



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Fractales, patrones y dimensión

Tesis presentada para optar al título de Doctor de la Universidad de Buenos Aires en el área
Ciencias Matemáticas

Lic. Alexia Yavicoli

Directora de tesis: Dra. Ursula Molter

Consejera de estudios: Dra. Ursula Molter

Lugar de trabajo: Instituto de Investigaciones Matemáticas “Luis A. Santaló”
Buenos Aires, 21 de Diciembre de 2018

Fecha de la defensa: 06 de Marzo de 2019

Fractales, patrones y dimensión

Resumen:

Es bien sabido que si un conjunto tiene medida Lebesgue positiva, entonces contiene una copia homotética de cualquier conjunto finito. Surge entonces la pregunta natural: ¿Cuán chico puede ser un conjunto que contenga muchas configuraciones geométricas? En esta tesis demostraré entre otros resultados, que existe un conjunto pequeño y cerrado (definido explícitamente), sin puntos aislados, que contiene todo patrón finito definido por una familia de funciones que cumple ciertas condiciones. Entre otras aplicaciones, veremos que hay un conjunto de dimensión de Hausdorff cero que contiene todo patrón polinomial finito (en una o varias variables). También veremos que el conjunto de funciones bilipschitz satisfacen las condiciones, lo cual generaliza resultados anteriores sobre funciones lineales.

Uno puede hacerse la pregunta en cierto sentido opuesta: ¿Cuán grande puede ser un conjunto que no contenga ciertos patrones? En esta tesis respondo la pregunta en el caso de patrones lineales. Veremos que dados contables patrones lineales, existe un conjunto compacto (definido explícitamente) que no contiene ninguno de esos patrones y tiene dimensión de Hausdorff total, y más aún tiene medida de Hausdorff positiva para cualquier función de dimensión prefijada.

Los resultados anteriores muestran que si consideramos como noción de tamaño a la dimensión de Hausdorff, hay conjuntos grandes sin ciertos patrones, como así también conjuntos chicos con muchos patrones. Otra noción de tamaño importante es el espesor, definido por Newhouse. En esta tesis desarrollaré un trabajo en el que muestro que si un conjunto de Cantor tiene espesor grande entonces contiene progresiones aritméticas largas, como así también patrones más generales.

Además mostraré un resultado en el que estudio el tamaño (dimensiones L^q) de las proyecciones de una clase de medidas autosimilares aleatorias. En el momento de la publicación de este trabajo no se sabía casi nada para la dimensión L^q de medidas fractales con estructura de solapamiento.

Palabras clave: geometría fractal, conjuntos de Cantor, patrones, dimensión, progresiones aritméticas, espesor, medidas autosimilares.

Fractals, patterns and dimension

Abstract:

It is well known that if a set has positive Lebesgue measure, then it contains a homothetic copy of any finite set. The natural question then arises: How small can be a set that contains many geometrical configurations? In this thesis I will prove among other results, that there exists a small and closed set (explicitly defined), without isolated points, containing all finite patterns defined by a family of functions satisfying certain conditions. Among other applications, we will see that there exists a set of Hausdorff dimension zero that contains all finite polynomial patterns (in one or more variables). We will also see that the set of bilipschitz functions satisfies the conditions, which generalizes previous results on linear functions.

One can ask what is in some sense the opposite question: How large can be a set that does not contain certain patterns? In this thesis I answer the question in the case of linear patterns. We will see that given countably many linear patterns, there is a compact set (explicitly defined) that does not contain any of those patterns and has full Hausdorff dimension, and even more, has positive Hausdorff measure for any given dimension function.

The previous results show that if we consider the Hausdorff dimension as a notion of size, there are large sets without certain patterns, as well as small sets with many patterns. Another important notion of size is *thickness*, defined by Newhouse. In this thesis I will develop a work in which I show that if a Cantor set has large thickness then it contains long arithmetic progressions, as well as more general patterns.

In addition, I will develop a result in which I study the size (L^q dimensions) of the projections of a class of random self-similar measures. At the time of its publication, almost nothing was known for the L^q dimension of fractal measures with an overlapping structure.

Keywords: fractal geometry, Cantor sets, patterns, dimension, arithmetic progressions, thickness, self-similar measures.

Agradecimientos:

A mi directora por su apoyo. A mi marido, familia y amigos por estar siempre.

Índice general

1. Introducción.	7
2. Preliminares.	21
2.1. Copias de conjuntos finitos y medida de Lebesgue	21
2.2. Medida exterior de Hausdorff y dimensión	23
2.3. El principio de distribución de masa	27
2.4. Sistemas iterados de funciones	31
2.5. Proyecciones y dimensión	34
2.6. Algunos resultados de teoría ergódica	35
3. Conjuntos grandes evitando contables patrones lineales.	49
3.1. Desarrollo de un resultado previo de Keleti	51
3.2. Teorema principal del capítulo	60
3.3. Aplicaciones	64
4. Conjuntos pequeños contentiendo muchas configuraciones geométricas.	67
4.1. Desarrollo de un resultado previo de Davies, Marstrand y Taylor.	71
4.2. Intersecciones finitas y configuraciones finitas	76
4.2.1. Conjuntos pequeños con una propiedad de intersección finita	76
4.2.2. Conjuntos perfectos conteniendo toda configuración finita	95
4.3. Intersecciones infinitas e infinitas configuraciones	99
4.3.1. Pequeños conjuntos \mathcal{F}_σ con una propiedad de intersección contable .	103
4.3.2. Pequeños conjuntos \mathcal{F}_σ conteniendo toda configuración contable . . .	108
5. Espesor, juegos ganadores y configuraciones geométricas.	113
5.1. Garantizando copias homotéticas de ciertos conjuntos finitos	116
5.2. Garantizando ciertas configuraciones bilipschitz	119
6. Dimensiones L^q y proyecciones de medidas aleatorias.	123
6.1. Resultados principales	123
6.2. Demostración del Teorema 145	128
6.3. Demostración del Teorema 147	137

6.4.	Ejemplos y aplicaciones	143
6.4.1.	El caso determinístico	143
6.4.2.	Medidas autosimilares aleatorias	145
6.4.3.	Estimaciones uniformes para box-counting	147
6.4.4.	Proyecciones de medidas no-homogeneas autosimilares	148

Capítulo 1

Introducción.

Patrones y tamaño

Hay una larga historia acerca del estudio de la relación entre el tamaño de un conjunto (en algún sentido apropiado) y la presencia de patrones o configuraciones contenidas en dicho conjunto.

Intuitivamente un patrón o configuración geométrica es un conjunto de puntos que satisfacen cierta relación o que tienen cierta estructura. Hay diversas definiciones formales de patrón, a lo largo de esta tesis seremos precisos cuando sea necesario, sin embargo daremos algunas nociones de patrón para que el lector tenga una idea: un patrón puede ser tomado como cualquier copia homotética de un conjunto dado, o como un conjunto finito de puntos que anula a una función dada, o bien un conjunto de la forma $\{f(x_1), \dots, f(x_n)\}$ para cierta función f dada, o también podemos decir que $\{f_1, \dots, f_k\}$ es una configuración en un conjunto E si existe x en el dominio de todas esas funciones tal que $f_i(x) \in E$ para todo $1 \leq i \leq k$ (es decir, $\bigcap_{1 \leq i \leq k} f_i^{-1}(E) \neq \emptyset$). Cuando la función asociada es una función lineal, a dicho patrón se lo llama patrón lineal. Análogamente con los patrones polinomiales.

Uno de los ejemplos más elementales de patrones o configuraciones son las progresiones aritméticas.

Definición 1. Decimos que $\{a_1, \dots, a_n\} \subseteq \mathbb{R}^d$ es una progresión aritmética (de longitud $n \geq 3$) si existe $\vec{v} \in \mathbb{R}^d \setminus \{\vec{0}\}$ tal que $\vec{a}_{i+1} - \vec{a}_i = \vec{v}$ para todo $i \in \{1, \dots, n-1\}$.

Observación 2. $\{a_1, \dots, a_n\} \subseteq \mathbb{R}^d$ es una progresión aritmética si y solo si $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$ es un conjunto de vectores distintos verificando que $\frac{\vec{a}_i + \vec{a}_{i+2}}{2} = \vec{a}_{i+1}$ para todo $1 \leq i \leq n-2$.

Ejemplo 3. Una progresión aritmética de longitud 3 es un ejemplo de patrón lineal ya que anula a la función $f(x, y, z) := \frac{x+z}{2} - y$. Las progresiones aritméticas de mayor longitud pueden ser obtenidas también como ceros de una función lineal de más variables en donde en cada coordenada tenemos una función similar a la anterior. También se tiene que un

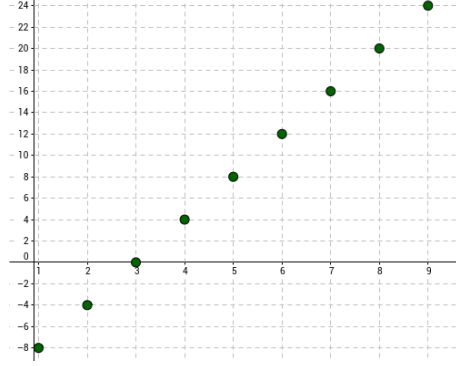


Figura 1.1: Ejemplo de progresión aritmética de longitud 9.

conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^d$ contiene una progresión aritmética de longitud k y gap $\vec{v} \neq \vec{0}$ si y solo si $\bigcap_{0 \leq i \leq k-1} f_i^{-1}(E) \neq \emptyset$ con $f_i(\vec{x}) := \vec{x} + \vec{v}i$.

Contexto discreto

Si bien a lo largo de esta tesis estudiaremos resultados en el contexto continuo (\mathbb{R}^d), a modo de motivación mencionaremos algunos resultados que se han realizado en el contexto discreto (\mathbb{Z}).

El clásico Teorema de Roth [48] da una versión cuantitativa para garantizar la existencia de progresiones aritméticas de longitud 3 en ciertos subconjuntos de los números enteros. Más específicamente, dado $\delta > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $N \geq N_0$, entonces cualquier subconjunto de $\{1, \dots, N\}$ con al menos δN elementos contiene una progresión aritmética de longitud 3.

Un problema importante desde entonces ha sido encontrar funciones $h(N)$, lo más chicas posibles, tal que para N suficientemente grande, un subconjunto de $\{1, \dots, N\}$ con $h(N)$ elementos contiene una progresión aritmética de longitud 3. La mejor h conocida con esa propiedad es

$$h(N) = \frac{(\log \log N)^4 N}{\log N},$$

como lo muestra Bloom [5], mejorando ligeramente un resultado notable anterior de Sanders [50].

El resultado de Roth fue extendido por Szemerédi [54], quien demostró que cualquier subconjunto A de los números naturales que tenga densidad superior positiva

$$\text{i.e.: } \bar{d}(A) := \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\#\{1, \dots, n\} \cap A}{n} > 0,$$

contiene progresiones aritméticas de cualquier longitud.

Es fácil construir un conjunto con densidad superior nula, conteniendo progresiones aritméticas arbitrariamente largas. Por ejemplo: $A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{n^3, n^3 + 1, \dots, n^3 + n\}$. El cual tiene progresiones aritméticas arbitrariamente largas pues para cada natural n tenemos que $\{n^3, n^3 + 1, \dots, n^3 + n\}$ es progresión aritmética de longitud $n + 1$. Además, A tiene densidad superior nula, pues para cada $N \in \mathbb{N}$ hay un único $n \in \mathbb{N}$ tal que $(n - 1)^3 \leq N < n^3$, tenemos que por ser:

$$0 \leq \frac{\#(A \cap [1, N])}{N} \leq \frac{\sum_{i=1}^n (i + 1)}{(n - 1)^3} = \frac{n^2 + 3n}{2(n - 1)^3} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0,$$

resulta $\bar{d}(A) = 0$.

Pero dado un conjunto específico con densidad superior nula, puede ser difícil saber si contiene o no progresiones aritméticas arbitrariamente largas. Un ejemplo de este hecho, que fue probado por Green y Tao [25], es que el conjunto de números primos contiene progresiones aritméticas arbitrariamente largas. Es claro que el conjunto de números primos tiene densidad superior nula (pues el Teorema de los números primos asegura que entre los primeros N números naturales hay $\sim \frac{N}{\ln N}$ números primos), por lo que el Teorema de Szemerédi no puede ser directamente aplicado.

Las progresiones aritméticas pueden ser vistas como patrones lineales; y ha habido muchos resultados similares al de Szemerédi para patrones polinomiales. Cabe hacer aquí una advertencia: las definiciones de patrón lineal como así también la de patrón polinomial pueden variar según el autor o el contexto, pero daremos una definición explícita cuando sea relevante para nosotros. Un resultado destacado es el clásico Teorema de Furstenberg-Sárközy ([23], [51]) en el que se prueba que para todo polinomio $P(n) \in \mathbb{Q}[n]$ que satisfaga $P(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{Z}$ y $P(0) = 0$, y para todo subconjunto A de los números naturales que tenga densidad superior positiva, se tiene que existen $n \in \mathbb{N}$ y $x, y \in A$ tal que $x - y = P(n)$. En particular, por ejemplo, todo subconjunto de los números naturales que tenga densidad superior positiva contiene dos números cuya diferencia es un cuadrado.

Los patrones polinomiales con coeficientes racionales también han sido estudiados en teoría de números como por ejemplo en [3], donde Bergelson y Leibman probaron que cualquier conjunto de enteros que tenga densidad positiva, contiene casi todo patrón polinomial. Más específicamente, probaron entre otros resultados que: dada $P : \mathbb{Z}^r \rightarrow \mathbb{Z}^l$ con $r, l \in \mathbb{N}$ una función polinomial satisfaciendo $P(0) = 0$ y dado un conjunto finito $F \subseteq \mathbb{Z}^r$ y un conjunto con densidad superior positiva $S \subseteq \mathbb{Z}^l$, entonces para algún $n \in \mathbb{N}$ y $u \in \mathbb{Z}^l$ se tiene que $u + P(nF) \subseteq S$. A posteriori, en [55] y [56], Tao y Ziegler estudiaron la presencia de patrones polinomiales contenidos en el conjunto de números primos.

Hasta ahora describimos resultados en los que bajo ciertas condiciones se garantiza la contención de patrones en ciertos conjuntos. Es natural entonces estudiar que pasa en la dirección opuesta, esto es bajo qué condiciones podemos garantizar que no hay ciertos patrones en ciertos conjuntos.

En [2], Behrend mostró que si

$$h(N) := cNe^{-C\sqrt{\log(N)}},$$

donde $c, C > 0$ son constantes absolutas, entonces para todo N existe un subconjunto de $\{1, \dots, N\}$ con a lo sumo $h(N)$ elementos que no contiene progresiones aritméticas. Notar que, en particular, para todo $\varepsilon > 0$, tenemos $h(N) > N^{1-\varepsilon}$ si N es suficientemente grande.

Contexto continuo

Como dijimos al comienzo, esta tesis está enfocada al estudio de esta clase de problemas pero para el contexto continuo, el cual vamos a desarrollar para contextualizar, citar resultados estrechamente relacionados, como así también introducir algunos de los resultados principales fruto de nuestro trabajo (Capítulos 3, 4, 5 y 6).

En [6] Boshernitzan y Chaika probaron la siguiente dicotomía para conjuntos de Borel $A \subseteq [0, 1]$: Si llamamos H al conjunto de todos los homeomorfismos $\phi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, vale que o bien existe un homeomorfismo $\phi \in H$ tal que la imagen $\phi(A)$ no contiene progresiones aritméticas de longitud 3; o, para todo $\phi \in H$, la imagen $\phi(A)$ contiene progresiones aritméticas de cualquier longitud finita. De hecho, ellos probaron que la primera alternativa vale si y solo si el conjunto A es una unión contable de conjuntos nunca densos.

Conjuntos pequeños conteniendo patrones

Es un resultado bien conocido (ver la Proposición 12) que si un conjunto tiene medida Lebesgue positiva, entonces tiene copia homotética ($T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ se dice una homotecia si existen $a \in \mathbb{R}_{\neq 0}, b \in \mathbb{R}^n$ tales que $T(x) = ax + b$) de cualquier conjunto finito. Surge entonces la pregunta natural: ¿Cuán chico puede ser un conjunto que contenga muchas configuraciones geométricas?

Algunas de las nociones con las que se ha estudiado esa pregunta son: dimensión de Hausdorff, y más generalmente medidas de Hausdorff para funciones de dimensión más generales. Recordaremos las definiciones más básicas:

Decimos que $h : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ es una función de dimensión si es creciente y continua a derecha, $h(0) = 0$, y $h(t) > 0$ si $t > 0$. El conjunto de funciones de dimensión es parcialmente ordenado si consideramos el orden definido por

$$h_2 < h_1 \text{ si } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{h_1(x)}{h_2(x)} = 0.$$

La medida exterior de Hausdorff asociada a h es

$$\mathcal{H}^h(E) := \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^h(E)$$

donde $\mathcal{H}_\delta^h(E) := \inf \{ \sum_i h(|U_i|) : \{U_i\}_i \text{ un } \delta\text{-cubrimiento de } E \}$.

Notaremos $\mathcal{H}^{x^s} = \mathcal{H}^s$

Se define la dimensión de Hausdorff como

$$\dim_H(E) := \inf \{ s > 0 : \mathcal{H}^s(E) = 0 \}.$$

Nosotros estamos especialmente interesados en esas nociones de tamaño, por lo que dedicamos la Sección 2.2 en los Preliminares para dar algunas de sus propiedades más relevantes.

Han habido otros resultados utilizando enfoques diferentes a los nuestros, por ejemplo relacionados con la transformada de Fourier:

En [39] Łaba y Pramanik dieron condiciones suficientes para garantizar la existencia de progresiones aritméticas de longitud 3 en conjuntos grandes. Más específicamente probaron que dado $E \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto cerrado que soporta una medida de probabilidad obedeciendo una condición de decaimiento de la masa de bolas y una condición de decaimiento para la transformada de la medida, entonces E contiene una progresión aritmética de longitud 3.

Recientemente, en [27] los autores anteriores junto con Henriot dieron condiciones suficientes que garantizan que un conjunto de \mathbb{R}^n contiene ciertos patrones polinomiales. Más específicamente, probaron que si un subconjunto de \mathbb{R}^n tiene dimensión de Hausdorff suficientemente grande y dimensión de Fourier suficientemente grande, entonces contiene patrones polinomiales de la forma

$$(x, x + A_1y, \dots, x + A_{k-1}y, x + A_ky + Q(y)e_n), \text{ con } x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m,$$

donde A_i son matrices de $n \times m$, Q es un polinomio real en m variables y $e_n = (0, \dots, 0, 1)$.

Recordemos que la dimensión de Fourier está definida por

$$\dim_F(E) := \sup\{\beta \in [0, n) : \exists \mu \in M(E) : \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\widehat{\mu}(\xi)| (1 + |\xi|)^{-\frac{\beta}{2}} < +\infty\},$$

donde $M(E)$ es el espacio de probabilidades soportadas en E y la transformada de una medida está definida como $\widehat{\mu}(\xi) := \int e^{-2ix \cdot \xi} d\mu(x)$.

Además, asumiendo una hipótesis sobre el decaimiento de la transformada de Fourier, en [7, Corolario 1.7] Chan, Łaba, y Pramanik aseguraron la existencia de vértices de triángulos equiláteros contenidos en un subconjunto del plano. Más específicamente probaron lo siguiente: Dados tres puntos distintos en el plano a, b, c , y $E \subseteq \mathbb{R}^2$ de medida de Lebesgue nula que soporta una medida positiva de Radón μ satisfaciendo las siguientes dos condiciones:

- $\sup_{x \in E, 0 < r < 1} \frac{\mu(B(x, r))}{r^\alpha} \leq C$ si $n - \varepsilon_0 < \alpha < n$,
- $\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\widehat{\mu}(\xi)| (1 + |\xi|)^{\frac{\beta}{2}} \leq C$.

con ε_0 suficientemente chico dependiendo de C y de a, b, c . Entonces E contiene tres puntos distintos x, y, z tal que el triángulo que forma x, y, z es una copia similar (posiblemente rotada) del triángulo que forma a, b, c . Donde, recordemos que una medida de Radon μ es una medida en la σ -álgebra de Borel de un espacio topológico X que satisface las siguientes tres condiciones:

- Es regular por dentro: para todo B boreliano se cumple $\mu(B) = \sup_{K \text{ compacto } \subseteq B} \mu(K)$.

- Es regular por fuera: para todo B boreliano se cumple $\mu(B) = \inf_{U \text{ abierto } \supseteq B} \mu(U)$.
- Es localmente finita: para todo punto $x \in X$, existe U entorno de x con $\mu(U) < \infty$.

Para recientes progresos en dimensiones mayores o iguales a 4, sin asumir cotas de Fourier, véase el trabajo de Iosevich y Liu [32].

Volvamos a nuestro enfoque para abordar la pregunta “¿Cuán chico puede ser un conjunto que contenga muchas configuraciones geométricas?”.

Un resultado de Davies, Marstrand y Taylor probado en [8], que desarrollaré en la Sección 4.1, dice que dada una función de dimensión h , existe un conjunto cerrado $E \subseteq \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{H}^h(E) = 0$ y $\bigcap_{i=1}^n f_i(E) \neq \emptyset$ para cualesquiera finitas funciones afines reales con pendiente no nula. Además existe un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}$ de clase \mathcal{F}_σ , tal que $\mathcal{H}^h(E) = 0$ y $\bigcap_{i \in \Lambda} (a_i E + b_i) \neq \emptyset$ (para $a_i \neq 0$) para cualquier conjunto contable Λ .

La primer parte de este Teorema fue extendida por Keleti, Nagy y Shmerkin a \mathbb{R}^N en [36].

Observar que con estos enunciados no importa considerar las imágenes o preimágenes, por tratarse de funciones lineales inversibles.

Hemos generalizado esos resultados en [57] (ver el capítulo 4): Construimos explícitamente un conjunto pequeño y cerrado (o F_σ), sin puntos aislados, que contiene toda configuración finita (o contable) en una familia dada de antemano que cumple ciertas condiciones. En particular, la familia de polinomios no constantes satisface las hipótesis, con lo cual construimos un conjunto chico que contiene toda configuración polinomial.

Más específicamente tenemos el siguiente Teorema:

Teorema 4. (ver Teorema III) Sea h una función de dimensión, \mathcal{F} una familia de funciones continuas de \mathbb{R}^N de \mathbb{R}^N tal que existe una familia contable $\Psi = \{\psi_j\}_j$ de funciones inyectivas, cerradas, continuas definidas en conjuntos cerrados $\Omega_j \subseteq \mathbb{R}^N$, en \mathbb{R}^N , y tal que ψ_j^{-1} son localmente bilipschitz con $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty, x \in \text{Im}(\psi_j)} \|\psi_j^{-1}(x)\| = +\infty$ para todo j , satisfaciendo:

- para cada $f_i \in \mathcal{F}$ existe $\psi_{r(i)} \in \Psi$ y un conjunto cerrado $D_i \subseteq \mathbb{R}^N$ tal que $\psi_{r(i)} \circ f_i|_{D_i}$ está bien definida y es bilipschitz no expansiva.
- para cada $a > 0$ y cualquier elección de finitas funciones $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{F}$, tenemos que

$$A_{a, f_1, \dots, f_n} := \bigcap_{1 \leq i \leq n} (\psi_{r(i)} \circ f_i|_{D_i})^{-1}((-a, a)^C)^N$$

contiene bolas arbitrariamente grandes.

Entonces existe un conjunto perfecto $E \subseteq \mathbb{R}^N$, tal que $\bigcap_{1 \leq i \leq n} f_i^{-1}(E) \neq \emptyset$ para cada conjunto finito de $\{f_1, \dots, f_n\} \subseteq \mathcal{F}$ y $\mathcal{H}^h(E) = 0$.

El Teorema anterior muestra, bajo ciertas condiciones, la presencia de configuraciones finitas dados por la familia de funciones. Obtuvimos también un resultado análogo para configuraciones contables:

Teorema 5. (ver Teorema 122) Sea h una función de dimensión. Sea \mathcal{F} una familia de funciones continuas definidas en un conjunto cerrado $D \subseteq \mathbb{R}^N$ conteniendo bolas arbitrariamente grandes, tal que existe $L \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ y una familia contable de funciones $\Psi := \{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ que son continuas, inyectivas y cerradas, y están definidas en conjuntos cerrados $\Omega_j \subseteq \mathbb{R}^N$, tales que ψ_j^{-1} son localmente bilipschitz, y para cada $f \in \mathcal{F}$, existe $\psi_j \in \Psi$ tal que $\psi_j \circ f$ está bien definida y es bilipschitz con constantes $(\frac{1}{L}, 1)$ en D .

Entonces existe un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^N$ de clase \mathcal{F}_σ sin puntos aislados, con $\mathcal{H}^h(E) = 0$, tal que $\bigcap_{i \in \Lambda} f_i^{-1}(E) \neq \emptyset$ para todo subconjunto contable $(f_i)_{i \in \Lambda} \subseteq \mathcal{F}$. En otras palabras, E contiene toda configuración contable de \mathcal{F} .

También probamos los resultados análogos para imágenes (en lugar de preimágenes): construimos explícitamente conjuntos pequeños y cerrados (o de clase \mathcal{F}_σ), sin puntos aislados, tal que las intersecciones finitas (o contables) de imágenes son no vacías.

Teorema 6. (ver Teorema 96) Sean h una función de dimensión, \mathcal{F} una familia de funciones continuas de \mathbb{R}^N a \mathbb{R}^N tal que existe una familia contable de funciones cerradas, inyectivas y localmente bilipschitz $\Psi = \{\psi_r : \Omega_r \rightarrow \mathbb{R}^N\}_{r \in \mathbb{N}}$ cada una definida sobre un conjunto cerrado Ω_r y satisfaciendo las siguientes condiciones:

- $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty, x \in \Omega_r} \|\psi_r(x)\| = +\infty$.
- para cada $f_i \in \mathcal{F}$ existe $\psi_{r(i)} \in \Psi$ tal que $f_i \circ \psi_{r(i)}$ es una función bilipschitz no contractiva en $\Omega_{r(i)}$
- dadas finitas funciones (cualesquiera) $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{F}$, el conjunto A_{a, f_1, \dots, f_n} definido como

$$A_{a, f_1, \dots, f_n} := \bigcap_{1 \leq i \leq n} f_i \circ \psi_{r(i)}|_{\Omega_{r(i)}} \left(\left((-a, a)^N \right)^c \right)$$

contiene bolas arbitrariamente grandes para todo $a > 0$.

Entonces existe un conjunto perfecto $E \subseteq \mathbb{R}^N$, tal que $\mathcal{H}^h(E) = 0$ y $\bigcap_{1 \leq i \leq n} f_i(E) \neq \emptyset$ para cualquier subconjunto finito $\{f_1, \dots, f_n\} \subseteq \mathcal{F}$.

Teorema 7. (ver Teorema 117) Sea h una función de dimensión, \mathcal{F} una familia de funciones continuas de \mathbb{R}^N en \mathbb{R}^N tal que existe una sucesión de funciones cerradas y localmente bilipschitz $\Psi := (\psi_j)_j$ definidas en conjuntos cerrados $\Omega_j \subseteq \mathbb{R}^N$, satisfaciendo que existe $L \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ tal que

- para cada $f_i \in \mathcal{F}$, existe $\psi_{r(i)} \in \Psi$ tal que $f_i \circ \psi_{r(i)}|_{\Omega_{r(i)}}$ está bien definida y es bilipschitz con constantes $(1, L)$;
- dadas contables funciones $(f_i)_{i \in \Lambda} \subseteq \mathcal{F}$ el conjunto

$$A_{\{f_i : i \in \Lambda\}} := \bigcap_{i \in \Lambda} f_i \circ \psi_{r(i)}(\Omega_{r(i)}),$$

contiene bolas arbitrariamente grandes.

Entonces existe un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^N$, de clase \mathcal{F}_σ , sin puntos aislados, con $\mathcal{H}^h(E) = 0$, tal que $\bigcap_{i \in \Lambda} f_i(E) \neq \emptyset$ para toda familia contable $\{f_i : i \in \Lambda\} \subseteq \mathcal{F}$.

Además mostramos algunas aplicaciones de nuestros resultados. Entre ellas construimos un conjunto E con medida \mathcal{H}^h cero (tomando h adecuadamente se puede conseguir que E tenga dimensión de Hausdorff cero) que contiene toda configuración polinomial finita (Obtuvimos este resultado para el caso de una variable como un caso particular del Teorema 111 y lo extendimos a polinomios en varias variables en el Teorema 113).

También vimos que el conjunto de funciones bilipschitz satisfacen otro de nuestros resultados (ver el Teorema 90 para una demostración directa, o bien el Teorema 104 para verlo como Corolario de los resultados generales obtenidos). En particular, construimos un conjunto de dimensión de Hausdorff cero en \mathbb{R}^n que contiene una copia trasladada de cualquier conjunto finito de puntos.

Conjuntos grandes que no contienen configuraciones

En lo descrito anteriormente construimos conjuntos muy chicos conteniendo muchas configuraciones. Al igual que en el contexto discreto, es de interés estudiar el problema en cierto sentido opuesto. Es natural entonces estudiar si podemos tener conjuntos grandes que no contengan patrones dados tales como progresiones aritméticas.

Recordemos que cualquier conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^d$ de medida de Lebesgue positiva contiene una copia similar de cualquier conjunto finito. En relación a esto, Falconer preguntó: ¿Dados un conjunto finito $A \subset \mathbb{R}$ y un conjunto $E \subseteq [0, 1]$ de dimensión de Hausdorff 1, debe E contener una copia similar de A ? Es decir, queremos saber si todo subconjunto de $[0, 1]$ de medida de Lebesgue nula pero dimensión de Hausdorff 1 debe contener una copia de todo conjunto finito.

En [34] Keleti respondió negativamente a esa pregunta, él construyó un compacto $E \subseteq \mathbb{R}$ con dimensión de Hausdorff total (es decir, dimensión de Hausdorff 1 ya que estamos en la recta real), que no contiene puntos $x_1 < x_2 \leq x_3 < x_4$ tales que $x_2 - x_1 - x_4 + x_3 = 0$. En particular, tomando $x_2 = x_3$ tenemos un conjunto de dimensión total que no tiene copia similar de una progresión aritmética de longitud 3 (es decir, no contiene una copia homotética del conjunto $\{0, 1, 2\}$). Más adelante, Keleti [35] generalizó el resultado (con $x_2 = x_3$) para contables ternas (en cualquier proporción), él mostró que para cualquier conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ de 3 elementos existe un conjunto de dimensión de Hausdorff 1 que no tiene copia similar de A . Más aún, probó que dada una familia contable de ternas de números reales, existe un conjunto de dimensión de Hausdorff 1 que no contiene copia de ninguna de esas ternas. Él lo probó usando la existencia de infinitas escalas en \mathbb{R} (ver Teorema 63), lo que es la principal diferencia con el contexto discreto. Maga [40] extendió la construcción de Keleti al plano (con la misma demostración, utilizando que $\mathbb{C} \sim \mathbb{R}^2$). Usando un método diferente, Falconer [14] había probado previamente eso para solo un triángulo.

Recordemos que todo $E \subseteq \mathbb{R}$ de medida de Lebesgue positiva contiene una copia homotética de cualquier conjunto finito. Y también vimos que hay conjuntos compactos de

dimensión de Hausdorff total (es decir, dimensión de Hausdorff 1) que no contiene ninguna copia homotética de ninguna de las contables ternas dadas de antemano. Por este motivo la dimensión de Hausdorff no parece ser tan útil a la hora de estudiar si un conjunto contiene o no patrones. Por este motivo surge la siguiente pregunta natural: Qué pasa entre dimensión de Hausdorff total y medida de Lebesgue positiva? Más específicamente: Cuán grande puede ser un conjunto (con una noción más fina de tamaño que la dimensión de Hausdorff) que evite patrones dados? La respuesta dependerá de qué clase de patrones estemos tratando de evitar.

Máthé [41] mostró que existen conjuntos de dimensión grande que no contienen ciertas configuraciones polinomiales dadas (ceros de polinomios multivariados). Más específicamente mostró lo siguiente:

Teorema 8. [41, Teorema 6.1] Sean $d \geq 1$, $(P_j)_j$ una familia contable de polinomios no nulos $P_j : \mathbb{R}^{d m_j} \rightarrow \mathbb{R}$ con coeficientes racionales. Supongamos que existe $n \in \mathbb{N}$ que es el grado máximo de los polinomios. Sean $\phi_{j,1}, \dots, \phi_{j,m_j}$ difeomorfismos C^1 en \mathbb{R}^d . Entonces existe un conjunto compacto $E \subseteq \mathbb{R}^d$ con dimensión de Hausdorff al menos $\frac{d}{n}$ tal que para cada j , E no contiene m_j puntos distintos x_1, \dots, x_{m_j} satisfaciendo $P_j(\phi_{j,1}(x_1), \dots, \phi_{j,m_j}(x_{m_j})) = 0$.

De este Teorema uno puede deducir en el caso particular en que todo P_j es lineal no nulo ($n = 1$), tomando adecuadamente las $\phi_{j,i}$ como funciones lineales con matriz asociada diagonal, que existe un conjunto compacto en \mathbb{R}^d con dimensión de Hausdorff total, evitando cualquier familia contable de patrones lineales.

Ésto generaliza los resultados de Keleti y Maga mencionados arriba.

Por otra parte, en [21] Fraser y Pramanik construyeron subconjuntos del espacio euclideo de dimension de Hausdorff grande y dimension de Minkowski total, que no contienen patrones no triviales descritos como ceros de funciones.

En todos esos trabajos los autores consideran solo dimensión de Hausdorff y no medidas de Hausdorff asociadas a funciones de dimensión más generales.

Recordemos que Máthé construyó conjuntos grandes evitando patrones polinomiales. Dichos conjuntos no tienen dimensión de Hausdorff total en el caso en que los polinomios no son lineales.

Al menos en algunos casos, no hay conjuntos de dimensión de Hausdorff total que no contengan ciertos patrones no lineales. Por ejemplo, la función para estudiar si hay tres puntos formando un ángulo recto (un conjunto no tiene tres puntos que anulen la función equivale a que el conjunto no tiene tres puntos formando un ángulo recto) está dada por el siguiente polinomio de grado 2

$$\psi(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) := \langle \vec{z} - \vec{x}, \vec{y} - \vec{x} \rangle;$$

y fue probado en [26] por Harangi, Keleti, Kiss, Maga, Máthé, Mattila y Strenner que cualquier conjunto de Borel de \mathbb{R}^2 con dimensión de Hausdorff mas grande que 1 contiene tres puntos formando un ángulo recto. En particular, no puede existir un conjunto Boreliano con dimensión de Hausdorff total que no contenga ángulos rectos.

Como queríamos estudiar conjuntos bien grandes evitando patrones, consideramos extender el resultado que dedujimos del Teorema de Máthé, considerando ahora funciones de

dimensión h con $h < x^d$ (para obtener aún información más fina) y nos enfocamos en el caso de patrones lineales (porque en otro caso no se conseguiría un conjunto grande). Más específicamente, obtuvimos el siguiente Teorema:

Teorema 9 (Ver Teorema 60). *Sea h una función de dimensión con $h < x^d$, y sea $(\psi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones lineales no nulas con $\psi_k : (\mathbb{R}^d)^{m_k} \rightarrow \mathbb{R}$ y $m_k \geq 2$. Entonces existe un conjunto compacto $E \subseteq \mathbb{R}^d$ tal que $\mathcal{H}^h(E) > 0$, y $\psi_k(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{m_k}) \neq 0$ para todos $k \in \mathbb{N}$ y todos vectores distintos $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{m_k} \in E$.*

En particular, si tomamos $h(x) := -\log(x)x^d$, obtenemos un conjunto de dimensión de Hausdorff d con las mismas propiedades.

Este resultado fue publicado en [60] y lo desarrollamos en el capítulo 3.

Garantizando la presencia de patrones

Por los resultados probados anteriormente, se ve que hay conjuntos grandes (en el sentido de dimensión de Hausdorff o de medida de Hausdorff generalizada) evitando muchos patrones, como así también conjuntos chicos conteniendo muchos patrones. Esto muestra que tanto la noción de dimensión de Hausdorff como la de medida de Hausdorff generalizada no nos ayudan a analizar la contención (o no) de patrones en el conjunto. Por este motivo es de interés buscar otra noción geométrica de tamaño que nos ayude a garantizar la presencia de patrones (tales como las progresiones aritméticas) en un conjunto dado.

En [49] Broderick, Fishman y Simmons prueban que ciertos conjuntos de Cantor centrales de la recta real contienen progresiones aritméticas de cierto orden de longitud. La forma en que abordan las demostraciones tienen un enfoque completamente diferente a los resultados que mencionamos anteriormente, ellos utilizan una herramienta conocida como juegos de Schmidt (y conjuntos ganadores). Definamos el juego utilizado por dichos autores:

Definición 10. *Sea \mathcal{H} una colección de subconjuntos cerrados de \mathbb{R}^d . Dados $\alpha, \beta, \rho > 0$ y $c \geq 0$, Alice y Bob juegan el $(\alpha, \beta, c, \rho, \mathcal{H})$ -juego bajo las siguientes reglas:*

- *Para cada $m \in \mathbb{N}_0$ Bob juega primero, y después Alice.*
- *En el turno m -ésimo, Bob juega una bola cerrada $B_m := B[x_m, \rho_m]$, satisfaciendo $\rho_0 \geq \rho$, $\rho_{m+1} \geq \beta\rho_m$, $\lim_{m \rightarrow \infty} \rho_m = 0$ y $B_0 \supseteq B_1 \supseteq \dots$.*
- *En el turno m -ésimo Alice responde eligiendo y borrando una colección contable (puede ser finita) \mathcal{A}_m de conjuntos de la forma $A(\rho_{i,m}, H_{i,m}) := \{x \in \mathbb{R}^d : d(x, H_{i,m}) \leq \rho_{i,m}\}$ con $H_{i,m} \in \mathcal{H}$ y $\rho_{i,m} > 0$. La colección de Alice debe satisfacer $\sum_i \rho_{i,m}^c \leq (\alpha\rho_m)^c$ si $c > 0$, o $\rho_{1,m} \leq \alpha\rho_m$ si $c = 0$ (en este caso Alice puede borrar solo un conjunto).*

Como $\lim_{m \rightarrow \infty} \rho_m = 0$, existe un único punto $x_\infty = \bigcap_{m \in \mathbb{N}_0} B_m$ llamado el resultado del juego.

Decimos que un conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^d$ es ganador si Alice tiene una estrategia que le garantiza que si $x_\infty \notin \bigcup_{m \in \mathbb{N}_0} \bigcup_i A(\rho_{i,m}, H_{i,m})$, entonces $x_\infty \in S$.

Dado $\varepsilon > 0$ definimos el conjunto de Cantor central $M_\varepsilon \subseteq \mathbb{R}$ que se obtiene comenzando con el intervalo $[0, 1]$ y repetidamente borrando de cada intervalo que aparece en su construcción el intervalo abierto central de longitud relativa ε .

Si \mathcal{P} es el conjunto de todos los puntos de la recta real. Broderick, Fishman y Simmons probaron que: $(-\infty, 0) \cup M_\varepsilon \cup (1, +\infty)$ es $(\frac{2\varepsilon}{(1-\varepsilon)\beta}, \beta, 0, \frac{\beta}{2}, \mathcal{P})$ -ganador para todo $\beta \in (0, 1)$. Y a partir de esto inferieron que existe una constante δ tal que M_ε contiene progresiones aritméticas de longitud $\left\lfloor \delta \frac{\frac{1}{\varepsilon}}{\log(\frac{1}{\varepsilon})} \right\rfloor$. Más aún para todo $t > 0$ suficientemente chico, M_ε contiene

no numerables progresiones aritméticas de longitud $\left\lfloor \delta \frac{\frac{1}{\varepsilon}}{\log(\frac{1}{\varepsilon})} \right\rfloor$ y gap t .

Los juegos de Schmidt tienen algunas buenas propiedades que son de ayuda para estudiar la presencia de progresiones aritméticas, como así también otras configuraciones, a saber: monotonía, propiedad de intersección contable e invariancia bajo similitudes.

Se pudo extender el resultado antes mencionado a una clase de conjuntos de Cantor mucho más generales usando la noción de “espesor” dada por Newhouse (la cual es otra noción bien conocida de tamaño) como así también a la clase de configuraciones contenidas en dicho conjunto de Cantor. Si bien las demostraciones son simples, los conceptos de espesor y de juegos de Schmidt no se habían relacionado hasta ahora. Esos resultados forman parte de un trabajo en progreso [61], el cual será desarrollado en el Capítulo 5.

Un conjunto de Cantor general C en la recta real puede ser construido empezando con un intervalo cerrado y sucesivamente removiendo intervalos abiertos (gaps), los cuales los podemos listar en orden decreciente de longitud. Cada gap G_n es removido de un intervalo cerrado I_n , dejando detrás dos nuevos intervalos cerrados en $I_n \setminus G_n$, los cuales llamamos L_n (el de la izquierda) y R_n (el de la derecha). Notamos $|I|$ a la longitud del intervalo I , y $\text{conv}(C)$ a la cápsula convexa del conjunto C . Newhouse definió el espesor de C como

$$\tau(C) := \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{\min\{|L_n|, |R_n|\}}{|G_n|}.$$

Se demostró que si C es un conjunto de Cantor general con $\text{conv}(C) = [0, 1]$ y $\tau := \tau(C) > 0$, entonces $S := (-\infty, 0) \cup C \cup (1, +\infty)$ es $(\frac{1}{\tau\beta}, \beta, 0, \frac{\beta}{2}, \mathcal{P})$ -ganador para todo $\beta \in (0, 1)$. Y a partir de esto se infirió que existe una constante δ tal que si $\tau(C)$ es suficientemente grande entonces C contiene no numerables copias homotéticas de cualquier conjunto finito con a lo sumo $\left\lfloor \delta \frac{\tau}{\log(\tau)} \right\rfloor$ elementos. Y más aún si el diámetro del conjunto finito es suficientemente chico, las copias son solo translaciones.

Dimensión de las proyecciones de medidas aleatorias

Por otra parte, en otra dirección estudiamos otro problema enfocado a conocer el tamaño de las proyecciones de medidas aleatorias.

En los últimos años ha habido un gran interés en entender el tamaño de imágenes lineales (y no lineales) de conjuntos y medidas. Aquí tamaño puede referirse a alguna dimensión fractal o a la medida de Lebesgue/continuidad absoluta.

Incluso si uno se refiere a los conjuntos, las demostraciones implican por lo general medidas soportadas en ellos. En el Capítulo 6, en el cual desarrollamos los resultados que obtuvimos en [24], nos ocupamos principalmente de las medidas (por una medida, siempre nos referimos a una medida local finita de Borel en algún espacio euclidiano). Si μ es una medida en un espacio X y $f : X \rightarrow Y$ es una función, denotamos el push-forward de μ vía f como $f\mu$, esto es, $f\mu(B) = \mu(f^{-1}B)$ siempre que $f^{-1}(B)$ sea medible. Un principio heurístico es que si μ es una medida en \mathbb{R}^d , $\Pi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^k$ es una “buena” función Lipschitz y \dim es alguna noción de dimensión para medidas, entonces “típicamente” $\Pi\mu$ es “tan grande como sea posible” en el sentido que $\dim \Pi\mu = \dim \mu$ si $\dim \mu \leq k$, y $\dim \Pi\mu = k$ si $\dim \mu > k$ (en el último caso, se espera que también $\Pi\mu$ sea absolutamente continua).

Una versión precisa de esta heurística está dada por el Teorema de proyección de Marstrand (y sus variantes) el cual, para el caso de las medidas, dice que, para cualquier medida μ en \mathbb{R}^d , hay una igualdad $\dim \Pi\mu = \min(\dim \mu, k)$ para casi toda función lineal $\Pi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^k$, siempre que \dim sea la dimensión de Hausdorff o la dimensión L^q ($1 < q \leq 2$) (esas nociones de dimensión serán definidas después). Ver por ejemplo [42, Capítulo 9] y [30, Teorema 1.1]. Para medidas con cierta estructura, como por ejemplo las medidas autosimilares o las medidas invariantes bajo algún sistema dinámico, uno quisiera poder decir más, idealmente encontrar el conjunto excepcional preciso de funciones lineales Π .

Los primeros resultados de este tipo fueron obtenidos en [9, 20, 46]. La dimensión de Hausdorff (inferior) de una medida μ es

$$\dim_{\text{H}} \mu = \inf\{\dim_{\text{H}} A : \mu(A) > 0\},$$

donde $\dim_{\text{H}} A$ es la dimensión de Hausdorff de A . Un método general para acotar la dimensión de Hausdorff de medidas proyectadas fue desarrollado en [29], con aplicaciones y variantes dadas en [1, 16, 18, 19]. Entre otras cosas, la igualdad $\dim_{\text{H}} \Pi\mu = \min(\dim_{\text{H}} \mu, k)$ se establece para muchas clases de medidas (satisfaciendo ciertas condiciones necesarias), incluyendo medidas autosimilares determinísticas y aleatorias en conjuntos autosimilares, productos de $\times m$ -invariantes medidas en $[0, 1]$, medidas de Bernoulli para el espacio simbólico natural de códigos de los $(\times m, \times n)$ -automorfismos del toro, y *todas* las funciones lineales Π (aparte de las excepciones obvias). En [28] se logra un avance en las dimensiones de medidas autosimilares que también tiene aplicaciones en la dimensión de las proyecciones, ver [53].

Aunque la dimensión de Hausdorff es sin duda relevante, hay muchas otras nociones de dimensión de una medida que son también importantes tanto en matemática como en sus aplicaciones. El principal de ellos es la familia de dimensiones L^q : Sea

$$C_{\mu}^q(n) := \sum_{I \in \mathcal{D}_n} (\mu(I))^q, \quad (1.1)$$

donde \mathfrak{D}_n es la familia de cubos diádicos $\{2^{-n} \cdot ([0, 1]^d + j) : j \in \mathbb{Z}^d\}$ en \mathbb{R}^d . Para $q > 0, q \neq 1$, la dimensión L^q inferior $\underline{D}_q(\mu)$ es el exponente de escala (inferior) adecuadamente normalizado de $C_\mu^q(n)$ cuando $n \rightarrow \infty$:

$$\underline{D}_q(\mu) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log C_\mu^q(n)}{-n(q-1)}.$$

Por simplicidad a lo largo del Capítulo 6 siempre tomaremos logaritmos en base 2, a menos que se indique lo contrario. La dimensión L^q superior \overline{D}_q está definida análogamente. Cuando el límite existe, se denota como $D_q(\mu)$ y en este caso decimos que existe la dimensión L^q . Es de especial relevancia el caso $q = 2$; D_2 es también conocida como la *dimensión de correlación* de μ . Esto se debe en parte a que la dimensión inferior de correlación puede ser definida en término de energías:

$$\underline{D}_2(\mu) = \sup \left\{ s \geq 0 : \int \int |x - y|^{-s} d\mu(x) d\mu(y) < \infty \right\}.$$

La función $q \mapsto \underline{D}_q(\mu)$ es no creciente, y $\underline{D}_q(\mu) \leq \dim_{\text{H}} \mu \leq \overline{D}_{q'}$ para $q' < 1 < q$ (ver por ejemplo [17]). En general, $q \mapsto D_q(\mu)$ puede ser estrictamente decreciente (esto es un reflejo de lo que se llama “multifractalidad” de μ), pero también puede ser constante. Por ejemplo, si μ es Ahlfors-regular con exponente d (esto es, si $C^{-1} r^d \leq \mu(B(x, r)) \leq C r^d$ para todo $x \in \text{sop}(\mu)$) entonces $D_q(\mu) = \dim_{\text{H}} \mu = d$ para todo q . Para muchas medidas, como las medidas autosimilares, el límite en la definición de D_q es sabido que existe, ver [47].

El único resultado previo en dimensiones L^q de todas las medidas proyectadas (a diferencia de casi todo) fue obtenido en [43]. Allí se demuestra que si μ, ν son medidas autosimilares satisfaciendo ciertas condiciones naturales, entonces para cualquier $q \in (1, 2]$,

$$D_q(\Pi(\mu \times \nu)) = \min(D_q(\mu \times \nu), 1)$$

para toda proyección ortogonal Π sobre rectas, distintas de las rectas principales (las cuales son claramente excepcionales para productos).

Hemos podido probar la preservación de las dimensiones L^q para $q \in (1, 2]$ bajo cualquier proyección, para una clase de medidas en el plano que incluyen ciertas medidas autosimilares, estocasticamente autosimilares y ciertos productos de medidas (ver [24]). Las definiciones precisas se darán en el capítulo 6. Entre otras aplicaciones, mejoramos el resultado principal de [43] en varias direcciones, y obtenemos una demostración diferente (y de alguna manera más elemental) de un resultado sobre proyecciones de [29] y la mejoramos en algunos casos especiales.

Seguimos el enfoque general de [43], con variantes adecuadas. Un elemento central en el resultado principal de [43] es la existencia de cierto cociclo subaditivo sobre una rotación irracional. En nuestro trabajo también hay un cociclo subaditivo en el núcleo de las demostraciones, pero la transformación base ahora es una extensión circular del espacio de códigos. La mayor parte del trabajo adicional está relacionado con el estudio de ese objeto dinámico más complejo. Sin embargo, mostramos también algunas generalizaciones y aclaraciones que también son válidas en el contexto determinístico de [43].

Capítulo 2

Preliminares.

2.1. Copias de conjuntos finitos y medida de Lebesgue

Definición 11. $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ se dice una **homotecia** si existen $a \in \mathbb{R}_{\neq 0}$, $b \in \mathbb{R}^n$ tales que $T(x) = ax + b$.

Y se dice que $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $B \subseteq \mathbb{R}^n$ son **homotéticos** (o que B es copia homotética de A), si existe una homotecia T tal que $T(A) = B$

Veamos que si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto finito y $E \subseteq \mathbb{R}^n$ tiene medida de Lebesgue positiva, entonces E contiene una copia homotética de A . Notaremos con \mathcal{L} a la medida de Lebesgue.

Proposición 12. Sean $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto medible Lebesgue, de medida Lebesgue positiva; y $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto finito.

Entonces, existen $a \in \mathbb{R}_{\neq 0}$, $b \in \mathbb{R}^n$ tales que $aA + b \subseteq E$.

Para probar esta proposición, utilizaremos los siguientes lemas:

Lema 13. Si A_1, \dots, A_m son subconjuntos de $[0, 1]^n$ tales que $\mathcal{L}(A_i) \geq 1 - \varepsilon_i$; entonces $\mathcal{L}(\bigcap_{1 \leq i \leq m} A_i) \geq 1 - \sum_{1 \leq i \leq m} \varepsilon_i$.

Demostración.

$$\begin{aligned} 1 - \mathcal{L}\left(\bigcap_{1 \leq i \leq m} A_i\right) &= \mathcal{L}\left([0, 1]^n \setminus \bigcap_{1 \leq i \leq m} A_i\right) \\ &= \mathcal{L}\left(\bigcup_{1 \leq i \leq m} ([0, 1]^n \setminus A_i)\right) \\ &\leq \sum_{1 \leq i \leq m} \mathcal{L}([0, 1]^n \setminus A_i) \\ &\leq \sum_{1 \leq i \leq m} \varepsilon_i. \end{aligned}$$

□

Lema 14. Si $B \subseteq [0, 1]^n$ y $\|v\| \leq r$, entonces

$$\mathcal{L}((B - v) \cap [0, 1]^n) \geq \mathcal{L}(B) - nr.$$

Demostración. Como $B - v = [(B - v) \cap [0, 1]^n] \cup [(B - v) \cap ([0, 1]^n)^c]$, tomando medida de Lebesgue y despejando,

$$\mathcal{L}((B - v) \cap [0, 1]^n) = \mathcal{L}(B) - \mathcal{L}((B - v) \cap ([0, 1]^n)^c).$$

Utilizando que $B - v \subseteq [0, 1]^n - v$, se tiene

$$\mathcal{L}((B - v) \cap [0, 1]^n) \geq \mathcal{L}(B) - \mathcal{L}([0, 1]^n - v \cap ([0, 1]^n)^c).$$

Y como $([0, 1]^n - v) \cap ([0, 1]^n)^c$ se puede cubrir con n paralelepípedos donde cada uno de ellos tiene medida de Lebesgue igual a r ,

$$\mathcal{L}((B - v) \cap [0, 1]^n) \geq \mathcal{L}(B) - nr.$$

□

Demostración de la Proposición 12. Como A es finito, $A = \{a_0, \dots, a_m\}$, sea $R = \max_{0 \leq i \leq m} \|a_i\|$. Por el Teorema de densidad de Lebesgue, sabemos que para casi todo $x \in E$,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}(E \cap Q_r(x))}{\mathcal{L}(Q_r(x))} = 1$$

donde $Q_r(x) = \prod_{i=1}^n [x_i - r, x_i + r]$

Entonces, existe un $r_0 > 0$ tal que $\frac{\mathcal{L}(E \cap Q_{r_0}(x))}{\mathcal{L}(Q_{r_0}(x))} > 1 - \frac{1}{10m}$

Podemos suponer que $Q_{r_0}(x) = \prod_{i=1}^n [0, 1]$ (Pues si no trasladamos y reescalamos E).

Es suficiente mostrar que

$$\bigcap_{0 \leq i \leq m} \left(E - \frac{a_i}{10Rmn} \right) \neq \emptyset. \quad (2.1)$$

Pues así valdría que

$$\exists b \in \left(E - \frac{a_i}{10Rmn} \right) \forall 0 \leq i \leq m.$$

Con lo cual sería

$$\exists b \text{ tal que } \frac{a_i}{10Rmn} + b \in E \text{ para todo } 0 \leq i \leq m.$$

Es decir,

$$A \frac{1}{10Rmn} + b \subseteq E,$$

como queríamos probar.

Para probar (2.1), basta ver que

$$\mathcal{L}\left(\bigcap_{0 \leq i \leq m} \left(E - \frac{a_i}{10Rmn}\right)\right) > 0.$$

Notemos que

$$\mathcal{L}\left(\bigcap_{1 \leq i \leq m} \left(E - \frac{a_i}{10Rmn}\right)\right) \geq \mathcal{L}\left(\bigcap_{1 \leq i \leq m} \left((E \cap [0, 1]^n - \frac{a_i}{10Rmn}) \cap [0, 1]^n\right)\right). \quad (2.2)$$

Por ser $\mathcal{L}(E \cap [0, 1]^n) \geq 1 - \frac{1}{10m}$, y por ser $\frac{a_i}{10Rmn}$ un vector de norma menor o igual que $\frac{1}{10mn}$, resulta utilizando el Lema 14 que,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left((E \cap [0, 1]^n - \frac{a_i}{10Rmn}) \cap [0, 1]^n\right) &\geq \mathcal{L}(E \cap [0, 1]^n) - n \frac{1}{10mn} \\ &\geq 1 - \frac{1}{10m} - \frac{1}{10m} \\ &= 1 - \frac{1}{5m}. \end{aligned}$$

Utilizando lo recién visto junto con el Lema 13, tenemos de (2.2), que:

$$\mathcal{L}\left(\bigcap_{1 \leq i \leq m} \left(E - \frac{a_i}{10Rmn}\right)\right) \geq 1 - m \frac{1}{5m} = \frac{4}{5} > 0$$

□

2.2. Medida exterior de Hausdorff y dimensión

Usaremos la notación $|U|$ para el diámetro del conjunto U .

Definición 15. Si $E \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i$ con $0 < |U_i| \leq \delta$ para todo i , decimos que $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es un δ -cubrimiento de E .

Definición 16. El espacio de funciones de dimensión está definido como

$$H := \left\{ h : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : \begin{array}{l} h(t) > 0 \text{ si } t > 0, h(0) = 0, \\ \text{creciente y continua a derecha} \end{array} \right\}.$$

Éste conjunto es parcialmente ordenado si consideramos el orden definido por

$$h_2 < h_1 \text{ si } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{h_1(x)}{h_2(x)} = 0.$$

Definición 17. La medida exterior de Hausdorff asociada a h es

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^h(E) &:= \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^h(E) \\ &= \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_\delta^h(E),\end{aligned}$$

donde $\mathcal{H}_\delta^h(E) := \inf \{ \sum_i h(|U_i|) : \{U_i\}_i \text{ un } \delta\text{-cubrimiento de } E \}$.

Para cualquier $h \in H$, \mathcal{H}^h es una medida de Borel. Esta definición generaliza la medida exterior α -dimensional de Hausdorff, la cual es el caso particular $h(x) := x^\alpha$. La relación de orden dice que $x^s < x^t$ si y solo si $s < t$.

Usualmente se suele notar $\mathcal{H}^{x^s} = \mathcal{H}^s$

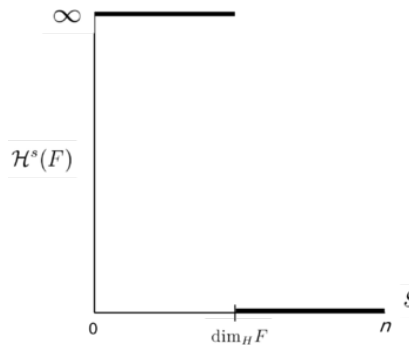
Son bien conocidos los siguientes hechos, que pueden encontrarse en cualquier libro clásico de geometría fractal (como por ejemplo [13], [15], [42]):

- \mathcal{H}^h es una medida exterior
- \mathcal{H}^h es \mathcal{G}_δ -regular; y en particular Borel-regular.
- Si $\mathcal{H}^{h_1}(E) > 0$ y $h_2 < h_1$, entonces $\mathcal{H}^{h_2}(E) = +\infty$. En particular, si $\mathcal{H}^t(E) > 0$ y $s < t$, entonces $\mathcal{H}^s(E) = +\infty$ (Y por contrarrecíproco, si $\mathcal{H}^s(E) < +\infty$ y $t > s$, entonces $\mathcal{H}^t(E) = 0$. Esto hace que tenga sentido la siguiente definición).

