Asymptotische Resultate über Lokalzeiten von Irrfahrten im $\mathbb{Z}^d$

Von der Fakultät für Mathematik und Informatik
der Universität Leipzig
angenommene

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades

Doctor rerum naturalium
(Dr. rer. nat.)

im Fachgebiet

Mathematik

vorgelegt von

Diplom-Mathematiker, Diplom-Wirtschaftsmathematiker
Mathias Becker

geboren am 27. November 1980
in Leipzig

Die Annahme der Dissertation wurde empfohlen von:

1. Prof. Dr. Wolfgang König, Weierstrass Institut Berlin

2. Prof. Dr. Max-Konstantin von Renesse, Universität Leipzig

Die Verleihung des akademischen Grades erfolgt mit Bestehen der Verteidigung am 13. November 2013 mit dem Gesamtprädikat **magna cum laude**.

Danksagung

Endlich! Nach langem Mühen und viel Arbeit ist der letzte Abschnitt beendet und die letzte Bemerkung geschrieben. Es hat lange gedauert und auf dieser Reise, die nun hinter mir liegt haben mich viele Menschen begleitet, bei denen ich mich hiermit bedanken möchten.

Zuallererst möchte ich Herrn Prof. Dr. Wolfgang König nennen, der mir in den vergangenen Jahren beigestanden hat und mir mehr als nur einmal den Weg gewiesen hat, wenn ich im dichten Nebel der Mathematik das Ziel aus den Augen verloren hatte. Nicht zuletzt möchte ich mich auch für seine Geduld und seine Motivation bedanken, die mir das ein ums andere Mal weitergeholfen hat, diesen Weg bis zum Ende zu gehen.

Darüber hinaus möchte ich es nicht versäumen mich bei meiner Familie zu bedanken. Meine Eltern, Tim, Thomas und Nicole haben mich immer unterstützt und waren das Fundament in meinem Leben, auf das ich bauen konnte. Sie haben immer an mich geglaubt und waren stets da, wenn ich Hilfe, Motivation oder einfach nur etwas Ablenkung brauchte.

Mein Dank gebührt noch vielen anderen Menschen, dank derer die letzten Jahre (auch außerhalb der Mathematik) so unglaublich spannend und erlebnisreich gewesen sind. Sei es die Tätigkeit im Studentenwerk Leipzig, bei der ich viele wundervolle Menschen kennenlernen durfte oder die Aktivitäten beim Volleyball, die neben dem physischen Ausgleich zu meiner doch eher kopflastigen Tätigkeit auch viele neue Freundschaften entstehen ließ. Seien es die Tätigkeiten in der Lehre an der Universität oder das Engagement in den Gremien der akademischen Selbstverwaltung, alles spielte zusammen und hat die letzten Jahre zu einer spannenden und erlebnisreichen Zeit gemacht, die ich keineswegs missen möchte.

Zusammenfassung

Gegenstand der vorliegenden Dissertation ist das Verhalten sogenannter Selbstüberschneidungslokalzeiten $\|\ell_t\|_p^p$ einer zeitstetigen Irrfahrt $(S_r)_r$ auf dem d-dimensionalen Gitter $\mathbb{Z}^d$. Dabei ist für $p > 1$ die Funktion ℓ_t definiert durch

$$\ell_t(z) := \int_0^t \mathbb{1}_{\{S_r = z\}} \,\mathrm{d}r$$

und bezeichnet die Aufenthaltsdauer der Irrfahrt bis zum Zeitpunkt $t \in (0, \infty)$ im Punkt $z \in \mathbb{Z}^d$. Ziel ist es, ein Prinzip großer Abweichungen zu entwickeln, d.h. das Hauptaugenmerk liegt auf dem asymptotischen Verhalten der Wahrscheinlichkeit, dass die Selbstüberschneidungslokalzeiten von ihrem Erwartungswert in erheblichem Maße nach oben abweichen. Mit anderen Worten; es soll das asymptotische Verhalten von

$$\log \mathbb{P}(\|\ell_t\|_p^p \geq r_t^p)$$

genau bestimmt werden, wobei $r_t^p \in (0, \infty)$ schneller als der Erwartungswert $\mathbb{E}[\|\ell_t\|_p^p]$ gegen unendlich streben soll. Dieses Verhalten kann dabei durch t, r_t und eine gewisse Variationsformel beschrieben werden.
Es wird sich herausstellen, dass es zwei Fälle zu betrachten gilt, in denen sich das probabilistisch beste Verhalten stark unterscheidet (vgl. Abschnitt 1.4); die genaue Position des Phasenübergangs hängt dabei von den Parametern p und d ab.
Im Vorgriff auf die Resultate kann man festhalten, dass die nötigen Selbstüberschneidungen in kleinen Dimensionen (im sogenannten subkritischen Fall) über einen großen Bereich erfolgen, aufgrund dessen bei der mathematischen Modellierung eine Reskalierung erforderlich ist. In hohen Dimensionen (dem sogenannten superkritischen Fall) ist dies nicht nötig, da die erforderlichen Selbstüberschneidungen innerhalb eines begrenzten Intervalles erfolgen.

Das Interesse an der Untersuchung entstand unter anderem aus der Verbindung zu Modellen der statistischen Mechanik (parabolisches Anderson Modell) und zur Variationsanalysis. In der Vergangenheit wurde eine Vielzahl an Methoden benutzt, um dieses Problem zu lösen. In der vorliegenden Dissertation soll die sogenannte Momentenmethode bestmöglich ausgereizt werden und es wird gezeigt, welche Ergebnisse damit möglich sind.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einführung

Hauptgegenstand dieser Dissertation ist die Untersuchung des asymptotischen Verhaltens sogenannter (p-facher) Selbstüberschneidungslokalzeiten von zufälligen Irrfahrten auf $\mathbb{Z}^d$. Um es etwas präziser zu formulieren sei an dieser Stelle erwähnt, dass nicht das typische Verhalten dieser Größe im Fokus unseres Interesses stehen wird, sondern die Analyse von sogenannten großen Abweichungen (eine kurze Einführung dazu wird in Abschnitt 1.7 gegeben) dieser Lokalzeiten.

Dieses Thema wurde in den letzten Jahren und Jahrzehnten vielfältigst untersucht und es erwies sich als eine reichhaltige Quelle für verschiedene neue Fragestellungen. Dabei spielten eine Vielzahl unterschiedlicher Parameter im Hinblick auf das Verhalten der Irrfahrt eine entscheidene Rolle. Unter diesen Parametern findet man beispielsweise die Dimension d, die Vielfachheit p, die Skala der Geschwindigkeit und nicht zuletzt die Art der Irrfahrt.

Darüber hinaus sei vermerkt, dass die Lösung diverser Fragestellungen technisch relativ aufwendig ist, da die beteiligten Größen gewisse grundlegende Eigenschaften (Stetigkeit, Beschränkheit) nur in unzureichendem Maße aufweisen. Aus diesem Grunde wurden in der Vergangenheit eine Reihe unterschiedlicher Techniken zum Studium der Selbstüberscheidungslokalzeiten eingesetzt, die sich in bestimmten Situationen als mehr oder weniger erfolgreich heraustellten. (siehe dazu Abschnitt 1.3)

An dieser Stelle sei zudem ausdrücklich erwähnt, dass Teile der vorliegenden Dissertation vorab publiziert wurden. Dazu sei auf die Punblikationsliste im Anhang verwiesen.

Im weiteren Verlauf dieses Kapitels werden zunächst die Selbstüberscheidungen eingeführt (Abschnitt 1.1) und die Problemstellung genauer formuliert (Abschnitt 1.2). Im Anschluss daran erfolgt die Einordnung in die vorhandene Literatur (Abschnitt 1.3) und die heuristische Argumentation (Abschnitt 1.4), die eine intuitive Vorstellung über die zu erwartenden Ergebnisse vermitteln soll. Diese Ergebnisse werden anschließend exakt formuliert (Abschnitt 1.5) und der Beweis kurz skizziert (Abschnitt 1.6). Dabei wird auch auf den Vergleich zur Methode des Dynkinschen Isomorphismus eingegangen, die nach dem derzeitigen Stand der Technik die weitreichendsten Resultate ermöglicht. Zum Ende dieses Kapitels wird schließlich in Abschnitt 1.7 eine kurze Einführung in das Gebiet der großen Abweichungen aufgezeigt.

1.1 Selbstüberschneidungslokalzeiten

In diesem Kapitel werden wir die sogenannten Selbstüberschneidungslokalzeiten einführen. Diese Objekte stehen im Fokus dieser Dissertation und der Theoreme, die in den folgenden Kapiteln bewiesen werden.

Es bezeichne $(S_t)_{t\in[0,\infty)}$ eine einfache (Nächstnachbarschafts-) Irrfahrt (engl. *random walk*) in stetiger Zeit auf dem Gitter $\mathbb{Z}^d$. Startpunkt sei dabei der Koordinatenursprung ($S_0 = 0$) und es bezeichne $\mathbb{P}$ das zugrundeliegende Wahrscheinlichkeitsmaß, bzw. $\mathbb{E}$ den dazugehörigen Erwartungswert. Um die Selbstüberschneidungslokalzeiten einzuführen, seien zunächst die Lokalzeiten der Irrfahrt definiert.

Definition 1.1.1 (Lokalzeit einer Irrfahrt).
Für eine Irrfahrt $(S_t)_t$ in stetiger Zeit auf dem Gitter $\mathbb{Z}^d$ und für jeden Punkt $z \in \mathbb{Z}^d$ bezeichne für alle $t > 0$

$$\ell_t(z) = \int_0^t \mathbb{1}_{\{S_r=z\}}\,\mathrm{d}r \tag{1.1.1}$$

die Lokalzeit der Irrfahrt im Punkt z zum Zeitpunkt $t > 0$.

Die Lokalzeit $\ell_t(z)$ gibt also an wie lange sich die Irrfahrt insgesamt bis zum Zeitpunkt t im Punkte $z \in \mathbb{Z}^d$ aufgehalten hat. Auf Basis der vorhergehenden Definition kann nun erklärt werden, was unter der Selbstüberschneidungslokalzeit zu verstehen ist.

Definition 1.1.2 (p-fache Selbstüberschneidungslokalzeit).
Es sei $(S_t)_t$ eine zeitstetige Irrfahrt auf dem Gitter $\mathbb{Z}^d$ und $p \in (1,\infty)$ eine beliebige reelle Zahl sowie $t > 0$. Die p-te Potenz der p-Norm der Lokalzeit

$$\|\ell_t\|_p^p = \sum_{z\in\mathbb{Z}^d} \ell_t(z)^p \tag{1.1.2}$$

sei als p-fache Selbstüberschneidungslokalzeit der Irrfahrt $(S_t)_t$ zum Zeitpunkt $t > 0$ bezeichnet.

Auf den ersten Blick scheint die p-Norm nichts mit dem (visuellen) Bild einer Selbstüberschneidung zu tun zu haben. Jedoch wird folgende kleine Rechnung die Rechtfertigung für die Begriffsbildung liefern. Falls $p \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl ist, so gilt:

$$\begin{aligned}
\|\ell_t\|_p^p &= \sum_{z\in\mathbb{Z}^d} \ell_t(z)^p \\
&= \sum_{z\in\mathbb{Z}^d} \left(\int_0^t \mathbb{1}_{\{S_r=z\}}\,\mathrm{d}r\right)^p \\
&= \sum_{z\in\mathbb{Z}^d} \int_0^t \cdots \int_0^t \mathbb{1}_{\{S_{r_1}=z\}} \cdots \mathbb{1}_{\{S_{r_p}=z\}}\,\mathrm{d}r_1 \ldots \mathrm{d}r_p \\
&= \int_0^t \cdots \int_0^t \sum_{z\in\mathbb{Z}^d} \mathbb{1}_{\{S_{r_1}=z\}} \cdots \mathbb{1}_{\{S_{r_p}=z\}}\,\mathrm{d}r_1 \ldots \mathrm{d}r_p \\
&= \int_0^t \mathrm{d}r_1 \ldots \int_0^t \mathrm{d}r_p\, \mathbb{1}_{\{S_{r_1}=\cdots=S_{r_p}\}}
\end{aligned} \tag{1.1.3}$$

Es ist leicht erkennbar, dass im Falle einer zeitlich diskreten Irrfahrt das Funktional $\|\ell_t\|_p^p$ die Anzahl der Tupel $(r_1, \dots r_p)$ angibt (gezählt in ihrer jeweiligen Vielfachheit), für die die Irrfahrt an demselben Gitterpunkt verweilt. Daher leitet sich die Bezeichnung p-fache Selbstüberschneidungslokalzeit ab.
Einige Spezialfälle ragen besonders hinaus. Für $p = 0$ (welches nicht in der obigen Definition enthalten ist) bezeichnet das Funktional

$$\sum_{z \in \mathbb{Z}^d} \ell_t(z)^0 = \#\{z \in \mathbb{Z}^d; \exists r \in [0,t] \text{ mit } S_r = z\}$$

den sogenannten *Range* der Irrfahrt, also die Anzahl der Punkte $z \in \mathbb{Z}^d$, die bis zum Zeitpunkt t von der Irrfahrt besucht worden sind. (Dabei sei $0^0 := 0$ definiert.) Für $p = 1$ ergibt sich der Trivialfall

$$\|\ell_t\|_1 = \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} \ell_t(z) = t.$$

Auch wenn für nicht-ganzzahlige Werte von p keine anschauliche Interpretation gegeben werden kann, so sind diese Fälle dennoch von Interesse (siehe dazu beispielsweise [HKM06]).

Es stellt sich nun die Frage nach dem typischen Verhalten von $\|\ell_t\|_p^p$ für $t \to \infty$. In der Literatur zu diesem Thema findet sich kein expliziter Verweis für beliebige zeitstetige Irrfahrten, jedoch besteht kein Zweifel daran, dass dies (vielleicht mit Ausnahme des Vorfaktors) dem Verhalten einer zentrierten Irrfahrt in stetiger Zeit entspricht. Für den Erwartungswert der Selbstüberscheidungslokalzeiten gilt in diesem Fall:

$$\mathbb{E}[\|\ell_t\|_p^p] \sim C_{d,p} a_{d,p}(t), \qquad \text{mit} \qquad a_{d,p}(t) = \begin{cases} t^{(p+1)/2} & \text{für } d = 1, \\ t(\log t)^{p-1} & \text{für } d = 2, \\ t & \text{für } d \geq 3, \end{cases} \tag{1.1.4}$$

Dabei sei $b_t \sim c_t$ eine Schreibweise für $\lim_{t\to\infty} \frac{b_t}{c_t} = 1$. Die Konstante $C_{d,p}$ nimmt dimensionsabhängig folgende Werte an:

$$C_{d,p} = \begin{cases} \sigma^{1-p} \int_{\mathbb{R}} L^p(1,x)\mathrm{d}x & \text{if } d = 1 \\ \frac{\Gamma(p+1)}{\left(2\pi\sqrt{\det \Sigma}\right)^{p-1}} & \text{für } d = 2, \\ \gamma^2 \sum_{j=1}^{\infty} j^p (1-\gamma)^{1-j} & \text{für } d \geq 3, \end{cases} \tag{1.1.5}$$

Im Fall einer transienten Irrfahrt ($d \geq 3$) bezeichnet $\gamma = \mathbb{P}(S_t \neq 0 \text{ für alle } t \in (0,\infty))$ die Nichtrückkehrwahrscheinlichkeit der Irrfahrt Für $d = 2$ bezeichnet Σ die Kovarianzmatrix der Irrfahrt und für $d = 1$ ist $\sigma^2 > 0$ die Varianz der Irrfahrt sowie $L(1,\cdot)$ die Lokalzeit einer eindimensionalen Brownschen Bewegung bis zum Zeitpunkt $t = 1$. Diese Ergebnisse stammen für $d = 1$ aus [Ch09, Kapitel 5.2], für $d = 2$ aus [Če07] und für $d \geq 3$ aus [BK09].

An dieser Stelle soll die kurze Einführung der Selbstüberschneidungslokalzeiten beendet sein, da es nun möglich ist, die Problemstellung zu formulieren.

1.2 Problemstellung

Ziel dieser Dissertation ist es, das (logarithmische) asymptotische Verhalten von

$$\mathbb{P}\left(\|\tfrac{1}{t}\ell_t\|_p > r_t\right) \qquad \text{für } t \to \infty$$

zu analysieren. Dabei soll die Skala $(r_t)_t$ einerseits der Bedingung $tr_t - \mathbb{E}[\|\ell_t\|_p] \to \infty$ genügen und zum anderen soll wegen $\|\ell_t\|_p \leq t$ (trivialerweise) $r_t < 1$ gelten. Anders könnte man formulieren, dass die Wahrscheinlichkeiten, dass der Pfad der Irrfahrt viele Selbstüberschneidungen produziert studiert werden sollen sowie das typische Verhalten der Irrfahrt auf dem Ereignis $\{\|\frac{1}{t}\ell_t\|_p \geq r_t\}$.

Das Verhalten der Irrfahrt hängt zweifelsfrei von den bereits eingeführten Parametern d (Dimension) und p (Vielfachheit der Überschneidungen) ab und man kann generell feststellen, dass es zwei konkurrierende Effekte gibt. Zum einen produziert eine starke Verklumpung der Irrfahrt in einem begrenzten Gebiet eine hohe Anzahl von Selbstüberschneidungen, jedoch sind die probabilistischen Kosten dafür relativ hoch. Eine gleichmäßige Verteilung der Selbstüberschneidungen über die gesamte Pfadlänge wirkt auf den ersten Blick im Hinblick auf die Wahrscheinlichkeiten günstiger, jedoch entstehen durch ein derartiges Verhalten deutlich weniger Überschneidungen im Vergleich zur ersten Strategie (die Überschneidungen werden mit ihrer Vielfachheit gezählt). Welche der beiden Verhaltensweisen dominiert hängt vom Zusammenspiel der Parameter d und p ab und wird in Kapitel 2 bzw. Kapitel 3 näher beleuchtet.

Der obige Paragraph stellt einen Teil der Motivation der vorliegenden Arbeit dar. Es ist von intrinsischem Interesse, genau zu wissen, wie sich der Pfad verhält. Dabei ist explizit nicht (nur) das typische Verhalten gemeint, sondern es stellt sich die Frage, wie die Irrfahrt im atypischen Fall typischerweise agiert. Mit anderen Worten, wie werden viele Selbstüberscheidungen (atypisches Verhalten) am wahrscheinlichsten (d.h. typischerweise) produziert?

Eine weitere Quelle der Inspiration stellt überdies das Buch [Ch09] dar, in dem vielfältige Resultate bezüglich Überschneidungen von Irrfahrten zusammengetragen wurden.

Im folgenden Abschnitt soll nun zunächst daran erinnert werden, welche Ergebnisse auf diesem Feld bereits erzielt wurden und welche Methoden dabei Verwendung fanden.

1.3 Einordnung in die Literatur

Die Bedeutung von Selbstüberschneidungen von Irrfahrten begründet sich nicht nur in der Theorie stochastischer Prozesse, sondern diese Objekte spielen in einer Reihe von anderen Gebieten eine wichtige Rolle. Beispielhaft seien an dieser Stelle die Quantenfeldtheorie [V69], sogenannte zufällige Polymere in der Physik [F81] und Chemie [dG79] genannt. Darüber hinaus tauchen Selbstüberschneidungen beim Studium von (physikalisch motivierten) Modellen sogenannter zufälliger Pfade in einer zufälligen Umgebung (*random paths in random media*) auf. Prominente Beispiele dafür sind das Parabolische Anderson Model [GK05], das eng verwandte Problem von Irrfahrten in zufälliger Szenerie [AC07] und das Problem der sogenannten *Wiener-sausages*. Während ein zufälliges Polymer versucht Selbstüberscheidungen zu vermeiden (*self-repellent random walk*) induziert eine zufällige Umgebung zumeist eine gewisse Selbstanziehung des Pfades, welches dem in dieser Dissertation behandelten Szenario entspricht.

Seit geraumer Zeit und insbesondere in den letzten Jahren kann man ein verstärktes Interesse am extremen Verhalten von Selbstüberscheidungslokalzeiten und deren Verbindung zur Theorie großer Abweichungen feststellen. Insbesondere sei an dieser Stelle auf das Buch [Ch09] verwiesen, welches ein umfangreiches Kompendium bezüglich der Thematik verschiedentlicher Irrfahrten und der gegenseitigen Anziehung eines oder mehrerer Pfade darstellt. Diese Objekte sind eine reichhaltige Quelle verschiedener Phänomene, welche von der Dimension d, dem Parameter p und der Skala der Abweichungen r_t abhängen. Insbesondere kann man einen interessanten Phasenübergang im Verhalten des Pfades der Irrfahrt beobachten, wenn man von subkritischen Dimensionen (Kapitel 2) zu superkritischen Dimensionen (Kapitel 3) übergeht: im ersten Fall kann ein zeitlich homogenes Zusammenziehen der Irrfahrt beobachtet werden, während in letzterem Fall innerhalb eines zeitlich eng begrenzten Intervalles ein extremes Verklumpungverhalten beobachtet werden kann.
Der mathematisch korrekte Beweis gestaltet sich jedoch schwieriger als bislang formuliert. Grundsätzlich gibt es drei wesentliche Hürden, welche überwunden werden müssen. Zum ersten erfordern die meisten bekannten Prinzipien kompakte Teilmengen von $\mathbb{Z}^d$ bzw. $\mathbb{R}^d$. Das zweite Problem besteht ursächlich darin, dass das Normfunktional $f \to \|f\|_p$ nicht beschränkt ist (weder für diskrete noch für stetige Definitionsbereiche von f). Und zum dritten ist das Normfunktional auch nicht stetig (zumindest nicht in der Topologie der Prinzipien großer Abweichungen.)

Die untere Schranke zu beweisen ist relativ einfach. Durch die Einschränkung auf solche Irrfahrten, die innerhalb einer gewissen Box bleiben (vgl. subkritischer Fall, Abschnitt 2.4.3), bzw. geschicktes Abschneiden der Irrfahrt an einem Zeitpunkt t_0 (vgl. superkritischer Fall, Abschnitt 3.2) kann die Problemstellung auf bekannte Prinzipien großer Abweichungen zurückgeführt werden.

Für den Beweis der oberen Schranke besteht der Grundgedanke in der Periodisierung der Irrfahrt. D.h. man betrachtet anstelle der eigentlichen Irrfahrt lediglich deren Projektion auf einen Torus (dadurch entstehen periodische Randbedingungen). Auf diese Art und Weise wird eine Kompaktifizierung erreicht, jedoch entstehen dabei eine Vielzahl neuer Überschneidungen der Irrfahrt. Die Größe der Box wird nun als t abhängiger Parameter gestaltet um die Zahl der neuentstandenen Selbstüberschneidungen auf einer geeigneten Skala gegenüber den originären Selbstüberschneidungen vernachlässigbar klein zu gestalten. Für das Problem der oberen Schranke (welches die Hauptarbeit darstellt) lohnt sich ein Blick auf die von anderen Autoren bereits verwendeteten Techniken. An dieser Stelle sei auf den Übersichtsartikel [K10] hingewiesen, auf dem die folgenden Bemerkungen basieren.

Bemerkung 1.3.1 (Bisektionsverfahren)**.**
Le Gall nutzte in [Le86] eine ursprünglich von Varadhan (vgl. [V69]) eingeführte Technik, indem er den Pfad der Irrfahrt fortwährend in gleich große Stücke teilte und deren gegenseitige Überschneidungen kontrollierte. Ihm gelang es damit einen Zusammenhang zwischen den Selbstüberschneidungen eines Pfades und den gegenseitigen Überschneidungen mehrerer Pfade herzustellen. In erster Linie konnte diese Methode nur für $p = 2$ genutzt werden, jedoch gelang es Asselah (vgl. [A10]) diese Technik für beliebige $p \in (1, \infty)$ zu erweitern. Eine seiner Voraussetzungen ist jedoch die Transienz der Irrfahrt, was dazu führt, dass er sich auf Dimensionen $d \geq 3$ beschränken muss.
Die Methode der sukzessiven Teilung des Pfades führt dazu, dass die einzelnen Teilstücke un-

abhängig voneinander sind (aufgrund der Markoveigenschaft), so dass für die obere Schranke der Selbstüberschneidungen folgendes gilt: Die Gesamtzahl der Selbstüberschneidungen kann abgeschätzt werden gegen die Summe der Selbstüberschneidungen der einzelnen Pfadstücke und deren gegenseitige Überschneidungen. Diese einzelnen Teile werden dann mit Hilfe verschiedener Techniken kontrolliert. ◇

Bemerkung 1.3.2 (Dreieckszerlegung)**.**
Chen gelang eine umfangreiche Behandlung der beiden Fälle $d = 2 = p$ und $d = 3$, $p = 2$ (vgl. [Ch09, Theorem 8.2.1 und 8.4.2]) und er konnte so das in dieser Dissertation aufgeführte Resultat aus Theorem 2.2.1(ii) in diesen beiden Situationen sogar in allgemeinerer Form beweisen als dies in der vorliegenden Arbeit der Fall ist. Die Strategie in seinem Beweis liegt darin, dass er zunächst eine Dreieckszerlegung der Anzahl der Selbstüberschneidungen vornimmt (welche jedoch nur für $p = 2$ möglich ist), anschließend mit Hilfe der Faltung eine Glättung (durch die bekannten Glättungsoperatoren) erreicht wird und schließlich Argumente der Banachraumtheorie angeführt werden können, welche dazu führen, dass eine Kompaktifizierung gelingt, die letztendlich die Anwendung klassischer Argumente der Theorie der großen Abweichungen gestattet.
Auch diese Zerlegung geht zurück auf Le Gall [Le86] und wurde (wie in obiger Bemerkung angeführt) von Asselah für $p > 1$ erweitert (vgl. dazu [AC07], [A08], und [A09]). ◇

Bemerkung 1.3.3 (Dekomposition in Zyklen)**.**
Asselah gelingt es in [A09] ein Prinzip großer Abweichungen in den Fällen $p = 2$ und $d \geq 5$ zu zeigen, jedoch nur für Abweichungen der Größenordnung $r_t \sim t^{-1/2}$. Er nutzt dabei die Tatsache, dass das Auftauchen einer Selbstüberschneidung notwendigerweise bedingt, dass der Pfad der Irrfahrt einen Zyklus beschreibt, d.h. dass $S_r = 0$ nach geeignetem Neustart beim ersten Durchlauf durch den Gitterpunkt der Selbstüberschneidung gilt. Es ist anzumerken, dass der Beitrag zur Selbstüberschneidung von einem extremen Verklumpungsverhalten innerhalb eines beschränkten Gebietes herrührt. Es gelingt ihm, die Lokalzeiten einer Irrfahrt auf einem beschränkten Gebiet abzuschätzen, sofern die Irrfahrt einen Zyklus durchläuft. (Mit anderen Worten unter der Bedingung $S_r = 0$.) Auf diese Art und Weise kontrolliert er diejenigen Gebiete, die den wesentlichen Beitrag zu den Selbstüberschneidungslokalzeiten liefern. ◇

Bemerkung 1.3.4 (Dynkin'scher Isomorphismus)**.**
Die nach dem heutigen Stand erfolgreichste Methode stellt die Nutzung des sogenannten Dynkin'schen Isomorphismus dar. C. Laurent hat diese Idee von F. Castell weiterentwickelt und wir werden diese in Abschnitt 1.6 näher beleuchten. ◇

1.4 Heuristik

In diesem Abschnitt wird eine grobe heuristische Analyse der zugrundeliegenden Situation durchgeführt. Diese Analyse findet sich im Übersichtsartikel [K10] und erklärt sehr gut, wie es zur Unterteilung in einen subkritischen und einen superkritischen Fall kommt. Dabei wird explizit auf exakte Formulierungen und technische Details verzichtet, um den Blick auf das Wesentliche zu lenken.

Ausgangspunkt dieser Betrachtungen ist die Annahme, dass die optimale Strategie der Irrfahrt hinreichend viele Überschneidungen zu produzieren (d.h. $\{\|\ell_t\| \geq tr_t\}$) darin besteht, dass die Irrfahrt bis zum Zeitpunkt n_t innerhalb einer Box B_{α_t} mit Radius α_t verbleibt und darin die entsprechenden Selbstüberschneidungen entstehen. Dem Verhalten der Irrfahrt nach dem Zeitpunkt n_t wird keinerlei Bedeutung zugemessen, d.h. sämtliche Selbstüberschneidungen, die im Intervall (n_t, t) auftreten, werden ignoriert. Mit anderen Worten, es gelte $\ell_t = \ell_{n_t}$. Innerhalb der Box $[-\alpha_t; \alpha_t]^d$ ist es am wahrscheinlichsten, dass sich die Irrfahrt relativ gleichmäßig über die vorhandenen Gitterpunkte verteilt. Andere Strategien, die eine Verklumpung innerhalb dieser Box zum Ziele haben, verursachen im probabilistischen Sinn weitaus höhere Kosten. Daher folgern wir dass sich die Irrfahrt ungefähr $n_t\alpha_t^{-d}$ Zeiteinheiten in jedem der α_t^d Gitterpunkte aufhält. Damit gilt:

$$\|\ell_t\|_p^p \approx \|\ell_{n_t}\|_p^p = \sum_{z\in B_{\alpha_t}} \ell_{n_t}(z)^p \approx \sum_{z\in B_{\alpha_t}} \left(n_t\alpha_t^{-d}\right)^p = \alpha_t^d n_t^p \alpha_t^{-dp} = n_t^p \alpha_t^{d(1-p)}$$

Darüber hinaus ist nach der Annahme auch $\{\|\ell_t\| \geq tr_t\}$ erfüllt. Am wahrscheinlichsten dabei ist wiederum dass $\|\ell_t\| \approx tr_t$ gilt. Daher folgt:

$$(tr_t)^p \approx n_t^p \alpha_t^{d(1-p)} \Longrightarrow n_t \approx tr_t \alpha_t^{d(p-1)/p}$$

Damit der Zeitpunkt n_t nicht nach dem Zeitpunkt t liegt (dies wäre ein Widerspruch zur bisherigen Situation) muss gelten, dass

$$\alpha_t \leq r_t^{\frac{p}{d(1-p)}}$$

gilt. Darüber hinaus ist bekannt, welche (logarithmische) Größenordnung die Wahrscheinlichkeit besitzt, dass eine Irrfahrt bis zum Zeitpunkt n_t innerhalb einer Box mit Radius α_t verbleibt. (Man nutze dazu den zentralen Grenzwertsatz.) Es gilt:

$$-\log \mathbb{P}\left(S_t \in B_{\alpha_t}\ \forall t \in [0, n_t]\right) \approx \frac{n_t}{\alpha_t^2} \approx tr_t \alpha_t^{\frac{d(p-1)-2p}{p}} \tag{1.4.1}$$

Ziel der Bemühungen ist es, die Wahrscheinlichkeit zu maximieren (d.h. die linke Seite zu minimieren). Der Exponent $\frac{d(p-1)-2p}{p}$ induziert dabei eine Fallunterscheidung:

1. Subkritischer Fall, d.h. $d(p-1) < 2p$: $n_t \approx t$ und $\alpha_t \approx r_t^{\frac{p}{d(1-p)}}$
   Hier sollte α_t möglichst groß gewählt werden, da der Exponent in (1.4.1) negativ ist. Aufgrund der Nebenbedingung $n_t \leq t$ ergibt sich die größtmögliche Wahl von α_t.

2. Superkritischer Fall, d.h. $d(p-1) > 2p$: $n_t \approx tr_t$ und $\alpha_t \approx 1$
   Der positive Exponent aus (1.4.1) erzwingt ein möglichst kleines α_t, d.h. $\alpha_t \approx 1$. Die erste Relation ist wiederum eine direkte Folgerung.

Diese beiden Fälle bestimmen daher die Struktur der vorliegenden Dissertation. In Kapitel 2 wird der subkritische Fall analysiert, während der superkritische Fall Gegenstand der Betrachtungen in Kapitel 3 ist.
Deutlich zu erkennen ist das unterschiedliche Verhalten der Irrfahrt um die nötigen Selbstüberschneidungen zu erzeugen. Während im subkritischen Fall die Box B_{α_t} in Abhängigkeit von t größer werden muss, werden die Selbstüberscheidungen im superkritischen Fall in einer Box mit konstantem Radius produziert. Dies entspricht dem Bild, dass der Pfad der Irrfahrt im ersten Fall ein zeitlich und räumlich homogenes Verhalten aufweist, während im superkritischen Fall

eine Verklumpung innerhalb eines engen räumlichen Intervalls zu beobachten ist (und das sonstige Verhalten der Irrfahrt für die Selbstüberschneidungen keine Rolle spielt).

Neben der heuristischen Begründung für die Zweiteilung der Antwort auf die ursprüngliche Problemstellung ermöglicht uns diese Heuristik auch einen ersten Blick auf die zu erwartenden Ergebnisse. Zweifelsohne kann nicht erwartet werden aus dieser Heuristik die Theoreme exakt zu antizipieren (spätestens in der Frage der Konstanten scheitert der Versuch), jedoch können zumindest die Größenordnung abgeschätzt werden:

1. Subkritischer Fall: $-\frac{1}{t}\log\mathbb{P}\left(\|\ell_t\|_p \geq tr_t\right) \approx \frac{1}{\alpha_t^2} \approx r_t^{\frac{2p}{d(p-1)}}$
2. Superkritischer Fall: $-\frac{1}{t}\log\mathbb{P}\left(\|\ell_t\|_p \geq tr_t\right) \approx \frac{1}{\alpha_t^2} \approx r_t$

Für den kritischen Fall ($d(p-1) = 2p$) sei an dieser Stelle auf [Ca10] verwiesen. Interessanterweise zeigt sich, dass dabei ein ähnliches Verhalten wie im subkritischen Fall zu beobachten ist.

