ВЛИЯНИЕ ВЯЗКОСТИ И НАГРУЗОК НА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В ЛУНЕ

by

B. BODRI

(Department of Geophysics, Roland Eötvös University, Budapest)
Received: 15 October 1975

SUMMARY

Observations evidently have shown that the figure of the Moon significantly departures from the hydrostatic case, and these departures raise stresses in its interior. The investigation of these stresses strongly depends on the mechanical model applied to our satellite. We have considered different probable mechanical models and analised the stresses and strains arising for each case. If the interior of the Moon has relatively low temperature and the relaxation time is greater than the interval needed for significant changes of the elements of its orbit, than the model can be determined as an elastic, nearly homogeneous sphere. On the other hand, if the Moon's interior has high temperatures than the conditions will be similar to those taking place in the upper mantle of the Earth, the energy dissipation will increase by about of 1 – 2 orders of magnitude and therefore it will be necessary to include in the theory viscosity too. Finally, the existence of mascons induced extensive mass loads strongly affecting the distribution of stresses. For each of the above mentioned models there have been carried out computations of stresses and of the phase lag of deformations and on the bases of the results the true mechanical model of the Moon can be clearly obtained.

Можно считать почти бесспорным, что недра Луны находятся в сильно напряженном состоянии. Исследования гравитационного поля и фигуры Луны показывают, что фигура Луны заметно отклоняется от гидростатически равновесной. Эти отклонения приводят к напряжениям в теле Луны. Немаловажным источником напряжений в Луне являются также приливы и, возможно, температурные неоднородности. Существование масконов, по-видимому, дает возможность постулировать наличие на Луне значительных нагруженных зон. Возмушение ргавитационного поля, вызванное нескомпенсированной поверхностной плотностью может привести к значительному изменению напряжений в нагруженной области.

Вязкость Луны изменила бы не только амплитуду, но и фазу напряжений, поэтому ее также необходимо учитывать при расчетах. О вязкости Луны пока можно судить лишь по косвенным данным. Существование масконов, то есть больших концентраций вещества под центрами всех пяти круглых морей на видимой стороне Луны, можно обьяснить либо тем, что наш спутник обладает весьма значительной твердостью, которая много выше твердости внешних частей Земли и способна бесконечно долго выдерживать напряжения, дызываемые масконами; либо тем, что масконы размещаются в очень вязкой жидкости, и время, прошедшее с момента их образования, недостаточно для выравнивания. В этом случае по расчетам Urey and Mac Donald (1971) вязкость Луны должна составлять 10^{26} пуаз, то есть на четыре порядка превышать эффективную вязкость поверхностных областей Земли. В первом случае диссипация энергии в Луне, по-видимому, будет весьма малой ($Q \sim 1000-10\,000$), что приведет к чрезвычайно малым углам запаздывания деформаций, во втором же случае диссипация может сильно превышать диссипацию энергии в Земле, что соответственно увеличит угол запаздывания.

Цель настоящей работы исследовать распределение напряжений в Луне и определить влияние на них поверхностных нагрузок и вязкости.

В качестве модели Луны в данной работе использовалась почти однородная модель, расчитанная Arkani-Hamed (1973), которая представлена в таблице 1.

Таблица I.

Модель Луны, Arkani-Hamed (1973)

Table 1.

Model of the Moon, Arkani-Hamed (1973)

r (км)	G (см сек$^{-2}$)	ϱ (г см$^{-3}$)	λ (10^{11} дин см$^{-2}$)	μ (10^{11} дин см$^{-2}$)
300	28.2801	3.374	6	4
500	47.1335	3.374	6	4
700	65.9869	3.374	6	4
900	84.8403	3.374	6	4
1100	103.6937	3.374	6	4
1200	113.1204	3.374	6	4
1300	122.5470	3.374	6	4
1400	131.9737	3.374	6	4
1500	141.4004	3.374	6	4
1600	150.8271	3.374	6	4
1685	158.8398	3.374	6	4
1735	162.8709	3.200	4	3

Отправной точкой данного исследования послужила задача о распределении напряжений в идеально упругой Луне при отсутствии напряжений на свободной поверхности. Уравнения упругого равновесия, использованные при расчете, имели следующий вид:

$$M - r^2 \mu \left(T' + H - \frac{2T}{r} \right) = 0$$

$$N - (\lambda + 2\mu) H' - \lambda \left[\frac{2H}{r} - \frac{n(n+1)}{r^2} T \right] = 0$$

$$L - r^2 (R' - 4\pi f \varrho H) = 0$$

$$N' - \frac{n(n+1)}{r^4} M + \frac{\varrho}{r^2} [L - 4V' rH + n(n+1) TV'] +$$

$$+ \frac{2\mu}{r} \left[2H' - 2H/r + \frac{(n+1)\,n}{r^2} T \right] = 0 \qquad (1)$$

$$M' + Nr^2 + \varrho r^2 (R + V' H) - 2\mu [H' r^2 - Hr + (n^2 + n - 1)\, T] = 0$$

$$L' - n(n+1)(R - 4\pi f \varrho T) = 0$$

, где

f — гравитационная постоянная,
$G = -V'$ — ускорение силы тяжести,
r — текущий радиус Луны,
ϱ — плотность,
λ, μ — параметры Лямэ,
H, T — соответсвенно, радиальное и тангенциальное смещения,
N, M — радиальное и тангенциальное напряжения,
R, L — потенциал и его градиент,
n — порядок прилива.