Definición 18. Se define la dimensión de Hausdorff como,

$$\begin{aligned}\dim_H(E) &:= \sup\{s > 0 : \mathcal{H}^s(E) = +\infty\} \\ &= \inf\{s > 0 : \mathcal{H}^s(E) = 0\}.\end{aligned}$$

En la definición anterior, tomamos la convención de que $\sup(\emptyset) = 0$ y que $\inf(\emptyset) = +\infty$. Notar que tenemos una gráfica de la forma:



- La dimensión de Hausdorff es una noción de tamaño que puede ser útil a la hora de comparar conjuntos que tienen medida de Lebesgue nula. Los conjuntos contables tienen dimensión cero, las rectas tienen dimensión 1, los planos 2, etc. Hay, sin embargo, muchos conjuntos irregulares que tienen dimensión de Hausdorff no entera, por ejemplo el conjunto ternario de Cantor tiene dimensión de Hausdorff $\frac{\log(2)}{\log(3)}$ (el 2 tiene que ver con la cantidad de intervalos hijos en cada paso de la construcción, y el 3 con el factor de contracción).
- La medida exterior de Hausdorff \mathcal{H}^s generaliza la idea de longitud, área y volumen. Al considerar $s = 0$, es la medida de contar puntos. Cuando tomamos $s = 1$ es la longitud, y para $s = n$ es proporcional a la medida de Lebesgue n -dimensional (esto puede verse, por ejemplo, en el libro [59] Teorema 11.16).
- Todo conjunto de medida de Lebesgue positiva, tiene dimensión de Hausdorff total, pero la vuelta no es cierta.
- Las funciones de dimensión h juegan un rol analogo a las funciones h en el caso discreto. En el contexto discreto tiene sentido definir $h_2 < h_1$ si $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{h_2(N)}{h_1(N)} = 0$, tal que un conjunto con $h_1(N)$ elementos sea más grande que un conjunto con $h_2(N)$ elementos si N es suficientemente grande. En el caso continuo, tenemos que si E es un conjunto, $h_2 < h_1$ (ver la definición del orden en la Definición 16) y $\mathcal{H}^{h_1}(E) > 0$, entonces $\mathcal{H}^{h_2}(E) = +\infty$. En particular, si E es un conjunto, y $h_2 < h_1$; entonces $\mathcal{H}^{h_1}(E) \leq \mathcal{H}^{h_2}(E)$. Por lo tanto si uno busca conseguir que un conjunto E sea grande, es preferible una condición del tipo $\mathcal{H}^{h_1}(E) > 0$ antes que $\mathcal{H}^{h_2}(E) > 0$ donde $h_2 < h_1$. Así tanto en el caso continuo como en el discreto la función h indica el tamaño del conjunto.

Recordemos la siguiente definición y propiedades:

Definición 19. $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ se dice una similaridad si existe $a \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $\|T(x) - T(y)\| = a \|x - y\|$.

Y se dice que $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $B \subseteq \mathbb{R}^n$ son similares, si existe una similaridad T tal que $T(A) = B$

Observación 20. En el caso $n = 1$ las definiciones de similaridad y homotecia coinciden. Toda homotecia es similaridad, cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$.

Propiedad 21 (Propiedad de reescalamiento de la medida exterior de Hausdorff). Si $g : F \rightarrow \mathbb{R}$ es una función bilipschitz (esto es existen constantes positivas tal que $c_1|x - y| \leq |g(x) - g(y)| \leq c_2|x - y|$ para todo $x, y \in F$), si $A \subseteq F$ tenemos que $c_1^s \mathcal{H}^s(A) \leq \mathcal{H}^s(g(A)) \leq c_2^s \mathcal{H}^s(A)$.

Y en particular si g es una similaridad con constante c , resulta $\mathcal{H}^s(g(A)) = c^s \mathcal{H}^s(A)$ (con lo cual también vale para homotecias, las cuales son un caso particular de similaridades).

En cualquier caso, eso nos dice que $\dim_H(g(A)) = \dim_H(A)$.

Lema 22. Sea h función de dimensión. Existe un conjunto denso $G \subseteq \mathbb{R}^N$, de clase \mathcal{G}_δ , con $\mathcal{H}^h(G) = 0$.

Demostración. Sea $(q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una enumeración de \mathbb{Q}^N . Construiremos un conjunto G tal que $\mathbb{Q}^N \subseteq G \subseteq \mathbb{R}^N$, de clase \mathcal{G}_δ , con $\mathcal{H}^h(G) = 0$.

Elijamos $(\delta_k)_{k \in \mathbb{N}} \in (0, 1]$, tal que $h\left(\frac{\delta_k}{m}\right) \leq \frac{1}{m} \frac{1}{2^k}$.

Tomemos

$$A_m := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B\left(q_k, \frac{1}{2m} \delta_k\right),$$

el cual es abierto y contiene a \mathbb{Q}^N . Y consideremos

$$G := \bigcap_{m \in \mathbb{N}} A_m,$$

que es de clase \mathcal{G}_δ y contiene a \mathbb{Q}^N .

Cualquier bola de A_m tiene diámetro menor o igual que $\frac{1}{m}$, y forman un $\frac{1}{m}$ -cubrimiento de G . Así, para cualquier $m \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^h_{\frac{1}{m}}(G) &\leq \sum_{k \in \mathbb{N}} h\left(|B\left(q_k, \frac{1}{2m} \delta_k\right)|\right) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} h\left(\frac{\delta_k}{m}\right) \\ &\leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{m} \frac{1}{2^k} \\ &= \frac{1}{m} \end{aligned}$$

Haciendo $m \rightarrow +\infty$, tenemos que $\mathcal{H}^h(G) = 0$. □

Recordemos que el Teorema de Baire nos dice que la intersección de contables abiertos densos en un espacio métrico completo, es densa.

Observación 23. Notemos que dada h función de dimensión, vimos que existe un conjunto denso $G \subseteq \mathbb{R}^N$, de clase \mathcal{G}_δ , con $\mathcal{H}^h(G) = 0$. Podemos escribir $G = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k$ con A_k abierto denso.

Notemos que si $f_i : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ es un homeomorfismo para todo $i \in \Lambda \subseteq \mathbb{N}$, tenemos que

$$\bigcap_{i \in \Lambda} f_i(G) = \bigcap_{i \in \Lambda} \bigcap_{k \in \mathbb{N}} f_i(A_k)$$

es intersección contable de conjuntos abiertos densos, y (por Baire) es densa en \mathbb{R}^N (y por lo tanto no vacía).

Así existe un conjunto denso $G \subseteq \mathbb{R}^N$, de clase \mathcal{G}_δ , con $\mathcal{H}^h(G) = 0$, tal que $\bigcap_{i \in \Lambda} f_i(G) \neq \emptyset$ para toda familia contable de homeomorfismos.

Esto nos muestra que no es difícil conseguir conjuntos de clase \mathcal{G}_δ tal que al intersecar su imagen por contables homeomorfismos es no vacía. Por este motivo, es que nos enfocamos en el Capítulo 4 en trabajar con conjuntos cerrados o de clase \mathcal{F}_σ .

2.3. El principio de distribución de masa

Una **distribución de masa** μ en $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es una medida exterior soportada en E con $0 < \mu(E) < +\infty$.

Proposición 24 (Principio de distribución de masa generalizado). *Sea μ una distribución de masa en $E \subseteq \mathbb{R}^n$ y sea h una función de dimensión tal que existen $c > 0$ y $\varepsilon > 0$ satisfaciendo que*

$$\mu(U) \leq ch(|U|) \quad \forall U \text{ si } |U| \leq \varepsilon.$$

Entonces

$$0 < \frac{\mu(E)}{c} \leq \mathcal{H}^h(E).$$

Demostración. Sea $\delta \in (0, \varepsilon)$. Si $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es un δ -cubrimiento de E , entonces

$$0 < \mu(E) \leq \mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i\right) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(U_i) \leq c \sum_{i \in \mathbb{N}} h(|U_i|).$$

Tomando ínfimo sobre los δ -cubrimientos, tenemos que

$$0 < \mu(E) \leq c\mathcal{H}_\delta^h(E).$$

Y ahora tomando límite de $\delta \rightarrow 0$ obtenemos que $0 < \mu(E) \leq c\mathcal{H}^h(E)$, por lo tanto

$$0 < \frac{\mu(E)}{c} \leq \mathcal{H}^h(E).$$

□

Una cota inferior para la dimensión de Hausdorff

Probaremos ahora una cota inferior para la dimensión de Hausdorff, para la cual necesitaremos el principio de distribución de masa y el siguiente Lema:

Lema 25. *Sea $(m_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números naturales mayores o iguales que 2. Supongamos que para cada $k \in \mathbb{N}$, se tiene un conjunto cerrado $E_k \subseteq \mathbb{R}$ que es una unión de $m_1 \cdots m_k$*

intervalos cerrados disjuntos, de forma tal que cada intervalo de E_k es una unión de m_{k+1} de los intervalos de E_{k+1} . Notemos en particular que $E_k \supset E_{k+1}$. Sea

$$E := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} E_k.$$

Definimos, para cada I^k intervalo de E_k , $\mu_0(I^k) := \frac{1}{m_1 \cdots m_k}$. Entonces,

$$\mu(A) := \inf \left\{ \sum_j \mu_0(I_j) : \{I_j\}_j \text{ es un cubrimiento de } A \right\}$$

es una medida exterior en E , tal que $\mu(E \cap I^k) = \frac{1}{m_1 \cdots m_k}$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Durante la demostración, I^k denota cualquiera de los intervalos que componen E_k .

Veamos que μ es una medida exterior en E .

- $\mu(\emptyset) = 0$ pues por ser I^k cubrimiento del conjunto vacío,

$$0 \leq \mu(\emptyset) \leq \mu_0(I^k) = \frac{1}{m_1 \cdots m_k}$$

Y como esto vale cualquiera sea $k \in \mathbb{N}$, haciendo $k \rightarrow \infty$ tenemos lo requerido.

- Sean $A \subseteq B$ subconjuntos de E , veamos que $\mu(A) \leq \mu(B)$. Como todo cubrimiento de B , es un cubrimiento de A , tenemos que

$$\begin{aligned} \mu(A) &:= \inf \left\{ \sum_j \mu_0(I_j) : \{I_j\}_j \text{ es un cubrimiento de } A \right\} \\ &\leq \inf \left\{ \sum_j \mu_0(I_j) : \{I_j\}_j \text{ es un cubrimiento de } B \right\} =: \mu(B). \end{aligned}$$

- Veamos que $\mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$.

Sea $\{I_j\}_{j \in J}$ un cubrimiento de $A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Como estamos considerando el ínfimo en la definición de μ , podemos suponer sin pérdida de generalidad que cada I_j interseca a $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$; es decir, que cada I_j interseca a al menos un A_k . Así para cada $k \in \mathbb{N}$, A_k se cubre con $\{I_j\}_{j \in B_k}$, donde por la suposición anterior $\bigcup_{j \in J} B_j = J$. Entonces,

$$\mu(A) \leq \sum_{j \in J} \mu_0(I_j) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{j \in B_k} \mu_0(I_j).$$

Con lo cual, tomando ínfimo a derecha (sobre los cubrimientos de A_k),

$$\mu(A) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(A_k).$$

Sea $k \in \mathbb{N}$ e I^k un intervalo de E_k , veamos que $\mu(E \cap I^k) = \frac{1}{m_1 \cdots m_k}$.

- Por ser I^k un cubrimiento particular de $I^k \cap E$, tenemos que

$$\mu(I^k \cap E) \leq \mu_0(I^k) = \frac{1}{m_1 \cdots m_k}.$$

Y cualquier cubrimiento que tenga algún intervalo de pasos anteriores a k daría un número mayor. Con lo cual, para estimar $\mu(I^k \cap E)$, nos interesa mirar cubrimientos cuyos intervalos sean del nivel k en adelante.

- Sea $\{I_j\}_j$ un cubrimiento de $I^k \cap E$. Podemos suponer, por definición de μ , que todo intervalo del cubrimiento interseca a $I^k \cap E$.

Podemos suponer también que el cubrimiento es finito. Pues como $I^k \cap E$ es un conjunto compacto, cubierto por $\{I_j\}_j$, donde para cualquier j es $E \cap I_j$ abierto en E ; entonces existe un subcubrimiento finito: I_1, \dots, I_N .

Finalmente, podemos suponer que I_1, \dots, I_N son disjuntos. Pues si dos de los intervalos se intersecan, uno está contenido en el otro (por construcción), así que podríamos sacar el más pequeño del cubrimiento.

Llamemos k_1, \dots, k_N a los niveles que pertenecen I_1, \dots, I_N respectivamente. Sea $K := \max\{k_1, \dots, k_N\}$. Podemos hacer la siguiente reducción: El intervalo I_K está contenido en un único I^{K-1} intervalo de E_{K-1} . Si $K > k$, por ser K el máximo, y los intervalos que cubren I^k disjuntos; entonces todo intervalo del paso K que esté contenido en I^{K-1} debe estar en el cubrimiento finito. Por ser

$$\sum_{I_j \subseteq I^{K-1}} \mu_0(I_j) = m_K \frac{1}{m_1 \cdots m_K} = \frac{1}{m_1 \cdots m_{K-1}} = \mu_0(I^{K-1}),$$

podemos cambiar el cubrimiento finito que teníamos por uno con estrictamente menos elementos, reemplazando todos los $I_j \subseteq I^{K-1}$ por I^{K-1} . Iterando esto, llegamos en finitos pasos, a que el cubrimiento tomado era equivalente al cubrimiento $\{I^k\}$.

Así por los dos últimos items, tenemos que $\mu(E \cap I^k) = \frac{1}{m_1 \cdots m_k}$, como queríamos probar. \square

Ahora estamos en condiciones de probar el siguiente Teorema, utilizando el Principio de distribución de masa (Proposición 24) y el Lema anterior.

Teorema 26. *Sea $(\delta_k)_k$ una sucesión decreciente de números positivos, convergentes a 0; y sea $(m_k)_k$ una sucesión de números naturales mayores o iguales que 2. Supongamos que $(E_k)_k$ es una sucesión de conjuntos compactos tales que se cumple lo siguiente:*

- $E_0 = [0, 1]$.

- E_k es una unión de $m_1 \cdots m_k$ intervalos cerrados disjuntos separados por distancias de al menos δ_k .
- Cada uno de los intervalos que compone E_k contiene exactamente m_{k+1} de los intervalos que componen E_{k+1} .

Llamando $E = \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} E_k$, tenemos que

$$\dim_H(E) \geq \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\log(m_1 \cdots m_{k-1})}{-\log(m_k \delta_k)}.$$

Demostración. Si $\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\log(m_1 \cdots m_{k-1})}{-\log(m_k \delta_k)} \leq 0$, como $\dim_H(E) \geq 0$, no hay nada que probar.

Si no, definimos una distribución de masa en E que a cada intervalo del paso k (hay $m_1 \cdots m_k$ intervalos), le asigna masa $\frac{1}{m_1 \cdots m_k}$ (esto es posible por el Lema 25).

Dado un intervalo U con $0 \leq |U| \leq \delta_1$, estimemos $\mu(U)$:

Existe un único $k \geq 2$ tal que $\delta_k \leq |U| < \delta_{k-1}$ (pues $(\delta_k)_k$ decrece a cero y $0 < |U| < \delta_1$).

1. La cantidad de intervalos del nivel k que intersecan a U es a lo sumo m_k .
Pues como $|U| < \delta_{k-1}$ entonces U interseca como mucho a un intervalo del paso $k-1$, luego U interseca como mucho a m_k intervalos del paso k .
2. La cantidad de intervalos del nivel k que intersecan U es como mucho $\frac{2|U|}{\delta_k}$.
Pues como $\delta_k \leq |U|$ entonces $\frac{|U|}{\delta_k} + 1 \leq 2\frac{|U|}{\delta_k}$. Como $|U|$ es mayor estricto que la cantidad de huecos que U interseca del paso $k-2$ multiplicada por δ_k ; $\frac{|U|}{\delta_k} >$ cantidad de huecos que U interseca del paso $k-2$; y por lo tanto la cantidad de intervalos que U interseca del paso k es menor o igual que $\frac{|U|}{\delta_k} + 2 \leq \frac{3|U|}{\delta_k}$.

Así de 1 y 2, tenemos que la cantidad de intervalos del paso k que intersecan a U es menor o igual que $\min\{m_k, \frac{3|U|}{\delta_k}\}$.

Como cada intervalo del nivel k tiene masa $\frac{1}{m_1 \cdots m_k}$; se tiene:

$$\begin{aligned} \mu(U) &\leq \frac{1}{m_1 \cdots m_k} \min\left\{m_k, \frac{3|U|}{\delta_k}\right\} \\ &\leq \frac{1}{m_1 \cdots m_k} \left(\frac{3|U|}{\delta_k}\right)^s m_k^{1-s} \quad \forall s \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para cualquier $s \in [0, 1]$:

$$\frac{\mu(U)}{|U|^s} \leq \frac{1}{m_1 \cdots m_k} m_k^{1-s} \left(\frac{3}{\delta_k}\right)^s = \frac{3^s}{m_1 \cdots m_{k-1} m_k^s \delta_k^s} \quad (2.3)$$

Si $0 \leq s < \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\log(m_1 \cdots m_{k-1})}{-\log(m_k \delta_k)}$, entonces existe un k_0 tal que

$$-s \log(m_k \delta_k) < \log(m_1 \cdots m_{k-1}) \quad \forall k \geq k_0$$

De lo que se sigue:

$$\log\left(\frac{1}{(m_k \delta_k)^s}\right) < \log(m_1 \dots m_{k-1}) \quad \forall k \geq k_0$$

Y como el logaritmo es creciente:

$$\frac{1}{(m_k \delta_k)^s} < m_1 \dots m_{k-1} \quad \forall k \geq k_0$$

Con lo cual,

$$1 < m_1 \dots m_{k-1} m_k^s \delta_k^s \quad \forall k \geq k_0 \quad (2.4)$$

Veamos que en este caso es $s \leq 1$: Por ser $s < \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log(m_1 \dots m_{k-1})}{-\log(m_k \delta_k)}$, basta ver que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log(m_1 \dots m_{k-1})}{-\log(m_k \delta_k)} < 1$$

. Como en el paso k hay $m_1 \dots m_k$ intervalos separados por huecos de longitud $\geq \delta_k$, se tiene que $\delta_k(m_1 \dots m_k - 1) \leq 1$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \Rightarrow m_1 \dots m_k &\leq \frac{1}{\delta_k} + 1 \\ \Rightarrow m_1 \dots m_{k-1} &\leq \frac{1}{m_k} \left(\frac{1}{\delta_k} + 1 \right) \\ \Rightarrow \log(m_1 \dots m_{k-1}) &\leq \log\left(\frac{1}{m_k} \left(\frac{1}{\delta_k} + 1 \right) \right) \\ &= -\log\left(m_k \frac{\delta_k}{1 + \delta_k} \right). \end{aligned}$$

Por lo que,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log(m_1 \dots m_{k-1})}{-\log(m_k \delta_k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log(m_1 \dots m_{k-1})}{-\log\left(m_k \frac{\delta_k}{1 + \delta_k}\right)} \leq 1.$$

Por ser $s \in [0, 1]$ podemos utilizar (2.4), junto con (2.3), obteniendo que $\frac{\mu(U)}{|U|^s} \leq 3^s$, y así $\mu(U) \leq 3^s |U|^s$

Así, por el Principio de distribución de masa (Proposición 24), $\dim_H(E) \geq s$

Y como eso vale para todo $s < \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log(m_1 \dots m_{k-1})}{-\log(m_k \delta_k)}$, tenemos lo requerido. \square

2.4. Sistemas iterados de funciones

Definición 27. Una $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ se dice una **contractividad** si existe una constante $C \in [0, 1)$ tal que $\|F(x) - F(y)\| \leq C\|x - y\|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Definición 28. Un *IFS* (sistema iterado de funciones) en \mathbb{R}^n es $\{F_1, \dots, F_m\}$ donde $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ y $F_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una contractividad para cada i .

Es bien conocido el siguiente Teorema, el cual fue probado por Hutchinson en [31]:

Teorema 29 (Hutchinson). Dado un *IFS* en \mathbb{R}^n dado por $\{F_1, \dots, F_m\}$, existe un único conjunto compacto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $E = \bigcup_{1 \leq i \leq m} F_i(E)$. A ese conjunto se lo llama **atractor**.

Notaremos $E_{i_1, \dots, i_k} = F_{i_1} \circ \dots \circ F_{i_k}(E)$ para cada $k \in \mathbb{N}$ y $(i_1, \dots, i_k) \in \{1, \dots, m\}^k$.

Definición 30. Diremos que el *IFS* $\{F_1, \dots, F_m\}$ satisface la **condición de separación fuerte** si los $F_i(E)$ son conjuntos disjuntos.

Una clase especial de *IFS* es de especial interés:

Definición 31. Una $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ se dice una **similaridad contractiva** si existe una constante $C \in [0, 1)$ tal que $\|F(x) - F(y)\| = C\|x - y\|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Definición 32. Cuando el *IFS* $\{F_1, \dots, F_m\}$ este dado por similaridades contractivas, el atractor E se dira que es un **conjunto autosimilar**.

Teorema 33. Si E es un conjunto autosimilar dado por el *IFS* $\{F_1, \dots, F_m\}$ que satisface la condición de separación fuerte, tenemos que las funciones $F_i : E \rightarrow F_i(E)$ son biyecciones y la unión de sus imagenes es E .

Por lo cual se puede definir una función inversa de todas ellas $f : E \rightarrow E$ dada por

$$f(x) := \sum_{1 \leq i \leq m} F_i^{-1}(x) \chi_{F_i(E)}(x).$$

En ese caso, tenemos en particular que para cualquier $A \subseteq E$, $f^{-1}(A)$ es la unión disjunta de $F_i(A)$.

Teorema 34. Dado un conjunto E autosimilar dado por un *IFS* $\{F_1, \dots, F_m\}$ que satisface la condición de separación fuerte, con un vector de probabilidad asociado (p_1, \dots, p_m) .

Definiendo $E_{i_1, \dots, i_k} := F_{i_1, \dots, i_k}(E) := F_{i_1} \circ \dots \circ F_{i_k}(E)$ y $\mu(E_{i_1, \dots, i_k}) := p_{i_1} \cdots p_{i_k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$ y $(i_1, \dots, i_k) \in \{1, \dots, m\}^k$ y extendiéndola del siguiente modo: Si llamamos

$$\mathcal{E} := \{E_{i_1, \dots, i_k} : k \in \mathbb{N} \text{ y } (i_1, \dots, i_k) \in \{1, \dots, m\}^k\}.$$

Definiendo

$$\mu(A) := \inf \left\{ \sum_i \mu(V_i) : A \cap E \subseteq \bigcup_i V_i \text{ y } V_i \in \mathcal{E} \right\}$$

se extiende a una probabilidad boreliana que verifica $\mu(A) = \sum_{1 \leq i \leq m} p_i \mu(F_i^{-1}(A))$ para cualquier conjunto boreliano A (porque vale para los E_{i_1, \dots, i_k}).

Proposición 35. Si E es un conjunto autosimilar dado por el IFS $\{F_1, \dots, F_m\}$ que satisface la condición de separación fuerte, cuyos radios de contracción son $c_1, \dots, c_m \in (0, 1)$. Sea s el número que verifica que

$$\sum_{i=1}^m c_i^s = 1.$$

Entonces,

$$0 < (2DM)^s \leq \mathcal{H}^s(E) \leq |E|^s < \infty,$$

donde $M := \min_{1 \leq i \leq m} c_i$, $D := \min_{1 \leq i \neq j \leq m} d(F_i(E), F_j(E))$. Y por lo tanto, $\dim_H(E) = s$.

Demostración. Notar que $D > 0$ por la condición de separación fuerte.

Veamos que $\mathcal{H}^s(E) \leq |E|^s$.

Como, por definición de s ,

$$\begin{aligned} \sum_{i_1, \dots, i_k} |E_{i_1, \dots, i_k}|^s &= \sum_{i_1, \dots, i_k} (c_{i_1} \cdots c_{i_k})^s |E|^s \\ &= \sum_{i_1} c_{i_1}^s \cdots \sum_{i_k} c_{i_k}^s |E|^s \\ &= |E|^s. \end{aligned}$$

Dado $\delta > 0$, sea k el mínimo natural tal que $(\max_{1 \leq i \leq m} c_i)^k |E| \leq \delta$. Entonces, fijado ese k , tenemos que $E = \bigcup_{i_1, \dots, i_k} F_{i_1, \dots, i_k}(E)$ con $|F_{i_1, \dots, i_k}(E)| \leq c_{i_1} \cdots c_{i_k} \leq (\max_{1 \leq i \leq m} c_i)^k |E| \leq \delta$. Es decir que $F_{i_1, \dots, i_k}(E)$ con $(i_1, \dots, i_k) \in \{1, \dots, m\}^k$, es un δ -cubrimiento de E . Así, $\mathcal{H}_\delta^s(E) \leq \sum_{i_1, \dots, i_k} |F_{i_1, \dots, i_k}(E)|^s = |E|^s$ (por la cuenta de antes). Y por lo tanto, haciendo $\delta \rightarrow 0$, resulta $\mathcal{H}^s(E) \leq |E|^s$.

Veamos que $(2DM)^s \leq \mathcal{H}^s(E)$.

Definamos una distribución de masa en E dada por $\mu(E_{i_1, \dots, i_k}) = (c_{i_1} \cdots c_{i_k})^s$. Veamos que se cumple la hipótesis del Principio de Distribución de Masa (Proposición 25). Sea B cualquier bola abierta de radio rDM con $r \in (0, 1)$, que interseque al conjunto E . Elijamos cualquier $x \in E \cap B$. Por la condición de separación fuerte, existe un único $(i_n)_n \in \{1, \dots, m\}^{\mathbb{N}}$ tal que $x \in F_{i_1, \dots, i_n}(E)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sea k el mínimo natural tal que $c_{i_1} \cdots c_{i_k} \leq r$. Entonces, por ser el mínimo que lo verifica, tenemos también que $Mr \leq c_{i_1} \cdots c_{i_k}$.

Entonces,

$$\begin{aligned} d(F_{i_1, \dots, i_k}(E), E \setminus F_{i_1, \dots, i_k}(E)) &= \min_{(j_1, \dots, j_k) \neq (i_1, \dots, i_k)} d(F_{i_1, \dots, i_k}(E), F_{j_1, \dots, j_k}(E)) \\ &\geq c_{i_1} \cdots c_{i_k} D \\ &\geq rDM. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si B es una bola abierta de radio rDM con $r \in (0, 1)$, que interseca al conjunto E , entonces B toca como mucho un $F_{i_1, \dots, i_k}(E)$ con $Mr \leq c_{i_1} \cdots c_{i_k} \leq r$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mu(B) &\leq \mu(F_{i_1, \dots, i_k}(E)) \\ &= (c_{i_1} \cdots c_{i_k})^s \\ &\leq r^s \\ &= (2rDM)^s \cdot \left(\frac{1}{2DM}\right)^s \\ &= |B|^s \left(\frac{1}{2DM}\right)^s. \end{aligned}$$

Así, por el Principio de Distribución de Masa (Proposición 25), resulta

$$\mathcal{H}^s(E) \geq (2DM)^s \text{ y por lo tanto } E \text{ es un } s\text{-set.}$$

□

2.5. Proyecciones y dimensión

Notamos $p_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a la proyección ortogonal sobre la recta que forma el ángulo θ con el eje x .

Observación 36. Dado E un conjunto boreliano en \mathbb{R}^2 . Como la proyección es sobre una recta, claramente $\dim_H(p_\theta(E)) \leq 1$. Y como además la proyección es una función Lipschitz, tenemos que $\dim_H(p_\theta(E)) \leq \dim_H(E)$. Entonces vale que

$$\dim_H(p_\theta(E)) \leq \min\{\dim_H(E), 1\} \text{ para todo } \theta.$$

El siguiente teorema es bien conocido, y su demostración puede encontrarse en [13]

Teorema 37 (Teorema de las proyecciones, de Marstrand). Sea E un conjunto boreliano en \mathbb{R}^2 , llamemos $\alpha := \dim_H(E)$. Entonces vale que:

- Si $\alpha \leq 1$, entonces $\dim_H(p_\theta(E)) = \alpha$ para casi todo θ .
- Si $\alpha > 1$, entonces $p_\theta(E)$ tiene medida de Lebesgue positiva para casi todo θ .

En particular tenemos que

$$\dim_H(p_\theta(E)) = \min\{\dim_H(E), 1\} \text{ para casi todo } \theta.$$

Ejemplo 38. Si llamamos C al conjunto ternario de Cantor, entonces $C \times C$ tiene dimensión de Hausdorff $\frac{2 \log(2)}{\log(3)}$ (una cota superior se obtiene considerando los cubrimientos por cubos de cada nivel de construcción, y la cota inferior por principio de distribución de masa. Para más información sobre la dimensión de productos de fractales puede verse el Capítulo 7 de [15]), y por otra parte la proyección sobre el eje x es $p_0(C \times C) = C$ que tiene dimensión de Hausdorff $\frac{\log(2)}{\log(3)}$. En este caso (para esa dirección particular) se tiene $\dim_H(p_0(E)) < 1 < \dim_H(C \times C)$. Así vemos un ejemplo que muestra que el Teorema no es válido para todas las direcciones.

2.6. Algunos resultados de teoría ergódica

En esta sección desarrollaremos algunos hechos de teoría ergódica. Los resultados son más bien estándar, pero incluiremos las demostraciones completas (en ciertos casos no hemos podido encontrar referencias exactas). Dado que las demostraciones son las mismas, las desarrollaremos con una generalidad mayor que la necesaria en nuestras aplicaciones posteriores.

El teorema ergódico

Trabajaremos en un espacio X dotado con una medida exterior finita μ .

Notaremos \mathcal{M} a la σ -álgebra de conjuntos μ -medibles. Sabemos que $\mu|_{\mathcal{M}}$ es una medida.

Definición 39. Decimos que una función $f : X \rightarrow X$ μ -medible **preserva la medida** μ (o que μ es f -invariante) si verifica que

$$\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A) \text{ para todo } A \in \mathcal{M}.$$

Proposición 40. Son equivalentes:

- $f : X \rightarrow X$ preserva la medida μ .
- $\int g(x)d\mu(x) = \int g(f(x))d\mu(x)$ para toda $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ medible.

Eso vale, pues:

Si $\int g(x)d\mu(x) = \int g(f(x))d\mu(x)$ para toda $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ medible. Tomando $g = \chi_A$ con $A \in \mathcal{M}$, tenemos que

$$\mu(A) = \int \chi_A d\mu = \int \chi_A \circ f d\mu = \int \chi_{f^{-1}(A)} d\mu = \mu(f^{-1}(A)).$$

Para la otra implicación, si $f : X \rightarrow X$ preserva la medida μ , es decir vale $\int g(x)d\mu(x) = \int g(f(x))d\mu(x)$ para $g = \chi_A$ con $A \in \mathcal{M}$. Usando la linealidad de la integral, vale la igualdad para g simple no negativa. Luego, vale para g medible no negativa, usando el Teorema de Convergencia Monotona y tomando una sucesión creciente de funciones simples no negativas que tiendan a g . Así, vale para una g medible cualquiera, pues $g = g^+ - g^-$ con g^+ y g^- medibles no negativas.

Definición 41. Diremos que μ (finita) es **ergódica** si es f -invariante y además para cada $A \in \mathcal{M}$ tal que $A = f^{-1}(A)$, vale que $\mu(A) = 0$ o $\mu(X \setminus A) = 0$.

Notaremos f^j a la composición de f consigo misma j veces.

Muchas veces es de interés estudiar la órbita de un $x \in X$ por f , es decir que pasa con los puntos $x, f(x), f^2(x), \dots$ (esto es, mirar como se comporta x vía el sistema dinámico

discreto que está dado por aplicar f). Intuitivamente el hecho de que μ sea ergódica nos dice que el sistema (X, f, μ) no se puede descomponer en dos partes “independientes” que tengan medida μ positiva.

Pues, si existe $A \in \mathcal{M}$ tal que $A = f^{-1}(A)$, aplicando f y f^{-1} cualquier cantidad finita de veces a la igualdad anterior, sale que $A = f^m(A)$ para todo $m \in \mathbb{Z}$. De este modo la órbita $\{f^m(x)\}_m$ de un x cualquiera, está completa en A o en $X \setminus A$. Así, el sistema se podría descomponer en dos partes independientes: A y $X \setminus A$.

Otra noción intuitiva de ergodicidad, tal vez menos precisa, es que la ergodicidad tiene que ver con que no hay un conjunto de interés (en lo que respecta a la medida) que quede fijo. Esto nos dice, de algún modo, que al aplicar la función f se van “revolviendo” los puntos del espacio. Esto se puede visualizar por ejemplo en el caso del círculo S^1 dotado con la medida $\mu := \mathcal{H}^1$ (la que intuitivamente mide longitudes), y $f := R_\alpha$ la rotación de ángulo $2\pi\alpha$. Tenemos en (S^1, f, μ) que: $\alpha \notin \mathbb{Q}$ si y solo si μ es ergódica. Es un resultado bien conocido, que la órbita de cualquier punto en el caso racional es finita. Y también que en el caso irracional vale que: para cualquier $x \in S^1$ y cualquier abierto U de S^1 vale que existen infinitos $n \in \mathbb{N}$ tales que $f^n(x) \in U$.

Proposición 42. *Si μ es ergódica y $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ medible tal que $\phi(f(x)) = \phi(x)$ para todo $x \in X$. Entonces, existe un número real λ tal que $\phi(x) = \lambda$ para casi todo x respecto de μ .*

Demostración. Notar que en caso de ser $\phi(x) = \lambda$ para casi todo x respecto de μ , debe ser $\lambda = \|\phi\|_{L^\infty\mu}$. Utilizando esto, veamos que vale la proposición:

Claramente $\phi(x) \leq \|\phi\|_{L^\infty\mu}$ para casi todo x respecto de μ .

Por otra parte, para cada $\epsilon > 0$, el conjunto

$$A := \{x \in X : \phi(x) < \|\phi\|_{L^\infty\mu} - \epsilon\}$$

está en \mathcal{M} (ya que ϕ es medible), y verifica $f^{-1}(A) = A$ (ya que $\phi(f(x)) = \phi(x)$ implica que $x \in A \iff f(x) \in A$). Por lo cual, por ser μ ergódica, resulta $\mu(A) = 0$ o $\mu(X \setminus A) = 0$. Pero, por definición de norma infinito, $\mu(X \setminus A) > 0$. Por lo tanto $\mu(A) = 0$. Y como eso vale para cualquier $\epsilon > 0$, tenemos que $\phi(x) \geq \|\phi\|_{L^\infty\mu}$ para casi todo x respecto de μ . \square

Muchas veces puede ser de interés estudiar la tendencia de los promedios de ϕ en la órbita de un x , es decir, $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \phi(f^j(x))$.

El siguiente Teorema (véase por ejemplo [58]), nos garantiza que bajo ciertas condiciones existe ese límite, y nos dice el resultado en caso de ser μ ergódica:

Teorema 43 (Teorema Ergódico, de Birkhoff). *Sea (X, T, μ) un espacio de medida exterior finita, con T una función que preserva la medida μ .*

Si $\phi \in L^1(X, T, \mu)$, entonces $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \phi(T^j(x))$ para casi todo x respecto de μ .

Si además μ es ergódica, para casi todo x respecto de μ el límite es $\frac{1}{\mu(X)} \int_X \phi d\mu$ (que es una constante independiente de x).

Demostración. Sea $S_k(x) := \frac{1}{k} \sum_{0 \leq j \leq k-1} \phi(T^j(x))$.

- Comencemos por ver la existencia de límite en el caso en que ϕ es acotada.

Veremos que

$$\int \limsup_{k \rightarrow \infty} S_k d\mu \leq \int \phi d\mu \quad (2.5)$$

y además que

$$-\int \liminf_{k \rightarrow \infty} S_k d\mu \leq -\int \phi d\mu, \quad (2.6)$$

así sería

$$0 \leq \int \liminf_{k \rightarrow \infty} S_k - \phi d\mu \leq \int \limsup_{k \rightarrow \infty} S_k - \phi d\mu \leq 0,$$

y por lo tanto

$$\exists \lim_{k \rightarrow \infty} S_k \text{ para casi todo punto respecto de } \mu.$$

Sea cualquier $\epsilon \in (0, 1)$, veamos que vale (2.5): Comencemos por definir

$$\tau(x) := \min\{k \in \mathbb{N} : S_k(x) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} S_n(x) - \frac{\epsilon}{\mu(X)}\}.$$

Para cada x definimos inductivamente

$$\begin{aligned} k_1 &:= \tau(x) \\ k_2 &:= \tau(T^{k_1}(x)) \\ &\dots \\ k_i &:= \tau(T^{k_1 + \dots + k_{i-1}}(x)) \end{aligned}$$

- Veamos primero el caso en que τ está acotada por un cierto C (y por lo tanto $k_i \leq C$ para todo $i \in \mathbb{N}$).

Como, dado $i \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{j=k_1 + \dots + k_{i-1}}^{k_1 + \dots + k_i - 1} \phi(T^j(x)) &= \sum_{j=0}^{k_i - 1} \phi(T^{k_1 + \dots + k_{i-1} + j}(x)) \\ &= k_i S_{k_i}(T^{k_1 + \dots + k_{i-1}}(x)) \\ &\geq k_i \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} S_n(T^{k_1 + \dots + k_{i-1}}(x)) - \frac{\epsilon}{\mu(X)} \right) \\ &= k_i \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} S_n(x) - \frac{\epsilon}{\mu(X)} \right), \end{aligned}$$

donde la desigualdad vale por definición de τ y elección de k_i , y la última igualdad porque al ser $|\phi| \leq M$ resulta $|S_n(T(x)) - S_n(x)| = \left| \frac{-\phi(x) + \phi(T^n(x))}{n} \right| \leq \frac{2M}{n} \rightarrow 0$ (y análogamente se puede hacer con $T^k(x)$ en lugar de $T(x)$).

Así, sumando sobre $1 \leq i \leq N$, tenemos

$$\sum_{j=0}^{k_1+\dots+k_N-1} \phi(T^j(x)) \geq \left(\sum_{i=1}^N k_i \right) \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} S_n(x) - \frac{\epsilon}{\mu(X)} \right). \quad (2.7)$$

Dado $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$k_1 + \dots + k_N \leq k < k_1 + \dots + k_{N+1}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{k-1} \phi(T^j(x)) &\geq \sum_{j=0}^{k_1+\dots+k_N-1} \phi(T^j(x)) \\ &\geq \left(\sum_{i=1}^N k_i \right) \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} S_n(x) - \frac{\epsilon}{\mu(X)} \right) \\ &> (k - k_{N+1}) \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} S_n(x) - \frac{\epsilon}{\mu(X)} \right) \\ &= (k - C) \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} S_n(x) - \frac{\epsilon}{\mu(X)} \right) + (C - k_{N+1}) \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} S_n(x) - \frac{\epsilon}{\mu(X)} \right) \\ &\geq (k - C) \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} S_n(x) - \frac{\epsilon}{\mu(X)} \right) - C \left(M + \frac{\epsilon}{\mu(X)} \right) \\ &\geq (k - C) \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} S_n(x) - \frac{\epsilon}{\mu(X)} \right) - C \left(M + \frac{1}{\mu(X)} \right), \end{aligned}$$

donde usamos (2.7) en la segunda desigualdad, que $|\tau| \leq C$ en la cuarta desigualdad, y finalmente que $\epsilon \in (0, 1)$.

Entonces,

$$\frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \phi(T^j(x)) \geq \left(1 - \frac{C}{k} \right) \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} S_n(x) - \frac{\epsilon}{\mu(X)} \right) - \frac{C \left(M + \frac{1}{\mu(X)} \right)}{k}.$$

E integrando, tenemos

$$\begin{aligned} \int \phi(x) d\mu(x) &= \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \int \phi(x) d\mu(x) \\ &= \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \int \phi(T^j(x)) d\mu(x) \\ &\geq \left(1 - \frac{C}{k} \right) \int \limsup_{n \rightarrow \infty} S_n(x) d\mu(x) - \epsilon - \frac{C(M\mu(X) + 1)}{k} \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se debe a que como T preserva la medida μ se tiene que $\int \phi(T^j(x)) d\mu(x) = \int \phi(x) d\mu(x)$.

Tomando el límite de k tendiendo a infinito tenemos que

$$\int \phi(x) d\mu(x) \geq \int \limsup_{n \rightarrow \infty} S_n(x) - \epsilon.$$

- Ahora veamoslo para una τ cualquiera.

Como queremos relacionarlo con el caso acotado, elijamos $C \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $\mu\{x : \tau(x) > C\} < \frac{\epsilon}{2M}$.

Definamos $\phi^* : X \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\phi^*(x) := \phi(x)\chi_{\{\tau(x) \leq C\}}(x) + M\chi_{\{\tau(x) > C\}}(x),$$

$$S_k^*(x) := \frac{1}{k} \sum_{0 \leq j \leq k-1} \phi^*(T^j(x)),$$

y

$$\tau^*(x) := \min \left\{ k \in \mathbb{N} : S_k^*(x) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} S_n(x) - \frac{\epsilon}{2} \right\}.$$

Es claro que $\phi(x) \leq \phi^*(x)$ para cualquier x . Por lo tanto, dado un x cualquiera, $\phi(T^j(x)) \leq \phi^*(T^j(x))$ para todo $j \in \mathbb{N}$, entonces sumando resulta $S_k^*(x) \geq S_k(x)$, por lo cual $\tau^*(x) \leq \tau(x)$.

Observemos que si $x \in \{\tau(x) > C\}$, resulta $\phi^*(x) = M \geq |\phi(x)|$, y por lo tanto

$$S_1^*(x) = M \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} S_n(x) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} S_n(x) - \frac{\epsilon}{2},$$

con lo cual $\tau^*(x) = 1$.

Observemos también que $\tau^*(x) \leq C$ cualquiera sea x . Esto vale pues por lo recién visto, si $x \in \{\tau(x) > C\}$ resulta que $\tau^*(x) = 1 \leq C < \tau(x)$, y si $x \in \{\tau(x) \leq C\}$ resulta que $\tau^*(x) \leq \tau(x) \leq C$.

Como τ^* es acotada, tenemos por el caso anterior, que

$$\begin{aligned} \int \limsup_{n \rightarrow \infty} S_n(x) d\mu(x) &\leq \int \phi^*(x) d\mu(x) + \epsilon \\ &= \int \phi d\mu + \int (\phi^* - \phi) d\mu + \epsilon \\ &\leq \int \phi d\mu + 2M\mu\{\tau > C\} + \epsilon \\ &< \int \phi d\mu + 2\epsilon \end{aligned}$$

Así, haciendo $\epsilon \rightarrow 0^+$, vemos (2.5).

Deduzcamos (2.6): Considerando $-\phi$ en lugar de ϕ (la cual cumple todas las mismas hipótesis), tenemos por lo recién visto que

$$-\int \liminf_{n \rightarrow \infty} S_n d\mu = \int \limsup_{n \rightarrow \infty} -S_n d\mu \leq \int -\phi d\mu = -\int \phi d\mu.$$

- Ahora veamos la existencia de límite para una ϕ cualquiera.

Sea $\phi_M^+ := \phi^+ \chi_{\{\phi^+ \leq M\}}$. Como ϕ_M^+ es acotada, por lo tanto por el caso anterior,

$$\int \phi_M^+ d\mu = \int \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \phi_M^+(T^j(x)) d\mu.$$

Cuando $M \rightarrow \infty$ tenemos $0 \leq \phi_M^+ \nearrow \phi^+$, y también $0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \phi_M^+(T^j(x)) \nearrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \phi^+(T^j(x))$; por lo cual tenemos por convergencia monótona que

$$\int \phi^+ d\mu = \int \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \phi^+(T^j(x)) d\mu.$$

Analogamente con $\phi_M^- := \phi^- \chi_{\{\phi^- \geq M\}}$. Como ϕ_M^- es acotada, por lo tanto por el caso anterior,

$$\int \phi_M^- d\mu = \int \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \phi_M^-(T^j(x)) d\mu.$$

Donde cuando $M \rightarrow \infty$ tenemos que $0 \leq \phi_M^- \nearrow \phi^-$ y $0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \phi_M^-(T^j(x)) \nearrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \phi^-(T^j(x))$; tenemos por convergencia monótona que

$$\int \phi^- d\mu = \int \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \phi^-(T^j(x)) d\mu.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \int \phi d\mu &= \int \phi^+ d\mu - \int \phi^- d\mu \\ &= \int \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \phi^+(T^j(x)) d\mu - \int \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \phi^-(T^j(x)) d\mu \\ &= \int \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \phi(T^j(x)) d\mu \end{aligned}$$

■ Veamos el “además”.

- Veámoslo primero en el caso en que ϕ es acotada.

Llamemos $S_n(x) := \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \phi(T^j(x))$. Vimos que casi todo punto está en $L := \{x : \exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)\}$. Sea $x \in L$, entonces existe $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$, y por ser ϕ acotada es

$$S_n(T(x)) - S_n(x) = \frac{\phi(T^n(x)) - \phi(x)}{n} \rightarrow 0,$$

así resulta que existe $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(T(x))$ y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(T(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x).$$

Es decir, si llamamos $\Phi := \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, se verifica que $\Phi(T(x)) = \Phi(x)$ para todo $x \in L$. Así, por la Proposición 42 en el espacio $X := L$ (acá usamos que μ es ergódica), existe una constante $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$ para casi todo $x \in L$ con respecto a la medida μ . Entonces,

$$\lambda \mu(X) = \int \lim_{n \rightarrow \infty} S_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int S_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \phi d\mu = \int \phi d\mu,$$

donde usamos Teorema de Convergencia Mayorada ($|S_n| \leq M$ con μ finita), y que μ es T -invariante. así, juntando todo, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \frac{1}{\mu(X)} \int \phi d\mu$ para casi todo x respecto de μ .

- Veámoslo ahora para una ϕ cualquiera. Sean, como antes, $\phi_M^+ := \phi^+ \chi_{\{\phi^+ \leq M\}}$ y $\phi_M^- := \phi^- \chi_{\{\phi^- \geq M\}}$. Como ambas son funciones acotadas, por el caso anterior

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \phi_M^+(T^j(x)) = \frac{1}{\mu(X)} \int \phi_M^+ d\mu \text{ para casi todo } x \text{ respecto de } \mu,$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \phi_M^-(T^j(x)) = \frac{1}{\mu(X)} \int \phi_M^- d\mu \text{ para casi todo } x \text{ respecto de } \mu.$$

Entonces, restándolas y luego haciendo $M \rightarrow \infty$, tenemos que existe $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \frac{1}{\mu(X)} \int \phi d\mu$ para casi todo x respecto de μ .

□

Observación 44. *Notar que el Teorema Ergódico (Teorema 43) generaliza la Ley de los Grandes Números, la cual dice que:*

Si X_1, X_2, X_3, \dots es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas en un espacio de probabilidad (X, P) que cumplen $E = \int |X_1| dP < \infty$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = E$ para casi todo x respecto de P .

Esto se debe al Teorema Ergódico, tomando como espacio $X^{\mathbb{N}}$ con la probabilidad dada por la medida producto, $T(X_1, X_2, X_3, \dots) = (X_2, X_3, \dots)$ el shift, y $\phi = \pi_1$ la proyección a la primer coordenada. Pues $\phi(T^j(X_1, X_2, \dots)) = X_j$. Se puede ver que dicha medida producto es ergódica.

El siguiente Teorema está emparentado con el anterior y su demostración puede encontrarse en [33]:

Teorema 45 (Teorema ergódico subaditivo, de Kingman). Si T es una transformación que preserva la medida en el espacio de probabilidad (X, \mathcal{B}, μ) y $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones integrables satisfaciendo

$$f_{n+m}(x) \leq f_n(x) + f_m(T^n(x)) \text{ para todos } n, m \in \mathbb{N},$$

entonces existe $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(x)}{n}$ para casi todo punto x respecto de μ .

Si además μ es ergódica, para casi todo x respecto de μ el límite es $\inf_n \frac{\int f_n d\mu}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int f_n d\mu}{n}$ (que es una constante independiente de x).

Veamos que la última igualdad en el Teorema se debe a la siguiente propiedad de sucesiones:

Lema 46. Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que $a_{n+m} \leq a_n + a_m$. Entonces existe $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n}{n}$.

Demostración. Definimos $a_0 := 0$. La nueva sucesión sigue cumpliendo todas las hipótesis. Dado $\varepsilon > 0$, sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{a_m}{m} < \inf_{k \in \mathbb{N}} \frac{a_k}{k} + \varepsilon$. Cada $n \in \mathbb{N}$ podemos escribirlo como $n = mq + r$ con $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $0 \leq r \leq m - 1$. Tenemos entonces que

$$a_n = a_{mq+r} \leq a_m + \dots + a_m + a_r = qa_m + a_r.$$

Entonces,

$$\frac{a_n}{n} \leq \frac{qa_m + a_r}{n} = \frac{qm}{n} \frac{a_m}{m} + \frac{a_r}{n}.$$

Por lo tanto,

$$\inf_{k \in \mathbb{N}} \frac{a_k}{k} \leq \frac{a_n}{n} \leq \frac{qm}{n} \frac{a_m}{m} + \frac{a_r}{n} \leq \frac{qm}{n} \left(\inf_{k \in \mathbb{N}} \frac{a_k}{k} + \varepsilon \right) + \frac{a_r}{n} = \frac{n-r}{n} \left(\inf_{k \in \mathbb{N}} \frac{a_k}{k} + \varepsilon \right) + \frac{a_r}{n}.$$

Por lo cual tenemos que

$$\inf_{k \in \mathbb{N}} \frac{a_k}{k} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} \leq \inf_{k \in \mathbb{N}} \frac{a_k}{k} + \varepsilon$$

para todo $\varepsilon > 0$. Haciendo $\varepsilon \rightarrow 0$ obtenemos el resultado buscado. \square

Y con esto, podemos ver que:

Observación 47. Llamando $a_n := \int f_n d\mu$. Si sabemos que $f_{n+m} \leq f_n + f_m \circ T^n$ y que $T\mu = \mu$, vale que $a_{n+m} = \int f_{n+m} d\mu \leq \int f_n d\mu + \int f_m \circ T^n d\mu = \int f_n d\mu + \int f_m d\mu = a_n + a_m$. Y así es como sabemos, por el Lema anterior, que

$$\inf_n \frac{\int f_n d\mu}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int f_n d\mu}{n}$$

en el Teorema ergódico subaditivo.

Skew-products sobre grupos compactos y puntos genéricos

Comencemos repasando algunas definiciones generales:

Definición 48. Un **grupo topológico** (G, \cdot) es un grupo dotado con una topología de modo que la multiplicación $G \times G \rightarrow G$ dada por $(g_1, g_2) \mapsto g_1 \cdot g_2$ y la inversión $G \rightarrow G$ dada por $g \mapsto g^{-1}$ son funciones continuas.

Definición 49. Si $a \in G$ y $S \subseteq G$ definimos el trasladado por izquierda como $aS := \{a \cdot s : s \in S\}$. Una medida μ en los subconjuntos de Borel se llama **invariante por traslación a izquierda** si $\mu(aS) = \mu(S)$. Decimos que una medida boreliana es una **medida de Haar** si es invariante por traslación a izquierda, regular, y finita sobre compactos.

Se verifica que hay (salvo una constante multiplicativa) sólo una medida regular de Haar (ver el capítulo 3 del libro [38]).

Sea (Y, T, μ) un sistema dinámico que preserva medida en un espacio métrico compacto Y junto con su σ -álgebra de Borel, G un grupo topológico compacto dotado con la medida de Haar m_G y $\alpha : Y \rightarrow G$ una función continua. Definamos la función **skew-product** S en $X = Y \times G$ por la fórmula

$$S(y, g) = (T(y), \alpha(y) \cdot g).$$

El estudio de skew-products sobre grupos compactos de esta forma es clásico, ver por ejemplo [37]. La aplicación de ésta teoría al estudio de proyecciones fue resaltada por Falconer y Jin en [16], quienes usaron extensiones de grupos compactos para el estudio de la dimensión de Hausdorff de proyecciones de una clase de medidas aleatorias (diferentes a las nuestras).

Definición 50. Una medida ϑ en X se dice que se **proyecta sobre una medida** μ en Y , si $\pi_Y \vartheta = \mu$ donde π_Y representa la proyección en Y .

Además, ϑ se dice **únicamente ergódica sobre** μ si es la única medida ergódica que se proyecta sobre μ .

Notar que la medida $\mu \times m_G$ claramente se proyecta sobre μ y es también S -invariante por el Teorema de Fubini-Tonelli, pues μ es T -invariante y m_G es la medida de Haar en G .

Proposición 51. *Sea μ una medida ergódica. Entonces se tiene que: una medida ϑ en X es únicamente ergódica sobre μ si y solo si es la única medida S -invariante que se proyecta sobre μ .*

Demostración. Para la implicación \Leftarrow , notemos que ϑ debe ser ergódica: si $\vartheta = \int \sigma d\rho(\sigma)$ es la descomposición ergódica de ϑ (ver por ejemplo [12, Teorema 6.1]) entonces $\mu = \int \pi_Y \sigma d\rho(\sigma)$. Como μ es ergódica, $\pi_Y \sigma = \mu$ para ρ -casi todo σ , por lo cual $\sigma = \vartheta$ para ρ -casi todo σ , mostrando que ϑ es ergódica, como queríamos ver. La implicación \Leftarrow es ahora clara.

Supongamos entonces que ϑ es únicamente ergódica y sea ζ una medida S -invariante que proyecta sobre μ . Debemos probar que $\zeta = \vartheta$. Sea

$$\zeta = \int \sigma d\rho(\sigma)$$

una descomposición ergódica de ζ . Por lo tanto, para ver que $\zeta = \vartheta$ es suficiente ver que $\rho = \delta_\vartheta$. Notar que

$$\mu = \pi_Y \zeta = \int \pi_Y \sigma d\rho(\sigma) = \int_{\mathcal{D}} \sigma' d\pi_Y \rho(\sigma') \quad (2.8)$$

donde $\mathcal{D} = \{\sigma' \in \mathcal{P}(Y) : \sigma' \text{ es } T\text{-invariante}\}$.

Como μ es ergódica, es un punto extremo del conjunto \mathcal{D} de donde, por la caracterización de puntos extremos de Bauer [10, Capítulo IX, Teorema 3], tenemos que $\pi_Y \rho = \delta_\mu$. Pero entonces, como ρ está soportada en el conjunto de medidas ergódicas y ϑ es únicamente ergódica, obtenemos que

$$\begin{aligned} 1 &= \pi_Y \rho(\{\mu\}) = \rho(\{\sigma : \pi_Y \sigma = \mu\}) \\ &= \rho(\{\sigma : \sigma \text{ es ergódica y } \pi_Y \sigma = \mu\}) = \rho(\{\vartheta\}) \end{aligned}$$

lo que implica que $\rho = \delta_\vartheta$ y concluimos la demostración. \square

Definición 52. *Dado un sistema que preserva medida (Z, R, σ) (es decir que σ es R -invariante), con Z compacto y $R : Z \rightarrow Z$ función continua, decimos que $z \in Z$ es **genérico** para σ (o **σ -genérico**) si para cualquier función continua $f : Z \rightarrow \mathbb{R}$ tenemos que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(R^i(z)) = \int_Y f d\sigma.$$

Observación 53. *Se sigue del Teorema ergódico que si σ es ergódica entonces σ -casi todo $z \in Z$ es genérico para σ .*

El caso especial del siguiente Lema en que el sistema base (Y, T) es únicamente ergódico es un clásico resultado de Furstenberg, ver por ejemplo [12, Teorema 4.21]. El caso general sigue la misma línea y damos la prueba a continuación.

Lema 54. Si $\vartheta = \mu \times m_G$ es ergódica entonces es únicamente ergódica sobre μ .

Demostración. Claramente tenemos $\pi_Y \vartheta = \mu$, de modo que queda por verificar que ϑ es la medida únicamente ergódica con esta propiedad. Ahora, como ϑ es ergódica tenemos que ϑ -casi todo $(\tilde{\omega}, \tilde{g}) \in X$ es genérico para ϑ . Además, tenemos que

$$(\omega, g) \text{ es genérico para } \vartheta \implies (\omega, g') \text{ es genérico para } \vartheta \text{ para todo } g' \in G. \quad (2.9)$$

En efecto, observar que para todo $i \in \mathbb{N}_0$ tenemos que

$$S^i(\omega, g') = M_{g^{-1} \cdot g'}(S^i(\omega, g))$$

donde para todo $h \in G$ la función $M_h : X \rightarrow X$ está definida por la fórmula

$$M_h(\tilde{\omega}, \tilde{g}) := (\tilde{\omega}, \tilde{g} \cdot h).$$

Entonces para cualquier función continua f tenemos que

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(S^i(\omega, g')) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(M_{g^{-1} \cdot g'}(S^i(\omega, g))) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_X f \circ M_{g^{-1} \cdot g'} d(\mu \times m_G)$$

como (ω, g) es genérico para ϑ y $f \circ M_h$ es continua para todo $h \in G$. Ahora, como m_G es invariante bajo multiplicación, por el Teorema de Fubini concluimos que

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(S^i(\omega, g')) \longrightarrow \int_X f d(\mu \times m_G)$$

lo que muestra que (ω, g') es genérico para ϑ .

