

磁束反射効果を用いた
超伝導バルク磁石の磁場解析高精度化

土屋 寛明

電気通信大学
情報理工学研究科

博士（工学）の学位申請論文

2019年6月

磁束反射効果を用いた
超伝導バルク磁石の磁場解析高精度化

博士論文審査委員会
審査委員氏名

伏屋 雄紀（主査）

村中 隆弘

島田 宏

齊藤 弘樹

佐々木 成朗

著作権所有者：土屋 寛明

氏名：土屋 寛明

2019年

Abstract

Highly precise magnetic field calculations must be conducted for superconducting bulk magnets at least 3 mm above the surface for cryocooler-cooling applications; in practice, calculations must be conducted for those at a distance of 5 mm from the surface. However, the reflection of the fluxoid affects the precision of the magnetic field calculations for superconducting bulk magnets but this effect has yet to be accounted for. Therefore, the data shows the maximum error was over 20 % at distances above 3 mm from the bulk surface in previous work about the magnetic field calculations. Here, the reflection's effect was approximated and incorporated into the magnetic field calculations for superconducting bulk magnets. The numerical results were then compared with the experimental results. The data shows that the error was less than 6 % at distances above 3 mm from the bulk surface in the magnetic field calculations performed by the new method. It is expected that the calculation error can be corrected in future studies by comparing the extrapolative semi-empirical model, like that presented here, with mesoscopic calculation models. These findings will be useful in the design of devices containing highly homogeneous superconducting magnets.

概要

従来、超伝導バルク磁石の磁場値は、実験的に得られた臨界電流特性からマクスウェル方程式を解くことで算出されてきた。しかし、実際の実験結果とマクスウェル方程式を用いた計算結果の間にはMRI等要素機器設計の立場から許容不可能な誤差が存在している。本研究では、バルク端部の磁束量子挙動を考慮することで、計算精度向上のための捕捉磁場算出手法を検討した。さらに、新規手法による計算磁場値と作製した超伝導バルク磁石 MgB_2 の磁場実測値を比較し、本手法が超伝導バルク磁石の磁場計算精度を数%以上向上できることを示した。

目次

第 1 章	序論	8
1.1	研究背景	8
1.1.1	超伝導の歴史	8
1.1.2	超伝導体の各技術分野への適応	10
1.1.3	磁場応用機器における磁場発生装置	12
1.1.4	MgB ₂ の微視的構造と超伝導特性	16
1.1.5	均一磁場設計	16
1.2	従来計算手法の問題点	20
1.3	本研究の着眼点	21
第 2 章	研究手法	22
2.1	目的	22
2.2	計算原理	22
2.2.1	磁場計算原理	22
2.2.2	磁束反射効果の導入	28
2.2.3	超伝導バルク着磁方法と J_c - B 特性	29
2.3	方法	35
2.3.1	バルク作製方法	35
2.3.2	J_c - B 特性測定方法	37
2.3.3	捕捉磁場分布測定方法	41
2.3.4	計算方法	46
第 3 章	結果	51
3.1	測定磁場分布	51
3.2	測定した J_c - B 特性	52
3.3	計算結果	52
3.3.1	計算収束性	52
3.3.2	捕捉磁場ベクトル空間分布	53
3.3.3	各模型間における捕捉磁場分布の径方向依存性	56
3.3.4	各模型間でのバルク内部電流分布と経験磁場	60
3.3.5	捕捉磁場への寄与率空間分布	60
3.3.6	Y20 模型での捕捉磁場への寄与率空間分布	65

第 4 章 議論	68
4.1 測定試料の品質	68
4.2 磁場計算の妥当性	69
4.2.1 Y 値の設定	69
4.2.2 各計算点での捕捉磁場分布の精度低下	69
4.2.3 磁場計算時の振動解への対処	74
第 5 章 結論	77
5.1 本計算の導入効果	77
5.2 計算手法での未考慮事項	79
5.3 今後の課題	79
付 録 A	81
A.1 超伝導現象の現象論的特徴とロンドン方程式	81
A.2 コヒーレンス長	83
A.3 第二種超伝導体	83
A.4 超伝導バルクの静磁界解析方法	84
A.5 磁束量子動力学法における磁束に加わる力	86
A.5.1 単一磁束周りの磁束密度	86
A.5.2 磁束量子に加わる五種の力	88

第1章 序論

近年、粉末冶金等の方法で超伝導物質を成型したバルク体(超伝導バルク)の高携行性が注目され、磁石としての応用を目標とした様々な開発が進められている。磁石として用いられる超伝導バルク体は、超伝導バルク磁石と呼ばれ、磁場発生装置の中でも高い携行性を持つ永久磁石よりも高い磁場を持つことから、永久磁石と置換される形での実用が期待されている。超伝導バルク磁石の磁場を有効に用いるためには、実用上の要求を満足する磁場を設計する必要がある。従来から様々な方法で超伝導バルク体の捕捉磁場分布が計算されてきた。数ある計算手法の内、最も広く用いられている計算手法は、マクスウェル方程式を用いた静磁界解析である。

しかし、従来の超伝導バルク磁石の捕捉磁場計算では、最大 19%程の計算誤差¹が生じている。計算誤差の一部は、従来手法がバルク端部における磁束反射効果を考慮していないことに由来している。本研究ではバルク磁石の磁場計算を高精度化するため、バルク端部の磁束反射効果を近似的に磁場計算へ導入する。近年、ギンツブルグランダウ (GL) 方程式でも μm サイズ試料への類似効果が検証されたが、磁場設計に用いられる mm サイズ試料の捕捉磁場計算へ具体的な導入の方法や該当効果の影響は議論されていなかった。

本章では、超伝導の歴史と磁場発生装置での超伝導バルクの扱いを踏まえ、均一磁場設計に用いられる従来計算の問題点から本研究の着眼点を説明する。

1.1 研究背景

1.1.1 超伝導の歴史

超伝導現象は、Kamerlingh Onnes による Hg の電気抵抗測定実験中に発見され、1911 年に報告された [1]。Kamerlingh Onnes は、1908 年に He の液化に成功して以来、低温時における様々な金属の電気抵抗変化を調査し、絶対温度 4.19 K で Hg の電気抵抗が突然ゼロになることを発見した。超伝導現象は、Hg 以外の Sn や Pb などの単体金属および各種合金におい

¹本論文では、測定値と計算値の差を計算誤差の大きさとし、計算誤差の減少を計算精度の向上と呼ぶ

でも観測され、Hg に特有な現象でないことが確認された。その後、1933 年には Meissner と Ocshenfeld により、超伝導状態の物質からは磁場が完全に排除されるという効果（マイスナー効果）が発見され、超伝導状態に完全導体以外の性質が示された [2]。

超伝導現象の理論は、1957 年に J. Bardeen, L. N. Cooper, J. R. Schrieffer による BCS 理論 [3] として示された。当時、BCS 理論により考慮された電子間相互作用は、格子振動を介した引力であり、超伝導転移温度 T_c は 40 K を越えないと予測された [4]。当時の単体金属超伝導の臨界磁場 H_c は 1 kOe 程度と低く、工業的に実用に耐えるものではなかった。しかし、1954 年の Matthias らの研究により、現在の実用的な第二種超伝導体 Nb_3Sn [5] が発見された。 Nb_3Sn の臨界電流密度は発見当初から大幅に増加し、1961 年の J. E. Kunzler らの研究より、 Nb_3Sn の臨界電流密度は、実用に耐える 1500 A/mm^2 程まで向上した [6]。

高臨界電流密度を持った物質の探索は進み、1986 年 IBM チューリッヒ研究所の Bednorz と Muller により La-Ba-Cu-O 系超伝導体 ($T_c = 30 \text{ K}$) [7] の発見が報告されたため、銅酸化物高温超伝導体 (銅系超伝導体) の研究が盛んに進められた。銅系超伝導体の研究はより進められ、1987 年 2 月にヒューストン大学の Chu らにより液体窒素温度 77 K を越える転移温度を示す $YBa_2Cu_3O_7$ ($T_c = 93 \text{ K}$) [8] が発見された。

$YBa_2Cu_3O_7$ の発見により世界中で一斉に銅系超伝導体の研究が競って進められた。その後、Bi 系 [9]、Tl 系 [10]、Hg 系 [11] を含んだ銅系超伝導体の発見によって T_c の記録は次々と塗り替えられていき、1993 年に発見された $HgBa_2Ca_2Cu_3O_y$ の T_c は常圧下で 133 K に到達した。この転移温度は、常圧下での銅系超伝導体転移温度の最高記録である。銅系超伝導体の最高転移温度は、1993 年の Hg 系の 164 K (高圧下) [11] から更新されていない。

その一方、銅系超伝導体以外の超伝導物質探索には進展が見られた。2001 年のニホウ化マグネシウム MgB_2 ($T_c \simeq 38 \text{ K}$) [12] 等金属間化合物超伝導物質の発見、2006 年の $LaFePO$ [13] や 2008 年の $La(O, F)FeAs$ ($T_c \simeq 26 \text{ K}$) [14] 等鉄系超伝導体の発見、2015 年の H_3S [15] 等 150 GPa 程の超高压下での水素化合物超伝導体の発見等が相次いだ。2019 年現在最高の超伝導転移温度を持った物質は、200 GPa 程の超高压下の水素化合物系超伝導物質 $LaH_{10\pm x}$ [16] ($T_c \simeq 260 \text{ K}$) であり、非常に高い超伝導転移温度に関心が高まっている。

2018 年度までの新規超伝導物質の最高転移温度推移を、図 1.1 に示した [17]。常圧下の超伝導転移温度に近年大幅な記録更新は見られないものの、発見から 100 年を超えた今でも研究が進められており、学術的な関心とは別に、超伝導転移温度の上昇は様々な既存技術へ超伝導現象の応用を

期待させている。

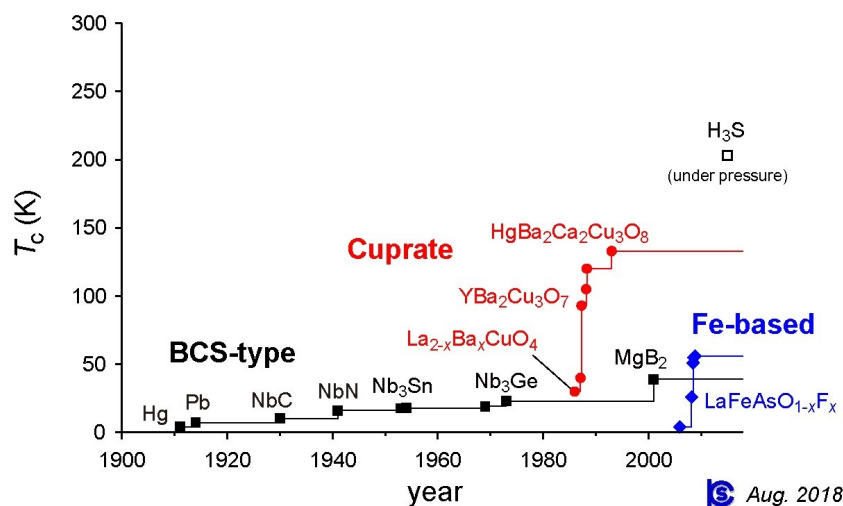


図 1.1: 新規超伝導物質の最高転移温度推移 (2018 年度) [17]

1.1.2 超伝導体の各技術分野への適応

超伝導体は、重電業界と弱電業界に分けて浸透しエネルギー分野等に広く応用が検討されている [18]. 超伝導体の応用には、磁気遮蔽効果 [19], 強力磁石, 超伝導リングでの磁束量子化効果, 電力輸送などの特異もしくは高い特性が活かされており、機器としては MRI 等医療用解析装置, 水浄化用磁気分離装置 [20], 磁場検出器, 電線, 超伝導磁気浮上方式鉄道への応用が検討, もしくは一部実現されている。

各分野の設計には有限要素法 [21], 境界要素法 [22] などが用いられ, 実際核磁気共鳴現象 (NMR) を利用したイメージング手法 (MRI) [23] や水分離装置 [24] などに適用されている。例えば MRI の設計では, 高い磁場強度, 高磁場均一性, 磁場安定性, 小漏洩磁場が求められる [25]. 特に磁場均一性では, 1~20 T 以上かつ ppm 程度の高均一高磁場を生成する設計が求められる。

本論文では, 実用上要求される磁場を出力するための磁場解析や磁石加工を磁場設計と呼ぶ。MRI の磁場設計の場合, 2 T 級の実用領域ではネオジム磁石 [27] が用いられ, 10 T 級の実用領域では超伝導磁石 [28] が用いられている。ネオジム磁石を用いた MRI 装置は広く用いられているものの, 金属系超伝導磁石を用いた MRI 装置での冷媒 (He) 供給は難化している。

図 1.2 に, He 需要と供給量に関する年代推移 [29] を示した。He 需要は年々増加傾向を示しており, He 供給を上回っている。そのため, レア

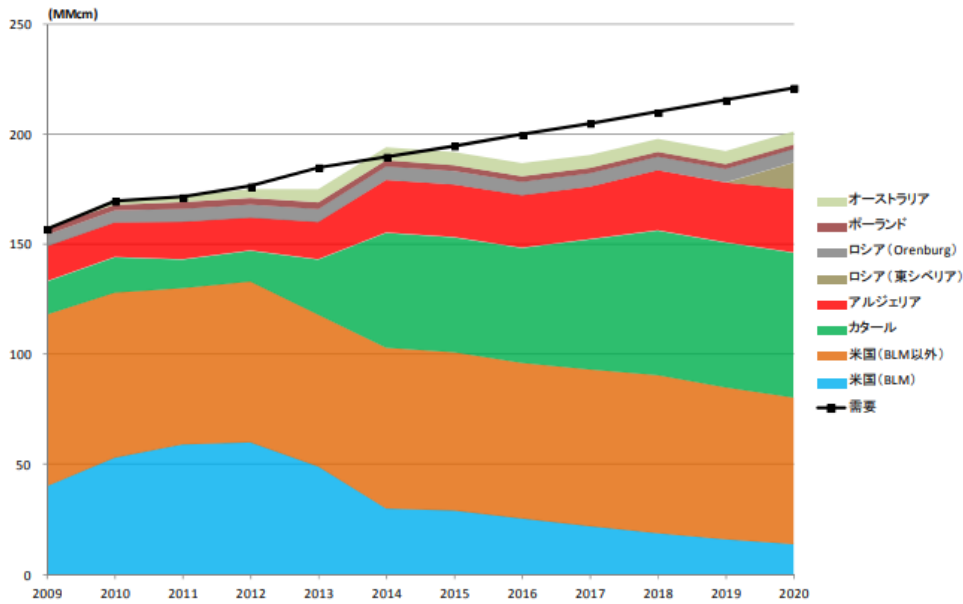


図 1.2: He の需要と供給に関する年代推移 (2015 年度予測グラフ) [29]

アース系銅酸化物高温超伝導体や MgB_2 など、超伝導転移温度が高く He フリーな高温超伝導磁石の適用が期待されている。

高温超伝導体を用いた磁場設計には超伝導コイルを用いる場合と、超伝導バルク磁石を用いられる場合がある。現状、超伝導コイルを用いた磁場設計が商業的にも広く用いられているが、超伝導コイルの適用には据え置きかつ磁場励起のための消費電力も大きく、大規模なシステムが必要となる。一方近年では、超伝導バルク磁石においても、超伝導バルク磁石の着磁方法の改良、材料改善、NMR 用磁石配置の変更から、超伝導バルク磁石技術が実用レベルに達しつつある。そのため、超伝導バルク磁石は、従来の永久磁石と比較して高均一もしくは高傾斜の高磁場生成を目的として、永久磁石と置換される形で応用を検討されることが多い [30]。

1.1.3 磁場応用機器における磁場発生装置

磁場設計で用いる磁場発生装置は、永久磁石と電磁コイルと超伝導コイルと超伝導バルク磁石の4種に類別される。一般的に、2 T級の実用領域の磁場設計では、永久磁石や電磁コイルが用いられ、より高磁場の設計においては、超伝導コイルや超伝導バルク磁石が用いられる。

磁場設計での超伝導バルク磁石の位置付けを示すため、4種の磁場発生装置の特徴を個別に説明する。

永久磁石

永久磁石は、外部磁場の供給を受けることなく、半永久的に残留磁化を持つ物質である。

図 1.3 に、永久磁石の最大磁気エネルギー積の年間推移を示す。ここで、磁気エネルギー積 $|\mathbf{B} \times \mathbf{H}|$ は、磁石外部から磁石に印加した磁場 H (A/m) と磁石への印加磁場に対する磁石内部の磁束密度 B の積で示され、最大磁気エネルギー積 $|\mathbf{B} \times \mathbf{H}|_{\max}$ は任意の外部印加磁場 H に対して最も高い磁気エネルギー積を示されている。

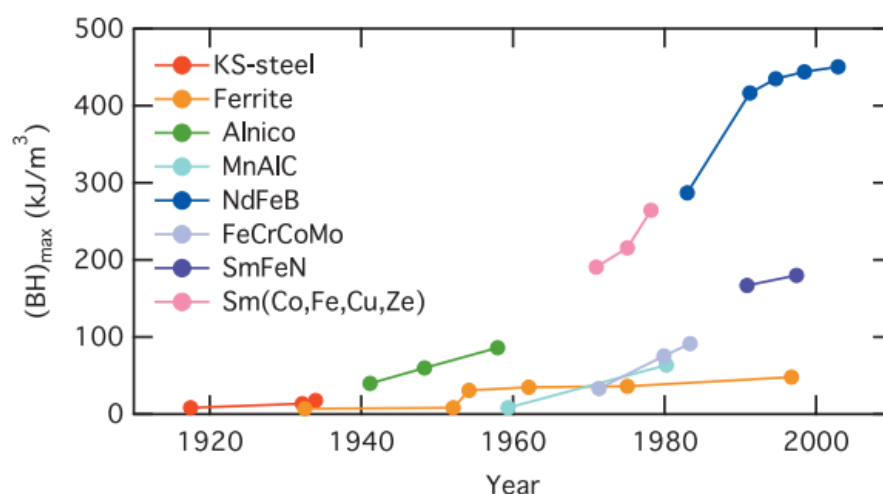


図 1.3: 永久磁石の保持出来る最大磁気エネルギーの年間推移 [31]

永久磁石の中では、NdFeB 磁石が最も大きな磁気エネルギーを保持している。永久磁石に用いられる物質には、①300 K 以上の磁気転移点と②大きな磁化と③大きな磁気異方性の三点の特性が求められる。永久磁石内部には、磁壁やスピン軌道相互作用を起源とする結晶磁気異方性エネルギーが存在することから、永久磁石の開発方針は、多くの場合ピンニン

グセクター等を用いた磁壁の不動化や単磁区粒子臨界径よりも小さい粒径への微細化を目標としている。この中でも、高い磁気エネルギー積を持つNdFeB磁石の需要は高く [32]、焼結性の改善、成形プロセス見直しによる配向性の改善、不純物制御等からNd₂Fe₁₄Bの着磁磁場応用を目指した開発が進められている [33][34]。

電磁コイル

電磁コイルは、導線をコアに巻きつけたものである。導線に通電させることで、電磁コイルは磁石として用いられる。電磁コイルの外観を図1.4に示す。

銅には電気抵抗由来の発熱があるため、大規模な冷却システムがなければ、2 T程度の磁場励起が一般的である。電磁コイルの最高記録についての開発は爆縮や装置改良が進んでおり、表1.1に示されるように毎年のように世界記録が更新されている。

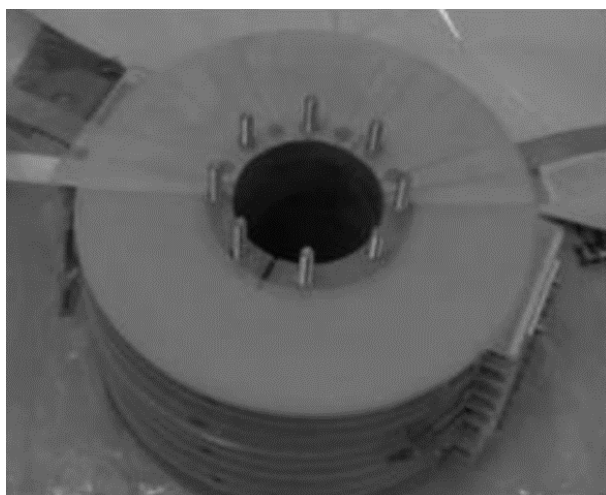


図 1.4: 電磁コイルの外観 [35]

表 1.1: 電磁コイルの磁場世界記録

種別	最高磁場値
定常磁場	41.4 T [36]
パルス磁場 (100 ms 以下)	101 T [36]
パルス磁場 (100 ms 以上)	60 T [36]
ピーク磁場	1200 T [37]

超伝導コイル

超伝導コイルは、電磁コイルの導線を超伝導線に置換したものであり、液体窒素の沸点（77 K）より低い温度領域での実用超伝導線材には Nb_3Sn が用いられている [38]。その一方、液体窒素の沸点（77 K）より高い温度領域での実用超伝導線材は、Bi系とY系の二種に大別されている [39][40]。

超伝導線材の抵抗値は0に非常に近く、超伝導線材には電磁コイルの約100倍の電流密度（約 200 A/mm^2 ）を通電させることが出来る [41]。超伝導コイルでは10 T以上の非常に大きな磁場を励起出来、Y系超伝導線材を用いた超伝導コイルでは、超伝導コイルでの世界最高磁場値となる32 Tの磁場が励起された [36]。その一方、超伝導コイルによる磁場励起には、大電流通電のための据え置き型の大規模な冷却設備が必要となる [42]。

超伝導バルク

超伝導バルク磁石は、第二種超伝導物質を用いた磁石である。超伝導バルク磁石を磁化することで、超伝導バルク体内部には磁束量子が残留する。バルク中に残留した磁束量子は、捕捉磁場と呼ばれる磁場をバルク周辺に生成するため、超伝導バルク磁石は磁石として用いられる。永久磁石の保持可能な磁場は1 T級であるが、超伝導バルク体では10 T級高磁場を捕捉することが出来 [43]、REBCO系・Fe系・ MgB_2 超伝導バルク体の応用が検討されている。

近年、NMR用に研究されている超伝導バルク磁石の特徴は、REBCO系や MgB_2 系などの超伝導体の種類によって異なり、各々期待されている役割も異なる。REBCO系はより高い磁場強度を応用する際に用いられ、 MgB_2 は加工性や作製工程上の試料間品質差を考慮した際に用いられる。

図1.5にREBCO(RE=Gd)と MgB_2 の超伝導バルク磁石の捕捉磁場分布を示す [44]。

REBCOの超伝導バルク磁石は、 MgB_2 と比べ、1.5倍の磁場強度を有している。一方、 MgB_2 の超伝導バルク磁場分布には、ほぼ同径のREBCOと比較して、径方向に高い均一性が存在している。REBCOの磁場分布の均一性が MgB_2 と比較して劣るのは、REBCOの素材に結晶配向性が要求されるためである。

REBCO系・ MgB_2 超伝導バルク体の外観を図1.6に示す。REBCO系の超伝導バルク体の結晶面は種結晶から成長しているため、図1.6上図のバルク表面外観から確認出来るように、REBCO系超伝導バルク体には結晶配向性が求められる。その一方、多結晶体 MgB_2 には結晶配向性が要求されないため、試料間の超伝導特性に実用上有意な差が生まれにくい [46]。さらに、 MgB_2 バルクの大形化・試料加工は容易であるため、 MgB_2

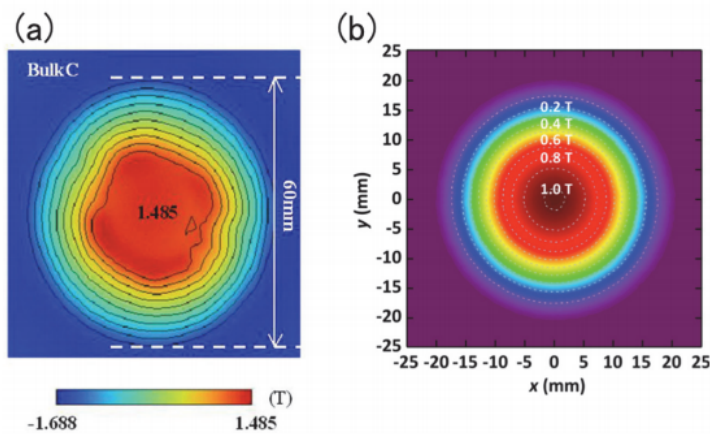


図 1.5: (a)GdBCO と (b)MgB₂ の超伝導バルク磁石の捕捉磁場分布の比較 [44]

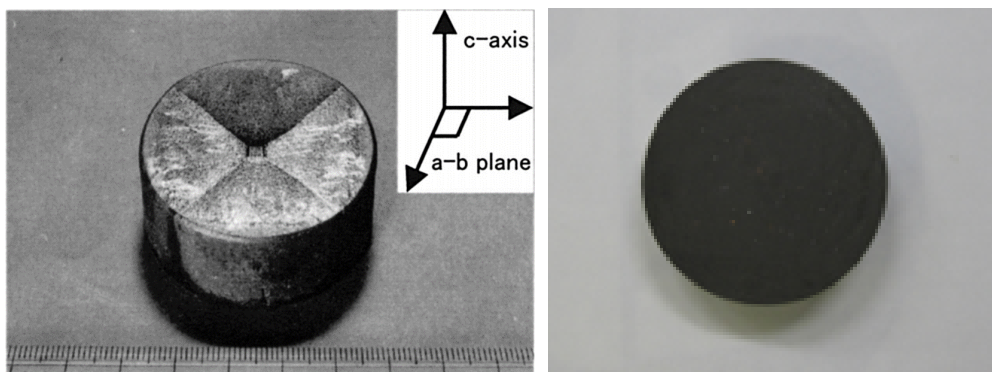


図 1.6: REBCO 系 (RE=Y) (左図) [45]・MgB₂ (右図) の超伝導バルク外観

超伝導バルクは広く応用が期待されている [47][48]. 本研究では, 実用的な磁場設計に対応した超伝導バルク磁石の磁場計算を行うため, 超伝導バルク MgB_2 の研究を研究対象とした.

1.1.4 MgB_2 の微視的構造と超伝導特性

2001年に永松らにより発見された MgB_2 は, 図 1.7 のようにハニカム構造の B とトラス構造の Mg が交互に積層した結晶構造を持つ, 六方晶の金属化合物超伝導物質 ($T_c = 39 \text{ K}$) である [12]. フェルミ面近傍の電子状態は, sp^2 軌道によって構成され, ab 面に沿った B の $2p$ 電子軌道 σ バンドと c 軸方向に沿った π バンドが存在する [12][50].

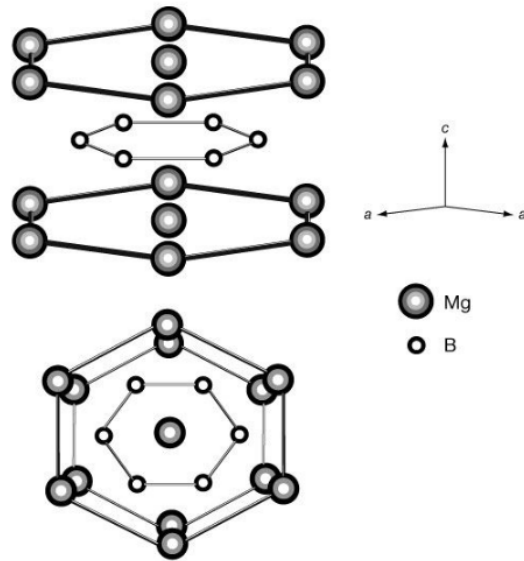
超伝導状態では, MgB_2 は各々のフェルミ面に対して σ バンドで 5.5 meV , π バンドで 1.9 meV と異なる超伝導ギャップが生じる 2 ギャップ超伝導体である [51]. MgB_2 の大きな σ バンドに生じる超伝導ギャップは, B 面内に広がる二次元的な σ バンドと B 面内の高い振動数のフォノンが結合したためとされている [52]. また, 上部臨界磁場の異方性比は, 単結晶で $1.2 \sim 9$ [50][53][54], 多結晶で 30 K で $2 \sim 2.7$ 程 [55][56] となっている.

MgB_2 超伝導バルクの作製方法は, マグネシウム粉末とホウ素粉末の混合体の熱処理である [57]. MgB_2 の作製では, 高純度原料粉同士合成のため密閉空間で原料や雰囲気からの MgO を生じさせる酸素や水分を遮断し, MgB_4 相の生成を抑制するように MgB_2 を焼成させる [49]. 焼成により Mg が溶解することで MgB_2 が生成されるため, 結晶に配向性は無く, 実用上の超伝導 MgB_2 バルクの超伝導特性は, ① MgB_2 粒の粒径と ② 結合度の観点から議論される.

MgB_2 粒は微細化されることで, バルク中の磁束に対する単位面積辺りのピンニングセンターの数は増加する [58]. ピンニングセンターが増加した物質では, MgB_2 バルク内部の磁束へのピンニング力は増加し, よりバルク中により多くの磁束を捕捉出来るようになる [59]. 一方, 実用上 MgB_2 内の電流は試料全体に渡って流れる必要があり, バルク中 MgB_2 粒の結合度 (コネクティビティ) も実用上超伝導特性に重要な影響を与える. これは, バルク中の電流経路が粒径程度の小さなパスで形成されると, バルク内部で磁束線が閉じることでバルクが磁石として実用出来なくなるためである.

