UNIVERSITETET I AGDER

-Hva mener du, lærer?

Kommunikasjonsproblemer i matematikk-klasserommet

Anette Frigstad

Veileder
Olav Nygaard

Masteroppgaven er gjennomført som ledd i utdanningen ved Universitetet i Agder og er godkjent som del av denne utdanningen. Denne godkjenningen innebærer ikke at universitetet innestår for de metoder som er anvendt og de konklusjoner som er trukket.

Universitetet i Agder, 2010
Fakultet for teknologi og realfag
Institutt for matematiske fag

Forord

Jeg vil rette en stor takk til min veileder, Olav Nygaard, for all støtte og veiledning underveis i arbeidet med masteroppgaven. I starten var jeg litt usikker, og bekymret over at jeg ikke hadde full oversikt over veien videre i arbeidet med masteroppgaven. Men som du stadig har sagt: *Veien blir til mens man går*. At oppgaven til slutt skulle ende opp med å dreie seg om forbisnakking hadde jeg ikke forestilt meg fra starten av, og nå er jeg glad for at vi ”lot veien bli til underveis”, og at du utfordret meg til å ikke bare følge ei allerede merka løype.

Takk også til fagansvarlige ved videreutdanningskurset for lærere. Dere har vist stor samarbeidsvilje! Undervisningsopplegget ”trekantgjerde” slik det fremstår i dag er resultat av et samarbeid mellom dere og meg, og jeg tror det ble et bedre opplegg nå enn om jeg skulle laget det alene. Det er nyttig å ha noen å diskutere med, noen som ser andre muligheter og kan utfordre meg hvis jeg går meg fast i ett spor. Takk skal dere ha!

Takk til ”Linda” og ”Leo” for at dere lot meg få observere i deres klasser, og takk til elevene for å ha tatt godt imot meg og vært villige til å la meg få se hvordan dere jobber.

Takk for at jeg fikk tilgang til filmer fra de allerede dokumenterte undervisningssekvensene, og for bakgrunnsinformasjon om disse. Ikke minst takk til deltakerne i prosjektet for at dere lot forskere få komme på besøk i deres klasser.

Til medstudenter og ansatte ved Universitetet i Agder: Takk for nyttige innspill og forslag til litteratur om emnet.

Takk også til min farmor, Ruth Frigstad, for korrekturlesing av oppgaven.

Kristiansand, 10.05.2010

Anette Frigstad

Sammendrag

I masteroppgaven min fokuserer jeg på misforståelser/miskommunikasjon i matematikkundervisningen. Jeg har fått tilgang til videoer fra tre klasser (1. klasse, videregående skole) som jobbet med et inquirybasert opplegg i matematikk. Temaet var lineære funksjoner. Jeg har valgt ut ei gruppe elever fra hver klasse, og har analysert tre analoge episoder for hver gruppe. I analysen av disse har jeg lagt vekt på misforståelser som oppstår i forbindelse med tolkningen av oppgavene elevene blir gitt. Basert på erfaringer fra denne analysen har jeg så utformet en oppgave om figurtall som deltakere ved et videreutdanningskurs for lærere har prøvd ut i sine klasser. Oppgaven ble utformet i samarbeid med fagansvarlige på kurset. Jeg har vært til stede da to av lærerne gjennomførte inquirybaserte opplegg med utgangspunkt i denne oppgaven i sine klasser, en 8. klasse og en 9. klasse. Lærerne hadde også laget egne ekstraoppgaver. I 8. klasse ble økta dokumentert med videokamera, mens økta i 9. klasse ble dokumentert ved notater.

Mine forskningsspørsmål er:

Hvordan tolker elevene oppgavene de blir gitt?
Hvilke misforståelser oppstår?
Er lærerne klar over misforståelsene som oppstår, og i så fall, hvordan reagerer de?
Hva blir konsekvensene av disse misforståelsene?

Jeg har funnet at elevene ved flere tilfeller tolket oppgavene annerledes enn lærerne hadde tenkt. En del av misforståelsene som oppstod kan karakteriseres som forbisnakking, og jeg har valgt å skille mellom enveis- og toveisforbisnakking. Enveisforbisnakking dreier seg om tilfeller der noe blir oppfattet annerledes enn den som uttrykte seg hadde tenkt, mens toveisforbisnakking dreier seg om situasjoner der det foregår en interaksjon mellom to eller flere personer, og disse snakker om ulike ting, men tror de snakker om det samme. Tilfellene av forbisnakking som oppstod, var gjerne knyttet til tvetydige oppgaver, eller ord som kan tolkes på flere måter. I de fleste tilfellene ble misforståelsene oppdaget, men ikke alltid. Dersom lærerne oppdaget at elevene hadde tolket en oppgave annerledes enn de hadde tenkt, valgte de på ulike måter å lede elevene til sine tolkninger av oppgaven. En viktig konsekvens av misforståelsene som oppstod var at mye tid gikk vekk.

Universitetet i Agder
Institutt for matematiske fag, 2010
Anette Frigstad

Abstract

In this thesis I focus on misunderstandings/miscommunication in the mathematics classroom. I have been given access to videos of pupils in three classes (first year, videregående skole) working on an inquiry based task in mathematics. The theme was linear functions. I have chosen to analyse three analogous episodes from three groups, one group in each class. In this analysis I have focused on misunderstandings that occur in connection with the students' interpretations of the tasks. Based on what I have learned from this analysis, I have developed a task about shape patterns that teachers attending a professional development course in mathematics have implemented in their classes. This task was developed in collaboration with the tutors responsible for this course. I have observed when two of the teachers have implemented this task in their classes, one eighth grade and one ninth grade. The teachers had also developed some extra tasks. In eighth grade, I used video recording to document the lesson, while in ninth grade, I took notes.

My research questions are:

How do the pupils interpret the tasks they are given?
What misunderstandings occur?
Do the teachers notice these misunderstandings, and if so, how do they react?
What are the consequences resulting from these misunderstandings?

My results show that the pupils on several occasions interpreted the tasks differently from the teachers' expectations. Some of the misunderstandings that occurred can be explained using the expression "talking past each other"/"talking at cross purposes", and I have made the distinction between one-way-talking-past-each-other and two-way-talking-past-each-other. The first one describes instances where someone is saying something, and the hearer(s) interprets this differently from what the person meant, and the second one describes instances where at least two persons are interacting, and they think they are talking about the same thing when really they are not. Several of the instances, where teacher and pupils were talking past each other, occurred in connection with ambiguous tasks, and some in connection with words with more than one meaning. In most cases the misunderstandings were discovered, but some were not. When the teachers discovered that pupils had interpreted a task differently from the way they did, they tried to direct the pupils towards their (the teacher's) interpretation. An important consequence resulting from the misunderstandings was that a lot of time was lost.

University of Agder
Department of Mathematics, 2010
Anette Frigstad

Innholdsfortegnelse

1 Innledning

1.1 Pål sine høner

Lærer:	Pål hadde ei høne, en hane og ti kyllinger. En dag spiste reven den ene kyllingen. Hvor mange var det igjen?
Ole:	Elleve.
Anne:	Nei, ni.
Ole:	Det må jo være elleve.
Lise:	Jeg er enig med Ole. Det må være elleve.
Anne:	Nei, jeg er helt sikker på at det blir ni. Det var først ti, og så ble det ni.
Ole:	Åja. Du mener kyllinger. Jeg mente at det ble elleve dyr igjen.
Anne:	Ok.

Samtalen over er fiktiv, men den illusterer noe av det som skulle vise seg å bli hovedtemaet i min masteroppgave, nemlig kommunikasjonsproblemer.

1.2 Bakgrunn for oppgaven og forskningsspørsmål

Utgangspunktet mitt før jeg gikk i gang med denne masteroppgaven, var at jeg ønsket å lære mer om inquirybasert undervisning. Da jeg gikk andre året på videregående skole, hadde jeg to matematikklærere som jeg synes underviste på en forståelig og inspirerende måte, og da jeg i matematikkdidaktikken på PPU-studiet lærte om inquirybasert undervisning, fant jeg at inquiry minnet om måten disse lærerne hadde undervist på.

Øktene jeg analyserer er alle inquirybaserte. Jeg fikk tilgang til videoer fra allerede dokumenterte undervisningsøkter fra tre klasser (første året, videregående skole) som arbeidet med et inquirybasert opplegg om lineære funksjoner. Jeg så gjennom disse videoene og fant at det oppstod en del misforståelser i tilknytning til tolkning av oppgavene. Dette ble utgangspunktet for problemstillinga mi, og oppgaven min har etter hvert utviklet seg til å i hovedsak dreie seg om kommunikasjonsproblemer i matematikk-klasserommet. Inquiry danner en ramme rundt dette, men har vist seg å ikke være en så sentral faktor i oppgaven min som jeg opprinnelig hadde sett for meg.

Mine forskningsspørsmål er:

- Hvordan tolker elevene oppgavene de blir gitt?
- Hvilke misforståelser oppstår?
- Er lærerne klar over misforståelsene som oppstår, og i så fall, hvordan reagerer de?
- Hva blir konsekvensene av disse misforståelsene?

Ordet *misforståelse* kan skape ulike assosiasjoner og brukes i ulike sammenhenger. Innen matematikkundervisning brukes det gjerne om når elever har misoppfattet/ikke forstått et matematisk begrep. For eksempel kan man kalle det en misforståelse dersom en elev tror at man ved å multiplisere et tall med et annet, alltid vil få et større tall (noe som ikke er tilfelle dersom tallet man multipliserer med er mindre enn én). I denne oppgaven bruker jeg imidlertid begrepet *misforståelse* i tilknytning til kommunikasjonsproblemer. Jeg har valgt å buke det noe diffuse begrepet misforståelser i problemstillinga, i hovedsak fordi dette åpner for å studere ulike typer misforståelser, og så vil jeg mot slutten av oppgaven se nærmere på en bestemt type misforståelser, nemlig misforståelser som kan karakteriseres som forbisnakking.

1.3 Oversikt over innholdet i masteroppgaven

I kapittel to vil jeg gi en oversikt over relevant litteratur, og i avsnitt 2.6 vil jeg også gjøre rede for hvordan jeg vil definere begrepet *forbisnakking.*

Kapittel tre gir en oversikt over hvordan jeg har samlet inn data og hvordan disse har blitt analysert.

I kapittel fire analyserer jeg deler av de allerede dokumenterte undervisningssekvensene fra gjennomføringen av opplegget om lineære funksjoner. Jeg fokuserer på ei gruppe elever fra hver av de tre klassene, og gir først en oversikt over hvordan økta forløp for dem, før jeg så analyserer inngående tre episoder der det for minst ei av gruppene oppstod misforståelser. Jeg gir også en helhetsvurdering av opplegget, samt et forslag til revidert opplegg.

Kapittel fem omhandler oppgaven ”trekantgjerde”, som jeg, basert på erfaringer fra analysen av de allerede dokumenterte undervisningssekvensene, har utformet i samarbeid med fagansvarlige ved et videreutdanningskurs for lærere. Jeg gjør først rede for utformingen av oppgaven, samt foretar en a priori-analyse av denne. Deretter analyserer jeg observasjonene fra utprøvingen av oppgaven i en åttende- og en niendeklasse. Lærerne jeg fulgte da de prøvde ut oppgaven, hadde også laget egne ekstraoppgaver, og observasjoner fra da elevene arbeidet med disse, blir også analysert.

I kapittel seks ser jeg nærmere på observasjonene i lys av begrepet forbisnakking. Det var først etter å ha analysert observasjonene fra utprøvingen av opplegget ”trekantgjerde” i de to ungdomsskoleklassene at jeg ble oppmerksom på fenomenet forbisnakking, så observasjonene herfra kommenteres først. Deretter ser jeg om begrepet forbisnakking også kan kaste nytt lys over observasjonene fra de allerede dokumenterte undervisningssekvensene om lineære funksjoner.

I kapittel syv gir jeg en kort oppsummering av hovedfunnene i denne oppgaven, knytter disse til noe av teorien presentert i kapittel to, og gir en konklusjon.

Kapittel åtte inneholder pedagogiske implikasjoner, mens jeg i kapittel ni gir noen forslag til videre forskning.

2 Teori

2.1 Tallmengder

I analysekapitlet kommer jeg inn på ulike tallmengder. Jeg vil derfor gjengi definisjonene på disse tallmengdene her. Definisjonene er hentet fra Lorentzen, Hole & Lindstrøm (2003) s. 19-20:

Mengden av *naturlige tall*: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4 \ldots\}$[1]

Mengden av *hele tall*: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Mengden av *rasjonale tall*: $\mathbb{Q} = \{a / b;\ a \epsilon \mathbb{Z},\ b \epsilon \mathbb{Z},\ b \neq 0\}$

Reelle tall som ikke er rasjonale, kalles irrasjonale.

2.2 Inquiry i matematikkundervisningen

Verbet *inquire* betyr å stille spørsmål, gjøre en undersøkelse, søke etter informasjon eller søke etter kunnskap (McDonald, 1977, i Fuglestad, Goodchild & Jaworski, 2007). Wells (1999, i Jaworski, 2007, s. 127) snakker om *dialogic inquiry* som ”a willingness to wonder, to ask questions, and to seek to understand by collaborating with others in the attempt to make answers to them”. Han legger altså vekt på samhandling mellom mennesker. Wells skiller mellom praksisfellesskap og inquiryfellesskap ved å legge vekt på viktigheten av ”metaknowing through reflection on what is beeing or have been contributed and on the tools and practices involved in the process” (Wells, 1999, i Berg, 2009, s. 43). I likhet med Wells, anerkjenner også Jaworski (2006, i Berg, 2009) viktigheten av et meta-nivå, *metacognitive awareness*. Hun ser inquiry både som et verktøy og som en måte å være på, *a way of beeing* (Jaworski, 2004, i Fuglestad, Goodchild & Jaworski, 2007; Jaworski, 2007). Inquiry brukes for eksempel som et verktøy når en utvikler oppgaver som skal stimulere til inquiry i klasserommet (Jaworski, 2007). Inquiry som en måte å være på, beskriver Jaworski (2009, power-point-presentasjon, slide 18) slik: ”Taking on an inquiry way of beeing – bringing an attitude of inquiry to all mathematical engagement – questioning and exploring as norms of practice leading to conjecture, generalisation and abstraction”.

På hjemmesiden til prosjektet *Lær bedre matematikk* (LBM) beskrives læring gjennom inquiry som ”en dynamisk og interaktiv prosess med 6 nøkkelelementer, der formålet er å motivere for læring gjennom å stimulere elevenes nysgjerrighet og utforskertrang” (http://lbm.vaf.no/print.aspx?m=29&amid=341). De seks nøkkelelementene er

- **spørre**
- **undersøke** ulike løsninger
- **skape** ny kunnskap
- **diskutere** funn og erfaringer
- **reflektere** over den nye kunnskapen
- **undre**, nye spørsmål oppstår

[1] Noen regner også med 0 blant de naturlige tallene (se f. eks. http://no.wikipedia.org/wiki/Naturlig_tall). Den vanligste definisjonen er imidlertid den gjengitt her.

Etter denne beskrivelsen er inquiry-prosessen ganske åpen, og elevene gis stor frihet. Det er ikke alltid en har mulighet til å la prosessen være så åpen. Lærerne er bundet til læreplanmål som skal nåes, de er presset på tid, elevene er kanskje ikke modne nok til å ta et så stort ansvar, det kan være problematisk at ikke alle arbeider med det samme og så videre. Banchi & Bell (2008) peker på at det finnes ulike nivåer av inquiry i naturfagsundervisningen, og denne idéen kan også overføres til matematikkundervisningen. Nivåene de beskriver er bekreftelsesinquiry, strukturert inquiry, guidet inquiry og åpen inquiry, og fokus er på hvor mye informasjon studentene blir gitt, og hvor mye veiledning læreren gir dem. På det laveste nivået, bekreftelsesinquiry, kjenner studentene både spørsmålet, metoden og resultatet, og skal vise at det stemmer. I strukturert inquiry oppgis spørsmålet og metoden, men studentene må selv finne et svar, en forklaring. I guidet inquiry stiller læreren spørsmålet, mens studentene selv må velge en metode for å finne svar på spørsmålet. Læreren veileder dem så underveis. På det høyeste nivået, åpen inquiry, skal studentene både utlede spørsmål, gjennomføre undersøkelser og komme frem til et resultat.

Beskrivelsen fra LBM-prosjektet vil i hovedsak tilsvare det Banchi & Bell (2008) kaller åpen inquiry, men i LBM-prosjektet er det i tillegg et poeng at resultatet skal lede til nye spørsmål. Det kan diskuteres om de to laveste nivåene Banchi & Bell beskriver virkelig kan defineres som inquiry, men fordi det ikke finnes noen klar definisjon av inquiry, blir dette opp til den enkelte å avgjøre. Tenker en seg inquiry som en væremåte, bør det være mulig også på de laveste nivåene å gå inn i oppgavene med en ”inquiry-holdning”.

I forhold til Wells' beskrivelse, er jeg enig i at inquiry handler om å innta en undrende, spørrende holdning, men jeg vil tone ned fokuset på samhandling. I inquiryinspirert undervisning er det ikke et krav at elevene jobber i grupper, selv om det ofte kan være hensiktsmessig. I forhold til LBM-prosjektets beskrivelse av inquiry, vil jeg hevde at ikke alle de seks elementene som nevnes der må være til stede for at en skal kunne kalle undervisningen inquirybasert. Ofte vil det for eksempel være hensiktsmessig at læreren gir elevene et spørsmål/en oppgave de skal løse, fremfor at elevene skal stille spørsmålet selv. Jeg vil støtte meg til Jaworskis syn på inquiry som både et verktøy og en væremåte/en holdning. Det kan være enklere å få et inntrykk av hva inquiry er ved å se på dets motstykke: At elevene får regler de skal følge, og oppgaver der de kan bruke disse reglene enten de har forstått dem eller ei, eller at læreren viser et eksempel på en metode på tavla, og så ”kopierer” elevene eksemplet i senere oppgaver (bare endrer tallene).

Collins (1986, i Silver, 1994) har identifisert tre ulike mål for inquiry-orientert undervisning. Disse er 1) å hjelpe elever å konstruere (allerede kjente) generelle regler, teorier eller prinsipper, 2) å hjelpe elever å konstruere nye teorier eller prinsipper som kommer ut av deres undersøkelser, og 3) å lære elever å løse problemer ved hjelp av selvregulering og spørreteknikker og metakognitiv kompetanse.

Goodhild & Fuglestad (2009) hevder at inquiry handler om ”intelligent behavior”, å lære å lære, bli en selvstendig lærende, kunne bruke kunnskap i nye situasjoner og tilpasse seg en stadig skiftende verden. Det handler om sosialt ansvar, fremmer forståelse, myndiggjør og frigjør, og så er det i tillegg spennende (ibid.). Et viktig mål er dessuten å gi elevene en bedre forståelse av matematikken, i Fuglestad, Goodchild & Jaworski (2007, s. 34) uttrykt som ”å fremme elevenes «principled» læring”, det vil si ”læring der elevene utvikler gode ferdigheter, som automatiseres, sammen med begrepsforståelse der de oppfatter matematiske relasjoner og utvikler sine evner til å bruke matematikk effektivt i verden omkring seg” (Fuglestad, Goodchild & Jaworski, 2007, s. 35). En ønsker altså at elevene skal *forstå* stoffet, og med forståelse mener en da det Skemp (1976) kaller *relasjonell forståelse*, å forstå både hva man skal gjøre og hvorfor, i motsetning til *instrumentell forståelse*, å kunne bruke regler og algoritmer uten å forstå hvorfor de fungerer. I tillegg fremheves i LBM-prosjektet motivasjon, og formålet med inquiry i matematikkundervisningen hevdes å være ”å motivere for læring gjennom å stimulere elevenes nysgjerrighet og utforskertrang” (http://lbm.vaf.no/print.aspx?m=29&amid=341).

I 1994 skrev Silver at inquiry-orientert undervisning ikke hadde vært utsatt for seriøs gransking. Noen beskrivelser av undervisningen og av elevenes reaksjoner og arbeid hadde vært gitt, men det hadde vært lite eller ingen systematisk analyse av ”the problem-posing and inquiry that occured or of the impact that these experiences had on student’s mathematical performance” (s. 22). I den senere tid har det vært gjennomført flere prosjekter der inquiry står sentralt, og det har blitt utgitt en del litteratur herfra. Ved Universitetet i Agder, i samarbeid med andre instanser, har prosjektene *Læringsfellesskap i matematikk (LCM), IKT og læring i matematikk (IKTML)*, og *Lær bedre matematikk (LBM)* blitt gjennomført. Her har didaktikere og lærere arbeidet sammen for å forbedre matematikkundervisningen. Noen av disse prosjektene går litt inn i hverandre, og ikke alle er ferdigstilt ennå. Det har blitt publisert en del litteratur fra disse prosjektene (se f. eks. Fuglestad, Goodchild & Jaworski, 2007; Hundeland, Erfjord, Grevholm & Breiteig, 2007; Jaworski et al, 2007). Claire V. Berg (2009) har i sin doktorgradsavhandling fokusert på utviklingen av algebraisk tenkning i et inquiryfellesskap bestående av henne selv og tre lærere.

Way (2008) hevder at det er to vanlige grunner til at lærere ofte ender opp skuffet når de forsøker å bruke undersøkende matematikk i undervisningen. Den ene er at elevene er uerfarne med denne arbeidsmåten, den andre at lærerne er det.

2.3 Bruk av eksempler i matematikkundervisningen

Historisk sett har det vært to hovedtilnærminger til bruk av eksempler i undervisningen, der hovedforskjellen går på om generelle regler presenteres før eller etter eksemplene (Bills et al., 2006). Dersom læringen skjer gjennom å bruke spesifikke eksempler for å formulere et generelt prinsipp, kalles det induktiv resonnering, mens dersom en går fra det generelle til det spesifikke, kalles det deduktiv resonnering (Woolfolk, 2004). Jeg vil hevde at en induktiv tilnærming er sentral i inquiry-basert undervisning.

Spencer (1878, i Bills et al, 2006, s. 1-129) skrev til fordel for induktiv resonnering:

> ”To give the net product of inquiry without the inquiry that leads to it, is found to be both enervating and inefficient. General truths to be of due and permanent use must be earned. (…) While rule-taught youth is at sea when beyond his rules, the youth instructed in principles solves a new case as readily as an old one.”

I denne påstanden ligger det en antakelse om at elever som lærer gjennom induktiv resonnering, får en bedre forståelse for lærestoffet (relasjonell forståelse) enn elever som får presentert regler de kan bruke (instrumentell forståelse).

Skemp (1979; 1986) var opptatt av læring av begreper gjennom eksempler. Han bruker begrepet *noise*, som jeg på norsk vil oversette til *støy*, om irrelevant informasjon som kan virke forstyrrende. For eksempel kan fargen på hver individuelle katt regnes som støy i forhold til begrepet katt. Når en lærer skal velge ut eksempler for å underbygge en definisjon, må eksemplene være like når det gjelder de egenskapene som er av betydning for dannelsen av begrepet, men de må være ulike når det gjelder egenskaper irrelevante for dette begrepet (Skemp, 1986).

Et viktig poeng med å bruke eksempler i undervisningen, er at spesifikke eksempler kan sees på som representanter for en større klasse, og at en dermed gjennom å jobbe med disse eksemplene kan lære noe mer generelt. Mason & Pimm (1984) fokuserer i sin artikkel på *generiske eksempler*, som de beskriver som ”an actual example (...) presented in such a way as to bring out its intended role as a carrier of the general” (s. 287). En legger vekt på visse egenskaper ved eksemplet, og ignorerer andre. Mason & Pimm (ibid.) hevder imidlertid at det er nærmest umulig å si om noen vektlegger og ignorerer det samme som du gjør. Dette er relevant i forhold til undervisning, der læreren kan ha gitt et eksempel han/hun ser som et generisk eksempel, og så ser kanskje elevene det kun som et partikulært eksempel (ibid.).

2.4 Oppgaver og spørsmål i matematikkundervisningen

Mason & Davis (1991) hevder at hovedkonklusjonene som kan trekkes etter at mennesker i århundrer har stilt hverandre spørsmål er:

- *Ulike måter å stille spørsmål på er populære til ulike tider.*
- *Personene spørsmålet stilles til og i hvilken kontekst spørsmålet stilles, har like stor innflytelse på hva som skjer som ordlyden eller formatet.*

(s. 71, min oversettelse)

Den første konklusjonen fremkommer fra å se på gåter og spørsmålssett over århundrer. For å teste den andre konklusjonen, oppfordres vi til å prøve å stille elever spørsmål på ulike måter, for eksempel muntlig til noen og skriftlig til andre, og se hva som skjer. Mason & Davis (1991) hevder at vi, dersom vi eksperimenterer, også raskt vil se at det ikke bare er ordene vi bruker, tonefall eller skriftstørrelse som påvirker utfallet. Atmosfæren i klasserommet, tiden på dagen etc. har også betydning.

Mason & Davis (1991) fremsetter også en hypotese om at ”måten en stiller spørsmål på og interessen en viser elevene har mye større innflytelse på motivasjon enn det faktiske innholdet i et spørsmål” (s. 83, min oversettelse). Dersom dette stemmer, understreker det viktigheten av at lærere er bevisst på hvordan de formulerer oppgaver eller spørsmål til elevene og hvordan de veileder dem i arbeidet.

Brown & Walter (1983, i Mason & Davis, 1991) har foreslått en enkel teknikk for å påvirke i hvilken retning en oppgave vil føre:

Se på følgende uttalelse, og prøv å legge vekt på ulike ord:

Summen av vinklene i en trekant er 180 grader.

”**Summen** av vinklene i en trekant er 180 grader” leder mot å se på andre kombinasjoner, som produkter eller differanser, men vil trolig ikke lede noe særlig videre. ”Summen av vinklene i en **trekant** er 180 grader” vil derimot lede mot å se på vinkelsummen på andre figurer, som firkanter, femkanter og så videre (Mason & Davis, 1991). Dette er bare ett eksempel på hvordan måten vi stiller et spørsmål (i dette tilfellet en uttalelse) påvirker virkningen av spørsmålet.

Det finnes mye litteratur om å stille spørsmål i undervisningen (Sahin, 2007), og mange ulike fokus i forhold til dette (for eksempel fokus på forbedring av lærerstudenters evne til å lage oppgaver (Crespo, 2003; Crespo & Sinclair, 2008), fokus på at elever/studenter selv skal stille spørsmål (Silver, 1994), med mer). I min oppgave har jeg ikke anledning til å gi et sammendrag av alle disse, men velger å fokusere på litteratur som jeg mener er mest relevant i forhold til min problemstilling.

Sahin (2007) hevder at *guiding questions* er sentrale i inquiry- og problembasert undervisning, men at det er få studier som fokuserer på nettopp denne typen spørsmål. Ortenzi (2002, i Sahin, 2007) nevner *leading* eller *helping questions*, som også kan klassifiseres som guidende spørsmål, og peker på at det er en fare for at læreren leder elevene til å tenke slik læreren vil de skal tenke (ibid.).

Bruner (1986, i Mason, 2000) bruker begrepet *stillas* for å beskrive hvordan læreren kan gjøre for eleven det eleven ikke klarer å gjøre selv, og slik bygge et slags stillas som eleven kan støtte seg til. Når det gjelder stillasbygging, hevder Mason (2000) det er viktig å tenke over graden av klarhet, og sier at hvis alt blir gjort eksplisitt for elevene, kan de bli avhengige av læreren, mens hvis for mye blir gjort implisitt, vil elevene kanskje ikke få tak på det som er tilgjengelig for dem. ”Spørsmålet er ikke så mye om man skal være eksplisitt, men heller når, og i hvilken grad det kan gagne elevene” (Mason, 2000, s. 99, min oversettelse). Vi skal se i den kommende analysen at nettopp dette spørsmålet er sentralt.

Mason (2000) påpeker at spørsmål lærere stiller ofte har et på forhånd forventet svar, uten at læreren nødvendigvis selv er klar over det. Innimellom spørsmål som tester elevenes kunnskaper eller søker informasjon om elevenes løsninger, kan en også finne interaksjon mellom læreren og elevene der læreren stiller spørsmål og elevene forsøker å gjette hva læreren tenker på. For læreren kan det være vanskelig å legge merke til at dette skjer, og vanskelig å gjøre noe med det, mens det for en som observerer kan være lett å gjenkjenne denne ”gjett hva jeg tenker på”- interaksjonen (ibid.). Mason fokuserer på at læreren ikke alltid er klar over at han/hun ønsker et spesielt svar, men det hender også at læreren er klar over at han/hun er ute etter et bestemt svar, men ikke er klar over at oppgaven/spørsmålet kan tolkes på flere måter.

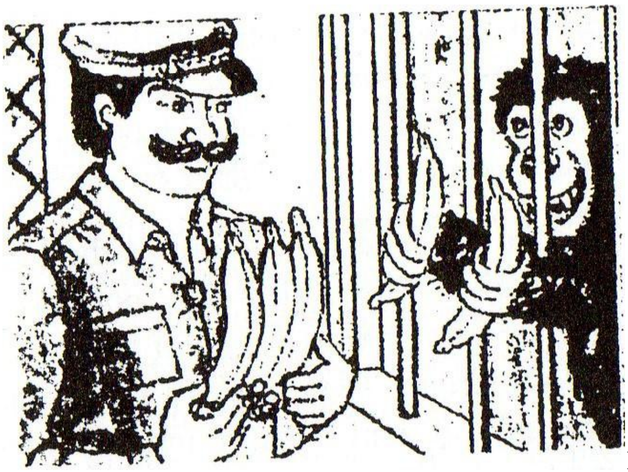
Også Pimm (1987) har påpekt at ”gjett hva jeg tenker på”- interaksjon kan forekomme i klasserommet. Han knytter denne særlig til interaksjon der læreren stiller flere lukkede spørsmål. Pimm (1987, s. 54) skriver:

> “There is the danger that the questioning may degenerate into guess-what-is-the-particular-word-in-my-mind. It is also possible that the teacher is so hooked on a particular word that he may overlook or even say ‘no’ to alternative, equally valid possibilities.”

Mange tror at oppgaver, spørsmål, symboler og så videre i matematikkundervisningen har en entydig, klar betydning (Voigt, 1996), men dette er ikke nødvendigvis tilfelle. Voigt (1996) fokuserer på *negotiation of meaning* i klasserommet. Lærere og elever kommer fra ulike bakgrunner og tolker ting ulikt. Krummheuer (1983, i Voigt, 1996) fant at ”misforståelser” mellom læreren og elevene er ganske vanlige uten at deltakerne selv er klar over det.

Voigt (1996) har funnet at elever noen ganger tolker oppgaven annerledes enn læreren hadde tenkt. Et eksempel han viser til er en situasjon der utfallene etter at flere elever har kastet en terning 100 ganger hver, er skrevet opp på tavla, og læreren spør elevene hva de legger merke til ved disse utfallene. Læreren ønsket å introdusere elevene for begrepet tilfeldighet, men elevene fokuserte på helt andre ting.

En annen oppgave Voigt (1996) viser til, henter han fra en tysk skolebok, der oppgaven var presentert som en angivelig utvetydig oppgave. Flere elever ble bedt om å gi den riktige "number sentence" til dette bildet:


Hentet fra Voigt (1996, s. 31)

Eksempler på løsninger var 2+3=5 (sum av bananer), 5-2=3 (vokteren gir apen to bananer), 3-2=1 (vokteren har én banan mer enn apen), med flere (Voigt, 1996). Den samme oppgaven er kommentert i Voigt (1994), og her kommer det frem at den ønskede løsningen var 5-2=3. Irritert over de mange ulike svarene, stilte læreren en rekke spørsmål for å lede elevene til den bestemte løsningen (hvor mange bananer har vokteren kjøpt, hvor mange gir han til apen, og hvor mange har han da igjen?) (ibid.). Et av funnene i et forskningsprosjekt (Neth & Voigt, 1991, i Voigt, 1996) var at slike bilder, oppgaver og lignende kan tolkes på flere måter hvis elevene ikke er kjent med den spesielle typen oppgaver. I læreboka bildet med bananene er hentet fra, var det flere liknenede bilder, og elevene lærte etter hvert hvordan de skulle tolke denne typen bilder slik det var tiltenkt i læreboka (Voigt, 1994).

Til tross for problemer som oppstod i situasjonene Voigt (1996) har beskrevet, kommenterer han at "the ambiguity of tasks, questions and so forth does not have to be evaluated as a disaster so that we would have to minimize it" (s. 32). Poenget er at læreren bør være klar over at oppgaven kan tolkes på flere måter, slik at han/hun er i stand til å håndtere ulike tolkninger som måtte komme frem i undervisningsøkta. Manoucheri (2007) beskriver ei matematikkøkt hvor elevers (uventede) ulike tolkninger av en gitt oppgave ledet til utvidede matematiske utforskninger. Undervisningen gikk ikke som planlagt, men lærerne tok tak i elevenes ulike tolkninger av oppgaven og bygde videre på dem i undervisningen.

En lærer må ofte ta avgjørelser i situasjonen, der og da, avgjørelser som ikke kan planlegges på forhånd. Mason & Spence (1999) bruker begrepet *knowing-to act in the moment* om denne egenskapen/kunnskapen. For å kunne handle i øyeblikket, må en være oppmerksom på muligheten til å handle, og på hvilke valg en har:

”In order to inform practice, it is essential that something brings to mind a possible action in the moment, just in time when it is needed, and not in retrospect, as captured by the French idiom *l'esprit d'escalier*: the good idea of what one could have done, that comes too late, after the event.” (s. 153)

Lærernes måte å reagere (eller ikke reagere) på når/hvis de oppdager misforståelser, har stor betydning for hva elevene sitter igjen med etter økta. Ofte kan det være vanskelig å forutse hvilke misforståelser som kan oppstå, og å lage gode oppgaver. Da blir det viktig å kunne handle der og da. Som vi skal se reagerte lærerne på ulike måter i forhold til hva som skjedde i øktene jeg vil analysere.

2.5 Språklige forviklinger

”Lærer: La *n* være et tall.
Elev: Men frøken, *n* er en bokstav, ikke et tall.”
(Adda, 1982, s. 211, i Durkin & Shire, 1991, s. 72, min oversettelse)

“Mathematical discourse is notorious for involving both specialized terms and different meanings attached to everyday words.” (Pimm, 1987, s. 8)

Misforståelser kan oppstå dersom en har ulike tolkninger av eller ikke forstår hva som menes med bestemte ord eller uttrykk.

Måsøval (2009) beskriver en situasjon der lærerstudenter har funnet en formel for figur *n* i ei gitt rekke og mener de har bevist at denne formelen er gyldig etter å ha vist at den gjelder for de fire første figurene i rekka og testet den for den syvende figuren. Læreren deres sier at for å være sikre må vi ”raise ourselves in the sense of seeing a superior structure in our system” (Måsøval, 2009, s. 31). Studentene forstår ikke hva læreren mener med dette og lurer på om han mener formelen deres er feil (noe den ikke er). Læreren bruker begrepene *structure* og *structural relationship* i sin forklaring av hva som er et gyldig bevis, og Måsøvals analyse avslører at studentene ikke ser ut til å ha en klar forestilling av hva som menes med *structure*. Måsøval konkluderer med å peke på nødvendigheten av å fastslå betydningen av begrepene ”structure” og ”relationships”.

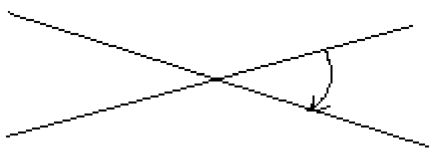
Når dagligdagse ord brukes i matematikken, men med en annen betydning enn den dagligdagse, kan det oppstå forvirring (Pimm, 1987, Durkin & Shire, 1991, Rowland, 2000, Katsopoulos, 2007). Halliday (1975, s. 65, i Pimm, 1987, s. 75) bruker betegnelsen *register* om ”a set og meanings that is appropriate to a particular function of language, together with the words and structures which express these meanings”. Individer kan benytte seg av ulike registre i ulike sammenhenger (Pimm, 1987). Innenfor en matematisk sammenheng bruker en visse ord og uttrykk, og disse får en bestemt mening. Det matematiske registret er annerledes enn det dagligdagse registret. I noen tilfeller brukes de samme ordene, men med ulik mening. Pimm (1987) peker på at dette medfører en fare for det han kaller *semantic contamination*, der den dagligdagse betydningen av et ord benyttes for å skape mening i det man har hørt eller lest i en matematisk sammenheng. Han nevner blant annet et eksempel der en elev har en oppfatning om at en diagonal er ei linje som er skrå i forhold til den naturlige orienteringen av arket, og dermed hevder at hvor mange diagonaler en figur har er avhengig av hvordan den er plassert. Et annet eksempel er ordet *eller*, som i dagligtale vanligvis betyr ”enten eller”, men som i kombinatorikk betyr ”og eller”.

2.6 Miskommunikasjon

> ”Until I started doing research on miscommunication, I had not realized how common misunderstandings were in everyday interaction. After six years of work in the area, it is now clear to me that people misunderstand each other’s words, silences, gestures or attitudes all the time and that such incidents happen not only between people with different languages or cultures, but also between close friends, spouses, adults and children, doctors and their patients or teachers and their students.” (Tzanne, 1999, s. 1)

Flere studier har vært gjort innenfor temaet miskommunikasjon (se for eksempel Coupland, Giles & Wiemann, 1991; Tzanne, 1999). Når det gjelder kommunikasjonsproblemer i klasserommet, er det gjort noen studier i forhold til flerkulturelle/flerspråklige klasser (se for eksempel Saville-Troike & Kleifgen, 1989; Crago et al., 1997), men jeg har funnet lite litteratur som dreier seg om miskommunikasjon/kommunikasjonsproblemer i klasserommet generelt. Noe finnes det imidlertid, og en del av litteraturen jeg har presentert i avsnitt 2.3 - 2.5 kan også knyttes til kommunikasjonsproblemer i klasserommet.

I Bauersfelds artikkel ”Hidden dimensions in the socalled reality of a classroom” (1980) beskrives ei undervisningsøkt der læreren og elevene misforstår hverandre. Transkripsjoner hentet fra Shirks doktoravhandling ”An Examination of Conceptual Framework of Beginning Mathematics Teachers” (1972) danner grunnlaget for Bauersfelds analyse. Økta som analyseres dreier seg om parallelle linjer. Læreren, Tom, har definert parallelle linjer ved hjelp av betegnelsen ”slides”. For parallelle linjer finnes det en ”slide-arrow” som kan føre ei linje over den andre. Nå innfører Tom et eksempel med to linjer som skjærer hverandre, og spør om disse linjene er parallelle. En elev svarer at de ikke er parallelle fordi de skjærer hverandre, men læreren godtar ikke dette svaret. Han vil at elevene skal se at det ikke finnes noen ”slide-arrow” som vil føre linjene sammen, og retter fokus mot ”slide-arrows”. Elevene blir forvirret, og i forsøk på å finne det svaret Tom ønsker, begynner de å lete etter måter å føre de to linjene sammen. En elev foreslår da ei vridd pil som illustrert under:



Læreren tror elevene ikke har lært det de skal om ”slides”, og forsøker å lære dem dette om igjen.

Shirk (1972, s. 43, i Bauersfeld, 1980, s. 29) bruker begrepet *split personality* for å forklare denne episoden: ”A ’split personality’ ... occurs when the teacher is teaching one lesson and the students, in an effort in ‘psych out’ the teacher, are actually learning another”.

Innenfor feltet miskommunikasjon bruker forskere ulik terminologi. Det kan være problematisk at ulike betegnelser brukes for å forklare samme fenomen, eller at samme betegnelse brukes for å beskrive ulike, men ikke helt urelaterte fenomener (Tzanne, 1999).

Tzanne (1999) har valgt å bruke betegnelsen *miskommunikasjon* om fenomenet som helhet, og *misforståelse(r)* om individuelle tilfeller av miskommunikasjon. Så langt velger jeg å følge samme linje. Tzanne definerer imidlertid *misforståelse* slik: ”a mismatch between the speaker’s intended meaning and the hearer’s understanding of this meaning in the particular context of interaction.” (s. 34).

Som nevnt innledningsvis brukes betegnelsen *misforståelse* i ulike sammenhenger, og kan ha en videre betydning enn den Tzanne holder seg til her. Jeg har valgt å la misforståelse betegne også andre former for kommunikasjonsproblemer enn akkurat den typen Tzanne viser til. Misforståelse kan dessuten ha ulike betydninger også utenfor feltet kommunikasjonsproblemer, så jeg velger heller å bruke betegnelsen *forbisnakking* for å referere til en bestemt type misforståelser.

Jeg bruker betegnelsen *forbisnakking* ikke bare om tilfeller som dreier seg om muntlig miskommunikasjon, men også der det er skriftlige utsagn/oppgaver/tegn, eventuelt kroppsbevegelser etc. som misforstås. Av praktiske årsaker har jeg har valgt å skille mellom to typer forbisnakking, som jeg definerer slik:

Enveisforbisnakking: Tilfeller der en ytring/beskjed/oppgave eller lignende blir oppfattet annerledes enn den som ga den hadde tenkt.

Toveisforbisnakking: Situasjoner der det foregår en interaksjon mellom to eller flere personer, og der disse snakker om ulike ting, men tror de snakker om det samme.

Enveisforbisnakking kan sees på som starten på toveisforbisnakking, men siden enveisforbisnakking ikke nødvendigvis utvikler seg til toveisforbisnakking (enveisforbisnakkingen kan for eksempel bli oppdaget og avklart med det samme), synes jeg det er nyttig med en slik oppdeling.

Shirks begrep *split personality* (1972, i Bauersfeld, 1980) er nært knyttet til begrepet *forbisnakking*, men slik *split personality* er forklart i sitatet ovenfor, dekker det kun tilfeller der læreren underviser noe og elevene lærer noe annet. Begrepet *forbisnakking* vil kunne dekke også andre tilfeller enn akkurat denne typen.

3 Metode

3.1 Ontologisk og epistemologisk syn

Hvordan ser virkeligheten egentlig ut? Positivismen har som utgangspunkt at det finnes generelle lover, også i sosiale systemer (Jacobsen, 2000). En kontrast til dette synet finner vi hos dem som hevder vi bare kan forstå det unike: Vi kan forklare hvorfor en spesiell hendelse fant sted, men ikke overføre erfaring fra én hendelse til andre områder (ibid.). Når det gjelder epistemologiske syn (hvordan og i hvilken grad det er mulig å tilegne seg kunnskap om virkeligheten), kan vi grovt skille mellom en positivistisk og en fortolkningsbasert tilnærming. Med utgangspunkt i antakelsen om en objektiv virkelighet, er positivister opptatt av å studere denne virkeligheten gjennom objektive metoder og mål. Funnene kan så omgjøres til generelle lover, og det er et ideal at forskningen skal være kumulativ: bygge på tidligere forskning og utvide den kunnskapen som fantes fra før (ibid.). Innenfor en fortolkningbasert tilnærming hevder en at det er meningsløst å snakke om en objektiv sosial virkelighet. Litt forenklet kan man si at fokuset her er på det subjektive, og det blir lagt vekt på å forstå den enkelte situasjon (ibid.).

Jeg vil slutte meg til Jacobsens (2000) tilnærming, som er en slags gyllen middelvei mellom de to synene skissert ovenfor. Ontologisk tar Jacobsen utgangspunkt i Karl Poppers syn. Popper forkaster både den positivistiske antakelsen om generelle lovmessigheter og den forståelsesbaserte antakelsen om at alt er unikt. Litt upresist kan man si at han hevder at også sosiale systemer er underlagt visse lover, men at disse ikke er absolutte. Popper innfører begrepet *sannsynlighet*, og forklarende utsagn kan dermed formuleres som ”hvis A forekommer, så øker sannsynligheten for at B vil finne sted” (Jacobsen, 2000, s. 33).

Epistemologisk tar Jacobsen (2000) utgangspunkt i at en ikke kan tenke seg en objektiv kunnskap om samfunnet:

> ”Hva vi ser, vil avhenge av hva vi er interessert i, hva vi er opplært til å se og hva vi er opplært til ikke å se. I nyere vitenskapsteori er det en ganske bred enighet om at vi bare kan få en delvis og subjektiv forståelse av sosiale fenomener.” (s. 33)

Samtidig er det ikke slik at alt kan sies å være riktig. For å unngå å havne i denne fellen, henter Jacobsen inspirasjon fra filosofene Hegel, Kant, Husserl og Habermas, som i ulike former snakker om begrepet *intersubjektivitet*. Det finnes situasjoner der flere individer oppfatter samme fenomen på samme måte, og jo flere som er enige om hvordan et fenomen ser ut eller kan forklares, og jo mer uavhengig av hverandre en slik enighet oppstår, jo større sannsynlighet for at vi snakker om noe som kan kalles ”sant”. Man kan da snakke om en virkelighet som går på tvers av ulike kontekster (Jacobsen, 2000).

3.2 Hva skal studeres?

Jeg har valgt å benytte kvalitativ metode. Utgangspunktet for oppgaven min var at jeg fikk tilgang til allerede dokumenterte inquirybaserte undervisningssekvenser. Disse sekvensene var dokumentert gjennom videofilming. Med utgangspunkt i analysen av disse sekvensene skulle jeg så i samarbeid med fagansvarlige ved et videreutdanningskurs for lærere utforme et inquirybasert undervisningsopplegg som deltakerne ved dette videreutdanningskurset skulle gjennomføre i sine klasser. Jeg skulle så observere når noen av lærerne gjennomførte sine inquirybaserte opplegg, og analysere disse observasjonene. Det var et krav i fagplanen ved dette kurset at deltakerne innenfor hovedemnet tall og algebra som et forskningsprosjekt skulle prøve ut et inquirybasert undervisningsopplegg og skrive en rapport fra denne gjennomføringen. Rapportene var en del av eksamen for deltakerne ved dette kurset.

Jeg hadde altså ikke noen problemstilling klar fra starten av, men visse føringer var lagt i forhold til hva jeg kunne fokusere på i problemstillinga mi. I tillegg til føringene nevnt ovenfor var det et ønske fra min side at problemstillinga skulle være relevant med tanke på mitt fremtidige yrke som lærer, altså at jeg skulle lære noe som jeg kan dra nytte av i egen undervisning i fremtiden.