Ahora, sea ρ una medida ergódica en X que se proyecta sobre μ . Para cualquiera de esos ρ el conjunto

$$\Lambda_\rho = \{\omega \in Y : (\omega, g) \text{ es genérico para } \rho \text{ para algún } g \in G\} \quad (2.10)$$

tiene medida μ total en Y . En particular, el conjunto $\Lambda_\vartheta \cap \Lambda_\rho$ es no vacío, donde Λ_ϑ está definida análogamente a (2.10). Notar que por (2.9) tenemos que para todo $\omega \in \Lambda_\vartheta \cap \Lambda_\rho$ existe $g \in G$ tal que (ω, g) es genérico para ϑ y para ρ . Pero por definición de punto genérico esto implica que

$$\int_X f d\vartheta = \int_X f d\rho$$

para toda función continua, lo que muestra que $\vartheta = \rho$. □

Terminamos esta sección con el siguiente resultado de convergencia uniforme, que nuevamente es clásico en el caso únicamente ergódico.

Lema 55. Si $\mu \times m_G$ es ergódica, entonces para toda función continua $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ y todo punto μ -genérico ω , los promedios ergódicos

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(S^i(\omega, g))$$

convergen a $\int f d(\mu \times m_G)$, uniformemente en $g \in G$.

Demostración. Supongamos que el enunciado no vale para algún punto μ -genérico ω y función continua f . Entonces podemos encontrar $\varepsilon > 0$, una sucesión $n_j \rightarrow \infty$ y puntos $g_j \in G$ tales que

$$\left| \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} f(S^i(\omega, g_j)) - \int f d(\mu \times m_G) \right| > \varepsilon. \quad (2.11)$$

Después de pasar a una subsucesión, podemos suponer que $\nu_j := \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} \delta_{S^i(\omega, g_j)}$ converge a una medida ϑ . Notar que, para cualquier $h \in C(X)$,

$$\left| \int h d\nu_j - \int h d(S\nu_j) \right| = \frac{1}{n_j} |h(\omega, g_j) - h(S^{n_j+1}(\omega, g_j))| \leq \frac{2\|h\|_\infty}{n_j},$$

la cual tiende a cero 0 cuando $j \rightarrow \infty$. Entonces el límite ϑ es S -invariante. Más aún, $\pi_\gamma \vartheta$ es el límite de $\frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} \delta_{T^i(\omega)}$, lo que equivale a μ gracias a nuestra asunción de que ω es genérico.

Se sigue de la Proposición 51 y el Lema 54 que $\vartheta = \mu \times m_G$, y por lo tanto $\frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} f(S^i(\omega, g_j))$ converge a $\int f d\vartheta = \int f d(\mu \times m_G)$. Esto contradice (2.11). \square

Cociclos subaditivos y puntos genéricos

Sea X un espacio y $S : X \rightarrow X$ una transformación. Un cociclo subaditivo sobre (X, S) es una sucesión de funciones $(\phi_n : X \rightarrow \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\phi_{n+m}(x) \leq \phi_n(x) + \phi_m \circ S^n(x) \quad \text{para todo } x \in X, m, n \in \mathbb{N}. \quad (2.12)$$

Es bien sabido que si (X, S) es únicamente ergódico, entonces los promedios ergódicos de funciones continuas convergen uniformemente. Esto falla para cociclos subaditivos sobre sistemas únicamente ergódicos, pero un lado de la desigualdad vale: esto fue observado por Furman [22, Teorema 1]. Una inspección de la prueba del teorema ergódico subaditivo dada por Katznelson y Weiss [33] arroja un resultado más general que el resultado de Furman. Primero, veamos la siguiente una definición.

Definición 56. Una función $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$, donde (X, μ) es un espacio métrico de medida, se dice que es C -aproximable por arriba si, para todo $\varepsilon > 0$, existe una función continua $\phi_\varepsilon : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\phi \leq \phi_\varepsilon$ puntualmente, y $\int (\phi_\varepsilon - \phi) d\mu < \varepsilon$.

Teorema 57. *Sea (X, S, μ) un sistema ergódico que preserva medida con X compacto y S continua. Sea $\mathcal{F} = (\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un cociclo subaditivo C -aproximable por arriba en X . Entonces para todo $x \in X$ μ -generico, vale que*

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\phi_n(x)}{n} \leq \Phi(\mathcal{F}) := \inf_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{1}{n} \int_X \phi_n d\mu \right\}.$$

Demostración. Empecemos notando que las funciones C -aproximables por arriba son acotadas por arriba e integrables por definición. Fijemos $N \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ y sea

$$L := \max_{1 \leq i \leq N} \sup_{x \in X} \phi_i(x) < +\infty.$$

Por la asunción, existe una función continua $\phi_{N,\varepsilon} : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\phi_N \leq \phi_{N,\varepsilon}$ y $\int_X (\phi_{N,\varepsilon} - \phi_N) d\mu < \varepsilon$.

Supongamos que $n = (m+1)N + 1$, para algún $m \in \mathbb{N}$. Entonces podemos escribir n como $i + mN + (N+1-i)$ para todo $1 \leq i \leq N$. Por subaditividad,

$$\begin{aligned} \phi_n(x) &= \phi_{(m+1)N+1}(x) \leq \phi_i(x) + \phi_{mN+(N+1-i)}(S^i(x)) \\ &\leq \phi_i(x) + \phi_{mN}(S^i(x)) + \phi_{N+1-i}(S^{i+mN}(x)) \\ &\leq 2L + \phi_{mN}(S^i(x)). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Notar también que

$$\phi_{mN}(S^i(x)) \leq \phi_N(S^i(x)) + \phi_N(S^{i+N}(x)) + \dots + \phi_N(S^{i+(m-1)N}(x)).$$

Por lo tanto, si sumamos sobre todo i ($1 \leq i \leq N$) en la ecuación (2.13) y usamos la última desigualdad, obtenemos que

$$N\phi_n(x) = N\phi_{(m+1)N+1}(x) \leq 2LN + \sum_{j=1}^{mN} \phi_N(S^j(x)). \quad (2.14)$$

Ahora, si $n = (m+1)N + 1 + r - 1$ para algún $2 \leq r \leq N$ entonces notamos que

$$\phi_n(x) \leq \phi_{(m+1)N+1}(x) + \phi_{r-1}(S^{(m+1)N+1}(x)) \leq \phi_{(m+1)N+1}(x) + L.$$

Por (2.14) y lo de recién, obtenemos

$$N\phi_n(x) \leq 3LN + \sum_{j=1}^{mN} \phi_N(S^j(x))$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, donde hemos escrito n como $(m+1)N + r$ para algún $m \in \mathbb{N}$ y $1 \leq r \leq N$. Dividiendo la desigualdad de arriba por Nn se obtiene

$$\frac{\phi_n(x)}{n} \leq \frac{3L}{n} + \frac{m}{n} \left(\frac{1}{mN} \sum_{j=1}^{mN} \phi_N(S^j(x)) \right) \leq \frac{3L}{n} + \frac{m}{n} \left(\frac{1}{mN} \sum_{j=1}^{mN} \phi_{N,\varepsilon}(S^j(x)) \right). \quad (2.15)$$

Observar que $\frac{m}{n} \rightarrow \frac{1}{N}$ cuando $n \rightarrow \infty$, así tomando $\limsup_{n \rightarrow \infty}$ en ambos lados y usando el hecho de que x es genérico, podemos concluir que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\phi_n(x)}{n} \leq \frac{1}{N} \left(\int_X \phi_N d\mu + \varepsilon \right). \quad (2.16)$$

Como la cota en (2.16) vale para $N \in \mathbb{N}$ arbitrario y para cualquier $\varepsilon > 0$, obtenemos el resultado. \square

En el caso especial de un grupo (topológico) compacto skew-product $(Y \times G, S, \mu \times m_G)$, podemos aplicar el Lema 55 para obtener la siguiente mejora.

Corolario 58. *Sea (Y, T, μ) un sistema que preserva medida con Y compacto y T continua, sea G un grupo (topológico) compacto con la medida de Haar m_G , y sea $\alpha : Y \rightarrow G$ una función continua. Denotemos el sistema que preserva medida skew-product asociado como $(X, S, \mu \times m_G)$. Más aún, sea $\mathcal{F} = (\phi_n)_{n=1}^{\infty}$ un cociclo subaditivo sobre X , C -aproximable por arriba.*

Si $\mu \times m_G$ es ergódica, entonces para todo punto $\omega \in X$ que sea μ -genérico,

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\phi_n(\omega, g)}{n} \leq \inf_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{1}{n} \int_X \phi_n d(\mu \times m_G) \right\} \quad \text{uniformemente en } g \in G.$$

Demostración. Esto se sigue del Lema 55 haciendo $n \rightarrow \infty$ en la desigualdad puntual (2.15). \square

Capítulo 3

Conjuntos grandes evitando contables patrones lineales.

En este capítulo construiremos un conjunto grande, compacto en \mathbb{R}^d , que evite contables patrones lineales dados de antemano.

Comencemos por definir qué es un patrón lineal:

Definición 59. Dado $E \subseteq \mathbb{R}^d$ decimos que $\psi : \mathbb{R}^{dk} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un patrón en E , si existen distintos puntos $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k \in E$ tales que $\psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k) = \vec{0}$.

En el caso particular que ψ es una función lineal, decimos que es un patrón lineal.

Ahora enunciemos el resultado principal de este capítulo:

Teorema 60. Sea h una función de dimensión con $h < x^d$, y sea $(\psi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones lineales no nulas con $\psi_k : (\mathbb{R}^d)^{m_k} \rightarrow \mathbb{R}$ y $m_k \geq 2$. Entonces existe un conjunto compacto $E \subseteq \mathbb{R}^d$ tal que $\mathcal{H}^h(E) > 0$, y $\psi_k(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{m_k}) \neq 0$ para todos $k \in \mathbb{N}$ y todos vectores distintos $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{m_k} \in E$.

En particular, si tomamos $h(x) := -\log(x)x^d$, obtenemos un conjunto de dimensión de Hausdorff d con las mismas propiedades.

Un Teorema de Besicovitch [4] implica que si $E \subset \mathbb{R}^d$ tiene medida \mathcal{H}^h positiva para todo $h < x^d$, entonces tiene medida de Lebesgue positiva. Más específicamente:

Teorema 61 (Besicovitch 1956). Dado un conjunto compacto $E \subseteq \mathbb{R}^d$ y una función de dimensión g tal que $\mathcal{H}^g(E) = 0$, entonces existe $h < g$ tal que $\mathcal{H}^h(E) = 0$.

Por lo tanto, como un conjunto de medida de Lebesgue positiva contiene todo patrón finito, en el Teorema 60 no es posible tener un conjunto E que lo verifique para toda $h < x^d$ simultáneamente. Eso puede verse por absurdo, tomando por ejemplo la función lineal

$\psi(x, y, z) := \frac{x+z}{2} - y$. Supongamos que el conjunto no tiene el patrón ψ y que $\mathcal{H}^h(E) > 0$ para toda $h < x^d$, entonces (por el Teorema de Besicovitch) $\mathcal{L}(E) = c_d \mathcal{H}^d(E) > 0$. Por lo tanto, por tener medida de Lebesgue positiva, E contiene una progresión aritmética de longitud 3 (que está en el conjunto de ceros de ψ), lo que es una contradicción ya que E no contiene el patrón ψ .

Remarcamos que Máthé [41], y Fraser y Pramanik [21] estudiaron problemas similares para patrones más generales, bajo ciertas condiciones, pero el conjunto que ellos construyen no tiene dimensión total, y en ciertos casos particulares la dimensión obtenida es óptima (es decir, en algunos casos, no existe un conjunto de dimensión total que no contenga las patrones no-lineales dados). Como queremos estudiar conjuntos grandes para funciones de dimensión arbitrarias h con $h < x^d$, nos enfocamos en el caso de los patrones lineales.

Como dijimos anteriormente, Fraser y Pramanik [21] construyen conjuntos grandes en \mathbb{R}^d que evitan patrones no necesariamente polinomiales. Si bien es más general en cuanto al tipo de patrones que evitan, si restringimos sus resultados al caso de patrones lineales nuestro resultado es más potente en cuanto a que conseguimos que el conjunto sea compacto, no solo obtenemos una cota inferior para la dimensión de Hausdorff sino que lo estudiamos para cualquier $h < x^d$ función de dimensión de lo que se infiere que bajo ciertas condiciones se puede conseguir uno de dimensión total.

El siguiente Teorema dice esencialmente que dada una familia contable de funciones que satisfacen ciertas condiciones de regularidad y que la derivada parcial no se anule, se puede conseguir un conjunto grande (no necesariamente compacto) que no tiene esos patrones, es decir que no tiene puntos distintos que al evaluarlos en las funciones se anulen.

Teorema 62 (R. Fraser, M. Pramanik). [21, Teorema 1.1] *Para cada $\eta > 0$ y $v \in \mathbb{Z}_{\geq 3}$, sea $(f_k)_k$ una familia contable de funciones en v variables $f_k : \mathbb{R}^v \rightarrow \mathbb{R}$ con las siguientes propiedades:*

1. *Existe $r_k < \infty$ tal que $f_k \in C^{r_k}([0, \eta]^v)$.*
2. *Para cada k , alguna derivada parcial de f_k de orden $r_k \geq 1$ no se anula en ningún punto de $[0, \eta]^v$.*

Entonces, existe un conjunto $E \subseteq [0, \eta]$ con dimensión de Hausdorff al menos $\frac{1}{v-1}$, y dimensión de Minkowski 1 tal que $f_k(x_1, \dots, x_v) \neq 0$ para todos x_1, \dots, x_v distintos en E , y para todo k .

La cota inferior que obtienen para la dimensión de Hausdorff del conjunto depende de la cantidad de variables de las funciones. En el caso lineal esa cota es peor, pero lo innovador de este resultado es que no es para polinomios necesariamente, es decir que se aplica a casos en donde los resultados de Máthé no se aplican.

Para probar el Teorema principal de esta sección usamos la idea de Keleti (que también fue utilizada posteriormente por Maga) de definir los cubos para matar los patrones a escalas siguientes de la construcción, pero los detalles son diferentes.

La demostración de Maga, es casi idéntica a la hecha por Keleti. Maga piensa a \mathbb{R}^2 como el plano complejo, para poder usar el método de Keleti y poder ver las relaciones de tres puntos como un cociente de números complejos.

Para poder tener dimensión total ellos necesitan como condición en la construcción tener separación entre los cubos de un mismo nivel para utilizar el Ejemplo 4,6 del clásico libro de Falconer [15] (Teorema 26 de los Preliminares) el cual da un resultado solo para dimensión y no para medidas generales de Hausdorff. Algunos cubos pueden tener gran cantidad de hijos (incluso si miramos las cantidades de hijos, puede ser no acotada).

En el resultado que expondremos aquí, los cubos a veces comparten el lado y la cantidad de hijos de cada cubo es uniformemente acotada, y para poder mostrar que el conjunto es grande se basa en el principio de distribución de masa generalizado. Por otra parte hubo que posicionar los cubos hijos de una forma más general, dado que se evitan patrones lineales más generales.

La demostración del resultado de Máthé es extremadamente distinta. Mientras que yo me baso fuertemente en la linealidad para probar que los patrones dados no están en el conjunto, él se basa en condiciones con la derivada, utiliza lemas acerca de intersección contable de clausuras de conjuntos engordados para obtener cotas inferiores para la dimensión de Hausdorff (que resulta a veces grosera para ciertos polinomios de grado grande).

3.1. Desarrollo de un resultado previo de Keleti

A grandes rasgos en el trabajo de Keleti, se muestra que para cualquier colección contable de conjuntos de 3 puntos, hay un subconjunto compacto de \mathbb{R} , con dimensión de Hausdorff total, que no contiene copia similar de cualquiera de los conjuntos de 3 puntos dados. Dado un conjunto contable de ternas de números reales ordenados:

$$T = \{(x_i, y_i, z_i) : x_i, y_i, z_i \in \mathbb{R}, x_i < y_i < z_i\}_i$$

con i en un conjunto finito de índices o $i \in \mathbb{N}$, definimos

$$A = \left\{ \frac{z_i - x_i}{z_i - y_i} : (x_i, y_i, z_i) \in T \right\}_i.$$

Este es el conjunto de las “proporciones” de las ternas de T .

El conjunto A es contable, pues T es contable. Además $A \subseteq (1, +\infty)$, pues $x_i < y_i < z_i$.

Teorema 63 (Keleti). *Para cualquier conjunto contable $A \subseteq (1, +\infty)$, existe un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}$ compacto, con $\dim_H(E) = 1$ tal que si $x < y < z$ en E , se tiene $\frac{z-x}{z-y} \notin A$.*

Antes de probar el teorema, veamos dos corolarios con sus respectivas demostraciones:

Corolario 64 (Keleti). *Para toda sucesión de subconjuntos de \mathbb{R} : B_1, B_2, \dots con $\#B_i \geq 3$, existe $E \subseteq \mathbb{R}$ compacto con $\dim_H(E) = 1$, que no contiene una copia similar de cualquiera de los B_i .*

Demostración. Si $\#B_i = 3 \forall i \in \mathbb{N}$ sea

$$A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \left(\left\{ \frac{z-x}{z-y} : x < y < z \text{ en } B_i \right\} \cup \left\{ \frac{z-x}{y-x} : x < y < z \text{ en } B_i \right\} \right),$$

que es un subconjunto de $(1, \infty)$. Entonces por el Teorema 63 existe $E \subseteq \mathbb{R}$ compacto con $\dim_H(E) = 1$, que no contiene copia similar de cualquier B_i . Pues: Si E tuviera una copia similar de algún $B_{i_0} = \{x, y, z\}$ con $x < y < z$; entonces existen a no nulo y b tales que $ax + b, ay + b, az + b$ están en E . Con lo cual tenemos que en caso de ser $a > 0$ $ax + b < ay + b < az + b$ en E , o en caso de ser $a < 0$ tenemos $az + b < ay + b < ax + b$ en E . Por lo que (por lo que verifica el E del Teorema)

$$\frac{z-x}{z-y} = \frac{(az+b) - (ax+b)}{(az+b) - (ay+b)} \notin A$$

o bien

$$\frac{z-x}{y-x} = \frac{x-z}{x-y} = \frac{(ax+b) - (az+b)}{(ax+b) - (ay+b)} \notin A,$$

lo que en cualquier caso es un absurdo por como definimos A .

Veamos el caso general. Suponemos que $\#B_i \geq 3$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Tomando $\tilde{B}_i \subseteq B_i$ con $\#\tilde{B}_i = 3$, por el caso anterior existe $E \subseteq \mathbb{R}$ compacto con $\dim_H(E) = 1$, que no contiene copia similar de cualquier \tilde{B}_i ; y por lo tanto no contiene copia similar de cualquier B_i . □

En particular, para cualquier colección contable de conjuntos de 3 puntos, hay un subconjunto compacto de \mathbb{R} , con dimensión de Hausdorff total, que no contiene copia similar de cualquiera de los conjuntos de 3 puntos dados. Más en particular, tomando la colección que tiene solo el elemento $\{1, 2, 3\}$, tenemos que existe $E \subseteq \mathbb{R}$ compacto con $\dim_H(E) = 1$, que no contiene progresiones aritméticas.

Corolario 65 (Keleti). *Para cualquier $B \subseteq \mathbb{R}$ contable, existe $E \subseteq \mathbb{R}$ compacto con $\dim_H(E) = 1$, que interseca a toda copia similar de B en a lo sumo dos puntos.*

Demostración. Sea

$$A = \left\{ \frac{z-x}{z-y} : x < y < z \in B \right\} \cup \left\{ \frac{z-x}{y-x} : x < y < z \in B \right\} \subseteq (1, +\infty).$$

Como además A es contable, utilizando el Teorema 63, existe $E \subseteq \mathbb{R}$ compacto con $\dim_H(E) = 1$, tal que

$$\frac{z-x}{z-y} \notin A \text{ y } \frac{z-x}{y-x} \notin A \text{ para cualquier terna } x < y < z \text{ en } E. \quad (3.1)$$

Si \tilde{B} es una copia similar cualquiera de B , entonces $\tilde{B} = aB+b$ con a y b números reales donde a es no nulo. Veamos, por absurdo, que $\tilde{B} \cap E$ tiene como mucho dos puntos: Supongamos que existen $x < y < z$ en $E \cap \tilde{B}$

1. Si $a > 0$, tenemos $\frac{x-b}{a} < \frac{y-b}{a} < \frac{z-b}{a}$ en B ; por lo tanto, por como definimos A , resulta:

$$\frac{z-x}{z-y} = \frac{\frac{z-b}{a} - \frac{x-b}{a}}{\frac{z-b}{a} - \frac{y-b}{a}} \in A.$$

Lo que es un absurdo por (3.1).

2. $a < 0$ tenemos $\frac{x-b}{a} > \frac{y-b}{a} > \frac{z-b}{a}$ en B ; por lo tanto, por como definimos A , resulta:

$$\frac{z-x}{y-x} = \frac{x-z}{x-y} = \frac{\frac{x-b}{a} - \frac{z-b}{a}}{\frac{x-b}{a} - \frac{y-b}{a}} \in A.$$

Lo que es un absurdo por (3.1).

□

A continuación veremos la demostración del Teorema 63:

Demostración. Podemos pensar $A = \{\alpha_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de modo que cada $a \in A$ se repita infinitas veces en la sucesión $\{\alpha_k\}_{k \in \mathbb{N}}$.

Pues como A es contable: si A es finito $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ podemos tomar una sucesión de α como: $a_1, \dots, a_n, a_1, \dots, a_n, \dots$. Y en el caso que A sea numerable $A = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ podemos tomar la sucesión como $a_1, a_2, a_1, a_2, a_3, a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$.

Definimos:

$$\beta_k := \max \left\{ 6\alpha_k, \frac{6\alpha_k}{\alpha_k - 1} \right\}. \quad (3.2)$$

Notemos que

$$\beta_k \geq 6\alpha_k \geq 6 \quad \text{pues} \quad \alpha_k \in (1, +\infty).$$

Podemos tomar

$$(m_j)_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}_{\geq 3} \text{ tal que } \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\log(\beta_1 \dots \beta_k)}{\log(m_1 \dots m_{k-1})} = 0. \quad (3.3)$$

Por ejemplo, tomando

$$\begin{aligned} m_1 &\geq 3 \text{ tal que } m_1 \geq (\beta_1\beta_2)^2 \\ m_2 &\geq 3 \text{ tal que } m_2 \geq \beta_1\beta_2\beta_3^3 \\ m_3 &\geq 3 \text{ tal que } m_3 \geq \beta_1\beta_2\beta_3\beta_4^4 \\ &\dots \end{aligned}$$

obtenemos que

$$\begin{aligned} m_1 &\geq (\beta_1\beta_2)^2 \\ m_1m_2 &\geq (\beta_1\beta_2\beta_3)^3 \\ m_1m_2m_3 &\geq (\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4)^4 \\ &\dots \end{aligned}$$

con lo cual:

$$0 \leq \frac{\log(\beta_1 \dots \beta_k)}{\log(m_1 \dots m_{k-1})} \leq \frac{\log(\beta_1 \dots \beta_k)}{\log((\beta_1 \dots \beta_k)^k)} = \frac{1}{k} \rightarrow 0.$$

Sea

$$\delta_k := \frac{1}{\beta_1 \dots \beta_k m_1 \dots m_k}. \quad (3.4)$$

Construcción de E :

Por inducción definiremos $E_0 \supseteq E_1 \supseteq \dots$ de la siguiente manera:

$$E_0 = [0, 1].$$

Definimos E_1 como cualquier unión de m_1 intervalos cerrados de longitud δ_1 separados por huecos de longitud al menos δ_1 , de forma que $E_1 \subseteq E_0$. Esto es posible porque $(2m_1 - 1)\delta_1 = \frac{2m_1 - 1}{\beta_1 m_1} \leq \frac{2m_1 - 1}{6m_1} \leq \frac{2}{6} \leq 1$.

Definiremos inductivamente los E_k , $k \geq 2$.

Cada E_k , será unión de $m_1 \dots m_k$ intervalos cerrados de longitud δ_k , separados por huecos de longitud al menos δ_k , donde cada intervalo E_{k-1} contendrá exactamente m_k intervalos de E_k . Esto es posible ya que

$$(2m_k - 1)\delta_k = \frac{2m_k - 1}{\beta_k m_k} \delta_{k-1} \leq \frac{2m_k}{6m_k} \delta_{k-1} \leq \delta_{k-1}.$$

Llamaremos $I_1^k \dots I_{m_1 \dots m_k}^k$ a los intervalos de E_k ordenados de izquierda a derecha (Estamos nombrándolos según su posición, si bien todavía no están fijados).

Sea

$$\Gamma := \{(I_a^k, I_b^k, I_c^k) / 1 \leq a < b < c \leq m_1 \dots m_k, k \in \mathbb{N}\}$$

el conjunto de todas las ternas de intervalos de cada nivel de construcción ordenados de izquierda a derecha. Notemos que Γ es numerable.

Podemos tomar $\Gamma = \{(J_n, K_n, L_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ donde

$$\text{si } n > 1 \text{ y } (J_n, K_n, L_n) = (I_a^k, K_b^k, L_c^k) \text{ entonces } n > k. \quad (3.5)$$

Es decir, que si $n > 1$ el término n -ésimo es una terna de intervalos de un paso de la construcción anterior a n . Y podemos hacer que además se verifique que

$$\forall a \in A \text{ y } \forall (J, K, L) \in \Gamma, \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que } \alpha_n = a \text{ y } (J_n, K_n, L_n) = (J, K, L) \quad (3.6)$$

En efecto, podemos construir (J_n, K_n, L_n) de la siguiente manera:

Como $(\alpha_k)_k$ la construimos de modo que tome infinitas veces cada valor de A , para cada $a \in A$ tenemos la subsucesión $(\alpha_{k_m})_m$ de todos los que toman el valor a , y definimos $(J_{k_m}, K_{k_m}, L_{k_m})_{m \in \mathbb{N}}$ que recorra todas las ternas de Γ , como lo hacía la sucesión que cumplía (3.5). De este modo se verifica lo pedido en (3.6) y se sigue cumpliendo (3.5).

Si tenemos definidos E_1, \dots, E_{k-1} para $k \geq 2$, tenemos definido también

$$(J_k, K_k, L_k) = (I_a^{k'}, K_b^{k'}, L_c^{k'})$$

pues $k' < k$ (por (3.5))

Por como fueron elegidos, sabemos que cada intervalo de E_{k-1} , o bien está incluido en exactamente uno de los J_k, K_k, L_k , o bien es disjunto de $J_k \cup K_k \cup L_k$ (pues los intervalos de E_{k-1} son o bien del mismo nivel o bien de algún paso siguiente).

Para construir E_k , consideremos (J_k, K_k, L_k) que son intervalos de un mismo nivel, que como vimos es anterior a k .

Sea I intervalo de E_{k-1} . Consideramos los casos:

- $I \subseteq J_k$.

Utilizando la definición de β_k dada en (3.2)

$$\begin{aligned} \frac{\delta_{k-1}}{\delta_k 3\alpha_k} &= \frac{\beta_k m_k}{3\alpha_k} \\ &\geq \frac{6\alpha_k m_k}{3\alpha_k} = 2m_k \end{aligned}$$

Entonces, por ser I un intervalo de E_{k-1} ,

$$\text{long}(I) = \delta_{k-1} \geq \delta_k 3\alpha_k 2m_k$$

y por lo tanto I tiene al menos m_k puntos de la forma $\delta_k 3\alpha_k i$ con $i \in \mathbb{Z}$ y podemos elegir m_k intervalos en I como segmentos de la forma

$$\delta_k (3\alpha_k i + [0, 1]) \text{ con } i \in \mathbb{Z}.$$

La distancia entre dos de esos intervalos es

$$\begin{aligned} 3\alpha_k\delta_k i - (3\alpha_k\delta_k(i-1) + \delta_k) &= 3\alpha_k\delta_k - \delta_k \\ &\geq (3\alpha_k - 1)\delta_k \\ &> 2\delta_k \\ &> \delta_k \end{aligned}$$

donde la anteúltima desigualdad vale porque $\alpha_k \in A \subseteq (1, +\infty)$. Por lo tanto tomamos a estos m_k intervalos como los intervalos de E_k contenidos en I .

- $I \subseteq K_k$.

Dado que, por la definición de los δ_k dada en (3.4), y por como definimos β_k en (3.2) es $\beta_k \geq 6\alpha_k > 6$, resulta que

$$\frac{\delta_{k-1}}{3\delta_k} = \frac{m_k\beta_k}{3} \geq 2m_k.$$

Entonces, por ser I un intervalo de E_{k-1} , tenemos que

$$\text{long}(I) = \delta_{k-1} \geq 3\delta_k 2m_k$$

y por lo tanto I tiene al menos m_k puntos de la forma $\delta_k 3j$ con $j \in \mathbb{Z}$, y podemos elegir m_k intervalos en I como segmentos de la forma

$$\delta_k(3j + [0, 1]) \text{ con } j \in \mathbb{Z}.$$

La distancia entre dos de esos intervalos es

$$\begin{aligned} \delta_k 3j - (\delta_k 3(j-1) + \delta_k) &= 2\delta_k \\ &> \delta_k. \end{aligned}$$

Tomamos estos m_k intervalos como los intervalos de E_k contenidos en I .

- $I \subseteq L_k$.

Por como definimos β_k en (3.2) es $\beta_k \geq \frac{6\alpha_k}{\alpha_k-1}$, y por como definimos los δ_k en (3.4), resulta entonces que

$$\begin{aligned} \frac{\delta_{k-1}}{\frac{3\alpha_k\delta_k}{\alpha_k-1}} &= \frac{\beta_k m_k}{\alpha_k-1} = \frac{2\beta_k m_k}{\alpha_k-1} \\ &\geq \frac{2m_k\beta_k}{\beta_k} = 2m_k \end{aligned}$$

Entonces, por ser I un intervalo de E_{k-1} , tenemos que

$$\text{long}(I) = \delta_{k-1} \geq \frac{\delta_k 3\alpha_k}{\alpha_k - 1} 2m_k$$

y por lo tanto tiene al menos m_k puntos de la forma $\frac{3\alpha_k \delta_k}{\alpha_k - 1} \left(l + \frac{1}{2}\right) + \delta_k$ con $l \in \mathbb{Z}$ y podemos elegir m_k intervalos en I como segmentos de la forma

$$\delta_k \left(\frac{3\alpha_k}{\alpha_k - 1} \left(l + \frac{1}{2}\right) + [0, 1] \right) \text{ con } l \in \mathbb{Z}.$$

Notar que a diferencia de los casos anteriores, introducimos un factor $\frac{1}{2}$ sumando. Más adelante se verá que lo necesitaremos para cuando veamos que si $x < y < z$ en entonces $\frac{z-x}{z-y} \notin A$.

La distancia entre dos de esos intervalos es

$$\begin{aligned} \delta_k \frac{3\alpha_k}{\alpha_k - 1} \left(l + \frac{1}{2}\right) - \left(\delta_k \frac{3\alpha_k}{\alpha_k - 1} \left(l - \frac{1}{2}\right) + \delta_k \right) &= \delta_k \frac{3\alpha_k}{\alpha_k - 1} - \delta_k \\ &= \delta_k \left(\frac{3\alpha_k}{\alpha_k - 1} - 1 \right) \\ &\geq 2\delta_k \\ &> \delta_k \end{aligned}$$

donde la anteúltima desigualdad vale porque $\frac{3x}{x-1} > 3$ si $x > 1$.

Tomamos a estos m_k intervalos como los intervalos del paso k contenidos en I .

- $I \cap (J_k \cup K_k \cup L_k) = \emptyset$.

En este caso definimos m_k intervalos de longitud δ_k en I arbitrariamente de modo que queden separados por huecos de longitud al menos δ_k , y tomamos a estos intervalos como los intervalos de E_k contenidos en I .

Si comparamos la distancia entre subintervalos de E_k de los diferentes casos, tenemos por construcción de E_{k-1} , que deben distar más que $\delta_{k-1} \geq \delta_k$.

Así construimos E_k , que consiste en $m_1 \dots m_k$ intervalos de longitud δ_k , separados por huecos de al menos δ_k y cada intervalo de E_{k-1} contiene m_k intervalos de E_k .

Definimos $E := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} E_k$, que es compacto.

- a) Veamos que $\dim_H(E) = 1$:

Por ser $E \subseteq \mathbb{R}$, se tiene que $\dim_H(E) \leq 1$.

Por otra parte, por ser $E = \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} E_k$ donde $E_1 = [0, 1] \supseteq E_2 \supseteq \dots$ construidos de modo que cada intervalo del paso $k - 1$ tiene $m_k \geq 2$ intervalos del paso k , separados por agujeros de longitud al menos δ_k , donde $\delta_k > \delta_{k+1} > 0 \forall k$, $\delta_k \rightarrow 0$, utilizando el Teorema 26, tenemos que:

$$\dim_H(E) \geq \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\log(m_1 \dots m_{k-1})}{-\log(\delta_k m_k)}.$$

Por como elegimos los δ_k en (3.4), deducimos que

$$\begin{aligned} \dim_H(E) &\geq \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\log(m_1 \dots m_{k-1})}{\log(\beta_1 \dots \beta_k m_1 \dots m_{k-1})} \\ &= \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\log(m_1 \dots m_{k-1})}{\log(\beta_1 \dots \beta_k) + \log(m_1 \dots m_{k-1})} \\ &= \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{\log(\beta_1 \dots \beta_k)}{\log(m_1 \dots m_{k-1})} + 1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

donde la última igualdad vale por como elegimos $(m_k)_{k \in \mathbb{N}}$ en (3.3).

b) Sean $x < y < z$ en E . Veamos, por absurdo, que $\frac{z-x}{z-y} \notin A$:

Supongamos que $x < y < z$ en E cumplen que $\frac{z-x}{z-y} \in A$. Como $\lim_{k \rightarrow \infty} \delta_k = 0$, donde δ_k es la longitud de cada intervalo de E_k , tenemos que existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que x, y, z están en distintos intervalos de E_k .

Así, por (3.6), para $a = \frac{z-x}{z-y}$ y (J, K, L) la terna de intervalos del nivel k en la que están x, y, z respectivamente; existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha_n = \frac{z-x}{z-y}$, $x \in J_n, y \in K_n, z \in L_n$ (Es decir, $J = J_n, K = K_n, L = L_n$).

Por construcción de E_n , tenemos que existen $i, j, l \in \mathbb{Z}$ tales que

$$\begin{aligned} x &\in \delta_n (3i\alpha_n + [0, 1]), \\ y &\in \delta_n (3j + [0, 1]), \\ z &\in \delta_n \left(\frac{3\alpha_n}{\alpha_n - 1} \left(l + \frac{1}{2} \right) + [0, 1] \right). \end{aligned}$$

Llamando

$$\begin{aligned} X &:= 3i\alpha_n + [0, 1] \\ Y &:= 3j + [0, 1] \\ Z &:= \frac{3\alpha_n}{\alpha_n - 1} \left(l + \frac{1}{2} \right) + [0, 1] \end{aligned}$$

tenemos (por lo visto recién) que

$$\frac{x}{\delta_n} \in X, \frac{y}{\delta_n} \in Y, \frac{z}{\delta_n} \in Z.$$

Como $\alpha_n = \frac{z-x}{z-y}$, resulta $\alpha_n z - \alpha_n y = z - x$, por lo que $z(\alpha_n - 1) + x = \alpha_n y$. De ahí se sigue que

$$X + (\alpha_n - 1)Z \ni \frac{z}{\delta_n}(\alpha_n - 1) + \frac{x}{\delta_n} = \alpha_n \frac{y}{\delta_n} \in \alpha_n Y.$$

Por lo tanto,

$$(\alpha_n Y) \cap (X + (\alpha_n - 1)Z) \neq \emptyset. \quad (3.7)$$

Además,

$$\begin{aligned} X + (\alpha_n - 1)Z &= 3i\alpha_n + [0, 1] + 3\alpha_n \left(l + \frac{1}{2} \right) + (\alpha_n - 1)[0, 1] \\ &= 3\alpha_n(i + l) + \frac{3}{2}\alpha_n + [0, 1] + [0, \alpha_n - 1] \\ &= 3\alpha_n(i + l) + \frac{3}{2}\alpha_n + [0, \alpha_n] \\ &= \alpha_n \left(3(i + l) + \left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2} \right] \right), \end{aligned}$$

y también

$$\alpha_n Y = \alpha_n(3j + [0, 1]) \quad (3.8)$$

Reemplazando ambas en (3.7), tenemos que:

$$\emptyset \neq (\alpha_n Y) \cap (X + (\alpha_n - 1)Z) = (\alpha_n(3j + [0, 1])) \cap \left(\alpha_n \left(3(i + l) + \left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2} \right] \right) \right),$$

con lo cual

$$\emptyset \neq (3j + [0, 1]) \cap \left(3(i + l) + \left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2} \right] \right) \text{ con } i, j, l \in \mathbb{Z},$$

lo que es un absurdo. (Pudimos llegar a un absurdo por introducir ese factor $\frac{1}{2}$ antes mencionado, para que quedaran disjuntos los conjuntos).

El absurdo provino de suponer que era $\frac{z-x}{z-y} \in A$, por lo cual resulta que $\frac{z-x}{z-y} \notin A$.

□

3.2. Teorema principal del capítulo

Si tenemos un conjunto $E := \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} E_k$, donde E_k es una sucesión de conjuntos encajados y cada E_k es unión finita de cubos cerrados no solapados, decimos que un cubo I en la construcción del conjunto E es un cubo del nivel k si I es uno de los cubos de E_k . También decimos que un cubo J es un ancestro de I si J, I son cubos de niveles j, k respectivamente, con $j < k$ y $I \subseteq J$.

Lema 66. *Sea $E := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} E_k \subseteq \mathbb{R}^d$ donde E_k en una unión finita de cubos no rampantes del mismo tamaño, y cada cubo de E_{k+1} está contenido en un cubo de E_k . Sea μ una distribución de masa en E y sea h una función de dimensión tal que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ satisfaciendo $\mu(I_k) \leq c_1 h(|I_k|)$ para todo I_k cubo de nivel k , para todo $k \geq k_0$. Supongamos que cada cubo de E_k contiene a lo sumo c_2 cubos de nivel $k + 1$.*

Entonces existe una constante c_3 dependiendo de c_1, c_2 y d tal que

$$0 < \frac{\mu(E)}{c_3} \leq \mathcal{H}^h(E).$$

Demostración. Usaremos la Proposición 24.

Sea $\varepsilon := |I_{k_0}| \sqrt{d}$ el diámetro de cualquier cubo en el nivel k_0 . Escribamos δ_k la longitud del lado de cualquier cubo de nivel k . Si U es un conjunto con $|U| \in (0, \varepsilon)$, entonces existe $k \geq k_0$ tal que $\sqrt{d}\delta_{k+1} \leq |U| < \sqrt{d}\delta_k$. Existe un cubo C con longitud de lado $2\sqrt{d}\delta_k$ tal que $U \subseteq C$. Como C interseca a lo sumo $(2\sqrt{d} + 3)^d$ cubos de nivel k , entonces por hipótesis C interseca a lo sumo $c_2(2\sqrt{d} + 3)^d$ cubos I_j de nivel $k + 1$. Entonces existe una constante c_3 dependiendo de c_1, c_2 y d tal que

$$\mu(U) \leq \sum_{j=1}^{c_2(2\sqrt{d}+3)^d} \mu(I_j) \leq c_2(2\sqrt{d} + 3)^d c_1 h(\sqrt{d}\delta_{k+1}) \leq c_3 h(|U|).$$

Es bien sabido que considerar la definición de \mathcal{H}^h con δ -cubrimientos por cubos, en lugar de con δ -cubrimientos generales difieren solo en una constante multiplicativa.

Usando lo visto y la Proposición 24 se sigue el resultado. \square

Ahora estamos en condiciones de probar el Teorema principal de este Capítulo.

Demostración del Teorema 60. Podemos asumir que cada función aparece numerables veces en la sucesión $\{\psi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$.

Construiremos un conjunto $E := \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} E_k \subseteq [1, 2]^d$, donde los E_k son encajados y cada uno es una unión finita de cubos cerrados no rampantes, por lo que el conjunto E será compacto.

Como ψ_i es una función lineal no nula, podemos definir

$$c_i := \max_{\vec{y} \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^{m_i d}} |\psi_i(\vec{y})| > 0.$$

La función ψ_i tiene la forma

$$\psi_i(x_{1,1}, \dots, x_{1,d}, \dots, x_{m_i,1}, \dots, x_{m_i,d}) := b_{i,1,1}x_{1,1} + \dots + b_{i,m_i,d}x_{m_i,d}.$$

Como permutar los conjuntos $(x_{k,1}, \dots, x_{k,d})$ con $1 \leq k \leq m_i$, y multiplicar ψ_i por una constante no nula, no afecta el enunciado, podemos asumir sin pérdida de generalidad que existe $j_i \in \{1, \dots, d\}$ tal que $b_{i,m_i,j_i} = 1$.

Sea $\lambda_{i,\ell,v} := \frac{1}{|b_{i,\ell,v}|}$ si $b_{i,\ell,v} \neq 0$, y $\lambda_{i,\ell,v} := 1$ si no. Entonces, tenemos que

$$\lambda_{i,\ell,v} b_{i,\ell,v} = \text{sg}(b_{i,\ell,v}) \text{ para todo } i, 1 \leq \ell \leq m_i, 1 \leq v \leq d,$$

donde sg es la función signo.

Para cada i y cada $1 \leq \ell \leq m_i - 1$, definimos la función

$$\phi_i^\ell(x_1, \dots, x_d) := (\lambda_{i,\ell,1}x_1, \dots, \lambda_{i,\ell,d}x_d),$$

y para $\ell = m_i$ tomamos

$$\phi_i^{m_i}(x_1, \dots, x_d) := (\lambda_{i,m_i,1}x_1, \dots, \lambda_{i,m_i,d}x_d) + \frac{1}{2}e_{j_i},$$

donde $e_j = (v_1, \dots, v_d)$ con $v_j = 1$ y $v_k = 0$ para todo $k \neq j$.

Como consecuencia de esas definiciones, tenemos

$$\begin{aligned} \psi_i(\phi_i^1(\mathbb{Z}^d), \dots, \phi_i^{m_i}(\mathbb{Z}^d)) &= \text{sg}(b_{i,1,1})\mathbb{Z} + \dots + \text{sg}(b_{i,m_i,d})\mathbb{Z} + \frac{1}{2} \\ &= \mathbb{Z} + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos

$$|\psi_i(\phi_i^1(\vec{z}_1), \dots, \phi_i^{m_i}(\vec{z}_{m_i}))| \geq \frac{1}{2} \quad (3.9)$$

para todo $\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_{m_i} \in \mathbb{Z}^d$ y todo i .

Definimos β_i tal que $\beta_i \geq m_i$ y

$$\frac{\beta_i}{2} \geq \max\{\lambda_{i,\ell,v} : 1 \leq \ell \leq m_i, 1 \leq v \leq d\} 2c_i \sqrt{d} + \frac{\sqrt{d}}{2}.$$

Sea $(M_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}_{\geq 2}$ una sucesión estrictamente creciente tal que para todo i :

- $M_{i+1} \geq M_i + 2$
- $\frac{h(\sqrt{d}2^{-k} \prod_{j:M_j \leq k} \beta_j^{-1})}{(\sqrt{d}2^{-k} \prod_{j:M_j \leq k} \beta_j^{-1})^d} \geq 2^{id} \beta_1^d \dots \beta_i^d$ para todo $k \geq M_i$

La última condición vale si M_i es suficientemente grande por la hipótesis $h < x^d$ y $\sqrt{d}2^{-k} \prod_{j:M_j \leq k} \beta_j^{-1} \leq \sqrt{d}2^{-k}$ tiende a 0 independientemente de β_1, \dots, β_i .

Construiremos E evitando los patrones dados en los niveles $\{M_i\}_i$. Sea $E_0 := [1, 2]^d$. Construiremos E_k como unión de $N_k := 2^{d(k - \#\{j \leq k: j \in \cup_i \{M_i\}\})}$ cubos con longitud de lado $\delta_k := 2^{-k} \prod_{i: M_i \leq k} \beta_i^{-1}$.

Para cada i , sea $\Gamma_{m_i} := \{(J_k^1, \dots, J_k^{m_i})\}_{k \in \mathbb{N}}$ el conjunto de todas las m_i -uplas de cubos diferentes del mismo nivel de construcción de E (donde ignoramos los niveles con menos de m_i cubos), en todo posible orden, y escribimos $\Gamma = \cup_i \Gamma_{m_i}$. En este punto, la notación J_k^j debe ser entendida como una etiqueta para un cubo que aún no está definido (pero que sin embargo la cantidad de cubos y sus tamaños ya están fijados). En la siguiente construcción, definiremos inductivamente (en k) las posiciones de los cubos correspondientes a cada etiqueta.

Sea $(U_j)_{j \in \mathbb{N}}$ una sucesión donde:

- cada elemento de Γ aparece infinitas veces
- $U_j \in \Gamma_{m_j}$
- para todo i y todo $U \in \Gamma_{m_i}$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\psi_k = \psi_i$, $U = U_k$ y cada cubo de U_k es de nivel $< k - 1$.

Para esto, es suficiente que para cada i , si consideramos la subsucesión $(\psi_{j_n})_{n \in \mathbb{N}}$ de todos los términos que son iguales a ψ_i , pedimos que cada U_{j_n} sea un elemento de Γ_{m_i} , y además, cada elemento de Γ_{m_i} aparece infinitas veces en las sucesión $(U_{j_n})_{n \in \mathbb{N}}$.

Si E_{k-1} está dado, la construcción de E_k depende de si k pertenece a $(M_i)_{i \in \mathbb{N}}$:

- (a) Si $k \notin \cup_{i \in \mathbb{N}} \{M_i\}$, dividiremos cada cubo de nivel $k - 1$ en 2^d cubos cerrados del mismo tamaño.
- (b) Si $k = M_i$ para algún i , haremos diferentes cosas, dependiendo de si tienen un mismo ancestro entre los cubos de $U_i: J_i^1, \dots, J_i^{m_i}$.

Para cada cubo I de nivel $k - 1$ que no está contenido en ninguno de los cubos en la upla U_i , tomaremos cualquier cubo $I' \subseteq I$ con longitud de lado δ_k .

Para cada cubo I de nivel $k - 1$ que está contenido en algún cubo J_i^ℓ of U_i , tomaremos un cubo $I' \subseteq I$ de la forma

$$\delta_{M_i} \left(4c_i \phi_i^\ell(\vec{z}_\ell) + \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]^d \right) \text{ con } \vec{z}_\ell \in \mathbb{Z}^d. \quad (3.10)$$

Sea E_k la unión de todos los cubos I' .

Veamos que los cubos se pueden tomar de esta manera:

En el caso (a) es claro, porque $\delta_k = \frac{\delta_{k-1}}{2}$.

En el caso (b), sea I un cubo de E_{k-1} que está contenido en un cubo J_k^ℓ de U_k . Como I es un cubo con longitud de lado $\delta_{k-1} = \beta_i \delta_k$, tenemos que $\frac{1}{\beta_i} I$ es un cubo cerrado con longitud

de lado β_i , por lo tanto contiene una bola cerrada de radio $\frac{\beta_i}{2}$, cuyo centro denotaremos por \vec{x} .

Por la definición de ϕ_i^ℓ , existe $\vec{z} \in \mathbb{Z}^d$ tal que

$$\text{dist}(\vec{x}, 4c_i\phi_i^\ell(\vec{z})) \leq \text{máx}\{\lambda_{i,\ell,1}, \dots, \lambda_{i,\ell,d}\}2c_i\sqrt{d}.$$

Usando esto y por lo que asumimos sobre β_i , tenemos:

$$\begin{aligned} 4c_i\phi_i^\ell(\vec{z}) + \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^d &\subseteq B\left[4c_i\phi_i^\ell(\vec{z}), \frac{\sqrt{d}}{2}\right] \\ &\subseteq B\left[\vec{x}, \text{máx}\{\lambda_{i,\ell,1}, \dots, \lambda_{i,\ell,d}\}2c_i\sqrt{d} + \frac{\sqrt{d}}{2}\right] \\ &\subseteq B\left[\vec{x}, \frac{\beta_i}{2}\right] \subseteq \frac{1}{\delta_k}I. \end{aligned}$$

1) Veamos que si $n \in \mathbb{N}$ y $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{m_n} \in E \subset \mathbb{R}^d$ son distintos, entonces $\psi_n(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{m_n}) \neq 0$.

Lo probaremos por el absurdo. Supongamos que $\psi_n(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{m_n}) = 0$. Como $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{m_n} \in E$ son distintos, por definición de la sucesión $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$, existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $\psi_n = \psi_i$, $\vec{x}_1 \in J_i^1$, \dots , $\vec{x}_{m_i} \in J_i^{m_i}$, y todo J_i^ℓ es del mismo nivel $< i - 1$.

Considerando el nivel $M_i \geq i$, vemos de (3.10) que $\vec{x}_\ell = \delta_{M_i}(4c_i\phi_i^\ell(\vec{z}_\ell) + \vec{\Delta}_\ell)$ con $\vec{z}_\ell \in \mathbb{Z}^d$ y $\vec{\Delta}_\ell \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^d$ para todo $1 \leq \ell \leq m_i$. Así, por linealidad de ψ_i tenemos

$$4c_i\psi_i(\phi_i^1(\vec{z}_1), \dots, \phi_i^{m_i}(\vec{z}_{m_i})) + \psi_i(\vec{\Delta}_1, \dots, \vec{\Delta}_{m_i}) = 0$$

con $\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_{m_i} \in \mathbb{Z}^d$. Por lo tanto, tenemos por (3.9)

$$2c_i \leq 4c_i|\psi_i(\phi_i^1(\vec{z}_1), \dots, \phi_i^{m_i}(\vec{z}_{m_i}))| = |\psi_i(\vec{\Delta}_1, \dots, \vec{\Delta}_{m_i})| \leq c_i$$

lo que es una contradicción.

2) Veamos que $\mathcal{H}^h(E) > 0$.

Sea μ la distribución de masa uniforme, i.e.: $\mu(I_k) = \frac{1}{\#\text{cubos de nivel } k}$ para cada I_k cubo de nivel k . Es suficiente probar que si I es un cubo de nivel k con k suficientemente grande entonces

$$h(|I|) \geq \frac{1}{\#\text{cubos de nivel } k}.$$

$\mathcal{H}^h(E) > 0$ se seguirá del Lema 66 y el hecho de que cada cubo de E_k tiene a los sumo 2^d descendientes de nivel $k + 1$.

La longitud del lado de I es $\delta_k = 2^{-k} \prod_{j: M_j \leq k} \beta_j^{-1}$. Si k es suficientemente grande, existe j tal que $M_j \leq k < M_{j+1}$. Por definición de $(M_i)_{i \in \mathbb{N}}$, tenemos

$$\begin{aligned} h(I) &= h \left(\sqrt{d} 2^{-k} \prod_{i: M_i \leq k} \beta_i^{-1} \right) \\ &\geq \left(\sqrt{d} 2^{-k} \prod_{i: M_i \leq k} \beta_i^{-1} \right)^d 2^{jd} \beta_1^d \cdots \beta_j^d \\ &\geq \frac{1}{2^{d(k-j)}} = \frac{1}{\#\text{cubos de nivel } k}. \end{aligned}$$

□

3.3. Aplicaciones

En esta sección veremos algunas aplicaciones del Teorema 60.

Corolario 67. *Dada una función de dimensión h con $h < x$ y con conjunto contable $A \subseteq \mathbb{R}_{\neq 1}$, existe un conjunto compacto $E \subseteq [1, 2]$ tal que $\mathcal{H}^h(E) > 0$ y el conjunto de cocientes de E dado por $\frac{E}{E} := \{\frac{y}{x} : x, y \in E\}$ no contiene ningún elemento de A .*

Demostración. Tomando $d = 1$, $m_a = 2$ para todo k , $\psi_a(x, y) := ax - y$ para todo $a \in A$, y aplicando el Teorema 60, se sigue el Corolario. □

Corolario 68. *Dada una función de dimensión h con $h < x$ y un conjunto contable $\tilde{A} \subseteq \mathbb{R}_{\neq 0}$, existe un conjunto compacto $\tilde{E} \subseteq [0, \log(2)]$ tal que $\mathcal{H}^h(\tilde{E}) > 0$ y el conjunto de diferencias de \tilde{E} dado por $\tilde{E} - \tilde{E} := \{y - x : x, y \in \tilde{E}\}$ no contiene ningún elemento de \tilde{A} .*

Demostración. Definiendo $A := e^{\tilde{A}} := \{e^{\tilde{a}} : \tilde{a} \in \tilde{A}\} \subseteq (0, +\infty) \setminus \{1\}$. Por el Corolario 67 tenemos un conjunto compacto $E \subseteq [1, 2]$ tal que $\mathcal{H}^h(E) > 0$ y $\frac{y}{x} \neq a$ para todos puntos distintos $x, y \in E$ y todo $a \in A$. Tomando $\tilde{E} := \log(E)$. Tenemos $\mathcal{H}^h(\tilde{E}) > 0$, porque $\log|_{[1, 2]} : [1, 2] \rightarrow [0, \log(2)]$ es una función bilipschitz. Para todo $\tilde{a} \in \tilde{A}$, y distintos $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{E}$, tenemos $\tilde{a} = \log(a)$ con $a \in A$, $\tilde{x} = \log(x)$ y $\tilde{y} = \log(y)$ donde $x, y \in E$ son distintos, por lo tanto

$$\tilde{y} - \tilde{x} = \log\left(\frac{y}{x}\right) \neq \log(a) = \tilde{a}.$$

□

En particular, si \tilde{A} es un conjunto contable y denso, obtenemos un conjunto \tilde{E} de medida \mathcal{H}^h positiva cuyo conjunto de diferencias tiene interior vacío. Esto contrasta con el Teorema de Steinhaus, el cual dice que el conjunto de diferencias de cualquier conjunto de medida de Lebesgue positiva contiene un intervalo.

Corolario 69. *Dada una función de dimensión h con $h < x$ y dado un conjunto contable de planos $\{\pi_k\}_k$ que contienen el origen en \mathbb{R}^3 , existe un conjunto compacto $E \subseteq \mathbb{R}$ con $\mathcal{H}^h(E) > 0$ tal que*

$$(x, y, z) \notin \pi_k \quad \forall k \text{ para todos puntos distintos } x, y, z \in E.$$

Demostración. Cada uno de esos planos π_k está dado por una ecuación $\psi_k(x, y, z) := a_k x + b_k y + c_k z = 0$. Tomando $d = 1$, $m_k = 3$ para todo k , y ψ_k como arriba, y aplicando el Teorema 60 se sigue el resultado. \square

Sería interesante saber si se puede obtener ese resultado para contables planos en general.

Corolario 70. *Dada una función de dimensión h con $h < x$ y un conjunto contable $A \subseteq (1, +\infty)$, existe un conjunto compacto $E \subseteq \mathbb{R}$ con $\mathcal{H}^h(E) > 0$ tal que*

$$\frac{z-x}{z-y} \notin A \quad \forall x < y < z \text{ en } E.$$

Demostración. Si tomamos $\pi_k : x - \alpha_k y + (\alpha_k - 1)z = 0$ en el Corolario 69, el resultado se sigue. \square

En particular, tomando $A = \{2\}$, existe un conjunto compacto $E \subseteq \mathbb{R}$ con $\mathcal{H}^h(E) > 0$ que no contiene ninguna progresión aritmética de longitud 3. Notar que tomando por ejemplo $h(x) := -\log(x)x$, recuperamos el resultado de Keleti [35] mencionado en la introducción de este capítulo.

Corolario 71. *Es un resultado equivalente si consideramos $\psi_k : \mathbb{R}^{m_k d} \rightarrow \mathbb{R}^{N_k}$ en el Teorema 60.*

Demostración. Es claro que esto es más general que el Teorema 60. Y el Teorema 60 implica éste enunciado, como dada $\psi_k : \mathbb{R}^{m_k d} \rightarrow \mathbb{R}^{N_k}$ podemos separar in N_k funciones lineales, descartando las funciones nulas, y aplicar el Teorema. \square

Corolario 72. *Sea $d \in \mathbb{N}$ y sea h una función de dimensión tal que $h < x^d$. Entonces existe un conjunto compacto $E \subseteq \mathbb{R}^d$ tal que $\mathcal{H}^h(E) > 0$, y E no contiene los vértices de ningún paralelogramo.*

Demostración. Esto se sigue del Teorema 60 y del Corolario 71, tomando

$$\psi : \mathbb{R}^{4d} \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad \psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4) := \vec{x}_1 - \vec{x}_2 + \vec{x}_3 - \vec{x}_4.$$

\square

El Corolario previo es una mejora del Resultado de Maga [40, Teorema 2.3].

Corolario 73. Sea $d \in \mathbb{N}$ y sea h una función de dimensión tal que $h < x^d$. Sea $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_{\neq 0}$. Tenemos un conjunto compacto $E \subseteq \mathbb{R}^d$ tal que $\mathcal{H}^h(E) > 0$, y para todo $n \in \mathbb{N}$, E no contiene los vértices de ningún trapecioide con longitudes de lados paralelos en proporción α_n .

