

**APROKSIMASI LUAS DAERAH ELIPS DENGAN MENGGUNAKAN
METODE CLENSHAW-CURTIS**



SKRIPSI

*Diajukan Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat Meraih Gelar Sarjana Jurusan
Matematika Pada Fakultas Sains Dan Teknologi Universitas Islam Negeri
Alauddin Makassar*

Oleh:

MUH. ALIF MIKAIL

NIM. 60600113033

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
ALAUDDIN
M A K A S S A R

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI ALAUDDIN MAKASSAR

2018

PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI

Dengan penuh kesadaran, penyusun yang bertanda tangan di bawah ini menyatakan bahwa skripsi ini benar adalah hasil karya penyusun sendiri. Jika di kemudian hari terbukti bahwa ia merupakan duplikat, atau dibuat oleh orang lain sebagian atau seluruhnya, kecuali yang telah disebutkan dalam kutipan dan daftar pustaka, maka skripsi dan gelar yang diperoleh karenanya batal demi hukum.

Gowa, Agustus 2018
Penyusun,

Muh. Alif Mikail
NIM: 60600113033



UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
ALAUDDIN
M A K A S S A R

PENGESAHAN SKRIPSI

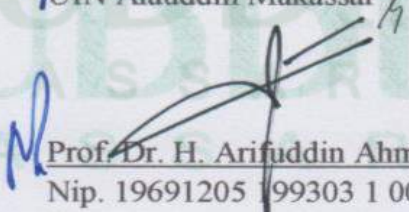
Skripsi yang berjudul “Aproksimasi Luas Daerah Elips dengan Menggunakan Metode Clenshaw-Curtis”, yang disusun oleh Saudara **Muh. Alif Mikail**, Nim: **60600113033** Mahasiswa Jurusan Matematika pada Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Alauddin Makassar, telah diuji dan dipertahankan dalam sidang *munaqasyah* yang diselenggarakan pada hari Selasa tanggal **14 Agustus 2018 M**, bertepatan dengan **02 Dzulhijjah 1439 H**, dinyatakan telah dapat diterima sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Matematika (S.Mat.).

Makassar, 14 Agustus 2018 M
02 Dzulhijjah 1439 H

DEWAN PENGUJI

Ketua	: Prof. Dr. H. Arifuddin Ahmad, M.Ag.	(.....)
Sekretaris	: Ermawati, S.Pd., M.Si.	(.....)
Munaqisy I	: Risnawati Ibbas, S.Si., M.Si.	(.....)
Munaqisy II	: Adnan Sauddin, S.Pd., M.Si.	(.....)
Pembimbing I	: Wahidah Alwi, S.Si., M.Si.	(.....)
Pembimbing II	: Nur Aeni, S.Si., M.Pd.	(.....)

Diketahui oleh:
Dekan Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Alauddin Makassar


Prof. Dr. H. Arifuddin Ahmad, M.Ag
Nip. 19691205 199303 1 001

MOTTO DAN PERSEMBAHAN

Motto

“Dunia ibarat biskuit kaleng. Jangan hanya memakan biskuit-biskuit yang kamu suka nanti yang tersisa biskuit-biskuit yang tidak kamu suka. Sisakanlah 1 biskuit yang paling kamu suka di akhir.”

“Kita tidak benar-benar paham sampai kita bisa menjelaskan dengan bahasa yang lebih sederhana.” Albert Einstein.

Puji Syukur

Allah Swt

Terima Kasih

Keluarga, SIGMA 2013, LBB Gadjahmada dan HMJ-Matematika

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
ALAUDDIN
M A K A S S A R

KATA PENGANTAR



Segala puji dan syukur bagi Allah swt. Tuhan semesta alam, atas segala nikmat iman dan nikmat kesehatan serta Rahmat-Nyalah sehingga skripsi yang berjudul **“Aproksimasi Luas Daerah Elips dengan Menggunakan Metode Clenshaw-Curtis”** dapat diselesaikan. Salam dan shalawat dicurahkan kepada Rasulullah Muhammad SAW. beserta para keluarga, sahabat dan para pengikutnya hingga akhir zaman yang senantiasa istiqamah dijalan-Nya.

Penyusunan skripsi ini dimaksudkan untuk memperoleh gelar sarjana Matematika (S.Mat) pada Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Alauddin Makassar. Untuk itu, penulis menyusun skripsi ini dengan mengerahkan semua ilmu yang telah diperoleh selama proses perkuliahan. Tidak sedikit hambatan dan tantangan yang penulis hadapi dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini.

Dalam menyelesaikan Skripsi ini penulis tidak dapat menyelesaikan tugas akhir ini dengan sendiri, melainkan berkat bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu dengan segenap ketulusan hati penulis mengucapkan terima kasih sedalam – dalamnya kepada:

Allah SWT yang telah melimpahkan Rahmat dan Karunia-Nya sehingga skripsi ini dapat terselesaikan, Ibundaku tersayang Nurbaya, Ayahanda yang tercinta Bese Nyampa, serta ketiga saudaraku tersayang Rosdiana, Herlina dan Kasmawati

yang senantiasa telah mendo'akan dan selalu setia memberikan bantuan serta semangat selama proses penelitian dan penyusunan skripsi ini.

Penulis tak lupa pula untuk mengucapkan terima kasih yang setinggi-tingginya kepada:

1. Bapak **Prof. Dr. Musafir Pabbari, M.Si.** Rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Alauddin Makassar.
2. Bapak **Prof. Dr. H. Arifuddin, M.Ag.** Dekan Fakultas Sains Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Alauddin Makassar.
3. Bapak **Irwan, S.Si., M.Si.** selaku Ketua Jurusan dan ibu **Wahidah Alwi, S.Si., M.Si.** selaku Sekertaris Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Alauddin Makassar
4. Ibu **Wahidah Alwi, S.Si., M.Si.** sebagai Pembimbing I dan Bapak **Nur Aeni, S.Si, M.Pd.** Pembimbing II yang telah meluangkan waktu dan pikiran untuk bimbingan dan arahnya.
5. Ibu **Risnawati Ibtnas, S.Si., M.Si.** Penguji I, Bapak **Adnan Sauddin, S.Pd., M.Si.** Penguji II atas semua bimbingan serta nasehat yang diberikan.
6. **Seluruh dosen, staf dan karyawan** Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi yang telah membekali pengetahuan, bimbingan dan arahan selama ini.
7. Keluarga besar dari bapak dan mama terima kasih untuk doa, semangat dan nasehat yang diberikan.

8. Keluarga besar **Himpunan Mahasiswa Jurusan Matematika (HMJ-Matematika) UIN Alauddin Makassar** yang telah memberikan pengalaman yang berharga.
9. Sahabat tercinta **Kelas B angkatan 2013**, yang sudah menemani hari-hari yang lelah ini dan memberikan bantuan dalam menyelesaikan skripsi ini. Terkhusus Atep, Asrul, Mimin, Sule, geng hafiz, sarjana hafiz dan yang belum hafiz.
10. Teman-teman **SIGMA** angkatan 2013 terima kasih atas semangat yang telah diberikan.
11. Untuk **Senior-senior** yang telah mengajarkan begitu banyak pengalaman yang sangat berharga dalam membimbing penulis untuk menjadi mahasiswa yang idealis.
12. Teman-teman **“Macanre Bermartabat”**, **“Kebo Bersahaja”** dan geng **“Hoax”** yang selalu memberikan dukungan dan motivasi selama penyusunan skripsi ini.
13. Tentor-tentor Gadjahmada, terkhusus Kak Ucup, Kak Emma, Kak Usi, Kak Ardi, Kak Nia, Fiyan, Kak Risty, Haula, Kak Amma, Kak Aam, Puput, dan semuanya.
14. Untuk barisan para mantan dan yang pernah mengakui sebagai teman dekat. Para Fans dan haters.
15. Untuk Dg. Puji yang selalu menawarkan minuman dinginnya dikala tenggorokan terasa haus. Mas Baim dan semua penghuni gedung C dan seluruh penjaga Kafetaria.

16. Kepada semua pihak yang tidak sempat penulis tuliskan satu persatu dan telah memberikan kontribusi secara langsung maupun tidak langsung dalam penyelesaian studi, penulis mengucapkan banyak terima kasih atas bantuannya.

Akhirnya sebagai usaha manusiawi, penulis menyadari sepenuhnya skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan, sehingga penulis dengan senang hati membuka diri untuk menerima segala kritikan dan saran yang bersifat membangun guna memberikan kontribusi untuk perkembangan ilmu pengetahuan serta bermanfaat bagi masyarakat luas, para pembaca dan khususnya bagi pribadi penulis. semoga segala kerja keras dan doa dari segala pihak mendapat balasan dari sang pencipta. aamiin ya rabbal alamiin..

Gowa, Agustus 2018

Penulis,

Muh. Alif Mikail
NIM. 60600113033

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
ALAUDDIN
M A K A S S A R

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI	ii
PENGESAHAN SKRIPSI	iii
MOTTO DAN PERSEMBAHAN.....	iv
KATA PENGANTAR	v
DAFTAR ISI	ix
DAFTAR TABEL.....	xi
DAFTAR GAMBAR.....	xii
ABSTRAK.....	xii
BAB I PENDAHULUAN	1
A. Latar Belakang	1
B. Rumusan Masalah	5
C. Tujuan Penelitian	6
D. Batasan Masalah	6
E. Manfaat Penulisan	6
F. Sistematika Penulisan	6
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	8
A. Konstruksi Elips	8
B. Deret Fourier	9
C. Polinom Chebyshev	12
D. Kuaratur Gauss	15
E. Kuadratur Celenshaw-curtis.....	19
BAB III METODOLOGI PENELITIAN	35
A. Jenis Penelitian.....	35
B. Waktu Penelitian.....	35
C. Prosedur Penelitian.....	35

BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN.....	40
A. Hasil Penelitian.....	40
B. Pembahasan.....	68
BAB V PENUTUP.....	71
A. Kesimpulan.....	71
B. Saran.....	71
LAMPIRAN	
DAFTAR PUSTAKA	
BIOGRAFI	



DAFTAR TABEL

Tabel 4.1: Luas daerah secara analitik.....14

**Tabel 4.2: Luas Daerah Elips Secara Analitik Dan Menggunakan Metode
Clenshaw-Curtis Untuk $N=4$ Sampai $N=30$17**



DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1: Elips dengan pusat di O	7
Gambar 2.2: Elips dengan titik fokus di $(0,c)$ dan $(0,-c)$.....	9
Gambar 2.3: Karakteristik utama kurva elips.....	9



ABSTRAK

Nama : Muh. Alif Mikail
Nim : 60600113033
Judul : Aproksimasi Luas Daerah Elips Dengan Menggunakan Metode Clenshaw-Curtis.

Geometri sangat erat kaitannya dalam permasalahan kehidupan sehari-hari. Salah satu bentuk penerapan geometri dalam kehidupan sehari-hari adalah pengukuran luas daerah. Mengukur luas daerah berguna untuk membatasi daerah yang menjadi objek pembicaraan. Bentuk elips pada orbit planet adalah salah satu contoh penerapan geometri. Mengetahui luas daerah yang dibatasi orbit adalah cara yang tepat untuk mengetahui daerah yang dipengaruhi gaya gravitasi. Tujuan dari penelitian ini untuk mendapatkan besar tingkat akurasi metode Clenshaw–Curtis dalam menyelesaikan kasus luas daerah elips. Metode Clenshaw-Curtis sendiri adalah hasil modifikasi dari metode sebelumnya yakni metode Fejer yang mengembangkan fungsi integrand mengikuti polinom Chebyshev. Hasil penelitian ini menunjukkan tingkat akurasi metode Clenshaw-curtis diatas 98% dari luas daerah secara analitik.

Kata Kunci: Aproksimasi, Clenshaw-Curtis, Geometri, Numerik.

BAB I

PENDAHULUAN

2.1. Latar Belakang

Cabang ilmu matematika yang berkaitan dengan pengukuran yakni geometri sangat erat kaitannya dalam permasalahan kehidupan sehari-hari. Salah satu bentuk penerapan geometri dalam kehidupan sehari-hari adalah pengukuran luas daerah. Mengukur luas daerah berguna untuk membatasi daerah yang menjadi objek pembicaraan.

Allah SWT. telah memberikan isyarat, dalam Al-Qur'an, surah Ar-Rad (13:41):

أَوَلَمْ يَرَوْا أَنَّا نَأْتِي الْأَرْضَ نَنْقُصُهَا مِنْ أَطْرَافِهَا وَاللَّهُ يَحْكُمُ لَا مُعْتَبَئَ لِحُكْمِهِمْ وَهُوَ سَرِيعُ الْحِسَابِ ﴿٤١﴾

Terjemahnya:

“Dan apakah mereka tidak melihat bahwa sesungguhnya Kami mendatangi daerah-daerah (orang-orang kafir), lalu Kami kurangi daerah-daerah itu (sedikit demi sedikit) dari tepi-tepinya? Dan Allah menetapkan hukum (menurut kehendak-Nya), tidak ada yang dapat menolak ketetapan-Nya; dan Dialah Yang Maha cepat hisab-Nya.”¹

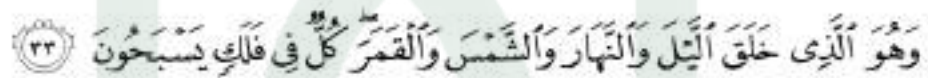
Ayat diatas menjelaskan tentang kemenangan nabi Muhammad SAW dalam menaklukkan daerah-daerah yang dikuasai oleh orang-orang kafir. Ini menunjukkan

¹ Departemen Agama RI Al-Hikmah, *Al-Qur'an dan Terjemahannya* (Bandung: Diponegoro, 2008), h. 376

bahwa Allah SWT mengisyaratkan salah satu penggunaan luas daerah adalah membatasi daerah yang menjadi objek pembicaraan.

Bentuk elips menjadi salah satu bentuk yang berperan penting dalam kehidupan sehari-hari, khususnya dibidang Astronomi. Bentuk elips sangat erat kaitannya dengan sistem tata surya. Bentuk elips pertama kali diperkenalkan oleh Johannes Kepler, pada penemuannya terhadap orbit planet-planet di sistem tata surya. Johannes Kepler menemukan bahwa orbit dari planet dalam tata surya berbentuk elips dan bukan lingkaran atau episiklus seperti semula yang dipercaya.

Allah SWT. telah memberikan isyarat, dalam Al-Qur'an, surah Al-Anbiya (21:33):



Terjemahnya:

“Dan Dialah yang telah menciptakan malam dan siang, matahari dan bulan. Masing-masing dari keduanya itu beredar di dalam garis edarnya.”²

Ayat diatas menjelaskan bahwa penemuan Johannes Kepler tentang orbit yakni garis edar pada sistem tata surya.

Orbit yang berbentuk elips tersebut adalah jalur yang dilalui oleh objek disekitar objek lainnya akibat pengaruh gaya gravitasi. Pengaruh tersebut menunjukkan bahwa daerah yang dikelilingi oleh orbit yang berbentuk elips

² Departemen Agama RI Al-Hikmah, *Al-Qur'an dan Terjemahannya* (Bandung: Diponegoro, 2008), h. 499

merupakan daerah dengan gaya gravitasi yang kuat. Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa dengan memanfaatkan luas daerah yang dikelilingi oleh orbit yang berbentuk elips maka akan diperoleh luas daerah yang memiliki gaya gravitasi yang kuat.

Elips merupakan bidang irisan kerucut yang menyerupai lingkaran yang telah dipanjangkan ke satu arah. Secara geometrik, luas daerah elips ditentukan dari tiga faktor utama yakni, jarak dua titik terpanjang (Mayor), jarak dua titik terpendek (Minor) dan nilai ketetapan π (*phi*). Dari ketiga faktor tersebut, aproksimasi nilai ketetapan π (*phi*) menjadi pembeda dalam penyelesaian kasus luas daerah untuk berbagai bentuk bangun dimensi dua yang lain.

Elips diinterpretasikan dengan menggunakan persamaan $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$. Pembentukan persamaan elips yang kompleks menyebabkan permasalahan luas daerah elips harus diselesaikan dengan metode analitik tertentu.

Integral merupakan salah satu metode analitik yang digunakan dalam penyelesaian luas daerah. Persoalan integral banyak ditemukan dalam sains dan rekayasa. Untuk persoalan integral yang rumit dibutuhkan cara numerik untuk menyelesaikannya.

Persoalan integrasi numerik adalah menghitung secara numerik integral $I = \int_a^b f(x)dx$ yang dalam hal ini a dan b diketahui dan $f(x)$ adalah fungsi yang diberikan, baik secara eksplisit dalam bentuk persamaan maupun secara empirik dalam bentuk tabel nilai.

Penelitian terus dilakukan oleh para ahli numerik untuk menemukan metode yang lebih presisi dan akurat dari yang sudah ada sebelumnya. Oleh karena itu, banyak metode dengan berbagai pendekatan yang berbeda untuk menentukan persoalan integral menggunakan numerik. Salah satu pendekatan metode numerik adalah berdasarkan tafsiran geometri integral tentu. Daerah integrasi dihampiri dengan luas seluruh trapesium. Aturan ini dinamakan metode trapesium. Pendekatan lain adalah berdasarkan polinom interpolasi. Pada pendekatan ini, fungsi *integrand* $f(x)$ dihampiri dengan polinom $P_n(x)$. Selanjutnya, integrasi dilakukan terhadap $P_n(x)$ karena suku-suku polinom lebih mudah untuk diintegrasikan. Aturan ini disebut metode Newton-Cotes. Pendekatan lain yang dilakukan adalah dengan menghilangkan batasan-batasan yang terdapat pada metode Newton-Cotes. Metode ini tidak perlu menentukan titik-titik farik yang berjarak sama seperti pada metode-metode sebelumnya, tetapi nilai integrasi numerik cukup diperoleh dengan menghitung nilai fungsi $f(x)$ pada beberapa titik tertentu. Metode ini dikembangkan oleh Gauss dan dinamakan kuadratur Gauss. Satu lagi pendekatan lain dilakukan oleh Clenshaw dan Curtis, yang dinamakan kuadratur Clenshaw-Curtis. Setiap metode masing-masing memiliki kekurangan dan kelebihan tersendiri, terutama jika dilihat dari kemangkusan algoritma dan ketepatan solusi yang dihasilkan.

Metode Gauss adalah metode numerik yang sangat sering digunakan untuk mengaproksimasi luas daerah bidang datar. Terdapat satu lagi metode numerik yang digunakan yakni metode Clenshaw-Curtis. Metode Clenshaw-Curtis adalah metode

yang jarang digunakan, namun ternyata memiliki tingkat presisi dan kemangkusan yang cukup tinggi.³

Metode Romberg juga merupakan metode yang sering dipakai dalam menentukan luasan daerah bidang datar. Namun, metode Clenshaw-Curtis memiliki tingkat akurasi yang lebih baik dari metode Romberg.⁴

Metode Clenshaw-Curtis sendiri adalah hasil modifikasi dari metode sebelumnya yakni metode Fejer yang didasarkan pada perluasan atau pengembangan fungsi integrand mengikuti polinom Chebyshev. Dan mengakibatkan metode ini memiliki tingkat konvergensi yang cukup cepat.⁵

Berdasarkan uraian diatas dapat disimpulkan bahwa penelitian ini dimaksudkan untuk mendapatkan besar tingkat akurasi metode Clenshaw-Curtis dalam penyelesaian kasus luas daerah elips.

2.2. Rumusan Masalah

Rumusan masalah dari penelitian ini adalah seberapa besar tingkat akurasi metode Clenshaw-Curtis dalam menyelesaikan kasus luas daerah elips?

³ M. Pasca Nugraha, "Perbandingan Metode Gauss-Legendre dan Metode Clenshaw-Curtis untuk Mencari Solusi Permasalahan Integral." Jurnal (Institut Teknologi Bandung_2011)

⁴ O Hara dan Francis Smith, "Error Estimation in the Clenshaw-Curtis Formula." Jurnal (Oxford University_1967)

⁵ Jeffrey Michael Bardon, *A Modified Clenshaw-Curtis Algorithm* (Worcester: Worcester Polytechnic Institute, 2013), h. 9

2.3. Tujuan

Tujuan dari penelitian ini mendapatkan besar tingkat akurasi metode Clenshaw–Curtis dalam menyelesaikan kasus luas daerah elips.

2.4. Batasan Masalah

Batasan masalah pada penelitian ini adalah:

1. Luas daerah untuk kurva elips pada pusat $O(0,0)$ horizontal.
2. Luas daerah untuk kurva elips pada pusat $O(0,0)$ vertikal.
3. Luas daerah untuk kurva elips pada pusat $P(p, q)$ horizontal.
4. Luas daerah untuk kurva elips pada pusat $P(p, q)$ vertikal.
5. *Frekuensi Nyquist* (Frekuensi sampel) $N = [4,30]$

2.5. Manfaat Penelitian

Manfaat yang diperoleh dari penelitian ini antara lain sebagai berikut:

1. Bagi peneliti : Untuk memperdalam dan memperluas pengetahuan penulis tentang metode numerik khususnya metode Clenshaw-Curtis.
2. Bagi pengembangan ilmu pengetahuan : Agar dapat dijadikan sebagai sarana informasi atau bahan studi kedepannya bagi pembaca dan acuan atau referensi bagi pihak perpustakaan.

2.6. Sistematika Penulisan

Secara garis besar, sistematika penulisan draft penelitian ini adalah sebagai berikut :

Bab I Pendahuluan

Berisi latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, mafaat penelitian, batasan masalah dan sistematika penulisan.

Bab II Tinjauan Pustaka

Berisi konstruksi elips, deret Fourier, polinom Chebyshev, kuadratur Gauss dan kuadratur Clenshaw-Curtis.

Bab III Metodologi Penelitian

Berisi jenis penelitian, waktu penelitian dan prosedur penelitian.

Bab IV Hasil dan Pembahasan

Berisi hasil penelitian dan pembahasan hasil penelitian.

Bab V Kesimpulan dan Saran

Berisi kesimpulan dari hasil penelitian dan saran untuk pengembang.

Daftar Pustaka

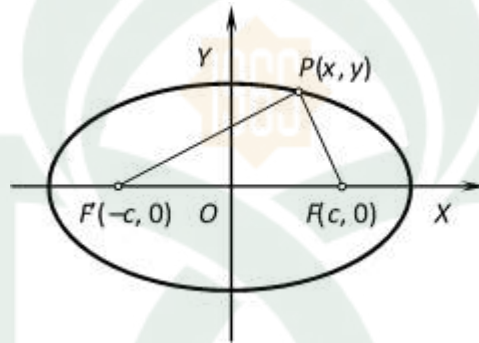


BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Konstruksi Elips

Elips adalah tempat kedudukan suatu titik dalam bidang yang jumlah jarak dari dua titik tetap pada bidang adalah konstan. Setiap titik yang tetap tersebut disebut titik fokus.⁶



Gambar 2.4: Elips dengan pusat di O

Konstruksi persamaan kurva elips, dimisalkan kedua fokus berada pada sumbu- x dan sumbu- y menjadi bisektor tegak lurus segmen yang menghubungkan kedua fokus. Misalkan jarak antara kedua fokus adalah $2c$, sehingga titik fokusnya adalah $F(c, 0)$ dan $F'(-c, 0)$.

