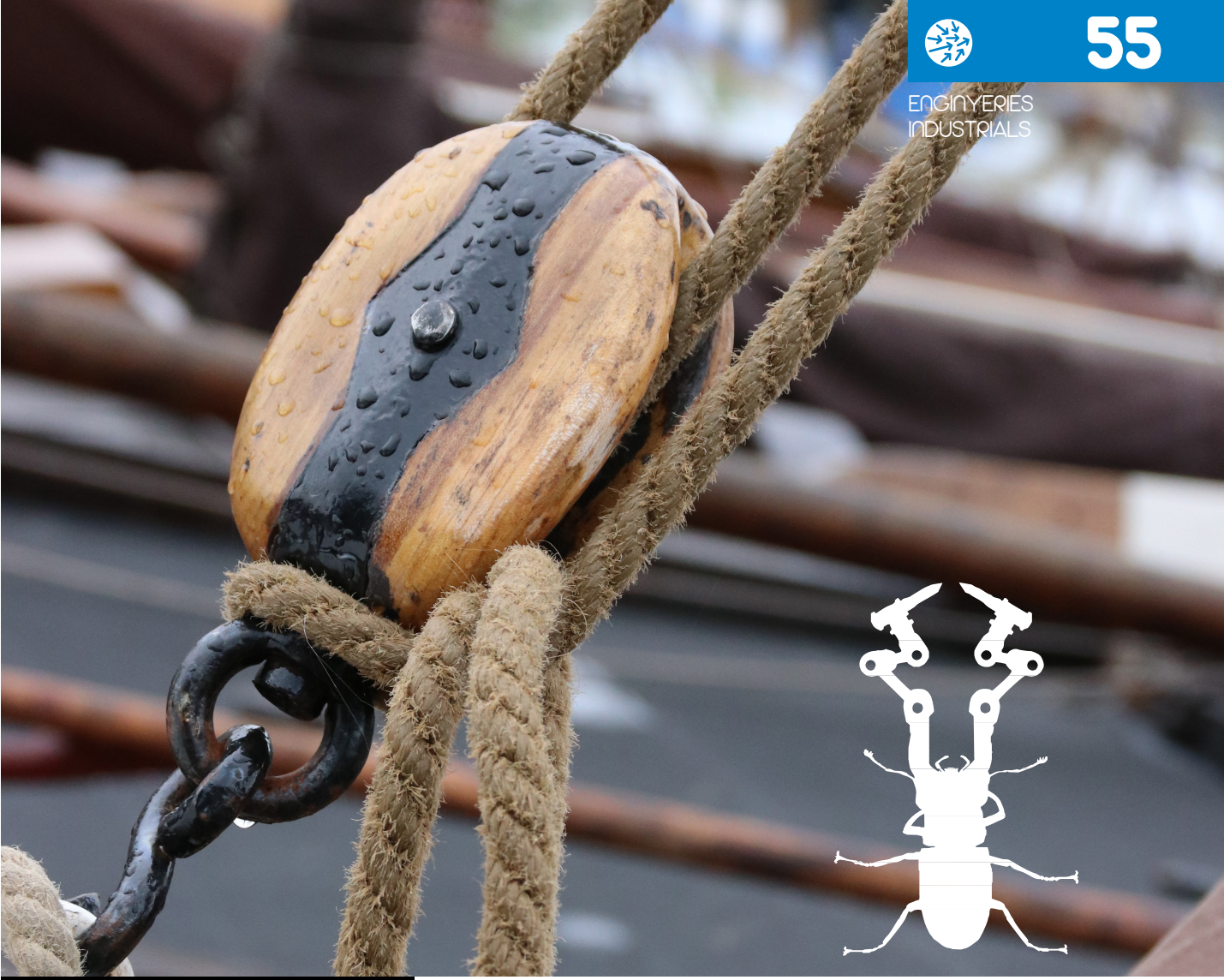


55

ENGINYERIES INDUSTRIALS

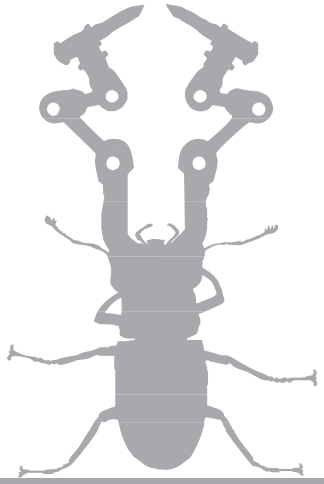
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA BARCELONATECH

UPCGRAU

Mecànica fonamental
Mecànica newtoniana per a l'enginyeria

Xavier Jaén
Josep Salud
Carina Serra
Jaume Calaf
Maria Khoury

55
ENGINYERIES
INDUSTRIALS



UNIVERSITAT POLITÈCNICA
DE CATALUNYA
BARCELONATECH

iniciativa
digital politècnica
Publicacions Acadèmiques UPC

UPCGRAU

Mecànica fonamental
Mecànica newtoniana per a l'enginyeria

Xavier Jaén
Josep Salud
Carina Serra
Jaume Calaf
Maria Khoury

Els autors i els col·laboradors: Manel Canales, Josep Sempau i Claudia Grossi, formen part del professorat del departament de física de la UPC.

Disseny i maquetació LaTeX feta pels autors, basada en Tufte-Latex de Bil Kleb, Bill Wood i Kevin Godby (2007-2015) que al seu torn s'han inspirat en els treballs d'Edward Tufte.

Primera edició: juliol de 2019
1a. Reimpressió: gener de 2020
2a. Reimpressió: febrer de 2021

© Els autors, 2019

© Iniciativa Digital Politècnica, 2019
Oficina de Publicacions Acadèmiques Digitals de la UPC
Edifici K2M, Planta S1, Despatx S103-S104
Jordi Girona 1-3, 08034 Barcelona
Tel.: 934 015 885
www.upc.edu/idp
E-mail: info.idp@upc.edu

ISBN: 978-84-9880-772-1

Els continguts d'aquesta obra estan subjectes a la llicència de Creative Common: Reconeixement-NoComercial-SenseObraDerivada 3.0

Index

Pròleg **11**

1 Fonaments fisicomatemàtics de la mecànica **17**
Introducció . . . 17
1.1 Espai, temps i sistemes de referència . . . 17
1.2 Coordenades cartesianes euclidianes. Distància . . . 18
1.3 Escalars i vectors . . . 18
1.4 Principi de simetria . . . 24
1.5 Mesurament i tractament de dades experimentals . . . 25
1.6 Primera llei de Newton. Sistemes de referència inercials . . . 33
1.7 Cinemàtica del punt: posició, trajectòria, velocitat i acceleració . . . 36

2 Dinàmica d'una partícula **43**
Introducció . . . 43
2.1 Primera i segona lleis de Newton . . . 44
2.2 Força i quantitat de moviment . . . 49
2.3 Moment d'una força i moment angular d'una partícula . . . 51
2.4 Treball, energia cinètica i energia potencial. Potència . . . 54
2.5 Algunes forces . . . 63

3 Dinàmica de N partícules **75**
Introducció . . . 75
3.1 Forces entre partícules. Segona i tercera lleis de Newton . . . 75
3.2 Força resultant i centre de masses . . . 76
3.3 Quantitat de moviment . . . 80
3.4 Moment angular . . . 82
3.5 Treball, energia cinètica i energia potencial . . . 84
3.6 Xocs . . . 89
3.7 Interacció gravitatòria i electromagnètica . . . 91
3.8 Lligams i reaccions. Desplaçaments possibles i desplaçaments virtuals. Reaccions ideals . . . 94

3.9 Equació general de la dinàmica o principi de D'Alembert . . . 98
3.10 Sistema amb lligams conservatiu. Conservació de l'energia . . . 99
3.11 Sòlid rígid . . . 104
3.12 Tòpics de cinemàtica del sòlid . . . 106
3.13 Equacions de moviment del sòlid rígid . . . 109
3.14 Parell de forces . . . 112

4 Estàtica dels sòlids rígids 117
Introducció . . . 117
4.1 Estàtica del sòlid: condicions d'equilibri . . . 117
4.2 Pes i centre de gravetat . . . 120
4.3 Forces sobre sòlids degudes a fluids gravitants. Principi d'Arquimedes . . . 120
4.4 Lligams i forces de reacció . . . 125
4.5 Estàtica de N sòlids rígids . . . 125
4.6 Principi dels treballs virtuals . . . 127
4.7 Equilibri i estabilitat de sistemes conservatius . . . 130

5 Dinàmica del sòlid rígid en el pla 135
Introducció . . . 135
5.1 Equació de translació 3 D . . . 136
5.2 Equació de rotació per al moviment pla (2 D) . . . 136
5.3 Energia cinètica de rotació i translació. Conservació de l'energia . . . 144

6 Petites oscil·lacions 153
Introducció . . . 153
6.1 Petites oscil·lacions al voltant d'una posició d'equilibri estable . . . 153
6.2 Moviment harmònic simple (MHS) . . . 154
6.3 Moviment harmònic esmorteït (MHE) . . . 156
6.4 Moviment harmònic forçat (MHF) . . . 161

7 Ones mecàniques 167
Introducció . . . 167
7.1 Ones . . . 167
7.2 Ones planes i equació d'ones . . . 170
7.3 De les lleis de Newton a l'equació d'ones . . . 177
7.4 Anàlisi i síntesi de Fourier . . . 185

8 Fenòmens ondulatoris 189
Introducció . . . 189
8.1 Potència i intensitat de les ones planes . . . 189
8.2 Potència i intensitat de les ones esfèriques . . . 194

8.3 Transmissió i reflexió d'una ona en un canvi de medi . . . 196
8.4 Interferències i batecs . . . 198
8.5 Ones estacionàries . . . 202
8.6 Efecte Doppler i ones de xoc . . . 209
8.7 Difracció . . . 211

9 Equacions de Lagrange **215**
Introducció . . . 215
9.1 Equacions de Lagrange de segona classe . . . 215
9.2 Equacions de Lagrange . . . 217

1 Problemes i qüestions **223**
1.5 Mesurament i tractament de dades experimentals . . . 224
1.7 Cinemàtica del punt: posició, trajectòria, velocitat i acceleració . . . 224

2 Problemes i qüestions **227**
2.1 Segona llei de Newton. Força i massa. Mecànica predictiva. Superposició . . . 227
2.2 Força i quantitat de moviment . . . 228
2.3 Moment d'una força i moment angular d'una partícula . . . 230
2.4 Treball, energia cinètica i energia potencial. Potència . . . 231
2.5 Algunes forces . . . 236

3 Problemes i qüestions **243**
3.2 Centre de masses . . . 243
3.3 Quantitat de moviment . . . 247
3.4 Moment angular . . . 248
3.5 Treball, energia cinètica i energia potencial . . . 249
3.6 Xocs . . . 249
3.7 Interacció gravitatòria i electromagnètica . . . 252
3.10 Sistema amb lligams conservatiu. Conservació de l'energia . . . 253
3.12 Tòpics de cinemàtica del sòlid . . . 254
3.13 Equacions de moviment del sòlid rígid . . . 255

4 Problemes i qüestions **257**
4.2 Pes i centre de gravetat . . . 257
4.3 Forces sobre sòlids degudes a fluids gravitants. Principi d'Arquimedes . . . 257
4.5 Estàtica de N sòlids rígids . . . 260
4.7 Equilibri i estabilitat de sistemes conservatius . . . 269

5 Problemes i qüestions **277**
5.2 Equació de rotació per al moviment pla (2 D) . . . 277
5.3 Energia cinètica de rotació i translació. Conservació de l'energia . . . 285

6 Problemes i qüestions **291**
6.2 Moviment harmònic simple (MHS) 291
6.3 Moviment harmònic esmorteït (MHE) 298
6.4 Moviment harmònic forçat (MHF) 301

7 Problemes i qüestions **311**
7.2 Ones planes i equació d'ones 311
7.3 De les lleis de Newton a l'equació d'ones 313
7.4 Anàlisi i síntesi de Fourier 314

8 Problemes i qüestions **317**
8.1 Potència i intensitat de les ones planes 317
8.2 Potència i intensitat de les ones esfèriques 317
8.3 Transmissió i reflexió d'una ona en un canvi de medi 318
8.4 Interferències i batecs 320
8.5 Ones estacionàries 323
8.6 Efecte Doppler i ones de xoc 327

Solucions a les qüestions **329**

Taules **333**

Glossari **341**

Pròleg

La mecànica és una branca de la física que tracta de les relacions que tenen els objectes materials amb l'espai i el temps. El fet de tractar amb nocions tan bàsiques fa que la mecànica tingui unes característiques i una problemàtica específiques:

- La mecànica actua com a metallenguatge[1] de la física. És dins la mecànica que hem de dir alguna cosa del que entenem per matèria, espai, temps. Malgrat que conceptes com ara força o energia són emprats en moltes branques de la física, és en la mecànica que troben una primera definició sobre la qual s'assenten les altres.

- El fet que la mecànica tracti amb conceptes molt bàsics fa que aquests mateixos conceptes s'emprin en la vida quotidiana, deslligats de la física. Així, paraules com *longitud, distància, temps, velocitat, força, treball, energia* i la mateixa *mecànica* els fem servir diàriament en contextos molt diferents. Quan ens movem en contextos quotidians, no sempre funcionem de manera racional, i encara menys científica, i això és molt recomanable. La pega que té, pel que ens pertoca aquí, és que generem tot un seguit d'intuïcions que, sense voler-ho, acabem emprant en el context de la mecànica com a ciència, i això no és gaire recomanable.

- El concepte de mecànica també s'empra en molts contextos diferents dins i fora de la física. Així, tenim:

  – **Mecànica clàssica**. És la que tracta amb objectes de mida molt més gran que els àtoms i les molècules, per als quals no tenim problemes de fer-ne mesuraments espaciotemporals sense que els alterarem substancialment.
  – **Mecànica quàntica**. És la complementària a la clàssica. És la que sorgeix quan tractem amb objectes extremament petits, de l'ordre dels àtoms i les molècules. Objectes per als quals tenim problemes de fer-ne mesuraments espaciotemporals, perquè de fer-los, els alterarem substancialment. No sabem com fer-los; segons la mecànica quàntica, no és possible sense que es produeixi aquesta alteració.

[1] Un metallenguatge és un llenguatge artificial format per un repertori d'axiomes, postulats i regles, que serveix per descriure altres llenguatges, artificials o naturals.

- **Mecànica newtoniana**. És una mecànica clàssica que tracta amb objectes que es mouen a velocitats petites, comparades amb la de la llum.
- **Mecànica relativista**. És la que tracta amb objectes que es mouen a gran velocitat, comparada amb la de la llum. Pot ser clàssica, com la newtoniana, o quàntica. Encara avui s'està mirant d'establir els fonaments de la mecànica quàntica relativista.
- Mecànica de medis continus, mecànica de fluids, mecànica del sòlid rígid, mecànica estadística, mecànica analítica, mecànica de camps, enginyeria mecànica, biomecànica...