Demostración. Tomando $\psi_n : \mathbb{R}^{4d} \rightarrow \mathbb{R}^d$ dada por $\psi_n(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4) := \vec{x}_1 - \vec{x}_2 - \alpha_n(\vec{x}_3 - \vec{x}_4)$, se sigue el resultado aplicando el Teorema 60 y el Corolario 71. \square

Tenemos la siguiente versión compleja:

Corolario 74. Sea h una función de dimensión con $h < x^{2s}$ (con $s \in \mathbb{N}$), $m \geq 2$, y consideremos una sucesión de funciones \mathbb{R} -lineales $(\psi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tales que $\psi_k : \mathbb{C}^{ms} \rightarrow \mathbb{C}$.

Entonces existe un conjunto compacto $E \subseteq \mathbb{C}^s$ tal que $\mathcal{H}^h(E) > 0$ y $\psi_k(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m) \neq 0$ para todos distintos vectores $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m \in E$.

Demostración. Tomemos $d = 2s$ e identifiquemos \mathbb{C} con \mathbb{R}^2 en el Teorema 60 y el Corolario 71. \square

Corolario 75. Sea h una función de dimensión con $h < x^2$, y sea $(P_n)_{n \in \mathbb{N}} = (x_n, y_n, z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de ternas de números complejos diferentes. Entonces existe un conjunto compacto $E \subseteq \mathbb{C}$, con $\mathcal{H}^h(E) > 0$, que no contiene copia similar de ninguna de las ternas dadas.

Demostración. Tomando $m = 3$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $\alpha_n := \frac{z_n - x_n}{z_n - y_n}$, $\psi_n(x, y, z) = (\alpha_n - 1)z - \alpha_n y + x$, y aplicando el Corolario 74. \square

En particular, tomando $h(x) := -x^2 \log(x)$, recuperamos los siguientes resultados de Maga [40, Teorema 2.8], y Falconer [14]:

Teorema 76 (Falconer). Sea $P = (p_1, p_2, p_3) \subseteq \mathbb{R}^2$ los vértices de un triángulo, es decir que p_1, p_2, p_3 son distintos. Entonces existe un conjunto compacto $A \subseteq \mathbb{R}^2$ con $\dim_H(A) = 2$, tal que A no contiene ninguna copia similar de P .

Teorema 77 (Maga). Decimos que $P = (p_1, p_2, p_3) \subseteq (\mathbb{R}^2)^3$ son los vértices de un triángulo si p_1, p_2, p_3 son distintos. Sea una sucesión de vértices de triángulos $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Entonces existe un conjunto compacto $A \subseteq \mathbb{R}^2$ con $\dim_H(A) = 2$, tal que A no contiene ninguna copia similar de ningún P_n .

Capítulo 4

Conjuntos pequeños contentiendo muchas configuraciones geométricas.

En la dirección opuesta al resultado del capítulo anterior, en [57] probamos que para cualquier función de dimensión h existe un conjunto perfecto (cerrado y sin puntos aislados) en la recta real con medida h -Hausdorff cero que contiene toda configuración polinomial finita. En particular, existe un conjunto perfecto en la recta real con dimensión de Hausdorff cero que contiene toda configuración polinomial finita.

Hay muchas definiciones no equivalentes de lo que puede ser un patrón o una configuración. En cualquier caso se busca que generalice a las progresiones aritméticas. Ahora vamos a definir una noción diferente de patrón a la vista anteriormente, y para evitar confusiones la llamaremos configuración.

Definición 78. Sea $E \subseteq \mathbb{R}^N$ y $\mathcal{F} := \{f_i : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N, i \in \Lambda'\}$ un conjunto de funciones, decimos que E contiene la configuración $(f_i)_{i \in \Lambda}$ (con $\Lambda \subseteq \Lambda'$) si existe $t \in \mathbb{R}^N$ tal que $f_i(t) \in E \forall i \in \Lambda$, o equivalentemente, si

$$\bigcap_{i \in \Lambda} f_i^{-1}(E) \neq \emptyset. \quad (4.1)$$

En el caso en que Λ es finito, decimos que la configuración es finita. Si Λ es contable, decimos que la configuración es contable. Si las funciones f_i son polinomios no constantes, decimos que la configuración es una configuración polinomial.

Remark 79. Nuestra definición de configuración polinomial incluye las progresiones aritméticas, que son el caso particular de configuraciones polinomiales en que f_1, \dots, f_n son ciertas similitudes.

¿Cuándo un conjunto contiene progresiones aritméticas? Dado un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^d_{\neq\{0\}}$,

$$\begin{aligned} &\text{Un conjunto } E \subseteq \mathbb{R}^d \text{ contiene una progresión aritmética de longitud } n \text{ con gap } \vec{v} \\ &\iff \exists \vec{a} \text{ tal que } \vec{a}, \vec{a} + \vec{v}, \dots, \vec{a} + (n-1)\vec{v} \in E \\ &\iff \exists \vec{a} \in E \cap (E - \vec{v}) \cap \dots \cap (E - (n-1)\vec{v}) \\ &\iff \bigcap_{0 \leq i \leq n-1} f_i^{-1}(E) \neq \emptyset \quad \text{donde } f_i(\vec{x}) := \vec{x} + i\vec{v}. \end{aligned}$$

Ésta es una diferencia entre patrones y configuraciones: una progresión aritmética es un patrón (no importa el gap), mientras que una progresión aritmética **con un gap dado** es una configuración.

La ecuación (4.1) es nuestra motivación para estudiar intersecciones de preimágenes o imágenes de un conjunto bajo las acciones de las funciones f_i .

Recordemos que por lo visto en los Preliminares (Lema 22 y Observación 23) nos concentramos en el caso de conjuntos cerrados (o conjuntos \mathcal{F}_σ).

A lo largo del capítulo, las funciones bilipschitz y las localmente bilipschitz jugarán un papel fundamental, por este motivo recordaremos su definición a continuación:

Definición 80. Una función $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ es bilipschitz si existen constantes positivas c_1 y c_2 tales que para $x, y \in \mathbb{R}^N$ tenemos

$$c_1 \|x - y\| \leq \|f(x) - f(y)\| \leq c_2 \|x - y\|.$$

En el caso particular en que $c_2 \leq 1$, decimos que f es una función bilipschitz no expansiva. Y en el caso en que $c_1 \geq 1$ decimos que es una función bilipschitz no contractiva. A veces, cuando queremos hacer una referencia explícita a las constantes, diremos que la función es bilipschitz con constantes (c_1, c_2) .

Definición 81. Una función $\psi : \Omega_\psi \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ es localmente bilipschitz si para todo $x_0 \in \Omega_\psi$ existe $\varepsilon = \varepsilon(x_0)$ y constantes $c_1 = c_1(x_0) > 0$ y $c_2 = c_2(x_0) > 0$ tales que para $x, y \in B(x_0, \varepsilon)$ tenemos que

$$c_1 \|x - y\| \leq \|\psi(x) - \psi(y)\| \leq c_2 \|x - y\|.$$

Definición 82. Una función $f : X \rightarrow Y$ es una función cerrada si para todo conjunto cerrado C en X , la imagen $f(C)$ es cerrada en Y .

Notemos primero que ser localmente bilipschitz es una propiedad mucho más débil que ser bilipschitz. Sin embargo no son equivalentes, y tenemos la siguiente relación entre ellas:

Lema 83. Si $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ es localmente bilipschitz cerrada e inyectiva, con Ω un conjunto cerrado en \mathbb{R}^N , entonces:

1. Si K es un subconjunto compacto de Ω , $\psi|_K$ es bilipschitz.

2. Si A es un conjunto compacto en \mathbb{R}^N , K es un conjunto compacto en Ω que está contenido en $\psi^{-1}(A)$, entonces existe una constante positiva $c = c(\psi, A)$ tal que

$$\text{diam}(\psi(K)) \geq \frac{\text{diam}(K)}{c}.$$

Para demostrar el Lema usaremos la compacidad de K , el hecho de que ψ es cerrada e inyectiva (de hecho, ninguna de esas condiciones puede ser removida), y el lema del número de Lebesgue:

Lema 84 (del número de Lebesgue). *Sea X un espacio métrico en el que toda sucesión tenga una subsucesión convergente y sea $\{U_\alpha\}_\alpha$ un cubrimiento por abiertos, entonces existe un $\delta > 0$ (conocido como número de Lebesgue) tal que para cualquier $x \in X$ existe U_α verificando $B(x, \delta) \subseteq U_\alpha$.*

Probemos el Lema 83:

Demostración. 1. Como para cada $x \in \Omega$ existe $r_x > 0$ y existen $c_1(x) > 0$ y $c_2(x) > 0$ tal que

$$c_1(x)\|z - y\| \leq \|\psi(z) - \psi(y)\| \leq c_2(x)\|z - y\| \text{ para todo } y, z \in B(x, r_x) \cap \Omega.$$

$\{B(x, r_x) \cap \Omega : x \in K\}$ es un cubrimiento de K compacto, por abiertos de Ω ,

entonces tenemos un subcubrimiento finito de K por abiertos de Ω :

$$B_1 := B(x_1, r_{x_1}) \cap \Omega, \dots, B_n := B(x_n, r_{x_n}) \cap \Omega,$$

donde

$$c_1^i\|z - y\| \leq \|\psi(z) - \psi(y)\| \leq c_2^i\|z - y\| \text{ para todo } y, z \in B_i.$$

Aplicando el Lema del número de Lebesgue (Lema 84) a K compacto y el cubrimiento abierto $\{B_1, \dots, B_n\}$, tenemos que existe $\delta > 0$ tal que para cualquier $x \in K$ existe $i \in \{1, \dots, n\}$ verificando $B(x, \delta) \subseteq B_i$.

Sean $y, z \in K$.

En caso de que $\|y - z\| \geq \delta$: Consideremos la función $f(y', z') := \|\psi(y') - \psi(z')\|$ que es continua en $\{(y', z') \in K \times K : \|y' - z'\| \geq \delta\}$ compacto, por lo cual alcanza un máximo M (finito) y un mínimo m (positivo, por inyectividad de ψ). Así tenemos que

$$\frac{m}{\text{diam}(K)} \leq \frac{\|\psi(y) - \psi(z)\|}{\|y - z\|} \leq \frac{M}{\delta},$$

donde las constantes $\frac{m}{\text{diam}(K)}$ y $\frac{M}{\delta}$ son positivas y solo dependen de ψ y de K .

Si no, es $\|y - z\| < \delta$. Por el Lema 84, tenemos que existe $i \in \{1, \dots, n\}$ verificando $B(y, \delta) \subseteq B_i$. Entonces resulta que $z, y \in B_i$. Llamando $c_1 := \min_{1 \leq i \leq n} c_1^i$ (c_1 es positiva) y $c_2 := \max_{1 \leq i \leq n} c_2^i$, tenemos que

$$c_1 \|y - z\| \leq \|\psi(y) - \psi(z)\| \leq c_2 \|y - z\|.$$

Así, en cualquier caso, tenemos que existen C_1 y C_2 constantes positivas (que solo dependen de ψ y de K) tales que:

$$C_1 \|y - z\| \leq \|\psi(y) - \psi(z)\| \leq C_2 \|y - z\| \quad \forall y, z \in K.$$

2. Como ψ es inyectiva, tenemos definida su inversa $\psi^{-1} : \text{Im}(\psi) \rightarrow \Omega$. Como $\psi : \Omega \rightarrow \text{Im}(\psi)$ es una función continua, biyectiva y cerrada, resulta ser un homeomorfismo, por lo que $\psi^{-1} : \text{Im}(\psi) \rightarrow \Omega$ es cerrada. Así, tenemos en biyección las topologías de Ω y de $\text{Im}(\psi)$.

Veamos que $\psi^{-1} : \text{Im}(\psi) \rightarrow \Omega$ es localmente bilipschitz. Dado $\psi(x) \in \text{Im}(\psi)$ (con $x \in \Omega$), tenemos que por ser ψ localmente bilipschitz, es

$$c_1 \|y - z\| \leq \|\psi(y) - \psi(z)\| \leq c_2 \|y - z\| \quad \forall y, z \in B(x, r_x).$$

Entonces por el Teorema de Invariancia del Dominio (Teorema 88) aplicado a ψ en $B(x, r_x)$, tenemos que $\psi(B(x, r_x))$ es un abierto en $\text{Im}(\psi)$, en el que además para todo $\psi(y) \in \psi(B(x, r_x))$ verifica

$$\frac{1}{c_2} \|\psi(y) - \psi(x)\| \leq \|y - x\| = \|\psi^{-1}(\psi(y)) - \psi^{-1}(\psi(x))\| \leq \frac{1}{c_1} \|\psi(y) - \psi(x)\|.$$

Por lo que $\psi^{-1} : \text{Im}(\psi) \rightarrow \Omega$ es localmente bilipschitz.

Como $A \cap \text{Im}(\psi)$ es compacto, por ser A compacto y $\text{Im}(\psi)$ cerrado (pues ψ cerrada y $\text{Im}(\psi) = \psi(\Omega)$ con Ω cerrado).

Así, como $\psi^{-1} : \text{Im}(\psi) \rightarrow \Omega$ es localmente bilipschitz, cerrada e inyectiva, con $\text{Im}(\psi)$ conjunto cerrado, y $A \cap \text{Im}(\psi)$ es compacto en $\text{Im}(\psi)$; tenemos por el primer ítem que $\psi^{-1}|_{A \cap \text{Im}(\psi)}$ es bilipschitz. En particular

$$\|\psi^{-1}(y) - \psi^{-1}(z)\| \leq C \|y - z\| \quad \forall y, z \in A \cap \text{Im}(\psi),$$

con C constante que depende de ψ^{-1} y de A . Por lo que

$$\text{diam}(K) \leq C \text{diam}(\psi(K)) \quad \forall K \text{ compacto} \subseteq \psi^{-1}(A),$$

con C constante que depende de ψ y de A .

□

4.1. Desarrollo de un resultado previo de Davies, Marstrand y Taylor.

Desarrollaremos un trabajo de Davies, Marstrand y Taylor [8].

En ese trabajo se muestra que dada una función de dimensión h cualquiera, y dada la familia de funciones lineales con pendiente no nula \mathcal{F} , podemos construir un conjunto cerrado, con medida Hausdorff- h igual a 0, que tiene la propiedad de que para cualquier subconjunto finito $\{f_1, \dots, f_n\} \subseteq \mathcal{F}$ se tiene que

$$\bigcap_{i=1}^n f_i(E) \neq \emptyset.$$

Esto muestra que aún los conjuntos muy “chicos” pueden contener todos los patrones finitos. Esto contrasta con las construcciones de la sección anterior de conjuntos “grandes” evitando muchos patrones.

Antes de construir dicho conjunto, veamos un resultado previo que nos será de utilidad:

Lema 85. *Si h es una función de dimensión, entonces existe una sucesión $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ tal que:*

$$\delta_0 = 1 \quad , \quad 0 < \delta_n \leq \frac{1}{6}\delta_{n-1} \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \quad (4.2)$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{6}{a\delta_{n-1}} + 1 \right) h(a\delta_n) = 0 \text{ para todo } a \text{ racional positivo.} \quad (4.3)$$

Demostración. Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una enumeración de todos los racionales positivos. Definamos $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ por inducción: Tomamos $\delta_0 = 1$. Una vez definidos $\delta_0, \dots, \delta_{n-1}$ positivos, definimos δ_n como un número positivo satisfaciendo simultáneamente las condiciones:

$$\delta_n \leq \frac{1}{6}\delta_{n-1}$$

y

$$\left(\frac{6}{a_i\delta_{n-1}} + 1 \right) h(a_i\delta_n) \leq \frac{1}{n} \text{ para todo } 1 \leq i \leq n \quad (4.4)$$

Esto último se puede hacer, pues por ser h una función de dimensión, vale que $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = 0$.

Por (4.4), para cada $\varepsilon > 0$ tenemos que

$$\left(\frac{6}{a_i\delta_{n-1}} + 1 \right) h(a_i\delta_n) \leq \varepsilon \text{ si } 1 \leq i \leq n \text{ y } \frac{1}{n} \leq \varepsilon,$$

es decir

$$\left(\frac{6}{a_i\delta_{n-1}} + 1 \right) h(a_i\delta_n) \leq \varepsilon \text{ si } \max \left\{ i; \frac{1}{\varepsilon} \right\} \leq n. \quad (4.5)$$

Por lo cual, como para cada a racional positivo, existe un $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a = a_{i_0}$, por (4.5) tomando $i = i_0$, tenemos que: Para cada $\varepsilon > 0$

$$\left(\frac{6}{a_{i_0} \delta_{n-1}} + 1 \right) h(a_{i_0} \delta_n) \leq \varepsilon \text{ para todo } n \geq \max\{i_0, \frac{1}{\varepsilon}\}.$$

Como lo anterior vale cualquiera sea ε positivo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{6}{a_{i_0} \delta_{n-1}} + 1 \right) h(a_{i_0} \delta_n) = 0.$$

□

Habiendo probado ese resultado previo, estamos en condiciones de demostrar el siguiente resultado:

Teorema 86 (Davies, Marstrand, Taylor). *Dada una función de dimensión h y dada la familia de funciones lineales con pendiente no nula \mathcal{F} . Existe $E \subseteq \mathbb{R}$ cerrado, con $\mathcal{H}^h(E) = 0$, que cumple la propiedad de que para cualquier subconjunto finito $\{f_1, \dots, f_n\} \subseteq \mathcal{F}$ se tiene que*

$$\bigcap_{i=1}^n f_i(E) \neq \emptyset.$$

Demostración. Para la función de dimensión dada en el enunciado, tenemos por el Lema 85 una sucesión $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ tal que:

$$\delta_0 = 1 \quad \text{y} \quad \delta_n \leq \frac{1}{6} \delta_{n-1} \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \quad (4.6)$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{6}{a \delta_{n-1}} + 1 \right) h(a \delta_n) = 0 \text{ para todo } a \text{ racional positivo.} \quad (4.7)$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, construimos F_n que consiste en unión de intervalos cerrados de longitud δ_n , separados por huecos de longitud $\frac{1}{6} \delta_{n-1}$, a lo largo de toda la recta real (Tomamos cualquiera que lo verifique. No nos va a importar si consideramos ese o cualquier trasladado). Para cada $i \in \mathbb{N}$ definimos

$$K_i = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} F_{(2k-1)2^{i-1}},$$

que es cerrado (por ser intersección de cerrados).

Sea $(\psi_r)_{r \in \mathbb{N}}$ una enumeración de todas las $\psi(x) := ax + b$ con a y b racionales, y $a \neq 0$.

1) Si $\tilde{E} \subseteq \bigcup_{r \in \mathbb{N}} \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \psi_r(K_i)$, veamos que $\mathcal{H}^h(\tilde{E}) = 0$.

4.1. DESARROLLO DE UN RESULTADO PREVIO DE DAVIES, MARSTRAND Y TAYLOR.73

- Comencemos por probar que para cada $r \in \mathbb{N}$, para cada $i \in \mathbb{N}$, y cada intervalo I de longitud 1, vale que $\mathcal{H}^h(I \cap \psi_r(K_i)) = 0$.

Por construcción, $\psi_r(F_n)$ consiste en intervalos de longitud $|a|\delta_n$ separados por huecos de longitud $\frac{1}{6}|a|\delta_{n-1}$ a lo largo de toda la recta real. Con lo cual, el conjunto $I \cap \psi_r(F_n)$ consiste en m intervalos J_n^1, \dots, J_n^m donde $m \leq \frac{6}{|a|\delta_{n-1}} + 1$ y cada intervalo tiene longitud menor o igual que $|a|\delta_n$.

Veamos que $m \leq \frac{6}{|a|\delta_{n-1}} + 1$:

Recordemos que en $\psi_r(F_n)$ la longitud de los huecos es $\frac{1}{6}\delta_{n-1}|a|$. Por lo cual,

$$(m - 1) \frac{\delta_{n-1}}{6} |a| \leq 1.$$

Es decir, que

$$m \leq \frac{6}{|a|\delta_{n-1}} + 1.$$

Por lo tanto, por ser $\{J_n^1, \dots, J_n^m\}$ un cubrimiento particular de $I \cap \psi_r(F_n)$, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{|a|\delta_n}^h(I \cap \psi_r(F_n)) &\leq \sum_{1 \leq j \leq m} h(|J_n^j|) \\ &\leq \left(\frac{6}{|a|\delta_{n-1}} + 1 \right) h(|a|\delta_n) \end{aligned}$$

Y esto último tiende a cero cuando $n \rightarrow \infty$ por como tomamos δ_n en el Lema 85.

- Concluamos que $\mathcal{H}^h(\tilde{E}) = 0$:

Utilizando lo que probamos en el ítem anterior, tenemos que

$$0 \leq \mathcal{H}^h(\psi_r(K_i)) \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{H}^h([k, k + 1] \cap \psi_r(K_i)) \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} 0 = 0.$$

Con lo cual

$$0 = \mathcal{H}^h(\psi_r(K_i)) \text{ para cada } r \in \mathbb{N} \text{ y para cada } i \in \mathbb{N}$$

De lo que se sigue:

$$0 \leq \mathcal{H}^h(\tilde{E}) \leq \sum_{r \in \mathbb{N}} \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{H}^h(\psi_r(K_i)) = \sum_{r \in \mathbb{N}} \sum_{i \in \mathbb{N}} 0 = 0.$$

Y así,

$$\mathcal{H}^h(\tilde{E}) = 0.$$

2) Construyamos el conjunto E de modo que $E \subseteq \bigcup_{r \in \mathbb{N}} \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \psi_r(K_i)$:

Fijado $m \in \mathbb{N}$, como para cada $1 \leq r \leq m$ a partir de un cierto k_r resulta

$$\psi_r[k_r, 2k_r + 2] \subseteq (-\infty, -m] \cup [m, +\infty)$$

tomando $I_m := [\max_{1 \leq r \leq m} k_r, 2 \max_{1 \leq r \leq m} k_r + 2]$, resulta

$$\bigcup_{1 \leq r \leq m} \psi_r(I_m) \subseteq (-\infty, -m] \cup [m, +\infty).$$

Tomando $I'_m := [2 \max_{1 \leq r \leq m} k_r + 1, 2 \max_{1 \leq r \leq m} k_r + 2]$ que tiene longitud 1. Si $\chi(x) := ax + b$ con $a \in [1, 2]$ y $b \in [0, 1]$, resulta

$$\chi(I_m) \supseteq I'_m.$$

Consideremos

$$E := \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{r=1}^m \psi_r(K_r \cap I_m).$$

El conjunto E es cerrado por ser unión con $m \in \mathbb{N}$ de conjuntos cerrados $\bigcup_{r=1}^m \psi_r(K_r \cap I_m) \subseteq (-\infty, -m] \cup [m, +\infty)$. Además E está contenido en $\bigcup_{r \in \mathbb{N}} \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \psi_r(K_i)$ por lo que (por el ítem anterior) verifica que $\mathcal{H}^h(E) = 0$.

Dadas $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{F}$, queremos ver que

$$\bigcap_{i=1}^n f_i(E) \neq \emptyset.$$

Tomamos $\psi_{r(i)}(x) := a_{r(i)}x + b_{r(i)}$ ($a_{r(i)} \neq 0$), de modo que $f_i \circ \psi_{r(i)}$ sea de la forma $ax + b$ con $a \in [1, 2]$ y $b \in [0, 1]$. Llamemos $R := \max\{r(1), \dots, r(n)\}$.

Usando que cada $m \in \mathbb{N}$ puede escribirse en forma única como $m = (2k-1)2^{s-1}$ con $k \in \mathbb{N}$ y $s \in \mathbb{N}$, definimos $F_m = F_{(2k-1)2^{s-1}}$, y $\chi_m := f_i \circ \psi_{r(i)}$ si para ese i existe $r(i)$ satisfaciendo

4.1. DESARROLLO DE UN RESULTADO PREVIO DE DAVIES, MARSTRAND Y TAYLOR.75

$m = (2i - 1)2^{r(i)-1}$, o $\chi_m := id$ si no; tenemos que

$$\begin{aligned}
 \bigcap_{1 \leq i \leq n} f_i(E) &\supseteq \bigcap_{1 \leq i \leq n} f_i \left(\bigcup_{r=1}^R \psi_r(K_r \cap I_R) \right) \\
 &\supseteq \bigcap_{1 \leq i \leq n} f_i \circ \psi_{r(i)}(K_{r(i)} \cap I_R) \\
 &\supseteq \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \chi_m(K_m \cap I_R) \\
 &= \left(\bigcap_{m \in \mathbb{N}} \chi_m(K_m) \right) \cap \left(\bigcap_{m \in \mathbb{N}} \chi_m(I_R) \right) \\
 &\supseteq \left(\bigcap_{m \in \mathbb{N}} \chi_m(K_m) \right) \cap I'_R \\
 &\supseteq \left(\bigcap_{m \in \mathbb{N}} \chi_m \left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} F_{(2k-1)2^{i-1}} \right) \right) \cap I'_R \\
 &= \left(\bigcap_{m \in \mathbb{N}} \chi_m(F_m) \right) \cap I'_R
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

donde χ_s es de la forma $ax + b$ con $a \in [1, 2]$ y $b \in [0, 1]$.

Veamos que $(\bigcap_{m \in \mathbb{N}} \chi_m(F_m)) \cap I'_R$ es no vacío: Por construcción I'_R tiene longitud 1, y $\delta_1 \leq \frac{1}{6}$, entonces hay al menos un intervalo de $\chi_1(F_1)$ que esta completamente contenido en I'_R . Y utilizando que χ_m es de la forma $ax + b$ con $a \in [1, 2]$ y $b \in [0, 1]$, es claro que para cada $m \in \mathbb{N}$ hay un intervalo completo de $\chi_m(F_m)$ en cada intervalo de $\chi_{m-1}(F_{m-1})$.

Así, vimos que I'_R contiene al menos un intervalo completo de $\chi_1(F_1)$, y para cada $m \geq 2$ cada intervalo de $\chi_{m-1}(F_{m-1})$ contiene al menos un intervalo completo de $\chi_m(F_m)$. Con lo cual tenemos un encaje de intervalos cerrados en $I'_R \cap (\bigcap_{m \in \mathbb{N}} \chi_m(F_m))$, lo que nos muestra que $I'_R \cap (\bigcap_{m \in \mathbb{N}} \chi_m(F_m)) \neq \emptyset$.

□

T. Keleti, D. Nagy, y P. Shmerkin publicaron [36] en 2014, en el que probaron el siguiente resultado que generaliza el resultado de Davies, Marstrand y Taylor:

Teorema 87 (T. Keleti, D. Nagy, P. Shmerkin). *Para cada $d \geq 1$ y h función de dimensión, existe un conjunto cerrado $E \subseteq \mathbb{R}^d$, con $\mathcal{H}^h(E) = 0$, tal que para cualquier familia finita de funciones afines en \mathbb{R}^d f_1, \dots, f_m , se tiene que $\bigcap_{1 \leq j \leq m} f_j(E) \neq \emptyset$. Y si además las funciones afines se eligen de un conjunto compacto (de funciones, fijado de antemano), entonces conseguimos el mismo resultado de antes pero con E compacto.*

Generalizamos en las Secciones 4.2 y 4.3 el resultado de Davies, Marstrand y Taylor y la primera parte de la Proposición de Keleti, Nagy y Shmerkin. Obtuvimos también resultados y aplicaciones adicionales.

4.2. Intersecciones finitas y configuraciones finitas

En esta sección probaremos constructivamente la existencia de conjuntos pequeños que tienen intersección finita no vacía, bajo imágenes o preimágenes de ciertas funciones.

4.2.1. Conjuntos pequeños con una propiedad de intersección finita

Probaremos que dada una función de dimensión h y un conjunto \mathcal{F} de funciones satisfaciendo ciertas condiciones, existe un conjunto perfecto E de medida \mathcal{H}^h nula y tal que cualquier intersección finita de las imágenes de E por funciones de \mathcal{F} es no vacía.

La idea será modificar las funciones originales componiéndolas con funciones Ψ tales que las composiciones sean bilipschitz. Esto nos permitirá mirar las intersecciones de las imágenes de E esencialmente como una intersección de imágenes bajo funciones bilipschitz.

Un primer resultado para funciones bilipschitz

Recordemos el siguiente

Teorema 88 (de Invariancia del Dominio). *Si $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es abierto, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continua e inyectiva. Entonces $f(U)$ es un abierto y $f : U \rightarrow f(U)$ es un homeomorfismo.*

Observación 89. *Si $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ es bilipschitz, entonces es biyectiva.*

Pues: Claramente es inyectiva. Y como la imagen es un conjunto no vacío, cerrado, y además es abierto (pues, por Teorema de Invariancia del Dominio: toda $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua e inyectiva, es abierta), resulta que la imagen es \mathbb{R}^n , es decir que la f resulta ser también sobreyectiva.

Teorema 90. *Sea $\mathcal{F} := \{f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N \text{ bilipschitz}\}$ y sea h una función de dimensión. Veamos que existe un conjunto cerrado $E \subseteq \mathbb{R}^N$, con $\mathcal{H}^h(E) = 0$, tal que $\bigcap_{i=1}^n f_i(E) \neq \emptyset$ para todo subconjunto finito $\{f_1, \dots, f_n\} \subseteq \mathcal{F}$.*

Para probar el teorema principal de esta subsección (Teorema 90), vamos a necesitar el siguiente:

Lema 91. *Dada h función de dimensión y dados $L \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ y $N \in \mathbb{N}$, existe una sucesión $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq (0, 1]$ verificando simultáneamente:*

- $\delta_0 = 1$

-

$$\delta_n \leq \frac{\delta_{n-1}}{4L\sqrt{N}} \tag{4.9}$$

▪ para todo $q \in \mathbb{Q}_{>0}$ vale que

$$\left(\frac{2L\sqrt{N}}{q\delta_{n-1}} + 2 \right)^N h(q\sqrt{N}\delta_n) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0 \quad (4.10)$$

Demostración. Sea $(q_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una enumeración de $\mathbb{Q}_{>0}$. Construimos inductivamente la sucesión. Tomamos $\delta_0 = 1$. Si tenemos elegidos $\delta_0, \dots, \delta_{n-1}$, tomamos $\delta_n > 0$ suficientemente chico tal que $\delta_n \leq \frac{\delta_{n-1}}{4\sqrt{NL}}$ y

$$\left(\frac{2L\sqrt{N}}{q_i\delta_{n-1}} + 2 \right)^N h(q_i\sqrt{N}\delta_n) < \frac{1}{n} \text{ para todo } 1 \leq i \leq n.$$

Lo que resta ver es que la sucesión cumple la última condición. Veámoslo: Dado $q \in \mathbb{Q}_{>0}$, existe un $i \in \mathbb{N}$ tal que $q = q_i$. Dado $\epsilon > 0$ cualquiera, si $n \geq \max\{i, \frac{1}{\epsilon}\}$, tenemos que $\left(\frac{2L\sqrt{N}}{q\delta_{n-1}} + 2 \right)^N h(q_i\sqrt{N}\delta_n) < \epsilon$, por lo que vale la última condición. \square

Con lo antes visto estamos en condiciones de probar el Teorema 90:

Para cada $L \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, considero

$$\mathcal{F}_L := \{f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N : \exists a > 0, \exists b \in (0, La) \text{ tq } a\|x - y\| \leq \|f(x) - f(y)\| \leq b\|x - y\| \forall x, y\}.$$

Lema 92. Existe un conjunto cerrado $E_L \subseteq \mathbb{R}^N$, con $\mathcal{H}^h(E_L) = 0$, tal que $\bigcap_{i=1}^n f_i(E_L) \neq \emptyset$ para todo subconjunto finito $\{f_1, \dots, f_n\} \subseteq \mathcal{F}_L$.

Demostración. Sea $\Psi := \{\psi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N : \psi(x) := \lambda x \text{ con } \lambda \in \mathbb{Q}_{>0}\} = (\psi_j)_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}_L$.

Fijemos una sucesión como en el lema anterior, y definamos $\tilde{F}_n \subseteq \mathbb{R}$ unión de intervalos cerrados a lo largo de todo \mathbb{R} , con longitudes δ_n , y equiespaciados con huecos de longitud $\frac{\delta_{n-1}}{L2\sqrt{N}}$. Sean

$$F_n := \tilde{F}_n^N$$

y

$$K_i := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} F_{(2k-1)2^{i-1}}.$$

Fijamos $m \in \mathbb{N}$. Para cada $j \in \{1, \dots, m\}$, existe un $k_j \in \mathbb{N}$ tal que $\|\psi_j(x)\| \geq \max\{m, L\}$ para todo $x \in ((-k_j, k_j)^N)^C$. Definamos

$$\tilde{k}_m := \max_{1 \leq j \leq m} k_j,$$

$$I_m := ((-\tilde{k}_m, \tilde{k}_m)^N)^C$$

y

$$E_L := \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{j=1}^m \psi_j(K_j \cap I_m).$$

Tenemos que

$$E_L \subseteq (B(0, L))^C, \quad (4.11)$$

pues $\psi_j(K_j \cap I_m) \subseteq (B(0, L))^C$ para todo $m \in \mathbb{N}$ y todo $1 \leq j \leq m$.

Además E_L es cerrado, pues $\bigcup_{j=1}^m \psi_j(K_j \cap I_m)$ es cerrado y está contenido en $(B(0, m))^C$.

Veamos que si $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{F}_L$, entonces $\bigcap_{i=1}^n f_i(E_L) \neq \emptyset$.

Como $f_i \in \mathcal{F}_L$, existen $c_i, d_i > 0$ tales que $d_i < Lc_i$ y

$$c_i \|x - y\| \leq \|f_i(x) - f_i(y)\| \leq d_i \|x - y\| \quad \forall x, y.$$

Tomo $\psi_{r(i)}(x) := \lambda_{r(i)} x$ con $\lambda_{r(i)} \in \mathbb{Q} \cap [\frac{1}{c_i}, \frac{L}{d_i}]$ (el cual existe ya que $d_i < Lc_i$). Entonces,

$$\begin{aligned} \|x - y\| &\leq c_i \|\psi_{r(i)}(x) - \psi_{r(i)}(y)\| \\ &\leq \|f_i \circ \psi_{r(i)}(x) - f_i \circ \psi_{r(i)}(y)\| \\ &\leq d_i \|\psi_{r(i)}(x) - \psi_{r(i)}(y)\| \\ &\leq d_i \frac{L}{d_i} \|x - y\| \\ &= L \|x - y\|. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Sea $R := \max\{r(1), \dots, r(n)\} \in \mathbb{N}$. Tenemos, por lo anterior, definido un I_R .

Llamemos $a_i := d_i (\lambda_{r(i)} \tilde{k}_R + \max_{1 \leq j \leq N} \|(f_i^{-1}(0))_j\|)$. Veamos que

$$[a_i, +\infty)^N \subseteq f_i \circ \psi_{r(i)}(I_R).$$

Sea $x = (x_1, \dots, x_N)$ con $x_1, \dots, x_N \geq a_i$.

Quiero ver que $x \in f_i \circ \psi_{r(i)}(I_R)$.

Es decir, quiero ver que $\frac{1}{\lambda_{r(i)}} f_i^{-1}(x) = \psi_{r(i)}^{-1} \circ f_i^{-1}(x) \in I_R = ((-\tilde{k}_R, \tilde{k}_R)^N)^C$.

O lo que es lo mismo, quiero ver que existe una coordenada $j_0 \in \{1, \dots, N\}$ tal que $\|(f_i^{-1}(x))_{j_0}\| \geq \lambda_{r(i)} \tilde{k}_R$.

Sabemos que $\|x - 0\| \leq d_i \|f_i^{-1}(x) - f_i^{-1}(0)\|$ y que $a_i \sqrt{N} \leq \|x\|$. Por lo tanto, tenemos que

$$a_i \sqrt{N} \leq \|x\| \leq d_i \|f_i^{-1}(x) - f_i^{-1}(0)\| \leq d_i \sqrt{N} \max_{1 \leq j \leq N} \|(f_i^{-1}(x) - f_i^{-1}(0))_j\|.$$

Entonces, existe $j_0 \in \{1, \dots, N\}$ tal que $\frac{a_i}{d_i} \leq \|(f_i^{-1}(x) - f_i^{-1}(0))_{j_0}\|$. Así, por como elegimos a_i , y por desigualdad triangular, resulta

$$\|(f_i^{-1}(x))_{j_0}\| \geq \frac{a_i}{d_i} - \|(f_i^{-1}(0))_{j_0}\| \geq \lambda_{r(i)} \tilde{k}_R.$$

Por lo cual vale la inclusión que queríamos mostrar.

Usando la inyectividad de $f_i \circ \psi_j$, y llamando $a := \max_{1 \leq i \leq n} a_i$ y $I := [a, +\infty)^N$, tenemos

$$\begin{aligned}
\bigcap_{i=1}^n f_i(E_L) &= \bigcap_{i=1}^n f_i \left(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{j=1}^m \psi_j(K_j \cap I_m) \right) \\
&\supseteq \bigcap_{i=1}^n f_i(\psi_{r(i)}(K_i \cap I_R)) \\
&= \left(\bigcap_{i=1}^n f_i \circ \psi_{r(i)}(K_i) \right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^n f_i \circ \psi_{r(i)}(I_R) \right) \\
&\supseteq \left(\bigcap_{i=1}^n f_i \circ \psi_{r(i)}(K_i) \right) \cap \bigcap_{i=1}^n [a_i, +\infty)^N \\
&= \left(\bigcap_{i=1}^n \bigcap_{k \in \mathbb{N}} f_i \circ \psi_{r(i)}(F_{(2k-1)2^{i-1}}) \right) \cap I \\
&\supseteq \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{X}_m(F_m) \cap I
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Donde usamos que cada $m \in \mathbb{N}$ se escribe en forma única como

$$m = (2k - 1)2^{i-1} \text{ con } k, i \in \mathbb{N}.$$

Y definimos $\chi_m := f_i \circ \psi_{r(i)}$ si $m = (2k - 1)2^{i-1}$ para algún $k \in \mathbb{N}$ y algún $1 \leq i \leq n$, y $\chi_m = id$ si no.

Veamos que (4.13) es no vacío:

Para esto utilizaremos lo siguiente:

1. $\|x - y\| \leq \|\chi_m(x) - \chi_m(y)\| \leq L\|x - y\|$ para todo $m \in \mathbb{N}$ y todos $x, y \in \mathbb{R}^N$.
2. Como vale que $\text{dist}(x, F_n) \leq \sqrt{N} \text{ long hueco} \leq \frac{\delta_{n-1}}{L2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo x . Y como todo $y \in \mathbb{R}^N$ se puede escribir como $y = \chi_m(x)$ (por Observación 89), tenemos que

$$\text{dist}(y, \mathcal{X}_m(F_n)) = \text{dist}(\chi_m(x), \mathcal{X}_m(F_n)) \leq \frac{\delta_{n-1}}{2},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, todo $y \in \mathbb{R}^N$, y todos $m, n \in \mathbb{N}$.

3. Si C es un cubo cualquiera de F_n , tenemos que $\text{diam}(C) = \sqrt{N}\delta_n$. Por lo tanto (usando el primer ítem),

$$\text{diam}(\chi_m(C)) \in [\text{diam}(C), L \cdot \text{diam}(C)] = [\sqrt{N}\delta_n, L\sqrt{N}\delta_n].$$

Para poder probar que (4.13) es no vacío, nos basta ver dos cosas:

A) Existe C_1 cubo de F_1 tal que $I_1 := \chi_1(C_1) \subseteq I := [a, +\infty)^N$.

B) Dados C_m cubo de F_m e $I_m := \chi_m(C_m)$, existe un cubo C_{m+1} de F_{m+1} tal que $I_{m+1} := \chi_{m+1}(C_{m+1}) \subseteq I_m$.

Pues así tendríamos un encaje de compactos no vacíos (ya que χ_m es una función bilipschitz).

Comencemos por ver que vale el ítem A:

Como para todo cubo C_1 de F_1 vale que $\text{diam}(\chi_1(C_1)) \leq L\sqrt{N}\delta_1$, y además $\text{dist}(\chi_1(F_1), y) \leq \frac{\delta_0}{2}$, eligiendo y_0 como el vector que tiene en toda coordenada el valor $a + 2(L\sqrt{N}\delta_1 + \frac{\delta_0}{2})$; existe un $x_0 \in \chi_1(F_1)$ tal que $\text{dist}(x_0, y_0) \leq \frac{\delta_0}{2}$. Existe C_1 cubo de F_1 tal que $x_0 \in \chi_1(C_1)$, cuyo diámetro es menor o igual a $L\sqrt{N}\delta_1$. Por lo tanto $\text{dist}(x, y_0) \leq L\sqrt{N}\delta_1 + \frac{\delta_0}{2}$ para todo $x \in \chi_1(C_1)$. Y así, $\chi_1(C_1) \subseteq I$.

Veamos ahora que vale el ítem B:

Sea $I_m := \chi_m(C_m)$ con C_m cubo de F_m . Quiero ver que existe un cubo C_{m+1} de F_{m+1} de modo que $I_{m+1} := \chi_{m+1}(C_{m+1}) \subseteq I_m$.

Sea x el centro de C_m , sabemos que

$$\overline{B(\chi_m(x), \frac{\delta_m}{2})} \subseteq \chi_m \left(\overline{B(x, \frac{\delta_m}{2})} \right) \subseteq I_m.$$

Por otra parte si y es el centro del cubo C_{m+1} , sabemos que

$$I_{m+1} \subseteq \overline{B(\chi_{m+1}(y), L\sqrt{N}\frac{\delta_{m+1}}{2})}.$$

Así, si elegimos y de forma que se cumpla

$$\overline{B(\chi_{m+1}(y), L\sqrt{N}\frac{\delta_{m+1}}{2})} \subseteq \overline{B(\chi_m(x), \frac{\delta_m}{2})},$$

tendremos que $I_{m+1} \subseteq I_m$. Tomemos y el centro de un cubo de F_{m+1} tal que

$$\text{dist}(y, \chi_{m+1}^{-1} \circ \chi_m(x)) \leq \frac{\sqrt{N}}{2}(\text{lado}_{m+1} + \text{hueco}_{m+1}) = \frac{\sqrt{N}}{2}(\delta_{m+1} + \frac{\delta_m}{2\sqrt{N}L}).$$

Así, aplicando χ_{m+1} , tenemos $\text{dist}(\chi_{m+1}(y), \chi_m(x)) \leq \frac{\sqrt{N}}{2}(L\delta_{m+1} + \frac{\delta_m}{2\sqrt{N}})$. Habiendo elegido y de esa forma, y por ser $\delta_{m+1} \leq \frac{\delta_m}{4\sqrt{N}L}$ (por (4.9)) resulta que

$$\frac{\sqrt{N}}{2}(L\delta_{m+1} + \frac{\delta_m}{2\sqrt{N}}) + L\frac{\delta_{m+1}}{2}\sqrt{N} \leq \frac{\delta_m}{2},$$

y así vale que

$$\overline{B(\chi_{m+1}(y), L\sqrt{N}\frac{\delta_{m+1}}{2})} \subseteq \overline{B(\chi_m(x), \frac{\delta_m}{2})}.$$

□

Lema 93. $\mathcal{H}^h(E_L) = 0$.

Demostración. Como $E_L \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \psi_j(K_i)$, basta ver que $\mathcal{H}^h\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \psi_j(K_i)\right) = 0$. Sea \tilde{I} cubo de lado 1, sean $j \in \mathbb{N}$ e $i \in \mathbb{N}$, para ver lo anterior, alcanza ver que $\mathcal{H}^h(\psi_j(K_i) \cap \tilde{I}) = 0$. Y como $\psi_j(K_i) \cap \tilde{I} \subseteq \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \psi_j(F_{(2k-1)2^{i-1}}) \cap \tilde{I}$, es suficiente ver que $\mathcal{H}^h_{\delta_m \lambda_j \sqrt{N}}(\psi_j(F_m) \cap \tilde{I}) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$.

$\psi_j(F_m)$ es unión de cubos cerrados distribuidos uniformemente (de lado y separación fija) a lo largo de todo \mathbb{R}^N , de lado $\lambda_j \delta_m$, de diámetro $\lambda_j \sqrt{N} \delta_m$, con huecos de longitud (en dirección a los ejes) $\lambda_j \frac{\delta_{m-1}}{2L \sqrt{N}}$. Tenemos que $\psi_j(F_m) \cap \tilde{I}$ consiste de entre $(M-1)^N$ y M^N paralelepípedos, que forman un $\lambda_j \sqrt{N} \delta_m$ -cubrimiento.

Como debe cumplirse que

$$(M-2)^N \text{área producto de huecos contenidos en } I \leq \text{volumen } I.$$

Resulta,

$$(M-2)^N \left(\lambda_j \frac{\delta_{m-1}}{2L \sqrt{N}} \right)^N \leq 1.$$

Entonces,

$$(M-2) \frac{\lambda_j \delta_{m-1}}{2L \sqrt{N}} \leq 1.$$

Despejando, tenemos que debe ser

$$M \leq \frac{2L \sqrt{N}}{\lambda_j \delta_{m-1}} + 2.$$

Así,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^h_{\lambda_j \sqrt{N} \delta_m}(I \cap \psi(F_m)) &\leq M^N h(\lambda_j \delta_m \sqrt{N}) \\ &\leq \left(\frac{2L \sqrt{N}}{\lambda_j \delta_{m-1}} + 2 \right)^N h(\lambda_j \delta_m \sqrt{N}), \end{aligned}$$

donde el último término tiende a cero cuando m tiende a infinito (por (4.10)). Por lo tanto, $\mathcal{H}^h_{\lambda_j \sqrt{N} \delta_m}(I \cap \psi(F_m)) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$. \square

Veamos como construir el conjunto E buscado, utilizando lo visto anteriormente.

Tomemos

$$E := \bigcup_{L \in \mathbb{N}_{\geq 2}} E_L.$$

Veamos que cumple lo que queremos:

- E es cerrado, pues para cada L tenemos que E_L es cerrado y está contenido en $B(0, L)^C$ (por (4.11)).

- $\mathcal{H}^h(E) = 0$, por ser unión numerable de E_L , con $\mathcal{H}^h(E_L) = 0$.
- Si f_1, \dots, f_n es un conjunto finito de funciones en \mathcal{F} , tenemos que existen $L_1, \dots, L_n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ tales que $f_i \in \mathcal{F}_{L_i}$. Tomando $L := \max\{L_1, \dots, L_n\}$ tenemos que $\{f_1, \dots, f_n\} \subseteq \mathcal{F}_L$. Entonces resulta

$$\bigcap_{i=1}^n f_i(E) \supseteq \bigcap_{i=1}^n f_i(E_L) \neq \emptyset.$$

Y con esto concluimos la prueba del Teorema.

Aplicación 94. *Notar que una consecuencia (que también puede ser obtenida de [36]) es que existe un conjunto cerrado $E \subseteq \mathbb{R}^N$, de dimensión de Hausdorff cero, que contiene todos los conjuntos finitos de puntos en el espacio (salvo traslación).*

Esto se debe a que dado cualquier conjunto finito de puntos en el espacio, podemos suponer que tiene un vértice en el origen, lo podemos pensar “generado” por los otros vértices v_1, \dots, v_k . Elegimos

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-1}{\ln(x)} & \text{si } x \leq \frac{1}{2} \\ \ln(2) & \text{si no} \end{cases} \quad (4.14)$$

Por el Teorema, existe un conjunto cerrado $E \subseteq \mathbb{R}^N$ de dimensión de Hausdorff cero tal que para cualesquiera v_1, \dots, v_k en \mathbb{R}^N tenemos que

$$E \cap (E - v_1) \cap \dots \cap (E - v_k) \neq \emptyset.$$

Es decir que E contiene cualquier conjunto finito de puntos en el espacio (salvo traslación).

Un resultado más general

Necesitaremos el siguiente Lema para construir el conjunto.

Lema 95. *Sea h una función de dimensión y sean $L, N \in \mathbb{N}$ dados. Existe una sucesión $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \subseteq (0, 1]$ satisfaciendo simultaneamente:*

1. $\delta_0 = 1$,
2. $\delta_n \leq \frac{\delta_{n-1}}{4L\sqrt{N}}$,
3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{N_1}{\delta_{n-1}} + 1 \right)^N h(\delta_n N_2) = 0$ para todo $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$.

Demostración. Sea $(q_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una enumeración de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Tomemos primero $\delta_0 = 1$. Una vez que hayamos tomado $\delta_0, \dots, \delta_{n-1}$, tomamos $\delta_n > 0$ suficientemente chico tal que $\delta_n \leq \frac{\delta_{n-1}}{4L\sqrt{N}}$ y

$$\left(\frac{\pi_1(q_i)}{\delta_{n-1}} + 1 \right)^N h(\delta_n \pi_2(q_i)) < \frac{1}{n} \text{ para todo } 1 \leq i \leq n,$$

donde π_1 y π_2 son las proyecciones en la primera y segunda coordenada respectivamente. Veamos que la sucesión construida satisface la tercer condición: Dados $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $q_i = (N_1, N_2)$. Dado $\varepsilon > 0$, si $n > \max\{i, \frac{1}{\varepsilon}\}$, tenemos que

$$\left(\frac{\pi_1(q_i)}{\delta_{n-1}} + 1\right)^N h(\delta_n \pi_2(q_i)) < \varepsilon,$$

lo que implica la tercer condición. \square

Teorema 96. Sean h una función de dimensión N , \mathcal{F} una familia de funciones continuas de \mathbb{R}^N a \mathbb{R}^N tal que existe una familia contable de funciones cerradas, inyectivas y localmente bilipschitz $\Psi = \{\psi_r : \Omega_r \rightarrow \mathbb{R}^N\}_{r \in \mathbb{N}}$ cada una definida sobre un conjunto cerrado Ω_r y satisfaciendo las siguientes condiciones:

- $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty, x \in \Omega_r} \|\psi_r(x)\| = +\infty$.
- para cada $f_i \in \mathcal{F}$ existe $\psi_{r(i)} \in \Psi$ tal que $f_i \circ \psi_{r(i)}$ es una función bilipschitz no contractiva en $\Omega_{r(i)}$
- dadas finitas funciones (cualesquiera) $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{F}$, el conjunto A_{a, f_1, \dots, f_n} definido como

$$A_{a, f_1, \dots, f_n} := \bigcap_{1 \leq i \leq n} f_i \circ \psi_{r(i)}|_{\Omega_{r(i)}} \left(((-a, a)^N)^c \right)$$

contiene bolas arbitrariamente grandes para todo $a > 0$.

Entonces existe un conjunto perfecto $E \subseteq \mathbb{R}^N$, tal que $\mathcal{H}^h(E) = 0$ y $\bigcap_{1 \leq i \leq n} f_i(E) \neq \emptyset$ para cualquier subconjunto finito $\{f_1, \dots, f_n\} \subseteq \mathcal{F}$.

Antes de probar el Teorema veamos algunas observaciones:

Observación 97. Notar que si tenemos, por ejemplo,

$$\mathcal{F} := \{f_1(x) := x^2 + 1, f_2(x) := -x^2\} \text{ con } N = 1,$$

resulta que $\text{Im}(f_1) \cap \text{Im}(f_2) = \emptyset$ y en este caso no puede existir tal conjunto E .

La condición de que A_{a, f_1, \dots, f_n} contenga bolas arbitrariamente grandes, nos está diciendo que eso no puede suceder; más aún nos dice que las imágenes de finitas funciones de \mathcal{F} deben intersectarse “mucho” hacia “el infinito”. Esto último se utiliza a la hora de armar un encaje de compactos no vacíos dentro de todas estas imágenes (de composiciones), para garantizar que la intersección será no vacía.

Observación 98. La condición “dada $f_i \in \mathcal{F}$ existe $\psi_{r(i)} \in \Psi$ tal que $f_i \circ \psi_{r(i)}$ es bilipschitz expansiva”, puede ser reemplazada por “dada $f_i \in \mathcal{F}$ existe $\psi_{r(i)} \in \Psi$ tal que $f_i \circ \psi_{r(i)}$ es bilipschitz con constante inferior $c > 0$ (uniforme para todas las $f_i \in \mathcal{F}$)”. Es claro que la segunda condición es más general. Pero son equivalentes, esto se debe a que si tenemos la segunda condición podremos considerar una nueva familia $\tilde{\Psi} := \{\psi \circ g : \psi \in \Psi \text{ y } g(x) := \frac{1}{c}x\}$ que cumpla la primera condición.

Observación 99. *El hecho de conseguir un conjunto cerrado bajo las hipótesis del Teorema es lo óptimo posible, en el sentido siguiente: para cualquier familia \mathcal{F} que verifique el enunciado, no es posible conseguir un conjunto compacto. Esto es porque no existe un conjunto acotado E tal que $\bigcap_{1 \leq i \leq n} \varphi_i(E) \neq \emptyset$ para cualesquiera finitas $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ funciones afines.*

Observación 100. *Vamos a citar algunas de las diferencias que introducimos en la demostración del Teorema 96, para generalizar el resultado de [8]:*

1. *Utilizamos el Lema 95, el cual es una modificación del utilizado por [8], en el que introducimos la dependencia de la constante L relacionada con la contracción-expansión de las composiciones de las funciones y la dimensión ambiente N , además de introducir mayor grado de libertad al considerar $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ en lugar de solo una variable $a \in \mathbb{Q}$.*
2. *Introducimos en la demostración la dependencia del tamaño de los huecos en función de L y de N .*
3. *Escribimos la familia $\mathcal{F} = \bigcup_{L \geq 2} \mathcal{F}_L$, para probar el resultado en cada \mathcal{F}_L y luego extenderlo a \mathcal{F} .*
4. *Al probar que la intersección es no vacía, nos quedamos sólo con la familia de índices Λ , sin introducir otras funciones (en la demostración de [8] completan esos índices a \mathbb{N} tomando las nuevas funciones como la función identidad), porque sino en este caso la intersección podría ser vacía.*
5. *Para poder hacer la prueba del encaje de compactos necesitamos introducir la hipótesis del conjunto A_{f_1, \dots, f_n} (que en cierto sentido se asemeja al rol que cumplía el I'_R en [8]) que es lo que nos permitió aplicar χ_m y χ_m^{-1} para cualquier m sin perder parte de los conjuntos, con lo cual seguimos teniendo control sobre las distancias en los mismos. En definitiva la prueba de esta parte también se basa en encaje de compactos y de bolas, y se basa en distancias. Aunque para poder probar algunos encajes, utilizamos el Teorema de separación de Jordan-Brouwer.*
6. *En la prueba de $\mathcal{H}^h(E) = 0$ necesitamos trabajar con un conjunto engordado y usar que ψ es localmente bilipschitz para controlar los diámetros del cubrimiento.*

Comencemos por recordar la siguiente

Definición 101. *Dado $x \in \mathbb{R}$, definimos el techo de x como $\lceil x \rceil$ el menor número entero que es mayor o igual que x .*

Y recordemos también el Teorema de separación de Jordan-Brouwer (el cual generaliza el Teorema de la curva de Jordan a más dimensiones):

Teorema 102 (Jordan, Brower). *Sea X una esfera topológica en \mathbb{R}^{n+1} , es decir que X es la imagen de la esfera n dimensional S_n por una función continua e inyectiva, en \mathbb{R}^{n+1} . Entonces el complemento $Y := \mathbb{R}^{n+1} \setminus X$ consiste de exactamente dos componentes: una acotada (el interior) y otra no acotada (el exterior), y el conjunto X es la frontera que tienen en común.*

Ahora si probemos el Teorema 96:

Demostración. Sea $\mathcal{F} = \bigcup_{L \in \mathbb{N}_{\geq 2}} \mathcal{F}_L$, donde

$$\mathcal{F}_L := \{f \in \mathcal{F} : \exists \psi \in \Psi \text{ satisfaciendo todas las hipótesis} \\ \text{tal que } f \circ \psi \text{ es bilipschitz con constantes } (1, L)\}.$$

Probaremos que dado $L \geq 2$, existe un conjunto cerrado $E_L \subseteq B(0, L)^C$, tal que $\mathcal{H}^h(E_L) = 0$ y $\bigcap_{1 \leq i \leq n} f_i(E_L) \neq \emptyset$ para todo subconjunto finito $\{f_1, \dots, f_n\}$ de \mathcal{F}_L .

Para ver esto, fijemos $L \geq 2$ y sea $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión dada por el Lema 95.

Definamos $\tilde{F}_n \subseteq \mathbb{R}$ como una unión de intervalos cerrados de longitud δ_n en los reales positivos, que son equiespaciados y los intervalos complementarios tienen longitud $\frac{\delta_{n-1}}{L^4 \sqrt{N}}$. Sea $F_n := \tilde{F}_n^N$ y sea K_j definidos como

$$K_j := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} F_{(2k-1)2^{j-1}}.$$

Por elección de la sucesión $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y el argumento de abajo, se sigue que K_j es no vacío.

Fijemos ahora $m \in \mathbb{N}$. Como por hipótesis $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty, x \in \Omega_j} \|\psi_j(x)\| = +\infty$ para cada $j \in \{1, \dots, m\}$, existe $k_j \in \mathbb{N}$ tal que $\|\psi_j(x)\| \geq \max\{m, L\}$ para todo $x \in ((-k_j, k_j)^N)^C \cap \Omega_j$. Definimos

$$I_m := ((-\tilde{k}_m, \tilde{k}_m)^N)^C \quad \text{con} \quad \tilde{k}_m := \max_{1 \leq j \leq m} k_j, \quad (4.15)$$

y

$$E_L := \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{j=1}^m \psi_j(K_j \cap I_m \cap \Omega_j).$$

Como $\psi_j(K_j \cap I_m \cap \Omega_j) \subseteq (B(0, L))^C$ para todo $m \in \mathbb{N}$ y todo $1 \leq j \leq m$, tenemos que $E_L \subseteq (B(0, L))^C$.