1.5 Formulierung der Hauptergebnisse

Im Vorgriff auf Kapitel 2 und Kapitel 3 werden wir bereits an dieser Stelle einen Teil der Ergebnisse formulieren. Ziel der vorliegenden Dissertation ist es, die Momentenmethode so weit wie möglich auszureizen. Die nachfolgenden Ergebnisse stellen dabei das Maximum dar:

Theorem 1.5.1 (Große Abweichungen).
Es bezeichne $(S_t)_{t>0}$ eine zeitstetige (Nächstnachbarschafts-)Irrfahrt auf dem Gitter $\mathbb{Z}^d$ (mit $d \in \mathbb{N}$). Darüber hinaus sei $p > 1$ und es bezeichne r_t eine beliebige Skalenfunktion mit $t^{(1-p)/p} \ll r_t \ll 1$ für $t \to \infty$. Dann gilt:

1. *Sofern im subkritischen Fall $d(p-1) < 2p$ zusätzlich gilt, dass*
   (a) $d(p-1) < 2$
   (b) $\left(\frac{\log t}{t}\right)^{\frac{d(p-1)}{p(d+2)}} \ll r_t \qquad$ *für $t \to \infty$.*

   so folgt im Grenzwert $t \to \infty$, dass
   $$\frac{1}{t}\log\mathbb{P}\big(\big\|\ell_t/t\big\|_p \geq r_t\big) \sim -\chi_{d,p} r_t^{\frac{2p}{d(p-1)}}$$
   Dabei bezeichnet $\chi_{d,p} := \inf\Big\{\frac{1}{2}\|\nabla g\|_2^2 \colon g \in L^{2p}(\mathbb{R}^d)\cap L^2(\mathbb{R}^d)\cap H^1(\mathbb{R}^d)\colon \|g\|_2 = 1 = \|g\|_{2p}\Big\}$.
2. *Sofern im superkritischen Fall $d(p-1) > 2p$ zusätzlich gilt, dass*
   (a) $p \in \mathbb{N}$
   (b) $\left(\frac{p\log(tr_t)}{t}\right)^{\frac{p-1}{3p-1}} \ll r_t \qquad$ *für $t \to \infty$*

so folgt im Grenzwert $t \to \infty$, dass

$$\frac{1}{t} \log \mathbb{P}\left[\|\ell_t/t\|_p \geq r_t\right] \sim -r_t \inf_{\substack{f:\mathbb{Z}^d \to \mathbb{R} \\ \|f\|_2=1}} \left\{ \frac{\langle f, -Af \rangle}{\|f\|_{2p}^2} \right\}$$

Dabei bezeichne A den Generator der zugrundeliegenden Irrfahrt $(S_t)_t$.

Bemerkung 1.5.2 (Die Geschwindigkeit r_t)**.**
Während im Kopf des Theoremes die natürlich zu erwartenden Grenzen der Geschwindigkeit vermerkt sind, sieht man deutlich, dass es in beiden Fällen zusätzliche Einschränkungen an die Skalenfunktion r_t gibt. Diese entstehen nur aufgrund der Technik, die im Beweis der jeweiligen oberen Schranke verwendet wurde. Dort liegt ebenso der Grund für die (unterschiedlichen) weiteren Einschränkungen hinsichtlich der Gültigkeit des Prinzips großer Abweichungen. ◇

Bemerkung 1.5.3.
Im Beweis des superkritischen Falls ist es ein wenig bequemer anstelle von r_t die leichte Modifizierung $\tilde{r}_t := t^p r_t^p$ zu verwenden. Dies stellt keinerlei inhaltliche Änderung dar, jedoch ist es erforderlich die betroffenen Einschränkungen umzurechnen. Theorem 1.5.1 nimmt dann folgende Gestalt an (es sei dabei auf die Wiederholung der unveränderten Passagen verzichtet und der Vollständigkeit halber sei der subkritische Fall ebenso transkribiert):

Für $\tilde{r}_t$ mit $t \ll \tilde{r}_t \ll t^p$ für $t \to \infty$ gilt:

1. Sofern im subkritischen Fall $d(p-1) < 2p$ zusätzlich gilt, dass

   (b') $(\log t)^{\frac{d(p-1)}{(d+2)}}\, t^{\frac{2p+d}{d+2}} \ll \tilde{r}_t$ für $t \to \infty$.

   so folgt im Grenzwert $t \to \infty$, dass

$$t^{\frac{2p-dp+d}{d(p-1)}} \log \mathbb{P}\big(\big\|\ell_t\big\|_p^p \geq \tilde{r}_t\big) \sim -\chi_{d,p} \tilde{r}_t^{\frac{2}{d(p-1)}}$$

2. Sofern im superkritischen Fall $d(p-1) > 2p$ zusätzlich gilt, dass

   (b') $t^{\frac{2p^2}{3p-1}} \ll \tilde{r}_t \left(\frac{1}{\log(\tilde{r}_t)}\right)^{\frac{p(p-1)}{3p-1}}$ für $t \to \infty$

   so folgt im Grenzwert $t \to \infty$, dass

$$\log \mathbb{P}\left[\|\ell_t\|_p^p \geq \tilde{r}_t\right] \sim -\tilde{r}_t^{1/p} \inf_{\substack{f:\mathbb{Z}^d \to \mathbb{R} \\ \|f\|_2=1}} \left\{ \frac{\langle f, -Af \rangle}{\|f\|_{2p}^2} \right\}$$

◇

1.6 Beweisüberblick und Vergleich zum Isomorphismus von Dynkin

Wie bereits erwähnt erfolgen die Beweise in der vorliegenden Arbeit mit Hilfe einer Methode bezüglich der Momente der Selbstüberschneidungslokalzeiten. Der Nachweis der unteren Schranke ist dabei mit Hilfe klassischer Argumente möglich und stellt keine größere Herausforderung dar. Entscheidend und das eigentliche Problem im Beweis des Prinzips großer Abweichungen sind jeweils die oberen Schranken. Dabei wird in den beiden vorhandenen Fällen (subkritisch und superkritisch) aufgrund der jeweiligen Gegebenheiten unterschiedlich vorgegangen. Im Folgenden seien (unter Vorgriff auf die ausführlichen Nachweise in Kapitel 2 und Kapitel 3) die Beweisgedanken kurz skizziert.

Im superkritischen Fall ist der Beweis der oberen Schranke eng verbunden mit der Strategie aus [HKM06]. Zunächst wird die Wahrscheinlichkeit mittels der Markovungleichung durch die entsprechenden Momente ersetzt:

$$\mathbb{P}\left[\|\ell_t\|_p^p \geq \tilde{r}_t\right] \leq \tilde{r}_t^{-k}\mathbb{E}[\|\ell_t\|_p^{kp}]$$

Anschließend werden die Momente mittels kombinatorischer Methoden weiter umgeformt. Leider ist dabei die Ganzzahligkeit des Exponenten kp erforderlich, welche nur durch die Einschränkung $p \in \mathbb{N}$ erzwungen werden kann. Einer der Hauptbeweggründe für die Verwendung der kombinatorischen Vorgehensweise ist dabei das Umgehen von Argumenten, welche Kompaktheit bestimmter Mengen erfordern. Lediglich ein Teil der damit verbundenen Probleme kann dadurch gelöst werden, dass die Irrfahrt in den Torus projiziert wird und auf diese Weise (unter Inkaufnahme eines gewissen Fehlers) das gesamte Geschehen auf eine bestimmte t-abhängige Box beschränkt werden kann. (Die t-Abhängigkeit ist leider notwendig, da ansonsten zuviele künstliche, ursprünglich nicht vorhandene Selbstüberschneidungen auftreten.) Im weiteren Verlauf des Beweises führt die Kombinatorik zur Einführung gewisser Paarmaße μ. Diese Objekte sind sehr anschaulich, leider ist aber eine Abschätzung der Anzahl einer bestimmten Sorte von Paarmaßen auch verantwortlich für die zusätzliche Einschränkung an $\tilde{r}_t$. Schließlich erhält man eine wohlbekannte Variationsformel, welche im Wesentlichen dem gewünschten Ergebnis entspricht.

Im subkritischen Fall gestaltet sich die Situation etwas anders. Herzstück ist die Nutzung einer Abschätzung für die gemeinsame Dichte der Lokalzeiten. Diese Strategie ist aus [BHK07] entlehnt und aus der eben erwähnten Abschätzung kann unter Verwendung klassischer Resultate der Theorie der großen Abweichungen ein LDP für die Lokalzeiten hergeleitet werden. Die dabei entstehende Variationsformel hängt jedoch noch vom Parameter t ab und erzwingt weitere Schritte hinsichtlich deren Asymptotik. Letztendlich ist diese Strategie jedoch erfolgreich und man erhält die gewünschte (und erwartete) Variationsformel. Die zusätzlichen Einschränkungen kommen aufgrund technischer Unwegbarkeiten zustande. Die Restriktion an r_t hat ihre Gründe in der Kontrolle der Fehlerterme einer bestimmten Abschätzung. Die zweite Restriktion $d(p-1) < 2$ (anstelle von $d(p-1) < 2p$) findet ihre Ursache darin, dass ein im L^2 Sinne beschränkter Fehlerterm im L^{2p} Sinn kontrolliert werden muss.

An dieser Stelle sei nun im Vergleich die Beweismethode mittels des Dynkinschen Isomorphismus erläutert. (Ein ausführlicher Überblick über andere Beweismethoden ist im Übersichtsartikel [K10] zusammengefasst.) Während die untere Schranke mittels klassischer Sätze aus dem Bereich der großen Abweichungen keine Probleme bereitet, stellt die obere Schranke das Hauptproblem dar. Die Verwendung des sogenannten Dynkin'schen Isomorphismus ermöglicht dabei nach dem derzeitigen Stand die weitreichendsten Resultate. Das erste Ergebnis konnte Castell in [Ca10] für den kritischen Fall $p(d-2) = d$ beweisen. Ihre Technik wurde später von Laurent (vgl. [L10a] und [L10b]) im sub- und im superkritschen Fall für eine sehr allgemeine Klasse von Irrfahrten weiterentwickelt. Zuletzt konnte für den subkritischen Fall in [CLM12] das vermutlich allgemeinste Resultat gezeigt werden. Dies geschah parallel zu den Arbeiten an dieser Dissertation, jedoch sind die verwendeten Methoden gänzlich unterschiedlich.

Die Grundlage des Verfahrens findet sich in [D88] und stellt eine Verbindung zwischen der Verteilung der Lokalzeiten einer symmetrischen und rekurrenten Irrfahrt, welche zu einem exponentiell verteilten zufälligen Zeitpunkt gestoppt wird und der Verteilung eines Gauß-Prozesses, bei dem die zugehörige Kovarianz dem Kern des zuvor erwähnten Markov-Prozesses entspricht, her. Zunächst (vgl. [L10a, Lemma 3.2]) sei die Selbstüberscheidungslokalzeit $\|\ell_t\|_p^p$ abgeschätzt gegen die Selbstüberschneidungslokalzeit $\|\ell_\tau\|_p^p$ einer auf den Torus B_R projizierten, zum Zeitpunkt τ gestoppten Irrfahrt (τ ist dabei zum Parameter λ exponentalververteilt: $\tau \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$).

$$\mathbb{P}(\|\ell_t\|_p^p \geq \tilde{r}_t) \leq \mathrm{e}^{a\tilde{r}_t^{1/p}} \mathbb{P}(\|\ell_\tau^{(R)}\|_p^p \geq \tilde{r}_t)$$

Anschließend sei $Z := (Z_x)_{x \in B_R}$ definiert als ein zentrierter Gaußprozess mit Kovarianzmatrix $G_{R,\lambda}$. Dabei bezeichne $G_{R,\lambda}$ die Greensche Funktion der zum Zeitpunkt τ gestoppten, auf den Torus B_R projizierten Irrfahrt. Mit Hilfe des Eisenbaumtheorems (vgl. [L10a, Thm.3.3]) ist nun eine Abschätzung von $\mathbb{P}(\|\ell_\tau^{(R)}\|_p^p \geq \tilde{r}_t)$ gegen die exponentielle Momente von $\|Z\|_{2p,R}^2$ bzw. gegen $\mathbb{P}(\|Z\|_{2p,R} \geq 2\sqrt{2\tilde{r}_t^{1/p}\varepsilon})$ (für alle $\varepsilon > 0$) möglich (vgl.[L10a, Lemma 3.4]). Für Z wiederum gelingt es, geeignete Schranken für die exponentiellen Monemte bzw. die großen Abweichungen zu finden. Dabei können bekannte Konzentrationsungleichungen verwendet werden, welche zeigen, dass das Verhalten von $\|Z\|_{2p} - M$ (M bezeichne dabei den Median) identisch ist, mit dem Verhalten einer Gaußschen Zufallsvariablen, deren Varianz gleich $\sup\{\langle f, G_{R,\tau} f\rangle, \|f\|_{2p} = 1\}$ ist. Wenn nun R und t geeignet gekoppelt werden ($R^d \sim t$) dann kann gezeigt werden, dass dieses Supremum gegen die entsprechenden Variationsformeln (z. B. $\chi_{d,p}$) konvergiert.

Einzelne der eben erwähnten Abschätzungen sind dabei präziser (schärfer) als die in der vorliegenden Arbeit verwendeten Abschätzungen. Ziel der Arbeit ist es jedoch gewesen, einen anderen Weg zu beschreiten und mit kombinatorischen Mitteln das Problem der oberen Schranke zu lösen. Leider konnten die Resultate dabei nicht in voller Allgemeinheit bewiesen werden, so dass abschließend festzuhalten ist, dass die Verwendung des Dynkinschen Isomorphismus nach dem derzeitigen Stand der Forschung die beste Methode ist um möglichst allgemeine Resultate für die großen Abweichungen der Selbstüberschneidungslokalzeiten zu erhalten. $\diamond$

1.7 Große Abweichungen

In diesem Abschnitt sei eine kurze Einführung in die Theorie der großen Abweichungen wiedergegeben. Aufgrund der Vielfältigkeit und Komplexität der Materie sei diese Einführung auf die in dieser Dissertation relevanten Aspekte konzentriert. Für eine weitergehende Behandlung dieser Thematik sei auf [DZ98] bzw. [Ch09] verwiesen.
Explizit sei an dieser Stelle erwähnt, dass es sich bei dem vorliegenden Abschnitt um eine wohlbekannte Herangehensweise handelt (wie sie beispielsweise Bestandteil der zuvor genannten Quellen ist).

Wer den Begriff „große Abweichungen“ zum ersten Mal hört, stellt sich für gewöhnlich folgende grundlegenden Fragen:

(1) Was weicht ab?

(2) Wovon weicht es ab?

(3) Was genau bedeutet „groß“ bei diesen Abweichungen?

Ohne die Verwendung von exakten Definitionen und Verweisen lassen sich die Antworten auf diese Fragen in erster Instanz folgendermaßen formulieren:

(1) Zufallgrößen weichen von ihrem

(2) normalen Verhalten in der Art ab,

(3) dass die Wahrscheinlichkeit dieser Abweichungen gegen Null konvergiert.

Unter geeigneten Annahmen beschreiben die Gesetze der großen Zahlen und der zentrale Grenzwertsatz das typische Verhalten von Zufallsgrößen. Unter gewissen Bedingungen gilt für die Partialsummenfolge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einer Folge von unabhängigen (reellwertigen) und identisch verteilten Zufallgrößen, dass für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(|S_n - n\mathbb{E}(X_i)| > \sqrt{n}x) \to 2\left[1 - \Phi(x/\sqrt{\mathrm{Var}(X_i)})\right] \qquad \text{für } n \to \infty$$
$$\mathbb{P}(|S_n - n\mathbb{E}(X_i)| > nx) \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty$$

Der „typische“ Wert von S_n ist also gleich dem Erwartungswert $n\mathbb{E}(X_i)$. Die „mittelgroßen“ Abweichungen (hier von Ordnung $\sqrt{n}$) werden durch den zentralen Grenzwertsatz beschrieben und für „große“ Abweichungen (von Ordnung n) kann aus dem Gesetz der großen Zahlen lediglich gefolgert werden, dass deren Wahrscheinlichkeit gegen Null konvergiert. Derartige Abweichungen sind also sehr selten.
Die Theorie der großen Abweichungen beschäftigt sich nun mit den Wahrscheinlichkeiten dieser seltenen Ereignisse. Genauergesagt spielt die Asymptotik derartiger Wahrscheinlichkeiten die herausragende Rolle in diesem Gebiet. Es geht dabei nicht um die Frage nach dem Grenzwert dieser Wahrscheinlichkeiten (welcher wie eben erwähnt gleich Null ist), sondern um die Frage nach der Konvergenzgeschwindigkeit. Um ein besseres Verständnis für obige Aussagen zu entwickeln ist folgendes Standardbeispiel (siehe u.a. [DZ98], [Kl06]) von großer Hilfe.

Beispiel 1.7.1 (Normalverteilung)**.**
Es sei $(X_n)_n$ eine Folge unabhängiger, standardnormalverteilter (d.h. $X_i \sim \mathcal{N}(0,1)$) Zufallsgrößen. Darüber hinaus bezeichne S_n die n-te Partialsumme dieser Folge:

$$S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Aus den Eigenschaften der Normalverteilung folgt an dieser Stelle sofort, dass S_n eine zu den Parametern $(0, n)$ normalverteilte Zufallgröße ist. Aus dem Gesetz der großen Zahlen kann für Abweichungen der Größenordnung n gefolgert werden, dass für jedes $\varepsilon > 0$ gilt:

$$\mathbb{P}(|S_n| > n\varepsilon) \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty.$$

Das Ereignis $\{|S_n| > n\varepsilon\}$ ist dabei in obigem Sinne ein seltenes Ereignis, bzw. Abweichungen der Ordnung n werden als „große“ Abweichungen bezeichnet. Wie bereits erwähnt liegt die zentrale Frage nun nicht mehr im Bestimmen des Grenzwertes, sondern liegt darin, die Konvergenzgeschwindigkeit zu ermitteln. Mit anderen Worten, es interessiert an dieser Stelle, wie schnell die

Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\{|S_n| > n\varepsilon\}$ gegen Null strebt. Im Fall einer normalverteilten Zufallgröße ist dies recht einfach zu beantworten. Da $S_n \sim \mathcal{N}(0,n)$, folgt sofort:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|S_n| > n\varepsilon) &= 1 - \frac{1}{\sqrt{2n\pi}} \int_{-n\varepsilon}^{n\varepsilon} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2n}} \mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\sqrt{2n\pi}} \int_{n\varepsilon}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2n}} \mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\varepsilon\sqrt{n}}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Dieses Integral besitzt bekanntermaßen keine explizit darstellbare Stammfunktion. Jedoch sind beispielsweise Abschätzungen des Gaußschen Fehlerintegrales bekannt, die für die hier nötigen Zwecke vollkommen ausreichend sind. Wegen $\int_a^\infty \mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{d}x = [1 + o(a^{-1})]\frac{1}{a}\mathrm{e}^{-a^2/2}$ für $a \to \infty$ (siehe [Kl06, Lemma 22.2]) folgt sofort:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|S_n| > n\varepsilon) &= \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon\sqrt{\pi n}} \left[1 + o(\varepsilon^{-1}n^{-1/2})\right] \mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon^2 n}{2}} \\
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(|S_n| > n\varepsilon) &= -\frac{\varepsilon^2}{2}
\end{aligned}$$

Dies bedeutet also, dass die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\{|S_n| > n\varepsilon\}$ exponentiell gegen Null abfällt. Anders könnte man ebenso formulieren, dass die Zufallsvariable S_n nur mit kleiner Wahrscheinlichkeit (von Größenordnung $\mathrm{e}^{-n\varepsilon^2/2}$) um mindestens $n\varepsilon$ von Null (ihrem Erwartungswert) abweicht. Wir bezeichnen dabei die Funktion $I : \varepsilon \to \varepsilon^2/2$ als die zugehörige Ratenfunktion. $\diamond$

Bei erster Betrachtung dieser Zusammenhänge könnte man vermuten, dass sich obiges Beispiel auf beliebige Zufallgrößen X_i verallgemeinern lässt. Diese Vermutung erweist sich jedoch als Trugschluss. Unter geeigneten Bedingungen an X_i ist es zwar korrekt, dass der Abfall der Wahrscheinlichkeit exponentiell erfolgt, jedoch hängt die exakte Rate des Abfalls (also die Ratenfunktion) von der jeweiligen Verteilung von X_i ab. Anhand der folgenden Bemerkung sei dieser allgemeine Zusammenhang verdeutlicht. Diese Bemerkung (welche [K06] entnommen wurde) leitet die obere Schranke für die großen Abweichungen obigen Typs her.

Bemerkung 1.7.2 (Obere Schranke)**.**
Bezeichne $(X_i)_i$ eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsgrößen, deren momentenerzeugende Funktion $\varphi(t) := \mathbb{E}[\mathrm{e}^{tX_i}]$ für alle $t \in \mathbb{R}$ endlich ist. Mit Hilfe der Markovschen Ungleichung erhalten wir für $t > 0$ und $x > 0$:

$$\mathbb{P}(S_n > nx) = \mathbb{P}\left(\mathrm{e}^{tS_n} > \mathrm{e}^{tnx}\right) \le \mathrm{e}^{-tnx}\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{tS_n}\right] = \mathrm{e}^{-tnx}\varphi(t)^n = \mathrm{e}^{-n[tx - \log\varphi(t)]}$$

Diese Abschätzung kann nun umgestellt werden. Zudem ist es gestattet, das Infimum über alle $t > 0$ zu bilden, da die linke Seite der Ungleichung nicht von t abhängt (durch das negative Vorzeichen wird aus dem Infimum ein Supremum). Damit erhält man für alle $x > 0$:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(S_n > nx) \le -\sup_{t>0}[tx - \log\varphi(t)]$$

Es kann gezeigt werden, dass zum einen das Supremum auch über $t \in \mathbb{R}$ erstreckt werden kann (siehe [K06, Lemma 1.4.1]) und dass diese obere Schranke auf der exponentiellen Skala tatsächlich auch eine untere Abschätzung ist (vgl [K06, Satz 1.4.3]). Dies ist Inhalt des nachfolgenden Satzes. $\diamond$

Theorem 1.7.3 (Satz von Cramér).
Es sei $(X_i)_i$ eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten und reellwertigen Zufallsgrößen, deren momentenerzeugende Funktion $\varphi(t) := \mathbb{E}[\mathrm{e}^{tX_1}]$ endlich ist. Es sei weiterhin

$$I(x) := \sup_{t\in\mathbb{R}} (tx - \log\varphi(t))$$

die sogenannte Legendre-Transformierte von $\log\varphi$. Dann gilt für jedes $x > \mathbb{E}[X_1]$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(S_n \geq nx) = -I(x)$$

Es sei an dieser Stelle vermerkt, dass mehrere Versionen des Satzes von Cramér existieren. Für den Beweis (genauergesagt für den fehlenden Beweisteil hinsichtlich der unteren Schranke) sei an dieser Stelle auf die Literatur ([Kl06, Satz 23.3.] oder [K06, Satz 1.4.3]) verwiesen.

Bislang haben wir lediglich Ereignisse der Form $\{S_n > nx\}$ betrachtet. Der nächste Schritt besteht nun in der Verallgemeinerung und wir werden den formellen Rahmen präsentieren, in dem sich die Theorie der großen Abweichungen entwickelt. Um diesen Weg zu beschreiten betrachte man folgende Interpretation des obigen Ereignisses. Genauergesagt handelt es sich um eine Folge von Ereignissen:

$$\mathbb{P}(S_n > nx) = \mathbb{P}(\tfrac{1}{n}S_n > x) = \mathbb{P}(\tfrac{1}{n}S_n \in (x,\infty)) = \mathbb{P}_{\left\{\frac{1}{n}S_n\right\}}((x,\infty))$$

Man erkennt klar, dass die bisherigen Schritte äquivalent als Aussage für eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen $\mathbb{P}_{\left\{\frac{1}{n}S_n\right\}}$ formuliert werden können. Die notwendige Verallgemeinerung der Ratenfunktion I liefert die folgende Definition:

Definition 1.7.4 (Ratenfunktion).
Eine Funktion $I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ heißt Ratenfunktion, wenn sie halbstetig von unten ist, d.h. wenn für alle $a \in \bar{\mathbb{R}}$ die Menge $I^{-1}([-\infty, a])$ abgeschlossen ist.

Damit stehen alle notwendigen Mittel bereit, um zu erklären, was unter einem Prinzip großer Abweichungen zu verstehen ist.

Definition 1.7.5. *Prinzip großer Abweichungen (Large Deviation Principle - LDP)*
Sei I eine Ratenfunktion. Eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen $(\mu_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ erfüllt ein Prinzip großer Abweichungen (LDP) mit Ratenfunktion I, wenn gilt:

1. $\liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log \mu_\varepsilon(O) \geq -\inf I(O)$ *für jede offene Menge $O \subset \mathbb{R}$*

2. $\limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log \mu_\varepsilon(A) \leq -\inf I(A)$ *für jede abgeschlossene Menge $A \subset \mathbb{R}$*

Diese allgemeine Definition sei in der folgenden Bemerkung auf das bisherige Vorgehen angewendet und es wird gezeigt, dass die Folge $\mathbb{P}_{\left\{\frac{1}{n}S_n\right\}} := \mathbb{P} \circ (\frac{1}{n}S_n)^{-1}$ ein Prinzip großer Abweichungen mit der bekannten Ratenfunktion I erfüllt. Genauergesagt wird gezeigt, dass die Gültigkeit des LDP aus dem Satz von Cramér folgt.

Beispiel 1.7.6 (LDP für Beispiel 1.7.1)**.**
Die Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen $(\mu_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ ist im vorliegenden Fall lediglich eine abzählbare Folge von Wahrscheinlichkeitmaßen. Es sei $\varepsilon = \frac{1}{n}$ und man erhält die Folge

$$(\mu_{1/n})_n = \left(\mathbb{P}_{\left\{\frac{1}{n}S_n\right\}}\right)_n$$

Die Ratenfunktion I ist bereits aus Beispiel 1.7.1 bekannt:

$$I(x) := \tfrac{x^2}{2},$$

Der Satz von Cramér besagt nun, dass für alle $x > 0$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n} \log \mu_{1/n}([x,\infty)) = -I(x) = \tfrac{-x^2}{2}$$

Aus Symmetriegründen gilt dies natürlich auch für $x < 0$ und die Menge $(-\infty, x]$. Für die offenen Intervalle (x,∞) bzw. $(-\infty, x)$ gilt dies in ähnlicher Weise, denn für $x > 0$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} -I(x) &= \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n} \log \mu_{1/n}([x,\infty)) \\ &\geq \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n} \log \mu_{1/n}((x,\infty)) \\ &\geq \sup_{\varepsilon>0} \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n} \log \mu_{1/n}([x+\varepsilon,\infty)) \\ &= -\inf_{\varepsilon>0} I(x+\varepsilon) \\ &= -I(x) \end{aligned}$$

Analog zeigt man dies für $x < 0$ und Intervalle $(-\infty, x)$. Damit sind die Anforderungen aus Definition 1.7.5 zumindest für die unbeschränkten Intervalle obiger Bauart nachgewiesen. Mit Hilfe von Standardargumenten (es sei an dieser Stelle auf [Kl06, Beispiel 23.10] verwiesen) erfolgt der Beweis für beliebige offene bzw. abgeschlossene Mengen. Erwähnt werden soll an dieser Stelle jedoch noch die sogenannte Skala. Die Wahl von $\varepsilon = 1/n$ führt dazu, dass abschließend formuliert werden kann:
Die Folge $\left(\mathbb{P}_{\left\{\frac{1}{n}S_n\right\}}\right)_n$ genügt einem Prinzip großer Abweichungen mit Ratenfunktion I und Skala n. ◇

Im Folgenden sei nun ein weiteres Theorem angeführt. Bemerkenswert am sogenannten Satz von Gärtner-Ellis (siehe beispielsweise [Ch09, Thm. 1.1.4]) ist vor allem, dass die Voraussetzung der unabhängigen und identischen Verteilung aus dem Satz von Cramér (Theorem 1.7.3) fallengelassen werden kann. In diesem Sinne stellt das nachfolgende Theorem eine deutliche Verallgemeinerung dar. Zuvor wird jedoch noch eine Definition (vgl [DZ98]) benötigt.

Definition 1.7.7. *(Exponentielle Straffheit, Gâteaux-differenzierbar)*

- *Eine Familie von Verteilungen $(\mu_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ heißt exponentiell straff, falls es für alle $l > 0$ eine kompakte Teilmenge K_l gibt, so dass gilt:*

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log \mu_\varepsilon(\Omega \setminus K_l) < -l.$$

- *Eine Funktion $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ heißt Gâteaux differenzierbar, falls für alle $a, b \in \mathcal{X}$ die Funktion $g(t) := f(a + tb)$ bei $t = 0$ differenzierbar ist.*

Nun kann der zuvor erwähnte Satz formuliert werden.

Theorem 1.7.8 (Satz von Gärtner-Ellis)**.**
Es sei $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge von Zufallsvariablen und $(b_n)_n$ eine Folge positiver reeller Zahlen mit $b_n \to \infty$. Falls für jedes $\theta > 0$ die logarithmische momentenerzeugende Funktion

$$\Lambda(\theta) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} \log \mathbb{E}\left[e^{\theta b_n X_n}\right]$$

im eigentlichen oder uneigentlichen Sinne existiert und darüber hinaus der Nullpunkt im Inneren der Menge $\{\theta \in \mathbb{R}, \Lambda(\theta) < \infty\}$ liegt, so gilt für jede abgeschlossene Menge $F \subset \mathbb{R}$:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} \log \mathbb{P}\{X_n \in F\} \leq - \inf_{\lambda\in F} \sup_{\theta\in\mathbb{R}} \{\theta\lambda - \Lambda(\theta)\}.$$

Falls die Funktion Λ darüber hinaus noch Gâteaux-differenzierbar und unterhalbstetig ist und die Verteilungen der $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ exponentiell straff sind so gilt überdies für alle offenen Mengen $G \subset \mathbb{R}$, dass

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} \log \mathbb{P}\{X_n \in G\} \geq - \inf_{\lambda\in G} \sup_{\theta\in\mathbb{R}} \{\theta\lambda - \Lambda(\theta)\}.$$

Mit anderen Worten, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erfüllt in diesem Fall ein Prinzip großer Abweichungen auf der Skala b_n mit der Ratenfunktion $\Lambda^*(\lambda) = \sup_{\theta\in\mathbb{R}}\{\theta\lambda - \Lambda(\theta)\}$.

Mit Hilfe der Kenntnis über die exponentiellen Momente (d.h. von Λ) ist es also möglich, ein Prinzip großer Abweichungen zu erhalten. Diese Strategie wird in Kapitel 2 angewendet. Der Hauptteil dieses Kapitels besteht darin, die Asymptotik der exponentiellen Momente exakt herzuleiten.

Eine natürliche Frage ist nun die nach einer Umkehrung, d.h. kann aus der Existenz eines Prinzips großer Abweichungen etwas über die exponentiellen Momente gesagt werden? Die Antwort liefert das bekannte Lemma von Varadhan (vgl.[DZ98, Thm. 4.3.1]), welches an dieser Stelle aufgeführt sei.

Theorem 1.7.9 (Varadhans Lemma)**.**
Es sei $(Z_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ eine Familie von $\mathcal{X}$-wertigen Zufallsvariablen. Die zugehörigen Wahrscheinlichkeitsmaße seien mit $(\mu_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ bezeichnet und mögen einem Prinzip großer Abweichungen genügen, dessen Ratenfunktion I nur kompakte Niveaumengen besitzt (man bezeichnet dies auch als eine gute Ratenfunktion). Desweiteren sei $\phi : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ eine beliebige stetige Funktion und es sei eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt:

- $\lim_{M\to\infty} \limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log \left[e^{\phi(Z_\varepsilon)/\varepsilon} \mathbb{1}_{\phi(Z_\varepsilon \geq M)}\right] = -\infty$
- $\exists \gamma > 1 : \limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log \mathbb{E}\left[e^{\gamma\phi(Z_\varepsilon)/\varepsilon}\right] < \infty$

Dann gilt, dass

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log \mathbb{E}\left[e^{\phi(Z_\varepsilon)/\varepsilon}\right] = \sup_{x\in\mathcal{X}} \{\phi(x) - I(x)\}$$

Dieses Theorem liefert erste Anhaltspunkte über die Gestalt der zu erwartenden Konstanten. Beispielhaft sei dies in folgender Bemerkung demnonstriert.

Bemerkung 1.7.10 (Heuristische Herleitung der Konstanten)**.**
Ziel dieser Bemerkung ist es, den letzten Satz für eine weitere (kleine) Heuristik zu nutzen. Dafür sei angenommen, dass ℓ_t/t ein Prinzip großer Abweichungen erfülle. Es sei angemerkt, dass ℓ_t/t ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist und in obigem Satz sei $\varepsilon := 1/t$ gewählt. Desweiteren sei für alle $\theta > 0$ die Funktion ϕ (wie in obigem Lemma verwendet) auf dem Raum aller Wahrscheinlichkeitsmaße des $\mathbb{Z}^d$ definiert durch:

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{M}^1(\mathbb{Z}^d) &\to \mathbb{R}_+ \\ \mu &\mapsto \theta\|\mu\|_p \end{aligned}$$

Varadhans Lemma liefert uns nun folgendes Ergebnis:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{\theta\|\ell_t/t\|_p t}\right] = \sup_{\mu\in\mathcal{M}^1(\mathbb{Z}^d)} \{\theta\|\mu\|_p - I(\mu)\}$$

Unter der Berücksichtigung, dass die Ratenfunktion I dem Donsker-Varadhan Funktional entspricht, erhält man exakt Gleichung (2.2.1) aus Theorem 2.2.1. ◇

An dieser Stelle soll die kurze Einführung in das Gebiet der großen Abweichungen beendet sein. Es sei nochmals darauf hingewiesen, dass diese Thematik sehr reichhaltig ist und der Abschnitt speziell auf die Anforderungen dieser Dissertation zugeschnitten ist. Für weitere Informationen sei beispielweise auf [Kl06] oder [Ch09] verwiesen.

Kapitel 2

Der subkritische Fall

Die Ergebnisse des vorliegenden Kapitels wurden vorab in [BK11] veröffentlicht.

2.1 Einführung

In diesem Kapitel wird eine relativ neue Methode zur Untersuchung der Selbstüberschneidungen von Lokalzeiten verwendet, welche es insbesondere ermöglicht eine obere Schranke in Form einer bestimmten Variationsformel anzugeben. Diese Variationsformel beschreibt das optimale Verhalten für die Irrfahrt unter der Zielsetzung, möglichst viele Selbstüberschneidungen zu produzieren und die probabilistischen Kosten dafür so gering wie möglich zu halten. Im subkritischen Fall bedeutet dies, dass die Irrfahrt sich nur innerhalb einer bestimmten Box mit zeitabhängigem Radius bewegt und dabei (gleichförmig) die Selbstüberschneidungen produziert.
Die oben erwähnte Methode ist eng verwandt mit der allgemein bekannten Theorie zu großen Abweichungen, welche auf Donsker und Varadhan zurückgeht. Das größte Hindernis, die bekannte Vorgehensweise im Beweis der oberen Schranke anzuwenden liegt darin, dass bestimmte Objekte nicht notwendigerweise stetig sind. So einfach dies klingen mag, umso schwerer ist es, dieses Problem zu überwinden. In der vorliegenden Dissertation sei dazu ein Resultat aus [BHK07] genutzt, in welchem eine explizite obere Schranke für die gemeinsame Dichte der Lokalzeiten der Irrfahrt bewiesen wird. Anschließend liegt der größte Teil der Schwierigkeiten darin, das assymptotische Verhalten der so entstandenen Formel zu spezifizieren. Dies ist die wesentliche Neuerung in [BK11] und diesem Kapitel.