3.3 Innsamling og analyse av data

3.3.1 De allerede dokumenterte undervisningsseksvensene

Jeg fikk tilgang til filmer fra tre matematikkgrupper som arbeidet med et inquirybasert opplegg innenfor emnet lineære funksjoner. Elevene gikk første året på videregående skole, allmennfaglig studieretning. Lærerne som hadde ansvar for hver sin av disse matematikkgruppene, deltok i et prosjekt der inquirybasert undervisning stod sentralt. Det var i forbindelse med dette prosjektet at undervisningssekvensene som jeg fikk tilgang til data fra, var blitt filmet.

Undervisningsopplegget som ble gjennomført var planlagt av lærerne i samarbeid med didaktikere fra en høgskole i Norge. Disse didaktikerne var involverte i prosjektet som lærerne deltok i. Undervisningsopplegget gikk over to skoletimer, men det var kun første del av økta som ble filmet. I hver matematikkgruppe var ett kamera plassert slik at det fokuserte på ei gruppe elever gjennom hele økta, mens et annet sirkulerte rundt i klassen og i stor grad fulgte læreren.

3.3.2 Utvikling av problemstillinga

Da jeg så gjennom filmene fra de allerede dokumenterte undervisningssekvensene la jeg merke til at det oppstod en del misforståelser i forbindelse med tolkning av oppgavene elevene skulle arbeide med. Jeg valgte å fokusere på dette, og så at dette var ei vinkling som var forenlig både med den videre planen for masteroppgaven min og med mitt eget ønske om relevans i forhold til mitt eget fremtidige yrke som lærer.

Et utkast til problemstilling ble så utviklet, og jeg valgte ut deler av de dokumenterte videosekvensene og analyserte disse i lys av problemstillinga.

3.3.3 Analyse av data fra de allerede dokumenterte undervisningssekvensene

Jeg har valgt å fokusere på de tre gruppene, ei i hver klasse, som hadde et kamera fast plassert hos seg. Grunnen til dette er at jeg hos disse gruppene får et mer helhetlig bilde av hvordan økta forløp for dem. Det sirkulerende kameraet viser kun bruddstykker av hvordan elevene på de ulike gruppene jobbet. Samtidig har jeg også brukt filmene fra det sirkulerende kameraet, i hovedsak for å få med lærernes introduksjon og oppsummering av økta, men også for å se om problemene som oppstod hos fokusgruppene også forekom hos andre grupper. Jeg har valgt å fokusere på tre tilfeller der det hos minst ei av fokusgruppene oppstod misforståelser, og analysert disse tilfellene inngående for hver av gruppene.

Deler av de dokumenterte undervisningssekvensene var allerede transkribert av didaktikere som deltok i prosjektet disse undervisningssekvensene var blitt dokumentert i forbindelse med. Jeg fikk tilgang til disse transkripsjonene, og valgte å ta utgangspunkt i malen som var brukt i disse også for mine egne transkripsjoner. Der hvor jeg brukte de ferdige transkripsjonene, endret jeg navnene på lærere og elever, og så selv gjennom filmene og endret på transkripsjonene der jeg mente de ikke var i overensstemmelse med min oppfatning av hva elevene sa. Jeg har gitt lærere navn som begynner på L og elever som sitter på samme gruppe får navn med samme forbokstav.

I transkripsjonene har jeg ofte ”oversatt” elevenes dialekter til bokmål. Begrunnelsen for dette er først og fremst at dialekter vil kunne brukes for å identifisere hvor elevene kommer fra, og dette er ikke ønskelig med tanke på anonymitet. Det kan også være lettere for leseren å lese bokmål enn dialekter.

Når jeg har transkribert data, har jeg hørt/sett gjennom filmsnuttene flere ganger for å få med meg mest mulig av det som blir sagt så riktig som mulig. Det er likevel en fare for at en kan høre feil. Der hvor jeg er usikker på hva elevene/lærerne sier, markerer jeg dette med å sette utsagnet i klammer slik: {utsagnet/ordet}. Er jeg ikke i stand til å høre hva elevene/lærerne sier, markeres det med (...).

Bar-Hillel (i Bauersfeld, 1980) bruker begrepet *indexical expressions* om utsagn som ikke kan forstås tatt ut av sin sammenheng. I analysen av data benytter jeg meg av informasjon om konteksten når jeg tolker utsagn og situasjoner.

En svakhet ved analysen av de allerede dokumenterte undervisningssekvensene er at jeg selv ikke var tilstede ved innsamling av data, og ikke kjenner til alle detaljer rundt planleggingen og utformingen av undervisningsopplegget. Jeg vet også lite om elevforutsetninger. Samtidig kan det også være en fordel at jeg står utenfor prosjektet der dette undervisningsopplegget ble utformet og gjennomført. Dette kan gi meg en distanse som er nyttig med tanke på å skulle inneha en kritisk og objektiv holdning til det jeg studerer (se Jacobsen, 2000, s. 30 + 38-39 for en drøfting av forholdet mellom nærhet og distanse).

3.3.4 Utprøving av den inquirybaserte oppgaven jeg har utviklet i samarbeid med fagansvarlige ved videreutdanningskurset

Basert på erfaringene fra analysen av de allerede dokumenterte undervisningssekvensene utviklet jeg, i samarbeid med fagansvarlige ved et videreutdanningskurs for lærere, et inquirybasert opplegg beregnet på ungdomsskoletrinnet.

Jeg ønsket å observere da to av lærerne som deltok i videreutdanningskurset gjennomførte dette opplegget. I utgangspunktet var planen å filme i begge tilfellene, og jeg planla å plassere ett kamera fast på ei gruppe elever, og la et annet kamera sirkulere rundt i klassen (jamfør de allerede dokumenterte undervisningssekvensene). Én av lærerne som sa ja til at jeg kunne komme, ønsket imidlertid ikke filming, så i hans klasse har jeg kun observert og tatt notater.

De to lærerene jeg observerte, var Linda og Leo, som underviste på henholdsvis åttende og niende trinn.

3.3.5 Observasjon i Lindas klasse

Linda ønsket meg velkommen til å filme i hennes åttendeklasse når hun skulle gjennomføre det inquirybaserte opplegget. Elevene fikk med seg hvert sitt informasjons-/tillatelsesskjema hjem til sine foresatte, og de fleste fikk underskrift fra foresatte om at det var i orden at de ble filmet.

Opplegget ble gjennomført fredag 09.10.09 i fjerde og femte time. Klassen hadde ikke vanligvis matematikk i disse timene, men for at de skulle få en dobbeltime, hadde Linda byttet om på noen timer. Elevene var delt inn i gupper på 3-4 elever, og gruppene var blandet med tanke på nivå. Dette var første gangen denne klassen skulle ha en gruppeoppgave i matematikk.

Jeg valgte å bruke tre kamera under observasjonen i Lindas klasse. Siden jeg kun skulle filme i denne ene klassen, var det viktig at jeg fikk gode nok data. Fordi jeg ikke var kjent med å bruke kameraene, valgte jeg å ha med et "ekstra" kamera i forhold til det som opprinnelig var planlagt. Linda hadde allerede avtalt med ei gruppe, gruppe A, at de skulle ha et kamera fast plassert hos seg, og fordi jeg ikke ville skape uro ved at ei anna gruppe også skulle velges ut til å ha kamera plassert hos seg, valgte jeg å plassere også det tredje kameraet hos gruppe A, men fokusert ut over klasserommet.

Oversikt over klasserommet:

Gruppe A (Pia, Per, Pål, Peter)	Gruppe B (Janne, Jens, Jan, Jon)	
		Gruppe C (Martin, Mats, Morten, Mari)
(Dør)	Gruppe D (Frans, Fredrik, Fia, Frida)	
		Gruppe E (Ruben, Randi, Reidun)
Gruppe F (tre elever, ikke filmes)		
	Tavle	

Ett kamera var plassert i hjørnet bak gruppe A, og fokusert ut over klasserommet. Dette kameraet ble etter hvert flyttet og fokusert på gruppe E. Et annet kamera var plassert mellom gruppe A og B, og fokusert på elevene i gruppe A. Hos gruppe A var det dessuten plassert en diktafon for bedre lydopptak. Det siste kameraet bar jeg rundt i klasserommet. Mens tavleundervisning pågikk, var det plassert i et stativ nær døra.

Jeg la merke til at det ble mye uro hos gruppe A, og dette var grunnen til at jeg cirka halvveis i økta valgte å flytte det ene kameraet fra dem til gruppe E. Elevene i gruppe E hadde jeg filmet en del med det sirkulerende kameraet, og de så ikke ut til å reagere så mye på å bli filmet. Jeg spurte dem om det var ok at et kamera ble plassert hos dem, og det svarte de ja til.

I ettertid ser jeg at det kanskje ikke var så lurt å plassere to kamera ved gruppe A. Elevene så ut til å reagere en del på at de ble filmet. Samtidig er jeg usikker på hvor stor betydning det ville hatt om de hadde hatt ett kamera plassert hos seg i stedet for to. Først cirka et kvarter etter at jeg flyttet det ene kameraet, oppdaget Pål at det var borte og spurte Peter hvor det var blitt av.

Det som er helt klart, er at elevene i gruppe A ble påvirket av å ha kamera fokusert på seg. De var også opptatt av diktafonen som lå foran dem. Samarbeidet i denne gruppa fungerte dårlig, men om, og eventuelt i hvilken grad, kamera var medvirkende årsak til dette, er vanskelig å si. Til tross for at elevenes atferd ble påvirket av at de ble filmet, vil jeg likevel hevde at en del av data herfra er gyldige. Dette gjelder data som omhandler tolkningen av oppgavene og løsningsmetoder. Elevene så ut til å glemme kamera i perioder, og det var særlig når de stod fast eller ventet på hjelp at de tullet en del med kameraene og diktafonen.

Også resten av klassen, samt Linda, kan ha blitt påvirket av min tilstedeværelse og av at de ble filmet. Bruk av kamera vil antakelig påvirke i større grad enn ren observasjon. Fordelen med bruk av videokamera er at det gir en korrekt gjengivelse av hva som faktisk skjer. Ved ren observasjon vil ikke forskeren klare å notere ned alt som skjer, og notatene vil bli farget av forskerens subjektive oppfatning av situasjonen. I analysen av data fra film-opptak kan også forskerens subjektive oppfatning virke inn, men forskeren har da mulighet til å se gjennom filmene flere ganger og studere hva som blir sagt. Ved å gjøre transkripsjonene tilgjengelige for leseren, får leseren anledning til selv å tolke data og se om han/hun er enig i forskerens tolkning.

Det er vanskelig å si i hvor stor grad læreren og elevene ble påvirket av at de ble filmet. Linda sa i etterkant av økta at ”jeg glemte definitivt at det var kamera her, og det tror jeg ungene óg gjorde. Jeg tror ikke de brydde seg, altså, bortsett fra dem som satt der [viser til gruppe A]”. En viss observatøreffekt må vi uansett regne med, og dette er viktig å ha i bakhodet når vi vurderer gyldigheten av data.

Både fordi gruppe A i så stor grad ble påvirket av at de ble filmet, og fordi de andre kameraene fanget opp mye som var relevant i forhold til min problemtilling, valgte jeg å analysere data fra alle de tre kameraene. Jeg har ikke transkribert alle data, men har valgt ut deler som jeg har transkribert og analysert næremere. Transkripsjonen er gjort etter samme mal som for de allerede dokumenterte undervisningssekvensene.

I forhold til det som etter hvert ble fokus i min oppgave, ser jeg at det var en stor fordel at jeg benyttet meg av filming. Både fordi dette ga mer eksakte og helhetlige data og fordi det ga meg muligheten til å ”være flere steder på en gang”. Jeg fikk samlet data fra flere grupper i klassen, og fikk slik et mer helhetlig bilde av økta.

3.3.6 Samtale med Linda før og etter økta

Cirka to uker før observasjonen skulle finne sted, møtte jeg Linda første gang. Under dette møtet brukte jeg ikke diktafon, men skrev notater. Vi diskuterte da litt rundt praktiske forhold i forbindelse med at jeg skulle filme i klassen hennes. Jeg må også gjøre leseren oppmerksom på at jeg under dette møtet nevnte at det også gikk an å bruke konkreter i tilknytning til den inquirybaserte oppgaven elevene skulle jobbe med. Dette kan ha påvirket Lindas valg om å benytte konkreter.

Den dagen observasjonen skulle finne sted, møtte jeg i god tid før opplegget skulle gjennomføres, og Linda forklarte meg planene sine for økta. Heller ikke under dette møtet brukte jeg diktafon. Jeg tok notater, og fikk i tillegg et utkast Linda hadde skrevet om hvordan hun planla å gjennomføre økta.

Like etter at økta var gjennomført, samtalte Linda og jeg litt om hvordan økta hadde gått. Denne samtalen ble dokumentert ved hjelp av diktafon. Jeg hadde ikke planlagt noen spesielle spørsmål til denne samtalen fordi jeg ønsket Lindas umiddelbare reaksjoner i etterkant av økta, og ønsket å påvirke samtalen i minst mulig grad. Det var også vanskelig å vite i forkant av økta hva som ville skje, og derfor vanskelig å planlegge spørsmålene.

Noen dager etter at observasjonen fant sted, kom Linda hjem til meg, og vi så filmene sammen. Linda hadde selv bedt om å få se filmene. Jeg hadde sett gjennom filmene på forhånd, og før vi så filmene, stilte jeg Linda noen spørsmål. Dette ”intervjuet” ble dokumentert ved hjelp av diktafon. Spørsmålene jeg hadde planlagt finnes i vedlegg 11.2. Jeg hadde også planlagt å stoppe filmen på ulike tidspunkt og be om Lindas kommentarer til det vi så, men ved flere anledninger kommenterte Linda selv situasjoner, og jeg rakk da ikke å slå på diktafonen, så da skrev jeg notater i stedet.

3.3.7 Observasjon i Leos klasse

Som nevnt tidligere ønsket ikke Leo filming i sin klasse, og jeg har derfor kun observert og tatt notater fra denne økta.

Opplegget ble gjennomført onsdag 21.10.09 i første time, og økta varte i 60 minutter.

Det var 19 elever til stede i klassen, og elevene var delt inn i rene jente-og guttegrupper, 5 grupper på 3-4 elever. Gruppene var blandet med tanke på nivå. De aller svakeste elevene var tatt ut av klassen for spesialpedagogisk undervisning.

Plassering av gruppene:

	Tavle	
Gruppe β (4 jenter)		Gruppe α (4 gutter)
	Gruppe δ (4 gutter)	
Gruppe ε (3 jenter)		Gruppe γ (4 jenter)

Jeg gikk rundt til de ulike gruppene og tok notater underveis. Jeg forsøkte å påvirke i minst mulig grad, og hjalp ikke elevene hvis de stod fast. For det meste forholdt jeg meg taus, men i noen få tilfeller ba jeg elevene forklare hva de hadde gjort. Jeg fulgte læreren en del, og da fikk jeg høre elevene forklare ham hva de hadde gjort.

Leo samlet inn elevenes kladdeark etter økta, og jeg fikk kopier av disse.

Når det gjelder observatøreffekten, i hvor stor grad min tilstedeværelse påvirket det som skjedde i klassen, tror jeg denne var mindre i dette tilfellet enn i tilfellet med Lindas klasse. Likevel kan en ikke se bort fra at en viss observatøreffekt kan ha forekommet.

Fordi notater ikke er fullstendige data, og en også må stole en del på hukommelsen, valgte jeg å analysere data fra observasjonen i Leos klasse så snart som mulig etter at observasjonen var gjennomført. Samme dag som jeg kom hjem renskrev jeg notatene, og i dagene som fulgte skrev jeg analysen av økta. Jeg tok da utgangspunkt i notatene mine samt kopiene av elevenes kladdeark.

3.3.8 Samtale med Leo før og etter økta

Avtalen om at jeg skulle komme og observere i Leos klasse ble gjort via mail, og jeg møtte ikke Leo før samme dag som observasjonen skulle finne sted. I forkant av økta fortalte Leo hvordan han hadde tenkt å gjennomføre økta, og jeg stilte spørsmål hvis det var noe jeg ønsket mer utdypende forklart. Denne samtalen ble dokumentert ved hjelp av diktafon.

I etterkant av økta samtalte Leo og jeg om erfaringene fra gjennomføringen av opplegget. Også denne samtalen ble dokumentert ved hjelp av diktafon. Leo ga sine umiddelbare reaksjoner etter økta, og jeg stilte noen tilleggsspørsmål. Jeg spurte også spesifikt om han hadde lagt merke til om alle forstod oppgavene eller om noen stusset på hva de skulle gjøre på noen av dem. Leo tolket først spørsmålet som at det dreide seg om hvorvidt elevene fikk til oppgavene, det vil si om de forstod det matematiske innholdet, men etter at jeg presiserte at jeg lurte på om elevene forstod hva oppgavene spurte etter, svarte han at han ikke la merke til noen som lurte på hva de skulle gjøre på oppgavene.

Senere på dagen sendte jeg Leo en mail og spurte om det var noen spesiell grunn til at han ikke hadde hatt noen oppsummering av økta, og jeg fikk da svar tilbake at han skulle ha en oppsummering dagen etter. Jeg var ikke til stede under denne oppsummeringa.

3.3.9 Faktorer som kan ha påvirket resultatene

Observatøreffekten har jeg allerede kommentert ovenfor. I tillegg kan det ha en betydning i samtalene mellom lærerne og meg at jeg kommer inn som en som skal ”granske” det lærerne gjør. Dette kan skape en følelse av å måtte prestere hos lærerne. Det er mitt inntrykk dette ikke var noe stort problem i samtalene med Linda og Leo, men det kan jeg ikke uttale meg sikkert om. Jeg lot i stor grad lærerne styre samtalene, og grunnen til dette er at det er en fare for at spørsmål kan oppfattes som ledende, og slik påvirke svaret en får. For å minimere denne effekten ønsket jeg å la lærerne uttale seg mest mulig fritt. Der hvor jeg har stilt lærerne spørsmål, har jeg forsøkt å unngå ledende spørsmål, men det er alltid en fare for at respondentene svarer det de tror forskeren ønsker å høre.

Jeg valgte å ikke fortelle Linda og Leo hva som var problemstillinga mi og hva jeg ville fokusere på når jeg observerte i klassen. Dersom jeg hadde fortalt det, ville det antakelig ha påvirket lærerne til å endre atferd. Fagansvarlige ved videreutdanningskurset var imidlertid klar over hva som var fokus i masteroppgaven min, og dette kan ha påvirket deres veiledning av deltakerne ved kurset.

Det at lærerne visste at de skulle skrive rapport fra gjennomføringa av undervisningsopplegget, kan også ha hatt en innvirkning på hvordan økta forløp.

Når det gjelder analyse av data fra utprøvingen av den inquirybaserte oppgaven jeg har utviklet i samarbeid med fagansvarlige ved videreutdanningskurset, har jeg ikke lenger den samme distansen til data som jeg hadde til data fra de allerede dokumenterte undervisningssekvensene. Jeg har selv hatt hovedansvar for utviklingen av den inquirybaserte oppgaven, og jeg har selv vært tilstede under utprøvingen. Dette gjør at jeg har større kunnskap til detaljer, men det kan også gjøre det vanskeligere å forholde seg kritisk og objektiv til datamaterialet. Jeg har valgt å gi en relativt detaljert beskrivelse av data som analyseres, og dette er for å gjøre leseren i stand til selv å vurdere om analysen min er rimelig. Utvelgelsen av data vil uansett til en viss grad være subjektiv.

3.3.10 Lærernes rapporter

19 lærere krysset av for at rapporten deres kunne brukes i masteroppgaven min. 4 krysset av for at rapporten ikke kunne det, mens 1 ikke hadde krysset av for hverken ja eller nei. Jeg fikk altså tilgang til 19 av 24 rapporter.

Etter hvert som fokuset i masteroppgaven min ble mer tydelig, ble det klart at lærernes rapporter ikke var av så stor verdi med tanke på å besvare problemstillinga mi. Rapportene var knyttet til videreutdanningskurset for lærere, og lærerne valgte selv hva de ville fokusere på i sine rapporter. Det var derfor ikke alt som var relevant for meg. Jeg har lest gjennom de 19 rapportene, men vil i oppgaven min kun kommentere det jeg finner direkte relevant i forhold til min problemstilling.

4 Undervisningsopplegg om lineære funksjoner

4.1 Undervisningsopplegget

Det undervisningsopplegget jeg nå vil analysere, ble gjennomført av tre ulike lærere i hver sine matematikkgrupper i første klasse, videregående skole. Kun første del av økta ble filmet.

Lærerne hadde forberedt fire kort med oppgaver som elevene skulle arbeide med. Elevene satt i grupper, og etter hvert som de ble ferdige med oppgavene på ett kort, fikk de utdelt neste kort. Oppgavekortene var som følger:

Kort 1

X + Y = 7

1. Hver elev **skriver ned** to hele tall som til sammen blir 7.
2. Fins det flere slike tallpar?
3. Hvor mange slike finnes det?
4. **Tegn** disse tallparene på millimeterpapiret.

Kort 2

X + Y = 7

1. Hva skjer hvis x = 2 ½?
2. Hva om y = 4,7?
3. Hvor mange forskjellige tallpar er mulig nå?
4. **Tegn** disse nye tallparene sammen med de du allerede har tegnet.
5. Hva skjer hvis et av tallene er 9 ?
6. Hva skjer med tegningen nå?
7. Finn fire nye tallpar hvor det ene er større enn 9. Tegn disse også.
8. **Diskuter** hva dere har funnet ut. **Skriv ned** minst to punkter.

Kort 3

X+ Y = 12

1) Finn tallpar som passer og tegn dem i samme koordinatssystem som før.
2) Hvordan blir denne tegningen i forhold til den første?
3) Finn likheter og forskjeller. **Skriv ned.**
4) Gjør det samme som i punktene over med uttrykket: **X + Y = 5.** Hva ser du? **Skriv ned.**

Kort 4

2X + Y = 9

5) Finn tallpar som passer og tegn disse inn på et nytt mm – papir
6) Tegn tallparene som passer i uttrykket **X + Y = 7** på nytt inn dette koordinatssystemet
7) Finn et tallpar som passer i begge uttrykkene. Hva har du gjort nå ?
8) Kan du skrive **2X + Y = 9** på en annen måte slik at det blir lettere å finne tallpar som passer?

4.2 Generell oversikt over øktas forløp for de tre fokusgruppene

4.2.1 Gruppe 1

Liv (lærer) gir en kort felles introduksjon til timen og elevene får beskjed om at det eneste de trenger å ha på pulten er noe å skrive med og noe å skrive på. Elevene i gruppe 1 begynner å arbeide med kort 1, og stusser tidlig på hva det vil si å tegne tallparene på millimeterpapir. Da de ser at Liv gir en linjal til en elev på en annen gruppe som også skal tegne tallpar, får Eli ideen til at de kan tegne et koordinatsystem. Liv kommer bort til gruppe 1 og kommenterer at de har linjaler. Hun sier også at de gjerne må diskutere litt høyere (med tanke på at de blir filmet). Elevene krysser av punkter for noen tallpar i koordinatsystemet, og Eli lurer på om de kan bruke null og syv. Før gruppa har kommet til noen konklusjon angående dette, kommer

Liv bort, og Eli spør henne om null er et helt tall. Liv svarer at "det er jo helt, men er det positivt?". Hun spør også om elevene kan se noe annet når de tegner tallparene enn om de bare hadde skrevet dem opp. Før hun forlater gruppa, gir hun dem kort 2. Elevene går i gang med oppgavene på kort 2, og for å finne ut hva Y er når X er to og en halv, tar de syv minus to og en halv. I diskusjonen om hvor mange tallpar som er mulige nå, kommer det frem at de på kort 1 kun har tatt med positive heltall, og at de har valgt å ikke regne med null og syv. Nå tolker de det slik at også (positive) desimaltall med én desimal skal være med, og strever en god stund med å telle hvor mange tall som er mulige nå. De lurer på om det er seksti eller åtti, og bestemmer seg for å regne med null og syv både her og på forrige oppgavekort. Videre diskuterer de om det nå blir søtti eller åtti tallpar. Eli teller millimetre i koordinatsystemet, og oppdager at selv om det er ti mulige mellom to tallpar av hele tall, må det bli elleve i den ene enden. Diskusjonen står nå mellom søttien og åttien mulige tallpar. De velger å spørre Liv om hjelp, og hun spør hvor mange tallpar som ville vært mulige hvis man kunne ha så mange desimaler man ville. Da vil det bli uendelig mange. På oppgave 5 på kort 2 (hva om et av tallene er 9?), har elevene problemer med å tolke oppgaven, og lurer på om det vil si at et av sifrene skal være ni (f. eks 0,9) eller at X, Y eller 7 skal være ni. Liv kommer, og det blir avklart at det menes at f. eks X er lik ni, ikke at en av desimalene er ni. Elevene ser at de nå også må ta med negative tall, og må tegne nye koordinatsystem for å få plass. De diskuterer seg frem til flere tallpar der det ene tallet er større enn ni, og konkluderer med at det er uendelig mange tallpar som blir syv, og at punktene for disse ligger på ei rett linje. Eva har ikke fått alle punktene på ei rett linje, og Eli og Ester hjelper henne å finne ut hva hun har gjort feil. De begynner så på kort tre, og tegner et nytt koordinatsystem med ei ny linje. Liv kommer bort og ber dem forklare hva de har gjort. Ester har kun brukt punktene (0,12) og (12,0) for å tegne linja, men på spørsmål fra Liv om hvor mange punkter man trenger for å tegne ei rett linje, svarer Ester at hun ville tegnet de hele tallpunktene (med hele virker det som hun mener hele og positive) hvis hun skulle være helt sikker. Til slutt tar Liv en oppsummering på tavla der hun fokuserer på at f. eks. X+Y=7 også kan skrives på eksplisitt form Y= -X +7. Hun påpeker hva som blir skjæringspunkt med y-aksen, og at tallet som X er multiplisert med, er stigningstallet til grafen. Klassen går til friminutt, og de skal jobbe mer med dette neste time.

4.2.2 Gruppe 2

Lene (lærer) har først en kort introduksjon til oppgavene, og elevene får beskjed om å ta frem blyant, viskelær og linjal. Hun oppfordrer elevene til å diskutere sammen i gruppene. Elevene i gruppe to går i gang med oppgavene på kort 1, og finner åtte ulike tallpar. De skriver ned tallparene og ber om neste oppgavekort. Lene kommer bort og ber dem tegne tallparene. Elevene skjønner ikke hva som menes med det, og lurer på om de for eksempel kan tegne syv ruter på en side av arket og null ruter på andre siden. Lene hinter om *x*- og *y*-verdier, og elevene forstår at de skal tegne et koordinatsystem. De tegner, og ser at de kan tegne ei rett linje fra syv til syv. Lene kommer bort og ser på hva elevene gjør. Én av elevene kommenterer at linja kan gå lenger oppover og nedover, og det blir en liten diskusjon rundt dette. Elevene er usikre på om de kan ha med negative tall, og Lene sier at det ikke står noe om at de ikke kan det. De utvider linja i begge retninger. På kort 2 bruker elevene linja de har tegnet for å finne *y*-verdien når *x* er lik 2 ½ og *x*-verdien når *y* er lik 4,7. De kommenterer også at de kunne brukt likning, og én av elevene velger å løse det som en likning. En del av oppgavene på kort 2 har elevene allerede gjort i arbeidet med kort 1. På oppgave 8 på kort 2 konkluderer de med at de kan finne det ukjente tallet ved å se på koordinatsystemet eller ved hjelp av likning. På kort 3 ser de raskt at det blir det samme prinsippet som på de tidligere oppgavene, og at linja til X+Y=12 blir parallell med den de allrede har tegnet. Forskjellen mellom de to linjene er at de krysser *x*- og *y*-aksen på ulike steder. For X+Y=5 gjelder det samme. På kort 4 oppstår det en diskusjon om hva 2X betyr, om det betyr 2+X eller 2 ganger X. De blir enige om at det betyr 2 ganger X, men gjør en del slurvefeil og unnskylder seg med at de er sultne. De rekker å begynne å tegne inn noen punkter for 2X+Y=9, men så avbrytes de, og Lene tar en oppsummering på tavla. Hun spør elevene hva de har funnet ut, og fokuserer på at de har funnet tre parallelle linjer. De skal jobbe videre med dette opplegget senere.

4.2.3 Gruppe 3

Lars starter timen med å forklare at elevene skal få utdelt kort én, og når de er ferdige med det, skal de få kort to og så videre. Han sier at elevene selv skal finne ut hva de skal gjøre ved å lese på kortene, og at de bør ha linjal og noe å skrive med. Elevene går i gang med oppgavene, men stusser på hva som menes med tallpar. De finner ut av det, og skriver ned mulige tallpar. De tar kun med naturlige tall, inkludert null. Etter å ha skrevet ned åtte mulige tallpar, tilkaller de Lars og sier at de er ferdige. Lars spør om de har tegnet tallparene, og det kommer frem at elevene ikke forstår hva som menes med å *tegne tallpar*. Lars unngår å nevne koordinatsystem, og elevene prøver seg på ulike måter å tegne tallparene på. Etter hvert kommer Lars igjen, og fokuserer på at det er *x*-er og *y*-er. Elevene "tegner" så x-er og y-er på arket. Lars kommer igjen, og hinter nå om *x*- og *y*-akse, og nå tegner endelig elevene koordinatsystem. Rett etter å ha vært hos gruppe 3, går Lars frem til tavla og tegner et koordinatsystem. Elevene rekker opp handa og sier til Lars at de tror de er ferdige. Lars spør om de har svart på spørsmålet om hvor mange slike tallpar som finnes, og elevene svarer at det er åtte. Lars påpeker at elevene kun har valgt positive tall, og elevene må ta med negative tall også. For å få plass, trenger de nye millimeterpapir. Elevene virker nokså frustrerte og leie, og det er kun Adele som gidder å tegne nå. De tilkaller Lars igjen, og han godkjenner det de har gjort og gir dem kort 2. Elevene prater mye om andre ting, men løser oppgave 1-2 greit, og svarer på oppgave 3 at det fortsatt er uendelig mange tallpar. De påpeker at de ikke trenger å tegne de nye tallparene (oppgave 4), fordi de allerede har tegnet dem. Tallparene med negative tall er også allerede tegnet inn. Lars spør om de har skrevet ned fire tallpar der et av tallene er større enn ni, og Adele sier de har det i hodet. De får beskjed om at de må skrive dem ned. På oppgave 8, der de skal skrive ned hva de har funnet ut, skriver de at de får en rett graf, og at *x* og *y* er proporsjonale. De får kort 3, og kommenterer at det er akkurat det samme de skal gjøre der. Elevene prater mye om andre ting, men får likevel gjort oppgavene etter hvert, og svarer på oppgave 3 at *x* og *y* også her er proporsjonale, og at de to linjene blir parallelle. De gjør seg ferdige med kort 3, og får utdelt kort 4. De rekker å finne en del tallpar før Lars avslutter timen og sier at de skal ta en oppsummering etter friminuttet.

4.3 Hele tall – hvilke tall er nå det?

4.3.1 Gruppe 1

Elevene i gruppe 1 regner kun med positive hele tall på oppgavekort 1 der de skal finne *hele tall som til sammen blir 7*. Det oppstår en diskusjon omkring hvorvidt 0 er et helt tall, og Eli spør læreren, Liv:

83	Eli:	Er null et helt tall?
84	Liv:	(4s) Det er jo helt, men er det positivt?
85	Eli:	Det er nøytralt
86	Liv:	*(ler)* Jaa. Elin, {har du fått tegnet?}

Lærerens svar på hvorvidt null er et helt tall (84) kan tolkes som at for at null skulle kunne bli regnet med i denne sammenhengen, måtte det vært positivt. Elevene ser ut til å ha tolket svaret slik, for de valgte å ikke regne med tallparene (0,7) og (7,0), og regnet dermed med seks ulike tallpar på kort 1. Elevene forbinder tydeligvis hele tall med naturlige tall, og da er det naturlig at de lurer på om 0 skal være med.

Under diskusjonen om hvor mange tallpar som er mulige på kort 2, kommer elevene igjen tilbake til spørsmålet omkring 0 og 7:

65	Eli:	Det var noen der som sa åtti *(viser til ei av de andre gruppene)*. Men da
66		har de typisk regnet med at det går an å ta null pluss syv og syv pluss
67		null
68	Eva:	(*ser inn i kameraet)* Det regner ikke vi med
69	Eli:	(*ser inn i kameraet)* Nei *(ler)*

Det følger en kort diskusjon om hvordan elevene skal tegne disse tallparene (utelatt her).

91	Eli:	(...) kryss for hver eneste millimeter. **Hver eneste millimeter**
92	Ester:	Ja, men da skjønner...
93	Eva:	Centimeter mener du
94	Eli:	Ja, men det skal være et kryss for hver millimeter
95	Eva:	Åja okey
96	Ester:	Ja men det går jo ikke (...)
97	Eli:	(...) Nei, det ble mer *(uttalt i en overrasket tone)* (...)
98	Ester:	(...) seksti sytti åtti. Det er åtti
99	Eli:	(...)
100	Eva:	Ja, det er fordi vi har tatt syv der
101	?:	I stedet for åtte
102	Ester:	Ja, men det er
103	Eva:	{og det er jo} null og syv
104	?:	Ja
105	Eva:	Det er de vi egentlig ikke skulle ta med
106	Ester:	Men det er mange som regner med med *(forstyrrelser på lyden idet*
107		*kameraet beveges)*, hvis ikke så blir det sytti {gjør det ikke det?}
108	Eva:	Nei det blir seksti
109	Ester:	Men eh kan vi ikke bare ta seksti (...)
110	Eli:	{det blir feil}
111	Ester:	Jeg tror det er åtti
112	Eli:	Jeg tror og det, men da må vi ta med syv og null
113	Ester:	Ja. Det står jo hvilke mulige forskjellige tallpar
114	?:	(...)
115	Eli:	Skal vi si null og syv og da på den forrige
116	Ester:	Mm
117	Eva:	Ja

Elevene har tolket oppgave 1-4 på kort 2 som at det nå er tillatt med desimaltall med én desimal. Da de så skulle telle hvor mange tallpar som nå er mulige, ble det en del forvirring, og elevene bestemte seg for å ta med 0 og 7 likevel. Basert på diskusjonen dem imellom kan det se ut til at 0 og 7 tas med av praktiske hensyn, nemlig at de finner det enklere å telle antall mulige tallpar når de også regner med endepunktene. Avgjørelsen rettferdiggjøres ved å vise til at det er flere i klassen som regner med 0 og 7 (106). De velger å endre svaret sitt på kort 1, og tar med 0 og 7 der også (115-117).

I arbeidet med oppgave 5-7 på kort 2, der elevene skal finne tallpar der det ene tallet er større enn ni, innføres negative tall. Elevene går ikke tilbake til kort 1 for å endre svaret sitt der, noe som tyder på at de fortsatt tenker på hele tall som naturlige tall, inkludert null, og ser oppgavene på kort 2 som en utvidelse fra dette.

4.3.2 Gruppe 2

I gruppe 2 er Stian raskt ute med å ramse opp mulige tallpar:

9	Stian:	Men det er jo bare syv og null, seks og én, fem og to, tre og fire
10		[og så er det omvendt]
11	Siv:	[Ja men du kan jo skal vi ha] liksom fem og to og to og fem
12		også begge veier.
13	Stian:	Eh jeg vet ikke. X kan jo være fem og X kan være to så da må jo
14		være ha det begge veier.
15	Sara:	Mm. Ja da gjør vi det.
16	Stian:	Yeah finnes det flere ja hvor mange.

Stian regnet kun med naturlige tall på denne oppgaven. Siv lurte på om en kan regne for eksempel (5,2) og (2,5) som to forskjellige tallpar, og Stian argumenterte med at siden X både kan være to og fem, må de kunne regnes som to forskjellige tallpar.

Like etter kommer Lene og deler ut millimeterpapir. Stian benytter anledningen til å stille et spørsmål:

27	Stian:	Du, sånn syv pluss null, det er jo *(peker på arket sitt, ser spørrende på Lene)*
28	Lene:	Det er også to tall.
29	Sara:	Men skal du ha null pluss syv da?
30	Lene:	Det kan du også.
31	Sara:	Ja.

Det virker som Stian er usikker på om syv og null kan regnes med som hele tall. Han fullførte ikke spørsmålet sitt, men så spørrende på Lene som om han ventet et svar. Lene sier ganske enkelt at syv og null også er to tall, og elevene ser ut til å tolke dette som at syv pluss null kan regnes med. Selv om Stian tidligere har argumentert for at de kan regne tallparene ”begge veier”, spør Sara Lene om de også kan regne med null pluss syv, og Lene bekrefter at det kan de. Læreren ses gjerne på som en autoritet, og det er rimelig å anta at Sara ikke var hundre prosent sikker på om de faktisk kunne regne tallparene ”begge veier”, og ønsket en bekreftelse fra læreren.

Elevene skriver ned de mulige tallparene, og skal så svare på hvor mange slike som finnes:

44	Siv:	Er det bare åtte?
45	Stian:	Skal vi se hvor mange (…) da må det være åtte. Hvor mange
46		slike finnes det, svar, det finnes åtte slike tallpar.

Elevene kom frem til at det finnes åtte tallpar som oppfyller kravene på kort 1. Da har de regnet med de naturlige tallene, inkludert null, og er altså ikke klar over at negative tall også er tillatt.

Etter en diskusjon med Lene om hvordan tallparene kan tegnes, og etter at elevene har tegnet linje i koordinatsystem, kommer Lene igjen og ser hvordan det går med elevene:

174	Stian:	Card one. *(ser opp på Lene)* Det blir jo sånn som det?
175	Lene:	Se her ja. *(kommer og stiller seg bak Sara og ser på arket hennes)*

Sara:	Sånn *(snur seg og ser opp på lærer)*
Stian:	[Så blir det]
Lene:	[Stopper den der?]
Sara:	Nei han går jo lenger nedover og lenger oppover.
Stian:	[Nei.]
Siv:	[Nei] kan han det egentlig?
Stian:	Han stopper der.
Sara:	Ja.
Lene:	Gjør han det?
Sara:	Nei men eh
Lene:	Hvis du hadde hatt et koordinatsystem så ligger jo den {y-aksen} *(peker og viser på arket til Sara)*
Stian:	Gått sånn og [så] sånn ja. *(peker og viser over arket til Sara)*
Sara:	[Ja.]
Lene:	Ja.
Stian:	Men det blir jo ikke.
Siv:	Skal vi tegne alt?
Sara:	Men da må det være sånn der minustall og sånn der og sånn der veldig høye noen eller noe. *(ser opp på Lene som står mellom henne og Siv)*
Lene:	Det står jo ikke at at dere ikke kan ha det.
Stian:	Minustall.
Lene:	Ja.
Stian:	Ja ja okei [en null syvhundre] og nittisyv tusen minus en million *(beveger hodet fra side til side og lener seg så litt bakover)*
Siv:	[Er det sånn liksom minus]
Lene:	Ja, men da kunne dere jo velge noen som dere kunne klare å tegne da. Dere må liksom ikke dra den helt *(ler, peker ut i luften og legger så armene i kors)*
Stian:	Nei nei *(ler)* nei men liksom ja greit.
Sara:	Men da må vi lage han større da.
Stian:	Da må vi bare ta det begge veier men
Siv:	Det har ikke jeg plass til da men jeg kan
Lene:	Nei men dere kan jo fortsette på den litt og så [ser dere] ideen i det i hvert fall.
Stian:	[Ser poenget] ja.
Lene:	Ja. *(går fra elevene)*
Siv:	Trenger vi noe den veien?
Sara:	Ja.
Siv:	Yeah yeah.
(Elevene sitter bøyd over papirene sine og skriver/tegner)	

Stian spurte Lene om det blir slik de har gjort det, med andre ord ba han om en bekreftelse på at det de har gjort er riktig (174). Det ser ut til at elevene har tegnet linja fra (0,7) til (7,0) i koordinatsystemet, og Lene spør om linja stopper der (178). Sara svarte at linja også kan gå lengre oppover og lengre nedover (179), men Siv og Stian er uenige (180-182). Da blir også Sara usikker (183-185), og sier etter hvert at da måtte det vært minustall og noen veldig høye tall (193). Lene påpeker at det ikke står noe om at de ikke kan ha det (195), hvorpå Stian påpeker at det da kan være svært høye tall (198). Lene råder dem til å velge noen tall de kan klare å tegne (201). Elevene blir enige om at de må utvide linja si. De får litt plassproblemer (206, 207), men Lene fokuserer på at poenget er at de ser ideen (208).

Først mens de jobber med oppgavekort 2 kommer elevene på at de må endre svaret sitt på kort 1 der de skrev at det fantes åtte ulike tallpar.

Stian:	Eeh x fire komma tre.(6s) Hvor mange forskjellige tallpar ey på tre hvor mange slike [finnes det hvor mang på kort en der skrev vi åtte. Det er jo en milliard]
Siv:	[Nei blir det ikke sa du to ja, ja uendelig]
Stian:	Uendelig vi skriver bare vi snur bare åttetallet sånn at det blir uendelig.
Siv:	Hæ! (*Elev 1 visker ut noe fra arket hun har skrevet på*)

40	Sara:	Jo.
41	Stian:	Det betyr uendelig ikke sant sånn.
42	Siv:	Det visste jeg ikke. Da lærte jeg noe nytt, kanskje jeg skal

Stian begynte å lese oppgave 3 på kort 2 (hvor mange forskjellige tallpar er mulig nå), og kom da på at de skrev åtte på kort 1, mens det faktisk er "en milliard". Han bruker ordet *milliard* (36), men med det mener han antakelig uendelig mange. Siv er midt i en annen uttalelse, men bekrefter at det er uendelig mange (37). Stian hevder at de bare kan snu åttetallet slik at det blir tegnet for uendelig (38), et tegn som ser ut til å være ukjent for Siv, som påpeker at hun nå lærte noe nytt (42).

Elevene innser at det er uendelig mange tallpar bestående av hele tall som til sammen blir syv. De ser altså ut til å ha endret sin oppfatning av hele tall fra kun naturlige tall, inkludert null, til også å inkludere negative tall. En annen mulighet er at de ikke har lest så nøye at det stod hele tall på kort 1.

4.3.3 Gruppe 3

Elevene i gruppe 3 er først litt i tvil om hva et tallpar er, men finner raskt ut av det, og går i gang med å finne tallpar:

35	Adele:	Ja og så står det på neste. Hvor mange slike finnes det, men det går an å
36		regne ut faktisk (…) kan vi ikke gjøre det nå.
37	Adam:	Ja [du kan jo du finner bare] det vanlige og så tar vi å [{at du kan ta de} i en
38		annen rekkefølge.]
39	Anne:	[Kan vi ikke bare ta og skrive det ned]
40	Adele:	[Nei det står her] tegn disse partallene på millimeterpapiret.
41	Anne:	Da gjør vi bare det samtidig da.
42	Adele:	Tre men ja okay.
43	Anne:	Da blir jo det
44	Arne:	Vi vi bare skriver tre og så går vi litt ned og så gjør vi oppgave fire og så
45		skriver vi det på oppgave tre.
46	Adele:	Ja.
47	Arne:	Ikke sant.
48	Anne:	Skal vi bare skrive skrive en pluss seks og seks pluss en på toppen?
49	Arne:	[Ja]
50	Adele:	[Vi må jo det.] Skitt, jeg glemte én
51	Anne:	Mm to
52	Adele:	Syv pluss null går jo også.
53	Adam:	Ja men syv pluss null og null pluss syv er det samme det.
54	Arne:	[Ja] men det nei [du tar du skriver det som to]
55	Anne:	[Ja]
56	Adam:	[Nei ja ja ja greit]
57	Arne:	Så tar vi tre.
58	Anne:	Du ja. *(Bøyer seg over for å se på arket til elev 2)*
59	Adele:	En to tre fire fem seks syv åtte.
60	Arne:	Åtte ja.
61	Adam:	Mm.
62	Arne:	En to tre fire fem seks syv åtte ja.

Adele sa at det går an å regne ut hvor mange slike tallpar som finnes (35), og elevene bestemte seg for å "tegne" disse på millimeterpapiret, og slik gjøre oppgave 3 og 4 samtidig (44). Med "tegne" mener de her å skrive ned tallene. De regner kun med naturlige tall, inkludert null, og finner dermed at det er åtte mulige tallpar.

Adele leste her partall (40), men det hadde hun også gjort tidligere, og da hadde Anne rettet på henne og sagt at det stod tallpar, så jeg går ut fra at det bare var en glipp at hun igjen leste partall.

Elevene tilkaller Lars, og sier at de er ferdige, men han spør om de har tegnet tallparene. Videre strever elevene lenge med å finne ut hva som menes med å tegne tallpar, og til slutt gir Lars dem hint om *x*- og *y*-akse, og de tegner ei linje i et koordinatsystem. De tilkaller Lars igjen:

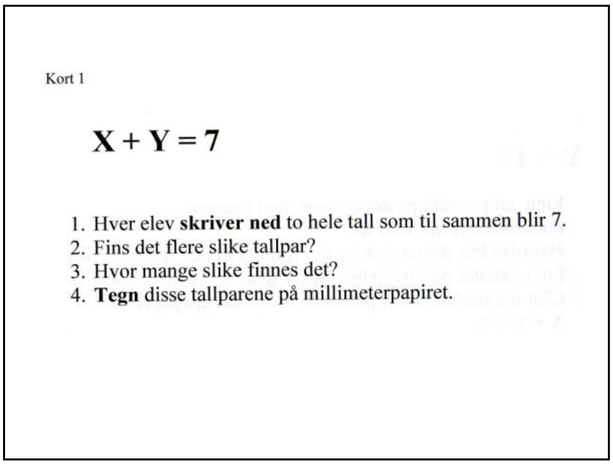
Lars:	Yes.
{Adele}:	Vi er ferdige nå, tror vi.
Lars:	Mhm.
{Anne}:	Er vi ferdige nå?
Lars:	Har dere svart på spørsmålet finnes det flere slike tallpar?
Anne:	Ja.
Lars:	Hvor mange slike fins?
Adele:	Ja.
Lars:	Hvor mange tror dere fins?
Anne:	Ja.
Adele:	Åtte.
Anne:	Ja, åtte. Av det som kan bli syv liksom.
Lars:	Dere har tatt hele tall, ja. Mm. Ehm alle tall dere har valgt er positive ser det ut som for meg.
Adele:	Å din gris!
Anne:	Åh neeei *(tar seg til hodet)*
Arne:	Du har vi feilet helt på dette her eller?
Anne:	Saddam Hussein [Vi må jo]
Adele:	[Helvete!] Jeg skal ikke banne.
Adam:	[{Positive} ja {hva mener} skulle vi ta både negative og positive?]
Anne:	[Sava sier vi da.]
Adele:	Nei men ikke sant da må vi jo tegne
Anne:	Da må vi tegne en sånn derre bortover der og [(...) ledig plass (...)]
Adele:	[Ja men herre da kan vi jo holde på] i uendelig ikke sant minus hundreogtjue pluss hundreogtjueåtte nei eller et eller annet sånn.
Anne:	Herligland ja det er sant ja tusen millioner skriver vi da.
Arne:	Eh kan du ikke bare skrive uendelig?
Adele:	Så mange du vil ehe.
Arne:	Åh Jesus. *(bøyer hodet ned mot pulten)*

Lars spurte elevene om de har svart på hvor mange slike tallpar det finnes (5, 7, 9), og elevene svarte at det finnes åtte slike tallpar (11,12). Lars påpeker da at alle tallene de har valgt er positive (13). Elevene reagerer sterkt (15-19, 21, 29), og skjønner at må ta med også negative tall (20). Dermed blir det uendelig mange mulige tallpar (24-28).