Jika $P(x, y)$ adalah sembarang titik yang berada pada elips, maka menurut definisi akan berlaku

$$PF + PF' = \text{konstan} \quad (2.1)$$

⁶ Try Azisah Nurman, *Geometri Analitik Bidang Dan Ruang* (Makassar: Universitas Islam Negeri Alauddin, 2012), h. 60

Dan apabila dimisalkan konstanta tertentu itu adalah $2a$, maka dengan menggunakan rumus jarak untuk menyatakan PF dan PF' diperoleh:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 2a \\ \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \\ x^2 - 2cx + c^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2 \\ 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 4a^2 + 4cx \\ \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= a + \frac{cx}{a} \\ x^2 + 2cx + c^2 + y^2 &= a^2 + 2cx + \frac{c^2x^2}{a^2} \\ \frac{a^2 - c^2}{a^2}x^2 + y^2 &= a^2 - c^2 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} &= 1 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Segitiga $F'PF$ dengan titik-titik sudut $(-c, 0)$, $(c, 0)$, dan (x, y) salah satu sisinya mempunyai panjang $2c$. Sedangkan jumlah dua sisi yang lain adalah $2a$. Jadi, diperoleh $2a > 2c$, $a > c$, $a^2 > c^2$ dan $a^2 - c^2 > 0$.

Karena $a^2 - c^2$ adalah positif, maka diperoleh persamaan baru :

$$b^2 = a^2 - c^2 \tag{2.3}$$

Ini juga berarti bahwa $b < a$.

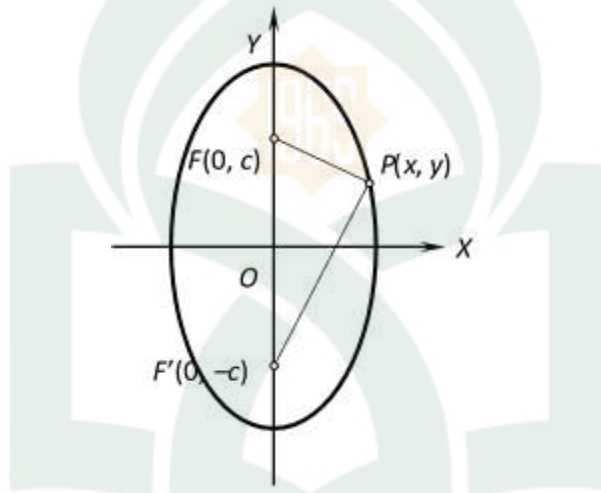
Jika persamaan (2.3) disubstitusikan ke persamaan (2.2) maka akan diperoleh persamaan:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2.4)$$

Persamaan (2.4) di atas disebut *persamaan elips bentuk baku*.⁷

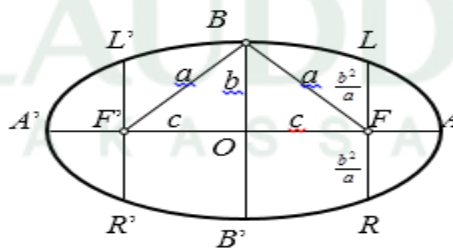
Jika fokus elips adalah titik-titik $(0, c)$ dan $(0, -c)$ yang berada di sumbu-
y maka persamaan elips bentuk baku adalah

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad (2.5)$$



Gambar 5.2: Elips dengan titik fokus di $(0, c)$ dan $(0, -c)$

Dalam hal ini bilangan yang lebih besar adalah berada di bawah suku y^2 .



Gambar 2.6: Karakteristik utama kurva elips

⁷ Edwin J. Purcell dkk, *Kalkulus dan Geometri Analitis Edisi Keempat* (Jakarta: Erlangga, 2003), h. 71

Grafik yang terbentuk dari persamaan (2.4), adalah simetris dengan sumbu- x dan sumbu- y . Selanjutnya grafik memotong sumbu- x di titik $(a,0)$ dan $(-a, 0)$, dan memotong sumbu- y di titik $(0, b)$ dan $(0, -b)$.

Garis yang melalui kedua fokus dinamakan sumbu utama elips. Untuk elips dengan persamaan (2.4), sumbu- x menjadi sumbu utama elips. Titik potong elips dengan sumbu utamanya disebut puncak. Jadi, untuk elips dalam persamaan (2.4), puncaknya adalah $A(a, 0)$ dan $A'(-a, 0)$. Titik pada sumbu utama yang terletak di tengah-tengah kedua puncak elips dinamakan pusat elips. Pusat elips dengan bentuk persamaan (2.4) adalah berimpit dengan titik asal. Segmen garis yang menghubungkan kedua puncak disebut sumbu mayor (sumbu panjang) elips dengan panjang $2a$ satuan, dan diperoleh kesimpulan bahwa a adalah satuan panjang setengah panjang sumbu mayor. Pada elips ini segmen garis yang menghubungkan titik potong elips dengan sumbu- y yaitu titik $(0, b)$ dan $(0, -b)$ disebut sumbu minor (sumbu pendek) elips. Panjang sumbu minor adalah $2b$ satuan, sehingga b adalah satuan panjang setengah sumbu minor. Titik-titik tetap F dan F' terletak pada sumbu mayor dan disebut fokus, sebagaimana telah disebutkan pada definisi, adalah berjarak c dari pusat elips.

Karakteristik dari elips dengan persamaan (2.5) secara essensial adalah sama. Pada kenyataannya, elips dengan bentuk persamaan (2.4) dan (2.5) adalah identik dalam bentuk dan ukuran, hanya berbeda dalam posisi.

Karena titik B pada elips, maka jumlah jarak dari kedua fokus adalah $2a$ yaitu $BF + BF' = 2a$. Akan tetapi, B berada pada bisektor tegak lurus dari FF' , hal ini

berarti berjarak sama dari F dan F' yaitu $BF = BF' = a$. Hal ini memungkinkan untuk memberikan interpretasi geometris pada persamaan (2.4). Pada gambar (2.3), terlihat bahwa a adalah sisi miring sedangkan b dan c adalah sisi-sisi dari segitiga siku-siku BOF .

Tali busur yang melalui salah satu fokus dan tegak lurus dengan sumbu mayor disebut latus rektum. Sedangkan, titik potong latus rektum dengan elips disebut latera rekta. Untuk mencari panjang latus rektum diberikan nilai $x = c = \sqrt{a^2 - b^2}$ pada persamaan (2.4) dan dengan menyelesaikan persamaan untuk y diperoleh $y = \frac{b^2}{a}$. Jadi, latera rekta elips (2.4) adalah $L\left(c, \frac{b^2}{a}\right)$ dan $R\left(c, -\frac{b^2}{a}\right)$ sehingga *panjang latus rektum ellips adalah $\frac{2b^2}{a}$* . Jika panjang setengah latus rektum dinotasikan dengan l maka:

$$l = \frac{b^2}{a} \tag{2.6}$$

Sebuah elips dapat dibuat sketsa grafiknya secara kasar dengan memperhatikan ujung-ujung sumbu mayor dan minor dan ujung latus rektum, dengan menggunakan kenyataan bahwa grafiknya simetrik terhadap kedua sumbu.⁸

Persamaan elips dengan pusat $P(p, q)$ secara implisit dituliskan sebagai:

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1 \tag{2.7}$$

Akan diubah kedalam bentuk eksplisit

$$\frac{(y-q)^2}{b^2} = 1 - \frac{(x-p)^2}{a^2}$$

⁸James Stewart, *Kalkulus Edisi Keempat* (Jakarta: Erlangga, 2003), h.109-110

$$(y - q)^2 = b^2 - \frac{b^2(x-p)^2}{a^2}$$

$$y - q = \sqrt{b^2 - \frac{b^2(x-p)^2}{a^2}}$$

$$y - q = \sqrt{\frac{b^2 a^2 - b^2(x-p)^2}{a^2}}$$

$$y - q = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - (x-p)^2}$$

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}. \quad (2.8)$$

Luas daerah elips secara analitik dapat diperoleh dengan menggunakan integral tentu untuk persamaan elips pada titik pusat $O(0,0)$, Karena elips memiliki simetri lipat pada titik O . Artinya, jika diperoleh luas daerah pada kuadran I maka luas elips sama dengan 4 kali luas kurva pada kuadran I dan diperoleh batas bawah 0 dan batas atas a .

$$I = \int_a^b f(x) dx \quad (2.9)$$

$$I = 4 \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - (x)^2} dx \quad (2.10)$$

$$x = a \sin \theta$$

$$dx = a \cos \theta d\theta$$

$$I = \frac{4b}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - (a \sin \theta)^2} a \cos \theta d\theta$$

$$I = \frac{4b}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2(1 - \sin^2 \theta)} a \cos \theta d\theta$$

$$I = 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta$$

$$I = 2ab \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2\theta) d\theta$$

$$I = 2ab \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\pi/2}$$

$$I = 2ab \left(\left[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \sin 2 \left(\frac{\pi}{2} \right) \right] - \left[0 + \frac{1}{2} \sin 2(0) \right] \right)$$

$$I = 2ab \left(\frac{\pi}{2} + 0 \right)$$

$$I = \pi ab \tag{2.11}$$

2.2. Deret Fourier

Sebuah deret dikatakan deret Fourier, jika hasil penghampiran fungsi periodik dimana komponen dari deret itu berupa fungsi kosinus atau sinus.⁹

$F(x)$ dikatakan deret Fourier jika memenuhi kondisi-kondisi yang berikut:

- $F(x)$ didefinisikan dalam interval $c < x < c + 2l$
- $F(x)$ dan $F'(x)$ kontinu secara bagian-bagian dalam $c < x < c + 2l$
- $F(x + 2l) = F(x)$, yakni $F(x)$ periodik dengan periode $2l$

Maka ditiap-tiap titik kontinuitas, diperoleh:

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) \tag{2.12}$$

Dimana,

$$a_n = \frac{1}{l} \int_c^{c+2l} F(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \tag{2.13}$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_c^{c+2l} F(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \tag{2.14}$$

Sebuah titik diskontinuitas, ruas kiri dari (6) digantikan oleh $\frac{1}{2} \{F(x + 0) + F(x - 0)\}$, yakni nilai rata-rata diskontinuitas.¹⁰

⁹ Bambang Murdeka, *Matematika* (Yogyakarta: Andi, 2011), h.255

¹⁰ Murray Spiegel, *Kalkulus Lanjut Edisi Kedua* (Jakarta: Erlangga, 2006) h. 268

2.3. Polinom Chebyshev

Polinomial Chebyshev, yang diberi nama oleh Pafnuty Chebyshev, merupakan suatu deret dari suku banyak ortogonal yang dapat dituliskan secara rekursif.¹¹

Jenis polinom Chebyshev antara lain sebagai berikut:

a. Polinomial Jenis Pertama

Sebuah polinomial $T_n(x)$ adalah polinomial Chebyshev jenis pertama dalam x dan berderajat n , didefinisikan sebagai:

$$T_n(x) = \cos n\theta \text{ untuk } x = \cos\theta \quad (2.15)$$

b. Polinomial Jenis Kedua

Sebuah polinomial $U_n(x)$ adalah polinomial Chebyshev jenis kedua dalam x dan berderajat n , didefinisikan sebagai:

$$U_n(x) = \frac{\sin (n+1)\theta}{\sin \theta} \text{ untuk } x = \cos\theta \quad (2.16)$$

c. Polinomial Jenis Ketiga

Sebuah polinomial $V_n(x)$ adalah polinomial Chebyshev jenis ketiga dalam x dan berderajat n , didefinisikan sebagai:

$$V_n(x) = \frac{\cos \left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{\cos \frac{1}{2}\theta} \text{ untuk } x = \cos \theta \quad (2.17)$$

¹¹Yuli Safitri, "Metode Iterasi Keluarga Chebyshev-Halley untuk menyelesaikan persamaan nonlinear." Skripsi (Riau: FMIPA Universitas Riau_2010)

d. Polinomial Jenis Keempat

Sebuah polinomial $W_n(x)$ adalah polinomial Chebyshev jenis keempat dalam x dan berderajat n , didefinisikan sebagai:

$$W_n(x) = \frac{\sin\left(n\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\frac{\theta}{2}} \text{ untuk } x = \cos \theta \quad (2.18)$$

Polinomial Chebyshev sangat berperan penting dalam penyelesaian kasus numerik.¹²

2.4. Kuadratur Gauss

Fungsi dan data tertabulasi adalah syarat integrasi numerik dalam aturan trapesium dan Simpson. Metode Gauss sendiri hanya dapat digunakan untuk mengintegalkan fungsi. Pada aturan trapesium, integrasi dilakukan dengan menghitung luasan di bawah garis lurus yang menghubungkan nilai-nilai fungsi dari titik ujung atau batas integrasi. Rumus untuk aturan trapesium adalah:

$$I = (b - a) \cdot \frac{f(a) + f(b)}{2} \quad (2.19)$$

dengan a dan b adalah batas integrasi sedangkan $(b - a)$ adalah lebar selang.¹³

Metode kuadratur Gauss sendiri dihitung luas di bawah garis lurus yang menghubungkan dua titik sembarang pada kurva. Dengan menetapkan posisi dari kedua titik tersebut secara bebas maka dapat dibuat garis lurus yang dapat

¹² Mason dan Handsome, *Chebyshev Polynomials* (Washington: CRC, 2003), h.12

¹³ John Mathews dan Kurtis Fink, *Numerical Methods Using Matlab Fourth Edition* (California: CSU, 1999), h. 399

menyeimbangkan antara *error* positif dan negatif. Dalam aturan trapesium persamaan integrasi dapat ditulis:

$$I = c_1 f(a) + c_2 f(b) \quad (2.20)$$

dengan c_1 dan c_2 adalah koefisien yang harus dicari. Sedangkan, pada metode Gauss dapat ditulis:

$$I = c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) \quad (2.21)$$

Dalam hal ini variabel x_1 dan x_2 adalah tidak tetap dan akan dicari.¹⁴

Kuadratur Gauss memberikan suatu prosedur pemilihan titik-titik $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ pada interval $[a, b]$ dan konstanta $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ untuk meminimumkan galat hampiran.

$$\int_a^b f(x) \approx \sum_{i=1}^n c_i f(x_i) \quad (2.22)$$

untuk sebarang fungsi $f(x)$. Nilai-nilai x_i dikenal sebagai absis dan nilai-nilai c_i dikenal sebagai bobot. Nilai-nilai ini dihitung dengan menggunakan polinomial Legendre.

Polinomial Legendre berderajat n didefinisikan sebagai:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d}{dx^n} (x^2 - 1)^n \text{ dengan } P_0(x) = 1 \quad (2.23)$$

Dalam rumus kuadratur Gauss-Legendre, nilai-nilai x_i dipilih sedemikian hingga merupakan pembuat nol $P_n(x)$ dan koefisien-koefisien c_i didefinisikan sebagai:

¹⁴ Agus Setiawan, *Pengantar Metode Numerik* (Yogyakarta: Andi, 2006), h.167-168

$$c_i = \frac{2(1-x_i^2)}{n^2[P_{n-1}(x_i)]^2} \quad (2.24)$$

Dalam menggunakan rumus kuadratur Gauss-Legendre, interval (a, b) dinormalisasikan menjadi $(-1, 1)$. Misalkan absis-absis $\{x_{n,k}: k = 1, 2, 3, \dots, n\}$ dan bobot-bobot $\{c_{n,k}: k = 1, 2, 3, \dots, n\}$ diketahui untuk aturan Gauss-Legendre pada $(-1, 1)$. Untuk menerapkan aturan tersebut pada interval (a, b) , digunakan perubahan variabel.

$$t = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}x \text{ dan } dt = \frac{b-a}{2}dx \quad (2.25)$$

Maka relasi:

$$\int_a^b f(t)dt = \int_{-1}^1 f\left\{\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}x\right\} \frac{b-a}{2} dx \quad (2.26)$$

Digunakan untuk mendapatkan rumus kuadratur.¹⁵

Beberapa jenis kuadratur Gauss pada kasus-kasus tertentu antara lain sebagai berikut:

a. Kuadratur Gauss-Legendre

Bentuk Umum:

$$\int_a^b f(x) \approx \sum_{i=1}^n c_i f(x_i) \quad (2.27)$$

Keterangan :

¹⁵ Sahid, *Pengantar Komputasi Numerik dengan Matlab* (Yogyakarta: Andi, 2005), h. 342-345

$$c_i = \frac{2(1-x_1^2)}{n^2[P_{n-1}(x_i)]^2} \quad (2.28)$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (2.29)$$

b. Kuadratur Gauss-Laguerre

Bentuk Umum:

$$\int_0^\infty e^{-x} f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n c_i f(x_i) \quad (2.30)$$

Keterangan:

$$c_i = \frac{(n!)^2}{x_i [L_n'(x_i)]^2} \quad (2.31)$$

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n) \quad (2.32)$$

c. Kuadratur Gauss-Hermite

Bentuk Umum:

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n c_i f(x_i) \quad (2.33)$$

Keterangan:

$$c_i = \frac{2^{n+1} n! \sqrt{\pi}}{[H_n'(x_i)]^2} \quad (2.34)$$

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) \quad (2.35)$$

d. Kuadratur Gauss-Chebyshev

Bentuk Umum:

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \sum_{i=1}^n \left(\frac{\pi}{n}\right) f(x_i) \quad (2.36)$$

e. Kuadratur Gauss-Lobatto

Bentuk Umum:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{2}{n(n-1)} [f(-1) + f(1)] + \sum_{i=1}^{n-2} c_i f(x_i) \quad (2.37)$$

Keterangan:

$$c_i = \frac{2}{n(n-1)[P_{n-1}'(x_i)]^2} \quad (2.38)$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (2.39)$$

f. Kuadratur Chebyshev

Bentuk Umum:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n \left(\frac{2}{n}\right) f(x_i) \quad (2.40)$$

g. Kuadratur titik dua

Bentuk Umum:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{2^n n!}{(2n)!} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(n+1)!}{(n-i)! 2^i i!} F(x_i) \quad (2.41)$$

Keterangan:

$$F(x_i) = f^{(n-i-1)}(-1) + (-1)^{(n-i-1)} f^{(n-i-1)}(1) \quad (2.42)$$

Integrasi ini digunakan dengan memanfaatkan turunan-turunan $f(x)$ hanya di titik-titik ujung interval integrasi.¹⁶

2.5. Kuadratur Clenshaw-Curtis

Metode Clenshaw-Curtis dikembangkan oleh Clenshaw dan Curtis pada tahun 1960. Metode ini merupakan modifikasi dari metode kuadratur Fejer. Metode kuadratur Clenshaw-Curtis adalah metode untuk mencari solusi persoalan integral dengan pendekatan numerik yang didasarkan pada perluasan atau pengembangan fungsi integrand menurut polinom Chebyshev.¹⁷

Secara sederhana, aturan metode ini dapat ditulis:

$$J = \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_0^\pi f(\cos \theta) \sin \theta d\theta \quad (2.43)$$

Dimana $f(\cos \theta)$ adalah fungsi deret kosinus:

$$f(\cos \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\theta) \quad (2.44)$$

Sehingga, jika disubstitusikan ke dalam persamaan integral diatas akan menjadi:

$$J = \int_0^\pi f(\cos \theta) \sin \theta d\theta = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2a_{2k}}{1-(2k)^2} \quad (2.45)$$

Dengan:

¹⁶ Francis Scheid, *Analisis Numerik* (Jakarta: Erlangga, 1992), h.139-141

¹⁷ M. Pasca Nugraha, "Perbandingan Metode Gauss-Legendre dan Metode Clenshaw-Curtis untuk Mencari Solusi Permasalahan Integral." *Jurnal (Institut Teknologi Bandung_2011)*

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\cos \theta) (\cos k\theta) d\theta \quad (2.46)$$

Maka, diperoleh pendekatan:

$$J = \int_0^\pi f(\cos \theta) \sin \theta d\theta \approx a_0 + \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} \frac{2a_{2k}}{1-(2k)^2} + \frac{a_N}{1-N^2}, N > 2, N \in \text{Genap} \quad (2.47)$$

Keterangan:

$$a_k \approx \frac{2}{N} \left[\frac{f(1)}{2} + \frac{f(-1)}{2} (-1)^k + \sum_{n=1}^{N-1} f\left(\cos\left[\frac{n\pi}{N}\right]\right) \cos\left(\frac{nk\pi}{N}\right) \right] \quad (2.48)$$

$$a_{2k} \approx \frac{2}{N} \left[\frac{f(1)+f(-1)}{2} + f(0)(-1)^k + \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}-1} \left\{ f\left(\cos\left[\frac{n\pi}{N}\right]\right) + f\left(-\cos\left[\frac{n\pi}{N}\right]\right) \right\} \cos\left(\frac{nk\pi}{\frac{N}{2}}\right) \right] \quad (2.49)$$

Secara sederhana, metode ini akan mentransformasi fungsi yang akan diintegalkan menjadi fungsi polinomial Chebyshev yang berbentuk deret kosinus.¹⁸

¹⁸ Imran Aziz, *A Quadrature Rule of Numerical Integration based on Haar Wavelets and Hybrid Functions* (Peshawar: University of Peshawar, 2010), h. 120

BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

3.1. Jenis Penelitian

Jenis penelitian yang digunakan pada penelitian ini adalah kajian pustaka.

3.2. Waktu Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada Januari 2018 sampai dengan April 2018.

3.3. Prosedur Penelitian

Prosedur penelitian untuk memperoleh hasil dari luas daerah elips dengan menggunakan metode Clenshaw-Curtis adalah sebagai berikut :

1. Mengubah persamaan elips yang implisit menjadi persamaan elips yang eksplisit.
2. Menentukan luas daerah elips secara analitik menggunakan integral tentu.

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

3. Menentukan luas daerah elips secara numerik dengan menggunakan pendekatan hasil pengintegralan.

$$J = \int_0^\pi f(\cos \theta) \sin \theta d\theta \approx a_0 + \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} \frac{2a_{2k}}{1 - (2k)^2} + \frac{a_N}{1 - N^2}$$

4. Mengaproksimasi nilai galat pada hasil yang diperoleh dari selisih luas daerah elips secara analitik dan secara numerik.

a. Galat Mutlak : $\varepsilon = |I - J|$

b. Galat Relatif : $\varepsilon_R = \frac{\varepsilon}{I}$

c. Galat Relatif Hampiran : $\varepsilon_{RA} = \frac{\varepsilon}{J}$

5. Mendapatkan tingkat presisi melalui hasil aproksimasi luas daerah elips dengan menggunakan metode Clenshaw-Curtis.



BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1. Hasil

4.1.1. Mengubah persamaan elips yang implisit menjadi persamaan elips yang eksplisit.

Persamaan elips secara implisit dan eksplisit dituliskan sebagai:

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1 \quad (4.1)$$

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \quad (4.2)$$

Penelitian ini menggunakan 4 jenis bentuk persamaan elips yang mewakilkan setiap bentuk kurva elips pada koordinat Cartesius, yakni:

- a. Persamaan elips pada pusat $O(0,0)$ horizontal

Penelitian ini menggunakan kasus dengan persamaan:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1 \quad (4.3)$$

Maka, diperoleh bentuk elips secara eksplisit sebagai berikut:

$$y = \frac{2}{4} \sqrt{16 - x^2} \quad (4.4)$$

- b. Persamaan elips pada pusat $O(0,0)$ vertikal

Penelitian ini menggunakan kasus dengan persamaan:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1 \quad (4.5)$$

Maka, diperoleh bentuk elips secara eksplisit sebagai berikut:

$$y = \frac{5}{4}\sqrt{16 - x^2} \quad (4.6)$$

c. Persamaan elips pada pusat $P(p, q)$ horizontal

Penelitian ini menggunakan kasus dengan persamaan:

$$\frac{(x-2)^2}{36} + \frac{(y-3)^2}{20} = 1 \quad (4.7)$$

Maka, diperoleh bentuk elips secara eksplisit sebagai berikut:

$$y = \frac{\sqrt{20}}{6}\sqrt{36 - x^2} \quad (4.8)$$

d. Persamaan elips pada pusat $P(p, q)$ vertikal

Penelitian ini menggunakan kasus dengan persamaan:

$$9x^2 + 4y^2 + 72x - 16y + 124 = 0 \quad (4.9)$$

Maka, diperoleh bentuk elips secara eksplisit sebagai berikut:

$$y = \frac{3}{2}\sqrt{4 - x^2} \quad (4.10)$$

4.1.2. Menentukan luas daerah elips secara analitik.

Luas daerah elips secara analitik dapat diperoleh dengan menggunakan integral tentu untuk persamaan elips pada titik pusat $O(0,0)$, Karena elips memiliki simetri lipat pada titik O . Artinya, jika diperoleh luas daerah pada kuadran I maka luas elips dapat diperoleh luas elips sama dengan 4 kali luas elips pada kuadran I diperoleh batas bawah 0 dan batas atas a .

$$I = \int_a^b f(x) dx \quad (4.11)$$

$$I = 4 \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - (x)^2} dx \quad (4.12)$$

$$x = a \sin \theta$$

$$dx = a \cos \theta d\theta$$

$$I = \frac{4b}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - (a \sin \theta)^2} a \cos \theta d\theta$$

$$I = \frac{4b}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2(1 - \sin^2 \theta)} a \cos \theta d\theta$$

$$I = 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta$$

$$I = 2ab \left(\frac{\pi}{2} + 0 \right)$$

$$I = \pi ab \tag{4.13}$$

Berdasarkan persamaan (4.13) diperoleh luas daerah elips secara analitik sebagai berikut:

Tabel 4.1: Luas daerah secara analitik

Persamaan	a	b	Luas Daerah (I)
$y = \frac{2}{4} \sqrt{16 - x^2}$	4	2	25.14285714
$y = \frac{5}{4} \sqrt{16 - x^2}$	4	5	62.85714286
$y = \frac{\sqrt{20}}{6} \sqrt{36 - x^2}$	6	$\sqrt{20}$	84.33170658
$y = \frac{3}{2} \sqrt{4 - x^2}$	2	3	18.85714286

4.1.3. Mengaproksimasi luas daerah elips dengan menggunakan metode Clenshaw-Curtis.

Teknik pengaproksimasian luas daerah elips dengan menggunakan metode Clenshaw-curtis ini meliputi 3 tahapan setiap iterasinya, yakni:

6. Menentukan luas daerah elips secara numerik dengan menggunakan pendekatan hasil pengintegralan.
7. Mengaproksimasi nilai galat pada hasil yang diperoleh dari selisih luas daerah elips secara analitik dan secara numerik.
8. Mendapatkan tingkat presisi melalui hasil aproksimasi luas daerah elips dengan menggunakan metode Clenshaw-Curtis.