2.2 Die Theoreme

In diesem Kapitel wird das Verhalten der Irrfahrt in dem Fall untersucht, in dem möglichst viele Selbstüberschneidungen produziert werden. Die Untersuchungen seien dabei zunächst auf den sogenannten subkritischen Fall beschränkt, in welchem für die Dimension d und den Parameter p die Ungleichung $d(p-1) < 2p$ erfüllt ist (der superkritische Fall wird in Kapitel 3 behandelt). Bevor jedoch das eigentliche Resultat exakt wiedergeben wird, sei zunächst (informell) das optimale Verhalten der Irrfahrt beschrieben (optimal im Sinne der probabilistischen Kosten), welches zu dieser Menge an Selbstüberschneidungen führt. Die Irrfahrt folgt dabei der folgenden Strategie: sie bewegt sich innerhalb der Box mit dem Radius $\alpha_t \ll \sqrt{t}$ wobei die Größenordnung der Lokalzeiten in jedem Punkt dieser Box von der Ordnung t/α_t^d ist (d.h.

die Irrfahrt besucht gleichmäßig alle Punkte innerhalb der Box). Darüber hinaus nähert sich das Aussehen der reskalierten Irrfahrt einer bestimmten deterministischen Gestalt an, welche in Form einer charakteristischen Variationsformel angegeben werden kann.

Das Ergebnis dieses Kapitels ist kein Beweis für dieses Bild (des Graphen) der Irrfahrt, sondern es wird die exakte logarithmische Asymptotik (für $t \to \infty$) der exponentiellen Momente von $\theta_t \|\ell_t\|_p$ bewiesen. Dabei ist es möglich, einen großen Spielraum für die Wahl von $\theta_t \in (0, \infty)$ zuzulassen. (Es sei an dieser Stelle bemerkt, dass es jedoch zwingend ist, dass θ_t von oben beschränkt ist.) Als Konsequenz des Verhaltens der exponentiellen Momente erhält man ebenso die genaue Asymptotik für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\{\|\ell_t\|_p > tr_t\}$, wobei eine große Klasse von Skalen(-funktionen) $r_t \in [0,1]$ zugelassen wird, welche die Bedingung $a_{d,p}(t) \ll tr_t$ erfüllen.

Damit das Theorem formuliert werden kann, wird noch die Einführung der folgenden Notation benötigt:
Für den bekannten Lebesgue Raum $L^q(\mathbb{R}^d)$ bezeichne $\|\!| \cdot |\!\|_q$ (für $q \geq 1$) die herkömmliche Norm. Weil das Zusammenspiel zwischen Funktionen von $\mathbb{Z}^d$ und von $\mathbb{R}^d$ von herausragender Bedeutung ist, wird ausnahmsweise (und nur in diesem Kapitel!) der Unterschied der beiden zugehörigen Normen auch formal in der Notation kenntlich gemacht.
Darüber hinaus bezeichne $H^1(\mathbb{R}^d)$ den bekannten Sobolev Raum und mit $\mathcal{M}_1(X)$ sei die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße des metrischen Raumes X bezeichnet (bezogen auf die normale Borelsche σ-Algebra.).

Mit diesen Vorbereitungen kann nun das Hauptresultat dieses Kapitels formuliert werden.

Theorem 2.2.1 (Exponentielle Momente)**.**
Es seien $d \in \mathbb{N}$ und $p > 1$.

(i) Für alle $\theta > 0$ gilt,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{E}\Big(\mathrm{e}^{\theta \|\ell_t\|_p}\Big) = \rho^{(\mathrm{d})}_{d,p}(\theta), \tag{2.2.1}$$

wobei

$$\rho^{(\mathrm{d})}_{d,p}(\theta) = \sup\Big\{\theta\|\mu\|_p - J(\mu) \colon \mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{Z}^d)\Big\} \in (0, \theta], \tag{2.2.2}$$

und $J(\mu) = \frac{1}{2}\sum_{x\sim y}\big(\sqrt{\mu(x)} - \sqrt{\mu(y)}\big)^2$ das bekannte Donsker-Varadhan Funktional bezeichnet.

(ii) Zu den bisherigen Voraussetzungen sei zusätzlich angenommen, dass $d(p-1) < 2p$ gilt. Es sei $\lambda := \frac{2p+d-dp}{2p} \in (0,1)$ definiert und bezeichne $(\theta_t)_{t>0}$ eine Funktion in $(0,\infty)$ welche die Bedingung

$$\Big(\frac{\log t}{t}\Big)^{\frac{2\lambda}{d+2}} \ll \theta_t \ll 1. \tag{2.2.3}$$

erfülle. Darüber hinaus sei

$$\rho^{(\mathrm{c})}_{p,d}(\theta) := \sup\Big\{\theta|\!|\!| g^2 |\!|\!|_p - \frac{1}{2}|\!|\!|\nabla g|\!|\!|_2^2 \colon g \in H^1(\mathbb{R}^d), |\!|\!| g|\!|\!|_2 = 1\Big\}, \qquad \theta > 0. \tag{2.2.4}$$

definiert. Dann gilt, dass $\rho^{(\mathrm{c})}_{p,d}(\theta) \in (0,\infty)$, und

(a)

$$\frac{1}{t}\log \mathbb{E}\Big(\mathrm{e}^{\theta_t\|\ell_t\|_p}\Big) \geq \theta_t^{1/\lambda}\big(\rho^{(\mathrm{c})}_{d,p}(1) + o(1)\big), \qquad t \to \infty. \tag{2.2.5}$$

(b) Wenn anstelle der Bedingung $d(p-1) < 2p$ sogar die stärkere Voraussetzung $d(p-1) < 2$ erfüllt ist, dann gilt,

$$\frac{1}{t}\log\mathbb{E}\left(e^{\theta_t\|\ell_t\|_p}\right) \leq \theta_t^{1/\lambda}\big(\rho_{d,p}^{(\mathrm{c})}(1) + o(1)\big), \qquad t \to \infty. \tag{2.2.6}$$

Es sei an dieser Stelle bemerkt, dass in der vorliegenden Arbeit die logarithmische Asymptotik der exponentiellen Momente mit festen Parameter θ in beliebigen Dimensionen, für $\theta \to 0$ jedoch nur in subkritischen Dimensionen ($d < \frac{2p}{p-1}$) bewiesen werden kann.

Wenige Monate nach der Publizierung einer ersten Version dieses Resultates gelang es C. Laurent [L10b] eine Erweiterung des Theoremes 2.2.1(ii) zu beweisen. Insbesondere ermöglichte die von ihm genutze Beweistechnik die Voraussetzung $d(p-1) < 2$ durch die bestmögliche (d.h. schwächste) Annahme $d(p-1) < 2p$ zu ersetzen. Darüber hinaus konnte er das Resultat für alle Skalenfunktionen $t^{\frac{1}{p}-1} \ll r_t \ll 1$ und eine große Klasse von sogenannten stabilen Irrfahrten nachweisen. Desweiteren wurde vor Kurzem eine weitere Verallgemeinerung für beliebige α stabile Irrfahrten veröffentlicht (vgl. [CLM12]). Dieser Artikel stellt (größtenteils unter Verwendung zuvor benutzter Techniken) das weitreichendste Resultat dar (insbesondere auch ohne die in der vorliegenden Arbeit vorzunehmenden Einschränkungen.).

Bevor eine Reihe weiterer Bemerkungen folgen wird (siehe Abschnitt 2.3) sei zunächst das Prinzip großer Abweichungen für die Selbstüberschneidungenslokalzeiten $\|\ell_t\|_p$ explizit und in klassischer Form formuliert. Der Nachweis, dass dieses tatsächlich eine direkte Folgerung aus Theorem 2.2.1(ii) ist, wird (im Geiste des bekannten Gärtner-Ellis-Theorems, siehe [DZ98, Sect. 4.5]) in Abschnitt 2.4.1 vollzogen.

Theorem 2.2.2 (Große Abweichungen)**.**
Es seien $d \in \mathbb{N}$ und $p > 1$ mit $d(p-1) < 2$. Bezeichne $(r_t)_{t>0}$ eine beliebige Skalenfunktion, welche der Bedingung

$$\left(\frac{\log t}{t}\right)^{\frac{d(p-1)}{p(d+2)}} \ll r_t \ll 1 \qquad \textit{für} \qquad t \to \infty. \tag{2.2.7}$$

genüge. Unter diesen Voraussetzungen gilt im Grenzwert $t \to \infty$, dass

$$\frac{1}{t}\log\mathbb{P}\big(\big\|\ell_t/t\big\|_p \geq r_t\big) \sim -\chi_{d,p} r_t^{\frac{2p}{d(p-1)}}. \tag{2.2.8}$$

Dabei ist

$$\chi_{d,p} := \inf\Big\{\frac{1}{2}\|\nabla g\|_2^2 \colon g \in L^{2p}(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d) \cap H^1(\mathbb{R}^d) \colon \|g\|_2 = 1 = \|g\|_{2p}\Big\}. \tag{2.2.9}$$

Es ist klar, dass sich sowohl $\chi_{d,p}$ als auch r_t direkt durch $\rho_{p,d}^{(\mathrm{c})}(\theta)$ bzw. θ_t darstellen lassen. Es sei diesbezüglich auf Bemerkung 2.3.2 bzw. Abschnitt 2.4.1 verwiesen.

Neben zahlreichen Bemerkungen wird den Beweisen eine heuristische Herleitung von Theorem 2.2.1 vorangestellt (siehe Abschnitt 2.4).

2.3 Anmerkungen zu den Theoremen

Im vorliegenden Abschnitt werden diverse Anmerkungen zu den beiden Theoremen festgehalten. Dabei wird insbesondere der Zusammenhang zwischen den verwendeten Größen beleuchtet und die Restriktionen der Theoreme genauer erklärt. Im Anschluß daran sei zum besseren Verständnis von Theorem 2.2.1 eine heuristische Herleitung desselben notiert. Dabei wird insbesondere deutlich werden, warum beim Beweis der oberen Schranke klassische Resultate nicht anwendbar sind.

2.3.1 Die Variationsformeln

Bemerkung 2.3.1 (Beziehung zwischen $\rho^{(\mathrm{c})}_{d,p}$ und $\rho^{(\mathrm{d})}_{d,p}(\theta)$)**.**
Es sei an dieser Stelle festgehalten, dass das Donsker-Varadhan Funktional der Dirichletform der Irrfahrt von $\sqrt{\mu}$ entspricht, d.h.

$$J(\mu) = \frac{1}{2}\|\nabla^{(\mathrm{d})}\sqrt{\mu}\|_2^2, \qquad \mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{Z}^d),$$

dabei bezeichne $\nabla^{(\mathrm{d})}$ die diskrete Version des Gradienten. Damit kann man leicht erkennen, dass $\rho^{(\mathrm{c})}_{p,d}(\theta)$ die stetige Version von $\rho^{(\mathrm{d})}_{d,p}(\theta)$ ist. Ein entscheidender Schritt im Beweis von Theorem 2.2.1(ii) wird der Nachweis sein, dass die Asymptotik der diskreten Formel für $\theta \to 0$ auf die stetige Version dieser Formel führt. Mit anderen Worten, es gilt zu zeigen, dass

$$\rho^{(\mathrm{d})}_{d,p}(\theta) \sim \theta^{1/\lambda}\rho^{(\mathrm{c})}_{d,p}(1), \qquad \theta \downarrow 0. \tag{2.3.1}$$

(Tatsächlich wird nur eine Version dieser Aussage auf großen Boxen bewiesen, siehe dazu Lemma 2.5.1.) Mit Kenntnis dieses Zusammenhanges kann jedoch (zumindest heuristisch) der Übergang zwischen den beiden Fällen in Theorem 2.2.1 erklärt werden. Wenn in (i) θ ersetzt wird durch $\theta_t \to 0$, dann erhält man formal

$$\frac{1}{t}\log \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\theta_t\|\ell_t\|_p}\right) \sim \rho^{(\mathrm{d})}_{p,d}(\theta_t) \sim \theta_t^{1/\lambda}\rho^{(\mathrm{c})}_{d,p}(1). \tag{2.3.2}$$

Aus diesem Grunde zeigt uns Gleichung (2.3.1), dass die beiden Fälle (i) und (ii) von Theorem 2.2.1 konsistent sind. ◇

Bemerkung 2.3.2 (Über die Konstante $\rho^{(\mathrm{c})}_{d,p}(\theta)$)**.**
Es wird in dieser Bemerkung gezeigt, dass

$$\rho^{(\mathrm{c})}_{p,d}(\theta) = \theta^{1/\lambda}\lambda\left(\frac{2p}{d(p-1)}\chi_{d,p}\right)^{\frac{\lambda-1}{\lambda}}, \qquad \theta \in (0,\infty), \tag{2.3.3}$$

wobei an dieser Stelle an die Definition von $\chi_{d,p}$ in (2.2.9) (siehe Theorem 2.2.2) erinnert sei:

$$\chi_{d,p} = \inf\Big\{\frac{1}{2}\|\nabla g\|_2^2\colon g \in L^{2p}(\mathbb{R}^d)\cap L^2(\mathbb{R}^d)\cap H^1(\mathbb{R}^d).\colon \|g\|_2 = 1 = \|g\|_{2p}\Big\}. \tag{2.3.4}$$

In [GKS07, Lemma 2.1] konnte gezeigt werden, dass $\chi_{d,p}$ genau dann positiv ist, wenn $d(p-1) \le 2p$ gilt, d.h. insbesondere im subkritischen Fall. Darüber hinaus impliziert dies insbesondere, dass für alle $\theta > 0$ die Konstante $\rho^{(\mathrm{c})}_{p,d}(\theta)$ endlich und positiv ist. Aus dem letzten Faktum wiederum kann man mit Hilfe von (2.3.1) ebenso schließen, dass für hinreichend kleine $\theta \in (0,\infty)$ die

Konstante $\rho_{p,d}^{(\mathrm{d})}(\theta)$ auch endlich und positiv sein muss. Daraus folgt jedoch (wegen der Monotonie) dass diese Konstante für alle $\theta \in (0,\infty)$ positiv sein muss. Die Endlichkeit folgt aus der Tatsache, dass $J(\mu) \geq 0$ und $\|\mu\|_p \leq 1$ für alle $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{Z}^d)$. (Aus gleichem Grunde kann sie nicht größer sein als θ.)
Kommen wir nun zum Beweis von (2.3.3). In der Definition (2.2.4) von $\rho_{p,d}^{(\mathrm{c})}(\theta)$ ersetze man dazu g (für beliebige $\beta \in (0,\infty)$) durch $\beta^{d/2}g(\beta\,\cdot)$. Zweifelsohne ist $\beta^{d/2}g(\beta\,\cdot)$ ebenso L^2-normiert und man erhält für jedes $\beta > 0$,

$$\rho_{p,d}^{(\mathrm{c})}(\theta) = \sup_{g\in H^1(\mathbb{R}^d):\ \|g\|_2=1} \Big\{\theta\beta^{\frac{d(p-1)}{p}}\|g^2\|_p - \frac{1}{2}\beta^2\|\nabla g\|_2^2\Big\}.$$

An dieser Stelle besteht noch die Freiheit, β zu wählen. Das Optimum β^* lässt sich durch eine einfache Rechnung bestimmen:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta}\left[\theta\beta^{\frac{d(p-1)}{p}}\|g^2\|_p - \frac{1}{2}\beta^2\|\nabla g\|_2^2\right] \\
&= \theta\frac{d(p-1)}{p}(\beta^*)^{\frac{d(p-1)-p}{p}}\|g^2\|_p - (\beta^*)\|\nabla g\|_2^2 \\
\Rightarrow (\beta^*)\|\nabla g\|_2^2 &= \theta\frac{d(p-1)}{p}(\beta^*)^{\frac{d(p-1)-p}{p}}\|g^2\|_p \\
\Rightarrow (\beta^*)^{\frac{2p-dp+d}{p}} &= \theta\frac{d(p-1)}{p}\frac{\|g^2\|_p}{\|\nabla g\|_2^2}
\end{aligned}$$

Es ist $\lambda = \frac{2p+d-dp}{2p}$ und man erhält daher für das Optimum

$$\beta^* = \Big(\theta\frac{d(p-1)}{p}\frac{\|g^2\|_p}{\|\nabla g\|_2^2}\Big)^{1/(2\lambda)},$$

Eingesetzt in $\rho_{p,d}^{(\mathrm{c})}(\theta)$ ergibt sich damit

$$\rho_{p,d}^{(\mathrm{c})}(\theta) = \theta^{1/\lambda}\lambda \sup_{g\in H^1(\mathbb{R}^d):\ \|g\|_2=1}\left(\frac{2p}{d(p-1)}\left[\frac{\frac{1}{2}\|\nabla g\|_2^2}{\|g\|_{2p}^{2/(1-\lambda)}}\right]\right)^{\frac{\lambda-1}{\lambda}}.$$

Man beachte, dass der Term in den eckigen Klammern invariant gegenüber der Transformation $g \mapsto \beta^{d/2}g(\beta\,\cdot)$ ist. Diese Transformation erhält darüber hinaus die L^2-Norm. Aus diesem Grunde kann die Bedingung $\|g\|_{2p} = 1$ jederzeit hinzugefügt werden (da durch vorhergehende Transformation die L^{2p}-Norm adjustiert werden kann). Mit Verweis auf Gleichung (2.2.9) erkennt man, dass der Beweis von (2.3.3) damit beendet ist. $\diamond$

Bemerkung 2.3.3 (Beziehung zur Gagliardo-Nirenberg Konstante)**.**
In den Dimensionen $d \geq 2$ kann die Konstante $\chi_{d,p}$ aus Gleichung (2.2.9) durch die sogenannte *Gagliardo-Nirenberg* Konstante, $K_{d,p}$, dargestellt werden. Dazu sei $d \geq 2$ und $p < \frac{d}{d-2}$. In der sogenannten *Gagliardo-Nirenberg Ungleichung* ist $K_{d,p}$ dann definiert als die kleinste aller Konstanten $C > 0$ mit

$$\|\psi\|_{2p} \leq C\|\nabla\psi\|_2^{\frac{d(p-1)}{2p}}\|\psi\|_2^{1-\frac{d(p-1)}{2p}}, \qquad \text{mit } \psi \in H^1(\mathbb{R}^d). \tag{2.3.5}$$

Diese Ungleichung zog das Interesse von Physikern und Mathematikern auf sich, da sie enge Verbindungen zur Nash Ungleichung und zur logarithmischen Sobolov Ungleichungen aufweist.

Darüber hinaus spielt sie in den Arbeiten von Chen [Ch04] zu Überschneidungen von Irrfahrten und zu Selbstüberschneidungen von Brownschen Bewegungen eine wichtige Rolle. Der interessierte Leser sei für weitere Details an dieser Stelle auf [Ch04, Abschnitt 2] verwiesen.
Mit dieser Definition von $K_{d,p}$ folgt mittels Gleichung (2.3.5) sofort, dass

$$K_{d,p} = \sup_{\substack{\psi \in H^1(\mathbb{R}^d)\\ \psi \neq 0}} \frac{\|\psi\|_{2p}}{\|\nabla\psi\|_2^{\frac{d(p-1)}{2p}} \|\psi\|_2^{1-\frac{d(p-1)}{2p}}} = \Big(\inf_{\substack{\psi \in H^1(\mathbb{R}^d)\\ \|\psi\|_2 = 1}} \|\psi\|_{2p}^{-\frac{4q}{d}} \|\nabla\psi\|_2^2 \Big)^{-\frac{d}{4q}}. \tag{2.3.6}$$

Auch an dieser Stelle erkennt man, dass für alle $\beta > 0$ der Term, auf den sich das Infimum bezieht unter der Transformation, die ψ durch $\psi_\beta(\cdot) = \beta^{\frac{d}{2}}\psi(\cdot\,\beta)$ ersetzt, invariant ist. Analog der obigen Vorgehensweise in Bemerkung 2.3.2 kann daher die Bedingung $\|\psi\|_{2p} = 1$ hinzugefügt werden und man erhält

$$K_{d,p} = \chi_{d,p}^{-\frac{d}{4q}}.$$

Insbesondere haben also die Variationsformeln für $K_{d,p}$ (siehe (2.3.6)) und für $\chi_{d,p}$ (siehe (2.2.9)) diesselben Maximierer bzw. Minimierer. Es ist bekannt, dass (2.3.6) einen Maximierer besitzt, welcher eine glatte, positive und rotationssymetrische Funktion ist (siehe [We83]). Für Aussagen zur Eindeutigkeit sei auf [MS81] verwiesen. ◇

2.3.2 Weitere Bemerkungen zu den Theoremen

Bemerkung 2.3.4 (Der kritische Fall).
Natürlicherweise stellt man sich die Frage, welche Form (2.2.8) im kritischen Fall $p = \frac{d}{d-2}$ annimmt. Es sei an Bemerkung 2.3.2 erinnert und man erkennt, dass die rechte Seite der Gleichung in diesem Fall gleich $-\chi_{d,d/(d-2)} r_t$ ist. Gemäß [GKS07, Lemma 2.1] ist dies ein relativ komplizierter und nichttrivialer Ausdruck.
In Dimension 3 und höher ist bekannt (siehe [Ca10, Theorem 2]), dass Gleichung (2.2.8) weiterhin, für alle $t^{\frac{1}{p}-1} \ll r_t \ll 1$ gilt, wobei jedoch $\chi_{d,d/(d-2)}$ durch $\sup\{\|\nabla^{(\mathrm{d})} f\|_2^2 \colon f \in \ell^{2p}(\mathbb{Z}^d), \|f\|_{2p} = 1\}$ ersetzt werden muss. Letzteres ist wiederum eine diskrete Version von $\chi_{d,d/(d-2)}$.
Dieses zeigt interessantweise, dass in der kritischen Dimension $d = \frac{2p}{p-1}$ ein völlig anderes Verhalten vorherrscht, welches sich nicht als „Grenzverhalten" der hier betrachteten Fälle interpretieren lässt. ◇

Bemerkung 2.3.5 (Einschränkungen von r_t).
Die Einschränkungen in Gleichung (2.2.7) des Theorems 2.2.1(ii) haben rein technische Gründe. Die Restriktionen sind notwendig, damit die Fehlerterme in [BHK07, Theorem 2.1, Prop. 3.6] hinreichend klein bleiben, was wiederum ein zentraler Bestandteil des Beweises der oberen Schranke ist (siehe Gleichung (2.5.3)). Der Beweis der unteren Schranke von (2.2.5) benötigt diese Einschränkung nicht und gilt daher in allgemeinerer Form. ◇

Bemerkung 2.3.6 (Einschränkung der zulässigen Dimensionen).
Bedauerlicherweise kann die verwendete Beweismethode nicht auf alle Werte von p und d in subkritischen Dimensionen ausgedehnt werden. Grund hierfür ist, dass im Beweis der Formel (2.3.1) eine bestimmte Treppenfunktion durch einen Polygonzug im L^{2p}-Sinne approximiert werden muss. Der dabei entstehende Fehler ist von der Größenordnung des Gradienten des Polygonzuges. Diesen Fehler im L^2-Sinne zu kontrollieren ist nur möglich, indem er gegen den entsprechenden Energieterm abgeschätzt wird. Die dadurch entstehende Notwendigkeit der Kontrolle im L^{2p}-Sinn wiederum stellt ein Problem dar, welches nicht in vollem Umfang überwunden werden konnte. (Siehe dazu Gleichung (2.5.21).) ◇

2.3.3 Heuristische Herleitung von Theorem 2.2.1

In diesem Abschnitt wird eine heuristische Herleitung von Theorem 2.2.1(ii) angeführt, welche auf der Theorie der großen Abweichungen beruht.

Zunächst sei an die Abkürzung $\lambda = (2p - dp + d)/2p \in (0,1)$ erinnert. Für eine später zu spezifizierende Skala $\alpha_t \to \infty$, sei die Funktion $L_t \colon \mathbb{R}^d \to [0,\infty)$ definiert als die skalierte und normierte Version der Lokalzeiten ℓ_t, d.h.,

$$L_t(x) = \frac{\alpha_t^d}{t} \ell_t\big(\lfloor x\alpha_t \rfloor\big), \qquad \text{for } x \in \mathbb{R}^d. \tag{2.3.7}$$

Die Funktion L_t ist eine zufällige Treppenfunktion und Teil der Menge

$$\mathcal{F} = \Big\{ f \in L^1(\mathbb{R}^d) \colon f \geq 0, \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathrm{d}x = 1 \Big\} \tag{2.3.8}$$

aller Wahrscheinlichkeitsdichten auf $\mathbb{R}^d$. Analog dem bekannten Satz von Donsker und Varadhan über große Abweichungen folgt, falls α_t der Bedingung $1 \ll \alpha_t^d \ll a_{d,0}(t)$ genügt (siehe dazu (1.1.4)), dass die Verteilungen von L_t ein (schwaches) Prinzip großer Abweichungen in der schwachen L^1-Topologie auf $\mathcal{F}$ mit der Geschwindigkeit $t\alpha_t^{-2}$ und der Ratenfunktion $\mathcal{I} \colon \mathcal{F} \to [0,\infty]$ erfüllen. Die Ratenfunktion ist dabei gegeben durch

$$\mathcal{I}(f) = \begin{cases} \frac{1}{2}\big\|\nabla\sqrt{f}\big\|_2^2 & \text{falls } \sqrt{f} \in H^1(\mathbb{R}^d), \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases} \tag{2.3.9}$$

Grob formuliert sagt dieses Prinzip großer Abweichungen aus, dass

$$\mathbb{P}(L_t \in \,\cdot\,) = \exp\Big\{ -\frac{t}{\alpha_t^2} \Big[\inf_{f \in \,\cdot} \mathcal{I}(f) + o(1) \Big] \Big\}, \tag{2.3.10}$$

wobei die Konvergenz bzgl. der schwachen Topologie gemeint ist. Für einen Spezialfall wurde dieses Prinzip in [DV79] bewiesen, der Beweis im allgemeinen Fall erfolgte in [HKM06, Prop. 3.4].

Um Theorem 2.2.1(ii) gemäß (2.3.10) heuristisch herleiten zu können, halten wir fest, dass

$$\theta_t \|\ell_t\|_p = \theta_t \Big(\sum_{z\in\mathbb{Z}^d} \ell_t(z)^p \Big)^{1/p} = t\theta_t \alpha_t^{-d} \Big(\sum_{z\in\mathbb{Z}^d} L_t\big(\tfrac{z}{\alpha_t}\big)^p \Big)^{1/p} = t\theta_t \alpha_t^{\frac{d(1-p)}{p}} \|\!|L_t|\!\|_p.$$

An dieser Stelle sei $\alpha_t = \theta_t^{-1/(2\lambda)}$ gewählt und man erhält somit

$$\theta_t \|\ell_t\|_p = \frac{t}{\alpha_t^2} \|\!|L_t|\!\|_p \qquad \text{und} \qquad t\theta_t^{1/\lambda} = \frac{t}{\alpha_t^2}. \tag{2.3.11}$$

Man erkennt, dass die Skala t/α_t^2 des Prinzips großer Abweichungen mit der logarithmischen Skala $t\theta_t^{1/\lambda}$ des zu betrachtenden Erwartungswertes in Theorem 2.2.1(ii) übereinstimmt. Die formale Anwendung von Varadhans Lemma führt zu

$$\mathbb{E}\Big(\mathrm{e}^{\theta_t \|\ell_t\|_p} \Big) = \mathbb{E}\Big(\exp\Big\{ \frac{t}{\alpha_t^2} \|\!|L_t|\!\|_p \Big\} \Big) = \exp\Big\{ \frac{t}{\alpha_t^2} (\widetilde{\rho} + o(1)) \Big\},$$

wobei

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\rho} &= \sup\Big\{ \|f\|_p - \mathcal{I}(f) \colon f \in \mathcal{F} \Big\} \\
&= \sup\left\{ \|g^2\|_p - \frac{1}{2}\|\nabla g\|_2^2 \;:\; g \in L^2(\mathbb{R}^d) \cap L^{2p}(\mathbb{R}^d) \cap H^1(\mathbb{R}^d),\ \|g\|_2 = 1 \right\} \\
&= \rho_{d,p}^{(c)}(1).
\end{aligned}
\tag{2.3.12}
$$

Damit ist die heuristische Herleitung von Theorem 2.2.1(ii) beendet. In analoger Weise erhält man ebenso Theorem 2.2.1(i). (Vergleiche dazu die Argumentation aus [GM98].)

Durch diese informelle Betrachtungsweise erkennt man, dass der Hauptbeitrag zu den exponentiellen Momenten in Theorem 2.2.1(ii) von denjengigen Realisierungen der Irrfahrt kommmen sollten, bei denen die reskalierten Lokalzeiten L_t wie die Minimierer der Variationsformel $\rho_{d,p}^{(c)}(1)$ aussehen. Insbesondere sollte sich also die Irrfahrt innerhalb eines Box mit Durchmesser $\alpha_t \ll t^{1/d}$ bewegen und die Lokalzeit in jedem Punkt sollte von der Größenordnung $t/\alpha_t^d \gg 1$ sein. Mit anderen Worten, die beste Strategie für die Irrfahrt ist ein über die gesamte Zeit gleichmäßig verteiltes Zusammenziehen. (Durch dieses Zusammenziehen werden letztendlich die Selbstüberschneidungen produziert.) Die Interpretation von Theorem 2.2.1(i) ist analog, jedoch ist hierbei der Durchmesser der zu betrachtenden Region von endlicher Größenordnung bzgl. t. Aus diesem Grunde ist das in der Variationsformel $\rho_{d,p}^{(d)}(1)$ entstehende Bild diskret und nicht stetig.

Beim Versuch, die obige heuristische Argumentation in einen mathematisch exakten Beweis zu überführen stößt man vor allem auf folgende schwerwiegende Probleme:
(1) das Prinzip großer Abweichungen ist nur für kompakte Untermengen von R^d gültig
(2) das Funktional $L_t \mapsto \|L_t\|_p$ ist unbeschränkt und
(3) dieses Funktional ist auch nicht stetig
Punkt (1) zu überwinden stellt keine große Probleme dar, jedoch ist es außerordentlich schwierig die Punkte (2) und (3) zu überwinden.

2.4 Beweis der Theoreme

Dieses Kapitel widmet sich dem Beweis der beiden Theoreme. Zur besseren Übersicht sei zunächst kurz die Reihenfolge erläutert.

Im ersten Abschnitt 2.4.1 wird gezeigt, dass Theorem 2.2.2 eine direkte Folgerung aus Theorem 2.2.1(ii) darstellt. Anschließend wird in Abschnitt 2.4.2 Theorem 2.2.1(i) (d.h. die Gleichung (2.2.1)) bewiesen. Darauf folgend wird in Abschnitt 2.4.3 der Beweis der unteren Schranke (2.2.5) von Theorem 2.2.1(ii) geführt.
Der mit Abstand aufwendigste Beweis ist der Nachweis der oberen Schranke (2.2.6) von Theorem 2.2.1(ii). Um diesem Faktum Rechnung zu tragen sei der Beweis in einem extra Abschnitt 2.5 geführt.

Bemerkung 2.4.1 (Beweisstrategie der oberen Schranke).
Der schwierigste Abschnitt dieses Kapitels ist der Beweis der oberen Schranke (2.2.6) in Abschnitt 2.5. Dabei findet eine neue Strategie für den Beweis ihre Anwendung, die auf einer Formel für die gemeinsame Dichte der Lokalzeiten der (eingangs erwähnten) Marovkette beruht

(vgl. [BHK07]). Diese Markovkette ist in stetiger Zeit, jedoch in einem diskreten Raum definiert und deren Kern ist dabei eine explizite obere Schranke für diese Dichte. Aus dieser oberen Abschätzung kann in einem weiteren Schritt die obere Schranke im Prinzip großer Abweichungen (im Donsker-Varadhan Sinn) für die Lokalzeiten gefolgert werden. Das Besondere bei dieser Vorgehensweise ist, dass keinerlei (gravierende) topologische Eigenschaften dafür notwendig sind. Auf diesem Wege erhält man eine diskrete, t-abhängige Variationsformel und die Hauptaufgabe besteht nun darin, deren asymptotisches Verhalten für $t \to \infty$ zu bestimmen. Dieses erfolgt mit Hilfe der sogenannten Γ-Konvergenz. Ein Beispiel für diese Technik findet sich in [HKM06, Section 5]. ◇

2.4.1 Beweis von Theorem 2.2.2

Der Beweis von Theorem 2.2.2 erfolgt in zwei Teilen. Aus Gründen der Übersicht wurden diese separat in zwei Lemmas formuliert.