Lars valgte å spørre etter elevenes svar på hvor mange tallpar som finnes før han ville gi dem neste kort. Jeg tolker dette som at han ville sjekke at elevene hadde fått med seg alle mulige tallpar. Kanskje hadde han en anelse om at de ikke hadde fått dekket alle muligheter. Han sier ikke at elevenes svar er feil, og kommer ikke med forslag til nye tallpar, men kommenterer ganske enkelt at alle tallene elevene har valgt er positive. Denne lille kommentaren fra Lars er nok til at elevene innser at de kan ta med negative tall også, og at det dermed finnes uendelig mange tallpar.

4.3.4 Drøfting

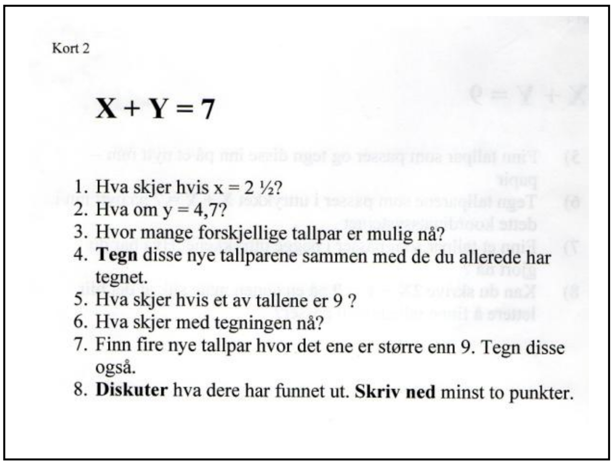
Før jeg kommenterer hvordan oppgavene elevene har fått kan ha bidratt til misoppfatninger angående hele tall, vil jeg minne om hvordan de to første oppgavekortene lød:



Kort 1

X + Y = 7

1. Hver elev **skriver ned** to hele tall som til sammen blir 7.
2. Fins det flere slike tallpar?
3. Hvor mange slike finnes det?
4. **Tegn** disse tallparene på millimeterpapiret.



Kort 2

X + Y = 7

1. Hva skjer hvis x = 2 ½?
2. Hva om y = 4,7?
3. Hvor mange forskjellige tallpar er mulig nå?
4. **Tegn** disse nye tallparene sammen med de du allerede har regnet.
5. Hva skjer hvis et av tallene er 9 ?
6. Hva skjer med tegningen nå?
7. Finn fire nye tallpar hvor det ene er større enn 9. Tegn disse også.
8. **Diskuter** hva dere har funnet ut. **Skriv ned** minst to punkter.

I oppgave 1 på kort 1 står det at hver elev skal skrive ned to hele tall som til sammen blir 7. *Skriver ned* er uthevet, men det er ikke noen utheving av *hele tall*. Det spørres hvor mange slike tallpar som finnes, og elevene bes om å tegne disse på millimeterpapiret. Når det står at elevene skal tegne *disse* tallparene (min kursivering), antydes det at det finnes et endelig antall slike tallpar, selv om dette altså ikke er tilfelle. Anne i gruppe 3 kommenterer:

Anne: Det står tegn disse tallparene såå skal vi tegne hele gjengen da? [Det tar jo femten år.]

I oppgave 5 på kort 2 spørres det hva som skjer dersom ett av tallene er 9. Uavhengig av om man har regnet med negative tall på kort 1 eller ikke, kan man svare her at det andre tallet da må være (-2). Gruppe 1, som kun hadde tatt med tall med én desimal etter komma, lurte imidlertid på hvilke tall det var snakk om her. Var det et av sifrene som skulle være 9 (f. eks. som i 1,9), eller var det X,Y eller 7 som skulle være 9? En bedre formulering av denne oppgaven kunne vært ”hva om X eller Y er 9?”.

Etter dette spørres det hva som skjer med tegningen nå, og elevene bes om å finne fire nye tallpar hvor det ene er større enn 9, og tegne disse også. I disse oppgavene ligger det en antakelse om at elevene ikke allerede har regnet med negative tall, selv om de altså egentlig burde ha gjort dette på kort 1 der de skulle ta med alle hele tall. Dette kan bidra til å forvirre elevene, for hvis de har regnet med negative tall på kort 1, blir disse oppgavene meningsløse.

Liv synes ikke å være klar over at det skjer en misforståelse i gruppe 1. På spørsmål om hvorvidt 0 er et helt tall, svarer hun at ”det er jo helt, men er det positivt?”, noe som resulterer i at elevene utelater (0,7) og (7,0). Her var altså elevene oppmerksomme på at det stod *hele tall* i oppgaven, og konsulterte læreren fordi de var usikre på hvilke tall som ble regnet som hele tall, men Livs svar bidrar til at elevene kun regner med naturlige tall på kort 1, der de skulle regne med hele tall. Elevene velger senere å ta med 0 og 7 likevel, men når de regner med negative tall på kort 2, viser de ingen tegn til å ville endre svaret sitt på kort 1. De sitter altså igjen med en oppfatning av hele tall som naturlige tall, eventuelt inkludert null.

Lene og Lars derimot, får på hver sin måte elevene til å innse at de også kan regne med negative tall på kort 1. Lene spør om linja elevene har tegnet stopper ”der”, altså om den bare går fra (0,7) til (7,0), noe som etter en liten diskusjon resulterer i at elevene utvider linja si. Lars kommenterer at alle tallene elevene har valgt er positive, noe som får elevene til å se at de også kan ta med negative tall.

4.4 Hva menes med å *tegne* tallpar?

4.4.1 Gruppe 1

I starten av timen fikk elevene beskjed om at det eneste de trengte å ha på pulten var noe å skrive med og noe å skrive på. Det viser seg imidlertid at elevene trenger linjaler også:

Eva:	(...) den tegninga, hva var det (...)
Eli:	Tegne tallpar? (...)
?:	(...)
?:	Ja, det tror jeg.
	(16s)
Ester:	Hva var det du skulle si {i stad}?
	(9s)
?:	{Er det seks par det blir?}
Ester	*(blar i ei skrivebok)*
Eva:	*(teller noe i boka si)* Mm *(hoster)*
?:	{Skal vi bare skrive det på millimeterpapir}
?:	Hæ?
Eva:	Skal du skrive det på millimeterpapir?
{Eli}:	Tegn disse tallparene på millimeterpapiret.
Eva:	{Bare skrive sånn der tre pluss fire?} (smiler)
?:	Tegne
?:	Hm
Eva:	(...) {tegne de, er det ikke bare å skrive de?}
Ester:	Hva er det jeg har skrevet for noe? *(kikker i skriveboka til Eli)*
Liv:	*(hjelper en annen gruppe)*
(elevene snur seg og følger med på Liv som hjelper gruppa ved siden av dem)	
Liv:	*(henvendt til den andre gruppa)* (...) må finne en måte å tegne de på. [Skal dere ha en linjal?] *(henter en linjal)*
Ester:	[Tegne de på?]
Eli:	*(løfter en finger raskt i været, og raskt ned igjen, som for å vise at hun har et poeng)* Aha!
Ester:	(...) kryssegreier *(viser et kryss i lufta med blyanten)* Gjør det ikke det?
Eli:	*(nikker til Ester)*
Eli+Ester:	*(ler)*
Eli:	*(løfter en finger i været og raskt ned igjen, som for å vise at hun har et poeng)*
Ester:	Men jeg vet ikke helt hvordan jeg skal sette det opp.
Eli:	{Jo, vi tar og skriver sånn der}
?:	Åssen da kryss?
(Kameraet fokuserer nå kun på Eli. Hører de andre mumle noe)	
Eli:	*(tegner ei loddrett linje)* (...) bruke blyant *(bytter ut pennen med en blyant og tegner videre.For transkriptør ser det ut som hun tegner positiv x- og y-akse, og setter merker for verdier på disse)*

Elevene var i tvil om hva det vil si å tegne tallpar, og det ble foreslått å skrive dem ned (18). Før de rakk å avgjøre hva de skulle gjøre, hørte de Liv si til ei anna gruppe at de måtte finne en måte å tegne dem på (29), og så at hun hentet linjal. Da fikk Eli ideen om at de kan tegne koordinatsystem.

Da elevene så at ei anna gruppe fikk linjaler, skjønte de altså at de kunne tegne koordinatsystem. En kan spørre seg om elevene ville ha tenkt på dette enda raskere dersom de hadde fått beskjed i starten av timen om at de skulle ha linjaler også på pulten.

4.4.2 Gruppe 2

5	Siv:	Men skal vi ha skrive det på millimeterpapir eller?
6	Sara:	Nei {jeg t} *(ytringen går inn i en lav mumling der hun avbryter seg selv)*
7	Stian:	Eh ja skal vel det. Tegn disse tallparene på millimeterpapir så (…)
8	Sara:	Ja.

Siv spurte tidlig om de bare skulle skrive tallparene på millimeterpapiret (5). Sara svarte først nei (6), men etter at Stian har sagt at han tror de skal det (7), sa også Sara seg enig (8).

Også i denne gruppa var altså elevene i tvil om hva det vil si å tegne tallpar. Det stod i oppgaven at de skulle tegne tallparene på millimeterpapiret, men elevenes løsning er å *skrive* tallparene på millimeterpapiret. Det ser ut til at elevenes fokus er på at tallparene skal skrives/tegnes *på millimeterpapiret,* altså er fokus på *hvor* de skal notere svarene sine, ikke *hvordan*.

Elevene velger å skrive tallparene på millimeterpapiret, og slår dermed sammen flere oppgaver.

46	Siv:	Tegn disse tallpar på millimeterpapir.
47	Sara:	Det [har vi gjort det]
48	Siv:	[Det har vi jo gjort.] Ja vi gjør egentlig én a og fire sammen da. Okei var det
49		alt?
50	Stian:	Det virker sånn.
51	Siv:	Her er det lagt omtanke i. Se, det er rivd for hånd.
52	Stian:	Oh no.
53	Sara:	Eller må vi tegne sånn der ruter og så er det sånn der
54	Siv:	Nei.
55	Stian:	Hm?
56	Sara:	{Nei vel}
57	Stian:	Tegne hva?
58	Sara:	Øj Lene har du flere oppgaver? (*snur seg og ser bakover*)
59	Lene:	Hm?
60	Sara:	Har du mer oppgaver?
61	Lene:	Eh ja men nå nå har dere satt opp masse. (*kommer bort og stiller seg*
62		*bak Siv og Sara)*
63	Sara:	Ja.
64	Lene:	Og så skal dere prøve å **tegne** på millimeterpapiret de tallparene.
65	Siv:	Skal vi sånn tegne?
66	Sara:	Tegne?
67	Lene:	Ja hvordan er det mulig å tegne det inn.
68	Siv:	Kan vi ikke bare si at liksom en rute er verdt én liksom eller er det sånn.
69	Lene:	Jo sånt noe kan du kanskje
70	Sara:	Ja.
71	Lene:	Prøv å prøv å tenk åssen det er mulig å å representere det på en måte,
72		hvordan dere kan gjøre det på de forskjellige tallparene.
73	Stian:	Ja tenkte du på liksom markere en sånn [pluss]
74	Siv:	Ja men ikke [sant] hvis vi hvis vi sier at en sånn en en fire deler av den
75		liksom den med de store firkantene der er en.
76	Sara:	Ja.
77	Stian:	Ja er det sånn.

Lene: Men hvis dere har x eh det er jo, det er egentlig x pluss y som er lik syv.
Sara: Ja.
Lene: Du kunne på en måte valgt at at noe var x og noe var y og så.
Sara: Men vi hvis vi for eksempel deler arket inn, og så kan vi, inn i to for eksempel, så er det x og så er det y. Og så må vi jo tegne, så kan vi for eksempel vi tegne syv, syv, vi skal ha syv pluss null, så syv ruter der og så blir det null ruter der eller noe sånn, er det det du mener? (*bruker blyanten og viser i luften over arket sitt*)
Lene: Ja åssen er det du pleier å tegne tallpar ellers da?
Sara: Aner ikke jeg. (*ser opp på lærer og biter seg i leppa*)
Stian: Eh
Siv: [Tegne (…)]
Lene: [x- og y-verdier] åssen tegner dere det?
Siv: Som koordinatsystem eller sånn.
Lene: Ja kanskje det. Åssen ville du gjort det i et koordinatsystem?
Siv: Med denne {fine} linjalen.
Lene: (*Gir Siv en linjal*)
Siv: Oj oj oj.
Lene: Du verden for en service.
Sara: Ja men da får vi tegne et koordinatsystem da.

Da elevene kom til oppgave 4, der de skulle tegne tallparene på millimeterpapiret, mente de at de allerede hadde gjort det da de skrev ned tallparene (46-50). Sara er litt usikker og lurer på om de må tegne "sånn der ruter" (53), men Siv avfeier henne (53), og Sara ber Lene om flere oppgaver (58). Lene sier at de må *tegne* tallparene (64), og da spør Siv om de skal "sånn tegne". Siv foreslår å tegne ruter der hver rute er verd én (68, 74, 81). Lene lytter til Sivs innspill, men er tydeligvis ikke helt fornøyd med det, for hun spør hvordan elevene pleier å tegne tallpar ellers (86). Hun hinter om *x*- og *y*-verdier (90), og da foreslår Siv å tegne koordinatsystem (91).

Det at Siv spør om de skal *sånn* tegne, viser at ordet *tegne* kan ha flere betydninger. Elevene hadde først tolket det som at de skulle *skrive* tallparene, men innså at Lene hadde ment noe annet. Hva hun mente med *tegne* var imidlertid fortsatt uklart for elevene. Det er tydelig at Lene ville at elevene skulle tegne et koordinatsystem, men hun unngikk å nevne dette. I stedet hintet hun ved å spørre hvordan elevene pleier å tegne tallpar, og antok dermed at elevene hadde tegnet tallpar før, og så nevnte hun *x*- og *y*-verdier. Til slutt skjønte elevene at hun ville de skulle tegne et koordinatsystem.

4.4.3 Gruppe 3

Også i gruppe 3 velger elevene først å *skrive* ned tallparene:

Adele: Ja og så står det på neste. Hvor mange slike finnes det, men det går an å regne ut faktisk (…) kan vi ikke gjøre det nå?
Arne: Ja [du kan jo du finner bare] det vanlige og så tar vi å [(…) i en annen rekkefølge.]
Anne: [Kan vi ikke bare ta og skrive det ned]
Adele: [Nei det står her] tegn disse partallene på millimeterpapiret.
Anne: Da gjør vi bare det samtidig da.
Adele: Tre men ja okay.
Anne: Da blir jo det
Arne: Vi vi bare skriver tre og så går vi litt ned og så gjør vi oppgave fire og så skriver vi det på oppgave tre.
Adele: Ja.
Arne: Ikke sant.

Anne foreslo å skrive ned tallparene (39), men Adele påpekte at det står at de skal tegne tallparene på millimeterpapiret (40). Anne foreslo da at de kan gjøre begge deler samtidig (41), og Adele gikk litt nølende med på det (42). Også Arne var enig i at de kunne gjøre oppgave tre og fire samtidig (44).

Annes spørsmål om de bare kan skrive ned tallparene ser ut til å være knyttet til oppgave tre, der oppgaven er å svare på hvor mange slike tallpar (som oppfyller at $x+y=7$) som finnes. Adele viser til neste oppgave, der de skal tegne tallparene, og det er mulig hun tenker at det først er der de skal notere ned de ulike tallparene, mens oppgave 3 kun spør etter antallet. En annen mulig tolkning er at hun faktisk tenker at de må tegne tallparene, ikke bare skrive dem ned, men det at hun nevner tre som kommentar til Adeles forslag om å gjøre oppgave 3 og 4 samtidig, og ikke sier noe om hvordan hun eventuelt ser for seg at tallparene skal tegnes, gjør at jeg ser den første tolkningen som den mest sannsynlige.

Etter å ha skrevet ned tallparene, tilkaller gruppa Lars og hevder at de er ferdige:

Adele:	**Lars.** Vi er ferdige. (*rekker opp hånden*)
?:	(…)
Lars:	Mhm. Har du tegnet de eller har dere tegnet de? (*Bøyer seg over Adele og ser på arket)*
Adele:	Vi har jo [tegne og tegne]
Anne:	[Er ikke det tegning?]
Lars:	Jaha ja vel.
Arne:	Er det ikke sånn?
Lars:	Eh *(humrer)* [ja det er opp til dere det men] hva mener vi med å tegne tallpar? (*stiller seg litt bak gruppen med hendene på hoften)*
Anne:	[Jeg skjønte ikke en dritt av det her]
Adele:	Du tegner seks runde kuler pluss én rund kule.
Anne:	*(Ler)*
Arne:	Skal vi gjøre sånn?
Lars:	Det er opp til dere det. Hva vi legger i begrepet å tegne tallpar.
Arne:	Ja skal vi tegne seks mennesker og [to sett en dame et damemenneske liksom]
Lars:	*(forlater elevene)*
Adele:	[*(Ler)* Eh nei men nei men du] hvis vi skal tegne
Anne:	*(Ler)*
Adele:	Nei men se her nå. Hvis vi skal tegne det på sånn millimeterpapir så kan vi jo ta en sånn rute til hver ting. Sånn seks (*tegner/skriver på sitt ark. Anne og Arne ser på)*
Anne:	Å herre min hatt. (*Tar seg til hodet)*
Adele:	pluss en hvis han absolutt mener vi skal tegne.

Lars spurte elevene om de hadde tegnet tallparene (63), og Adele og Anne ble usikre på om de egentlig hadde det (67,68). Lars sier at det er opp til elevene hva de legger i begrepet å tegne tallpar (71, 77), og det kommer forslag om å tegne kuler, mennesker eller ruter (74, 78, 83).

Det er tydelig at elevene er usikre på hva som menes med å *tegne* tallpar. Lars vil ikke fortelle dem hvordan de skal gjøre det, og nevner hverken x- og y-akser eller koordinatsystem. Han sier at det er opp til elevene hva de legger i det å tegne tallpar, men mener han egentlig det? Han virker ikke å være tilfreds med forslagene deres, for det er så vidt han rekker å forlate gruppa før han kommer tilbake for å hjelpe dem mer på vei:

Lars:	*(kommer tilbake til elevene)* Jeg har ikke lyst til å hjelpe dere så mye videre men det har lett for å bli kanskje det. Nå må dere bruke hodet når det gjelder

90		hva vil det si å tegne et tallpar. (*står bak elevene med armene i kors)*
91	Anne:	Jeg vet da fanken hva et tallpar er for noe.
92	Lars:	*(går til gruppa ved siden av)*
93	Arne:	To tall ikke sant som er
94	Anne:	Ja men tallpar.
95	Adele:	Eller kanskje vi skal tegne syv stykker og så fargelegger vi noen av dem. Vi
96		kan gjør det på mange måter vi har god tid sikkert.
97	Adam:	Nei jeg tviler på.
98	Anne:	Skal vi gjøre det da. Skal vi gjøre det?
99	Arne:	Jeg bare tegner det sånn som Adele har gjort [jeg gidder ikke stresse]
100	Anne:	[Ja hva tegner du?] (*bøyer seg over til Adele for å se hva hun tegner*) Skal vi
101		tegne det samme eller skal vi bare tegne forskjellig?
102	Arne:	Bare prøv. Kan vi ikke prøve alle sine metoder liksom.
103	Adele:	Ja men jeg tror vi skal samarbeide egentlig.
104	Arne:	Okei da samarbeider vi og så tegner alle likt. **Alle tegner likt.**

Lars ba elevene bruke hodet når det gjelder hva det vil si å tegne et tallpar (88), men elevene forstod fortsatt ikke hvor han ville. Anne uttaler til og med at hun ikke vet hva et tallpar er (91), selv om gruppa sammen har funnet flere mulige tallpar. Adele foreslår å tegne syv stykker og fargelegge noen av dem (94), og sier de sikkert har god tid (95). Arne foreslår at de skal prøve ulike metoder (101), men Adele sier hun tror de må samarbeide (102), og gruppa bestemmer seg for å tegne slik som Adele har gjort (103).

Lars vil altså fortsatt ikke nevne koordinatsystem. Han sier bare at de må bruke hodet, noe som ikke ser ut til å hjelpe elevene noe videre. De prøver å tegne syv av et eller annet og så fargelegge noen for å representere ulike tallpar, men virker fortsatt usikre på om de gjør det riktig.

116	Anne:	Jeg synes ikke det her var så veldig grei oppgave jeg.
117	Arne:	Nei jeg synes heller ikke det.
118	Anne:	Sjekk å fint sier jeg bare. (*Ser opp på Lars som står utenfor bildet)*
119	Lars:	Ja vel ja ha okei *(ler)* ja.
120	Anne:	Ikke kom her og bare le.
121	Lars:	Nei nei nei nei det det er dere som skal få
122	Arne:	Han bare disser oss, vet du, er det sånn [trekker vi en vinner, trekker vi en
123		vinner] på slutten?
124	Adele:	[Men vi har mange ideer så vi må bare tegne i hele dag.]
125	Lars:	Hm?
126	Adele:	Trekker.
127	Arne:	Trekker nei eh er det er det den som gjør det gjør det best blir liksom filmet litt
128		ekstra og får et intervju eller noe sånn. *(ler)*
129	Lars:	Men du for å lede dere litt [for å lede dere litt] (*Adele ser opp mot læreren)*
130	Anne:	[Ikke gidd å si jeg har gjort feil nå.]
131	Adele:	Kan vi tegne syv firkanter og så markere noen?
132	Lars:	Se på det uttrykket x pluss y er lik syv.
133	Adele:	Ja.
134	Lars:	Ikke sant.
135	Adele:	Er det feil?
136	Lars:	[x og y]
137	Arne:	[Kanskje du skal tegne x-er] og så pluss y-er ikke sant? [Er jeg inne på noe
138		riktig her?]
139	Anne:	**Ja**! [Da må vi ha da må vi ha] jeg tror jeg må ha et nytt ark her.]

Anne og Arne syntes ikke denne oppgaven var så grei (116, 117), men Anne sa likevel til Lars "sjekk å fint" (118), hvorpå han svarer okey og ler (119). Arne hevder at Lars bare tuller med dem, og lurer på om det trekkes en vinner til slutt (122). Adele hevder de har mange ideer, så de kan tegne hele dagen (124). Lars vil lede dem litt mer (129), og Anne er rask til å gjøre det klart at hun håper han ikke skal si at hun har gjort feil (130). Før Lars rekker å gi dem noen ledetråd, spør Adele om de kan tegne syv firkanter og så markere noen (131). Lars svarer henne ikke, men leder oppmerksomheten mot *x* og *y* (132, 136). Arne tror da at de skal tegne x-er pluss y-er (137), og nå trenger de nye ark for å få plass (139).

Lars forsøker altså igjen å lede elevene, men er fortsatt tilbakeholden med å nevne koordinatsystem. Denne gangen fokuserer han på at det er *x*-er og *y*-er det er snakk om her.

Elevene ”tegner” (skriver) nå x-er og y-er, og utfra den videre samtalen (utelatt her), går det frem at de tror de endelig har skjønt hva Lars mente med å tegne tallpar. Det viser seg imidlertid at de fortsatt ikke har gjettet riktig på hva Lars mener med å tegne tallpar. Jeg skriver gjettet, fordi det ser ut til at denne oppgaven nærmest har utviklet seg til en ”gjettekonkurranse” der elevene kommer med stadig nye forslag til hvordan man kan tegne tallpar. Lars kommer med enda et nytt hint:

Lars:	Ja, du, et nytt stikkord. Jeg har, jeg ga et stikkord, jeg ga x og y til en annen gruppe.(Adele *ser opp, puster ut og ser noe oppgitt ut)* Og da sa hun **å ja** x-akse og y-akse.
Arne:	Jesus. (*Bøyer seg bakover og smiler)*
Anne:	*(ler)*
Adele:	Å ja men nå skjønte jeg det. Ta og så gi meg et viskelær eller noe sånn. Jeg tror forresten jeg har.
Arne:	Det er synd du ikke kan viske viske penn. Har du korrekturlakk eh
Adele:	(*visker ut noe fra arket sitt)*
Anne:	Nei.
Adele:	Nei men ikke sant det går jo i en [sånn rett, rett strek.]
{Adam}:	[Det blir jo bare stygt]
{Arne}:	Ja men jeg tenkte bare her sånn.
Adele:	Se nå her.
Arne:	(…)
Anne:	Ja den der må du forklare litt nærmere for jeg vet ikke helt om jeg var med med på den.
Adele:	Skal vi tegne disse her flotte.
{Adam}:	Skal vi tegne x- og y-aksen?
Anne:	Så tar vi [x y en to tre fire fem seks syv en to tre fire] fem seks syv.
{Arne}:	[Den er veldig fin den her da, {Adam}]
Anne:	[Er det mulig å gjøre det så vanskelig {kan du ikke bare} gjøre det lett?]

Lars sa han hadde gitt stikkordene *x* og *y* til en annen gruppe, og at ei da sa ”åja, *x*-akse og *y*-akse” (168). Adele sier hun skjønte det nå (173), og visker ut det hun har gjort. Anne og Adam er ikke helt sikre på hva de skal gjøre (183, 186), men gruppa tegner etter hvert koordinatsystem. Anne spør om det er mulig å gjøre det så vanskelig, og om man ikke bare kan gjøre det lett (187).

Etter mye strev og flere mer eller mindre nyttige hint fra Lars, skjønner altså elevene til slutt, etter at Lars har hintet om *x*- og *y*-akse, at det er koordinatsystem Lars vil at de skal tegne.

Like etter at Lars hadde vært hos denne gruppa og de hadde skjønt at de skulle tegne koordinatsystem, gikk han frem til tavla og tegnet et koordinatsystem der, og ga et felles hint til hele klassen om hva det ville si å tegne tallpar.

4.4.4 Drøfting

På kort 1 er *skriver ned* uthevet i oppgave 1, som lyder "hver elev **skriver ned** to hele tall som til sammen blir 7", og *tegn* er uthevet i oppgave 4, som lyder "**tegn** disse tallparene på millimeterpapiret". Lærerne ser altså ut til å ha forsøkt å rette elevenes oppmerksomhet mot hvordan de skal representere tallparene.

I gruppe 1 reagerte elevene på at det stod *tegn* disse tallparene. Det ble foreslått å bare skrive ned tallparene, men gruppa var usikre, og diskuterte litt seg i mellom. Så hørte de at Liv hjalp ei anna gruppe, og sa at de måtte finne en måte å tegne tallparene på. Da hun så ga en linjal til en elev i denne gruppa, fikk Eli ideen om å tegne koordinatsystem. I gruppe 2 hevdet elevene at de allerede hadde tegnet tallparene da de kom til oppgave 4, og viste da til at de hadde skrevet tallparene på millimeterpapiret. Sara er den eneste som reagerte litt og lurte på om de kanskje måtte tegne ruter eller noe sånt. Hun godtok imidlertid raskt de andres svar om at det ikke var nødvendig, og først da Lene sa at elevene måtte *tegne* tallpar, skjønte elevene at Lene hadde ment noe annet enn at de skulle skrive ned tallparene. Også i gruppe 3 skrev elevene ned tallparene, og innså først da Lars spurte om de hadde tegnet tallparene, at han hadde ment noe annet.

Liv hadde ikke sagt til sine elever at de trengte linjaler. Hun sa i begynnelsen av timen at det eneste elevene trengte å ha på pulten var noe å skrive med og noe å skrive på. Da elevene i gruppe 1 så at Liv ga linjal til noen andre, fikk de ideen om å tegne koordinatsystem. En kan spørre seg om elevene ville fått denne ideen selv dersom de allerede i starten av timen hadde fått beskjed om at de trengte linjaler. Elevene i gruppe 2 og gruppe 3 hadde fått denne beskjeden i starten av timen, men de så ikke ut til å reagere på hva de skulle bruke millimeterpapir og linjaler til.

Ordet *tegne* kan ha ulike betydninger. Lærerne ser ut til å ha ment at elevene skulle plotte tallparene i et koordinatsystem da de skrev "tegn tallparene på millimeterpapiret". Dette går frem både fra veiledningen lærerne gir elevene i timene, og fra at det faktisk står "finn tallpar som passer og tegn dem *i samme koordinatsystem som før*" (min utheving) i oppgave 1 på kort 3. Da elevene i gruppe 2 og 3 ble klar over at *å tegne* betydde noe annet enn å skrive ned tallparene, kom de med ulike forslag om å tegne ruter, kuler eller mennesker. Elevene ser ut til å tenke på den dagligdagse betydningen av å tegne, mens lærerne kan ha vært så vant til å jobbe med matematikk og til å bruke ordet tegne i denne sammenhengen at de ikke forutså at elevene kunne legge noe annet i begrepet tegne enn det de selv gjorde.

Da Lene og Lars innså at elevene ikke skjønte hva de mente med å tegne tallpar, forsøkte begge å gi elevene hint uten å nevne koordinatsystem. I inquiry-inspirert undervisning er det et poeng at elevene skal finne ut av ting selv, og ikke bare få servert ferdige svar eller løsningsmetoder fra lærerne, og lærerne kan ha hatt dette i bakhodet da de valgte å ikke si rett ut at elevene skulle tegne koordinatsystem. Men som Mason (2000, s. 99, min oversettelse) påpekte: "Spørsmålet er ikke så mye om man skal være eksplisitt, men heller når, og i hvilken grad det kan gagne elevene". I dette tilfellet vil jeg hevde at lærerne gjerne kunne vært mer eksplisitte, for elevene strevde ikke med å løse en matematisk oppgave, de strevde med å forstå hva lærerne mente med at elevene skulle *tegne tallpar*. Det ble en slags interaksjon som handlet om "gjett hva læreren tenker på". Her har lærerne to utfordringer. For det første å oppfatte at de er i en slik situasjon der elevene forsøker å gjette hva læreren tenker på, noe som ifølge Mason (2000) kan være vanskelig, og for det andre å, basert på denne oppdagelsen, velge en reaksjon – knowing-to act in the moment.

Jeg vil hevde at både Lene og Lars havnet i en slik "gjett hva jeg tenker på"-situasjon, men det er vanskelig å si om de var klar over det selv. Ingen av dem brøt av i interaksjonen med gruppa og sa rett ut at de ville at elevene skulle tegne koordinatsystem. Lene spurte først bare ganske enkelt hvordan det er mulig å *tegne* tallpar. Så endret hun ordbruken og spurte hvordan det var mulig å *representere* tallparene. Da elevene fortsatt ikke skjønte hva hun mente, fokuserte hun på *x* og *y*, og spurte hvordan elevene pleide å tegne tallpar ellers. Til slutt nevnte hun *x*- og *y*-verdier, og spurte hvordan elevene pleide å tegne dem, og da skjønte elevene at hun mente koordinatsystem. Lars var mer vag, og sa først at det var opp til elevene hva de la i begrepet *tegne tallpar*. Da elevene blant annet kom med forslag om å tegne mennesker eller ruter, kommenterte han at elevene måtte bruke hodet når det gjelder hva det vil si å tegne tallpar. Her gir han ikke elevene hint som hjelper dem på vei, men det går frem at han har en bestemt oppfatning av hva det vil si å tegne tallpar. Han ser ikke ut til å være klar over at han faktisk ikke hjelper elevene noe, og at de kun kan gjette på hva han mener. Senere kommer han tilbake og gir mer konkrete hint. Først gir han hint om *x*-er og *y*-er, og litt etter kommer han igjen og gir hint om *x*-akse og *y*-akse. Til slutt blir han altså mer eksplisitt, og det er mulig han da har innsett at elevene forsøker å gjette hva han tenker på, men ikke lykkes, og at han derfor må være klarere. Etter at denne gruppa har skjønt at de skal tegne koordinatsystem, velger Lars å tegne et koordinatsystem på tavla. Han ser altså ut til å ha innsett at han må være relativt eksplisitt for at elevene skal skjønne hva han mener.

Det går med ganske mye tid før elevene skjønner hva lærerne har ment med oppgaven. Dette gjaldt særlig gruppe 3. Lene ble hos gruppa helt til de hadde skjønt at de skulle lage koordinatsystem, mens Lars forlot gruppa og kom tilbake flere ganger. Siden tid er en viktig faktor i undervisning, og man ofte har lite tid, kan det være lurt å være obs på hva slags problemer elevene sliter med. Er det et matematisk problem som det er lærerikt for elevene å streve med og løse på egenhånd, eventuelt med litt hjelp, eller en oppgave det er et poeng å klare å tolke selv, eller dreier problemet seg om å finne ut hva læreren har ment? I det siste tilfellet kan det kanskje være greit å gi elevene svaret med én gang? Som Anne i gruppe 3 uttrykte det: "Er det mulig å gjøre det så vanskelig, {kan du ikke bare} gjøre det lett?" (189).

Hundeland et al (2007) setter opp en hypotese om at slike hendelser der elever strever med å forstå hva læreren mener med visse ord, har større sannsynlighet for å inntreffe i inquirybasert undervisning enn i lærerstyrt undervisning. Hvorvidt dette er tilfelle, vil kanskje eventuell videre forskning kunne uttale seg om.

4.5 Hvilke tall er *nå* tillatt, da?

På kort 2 er oppgavene fortsatt knyttet til uttrykket X+Y=7, men nå er det ikke lenger kun tallpar bestående av hele tall som er tillatt. De fire første oppgavene på kort 2 lyder slik:

1. Hva skjer hvis x = 2 ½?
2. Hva om y = 4,7
3. Hvor mange forskjellige tallpar er mulige nå?
4. **Tegn** disse nye tallparene sammen med de du allerede har tegnet.

Det viser seg at disse oppgavene kan tolkes på ulike måter.

4.5.1 Gruppe 1

Elevene finner raskt svar på oppgave 1 og 2, men på oppgave 3 begynner problemene:

Ester:	Hvor mange forskjellige tallpar er mulig nå?
Eli:	Åh.
Ester:	(...) stress.
Eli.	Da blir det jo
Ester:	Eeeh
Eva:	Tallpar hæ?
Ester:	(...) [kan du ikke ta kan du ikke ta fem komma tre]
Eli:	[{en to tre fire fem seks syv åtte}] ni
Ester:	gange
Eli:	(...) atten innimellom hvert tall {er det det}
Eva:	Hvor mange tallpar, hva mener de?
Eli:	{Ikke sant} du har seks med de hele tallene og så har du atten mellom hvert av de hele tallene.
Eva:	[Åssen fant du ut det?]
Ester:	[jeg skjønte ikke det] nei det skjønte ikke jeg heller åssen {du} klarte å finne ut av.
Eli:	{jeg vet ikke om det er riktig.}
Ester:	Åssen tenkte du? Fortell oss!
Eli:	Siden, ikke sant, typisk mellom to og tre {så har du} null k to komma én, to komma to, to komma tre, to komma fire, to komma fem, to komma seks, to komma syv, to komma åtte, to komma ni *(teller på fingrene.)* Ni forskjellige tall.
Eva:	Ni ja.
Eli:	Og så kan du ha de
Eva+Ester:	*(Ler høyt)*
Eli:	*(Smiler)* ja så kan du ha de (...)
Ester:	Ja.
Eli:	Så kan du ha de begge veier.
Eva:	*(Ler)*
Eli:	(...) men ikke sant hvis du har to par, nei to tall, så kan du ha både to komma syv og *(kikker i boka si)* fire komma tre og så kan du fire komma syv og to nei {blæh} jo.
Eva:	Åja det er bare av de fire og to liksom ehe det er bare du ska'kke regne alle fra null {til seks syv}?
Ester:	Åffer fire og to, det blir seks.
Eli:	{Jeg må se.}
Eva:	Nei, men se da. Det vi fikk i svaret, det er bare liksom hvor mange tallpar med fire komma et eller annet og to komma et eller annet. Det er ikke sånn fra null til syv igjen med kommatall?

Eva var i tvil om hva som menes med oppgaven ”hvor mange forskjellige tallpar er mulig nå?” (6, 11). Eli satte i gang å telle, og hevdet at det blir seks med de hele tallene, og så atten mellom hvert av de hele tallene (8, 10, 12). Samtidig lurer Ester på om de kan ta fem komma tre gange et eller annet (7, 9), men avbryter sin ytring og lurer heller på hvordan Eli kom frem til sitt svar (14, 18). Eli forklarer at det er ni tall mellom to og tre, og så kan man ha dem begge veier (19, 27, 29). Eva kommenterer at de bare har regnet med tallpar med fire komma et eller annet og to komma et eller annet, og lurer på om det kunne vært fra null til syv igjen med kommatall (32, 36).

Det ser ut til at Eli har tolket oppgaven som at de nå i tillegg til hele tall (som for elevene vil si positive hele tall) kan regne med desimaltall med én desimal som har to eller fire foran komma. Dermed blir det seks pluss atten mulige tallpar. Eva stiller imidlertid spørsmålstegn ved denne tolkningen, og ser en annen mulig tolkning, nemlig at de skal ta med kommatall fra null til syv, ikke bare tall av typen fire komma noe og to komma noe.

Eli tar Evas kommentar til etterretning, og kommer nå til at det er seksti mulige tallpar:

41	Eli:	{Vent da} *(teller noe)* seksti?
42	Ester:	**Seksti?**
43	Eli:	Ja ti mellom hvert tall.
44	Eva:	{Er det ikke ni?}
45	Eli:	Jo, men det blir ti *(ler)*
46	Ester:	{men det er hvor mange mulige til sammen} Det står jo hvor mange
47		forskjellige tallpar er det mulig nå
48	Eli:	Ja men se da [ikke sant.]
49	Ester:	[og da tar du jo med de andre au.]
50	Eli:	{hør her da} hvis vi begynner på null komma én. Null komma én, null komma
51		to, null komma tre, null komma fire, null komma fem, null komma seks, null
52		komma syv, null komma åtte, null komma ni, én. Én komma én, én komma to,
53		én komma tre, én komma fire, {én komma fem, én komma seks syv åtte ni, to,
54		ikke sant} det blir ti hakk i hvert. Skjønner?
55	Ester:	Mm.
56	Eli:	Så er det seks forskjellige mulige par
57	Ester:	(...)
58	Eli:	Gange ti eller blir det det? Seksti?
59	Eva:	Hvis det er riktig gange ti, ja.
60	Ester:	Jeg foreslår at vi prøver, og så er det feil, så er det feil.
61	Eva:	*(lLer)* Det er det.
62	*(Eva, Eli og Ester skriver i bøkene sine. Etter hvert begynner også Elin å skrive)*	

Eli foreslo at det var seksti mulige tallpar (41), noe Ester stilte seg spørrende til (42). Eli forklarer at det er ti mellom hvert tall (43), og Eva spør om ikke det var ni (44). Eli ramser opp tallene null komma én, null komma to, og så videre opp til én, og deretter fra én til to, og forklarer slik at det blir ti hakk i hvert (50). De går for at det da må bli seksti mulige tallpar fordi de har seks forskjellige tallpar (med "hele" tall), og da blir det seksti ganger ti (56-60). Eva kommenterer imidlertid at hun mener dette er feil (61).

Diskusjonen går videre, og elevene strever med å finne ut hvor mange tallpar som er mulige. Når de skal tegne tallparene oppdager de at det blir flere enn seksti, og Eli og Ester hevder det må være åtti, og vil ta med syv og null også. Eli teller igjen, og får plutselig søtti i stedet. Nå har imidlertid Eva fått åtti, og elevene klarer ikke å bli enige. Eli bestemmer seg for å telle alle, og oppdager at det må bli elleve tall i stedet for ti ved ett av endepunktene. Nå står diskusjonen mellom søttien og åttien, og elevene spør til slutt om hjelp:

159	Eli:	*(Henvender seg til Liv, som nå er like ved)* {har vi lov til å spørre om hjelp?}
160	Liv:	Hm?
161	Eli:	Har vi lov til å spørre om hjelp?
162	Liv:	Jaja. Hvis ikke dere finner ut av det noen av dere.
163	Eli:	Det blir syttién hvis vi tar med nullen?
164	Liv:	Ja, hvor mange åja eh er du på kort to?
165	?:	Ja.
166	Eli:	(...) null og syv [(...)]
167	Liv:	[Ja]
168	Eli:	så ble det (...)
169	Liv:	Mm.
170	Eli:	men så da ble det syttién (...)
171	Liv:	Mm.
172	Eli:	{åssen vi regnet ut det}
173	Liv:	Mm men eh men det er under forutsetning at du har én eh én desimal, er det
174		ikke det? Mm. Er det nødvendig å bare ha én desimal?
175	Eli.	{Så du kan ha hundre millioner?}

Liv: Jaa, hvis du har lyst.
Eli: Men der står det jo fire komma syv. *(peker på oppgaveteksten)*
Liv: [Det gjør det.]
Eli: [(...)] tallpar nå.
Liv: Mm.
Eli: Det står én desimal.
Liv: Ja, det gjør det. Men hvis det hadde vært mulig å ta så mange desimaler som du
Eli: Da hadde du fått flere.
Liv: Ja. For eksempel hvor mange hadde det blitt hvis jeg hadde sagt du kan ta så mange desimaler du vil?
Ester: Alt for mange.
Liv: Alt for mange, ja, og det blir omtrent?
Ester: En million, nei
Liv: Aah.
Ester: [en billion]
Eli: [Uendelig]
Liv: Uendelig ja, det er [det det gjør.]

Eli spurte Liv om det blir syttién mulige tallpar hvis de tar med nullen (163), og Liv stusset litt og spurte om de var på kort to (164). Elevene forklarer litt videre, men en del av dette er ikke hørbart for transkriptøren (166-172). Liv påpeker at dette er under forutsetning av at de har én desimal, og lurer på om det er nødvendig å bare ha én desimal (173). Eli spør om de kan ha hundre millioner (175), og får bekreftende svar på det (176), men påpeker at det står én desimal, fire komma syv, i oppgaven (177, 181). Liv sier seg enig i at det gjør det, men spør hvor mange tallpar de ville fått hvis de kunne ta så mange desimaler de ville (182, 185). Elevene kommer frem til at de da ville fått uendelig mange tallpar.

Elevene oppfatter tydeligvis 2 ½ som 2,5, altså et desimaltall med én desimal. Med en slik tolkning har begge eksemplene én desimal, og elevene ser dette som en relevant faktor.

I arbeidet med oppgavekort 2 er elevene innom flere ulike tolkninger av oppgavene. Først regner Eli kun med tallparene fra kort 1 pluss tall med én desimal og to eller fire som tallet foran komma, deretter regner elevene med tall mellom null og syv med én desimal, og inkluderer etter hvert null og syv også, og til slutt spør Liv dem hvor mange tallpar som er mulige hvis de kan ha så mange desimaler de vil bak komma. Det virker imidlertid fortsatt som at det kun er tallene fra null til syv elevene regner med, for negative tall nevnes ikke før elevene begynner å jobbe med oppgaven om hva som skjer hvis et av tallene er ni.

4.5.2 Gruppe 2

I gruppe 2 har elevene allerede på kort 1 tegnet ei linje som de vet at fortsetter i det uendelige i begge retninger. Oppgave 3 og 4 på kort 2 fortoner seg for denne gruppa ganske annerledes enn for gruppe 1:

Stian: Ja og så hvor mange forskjellige tallpar er mulig nå, det er jo ikke noe flere for det er jo fortsatt uendelig.
Sara: Eh jo for det at nå er det jo mange flere komma.
Stian: Du kan ta nihundretusenogåtte minus nihundretusenogén, så får du syv liksom.
{Sara}: Okei!
Stian: Ja de skulle liksom ja hvis du hadde sånn [(*viser med handa)*]
{Sara}: [{Jajaja}]
Stian: sånn jævlig svær sånn. Men det er bare vas.
Siv: Regn hvor mange forskjellige tallpar er mulig nå.

Stian: Uendelig.
Siv: [Åssen skal vi tegn]
Stian: [Det er jo]
Siv: Ja.
Stian: Ja. Det må være det. Jeg har fått så mange at jeg ikke gidder å telle de. Tegn disse **nye** tallparene. Hva er det de mener? Tegn disse nye tallparene sammen med de du allerede har tegnet. Hva er det de snakker om?
Siv: Er det sånn kommatall du mener der, eller? Lene!
Stian: Tegn disse nye tallparene sammen med de du allerede har tegnet.
Siv: Lene! Åssen nye tallpar er dette her? Det er jo liksom bare sånn kommatall, [men] det er jo på den der.
Lene: *(Kommer bort til Siv og bøyer seg ned for å se på arket hennes)* [Ja.] Den er på den da ja visst søren er den det.
Siv: Høres ut som i barnetimen ja. Ja hva skal jeg da gjøre? Nei vel.
Lene: Ja det, hva skjer hvis et av tallene er ni, det har dere funnet, eller hva ble det?