1.1.5 均一磁場設計

超伝導現象を用いた磁場発生装置において商業的に最も成功している例は MRI 装置である. 超伝導体を用いる MRI 装置の磁場設計では中空型

図 1.7: MgB₂ の結晶構造 [12]

が存在しており，MRI 装置の中核となる NMR 装置には中空型と対向型が存在する。

図 1.8 に中空型 MRI の構造 [25] を示し，表 1.2 に NMR 用超伝導バルク磁石単体での目標値と設計値の差を示した．実用化を踏まえた場合，補正用コイルを用いない NMR 用磁石には， $\phi 3 \text{ mm} \times L 5 \text{ mm}$ の空間に磁場強度 4.7 T で磁場均一度 1 ppm が求められる．実用上の要求に対して，現行の研究で REBCO 系の NMR 用超伝導バルク磁石の捕捉磁場は，要求された磁場均一度を満たしている．その一方，MgB₂ バルクを用いた均一磁場は実用領域まで到達していない [26]．

MgB₂ バルクを用いて生成した均一磁場が実用要求を満たさない理由は，MgB₂ バルクの捕捉磁場強度が REBCO 系の捕捉磁場強度よりも低いためである．一般的に，MRI は核磁気共鳴現象による原子間の化学的シフトの差を検出しているため，磁場均一度の上昇は MRI 装置の分解能を向上させ，磁場強度の上昇は MRI による画像の信号雑音を除去する．REBCO 系の NMR 用超伝導バルク磁石の捕捉磁場強度は MgB₂ の超伝導バルクよりも 2 倍以上高く，MgB₂ の捕捉磁場強度の低さは実用化のための要求磁場均一度を上昇させている．

中空型とは別に，バルク 2 個を対向させることで，バルクからより遠方の均一磁場を用いた NMR 用超伝導磁石も開発されている．この磁石を対向型超伝導磁石と呼ぶ．図 1.9 に対向型 NMR 用超伝導磁石の外観 [60] を，図 1.10 に対向型超伝導磁石の模式図を示した．対向型超伝導バルク

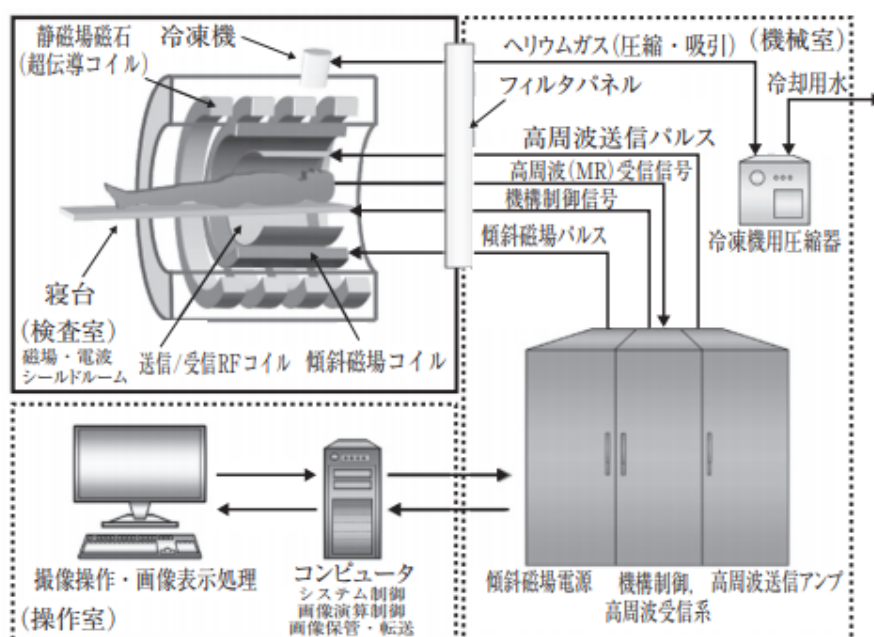


図 1.8: MRI 構造 [25]

磁石は、磁石間がフリースペースとなっているため、中空型と比較して携行性や小型化を追求しやすく設計されている [61].

しかしながら、対向型 NMR 用超伝導磁石による捕捉磁場の均一性は、現状 NMR としての実用に耐えられるものではない。その要因には下記の三点が挙げられる。

- 測定点がバルク遠方に位置することによる磁場強度不足
(現行の実用的な NMR 用超伝導磁石約 5 T に対して、現行の磁場強度は約 1 T)
- 実用上要求値に対する磁場均一性の不足
- 磁場計算モデルによる計算誤差

対向型バルク磁石の磁場応用では、上記三点から現在十分な磁場均一性が維持出来ないため、磁気分離等への技術提案が進んでいる。しかし、将来的に新規物質発見や捕捉磁場の構造最適化による磁場強度の改善、もしくは実用上要求される磁場値の低下があれば、設計で用いる磁場計算モデルによる計算誤差が本質的な課題となる。

表 1.2: NMR 用超伝導バルク磁石単体の捕捉磁場の目標値と実績値 [62]

目標種別	目標値 (実用)	実績値 (REBCO 系)
磁場強度	4.7 T	4.747 T
均一磁場領域	$\phi 3 \text{ mm} \times L5 \text{ mm}$	$\phi 6.9 \text{ mm} \times L10 \text{ mm}$
磁場均一度	1 ppm	0.45 ppm



図 1.9: 対向型 NMR 用超伝導磁石の外観 [62]

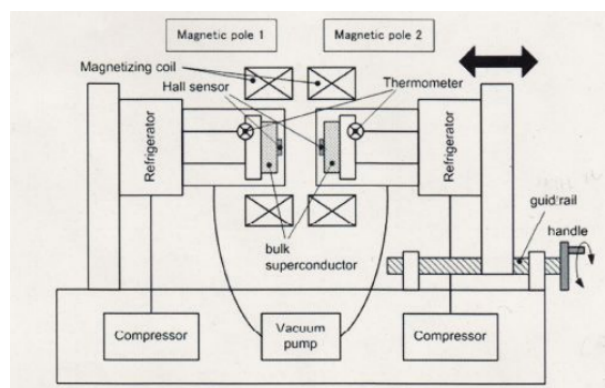


図 1.10: 対向型超伝導磁石の模式図 [63]

1.2 従来計算手法の問題点

磁場設計に用いられる超伝導バルク磁石の従来計算模型には、計算精度の向上が課題となっている。図 1.11 に従来計算で示された超伝導バルク磁石（バルク径 30 mm ϕ バルク厚 10 mm t ）のバルク表面上 3 mm 捕捉磁場分布の径方向依存性の実測値と計算値を示した [64]。超伝導バルク磁石の捕捉磁場応用では、超伝導バルク磁石の周囲を低温に保つため、冷却装置が設けられており、バルク表面から最低 3 mm 以上離れた捕捉磁場分布が実用上用いられている。図 1.11 では、その実用領域にあるバルク表面上 3~8 mm の領域で最大 21% の計算誤差が生じている。

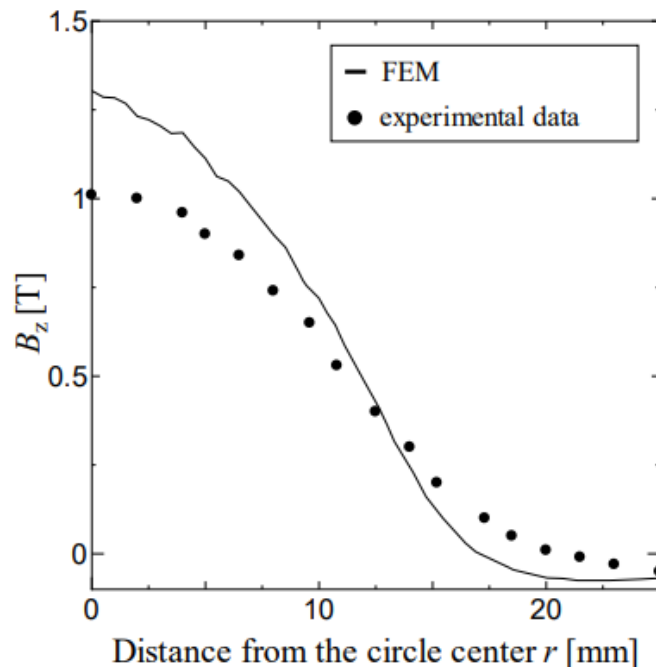


図 1.11: 超伝導バルク磁石 (30 mm ϕ ×10 mm t) のバルク表面上 3 mm での捕捉磁場分布の径方向依存性の実測値と計算値 [64]

従来計算模型の計算誤差は下記二点により生じている。

1. 磁束運動の過剰な粗視化
2. 粒間・粒内電流分離計算模型の不存在

第一の問題は、静磁界解析での磁束運動の粗視化である。超伝導バルク磁石の磁場設計では、補正用コイル (シムコイル) や周辺装置の磁化を考慮するため、超伝導バルク磁石作製前に静磁界解析の手法が用いられる。静磁界解析では、実験的に得た超伝導特性を用いてバルク内部の電流密度

に拘束条件が設定されており、実験的な超伝導特性と計算模型に、電子のフェルミ面形状や磁束運動のパラメーターは粗視化されている。前者の実験的な超伝導特性では、バルク磁石の磁化率でバルク中の磁束運動を粗視化しており、後者の計算模型では、磁束にかかる力の一部(磁束反射効果)を考慮していない。

第二の問題は、バルク内部の粒間・粒内電流を分離した計算模型が存在していないことにある。粒内電流と粒間電流を分離して測定する方法は開発されているが、粒内電流と粒間電流の経路の適切なループを設定出来ないため、粒内電流を実試料のスケールで磁場計算に導入出来ていない。

1.3 本研究の着眼点

従来手法に存在する二点の問題を解消するのは、計算精度と計算の妥当性を向上させるために重要である。特に、実用上バルク磁石を用いた磁場設計では、複数のバルク体を磁場設計に用いる例が多く、バルク間の磁気的な相関関係に磁束反射効果を導入することで磁場計算の高精度化が見込める。そのため、本研究では磁束運動の粗視化の問題に取り組み、磁束反射効果を従来計算に近似的に導入することを目標とする。

また、研究の目標設定として、下記の二点から、磁束反射効果を従来計算に導入する技術的障壁は、他の課題よりも低いと想定している。

1. GL 方程式計算の時間的制約
2. 粒内電流模型の構築

第一の問題は、GL 方程式の計算スケールが従来計算と比較して大きいことにある。バルク中の磁束運動を磁化率以外で記述するには、試料サイズでの GL 方程式の計算が必要となる。しかし、GL 方程式が試料サイズの計算を可能とする程高速化された事例はない。

第二の問題は、粒内・粒間電流経路ループを磁場計算で設定出来ないことにある。粒内電流に対するループが決定出来ないことには、実用的なレベルで粒内電流を磁場設計に導入することは困難である。

第2章 研究手法

2.1 目的

本研究の目的は、超伝導バルク磁石の従来捕捉磁場計算へ磁束反射効果を近似的に導入し、磁束反射効果の影響を確認することにある。静磁界解析で生じる計算精度低下の一要因は、より微視的な理論で考慮されている磁束反射効果の未考慮である。磁場計算精度に対する磁束反射効果の影響を確認するため、磁場値の実験値と計算値を比較する。磁場設計への応用を意識するため、磁場値の比較対象領域は、バルク磁石表面上 3 mm 以上 8 mm 以内とする。

2.2 計算原理

静磁界解析に磁束反射効果を導入するため、本節では、磁場計算に用いられる原理を述べ、磁場計算に対して如何に磁束反射効果を導入するかを述べる。

具体的には、まず従来手法である静磁界解析と磁束量子動力学法の差を述べる。その後、磁場計算で用いるビオ・サバールの法則による磁場計算式を示し、磁場計算式への磁束反射効果の導入方法を述べる。最後に、磁場計算においてバルク内部電流分布の拘束条件導出に必要な①バルク体着磁原理と②電流拘束条件の算出方法と③実験的な電流拘束条件データの補間方法の三点を述べる。

2.2.1 磁場計算原理

本研究の磁場計算では、静磁界解析としてビオ・サバールの法則を用いる。

磁束量子動力学法・静磁界解析における磁束に掛かる力の詳細な説明と立式は付録で述べるが、第二種超伝導体内の各磁束の挙動は、磁束量子動力学法で記述される。二次元の磁束量子動力学法では、各磁束に掛かる力は①ローレンツ力と②ピンニング力と③磁束間反発力と④磁束反射効果による磁束間力の4種と仮定されている。その一方、従来計算となる静

磁界解析で各磁束に掛かる力は①ローレンツ力と②ピンニング力と③磁束間反発力の3種と考えられ、従来計算では磁束反射効果による磁束間力は考慮されていない。

静磁界解析ではマクスウェル方程式が用いられ、電磁場が時間変化しない場合、マクスウェル方程式からビオ・サバールの法則が求められる。そのため、本研究では、ビオ・サバールの法則を用いて、超伝導バルク磁石の磁場解析を行う。図2.1に示すようにバルク内部の電流を円筒形コイル $J_1 \sim J_N$ の集合と仮定し、円筒形コイル N 個を外径の小さな順に番号付けする。図2.1の各円筒形コイルに対して、ビオ・サバールの法則は、各

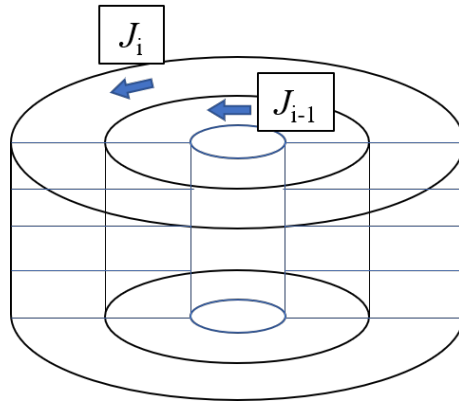


図 2.1: 円筒形コイルでのバルク内部電流の近似

円筒形コイル内外の磁場値 $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ を式 (2.1) で与える [65][66].

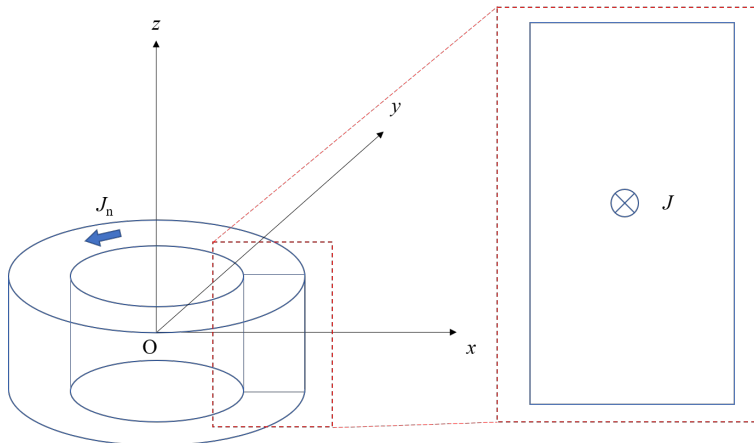


図 2.2: 逆時計周りに電流が流れる円筒形コイル模式図

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\mathbf{x}' \frac{(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \times \mathbf{J}_i(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \quad (2.1)$$

図 2.2 には，円筒形コイルの模式図が示されており，円筒形コイルの断面には電流密度 $\mathbf{J}_n(\mathbf{x}')$ の電流が y 方向へ一様に通電されている．図 2.3 の円柱座標を用いて，コイル内の一点 x' を (r', θ', z') とすると式 (2.1) の $\mathbf{J}_i(\mathbf{x}')$ は式 (2.2) のように示される．

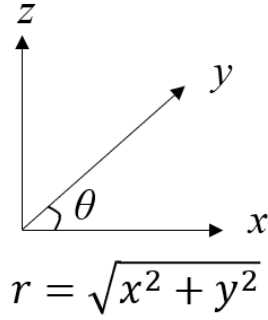


図 2.3: 円筒形座標

$$\mathbf{J}_i(\mathbf{x}') = \begin{pmatrix} -J_i \sin \theta' \\ J_i \cos \theta' \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

式 (2.2) を用いて，式 (2.1) は式 (2.3) のように示される．

$$\mathbf{B}_i(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0 J_i}{4\pi} \int \int \int r dr' d\theta' dz' \frac{\begin{pmatrix} -(z' - z) \cos \theta' \\ (z' - z) \sin \theta' \\ r' - x \cos \theta' - y \sin \theta' \end{pmatrix}}{\{r'^2 - 2r'(x \cos \theta' + y \sin \theta') + x^2 + y^2 + (z' - z)^2\}^{3/2}} \quad (2.3)$$

z' に関する積分を行うと，式 (2.2) を用いて，式 (2.3) は式 (2.5) のよう

に示される.

$$B_1(x) = \frac{\mu_0 J_i}{4\pi} \int \int \int r dr' d\theta' [\Omega]_{z'=z_1}^{z'=z_2} \quad (2.4)$$

$$\Omega = \left[\begin{array}{c} \begin{pmatrix} \cos \theta' \\ \sin \theta' \\ \alpha \end{pmatrix} \\ \hline \{r'^2 - 2r'(x \cos \theta' + y \sin \theta') + x^2 + y^2 + (z' - z)^2\}^{3/2} \end{array} \right]$$

$$\alpha = \frac{z'(r' - x \cos \theta' - y \sin \theta')}{\{r'^2 - 2r'(x \cos \theta' + y \sin \theta') + x^2 + y^2\}}$$

ここで積分公式より式 (2.5), (2.6) を参照する.

$$\int dr' \frac{r'}{R} = R + XH \quad (2.5)$$

$$\int dr' \frac{(z' - z)(r' - X)}{R(r'^2 - 2r'X + x^2 + y^2)} = (z' - z)H - Q \quad (2.6)$$

$$H = \ln \frac{R + r' + Z}{r'^{1/2}} + \operatorname{sgn}(r' - Z) \ln \frac{R + |r' - Z|}{\{2r'(Z - X)\}^{1/2}}$$

$$Q = \operatorname{sgn}(z' - z)X \ln \frac{R + |z' - z|}{\{r'^2 - 2r'X + x^2 + y^2\}^{1/2}} \\ + |Y| \arctan \frac{(r' - X) \cdot (z' - z)}{|Y| \cdot R}$$

$$R = \{(r'^2 - X)^2 + Y^2 + (z' - z)^2\}^{1/2}$$

$$Z = \{x + y^2 + (z' - z)^2\}^{1/2}$$

$$X = x \cos \theta' + y \sin \theta'$$

$$Y = -x \sin \theta' + y \cos \theta'$$

式 (2.5) と式 (2.6) を用いると, 式 (2.5) は式 (2.7), 式 (2.8) となる. ここ

で, 外径を r'_2 , 内径を r'_1 とする.

$$\begin{pmatrix} B_{i,x} \\ B_{i,y} \end{pmatrix} = \frac{\mu_0 J_i}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\theta' \begin{pmatrix} \cos \theta' \\ \sin \theta' \end{pmatrix} \cdot [R_{2,2} - R_{1,2} - R_{2,1} + R_{1,1} + X (H_2 - H_1)] \quad (2.7)$$

$$B_{i,z} = \frac{\mu_0 J_i}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\theta' \left[\left\{ \left(\frac{z_2 - z_1}{2} - z \right) H_2 - \left(-\frac{z_2 - z_1}{2} - z \right) H_1 \right\} - X \cdot \Lambda - \beta \right] \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \beta &= -|Y| \left[\arctan \frac{(r' - X) \cdot z}{|Y| \cdot R} \right]_{z=\left\{ \frac{z_2 - z_1}{2} - z \right\}, r'=r'_2}^{z=\left\{ -\frac{z_2 - z_1}{2} - z \right\}, r'=r'_1} \\ &= -|Y| \left[\left\{ \arctan \frac{(r'_2 - X) \cdot \left\{ \frac{z_2 - z_1}{2} - z \right\}}{|Y| \cdot R_{2,2}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \arctan \frac{(r'_1 - X) \cdot \left\{ \frac{z_2 - z_1}{2} - z \right\}}{|Y| \cdot R_{1,2}} \right\} \right. \\ &\quad \left. - \left\{ \arctan \frac{(r'_2 - X) \cdot \left\{ -\frac{z_2 - z_1}{2} - z \right\}}{|Y| \cdot R_{2,1}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \arctan \frac{(r'_1 - X) \cdot \left\{ -\frac{z_2 - z_1}{2} - z \right\}}{|Y| \cdot R_{1,1}} \right\} \right] \quad (2.9) \end{aligned}$$

ここで, 円筒形コイルの外径が内径よりも小さくなることはないため, $r'_2 > r'_1$ が成り立ち, 式(2.7)と式(2.8)の各パラメーターは式(2.10)～式

(2.17) のように成り立つ。

$$H_a = \begin{cases} \ln \left[\frac{(R_{2,a}+r'_2+Z_a)(R_{1,a}-r'_1+Z_a)}{(R_{2,a}-r'_2+Z_a)(R_{1,a}+r'_1+Z_a)} \right] & (Z_a > r'_2 > r'_1 \text{の時}) \\ \ln \left[\frac{(R_{2,a}+r'_2-X)(R_{1,a}-r'_1+Z_a)}{(Z_a-X)(R_{1,a}+r'_1+Z_a)} \right] & (r'_2 > Z_a > r'_1 \text{の時}) \\ \ln \left[\frac{R_{2,a}+r'_2-X}{R_{1,a}+r'_1-X} \right] & (r'_2 > r'_1 > Z_a \text{の時}) \end{cases} \quad (2.10)$$

$$\Lambda = \begin{cases} \ln \left[\frac{\{R_{2,1}-(-t-z)\}\{R_{1,2}-(-t-z)\}}{\{R_{2,2}-(-t-z)\}\{R_{1,1}-(-t-z)\}} \right] & (z > \frac{t}{2} > \frac{-t}{2} \text{の時}) \\ \ln \left[\frac{\Upsilon \{R_{2,2}+(t-z)\}\{R_{2,1}-(-t-z)\}}{\{R_{1,2}+(t-z)\}\{R_{1,1}-(-t-z)\}} \right] & (\frac{t}{2} > z > \frac{-t}{2} \text{の時}) \\ \ln \left[\frac{\{R_{2,2}+(t-z)\}\{R_{1,1}+(-t-z)\}}{\{R_{2,1}+(-t-z)\}\{R_{1,2}+(t-z)\}} \right] & (\frac{t}{2} > \frac{-t}{2} > z \text{の時}) \end{cases} \quad (2.11)$$

$$\Upsilon = \frac{(r'_1{}^2 - 2r'_1 X + x^2 + y^2)}{(r'_2{}^2 - 2r'_2 X + x^2 + y^2)} \quad (2.12)$$

$$R_{b,a} = \begin{cases} \sqrt{(r'_b{}^2 - X)^2 + Y^2 + (-t-z)^2} & (a=1) \\ \sqrt{(r'_b{}^2 - X)^2 + Y^2 + (t-z)^2} & (a=2) \end{cases} \quad (2.13)$$

$$Z_a = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 + (-t-z)^2} & (a=1) \\ \sqrt{x^2 + y^2 + (t-z)^2} & (a=2) \end{cases} \quad (2.14)$$

$$X = x \cos \theta' + y \sin \theta' \quad (2.15)$$

$$Y = -x \sin \theta' + y \cos \theta' \quad (2.16)$$

$$t = \frac{(z_2 - z_1)}{2} \quad (2.17)$$

式 (2.8) の θ' に関する積分を SSL 計算ライブラリを用いて計算した [67][68]. バルク内外の磁場は, 式 (2.18) のように各円筒形コイルから生じる磁場値の総和で求められる.

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{i=N} B_{i,x} \hat{x} + B_{i,y} \hat{y} + B_{i,z} \hat{z} \quad (2.18)$$

本研究では, 各円筒形コイルから生じる磁場の総和を式 (2.18) を用いて計算し, 超伝導バルクの磁場計算を行っている.

磁場計算には円筒形コイル内部の電流分布 $J_1 \sim J_N$ が必要となる. 本研究では電流分布 $J_1 \sim J_N$ とバルク内部の経験磁場強度 $|\mathbf{B}_{i,\text{exp}}(\mathbf{x})|$ の相関を実測値から求め, 式 (2.18) から求めた経験磁場強度から自己無撞着的に電流分布 $J_1 \sim J_N$ を決定する.

ここで, i 番目の円筒形コイルが経験する磁場強度 $|\mathbf{B}_{i,\text{exp}}(\mathbf{x})|$ を式 (2.19) のように定義した.

$$|\mathbf{B}_{i,\text{exp}}(\mathbf{x})| = \sqrt{B_{i,x}^2 + B_{i,y}^2 + B_{i,z}^2} \quad (2.19)$$

2.2.2 磁束反射効果の導入

磁束反射効果は、バルク端部の磁束による超伝導電流が真空中を流れずに短い経路を通ることで、バルク端部の電流が増加する効果である [69].

磁束反射効果の模式図を図 2.4 に示した. バルク端部に接近した磁束は、バルク端部に接することで通電領域を遮られる. 通電領域を遮られた磁束周囲の超伝導電流は増加し、バルク端部磁束に対して、着磁磁束と平行なバルク端側面に関する鏡像の磁束をバルク外部に置くことで磁束反射効果の影響は考慮される.

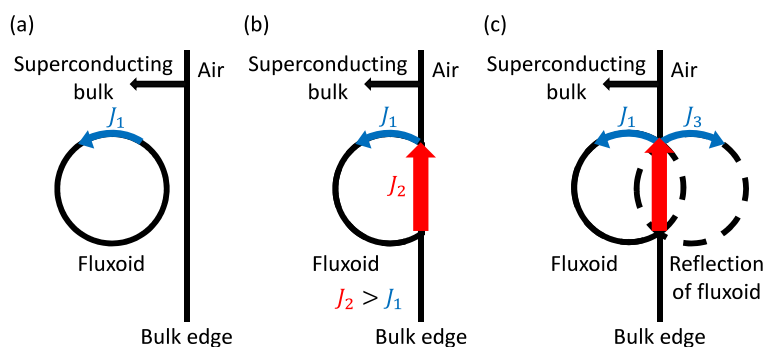


図 2.4: 磁束反射効果の模式図 (a) 磁束がバルク端から離れている場合 (b) 磁束がバルク端部に接している場合 (c) 磁束がバルク端部に接している時の計算モデル

鏡像の発生により、バルク端部付近の磁束はバルク端部に引き付けられる。また、端部から外部に弾き出された磁束は同様の鏡像により端部に引き付けられるため、端部に引き付けられた磁束量子は、磁束反射効果で生じる磁束間力よりも強い力が磁束に加わらない限り、端部から外部に排出されない。磁束反射効果は、バルク外部への磁束の排出を防いでいるため、巨視的に磁束が端部で反射しているかのような物理的描像を与えるが、本質的に磁束反射効果は磁束をバルク端部に誘引する。

磁束反射効果は磁束がバルク外部に排出しないように作用し、磁束量子の鏡像と磁束量子の相互作用エネルギーは、バルク端部にある磁束量子数と比例し、磁束量子数は超伝導電流値に比例している。そのため、本研究では、擬似的な磁束反射効果導入のため、式 (2.20) のようにバルク最端部の電流密度 J_N を Y 倍と設定した。

$$J_N \rightarrow Y J_N \quad (2.20)$$

上式の Y 値は、磁束量子動力学法における磁束反射効果のエネルギーの概算から求められる。詳細な磁束反射効果の説明とエネルギー見積りは付録の節 A.5.2 に記載するが、式 (2.21) のように、磁束反射効果によりバ

バルク端部にて生じるエネルギーはバルク外部へ磁束を排出するエネルギーの最大 62 倍と解析的に見積もられる。

$$\frac{\text{磁束反射効果のエネルギー}}{\text{バルク外部へ磁束を排出するエネルギー}} = 62 \quad (2.21)$$

磁束反射効果を近似的に計算へ導入するため、本研究では、式 (2.21) の磁束反射効果によるエネルギー量を踏まえ、バルク端部の電流密度値 J_N を Y 倍 ($Y=1,10,20$) とすることで近似的に磁束反射効果を仮定した。

2.2.3 超伝導バルク着磁方法と J_c - B 特性

磁場計算時に必要な電流密度分布の算出には、電流密度分布とバルク内部の経験磁場の相関データが求められる。バルク内部の経験磁場と電流密度分布の相関にはバルク体の着磁原理が関与しているため、本節では①バルク体着磁原理と②電流拘束条件の算出方法と③実験的な電流拘束条件データの補間方法の三点を述べる。また、超伝導バルク着磁に関わる実験的方法是、次節で記す。

超伝導バルク着磁方法

超伝導バルク磁石を着磁する方法には、下記の三点の方法がある。

1. 磁場中冷却法 (FC :Field Cooling)[70]
磁場冷却法は、常伝導状態の超伝導バルク磁石に一樣な磁場を印加し、その後超伝導状態に転移させることで、超伝導バルク磁石内部の磁束をピンニングする方法である。
2. 零磁場冷却法 (ZFC :Zero Field Cooling)
零磁場冷却法は、超伝導状態の超伝導バルク磁石に一樣な磁場を印加し、超伝導バルク磁石内部の磁束をピンニングする方法である。
3. パルス着磁法 (PWM: Pulsed Field Magnetization)[71]
パルス着磁法は、超伝導状態の超伝導バルク磁石に 6 ms 程の外部磁場を印加し、磁束をピンニングする方法である。

上記三種の内、本研究では FC 法を用いる。磁石の着磁方法により、超伝導バルク磁石内部の磁場には違いが生じる。

FC 法で着磁された有限サイズな超伝導バルク磁石内部の残留磁束は数値計算でしか求められないが、無限平板超伝導バルク磁石内部の残留磁束は解析的に算出される。今、図 2.5 左図のような厚さ $2a$ の無限平面バル