Мы не останавливаемся подробно на формулировке задачи в, целом ссылаясь на работы Молоденского (1953) и Bodri (1974).

Граничные условия на поверхности Луны брались следуюшие

$$M = 0$$

$$N = 0$$

$$L + (n+1)\, rR = 0. \qquad (2)$$

Они были выведены в предположении отсутствия напряжений на свободной поверхности и непрерывности потенциала и его производной.

Граничные условия в центре Луны

$$M = 0$$

$$N = 0$$

$$L = 0 \qquad (3)$$

предполагали регулярность соответствующих функций в нуле.

Система уравнений (1) интегрировалась численно методом Рунге-Кутта. В результате интегрирования были получены следующие числа Лява

$$h = 0.0639$$

$$l = 0.0173$$

$$k = 0.0383 \qquad (4)$$

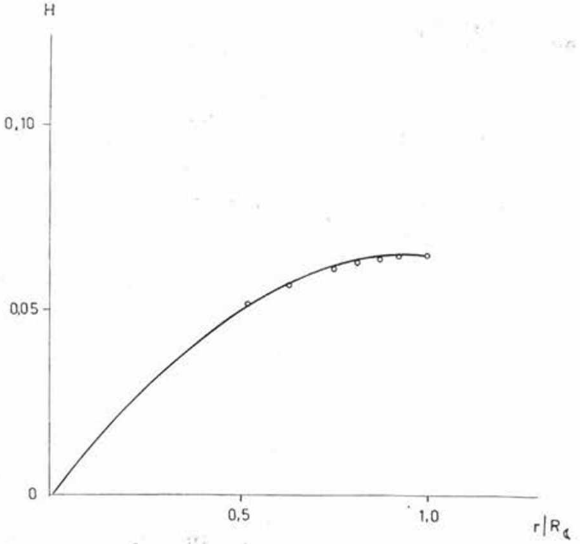

Рис. 1.a. Зависимость радиального смещения от радиуса при отсутствии напряжений на поверхности Луны

Fig. 1.a. The dependence of the radial displacement on the distance from the centre of the Moon. Surface loads do not exist

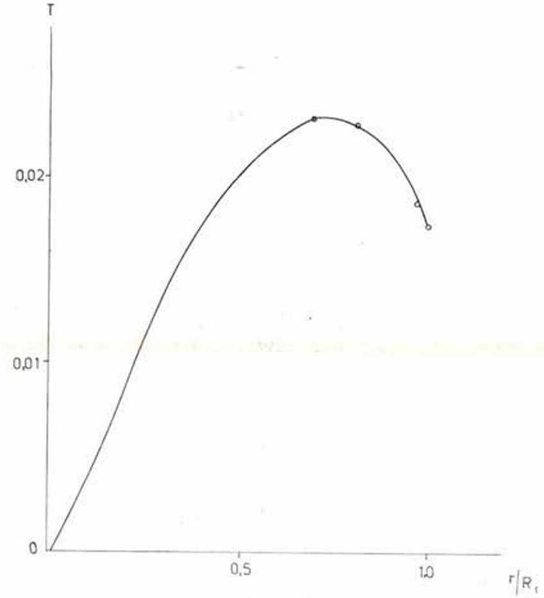

Рис. 1.b. Зависимость тангенциального смещения от радиуса при отсутствии напряжений на поверхности Луны

Fig. 1.b. The dependence of the tangential displacement on the distance from the centre of the Moon. No surface loads

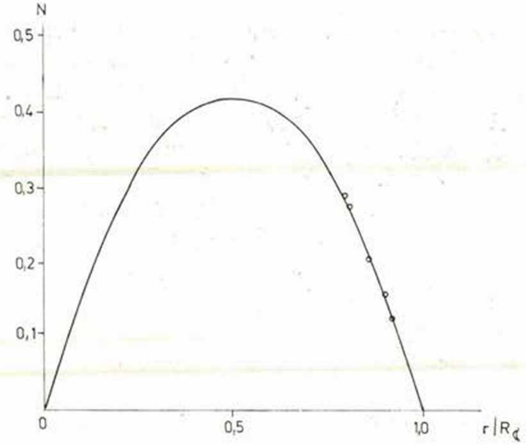

Рис. 1.с. Зависимость радиального напряжения от радиуса при отсутствии напряжений на поверхности Луны

Fog. 1.c. The dependence of the radial stress on the distance from the centre of the Moon. No surface loads