Stian hevdet det ikke er noen flere tallpar mulige nå enn på oppgavekort 1, for det er fortsatt uendelig (45). Sara mente det måtte være flere (47), men går med på at det fortsatt er uendelig (50). Siv og Stian lurer på hva som menes med at de skal tegne inn disse nye tallparene (56, 59, 62-64), og Siv spør Lene om det er kommatall hun mener, og sier at de jo allerede er på linja de har tegnet (64). Lene svarer at de er det (66), og Siv vet da ikke hva hun skal gjøre på denne oppgaven (68). Lene går så videre til neste oppgave (69).

Elevene tolker oppgaven som at det nå er tillatt også med det de kaller kommatall. Det oppstår en liten diskusjon om hvorvidt det er flere mulige tallpar nå enn tidligere. De er enige om at det er uendelig mange mulige tallpar både nå og på kort 1, og diskusjonen dreier seg altså om uendelighetsbegrepet, noe jeg ikke vil gå inn på her. Det ser ut til at elevene regner med alle mulige desimaltall på denne oppgaven. For dem blir oppgave 4 nokså meningsløs fordi de allerede har tegnet inn desimaltall da de tegnet ei rett linje på kort 1.

4.5.3 Gruppe 3

Elevene i gruppe 3 har også allerede tegnet ei uendelig linje på oppgavekort 1.

Adele: Men hvor mange forskjellige tallpar er mulig nå
Arne: Nå har jeg jo ødelagt denne her nå på grunn av jeg
Adele: Å himmel da, nå kan vi jo ha sånn der halve greier også
(Elevene sitter og skriver på arkene sine)
Arne: Oppgave to. [Hva om y er]
Anne: [Du, er det treeren vi er på nå, Adele?]
Arne: **å hellemadussen** [**fire komma syv det er jo søtten**] **millioner muligheter**
Adele: [Tegn de nye tallparene]
Adam: Hva om y er fire komma syv? To komma tre da
Arne: *(Noe oppgitt)* **Ja!**
Adam: Ja, to komma tre
Arne: Ja, men jeg trodde vi se [hvor mange forskjellige tallpar] *(leser fra oppgavekortet)*
Anne: [Fortsatt uendelig]
Adam: [Ja, men det er på toeren]
Arne: Ja, men jeg så på treeren

Da Adele skulle til å løse oppgave 3, og uttrykte hun at ”å himmel da kan vi jo ha sånn der halve greier også” (3). Arne uttrykker også at ”å hellemadussen, fire komma syv, det er jo søtten millioner muligheter” (7), mens Anne kort svarer at det fortsatt er uendelig mange (14).

Adele og Arne reagerer spontant noe oppgitt på oppgave 3, og begge gir uttrykk for at det da blir svært mange muligheter. Adele sier at de kan ha sånn der halve greier også, men måten hun sier det på, og det at oppgaven før handlet om 4.7, kan tyde på at hun tenker på desimaltall generelt. Arnes kommentar om at det er søtten millioner muligheter, kan tolkes som at han mener uendelig, men bare sier et svært høyt tall. Anne sier også at det fortsatt er uendelig.

Basert på samtalen elevene imellom er det ikke mulig å konkludere hvilke tall de nå tenker skal være tillatt. De hadde allerede funnet uendelig mange mulige tallpar på kort 1, og selv om enda flere tall er tilllatt nå, er antallet fortsatt uendelig.

Elevene prater en del om andre ting før de går videre. Oppgave 4, som dreier seg om at elevene skal tegne inn disse nye tallparene, blir også for denne gruppa nokså meningsløs fordi de allerede har tegnet ei linje på kort 1:

38	Anne:	Nå skal vi tegne det sammen med det andre. [{Herrens}]
39	Arne:	[Fritidsproblemer (...)]
40	Adele:	Ja, men vi trenger jo ikke det, for de er jo allerede der. Tenk da hoho
41	Anne:	Ja, de er jo det. Det er jo bare {å sette} streken lengre videre (...)
42	Adele:	{Hvis han bare ja da må de nei ja hm skrev} ja [bla bla bla]
43	Arne:	[Hva skrev du på tre?] Fortsatt uendelig?
44	Adele:	*(Nikker)* Uendelig, hva betyr egentlig det?

Adele påpekte raskt at det ikke er nødvendig å tegne inn de nye tallparene, for ”de er jo allerede der” (40). I likhet med i gruppe 2, oppstår det også i denne gruppa en diskusjon omkring uendelighetsbegrepet.

4.5.4 Drøfting

Det kan se ut til at lærerne har ment å bruke x=2 ½ og y=4,7 som generiske eksempler, eksempler fra en mengde. Det er imidlertid uklart hvilken mengde de er ment å representere. I og med at det var et poeng i dette opplegget at elevene skulle lære om lineære funskjoner, vil jeg anta at lærerne har tenkt på disse to eksemplene som representanter for mengden av reelle tall. Ser en kun på eksemplene, kunne de like gjerne vært representanter for rasjonale tall, og som vi så ovenfor, fant elevene også flere andre tolkninger av disse oppgavene.

I gruppe 1 fokuserte Eli først på mengden av hele (og positive) tall og tall på formen to komma noe og fire komma noe, der det kun var én desimal bak komma. Dette var en ganske snever tolkning av oppgavene, og gruppa inkluderte etter hvert alle tallene fra null til syv med én desimal bak komma. Gruppa så 2 ½ som 2,5, og regnet det som en relevant faktor at begge eksemplene, både ”2,5” og 4,7, hadde én desimal bak komma,. Fra det sirkulerende kameraet finner jeg at også andre grupper oppfattet det som at de skulle regne med ”hele tall” med én desimal.

Mason og Pimm (1984) hevdet at det er vanskelig å si om noen vektlegger og ignorerer egenskaper/faktorer ved eksempler på samme måte som du gjør. Dette ser vi tydelig i disse oppgavene, der lærerne antakelig vektlegger at 2 ½ og 4,7 er reelle tall (eventuelt rasjonale tall), mens noen av elevene vektlegger andre egenskaper ved eksemplene.

Kanskje hadde det vært bedre å velge andre tall, for eksempel 2 ¼ og 4,7, slik at en unngikk at elevene oppfattet antall desimaler bak komma som en relevant faktor. Fortsatt ville det vært uklart om disse eksemplene skulle representere rasjonale tall eller reelle tall. For å få frem at en mente reelle tall, kunne en lagt til et tredje eksempel, et irrasjonalt tall, for eksempel $\sqrt{2}$, men dette ville vært vanskeligere for elevene å regne med. Det ville også fortsatt vært en mulighet for kun å oppfatte disse eksemplene som spesifikke tall, og kun regnet med disse spesifikke tallene i tillegg til hele tall.

4.6 Hvordan påvirkes elevene av misforståelsene som oppstår?

4.6.1 Gruppe 1

La meg først nevne hvilke misforståelser som oppstår i gruppe 1. Elevene ser ut til å regne kun positive hele tall, eventuelt inkludert null, som hele tall. Livs svar på hvorvidt null er et helt tall styrker muligens denne oppfatningen. Når det gjelder hva det vil si å tegne tallpar, lurer elevene på hva som menes med det. Etter kort tid hører de imidlertid Liv hjelpe en annen gruppe og gi dem en linjal, og de skjønner raskt at de skal lage koordinatsystem.

På kort 2 tror Eli først at det kun er hele tall og tall med én desimal etter komma og to eller fire som tallet foran komma som er tillatt. Så regner elevene med tall mellom 0 og 7 med én desimal etter komma, etter hvert inkludert 0,0 og 7,0. Elevene var usikre på hvilke tall som kunne regnes med. Da de fikk hjelp av Liv, godtok hun elevenes begrunnelse for å regne med én desimal, men spurte hva som ville skjedd hvis de kunne regne med hvor mange desimaler de ville.

På spørsmålet om hva som skjer dersom ett av tallene er 9, var også elevene usikre på hva som mentes med oppgaven. Var det ett av sifrene som skulle være 9? Eller var det X, Y eller 7 som skulle være 9? Her ser jeg tegn på at noen av elevene virker litt oppgitte. De diskuterer først litt, så leser Eli opp spørsmålene igjen:

Eli: Hva skjer hvis ett av tallene er ni? Og så kommer etterpå: Hva skjer med tegningen nå? *(virker litt oppgitt)*
Ester: Ja, jeg vet det, vi har jo ikke peiling på det. *(ler)* Og diskutér det etterpå. *(ler)* (...) Men eh kan du ikke spørre, for jeg skjønner ingenting.

Esters uttalelser om at de ”har jo ikke peiling på det”, og at hun ”skjønner ingenting”, tyder på at hun har gitt litt opp å finne ut selv hva som menes med denne oppgaven. Hun foreslår imidlertid å spørre Liv, så hun ønsker fortsatt å finne ut hva som menes med oppgaven.

Kort tid etter kommer Liv for å dele ut nye millimeterpapir, og Eli spør henne hvilket tall det er som skal være 9. Elevene godtar svaret om at X eller Y skal være 9, og arbeider videre.

Gjennom hele økta holder elevene seg til oppgavene, og de gir ikke opp til tross for at de møter vanskeligheter. Utdraget ovenfor er faktisk eneste tilfelle der jeg ser tydelig tegn på oppgitthet, og denne oppgittheten varer ikke lenge. Utenom dette, er det en del steder elevene ler etter ulike utsagn, som om de er usikre på om det de sier er riktig, men ikke i så stor grad at jeg kan si jeg oppfatter dem som oppgitte eller leie. Der hvor de strever med å telle tallpar på oppgave 3, kort 2, er det noen utsagn som tyder på at de gjerne vil bli ferdige med denne oppgaven. Blant annet reagerer Ester på at Eli vil telle hver eneste millimeter for å finne ut hvor mange tallpar det er. Men elevene gir seg ikke, og diskuterer videre inntil de til slutt velger å spørre Liv om hjelp.

4.6.2 Gruppe 2

I gruppe 2 skjer det få misforståelser. Elevene skrev først ned tallparene i stedet for å ”tegne” dem. Da Lene kommenterte at de måtte prøve å tegne dem, kom de med forslag om å tegne ruter, men Lene ble hos dem og ga dem hint inntil de skjønte at de skulle tegne koordinatsystem. Elevene tegnet ei linje fra (0,7) til (7,0) i koordinatsystemet, og Lene spurte om ikke den kunne gå lengre. Da elevene fikk plassmangel, sa hun det var greit at de bare forlenget linja litt, og at de ikke trengte å tegne nytt koordinatsystem for å få plass. På kort 2 lurte elevene på hva som mentes med at de skulle tegne inn ”disse nye tallparene”, og hva som ”skjer med tegningen nå”, men de kom frem til at de allerede hadde svart på dette på kort 1.

Elevene jobbet godt med oppgavene gjennom hele økta, og hadde kun noen små, korte avbrudd der de snakket om andre ting, blant annet om at de frøs og var sultne.

For denne gruppa gikk svært lite tid bort til problemer med tolkning av oppgavene, og elevene så ikke ut til å påvirkes i særlig grad av de få misforståelsene som oppstod. Før Lene ga dem neste kort, sjekket hun hva de hadde svart på kortet før. Da hun korrigerte dem angående tegning av tallpar, og at de også kunne ha med negative tall på kort 1, sa hun ikke at de hadde gjort feil, men stilte dem spørsmål og ga hint. Hun forlot ikke gruppa før de hadde funnet ut hvor hun ville med spørsmålene og hintene sine, og hun kom relativt raskt tilbake til dem etter at de hadde korrigert svarene sine. Elevene slapp å lage nytt koordinatsystem selv om det ble liten plass i det de først hadde tegnet (der de kun hadde tatt med positive tall), og Lene fokuserte på at de så poenget.

4.6.3 Gruppe 3

I gruppe 3 virket noen av elevene lite motiverte allerede før de skulle starte arbeidet med kortene. Anne sa ”hva er det vi skal gjøre for noe? Jeg skjønner ingenting” før Lars hadde startet timen, og da Arne kom for å sette seg sammen med de andre i gruppa, var noe av det første han sa ”jeg er ikke klar for dette her”.

Etter at Lars har startet timen og delt ut kort 1, kommer elevene i gruppe 3 raskt i gang med oppgavene. De skriver ned åtte tallpar, og rekker opp handa for å si ifra at de er ferdige med kort 1. Lars spør om de har tegnet tallparene, og elevene strever med å finne ut hva som menes med å tegne. Hvordan denne prosessen foregikk, er beskrevet tidligere, så jeg vil ikke gjenta alt her, men fokuserer på elevenes reaksjoner underveis. Da Lars ba elevene bruke hodet angående hva det vil si å tegne tallpar, responderte Anne med ”jeg vet da fanken hva et tallpar er”, selv om elevene hadde avklart dette tidligere. Hun hevder altså at hun skjønner mindre enn hun antakelig gjør. Anne uttaler også at hun ikke synes dette var noen grei oppgave, og Arne sier seg enig i denne oppfattelsen. Når Lars så kommer tilbake og sier han vil lede dem litt, utbryter Anne raskt ”ikke gidd å si jeg har gjort feil nå”. Hun vil altså helst slippe å endre svaret sitt igjen. Lars gir dem hint om X-er og Y-er, og elevene ”tegner” (skriver) X-er og Y-er på arkene sine. De tror tydeligvis at de nå har funnet ut hva som menes med å tegne tallpar, og Anne kommenterer ”er det mulig å være litt sånn smådumme?”. Hun tillegger altså dem selv skylden for at de ikke skjønte hva Lars mente med å tegne tallpar. Når så Lars kommer igjen og sier han vil gi elevene et nytt stikkord, sukker Adele tungt, men etter å ha hørt Lars' hint om *x*-og *y*-akse, sier hun at hun skjønte det, og begynner å tegne koordinatsystem. Elevene virker litt oppgitte over å stadig måtte endre ”tegningene” sine, og Anne spør ”er det mulig å gjøre det så vanskelig {kan du ikke bare} gjøre det lett?”. Elevene tegner linja i et koordinatsystem, og rekker så opp handa og sier de tror de er ferdige. Da kommenterer Lars at de kun har valgt positive tall, og elevene reagerer med uttrykk som ”Å din gris” (Adele), ”Åh neeei!” (Anne), ”Saddam Hussein” (Anne) og ”Helvete” (Adele). Arne spør også om de har feilet helt på dette her. Igjen ser vi altså at elevene legger skylden på seg selv for at de ”mislykkes”. De finner ut at de kan skrive at det er uendelig mange tallpar, men Anne og Arne er svært motvillige til å tegne dem også. De spør om ikke bare Adele kan gjøre det, og Adele og Adam tegner. Anne spør Lars om alle må skrive, og han sier at de må det. Resten av økta er preget av at Anne og Arne prater om utenomfaglige ting, og jobber litt innimellom. Adam sitter stille og følger med på hva de andre sier/gjør, og jobber litt innimellom, mens Adele forsøker å konsentrere seg om oppgavene. Hun prøver iblant å dra de andre med seg, men også Adele deltar innimellom i utenomfaglige diskusjoner.

Selv om det for gruppe 3 skjedde relativt få misforståelser, er det i denne gruppa elevene ser ut til å påvirkes i størst grad av misforståelsene som oppstod. Jeg legger spesielt merke til at de ser ut til å plassere skylden på seg selv for at de tolker oppgavene annerledes enn Lars hadde tenkt. Det var særlig på ”tegne”-oppgaven at elevene strevde, og de ble korrigert flere ganger. Da de så også ble gjort oppmerksomme på at de kun hadde valgt positive tall, er det mulig de reagerte så sterkt fordi de allerede hadde gjort så mange ”feil” angående hvordan de skulle tegne tallpar.

Når det gjelder denne gruppa og elevenes reaksjoner, er det viktig å påpeke at Anne og Arne allerede før økta startet, og før de hadde sett oppgavene, virket lite motiverte for å jobbe med kortene. Det er mulig at de ville blitt lei etterhvert uavhengig av om de hadde støtt på problemer angående tolkning av oppgavene. Siden elevene faktisk jobbet godt frem til Lars sa de måtte *tegne* tallparene, mener jeg imidlertid det er rimelig å anta at problemene med tegne-begrepet i hvert fall var en medvirkende faktor til at elevene så ut til å bli lei av å arbeide med kortene.

4.6.4 Drøfting

Som vi har sett, er det store forskjeller mellom gruppene, både når det gjelder hva som misforstås og hvordan elevene jobber.

Gruppe 1 er vel den gruppa som havnet i størst problemer, men elevene i denne gruppa virker motiverte og konsentrerte om oppgaven gjennom hele økta. Kan en av grunnene til at de ikke blir lei være at de ikke er klar over at misforståelsene? Elevene i denne gruppa brukte litt tid på å avklare hva som menes med oppgavene før de gikk i gang med dem. Både når det gjelder hva det vil si å tegne og hva om ett av tallene er ni, får de avklart hva som menes med oppgaven før de går løs på den. Også på oppgave 1-4 på kort 2, lurer de på hvilke tall de skal regne med, og forsøker å avklare hva som menes med oppgavene før de går videre med dem. Her tolker de imidlertid oppgavene annerledes enn lærerne hadde tenkt, og bruker mye tid på å telle tallpar. De strever lenge med disse oppgavene, men det de strever med er forsåvidt et matematisk problem, nemlig hvor mange tall med én desimal etter komma det er mellom 0 og 7. Da Liv oppdaget at elevene hadde tolket oppgaven annerledes enn hun hadde tenkt, sa hun ikke at de hadde gjort feil, men utvidet oppgavene for dem, og spurte hvor mange tallpar de ville fått dersom de kunne ha så mange desimaler de ville. Altså er det ikke sikkert at elevene oppfatter det som at de har misforstått. De har tolket oppgavene på sin måte og forsøkt å løse dem, og Liv stiller dem på en måte bare et tilleggsspørsmål.

I gruppe 2 var også elevene konsentrerte om oppgavene og jobbet godt. I denne gruppa skjedde det få misforståelser, og når de skjedde, oppdaget Lene det tidlig, og ble hos elevene til de hadde skjønt hva hun mente med oppgaven.

Også i gruppe 3 skjedde det få misforståelser, men her gikk det mye tid vekk til å finne ut hva som mentes med å tegne tallpar. Lars ga elevene hint, forlot gruppa, og kom tilbake og ga nye hint flere ganger. Elevene forsøkte flere måter å tegne tallparene på, men fikk nye hint som gjorde at de skjønte at Lars ville de skulle gjøre det annerledes. De måtte derfor stadig forandre på det de hadde gjort.

Det er nok forskjeller i elevenes motivasjon og arbeidsinnsats i utgangspunktet, for eksempel ser Anne og Arne i gruppe 3 ut til å være mindre motiverte helt fra starten. Hvordan elevene pleier å arbeide i timene, og om de liker matematikkfaget og er motiverte for det til vanlig, vet jeg lite om, og derfor har jeg ikke grunnlag til å si så mye om dette.

4.7 En helhetsvurdering av opplegget

Opplegget ble gjennomført som en introduksjon til emnet lineære funksjoner.

Selv om det i skrivende stund er Kunnskapsløftets læreplaner som er gjeldende, velger jeg i analysen av opplegget å ta utgangspunkt i læreplanmål fra R94 fordi det var denne læreplanen som var gjeldende da dette opplegget ble gjennomført.

Fordi læreplanen i 1MX og 1MY er relativt like når det gjelder de målene som er aktuelle for dette opplegget, velger jeg å ikke ta hensyn til om opplegget ble gjennomført i X- eller Y-grupper.

1MY:	1MX:
Mål 7: Praktisk bruk av funksjoner og algebra **Elevene skal kunne tegne og tolke funksjonsgrafer. De skal kunne bruke algebra og funksjoner i praktiske situasjoner**	**Mål 9: Funksjonslære** **Elevene skal forstå funksjonsbegrepet. De skal kunne tegne og tolke funksjonsgrafer og kunne bruke funksjoner i praktiske situasjoner. De skal ha kjennskap til ideene som ligger til grunn for derivasjon og integrasjon**
Hovedmomenter: Elevene skal	**Hovedmomenter:** Elevene skal
7d kjenne sammenhengen mellom lineære funksjoner og rette linjer, kunne finne funksjonsuttrykket når linjen er gitt, kjenne begrepet stigningstall og kunne tolke det i praktiske situasjoner 7e kunne løse to lineære likninger med to ukjente grafisk og ved regning	9b kunne finne nullpunkter til funksjoner og skjæringspunkter mellom kurver grafisk og ved regning 9d kjenne sammenhengen mellom lineære funksjoner og rette linjer, kunne finne funksjonsuttrykket for en linje ved regning, kunne beregne stigningstallet og tolke det i praktiske situasjoner **Mål 8: Algebra** **Elevene skal regne med algebraiske uttrykk og kunne tolke og bruke algebraiske formler i praktiske sammenhenger. De skal kunne bruke likninger til å løse praktiske og teoretiske problemer** 8d kunne løse to likninger med to ukjente ved regning

Fra læreplanen i matematikk R94

Jeg vet ikke hvilke læringsmål lærerne ville at elevene skulle nå gjennom dette opplegget, og hvilke læringsmål som faktisk blir nådd, vil være avhengig av hva lærerne fokuserer på i sin oppsummering etter å ha arbeidet med disse kortene. Opplegget kan også brukes for å forberede elevene på stoff som vil bli tatt opp senere.

Liv, Lene og Lars tok alle en oppsummering etter den første delen av økta, selv om elevene ikke var ferdige med alle kortene. Jeg antar at grunnen til at de oppsummerte en del såpass tidlig var at de (eller didaktikerne som filmet) ønsket at dette skulle komme med på filmen.

Liv sa at de elevene som ikke har rukket å jobbe med kort 4 skal få dette i neste time, men at hun ville ta en liten oppsummering før pausen. Hun fokuserte i sin oppsummering på at uttrykkene elevene hadde jobbet med også kunne skrives på eksplisitt form, det vil si på formen y=ax+b, og pekte på hva som ble stigningstall og skjæringspunkt med y-aksen.

Lene ba elevene spare på kortene de hadde fått, og så skulle de fortsette å arbeide med dem neste time (ikke samme dagen). Hun sa hun likevel ville ta en kort oppsummering av hva de hadde funnet ut til nå, og i denne oppsummeringen spurte hun elevene hva de hadde kommet frem til. Fokus var på at de hadde fått parallelle linjer, og Lene ville vite hvorfor de hadde fått ulike linjer, altså hvorfor linjene ikke falt sammen.

Lars gikk gjennom ett og ett kort etter at elevene hadde hatt friminutt. På kort 2 var Lars spesielt opptatt av hvorfor de kunne tegne ei linje, og grunnen var at det var uendelig mange punkter som lå så tett sammen at de ikke kunne skilles fra hverandre. På kort tre var han opptatt av at elevene hadde fått parallelle linjer, og på kort fire pekte han på at linja de fikk der (fra uttrykket 2X+Y=9), synker raskere enn de andre. Han hopper over oppgave 7 (der elevene skulle finne et tallpar som passer i begge uttrykkene) uten noen videre kommentar, og går rett til oppgave 8, der han vil at elevene skal skrive uttrykket på formen Y=9-2X. Han får imidlertid problemer med å overbevise elevene om at denne måten å skrive uttrykket på gjør det lettere å finne tallpar. Videoen slutter brått uten noen avslutning fra Lars, så jeg vet derfor ikke om han kommenterte noe mer angående dette kortet, for eksempel om han kommenterte oppgave 7 etter å ha kommentert oppgave 8.

Dersom en ser kun på oppgavene på kortene, er det nærliggende å tenke at et hovedmål var at elevene skulle kunne løse to lineære likninger med to ukjente grafisk. Ut fra Liv sin oppsummering ser det ut til at det i hvert fall for henne også var et mål at elevene skulle lære om stigningstall og skjæring med y-aksen. Hun sa ikke noe om grafisk løsning av to lineære likninger med to ukjente, men siden elevene skulle jobbe med kort 4 neste time, er det naturlig at hun ikke kommenterte dette enda. Basert på Lene og Lars sine oppsummeringer, er det vanskelig å si noe om deres mål med opplegget. Begge fokuserte i hovedsak på hva elevene hadde funnet ut, og holdt seg til oppgavene på kortene. Lenes oppsummering var dessuten svært kort, og elevene skulle jobbe videre med kortene senere.

Dersom jeg tar hensyn både til oppgavekortenes utforming, lærernes oppsummeringer og læreplanens mål, vil jeg si at det særlig er to mål som ser ut til å være relevante i forhold til dette opplegget. Disse er

1) Elevene skal kunne løse to lineære likninger med to ukjente grafisk.
2) Elevene skal kunne finne stigningstall og skjæringspunkt med y-aksen for likninger av typen y=ax+b.

Når det gjelder punkt 2, er ikke dette et mål en kan regne med at elevene når kun etter arbeidet med kortene, men kortene legger et grunnlag for at de kan nå dette målet.

Opplegget utfordrer også elevene til å se sammenhenger mellom likninger på formen ax+by=c og lineære funksjoner, og som nevnt tidligere kan man bygge videre på elevenes erfaringer fra dette opplegget senere.

Spørsmålet er nå hvordan opplegget fungerte. Som et hovedinntrykk vil jeg si at det oppstod mange misforståelser underveis, og at mye tid gikk vekk til irrelevante ting. Jeg har ikke data til å kunne si noe om elevenes læringsutbytte, men jeg vil se nærmere på sterke og svake sider ved opplegget.

En positiv side ved opplegget er at det har en lav inngangsterskel, og at alle kan delta. Elevene får selv være aktive fremfor at læreren bare forteller dem om lineære funksjoner.

Som nevnt tidligere, kan opplegget fungere som en introduksjon til emnet lineære funksjoner, og det kan skape en referanseramme som lærerne kan vise tilbake til i det videre arbeidet med emnet. Opplegget får også frem at det er en sammenheng mellom lineære likninger på formen ax+by=c og lineære funksjoner, og bygger en slags bro mellom algebra og funksjonslære.

Dessverre er opplegget preget av en del støy, og noen av oppgavene står i et slags motsetningsforhold til hverandre. Det er også noen oppgaver der elevene har problemer med å forstå hva som menes med oppgaven. Jeg vil utdype disse momentene i det følgende, der jeg tar for meg ett og ett kort.

Kort 1

X + Y = 7

1. Hver elev **skriver ned** to hele tall som til sammen blir 7.
2. Fins det flere slike tallpar?
3. Hvor mange slike finnes det?
4. **Tegn** disse tallparene på millimeterpapiret.

På kort 1 hadde elevene store problemer med å forstå hva som mentes med å tegne tallpar. Lærerne hadde tydeligvis en klar forståelse av at å tegne tallpar ville si å plotte dem i et koordinatsystem, mens elevene ikke delte denne forståelsen. Det står også at elevene skal tegne *disse* tallparene, men det er jo uendelig mange.

Kort 2

X + Y = 7

1. Hva skjer hvis x = 2 ½?
2. Hva om y = 4,7?
3. Hvor mange forskjellige tallpar er mulig nå?
4. **Tegn** disse nye tallparene sammen med de du allerede har tegnet.
5. Hva skjer hvis et av tallene er 9 ?
6. Hva skjer med tegningen nå?
7. Finn fire nye tallpar hvor det ene er større enn 9. Tegn disse også.
8. **Diskuter** hva dere har funnet ut. **Skriv ned** minst to punkter.

På kort 2 var det uklart hvilke tall som skulle være tillatt ut fra eksemplene med 2 ½ og 4,7, noe som skapte problemer for noen av gruppene. Oppgave 5-7 stod i motsetning til oppgavene på kort 1, for i oppgave 5-7 ligger det en antakelse om at elevene ikke allerede har regnet med negative tall, noe de skulle ha gjort på kort 1.

Kort 3

X+ Y = 12

1) Finn tallpar som passer og tegn dem i samme koordinatssystem som før.
2) Hvordan blir denne tegningen i forhold til den første?
3) Finn likheter og forskjeller. **Skriv ned.**
4) Gjør det samme som i punktene over med uttrykket: **X + Y = 5**. Hva ser du? **Skriv ned.**

På kort 3 var det mindre problemer. Her skulle elevene ”tegne” tallpar for nye uttrykk, og de fikk parallelle linjer. Uttrykkene er valgt slik at linjene i koordinatsystemet blir liggende med passe avstand fra hverandre, og ”tegningen” blir oversiktlig.

Kort 4

2X + Y = 9

5) Finn tallpar som passer og tegn disse inn på et nytt mm – papir
6) Tegn tallparene som passer i uttrykket **X + Y = 7** på nytt inn i dette koordinatssystemet
7) Finn et tallpar som passer i begge uttrykkene. Hva har du gjort nå ?
8) Kan du skrive **2X + Y = 9** på en annen måte slik at det blir lettere å finne tallpar som passer?

På kort 4 skulle elevene ”tegne” tallpar som passer i uttrykket 2X+Y=9 på et nytt millimeterpapir sammen med tallparene som passet i uttrykket X+Y=7. I oppgave 7 skal de finne et tallpar som passer i begge uttrykkene, og så spørres det ”hva har du gjort nå?”. Jeg antar at lærerne her ønsket at elevene skulle se at de har løst likningssettet bestående av de to likningene 2X+Y=9 og X+Y=7, men det er en fare for at elevene kan bli sittende og lure på hvilket svar det er læreren ønsker her. Ingen av gruppene jeg fulgte rakk å jobbe med denne oppgaven, så jeg vet ikke om dette ble et problem, men det er mange mulige svar på spørsmålet ”hva har du gjort nå?”.

I oppgave 8 bes elevene om å skrive uttrykket 2X+Y=9 på en annen måte ”slik at det blir lettere å finne tallpar som passer”. Fra Liv og Lars sine oppsummeringer går det frem at lærerne ville at elevene skulle skrive Y=-2X+9 (Liv) eller Y= 9-2X (Lars). Problemet var at ikke alle elevene syntes denne måten å skrive tallparene på gjorde det ”lettere” å finne tallpar. Svaret på oppgave 8 vil være svært subjektivt, men lærerne hadde tydeligvis en bestemt oppfatning om hvilket svar de ønsket seg.

Generelt skaper spørsmålene om hvor mange tallpar som er mulige (kort 1: 1,2; kort 2: 3) mye støy i forhold til hva som er poenget med opplegget. Noen elever blir sittende og telle, og når de i tillegg misforstår hvilke tallpar lærerne mente de skulle regne med, blir det mye rot. Mye tid går vekk både til dette og til å finne ut hva lærerne mente med å tegne tallpar.

Oppgavekortene virker som en introduksjon til emnet om lineære funksjoner, og dersom en bygger videre på det elevene antakelig vil sitte igjen med etter å ha fullført arbeidet med alle fire kortene, ligger det et potensiale til at elevene selv kan finne ut hva som blir stigningstall og skjæringspunkt med *y*-aksen for en funksjon av typen f(x)=ax+b. Kortene i seg selv leder ikke helt frem til denne oppdagelsen, men Liv valgte likevel i sin oppsummering å gå inn på dette. Det ble nok enklere for elevene å forstå hva hun snakket om nå enn om ikke de hadde arbeidet med kortene først, men kanskje det kunne vært lurt å gi elevene mulighet til å gjøre også denne oppdagelsen selv?

Etter å ha arbeidet med kortene skulle elevene jobbe med en del oppgaver fra læreboka. Her skulle elevene tegne linjer for uttrykk av typen y+ax=b, og for uttrykk som y=-x og x=-1, de skulle finne stigningstall og konstantledd for uttrykk av typen y=ax+b, og utnytte disse til å tegne linjene, de skulle avgjøre hvilke linjer som var parallelle ved å se på flere uttrykk på formen y=ax+b, og de skulle finne likningen for noen linjer som var tegnet inn i et koordinatsystem. Lærerne kommenterer i sitt notat skrevet i ettertid at det virket som elevene hadde mindre problemer med å løse denne typen oppgaver etter å ha arbeidet med kortene.

Som en hovedkonklusjon av analysen av hele opplegget, vil jeg si at opplegget har potensiale, men at det var preget av støy og ”indre motsetninger”, og at mye tid gikk vekk til unødvendige ting.

4.8 Forslag til nytt opplegg

Basert på den foregående analysen, vil jeg komme med et forslag til revidert opplegg. Siden det nå er Kunnskapsløftet som er gjeldende læreplanverk, velger jeg å ta utgangspunkt i kompetansemål herfra.

<table>
<tr>
<td>Vg1P:
Funksjonar
Mål for opplæringa er at eleven skal kunne
undersøkje funksjonar som beskriv praktiske situasjonar, ved å fastsetje skjeringspunkt, nullpunkt, ekstremalpunkt og stiging, og tolke den praktiske verdien av resultata
omsetje mellom ulike representasjonar av funksjonar
gjere greie for omgrepet lineær vekst, vise gangen i slik vekst og bruke dette i praktiske døme, også digitalt</td>
<td>Vg1T:
Funksjonar
Mål for opplæringa er at eleven skal kunne
gjere greie for funksjonsomgrepet og teikne grafar ved å analysere funksjonsomgrepet
lage og tolke funksjonar som beskriv praktiske problemstillingar, analysere empiriske funksjonar og finne uttrykk for ein tilnærma lineær funksjon</td>
</tr>
</table>

Kompetansemål hentet fra læreplanverket for Kunnskapsløftet.

Både ut fra kompetansemålene fra Vg1P og Vg1T, må en kunne argumentere for at elevene bør lære både å løse likninger grafisk og om stigningstall og skjæringspunkt med y-aksen for lineære funksjoner. For Vg1P står det at elevene skal kunne undersøke funksjoner, og blant annet fastsette stigning, omsette mellom ulike representasjoner av funksjoner, og gjøre greie for begrepet lineær vekst. Alt dette krever at de har kunnskaper om lineære funksjoner. For å kunne dra nytte av kunnskapene i praktiske situasjoner, er det også viktig at de kan finne skjæringspunkt mellom to lineære funksjoner, og tolke betydningen av dette. I Vg1T skal elevene kunne gjøre greie for funksjonsbegrepet og tegne grafer ved å analysere dette, altså trenger de kunnskaper om stigningstall og konstantledd til lineære funksjoner. De skal også kunne tolke funksjoner som beskriver praktiske problemstillinger, og da bør de kunne tolke betydningen av skjæringspunktet mellom to funksjoner. Altså er opplegget også relevant etter Kunnskapsløftet.

I analysen av opplegget pekte jeg på to relevante mål i tillegg til det mer generelle om at opplegget kunne fungere som en forberedelse til kommende stoff. Disse målene var

1) Elevene skal kunne løse to lineære likninger med to ukjente grafisk.
2) Elevene skal kunne finne stigningstall og skjæringspunkt med *y*-aksen for likninger av typen y=ax+b.

I mitt forslag til revidert opplegg velger jeg å være tro mot at begge disse målene skal være relevante, selv om en annen mulighet kunne vært å splitte dem og fokusere på ett av gangen. Jeg velger å ikke ta hensyn til om opplegget er beregnet for Vg1P eller Vg1T, men opplegget vil nok være mest egnet for Vg1T i den formen det følger her. Elevenes læringsfoutsetninger vil antakelig være ganske forskjellige avhengig av om de har valgt 1P eller 1T, men de vil også variere innen hver av disse gruppene. Dersom man vil sette opplegget ut i praksis, kan det være lurt å justere det i forhold til elevforutsetningene i den gruppa en underviser.

Jeg har foretatt relativt store endringer når det gjelder utformingen av kortene, og vil kommentere valg jeg har gjort underveis når jeg presenterer kortene.

Kort 1 **X + Y = 7** 1. Hver elev skriver ned to tall som til sammen blir 7. 2. Hvor mange løsninger finnes det? 3. Plott noen av disse løsningene i et koordinatsystem. Hva ser du?

På kort 1 har jeg valgt å beholde uttrykket X+Y=7, og ser ingen grunn til å endre dette. I stedet for å be elevene finne *hele tall*, har jeg bare skrevet *tall*. Dette er fordi jeg synes at alt fokuset på hvilke tall som skal regnes med og hvor mange tallpar som er mulige i de ulike tilfellene er irrelevant i forhold til målene med opplegget. Jeg har valgt å ikke bruke betegnelsen tallpar fordi noen av elevene var litt usikre på hva et tallpar var. Jeg vil anta at en del elever vil svare seks eller åtte på spørsmålet om hvor mange løsninger som finnes. Disse vil være (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1) og eventuelt (0,7) og (7,0). Jeg velger å ta med spørsmålet om hvor mange som finnes fordi jeg vil utfordre de elevene som først tenker kun på naturlige tall (eventuelt inkludert null) som mulige løsninger i en slik likning.

I stedet for å skrive at elevene skal *tegne* tallpar, har jeg valgt å skrive at de skal *plotte* noen av løsningene i et koordinatsystem. Dette er for å unngå at tid går vekk på at elevene skal lure på hva det er meningen at de skal gjøre her. Det er ikke noe poeng i at de skal prøve å tegne ruter, kuler eller mennesker. Jeg har også bevisst skrevet at de skal plotte *noen av disse* løsningene, for det ville være en umulig oppgave å plotte alle. Et aspekt ved det originale opplegget som jeg risikerer å miste, er at elevene ser at tallparene ligger så tett i tett at de til sammen danner ei linje. Ut fra oppgave 3 vil de se at tallparene *ligger på* linje, men det er ikke garantert at de er oppmerksomme på at det er så uendelig mange at de vil *danne* ei kontinuerlig linje. Dette bør læreren kommentere for elevene.

Etter at elevene er ferdige med kort 1, vil det være svært viktig at læreren sjekker hva de har svart. Dersom elevene har svart at det er seks eller åtte løsninger på oppgave 2, må læreren utfordre dem på dette. Én mulighet er at læreren stiller elevene spørsmål mens han/hun er hos dem, men ettersom flere grupper antakelig vil være ferdige nokså på samme tid, kan det være en idé å ha et ekstra kort i bakhånd, som kan leveres ut til dem som trenger det. Dette kortet kan for eksempel se slik ut:

Noen ekstra spørsmål til kort 1:

a) Hva må *y* være hvis *x*=9?
b) Hva må *x* være hvis *y*=4,7?

Her har jeg valgt å bruke de samme spesifikke eksemplene som lærerne brukte i sitt opplegg, men har kuttet ut ett. Eksemplene er nå ikke tenkt som en utvidelse av mengden løsningene kan velges fra, men som en påminnelse om at flere typer tall enn de elevene har tenkt på er mulige. Som for lærernes opplegg vil det være uklart hvilken mengde 4,7 representerer, men dette vil i denne sammenhengen ikke være av betydning siden det kun er ment som en påminnelse om at det ikke bare er hele tall som er tillatt.

Etter at elevene har innsett at det finnes uendelig mange løsninger som passer inn i uttrykket X+Y=7, og sett at disse vil generere ei rett linje, kan de få utdelt kort 2.

Kort 2

1. Finn løsninger som passer i uttrykket **2X + Y = 9** og plott dem i samme koordinatsystem som før. Tegn linja som går gjennom disse punktene.
2. Hvilket punkt går begge linjene gjennom? Hvorfor skjærer linjene hverandre i nettopp dette punktet?

Jeg har valgt å flytte den delen der elevene skal finne skjæringspunktet mellom to rette linjer til kort 2 (dette var tema på kort 4). Dette er fordi jeg vil gi elevene uttrykk på formen *y*=a*x*+b når de skal se på hvilke linjer som blir parallelle, hva som blir stigningstall og så videre. Grunnen til at jeg vil at de skal få uttrykkene på denne formen når de skal jobbe med hvordan linjene går i koordinatsystemet, er at det er på denne formen en skriver en lineær funksjon når en definerer stigningstall og konstantledd. Samtidig synes jeg at det var en fin idé at elevene skulle se sammenhengen mellom likninger på formen aX+bY=c og rette linjer, og vil derfor bevare denne ved å skape et slags skille mellom to deler av opplegget, én del som handler om grafisk løsning av to likninger med to ukjente, og én del som handler om hvordan linjene vil gå.

Jeg har beholdt lærernes valg av likning, 2X+Y=9, og ber elevene finne skjæringspunktet mellom linja som genereres av dette uttrykket og linja de fant da de jobbet med uttrykket X+Y=7. Jeg har endret litt på ordlyden i min oppgave 2 kontra lærernes oppgave 7. I stedet for å skrive ”finn et tallpar som passer i begge uttrykkene”, spør jeg ”hvilket punkt går begge linjene gjennom?”. Grunnen til at jeg endrer denne oppgaveformuleringen, er at jeg vil lede elevene til å finne denne løsningen grafisk. Så var det spørsmålet ”hva har du gjort nå?”. Jeg må innrømme at jeg strevde med å finne en god erstatning for denne formuleringen. Som nevnt i analysen over, kan en gi mange svar på spørsmålet ”hva har du gjort nå?”. Jeg har en klar oppfatning av hva jeg vil at elevene skal svare her, nemlig at de har løst et likningssett, men det er vanskelig å finne en oppgaveformulering som vil provosere frem nettopp dette svaret. Løsningen min ble å spørre hvorfor linjene skjærer hverandre i nettopp dette punktet. Det er fortsatt ikke sikkert at elevene vil se at de har løst et likningssett, men svaret på dette spørsmålet bør i hvert fall bli mindre subjektivt enn svaret på ”hva har du gjort nå?”.

Før læreren leverer ut kort 3, kan han/hun kanskje snakke litt med elevene rundt hva det er de har gjort, og peke på at de har løst et likningssett. Eventuelt kan dette bli kommentert i en oppsummering i etterkant av økta. Det er også mulig å ta en liten pause fra arbeidet med kortene her, og ta en oppsummering i fellesskap før en går videre til kort 3. De elevene som blir fort ferdige med kort 2, kan i så fall få noen ekstraoppgaver som går på grafisk løsning av to lineære likninger med to ukjente mens de venter på at alle blir ferdige med kort 2.

Kort 3

Bruk et nytt millimeterpapir til disse oppgavene.

1. Finn løsninger som passer i uttrykket **Y = X + 2** og plott dem i et koordinatsystem. Tegn linja som går gjennom disse punktene
2. Finn løsninger som passer i uttrykket **Y = X + 5** og plott dem i det samme koordinatsystemet. Tegn linja. Hvordan går denne linja i forhold til den første?

Som nevnt tidligere, vil jeg gi elever uttrykk på formen Y=aX+b når de skal jobbe med hvordan linjene vil gå. På kort 3 ber jeg elevene ta i bruk et nytt millimeterpapir fordi jeg vil at de skal se at de her får to parallelle linjer, og da er jeg redd det vil virke forstyrrende om linjene fra kort 1 og 2 også er i det samme koordinatsystemet. Uttrykkene lærerne brukte på sine kort ville få minus foran X skrevet med Y= på venstre side. Av frykt for at elevene skal gå i surr og tenke for eksempel at X= -2 hvis de satte inn X=2 i uttrykket Y= -X+2, velger jeg å starte med uttrykk der stigningstallet er positivt. Dette for å starte så enkelt som mulig. Elevene skal på kort 3 tegne to linjer som blir parallelle.

Kort 4

1. Finn løsninger som passer i uttrykket **Y = 2X + 5** og plott dem i samme koordinatsystem som før. Tegn linja.
2. Hvorfor blir ikke denne linja parallell med de to andre?
3. Plott løsninger som passer i uttrykket **Y= -2X + 5** i det samme koordinatsystemet. Tegn linja.
4. Prøv deg frem med noen flere uttrykk, og prøv å finne ut hvilken betydning *a* og *b* i et uttrykk på formen Y = *a*X + *b* har for hvordan linja går. Skriv ned hva du finner ut.
5. Se på de to uttrykkene du jobbet med i kort 1 og 2. Stemmer det du fant ut i punkt 4 for disse?

Jeg velger å fokusere eksplisitt på at linja Y=2X+5 ikke blir parallell med de andre linjene elevene har tegnet. I lærernes opplegg skulle linja for 2X+Y=9 tegnes i et nytt koordinatsystem, og fokus i oppgavekortene var ikke på at denne ikke ble parallell med de andre linjene, men dette ble fokusert på i oppsummeringene.

Lærernes opplegg førte ikke elevene helt i mål med å finne stigningstall og skjæringspunkt med *y*-aksen, men det velger jeg å gjøre i mitt opplegg. Jeg har valgt tre linjer som alle skjærer *y*-aksen i *y*=5, men har ulike stigningstall, 1, 2 og -2, og ei linje som har stigningstall 1 og konstantledd 2. Elevene skal så prøve seg frem med noen flere linjer selv. I uttrykkene jeg har valgt, har jeg bevisst sørget for at to linjer er parallelle, og altså har samme stigningstall, og at tre linjer har samme konstantledd. Jeg har altså forsøkt å variere noen faktorer, samtidig som noen holdes konstant. Dette i håp om at elevene lettere skal se sammenhenger. En svakhet kan være at ingen av konstantleddene jeg har valgt er negative. For å unngå for mange variasjoner, og fordi jeg ikke vil sette elevene til å tegne altfor mange linjer, er dette et kompromiss jeg har foretatt.

Dersom elevene tegner mange linjer i det samme koordinatsystemet, kan det fort bli litt rotete. Jeg har ikke skrevet om elevene skal lage et nytt koordinatsystem til utprøvingen, men lar det være opp til dem. Det kan være lurt at læreren tipser elevene om å merke linjene de har tegnet, slik at de har kontroll på hvilken linje som hører til hvilket uttrykk.

Jeg har valgt å bruke det generelle uttrykket Y=aX+b i oppgaveteksten til elevene. Dette har jeg gjort for å kunne være helt presis. Noen elever kan ha problemer med å tolke uttrykk på en slik form. Dersom opplegget skal brukes for relativt svake elever, kan det være en idé å bruke mer uformelt språk, eller forklare elevene muntlig hva som menes med dette uttrykket.

Til slutt skal elevene gå tilbake til linjene de jobbet med i kort 1 og 2, og prøve ut hypotesen sin om stigningstall og konstantledd for disse. Her kan det hende at det blir en utfordring for elevene å se at de må skrive om på uttrykkene fra kort 1 og 2 for å kunne lese av stigningstallet riktig. Jeg tror imidlertid det er viktig å la dem få denne utfordringen.

I min reviderte versjon av opplegget går jeg ganske klart inn for at to ulike mål skal oppnås. Det er en fare for at dette kan bli litt mye å ta inn på én gang, og at det hadde vært bedre å jobbe med grafisk løsning av likninger for seg, og stigningstall, konstantledd etc. for seg. Samtidig synes jeg det var en styrke i det opprinnelige opplegget at det ble knyttet såpass sterke bånd mellom likninger og lineære funksjoner, så jeg har forsøkt å ivareta dette aspektet.