De totes aquestes, aquí tractarem de la mecànica newtoniana, que és una mecànica clàssica no relativista. Tracta amb objectes no extremament petits ni excessivament ràpids. Això abraça una bona part del món que ens envolta. Perquè ens entenguem, la mecànica newtoniana és la *mecànica del món quotidià*. Haurem d'anar molt en compte a no caure en intuïcions no fonamentades.

El capítol 1 tracta de la fonamentació més bàsica de la mecànica. Què entenem per espai i temps, però també quines parts de les matemàtiques ens seran útils en la descripció de les magnituds de la mecànica i el seu mesurament. Caracteritzarem les corbes traçades per punts a l'espai, però també la seva relació amb el temps: estudiem la cinemàtica, que podem entendre com una extensió de la geometria usual a l'espai-temps. En aquest capítol s'introdueixen conceptes com sistema de referències, primera llei de Newton, posició, velocitat i acceleració, entre d'altres.

El capítol 2 tracta de definir l'objecte estrella de la mecànica newtoniana: la *partícula newtoniana*. Aquest concepte ens ha de permetre més endavant construir objectes més propers als reals, com els sòlids rígids. I és aquest l'objectiu que ens porta a definir-la de partícula newtoniana. Tractarem de la dinàmica de la partícula, és a dir, quina trajectòria temporal traça quan se sotmet a diferents forces. En aquest capítol s'introdueixen la llei de moviment de Newton i els conceptes de quantitat de moviment, moment angular, força, moment d'una força, treball i energia, entre d'altres.

Al capítol 3 podem dir que *anem per feina*. Estenem els conceptes introduïts al capítol anterior a un conjunt N de partícules. Aquest N el podem entendre com un número finit $(1, 2, 3...)$ o infinit! En aquest últim cas, estarem tractant amb cossos continus. Veurem com els conceptes que introduïm per a N finit els podem traslladar al cas continu sense problemes. Començarem distingint entre forces internes i externes, i veient la llei d'acció-reacció de Newton. Introduirem el concepte fonamental de lligam i de reaccions ideals. Arribarem així a la part central del desenvolupament de la mecànica: l'*equació general de la dinàmica*. Aquesta equació és important perquè permet tractar sistemes mecànics complexos, que els enginyers

anomenarien *mecanismes* o *màquines*, aprofitant al màxim el coneixement de la geometria del mecanisme i eliminant les forces de reacció que apareixen com a conseqüència d'aquest mecanisme. En sistemes conservatius amb un grau de llibertat, podem emprar les propietats de la *funció energia mecànica del sistema* com a mètode de resolució. Per a sistemes de més d'un grau de llibertat i/o amb lligams dependents del temps, que queden fora del nivell d'aquest llibre, l'equació general de la dinàmica ens duria a la mecànica lagrangiana, que introduïm al capítol 9 només per als lectors afamats de mecànica. Introduirem també en aquest capítol 3 el *sòlid rígid*, entès com un sistema de partícules lligades. No tractarem aquí de la dinàmica del sòlid rígid, que posposem al capítol 5, però al capítol 4 tractarem de l'estàtica dels sòlids rígids.
És aquí on s'introdueix de manera general el concepte de *velocitat angular*.

El capítol 4, com ja hem comentat, tracta de l'estàtica o, més generalment, dels problemes d'equilibri dels sistemes de sòlids rígids, que inclouen l'estudi de l'estabilitat d'aquest equilibri. També tractem com representar bé algunes forces externes sobre els sòlids, com és el cas del pes i de les forces exercides per fluids gravitants sobre els sòlids que hi estan en contacte. El problema de l'estàtica es planteja com un problema invers de mecànica. Si, en general, pensem que el problema estàndard de la mecànica és trobar el moviment del sistema sotmès a unes forces conegudes, ara aquest *moviment* és conegut, ja que volem que es mantingui en repòs. Les incògnites, més enllà de les forces de reacció, seran algunes altres forces o també la mateixa configuració del sistema.

El capítol 5 tracta de la dinàmica del sòlid rígid. Per això ens caldrà acabar d'expressar les equacions de moviment que hem trobat al capítol 3 en funció dels graus de llibertat adients. Per raons de dificultat, restringirem el nostre estudi a situacions en què les rotacions tenen l'eix en una direcció fixa de l'espai, que anomenarem *rotacions 2 D*.
És aquí on introduïm el concepte de *moment d'inèrcia respecte d'un eix*.

El capítol 6 tracta del problema de les petites oscil·lacions de sistemes amb un grau de llibertat. Veurem com aquest problema és de gran interès atès que qualsevol sistema en equilibri estable per a petites desviacions d'aquesta configuració fa un moviment harmònic les característiques del qual són independents del coneixement exacte de les forces que hi actuen. Per aquesta raó, l'estudi el farem amb un cert grau d'abstracció, introduint el concepte d'equació canònica del moviment harmònic per als casos simple, esmorteït i forçat. En aquest capítol, s'introdueixen els conceptes d'elongació, pulsació, període, amplitud i fase, així com l'important concepte de ressonància.

Els capítols 7 i 8 estan dedicats a l'estudi dels fenòmens ondulatoris, entesos com a fenòmens mecànics. Hom pot entendre l'estudi del moviment ondulatori com

una extensió de l'estudi del moviment harmònic que s'ha fet al capítol 6, però per raó de la seva complexitat i de la varietat de fets perceptibles que abraça, l'hem tractat d'una forma més propera a la fenomenologia que al pur desenvolupament matemàtic formal.

El capítol 9, com ja hem comentat, només justifica la seva presència per tal que qui ho desitgi pugui percebre un tast de la mecànica analítica i la seva relació amb la mecànica newtoniana a través de l'equació general de la dinàmica. Partint d'aquesta, es dedueixen les equacions de moviment de Lagrange per a sistemes amb lligams geomètrics dependents del temps, que serien l'extensió a L graus de llibertat de les equacions que hem trobat al capítol 3 per a sistemes conservatius emprant la funció d'energia mecànica del sistema, que ara quedaria, en certa manera, substituïda per la funció de Lagrange o lagrangiana. No anem més enllà perquè l'únic objectiu és fer el pont entre la mecànica newtoniana i la lagrangiana, analítica en general, que es pot trobar en molts de textos.

Finalment, cal dir que cada capítol conté, en paral·lel al desenvolupament de la teoria, alguns problemes resolts que ajuden i contextualitzen aquesta teoria. A la part final del llibre, podreu trobar, ordenats per capítols i seccions, més problemes i qüestions. Alguns dels problemes estan resolts i de la resta se'n dóna la solució.

1 Fonaments fisicomatemàtics de la mecànica

Introducció

Aquest capítol és una barreja de física i matemàtiques. Això és així perquè, quan es tracten els conceptes més bàsics de física, la línia que separa aquesta de les matemàtiques s'aprima moltíssim.

1.1 Espai, temps i sistemes de referència

La física en general, i la mecànica en particular, estudia el comportament dels objectes a l'espaitemps. La realitat o no d'aquest espaitemps no la discutirem, com sí que ho fan algunes teories físiques actuals. En tenim prou a pensar que l'espaitemps és una construcció intel·lectual que ens és molt útil per tal d'organitzar tot allò que s'esdevé. Tots estem d'acord a organitzar les percepcions del que s'esdevé situant-les en diferents instants de temps en un espai tridimensional.

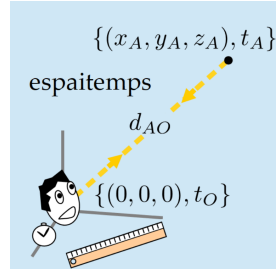


Fig. 1.1: Observador

Un **observador** (vegeu la figura 1.1) és un sistema de registre (humà o automàtic) de la posició dels objectes a l'espai a cada **instant**. Podrà assignar a cada punt A una tríada de nombres que l'etiqueten unívocament: les coordenades del punt $A = (x_A, y_A, z_A)$. Podrà assignar a cada punt A un temps t_A **sincronitzat** amb el temps del seu rellotge t_O utilitzant la **velocitat màxima** de què disposi c

$$t_A - t_O = d_{AO}/c \tag{1.1}$$

on d_{AO} és la **distància** entre el punt A i el punt on es troba el rellotge de l'observador. Més endavant veurem que fer servir una velocitat que no sigui la màxima dóna lloc a inconsistències.

El conjunt d'objectes i marques que l'observador utilitza constitueixen el **sistema de referència**.

Per acord internacional, tots els observadors defineixen els patrons d'espai i temps

de la mateixa manera. El BIPM (Bureau International des Poids et Mesures) és l'organisme que supervisa el S.I. (Système internationale d'unités). Les últimes definicions són:

➔ **Unitat de temps. El segon, s:** un interval temporal de 1 segon és igual a 9192631770 períodes de la radiació corresponent a la transició entre els dos nivells hiperfins dels estats fonamentals de l'àtom de cesi 133. (Adoptada l'any 1967).

➔ **Unitat de distància. El metre, m:** un interval espacial de 1 metre és igual a la distància recorreguda per la llum en el buit durant un interval de temps de $1/299792458$ s. (Adoptada l'any 1983).

1.2 Coordenades cartesianes euclidianes. Distància

Un fet destacable de l'espai físic és que pot ser etiquetat emprant les **coordenades cartesianes euclidianes** (si no hi ha dubtes, simplement cartesianes) amb la important propietat que la distància o camí més curt entre dos punts $A = (x_A, y_A, z_A)$ i $B = (x_B, y_B, z_B)$ (vegeu les figures 1.2 i 1.3) es pot expressar com

$$d(A,B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2} \qquad (1.2)$$

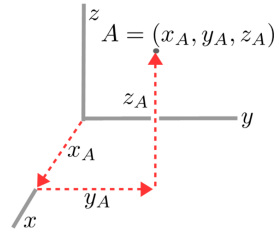


Fig. 1.2: Coordenades cartesianes euclidianes del punt A

Per exemple, a l'espai de punts de la superfície d'una esfera, això no és possible.

El punt $(0,0,0)$ és l'**origen de coordenades** i les rectes $(x,0,0)$, $(0,y,0)$ i $(0,0,z)$ són els **eixos coordenats**.

1.3 Escalars i vectors

Les magnituds físiques tenen unes característiques amb relació a l'observador que les mesura. Atenent aquest criteri, destaquem i utilitzarem dues categories de magnituds físiques: escalars i vectors.

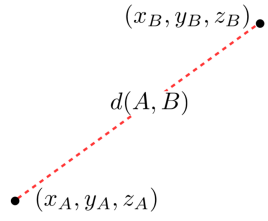


Fig. 1.3: Distància del punt A al B

➔ **Escalar:** és una aplicació que associa punts i instants amb valors que són independents de l'orientació (o rotació) de l'observador: $f(x,y,z,t)$. També s'anomena *camp escalar*.

➔ **Vector:** és una aplicació que associa punts i instants amb vectors: un escalar positiu (o mòdul), una direcció i un sentit. $\vec{V}(x,y,z,t)$. També s'anomena *camp vectorial*.

Exemples de magnituds escalars són: la temperatura, el volum, la densitat..., etc. Exemples de magnituds vectorials són: la velocitat d'una partícula associada als punts i a l'instant per on passa, el camp gravitatori associat a tots els punts en tot instant, la força que una càrrega fa allà on en pugui haver una altra

La idea que a cada punt de l'espai hi ha un vector és el que va donar el nom de

camp. Ens podem imaginar un camp de blat. Cada espiga de blat és un vector en un punt de l'espai. El conjunt de les espigues de blat, és a dir, tot el camp de blat, és el que anomenem ***camp vectorial*** o simplement *vector*. Podem parlar també de **camp escalar**, per exemple, un camp de densitats o de temperatures, en el sentit que es tracta no d'una densitat o temperatura d'un punt a l'espaitemps, sinó d'una funció que a cada instant i a cada punt assigna una densitat o temperatura que pot ser diferent.

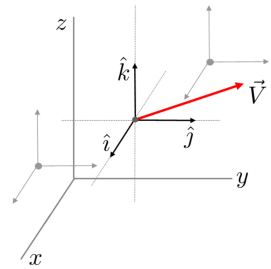


Fig. 1.4: A cada punt de l'espai disposem dels tres vectors base $\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}\}$

La **base cartesiana** de vectors està formada pels vectors unitaris $\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}\}$ paral·lels als eixos coordenats i definits a tots els punts de l'espai (vegeu la figura 1.4). Un vector qualsevol $\vec{V}$ es pot escriure com

$$\vec{V} = V_x\hat{\imath} + V_y\hat{\jmath} + V_z\hat{k} = (V_x, V_y, V_z) \tag{1.3}$$

V_x , V_y i V_z, són les components cartesianes del vector, que poden ser funcions de (x, y, z, t).[1]

Els vectors base $\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}\}$ no tenen unitats i no estan associats a cap magnitud. Representen direccions (i sentit) de l'espai, en aquest cas, les tres direccions i el sentit dels eixos coordenats.

Observem que una component d'un vector no és un escalar.

[1] Quan algunes de les components són numèriques, enlloc de la coma (,), podem fer servir el punt i coma (;). Per exemple, $(2; 5{,}6; 7)$

Operacions algebraiques amb vectors

Si tenim dos vectors $\vec{A}$ i $\vec{B}$, es pot demostrar que $(A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z)$ és un vector. D'acord amb això, definim la suma de dos vectors.

➔ **Suma:** Donats dos vectors $\vec{A}$ i $\vec{B}$, la suma $\vec{A}+\vec{B}$ és el vector que, en coordenades cartesianes, es pot expressar com

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z) \tag{1.4}$$

Si U és un escalar i $\vec{A}$ un vector, es pot demostrar que (UA_x, UA_y, UA_z) és un vector. D'acord amb això, definim el producte extern o producte d'un escalar per un vector com

➔ **Producte extern:** Donats un escalar U i un vector $\vec{A}$, el producte extern és el vector $U\vec{A}$ que, en coordenades cartesianes, es pot expressar com

$$U\vec{A} = (UA_x, UA_y, UA_z) \tag{1.5}$$

Si tenim dos vectors $\vec{A}$ i $\vec{B}$, es pot demostrar que $A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$ és un escalar. D'acord amb això, definim el producte escalar.

➔ **Producte escalar:** Donats dos vectors $\vec{A}$ i $\vec{B}$ el producte escalar és l'escalar $\vec{A}\cdot\vec{B}$ que, en coordenades cartesianes, es pot expressar com

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \tag{1.6}$$

➔ El **mòdul** d'un vector $\vec{A}$ és l'escalar

$$A = \sqrt{\vec{A}\cdot\vec{A}} \tag{1.7}$$

➔ El cosinus de l'angle $0 \leq \theta \leq \pi$ (vegeu la figura 1.5) entre dos vectors $\vec{A}$ i $\vec{B}$ es pot expressar com

$$\cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{AB} \tag{1.8}$$

on $0 \leq \theta \leq \pi$.