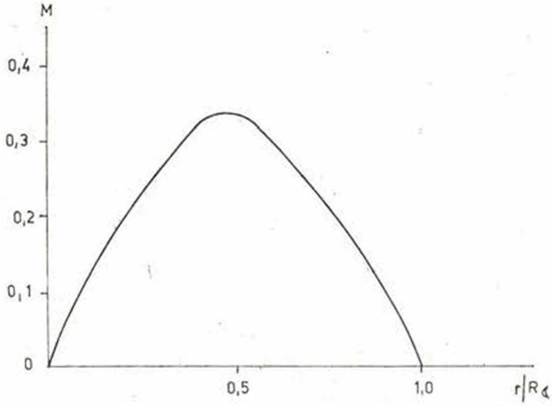

Рис. 1.д. Зависимость тангенциального напряжения от радиуса при отсутствии напряжений на поверхности Луны

Fig. 1.d. The dependence of the tangential stress on the distance from the centre of the Moon. No surface loads

Следует отметить хорошее согласие полученных нами чисел Лява с расчитанными Harrison (1963) для однородной Луны. Числа Лява, примерно, на порядок ниже земных, что вероятно, весьма затруднит возможность изучения лунных приливов непосредственно на поверхности Луны, поскольку потребует приборов значительно более точных, чем любые из применяемых в настоящее время на Земле.

В таблице 2 представлены общие решения системы (1), и, наконец, на графиках 1, a, b, c, d отложены соответственно распределения с радиусом радиальных и тангенциальных смещений и напряжений. Для сравнения на тех же графиках отложены аналогичные функции, полученные Kaula (1964) для однородной Луны с плотностью 3.34 г см$^{-3}$, твердостью 7.38 10^{11} дин см$^{-2}$ и модулем сжатия 1.23 10^{12} дин см$^{-2}$. Последние два значения соответствуют эффективным значениям для верхней мантии Земли. Поскольку мы использовали почти в два раза меньшую твердость, смещения и напряжения, полученные нами, превышают расчитанные Kaula (1964). Максимум напряжений сильно смещен к поверхности и располагается, примерно, на расстоянии 0.6 $R_☾$ от центра. Здесь $R_☾$ — радиус Лунн.

Таблица 2.

Общее решение системы уравнений (1).

Table 2

General solution of the equation system (1).

$r/R_☾$	H	M	T	R	N	L
1.0000	0.06389	0.00000	0,01732	1.03830	0.00000	1.88510
0.9712	0.06408	0.02291	0.01804	0.97945	0.04704	1.71971
0.9222	0.06405	0.05262	0.01876	0.88321	0.12228	1.46243
0.8646	0.06343	0.07379	0.01890	0.77650	0.20199	1.19536
0.8069	0.06225	0.08333	0.01838	0.67685	0.27103	0.96365
0.7493	0.06059	0.08438	0.01736	0.58429	0.32759	0.76446
0.6916	0.05855	0.07960	0.01595	0.49887	0.36872	0.59476
0.6340	0.05624	0.07119	0.01426	0.42067	0.38947	0.45173
0.5187	0.05148	0.04567	0.01058	0.28681	0.33960	0.23479
0.4035	0.04776	0.02115	0.00745	0.18606	0.12376	0.09213
0.2882	0.04474	0.00033	0.00608	0.13332	0.04145	0.00046
0.1729	0.00000	0.00000	0.00000	0.09837	0.00000	0.00000

Для сравнения на графиках 2 a, b, c, d приведено распределение соответствующих величин для мантии Земли, расчитанное Молоденским (1953), Kaula (1964) и Bodri (1974). Как видим, картина зависимости смещений и напряжений от радиуса сильно отличается от лунной. Максимум смещений расположен на расстоянии 0.65 $R_\oplus$ от центра Земли ($R_\oplus$ — радиус Земли), картина напряжений имеет более сложный вид. Поскольку диссиация энергии пропорциональна произведению напряжения на деформацию, можно сразу сказать, что максимальное выделение эинергии в результате приливных деформаций на Луне будет близко к поверхности, а на Земле будет находиться на глубине нескольких десятых приведенного радиуса. То есть энергия приливных деформаций в Луне, скорее всего, рассеивается в пространство и вряд ли способствует нагреванию Луны.

В дальнейших расчетах задача была усложнена. Уравнения равновесия оставались прежними, точно так же, как и предположения о регулярности всех функций в нуле, но граничные условия

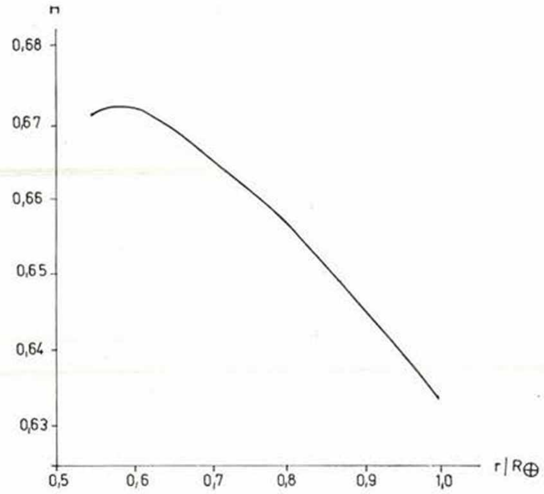

Рис. 2.a. Радиальное смещение в упругой мантии Земли
Fig. 2.a. The radial displacement in the elastic mantle of the Earth