Lemma 2.4.2. *Obere Schranke*
Unter den Voraussetzungen von Theorem 2.2.2 gilt für $t \to \infty$:

$$\frac{1}{t}\log \mathbb{P}\left(\left\|\ell_t/t\right\|_p \geq r_t\right) \leq -\chi_{d,p} r_t^{\frac{2p}{d(p-1)}}$$

Beweis.
Zum Beweis der oberen Schranke sei an die Definition von $\lambda := \frac{2p+d-dp}{2p}$ erinnert. Es sei nun θ_t wiefolgt definiert:

$$\theta_t := \left(\frac{r_t\lambda}{\rho^{(c)}_{p,d}(1)}\right)^{\frac{\lambda}{1-\lambda}} \iff r_t = \frac{1}{\lambda}\theta_t^{\frac{d(p-1)}{2p\lambda}}\rho^{(c)}_{p,d}(1) \tag{2.4.1}$$

Die Voraussetzungen an r_t aus Theorem 2.2.2 führt mit Hilfe dieser Definition nun zu folgender Bedingung an θ_t:

$$\left(\frac{\log t}{t}\right)^{\frac{d(p-1)}{p(d+2)}} \ll r_t \ll 1 \qquad \text{as} \qquad t \to \infty$$

$$\left(\frac{\log t}{t}\right)^{\frac{d(p-1)}{p(d+2)}} \ll \frac{1}{\lambda}\theta_t^{\frac{d(p-1)}{2p\lambda}}\rho^{(c)}_{p,d}(1) \ll 1 \qquad \text{as} \qquad t \to \infty$$

$$\left(\frac{\log t}{t}\right)^{\frac{2p\lambda}{p(d+2)}} \ll \theta_t \ll 1 \qquad \text{as} \qquad t \to \infty$$

Damit ist also die Bedingung (2.2.3) aus Theorem 2.2.1(ii) erfüllt. Darüber hinaus kann die (exponentielle) Markov Ungleichung genutzt werden und man erhält:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t}\log \mathbb{P}\left(\left\|\ell_t/t\right\|_p \geq r_t\right) &= \frac{1}{t}\log \mathbb{P}\left(\|\ell_t\|_p \geq r_t t\right) \\
&= \frac{1}{t}\log \mathbb{P}\left(\mathrm{e}^{\theta_t\|\ell_t\|_p} \geq \mathrm{e}^{t r_t\theta_t}\right) \\
\text{Markov} \quad &\leq \frac{1}{t}\log\left[\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\theta_t\|\ell_t\|_p}\right)\mathrm{e}^{-t r_t\theta_t}\right] \\
&= \frac{1}{t}\log \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\theta_t\|\ell_t\|_p}\right) + \frac{1}{t}\log \mathrm{e}^{-t r_t\theta_t} \\
\text{Thm. 2.2.1(ii) für } t\to\infty \quad &\leq \theta_t^{1/\lambda}\left(\rho^{(c)}_{p,d}(1) + o(1)\right) - r_t\theta_t
\end{aligned}$$

Es sei auf die obige Definiton von θ_t (vgl.2.4.1) verwiesen und an Bemerkung 2.3.2 erinnert:

$$\rho^{(c)}_{p,d}(1) := \lambda \left(\frac{2p}{d(p-1)} \chi_{d,p} \right)^{\frac{\lambda-1}{\lambda}} .$$

Damit ergibt sich für die obere Schranke für $t \to \infty$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t} \log \mathbb{P}\left(\left\| \ell_t/t \right\|_p \geq r_t \right) &\leq \left(\frac{r_t \lambda}{\rho^{(c)}_{p,d}(1)} \right)^{\frac{1}{1-\lambda}} \rho^{(c)}_{p,d}(1) - r_t \left(\frac{r_t \lambda}{\rho^{(c)}_{p,d}(1)} \right)^{\frac{\lambda}{1-\lambda}} \\
&= r_t^{\frac{1}{1-\lambda}} \lambda^{\frac{1}{1-\lambda}} \rho^{(c)}_{p,d}(1)^{\frac{\lambda}{\lambda-1}} - r_t^{\frac{1}{1-\lambda}} \lambda^{\frac{\lambda}{1-\lambda}} \rho^{(c)}_{p,d}(1)^{\frac{\lambda}{\lambda-1}} \\
&= r_t^{\frac{1}{1-\lambda}} \lambda^{\frac{\lambda}{\lambda-1}} \left(\frac{2p}{d(p-1)} \chi_{d,p} \right) \left(\lambda^{\frac{1}{1-\lambda}} - \lambda^{\frac{\lambda}{1-\lambda}} \right) \\
&= r_t^{\frac{2p}{d(p-1)}} \chi_{d,p} \left(\frac{2p}{d(p-1)} \right) (\lambda - 1) \\
&= r_t^{\frac{2p}{d(p-1)}} \chi_{d,p} \left(\frac{2p}{d(p-1)} \right) \frac{d(1-p)}{2p} \\
&= -\chi_{d,p} r_t^{\frac{2p}{d(p-1)}}
\end{aligned}$$

Damit ist der Beweis der oberen Schranke beendet. □

Die untere Schranke erhält man ohne größere Probleme durch eine exponentielle Maßtransformation, ähnlich wie im Beweis des Gärtner-Ellis Theorems. Entscheidend dabei ist, dass im Grenzwert die logarithmische momentenerzeugende Funktion von $\theta_t \|\ell_t\|_p$ über den gesamten Bereich von $(0, \infty)$ differenzierbar ist (wie man in (2.2.5) und (2.2.6) leicht erkennen kann).

Lemma 2.4.3. *Untere Schranke*
Unter den Voraussetzungen von Theorem 2.2.2 gilt für $t \to \infty$:

$$\frac{1}{t} \log \mathbb{P}\left(\left\| \ell_t/t \right\|_p \geq r_t \right) \geq -\chi_{d,p} r_t^{\frac{2p}{d(p-1)}}$$

Beweis.
Zunächst seien die folgenden Umformungen betrachtet. Für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t} \log \mathbb{P}\left(\left\| \ell_t/t \right\|_p \geq r_t \right) &= \frac{1}{t} \log \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{\|\ell_t\|_p \geq t r_t\}} \right] \\
&\geq \frac{1}{t} \log \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{t r_t \leq \|\ell_t\|_p \leq (1+\varepsilon) t r_t\}} \right] \\
&= \frac{1}{t} \log \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{t r_t \leq \|\ell_t\|_p \leq (1+\varepsilon) t r_t\}} \mathrm{e}^{\theta_t \|\ell_t\|_p} \mathrm{e}^{-\theta_t \|\ell_t\|_p} \right] \\
&\geq \frac{1}{t} \log \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{t r_t \leq \|\ell_t\|_p \leq (1+\varepsilon) t r_t\}} \mathrm{e}^{\theta_t \|\ell_t\|_p} \right] \mathrm{e}^{-\theta_t (1+\varepsilon) t r_t}
\end{aligned} \tag{2.4.2}$$

An dieser Stelle folgt nun die bereits angekündigte exponentielle Maßtransformation. Das (transformierte) Maß $\hat{\mathbb{P}}$ sei mit Hilfe der Radon-Nikodym Dichte wiefolgt definiert. $\mathbb{P}$ bezeichne dabei die Wahrscheinlichkeit bzgl. der Zufallsgröße $\|\ell_t\|_p$:

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbb{P}}}{\mathrm{d}\mathbb{P}} := \frac{\mathrm{e}^{\theta_t \|\ell_t\|_p}}{\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{\theta_t \|\ell_t\|_p} \right]} \tag{2.4.3}$$

Es ist klar, dass $\hat{\mathbb{P}}$ wiederum ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist:

$$\int_R \mathrm{d}\hat{\mathbb{P}} = \frac{\int_R \mathrm{e}^{\theta_t \|\ell_t\|_p} \mathrm{d}\mathbb{P}}{\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{\theta_t \|\ell_t\|_p}\right]} = 1 \tag{2.4.4}$$

Damit ergeben sich in 2.4.2 folgende Umformungen:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t}\log \mathbb{P}\left(\left\|\ell_t/t\right\|_p \geq r_t\right) &\geq \frac{1}{t}\log\left\{\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{tr_t \leq \|\ell_t\|_p \leq (1+\varepsilon)tr_t\}} \mathrm{e}^{\theta_t\|\ell_t\|_p} \mathrm{d}\mathbb{P}\ \mathrm{e}^{-\theta_t(1+\varepsilon)tr_t}\right\} \\
&= \frac{1}{t}\log\left\{\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{tr_t \leq \|\ell_t\|_p \leq (1+\varepsilon)tr_t\}} \mathrm{d}\hat{\mathbb{P}}\ \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{\theta_t\|\ell_t\|_p}\right] \mathrm{e}^{-\theta_t(1+\varepsilon)tr_t}\right\} \\
&= \frac{1}{t}\log\left\{\hat{\mathbb{P}}\left(1 \leq \frac{\|\ell_t\|_p}{tr_t} \leq (1+\varepsilon)\right) \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{\theta_t\|\ell_t\|_p}\right] \mathrm{e}^{-\theta_t(1+\varepsilon)tr_t}\right\} \\
&= \frac{1}{t}\log\hat{\mathbb{P}}\left(1 \leq \frac{\|\ell_t\|_p}{tr_t} \leq (1+\varepsilon)\right) + \frac{1}{t}\log\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{\theta_t\|\ell_t\|_p}\right] - \theta_t(1+\varepsilon)r_t
\end{aligned} \tag{2.4.5}$$

Es folgt die Fortsetzung der Untersuchung von Gleichung (2.4.5), indem zunächst der erste Term weiter umgeformt wird. Es wird sich herausstellen, dass dieser keinen substanziellen Beitrag leistet und für $t \to \infty$ hinreichend schnell gegen Null konvergiert. Man beachte, dass bei den folgenden Umformungen zunächst das Gegenereignis betrachtet und nach oben abgeschätzt wird, damit eine untere Schranke für den Ausgangsterm hergeleitet werden kann:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbb{P}}\left(\frac{\|\ell_t\|_p}{tr_t} > (1+\varepsilon)\right) &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{\|\ell_t\|_p > (1+\varepsilon)tr_t\}} \mathrm{d}\hat{\mathbb{P}} \\
&= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{\|\ell_t\|_p > (1+\varepsilon)tr_t\}} \mathrm{e}^{\theta_t\|\ell_t\|_p} \mathrm{d}\mathbb{P}\ \frac{1}{\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{\theta_t\|\ell_t\|_p}\right]} \\
{\scriptstyle \forall\gamma>0} &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{\gamma\|\ell_t\|_p > \gamma(1+\varepsilon)tr_t\}} \mathrm{e}^{(\theta_t+\gamma)\|\ell_t\|_p} \mathrm{e}^{-\gamma\|\ell_t\|_p} \mathrm{d}\mathbb{P}\ \frac{1}{\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{\theta_t\|\ell_t\|_p}\right]} \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\gamma\|\ell_t\|_p - \gamma(1+\varepsilon)tr_t} \mathrm{e}^{(\theta_t+\gamma)\|\ell_t\|_p} \mathrm{e}^{-\gamma\|\ell_t\|_p} \mathrm{d}\mathbb{P}\ \frac{1}{\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{\theta_t\|\ell_t\|_p}\right]} \\
&= \mathrm{e}^{-\gamma(1+\varepsilon)tr_t} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{(\theta_t+\gamma)\|\ell_t\|_p} \mathrm{d}\mathbb{P}\ \frac{1}{\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{\theta_t\|\ell_t\|_p}\right]} \\
&= \mathrm{e}^{-\gamma(1+\varepsilon)tr_t} \frac{\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{(\theta_t+\gamma)\|\ell_t\|_p}\right]}{\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{\theta_t\|\ell_t\|_p}\right]}
\end{aligned}$$

An dieser Stelle wende man Theorem 2.2.1(ii) an. Man beachte, dass dabei auch die stärkeren Einschränkungen hinsichtlich der oberen Schranke benötigt werden. Man erhält damit für alle $\varepsilon, \gamma > 0$ für $t \to \infty$:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbb{P}}\left(\frac{\|\ell_t\|_p}{tr_t} > (1+\varepsilon)\right) &= \mathrm{e}^{-\gamma(1+\varepsilon)tr_t} \frac{\mathrm{e}^{t(\theta_t+\gamma)^{1/\lambda}(\rho_{p,d}^{(\mathrm{c})}(1)+o(1))}}{\mathrm{e}^{t\theta_t^{1/\lambda}(\rho_{p,d}^{(\mathrm{c})}(1)+o(1))}} \\
&= \mathrm{e}^{-\gamma(1+\varepsilon)tr_t} \mathrm{e}^{t(\rho_{p,d}^{(\mathrm{c})}(1)+o(1))\left[(\theta_t+\gamma)^{1/\lambda}-\theta_t^{1/\lambda}\right]}
\end{aligned} \tag{2.4.6}$$

Im Hinblick auf den Term $(\theta_t+\gamma)^{1/\lambda} - \theta_t^{1/\lambda}$ betrachte man die Taylorentwicklung von $f(\gamma) :=$

$\lambda(\theta_t+\gamma)^{1/\lambda}$ an der Stelle Null. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} f(\gamma) &= \lambda\left[\theta_t^{1/\lambda} + \frac{\gamma}{\lambda}\theta_t^{1/\lambda-1} + o(\gamma^2)\right] \\ \Rightarrow \lambda\left[(\theta_t+\gamma)^{1/\lambda} - \theta_t^{1/\lambda}\right] &= \gamma\theta_t^{1/\lambda-1} + o(\gamma^2) \end{aligned}$$

Dies ermöglicht folgende Umformungen in Gleichung (2.4.6):

$$\begin{aligned} \hat{\mathbb{P}}\left(\frac{\|\ell_t\|_p}{tr_t} > (1+\varepsilon)\right) &= \mathrm{e}^{-\gamma(1+\varepsilon)tr_t}\mathrm{e}^{t\left(\rho_{p,d}^{(\mathrm{c})}(1)+o(1)\right)\left[\gamma\theta_t^{1/\lambda-1}+o(\gamma^2)\right]\lambda^{-1}} \\ &= \exp\left\{-\gamma(1+\varepsilon)tr_t + t\left(\rho_{p,d}^{(\mathrm{c})}(1)+o(1)\right)\left[\gamma\theta_t^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} + o(\gamma^2)\right]\lambda^{-1}\right\} \\ \text{Definition von } \theta_t &= \exp\left\{-\gamma(1+\varepsilon)tr_t + t\left(\rho_{p,d}^{(\mathrm{c})}(1)+o(1)\right)\left[\frac{\gamma r_t\lambda}{\rho_{p,d}^{(\mathrm{c})}(1)} + o(\gamma^2)\right]\lambda^{-1}\right\} \\ &= \exp\left\{-\gamma tr_t\left[(1+\varepsilon) - \left(\rho_{p,d}^{(\mathrm{c})}(1)+o(1)\right)\left[\frac{1}{\rho_{p,d}^{(\mathrm{c})}(1)} + \frac{o(\gamma^2)}{\gamma\lambda r_t}\right]\right]\right\} \end{aligned}$$

Damit ist also der exponentielle Abfall der Wahrscheinlichkeit $\hat{\mathbb{P}}\left(\frac{\|\ell_t\|_p}{tr_t} > (1+\varepsilon)\right)$ gegen Null auf der Skala tr_t nachgewiesen. In vollkommen analoger Weise erhält man dasselbe Resultat für die Wahrscheinlicheit $\hat{\mathbb{P}}\left(\frac{\|\ell_t\|_p}{tr_t} > 1\right)$. Daraus folgt nun insbesondere, dass die Wahrscheinlichkeit von $\hat{\mathbb{P}}\left(1 \le \frac{\|\ell_t\|_p}{tr_t} \le (1+\varepsilon)\right)$ gegen 1 strebt. Man nutze nun die sich aus der Taylorentwicklung ergebende bekannte Näherung $\log(1+x) = x+o(x^2)$ und erhalte für den ersten Term in Gleichung (2.4.5):

$$\begin{aligned} \frac{1}{t}\log\hat{\mathbb{P}}\left(1 \le \frac{\|\ell_t\|_p}{tr_t} \le (1+\varepsilon)\right) &\ge \frac{1}{t}\log\left\{1 - \hat{\mathbb{P}}\left(\frac{\|\ell_t\|_p}{tr_t} > (1+\varepsilon)\right) - \hat{\mathbb{P}}\left(\frac{\|\ell_t\|_p}{tr_t} >\right)\right\} \\ &= \frac{1}{t}\log\left[1 - \exp\{-\gamma tr_t c_1\} - \exp\{-\gamma tr_t c_2\}\right] \\ {\scriptstyle tr_t\to\infty \text{ für } t\to\infty} &\ge -\frac{1}{t}\mathrm{e}^{-tr_t\gamma\min(c_1,c_2)} \quad \text{für } t\to\infty. \end{aligned}$$

Damit kann der verbleibende Term von Gleichung (2.4.5) weiter umgeformt werden. Man erhält für $t \to \infty$:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{t}\log\mathbb{P}\left(\left\|\ell_t/t\right\|_p \geq r_t\right) &\geq -\frac{1}{t}\mathrm{e}^{-tr_tc} + \frac{1}{t}\log\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{\theta_t\|\ell_t\|_p}\right] - \theta_t(1+\varepsilon)r_t \\
\text{Theorem 2.2.1(ii) für } t\to\infty \quad &= \theta_t^{1/\lambda}\left(\rho^{(\mathrm{c})}_{p,d}(1) + o(1)\right) - \theta_t(1+\varepsilon)r_t \\
\text{Definition von } \theta_t \quad &= \left(\frac{r_t\lambda}{\rho^{(\mathrm{c})}_{p,d}(1)}\right)^{\frac{1}{1-\lambda}}\left(\rho^{(\mathrm{c})}_{p,d}(1) + o(1)\right) - \left(\frac{r_t\lambda}{\rho^{(\mathrm{c})}_{p,d}(1)}\right)^{\frac{\lambda}{1-\lambda}}(1+\varepsilon)r_t \\
&= \left(\rho^{(\mathrm{c})}_{p,d}(1)\right)^{\frac{\lambda}{\lambda-1}} r_t^{\frac{1}{1-\lambda}}\lambda^{\frac{1}{1-\lambda}}\left(1 + \frac{o(1)}{\rho^{(\mathrm{c})}_{p,d}(1)}\right) - \left(\rho^{(\mathrm{c})}_{p,d}(1)\right)^{\frac{\lambda}{\lambda-1}} r_t^{\frac{1}{1-\lambda}}\lambda^{\frac{\lambda}{1-\lambda}}(1+\varepsilon) \\
&= \left(\rho^{(\mathrm{c})}_{p,d}(1)\right)^{\frac{\lambda}{\lambda-1}} r_t^{\frac{1}{1-\lambda}}\left[\lambda^{\frac{1}{1-\lambda}}\left(1+o(1)\right) - \lambda^{\frac{\lambda}{1-\lambda}}(1+\varepsilon)\right] \\
\text{Definition von } \rho^{(\mathrm{c})}_{p,d}(1) \quad &= \lambda^{\frac{\lambda}{\lambda-1}}\frac{2p}{d(p-1)}\chi_{d,p}r_t^{\frac{1}{1-\lambda}}\left[\lambda^{\frac{1}{1-\lambda}}\left(1+o(1)\right) - \lambda^{\frac{\lambda}{1-\lambda}}(1+\varepsilon)\right] \\
&= \chi_{d,p}r_t^{\frac{2p}{d(p-1)}}\frac{2p}{d(p-1)}\left[\lambda\left(1+o(1)\right) - 1(1+\varepsilon)\right]
\end{aligned}
$$

Für $\varepsilon \to 0$ und wegen $\lambda - 1 = d(1-p)/2p$ gilt im Limes für $t \to \infty$ nun:

$$
\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\mathbb{P}\left(\left\|\ell_t/t\right\|_p \geq r_t\right) = -\chi_{d,p}r_t^{\frac{2p}{d(p-1)}}
$$

Damit ist auch der Beweis der unteren Schranke beendet. □

Bemerkung 2.4.4.
Aus Theorem 2.2.1(i) kann leider nicht abgeleitet werden, ob $\|\ell_t\|_p/t$ ein Prinzip großer Abweichungen erfüllt oder nicht. An dieser Stelle ist unbekannt, ob die Funktion $\theta \mapsto \rho^{(\mathrm{d})}_{d,p}(\theta)$ differenzierbar ist, da die Funktion $\mu \mapsto \theta\|\mu\|_p - J(\mu)$ als Differenz zweier konvexer Funktionen nicht notwendigerweise streng konvex sein muss. Die führt unter anderem dazu, dass nicht gefolgert werden kann, ob der entsprechende Maximierer eindeutig ist oder nicht. ◇

2.4.2 Beweis von (2.2.1)

Der Nachweis von 2.2.1 erfolgt im Wesentlichen analog dem Beweis von [GM98, Theorem 1.2]. Der Beweis wird dabei in 3 Schritten geführt, die aus Gründen der Übersichtlichkeit in einzelne Lemmas verpackt wurden.

Lemma 2.4.5.
Unter den Voraussetzungen von Theorem 2.2.1(i) gilt für alle $R > 0$:

$$
\sup_{\mu\in\mathcal{M}_1(Q_R)}\left(\theta\|\mu\|_p - J(\mu)\right) \leq \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\theta\|\ell_t\|_p}\right) \leq \sup_{\mu\in\mathcal{M}_1(Q_R)}\left(\theta\|\mu\|_p - J_{R,\mathrm{per}}(\mu)\right)
$$

Dabei bezeichne $J_{R,\mathrm{per}}$ das Donsker-Varadhan Funktional mit periodischen Randbedingungen, d.h. wenn $\sim'$ die periodisierte Version von $\sim$ bezeichnet, dann gilt:

$$
J_{R,\mathrm{per}} = \frac{1}{2}\sum_{x\sim' y}\left(\sqrt{\mu(x)} - \sqrt{\mu(y)}\right)^2 \tag{2.4.7}
$$

Beweis.
Zunächst betrachte man die untere Schranke. Es bezeichne Q_R die Box $[-R,R]^d \cap \mathbb{Z}^d$ und im folgenden Schritt sei der Indikator bzgl. des Ereignisses $\{\mathrm{supp}\,(\ell_t) \subset Q_R\}$ eingeführt. Trivialerweise gilt nun für alle $\theta > 0$, dass

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\theta\|\ell_t\|_p}\right) \geq \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\theta t\|\ell_t/t\|_p}\mathbb{1}_{\{\mathrm{supp}\,(\ell_t)\subset Q_R\}}\right).$$

Es sei an dieser Stelle bemerkt, dass das Funktional $\mu \mapsto \|\mu\|_p$ stetig und beschränkt auf der Menge $\mathcal{M}_1(Q_R)$ aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf Q_R operiert. Darüber hinaus ist bekannt, dass die Verteilung von ℓ_t/t bezüglich des Sub-Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbb{P}(\cdot, \mathrm{supp}\,(\ell_t) \subset Q_R)$ ein Prinzip großer Abweichungen erfüllt. Genauergesagt ein Prinzip großer Abweichungen auf der Skala t und mit einer Ratenfunktion, die der Einschränkung von J (siehe Theorem 2.2.1(i)) auf die Menge $\mathcal{M}_1(Q_R)$ entspricht. Daher führt Varadhans Lemma (siehe [DZ98, Lemma 4.3.4]) zu:

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\theta\|\ell_t\|_p}\right) \geq \sup_{\mu\in\mathcal{M}_1(Q_R)}\big(\theta\|\mu\|_p - J(\mu)\big). \tag{2.4.8}$$

Es verbleibt der Nachweis der oberen Schranke. Dazu sei hier die periodisierte Version der Lokalzeiten auf Q_R genutzt. (Mit anderen Worten, die Irrfahrt wird in die Box Q_R hineingefaltet),

$$\ell_t^{(R)}(z) = \sum_{x\in\mathbb{Z}^d}\ell_t(z+Rx), \qquad t\in(0,\infty), R\in\mathbb{N}, z\in\mathbb{Z}^d. \tag{2.4.9}$$

Man erkennt nun, dass $\|\ell_t\|_p \leq \|\ell_t^{(R)}\|_{p,R}$ gilt. Daher gilt auch für alle $\theta \in (0,\infty)$, dass

$$\mathbb{E}\big(\mathrm{e}^{\theta\|\ell_t\|_p}\big) \leq \mathbb{E}\big(\mathrm{e}^{\theta\|\ell_t^{(R)}\|_{p,R}}\big) = \mathbb{E}\big(\mathrm{e}^{\theta t\|\ell_t^{(R)}/t\|_{p,R}}\big).$$

Es ist klar, dass $(\ell_t^{(R)}/t)_{t>0}$ ein Prinzip großer Abweichungen auf der Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf Q_R erfüllt. Die zugehörige Ratenfunktion $\mu \mapsto J_{R,\mathrm{per}}(\mu)$ ist dabei gleich der Dirichletform für $\sqrt{\mu}$ bzgl. $-\frac{1}{2}\Delta$ in Q_R mit periodischen Randbedingungen. Wegen der Stetigkeit und der Beschränkheit der Funktion $\mu \mapsto \|\mu\|_p$, erhält man durch Anwendung von Varadhans Lemma, dass

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\theta\|\ell_t\|_p}\right) \leq \sup_{\mu\in\mathcal{M}_1(Q_R)}\big(\theta\|\mu\|_p - J_{R,\mathrm{per}}(\mu)\big). \tag{2.4.10}$$

Damit ist der Beweis des ersten Lemma beendet. □

Im zweiten Lemma wird der (bereits ersichtliche) Zusammenhang zur Variationsformel $\rho_{d,p}^{(\mathrm{d})}(\theta)$ aus Theorem2.2.1(i) hergestellt. Dazu sei an folgende Definition erinnert:

$$\rho_{d,p}^{(\mathrm{d})}(\theta) = \sup\left\{\theta\|\mu\|_p - J(\mu) \colon \mu\in\mathcal{M}_1(\mathbb{Z}^d)\right\},$$

Das dazugehörige Lemma lautet wiefolgt:

Lemma 2.4.6.
Unter den Voraussetzungen von Theorem 2.2.1(i) gilt für alle $R > 0$:

$$\sup_{\mu\in\mathcal{M}_1(Q_R)}\big(\theta\|\mu\|_p - J(\mu)\big) \leq \rho_{d,p}^{(\mathrm{d})}(\theta) \leq \sup_{\mu\in\mathcal{M}_1(Q_R)}\big(\theta\|\mu\|_p - J_{R,\mathrm{per}}(\mu)\big)$$

Beweis.
Dieser Beweis erfolgt analog dem Beweis von [GM98, Lemma 1.10]. Wegen $\mathcal{M}_1(Q_R) \subset \mathcal{M}_1(\mathbb{Z}^d)$ ist die erste (linke) Ungleichung offensichtlich.
Für die zweite (rechte) Ungleichung betrachte man zu jedem $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{Z}^d)$ dessen auf Q_R periodisierte Version

$$\mu_R(z) := \sum_{x \in (2R+1)\mathbb{Z}^d} \mu\left(z + (2R+1)x\right)$$

Es reicht nun aus zu zeigen, dass

$$\|\mu\|_p \leq \|\mu_R\|_p \quad \text{und} \quad -J(\mu) \leq -J_{R,\mathrm{per}}(\mu_R)$$

Mit Hilfe der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung erhält man folgende Umformungen:

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{\mu_R(y)} - \sqrt{\mu_R(z)}\right)^2 &= \sum_{x \in (2R+1)\mathbb{Z}^d} \mu(y + (2R+1)z) + \sum_{x \in (2R+1)\mathbb{Z}^d} \mu(z + (2R+1)z) \\
&\quad - 2\sqrt{\left(\sum_{x \in (2R+1)\mathbb{Z}^d} \mu(y + (2R+1)x)\right)\left(\sum_{x \in (2R+1)\mathbb{Z}^d} \mu(z + (2R+1)x)\right)} \\
&\overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \sum_{x \in (2R+1)\mathbb{Z}^d} \mu(y + (2R+1)z) + \sum_{x \in (2R+1)\mathbb{Z}^d} \mu(z + (2R+1)z) \\
&\quad - 2 \sum_{x \in (2R+1)\mathbb{Z}^d} \left(\sqrt{\mu(y + (2R+1)x)}\sqrt{\mu(z + (2R+1)x)}\right) \\
&= \sum_{x \in (2R+1)\mathbb{Z}^d} \left(\sqrt{\mu(y + (2R+1)x)} - \sqrt{\mu(z + (2R+1)x)}\right)^2
\end{aligned}$$

Man mache sich nun klar, dass für Paare (y, z) mit $y \sim' z$ entweder direkt $y \sim z$ gilt oder aber (im Falle der Randlage) $y \sim z \pm (2R+1)1_d$. Zusammengenommen folgt daraus, dass $-J(\mu) \leq -J_{R,\mathrm{per}}(\mu_R)$.
Für $p > 1$ und $x \geq 0$ ist $\mu(y)^p + \mu(z)^p \leq (\mu(y) + \mu(z))^p$, es gilt daher:

$$\begin{aligned}
\|\mu\|_p^p &= \sum_{y \in Q_R} \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \mu(y + (2R+1)x)^p \\
&\overset{\mu \geq 0,\ p>1}{\leq} \sum_{y \in Q_R} \left(\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \mu(y + (2R+1)x)\right)^p = \|\mu_R\|_p
\end{aligned}$$

Damit ist auch der Beweis des zweiten Lemmas beendet. □

Der dritte Teil des Beweises wird nun zeigen, dass die obere und die untere Schranke für $R \to \infty$ gegeneinander konvergieren.

Lemma 2.4.7.
Unter den Voraussetzungen von Theorem 2.2.1(i) gilt:

$$\lim_{R \to \infty} \sup_{\mu \in \mathcal{M}_1(Q_R)} \left(\theta\|\mu\|_p - J(\mu)\right) = \lim_{R \to \infty} \sup_{\mu \in \mathcal{M}_1(Q_R)} \left(\theta\|\mu\|_p - J_{R,\mathrm{per}}(\mu)\right)$$

Beweis.
Der Beweis folgt ebenfalls [GM98, Lemma 1.10]. Sei dazu $\left(\mu_{n,R}\right)_n$ eine Folge von Maßen auf Q_R mit:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\theta\|\mu_{n,R}\|_p - J_{R,\mathrm{per}}(\mu_{n,R})\right) = \sup_{\mu\in\mathcal{M}_1(Q_R)}\left(\theta\|\mu\|_p - J_{R,\mathrm{per}}(\mu)\right)$$

Aufgrund der periodischen Randbedingungen sind alle Maße auf Q_R shiftinvariant. Insbesondere kann man jedes der $\mu_{n,R}$ so verschieben, dass die Wahrscheinlichkeitsmasse am Rand (d.h. ∂Q_R) hinreichend klein ist. Hinreichend klein bedeutet dabei, dass $\mu_{n,R}(\partial Q_R) \leq \frac{|\partial Q_R|}{|Q_R|}$ gilt. O.B.d.A. sei also nun

$$\mu_{n,R}(\partial Q_R) \leq \frac{|\partial Q_R|}{|Q_R|} = \frac{2d(2R+1)^{d-1}}{(2R+1)^D} = \frac{2d}{2R+1} \tag{2.4.11}$$

Aufgrund des vorhergehenden Lemmas gilt nun

$$\begin{aligned}
0 &\leq \sup_{\mu\in\mathcal{M}_1(Q_R)}\left(\theta\|\mu\|_p - J_{R,\mathrm{per}}(\mu)\right) - \sup_{\mu\in\mathcal{M}_1(Q_R)}\left(\theta\|\mu\|_p - J(\mu)\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\theta\|\mu_{n,R}\|_p - J_{R,\mathrm{per}}(\mu_{n,R})\right] - \sup_{\mu\in\mathcal{M}_1(Q_R)}\left(\theta\|\mu\|_p - J(\mu)\right)\\
&\leq \lim_{n\to\infty}\left[\theta\|\mu_{n,R}\|_p - J_{R,\mathrm{per}}(\mu_{n,R}) - \theta\|\mu_{n,R}\|_p + J(\mu_n,R)\right]
\end{aligned}$$

An dieser Stelle erkennt man, dass lediglich der Term $J(\mu_n,R) - J_{R,\mathrm{per}}(\mu_{n,R})$ verbleibt. Es sei weiterhin an die Definition beider Donsker-Varadhan Funktionale erinnert, mit Hilfe derer leicht ersichtlich ist, dass sich sämtliche Paare $(x,y)\in Q_R^2$ mit $x\sim y$ zu Null addieren, da sie in beiden Funktionalen vorkommen. Es muss also lediglich der Rand untersucht werden. Genauergesagt; es müssen nur solche Paare untersucht werden, deren Nachbarschaftsverhältnis ausschließlich aufgrund der Periodisierung zustande kommt, d.h. Paare (x,y) mit $x\sim' y$ und $x\nsim y$. Für jedes derartiges Paar aus der periodisierten Version gibt es genau zwei Paare benachbarter Punkte $(x, y\pm(2R+1)1_{\mathbb{Z}^d})$ und $(x\mp(2R+1)1_{\mathbb{Z}^d}, y)$ in der Summe der nicht-periodisierten Variante. Jeweils genau eine der Koordinaten liegt dabei außerhalb von Q_R und hat damit das Maß Null. Damit verbleiben entsprechend zwei Terme $(\sqrt{\mu_{n,R}}(x)+0)^2$ und $(0+\sqrt{\mu_{n,R}}(y))^2$. Insgesamt ergibt sich daher:

$$\begin{aligned}
0 &\leq \sup_{\mu\in\mathcal{M}_1(Q_R)}\left(\theta\|\mu\|_p - J_{R,\mathrm{per}}(\mu)\right) - \sup_{\mu\in\mathcal{M}_1(Q_R)}\left(\theta\|\mu\|_p - J(\mu)\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left[-\tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{\substack{x\sim' y\\ x\nsim y}}\left(\sqrt{\mu_{n,R}(x)} - \sqrt{\mu_{n,R}(y)}\right)^2 + \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{\substack{x\sim' y\\ x\nsim y}}\left(\mu_{n,R}(x) - \mu_{n,R}(y)\right)\right]\\
&= \lim_{n\to\infty}\left[-\tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{\substack{x\sim' y\\ x\nsim y}}\left(-2\sqrt{\mu_{n,R}(x)}\sqrt{\mu_{n,R}(y)}\right)\right]\\
&\leq \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{\substack{x\sim' y\\ x\nsim y}}\left(\mu_{n,R}(x) + \mu_{n,R}(y)\right)\right]
\end{aligned}$$

In der letzten Zeile wurde dabei verwendet, dass $\sqrt{ab} \leq \sqrt{\max(a,b)^2} = \max(a,b) \leq a+b$ für $a,b\geq 0$ gilt.
Jeder Punkt $x\in\mathbb{Z}^d$ hat genau $2d$ Nachbarn, d.h. zu jedem $x\in Q_R$ kann es maximal $2d$

verschiedene $y \in Q_R$ geben mit $x \sim' y$. Es sei daran erinnert, dass die Wahrscheinlichkeitsmasse auf dem Rand der Box Q_R durch (2.4.11) beschränkt werden konnte und man erhält:

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \sup_{\mu\in\mathcal{M}_1(Q_R)} \big(\theta\|\mu\|_p - J_{R,\mathrm{per}}(\mu)\big) - \sup_{\mu\in\mathcal{M}_1(Q_R)} \big(\theta\|\mu\|_p - J(\mu)\big) \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \Big[\sum_{\substack{x\sim' y\\ x\nsim y}} \mu_{n,R}(x) + \sum_{\substack{x\sim' y\\ x\nsim y}} \mu_{n,R}(y)\Big] \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \big[2d\mu_{n,R}(\partial Q_R) + 2d\mu_{n,R}(\partial Q_R)\big] \\
&\overset{(2.4.11)}{\leq} \lim_{n\to\infty} \frac{8d^2}{2R+1} \\
&= \frac{8d^2}{2R+1}
\end{aligned}
\tag{2.4.12}
$$

Anhand dieser Ungleichung erkennt man die Gleichheit der beiden Variationsformeln im Limes für $R \to \infty$. Der Beweis dieses Lemmas ist damit beendet. □

Der eigentliche Beweis von Theorem 2.2.1(i) besteht nun darin, diese drei Lemmas der Reihe nach zu zitieren. Aus Lemma 2.4.6 und Lemma 2.4.7 folgt, dass:

$$
\lim_{R\to\infty} \sup_{\mu\in\mathcal{M}_1(Q_R)} \big(\theta\|\mu\|_p - J(\mu)\big) = \rho_{d,p}^{(\mathrm{d})}(\theta) = \lim_{R\to\infty} \sup_{\mu\in\mathcal{M}_1(Q_R)} \big(\theta\|\mu\|_p - J_{R,\mathrm{per}}(\mu)\big)
$$

Damit folgt mittels Lemma 2.4.5 nun:

$$
\begin{aligned}
\sup_{\mu\in\mathcal{M}_1(Q_R)} \big(\theta\|\mu\|_p - J(\mu)\big) &\leq \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\theta\|\ell_t\|_p}\right) \leq \sup_{\mu\in\mathcal{M}_1(Q_R)} \big(\theta\|\mu\|_p - J_{R,\mathrm{per}}(\mu)\big) \\
\lim_{R\to\infty} \sup_{\mu\in\mathcal{M}_1(Q_R)} \big(\theta\|\mu\|_p - J(\mu)\big) &\leq \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\theta\|\ell_t\|_p}\right) \leq \lim_{R\to\infty} \sup_{\mu\in\mathcal{M}_1(Q_R)} \big(\theta\|\mu\|_p - J_{R,\mathrm{per}}(\mu)\big) \\
\rho_{d,p}^{(\mathrm{d})}(\theta) &\leq \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\theta\|\ell_t\|_p}\right) \leq \rho_{d,p}^{(\mathrm{d})}(\theta)
\end{aligned}
$$

Damit ist der Beweis von Theorem 2.2.1(i) beendet.