Luas daerah elips secara numerik dengan menggunakan metode Clenshaw-Curtis, maka digunakan pendekatan persamaan (2. 43-45) sebagai berikut:

$$J = \int_0^\pi f(\cos \theta) \sin \theta d\theta \approx a_0 + \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} \frac{2a_{2k}}{1-(2k)^2} + \frac{a_N}{1-N^2}$$

$$N > 2, N \in \text{Genap}$$

Keterangan:

$$a_k \approx \frac{2}{N} \left[\frac{f(1)}{2} + \frac{f(-1)}{2} (-1)^k + \sum_{n=1}^{N-1} f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{N} \right] \right) \cos \left(\frac{nk\pi}{N} \right) \right]$$

$$a_{2k} \approx \frac{2}{N} \left[\frac{f(1)+f(-1)}{2} + f(0)(-1)^k + \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}-1} \left\{ f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{N} \right] \right) + \right.$$

$$\left. f \left(-\cos \left[\frac{n\pi}{N} \right] \right) \right\} \cos \left(\frac{nk\pi}{2} \right) \right]$$

Batas-batas integral pada fungsi integrand pada kurva elips sebelumnya adalah merupakan absis pada titik pusat $x_1 = p$ sampai $x_2 = a + p$. Untuk menggunakan Metode Clenshaw-Curtis digunakan batas $\theta_1 = 0$ sampai $\theta_2 = \pi$. Maka, batas sebelumnya ditransformasikan terlebih dahulu dengan menggunakan batas $t_1 = -1$ sampai $t_2 = 1$.

Transformasi batas x ke t ini bisa dilakukan dengan menggunakan persamaan (2.20) yakni:

$$t = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} x$$

$$dt = \frac{b-a}{2} dx$$

Berdasarkan persamaan (2.26) diperoleh:

$$\int_a^b f(t) dt = \int_{-1}^1 f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} x\right) \frac{b-a}{2} dx$$

Transformasi yang dilakukan mengakibatkan $t = \frac{a+ax}{2}$ dan $dt = \frac{a}{2} dx$

$$\int_a^b f(t) dt = \int_{-1}^1 f\left(\frac{a+ax}{2}\right) \frac{a}{2} dx$$

Dengan:

$$f(t) = y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - \left(\frac{a+ax}{2}\right)^2}$$

Karena luas daerah elips merupakan 4 kali luas kuadran I,

$$\pi ab \approx 2a \int_0^\pi f(\cos \theta) \sin \theta d\theta$$

(4.14)

Sehingga berlaku,

$$\frac{\pi b}{2} \approx \int_0^{\pi} f(\cos \theta) \sin \theta d\theta \quad (4.15)$$

Persamaan (4.15) mengakibatkan aproksimasi luas daerah elips pada metode Clenshaw-Curtis, di titik beratkan pada hasil aproksimasi $\frac{\pi b}{2}$. Sehingga berlaku,

$$\frac{\pi b}{2} \approx a_0 + \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} \frac{2a_{2k}}{1-(2k)^2} + \frac{a_N}{1-N^2} \quad (4.16)$$

Berdasarkan lampiran (1-14), berikut ini adalah hasil penelitian luas daerah elips secara numerik untuk masing-masing fungsi integrand pada persamaan (4.4/6/8/10) adalah sebagai berikut:

a. Persamaan elips pada pusat $O(0,0)$ horizontal

$$y = \frac{2}{4} \sqrt{16 - x^2}$$

- untuk $N = 4$

$$a_0 = \frac{2}{4} \left[\frac{f(1)}{2} + \frac{f(-1)}{2} (-1)^0 + \sum_{n=1}^3 f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{4} \right] \right) \cos \left(\frac{n \cdot 0 \cdot \pi}{4} \right) \right] = 3.904313896$$

$$a_4 = \frac{2}{4} \left[\frac{f(1)}{2} + \frac{f(-1)}{2} (-1)^4 + \sum_{n=1}^3 f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{4} \right] \right) \cos \left(\frac{n \cdot 4 \cdot \pi}{4} \right) \right] = -0.252667873$$

$$a_{2(1)} = \frac{2}{4} \left[\frac{f(1)+f(-1)}{2} + f(0)(-1)^1 + \sum_{n=1}^{2-1} \left\{ f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{4} \right] \right) + \right.$$

$$\left. f \left(-\cos \left[\frac{n\pi}{4} \right] \right) \right\} \cos \left(\frac{n \cdot 1 \cdot \pi}{2} \right) \right] = 1.587808358$$

Solusi Numerik:

$$J = a_0 + \frac{2a_{2(1)}}{1-(2)^2} + \frac{a_4}{1-(4)^2} = 22.90095612$$

Nilai Galat:

a. Galat Mutlak: $\varepsilon = |I - J| = 2.241901018$

b. Galat Relatif: $\varepsilon_R = \frac{\varepsilon}{I} = 0.089166518$

c. Galat Relatif Hampiran: $\varepsilon_{RA} = \frac{\varepsilon}{J} = 0.09789552$

- Untuk $N = 6$

$$a_0 = \frac{2}{6} \left[\frac{f(1)}{2} + \frac{f(-1)}{2} (-1)^0 + \sum_{n=1}^5 f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{6} \right] \right) \cos \left(\frac{n \cdot 0 \cdot \pi}{6} \right) \right] = 3.90849882$$

$$a_6 = \frac{2}{6} \left[\frac{f(1)}{2} + \frac{f(-1)}{2} (-1)^6 + \sum_{n=1}^5 f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{6} \right] \right) \cos \left(\frac{n \cdot 6 \cdot \pi}{6} \right) \right] = 0.412364559$$

$$a_{2(1)} = \frac{2}{6} \left[\frac{f(1)+f(-1)}{2} + f(0)(-1)^1 + \sum_{n=1}^{3-1} \left\{ f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{6} \right] \right) + f \left(-\cos \left[\frac{n\pi}{6} \right] \right) \right\} \cos \left(\frac{n \cdot 1 \cdot \pi}{2} \right) \right] = 1.174564895$$

$$a_{2(2)} = \frac{2}{6} \left[\frac{f(1)+f(-1)}{2} + f(0)(-1)^2 + \sum_{n=1}^{3-1} \left\{ f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{6} \right] \right) + f \left(-\cos \left[\frac{n\pi}{6} \right] \right) \right\} \cos \left(\frac{n \cdot 2 \cdot \pi}{2} \right) \right] = 2.247829096$$

Solusi Numerik:

$$J = a_0 + \frac{2a_{2(1)}}{1-(2)^2} + \frac{2a_{2(2)}}{1-(4)^2} + \frac{a_6}{1-(6)^2} = 22.51170532$$

Nilai Galat:

a. Galat Mutlak: $\varepsilon = |I - J| = 2.631151818$

b. Galat Relatif: $\varepsilon_R = \frac{\varepsilon}{I} = 0.104648084$

c. Galat Relatif Hampiran: $\varepsilon_{RA} = \frac{\varepsilon}{J} = 0.116879276$

- Untuk $N = 8$

$$a_0 = \frac{2}{8} \left[\frac{f(1)}{2} + \frac{f(-1)}{2} (-1)^0 + \sum_{n=1}^7 f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{8} \right] \right) \cos \left(\frac{n.0.\pi}{8} \right) \right] = 3.91063798$$

$$a_8 = \frac{2}{8} \left[\frac{f(1)}{2} + \frac{f(-1)}{2} (-1)^8 + \sum_{n=1}^7 f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{8} \right] \right) \cos \left(\frac{n.8.\pi}{8} \right) \right] = 0.516628137$$

$$a_{2(1)} = \frac{2}{8} \left[\frac{f(1)+f(-1)}{2} + f(0)(-1)^1 + \sum_{n=1}^{4-1} \left\{ f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{8} \right] \right) + f \left(-\cos \left[\frac{n\pi}{8} \right] \right) \right\} \cos \left(\frac{n.1.\pi}{8} \right) \right] = 0.911979858$$

$$a_{2(2)} = \frac{2}{8} \left[\frac{f(1)+f(-1)}{2} + f(0)(-1)^2 + \sum_{n=1}^{4-1} \left\{ f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{8} \right] \right) + f \left(-\cos \left[\frac{n\pi}{8} \right] \right) \right\} \cos \left(\frac{n.2.\pi}{8} \right) \right] = 2.172094709$$

$$a_{2(3)} = \frac{2}{8} \left[\frac{f(1)+f(-1)}{2} + f(0)(-1)^3 + \sum_{n=1}^{4-1} \left\{ f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{8} \right] \right) + f \left(-\cos \left[\frac{n\pi}{8} \right] \right) \right\} \cos \left(\frac{n.3.\pi}{8} \right) \right] = -0.345051407$$

Solusi Numerik:

$$J = a_0 + \frac{2a_{2(1)}}{1-(2)^2} + \frac{2a_{2(2)}}{1-(4)^2} + \frac{2a_{2(3)}}{1-(6)^2} + \frac{a_8}{1-(8)^2} = 24.196444445$$

Nilai Galat:

a. Galat Mutlak: $\varepsilon = |I - J| = 0.946412691$

b. Galat Relatif: $\varepsilon_R = \frac{\varepsilon}{I} = 0.037641414$

c. Galat Relatif Hampiran: $\varepsilon_{RA} = \frac{\varepsilon}{J} = 0.039113709$

- Untuk $N = 10$

$$a_0 = \frac{2}{10} \left[\frac{f(1)}{2} + \frac{f(-1)}{2} (-1)^0 + \sum_{n=1}^9 f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{10} \right] \right) \cos \left(\frac{n.0.\pi}{10} \right) \right] = 3.911936293$$

$$a_{10} = \frac{2}{10} \left[\frac{f(1)}{2} + \frac{f(-1)}{2} (-1)^{10} + \sum_{n=1}^9 f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{10} \right] \right) \cos \left(\frac{n.10.\pi}{10} \right) \right] = -0.164551768$$

$$a_{2(1)} = \frac{2}{10} \left[\frac{f(1)+f(-1)}{2} + f(0)(-1)^1 + \sum_{n=1}^{5-1} \left\{ f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{10} \right] \right) + f \left(-\cos \left[\frac{n\pi}{10} \right] \right) \right\} \cos \left(\frac{n.1.\pi}{\frac{10}{2}} \right) \right] = 0.741168163$$

$$a_{2(2)} = \frac{2}{10} \left[\frac{f(1)+f(-1)}{2} + f(0)(-1)^2 + \sum_{n=1}^{5-1} \left\{ f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{10} \right] \right) + f \left(-\cos \left[\frac{n\pi}{10} \right] \right) \right\} \cos \left(\frac{n.2.\pi}{\frac{10}{2}} \right) \right] = 1.93983227$$

$$a_{2(3)} = \frac{2}{10} \left[\frac{f(1)+f(-1)}{2} + f(0)(-1)^3 + \sum_{n=1}^{5-1} \left\{ f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{10} \right] \right) + f \left(-\cos \left[\frac{n\pi}{10} \right] \right) \right\} \cos \left(\frac{n.3.\pi}{\frac{10}{2}} \right) \right] = 0.314067265$$

$$a_{2(4)} = \frac{2}{10} \left[\frac{f(1)+f(-1)}{2} + f(0)(-1)^4 + \sum_{n=1}^{5-1} \left\{ f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{10} \right] \right) + f \left(-\cos \left[\frac{n\pi}{10} \right] \right) \right\} \cos \left(\frac{n.4.\pi}{\frac{10}{2}} \right) \right] = -0.359640942$$

Solusi Numerik:

$$J = a_0 + \frac{2a_{2(1)}}{1-(2)^2} + \frac{2a_{2(2)}}{1-(4)^2} + \frac{2a_{2(3)}}{1-(6)^2} + \frac{2a_{2(4)}}{1-(8)^2} + \frac{a_{10}}{1-(10)^2} = 25.23449994$$

Nilai Galat:

- a. Galat Mutlak: $\varepsilon = |I - J| = 0.091642794$
- b. Galat Relatif: $\varepsilon_R = \frac{\varepsilon}{I} = 0.003644884$
- c. Galat Relatif Hampiran: $\varepsilon_{RA} = \frac{\varepsilon}{J} = 0.003631647$

b. Persamaan elips pada pusat $O(0,0)$ vertikal

$$y = \frac{5}{4} \sqrt{16 - x^2}$$

- untuk $N = 4$

$$a_0 = \frac{2}{4} \left[\frac{f(1)}{2} + \frac{f(-1)}{2} (-1)^0 + \sum_{n=1}^3 f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{4} \right] \right) \cos \left(\frac{n \cdot 0 \cdot \pi}{4} \right) \right] = 9.760784739$$

$$a_4 = \frac{2}{4} \left[\frac{f(1)}{2} + \frac{f(-1)}{2} (-1)^4 + \sum_{n=1}^3 f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{4} \right] \right) \cos \left(\frac{n \cdot 4 \cdot \pi}{4} \right) \right] = -0.631669683$$

$$a_{2(1)} = \frac{2}{4} \left[\frac{f(1)+f(-1)}{2} + f(0)(-1)^1 + \sum_{n=1}^{2-1} \left\{ f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{4} \right] \right) + \right.$$

$$\left. f \left(-\cos \left[\frac{n\pi}{4} \right] \right) \right\} \cos \left(\frac{n \cdot 1 \cdot \pi}{4} \right) \right] = 3.969520894$$

Solusi Numerik:

$$J = a_0 + \frac{2a_{2(1)}}{1-(2)^2} + \frac{a_4}{1-(4)^2} = 57.25239031$$

Nilai Galat:

- a. Galat Mutlak: $\varepsilon = |I - J| = 5.604752546$
- b. Galat Relatif: $\varepsilon_R = \frac{\varepsilon}{I} = 0.089166518$
- c. Galat Relatif Hampiran: $\varepsilon_{RA} = \frac{\varepsilon}{J} = 0.09789552$

- Untuk $N = 6$

$$a_0 = \frac{2}{6} \left[\frac{f(1)}{2} + \frac{f(-1)}{2} (-1)^0 + \sum_{n=1}^5 f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{6} \right] \right) \cos \left(\frac{n.0.\pi}{6} \right) \right] = 9.771247049$$

$$a_6 = \frac{2}{6} \left[\frac{f(1)}{2} + \frac{f(-1)}{2} (-1)^6 + \sum_{n=1}^5 f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{6} \right] \right) \cos \left(\frac{n.6.\pi}{6} \right) \right] = 1.030911398$$

$$a_{2(1)} = \frac{2}{6} \left[\frac{f(1)+f(-1)}{2} + f(0)(-1)^1 + \sum_{n=1}^{3-1} \left\{ f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{6} \right] \right) + f \left(-\cos \left[\frac{n\pi}{6} \right] \right) \right\} \cos \left(\frac{n.1.\pi}{2} \right) \right] = 2.936412238$$

$$a_{2(2)} = \frac{2}{6} \left[\frac{f(1)+f(-1)}{2} + f(0)(-1)^2 + \sum_{n=1}^{3-1} \left\{ f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{6} \right] \right) + f \left(-\cos \left[\frac{n\pi}{6} \right] \right) \right\} \cos \left(\frac{n.2.\pi}{2} \right) \right] = 5.61957274$$

Solusi Numerik:

$$J = a_0 + \frac{2a_{2(1)}}{1-(2)^2} + \frac{2a_{2(2)}}{1-(4)^2} + \frac{a_6}{1-(6)^2} = 56.27926331$$

Nilai Galat:

a. Galat Mutlak: $\varepsilon = |I - J| = 6.577879545$

b. Galat Relatif: $\varepsilon_R = \frac{\varepsilon}{I} = 0.104648084$

c. Galat Relatif Hampiran: $\varepsilon_{RA} = \frac{\varepsilon}{J} = 0.116879276$

- Untuk $N = 8$

$$a_0 = \frac{2}{8} \left[\frac{f(1)}{2} + \frac{f(-1)}{2} (-1)^0 + \sum_{n=1}^7 f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{8} \right] \right) \cos \left(\frac{n.0.\pi}{8} \right) \right] = 9.776594949$$

$$a_8 = \frac{2}{8} \left[\frac{f(1)}{2} + \frac{f(-1)}{2} (-1)^8 + \sum_{n=1}^7 f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{8} \right] \right) \cos \left(\frac{n.8.\pi}{8} \right) \right] = 1.291570343$$

$$a_{2(1)} = \frac{2}{8} \left[\frac{f(1)+f(-1)}{2} + f(0)(-1)^1 + \sum_{n=1}^{4-1} \left\{ f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{8} \right] \right) + f \left(-\cos \left[\frac{n\pi}{8} \right] \right) \right\} \cos \left(\frac{n.1.\pi}{2} \right) \right] = 2.279949645$$

$$a_{2(2)} = \frac{2}{8} \left[\frac{f(1)+f(-1)}{2} + f(0)(-1)^2 + \sum_{n=1}^{4-1} \left\{ f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{8} \right] \right) + f \left(-\cos \left[\frac{n\pi}{8} \right] \right) \right\} \cos \left(\frac{n.2.\pi}{2} \right) \right] = 5.430236772$$

$$a_{2(3)} = \frac{2}{8} \left[\frac{f(1)+f(-1)}{2} + f(0)(-1)^3 + \sum_{n=1}^{4-1} \left\{ f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{8} \right] \right) + f \left(-\cos \left[\frac{n\pi}{8} \right] \right) \right\} \cos \left(\frac{n.3.\pi}{2} \right) \right] = -0.55359369$$

Solusi Numerik:

$$J = a_0 + \frac{2a_{2(1)}}{1-(2)^2} + \frac{2a_{2(2)}}{1-(4)^2} + \frac{2a_{2(3)}}{1-(6)^2} + \frac{a_8}{1-(8)^2} = 60.34983807$$

Nilai Galat:

- Galat Mutlak: $\varepsilon = |I - J| = 2.507304792$
- Galat Relatif: $\varepsilon_R = \frac{\varepsilon}{I} = 0.03988894$
- Galat Relatif Hampiran: $\varepsilon_{RA} = \frac{\varepsilon}{J} = 0.041546173$

- Untuk $N = 10$

$$a_0 = \frac{2}{10} \left[\frac{f(1)}{2} + \frac{f(-1)}{2} (-1)^0 + \sum_{n=1}^9 f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{10} \right] \right) \cos \left(\frac{n.0.\pi}{10} \right) \right] = 9.779840732$$

$$a_{10} = \frac{2}{10} \left[\frac{f(1)}{2} + \frac{f(-1)}{2} (-1)^{10} + \sum_{n=1}^9 f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{10} \right] \right) \cos \left(\frac{n.10.\pi}{10} \right) \right] = -0.411379419$$

$$a_{2(1)} = \frac{2}{10} \left[\frac{f(1)+f(-1)}{2} + f(0)(-1)^1 + \sum_{n=1}^{5-1} \left\{ f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{10} \right] \right) + f \left(-\cos \left[\frac{n\pi}{10} \right] \right) \right\} \cos \left(\frac{n.1.\pi}{2} \right) \right] = 1.852920408$$

$$a_{2(2)} = \frac{2}{10} \left[\frac{f(1)+f(-1)}{2} + f(0)(-1)^2 + \sum_{n=1}^{5-1} \left\{ f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{10} \right] \right) + f \left(-\cos \left[\frac{n\pi}{10} \right] \right) \right\} \cos \left(\frac{n.2.\pi}{2} \right) \right] = 4.399302728$$

$$a_{2(3)} = \frac{2}{10} \left[\frac{f(1)+f(-1)}{2} + f(0)(-1)^3 + \sum_{n=1}^{5-1} \left\{ f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{10} \right] \right) + f \left(-\cos \left[\frac{n\pi}{10} \right] \right) \right\} \cos \left(\frac{n.3.\pi}{2} \right) \right] = 0.785168163$$

$$a_{2(4)} = \frac{2}{10} \left[\frac{f(1)+f(-1)}{2} + f(0)(-1)^4 + \sum_{n=1}^{5-1} \left\{ f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{10} \right] \right) + f \left(-\cos \left[\frac{n\pi}{10} \right] \right) \right\} \cos \left(\frac{n.4.\pi}{2} \right) \right] = -0.899102355$$

Solusi Numerik:

$$J = a_0 + \frac{2a_{2(1)}}{1-(2)^2} + \frac{2a_{2(2)}}{1-(4)^2} + \frac{2a_{2(3)}}{1-(6)^2} + \frac{2a_{2(4)}}{1-(8)^2} + \frac{a_{10}}{1-(10)^2} = 63.08624984$$

Nilai Galat:

a. Galat Mutlak: $\varepsilon = |I - J| = 0.229106984$

b. Galat Relatif: $\varepsilon_R = \frac{\varepsilon}{I} = 0.003644884$

c. Galat Relatif Hampiran: $\varepsilon_{RA} = \frac{\varepsilon}{J} = 0.003631647$

c. Persamaan elips pada pusat $P(p, q)$ horizontal

$$y = \frac{\sqrt{20}}{6} \sqrt{36 - x^2}$$

- untuk $N = 4$

$$a_0 = \frac{2}{4} \left[\frac{f(1)}{2} + \frac{f(-1)}{2} (-1)^0 + \sum_{n=1}^3 f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{4} \right] \right) \cos \left(\frac{n.0.\pi}{4} \right) \right] = 8.849877786$$

$$a_4 = \frac{2}{4} \left[\frac{f(1)}{2} + \frac{f(-1)}{2} (-1)^4 + \sum_{n=1}^3 f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{4} \right] \right) \cos \left(\frac{n.4.\pi}{4} \right) \right] = -0.545048781$$

$$a_{2(1)} = \frac{2}{4} \left[\frac{f(1)+f(-1)}{2} + f(0)(-1)^1 + \sum_{n=1}^{2-1} \left\{ f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{4} \right] \right) + f \left(-\cos \left[\frac{n\pi}{4} \right] \right) \right\} \cos \left(\frac{n.1.\pi}{2} \right) \right] = 3.650829195$$