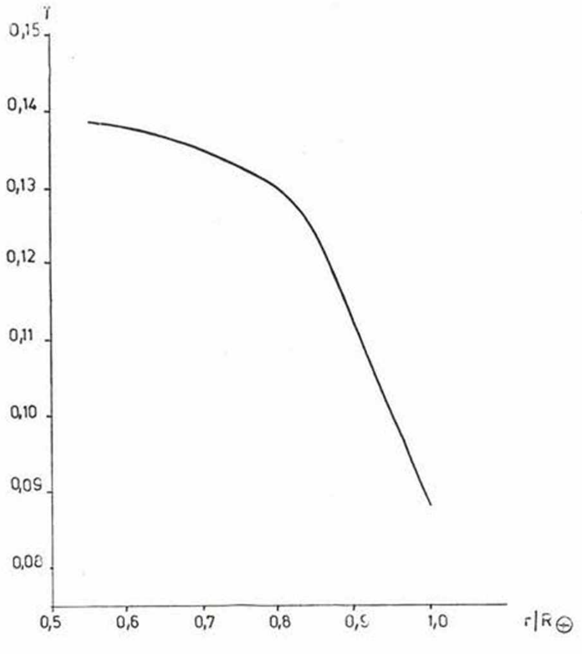

Рис. 2.ь. Тангенциальное смешение в упругой мантии Земли
Fig. 2.b. The tangential displacement in the elastic mantle of the Earth

на поверхности были изменены. Предполагалось, что на поверхности существует нескомпенсированный избыток массы плотности ϱ, который вызывает поверхностную нагрузку A и возмущение гравитационного поля g.

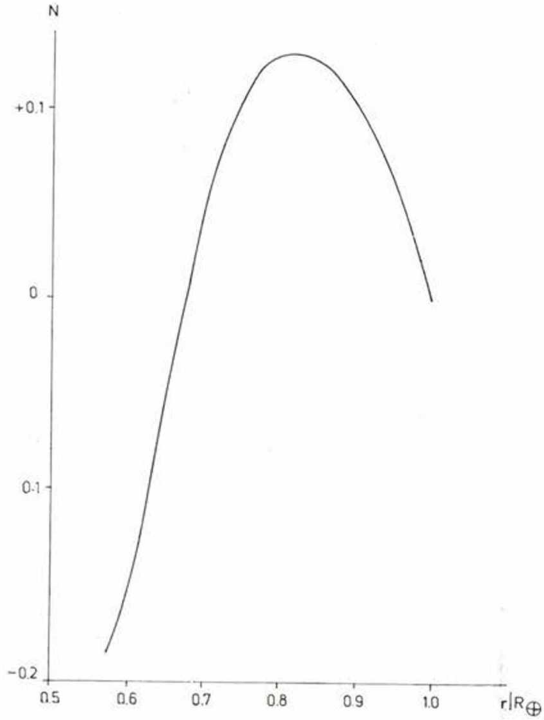

Рис. 2.с. Радиальное напряжение в упругой мантии Земли

Fig. 2.c. The radial stress in the elastic mantle of the Earth

Пусть γ — единица массы, однородно распределенная по диску радиуса α. Пользуясь разложением по полиномам лежандра (F a r r e l 1972), имеем:

$$\gamma = \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma_n P_n(\cos\Theta)$$

$$\Gamma_n = [P_{n-1}(\cos\alpha) - P_{n+1}(\cos\alpha)]/[4\pi R_{\zeta}^{2}(1-\cos\alpha)]$$

$$\Gamma_0 = 1/4\pi R_{\zeta}^{2} \tag{5}$$

Возмущение гравитационного поля можно разложить в аналогичный ряд

$$g = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(r)\, P_n(\cos\Theta), \tag{6}$$

,где для точечной массы, то есть при $\alpha \to 0$,

$$G_n = \frac{4\pi f R_{\zeta}}{2n+1} \Gamma_n .$$

При такой постановке задачи граничные условия на поверхности будут следующими
$M = 0$ (отсутствие тангенциальных напряжений)

$$N = -(2n+1)\,A\,, \qquad A = [G(Rc)]^2/4\pi f$$

(наличие радиальной поверхностной нагрузки A)

$$L + (n+1)\,R_{\zeta}\,R = -4\pi f \Gamma_n$$

(учтен возмущающий потенциал).

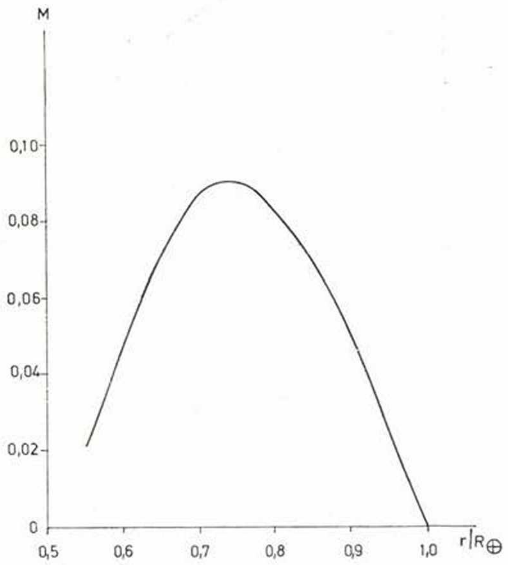

Рис. 2.д. Тангенциальное напряжение в упругой мантии Земли

Fig. 2.d. The tangential stress in the elastic mantle of the Earth

Эта задача решалась аналогично предыдущей численным интегрированием на ЭЦВМ для $n = 2$. Были получены следующие числа Лява, обусловленные деформациями от нагрузки

$$h = -0.0761$$

$$l = -0.0025$$

$$k = -0.0274 . \qquad (8)$$

Отрицательные значения чисел Лява говорят о том, что поверхность опускается при положительной нагрузке, что и следовало ожидать.