Til slutt må jeg også være ydmyk og ta høyde for at misforståelser kan oppstå som ikke jeg har forutsett. Jeg har forsøkt å ta lærdom av problemene som oppstod i implementeringen av det originale undervisningsopplegget, men det er først når opplegget prøves ut at en ser hvordan det virker på elevene.

5 Oppgaven ”trekantgjerde”

5.1 Utforming av oppgaven ”trekantgjerde” og refleksjoner rundt denne

I samarbeid med fagansvarlige ved et videreutdanningskurs for lærere i ungdomsskolen, har jeg utviklet en oppgave som lærerne som deltok på kurset skulle prøve ut i sine klasser. Lærerne kunne selv tilpasse oppgaven til sine klasser. Refleksjonene som følger i dette avsnittet, er skrevet før oppgaven ble prøvd ut.

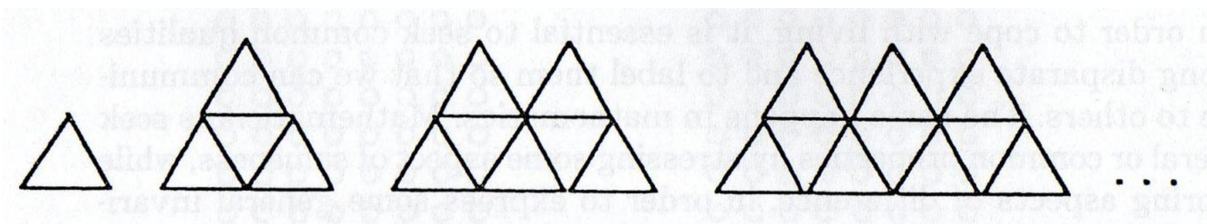
Kursets hovedtema i høst var tall og algebra, og det var et ønske fra fagansvarlige at oppgaven skulle kunne knyttes til pensum i kurset. Oppgaven måtte også kunne knyttes til læreplanmål for ungdomstrinnet. Jeg kom frem til at en oppgave om figurtall ville oppfylle disse kriteriene. Læreplanmålene jeg tok utgangspunkt i var disse:

Kompetansemål etter 10. årssteget

Tal og algebra
Mål for opplæringa er at eleven skal kunne
- behandle og faktorisere enkle algebrauttrykk, og rekne med formlar, parentesar og brøkuttrykk med eitt ledd i nemnaren
- bruke, med og utan digitale hjelpemiddel, tal og variablar i utforsking, eksperimentering, praktisk og teoretisk problemløysing og i prosjekt med teknologi og design

Kompetansemål hentet fra læreplanverket for Kunnskapsløftet

Siden oppgaven skulle brukes på ungdomstrinnet, var jeg opptatt av at den ikke måtte være for vanskelig, og jeg ønsket at elevene skulle ha mulighet til å finne og begrunne en eksplisitt formel. Jeg forsøkte derfor å finne figurtall der den eksplisitte formelen ikke var for vanskelig å komme frem til. Idéen til oppgaven jeg vil presentere under, fant jeg i Mason & Davis (1991), s. 14-15. Figurrekka ser der slik ut:

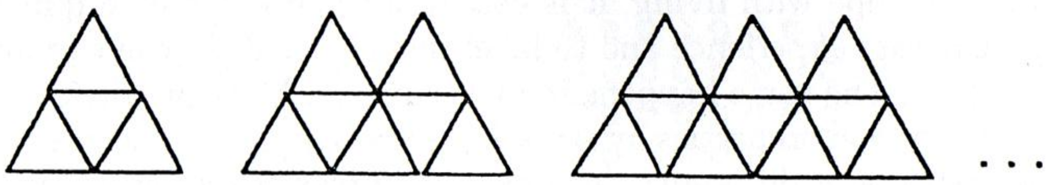


Mason & Davis (ibid.) kommer med forslag til spørsmål som kan stilles i forhold til denne figurrekka, og beskriver to ulike måter å se figurene på:

1) Hver gang du lager en ny figur, legger du til tre små trekanter. Dette leder til formelen F_n=1+3(n-1), der F_n er antall små trekanter på figur n.
2) Hver figur har n små trekanter nederst, (n-1) ”opp-ned”-trekanter, og (n-1) små trekanter øverst, noe som leder til formelen F_n=n+(n-1)+(n-1)

Etter diskusjoner mellom fagansvarlige og meg, ble vi til slutt enige om denne utformingen av oppgaven:

”Trekantgjerde”



Figur 1 Figur 2 Figur 3

Vi kan lage et gjerde ved hjelp av små trekanter. Tegningene over illustrerer deler av et slikt gjerde hvor figur 1 er satt sammen av 4 små trekanter, figur 2 er satt sammen av 7 og figur 3 er satt sammen av 10.

1. Lag de to neste figurene i rekka.
2. Hvor mange små trekanter er det på hver av figurene?
3. Hvor mange små trekanter tror du det vil være på figur 6?
4. Lag figur 6. Hadde du rett?
5. Kan du vite sikkert hvor mange små trekanter det er på figur 7 uten å lage den?

   Skriv ned hvordan du tenker.
6. Hvor mange små trekanter er det på figur 100?
7. Ole tenker på en figur i rekka. Forklar Ole hvordan han kan finne ut hvor mange små trekanter det er på figuren uten å lage den.

   (Hvis du vil, kan du kalle Oles figur for figur *n*, der *n* er nummeret i rekka.)

Det er opp til lærerne om de ønsker å gjøre endringer i oppgaven for å tilpasse den til sin klasse, men vi har forsøkt å utforme oppgaven på en slik måte at den kan presenteres i sin nåværende form både på 8., 9. og 10. trinn. Lærerne velger selv om de ønsker at elevene skal bruke konkreter, om elevene skal sitte alene eller i gruppe, om/hvordan de vil oppsummere innholdet i oppgaven og så videre.

Læringsmål i forbindelse med denne oppgaven kan variere etter hvilket trinn den blir presentert på. Uavhengig av trinn er det et viktig poeng at elevene skal se generaliteten i disse figurene, se et mønster, og kunne uttrykke dette. Avhengig av hvilket nivå elevene er på, kan noen beskrive denne generaliteten med ord, mens andre også kan bruke symboler. Noen klarer kanskje kun å komme frem til en rekursiv formel, mens andre også klarer å uttrykke en eksplisitt formel. Jeg bruker ordet formel, men inkluderer her både beskrivelse med ord og med symboler.

Mason & Davis (1991, s. 13) hevder at ”røttene til *formulering*, til *algebra*, kan bli funnet i det å bli trygg på å uttrykke generalitet” (min oversettelse, kursiv i opprinnelig tekst), og at elevene ofte bør få oppgaver av typen ovenfor fordi de ”strekker og trener generaliserings-overbevisningsmusklene’” (ibid.).

I arbeidet med å utforme oppgaven har jeg bygd på erfaringer fra analysen av opplegget med lineære funksjoner, og forsøkt å unngå å skape grobunn for tilsvarende misforståelser som jeg har identifisert der. Jeg vil under foreta en analyse av oppgaven, begrunne noen av valgene vi har gjort, og peke på ting som kunne vært gjort annerledes.

Den største diskusjonen angående utformingen av oppgaven handlet om hvorvidt vi skulle kalle oppgaven ”trekantgjerde”, og hvorvidt vi skulle ha med innledningen som beskriver figurene som deler av et gjerde og i tillegg forteller hvor mange små trekanter hver av figurene er bygd opp av.

La oss først se på betegnelsen ”trekantgjerde”. Jeg ønsket ikke å ha med denne betegnelsen, hovedsaklig fordi jeg synes det er unaturlig å lage separate figurer i ei rekke når det er snakk om et gjerde. Et poeng med et gjerde er jo nettopp at det er sammenhengende. Vi låser også elevene til en bestemt måte å se figurene på, som deler av et gjerde. Dersom elevene hadde fått bruke fantasien og selv tenke seg hva figurene kan forestille, er det mulig at dette ville vært mer meningsfylt for dem. Noen ville kanskje også foretrukket å bare forholde seg til figurene som figurer, ikke noe annet. Det er det for så vidt fortsatt mulighet til dersom elevene velger å se bort fra vår beskrivelse.

Jeg ser imidlertid også visse fordeler med å gi figurrekka et navn. For læreren kan det gjøre det enklere å vise tilbake til denne oppgaven ved senere anledninger, og i felles diskusjon i klassen kan det være en fordel å kunne forholde seg til en felles oppfatning av hva figurene forestiller. For noen elever kan det dessuten være nyttig at oppgaven settes inn i en praktisk sammenheng. En annen begrunnelse fra fagansvarlige var dessuten at de trodde lærerne selv ville sette oppgaven inn i en sammenheng hvis ikke vi allerede hadde gjort det, og da risikerte vi at de endret mer også på resten av oppgaven, noe som ikke var ønskelig i denne sammenhengen. Vi var enige om at ”trekantgjerde” ikke var noen ideell beskrivelse, men fant ikke noen bedre.

Jeg ønsket ikke at vi i innledninga skulle oppgi hvor mange små trekanter det var på hver av figurene vi hadde presentert, for jeg ønsket at elevene selv skulle telle dem, og gjennom dette kanskje ane et mønster. Fagansvarlige ønsket imidlertid en beskrivelse av figurene, og mente at det var nettopp en *beskrivelse*, ikke en opplysning, og at elevene likevel ville telle hvor mange små trekanter det var på figurene. Uansett må elevene senere telle hvor mange små trekanter det er på de to neste figurene i rekka.

Vi har endret rekka litt i forhold til slik den er presentert av Mason & Davis (2001) ved at vi har fjernet den første figuren i rekka. Grunnen til dette er at denne figuren er så forskjellig fra de andre, og at den neste figuren også utvides i høyden i forhold til denne. Vi ville unngå eventuell forvirring rundt dette. Særlig når vi refererer til figurene som deler av et gjerde, ville det være rart om den første delen av gjerdet var lavere enn resten. Når rekka er presentert med så mange figurer som hos Mason & Davis (2001), er den entydig, så det er ikke strengt tatt nødvendig å fjerne den første, men vi har altså valgt å gjøre det. Dette endrer ikke oppgaven i særlig grad.

Vi velger å presentere rekka med tre figurer. Dette er nok figurer til at en kan se et mønster i forhold til hvordan figurene er bygd opp, og det er mulig å se for seg hvordan neste figur i rekka vil bli. Jeg har i tillegg valgt å kalle figurene for figur 1, figur 2 og så videre, fordi jeg tror det vil gjøre det lettere for elevene når de skal beskrive figurene.

Første oppgave går ut på at elevene skal lage de to neste figurene i rekka. Jeg bruker bevisst ordet lage fordi det da er åpent om man vil lage figurene ved hjelp av konkreter eller om man vil tegne dem. Begrunnelsen for å starte med denne oppgaven er at elevene da selv får opplevelsen med å lage figurene og må finne et mønster, og at dette er en ”myk start” der alle elevene har mulighet til å lykkes.

I oppgave to spør jeg hvor mange små trekanter det er på hver av figurene. Her har jeg vært bevisst på å inkludere ordet *små*, fordi oppgaven ellers kunne tolkes som hvor mange trekanter det er til sammen på hver figur (inkludert de større trekantene som fremkommer). Når vi i tillegg har tatt med i innledninga til oppgaven hvor mange små trekanter det er på de tre første figurene, bør det ikke være noen tvil om hvilke trekanter vi mener.

Dersom en kun hadde skrevet trekanter, og heller ikke hatt med beskrivelsen i innledninga, ville det vært flere tolkninger av oppgaven. Da kunne en også tolket den som hvor mange trekanter det er til sammen på hver figur. Med en slik tolkning ville det bli litt mer komplisert for elevene å finne mønsteret, og det ville bli vanskeligere med en felles oppsummering. På høyere nivåer kunne en latt det være åpent for begge tolkningene, men da burde læreren være bevisst på dette. På ungdomstrinnet velger jeg å holde meg til antall *små* trekanter på hver figur. Eventuelt kunne en brukt det som en mulig utvidelse av oppgaven å se på hvor mange trekanter det er sammenlagt.

Det er uklart i oppgave to om elevene skal finne antall små trekanter på de tre første figurene (allerede oppgitt), de fem første eller de to de nettopp har laget. Vi lar imidlertid spørsmålet stå slik fordi det ikke har noen stor betydning for opplegget hvilke figurer elevene velger å se på her. Poenget er å rette fokus mot antall små trekanter på figurene. En ulempe med å la det være åpent for ulike tolkninger av dette spørsmålet kan være at elevene (og eventuelt lærerne) blir usikre på hva vi har ment, og henger seg opp i dette.

I oppgave tre spør jeg hvor mange små trekanter elevene tror det er på figur 6, altså figuren som kommer etter den siste de lagde. Dersom elevene på oppgave to kun har funnet antall små trekanter på de tre første figurene, vil de her antakelig også finne antallet på figur 4 og 5 for å kunne anta noe om figur 6. Det er en fare for at elevene vil lage figur 6 her, selv om vi har tenkt at de skal ”gjette” antall små trekanter, og så lage figur 6 i neste oppgave og sjekke om antakelsen deres stemte. Jeg synes imidlertid ikke at det er så farlig om elevene lager figuren med en gang, for i oppgave 5 må de uansett se for seg antall små trekanter på neste figur uten å lage den. En annen mulighet kunne vært å skrive ”gjett hvor mange små trekanter det vil være på figur 6”, men jeg valgte å ikke bruke ordet gjette fordi dette ordet også brukes om ”vill gjetting”, og det er ikke det som er tanken her.

I oppgave fire spør vi elevene om de kan være sikre på hvor mange små trekanter det er på figur 7 uten å lage den. Her må de altså finne et mønster i forhold til antall små trekanter på hver figur, og kunne begrunne dette. Jeg velger å be dem skrive ned hvordan de tenker fremfor å be dem skrive en regel eller formel fordi dette er mer uformelt, og jeg er redd noen elever kunne tenkt at det blir for vanskelig hvis de hadde fått beskjed om å lage en regel, selv om det faktisk er det de gjør her. Når jeg stiller spørsmålet på denne måten åpner jeg også for at elevene selv kan velge om de vil lage en rekursiv formel eller en eksplisitt (igjen bruker jeg ordet formel i en vid betydning), selv om spørsmålene til nå vel må kunne sies å lede mot en rekursiv formel.

Jeg gjør så et hopp og spør hvor mange små trekanter det er på figur 100. Her utfordres elevene til å finne en måte å finne ut direkte hvor mange små trekanter det er på en spesiell figur, for det blir mye arbeid hvis de skal telle seg helt opp til figur 100 ved hjelp av en rekursiv formel eller tegne/lage figur 100. Det er imidlertid åpent for at elevene kan løse oppgaven på denne måten, og de vil da antakelig bruke mye tid. Fordelen med å åpne for dette, er at alle har mulighet til å løse oppgaven, selv om det kan være tungvint. For dem som strever lenge med å telle seg frem, vil det antakelig vokse frem et ønske om en enklere måte å løse oppgaven på, og en eksplisitt løsning vil være kjærkommen. Det er også mulig at elevene finner måter å forenkle tellingen på, for eksempel ved å finne ut hvor mange små trekanter det økes med for hver tiende figur.

For dem som søker å finne ut direkte hvor mange små trekanter det er på figur 100, er det flere måter å se dette på. Mason & Davis (1991) beskriver to ulike måter (se ovenfor), og tilpasset til vår rekke vil dette tilsvare:

1) Hver gang du lager en ny figur, legger du til tre små trekanter. Dette leder til formelen F_n=4+3(n-1), der F_n er antall små trekanter på figur n.
2) Hver figur har (n-1) små trekanter nederst, n ”opp-ned”-trekanter, og n små trekanter øverst, noe som leder til formelen F_n=(n+1)+n+n

Jeg skriver formlene med symboler, men mange elever vil nok skrive dem med ord. Det er heller ikke sikkert at alle elevene er kjent med den skrivemåten jeg bruker ovenfor, der multiplikasjonstegnet utelates. Noen vil kanskje også se figurene på andre måter enn beskrevet her.

Til slutt ber jeg elevene forklare Ole hvordan han kan finne ut hvor mange små trekanter det er på figuren han tenker på uten å lage den. Her kunne jeg ganske enkelt spurt hvor mange små trekanter det er på figur n, men jeg tror mange elever, særlig på lavere trinn, men også en del på høyere trinn, ville hatt problemer med en slik oppgave. Ved å rette oppgaven mot Ole som tenker på en figur, gir jeg oppgaven en personlig og praktisk vri, og jeg tror det gjør oppgaven lettere for elevene å forholde seg til. Det er også opp til elevene om de vil forklare med ord eller bruke symboler. Jeg foreslår at elevene kan kalle Oles figur for figur n for å hjelpe dem som ønsker å bruke symboler litt på vei. Det er en fare for at elevene tenker at de *bør* kalle Oles figur for figur n, selv om det ikke er naturlig for dem, men denne sjansen tar jeg.

Også i denne oppgaven er det åpent for at elever kan gi en rekursiv formel. Det er ønskelig at elevene skal finne en eksplisitt formel, men jeg synes det er ok å holde det åpent slik at flest mulig kan mestre denne oppgaven. Så kan heller læreren eventuelt utfordre elevene til å prøve å lage en eksplisitt formel, eller en slik formel kan komme frem i en eventuell oppsummering. Det er også mulig at elevene i stedet for å skrive en formel, vil bruke spesifikke eksempler for å forklare Ole hvordan han kan regne ut antall små trekanter på sin figur.

I oppsummeringen kan det også være aktuelt å sammenligne elevers ulike svar. Dersom elevene har laget formler med symboler, vil det være en fin øvelse i å manipulere algebraiske uttrykk å vise at de eksplisitte formlene alle kan trekkes sammen til uttrykket $3n+1$.

Det er en vanskelig balansegang å avgjøre i hvor stor grad en skal lede elevene når en lager en slik oppgave. Jeg var inne på tanken om å lede elevene i større grad, først mot en rekursiv formel, og deretter mot en eksplisitt, og i tillegg stille spørsmål der elevene fikk bruke formlene de hadde kommet frem til, men jeg valgte å gå bort fra dette fordi det til en viss grad ville hindret elevene i å løse oppgaven på sin egen måte. Flere spørsmål der elevene skulle bruke formlene ville dessuten kunne rettet fokus mot å *bruke* formlene fremfor å *lage* dem. En fordel med flere ledende spørsmål ville vært at flere elever kanskje klarte å løse oppgaven, men slik opplegget er nå, kan heller læreren gi veiledning og hint til elever som strever. Oppgaver der elevene fikk bruke formlene de hadde laget, kunne vært positivt for elevenes mestringsfølelse, men det kunne også vært med på å lukke oppgaven i større grad. Eventuelt kan lærerne tilpasse opplegget ved å legge inn noen flere spørsmål for elever på lavere trinn.

Opplegget med figurtall kan utvides eller bygges videre på på mange måter. Man kan for eksempel la elevene få andre figurtall å arbeide med, eller la dem finne på sine egne. Her bør en være oppmerksom på at det at vi har beskrevet figurene som deler av et gjerde kan påvirke elevene til å finne andre figurer som også kan representere et gjerde. Dersom læreren åpner for en utvidelse av oppgaven som dreier seg om å arbeide med andre figurtall, bør han/hun være bevisst på dette, og kanskje foreslå andre typer figurer enn "gjerde-figurer".

En annen idé kan være å farge "opp-ned-trekantene" i figurene svarte, og så la elevene finne uttrykk for antall hvite og antall svarte små trekanter. Så kan de legge sammen de to uttrykkene og se at de får det samme som tidligere, nemlig $3n+1$. Dette vil gi trening i å manipulere algebraiske uttrykk.

Basert på formlene elevene har kommet frem til i dette opplegget, kan en også gi dem ekstra oppgaver der de skal bruke formlene på ulike måter. Et eksempel kan være å la en elev tenke på en bestemt figur i rekka og fortelle en annen elev hvor mange små trekanter det er på denne, og så kan den andre eleven forsøke å finne ut hvilken figur det er snakk om. Da vil de også få trening i reversibel tenkning.

5.2 Gjennomføringen av opplegget

Under vil jeg beskrive og analysere observasjoner fra gjennomføringen av opplegget. Til slutt vil jeg knytte disse observasjonene opp mot problemstillinga for masteroppgaven.

5.2.1 8. klasse

Selv om elevene ikke var kjent med bruk av *n* som variabel, valgte Linda å ikke endre på oppgavene, og lot forslaget om å kalle Oles figur for figur *n* bli stående. I tillegg til "trekantgjerde"-oppgaven slik den er presentert ovenfor, hadde Linda tenkt ut en ekstraoppgave som gikk ut på å bygge gjerdet ett hakk høyere.

På forhånd hadde Linda laget mange små røde og grønne trekanter som elevene kunne bruke for å bygge figurene. Hun sa til meg før økta at hver gruppe bare skulle få trekanter av én farge, men at de kunne få ulike farger senere hvis de skulle få frem ulike mønstre. Jeg spurte om elevene *måtte* bruke konkreter eller om de kunne velge å tegne figurene, og da svarte Linda at hvis noen spurte, kunne de få lov til å bare tegne.

Før timen begynte hadde Linda satt pultene sammen til grupper. Gruppene var avtalt på forhånd, så elevene visste hvor de skulle sitte. Noen få elever var borte, så det ble noen små endringer i gruppesammensetningen i forhold til det som opprinnelig var planlagt.

Linda innledet timen med å presentere meg. Hun fortalte elevene at det eneste de trengte var papir og skrivesaker, og at de skulle få utdelt noen trekanter etter hvert. Hun spurte så elevene hva som kjennetegner et godt gruppearbeid, og punkter ble skrevet opp på tavla. Ei god gruppe ble beskrevet som ei gruppe der elevene samarbeider, alle slipper til, ingen melder seg ut og man venter på hverandre. Hun spurte også hvordan man vet at man har lært noe, og en elev svarte at det er når du kan forklare til en annen person uten å bruke boka.

Linda leste så opp introduksjonen til trekantgjerde-oppgaven, og holdt oppgavearket opp for elevene. Mens hun delte ut oppgavearkene, skulle elevene finne ut hvem som hadde bursdag først. Hun forklarte så at den som har bursdag først, skulle lese oppgave 1 og forklare hva de skulle gjøre, den som har bursdag som nummer to, skulle lese oppgave 2 og så videre. Deretter delte Linda ut trekanter til gruppene, og de begynte å jobbe med oppgavene.

Oppgave 1-5

Elevene går raskt i gang med byggingen, og Linda oppfordrer til at alle kan bygge. Noen elever spør om de skal tegne også, men Linda sier de ikke behøver det. Så vidt jeg kan se, bygger de fleste elevene videre på figuren når de skal lage neste figur i rekka, det vil si de legger til tre trekanter. En del ødelegger figurene etter at de har bygd dem.

I gruppe A utbryter Peter etter å ha lest oppgave 4 ("Lag figur 6. Hadde du rett?") "jeg skjønte ikke den, lag figur seks?". De andre elevene på gruppa går imidlertid raskt i gang med byggingen. Peter har vært ganske opptatt av kameraet og diktafonen, og har tullet en del rundt dette. Han har ikke fulgt med i alt de andre elevene på gruppa har gjort, og det er mulig at dette er grunnen til at han ikke umiddelbart skjønner oppgaven. Like etter at han har sagt at han ikke skjønte oppgaven, er han igjen i gang med å tulle, og prater til en av elevene i gruppa ved siden av.

Med unntak av Peter, ser det ut til at elevene skjønner hva de skal gjøre på disse oppgavene.

Elevene ser raskt et mønster, og ser at det øker med tre små trekanter for hver figur. I gruppe E mener elevene at de kan bruke tre-gangen for å finne antall små trekanter.

Oppgave 6: Hvor mange små trekanter er det på figur 100?

Gruppene som er filmet mens de jobbet med denne oppgaven, er gruppe A, C og E. Gruppe C og E er filmet med det sirkulerende kameraet, og er derfor ikke filmet hele tiden mens de jobber med oppgaven. I gruppe A fant Pål svært raskt at svaret måtte være 301 små trekanter, 300 +1. Han begrunnet det at de måtte plusse på 1 med at det var 4 små trekanter på den første figuren.

Gruppe C

I gruppe C var elevene overbevist om at svaret måtte være 310. De var svært engasjerte, og diskuterte med Linda som hevdet at 310 ikke var riktig svar. Morten forteller Linda at de har laget figur 10, og dermed mangler 90 figurer for å komme til figur 100. De regnet derfor ut 90×3 pluss antall små trekanter på figur 10, og på figur 10 visste de at det var 31 små trekanter. De kom da frem til svaret 310. De prøvde også å multiplisere antall små trekanter på figur 10 med 10, og fikk også da svaret 310. Linda fokuserer på at det er én figur som består av 4 små trekanter, og ingen som består av bare 3. Hun spør elevene hvorfor det er 31 små trekanter på figur 10, hvorfor ikke 30? Martin svarer stille at det er én ekstra der. Morten foreslår da å plusse på hundre firere på figur 100, men dette avfeies/overhøres. Linda spør Martin hvor mange små trekanter det er på figur 40. Martin svarer 41, og Linda ber ham entusiastisk om å gjenta svaret. Hun spør hvorfor det er 41, og Martin svarer at det er fordi det er én ekstra der. Linda forlater heretter gruppa.

Elevene har altså ved to ulike regnemåter kommet frem til svaret 310. Når de regner 31×10, tenker de nok at fordi 10×10 er lik 100, må 10 ganger antall små trekanter på figur 10 gi antall små trekanter på figur 100. Dette blir ikke riktig. Den andre regnemåten deres, antall små trekanter på figur 10 pluss 90×3, er imidlertid riktig, men elevene har nok gjort en regnefeil. 31+90×3 er nemlig lik 301, ikke 310 som elevene har fått. Denne regnemåten har likhetstrekk med den som starter med figur 1 og legger til 99×3, altså 4+99×3, som vi senere skal se at noen andre elever har brukt. Poenget er at en starter med antall små trekanter på en figur og legger til 3×antall figurer videre.

Linda ser ikke ut til å være klar over at den ene regnemåten elevene hadde brukt faktisk var riktig, og at elevene kun hadde gjort en regnefeil. Hun fokuserer i stedet på at det er én ekstra trekant, og leder altså elevene mot å tenke 1+100×3 på figur 100. Først fokuserer hun på at det er 31 små trekanter på figur 10, og spør hvorfor det ikke er 30. Deretter spør hun hvor mange det er på figur 40, og godtar svaret 41. Det er ikke riktig at det er 41 små trekanter på figur 40, og dette kommenterte Linda selv i ettertid. Da vi så filmen sammen, forklarte hun at hun egentlig mente å ta figur 20, der det ville vært 61 små trekanter.

Gruppe E

I gruppe E hadde elevene allerede på oppgaven før sagt at de kunne bruke tre-gangen. De hevder derfor raskt at antall små trekanter på figur 100 er 300. Dette er ikke riktig, men elevene har klart å overføre tankegangen fra arbeidet med de mindre figurene til figur 100.

Elevene besvarer så Ole-oppgaven (kommenteres senere), og mener at de er ferdige med oppgavene.

Litt senere kommer Linda bort til dem og spør om det er 3 i hver figur. Ruben oppdager da at det er 4 på figur 1, og ser at de har gjort feil. De starter på nytt, og sjekker svarene sine på de første oppgavene. Så leter de igjen etter et mønster. De kommer frem til at det hverken blir tre-gangen eller fire-gangen. Så utbryter Ruben ”primtall!”, og Randi utbryter oppglødd at ”det er det vi jobber med”. Elevene oppdager at ikke alle figurene har prim antall små trekanter, men kommer så frem til en teori om at det må være annenhver partall og primtall.

Linda blir tilkalt, og elevene forteller at de mener det må være annenhver partall og primtall, og at de har multiplisert antall små trekanter på figur 10 med 10, og kommet frem til at det er 310 små trekanter på figur 100. Linda sier at 310 ikke er riktig, og fokuserer også her på figur

10, og spør hvorfor den har 31 små trekanter. Elevene snakker først om primtall og partall, men så legger Linda handa over den ytterste trekanten i enden av figur 10 (som ligger ferdig bygd foran Ruben), og spør hvor mange det ville vært hvis hun tok vekk den. Ruben svarer raskt 30, og Linda spør hvor mange det ville bli ”hvis du legger på ti til, da”. Reidun foreslår 60, mens Randi foreslår 31+31. Linda spør igjen hvor mange det ville bli hvis hun tok vekk den ene i enden, og de la på 10 til. Reidun svarer 60, Linda spør hvor mange det blir når de legger til den ene hun holdt handa over, og svaret blir da 61. Linda spør hvilken figur de da har funnet, og svarer selv ”figur førti? Nei, figur tyve?”. Hun spør så hvor mange det ville vært på figur 30, men før elevene har funnet svaret, forlater hun gruppa, og starter oppsummeringen.

Elevene var altså opptatt av at det ble annenhvert partall og primtall som svar for de første figurene. Dette er tilfelle for de første figurene (4, 7, 10, 13, 16, 19, 22), men dersom de hadde fortsatt videre, ville de på figur 8 fått 25, som ikke er et primtall, og mønsteret ville være brutt. Randi utbrøt at ”det er det vi jobber med” da Ruben nevnte primtall, og det så ut til at dette styrket deres tro på at de var inne på noe her. Boaler (1998) har kalt det at elever bruker irrelevante sider ved en oppgave som ledetråder for *cue-based behavior*. Disse ”ledetrådene” kan være relatert til ordene lærerne bruker, antatt vanskegrad på et spørsmål, konteksten eller lærerens tonefall når han/hun snakker til elevene (ibid.). Jeg vil hevde at elevene i denne gruppa viser en slik *cue-based behavior* når de fokuserer på at primtall er det de har holdt på med i klassen, og dette ser ut til å styrke deres tro på at primtall er relevant i denne oppgaven.

Denne gruppa tror i likhet med gruppe C at de kan multiplisere antall små trekanter på figur 10 med 10 for å finne antall små trekanter på figur 100, og Linda sier også til denne gruppa at det er feil, og fokuserer på den ”ekstra” trekanten i enden av figurene. Når hun går fra figur 10 til figur 20, spør hun ”hvis du legger på ti til, da?”, noe som er et ganske uklart spørsmål i og med at det ikke er klart hva det er du skal legge på (trekanter? figurer?). Elevene ser imidlertid ut til å skjønne hva hun mener. Da Linda spurte hvilken figur de nå har funnet, nevnte hun først figur 40, men retter seg selv og sier figur 20. Det at hun nevner figur 40, kan tyde på at hun tenkte å bruke samme strategi her som hos gruppe C (hvor hun hadde vært like før hun kom til gruppe E), men oppdager at noe ble feil. Hos denne gruppa får hun korrigert seg, og sier at det er figur 20.

Oppgave 7: Å forklare for Ole

Som nevnt tidligere var ikke elevene kjent med bruk av *n* i matematikken. Det var en del elever som strevde med å finne mening i forslaget om å kalle Oles figur for figur *n*, der *n* er nummeret i rekka.

Gruppe A

Pål:	*(leser fra oppgavearket)* Ole tenker på en figur i rekka *(ler).* Forklar Ole, nei, hvordan Ole kan finne ut hvor mange små trekanter det er på figuren uten å lage den. Hvis du vil, kan du kalle Oles figur for figur n, der n i nummeret i rekka.
Per:	Figur n.
Pål:	Ja. *(ler)* Jeg skjønte ikke den.
Peter:	Hysj. Be quiet.
Pia:	Jeg leser den. *(tar oppgavearket)* Ole tenker på en figur i rekka. Forklar Ole hvordan han kan finne ut hvor mange små trekanter det er på figuren uten å lage den. Hvis du vil kan du kalle Oles figur for figur n, der n er nummeret i

12 rekka.
13 Peter: *(har skrevet noe på et ark som han holder foran kamera. Ler)*
14 Pål: Også der, også der, også den.. *(tar tak i arket og holder det foran kameraet i*
15 *hjørnet)*
16 Per: (...)
17 Pål: Nei, dette er gøy.
18 Per: {Jeg lurer på om vi bør vise denne filmen til foreldrene våre.}
19 Peter: Nei, de skal se det.
20 Pia: *(Har sittet en stund og fundert over oppgaven)* Det skjønte jeg ikke.
21 Pål: *(Rekker opp handa)*
22 Per: *(Snakker inn i diktafonen)* Pia skjønte det ikke.
23 Pia: *(Rekker opp handa)*
24 Per: Kan noen her hjelpe? Har du et forslag? *(flytter diktafonen fra elev til elev)*
25 Pål: [Nei.]
26 Peter: [*(Rekker opp handa)* Arrow, arrow.] Hei. *(vinker til diktafonen)*
27 Per: Du, jeg spurte om du hadde et forslag, [om du kunne hjelpe Pia.]
28 Pia: [Jeg rekker bare opp handa.]

Først leser Pål oppgaven høyt for gruppa (2), men skjønner den ikke (7). Pia leser oppgaven igjen (9), og sitter en stund og funderer på hva som menes med den før hun sier at hun ikke skjønte den (20). Løsningen blir å rekke opp handa for å spørre Linda (21, 23, 28).

Elevene tuller en del mens de venter på hjelp, og etter cirka 4 ½ minutt forsøker en av elevene fra gruppa ved siden av å hjelpe dem:

40 Elev i gruppe B: Vi er ferdige!
41 Peter: Jeg skal bare
42 Pia: [Ja, men hallo, vi skjønte ikke siste oppgaven.]
43 Per: [Ja, vi er, vi får aldri hjelp.] Fikk dere hjelp?
44 Elev i gruppe B: Dere skal forklare hvordan dere kan finne ut av det. Hvordan fant dere
45 ut hvor hundre var? Figur hundre. Hvordan fant dere ut det?
46 Pål: *(roper på en elev i gruppe B)*
47 Eleven i gruppe B: Akkurat samme måten kan Ole finne ut på.

Eleven i gruppe B roper ut at de er ferdige (40), og Pia og Per klager over at de ikke skjønte den siste oppgaven og at de ikke får hjelp (42, 43). Eleven i gruppe B prøver så å forklare oppgaven for dem (44, 47).

Like etter kommer Linda til gruppe B, og samtalen mellom eleven i gruppe B og elevene i gruppe A blir avbrutt. Til tross for at eleven i gruppe B prøvde å forklare oppgaven for dem, viser elevene i gruppe A ingen tegn til å ville gjøre noe nytt forsøk på å forstå oppgaven. De prater om andre ting inntil Linda, cirka 5 ½ minutt etter at elevene først rakk opp handa, kommer til gruppa. Linda fokuserer først på oppgave 6, der elevene har funnet ut hvor mange små trekanter det er på figur 100, og ber elevene forklare. Per og Peter har problemer med å forklare hvorfor det er 301 små trekanter på figur 100, men Linda gir seg ikke før alle i gruppa har skjønt det. Så kommer de til oppgaven elevene ønsket hjelp til:

174 Linda: Så disse, ja, mm. Så er dere kommet til den neste, ja. [Ole tenker på en figur i
175 rekka]
176 Elev fra annen gruppe: [Vi er ferdige!]
177 Peter: Det er vi og. Tror jeg.
178 Linda: Forklar Ole hvordan han kan finne ut hvor mange små trekanter det er på
179 figuren uten å lage den. Hvis du vil, kan du kalle Oles figur for figur n, [og da
180 kan n være et hvilket som helst tall]
181 Peter: [Er vi ferdige nå?]
182 Linda: for eksempel...
183 Peter: {ehnee}

184	Linda:	Si et tall.
185	Peter:	Tretten.
186	Linda:	Tretti. Hvor mange figurer vil det være i tretti?

Allerede idet hun leser oppgaven, forklarer Linda at *n* kan være hvilket som helst tall. Det ser altså ut til at hun antar at det er forståelsen av *n* elevene har problemer med. Hun ber så om et eksempel på et tall (184), og Peter svarer tretten (185). Linda hører feil, og tror Peter sa tretti (186). Hun spør så hvor mange *figurer* det vil være i tretti (186), men det går frem av sammenhengen at hun mener hvor mange *små trekanter* det vil være i figur 30.

Elevene finner så ut hvor mange små trekanter det er på figur 30, og Linda ber dem komme med flere tall. De finner antall små trekanter også på figur 13 og 15, og Linda ber dem så om å skrive ned hva de har kommet frem til:

252	Linda:	Kan dere klare å skrive det?
253	Pia:	Nei, du må gjøre det.
254	Linda:	{Skrive en regel} *(forlater gruppa)*
255	Peter:	Du ganger med tre og plusser på én.
256	Per:	Den ene er til overs. Den ene er til overs, så den må du plusse på.
257	Pia:	Du ganger med tre og plusser på den til overs. *(skriver)*

Elevene skriver så ned regelen ”du ganger med tre og plusser på den til overs” (257).

For denne gruppa er det mulig at forslaget om å kalle Oles figur for figur *n* var det som skapte problemer. Da Linda forklarte oppgaven for dem, så det ut til at de skjønte den raskt, men de ble sittende svært lenge og vente før de fikk hjelp.

Gruppe C

1	Mats:	[Jeg skjønte ikke nummer syv.]
2	Morten:	[*(Rekker opp handa)*] *(tar handa ned igjen, tar oppgavearket fra Mats)* [Jamen
3		se, ey, vi må gjøre nummer hundre, vi må gjøre den der hundregreia.]
4	Mari:	[(...)]
5	Mats:	(...) den her. Hvis du vil, kan du kalle Ole
6	Mari:	*(Ler)*
7	Morten:	Nei *(rekker opp handa).* Vi må gjøre oppgave, vi må gjøre [(...)]
8	Mari:	[(...)]
9	Morten:	Hvordan kan det ikke bli trehundreogti? {Vi har jo gjort det}
10	Mats:	(...)
11	Morten:	Men hun sa at det var feil. Og hun har gjort denne oppgaven selv.
12	Mari:	Først var du skikkelig {trofast på} at det var sant, og nå tror du ikke på det
13		engang.
14	Morten:	Jamen, jeg
15	Mats:	(...)
16	Mari:	*(Leser opp)* Ole tenker på en figur i rekka, forklar Ole
17	Morten:	*(Tar arket fra Mari)* Nei, nei, nei (...)
18	Mari:	Vi har jo gjort den andre!
19	Morten:	Okey, okey da, okey da *(tar ned handa).*
20	Mari:	Ole tenker på en figur i rekka. Forklar Ole hvordan
21	Martin:	Jeg skjønte ikke den her. *(ler og peker på arket)*
22	Mari:	*(Ler)* {Det er} *(ler)* der n er nummeret i rekka. Når tid er n nummeret i rekka?
23	Morten:	[Når det er ni.]
24	Mats:	[{Les her.}] Hvis du vil kan du kalle Oles Oles figur for figur én (...)
25	Morten:	Nei, n, n, det kan være når det er figur ni (...)
26	Mari:	N er ikke et tall. Det er en bokstav!
27	Morten:	*(Rekker opp handa)* Jeg skjønner ikke *(tar ned handa)* **Jo, jo, jo!** Det, men da

28		må vi ta alfabetet! [A, b, c] *(viser med fingrene)*
29	Mats:	[(...)]
30	Morten:	Vent, jeg skjønte det, jeg skjønte det! *(tar oppgavearket)* Figur n, da må vi ta
31		alfabetet og så må vi komme frem til okey hvis det er for eksempel hvis det er
32		ti, ti bokstaver til ti, til n, da må det være (...)
33	Mari:	*(Teller på fingrene)* a b c d e f g h i j k l m n, ni
34	Morten:	Nei.
35	Mats:	Nitten.
36	Mari:	Nei, ni, nei, fjorten.
37	Mats:	Fjorten.
38	Morten:	*(Ivrig, lener seg frem for å skrive noe, ser ut som han ombestemmer seg)* Vi
39		bare lager det, vi bare lager det *(begynner å bygge med de små trekantene)*
40		Jeg lager, jeg lager fire figurer til.
41	Mari:	[(*Mumler for seg selv)* {Ole tenker på en figur i rekka, hvordan kan han finne ut
42		hvor mange små trekanter det er på figuren.}]
43	Mats:	[*(Rekker opp handa)*]
44	Mari:	Nei, vi skal forklare noe her, vi skal ikke gjøre noen ting. (...)
45	Mats:	(...)
46	27.37	(*Kamera flyttes til en annen gruppe.)*
47	28.05	*(Kamera flyttes tilbake. Mats har fortsatt handa oppe)*
48	Morten:	Vet du hva vi må gjøre? Vi må tenke, øi n, det var figur fjorten
49	Rolf:	*(Roper til Morten)* Morten, skjønte dere det når jeg begynte å prate så høyt?
50	Morten:	*(Henvendt til Rolf)* Hæ?
51	Rolf:	Skjønte dere det når jeg begynte å prate så høyt?
52	Mari:	Vi skal jo **forklare** Ole det, vi skal ikke
53	*28.20*	*(Kamera flyttes til en annen gruppe.)*

Mats sa han ikke skjønte oppgave 7 (1), men Morten er fortsatt opptatt av forrige oppgave, hvor mange små trekanter det er på figur 100 (2, 7, 9, 11). Morten viser til at Linda sa 310 var feil svar, og hun har jo gjort oppgaven selv (11). Han går imidlertid med på å gå videre til oppgave 7 (19). Mari leser oppgaven (20, 22), og utbryter "når tid er n nummeret i rekka?". Morten foreslår at det kan være figur ni (25), men Mari sier ham imot og presiserer at n er en bokstav, ikke et tall (26). Morten får så en idé om at de må ta alfabetet (30), og mener han har skjønt det. Elevene teller seg så frem til at n må tilsvare figur 14, og Morten begynner ivrig å bygge denne figuren (38). Mari og Mats virker imidlertid ikke helt overbevist om at dette er riktig tolkning av oppgaven, for Mats rekker opp handa (43), og Mari leser oppgaven om igjen (41) og peker på at de skal forklare noe her, ikke gjøre noe (44, 52).

Cirka et halvt minutt senere kommer Linda til gruppa, og elevene diskuterer først antall små trekanter på figur 100 med henne. Morten er imidlertid litt utålmodig, og vil ha svar på hva som menes med Ole-oppgaven før de har funnet et svar på antall små trekanter på figur 100.

86	Morten:	Vi gjør den etterpå. Du må bare forklare den der Ole-greia. Du vet når det står
87		figur n.
88	Linda:	Ja.
89	Morten:	Skal vi tenke eh se vi tenkte sånn i alfabetet så var n eh figur fjorten (...)
90	Linda:	Åja, nei, n betyr at du kan ha et hvilket som helst tall, for eksempel *(holder ut*
91		*handa)*
92	Mats:	Nitten.
93	Linda:	Så hvis han tenker på figur nummer nitten, den som heter nummer nitten
94	Morten:	Ja.
95	Linda:	Hvordan kan han finne ut hvor mange trekanter det er i den?

Morten forteller Linda at de har tenkt at i alfabetet var n figur 14 (89). Linda forklarer da at *n* betyr at du kan ta hvilket som helst tall, og ber om et eksempel (90).

Elevene i denne gruppa strevde altså med å finne mening i forslaget om å kalle Oles figur for figur *n*, der *n* er nummeret i rekka. Morten fant en forklaring som gikk ut på at de måtte finne ut hvilket nummer i alfabetet bokstaven n tilsvarer. Det er mulig elevene har vært borti kryptering før, enten i skolesammenheng eller i andre sammenhenger, der tall står for bokstaver i alfabetet, og så bringer med seg idéer derfra til denne oppgaven.

Mari var imidlertid opptatt av at det stod at de skulle *forklare* Ole noe, ikke *gjøre* noe. Ville elevene muligens skjønt denne oppgaven bedre hvis forslaget om å kalle Oles figur for figur *n* ikke hadde vært der?

Linda forklarer elevene at *n* kan bety hvilket som helst tall, og ber om et eksempel. Hun fokuserer altså på spesifikke eksempler, og gjør ikke noe stort nummer av å bruke *n*. Elevene strever med å finne antall små trekanter på de ulike figurene, og det ville nok blitt for vanskelig for dem om de skulle gå rett til å tenke abstrakt her.

Gruppe E

Elevene i gruppe E hadde allerede på tidligere oppgaver kommet frem til (den feilaktige) strategien om å multiplisere figurnummeret med 3. Nå er de altså kommet til oppgave 7:

Randi:	Og så skal du si nummer syv. *(gir oppgavearket til Reidun)*
Reidun:	(...) *(ser på Ruben)*
Ruben:	Bare les det.
Randi:	(...) *(peker på oppgaven)*
Reidun:	Ole tenker på en figur i rekka. Forklar Ole hvordan du kan hvordan han kan finne ut hvor mange små trekanter det er på figuren uten å lage den. Hvis du vil, kan du kalle Oles figur for figur n, der n, der n er nummeret i rekka.
Randi:	{Hæ? Jeg skjønte ikke} [Hvis vi, hvis vi for eksempel skal forklare]
Ruben:	[*(Tar oppgavearket)* Ole tenker på en figur i rekka] {Forklar Ole hvordan han kan finne ut hvor mange små trekanter det er på figuren uten å lage den.} Det er jo bare å gange med tre.
Randi:	Mm. Da skriver vi sånn.
Ruben:	Oles figur eh må han gange n gange tre, altså hvis det er figur syv, må han gange syv gange tre for å finne ut av hvor mange trekanter det er
Randi:	*(Skriver)* Oles figur
Reidun:	Det var enkelt egentlig, for det var jo
Ruben:	{Skjønte du det?}
Reidun:	Ja, vi bruker jo bare tregangen.
Ruben:	Ikke sant, hvis det er figur hundreogtolv [(...)]
Reidun:	[(...)]
Randi:	Tre gange hundreogtolv.
Ruben:	Ja.
Randi:	Så Oles figur må han gange med tre.
Ruben:	Må han gange n med tre.
Randi:	*(Mumler mens hun skriver)* gange n
Reidun:	Med tre.
Randi:	med tre.
Ruben:	For å finne ut hvor mange trekanter.
Randi:	(...)
Ruben:	Da er vi ferdige.

Reidun leser oppgave 7 (5), og Randi sier hun ikke skjønte det (8). Ruben leser oppgaven om igjen (13), og forklarer at for Oles figur må han multiplisere *n* med tre (13). Han gir også eksempler, og forklarer at det for figur 7 vil bli 7×3, og for figur 112 svarer Randi at det vil bli 3×112. Reidun og Randi ser ut til å være med på forklaringen hans, og Randi skriver ned svaret.