Además, E_L es cerrado, porque $\bigcup_{j=1}^m \psi_j(K_j \cap I_m \cap \Omega_j)$ está contenido en $(B(0, m))^C$ y es cerrado ya que ψ_j es una función cerrada.

Nuestro conjunto cerrado buscado E es

$$E := \bigcup_{L \in \mathbb{N}_{\geq 2}} E_L. \quad (4.16)$$

Para poder probar que E satisface las condiciones deseadas, nosotros primero necesitamos probar las siguientes afirmaciones:

1. Afirmación 1: Dado $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{F}_L$, se tiene que $\bigcap_{i=1}^n f_i(E_L) \neq \emptyset$.
 2. Afirmación 2: $\mathcal{H}^h(E_L) = 0$.
1. Probemos la Afirmación 1: Por la hipótesis de la familia de funciones, para cada función f_i asociamos una función $\psi_{r(i)}$ tal que $f_i \circ \psi_{r(i)}$ es bilipschitz con constantes $(1, L)$ en $\Omega_{r(i)}$.

Sea $R := \max\{r(1), \dots, r(n)\} \in \mathbb{N}$, y sea I_R dado por la ecuación (4.15).

Por hipótesis $A := \bigcap_{1 \leq i \leq n} f_i \circ \psi_{r(i)}|_{\Omega_{r(i)}}(I_R)$ contiene bolas arbitrariamente grandes.

Por lo tanto, usando la inyectividad de $f_i \circ \psi_{r(i)}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\bigcap_{i=1}^n f_i(E_L) &= \bigcap_{i=1}^n f_i \left(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{j=1}^m \psi_j|_{\Omega_j}(K_j \cap I_m) \right) \\
&\supseteq \bigcap_{i=1}^n f_i \left(\psi_{r(i)}|_{\Omega_{r(i)}}(K_{r(i)} \cap I_R) \right) \\
&\supseteq \left(\bigcap_{i=1}^n f_i \circ \psi_{r(i)}|_{\Omega_{r(i)}}(K_{r(i)}) \right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^n f_i \circ \psi_{r(i)}|_{\Omega_{r(i)}}(I_R) \right) \\
&\supseteq \bigcap_{i=1}^n \bigcap_{k \in \mathbb{N}} f_i \circ \psi_{r(i)}|_{\Omega_{r(i)}}(F_{(2k-1)2^{r(i)-1}}) \cap A.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Para cada $r(i) \in \{r(1), \dots, r(n)\}$ consideremos todos los $m \in \mathbb{N}$ que son de la forma $(2k-1)2^{r(i)-1}$ con $k \in \mathbb{N}$ y definamos $g_m := f_i \circ \psi_{r(i)}|_{\Omega_{r(i)}}$. Sea Λ el conjunto contable de todos esos índices que los consideramos estrictamente ordenados ($m_n < m_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}, m_n \in \Lambda$). Notar que puede haber muchos g_m que sean iguales. Así, reescribimos la ecuación (4.17) como

$$\bigcap_{i=1}^n f_i(E_L) \supseteq \bigcap_{m \in \Lambda} g_m(F_m) \cap A. \tag{4.18}$$

Para poder mostrar que esta última intersección es no vacía, probaremos que:

- a) Existe un cubo C_1 de F_{m_1} tal que $C_1 \subseteq g_{m_1}^{-1}(A)$.
- b) Dado un cubo C_k de F_{m_k} incluido en $g_{m_k}^{-1}(A)$, existe un cubo C_{k+1} de $F_{m_{k+1}}$ tal que $g_{m_{k+1}}(C_{k+1}) \subseteq g_{m_k}(C_k)$.

Esas dos condiciones producen una sucesión de conjuntos compactos anidados y, por lo tanto, su intersección será no vacía.

Veamos esas dos condiciones:

- a) Por hipótesis, para cada $\rho > 0$ existe una bola B_ρ de radio ρ contenida en A que está contenido en $\text{Im}(g_{m_1})$, y como los cubos de F_{m_1} están distribuidos uniformemente en todo \mathbb{R}^N con la misma longitud y separación tiene que existir una bola de radio $\frac{\rho}{L}$ contenida en $g_{m_1}^{-1}(B_\rho) \subseteq g_{m_1}^{-1}(A)$.
- b) Sea x el centro de $C_k \subseteq g_{m_k}^{-1}(A)$. Tenemos las siguientes inclusiones $\overline{B\left(x, \frac{\delta_{m_k}}{2}\right)} \subseteq C_k \subseteq g_{m_k}^{-1}(A)$ y por lo tanto $g_{m_k}\left(\overline{B\left(x, \frac{\delta_{m_k}}{2}\right)}\right) \subseteq g_{m_k}(C_k)$. Además podemos ver que

$$\overline{B\left(g_{m_k}(x), \frac{\delta_{m_k}}{2}\right)} \subseteq g_{m_k}\left(\overline{B\left(x, \frac{\delta_{m_k}}{2}\right)}\right).$$

Sea $y \in \overline{B\left(g_{m_k}(x), \frac{\delta_{m_k}}{2}\right)}$. Si $y \notin g_{m_k}\left(\overline{B\left(x, \frac{\delta_{m_k}}{2}\right)}\right)$, y como g_{m_k} es inyectiva y continua, por el Teorema de separación de Jordan-Brouwer, $g_{m_k}\left(\overline{\partial B\left(x, \frac{\delta_{m_k}}{2}\right)}\right)$ es la frontera entre las regiones $g_{m_k}\left(B\left(x, \frac{\delta_{m_k}}{2}\right)\right)$ y $\mathbb{R}^N \setminus g_{m_k}\left(\overline{B\left(x, \frac{\delta_{m_k}}{2}\right)}\right)$. Claramente $g_{m_k}(x)$ está contenido en la primera región, y por lo asumido, y pertenece a la segunda región. Por lo tanto, debe existir $z \in g_{m_k}\left(\overline{\partial B\left(x, \frac{\delta_{m_k}}{2}\right)}\right)$ tal que $\text{dist}(z, g_{m_k}(x)) < \text{dist}(y, g_{m_k}(x))$. Como g_{m_k} es bilipschitz no contractiva, tenemos que

$$\frac{\delta_{m_k}}{2} = \text{dist}(g_{m_k}^{-1}(z), x) \leq \text{dist}(z, g_{m_k}(x)) < \text{dist}(y, g_{m_k}(x)) \leq \frac{\delta_{m_k}}{2},$$

lo que es una contradicción.

Juntando todas las desigualdades, tenemos que

$$\overline{B\left(g_{m_k}(x), \frac{\delta_{m_k}}{2}\right)} \subseteq g_{m_k}\left(\overline{B\left(x, \frac{\delta_{m_k}}{2}\right)}\right) \subseteq g_{m_k}(C_k). \quad (4.19)$$

De aquí concluimos que

$$\begin{aligned} \overline{B} &:= \overline{B\left(g_{m_{k+1}}^{-1}(g_{m_k}(x)), \frac{\delta_{m_k}}{2L}\right)} \subseteq g_{m_{k+1}}^{-1}\left(\overline{B\left(g_{m_k}(x), \frac{\delta_{m_k}}{2L}\right)}\right) \\ &\subseteq g_{m_{k+1}}^{-1}(g_{m_k}(C_k)). \end{aligned} \quad (4.20)$$

donde la primera inclusión se prueba análogamente que se prueba (4.19).

Para ver que de hecho hay un cubo de $F_{m_{k+1}}$ en \overline{B} , es suficiente mostrar que

$$\sqrt{N}\left(\frac{\delta_{m_{k+1}-1}}{4L\sqrt{N}} + \delta_{m_{k+1}}\right) \leq \frac{\delta_{m_k}}{2L}.$$

Como $m_{k+1} > m_k$, tenemos que $\delta_{m_{k+1}-1} \leq \delta_{m_k}$ y $\delta_{m_{k+1}} \leq \frac{\delta_{m_k}}{4L\sqrt{N}}$ por la forma en que tomamos la sucesión usando el Lema 95. Esto prueba la desigualdad deseada, y por lo tanto la Afirmación 1.

2. Probemos la Afirmación 2, i.e. veamos que $\mathcal{H}^h(E_L) = 0$.

Como $E_L \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \psi_j(K_i)$, es suficiente ver que

$$\mathcal{H}^h \left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \psi_j(K_i) \right) = 0.$$

Sea \tilde{I} un cubo con longitud de lado 1, y sea $i, j \in \mathbb{N}$. Será suficiente para ver eso que $\mathcal{H}^h(\psi_j(K_i) \cap \tilde{I}) = 0$. Pero como $\psi_j(K_i) \cap \tilde{I} \subseteq \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \psi_j(F_{(2k-1)2^{i-1}}) \cap \tilde{I}$, veamos que $\mathcal{H}_{\delta_n N_2}^h(\psi_j(F_n) \cap \tilde{I}) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$ donde $N_2 := N_2(\psi_j, N, \tilde{I}) \in \mathbb{N}$.

Sea

$$M := \#\{J \text{ cubo en } F_n \text{ tal que } \psi_j(J) \cap \tilde{I} \neq \emptyset\}.$$

Como el diámetro de los cubos en F_n es $\sqrt{N}\delta_n \leq \sqrt{N}$, si J es un cubo en F_n tal que $J \cap \psi_j^{-1}(\tilde{I}) \neq \emptyset$ tenemos que J está contenido en un conjunto compacto G :

$$J \subseteq G := G(\psi_j, \tilde{I}, N) := \{x : \text{dist}(x, \psi_j^{-1}(\tilde{I})) \leq \sqrt{N}\}.$$

Como ψ_j es una función inyectiva, cerrada y localmente bilipschitz definida en el conjunto cerrado Ω_j . Cuando restringimos al conjunto compacto G , por Lema 83 tenemos que ψ_j es bilipschitz con ciertas constantes (a, b) , donde a y b solo dependen de N, \tilde{I} y ψ_j . Por lo tanto, si J es un cubo en F_n tal que $J \cap \psi_j^{-1}(\tilde{I}) \neq \emptyset$, entonces

$$\text{diam}(\psi_j(J)) \leq b \text{diam}(J) \leq b \sqrt{N}\delta_n \leq N_2\delta_n,$$

donde $N_2 := N_2(\tilde{I}, \psi_j, N) \in \mathbb{N}$ y por lo tanto

$$\mathcal{H}_{\lambda\delta_n}^h(\psi_j(F_n) \cap \tilde{I}) \leq Mh(N_2\delta_n). \quad (4.21)$$

Sea ahora $Q = Q(\tilde{I}, N, \psi_j)$ un cubo de lados paralelos a los ejes y con lados de longitud $\ell := \ell(\tilde{I}, N, \psi_j)$, que contiene a G . Tenemos que

$$M \leq \#\{J \text{ cubo de } F_n : J \subseteq Q\} \leq \left[\frac{\ell}{\delta_n + \frac{\delta_{n-1}}{8L\sqrt{N}}} \right]^N \leq \left(\frac{\ell 8L\sqrt{N}}{\delta_{n-1}} + 1 \right)^N,$$

$$\text{y por lo tanto } M \leq \left(\frac{N_1}{\delta_{n-1}} + 1 \right)^N,$$

donde $N_1 = N_1(\tilde{I}, N, \psi_j) := \lceil \ell 8L \sqrt{N} \rceil \in \mathbb{N}$. Reemplazando esto en la ecuación (4.21) tenemos que

$$\mathcal{H}_{\lambda \delta_n}^h(\psi_j(F_n) \cap \tilde{I}) \leq \left(\frac{N_1}{\delta_{n-1}} + 1 \right)^N h(N_2 \delta_n)$$

que tiende a 0 si tomamos $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ como en Lema 95. Esto completa la demostración de la Afirmación 2.

Ahora estamos en condiciones de probar que el conjunto E dado por (4.16), satisface la tesis del Teorema. Recordemos que E está dado por:

$$E := \bigcup_{L \in \mathbb{N}_{\geq 2}} E_L.$$

Vale que:

- E es cerrado, porque para cada L tenemos que E_L es cerrado que está contenido en $B(0, L)^C$.
- $\mathcal{H}^h(E) = 0$, ya que E es una unión contable de conjuntos de medida \mathcal{H}^h cero.
- Si f_1, \dots, f_n es cualquier conjunto finito de funciones de \mathcal{F} , existen números naturales $L_1, \dots, L_n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ tales que $f_i \in \mathcal{F}_{L_i}$. Tomando $L := \max\{L_1, \dots, L_n\}$ tenemos que $\{f_1, \dots, f_n\} \subseteq \mathcal{F}_L$, y por lo tanto

$$\bigcap_{i=1}^n f_i(E) \supseteq \bigcap_{i=1}^n f_i(E_L) \neq \emptyset.$$

Por el primer ítem, E es cerrado, y el siguiente Lema muestra que modificando ligeramente la construcción del conjunto E , podemos hacer que E sea perfecto y siga satisfaciendo las condiciones requeridas. Esto completa la demostración del Teorema 96. \square

El siguiente Lema muestra que si nuestro conjunto E tiene puntos aislados, podemos reemplazarlo por otro conjunto sin puntos aislados y que siga satisfaciendo las condiciones requeridas.

Lema 103. *Dada una función de dimensión h y un conjunto $\tilde{E} \subseteq \mathbb{R}^N$ que es cerrado o de clase \mathcal{F}_σ tal que $\mathcal{H}^h(\tilde{E}) = 0$. Entonces existe un conjunto $E \supseteq \tilde{E}$ del mismo tipo pero sin puntos aislados y tal que $\mathcal{H}^h(E) = 0$.*

Demostración. Sea D el conjunto (contable) de todos los puntos aislados de \tilde{E} . Para cada $x \in D$ tomando una bola $B(x, r_x)$ suficientemente chica como para no tocar el conjunto ni otra bola elegida entorno a otro punto aislado, i.e. $B(x, r_x) \cap \tilde{E} = \emptyset$ y $B(x, r_x) \cap B(y, r_y) = \emptyset$ para todo $x \neq y$ en D .

Sea ahora C un conjunto compacto sin puntos aislados, contenidos en $[0, 1]^N$ tal que $\mathcal{H}^h(C) = 0$.

Para cada $x \in D$ podemos poner una copia reescalada y trasladada $C_x \subseteq B(x, r_x)$ de C , que es compacto, no tiene puntos aislados y $\mathcal{H}^h(C_x) = 0$. Obtenemos el conjunto buscado E considerando $E := \tilde{E} \cup \bigcup_{x \in D} C_x$. \square

Mostraremos algunas familias de funciones para las cuales el Teorema 96 puede ser aplicado.

El siguiente Corolario muestra que el resultado que vimos anteriormente para las bilipschitz es un caso particular del Teorema 96.

Corolario 104. *Sea $\mathcal{F} := \{f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N \text{ bilipschitz}\}$ y sea h una función de dimensión. Existe un conjunto perfecto $E \subseteq \mathbb{R}^N$, con $\mathcal{H}^h(E) = 0$, y tal que $\bigcap_{i=1}^n f_i(E) \neq \emptyset$ para todo subconjunto finito $\{f_1, \dots, f_n\} \subseteq \mathcal{F}$.*

Demostración. Consideremos la familia contable de funciones lineales

$$\Psi = \{\psi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N \mid \psi(x) = \lambda x : \lambda \in \mathbb{Q}_{>0}\},$$

que satisfacen las hipótesis del Teorema 96.

Para cada función bilipschitz $f \in \mathcal{F}$ sea (c, d) las constantes bilipschitz. Asociamos a f cualquier función $\psi(x) = \lambda x$ con $\lambda \in \mathbb{Q}_{\geq \frac{1}{c}}$. Cualquier elección cumple que $f \circ \psi$ es bilipschitz no contractiva en \mathbb{R}^N . Además, como $f \circ \psi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ es bilipschitz, por el Teorema de Invariancia del Dominio (Teorema 88), es biyectiva y por lo tanto $f \circ \psi(\mathbb{R}^N) = \mathbb{R}^N$. En particular, para cualquier $a > 0$, tenemos que

$$\left(f \circ \psi \left(\left((-a, a)^N \right)^C \right) \right)^C = f \circ \psi \left((-a, a)^N \right).$$

Por lo tanto, dado cualquier conjunto finito de funciones $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{F}$ y $a > 0$ tenemos que

$$\begin{aligned} A_{a, f_1, \dots, f_n} &= \bigcap_{1 \leq i \leq n} f_i \circ \psi_{r(i)} \left(\left((-a, a)^N \right)^C \right) \\ &= \mathbb{R}^N \setminus \bigcup_{1 \leq i \leq n} f_i \circ \psi_{r(i)} \left((-a, a)^N \right). \end{aligned}$$

Pero $\bigcup_{1 \leq i \leq n} f_i \circ \psi_{r(i)} \left((-a, a)^N \right)$ es acotado (pues $f_i \circ \psi_{r(i)}$ es continua en todo \mathbb{R}^N y $(-a, a)^N$ acotado) y por lo tanto A_{a, f_1, \dots, f_n} contiene bolas arbitrariamente grandes. \square

Aplicación 105. *Notar que una consecuencia de este Corolario (que también puede ser obtenida de [36]) es que existe un conjunto cerrado E en \mathbb{R}^N con dimensión de Hausdorff 0 tal que para cualquier conjunto finito A de \mathbb{R}^N , existe $z_A \in \mathbb{R}^N$ tal que $A + z_A \subseteq E$; i.e. E contiene todo conjunto finito de \mathbb{R}^N salvo translaciones.*

Esto se debe a que dado cualquier conjunto finito de puntos en el espacio, podemos suponer que tiene un vértice en el origen, lo podemos pensar “generado” por los otros vértices v_1, \dots, v_k . Elegimos

$$h(x) = \begin{cases} \frac{-1}{\ln(x)} & \text{si } x \leq \frac{1}{2} \\ \ln(2) & \text{si no} \end{cases} \quad (4.22)$$

Por el Corolario 104, existe un conjunto cerrado $E \subseteq \mathbb{R}^N$ de dimensión de Hausdorff cero tal que para cualesquiera v_1, \dots, v_k en \mathbb{R}^N tenemos que

$$E \cap (E - v_1) \cap \dots \cap (E - v_k) \neq \emptyset.$$

Es decir que E contiene cualquier conjunto finito de puntos en el espacio (salvo traslación).

Para continuar exhibiendo conjuntos de funciones que satisfagan las condiciones de nuestro teorema, usaremos la notación $\mathbb{R}[x]$ para la familia de polinomios en \mathbb{R} con coeficientes reales.

Como consecuencia del Teorema 96, tenemos para $N = 1$:

Teorema 106. Sean h una función de dimensión, \mathcal{F} una familia de funciones continuas de \mathbb{R} en \mathbb{R} tales que existe una familia contable $\Psi = \{\psi_j\}_j$ de funciones a valores reales, inyectivas, cerradas, localmente bilipschitz, con dominio $\text{Dom} = [c_j, +\infty)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} |\psi_j(x)| = +\infty$ para todo $j \in \mathbb{N}$, verificando que: Para cada $f \in \mathcal{F}$, existe $\psi_j \in \Psi$ tal que

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f \circ \psi_j(x) = +\infty$
- $f \circ \psi_j$ es bilipschitz expansiva en $[c_j, +\infty)$

Entonces, existe $E \subseteq \mathbb{R}$ cerrado, tal que $\mathcal{H}^h(E) = 0$ y $\bigcap_{1 \leq i \leq n} f_i(E) \neq \emptyset$ para todo $\{f_1, \dots, f_n\}$ subconjunto finito en \mathcal{F} .

De este Teorema se siguen varias aplicaciones para funciones a valores reales:

Lema 107. La familia

$$\mathcal{F} := \{P : P \text{ polinomio no constante, con coeficiente principal positivo}\}$$

cumple las hipótesis del Teorema 106.

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tomo la familia

$$\mathcal{F}_n := \{P : P \text{ polinomio de grado } n \text{ con coeficiente principal positivo}\},$$

que verifica $\mathcal{F} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n$. A la familia \mathcal{F}_n le asociamos la familia contable

$$\Psi_n := \{\psi : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} : \psi(x) := \left(\frac{x}{\tilde{a}}\right)^{\frac{1}{n}} + \tilde{d} \text{ con } \tilde{a}, \tilde{d} \in \mathbb{Q} \text{ y } \tilde{a} > 0\}.$$

Así, si vemos que Ψ_n cumple las hipótesis del Teorema para \mathcal{F}_n , tenemos que $\Psi := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Psi_n$ familia contable que cumple las hipótesis del Teorema para \mathcal{F} .

Notar que Ψ_n es una familia de contables funciones a valores reales, con dominio $[1, +\infty)$, inyectivas, cerradas, localmente bilipschitz, con $\lim_{x \rightarrow \infty} |\psi(x)| = +\infty$.

A cada $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \in \mathcal{F}_n$ le asociamos una $\psi(x) = \left(\frac{x}{\tilde{a}}\right)^{\frac{1}{n}} + \tilde{d} \in \Psi_n$ con $\tilde{a} \in \mathbb{Q} \cap (0, a_n]$. Por lo cual $\frac{a_n}{\tilde{a}} \geq 1$, y después elegiremos \tilde{d} de forma conveniente.

Así tenemos, usando el binomio de Newton, que

$$\begin{aligned} P \circ \psi(x) &= \sum_{k=0}^n a_k \left(\frac{x^{\frac{1}{n}}}{\tilde{a}^{\frac{1}{n}}} + \tilde{d} \right)^k \\ &= \sum_{k=0}^n a_k \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{x^{\frac{j}{n}}}{\tilde{a}^{\frac{j}{n}}} \tilde{d}^{k-j} \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{a_k}{\tilde{a}^{\frac{j}{n}}} \tilde{d}^{k-j} x^{\frac{j}{n}} \\ &= \sum_{j=0}^n A_j x^{\frac{j}{n}}, \end{aligned}$$

donde $A_j := \sum_{n \geq k \geq j} \binom{k}{j} \frac{a_k}{\tilde{a}^{\frac{j}{n}}} \tilde{d}^{k-j}$. Se verifica que $\lim_{x \rightarrow +\infty} P \circ \psi(x) = +\infty$, pues $A_n := \frac{a_n}{\tilde{a}} \geq 1$. Para cada $1 \leq j \leq n-1$, A_j es un polinomio en la variable \tilde{d} de grado $n-j \geq 1$, con coeficiente principal $\binom{n}{j} \frac{a_n}{\tilde{a}^{\frac{j}{n}}} > 0$. Por lo cual podemos elegir $\tilde{d} \in \mathbb{Q}$ suficientemente grande tal que $A_j > 0$ para todo $1 \leq j \leq n-1$.

Para $x > y \geq 1$, existen $\xi_j \in [x, y]$ tales que

$$\begin{aligned} P \circ \psi(x) - P \circ \psi(y) &= \sum_{j=1}^n A_j (x^{\frac{j}{n}} - y^{\frac{j}{n}}) \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} A_j \frac{j}{n} \xi_j^{\frac{j}{n}-1} (x - y) + A_n (x - y) \end{aligned}$$

Tomemos $M := \left[\max_{1 \leq j \leq n} A_j \right]$. Y usando también que $A_n \geq 1$, tenemos

$$|x - y| \leq |P \circ \psi(x) - P \circ \psi(y)| \leq Mn|x - y| \quad \forall x, y \geq 1.$$

Así $P \circ \psi$ es bilipschitz de constantes $(1, nM)$ en $[1, +\infty)$. □

Lema 108. *La familia*

$$\mathcal{F} := \{P : P \text{ polinomio de grado impar}\}$$

cumple las hipótesis del Teorema 106.

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$ impar, tomo la familia

$$\mathcal{F}_n := \{P : P \text{ polinomio de grado } n\},$$

que verifica $\mathcal{F} = \bigcup_{n \text{ impar}} \mathcal{F}_n$. A la familia \mathcal{F}_n le asociamos la familia contable

$$\begin{aligned} \Psi_n := & \{\psi : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} : \psi(x) := \left(\frac{x}{\tilde{a}}\right)^{\frac{1}{n}} + \tilde{d} \text{ con } \tilde{a}, \tilde{d} \in \mathbb{Q} \text{ y } \tilde{a} > 0\} \\ & \cup \{\psi : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} : \psi(x) := -\left(\left(\frac{x}{\tilde{a}}\right)^{\frac{1}{n}} + \tilde{d}\right) \text{ con } \tilde{a}, \tilde{d} \in \mathbb{Q} \text{ y } \tilde{a} > 0\}. \end{aligned}$$

Así, si vemos que Ψ_n cumple con las hipótesis del Teorema para \mathcal{F}_n , tenemos que $\Psi := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Psi_n$ familia contable que cumple con las hipótesis del Teorema para \mathcal{F} .

Notar que ψ_n es una familia contable de funciones a valores reales, con dominio $[1, +\infty)$, inyectivas, cerradas, localmente bilipschitz, con $\lim_{x \rightarrow +\infty} |\psi(x)| = +\infty$.

Sea $P(x) = \sum_j a_j x^j \in \mathcal{F}_n$ con n impar. Como $a_n \neq 0$, tenemos dos casos. O bien $a_n > 0$ o bien $a_n < 0$.

Si $a_n > 0$, sale como en el Lema 107.

Si $a_n < 0$, es parecido. Veámoslo. Tomo $\psi(x) = -\left(\left(\frac{x}{\tilde{a}}\right)^{\frac{1}{n}} + \tilde{d}\right)$ con \tilde{a} racional positivo menor que $|a_n|$, el \tilde{d} será elegido después en forma conveniente.

Usando el binomio de Newton, tenemos

$$\begin{aligned} P \circ \psi(x) &= \sum_{k=0}^n a_k (-1)^k \left(\left(\frac{x}{\tilde{a}}\right)^{\frac{1}{n}} + \tilde{d}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{x^{\frac{j}{n}}}{\tilde{a}^{\frac{j}{n}}} \tilde{d}^{k-j} \\ &= \sum_{j=0}^n B_j x^{\frac{j}{n}}, \end{aligned}$$

donde $B_j := \sum_{k=j}^n \binom{k}{j} \frac{(-1)^k a_k}{\tilde{a}^{\frac{j}{n}}} \tilde{d}^{k-j}$.

Como n es impar y $0 < \tilde{a} \leq |a_n|$, es $B_n := \frac{|a_n|}{\tilde{a}} \geq 1$. Para cada $1 \leq j \leq n-1$, por ser B_j un polinomio en la variable \tilde{d} , de grado $n-j$, con coeficiente principal $\binom{n}{j} \frac{(-1)^n a_n}{\tilde{a}^{\frac{j}{n}}} > 0$ (que es positivo pues $a_n < 0$ y n impar). Entonces podemos elegir $\tilde{d} \in \mathbb{Q}$ suficientemente grande tal que $B_j > 0$ para todo $1 \leq j \leq n$.

Para $x > y \geq 1$, existen $\xi_j \in [x, y]$ tales que

$$\begin{aligned} P \circ \psi(x) - P \circ \psi(y) &= \sum_{j=1}^n B_j (x^{\frac{j}{n}} - y^{\frac{j}{n}}) \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} B_j \frac{j}{n} \xi_j^{\frac{j}{n}-1} (x - y) + B_n (x - y) \end{aligned}$$

Tomemos $M := \lceil \max_{1 \leq j \leq n} B_j \rceil$. Y usando también que $B_n \geq 1$, tenemos

$$|x - y| \leq |P \circ \psi(x) - P \circ \psi(y)| \leq Mn|x - y| \quad \forall x, y \geq 1.$$

Así $P \circ \psi$ es bilipschitz de constantes $(1, nM)$ en $[1, +\infty)$.

Además, en cualquier caso ($a_n > 0$ o $a_n < 0$) vale que $\lim_{x \rightarrow +\infty} P \circ \psi(x) = +\infty$. \square

Lema 109. *La familia*

$$\mathcal{F} := \{b \circ P : P \text{ polinomio no constante con coeficiente principal positivo} \\ \text{y } b \text{ bilipschitz con } \lim_{x \rightarrow +\infty} b(x) = +\infty\}$$

cumple las hipótesis del Teorema 106.

Demostración. A cada P polinomio no constante con coeficiente principal positivo, le asociamos ψ_P como en Lema 107, y a cada b bilipschitz de constantes (c, d) con $\lim_{x \rightarrow +\infty} b(x) = +\infty$ le asociamos $\psi_b(x) := \lambda x$ con $\lambda \in \mathbb{Q} \cap [\frac{1}{c}, \frac{L}{d}]$ (donde habíamos fijado $L \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ tal que $d < Lc$).

Las funciones de la familia contable Ψ_b son lineales, inyectivas, cerradas, bilipschitz, con dominio \mathbb{R} , continuas. Las funciones de la familia contable Ψ_P son inyectivas, cerradas, localmente bilipschitz, con dominio $[1, +\infty)$, continuas.

Entonces, las funciones de la familia contable $\Psi := \Psi_P \circ \Psi_b$ son inyectivas, cerradas, localmente bilipschitz, con dominio $\psi_b^{-1}[1, +\infty) = [c_b, +\infty)$ (pues $\psi_b(x) := \lambda x$ con $\lambda > 0$).

Además, por ser $\psi_b(x) := \lambda x$ con $\lambda > 0$, $P \circ \psi_P$ un polinomio no constante con coeficiente principal mayor o igual a 1, y por hipótesis $\lim_{x \rightarrow +\infty} b(x) = +\infty$; tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} b \circ P \circ \psi_P \circ \psi_b(x) = +\infty.$$

Solo resta ver que $b \circ P \circ \psi_P \circ \psi_b$ es bilipschitz expansiva. Veámoslo. Para esto utilizaremos que b es bilipschitz (c, d) , $P \circ \psi_P$ es bilipschitz $(1, Mn)$ y ψ_b es bilipschitz $[\frac{1}{c}, \frac{L}{d}]$.

$$\begin{aligned} |x - y| &\leq c|\psi_b(x) - \psi_b(y)| \\ &\leq c|P \circ \psi_P \circ \psi_b(x) - P \circ \psi_P \circ \psi_b(y)| \\ &\leq |b \circ P \circ \psi_P \circ \psi_b(x) - b \circ P \circ \psi_P \circ \psi_b(y)| \\ &\leq d|P \circ \psi_P \circ \psi_b(x) - P \circ \psi_P \circ \psi_b(y)| \\ &\leq dMn|\psi_b(x) - \psi_b(y)| \\ &\leq LMn|x - y| \end{aligned}$$

donde en la primera desigualdad usamos que $\lambda \geq \frac{1}{c}$ y en la última que $d\lambda \leq L$. \square

Lema 110. *La familia*

$$\mathcal{F} := \{b \circ P : P \text{ polinomio de grado impar} \\ \text{y } b \text{ bilipschitz con } \lim_{x \rightarrow +\infty} b(x) = +\infty\}$$

cumple las hipótesis del Teorema 106.

Demostración. (es análoga a la anterior) A cada P polinomio de grado impar, le asociamos ψ_P como en Lema 108, y a cada b bilipschitz de constantes (c, d) con $\lim_{x \rightarrow +\infty} b(x) = +\infty$ le asociamos $\psi_b(x) := \lambda x$ con $\lambda \in \mathbb{Q} \cap [\frac{1}{c}, \frac{L}{d}]$ (donde habíamos fijado $L \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ tal que $d < Lc$).

Las funciones de la familia contable Ψ_b son lineales, inyectivas, cerradas, bilipschitz, con dominio \mathbb{R} , continuas. Las funciones de la familia contable Ψ_P son inyectivas, cerradas, localmente bilipschitz, con dominio $[1, +\infty)$, continuas.

Entonces, las funciones de la familia contable $\Psi := \Psi_P \circ \Psi_b$ son inyectivas, cerradas, localmente bilipschitz, con dominio $\psi_b^{-1}[1, +\infty) = [c_b, +\infty)$ (pues $\psi_b(x) := \lambda x$ con $\lambda > 0$).

Además, por ser $\psi_b(x) := \lambda x$ con $\lambda > 0$, $P \circ \psi_P$ un polinomio no constante con coeficiente principal mayor o igual a 1, y por hipótesis $\lim_{x \rightarrow +\infty} b(x) = +\infty$; tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} b \circ P \circ \psi_P \circ \psi_b(x) = +\infty.$$

Solo resta ver que $b \circ P \circ \psi_P \circ \psi_b$ es bilipschitz expansiva. Veámoslo. Para esto utilizaremos que b es bilipschitz (c, d) , $P \circ \psi_P$ es bilipschitz $(1, Mn)$ y ψ_b es bilipschitz $[\frac{1}{c}, \frac{L}{d}]$.

$$\begin{aligned} |x - y| &\leq c|\psi_b(x) - \psi_b(y)| \\ &\leq c|P \circ \psi_P \circ \psi_b(x) - P \circ \psi_P \circ \psi_b(y)| \\ &\leq |b \circ P \circ \psi_P \circ \psi_b(x) - b \circ P \circ \psi_P \circ \psi_b(y)| \\ &\leq d|P \circ \psi_P \circ \psi_b(x) - P \circ \psi_P \circ \psi_b(y)| \\ &\leq dMn|\psi_b(x) - \psi_b(y)| \\ &\leq LMn|x - y| \end{aligned}$$

donde en la primera desigualdad usamos que $\lambda \geq \frac{1}{c}$ y en la última que $d\lambda \leq L$. □

4.2.2. Conjuntos perfectos conteniendo toda configuración finita

Como la definición de configuraciones viene dada como intersección de preimágenes, en lugar de imágenes (ver ecuación (4.1)), en esta sección probaremos un resultado análogo para intersecciones de preimágenes.

Teorema 111. *Sea h una función de dimensión, \mathcal{F} una familia de funciones continuas de \mathbb{R}^N de \mathbb{R}^N tal que existe una familia contable $\Psi = \{\psi_j\}_j$ de funciones inyectivas, cerradas, continuas definidas en conjuntos cerrados $\Omega_j \subseteq \mathbb{R}^N$, en \mathbb{R}^N , y tal que ψ_j^{-1} son localmente bilipschitz con $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty, x \in \text{Im}(\psi_j)} \|\psi_j^{-1}(x)\| = +\infty$ para todo j , satisfaciendo:*

- para cada $f_i \in \mathcal{F}$ existe $\psi_{r(i)} \in \Psi$ y un conjunto cerrado $D_i \subseteq \mathbb{R}^N$ tal que $\psi_{r(i)} \circ f_i|_{D_i}$ está bien definida y es bilipschitz no expansiva.

- para cada $a > 0$ y cualquier elección de finitas funciones $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{F}$, tenemos que

$$A_{a, f_1, \dots, f_n} := \bigcap_{1 \leq i \leq n} (\psi_{r(i)} \circ f_i|_{D_i})^{-1}((-a, a)^C)^N$$

contiene bolas arbitrariamente grandes.

Entonces existe un conjunto perfecto $E \subseteq \mathbb{R}^N$, tal que $\bigcap_{1 \leq i \leq n} f_i^{-1}(E) \neq \emptyset$ para cada conjunto finito de $\{f_1, \dots, f_n\} \subseteq \mathcal{F}$ y $\mathcal{H}^h(E) = 0$.

Demostración. La demostración es análoga a la prueba del Teorema 96, definiendo \mathcal{F}_L como

$$\left\{ f_i \in \mathcal{F} : \psi_{r(i)} \text{ asociada a } f_i \text{ satisface que } \psi_{r(i)} \circ f_i|_{D_i} \text{ es bilipschitz } \left(\frac{1}{L}, 1 \right) \right\},$$

y considerando $\mathcal{F} = \bigcup_{L \in \mathbb{N}_{\geq 2}} \mathcal{F}_L$.

Para cada $L \geq 2$, construimos primer un conjunto cerrado $E_L \subseteq B(0, L)^C$ tal que $\mathcal{H}^h(E_L) = 0$, y $\bigcap_{1 \leq i \leq n} f_i^{-1}(E_L) \neq \emptyset$ para cualquier subconjunto finito $\{f_1, \dots, f_n\}$ of \mathcal{F}_L .

Para esto, para cada $j \in \{1, \dots, m\}$, existe $k_m \in \mathbb{N}$ tal que $\|\psi_j^{-1}(x)\| \geq \max\{m, L\}$ para todo $x \in ((-k_m, k_m)^N)^C \cap \text{Im}(\psi_j)$ para todo $1 \leq j \leq m$. Definimos $I_m := ((-k_m, k_m)^N)^C$ y

$$E_L := \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{j=1}^m \psi_j^{-1}(K_j \cap I_m) \subseteq (B(0, L)^C)^C.$$

Dadas f_1, \dots, f_n , por hipótesis tenemos que $A := \bigcap_{1 \leq i \leq n} (\psi_{r(i)} \circ f_i|_{D_i})^{-1}(I_R)$ contiene bolas arbitrariamente grandes. También tenemos que

$$\bigcap_{i=1}^n f_i^{-1}(E_L) \supseteq \bigcap_{m \in \mathcal{M}} g_m^{-1}(F_m) \cap A, \quad (4.23)$$

donde definimos $g_m := \psi_{r(i)} \circ f_i|_{D_i}$ para los m que son de la forma $(2k-1)2^{r(i)-1}$ con $k \in \mathbb{N}$ y cualquier $r(i)$ con $1 \leq i \leq n$. Llamemos \mathcal{M} al conjunto contable de esos índices que los consideraremos ordenados en forma creciente.

Para probar que la intersección en la ecuación (4.23) es no vacía, veamos que

1. Existe un cubo C_1 de F_{m_1} tal que $C_1 \subseteq g_{m_1}(A)$.
2. Dado un cubo C_k de F_{m_k} que está contenido en $g_{m_k}(A)$, existe un cubo C_{k+1} de $F_{m_{k+1}}$ contenido en $g_{m_{k+1}}(A)$, y tal que $g_{m_{k+1}}^{-1}(C_{k+1}) \subseteq g_{m_k}^{-1}(C_k)$.

En esta forma, como g_m^{-1} es localmente bilipschitz, tenemos una sucesión de conjuntos compactos, no vacíos, encajados, cuya intersección será no vacía.

Por lo tanto, $\mathcal{H}^h(E_L) = 0$. Como $E_L \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \psi_j^{-1}(K_i)$ es suficiente ver que si \tilde{I} es un cubo de lados de longitud 1, $j, i \in \mathbb{N}$, tenemos

$$\mathcal{H}_{\delta_m \lambda}^h(\psi_j^{-1}(F_m) \cap \tilde{I}) \longrightarrow_{m \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{donde } \lambda := \lambda(\psi_j, N, \tilde{I}).$$

Notando que

$$M := \#\{J \text{ cubo de } F_m \text{ tal que } \psi_j^{-1}(J) \cap \tilde{I} \neq \emptyset\},$$

y razonando como en la Afirmación 2 del Teorema 96 el resultado se sigue.

Finalmente, tomando

$$E := \bigcup_{L \in \mathbb{N}_{\geq 2}} E_L$$

y usando el Lema 103, concluimos la demostración. \square

Ahora estamos listos para probar el resultado que estábamos buscando: construir un conjunto E con medida H^h cero que contiene toda configuración polinomial finita. Obtenemos este resultado para el caso de una variable como un caso particular del Teorema 111. Entonces lo extendemos a polinomios en varias variables en el Teorema 113.

Teorema 112. *Sea h una función de dimensión, \mathcal{P} la familia de polinomios no constantes en una variable con coeficientes reales. Entonces existe un conjunto perfecto $E \subseteq \mathbb{R}$, tal que $\mathcal{H}^h(E) = 0$ y $\bigcap_{1 \leq i \leq n} P_i^{-1}(E) \neq \emptyset$ para cualquier subconjunto finito $\{P_1, \dots, P_n\}$ en \mathcal{P} . En particular E contiene cualquier configuración polinomial finita.*

Si h es tomada adecuadamente, E es un conjunto perfecto que tiene dimensión de Hausdorff cero y que contiene cualquier configuración polinomial finita.

Demostración. Consideremos la familia de funciones cerradas, inyectivas y continuas

$$\begin{aligned} \Psi := \{ & \psi : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \psi(x) := qx^{\frac{1}{n}} : n \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{Q}_{>0} \} \\ & \cup \{ \psi : (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \psi(x) := q(-x)^{\frac{1}{n}} : n \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{Q}_{>0} \}; \end{aligned}$$

y tal que para cada $\psi \in \Psi$, tenemos

- ψ^{-1} es inyectiva, cerrada y localmente bilipschitz y
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} |\psi^{-1}(x)| = +\infty$.

Esta familia verifica que para cada $P(x) := \sum_{k=0}^n a_k x^k \in \mathcal{P}$ con $a_n \neq 0$ ($n \geq 1$), podemos tomar $\psi \in \Psi$ como

$$\psi(x) = \begin{cases} qx^{\frac{1}{n}} \text{ con } q \in \mathbb{Q} \cap \left[\frac{1}{2|a_n|^{\frac{1}{n}}}, \frac{3}{4|a_n|^{\frac{1}{n}}} \right] & \text{if } a_n > 0 \\ q(-x)^{\frac{1}{n}} \text{ con } q \in \mathbb{Q} \cap \left[\frac{1}{2|a_n|^{\frac{1}{n}}}, \frac{3}{4|a_n|^{\frac{1}{n}}} \right] & \text{if } a_n < 0. \end{cases}$$

Tomamos $M_P \in \mathbb{N}$ tal que

$$|P| \text{ es inyectiva en } [M_P - 1, +\infty) \text{ y tenemos que} \quad (4.24)$$

$$\frac{1}{4} \leq |(\psi \circ P|_{[M_P-1, +\infty)})'(x)| \leq 1 \text{ para todo } x > M_P - 1. \quad (4.25)$$

En otras palabras, $P|_{[M_P-1, +\infty)}$ es siempre positiva o siempre negativa, inyectiva y $\psi \circ P|_{[M_P-1, +\infty)}$ está bien definida, i.e. $\text{Im}(P|_{[M_P-1, +\infty)}) \subseteq \text{Dom}(\psi)$.

Notar que podemos pedir que la condición en la derivada, como

$$|(\psi \circ P)'(x)| = q \frac{|\pm \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} \frac{k+1}{n} x^k|}{|(\pm \sum_{k=0}^n a_k x^k)^{1-\frac{1}{n}}|} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} q |a_n|^{\frac{1}{n}} \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right].$$

En particular, $\psi \circ P$ es bilipschitz no expansiva con constantes $(\frac{1}{4}, 1)$ en $[M_P, +\infty)$.

Como $\psi \circ P|_{[M_P, +\infty)}$ es inyectiva, podemos definir su inversa.

Más aún $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\psi \circ P)^{-1}(x) = +\infty$. Además

$$\psi \circ P : (M_P - 1, +\infty) \rightarrow \psi \circ P(M_P - 1, +\infty) = \left(\frac{1}{2} |P(M_P - 1)|^{\frac{1}{n}}, +\infty \right)$$

es abierto, y por lo tanto $(\psi \circ P)^{-1} : \left[\frac{1}{2} |P(M_P)|^{\frac{1}{n}}, +\infty \right) \rightarrow [M_P, +\infty)$ es continua. Finalmente, como $\psi \circ P|_{[M_P, +\infty)}$ es creciente, $(\psi \circ P|_{[M_P, +\infty)})^{-1}$ es también creciente.

Por el Teorema 111 con $N = 1$ y $\mathcal{F} = \mathcal{P}$, asociando a cada P una función ψ y M_P como indicamos arriba, obtenemos el resultado deseado. \square

De hecho, podemos extender este resultado al caso de polinomios en varias variables.

Teorema 113. *Dada una función de dimensión h , y dada $\tilde{\mathcal{P}}$ la familia de polinomios no constantes en varias variables $\tilde{P} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, entonces existe un conjunto perfecto $E \subseteq \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{H}^h(E) = 0$, y $\bigcap_{1 \leq i \leq n} \tilde{P}_i^{-1}(E) \neq \emptyset$ y cualquier subconjunto finito $\{\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_n\}$ in $\tilde{\mathcal{P}}$.*

Demostración. Tomamos E el conjunto dado por el Teorema 112. Dados $\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_n \in \tilde{\mathcal{P}}$, será suficiente elegir $\lambda_2, \dots, \lambda_N \in \mathbb{R}$ tales que

$P_1(t) := \tilde{P}_1(t, \lambda_2 t, \dots, \lambda_N t), \dots, P_n(t) := \tilde{P}_n(t, \lambda_2 t, \dots, \lambda_N t)$ sean polinomios no constantes en una variable, ya que por por el Teorema 112 existe $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$\tilde{P}_1(t, \lambda_2 t, \dots, \lambda_N t) \in E$$

...

$$\tilde{P}_n(t, \lambda_2 t, \dots, \lambda_N t) \in E$$

de lo cual se seguirá el resultado.

Tomando $\lambda_2, \dots, \lambda_N$, sea $d_k := \text{grado}(\tilde{P}_k)$ y escribiendo

$$\tilde{P}_k(x_1, \dots, x_N) = \sum_{0 \leq j \leq d_k} \sum_{i_1 + \dots + i_N = j} a_{i_1, \dots, i_N}^{(k)} x_1^{i_1} \cdots x_N^{i_N},$$

donde $a_{i_1, \dots, i_N}^{(k)} \neq 0$ para algunos $i_1 + \dots + i_N = d_k$.

Entonces,

$$P_k(t) := \tilde{P}_k(t, \lambda_2 t, \dots, \lambda_N t) = \sum_{0 \leq j \leq d_k} t^j \sum_{i_1 + \dots + i_N = j} a_{i_1, \dots, i_N}^{(k)} \lambda_2^{i_2} \dots \lambda_N^{i_N},$$

donde $a_{i_1, \dots, i_N}^{(k)} \neq 0$ para algunos $i_1 + \dots + i_N = d_k$.

Como siempre existen $\lambda_2, \dots, \lambda_N \in \mathbb{R}$ satisfaciendo

$$\sum_{i_1 + \dots + i_N = d_k} a_{i_1, \dots, i_N}^{(k)} \lambda_2^{i_2} \dots \lambda_N^{i_N} \neq 0 \quad \forall 1 \leq k \leq n,$$

se obtiene la construcción deseada. □

No pudimos obtener un resultado similar para configuraciones polinomiales multivaluadas usando nuestro método de demostración. Esto se debe al hecho de que necesitaríamos que si P es un polinomio multivaluado de $\mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$, i.e. $P := (P_1, \dots, P_N)$ con $P_j : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ y $N \geq 2$, entonces exista un conjunto $D_P \subseteq \mathbb{R}^N$ que contenga bolas arbitrariamente grandes tal que $P|_{D_P}$ sea inyectivo.

No es sencillo caracterizar una familia de polinomios multivaluados que satisfagan esa condición, pero es fácil ver que no cualquier familia de polinomios la cumple, por ejemplo en \mathbb{R}^2 la función polinomial $P(x, y) = (x - y, (x - y)^2)$ nunca satisfará esa condición.

Por otra parte, el haber conseguido en particular un conjunto pequeño conteniendo toda configuración polinomial es un avance con respecto a otros resultados (mencionados en la introducción) en los que solo consiguen contener ciertos patrones polinomiales.

4.3. Intersecciones infinitas e infinitas configuraciones

Ahora estudiaremos resultados análogos para intersecciones contables, en lugar de intersecciones finitas.

Un primer resultado para ciertas funciones bilipschitz

Teorema 114. *Dados h función de dimensión, $L \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ y*

$$\mathcal{F} := \{f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N : \exists a > 0, \exists b \in (0, La) \text{ tq } a\|x - y\| \leq \|f(x) - f(y)\| \leq b\|x - y\| \quad \forall x, y\}.$$

Entonces, existe $E \subseteq \mathbb{R}^N$, conjunto de clase \mathcal{F}_σ , con $\mathcal{H}^h(E) = 0$, de modo que para cualquier $(f_r)_{r \in \Lambda}$ subconjunto contable de \mathcal{F} se tiene que

$$\bigcap_{r \in \Lambda} f_r(E) \neq \emptyset.$$

Demostremos el teorema anterior: Sea

$$\Psi := \{\psi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N : \psi(x) := \lambda x \text{ con } \lambda \in \mathbb{Q}_{>0}\} = (\psi_j)_{j \in \mathbb{N}}.$$

Lema 115. Existe $E \subseteq \mathbb{R}^N$, conjunto de clase \mathcal{F}_σ , de modo que para cualquier $(f_r)_{r \in \Lambda}$ subconjunto contable de \mathcal{F} se tiene que

$$\bigcap_{r \in \Lambda} f_r(E) \neq \emptyset.$$

Demostración. Fijemos una sucesión como en el Lema 91, y definamos $\tilde{F}_n \subseteq \mathbb{R}$ unión de intervalos cerrados a lo largo de todo \mathbb{R} , con longitudes δ_n , y equiespaciados con huecos de longitud $\frac{\delta_{n-1}}{L2\sqrt{N}}$. Sean

$$F_n := \tilde{F}_n^N,$$

$$K_i := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} F_{(2k-1)2^{i-1}}$$

y

$$E := \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \psi_j(K_i).$$

E es un conjunto de clase \mathcal{F}_σ pues $\psi_j(K_i)$ es cerrado para todo $i, j \in \mathbb{N}$.

Como $f_r \in \mathcal{F}$, existen $c_r, d_r > 0$ tales que $d_r < Lc_r$ y

$$c_r \|x - y\| \leq \|f_r(x) - f_r(y)\| \leq d_r \|x - y\| \quad \forall x, y.$$

Tomo $\psi_{j(r)}(x) := \lambda_{j(r)}x$ con $\lambda_{j(r)} \in \mathbb{Q} \cap [\frac{1}{c_r}, \frac{L}{d_r}]$ (el cual existe ya que $d_r < Lc_r$). Entonces,

$$\begin{aligned} \|x - y\| &\leq c_r \|\psi_{j(r)}(x - y)\| \\ &\leq \|f_r \circ \psi_{j(r)}(x) - f_r \circ \psi_{j(r)}(y)\| \\ &\leq d_r \|\psi_{j(r)}(x - y)\| \\ &\leq d_r \frac{L}{d_r} \|x - y\| \\ &= L \|x - y\|. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Usando la inyectividad de $f_r \circ \psi_{j(r)}$, tenemos

$$\begin{aligned} \bigcap_{r \in \Lambda} f_r(E) &= \bigcap_{r \in \Lambda} f_r \left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \psi_j(K_i) \right) \\ &\supseteq \bigcap_{r \in \Lambda} f_r \circ \psi_{j(r)}(K_r) \\ &= \bigcap_{r \in \Lambda} \bigcap_{k \in \mathbb{N}} f_r \circ \psi_{j(r)}(F_{(2k-1)2^{r-1}}) \\ &= \bigcap_{l \in \mathbb{N}} \mathcal{X}_{m_l}(F_{m_l}) \end{aligned} \tag{4.27}$$

donde notamos $\chi_m := f_r \circ \psi_{j(r)}$ cuando $m = (2k-1)2^{r-1}$ con $k \in \mathbb{N}$ y $r \in \Lambda$. Y consideramos $(m_l)_{l \in \mathbb{N}}$ la sucesión de los $m \in \mathbb{N}$ tales que se escriben como $m = (2k-1)2^{r-1}$ con $k \in \mathbb{N}$ y $r \in \Lambda$, ordenada en forma creciente estricta.

Veamos que (4.27) es no vacío:

Para esto utilizaremos lo siguiente:

1. $\|x - y\| \leq \|\chi_{m_l}(x) - \chi_{m_l}(y)\| \leq L\|x - y\|$ para todo m_l y todos $x, y \in \mathbb{R}^N$.
2. Como vale que $\text{dist}(x, F_n) \leq \sqrt{N} \text{long hueco} \leq \frac{\delta_{n-1}}{L^2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo x . Y como todo $y \in \mathbb{R}^N$ se puede escribir como $y = \chi_m(x)$ (por Observación 89), tenemos que

$$\text{dist}(y, \chi_m(F_n)) = \text{dist}(\chi_m(x), \chi_m(F_n)) \leq \frac{\delta_{n-1}}{2},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, todo $y \in \mathbb{R}^N$, y todos $m, n \in \mathbb{N}$.

3. Si C es un cubo cualquiera de F_n , tenemos que $\text{diam}(C) = \sqrt{N}\delta_n$. Por lo tanto (usando el primer ítem),

$$\text{diam}(\chi_m(C)) \in [\text{diam}(C), L \cdot \text{diam}(C)] = [\sqrt{N}\delta_n, L\sqrt{N}\delta_n].$$

Sea C_l cubo de F_{m_l} . Para poder probar que (4.27) es no vacío, nos basta ver que: Dado C_l cubo de F_{m_l} , existe un cubo C_{l+1} de $F_{m_{l+1}}$ tal que $\chi_{m_{l+1}}(C_{l+1}) \subseteq \chi_{m_l}(C_l)$.

Pues así tendríamos un encaje de compactos no vacíos (ya que χ_{m_l} es una función continua para todo $l \in \mathbb{N}$).

Veámoslo: Sea $I_l := \chi_{m_l}(C_l)$ con C_l cubo de F_{m_l} . Quiero ver que existe un cubo C_{l+1} de $F_{m_{l+1}}$ de modo que $I_{l+1} := \chi_{m_{l+1}}(C_{l+1}) \subseteq I_l$.

Sea x el centro de C_l , sabemos que

$$\overline{B(\chi_{m_l}(x), \frac{\delta_{m_l}}{2})} \subseteq \chi_{m_l} \left(\overline{B(x, \frac{\delta_{m_l}}{2})} \right) \subseteq I_l.$$

Por otra parte si y es el centro del cubo C_{l+1} , sabemos que

$$I_{l+1} \subseteq \overline{B(\chi_{m_{l+1}}(y), L\sqrt{N}\frac{\delta_{m_{l+1}}}{2})}.$$

Así, si elegimos y de forma que se cumpla

$$\overline{B(\chi_{m_{l+1}}(y), L\sqrt{N}\frac{\delta_{m_{l+1}}}{2})} \subseteq \overline{B(\chi_{m_l}(x), \frac{\delta_{m_l}}{2})},$$

tendremos que $I_{l+1} \subseteq I_l$. Tomemos y el centro de un cubo de $F_{m_{l+1}}$ tal que

$$\text{dist}(y, \chi_{m_{l+1}}^{-1} \circ \chi_{m_l}(x)) \leq \frac{\sqrt{N}}{2}(\text{lado}_{m_{l+1}} + \text{hueco}_{m_{l+1}}) = \frac{\sqrt{N}}{2}(\delta_{m_{l+1}} + \frac{\delta_{m_{l+1}-1}}{2\sqrt{N}L}).$$

Así, aplicando $\chi_{m_{l+1}}$, tenemos $\text{dist}(\chi_{m_{l+1}}(y), \chi_{m_l}(x)) \leq \frac{\sqrt{N}}{2}(L\delta_{m_{l+1}} + \frac{\delta_{m_{l+1}-1}}{2\sqrt{N}})$. Habiendo elegido y de esa forma, utilizando que $\delta_{m_{l+1}} \leq \frac{\delta_{m_l}}{4\sqrt{NL}}$ (por (4.9) y $m_{l+1} > m_l$), y $\delta_{m_{l+1}-1} \leq \delta_{m_l}$ (pues $m_{l+1} - 1 \geq m_l$) resulta que

$$\begin{aligned} & \frac{\delta_{m_l}}{2} - \frac{\sqrt{N}}{2}(L\delta_{m_{l+1}} + \frac{\delta_{m_{l+1}-1}}{2\sqrt{N}}) - L\frac{\delta_{m_{l+1}}}{2}\sqrt{N} \\ & \geq \frac{\delta_{m_l}}{2} - \sqrt{N}L\delta_{m_{l+1}} - \frac{1}{4}\delta_{m_l} \\ & = \frac{1}{4}\delta_{m_l} - \sqrt{N}L\delta_{m_{l+1}} \\ & \geq 0 \end{aligned}$$

por lo que

$$\frac{\sqrt{N}}{2}(L\delta_{m_{l+1}} + \frac{\delta_{m_{l+1}-1}}{2\sqrt{N}}) + L\frac{\delta_{m_{l+1}}}{2}\sqrt{N} \leq \frac{\delta_{m_l}}{2},$$

y así vale que

$$\overline{B(\chi_{m_{l+1}}(y), L\sqrt{N}\frac{\delta_{m_{l+1}}}{2})} \subseteq \overline{B(\chi_{m_l}(x), \frac{\delta_{m_l}}{2})}.$$

□

Lema 116. $\mathcal{H}^h(E) = 0$.

Demostración. Como $E = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \psi_j(K_i)$, basta ver que $\mathcal{H}^h(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \psi_j(K_i)) = 0$. Sea \tilde{I} cubo de lado 1, sean $j \in \mathbb{N}$ e $i \in \mathbb{N}$, para ver lo anterior, alcanza ver que $\mathcal{H}^h(\psi_j(K_i) \cap \tilde{I}) = 0$. Y como $\psi_j(K_i) \cap \tilde{I} \subseteq \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \psi_j(F_{(2k-1)2^{i-1}}) \cap \tilde{I}$, es suficiente ver que $\mathcal{H}^h_{\delta_m \lambda_j \sqrt{N}}(\psi_j(F_m) \cap \tilde{I}) \rightarrow_{m \rightarrow \infty} 0$.

$\psi_j(F_m)$ es unión de cubos cerrados distribuidos uniformemente (de lado y separación fija) a lo largo de todo \mathbb{R}^N , de lado $\lambda_j \delta_m$, de diámetro $\lambda_j \sqrt{N} \delta_m$, con huecos de longitud (en dirección a los ejes) $\lambda_j \frac{\delta_{m-1}}{2L\sqrt{N}}$. Tenemos que $\psi_j(F_m) \cap \tilde{I}$ consiste de entre $(M-1)^N$ y M^N paralelepípedos, que forman un $\lambda_j \sqrt{N} \delta_m$ -cubrimiento.

