

DIFICULTADES RELATIVAS A LAS CUATRO OPERACIONES FUNDAMENTALES DEL CALCULO (*)

Creo innecesario resaltar aquí el papel básico que desempeñan las matemáticas en el orden de conocimientos, y cuyo valor pedagógico de transferencia nos interesa hasta el punto de no considerar tan fundamental el aprendizaje de las relaciones numéricas como el desenvolvimiento de la capacidad intelectual que logran.

Con todo, no terminan aquí sus funciones. Ya Reed (1) afirma que : «... la aritmética no se estudia sólo para saber aritmética, ni por la disciplina mental derivada de su estudio, sino por su aplicación en ciertas actividades esenciales de la vida».

Vemos, pues, que no sólo forman al hombre en un sentido individual, sino también socialmente.

Así, considerando interesante todo trabajo realizado sobre esta materia, se ha llevado a efecto, en la población escolar de Madrid, el trabajo de investigación de que tratamos, eligiendo para ello unos «tests diagnósticos de combinaciones» que, elaborados por el Dr. Fernández Huerta, han sido publicados por el Instituto «San José de Calasanz», de Pedagogía.

Antes de pasar adelante digamos la finalidad perseguida con el empleo de tales medios.

En efecto, deseamos conocer, dentro de cada una de las cuatro operaciones fundamentales de cálculo, la dificultad relativa de las combinaciones que las integran para de esta manera establecer unas tablas que en progresión ascendente de dificultad nos señalen el orden que se ha de seguir en la enseñanza de las mismas, con objeto de, empezando por las más fáciles, motivar al niño en el aprendizaje sucesivo de las más dificultosas, proporcionándole a la vez una mayor seguridad ante las mismas al adentrarse poco a poco en su conocimiento.

Para obtener las tablas citadas es necesario que, mediante la aplicación de los tests, conozcamos los aciertos y errores cometidos por los sujetos, teniendo en cuenta tanto la cantidad como la calidad de los mismos ; es decir, su número y clase, llegando así a saber cuáles de ellos se repiten más o menos. Dicha investigación no ha sido rea-

(*) Destaco en primer lugar mi agradecimiento a los Profesores García Hoz y Fernández Huerta por sus orientaciones.

(1) REED, H. D. : *Psicología de las materias de enseñanza primaria*. Uteha. Méjico, 1944. Trad. de Manuel Gallardo, pág. 301.

lizada aún en España, habiendo recogido estudios sobre la misma Buyse (2) en Bélgica y Reed (3) en Estados Unidos.

Ahora bien, el fin propuesto no será alcanzado con facilidad, de una manera directa. Se hace necesario *fundamentar científicamente el trabajo* y seguir luego un proceso riguroso en la *elaboración de los datos obtenidos*.

I. FUNDAMENTACIÓN DEL TRABAJO

Si intentásemos realizar la investigación con todos los escolares de Madrid, nuestro trabajo sería prácticamente interminable e insuperable para un solo experimentador. Por eso debemos seleccionar científicamente un número representativo de los mismos.

Agrupados los alumnos en «Unidades escolares», empezaremos por situar éstas en un plano de Madrid (4). Pero, enterados de que no existe una distribución geográfica por estratos de este territorio, procedemos a realizarla en nueve partes (agrupables en tres zonas) consecutivas, a partir del centro, y las que cada una de ellas bordea a la anterior. De este modo, cada una de las unidades citadas queda enmarcada dentro de su zona correspondiente, resultando el total que expresamos a continuación:

Primer estrato	238 unidades
Segundo estrato	286 »
	<hr/>
Primera zona	524 »
Tercer estrato	253 unidades
Cuarto estrato	192 »
Quinto estrato	92 »
	<hr/>
Segunda zona	536 »
Sexto estrato	100 unidades
Séptimo estrato	177 »
Octavo estrato	66 »
Noveno estrato	163 »
	<hr/>
Tercera zona	506 »

(2) BUYSE, R.: «Etudes et recherches louvanistes sur le calcul élémentaire». *Actas del I Congreso Internacional de Pedagogía*. Instituto «San José de Calasanz», págs. 63 a 82.

(3) REED, H. B.: *Psicología de las materias de enseñanza primaria*. Uteha. Méjico, 1944. Trad. de Manuel Gallardo.