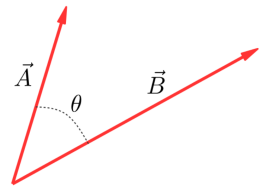


Fig. 1.5: Angle θ entre dos vectors

➔ El **vector unitari** $\hat{A}$ d'un vector donat $\vec{A}$ és el vector de mòdul la unitat

$$\hat{A} = \frac{\vec{A}}{A} \tag{1.9}$$

Si tenim dos vectors $\vec{A}$ i $\vec{B}$, es pot demostrar que

$$(A_yB_z - A_zB_y, A_zB_x - A_xB_z, A_xB_y - A_yB_x)$$

és un vector. D'acord amb això definim el producte vectorial.

➔ **Producte vectorial**: Donats dos vectors $\vec{A}$ i $\vec{B}$, el producte vectorial és el vector $\vec{A}\times\vec{B}$ (vegeu la figura 1.6) que, en coordenades cartesianes, es pot expressar com

$$\vec{A}\times\vec{B} \equiv \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = (A_yB_z - A_zB_y, A_zB_x - A_xB_z, A_xB_y - A_yB_x) \tag{1.10}$$

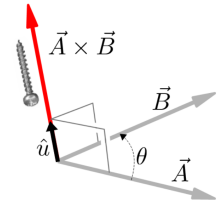


Fig. 1.6: Producte vectorial $\vec{A}\times\vec{B}$ entre dos vectors. Regla del cargol

➔ El sinus de l'angle $0 \leq \theta \leq \pi$ entre dos vectors $\vec{A}$ i $\vec{B}$ es pot expressar com

$$\sin\theta = \frac{\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|}{AB} \tag{1.11}$$

➔ **Regla del cargol**: Podem expressar el producte vectorial $\vec{A}\times\vec{B}$ com

$$\vec{A}\times\vec{B} = B\,A\sin\theta\,\hat{u} \tag{1.12}$$

on $\hat{u}$ és un vector unitari normal a $\vec{A}$ i $\vec{B}$ i de sentit el de l'avanç d'un cargol dextrogir en girar de $\vec{A}$ a $\vec{B}$ pel costat més curt (vegeu la figura 1.6).

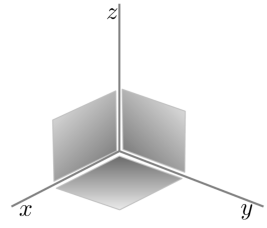


Fig. 1.7: Sistema de referència $\{x, y, z\}$ d'orientació positiva

És especialment important utilitzar sistemes de referència $\{x, y, z\}$ d'**orientació positiva**, és a dir, que es puguin juxtaposar únicament per translació i rotació al sistema de la figura 1.7.

Relacions algebraiques amb vectors

Són igualtats entre vectors (que donarem sense demostració) que involucren les operacions definides anteriorment

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = (\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C} \tag{1.13}$$

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B}) \tag{1.14}$$

$$(\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\vec{C}\times\vec{D}) = (\vec{A}\cdot\vec{C})(\vec{B}\cdot\vec{D}) - (\vec{A}\cdot\vec{D})(\vec{B}\cdot\vec{C}) \tag{1.15}$$

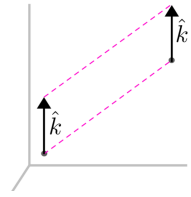


Fig. 1.8: Els vectors base $\hat{k}$ són paral·lels. També $\hat{\imath}$ i $\hat{\jmath}$

Operacions diferencials amb vectors

Donada una funció del tipus $f(x,y,z,t)$, podem voler derivar respecte d'alguna de les variables. Per exemple, si volem derivar només respecte de x ho indicarem amb l'operador $\frac{\partial f}{\partial x}$ i direm que fem la **derivada parcial respecte de** x. Si volem derivar només respecte de t, ho indicarem amb $\frac{\partial f}{\partial t}$ i direm que fem la derivada parcial respecte de t.

Recordem que la **regla de la cadena** per a funcions diu que, si $F(\lambda) = f(g(\lambda),\lambda)$, llavors $\frac{d}{d\lambda}F = \frac{\partial F}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial \lambda} + \frac{\partial F}{\partial \lambda}$.

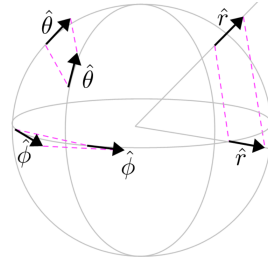


Fig. 1.9: Els vectors base $\hat{r}$ no són paral·lels. Tampoc no ho són $\hat{\theta}$ i $\hat{\phi}$

Quan derivem vectors, podrem fer servir les regles usuals de derivació, especialment la regla de Leibniz per al producte. En general, els escalars i les components de vectors són funcions del tipus $f(x,y,z,t)$ i, a més, pot passar que les coordenades $\{x,y,z\}$ formin part d'una trajectòria i, per tant, puguin dependre de t o d'algun altre paràmetre λ: $\{x(t),y(t),z(t)\}$ o $\{x(\lambda),y(\lambda),z(\lambda)\}$. L'operador de derivació D podrà ser: $D=\frac{\partial}{\partial x}$, $D=\frac{\partial}{\partial y}$, $D=\frac{\partial}{\partial z}$, $D=\frac{\partial}{\partial t}$, $D=\frac{d}{dt}$, $D=\frac{\partial}{\partial \lambda}$, $D=\frac{d}{d\lambda}$. Tots ells compliran les regles usuals de derivació i, en especial, la regla de Leibniz.

La **regla de Leibniz** per a funcions f i g amb el producte usual és $D(fg) = (Df)g + f(Dg)$. En cas que les expressions involucrin escalars U i vectors $\vec{A}$ i $\vec{B}$ amb el producte escalar $\cdot$ i vectorial $\times$

$$D(U\vec{A}) = (DU)\vec{A} + U(D\vec{A}) \tag{1.16}$$

$$D(\vec{A}\cdot\vec{B}) = (D\vec{A})\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot(D\vec{B}) \tag{1.17}$$

$$D(\vec{A}\times\vec{B}) = (D\vec{A})\times\vec{B} + \vec{A}\times(D\vec{B}) \tag{1.18}$$

Una propietat important de la base cartesiana (associada a les coordenades $\{x,y,z\}$) $\left\{\hat{\imath},\hat{\jmath},\hat{k}\right\}$ és que

$$D\hat{\imath} = D\hat{\jmath} = D\hat{k} = 0 \tag{1.19}$$

Això és així perquè els vectors a cada punt de l'espai dels camps $\left\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}\right\}$ es mantenen paral·lels (vegeu la figura 1.8). Això no passa si, per exemple, utilitzem una base esfèrica. Els vectors a cada punt de l'espai del camp unitari radial $\hat{r}$ no es mantenen paral·lels. Tampoc no ho fan els altres dos camps que completen la base esfèrica (vegeu la figura 1.9).

La propietat (1.19) és molt útil. En derivar un vector en base cartesiana

$$D\vec{V} = D(V_x\hat{\imath}) + D(V_y\hat{\jmath}) + D(V_z\hat{k}) = D(V_x)\hat{\imath} + D(V_y)\hat{\jmath} + D(V_z)\hat{k}$$

n'hi ha prou a derivar les seves components.

$$D\vec{V} = (DV_x, DV_y, DV_z)$$

En cas de derivar respecte de t, ens pot interessar tenir en compte que les altres variables x, y i z també poden variar en t perquè formen part d'una trajectòria, és a dir, de fet són funcions de t i la funció f és, encara que no ho explicitem, una funció només de t, $f(x(t), y(t), z(t), t)$. En aquest cas, la derivada respecte de t s'anomena ***derivada total*** i s'escriu $\dot{f} = \frac{df}{dt}$. Per calcular-la, farem servir la regla de la cadena per a cada coordenada a més de la derivada parcial del temps, és a dir

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\dot{z} + \frac{\partial f}{\partial t} \tag{1.20}$$

Respecte a les derivades totals, hi ha dos resultats importants:

➔ Donat un escalar f, la derivada total $\frac{df}{dt}$ és un escalar.

➔ Donat un vector $\vec{v}$, la **derivada total** $\frac{d\vec{v}}{dt}$ és un vector.

Altres operacions diferencials bàsiques entre escalars i vectors són:

➔ Donat un escalar U, el **gradient** $\vec{\nabla}U$ és el vector que en coordenades cartesianes es pot escriure com

$$\vec{\nabla}U = \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} \equiv \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right) \tag{1.21}$$

➔ La **diferencial** de $U(x, y, z)$ és l'expressió infinitesimal escalar dU, que en coordenades cartesianes es pot escriure

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz \tag{1.22}$$

i també podem expressar com $dU = \vec{\nabla}U \cdot d\vec{r} = \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} \cdot d\vec{r}$ on $d\vec{r} \equiv (dx, dy, dz)$.

En física, podem identificar dx amb un increment arbitrari de la magnitud x, amb la condició que sigui del mateix ordre, o menor, que l'error ε_x amb que mesurem x: $dx \lesssim \varepsilon_x$. El mateix amb dy, dz i dt. Tindrem també $dU \lesssim \varepsilon_u$ (vegeu l'apartat *Propagació d'errors* de la secció 1.5).

Operacions integrals amb vectors

Hi ha tres operacions integrals bàsiques que relacionen escalars i vectors.

La **integral temporal** d'un escalar $U(\vec{r},\dot{\vec{r}},t)$ definit sobre una trajectòria $\vec{r}(t)$ és l'escalar

$$\int U dt = \int U(\vec{r}(t),\dot{\vec{r}}(t),t)dt \tag{1.23}$$

La **integral temporal** d'un vector $\vec{V}$ definit sobre una trajectòria $\vec{r}(t)$ és el vector

$$\int \vec{V} dt = \left(\int V_x dt, \int V_y dt, \int V_z dt\right) \tag{1.24}$$

La integral d'un vector $\vec{F}$ definit a l'espai sobre un camí C, que també s'anomena ***circulació de $\vec{F}$ al llarg de*** C, si el camí ve donat en forma paramètrica per $\vec{r}(\lambda) = (x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda))$ de λ_1 a λ_2 (vegeu la figura 1.10), és l'escalar

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{d\lambda}d\lambda = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\left(F_x\frac{dx}{d\lambda}+F_y\frac{dy}{d\lambda}+F_z\frac{dz}{d\lambda}\right)d\lambda \tag{1.25}$$

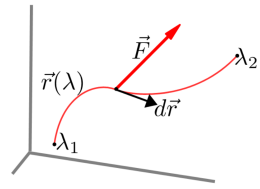


Fig. 1.10: Circulació de $\vec{F}$ al llarg d'un camí C

Problema 1.3.1. Donats els vectors $\vec{A} = 5\hat{\imath}+4\hat{\jmath}+3\hat{k}$ i $\vec{B} = -2\hat{\jmath}+\hat{k}$ calculeu:

a) els mòduls,

b) els productes escalar i vectorial,

c) l'angle format entre ells.

d) Trobeu un vector unitari perpendicular a $\vec{A}$ i $\vec{B}$.

Solució

a)

$$A = \sqrt{\vec{A}\cdot\vec{A}} = \sqrt{A_xA_x+A_yA_y+A_zA_z} = \sqrt{5^2+4^2+3^2} = 5\sqrt{2}$$

$$B = \sqrt{\vec{B}\cdot\vec{B}} = \sqrt{B_xB_x+B_yB_y+B_zB_z} = \sqrt{0^2+(-2)^2+1^2} = \sqrt{5}$$

b)

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z = 5\cdot 0+4\cdot(-2)+3\cdot 1 = -5$$

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix} = 10\hat{\imath}-5\hat{\jmath}-10\hat{k}$$

c) A partir del producte escalar, obtindrem l'angle entre els vectors

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{AB} = -\frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow \theta = 108{,}4^\circ$$

d) El producte vectorial dóna l'expressió d'un vector $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ perpendicular a $\vec{A}$ i $\vec{B}$

$$\hat{C} = \frac{\vec{C}}{C} = \frac{\vec{A} \times \vec{B}}{\left|\vec{A} \times \vec{B}\right|} = \frac{10\hat{i} - 5\hat{j} - 10\hat{k}}{\sqrt{10^2 + (-5)^2 + (-10)^2}} = \frac{2}{3}\hat{i} - \frac{1}{3}\hat{j} - \frac{2}{3}\hat{k}$$

■

Problema 1.3.2. Sigui el vector $\vec{A}(t)$ un vector en funció del temps. Demostreu que

$$\vec{A} \cdot \frac{d\vec{A}}{dt} = A\frac{dA}{dt}$$

i que si $\vec{A}$ té mòdul constant llavors és perpendicular a $\frac{d\vec{A}}{dt}$.

Solució

$A^2 = AA = \vec{A} \cdot \vec{A}$

$$\frac{d(A \cdot A)}{dt} = 2A\frac{dA}{dt}$$

$$\frac{d\left(\vec{A} \cdot \vec{A}\right)}{dt} = 2\vec{A} \cdot \frac{d\vec{A}}{dt}$$

$$\Rightarrow \vec{A} \cdot \frac{d\vec{A}}{dt} = A\frac{dA}{dt}$$

si $\vec{A}$ té mòdul constant, $\frac{dA}{dt} = 0, \Rightarrow \vec{A} \cdot \frac{d\vec{A}}{dt} = 0$ i, per tant, aquests vectors són perpendiculars. ■

1.4 Principi de simetria

Fig. 1.11: Pierre Curie (1859-1906) fou un físic francès

La idea de simetria no és exclusiva de la mecànica, ni tan sols de la física. S'ha fet servir en molts camps de les ciències. Es donen *raons de simetria* o *arguments de simetria* per justificar unes consideracions que simplifiquen molt alguns problemes, però fins a temps relativament recents no s'ha mirat de concretar què volem dir amb "raó de simetria". Pierre Curie va ser el primer a enunciar un principi de simetria, l'any 1894:

> Un efecte no pot tenir una manca de simetria si aquesta manca no és present a la causa.

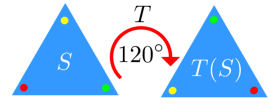


Fig. 1.12: Si no fos perquè hem marcat els vèrtex els dos triàngles són indistingibles

És a dir, si la causa té una simetria, aquesta ha de ser present a l'efecte. Donarem una versió més detallada d'aquesta idea. Primer precisem què és una simetria.