ク物質を仮定する．ここで下記の手順を踏むと，超伝導バルク中には磁束が捕捉され，超伝導体には図 2.5 右図のように y 軸に並行な循環電流 J が流れる．

1. z 方向へ並行に外部磁場 H_e を印加する
2. 超伝導バルク中の温度を T_c 以下に低下させる
3. 超伝導バルク外部磁場を 0 T まで消磁する．

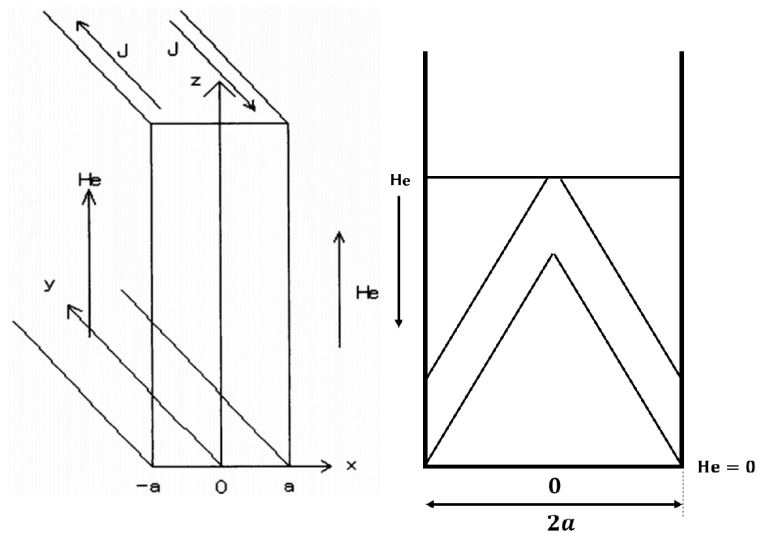


図 2.5: 外部印加磁場 H_e に対する超伝導電流の応答 (左図) と FC 法を模擬した超伝導体の減磁過程 (右図)

熱的な揺らぎを無視した時，減磁過程後のバルク内部では，磁束間反発とローレンツ力とピンニング力が釣り合うことで磁束がバルク内部に保持されている．FC 法で着磁されたバルクの内部では磁束間反発力とローレンツ力がバルク外部に磁束を排出する方向に働き，力の大きさはピンニング力と等しくなる．磁束に掛かる 3 種の力から磁束間反発力を無視した時，力の釣り合いが取れている状態を臨界状態と呼び，ピンニング力 $J_c B$ が最大化されている時の電流密度 J を臨界電流密度 J_c と呼ぶ．マクスウェル方程式より，臨界状態にある超伝導体内に侵入している磁場と電流には，式 (2.22) が成り立つ [72]．

$$F_P = F_L = J_c B \quad (2.22)$$

無限平面物質の場合，バルク内部の電流密度は一定の値を取る．バルク内部の電流密度が，経験磁場に依存せず一定となる模型をビーン模型 [73] と呼ぶ．一方，現実の物質サイズは有限であり，バルク内部での臨界電流密度 J_c は外部磁場に依存するため，現実の磁場設計では数値計算が用いられる．

J_c - B 特性の測定原理

本研究の磁場計算では，臨界電流密度 J_c の外部磁場依存性を実験的に求めて，電流の拘束条件として用いる．

超伝導バルク磁石の磁化は図 2.5 右図のようにヒステリシスを持つ．ここで，磁化 M の外部磁場依存性と J_c の関係は，図 2.6 のようになり，超伝導バルク磁石の磁化測定から臨界電流密度 J_c の外部磁場依存性を測定出来る [74]．

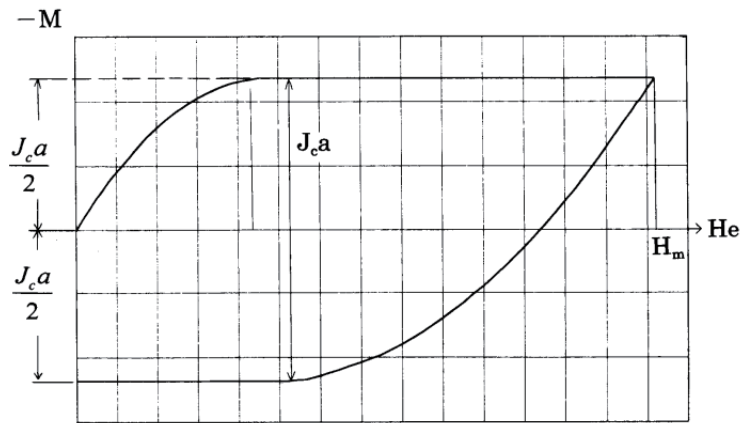


図 2.6: 超伝導体磁化 M の外部磁場依存性と J_c の関係

臨界電流密度 J_c の外部磁場依存性の測定では，外部印加磁場に対する超伝導バルク体の磁化依存性を求める．バルク体の磁化依存性測定では，図 2.7 のような超伝導バルク磁石の小片が用いられる．小片が測定に用いられる理由は，臨界状態の理論模型では磁束線の熱的揺らぎが無視されており，バルク体内部の磁束運動による発熱の早急な除去が望まれるためである．

小片平面に対して垂直に磁束を印加すると，小片の端部から試料へ磁束が侵入する．小片試料に一律な電流が流れるとすると，通電領域は $dI_c = J_c dy dz$ となり，領域に囲まれた部分の面積 S は式 (2.23) で表される．

$$S = 2x2y = 4y^2 + 2y(a - b) \quad (2.23)$$

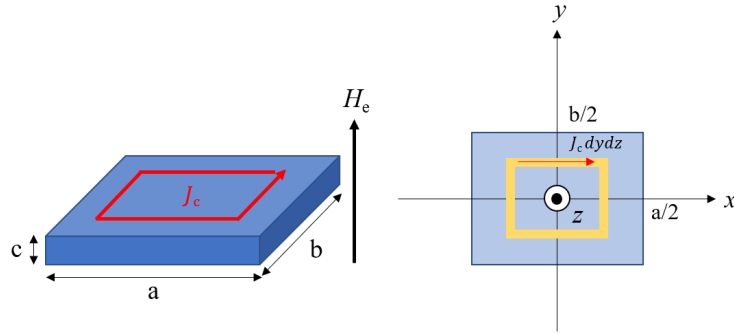


図 2.7: 超伝導バルク磁石の長方形小片試料に流れる臨界電流密度 J_c 模式図

通電電流による磁気モーメントは $m = SdI_c dydz$ で示されるため、試料全体の磁気モーメント m は単位 emu として式 (2.24) で示される。

$$\begin{aligned} m &= \int dm = \int_{-c/2}^{c/2} dz \int_{-b/2}^{b/2} dz \{4y^2 + 2y(a-b)\} \\ &= \frac{(3a-b)b^2cJ_c}{12} \end{aligned} \quad (2.24)$$

電流による超伝導バルク磁石の磁化ヒステリシス幅 ΔM は、増磁過程と減磁過程の磁気モーメントの差として式 (2.25) で示される。

$$\begin{aligned} \Delta m &= 2 \frac{m}{abc} = 2 \frac{(3a-b)b^2cJ_c}{12abc} \\ &= \frac{J_c b}{2} \left(1 - \frac{b}{3a}\right) \end{aligned} \quad (2.25)$$

式 (2.25) を変形し、SI 単位系に合わせると、臨界電流密度 J_c は磁化ヒステリシス幅 ΔM を用いて式 (2.26) で示される。

$$J_c = \frac{20\Delta M}{b \left(1 - \frac{b}{3a}\right)} \text{ [A/cm}^2\text{]} \quad (2.26)$$

本節での測定を拡張ビーン模型 [75] を用いた臨界電流密度の外部磁場依存性の測定と呼び、測定された臨界電流密度の外部磁場依存性を J_c - B 特性と呼ぶ。

チェビシェフ近似

測定された J_c - B 特性の離散値を補間するため、本研究ではチェビシェフ近似を用いる [76][77]. 式 (2.26) を用いて得た J_c - B 特性は、円筒形コイルの経験磁場に対応した臨界電流密度 J_c の離散値となっており、磁場解析に用いるためにはデータの補間が必要となる.

チェビシェフ近似は、式 (2.28) のチェビシェフ多項式 T_n を用いて J_c - B 特性の離散的な実験値が連続値となるように補間する手法である. ここで係数 a_n は式 (2.29) と式 (2.30) で示される. なお、チェビシェフ近似での補間では、 J_c - B 特性の磁場値を $-1 \sim 1$ の区間に変換する必要がある.

$$J_c(B) = \sum_{n=1}^{n=N} a_n T_n(B) \quad (2.27)$$

$$T_n(B) = \cos(n \arccos(B)) \quad (2.28)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(\cos \theta) d\theta \quad (2.29)$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\cos \theta) \cos k\theta d\theta \quad (2.30)$$

Fortran のサブルーチンでは式 (2.28) と式 (2.29) と式 (2.30) を用いてチェビシェフ近似による J_c - B 特性の補間が実行される. チェビシェフ近似の具体的な手順を下記に示す.

1. 式 (2.31) を用いて磁場実験値を -1 から 1 の区間を持った磁場値 B_{tr} に変換する

$$B_{tr} = \frac{(B - B_{\min}) - (B_{\max} - B)}{B_{\max} - B_{\min}} \quad (2.31)$$

2. 補間に用いるチェビシェフ多項式の最大次数を決定する
3. B_{tr} から式 (2.32) を満たす $B_{k,tr}$ ($k = 1 \sim N$) を読む

$$B_{k,tr} = \cos\left(\frac{\pi(2k+1)}{2(N+1)}\right) \quad (2.32)$$

ここで、 $B_{k,tr}$ をチェビシェフ分点と呼ぶ

4. チェビシェフ分点 $B_{k,tr}$ に対応した実験値 $J_{k,c}$ を読む

5. 近似に用いる係数 a_n を式 (2.34) を用いて計算する

$$a_0 = \sum_{n=0}^{n=N} \frac{J_{k,c}}{N+1} \quad (2.33)$$

$$a_n = 2 \frac{\sum_{k=0}^{k=N} J_{k,c} T_n(B_{k,tr})}{N+1} \quad (2.34)$$

6. B_{tr} に対応した $J_c(B)$ を式 (2.27) により算出する

7. 式 (2.35) を用いて B_{tr} を B に再変換する

$$B = \frac{(B_{\max} - B_{\min})B_{tr} + B_{\max} + B_{\min}}{2} \quad (2.35)$$

J_c - B 特性の磁場計算導入方法

チェビシェフ近似で補間した J_c - B 特性を用いて, J_c - B 特性から各経験磁場に対応したバルク内部の電流密度を自己無撞着に決定することで, 捕捉磁場分布を計算する. 超伝導バルク磁石内の電流密度分布を計算するため, 以下の手順で J_c - B 特性を用いる.

1. $J_i(r, \theta)$ の初期条件を $J_i^0(r, \theta)$ として設定する
2. $J = J_i^0(r, \theta)$ として, 式 (2.8) と式 (2.18) により捕捉磁場分布を算出する
3. 式 (2.19) により各円筒形コイルの経験磁場を算出する
4. J_c - B 特性を用いて各円筒形コイルに流れる電流密度 $J_i^1(r, \theta)$ を算出する
5. 磁束反射効果を考慮する場合, バルク端部の円筒形コイルに流れる電流密度 $J_N^1(r, \theta)$ を Y 倍する
6. $J = J_i^1(r, \theta)$ から式 (2.8) と式 (2.18) と式 (2.19) を用いて, 反復回数 n 回目におけるバルク内部の電流密度分布 $J = J_i^2(r, \theta)$, $J = J_i^3(r, \theta)$, ..., $J = J_i^n(r, \theta)$, ... を決定する
7. 計算反復でバルク内部電流密度差の最大値が式 (2.36) のようにパラメータ jud を満たす時, 計算を終了する

$$|J_i^{n+1}(r, \theta) - J_i^n(r, \theta)| < jud \quad (2.36)$$

2.3 方法

本研究の研究フローを図 2.8 に示した。磁束反射効果を検証するため、下記の順で研究を進める。

1. 超伝導バルク磁石 MgB_2 2 個の作製
Mg 粒と B 粒から in-situ 法を用いて、2 個の超伝導バルク磁石 MgB_2 を作製する
ここで、捕捉磁場分布測定用バルクをバルク #1, J_c - B 特性測定用バルクをバルク #2 と呼ぶ
2. FC 法によるバルク #1 の着磁と捕捉磁場分布測定
超伝導マグネットと FC 法を用いて、バルク #1 を着磁し、バルク #1 の捕捉磁場分布をホールプローブで測定する
3. バルク #2 小片への加工と小片を用いた J_c - B 特性の測定
バルク #2 を小片に切り出し、 J_c - B 特性を測定する
4. J_c - B 特性を用いた捕捉磁場分布の算出
 J_c - B 特性のチェビシェフ近似を行い、捕捉磁場分布を算出する。
5. 捕捉磁場計算の収束性判定
捕捉磁場分布算出の反復計算に問題が無かったかを確認する。
6. 捕捉磁場分布の計算値と実測値の比較
算出した捕捉磁場分布の計算値と実測値を比較する。
7. 計算の妥当性と磁束反射効果の検証
過去の計算結果と捕捉磁場分布の算出値を比較し、磁束反射効果の精度向上効果を検証する。

2.3.1 バルク作製方法

バルクを下記手順で 2 個（#1 と #2）作製する。

1. Mg 粉末と B 粉末の乾式混合
2. 原料粉末の型成形
3. 焼成による MgB_2 バルク作製

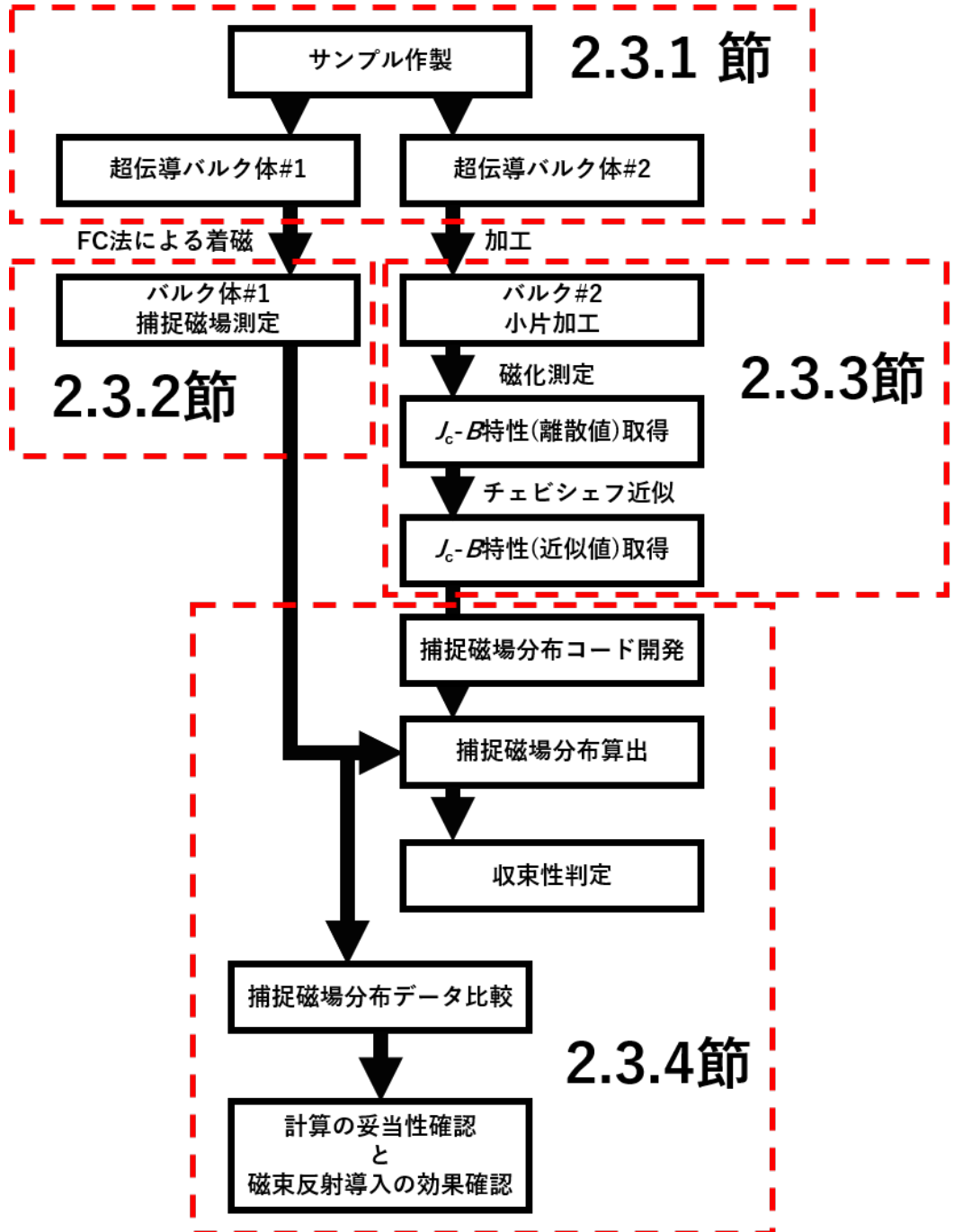


図 2.8: 本研究の検証フロー

Mg 粉末と B 粉末の乾式混合

Mg 原料粉と B 原料粉を瑪瑙乳鉢と瑪瑙乳棒を用いて、Mg:B=1:2 のモル比となるように乾式混合を行う。バルク #1 作製に用いた Mg 粉末と B 粉末の純度・粒径を表 2.1 に示す。

表 2.1: Mg 粉末と B 粉末の純度・粒径

物質	純度	粒径
Mg	99.8%	43 μm 以下
B	99.9%	46 μm 以下

原料粉末の型成形

作製した MgB_2 粉末をステンレス製シース材（内径 30 mm ϕ ，外径 34 mm ϕ ，厚み 10 mm t ）に充填し，図 2.9 のプレス機を用いて加圧する。

焼成による MgB_2 バルク作製

粉末成形体を電気炉に投入し，アルゴン雰囲気の中で図 2.10 温度パターンで MgB_2 粉末成形体を焼成する。

2.3.2 J_c - B 特性測定方法

捕捉磁場分布算出のため，バルク #2 を図 2.11 のように小片（サイズ：約 2 mm \times 1 mm \times 1 mm）に切り出し，小片を用いた J_c - B 特性（ $T = 20$ K）を測定する。具体的には，図 2.12 の SQUID 磁束計を用いて，磁化の外部磁場依存性を測定し，ヒステリシス幅から式 (2.26) を用いて， J_c - B 特性を算出する。算出した J_c - B 特性を Fortran プログラムのチェビシェフ近似で補間し，捕捉磁場計算に必要な J_c - B 特性を得る。



図 2.9: 油圧プレス機の装置外観

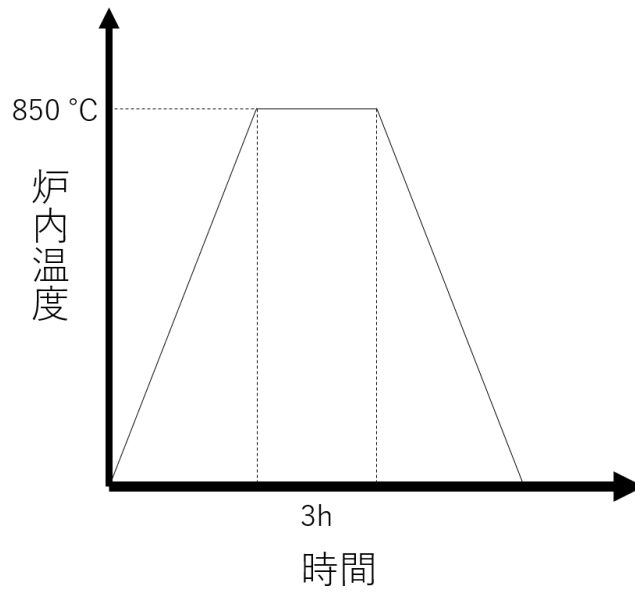


図 2.10: バルク体焼成時の炉内温度管理パターン

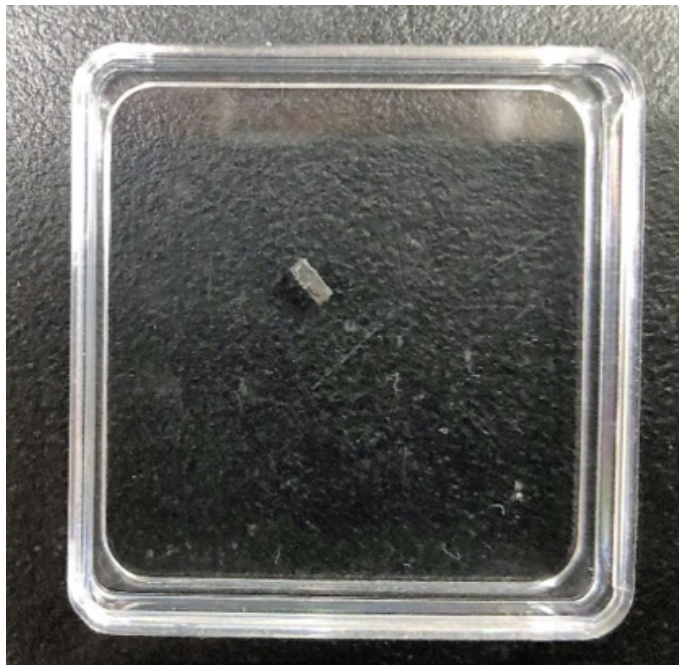


図 2.11: J_c - B 特性測定用のバルク #2 小片



図 2.12: SQUID 磁束計の装置外観

2.3.3 捕捉磁場分布測定方法

捕捉磁場分布を測定するため、FC法で着磁したバルク #1 の捕捉磁場分布のバルク径方向依存性 (バルク表面上 3mm, 4mm, 5mm, 6mm, 7mm, 8mm) をホール素子で測定する。捕捉磁場分布測定で用いた装置構成の模式図を図 2.13 に示す。

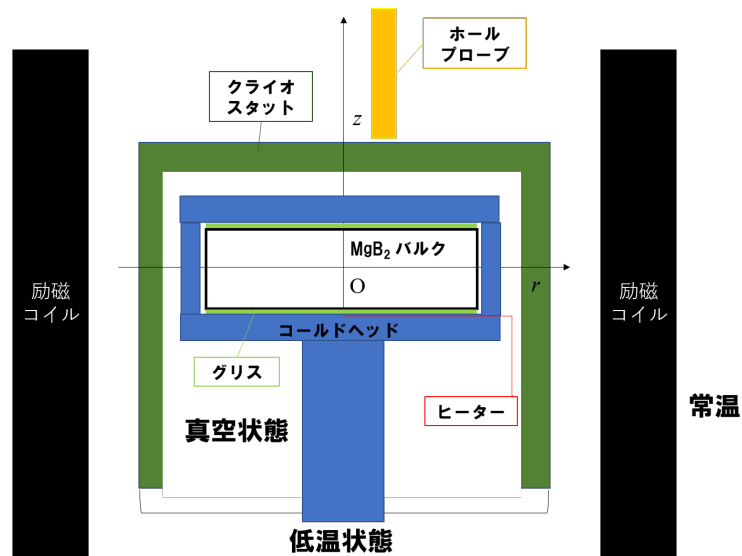


図 2.13: 捕捉磁場分布測定で用いた装置構成の模式図

具体的に、下記の手順でバルク #1 の着磁と捕捉磁場分布測定を行う。

1. 冷凍機の銅製台に温度センサーとヒーターとホール素子を取り付け、図 2.14 のように低温グリスを用いてバルク #1 を取り付ける
2. バルク #1 上に銅製上蓋を取り付ける
3. 銅製台全体にクライオスタットを取り付け、図 2.15 のような冷凍機下部からクライオスタット内部に結露防止用の真空引きを行う
4. 銅製台の中心を、図 2.16 のように超伝導マグネットの中心と一致するように配置する
5. 超伝導マグネットを起動し、バルク #1 に垂直に磁場値 4 T を励磁する
6. 図 2.17 のコンプレッサーを起動し、断熱膨張でバルク #1 下の温度センサーが 15 K を示すまでバルク #1 を冷却する
7. 超伝導マグネットの励磁磁場を 0 T まで約 12 G/s で消磁させる

8. 銅製台付属のヒーターを作動させ、バルク #1 下の温度センサーが 20 K になるまでバルク #1 の温度を上昇させる
9. バルク表面中央上 0.74 mm での捕捉磁場とバルク表面上 3 mm から 8 mm まで各 1 mm ずつ捕捉磁場の径方向依存性をホール素子で測定する。測定点の模式図を図 2.18 に示す。



図 2.14: 冷凍機に取り付けたバルク外観



图 2.15: 冷凍機下部外觀



図 2.16: 励磁に用いた超伝導マグネット外観



図 2.17: コンプレッサー外観

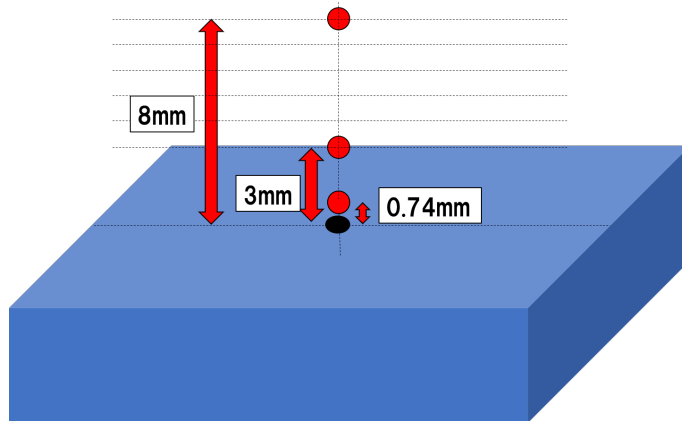


図 2.18: 磁場測定点の模式図

2.3.4 計算方法

計算フローチャート

磁場計算では、 J_c - B 特性を用いて、各メッシュの経験磁場からバルク内部の電流密度分布を決定する。

捕捉磁場分布算出の計算フローチャートを図 2.21 に示した。本計算の内手順 9 ~ 手順 11 が電流分布 $J_i^n(r, \theta)$ 算出時の振動解の処理のために導入されているが、煩雑になるため、図 2.21 には手順 9 ~ 手順 11 は記載されていない。電流分布算出時に生じる振動解への考察は付録に記した。

電流密度分布決定のための反復計算では、捕捉磁場計算の電流密度を、バルクの経験磁場 $|B_{\text{exp}}| + |B_0|$ を用いて決定する。ここで $|B_0|$ 値は、FC 法による着磁時の超伝導マグネット励磁磁場値である。FC 法では超伝導マグネットの励磁磁場は最終的に 0 T に消磁される。同様に、 $|B_0|$ 値も、電流密度分布が節 2.2.3 のように決定される毎に 0.1 T ずつ減少され、最終的に 0 T になるように設定した。

1. バルクサイズと収束パラメーター jud とメッシュ数を入力する。ここで、メッシュ数は円筒形コイルの数を示している。
2. FC 法の消磁開始磁場を経験磁場の初期条件 $|B_0|$ とする。本研究では各経験磁場を 4 T とする。
3. J_c - B 特性を用いて、測定した経験磁場からバルク内部の電流分布 $J_i^0(r, \theta)$ を決定する。
4. バルク内部の電流分布から式 (2.8) と式 (2.18) を用いて、磁場空間分布を算出する。
5. バルク内部の磁場空間分布から経験磁場 $|B_{\text{exp}}|$ を算出し、経験磁場値 $|B_{\text{exp}}|$ に超伝導マグネットからの励磁磁場値 $|B_0|$ を加える。
6. J_c - B 特性を用いて、自己無撞着的に測定した経験磁場からバルク内部の電流分布 $J_i^1(r, \theta)$, $J_i^2(r, \theta)$, ..., $J_i^n(r, \theta)$ を決定する。もし電流分布に拘束条件を設ける場合には、各円筒形コイルの経験磁場を平均化することで、 J_c - B 特性からバルク内部の電流分布を計算する。
7. 磁束反射効果を考慮する場合、式 (2.20) のようにバルク端部の電流密度 J_N を Y 倍する。
8. 式 (2.36) を満たすまで、手順 4 ~ 手順 7 で J_c - B 特性を用いて電流分布 $J_i^n(r, \theta)$ を計算する。

9. 電流分布 $J_1^n(r, \theta)$ が式 2.36 を満たした後、手順 8 を追加で 100 サイクル計算する。
手順 9 ~ 手順 10 で、追加で 100 サイクル計算する理由は、電流分布 $J_1^n(r, \theta)$ に振動解が現れるためである。
10. 100 サイクル中に電流密度分布 $J_1^n(r, \theta)$ の反復計算で下記の現象が現れていないかを確認する。もし下記の現象が現れていた場合には、計算の収束に問題があるため、計算を一度停止させる。計算停止後、計算のメッシュ数を再度変更し、計算を再開する。
 - (a) 同値の電流密度 $J_1^n(r, \theta)$ が何度も算出値に現れていないか
 - (b) 反復前後の電流密度 $J_1^n(r, \theta)$ の差が反復中に増加していないか
11. 図 4.2 のようなバルク端部の 3 メッシュに流れる電流密度値 $J_{N-2} \sim J_N$ が式 (4.5) を満たしていることを確認する。もし式 (4.5) を満たしていない場合には、計算の収束に問題があるため、計算を停止させる。計算停止後、 J_N の分割数を 1 つ増やし再度計算を再開する。

$$J_{N-2} \leq J_{N-1} \leq J_N \quad (2.37)$$

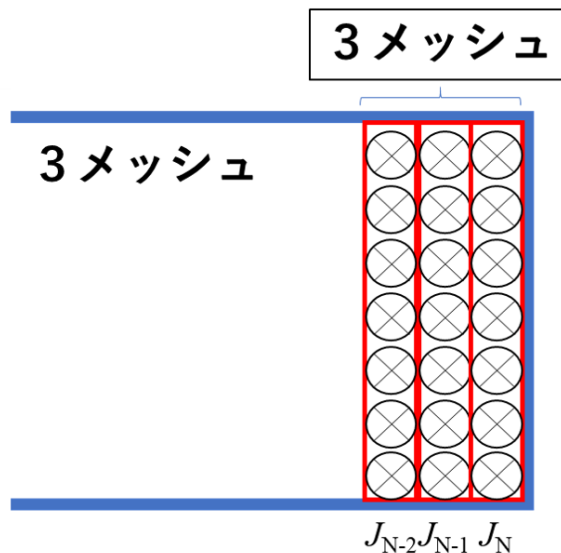


図 2.19: 計算収束性確認のためのバルク端部 3 メッシュの電流模式図

12. $|B_0|$ を 0.1 T 減少させる。

13. $|B_0|$ が 0 T となるまで手順 3 に戻り、反復計算を行う。
14. $|B_0| = 0$ T 時の電流密度分布からバルク表面上 3mm から 8mm まで各 1mm ずつ捕捉磁場分布を算出する。捕捉磁場計算点を図 2.20 に示す。