(4) *Nuevo Plano Guía de Madrid*. Editorial Hernando, Madrid. Dibujado por Ramiro Vicente Mesonero y de 88 por 70 cm. de área.

A la vista de todos los posibles centros de experimentación, seleccionamos aquellos en los que efectivamente será realizada por un procedimiento al azar, basándonos en las tablas de Royo y Ferrer (5).

De esta manera conocemos las unidades escolares a que debemos asistir; pero, ya en ellas, ¿aplicaremos los tests a todos los sujetos? De ningún modo. La edad de los escolares es un factor que no debemos pasar por alto. Según Washburne (6) y sus colaboradores, que han tratado de precisar la edad mental más conveniente para la enseñanza de las diversas fases del cálculo, el aprendizaje de la adición de enteros requiere una edad intelectual mínima de seis años y cinco meses.

Algunos autores admiten esta opinión con reservas, puesto que Washburne considera un nivel mental «como mínimo cuando el 75 por 100 de tales alumnos logran un dominio de 80 por 100 en el aprendizaje experimentado».

De todas formas, y puesto que aquí tratamos de investigar sobre lo ya aprendido, consideramos como edades cronológicas significativas las de siete y ocho años, para verificar las operaciones de suma y resta, y de nueve y diez años las de multiplicación y división, eligiendo, como vemos, dos edades distintas para cada caso, con el fin de que los resultados sean más exactos.

Con todo, hemos de precisar el número de tests conveniente en la aplicación, considerando suficientemente representativo el de 60 para cada grupo, y teniendo en cuenta que éstos se diferencian por operaciones aritméticas, edades y sexos, resultando, por tanto, un total de 960 tests aproximadamente, de los que, mediante su aplicación y corrección, llegaremos a la

II. ELABORACIÓN CIENTÍFICA DE LOS RESULTADOS

Obtenidos éstos, queremos saber hasta qué punto se pueden considerar semejantes los distintos grupos de sujetos, para lo que aplicamos el criterio de *análisis de varianzas*, que consiste en la «suma de cuadrados de la diferencia entre las puntuaciones y las medias, dividido por los grados de libertad».

Para seguir este proceso de elaboración nos basamos en un artículo

(5) ROYO LÓPEZ, J., y FERRER MARTÍN, S.: *Tablas estadísticas*. Número aleatorios, errores de muestreo y distribución normal. Consejo Superior de Investigaciones Científicas. Instituto de Investigaciones Estadísticas. Madrid, 1954.

(6) WASHBURNE, S. H.: Cit. por Villarejo Mínguez, E. *Iniciación al cálculo aritmético*. Revista «Bordón», núm. 35. Marzo 1953.

del doctor Fernández Huerta (7) en el que se intenta obtener previamente la posible homogeneidad en medias y varianzas, mediante las tablas que presentamos a continuación:

ESTUDIO DE LA HOMOGENEIDAD DE MEDIAS

Origen de variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Cuadrado medio	F	Hipótesis

Se entiende por «grados de libertad» el número de grupos comparados, menos uno.

En cada caso, el valor de F (que resulta de dividir entre sí los dos cuadrados medios obtenidos) no excederá al valor de 4,74 (para los dos grados de libertad que hay en este caso), según las tablas de Snedecor (8).

Pasamos después al

ESTUDIO DE LA HOMOGENEIDAD DE VARIANZAS

G	n	n-1	1 : (n-1)	ΣX^2	S^2	log. S^2	(n-1) log. S^2

En donde G indica el número de grupos, n el de sujetos.

$$\Sigma X^2 = \Sigma X^2 - \frac{(\Sigma x)^2}{n} \quad \text{y} \quad S^2 = \frac{\Sigma X^2 - (\Sigma x)^2/n}{n}$$

Realizadas operaciones con los resultados obtenidos, el número final será menor de 9,210 para que la homogeneidad entre las varianzas se verifique, según Snedecor (9).

Siguiendo estos criterios señalados, vamos a resumir los resultados de todas las tablas que sea necesario utilizar.