Amb un objecte S i una transformació del tipus que sigui T (vegeu la figura 1.12), diem que T és una transformació de simetria de S o que S té la simetria T, si S queda inalterat en fer T

$$T(S) = S \tag{1.26}$$

➔ ***Principi de simetria***: *Si les causes tenen unes simetries, llavors els efectes tenen, com a mínim, les mateixes simetries.*

Fixem-nos que hem d'estar segurs que controlem totes les causes. Podria passar que una part de les causes fossin simètriques i de la resta no se'n tingués informació. Els efectes, en aquest cas, no tindrien per què ser simètrics! Aquest principi l'emprem molts cops sense ser-ne conscients, perquè el trobem molt intuïtiu. Altres cops no ens ho sembla tant, però també pot ser aplicable.

Problema 1.4.1. Una distribució esfèrica uniforme de massa crea un camp gravitatori. Argumentant exclusivament amb el principi de simetria, què podem dir del camp gravitatori?

Solució

La causa, la distribució esfèrica uniforme de massa, té simetria esfèrica: si li fem una rotació qualsevol al voltant del seu centre, resta inalterada. També ha de tenir simetria esfèrica l'efecte, en aquest cas el camp gravitatori. El camp gravitatori ha de ser radial i només pot dependre de la distància al centre de la distribució. ■

1.5 Mesurament i tractament de dades experimentals

Mai en fer un mesurament podem donar el resultat en forma d'un nombre real. Això és així per moltes raons. Per exemple, suposem que volem mesurar la longitud d'una vareta com la de la figura 1.13.

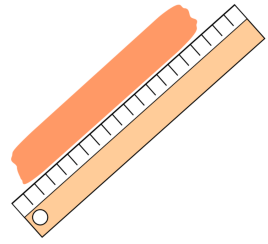


Fig. 1.13: L'error en el mesurament pot ser inherent a l'objecte mesurat

1) La suposició que la vareta té una longitud ben definida és una idealització. Les varetes reals no són un prisma tallat nítidament.

2) L'aparell de mesurament té unes limitacions per construcció. El regle emprat, per més ben construït que estigui, té unes divisions amb un cert gruix per tal que puguin ser vistes per nosaltres. Aquestes divisions estan separades de forma que és casual que coincideixi una divisió amb el final de la vareta.

3) El nostre ull té unes limitacions que, a més, poden variar segons la il·luminació, l'edat..., etc.

Així, el resultat d'un mesurament no és un nombre real; és un interval. Podem dir, per exemple: la longitud de la vareta està dins l'interval $[27{,}30;\,27{,}40]$ cm (si el regle té divisions fins als mm). Expressat d'una altra forma: $27{,}35 \pm 0{,}05$ cm . Això mateix ho podem expressar simplement com $27{,}3$ cm, entenent que la xifra que aniria després de l'última per la dreta pot variar en una unitat, és a dir, treballar amb un interval $[27{,}30;\,27{,}40]$ cm.

L'amplada de l'interval ve donada pels anomenats ***errors en el mesurament***. És evident que la paraula *error* no l'hem d'entendre com quelcom negatiu.

➔ Un error "gran" de mesurament no té per què reflectir cap mena d'incompetència de la persona que mesura!

Tipus d'error

Per donar amb algunes garanties el resultat d'un mesurament x, el que farem és repetir-lo un nombre M de vegades, $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_M$. Descartarem aquells valors que clarament s'aparten de la majoria i ens quedarem amb un nombre N de mesuraments bons, $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_N$. Expressarem el resultat del mesurament com

$$x = \bar{x} \pm \varepsilon \tag{1.27}$$

amb

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i \tag{1.28}$$

$\bar{x}$ és la mitjana del mesuraments realitzats i el nombre ε, positiu, és l'error del mesurament, que arrodonirem en general a una xifra significativa (s'explicarà més endavant). Aquest error es descompon, segons siguin les seves causes, en

$$\varepsilon = \varepsilon_I + \varepsilon_P \tag{1.29}$$

Errors d'imprecisió o sistemàtics ε_I: són deguts normalment al propi aparell de mesurament. Sempre que fem un mesurament cometem un error de forma sistemàtica. Sempre té el mateix valor.

Aparells analògics: per exemple, una agulla que es desplaça en una escala, un regle (vegeu la figura 1.14). Són aparells que donen una resposta contínua. En aquest cas, $\varepsilon_I = R/2$ on R és la resolució de l'aparell de mesurament o interval entre marques. En un regle típic, $R = 1\,\text{mm}$.

Fig. 1.14: Peu de rei amb sortida analògica

Aparells digitals: aquells que donen una resposta a intervals discrets (típicament, posseeixen un indicador (*display*) numèric, vegeu la figura 1.15). En aquest cas, $\varepsilon_I = R$ i coincideix amb l'increment mínim que mostra l'aparell.

Fig. 1.15: Peu de rei amb sortida digital

Errors d'incertesa o probables ε_P: són deguts a factors aleatoris. A l'exemple de la vareta de la figura 1.13, poden ser deguts al fet que el tall no és nítid i depèn d'on posem el regle. Hi poden intervenir factors ambientals: temperatura, pressió..., etc. La suposició que totes els mesuraments fets estan al voltant d'un cert valor (distribució gaussiana), junt amb el tractament estadístic del conjunt dels N mesuraments, que no exposarem aquí, dóna un valor per ε_P

$$\varepsilon_P = \sigma\ f \tag{1.30}$$

on

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(\bar{x} - x_i)^2} \tag{1.31}$$

és la **desviació estàndard**,

$$f = \frac{t}{\sqrt{N}} \tag{1.32}$$

on la t de (1.32) és la **funció estadística de Student**. Així, f és una funció que depèn del nombre de mesuraments N realitzats i, a través de la t de Student, de la probabilitat amb què volem assegurar que el valor real sigui dins l'interval d'error donat. Si treballem amb una probabilitat del 95% , f es calcula d'acord amb la taula 1.1.

N	f	N	f	N	f	N	f
		11	0,6718	21	0,4552	40	0,3198
2	8,984	12	0,6354	22	0,4438	60	0,2583
3	2,484	13	0,6043	23	0,4324	120	0,1808
4	1,592	14	0,5775	24	0,4223	$\to \infty$	$\to 0$
5	1,241	15	0,5538	25	0,4128		
6	1,050	16	0,5329	26	0,4039		
7	0,9248	17	0,5142	27	0,3956		
8	0,8360	18	0,4973	28	0,3876		
9	0,7687	19	0,4820	29	0,3804		
10	0,7154	20	0,4680	30	0,3734		

Taula 1.1: Valors de f en funció del nombre de mesuraments N per a una probabilitat del 95%: $f = \frac{t_{0,975;N-1}}{\sqrt{N}}$

Fig. 1.16: Consulteu les instruccions de la vostra calculadora

➔ **Nota**: Les calculadores científiques usuals (vegeu la figura 1.16) i/o els fulls de càlcul tenen procediments per entrar dades $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_N$ i fer els càlculs de $\bar{x}$ i σ. Si és necessari, llegiu el manual de la vostra calculadora i/o full de càlcul.

Propagació d'errors

Als apartats anteriors, hem vist com obtenir i expressar una variable sotmesa a error a partir de mesuraments directes d'aquesta. Hi ha situacions en què s'ha de fer el mateix amb variables que depenen d'altres variables que es poden mesurar directament. Per exemple, una variable z que depèn de diverses variables $x, y, ...$: $z = z(x, y, ...)$, amb el benentès que els errors són petits, podem identificar-los als valors diferencials de les magnituds corresponents. Així, $\varepsilon_z = dz$, $\varepsilon_x = dx$, $\varepsilon_y = dy$..., etc. Com que sabem que $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy + ...$ només ens cal avaluar els diferents factors $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, etc, amb els valors mitjans $x = \bar{x}$, $y = \bar{y}$, etc, i prendre sempre el valor absolut (positiu), com també fem amb els diferents errors ε_x, ε_y, etc. Obtenim així

$$z = \bar{z} \pm \varepsilon_z \quad ; \quad \bar{z} = z(\bar{x}, \bar{y}) \tag{1.33}$$

amb

$$\varepsilon_z = \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\y=\bar{y}}} \varepsilon_x + \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\y=\bar{y}}} \varepsilon_y + \ldots \tag{1.34}$$

Xifres significatives en els mesuraments directes

En molts casos, no ens cal afinar tant amb la precisió. N'hi ha prou a expressar el resultat d'un mesurament amb una amplada d'interval $10^n \geq 2\varepsilon$, essent n el mínim enter que compleix la desigualtat. Per exemple, i tornant al cas del regle i la vareta de la figura 1.13, el resultat del mesurament en cm és un interval $[27{,}300000\ldots;\ 27{,}399999\ldots]$ cm.

Podem dir que 27,3 és el resultat donat amb "un decimal". Compte! si, en lloc de treballar en cm, ho féssim en m, tindrem 0,273: diríem que el resultat és donat "amb tres decimals". Si ho féssim en mm tindríem 273 el resultat "sense decimals". Ha de quedar clar que l'expressió "amb tants decimals" o "sense decimals" no té gaire sentit si volem reflectir la precisió amb què s'està treballant. És per això que és millor parlar de xifres significatives: 2,73; 273; 0,000273; 273000... són resultat de mesuraments (intervals) amb tres xifres significatives. Vegem algunes regles per detectar quantes xifres significatives té un interval donat:

> En lloc de parlar d'intervals o del resultat del mesurament, parlarem de números, seguint la pràctica habitual. Hem de recordar, però, que no són estrictament nombres, com ho són els naturals, enters, reals..., són intervals expressats en forma de número.

➔ **Regla 1**: En nombres que no contenen zeros, tots els dígits són significatius.

➔ **Regla 2**: Tots els zeros entre dígits significatius són significatius.

➔ **Regla 3**: Els zeros a l'esquerra del primer dígit que no és zero serveixen solament per fixar la posició del punt decimal i no són significatius.

➔ **Regla 4**: En un número amb dígits a la dreta del punt decimal, els zeros a la dreta de la última xifra diferent de zero són significatius.

➔ **Regla 5**: En un número que no té punt decimal i que acaba amb zeros, aquests poden ser significatius o no. En aquest, s'eviten confusions si s'empra la notació científica.

Vegeu els exemples de la taula 1.2.

Exemple	XS
4,523	4
70,054	5
0,0789	3
0,0020	2
3600	2+?
$3{,}6 \times 10^3$	2
$3{,}60 \times 10^3$	3
$3{,}600 \times 10^3$	4

Taula 1.2: Exemples de xifres significatives (XS)

Xifres significatives en els mesuraments indirectes

Com se sumen, resten, multipliquen... els resultats dels mesuraments? És clar que es fa més o menys com amb els nombres usuals... però què fem amb les xifres

significatives? Quantes xifres significatives té el resultat d'una suma, resta...?

Posem-ne un exemple concret. Suposem que hem mesurat els costats d'una xapa (suposadament) rectangular i en volem conèixer la superfície (vegeu la figura 1.17). Diguem que els costats són $a = 5237\,\text{mm}$ i $b = 325\,\text{mm}$. Com hem d'expressar el resultat per tal de reflectir correctament l'error comès en el mesurament indirecte de la superfície? És correcte $1702025\,\text{mm}^2$, és a dir, amb sis xifres significatives? Si l'error en aquest exemple és d'1 mm per costat, l'error que cometem en la superfície és de l'ordre de $5237 \times 1 + 325 \times 1 + 1 \times 1 = 5563 \approx 6000\,\text{mm}^2$.

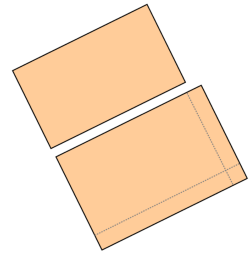


Fig. 1.17: Mesura indirecta de l'àrea de la xapa rectangular

Aquesta amplada d'interval afecta el dígit marcat en vermell $1702025\,\text{mm}^2$. El correcte és, doncs, expressar el resultat com $1{,}70 \times 10^6\text{mm}^2$, és a dir, amb tres xifres significatives.

Es poden deduir unes regles generals per a la manipulació de xifres significatives:

➜ **Les constants matemàtiques**: $(1/2{,}2/3, \sqrt{2}, \pi...)$, sempre que es prenguin amb un nombre de xifres superior als dels altres nombres implicats, no afecten en el còmput de xifres significatives.

➜ **Multiplicació i divisió**: El resultat de l'operació tindrà el mateix nombre de xifres significatives que l'operand que tingui menys xifres significatives.

➜ **Suma i resta**: El resultat no ha de tenir dígits en posicions més enllà de la posició de l'últim digit comú a tots els sumands. Per exemple, $34{,}6 + 85 - 17{,}8 = 101{,}8$ s'ha d'arrodonir a 102, ja que la posició de l'últim digit comú a tots els termes és a les unitats.

Ajust d'una recta a les dades experimentals

Una altra situació força usual és la que comporta trobar la possible dependència entre dues o més variables que es poden mesurar experimentalment de forma independent, els valors de les quals es poden representar gràficament. A través d'aquesta representació, es pot deduir una possible relació entre les variables. A continuació, es tracta de la metodologia que s'ha de seguir en la determinació d'aquesta gràfica.

➜ La representació es pot fer per ordinador o manualment (en aquest darrer cas, és convenient utilitzar paper mil·limetrat).

➜ Cal triar les escales dels eixos, considerant els valors extrems de X i de Y, de forma que la gràfica ocupi gran part del paper i que els mesuraments representats quedin, en tot el que sigui possible, uniformement repartits (no s'amunteguin en un extrem, per exemple).

➜ El punt d'intersecció dels eixos no ha de ser necessàriament el $(0{,}0)$; pot ser qualsevol altre que faci fàcil la representació (**escala amb zero desplaçat**).

➜ S'han de dibuixar tots els punts obtinguts, sense excloure'n d'antuvi cap. No s'han d'escriure les coordenades de les dades ni als eixos ni a prop de cada punt, ja que això dificulta l'observació de la gràfica.

➜ La corba resultant de l'ajust dels punts experimentals ha de ser contínua. Mai no s'han d'unir els punts experimentals amb trams rectes.

➜ Si un punt queda clarament separat de la corba, no se l'ha de tenir en compte en l'ajust i s'ha d'assenyalar com a erroni.

➜ Tota gràfica s'ha d'acompanyar d'un peu explicatiu de què representa. Si es fan servir diversos símbols per a les diferents variables mesurades, és preceptiu indicar quin símbol correspon a cada variable.