Solusi Numerik:

$$J = a_0 + \frac{2a_{2(1)}}{1-(2)^2} + \frac{a_4}{1-(4)^2} = 77.4279389$$

Nilai Galat:

a. Galat Mutlak: $\varepsilon = |I - J| = 6.903767684$

b. Galat Relatif: $\varepsilon_R = \frac{\varepsilon}{I} = 0.081864437$

c. Galat Relatif Hampiran: $\varepsilon_{RA} = \frac{\varepsilon}{J} = 0.08916378$

- Untuk $N = 6$

$$a_0 = \frac{2}{6} \left[\frac{f(1)}{2} + \frac{f(-1)}{2} (-1)^0 + \sum_{n=1}^5 f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{6} \right] \right) \cos \left(\frac{n.0.\pi}{6} \right) \right] = 8.853991573$$

$$a_6 = \frac{2}{6} \left[\frac{f(1)}{2} + \frac{f(-1)}{2} (-1)^6 + \sum_{n=1}^5 f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{6} \right] \right) \cos \left(\frac{n.6.\pi}{6} \right) \right] = 1.663670431$$

$$a_{2(1)} = \frac{2}{6} \left[\frac{f(1)+f(-1)}{2} + f(0)(-1)^1 + \sum_{n=1}^{3-1} \left\{ f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{6} \right] \right) + f \left(-\cos \left[\frac{n\pi}{6} \right] \right) \right\} \cos \left(\frac{n.1.\pi}{2} \right) \right] = 2.700017489$$

$$a_{2(2)} = \frac{2}{6} \left[\frac{f(1)+f(-1)}{2} + f(0)(-1)^2 + \sum_{n=1}^{3-1} \left\{ f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{6} \right] \right) + f \left(-\cos \left[\frac{n\pi}{6} \right] \right) \right\} \cos \left(\frac{n.2.\pi}{2} \right) \right] = 5.089586299$$

Solusi Numerik:

$$J = a_0 + \frac{2a_{2(1)}}{1-(2)^2} + \frac{2a_{2(2)}}{1-(4)^2} + \frac{a_6}{1-(6)^2} = 75.93401959$$

Nilai Galat:

a. Galat Mutlak: $\varepsilon = |I - J| = 8.397686986$

b. Galat Relatif: $\varepsilon_R = \frac{\varepsilon}{I} = 0.099579237$

c. Galat Relatif Hampiran: $\varepsilon_{RA} = \frac{\varepsilon}{J} = 0.110591893$

- Untuk $N = 8$

$$a_0 = \frac{2}{8} \left[\frac{f(1)}{2} + \frac{f(-1)}{2} (-1)^0 + \sum_{n=1}^7 f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{8} \right] \right) \cos \left(\frac{n.0.\pi}{8} \right) \right] = 8.856094768$$

$$a_8 = \frac{2}{8} \left[\frac{f(1)}{2} + \frac{f(-1)}{2} (-1)^8 + \sum_{n=1}^7 f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{8} \right] \right) \cos \left(\frac{n.8.\pi}{8} \right) \right] = 1.168550875$$

$$a_{2(1)} = \frac{2}{8} \left[\frac{f(1)+f(-1)}{2} + f(0)(-1)^1 + \sum_{n=1}^{4-1} \left\{ f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{8} \right] \right) + f \left(-\cos \left[\frac{n\pi}{8} \right] \right) \right\} \cos \left(\frac{n.1.\pi}{2} \right) \right] = 2.096333646$$

$$a_{2(2)} = \frac{2}{8} \left[\frac{f(1)+f(-1)}{2} + f(0)(-1)^2 + \sum_{n=1}^{4-1} \left\{ f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{8} \right] \right) + f \left(-\cos \left[\frac{n\pi}{8} \right] \right) \right\} \cos \left(\frac{n.2.\pi}{2} \right) \right] = 4.923458412$$

$$a_{2(3)} = \frac{2}{8} \left[\frac{f(1)+f(-1)}{2} + f(0)(-1)^3 + \sum_{n=1}^{4-1} \left\{ f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{8} \right] \right) + f \left(-\cos \left[\frac{n\pi}{8} \right] \right) \right\} \cos \left(\frac{n.3.\pi}{2} \right) \right] = -0.932509902$$

Solusi Numerik:

$$J = a_0 + \frac{2a_{2(1)}}{1-(2)^2} + \frac{2a_{2(2)}}{1-(4)^2} + \frac{2a_{2(3)}}{1-(6)^2} + \frac{a_8}{1-(8)^2} = 82.04178883$$

Nilai Galat:

a. Galat Mutlak: $\varepsilon = |I - J| = 2.289917751$

b. Galat Relatif: $\varepsilon_R = \frac{\varepsilon}{I} = 0.027153699$

c. Galat Relatif Hampiran: $\varepsilon_{RA} = \frac{\varepsilon}{J} = 0.027911602$

- Untuk $N = 10$

$$a_0 = \frac{2}{10} \left[\frac{f(1)}{2} + \frac{f(-1)}{2} (-1)^0 + \sum_{n=1}^9 f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{10} \right] \right) \cos \left(\frac{n.0.\pi}{10} \right) \right] = 8.857371373$$

$$a_{10} = \frac{2}{10} \left[\frac{f(1)}{2} + \frac{f(-1)}{2} (-1)^{10} + \sum_{n=1}^9 f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{10} \right] \right) \cos \left(\frac{n.10.\pi}{10} \right) \right] = -0.362716378$$

$$a_{2(1)} = \frac{2}{10} \left[\frac{f(1)+f(-1)}{2} + f(0)(-1)^1 + \sum_{n=1}^{5-1} \left\{ f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{10} \right] \right) + f \left(-\cos \left[\frac{n\pi}{10} \right] \right) \right\} \cos \left(\frac{n.1.\pi}{2} \right) \right] = 1.703682697$$

$$a_{2(2)} = \frac{2}{10} \left[\frac{f(1)+f(-1)}{2} + f(0)(-1)^2 + \sum_{n=1}^{5-1} \left\{ f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{10} \right] \right) + f \left(-\cos \left[\frac{n\pi}{10} \right] \right) \right\} \cos \left(\frac{n.2.\pi}{2} \right) \right] = 4.399302728$$

$$a_{2(3)} = \frac{2}{10} \left[\frac{f(1)+f(-1)}{2} + f(0)(-1)^3 + \sum_{n=1}^{5-1} \left\{ f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{10} \right] \right) + f \left(-\cos \left[\frac{n\pi}{10} \right] \right) \right\} \cos \left(\frac{n.3.\pi}{2} \right) \right] = 0.732934195$$

$$a_{2(4)} = \frac{2}{10} \left[\frac{f(1)+f(-1)}{2} + f(0)(-1)^4 + \sum_{n=1}^{5-1} \left\{ f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{10} \right] \right) + f \left(-\cos \left[\frac{n\pi}{10} \right] \right) \right\} \cos \left(\frac{n.4.\pi}{2} \right) \right] = -0.825749695$$

Solusi Numerik:

$$J = a_0 + \frac{2a_{2(1)}}{1-(2)^2} + \frac{2a_{2(2)}}{1-(4)^2} + \frac{2a_{2(3)}}{1-(6)^2} + \frac{2a_{2(4)}}{1-(8)^2} + \frac{a_{10}}{1-(10)^2} = 85.47606402$$

Nilai Galat:

a. Galat Mutlak: $\varepsilon = |I - J| = 1.144357443$

b. Galat Relatif: $\varepsilon_R = \frac{\varepsilon}{I} = 0.013569718$

c. Galat Relatif Hampiran: $\varepsilon_{RA} = \frac{\varepsilon}{J} = 0.013388046$

d. Persamaan elips pada pusat $P(p, q)$ vertikal

$$y = \frac{3}{2} \sqrt{4 - x^2}$$

- untuk $N = 4$

$$a_0 = \frac{2}{4} \left[\frac{f(1)}{2} + \frac{f(-1)}{2} (-1)^0 + \sum_{n=1}^3 f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{4} \right] \right) \cos \left(\frac{n \cdot 0 \cdot \pi}{4} \right) \right] = 5.400457368$$

$$a_4 = \frac{2}{4} \left[\frac{f(1)}{2} + \frac{f(-1)}{2} (-1)^4 + \sum_{n=1}^3 f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{4} \right] \right) \cos \left(\frac{n \cdot 4 \cdot \pi}{4} \right) \right] = -0.459381006$$

$$a_{2(1)} = \frac{2}{4} \left[\frac{f(1)+f(-1)}{2} + f(0)(-1)^1 + \sum_{n=1}^{2-1} \left\{ f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{4} \right] \right) + f \left(-\cos \left[\frac{n\pi}{4} \right] \right) \right\} \cos \left(\frac{n \cdot 1 \cdot \pi}{2} \right) \right] = 1.995688277$$

Sehingga diperoleh ,

Solusi Numerik:

$$J = a_0 + \frac{2a_{2(1)}}{1-(2)^2} + \frac{a_4}{1-(4)^2} = 16.40249567$$

Nilai Galat:

a. Galat Mutlak: $\varepsilon = |I - J| = 2.454647189$

b. Galat Relatif: $\varepsilon_R = \frac{\varepsilon}{I} = 0.130170684$

c. Galat Relatif Hampiran: $\varepsilon_{RA} = \frac{\varepsilon}{J} = 0.149650836$

- Untuk $N = 6$

$$a_0 = \frac{2}{6} \left[\frac{f(1)}{2} + \frac{f(-1)}{2} (-1)^0 + \sum_{n=1}^5 f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{6} \right] \right) \cos \left(\frac{n \cdot 0 \cdot \pi}{6} \right) \right] = 5.427245571$$

$$a_6 = \frac{2}{6} \left[\frac{f(1)}{2} + \frac{f(-1)}{2} (-1)^6 + \sum_{n=1}^5 f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{6} \right] \right) \cos \left(\frac{n.6.\pi}{6} \right) \right] = 2.106107295$$

$$a_{2(1)} = \frac{2}{6} \left[\frac{f(1)+f(-1)}{2} + f(0)(-1)^1 + \sum_{n=1}^{3-1} \left\{ f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{6} \right] \right) + f \left(-\cos \left[\frac{n\pi}{6} \right] \right) \right\} \cos \left(\frac{n.1.\pi}{2} \right) \right] = 1.478246685$$

$$a_{2(2)} = \frac{2}{6} \left[\frac{f(1)+f(-1)}{2} + f(0)(-1)^2 + \sum_{n=1}^{3-1} \left\{ f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{6} \right] \right) + f \left(-\cos \left[\frac{n\pi}{6} \right] \right) \right\} \cos \left(\frac{n.2.\pi}{2} \right) \right] = 3.127891652$$

Sehingga diperoleh ,

Solusi Numerik:

$$J = a_0 + \frac{2a_{2(1)}}{1-(2)^2} + \frac{2a_{2(2)}}{1-(4)^2} + \frac{a_6}{1-(6)^2} = 15.85808426$$

Nilai Galat:

- Galat Mutlak: $\varepsilon = |I - J| = 2.999058593$
- Galat Relatif: $\varepsilon_R = \frac{\varepsilon}{I} = 0.159040986$
- Galat Relatif Hampiran: $\varepsilon_{RA} = \frac{\varepsilon}{J} = 0.189118594$

- Untuk $N = 8$

$$a_0 = \frac{2}{8} \left[\frac{f(1)}{2} + \frac{f(-1)}{2} (-1)^0 + \sum_{n=1}^7 f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{8} \right] \right) \cos \left(\frac{n.0.\pi}{8} \right) \right] = 5.440923429$$

$$a_8 = \frac{2}{8} \left[\frac{f(1)}{2} + \frac{f(-1)}{2} (-1)^8 + \sum_{n=1}^7 f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{8} \right] \right) \cos \left(\frac{n.8.\pi}{8} \right) \right] = 0.724174259$$

$$a_{2(1)} = \frac{2}{8} \left[\frac{f(1)+f(-1)}{2} + f(0)(-1)^1 + \sum_{n=1}^{4-1} \left\{ f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{8} \right] \right) + f \left(-\cos \left[\frac{n\pi}{8} \right] \right) \right\} \cos \left(\frac{n.1.\pi}{2} \right) \right] = 1.147877791$$

$$a_{2(2)} = \frac{2}{8} \left[\frac{f(1)+f(-1)}{2} + f(0)(-1)^2 + \sum_{n=1}^{4-1} \left\{ f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{8} \right] \right) + f \left(-\cos \left[\frac{n\pi}{8} \right] \right) \right\} \cos \left(\frac{n.2.\pi}{2} \right) \right] = 3.001982904$$

$$a_{2(3)} = \frac{2}{8} \left[\frac{f(1)+f(-1)}{2} + f(0)(-1)^3 + \sum_{n=1}^{4-1} \left\{ f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{8} \right] \right) + f \left(-\cos \left[\frac{n\pi}{8} \right] \right) \right\} \cos \left(\frac{n.3.\pi}{2} \right) \right] = -1.039600974$$

Sehingga diperoleh ,

Solusi Numerik:

$$J = a_0 + \frac{2a_{2(1)}}{1-(2)^2} + \frac{2a_{2(2)}}{1-(4)^2} + \frac{2a_{2(3)}}{1-(6)^2} + \frac{a_8}{1-(8)^2} = 17.29327249$$

Nilai Galat:

a. Galat Mutlak: $\varepsilon = |I - J| = 1.563870371$

b. Galat Relatif: $\varepsilon_R = \frac{\varepsilon}{I} = 0.08293252$

c. Galat Relatif Hampiran: $\varepsilon_{RA} = \frac{\varepsilon}{J} = 0.090432298$

- Untuk $N = 10$

$$a_0 = \frac{2}{10} \left[\frac{f(1)}{2} + \frac{f(-1)}{2} (-1)^0 + \sum_{n=1}^9 f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{10} \right] \right) \cos \left(\frac{n \cdot 0 \cdot \pi}{10} \right) \right] = 5.449220268$$

$$a_{10} = \frac{2}{10} \left[\frac{f(1)}{2} + \frac{f(-1)}{2} (-1)^{10} + \sum_{n=1}^9 f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{10} \right] \right) \cos \left(\frac{n \cdot 10 \cdot \pi}{10} \right) \right] = -0.267598224$$

$$a_{2(1)} = \frac{2}{10} \left[\frac{f(1)+f(-1)}{2} + f(0)(-1)^1 + \sum_{n=1}^{5-1} \left\{ f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{10} \right] \right) + f \left(-\cos \left[\frac{n\pi}{10} \right] \right) \right\} \cos \left(\frac{n \cdot 1 \cdot \pi}{10} \right) \right] = 0.932868421$$

$$a_{2(2)} = \frac{2}{10} \left[\frac{f(1)+f(-1)}{2} + f(0)(-1)^2 + \sum_{n=1}^{5-1} \left\{ f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{10} \right] \right) + f \left(-\cos \left[\frac{n\pi}{10} \right] \right) \right\} \cos \left(\frac{n \cdot 2 \cdot \pi}{10} \right) \right] = 2.671972936$$

$$a_{2(3)} = \frac{2}{10} \left[\frac{f(1)+f(-1)}{2} + f(0)(-1)^3 + \sum_{n=1}^{5-1} \left\{ f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{10} \right] \right) + f \left(-\cos \left[\frac{n\pi}{10} \right] \right) \right\} \cos \left(\frac{n \cdot 3 \cdot \pi}{10} \right) \right] = 0.352484421$$

$$a_{2(4)} = \frac{2}{10} \left[\frac{f(1)+f(-1)}{2} + f(0)(-1)^4 + \sum_{n=1}^{5-1} \left\{ f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{10} \right] \right) + f \left(-\cos \left[\frac{n\pi}{10} \right] \right) \right\} \cos \left(\frac{n.4.\pi}{2} \right) \right] = -0.458277605$$

Sehingga diperoleh ,

Solusi Numerik:

$$J = a_0 + \frac{2a_{2(1)}}{1-(2)^2} + \frac{2a_{2(2)}}{1-(4)^2} + \frac{2a_{2(3)}}{1-(6)^2} + \frac{2a_{2(4)}}{1-(8)^2} + \frac{a_{10}}{1-(10)^2} = 17.87261788$$

Nilai Galat:

- Galat Mutlak: $\varepsilon = |I - J| = 0.984524977$
- Galat Relatif: $\varepsilon_R = \frac{\varepsilon}{I} = 0.052209658$
- Galat Relatif Hampiran: $\varepsilon_{RA} = \frac{\varepsilon}{J} = 0.055085661$

- Untuk $N = 12$

$$a_0 = \frac{2}{12} \left[\frac{f(1)}{2} + \frac{f(-1)}{2} (-1)^0 + \sum_{n=1}^{11} f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{12} \right] \right) \cos \left(\frac{n.0.\pi}{12} \right) \right] = 5.45478893$$

$$a_{12} = \frac{2}{12} \left[\frac{f(1)}{2} + \frac{f(-1)}{2} (-1)^{12} + \sum_{n=1}^{11} f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{12} \right] \right) \cos \left(\frac{n.12.\pi}{12} \right) \right] = 0.46749176$$

$$a_{2(1)} = \frac{2}{12} \left[\frac{f(1)+f(-1)}{2} + f(0)(-1)^1 + \sum_{n=1}^{6-1} \left\{ f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{12} \right] \right) + f \left(-\cos \left[\frac{n\pi}{12} \right] \right) \right\} \cos \left(\frac{n.1.\pi}{2} \right) \right]$$

$$= 0.78399575$$

$$a_{2(2)} = \frac{2}{12} \left[\frac{f(1)+f(-1)}{2} + f(0)(-1)^2 + \sum_{n=1}^{6-1} \left\{ f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{12} \right] \right) + f \left(-\cos \left[\frac{n\pi}{12} \right] \right) \right\} \cos \left(\frac{n.2.\pi}{2} \right) \right]$$

$$= 2.338170385$$

$$a_{2(3)} = \frac{2}{12} \left[\frac{f(1)+f(-1)}{2} + f(0)(-1)^3 + \sum_{n=1}^{6-1} \left\{ f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{12} \right] \right) + f \left(-\cos \left[\frac{n\pi}{12} \right] \right) \right\} \cos \left(\frac{n.3.\pi}{2} \right) \right]$$

$$= 0.643036888$$

$$a_{2(4)} = \frac{2}{12} \left[\frac{f(1)+f(-1)}{2} + f(0)(-1)^4 + \sum_{n=1}^{6-1} \left\{ f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{12} \right] \right) + f \left(-\cos \left[\frac{n\pi}{12} \right] \right) \right\} \cos \left(\frac{n.4.\pi}{2} \right) \right]$$

$$= 0.065385206$$

$$a_{2(5)} = \frac{2}{12} \left[\frac{f(1)+f(-1)}{2} + f(0)(-1)^5 + \sum_{n=1}^{6-1} \left\{ f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{12} \right] \right) + f \left(-\cos \left[\frac{n\pi}{12} \right] \right) \right\} \cos \left(\frac{n.5.\pi}{2} \right) \right]$$

$$= -1.262460792$$

Sehingga diperoleh ,

Solusi Numerik:

$$J = a_0 + \frac{2a_2(1)}{1-(2)^2} + \frac{2a_2(2)}{1-(4)^2} + \frac{2a_2(3)}{1-(6)^2} + \frac{2a_2(4)}{1-(8)^2} + \frac{2a_2(5)}{1-(10)^2} + \frac{a_{12}}{1-(12)^2} = 18.56886772$$

Nilai Galat:

- Galat Mutlak: $\varepsilon = |I - J| = 0.288275136$
- Galat Relatif: $\varepsilon_R = \frac{\varepsilon}{I} = 0.015287318$
- Galat Relatif Hampiran: $\varepsilon_{RA} = \frac{\varepsilon}{J} = 0.015524648$

- Untuk $N = 14$

$$a_0 = \frac{2}{14} \left[\frac{f(1)}{2} + \frac{f(-1)}{2} (-1)^0 + \sum_{n=1}^{13} f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{14} \right] \right) \cos \left(\frac{n \cdot 0 \cdot \pi}{14} \right) \right] = 5.458784853$$

$$a_{14} = \frac{2}{14} \left[\frac{f(1)}{2} + \frac{f(-1)}{2} (-1)^{14} + \sum_{n=1}^{13} f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{14} \right] \right) \cos \left(\frac{n \cdot 14 \cdot \pi}{14} \right) \right] = 0.156072289$$

$$a_{2(1)} = \frac{2}{14} \left[\frac{f(1)+f(-1)}{2} + f(0)(-1)^1 + \sum_{n=1}^{7-1} \left\{ f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{14} \right] \right) + \right.$$

$$\left. f \left(-\cos \left[\frac{n\pi}{14} \right] \right) \right\} \cos \left(\frac{n \cdot 1 \cdot \pi}{2} \right) \right]$$

$$= 0.675413593$$

$$a_{2(2)} = \frac{2}{14} \left[\frac{f(1)+f(-1)}{2} + f(0)(-1)^2 + \sum_{n=1}^{7-1} \left\{ f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{14} \right] \right) + f \left(-\cos \left[\frac{n\pi}{14} \right] \right) \right\} \cos \left(\frac{n.2.\pi}{2} \right) \right]$$

$$= 2.087314558$$

$$a_{2(3)} = \frac{2}{14} \left[\frac{f(1)+f(-1)}{2} + f(0)(-1)^3 + \sum_{n=1}^{7-1} \left\{ f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{14} \right] \right) + f \left(-\cos \left[\frac{n\pi}{14} \right] \right) \right\} \cos \left(\frac{n.3.\pi}{2} \right) \right]$$

$$= 1.047151828$$

$$a_{2(4)} = \frac{2}{14} \left[\frac{f(1)+f(-1)}{2} + f(0)(-1)^4 + \sum_{n=1}^{7-1} \left\{ f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{14} \right] \right) + f \left(-\cos \left[\frac{n\pi}{14} \right] \right) \right\} \cos \left(\frac{n.4.\pi}{2} \right) \right]$$

$$= 0.568673941$$

$$a_{2(5)} = \frac{2}{14} \left[\frac{f(1)+f(-1)}{2} + f(0)(-1)^5 + \sum_{n=1}^{7-1} \left\{ f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{14} \right] \right) + f \left(-\cos \left[\frac{n\pi}{14} \right] \right) \right\} \cos \left(\frac{n.5.\pi}{2} \right) \right]$$

$$= -1.366441395$$

$$a_{2(6)} = \frac{2}{14} \left[\frac{f(1)+f(-1)}{2} + f(0)(-1)^6 + \sum_{n=1}^{7-1} \left\{ f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{14} \right] \right) + f \left(-\cos \left[\frac{n\pi}{14} \right] \right) \right\} \cos \left(\frac{n \cdot 6 \cdot \pi}{2} \right) \right]$$

$$= 1.54837292$$

Sehingga diperoleh ,

Solusi Numerik:

$$J = a_0 + \frac{2a_{2(1)}}{1-(2)^2} + \frac{2a_{2(2)}}{1-(4)^2} + \frac{2a_{2(3)}}{1-(6)^2} + \frac{2a_{2(4)}}{1-(8)^2} + \frac{2a_{2(5)}}{1-(10)^2} + \frac{2a_{2(6)}}{1-(12)^2} + \frac{a_{14}}{1-(14)^2} =$$

$$18.62983628$$

Nilai Galat:

a. Galat Mutlak: $\varepsilon = |I - J| = 0.227306579$

b. Galat Relatif: $\varepsilon_R = \frac{\varepsilon}{I} = 0.012054137$

c. Galat Relatif Hampiran: $\varepsilon_{RA} = \frac{\varepsilon}{J} = 0.012201212$