Como debe cumplirse que

$$(M-2)^N \text{área producto de huecos contenidos en } I \leq \text{volumen } I.$$

Resulta,

$$(M-2)^N \left(\lambda_j \frac{\delta_{m-1}}{2L\sqrt{N}} \right)^N \leq 1.$$

Entonces,

$$(M-2) \frac{\lambda_j \delta_{m-1}}{2L\sqrt{N}} \leq 1.$$

Despejando, tenemos que debe ser

$$M \leq \frac{2L\sqrt{N}}{\lambda_j\delta_{m-1}} + 2.$$

Así,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\lambda_j\sqrt{N}\delta_m}^h(I \cap \psi(F_m)) &\leq M^N h(\lambda_j\delta_m \sqrt{N}) \\ &\leq \left(\frac{2L\sqrt{N}}{\lambda_j\delta_{m-1}} + 2 \right)^N h(\lambda_j\delta_m \sqrt{N}), \end{aligned}$$

donde el último término tiende a cero cuando m tiende a infinito (por (4.10)). Por lo tanto, $\mathcal{H}_{\lambda_j\sqrt{N}\delta_m}^h(I \cap \psi(F_m)) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$. \square

4.3.1. Pequeños conjuntos \mathcal{F}_σ con una propiedad de intersección contable

Dado un conjunto de funciones \mathcal{F} satisfaciendo ciertas condiciones, probaremos que existe un conjunto pequeño de clase \mathcal{F}_σ , sin puntos aislados, tal que las imágenes bajo intersecciones contables de funciones de \mathcal{F} es no vacía.

Teorema 117. *Sea h una función de dimensión, \mathcal{F} una familia de funciones continuas de \mathbb{R}^N en \mathbb{R}^N tal que existe una sucesión de funciones cerradas y localmente bilipschitz $\Psi := (\psi_j)_j$ definidas en conjuntos cerrados $\Omega_j \subseteq \mathbb{R}^N$, satisfaciendo que existe $L \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ tal que*

- para cada $f_i \in \mathcal{F}$, existe $\psi_{r(i)} \in \Psi$ tal que $f_i \circ \psi_{r(i)}|_{\Omega_{r(i)}}$ está bien definida y es bilipschitz con constantes $(1, L)$;
- dadas contables funciones $(f_i)_{i \in \Lambda \subseteq \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ el conjunto

$$A_{\{f_i: i \in \Lambda\}} := \bigcap_{i \in \Lambda} f_i \circ \psi_{r(i)}(\Omega_{r(i)}),$$

contiene bolas arbitrariamente grandes.

Entonces existe un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^N$, de clase \mathcal{F}_σ , sin puntos aislados, con $\mathcal{H}^h(E) = 0$, tal que $\bigcap_{i \in \Lambda} f_i(E) \neq \emptyset$ para toda familia contable $\{f_i : i \in \Lambda\} \subseteq \mathcal{F}$.

Demostración. La demostración de este Teorema es análoga a la del Teorema 96. Tenemos una sucesión como en el Lema 95. Definamos para cada $n \in \mathbb{N}$, $\tilde{F}_n \subseteq \mathbb{R}$ unión de intervalos cerrados a lo largo de \mathbb{R} , con longitudes δ_n , equiespaciados, con huecos de longitud $\frac{\delta_{n-1}}{L4\sqrt{N}}$. Sean $F_n := (\tilde{F}_n)^N$ y $K_i := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} F_{(2k-1)2^{i-1}}$ el cual es un conjunto cerrado.

Primero empezamos construyendo un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^N$, del clase \mathcal{F}_σ , tal que $\bigcap_{i \in \Lambda} f_i(E) \neq \emptyset$ para todo subconjunto contable $(f_i)_{i \in \Lambda \subseteq \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$.

Consideremos

$$E := \bigcup_j \bigcup_i \psi_j(K_i) \in \mathcal{F}_\sigma.$$

Por hipótesis, para cada f_i tenemos una correspondiente $\psi_{r(i)}$ tal que $f_i \circ \psi_{r(i)}$ es inyectiva en $\Omega_{r(i)}$. Como antes, tenemos

$$\begin{aligned} \bigcap_{i \in \Lambda} f_i(E) &= \bigcap_{i \in \Lambda} f_i \left(\bigcup_j \bigcup_l \psi_j|_{\Omega_j}(K_l) \right) \\ &\supseteq \bigcap_{i \in \Lambda} f_i \circ \psi_{r(i)}|_{\Omega_{r(i)}}(K_i) \\ &= \bigcap_{i \in \Lambda} \bigcap_{k \in \mathbb{N}} f_i \circ \psi_{r(i)}|_{\Omega_{r(i)}}(F_{(2k-1)2^{i-1}}) \\ &\supseteq \bigcap_{m \in \mathcal{M}} g_m(F_m), \end{aligned} \tag{4.28}$$

donde $g_m := f_i \circ \psi_{r(i)}|_{\Omega_{r(i)}}$ para los índices m tales que $m = (2k-1)2^{i-1}$ con $k \in \mathbb{N}$ y $i \in \Lambda$ y denotamos \mathcal{M} al conjunto contable de esos índices ordenados crecientemente.

Como por hipótesis $A := A_{\{f_i; i \in \Lambda\}} := \bigcap_{i \in \Lambda} f_i \circ \psi_{r(i)}(\Omega_{r(i)})$ contiene bolas arbitrariamente grandes, $\text{Im}(g_m)$ contiene bolas arbitrariamente grandes para $m \in \mathcal{M}$.

Para ver que la intersección dada en la ecuación (4.28) es no vacía, veremos que

1. Existe un cubo C_1 de F_{m_1} tal que $C_1 \subseteq g_{m_1}^{-1}(A)$.
2. Dado un cubo C_n de F_{m_n} contenido en $g_{m_n}^{-1}(A)$, existe un cubo C_{n+1} de $F_{m_{n+1}}$ contenido en $g_{m_{n+1}}^{-1}(A)$ tal que $g_{m_{n+1}}(C_{n+1}) \subseteq g_{m_n}(C_n)$.

Como g_m es bilipschitz, construimos una sucesión de conjuntos compactos, no vacíos y encajados, cuya intersección es no vacía.

Veámoslo:

1. Por hipótesis $A \subseteq \text{Im}(g_{m_1})$ contiene bolas arbitrariamente grandes. Entonces $g_{m_1}^{-1}(A)$ contiene bolas arbitrariamente grandes. Además los cubos de F_{m_1} están distribuidos uniformemente (con igual lado y separación) a lo largo de \mathbb{R}^N . Entonces existe C_1 cubo de F_{m_1} tal que $C_1 \subseteq g_{m_1}^{-1}(A)$.
2. Sea x el centro de $C_n \subseteq \chi_{m_n}^{-1}(A)$. Como $\overline{B\left(x, \frac{\delta_{m_n}}{2}\right)} \subseteq C_n \subseteq g_{m_n}^{-1}(A)$. Entonces

$$\overline{B\left(g_{m_n}(x), \frac{\delta_{m_n}}{2}\right)} \subseteq \chi_{m_n} \left(\overline{B\left(x, \frac{\delta_{m_n}}{2}\right)} \right) \subseteq g_{m_n}(C_n). \tag{4.29}$$

Por lo que

$$\bar{B} := \overline{B\left(g_{m_{n+1}}^{-1}(g_{m_n}(x)), \frac{\delta_{m_n}}{2L}\right)} \subseteq g_{m_{n+1}}^{-1}\left(\overline{B(g_{m_n}(x), \frac{\delta_{m_n}}{2L})}\right) \subseteq g_{m_{n+1}}^{-1}(g_{m_n}(C_n)). \quad (4.30)$$

La justificación de las primeras inclusiones de (4.29) y (4.30), es análoga a las realizadas anteriormente.

Para que haya un cubo de $F_{m_{n+1}}$ en \bar{B} , basta ver que $\sqrt{N}(\text{hueco}_{m_{n+1}} + \text{lado}_{m_{n+1}}) \leq \frac{\delta_{m_n}}{2L}$. O lo que es lo mismo, basta ver que

$$\frac{\delta_{m_n}}{2L} - \sqrt{N}\left(\frac{\delta_{m_{n+1}-1}}{4L\sqrt{N}} - \delta_{m_{n+1}}\right) \geq 0.$$

Y esto pasa porque como $m_{n+1} > m_n$, tenemos que $\delta_{m_{n+1}-1} \leq \delta_{m_n}$ y $\delta_{m_{n+1}} \leq \frac{\delta_{m_n}}{4L\sqrt{N}}$ por como elegimos la sucesión.

Finalmente notemos que por un argumento similar al usado en la demostración del Teorema 96, podemos mostrar que $\mathcal{H}^h(E) = 0$:

Como $E \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \psi_j(K_i)$ y \mathcal{H}^h es σ -subaditiva, basta ver que para cada j , cada i y cada \tilde{I} cubo de lado 1, resulta que $\mathcal{H}^h(\psi_j(K_i) \cap \tilde{I}) = 0$.

Y como $\psi_j(K_i) \cap \tilde{I} \subseteq \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \psi_j(F_{(2k-1)2^{i-1}}) \cap \tilde{I}$, nos basta ver que

$$\mathcal{H}_{\delta_n c'(\psi_j, N, \tilde{I})}^h(\psi_j(F_n) \cap \tilde{I}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

donde $c' := c'(\psi_j, N, \tilde{I})$ es una constante que depende solo de ψ_j , N y \tilde{I} .

Sea

$$\begin{aligned} M &:= \#\{J \text{ cubo de } F_n \text{ tal que } \psi_j(J) \cap \tilde{I} \neq \emptyset\} \\ &= \#\{J \text{ cubo de } F_n \text{ tal que } J \cap \psi_j^{-1}(\tilde{I}) \neq \emptyset\} \end{aligned}$$

Como los cubos de F_n tienen diámetro $\sqrt{N}\delta_n \leq \sqrt{N}$, entonces si J es un cubo de F_n tal que $J \cap \psi_j^{-1}(\tilde{I}) \neq \emptyset$ resulta que $J \subseteq G := G(\psi_j, \tilde{I}, N)$ donde G es el engordado cerrado en \sqrt{N} del conjunto $\psi_j^{-1}(\tilde{I})$ (el cual resulta compacto).

La función ψ_j es cerrada, inyectiva, localmente bilipschitz en G compacto, entonces por Lema 83 resulta que $\psi_j|_G$ es bilipschitz de constantes (a, b) (las constantes a y b solo dependen de N , \tilde{I} y ψ_j).

Por lo tanto si J es un cubo de F_n tal que $\psi_j(J) \cap \tilde{I} \neq \emptyset$, entonces $\text{diam}(\psi_j(J)) \leq b \text{diam}(J) \leq b\sqrt{N}\delta_n = \lambda\delta_n$ donde $\lambda := \lambda(\tilde{I}, \psi_j, N)$.

Así,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\lambda\delta_n}^h(\psi_j(F_n) \cap \tilde{I}) &\leq Mh(\lambda\delta_n) \\ &\leq Mh(N_2\delta_n), \end{aligned}$$

donde $N_2 \in \mathbb{N}$ es tal que $N_2 \geq \lambda$ (N_2 depende de N , \tilde{I} y de ψ_j).

Sea Q un cubo que contiene a G , de lados paralelos a los ejes (Q depende de \tilde{I} , N y de ψ_j), y tiene lados de longitud $\ell := \ell(\tilde{I}, N, \psi_j)$. Tenemos que

$$M \leq \#\{J \in F_n : J \subseteq Q\} \leq \left\lceil \frac{\ell 4L \sqrt{N}}{\delta_{n-1}} \right\rceil^N,$$

porque $\left\lceil \frac{\ell 4L \sqrt{N}}{\delta_{n-1}} \right\rceil (\delta_n + \frac{\delta_{n-1}}{4L \sqrt{N}}) \geq \ell$.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} M &\leq \left\lceil \frac{\ell 4L \sqrt{N}}{\delta_{n-1}} \right\rceil^N \\ &\leq \left(\frac{\ell 4L \sqrt{N}}{\delta_{n-1}} + 1 \right)^N \\ &\leq \left(\frac{N_1}{\delta_{n-1}} + 1 \right)^N, \end{aligned}$$

donde $N_1 \in \mathbb{N}$ es tal que $\ell(\tilde{I}, N, \psi_j) 4L \sqrt{N} \leq N_1$ (N_1 depende de \tilde{I} , N y ψ_j).

Así, juntándolo con lo anterior, tenemos que

$$\mathcal{H}_{\lambda \delta_n}^h(\psi_j(F_n) \cap \tilde{I}) \leq \left(\frac{N_1}{\delta_{n-1}} + 1 \right)^N h(N_2 \delta_n) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0,$$

por como fue elegida la sucesión $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Por el Lema 103 el conjunto E puede ser tomado sin puntos aislados. □

Observación 118. *El hecho de conseguir un conjunto de clase \mathcal{F}_σ bajo las hipótesis del Teorema es lo óptimo posible, en el sentido siguiente: para cualquier familia \mathcal{F} que verifique el enunciado, no es posible conseguir un conjunto cerrado con $\mathcal{H}^h(E) = 0$ (recordemos que nos interesan h que hagan que E sea chico). Esto es porque, el único conjunto cerrado $E \subseteq \mathbb{R}^N$ tal que $\bigcap_{i \in \Lambda} f_i(E) \neq \emptyset$ para cualesquiera $(f_i)_{i \in \Lambda}$ contables funciones afines, es $E = \mathbb{R}^N$. Esto se debe a que si E es cerrado y no es todo \mathbb{R}^N habría un cubito cerrado Q con interior no vacío contenido en el complemento de E , tomando f_i ciertas traslaciones adecuadas podríamos hacer que $\bigcup_{i \in \Lambda} f_i(Q) = \mathbb{R}^N$, por lo que $\bigcap_{i \in \Lambda} f_i(E) = \left(\bigcup_{i \in \Lambda} f_i(E^c) \right)^c \subseteq \left(\bigcap_{i \in \Lambda} f_i(Q) \right)^c = (\mathbb{R}^N)^c = \emptyset$.*

Aplicación 119. *Una aplicación del Teorema (tomando \mathcal{F} como las traslaciones, Ψ como las traslaciones en coordenadas racionales, y $D = \mathbb{R}^N$): Existe un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^N$ de clase \mathcal{F}_σ , sin puntos aislados, de dimensión de Hausdorff cero, que contiene todos los conjuntos contables de puntos en el espacio (salvo traslación).*

Esto se debe a que dado cualquier conjunto contable de puntos en el espacio, podemos suponer que tiene un vértice en el origen, lo podemos pensar “generado” por los otros contables vértices $\{v_i\}_{i \in \Lambda}$. Elegimos

$$h(x) = \begin{cases} \frac{-1}{\ln(x)} & \text{si } x \leq \frac{1}{2} \\ \ln(2) & \text{si no} \end{cases} \quad (4.31)$$

Por el Teorema 117, existe un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^N$ de clase \mathcal{F}_σ , sin puntos aislados, de dimensión de Hausdorff cero tal que para cualesquiera $\{v_i\}_{i \in \Lambda}$ contables puntos en \mathbb{R}^N tenemos que

$$\bigcap_{i \in \Lambda} (E - v_i) \cap E \neq \emptyset.$$

Entonces $(\{0\} \cup \{v_i\}_{i \in \Lambda}) + v \subseteq E$ (donde v depende del conjunto contable dado). Es decir que E contiene cualquier conjunto contable de puntos en el espacio (salvo traslación).

Corolario 120. Dado $L \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, la siguiente familia satisface las hipótesis del Teorema 117

$$\mathcal{F}_L := \{f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N : \exists a > 0, \exists b \in (0, La) \text{ tal que} \\ a\|x - y\| \leq \|f(x) - f(y)\| \leq b\|x - y\| \forall x, y\}.$$

Demostración. Sea $\Psi := \{\psi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N : \psi(x) := \lambda x \text{ con } \lambda \in \mathbb{Q}_{>0}\}$ una familia contable de funciones cerradas, localmente bilipschitz definidas en \mathbb{R}^N , y sea $\{f_r\}_{r \in \Lambda}$ una familia contable en \mathcal{F} . Para cada f_r existen $c_r, d_r > 0$ tal que $d_r < Lc_r$ y

$$c_r\|x - y\| \leq \|f_r(x) - f_r(y)\| \leq d_r\|x - y\| \forall x, y \in \mathbb{R}^N.$$

Tomando $\psi_r(x) := \lambda_r x$ con $\lambda_r \in \mathbb{Q} \cap [\frac{1}{c_r}, \frac{L}{d_r}]$, entonces $\psi_r \in \Psi$ y

$$\|x - y\| \leq c_r\|\psi_r(x - y)\| \leq \|f_r \circ \psi_r(x) - f_r \circ \psi_r(y)\| \\ \leq d_r\|\psi_r(x - y)\| \leq d_r \frac{L}{c_r} \|x - y\| = L\|x - y\|. \quad (4.32)$$

Más aún, como $f_r \circ \psi_r : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ es bilipschitz, es inyectiva y entonces $f_r \circ \psi_r(\mathbb{R}^N) = \mathbb{R}^N$ y por lo tanto contiene bolas arbitrariamente grandes, y así las hipótesis del Teorema 117 se satisfacen. \square

Corolario 121. La familia \mathcal{F} de todas las transformaciones afines inversibles de \mathbb{R}^N en \mathbb{R}^N , i.e.

$$\mathcal{F} := \{f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N f(x) := Ax + b : A \in \mathbb{R}^{N \times N} \text{ inversible, } b \in \mathbb{R}^N\}.$$

satisface las hipótesis del Teorema 117.

Demostración. Consideremos la familia contable

$$\Psi := \{\psi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N \mid \psi(x) := Cx \text{ con } C \in \mathbb{Q}^{N \times N}\} = (\psi_j)_{j \in \mathbb{N}}.$$

Para cada $f_i(x) = Ax + b \in \mathcal{F}$, como A es inversible, por la densidad de las matrices con coeficientes racionales podemos encontrar $C \in \mathbb{Q}^{N \times N}$ tal que $\|AC - \frac{3}{2}I\| < \frac{1}{2}$. Entonces

$$\|x\| \leq \|ACx\| \leq 2\|x\| \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^N.$$

Asociando a cada f_i la función $\psi_{r(i)}(x) = Cx$, tenemos que $f_i \circ \psi_{r(i)}$ es bilipschitz con constantes $(1, 2)$ en todo \mathbb{R}^N .

Más aún, $\bigcap_{i \in \Lambda} f_i \circ \psi_{r(i)}(\mathbb{R}^N) = \mathbb{R}^N$. El resultado se sigue del Teorema 117. \square

4.3.2. Pequeños conjuntos \mathcal{F}_σ conteniendo toda configuración contable

En esta sección nos concentraremos en preimágenes, en lugar de imágenes. Mostraremos que dado un conjunto de funciones \mathcal{F} satisfaciendo ciertas condiciones, existe un conjunto pequeño, de clase \mathcal{F}_σ , sin puntos aislados, tal que las preimágenes bajo intersecciones contables de funciones de \mathcal{F} es no vacía.

Teorema 122. *Sea h una función de dimensión. Sea \mathcal{F} una familia de funciones continuas definidas en un conjunto cerrado $D \subseteq \mathbb{R}^N$ conteniendo bolas arbitrariamente grandes, tal que existe $L \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ y una familia contable de funciones $\Psi := \{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ que son continuas, inyectivas y cerradas, y están definidas en conjuntos cerrados $\Omega_j \subseteq \mathbb{R}^N$, tales que ψ_j^{-1} son localmente bilipschitz, y para cada $f \in \mathcal{F}$, existe $\psi_j \in \Psi$ tal que $\psi_j \circ f$ está bien definida y es bilipschitz con constantes $(\frac{1}{L}, 1)$ en D .*

Entonces existe un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^N$ de clase \mathcal{F}_σ sin puntos aislados, con $\mathcal{H}^h(E) = 0$, tal que $\bigcap_{i \in \Lambda} f_i^{-1}(E) \neq \emptyset$ para todo subconjunto contable $(f_i)_{i \in \Lambda} \subseteq \mathcal{F}$. En otras palabras, E contiene toda configuración contable de \mathcal{F} .

Notar que las hipótesis son análogas a las dadas en el Teorema 117 pero adaptadas a este caso (tenemos preimágenes en lugar de imágenes). El D juega el rol que tenía el conjunto $A_{\{f_i: i \in \Lambda\}}$. Por trabajar con patrones, ese conjunto está en el conjunto de salida de las funciones, y por ser las funciones contables tomamos el mismo conjunto para todas ellas. El encaje de compactos va a estar en el dominio, y cada cubo que utilicemos para armar el encaje estará en la imagen de la respectiva composición de funciones.

Demostración. Otra vez, seguimos el mismo esquema de demostración.

Primero mostramos que existe un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^N$ de clase \mathcal{F}_σ , tal que $\bigcap_{i \in \Lambda} f_i^{-1}(E) \neq \emptyset$ para todo $(f_i)_{i \in \Lambda} \subseteq \mathcal{F}$ y entonces mostramos que ese conjunto verifica que $\mathcal{H}^h(E) = 0$.

Para esto consideremos $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ una sucesión como en el Lema 95.

Definamos para cada $n \in \mathbb{N}$, $\tilde{F}_n \subseteq \mathbb{R}$ unión de intervalos cerrados a lo largo de \mathbb{R} , con longitudes δ_n , equiespaciados, con huecos de longitud $\frac{\delta_{n-1}}{L4\sqrt{N}}$. Sean $F_n := (\tilde{F}_n)^N$ y $K_i := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} F_{(2k-1)2^{i-1}}$ el cual es un conjunto cerrado.

Y consideremos

$$E := \bigcup_j \bigcup_k \psi_j^{-1}(K_k),$$

que, por la hipótesis en Ψ , es \mathcal{F}_σ . Para $i \in \Lambda$ tenemos $j(i)$ tal que $\psi_{j(i)} \circ f_i$ es bilipschitz no expansiva en D . Tenemos

$$\begin{aligned} \bigcap_{i \in \Lambda} f_i^{-1}(E) &\supseteq \bigcap_{i \in \Lambda} (\psi_{j(i)} \circ f_i)^{-1}(K_i) \\ &\supseteq \bigcap_{i \in \Lambda} \bigcap_{k \in \mathbb{N}} (\psi_{j(i)} \circ f_i)^{-1}(F_{(2k-1)2^{i-1}}) \\ &\supseteq \bigcap_{m \in \mathcal{A}} g_m^{-1}(F_m) \end{aligned} \quad (4.33)$$

donde (como antes) $g_m := \psi_{j(i)} \circ f_i$ si $m = (2k-1)2^{i-1}$ con $i \in \Lambda$ y $k \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{M} := (m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es el conjunto de todos esos índices ordenados en forma creciente.

Para ver que la intersección en la ecuación (4.33) es no vacía, argumentamos como antes notando que

- A) existe un cubo C_1 de F_{m_1} , contenido en $\text{Im}(g_{m_1}) = g_{m_1}(D)$.
- B) dado un cubo C_n de F_{m_n} , contenido en $\text{Im}(g_{m_n}) = g_{m_n}(D)$; existe un cubo C_{n+1} de $F_{m_{n+1}}$ que está contenido en $g_{m_{n+1}}(D)$ y tal que

$$g_{m_{n+1}}^{-1}(C_{n+1}) \subseteq g_{m_n}^{-1}(C_n)$$

Así construimos una sucesión de conjuntos compactos, no vacíos, y encajados (usando que g_m es bilipschitz) y por lo tanto la intersección es no vacía.

Veamos A) Es claro porque los intervalos de F_{m_1} están distribuidos “a lo largo” de \mathbb{R}^N en forma uniforme (con igual lado y separación). Y como D contiene bolas arbitrariamente grandes y g_{m_1} es bilipschitz, $g_{m_1}(D)$ contiene bolas arbitrariamente grandes.

Veamos B) Sea x el centro de $C_n \subseteq g_{m_n}(D)$.

Como $\overline{B\left(x, \frac{\delta_{m_n}}{2}\right)} \subseteq C_n \subseteq g_{m_n}(D)$. Entonces

$$\overline{B\left(g_{m_n}^{-1}(x), \frac{\delta_{m_n}}{2}\right)} \subseteq g_{m_n}^{-1}\left(\overline{B\left(x, \frac{\delta_{m_n}}{2}\right)}\right) \subseteq g_{m_n}^{-1}(C_n) \subseteq D. \quad (4.34)$$

Por lo tanto

$$\overline{B} := \overline{B\left(g_{m_{n+1}}(g_{m_n}^{-1}(x)), \frac{\delta_{m_n}}{2L}\right)} \subseteq g_{m_{n+1}}\left(\overline{B\left(g_{m_n}^{-1}(x), \frac{\delta_{m_n}}{2}\right)}\right) \subseteq g_{m_{n+1}}(D). \quad (4.35)$$

La justificación de las primeras inclusiones de (4.34) y (4.35), es análoga a las hechas anteriormente.

Para ver que hay un cubo de $F_{m_{n+1}}$ en \bar{B} , nos basta que

$$\sqrt{N}(\text{hueco}_{m_{n+1}} + \text{lado}_{m_{n+1}}) \leq \frac{\delta_{m_n}}{2L}.$$

O equivalentemente, ver que

$$\frac{\delta_{m_n}}{2L} - \sqrt{N} \left(\frac{\delta_{m_{n+1}-1}}{4L\sqrt{N}} - \delta_{m_{n+1}} \right) \geq 0.$$

Y eso vale pues por como elegimos la sucesión $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, resulta que $\frac{\delta_{m_n}}{2L} - \sqrt{N} \left(\frac{\delta_{m_{n+1}-1}}{4L\sqrt{N}} - \delta_{m_{n+1}} \right) \geq \frac{\delta_{m_n}}{2L} - \sqrt{N} \left(\frac{\delta_{m_n}}{4L\sqrt{N}} + \frac{\delta_{m_n}}{4L\sqrt{N}} \right) \geq 0$.

Finalmente, analogamente a la demostración del Teorema 111 el conjunto E satisface que $\mathcal{H}^h(E) = 0$:

Basta ver que $\mathcal{H}^h \left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \psi_j^{-1}(K_i) \right) = 0$.

Sea \tilde{I} un cubo de lado 1, y sean $i_0, j_0 \in \mathbb{N}$, basta ver que

$$\mathcal{H}^h \left(\psi_{j_0}^{-1}(K_{i_0}) \cap \tilde{I} \right) = 0.$$

Y como $\psi_{j_0}^{-1}(K_{i_0}) \cap \tilde{I} \subseteq \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \left(\tilde{I} \cap \psi_{j_0}^{-1}(F_{(2k-1)2^{i_0-1}}) \right)$, nos basta ver que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{H}_{\delta_n c'(\psi_{j_0}, \tilde{I})}^h \left(\psi_{j_0}^{-1}(F_n) \cap \tilde{I} \right) = 0,$$

donde $c'(\psi_{j_0}^{-1}, \tilde{I})$ es una constante que solo depende de $\psi_{j_0}^{-1}$ y \tilde{I} .

$$\begin{aligned} M &:= \#\{J \text{ cubo de } F_n \text{ tal que } \psi_j^{-1}(J) \cap \tilde{I} \neq \emptyset\} \\ &= \#\{J \text{ cubo de } F_n \text{ tal que } J \cap \psi_j(\tilde{I}) \neq \emptyset\} \end{aligned}$$

Como los cubos de F_n tienen diámetro $\sqrt{N}\delta_n \leq \sqrt{N}$, entonces si J es un cubo de F_n tal que $J \cap \psi_j(\tilde{I}) \neq \emptyset$ resulta que $J \subseteq G := G(\psi_j, \tilde{I}, N)$ donde G es el engordado cerrado en \sqrt{N} del conjunto $\psi_j(\tilde{I})$ (el cual resulta compacto).

La función ψ_j^{-1} es cerrada, con dominio cerrado, inyectiva, localmente bilipschitz en G compacto, entonces por Lema 83 resulta que $\psi_j^{-1}|_G$ es bilipschitz de constantes (a, b) (las constantes a y b solo dependen de N, \tilde{I} y ψ_j).

Por lo tanto si J es un cubo de F_n tal que $\psi_j^{-1}(J) \cap \tilde{I} \neq \emptyset$, entonces $\text{diam}(\psi_j^{-1}(J)) \leq b \text{diam}(J) \leq b\sqrt{N}\delta_n = \lambda\delta_n$ donde $\lambda := \lambda(\tilde{I}, \psi_j, N)$.

Así,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\lambda\delta_n}^h(\psi_j^{-1}(F_n) \cap \tilde{I}) &\leq Mh(\lambda\delta_n) \\ &\leq Mh(N_2\delta_n), \end{aligned}$$

donde $N_2 \in \mathbb{N}$ es tal que $N_2 \geq \lambda$ (N_2 depende de N , \tilde{I} y de ψ_j).

Sea Q un cubo que contiene a G , de lados paralelos a los ejes (Q depende de \tilde{I} , N y de ψ_j), y tiene lados de longitud $\ell := \ell(\tilde{I}, N, \psi_j)$. Tenemos que

$$M \leq \#\{J \in F_n : J \subseteq Q\} \leq \left\lceil \frac{\ell 4L \sqrt{N}}{\delta_{n-1}} \right\rceil^N,$$

pues $\left\lceil \frac{\ell 4L \sqrt{N}}{\delta_{n-1}} \right\rceil (\delta_n + \frac{\delta_{n-1}}{4L \sqrt{N}}) \geq \ell$.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} M &\leq \left\lceil \frac{\ell 4L \sqrt{N}}{\delta_{n-1}} \right\rceil^N \\ &\leq \left(\frac{\ell 4L \sqrt{N}}{\delta_{n-1}} + 1 \right)^N \\ &\leq \left(\frac{N_1}{\delta_{n-1}} + 1 \right)^N, \end{aligned}$$

donde $N_1 \in \mathbb{N}$ es tal que $\ell(\tilde{I}, N, \psi_j) 4L \sqrt{N} \leq N_1$ (N_1 depende de \tilde{I} , N y ψ_j).

Así, juntándolo con lo anterior, tenemos que

$$\mathcal{H}_{\lambda\delta_n}^h(\psi_j^{-1}(F_n^L) \cap \tilde{I}) \leq \left(\frac{N_1}{\delta_{n-1}} + 1 \right)^N h(N_2\delta_n) \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0,$$

por como fue elegida la sucesión $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Por el Lema 103 el conjunto E puede ser tomado sin puntos aislados. \square

Remark 123. No pudimos obtener un resultado para un conjunto contable de polinomios, incluso en \mathbb{R} usando nuestra técnica de demostración del Teorema 122.

Esto es por el hecho de que si queremos un resultado para contables intersecciones usando el Teorema citado, necesitaríamos encontrar un dominio D tal que para cada polinomio P existe una función ψ tal que $\psi \circ P$ es bilipschitz en D . Entonces, P tendría que ser inyectiva en D , independientemente del polinomio P , lo que es claramente imposible.

Capítulo 5

Espesor, juegos ganadores y configuraciones geométricas.

Por los resultados probados en los capítulos anteriores, si estudiamos lo que pasa en conjuntos de medida de Lebesgue nula, se ve que si usamos como noción de tamaño a la medida h de Hausdorff (y por lo tanto también ocurre lo mismo con la dimensión de Hausdorff) hay conjuntos tan grandes como queramos (de medida de Lebesgue nula) evitando muchos patrones, como así también conjuntos tan chicos como queramos conteniendo muchos patrones. Esto muestra que la noción de medida h de Hausdorff solamente (y por lo tanto la noción de dimensión de Hausdorff) no nos ayuda a analizar la contención o no contención de patrones en un conjunto de medida de Lebesgue nula. Por este motivo es de interés buscar otra noción geométrica de tamaño que nos ayude a garantizar la presencia de patrones.

En [49] Broderick, Fishman y Simmons prueban que ciertos conjuntos de Cantor centrales de la recta real contienen progresiones aritméticas de longitud larga. La forma en que abordan las demostraciones tiene un enfoque diferente a los resultados que expuse anteriormente, ya que ellos utilizan una herramienta conocida como juegos de Schmidt (y conjuntos ganadores).

Más específicamente:

Definición 124. Sea M_ε el conjunto de **Cantor ε -central** que se obtiene empezando con el intervalo cerrado $[0, 1]$ y removiendo repetidamente de cada intervalo que aparece en la construcción el intervalo abierto central de longitud relativa ε .

Teorema 125 (R. Broderick, L. Fishman, D. Simmons). *Para todo ε suficientemente chico, el conjunto M_ε contiene una progresión aritmética de orden de longitud $\frac{1}{\log(\frac{1}{\varepsilon})}$.*

Comentario: R. Broderick, L. Fishman, D. Simmons también prueban que la longitud de la progresión aritmética más larga contenida en M_ε es menor o igual a $\frac{1}{\varepsilon} + 1$. Con esto quieremos remarcar que aún no se conoce el orden de longitud exacto de la progresión aritmética más larga contenida en M_ε .

Comencemos por dar la definición del juego que utilizan los autores a la hora de trabajar con ese resultado:

Definición 126. Sea \mathcal{H} una colección de subconjuntos cerrados de \mathbb{R}^d . Dados $\alpha, \beta, \rho > 0$ y $c \geq 0$, Alice y Bob juegan el $(\alpha, \beta, c, \rho, \mathcal{H})$ -juego bajo las siguientes reglas:

- Para cada $m \in \mathbb{N}_0$ Bob juega primero, y después Alice.
- En el turno m -ésimo, Bob juega una bola cerrada $B_m := B[x_m, \rho_m]$, satisfaciendo $\rho_0 \geq \rho$, $\rho_{m+1} \geq \beta\rho_m$, $\lim_{m \rightarrow \infty} \rho_m = 0$ y $B_0 \supseteq B_1 \supseteq \dots$.
- En el turno m -ésimo Alice responde eligiendo y borrando una colección contable (puede ser finita) \mathcal{A}_m de conjuntos de la forma $A(\rho_{i,m}, H_{i,m}) := \{x \in \mathbb{R}^d : d(x, H_{i,m}) \leq \rho_{i,m}\}$ con $H_{i,m} \in \mathcal{H}$ y $\rho_{i,m} > 0$. La colección de Alice debe satisfacer $\sum_i \rho_{i,m}^c \leq (\alpha\rho_m)^c$ si $c > 0$, o $\rho_{1,m} \leq \alpha\rho_m$ si $c = 0$ (en este caso Alice puede borrar solo un conjunto).

Como $\lim_{m \rightarrow \infty} \rho_m = 0$, existe un único punto $x_\infty = \bigcap_{m \in \mathbb{N}_0} B_m$ llamado el resultado del juego.

Decimos que un conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^d$ es ganador si Alice tiene una estrategia que le garantiza que si $x_\infty \notin \bigcup_{m \in \mathbb{N}_0} \bigcup_i A(\rho_{i,m}, H_{i,m})$, entonces $x_\infty \in S$.

Notar que las condiciones $B_0 \supseteq B_1 \supseteq \dots$ y $\lim_{m \rightarrow \infty} \rho_m = 0$ implican $\beta < 1$.

Los juegos de Schmidt tienen algunas buenas propiedades que son de ayuda a la hora de estudiar la presencia de progresiones aritméticas, como así también otras configuraciones: monotonía, propiedad de intersección contable e invariancia bajo similaridades.

Más precisamente:

Proposición 127 (Propiedad de intersección contable). Sea J un conjunto contable de índices, y para cada $j \in J$ sea S_j un $(\alpha_j, \beta, c, \rho, \mathcal{H})$ -conjunto ganador, donde $c > 0$. Entonces, el conjunto $S := \bigcap_{j \in J} S_j$ es $(\alpha, \beta, c, \rho, \mathcal{H})$ -ganador donde $\alpha^c = \sum_{j \in J} \alpha_j^c$ asumiendo que la serie converge.

Esto es porque en el $(\alpha, \beta, c, \rho, \mathcal{H})$ -juego Alice puede aplicar en cada turno m , simultáneamente el turnos m de cada estrategia correspondiente a cada S_j .

Proposición 128 (Monotonía). Si S es $(\alpha, \beta, c, \rho, \mathcal{H})$ -ganador y $\tilde{\alpha} \geq \alpha$, $\tilde{\beta} \geq \beta$, $\tilde{c} \geq c$, $\tilde{\rho} \geq \rho$, y $\mathcal{H} \subseteq \tilde{\mathcal{H}}$, entonces S es $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{c}, \tilde{\rho}, \tilde{\mathcal{H}})$ -ganador.

Esto es porque a mayores parámetros, Alice tiene más libertad para sus movimientos, mientras que los de Bob se restringen. Por lo que dada una sucesión de movimientos de Bob en el juego $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{c}, \tilde{\rho}, \tilde{\mathcal{H}})$, también resulta ser una sucesión de movimientos de Bob en el juego $(\alpha, \beta, c, \rho, \mathcal{H})$ en donde Alice tiene una respuesta ganadora \mathcal{A}_m , la que también le servirá para aplicarla en el juego $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{c}, \tilde{\rho}, \tilde{\mathcal{H}})$. La única condición que no es totalmente clara es la de la suma con exponentes (para cuando $c \neq 0$ y $\tilde{c} \neq 0$), la cual se deduce usando siguiente desigualdad: Si $(x_i)_{i \in \Lambda} \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ con Λ un conjunto contable de índices y $p \leq q$ entonces vale que $(\sum_i x_i^q)^{\frac{1}{q}} \leq (\sum_i x_i^p)^{\frac{1}{p}}$.

Proposición 129 (Invarianza bajo similaridades). *Sea $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ una biyección que satisfice*

$$d(f(x), f(y)) = \lambda d(x, y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d.$$

Entonces un conjunto S es $(\alpha, \beta, c, \rho, \mathcal{H})$ -ganador si y solo si el conjunto $f(S)$ es $(\alpha, \beta, c, \lambda\rho, f(\mathcal{H}))$ -ganador.

Esto es claro, llevando y trayendo a través de la función los conjuntos y estrategias de respuesta.

Se extendió el resultado antes mencionado a una clase de conjuntos de Cantor mucho más generales usando la noción de “espesor” dada por Newhouse (la cual es otra noción bien conocida de tamaño) como así también a la clase de configuraciones contenidas en dicho conjunto de Cantor. Esos resultados forman parte de un trabajo en progreso [61].

Comencemos por dar las definiciones necesarias y su contexto:

Definición 130. *Un conjunto de **Cantor general** C en la recta real es un conjunto compacto, perfecto y totalmente desconexo. Puede ser construido empezando con un intervalo cerrado y sucesivamente removiendo intervalos abiertos (a los que llamamos gaps) en orden decreciente de longitud. Cada gap G_n es removido de un intervalo cerrado I_n , dejando detrás dos intervalos cerrados L_n y R_n los intervalos a izquierda y derecha de $I_n \setminus G_n$ respectivamente. Notamos con $|I|$ a la longitud del intervalo I . Definimos el **espesor** de C como*

$$\tau(C) := \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{\min\{|L_n|, |R_n|\}}{|G_n|}.$$

Intuitivamente el espesor es una manera de medir cuán grande puede ser un conjunto de Cantor respecto de los intervalos en su complemento, y si un conjunto tiene espesor grande entonces es grande a toda escala en todas partes.

Si un conjunto tiene espesor grande, entonces tiene dimensión de Hausdorff grande. De hecho es bien conocida la siguiente cota (que puede encontrarse en el libro de Palis y Takens [44]):

Proposición 131.

$$\dim_H(E) \geq \frac{\log(2)}{\log(2 + \frac{1}{\tau(E)})}.$$

Por otra parte hay conjuntos de medida de Lebesgue positiva (y por la tanto de dimensión 1) con espesor arbitrariamente chico (por ejemplo, tomando la unión de dos conjuntos de Cantor con medida de Lebesgue positiva con una gran separación entre ellos), por lo que la vuelta no vale.

La noción de espesor fue inventada por Newhouse quien estaba tratando de ver cuándo dos conjuntos de Cantor se intersecan. En relación a esto él probó el siguiente resultado:

Teorema 132 (“Gap lemma” de Newhouse). *Dados dos conjuntos de Cantor $C_1, C_2 \subseteq \mathbb{R}$, tales que ninguno de ellos está contenido en un gap del otro conjunto y tales que $\tau(C_1)\tau(C_2) > 1$, entonces*

$$C_1 \cap C_2 \neq \emptyset.$$

Recordemos que la propiedad de contener progresiones aritméticas es equivalente a que cierta intersección de ≥ 3 conjuntos sea no vacía. Desafortunadamente el Teorema anterior no parece poder generalizarse en ninguna forma sencilla a intersecciones de 3 o más conjuntos. Por este motivo es que nos interesamos particularmente en el resultado [49] en donde se garantiza la presencia de ciertas progresiones aritméticas en conjuntos de Cantor centrales, utilizando en su demostración intersecciones de varios trasladados particulares de conjuntos de Cantor centrales.

Ahora vamos a ver algunos resultados en los que extendemos el Teorema 125 a conjuntos de Cantor generales y a patrones más generales.

5.1. Garantizando copias homotéticas de ciertos conjuntos finitos

Estudiando el resultado [49] se pudo relacionar el espesor asociado a un conjunto con los juegos de Schmidt en el siguiente sentido: si un conjunto tiene espesor grande, entonces es ganador con ciertos parámetros. La demostración es simple, pero estos conceptos no habían sido relacionados hasta ahora. Y con ese resultado, se obtuvo la siguiente generalización:

Teorema 133. *Sea $C \subset \mathbb{R}$ un conjunto de Cantor general con $\tau := \tau(C)$ suficientemente grande. Entonces C contiene una copia homotética de todo conjunto con a lo sumo*

$$N(\tau) := \left\lfloor \delta \frac{\tau}{\log \tau} \right\rfloor$$

elementos, donde $\delta > 0$ es una constante universal.

Observación 134. *De hecho veremos que:*

- *C contiene no numerables copias homotéticas de cada conjunto con $N(\tau)$ elementos.*
- *Si el diámetro del conjunto finito es suficientemente chico (por ejemplo, menor o igual que $\frac{1}{8}$ del diámetro del conjunto de Cantor), entonces las copias son solo translaciones.*

Observación 135. $\tau(M_\varepsilon) = \frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon} \sim \frac{1}{\varepsilon}$.

5.1. GARANTIZANDO COPIAS HOMOTÉTICAS DE CIERTOS CONJUNTOS FINITOS 117

Porque, si tomamos $\lambda := \frac{1-\varepsilon}{2}$, en el paso de construcción m tenemos que la longitud de cada intervalo es λ^m y la medida de cada gap es $\lambda^{m-1}\varepsilon$, por lo tanto

$$\begin{aligned}\tau(M_\varepsilon) &:= \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{\min\{|L_n|, |R_n|\}}{|G_n|} \\ &= \inf_{m \in \mathbb{N}} \frac{\lambda^m}{\lambda^{m-1}\varepsilon} \\ &= \frac{\lambda}{\varepsilon} = \frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon}\end{aligned}$$

Observación 136. El Teorema anterior generaliza el resultado de Broderick, Fishman y Simmons porque M_ε tiene espesor $\sim 1/\varepsilon$ y una progresión aritmética es una copia homotética de $\{1, \dots, N\}$.

Para probar el Teorema 133, comencemos por algunas definiciones, un resultado de [49] y una proposición que nos será de utilidad:

Sea \mathcal{P} el conjunto de todos los conjuntos de un elemento de \mathbb{R} .

Proposición 137. Sea C un conjunto de Cantor con $\text{conv}(C) = [0, 1]$ y $\tau := \tau(C) > 0$, entonces $S := (-\infty, 0) \cup C \cup (1, +\infty)$ es $(\frac{1}{\tau\beta}, \beta, 0, \frac{\beta}{2}, \mathcal{P})$ -ganador para todo $\beta \in (0, 1)$.

Demostración. Tenemos que describir la estrategia de Alice. Dado B un movimiento para Bob, como responde Alice? Si hay un $n \in \mathbb{N}$ tal que B interseca G_n y $|B| \leq \min\{|L_n|, |R_n|\}$, entonces $B \subseteq L_n \cup G_n \cup R_n$, por lo que $B \cap G_n \neq \emptyset$ y $B \cap G_k = \emptyset$ para todo $1 \leq k < n$, definimos que Alice borra G_n si es un movimiento legal (es decir si las reglas del juego lo permiten). En cualquier otro caso, Alice no borra nada (o podría borrar cualquier cosa permitida, esto no es relevante).

Para probar que la estrategia es ganadora, supongamos que $x_\infty \notin \bigcup_{m \in \mathbb{N}_0} \bigcup_i A(\rho_{i,m}, H_{i,m})$, queremos ver que $x_\infty \in S$. Por absurdo, supongamos que $x_\infty \notin S$, entonces existe n tal que $x_\infty \in G_n$. Probaremos que Alice borra G_n en algún momento (turno) del juego. Por definición $x_\infty \in B_m$ para todo $m \in \mathbb{N}_0$, y supusimos que $x_\infty \in G_n$, por lo tanto $x_\infty \in B_m \cap G_n$ para todo $m \in \mathbb{N}_0$. Como $\tau > 0$, tenemos que $\min\{|L_n|, |R_n|\} > 0$. Y $\lim_{m \rightarrow \infty} |B_m| = 0$. Entonces tomando $m \in \mathbb{N}_0$ el más chico tal que $\min\{|L_n|, |R_n|\} \geq |B_m|$, sabemos que $B_m \cap G_n \neq \emptyset$ y $B_m \cap G_k = \emptyset$ para todo $1 \leq k < n$. Si $m = 0$, $|B_0| = 2\rho_0 \geq 2\rho = \beta \geq \beta \min\{|L_n|, |R_n|\}$. Si $m > 0$, $|B_m| \geq \beta|B_{m-1}| > \beta \min\{|L_n|, |R_n|\}$. Por lo tanto, tenemos $|B_m| \geq \beta \min\{|L_n|, |R_n|\}$. Entonces,

$$|G_n| \leq \frac{1}{\tau} \min\{|L_n|, |R_n|\} \leq \frac{1}{\tau\beta} |B_m| = \alpha |B_m|.$$

Eso quiere decir que es legal para Alice borrar G_n en el turno m -ésimo, y su estrategia especifica que ella lo hace. \square

Observación 138. Sea C un conjunto de Cantor con $\text{conv}(C) = [0, 1]$ y $\tau := \tau(C) > 0$, entonces por la proposición anterior y monotonía, $S := (-\infty, 0) \cup C \cup (1, +\infty)$ es $(\frac{1}{\tau\beta}, \beta, c, \frac{\beta}{2}, \mathcal{P})$ -ganador para todo $\beta \in (0, 1)$ y todo $c \geq 0$.

Definición 139. Dado $\delta > 0$, una medida μ en un espacio métrico completo X se dice **Ahlfors δ -regular** si para toda bola suficientemente chica $B(x, \rho)$ centrada en el soporte de μ , tenemos que $\mu(B(x, \rho)) \sim \rho^\delta$. El soporte de una medida Ahlfors δ -regular también se dice que es Ahlfors δ -regular.

Finalmente, la **dimensión Ahlfors** de un conjunto $S \subseteq \mathbb{R}$ es el supremo sobre los δ tal que S contiene un subconjunto cerrado Ahlfors δ -regular. La denotaremos por $\dim_A(S)$.

Observación 140. La dimensión de Ahlfors de un conjunto es una cota inferior para su dimensión de Hausdorff. Esto se debe a que si un conjunto contiene un subconjunto cerrado Ahlfors δ -regular, por el principio de distribución de masa generalizado (Proposición 24), resulta que el subconjunto (y por lo tanto el conjunto original) tiene dimensión de Hausdorff mayor o igual que δ .

Teorema 141 (Broderick, Fishman, Simmons [49]). Sea $S \subseteq \mathbb{R}^d$ un conjunto $(\alpha, \beta, c, \rho, \mathcal{H})$ -ganador, con $c < 1$ y $\beta \leq \frac{1}{4}$. Entonces para toda bola $B_0 \subseteq \mathbb{R}^d$ con radio más grande o igual que ρ , tenemos que

$$\dim_A(S \cap B_0) \geq d - K_1 \frac{\alpha}{|\log(\beta)|} > 0 \text{ if } \alpha^c \leq \frac{1}{K_2}(1 - \beta^{1-c})$$

donde K_1, K_2 son constantes independientes de α, β, c, ρ (pero posiblemente dependiendo de d y \mathcal{H}).

Ahora veamos la Demostración del Teorema 133:

Demostración del Teorema 133. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\text{conv}(C) = [0, 1]$, y también que el conjunto finito es $\{b_1, \dots, b_n\} \subseteq [0, \frac{1}{8}]$.

Por la proposición 137 y la proposición 129, sabemos que

$$S_i := (-\infty, -b_i) \cup (C - b_i) \cup (1 - b_i, +\infty)$$

es $(\frac{1}{\tau\beta}, \beta, c, \frac{\beta}{2}, \mathcal{P})$ -ganador para todo $\beta \in (0, 1)$ y $c > 0$. Llamemos $\alpha := \frac{1}{\tau\beta}$.

Entonces, por la proposición 127, $S := \bigcap_{i=1}^n S_i$ es $(\frac{n}{\tau\beta}, \beta, c, \frac{\beta}{2}, \mathcal{P})$ -ganador para todo $\beta \in (0, 1)$ y $c > 0$.

Tomando $\beta := \frac{1}{4}$, $c := 1 - \frac{1}{\log(\alpha^{-1})} = 1 - \frac{1}{\log(\frac{1}{4})}$, $B := [\frac{3}{8}, \frac{5}{8}]$ de radio $\frac{1}{8} = \frac{\beta}{2} = \rho$, y usando el corolario 141, tenemos que:

$$\dim_A(S \cap B) > 0$$

si

$$n\alpha^c \leq \frac{1}{K_2}(1 - \beta^{1-c}). \quad (5.1)$$

Para completar la demostración necesitamos probar primero que el más grande n satisfaciendo la ecuación (5.1), satisface $n \sim \frac{\alpha^{-1}}{\log(\alpha^{-1})}$ cuando α es suficientemente chico (es decir cuando el espesor del conjunto de Cantor es grande).

Tenemos que:

Por definición, $c = \frac{1}{\log(\alpha)} + 1$, entonces $\log(\alpha^c) = c \log(\alpha) = 1 + \log(\alpha) = \log(e\alpha)$, entonces $\alpha^c = e\alpha$.

Y el límite de

$$\frac{1 - \beta^{\frac{1}{\log(\alpha^{-1})}}}{\frac{1}{\log(\alpha^{-1})}},$$

cuando $\alpha \rightarrow 0^+$ es una constante positiva (por la regla de L'hospital), por lo tanto es acotado para α suficientemente chico. Eso quiere decir que $1 - \beta^{\frac{1}{\log(\alpha^{-1})}} \sim \frac{1}{\log(\alpha^{-1})}$.

Entonces,

$$1 - \beta^{1-c} = 1 - \beta^{\frac{1}{\log(\alpha^{-1})}} \sim \frac{1}{\log(\alpha^{-1})}$$

y también

$$\alpha^c = e\alpha \sim \alpha,$$

por lo que tenemos

$$\begin{aligned} n &= \lfloor \frac{1}{K_2} \frac{(1 - \beta^{1-c})}{\alpha^c} \rfloor \sim \frac{(1 - \beta^{1-c})}{\alpha^c} \\ &\sim \frac{\frac{1}{\log(\alpha^{-1})}}{\alpha} \sim \frac{\alpha^{-1}}{\log(\alpha^{-1})} \\ &= \frac{\tau\beta}{\log(\tau\beta)} \sim \frac{\tau}{\log(\tau)} \end{aligned}$$

Así, vimos que cuando τ es grande $\dim_A(S \cap B) > 0$, entonces tenemos incontables puntos $x \in S \cap B$. Para cada uno de ellos, $x \in S \cap B$ y $0 \leq b_i \leq \frac{1}{8}$, entonces

$$x + b_i \in (B + b_i) \cap (S + b_i) \subseteq \left[\frac{3}{8}, \frac{6}{8} \right] \cap ((-\infty, 0) \cup C \cup (1, +\infty)).$$

Como $[\frac{3}{8}, \frac{6}{8}]$ es disjunto con $(-\infty, 0)$ y $(1, +\infty)$, tenemos que $x + b_i \in C$.

Por lo que, $x + \{b_1, \dots, b_n\}$ es una copia homotética del conjunto finito dado, la cual está contenida en C . \square

5.2. Garantizando ciertas configuraciones bilipschitz

Además estudiamos el resultado anterior pero para ciertas configuraciones bilipschitz.

Antes de enunciar el resultado, veamos como se relacionan los parámetros de los juegos ganadores vía una función bilipschitz.

Proposición 142. *Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función bilipschitz con constantes (c_1, c_2) . Si S es un conjunto $(\alpha, \beta, 0, \rho, \mathcal{P})$ -ganador, entonces $f(S)$ es un conjunto $(\frac{c_2}{c_1}\alpha, \frac{c_2}{c_1}\beta, 0, c_2\rho, \mathcal{P})$ -ganador.*

Demostración. Bob juega una sucesión $B_0 \supseteq B_1 \supseteq \dots$ de intervalos cerrados encajados de longitudes $|B_m| = 2\sigma_m$, con $\sigma_m \rightarrow 0$, $\sigma_{m+1} \geq \frac{c_2}{c_1}\beta\sigma_m$ and $\sigma_0 \geq \rho c_2$.

Queremos definir una estrategia para Alice $(A_m)_m$ (satisfaciendo las reglas de el $(\frac{c_2}{c_1}\alpha, \frac{c_2}{c_1}\beta, 0, \rho, \mathcal{P})$ -juego) garantizando que si $x'_\infty := \bigcap_m B_m \notin \bigcup_m A_m$, entonces $x'_\infty \in f(S)$.

Como $(f^{-1}(B_m))_m$ es una sucesión de intervalos cerrados de longitudes $|f^{-1}(B_m)| =: 2\rho_m \in [\frac{2\sigma_m}{c_2}, \frac{2\sigma_m}{c_1}]$. Entonces existe $x_\infty := f^{-1}(x'_\infty) = \bigcap_m f^{-1}(B_m)$.

Tenemos que

$$\rho_{m+1} \geq \frac{\sigma_{m+1}}{c_2} \geq \frac{\beta\sigma_m}{c_1} \geq \beta\rho_m$$

y $\rho_0 \geq \frac{\sigma_0}{c_2} \geq \rho$. Como S es un conjunto $(\alpha, \beta, 0, \rho, \mathcal{P})$ -ganador, entonces Alice tiene una estrategia $(A'_m)_m$ (satisfaciendo las reglas del $(\alpha, \beta, 0, \rho, \mathcal{P})$ -juego y) garantizando que si $x_\infty = \bigcap_m f^{-1}(B_m) \notin \bigcup_m A'_m$, entonces $x_\infty \in S$.

Tenemos que $|A'_m| =: 2\rho'_m$ donde $\rho'_m \leq \alpha\rho_m$. Definimos $A_m := f(A'_m)$. Tenemos que $|A_m| =: 2\sigma'_m \in [c_1 2\rho'_m, c_2 2\rho'_m]$. Entonces,

$$\sigma'_m \leq c_2 \rho'_m \leq c_2 \alpha \rho_m \leq \frac{c_2}{c_1} \alpha \sigma_m.$$

Si la estrategia de Alice es $(A_m)_m$, entonces como $x_\infty \notin \bigcup_m A_m$, tenemos que $x'_\infty \notin \bigcup_m A'_m$, y como S es un conjunto $(\alpha, \beta, 0, \rho, \mathcal{P})$ -ganador, tenemos que $x'_\infty \in S$. Por lo tanto, $x_\infty = f(x'_\infty) \in f(S)$. \square

Con la ayuda de la proposición anterior, estamos en condiciones de probar un resultado para configuraciones bilipschitz:

Teorema 143. *Dadas constantes $A \geq 1$, $D > 0$, $m > 0$ y $\mathcal{F} := \mathcal{F}_{A,D}$ una familia de funciones bilipchitz f con constantes $(c_1(f), c_2(f))$ tales que $\frac{c_2(f)}{c_1(f)} \leq A$, $(c_1(f))^{-1} \leq D$ y tales que existe un intervalo cerrado de longitud $m > 0$ contenido en $\bigcap_{f \in \mathcal{F}} f^{-1}([0, 1])$. Sea $C \subset \mathbb{R}$ un conjunto de Cantor general con $\tau := \tau(C)$ suficientemente grande. Entonces C contiene toda configuración en la familia \mathcal{F} con a lo sumo*

$$N(\tau) := \left\lfloor \delta \frac{\tau}{\log \tau} \right\rfloor$$

elementos, donde $\delta > 0$ es una constante que no depende de τ (puede depender de A , D y m).

Además, C contiene no numerables copias de cada configuración que lo satisface.

Demostración. Por la proposición 137, $S := (-\infty, 0) \cup C \cup (1, +\infty)$ es un conjunto $(\alpha, \beta, 0, \frac{\beta}{2}, \mathcal{P})$ -ganador para todo $\beta \in (0, 1)$, donde $\alpha := \frac{1}{\beta}$. Entonces, por la proposición 142 para toda f en \mathcal{F} tenemos que $f^{-1}(S)$ es un conjunto $(\frac{c_2(f)}{c_1(f)}\alpha, \frac{c_2(f)}{c_1(f)}\beta, 0, (c_1(f))^{-1}\frac{\beta}{2}, \mathcal{P})$ -ganador. Por lo que, por monotonía (proposición 128), para toda f en \mathcal{F} tenemos que $f^{-1}(S)$ es un conjunto

$(A\alpha, A\beta, c, D\frac{\beta}{2}, \mathcal{P})$ -ganador para todo $c > 0$ y $\beta \in (0, \frac{1}{A})$. Entonces, por propiedad de intersección contable (proposición 127),

$$\bigcap_{1 \leq i \leq n} f_i^{-1}(S)$$

es un conjunto $(n^{\frac{1}{c}}A\alpha, A\beta, c, D\frac{\beta}{2}, \mathcal{P})$ -ganador.