El cas més simple és el de dues variables x, y entre les quals la dependència és lineal. La recta que les relaciona s'anomena ***recta d'ajust*** i el procediment més usual per obtenir-la, ***regressió lineal per mínims quadrats***. En aquesta situació, disposem d'una sèrie de N mesuraments $x_1, x_2, ..., x_N$ d'una variable x i N mesuraments $y_1, y_2, ..., y_N$ d'una variable y, i "sospitem" que estan aproximadament relacionats per una funció lineal $y = ax + b$. Els coeficients a i b, així com la bondat de l'ajust, es determinen utilitzant el **mètode dels mínims quadrats**, segons el qual els valors d'aquests paràmetres corresponen a una recta que fa mínima la suma de les desviacions quadràtiques, χ^2, entre els punts de mesurament y_i i el valor $(ax_i + b)$ que pren la funció per a la variable x_i

$$\chi^2(a,b) = \sum_{i=1}^{N} [\, y_i - (ax_i + b)\,]^2 \tag{1.35}$$

Del procés de minimització resulta

$$a = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} \qquad\qquad b = \overline{y} - a\,\overline{x} \tag{1.36}$$

on

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \;\; ; \;\; \bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i \;\; ; \;\; \overline{x^2} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \;\; ; \;\; \overline{xy} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i y_i \tag{1.37}$$

Podem ajustar qualsevol conjunt de punts a una recta. No obstant això, existeix un índex, anomenat *coeficient de correlació* $|r| \leq 1$, que ens indica la bondat de l'ajust. Aquest coeficient es pot calcular d'acord amb l'expressió següent:

$$r = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{\sqrt{\overline{x^2} - \overline{x}^2}\sqrt{\overline{y^2} - \overline{y}^2}} \tag{1.38}$$

Quant més s'ajusten els punts a la hipòtesi de linealitat, més a prop de 1 està r^2. A la pràctica, es considera un bon ajust lineal quan $|r| \geq 0{,}95$ i que no es pot ajustar linealment quan $|r| < 0{,}8$, tot i que aquests límits són discutibles.

Els errors probables i/o d'imprecisió dels mesuraments de x i y provoquen uns errors probables ε_a i ε_b dels coeficients a i b que es poden avaluar utilitzant mètodes estadístics

$$\varepsilon_a = f\sigma_a \;\; ; \;\; \varepsilon_b = f\sqrt{\overline{x^2}}\,\sigma_a \;\; ; \;\; \sigma_a = \frac{a}{r}\sqrt{\frac{1-r^2}{N-2}} \tag{1.39}$$

on la funció f està tabulada a la taula 1.1 amb la mateixa interpretació (per al 95%).

➔ **Nota**: Les calculadores científiques usuals i/o els fulls de càlcul tenen procediments per entrar parelles de dades $(x_1, y_1), (x_2, y_2), ...(x_N, y_N)$ i fer els càlculs de a, b i r . Si és necessari, llegiu el manual de la vostra calculadora i/o full de càlcul.

Problema 1.5.1. En una experiència per esbrinar la viscositat de l'oli de ricí, una esfera d'alumini, de densitat ρ_{Al} i radi R, es deixa anar dins un recipient amb oli de ricí de densitat ρ_{Ol} i viscositat no coneguda η_{Ol}[2] . Se sap que, passat un cert temps, el moviment és aproximadament uniforme, amb un velocitat límit v_L que ve donada per l'expressió

$$v_L = \frac{P_{\text{ap}}}{b} \tag{1}$$

on P_{ap} és el pes aparent, tenint en compte que hi ha l'empenyiment d'Arquimedes (s'estudia a la secció 4.3)

$$P_{\text{ap}} = \frac{4}{3}\pi R^3 g(\rho_{\text{Al}} - \rho_{\text{Ol}}) \tag{2}$$

i b és el coeficient de la força de fricció viscosa $\vec{F}_b$ (s'estudia a la secció 2.5)

$$\vec{F}_b = -b\vec{v} \tag{3}$$

b es pot relacionar amb el radi de l'esfera i la viscositat de l'oli segons

$$b = 6\pi R\eta_{\text{Ol}} \tag{4}$$

L'experiència consisteix a mesurar el temps que triga l'esfera a recórrer una certa distància z, comptada després de deixar que el moviment s'atansi al moviment uniforme.

Dades: $R = 0{,}02\,\text{m}$, $\rho_{\text{Al}} = 2700\,\text{kg/m}^3$, $\rho_{\text{Ol}} = 960\,\text{kg/m}^3$.

Dels mesuraments realitzats entre $z = 0{,}25\,\text{m}$ i $z = 2{,}5\,\text{m}$ s'han obtingut els resultats de la taula.

z(m)	0,25	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00	2,25	2,50
t(s)	0,154	0,334	0,490	0,668	0,826	0,961	1,162	1,293	1,467	1,639

Taula de l'enunciat 1.5.1

[2] L'oli de ricí emprat en aquesta experiència té una viscositat de $0{,}985\,\text{N s/m}^2$. És aquest valor el que volem determinar a través de l'experiència descrita.

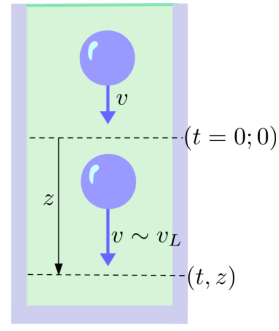


Figura de l'enunciat 1.5.1

a) Representeu els punts (t, z) d'acord amb els mesuraments realitzats.

b) Trobeu **gràficament** la recta que s'ajusta millor a aquests punts.

c) Trobeu per **regressió lineal** la recta que millor s'ajusta a aquest punts. Raoneu la bondat d'aquest ajust.

d) Utilitzant la recta d'ajust trobada a ***c)*** i les expressions (1,2,4), trobeu v_L, b i η_{Ol}.

e) Trobeu l'error del pendent i l'ordenada a l'origen de la recta d'ajust i calculeu, a continuació, l'error propagat a la viscositat η_{Ol}.

Solució

a), b) i **c)**. A la figura, podeu veure els punts representats i la recta de regressió. Hem utilitzat un full de càlcul per fer la regressió lineal. L'expressió analítica de la recta de regressió resulta: $z = At + B = 1{,}53091\,t + 0{,}00190$ amb un coeficient de correlació $r = 0{,}9997$

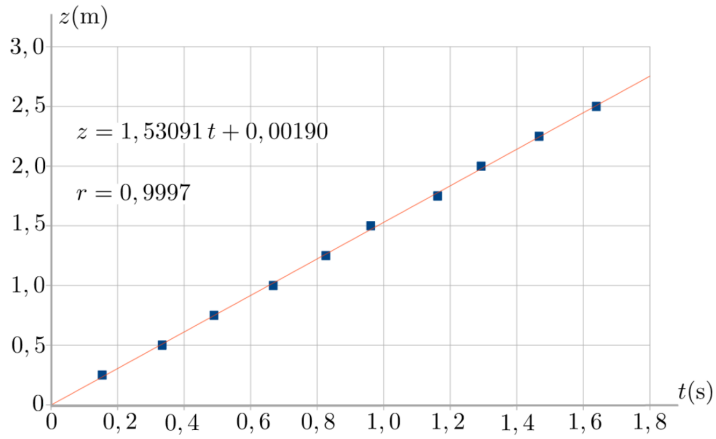


Figura de la solució 1.5.1

d) Comparant la recta amb el fet que esperem que el moviment sigui uniforme segons $z = v_L t$, obtenim $v_L = 1{,}5309\,\text{m/s}$. Tenint en compte (2), $P_{\text{ap}} = 0{,}5720\,\text{N}$, i amb (1), obtenim $b = 0{,}3736\,\text{Ns/m}$. Utilitzant (4), tenim $\eta_{\text{Ol}} = 0{,}9911\,\text{Ns/m}^2$.

e) Per trobar els errors del pendent A i l'ordenada a l'origen B, fem servir (1.39). Amb un nombre de mesuraments $N = 10$, tenim $\sigma_A = 0{,}01326$ i, de la taula 1.1, $f = 0{,}7154$. L'error del pendent resulta $\varepsilon_A = 0{,}0095\,\text{m/s}$, que serà també l'error de v_L. Tenint en compte que podem escriure

$$\eta_{\text{Ol}} = \frac{P_{\text{ap}}}{6\pi R}\frac{1}{v_L}$$

i que l'única magnitud subjecta a error del membre de la dreta és v_L, tenim, fent servir (1.34)

$$\varepsilon_{\eta_{\text{Ol}}} = \frac{P_{\text{ap}}}{6\pi R}\frac{1}{v_L^2}\varepsilon_{v_L}$$

on $\varepsilon_{v_L} = \varepsilon_A = 0{,}0095\,\text{m/s}$ N'obtenim $\varepsilon_{\eta_{OI}} = 0{,}0062\,\text{Ns/m}^2$. L'error de l'ordenada a l'origen B resulta $\varepsilon_B = 0{,}0097\,\text{m}$. Observem que aquest valor fa que la B trobada per regressió sigui compatible amb el valor 0, cosa que esperem segons l'expressió $z = v_L t$. Finalment, podrem expressar el resultat de l'experiència pel que respecta al valor trobat per η_{OI}

$$\eta_{OI} = (0{,}991 \pm 0{,}007)\,\text{N s/m}^2$$

■

1.6 Primera llei de Newton. Sistemes de referència inercials

Primera llei de Newton

La primera llei que enuncià Newton va estar motivada per la necessitat de "deixar clar" què passa quan no passa res. És a dir, necessitava expressar quin és l'escenari espaciotemporal pel qual es mourien més tard els actors: les partícules interactuants i les forces corresponents. Tinguem en compte que, en aquells temps, qui més qui menys pensava que les coses no es movien soles... Galileu ja va concebre que els cossos tenen *inèrcia*, una tendència natural a mantenir el seu estat de moviment.

Fig. 1.18: Isaac Newton (1643-1727) fou un físic, matemàtic i filòsof anglès

➔ ***Primera llei de Newton o llei d'inèrcia***: *Un cos no afectat per cap causa es mou amb velocitat constant (moviment rectilini uniforme).*

La podem entendre com la definició de l'absència de causa: si observem que un cos es mou amb velocitat constant és que no l'afecta res. Podem dir que té un **moviment inercial**.

Fig. 1.19: Galileo Galilei (1564-1642) va ser un físic, matemàtic, i filòsof toscà

Sistemes de referència inercials

Si un observador o sistema de referència es mou inercialment, amb velocitat rectilínia i uniforme, no l'afecta cap agent físic extern. Com podrà saber a quina velocitat es mou? Tot el que observi li semblarà conseqüència de les mateixes lleis de la física que fa servir estant aturat. Aquesta reflexió suggereix la definició de sistemes de referència inercials.

➔ **Sistemes de referència inercials**: Els sistemes de referència obtinguts per transformacions d'un sistema donat i respecte dels quals les lleis de la física adopten la mateixa forma s'anomenen ***sistemes de referència inercials***. Les transformacions que permeten passar dels uns als altres s'anomenen ***transformacions inercials*** (vegeu la figura 1.20).

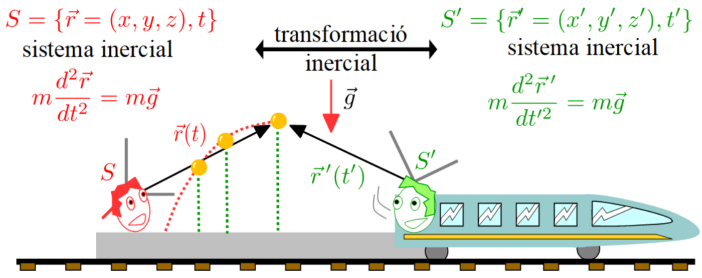


Fig. 1.20: Dos observadors inercials fan servir les mateixes lleis de moviment per explicar les observacions del mateix fet

Transformacions inercials

Amb hipòtesis molt generals de l'espaitemps, s'obté que dos sistemes de referència S i S' són inercials si estan relacionats entre ells per una composició de: translació, rotació, canvi a l'origen del temps i una transformació de velocitats: els dos sistemes viatgen a una velocitat relativa constant $\vec{V}$. L'expressió d'aquesta última depèn de l'existència o no d'una velocitat màxima amb la qual realitzar la sincronització temporal dels diferents punts de l'espai.

➜ **Transformacions de Galileu**: Si la naturalesa no posa límit a les velocitats, no tenim problemes a sincronitzar. Per per a la transformació de velocitats, obtenim

$$\begin{cases} \vec{r}' = \vec{r} - \vec{V}\,t \\ t' = t \end{cases} \tag{1.40}$$

Aquestes transformacions defineixen els sistemes inercials de Galileu sobre els quals es basa la mecànica newtoniana que estudiarem en aquest curs.

Fig. 1.21: Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928) fou un físic i matemàtic neerlandès

➜ **Transformacions de Lorentz-Poincaré**: Si la naturalesa posa límit a les velocitats, tindrem una **velocitat màxima** c que fem servir en sincronitzar. Obtenim

$$\begin{cases} \vec{r}' = \vec{r} - \gamma\vec{V}\,t + \frac{(\gamma-1)}{V^2}(\vec{V}\cdot\vec{r})\,\vec{V} \\ t' = \gamma t - \frac{1}{c^2}\gamma\vec{V}\cdot\vec{r} \end{cases} \tag{1.41}$$

on $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$. En ser c la màxima velocitat no hi ha cap contradicció, $V < c$ i l'arrel sempre és real. Aquestes transformacions defineixen els sistemes inercials de Poincaré sobre els quals es basa la teoria especial de la relativitat deguda a Albert Einstein.

Fig. 1.22: Henri Poincaré (1854-1912) fou un matemàtic francès

És un fet experimental que hi ha una velocitat màxima que coincideix amb la de la llum en el buit $c = 299792458\,\mathrm{m/s}$. Les conseqüències d'aquest fet, la teoria especial de la relativitat, s'han pogut contrastar experimentalment. Malgrat tot, sempre que tractem amb sistemes amb velocitats $v \ll c$ podrem fer l'aproximació $c \to \infty$ i utilitzar per als càlculs la mecànica newtoniana. A la mecànica newtoniana, el

temps és absolut: per a tot punt A: $t_A = t_O$, és a dir, tots els punts de l'espai d'un observador es poden sincronitzar amb un mateix temps t. Si no diem explícitament el contrari, estudiarem la mecànica newtoniana.

Independentment de si fem o no relativitat, l'elecció d'un sistema de referència inercial a partir del qual poder definir-ne d'altres depèn del grau d'aproximació amb què es treballi. En general, nosaltres en tindrem prou a considerar la Terra com a sistema inercial, encara que sabem que es mou al voltant del Sol i, per tant, no és estrictament inercial. Si es necessita més precisió, es pot prendre el sistema inercial lligat al Sol. Actualment, per exemple. en relació amb la tecnologia GPS (Global Positioning System), s'arriben a utilitzar sistemes de referència lligats als quàsars (*quasi-stellar radio source*), objectes celestes extremament llunyans.

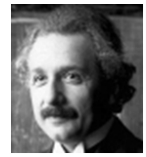


Fig. 1.23: Albert Einstein (1879-1955) va ser un físic d'origen alemany, nacionalitzat posteriorment suís i nord-americà

Per acabar aquesta secció, farem un únic problema relativista, que ens il·lustrarà, en un cas concret i real, com la mecànica relativista troba una explicació a un fet que al seu moment va sorprendre i del qual no es trobava cap explicació en el marc de la mecànica newtoniana.

