

減振器位置對於雙層振動平板減振效能之研究

王怡仁¹，陳書緯¹
淡江大學航太系¹

摘要

本文考慮的主體為三維剛體平板的振動系統，其類似的架構可模擬一般機械或電子設備運作時，所面臨的垂直振動及共面振動的問題。本文將提出一提高減振效能的方法，其重點在於不改變振動系統本體及減振器構造（亦即各種振動系統皆不需重新設計減振器），僅改變減振器擺放之位置，以期達到經濟有效的減振效果。本研究以 Lagrange 法推導雙層剛體平板的運動方程，其中包含：無減振器的受力振動、單一減振器、雙減振器於單一平板、兩組雙減振器於上下平板的受力振動分析，其中也考慮了各種減振器擺放的位置之減振效果。藉由實驗與本理論模式互相比對驗證。由實驗結果證實，整體減振效果最好的是將兩顆減振器分別放置於施力象限之端點與對角象限之端點，能將主體受之力之振幅降至最低，而其頻率振幅分布趨勢與數值理論結果相似。

關鍵字：調質減振器、減振、Lagrange's 方程、頻率響應。

The Effects of Multi-TMDs Locations on Vibration Reduction

Yi-Ren Wang¹，Shu-Wei Chen¹
Tamkang University¹

Abstract

A rigid body plate was considered in this study. Each of the four corners of the rigid body was supported by a spring to simulate the transverse-rotate-rotate vibrations. Two point-mass shock absorbers were suspended under the body. The positions of these two absorbers could be adjusted to achieve the best vibration reduction effect. Both analytic and numerical results were compared to verify the vibration absorber positions impact on the system. The experimental model was also established to ensure our theoretical predictions. This study found that: For a single deck vibration, the case of dual-absorbers (a pair of two absorbers) attached under the forced vibration rigid plate is better than a single-absorber. For the double-decker vibration system, the case of dual-absorbers attached under each forced vibration rigid plate of the this system is better than just one pair of dual-absorbers attached under one of the rigid plates. The best positions for the dual-absorbers are one of the absorbers located at the endpoint of the quadrant which the force applied and the other one located at the cross quadrant's endpoint.

Keywords : Tuned Mass Damper (TMD), Vibration reduction, Lagrange's equation, Frequency response.

一、前言

隨著人類科技的發展不斷進步，工程製造也越趨精密，然而振動的問題卻也隨之產生，人們要將科技向上提昇，勢必得先面對振動帶來的問題。有關精密製造的過程，諸如機械手臂的操作，或是光碟機的運作，都有著振動所產生的問

題，如 Heo 和 Chung [1]在 2002 年為了解決光碟機儀器因振動所造成的讀寫上的誤差，他們利用一鋼環加上橡膠筒組成一減振器，同時利用有限元素法取得其減振器模型的自然振動頻率，此研究得到了相當程度的減振成果。接著在 2004 年 Chung [2] 又提出了一新型的減振器來抑制水平向的振動，並同時分析各種減振器的設計，同

樣地得到了可減少平面振動的成果。減振器的設計可以分成主動式與被動式減振，在 Daley [3] 等人文章中就是以主動式減振器作研究。然而，雖然普遍認同主動型減振器可以有較好的減振效果，但相對的所費不貲，主動型減振器每換一環境就必須更改設計，這點在注重成本的科技業就很難有所發展。被動型減振器，如 JAlmazán [4] 等人所提出的被動型減振器，就有著先前提到的成本上的優勢。而吾人所設計的被動式減振器，其理念是在不改變減振器的構架設計前提下，只改變減振器的擺放位置來達到吾人所希望的減振效果。在此，吾人使用 Lagrange 方法導出一以線性彈簧與線性阻尼支撐四端點的長方板之三維理論方程，其構架與郭惠蘭 [5] 和 Heo 和 Chung [1] 的模式類似。吾人並進一步求得理論的頻率響應值，以利實驗驗證。