(7) FERNÁNDEZ HUERTA, J.: *El diseño factorial 2 x 2 en la investigación psicodidáctica*. «Revista Española de Pedagogía», núm. 52. Octubre-diciembre 1955. Páginas 294 a 301.

(8) GUILFORD, J. P.: *Fundamental Statistics and Psychology and Pedagogy*. Second Edition. Tables adopted from Wallace, H. A. and Snedecor, W. Páginas 609 a 619.

(9) GUILFORD, J. P.: Op. cit., págs. 609 a 619.

S U M A

Niños

Siete años:

Homogeneidad de medias	Aceptada
Homogeneidad de varianzas	Aceptada

Ocho años:

Homogeneidad de medias	Aceptada
Homogeneidad de varianzas	Aceptada

Siete y ocho años:

Homogeneidad de medias	Aceptada
-------------------------------	----------

NIÑAS

Siete años:

Homogeneidad de medias	Rechazada
Homogeneidad de varianzas	Rechazada

Ocho años:

Homogeneidad de medias	Rechazada
Homogeneidad de varianzas	Rechazada

R E S T A

NIÑOS

Siete años:

Homogeneidad de medias	Aceptada
Homogeneidad de varianzas	Aceptada

Ocho años:

Homogeneidad de medias	Aceptada
Homogeneidad de varianzas	Rechazada

Siete y ocho años:

Homogeneidad de medias	Aceptada
-------------------------------	----------

N I Ñ A S

Siete años:

Homogeneidad de medias	Aceptada
Homogeneidad de varianzas	Aceptada

Ocho años:

Homogeneidad de medias	Rechazada
Homogeneidad de varianzas	Rechazada

MULTIPLICACION

N I Ñ O S

Nueve años:

Homogeneidad de medias	Rechazada
Homogeneidad de varianzas	Rechazada

Diez años:

Homogeneidad de medias	Aceptada
Homogeneidad de varianzas	Aceptada

N I Ñ A S

Nueve años:

Homogeneidad de medias	Rechazada
Homogeneidad de varianzas	Rechazada

Diez años:

Homogeneidad de medias	Rechazada
Homogeneidad de varianzas	Rechazada

DIVISION

N I Ñ O S

Nueve años:

Homogeneidad de medias	Aceptada
Homogeneidad de varianzas	Rechazada

Diez años:

Homogeneidad de medias	Aceptada
Homogeneidad de varianzas	Rechazada

Nueve y diez años:

Homogeneidad de medias	Aceptada
-------------------------------	----------

NIÑAS

Nueve años:

Homogeneidad de medias	Aceptada
Homogeneidad de varianzas	Aceptada

Diez años:

Homogeneidad de medias	Aceptada
Homogeneidad de varianzas	Aceptada

Nueve y diez años:

Homogeneidad de medias	Aceptada
-------------------------------	----------

NIÑOS Y NIÑAS

Nueve y diez años:

Homogeneidad de medias	Aceptada
-------------------------------	----------

La serie de tablas que acabamos de indicar se han realizado para tener un criterio de posible refundición entre todos los apartados. Así, obteniendo homogeneidad en medias y varianzas dentro de una edad en cada sexo, podemos formar un solo grupo con ambos si este criterio se repite al analizarlos en conjunto.

De esta manera, suponiendo que la homogeneidad se dé podríamos formar un grupo con la totalidad de resultados obtenidos en cada operación aritmética y entonces, indiferenciadas edades y sexos, se establece una tabla de valor general para cada caso en la que venga señalada una dificultad progresiva de las combinaciones.

Pero si resultan, como aquí, pequeñas heterogeneidades ¿podremos llegar a una agrupación total? Sí, a condición de que la diferencia de grupos no sea lo suficientemente significativa. Esto lo sabemos hallando la correlación (mediante la fórmula de rangos de Spearman:

$$r = 1 - \frac{6 d^2}{n(n-1)}$$
) entre la tabla general y las individualidades de cada sector. Obtenidas correlaciones satisfactorias, expongas a continuación

las tablas correspondientes con un carácter de validez general, como hemos deducido de todos los grupos experimentados:

TABLA DE SUMAS

0 + 0	2 + 2	1 + 6	1 + 5	1 + 2	4 + 4	1 + 8
1 + 7	2 + 6	3 + 3	1 + 1	3 + 5	4 + 4	1 + 2
0 + 7	6 + 1	5 + 1	1 + 4	2 + 1	0 + 5	4 + 1
0 + 3	2 + 5	6 + 2	3 + 1	3 + 2	3 + 4	0 + 1
0 + 4	2 + 7	0 + 6	0 + 8	0 + 9	2 + 3	7 + 1
5 + 2	4 + 2	0 + 2	8 + 1	4 + 2	4 + 5	3 + 6
7 + 2	1 + 0	6 + 3	5 + 4	3 + 0	4 + 0	5 + 3
6 + 0	9 + 0	8 + 0	5 + 0	2 + 0	2 + 9	7 + 0
9 + 2	3 + 7	2 + 8	3 + 9	7 + 3	6 + 6	1 + 9
7 + 4	8 + 3	7 + 7	4 + 8	8 + 2	3 + 8	4 + 7
4 + 9	9 + 9	9 + 1	5 + 7	6 + 5	5 + 5	8 + 8
8 + 4	6 + 7	4 + 6	9 + 4	5 + 6	5 + 0	6 + 4
9 + 3	9 + 5	7 + 9	6 + 8	6 + 9	7 + 6	8 + 5
9 + 7	5 + 8	8 + 7	7 + 8	8 + 9	9 + 6	
7 + 5	9 + 8					

TABLA DE RESTAS

0 - 0	4 - 4	6 - 3	8 - 4	9 - 9	5 - 5	3 - 1
2 - 1	5 - 2	5 - 3	8 - 8	4 - 3	8 - 6	6 - 6
3 - 3	7 - 5	4 - 4	7 - 7	7 - 4	3 - 2	8 - 1
5 - 0	4 - 1	10 - 5	12 - 6	6 - 4	7 - 6	6 - 1
7 - 1	7 - 3	9 - 4	9 - 1	16 - 8	6 - 2	14 - 7
1 - 1	2 - 2	5 - 4	6 - 5	4 - 0	8 - 7	9 - 9
8 - 5	8 - 2	7 - 0	8 - 3	1 - 0	5 - 1	3 - 0
8 - 0	6 - 0	7 - 2	2 - 0	9 - 6	10 - 1	10 - 3
9 - 5	9 - 2	9 - 3	11 - 9	18 - 9	9 - 7	11 - 8
10 - 9	11 - 5	10 - 2	10 - 7	17 - 8	10 - 8	14 - 6
15 - 7	13 - 9	12 - 4	10 - 4	13 - 6	10 - 6	12 - 8
13 - 5	12 - 9	11 - 3	15 - 6	11 - 6	14 - 9	12 - 7
12 - 5	13 - 7	11 - 7	11 - 4	13 - 8	11 - 2	17 - 9
15 - 9	13 - 4	12 - 3	15 - 8	14 - 5	16 - 9	17 - 9
16 - 7	14 - 8					

TABLA DE MULTIPLICACIONES

0 × 0	5 × 2	4 × 6	8 × 6	0 × 9
2 × 2	5 × 3	3 × 6	6 × 8	9 × 3
1 × 4	2 × 8	9 × 5	4 × 7	0 × 7
1 × 7	1 × 1	6 × 4	6 × 7	7 × 7
1 × 2	2 × 6	7 × 6	7 × 9	0 × 2
1 × 3	4 × 5	3 × 7	8 × 3	8 × 8
5 × 1	1 × 6	5 × 8	9 × 7	0 × 5
3 × 1	4 × 3	9 × 2	8 × 7	0 × 3
4 × 1	7 × 1	8 × 2	0 × 1	4 × 4
2 × 1	2 × 7	2 × 4	6 × 9	0 × 4
3 × 2	6 × 2	3 × 4	3 × 8	3 × 3
1 × 9	2 × 4	7 × 3	0 × 6	2 × 0
4 × 2	5 × 7	8 × 4	9 × 9	1 × 0
1 × 8	7 × 5	9 × 8	4 × 9	3 × 0
1 × 5	6 × 5	7 × 4	0 × 8	9 × 0
2 × 3	3 × 5	9 × 6	9 × 4	4 × 0
9 × 1	8 × 1	2 × 5	6 × 6	8 × 0
5 × 4	6 × 3	4 × 8	8 × 9	6 × 0
6 × 1	7 × 2	5 × 9	7 × 8	5 × 0
8 × 5	5 × 6	3 × 9	5 × 5	7 × 0