Problema 1.6.1. Al laboratori, els muons μ^- de baixa velocitat tenen una vida mitjana de $\tau = 2{,}197 \times 10^{-6}$ s. Els raigs còsmics arriben a l'atmosfera a una altura de $h = 2{,}5 \times 10^6$ m i produeixen muons μ^-, que són detectats a la superfície de la Terra. Calculeu la velocitat (constant) amb què arriben a Terra els muons...

a) sense tenir en compte la mecànica relativista,

b) utilitzant la mecànica relativista.

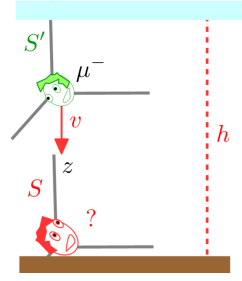


Figura de la solució 1.6.1

Solució

a) El temps és igual per a tots els observadors. El μ^- pot "viure", com a molt, $\tau = 2{,}197 \times 10^{-6}$ s. Segons el sistema de referència S, en repòs al terra, el μ^- hauria d'anar a una velocitat mínima $v = \frac{h}{\tau} = \frac{2{,}5\times 10^6}{2{,}197\times 10^{-6}} = 1{,}138 \times 10^{12}$ m/s, que supera amb escreix la màxima velocitat possible!

b) Donem l'explicació relativista. El temps depèn de l'observador. El temps que cal tenir en compte per al muó μ^- és el "seu" temps propi, en aquest cas, el temps del sistema de referència S', que viatja amb el muó. Amb aquesta interpretació, el muó, "ell", pot "viure" com a molt, $\Delta t' = \tau = 2{,}197 \times 10^{-6}$ s , que és un temps mesurat segons un rellotge en repòs respecte de S'. En canvi, en el mesurament de la velocitat del muó, v, l'observador S fa servir el seu temps Δt, $v = \frac{h}{\Delta t}$.

Si prenem increments a la transformació relativista de Lorentz-Poincaré del temps (1.41), amb $\vec{V} = \vec{v}$, $\vec{v}\cdot\vec{r} = vz$, $\Delta z = h$ i $\frac{h}{\Delta t} = v$, tenim

$$\Delta t' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\Delta t - \frac{1}{c^2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}vh$$

dividint tot per h i simplificant

$$\frac{\Delta t'}{h} = \frac{1}{v}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

i, per tant, la velocitat mínima v a què ha d'anar el muó per poder arribar a terra "viu" compleix

$$\left(\frac{v}{c}\right)^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{c\Delta t'}{h}\right)^2} = 0{,}9999$$

és a dir $v < c$, que és coherent amb el fet que c sigui la velocitat màxima possible i, per tant, amb la relativitat. ■

1.7 Cinemàtica del punt: posició, trajectòria, velocitat i acceleració

➔ **Vector posició**: El vector posició del punt $P = (x_P, y_P, z_P)$ respecte del punt $O = (x_O, y_O, z_O)$ és el vector $\vec{r}_{P(O)} = (x_P - x_O, y_P - y_O, z_P - z_O)$. Si $O = (0,0,0)$, s'acostuma a escriure $\vec{r}_P = (x_P, y_P, z_P)$ o, si no hi ha dubtes, $\vec{r} = (x, y, z)$ (vegeu la figura 1.24). En general, podem escriure $\vec{r}_{P(Q)} = \vec{r}_P - \vec{r}_Q$.

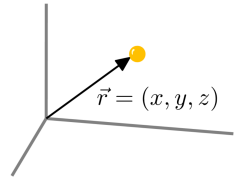


Fig. 1.24: Vector posició respecte de l'origen

Cada observador té el seu vector posició. En general, dos observadors posicionaran el mateix punt amb diferents vectors posició: $\vec{r}_{P(O)} \neq \vec{r}_{P(O')}$

➔ **Mòdul del vector posició**: el denotem per $|\vec{r}| = r$.

➔ **Trajectòria**: La trajectòria d'una partícula és la corba $\vec{r}(\lambda)$ per on passa la partícula.

➔ **Trajectòria temporal**: La trajectòria temporal d'una partícula és la corba per on passa la partícula parametritzada amb el temps $\vec{r}(t)$ (vegeu la figura 1.25).

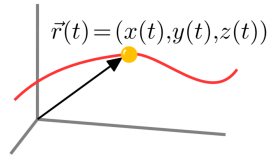


Fig. 1.25: Trajectòria temporal d'una partícula

➔ **Vector desplaçament**: El vector desplaçament entre dos punts és: $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$. Si els dos punts estan infinitament pròxims: $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$.

➔ **Mòdul de** $d\vec{r}$: Compte, dr no és el mòdul de $d\vec{r}$. Aquest el denotarem per $d\ell$: $|d\vec{r}| = d\ell$. ℓ és la longitud de la corba respecte a alguna referència sobre aquesta (vegeu la figura 1.26). Només si el desplaçament $d\vec{r}$ està alineat amb l'origen de $\vec{r}$, es compleix $d\ell = dr$.

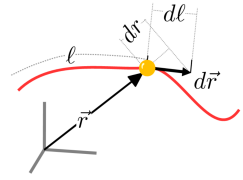


Fig. 1.26: Longitud de la corba ℓ, modul de $d\vec{r}$ i dr

➔ **Diferencial de** U: Donat un escalar $U(\vec{r})$ el diferencial de U és $dU = \vec{\nabla}U \cdot d\vec{r}$ i representa la variació infinitesima de la funció U quan variem infinitesimalment la posició en una direcció de l'espai no especificada $d\vec{r}$. Si U depèn explícitament del temps, $U(\vec{r}, t)$, la variació de U quan variem infinitesimalment la posició en una direcció de l'espai no especificada $d\vec{r}$ esmerçant un temps no especificat dt és

$$dU = \vec{\nabla}U \cdot d\vec{r} + \frac{\partial U}{\partial t}dt \qquad (1.42)$$

➔ **Vector velocitat**: El vector velocitat d'una partícula és el vector tangent a la trajectòria el mòdul del qual ens indica el ritme de canvi de posició de la partícula a cada instant

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = (\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}) \tag{1.43}$$

➔ **Velocitat relativa**: La velocitat relativa d'una partícula P respecte d'una altra Q és:

$$\vec{v}_{P(Q)} = \frac{d\vec{r}_{P(Q)}}{dt} = \vec{v}_P - \vec{v}_Q \tag{1.44}$$

➔ **Vector acceleració**: El vector acceleració d'una partícula és el vector

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}} = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}\right) \tag{1.45}$$

Tríedre de Frenet

La variació de la velocitat d'una partícula $\vec{v}$ és l'acceleració $\vec{a} = \dot{\vec{v}}$. Les components cartesianes d'aquests vectors no ens informen gaire de què representen. Si mirem de tornar a la definició de vector com aquella magnitud que té mòdul per una banda i direcció i sentit per l'altra, podem expressar el vector velocitat en la forma $\vec{v} = v\hat{v}$. D'aquesta manera, cada factor té un significat físic ben clar, v, el mòdul, i $\hat{v}$, la direcció i el sentit. Ara, si derivem per trobar l'acceleració:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v\,\hat{v})}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{v} + v\frac{d\hat{v}}{dt} \tag{1.46}$$

el primer terme és la part de l'acceleració en la direcció i el sentit de la velocitat. És l'acceleració tangent $\vec{a}_T = \frac{dv}{dt}\hat{v}$. La component de l'acceleració tangent, a_T, $a_T = \frac{dv}{dt}$.

Per estudiar que representa el segon terme $v\frac{d\hat{v}}{dt}$, ens fixarem que $\hat{v}$ és un vector unitari, $\hat{v}^2 = 1$. Derivant respecte del temps $2\hat{v} \cdot \frac{d\hat{v}}{dt} = 0$, és a dir, $\frac{d\hat{v}}{dt}$ és un vector normal a $\hat{v}$, normal a la trajectòria. El vector $\hat{n} = \frac{d\hat{v}}{dt}\left|\frac{d\hat{v}}{dt}\right|^{-1}$ és normal a la trajectòria i unitari. Podem encara definir un tercer vector, el vector binormal $\hat{b}$, normal als dos anteriors i unitari, fent $\hat{b} = \hat{v} \times \hat{n}$. Aquest tercer vector no el farem servir per descriure l'acceleració. El definim per completar la base. El que sí que ens interessa analitzar és la part de l'acceleració dirigida en la direcció normal $\hat{n}$. És l'acceleració normal $\vec{a}_N = v\left|\frac{d\hat{v}}{dt}\right|\hat{n}$. Per descriure adequadament la component normal a l'acceleració ens cal saber-ne més sobre la forma de la trajectòria.

A la figura 1.27, es comparen dos punts molt pròxims de la trajectòria, de vectors tangents unitaris $\hat{v}(t)$ i $\hat{v}(t+dt)$, que formen un triangle que té dos costats de longitud 1 i el tercer de longitud $|d\hat{v}|$. Essent aquest triangle isòsceles i d'angle

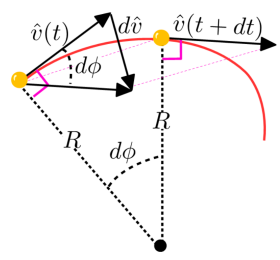


Fig. 1.27: Radi de curvatura R

infinitesimal, és equiparable a un arc de radi 1. A la vegada, el petit tram de trajectòria és una corba en forma de petit arc d'angle $d\phi$, **radi de curvatura** R i longitud d'arc $d\ell = vdt$. Tenim les relacions

$$1\ d\phi = |d\hat{v}| \quad ; \quad R\ d\phi = d\ell \tag{1.47}$$

les quals, eliminant $d\phi$, ens permeten obtenir una expressió del radi de curvatura R en termes del vector unitari tangent a la trajectòria $\hat{v}$. Es defineix per conveniència la **curvatura** $\rho = 1/R$. Amb tot, tenim:

➔ **Radi de curvatura**: A cada punt d'una trajectòria donada, de vector tangent unitari $\hat{v}$, li podem associar un radi de curvatura R i una curvatura ρ segons:

$$\rho = \frac{1}{R} = \left|\frac{d\hat{v}}{d\ell}\right| \tag{1.48}$$

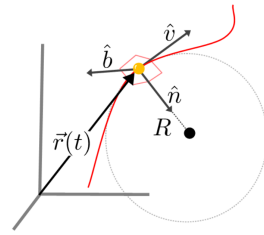


Fig. 1.28: Tríedre de Frenet i radi de curvatura

➔ **Tríedre de Frenet**: A cada punt d'una trajectòria donada, de vector tangent unitari $\hat{v}$, podem definir una base de vectors formada pels vectors tangent, normal i binormal a la trajectòria, anomenada *tríedre de Frenet* (vegeu la figura 1.28), segons:

$$\hat{v} \ ; \ \hat{n} = R\frac{d\hat{v}}{d\ell} \ ; \ \hat{b} = \hat{v} \times \hat{n} \tag{1.49}$$

Fig. 1.29: Jean Frédéric Frenet (1816-1900) fou un matemàtic, astrònom i meteoròleg francès

➔ **Acceleració tangent i normal**: L'acceleració d'una partícula que recorre una trajectòria, definida pel vector tangent unitari $\hat{v}$, sempre es pot escriure en la forma $\vec{a} = a_T\hat{v} + a_N\hat{n}$. Les components tangent, a_T i normal, a_N, de l'acceleració es poden expressar en termes de v i R com

$$a_T = \frac{dv}{dt} \ ; \ a_N = \frac{v^2}{R} \tag{1.50}$$

Problema 1.7.1. Un observador inercial O mesura la posició d'una partícula (unitats del S.I.) $\vec{r}_{P(O)} = (6t^2-4t)\hat{\imath}-3t^3\hat{\jmath}+2\hat{k}$. Un altre observador O', amb la mateixa orientació, mesura la posició de la mateixa partícula $\vec{r}_{P(O')} = (6t^2+3t)\hat{\imath}-3t^3\hat{\jmath}-3\hat{k}$.

a) Determineu la velocitat relativa del sistema O' respecte de O.

b) Calculeu l'acceleració de la partícula respecte de O i O'.

c) És O' un observador inercial?

Solució

a) La velocitat de la partícula respecte de O és:

$$\vec{v}_{P(O)} = \frac{d\vec{r}_{P(O)}}{dt} = (12t-4)\hat{\imath}\ - 9t^2\hat{\jmath}$$

La velocitat de la partícula respecte de O' és:

$$\vec{v}_{P(O')} = \frac{d\vec{r}_{P(O')}}{dt} = (12t+3)\hat{\imath} - 9t^2\hat{\jmath}$$

La velocitat relativa de O' respecte de O serà

$$\vec{V} = \vec{v}_{O'(O)} = \vec{v}_{O'} - \vec{v}_O = -\vec{v}_P + \vec{v}_{O'} + \vec{v}_P - \vec{v}_O = \vec{v}_{P(O)} - \vec{v}_{P(O')} = -7\hat{\imath}$$

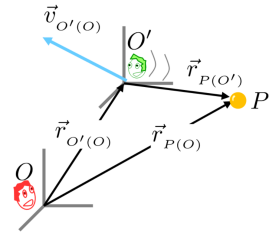


Figura de la solució 1.7.1

b)

$$\vec{a}_{P(O)} = \frac{d\vec{v}_{P(O)}}{dt} = 12\hat{\imath} - 18\,t\,\hat{\jmath}$$

De l'apartat anterior, tenim $\vec{v}_{P(O')} = \vec{v}_{P(O)} - \vec{V}$, així

$$\vec{a}_{P(O')} = \frac{d\vec{v}_{P(O')}}{dt} = \frac{d\vec{v}_{P(O)}}{dt} - \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{a}_{P(O)} = 12\hat{\imath} - 18\,t\,\hat{\jmath}$$

c) Si, perquè O' viatja a velocitat constant respecte d'un observador inercial O: $\vec{v}_{O'(O)} = \text{ct}$ ■

Problema 1.7.2. Una partícula descriu un moviment rectilini, essent l'espai recorregut $s = 4t^3 - 3t^2 - 6$, s en metres i t en segons. Si la partícula parteix de $t = 0$, calculeu

a) el temps que trigarà a tenir una velocitat de $6\,\text{m/s}$.

b) el valor de l'acceleració en aquest mateix instant.

Solució

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 12t^2 - 6t$$

a) Si la partícula parteix de $t = 0$,

$$v(t) = 6 = 12t^2 - 6t \Rightarrow 2t^2 - t - 1 = 0 \Rightarrow t = 1s$$

b) En aquest instant, l'acceleració serà

$$a(t=1) = \left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=1} = (24t-6)|_{t=1} = 18\,\text{m/s}^2$$ ■

Problema 1.7.3. Un cos descriu un moviment rectilini amb acceleració $a = 4 - t^2$ (a en m/s^2 i t en s). Calculeu la velocitat i el desplaçament en funció del temps, si a $t = 3\,\text{s}$, $v = 2\,\text{m/s}$ i $x = 9\,\text{m}$.