綜觀其他被動式減振設計在工程上的應用，為了解決設備在運轉時所產生的振動問題，Wang 和 Cheng [6] 就設計了一 nonprismatic-beam 利用一非等截面的梁柱來對應多個自然振動頻率，同時利用壓電晶片來使減振器的效能提升，即使設計變更依舊容易研究，節省重新設計減振器的時間。接著在 Babitsky 和 Veprík [7] 中的被動式減振器，是有著一可滑動的墊圈加裝在一桿件設備上，讓其墊圈自由滑動到最佳的減振位置，最後成果可以消除共振以及減少桿件的振動。於 2008 由 Wang 及 Chen [8] 提出用於微型旋翼飛行器的減振方式，他們發現單一減振器置於旋翼十字圓盤底座之端點，有著最好之效果。隨後於 2010 Wang 及 Chang [9] 提出雙減振器同時置於單一平板的端點，其兩顆減振器的振動頻率相同，可提升能量吸收的程度，針對旋轉振動的抑制有最好的效果。Wang 及 Chang [10] 同時也提出更換減振器的位置，對於一般翼剖面的氣彈問題也可有效提升振顫速度。這些都說明了移動減振器的位置，確實能有效達到減振效果，除了證實本研究之可行性，更加深本論文之實用性。

本研究中，吾人將針對一以金屬剛體的振動為主的結構，在設備中運作時所面臨的垂直振動及共面振動問題做研究。以光碟機為例，隨著轉速的不斷提昇，光碟機讀寫頭的微小振動也必需一同被考慮，這些振動有些是光碟機自身運轉所產生的振動，有些是周遭環境所發出的振動。針對這些振動問題，便有許多減振方法，最常見的是主動式減振與被動式減振。主動式減振可以有效應付大多數的振動問題，但它所必須付出的設計成本也比較高；因此吾人將提出一種被動式減振器設計，不僅在成本上優於主動式減振，在減振的效果也有相當良好的成果。吾人所設計的減振器系統，並不會隨著減振對象的不同而更改其架構設計，僅改變減振器在儀器上擺放的位置不同，試圖找出最佳的減振器位置來達到減振的效果。

二、雙層剛體平板振動系統理論架構

2.1 雙層具減振器之振動系統運動方程式推導

在此考慮一以線性彈簧與線性阻尼組合作支撐於各平板角落的雙層振動系統，其相關位置以及使用座標，見圖 1，足標 U 的為上層之參數， L 的為下層之參數。令此系統座標之原點位於雙層平板中央， M_U 、 M_L 為上、下層板的質量； m_{UA} 、 m_{UB} 、 m_{LA} 、 m_{LB} 係為單質點減振器之質量。 D_U 、 D_L 為主體四端支撐用之線性阻尼係數， D_{UA} 、 D_{UB} 、 D_{LA} 、 D_{LB} 為減振器上之阻尼係數， K_U 、 K_L 為主體四端支撐用之線性彈簧彈性係數， K_{UA} 、 K_{UB} 、 K_{LA} 、 K_{LB} 為減振器上之彈簧彈性係數， I_{UX} 、 I_{UY} 、 I_{LX} 、 I_{LY} 分別為 X 與 Y 方向之轉動慣量， X_{Ui} 、 Y_{Ui} 、 X_{Li} 、 Y_{Li} ($i=1\sim 4$) 代表各角落支撐點與原點之距離， X_{UT} 、 Y_{UT} 、 X_{LT} 、 Y_{LT} 代表施力點到原點之距離， X_{UA} 、 Y_{UA} 、 X_{LA} 、 Y_{LA} 代表減振器懸掛位置與原點之距離，在不考慮 X 與 Y 方向之橫向位移與繞 Z 方向之轉動位移的條件之下； Z_{UZ} 、 Z_{LZ} 為承載平板在 Z 方向位移， Z_{UA} 、 Z_{LA} 、 Z_{UB} 、 Z_{LB} 為減振器在 Z 方向之位移， θ_{UX} 、 θ_{UY} 、 θ_{LX} 、 θ_{LY} 為雙層平板在 X 與 Y 方向之轉動角。

$$\{X\}_{10 \times 1} = \{\bar{X}\}_{10 \times 1} e^{i\omega t}, \{F\}_{10 \times 1} = \{\bar{F}\}_{10 \times 1} e^{i\omega t}.$$