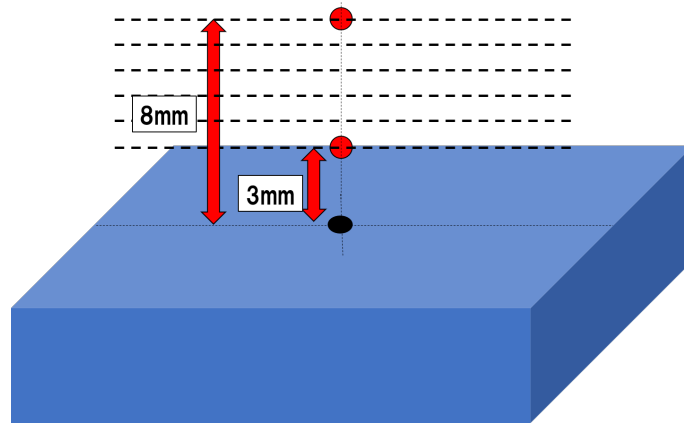


図 2.20: 磁場値計算点の模式図

計算パラメーター

本研究では、表 2.2 のように計算パラメーターを設定する。

表 2.2: 磁場計算に用いたパラメーター

パラメーター	数値
バルク径	30 mm ϕ
バルク厚	10 mm t
jud	5.0×10^2 (A/cm 2)
消磁開始磁場 $ B_0 $	4 T
チェビシェフ最高次数 N	7
磁束反射効果 Y	1 or 10 or 20

計算模型

本研究の磁場分布算出で用いる 6 種の計算模型を、表 2.3 に示す。各模型の違いは、電流密度分布への拘束条件と磁束反射効果 Y 値の値で

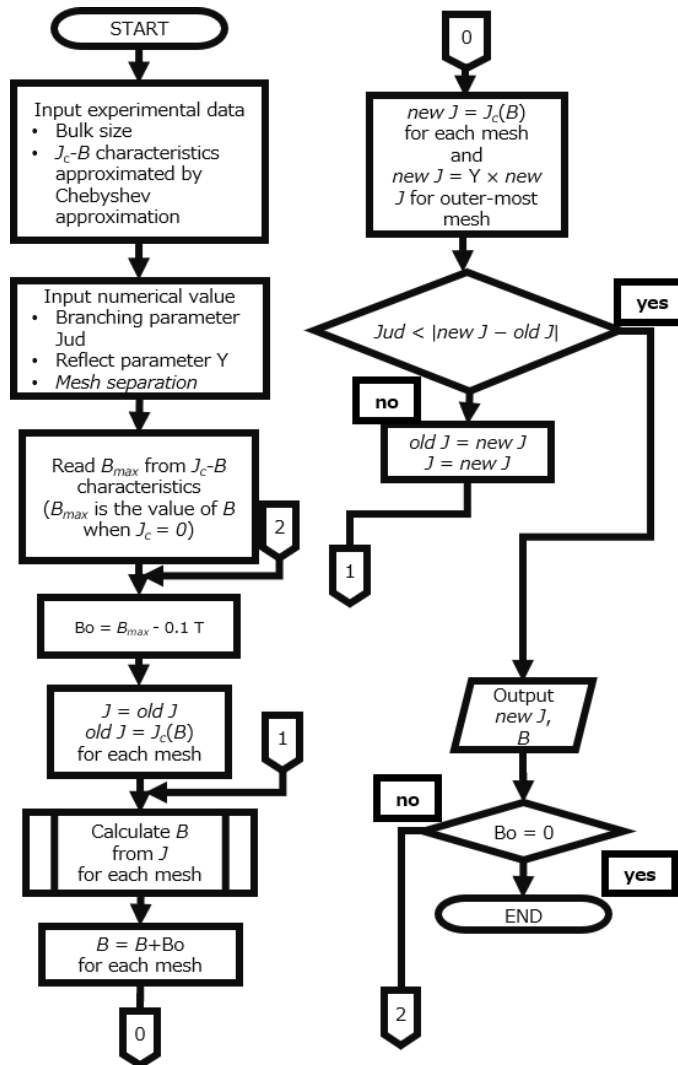


図 2.21: 磁場計算の計算フローチャート

表 2.3: 計算モデルリスト

ラベル	モデル名	Y	電流分布拘束条件
(a)	average	Y=1	$J = \text{const.}$
(b)	axial	Y=1	$J = J(r)$
(c)	radial	Y=1	$J = J(z)$
(d)	Y1	Y=1	$J = J(r, z)$
(e)	Y10	Y=10	$J = J(r, z)$
(f)	Y20	Y=20	$J = J(r, z)$

ある。ここで、average 模型, axial 模型, radial 模型, Y1 模型, Y10 模型, Y20 模型を (a), (b), (c), (d), (e), (f) と表記する。

1. average 模型

模型 (a) では, バルク中で電流密度は一様とする。一様な電流密度値はバルク表面中央上 0.74mm での磁場値からビオ・サバルの法則で逆算する。

2. axial 模型

模型 (b) では, 電流密度分布が z 方向に対して均一になるように電流密度分布の拘束条件を設ける。

3. radial 模型

模型 (c) では, 電流密度分布が r 方向に対して均一になるように電流密度分布の拘束条件を設ける。

4. Y1 模型

模型 (d) での電流密度分布計算では, 束縛条件を設けない。また, Y 値を 1 と設定することで, 模型 (d) では磁束反射効果を考慮しない。

5. Y10 模型

模型 (e) での電流密度分布計算では, 束縛条件を設けない。また, Y 値を 10 と設定することで, 模型 (e) では磁束反射効果を考慮する。

6. Y20 模型

模型 (f) での電流密度分布計算では, 束縛条件を設けない。また, Y 値を 20 と設定することで, 模型 (f) では模型 (e) よりも磁束反射効果を考慮する。

第3章 結果

本節では、バルク #1 の捕捉磁場分布の測定結果と磁場計算結果と比較する。まず、測定結果として①バルク #1 の捕捉磁場分布と②拡張ビーン模型により算出されたバルク #2 の J_c - B 特性を示す。また、バルクに捕捉された磁束線の向きを確認するため、 J_c - B 特性を用いて計算した Y1 模型と Y20 模型の捕捉磁場ベクトルを示す。

次に、磁場計算精度への磁束反射効果の影響を確認するため、各6種の計算模型での①磁場計算結果と②測定値と計算値の差を示す。また、磁束反射効果の詳細な影響確認と今後の計算精度向上のため、捕捉磁場へのバルク内部単位電流の寄与率空間分布を示す。単位電流による磁場寄与率の算出は、電流値の変動が捕捉磁場値にどの程度影響を及ぼすかを調べるために必要であり、寄与率分布データから磁場測定点とバルク内部単位電流の距離的相関を確認する。

最後に、Y20 模型でのバルク内部電流の寄与率空間分布を示す。磁場計算では、バルク内部電流同士が相関している。例えば隣接し合う電流経路でも、片方の電流増加はもう一方の電流経路の経験磁場の上昇と電流の低下を招く。磁場計算では千程度の電流経路が相互に相関し合うため、電流の寄与率分布を確認することで、磁束反射効果によるバルク中央表面上の磁場値上昇がどの電流の寄与により生じたものかを定量的に確認する必要がある。

3.1 測定磁場分布

図 3.1 にバルク #1 表面上 $z=3 \sim 8$ mm での捕捉磁場分布の径方向依存性の測定値 (各 1mm 毎, $T=20$ K) を示す。測定点がバルク表面に近づく程、測定磁場値は上昇する。また、測定磁場値は径方向に対して減少し、 $r=15.3$ mm 付近で一点に一致する。また、同サンプルでの繰り返し測定での不確かさは 0.05 T 以下となった。

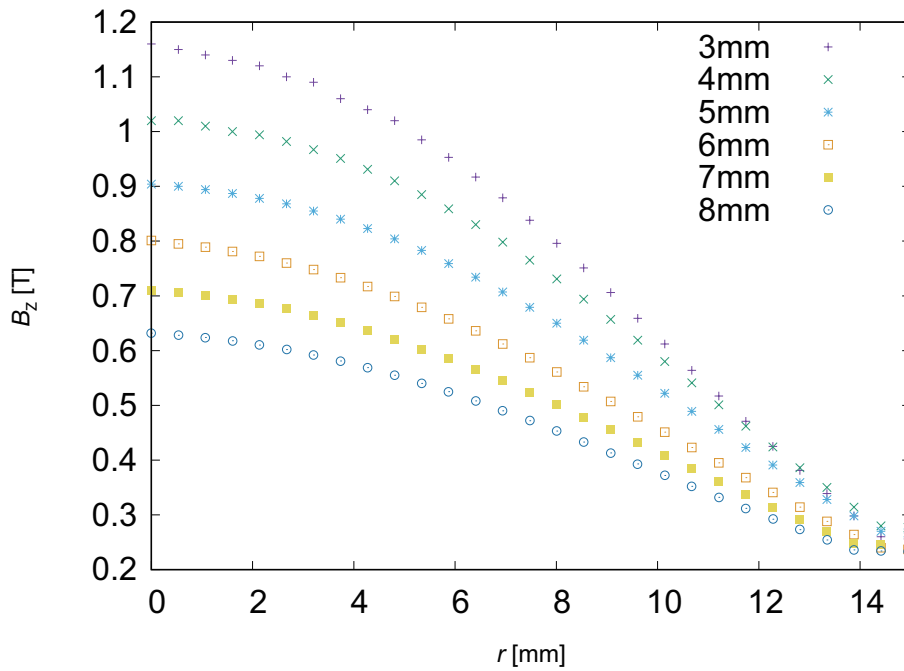


図 3.1: バルク #1 表面上 3 ~ 8 mm での捕捉磁場分布の径方向依存性の測定値 ($T=20$ K)

3.2 測定した J_c - B 特性

図 3.2 にバルク #2 の J_c - B 特性 ($T=20$ K) を示す。外部磁場の増加に伴い、臨界電流密度は減少し、4.01 T でほぼ臨界電流密度がゼロとなる。

3.3 計算結果

3.3.1 計算収束性

バルク #1 表面中心上 $z=3$ mm での捕捉磁場値と収束判定を図 3.3 に示す。図 3.3 では、計算の収束性を確認するため、磁場計算で用いるメッシュ数を変化させている。メッシュ数の増加により、バルク #1 表面中心上 $z=3$ mm での磁場値は 1.22 T に向けて収束する。10×5 程メッシュ数を用いた磁場計算では、メッシュ数の不足により計算は収束しなかった。

また、図 3.3 での収束判定 NG とは、節 2.3.4 の手順 9 ~ 手順 11 で計算が収束しなかったことを意味している。メッシュ数の増加により、磁場計算での異常な収束には消失傾向が見られる。しかし、メッシュ数が増加しても、メッシュ数 30×20 の磁場計算では反復計算中における計算収束半

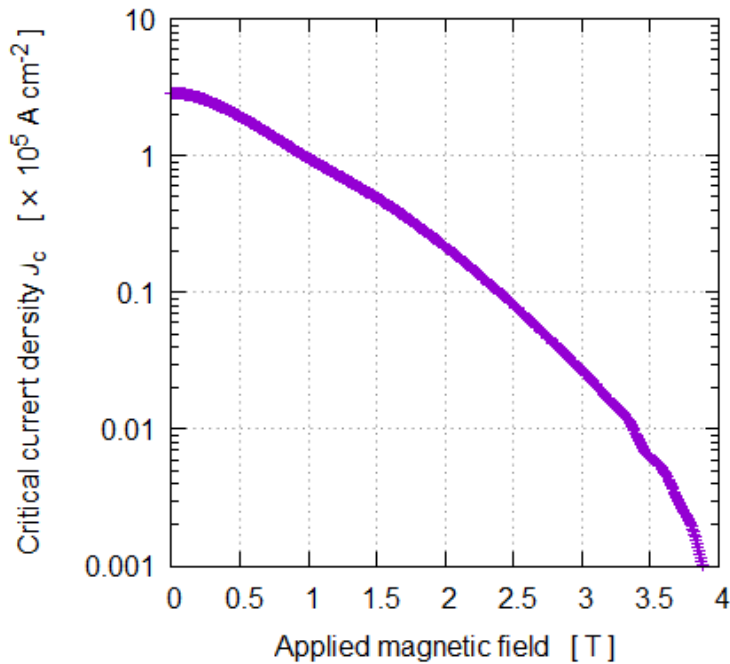


図 3.2: バルク #2 の J_c - B 特性 ($T=20$ K)

径内で振動解が現れ、計算が収束不可能になる。メッシュ数 30×20 の磁場計算での異常収束については、節 4.2.3 で議論した。

初期設定メッシュ (径方向×軸方向)	10×5	10×10	20×10	30×15	30×20	60×20
磁場値 (T)	収束不可	1.12	1.18	1.22	1.23	1.22
収束判定	NG	NG	NG	問題なし	NG	問題なし

図 3.3: 磁場計算の収束判定

3.3.2 捕捉磁場ベクトル空間分布

Y1 模型と Y20 模型でのバルク #1 捕捉磁場ベクトルの空間分布計算値 B_{cal} を図 3.4 と図 3.5 に示す。

Y1 模型は磁束反射効果が考慮されていない模型であり、Y20 模型は本研究で磁束反射効果が最も考慮された模型である。

Y1 模型と Y20 模型共に測定点がバルク表面から遠方になる程捕捉磁場ベクトルは減少し、測定点がバルク端部となる程捕捉磁場ベクトルの径方向成分は増加した。Y1 模型と Y20 模型での捕捉磁場強度計算値は、測定点がバルク表面から遠方になる程減少する。また、 r 方向の捕捉磁場強度は、測定点がバルク端部になる程減少する。磁束反射効果はバルク端部で

の磁場ベクトルの大きさと z 方向磁場に微小な影響を与えるが、磁場ベクトルに特異な特性は現れなかった。

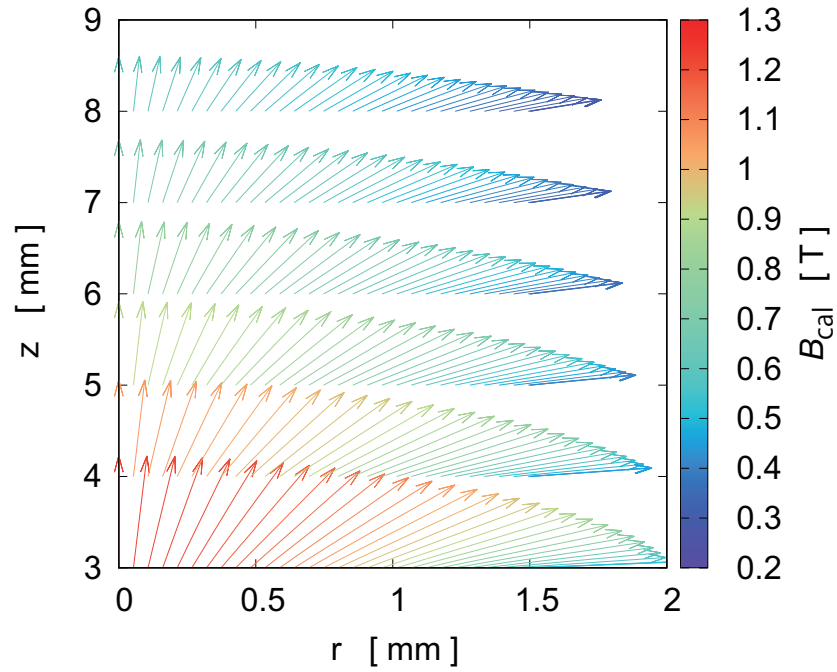


図 3.4: Y1 模型での捕捉磁場ベクトル分布の径方向依存性

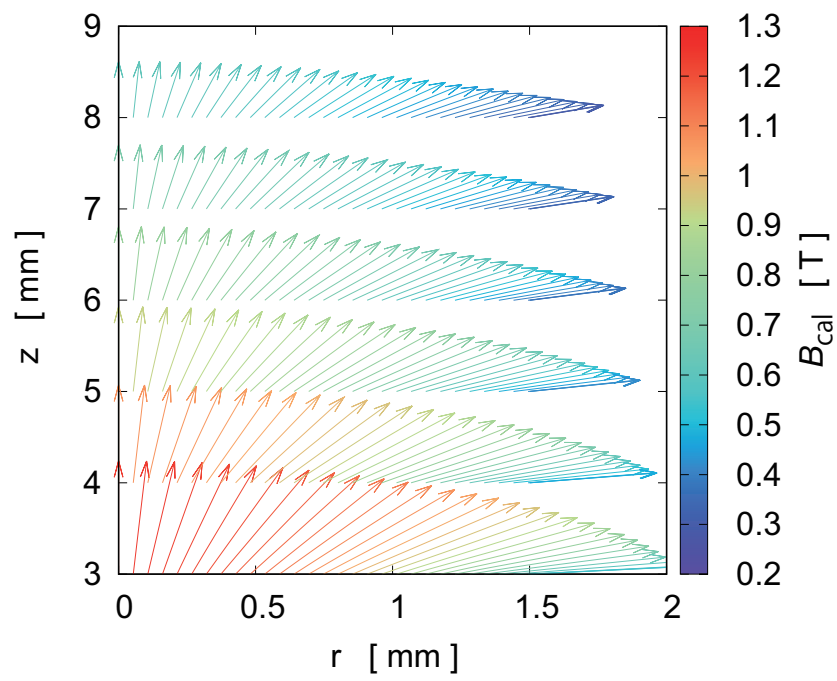


図 3.5: Y20 模型での捕捉磁場ベクトル分布の径方向依存性

3.3.3 各模型間における捕捉磁場分布の径方向依存性

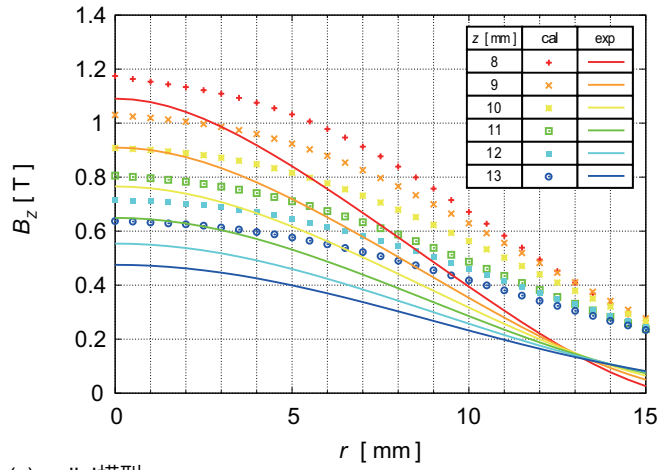
各6種模型のバルク #1 捕捉磁場分布の径方向依存性の計算値 B_{cal} と測定値 B_{exp} 結果 ($T=20$ K) を図 3.6 で比較する.

全模型の捕捉磁場分布の計算値は, 計算点がバルク表面に近づく程上昇した. 全模型の計算磁場値は径方向に対して減少し, Y10 模型と Y20 模型以外の模型では $r=13.5$ mm 付近で一点に一致する. Y1 模型と Y10 模型と Y20 模型の結果では, Y 値の上昇に伴って磁場一致点がバルク端部側に移動し, Y20 模型におけるバルク端部での磁場値の一致点は, Y1 模型と比較して約 0.3 mm 程バルク端部側に移動する.

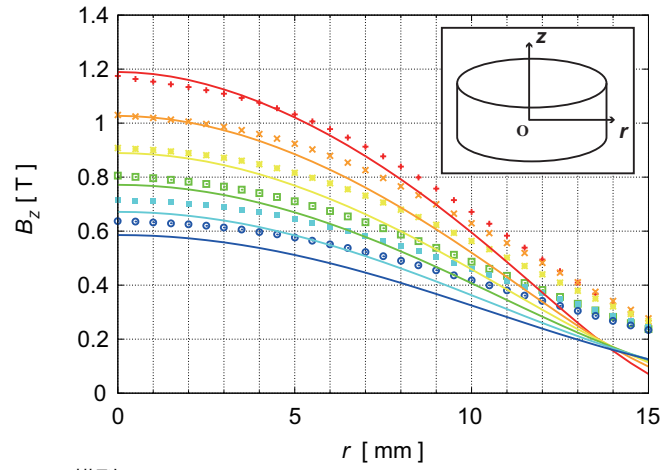
バルク #1 表面上 $z=3$ mm と $z=5$ mm と $z=8$ mm での捕捉磁場分布の径方向依存性の計算値 B_{cal} と測定値 B_{exp} の各模型間での差を図 3.7 と図 3.8 と図 3.9 に示す. バルク端部に測定点が近づく程計算誤差は大きくなる. Y20 模型でバルク #1 表面上 $z=3$ mm と $z=5$ mm と $z=8$ mm の捕捉磁場の最大計算誤差 $|B_{\text{cal}} - B_{\text{exp}}|$ は最も低い.

バルク表面中央上 $z=3$ mm での捕捉磁場値の計算誤差 $|B_{\text{cal}} - B_{\text{exp}}|$ は axial 模型で, バルク表面中央上 $z=5$ mm での捕捉磁場値の計算誤差 $|B_{\text{cal}} - B_{\text{exp}}|$ は Y10 模型で, バルク表面中央上 $z=8$ mm での捕捉磁場値の計算誤差 $|B_{\text{cal}} - B_{\text{exp}}|$ は Y20 模型で最も低くなる.

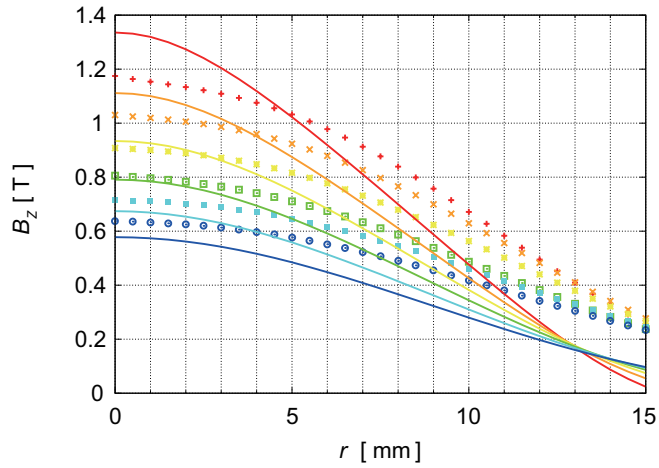
(a) average模型



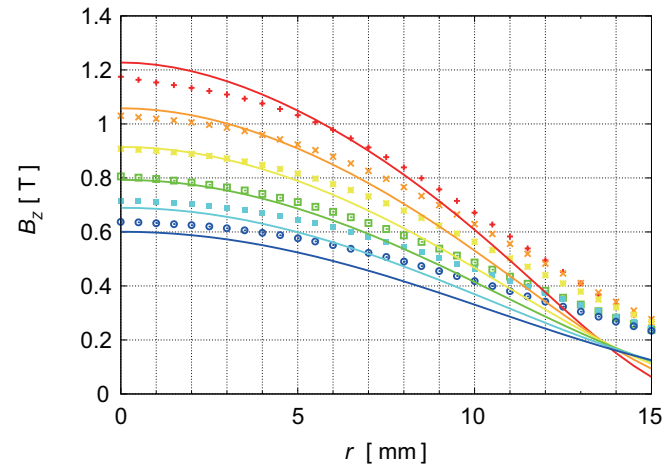
(b) axial模型



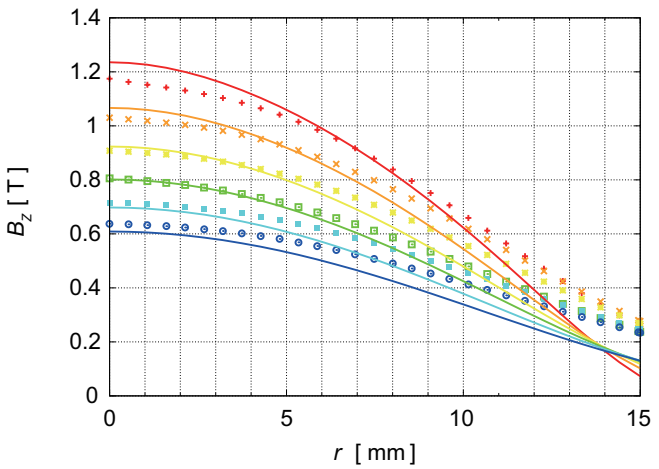
(c) radial模型



(d) Y1模型



(e) Y10模型



(f) Y20模型

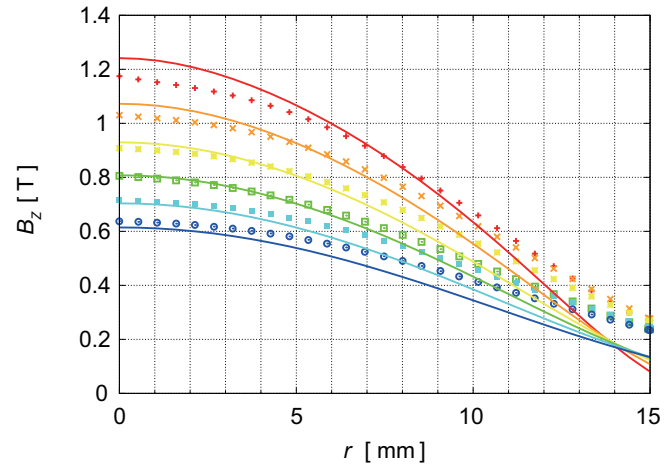


図 3.6: 各 6 種模型における捕捉磁場分布の径方向依存性：計算値 B_{cal} と測定値 B_{exp} の比較 ($T=20$ K)

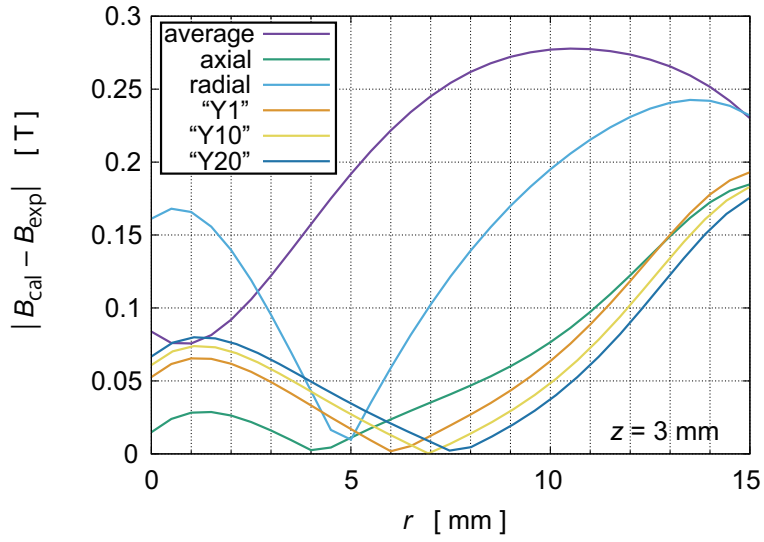


図 3.7: 捕捉磁場分布の径方向依存性の各 6 種模型間計算値と測定値の差 $|B_{\text{cal}} - B_{\text{exp}}|(z=3 \text{ mm}, T=20 \text{ K})$

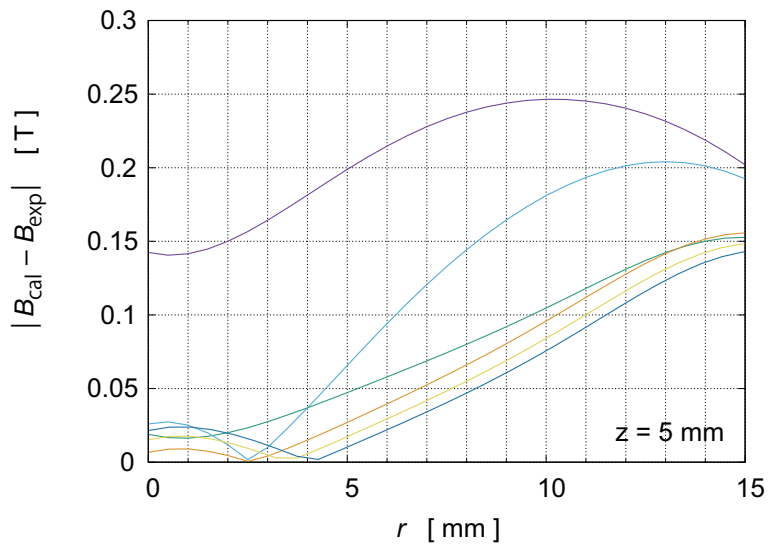


図 3.8: 捕捉磁場分布の径方向依存性の各 6 種模型間計算値と測定値の差 $|B_{\text{cal}} - B_{\text{exp}}|(z=5 \text{ mm}, T=20 \text{ K})$

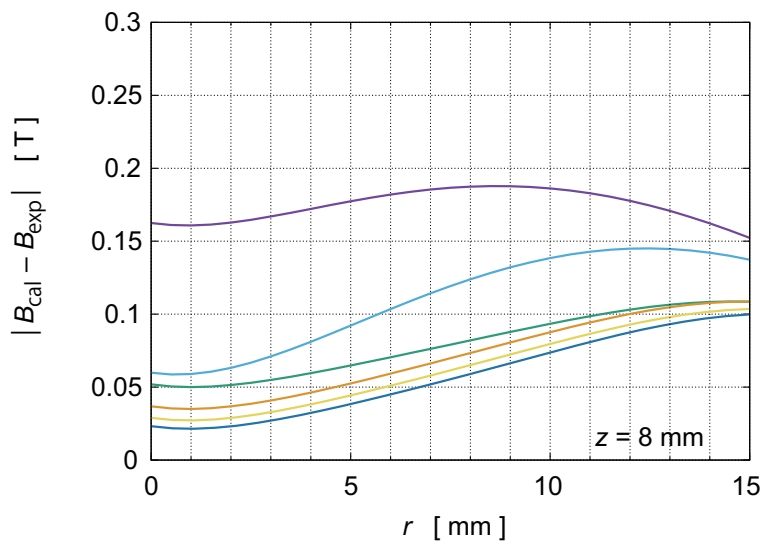


図 3.9: 捕捉磁場分布の径方向依存性の各 6 種模型間計算値と測定値の差 $|B_{\text{cal}} - B_{\text{exp}}|(z=8 \text{ mm}, T=20 \text{ K})$

3.3.4 各模型間でのバルク内部電流分布と経験磁場

捕捉磁場分布算出時の電流密度分布を図 3.10 に示す. average 模型や radial 模型以外では, 全模型でバルク端部の電流密度が増加する. Y20 の結果から, Y 値の上昇に伴って, バルク端部の臨界電流の z 方向依存性が axial 模型に近づくことが分かる.