Selv om elevene har feil svar, er dette en følgefeil fra de forrige oppgavene. Elevene har skjønt hva oppgave 7 går ut på, og de klarer også å bruke *n* riktig i forklaringen sin.

Som nevnt tidligere, gjorde Linda elevene oppmerksomme på at de hadde gjort feil, og elevene begynte på nytt på oppgavene.

Oppsummering

Oppsummeringa ble holdt før alle gruppene var ferdige med oppgavene. Linda hevdet at de nå hadde hatt en dobbeltime, men oppdaget etter oppsummeringa at hun hadde tatt feil av tida, og at de bare hadde hatt én time.

I oppsummeringa fokuserte Linda på de to siste oppgavene, oppgave 6 og 7. Hun spurte elevene hvordan de kunne finne antall små trekanter på figur 100, og fikk til svar at man kunne ta 3×100 og plusse på én. På Ole-oppgaven forklarte hun at ”sånn på matematikkspråk så gir vi av og til tall bokstaver når vi skal snakke mer generelt, hæ? Og da sa vi at n, det kunne være et hvilket som helst tall”. Hun ber så en av elevene si et tall. Eleven sier 203. Linda spør hvordan vi kan vite hvor mange trekanter det er i 203, og en elev svarer at de kan multiplisere tallet med tre og legge til én. Linda skriver denne regelen på tavla med ord, og skriver også opp regnestykket for figur 203. En elev fra gruppe B forteller så at det finnes en annen måte også, nemlig å multiplisere tohundreogto med tre og legge til fire. Denne metoden har gruppe B brukt.

I oppsummeringa gir altså Linda en forklaring på hva som menes med *n*. Forklaringen ”så gir vi av og til tall bokstaver når vi skal snakke mer generelt” er noe upresis, men hun forklarer også at ”n, det kunne være hvilket som helst tall”. Etter å ha forklart dette, fokuserer hun ikke mer på *n*, men ber om et hvilket som helst tall som hun så bruker i et generisk eksempel. Hun velger så å skrive en regel med ord, og ikke bruke symboler. Dersom hun hadde skrevet regelen med symboler, er det mulig at en del elever ville hatt problemer med å forstå det, og det kunne ha ødelagt litt av mestringsfølelsen deres. Men det er også mulig at en del ville ha forstått regelen med symboler. Dette er en vanskelig avveining, men det er mulig det var lurt av Linda å ikke presse frem en regel med symboler på dette tidspunktet, så kan elevene heller få flere liknende oppgaver senere, og gradvis bli kjent med å bruke symboler.

Ekstraoppgave

Etter oppsummeringa oppdager Linda at hun har tatt feil av tida, og at de har en time til.

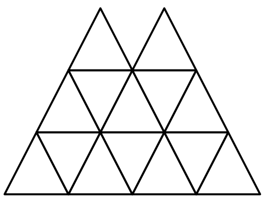
Linda:	Javel, gutter og jenter, vi skal rett og slett eh *(kikker på klokka)* **Nei!** *(holder hendende foran ansiktet)* **Er det mulig?** *(bøyer seg framover, og så tilbake)* Vi har en time til!
?:	Jeg visste det.
(Flere som ler, inkludert Linda)	
?:	Jeg visste også det.
Linda:	Hvorfor sier du det ikke da?
?:	Ey, hvorfor sa noen det?
?:	Ey, hva skal vi gjøre i en time til? Vi har jo gjort alle opp spørsmålene.
?:	Kan vi gå?
?:	Utetime.

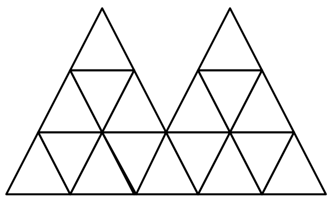
?: Kan vi gå hjem?
Linda: Dagens blemme.
(Flere roper utetime)
Linda: Å nei, nei, nei, hør nå! Hør nå eh det er bare ei gruppe som har fått den, jeg har flere oppgaver på lur, skjønner du.
(Flere roper neei, en roper yes!)
Linda: Eh det dere skal gjøre nå. Nå skal dere bygge på gjerdet med to rader. *(holder handa opp og beveger den fra side til side mens hun sier dette)*
?: Gjerdet?
Linda: Ja.
(Mange sier hæ)
Linda: Bygge på gjerdet med to rader, og så skal dere se, så prøver dere å gjøre de samme oppgavene.
?: Vi har jo gjort det, nei, nei, nei.
Linda: Bygg på gjerdet med to rader.

Da Linda oppdaget at de hadde én time til, foreslo elever at de kunne gå hjem (10, 12) eller ha utetime (11, 14). Linda sier imidlertid at hun har flere oppgaver på lur, og elevene får beskjed om at de skal bygge på gjerdet med to rader og prøve å gjøre de samme oppgavene (18, 23, 26).

Som nevnt tidligere hadde Linda tenkt å be elever som eventuelt ble tidlig ferdige om å bygge gjerdet ett hakk høyere. Nå ber hun dem i stedet om å bygge på gjerdet med *to* rader. Da jeg spurte henne hvorfor hun endret ekstraoppgaven, forklarte hun at hun idet hun sa at ”det er bare ei gruppe som har fått den”, kom på at den gruppa allerede hadde gjort ekstraoppgaven. Hun valgte derfor å endre oppgaven slik at også denne gruppa fikk noe å gjøre. Oppgaven om å bygge på gjerdet med to rader fant hun altså på der og da, og hun visste ikke svaret på denne oppgaven på forhånd.

Både oppgaven om å bygge gjerdet ett hakk høyere og oppgaven om å bygge på gjerdet med to rader kan tolkes på ulike måter. Bygger man gjerdet ett hakk høyere, kan for eksempel begge disse figurene være mulige tolkninger av hvordan figur 2 ville sett ut:





Jeg spurte Linda i ettertid om hun var klar over at denne oppgaven kunne tolkes på flere måter, og det var hun ikke.

Oppgaven om å bygge på gjerdet med to rader var ikke planlagt på forhånd, og vi skal se at elevene tolket denne på ulike måter.

Gruppe A

Pia skulle ut og reise, så hun er ikke til stede denne delen av timen. Linda har nettopp gitt beskjeden om at elevene skal bygge på gjerdet med to rader, og kommer så bort til gruppe A:

Linda: *(Kommer bort til gruppa)* Skjønte dere det? Bygg det på med to rader. Gjøre det to hakk høyere, hø?

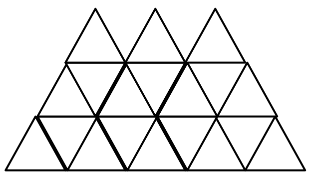
16	Pål:	To hakk?
17	Linda:	Mm.
18	Pål:	*(Bygger)* Sånn?
19 20	Peter:	Jeg skjønte ikke. Skal vi ikke bare bygge *(viser to hakk med handa)* {en gang til?}
21	Linda:	Skjønte du? Prøv.
22	Per:	Var det noen som egentlig ikke kunne bli filmet her?
23	Linda:	Eh. Det kan godt være.
24	Per:	Jeg ser i hvert fall ingen (...)
25	Linda:	Nei. *(forlater gruppa)*
26	*(Pål bygger.*	*Per og Peter ser ut i rommet)*
27	Peter:	Seriøst, vi trenger Pia nå.
28	Per:	(...)
29	Elev i ei anna gruppe:	Seksten pluss seksten, hva er det?
30	Peter:	*(Roper til ei anna gruppe)* Seksten pluss seksten er trettito.
31	Per:	*(Forlater gruppa)*
32	Pål:	Sånn? {Bare ganger vi med to?} Nei, det kan vi ikke. *(10s)* Nå må vi gange med fem. Du?
33	Peter:	Ja.
34	Pål:	Nå må vi gange med fem.
35	Peter:	Okey. Lykke til.
36	Pål:	Takk for det.
37	Peter:	*(Ler)* Okey. *(Bøyer seg over figuren foran Pål)*
38	Pål:	En to tre fire fem.
39 40	Peter:	{Javel} det er du som har kalkulatoren, {var det ikke} å nei, her er den. *(tar kalkulatoren)* Påål, hvor mange er det da?
41	Pål:	Hæ?
42	Peter:	Hvor mange skal vi gange med?
43	Pål:	(...) {nei, nei nei, nei. Hva var det vi gjorde i stad?}
44	Peter:	Pia.
45 46 47	Pål:	Men vi begynte med tre gange et eller annet. Åja! Figur nummer fem? Fem ganger fem. Nei. Vent litt. *(bøyer seg ned mot gulvet, ser ut som han leter etter noe).* Jo, fem gange fem pluss, minus én.
48	Peter:	Gange fem igjen?
49 50	Pål:	*(Ser ut som han teller noe på figuren foran seg)* Hæ? *(tar kalkulatoren fra Peter)* Åja, fire gange fem. Ja, okey {men da har vi det}
51	Peter:	Hæ? Fire gange fem? Du sa [fem gange fem.]
52 53	Pål:	[Nå, ja, men nå vet vi det], nå vet vi det. {Nitten.} *(leter i pennalet)* Hvor er blyanten min?

Linda spør elevene om de skjønte oppgaven, å bygge på gjerdet med to rader, gjøre det to hakk høyere (14). Pål prøver å bygge, mens Peter sier han ikke skjønte det, viser to ”hakk” med handa og spør om det var slik (19). Per er opptatt av om det var noen i klassen som ikke kunne bli filmet (22), og kort tid etter at Linda har forlatt gruppa, forlater han gruppa (31). Pål jobber med oppgaven, og lurer først på om de bare kan gange med to, men svarer selv at det ikke går, og at de nå må gange med fem (32). Peter virker lite interessert i oppgaven (35), men finner så frem kalkulatoren (39). Pål sier de på figur 5 må ta fem ganger fem minus én (45), men sier kort tid etter at det heller var fire ganger fem (49, 52).

Påls første innskytelse om å multiplisere med to, kan komme av at han tenkte at figurene ble dobbelt så store, men han ser raskt at dette ikke er tilfelle.

Pål sier først at Peter for figur 5 skal regne 5×5-1, men sier etter å ha talt på figuren sin at det var 4×5-1 i stedet. Senere går det frem at det er figur 4 han har bygd, så da går nok korreksjonen på at det er figur 4, ikke figur 5 de skulle finne antall små trekanter på.

Fra kameraet er det ikke mulig å se hvordan Pål har bygd figuren, men hvis vi går ut fra at formelen deres er riktig i forhold til deres tolkning, kan de ha bygd figurene slik at figuren under ville tilsvare figur 4:



Litt senere gir Linda et tips til hele klassen om at hvis de bygger opp figur tre, så får de figur nummer én:

69	Linda:	*(Høyt til hele klassen)* Skal dere ha et tips? Hvis dere bygger opp figur tre, så
70		får dere figur nummer én.
71	Peter:	*(Henvendt til gruppa ved siden av)* [Hæ?]
72	Linda:	[Bygg på med to rader]
73	Peter:	*(Henvendt til guppa ved siden av)* Nei, jeg skal ikke kødde mer. Seriøst, de får
74		se alt vi har gjort. Jeg har gjort mye mer enn egentlig dere har sett.
75	Linda:	*(Kommer bort til gruppa)*
76	Pål:	*(Tar ned handa)* At eh hva skal vi skrive? (...) begynner på en ny en.
77	Linda:	Bare skriv *(vifter med handa)* ny oppgave, hva som helst.
78	Pål:	Åja, ny oppgave?
79	Linda:	Ja..
80	Pål:	Kan vi få et nytt ark?
81	Linda:	Dere kan jo begynne med å bygge den opp med én *(legger noen små*
82		*trekanter foran Peter) (Det ligger et ark over Påls figur, så Linda ser ikke at*
83		*han allerede har bygd.)*
84	Pål:	Hæ?
85	Linda:	Ja, bare ta så mye ark dere vil. *(forlater gruppa)*
86	Pål:	*(Roper etter Linda)* Men vi har funnet ut teknikken, så det er, det er ikke så
87		{nøye} *(ødelegger figuren han har laget og legger arket der)*

Hverken Pål eller Peter ser ut til å bry seg noe om tipset fra Linda, selv om dette er i strid med deres tolkning av hvordan figurene vil se ut. Pål hadde handa oppe allerede før Linda ga dette tipset, og som vi ser av utdraget ovenfor, lurte han bare på hva de skulle skrive, antakelig som overskrift til den nye oppgaven, og om de kunne få et nytt ark. Idet Linda forlater gruppa, roper Pål etter henne at de har funnet teknikken.

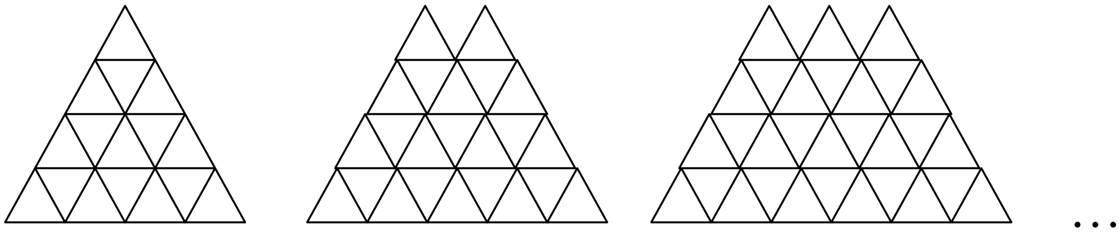
Videre skriver Pål svarene på oppgavene, og etter en stund kommer Linda igjen.

128	Pål:	Ja, vi er bare kommet til oppgave seks.
129	Linda:	Ja.
130	Peter:	*(Kommer tilbake og setter seg)* Nei, {nå var vi jo just og leste syv, nei, (...)}
131	Linda:	Ja, og så hva har dere funnet ut så langt, da?
132	Pål:	Vi har funnet ut at vi må gange med syv, syv gange f..., eller, vi må gange
133		med fem og så figuren og så minus én, så får vi svaret.
134	Linda:	Figur nummer syv eller figur nummer seks?
135	Pål:	Det er figur nummer syv.
136	Linda:	Ja, så ganger du med fem og så minus én?
137	Pål:	Ja.
138	Linda:	Hvorfor tar du minus én?
139	Pål:	Fordi du plusser på fem, og så er det fire på begynnelsen.
140	Linda:	Er det fire på begynnelsen?
141	Pål:	Ja, det begynner med [fire]

142	Linda:	[Hvor mange] er det i figur én? Hvis du skal ha den dobbelt så høy?
143	Pål:	[Dobbelt så]
144	Linda:	[Det er mer enn fire]
145	Pål:	Ja men det blir jo riktig. Vi telte jo!
146	Linda:	Ja.
147	Pål:	Ja. Vi tok figur nummer fire, og det ble [nitten.]
148	Peter:	[Det heter] ikke **vi** telte.
149	Pål:	Okey, jeg telte, da.
150	Linda:	Hvor er Per hen? Er han gått ut?
151	Peter:	[Jeg vet ikke, han gikk visst bare.]
152	Pål:	[(...)] Han skulle på do.
153	Linda:	Hja. Ja. Hvor mange var det i figur én, da?
154	Pål:	Figur én?
155	Linda:	Mm. Når dere bygde den opp.
156	Peter:	[Ja, vi bygde den.]
157	Pål:	[Vi bygde ikke figur én.]
158	Linda:	Å nei.
159	Peter:	Gjorde vi ikke?
160	Pål:	Nei, vi bygde figur fire.
161	Peter:	Åja, var det det vi gjorde.
162	Pål:	Ja, det står jo der, lag de to neste figurene.
163	Linda:	Jo, jo, men dere må jo vite hvordan figur én ser ut.
164	Pål:	(...)
165	Linda:	{Dere skulle legge på to lag} Da vil jo denne *(peker på oppgavearket)* når du
166		bygger den opp, se ut som figur én.
167	Pål:	Hæ? *(ser litt oppgitt ut)*
168	Linda:	*(Smiler)* Du har to lag på, hæ? *(viser i lufta med hendene)*
169	Pål:	Ja.
170	Linda:	Ja.
171	Pål:	Jeg skjønte ikke helt hvordan jeg, skal jeg bygge på sånn *(viser med handa*
172		*på arket)* og sånn, og så skal jeg oppå der igjen, da har jeg laget ett lag til?
173	Linda:	Mm ja. Begynn med den, så skal jeg komme og vise deg.
174	Pål:	Ja men vi har jo
175	Linda:	Og så er det annenhver oppover.
176	Pål:	Vi har jo måten her. Vi har jo måten (...)
177	Linda:	{Dere må jo} vite hvor mange det er i figur én.
178	Pål:	Hvorfor det? Det var jo riktig!
179	*(Linda forlater gruppa)*	
180	Pål:	Drit i det. Vi får riktig.

Linda spør hva elevene har funnet ut, og Pål forklarer at ”vi må gange med fem og så figuren og så minus én” (132). Linda lurer på hvorfor det er minus én (138), og Pål forklarer at det er fordi de legger til fem, og så er det fire på begynnelsen (139). Linda hevder det er mer enn fire på begynnelsen (144), men Pål er uenig med henne og sier at det blir riktig. Han begrunner det med at de har talt de små trekantene på figur fire, og det ble nitten (145, 147). Linda spør hvor mange små trekanter det var i figur én da de bygde den opp (153, 155), og Pål forteller at de ikke bygde figur én, men figur fire (157, 160). Linda hevder de må vite hvordan figur én ser ut (163), og forklarer at når de bygger opp figuren hun peker på på oppgavearket (antakelig figur tre), vil den se ut som figur én (165). Pål er usikker på hva Linda mener (167, 171). Linda ber ham bygge igjen, men han sier de allerede har funnet måten (176). Linda gjentar at elevene må vite hvor mange små trekanter det er i figur én (177), men Pål ser ikke hvorfor det er nødvendig (178). Etter at Linda har forlatt gruppa, sier han ”drit i det, vi får riktig” (180), og han og Peter går videre til neste oppgave.

Fra oppsummeringa i slutten av økta går det frem at Linda tenker seg figurrekka slik:



Figur 1 Figur 2 Figur 3

Dette er en annen tolkning enn elevene har, men Linda ser ikke ut til å være klar over at elevene har tolket oppgaven annerledes enn henne. Hun hevder det må være flere enn fire små trekanter på den første figuren, mens Pål hevder de fikk riktig svar.

Linda sier så at elevene må lage figur én, selv om Pål forteller at de allerede har laget figur fire (denne har de ødelagt igjen). I og med at Pål har laget figur fire, har han egentlig laget figur én også, for denne er jo en del av figur fire, men Linda hevder likevel at de må lage figur én. Antakelig er grunnen til at hun vil de skal lage figur én at hun mener de må ha gjort noe feil siden de bare har fått fire små trekanter på begynnelsen. Pål er imidlertid overbevist om at de har gjort riktig, og velger å gå videre til neste oppgave.

184	Pål:	{Fire}hundreognittiseks, er det det? Hvor mange er det på figur hundre?
185	Peter:	Jeg er trøtt.
186	Pål:	Deet er, er det, skal vi ta og si at det er firehundreognittiseks?
187	Peter:	Ja, okey. Det høres ut som et fint tall.

Nå mener Pål det er 496 små trekanter på figur 100. Dette stemmer ikke med formelen deres om å multiplisere figurnummeret med 5 og trekke fra 1, for dette ville gitt 499 som svar. Det er vanskelig å si om elevene har skiftet strategi eller om de har gjort en regnefeil her, men de har ikke diskutert noen strategiendring. Det er mulig at de kan ha gjort en slurvefeil og trukket fra fire i stedet for én.

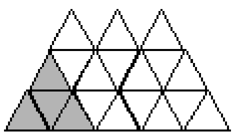
Elevene prater en del om utenomfaglige ting, men etter en stund får Pål skrevet ned svaret på siste oppgaven og rekker opp handa.

277	Pål:	*(Henvendt til Linda, som nå er på vei mot gruppa)* Vi er ferdige.
278	Linda:	Nå er jeg spent.
279	Pål:	Nei, vi har ikke funnet figur én.
280	Linda:	Dere har ikke funnet figur én.
281	Pål:	Nei, for det, det orker jeg ikke.
282	Linda:	*(Begynner å pusle med de små trekantene)*
283	Pål:	Okey. Hvis vi sier at det er [ni i figur én, da.]
284	Jan:	[*(Kommer bort til gruppa)* Har dere, er dere ikke ferdige enda?]
285	Linda:	Det er ikke ni i figur én.
286	Pål:	[Nei, jeg vet det.]
287	Peter:	[Ja, men det er bare én person som har jobbet her.]
288	Jan:	Nei, nei, nei, nei, nei.
289	Pål:	Du er bustet.
290	Jan:	Hvor mange må han plusse på for hver gang?
291	?:	(...)
292	Jan:	Hæ?
293	Linda:	*(Holder på å bygge figur én)* Det kan dere finne ut av selv.
294	Peter:	{Vi må finne egen metode.}

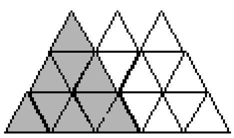
295	Jan:	Hvor mange må han plusse på for hver gang?
296	Pål:	Fem.
297	Jan:	{Neei.}
298	Linda:	Er det det? *(Ser på Jan)*
299	Jan:	*(Rister på hodet)* [{Det er tolv.}]
300	Elev fra gruppe F:	[*(Kommer bort til Linda)* Linda, kan jeg gå ut i ganga og hente (...)?]
301	Peter:	[{Er det tolv? Er det tolv?}]
302	Linda:	[Du må vente litt, så (...)]
303	*(Jens kommer bort til gruppa. Nå er det altså tre "ekstra elever" hos gruppa)*	
304	Linda:	Her er figur én, er det ikke det? *(har bygd figur én)*
305	Jan:	Eh jo.
306	Linda:	Jo.
307	Jan:	Så må du plusse på
308	Linda:	Legg på ei rad.
309	Jan:	Legg på ei rad til og tell hvor mange dere har for å få en til sånn en.
310	Linda:	Legg på ei rad til, langs her, hæ?
311	Jens:	Der er Per.
312	*(Linda og Jan forlater gruppa)*	

Pål hevder de er ferdige (277), men sier også at de ikke orket å finne figur én (279, 281). Idet Linda begynner å bygge, sier han at "okey, hvis vi sier at det er ni i figur én" (283), men Linda avfeier ham og sier det ikke er ni i figur én (285). Han svarer da at han vet det (286). Jan fra gruppe B kommer, og spør hvor mange Ole må plusse på for hver gang (290, 295). Pål svarer at han må plusse på fem (296), men Jan er uenig (297, 299). Han sier det er tolv (299), men det virker ikke som andre enn Peter får med seg dette (301). Linda har bygd figur én (slik hun tolker den), og spør om ikke det er figur én (305). Jan svarer bekreftende på dette (306), mens Pål er stille. Linda og Jan ber så Pål om å legge på ei rad til (309-311), og forlater gruppa.

Fortsatt har altså Linda og Pål ulike tolkninger av oppgaven, men de ser ikke ut til å være klar over det. Pål sier denne gangen at det er ni små trekanter på figur én, mens han tidligere sa at det begynte med fire. Dette kan skyldes at han tidligere ikke mente at det var fire små trekanter på figur én, men "på begynnelsen", som i enden av figuren, i likhet med "den ene ekstra trekanten" i den opprinnelige oppgaven. Det kan også skyldes at han tidligere regnet det skraverte området



som figur én, og nå har endret oppfatning, og regner det skraverte området under for figur én.



Skal formelen hans om å multiplisere figurnummeret med fem og trekke fra én fungere, må figur én tilsvare det skraverte området med fire små trekanter. Er det ni små trekanter på figur én, må han endre formelen sin. Det er mulig han nå prøver seg med ni små trekanter på figur én, og altså er åpen for å endre "navn/nummer" på figurene i og med at Linda tidligere sa det ikke var fire på den første figuren, men når Linda sier det ikke er ni på figur én, svarer han ”nei, jeg vet det”.

Uansett får han altså beskjed om at det ikke er ni små trekanter på figur én, og blir bedt om å legge på ei rad til på Lindas figur og se hvor mange det øker med. Legg merke til at ”rad” her har en annen betydning enn i oppgaveformuleringen av ekstraoppgaven.

Etter at Linda og Jan er gått, gjør Pål dette, men mener fortsatt det øker med fem:

328	Pål:	Ikke sant, det var det jeg sa, det var fem.

For meg ser det ut som han la på seks små trekanter, men han sier altså selv at det var fem. Dessverre klarer jeg ikke å se hvordan han legger trekantene, så jeg vet ikke hvordan han kom frem til det svaret han gjorde. Han startet fra Lindas figur, som hadde 16 små trekanter, og jeg vet ikke hvordan han klarte å få det til at det økte med fem trekanter nå også.

Kort tid etter startet Linda oppsummeringen av ekstraoppgaven.

Gruppe B

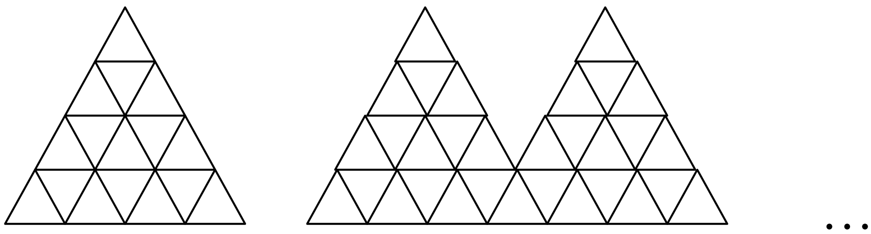
Gruppe B er filmet med det sirkulerende kameraet mens de jobber med deler av oppgaven.

51	*(Kamera flyttes til gruppe B)*	
52	Jan:	Trettién, trettién, og så skriver du figur tre. *(Janne skriver)*
53	?:	Femten.
54	Jan:	Da skriver du eh
55	Jon:	Førti eh, nei, nei, nei eh
56	Jan:	Førtifem, nei, nei nei
57	Jon:	Det er femti nå.
58	Jan:	[Jo det er]
59	Janne:	[(...) plusse på seksten.]
60	Jan:	Plusse på femten.
61	Janne:	Ja, femten, da.
62	Jan:	Det er førtii
63	Janne:	Seks
64	Jan:	Ja, akkurat.
65	?:	Det var det vi mente.
66	Jan:	Og så er det oppgave tre. Vent, vent, vent.
67	{Jon}	[Nei, figur tre.]
68	Jan:	[*(Mumler)* Hvor mange små trekanter tror du det vil være i figur]
69	Janne:	Du, der det figuuu, nei, det er figur to og tre.
70	Jan:	Hvor mange små trekanter [tror du det vil være]
71	Jens:	[Vi er jo ferdige med den.]
72	Jon:	Tuller du med meg?
73	Jan:	{Ja, jeg gjør det}
74	Jens:	Vi er jo ferdige med den.
75	Jan:	Hysj, hysj, hysj, hysj, hysj, hysj, hysj. Gangeee
76	Janne:	Hva sa (...)
77	Jan:	Vi må gange seks med femten og plusse på én.
78	Janne:	Gange seks med femten.
79	?:	Hæ?
80	?:	Okey, jeg skjønte ikke.
81	Janne:	Hva er det?
82	Jan:	Bare gang seks med femten. Det var en kalkulator her i stad. Bruk den.
83	Jon:	Ja, det var en kalkulator her i stad. *(finner en kalkulator)* Jeg har den her.
84		Hehehe. (...)

85	Janne:	Seks gange femten pluss fire.
86	Jon:	{Seks gange femten, det er nitti} *(hvisker siste delen av ordet)*
87	Jan:	[Nitti...]
88	Janne:	[{Nittifire, da}]
89	Jan:	Da er det nittién da.
90	Jon:	Det er jo nitti.
91	Jan:	Det er nittién, [for vi må plusse på én.]
92	Jon:	[Nitti.]
93	Jan:	Nittién.
94	Janne:	Okey.
95	Jon:	Nittii tre. Nitti (...)
96	Janne:	Hæ, skal vi nittifire? Nei, nittién?
97	Jan:	Nittién.
98	*(Kamera flyttes til gruppe D hvor Linda er)*	

Elevene kommer frem til at det er førtiseks små trekanter på figur 3 (62, 63) ved å legge til 15 små trekanter i forhold til forrige figur (60). På oppgave tre (hvor mange små trekanter det er på figur 6), sier Jan at de må "gange seks med femten og plusse på én" (77). Janne lurer på om det var seks gange femten pluss fire (85), men Jan står fast på at de må plusse på én, og Janne ser ut til å godta dette (94). Jon hevder, etter å ha trykket inn seks multiplisert med femten på kalkulatoren, at svaret er nitti (86, 90, 92), men Jan påpeker at de må legge til én (91).

Det kan se ut til at denne gruppa tenker seg figurrekka slik:



Figur 1 Figur 2

Da stemmer det at det øker med femten små trekanter for hver figur, og at antall små trekanter for en vilkårlig figur blir figurnummeret multiplisert med femten, pluss én.

Da vi så filmen sammen, gjorde Linda meg oppmerksom på en annen mulig tolkning, nemlig at elevene kun har laget figur 1, og sett at der var seksten små trekanter. Så kan de ha overført tankegangen fra den opprinnelige trekantgjerdeoppgaven, og tenkt at antall små trekanter i hver figur øker med én mindre enn antall små trekanter på figur 1, og at man må legge til én ekstra. Fra videoen er det ikke mulig å se hvilke figurer elevene har bygd, så begge disse tolkningene er mulige.

Kameraet flyttes til ei anna gruppe, men etter cirka et halvt minutt flyttes det tilbake, og da er også Linda kommet til gruppa:

107	*(Kamera flyttes til gruppe B, hvor Linda nå er)*	
108	Linda:	Men hvor mange er det i figur én, da?
109	?:	(...)
110	?:	Feil.
111	Janne:	Vi gjorde det i stad, skjønner du.
112	Jan:	Vi gjorde det i stad, jo.
113	Linda:	(...) med to rader?

?:	Ja.
Linda:	Er du med, Jens?
Jens:	Ja.
Linda:	Har du skjønt det?
Jens:	[Ja.]
Jon:	[Jeg har skjønt alt.]
Jan:	Og så, vi er på [femmm...]
Janne:	[Så øker det med femten.]
Jan:	Skriv ja, vi hadde riktig.
Linda:	Har dere skrevet ned alt?
Jan:	Ja, vi driver og skriver ned.
Linda:	Ja, flott.
Jan:	{Vi skrev på andre siden i stad.}
Janne:	Fem.
Jan:	Okey. Eh. Kan du vite sikkert hvor mange små trekanter det er på figur {syv} uten å lage den?
Jon:	(...)
Jan:	Det er akkurat det samme som i stad, bare at det øker.
Linda:	Hvor mange er det nå, da?
Jan:	Femten skal du gange, og så skal du plusse på én siden da blir det seksten.
Linda:	Hvor mange øker det med hver gang?
Jan:	Det øker med femten.
Linda:	Femten hver gang?
?:	Ja.
Linda:	*(Forlater gruppa)*

Elevene forteller Linda at de har funnet ut at de skal multiplisere med femten og legge til én (133). Linda spør hvor mange det øker med for hver gang (136), og Jan sier at det øker med femten (135). Like etter forlater Linda gruppa, uten å ha sagt noe om hvorvidt elevenes svar er riktig.

Linda kommenterte da vi så filmen at hun ikke hadde kontroll da hun var hos denne gruppa første gang, og ikke visste svaret. Dette kan være grunnen til at hun forlot gruppa uten å kommentere svaret deres. Elevene hadde dessuten ødelagt figurene igjen, så Linda fikk ikke sett hvordan de hadde bygd dem.

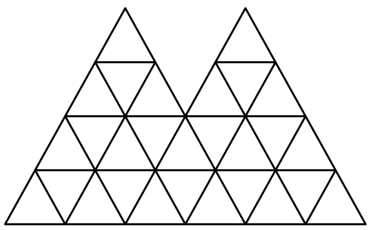
Like etter at hun har vært hos gruppe D, som bygde figur 2 mens hun så på, og kom frem til at antall små trekanter økte med syv for hver figur, kommer Linda tilbake til gruppe B:

Linda:	Er du sikker på det øker med femten hver gang?
Jens:	Ja.
Jan:	Nei. Nei, jeg er ikke sikker på det.
Linda:	Har dere bygd dem, eller bare tenkte dere?
Jan:	Vi bygde dem i stad.
Janne:	Vi bygde seksten. [Nei, det økte med seksten.]
Jan:	*(Tar noen små trekanter)* [Men det økte med.] Det kan ikke øke med seksten. Det kan ikke øke med femten heller, det er mindre.
Linda:	*(Forlater gruppa)*
Jan:	Fordi det er jo ikke så mye nå. *(Jan bygger ny figur)*
Janne:	Ja, men hvis det er feil, så må vi {bare viske ut tallene, da.}
Jon:	*(Kommer tilbake til gruppa med et pennal i handa)*
Janne:	Hva har du gjort med pennalet?
Jon:	(...)
(Latter fra de andre i gruppa)	
Jon:	Det ser så kult ut.
Jan:	*(Har nå bygd figur 1)* Her er det seksten, så skal vi liksom plusse på én til sånn en. *(bygger videre)* Én
Jon:	{okey}

212 Jan:		To
213 Jon:		Tre. Okey.
214 Jan:		Fem *(mumler stille)* åtte, ni, ti, elleve
215 Jens:		Tolv.
216 Jan:		Tolv blir det da.
217 Janne:		Da gjør vi bare [sånn her.]
218 Jan:		[{Huith}] *(fjerner figuren igjen)*
219 Jens:		Og så skriver vi tolv. Skriv tolv, vi øker med tolv.
220 Jan:		Vi må gange det med tolv.
221 Janne:		Og så plusse på én.
222 Jan:		*(Tar en kalkulator)* Okey, nå må vi
223 Janne:		Da blir det ikke nittién der, da.
224 Jan:		Nei.
225 Janne:		{Og ikke det her tallet, her} *(visker ut noe)*
226 Jan:		Ja, nei, vi må bare skrive alt på nytt. Det første, var det to, tolv gange to.
227		Tjuefem. Tjuefem. Og den blir eh trettisyv.
228 Jon:		*(Holder opp en penn/blyant)* Det her er Ole Brumm.
229 Jan:		Og så eh tolv gange seks *(trykker på kalkulatoren)* så den er syttitre. Eh tolv
230		gange syv.

Linda spør elevene om de er sikre på at det øker med femten hver gang (193). Jens svarer ja (194), men Jan blir usikker (195). Janne sier det økte med seksten (198), men Jan sier det hverken kan øke med femten eller seksten (199). Linda forlater gruppa og Jan bygger figuren om igjen. Han bygger først figur 1 (209), og teller så hvor mange små trekanter det øker med til figur 2, og finner at det øker med tolv (216). Så ødelgger han figuren igjen (218). Elevene mener nå at de må multiplisere med tolv og legge til én (220-221). D finner at det blir tjuefem små trekanter på figur 2, trettisyv på figur 3 og syttitre på figur 6 (226, 229).

Fra filmen ser jeg at Jan bygger figur 2 slik:



Han teller at det øker med tolv, men ødelegger så figuren. Elevene mener så at de må multiplisere figurnummeret med tolv og legg til én for å finne antall små trekanter på en vilkårlig figur. Det ser ut til at de her overfører tankegangen fra tidligere, der de skulle legge til én, og de legger ikke merke til at det nå er fire små trekanter ”til overs”, og at de derfor skulle ha lagt til fire i stedet for én.

Denne gruppa har også en annen tolkning av hvordan figurrekka vil se ut enn den Linda senere presenterer på tavla i oppsummeringen.

Gruppe C

I gruppe C lurte elevene på om de skulle bygge gjerdet dobbelt så stort:

29	Linda:	Dere skal lage gjerdet to hakk høyere, det vil si hvis du ser den, ikke sant, så
30		blir det én, to opp. *(viser noe på arket deres)*
31	{Morten}:	[Åja.]

32	Mari:	[Jamen, går det an?]
33	{Mats}:	Er det ikke bare å gange dette med to, da?
34	Linda:	{Det skal gå an, det er faktisk mulig.}
35	Mari:	{Det blir jo bare å bygge (...) det}
36	Morten:	Åh, så kjipt. Det kommer til å ta en evighet. Jamen hvor langt skal vi gjøre
37		det?
38	Linda:	Se om du klarer å finne ut av det igjen.
39	Morten:	Hæ? Hæ? *(henvendt til Linda, som nå er på vei til å forlate gruppa)* Skal vi
40		gjøre alle spørsmålene på nytt, bare med doble?
41	Linda:	Ja. {Bygg det to høyere}
42	Morten:	[*(sukker)*]
43	Mari:	[*(gjesper)*]
44	Morten:	(...)
45	Mari:	Bare begynn å lag den der eller den (...)
46	Morten:	Okey, bare doble alt. Åtte, fjorten, (...)
47	Linda:	Bygg den *(peker på arket)*. Den blir figur én hvis du bygger den.

Linda forklarer elevene at de skal lage gjerdet to hakk høyere (29), men Mari lurer på om det går an (32). Mats spør om ikke de bare kan gange med to (33), mens Linda svarer Mari at det skal gå an å bygge gjerdet to hakk høyere (34). Morten synes det er ”kjipt” å måtte bygge, og mener det kommer til å ta en evighet (36). Han spør om de skal gjøre alle oppgavene på nytt, bare med doble (39). Linda svarer bekreftende og sier de skal bygge det to høyere (41). Morten sier de bare kan doble alt, slik at de får åtte, fjorten og så videre (46), men Linda ber ham bygge figur én (47).

Når Mari lurer på om det er mulig å bygge gjerdet slik Linda vil, tenker hun kanskje på om det er mulig å doble antall små trekanter på hver figur for å få et nytt gjerde, og da ville de ikke klart å få gjerdet på den formen det tidligere hadde vært. Da Morten spurte om de skulle ”gjøre alle spørsmålene på nytt, bare med doble”, svarte Linda bekreftende, samtidig som hun sa at de skal bygge gjerdet ”to høyere”. Dette kan ha vært med på å forsterke Maris oppfatning om at de skulle bygge gjerdet dobbelt så stort. Da Linda kom tilbake til gruppa litt senere, var Mari fortsatt opptatt av om de skulle doble:

141	Linda:	(...) Bare bygg den opp. *(Morten bygger)*
142	*(Ser ut som Mats og/eller Martin sier noe, men ikke hørbart for transkriptøren.)*	
143	Mari:	Hæ? Jo, må det ikke bli tyve? Jo, hvis du skal ha dobbelt opp sånn der, så må
144		det jo bli tyve.
145	Linda:	Blir det tyve, Martin?
146	Martin:	*(Ser opp på Linda. Ikke mulig for transkriptøren å høre om han sier noe/hva*
147		*han eventuelt sier)*
148	Mari:	Ja, det var det det ble i stad når vi bygde, men, men vi må jo ha tyve, må {vi
149		ikke}?
150	Linda:	[Hvorfor det?]
151	Martin:	[(...)] *(peker på noe)*
152	Mari:	Jo, fordi at du skal ha det dobbelte, skulle du ikke?
153	Morten:	Nei, du skal bygge den [{så lang}]
154	Linda:	[To rader høyere.]
155	Mari:	Åja.
156	Morten:	Sånn. *(har bygd figur 1)*
157	Linda:	Der har du den.
158	Mari:	[Det hadde vi i stad også]
159	Mats:	[(...)]
160	Morten:	*(Teller de små trekantene i figuren)* (...) ti elleve tolv tretten fjorten femten
161		seksten. Martin har rett igjen! Martin er mattegeni. Han hadde rett igjen.
162	*(Linda forlater gruppa)*	
163	Mats:	En stjerne ble født i dag. *(Klapper Martin på skuldra)*
164	*(Mari, Mats og Morten ler)*	

Morten: Martin. Martin. Martin *(som i heiarop).* Okey sånn, nå skjønte jeg det.
Mari: Lag de to neste i rekka. *(ler litt oppgitt)*
Morten: *(Bøyer hodet ned)* Seriøst.
Mari: *(Peker på figuren Morten har bygd)* Ja, men dette er figur én. [Da må vi lage figur] to og tre
Morten: [Skal vi lage to til?]

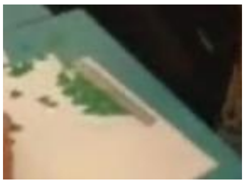
Morten bygger, og Mari spør om ikke det må bli tyve (143). Linda spør Martin om det blir tyve (145), og antakelig svarer han noe (146). Mari sier det var det i stad da de bygde, men tror de må ha tyve (148), og spør om ikke de skulle ha det dobbelte (152). Morten svarer nei (153) og bygger ferdig figur én (156). Mari sier de hadde det i stad også (158). Morten teller antall små trekanter på figur én og kommer frem til at det er seksten (160). Martin hadde rett igjen, og blir omtalt som mattegeni (161) og en stjerne som ble født i dag (163). Kameraet flyttes før vi får sett hvordan elevene bygger de neste figurene i rekka.

Da Linda spurte Martin om det ble tyve små trekanter på figur 1, svarte han antakelig 16, siden Mari sier det var det de fikk i stad, og Morten, etter at han har talt antall små trekanter på figuren han har bygd, sier at Martin hadde rett. Mari har tydeligvis tolket oppgaven som at de skulle bygge de nye figurene slik at de ble dobbelt så store, og mener derfor de skulle fått tyve da de bygde opp det som opprinnelig var figur 3. I den opprinnelige figur 3 var det nemlig 10 små trekanter, og det dobbelte av 10 er 20. Etter at Linda og Morten har forklart at de ikke skulle doble, men bygge figuren to rader høyere, ser det ut til at Mari skjønner hva Linda har ment.

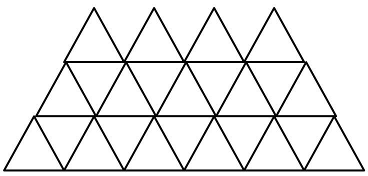
Om elevene har samme tolkning som Linda når det gjelder hvordan de neste figurene i rekka blir, får vi ikke vite.

Gruppe D

Da Linda kom til gruppe D lå denne figuren foran Fredrik:


Fra kamera A, tid: 45.27.

Det ser ut til at elevene i gruppe D, i likhet med elevene i gruppe A, har lagt til det Linda ville regnet som ei "rad", i stedet for to:



Dette er en mulig tolkning av Lindas utsagn om at de skulle legge til to rader/bygge gjerdet to hakk høyere. Figuren ovenfor kan enten regnes som at den består av 3 eller 5 rader i høyden. Det kommer an på hva man definerer som ei rad.

Linda: Får dere til å bygge den?
Fredrik: {Jeg vet ikke.}

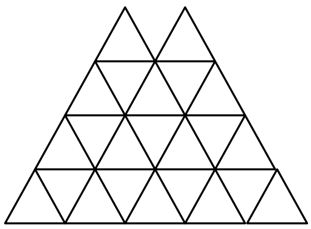
101	Linda:	*(Høyt til hele klassen:)* Skal dere ha et tips? Hvis dere bygger opp figur tre, så
102		får dere figur nummer én *(illustrererer toppen av en trekant med hendene)*
103		{med} to rader. *(Går mot gruppe C)*
104	?:	Hva?
105	Linda:	Bygg opp figur tre. Begynner med figur tre. *(Går videre mot ei anna gruppe)*

Linda spør elevene om de får til å bygge figuren (99). Fredrik svarer at han ikke vet (100), og Linda gir så et tips til hele klassen om at hvis de bygger opp figur tre, så får de figur én (101). Hun forlater så gruppa.

Etter at Linda har gitt dette tipset, endrer elevene figuren sin. Litt senere kommer Linda tilbake. Elevene har da bygd figur 1, og Fredrik, Fia og Frida holder på utvide den til figur 2.

176	Fredrik:	Er det ikke bare å bygge den dobbelt så stor, da? Nei, det må vi ikke.
177	{Frida:}	{Nei, nei.}
178	Linda:	Hvorfor tenkte du dobbelt så stor?
179	Fredrik:	Jeg bare tenkte det, men det blir feil, det blir feil.
180	Linda:	*(Ler)*
181	Fredrik:	Den skal ikke være dobbelt så stor. (...) *(13s)* Sånn. *(De har nå lagt til 7 små*
182		*trekanter til figur 1, slik at de får figur 2 (slik Linda senere lagde den på tavla),*
183		*og Fredrik fjerner tre små trekanter som de har lagt "feil" bortover.)*
184	Linda:	Hvor mange øker det med?
185	Fredrik:	(...) *(teller på figuren)* Syv. Syv.
186	Linda:	Hvordan tror du neste ser ut?
187	Fredrik:	(...) Bare én rad sånn?
188	Linda:	*(Henvendt til Frans)* Kan du legge på syv til?
189	Frans:	{Mmm}
190	Linda:	La Frans legge på ei rad.

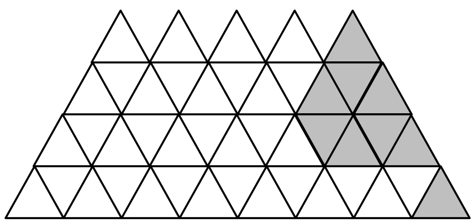
Elevene har bygd figur 2 slik:



De har nå samme tolkning som Linda av hvordan figurrekka skal se ut, og har funnet ut at det øker med 7 små trekanter for hver figur.

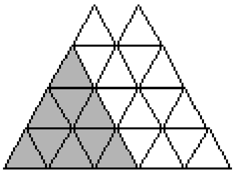
Elevene kommer frem til at de kan multiplisere figurnummeret med syv og legge til ni. Linda ber dem forklare, og er opptatt av at alle i gruppa skal forstå hvorfor det blir slik. Hun ber Fredrik forklare for Frans, og ber ham bytte ut ni av de grønne trekantene med røde. Hun forlater så gruppa.

Fredrik bytter så ut ni trekanter slik at figuren bli seende slik ut:



De mørkere trekantene tilsvarer røde trekanter.

Linda har nok tenkt at Fredrik skulle bytte ut ni i enden av figuren, slik illustrasjonen under viser:



Fredrik ser imidlertid ut til å ha fokusert kun på at ni trekanter fra den første figuren skulle byttes ut.