將式(2)中之十個自由度的振幅以數值法計算之，可得各個自由度之頻率響應圖。由

$$\sum_{i=1}^4 Y_{Ui} = \sum_{i=1}^4 X_{Ui} = \sum_{i=1}^4 X_{Ui} Y_{Ui} = 0, K_U = K_L \text{ 以及}$$

$X_{Ui} = X_{Li}, Y_{Ui} = Y_{Li}$ 。三維雙層無減振器之運動方程式可整理成下列之矩陣：

$$\begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4/\bar{M} & 8/\bar{M} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sum_{i=1}^4 Y_{Ui}^2}{I_{UX}} & 0 & -\frac{\sum_{i=1}^4 Y_{Ui}^2}{I_{UX}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sum_{i=1}^4 X_{Ui}^2}{I_{UY}} & 0 & -\frac{\sum_{i=1}^4 X_{Ui}^2}{I_{UY}} \\ 0 & 0 & -\frac{\sum_{i=1}^4 Y_{Li}^2}{I_{LX}} & 0 & \frac{2\sum_{i=1}^4 Y_{Li}^2}{I_{LX}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sum_{i=1}^4 X_{Li}^2}{I_{LY}} & 0 & \frac{2\sum_{i=1}^4 X_{Li}^2}{I_{LY}} \end{bmatrix}$$

吾人令 $\bar{M} = M_U/M_L$ ，則對於任意之 \bar{M} ，吾人令 $\bar{M} = 1$ 即上下層板之質量相等，可得各自由度之自然振動頻率解析解為： $\omega_{UZ}^2 = 6 - 2\sqrt{5}$ ， $\omega_{LZ}^2 = 6 + 2\sqrt{5}$ ， $\omega_{U\theta X}^2 = 18 - 6\sqrt{5}$ ， $\omega_{L\theta X}^2 = 18 + 6\sqrt{5}$ ， $\omega_{U\theta Y}^2 = 18 - 6\sqrt{5}$ 以及 $\omega_{L\theta Y}^2 = 18 + 6\sqrt{5}$ ；由於此係無因次之解，以上各值必須帶入振動主體之質量與彈性係數後始為有因次之值，若要回復有因次的值，則每一項都要乘以 219.529 後再開根號即可得各自由度之自然振動解析解頻率。本研究使用之各數據如表一所示，計算所得之自然振動頻率解析解，則詳表二。

表一. 雙層平板之各數據

	variables	values
Rigid plate mass (kg)	M_U, M_L	1.5
TMD mass (kg)	$M_{UA}, M_{UB}, M_{LA}, M_{LB}$	0.1
Rigid plate spring constant (kg/sec ²)	K_U, K_L	13000.0
Rigid plate spring damper	D_U, D_L	10.0

coefficient (kg/sec)		
TMD spring constant (kg/sec ²)	$K_{UA}, K_{UB}, K_{LA}, K_{LB}$	1600.0
TMD damping coefficient (kg/sec)	$D_{UA}, D_{UB}, D_{LA}, D_{LB}$	1.0
Moment of inertia of X-axis (kg · mm ²)	I_{UX}, I_{LX}	2812.5
Moment of inertia of Y-axis (kg · mm ²)	I_{UY}, I_{LY}	1800.0
Applied force position (relative to origin) (mm)	(X_T, Y_T)	(43.0, -58.0)
Plate end point position (1 st Quadrant, relative to origin) (mm)	(X_1, Y_1)	(60.0, 75.0)
Plate end point position (2 nd Quadrant, relative to origin) (mm)	(X_2, Y_2)	(-60.0, 75.0)
Plate end point position (3 rd Quadrant, relative to origin) (mm)	(X_3, Y_3)	(-60.0, -75.0)
Plate end point position (4 th Quadrant, relative to origin) (mm)	(X_4, Y_4)	(60.0, -75.0)