- Untuk $N = 16$

$$a_0 = \frac{2}{16} \left[\frac{f(1)}{2} + \frac{f(-1)}{2} (-1)^0 + \sum_{n=1}^{15} f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{16} \right] \right) \cos \left(\frac{n \cdot 0 \cdot \pi}{16} \right) \right] = 5.461791798$$

$$a_{16} = \frac{2}{16} \left[\frac{f(1)}{2} + \frac{f(-1)}{2} (-1)^{16} + \sum_{n=1}^{15} f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{16} \right] \right) \cos \left(\frac{n \cdot 16 \cdot \pi}{16} \right) \right] = -0.058508747$$

$$a_{2(1)} = \frac{2}{16} \left[\frac{f(1)+f(-1)}{2} + f(0)(-1)^1 + \sum_{n=1}^{8-1} \left\{ f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{16} \right] \right) + f \left(-\cos \left[\frac{n\pi}{16} \right] \right) \right\} \cos \left(\frac{n.1.\pi}{2} \right) \right]$$

$$= 0.592928751$$

$$a_{2(2)} = \frac{2}{16} \left[\frac{f(1)+f(-1)}{2} + f(0)(-1)^2 + \sum_{n=1}^{8-1} \left\{ f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{16} \right] \right) + f \left(-\cos \left[\frac{n\pi}{16} \right] \right) \right\} \cos \left(\frac{n.2.\pi}{2} \right) \right]$$

$$= 1.865929247$$

$$a_{2(3)} = \frac{2}{16} \left[\frac{f(1)+f(-1)}{2} + f(0)(-1)^3 + \sum_{n=1}^{8-1} \left\{ f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{16} \right] \right) + f \left(-\cos \left[\frac{n\pi}{16} \right] \right) \right\} \cos \left(\frac{n.3.\pi}{2} \right) \right]$$

$$= 1.16684507$$

$$a_{2(4)} = \frac{2}{16} \left[\frac{f(1)+f(-1)}{2} + f(0)(-1)^4 + \sum_{n=1}^{8-1} \left\{ f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{16} \right] \right) + f \left(-\cos \left[\frac{n\pi}{16} \right] \right) \right\} \cos \left(\frac{n.4.\pi}{2} \right) \right]$$

$$= 0.921313918$$

$$a_{2(5)} = \frac{2}{16} \left[\frac{f(1)+f(-1)}{2} + f(0)(-1)^5 + \sum_{n=1}^{8-1} \left\{ f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{16} \right] \right) + f \left(-\cos \left[\frac{n\pi}{16} \right] \right) \right\} \cos \left(\frac{n.5.\pi}{2} \right) \right]$$

$$= -1.096502114$$

$$a_{2(6)} = \frac{2}{16} \left[\frac{f(1)+f(-1)}{2} + f(0)(-1)^6 + \sum_{n=1}^{8-1} \left\{ f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{16} \right] \right) + f \left(-\cos \left[\frac{n\pi}{16} \right] \right) \right\} \cos \left(\frac{n.6.\pi}{2} \right) \right]$$

$$= -0.054872567$$

$$a_{2(7)} = \frac{2}{16} \left[\frac{f(1)+f(-1)}{2} + f(0)(-1)^7 + \sum_{n=1}^{8-1} \left\{ f \left(\cos \left[\frac{n\pi}{16} \right] \right) + f \left(-\cos \left[\frac{n\pi}{16} \right] \right) \right\} \cos \left(\frac{n.7.\pi}{2} \right) \right]$$

$$= 0.307090182$$

Sehingga diperoleh ,

Solusi Numerik:

$$J = a_0 + \frac{2a_{2(1)}}{1-(2)^2} + \frac{2a_{2(2)}}{1-(4)^2} + \frac{2a_{2(3)}}{1-(6)^2} + \frac{2a_{2(4)}}{1-(8)^2} + \frac{2a_{2(5)}}{1-(10)^2} + \frac{2a_{2(6)}}{1-(12)^2} + \frac{2a_{2(7)}}{1-(14)^2} + \frac{a_{16}}{1-(16)^2} =$$

$$18.96715714$$

Nilai Galat:

a. Galat Mutlak: $\varepsilon = |I - J| = 0.110014285$

b. Galat Relatif: $\varepsilon_R = \frac{\varepsilon}{I} = 0.005834091$

c. Galat Relatif Hampiran: $\varepsilon_{RA} = \frac{\varepsilon}{J} = 0.005800252$

4.2. PEMBAHASAN

Penelitian ini menggunakan 4 kasus yang mewakili posisi titik pusat elips pada koordinat kartesius. Setiap kasus dibatasi oleh *Frekuensi Nyquist* (Frekuensi sampel) dalam hal ini disimbolkan sebagai N . N merupakan bilangan genap lebih dari 4. Maka, diambil interval $N = [4,20]$.

Kasus 1: Luas daerah untuk kurva elips pada pusat $O(0,0)$ horizontal.

Fungsi Integrand yang digunakan ditunjukkan oleh persamaan (4.4) dengan panjang mayor dan minor adalah 4 dan 2. Pada kasus ini diperoleh luas daerah secara analitik adalah 25.14285714. Dengan *error* paling rendah ditunjukkan pada $N = 10$ yakni 0.091642794 dan paling tinggi ditunjukkan pada $N = 2$ yakni 2.631151818. Maka, jangkauan *error* yang diperoleh adalah 2.539509024. Tingkat akurasi yang diperoleh pada kasus ini adalah 99,64% untuk luas daerah relatif dan 99,64% untuk luas daerah relatif hampiran.

Kasus II: Luas daerah untuk kurva elips pada pusat $O(0,0)$ vertikal.

Fungsi Integrand yang digunakan ditunjukkan oleh persamaan (4.6) dengan panjang mayor dan minor adalah 5 dan 4. Pada kasus ini diperoleh luas daerah secara analitik adalah 62.85714286. Dengan *error* paling rendah ditunjukkan pada $N = 10$ yakni 0.229106984 dan paling tinggi ditunjukkan pada $N = 20$ yakni 5.988406902.

Maka, jangkauan *error* yang diperoleh adalah 5.759299918. Tingkat akurasi yang diperoleh pada kasus ini adalah 99,64% untuk luas daerah relatif dan 99,64% untuk luas daerah relatif hampiran.

Kasus III: Luas daerah untuk kurva elips pada pusat $P(p, q)$ horizontal.

Fungsi Integrand yang digunakan ditunjukkan oleh persamaan (4.8) dengan panjang mayor dan minor adalah 6 dan $\sqrt{20}$. Pada kasus ini diperoleh luas daerah secara analitik adalah 84.33170658. Dengan *error* paling rendah ditunjukkan pada $N = 10$ yakni 0.229106984 dan paling tinggi ditunjukkan pada $N = 20$ yakni 9.026356638. Maka, jangkauan *error* yang diperoleh adalah 8.797249654. Tingkat akurasi yang diperoleh pada kasus ini adalah 98,65% untuk luas daerah relatif dan 98,67% untuk luas daerah relatif hampiran.

Kasus IV: Luas daerah untuk kurva elips pada pusat $P(p, q)$ vertikal.

Fungsi Integrand yang digunakan ditunjukkan oleh persamaan (4.10) dengan panjang mayor dan minor adalah 3 dan 2. Pada kasus ini diperoleh luas daerah secara analitik adalah 18.85714286. Dengan *error* paling rendah ditunjukkan pada $N = 16$ yakni 0.110014285 dan paling tinggi ditunjukkan pada $N = 2$ yakni 2.999058593. Maka, jangkauan *error* yang diperoleh adalah 1.889044308. Tingkat akurasi yang diperoleh pada kasus ini adalah 99,42% untuk luas daerah relatif dan 99,42% untuk luas daerah relatif hampiran.

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

A. KESIMPULAN

Kesimpulan yang diperoleh dari penelitian ini adalah tingkat akurasi luas daerah elips dengan menggunakan metode Clenshaw-curtis pada penelitian ini menunjukkan lebih dari 98% dari solusi sejati.

B. SARAN

Saran untuk penelitian selanjutnya adalah sebaiknya pengembangan metode Clenshaw-curtis dapat digunakan untuk menentukan luas daerah untuk bentuk yang lain.



L

A

M

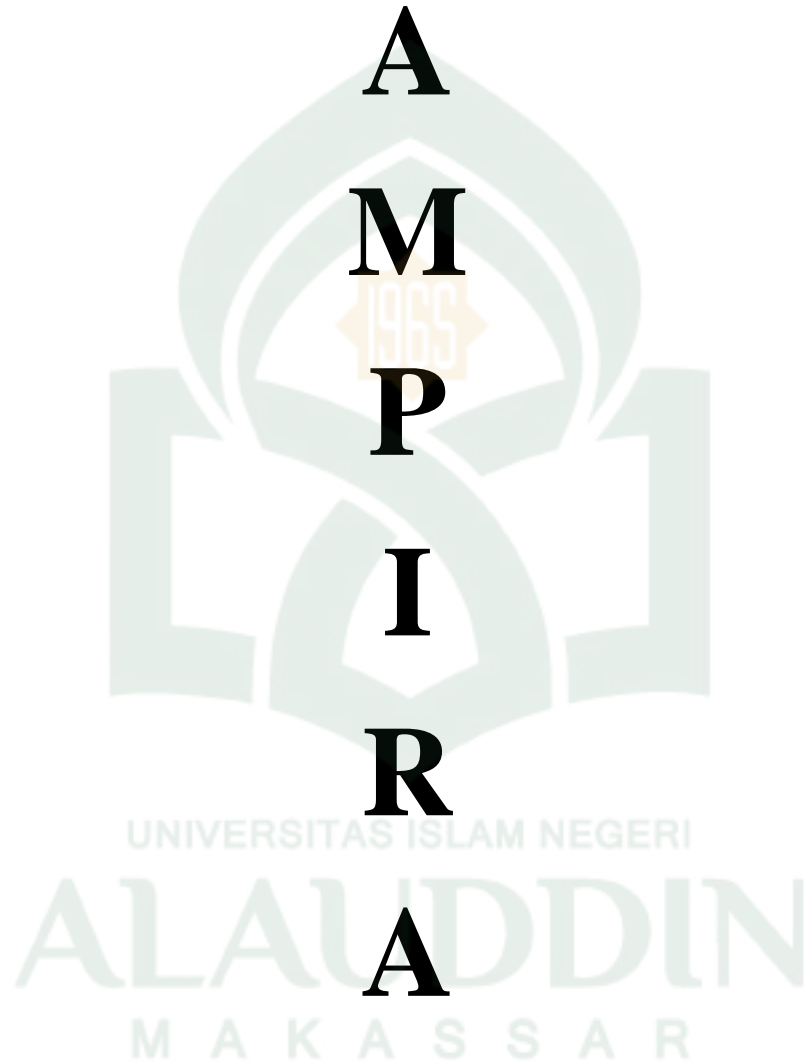
P

I

R

A

N



Lampiran 1: Luas Daerah Elips untuk N=4

N=4		Fungsi Integrand			
		$y = \frac{2}{4}\sqrt{16-x^2}$	$y = \frac{\sqrt{20}}{6}\sqrt{36-x^2}$	$y = \frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}$	$y = \frac{5}{4}\sqrt{16-x^2}$
	-1	1.936491673	4.409585518	2.598076211	4.841229183
	0	2	4.472135955	3	5
	1	1.936491673	4.409585518	2.598076211	4.841229183
1	0.957610218	1.941840794	4.414809841	2.633763659	4.854601984
2	0.834034657	1.956041039	4.428718537	2.726695606	4.890102598
3	0.639750002	1.974254285	4.446641675	2.842379259	4.935635714
1	-0.957610218	1.941840794	4.414809841	2.633763659	4.854601984
1	0.39122762	0.759701751	1.727195545	1.030401087	1.899254378
2	-0.693881899	-1.357261472	-3.073007631	-1.892004726	3.393153679
3	-0.934159147	-1.844267699	-4.153870994	-2.655234585	4.610669249
k=0		3.904313896	8.849877786	5.400457368	9.760784739
k=4		-0.252667873	-0.545048781	-0.459381006	0.631669683
2k=2	0.834034657	1.587808358	3.650829195	1.995688277	3.969520894
J		22.90095612	77.4279389	16.40249567	57.25239031
I		25.14285714	84.33170658	18.85714286	62.85714286
Error Mutlak		2.241901018	6.903767684	2.454647189	5.604752546
Error Relatif		0.089166518	0.081864437	0.130170684	0.089166518
Error Hampiran		0.09789552	0.08916378	0.149650836	0.09789552
Aproksimasi Error		0.008729003	0.007299343	0.019480152	0.008729003

Lampiran 2: Luas Daerah Elips Untuk N=6

N=6		Fungsi Integrand			
		$y = \frac{2}{4}\sqrt{16-x^2}$	$y = \frac{\sqrt{20}}{6}\sqrt{36-x^2}$	$y = \frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}$	$y = \frac{5}{4}\sqrt{16-x^2}$
	-1	1.936491673	4.409585518	2.598076211	4.841229183
	0	2	4.472135955	3	5
	1	1.936491673	4.409585518	2.598076211	4.841229183
1	0.981085398	1.938908936	4.411945366	2.614251469	4.847272339
2	0.925057115	1.945781934	4.418664286	2.659813152	4.864454834
3	0.834034657	1.956041039	4.428718537	2.726695606	4.890102598
4	0.711461332	1.968109675	4.440584469	2.803765546	4.920274188
5	0.56197399	1.980163203	4.452476541	2.879134727	4.950408006
1	-0.981085398	1.938908936	4.411945366	2.614251469	4.847272339
2	-0.925057115	1.945781934	4.418664286	2.659813152	4.864454834
1	0.39122762	0.758554727	1.726074883	1.022767379	1.896386819
2	-0.693881899	-1.350142864	-3.066031168	-1.845596202	-3.37535716
3	-0.934159147	-1.827253629	-4.137127931	-2.547167642	-4.568134072
4	-0.037055819	-0.072929917	-0.164549496	-0.10389583	-0.182324792
5	0.905164627	1.792373687	4.030224268	2.606090911	4.480934217
k=0		3.90849882	8.853991573	5.427245571	9.771247049
k=6		0.412364559	0.932725358	0.576758276	1.030911398

2k=2	0.925057115	1.174564895	2.700017489	1.478246685	2.936412238
2k=4	0.012354454	2.247829096	5.089586299	3.127891652	5.61957274
J		22.51170532	76.18462933	16.03286701	56.27926331
I		25.14285714	84.33170658	18.85714286	62.85714286
Error Mutlak		2.631151818	8.147077247	2.824275848	6.577879545
Error Relatif		0.104648084	0.096607523	0.149772204	0.104648084
Error Hampiran		0.116879276	0.106938595	0.176155384	0.116879276
Aproksimasi Error		0.012231192	0.010331073	0.02638318	0.012231192

Lampiran 3: Luas Daerah Elips untuk N=8

N=8		Fungsi Integrand			
		$y = \frac{2}{4}\sqrt{16-x^2}$	$y = \frac{\sqrt{20}}{6}\sqrt{36-x^2}$	$y = \frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}$	$y = \frac{5}{4}\sqrt{16-x^2}$
	-1	1.936491673	4.409585518	2.598076211	4.841229183
	0	2	4.472135955	3	5
	1	1.936491673	4.409585518	2.598076211	4.841229183
1	0.989345798	1.937859315	4.410920469	2.607237716	4.844648286
2	0.957610218	1.941840794	4.414809841	2.633763659	4.854601984
3	0.905469492	1.948083995	4.420917765	2.674935746	4.870209986
4	0.834034657	1.956041039	4.428718537	2.726695606	4.890102598
5	0.744827876	1.965021084	4.43754383	2.784200196	4.912552709
6	0.639750002	1.974254285	4.446641675	2.842379259	4.935635714
7	0.521040077	1.982959735	4.455241435	2.896405322	4.957399337
1	-0.989345798	1.937859315	4.410920469	2.607237716	4.844648286
2	-0.957610218	1.941840794	4.414809841	2.633763659	4.854601984

3	-0.905469492	1.948083995	4.420917765	2.674935746	4.870209986
1	0.39122762	0.758144087	1.725673915	1.020023405	1.895360217
2	-0.693881899	-1.347408178	-3.063356638	-1.82752093	-3.368520446
3	-0.934159147	-1.819820483	-4.129840769	-2.498815695	-4.549551207
4	-0.037055819	-0.072482703	-0.164109794	-0.10103994	-0.181206759
5	0.905164627	1.778667576	4.016707706	2.520159532	4.446668941
6	0.745306624	1.471424797	3.314111495	2.11844409	3.678561991
7	-0.321995554	-0.638504219	-1.434567935	-0.932629637	-1.596260547
k=0		3.91063798	8.856094768	5.440923429	9.776594949
k=8		0.516628137	1.168550875	0.724174259	1.291570343
2k=2	0.957610218	0.911979858	2.096333646	1.147877791	2.279949645
2k=4	0.834034657	2.172094709	4.923458412	3.001982904	5.430236772
	0.39122762				
2k=6	0.639750002	-0.421437476	-0.932509902	-1.039600974	-0.55359369
	-0.18143987				
	-0.871902316				
J		24.2313638	82.04178883	17.29327249	60.34983807
I		25.14285714	84.33170658	18.85714286	62.85714286
Error Mutlak		0.911493345	2.289917751	1.563870371	2.507304792
Error Relatif		0.036252576	0.027153699	0.08293252	0.03988894
Error Hampiran		0.037616263	0.027911602	0.090432298	0.041546173
Aproksimasi Error		0.001363686	0.000757903	0.007499778	0.001657233

Lampiran 4: Luas Daerah Elips untuk N=10

N=10		Fungsi Integrand	
------	--	------------------	--

		$y = \frac{2}{4}\sqrt{16 - x^2}$	$y = \frac{\sqrt{20}}{6}\sqrt{36 - x^2}$	$y = \frac{3}{2}\sqrt{4 - x^2}$	$y = \frac{5}{4}\sqrt{16 - x^2}$
	-1	1.936491673	4.409585518	2.598076211	4.841229183
	0	2	4.472135955	3	5
	1	1.936491673	4.409585518	2.598076211	4.841229183
1	0.993176942	1.937369322	4.410442127	2.603958336	4.843423306
2	0.972800875	1.93995222	4.412964389	2.621208029	4.849880549
3	0.939149854	1.944093462	4.417012411	2.648677876	4.860233654
4	0.892683084	1.949558726	4.422362171	2.68458806	4.873896816
5	0.834034657	1.956041039	4.428718537	2.726695606	4.890102598
6	0.764004896	1.963179597	4.435732216	2.772483934	4.907948992
7	0.683549435	1.970581143	4.443019504	2.819345737	4.926452858
8	0.593766178	1.977842368	4.450183625	2.864741504	4.944605919
9	0.495880319	1.984571913	4.456836366	2.906326048	4.961429782
1	-0.993176942	1.937369322	4.410442127	2.603958336	4.843423306
2	-0.972800875	1.93995222	4.412964389	2.621208029	4.849880549
3	-0.939149854	1.944093462	4.417012411	2.648677876	4.860233654
4	-0.892683084	1.949558726	4.422362171	2.68458806	4.873896816
5	-0.834034657	1.956041039	4.428718537	2.726695606	4.890102598
1	0.39122762	0.757952388	1.725486775	1.018740421	1.89488097
2	-0.693881899	-1.346097731	-3.062076112	-1.818808806	-3.365244327
3	-0.934159147	-1.81609269	-4.126192547	-2.474286666	-4.540231725
4	-0.037055819	-0.072242496	-0.163874254	-0.09947961	-0.18060624
5	0.905164627	1.770539158	4.008719363	2.468108411	4.426347895
6	0.745306624	1.463170758	3.305980603	2.066350641	3.657926895
7	-0.321995554	-0.634518368	-1.430632528	-0.907816793	-1.586295919

8	-0.997253732	-1.972410683	-4.43796223	-2.856874157	-4.931026709
9	-0.458310853	-0.909550847	-2.042616478	-1.332000771	-2.273877118
k=0		3.911936293	8.857371373	5.449220268	9.779840732
k=10		-0.164551768	-0.362716378	-0.267598224	-0.411379419
2k=2	0.972800875	0.741168163	1.703682697	0.932868421	1.852920408
2k=4	0.892683084	1.93983227	4.399302728	2.671972936	4.849580675
	0.593766178				
2k=6	0.764004896	0.314067265	0.732934195	0.352484421	0.785168163
	0.167406963				
	-0.508205418				
2k=8	0.593766178	-0.359640942	-0.825749695	-0.458277605	-0.899102355
	-0.294883451				
	-0.943949818				
	-0.826087501				
J		25.23449994	85.47606402	17.87261788	63.08624984
I		25.14285714	84.33170658	18.85714286	62.85714286
Error Mutlak		0.091642794	1.144357443	0.984524977	0.229106984
Error Relatif		0.003644884	0.013569718	0.052209658	0.003644884
Error Hampiran		0.003631647	0.013388046	0.055085661	0.003631647
Aproksimasi Error		1.32369E-05	0.000181672	0.002876004	1.32369E-05

Lampiran 5: Luas Daerah Elips untuk N=12

N=12		Fungsi Integrand
------	--	------------------

		$y = \frac{2}{4}\sqrt{16-x^2}$	$y = \frac{\sqrt{20}}{6}\sqrt{36-x^2}$	$y = \frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}$	$y = \frac{5}{4}\sqrt{16-x^2}$
	-1	1.936491673	4.409585518	2.598076211	4.841229183
	0	2	4.472135955	3	5
	1	1.936491673	4.409585518	2.598076211	4.841229183
1	0.995260116	1.937102043	4.410181232	2.602168121	4.842755108
2	0.981085398	1.938908936	4.411945366	2.614251469	4.847272339
3	0.957610218	1.941840794	4.414809841	2.633763659	4.854601984
4	0.925057115	1.945781934	4.418664286	2.659813152	4.864454834
5	0.883734686	1.950577671	4.423360525	2.691241212	4.876444178
6	0.834034657	1.956041039	4.428718537	2.726695606	4.890102598
7	0.776428174	1.961960709	4.434533628	2.764707652	4.904901772
8	0.711461332	1.968109675	4.440584469	2.803765546	4.920274188
9	0.639750002	1.974254285	4.446641675	2.842379259	4.935635714
10	0.56197399	1.980163203	4.452476541	2.879134727	4.950408006
11	0.478870596	1.985615959	4.45786963	2.912736968	4.964039898
1	-0.995260116	1.937102043	4.410181232	2.602168121	4.842755108
2	-0.981085398	1.938908936	4.411945366	2.614251469	4.847272339
3	-0.957610218	1.941840794	4.414809841	2.633763659	4.854601984
4	-0.925057115	1.945781934	4.418664286	2.659813152	4.864454834
5	-0.883734686	1.950577671	4.423360525	2.691241212	4.876444178
1	0.39122762	0.759701751	1.727195545	1.030401087	1.894619553
2	-0.693881899	-1.350142864	-3.066031168	-1.845596202	-3.363434538
3	-0.934159147	-1.822149974	-4.132122695	-2.514047595	-4.534970849
4	-0.037055819	-0.072482703	-0.164109794	-0.10103994	-0.18025636

5	0.905164627	1.775897433	4.013982977	2.502515571	4.413984776
6	0.745306624	1.466845178	3.30959702	2.089665034	3.644625859
7	-0.321995554	-0.635701103	-1.431798851	-0.915233485	-1.579356565
8	-0.997253732	-1.974725145	-4.44024885	-2.871227853	-4.906761799
9	-0.458310853	-0.910029345	-2.043090035	-1.334938965	-2.262055416
10	0.638646004	1.237122479	2.816544621	1.661864272	3.161558292
11	0.958022765	1.8575189	4.2267441	2.504512422	4.75566323
k=0		3.912807987	8.858228542	5.45478893	9.782019967
k=12		0.378057714	0.871041398	0.46749176	0.980807561
2k=2	0.981085398	0.622902788	1.43182973	0.78399575	1.557256971
2k=4	0.925057115	1.713211533	3.883416303	2.338170385	3.11870651
	0.711461332				
2k=6	0.834034657	0.518705197	1.194845541	0.643036888	1.296762992
	0.167406963				
	-0.18143987				
2k=8	0.711461332	0.025925688	0.050789756	0.065385206	0.064814221
	0.012354454				
	-0.693881899				
	-0.999694735				
2k=10	0.56197399	-0.887976863	-2.003859782	-1.262460792	-2.219942157
	-0.368370468				
	-0.976003234				
	-0.728606396				
	0.157087547				
J		26.03154471	88.20465725	18.41513378	66.31881043
I		25.14285714	84.33170658	18.85714286	62.85714286