また, 捕捉磁場分布算出時のバルク内部経験磁場分布を図 3.11 に示す. 全模型でバルク端部とバルク表面で経験磁場が減少する. 従来計算に習い, 経験磁場は縦向き横向き両方の磁場を考慮に入れるため磁束線とは対応していないが, Y1 模型と Y10 模型と Y20 模型の経験磁場分布の概形は図 3.10 の電流分布の概形と凡そ一致する. なお, average 模型と axial 模型と radial 模型での電流密度分布には拘束条件が与えられているため, 経験磁場は電流分布に対応していない.

3.3.5 捕捉磁場への寄与率空間分布

バルク #1 表面中央上 $z=3$ mm と $z=8$ mm での捕捉磁場計算値への各単位電流密度分布の寄与率分布を図 3.12 と図 3.13 に示す.

各単位電流密度分布による寄与率 $C(i, j)$ は式 (3.1) で定義される. ここで, 各メッシュの電流密度 $J(i, j)$ (バルク内径方向距離: i , バルク内厚方向距離: j) がバルク表面中央上 $z=3$ mm に生じる磁場値を $B(i, j)$ とする.

また, $B(i, j)$ の最大値を B_{cmax} とした際, B_{cmax} を生じる電流密度 $J(i, j)$ を J_{cmax} とする.

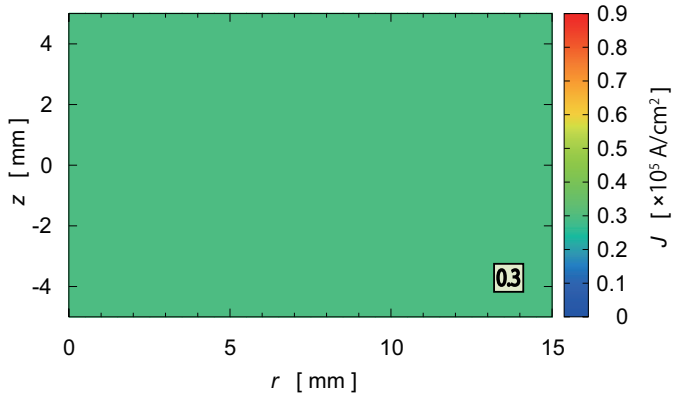
$$C(i, j) = \frac{\frac{B(i, j)}{J(i, j)}}{\frac{B_{\text{cmax}}}{J_{\text{cmax}}}} \times 100\% \quad (3.1)$$

図 3.12 と図 3.13 ではバルク表面中央上 $z=3$ mm と $z=8$ mm の磁場計算値への各単位電流密度の最大寄与率を 100% とする. 両図の各左図には z 軸方向に対する磁場値への各寄与率積算を示す. 一方, 各図の下図には径方向に対する磁場値への各寄与率積算を示す. 各左図と各下図で示された全寄与率積算は 100% とする.

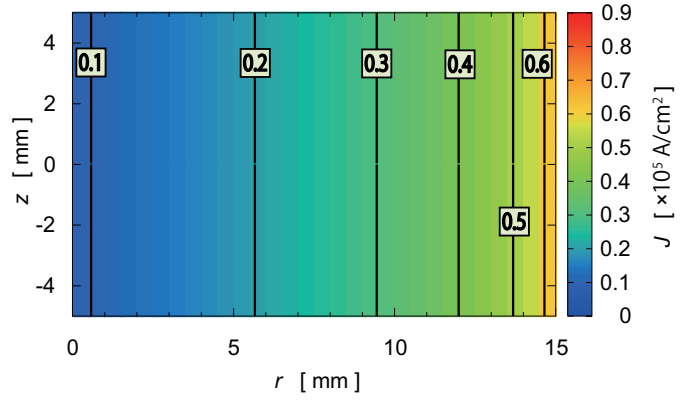
両図共, 単位電流の位置がバルク表面中央上の磁場計算点 ($z=3$ mm, 8 mm) に近い程, 単位電流密度が磁場計算値に寄与する. さらに, 単位電流の位置がバルク端部に近い程, 単位電流密度が磁場計算値に寄与する.

また, バルク表面中央上 $z=3$ mm の磁場計算値へ最も大きく寄与している単位電流の位置は, バルク表面かつ $r=5$ mm 付近である. また, バルク表面中央上 $z=8$ mm の磁場計算値へ最も大きく寄与している単位電流の位置は, バルク表面かつ $r=12$ mm である.

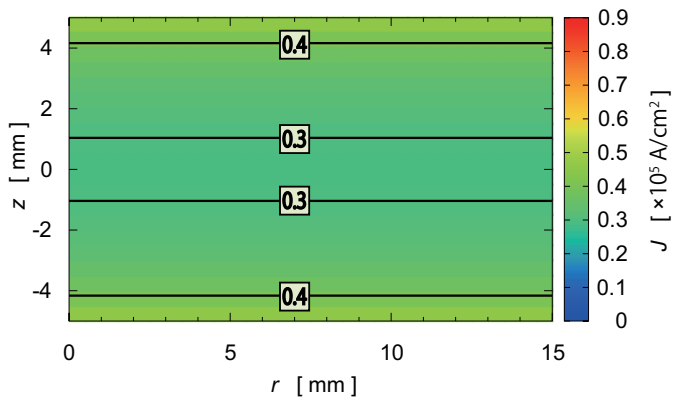
(a) average模型



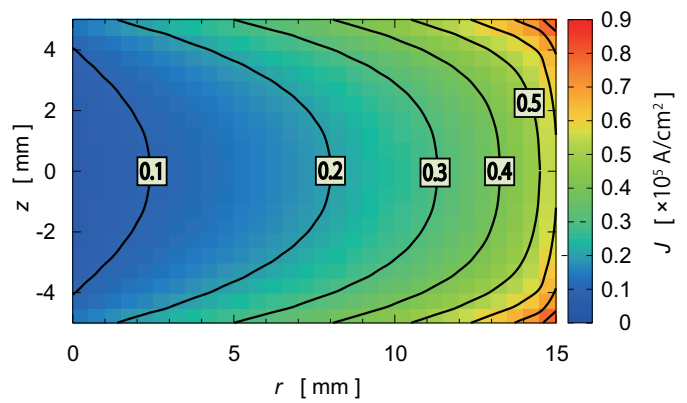
(b) axial模型



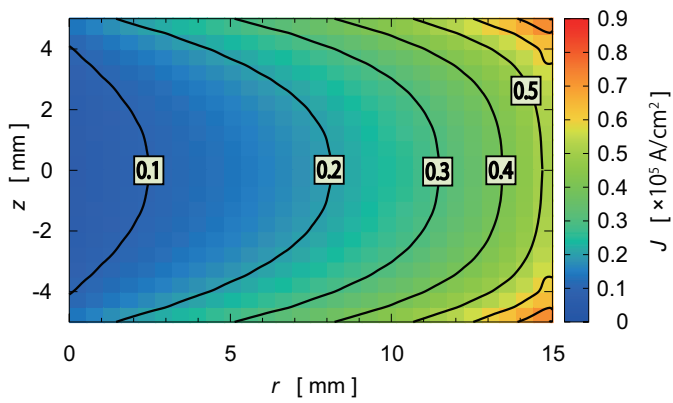
(c) radial模型



(d) Y1模型



(e) Y10模型



(f) Y20模型

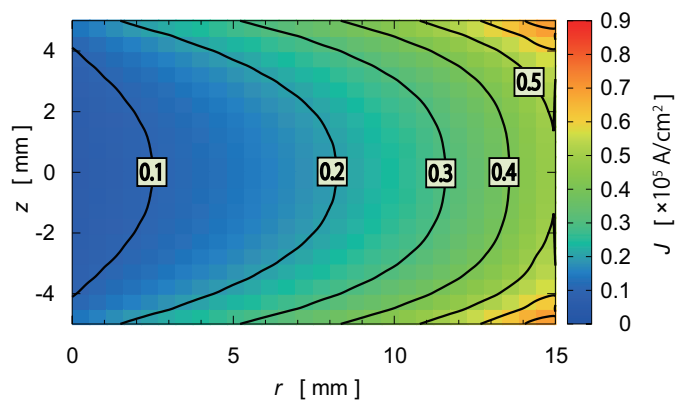


図 3.10: 磁場計算で決定された各 6 種模型のバルク内部電流分布

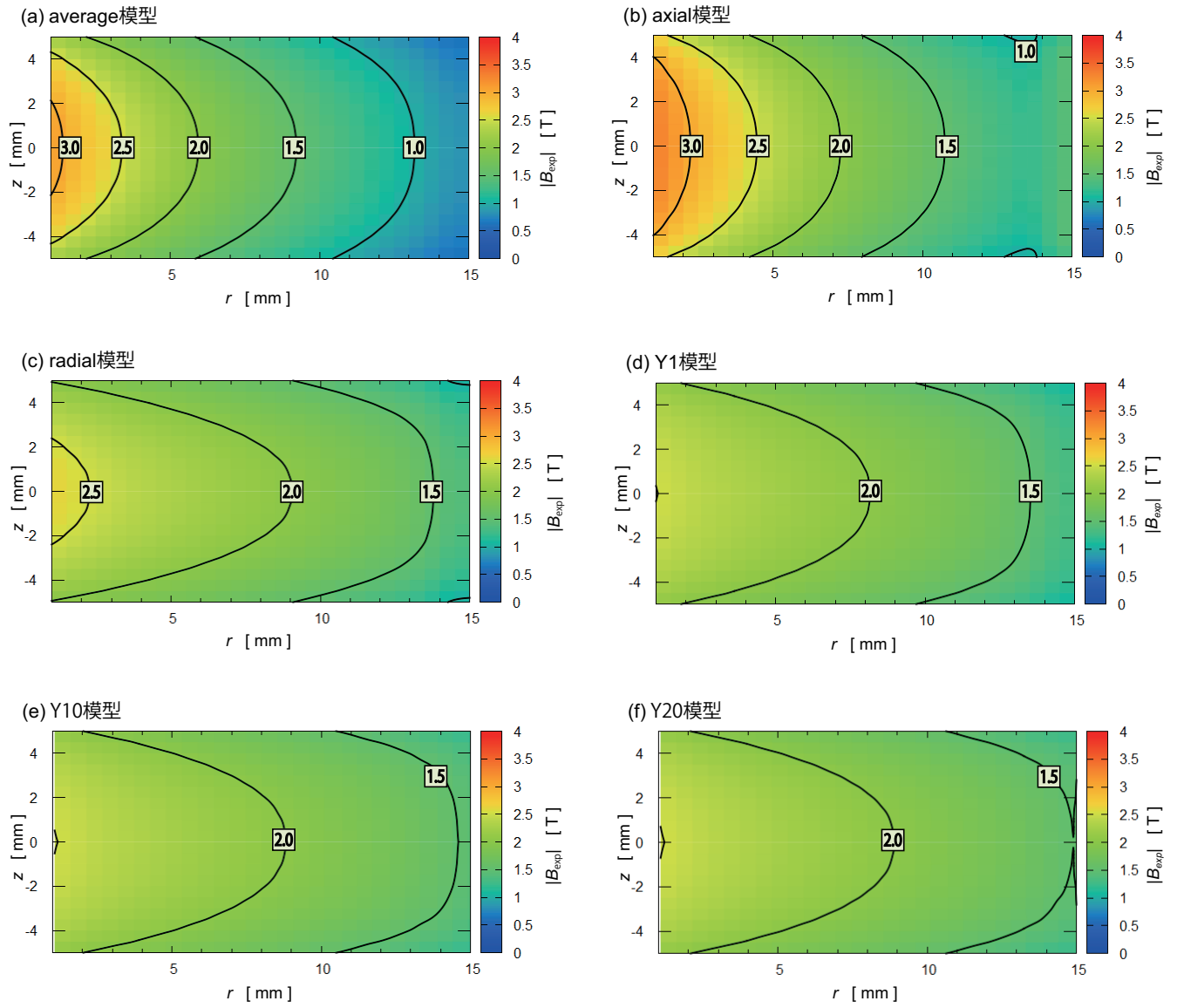


図 3.11: 磁場計算で決定された各6種模型のバルク内部経験磁場

両左図よりバルク中央表面上 $z=3$ mm での磁場値へのバルク表面単位電流寄与率は、 $z=8$ mm の結果と比較して約 1.1 倍となった。また、両下図よりバルク中央表面上 $z=8$ mm での磁場値へのバルク表面単位電流寄与率は、 $z=3$ mm の結果と比較して約 1.5 倍となった。

磁場寄与率の計算結果を踏まえると、下記三点の結果が得られる。

1. $z=3\sim 8$ mm の測定領域では、バルク端部の電流程、遠方の磁場に対する寄与が大きくなる
2. $z=3\sim 8$ mm の測定領域では、バルク表面電流から磁場値への寄与率に大きな変化はない
3. 磁束反射効果による計算精度向上効果は $z=3$ mm より $z=8$ mm の磁場値に生じる

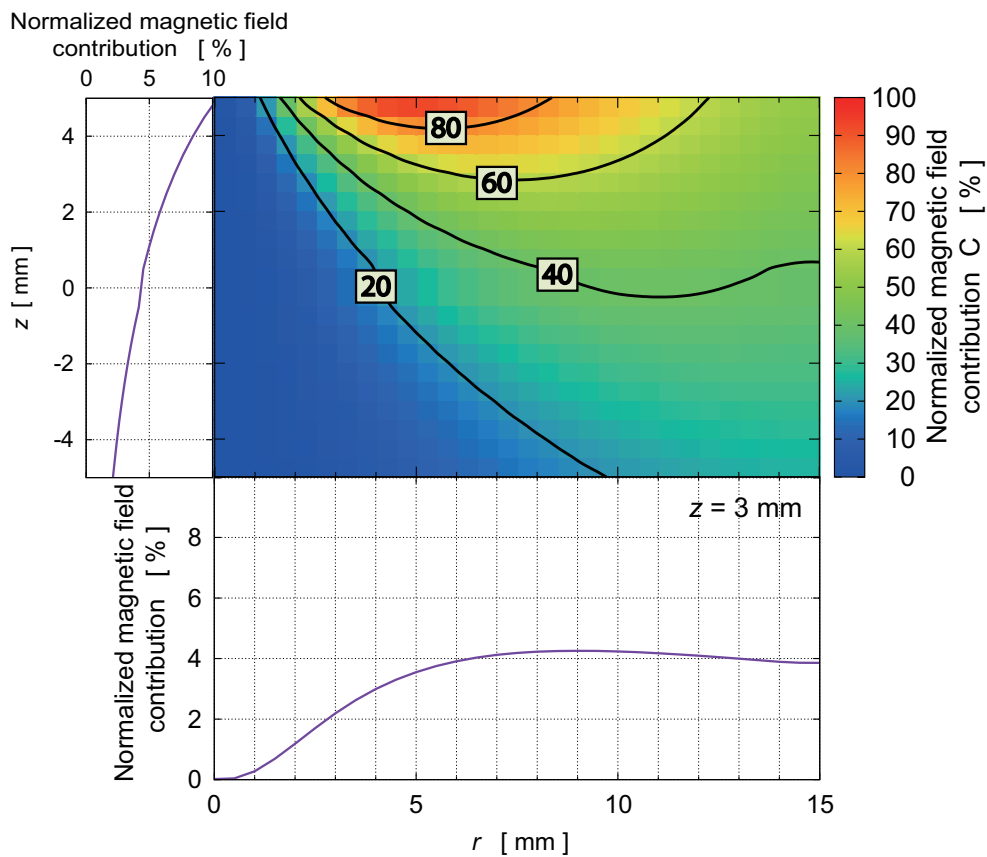


図 3.12: バルク #1 表面中央上 3 mm での捕捉磁場計算値に対する各単位電流密度分布の寄与率分布

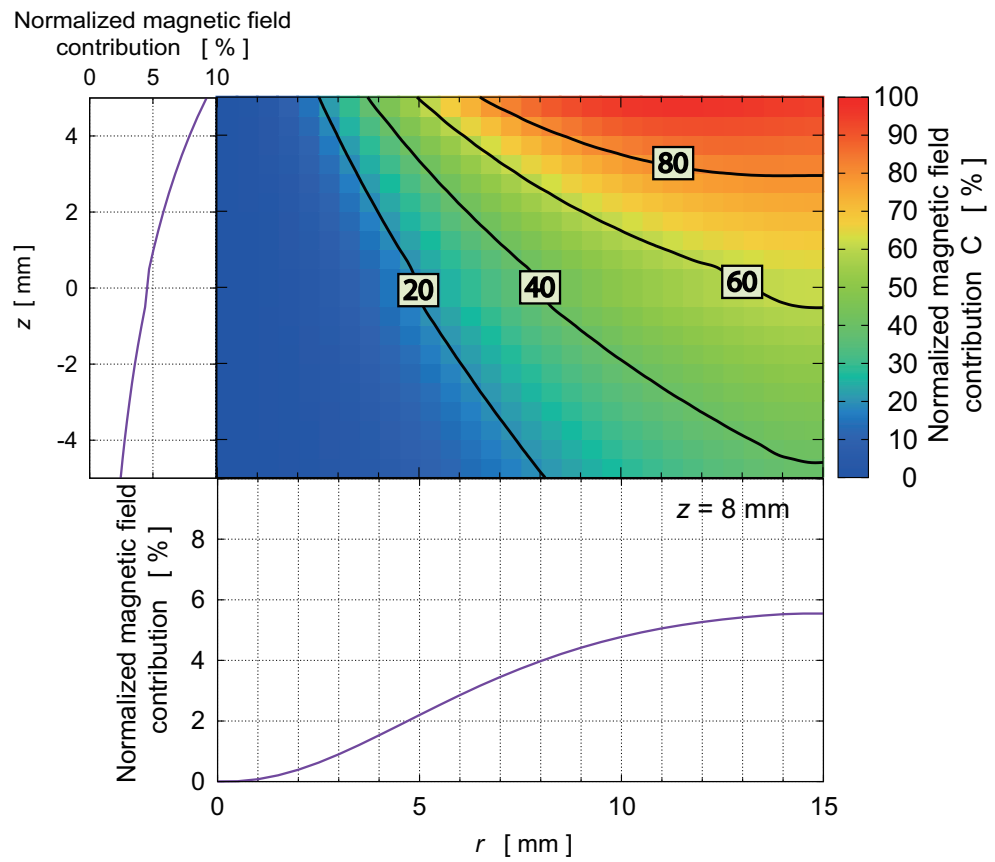


図 3.13: バルク #1 表面中央上 8 mm での捕捉磁場計算値に対する各単位電流密度分布の寄与率分布

3.3.6 Y20 模型での捕捉磁場への寄与率空間分布

バルク #1 表面中央上 $z=3$ mm と $z=8$ mm での捕捉磁場計算値への電流密度分布に対する寄与率分布 (Y20 模型) を図 3.14 と図 3.15 に示す。Y20 模型でのバルク内部電流の寄与率 $W_{Y20}(i, j)$ は式 (3.2) で定義される。

$$W_{Y20}(i, j) = \frac{B(i, j)}{B_{\text{cmax}}} \times 100\% \quad (3.2)$$

両図の各左図には z 軸方向に対する磁場値への各寄与率積算を示す。一方、各図の下図には径方向に対する磁場値への各寄与率積算を示す。各左図と各下図で示された全寄与率積算は 100 % とする。また、比較のため、各左図と各下図で示された寄与率には、各 6 種の模型による寄与率を併記する。

各図の左図には z 軸方向に対する各寄与率の積算を示す。一方、各図の下図には径方向に対する各寄与率の積算を示す。左図と下図において示された寄与率の積算は 100 % とし、全 6 種模型の寄与率も併記する。バルク表面中央上 $z=3$ mm と $z=8$ mm の磁場計算値へ最も大きく寄与している電流の位置は、バルク表面かつ最端部である。

両左図よりバルク中央表面上 $z=3$ mm での磁場値へのバルク表面単位電流寄与率は、 $z=8$ mm の結果と比較して約 1.2 倍となる。

両下図よりバルク中央表面上 $z=8$ mm での磁場値へのバルク表面単位電流寄与率は、 $z=3$ mm の結果と比較して約 1.4 倍となる。

磁場寄与率の計算結果を踏まえると、下記 3 点の結果が得られる。

1. 磁束反射効果による計算精度向上の要因となった電流は、バルク端部に集中している
Y=20 模型にてバルク端部電流は磁場値に 2 % 程度寄与しており、測定点の高さに大きく依存していない。Y1 模型と Y20 模型で計算精度は平均 1.7 % 程向上しているため、磁場値へのバルク端部電流寄与の 9 割近くが計算精度の向上に結びついている。
2. $z=3\sim 8$ mm の測定領域では、バルク表面電流が磁場値に約 12 % と非常に大きな影響を与える
3. 磁束反射効果の導入に関わらず、バルク最下部の内部電流は約 2 % 程磁場値へ寄与しており、バルク厚の増加でより高い捕捉磁場が得られる。

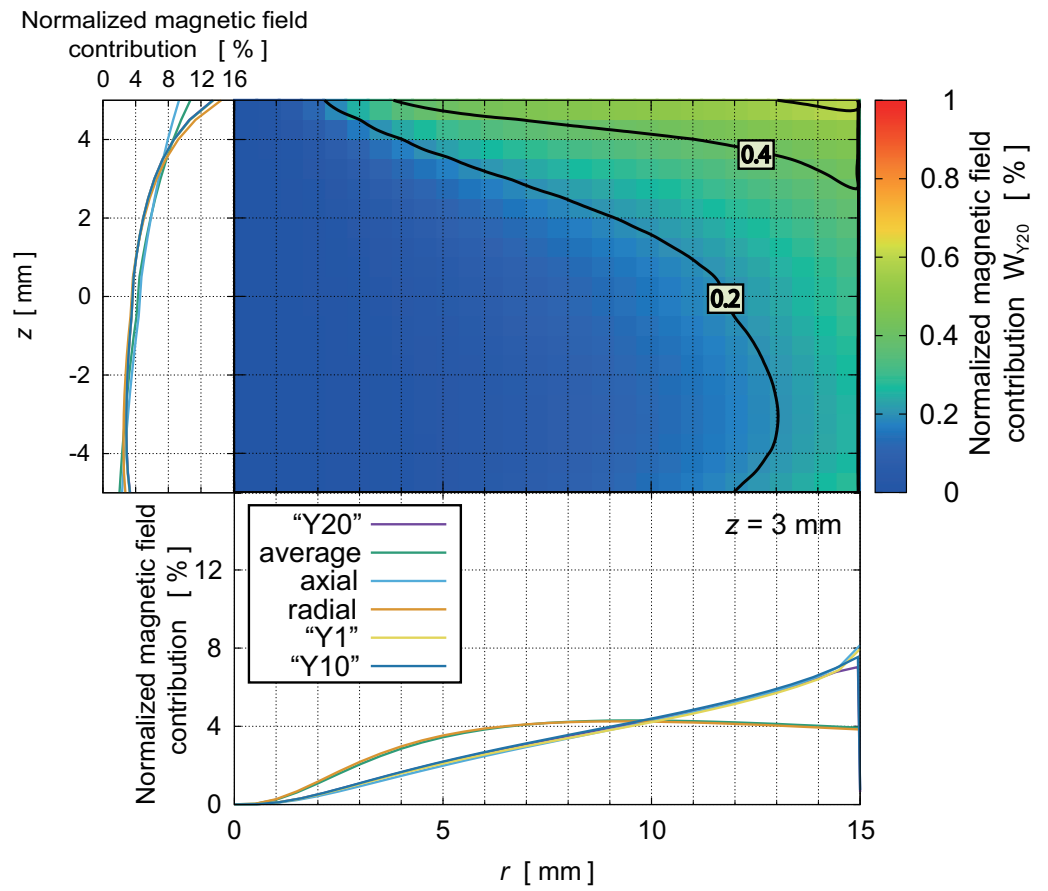


図 3.14: バルク #1 表面中央上 3 mm での捕捉磁場計算値に対する電流密度分布の寄与率分布 (Y20 模型)

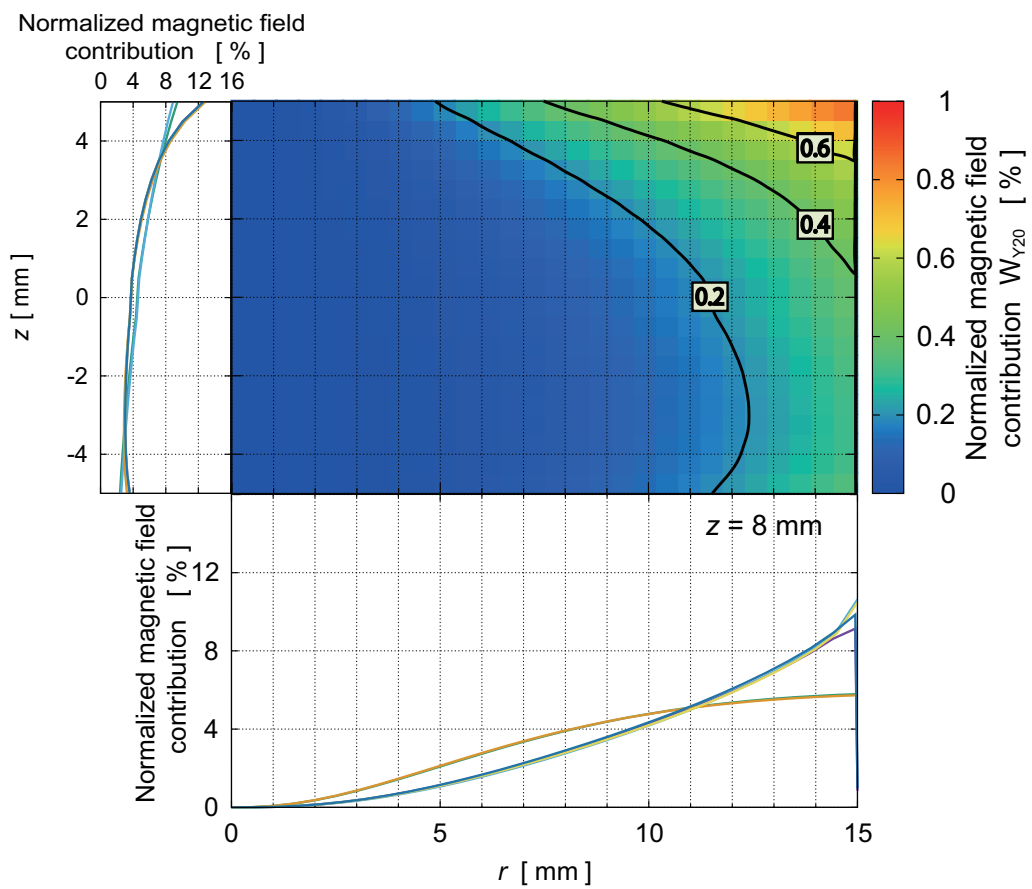


図 3.15: バルク #1 表面中央上 8 mm での捕捉磁場計算値に対する電流密度分布の寄与率分布 (Y20 模型)

第4章 議論

本章では、実験結果と計算結果の比較を踏まえ、① 測定試料の品質と② 磁場計算の妥当性の二点を議論する。

4.1 測定試料の品質

本研究の測定結果と従来研究での捕捉磁場分布測定結果の差から、バルク端部への磁束反射効果の検証で作製した超伝導バルク MgB_2 の品質上の問題はないと判断した。

図 3.1 により、バルク #1 の捕捉磁場測定値 ($r=0, z=3 \text{ mm}$) は、約 1.17 T となった。従来研究の磁場測定結果 [78] は約 1.3 T であり、磁場測定誤差が 0.05 T であることも踏まえても磁場測定試料間の差は約 0.12 T となる。 J_c - B 特性は非公開であるが、従来研究と本研究の測定試料間差は試料作成環境の差によって生じていると考える。

本研究と同処理・同製法・同装置で作製されたバルクの SEM 画像を、図 4.1 に示す。図 4.1 より当研究で用いた MgB_2 バルクの粒径は μm 程度である。従来研究で作製された試料の粒径 [78] は同様に 1 μm 程度であり、本研究で用いられた試料の粒径は同程度と従来研究と同程度と考えられる。

また、本研究で作製した試料のコネクティビティも、従来研究 [78] と同程度と考えられる。従来研究から、本作製法と同熱処理・同製法の試料間のコネクティビティには約 2 %程度の差しか生じないことが判明している [48]。他の従来研究 [79] においては B 粒子同士で 5 %結合している試料と 19.2 %結合している試料が存在するが、二種の試料間の原粉末条件は同一ではなく、本研究で用いた測定試料の粒径・コネクティビティは共に従来研究と同程度の品質を持っていると考える。

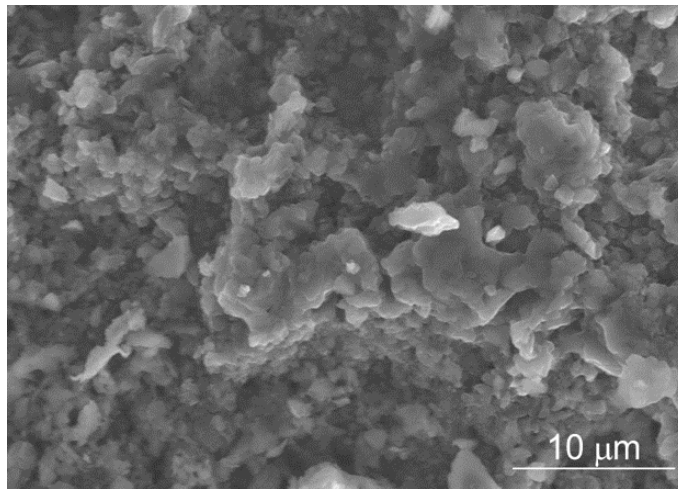


図 4.1: 同製法・同処理の MgB_2 バルクの SEM 画像

4.2 磁場計算の妥当性

4.2.1 Y 値の設定

磁場計算では、正確に磁束反射効果を見積もれていない。磁場計算では磁束反射効果を導入するため、節 2.2.2 のように磁場計算に近似的な Y 値を導入しバルク端部の電流密度を一律で倍増させた。しかし、本来磁束反射効果はバルク端部で電流密度を一律倍増させるものではない。正しく磁束反射効果を見積もるためには、バルク端部にある数万以上の磁束量子をシミュレートする必要がある。将来的に適切な Y 値を設定するためには、磁束運動を粗視化した計算モデルを構築する必要がある。

4.2.2 各計算点での捕捉磁場分布の精度低下

図 3.7～図 3.9 では、6 種模型中 Y20 模型での最大誤差 $|B_{\text{cal}} - B_{\text{exp}}|$ が最も小さくなった。しかし、下記二点の測定点で、Y20 模型における捕捉磁場分布の計算精度は低下する。

1. バルク中心付近かつバルク表面に最も近い計算点
($r=0\sim 6$ mm, $z=3$ mm)
2. バルク端部での全計算点

上記二点の計算精度の低下は磁束反射効果のバルク厚依存性を考慮していないことに由来している。

バルク中心付近かつバルク表面に最も近い計算点 ($r=0\sim 6$ mm, $z=3$ mm) では, axial 模型による計算精度が他の模型と比較して最も高い. しかし, 計算対象バルク (バルク径 30 mm ϕ バルク厚 10 mm t) の axial 模型での計算では物理的な意味を持たない軸方向一定の束縛条件が電流分布に設けられており, 他の計算点 ($r=0\sim 6$ mm, $z=5$ mm, 8 mm) では axial 模型での計算精度は悪化している. また, 従来研究より磁束反射効果を考慮していないバルク径 30 mm ϕ バルク厚 100 mm の MgB₂ バルクによる捕捉磁場分布の計算値は, axial 模型に漸近していく [64].