表 2. 雙層平板之自然振動頻率

ω_{ZUZ}	$\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} \times \sqrt{K_U / M_U} / 2\pi = 18.31423$
$\omega_{\theta UX}$	$\sqrt{18 - 6\sqrt{5}} \times \sqrt{K_U / M_U} / 2\pi = 31.72117$
$\omega_{\theta UY}$	$\sqrt{18 - 6\sqrt{5}} \times \sqrt{K_U / M_U} / 2\pi = 31.72117$
$\omega_{Z LZ}$	$\sqrt{6 + 2\sqrt{5}} \times \sqrt{K_U / M_U} / 2\pi = 47.94727$
$\omega_{\theta LX}$	$\sqrt{18 + 6\sqrt{5}} \times \sqrt{K_U / M_U} / 2\pi = 83.04710$
$\omega_{\theta LY}$	$\sqrt{18 + 6\sqrt{5}} \times \sqrt{K_U / M_U} / 2\pi = 83.04710$

三、實驗設計

本文之實驗流程當中，在於驗證理論的正確性，也就是被動式減振器的效果。為此，吾人以一雙層剛體平板做為主振動體，其四端角落以彈簧固定在光學桌上，剛體平板下方以川字型固定條鑽孔固定之，以允許減振器於不同位置吊掛之，圖 2 是模型完成圖。圖 3 是實驗流程圖，實驗流程首先架設儀器，並以水平儀確認振動主體、雷射位移器和振動器之水平校正，由訊號產生器產生一波形給振動器的訊號放大器，訊號放大器將訊號傳給振動器，藉由振動器施加一外力於主體上層之第四象限端點，使用兩台雷射位移器以取得其振動主體的各自由度的振幅資料，資料經過低通濾波器後傳給資料擷取卡，經過電腦計算各頻率的振幅，完成一筆實驗流程。

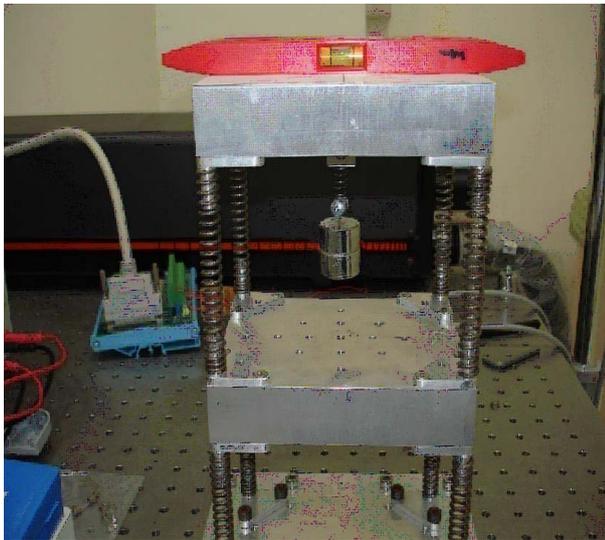


圖 2. 雙層振動主體掛載減振器之示意圖。

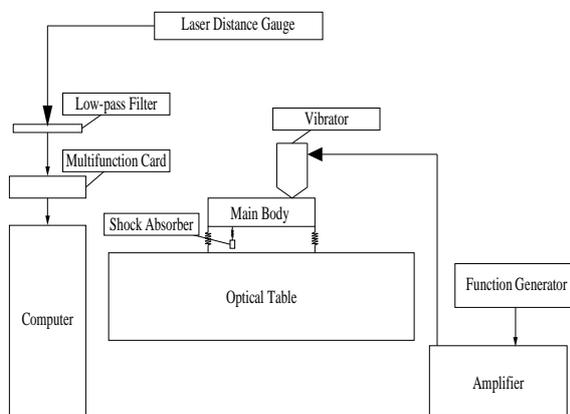


圖 3. 實驗流程圖。

四、結果與討論

本實驗藉由雷射位移計量測金屬模型振動之垂直位移量，可得到吾人選定之頻率下的各自由度振幅，將此數據處理過後可得到特定頻率與振幅之關係圖，而旋轉角亦可由金屬平板之距離中心點的長與寬換算成徑度。實驗流程首先確定雙層主體無減振器，各自由度自然振動頻率是否與理論解析解相同。同時根據數值模擬之結果設定實驗之外力頻率的範圍，最後將減振器掛載於不同位置，觀察減振器之效果以及與理論的差異。