На графиках 3 a, b, c, d, как и в предыдущей задаче, представлено распределение тангенциальных и радиальных деформаций и напряжений в теле Луны для случая поверхностной нагрузки. Для сравнения на графиках 4 a, b, c, d представлены аналогичные величины для нагруженной мантии Земли, расчитанные нами для модели Земли. Как видим, и здесь картины распределения напряжений и деформаций сильно различаются.

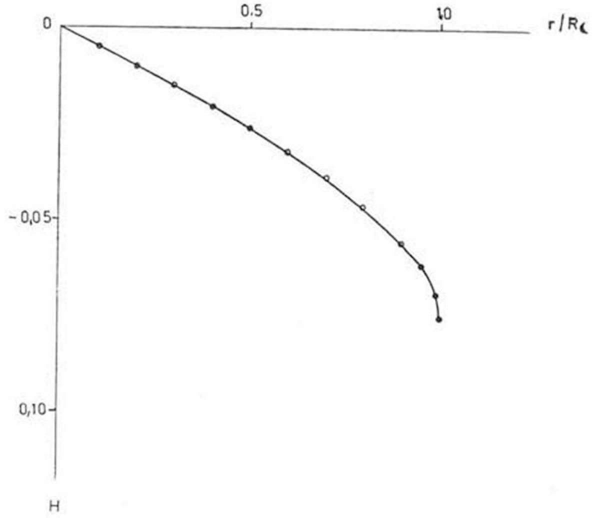

Рис. 3.a. Зависимость радиального смещения от радиуса на нагруженной поверхности Луны

Fig. 3.a. The radial displacement versus distance from the centre of the loaded Moon

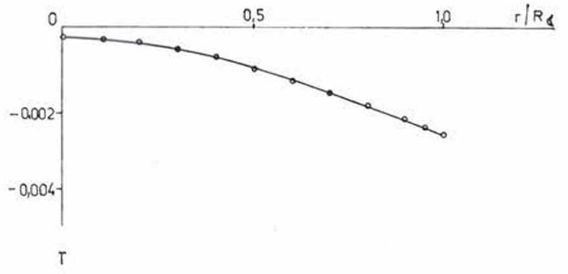

Рис. 3.b. Зависимость тангенциального смещения от радиуса на нагруженной поверхности Луны

Fig .3.b. The tangential displacement versus distance from the centre of the loaded Moon

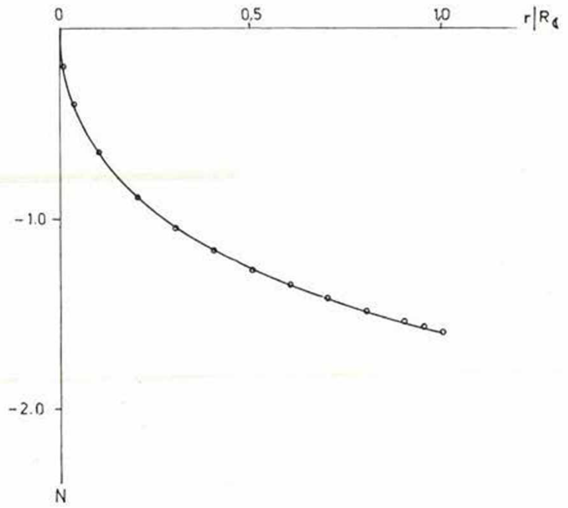

Рис. 3.с. Зависимость радиального напряжения от радиуса на нагруженной поверхности Луны

Fig. 3.c. The radial stress versus distance from the centre of the loaded Moon

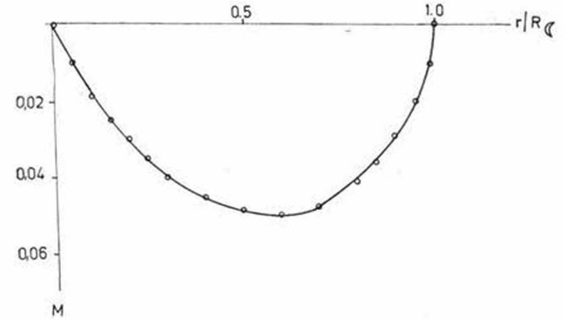

Рис. 3.д. Зависимость тангенциального напряжения от радиуса на нагруженой поверхности Луны

Fig. 3.d. The tangential stress versus distance from the centre of the loaded Moon

Для $n = 2$ наибольшая разность напряжений существует в центре Луны. Разность напряжений в центре Луны по нашим вчислениям составляет около 20 бар. Это указывает на то, что глубокие недра Луны должны быть в настоящее время исключительно прочными и что они были таковыми с тех пор, как Луна приобрела свою неправильную форму, поскольку за этот период не произошло изостатического выравнивания. Для гармоник более высокого порядка максимум напряжений будет смещаться вверх, например, при $n = 3$ максимальная разность напряжений существует на глубине, приблизительно, $0.4R_☾$.