2.4.3 Beweis der unteren Schranke (2.2.5)

Für den Beweis der unteren Schranke bezeichne $q > 1$ den zu p konjugierten Exponenten, d.h. es gelte $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Es sei nun f eine beliebige stetige und beschränkte Funktion $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ derart, dass $\|f\|_q = 1$ gilt. Aus der Ungleichung von Hölder folgt damit:

$$
\|L_t\|_p \geq \langle f, L_t\rangle := \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)L_t(x)|\mathrm{d}x.
$$

Es sei an den Zusammenhang von α_t und θ_t aus Abschnitt 2.3.3 erinnert: $\alpha_t = \theta_t^{-1/(2\lambda)}$. Darüber hinaus nutze man (2.3.11), und erhalte für alle $R > 0$ folgende untere Schranke

$$
\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\theta_t\|\ell_t\|_p}\right) = \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{t\alpha_t^{-2}\|L_t\|_p}\right) \geq \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{t\alpha_t^{-2}\langle f, L_t\rangle}\mathbb{1}_{\{\mathrm{supp}\,(L_t)\subset B_R\}}\right). \tag{2.4.13}
$$

Dabei sei B_R die reelle Box mit Radius $R > 0$, d.h. $B_R = [-R, R]^d$.
Man nutze nun [GKS07, Lemma 3.2] und folgere, dass die Verteilung von L_t unter dem Sub-Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}(\cdot\,, \operatorname{supp}(L_t) \subset B_R)$ für $t \to \infty$ auf der Menge aller Wahrscheinlichkeitsdichten auf $\mathbb{R}^d$ mit Träger B_R ein Prinzip großer Abweichungen erfüllt. Die Ratenfunktion dabei lautet folgendermaßen:

$$g^2 \mapsto \frac{1}{2}\|\nabla g\|_2^2, \qquad g \in H^1(\mathbb{R}^d), \|g\|_2 = 1, \operatorname{supp}(g) \subset B_R,$$

Für den Fall, dass die Funktion g keine Funktion aus $H^1(\mathbb{R}^d)$, nicht normiert oder ihr Träger nicht in B_R enthalten ist, sei der Wert der Ratenfunktion als $+\infty$ definiert. Die Geschwindigkeit ist gleich $t\alpha_t^{-2}$ und man stellt fest, dass dies mit der logarithmischen Skala aus (2.2.5) (d.h. mit $t\theta_t^{1/\lambda}$) übereinstimmt. Aufgrund der Tatsache, dass die Funktion $L_t \mapsto \langle f, L_t\rangle$ stetig ist, erhält man durch Anwendung des Lemmas von Varadhan aus diesem Prinzip großer Abweichungen folgende Abschätzung für die exponentiellen Momente:

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{\alpha_t^2}{t} \log \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\theta_t\|\ell_t\|_p}\right) \geq \sup_{\substack{g\in H^1(\mathbb{R}^d):\ \|g\|_2=1\\ \operatorname{supp}(g)\subset B_R}} \left(\langle f, g^2\rangle - \frac{1}{2}\|\nabla g\|_2^2\right).$$

Es ist bekannt, dass jede Funktion aus $L^2(\mathbb{R}^d) \cap H^1(\mathbb{R}^d)$ durch glatte Funktionen mit kompaktem Träger (also insbesondere Funktionen aus $L^{2p}(\mathbb{R}^d)$) approximierbar ist. (Dies geschieht beispielsweise durch das Einschränken der Ausgangsfunktion auf einen kompakten Träger $[-r, r]^d$ und anschließende Anwendung von sog. Glättungsoperatoren (*mollifiers*). Für $r \to \infty$ erhält man die gewünschte Folge, die ggf. noch normiert werden kann.) Daher kann o.B.d.A. das Supremum auf Funktionen $g \in L^{2p}(\mathbb{R}^d)$ eingeschränkt werden.
An dieser Stelle wähle man $f = g^{2p-2}\|g^2\|_p^{1-p}$. Es sei an $q = \frac{p}{p-1}$ erinnert und man mache sich klar, dass diese Wahl von f zulässig ist, da

$$\|f\|_q^q = \|g^{2p-2}\|_q^q * \|g^2\|_p^{q(1-p)} = \int_{\mathbb{R}^d} g^{2p}(x)\mathrm{d}x \|g^2\|_p^{-p} = \|g^2\|_p^p * \|g^2\|_p^{-p} = 1.$$

Als Folge dieser Wahl von f gilt:

$$\langle f, g^2\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{g^{2p-2}(x)}{\|g^2\|_p^{p-1}} g^2(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\|g^2\|_p^{p-1}} \int_{\mathbb{R}^d} g^{2p}(x)\mathrm{d}x = \frac{\|g^2\|_p^p}{\|g^2\|_p^{p-1}} = \|g^2\|_p$$

Damit folgt sofort, dass

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{\alpha_t^2}{t} \log \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\theta_t\|\ell_t\|_p}\right) \geq \sup_{\substack{g\in H^1(\mathbb{R}^d)\cap L^{2p}(\mathbb{R}^d):\ \|g\|_2=1\\ \operatorname{supp}(g)\subset B_R}} \left(\|g^2\|_p - \frac{1}{2}\|\nabla g\|_2^2\right)$$

Nun betrachte man den Limes für $R \to \infty$. Es sei wiederum das vormals erwähnte und bekannte Ergebnis zitiert, dass eine beliebige Funktion aus $H^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ durch glatte Funktionen mit kompaktem Träger approximierbar ist. Daher lässt sich jede Funktion $g \in H^1(\mathbb{R}^d)$ mit $\|g\|_2 = 1$ (welche damit auch in $L^2(\mathbb{R}^d)$ liegt) durch Funktionen aus obigem Supremum annähern. Man erhält damit:

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{\alpha_t^2}{t} \log \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\theta_t\|\ell_t\|_p}\right) \geq \sup_{g\in H^1(\mathbb{R}^d):\ \|g\|_2=1} \left(\|g^2\|_p - \frac{1}{2}\|\nabla g\|_2^2\right) = \rho_{d,p}^{(\mathrm{c})}(1)$$

Somit ist der Beweis der unteren Schranke an dieser Stelle beendet.

2.5 Beweis der oberen Schranke (2.2.6)

Es sei $\theta_t \in (0,\infty)$ derart gewählt, dass Bedingung (2.2.3) erfüllt ist. Man erinnere sich an die Definition von $\lambda = (2p - dp + d)/2p \in (0,1)$ und daran, dass $\alpha_t = \theta_t^{-1/(2\lambda)}$ gelten soll. Analog zum Beweis von (2.2.1) wird beim Beweis der oberen Schranke eine Abschätzung gegen die periodisierte Version der Irrfahrt genutzt. Jedoch ist es notwendig, die Größe der Box als t-abhängige Variable zu gestalten. Es sei deshalb $Q_{R\alpha_t} = [-R\alpha_t, R\alpha_t]^d \cap \mathbb{Z}^d$. Es sei daran erinnert, dass $\ell_t^{(R\alpha_t)}$ die periodisierte Version der Lokalzeiten bezeichnet (siehe dazu (2.4.9)) und man erhält somit:

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\theta_t \|\ell_t\|_p}\right) \le \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\theta_t \|\ell_t^{(R\alpha_t)}\|_{p,R\alpha_t}}\right) = \mathbb{E}\left(\exp\left\{t\alpha_t^{-2\lambda}\left\|\tfrac{1}{t}\ell_t^{(R\alpha_t)}\right\|_{p,R\alpha_t}\right\}\right). \tag{2.5.1}$$

Der Generator $A_{R\alpha_t}$ der Lokalzeit $\ell_t^{(R\alpha_t)}$ auf der Box $Q_{R\alpha_t}$ ist definitionsgemäß gleich $\frac{1}{2}$ des Laplaceoperators in $Q_{R\alpha_t}$ (mit periodischen Randbedingungen!).

Nun soll eine relativ neue Methode zum Beweis der obere Schranke für die großen Abweichungen angewendet werden. Das Besondere an dieser Methode ist, dass keinerlei Anforderungen hinsichtlich Stetigkeit und Beschränktheit notwendig sind. Die Grundlagen für diese Methode wurden in [BHK07] gelegt und deren Anwendung erfolgte zuerst in [BHK07, Theorem 3.7] und [HKM06, Section 5]. Der Dreh- und Angelpunkt dabei ist, die gemeinsame Dichte der Lokalzeit $\ell_t^{(R\alpha_t)}$ zu berechnen und eine explizite obere Schranke dafür anzugeben. Durch diese Vorgehensweise ist weder Stetigkeit noch Beschränktheit erforderlich. Dies stellt eine fundamentale Verbesserung im Vergleich zu herkömmlichen Beweistechniken für große Abweichungen dar. Die erwähnte obere Schranke erhält dadurch die Form einer Variationsformel, wobei zusätzlich ein paar Fehlerterme auftauchen, welche wiederum von der Größe der Box abhängen. An dieser Stelle sei bemerkt, dass genau diese Fehlerterme verantwortlich für die (untere) Beschränkung von θ_t in (2.2.3) sind. Die Hauptaufgabe nach Herleitung der eben genannten oberen Schranke wird sein, das asymptotische Verhalen (für $t \to \infty$) dieser (diskreten) Variationsformel zu bestimmen. Man wird an späterer Stelle erkennen, dass dazu Techniken der sogenannten Gamma-Konvergenz nötig sein werden.

Zunächst sei jedoch [BHK07, Theorem 3.6] angewendet und man erhält für alle $t \ge 1$:

$$\begin{aligned}\log\mathbb{E}\left(\exp\left\{t\alpha_t^{-2\lambda}\left\|\tfrac{1}{t}\ell_t^{(R\alpha_t)}\right\|_{p,R\alpha_t}\right\}\right) \le t \sup_{\mu\in\mathcal{M}_1(Q_{R\alpha_t})}&\left[\alpha_t^{-2\lambda}\|\mu\|_p - \|\left(-A_{R\alpha_t}\right)^{1/2}\sqrt{\mu}\|_2^2\right]\\ &+ |Q_{R\alpha_t}|\log\left(2d\sqrt{8\mathrm{e}}\,t\right) + \log|Q_{R\alpha_t}| + \frac{|Q_{R\alpha_t}|}{4t}\end{aligned} \tag{2.5.2}$$

Es sei bemerkt, dass $\eta_{Q_{R\alpha_t}}$ aus [BHK07, (3.2)] im vorliegenden Fall gleich $2d$ ist.

Zunächst soll gezeigt werden, dass die (Fehler-)Terme in der zweiten Zeile der rechten Seite asymptotisch vernachlässigbar sind, wenn man sich auf der Skala $t/\alpha_t^2 = t\theta_t^{1/\lambda}$ befindet. Genauergesagt sind diese Terme von Ordnung $\alpha_t^d \log t$ und man sieht, dass

$$\alpha_t^d \log t = \frac{t}{\alpha_t^2}\alpha_t^{d+2}\frac{\log t}{t} = \frac{t}{\alpha_t^2}\theta_t^{-\frac{d+2}{2\lambda}}\frac{\log t}{t} \ll \frac{t}{\alpha_t^2}. \tag{2.5.3}$$

Die letzte Abschätzung ist dabei nur durch die Verwendung der unteren Schranke aus (2.2.3) möglich.

Wenn dies nun in (2.5.1) bzw. (2.5.2) substituiert wird erhält man:

$$\frac{1}{t}\log \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\theta_t\|\ell_t\|_p}\right) \leq \sup_{\mu\in\mathcal{M}_1(Q_{R\alpha_t})}\left[\alpha_t^{-2\lambda}\|\mu\|_p - \|\,(-A_{R\alpha_t})^{1/2}\sqrt{\mu}\|_2^2\right] + o\left(\alpha_t^{-2}\right)$$

Daher ist klar, dass der Beweis der oberen Schranke (2.2.6) beendet ist, sobald dass folgende Lemma bewiesen wurde.

Lemma 2.5.1.
Unter den bisherigen Voraussetzungen und mit den eingeführten Bezeichnern gilt:

$$\limsup_{R\to\infty}\limsup_{t\to\infty}\alpha_t^2 \sup_{\mu\in\mathcal{M}_1(Q_{R\alpha_t})}\left[\alpha_t^{-2\lambda}\|\mu\|_p - \left\|\,(-A_{R\alpha_t})^{1/2}\sqrt{\mu}\right\|_2^2\right] \leq \rho_{p,d}^{(\mathrm{c})}(1). \tag{2.5.4}$$

Beweis.
Im Folgenden wird analog der Methode im Beweis von [HKM06, Prop. 5.1] vorgegangen. Zunächst seien $R_n\to\infty$, $t_n\to\infty$ und $\mu_n\in\mathcal{M}_1(B_{R_n\alpha_{t_n}})$ Folgen mit

$$\text{L.S. von (2.5.4)} \leq \alpha_{t_n}^{d(p-1)/p}\|\mu_n\|_p - \alpha_{t_n}^2\left\|\left(-A_{R_n\alpha_{t_n}}\right)^{1/2}\sqrt{\mu_n}\right\|_2^2 + \tfrac{1}{n}, \qquad n\in\mathbb{N}. \tag{2.5.5}$$

O.B.d.A. kann angenommen werden, dass μ_n ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{Z}^d$ mit Träger in $B_{R_n\alpha_{t_n}}$ ist. Ausgehend von $(\mu_n)_n$ wird nun eine Folge $(h_n)_n$ aus $H^1(\mathbb{R}^d)$ derart konstruiert, so dass:

(i) h_n L^2-normiert ist (d.h. $\|h_n\|_2 = 1$),

(ii) der Term $\alpha_{t_n}^2\|(-A_{R_n\alpha_{t_n}})^{1/2}\sqrt{\mu_n}\|_2^2$ näherungsweise der Energie, $\frac{1}{2}\|\nabla h_n\|_2^2$ entspricht und

(iii) der Ausdruck $\alpha_{t_n}^{d(p-1)/p}\|\mu_n\|_p$ näherungsweise gleich $\|h_n^2\|_p$ ist.

Nach der Konstruktion einer solchen Folge, ist der Beweis nahezu beendet.

Um derartige Funktionen h_n zu konstruieren bediene man sich der Methoden aus der Theorie der finiten Elemente (siehe [B07] für weitere Informationen). Zunächst werde eine Zerlegung des $\mathbb{R}^d$ entlang des Gitters der ganzen Zahlen in halboffene Einheitswürfel $C(k) = \times_{i=1}^d(k_i, k_i+1]$ mit $k = (k_1,\ldots,k_d)\in\mathbb{Z}^d$ betrachtet. Jeder dieser Einheitswürfel wird weiter in $d!$ d-dimensionale „Tetraeder“ zerlegt. Dies geschehe auf folgende Weise; Für jedes $\sigma\in\mathfrak{S}_d$ (der Menge aller Permutationen von $1,\ldots,d$) bezeichne $T_\sigma(k)$ den Schnitt von $C(k)$ mit der konvexen Hülle, die durch $k, k+\mathrm{e}_{\sigma(1)},\ldots,k+\mathrm{e}_{\sigma(1)}+\ldots+\mathrm{e}_{\sigma(d)}$ erzeugt wird. Dabei bezeichne e_i den i-ten Einheitsvektor aus $\mathbb{R}^d$. Mit Ausnahme des Randes sind diese Tetraeder $T_\sigma(k)$ (mit $\sigma\in\mathfrak{S}_d$) paarweise disjunkt. Darüber hinaus erkennt man leicht, dass für $x\in C(k)$ gilt:

$$x\in T_\sigma(k) \qquad\Longleftrightarrow\qquad x_{\sigma(1)}-\lfloor x_{\sigma(1)}\rfloor \geq \ldots \geq x_{\sigma(d)}-\lfloor x_{\sigma(d)}\rfloor > 0.$$

Das Innere eines jeden Tetraeders $T_\sigma(k)$ ist dabei durch strikte Ungleichungen in obigem Term charakterisiert. Ein Punkt x gehört genau dann zu (mindestens) zwei verschiedenen Tetraedern, wenn mindestens eine der obigen Ungleichungen mit Gleichheit erfüllt ist.

Mit diesen Vorbereitungen können nun die folgenden Funktionen definiert werden. Für $n\in\mathbb{N}$, $i\in\{1,\ldots,d\}$ und $y\in\mathbb{R}^d$, sei

$$f_{n,\sigma,i}(y) = \left[\sqrt{\mu_n\big(\lfloor y\rfloor + \mathrm{e}_{\sigma(1)}+\cdots+\mathrm{e}_{\sigma(i)}\big)} - \sqrt{\mu_n\big(\lfloor y\rfloor + \mathrm{e}_{\sigma(1)}+\cdots+\mathrm{e}_{\sigma(i-1)}\big)}\,\right](y_{\sigma(i)}-\lfloor y_{\sigma(i)}\rfloor), \tag{2.5.6}$$

wobei stillschweigend die Vereinbarung $\sigma(0) = 0$ und $\mathrm{e}_0 = 0$ getroffen sei. Darüber hinaus wähle man für jedes gegebene $k \in \mathbb{Z}^d$ und $y \in C(k)$ ein $\sigma(y) \in \mathfrak{S}_d$ mit $y \in T_{\sigma(y)}(k)$. Man definiere:

$$g_n(x) := \alpha_{t_n}^{d/2} \mu_n(\lfloor \alpha_{t_n} x \rfloor)^{1/2} + \alpha_{t_n}^{d/2} \sum_{i=1}^{d} f_{n,\sigma(\alpha_{t_n} x),i}(\alpha_{t_n} x). \tag{2.5.7}$$

Der Beweis der wichtigsten Eigenschaften (allen voran die Wohldefiniertheit) wurde aus Gründen der Übersichtlichkeit in Hilfslemma 2.5.2 ausgelagert. Darin werden insgesamt folgende Eigenschaften von g_n bewiesen:

(i) die Wohldefiniertheit von g_n

(ii) die Stetigkeit von g_n

(iii) die Differenzierbarkeit von g_n im Inneren eines jeden Teatraeders $T_\sigma(k)$

Aus den letzten beiden Eigenschaften folgt insbesondere, dass $g_n \in H^1(\mathbb{R}^d)$ gilt. Laut Definition des Generators ergibt sich sofort:

$$\|\nabla g_n\|_{2,R_n}^2 = \alpha_{t_n}^2 \llbracket \left(-A_{R_n \alpha_{t_n}}\right)^{1/2} \sqrt{\mu_n} \rrbracket_2^2, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{2.5.8}$$

Ebenfalls aus Gründen der Übersichtlichkeit wurde der Beweis der nachfolgenden Ungleichung in Hilfslemma 2.5.3(i) ausgelagert. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\alpha_{t_n}^{d(p-1)/p} \|\mu_n\|_p \le \|g_n^2\|_{p,R_n} \left[1 + C\alpha_{t_n}^{[d(p-1)-2]/2p}\right] + \left[\|\nabla g_n\|_{2,R_n}^2 + 1\right] C \left[\alpha_{t_n}^{[d(p-1)-2]/2p} + \alpha_{t_n}^{[d(p-1)-2]/p}\right], \tag{2.5.9}$$

wobei die Konstante C lediglich von d und p abhängt. Die (verschärfte) Annahme $d(p-1) < 2$ impliziert, dass die Exponenten von α_{t_n} auf der rechten Seite der Gleichung negativ sind. Aufgrund der Tatsache, dass für $t \to \infty$ ebenso $\alpha_{t_n} \to \infty$ gilt, erhält man (wobei ggf. noch eine Teilfolge von $(R_n, t_n, \mu_n)_n$ ausgewählt werden muss), dass

$$\alpha_{t_n}^{d(p-1)/p} \|\mu_n\|_p \le \|g_n^2\|_{p,R_n} (1 + \tfrac{1}{n}) + \tfrac{1}{n} \left(\|\nabla g_n\|_{2,R_n}^2 + 1\right). \tag{2.5.10}$$

Mit Hilfe von (2.5.8) und (2.5.10) erhält man aus (2.5.5) als Zwischenstand:

$$\begin{aligned} \text{L.S. von (2.5.4)} &\le \|g_n^2\|_{p,R_n} (1 + \tfrac{1}{n}) + \tfrac{1}{n} \left(\|\nabla g_n\|_{2,R_n}^2 + 1\right) - \|\nabla g_n\|_{2,R_n}^2 + \tfrac{1}{n} \\ &\le \|g_n^2\|_{p,R_n} (1 + \tfrac{1}{n}) - \|\nabla g_n\|_{2,R_n}^2 \left(1 - \tfrac{1}{n}\right) + \tfrac{2}{n} \end{aligned} \tag{2.5.11}$$

Man beachte, dass g_n (asymptotisch) ebenfalls periodische Randbedingungen besitzt, jedoch in der Box $[-R_n, R_n]^d$. Im Folgenden wird nun eine Version dieser Funktion konstruiert, welche Nullrandbedingungen genügt.

Sei $\varepsilon \in (0,1)$ beliebig und bezeichne $\psi_{R_n} \colon \mathbb{R} \to [0,1]$ diejenige (stetige) Funktion, welche außerhalb von $[-R_n, R_n]$ den Wert Null, innerhalb von $[-R_n + R_n^\varepsilon, R_n - R_n^\varepsilon]$ den Wert Eins und zwischen $-R_n$ und $-R_n + R_n^\varepsilon$ bzw. $R_n - R_n^\varepsilon$ und R_n linear ist. Darauf aufbauend sei nun die d-dimensionale Variante $\Psi_{R_n} = \bigotimes_{i=1}^d \psi_{R_n} \colon \mathbb{R}^d \to [0,1]$ definiert.

Es wird nun $\|g_n^2\|_{p,R_n}$ bzw. $\|\nabla g_n\|_{2,R_n}^2$ gegen die entsprechenden Analoga von $g_n \Psi_{R_n}$ abgeschätzt. Es sei dazu bemerkt, dass (wiederum aus Gründen der Übersichtlichkeit) der Beweis von

$$1 - C\alpha_{t_n}^{-1} \|\nabla g_n\|_{2,R_n} \le \|g_n\|_{2,R_n} \le 1 + C\alpha_{t_n}^{-1} \|\nabla g_n\|_{2,R_n} \tag{2.5.12}$$

in Hilfslemma 2.5.3(ii) ausgelagert wird. Man nutze nun die Schwarzsche Ungleichung (bzw. die Dreiecksungleichung) und wähle n so groß, dass $dR_n^{-\varepsilon} \leq 1$. Damit gilt:

$$\begin{aligned}\|\nabla(g_n\Psi_{R_n})\|_2^2 &\leq \int_{\mathbb{R}^d}\sum_{i=1}^d \left|\partial_i g_n(x)\Psi_{R_n}(x) + g_n(x)\partial_i\Psi_{R_n}(x)\right|^2 \mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^d}\sum_{i=1}^d \big(\partial_i g_n(x)\Psi_{R_n}(x)\big)^2 + \big(g_n(x)\partial_i\Psi_{R_n}(x)\big)^2 \mathrm{d}x \\ &+ \int_{\mathbb{R}^d}\sum_{i=1}^d 2|\partial_i g_n(x)|\Psi_{R_n}(x)g_n(x)|\partial_i\Psi_{R_n}(x)|\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Man beachte nun, dass $0 \leq \Psi_{R_n} \leq 1$ und dass $|\partial_i\Psi_{R_n}| \leq R_n^{-\varepsilon}$. Man erhält also:

$$\begin{aligned}\|\nabla(g_n\Psi_{R_n})\|_2^2 &\leq \int_{\mathbb{R}^d}\sum_{i=1}^d |\partial_i g_n(x)|^2 + R_n^{-2\varepsilon}g_n(x)^2\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^d}\sum_{i=1}^d 2R_n^{-\varepsilon}|\partial_i g_n(x)|g_n(x)\mathrm{d}x \\ &= \|\nabla g_n\|_{2,R_n}^2 + R_n^{-2\varepsilon}\|g_n\|_{2,R_n}^2 + 2R_n^{-\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^d} g_n(x)\sum_{i=1}^d|\partial_i g_n(x)|\mathrm{d}x \\ &= \|\nabla g_n\|_{2,R_n}^2 + R_n^{-2\varepsilon}\|g_n\|_{2,R_n}^2 + 2R_n^{-\varepsilon}\|g_n(x)\nabla\partial_i g_n(x)\|_{1,R_n} \\ &\overset{\text{Hölder Ungleichung}}{\leq} \|\nabla g_n\|_{2,R_n}^2 + 2R_n^{-\varepsilon}\|g_n\|_{2,R_n}\|\nabla g_n\|_{2,R_n} + dR_n^{-2\varepsilon}\|g_n\|_{2,R_n}^2\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Ungleichung von arithmetischem und geometrischem Mittel ($ab = \sqrt{a^2b^2} \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$) liefert dies nun:

$$\begin{aligned}\|\nabla(g_n\Psi_{R_n})\|_2^2 &\leq \|\nabla g_n\|_{2,R_n}^2 + 2R_n^{-\varepsilon}\tfrac{1}{2}\big(\|g_n\|_{2,R_n}^2 + \|\nabla g_n\|_{2,R_n}^2\big) + dR_n^{-2\varepsilon}\|g_n\|_{2,R_n}^2 \\ &\leq \|\nabla g_n\|_{2,R_n}^2\left[1 + R_n^{-\varepsilon}\right] + 2R_n^{-\varepsilon}\|g_n\|_{2,R_n}^2 \\ &\leq \|\nabla g_n\|_{2,R_n}^2\left[1 + R_n^{-\varepsilon}\right] + 2R_n^{-\varepsilon}\big(1 + 2C\alpha_{t_n}^{-1}\|\nabla g_n\|_{2,R_n} + C^2\alpha_{t_n}^{-2}\|\nabla g_n\|_{2,R_n}^2\big).\end{aligned}$$

Ggf. muss nun wieder eine Teilfolge von $(R_n, t_n, \mu_n)_n$ ausgewählt werden und man erhält:

$$\|\nabla g_n\|_{2,R_n}^2 \geq \|\nabla(g_n\Psi_{R_n})\|_2^2(1 - \tfrac{1}{n}) - \tfrac{1}{n}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{2.5.13}$$

Der nächste Schritt besteht darin, $\|g_n^2\|_{p,R_n}$ gegen $\|(g_n\Psi_{R_n})^2\|_p$ abzuschätzen. Dazu benötigt man eine kleine Vorbetrachtung, in der wieder die periodischen Randbedingungen ausgenutzt werden (sog. Shiftargument). Ziel ist es, zu verhindern, dass g_n^{2p} zu stark auf dem ε-Rand der Box B_{R_n} konzentriert ist. Mit anderen Worten, es gilt o.B.d.A.:

$$\int_{B_{R_n}\setminus B_{R_n-R_n^\varepsilon}} g_n^{2p}(x)\,\mathrm{d}x \leq \frac{|B_{R_n}\setminus B_{R_n-R_n^\varepsilon}|}{|B_{R_n}|}\int_{B_{R_n}} g_n^{2p}(x)\,\mathrm{d}x, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{2.5.14}$$

Zum Beweis nehme man an, dass für alle Verschiebungen (engl. shift) $\theta_z(x) = x + z$ modulo R_n mit $z \in B_{R_n}$ gilt:

$$\int_{B_{R_n}\setminus B_{R_n-R_n^\varepsilon}} g_n^{2p}(\theta_z(x))\,\mathrm{d}x > \frac{|B_{R_n}\setminus B_{R_n-R_n^\varepsilon}|}{|B_{R_n}|}\int_{B_{R_n}} g_n^{2p}(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2.5.15}$$

Um einen Widerspruch zu erhalten integriere man nun beide Seiten über $z \in B_{R_n}$ und vertausche die Integrationsreihenfolge:

$$\begin{aligned}\int_{B_{R_n}\setminus B_{R_n-R_n^\varepsilon}} g_n^{2p}(\theta_z(x))\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{|B_{R_n}|}\int_{B_{R_n}}\int_{B_{R_n}\setminus B_{R_n-R_n^\varepsilon}} g_n^{2p}(\theta_z(x))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\\ &= \frac{1}{|B_{R_n}|}\int_{B_{R_n}\setminus B_{R_n-R_n^\varepsilon}}\int_{B_{R_n}} g_n^{2p}(z+x)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{|B_{R_n}|}\int_{B_{R_n}\setminus B_{R_n-R_n^\varepsilon}}\int_{B_{R_n}} g_n^{2p}(z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{|B_{R_n}\setminus B_{R_n-R_n^\varepsilon}|}{|B_{R_n}|}\int_{B_{R_n}} g_n^{2p}(z)\,\mathrm{d}z\end{aligned}$$

Damit gibt es also mindestens ein $z \in B_{R_n}$, so dass das Gegenteil von (2.5.15) wahr ist. Im weiteren Verlauf wird nun mit $g_n \circ \theta_z$ anstelle von g_n gearbeit. Man beachte, dass aufgrund der periodischen Randbedingungen sämtliche weiteren Eigenschaften erhalten bleiben. Der Quotient auf der rechten Seite von (2.5.14) kann nun wiefolgt abgeschätzt werden.

$$\begin{aligned}\frac{|B_{R_n}\setminus B_{R_n-R_n^\varepsilon}|}{|B_{R_n}|} &= \frac{(2R_n+1)^d-(2(R_n-R_n^\varepsilon)+1)^d}{(2R_n+1)^d}\\ &= \frac{\sum_{i=0}^d (2R_n)^i * 1^{d-i} - \sum_{i=0}^d (2(R_n-R_n^\varepsilon))^i * 1^{d-i}}{(2R_n+1)^d}\\ {}_{R_n>1}&\leq C\frac{R_n^d + CR_n^{d-1} - (R_n-R_n^\varepsilon)^d}{R_n^d}\\ &= C\frac{R_n^d + CR_n^{d-1} - \sum_{i=0}^d R_n^i(-R_n^\varepsilon)^{d-i}}{R_n^d}\\ &= C\frac{CR_n^{d-1} + R_n^{d-1+\varepsilon} - \sum_{i=0}^{d-2} R_n^i(-R_n^\varepsilon)^{d-i}}{R_n^d}\\ {}_{\varepsilon<1}&\leq C\frac{CR_n^{d-1+\varepsilon}}{R_n^d} = CR_n^{\varepsilon-1}\end{aligned} \tag{2.5.16}$$

Dabei hängt die Konstante C nicht von n ab. Im Inneren $B_{R_n-R_n^\varepsilon}$ ist $g_n = (g_n\Psi_{R_n})$. Man erhält damit:

$$\begin{aligned}\|g_n^2\|_{p,R_n}^p - \|(g_n\Psi_{R_n})^2\|_p^p &= \int_{B_{R_n}} g_n^{2p}(x)\,\mathrm{d}x - \int_{B_{R_n}} (g_n\Psi_{R_n})^{2p}(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{B_{R_n}\setminus B_{R_n-R_n^\varepsilon}} g_n^{2p}(x) - (g_n\Psi_{R_n})^{2p}(x)\,\mathrm{d}x\\ &\leq \int_{B_{R_n}\setminus B_{R_n-R_n^\varepsilon}} g_n^{2p}(x)\,\mathrm{d}x\\ {}_{(2.5.14)}&\leq \frac{|B_{R_n}\setminus B_{R_n-R_n^\varepsilon}|}{|B_{R_n}|}\int_{B_{R_n}} g_n^{2p}(x)\,\mathrm{d}x\\ {}_{(2.5.16)}&\leq CR_n^{\varepsilon-1}\|g_n^2\|_{p,R_n}^p\end{aligned}$$

Gegebenenfalls muss nun wieder eine Teilfolge von $(R_n, t_n, \mu_n)_n$ ausgewählt werden und man erhält schließlich:

$$\|g_n^2\|_{p,R_n} \leq \|(g_n\Psi_{R_n})^2\|_p(1+\tfrac{1}{n}), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{2.5.17}$$

Damit liegen die nötigen Abschätzungen von $\|g_n^2\|_{p,R_n}$ (siehe (2.5.17)) bzw. $\|\nabla g_n\|_{2,R_n}^2$ (siehe (2.5.13)) bereit. Man erhält nun aus (2.5.11) für alle n:

$$\begin{aligned}
\text{L.S. von (2.5.4)} &\le \|g_n^2\|_{p,R_n}(1+\tfrac{1}{n}) - \|\nabla g_n\|_{2,R_n}^2\big(1-\tfrac{1}{n}\big) + \tfrac{2}{n} \\
&\le \|g_n^2\|_{p,R_n}(1+\tfrac{1}{n}) - \|\nabla g_n\|_{2,R_n}^2(1-\tfrac{2}{n}) - \tfrac{1}{n}\|\nabla g_n\|_{2,R_n}^2 + \tfrac{2}{n} \\
&\le \|(g_n\Psi_{R_n})^2\|_p(1+\tfrac{1}{n})^2 - \big[\|\nabla(g_n\Psi_{R_n})\|_2^2(1-\tfrac{1}{n}) - \tfrac{1}{n}\big](1-\tfrac{2}{n}) \\
&\quad - \tfrac{1}{n}\big[\|\nabla(g_n\Psi_{R_n})\|_2^2(1-\tfrac{1}{n}) - \tfrac{1}{n}\big] + \tfrac{2}{n} \\
&\le \|(g_n\Psi_{R_n})^2\|_p(1+\tfrac{3}{n}) - \|\nabla(g_n\Psi_{R_n})\|_2^2(1-\tfrac{3}{n}) - \tfrac{1}{n}\|\nabla g_n\|_{2,R_n}^2 + \tfrac{3}{n} \\
&= \Big[\frac{\|(g_n\Psi_{R_n})^2\|_p}{\|g_n\Psi_{R_n}\|_2^2}\,\frac{1+\frac{3}{n}}{1-\frac{3}{n}} - \frac{\|\nabla(g_n\Psi_{R_n})\|_2^2}{\|g_n\Psi_{R_n}\|_2^2}\Big](1-\tfrac{3}{n})\|g_n\Psi_{R_n}\|_2^2 - \tfrac{1}{n}\|\nabla g_n\|_{2,R_n}^2 + \tfrac{3}{n}.
\end{aligned}$$

Man beachte, dass $h_n = g_n\Psi_{R_n}/\|g_n\Psi_{R_n}\|_2$ eine L^2-normierte Funktion aus $H^1(\mathbb{R}^d)\cap L^{2p}(\mathbb{R}^d)$ mit kompaktem Träger B_{R_n} ist. Daher kann nun der Term in eckigen Klammern gegen das Supremum aller derartiger Funktionen abgeschätzt werden, welcher wiederum gleich $\rho_{d,p}^{(\mathrm{c})}(\frac{1+3/n}{1-3/n})$ ist (siehe dazu (2.2.4)). Aufgrund von (2.3.3) ist $\rho_{d,p}^{(\mathrm{c})}(\frac{1+3/n}{1-3/n}) > 0$ und da trivialerweise $\|g_n\Psi_{R_n}\|_2^2 \le \|g_n\|_{2,R_n}^2$ gilt, erhält man:

$$\begin{aligned}
\text{L.S. von (2.5.4)} &\le \rho_{d,p}^{(\mathrm{c})}\big(\tfrac{1+3/n}{1-3/n}\big)(1-\tfrac{3}{n})\|g_n\|_{2,R_n}^2 - \tfrac{1}{n}\|\nabla g_n\|_{2,R_n}^2 + \tfrac{3}{n} \\
&\le \rho_{d,p}^{(\mathrm{c})}\big(\tfrac{1+3/n}{1-3/n}\big)\|g_n\|_{2,R_n}^2 - \tfrac{1}{n}\|\nabla g_n\|_{2,R_n}^2 + \tfrac{3}{n}. \qquad (2.5.18)
\end{aligned}$$

Mit Hilfe von (2.5.26) aus Hilflemma 2.5.3(ii) ist klar, dass (bei ggf. notwendiger erneuter Auswahl einer Teilfolge von $(R_n, t_n, \mu_n)_n$) die Abschätzung

$$\|g_n\|_{2,R_n}^2 \le 1 + \tfrac{1}{n}\|\nabla g_n\|_{2,R_n}^2/\rho_{d,p}^{(\mathrm{c})}(\tfrac{1+3/n}{1-3/n})$$

gilt. Wenn dies in Gleichung (2.5.18) eingesetzt wird, erhält man für alle n, dass

$$\text{L.S. von (2.5.4)} \le \rho_{d,p}^{(\mathrm{c})}\big(\tfrac{1+3/n}{1-3/n}\big) + \tfrac{3}{n}.$$

Mit Hilfe von (2.3.3) sieht man, dass die rechte Seite für $n\uparrow\infty$ gegen $\rho_{d,p}^{(\mathrm{c})}(1)$ konvergiert. Damit ist der Beweis des Lemmas beendet. □

Hilfslemma 2.5.2 (Eigenschaften von g_n).
Es sei an die Definition von g_n erinnert. Für $n\in\mathbb{N}$, $i\in\{1,\dots,d\}$ und $y\in\mathbb{R}^d$, sei die Funktion $f_{n,\sigma,i}$ definiert gemäß

$$f_{n,\sigma,i}(y) = \Big[\sqrt{\mu_n\big(\lfloor y\rfloor + \mathrm{e}_{\sigma(1)}+\dots+\mathrm{e}_{\sigma(i)}\big)} - \sqrt{\mu_n\big(\lfloor y\rfloor + \mathrm{e}_{\sigma(1)}+\dots+\mathrm{e}_{\sigma(i-1)}\big)}\Big]\,(y_{\sigma(i)} - \lfloor y_{\sigma(i)}\rfloor),$$

(wobei $\sigma(0)=0$ and $\mathrm{e}_0=0$). Für jedes Paar $k\in\mathbb{Z}^d$ und $y\in C(k)$ sei $\sigma(y)\in\mathfrak{S}_d$ derart gewählt dass $y\in T_{\sigma(y)}(k)$ gilt. Damit sei

$$g_n(x) = \alpha_{t_n}^{d/2}\mu_n(\lfloor\alpha_{t_n}x\rfloor)^{1/2} + \alpha_{t_n}^{d/2}\sum_{i=1}^{d} f_{n,\sigma(\alpha_{t_n}x),i}(\alpha_{t_n}x).$$

Dann gilt:

(i) g_n *ist wohldefiniert*

(ii) g_n *ist auf* $\mathbb{R}^d$ *stetig*

(iii) g_n *ist im Inneren eines jeden Teatraeders* $T_\sigma(k)$ *differenzierbar.*

Aus (ii) und (iii) folgt damit insbesondere, dass $g_n \in H^1(\mathbb{R}^d)$.