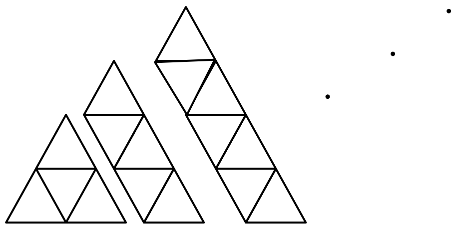
Gruppe E

Linda har fortalt klassen at de skal bygge på gjerdet med to rader, og kamera flyttes til gruppe E.

Reidun: Hæ?
Randi: Det skjønte jeg ikke.
Reidun: Ikke jeg heller.
Ruben: Eeh (...)
Reidun: Her, (...) *(skyver noe bort til Ruben)*
(Vi hører Linda hjelpe gruppe C)
Linda: Vi skal bygge gjerdet, spør Martin, da. Skjønte du det Martin?
Ruben: *(Ler)* Spør Martin, da.
Linda: Dere skal lage gjerdet to hakk høyere, og det vil si, hvis du ser den, ikke sant, så skal du én, to opp.
Reidun: *(Ser på Randi)* Skjønte du den?
Randi: (...)
Anette: Er det greit om det kameraet står der?
Ruben: Jada.
Reidun: *(Hermer etter Rubens tonefall)* Jada.
Ruben: Jada.
Reidun: Jada.
Randi: Ja, nå skjønte jeg det.
Reidun: Hvordan da?
Randi: {For se her litt} for se, det der, og så plusser han bare på (...)
Reidun: Åja, at det skal bli sånn der, sånn tre stor trekant *(viser en stor trekant med hendene)* er det det?
Randi: Ja, (...) sånn der som går oppover *(viser ved å føre hendene sammen til en spiss i lufta)* {som har et endepunkt.}
Reidun: Aha. *(begynner å bygge)*
Ruben: Nei, det er ikke det hun mener. *(bygger)*

Elevene sier de ikke skjønte oppgaven (12, 13, 14), men kort tid etter mener Randi at hun har skjønt det (29), og begynner å forklare (31). Hun mener det skal bli en stor trekant (34), og Reidun ser ut til å synes dette er en grei tolkning (32, 36). Ruben tror derimot ikke at det er dette Linda har ment (37).

Randi og Reidun tenker seg altså at de nå skal bygge en stor trekant. Antakelig tenker de da at de legger til rader slik:



Litt senere kommer Linda, og ser på Reidun som bygger.

54	Linda:	(...) nå har du bygd den litt for stor. Se nå. *(fikser på Reiduns figur)* (...) skal
55		vi se *(teller noe på oppgavearket, og fikser så videre på Reiduns figur).* Det er
56		figur én. Den som Reidun har nå.
57	Reidun:	{Og nummer to er det der} som jeg gjorde i stad?
58	Linda:	Ja. *(forlater gruppa)*
59	Randi:	Skal vi lage nummer to og?
60	Reidun:	(...)
61	*(Reidun og Ruben bygger hver sine figurer)*	
62	Linda:	*(Høyt til hele klassen)* Skal dere ha et tips? Hvis dere bygger opp figur tre, så
63		får dere figur nummer én, med to rader.
64	Elev:	Hva?
65	Linda:	*(Fortsatt høyt til hele klassen)* Bygg opp figur tre, begynner med figur tre.
66	Reidun:	Se, jeg visste det. (...) hun ødela hele greia mi. Sånn. Sånn.
67	Ruben:	Jeg skjønte det seriøst ikke.
68	Reidun:	Skjønte du ikke?
69	Ruben:	Nei.
70	Reidun:	Hehe. Det skjønte jeg. Vet du hva, hun ødela greia mi! *(ødelegger figuren sin)*
71	Randi:	(...) *Tar de små trekantene fra Reidun.*
72	Reidun:	Jeg greier det, jeg greier det, jeg greier det. *(tar tilbake trekantene, og*
73		*begynner å bygge igjen)*

Linda sier Reidun har bygd figuren litt for stor, og fikser på den slik at den blir figur 1 slik hun tenker seg den (54). Hun forlater gruppa og gir kort tid etter tipset til hele klassen om å bygge opp figur 3 for å få figur 1 (62). Reidun sier Linda ødela figuren hennes (66, 70), ødelegger figuren og starter på nytt (70, 72). Ruben sier han ikke har skjønt det (67, 69).

Reidun tror altså at figurene skal øke til større og større trekanter. Når Linda da sier hun har bygd figuren for stor, og antakelig fjerner noen av de små trekantene, må jo Reidun legge dette til igjen etterpå, og det er nok grunnen til at hun sier at Linda ødela figuren hennes. Litt senere sier hun ”eller liksom hun tok jo alt det her vekk fra meg”, noe som støtter en slik tolkning.

Ruben ser ikke ut til å være helt enig i de andres tolkning av oppgaven, og han virker også senere usikker på om det de gjør er riktig.

Etter å ha bygd noen figurer, ber elevene om hjelp, og Linda kommer:

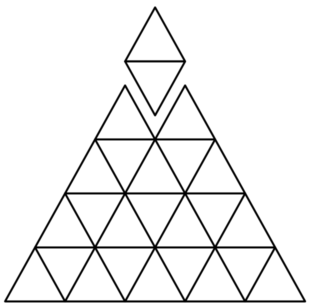
160	Randi:	Se sånn!
161	Ruben:	Nei men vi skjønner ikke helt.
162	Randi:	[(...)]
163	Ruben:	[Det er figur én, det er to, det er fire. *(Peker på figurene de har bygd)*]
164	Reidun:	Og det er? *(sier dette samtidig som Ruben peker på figuren hun og Randi har*
165		*bygd)*
166	Linda:	Er det sånn de ser ut? *(peker på figurene på oppgavearket)*

Randi: Jaa.
Ruben: Nei! [{Men}]
Linda: På toppen?
Ruben: Ja.
Randi: {Ja men du skal plusse på og så} (...)
Ruben: {Vi skjønte ikke oppgaven.} *(mumler lavt, vanskelig å høre hva han sier)*
Linda: *(Beveger fingeren over figuren foran Reidun. Ser ut som hun teller noe.)* Var det ikke her vi hadde figur én?
Randi: Var det figur én?
Linda: *(Tar bort noe fra figuren)* Hæ?
Reidun: {(...) ikke den vekke?} Sånn. Det er én til her.
Randi: {De skal ikke ha sånn der} (...) *(peker på/gjør noe med en av figurene foran Ruben, den han kalte figur fire)*
Linda: Har de det her? (peker på oppgavearket) (...)
Randi: Det er figur nummer to*. (peker figuren foran Ruben)*
Linda: *(Teller noe på figuren.)* Ja, det er figur nummer to.
Randi: *(Klapper hendene sammen)* Nå var jeg smart.
Ruben: Hvorfor det?
Linda: Se på toppen *(peker på oppgavearket)*
Randi: Det er to på toppen. (...)
Linda: (...)
Ruben: *(Smiler)*
Randi: {Haha}
Ruben: Jeg visste jo det. Så det er figur to? *(peker på en av figurene)* Nei.
Randi: Jo, det er det! Bare sånn vanlig figur to. [Med to etasjer]
Ruben: [(...)] *(Klapper hendene sammen)*
Linda: *(Har hjulpet Reidun med hennes figur)* Og her har Reidun figur tre.
Ruben: [{Nei men så gøy}, da har vi én]
Randi: [(...) da er vi ferdige?]
Randi: [Kan vi gå ut?]
Linda: [Hvor mange øker det med hver gang?]
Reidun: Hæ?
Linda: Hvor mange øker det med hver gang? *(går mot gruppe C)*
Randi: Det øker med *(teller på figuren)* {én to tre fire fem seks syv.} Syv! *(roper etter Linda)*
Reidun: Syv!
Ruben: Nei, ikke syv hver gang, nei.
Reidun: Joo. Joo, se [én to tre fire fem seks syv.]
Randi: [Jo, se hvis vi tar vekk de syv så ville vi fått en annen en.]
Ruben: Ja, men hvis det skal øke med syv med denne, så blir det [(...)]
Linda: [Hvor mange trekanter øker det med?]
Reidun: Fire.
Randi: Det er ikke fire.
Reidun: Å nei nei nei!
Ruben: [Nå skal jeg bygge på denne]
Linda: [Der er figur én, hæ?] *(holder handa over deler av figuren foran Reidun)*
Reidun: (...) telle de. *(teller)*
Randi: Én to tre fire fem seks syv.
Linda: Ja *(nikker og forlater gruppa)*
Randi: Ikke sant, jeg sa det, det øker med syv.
Ruben: {Var det riktig?}
Reidun: {Seksten sa (...)}
Randi: (...) neida.
Ruben: *(Ser på Randi, smiler og nikker)*
Randi: Men nå er vi ferdige (...)

Linda spør om det er slik figurene ser ut på toppen, og viser til figurene på oppgavearket (166, 169). Randi ser ut til å skjønne hva Linda mener, for hun gjøre noe med en av figurene foran Ruben, og sier den da blir figur to (178, 181). Linda bekrefter at den blir figur to (182). Ruben spør hvorfor (184), og Linda og Randi viser til hvordan figurene skal se ut på toppen (185, 186). Ruben ser da ut til å skjønne det, og Randi lurer på om de er ferdige (195). Linda spør hvor mange det øker med for hver figur (199), og Randi og Reidun mener det øker med syv (200, 202). Ruben er uenig, og Randi og Reidun forsøker å argumentere for hvorfor det blir syv (204, 205). Linda bekrefter at det øker med syv (215), og Ruben ser ut til å godta dette. Elevene mener de nå er ferdige med oppgaven.

Hos denne gruppa lå figurene fortsatt på pultene da Linda kom, så hun så at de hadde bygd figurene annerledes enn hun hadde tenkt. Hun viser da til hvordan figurene i den opprinnelige trekantgjerde-oppgaven så ut på toppen, og elevene skjønner etter hvert hvordan hun vil at figurene skal se ut.

Der hvor Randi endrer noe på Rubens figur for å få den til å bli figur 2, vil jeg tro at hun fjerner to trekanter på toppen av figuren:

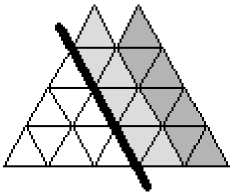


Etter at elevene har funnet ut hvordan figurene blir, ser det ut til at de tror de er ferdige. Linda spør imidlertid hvor mange små trekanter det øker med for hver figur. Etter at elevene har avklart at det øker med syv, tror de at de er ferdige, og gjør ikke flere oppgaver. Da Linda ga ekstraoppgaven, sa hun at elevene skulle ”bygge på gjerdet med to rader, og så skal dere se, så prøver dere å gjøre de samme oppgavene”. Elevene i gruppe E ser ikke ut til å ha fått med seg beskjeden om å gjøre de samme oppgavene, for de tror de er ferdige etter at de har laget figurene.

Oppsummering av ekstraoppgaven

I oppsummeringa tegnet Linda figur 1 og spurte hvor mange små trekanter det var på denne. Der var det 16. Hun la så til ei ”rad”, slik at hun fikk figur 2, og spurte om alle fant ut at de skulle legge til syv på hver. Noen svarte da ja. Hun spurte også om noen hadde klart Ole-varianten, og ba Per si et tall. Per sa 3, og Linda spurte hvor mange små trekanter det var på figur 3. Fredrik svarte 30, og Linda ba ham forklare hvordan han tenkte. Fredrik forklarte at man skulle multiplisere med syv og legge til ni, og Linda spurte om det var noen andre som hadde kommet frem til det. En elev ropte da ”Martin”. Linda ba Frans forklare hvorfor det ble slik, og han startet med å forklare at man legger til syv for hver gang man øker. Linda fullførte forklaringen med å tegne en strek som markerte at det ble ni til overs.

Figuren hennes (figur 2) på tavla så til slutt slik ut:



Jeg har fargelagt deler av figuren, mens Linda skraverte deler av den.

Det var ingen av elevene som kommenterte at de hadde en annen tolkning av oppgaven enn den Linda presenterte på tavla.

Elevenes opplevelser av økta

De fleste elevene så ut til å være engasjert i oppgavene. Det var ei gruppe som utmerket seg, og det var gruppe A, som var valgt ut til å bli filmet. Elevene i denne gruppa var opptatt av kamera og diktafonen, og tullet en del rundt dette. Gruppa fungerte ikke spesielt godt, og det var i hovedsak Pia og Pål som jobbet med oppgavene. Da gruppa ikke skjønte Ole-oppgaven, satt de og ventet på hjelp i over fem minutter uten å gjøre noen nye forsøk på å forstå oppgaven. I andre del av økta var Pia ikke til stede fordi hun skulle reise, og Per forlot gruppa en god stund. Da var det i hovedsak Pål som jobbet med oppgavene. Da jeg etter økta spurte Pål og Peter hvordan de syntes det hadde vært å jobbe med oppgaven, svarte Pål at det hadde vært gøy, mens Peter var mer tilbakeholden:

Anette.	Hvordan synes dere det var å jobbe med denne oppgaven?
Pål:	Gøy.
Peter:	Jeg vet ikke. Jeg har ikke gjort så mye. Jeg skjønte ikke helt fra starten.
Anette:	Så du har nesten ikke gjort noe?
Peter:	Jo, jeg har hjulpet, men jeg skjønte ikke.
Anette:	Okey.
Peter:	Og så han gjorde nesten alt. *(peker på Pål)* Han spurte meg aldri, unntatt om å lese det der *(peker på oppgavearket)* og sånn.
Anette:	Ja, og hvordan synes du det var, at han gjorde så mye?
Peter:	Egentlig greit.

Peter sa Pål ikke spurte ham så mye, unntatt om å lese noen oppgaver, men fra analysen ovenfor ser vi eksempler der Pål forsøkte å involvere Peter, men Peter virket lite interessert.

De andre gruppene så ut til å fungere godt, og så ut til å like å arbeide med oppgavene. Særlig i gruppe C var elevene svært engasjerte, og diskuterte høylytt. Det virket imidlertid som en del elever ble litt lei av å bygge da de jobbet med ekstraoppgaven.

Jeg vil tro at Martin fikk en god opplevelse denne økta. Han var svært stille, men etter at han sa den utløsende setningen om den ekstra trekanten, ble han fremstilt som den store helten, og han ble spurt også om andre ting. Som Mats uttrykte det: ”en stjerne ble født i dag”.

5.2.2 9. klasse

Et par dager før økta skulle gjennomføres hadde læreren, Leo, kort fortalt elevene litt om inquiry i matematikkundervisningen, og vist dem en plakat med en sirkel med ordene spørre, undersøke, skape, diskutere, reflektere og undre. Elevene var for øvrig ukjente med denne måten å arbeide på.

Klassen hadde jobbet med likninger i perioden før denne økta ble gjennomført, men de hadde ikke blitt undervist i å lage formler selv.

Timen startet ved at læreren, Leo, sa god morgen, og sa at han håpte elevene var klare for en litt annerledes time. Han introduserte meg, og fortalte også elevene at brannalarmen ville gå i løpet av timen, men at det bare var en øvelse. De var blitt fritatt fra å delta, og kunne bare bli sittende. Elevene ble så bedt om å sette seg i grupper. Leo forklarte elevene at de først kunne jobbe litt selv, og eventuelt klippe litt hvis de ville. Når de hadde begynt å finne ut noe, skulle de diskutere sammen. Elevene fikk ikke utdelt konkreter.

Trekantgjerde-oppgaven ble introdusert ved at læreren viste innledningen til oppgaven, og oppgave1-2, på storskjerm ved hjelp av powerpoint, og han leste hva som stod der høyt for elevene.

Leo hadde valgt å ikke gi elevene alle oppgavene med én gang, og hadde i stedet delt dem opp slik at elevene først fikk utdelt oppgave 1 og 2, så 3 og 4, så 5, så 6, så 7 og til sist hadde han en ekstraoppgave til dem som eventuelt ble tidlig ferdige. Etter hvert som elevene ble ferdige med oppgavene de hadde fått utdelt, skulle de rekke opp handa, og så ville Leo høre hva de hadde kommet frem til før han ga dem neste oppgave.

Elevene jobbet godt med oppgavene, og til slutt ba Leo om å få inn kladdearkene deres. Han hadde ikke noen felles oppsummering i slutten av økta, men senere fikk jeg vite at han ville ha denne neste dag.

Oppgave 1-5

Elevene gikk raskt i gang med oppgavene. På oppgave 1-2 valgte alle gruppene å tegne figurene, men det varierte litt hvilke figurer de tegnet og hvordan de tegnet dem. I de fleste gruppene tegnet elevene hver sine figurer, men i gruppe γ så det ut til at elevene lagde ei felles tegning. Noen elever tegnet alle figurene fra 1 til 5, mens andre kun tegnet figur 4 og 5. Én elev i gruppe α tegnet flere figurer i én, det vil si han bygde bare videre fra forrige figur og markerte de ulike figurene.

De fleste gruppene fokuserte på at antall små trekanter økte med tre for hver figur. I ei gruppe var det en elev som sa at de ikke kan vite sikkert på oppgave 5, der det spørres ”kan du vite sikkert hvor mange små trekanter det er på figur 7 uten å lage den?”. En medelev var imidlertid rask til å svare at jo, de kan vite sikkert, for de vet at de må legge til tre.

En del elever uttrykker etter å ha fullført oppgave 1-5 at dette var lett, men vanskelighetsgraden økes når de skal finne antall små trekanter på figur 100. Da elevene i gruppe γ leste oppgave 6, var det noen som uttrykte ”Figur 100! Oi!”.

Oppgave 6: Hvor mange små trekanter er det på figur 100?

Gruppene hadde ulike strategier for å finne ut hvor mange små trekanter det er på figur 100. I gruppe β forklarer elevene læreren at de har lagt merke til at det på figur 6 er 6 trekanter øverst, 6 i midten og 7 nede. På figur 100 vil det da være 100 øverst, 100 i midten og 101 nede, altså 301 små trekanter til sammen.

I gruppe γ blir 100×3 foreslått, men raskt avvist av en elev som sier at det ikke blir riktig, og viser til at denne metoden ville gitt 18 små trekanter på figur 6, mens de fra tidligere oppgaver vet at det skal være 19. Jeg har ikke fått med meg hvordan de fant svaret på oppgaven, men på kladdearket har de skrevet at det er 301 små trekanter på figur 100.

I gruppe ε foreslås umiddelbart å tegne figuren eller ”gange litt”, 3×100. Litt senere ser jeg at de har funnet et mønster:

1×3 +1
2×3+1
3×3+1
4×3+1

En av elevene forteller at hun har en teori om at det på figur 100 vil være 100×3+1=301 små trekanter, men hun synes dette var et merkelig svar, og er usikker på om det stemmer. Elevene prøver teorien på figur 7, og ser at den stemmer der. De sier de vet at det blir riktig, men vet ikke om det blir riktig etter hvert. De har altså sett at teorien deres stemmer for de første figurene, men er usikre på om det vil være slik også for figur 100.

For å teste teorien videre, regner elevene ut hvor mange små trekanter det ifølge deres teori vil være på figur 50, og multipliserer dette antallet med 2. De får da svaret 302, og sier at teorien ikke stemmer. Her har de nok tenkt at det på figur 100 vil være dobbelt så mange små trekanter som på figur 50, og når de ikke får 301 som svar her, tenker de at teorien deres om at de kan multiplisere figurnummeret med 3, og plusse på 1, ikke stemmer. Læreren kommer, og elevene forklarer at de har en teori om at de kan multiplisere figurnummeret med 3 og plusse på 1, og at de har sjekket at dette stemmer helt opp til figur 7, men at de er usikre på om det stemmer for figur 100. Læreren ber dem først snakke litt mer om dette her, og sier at det ser veldig bra ut. Elevene foreslår å tegne figur 100, og forteller at de prøvde å ta figur 50 ganger 2, og så gjentar en elev at teorien stemmer på alle de lave, og læreren bekrefter at da må det faktisk stemme på alle.

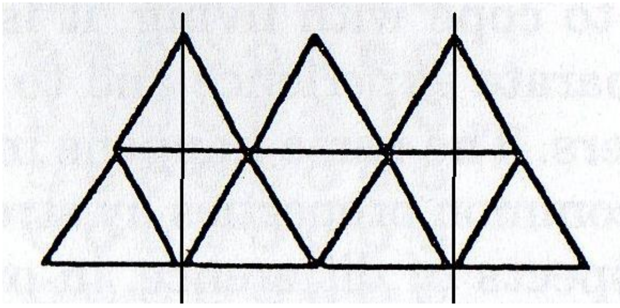
Her var altså elevene usikre helt til læreren sa at de hadde rett, og så godtok de svaret hans. Læreren ses som en autoritet, den som vet hva det riktige svaret er. På neste oppgave kommer de imidlertid tilbake til hvorfor teorien stemmer.

Det er interessant at elevene syntes 301 var et merkelig svar, og at de derfor ble usikre på om det kunne være riktig. Kanskje er de vant til ”fine” svar, og hadde heller ventet et svar som 300 eller 350, eller i hvert fall et svar i fem-gangen?

Gruppe δ –skal vi sage av endene på gjerdet?

I gruppe δ velger elevene å prøve å telle seg frem til svaret. Én elev foreslår å starte fra figur 7, som de vet har 22 trekanter, og så telle videre derfra. Elevene teller opp til 101 trekanter, og så er det en som påstår at det ikke går an å få hundre. Han tenker tydeligvis på 100 små trekanter i en figur i stedet for antall små trekanter på figur 100. Han teller videre til 104 små trekanter, og foreslår at de kan sage av endene på denne figuren for å få 100 små trekanter. Dersom de sager av endene, kan de nemlig sage av den ytterste trekanten, samt to halve trekanter i hver side, til sammen 4 trekanter, og da står de igjen med 100.

Dette kan illustreres slik:



Her viser jeg det på figur 3, men prinsippet blir det samme også for andre figurer. Eleven illustrerte det ved hjelp av figur 6.

En av de andre elevene i gruppa påpeker at det er antall små trekanter på figur 100 de skal finne, ikke en figur som har 100 små trekanter.

Elevene synes tydeligvis det nå blir for mye arbeid å telle helt opp, for de leter etter andre strategier. 100×3 blir foreslått, men raskt forkastet. De finner ut at de kan finne antall små trekanter på figur 100 ved å regne ut $99 \times 3 + 4$ siden det er 4 små trekanter i den første figuren, og det øker med tre små trekanter for hver figur.

Minst én av elevene i denne gruppa tolket altså denne oppgaven annerledes enn det som var tiltenkt. Dette kan skyldes at han ikke leste oppgaven godt nok, for som en av de andre elevene påpekte, stod det i oppgaven at det var antall små trekanter på figur 100 elevene skulle finne.

Ut fra denne elevens tolkning av oppgaven, er det interessant å se at han viser kreativitet og finner ut at han kan sage av endene på gjerdet for å få antall små trekanter til å bli 100. Nå er det ingen av figurene som har 101 eller 104 små trekanter, så elevene har nok gjort en liten tellefeil underveis, men ut fra den tolkningen i hvert fall én av elevene hadde, og det svaret de kom frem til, var det for så vidt en grei løsning å sage av endene på gjerdet. I praksis vil vel et gjerde vanligvis være loddrett i endene.

Oppgave 7: Å forklare for Ole

Alle gruppene så ut til å forstå hva de skulle gjøre på denne oppgaven. Noen brukte ord i formelen, andre prøvde seg med symboler. Leo utfordret gruppene til å prøve å skrive formelen med symboler da han gikk rundt og hjalp dem.

Gruppe α

Elevene har skrevet formelen T×3+1=N, og forteller Leo at N er figur og T er antall topper. Leo påpeker at N i deres formel er antall små trekanter, og elevene retter så på formelen sin.

Mens jeg observerer dem, ser jeg at én skriver N×3+1. Fra kladdearkene deres, ser jeg at andre forslag til formler er N×3+1=F og N=3*n*+1.

Elevene strever med å bruke symboler riktig. Formlene deres er i og for seg korrekte, men når de forklarer hva symbolene står for, ser vi at det ikke blir helt riktig. La oss se på det første forslaget, T×3+1=N. Elevene har helt riktig brukt to ulike symboler for to ulike størrelser. De bruker T for antall topper, noe som er helt greit. I oppgaveteksten var det foreslått å kalle nummeret på Oles figur for *n*, men det var ikke noe krav om dette. Dersom elevene kun hadde skrevet at formelen var T×3+1, og sagt at T var antall topper, ville dette vært riktig. Den lille feilen de har gjort, er altså bare at de sier at N er figuren (da mener de antakelig figurnummer), mens det ut fra deres formel vil være antall små trekanter på figuren med T topper. Det er mulig at de har tenkt at for figur N, gjelder følgende formel: T×3+1, der T er antall topper på figuren, men så har brukt likhetstegnet feil.

Etter at læreren har kommentert formelen deres, endrer de den til N×3+1, N×3+1=F, eller N=3*n*+1. Disse formlene hører jeg ikke noen muntlig forklaring til, og i kladdearkene deres har elevene heller ikke forklart hva symbolene skal stå for. Ser en kun på formlene, er de alle riktige, men vi vet ikke hva elevene tenker at symbolene skal stå for. Det er interessant at elevene i alle forslagene har fjernet T, og heller brukt N eller *n* i stedet. Dette kan tyde på at de har tolket Leos kommentar som at de må bruke N eller *n* for nummeret på figuren/antall topper, og at det ikke er riktig å bruke T.

Gruppe β

Det var i denne gruppa minst én av elevene som hadde fokusert på antall små trekanter i øverste, midterste og nederste ”rad” da de skulle finne antall små trekanter på figur 100. Nå fokuserer også denne gruppa på at antall små trekanter øker med tre for hver figur.

Elevene har funnet formelen *1+figurnummer×3=antall små trekanter*, men da de prøvde den ut, fikk de den ikke til å stemme. Da de trykket inn 1+5×3 på kalkulatoren fikk de nemlig 18 som svar, men dette var feil, for de visste at det var 16 små trekanter på figur 5.

Da jeg litt senere kommer tilbake til denne gruppa, har de funnet frem til formelen N×3+1 (noen har brukt N, andre *n*). Jeg spør dem om de har funnet ut hvorfor de fikk 18 som svar tidligere, og da forteller de at de måtte bytte om på formelen og bruke N×3+1 i stedet for 1+N×3. Da jeg spurte hvorfor, forklarte de at med formelen 1+ N×3 ble 1 og N addert sammen først, og så multiplisert med 3, og det ble feil.

Fra kladdearket ser jeg også at en av elevene har prøvd å rette opp problemet med formelen *1+figurnummer×3=antall små firkanter* (det står firkanter, men hun har nok ment trekanter) ved å trekke fra 2, og fått formelen *1+figurnummer×3-2=antall små firkanter*.

Elevene har helt fra starten av hatt en riktig formel, men fordi kalkulatoren regner ut svarene etter hvert som tallene trykkes inn, får de problemer, og må prøve å rette opp i disse. Det ser ikke ut til at elevene oppfatter at det er kalkulatorene som ”regner feil”, og at det ikke er noe galt med deres formel. Her ser vi tydelig et problem som kalkulatoren skaper. Elevenes formel er riktig, og fordi mulitiplikasjon alltid skal gjøres før addisjon, er det ikke nødvendig med noen parentes i formelen. Likevel kan ikke formelen brukes direkte når de bruker kalkulatoren, for kalkulatoren vet ikke at multiplikasjonen skal gjøres først, men regner ut etter hvert som tallene trykkes inn. Elevenes løsning blir altså å endre formelen sin. Det kan se ut som de tror at N×3+1 og 1+N×3 er to forskjellige formler, og i så fall har kalkulatoren vært med på å skape en misoppfatning hos disse elevene.

Gruppe γ

Elevene i denne gruppa har skrevet formelen *nr.på oppgave×3+1*. Leo spør dem om de mente nummer på figur, og elevene svarer ja og retter dette. Leo spør så om det går an å bare skrive *n* i stedet for nummer på figur, og skriver 3*n*+1. Elevene synes denne skrivemåten var litt vanskelig å forstå, og Leo skriver i stedet *n*×3+1. Dette synes elevene var bedre. Leo forklarer at 3*n*=*n*×3 ved å vise til at 1×2=2×1, og elevene ser ut til å være med på denne forklaringen.

Gruppe δ

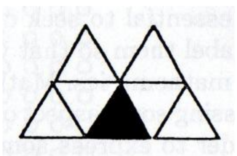
Elevene i denne gruppa har skrevet formelen *n=(n-1)×3+4*, noe som godtas av lærer, og de får neste oppgave.

Fra kladdearket ser jeg at elevene først har prøvd å forklare ved hjelp av et eksempel: ”Hvis det er figur 200, kan han for eksempel ta 199×3+4 da kan han finne ut antall trekanter”. De har så skrevet formelen *(antall figur-1) ×3+4*, og vist hvordan de bruker denne for figur nummer 200: ”200-1×3+4”. I utregningen med tall har de utelatt parentesen (noe som ville gitt feil svar). Svaret de har fått, er 602. Det ser altså ut til at de ikke har fulgt utregningen de skrev opp, men doblet antall små trekanter på figur 100.

Formelen elevene har skrevet med ord på kladdearket er riktig (men det er litt upresist å skrive ”antall figur”), men der de har brukt symboler, har de brukt samme variabel for to ulike størrelser, noe som gjør at denne formelen egentlig er feil. Leo godkjenner likevel formelen. Det er mulig at han ikke legger merke til at elevene har brukt samme variabel for to ulike størrelser.

Gruppe ε

Det var denne gruppa som i forrige oppgave var i tvil om hvorvidt teorien deres holdt for figur 100. Nå har de laget formelen *n×3+1*, og forklarer at Ole må multiplisere figurnummeret med 3 og legge til 1. De sier de vet at det da alltid fungerer, men de vet ikke hvorfor. Leo hinter om at det øker med 3, og spør hva med den første figuren? Han ber elevene prøve å finne en forklaring på hvorfor de må legge til 1. Elevene er innom hvorvidt det kan være denne trekanten (markert med svart)

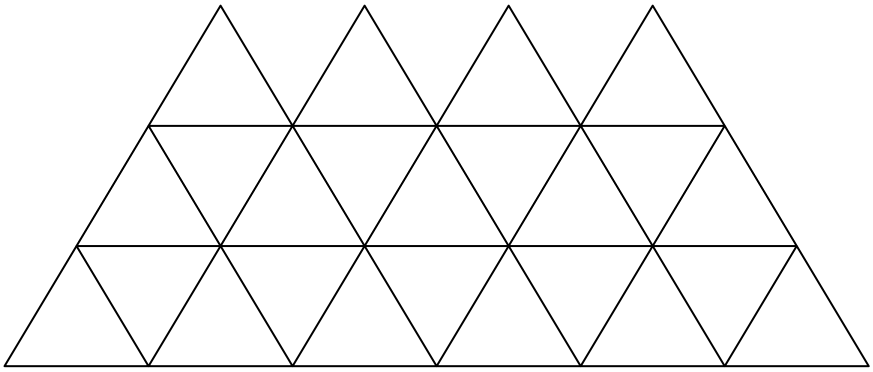


som er til overs, men ser at det da ville bli flere enn 1 til overs videre i rekka. Kort tid etter finner elevene ut at det må være én trekant til overs på enden. De virker nå svært fornøyde, og det ser ut til at de endelig har skjønt hvorfor formelen må stemme for alle figurene.

Ekstraoppgaven

Leo hadde forberedt en ekstra oppgave til de elevene som eventuelt ble tidlig ferdige. Denne så slik ut:

<u>Ekstraoppgave.</u>
Det viser seg at gjerdet er for lavt. Vi må lage det høyere.



Finn en formel som viser hvor mange trekanter det er i figur n.

Ser vi på hvordan oppgaven er formulert, ser vi at det er uklart hvilken figur som har hvilket nummer. Det er også uklart om man skal finne antall små trekanter eller antall trekanter til sammen. Siden elevene nettopp har arbeidet med å finne antall små trekanter, er det imidlertid rimelig å anta at det er antall små trekanter det er snakk om her også.

Flere av gruppene rekker å begynne på ekstraoppgaven. Gruppe α ble ferdige med den, og skrev formelen 5×N+4.

Gruppe δ

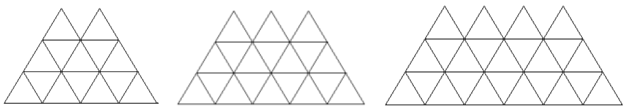
Elevene i gruppe δ har funnet to "formler" på denne oppgaven, N=4×5+4 og 4×6. Leo ber dem forklare, og de forklarer den første formelen med at det er 5 trekanter i hver rad, 4 rader med 5 i, pluss 4 ekstra. 4×6 forklarer de med at de kan telle fire og fire trekanter seks ganger (de starter i den ene enden av figuren, og teller seg bortover). Leo utvider så figuren med 5 små trekanter (til neste figur i rekka), og da fungerer ikke lenger 4×6-tilnærmingen. Den andre fungerer fortsatt, men tallene må endres. Leo spør hvordan det for eksempel vil bli for figur 72, og før han får svar, sier han at han vil ha et uttrykk som gjelder for alle mulige figurer. Han kommenterer at det ikke er noen variabel i elevenes løsning. Leo forlater elevene, og jeg hører en elev foreslå $X \times X + 4$. Like før timen er slutt, kommer Leo tilbake til elevene, som ikke har funnet noe nytt uttrykk, og skriver *n*=5*n*+4 for dem.

Disse elevene har altså fokusert kun på hvor mange små trekanter det er på den figuren som var presentert i oppgaven. Jeg vil hevde at oppgaveteksten er klar på at det spørres etter en generell løsning, men elevene kan ha hengt seg opp i at det kun var én figur som var presentert her, i motsetning til i den forrige oppgaven, der de tre første figurene i rekka ble presentert, og elevene ble bedt om å lage de to neste også. Det er også mulig at elevene ikke var så godt kjent med bruk av *n* som variabel (selv om denne ble brukt som symbol for figurnummer i forrige oppgave), og at de tenker seg at figur *n* er "navnet" på figuren som er presentert i oppgaven.

På forrige oppgave fikk elevene i denne gruppa godkjent formelen $n=(n-1)\times3+4$, og nå gir læreren dem en ny formel der han gjør samme feil som elevene hadde gjort, nemlig å bruke samme variabel for to ulike størrelser. Etter timen ba jeg Leo kommentere formelen $n=5n+4$. Han så da raskt at dette ble feil, og foreslo at han heller burde skrevet $F(n)=5n+4$. Han sa han var i tvil om hvordan han skulle "ta det der" med elevene, og at han ikke hadde tenkt nok gjennom det på forhånd. Han sa det ikke var bevisst at han skrev $n=5n+4$, men at det bare ble sånn.

Gruppe ε

Fra elevenes kladdeark ser jeg at en elev i gruppe ε har tegnet tre av figurene i rekka:

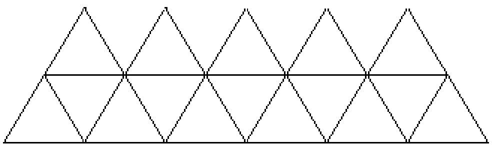


Eleven har merket dem med nr. 3, 4 og 5. Under figurene har hun skrevet henholdsvis 4, 6 og 8. Det kan se ut som hun har fokusert på hvor mange flere små trekanter det er på de nye figurene enn på de tilsvarende figurene fra tidligere oppgaver. Hun har beholdt figurnummeret fra tidligere oppgaver, og kaller figuren bygd opp fra figur 3 for figur nummer 3. Under denne har hun skrevet tallet 4, som er antall små trekanter som er lagt til denne figuren. Tilsvarende for de to neste figurene.

Hun har så laget en pil til litt lenger nede på siden der hun har skrevet svaret *n*×*ant."topper"* (anførselstegn i hennes svar) og *2 flere topper*. Det er litt vanskelig å skulle tolke hva hun har ment med dette, men én muliget er at hun har forsøkt å lage en formel for hvor mange flere små trekanter det er på figuren nå i forhold til tidligere. Da kan *n* her stå for antall topper på den nye figuren, og *ant."topper"* stå for hvor mange små trekanter som er lagt til for hver topp, altså 2, som det står skrevet under, *2 flere topper*. Formelen vil da gi svarene 4, 6 og 8 henholdsvis for hver av figurene hun har laget.

En ekstra ekstraoppgave

Elevene i gruppe α ble tidlig ferdige, og Leo ba dem om å lage en ny oppgave som de kunne gi til ei av de andre gruppene i klassen. De rakk ikke å gi oppgaven til ei anna gruppe, men fra et av kladdearkene ser jeg at de har laget en oppgave. Først har de tegnet en figur tilsvarende denne:



Under har de skrevet oppgavene:

a) Gjerdet er for lavt. Bygg på til en full trekant.
b) Hvor mange små trekanter er det på *figur 50 *figur 100
c) Finn en formel for figur 100

Her ser vi at elevene, i likhet med Linda, læreren i 8. klasse, har laget en oppgave der det er uklart hvordan figurrekka skal fortsette. Den første figuren er det bare å bygge opp til en full trekant, men hvordan ser den neste figuren ut, og hva med figur 50 og figur 100?

Elevene spør så etter en formel for figur 100. Det kan se ut til at de ikke har helt kontroll på dette med generalitet. For å finne antall små trekanter på figur 100, vil en gjerne se etter et mønster og bruke en slags formel, men det ville vært rimeligere å spørre etter en formel for antall små trekanter på en hvilken som helst figur i rekka.

Elevenes opplevelser av økta

Alle elevene så ut til å trives med denne oppgaven, og alle deltok. Leo kommenterte etter økta at ingen var helt på sidelinja, og at han hadde vært spesielt oppmerksom på noen jenter som han tidligere hadde slitt med å trekke med. Disse jentene mente han hadde vært ”veldig med” denne timen. Han mente opplegget hadde favnet alle, fra toer-elever til femmer-elever.

Idet elevene forlot klasserommet etter at timen var slutt, hørte jeg kommentarer som ”sånne timer må vi ha flere av” og ”dette var dritgøy”. Det ser altså ut til at elevene har hatt en god opplevelse av denne økta.

Noen av elevene strevde litt med å skrive en formel for det de hadde kommet frem til, men det så ikke ut til at de mistet motet fordi om de ikke fikk formelen helt riktig i første forsøk. Jeg la ikke merke til noen som ga opp eller meldte seg ut når det var noe de strevde med. Gruppene arbeidet dessuten i stor grad selvstendig, og rakk i hovedsak opp handa når de var ferdige med en oppgave, ikke fordi de ville ha hjelp til oppgaver. Da eleven i gruppe δ misforstod oppgaven om antall små trekanter på figur 100, og prøvde å finne figuren med 100 små trekanter, ga han ikke opp eller spurte om hjelp da han kom frem til at ingen av figurene hadde 100 små trekanter. I stedet lette han etter alternative løsninger, og fant altså ut at han kunne kutte av endene på gjerdet.

Leo kommenterte etter økta at han trodde mye av svaret på hvorfor elevene jobbet så godt denne timen, lå i at elevene opplevde mestring helt fra starten av, og jeg er enig med ham i dette. Samtidig tror jeg det er viktig at vanskelighetsgraden økte etter hvert slik at elevene også fikk utfordringer å jobbe med.

5.3 Observasjonene sett i lys av problemstillinga

Hvordan elevene tolket oppgavene de ble gitt, er relativt detaljert beskrevet ovenfor. I det følgende vil jeg fokusere på episoder der elevene hadde problemer med å forstå oppgaveformuleringene, og episoder der de tolket oppgavene annerledes enn tiltenkt. Jeg gjør oppmerksom på at jeg ikke har data fra alt som skjedde i klasserommene, og at jeg derfor kun kan kommentere episoder jeg har observert eller har videoopptak fra. Det kan ha forekommet flere slike episoder enn dem jeg kommenterer under.

5.3.1 Oppgaver der elevene ikke skjønner oppgaveformuleringen

I dette avsnittet vil jeg kommentere episoder der elevene hadde problemer med å forstå oppgaveformuleringen. Her tar jeg ikke med tilfeller der elevene tolket oppgavene annerledes enn læreren. Disse vil bli kommentert i neste avsnitt.

I åttende klasse har jeg observert to grupper som hadde problemer med å forstå hva som mentes med oppgave 7, der elevene skulle forklare for Ole. Antakelig var det hintet om å kalle Oles figur for figur *n* som skapte problemer. Elevene i gruppe A valgte å rekke opp handa og vente på hjelp da de ikke skjønte oppgaven, og da Linda til slutt kom, forklarte hun hva som mentes med *n*. Også i gruppe C strevde elevene med å forstå hva som mentes med *n*. De forsøkte imidlertid å finne ut av problemet, og siden de da endte opp med en annen tolkning enn tiltenkt, vil denne episoden bli kommentert i neste avsnitt.

5.3.2 Episoder der elevene tolket oppgavene annerledes enn læreren

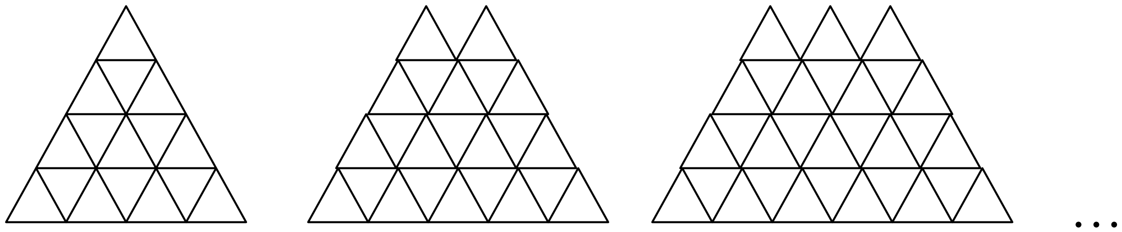
Her vil jeg fokusere på episoder der elevene tolket oppgavene annerledes enn tiltenkt. Ble det oppdaget at elevene og læreren hadde ulike tolkninger av oppgaven, og hvordan reagerte i så fall læreren?

Når det gjelder de opprinnelige oppgavene (oppgave 1-7), har jeg observert to tilfeller der elevene tolket oppgaven annerledes enn tiltenkt. I åttende klasse strevde elevene i gruppe C med å finne ut hva som mentes med *n* i oppgave 7. De var innom forslag om at *n* kunne være ni eller én, men disse forslagene ble raskt forkastet. Morten kom så på idéen om at de måtte finne ut hvilket nummer i alfabetet bokstaven *n* tilsvarte, og at det var antall små trekanter på figuren med dette nummeret elevene skulle finne. Gruppa var imidlertid usikre på om dette var den rette tolkningen av oppgaven, og spurte senere Linda om dette. Hun sa da at *n* kunne være et hvilket som helst tall. I niende klasse var det minst én elev i gruppe δ som på oppgave 6 prøvde å finne figuren som bestod av 100 små trekanter. En medelev på gruppa avklarte imidlertid at oppgaven spurte etter antall små trekanter på figur 100.

Når det gjelder ekstraoppgavene, både i 8. og 9.klasse, var det flere tilfeller der elevene tolket oppgavene annerledes enn læreren hadde tenkt.

I åttende klasse gikk ekstraoppgaven ut på at elevene skulle ”bygge på gjerdet med to rader”, og så gjøre de samme oppgavene. Oppgaven Linda gir elevene er ikke entydig. Det er uklart hva som menes med ei rad, hvordan figurrekka vil se ut, og hvordan figurene skal nummereres. Linda ga etter en stund også et tips om at hvis elevene bygde opp figur 3, ville de få figur 1. Dette tipset begrenser antall tolkninger noe, men ikke alle elevene fikk med seg dette. Som vi har sett, tolket gruppene oppgaven på flere ulike måter. I og for seg er det ikke et problem at en oppgave kan tolkes på flere måter, men det stiller større krav til læreren, for det er viktig at læreren er klar over at det finnes flere mulige tolkninger, slik at han/hun kan veilede elevene i forhold til den tolkningen de har. Linda var ikke klar over at oppgaven hun ga kunne tolkes på flere måter, og holdt fast på sin tolkning av oppgaven også i møte med grupper som ikke delte hennes tolkning.

Lindas tolkning var at figurrekka ville se slik ut:

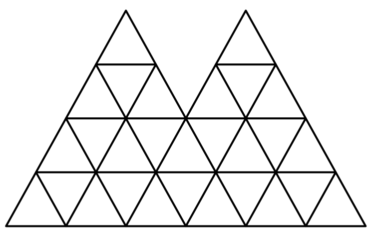


Figur 1 Figur 2 Figur 3

Hun tenker seg altså at å bygge på gjerdet med to rader vil si at gjerdet øker fra to trekanter langs kanten til fire trekanter langs kanten. Figurene blir nummerert slik at figurnummeret tilsvarer antall topper på figuren. Vi ser at det øker med 7 små trekanter for hver figur, og at formelen for figur n vil bli $7n+9$.

Gruppe A bygde på gjerdet med det Linda ville kalt én rad. I tillegg nummererte de figurene slik at figurnummeret til den nye figuren tilsvarte figurnummeret til den opprinnelige figuren den var bygd opp fra, altså slik at den figuren som var bygd opp fra figur 4, ble kalt figur 4. Elevene hevdet da at en formel for antall små trekanter på en figur, ville være fem ganger figurnummeret, minus fire. Linda så ikke ut til å oppdage at elevene hadde tolket oppgaven annerledes enn henne. Hun og elevene var uenige om hva som var riktig svar, og snakket forbi hverandre fordi de ikke var klar over at de ikke snakket om de samme figurene.

Gruppe B mente først at antall små trekanter nå økte med 15 for hver figur. Som nevnt i analysen ovenfor kan dette enten skyldes at de hadde en annen tolkning enn Linda av hvordan figurrekka så ut, eller at de ikke hadde bygd annet enn figur 1, og så overført tankegangen fra den opprinnelige figurrekka, der antall små trekanter økte med én mindre enn antall små trekanter på figur 1. Da elevene fortalte Linda at de mente det økte med 15 for hver figur, kommenterte hun først ikke dette, antakelig fordi hun ikke visste hva svaret skulle bli. Etter at hun hadde sett på ei anna gruppe som bygde figurene, og sett at det økte med 7 små trekanter for hver figur, kom hun tilbake til gruppe B og spurte om de var sikre på at det økte med femten. Elevene mente da at det ikke var femten likevel, og etter at Linda forlot gruppa, bygde de figur 2 slik:



Dette er en annen tolkning enn den Linda hadde. Elevene mener nå at det øker med tolv for hver figur (og feilaktig hevder de at antall små trekanter på hver figur kan finnes ved å multiplisere figurnummeret med tolv og legge til 1). Jeg har ikke observert at Linda kommer tilbake til denne gruppa etter dette. Da Linda mot slutten av økta hjalp gruppe A, hevdet Jan (elev i gruppe B) at antall små trekanter økte med tolv for hver figur (noe Linda ikke så ut til å høre). Jeg vil derfor anta at gruppe B beholdt denne tolkningen helt frem til oppsummeringen.