Судя по гармоникам низкого порядка, мы делаем вывод, что вещество, составляющее Луну, способно выдержать разность напряжений от нескольких бар до 10—20 бар на всех глубинах. Можно сделать определенный вывод, что Луна много тверже и находится при более низких температурах, чем Земля.

Тем не менее следует заметить, что подобный вывод справедлив лишь для однородной Луны. Urey et al. (1959) показали, что если плотность Луны меняется с угловыми координатами, то при некоторых законах изменения плотности разность напряжений в центре можно сделать близкой к нулю. Однако эти же авторы показали, что нагрузку на изостатически уравновешенной поверхности нельзя использовать

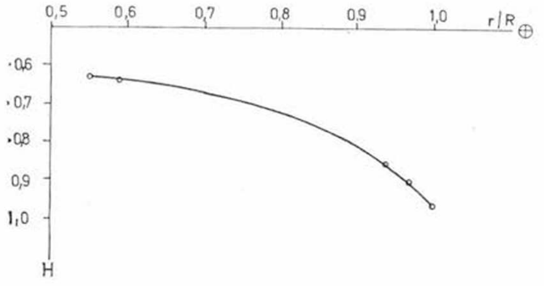

Рис. 4.а. Радиальное смещение на нагруженной мантии Земли

Fig. 4.a. The radial displacement in the loaded mantle of the Earth

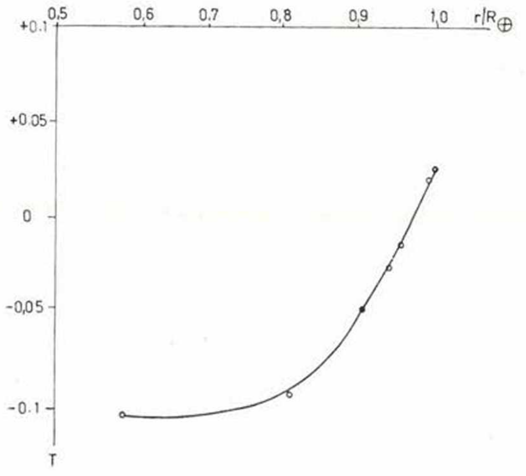

Рис. 4.ь. Тангенциальное смещение на нагруженной мантии Земли

Fig. 3.b. The tangential displacement in the loaded mantle of the Earth

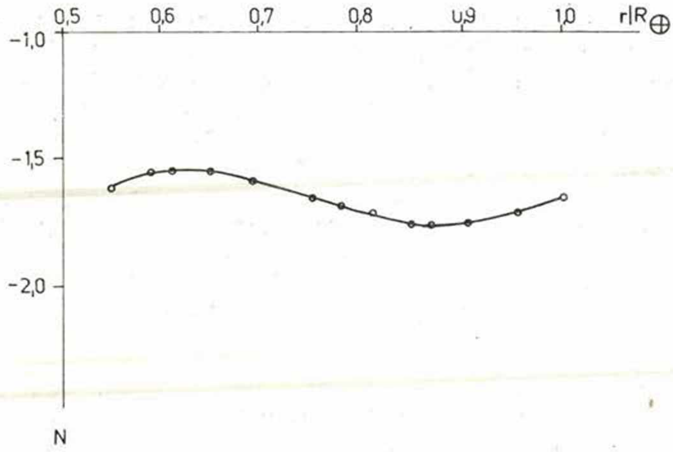

Рис. 4.с. Радиальное напряжение на нагруженной мантии Земли

Fig. 4.c. The radial stress in the loaded mantle of the Earth

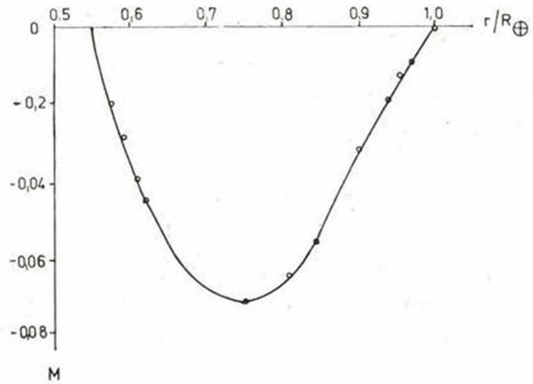

Рис. 4.д. Тангенциальное напряжение на нагруженной мантии Земли.

Fig. 4.d. The tangential stress in the loaded mantle of the Earth

для объяснения наблюдений гравитационного поля, если в центре Луны нет напряжений. Попытка обойтись без напряжений, выбрав для этого некоторый закон изменения плотности от координат, представляется нам несколько искусственной, поскольку анализ коэффициентов разложения в ряд по сферическим функциям гравитационного потенциала Луны указывает на то, что распределение плотности в Луне не очень отличается от однородного и что, во всяком случае, Луна значительно более близка к однородности, чем Земля.