Beweis.
Zunächst zeigt man, dass g_n überhaupt wohldefiniert ist. Mit anderen Worten, es muss nachgewiesen werden, dass für einen Punkt $y \in \mathbb{R}^d$, der sowohl zu $T_{\sigma_1}(k)$ als auch zu $T_{\sigma_2}(k)$ gehört, die Funktion g_n ordnungsgemäß definiert ist, d.h. es ist zu zeigen, dass

$$\sum_{i=1}^{d} f_{n,\sigma_1,i}(y) = \sum_{i=1}^{d} f_{n,\sigma_2,i}(y). \tag{2.5.19}$$

Im Folgenden sei dies lediglich für einen Spezialfall gezeigt. Der allgemeine Fall ergibt sich durch analoge Betrachtungsweisen. Es sei daher

$$\sigma_1(1) = 1 = \sigma_2(2) \qquad \text{and} \qquad \sigma_1(2) = 2 = \sigma_2(1), \qquad \text{and } \sigma_1(i) = \sigma_2(i) \text{ for } i \geq 3.$$

Mit anderen Worten, es soll gelten, dass $y_1 - \lfloor y_1 \rfloor = y_2 - \lfloor y_2 \rfloor \geq y_i - \lfloor y_i \rfloor$ für alle $i \in \{3, \ldots, d\}$. Man betrachte nun die durch die unterschiedlichen σ induzierte Differenz:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{d} f_{n,\sigma_1,i}(y) - \sum_{i=1}^{d} f_{n,\sigma_2,i}(y) = & \left[\sqrt{\mu_n\big(\lfloor y \rfloor + \mathrm{e}_1\big)} - \sqrt{\mu_n\big(\lfloor y \rfloor\big)}\right](y_1 - \lfloor y_1 \rfloor) \\ & + \left[\sqrt{\mu_n\big(\lfloor y \rfloor + \mathrm{e}_1 + \mathrm{e}_2\big)} - \sqrt{\mu_n\big(\lfloor y \rfloor + \mathrm{e}_1}\right](y_2 - \lfloor y_2 \rfloor) \\ & - \left[\sqrt{\mu_n\big(\lfloor y \rfloor + \mathrm{e}_2\big)} - \sqrt{\mu_n\big(\lfloor y \rfloor}\right](y_2 - \lfloor y_2 \rfloor) \\ & - \left[\sqrt{\mu_n\big(\lfloor y \rfloor + \mathrm{e}_2 + \mathrm{e}_1\big)} - \sqrt{\mu_n\big(\lfloor y \rfloor + \mathrm{e}_2}\right](y_1 - \lfloor y_1 \rfloor).\end{aligned}$$

Da $y_1 - \lfloor y_1 \rfloor = y_2 - \lfloor y_2 \rfloor$ gilt, ist diese Differenz Null und es ist gezeigt, dass g_n in der Tat wohldefiniert ist. Die obige Argumentation erfolgte dabei für den Spezialfall, dass die erste und die zweite Koordinate eines Punktes $y \in \mathbb{R}^d$ gleich sind und dass diese den größten gebrochenen Anteil $(y_1 - \lfloor y_1 \rfloor)$ aller Koordinaten besitzen. Eine Verallgemeinerung dieses Falles folgt dem gleichen Prinzip und sei an dieser Stelle aus Gründen der Übersichtlichkeit ausgespart. Damit ist also (i) bewiesen und in Bezug auf die Notation werde daher ab sofort $f_{n,\sigma,i}(y)$ anstelle von $f_{n,\sigma(y),i}(y)$ geschrieben.

Darüber hinaus folgt aus obiger Argumentation sofort, dass g_n innerhalb eines jeden Einheitswürfels $C(k)$ stetig ist. Um Teil (ii) zu zeigen muss daher nur noch der Nachweis der Stetigkeit an den Rändern der Einheitswürfel erfolgen. Ein Punkt $y \in \mathbb{R}^d$ gehört genau dann zum Rand eines dieser Würfel, wenn mindestens eine seiner Koordinaten eine ganze Zahl ist. Wiederum aus Gründen der Übersichtlichkeit nehme man an, dass dieses nur für $i = 1$ gilt: $y_i - \lfloor y_i \rfloor = 1$. Es ist klar, dass y zu zwei verschiedenen Tetraedern zweier verschiedener Einheitswürfel gehört: $y \in T_{\sigma_1}(k) \cap \overline{T_{\sigma_2}(k + \mathrm{e}_1)}$. Die beiden Permutationen σ_1 und σ_2 hängen dabei wiefolgt zusammen:

$$\sigma_1(1) = 1, \sigma_2(d) = 1 \text{ and } \sigma_1(i+1) = \sigma_2(i) \qquad \forall i \in \{1, \ldots, d-1\}$$

Die Begründung dafür ist denkbar einfach: Die Ganzzahligkeit in der ersten Koordinate kann einmal durch die maximal mögliche Differenz von $y_i - \lfloor y_i \rfloor = 1$ ausgedrückt werden (damit ist dann $\sigma_1(1) = 1$), andererseits aber auch dadurch, dass diese Differenz minimal wird und die Differenz durch Verschiebung des ganzen Einheitswürfels dargestellt wird. Somit ergibt sich dann (aufgrund der Ordnung der gebrochenen Anteile), dass $\sigma_2(d) = 1$ gilt.

Man wähle nun eine beliebige Folge $(y^{(m)})_m \in T_{\sigma_2}(k + \mathrm{e}_1)$, welche gegen y konvergiere. Für hinreichend große m gilt, dass $\lfloor y \rfloor + \mathrm{e}_1 = \lfloor y^{(m)} \rfloor$. Es gilt nun:

$$\begin{aligned}\mu_n(\lfloor y^{(m)} \rfloor)^{1/2} + \sum_{i=1}^{d} f_{n,\sigma_2,i}(y^{(m)}) &= \mu_n(\lfloor y \rfloor + \mathrm{e}_1)^{1/2} + \sum_{i=1}^{d} (y^{(m)}_{\sigma_2(i)} - \lfloor y^{(m)}_{\sigma_2(i)} \rfloor) \\ &\quad \times \left[\sqrt{\mu_n\big(\lfloor y \rfloor + \mathrm{e}_1 + \mathrm{e}_{\sigma_2(1)} + \cdots + \mathrm{e}_{\sigma_2(i)}\big)} - \sqrt{\mu_n\big(\lfloor y \rfloor + \mathrm{e}_1 + \mathrm{e}_{\sigma_2(1)} + \cdots + \mathrm{e}_{\sigma_2(i-1)}\big)}\right].\end{aligned}$$

Man beachte dabei, dass der Summand für $i = d$ wegen $\lim_{m\to\infty}(y^{(m)}_{\sigma_2(d)} - \lfloor y^{(m)}_{\sigma_2(d)} \rfloor) = 0$ gegen Null konvergieren muss. In der verbleibenden Summe mit $i = 1, \ldots, d-1$ verschiebe man nun den Laufindex, indem $i = j - 1$ ersetzt wird. Dabei kann gleichzeitig $\sigma_2(j-1)$ durch $\sigma_1(j)$ substituiert werden und man erhält (für $m \to \infty$):

$$\begin{aligned}&\mu_n(\lfloor y^{(m)} \rfloor)^{1/2} + \sum_{i=1}^{d} f_{n,\sigma_2,i}(y^{(m)}) \\ &\quad = \mu_n(\lfloor y \rfloor)^{1/2} + \left[\sqrt{\mu_n(\lfloor y \rfloor + \mathrm{e}_1)} - \sqrt{\mu(\lfloor x \rfloor)}\right](y^{(m)}_{\sigma_1(1)} - \lfloor y_{\sigma_1(1)} \rfloor) \\ &\qquad + \sum_{j=2}^{d} \left[\sqrt{\mu_n\big(\lfloor y \rfloor + \mathrm{e}_{\sigma_1(1)} + \mathrm{e}_{\sigma_1(2)} + \cdots + \mathrm{e}_{\sigma_1(j)}\big)} - \sqrt{\mu_n\big(\lfloor y \rfloor + \mathrm{e}_{\sigma_1(1)} + \mathrm{e}_{\sigma_1(2)} + \cdots + \mathrm{e}_{\sigma_1(j-1)}\big)}\right] \\ &\qquad\qquad \times (y^{(m)}_{\sigma_1(j)} - \lfloor y_{\sigma_1(j)} \rfloor) + o(1) \\ &\quad = \mu_n(\lfloor y \rfloor)^{1/2} + \sum_{j=1}^{d} \left[\sqrt{\mu_n\big(\lfloor y \rfloor + \mathrm{e}_{\sigma_1(1)} + \cdots + \mathrm{e}_{\sigma_1(j)}\big)} - \sqrt{\mu_n\big(\lfloor y \rfloor + \mathrm{e}_{\sigma_1(1)} + \cdots + \mathrm{e}_{\sigma_1(j-1)}\big)}\right] \\ &\qquad\qquad \times (y^{(m)}_{\sigma_1(j)} - \lfloor y_{\sigma_1(j)} \rfloor) + o(1).\end{aligned}$$

Wegen $y^{(m)}_j \to y_j$ muss nun der letzte Term gegen $\mu_n(\lfloor y \rfloor)^{1/2} + \sum_{j=1}^{d} f_{n,\sigma_1,j}(y)$ konvergieren. Somit wurde soeben die Stetigkeit von g_n am Rand aller Einheitswürfel $C(k)$ gezeigt und daher auch die Stetigkeit von g_n auf dem gesamten $\mathbb{R}^d$. Der Beweis von (ii) ist damit ebenso beendet.

Aufgrund der Definition von g_n als Kompostition differenzierbarer Funktionen innerhalb eines jeden Tetraeders $T_\sigma(k)$ folgt sofort dass g_n ebendort auch differenzierbar ist. (Damit ist (iii) bewiesen.) Die Vereinigung der Ränder aller Tetraeder wiederum ist eine Nullmenge bezüglich des Lebesgue-Maßes. Daher liegt g_n auch in $H^1(\mathbb{R}^d)$. □

Als letzten Schritt um den Beweis zu vervollständigen verbleibt das folgende Lemma mit den ausgelagerten Hilfresultaten (2.5.9) und (2.5.12).

Hilfslemma 2.5.3.
Unter den bisherigen Bedingungen und mit den eingeführten Bezeichnern gilt:

(i) Für die Norm $\|\mu_n\|_p$ gilt folgende Abschätzung:

$$\alpha_{t_n}^{d(p-1)/p}\|\mu_n\|_p \leq \|g_n^2\|_{p,R_n}\left[1 + C\alpha_{t_n}^{[d(p-1)-2]/2p}\right] \\ + \left[\|\nabla g_n\|_{2,R_n}^2 + 1\right] C\left[\alpha_{t_n}^{[d(p-1)-2]/2p} + \alpha_{t_n}^{[d(p-1)-2]/p}\right]$$

(ii) Der Abstand zwischen $\|g_n\|_{2,R_n}$ und eins genügt folgender Ungleichung:

$$1 - C\alpha_{t_n}^{-1}\|\nabla g_n\|_{2,R_n} \leq \|g_n\|_{2,R_n} \leq 1 + C\alpha_{t_n}^{-1}\|\nabla g_n\|_{2,R_n}$$

Beweis.
Zunächst sei der Beweis von (ii), d.h. (2.5.9), geführt. Die Definition von $f_{n,\sigma,i}$, (2.5.6), bzw. von g_n, (2.5.7), liefern zusammen mit der Dreiecksungleichung die nachfolgenden Umformungen. Man beachte dabei, dass sich wegen $\mu(\mathbb{Z}^d \setminus Q_{\alpha_t R_n}) = 0$ die Norm auf B_{R_n} in die entsprechende l^p-Norm auf $\mathbb{Z}^d$ überführen lassen:

$$\begin{aligned}
\|g_n\|_{2p,R_n} &\geq \alpha_{t_n}^{d/2}\|\mu_n(\lfloor\alpha_{t_n}\cdot\rfloor)^{1/2}\|_{2p,R_n} - \alpha_{t_n}^{d/2}\Big\|\sum_{i=1}^{d} f_{n,\sigma,i}(\alpha_{t_n}\cdot)\Big\|_{2p,R_n} \\
&= \alpha_{t_n}^{d/2}\left[\int_{B_{R_n}} \mu_n(\lfloor\alpha_{t_n}x\rfloor)^p \mathrm{d}x\right]^{1/2p} - \alpha_{t_n}^{d/2}\left[\int_{B_{R_n}} \left(\sum_{i=1}^{d} f_{n,\sigma,i}(\alpha_{t_n}x)\right)^{2p} \mathrm{d}x\right]^{1/2p} \\
&= \alpha_{t_n}^{d/2}\left[\int_{\mathbb{R}^d} \alpha_t^{-d}\mu_n(\lfloor x\rfloor)^p \mathrm{d}x\right]^{1/2p} - \alpha_{t_n}^{d/2}\left[\int_{\mathbb{B}_{\alpha_t R_n}} \alpha_t^{-d}\left(\sum_{i=1}^{d} f_{n,\sigma,i}(x)\right)^{2p} \mathrm{d}x\right]^{1/2p} \\
&= \alpha_{t_n}^{d(p-1)/2p}\|\mu_n\|_p^{\frac{1}{2}} - \alpha_{t_n}^{d(p-1)/2p}\Big\|\sum_{i=1}^{d} f_{n,\sigma,i}\Big\|_{2p,\alpha_t R_n}
\end{aligned} \tag{2.5.20}$$

Für alle $y \in \mathbb{R}^d$ gilt nun:

$$\begin{aligned}
\Big|\sum_{i=1}^{d} f_{n,\sigma,i}(y)\Big|^{2p} &\leq d^{2p}\sum_{i=1}^{d}\Big|\sqrt{\mu_n\big(\lfloor y\rfloor + \mathrm{e}_{\sigma(1)} + \cdots + \mathrm{e}_{\sigma(i)}\big)} - \sqrt{\mu_n\big(\lfloor y\rfloor + \mathrm{e}_{\sigma(1)} + \cdots + \mathrm{e}_{\sigma(i-1)}\big)}\Big|^{2p} \\
&\leq d^{2p}\sum_{i=1}^{d}\Big|\sqrt{\mu_n\big(\lfloor y\rfloor + \mathrm{e}_{\sigma(1)} + \cdots + \mathrm{e}_{\sigma(i)}\big)} - \sqrt{\mu_n\big(\lfloor y\rfloor + \mathrm{e}_{\sigma(1)} + \cdots + \mathrm{e}_{\sigma(i-1)}\big)}\Big|^{2} \\
&= d^{2p}\alpha_{t_n}^{-d-2}|\nabla g_n(y/\alpha_{t_n})|^2,
\end{aligned} \tag{2.5.21}$$

Die Korrektheit der Abschätzung des Exponenten lässt sich leicht einsehen. Da μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß (auf einer endlichen Menge) ist, muss der Term innerhalb des Betrages im Intervall $[-1, 1]$ liegen. Für $x \in [0, 1]$ und $p > 1$ gilt nun trivialerweise, dass $x^{2p} \leq x^2$.
Es sei an dieser Stelle bemerkt, dass genau diese Abschätzung der Grund ist, weshalb statt der zu erwartenden Bedingung $d(p-1) < 2p$ die stärkere Einschränkung $d(p-1) < 2$ nötig ist (siehe

dazu auch Bemerkung 2.3.6). Mit Hilfe von (2.5.20) erhält man nun:

$$\begin{aligned}
\alpha_{t_n}^{d(p-1)/2p}\|\mu_n\|_p^{\frac{1}{2}} &\leq \|g_n\|_{2p,R_n} + \alpha_{t_n}^{d/2}\left[\int_{\mathbb{B}_{\alpha_t R_n}} \alpha_t^{-d}\left(\sum_{i=1}^d f_{n,\sigma,i}(x)\right)^{2p}\mathrm{d}x\right]^{1/2p} \\
\overset{(2.5.21)}{\leq} &\|g_n\|_{2p,R_n} + \alpha_{t_n}^{d/2}\left[\int_{\mathbb{B}_{\alpha_t R_n}} \alpha_t^{-d} d^{2p}\alpha_{t_n}^{-d-2}|\nabla g_n(x/\alpha_{t_n})|^2\mathrm{d}x\right]^{1/2p} \\
&= \|g_n\|_{2p,R_n} + \alpha_{t_n}^{d/2}\left[\int_{\mathbb{B}_{R_n}} d^{2p}\alpha_{t_n}^{-d-2}|\nabla g_n(x)|^2\mathrm{d}x\right]^{1/2p} \\
&= \|g_n\|_{2p,R_n} + d\alpha_{t_n}^{[d(p-1)-2]/2p}\|\nabla g_n\|_{2,R_n}^{\frac{1}{p}}. \qquad (2.5.22)
\end{aligned}$$

Man quadriere nun beide Seiten dieser Ungleichung und nutze die (trivialen) Abschätzungen:

$$\begin{array}{ll}
a^{2/p} \leq \max\{1^2, a^2\}^{1/p} \leq \max\{1, a^2\} \leq 1 + a^2 & \Rightarrow \|\nabla g_n\|_{2,R_n}^{\frac{2}{p}} \leq 1 + \|\nabla g_n\|_{2,R_n}^2 \\
ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2) & \Rightarrow \|g_n\|_{2p,R_n}\|\nabla g_n\|_{2,R_n} \leq \frac{1}{2}(\|g_n\|_{2p,R_n}^2 + \|\nabla g_n\|_{2,R_n}^2)
\end{array}$$

um die folgenden Umformungen zu erhalten:

$$\begin{aligned}
\alpha_{t_n}^{d(p-1)/p}\|\mu_n\|_p &\leq \left[\|g_n\|_{2p,R_n} + d\alpha_{t_n}^{[d(p-1)-2]/2p}\|\nabla g_n\|_{2,R_n}^{\frac{1}{p}}\right]^2 \\
&= \|g_n\|_{2p,R_n}^2 + \frac{1}{2}\|g_n\|_{2p,R_n} d\alpha_{t_n}^{[d(p-1)-2]/2p}\|\nabla g_n\|_{2,R_n}^{\frac{1}{p}} + d^2\alpha_{t_n}^{[d(p-1)-2]/p}\|\nabla g_n\|_{2,R_n}^{\frac{2}{p}} \\
&\leq \|g_n\|_{2p,R_n}^2 + \frac{1}{4}d\alpha_{t_n}^{[d(p-1)-2]/2p}\left(\|g_n\|_{2p,R_n}^2 + \|\nabla g_n\|_{2,R_n}^{\frac{2}{p}}\right) + d^2\alpha_{t_n}^{[d(p-1)-2]/p}\|\nabla g_n\|_{2,R_n}^{\frac{2}{p}} \\
&= \|g_n\|_{2p,R_n}^2\left[1 + \frac{1}{4}d\alpha_{t_n}^{[d(p-1)-2]/2p}\right] + \|\nabla g_n\|_{2,R_n}^{\frac{2}{p}}\left[d^2\alpha_{t_n}^{[d(p-1)-2]/p} + \frac{1}{4}d\alpha_{t_n}^{[d(p-1)-2]/2p}\right] \\
&= \|g_n^2\|_{p,R_n}^2\left[1 + C\alpha_{t_n}^{[d(p-1)-2]/2p}\right] + \|\nabla g_n\|_{2,R_n}^{\frac{2}{p}} C\left[\alpha_{t_n}^{[d(p-1)-2]/p} + \alpha_{t_n}^{[d(p-1)-2]/2p}\right] \\
&= \|g_n^2\|_{p,R_n}^2\left[1 + C\alpha_{t_n}^{[d(p-1)-2]/2p}\right] + \left(1 + \|\nabla g_n\|_{2,R_n}^2\right) C\left[\alpha_{t_n}^{[d(p-1)-2]/p} + \alpha_{t_n}^{[d(p-1)-2]/2p}\right]
\end{aligned}$$

Dabei hängt C nur von der Dimension d ab und es ist damit (2.5.9), also der ersten Teil dieses Hilfslemmas gezeigt.

Es verbleibt der Nachweis von Teil (i). Zuallererst nutze man wiederum die Dreiecksungleichung in der Definition von g_n (2.5.7) aus und erhalte:

$$\|g_n\|_{2,R_n} \leq \left\|\sqrt{\alpha_{t_n}^d \mu_n\big(\lfloor \alpha_{t_n}\cdot\rfloor\big)}\right\|_{2,R_n} + \left\|\alpha_{t_n}^{d/2}\sum_{i=1}^d f_{n,\sigma,i}(\alpha_{t_n}\cdot)\right\|_{2,R_n}. \qquad (2.5.23)$$

Für den ersten Summanden der rechten Seite gilt nun:

$$\begin{aligned}
\left\| \sqrt{\alpha_{t_n}^d \mu_n\big(\lfloor \alpha_{t_n} \cdot \rfloor\big)} \right\|_{2,R_n} &= \left[\int_{B_{R_n}} \alpha_{t_n}^d \mu_n\big(\lfloor \alpha_{t_n} x \rfloor\big) \mathrm{d}x \right]^{1/2} \\
&= \left[\int_{B_{\alpha_t R_n}} \mu_n\big(\lfloor x \rfloor\big) \mathrm{d}x \right]^{1/2} \\
&= \left[\sum_{x \in Q_{R_n}} \mu_n(x) \mathrm{d}x \right]^{1/2} = 1 \qquad (2.5.24)
\end{aligned}$$

Für die L^2-Norm von $x \mapsto \alpha_{t_n}^{d/2} \sum_{i=1}^d f_{n,\sigma,i}(\alpha_{t_n} x)$ gilt nun:

$$\begin{aligned}
\left\| \alpha_{t_n}^{d/2} \sum_{i=1}^d f_{n,\sigma,i}(\alpha_{t_n} \cdot) \right\|_{2,R_n} &= \alpha_{t_n}^{d/2} \left(\int_{B_{R_n}} \left(\sum_{i=1}^d f_{n,\sigma,i}(\alpha_{t_n} x) \right)^2 \mathrm{d}x \right)^{1/2} \\
&= \alpha_{t_n}^{d/2} \left(\int_{\alpha_t B_{R_n}} \alpha_t^{-d} \left(\sum_{i=1}^d f_{n,\sigma,i}(x) \right)^2 \mathrm{d}x \right)^{1/2} \\
(2.5.21) \leq \alpha_{t_n}^{d/2} \left(\int_{\alpha_t B_{R_n}} \alpha_t^{-d} d^2 \alpha_{t_n}^{-d-2} |\nabla g_n(x/\alpha_t)|^2 \mathrm{d}x \right)^{1/2} \\
&= \alpha_{t_n}^{d/2} \left(\int_{B_{R_n}} d^2 \alpha_{t_n}^{-d-2} |\nabla g_n(x)|^2 \mathrm{d}x \right)^{1/2} \\
&\leq C \alpha_{t_n}^{-1} \|\nabla g_n\|_{2,R_n} \qquad (2.5.25)
\end{aligned}$$

wobei wieder $C \in (0, \infty)$ nur von d abhängt. Wenn nun (2.5.24) und (2.5.25) in (2.5.23) eingesetzt wird, erhält man

$$\|g_n\|_{2,R_n} \leq \left\| \sqrt{\alpha_{t_n}^d \mu_n\big(\lfloor \alpha_{t_n} \cdot \rfloor\big)} \right\|_{2,R_n} + \left\| \alpha_{t_n}^{d/2} \sum_{i=1}^d f_{n,\sigma,i}(\alpha_{t_n} \cdot) \right\|_{2,R_n} \leq 1 + C \alpha_{t_n}^{-1} \|\nabla g_n\|_{2,R_n}.$$

In vollkommen analoger Weise (man nutze die Dreiecksungleichung in modifizierter Form) gelangt man zu $\|g_n\|_{2,R_n} \geq 1 - C\alpha_{t_n}^{-1} \|\nabla g_n\|_{2,R_n}$. Somit gilt:

$$\Big| \|g_n\|_{2,R_n} - 1 \Big| \leq C \alpha_{t_n}^{-1} \|\nabla g_n\|_{2,R_n}, \qquad n \in \mathbb{N}. \qquad (2.5.26)$$

Damit ist der Beweis von Hilfslemma 2.5.3 abgeschlossen. □

Kapitel 3

Der superkritische Fall

3.1 Das Theorem

In diesem Abschnitt wird der superkritische Fall (d.h. $p(d-2) \geq d$) näher untersucht. Dazu sei zunächst das folgende Theorem formuliert:

Theorem 3.1.1.
Es seien $p, d \in \mathbb{N}$ mit $p(d-2) \geq d$ (dies bezeichnet man als superkritischen Fall) und $p > 1$. Dann gilt für alle Geschwindigkeiten $\tilde{r}_t \to \infty$ mit $\tilde{r}_t{}_{\frac{1}{\log \tilde{r}_t}}^{\frac{p(p-1)}{3p-1}} \gg t^{\frac{2p^2}{3p-1}}$ und $\tilde{r}_t \ll t^p$ für die Selbstüberschneidungslokalzeiten ℓ_t, dass:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{\tilde{r}_t^{1/p}} \log \mathbb{P}\left[\|\ell_t\|_p^p > \tilde{r}_t\right] = - \inf_{f, \|f\|_2 = 1} \left\{ \frac{\langle f, -Af \rangle}{\|f\|_{2p}^2} \right\}.$$

Dabei bezeichne A den Generator der zugrundeliegenden Irrfahrt $(S_t)_t$.

Bemerkung 3.1.2 (Beweis der oberen Schranke)**.**
Der Beweis der oberen Schranke von Theorem 3.1.1 folgt in weiten Teilen der Strategie aus [HKM06]. Während dort lediglich der subkritische Fall behandelt wurde und eine nur grobe Abschätzung erfolgte (für den Zweck der Publikation war diese Abschätzung jedoch vollkommen ausreichend) wird die Strategie im vorliegenden Kapitel (Abschnitt 3.3) für den superkritischen Fall adaptiert und versucht, die Technik bis zum Äußersten auszureizen. ◇

Bemerkung 3.1.3 (Fehlende Kompaktheit)**.**
Wie bereits in der Einleitung dieser Dissertation erwähnt ist eines der Hauptprobleme beim Beweis der oberen Schranke die fehlende Kompaktheit. Im vorliegenden Kapitel wird diese Hürde durch die Verwendung verschiedener kombinatorischer Argumente umgangen. Der Ausgangspunkt des Beweises ist dabei die Projektion der Irrfahrt in eine Box (d.h. die Periodisierung der gesamten Irrfahrt). Dabei sei angemerkt, dass die Größe dieser Box t-abhängig ist und damit zunächst viel zu groß. Eine Projektion auf eine Box konstanter Größe (wie die Heuristik es nahelegt) hat den entscheidenden Nachteil, dass die dadurch entstehenden neuen Selbstüberscheidungen zu zahlreich und damit die obere Abschätzung zu schlecht ist.
Ähnliche Probleme tauchten ebenfalls in [CM09] auf. Im Gegensatz zum vorliegenden Beweis

wurde dieses Problem in [CM09] nicht durch die Periodisierung der gesamten Irrfahrt (durch Projektion auf den Torus) gelöst, sondern es wurde lediglich die p-te Potenz der Greenschen Funktion periodisiert. (Desweiteren lieferte die bekannte Minkowski Ungleichung einen zentralen Beitrag.) Der Hauptgrund für den Erfolg dieser Strategie besteht darin, dass in [CM09] die gegenseitigen Überscheidungen von Irrfahrten betrachtet wurden, während in der vorliegenden Dissertation das Problem der Selbstüberschneidungen (welches im Allgemeinen komplizierter ist) behandelt wird. $\diamond$

Bemerkung 3.1.4 (Einschränkungen an $\tilde{r}_t$)**.**
Während die obere Begrenzung der Geschwindigkeit $\tilde{r}_t$ der natürlichen Erwartung (hinsichtlich des maximal Möglichen) entspricht, ist festzuhalten, dass sich die Notwendigkeit für die untere Begrenzung der Geschwindigkeit rein aus der Technik des Beweises ergibt. Während des Nachweises der oberen Schranke ist es an einer Stelle unabdingbar, eine Anzahl gewisser Paarmaße abzuschätzen. Leider ist dies nur in grobem Maße gelungen woraus die Einschränkungen an $\tilde{r}_t$ resultieren. $\diamond$

Bemerkung 3.1.5 (Einschränkungen an p)**.**
Weiterhin gravierend in obigem Theorem ist vor allem die Einschränkung, dass $p > 1$ eine ganze Zahl sein muss. Trotz großer Anstrengungen ist es nicht gelungen, diese Voraussetzung fallen zu lassen oder sie zumindest abzumildern. Wie bereits erwähnt, wird diese Restriktionen beim Beweis der oberen Schranke benötigt. An gegebener Stelle wird darauf hingewiesen werden. $\diamond$

Bemerkung 3.1.6 (Arbeiten von C. Laurent)**.**
Während der Erarbeitung dieser Dissertation konnte Clement Laurent (siehe [L10a]) dieses Theorem bereits in allgemeinerer Form und mit geringeren Annahmen beweisen. Er nutzte dabei eine Technik von Fabienne Castell (siehe [Ca10]) und konnte diese entsprechend anpassen. In dieser Dissertation sollte versucht werden, dieses Theorem weiter zu verallgemeinern, jedoch konnte dieses Ziel nicht erreicht werden. Jedoch ist der alternative Beweisweg in sich bemerkenswert und soll daher in dieser Dissertation aufgeführt werden. $\diamond$

3.2 Die untere Schranke

Die untere Schranke stellt hinsichtlich ihres Beweises keine bedeutende Schwierigkeit dar. Kernstück desselben ist die Anwendung des berühmten Prinzips großer Abweichungen von Donsker und Varadhan (vgl. [DV75]). Im Falle der unteren Schranke ist es hinreichend, die Lokalzeiten nur bis zu einem bestimmten Zeitpunkt zu betrachten. Diese Fixierung führt letztendlich dazu, dass die Voraussetzungen zur Anwendung des Standardprinzips erfüllt sind. Diese Vorgehensweise findet sich vergleichsweise häufig und der Beweis sei an dieser Stelle nur aus Gründen der Vollständigkeit wiedergegeben. (Er findet sich bereits zitierfähig in der Literatur, beispielsweise in [L10a], dem wir im Wesentlichen folgen.)