そのため, axial 模型では, $z=3$ mm 付近の磁場計算で高い計算精度を持つのではなく, Y20 模型での計算精度が $z=3$ mm 付近の磁場計算で低下したと考えられる.

Y20 模型での計算精度低下は, 近似的な磁束反射効果の導入方法に依っている. 磁場計算の Y 値はバルク最端部の電流分布にバルク厚依存性に寄らず導入した. しかし, 実際にバルク端部を通過する磁場ベクトルは全て平行に捕捉されておらず, Y 値には本質的にバルク厚依存性が生じる. そのため, Y20 模型での計算精度低下は, 磁束反射効果のバルク厚依存性の無視により生じたと考える. もし仮に Y 値のバルク厚依存性を考慮した場合, バルク表面端部における磁場ベクトルの z 方向成分はバルク中央端部よりも減少すると想定されるため, バルク表面端部の Y 値は減少しバルク中央表面上 $z=3$ mm での計算精度は上昇すると考える.

また, バルク端部付近では, z 方向への微小な計算点移動に対して捕捉磁場値の計算値や測定値が特定の点で変動しなくなる. 本研究ではこの点を磁場一致点と呼ぶ. 磁場一致点の位置は計算と測定で違っており, 磁場計算精度に大きな影響を与えている. 計算と測定における磁場一致点位置のズレは, 計算模型の特徴と磁束反射効果のバルク厚依存性の無視から生じていると考える.

磁場計算において磁場一致点が生じた理由は, バルク内部電流を円筒形バルクの集合と置換しているためである. 例えば, バルク表面上 $z=3$ mm と $z=8$ mm にあるバルク中央 ($r=0$ mm) とバルク端部付近 14 mm ($r=14$ mm) への各電流分布の最大寄与率 (Y1 模型) を持つメッシュ位置を表 4.1 に示す.

バルクの計算点がバルク中央上 ($r=0$ mm) にある場合, バルク表面上 $z=3$ mm, 8 mm の磁場値に対して最大寄与率の位置は, 大きく変動する. その一方, バルクの計算点がバルク端部 ($r=14$ mm) にある場合, バルク表面上 $z=3$ mm, 8 mm の磁場値に対して最大寄与率を持つメッシュ位置は全く変動しない. 磁場一致点は円形コイル状となったバルク内部電流分布の直上に位置しており, 磁場一致点はバルク内部電流分布の形状に大きく依存していると想定される.

表 4.1: バルク表面上 3 mm, 8 mm のバルク中央 (r=0 mm) とバルク端部付近 14 mm (r=14 mm) への各電流分布の最大寄与率 (Y1 模型) を持つメッシュ位置

測定点	最大寄与率を持つメッシュ
r=0 mm, z=3.0 mm	r=4.8 mm, z=10.0 mm
r=0 mm, z=8.0 mm	r=11.7 mm, z=10.0 mm
r=14.0 mm, z=3.0 mm	r=15.0 mm, z=10.0 mm
r=14.0 mm, z=8.0 mm	r=15.0 mm, z=10.0 mm

Y0 模型での電流分布形状に対する磁場一致点の位置依存性は解析的に導出出来ない。しかし、磁場一致点は average 模型においても生じており、average 模型かつ電流の周方向成分 θ を微小とした際のビオ・サバル法則から磁場一致点位置のバルク径依存性や計算点依存性を推定出来る。

円柱形バルクの磁場一致点は円柱軸に対して対称性を持つため、ビオ・サバル法則 (式 (2.8)) における \hat{x}, \hat{z} 方向のみを考慮する。さらに、式 (2.8) の被積分関数の θ' 方向の寄与を磁場一致点の寄与情報から省くと、 $\theta' \rightarrow 0$ から $\cos \theta' \simeq 1 - \frac{\theta'^2}{2}$, $\sin \theta' \simeq \theta'$ により、 $|Y| \rightarrow 0$ が成り立つ。そのため、式 (2.8) から式 (4.1) が成り立つ。

$$B_{i,z} = \frac{\mu_0 J_1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\theta' \left[\left\{ \left(\frac{z_2 - z_1}{2} - z \right) H_2 - \left(-\frac{z_2 - z_1}{2} - z \right) H_1 \right\} - X \cdot \Lambda \right] \quad (4.1)$$

計算点 z の移動 $z + \Delta z$ に対して、磁場値 $B_{i,z}$ の変動しない点が磁場一致点となるため、式 (4.1) を用いて計算点変動に対する変動磁場値 $\Delta B = |B_{i,z} - B_{i,z+\Delta z}|$ を式 (4.2) のように算出出来る。ここで、パラメーター H と Λ は z の陽関数なので、 $H_a = H(z_a)$, $\Lambda_a = \Lambda(z_a)$ と書けるため、 $H'(z_a) = H(z_a + \Delta z)$, $\Lambda'(z_a) = \Lambda(z_a + \Delta z)$ とする。

$$\begin{aligned} \Delta B &= |B_{i,z} - B_{i,z+\Delta z}| \\ &= \frac{\mu_0 J_1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\theta' [\Xi] \\ &= \frac{\mu_0 J_1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\theta' \left[\left\{ \left(\frac{z_2 - z_1}{2} - z \right) (H_2 - H_2') \right\} \right. \\ &\quad \left. - \Delta z H_2' - \left\{ \left(-\frac{z_2 - z_1}{2} - z \right) (H_1 - H_1') - \Delta z H_1' \right\} \right] \\ &\quad - X \cdot (\Lambda - \Lambda') \end{aligned} \quad (4.2)$$

式 (4.2) 中では被積分関数を Ξ と置いている。H と Λ の関数形は対数関

数であるため、式 (4.2) の被積分関数 Ξ は対数関数の和差で表現される。そのため、式 (4.2) の被積分関数 Ξ には、式 (4.4) が成り立つ。パラメーター R と Z は z の陽関数なので、 $R_a = R(z_a)$ 、 $Z_a = Z(z_a)$ と書ける。ここで、 $R'(z_a) = R(z_a + \Delta z)$ 、 $Z'(z_a) = Z(z_a + \Delta z)$ とする。

$$\Xi = \ln \left[\frac{(A_{22})^{s_+} (B_{11}^+)^{s_-} (B_{11}^{-\alpha})^{s'_-} (B_{12}^{+\alpha})^{s'_+}}{(A_{22}^\alpha)^{s'_+} (B_{11}^{+\alpha})^{s'_-} (B_{11}^-)^{s_-} (B_{12}^+)^{s_+}} \frac{(B_{12}^-)^{s_+} (B_{21}^{+\alpha})^{s'_-} (B_{21}^-)^{s_-} (C_2^\alpha)^{s'_+}}{(B_{12}^{-\alpha})^{s'_+} (B_{21}^+)^{s_-} (B_{21}^{-\alpha})^{s'_-} (C_2)^{s_+}} \left\{ \frac{(D_{11}^-)^{s_+} (D_{12}^{+\alpha})^{s'_-} (D_{21}^{-\alpha})^{s_-} (D_{22}^+)^{s'_+}}{(D_{11}^{-\alpha})^{s'_+} (D_{12}^+)^{s_-} (D_{21}^-)^{s'_-} (D_{22}^{+\alpha})^{s_+}} \right\}^x \right] \quad (4.3)$$

$$A_{22} = R_{22} + r'_2 - X$$

$$A_{22}^\alpha = R'_{22} + r'_2 - X$$

$$B_{11}^+ = R_{11} + r'_1 + Z_1$$

$$B_{11}^{+\alpha} = R'_{11} + r'_1 + Z'_1$$

$$B_{11}^{-\alpha} = R'_{11} - r'_1 + Z'_1$$

$$B_{11}^- = R_{11} - r'_1 + Z_1$$

$$B_{12}^{+\alpha} = R'_{12} + r'_1 + Z'_2$$

$$B_{12}^+ = R_{12} + r'_1 + Z_2$$

$$B_{12}^- = R_{12} - r'_1 + Z_2$$

$$B_{12}^{-\alpha} = R'_{12} - r'_1 + Z'_2$$

$$B_{21}^{+\alpha} = R'_{21} + r'_2 + Z'_1$$

$$B_{21}^+ = R_{21} + r'_2 + Z_1$$

$$B_{21}^- = R_{21} - r'_2 + Z_1$$

$$B_{21}^{-\alpha} = R'_{21} - r'_2 + Z'_1$$

$$C_2^\alpha = Z'_2 - x$$

$$C_2 = Z_2 - x$$

$$D_{11}^- = R_{11} - (-t - z)$$

$$D_{11}^{-\alpha} = R'_{11} - (-t - (z + \Delta z))$$

$$D_{12}^{+\alpha} = R'_{12} - (t - (z + \Delta z))$$

$$D_{12}^+ = R_{12} - (t - z)$$

$$D_{21}^{-\alpha} = R'_{21} - (-t - (z + \Delta z))$$

$$D_{21}^- = R_{21} - (-t - z)$$

$$D_{22}^+ = R_{22} - (t - z)$$

$$D_{22}^{+\alpha} = R'_{22} - (t - (z + \Delta z))$$

$$s_+ = t - z$$

$$s_- = -t - z$$

$$s'_+ = t - z + \Delta z$$

$$s'_- = -t - z + \Delta z$$

計算点変動 Δz に対して式 (4.4) の Ξ が最小化される時、磁場一致点が生じる。そのため、式 (4.4) が成り立つ時、 $\Xi = 0$ より磁場一致点が生じる。

$$\left[\begin{array}{l} \frac{(A_{22})^{s+} (B_{11}^+)^{s-} (B_{11}^{-\alpha})^{s'-} (B_{12}^{+\alpha})^{s'+}}{(A_{22}^{\alpha})^{s'+} (B_{11}^{+\alpha})^{s'-} (B_{11}^-)^{s-} (B_{12}^+)^{s+}} \\ \frac{(B_{12}^-)^{s+} (B_{21}^{+\alpha})^{s'-} (B_{21}^-)^{s-} (C_2^{\alpha})^{s'+}}{(B_{12}^{-\alpha})^{s'+} (B_{21}^+)^{s-} (B_{21}^{-\alpha})^{s'-} (C_2)^{s+}} \\ \left\{ \frac{(D_{11}^-)^{s+} (D_{12}^{+\alpha})^{s'-} (D_{21}^{-\alpha})^{s-} (D_{22}^+)^{s'+}}{(D_{11}^{-\alpha})^{s'+} (D_{12}^+)^{s-} (D_{21}^-)^{s'-} (D_{22}^{+\alpha})^{s+}} \right\}^x \end{array} \right] = 1 \quad (4.4)$$

式 (4.4) を用いて、バルク径 30 mm ϕ バルク厚 10 mm のバルク最小点を探索すると、バルク表面上 $z=3.0$ mm に対して磁場一致点は $r=11$ mm 付近に存在する。計算点 z がバルク表面から離れることで、磁場一致点は径方向側に移動し、計算点 $z=15.9$ mm 時に磁場一致点は $r=14.0$ mm 付近に存在する。一方、磁場一致点の位置は外径の増加に対して大きく変動する。バルク外径を 30 mm ϕ から 40 mm ϕ に増加させることで、バルク表面上 $z=3.0$ mm に対する磁場一致点は $r=11$ mm から $r=14$ mm 付近に移動する。一様な電流分布を持ったバルクの外径が増加することで、バルクの磁場一致点はバルク端部に近づくため、本研究での計算模型がバルク磁場をより忠実に再現するためには、バルク径方向に対する電流密度計算の精度向上が求められる。

また、図 3.7 と図 3.8 と図 3.9 の Y1 模型と Y20 模型磁場計算結果より、磁束反射効果を導入することで、バルク端部での計算精度は改善している。そのため、磁場計算で用いるコイル形状を円筒形から別の形に変更しない場合、バルク端部の計算精度の改善には、磁束反射効果をより詳細に導入するための近似的手法が必要であると考えられる。

4.2.3 磁場計算時の振動解への対処

磁場計算ではバルク内部電流密度決定の反復計算時、同値の電流密度が振動解として現れ、図 3.3 のように計算メッシュを 30×20 とした時全模型計算で計算が収束しなかった。

振動解による計算未収束の理由は、バルク端部の計算メッシュ数不足にある。磁場計算での振動解への対処は、下記の二点の方法で対処した。

1. バルク内部電流密度分布 $J_i^m(r, \theta)$ 決定の際、反復計算で下記の現象が現れていないかを確認する。

- (a) 同値の電流密度 $J_i^n(r, \theta)$ が何度も算出値に現れていないか
 - (b) 反復前後の電流密度 $J_i^n(r, \theta)$ の差が反復中に増加していないか
2. バルク内部電流分布決定のための反復計算中，図 4.2 のようにバルク端部の 3 メッシュが式 (4.5) を満たしていることを確認する．

$$J_{N-2} \leq J_{N-1} \leq J_N \quad (4.5)$$

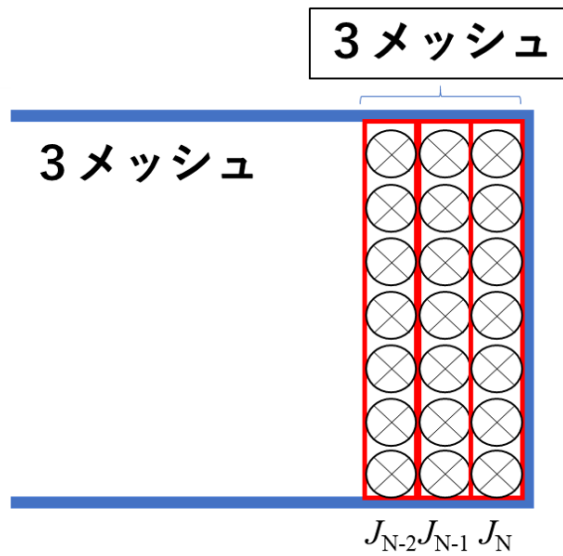


図 4.2: 計算収束性確認のためのバルク端部 3 メッシュの電流 (再掲)

上記の収束性異常の状況を確認するため，Y10 模型を用いた初期設定計算メッシュ 30×20 時の磁場計算を行う．検証のため，この磁場計算では電流分布反復計算毎に最端部メッシュを径方向に 1 分割し，バルク内部磁気エネルギーと同義となるパラメーター $|B_{\text{exp}}|^2$ の反復回数依存性を調べ，バルク内部磁気エネルギーの反復回数依存性を図 4.3 に示す．

バルク内磁気エネルギーは，反復回数 70 回を超えた後急激に一定値に収束していき，更なる反復でバルク内部磁気エネルギーが別の一定値へ収束する．計算反復毎にバルク端部での磁束反射効果を導入した径方向計算メッシュ数は増加しており，節 2.3.4 での収束判定基準を用いない場合バルク内部の磁気エネルギーを収束判定基準に用いるべきと考える．

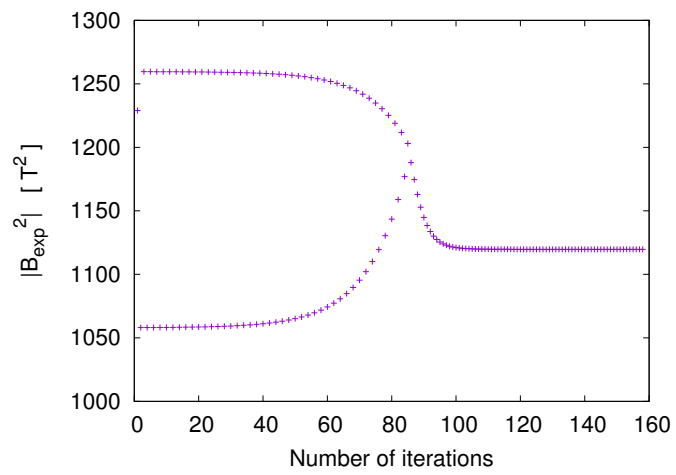


図 4.3: バルク内磁気エネルギーの反復回数依存性

第5章 結論

金属化合物系超伝導体 MgB_2 の超伝導バルク磁石へのバルク端部での磁束反射効果の影響を調べるために、 MgB_2 バルクの作製、 J_c - B 特性の測定、捕捉磁場計算コードの作成、磁束反射効果の導入検証を行った。結果として、本研究では、従来研究から下記四点の進展を得られた。

1. 計算精度向上による影響
2. 模型間の差異による計算模型の選択
3. バルク加工指針への影響
4. 磁場計算への技術的障壁の低下

5.1 本計算の導入効果

計算精度向上による影響

従来計算への磁束反射効果の導入により設計時の磁場計算精度は最低9%以上向上した。従来計算を含めたバルク表面中央上3 mmと8 mmの捕捉磁場計算の計算誤差の比較表を表5.1に示した。

表 5.1: 捕捉磁場計算の最大計算誤差比較

計算種別	最大計算誤差 ($z=3$ mm)	最大計算誤差 ($z=8$ mm)
従来研究	21 %	13 %
Y1 模型	4.9 %	5.8 %
Y20 模型	5.4 %	3.6 %

本研究の捕捉磁場の計算精度は従来研究より最低約9%程度向上し磁束反射効果を考慮することで、平均して約1.7%精度が向上した。

模型間の差異による計算模型の選択

磁場計算結果より MgB_2 バルク ($T=20$ K) における計算模型選択に下記の指針が与えられた。図3.6と図3.7から average 模型と他の5種模型

の磁場測定値には、最大0.3 T程の差が生じていることが分かった。磁場値の測定誤差0.05 Tを勘案しても、磁場値0.3 Tの影響は他の模型と比較して大きい。その一方で、下記三点のようなケースでは計算的な負荷が小さいビーン模型を用いるべきと考えた。

1. 磁場設計の必要や余地がない

磁場設計後に実測で磁場分布を測定し、磁石の位置を適宜変更出来る場合には、磁場設計の必要がなくなる。例えば超伝導バルク体による高い磁場強度のみを実用上用いる場合やバルク内部電流分布を考慮する必要がない場合にもビーン模型を用いるべきと考えられる。

2. 磁場適用範囲が約15 mm等大きく離れている。

測定点がバルク表面からz方向へ8 mm離れている時、ビーン模型での計算結果と実測値の差異は最大でも0.15 T程度だった。測定誤差は0.05 T程度のため、磁場適用範囲がバルク表面から大きく離れる場合には、バルク内部電流を考慮する必要がないと考える。

3. 磁場補正が容易である

実用時補正用コイル等により、磁場補正が容易な場合にはビーン模型を用いても設計上の問題は生じない。

磁束反射効果による捕捉磁場への効果は1.7%程だったため、磁場設計において磁束反射効果を用いるべき状況は下記の二点と考えられる。

1. 実用上数%の精度向上が求められる

2. 磁場設計に多数バルクが用いられる

複数のバルクが磁場設計に用いられる場合、他バルクの磁場計算精度が磁束反射効果考慮により向上する。例えば、未加工な円柱型バルク2個を対向させて着磁させた場合、最も磁場値に影響を与えるバルク表面端部の電流(図3.14)が他のバルクの磁場を受けて変動する。

バルク加工指針への影響

Y20 模型での捕捉磁場分布(図3.14)から、各測定点への磁場設計バルク加工方針を得ることが出来た。例えば、図3.14右図中の左図では、バルク最下部の寄与率が約2%程あり、バルク厚の増加によりバルク表面中央上8 mmでの捕捉磁場値の向上が予想出来る。

磁場計算への技術的障壁の低下

本研究の模型構築は、従来模型と比較して容易である。磁場計算で用いられた Fortran プログラムと Fortran 用パッケージであり、有限要素法等のプリメッシュソフトを導入する必要がない。

5.2 計算手法での未考慮事項

計算手法で考慮出来なかった内容を下記に列挙した。

1. 計算手法から生じる計算精度向上への課題
 - (a) 計算模型への磁束反射効果のより詳細な導入
Y 値の適切な導入がなく、現行の計算では Y 値が最適値であると保証出来ない。バルク表面上 $z=3\text{ mm}$, 5 mm のバルク中央付近捕捉磁場値での計算精度が悪化しており、磁束反射効果の従来計算に対する導入方法をより詳細にすべきと考える。
 - (b) バルク内部の粒間・粒内電流を分離した計算模型構築
粒間・粒内電流を分離した計算模型を構築出来ていない
2. 測定から生じる計算精度への課題
 - (a) 実験時のバルク位置ずれによる測定誤差
 - (b) 着磁実験時の温度管理
捕捉磁場測定時のバルク位置ズレや FC 法着磁時の温度管理の影響は測定誤差 0.05 T に含まれている。しかし、具体的にどの程度影響があるかは議論出来ていない。
 - (c) 同製法別 J_c - B 特性での実験誤差
本研究では同製法で作製された J_c - B 特性が同一であることが前提となっている。しかし、試作サンプル数に限界があり、同製法別 J_c - B 特性での捕捉磁場分布の差は議論出来ていない。

5.3 今後の課題

計算結果と未考慮事項を踏まえて、次に取り込むべき課題は下記の二点である。

1. 磁束量子動力学法による磁束運動の粗視化模型開発
2. 磁場測定によらない Y 値の算出

第一には、磁束反射効果をより詳細に導入するため、磁束量子動力学法による磁束運動の粗視化手法を開発したい。計算手法の技術的な平易さを保ち、バルク端部とバルク表面上3~5 mmの計算精度を向上するために、磁束に掛かる力をより詳細に議論する必要がある。

具体的には、実験系でバルクの温度上昇で生じる捕捉磁場分布の減少を実験的に求め、磁束量子動力学法の結果と比較したい。バルクの温度上昇過程では、外部磁場の影響がなく、バルク端部の磁束は磁束反射効果以外の影響を受けにくい。バルク温度上昇による捕捉磁場分布の測定結果を元に、磁束量子動力学法における磁束運動の粗視化もしくは微視化した模型を開発し、従来より磁場設計に適した理論模型を構築したい。

第二には、磁場設計段階から適切なY値を考慮出来るような理論模型を構築したい。現状、磁束反射効果による計算精度向上のためには、参考試料を用いたY値実測が求められる。しかし、粗視化模型を元に、磁場測定に依らないY値を原理的に算出することで、余分な工数は省略され、磁場設計の計算精度はより向上すると考えられる。

付録 A

付録では、磁場計算への磁束反射効果の導入のため、磁束量子動力学法に掛かる力と Y 値の概算法を説明する。磁場計算では、バルク最端部の電流密度を Y 倍する形で、磁束反射効果を導入した。しかし、本研究での磁束量子動力学法は、凡その Y 値を見積もるために用いられ、解析的に Y 値を決定していない。そのため、付録として磁束量子動力学法による Y 値の見積り方法を示した。

Y 値の見積りのためには、磁束量子動力学法の説明が必要となる。まず、超伝導現象の特徴を述べた後、超伝導バルク体の静磁界解析方法の一つとして磁束量子動力学法を述べる。次に、磁束量子動力学法で磁束に掛かる各力を紹介し、静磁界解析と磁束量子動力学法の差を述べた上で、バルク端部での磁束反射効果のエネルギーを見積もる。

A.1 超伝導現象の現象論的特徴とロンドン方程式

物質の超伝導転移は、下記二点の影響を物質内外の電磁界に与える。ここで超伝導状態の示す完全反磁性をマイスナー効果と呼ぶ。

1. 物質の電気抵抗がゼロ
2. 物質が完全反磁性を示す

1935年に F.London と H.London は、臨界温度以下の物質の超伝導状態で電子が超伝導電子と常伝導電子に分かれる模型を仮定し、完全導電性と完全反磁性の両性質を両立する模型の構築に成功した [80]。電子が超伝導電子と常伝導電子に分かれる模型を二流体模型と呼ぶ。二流体模型では、物質中の常伝導電子は常伝導状態と同じ電気抵抗を受ける自由電子であり、物質中の超伝導電子は電気抵抗を受けない自由電子である。

超伝導物質中の質量 m の超伝導電子 (電荷 $-e$) は電場 E に対して力を受け、超伝導電子は減衰なく加速される。超伝導電子速を v_s はニュートンの法則から式 (A.1) で示される。

$$m \frac{dv_s}{dt} = -eE \quad (\text{A.1})$$

超伝導電流密度 j_s はクーパー対の空間密度 n_s を用いて、式 (A.2) で示される。

$$m \frac{dy}{dt} = -e\mathbf{E} \quad (\text{A.2})$$

式 (A.2) を式 (A.1) に代入すると、式 (A.3) を得られる。

$$\mathbf{E} = \frac{m}{n_s e^2} \frac{d\mathbf{j}_s}{dt} \quad (\text{A.3})$$

マクスウェル方程式より磁場 H と磁束密度 B に式 (A.4) と式 (A.5) が成立する。ここで変位電流は無視した。

$$\nabla \times \mathbf{E} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{A.4})$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_s \quad (\text{A.5})$$

$B = \mu_0 H$ を用いて式 (A.4) と式 (A.5) を式 (A.3) に代入すると、式 (A.6) が成立する。

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{m}{\mu_0 n_s e^2} \nabla \times \nabla \times \mathbf{B} + \mathbf{B} \right) = 0 \quad (\text{A.6})$$

超伝導体の完全反磁性は 1933 年に R.Becker が式 (A.7) を満たした時に成立することを示している [81]。式 (A.3) と式 (A.7) をロンドン方程式と呼ぶ。

$$\frac{m}{\mu_0 n_s e^2} \nabla \times \nabla \times \mathbf{B} + \mathbf{B} = 0 \quad (\text{A.7})$$

ベクトル公式 $\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B}$ に $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ を仮定すると、式 (A.8) が示される。

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{1}{\lambda^2} \mathbf{B} = 0 \quad (\text{A.8})$$

ここで λ をロンドンの磁場侵入長と呼び、式 (A.9) で示される。

$$\lambda = \left(\frac{m}{\mu_0 n_s e^2} \right)^{1/2} \quad (\text{A.9})$$

超伝導面 ($x = 0$) に外部磁場 $B(0) = \mu_0 H_{\text{ex}}$ が印加された状況を考える。この時、完全反磁性より超伝導内部 ($x > 0$) には磁場は侵入しないため、式 (A.10) と式 (A.11) が成り立つ。

$$B(0) = \mu_0 H_{\text{ex}} \quad (\text{A.10})$$

$$B(\infty) = 0 \quad (\text{A.11})$$

式 (A.8) と式 (A.9) と式 (A.10) と式 (A.11) を用いて 1 次元的な超伝導面への外部磁場 $B(0) = \mu_0 H_{\text{ex}}$ 侵入の挙動を式 (A.12) で記述出来る.

$$B(x) = \mu_0 H_{\text{ex}} \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right) \quad (\text{A.12})$$

外部磁場 $B(0) = \mu_0 H_{\text{ex}}$ は, 超伝導内部へ距離 λ 侵入した所で, $B_0 = \mu_0 H_{\text{ex}}$ の $1/e$ 倍まで減衰される.

ロンドン方程式により提唱された磁場侵入長 λ は物質固有の値となっているが, 式 (A.12) では電子の平均自由行程に対する不純物の影響を記述出来ない.

A.2 コヒーレンス長

A. B. Pippard は, 1953 年に物質中の超伝導電子が超伝導電子周りの一定範囲でベクトルポテンシャルを感じる模型を構築し, 不純物を含む超伝導体での電磁界現象を記述した [82]. ここで, 超伝導電子を感じるベクトルポテンシャルの超伝導電子周囲の一定範囲をコヒーレンス長 ξ と呼ぶ.

コヒーレンス長 ξ が磁場侵入長 λ より非常に短くなる場合には, 超伝導電子の感じるベクトルポテンシャルが短くなるため, ロンドン方程式が超伝導物質の完全導電性と完全反磁性を記述出来る. コヒーレンス長 ξ が磁場侵入長 λ より短くなる超伝導体を, 第二種超伝導体と呼ぶ. 一方, コヒーレンス長 ξ が磁場侵入長 λ より長くなる物質を第一種超伝導体と呼ぶ.