Ahora, tomemos $\beta := \min\{\frac{m}{D}; \frac{1}{4A}\}$ y $\tilde{\beta} := A\beta \in (0, \frac{1}{4}]$. Por hipótesis $\bigcap_{1 \leq i \leq n} f_i^{-1}([0, 1])$ contiene un intervalo cerrado de longitud m , y por definición de β sabemos que $D\beta \in (0, m]$, por lo tanto $\bigcap_{1 \leq i \leq n} f_i^{-1}([0, 1])$ contiene un intervalo de longitud $D\beta$. Entonces, aplicando el Corolario 141, tenemos que

$$\dim_A \left(\bigcap_{1 \leq i \leq n} f_i^{-1}(S) \cap B \right) > 0 \text{ si } nA^c \alpha^c \leq \frac{1}{K_2} (1 - \tilde{\beta}^{1-c})$$

donde K_2 es una constante grande.

$$\text{Tomemos } c := 1 - \frac{1}{\log(\alpha^{-1})} = 1 - \frac{1}{\log(\tau\beta)}.$$

Para completar la demostración necesitamos mostrar primero que el más grande n satisfaciendo la ecuación $nA^c \alpha^c \leq \frac{1}{K_2} (1 - \tilde{\beta}^{1-c})$, satisface $n \sim \frac{\alpha^{-1}}{\log(\alpha^{-1})}$ donde α es suficientemente chico (es decir que el espesor τ es grande).

Tenemos que:

Por definición, $c = \frac{1}{\log(\alpha)} + 1$, entonces $\log(\alpha^c) = c \log(\alpha) = 1 + \log(\alpha) = \log(e\alpha)$, por lo tanto $\alpha^c = e\alpha$.

Y el límite de

$$\frac{1 - \tilde{\beta}^{\frac{1}{\log(\alpha^{-1})}}}{\frac{1}{\log(\alpha^{-1})}},$$

con $\alpha \rightarrow 0^+$ es una constante positiva (por L'hopital), por lo que es acotada para α suficientemente chico. Eso quiere decir que $1 - \tilde{\beta}^{\frac{1}{\log(\alpha^{-1})}} \sim \frac{1}{\log(\alpha^{-1})}$.

Entonces, tenemos que

$$1 - \tilde{\beta}^{1-c} = 1 - \tilde{\beta}^{\frac{1}{\log(\alpha^{-1})}} \sim \frac{1}{\log(\alpha^{-1})},$$

$$A^c = A^{1 - \frac{1}{\log(\alpha^{-1})}} \rightarrow_{\alpha \rightarrow 0^+} A \text{ por lo tanto } A^c \sim 1$$

y también

$$\alpha^c = e\alpha \sim \alpha,$$

por lo tanto tenemos que

$$\begin{aligned}
 n &= \lfloor \frac{1}{A^c} \frac{1}{K_2} \frac{(1 - \tilde{\beta}^{1-c})}{\alpha^c} \rfloor \sim \frac{(1 - \tilde{\beta}^{1-c})}{\alpha^c} \\
 &\sim \frac{\frac{1}{\log(\alpha^{-1})}}{\alpha} \sim \frac{\alpha^{-1}}{\log(\alpha^{-1})} \\
 &= \frac{\tau\beta}{\log(\tau\beta)} \sim \frac{\tau}{\log(\tau)}
 \end{aligned}$$

La conclusión de la demostración: Cuando τ es suficientemente grande vimos que

$$\dim_A \left(\bigcap_{1 \leq i \leq n} f_i^{-1}(S) \cap B \right) > 0.$$

Entonces, existen incontables puntos $x \in \bigcap_{1 \leq i \leq n} f_i^{-1}(S) \cap B$. Entonces, $f_i(x) \in S$ para todo i y por hipótesis $x \in B \subseteq \bigcap_{1 \leq i \leq n} f_i^{-1}([0, 1])$, por lo tanto $f_i(x) \in S \cap [0, 1] = C$ para todo i . \square

Observación 144. *El resultado anterior implica el Teorema 133. Pues como ese resultado es salvo homotecia (es decir, basta verlo para uno copia homotética de C y para una copia homotética del conjunto finito), podemos suponer que $\text{conv}(C) = [0, 1]$ y que el conjunto finito $\{b_1, \dots, b_n\}$ está contenido en $[0, \frac{1}{8}]$. Ahora tomando $f_i(x) := x + b_i$, $c_1 = c_2 = A = D = 1$, $\mathcal{F} := \{x \mapsto x + b : b \in [0, \frac{1}{8}]\}$ y el intervalo cerrado $[\frac{3}{8}, \frac{5}{8}]$ satisfacen las hipótesis del Teorema anterior.*

Capítulo 6

Dimensiones L^q y proyecciones de medidas aleatorias.

A lo largo de este capítulo, desarrollaremos el resultado que obtuvimos en [24]. Probaremos la preservación de las dimensiones L^q para $q \in (1, 2]$ bajo cualquier proyección, para una clase de medidas en el plano que incluyen ciertas medidas autosimilares, estocasticamente autosimilares y ciertos productos de medidas.

Entre otras aplicaciones y ejemplos, obtuvimos resultados para: el caso determinístico, las medidas autosimilares aleatorias, proyecciones de medidas no-homogeneas autosimilares, y también obtuvimos estimaciones uniformes por debajo para “box-counting”.

6.1. Resultados principales

El modelo

Nuestra situación general es la siguiente. Una *regla* es un sistema iterado de funciones (f_1, \dots, f_k) , donde cada función f_j es una similaridad estrictamente contractiva en \mathbb{R}^d (la dimensión ambiente d será 1 o 2, más adelante asumiremos cierta homogeneidad adicional sobre las reglas). Trabajaremos con un conjunto finito de N reglas $(f_1^{(i)}, \dots, f_{k_i}^{(i)})$, $i \in \{1, \dots, N\}$. Como las funciones $f_j^{(i)}$ son uniformemente contractivas, si $R > 0$ es suficientemente grande, entonces $f_j^{(i)}(B[0, R]) \subset B[0, R]$ para todo $i \in \{1, \dots, N\}$, $j \in \{1, \dots, k_i\}$, donde $B[0, R]$ es la bola cerrada de radio R centrada en el origen.

Vamos a construir conjuntos de tipo Cantor (con encajes de bolas) aleatorios, en donde de antemano sortearemos ω el cual nos dirá que reglas aplicar en cada nivel de su construcción.

Dada una sucesión $\omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \in Y := \{1, \dots, N\}^{\mathbb{N}}$ definimos el espacio de palabras de longitud n (posiblemente con $n = \infty$) con respecto a ω con la fórmula

$$\mathbb{X}_n^{(\omega)} := \prod_{j=1}^n \{1, \dots, k_{\omega_j}\}.$$

Notar que todo $\mathbb{X}_n^{(\omega)}$ son subconjuntos de un mismo árbol común $\mathbb{X}_n := \prod_{j=1}^n \{1, \dots, k_{\max}\}$, donde $k_{\max} = \max_{i=1}^N k_i$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ y $u \in \mathbb{X}_n^{(\omega)}$ consideramos la bola

$$B_u^{(\omega)} = f_u^{(\omega)}(B[0, R]),$$

donde $f_u^{(\omega)} = f_{u_1}^{(\omega_1)} \circ \dots \circ f_{u_n}^{(\omega_n)}$. Definimos el conjunto compacto

$$C^{(\omega)} := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{u \in \mathbb{X}_n^{(\omega)}} B_u^{(\omega)}.$$

Notar que, para todo n , tenemos la inclusión $B_{ul}^{(\omega)} \subset B_u^{(\omega)}$, para cada $u \in \mathbb{X}_n^{(\omega)}$ y $l \in \{1, \dots, k_{\omega_{n+1}}\}$ (donde ul denota la concatenación de u y l). En otras palabras, estos discos son encajados. Más aún, sus diámetros tienden a cero uniformemente. Alternativamente, $C^{(\omega)} = \Delta_\omega(\mathbb{X}_\infty^{(\omega)})$, donde Δ_ω es la *función de codificación* dada por

$$\{\Delta_\omega(u)\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{u|n}^{(\omega)},$$

donde $u|n$ es la restricción de la palabra infinita u a sus primeras n coordenadas. Dado $u \in \mathbb{X}_n^{(\omega)}$, el *cilindro* $[u]_\omega$ como el conjunto de palabras infinitas en $\mathbb{X}_\infty^{(\omega)}$ que empiezan con u , y notar que $\Delta_\omega([u]_\omega) \subset B_u^{(\omega)}$.

Observemos que no asumimos que $\{B_u^{(\omega)} : u \in \mathbb{X}_n^{(\omega)}\}$ son disjuntos o tienen alguna condición de separación. Tampoco excluimos la posibilidad de que haya una única regla ($N = 1$), en cuyo caso $C^{(\omega)}$ es un conjunto autosimilar determinístico.

Aunque $C^{(\omega)}$ está definida para todo ω , nuestros resultados serán de naturaleza probabilística, y estaremos sorteando ω de acuerdo a una probabilidad invariante y ergódica μ para el shift a izquierda \mathbf{T} en Y .

No estaremos interesados en conjuntos $C^{(\omega)}$ en sí mismos, sino en medidas soportadas en ellos. Para cada i , sea $p_i = (p_1^{(i)}, \dots, p_{k_i}^{(i)})$ un vector de probabilidad. En cada $\mathbb{X}_\infty^{(\omega)}$ podemos definir la medida producto

$$\bar{\eta}^{(\omega)} = \prod_{n=1}^{\infty} p_{\omega_n}.$$

La proyección de $\bar{\eta}^{(\omega)}$ vía la función de codificación es una probabilidad de Borel $\eta^{(\omega)}$ en $C^{(\omega)}$. En el caso determinístico $N = 1$, esto es simplemente una medida autosimilar en $C^{(\omega)}$. El caso aleatorio surge naturalmente, incluso si a priori uno solo está interesado en medidas autosimilares determinísticas. Por ejemplo, las medidas condicionales en fibras de medidas autosimilares y autoafines determinísticas suelen tener esta forma, y uno puede descomponer una medida autosimilar arbitraria como $\int \eta^{(\omega)} d\mu(\omega)$ para una elección apropiada de pesos p_i y medida μ ; ver Sección 6.4.4 debajo.

Aunque la familia de medidas producto que acabamos de describir proporciona nuestra clase principal de ejemplos, las pruebas se extienden a familias más generales $\{\bar{\eta}^{(\omega)} : \omega \in Y\}$ de probabilidades de Borel en \mathbb{X}_∞ satisfaciendo las siguientes condiciones:

- (a) Cada $\bar{\eta}^{(\omega)}$ está soportada en $\mathcal{X}_\infty^{(\omega)}$.
- (b) La función $\omega \mapsto \bar{\eta}^{(\omega)}$ es continua (considerando la topología débil en el espacio de probabilidades de Borel en \mathcal{X}_∞ , donde \mathcal{X}_∞ está dotado de la topología producto). En otras palabras, para cualquier función continua g en \mathcal{X}_∞ , tenemos que

$$\lim_{\omega' \rightarrow \omega} \int g(u) d\bar{\eta}^{(\omega')}(u) = \int g(u) d\bar{\eta}^{(\omega)}(u).$$

- (c) Existe $K \geq 1$ tal que para todo $\omega \in Y$ la medida $\bar{\eta}^{(\omega)}$ satisface

$$\bar{\eta}^{(\omega)}([uv]_\omega) \leq K \bar{\eta}^{(\omega)}([u]_\omega) \bar{\eta}^{(\mathbf{T}^n \omega)}([v]_{\mathbf{T}^n \omega}), \quad (6.1)$$

para todo $u \in \mathcal{X}_n^{(\omega)}$, $v \in \mathcal{X}_m^{(\mathbf{T}^n \omega)}$.

Cuando $\bar{\eta}^{(\omega)}$ es la medida producto como arriba, esta condición se cumple con igualdad y $K = 1$. Esto sugiere que, en general, las medidas $\bar{\eta}^{(\omega)}$ satisfaciendo (6.1) (o más bien sus proyecciones $\eta^{(\omega)}$ bajo Δ_ω) pueden ser pensadas como satisfaciendo algún tipo de “sub-autosimilaridad”. Además observemos que, como los cilindros generan la σ -álgebra de Borel de cada espacio $\mathcal{X}_\infty^{(\omega)}$, se sigue de (6.1) que

$$\bar{\eta}^{(\omega)}(\{uy : y \in A\}) \leq K \bar{\eta}^{(\omega)}([u]_\omega) \bar{\eta}^{(\mathbf{T}^n \omega)}(A), \quad (6.2)$$

para cada $u \in \mathcal{X}_n^{(\omega)}$ y conjunto de Borel $A \subset \mathcal{X}_\infty^{(\mathbf{T}^n \omega)}$.

Dimensión L^q de proyecciones

Ahora nos especializaremos en el caso $d = 2$ y asumimos que las reglas son de la forma $\{f_1^{(i)}, \dots, f_{k_i}^{(i)}\}$, donde la función $f_j^{(i)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una similaridad definida por

$$f_j^{(i)}(x) := \lambda_i R_{\alpha_i} x + t_j^i, \quad (6.3)$$

donde $\lambda_i \in (0, 1)$, $t_j^i \in \mathbb{R}^2$ y R_{α_i} es la matriz de rotación de ángulo $\alpha_i \in [0, 2\pi)$. En otras palabras, cada regla es un IFS *homogéneo* (solo las translaciones difieren).

Consideramos el círculo unitario S^1 dotado con la medida de Haar normalizada correspondiente \mathcal{L} . Además, definimos la función continua $\alpha : Y \rightarrow S^1$ por la fórmula $\alpha(\omega) := e^{-i\alpha_\omega}$, y la función skew-product \mathbf{S} en $Y \times S^1$ como

$$\mathbf{S}(\omega, v) = (\mathbf{T}(\omega), \alpha(\omega)v). \quad (6.4)$$

Recordar que ω se dice μ -genérico si $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{\mathbf{T}^i \omega}$ converge a μ (aquí, y a lo largo del capítulo, cuando hablemos de convergencia de medidas de probabilidad estará referido a convergencia débil). La proyección ortogonal en la recta generada por $v \in S^1$ (identificada con \mathbb{R}) es denotada Π_v , i.e. $\Pi_v(x, y) = \langle (x, y), v \rangle$.

Recordemos que a lo largo de este Capítulo siempre tomaremos logaritmos en base 2, a menos que se indique lo contrario.

Ahora podemos enunciar nuestro primer resultado principal del capítulo:

Teorema 145. *Supongamos que tenemos dadas N reglas de la forma (6.3). Sea μ una medida ergódica \mathbf{T} -invariante en $\{1, \dots, N\}^{\mathbb{N}}$. Sea $\{\bar{\eta}^{(\omega)}\}_{\omega \in \{1, \dots, N\}^{\mathbb{N}}}$ una familia de medidas satisfaciendo las condiciones (a)-(c) de arriba, y escribamos $\eta^{(\omega)} = \Delta_{\omega} \bar{\eta}^{(\omega)}$ para la proyección de $\bar{\eta}$ en $\mathbb{C}^{(\omega)}$. Asumamos además que la medida producto $\mu \times \mathcal{L}$ es ergódica para el skew-product \mathbf{S} definido en (6.4).*

Entonces para cada $q \in (1, 2]$ hay un número $D(q)$, tal que para μ -casi todo ω vale que $D_q(\eta^{(\omega)}) = D(q)$, y

$$D_q(\Pi_v \eta^{(\omega)}) = \min(D(q), 1) \quad \text{para todo } v \in S^1. \quad (6.5)$$

Más aún, la convergencia de $-\frac{\log C_{\Pi_v \eta^{(\omega)}}^q(n)}{n(q-1)}$ a $D_q(\Pi_v \eta^{(\omega)})$ es uniforme en $v \in S^1$.

Si $D_q(\eta^{(\omega)}) = D(q)$ para todo punto μ -genérico ω , o si $D(q) \geq 1$, entonces las conclusiones valen para todo ω que sea μ -genérico.

Ejemplos y aplicaciones de este resultado serán discutidos en la Sección 6.4. La asunción de cada regla es homogénea es necesaria para utilizar nuestro método, y sería interesante saber si puede ser removida (recordamos que para la dimensión de Hausdorff hay resultados similares que no requieren homogeneidad, ver [16, 29]).

Convoluciones de medidas de Cantor

Recordemos la definición de convolución de medidas:

Definición 146. *La convolución $\mu * \nu$ de dos medidas μ, ν en \mathbb{R}^d es*

$$\mu * \nu(A) := \iint \mathbb{1}_A(x+y) d\mu(x) d\nu(y) = \mu \times \nu \{(x, y) : x + y \in A\} = (\mu \times \nu) \circ ((x, y) \rightarrow x + y)^{-1}(A).$$

Es decir, que es el push-forward del producto $\mu \times \nu$ bajo la función suma $(x, y) \mapsto x + y$.

En esta sección nos ocuparemos de las convoluciones de dos medidas en \mathbb{R} , una de las cuales es una medida determinística soportada en un conjunto autosimilar, mientras que la otra es una medida aleatoria satisfaciendo propiedades análogas a las de la sección previa. Recientemente, ha habido mucho interés en comprender el comportamiento de varias dimensiones de medidas bajo convolución, en relación con su estructura algebraica y geométrica, ver por ejemplo [28, 29, 43]. La mayoría de los resultados conocidos son para dimensión de Hausdorff (o entropía) más que para dimensiones L^q . La excepción es [43, Teorema 1.1], que nosotros generalizamos debajo.

Fijadas N reglas de la forma $\{f_1^{(i)}, \dots, f_{k_i}^{(i)}\}$, donde $f_j^{(i)}(x) = a_i x + t_j^{(i)}$ para algunas proporciones $a_i \in (0, 1)$ y traslaciones $t_j^{(i)} \in \mathbb{R}$, y sea $\{\bar{\nu}^{(\omega)} : \omega \in Y\}$ una familia de medidas satisfaciendo las condiciones (a)-(c) de arriba (con $\bar{\nu}^{(\omega)}$ en lugar de $\bar{\eta}^{(\omega)}$). Asumiremos sin pérdida de generalidad que $f_j^{(i)}([0, 1]) \subset [0, 1]$; podemos siempre lograr esto a través de un

cambio afín de coordenadas, el cual no afectará el enunciado del Teorema. Como antes, denotamos $\nu^{(\omega)} = \Delta_\omega \bar{\nu}^{(\omega)}$, donde Δ_ω la función de codificación. Las medidas $\nu^{(\omega)}$ serán soportadas en conjuntos de Cantor $C^{(\omega)} \subset [0, 1]$ construidos a partir de la sucesión de reglas ω .

Consideramos una regla más $\{g_1, \dots, g_{k'}\}$, donde $g_j(x) = bx + t'_j$ para alguna contracción $b \in (0, 1)$ y translaciones $t'_j \in \mathbb{R}$. Otra vez, asumimos que $g_j([0, 1]) \subset [0, 1]$ para todo $j \in \{1, \dots, k'\}$. Este es un caso especial del marco anterior con $N = 1$ regla, pero repetimos algunas definiciones con el fin de corregir la notación. Denotamos el espacio de códigos por $\mathbb{X}'_n = \{1, \dots, k'\}^n$ (permitiendo $n = \infty$), y la función codificadora dada por $\Delta' : \mathbb{X}'_\infty \rightarrow [0, 1]$, esto es,

$$\{\Delta'(u)\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} g_{u_1} \circ \dots \circ g_{u_n}([0, 1]).$$

El cilindro de palabras infinitas en \mathbb{X}'_∞ empezando con u será denotado simplemente por $[u]$.

Sea además $\bar{\vartheta}$ una probabilidad de Borel satisfaciendo la condición análoga a (c) en el caso aleatorio, esto es, asumimos que

$$\bar{\vartheta}([uv]) \leq K' \bar{\vartheta}[u] \bar{\vartheta}[v], \quad (6.6)$$

para alguna constante $K' > 0$, y fijamos $\vartheta = \Delta' \bar{\vartheta}$.

Fijemos $r \in \mathbb{N}$ tal que

$$1 < \min_{i=1, \dots, N} \frac{b}{a_i^r} \quad (6.7)$$

y, para esta elección de r , fijamos $l \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que

$$\max_{i=1, \dots, N} \frac{b}{a_i^r} < b^{-l}. \quad (6.8)$$

Escribimos $\beta := \ln(b^{-l})$ y $\alpha_{i_1 \dots i_r} = \ln\left(\frac{b}{a_{i_1} \dots a_{i_r}}\right)$ para cada elección de índices $1 \leq i_1, \dots, i_r \leq N$. (Tenga en cuenta que estos son logaritmos naturales.)

Notar que $0 < \alpha_{i_1 \dots i_r} < \beta$ para todo $1 \leq i_1, \dots, i_r \leq N$ y también que β puede hacerse arbitrariamente grande tomando l apropiadamente. Consideremos el espacio S_β^1 obtenido tomando el intervalo $[-\beta, \beta)$ e identificando sus puntos extremos, i.e. $-\beta = \beta$, y dotemoslo con la medida Lebesgue normalizada \mathcal{L}_β . Además, definamos la función continua $\alpha : Y \rightarrow \mathbb{R}$ por la fórmula $\alpha(\omega) := \alpha_{\omega_1 \dots \omega_r}$ y la función skew-product \mathbf{S} en $Y \times S_\beta^1$ como

$$\mathbf{S}(\omega, s) = (\mathbf{T}^r(\omega), s +_{(\beta)} \alpha(\omega)),$$

donde, como antes, \mathbf{T} denota el operador shift izquierdo en Y , y $+_{(\beta)}$ representa la suma natural en S_β^1 . Además, para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos la n -ésima rotación $\mathbf{R}^n : Y \times S_\beta^1 \rightarrow S_\beta^1$ por la fórmula

$$\mathbf{R}^n(\omega, s) := \pi_{S_\beta^1}(\mathbf{S}^n(\omega, s)) = s +_{(\beta)} \alpha_{\omega_1 \dots \omega_r} +_{(\beta)} \dots +_{(\beta)} \alpha_{\omega_{r(n-1)+1} \dots \omega_m},$$

donde $\pi_{S_\beta^1}$ denota la proyección de $Y \times S_\beta^1$ en S_β^1 .

Ahora podemos enunciar nuestro resultado principal para convoluciones:

Teorema 147. *Sea μ una medida ergódica, invariante para $(\{1, \dots, N\}^{\mathbb{N}}, \mathbf{T})$ tal que la medida producto $\mu \times \mathcal{L}_\beta$ es ergódica para el sistema dinámico $(\{1, \dots, N\}^{\mathbb{N}} \times S^1_\beta, \mathbf{S})$.*

Entonces para cada $q \in (1, 2]$ existe un número $D(q)$, tal que para μ -casi todo ω vale que $D_q(\nu^{(\omega)} \times \vartheta) = D(q)$, y

$$D_q(\nu^{(\omega)} * A_t \vartheta) = \min(D(q), 1) \quad \text{para todo } t \in [e^{-\beta}, e^\beta], \quad (6.9)$$

*donde $A_t(x) = tx$ escala por t . Además, la convergencia de $-\frac{\log C_{\nu^{(\omega)} * A_t \vartheta}^q(n)}{n(q-1)}$ a $D_q(\nu^{(\omega)} * A_t \vartheta)$ es uniforme en $t \in [e^{-\beta}, e^\beta]$.*

Si $D_q(\nu^{(\omega)}) = D(q)$ para todo punto ω que sea μ -genérico, o si $D(q) \geq 1$, entonces las conclusiones de arriba valen para todo punto ω que sea μ -genérico.

Notar que $(x, y) \mapsto x + A_t y$ es, salvo un homeomorfismo afín, la proyección ortogonal de ángulo $\arctan(t)$; por lo tanto, este resultado también se puede interpretar en términos de proyecciones de la medida del producto $\nu^{(\omega)} \times \vartheta$. De nuevo, el supuesto de homogeneidad en las reglas es crucial. Además, no sabemos si el enunciado es cierto si ϑ es también tomada aleatoriamente de acuerdo a una sucesión de reglas. Aunque esto parece natural, no parece posible construir un cociclo como el que está en el núcleo de nuestra demostración.

6.2. Demostración del Teorema 145

Notación y preliminares

Recordemos que $Y = \{1, \dots, N\}^{\mathbb{N}}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos la n -ésima rotación $\mathbf{R}^n : Y \times S^1 \rightarrow S^1$ por la fórmula

$$\mathbf{R}^n(\omega, \nu) := \pi_{S^1}(S^n(\omega, \nu)) = \alpha(\omega) \cdots \alpha(\mathbf{T}^{n-1} \omega) \nu,$$

donde π_{S^1} denota la proyección de $Y \times S^1$ en S^1 .

Es fácil ver que para $u \in \mathbb{X}_n^{(\omega)}$ podemos descomponer $f_u^{(\omega)}$ como

$$f_u^{(\omega)}(x, y) = \lambda_{\omega_1} \cdots \lambda_{\omega_n} \mathbf{R}^n(\omega, (1, 0)) \cdot (x, y) + d_u^{(\omega)} \quad (6.10)$$

para una cierta constante $d_u^{(\omega)} \in \mathbb{R}^2$ (aquí y en lo que sigue identificamos \mathbb{R}^2 con $\mathbb{C} \supset S^1$). Más aún, si $F_u^{(\omega)}$ denota la inversa de $f_u^{(\omega)}$, entonces de (6.10) obtenemos que

$$F_u^{(\omega)}(x, y) = \frac{\overline{\mathbf{R}^n(\omega, (1, 0))}}{\lambda_{\omega_1} \cdots \lambda_{\omega_n}} \cdot ((x, y) - d_u^{(\omega)}).$$

Para cada $\omega \in Y$ denotamos la medida proyectada $\Pi_\nu \eta^{(\omega)}$ por $\eta_\nu^{(\omega)}$, i.e. $\eta_\nu^{(\omega)}(B) = \eta^{(\omega)}(\Pi_\nu^{-1}(B))$ para todo conjunto de Borel $B \subseteq \mathbb{R}$.

Además, para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $L_n^{(\omega)}$ como el único entero no negativo tal que

$$2^{-L_n^{(\omega)}} \leq \lambda_{\omega_1} \cdots \lambda_{\omega_n} < 2^{1-L_n^{(\omega)}}, \quad (6.11)$$

y consideramos la familia de intervalos $\mathfrak{D}_n^{(\omega)}$ dada por

$$\mathfrak{D}_n^{(\omega)} = \mathfrak{D}_{L_n^{(\omega)}} = \{[2^{-L_n^{(\omega)}} j, 2^{-L_n^{(\omega)}} (j+1)) : j \in \mathbb{Z}\}.$$

Notar que para cada $\omega \in Y$ las familias $\mathfrak{D}_n^{(\omega)}$ están encajadas: para todo $n \in \mathbb{N}$, cada elemento de $\mathfrak{D}_{n+1}^{(\omega)}$ es un subintervalo de exactamente un elemento de $\mathfrak{D}_n^{(\omega)}$. Con esto, para $q > 1$ definimos las funciones $\tau_{q,n} : Y \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\tau_{q,n}(\omega, v) := \sum_{I \in \mathfrak{D}_n^{(\omega)}} \left(\eta_v^{(\omega)}(I) \right)^q = C_{\eta_v^{(\omega)}}^q(L_n^{(\omega)}), \quad (6.12)$$

recordar (1.1).

Para concluir estos preliminares de la demostración del Teorema 145, daremos la versión del Teorema de proyección de Marstrand que mencionamos en la introducción, debida a Hunt y Kaloshin [30, Teorema 1.1].

Teorema 148. *Sea η una probabilidad Borel en \mathbb{R}^2 . Si $q \in (1, 2]$, entonces*

$$\underline{D}_q(\Pi_v \eta) = \min(\underline{D}_q \eta, 1) \quad \text{para casi todo } v \in S^1.$$

Un cociclo subaditivo

Nuestro objetivo es mostrar que dado $q > 1$ existe un cociclo subaditivo continuo $\mathcal{F}_q = (\phi_{q,n})_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{\phi_{q,n}(\omega, v)}{-L_n^{(\omega)}} = \underline{D}^q(\eta_v^{(\omega)}), \quad \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\phi_{q,n}(\omega, v)}{-L_n^{(\omega)}} = \overline{D}^q(\eta_v^{(\omega)}), \quad (6.13)$$

para todo $(\omega, v) \in Y \times S^1$. Hacemos esto en dos pasos. Primero mostramos que la familia $(\log \tau_{q,n})_{n \in \mathbb{N}}$ para $\tau_{q,n}$ definida en (6.12) es, salvo constante aditiva, un cociclo subaditivo. Entonces, probamos que existe una $\bar{\tau}_{q,n}$ “suave” análoga de $\tau_{q,n}$ que es continua. De esos hechos se seguirá que el cociclo $\mathcal{F}_q = \log \bar{\tau}_{q,n}$ tiene las propiedades deseadas.

En esta sección establecemos el núcleo de esta estrategia, mostrando que existe $K_1 > 1$ tal que para toda $n, m \in \mathbb{N}$ y $(\omega, v) \in Y \times S^1$ uno tiene

$$\tau_{n+m}(\omega, v) \leq K_1 \tau_n(\omega, v) \tau_m(S^n(\omega, v)), \quad (6.14)$$

donde por simplicidad hemos suprimido q de la notación. Esto implica que la familia $(\log K_1 \tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es un cociclo subaditivo.

Empecemos por introducir una definición.

Definición 149. Dado $M \in \mathbb{N}$, decimos que dos familias $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'$ de conjuntos son M -equivalentes en un conjunto W (o simplemente M -equivalentes si el espacio ambiente W es sobreentendido por contexto) si

$$(i) \quad W \cap \bigcup_{A \in \mathfrak{A}} A = W \cap \bigcup_{B \in \mathfrak{A}'} B.$$

(ii) Cada elemento de \mathfrak{A} interseca como mucho M elementos de \mathfrak{A}' y viceversa.

La siguiente consecuencia simple de la desigualdad de Hölder que fue probada en [53, Lemma 5.3].

Lema 150. Si \mathfrak{A} y \mathfrak{A}' son particiones M -equivalentes en un conjunto de Borel W , ρ es una probabilidad con $\rho(W) = 1$ y $q \geq 1$, entonces

$$M^{1-q} \sum_{B \in \mathfrak{A}'} \rho(B)^q \leq \sum_{A \in \mathfrak{A}} \rho(A)^q \leq M^{q-1} \sum_{B \in \mathfrak{A}'} \rho(B)^q.$$

Ahora, dejemos fijo $n, m \in \mathbb{N}$, $(\omega, \nu) \in Y \times S^1$ y demostremos (6.14). Recordemos que $\Delta_\omega : \mathbb{X}^{(\omega)} \rightarrow \mathbb{C}^{(\omega)}$ es una función de codificación, y sea $\bar{\Pi}_\nu : \mathbb{X}^{(\omega)} \rightarrow \mathbb{R}$ la composición $\Pi_\nu \circ \Delta_\omega$. Dado $J \in \mathfrak{D}_n^{(\omega)}$ definamos

$$\mathbb{X}_J^{(\omega)}(\nu) := \{u \in \mathbb{X}_n^{(\omega)} : [u]_\omega \cap \bar{\Pi}_\nu^{-1}(J) \neq \emptyset\}, \quad (6.15)$$

y consideremos el intervalo \widehat{J} el cual tiene el mismo centro x_J que J pero su longitud es $|\widehat{J}| = 9|J|$, i.e.

$$\widehat{J} = \left[x_J - \frac{9}{2}|J|, x_J + \frac{9}{2}|J| \right).$$

No es difícil ver que, tomando \widehat{J} de esta forma, uno tiene $\bar{\Pi}_\nu[u]_\omega \subset \widehat{J}$ para todo $u \in \mathbb{X}_J^{(\omega)}(\nu)$. Además, notemos que si $u \in \mathbb{X}_n^{(\omega)}$ y $y \in \mathbb{X}_\infty^{(\mathbf{T}^n \omega)}$, entonces $\Delta_\omega(uy) = f_u^{(\omega)}(\Delta_{\mathbf{T}^n \omega}(y))$, y por lo tanto

$$\Delta_\omega^{-1}(f_u^{(\omega)} A) \cap [u]_\omega = \{uy : y \in \Delta_{\mathbf{T}^n \omega}^{-1}(A)\}. \quad (6.16)$$

Si $I \in \mathfrak{D}_{n+m}^{(\omega)}$ es tal que $I \subset J$, entonces

$$\begin{aligned} \eta_\nu^{(\omega)}(I) &= \sum_{u \in \mathbb{X}_n^{(\omega)}} \bar{\eta}^{(\omega)}([u]_\omega \cap \bar{\Pi}_\nu^{-1}(I)) \\ &= \sum_{u \in \mathbb{X}_J^{(\omega)}(\nu)} \bar{\eta}^{(\omega)}|_{[u]_\omega} \left(\bar{\Pi}_\nu^{-1}(I) \right) && \text{por (6.15)} \\ &= \sum_{u \in \mathbb{X}_J^{(\omega)}(\nu)} \bar{\eta}^{(\omega)}|_{[u]_\omega} \left(\Delta_\omega^{-1} f_u^{(\omega)} F_u^{(\omega)} \Pi_\nu^{-1}(I) \right) \\ &= \sum_{u \in \mathbb{X}_J^{(\omega)}(\nu)} \bar{\eta}^{(\omega)}(\{uy : y \in \Delta_{\mathbf{T}^n \omega}^{-1} F_u^{(\omega)} \Pi_\nu^{-1}(I)\}) && \text{por (6.16)} \\ &\leq K \sum_{u \in \mathbb{X}_J^{(\omega)}(\nu)} \bar{\eta}^{(\omega)}([u]_\omega) \bar{\eta}^{(\mathbf{T}^n \omega)}(\Delta_{\mathbf{T}^n \omega}^{-1}(F_u^{(\omega)} \Pi_\nu^{-1}(I))) && \text{por (6.2).} \end{aligned} \quad (6.17)$$

Ahora, observemos que, por definición de $\mathbb{X}_J^{(\omega)}(v)$,

$$\sum_{u \in \mathbb{X}_J^{(\omega)}(v)} \bar{\eta}^{(\omega)}([u]_\omega) \leq \eta_v^{(\omega)}(\widehat{J}). \quad (6.18)$$

Por lo tanto, usando (6.17), Hölder y (6.18) obtenemos que

$$\begin{aligned} (\eta_v^{(\omega)}(I))^q &\leq \left(K \sum_{u \in \mathbb{X}_J^{(\omega)}(v)} \bar{\eta}^{(\omega)}([u]_\omega) \eta^{(\mathbf{T}^n(\omega))}(F_u^{(\omega)} \Pi_v^{-1}(I)) \right)^q \\ &\leq K^q \left(\sum_{u \in \mathbb{X}_J^{(\omega)}(v)} \bar{\eta}^{(\omega)}([u]_\omega) \right)^{\frac{q}{q'}} \times \\ &\quad \times \sum_{u \in \mathbb{X}_J^{(\omega)}(v)} \bar{\eta}^{(\omega)}([u]_\omega) \left(\eta^{(\mathbf{T}^n(\omega))}(F_u^{(\omega)} \Pi_v^{-1}(I)) \right)^q \\ &\leq K^q (\bar{\eta}_v^{(\omega)}(\widehat{J}))^{q-1} \sum_{u \in \mathbb{X}_J^{(\omega)}(v)} \bar{\eta}^{(\omega)}([u]_\omega) \left(\eta^{(\mathbf{T}^n(\omega))}(F_u^{(\omega)} \Pi_v^{-1}(I)) \right)^q. \end{aligned}$$

Sumando sobre todo $I \in \mathfrak{D}_{n+m}^{(\omega)}$ tal que $I \subset J$, tenemos que

$$\sum_{\substack{I \in \mathfrak{D}_{n+m}^{(\omega)} \\ I \subset J}} (\eta_v^{(\omega)}(I))^q \leq K^q (\bar{\eta}_v^{(\omega)}(\widehat{J}))^{q-1} \Lambda_v(J), \quad (6.19)$$

donde

$$\begin{aligned} \Lambda_v(J) &= \sum_{\substack{I \in \mathfrak{D}_{n+m}^{(\omega)} \\ I \subset J}} \sum_{u \in \mathbb{X}_J^{(\omega)}(v)} \bar{\eta}^{(\omega)}([u]_\omega) \left(\eta^{(\mathbf{T}^n(\omega))}(F_u^{(\omega)} \Pi_v^{-1}(I)) \right)^q \\ &= \sum_{u \in \mathbb{X}_J^{(\omega)}(v)} \bar{\eta}^{(\omega)}([u]_\omega) \sum_{\substack{I \in \mathfrak{D}_{n+m}^{(\omega)} \\ I \subset J}} \left(\eta^{(\mathbf{T}^n(\omega))}(F_u^{(\omega)} \Pi_v^{-1}(I)) \right)^q. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Ahora, usando (6.10) no es difícil de ver que para cualquiera de esos intervalos I y $u \in \mathbb{X}_J^{(\omega)}(v)$ uno tiene que

$$F_u^{(\omega)} \Pi_v^{-1}(I) = \left(\Pi_v \circ f_u^{(\omega)} \right)^{-1}(I) = \Pi_{v'}^{-1} \left(\frac{1}{\lambda_{\omega_1} \cdots \lambda_{\omega_n}} \cdot (I - \Pi_v(d_u^{(\omega)})) \right) \quad (6.21)$$

donde $v' := \mathbf{R}^n(\omega, v)$. Escribamos $\ell = \lambda_{\omega_{n+1}} \cdots \lambda_{\omega_{n+m}}$, y notemos que la familia

$$\left\{ \frac{1}{\lambda_{\omega_1} \cdots \lambda_{\omega_n}} (I - \bar{\Pi}_v(d_u^{(\omega)})) : I \in \mathfrak{D}_{n+m}^{(\omega)} \right\}$$

está compuesta de intervalos consecutivos de igual longitud entre $\frac{1}{2}\ell$ y ℓ . Como lo mismo es cierto para la familia $\mathfrak{D}_m^{(\mathbf{T}^n\omega)}$, estas familias son 6-equivalentes. Se sigue del Lema 150 y (6.21) que

$$\sum_{\substack{I \in \mathfrak{D}_{n+m}^{(\omega)} \\ I \subset J}} \left(\eta^{(\mathbf{T}^n\omega)}(F_u^{(\omega)}\Pi_v^{-1}(I)) \right)^q \leq 6^{q-1} \tau_m(\mathbf{T}^n(\omega), v') = 6^{q-1} \tau_m(S^n(\omega, v)). \quad (6.22)$$

Combinando (6.18), (6.19), (6.20) y (6.22) se obtiene

$$\sum_{\substack{I \in \mathfrak{D}_{n+m}^{(\omega)} \\ I \subset J}} \left(\eta_v^{(\omega)}(I) \right)^q \leq (6K)^q \left(\eta_v^{(\omega)}(\widehat{J}) \right)^q \tau_m(S^n(\omega, v)). \quad (6.23)$$

Finalmente, sumando (6.23) sobre todo $J \in \mathfrak{D}_n^{(\omega)}$, concluimos que

$$\begin{aligned} \tau_{n+m}(\omega, v) &= \sum_{J \in \mathfrak{D}_n^{(\omega)}} \sum_{\substack{I \in \mathfrak{D}_{n+m}^{(\omega)} \\ I \subset J}} \left(\eta_v^{(\omega)}(I) \right)^q \\ &\leq (6K)^q \tau_m(S^n(\omega, v)) \sum_{J \in \mathfrak{D}_n^{(\omega)}} \left(\eta_v^{(\omega)}(\widehat{J}) \right)^q \\ &\leq (54K)^q \tau_n(\omega, v) \tau_m(S^n(\omega, v)) \end{aligned}$$

donde para obtener la última desigualdad usamos el Lema 150 aplicado a las familias $\mathfrak{D}_n^{(\omega)}$ y $\{\widehat{J} : J \in \mathfrak{D}_n^{(\omega)}\}$, que son 9-equivalentes. Esto nos muestra (6.14) para $K_1 := (54K)^q$.

Una análoga continua de τ_n

Ahora construimos para cada $n \in \mathbb{N}$ una función continua $\bar{\tau}_n$ que es comparable salvo constante multiplicativas a τ_n . Para tal fin, consideramos $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ soportada en $[-2, 2]$ tal que $0 \leq \psi \leq 1$ y $\psi|_{[-1,1]} \equiv 1$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\omega \in Y$ definimos $\psi_n^{(\omega)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ por la fórmula

$$\psi_n^{(\omega)}(x, y) = \psi(2^{L_n^{(\omega)}}(x - y)).$$

Para cualquier $y \in \mathbb{R}$ fijo la función $\psi_{n,y}^{(\omega)}(x) := \psi_n^{(\omega)}(x, y)$ es soportada en el intervalo $[y - 2^{1-L_n^{(\omega)}}, y + 2^{1-L_n^{(\omega)}})$ y es igual a 1 en el intervalo $[y - 2^{-L_n^{(\omega)}}, y + 2^{-L_n^{(\omega)}})$. Definimos $\bar{\tau}_n : Y \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ por la fórmula

$$\bar{\tau}_n(\omega, v) := \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \psi_n^{(\omega)}(x, y) d\eta_v^{(\omega)}(x) \right)^{q-1} d\eta_v^{(\omega)}(y).$$

Notar que $\bar{\tau}_n$ puede ser reescrito como

$$\bar{\tau}_n(\omega, v) = \int_{\mathcal{X}_\infty} \left(\Psi_n^{(\omega)}(u, v) \right)^{q-1} d\bar{\eta}^{(\omega)}(u),$$

donde

$$\Psi_n^{(\omega)}(u, v) := \int \psi_n^{(\omega)}(\bar{\Pi}_v(u), \bar{\Pi}_v(u')) d\bar{\eta}^{(\omega)}(u').$$

Afirmamos que $\bar{\tau}_n$ es continua. De hecho, esto es una consecuencia del siguiente hecho.

Lema 151. *Sea X un espacio métrico compacto y sea $\{\rho^{(\omega)} : \omega \in X\}$ una familia de probabilidades de Borel en algún otro espacio métrico compacto Z , tal que $\omega \mapsto \rho^{(\omega)}$ es continua con la topología débil (es decir que si $\omega' \rightarrow \omega$ entonces $\rho^{\omega'} \rightarrow \rho^\omega$ débil, o sea $\int g(u) d\rho^{\omega'}(u) \rightarrow \int g(u) d\rho^\omega(u)$ para toda g continua). Entonces, para toda función continua $h : X \times Z \rightarrow \mathbb{R}$, la función $\omega \mapsto \int h(\omega, u) d\rho^{(\omega)}(u)$ es continua.*

Demostración. Por continuidad uniforme, dado $\varepsilon > 0$ tenemos $|h(\omega, u) - h(\omega', u)| < \varepsilon$ siempre que $d(\omega, \omega')$ sea suficientemente chico. Se sigue que

$$\begin{aligned} \limsup_{\omega' \rightarrow \omega} \left| \int h(\omega, u) d\rho^{(\omega)}(u) - \int h(\omega', u) d\rho^{(\omega')}(u) \right| &\leq \\ \varepsilon + \lim_{\omega' \rightarrow \omega} \left| \int h(\omega, u) d\rho^{(\omega)}(u) - \int h(\omega, u) d\rho^{(\omega')}(u) \right| &= \varepsilon. \end{aligned}$$

En la última igualdad usamos la hipótesis, con $g(u) := h(\omega, u)$ (ahí ω está fijado de antemano). \square

Notar que $L_n(\omega)$ es continua, porque solo depende de las primeras n coordenadas de ω , y por lo tanto $\psi_n^{(\omega)}(x)$ es continua en (ω, x) . Podemos entonces aplicar el Lema 151 con $X = Y \times \mathcal{X}_\infty \times S^1$, $Z = \mathcal{X}_\infty$, $\rho^{(\omega, u, v)} = \bar{\eta}^{(\omega)}$, y $h((\omega, u, v), u') = \psi_n^{(\omega)}(\bar{\Pi}_v(u), \bar{\Pi}_v(u'))$ para obtener que $\Psi_n^{(\omega)}(u, v)$ es continua en (ω, u, v) . Una segunda aplicación del Lema 151, con $X := Y \times S^1$, $Z := \mathcal{X}_\infty$ y $h(\omega, v, u) := \left(\Psi_n^{(\omega)}(u, v)\right)^{q-1}$, da la continuidad de $\bar{\tau}_n$.

Resta ver que $\bar{\tau}_n$ es equivalente a τ_n , i.e. existe $M > 1$ tal que

$$M^{-1}\tau_n \leq \bar{\tau}_n \leq M\tau_n. \quad (6.24)$$

Para mostrar la desigualdad derecha, notemos que para todo $(\omega, v) \in Y \times S^1$ tenemos que

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_n(\omega, v) &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{j2^{-L_n^{(\omega)}}}^{(j+1)2^{-L_n^{(\omega)}}} \left(\int_{\mathbb{R}} \psi_n^{(\omega)}(x, y) d\eta_v^{(\omega)}(x) \right)^{q-1} d\eta_v^{(\omega)}(y) \\ &\leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{j2^{-L_n^{(\omega)}}}^{(j+1)2^{-L_n^{(\omega)}}} \left(\eta_v^{(\omega)}([y - 2^{1-L_n^{(\omega)}}, y + 2^{1-L_n^{(\omega)}}]) \right)^{q-1} d\eta_v^{(\omega)}(y) \\ &\leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{j2^{-L_n^{(\omega)}}}^{(j+1)2^{-L_n^{(\omega)}}} \left(\eta_v^{(\omega)}([(j-2)2^{-L_n^{(\omega)}}, (j+3)2^{-L_n^{(\omega)}}]) \right)^{q-1} d\eta_v^{(\omega)}(y) \\ &\leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left[\eta_v^{(\omega)}([(j-2)2^{-L_n^{(\omega)}}, (j+3)2^{-L_n^{(\omega)}}]) \right]^q \end{aligned}$$

que, al notar que las familias $\mathfrak{D}_n^{(\omega)}$ y $\{(j-2)2^{-L_n^{(\omega)}}, (j+3)2^{-L_n^{(\omega)}} : j \in \mathbb{Z}\}$ son 5-equivalentes, implica que $\bar{\tau}_n \leq 5^{q-1}\tau_n$. Para demostrar la desigualdad izquierda, observemos que para todo $\omega \in Y$ and $j \in \mathbb{Z}$ tenemos la inclusión

$$[j2^{-L_n^{(\omega)}}, (j+1)2^{-L_n^{(\omega)}}] \subseteq [y - 2^{-L_n^{(\omega)}}, y + 2^{-L_n^{(\omega)}}]$$

cuando $y \in [j2^{-L_n^{(\omega)}}, (j+1)2^{-L_n^{(\omega)}}]$. Entonces, para $(\omega, \nu) \in Y \times S^1$ obtenemos que

$$\begin{aligned} \tau_n(\omega, \nu) &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(\eta_\nu^{(\omega)}([j2^{-L_n^{(\omega)}}, (j+1)2^{-L_n^{(\omega)}}]) \right)^q \\ &\leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{j2^{-L_n^{(\omega)}}}^{(j+1)2^{-L_n^{(\omega)}}} \left(\eta_\nu^{(\omega)}([y - 2^{-L_n^{(\omega)}}, y + 2^{-L_n^{(\omega)}}]) \right)^{q-1} d\eta_\nu^{(\omega)}(y) \\ &\leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{j2^{-L_n^{(\omega)}}}^{(j+1)2^{-L_n^{(\omega)}}} \left(\int_{\mathbb{R}} \psi_n^{(\omega)}(x, y) d\eta_\nu^{(\omega)}(x) \right)^{q-1} d\eta_\nu^{(\omega)}(y) = \bar{\tau}_n(\omega, \nu) \end{aligned}$$

lo que muestra que

$$\tau_n \leq \bar{\tau}_n \leq 5^{q-1}\tau_n$$

y por la tanto ambas desigualdades son equivalentes. Más aún, si reemplazamos $\bar{\tau}_n$ por $5^{q-1}K_1\bar{\tau}_n$, donde la constante K_1 es como en (6.14), entonces (6.24) sigue valiendo (para una constante M distinta), y

$$\log \bar{\tau}_{n+m}(\omega, \nu) \leq \log \bar{\tau}_n(\omega, \nu) + \log \bar{\tau}_m(S^n(\omega, \nu)).$$

Notar que $\log \bar{\tau}_n$ está bien definida por (6.24), ya que τ_n es estrictamente positiva por su definición. Más aún, cada $\log \tau_n$ es continua, porque τ_n lo es. Entonces, concluimos que la sucesión $(\log \bar{\tau}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es un cociclo subaditivo continuo en $Y \times S^1$.

Demostración de la ecuación (6.13)

Escribimos $\phi_n = \log \bar{\tau}_n$ por simplicidad. Ahora podemos mostrar que

$$\underline{D}^q(\eta_\nu^{(\omega)}) = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{\phi_n(\omega, \nu)}{-(q-1)L_n^{(\omega)}} \quad (6.25)$$

para todo $(\omega, \nu) \in Y \times S^1$, y del mismo modo para $\bar{D}^q(\eta_\nu^{(\omega)})$. Se sigue de la definición de τ_n y (6.24) que

$$\left| \phi_n(\omega, \nu) - \log C_{\eta_\nu^{(\omega)}}^q(L_n^{(\omega)}) \right|$$

es uniformemente acotada (independiente de n). Como $L_n^{(\omega)} \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$, es suficiente chequear que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log C_{\eta_\nu^{(\omega)}}^q(L_n^{(\omega)})}{-L_n^{(\omega)}} = \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\log C_{\eta_\nu^{(\omega)}}^q(k)}{-k}.$$

El “ \geq ” de la desigualdad es claro, pues el límite en la izquierda es tomado sobre una sub-
sucesión. Para ver la otra desigualdad, fijado k y elegido n tal que $L_n^{(\omega)} \leq k < L_{n+1}^{(\omega)}$. Notar
que $L_{n+1}^{(\omega)} \leq L_n^{(\omega)} + \ell^*$, donde $\ell^* = 1 + \max_{i=1}^N |\log \lambda_i|$. Por otro lado, la sucesión $k \mapsto C_v^q(k)$
es siempre decreciente para $q > 1$, pues para un intervalo diádico $J = I_1 \cup I_2$ uno tiene que
 $\nu(J)^q \geq \nu(I_1)^q + \nu(I_2)^q$. Por lo tanto

$$\frac{\log C_{\eta_v^{(\omega)}}^q(k)}{-k} \geq \frac{\log C_{\eta_v^{(\omega)}}^q(L_n^{(\omega)})}{-L_{n+1}^{(\omega)}} \geq \frac{\log C_{\eta_v^{(\omega)}}^q(L_n^{(\omega)})}{\ell^* - L_n^{(\omega)}},$$

siempre que n sea suficientemente grande.

La afirmación para \underline{D}_q se sigue tomando límite sobre una subsucesión apropiada de k ,
y el caso de \overline{D}_q es análogo.

Un cociclo subaditivo para las medidas $\eta^{(\omega)}$

El análisis anterior de las medidas $\eta_v^{(\omega)}$ tiene una correspondencia, pero mas simple para
las medidas $\eta^{(\omega)}$. Como las demostraciones son muy similares, solo indicamos los resultados,
dejando los detalles al lector interesado. Sea \mathfrak{Q}_n la familia de cuadrados diádicos

$$\{[j_1 2^{-n}, (j_1 + 1) 2^{-n}] \times [j_2 2^{-n}, (j_2 + 1) 2^{-n}] : j_1, j_2 \in \mathbb{Z}\}.$$

Escribamos $\mathfrak{Q}_n^{(\omega)} = \mathfrak{Q}_{L_n^{(\omega)}}$, y definamos

$$\xi_n(\omega) = \sum_{Q \in \mathfrak{Q}_n^{(\omega)}} \left(\eta^{(\omega)}(Q) \right)^q.$$

Entonces uno puede chequear, como antes, que existe una sucesión de funciones *continuas*
 $\overline{\xi}_n$, tal que

$$M^{-1} \xi_n(\omega) \leq \overline{\xi}_n(\omega) \leq M \xi_n(\omega)$$

para alguna constante $M > 0$ (dependiendo de q) y todo $\omega \in Y$, y más aún

$$\overline{\xi}_{n+m}(\omega) \leq \overline{\xi}_n(\omega) \overline{\xi}_m(\mathbf{T}^n(\omega)).$$

Desde aquí se puede deducir, como lo hicimos anteriormente para las proyecciones $\eta_v^{(\omega)}$, que

$$\underline{D}_q(\eta^{(\omega)}) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \overline{\xi}_n(\omega)}{-L_n^{(\omega)}}, \quad \overline{D}_q(\eta^{(\omega)}) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \overline{\xi}_n(\omega)}{-L_n^{(\omega)}}. \quad (6.26)$$

Conclusión de la demostración

Empezamos aplicando (6.26) para mostrar que $D_q(\eta^{(\omega)})$ existe y es constante en μ -casi
todo punto. Sin embargo, antes de que podamos hacerlo, está claro que debemos entender el
comportamiento del cociente $\frac{L_n^{(\omega)}}{n}$ cuando n tiende a infinito. Esto es el propósito del siguiente
Lema.

Lema 152. Si $\omega \in Y$ es μ -genérico, entonces

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-L_n^{(\omega)}}{n} = \int_Y \log \lambda_{\tilde{\omega}_1} d\mu(\tilde{\omega}).$$

Demostración. Por definición de $L_n^{(\omega)}$ tenemos $2^{-L_n^{(\omega)}} < \prod_{i=1}^n \lambda_{\omega_i} \leq 2^{1-L_n^{(\omega)}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es suficiente ver que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \log(\lambda_{(\mathbb{T}^i(\omega))_1})}{n} = \int_Y \log \lambda_{\tilde{\omega}_1} d\mu(\tilde{\omega}).$$

Pero esto se sigue del hecho de que ω es μ -genérico, porque la función $\tilde{\omega} \mapsto \log \lambda_{\tilde{\omega}_1}$ es continua en Y . \square

Ahora se sigue del Teorema ergódico subaditivo (Teorema 45) que para μ -casi todo ω vale que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \bar{\xi}_n(\omega)}{-L_n^{(\omega)}} = \frac{\inf_{n \in \mathbb{N}} \left[\frac{1}{n} \int_Y \log \bar{\xi}_n(\tilde{\omega}) d\mu(\tilde{\omega}) \right]}{\int_Y \log(\lambda_{\tilde{\omega}_1}) d\mu(\tilde{\omega})} =: D(q).$$

Deducimos de (6.26) que $D_q(\eta^{(\omega)})$ existe y es igual a $D(q)$ para μ -casi todo ω . Más aún, si ω es μ -genérico, entonces se sigue del Teorema 57 que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \bar{\xi}_n(\omega)}{-L_n^{(\omega)}} \geq D(q),$$

de donde $\underline{D}_q(\eta^{(\omega)}) \geq D(q)$.

Ahora pasemos las proyecciones $\eta_v^{(\omega)}$. Comencemos observando que para todo $(\omega, v) \in Y \times S^1$ tenemos

$$\underline{D}^q(\eta_v^{(\omega)}) \leq \bar{D}^q(\eta_v^{(\omega)}) \leq \min\{\bar{D}^q(\eta^{(\omega)}), 1\}.$$

De hecho, esto se desprende de los hechos bien conocidos de que \bar{D}_q no crece bajo funciones Lipschitz, y nunca puede exceder la dimensión del espacio ambiente.

Ahora, como $\mu \times \mathcal{L}_\beta$ es ergódica por hipótesis, el Corolario 58 combinado con el Lema 152 implican que cualquier punto μ -genérico ω satisface, para cada $v \in S^1$,

$$\min\{\bar{D}^q(\eta^{(\omega)}), 1\} \geq \underline{D}^q(\eta_v^{(\omega)}) = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{\phi_n(\omega, v)}{-L_n^{(\omega)}} = \frac{1}{\mu^*} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{\phi_n(\omega, v)}{n} \geq \frac{\Phi}{\mu^*} \quad (6.27)$$

donde

$$\Phi := \inf_{n \in \mathbb{N}} \left[\frac{1}{n} \int_Y \phi_n d(\mu \times \mathcal{L}_\beta) \right], \quad \mu^* := \int_Y \log \lambda_{\omega_1} d\mu(\omega).$$

Por lo tanto, dado cualquier $\omega \in Y$, si queremos probar (6.5), entonces es suficiente ver que

$$\min\{\bar{D}^q(\eta^{(\omega)}), 1\} = \frac{\Phi}{\mu^*} \quad (6.28)$$

Como $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es un cociclo subaditivo acotado, el Teorema ergódico subaditivo (Teorema 45) y una aplicación del Teorema de Fubini implican que μ -casi todo $\omega \in Y$ satisface

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\phi_n(\omega, \nu)}{-L_n^{(\omega)}} = \frac{\Phi}{\mu^*}$$

para \mathcal{L} -casi todo $\nu \in S^1$. Por (6.13), resulta que $\frac{\Phi}{\mu^*}$ es igual para $(\mu \times \mathcal{L})$ -casi todo valor de $D_q(\eta_\nu^{(\omega)})$, y por el Teorema 148 y Fubini, deducimos que es igual a $\min(D(q), 1)$ (este es el punto de la demostración donde usamos que $q \leq 2$). Por lo tanto, si tomamos

$$\mathcal{E} = \{\omega \in Y : D_q(\eta^{(\omega)}) = D(q)\},$$

entonces (6.28) vale para todo $\omega \in \mathcal{E}$, y si $D(q) \geq 1$, también para ω en el conjunto \mathcal{G} de puntos μ -genéricos.