Proposition 3.2.1 (Untere Schranke)**.**
Im superkritischen Fall gilt unter der Nebenbedingung $\tilde{r}_t \ll t^p$, dass:

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{\tilde{r}_t^{1/p}} \log \mathbb{P}(\|\ell_t\|_p^p \geq \tilde{r}_t) \geq - \inf_{f,\|f\|_2=1} \left\{ \frac{\langle f, -Af\rangle}{\|f\|_{2p}^2} \right\}$$

Beweis.
Man fixiere zunächst eine beliebige Konstante $M > 0$. Wegen $\tilde{r}_t \ll t^p$ existiert ein Zeitpunkt t_0, so dass für alle $t > t_0$ die Beziehung $M\tilde{r}_t < t^p$ gilt. Man erhält daher:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\|\ell_t\|_p^p \geq \tilde{r}_t) &\geq \mathbb{P}(\|\ell_{(M\tilde{r}_t)^{1/p}}\|_p^p \geq \tilde{r}_t) \\ &= \mathbb{P}\left(\left\|\frac{\ell_{(M\tilde{r}_t)^{1/p}}}{(M\tilde{r}_t)^{1/p}}\right\|_p^p \geq \frac{1}{M}\right) \\ &\geq \mathbb{P}\left(\left\|\frac{\ell_{(M\tilde{r}_t)^{1/p}}}{(M\tilde{r}_t)^{1/p}}\right\|_p^p > \frac{1}{M}\right) \end{aligned}$$

Die letzte Abschätzung gilt (trivialerweise) immer. Da die Norm (aufgefasst als Funktional $f \to \|f\|_p$) unterhalbstetig ist, ist wiederum die Menge $\{\|f\|_p > c\}$ eine offene Menge. Diese Tatsache ermöglicht die Anwendung des berühmten Resultates von Donsker und Varadhan (vgl. [DV75]) und man erhält:

$$\liminf_{t\to\infty} \tfrac{1}{(M\tilde{r}_t)^{1/p}} \log \mathbb{P}(\|\ell_t\|_p^p \geq \tilde{r}_t) \geq -\inf_{f,\|f\|_2=1} \left\{\langle f, -Af\rangle,\ \|f\|_{2p}^2 > \tfrac{1}{M^{1/p}}\right\}$$

Da $M > 0$ beliebig gewählt wurde, kann nun ebenso zum Infimum über diese Konstante übergegangen werden und folgende Umformungen werden ermöglicht:

$$\begin{aligned} \inf_{M>0}\left\{M^{1/p} \inf_{f,\|f\|_2=1}\left\{\langle f, -Af\rangle,\ \|f\|_{2p}^2 > \tfrac{1}{M^{1/p}}\right\}\right\} &= \inf_{f,\|f\|_2=1}\inf_{M>0}\left\{M^{1/p}\langle f, -Af\rangle,\ M^{1/p} > \tfrac{1}{\|f\|_{2p}^2}\right\} \\ &= \inf_{f,\|f\|_2=1}\left\{\frac{\langle f, -Af\rangle}{\|f\|_{2p}^2}\right\} \end{aligned}$$

Zusammengefasst erhält man nun:

$$\liminf_{t\to\infty} \tfrac{1}{\tilde{r}_t^{1/p}} \log \mathbb{P}(\|\ell_t\|_p^p \geq \tilde{r}_t) \geq -\inf_{f,\|f\|_2=1}\left\{\frac{\langle f, -Af\rangle}{\|f\|_{2p}^2}\right\}$$

Damit ist der Beweis der unteren Schranke beendet. □

3.3 Die obere Schranke

Das wesentliche Problem stellt der Beweis der oberen Schranke dar. Wie eingangs bereits erwähnt wurde dieses Problem in [L10a] mit Hilfe des sogenannten Eisenbaumtheorems (vgl.[MR06]) gelöst. Der vorliegende Weg umgeht die Nutzung dieses Theorems und bietet eine Alternative, unter Nutzung ähnlicher Techniken wie im subkritischen Fall. Bedauerlicherweise stellt sich heraus, dass die auf diese Weise entstehenden Einschränkungen an die Gültigkeit härter sind als jene, die im Zuge des Beweises in [L10a] entstehen.

Bemerkung 3.3.1 (Struktur des Beweises)**.**
Es werde wiederum $\mathbb{P}(\|\ell_t\|_p^p > \tilde{r}_t)$ betrachtet. Der Beweis der oberen Schranke entwickelt sich anhand der folgenden Schritte:

- Projektion der Irrfahrt auf den Torus $[-R, R)^d$, mit $R = R(t)$

- Nutzung der Markov-Ungleichung
- Abschätzung des Erwartungswertes mittel einer Variante der Greenschen Funktion
- Umformulierung mit Hilfe von empirischen Paarmaßen als eine Variationsformel
- Abschätzung der Variationsformel gegen eine andere Variationsformel
- Nutzung von Umformulierungen aus [L10a] ohne Verwendung des Eisenbaumtheorems

$\diamond$

Bevor diese Schritte genau ausgearbeitet werden, sei an dieser Stelle noch ein Kommentar zu den Einschränkungen gestattet. In der folgenden Bemerkung werden die Restriktionen näher beleuchtet, die im Verlauf des Beweises der unteren Schranke im superkritischen Fall ($p(d-2) \geq d$) benötigt werden. Ebenfalls wird eine erste Begründung der Notwendigkeit dieser Einschränkungen gegeben, welche unter anderem aus den Anforderungen an die Größe des Torus R resultieren.

Bemerkung 3.3.2 (Restriktionen im Beweis der oberen Schranke)**.**
Es sei zunächst an die Einschränkungen aus Theorem 3.1.1 erinnert, die im Zuge des Beweises der oberen Schranke benötigt werden:

1. Ganzahligkeit von p:
   Der Parameter p muss eine ganze Zahl sein ($p \in \mathbb{N}$). Der Trivialfall $p = 1$ sei an dieser Stelle ebenfalls ausgeschlossen.
2. Begrenzung der Geschwindigkeit $\tilde{r}_t$:
   $\tilde{r}_t$ darf höchstens so schnell wachsen, dass immer noch $\tilde{r}_t \ll t^p$ gilt, muss jedoch mindestens so schnell wachsen, dass $\tilde{r}_t \big(\frac{1}{\log \tilde{r}_t}\big)^{p(p-1)/(3p-1)} \gg t^{2p^2/(3p-1)}$ gilt.

Bedingung 1 wird benötigt, um Gleichung (3.3.3) weiter umzuformen. Konkret geht es darum, dass die Ganzzahligkeit des Exponenten $p\beta_x$ im Term $\ell_t^R(x)^{p\beta_x}$ notwendig ist, welches leider nur durch die Bedingung $p \in \mathbb{N}$ erzwungen werden kann.

Die Erklärung von Bedingung 2 ist etwas umfangreicher. Während die obere Schranke $\tilde{r}_t \ll t^p$ die natürliche Grenze darstellt, spielt für die untere Schranke die Größe des Torus $[-R, R)^d$ eine entscheidende Rolle.
Die Technik des Beweises basiert darauf, dass die gesamte Irrfahrt auf diesen Torus projiziert wird. Dabei entstehen bedauerlicherweise eine Vielzahl an zusätzlichen Selbstüberschneidungen, die es bei konstanter Größe R unmöglich machen würde, die ursprünglichen Selbstüberschneidungen exakt zu quantifizieren. Aus diesem Grunde entsteht die Notwendigkeit R in Abhängigkeit von t anwachsen zu lassen. Die untere Grenze für die Geschwindigkeit ist eine logische Konsequenz aus der eben beschriebenen Vorgehensweise. Die zusätzlichen Selbstüberschneidungen der periodisierten Irrfahrt müssen im Vergleich zu den ursprünglichen Selbstüberschneidungen hinreichend (vernachlässigbar) klein sein und die untere Schranke von $R(t)$ wird dafür in 3.3.9 benötigt (dabei sei jedoch lediglich auf eine Proposition aus [L10a] verwiesen).
Darüber hinaus verlangt die Technik des nachfolgenden Beweises ebenfalls eine obere Schranke für R in Abhängigkeit von t. Der Grund hierfür liegt darin, dass in (3.3.7) die Anzahl von Paarmaßen $\nu : B_R \times B_R \to (kp)^{-1}\mathbb{N}_0$ berechnet/abgeschätzt werden muss. Je größer B_R ist, desto

mehr Paarmaße gibt es und daher ist eine obere Begrenzung vonnöten.
Konkret lassen sich die Schranken für R folgendermaßen quantifizieren:

i) Untere Beschränkung von R mittels $\tilde{r}_t$ (bzw. t): $R^{2d} \gg \left(\frac{t^p}{\tilde{r}_t}\right)^{2/(p-1)}$

ii) Obere Beschränkung von R mittels $\tilde{r}_t$: $R^{2d} \ll \frac{\tilde{r}_t^{1/p}}{\log \tilde{r}_t}$.

Es sei darauf hingewiesen, dass im Verlauf des Beweises eine weitere Größe k mit Hilfe von $\tilde{r}_t$ (via $k = x\tilde{r}_t^{1/p}$) definiert wird, so dass sich Bedingung (ii) folgendermaßen darstellt:

$$R^{2d} \ll \frac{k}{\log k}. \tag{3.3.1}$$

Nach der Begründung für die Notwendigkeit der beiden Schranken für $R = R(t)$ muss nun noch sichergestellt werden, dass sich diese nicht widersprechen. Der entsprechende Nachweis wird in folgender Rechnung (ausgehend von den Bedingungen an R^{2d}) geführt, liefert jedoch eine zusätzliche Einschränkung für $\tilde{r}_t$, nämlich vormals erwähnte Bedingung 2:

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{t^p}{\tilde{r}_t}\right)^{2/(p-1)} \ll \frac{\tilde{r}_t^{1/p}}{\log \tilde{r}_t} \\
\iff \quad & \frac{1}{\log \tilde{r}_t} \tilde{r}_t^{\left(\frac{1}{p} + \frac{2}{p-1}\right)} \gg t^{\frac{2p}{p-1}} \\
\iff \quad & \frac{1}{\log \tilde{r}_t} \tilde{r}_t^{\frac{3p-1}{p(p-1)}} \gg t^{\frac{2p}{p-1}} \\
\iff \quad & \tilde{r}_t \frac{1}{\log \tilde{r}_t}^{\frac{p(p-1)}{3p-1}} \gg t^{\frac{2p^2}{3p-1}}
\end{aligned}$$

Dies stellt die Erklärung für Bedingung 2 dar.

Es bleibt nun noch zu zeigen, dass obere und untere Schranke für $\tilde{r}_t$ nicht im Widerspruch zueinander stehen. Dies stellt jedoch keine Schwierigkeit dar, da wegen $p > 1$ zweifelsohne $p > \frac{2p^2}{3p-1}$ gilt. Der logarithmische Term ist von untergeordneter Bedeutung, da jedes $\varepsilon > 0$, welches im Exponenten hinzugefügt wird, diesen Term überkompensiert.
Insofern folgt daraus, dass Bedingung (2) keinen Widerspruch darstellt (und somit auch implizit, dass es für jedes zulässige $\tilde{r}_t$ jeweils mindestens ein R gibt, welches die Bedingungen (i) und (ii) erfüllt.) $\diamond$

Proposition 3.3.3 (Obere Schranke)**.**
Unter den eben genannten Einschränkungen gilt im superkritischen Fall für die Selbstüberschneidungslokalzeiten ℓ_t, dass:

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{\tilde{r}_t^{1/p}} \log \mathbb{P}(\|\ell_t\|_p^p \geq \tilde{r}_t) \leq - \inf_{f, \|f\|_2 = 1} \left\{ \frac{\langle f, Af \rangle}{\|f\|_{2p}^2} \right\}.$$

Beweis.
Der erste Schritt besteht im Periodisieren der Irrfahrt. Falls $(S_t)_{t\geq 0}$ die zu betrachtende Irrfahrt bezeichnet, so sei deren Projektion auf den Torus mit Radius R bezeichnet als $(S_t)_{t\geq 0}^{(R)}$. (D.h.

$(S_t)_{t\geq 0}^{(R)}$ bezeichnet die Irrfahrt auf der Box $B_R := (-R, R]^d$ mit periodischen Randbedingungen.) Man erhält für die Lokalzeiten:

$$\begin{aligned}\|\ell_t\|_p^p &= \sum_{y\in(-R,R]^d, z\in\mathbb{Z}^d} \ell_t^p(y+2Rz)\\ &\leq \sum_{y\in B_R} \big(\sum_{z\in\mathbb{Z}^d} \ell_t(y+2Rz)\big)^p\\ &= \sum_{y\in B_R} \ell_t^{(R)}(y)^p\\ &= \|\ell_t^{(R)}\|_p^p\end{aligned}$$

Die Anwendung der Markov-Ungleichung liefert für alle $k \in \mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\|\ell_t\|_p^p > \tilde{r}_t) &\leq \mathbb{P}(\|\ell_t^{(R)}\|_p^p > \tilde{r}_t)\\ &\leq \tilde{r}_t^{-k}\mathbb{E}\left[\|\ell_t^{(R)}\|_p^{kp}\right]\end{aligned} \tag{3.3.2}$$

Die Abschätzung des Erwartungswertes von $\|\ell_t^{(R)}\|_p^{kp}$ erfolgt nun anhand der folgenden Lemmas.

Lemma 3.3.4 (Abschätzung des Erwartungswert mittels Greenscher Funktionen)**.**
Für den Erwartungswert $\mathbb{E}\left[\|\ell_t^{(R)}\|_p^{kp}\right]$ gilt folgende obere Abschätzung:

$$\mathbb{E}\left[\|\ell_t^{(R)}\|_p^{kp}\right] \leq \sum_{\substack{\nu: B_R\times B_R\to(kp)^{-1}\mathbb{N}_0\\ \sum_{x,y}\nu(x,y)=1\\ \sum_y \nu(x,y)=\sum_y \nu(y,x)\in k^{-1}\mathbb{N}_0}} \frac{k!kp}{\prod_x(k\bar{\nu}(x))!}\frac{\prod_x(kp\bar{\nu}(x))!^2}{\prod_{x,y}(kp\nu(x,y))!}\mathrm{e}^{\lambda t+o(k)}\prod_{x,y\in B_R} G_{R,\lambda}(x,y)^{kp\nu(x,y)}$$

wobei $G_{R,\lambda}$ die folgende Version einer Greenschen Funktion bezeichnet:

$$G_{R,\lambda}(x,y) := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda r}\mathbb{P}(S_r^{(R)} = y-x)\mathrm{d}r$$

Beweis.
Zunächst formuliere man den Erwartungswert wiefolgt um:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\|\ell_t^{(R)}\|_p^{kp}\right] &= \mathbb{E}\left[\big(\sum_{x\in B_R}\ell_t^{(R)}(x)^p\big)^k\right]\\ &= \sum_{x_1,\dots x_k\in B_R}\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^k \ell_t^{(R)}(x_i)^p\right]\\ &= \sum_{x_1,\dots x_k\in B_R}\mathbb{E}\left[\prod_{x\in B_R}\ell_t^{(R)}(x)^{p\#\{i:x_i=x\}}\right]\end{aligned}$$

Dabei ist impliziert, dass $k \in \mathbb{N}$ gilt. Im nächsten Schritt wird die Summe über die $x_1, \ldots, x_k$ ersetzt. Dazu sei die Funktion $\beta : B_R \to \mathbb{N}_0$ so definiert, dass $\sum_x \beta_x = k$ gilt. Man erhält:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\|\ell_t^{(R)}\|_p^{kp}\right] &= \sum_{\substack{\beta: B_R \to \mathbb{N}_0 \\ \sum_x \beta_x = k}} \mathbb{E}\left[\prod_{x \in B_R} \ell_t^{(R)}(x)^{p\beta_x}\right] \#\{(x_1, \ldots, x_k) \in B_R^k : \#\{i : x_i = x\} = \beta_x\} \\
&= \sum_{\substack{\beta: B_R \to \mathbb{N}_0 \\ \sum_x \beta_x = k}} \mathbb{E}\left[\prod_{x \in B_R} \ell_t^{(R)}(x)^{p\beta_x}\right] \frac{k!}{\prod_x \beta_x!} \qquad (3.3.3)
\end{aligned}$$

Um den letzten Schritt zu verstehen, sei daran erinnert, dass für jedes β genau $\frac{k!}{\prod_x \beta_x!}$ zu diesem β passende k-Tupel $(x_1, \ldots, x_k)$ existieren.
Für die nächsten Schritte definiere man s_β als ein kp-Tupel, welches aus allen $s_{x,i}$ besteht, auf die die folgenden Bedingungen zutreffen. Zum einen sei $\beta_x > 0$ gefordert und zum anderen soll $i \in \{1, \ldots, p\beta_x\}$ gelten. (Es ist klar, dass es genau kp dieser $s_{x,i}$ gibt.) An dieser Stelle muss mit der Ganzahligkeit von p (Bedingung (1)) eine der härtesten Einschränkungen eingeführt werden. Es ist bedauerlicherweise nicht gelungen, diese Bedingung aufzuweichen. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\|\ell_t^{(R)}\|_p^{kp}\right] &= \sum_{\substack{\beta: B_R \to \mathbb{N}_0 \\ \sum_x \beta_x = k}} \frac{k!}{\prod_x \beta_x!} \mathbb{E}\left[\prod_{x \in B_R} \prod_{i=1}^{p\beta_x} \ell_t^{(R)}(x)\right] \\
&= \sum_{\substack{\beta: B_R \to \mathbb{N}_0 \\ \sum_x \beta_x = k}} \frac{k!}{\prod_x \beta_x!} \mathbb{E}\left[\prod_{x \in B_R} \prod_{i=1}^{p\beta_x} \int_0^t \mathbb{1}_{\{S^{(R)}_{s_{x,i}} = x\}} \mathrm{d}s_{x,i}\right] \\
&= \sum_{\substack{\beta: B_R \to \mathbb{N}_0 \\ \sum_x \beta_x = k}} \frac{k!}{\prod_x \beta_x!} \mathbb{E}\left[\int_{[0,t]^{kp}} \prod_{x \in B_R} \prod_{i=1}^{p\beta_x} \mathbb{1}_{\{S^{(R)}_{s_{x,i}} = x\}} \mathrm{d}s_\beta\right] \\
&= \sum_{\substack{\beta: B_R \to \mathbb{N}_0 \\ \sum_x \beta_x = k}} \frac{k!}{\prod_x \beta_x!} \mathbb{E}\left[\int_{[0,t]^{kp}} \mathbb{1}_{\{S^{(R)}_{s_{x,i}} = x,\ \forall x \in B_R, \forall i = 1, \ldots, p\beta_x\}} \mathrm{d}s_\beta\right] \\
&= \sum_{\substack{\beta: B_R \to \mathbb{N}_0 \\ \sum_x \beta_x = k}} \frac{k!}{\prod_x \beta_x!} \int_{[0,t]^{kp}} \mathbb{P}\left[S^{(R)}_{s_{x,i}} = x,\ \forall x \in B_R, \forall i = 1, \ldots, p\beta_x\right] \mathrm{d}s_\beta
\end{aligned}$$

Im nächsten Schritt sei die Sortierung der $(s_{x,i})$ nach deren Größe vorbereitet. Dazu seien die Integrationsvariablen anstelle von $s_{x,i}$ mit $s_1, \ldots, s_{kp}$ bezeichnet. Jedoch darf dabei die Verbindung zu den entsprechenden x nicht verloren werden und es sei deshalb für jedes β eine feste Funktion $\rho_\beta : \{1, \ldots, kp\} \to B_R$ eingeführt, so dass jedes $x \in B_R$ exakt $p\beta_x$ Urbilder hat, d.h. $\forall x \in B_R : \#\rho_\beta^{-1}(x) = p\beta_x$. (Man beachte, dass $\rho_\beta^{-1}(x)$ die Menge aller Urbilder der nicht injektiven Funktion ρ_β bezeichne.) Man erhält:

$$\mathbb{E}\left[\|\ell_t^{(R)}\|_p^{kp}\right] = \sum_{\substack{\beta: B_R \to \mathbb{N}_0 \\ \sum_x \beta_x = k}} \frac{k!}{\prod_x \beta_x!} \int_{[0,t]^{kp}} \mathbb{P}\left[S^{(R)}_{s_i} = \rho_\beta(i),\ \forall i = 1, \ldots, kp\right] \mathrm{d}s_1 \ldots \mathrm{d}s_{kp}$$

Im nächsten Schritt sei, wie bereits angekündigt, die Sortierung der $(s_i)_i$ vorgenommen. Für jede Realisierung der $s_1, \ldots, s_{kp}$ exisitiert eine eindeutige Sortierung nach deren Größe, wenn man voraussetzt, dass alle s_i verschiedene Werte annehmen. Dies stellt jedoch keine relevante Einschränkung dar, da die Menge aller kp-Tupel $(s_1, \ldots, s_{kp})$ die mindestens ein $s_i = s_j (i \neq j)$ enthalten eine Nullmenge ist. Aus diesen Gründen kann das Integral über alle kp-Tupel ersetzt werden durch das Integral über alle geordneten Tupel $(s_1 < \ldots < s_{kp})$, sofern gleichzeitig eine Summe über alle Permutationen $\sigma \in S_{kp}$ eingeführt wird. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\|\ell_t^{(R)}\|_p^{kp}\right] &= \sum_{\substack{\beta: B_R \to \mathbb{N}_0 \\ \sum_x \beta_x = k}} \frac{k!}{\prod_x \beta_x!} \sum_{\sigma \in S_{kp}} \int_{0<s_1<\ldots<s_{kp}<t} \mathbb{P}\left[S_{s_{\sigma(i)}}^{(R)} = \rho_\beta(i),\ \forall i = 1, \ldots, kp\right] \mathrm{d}s_1 \ldots \mathrm{d}s_{kp} \\
&= \sum_{\substack{\beta: B_R \to \mathbb{N}_0 \\ \sum_x \beta_x = k}} \frac{k!}{\prod_x \beta_x!} \sum_{\sigma \in S_{kp}} \int_{0<s_1<\ldots<s_{kp}<t} \mathbb{P}\left[S_{s_i}^{(R)} = \rho_\beta(\sigma(i)),\ \forall i = 1, \ldots, kp\right] \mathrm{d}s_1 \ldots \mathrm{d}s_{kp} \\
&= \sum_{\substack{\beta: B_R \to \mathbb{N}_0 \\ \sum_x \beta_x = k}} \frac{k!}{\prod_x \beta_x!} \sum_{\sigma \in S_{kp}} \int_{0<s_1<\ldots<s_{kp}<t} \\
&\qquad \mathbb{P}\left[S_{s_i}^{(R)} - S_{s_{i-1}}^{(R)} = \rho_\beta(\sigma(i)) - \rho_\beta(\sigma(i-1)),\ \forall i = 1, \ldots, kp\right] \mathrm{d}s_1 \ldots \mathrm{d}s_{kp}
\end{aligned}$$

Dabei sei impliziert definiert, dass $\sigma(0) := 0$ und $\rho_\beta(0) := 0$ gelte und es sei daran erinnert, dass $S_0^{(R)} := 0$ gilt. Die einzelnen Terme $S_{s_i}^{(R)} - S_{s_{i-1}}^{(R)}$ sind nun wegen der Markov-Eigenschaft voneinander unabhängig. Dies ermöglicht folgende Umformungen:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\|\ell_t^{(R)}\|_p^{kp}\right] &= \sum_{\substack{\beta: B_R \to \mathbb{N}_0 \\ \sum_x \beta_x = k}} \frac{k!}{\prod_x \beta_x!} \sum_{\sigma \in S_{kp}} \int_{0<s_1<\ldots<s_{kp}<t} \prod_{i=1}^{kp} \mathbb{P}\left[S_{s_i}^{(R)} - S_{s_{i-1}}^{(R)} = \rho_\beta(\sigma(i)) - \rho_\beta(\sigma(i-1))\right] \mathrm{d}s_1 \ldots \mathrm{d}s_{kp} \\
&= \sum_{\substack{\beta: B_R \to \mathbb{N}_0 \\ \sum_x \beta_x = k}} \frac{k!}{\prod_x \beta_x!} \sum_{\sigma \in S_{kp}} \int_{0<s_1<\ldots<s_{kp}<t} \prod_{i=1}^{kp} \mathbb{P}\left[S_{s_i - s_{i-1}}^{(R)} = \rho_\beta(\sigma(i)) - \rho_\beta(\sigma(i-1))\right] \mathrm{d}s_1 \ldots \mathrm{d}s_{kp} \\
&= \sum_{\substack{\beta: B_R \to \mathbb{N}_0 \\ \sum_x \beta_x = k}} \frac{k!}{\prod_x \beta_x!} \sum_{\sigma \in S_{kp}} \int_{[0,\infty]^{kp}} \mathbb{1}_{\{\sum_{i=1}^{kp} t_i < t\}} \prod_{i=1}^{kp} \mathbb{P}\left[S_{t_i}^{(R)} = \rho_\beta(\sigma(i)) - \rho_\beta(\sigma(i-1))\right] \mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_{kp} \\
&\leq \sum_{\substack{\beta: B_R \to \mathbb{N}_0 \\ \sum_x \beta_x = k}} \frac{k!}{\prod_x \beta_x!} \sum_{\sigma \in S_{kp}} \int_{[0,\infty]^{kp}} \mathrm{e}^{\lambda t - \sum_{i=1}^{kp} \lambda t_i} \prod_{i=1}^{kp} \mathbb{P}\left[S_{t_i}^{(R)} = \rho_\beta(\sigma(i)) - \rho_\beta(\sigma(i-1))\right] \mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_{kp}
\end{aligned}$$

An dieser Stelle sei nun die folgende Version der Greenschen Funktion eingeführt:

$$G_{R,\lambda}(x, y) := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda r} \mathbb{P}(S_r^{(R)} = y - x) \mathrm{d}r.$$

Trivialerweise ist $G_{R,\lambda}(x, y)$ aufgrund der Exponentialfunktion im Integranden stets endlich. Man erhält also den folgenden Ausdruck für die obere Schranke:

$$\mathbb{E}\left[\|\ell_t^{(R)}\|_p^{kp}\right] \leq \sum_{\substack{\beta: B_R \to \mathbb{N}_0 \\ \sum_x \beta_x = k}} \frac{k!}{\prod_x \beta_x!} \sum_{\sigma \in S_{kp}} \mathrm{e}^{\lambda t} \prod_{i=1}^{kp} G_{R,\lambda}\left[\rho_\beta(\sigma(i-1)), \rho_\beta(\sigma(i))\right]$$

Im nun folgenden Schritt soll σ leicht modifiziert werden. Bislang ist σ eine Permutation aus S_{kp} mit der Zusatzbedingung, dass $\sigma(0) = 0$ gilt. Dies sei nun durch $\sigma(0) := \sigma(kp)$ ersetzt um sicherzustellen, dass durch σ jeder Index in obiger Formel genau zweimal angesprochen wird. (Bisher taucht für $i = kp$ das entsprechende $\sigma(kp)$ nur einmal an der zweiten Stelle der Greenschen Funktion, jedoch niemals an dessen erster Stelle auf.) Bei dieser Neudefinition entsteht ein Fehler von der Größe von $\frac{G_{R,\lambda}[\rho_\beta(0),\rho_\beta(\sigma(1))]}{G_{R,\lambda}[\rho_\beta(\sigma(kp)),\rho_\beta(\sigma(1))]}$, der jedoch gemäß [HKM06, Beweis von Prop. 2.1] durch $\mathrm{e}^{o(k)}$ beschränkt ist.
Zudem seien im Folgenden empirische Paarmaße $\nu : B_R \times B_R \to \mathbb{N}_0$ eingeführt, die der Bedingung

$$\sum_y \nu(x,y) = \sum_y \nu(y,x) = p\beta_x$$

genügen. Man beachte, dass für jede Folge $(\rho_\beta(\sigma(i-1)), \rho_\beta(\sigma(i)))_{i=1}^{kp}$ genau ein passendes ν existiert, so dass

$$\forall (x,y) : \nu(x,y) = \#\{i : (\rho_\beta(\sigma(i-1)), \rho_\beta(\sigma(i))) = (x,y)\}$$

gilt. Man erhält damit:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\|\ell_t^{(R)}\|_p^{kp}\right] \leq & \sum_{\substack{\beta: B_R \to \mathbb{N}_0 \\ \sum_x \beta_x = k}} \frac{k!}{\prod_x \beta_x!} \sum_{\sigma \in S_{kp}} \mathrm{e}^{\lambda t + o(k)} \prod_{x,y \in B_R} G_{R,\lambda}(x,y)^{\#\{i: (\rho_\beta(\sigma(i-1)),\rho_\beta(\sigma(i)))=(x,y)\}} \\
= & \sum_{\substack{\beta: B_R \to \mathbb{N}_0 \\ \sum_x \beta_x = k}} \frac{k!}{\prod_x \beta_x!} \sum_{\sigma \in S_{kp}} \sum_{\substack{\nu: B_R \times B_R \to \mathbb{N}_0 \\ \sum_y \nu(x,y) = \sum_y \nu(y,x) = p\beta_x}} \mathbb{1}_{\{\forall (x,y):\ \nu(x,y) = \#\{i:\ (\rho_\beta(\sigma(i-1)),\rho_\beta(\sigma(i)))=(x,y)\}\}} \\
& \mathrm{e}^{\lambda t + o(k)} \prod_{x,y \in B_R} G_{R,\lambda}(x,y)^{\nu(x,y)} \\
= & \sum_{\substack{\beta: B_R \to \mathbb{N}_0 \\ \sum_x \beta_x = k}} \frac{k!}{\prod_x \beta_x!} \sum_{\substack{\nu: B_R \times B_R \to \mathbb{N}_0 \\ \sum_y \nu(x,y) = \sum_y \nu(y,x) = p\beta_x}} \left[\sum_{\sigma \in S_{kp}} \mathbb{1}_{\{\forall (x,y):\ \nu(x,y) = \#\{i:\ (\rho_\beta(\sigma(i-1)),\rho_\beta(\sigma(i)))=(x,y)\}\}}\right] \\
& \mathrm{e}^{\lambda t + o(k)} \prod_{x,y \in B_R} G_{R,\lambda}(x,y)^{\nu(x,y)}
\end{aligned}$$

Die nächsten Bemühungen zielen darauf ab, eine obere Schranke für den Ausdruck in den Klammern zu finden. Dazu seien Folgen $(w_1, \ldots, w_{kp})$ eingeführt, wobei wiederum $w_0 := w_{kp}$ definiert sei. Es folgt:

$$\begin{aligned}
& \sum_{\sigma \in S_{kp}} \mathbb{1}_{\{\forall (x,y):\ \nu(x,y) = \#\{i:\ (\rho_\beta(\sigma(i-1)),\rho_\beta(\sigma(i)))=(x,y)\}\}} \\
& = \sum_{\sigma \in S_{kp}} \sum_{w_1,\ldots,w_{kp} \in B_R} \mathbb{1}_{\{\forall i: (w_{i-1},w_i) = (\rho_\beta(\sigma(i-1)),\rho_\beta(\sigma(i)))\}} \mathbb{1}_{\{\forall (x,y):\ \nu(x,y) = \#\{i:\ (w_{i-1},w_i)=(x,y)\}\}} \\
& = \sum_{w_1,\ldots,w_{kp} \in B_R} \mathbb{1}_{\{\forall (x,y):\ \nu(x,y) = \#\{i:\ (w_{i-1},w_i)=(x,y)\}\}} \sum_{\sigma \in S_{kp}} \mathbb{1}_{\{\forall i: (w_{i-1},w_i) = (\rho_\beta(\sigma(i-1)),\rho_\beta(\sigma(i)))\}}
\end{aligned}$$

Man betrachte zunächst die letzte Summe. Für jedes $x \in B_R$ existieren genau $p\beta_x$ Urbilder bezogen auf die Funktion $\rho_\beta \circ \sigma$ (d.h. $i \in \{1, \ldots, kp\}$, so dass $\rho_\beta(\sigma(i)) = x$). Da σ bijektiv ist, bedeutet dies, dass für jedes $i \in \{1, \dots, kp\}$ exakt $p\beta_{\rho_\beta(\sigma(i))}$ Möglichkeiten für den Wert von $\sigma(i)$ existieren, ohne dass sich letzendlich der Wert von $\rho_\beta(\sigma(i)) = x$ ändert. Demzufolge kann die Summe über die σ ersetzt werden durch den Faktor $\prod_{x\in B_R}(p\beta_x)!$. Für die erste Summe sei auf [dH00, Beweis von Theorem II.8, Lemma II.10] verwiesen und man erhält die folgende obere Schranke:

$$\#\{(w_1,\dots,w_{kp}) : \forall x,y \in B_R \nu(x,y) = \#\{i:\ (w_{i-1},w_i) = (x,y)\}\} \le kp\frac{\prod_x (p\beta_x)!}{\prod_{x,y}\nu(x,y)!}$$

Die Verwendung dieser Abschätzung liefert nun:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\|\ell_t^{(R)}\|_p^{kp}\right] &\le \sum_{\substack{\beta:B_R\to\mathbb{N}_0\\ \sum_x \beta_x = k}} \frac{k!}{\prod_x \beta_x!} kp \frac{\prod_x (p\beta_x)!^2}{\prod_{x,y}\nu(x,y)!} \sum_{\substack{\nu:B_R\times B_R\to\mathbb{N}_0\\ \sum_y \nu(x,y)=\sum_y \nu(y,x)=p\beta_x}} \mathrm{e}^{\lambda t+o(k)} \prod_{x,y\in B_R} G_{R,\lambda}(x,y)^{\nu(x,y)}\\
&= \sum_{\substack{\beta:B_R\to\mathbb{N}_0\\ \sum_x \beta_x = k}} \sum_{\substack{\nu:B_R\times B_R\to\mathbb{N}_0\\ \sum_y \nu(x,y)=\sum_y \nu(y,x)=p\beta_x}} \frac{k!kp}{\prod_x \beta_x!}\frac{\prod_x (p\beta_x)!^2}{\prod_{x,y}\nu(x,y)!}\mathrm{e}^{\lambda t+o(k)} \prod_{x,y\in B_R} G_{R,\lambda}(x,y)^{\nu(x,y)}
\end{aligned}$$

An dieser Stelle erkennt man, dass β nur das mit einem Faktor versehene Marginalmaß von ν ist. In einer Formel ausgedrückt bedeutet dies, dass $\beta_x = p^{-1}\sum_y \nu(x,y) = p^{-1}\sum_y \nu(y,x)$ gilt. (Man sieht auch, dass das rechte und das linke Marginalmaß gleich sind, welches die Berechtigung liefert von einem Marginalmaß zu sprechen.) Um dies auch bei den weiteren Umformung hervorzuheben, werde nun anstelle von $p\beta_x$ künftig die Formulierung $\bar\nu(x) := \sum_y \nu(x,y)$ verwendet. In einem zweiten Schritt sei dann ν normalisiert und es kann anschließend ersetzt werden durch $(kp)^{-1}\nu$. Dies beendet dann letztendlich den Beweis des Lemmas.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\|\ell_t^{(R)}\|_p^{kp}\right] &\le \sum_{\substack{\nu:B_R\times B_R\to\mathbb{N}_0\\ \sum_{x,y}\nu(x,y)=kp\\ \sum_y \nu(x,y)=\sum_y \nu(y,x)\in p\mathbb{N}_0}} \frac{k!kp}{\prod_x (p^{-1}\bar\nu(x))!}\frac{\prod_x (\bar\nu(x))!^2}{\prod_{x,y}\nu(x,y)!}\mathrm{e}^{\lambda t+o(k)} \prod_{x,y\in B_R} G_{R,\lambda}(x,y)^{\nu(x,y)}\\
&\le \sum_{\substack{\nu:B_R\times B_R\to(kp)^{-1}\mathbb{N}_0\\ \sum_{x,y}\nu(x,y)=1\\ \sum_y \nu(x,y)=\sum_y \nu(y,x)\in k^{-1}\mathbb{N}_0}} \frac{k!kp}{\prod_x (k\bar\nu(x))!}\frac{\prod_x (kp\bar\nu(x))!^2}{\prod_{x,y}(kp\nu(x,y))!}\mathrm{e}^{\lambda t+o(k)} \prod_{x,y\in B_R} G_{R,\lambda}(x,y)^{kp\nu(x,y)}
\end{aligned}$$

□

Nach diesem wichtigen Zwischenschritt und der Nutzung der empirischen Paarmaße besteht das nächste Ziel darin, die obere Schranke mit Hilfe einer bestimmten Varationsformel darzustellen. Dafür sei die folgende Abkürzung verwendet:

$$\chi_{(\lambda,R)} := \inf_{\nu\in\mathcal{M}_1(B_R)}\left\{\langle\bar\nu, \log(\bar\nu)\rangle - p\left\langle\nu, \log\frac{\bar\nu\times\bar\nu}{\nu}\right\rangle - \left\langle\nu, \log G_{R,\lambda}^p\right\rangle\right\} \tag{3.3.4}$$

Damit entspricht der nächste Schritt in Bezug auf die obere Schranke der Aussage des folgenden Lemmas.