I gruppe C oppfattet Mari (og muligens noen av de andre elevene) oppgaven som at de nå skulle bygge gjerdet slik at de doblet antall små trekanter i hver figur. Hun lurte på om dette var mulig. Da gruppa hadde fulgt Lindas instruksjoner for å bygge figur 1, og funnet at det ble seksten små trekanter i figur 1, mente Mari at det var feil. De skulle jo doble, og da måtte det bli tyve. Linda og medelever avklarte imidlertid at det ikke var meningen at de skulle doble, men bygge gjerdet to rader høyere.

Gruppe D hadde i likhet med gruppe A bygd på gjerdet med én "rad" i høyden. Om Linda oppdaget dette eller ikke, er jeg usikker på. Like etter at hun hadde sett på figuren elevene hadde bygd, ga hun tipset til hele klassen om at hvis de bygde opp figur 3, fikk de figur 1. Det er mulig at dette tipset ble gitt fordi hun la merke til at gruppe C hadde bygd figurene for lave, men siden hun ikke kommenterte dette spesielt til gruppe C, og senere ikke oppdaget at gruppe A hadde en slik tolkning, vil jeg si det er mer sannsynlig at hun ikke oppdaget det. Det gikk dessuten bare 7 sekunder fra Linda hadde forlatt gruppe E til hun ga dette tipset, så hun har ikke hatt mye tid til å studere gruppe Ds figur. Like før Linda og jeg så filmen sammen, spurte jeg henne om hun hadde lagt merke til om noen av elevene hadde tolket ekstraoppgaven annerledes enn hun hadde tenkt, og da nevnte hun kun gruppe E, som hadde bygd store trekanter.

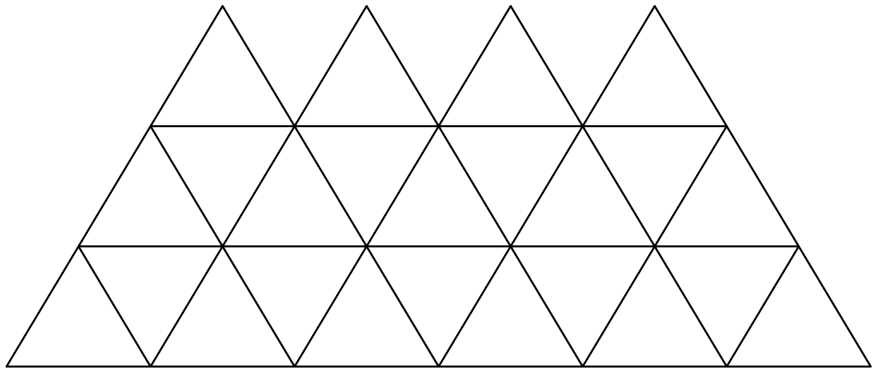
Etter at Linda hadde gitt dette tipset, endret gruppe C figuren sin, og bygde figur 1 opp fra figur 3, slik at de fikk 16 små trekanter på figur 1, og altså fikk samme tolkning som Linda av hvordan denne så ut. De utvidet den så til figur 2 mens Linda var til stede, og gruppa kom nå frem til at det økte med syv små trekanter for hver figur.

I gruppe E var elevene usikre på hva Linda mente med oppgaven, men kom frem til at de skulle legge til rader langs figur 1, slik at de fikk stadig større trekanter. Første gang Linda var hos denne gruppa, oppdaget hun ikke at de hadde en annen tolkning enn henne, men hevdet de hadde bygd figur 1 for stor, og endret på denne. Neste gang hun kommer til gruppa, ligger det flere store trekanter på pultene foran elevene, og da oppdager Linda at de ikke har bygd figurene slik hun hadde tenkt. Hun kommenterer hvordan figurene ser ut på toppen, og elevene endrer figurene sine.

Elevene i gruppe E har ikke fått med seg at de skulle gjøre de samme oppgavene som tidligere, og gjør derfor ingen forsøk på å finne ut hvor mange små trekanter det nå ville bli på figur 100. De prøver heller ikke å finne noen generell formel.

I niende klasse så ekstraoppgaven slik ut:

<u>Ekstraoppgave.</u>
Det viser seg at gjerdet er for lavt. Vi må lage det høyere.



Finn en formel som viser hvor mange trekanter det er i figur n.

Fra Leos interaksjon med gruppene går det frem at hans tolkning er at figuren som er presentert i oppgaven, er figur 4, og at han nummererer figurene slik at figur 1 er den figuren som består av 9 små trekanter, og som har én topp. Figur 2 har to topper og så videre. Figur *n* vil dermed være figuren med *n* topper. Han tenker seg så at elevene skal finne en formel for antall små trekanter i figur *n*.

Elevene i gruppe δ har prøvd å finne en ”formel” for antall små trekanter i den figuren som er presentert i oppgaveteksten. Om dette skyldes at de hadde problemer med å lage en generell formel, eller om de tolket oppgaven som at de skulle finne et uttrykk for antall små trekanter på den figuren som var presentert i oppgaven, er vanskelig å si. Leo oppdager at elevene har laget et uttrykk kun for figuren som var presentert i oppgaven, og presiserer at han vil ha et uttrykk som gjelder for alle mulige figurer.

I gruppe ε har en elev nummerert figurene etter hvilken figur de var bygd opp fra. Siden figuren Leo kaller figur 1 er bygd opp fra det som opprinnelig var figur 2, vil denne da etter elevens tolkning tilsvare figur 2. Det kan også se ut som hun har laget en formel for hvor mange flere små trekanter det er på figurene nå i forhold til tidligere, men om dette skyldes at hun har tolket oppgaven som at det var det de skulle gjøre, eller om det har en annen forklaring, er ikke mulig å vite kun fra analyse av elevens kladdeark. Jeg vet heller ikke hvorvidt Leo oppdaget at denne eleven nummererte figurene annerledes enn ham.

5.3.3 Hvordan påvirkes elevene av misforståelsene som oppstår?

Dette spørsmålet kan ikke besvares fullstendig ut fra mine observasjoner. Jeg vet ikke hvordan elevene ble påvirket følelsesmessig av misforståelsene som oppstod, og kan kun kommentere det jeg har observert.

Basert på analysen av observasjonene vil jeg hevde at en uheldig konsekvens av misforståelsene var at mye tid gikk vekk til dette, tid som kunne vært brukt til å arbeide med matematikk. For eksempel ble gruppe A, da de ikke forstod oppgaveformuleringen på oppgave 7 på trekantgjerdeoppgaven, sittende og vente cirka 5 ½ minutt før læreren forklarte dem hva som mentes med oppgaven.

At en oppgave kan tolkes på flere måter behøver ikke alltid å bli et problem. I noen tilfeller kan elevenes tolkning gi et like interessant og nyttig matematisk problem som lærerens. Det kan imidlertid være problematisk dersom læreren ikke er klar over at elevene har en annen tolkning enn ham/henne, for da er det en fare for at elevenes løsning kan bli avvist som feil, slik vi så i tilfellet der gruppe A hadde en annen tolkning enn Linda av hvordan figurene i ekstraoppgaven ville se ut. I noen tilfeller kan det også være en fare for at elever kan bli sittende igjen med en misoppfatning på grunn av forbisnakking mellom dem og læreren, men jeg kan ikke se at dette har skjedd i forbindelse med dette opplegget.

5.4 Lærernes rapporter

Lærerne som deltok på videreutdanningskurset skulle alle prøve ut oppgaven ”trekantgjerde”, men de stod fritt til å endre på den og tilpasse den til sine klasser. Lærerne leverte inn rapporter fra utprøvingen, og valgte selv problemstillingen. Dette var en del av eksamen i kurset, og jeg har fått tilgang til de fleste av disse rapportene. Fordi lærerne selv valgte problemstilling, og valgte hva de ville kommentere i rapportene sine, er det ikke alle rapportene som er like relevante for min oppgave. Jeg har imidlertid lest gjennom rapportene og vil her kommentere noe av det lærerne skrev som var knyttet til elevenes tolkning av oppgavene. Som tidligere fokuserer jeg her på de tilfellene der elevene har hatt problemer med å forstå hva som mentes med oppgavene. Jeg vil her kalle lærerne L1, L2 og L3 (ingen av disse er Leo eller Linda). Alle de tre lærerne jeg her refererer til har beholdt spørsmålene i trekantgjerde-opplegget slik jeg har formulert dem, med unntak av at L1 har streket under ”tror du” på oppgave 3 (hvor mange små trekanter tror du det vil være på figur 6?).

L1 skriver at det hos ei gruppe elever i hans klasse (9. trinn) oppstod en diskusjon om hvorvidt elevene skulle telle de store trekantene i gjerdet også. En av elevene leste så høyt fra oppgaveteksten, og elevene så at de kun skulle telle de små trekantene.

I L2s klasse (8. trinn) var det en del elever som rakk opp handa i forbindelse med oppgave 2 for å spørre hvilke gjerder de skulle telle trekanter i. Oppgave 2 lød ”Hvor mange små trekanter er det på hver av figurene?”. I a priori-analysen min av trekantgjerde-opplegget forutså jeg at det kunne hende at noen elever ble usikre på hvilke figurer de skulle telle trekanter i på denne oppgaven. Jeg lot imidlertid oppgaven stå slik fordi hvilke figurer elevene valgte var av liten betydning for det videre arbeidet med oppgavene. Det står ikke noe i L2s rapport om hvor mye tid elevene ”mistet” fordi de måtte spørre læreren i forbindelse med denne oppgaven, men L2 skriver at ”en del elever” rakk opp handa, altså ser det ut til at det var flere elever som ba om en avklaring her.

L3 gjennomførte opplegget i en klasse på 9. trinn. Han skriver om ei av gruppene at de på spørsmål om de kunne lage en formel for figur *n* skjønte lite, men at de etter at spørsmålene ble formulert som ”formel for 5 trekanter”, ”formel for 8 trekanter” og så videre, svarte $n \times 3+1$ på spørsmålet om *n* trekanter. Om ei anna gruppe skriver L3 at de mente den generelle formelen var å multiplisere figurnummeret med tre og legge til én. Han skriver så at ”på spørsmål om de kan lage en formel med bokstaver skjønner de ikke spørsmålet (...)”. I begge disse tilfellene er det uklart om L3 refererer til at elevene hadde problemer med å forstå hva det siste spørsmålet ba om, eller om det er L3 som har bedt elevene lage en formel med bokstaver etter at elevene har laget en generell formel med ord. Uansett er det klart at elevene hadde problemer med å bruke *n* i formelen sin.

Både L1 og L2 forteller om problemer jeg ikke har observert i Linda eller Leos klasser, mens L3 forteller om et problem vi så også hos Linda og Leos klasser. I Leos klasse forstod elevene spørsmål 7, men hadde problemer med å lage formelen, mens flere elever i Lindas klasse ikke forstod spørsmålet. Om L3s elever, i likhet med elevene i Lindas klasse ikke forstod spørsmålet, eller om de kun hadde problemer med å lage formelen, er uklart.

Hvorvidt noen av de andre lærerne også har erfart at elever hadde problemer med å forstå noen av oppgavene, kan jeg ikke uttale meg om. Lærerne velger selv hva de vil kommentere i rapportene sine, og det kan derfor ha vært andre som har erfart liknende problemer uten å kommentere dem.

6 Forbisnakking

Jeg vil nå se nærmere på observasjonene i lys av begrepet *forbisnakking*, og minner om hvordan jeg definerte enveis- og toveisforbisnakking:

Enveisforbisnakking: Tilfeller der en ytring/beskjed/oppgave eller lignende blir oppfattet annerledes enn den som ga den hadde tenkt.

Toveisforbisnakking: Situasjoner der det foregår en interaksjon mellom to eller flere personer, og disse snakker om ulike ting, men tror de snakker om det samme.

6.1 Observasjonene fra utprøvingen av opplegget ”trekantgjerde” sett i lys av begrepet forbisnakking

I avsnitt 5.3.2 er flere tilfeller av forbisnakking kommentert (dog uten at de karakterisert som forbisnakking). Dette er tilfeller som fant sted i forbindelse med at lærere og elever hadde ulike tolkninger av oppgavene. I tillegg har jeg observert et tilfelle av enveisforbisnakking som ikke er direkte knyttet til ulik tolkning av de gitte oppgavene. Dette fant sted i gruppe D i 8. klasse. Etter at gruppa på ekstraoppgaven hadde kommet frem til at de for å finne antall små trekanter på en figur kunne multiplisere figurnummeret med syv og legge til ni, ba Linda Fredrik forklare for Frans. Hun ba ham om å illustrere de ni ”ekstra” små trekantene ved å bytte ut ni grønne trekanter fra figuren deres med røde. Fredrik byttet da ut andre trekanter enn Linda hadde tenkt. Linda kom ikke tilbake til denne gruppa etter at Fredrik hadde byttet ut trekantene, og så altså ikke at han hadde byttet ut andre trekanter enn hun hadde tenkt.

Under vil jeg forsøke å kategorisere de ulike tilfellene av forbisnakking som enveis- eller toveisforbisnakking. Noen tilfeller vil ligge i en gråsone, både i forhold til hvorvidt det i det hele tatt dreier seg om forbisnakking, og hvorvidt det er enveis- eller toveisforbisnakking.

	Enveisforbisnakking	Toveisforbisnakking
8. klasse	• Gruppe C –tolkning av *n*. • Gruppe A –tolkning av ekstraoppgaven. • Gruppe B –tolkning av ekstraoppgaven. • Gruppe C –tolkning av ekstraoppgaven. • Gruppe D –tolkning av ekstraoppgaven. • Gruppe E –tolkning av ekstraoppgaven. • Frans – tolkning av Lindas beskjed om å bytte ut ni trekanter.	• Gruppe A –Linda og gruppa har ulike tolkninger av ekstraoppgaven, men er ikke klar over det. Snakker sammen, men om ulike ting. • Gruppe C –Linda og gruppa har ulike tolkninger av ekstraoppgaven. Elevene tror de skal doble. Linda ser først ut til å tro de har skjønt hva hun mener. Oppklares senere. • Gruppe E – elevene tror de skal bygge store trekanter, men Linda er ikke klar over at de har en slik tolkning. Oppdages senere.
9.klasse	• Gruppe δ – en elev tolker oppgaven om figur 100 som at de skal finne ut hvilken figur som består av 100 små trekanter. • Gruppe δ – fokus på enkeltfigur i ekstraoppgaven. • Gruppe ε –minst én elev nummererte figurene i ekstraoppgaven annerledes enn Leo. Mulig også annen tolkning av hva slags formel de skulle lage.	

I åttende klasse ser vi helt klart at det forekommer mer forbisnakking knyttet til ekstraoppgaven enn til den opprinnelige trekantgjerdeoppgaven. Det er flere faktorer som kan være med på å forklare dette. Trekantgjerde-oppgaven var planlagt (av fagansvarlige og meg) med særlig fokus på å unngå oppgaver som kunne skape grobunn for misforståelser. Linda hadde også jobbet med denne oppgaven, og planlagt hvordan hun ville bruke den i klasserommet. Ekstraoppgaven var ikke planlagt. Linda fant den på der og da. Hun hadde planlagt en annen ekstraoppgave, å bygge gjerdet ett hakk høyere, men ifølge henne selv var heller ikke denne oppgaven særlig godt planlagt. Lindas ekstraoppgave ble gitt muntlig, i en stresset situasjon, og hun visste ikke svaret på oppgaven da hun ga den. Det viste seg at det var en oppgave som kunne tolkes på mange måter, men Linda var ikke klar over dette. Elevene brukte konkreter for å bygge figurene, og mange fjernet figurene kort tid etter at de hadde bygd dem. Da Linda gikk rundt for å hjelpe elevene, så hun dermed ikke hvordan de hadde bygd figurene, og oppdaget i mange tilfeller ikke at elevene hadde tolket oppgaven annerledes enn hun hadde.

I niende klasse er det ikke en slik tydelig forskjell mellom ekstraoppgaven og trekantgjerde-oppgaven når det gjelder hvor mye forbisnakking som forekommer. Her er det generelt færre tilfeller av forbisnakking enn i åttende klasse. Det kan være flere grunner til dette. Jeg vil ikke spekulere i alle mulige grunner, men nevner noen få: I niende klasse har jeg kun observert, ikke filmet, og jeg har derfor ikke like fullstendige data herfra. Altså kan det hende at flere tilfeller av forbisnakking er oversett her i forhold til i åttende klasse. Det ble også brukt mindre tid på ekstraoppgaven i forhold til trekantgjerde-oppgaven i niende klasse enn i åttende klasse. Leo sin ekstraoppgave var dessuten ikke den samme som Lindas, og ble gitt skriftlig. Selv om den var planlagt, var imidlertid også Leos oppgave tvetydig.

Når det gjelder enveisforbisnakking, tyder mine observasjoner på at denne typen forbisnakking kan reduseres ved god planlegging med spesielt fokus på å unngå oppgaver som kan skape grobunn for misforståelser.

Tilfellene av toveisforbisnakking er direkte knyttet til tilfeller av enveisforbisnakking. For eksempel er toveisforbisnakkingen mellom Linda og elevene i gruppe A, som gjaldt ekstraoppgaven, direkte knyttet til at elevene har tolket oppgaven annerledes enn Linda. Noen vil kanskje synes det er unaturlig å splitte opp denne forbisnakkingen i enveis- og toveisforbisnakking slik jeg har gjort, men jeg finner det nyttig fordi enveisforbisnakking ikke alltid utvikler seg til toveisforbisnakking.

I det følgende vil jeg se litt nærmere på sammenhengen mellom enveis- og toveisforbisnakking. Når utvikler enveisforbisnakking seg til toveisforbisnakking? Fra tabellen ovenfor ser vi tre tilfeller der dette har skjedd. Dette gjelder gruppe A, C og E, og er knyttet til tolkning av ekstraoppgaven i åttende klasse.

Felles for disse tre tilfellene er at verken Linda eller elevene er klar over at de har ulike tolkninger av ekstraoppgaven, og dermed snakker om ulike ting. I gruppe A foregår forbisnakkingen i flere etapper over lengre tid. Selv om Linda gir tips om å bygge opp figur 3, og hun hevder at elevene har feil svar, og må bygge figur 1, velger Pål å overhøre dette. Han er overbevist om at det de har gjort er riktig. Selv etter at Linda har bygd figur 1, og bedt Pål se hvor mange små trekanter det øker med til figur 2, står Pål fast på at det øker med fem. I gruppe C tror elevene de skal bygge figurene dobbelt så store, og første gang Linda er hos denne gruppa, ser det ut til at hun ser "å doble" som en språkbruk som dekker det hun vil at elevene skal gjøre, nemlig å bygge gjerdet to hakk høyere. Neste gang hun kommer, spør imidlertid Mari om ikke det må bli tyve på figur 1, og tolkningen av oppgaven avklares. I gruppe E trodde elevene de skulle bygge store trekanter, og første gang Linda var hos denne gruppa, trodde hun bare de hadde bygd figur 1 litt for stor. Neste gang hun kommer, ligger det imidlertid flere store trekanter fremme, og Linda oppdager at hun og elevene har ulike tolkninger.

For gruppe A ble altså forbisnakkingen vedvarende, mens den etter en stund ble oppdaget både for gruppe C og E.

Der hvor det raskt ble oppdaget at elevene hadde tolket oppgaven annerledes enn tiltenkt, utviklet ikke enveisforbisnakkingen seg videre til toveisforbisnakking.

6.2 Observasjonene fra opplegget om lineære funksjoner sett i lys av begrepet forbisnakking

Jeg vil nå gå tilbake til analysen av episoder fra undervisningssekvensene om lineære funksjoner. Kan begrepet *forbisnakking* forklare også de misforståelsene som oppstod der? Jeg vil her kun se på de til sammen ni episodene (tre tilfeller for hver av de tre gruppene) som er analysert grundig i del I, ikke på hele undervisningssekvensene.

Hele tall – hvilke tall er nå det?

Når det gjelder misforståelsene som oppstod rundt begrepet *hele tall* vil jeg hevde at disse ikke er knyttet til forbisnakking, men til misoppfatninger eller "slurv" hos elevene (og hos den ene læreren), og "indre motsetninger" i selve opplegget. Det ville også vært mulig å argumentere for at episodene hos gruppe 2 og 3 kan klassifiseres som enveisforbisnakking, men av oppgave 5-7 på kort to (der negative tall innføres), ser det ut til at lærerne har forutsett at elevene kunne komme til å regne med naturlige tall (eventuelt inkludert null) på kort 1.

Hva vil det si å tegne tallpar?

Ordet *tegne* skapte problemer. Elevene i gruppe 1 diskuterte litt, men da de hørte Liv nevne linjal, skjønte de at det var meningen at de skulle "tegne" tallparene i et koordinatsystem. Her skjedde det altså ikke noen forbisnakking. For gruppe 2 og gruppe 3 vil jeg imidlertid hevde at ordet *tegne* ledet til enveisforbisnakking. I begge gruppene *skrev* elevene ned tallparene og trodde da de hadde løst oppgaven. For begge gruppene ble denne forbisnakkingen raskt oppdaget da Lene og Lars kom til gruppene. Lene ble hos gruppa mens de diskuterte hva det vil si å tegne tallparene. Hun sier ikke direkte hva hun mener, men leder elevene. Det kommer ulike forslag fra elevene, men jeg vil ikke klassifisere disse som resultat av enveisforbisnakking, fordi de bærer preg av å være ledd i en diskusjon angående betydningen av hva det vil si å tegne tallpar, ikke "ferdige" oppfatninger. Hos gruppe 3 vil jeg imidlertid hevde at "gjett hva jeg tenker på"-interaksjonen mellom Lars og elevene kan klassifiseres som en rekke enveisforbisnakkinger, fordi elevene går for stadig nye tolkninger etter hvert som Lars gir nye hint. Først gjør Lars det klart for elevene at han har ment noe annet enn at elevene skal skrive ned tallparene, og da tegner elevene ruter. Senere gir han hint om *x* og *y*, og dette tolkes av elevene som at de skal "tegne" *x*-er og *y*-er. I neste hint nevner Lars *x*-akse og *y*-akse, og først da forstår elevene hva Lars har ment, og det er er slutt på forbisnakkingen.

Utvidelse til reelle tall?

Gruppe 1 tolker de første oppgavene på kort 3 som at de nå skal regne med desimaltall med ett siffer bak komma. Det er uklart hva lærerne har ment her, men det er rimelig å anta at de mener reelle tall. Det skjer altså en enveisforbisnakking her. Da elevene senere ber Liv om hjelp, oppdager Liv at denne forbisnakknigen har skjedd. For gruppe 2 skjer det ikke forbisnakking i dette tilfellet, mens det for gruppe 3 er uklart hvilke tall de nå tenker er mulige fordi det uansett fortsatt er uendelig mange mulige tallpar.

Vi ser at problemene som oppstod i forbindelse med opplegget om lineære funksjoner, er mer komplekse enn at de enkelt kan forklares ved hjelp av begrepet forbisnakking. "Indre motsetninger" i opplegget skaper problemer. Vi ser likevel at noen av misforståelsene kan forklares ved hjelp av begrepet enveisforbisnakking.

Det er interessant å merke seg at av observasjonene fra de to klassene som arbeidet med trekantgjerde-oppleggene, ser vi at når enveisforbisnakking ble oppdaget, ble det avklart en felles forståelse, og forbisnakkingen tok slutt. I tilfellet med gruppe 3 og Lars, i forbindelse med tolkningen av "å tegne tallpar", skjer det imidlertid stadig nye enveisforbisnakkinger til tross for at det oppdages at lærer og elever har ulike tolkninger.

7 Oppsummering

Jeg vil nå gå tilbake til problemstillinga og oppsummere kort hva jeg har kommet frem til. Flere av spørsmålene fra problemstillinga er besvart og drøftet underveis i analysen, og jeg vil ikke repetere alt her. Oppsummeringa som gis her er derfor ikke fullstendig og utdypende.

Hvordan tolker elevene oppgavene de blir gitt?

Dette spørsmålet er allerede besvart utdypende underveis i oppgaven. Det vi kan konkludere med, er at elevene ikke alltid tolker oppgavene slik lærerne eller de som lagde oppgavene hadde forventet, og at ikke alle elever tolker oppgavene likt. Dette er i overensstemmelse med hva Voigt (1994; 1996) har funnet.

Hvilke misforståelser oppstår?

Flere av misforståelsene som oppstod kan karakteriseres som forbisnakking, og det er disse jeg har valgt å fokusere mest på. Fra tidligere forskning har jeg funnet lite som omhandler forbisnakking i klasserommet, men en del av litteraturen jeg har funnet kan likevel kaste lys over noen av tilfellene av forbisnakking jeg har observert.

Det er flere faktorer som bidrar til at forbisnakking oppstår. Vi har sett at en del av tilfellene av forbisnakking som forekom i øktene jeg har analysert, kan knyttes til tvetydige oppgaver. For eksempel skjedde det flere tilfeller av både enveis- og toveisforbisnakking i forbindelse med ekstraoppgaven Linda ga elevene sine.

Som nevnt tidligere, er det ikke nødvendigvis et problem at en oppgave er tvetydig, men det stiller større krav til læreren, og det kan lettere utvikle seg misforståelser dersom læreren ikke er klar over at oppgaven kan tolkes på flere måter.

”Språklige forviklinger” ledet også i noen tilfeller til misforståelser og forbisnakking. Ordet *tegne* skapte problemer for både gruppe 2 og gruppe 3 i arbeidet med oppgavene om lineære funksjoner. I åttende klasse, i arbeidet med trekantgjerde-oppgaven, var det *n* som skapte problemer. I begge disse tilfellene dreide det seg om at ord/bokstaver som elevene kjente fra andre sammenhenger, fikk en ny betydning i denne matematiske sammenhengen, jamfør Pimms (1987) betegnelse *semantic contamination*.

Det var også et tilfelle, i forbindelse med opplegget om lineære funksjoner, der elever vektla andre egenskaper ved eksempler enn lærerne gjorde. Lærerne stilte spørsmålene ”hva skjer hvis x = 2 ½? ” og ”hva om y = 4,7?” , og elevene i gruppe 1 la her vekt på at både 2,5 (som de tolket 2 1/2 som) og 4,7 hadde ett siffer bak komma. Mason & Pimm (1984) pekte på muligheten for at ikke alle vektlegger de samme egenskapene ved eksempler. I vårt tilfelle var dette eksempler som ble brukt i forbindelse med en oppgave, og oppgaven ble tvetydig fordi det var flere mulige tolkninger av hvilken mengde disse eksemplene skulle representere.

Er lærerne klar over misforsåelsene som oppstår, og i så fall, hvordan reagerer de?

I analysen av undervisningsøktene har vi sett eksempler både på at lærerne etter hvert ble klar over misforståelsene som oppstod, og på at de ikke oppdaget dem. Linda oppdaget ikke at hun og elevene i gruppe C hadde ulike tolkninger av ekstraoppgaven om å bygge på trekantgjerdet, og at de dermed snakket forbi hverandre. I de fleste tilfellene ble imidlertid misforståelsene oppdaget. Lærerne reagerte da på ulike måter. Da Liv oppdaget at elevene i gruppe 1 regnet med tall med én desimal bak komma, spurte hun hvor mange tallpar som ville vært mulige hvis de kunne ha så mange desimaler de ville. Hun anerkjente elevenes tolkning samtidig som hun ledet dem til sin tolkning. Både Lene og Lars havnet i en slags "gjett hva jeg tenker på"- situasjon i forbindelse med at elevene skulle *tegne* tallpar, og begge ga elevene hint for å prøve å lede dem til "den rette" tolkningen av oppgaven. Lene valgte å bli hos gruppe 2 til elevene hadde forstått hva hun mente, mens Lars gikk til og fra gruppe 3. Når Linda oppdaget forbisnakking eller misforståelser i forbindelse med trekantgjerde-opplegget (inkludert ekstraoppgaven), valgte hun som regel å avklare relativt raskt hva hun hadde ment med oppgaven, og elevene måtte tilpasse sine tolkninger. Lærerne ledet altså elevene på ulike måter til *sine* tolkninger av oppgavene.

Hva blir konsekvensene av disse misforståelsene?

En viktig konsekvens av misforståelsene var at mye tid gikk med til disse. For eksempel ble elevene i gruppe C sittende lenge og vente da de ikke forstod hva som mentes med oppgave 7, som handlet om Ole og figur *n*. Elevene i gruppe 2 ble sittende lenge og telle da de regnet med tall mellom 0 og 8 med én desimal bak komma, og elevene i gruppe 3 brukte mye tid på å finne ut hva Lars mente med å *tegne* tallpar.

En annen mulig konsekvens av forbisnakking eller misforståelser, er at elevene kan bli frustrerte eller motløse dersom de for eksempel stadig "tolker oppgaven feil", og må endre tolkningen sin fordi læreren har en annen tolkning. Dette kan påvirke elevenes mestringsfølelse negativt. Jeg har ikke klare data som viser dette i forbindelse med de undervisningsøktene jeg har analysert, men vi ser tendenser til at elevene blir frustrerte blant annet hos gruppe 3 (tegne tallpar) og gruppe C (ekstraoppgaven).

Det er også en fare for at elevers svar kan bli avvist som feil dersom de har en annen tolkning av oppgaven enn læreren, slik vi så hos gruppe C i forbindelse med ekstraoppgaven.

En annen fare en bør være oppmerksom på, er at forbisnakking også kan føre til misoppfatninger. Dette ser ikke ut til å ha vært noe stort problem i de øktene jeg har analysert, men av Bauersfelds (1980) artikkel ser vi at det kan forekomme. Der hadde elevene egentlig forstått hva som kjennetegnet *parallelle linjer*, men det ble skapt forvirring hos dem angående dette begrepet. Læreren måtte så forsøke å rette opp igjen dette.

Avslutning

Vi ser at det forekom forbisnakking i større eller mindre grad i alle undervisningsøktene jeg har analysert. Dette kan tyde på at forbisnakking er et fenomen som ikke er så helt uvanlig i norske klasserom. I og med at undervisningsøktene jeg har analysert alle er knyttet enten til opplegget om lineære funksjoner eller til trekantgjerde-opplegget, og at forbisnakkingen ofte er direkte knyttet til oppgavene, kan det også hende at det var særlig i forbindelse med disse oppleggene at forbisnakking forekom. Alle øktene var dessuten inquiry-baserte. Linda og Leo hadde liten eller ingen erfaring fra inquiry-basert undervisning, og det kan også ha vært en medvirkende faktor hva gjelder tilfellene av forbisnakking. Hvor mye erfaring Liv, Lene og Lars hadde fra inquirybasert undervisning, er jeg usikker på.

Jeg kan ikke si hvor vanlig forbisnakking er i norske klasserom generelt, men forbisnakking er et fenomen som oppstår i kommunikasjonen mellom mennesker i flere sammenhenger, og det vil være rimelig å anta at det også forekommer i klasserommet i større eller mindre grad.

Resultatene mine tyder også på at dersom oppgavene er planlagt *med spesielt fokus på å unngå å skape grobunn for misforståelser*, kan dette redusere antall tilfeller av forbisnakking knyttet til tolkning av oppgavene. Det er imidlertid kun observasjonene fra Lindas klasse som viser dette, og jeg vil derfor være forsiktig med å konkludere her. Jeg vet ikke om lærerne og didaktikerne som planla opplegget om lineære funksjoner fokuserte spesielt på å unngå å skape grobunn for misforståelser, men jeg vil anta at de ikke gjorde det. Hvis det imidlertid er slik at de faktisk fokuserte på dette, ville observasjonene fra disse undervisningsøktene stå i motsetning til observasjonene fra Lindas klasse. Observasjonene fra Leos klasse viste ikke noen tydelig forskjell i antall tilfeller av forbisnakking i forbindelse med de opprinnelige trekantgjerde-oppgavene i forhold til ekstraoppgaven Leo gav, men herfra har jeg mindre detaljerte data, så det er vanskelig å si om det var en forskjell.

8 Pedagogiske implikasjoner

Mine analyser har vist at forbisnakking kan forekomme i klasserommet, og de fleste vil vel være enige i at forbisnakking ikke er ønskelig. Det kan være nyttig at lærere er oppmerksomme på at forbisnakking kan forekomme. Da vil en kanskje ha større mulighet til både å forebygge, oppdage og oppklare forbisnakking. I samtaler med elever kan det være lurt å forsøke å opprette en felles forståelse av hva man snakker om, og stille utdypende spørsmål dersom en er usikker på om man snakker om det samme.

Flere av tilfellene av forbisnakking jeg har identifisert, er knyttet til tvetydige oppgaver. Det kan derfor være lurt at lærere tenker gjennom mulige tolkninger av en oppgave før oppgaven gis til elevene. Elever kan også få trening i lese oppgaver og lete etter flere mulige tolkninger. Dersom det er et poeng at alle skal ha samme tolkning av en oppgave, kan man så i fellesskap avgjøre hvilken tolkning man skal velge.

Når læreren underviser eller gir beskjeder, bør han/hun forsøke å uttrykke seg så klart som mulig. Det kan også være lurt å stille elevene noen spørsmål for å forsikre seg om at de har oppfattet hva læreren har ment.

9 Videre forskning

Mine funn bygger på et relativt lite datamateriale, og det trengs derfor mer forskning her. Når det gjelder forskning på miskommunikasjon, er det imidlertid visse utfordringer. For mitt vedkommende skjedde det tilfeldigvis en del kommunikasjonsproblemer i øktene jeg analyserte, særlig i forbindelse med Lindas ekstraoppgave, men som Milroy (1986, i Tzanne, 1999, s. 16) uttrykker det: ”by it's nature, material on miscommunication is hard to collect in any systematic way, since (...) [such instances] occur unpredictably and sometimes infrequently”.

Under vil jeg foreslå noen spørsmål det ville vært interessant å finne svar på, men jeg er klar over at det vil være krevende (kanskje heller ikke mulig) å gi fullstendige svar på en del av disse spørsmålene. Videre forskning kan imidlertid kanskje lede oss nærmere svarene, og gi oss en dypere forståelse av fenomenet forbisnakking i klasserommet.

Hvor vanlig er forbisnakking i klasserommet?

Forekommer forbisnakking oftere i visse undervisningsformer enn i andre?

Hvilke konsekvenser får eventuell forbisnakking for elevenes læring?

Kan noen misoppfatninger innenfor matematiske emner skyldes forbisnakking?

Resultatene mine tyder på at planlegging der man er spesielt bevisst på å unngå at oppgavene skal kunne skape grobunn for misforståelser, kan redusere antall tilfeller av forbisnakking knyttet til tolkning av oppgavene. Gjelder dette generelt?

Er det slik at dersom læreren er spesielt bevisst på fenomenet forbisnakking og på å unngå/oppdage misforståelser, vil det redusere antall tilfeller av forbisnakking også i ikke-planlagte situasjoner?

10 Referanseliste

Banchi, H. & Bell, R. (2008). The Many Levels of inquiry. *Science and Children, 46*(2), 26-29.

Bauersfeld, H. (1980). Hidden dimensions in the so-called reality of a classroom. *Educational Studies in Mathematics, 11*, 23-41.

Berg, C. V. (2009). *Developing Algebraic Thinking in a Community of Inquiry. Collaboration between Three Teachers and a Didactitian.* Doktorgradsavhandling. Kristiansand: Universitetet i Agder.

Bills, L., Dreyfus, T., Mason, J., Tsamir, P., Watson, A. & Zaslavsky, O. (2006). Exemplification in Mathematics Education. I J. Novotna, H. Moraova, M. Kratka, N. Stehlikova, & I. Education. *Proceedings of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (30th, Prague, Czech Republic, July 16-21, 2006). Volume 1* (s. 126-154). International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Boaler, J. (1998). Open and Closed Mathematics: Student Experiences and Understandings. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*(1), 41-62.

Coupland, N., Giles, H. & Wiemann, J. M. (red.) (1991). *Miscommunication and Problematic Talk*. Newbury Park/London/New Delhi: Sage Publications.

Crago, M. B., Eriks-Brophy, A., Pesco, D. & McAlpine, L. (1997). Culturally Based Miscommunication in Classroom Interaction. I *Language, Speech, and Hearing Services in Schools, 28*(3), 245-254.

Crespo, S. (2003). Learning to Pose Mathematical Problems: Exploring Changes in Preservice Teachers' Practices. *Educational Studies in Mathematics, 52*(3), 243-70.

Crespo, S. & Sinclair, N. (2008). What Makes a Problem Mathematically Interesting? Inviting Prospective Teachers to Pose Better Problems. *Journal of Mathematics Teacher Education, 11*(5), 395-415.

Durkin, K. & Shire, B. (1991). Lexical ambiguity in mathematical contexts. I K. Durkin & B. Shire (red.). *Language in mathematical education. Research and practice* (s. 71-84). Milton Keynes: Open University Press.

Fuglestad, A. B., Goodchild, S. & Jaworski, B. (2007). Utvikling av Inquiry community for å forbedre undervisning og læring i matematikk: Didaktikere og lærere arbeider sammen. I M. B. Postholm (red.). *Forsk med! Lærere og forskere i læringsarbeid* (s. 34-73). Oslo: Damm & Søn A/S.

Hundeland, P. S., Erfjord, I., Grevholm, B. & Breiteig, T. (2007). Teachers and researchers inquiring into mathematics teaching and learning: A case of linear functions. I C. Bergsten, B. Grevholm, H. Måsøval & F. Rønning (red.). *Relating practice and research in mathematics education. Proceedings of NORMA05, Fourth Nordic Conference on Mathematics Education* (s. 299-310). Trondheim: Tapir Academic Press.

Jacobsen, D. I. (2000). *Hvordan gjennomføre undersøkelser? Innføring i samfunnsvitenskapelig metode.* Kristiansand: Høyskoleforlaget.

Jaworski, B. (2007). Theroretical perspectives as a basis for Research in LCM and ICTML. I B. Jaworski, A. B. Fuglestad, R. Bjuland, T. Breiteig, S. Goodchild og B. Grevholm (red.). *Læringsfellesskap i matematikk - Learning Communities in Mathematics* (s. 121-138). Bergen: Caspar Forlag.

Jaworski, B., Fuglestad, A. B., Bjuland, R., Goodchild, S. & Grevholm, B. (red.) (2007). *Læringsfellesskap i matematikk – Learning Communities in Mathematics.* Bergen: Caspar Forlag.

Katsopoulos, D. (2007). ”It’s like Hearing a Foreign Language”. *Mathematics Teacher, 101*(4), 301-305.

Lorentzen, L., Hole, A. & Lindstrøm, T. (2003). *Kalkulus – med én og flere variable.* Oslo: Universitetsforlaget.

Manoucheri, A. (2007). Inquiry-Discourse. Mathematics Instruction. *Mathematics Teacher, 101*(4), 290-300.

Mason, J. (2000). Asking mathematical questions mathematically. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 31*, 97-111.

Mason, J. & Davis, J. (1991). *Fostering and Sustaning Mathematics through Problem Solving.* Victoria: Deakin University.

Mason, J. & Pimm, D. (1984). Generic Examples: Seeing the General in the Particular. *Educational Studies in Mathematics*, *15*(3), 277-289.

Mason, J., & Spence, M. (1999). Beyond Mere Knowledge of Mathematics: The Importance of Knowing-To Act in the Moment. *Educational Studies in Mathematics, 38*, 135-61.

Måsøval, H. S. (2009). Complexity of operating beyond naïve empiricism when proving a conjectured formula for the general term of a geometrical pattern. I C. Winsløw (red.). *Nordic Research in Mathematics Education: Proceedings from NORMA08 in Copenhagen, April 21-April 25* (s. 25-33). Rotterdam: Sense Publishers.

Pimm, D. (1987). *Speaking Mathematically. Communication in Mathematics Classrooms.* New York: Routledge & Kegan Paul.

Rowland, T. (2000). *The Pragmatics of Mathematics Education. Vagueness in Mathematical Discourse.* London: Falmer Press.

Sahin, A. (2007). Teachers' Classroom Questions. *School Science & Mathematics, 107*(1), 369-370.

Saville-Troike, M. & Kleifgen, J. A. (1989). Culture and language in classroom communication. I O. Garcia & R. Otheguy (red.). *English across Cultures, Cultures across English. A Reader in Cross-cultural Communication.* Berlin/New York: Mouton de Gruyter.

Silver, E. (1994). On Mathematical Problem Posing. *For the Learning of Mathematics*, *14*(1), 19-28.

Skemp, R. R. (1976). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teaching*, *77*, 20-26.

Skemp, R. R. (1979). *Intelligence, Learning and Action*: *A Foundation for Theory and Practice in Education.* Chichester: John Wiley & Sons.

Skemp, R. R. (1986). *The Psychology of Learning Mathematics* (2. Utg). Harmondsworth: Penguin Books Ltd.

Tzanne, A. (1999). *Talking at Cross-Purposes. The dynamics of miscommunication.* Amsterdam/Philadelphia: John Benjamins.

Voigt, J. (1994). Negotiation of Mathematical Meaning and Learning Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *26*(2/3), 275-298.

Voigt, J. (1996). Negotiation of Mathematical Meaning in Classroom Processes: Social Interaction and Learning Mathematics. I L. P. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. A. Goldin & B. Greer (red.). *Theories of Mathematical Learning* (s. 21-50). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Way, J. (2008). Using questioning to stimulate mathematical thinking. *Australian Primary Mathematics Classroom, 13*(3), 22-27.

Woolfolk, A. (2004). *Pedagogisk psykologi.* Trondheim: Tapir akademisk Forlag.

Internettkilder

Utdanningsdirektoratet (2005). *Læreplan i matematikk, R94*. Lastet ned 25.08.09 fra http://www.udir.no/Artikler/_Lareplaner/Lareplanverket-for-videregaende-opplaring-R94/?id=1120#Felles%20allmenne%20fag

Utdanningsdirektoratet (2006). *Læreplan i matematikk, Kunnskapsløftet*. Lastet ned 25.08.09 fra http://www.utdanningsdirektoratet.no/grep/Lareplan/?laereplanid=212147

Wikipedia. *Naturlig tall*. Lastet ned 03.03.10 fra http://no.wikipedia.org/wiki/Naturlig_tall

Lær bedre matematikk. *Inquiry*. Lastet ned 25.09.09 fra http://lbm.vaf.no/print.aspx?m=29&amid=341

Muntlige kilder

Jaworski, B. (2009). *Becoming Partners in Inquiry in Learning and Teaching Mathematics*. Muntlig foredrag på Lær bedre matematikk-konferanse på Universitetet i Agder, 24.09.09. Power-point presentasjon fra foredraget finnes på http://lbm.vaf.no/default.aspx?m=140&amid=1196

Goodchild, S. & Fuglestad, A. B. (2009). *Forskning innenfor TBM-prosjektet ved UiA*. Muntlig foredrag på Lær bedre matematikk-konferanse på Universitetet i Agder, 24.09.2009.

11 Vedlegg

11.1 Transkripsjonsnøkkel

,	Komma
.	Punktum
?	Spørsmålstegn
!	Utropstegn
(*3s*)	Pause på mer enn 2 sekunder
(*Italic*)	Beskriver ikke-verbale lyder eller fakter. *Som latter, hosting, bevegelser etc. eller andre kommentarer fra transkriptøren.*
Bold	Empatisk tale
(…)	Ord som ikke er transkribert
{ }	Brukes når transkriptøren er usikker på hva som blir sagt eller hvordan ord skal skrives.
[ ]	Samtidig tale

11.2 Planlagte spørsmål til Linda før vi så filmen sammen

Angående ekstraoppgaven:

- I planen som jeg fikk av deg før timen, står det som ekstraoppgave at elevene kan bygge gjerdet ett hakk høyere. I selve økta ba du dem bygge på gjerdet med to rader. Når bestemte du deg for at det skulle være to rader høyere?

- Hadde du tegnet figurene på forhånd, og talt opp antall små trekanter?

- La du merke til om det var noen elever som tolket oppgaven annerledes enn du hadde tenkt?

- Kan du se flere mulige tolkninger av hvordan gjerdet vil se ut når det bygges to rader høyere?

- Var du klar over at det kunne være flere mulige tolkninger før timen begynte?

11.3 Skriv til foreldre/foresatte til elever i Lindas klasse

Til foreldre/foresatte

Mitt navn er Anette Frigstad, og jeg skriver masteroppgave i matematikkdidaktikk ved Universitetet i Agder. I forbindelse med masteroppgaven min ønsker jeg å observere to matematikkgrupper som arbeider med en utforskningsoppgave . Matematikklæreren til deres sønn/datter, [redacted], har sagt seg villig til å la meg komme og filme i hennes matematikkgruppe i uke 41, og dersom deres sønn/datter skal kunne filmes og/eller intervjues, trenger jeg deres tillatelse.

Det er frivillig å delta, og dersom dere ikke tillater at deres sønn/datter filmes, vil han/hun bli plassert slik at han/hun ikke kommer med på filmen.

I oppgaven min vil både skole, lærere og elever anonymiseres. Prosjektslutt er beregnet til 15. juni 2010, og innen da skal datamaterialet være anonymisert og videoopptakene slettet.

Jeg håper at dere vil være villige til å la deres sønn/datter delta i dette prosjektet.

Dersom dere på et senere tidspunkt skulle ønske å trekke samtykket tilbake, gis det anledning til dette uten å oppgi grunn.

Dersom dere har spørsmål, kan jeg kontaktes på mail:

afrigs03@student.uia.no

Med vennlig hilsen

Anette Frigstad

Anette Frigstad

Fyll ut svarslippen under og send den med eleven til skolen.
Kryss av for JA dersom dere tillater at eleven filmes/intervjues, NEI dersom dere ikke tillater det.

SVARSLIPP

Jeg tillater at ______________________________(elevens navn) blir filmet/intervjuet

JA ☐ NEI ☐

Underskrift fra foresatt ______________________________