實驗數據皆以主體達到穩定後進行取樣，圖 4 是掛載減振器前後的比較圖，可以看出前半段無減振器到掛載減振器後明顯的抑制效果。圖 5 則進一步顯示振動穩定後，減振器抑制振動 (Z_z 方向) 的效果，其中，點線為無減振器附加，實線(紅線)為減振器附加於平板中央。

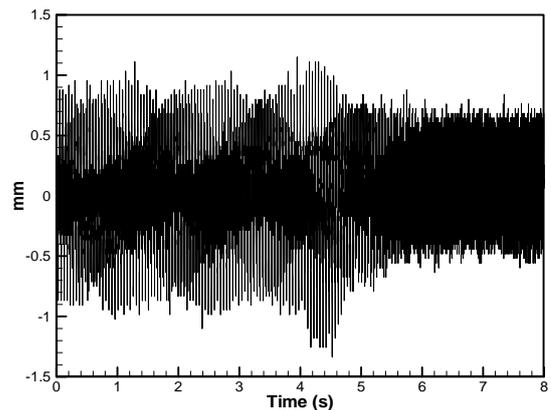


圖 4. 減振器抑制振動 (Z_z 方向) 效果圖。

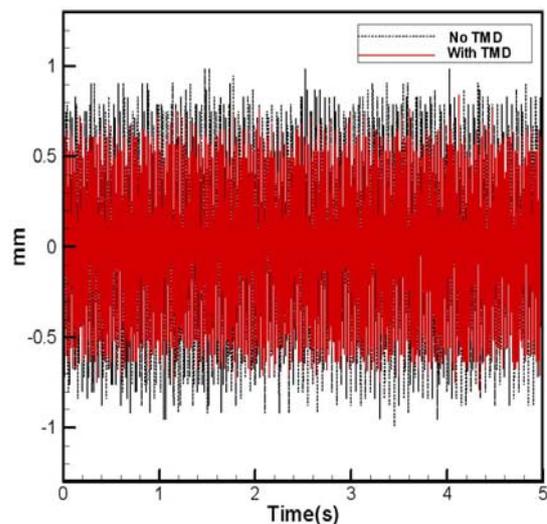


圖 5. 振動穩定後，抑制振動 (Z_z 方向) 效果圖。

藉由理論分析及實驗的結果，可得到雙層系統，在多種不同減振器掛載位置的情況之下，例如：無減振器，具有減振器的最好、最差，以及減振器其他參考位置的分析結果。圖 6 是四個減振器之擺放位置，吾人將實驗與理論模擬的結果繪製在同一張圖上作比較，其中標示 A1 意味著在上層平板的兩個減振器，一個置放於中心，一個置放於地一象限端點，而其下方平板的兩個減振器擺放位置亦同。又例如標示 C10 意味著在上層平板的兩個減振器，一個置放於中心，一個置放於第三象限端點，而其下方平板的兩個減振器，一個擺放於第三象限端點，另一個則擺放於第四象限端點。請注意，圖中標示的 A3,A6,A8,A10~J3,J6,J8,J10 代表 A3,B3,C3,...J3, 以及 A6,B6,C6,...J6, 以及 A8,B8,C8,...J8, 以及 A10,B10,C10,...J10,... 於類推。圖 7~圖 9 各別是雙層主體四顆減振器各擺兩個於上下層板之 Z_z 、 θ_x 、 θ_y 自由度頻率響應圖，線條部份為數值模擬，圖形部份為實驗數據。由圖可見實驗之各頻率之振幅分布趨勢與數值結果相同。