Следующим шагом был учет вязкости при вычислении деформаций и напряжений в теле Луны. Как известно, неидельная упругость Луны вызывает запаздывание фаз деформаций по оношению к деформирующему потенциалу, которое принято характеризовать углом запаздывания φ. Метод вычисления угла φ подробно описан в работах Bodri (1974, 1975), в данной работе мы остановимся лишь на его принципах. Как известно, упругая изотропная среда характеризуется двумя упругими модулями: К — модуль сжатия и μ модуль сдвига, или постоянными Лямэ. Предположим, что диссипация при всестороннем сжатии значительно меньше, чем при сдвиговых процессах. Математически это можно выразить, оставив модуль К действительным, а μ заменив комплексной величиной

$$\mu = \mu_0(1+i\psi), \quad \psi \ll 1, \tag{9}$$

где

i — мнимая единица,

ψ — комплексная часть модуля сдвига, малая для малого поглощения.

Наконец, особое распространение среди геофизиков получило положение, согласно которому диссипативная функция Q не зависит от частоты возмущающей силы. Обосновать это положение теоретически в рамках теории линейного поглощения трудно. Ломнитц показал, что оно будет приближенно выполняться в широком интервале частот для определенных логарифмических функций крипа. Введение этой гипотезы в уравнения теории упругости принадлежит Кнопову, который показал, что

$$\mu = \mu_0\left(1+\frac{i}{Q}\right). \tag{10}$$

При этом учтено отсутствие микрокрипа при всестороннем сжатии.

В случае комплексности модуля сдвига, очевидно, и функции H, T, R, L, N, M, фигурирующие в уравнениях системы (1), также будут комплексными. То есть

$$\begin{aligned} H &= H_0+H^*i \\ T &= T_0+T^*i \end{aligned} \tag{11}$$

и так далее. Здесь звездочки обозначают комплексную часть соответствующей функции. Подставляя (10), (11) в систему дифференциальных уравнений (1) и приравнивая нулю отдельно реальные и комплексные части, мы получим две системы дифференциальных уравнений, в которых разделены реальные и комплексные части функций. Проинтегрировав эти системы, мы будем знать вид функций (11), а отношение комплексных частей к реальным на поверхности и даст нам, очевидно, углы запаздывания по соответствующим деформациям и напряжениям.

Некоторую трудность в решении данной задачи представляет лишь вопрос о виде используемой в расчетах функции Q. Для Земли распределение Q с радиусом получают обычно методом свободных колебаний. Некоторую информацию о величине Q может дать также наблюдение затухания чандлеровского периода свободных колебаний Земли и запаздывания приливных деформаций. Применение этих методов для Луны, естественно, невозможно, так что о вязкости Луны мы можем судить лишь по косвенным фактам. Поскольку при расчетах нами использовалась почти однородная модель Луны, естественно было положить и диссипативную функцию почти практически постоянной. О величине ее можно сказать следующее. Если физические условия в большей части лунных недр близки к условиям в верхней мантии Земли, то в качестве оценки Q можно принять $Q \sim 100$ (Жарков, 1960), если же, как мы упомнали выше, недра Луны характеризуются гораздо большей твердостью, то диссипативная функция может изменяться в пределах $1000 \div 10\,000$. Для обсуждения вероятности той или иной гипотезы мы имеем пока еще слишком мало данных, поэтому в нашей работе были расчитаны углы запаздывания для трех возможных величин Q : 100, 1000, 10 000. Результаты вычислений углов запаздывания представлены в таблице 3. Индекс у φ показывает по какому виду напряжений или смещений берется запаздывание.

Как видим, при $Q = 100$ результаты довольно неожиданны, поскольку углы запаздывания почти на два порядка превышают соответствующие для Земли. Если дальнейшими исследованиями этот факт подтвердится, то это может привести к полному пересмотру теории эволюции ситтемы Земля-Луна. Как показали расчеты Bodri (1973), диссипация энергии системы Земля-Луна, а следовательно и изменение элементов орбиты Луны, скорости вращения Земли и т. п., сильно зависит от принятого нами значения угла запаздывания φ_R. До сих пор болшинством исследователей углы запаздывания считались равными, примерно, $\sim 2°$ и для Земли, и для Луны. Из этого следовал вывод о том, что перераспределение энергии диссипации между Луной и Землей зависит только от соотношения их чисел Лява k (Kaula, 1964), и таким образом, дисснипация около 70% всей энергии считалась происходящей в Земле. Если Q для Луны действительно порядка 100, то предыдущий вывод, скорее всего, неверен, по-видимому, большая часть энергии в этом случае будет диссипировать в Луне. Таким образом создается возможность для заметного приливного нагрева Луны в прошлом.