Concluimos que para todo ω en el conjunto de μ -medida total $\mathcal{G} \cap \mathcal{E}$, todas las desigualdades en (6.27) son igualdades, y por lo tanto (6.5) es satisfecho. Si $\mathcal{G} \subset \mathcal{E}$, o si $D(q) \geq 1$, entonces (6.5) vale para todo punto μ -genérico ω .

La afirmación sobre la convergencia uniforme sobre $\nu \in S^1$ se sigue del análisis de arriba, y la uniformidad en el Corolario 58 (que implica que la desigualdad de más a la derecha en (6.27) vale uniformemente en ν , para todo $\omega \in \mathcal{G}$ fijo). Con esto terminamos la demostración del Teorema 145.

6.3. Demostración del Teorema 147

Preliminares

La demostración del Teorema 147 se sigue el mismo esquema general de la prueba del Teorema 145. Indicaremos entonces, donde radican las principales diferencias, y esbozaremos u omitiremos las demostraciones que sigan de cerca los argumentos del Teorema 145.

Dado $\omega \in Y$, escribimos $\bar{\eta}^{(\omega)} = \bar{\nu}^{(\omega)} \times \bar{\vartheta}$. Para $s \in [-\beta, \beta]$ consideremos la proyección ortogonal Π_s en el espacio lineal generado por el vector $(1, e^s)$, i.e. $\Pi_s(x, y) = x + e^s y$, y escribamos $\bar{\Pi}_s = \Pi_s \circ \Delta_\omega$ donde, abusando un poco de la notación, también denotamos por $\Delta_\omega : \mathbb{X}_\infty^{(\omega)} \times \mathbb{X}' \rightarrow [0, 1]^2$ la función de codificación del producto

$$\Delta_\omega(u, u') = (\Delta_\omega(u), \Delta'(u')).$$

Para cada $\omega \in Y$, denotemos la medida proyectada $\bar{\Pi}_s \bar{\eta}^{(\omega)}$ por $\eta_s^{(\omega)}$. Entonces $\eta_s^{(\omega)}$ no es otra cosa que la convolución $\nu^{(\omega)} * A_{e^s} \vartheta$ en la que estamos interesados.

Para $(u, \nu) \in \mathbb{X}_n^{(\omega)} \times \mathbb{X}'_n$, definimos la función producto $h_{u, \nu}^{(\omega)} : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]^2$ por la fórmula

$$h_{u, \nu}^{(\omega)}(x, y) := \left(f_u^{(\omega)}(x), g_\nu(y) \right).$$

A lo largo de la demostración va a ser importante trabajar con familias de pares (u, v) tales que la excentricidad del rectángulo $h_{u,v}^\omega([0, 1])^2$ sea acotada, y se comporte como una rotación bajo la acción del skew-product \mathbf{S} . Para hacer esto, necesitamos introducir un número de familias de pares de palabras. Familias similares aparecen en [43], aunque aquí necesitaremos una familia adicional debido a la configuración algo más complicada.

Por lo tanto, consideremos las familias $\mathbb{W}^{(\omega)} = (\mathbb{W}_n^{(\omega)})_{n \in \mathbb{N}}$, $\mathbb{Y}^{(\omega)} = (\mathbb{Y}_n^{(\omega)})_{n \in \mathbb{N}}$ y $\mathbb{Z}^{(\omega)} = (\mathbb{Z}_n^{(\omega)})_{n \geq 3l}$ de pares de palabras definidas como

$$\begin{aligned}\mathbb{W}_n^{(\omega)} &= \mathbb{X}_{rn}^{(\omega)} \times \mathbb{X}'_{n+2l\xi_n^{(\omega)}}, \\ \mathbb{Y}_n^{(\omega)} &= \mathbb{X}_{rn}^{(\omega)} \times \mathbb{X}'_{n+2l(\xi_n^{(\omega)}+1)}, \\ \mathbb{Z}_n^{(\omega)} &= \mathbb{X}_{rn}^{(\omega)} \times \mathbb{X}'_{n+2l(\xi_n^{(\omega)}-1)},\end{aligned}$$

donde $\xi_n^{(\omega)} := \#\{k \in \{1, \dots, n\} : \mathbf{R}^{k-1}(\omega, 0) + \alpha(\mathbf{T}^{rk}(\omega)) \geq \beta\}$ cuenta el número de veces $k \leq n$ para el cual la k -ésima rotación del origen $0 \in S_\beta^1$ dada por $\mathbf{R}^k(\omega, 0)$ cruza el punto final β . Si identificamos cada palabra $(u, v) \in \mathbb{X}_n^{(\omega)} \times \mathbb{X}'_n$ con el rectángulo $Q_{u,v}^{(\omega)} := I_u^{(\omega)} \times I_v$, obtenido como la imagen de la función $h_{u,v}^{(\omega)}$, entonces tenemos las siguientes propiedades de $\mathbb{W}^{(\omega)}$, $\mathbb{Y}^{(\omega)}$ y $\mathbb{Z}^{(\omega)}$:

- i. Cada rectángulo de $\mathbb{W}^{(\omega)}$, $\mathbb{Y}^{(\omega)}$ y $\mathbb{Z}^{(\omega)}$ es el producto de intervalos básicos de $C^{(\omega)}$ y C' (donde C' es la imagen de \mathbb{X}' bajo la función de codificación), cada uno de esos posiblemente pertenezca a diferentes pasos de las construcción de $C^{(\omega)}$ y C' , respectivamente.
- ii. Un simple cálculo usando (6.7) y (6.8) muestra que el tamaño de todos los rectángulos en $\mathbb{W}_n^{(\omega)}$, $\mathbb{Y}_n^{(\omega)}$ y $\mathbb{Z}_n^{(\omega)}$ es, respectivamente,

$$\begin{aligned}a_{\omega_1} \dots a_{\omega_m} \times a_{\omega_1} \dots a_{\omega_m} e^{\mathbf{R}^n(\omega, 0)}, \\ a_{\omega_1} \dots a_{\omega_m} \times a_{\omega_1} \dots a_{\omega_m} e^{\mathbf{R}^n(\omega, 0) - 2\beta}, \\ a_{\omega_1} \dots a_{\omega_m} \times a_{\omega_1} \dots a_{\omega_m} e^{\mathbf{R}^n(\omega, 0) + 2\beta}.\end{aligned}$$

En particular, la excentricidad de los rectángulos en cada familia, i.e. su relación altura-ancho, siempre son acotados entre $e^{-3\beta}$ y $e^{3\beta}$.

- iii. Bajo la convención $\mathbb{W}_0^{(\omega)} := \{[0, 1]^2\}$, para $n \in \mathbb{N}_0$ los rectángulos en $\mathbb{W}_{n+1}^{(\omega)}$ son obtenidos de aquellos en $\mathbb{W}_n^{(\omega)}$ avanzando r pasos en la construcción de $C^{(\omega)}$, y avanzando un paso en la construcción de C' si el rectángulo resultante tiene excentricidad entre $e^{-\beta}$ y e^β , o $2l + 1$ pasos en la construcción en cualquier otro caso. Por (6.7), la primer opción incrementa la excentricidad del rectángulo resultante por un factor de $e^{\mathbf{R}^{n+1}(\omega, 0) - \mathbf{R}^n(\omega, 0)}$ con respecto a su predecesor en $\mathbb{W}_n^{(\omega)}$, mientras que la segunda opción tiene el efecto de llevar la excentricidad del rectángulo resultante a un valor entre $e^{-\beta}$ y e^β .

- iv. Los rectángulos en $\mathbb{Y}_n^{(\omega)}$ son obtenidos de los de $\mathbb{W}_n^{(\omega)}$ avanzando $2l$ pasos en la construcción de C' y manteniendo los mismos intervalos básicos en la construcción de $C^{(\omega)}$. Esto produce rectángulos con mayor ancho que alto.
- v. Los rectángulos en $\mathbb{Z}_n^{(\omega)}$ son obtenidos de los de $\mathbb{W}_n^{(\omega)}$ yendo $2l$ pasos hacia atrás en la construcción de C' (notar que eso es posible porque $n \geq 3l$) manteniendo los mismos intervalos básicos en la construcción de $C^{(\omega)}$. Esto produce rectángulos con mayor altura que ancho.
- vi. Para cada $n \in \mathbb{N}$, los rectángulos en $\mathbb{W}_n^{(\omega)}$ cubren el conjunto producto $C^{(\omega)} \times C'$ (y los rectángulos simbólicos son disjuntos, aunque sus proyecciones geométricas pueden solaparse). La misma afirmación vale para $\mathbb{Y}_n^{(\omega)}$ y $\mathbb{Z}_n^{(\omega)}$.

A partir de las consideraciones anteriores es fácil ver que para $(u, v) \in \mathbb{W}_n^{(\omega)}$ podemos descomponer $h_{u,v}^{(\omega)}$ como

$$h_{u,v}^{(\omega)}(x, y) = a_{\omega_1} \dots a_{\omega_m}(x, e^{\mathbf{R}^n(\omega, 0)}y) + (t_u^{(\omega)}, t_v) \quad (6.29)$$

para ciertas translaciones $t_u^{(\omega)}, t_v \in [0, 1]$. Más aún, si $H_{u,v}^{(\omega)}$ denota la inversa de $h_{u,v}^{(\omega)}$, entonces de (6.29) obtenemos

$$H_{u,v}^{(\omega)}(x, y) = \frac{1}{a_{\omega_1} \dots a_{\omega_m}}(x, e^{-\mathbf{R}^n(\omega, 0)}y) - \frac{1}{a_{\omega_1} \dots a_{\omega_m}}(t_u^{(\omega)}, e^{-\mathbf{R}^n(\omega, 0)}t_v).$$

Obviamente, descomposiciones similares valen para $h_{u,v}^{(\omega)}$ y $H_{u,v}^{(\omega)}$ siempre que $(u, v) \in \mathbb{Y}_n^{(\omega)}$ o $(u, v) \in \mathbb{Z}_n^{(\omega)}$.

Notamos que la familia $(\bar{\eta}^{(\omega)})_{\omega \in Y}$ satisface las siguientes condiciones, muy relacionadas con (a)-(c) dadas antes.

(a') Cada $\bar{\eta}^{(\omega)}$ está soportada en $\mathbb{X}_{\infty}^{(\omega)} \times \mathbb{X}'_{\infty}$.

(b') La función $\omega \mapsto \bar{\eta}^{(\omega)}$ es continua.

(c') Existe $K'' > 0$ tal que

$$\bar{\eta}^{(\omega)}([uv]_{\omega} \times [u'v']) \leq K'' \bar{\eta}^{(\omega)}([u]_{\omega} \times [u']) \bar{\eta}^{(\mathbf{T}^n \omega)}([v]_{\mathbf{T}^n \omega} \times [v']), \quad (6.30)$$

para todo $\omega \in Y$, todo $(u, u') \in \mathbb{W}_n^{(\omega)} \cup \mathbb{Y}_n^{(\omega)} \cup \mathbb{Z}_n^{(\omega)}$, y todo $(v, v') \in \mathbb{X}_m^{(\mathbf{T}^n \omega)} \times \mathbb{X}'_{m'}$.

De hecho probaremos el resultado para proyecciones de familias de medidas $\bar{\eta}^{(\omega)}$ satisfaciendo esas condiciones (i.e. no importará que $\bar{\eta}^{(\omega)}$ sea una medida producto para cada ω).

Un cociclo multiplicativo

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $L_n^{(\omega)}$ como el único entero no negativo tal que

$$2^{-L_n^{(\omega)}} \leq a_{\omega_1} \cdots a_{\omega_m} < 2^{1-L_n^{(\omega)}}, \quad (6.31)$$

y, como en la demostración del Teorema 145, consideramos las familias encajadas de intervalos $\mathfrak{D}_n^{(\omega)}$ dadas por

$$\mathfrak{D}_n^{(\omega)} = \{[2^{-L_n^{(\omega)}} j, 2^{-L_n^{(\omega)}} (j+1)] : j \in \mathbb{Z}\}.$$

Con esto, para $q > 1$ definimos las funciones $\tau_{q,n} : Y \times S_\beta^1 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\tau_{q,n}(\omega, s) := \sum_{I \in \mathfrak{D}_n^{(\omega)}} \left(\eta_s^{(\omega)}(I) \right)^q. \quad (6.32)$$

Similarmente a la demostración del Teorema 145, mostraremos que $\tau_{q,n}$ es un cociclo submultiplicativo (salvo una constante multiplicativa), y entonces construiremos un “mejor” cociclo $\bar{\tau}_{q,n}$ que sea comparable con $\tau_{q,n}$. A diferencia de la situación del Teorema 145, las funciones $\bar{\tau}_{q,n}$ no serán continuas, pero será aproximable por funciones continuas en una forma adecuada. Como q estará fijo, lo sacaremos de la notación.

Por lo tanto, el primer paso a probar es que existe $K_1 > 1$ tal que para todo $n, m \in \mathbb{N}$ and $(\omega, s) \in Y \times S_\beta^1$, uno tiene que

$$\tau_{n+m}(\omega, s) \leq K_1 \tau_n(\omega, s) \tau_m(\mathbf{S}^n(\omega, s)). \quad (6.33)$$

Para ver esto, fijemos $n, m \in \mathbb{N}$, $(\omega, s) \in Y \times S_\beta^1$, y veamos que vale (6.33). Consideraremos tres casos separados, dependiendo de si $-\beta \leq \mathbf{R}^n(\omega, 0) + s < \beta$, $\mathbf{R}^n(\omega, 0) + s \geq \beta$ o $\mathbf{R}^n(\omega, 0) + s < -\beta$. En el primer caso uno tiene $\mathbf{R}^n(\omega, s) = \mathbf{R}^n(\omega, 0) + s$ mientras que en el segundo tenemos $\mathbf{R}^n(\omega, s) = \mathbf{R}^n(\omega, 0) + s - 2\beta$ y en el tercero vale sin embargo que $\mathbf{R}^n(\omega, s) = \mathbf{R}^n(\omega, 0) + s + 2\beta$. Para la prueba en el primer caso usaremos solo la familia $\mathbb{W}^{(\omega)}$, y lo remplazamos con la familia $\mathbb{Y}^{(\omega)}$ para la prueba del segundo caso, y con $\mathbb{Z}^{(\omega)}$ para la prueba del tercero. Excepto por esa diferencia, la prueba de los tres casos son completamente análogas por lo que solo comentaremos el primer caso.

La prueba es una variante menor de la demostración de (6.14). Dado $J \in \mathfrak{D}_n^{(\omega)}$ definamos

$$\mathbb{W}_J^{(\omega)}(s) := \{(u, v) \in \mathbb{W}_n^{(\omega)} : ([u]_\omega \times [v]) \cap \bar{\Pi}_s^{-1}(J) \neq \emptyset\}$$

y consideremos el intervalo \widehat{J} que tiene el mismo centro que J pero de longitud $|\widehat{J}| = 65e^{2\beta}|J|$. La constante es tomada para asegurar que $\bar{\Pi}_s([u]_\omega \times [v]) \subset \widehat{J}$ para todo $(u, v) \in \mathbb{W}_J^{(\omega)}(s)$.

Si $I \in \mathfrak{D}_{n+m}^{(\omega)}$ es tal que $I \subset J$, entonces

$$\eta_s^{(\omega)}(I) \leq K'' \sum_{(u,v) \in \mathbb{W}_J^{(\omega)}(s)} \bar{\eta}^{(\omega)}([u]_\omega \times [v]) \eta^{(\mathbf{T}^m \omega)}(H_{u,v}^{(\omega)} \Pi_s^{-1}(I))$$

Esto puede verse en una forma muy similar a (6.17); por lo que omitiremos los detalles. Si continuamos argumentando como en la demostración del Teorema 145, obtenemos más

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{I \in \mathfrak{D}_{n+m}^{(\omega)} \\ I \subset J}} \left(\eta_s^{(\omega)}(I) \right)^q &\leq (K'')^q \left(\eta_s^{(\omega)}(\widehat{J}) \right)^{q-1} \times \\ &\times \sum_{(u,v) \in \mathbb{W}_J^{(\omega)}(s)} \eta^{(\omega)}(Q_{u,v}) \sum_{\substack{I \in \mathfrak{D}_{n+m}^{(\omega)} \\ I \subset J}} \left(\eta^{\mathbf{T}^m(\omega)}(H_{u,v}^{(\omega)} \Pi_s^{-1}(I)) \right)^q, \end{aligned} \quad (6.34)$$

recordemos (6.19) y (6.20). Ahora usando (6.29) no es difícil de ver que para cualquiera de esos intervalos I y $(u, v) \in \mathbb{W}_J^{(\omega)}$ tenemos

$$H_{u,v}^{(\omega)} \Pi_s^{-1}(I) = \left(\Pi_s \circ h_{(u,v)}^{(\omega)} \right)^{-1}(I) = \Pi_t^{-1} \left(\frac{1}{a_{\omega_1} \cdots a_{\omega_m}} \cdot (I - \Pi_s(t_u^{(\omega)}, t_v^{(\omega)})) \right), \quad (6.35)$$

donde $t := \mathbf{R}^n(\omega, s)$ (de hecho, tenemos (6.35) para $t = \mathbf{R}^n(\omega, 0) + s$ el cual, en este caso, coincide con $\mathbf{R}^n(\omega, s)$; este es el punto en donde es importante usar la familia apropiada de rectángulos). Más aún, las familias $\mathfrak{D}_{n+m}^{(\omega)}$ y

$$\left\{ \frac{1}{a_{\omega_1} \cdots a_{\omega_m}} (I - \Pi_s(d_u^{(\omega)}, d_v^{(\omega)})) : I \in \mathfrak{D}_{n+m}^{(\omega)} \right\}$$

se puede ver que son 6-equivalentes, por lo tanto por Lema 150 y (6.35) obtenemos

$$\sum_{\substack{I \in \mathfrak{D}_{n+m}^{(\omega)} \\ I \subset J}} \left(\eta^{\mathbf{T}^m(\omega)}(H_{u,v}^{(\omega)} \Pi_s^{-1}(I)) \right)^q \leq 6^{q-1} \tau_m(\mathbf{T}^m(\omega), t) = 6^{q-1} \tau_m(\mathbf{S}^n(\omega, s)). \quad (6.36)$$

Combinando esto con (6.34), y razonando exactamente como al final de la Sección 6.2, finalmente deducimos que la relacion del cociclo (6.33) vale para algún $K_1 > 0$ dependiendo de q .

Una función C -aproximable por arriba análoga de τ_n

Para poder aplicar el Corolario 58, necesitamos un cociclo C -aproximable (recordemos la definición 56). A diferencia de la situación en el Teorema 145, hay ahora una discontinuidad inherente en el punto final del intervalo $[-\beta, \beta)$; tengamos en cuenta que la identificación de los puntos extremos es necesaria para aplicar herramientas de teoría ergódica, en lo que respecta a la definición geométrica de τ_n , no existe tal identificación. Este problema surge ya en [43, p. 107], donde (en el curso de probar que lo que efectivamente es un caso particular del Teorema 147) se afirma incorrectamente que las funciones ϕ_n (correspondientes a nuestra τ_n) son continuas. De hecho, hay continuidad hasta el punto final del intervalo. Afortunadamente,

esto resulta ser un problema menor, dado que el conjunto de discontinuidades es pequeño el nuevo cociclo sigue siendo C -aproximable por arriba.

Pasemos a los detalles. Primeramente, en estrecha analogía con la Sección 6.2, definimos

$$\psi_n^{(\omega)}(x, y) = \psi(2^{L_n^{(\omega)}}(x - y)).$$

donde $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ está soportada en $[-2, 2)$, $0 \leq \psi \leq 1$ y $\psi|_{[-1, 1)} \equiv 1$, y

$$\bar{\tau}_n(\omega, s) := \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \psi_n^{(\omega)}(x, y) d\eta_s^{(\omega)}(x) \right)^{q-1} d\eta_s^{(\omega)}(y).$$

Entonces uno puede checkear, como en la Sección 6.2, que existe una constante $M \geq 1$ tal que

$$M^{-1}\tau_n(\omega, s) \leq \bar{\tau}_n(\omega, s) \leq M\tau_n(\omega, s) \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}, (\omega, s) \in Y \times S_\beta^1, \quad (6.37)$$

y $\bar{\tau}_n$ es continua en $Y \times (-\beta, \beta)$. Como claramente tenemos $0 \leq \bar{\tau}_n \leq 1$, el hecho de que $\bar{\tau}_n$ es C -aproximable es ahora consecuencia del siguiente Lema.

Lema 153. *Dada una medida μ en Y , toda $f : Y \times S_\beta^1 \rightarrow \mathbb{R}$ acotada que es continua en $Y \times (-\beta, \beta)$ es también C -aproximable por arriba en $(Y \times S_\beta^1, \mu \times \mathcal{L}_\beta)$.*

Demostración. Para $\delta \in (0, \beta)$ sea $g : S_\beta^1 \rightarrow [0, 1]$ una función continua tal que $g|_{[\beta - \frac{1}{2}\delta, -\beta + \frac{1}{2}\delta]} \equiv 0$ y $g|_{[-\beta + \delta, \beta - \delta]} \equiv 1$, donde identificamos $-\beta = \beta$.

La función $M_\delta : Y \times S_\beta^1 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por la fórmula

$$M_\delta(\omega, s) = f(\omega, s)g(s) + \|f\|_\infty(1 - g(s))$$

es continua en $Y \times S_\beta^1$ y también satisface $f \leq M_\delta \leq 2\|f\|_\infty$. Más aún, como M_δ y f coinciden en $Y \times [-\beta + \delta, \beta - \delta]$, tenemos que

$$\int_{Y \times S_\beta^1} (M_\delta - f) d(\mu \times \mathcal{L}_\beta) \leq 2\|f\|_\infty \mathcal{L}_\beta([\beta - \delta, -\beta + \delta]) = \frac{2\delta\|f\|_\infty}{\beta}$$

lo que muestra que f es C -aproximable por arriba. □

Para esto, se sigue que si para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $\phi_n : Y \times S_\beta^1 \rightarrow \mathbb{R}$ por la fórmula

$$\phi_n := \log(K_1 \bar{\tau}_n)$$

donde K_1 es como en (6.33), entonces la sucesión $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es un cociclo subaditivo en $Y \times S_\beta^1$. Notar que cada ϕ_n está bien definida dado que τ_n , y por lo tanto también $\bar{\tau}_n$, son estrictamente positivas. Más aún, por el Lema 153 tenemos que ϕ_n será C -aproximable por arriba siempre que siga siendo acotada. Este hecho será una consecuencia de (6.37) y del siguiente Lema.

Lema 154. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos

$$0 < \inf_{(\omega, s) \in Y \times S_\beta^1} \tau_n(\omega, s) \leq \sup_{(\omega, s) \in Y \times S_\beta^1} \tau_n(\omega, s) < +\infty.$$

Demostración. Notar que, como $\eta_s^{(\omega)}$ es una probabilidad para cada (ω, s) , tenemos

$$\tau_n(\omega, s) = \sum_{I \in \mathfrak{D}_n^{(\omega)}} \left(\eta_s^{(\omega)}(I) \right)^q \leq \sum_{I \in \mathfrak{D}_n^{(\omega)}} \eta_s^{(\omega)}(I) = \eta_s^{(\omega)}(\mathbb{R}) = 1.$$

Para ver la otra desigualdad notemos que para todo $(\omega, s) \in Y \times S_\beta^1$ tenemos

$$\text{Sop}(\eta_s^{(\omega)}) \subseteq \Pi_s([0, 1] \times [0, 1]) \subseteq [0, 1 + e^\beta]$$

por lo que para cada $n \in \mathbb{N}$ existen como mucho $c_{n,\beta}$ intervalos $I \in \mathfrak{D}_n^{(\omega)}$ satisfaciendo $\eta_s^{(\omega)}(I) \neq 0$, donde $c_{n,\beta} \in \mathbb{N}$ es una constante que, como $\inf_{i=1, \dots, N} a_i > 0$, puede ser tomada independientemente de ω . Entonces, para cada (ω, s) existe como mínimo un $I \in \mathfrak{D}_n^{(\omega)}$ tal que $\eta_s^{(\omega)}(I) \geq \frac{1}{c_{n,\beta}}$, lo que implica que

$$\frac{1}{c_{n,\beta}^q} \leq \inf_{(\omega, s) \in \{1, \dots, N\}^{\mathbb{N}} \times S_\beta^1} \tau_n(\omega, s).$$

□

Conclusión de la demostración

El resto de la prueba del Teorema 147 sigue exactamente las mismas líneas de la prueba del Teorema 145. En particular, (6.13) vale en la forma actual. Los detalles se dejan al lector interesado.

6.4. Ejemplos y aplicaciones

6.4.1. El caso determinístico

Cuando hay solo $N = 1$ regla, obtenemos la siguiente consecuencia inmediata del Teorema 145

Corolario 155. Sea $\{f_j(x) = \lambda R_\alpha x + t_j\}_{j=1}^k$, donde $\lambda \in (0, 1)$, R_α es una rotación en $\alpha \in [0, 2\pi)$ y $t_j \in \mathbb{R}^2$ son translaciones. Sea $\bar{\eta}$ una medida en $\mathcal{X}_\infty := \{1, \dots, k\}^{\mathbb{N}}$ tal que

$$\bar{\eta}([uv]) \leq K \bar{\eta}[u] \bar{\eta}[v]$$

para algún $K > 1$ y toda palabra finita $u \in \mathcal{X}_m, v \in \mathcal{X}_n$, y sea η la proyección de $\bar{\eta}$ bajo la función de codificación.

Si α/π es irracional, entonces para todo $q \in (1, 2]$ y todo $v \in S^1$ vale que

$$D_q(\Pi_v \eta) = \min(D_q \eta, 1),$$

y más aún la convergencia de $-\frac{\log C_{\Pi_v \eta}^q(n)}{n(q-1)}$ a $\min(D_q \eta, 1)$ es uniforme sobre $v \in S^1$.

Demostración. El sistema dinámico $(Y \times S^1, \mathbf{S})$ degenera a una rotación por α en el círculo, para la cual la medida de Lebesgue es ergódica. Esto es entonces un caso especial del Teorema 145. \square

Las medidas $\bar{\eta}$ satisfaciendo las hipótesis incluyen el producto de medidas (Bernoulli) en \mathbb{X}_∞ . Cuando $\bar{\eta}$ es Bernoulli, tenemos que η es una medida autosimilar en el conjunto auto-similar correspondiente, por lo que en particular obtenemos la existencia y preservación de las dimensiones L^q de proyecciones de medidas autosimilares para sistemas iterados de funciones homogéneos en el plano (para el cual la parte lineal contiene una rotación irracional), independientemente de los solapamientos. Para dimensión de Hausdorff es sabido que vale incluso para sistemas no-homogéneos [16, 29]; a continuación recuperaremos esto como otra consecuencia del Teorema 145.

En una forma similar, tenemos la siguiente consecuencia de la demostración del Teorema 147.

Corolario 156. Para $(i, j) \in \{1, \dots, k_1\} \times \{1, \dots, k_2\}$, sea

$$f_{i,j}(x, y) = (ax + t_i, by + u_j),$$

donde $0 < a < b < 1$ y $t_i, u_j \in \mathbb{R}$.

Para $i = 1, 2$, sea \bar{v}_i una medida en $\{1, \dots, k_i\}^{\mathbb{N}}$ tal que

$$\bar{v}_i([uv]) \leq K \bar{v}_i([u]) \bar{v}_i([v]), \quad (6.38)$$

para toda palabra $u \in \{1, \dots, k_i\}^m, v \in \{1, \dots, k_i\}^n$. Sea v_i una proyección de \bar{v}_i bajo la respectiva función de codificación.

Si $\log a / \log b$ es irracional, entonces para todo $t > 0$,

$$D_q(v_1 * A_t v_2) = \min(D_q(v_1) + D_q(v_2), 1),$$

donde $A_t x = tx$, y más aún

$$-\frac{\log C_{v_1 * A_t v_2}^q(n)}{(q-1)n} \rightarrow \min(D_q(v_1) + D_q(v_2), 1)$$

uniformemente sobre subconjuntos compactos de $(0, +\infty)$.

Demostración. Como no hay espacio de códigos, la asunción de ergodicidad en el Teorema 147 se reduce a \mathcal{L}_b siendo ergódica para la función $s \mapsto s + \beta \ln(b/a)$ en S_β^1 , donde $\beta = \ln(b^{-\ell})$ y $\ell \in \mathbb{N}$ es arbitrariamente grande (recordemos (6.7) y (6.8); tomamos $r = 1$ pues $a < b$). Como $\log b / \log a$ es irracional, esos sistemas son isomorfos a una rotaciones irracionales para algún valor de ℓ , por lo tanto la afirmación se sigue de la prueba del Teorema 147. \square

Esto extiende [43, Teorema 1.1], y la mayor parte de las generalizaciones de la Sección [43, Section 5]. Más precisamente, permitimos superposiciones en la construcción, nuestras medidas en los conjuntos de Cantor son más generales, y obtenemos convergencia uniforme sobre conjuntos compactos de escalas t .

6.4.2. Medidas autosimilares aleatorias

A continuación volvemos al marco del Teorema 145 con N reglas diferentes, pero asumiendo que las medidas $\bar{\eta}^{(\omega)}$ tienen la siguiente estructura de producto. Para cada $i \in \{1, \dots, N\}$, sea $p_i = (p_{i,1}, \dots, p_{i,k_i})$ un vector de probabilidades, y sea

$$\bar{\eta}^{(\omega)} = \prod_{n=1}^{\infty} p_{\omega_n}. \quad (6.39)$$

Es inmediato que las propiedades (a)-(c) valen. (Recordar la Sección 6.1). Sea μ una medida ergódica para (Y, \mathbf{T}) , donde como de costumbre $Y = \{1, \dots, N\}^{\mathbb{N}}$.

Queremos obtener una fórmula explícita para las dimensiones L^q de las proyecciones $\eta^{(\omega)}$; para esto, necesitamos asumir cierta condición de separación. Por simplicidad asumimos la siguiente condición de separación fuerte:

$$\text{para cada } i \in \{1, \dots, N\}, \text{ los discos } f_1^{(i)}(B), \dots, f_{k_i}^{(i)}(B) \text{ son disjuntos,} \quad (6.40)$$

donde $B = B[0, R]$ es una bola tal que $f_j^{(i)}(B) \subset B$ para todo i, j , recordar la Sección 6.1. El siguiente Lema es standard, pero incluimos la demostración.

Lema 157. *Sea la familia $\bar{\eta}^{(\omega)}$ dada por (6.39), y supongamos que (6.40) vale. Entonces para cada $q > 1$, la dimensión L^q de $\eta^{(\omega)} = \Delta_\omega \bar{\eta}^{(\omega)}$ existe y es constante en el conjunto de puntos μ -genéricos ω , y está dada por el valor*

$$D^q(\eta^{(\omega)}) = \frac{\int \log(p_{\omega_1,1}^q + \dots + p_{\omega_1, k_{\omega_1}}^q) d\mu(\bar{\omega})}{(q-1) \int \log(\lambda_{\bar{\omega}_1}) d\mu(\bar{\omega})}. \quad (6.41)$$

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos

$$\theta_n(\omega) := \sum_{u \in \mathcal{X}_n^{(\omega)}} (\eta^{(\omega)}(B_u^{(\omega)}))^q.$$

Notar que tenemos

$$D^q(\eta^{(\omega)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \theta_n(\omega)}{(q-1) \log(\lambda_{\omega_1} \cdots \lambda_{\omega_n})}.$$

De hecho, esto se sigue de la definición de $L_n^{(\omega)}$ en la ecuación (6.11), y el hecho de que las familias $\mathfrak{D}_n^{(\omega)}$ y $\{B_u^{(\omega)} : |u| = n\}$ son C -equivalentes en $\text{sop}(\eta^{(\omega)})$ para algún $C > 0$, razonando como en la demostración de la ecuación (6.25).

Observar que en el n -ésimo paso de la construcción de $C^{(\omega)}$ tenemos $k_{\omega_1} \cdots k_{\omega_n}$ discos, cada uno de medida $p_{\omega_1, i_1} \cdots p_{\omega_n, i_n}$ (para una elección dada de $i_j \in \{1, \dots, k_{\omega_j}\}$). Entonces

$$\begin{aligned} \theta_n(\omega) &= \sum_{i_1 \in \{1, \dots, k_{\omega_1}\}} \cdots \sum_{i_n \in \{1, \dots, k_{\omega_n}\}} p_{\omega_1, i_1}^q \cdots p_{\omega_n, i_n}^q \\ &= \prod_{j=1}^n (p_{\omega_j, 1}^q + \cdots + p_{\omega_j, k_{\omega_j}}^q). \end{aligned}$$

Sea $H(\omega) := \log(p_{\omega_1, 1}^q + \cdots + p_{\omega_1, k_{\omega_1}}^q)$ (que es obviamente continua, pues depende solo de ω_1). Notemos entonces que $\log \theta_n(\omega) = \sum_{j=1}^n H(\mathbf{T}^{j-1}(\omega))$. Sea \mathcal{G} el conjunto de puntos μ -genericos. Si $\omega \in \mathcal{G}$, entonces

$$\frac{1}{n} \log \theta_n(\omega) \longrightarrow \int H(\bar{\omega}) d\mu(\bar{\omega}) = \int \log(p_{\bar{\omega}_1, 1}^q + \cdots + p_{\bar{\omega}_1, k_{\bar{\omega}_1}}^q) d\mu(\bar{\omega}). \quad (6.42)$$

Similarente, fue probado en la demostración del Lema 152 que para todo $\omega \in \mathcal{G}$,

$$\frac{\log(\lambda_{\omega_1} \cdots \lambda_{\omega_n})}{n} \longrightarrow \int \log(\lambda_{\bar{\omega}_1}) d\mu(\bar{\omega}). \quad (6.43)$$

Así, por las ecuaciones (6.42) y (6.43), concluimos que

$$\begin{aligned} (q-1)D^q(\eta^{(\omega)}) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log \theta_n(\omega)}{\log(\lambda_{\omega_1} \cdots \lambda_{\omega_n})} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n} \log \theta_n(\omega)}{\frac{1}{n} \log(\lambda_{\omega_1} \cdots \lambda_{\omega_n})} \\ &= \frac{\int \log(p_{\bar{\omega}_1, 1}^q + \cdots + p_{\bar{\omega}_1, k_{\bar{\omega}_1}}^q) d\mu(\bar{\omega})}{\int \log(\lambda_{\bar{\omega}_1}) d\mu(\bar{\omega})}. \end{aligned}$$

Esto concluye la demostración. □

Aplicando esto al caso en que μ es una medida de Bernoulli, obtenemos la siguiente consecuencia del Teorema 145.

Corolario 158. *Sea la familia $\bar{\eta}^{(\omega)}$ dada por (6.39), y supongamos que (6.40) vale. Sea $r = (r_1, \dots, r_N)$ un vector de probabilidad y sea μ la medida r -Bernoulli. Finalmete, asumamos que α_i/π es irracional para algún i con $r_i > 0$.*

Entonces para cada $q \in (1, 2]$ y cada μ -genérico ω

$$D_q(\Pi_v \eta^{(\omega)}) = \min(D(q), 1) \quad \text{para todo } v \in S^1,$$

donde

$$D(q) = \frac{\sum_{i=1}^N r_i \log(p_{i,1}^q + \cdots + p_{i,k_i}^q)}{(q-1) \sum_{i=1}^N r_i \log(\lambda_i)}.$$

Más aún, la convergencia de $-\frac{\log C_{\Pi_v \eta^{(\omega)}}^q(n)}{(q-1)n}$ a $\min(D(q), 1)$ es uniforme en $v \in S^1$.

Demostración. La ergodicidad de $\mu \times \mathcal{L}$ para el skew-product dado en (6.4) es clásica cuando μ es una medida de Bernoulli (asumiendo que algún α_i/π es irracional), ver por ejemplo [45, Corolario 4.5]. La afirmación es entonces inmediata del Teorema 145 y Lema 157. \square

6.4.3. Estimaciones uniformes para box-counting

Una cota superior en $C_\mu^q(n)$ para $q > 1$ provee (vía desigualdad de Hölder) una cota inferior en el número de cubos en \mathfrak{D}_n que intersecan el $\text{sop}(\mu)$:

$$1 = \sum_{I \in \mathfrak{D}_n} \mu(I) \leq \#\{I \in \mathfrak{D}_n : I \cap \text{sop}(\mu) \neq \emptyset\}^{1/q'} C_\mu^q(n)^{1/q}. \quad (6.44)$$

Junto con nuestros resultados principales, esto da cotas inferiores uniformes para “box-counting” para las proyecciones de los soportes de las medidas en cuestión. Daremos un ejemplo concreto.

Corolario 159. *Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto autosimilar, esto es, $A = \bigcup_{i=1}^k f_i(A)$ para algunas similitudes contractivas f_i . Si la parte ortogonal de alguna f_i es una rotación irracional, entonces para todo $\varepsilon > 0$ hay un $\delta > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ y $v \in S^1$, la proyección $\Pi_v A$ interseca al menos $\delta 2^{(\gamma-\varepsilon)n}$ intervalos en \mathfrak{D}_n , donde $\gamma = \min\{\dim_H(A), 1\}$.*

Demostración. Asumimos que $f_i(x) = \lambda R_\alpha(x) + t_i$ donde α/π es irracional y, más aún, la condición de separación fuerte vale. De hecho, cualquier conjunto autosimilar del plano A para el cual una de las funciones generadoras contienen una rotación irracional, contiene conjuntos autosimilares de esta especial forma y dimensión arbitrariamente cerca de la de A , ver por ejemplo [52, Lemma 4.2].

Si $\bar{\eta}$ es la medida $(\frac{1}{k}, \dots, \frac{1}{k})$ -Bernoulli en $\{1, \dots, k\}^{\mathbb{N}}$, y η es su proyección en A vía la función de codificación, entonces es bien sabido que $D_2(\eta) = \dim_H(A) = \log k / |\log \lambda|$. La afirmación ahora se sigue del Corolario 155 y (6.44). \square

6.4.4. Proyecciones de medidas no-homogeneas autosimilares

Usamos una representación integral de medidas autosimilares para recuperar un resultado de [29] en la dimensión de Hausdorff de proyecciones de medidas planas auto-similares. Sean $f_j(x) = \lambda_j R_{\alpha_j}(x) + t_j$, $j = 1, \dots, k$ similaridades contractivas (es decir, $\lambda_j \in (0, 1)$). Sea $\bar{p} = (\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_k)$ un vector de probabilidad y sea ν la medida autosimilar correspondiente. Es decir, ν es la proyección de la medida \bar{p} -Bernoulli $\bar{\nu}$ bajo la función de codificación Δ dada por

$$\{\Delta(u)\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} f_{u_1} \cdots f_{u_n}(B),$$

donde B es una bola suficientemente grande tal que $f_j(B) \subset B$ para todo j .

Fijemos un entero grande ℓ . Para cada $u \in \{1, \dots, k\}^\ell$, sea $N_j(u)$ que cuenta el número de veces que el símbolo j aparece en u , y escribamos $N(u) = (N_1(u), \dots, N_k(u))$. Notar que N toma valores en

$$\Sigma := \left\{ (\ell_1, \dots, \ell_k) : \ell_i \geq 0, \sum_i \ell_i = \ell \right\} \subset \{0, 1, \dots, \ell\}^k,$$

por lo tanto en particular $\#\Sigma \leq (\ell+1)^k$ (ésta es una estimación no muy delicada, pero suficiente para nosotros; la idea en que tiene tamaño polinomial en ℓ).

Además, si $N(u) = N(v)$, entonces las funciones f_u y f_v tienen la misma parte lineal (y posiblemente distintas traslaciones), donde como es usual $f_u = f_{u_1} \circ \cdots \circ f_{u_\ell}$. Por lo tanto, para cada $\sigma \in \Sigma$, $\{f_u : N(u) = \sigma\}$ es una regla válida en el sentido de la Sección 6.1.

Nuestro objetivo es desintegrar $\bar{\nu}$ sobre las fibras de la función

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (N(u_{(j-1)\ell+1} \dots u_{j\ell}))_{j \in \mathbb{N}}$$

que divide u en bloques de longitud ℓ y aplica N a cada bloque. Aunque dicha desintegración existe en un entorno muy general (ver por ejemplo [12, Capítulo 5]), en esta simple configuración hay una expresión explícita, que ahora describimos.

Para cada $\sigma \in \Sigma$, escribimos

$$r_\sigma = \sum_{u \in \{1, \dots, k\}^\ell : N(u) = \sigma} \bar{p}_{u_1} \cdots \bar{p}_{u_\ell} =: \sum_{u \in \{1, \dots, k\}^\ell : N(u) = \sigma} \bar{p}_u.$$

Consideramos la probabilidad condicional p_σ en la fibra $\{u \in \{1, \dots, k\}^\ell : N(u) = \sigma\}$, extendida a todo $\{1, \dots, k\}^\ell$ asignando masa cero al complemento de la fibra. Formalmente, $p_{\sigma, u} = \bar{p}_u / r_\sigma$ if $N(u) = \sigma$, y $p_{\sigma, u} = 0$ en otro caso.

Notar que uno puede muestrear una sucesión $u = (u_1, \dots, u_\ell)$ de acuerdo con ν en la forma siguiente: tomar $\sigma \in \Sigma$ de acuerdo con el vector de probabilidad r ; entonces tomar u de acuerdo con el vector de probabilidad p_σ . Gracias a la estructura producto de ν , esto se extiende a sucesiones infinitas como sigue.

Para cada $\omega \in \Sigma^{\mathbb{N}}$, sea $\bar{\eta}^{(\omega)}$ la medida producto $\prod_{i=1}^{\infty} p_{\omega_i}$ (esto es una medida en $(\{1, \dots, k\}^{\ell})^{\mathbb{N}}$, la que podemos identificar con $\{1, \dots, k\}^{\mathbb{N}}$ en forma canónica). Explicitamente,

$$\bar{\eta}^{(\omega)}([u_1, \dots, u_{n\ell}]) = p_{\omega_1, (u_1 \dots u_{\ell})} \cdots p_{\omega_n, (u_{(n-1)\ell+1} \dots u_{n\ell})}.$$

Finalmente, escribamos μ para la medida r -Bernoulli en $\Sigma^{\mathbb{N}}$.

Lema 160.

$$\bar{\nu}(\cdot) = \int_{\Sigma^{\mathbb{N}}} \bar{\eta}^{(\omega)}(\cdot) d\mu(\omega).$$

Demostración. Es suficiente chequear que ambas medidas coinciden en cualquier cilindro $A = [i_1 \dots i_{n\ell}] =: [v_1 \dots v_n]$ donde $v_j = (i_{(j-1)\ell+1} \dots i_{j\ell})$ (como cualquier cilindro se parte como una union finita de esos cilindros). Pero

$$\begin{aligned} \int \bar{\eta}^{(\omega)}(A) d\mu(\omega) &= \int_{\Sigma^{\mathbb{N}}} p_{\omega_1, v_1} \cdots p_{\omega_n, v_n} d\mu(\omega) \\ &= \int_{\omega_i = N(v_i)} p_{\omega_1, v_1} \cdots p_{\omega_n, v_n} d\mu(\omega) \\ &= \prod_{j=1}^n r_{N(v_j)} \prod_{j=1}^n p_{N(v_j), v_j} \\ &= \prod_{j=1}^n \bar{p}_{v_j} = \bar{\nu}(A). \end{aligned}$$

□

Hemos definido las cosas para que las funciones de codificación Δ_{ω} coincidan con la función de codificación original Δ para ν , después de la identificación usual de $(\{1, \dots, k\}^{\ell})^{\mathbb{N}}$ con $\{1, \dots, k\}^{\mathbb{N}}$. Por lo tanto, se sigue del Lema anterior que también

$$\nu = \int \eta^{(\omega)} d\mu(\omega). \quad (6.45)$$

Esta es la desintegración a la que nos referíamos arriba, y es preservada bajo proyecciones ortogonales.

Desafortunadamente, las dimensiones L^q no funcionan bien con las representaciones integrales, pero la dimensión de Hausdorff sí lo hace. Esto nos permite recuperar, vía una prueba bastante diferente que evita la maquinaria de procesos con valores en medidas, el siguiente resultado que fue primero obtenido en [29] (notemos, sin embargo, que los métodos de [29] se extienden a dimensiones más altas, mientras que nuestro enfoque no sirve para dimensiones $d \geq 3$).

Corolario 161. *Supongamos que f_i , \bar{p} y ν son como arriba, y asumamos además que la condición de separación (6.40) vale. Entonces*

$$\dim_H(\Pi_\nu \nu) = \min\{\dim_H \nu, 1\} \quad \text{para todo } \nu \in S^1.$$

Demostración. Se sigue de la definición de dimensión de Hausdorff de una medida y de la representación (6.45) que si $\dim_H(\Pi_\nu \eta^{(\omega)}) \geq s$ para μ -casi todo ω , entonces $\dim_H(\Pi_\nu \nu) \geq s$. Mostraremos que lo anterior vale para todo $\nu \in S^1$ con un valor de s que puede hacerse arbitrariamente cerca de $\min\{\dim_H \nu, 1\}$ tomando ℓ suficientemente grande.

Primero, la condición de separación implica que

$$\dim_H(\nu) = \frac{\sum_{i=1}^k \bar{p}_i \log(\bar{p}_i)}{\sum_{i=1}^k \bar{p}_i \log(\lambda_i)} = \frac{\sum_{u \in \{1, \dots, k\}^\ell} \bar{p}_u \log(\bar{p}_u)}{\sum_{u \in \{1, \dots, k\}^\ell} \bar{p}_u \log(\lambda_u)},$$

donde $\lambda_u = \lambda_{u_1} \cdots \lambda_{u_k}$, ver por ejemplo [11, Teorema 5.2.5].

Por otra parte, obtenemos del Corolario 158 que para todo ω μ -genérico, todo $\nu \in S^1$, y todo $q \in (1, 2]$,

$$\dim_H(\Pi_\nu \eta^{(\omega)}) \geq D_q(\Pi_\nu \eta^{(\omega)}) = \min\left(\frac{\sum_{\sigma \in \Sigma} r_\sigma \log(\sum_{u \in \{1, \dots, k\}^\ell} p_{\sigma, u}^q)}{(q-1) \sum_{\sigma \in \Sigma} r_\sigma \log(\lambda_\sigma)}, 1\right),$$

donde $\lambda_\sigma = \lambda_u$ para todo u tal que $N(u) = \sigma$. (Para la desigualdad de más a la izquierda, recordemos que la dimensión L^q con $q > 1$, es siempre una cota inferior para la dimensión de Hausdorff.) Haciendo $q \rightarrow 1^+$, y recordando las definiciones de r_σ , $p_{\sigma, u}$, tenemos que

$$\begin{aligned} \dim_H(\Pi_\nu \eta^{(\omega)}) &\geq \min\left(\frac{\sum_{\sigma \in \Sigma} r_\sigma \sum_{u \in \{1, \dots, k\}^\ell} p_{\sigma, u} \log p_{\sigma, u}}{\sum_{\sigma \in \Sigma} r_\sigma \log(\lambda_\sigma)}, 1\right) \\ &= \min\left(\frac{\sum_{u \in \{1, \dots, k\}^\ell} \bar{p}_u \log(\bar{p}_u / r_{N(u)})}{\sum_{u \in \{1, \dots, k\}^\ell} \bar{p}_u \log(\lambda_u)}, 1\right) \\ &\geq \min(\dim_H \nu, 1) - \frac{\sum_{u \in \{1, \dots, k\}^\ell} \bar{p}_u \log(r_{N(u)})}{\sum_{u \in \{1, \dots, k\}^\ell} \bar{p}_u \log(\lambda_u)} \\ &= \min(\dim_H \nu, 1) - \frac{\sum_{\sigma \in \Sigma} r_\sigma \log(r_\sigma)}{\ell \sum_{i=1}^k \bar{p}_i \log(\lambda_i)} \\ &\geq \min(\dim_H \nu, 1) + \frac{\log \#\Sigma}{\ell \sum_{i=1}^k \bar{p}_i \log(\lambda_i)} \\ &\geq \min(\dim_H \nu, 1) + \frac{k \log(\ell + 1)}{\ell \sum_{i=1}^k \bar{p}_i \log(\lambda_i)} \\ &\rightarrow \min(\dim_H \nu, 1) \text{ as } \ell \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

donde en la quinta línea usamos que la entropía de un vector de probabilidad de longitud M está acotado por M . Esto completa la demostración. \square

Bibliografía

- [1] Javier Ignacio Almarza. CP-chains and dimension preservation for projections of $(\times m, \times n)$ -invariant Gibbs measures. *Adv. Math.*, 304:227–265, 2017.
- [2] F. A. Behrend. On sets of integers which contain no three terms in arithmetical progression. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, 32:331–332, 1946.
- [3] V. Bergelson and A. Leibman. Polynomial extensions of van der Waerden’s and Szemerédi’s theorems. *J. Amer. Math. Soc.*, 9(3):725–753, 1996.
- [4] A. S. Besicovitch. On the definition of tangents to sets of infinite linear measure. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 52:20–29, 1956.
- [5] T. F. Bloom. A quantitative improvement for Roth’s theorem on arithmetic progressions. *J. Lond. Math. Soc. (2)*, 93(3):643–663, 2016.
- [6] Michael Boshernitzan and Jon Chaika. Dichotomy for arithmetic progressions in subsets of reals. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 144(12):5029–5034, 2016.
- [7] Vincent Chan, Izabella Łaba, and Malabika Pramanik. Finite configurations in sparse sets. *J. Anal. Math.*, 128:289–335, 2016.
- [8] Roy O. Davies, J. M. Marstrand, and S. J. Taylor. On the intersections of transforms of linear sets. *Colloq. Math.*, 7:237–243, 1959/1960.
- [9] Carlos Gustavo T. de A. Moreira. Sums of regular Cantor sets, dynamics and applications to number theory. *Period. Math. Hungar.*, 37(1-3):55–63, 1998. International Conference on Dimension and Dynamics (Miskolc, 1998).
- [10] J. Diestel. *Sequences and series in Banach spaces*, volume 92 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1984.
- [11] Gerald A. Edgar. *Integral, probability, and fractal measures*. Springer-Verlag, New York, 1998.
- [12] M. Einsiedler and T. Ward. *Ergodic theory with a view towards number theory*, volume 259 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag London, Ltd., London, 2011.

- [13] K. J. Falconer. *The geometry of fractal sets*, volume 85 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1986.
- [14] K. J. Falconer. On a problem of Erdos on fractal combinatorial geometry. *J. Combin. Theory Ser. A*, 59(1):142–148, 1992.
- [15] Kenneth J. Falconer. *Fractal geometry*. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, third edition, 2014. Mathematical foundations and applications.
- [16] Kenneth J. Falconer and Xiong Jin. Exact dimensionality and projections of random self-similar measures and sets. *J. Lond. Math. Soc. (2)*, 90(2):388–412, 2014.
- [17] Ai-Hua Fan, Ka-Sing Lau, and Hui Rao. Relationships between different dimensions of a measure. *Monatsh. Math.*, 135(3):191–201, 2002.
- [18] Ábel Farkas. Projections of self-similar sets with no separation condition. *Israel J. Math.*, 214(1):67–107, 2016.
- [19] Andrew Ferguson, Jonathan Fraser, and Tuomas Sahlsten. Scaling scenery of $(\times m, \times n)$ -invariant measures. *Adv. Math.*, 268:564–602, 2015.
- [20] Andrew Ferguson, Thomas Jordan, and Pablo Shmerkin. The Hausdorff dimension of the projections of self-affine carpets. *Fund. Math.*, 209(3):193–213, 2010.
- [21] Robert Fraser and Malabika Pramanik. Large sets avoiding patterns. *Anal. PDE*, 11(5):1083–1111, 2018.
- [22] Alex Furman. On the multiplicative ergodic theorem for uniquely ergodic systems. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 33(6):797–815, 1997.
- [23] Harry Furstenberg. Poincaré recurrence and number theory. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 5(3):211–234, 1981.
- [24] Daniel Galicer, Santiago Saglietti, Pablo Shmerkin, and Alexia Yavicoli. L^q dimensions and projections of random measures. *Nonlinearity*, 29(9):2609–2640, 2016.
- [25] Ben Green and Terence Tao. The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions. *Ann. of Math. (2)*, 167(2):481–547, 2008.
- [26] Viktor Harangi, Tamás Keleti, Gergely Kiss, Péter Maga, András Máthé, Pertti Mattila, and Balázs Strenner. How large dimension guarantees a given angle? *Monatsh. Math.*, 171(2):169–187, 2013.
- [27] Kevin Henriot, Izabella Łaba, and Malabika Pramanik. On polynomial configurations in fractal sets. *Analysis and PDE*, To appear, 2016.

- [28] Michael Hochman. On self-similar sets with overlaps and inverse theorems for entropy. *Ann. of Math. (2)*, 180(2):773–822, 2014.
- [29] Michael Hochman and Pablo Shmerkin. Local entropy averages and projections of fractal measures. *Ann. of Math. (2)*, 175(3):1001–1059, 2012.
- [30] Brian R. Hunt and Vadim Yu. Kaloshin. How projections affect the dimension spectrum of fractal measures. *Nonlinearity*, 10(5):1031–1046, 1997.
- [31] John E. Hutchinson. Fractals and self-similarity. *Indiana Univ. Math. J.*, 30(5):713–747, 1981.
- [32] Alex Iosevich and Boschen Liu. Equilateral triangles in subsets of r^d of large hausdorff dimension. arXiv:1603.01907, 2016.
- [33] Y. Katznelson and B. Weiss. A simple proof of some ergodic theorems. *Israel J. Math.*, 42(4):291–296, 1982.
- [34] Tamás Keleti. A 1-dimensional subset of the reals that intersects each of its translates in at most a single point. *Real Anal. Exchange*, 24(2):843–844, 1998/99.
- [35] Tamás Keleti. Construction of one-dimensional subsets of the reals not containing similar copies of given patterns. *Anal. PDE*, 1(1):29–33, 2008.
- [36] Tamás Keleti, Dániel T. Nagy, and Pablo Shmerkin. Squares and their centers. *J. Anal. Math.*, 134(2):643–669, 2018.
- [37] H. B. Keynes and D. Newton. Ergodic measures for non-abelian compact group extensions. *Compositio Math.*, 32(1):53–70, 1976.
- [38] Steven G. Krantz and Harold R. Parks. *Geometric integration theory*. Cornerstones. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2008.
- [39] Izabella Łaba and Malabika Pramanik. Arithmetic progressions in sets of fractional dimension. *Geom. Funct. Anal.*, 19(2):429–456, 2009.
- [40] Péter Maga. Full dimensional sets without given patterns. *Real Anal. Exchange*, 36(1):79–90, 2010/11.
- [41] András Máthé. Sets of large dimension not containing polynomial configurations. <http://arxiv.org/abs/1201.0548>, 2012.
- [42] Pertti Mattila. *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces*, volume 44 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. Fractals and rectifiability.

- [43] Fedor Nazarov, Yuval Peres, and Pablo Shmerkin. Convolutions of Cantor measures without resonance. *Israel J. Math.*, 187:93–116, 2012.
- [44] Jacob Palis and Floris Takens. *Hyperbolicity and sensitive chaotic dynamics at homoclinic bifurcations*, volume 35 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993. Fractal dimensions and infinitely many attractors.
- [45] William Parry. Skew products of shifts with a compact Lie group. *J. London Math. Soc.* (2), 56(2):395–404, 1997.
- [46] Yuval Peres and Pablo Shmerkin. Resonance between Cantor sets. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 29(1):201–221, 2009.
- [47] Yuval Peres and Boris Solomyak. Existence of L^q dimensions and entropy dimension for self-conformal measures. *Indiana Univ. Math. J.*, 49(4):1603–1621, 2000.
- [48] Klaus Roth. Sur quelques ensembles déntiers. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 234:388–390, 1952.
- [49] Lior Fishman Ryan Broderick and David Simmons. Quantitative results using variants of schmidt’s game: Dimension bounds, arithmetic progressions, and more. arXiv:1703.09015v3, 2017.
- [50] Tom Sanders. On Roth’s theorem on progressions. *Ann. of Math.* (2), 174(1):619–636, 2011.
- [51] A. Sárkőzy. On difference sets of sequences of integers. I. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 31(1–2):125–149, 1978.
- [52] Pablo Shmerkin. Projections of self-similar and related fractals: a survey of recent developments. In Christoph Bandt, Kenneth J Falconer, and Martina Zähle, editors, *Fractal Geometry and Stochastics V*, Progress in probability, pages 53–74. Birkhäuser, 2015.
- [53] Pablo Shmerkin and Boris Solomyak. Absolute continuity of self-similar measures, their projections and convolutions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 368(7):5125–5151, 2016.
- [54] E. Szemerédi. On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression. *Acta Arith.*, 27:199–245, 1975.
- [55] Terence Tao and T. Ziegler. The primes contain arbitrarily long polynomial progressions. *Acta Math.*, 201:213–305, 2008.
- [56] Terence Tao and Tamar Ziegler. Polynomial patterns in the primes. *Forum Math. Pi*, 6:e1, 60, 2018.

- [57] Molter Ursula and Yavicoli Alexia. Small sets containing any pattern. To appear in *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 2016.
- [58] Peter Walters. *An introduction to ergodic theory*, volume 79 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.
- [59] Richard L. Wheeden and Antoni Zygmund. *Measure and integral*. Marcel Dekker, Inc., New York-Basel, 1977. An introduction to real analysis, Pure and Applied Mathematics, Vol. 43.
- [60] Alexia Yavicoli. Large sets avoiding linear patterns. To appear in *Proceedings of AMS*, 2017.
- [61] Alexia Yavicoli. Thickness, winning sets and patterns (en preparación). 2018.