圖 10 是雙層板在無減振器之外力振動頻率 31 赫茲時，其繞 X 軸與繞 Y 軸的垂直位移振動圖，可以看到兩波形以交互形式產生，可證明實驗量測的頻率與解析解之繞 X 軸與繞 Y 軸的旋轉頻率相同，此實驗結果與表二的理論值吻合。圖 11 是雙層平板在外力施放於上層板第四象限端點時，各種減振器位置組合的減振效果。吾人將無減振器放置的情況標示為 NT (No TMD)，並將置放減振器時的各位置組合總共 6 自由度的振幅依序與無減振器的情況相除。因此，無減振器主體的振幅值，應該是 6，而具減振器者，其 6 自由度的比較值則標示於圖 11。吾人發現，整體而言，I9 的位置，意即上下平板的各兩個減振器，皆置放於施力點，及其對角象限端點處，為最佳位置的選擇。其原因為兩個減振器其中一個扮演抑制施力源的角色，另一個則扮演抑制旋轉振動的角色。如此將可同時抑制 Z_z 、 θ_x 、 θ_y 等自由度的振動。

圖 12 則為雙層平板，外力同時施放於上、下層板第四象限端點時，各種減振器位置組合的減振效果。吾人將無減振器放置的情況標示為 NT (No TMD)，並將置放減振器時的各位置組合總共 6 自由度的振幅依序與無減振器的情況相除。因此，無減振器主體的振幅值，應該是 6，而具減振器者，其 6 自由度的比較值則標示於圖 12。同理，吾人發現，整體而言，I9 的位置，意即上下平板的各兩個減振器，皆置放於施力