TABLA DE DIVISIONES

49 : 7	7 : 7	16 : 2	56 : 7	12 : 3
16 : 4	14 : 2	42 : 8	24 : 8	63 : 7
1 : 1	6 : 2	21 : 3	5 : 5	54 : 6
25 : 5	21 : 7	8 : 2	8 : 1	28 : 7
9 : 3	0 : 2	63 : 9	0 : 6	37 : 4
4 : 2	12 : 2	35 : 7	3 : 1	27 : 3
2 : 2	0 : 1	18 : 9	0 : 3	40 : 5
36 : 6	40 : 8	48 : 8	0 : 4	6 : 3
64 : 8	4 : 1	10 : 5	45 : 5	0 : 5
15 : 5	30 : 5	36 : 9	0 : 7	0 : 8
9 : 9	3 : 3	45 : 9	6 : 1	18 : 6
10 : 2	27 : 9	18 : 3	72 : 9	32 : 4
81 : 9	20 : 4	42 : 7	28 : 4	48 : 6
30 : 6	12 : 4	24 : 4	7 : 1	24 : 3
15 : 3	14 : 7	16 : 8	5 : 1	35 : 5
32 : 8	6 : 6	12 : 6	9 : 1	56 : 8
24 : 6	20 : 5	54 : 9	0 : 9	18 : 2
8 : 8	4 : 4	8 : 4	72 : 8	2 : 1

Tengamos en cuenta que las combinaciones correspondientes a cada una de las tablas vienen expresadas en una orden de dificultad ascendente, de manera que las más sencillas son las situadas antes en la lista.

De ellas hemos obtenido una serie de

CONCLUSIONES

I. En la referente a las sumas, resultan de una mayor facilidad aquellas que dan como resultado un número dígito.

II. La cifra 1, como sumando, facilita la operación.

III. El 0, como sumando, generalmente la complica.

IV. Dos adiciones compuestas de los mismos sumandos, ofrecen distinta dificultad cuando éstos se encuentran situados en diferente orden.

V. Suelen tener una mayor sencillez las restas que dan como resultado un número dígito.

VI. También resultan generalmente más sencillas aquellas que tienen por minuendo un número doble del situado en el sustraendo.

VII. Al restar un número de 9, la dificultad es mayor que si verificamos la operación de otro dígito cualquiera.

VIII. En la multiplicación, la intervención de la cifra 1 como factor facilita el producto.

IX. En cambio, cuando el 0 aparece en uno de ellos complica la operación, constituyendo la mayor fuente de errores en la multiplicación de números dígitos.

X. En cuanto a la división, el 1 situado en el divisor, suele producir dificultades.

XI. El mismo fenómeno ocurre con el 0 como dividendo.

INTERPRETACIONES DIDÁCTICAS

De lo expuesto se deduce que, vista la relativa facilidad que existe ante las operaciones realizadas con los números más bajos, ha de ser éste el primer escalón en la enseñanza de las mismas. Así, además de producir un aprendizaje más rápido, se motiva al niño para que entre con mayor interés en el conocimiento de aquellas compuestas con números elevados.

Por otra parte, y puesto que la presencia de ceros en la combinación suele dar un resultado erróneo, deducimos la necesidad de que el didacta aluda, al menos, al papel que desempeña esta cifra en las distintas operaciones.

Dada la relativa facilidad que existe para captar su significado, atri-

buiremos el error, en gran parte, a fallo didáctico, que es necesario corregir, sin descartar una cierta dificultad intrínseca en esta cifra.

De todo lo expuesto concluimos que las tablas y orden corrientemente usados para la enseñanza de las operaciones fundamentales de cálculo no son satisfactorios, habiendo de ser tenidas en cuenta las conclusiones del presente trabajo para facilitar el aprendizaje. Estableciendo en las tablas obtenidas dos grupos y realizando una enseñanza consecutiva de los mismos, los resultados habrían de ser más satisfactorios.

MARÍA ESTHER URÍA RODRÍGUEZ

Licenciada en Pedagogía