Error Mutlak		0.888687565	3.872950667	0.442009077	3.461667575
Error Relatif		0.035345528	0.045925202	0.023439875	0.055071984
Error Hampiran		0.034138872	0.043908687	0.024002491	0.052197371
Aproksimasi Error		0.001206656	0.002016515	0.000562615	0.002874613

Lampiran 6: Luas Daerah Elips untuk N=14

N=14		Fungsi Integrand			
		$y = \frac{2}{4}\sqrt{16 - x^2}$	$y = \frac{\sqrt{20}}{6}\sqrt{36 - x^2}$	$y = \frac{3}{2}\sqrt{4 - x^2}$	$y = \frac{5}{4}\sqrt{16 - x^2}$
	-1	1.936491673	4.409585518	2.598076211	4.841229183
	0	2	4.472135955	3	5
	1	1.936491673	4.409585518	2.598076211	4.841229183
1	0.996516906	1.936940504	4.410023561	2.601085663	4.842351259
2	0.986091887	1.938273896	4.411325247	2.610009823	4.845684741
3	0.968797566	1.940452993	4.413453629	2.624541935	4.851132483
4	0.944754419	1.943414462	4.416348359	2.644189469	4.858536156
5	0.914129934	1.947072576	4.419927505	2.668299935	4.86768144
6	0.877137448	1.951321981	4.424089982	2.696092964	4.878304953
7	0.834034657	1.956041039	4.428718537	2.726695606	4.890102598
8	0.785121824	1.961095594	4.433683177	2.759178025	4.902738986
9	0.730739684	1.966343022	4.438844914	2.792587314	4.915857554
10	0.671267073	1.971636409	4.444059738	2.825977912	4.929091022
11	0.60711829	1.976828734	4.449182658	2.858437792	4.942071836
12	0.538740206	1.981776917	4.454071732	2.889110197	4.954442292
13	0.466609157	1.986345633	4.458591949	2.917211128	4.965864083

1	-0.996516906	1.936940504	4.410023561	2.601085663	4.842351259
2	-0.986091887	1.938273896	4.411325247	2.610009823	4.845684741
3	-0.968797566	1.940452993	4.413453629	2.624541935	4.851132483
4	-0.944754419	1.943414462	4.416348359	2.644189469	4.858536156
5	-0.914129934	1.947072576	4.419927505	2.668299935	4.86768144
6	-0.877137448	1.951321981	4.424089982	2.696092964	4.878304953
1	0.39122762	0.757784622	1.72532302	1.017616552	1.894461556
2	-0.693881899	-1.344933173	-3.060938742	-1.811038574	-3.362332932
3	-0.934159147	-1.812691913	-4.122868077	-2.451739856	-4.531729783
4	-0.037055819	-0.072014815	-0.163651407	-0.097982607	-0.180037038
5	0.905164627	1.762421222	4.000762031	2.415250715	4.406053055
6	0.745306624	1.454333198	3.297303569	2.009415945	3.635832996
7	-0.321995554	-0.629836519	-1.42602768	-0.877983863	-1.574591297
8	-0.997253732	-1.955709901	-4.421507097	-2.751600584	-4.889274753
9	-0.458310853	-0.901196348	-2.034370801	-1.279873075	-2.252990871
10	0.638646004	1.259177714	2.838180994	1.804799501	3.147944285
11	0.958022765	1.893846931	4.262418273	2.738448478	4.734617327
12	0.110963928	0.219905751	0.494241294	0.320587015	0.549764377
13	-0.871198459	-1.730501254	-3.884318433	-2.541469838	-4.326253134
k=0		3.913433633	8.858843787	5.458784853	9.783584084
k=14		0.119582455	0.273447495	0.156072289	0.298956139
2k=2	0.986091887	0.536642044	1.233546639	0.675413593	1.341605109
2k=4	0.944754419	1.519988592	3.448765059	2.087314558	3.799971481
	0.785121824				
2k=6	0.877137448	0.812374296	1.860977847	1.047151828	2.03093574
	0.538740206				

	0.067960971				
2k=8	0.785121824	0.398146532	0.897521263	0.568673941	0.995366331
	0.232832557				
	-0.41951798				
	-0.891578001				
2k=10	0.671267073	-0.967480466	-2.185654768	-1.366441395	-2.418701166
	-0.098801032				
	-0.803910833				
	-0.980476712				
	-0.512412633				
2k=12	0.538740206	1.098870133	2.483397177	1.54837292	2.747175333
	-0.41951798				
	-0.990762613				
	-0.037055819				
	0.905164627				
	0.96322111				
J		26.38007334	89.39795051	18.62983628	65.95018336
I		25.14285714	84.33170658	18.85714286	62.85714286
Error Mutlak		1.237216202	5.066243926	0.227306579	3.093040505
Error Relatif		0.049207463	0.060075197	0.012054137	0.049207463
Error Hampiran		0.04689965	0.056670694	0.012201212	0.04689965
Aproksimasi Error		0.002307813	0.003404503	0.000147075	0.002307813

Lampiran 7: Luas Daerah Elips untuk N=16

N=16		Fungsi Integrand
------	--	------------------

		$y = \frac{2}{4}\sqrt{16-x^2}$	$y = \frac{\sqrt{20}}{6}\sqrt{36-x^2}$	$y = \frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}$	$y = \frac{5}{4}\sqrt{16-x^2}$
	-1	1.936491673	4.409585518	2.598076211	4.841229183
	0	2	4.472135955	3	5
	1	1.936491673	4.409585518	2.598076211	4.841229183
1	0.997332893	1.936835505	4.409921081	2.600381891	4.842088764
2	0.989345798	1.937859315	4.410920469	2.607237716	4.844648286
3	0.976081321	1.939540233	4.412561945	2.618462683	4.848850581
4	0.957610218	1.941840794	4.414809841	2.633763659	4.854601984
5	0.934031016	1.94470988	4.417615374	2.652747376	4.861774699
6	0.905469492	1.948083995	4.420917765	2.674935746	4.870209986
7	0.872078	1.951888826	4.424645621	2.699783309	4.879722066
8	0.834034657	1.956041039	4.428718537	2.726695606	4.890102598
9	0.791542395	1.960450244	4.433048903	2.755047447	4.90112561
10	0.744827876	1.965021084	4.43754383	2.784200196	4.912552709
11	0.694140285	1.96965538	4.442107187	2.813517522	4.92413845
12	0.639750002	1.974254285	4.446641675	2.842379259	4.935635714
13	0.581947155	1.978720389	4.451050906	2.870193268	4.946800972
14	0.521040077	1.982959735	4.455241435	2.896405322	4.957399337
15	0.457353659	1.986883718	4.459124704	2.920507177	4.967209294
1	-0.997332893	1.936835505	4.409921081	2.600381891	4.842088764
2	-0.989345798	1.937859315	4.410920469	2.607237716	4.844648286
3	-0.976081321	1.939540233	4.412561945	2.618462683	4.848850581
4	-0.957610218	1.941840794	4.414809841	2.633763659	4.854601984
5	-0.934031016	1.94470988	4.417615374	2.652747376	4.861774699

6	-0.905469492	1.948083995	4.420917765	2.674935746	4.870209986
7	-0.872078	1.951888826	4.424645621	2.699783309	4.879722066
1	0.39122762	0.757743544	1.725151646	1.017341217	1.894358861
2	-0.693881899	-1.344645502	-3.103134191	-1.809115058	-3.361613755
3	-0.934159147	-1.811839249	-4.119254647	-2.446060866	-4.529598123
4	-0.037055819	-0.071956502	-0.163413239	-0.09759627	-0.179891254
5	0.905164627	1.760282593	3.992609181	2.401173089	4.400706482
6	0.745306624	1.451919905	3.288711647	1.993647331	3.629799763
7	-0.321995554	-0.628499525	-1.421549142	-0.869318223	-1.571248811
8	-0.997253732	-1.950669227	-4.40548342	-2.719207371	-4.876673068
9	-0.458310853	-0.898495624	-2.026154594	-1.262668146	-2.246239061
10	0.638646004	1.254952863	2.825782245	1.77811833	3.137382157
11	0.958022765	1.886974694	4.24281318	2.695413836	4.717436734
12	0.110963928	0.21907101	0.491908518	0.315401567	0.547677525
13	-0.871198459	-1.723858153	-3.865981345	-2.500507951	-4.309645382
14	-0.792637726	-1.571768695	-3.520981739	-2.295800128	-3.929421737
15	0.250994917	0.498697714	1.116084459	0.733032457	1.246744285
k=0		3.913904512	8.859306849	5.461791798	9.784761279
k=16		-0.02944981	-0.06666324	-0.058508747	-0.073624525
2k=2	0.989345798	0.471111477	1.082915419	0.592928751	1.177778691
2k=4	0.957610218	1.359805284	3.085676691	1.865929247	2.389362066
	0.834034657				
2k=6	0.905469492	0.870418193	1.982262194	1.16684507	2.176045483
	0.639750002				
	0.253078726				
2k=8	0.834034657	0.660614939	1.495147592	0.921313918	1.651537346

	0.39122762				
	-0.18143987				
	-0.693881899				
2k=10	0.744827876	-0.774136088	-1.748055709	-1.096502114	-1.935340221
	0.10953713				
	-0.581655261				
	-0.976003234				
	-0.872253572				
2k=12	0.639750002	-0.066085197	-0.159338941	-0.054872567	-0.165212994
	-0.18143987				
	-0.871902316				
	-0.934159147				
	-0.323354316				
	0.520427299				
2k=14	0.521040077	0.240818982	0.552802794	0.307090182	0.602047455
	-0.457034477				
	-0.997306635				
	-0.582238974				
	0.390566955				
	0.989241047				
	0.640301507				
J		26.89617336	91.1680437	18.96715714	68.31792795
I		25.14285714	84.33170658	18.85714286	62.85714286
Error Mutlak		1.753316218	6.83633712	0.110014285	5.460785097
Error Relatif		0.069734168	0.08106485	0.005834091	0.086876127
Error Hampiran		0.065188315	0.074986112	0.005800252	0.079931948

Aproksimasi Error		0.004545853	0.006078738	3.38392E-05	0.006944178
-------------------	--	-------------	-------------	-------------	-------------

Lampiran 8: Luas Daerah Elips untuk N=18

N=18		Fungsi Integrand			
		$y = \frac{2}{4}\sqrt{16-x^2}$	$y = \frac{\sqrt{20}}{6}\sqrt{36-x^2}$	$y = \frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}$	$y = \frac{5}{4}\sqrt{16-x^2}$
	-1	1.936491673	4.409585518	2.598076211	4.841229183
	0	2	4.472135955	3	5
	1	1.936491673	4.409585518	2.598076211	4.841229183
1	0.997892459	1.93676345	4.409850756	2.599898832	4.841908624
2	0.991578721	1.937573975	4.410641906	2.605328423	4.843934938
3	0.981085398	1.938908936	4.411945366	2.614251469	4.847272339
4	0.96645672	1.940744793	4.413738741	2.626483042	4.851861983
5	0.947754348	1.943049259	4.41599125	2.641772855	4.857623148
6	0.925057115	1.945781934	4.418664286	2.659813152	4.864454834
7	0.898460691	1.948895096	4.421712111	2.680247912	4.872237741
8	0.868077182	1.952334628	4.425082674	2.702682836	4.880836571
9	0.834034657	1.956041039	4.428718537	2.726695606	4.890102598
10	0.796476609	1.959950574	4.43255789	2.751845976	4.899876435
11	0.755561347	1.963996375	4.436535626	2.777685343	4.909990939
12	0.711461332	1.968109675	4.440584469	2.803765546	4.920274188
13	0.66436245	1.97222099	4.444636127	2.829646745	4.930552475
14	0.614463226	1.976261303	4.448622442	2.854904311	4.940653256
15	0.56197399	1.980163203	4.452476541	2.879134727	4.950408006
16	0.507115988	1.983861977	4.456133936	2.90196056	4.959654942

17	0.450120451	1.98729663	4.459533582	2.923034563	4.968241575
1	-0.997892459	1.93676345	4.409850756	2.599898832	4.841908624
2	-0.991578721	1.937573975	4.410641906	2.605328423	4.843934938
3	-0.981085398	1.938908936	4.411945366	2.614251469	4.847272339
4	-0.96645672	1.940744793	4.413738741	2.626483042	4.851861983
5	-0.947754348	1.943049259	4.41599125	2.641772855	4.857623148
6	-0.925057115	1.945781934	4.418664286	2.659813152	4.864454834
7	-0.898460691	1.948895096	4.421712111	2.680247912	4.872237741
8	-0.868077182	1.952334628	4.425082674	2.702682836	4.880836571
1	0.39122762	0.757715354	1.725255414	1.017152231	1.894288385
2	-0.693881899	-1.34444751	-3.060464583	-1.807790235	-3.361118776
3	-0.934159147	-1.811249518	-4.12145912	-2.442126923	-4.528123794
4	-0.037055819	-0.071915889	-0.163554706	-0.097326481	-0.179789721
5	0.905164627	1.758779458	3.997199073	2.391239341	4.396948645
6	0.745306624	1.450204164	3.293259762	1.982376361	3.62551041
7	-0.321995554	-0.627535557	-1.423771642	-0.863027912	-1.568838892
8	-0.997253732	-1.946972995	-4.412930213	-2.695260546	-4.867432488
9	-0.458310853	-0.896474838	-2.029729772	-1.24967419	-2.241187095
10	0.638646004	1.251714602	2.830835385	1.757455437	3.129286506
11	0.958022765	1.881553239	4.250302129	2.661085793	4.703883096
12	0.110963928	0.21838918	0.492744694	0.311116838	0.54597295
13	-0.871198459	-1.718195887	-3.872160143	-2.465183883	-4.295489717
14	-0.792637726	-1.566459265	-3.526145977	-2.262904861	-3.916148162
15	0.250994917	0.497010899	1.117548981	0.722648182	1.242527248
16	0.989030014	1.962099039	4.407250209	2.870126093	4.905247597
17	0.522876799	1.0391113	2.331786644	1.528386955	2.597778251

k=0		3.914271723	8.859667973	5.464136457	9.785679308
k=16		0.307757494	0.693950184	0.43959649	0.769393736
2k=2	0.991578721	0.419710947	0.964764212	0.528231659	1.049277367
2k=4	0.96645672	1.22711281	2.78479294	1.682967546	3.067782024
	0.868077182				
2k=6	0.925057115	0.86598363	1.980481033	1.128989073	2.164959075
	0.711461332				
	0.39122762				
2k=8	0.868077182	0.824777893	1.869916314	1.13795576	2.061944732
	0.507115988				
	0.012354454				
	-0.485666749				
2k=10	0.796476609	-0.505643269	-1.139235396	-0.726065057	-1.264108172
	0.268749977				
	-0.368370468				
	-0.8555469				
	-0.994475719				
2k=12	0.711461332	-0.311829116	-0.716050445	-0.39601871	-0.779572789
	0.012354454				
	-0.693881899				
	-0.999694735				
	-0.728606396				
	-0.037055819				
2k=14	0.614463226	0.030187758	0.07453967	0.018750572	0.075469395
	-0.244869887				
	-0.915390308				

	-0.880077477				
	-0.166160185				
	0.675878831				
	0.996765559				
2k=16	0.507115988	0.462680476	1.046993515	0.64679723	1.15670119
	-0.485666749				
	-0.999694735				
	-0.528255618				
	0.463920995				
	0.998779126				
	0.549072732				
	-0.441892004				
J		27.24655166	92.36047997	19.2075543	68.11637915
I		25.14285714	84.33170658	18.85714286	62.85714286
Error Mutlak		2.103694518	8.028773387	0.350411442	5.259236295
Error Relatif		0.083669668	0.095204683	0.018582425	0.083669668
Error Hampiran		0.077209569	0.086928667	0.018243418	0.077209569
Aproksimasi Error		0.006460099	0.008276016	0.000339007	0.006460099

Lampiran 9: Luas Daerah Elips untuk N=20

N=20		Fungsi Integrand			
		$y = \frac{2}{4}\sqrt{16-x^2}$	$y = \frac{\sqrt{20}}{6}\sqrt{36-x^2}$	$y = \frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}$	$y = \frac{5}{4}\sqrt{16-x^2}$
	-1	1.936491673	4.409585518	2.598076211	4.841229183

	0	2	4.472135955	3	5
	1	1.936491673	4.409585518	2.598076211	4.841229183
1	0.998292778	1.936711874	4.409800419	2.599553027	4.841779685
2	0.993176942	1.937369322	4.410442127	2.603958336	4.843423306
3	0.984669958	1.938454608	4.411501702	2.61121742	4.846136521
4	0.972800875	1.93995222	4.412964389	2.621208029	4.849880549
5	0.957610218	1.941840794	4.414809841	2.633763659	4.854601984
6	0.939149854	1.944093462	4.417012411	2.648677876	4.860233654
7	0.917482816	1.946678279	4.419541535	2.665709453	4.866695697
8	0.892683084	1.949558726	4.422362171	2.68458806	4.873896816
9	0.864835337	1.952694282	4.425435311	2.705020266	4.881735706
10	0.834034657	1.956041039	4.428718537	2.726695606	4.890102598
11	0.800386214	1.959552367	4.432166633	2.749292508	4.898880916
12	0.764004896	1.963179597	4.435732216	2.772483934	4.907948992
13	0.725014927	1.966872731	4.439366406	2.795942605	4.917181827
14	0.683549435	1.970581143	4.443019504	2.819345737	4.926452858
15	0.639750002	1.974254285	4.446641675	2.842379259	4.935635714
16	0.593766178	1.977842368	4.450183625	2.864741504	4.944605919
17	0.545754974	1.981297019	4.453597267	2.886146374	4.953242547
18	0.495880319	1.984571913	4.456836366	2.906326048	4.961429782
19	0.444312509	1.987623354	4.459857147	2.925033228	4.969058386
1	-0.998292778	1.936711874	4.409800419	2.599553027	4.841779685
2	-0.993176942	1.937369322	4.410442127	2.603958336	4.843423306
3	-0.984669958	1.938454608	4.411501702	2.61121742	4.846136521
4	-0.972800875	1.93995222	4.412964389	2.621208029	4.849880549
5	-0.957610218	1.941840794	4.414809841	2.633763659	4.854601984

6	-0.939149854	1.944093462	4.417012411	2.648677876	4.860233654
7	-0.917482816	1.946678279	4.419541535	2.665709453	4.866695697
8	-0.892683084	1.949558726	4.422362171	2.68458806	4.873896816
9	-0.864835337	1.952694282	4.425435311	2.705020266	4.881735706
1	0.39122762	0.757695176	1.725235721	1.017016943	1.89423794
2	-0.693881899	-1.344305505	-3.06032596	-1.806839556	-3.360763763
3	-0.934159147	-1.810825103	-4.121044667	-2.439292638	-4.527062759
4	-0.037055819	-0.071886519	-0.163526011	-0.097131011	-0.179716298
5	0.905164627	1.757685598	3.996129703	2.3839897	4.394213994
6	0.745306624	1.448945735	3.292028609	1.974077166	3.622364337
7	-0.321995554	-0.626821751	-1.423072726	-0.858346593	-1.567054378
8	-0.997253732	-1.944204717	-4.410217182	-2.677215463	-4.860511792
9	-0.458310853	-0.894940983	-2.028225034	-1.239740147	-2.237352457
10	0.638646004	1.249217794	2.828383397	1.741393253	3.123044484
11	0.958022765	1.877295777	4.246116534	2.633884811	4.693239442
12	0.110963928	0.217842119	0.492206269	0.307645707	0.544605297
13	-0.871198459	-1.713536491	-3.86756917	-2.435820888	-4.283841228
14	-0.792637726	-1.561956956	-3.521704877	-2.234719794	-3.904892391
15	0.250994917	0.495527791	1.116084459	0.713422747	1.238819477
16	0.989030014	1.956145465	4.401365172	2.833315329	4.890363661
17	0.522876799	1.035974243	2.328682682	1.509098977	2.589935607
18	-0.579902323	-1.150857863	-2.584529763	-1.685385227	-2.877144657
19	-0.97662441	-1.941161485	-4.355605355	-2.85665885	-4.852903714
k=0		3.914566106	8.85995748	5.466015914	9.786415264
k=16		1.715967756	3.904386722	2.31544668	4.28991939
2k=2	0.993176942	0.378348682	0.869687375	0.476170846	0.945871706

2k=4	0.972800875	1.116347533	2.533569105	1.530479025	2.790868832
	0.892683084				
2k=6	0.939149854	0.84570193	1.933472891	1.10493924	2.114254824
	0.764004896				
	0.495880319				
2k=8	0.892683084	0.919982228	2.086678456	1.265988524	2.299955569
	0.593766178				
	0.167406963				
	-0.294883451				
2k=10	0.834034657	-0.250314106	-0.559845831	-0.375450752	-0.625785265
	0.39122762				
	-0.18143987				
	-0.693881899				
	-0.976003234				
2k=12	0.764004896	-0.359597492	-0.823763396	-0.464232649	-0.898993729
	0.167406963				
	-0.508205418				
	-0.943949818				
	-0.934159147				
	-0.483454507				
2k=14	0.683549435	-0.270787032	-0.608965134	-0.392734467	-0.67696758
	-0.06552034				
	-0.773122218				
	-0.99141417				
	-0.582238974				
	0.195435927				

	0.849419209				
2k=16	0.593766178	0.630880324	1.424339695	0.894476962	1.57720081
	-0.294883451				
	-0.943949818				
	-0.826087501				
	-0.037055819				
	0.782082516				
	0.965804113				
	0.364841119				
2k=18	0.495880319	-0.410117707	-0.92257247	-0.594397458	-1.025294266
	-0.508205418				
	-0.999898449				
	-0.483454507				
	0.520427299				
	0.999593817				
	0.470930503				
	-0.53254348				
	-0.999086165				
J		27.5382199	93.35806322	19.4015431	68.84554976
I		25.14285714	84.33170658	18.85714286	62.85714286
Error Mutlak		2.395362761	9.026356638	0.544400245	5.988406902
Error Relatif		0.09527011	0.107033962	0.02886971	0.09527011
Error Hampiran		0.08698321	0.096685346	0.028059636	0.08698321
Aproksimasi Error		0.0082869	0.010348616	0.000810074	0.0082869