點，及其對角象限端點處，為最佳位置的選擇。本研究仍量測其他位置及施力方式的數據，但礙於篇幅，僅列出以上的重要發現，其他的結論則於下一章節條列之。

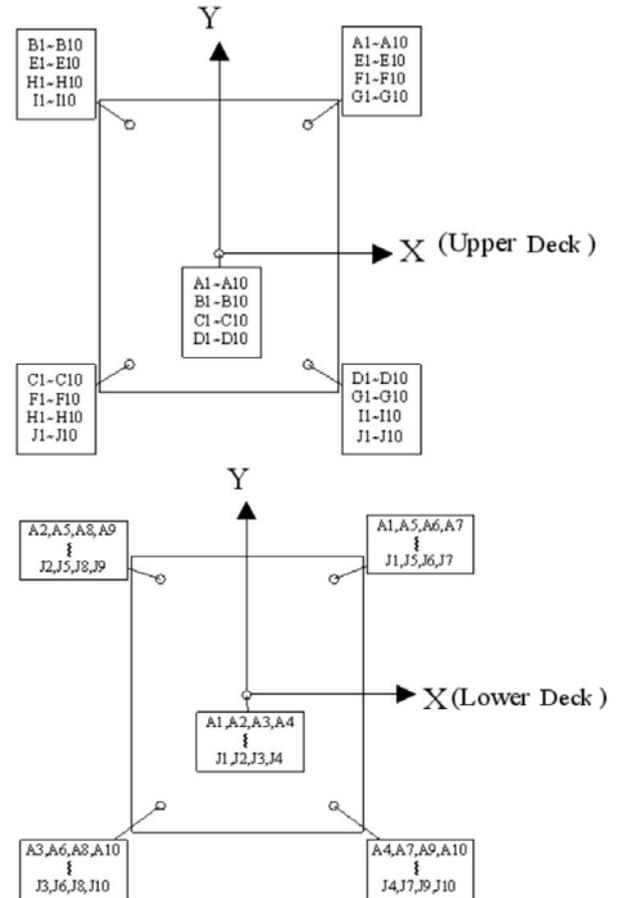


圖 6. 雙層振動主體之四減振器掛載之位置圖。

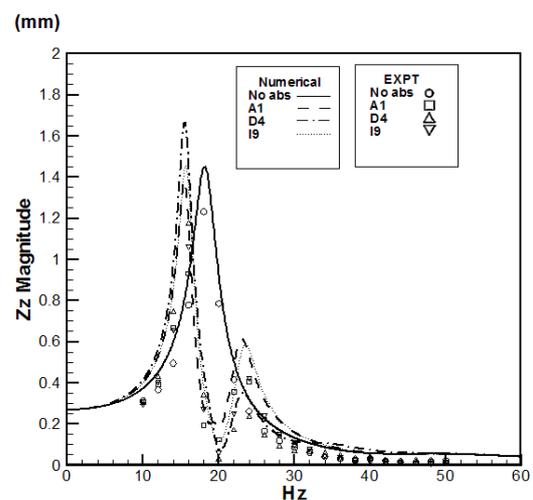


圖 7. 雙層振動主體與四減振器之 Z_z 響應圖。

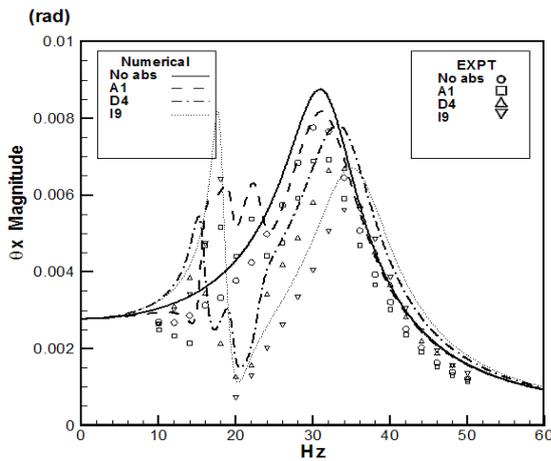


圖 8. 雙層主體與四減振器之 θ_x 響應圖。

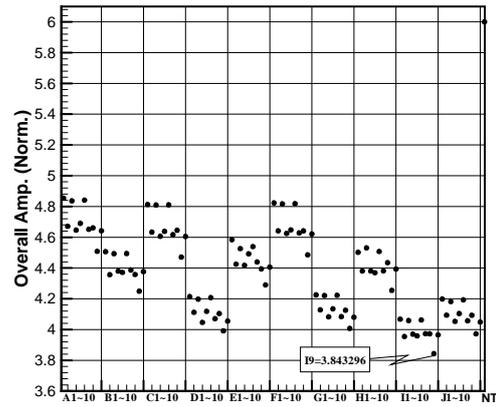


圖 11. 施力於上平板，4TMD 的位置減振效果。

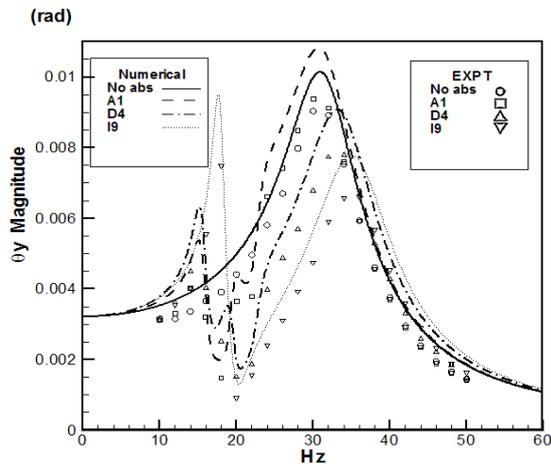


圖 9. 雙層主體與四減振器之 θ_y 響應圖。

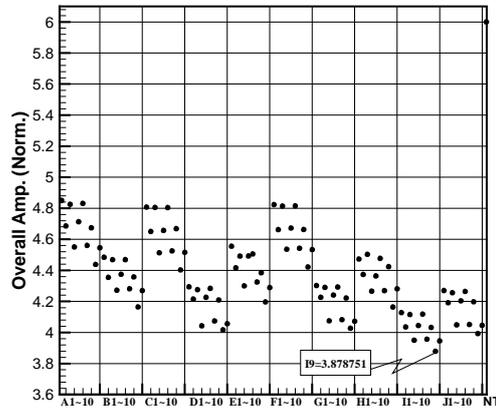


圖 12. 施力於上、下平板，4TMD 的位置減振效果。

五、結論

本研究目的是發展一套提高減振效能的方法，以不改變振動系統本體及減振器構造，僅改變減振器擺放之位置，以期達到經濟有效的減振效果。吾人利用解析及數值法求得振動模型各自由度的自然振動頻率、振幅及扭轉角等，並比較其結果；最後將振動模型實體化，藉由實驗與本理論模式互相比對驗證結果及預估之準確性。吾人將本研究之過程與成果作一總結，分為以下幾點：