При $Q = 1000$, $10\,000$ углы запаздывания слишком малы для того, чтобы привести к какой-либо заметной эволюции орбиты Луны за последние 4.5 млрд. лет. На рис. 5 a, b и представлено соответственно изменение большой полуоси a и эксцентриситета орбиты Луны e в предположении, что угол запаздывания для Земли и для Луны равен 1'. Алгоритм, согласно которому производился расчет, подробно описан в работе (Bodri, 1973). Как видим, за 4.5 млрд. лет (предполагаемый возраст системы Земля-Луна) Луна приблизилась к Земле лишь на 10 $R_\oplus$. Поскольку гипотеза образования Луны в околоземном рое предполагает образование Луны на расстоянии 10–20 $R_\oplus$ от Земли, можно считать такую малую диссипацию в Луне аргументом в пользу ее захвата.

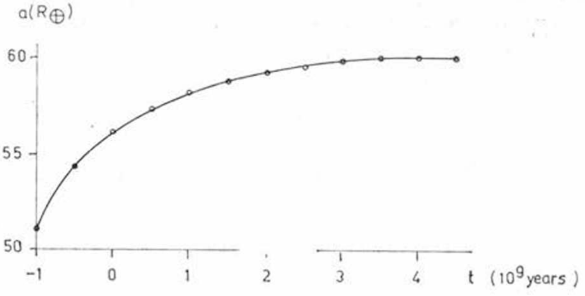

Рис. 5.а. Изменение расстояния Земля-Луна в прошлом при $\varphi_R = 1'$.

Fig. 5.a. The past variation of the earth-moon distance for $\varphi_R = 1'$.

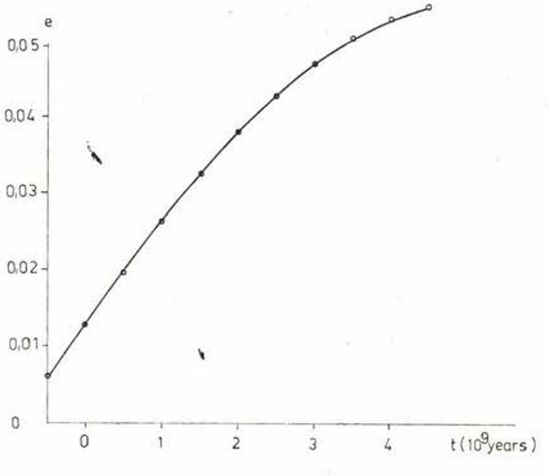

Рис. 5.ь. Изменение эксцентриситета лунной орбиты в прошлом при $\varphi_R = 1'$.

Fig. 5.b. The past variation of the eccentricity of the moon's orbit for $\varphi_R = 1'$.

В заключение сделаем некоторые выводы из приведенных расчетов. Существование высоких гор и масконов при отсутствии полного изостатического выравнивания предполагает высокую степень твердости по крайней мере внешних частей Луны. Если вся Луна однородна по плотности или по крайней мере плотность ее меняется только с изменением расстояния от центра, то ее глубокие недра должны обладать значительной твердостью, так как форма Луны не является равновесной, то есть обусловленной ее собственным гравитационным потенциалом, гравитационным потенциалом Земли и центробежной силой, вызванной вращением Луны вокруг своей оси и по орбите. Наличие концентраций масс под круглыми морями свидетельствует о том, что Луна уже была твердой в то время, когда они образовались на ранней стадии ее развития. При таких условиях недра Луны характеризуются, по-видимому, сравнительно низкими температурами, а время релаксации превосходит время существенного изменения лунной орбиты. Наиболее вероятная модель Луны в этом случае — эрто упругая почти однородная сфера, напряжения для которой мы расчитали в качестве исходной задачи. Если времена релаксации велики, то диссипация, скорее всего, низка. То есть более вероятны расчитанные нами малые углы запаздывания фаз деформаций. Если предположить, что преобладала одна и та же приливная характеристикаQ, то, интегрируя по времени назад, получаем, что Луна 4.5 млрд. лет назад находилась лишь на 10 $R_{\oplus}$ ближе к Земле, чем сейчас. Это заставляет нас либо принять гипотезу захвата, либо предположить, что в прошлом приливная диссипация была значительно больше, чем в настоящее время.

Таблица 3.

Зависимость угла запаздывания приливов на Луне от параметра Q.

Table 3.

The dependence of the moon tide phase lag on the parameter Q.

Q	100	1000	10 000
φ_H	3°·16	19'·00	1'·76
φ_T	23°·65	1°·82	14'·19
φ_R	9°·44	56'·64	3'·45

ЛИТЕРАТУРА

Arkani–Hamed, The Moon, 6 (1973).
Bodri, B., Ann. Univ. Sci. Bp., Sec. Geol., XVI (1973).
Bodri, B., Phys. Earth Planet. Inter., 9, 141–146 (1974).
Bodri, B., Nature, Vol. 254, March 27, 1975.
Farrell, W. E., Rev. Geophys. Space Phys., 10, 761–797 (1972).
Harrison, I. C., Journ. Geophys. Res., Vol. 68, N. 14 (1963).
Kaula, W. M., Revs. Geophys., Vol. 2 (1964).
Molodensky, M. S., Tr. Geofizicheskogo In-ta AN. SSSR, N. 19 (146), (1953).
Zharkov, V., N., Tr. Inst. Fiz. Zemil, 11, 36–60 (1960).