Lampiran 10: Luas Daerah Elips untuk N=22

N=22		Fungsi Integrand			
		$y = \frac{2}{4}\sqrt{16-x^2}$	$y = \frac{\sqrt{20}}{6}\sqrt{36-x^2}$	$y = \frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}$	$y = \frac{5}{4}\sqrt{16-x^2}$
	-1	1.936491673	4.409585518	2.598076211	4.841229183
	0	2	4.472135955	3	5
	1	1.936491673	4.409585518	2.598076211	4.841229183
1	0.998589003	1.936673695	4.409763158	2.599297022	4.841684237
2	0.994359994	1.937217605	4.410294032	2.602942269	4.843044013
3	0.987324908	1.938116968	4.411172024	2.608960796	4.84529242
4	0.977503597	1.939361152	4.412387028	2.617268637	4.848402881
5	0.964923776	1.940935477	4.413925068	2.62775089	4.852338693
6	0.949620947	1.942821406	4.415768466	2.640264216	4.857053514
7	0.931638294	1.944996792	4.417896061	2.654639844	4.862491981
8	0.911026563	1.947436174	4.420283463	2.670686963	4.868590434
9	0.88784392	1.950111098	4.422903343	2.688196354	4.875277744
10	0.862155788	1.952990489	4.425725766	2.706944152	4.882476222
11	0.834034657	1.956041039	4.428718537	2.726695606	4.890102598
12	0.803559886	1.959227623	4.43184759	2.747208746	4.898069057
13	0.770817474	1.962513721	4.435077378	2.768237878	4.906284303
14	0.73589982	1.965861863	4.438371289	2.789536839	4.914654657
15	0.698905461	1.969234062	4.441692067	2.810861986	4.923085154
16	0.659938795	1.972592253	4.445002236	2.831974889	4.931480633
17	0.619109786	1.975898724	4.448264523	2.852644723	4.93974681
18	0.576533653	1.979116529	4.451442272	2.872650367	4.947791323
19	0.532330546	1.98220989	4.454499859	2.891782223	4.955524725

20	0.486625205	1.985144573	4.457403075	2.909843775	4.962861434
21	0.439546611	1.98788825	4.460119504	2.926652909	4.969720625
1	-0.998589003	1.936673695	4.409763158	2.599297022	4.841684237
2	-0.994359994	1.937217605	4.410294032	2.602942269	4.843044013
3	-0.987324908	1.938116968	4.411172024	2.608960796	4.84529242
4	-0.977503597	1.939361152	4.412387028	2.617268637	4.848402881
5	-0.964923776	1.940935477	4.413925068	2.62775089	4.852338693
6	-0.949620947	1.942821406	4.415768466	2.640264216	4.857053514
7	-0.931638294	1.944996792	4.417896061	2.654639844	4.862491981
8	-0.911026563	1.947436174	4.420283463	2.670686963	4.868590434
9	-0.88784392	1.950111098	4.422903343	2.688196354	4.875277744
10	-0.862155788	1.952990489	4.425725766	2.706944152	4.882476222
1	0.39122762	0.75768024	1.725221143	1.016916786	1.894200599
2	-0.693881899	-1.344200232	-3.0602232	-1.806134525	-3.360500579
3	-0.934159147	-1.810509694	-4.120736696	-2.437184592	-4.526274234
4	-0.037055819	-0.071864617	-0.163504617	-0.096985034	-0.179661541
5	0.905164627	1.756866137	3.995328838	2.378547154	4.392165343
6	0.745306624	1.447997663	3.291101488	1.967806409	3.619994158
7	-0.321995554	-0.62628032	-1.422542891	-0.854782228	-1.565700801
8	-0.997253732	-1.942087993	-4.408144182	-2.663352542	-4.855219983
9	-0.458310853	-0.893757081	-2.027064606	-1.232029565	-2.234392704
10	0.638646004	1.247269572	2.826472076	1.728779066	3.118173929
11	0.958022765	1.873931845	4.24281318	2.612236465	4.684829614
12	0.110963928	0.217403592	0.491775216	0.304841073	0.543508981
13	-0.871198459	-1.709738929	-3.863832575	-2.411684572	-4.274347322
14	-0.792637726	-1.558216277	-3.518020526	-2.211092136	-3.895540692

15	0.250994917	0.49426774	1.114842133	0.705512071	1.235669351
16	0.989030014	1.950952944	4.396240624	2.800908164	4.877382359
17	0.522876799	1.0331516	2.325894314	1.491581741	2.582878999
18	-0.579902323	-1.147694273	-2.581401716	-1.665856622	-2.869235683
19	-0.97662441	-1.935874564	-4.350373296	-2.824185107	-4.83968641
20	-0.184262563	-0.365787827	-0.821332514	-0.536175272	-0.914469567
21	0.832447202	1.654812012	3.712814002	2.436284025	4.13703003
k=0		3.914807369	8.860194751	5.467556118	9.787018422
k=22		0.087710292	0.199537429	0.118366088	0.21927573
2k=2	0.994359994	0.344363033	0.7915667	0.433395469	0.860907582
2k=4	0.977503597	1.022946915	2.321693654	1.402038153	2.557367288
	0.911026563				
2k=6	0.949620947	0.814802138	1.862445953	1.066028854	2.037005345
	0.803559886				
	0.576533653				
2k=8	0.911026563	0.968318036	2.197319691	1.328657767	2.420795091
	0.659938795				
	0.291416982				
	-0.128961573				
2k=10	0.862155788	-0.036701083	-0.07493669	-0.082853573	-0.091752708
	0.486625205				
	-0.023062313				
	-0.526391819				
	-0.884601194				
2k=12	0.803559886	-0.293763248	-0.673571306	-0.376885962	-0.734408121
	0.291416982				

	-0.335217893				
	-0.830152286				
	-0.998936259				
	-0.775257928				
2k=14	0.73589982	-0.496529048	-1.122030268	-0.69972026	-1.241322621
	0.08309709				
	-0.613597553				
	-0.986189747				
	-0.837876162				
	-0.246996086				
	0.474347411				
2k=16	0.659938795	0.529694896	1.195431487	0.752777263	1.324237241
	-0.128961573				
	-0.830152286				
	-0.966737825				
	-0.445823306				
	0.378305634				
	0.945140435				
	0.869164046				
2k=18	0.576533653	-0.053860936	-0.115774926	-0.098617984	-0.134652339
	-0.335217893				
	-0.963062446				
	-0.775257928				
	0.069137875				
	0.854978552				
	0.916709941				

	0.202049711				
	-0.683733025				
2k=20	0.486625205	-0.164225275	-0.377404936	-0.207779453	-0.410563187
	-0.526391819				
	-0.998936259				
	-0.445823306				
	0.565038544				
	0.995747301				
	0.404072926				
	-0.60248316				
	-0.990439909				
	-0.361462888				
J		27.82659176	94.34462572	19.59302657	69.5664794
I		25.14285714	84.33170658	18.85714286	62.85714286
Error Mutlak		2.683734619	10.01291914	0.735883717	6.709336546
Error Relatif		0.106739445	0.118732557	0.039024137	0.106739445
Error Hampiran		0.096444963	0.106131314	0.03755845	0.096444963
Aproksimasi Error		0.010294482	0.012601242	0.001465686	0.010294482

Lampiran 11: Luas Daerah Elips untuk N=24

N=24	Fungsi Integrand				
		$y = \frac{2}{4}\sqrt{16 - x^2}$	$y = \frac{\sqrt{20}}{6}\sqrt{36 - x^2}$	$y = \frac{3}{2}\sqrt{4 - x^2}$	$y = \frac{5}{4}\sqrt{16 - x^2}$
	-1	1.936491673	4.409585518	2.598076211	4.841229183
	0	2	4.472135955	3	5

	1	1.936491673	4.409585518	2.598076211	4.841229183
1	0.998814326	1.936644646	4.409734808	2.599102224	4.841611615
2	0.995260116	1.937102043	4.410181232	2.602168121	4.842755108
3	0.989345798	1.937859315	4.410920469	2.607237716	4.844648286
4	0.981085398	1.938908936	4.411945366	2.614251469	4.847272339
5	0.970498502	1.940240491	4.413246012	2.623127614	4.850601228
6	0.957610218	1.941840794	4.414809841	2.633763659	4.854601984
7	0.942451106	1.943694029	4.416621755	2.646038228	4.859235072
8	0.925057115	1.945781934	4.418664286	2.659813152	4.864454834
9	0.905469492	1.948083995	4.420917765	2.674935746	4.870209986
10	0.883734686	1.950577671	4.423360525	2.691241212	4.876444178
11	0.859904238	1.953238638	4.425969116	2.708555072	4.883096594
12	0.834034657	1.956041039	4.428718537	2.726695606	4.890102598
13	0.806187291	1.958957762	4.43158249	2.745476209	4.897394405
14	0.776428174	1.961960709	4.434533628	2.764707652	4.904901772
15	0.744827876	1.965021084	4.43754383	2.784200196	4.912552709
16	0.711461332	1.968109675	4.440584469	2.803765546	4.920274188
17	0.676407666	1.971197141	4.443626689	2.823218643	4.927992852
18	0.639750002	1.974254285	4.446641675	2.842379259	4.935635714
19	0.601575268	1.977252336	4.449600931	2.861073434	4.943130839
20	0.56197399	1.980163203	4.452476541	2.879134727	4.950408006
21	0.521040077	1.982959735	4.455241435	2.896405322	4.957399337
22	0.478870596	1.985615959	4.45786963	2.912736968	4.964039898
23	0.435565546	1.988107307	4.460336476	2.927991799	4.970268267
1	0.998814326	1.936644646	4.409734808	2.599102224	4.841611615
2	0.995260116	1.937102043	4.410181232	2.602168121	4.842755108

3	0.989345798	1.937859315	4.410920469	2.607237716	4.844648286
4	0.981085398	1.938908936	4.411945366	2.614251469	4.847272339
5	0.970498502	1.940240491	4.413246012	2.623127614	4.850601228
6	0.957610218	1.941840794	4.414809841	2.633763659	4.854601984
7	0.942451106	1.943694029	4.416621755	2.646038228	4.859235072
8	0.925057115	1.945781934	4.418664286	2.659813152	4.864454834
9	0.905469492	1.948083995	4.420917765	2.674935746	4.870209986
10	0.883734686	1.950577671	4.423360525	2.691241212	4.876444178
11	0.859904238	1.953238638	4.425969116	2.708555072	4.883096594
1	0.638646004	1.236830365	2.816259514	1.659906249	3.092075912
2	0.958022765	1.855787856	4.225054019	2.492936299	4.63946964
3	0.39122762	0.758144087	1.725673915	1.020023405	1.895360217
4	-0.693881899	-1.345373815	-3.061369031	-1.813981775	-3.363434538
5	-0.934159147	-1.812493402	-4.122674131	-2.450418654	-4.531233506
6	-0.037055819	-0.071956502	-0.163594396	-0.09759627	-0.179891254
7	0.905164627	1.759363081	3.997769784	2.395100206	4.398407702
8	0.745306624	1.450204164	3.293259762	1.982376361	3.62551041
9	-0.321995554	-0.627274386	-1.423515866	-0.861317418	-1.568185964
10	-0.997253732	-1.945220863	-4.411212794	-2.683850344	-4.863052158
11	-0.458310853	-0.895190467	-2.028469683	-1.241360187	-2.237976167
12	0.638646004	1.249217794	2.828383397	1.741393253	3.123044484
13	0.958022765	1.876726132	4.245556911	2.63022871	4.69181533
14	0.110963928	0.217706866	0.492073269	0.30678282	0.544267166
15	-0.871198459	-1.711923339	-3.865981345	-2.425590919	-4.279808348
16	-0.792637726	-1.559997977	-3.519774776	-2.222370347	-3.899994944
17	0.250994917	0.494760463	1.115327713	0.70861353	1.236901158

18	0.989030014	1.952596744	4.397862078	2.811198399	4.881491859
19	0.522876799	1.033859372	2.326593091	1.495988918	2.58464843
20	-0.579902323	-1.148301242	-2.582001491	-1.669616917	-2.870753104
21	-0.97662441	-1.936606881	-4.351097537	-2.828700138	-4.841517202
22	-0.184262563	-0.365874686	-0.821418483	-0.536708379	-0.914686714
23	0.832447202	1.654994365	3.71299462	2.437398581	4.137485913
k=0		3.9150087	8.860392752	5.468841315	9.787521749
k=16		0.338039117	0.769607005	0.454042633	0.845097792
2k=2	0.995260116	0.315951835	0.72625966	0.397636814	0.789879588
2k=4	0.981085398	0.943364941	2.141142782	1.292688913	2.358412353
	0.925057115				
2k=6	0.957610218	0.779692046	1.78194371	1.021040614	1.949230115
	0.834034657				
	0.639750002				
2k=8	0.925057115	0.986670699	2.239661967	1.35116986	2.466676747
	0.711461332				
	0.39122762				
	0.012354454				
2k=10	0.883734686	0.13176177	0.307548445	0.147612827	0.329404425
	0.56197399				
	0.10953713				
	-0.368370468				
	-0.76062065				
2k=12	0.834034657	-0.177220947	-0.408174357	-0.220459103	-0.443052367
	0.39122762				
	-0.18143987				

	-0.693881899				
	-0.976003234				
	-0.934159147				
2k=14	0.776428174	-0.612472217	-1.385894931	-0.856023645	-1.531180543
	0.205681419				
	-0.457034477				
	-0.915390308				
	-0.964435174				
	-0.582238974				
	0.060301687				
2k=16	0.711461332	0.309757132	0.696783771	0.448986994	0.77439283
	0.012354454				
	-0.693881899				
	-0.999694735				
	-0.728606396				
	-0.037055819				
	0.675878831				
	0.998779126				
2k=18	0.639750002	0.173611324	0.399624876	0.216906262	0.43402831
	-0.18143987				
	-0.871902316				
	-0.934159147				
	-0.323354316				
	0.520427299				
	0.989241047				
	0.745306624				

	-0.035621218				
2k=20	0.56197399	-0.083560234	-0.194171039	-0.097625294	-0.208900586
	-0.368370468				
	-0.976003234				
	-0.728606396				
	0.157087547				
	0.905164627				
	0.860270408				
	0.061734561				
	-0.790883973				
	-0.950647005				
2k=22	0.478870596	-0.224922793	-0.505455115	-0.327798943	-0.562306983
	-0.541365905				
	-0.997359023				
	-0.413845915				
	0.601001743				
	0.98945004				
	0.346635318				
	-0.657463118				
	-0.976314828				
	-0.277593809				
	0.710451802				
J		28.04857455	95.10367849	19.74090255	70.12143637
I		25.14285714	84.33170658	18.85714286	62.85714286
Error Mutlak		2.905717404	10.77197191	0.883759694	7.264293509
Error Relatif		0.115568306	0.127733356	0.046866044	0.115568306

Error Hampiran		0.103595903	0.113265565	0.044767948	0.103595903
Aproksimasi Error		0.011972403	0.014467791	0.002098097	0.011972403

Lampiran 12: Luas Daerah Elips untuk N=26

N=26		Fungsi Integrand			
		$y = \frac{2}{4}\sqrt{16-x^2}$	$y = \frac{\sqrt{20}}{6}\sqrt{36-x^2}$	$y = \frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}$	$y = \frac{5}{4}\sqrt{16-x^2}$
	-1	1.936491673	4.409585518	2.598076211	4.841229183
	0	2	4.472135955	3	5
	1	1.936491673	4.409585518	2.598076211	4.841229183
1	0.998989692	1.936622033	4.409712739	2.598950575	4.841555083
2	0.99596081	1.937012007	4.410093352	2.601564846	4.842530018
3	0.990919474	1.93765829	4.410724216	2.605892715	4.844145725
4	0.98387587	1.938555408	4.41160013	2.611890812	4.846388519
5	0.974844231	1.93969577	4.412713874	2.619499405	4.849239426
6	0.963842807	1.941069747	4.414056275	2.628643347	4.852674366
7	0.950893827	1.942665754	4.415616286	2.63923324	4.856664386
8	0.936023455	1.944470371	4.41738108	2.651166763	4.861175927
9	0.91926174	1.946468459	4.419336165	2.664330154	4.866171148
10	0.90064255	1.94864331	4.421465506	2.678599773	4.871608275
11	0.880203508	1.950976793	4.423751662	2.693843725	4.877441982
12	0.857985913	1.953449524	4.426175938	2.709923503	4.88362381
13	0.834034657	1.956041039	4.428718537	2.726695606	4.890102598
14	0.808398139	1.958729974	4.431358736	2.744013122	4.896824936
15	0.781128158	1.961494252	4.434075051	2.761727232	4.90373563

16	0.752279817	1.964311271	4.436845418	2.779688638	4.910778177
17	0.721911408	1.967158097	4.439647378	2.797748884	4.917895243
18	0.690084294	1.970011654	4.442458258	2.815761576	4.925029135
19	0.656862784	1.97284891	4.445255353	2.833583489	4.932122274
20	0.622314007	1.975647063	4.448016117	2.851075564	4.939117659
21	0.586507772	1.978383724	4.450718334	2.868103803	4.945959309
22	0.549516431	1.981037083	4.4533403	2.884540051	4.952592707
23	0.511414728	1.983586082	4.455860995	2.900262694	4.958965205
24	0.472279653	1.98601057	4.458260244	2.915157259	4.965026424
25	0.432190281	1.98829145	4.460518876	2.929116934	4.970728625
1	0.39122762	0.757660028	1.725201418	1.016781247	1.89415007
2	-0.693881899	-1.344057571	-3.060083951	-1.805178757	-3.360143927
3	-0.934159147	-1.810081216	-4.120318371	-2.434318516	-4.525203039
4	-0.037055819	-0.071834759	-0.163475458	-0.096785754	-0.179586898
5	0.905164627	1.755743998	3.994232508	2.371078202	4.389359996
6	0.745306624	1.44669214	3.289825381	1.959145299	3.61673035
7	-0.321995554	-0.625529736	-1.421808814	-0.84982137	-1.563824341
8	-0.997253732	-1.939130335	-4.40524977	-2.64388595	-4.847825837
9	-0.458310853	-0.892087621	-2.025429729	-1.221091427	-2.230219052
10	0.638646004	1.244493263	2.823751278	1.710677041	3.111233158
11	0.958022765	1.869080182	4.2380548	2.580763615	4.672700455
12	0.110963928	0.216762432	0.491145867	0.300703756	0.54190608
13	-0.871198459	-1.704099938	-3.858292763	-2.375493009	-4.260249846
14	-0.792637726	-1.552563273	-3.512462112	-2.175008321	-3.881408182
15	0.250994917	0.492325087	1.1129303	0.693179498	1.230812718
16	0.989030014	1.942762804	4.388173286	2.749195492	4.856907009

17	0.522876799	1.028581329	2.321388609	1.46287798	2.571453322
18	-0.579902323	-1.142414335	-2.576191865	-1.63286668	-2.856035838
19	-0.97662441	-1.926732402	-4.341344886	-2.767346802	-4.816831006
20	-0.184262563	-0.364037791	-0.819602849	-0.52534649	-0.910094478
21	0.832447202	1.646899996	3.704988025	2.387544986	4.117249989
22	0.835615238	1.655384772	3.721279013	2.41036562	4.138461931
23	-0.178615682	-0.35429958	-0.795886649	-0.518032398	-0.885748951
24	-0.975374013	-1.9371031	-4.348471188	-2.843368635	-4.84275775
25	-0.584570825	-1.162297174	-2.6074892	-1.712276303	-2.905742934
k=0		3.915179254	8.860560488	5.469929994	9.787948136
k=26		-0.06410701	-0.141196277	-0.104648574	-0.160267524
2k=2	0.99596081	0.291853152	0.670865516	0.367306312	0.790435619
2k=4	0.98387587	0.947788366	1.436722528	1.088834824	1.698711395
	0.936023455				
2k=6	0.963842807	0.743680249	1.699471409	0.974524545	1.859200623
	0.857985913				
	0.690084294				
2k=8	0.936023455	0.98597836	2.238591325	1.348293698	2.4649459
	0.752279817				
	0.472279653				
	0.131849847				
2k=10	0.90064255	0.260410861	0.599649264	0.323557405	0.651027153
	0.622314007				
	0.220322398				
	-0.225450554				
	-0.626423122				

2k=12	0.857985913	-0.046916811	-0.111487829	-0.045393942	0.625894826
	0.472279653				
	-0.047567335				
	-0.55390386				
	-0.902916082				
	-0.995474697				
2k=14	0.808398139	-0.636719478	-1.441454605	-0.887259969	-1.591798696
	0.307015101				
	-0.312017266				
	-0.811483455				
	-0.999986164				
	-0.805290451				
	-0.30200444				
2k=16	0.752279817	0.082796171	0.181877836	0.136824702	0.206990427
	0.131849847				
	-0.55390386				
	-0.965231236				
	-0.898344096				
	-0.386381029				
	0.317010796				
	0.863342677				
2k=18	0.690084294	0.221485384	0.507845954	0.284252735	0.553713459
	-0.047567335				
	-0.755735236				
	-0.995474697				
	-0.618187671				

	0.142271493				
	0.814546316				
	0.981939746				
	0.540696076				
2k=20	0.622314007	0.147967328	0.331232919	0.220438801	0.369918319
	-0.225450554				
	-0.902916082				
	-0.898344096				
	-0.215188146				
	0.630514901				
	0.999944655				
	0.614044228				
	-0.235688007				
	-0.907388124				
2k=22	0.549516431	-0.447759009	-1.010410782	-0.636739927	-1.119397521
	-0.396063384				
	-0.984803106				
	-0.686267591				
	0.230572471				
	0.939674314				
	0.80216048				
	-0.058073586				
	-0.865985259				
	-0.893672672				
	-0.116190375				
2k=24	0.472279653	0.079257278	0.183724275	0.094342236	0.198143196

	-0.55390386				
	-0.995474697				
	-0.386381029				
	0.630514901				
	0.981939746				
	0.296985422				
	-0.701419401				
	-0.959517645				
	-0.204901918				
	0.765975631				
	0.928411328				
J		28.17022777	96.66392071	19.93245937	70.73361119
I		25.14285714	84.33170658	18.85714286	62.85714286
Error Mutlak		3.027370627	12.33221413	1.075316514	7.876468336
Error Relatif		0.120406786	0.146234609	0.057024361	0.125307451
Error Hampiran		0.107467027	0.127578253	0.05394801	0.111353969
Aproksimasi Error		0.012939759	0.018656356	0.003076351	0.013953482

Lampiran 13: Luas Daerah Elips untuk N=28

N=28	Fungsi Integrand			
	$y = \frac{2}{4}\sqrt{16-x^2}$	$y = \frac{\sqrt{20}}{6}\sqrt{36-x^2}$	$y = \frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}$	$y = \frac{5}{4}\sqrt{16-x^2}$
-1	1.936491673	4.409585518	2.598076211	4.841229183
0	2	4.472135955	3	5
1	1.936491673	4.409585518	2.598076211	4.841229183

1	0.999128847	1.936604086	4.409695224	2.598830214	4.841510216
2	0.996516906	1.936940504	4.410023561	2.601085663	4.842351259
3	0.992168727	1.937498466	4.410568193	2.604822976	4.843746164
4	0.986091887	1.938273896	4.411325247	2.610009823	4.845684741
5	0.978296973	1.939261137	4.412289342	2.616601579	4.848152843
6	0.968797566	1.940452993	4.413453629	2.624541935	4.851132483
7	0.957610218	1.941840794	4.414809841	2.633763659	4.854601984
8	0.944754419	1.943414462	4.416348359	2.644189469	4.858536156
9	0.930252569	1.9451626	4.418058281	2.655733017	4.862906499
10	0.914129934	1.947072576	4.419927505	2.668299935	4.86768144
11	0.896414606	1.94913063	4.421942814	2.681788941	4.872826576
12	0.877137448	1.951321981	4.424089982	2.696092964	4.878304953
13	0.856332049	1.953630941	4.426353868	2.711100275	4.884077354
14	0.834034657	1.956041039	4.428718537	2.726695606	4.890102598
15	0.810284122	1.958535144	4.431167368	2.742761235	4.89633786
16	0.785121824	1.961095594	4.433683177	2.759178025	4.902738986
17	0.758591603	1.96370433	4.436248339	2.775826409	4.909260824
18	0.730739684	1.966343022	4.438844914	2.792587314	4.915857554
19	0.701614592	1.968993205	4.441454777	2.809343014	4.922483012
20	0.671267073	1.971636409	4.444059738	2.825977912	4.929091022
21	0.639750002	1.974254285	4.446641675	2.842379259	4.935635714
22	0.60711829	1.976828734	4.449182658	2.858437792	4.942071836
23	0.573428792	1.979342026	4.451665071	2.874048311	4.948355064
24	0.538740206	1.981776917	4.454071732	2.889110197	4.954442292
25	0.50311297	1.984116764	4.456386013	2.903527857	4.960291911
26	0.466609157	1.986345633	4.458591949	2.917211128	4.965864083