Solució

Integrant l'expressió de la acceleració n'obtenim la velocitat:

$$v = \int a dt = \int \left(4 - t^2\right) dt = 4t - \frac{t^3}{3} + K_1$$

Integrant novament n'obtenim el desplaçament:

$$x = \int v dt = \int \left(4t - \frac{t^3}{3} + K_1\right) dt = 2t^2 - \frac{t^4}{12} + K_1 t + K_2$$

K_1 i K_2 són constants d'integració que depenen de les condicions inicials. Com que $t = 3\,\text{s}$, $v = 2\,\text{m/s}$ i $x = 9\,\text{m}$, tenim

$$v(3) = 2 = \left(4 \cdot 3 - \frac{3^3}{3} + K_1\right) \Rightarrow K_1 = -1$$

$$x(3) = 9 = \left(2 \cdot 3^2 - \frac{3^4}{12} + (-1)\,3 + K_2\right) m \Rightarrow K_2 = 0{,}75$$

N'obtenim finalment:

$$x = -t + 2t^2 - \frac{t^4}{12} + 0{,}75 \quad ; \quad v = 4t - \frac{t^3}{3} - 1$$

■

Problema 1.7.4. El moviment tridimensional d'una partícula està definit pel vector posició $\vec{r} = R\sin(\omega t)\,\hat{\imath} + c\,t\,\hat{\jmath} + R\cos(\omega t)\,\hat{k}$ amb R, ω i c constants.

a) Determineu les magnituds de la velocitat i l'acceleració de la partícula.

b) Calculeu el radi de curvatura i els components tangent i normal de l'acceleració i el vector normal unitari.

Solució

a)

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \omega R\cos\omega t\ \hat{\imath} + c\ \hat{\jmath} - \omega R\sin\omega t\ \hat{k}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -\omega^2 R\sin\omega t\,\hat{\imath} - \omega^2 R\cos\omega t\,\hat{k} = -\omega^2 R\left(\sin\omega t\,\hat{\imath} + \cos\omega t\,\hat{k}\right)$$

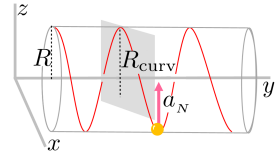


Figura de la solució 1.7.4

b)

$$v = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}} = \sqrt{\omega^2R^2\left(\cos^2\omega t + \sin^2\omega t\right) + c^2} = \sqrt{\omega^2R^2 + c^2}$$

$$a = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} = \sqrt{\omega^4R^2\left(\sin^2\omega t + \cos^2\omega t\right)} = \omega^2 R$$

$$a_T = \frac{dv}{dt} = 0$$

Essent $a_T = 0$, podem concloure que tota l'acceleració és normal, és a dir, $a_N = \omega^2 R$. Si $a_T \neq 0$, també podríem trobar a_N aïllant de $a^2 = a_T^2 + a_N^2$. No ho farem així; resoldrem a_N trobant-ne primer la curvatura.

$$\hat{v} = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{\omega R\cos\omega t\,\hat{\imath} + c\hat{\jmath} - \omega R\sin\omega t\,\hat{k}}{\sqrt{\omega^2R^2 + c^2}}$$

$$\frac{d\hat{v}}{dt} = \frac{-\omega^2 R\left(\sin\omega t\,\hat{\imath} + \cos\omega t\,\hat{k}\right)}{\sqrt{\omega^2R^2 + c^2}}$$

$$\left|\frac{d\hat{v}}{dt}\right| = \frac{\omega^2 R}{\sqrt{\omega^2R^2 + c^2}}$$

Denotarem el radi de curvatura per R_{curv} per no confondre'l amb R, que és una constant de l'enunciat del problema.

$$R_{\text{curv}} = v\left|\frac{d\hat{v}}{dt}\right|^{-1} = \frac{\sqrt{\omega^2R^2+c^2}}{\frac{\omega^2 R}{\sqrt{\omega^2R^2+c^2}}} = R + \frac{c^2}{\omega^2 R}$$

Observem que, si $c = 0$, si la corba no avança en la direcció $\hat{\jmath}$, és tracta d'una circunferència de radi R en el pla $x - z$. En aquest cas, $R_{\text{curv}} = R$.

L'acceleració normal a_N la calcularem utilitzant el radi de curvatura $R_{\text{curv}} = R$.

$$a_N = \frac{v^2}{R_{\text{curv}}} = \frac{\omega^2R^2+c^2}{\left(\frac{\omega^2R^2+c^2}{\omega^2 R}\right)} = \omega^2 R$$

$$\hat{n} = \frac{R_{\text{curv}}}{v}\frac{d\hat{v}}{dt} = -\sin\omega t\,\hat{\imath} - \cos\omega t\,\hat{k}$$ ■

Problema 1.7.5. Una partícula fa un moviment circular (no uniforme) $\vec{r}(t) = R_0(\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$ on $\varphi = \varphi(t)$ és una funció creixent del temps. Calculeu:

a) la velocitat i l'acceleració.

b) el radi de curvatura de la trajectòria.

c) la base de vectors, tangent $\hat{v}$ i normal $\hat{n}$, i els components tangent a_T i normal a_N de l'acceleració.

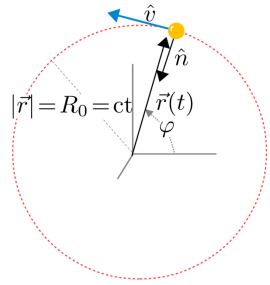


Figura de la solució 1.7.5

Solució

a) La velocitat i l'acceleració. En derivar respecte de t, tindrem en compte que estem fent una derivada total i que φ és una funció de t:

$$\vec{v} = R_0\dot{\varphi}(-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$$
$$\vec{a} = R_0\ddot{\varphi}(-\sin\varphi, \cos\varphi, 0) + R_0\dot{\varphi}^2(-\cos\varphi, -\sin\varphi, 0)$$

el mòdul de la velocitat és $v = R_0\dot{\varphi}$.

b) El vector de la base de Frenet $\hat{v}$ i el radi de curvatura R

$$\hat{v} = \frac{\vec{v}}{v} = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0) \quad ; \quad \frac{d\hat{v}}{dt} = \dot{\varphi}(-\cos\varphi, -\sin\varphi, 0)$$
$$R = v\left|\frac{d\hat{v}}{dt}\right|^{-1} = R_0$$

c) El vector de la base de Frenet $\hat{n}$ i les components tangent i normal de l'acceleració

$$\hat{n} = \frac{R}{v}\frac{d\hat{v}}{dt} = (-\cos\varphi, -\sin\varphi, 0)$$
$$a_T = \frac{dv}{dt} = R_0\ddot{\varphi} \quad ; \quad a_N = \frac{v^2}{R} = R_0\dot{\varphi}^2$$ ■

2 Dinàmica d'una partícula

Introducció

Estudiem el moviment d'una partícula des del punt de vista de les causes que el fan possible, és a dir, les forces. Per això relacionem aquestes causes amb els conceptes propis de la cinemàtica, introduïts al capítol 1, com ara la posició, la velocitat i l'acceleració. Tot seguit, introduirem altres propietats, com la quantitat de moviment, el moment d'una força, el moment angular, el treball i l'energia. Finalment, analitzem alguns tipus de forces.

Una **partícula clàssica** és qualsevol objecte material de dimensions negligibles respecte a les dimensions de la trajectòria que realitza (distàncies i radis de curvatura) i que no gira sobre si mateix o, si ho fa, no transmet aquest gir a cap altra partícula. En queden excloses les partícules extremament petites, de dimensió atòmica o inferior. D'aquestes se n'ocupa la mecànica quàntica. Una **partícula newtoniana** és una partícula clàssica que es mou sempre a velocitats molt inferiors a les de la llum.

Si no diem el contrari, quan parlem de *partícula* ens referim a partícula newtoniana, tal com l'hem definida aquí. També, quan diem que un objecte és *petit* el que volem dir és que el podem tractar com a partícula newtoniana.

Els conceptes i mètodes que expliquem en aquest tema s'apliquen, doncs, a les partícules. Tot i amb això, més endavant, a la secció 3.13, veurem que, si les forces que actuen sobre un sòlid rígid no el fan girar, el seu moviment es pot explicar considerant-lo una partícula situada en un punt solidari amb el cos, anomenat *centre de masses*. De moment, però, parlem de partícules.

2.1 Primera i segona lleis de Newton

Primera llei de Newton

La mecànica clàssica es fonamenta en tres lleis o axiomes establerts per Galileu i Newton als segles XVII-XVIII, basats, en bona part, en resultats experimentals. A la secció 1.6, ja hem vist la primera llei de Newton o llei d'inèrcia, en relació amb la definició de sistema inercial. Hem vist com la primera llei de Newton, entre altres coses, definia què entenem per absència de causa. Ara volem anar més enllà, especificant una mica més el concepte de causa. La primera llei es pot formular així:

➔ ***Primera llei de Newton o llei d'inèrcia***. *Tot cos (partícula) sobre el qual no actua cap* ***força*** *manté el seu estat de moviment, ja sigui en repòs o en moviment rectilini uniforme.*

La primera llei de Newton introdueix el concepte de força com la causa que modifica l'estat de moviment d'un cos.

Com s'ha indicat a la secció 1.6, els sistemes de referència (SR) per als quals es verifica la primera llei de Newton s'anomenen *sistemes de referència inercials* (SRI). A més, qualsevol SR que es mogui a velocitat constant respecte a un SRI també és inercial. D'altra banda, si un SR accelera respecte a un SRI és no inercial. En aquest curs, només tractarem els casos de SRI. Per tant, en cap moment parlarem de forces *fictícies*, com la centrífuga o la de Coriolis. Podem resoldre totes les situacions utilitzant un SRI, sense necessitat d'introduir cap força fictícia.

Segona llei de Newton

La segona llei, també anomenada *llei de moviment*, estableix que

➔ ***Segona llei de Newton o llei de moviment***. *Un cos (partícula) sotmès a l'acció d'una força no nul·la, accelera. L'acceleració té la mateixa direcció i sentit que la força, i el mòdul és igual al de la força dividit per la* ***massa inercial***. *És a dir:*

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \tag{2.1}$$

$\vec{F}$ és la força causant de l'acceleració $\vec{a}$ de la partícula. m és la constant de proporcionalitat entre força i acceleració, anomenada *massa inercial*. És una propietat intrínseca de la partícula que posa de manifest la resistència a ser accelerada.

S'ha escrit molt sobre el significat d'aquesta llei. Defineix la força? Defineix la massa (inercial)? És una llei per saber com es mou la partícula? La veritat és que és una mica de cada cosa.

La podem escriure:

$$\textbf{A)}\ \vec{F} = m\vec{a} \qquad \textbf{B)}\ \vec{F}(\vec{r},\vec{v},t) = m\vec{a} \qquad \textbf{C)}\ \vec{F}(\vec{r},\dot{\vec{r}},t) = m\,\ddot{\vec{r}} \tag{2.2}$$

La versió **A**, com (2.1), és la més coneguda però no la més aclaridora. Les dues altres donen més informació. La tercera és la que vol deixar més clar que es tracta d'una *llei de moviment*.

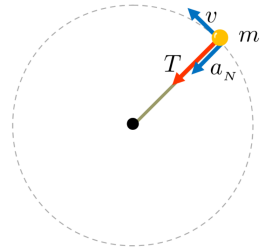


Fig. 2.1: L'acceleració normal a_N és causada per la força T de tensió de la corda: $a_N = \frac{T}{m}$

➔ **La llei de Newton defineix la força**: La força és la causa de l'acceleració de la partícula i pot dependre de la posició i la velocitat d'aquesta, a més del temps, però no de l'acceleració. La força és una magnitud vectorial, ja que l'acceleració, com hem vist a la secció 1.7, ho és i la massa, en estar definida com una propietat intrínseca de la partícula, és un escalar. A més, $\vec{a}$ i $\vec{F}$ són vectors paral·lels i, sent m positiva, tenen el mateix sentit.

És important adonar-se que (2.1) (també (2.2)) és una equació vectorial. Això vol dir que involucra mòdul, direcció i sentit. Així, per exemple, per al cas senzill d'una pedra lligada a una corda, que descriu una trajectòria circular a un mòdul de velocitat constant, hi ha acceleració. En aquest cas, malgrat que el mòdul de la velocitat és constant, la direcció no ho és. L'acceleració és la normal o centrípeta, està dirigida cap al centre de la trajectòria circular i és causada per la tensió de la corda, $a_N = \frac{T}{m}$ (vegeu la figura 2.1). Vegeu la secció 1.7.

➔ **La llei de Newton defineix la massa**: si sobre una mateixa partícula, actuen forces diferents $\vec{F}_1, \vec{F}_2...$ causant acceleracions diferents $\vec{a}_1, \vec{a}_2...$ (vegeu la figura 2.2), la relació entre els mòduls, $\frac{F_1}{a_1} = \frac{F_2}{a_2} = ...$, es manté constant i l'anomenem ***massa inercial*** de la partícula (o simplement massa):

$$m = \frac{F_1}{a_1} = \frac{F_2}{a_2} = ... \tag{2.3}$$

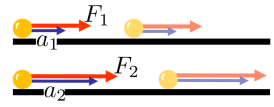


Fig. 2.2: Diferents forces sobre una mateixa partícula donen lloc a diferents acceleracions. Segons la segona llei de Newton, el quocient es manté constant i s'anomena *massa inercial* de la partícula

La massa és una magnitud escalar.

Hem de tenir en compte que, per dur a terme l'experiència descrita, hem de comptar primer amb un patró de força, amb una definició que no contingui el concepte de massa. Això no és del tot senzill. Es recolza en demanar la validesa de l'anomenada **llei de conservació de la massa** en un context clàssic i no relativista: si ajuntem una partícula de massa m_1 i una altra de massa m_2 la massa de la nova partícula és $m_1 + m_2$. Aquesta llei fa que, clàssicament, es pugui utilitzar la massa com a mesura de la *quantitat de matèria* i reanomenar la llei com *llei de conservació de la matèria*. Actualment, si es vol afinar molt, es comptabilitza la matèria pel nombre de protons, neutrons, electrons..., o d'àtoms i molècules que conté.

Podem ara prendre com a patró la força que, a prop de la Terra, rep una quantitat de matèria determinada. Fet això, podem fabricar-nos una molla que, per a una certa

deformació, faci la mateixa força que la descrita anteriorment. Per exemple, quan pengem en repòs de la molla la quantitat de matèria, la molla farà la força patró. Ara podem definir forces de valor doble, triple... de la força patró utilitzant dues, tres... molles en paral·lel. Si utilitzem el principi de superposició (que es tracta una mica més avall) la força serà el doble, triple... Aquestes són les forces que podem utilitzar en l'experiència descrita en la definició de massa. Evidentment, la quantitat de matèria determinada, esmentada anteriorment, acaba esdevenint el patró i la unitat de massa, i la unitat de força finalment és derivada segons la llei de Newton, com mostrarem una mica més avall.