A.3 第二種超伝導体

超伝導状態となった第二種超伝導体は下部臨界磁場 H_{c1} 以下の印加磁場中で完全反磁性を示し, 上部臨界磁場 H_{c2} 以上の印加磁場で常伝導状態に転移する. H_{c1} 以上 H_{c2} 以下の印加磁場中では, 第二種超伝導体内部では常伝導相と超伝導相が共存し, 混合状態と呼ばれる.

混合状態にある物質中の常伝導相には量子化磁束 Φ_0 が侵入しており, 完全反磁性を示す超伝導相に侵入するには量子化磁束に一定のエネルギーが必要となる. 混合状態を用いて第二種超伝導体内部に捕捉した磁場を捕捉磁場と呼び, 第二種超伝導体は捕捉磁場を利用した磁石として用いられる. 第二種超伝導体内の磁束量子はバルク外部から観察可能であり, 外村らにより世界初に観察された [83].

A.4 超伝導バルクの静磁界解析方法

第二種超伝導体の捕捉磁場に対する静磁界解析には、下記三種の解析方法がある。

1. ギンツブルグラランダウ理論
2. 磁束量子動力学
3. マクスウェル方程式

1950年に V. L. Ginzburg と L. D. Landau が提唱したギンツブルグラランダウ (GL: Ginzburg-Landau) 理論は、常伝導状態から超伝導状態への転移に関わる秩序パラメーター f を用いて、自由エネルギーを定義することで相転移現象を記述する現象論である [84]。また、1995-1996 年に出町が提唱した磁束量子動力学 [69] は、磁束に掛かる力を個々に計算することで、第二種超伝導体中の磁束の運動を記述する理論である。GL 方程式と磁束量子動力学法は、 μm サイズの微視的な磁場解析に用いられる [85]。

一方、1865年に Maxwell, J. C. が提唱したマクスウェル方程式 [86] は、mm サイズ以上の巨視的な磁場解析に用いられる。

マクスウェル方程式を用いた磁場解析では、式 (A.13) のマクスウェル方程式を算出臨界磁場の磁場依存性と温度依存性を仮定して、捕捉磁場を算出する [87][88][89]。

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_{\text{SC}} \quad (\text{A.13})$$

式 (A.13) から有限要素法を用いて算出した計算値は、MgB2 超伝導バルク磁石の捕捉磁場の実験値に概ね一致した [90]。

マクスウェル方程式を用いた静磁界解析

時間変化依存を考慮しないマクスウェル方程式から、ビオ・サバールの法則 (式 (A.17)) が算出される。ビオ・サバールの法則は、1820年に B.Jean-Baptiste と S.Flix によって発見された。 $\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}$ を用いて、式 (A.13) を式 (A.14) に変形する。

$$\mu_0 \mathbf{J}_{\text{SC}} = \text{rot} \text{rot} \mathbf{A} = \text{grad} \text{div} \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (\text{A.14})$$

\mathbf{A} を湧き出しのないベクトル場をとすると、 $\text{div} \mathbf{A} = 0$ が成り立ち、式 (A.14) は式 (A.15) に変形される。

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}_{\text{SC}} \quad (\text{A.15})$$

式 (A.15) の微分方程式はポアソン方程式であり、式 (A.15) の解は式 (A.16) で与えられる。

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \int \int \frac{\mathbf{J}_{\text{SC}}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r' \quad (\text{A.16})$$

$\text{rot} \left(\frac{\mathbf{J}_{\text{SC}}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = \mathbf{J}_{\text{SC}} \times \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$ を用いて、 \mathbf{B} は式 (A.17) で与えられる。

$$\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \int \int d\mathbf{r}' \mathbf{J}(\mathbf{r}')_{\text{SC}} \times \frac{(\mathbf{r}' - \mathbf{r})}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3} \quad (\text{A.17})$$

超伝導バルクは外部磁場の励磁と消磁を経て着磁される。FC法で着磁したバルク中の電流は磁束運動による発熱を無視した際には臨界状態にあり、バルク内部電流密度 J_{SC} は臨界電流密度 J_c に等しい。つまり、下記二点を満たした際には、式 (A.17) を用いた準静的なバルク磁石の磁界解析が可能となる。

1. 着磁時バルク内部の磁束運動により生じる熱が捕捉磁場へ与える影響を無視できる
2. J_c - B 特性での外部印加磁場がバルク内部電流の経験磁場に等しいと仮定する

本研究ではバルクの温度が 20 K の時の捕捉磁場分布を計算しているため、捕捉磁場分布への影響は無視できると考えている。従来研究では、FC法で着磁された MgB_2 バルク内部の磁束運動により生じる熱は温度換算で 0.5 K 程度と非常に少ないためである [91]。

また、従来研究に習い、本研究では J_c - B 特性での外部印加磁場はバルク内部電流の経験磁場に等しいと仮定している。磁場計算では、従来研究に習い要素の経験磁場を式 (A.18) のように定義している。

$$|\mathbf{B}_{\text{exp}}(\mathbf{x})| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2} \quad (\text{A.18})$$

その一方、過去の磁場設計では、 θ 方向以外のベクトルポテンシャル A_θ は 0 となっており、要素の経験したベクトルポテンシャルを θ 方向のベクトルポテンシャル A_θ としている [92]。ここで、磁場 B は $\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}$ としてベクトルポテンシャル \mathbf{A} で表現出来るため、本研究の磁場計算では、バルク内部電流の経験磁場を式 (A.18) で与えており、過去研究の仮定を踏襲している。

磁束量子動力学法

磁束量子動力学法では、式 (A.19) のように位置 r_i にある磁束に掛かる力 $F_{\text{sum}}(\mathbf{r}_i)$ を仮定することで、第二種超伝導体内の磁束の挙動を記述する。

$$\eta_f \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} = \sum_i \mathbf{F}_{\text{sum}}(\mathbf{r}_i) \quad (\text{A.19})$$

式 (A.19) 中の η_f は粘性係数を示す。

A.5 磁束量子動力学法における磁束に加わる力

二次元の磁束量子動力学法では、磁束に加わる力 $F_{\text{sum}}(\mathbf{r}_i)$ は、下記五種存在するとし、式 (A.20) のように5種の力の合力を磁束の加わる力と定義されている。

$$\sum_i \mathbf{F}_{\text{sum}}(\mathbf{r}_i) = \sum_j \mathbf{F}_{\text{P}}(\mathbf{r}_{ij}) + \sum_k \mathbf{F}_{\text{f}}(\mathbf{r}_{ik}) + \mathbf{F}_{\text{M}}(\mathbf{r}_i) + \mathbf{F}_{\text{J}}(\mathbf{r}_i) \quad (\text{A.20})$$

1. 磁束間反発力 $F_{\text{f}}(\mathbf{r}_{ik})$
2. ピンニング力 $F_{\text{P}}(\mathbf{r}_{ij})$
3. ローレンツ力 $F_{\text{J}}(\mathbf{r}_i)$
4. マイスナー効果によって生じるローレンツ力 $F_{\text{M}}(\mathbf{r}_i)$
5. 磁束反射効果によって生じる磁束間力
(境界条件として導入され、磁束反射効果は式に現れない)

A.5.1 単一磁束周りの磁束密度

磁束間で生じる力を算出するために、単一磁束周りの磁場分布をロンドン方程式 (A.6) から算出する。磁束量子 Φ_0 が z 方向に置かれた時、ロンドン方程式は式 (A.21) で示される。

$$\frac{m}{\mu_0 n_s e^2} \nabla \times \nabla \times \mathbf{B} + \mathbf{B} = \Phi_0 \delta_0(\mathbf{r}) \mathbf{z} \quad (\text{A.21})$$

単一磁束は領域に一つしか存在していないため、 $\delta_0(\mathbf{r})$ は式 (A.23) を満足する。ここで領域を S とする。

$$\int_S \delta_0(\mathbf{r}) dS = 1 \quad (\text{A.22})$$

ベクトル公式 $\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = \nabla(\nabla B) - \nabla^2 \mathbf{B}$ に $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ を仮定すると、式 (A.24) が示される。

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{1}{\lambda^2} \mathbf{B} = -\frac{\Phi_0}{\lambda^2} \delta_0(\mathbf{r}) \mathbf{e}_z \quad (\text{A.23})$$

今磁場が磁束量子に並行に侵入しているとし、磁場は z 方向依存性のみを持つ。円柱形座標で磁場 $B = (0, 0, B)$ を仮定して、式 (A.23) は、式 (A.23) の両辺に λ^2 を掛けることで、式 (A.24) に置き換えられる。

$$\lambda^2 \frac{d^2 B}{dr^2} + \lambda^2 \frac{1}{r} \frac{dB}{dr} - B + \Phi_0 \delta_0(r) = 0 \quad (\text{A.24})$$

式 (A.24) の解は第二種の変形ベッセル関数 ($n=0$) [93] を用いて、式 (A.25) で示される。

$$B(r) = CK_0\left(\frac{r}{\lambda}\right) \quad (\text{A.25})$$

ここで C は定数を示す。領域 S で磁束量子 Φ_0 は一つ存在するため、式 (A.26) が成り立つ。

$$\Phi_0 = \int_S B(r) dS = \int_0^\infty 2\pi B(r) r dr = 2\pi C \int_0^\infty K_0\left(\frac{r}{\lambda}\right) r dr \quad (\text{A.26})$$

変数変換 $r' = r/\lambda$ を用いて、式 (A.26) を式 (A.27) に変換した。

$$\Phi_0 = 2\pi\lambda^2 C \int_0^\infty K_0(r') r' dr' \quad (\text{A.27})$$

第二種変形ベッセル関数の微分公式より、式 (A.28) が成り立つ。

$$\Phi_0 = -2\pi\lambda^2 C [r' K_0(r')]_0^\infty \quad (\text{A.28})$$

第二種変形ベッセル関数の公式より r' が非常に大きい時、式 (A.29) が成り立つ。

$$K_1(r') = \left\{ 0.5772166\dots + \ln\left(\frac{r'}{2}\right) \right\} + \frac{1}{2} \left(\frac{r'}{2}\right)^{-1} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(m+1)} \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m} + \frac{1}{2(m+1)} \right\} \left(\frac{r'}{2}\right)^{2m+1} \quad (\text{A.29})$$

r' が 0 の極限を取る時、式 (A.29) より式 (A.30) が成り立つ

$$\lim_{r' \rightarrow 0} (r' K_0(r')) \simeq \lim_{r' \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{2} r' \left(\frac{r'}{2}\right)^{-1} \right\} = 1 \quad (\text{A.30})$$

さらに、第二種変形ベッセル関数の公式より r' が非常に大きい時、式 (A.31) が成り立つ。

$$K_1(r') = \sqrt{\frac{\pi}{2r'}} \exp(-r') \quad (\text{A.31})$$

r' が無限大の極限を取る時、式 (A.32) が成り立つ

$$\lim_{r' \rightarrow \infty} (r' K_0(r')) = 0 \quad (\text{A.32})$$

式 (A.30) と式 (A.32) を式 (A.28) に代入すると、 C は式 (A.33) で示せる。

$$C = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \quad (\text{A.33})$$

式 (A.33) を式 (A.25) へ代入すると、単一磁束周りの磁束密度を式 (A.34) で示される。

$$B(r) = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} K_0\left(\frac{r}{\lambda}\right) \quad (\text{A.34})$$

A.5.2 磁束量子に加わる五種の力

磁束間反発力

磁束間反発力は、磁束間同士の接近によるエネルギーの増加により生じる反発力である。磁束間反発力の発見は、77 年の Gaius Plinius Secundus の「博物誌」によると、Magnes による天然磁石の発見から成されたと言われている [94]。位置 r_i にある磁場 B_i のエネルギー E は式 (A.35) で表される。

$$E = \frac{1}{2\mu_0} B_i(r_i)^2 \quad (\text{A.35})$$

次に、図のように磁場 B_i と磁場 B_k と r_i にある磁束量子 Φ_0 の総エネルギーは式 (A.36) で示される。

$$\begin{aligned} E &= \frac{\Phi_0}{2\mu_0} \{B_i(r_i) + B_i(r_k) + B_k(r_i) + B_k(r_k)\} \\ &= \frac{\Phi_0}{\mu_0} B_i(\mathbf{r}_i) + \frac{\Phi_0}{\mu_0} B_i(\mathbf{r}_k) \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

式 (A.36) より、磁束周辺に単一磁束 $B_{0,i}(\mathbf{r}_k)$ が配置される時のエネルギーは式 (A.37) で示される。

$$E = \frac{\Phi_0}{\mu_0} B_{0,i}(\mathbf{r}_k) \quad (\text{A.37})$$

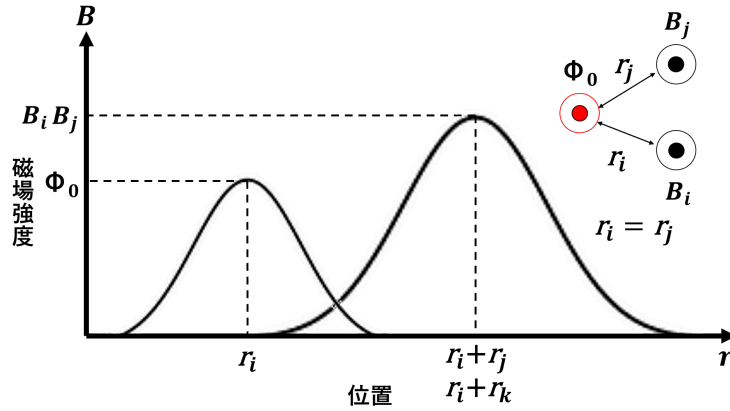


図 A.1: 磁束間反発力の模式図

ここで単一磁束の磁場分布 $B_{0,i}(\mathbf{r}_k)$ は、ロンドン方程式から式 (A.38) で示される.

$$B_i(\mathbf{r}_k) = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} K_0\left(\frac{r}{\lambda}\right) \quad (\text{A.38})$$

式 (A.37) に式 (A.38) を代入すると、位置 r_i にある単一磁束が位置 r_k の磁束に与えるエネルギー E_{ik} は式 (A.40) で示される.

$$E_{ik} = \frac{\Phi_0^2}{2\pi\mu_0\lambda^2} K_0\left(\frac{r_{ik}}{\lambda}\right) \quad (\text{A.39})$$

$$r_{ik} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|$$

磁束間反発力 $\mathbf{F}_f(\mathbf{r}_{ik})$ は、式 (A.40) を gradient を取ることで、式 (A.40) のように示される.

$$\mathbf{F}_f(\mathbf{r}_{ik}) = -\nabla E_{i,k} = \frac{\Phi_0^2}{2\pi\mu_0\lambda^2} K_0\left(\frac{r_{ik}}{\lambda}\right) \frac{\mathbf{r}_{ik}}{r_{ik}} \quad (\text{A.40})$$

ピンニング力

ピンニング力は、第二種超伝導体物質に侵入した磁束が感じるエネルギーの差によって生じる. 超伝導体におけるピンニング力の発見者は定かではないが、1937年にはL. V. Shubnikovにより、第二種超伝導体の下部臨界磁場と上部臨界磁場が発見されており [95], 間接的にはL. V. Shubnikovが混合状態と共にピンニング力を発見したとも推察出来る.

超伝導状態にある物質中に単一磁束が置かれている時の自由エネルギーモード図を図 A.2 に示した [69]. 図 A.2 の内 $\varepsilon_{s1}(r)$ は超伝導状態の物質中を通る磁束量子と超伝導体の総自由エネルギーの径方向依存性である. 超伝

導状態の物質中で磁束未交差領域のエネルギー ε_{s2} は磁束交差領域のエネルギー $\varepsilon_{s1}(r)$ よりも低いため、エネルギー $\varepsilon_{s1}(r)$ は磁束から離れることで、 ε_{s2} に近づく [69]. 図 A.2 中での磁束量子の中心は常伝導領域となっており、 $\varepsilon_{s1} = \varepsilon_n$ となる. 超伝導状態の物質中にある単一磁束の自由エネルギーと ε_{s1} は、GL 理論を用いて式 (A.41) で示される [69].

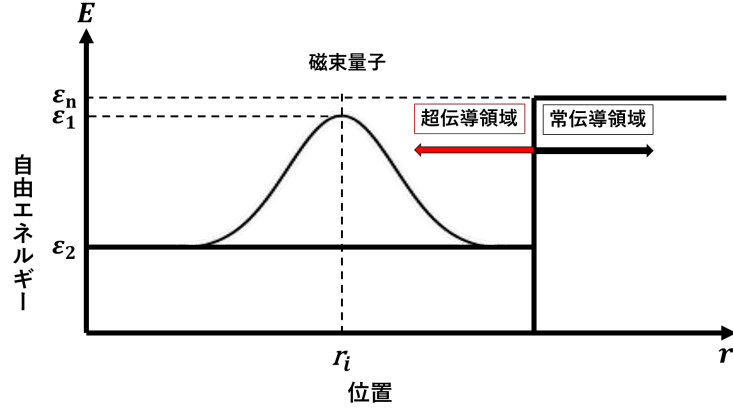


図 A.2: 超伝導領域と常伝導領域での自由エネルギーの模式図

$$\varepsilon_{s1}(r) = \varepsilon_n - \mu_0 H_c^2 \left[\hat{f}^2(r) - \frac{1}{2} \hat{f}^4(r) - \xi^2 \left\{ \left(\frac{d\hat{f}(r)}{dr} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} - \frac{2\pi \hat{A}(r)}{\Phi_0} \right)^2 \hat{f}^2(r) \right\} \right] + \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (\text{A.41})$$

ここで、磁束から離れた位置での秩序パラメーター f と秩序パラメーターの微分値 $\frac{df}{dr}$ とベクトルポテンシャル A は式 (A.43) と式 (A.44) と式 (A.44) のように示される.

$$f = 1 \quad (\text{A.42})$$

$$\frac{df}{dr} = 0 \quad (\text{A.43})$$

$$A = \frac{\Phi_0}{2\pi r} \quad (\text{A.44})$$

式 (A.43) と式 (A.44) と式 (A.44) を式 (A.41) に代入することで、超伝導状態の物質中にある単一磁束の自由エネルギーと ε_{s1} は、GL 理論を用いて式 (A.45) で示される.

$$\varepsilon_{s2}(r) = \varepsilon_n - \mu_0 H_c^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (\text{A.45})$$

磁束が常伝導領域に侵入した状況を図 A.3 に示した. 図 A.3 のように, 磁束が常伝導領域に侵入した状況で得られるエネルギー利得は, 磁束が侵入した領域を占める体積積分を用いて式 (A.46) で示される.

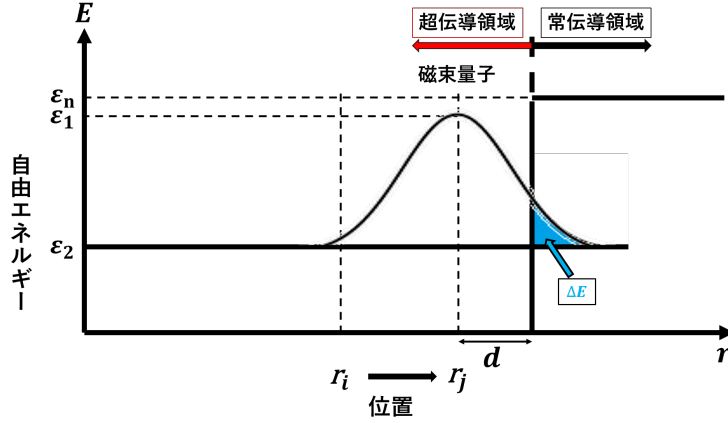


図 A.3: 常伝導領域に侵入した磁束の自由エネルギーの模式図

$$\begin{aligned}
 \Delta E &= \int_S \{ \varepsilon_{s1}(r) - \varepsilon_{s2} \} dS \\
 &= \mu_0 H_c^2 \int_S \left[\frac{(\hat{f}^2(r) - 1)^2}{2} + \xi^2 \left\{ \left(\frac{d\hat{f}(r)}{dr} \right)^2 \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \left(\frac{1}{r} - \frac{2\pi\hat{A}(r)}{\Phi_0} \right)^2 \hat{f}^2(r) \right\} \right] dS \quad (A.46)
 \end{aligned}$$

常伝導領域へ磁束が侵入した状況で, 磁束線と逆平行の向きから磁束侵入の様子を俯瞰した図を図 A.4 に示した. 図 A.4 で生じるピンニング力 $F_p(d)$ を式 (A.47) に示した.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_p(d) &= \frac{\partial \Delta E}{\partial d} \mathbf{n} = \frac{\partial}{\partial d} \left\{ \int_S \{ \varepsilon_{s1}(r) - \varepsilon_{s2} \} dS \right\} \mathbf{n} \\
 &= \left\{ \int_{\partial S} \{ \varepsilon_{s1}(\sqrt{d^2 + l^2}) - \varepsilon_{s2} \} dl \right\} \mathbf{n} \\
 &= \mu_0 H_c^2 \int_{-\infty}^{\infty} dl \left[\frac{(\hat{f}^2(r) - 1)^2}{2} \right. \\
 &\quad \left. + \xi^2 \left\{ \left(\frac{d\hat{f}(r)}{dr} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} - \frac{2\pi\hat{A}(r)}{\Phi_0} \right)^2 \hat{f}^2(r) \right\} \right] \quad (A.47)
 \end{aligned}$$

$\hat{f}(r)$ は常に 0 以上の値を取るため, $\mathbf{F}_p(d)$ は常 0 以上となる. つまり, ピンニング力は \mathbf{n} と同方向の常伝導領域側に生じる.

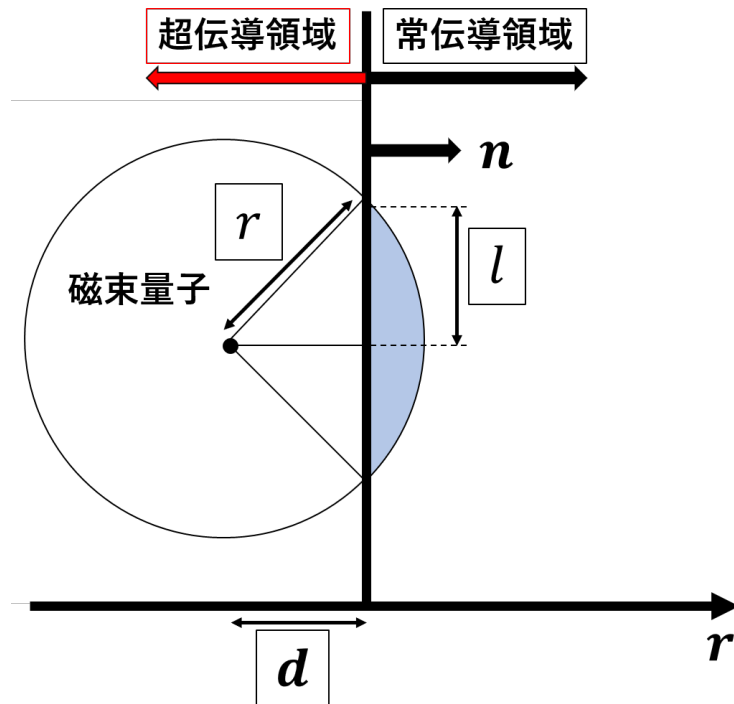


図 A.4: 常伝導領域への磁束の侵入面積

ローレンツ力

ローレンツ力は、荷電粒子が電磁場を受けることで生じる。1895年に Hendrik Lorentz から提唱されたローレンツ力 [96] は、荷電粒子が電場から受ける力 (クーロン力) と磁場から受ける力 (アンペール力) の二種に分離される。クーロン力は 1773 年に Henry Cavendish [97] から実験的に発見され、1784 年に Charles-Augustin de Coulomb により法則化 [98] された。また、アンペール力は 1820 年に Andre-Marie Ampere により発見された [99]。

図 A.6 のようにバルク内部の電流密度 $J = (J_x, J_y, J_z)$ が二次元平面上に分布し、磁場分布 $B_J = (0, 0, B_z)$ が z 方向にのみ依存性を保つと仮定する。磁束量子 Φ_0 と磁場分布 B_J は同じ方向を向いているため、磁束間反発力と同様の形式で、ローレンツ力によるエネルギー E_J を式 (A.48) の形で算出出来る。

$$E_J = \frac{\Phi_0 B_J}{\mu_0} \quad (\text{A.48})$$

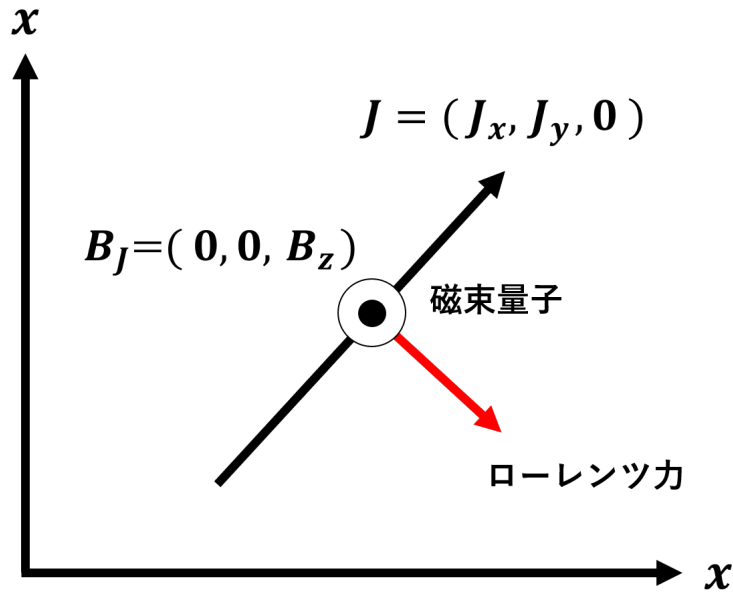


図 A.5: 磁束量子に加わるローレンツ力

式 (A.48) の gradient を取ることで、ローレンツ力は式 (A.49) で示される。

$$F_J = -\nabla E_J = -\left(\frac{\Phi_0}{\mu_0} \frac{\partial B_J}{\partial x} \quad \frac{\Phi_0}{\mu_0} \frac{\partial B_J}{\partial y} \quad \frac{\Phi_0}{\mu_0} \frac{\partial B_J}{\partial z} \right) \quad (\text{A.49})$$

マクスウェル方程式より、式 (A.50) が成り立つ。

$$J = (J_x, J_y, 0) = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B}_J = \left(\frac{\Phi_0}{\mu_0} \frac{\partial B_{Jz}}{\partial y} \quad -\frac{\Phi_0}{\mu_0} \frac{\partial B_{Jz}}{\partial x} \quad 0 \right) \quad (\text{A.50})$$

式 (A.50) を式 (A.49) に代入すると、ローレンツ力は式 (A.51) で示される。

$$F_J = \Phi_0 \begin{pmatrix} J_y & -J_x & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{J} \times \Phi_0 \quad (\text{A.51})$$

マイスナー効果によるローレンツ力

マイスナー効果は、第一種超伝導物質へ物質固有の臨界磁場以下の磁場を印加した、もしくは第二種超伝導物質へ物質固有の下部臨界磁場以下の磁場を印加した時に、物質の完全反磁性が保たれるように、超伝導電流が物質端部に流れる現象である。マイスナー効果は、1933年に Meissner, W. と R. Ochsenfeld の研究から発見された [2]。

第二種超伝導体バルクでは、マイスナー効果により外部印加磁場 B_{ez} がバルク内部に侵入する。マイスナー効果によるバルク内部への侵入磁場は

式 (A.52) で示される.

$$\mathbf{B}_M(\mathbf{r}_i) = B_{ez} \exp\left(-\frac{d_i^M}{\lambda}\right) \mathbf{e}_z \quad (\text{A.52})$$

バルク内部に侵入した外部印加磁場の模式図を図 A.6 に示した. 磁束

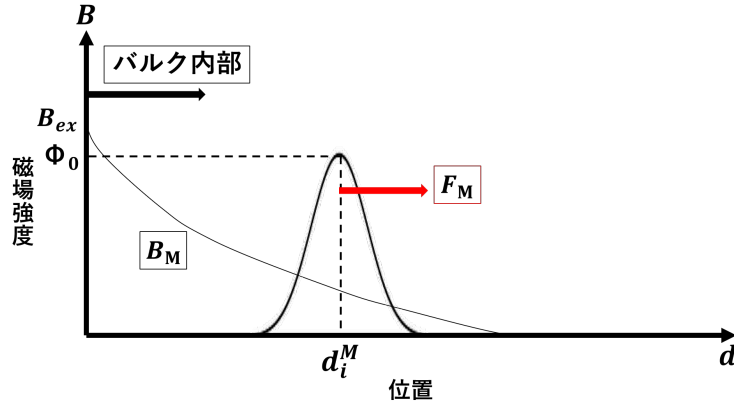


図 A.6: マイスナー効果によるローレンツ力

間反発力と同様に, マイスナー効果によるバルク端部の磁場エネルギー $E_{M,i}$ は, 式 (A.53) で示される.

$$\begin{aligned} E_{M,i} &= \frac{1}{\mu_0} \Phi_0 \cdot \mathbf{B}_M \\ &= \frac{\Phi_0 B_{ez}}{\mu_0 \lambda} \exp\left(\frac{d_i^M}{\lambda}\right) \mathbf{n} \end{aligned} \quad (\text{A.53})$$

式 (A.53) の gradient を取ることで, マイスナー効果により生じるローレンツ力は式 (A.54) で示される.

$$\mathbf{F}_M(\mathbf{r}_i) = -\nabla E_{M,i} = -\frac{\Phi_0 B_{ez}}{\mu_0 \lambda} \exp\left(\frac{d_i^M}{\lambda}\right) \mathbf{n} \quad (\text{A.54})$$

磁束反射効果

磁束反射効果は, バルク端部の磁束がバルク端部に引き付けられることで, バルク端部の電流が増加する効果である. 磁束反射効果は, 1995 年に出町らから提唱され, 磁束量子動力学法による計算では, バルク端部の境界条件として導入された [69].