27	0.429292367	1.988448394	4.460674343	2.930075621	4.971120985
1	0.39122762	0.757653007	1.725194566	1.016734158	1.894132517
2	-0.693881899	-1.344007956	-3.060035525	-1.80484626	-3.360019889
3	-0.934159147	-1.809931914	-4.120172621	-2.43331921	-4.524829785
4	-0.037055819	-0.071824327	-0.163465272	-0.096716053	-0.179560819
5	0.905164627	1.755350584	3.993848237	2.368455193	4.38837646
6	0.745306624	1.44623247	3.289376224	1.95608849	3.615581174
7	-0.321995554	-0.625264103	-1.421549142	-0.848060189	-1.563160257
8	-0.997253732	-1.938077326	-4.404219885	-2.636927817	-4.845193316
9	-0.458310853	-0.891489131	-2.024844061	-1.217151265	-2.228722828
10	0.638646004	1.24349012	2.822769039	1.704099091	3.108725301
11	0.958022765	1.867311516	4.236321883	2.569214857	4.668278791
12	0.110963928	0.216526351	0.490914401	0.299169065	0.541315878
13	-0.871198459	-1.702000265	-3.856232667	-2.36190638	-4.255000662
14	-0.792637726	-1.550431921	-3.510369391	-2.161281805	-3.876079804
15	0.250994917	0.491582366	1.112200487	0.688419129	1.228955916
16	0.989030014	1.939582403	4.385045734	2.728909881	4.848956008
17	0.522876799	1.026775434	2.31961133	1.451415227	2.566938585
18	-0.579902323	-1.140286887	-2.574096479	-1.619427871	-2.850717216
19	-0.97662441	-1.922966827	-4.337633151	-2.743672963	-4.807417067
20	-0.184262563	-0.363298778	-0.818873837	-0.520721933	-0.908246944
21	0.832447202	1.643462456	3.701594422	2.366130662	4.108656141
22	0.835615238	1.651868213	3.717804823	2.388554174	4.129670531
23	-0.178615682	-0.353541525	-0.795137191	-0.513350098	-0.883853813
24	-0.975374013	-1.932973705	-4.344385822	-2.817963008	-4.832434263
25	-0.584570825	-1.159856774	-2.605073249	-1.697317675	-2.899641936

26	0.517973509	1.028874417	2.309432515	1.511038083	2.572186042
27	0.989861911	1.968289327	4.415451628	2.900370253	4.920723317
k=0		3.915325588	8.860704404	5.470864024	9.788313971
k=28		0.154824207	0.349504465	0.219572282	0.387060517
2k=2	0.996516906	0.271157793	0.623294375	0.341259478	0.677894482
2k=4	0.986091887	0.815406931	1.850802095	1.11701581	2.038517326
	0.944754419				
2k=6	0.968797566	0.708456176	1.618857258	0.928819379	1.771140439
	0.877137448				
	0.730739684				
2k=8	0.944754419	0.973385279	2.210370869	1.32964024	2.433463199
	0.785121824				
	0.538740206				
	0.232832557				
2k=10	0.914129934	0.356629453	0.818095868	0.455217551	0.891573633
	0.671267073				
	0.313120717				
	-0.098801032				
	-0.493754679				
2k=12	0.877137448	0.07820482	0.173424392	0.122592386	0.195512051
	0.538740206				
	0.067960971				
	-0.41951798				
	-0.803910833				
	-0.990762613				
2k=14	0.834034657	-0.598754244	-1.355579473	-0.834074215	-1.496885609

	0.39122762				
	-0.18143987				
	-0.693881899				
	-0.976003234				
	-0.934159147				
	-0.582238974				
2k=16	0.785121824	-0.09796538	-0.228340795	-0.111283076	-0.244913451
	0.232832557				
	-0.41951798				
	-0.891578001				
	-0.980476712				
	-0.648009328				
	-0.037055819				
	0.589822663				
2k=18	0.730739684	0.143292764	0.329963959	0.178554601	0.358231909
	0.067960971				
	-0.631416127				
	-0.990762613				
	-0.81656299				
	-0.20262735				
	0.520427299				
	0.96322111				
	0.88730048				
2k=20	0.671267073	0.352548085	0.795753229	0.500415902	0.881370211
	-0.098801032				
	-0.803910833				

	-0.980476712				
	-0.512412633				
	0.292545255				
	0.905164627				
	0.922669166				
	0.333550234				
	-0.474866586				
2k=22	0.60711829	-0.428098409	-0.966185981	-0.608243848	-1.070246023
	-0.262814764				
	-0.92623759				
	-0.8618568				
	-0.120260463				
	0.715832146				
	0.98945004				
	0.485594287				
	-0.399823694				
	-0.971074842				
	-0.779290901				
2k=24	0.538740206	0.130638152	0.291337261	0.198985928	0.32659538
	-0.41951798				
	-0.990762613				
	-0.648009328				
	0.292545255				
	0.96322111				
	0.745306624				
	-0.160167821				

	-0.917884314				
	-0.828834548				
	0.024831323				
	0.855589812				
2k=26	0.466609157	0.092309477	0.21338321	0.112055718	0.230773692
	-0.56455179				
	-0.993459226				
	-0.362562553				
	0.655109212				
	0.973922466				
	0.253773069				
	-0.737096791				
	-0.941645293				
	-0.141663841				
	0.809442002				
	0.897049941				
	0.02770143				
J		28.41001678	96.34011732	19.98101073	71.02504195
I		25.14285714	84.33170658	18.85714286	62.85714286
Error Mutlak		3.267159637	12.00841074	1.123867873	8.167899092
Error Relatif		0.129943849	0.142394969	0.059599054	0.129943849
Error Hampiran		0.115000271	0.124646005	0.056246798	0.115000271
Aproksimasi Error		0.014943578	0.017748964	0.003352256	0.014943578

M A K A S S A R

Lampiran 14: Luas Daerah Elips untuk N=30

N=30		Fungsi Integrand			
		$y = \frac{2}{4}\sqrt{16-x^2}$	$y = \frac{\sqrt{20}}{6}\sqrt{36-x^2}$	$y = \frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}$	$y = \frac{5}{4}\sqrt{16-x^2}$
	-1	1.936491673	4.409585518	2.598076211	4.841229183
	0	2	4.472135955	3	5
	1	1.936491673	4.409585518	2.598076211	4.841229183
1	0.999241115	1.936589605	4.409681092	2.598733093	4.841474013
2	0.996965611	1.936882777	4.409967219	2.600698759	4.842206943
3	0.993176942	1.937369322	4.410442127	2.603958336	4.843423306
4	0.987880858	1.938046143	4.411102874	2.608487239	4.845115358
5	0.981085398	1.938908936	4.411945366	2.614251469	4.847272339
6	0.972800875	1.93995222	4.412964389	2.621208029	4.849880549
7	0.963039864	1.941169378	4.414153639	2.629305421	4.852923446
8	0.951817179	1.942552706	4.415505763	2.638484249	4.856381764
9	0.939149854	1.944093462	4.417012411	2.648677876	4.860233654
10	0.925057115	1.945781934	4.418664286	2.659813152	4.864454834
11	0.909560352	1.947607505	4.420451207	2.671811169	4.869018761
12	0.892683084	1.949558726	4.422362171	2.68458806	4.873896816
13	0.874450929	1.951623399	4.42438543	2.698055789	4.879058499
14	0.854891558	1.953788654	4.426508558	2.712122961	4.884471636
15	0.834034657	1.956041039	4.428718537	2.726695606	4.890102598
16	0.811911884	1.958366608	4.431001836	2.741677946	4.895916521
17	0.788556814	1.960751014	4.433344496	2.75697313	4.901877534

18	0.764004896	1.963179597	4.435732216	2.772483934	4.907948992
19	0.738293394	1.965637483	4.438150445	2.78811342	4.914093708
20	0.711461332	1.968109675	4.440584469	2.803765546	4.920274188
21	0.683549435	1.970581143	4.443019504	2.819345737	4.926452858
22	0.654600067	1.97303692	4.445440783	2.8347614	4.9325923
23	0.624657166	1.975462188	4.447833644	2.849922404	4.93865547
24	0.593766178	1.977842368	4.450183625	2.864741504	4.944605919
25	0.56197399	1.980163203	4.452476541	2.879134727	4.950408006
26	0.529328855	1.982410841	4.454698578	2.893021719	4.956027101
27	0.495880319	1.984571913	4.456836366	2.906326048	4.961429782
28	0.461679151	1.986633607	4.458877061	2.918975473	4.966584019
29	0.42677726	1.98858374	4.46080842	2.930902187	4.971459351
1	0.39122762	0.757647341	1.725189036	1.016696162	1.894118353
2	-0.693881899	-1.3439679	-3.05999643	-1.804577795	-3.359919751
3	-0.934159147	-1.809811274	-4.120054856	-2.432511498	-4.524528184
4	-0.037055819	-0.071815888	-0.163457031	-0.096659632	-0.17953972
5	0.905164627	1.755031784	3.993536882	2.366327956	4.387579459
6	0.745306624	1.44585924	3.289011591	1.953603707	3.614648099
7	-0.321995554	-0.62504791	-1.421337848	-0.846624656	-1.562619775
8	-0.997253732	-1.937217936	-4.403379603	-2.631238265	-4.843044841
9	-0.458310853	-0.890999134	-2.024364728	-1.213917818	-2.227497834
10	0.638646004	1.242665857	2.82196229	1.698679041	3.106664642
11	0.958022765	1.865852327	4.234892889	2.559655925	4.664630818
12	0.110963928	0.216330694	0.490722677	0.297892436	0.540826734
13	-0.871198459	-1.700251297	-3.854517767	-2.350542044	-4.250628244
14	-0.792637726	-1.548646596	-3.508617678	-2.149730976	-3.87161649

15	0.250994917	0.490956359	1.111585843	0.684386738	1.227390897
16	0.989030014	1.936883354	4.382393808	2.711601777	4.842208385
17	0.522876799	1.025231213	2.318092978	1.441557285	2.563078034
18	-0.579902323	-1.138452409	-2.572291417	-1.607769875	-2.846131023
19	-0.97662441	-1.919689547	-4.334406059	-2.722939624	-4.799223868
20	-0.184262563	-0.362648933	-0.818233475	-0.516629025	-0.906622332
21	0.832447202	1.640404759	3.698579156	2.34695647	4.101011899
22	0.835615238	1.648699715	3.714678055	2.36876982	4.121749287
23	-0.178615682	-0.352848525	-0.794452838	-0.509040833	-0.882121314
24	-0.975374013	-1.929136048	-4.340593463	-2.794194418	-4.82284012
25	-0.584570825	-1.157545637	-2.602787886	-1.683058163	-2.893864093
26	0.517973509	1.026836299	2.307415853	1.498508611	2.567090747
27	0.989861911	1.964452146	4.411652561	2.876861455	4.911130364
28	0.256549129	0.509669123	1.143921028	0.748860616	1.274172806
29	-0.7891237	-1.56923856	-3.520129647	-2.31284438	-3.923096399
k=0		3.915452519	8.860829238	5.471674173	9.788631297
k=30		0.073712952	0.167639963	0.09974368	0.184282381
2k=2	0.996965611	0.253194543	0.582003358	0.318651417	0.632986358
2k=4	0.987880858	0.763323192	1.732611044	1.045555538	1.908307979
	0.951817179				
2k=6	0.972800875	0.674845872	1.54196919	0.885083285	1.687114679
	0.892683084				
	0.764004896				
2k=8	0.951817179	0.95353667	2.165580036	1.301437946	2.383841674
	0.811911884				
	0.593766178				

	0.318401814				
2k=10	0.925057115	0.42738375	0.978694129	0.552168675	1.068459376
	0.711461332				
	0.39122762				
	0.012354454				
	-0.368370468				
2k=12	0.892683084	0.189773617	0.427518581	0.272205409	0.474434041
	0.593766178				
	0.167406963				
	-0.294883451				
	-0.693881899				
	-0.943949818				
2k=14	0.854891558	-0.524329914	-1.186750715	-0.731682506	-1.310824786
	0.461679151				
	-0.06552034				
	-0.573704722				
	-0.915390308				
	-0.99141417				
	-0.779712901				
2k=16	0.811911884	-0.218205057	-0.501214134	-0.276292409	-0.545512642
	0.318401814				
	-0.294883451				
	-0.79724057				
	-0.999694735				
	-0.826087501				
	-0.341725783				

	0.271185052				
2k=18	0.764004896	0.006779192	0.019599644	-0.006687384	0.016947979
	0.167406963				
	-0.508205418				
	-0.943949818				
	-0.934159147				
	-0.483454507				
	0.195435927				
	0.782082516				
	0.999593817				
2k=20	0.711461332	0.456650626	1.03237894	0.641903865	1.141626566
	0.012354454				
	-0.693881899				
	-0.999694735				
	-0.728606396				
	-0.037055819				
	0.675878831				
	0.998779126				
	0.745306624				
	0.061734561				
2k=22	0.654600067	-0.264618647	-0.595643786	-0.382012991	-0.661546618
	-0.142997505				
	-0.84181242				
	-0.959103427				
	-0.413845915				
	0.4172963				

	0.960170287				
	0.839758767				
	0.139242003				
	-0.657463118				
	-0.999992805				
2k=24	0.593766178	-0.088486528	-0.205150581	-0.104983115	-0.221216321
	-0.294883451				
	-0.943949818				
	-0.826087501				
	-0.037055819				
	0.782082516				
	0.965804113				
	0.364841119				
	-0.53254348				
	-0.997253732				
	-0.651727595				
	0.223306125				
2k=26	0.529328855	0.161124706	0.369467325	0.20680636	0.402811765
	-0.439621927				
	-0.994737997				
	-0.613465122				
	0.345288416				
	0.979007366				
	0.900223473				
	-0.247321087				
	-0.952973655				

	-0.76155182				
	0.14675095				
	0.916910844				
	0.823943784				
2k=28	0.461679151	0.081255542	0.180277659	0.127235045	0.203138856
	-0.573704722				
	-0.99141417				
	-0.341725783				
	0.675878831				
	0.965804113				
	0.122369832				
	-0.766446978				
	-0.923609597				
	-0.086375612				
	0.843853959				
	0.865555171				
	-0.044636405				
	-0.906770566				
J		28.56122139	96.85734298	20.08148956	71.40305348
I		25.14285714	84.33170658	18.85714286	62.85714286
Error Mutlak		3.418364249	12.5256364	1.224346703	8.545910623
Error Relatif		0.135957669	0.148528198	0.064927477	0.135957669
Error Hampiran		0.119685507	0.129320463	0.060968919	0.119685507
Aproksimasi Error		0.016272162	0.019207735	0.003958558	0.016272162

**Tabel 4.2: Luas Daerah Elips Secara Analitik Dan
Menggunakan Metode Clenshaw-Curtis Untuk N=4 Sampai N=30**

Fungsi Integrand	Jumlah N	Luas Daerah Elips		Galat			Tingkat Akurasi	
		Numerik	Analitik	Mutlak	Relatif	Relatif Hampiran	Relatif (%)	Relatif Hampiran (%)
$y = \frac{2}{4}\sqrt{16 - x^2}$	4	22.90095612	25.14285714	2.241901018	0.089166518	0.09789552	91.08335	90.21045
	6	22.51170532		2.631151818	0.104648084	0.116879276	89.53519	88.31207
	8	24.19644445		0.946412691	0.037641414	0.039113709	96.23586	96.08863
	10	25.23449994		0.091642794	0.003644884	0.003631647	99.63551	99.63684
	12	26.25945473		1.116597583	0.044410131	0.042521735	95.55899	95.74783
	14	26.38007334		1.237216202	0.049207463	0.04689965	95.07925	95.31004
	16	26.89617336		1.753316218	0.069734168	0.065188315	93.02658	93.48117
	18	27.24655166		2.103694518	0.083669668	0.077209569	91.63303	92.27904
	20	27.5382199		2.395362761	0.09527011	0.08698321	90.47299	91.30168

	22	27.82659176		2.683734619	0.106739445	0.096444963	89.32606	90.3555
	24	28.04857455		2.905717404	0.115568306	0.103595903	88.44317	89.64041
	26	28.17022777		3.027370627	0.120406786	0.107467027	87.95932	89.2533
	28	28.41001678		3.267159637	0.129943849	0.115000271	87.00562	88.49997
	30	28.56122139		3.418364249	0.135957669	0.119685507	86.40423	88.03145
$y = \frac{5}{4}\sqrt{16 - x^2}$	4	57.25239031	62.85714286	5.604752546	0.089166518	0.09789552	91.08335	90.21045
	6	56.27926331		6.577879545	0.104648084	0.116879276	89.53519	88.31207
	8	60.34983807		2.507304792	0.03988894	0.041546173	96.01111	95.84538
	10	63.08624984		0.229106984	0.003644884	0.003631647	99.63551	99.63684
	12	66.31881043		3.461667575	0.055071984	0.052197371	94.4928	94.78026
	14	65.95018336		3.093040505	0.086876127	0.04689965	91.31239	95.31004
	16	68.31792795		5.460785097	0.34228205	0.079931948	65.7718	92.00681
	18	68.11637915		5.259236295	0.083669668	0.077209569	91.63303	92.27904
	20	68.84554976		5.988406902	0.09527011	0.08698321	90.47299	91.30168
	22	69.5664794		6.709336546	0.106739445	0.096444963	89.32606	90.3555
	24	70.12143637		7.264293509	0.115568306	0.103595903	88.44317	89.64041

	26	70.73361119		7.876468336	0.125307451	0.111353969	87.46925	88.8646
	28	71.02504195		8.167899092	0.129943849	0.115000271	87.00562	88.49997
	30	71.40305348		8.545910623	0.135957669	0.119685507	86.40423	88.03145
$y = \frac{\sqrt{20}}{6} \sqrt{36 - x^2}$	4	77.4279389	84.33170658	6.903767684	0.081864437	0.08916378	91.81356	91.08362
	6	75.93401959		8.397686986	0.099579237	0.110591893	90.04208	88.94081
	8	82.04178883		2.289917751	0.027153699	0.027911602	97.28463	97.20884
	10	85.47606402		1.144357443	0.013569718	0.013388046	98.64303	98.6612
	12	88.98487004		4.653163458	0.055176916	0.052291625	94.48231	94.77084
	14	89.39795051		5.066243926	0.060075197	0.056670694	93.99248	94.33293
	16	91.1680437		6.83633712	0.08106485	0.520408558	91.89352	47.95914
	18	92.36047997		8.028773387	0.095204683	0.086928667	90.47953	91.30713
	20	93.35806322		9.026356638	0.107033962	0.096685346	89.2966	90.33147
	22	94.34462572		10.01291914	0.118732557	0.106131314	88.12674	89.38687
	24	95.10367849		10.77197191	0.127733356	0.113265565	87.22666	88.67344
	26	96.66392071		12.33221413	0.146234609	0.127578253	85.37654	87.24217
28	96.34011732	12.00841074	0.142394969	0.124646005	85.7605	87.5354		

	30	96.85734298		12.5256364	0.148528198	0.129320463	85.14718	87.06795
$y = \frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}$	4	16.40249567	18.85714286	2.454647189	0.130170684	0.149650836	86.98293	85.03492
	6	15.85808426		2.999058593	0.159040986	0.189118594	84.0959	81.08814
	8	17.29327249		1.563870371	0.08293252	0.090432298	91.70675	90.95677
	10	17.87261788		0.984524977	0.052209658	0.055085661	94.77903	94.49143
	12	18.56886772		0.288275136	0.015287318	0.015524648	98.47127	98.44754
	14	18.62983628		0.227306579	0.012054137	0.012201212	98.79459	98.77988
	16	18.96715714		0.110014285	0.005834091	0.005800252	99.41659	99.41997
	18	19.2075543		0.350411442	0.018582425	0.018243418	98.14176	98.17566
	20	19.4015431		0.544400245	0.02886971	0.028059636	97.11303	97.19404
	22	19.59302657		0.735883717	0.039024137	0.03755845	96.09759	96.24416
	24	19.74090255		0.883759694	0.046866044	0.044767948	95.3134	95.52321
	26	19.93245937		1.075316514	0.057024361	0.05394801	94.29756	94.6052
	28	19.98101073		1.123867873	0.059599054	0.056246798	94.04009	94.37532
30	20.08148956	1.224346703	0.064927477	0.060968919	93.50725	93.90311		

DAFTAR PUSTAKA

- Aziz, Imran. *A Quadrature Rule of Numerical Integration based on Haar Wavelets and Hybrid Functions*. Peshawar: University of Peshawar, 2010.
- Bardon, Jeffrey Michael. *A Modified Clenshaw-Curtis Algorithm*. Worcester: Worcester Polytechnic Institute, 2013.
- Departemen Agama RI Al-Hikmah. *Al-Qur'an dan Terjemahannya*. Bandung: Diponegoro, 2008.
- Hara, O. *Error Estimation in the Clenshaw-Curtis Formula*. Jurnal Oxford University, 1967.
- Mason, Handscome. *Chebyshev Polinomials*. Washington: CRC, 2003.
- Mathews, John dan Kurtis Fink. *Numerical Methods Using Matlab Fourth Edition*. California: CSU, 1999.
- Murdeka, Bambang. *Matematika*. Yogyakarta: Andi, 2011.
- Nugraha, M. Pasca. *Perbandingan Metode Gauss-Legendre dan Metode Clenshaw-Curtis untuk Mencari Solusi Permasalahan Integral*.” Jurnal jurusan Teknik Informatika Institut Teknologi Bandung, 2011.
- Nurman, Try Azisah. *Geometri Analitik Bidang Dan Ruang*. Makassar: Universitas Islam Negeri Alauddin, 2012.
- Purcel, Edwin dkk. *Kalkulus dan Geometri Analitis Edisi Keempat*. Jakarta: Erlangga, 2003
- Stewart, James. *Kalkulus Edisi Keempat*. Jakarta: Erlangga, 2003.
- Safitri, Yuli. *Metode Iterasi Keluarga Chebyshev-Halley untuk menyelesaikan persamaan nonlinear*. Skripsi jurusan Matematika FMIPA Universitas Riau, 2010.
- Sahid, *Pengantar Komputasi Numerik dengan Matlab*. Yogyakarta: Andi, 2005.
- Scheid, Francis, *Analisis Numerik*. Jakarta: Erlangga, 1992.
- Setiawan, Agus. *Pengantar Metode Numerik*. Yogyakarta: Andi, 2006.
- Spiegel, Murray. *Kalkulus Lanjut Edisi Kedua*. Jakarta: Erlangga, 2006.

BIOGRAFI



Muh. Alif Mikail, biasa disapa Alif, penulis lahir di Sungguminasa, 1 September 1995. Penulis merupakan anak kedua dari tiga bersaudara. Penulis memulai jenjang pendidikan di SDI Jongaya I pada tahun 2000, SDI Pangkabinanga pada tahun 2005 dan lulus pada tahun 2007. Pada tahun yang sama melanjutkan pendidikan di MTsN Model Makassar. Pada tahun 2010 melanjutkan Pendidikan di MA Syekh Yusuf. Pada tahun sama penulis melanjutkan studi ke jenjang pendidikan Strata 1 dan diterima sebagai

mahasiswa di Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Alauddin Makassar pada tahun 2013 sampai sekarang. Pada Tahun 2015, beliau diterima sebagai Asisten Laboratorium Komputasi. Dan pada tahun 2016 beliau memutuskan mengundurkan diri. Pada tahun 2015, beliau juga diterima sebagai Staff dan Tutor di LBB Gadjahmada. Pada tahun 2016, beliau dipilih menjadi Koordinator Komunitas Matematika (HMJ-MTK 2016).

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
ALAUDDIN
MAKASSAR