1. 抑制垂直與抑制旋轉之最佳位置並不一致。

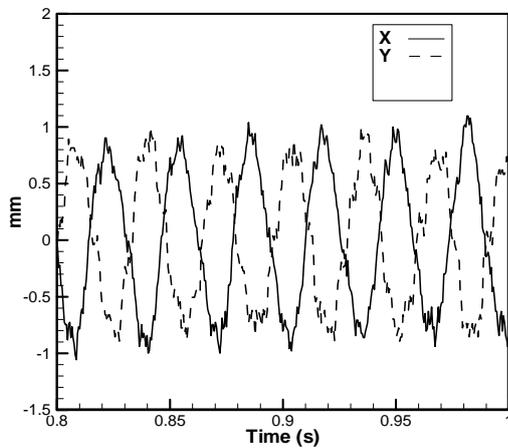


圖 10. 無減振器在 31Hz 之振幅。

2. 整體最佳減振器掛載位置選擇在其施力象限端點與對角象限端點。
3. 針對主體振動頻率上下平板同時受力時，4 顆減振器分別掛 2 顆於上下平板比 2 顆同時放置於任一平板與 1 顆放置於任一平板抑制效果來的佳。
4. 若僅使用兩顆減振器，且僅一平板受力時，則同時擺放於該受施力之平板為佳。

- [9] Wang, Y.-R. and Chang, M.-H., "On The Vibration Reduction of a Nonlinear Support Base with Dual-shock-absorbers," *Journal of Aeronautics, Astronautics and Aviation, Series A*, Vol.42, No.3, pp.179-190, 2010.
- [10] Wang, Y.-R. and Chang, H.-L., "The Effect of a Vibration Absorber on a Nonlinear Two-dimensional System in Vibration Reduction," *Journal of Emerging Trends in Engineering And Applied Sciences(JETEAS), Scholarlink Research Institute Journals*, Vol.1, pp.60-71, 2010.

參考文獻

- [1] Heo, J. W. and Chung, J., "Vibration and noise reduction of an optical disk drive by using a vibration absorber," *IEEE Transaction On Consumer Electronics on Consumer Electronics*, Vol. 48, No. 4, November, 2002.
- [2] Chung, J., "Vibration absorber for reduction of the in-plane vibration in an optical disk drive," *IEEE Transaction On Consumer Electronics on Consumer Electronics*, Vol. 50, No. 2, May 2004.
- [3] Daley, S., Hatonen, J. and Owens, D. H., "Active vibration isolation in a 'smart spring' mount using a repetitive control approach," *Control Engineering Practice*, 14, pp. 991-997, 2006.
- [4] Almazán, J.L., Llera, J.C.D., Inaudi, J.A., López-García, D. and Izquierdo, L.E., "A bidirectional and homogeneous tuned mass damper: A new device for passive control of vibrations," *Engineering Structures*, Vol. 29, No. 7, pp. 1548-1560, 2007.
- [5] 王怡仁，郭蕙蘭，"旋轉機構基座之減振最佳化設計"，2004 機械工程學術研討會，高雄國立中山大學，2004 年十一月。
- [6] Wang, P. W. and Cheng, C. C., "Design of vibration absorbers used in multiple tonal excitations," *Journal of Vibration and Acoustics, ASME*, Vol. 128, No. 1, pp. 106-114, February, 2006.
- [7] Babitsky, V. I. and Veprík, A. M., "Damping of beam forced vibration by a moving washer," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 166, No. 1, pp. 77-85, 1993.
- [8] Wang, Y.-R. and Chen, T.-H., "The vibration reduction analysis of a nonlinear rotating mechanism deck system," *Journal of Mechanics*, Vol. 24, No. 3, pp.253-266, 2008.