Lemma 3.3.5 (Einführung der Variationsformel unter Nutzung der Stirling'schen Formel)**.** *Unter den bekannten Voraussetzungen gilt nun:*

$$\mathbb{E}\left[\|\ell_t^{(R)}\|_p^{kp}\right] \le \mathrm{e}^{\lambda t+o(k)}(k!)^p p^{pk}\mathrm{e}^{-k\chi_{(\lambda,R)}}.$$

Beweis.
Zunächst nutze man die Stirling'sche Formel um sich der Fakultäten zu entledigen. Statt der bekannten Abschätzung (3.3.5) sei dabei eine leicht schwächere Version (3.3.6) verwendet:

$$\mathrm{e}^{1/(12n+1)}\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < \mathrm{e}^{1/12n}\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \tag{3.3.5}$$

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < \mathrm{e}^{o(n)}\left(\frac{n}{e}\right)^n \tag{3.3.6}$$

Es sei an dieser Stelle bemerkt, dass es viele Terme $\bar{\nu}(x), \nu(x,y)$ in der Formel von Lemma 3.3.4 gibt, die den Wert Null annehmen und so zu einem Faktor $0! = 1$ führen. Diese Terme tragen nichts zu den betreffenden Produkten bei. Aus technischer Sicht ist es jedoch nötig, diese Faktoren auszuschließen (damit wir Stirling anwenden können und eine Division durch Null ausschließen). Von nun an seien also die Produkte implizit mit der Zusatzbedingung versehen, dass $\bar{\nu}(x), \nu(x,y) \neq 0$ gilt, ohne dass wir dieses explizit in jeder Formel notieren. Man erhält also aus Lemma 3.3.4:

$$\mathbb{E}\left[\|\ell_t^{(R)}\|_p^{kp}\right] \leq \sum_{\substack{\nu: B_R\times B_R\to(kp)^{-1}\mathbb{N}_0\\ \sum_{x,y}\nu(x,y)=1\\ \sum_y \nu(x,y)=\sum_y \nu(y,x)\in k^{-1}\mathbb{N}_0}} \mathrm{e}^{\lambda t+o(k)} \prod_{x,y\in B_R} G_{R,\lambda}(x,y)^{kp\nu(x,y)}$$
$$\frac{kp\mathrm{e}^{o(k)}\left(\frac{k}{e}\right)^k}{\prod_x\left(\frac{k\bar{\nu}(x)}{e}\right)^{k\bar{\nu}(x)}} \frac{\prod_x\left(\mathrm{e}^{o(kp\bar{\nu}(x))}\left(\frac{kp\bar{\nu}(x)}{e}\right)^{kp\bar{\nu}(x)}\right)^2}{\prod_{x,y}\left(\frac{kp\nu(x,y)}{e}\right)^{kp\nu(x,y)}}$$

An dieser Stelle sei bemerkt, dass wegen $\sum_x \bar{\nu}(x) = 1$ trivialerweise sowohl $\prod_x \mathrm{e}^{o(kp\bar{\nu}(x))} = e^{o(k)}$ als auch $\prod_x (k/e)^{k\bar{\nu}(x)} = (k/e)^k$ gilt. Es ergibt sich daher:

$$\mathbb{E}\left[\|\ell_t^{(R)}\|_p^{kp}\right] \leq \sum_{\substack{\nu: B_R\times B_R\to(kp)^{-1}\mathbb{N}_0\\ \sum_{x,y}\nu(x,y)=1\\ \sum_y \nu(x,y)=\sum_y \nu(y,x)\in k^{-1}\mathbb{N}_0}} \mathrm{e}^{\lambda t+o(k)} \prod_{x,y\in B_R} G_{R,\lambda}(x,y)^{kp\nu(x,y)}$$
$$\frac{kp}{\prod_x\left(\bar{\nu}(x)\right)^{k\bar{\nu}(x)}} \frac{\prod_x\left(\frac{kp\bar{\nu}(x)}{e}\right)^{2kp\bar{\nu}(x)}}{\prod_{x,y}\left(\frac{kp\nu(x,y)}{e}\right)^{kp\nu(x,y)}}$$
$$= \sum_{\substack{\nu: B_R\times B_R\to(kp)^{-1}\mathbb{N}_0\\ \sum_{x,y}\nu(x,y)=1\\ \sum_y \nu(x,y)=\sum_y \nu(y,x)\in k^{-1}\mathbb{N}_0}} \frac{kp\mathrm{e}^{\lambda t+o(k)}}{\prod_x\left(\bar{\nu}(x)\right)^{k\bar{\nu}(x)}} \frac{\left(\frac{kp}{e}\right)^{kp}\prod_x\left(\bar{\nu}(x)\right)^{2kp\bar{\nu}(x)}}{\prod_{x,y}\left(\nu(x,y)\right)^{kp\nu(x,y)}} \prod_{x,y\in B_R} G_{R,\lambda}(x,y)^{kp\nu(x,y)}$$

Im nächsten Schritt sollen nun die verbleibenden Produkte genauer untersucht werden. Unter

Verwendung der Beziehung $\prod_{x,y}(\bar{\nu}(x)\bar{\nu}(y))^{\nu(x,y)} = \prod_x \bar{\nu}(x)^{\bar{\nu}(x)} \prod_y \bar{\nu}(y)^{\bar{\nu}(y)}$ erhält man:

$$\prod_x \frac{1}{(\bar{\nu}(x))^{k\bar{\nu}(x)}} \prod_{x,y} \frac{(\bar{\nu}(x)\bar{\nu}(y))^{kp\nu(x,y)}}{(\nu(x,y))^{kp\nu(x,y)}} \prod_{x,y\in B_R} G_{R,\lambda}(x,y)^{kp\nu(x,y)}$$
$$= \exp\left\{-\sum_x k\bar{\nu}(x)\log(\bar{\nu}(x)) + \sum_{x,y} kp\nu(x,y)\log\frac{(\bar{\nu}(x)\bar{\nu}(y))}{(\nu(x,y))} + \sum_{x,y\in B_R} k\nu(x,y)\log G_{R,\lambda}(x,y)^p\right\}$$
$$= \exp\left\{-k\left\{\langle\bar{\nu},\log(\bar{\nu})\rangle - p\left\langle\nu,\log\frac{\bar{\nu}\times\bar{\nu}}{\nu}\right\rangle - \left\langle\nu,\log G^p_{R,\lambda}\right\rangle\right\}\right\}$$

Wenn diese Umformung in der vorherigen Gleichung verwendet wird, erhält man den nachfolgenden Ausdruck. Der Einfachheit halber sei $(k!)^p$ eingeführt und die Tatsache benutzt, dass $kp \leq \mathrm{e}^{o(k)}$ gilt. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\|\ell_t^{(R)}\|_p^{kp}\right] &\leq \mathrm{e}^{\lambda t+o(k)}kp\left(\frac{kp}{e}\right)^{kp} \sum_{\substack{\nu:B_R\times B_R\to(kp)^{-1}\mathbb{N}_0\\ \sum_{x,y}\nu(x,y)=1\\ \sum_y\nu(x,y)=\sum_y\nu(y,x)\in k^{-1}\mathbb{N}_0}} \\ &\quad \exp\left\{-k\left\{\langle\bar{\nu},\log(\bar{\nu})\rangle - p\left\langle\nu,\log\frac{\bar{\nu}\times\bar{\nu}}{\nu}\right\rangle - \left\langle\nu,\log G^p_{R,\lambda}\right\rangle\right\}\right\} \\ &\leq \mathrm{e}^{\lambda t+o(k)}(k!)^p p^{pk} \sum_{\substack{\nu:B_R\times B_R\to(kp)^{-1}\mathbb{N}_0\\ \sum_{x,y}\nu(x,y)=1\\ \sum_y\nu(x,y)=\sum_y\nu(y,x)\in k^{-1}\mathbb{N}_0}} \\ &\quad \exp\left\{-k\left\{\langle\bar{\nu},\log(\bar{\nu})\rangle - p\left\langle\nu,\log\frac{\bar{\nu}\times\bar{\nu}}{\nu}\right\rangle - \left\langle\nu,\log G^p_{R,\lambda}\right\rangle\right\}\right\}\end{aligned} \tag{3.3.7}$$

Der nächste Schritt besteht darin, die Summe über alle ν's abzuschätzen. Es ist (erstaunlicherweise) ausreichend, diese Summe gegen das Produkt aus Anzahl der Summanden und dem größten Summanden abzuschätzen.
Die Anzahl der ν's kann wiederum grob abgeschätzt werden durch die Anzahl der Werte, welche $\nu(x,y)$ annehmen kann (dies sind kp Werte) potenziert mit der Anzahl der verschiedenen Tupel (x,y) (die sich aus $|B_R|^2 = (2R)^{2d}$ ergibt). An dieser Stelle sei bemerkt, dass die Einschränkung (3.3.1) maximal ausgereizt werden muss um den entstehenden Term gegenüber $\mathrm{e}^{o(k)}$ vernachlässigen zu können. (In anderen Worten: $(kp)^{(2R)^{2d}} = \mathrm{e}^{(2R)^{2d}\log(kp)} \ll \mathrm{e}^{o(k)}$.) Desweiteren sei noch notiert, dass aus Gründen der Einfachheit einige der Anforderungen an ν gestrichen werden. Dies ist jedoch im Falle der oberen Schranke irrelevant.
Der größte Summand entsteht einfacherweise durch Übergang zum Supremum (bzw. durch das negative Vorzeichen im Exponenten durch das Infimum über die betreffenden μ).
Mit Hilfe von $\chi_{(\lambda,R)}$ (Definition siehe (3.3.4)) erhält man damit die Behauptung des Lemmas:

$$\mathbb{E}\left[\|\ell_t^{(R)}\|_p^{kp}\right] \leq \mathrm{e}^{\lambda t+o(k)}(k!)^p p^{pk}\mathrm{e}^{-k\chi_{(\lambda,R)}}$$

□

An dieser Stelle sei an die Markov-Ungleichung in (3.3.2) erinnert. Unter Nutzung von Lemma 3.3.5 erhält man damit:

$$\mathbb{P}(\|\ell_t\|_p^p > \tilde{r}_t) \leq \tilde{r}_t^{-k}\mathrm{e}^{\lambda t+o(k)}(k!)^p p^{pk}\mathrm{e}^{-k\chi_{(\lambda,R)}}$$

Es sei daran erinenrt, dass $(k!)^p \leq (\mathrm{e}^{o(k)}\mathrm{e}^{-k}k^k)^p = \mathrm{e}^{o(k)}k^{kp}$ gilt. Zudem wird nun die Geschwindigkeit $\tilde{r}_t$ in Abhängigkeit von k festgelegt. Es sei $k = x\tilde{r}_t^{1/p}$ (beziehungsweise $\tilde{r}_t^{-k} = k^{-kp}x^{kp}$) für ein (im Anschluss zu definierendes) x und es ergibt sich:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\|\ell_t\|_p^p > \tilde{r}_t) &\leq k^{-kp}x^{kp}\mathrm{e}^{\lambda t+o(k)-kp}k^{kp}p^{pk}\mathrm{e}^{-k\chi_{(\lambda,R)}} \\ &= \mathrm{e}^{\lambda t+o(k)}\exp\{kp\log(xp) - k\chi_{(\lambda,R)} - kp\} \\ &= \mathrm{e}^{\lambda t+o(x\tilde{r}_t^{1/p})}\exp\{-\tilde{r}_t^{1/p}[-xp\log(xp) + x\chi_{(\lambda,R)} + xp]\} \qquad (3.3.8)\end{aligned}$$

Für x sei derjenige Wert x_m verwendet, welcher den Term $-xp\log(xp)+x\chi_{(\lambda,R)}+xp$ minimiert. Mit anderen Worten:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left[-xp\log(xp) + x\chi_{(\lambda,R)}\right] &= -p\log(xp) - p + \chi_{(\lambda,R)} + p \\ \Rightarrow x_m &= p^{-1}\mathrm{e}^{\chi_{(\lambda,R)}/p}\end{aligned}$$

Dieser Wert sei nun in Gleichung (3.3.8) eingesetzt und man erhält:

$$\mathbb{P}(\|\ell_t\|_p^p > \tilde{r}_t) \leq \mathrm{e}^{\lambda t+o(x_m\tilde{r}_t^{1/p})}\exp\{-\tilde{r}_t^{1/p}\mathrm{e}^{\chi_{(\lambda,R)}/p}\}$$

Der nächste Schritt besteht nun wiederum in einem Lemma, welches den Zusammenhang zwischen 2 Variationsformeln herstellt. Die Aussage des Lemmas wurde im subkritischen Fall (d.h. $p < d/(d-2)$) bereits in [KM02] bewiesen. Im superkritischen Fall kann sie jedoch analog formuliert werden:

Lemma 3.3.6 (Umformulierung der Variationsformel).
Unter den bisherigen Voraussetzungen und mit den bisherigen Bezeichnern gilt:

$$\chi_{(\lambda,R)}/p \geq -\log \sup_{\|f\|_{(2p)',B_R}=1}\left\{\sum_{x,y} f(x)G_{R,\lambda}(x,y)f(y)\right\}$$

Beweis.
Für den Beweis sei dieselbe Strategie wie in [KM02, Lemma 4.2.] verwendet, welche auf einem Variationsprinzip in [DZ98, Cor. 6.5.10] beruht. Für alle meßbaren $u : B_R^2 \to (0,\infty)$, welche von 0 und ∞ wegbeschränkt sind, gilt:

$$\sum_{x,y\in B_R}\nu(x,y)\log\frac{\nu(x,y)}{\bar{\nu}(x)\bar{\nu}(y)} \geq \sum_{x,y\in B_R}\nu(x,y)\log\frac{u(x,y)}{\sum_{z\in B_R}u(y,z)\bar{\nu}(z)}$$

Dabei sei bemerkt, dass die Summe nur über solche Paare (x,y) betrachtet wird, für die $\nu(x,y) \neq 0$ (und damit auch $(\bar{\nu}(x) \neq 0)$) gilt. Für alle $\varepsilon > 0$ sei folgende Funktion u_ε definiert:

$$u_\varepsilon(x,y) := \frac{G_{R,\lambda}(x,y)}{\bar{\nu}(y)^{\frac{1}{2p}} \wedge \varepsilon}$$

Die Einführung des $\varepsilon > 0$ hat dabei lediglich die Funktion, die Wohldefiniertheit (echt positiver Nenner) zu gewährleisten. Da zudem $G_{R,\lambda} > 0$ und B_R beschränkt (endlich) ist, folgt trivialerweise, dass die nötigen Bedingungen erfüllt sind. Es sei nun $\chi_{(\lambda,R)}$ etwas genauer betrachtet und es ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
\chi_{(\lambda,R)} &= \inf_{\nu\in\mathcal{M}_1(B_R)} \left\{ \langle \bar{\nu}, \log(\bar{\nu})\rangle + p \left\langle \nu, \log \frac{\nu}{\bar{\nu}\times\bar{\nu}} \right\rangle - \left\langle \nu, \log G^p_{R,\lambda} \right\rangle \right\} \\
&= \inf_{\nu\in\mathcal{M}_1(B_R)} \left\{ \sum_x \bar{\nu}(x)\log\bar{\nu}(x) + p\sum_{x,y}\nu(x,y)\log\frac{\nu(x,y)}{\bar{\nu}(x)\bar{\nu}(y)} - \sum_{x,y}\nu(x,y)\log G^p_{R,\lambda}(x,y) \right\} \\
&\geq \inf_{\nu\in\mathcal{M}_1(B_R)} \left\{ \sum_x \bar{\nu}(x)\log\bar{\nu}(x) + p\sum_{x,y}\nu(x,y)\log\frac{u_\varepsilon(x,y)}{\sum_z u_\varepsilon(y,z)\bar{\nu}(z)} - p\sum_{x,y}\nu(x,y)\log G_{R,\lambda}(x,y) \right\} \\
&= \inf_{\nu\in\mathcal{M}_1(B_R)} \left\{ \sum_x \bar{\nu}(x)\log\bar{\nu}(x) + p\sum_{x,y}\nu(x,y)\log\frac{u_\varepsilon(x,y)}{G_{R,\lambda}(x,y)\sum_z u_\varepsilon(y,z)\bar{\nu}(z)} \right\} \\
&= \inf_{\nu\in\mathcal{M}_1(B_R)} \left\{ \sum_x \bar{\nu}(x)\log\bar{\nu}(x) + p\sum_{x,y}\nu(x,y)\log\frac{\frac{G_{R,\lambda}(x,y)}{\bar{\nu}(y)^{\frac{1}{2p}}\wedge\varepsilon}}{G_{R,\lambda}(x,y)\sum_z \frac{G_{R,\lambda}(y,z)}{\bar{\nu}(z)^{\frac{1}{2p}}\wedge\varepsilon}\bar{\nu}(z)} \right\} \\
&= \inf_{\nu\in\mathcal{M}_1(B_R)} \left\{ p\sum_{x,y}\nu(x,y)\log\bar{\nu}^{\frac{1}{p}}(y) - p\sum_{x,y}\nu(x,y)\log\left[\left(\bar{\nu}(y)^{\frac{1}{2p}}\wedge\varepsilon\right)\sum_z G_{R,\lambda}(y,z)\bar{\nu}(z)\left(\bar{\nu}(z)^{\frac{1}{2p}}\wedge\varepsilon\right)^{-1}\right] \right\}
\end{aligned}
$$

Diese Ungleichung gilt nun für alle $\varepsilon > 0$.
Falls nun $\bar{\nu}(y) > 0$ so gilt für hinreichend kleine ε, dass $\bar{\nu}(y)^{\frac{1}{2p}}\wedge\varepsilon = \bar{\nu}^{\frac{1}{2p}}(y)$. Falls nun andererseits $\bar{\nu}(y) = 0$, so folgt automatisch, dass $\nu(x,y) = 0$. Mit anderen Worten, diese Summanden in der Summe über $x, y \in B_R$ werden gar nicht betrachtet, bzw. der Faktor $\nu(x,y)$ sorgt dafür, dass der gesamte Summand Null wird.
Analog kann $\varepsilon > 0$ ignoriert werden, falls $\bar{\nu}(z) > 0$. Im Falle von $\bar{\nu}(z) = 0$ gilt wiederum $\bar{\nu}(z)\left(\bar{\nu}(z)^{\frac{1}{2p}}\wedge\varepsilon\right)^{-1} = 0 = \bar{\nu}(z)^{1-\frac{1}{2p}}$. Zusammengefasst erhält man:

$$
\begin{aligned}
\chi_{(\lambda,R)} &\geq \inf_{\nu\in\mathcal{M}_1(B_R)} \left\{ p\sum_{x,y}\nu(x,y)\log\bar{\nu}^{\frac{1}{p}}(y) - p\sum_{x,y}\nu(x,y)\log\left[\bar{\nu}(y)^{\frac{1}{2p}}\sum_z G_{R,\lambda}(y,z)\bar{\nu}(z)^{1-\frac{1}{2p}}\right] \right\} \\
&= \inf_{\nu\in\mathcal{M}_1(B_R)} \left\{ -p\sum_{x,y}\nu(x,y)\log\left[\bar{\nu}^{\frac{-1}{p}}(y)\bar{\nu}(y)^{\frac{1}{2p}}\sum_z G_{R,\lambda}(y,z)\bar{\nu}(z)^{1-\frac{1}{2p}}\right] \right\} \\
&= \inf_{\nu\in\mathcal{M}_1(B_R)} \left\{ -p\sum_{y}\bar{\nu}(y)\log\left[\bar{\nu}(y)^{\frac{-1}{2p}}\sum_z G_{R,\lambda}(y,z)\bar{\nu}(z)^{1-\frac{1}{2p}}\right] \right\}
\end{aligned}
$$

An dieser Stelle kann die Ungleichung von Jensen angewendet werden. Man beachte, dass $-\log(\cdot)$ eine konvexe Funktion und $\sum_y \bar{\nu}(y) = 1$ gilt. Es ergibt sich daher:

$$
\begin{aligned}
\chi_{(\lambda,R)} &\geq \inf_{\nu\in\mathcal{M}_1(B_R)} \left\{ -p\log\left[\sum_y \bar{\nu}(y)\bar{\nu}(y)^{\frac{-1}{2p}}\sum_z G_{R,\lambda}(y,z)\bar{\nu}(z)^{1-\frac{1}{2p}}\right] \right\} \\
&= \inf_{\nu\in\mathcal{M}_1(B_R)} \left\{ -p\log\left[\sum_{y,z} \bar{\nu}(y)^{1-\frac{1}{2p}} G_{R,\lambda}(y,z)\bar{\nu}(z)^{1-\frac{1}{2p}}\right] \right\}
\end{aligned}
$$

An dieser Stelle definiere man die Funktion $f : B_R \to \mathbb{R}_0^+$ gemäß $f(x) := \bar{\nu}(x)^{1-\frac{1}{2p}}$ und mache sich klar, dass für den konjugierten Exponent $(2p)'$ von $2p$ gilt: $(2p)' = \left(1 - \frac{1}{2p}\right)^{-1}$. Daher folgt trivialerweise:

$$\|f\|_{(2p)',B_R} = \left(\sum_{x\in B_R} f(x)^{\left(1-\frac{1}{2p}\right)^{-1}}\right)^{1-\frac{1}{2p}} = \left(\sum_{x\in B_R} \bar{\nu}(x)\right)^{1-\frac{1}{2p}} = 1.$$

Man erhält also bei Verwendung der Stetigkeit der Logarithmusfunktion:

$$\begin{aligned}\chi_{(\lambda,R)} &\geq \inf_{\|f\|_{(2p)',B_R}=1} \left\{-p\log\left[\sum_{y,z} f(y)G_{R,\lambda}(y,z)f(z)\right]\right\} \\ &= -p\log \sup_{\|f\|_{(2p)',B_R}=1} \left\{\sum_{y,z} f(y)G_{R,\lambda}(y,z)f(z)\right\}\end{aligned}$$

□

Nach Beendigung des Beweises ist an dieser Stelle der weitere Weg vorgezeichnet und die verbleibenden Schritte finden sich zitierfähig in [L10a]. Zum besseren Vergleich sei an dieser Stelle an die Bezeichner aus [L10a] erinnert:

$$\begin{aligned}\rho_1(a,R,t) &:= \sup_{\|f\|_{(2p)',B_R}=1} \left\{\sum_{y,z} f(y)G_{R,\lambda}(y,z)f(z)\right\} \\ \rho_1(a) &:= \limsup_{t\to\infty} \rho_1(a,R,t) \\ \rho_1 &:= \limsup_{a\to 0} \rho_1(a)\end{aligned}$$

Unter Verwendung des vorangegangenen Lemma und mit $\lambda := a\frac{\tilde{r}_t^{1/p}}{t}$ ergibt sich nun:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\|\ell_t\|_p^p > \tilde{r}_t) &\leq \mathrm{e}^{\lambda t + o(x_m \tilde{r}_t^{1/p})} \exp\{-\tilde{r}_t^{1/p} \mathrm{e}^{-\log \rho_1(a,R,t)}\} \\ &= \exp\left\{a\tilde{r}_t^{1/p} + o(x_m\tilde{r}_t^{1/p}) - \tilde{r}_t^{1/p}\rho_1(a,R,t)^{-1}\right\}\end{aligned}$$

Daraus erhält man für $t\to\infty$ unter Berücksichtigung der Definition von $\rho_1(a)$:

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{\tilde{r}_t^{1/p}} \log \mathbb{P}(\|\ell_t\|_p^p > \tilde{r}_t) \leq a - \rho_1(a)^{-1}$$

Diese Gleichung findet sich exakt in [L10a, Abschnitt 3], dem Ende des Beweises der oberen Schranke. Daher konnte eine Alternative zu der von Laurent verwendeten (ursprünglich in [Ca10] entwickelten) Methode genutzt werden, ohne das Eisenbaum Theorem zu verwenden.
Der weitere Verlauf des Beweises folgt dem von Laurent eingeschlagenen Weg. Zunächst wähle man eine Folge $a_n \to 0$ und erhalte:

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{\tilde{r}_t^{1/p}} \log \mathbb{P}(\|\ell_t\|_p^p > \tilde{r}_t) \leq -\rho_1^{-1}$$

Mit Verweis auf [L10a, Prop. 5.1, Prop. 5.3] ist der Beweis der oberen Schranke beendet und es ergibt sich:

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{\tilde{r}_t^{1/p}} \log \mathbb{P}(\|\ell_t\|_p^p > \tilde{r}_t) \leq -\inf_{f,\|f\|_2=1} \left\{\frac{\langle f, -Af\rangle}{\|f\|_{2p}^2}\right\}$$

Um schließlich [L10a, Prop. 5.1, Prop. 5.3] anwenden zu können wird nun die Bedingung (i) benötigt:

$$\begin{aligned} \lambda R^{d/p'} \gg 1 &\Longleftrightarrow a\frac{\tilde{r}_t^{1/p}}{t} R^{\frac{d(p-1)}{p}} \gg 1 \\ &\Longleftrightarrow R^{2d} \gg \left(\frac{t^p}{\tilde{r}_t}\right)^{2/(p-1)} \end{aligned} \tag{3.3.9}$$

Damit ist der Beweis der oberen Schranke beendet. □

Bibliographie

[A08] A. Asselah, Large deviations estimates for self-intersection local times for simple random walk in $\mathbb{Z}^3$, *Probab. Theory Relat. Fields* **141**, 19-45 (2008).

[A09] A. Asselah, Large deviations principle for self-intersection local times for simple random walk in dimension $d > 4$, preprint (2009).

[A10] A. Asselah, Shape transition under excess self-intersections for transient random walks, *Ann. Inst. Henry Poincaré Probab. Stat.* **46:1**, 250-278 (2010).

[AC07] A. Asselah und F. Castell, Random walk in random scenery and self-intersection local times in dimensions $d \geq 5$. *Probab. Theory Relat. Fields* **138**, 1-32 (2007).

[B07] D. Braess, *Finite Elements. Theory, Fast Solvers and Applications in Elasticity Theory* (Finite Elemente. Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie), 4th revised and extended ed. (German), Springer, Berlin (2007).

[BC04] R. Bass und X. Chen, Self-intersection local time: Critical exponent, large deviations, and laws of the iterated logarithm. *Ann. Probab.* **32**, 3221-3247 (2004).

[BHK07] D. Brydges, R. van der Hofstad und W. König, Joint density for the local times of continuous-time Markov chains, *Ann. Probab.* **35:4**, 1307-1332 (2007).

[BK09] M. Becker und W. König, Self-intersection local times of random walks: Exponential moments in subcritical dimensions, *Jour. Theor. Prob.* **22:2**, 365 - 374 (2009).

[BK11] M. Becker und W. König, Moments and distribution of the local times of a transient random walk on $\mathbb{Z}^d$, *Probab. Theory Relat. Fields* **154:3**, 585-605 (2012)

[Ca10] F. Castell, Large deviations for intersection local time in critical dimension, *Ann. Probab.* **38:2**, 927-953 (2010).

[Če07] J. Černý, Moments and distribution of the local times of a two-dimensional random walk, *Stoch. Proc. Appl.* **117**, 262-270 (2007).

[Ch04] X. Chen. Exponential asymptotics and law of the iterated logarithm for intersection local times of random walks. *Ann. Probab.* **32**, 3248-3300 (2004).

[Ch09] X. Chen, *Random Walk Intersections: Large Deviations and Related Topics.* Mathematical Surveys and Monographs, AMS. (2010) Vol. 157, Providence, RI.

[CLM12] F. Castell, C. Laurent, C. Mélot , Exponential moments of self-intersection local times of stable random walks in subcritical dimensions, *arXiv:* 1205.4917 (2012)

[CM09] X. Chen und P. Mörters, Upper tails for intersection local times of random walks in supercritical dimensions, *J. Lond. Math. Soc.* **79**, 186-210 (2009).

[D88] E.B. Dynkin, Self-intersection gauge for random walks and Brownian motions, *Ann. Probab.* **16**, 1-57 (1988).

[DV75] M.D. Donsker und S.R.S. Varadhan, Asymptotic evaluation of certain Markov process expectation for large time I *Comm. Pure Appl. Math.* **28**, 1-47 (1975).

[DV75] M. Donsker und S.R.S. Varadhan, Asymptotics for the Wiener sausage. *Comm. Pure Appl. Math.* **28**, 525–565 (1975).

[DV79] M. Donsker und S.R.S. Varadhan, On the number of distinct sites visited by a random walk, *Comm. Pure Appl. Math.* **32**, 721–747 (1979).

[DZ98] A. Dembo und O. Zeitouni, *Large Deviations Techniques and Applications*, 2nd Edition. Springer, New York (1998).

[F81] K.F. Freed, Polymers as self-avoiding walks, *Ann. Probab.* **9**, 537-556 (1981).

[GKS07] N. Gantert, W. König und Z. Shi, Annealed deviations for random walk in random scenery, *Ann. Inst. Henri Poincaré (B) Prob. Stat.* **43:1**, 47-76 (2007).

[GK05] J. Gärtner und W. König, The parabolic Anderson model. in: J.-D. Deuschel and A. Greven (Eds.), *Interacting Stochastic Systems*, pp. 153-179, Springer, Berlin 2005.

[GM98] J. Gärtner und S. Molchanov, Parabolic problems for the Anderson model. II. Second-order asymptotics and structure of high peaks. *Probab. Theory Relat. Fields* **111**, 17–55 (1998).

[dG79] P.G. de Gennes, *Scaling Concepts in Polymer Physics,* Cornell University Press, Ithaca (1979).

[dH00] F. den Hollander, *Large deviations,* Fields institute Monographs, American Mathematical Society, Providence (2000).

[HKM06] R. van der Hofstad, W. König und P. Mörters, The universality classesin the parabolic Anderson model, *Commun. Math. Phys.* **267:2**, 307-353 (2006).

[K06] W. König, Große Abweichungen, *Vorlesungsskript*, Leipzig (2006).

[Kl06] A. Klenke, *Wahrscheinlichkeitstheorie,* Springer, Berlin (2006).

[KM02] W. König und P. Mörters, Brownian intersection local times: Upper tail asymptotics and thick points, *Ann. Probab.* **30:4**, 1605-1656 (2002).

[K10] W. König, Upper tails of self-intersection local times of random walks: survey of proof techniques, arXiv: 1011.3125, preprint (2010).

[L10a] C. Laurent, Large deviations for self-intersection local times of stable random walks, *Stoc. Proc. Appl.* **120(11)**, 2190-2211 (2010).

[L10b] C. Laurent, Large deviations for self-intersection local times in subcritical dimensions, arXiv: 1011.6486, preprint (2010).

[Le86] J.-F. Le Gall, Propriétés d'intersection des marches aléatoires, I. Convergence vers le temps local d'intersection, *Com. Math. Phys.* **104**, 471-507 (1986).

[MM80] G. Matheron und G. de Marsily, Is transport in porous media always diffusive? A counterexample. *Water Resources Res.* **16**, 901-907 (1980).

[MR06] M. Marcus und J. Rosen, *Markov processes, Gaussian processes, and local times,* Cambridge university press, Cambridge (2006).

[MS81] K. McLeod und J. Serrin, Uniqueness of solutions of semilinear Poisson equations, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **78:11**, 6592–6595 (1981).

[V69] S.R.S. Varadhan, Appendix to *Euclidean quantum field theory*, by K. Symanzik, *Local Quantum Theory* (R. Jost, ed). Academic New York (1969).

[We83] M.I. Weinstein, Nonlinear Schrödinger equations and sharp interpolation estimates, *Commun. Math. Phys.* **87**, 567–576 (1983).

Selbstständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, die vorliegende Dissertation selbständig und ohne unzulässige fremde Hilfe angefertigt zu haben. Ich habe keine anderen als die angeführten Quellen und Hilfsmittel benutzt und sämtliche Textstellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten oder unveröffentlichten Schriften entnommen wurden, und alle Angaben, die auf mündlichen Auskünften beruhen, als solche kenntlich gemacht. Ebenfalls sind alle von anderen Personen bereitgestellten Materialen oder erbrachten Dienstleistungen als solche gekennzeichnet.

Ort, Datum Unterschrift

Publikationsliste

- M. Becker und W. König,
  Self-intersection local times of random walks: Exponential moments in subcritical dimensions,
  Jour. Theor. Prob. **22:2**, 365 - 374 (2009).

- M. Becker und W. König,
  Moments and distribution of the local times of a transient random walk on $\mathbb{Z}^d$,
  Probab. Theory Relat. Fields **154:3**, 585-605 (2012)

Wissenschaftlicher Werdegang des Verfassers

März 2010 - Februar 2013	Doktorandenstelle am Weierstraß-Institut für angewandte Analysis und Stochastik (WIAS)
November 2009	Beendigung des Studiums der Wirtschaftsmathematik Abschlussnote 1,2
Juni 2007	Aufnahme in das Graduiertenkollegs „Analysis, Geometrie und ihre Verbindung zu den Naturwissenschaften“
März 2007	Beendigung des Studiums der Mathematik Abschlussnote 1,1 Auszeichung der Diplomarbeit mit einem Hauptpreis der DMV
April 2005	Aufnahme in die Studienstiftung des deutschen Volkes
Oktober 2004	Fortsetzung des Studiums an der Universität Leipzig Diplomstudiengänge Mathematik und Wirtschaftsmathematik
Oktober 2003 - September 2004	Studium an der Université Paris VII „Denis Diderot“ Stipendiat des DAAD Abschluss „Maitrise de Mathématiques“(frz. Diplom)
Oktober 2001	Beginn eines weiteren Studiums an der Universität Leipzig Diplomstudiengang Mathematik (Nebenfach Informatik)
Oktober 2000	Beginn des Studiums an der Universität Leipzig Diplomstudiengang Wirtschaftsmathematik