磁束反射効果の模式図を図 A.7 に再掲した. バルク端部に接近した磁束は, バルク端部に接することで通電領域を遮られる. 通電領域を遮られた

磁束周囲の超伝導電流は増加し、FC法で着磁されたバルク内部では、よりバルク端部の磁束がバルクから脱離しないように作用する [100]。磁束反射効果の影響は、バルク端部磁束に対して、着磁磁束と平行なバルク端側面に関する鏡像の磁束をバルク外部に置くことで考慮される。磁束反

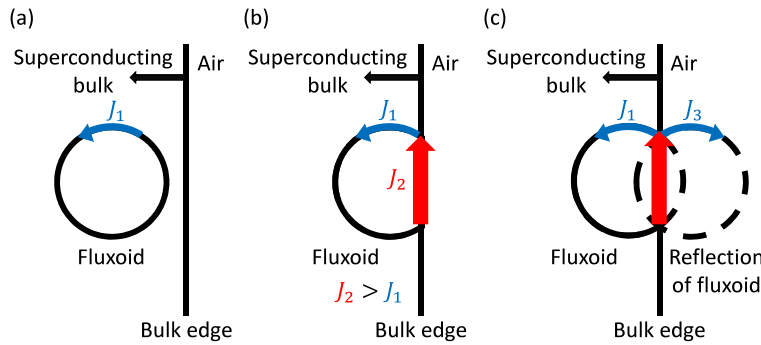


図 A.7: 磁束反射効果の模式図 (a) 磁束がバルク端から離れている場合 (b) 磁束がバルク端部に接している場合 (c) 磁束がバルク端部に接している時の計算モデル

射効果の模式図を磁束方向へ対して垂直な方向からの断面図として図 A.8 に示した。

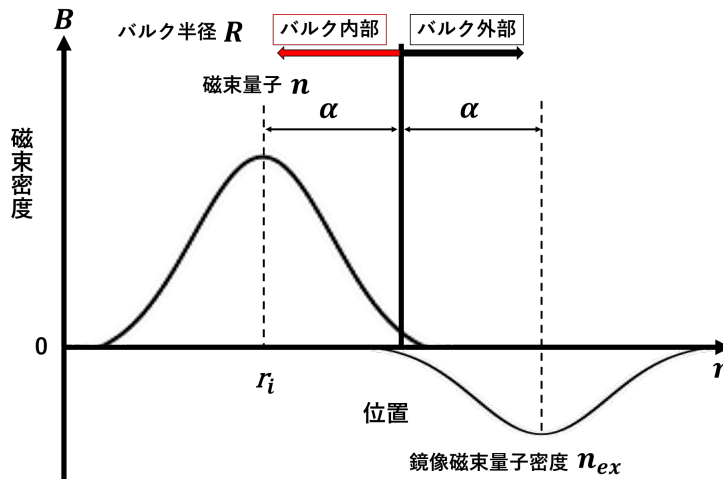


図 A.8: 磁束反射効果の断面模式図

バルク端部近傍領域 $2\delta r$ の範囲に存在する、磁束数 $n(r_i)$ の磁束量子エネルギー $E_{i,Y}$ は、磁束間反発力と同様に、磁束数 $n_{ex}(r_i)$ の鏡像磁束量子

によって式 (A.55) で示される。ここで、 R はバルクの半径を示す。

$$E_{i,Y} = -\frac{\Phi_0^2}{\mu_0 \lambda^2} \int_{r_i-\delta r}^{r_i+\delta r} r_i n(r_i) n_{\text{ex}}(r_i) K_0 \left(\frac{R + \alpha - r_i}{\lambda} \right) dr_i \quad (\text{A.55})$$

式 (A.55) より、バルク端部に近い磁束量子程、 $E_{i,Y}$ が減少していくことから、バルク端部近傍の磁束量子はバルク端部に接近する。また、バルク端近傍の外部磁束も、同様にバルク端部に引き付けられるため、磁束反射効果によりバルク端部近傍の磁束量子は内外問わずバルク端部に引き付けられる。

本研究では、式 (A.55) を用いた磁束反射効果によりバルク内部の磁束量子のエネルギー利得を見積った。磁束反射効果によるエネルギー利得の見積もりを節 A.5.2 に示した。

静磁界解析と磁束量子動力学法の差

マクスウェル方程式の静磁界解析では式 (A.13) が用いられ、 \mathbf{A} に対する式 (A.13) の汎関数は式 (A.56) で示される。

$$F[\mathbf{A}] = \int \left[\frac{1}{2\mu} (\nabla \times \mathbf{A})^2 - \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} \right] dV \quad (\text{A.56})$$

式 (A.56) が汎関数であると確認する。第一変分 δF は、式 (A.57) で示される。

$$\begin{aligned} \delta F &= F[\mathbf{A} + \delta \mathbf{A}] - F[\mathbf{A}] \\ &= \int \left[\frac{1}{2\mu} \nabla \times (\mathbf{A} + \delta \mathbf{A}) \cdot \nabla \times (\mathbf{A} + \delta \mathbf{A}) - \mathbf{J} \cdot (\mathbf{A} + \delta \mathbf{A}) \right] dV \\ &\quad - \int \left[\frac{1}{2\mu} (\nabla \times \mathbf{A})^2 - \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} \right] dV \\ &= \int \left[\frac{1}{2\mu} \{ (\nabla \times \mathbf{A})^2 + 2(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot (\nabla \times \delta \mathbf{A}) + (\nabla \times \delta \mathbf{A})^2 \} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2\mu} \mathbf{J} \cdot (\mathbf{A} + \delta \mathbf{A}) \right] dV \\ &\quad - \int \left[\frac{1}{2\mu} (\nabla \times \mathbf{A})^2 - \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} \right] dV \end{aligned} \quad (\text{A.57})$$

式 (A.57) の内 $(\delta \mathbf{A})^2$ を含んだ項を無視すると、式 (A.57) は式 (A.58) となる。

$$\delta F = \int \left[\frac{1}{\mu} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot (\nabla \times \delta \mathbf{A}) - (\delta \mathbf{A} \cdot \mathbf{J}) \right] dV \quad (\text{A.58})$$

ベクトル公式より, $\nabla \cdot (V \times W) = W \cdot (\nabla \times V) - V \cdot (\nabla \times W)$ から式 (A.59) が導かれる.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left(\frac{1}{\mu} (\nabla \times \mathbf{A}) \times \delta \mathbf{A} \right) &= \delta \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \frac{1}{\mu} (\nabla \times \mathbf{A})) \\ &\quad - \frac{1}{\mu} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot (\nabla \times \delta \mathbf{A}) \end{aligned} \quad (\text{A.59})$$

式 (A.59) を変形すると, 式 (A.60) が示される.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot (\nabla \times \delta \mathbf{A}) &= -\nabla \cdot \left(\frac{1}{\mu} (\nabla \times \mathbf{A}) \times \delta \mathbf{A} \right) \\ &\quad + \delta \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \frac{1}{\mu} (\nabla \times \mathbf{A})) \end{aligned} \quad (\text{A.60})$$

式 (A.60) を用いると, 式 (A.58) は式 (A.61) に変形される.

$$\begin{aligned} \delta F &= \int \left[-\nabla \cdot \left(\frac{1}{\mu} (\nabla \times \mathbf{A}) \times \delta \mathbf{A} \right) \right. \\ &\quad \left. + \delta \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \frac{1}{\mu} (\nabla \times \mathbf{A})) - (\delta \mathbf{A} \cdot \mathbf{J}) \right] dV \end{aligned} \quad (\text{A.61})$$

式 (A.61) の第 1 項にガウス発散定理を用いると, 式 (A.61) は式 (A.62) に変形される.

$$\begin{aligned} \delta F &= - \int \frac{1}{\mu} (\nabla \times \mathbf{A}) \times \delta \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS \\ &\quad + \int \left[\nabla \times \frac{1}{\mu} (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{J} \right] \cdot \delta \mathbf{A} dV \end{aligned} \quad (\text{A.62})$$

式 (A.62) の第一項はノイマン条件から, 常に 0 となる. 任意の $\delta \mathbf{A}$ に対して $\delta F = 0$ となるには, $\delta \mathbf{A} = 0$ 以外の解では式 (A.63) が要求される.

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{J} = 0 \quad (\text{A.63})$$

式 (A.63) は式 (A.13) と同値である. もし仮に $J = 0$ の場合, 式 (A.63) の汎関数の被積分関数は式 (A.64) のように電流分布に依存しない関数となる.

$$F[\mathbf{A}] = \int \left[\frac{1}{2\mu} (\nabla \times \mathbf{A})^2 \right] dV \quad (\text{A.64})$$

この時の被積分関数は, バルク内部に捕捉された単一磁束同士の位置情報を粗視化した時の磁束間反発力のエネルギーを示している. また, 式 (A.56) の被積分関数第二項では, 電流密度とベクトルポテンシャルの積でローレンツ力が示されている.

つまり、マクスウェル方程式を用いた従来計算では、磁束量子動力学法での磁束間反発力とローレンツ力が、 J_c - B 特性の拘束条件の元計算されている。

J_c - B 特性は、ローレンツ力とピンニング力の釣り合いを前提として成立しているため、磁束量子動力学法とマクスウェル方程式を用いた従来計算の間で考慮されている力には、表 A.1 で示したような差があると考えられる。(ただし、マイスナー効果を除く)

表 A.1: 磁束量子動力学法とマクスウェル方程式を用いた従来計算で考慮されている力の差

手法	考慮されている力
磁束量子動力学法	ローレンツ力, ピンニング力, 磁束間反発力, 磁束反射効果
従来計算	ローレンツ力, ピンニング力, 磁束間反発力

バルク端部での磁束反射効果の見積もり

本研究では、バルク端部磁束反射効果を考慮することで生じるバルク端部での磁束反射効果の最大エネルギー量を概算し、磁束反射効果からの電流密度値への影響を仮定した。

FC 法で着磁された磁束は、ローレンツ力と磁束間反発力と磁束反射効果の三種の力を受ける。三種の力の内、ローレンツ力と磁束間反発力はバルク内部から磁束を脱離させる方向に生じ、磁束反射効果による生じた力はバルク端部から磁束が脱離しない方向に生じる。

もし磁束間反発力とローレンツ力を受けた磁束から、ローレンツ力を除いた場合、磁束反射効果のエネルギー量は最大化される。磁束間反発力とバルク外部に密度 n_{ex} で分布した鏡像磁束量子エネルギーは、式 (A.65) で示され、解析的に磁束反射効果のエネルギー量が概算出来る。式 (A.65) の導出に、積分範囲 $2\delta r$ で $n(r_i)$ が変動しない仮定を用い、第二種ベッセル関数 K_n とシュトルーベ関数 L_n [101] の積分公式を使用した。

$$\frac{E_{i,Y}}{\frac{B^2}{2\mu_0}} = \frac{2\Phi^2 n_{\text{ex}} n}{\lambda^2 B^2} \times [G_i]_{r+\delta r}^{r+\delta r} \quad (\text{A.65})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} [G_i]_{r-\delta r}^{r+\delta r} = \left[\frac{\pi r_i \{r_i - (R + \alpha)\}}{2} P_i \right]_{r-\delta r}^{r+\delta r} \\ P_i = L_{-1} \left\{ \frac{(R + \alpha) - r_i}{\lambda} \right\} K_0 \left\{ \frac{(R + \alpha) - r_i}{\lambda} \right\} \\ \quad + L_0 \left\{ \frac{(R + \alpha) - r_i}{\lambda} \right\} K_1 \left\{ \frac{(R + \alpha) - r_i}{\lambda} \right\} \\ \quad - \lambda \{(R + \alpha) - r_i\} K_1 \left\{ \frac{(R + \alpha) - r_i}{\lambda} \right\} \end{array} \right.$$

図 A.9 のように、バルク端部の磁場値が 1.0 T となる超伝導バルク (径 30mm ϕ) を仮定する. この時、バルク端部の磁束反射効果と磁束間反発力のエネルギー比は式 (A.66) のように示される. ここで、バルク端部にて $n_{\text{ex}} = n$ が成立し、 λ の値を 0.14 μm ($T = 20$ K) とする [102].

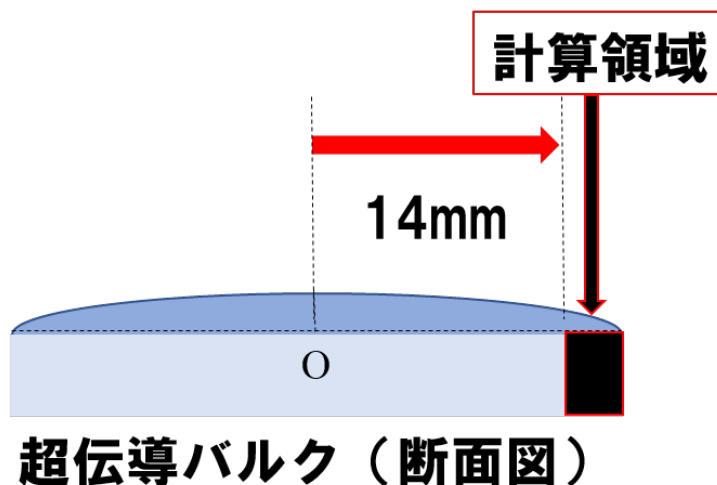


図 A.9: 磁束反射効果のエネルギーを考慮したバルク端部領域の模式図

$$\frac{E_Y}{\frac{B^2}{2\mu_0}} = \frac{2\Phi_0^2 n_{\text{ex}} n}{\lambda^2 B^2} [G_i]_{14.000 \text{ mm}}^{14.999 \text{ mm}} = 62 \quad (\text{A.66})$$

式 (A.66) の結果から、本研究では暫定的に磁束反射効果を導入するため、バルク端部の電流密度値を Y 倍 ($Y=1, 10, 20$) とすることで磁束反射効果を仮定した.

謝辞

本研究は、スーパー連携大学院コンソーシアムの制度の中で、博士後期課程を公益財団法人鉄道総合技術研究所において実施した研究の成果をまとめたものです。

研究指導と研究の場を提供して下さった鉄道総合技術研究所材料技術研究部超電導応用研究室富田優室長（研究開発推進部担当部長）、石原篤博士、赤坂友幸様、恩地太紀様、鈴木賢次様、福本祐介博士、小林祐介様、主査としても主任指導教員として多くのご助言と研究者としての姿勢を教えて下さった電気通信大学情報理工学研究科基盤理工学専攻伏屋准教授に心からお礼申し上げます。また、学部、博士前期課程にて、エレクトロニクスと微視的な超伝導理論を与えて下さった島田宏教授、黒木和彦教授にもご指導頂けたことは、会社に勤めている現在の私にとって貴重な財産となりました。心より感謝申し上げます。本論文を提出するにあたり、島田宏教授、斉藤弘樹教授、佐々木成朗教授、村中隆弘准教授の4名の先生に副査をお願いさせて頂きました。心より御礼申し上げます。

また、このたびの研究においては、電気通信大学の本多武様と鉄道総合技術研究所の垂水前理事長、熊谷理事長から格別の御配慮を頂き、心より感謝いたします。

在学中にはスーパー連携コンソーシアムにて、田野俊一教授、宇梶純良様、産形峰久様、磯野紳一様など様々な方々からご支援を頂きました。

また、単位取得済退学者の私が、博士論文に書き上げるには、富士電機株式会社の職場の皆様のご協力や電気通信大学教務課の水井様や磯谷様や電気通信大学伏屋研究室の大和田光明様のご支援が必要不可欠でした。誠にありがとうございます。

お亡くなりになった北海道大学工学部電気電子工学科榎本昌則教授は、最後まで巨視的な静磁界汎関数やビーン模型を使って計算を進めてよいか悩んでいた私に、貴重なご助言をお与え下さいました。謹んでご冥福をお祈り申し上げます。

最後に、学生時代常に私と共に居て下さった、父土屋憲一郎と母土屋敏子に御礼申し上げます。

参考文献

- [1] Kamerlingh Onnes, H., "The Superconductivity of Mercury." *Comm. Phys. Lab. Univ. Leiden*; Nos. **122** and **124**, 1911.
- [2] W. Meissner, R. Ochsenfeld *Naturwissenschaften* November 1933, Volume **21**, Issue 44, pp 787-788
- [3] J. Bardeen, L. Cooper and J. R. Schrieffer, "Theory of superconductivity," *Phys. Rev.* **108** (1957) 1175.
- [4] W. L. McMillan, *Physical Review* **167** p331 (1968)
- [5] B.T. Matthias, T. Gaballe, S. Geller, E. Corenzwit, "Superconductivity of Nb₃Sn" *Phys. Rev.* **95** 6 (1954) 1435-1435
- [6] J.E. Kunzler: "Superconductivity in high magnetic fields at high current densities" *Rev. Mod. Phys.* **33** (1961) 501-509
- [7] Bednorz, J.G. Müller and K.A. Z. *Physik B - Condensed Matter* (1986) **64**: 189.
- [8] Wu, M. K. and Ashburn, J. R. and Torng, C. J. and Hor, P. H. and Meng, R. L. and Gao, L. and Huang, Z. J. and Wang, Y. Q. and Chu, C. W., *Phys. Rev. Lett.* **58** (1987) 908-910
- [9] H. Maeda, Y. Tanaka, M. Fukutomi, T. Asano *Japan Society of Applied Physics* **27** Part 2, Number 2, February 1988
- [10] Z. Z. Sheng, A. M. Hermann *Nature* 332, p138139 (1988)
- [11] A. Schilling, M. Cantoni, J. D. Guo and H. R. Ott *Nature* **363**, p5658 (1993)
- [12] J. Nagamatsu, N. Nakagawa, T. Muranaka, Y. Zenitani, J. Akimitsu *Nature* **410**, 63-64 (2001)
- [13] Y. Kamihara, H. Hiramatsu, M. Hirano, R. Kawamura, H. Yanagi, T. Kamiya and H. Hosono *J. Am. Chem. Soc.* **128**, 31, 10012-10013 (2006)

- [14] Y. Kamihara, T. Watanabe, M. Hirano and H. Hosono J. Am. Chem. Soc., **130** (11), pp 32963297 (2008)
- [15] A. P. Drozdov, M. I. Erements, I. A. Troyan, V. Ksenofontov and S. I. Shylin Nature **525**, p7376 (2015)
- [16] Maddury Somayazulu, Muhtar Ahart, Ajay K. Mishra, Zachary M. Geballe, Maria Baldini, Yue Meng, Viktor V. Struzhkin, and Russell J. Hemley Phys. Rev. Lett. **122**, 027001 (2019)
- [17] S. Kitagawa and S. Kittaka "Records of the superconducting transition temperature T_c " <https://sakaki.issp.u-tokyo.ac.jp/user/kittaka/contents/others/tc-history.html> (2019年2月21日)
- [18] K. Asano Journal of Plasma and Fusion Research, **81**, Issue 7, p526-533 (2005)
- [19] V. Ganesan et al., Bull. Mater. Sci., Vol. **17**, No. 1, pp. 87-93. (1994)
- [20] M. Minoru et al., J. Cryo. Super. Soc. Jpn. Vol. **46** No.11 (2011)
- [21] H. Ueda et al., J. Cryo. Super. Soc. Jpn. Vol. **48** No.9 (2013)
- [22] H. Ueda et al. IEEJ Trans. PE, **124** No.10 (2014)
- [23] Paul C. Lauterbur Nobel Lecture Bioscience Reports, **24** No.3 (2004)
- [24] N. Kondo, K. Yokoyama and S. HOSAKA J. Cryo. Super. Soc. Jpn. Vol. **46** No.11 (2011)
- [25] I. Aoki J. IEIE Jpn Vol. **34** No.4 p233-238 (2014)
- [26] 岡徹雄 2015 国立研究開発法人科学技術振興機構 新潟大学新技術説明会
- [27] 西村博 計測と技術 Vol. **30**, No9 p818-827
- [28] S. Yokoyama et al., J. Cryo. Super. Soc. Jpn. Vol. **52** No.4 (2017)
- [29] みずほ情報総研株式会社 製造産業局化学課「平成 26 年度製造基盤技術実態等調査（ヘリウムの世界需給に関する調査）」経済産業省平成 26 年度委託調査報告書

- [30] 高木淳 愛知工業大学研究報告 第**37**号 A p39-46 (2002)
- [31] 赤井久純「磁石の秘密」 日本物理学会 (2016)
- [32] Y. Yang et al. Sustain. Metall. **3**:p122149 (2017)
- [33] 宝野和博 まてりあ 第**54**卷 第7号 (2015)
- [34] 宝野和博 J. Japan Inst. Metals, Vol.**76** No.1 p2-11 (2012)
- [35] Y Makida et al. 2015 IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. **101** 012028
- [36] Carlos R.Villa 2018 FAST Annual Conference Florida's Tesla Tales
- [37] D. Nakamura et al. Review of Scientific Instruments **89**, 095106 (2018)
- [38] K. Tachikawa et al. J.Cryo. Super. Soc. Jpn. Vol.**50** No.4 (2015)
- [39] H. Kim et al. IEEE Transactions on Applied Superconductivity **25** 1-4 (2015)
- [40] 塩原融他 日本金属学会誌 **80**, 406 (2016)
- [41] S. Miyata 玉川大学工学部紀要 第**53**号 (2018)
- [42] Y. Makida et al. J.Cryo. Super. Soc. Jpn. Vol.**50** No.12 (2015)
- [43] M. Tomita and M. Murakami Nature **421** 517-520 (2003)
- [44] T. Nakamura J.Cryo. Super. Soc. Jpn. Vol.**52** No.1 (2017)
- [45] M.Morita, H.Teshima, H.Hirano 「Development of Oxide Superconductors High-Tc Bulk Superconductor (QMG) and Its Magnetic Applications」 新日鉄技報第 383 号 (2005)
- [46] Y. Yamada et al. J. Japan Inst. Metals Vol.**74** No 7 (2010)
- [47] D. Uchiyama J. Cryo Soc. Jpn. Vol.**40** No 11 (2005)
- [48] A. Yamamoto J. Cryo Soc. Jpn. Vol.**43** No 8 (2008)
- [49] 児玉一宗「微細組織制御に基づく MgB₂ 超伝導線材の高臨界電流密度化の研究」東京大学 博士論文
- [50] C. Buzea and T, Yamashita, Supercond. Sci. Technol. **14**, R115 (2001).

- [51] Tsuda S, Yokoya T, Takano Y, Kito H, Matsushita A, Yin F, Itoh J, Harima H, and Shin S Phys. Rev. Lett. **86** 127001 (2003)
- [52] Brinkman A, Colubov A A, Rogalla H, Dolgov O V, Kortus J, Kong Y, Jepsen O, and Anderson O K Phys. Rev. B **65** 180517 (2002)
- [53] Eltsev Y, Lee S, Nakano K, Chikumoto N, Tajima S, Koshizuka N, and Murakami M Phys. Rev. B **65** 140501 (2002)
- [54] Lyard L, Samuely P, Szabo P, Klein T, Marcenat C, Paulius L, Kim K H P, Jung C U, Lee H-S, Kang B, Choi S, Lee S-I, Marcus J, Blanchard S, Jansen A G M, Welp U, Karapetrov G, and Kwok W K Phys. Rev. B **66** 180502 (2002)
- [55] David Larbalestier, Alex Gurevich, D. Matthew Feldmann and Anatoly Polyanskii, Nature Volume **414**, pages368377 (2001)
- [56] M. Jung et al. Chemical Physics Letters **343** (5-6) p447-451 (2001)
- [57] H. Fujii, K. Togano and H. Kumakura: Supercond. Sci. Technol., **15**, 1571 (2002)
- [58] A. I. Larkin and Yu. N. Ovchinnikov, Journal of Low Temperature Physics Volume **34** Issue 34 (1979)
- [59] T. Kenichi et al., J. Phys. Soc. Jpn. **62**, pp. 1006-1016 (1993)
- [60] W. Pauli Zeitschrift fr Physik **31**, 1,pp765-783 (1925)
- [61] T. Oka J.Cryo. Super. Soc. Jpn. Vol.**52** No.1 (2017)
- [62] T. Nakamura et al., J.Cryo. Super. Soc. Jpn. Vol.**46** No.3 (2011)
- [63] 近藤訓代「超伝導磁石を用いた磁気分離による 水質浄化に関する研究」群馬大学博士論文 (2010)
- [64] 平松健太「有限要素法による MgB2 超伝導バルク磁石の電磁気解析」九州工業大学
- [65] T. Watanabe 「多様な形状のコイルに対する磁場計算法」National Institute for Fusion Science (1990)
- [66] 大浦拓哉 日本応用数学会論文誌, p225-230 (2003).

- [67] H. Takahasi et al. "Double exponential formulas for numerical integration" Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences (京都大学) **9** (3) p721741. (1974)
- [68] O. Takuya and M. Masatake, Journal of Computational and Applied Mathematics **112** Issues 12 (1999)
- [69] M. Kenzo, D. Kazuyuki, T. Kentaro, COMPEL - The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering **17** 541-566 (1998)
- [70] 加藤与五郎, 武井 武, 電気学会誌, **53**, pp.408 (1933)
- [71] 伊藤佳孝「Y-Ba-Cu-O 超電導バルク磁石のパルス着磁に関する基礎的研究とモータへの応用」名古屋大学 博士論文
- [72] 松下照男「磁束ピンニングと電磁現象—超伝導工学の基礎」産業図書 (1994)
- [73] C.P. Bean, Phys. Rev. Lett. **8** 250253 (1962)
- [74] 大橋忠巖, 荻原宏康 湘南工科大学紀要 第**33**巻 第1号
- [75] E.M.Gyorgy et al. Appl. Phys. Lett. **55** 283 (1989)
- [76] L. Fox et al. "Chebyshev Polynomials in Numerical Analysis." Oxford Univ. Press, London-New York-Toronto, (1968)
- [77] 布広永示他 東京情報大学研究論集 Vol.8 No.1, pp.29-33 (2004)
- [78] T. Sasaki, T. Naito and H. Fujishiro, Physics Procedia **45**, 93 (2013)
- [79] 山本明保, 東大 博士論文 (2008)
- [80] F. London, H. London, Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences, Volume **149**, Issue 866, pp. 71-88 (1935)
- [81] R. Becker, G. Heller and F. Sauter, Z. Phys. **85**, 772 (1933).
- [82] A. B. Pippard, Proc.Roy. Soc. A **246**, 547(1953).
- [83] A. Tonomura, H. Kasai, O. Kamimura, T. Matsuda, K. Harada, J. Shimoyama, K. Kishio, and K. Kitazawa, "Motion of Vortices in Superconductors." Nature, vol.**397**, pp. 308-309.28 January (1999)

- [84] V.L. Ginzburg and L.D. Landau, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **20**, 1064 (1950). English translation in: L. D. Landau, Collected papers (Oxford: Pergamon Press, 1965) p. 546
- [85] 西 慧「時間に依存するギンツブルクランダウ方程式を用いた超伝導現象の解析」 北海道大学 修士論文
- [86] Maxwell, J. C. Phil. Trans. R. Soc. Lond. **155**: 459-512. (1865).
- [87] Yi Deri J. ADV. SIMULAT. SCI. ENG. Vol.**2**, No.1, p34-43 (2015)
- [88] M.Tsuchimoto J. Cryo. Super. Soc. Jpn. Vol.**47** 10 (2012)
- [89] M.Tsuchimoto Cryogenics Vol.**37**, Issue 1, Pages 43-47 (1997)
- [90] Mark D Ainslie et al. Supercond. Sci. Technol. **30** 105009 (2017)
- [91] Fujishiro, Superconductor Science and Technology **27** 065019 (2014)
- [92] 藤山 敬太「バルク超電導体のパルス着磁の捕捉磁場特性」 東京大学 修士論文
- [93] Abramowitz, M. et al. "Modified Bessel Functions I and K." §9.6 in *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, 9th printing*. New York: Dover, pp. 374-377, (1972)
- [94] Plinius Secundus, Gaius. Historia mundi. Basel: Johann Froben, Folio. (1525)
- [95] L.V. Shubnikov, V.I. Khotkevich, YU.D. Shepelev and YU.N. Ryabinin Translated and reprinted from Zh. Eksper. Teor. Fiz. **7**, pp. 221237 (1937)
- [96] Hendrik Antoon Lorentz, "Try a theory of the electrical and optical phenomena in moving bodies" EJ Brill (1895)
- [97] H. Cavendish, Philosophical Transactions of the Royal Society **74** 119-153 (1784)
- [98] Coulomb, Histoire de l'Academie Royale des Sciences, pages 229-269 (1784)
- [99] Andre-Marie Ampere, "Correspondance et souvenirs de 1805 a 1864" Paris: J. Hetzel. Volume **1** (1875)

- [100] G. J. Kimmel, A. Glatz, V. M. Vinokur, I. A. Sadovskyy, Sci Rep. **9** 211 (2019)
- [101] Struve, H. (1882). "Beitrag zur Theorie der Diffraction an Fernrhren" Annalen der Physik und Chemie. **17**(13): 10081016.
- [102] F. Manzano, A. Carrington, N. E. Hussey, S. Lee, A. Yamamoto and S. Tajima, Phys. Rev. Lett. **88**, 047002 (2002)

関連論文の印刷公表の方法及び時期

全著者名 Hiroaki Tsuchiya and Masaru Tomita

論文題目 "Analysis of the magnetic field in superconducting bulk magnets by the fluxoid dynamics method", Physica C: Superconductivity and its Applications **562**, 15 July 2019, Pages 90-95

著者略歴

氏名

土屋 寛明

学歴

平成 24 年 3 月 31 日 電気通信大学電気通信学部卒業
平成 24 年 4 月 1 日 電気通信大学大学院情報理工学研究科 博士前期課程入学
平成 26 年 3 月 31 日 同上修了
平成 26 年 4 月 1 日 電気通信大学大学院情報理工学研究科 博士課程後期入学
平成 29 年 3 月 31 日 同上単位修得のうえ退学

職歴

平成 29 年 4 月 1 日 富士電機株式会社 入社
令和元年 6 月 28 日 電気通信大学大学院情報理工学研究科 博士後期課程卒業