➔ **És una llei per saber com es mou la partícula**. Si coneixem la força com un camp funció de $\vec{r}$ i $\vec{v}$, la teoria d'equacions diferencials ens diu que **C** és una equació diferencial que pot ser integrada (dos cops) per trobar la incògnita $\vec{r}(t)$. A cada integració, s'introdueix una constant (vectorial): $\vec{C}_1$ i $\vec{C}_2$. N'obtindrem $\vec{r}(t) = \vec{f}(\vec{C}_1, \vec{C}_2, t)$

Si coneixem la posició i la velocitat de la partícula en un instant t_0 donat, $\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0)$ i $\vec{v}_0 = \vec{v}(t_0)$, podem resoldre

$$\begin{cases} \vec{r}_0 = \vec{f}(\vec{C}_1, \vec{C}_2, t_0) \\ \vec{v}_0 = \frac{\partial \vec{f}}{\partial t}(\vec{C}_1, \vec{C}_2, t_0) \end{cases} \tag{2.4}$$

i trobar $\vec{C}_1$ i $\vec{C}_1$ en funció de $\vec{r}_0$ i $\vec{v}_0$ i, per tant, tenir $\vec{r}(t) = \vec{r}(\vec{r}_0, \vec{v}_0, t)$.

➔ **Mecànica predictiva**. Podem dir que la mecànica newtoniana és una mecànica predictiva. Es tracta d'una versió forta de determinisme: coneguda la funció força que actua sobre una partícula, i conegudes la posició i velocitat en un instant donat, el futur i el passat de la partícula queden totalment determinats.

A la secció 2.5 d'aquest capítol, veurem alguns exemples de forces.

Principi de superposició de forces

L'experiència ens mostra que, si sobre una partícula actuen dues forces $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$, l'acceleració $\vec{a}$ que li provoquen és $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$, essent $\vec{a}_i$, $i = 1,2$, l'acceleració causada únicament per la força $\vec{F}_i$.

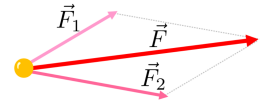


Fig. 2.3: Dues forces que actuen sobre una mateixa partícula causen la mateixa acceleració que una única força suma de les dues originals

Tenint en compte la llei de moviment de Newton, podem enunciar (vegeu la figura 2.3):

➔ ***Principi de superposició de forces***. *La* ***força resultant*** *de l'actuació de dues forces $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ sobre una mateixa partícula és*

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \tag{2.5}$$

Per apreciar bé aquest principi i no considerar-lo trivial només cal dir que a la teoria

de la relativitat no es compleix!

Tornant a la primera llei de Newton, per tal que es compleixi, no cal que totes les forces que actuen sobre un partícula siguin nul·les; n'hi ha prou que ho sigui la resultant. El fet que la força resultant sigui nul·la no implica absència de moviment, sinó que la velocitat sigui constant. Al seu moment, aquesta afirmació va trencar els esquemes dels seguidors de l'escola aristotèlica, que fins i tot associaven el moviment uniforme a l'existència d'una força.

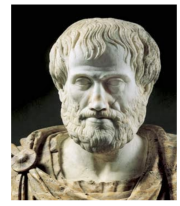


Fig. 2.4: Aristòtil (384 aC-322 aC). Física aristotèlica: és l'estudi de l'ésser en moviment. Entre les lleis de moviment, assenyala que "tot mòbil requereix un motor"

Unitats de massa i força

Només ens resta introduir el patró de massa necessari per poder fer mesures.

➔ **Unitat de massa (S.I.). El kilogram,** kg: una massa de 1 kilogram és igual a la massa del patró internacional: un cilindre d'iridi-platí custodiat a París pel BIPM. (Definició adoptada l'any 1889.)

La unitat de força és derivada de la llei de Newton.

➔ **La unitat de força en el S.I. és el newton** (N).: $1\,\mathrm{N} = 1\mathrm{kg}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

Problema 2.1.1. Una nena de massa $30\,\mathrm{kg}$ està en un ascensor. Determineu la força N que exerceix el sòl sobre la nena si l'ascensor:

a) puja amb moviment uniforme,

b) baixa amb moviment uniforme,

c) puja amb una acceleració de $2\,\mathrm{m/s^2}$,

d) baixa amb acceleració de $2\,\mathrm{m/s^2}$ i,

e) cau lliurement després que es trenquin els seus cables de l'ascensor

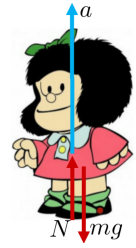


Figura de la solució 2.1.1

Solució

Amb $m = 30$ kg i $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$, utilitzem la llei de moviment de Newton en la direcció vertical, $N - mg = ma \Rightarrow N = m(a+g)$. N'obtenim:

a) $a = 0 \Rightarrow N = mg =$ $294{,}3\,\mathrm{N}$,

b) $a = 0 \Rightarrow N = mg =$ $294{,}3\,\mathrm{N}$,

c) $a = 2 \Rightarrow N = m(2+g) =$ $354{,}3\,\mathrm{N}$,

d) $a = -2 \Rightarrow N = m(g-2) =$ $234{,}3\,\mathrm{N}$,

e) $a = -g \Rightarrow N =$ 0 ■

Problema 2.1.2. Un objecte petit, de $m = 4\,\mathrm{kg}$, està sotmès a l'acció de dues forces, $\vec{F}_1 = \hat{\imath} - 2\hat{\jmath}$ i $\vec{F}_2 = \hat{\imath} + \hat{\jmath}$ (unitats N). Calculeu els vectors acceleració,

velocitat i posició de l'objecte en el temps $t = 3\,\text{s}$ si a $t = 0$ està en repòs a l'origen de coordenades

Solució

$m = 4$ kg. La força resultant és $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (2, -1)$. De l'equació de moviment, n'obtenim l'acceleració

$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$$

Integrant l'acceleració,

$$\vec{v} = \int \vec{a}\, dt = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right) t + \vec{C}_1$$

i, tenint en compte les condicions inicials a $t = 0$, $\vec{v} = 0$ implica $\vec{C}_1 = 0$ i, per tant, $\vec{v} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right) t$

Integrant la velocitat,

$$\vec{r} = \int \vec{v}\, dt = \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}\right) t^2 + \vec{C}_2$$

i, tenint en compte les condicions inicials a $t = 0$, $\vec{r} = 0$ implica $\vec{C}_2 = 0$ i, per tant, $\vec{r} = \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}\right) t^2$ ■

Per fer els dos problemes següents, tingueu compte la força pes o força deguda al camp gravitatori $\vec{g}$ a prop de la superfície terrestre, $\vec{P} = m\vec{g}$, que actua sobre qualsevol massa m, amb $g = 9{,}81\,\text{m/s}^2$. Si necessitem afinar més, tindrem en compte la gravetat local. Per exemple, a Barcelona, $g = 9{,}804\,\text{m/s}^2$. A la secció 2.5, tractem la força pes com a exemple de força constant i, a la secció 4.2, estudiarem amb més detall la força pes.

Problema 2.1.3. Una partícula lligada a una corda, de massa negligible i longitud ℓ, fa un moviment circular uniforme. Trobeu la mínima velocitat angular ω que el fa possible.

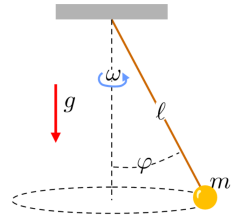


Figura de l'enunciat 2.1.3

Solució

Les equacions de moviment de Newton en les direccions verticals i normals a la trajectòria són

$$T\cos\varphi - mg = 0$$
$$T\sin\varphi = ma_N$$

L'acceleració normal és $a_N = \frac{v^2}{R} = R\omega^2 = \ell\sin\varphi\ \omega^2$. Aïllant T de la primera i substituint a la segona,

$$\frac{mg}{\cos\varphi}\sin\varphi = m\ell\sin\varphi\,\omega^2$$

d'on obtenim $\cos\varphi = \frac{g}{\ell\omega^2}$. El cosinus és positiu i també cal que compleixi $\cos\varphi \leq 1$, d'on obtenim

$$\omega \geq \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$ ■

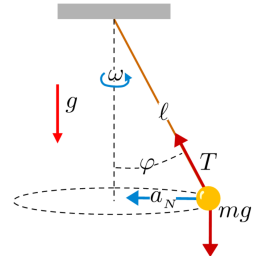


Figura de la solució 2.1.3

Problema 2.1.4. Una partícula lligada a una corda, de massa negligible i longitud ℓ, oscil·la en un pla vertical.

a) Trobeu l'equació de moviment utilitzant la segona llei de Newton.

b) Especifiqueu-ne el resultat per a petites oscil·lacions.

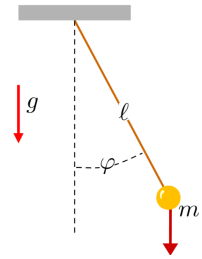


Figura de l'enunciat 2.1.4

Solució

Les equacions de moviment de Newton en les direccions tangents i normals a la trajectòria són

$$T - mg\cos\varphi = ma_N$$
$$-mg\sin\varphi = ma_T$$

Essent la velocitat $v = \ell\dot{\varphi}$, l'acceleració tangent és $a_T = \frac{dv}{dt} = \ell\ddot{\varphi}$. Substituint a la component tangent de l'equació de moviment $-mg\sin\varphi = m\ell\ddot{\varphi}$, d'on, simplificant,

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell}\sin\varphi = 0$$

Si $\varphi \ll 1$, expressió que hem d'entendre expressada en radians, llavors $\sin\varphi \approx \varphi$ i obtenim

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell}\varphi = 0$$

■

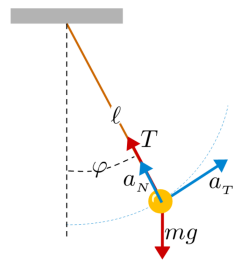


Figura de la solució 2.1.4

2.2 Força i quantitat de moviment

➔ **Quantitat de moviment**. Es defineix la quantitat de moviment $\vec{p}$ d'una partícula com el vector

$$\vec{p} = m\vec{v} \tag{2.6}$$

Les unitats de la quantitat de moviment en el S.I. són: $\mathrm{kg\,m/s}$.

La llei de moviment de Newton pot ser escrita, utilitzant la quantitat de moviment, com

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \tag{2.7}$$

(2.7) permet interpretar que la força és la causa de la variació de la quantitat de moviment i enunciar:

➔ ***Teorema de la conservació de la quantitat de moviment***. *Si sobre una partícula no actua cap força o la resultant és nul·la, la quantitat de moviment es manté constant.*

Per a una partícula, aquests resultats són immediats pel fet que la quantitat de moviment és, en aquest cas, directament proporcional a la velocitat de la partícula. Veurem més endavant, a la secció 3.3, quan tractem aquest concepte per a N partícules, que aquestes relacions són també vàlides i que ens permetran resoldre situacions de més complexitat.

➔ **Impuls subministrat per una força**. Es defineix l'impuls $\vec{I}$ subministrat per una força $\vec{F}$ en l'interval $t_1 \to t_2$ com el vector

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\, dt \tag{2.8}$$

Les unitats de l'impuls en el S.I. són: kg m/s. Observem que, per trobar $\vec{I}$, pot ser necessari conèixer la trajectòria $\vec{r}(t)$.

➔ ***Teorema de la quantitat de moviment***. *L'increment de la quantitat de moviment és igual a l'impuls $\vec{I}$ subministrat*

$$\vec{I} = \Delta\vec{p} \tag{2.9}$$

Demostració. Només cal considerar la llei de Newton (2.7) en la forma $\vec{F}\, dt = d\vec{p}$ i integrar a l'interval $t_1 \to t_2$ ■

Problema 2.2.1. Una partícula d'1 kg es mou, per a $t \leq 0$, rectilíniament amb una velocitat constant de 100 m/s. A l'instant $t = 0$ i durant 1 s actua una força $F = 1000\ \mathrm{e}^{-t}$ (F en N i t en s) en la mateixa direcció i sentit contrari al moviment. Calculeu l'impuls subministrat per la força i la quantitat de moviment final de la partícula.

Solució

En ser la força de la mateixa direcció que la velocitat, la partícula no canviarà de direcció. Com que treballem amb un problema unidimensional n'ometem la notació vectorial. Tenim una única direcció (diguem-ne $\hat{\imath}$) i indicarem el sentit pel signe. El signe positiu el prenem com el de la velocitat inicial.

L'impuls subministrat per la força a la partícula és

$$I = \int_{t_1}^{t_2} F dt = \int_0^1 -1000\,\mathrm{e}^{-t} dt = 1000\,\mathrm{e}^{-t}\Big|_0^1 = -632\,\frac{\mathrm{kg\ m}}{\mathrm{s}}$$

La quantitat de moviment final és p_2

$$\Delta p = p_2 - p_1 \Rightarrow p_2 = p_1 + \Delta p = mv_1 + \Delta p = 100 - 632$$
$$\Rightarrow p_2 = -532\,\mathrm{kg\ m/s}$$

Aquest resultat significa que la partícula acaba movent-se a una velocitat constant de 532 m/s en sentit contrari a l'inicial. ■

Problema 2.2.2. Una partícula de massa 2 kg es mou, en un cert instant, a una velocitat que s'expressa per $\vec{v} = 5\ \hat{\imath} + 2\ \hat{\jmath}$. Tot seguit, s'hi aplica una força $\vec{F} = 4\ \hat{\jmath}$. Sabent que $\vec{v}$ i $\vec{F}$ estan expressades en el S.I., determineu la quantitat de moviment de la partícula després d'aplicar-hi la força durant 3 s.

Solució

$m = 2\text{kg}$. La quantitat de moviment inicial és $\vec{p}_1 = m\vec{v} = 10\,\hat{\imath} + 4\,\hat{\jmath}$. Utilitzant el teorema de l'impuls lineal i essent $\vec{p}_2$ la quantitat de moviment final

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_t^{t+3} \vec{F}dt = 3\vec{F} = 12\,\hat{\jmath}$$

Observem que els límits d'integració depenen, en principi, del temps. La força és constant en el temps. Aïllant $\vec{p}_2$ obtenim

$$\vec{p}_2 = \vec{p}_1 + 12\,\hat{\jmath} = 10\,\hat{\imath} + 16\,\hat{\jmath}$$

en unitats del S.I. ■

2.3 Moment d'una força i moment angular d'una partícula

➔ **Moment d'una força**. Es defineix el moment $\vec{M}_{(A)}$ d'una força $\vec{F}$, aplicada a un punt Q, respecte d'un punt A com

$$\vec{M}_{(A)} = \vec{r}_{(A)} \times \vec{F} \tag{2.10}$$

on $\vec{r}_{(A)}$ és el vector posició del punt Q d'aplicació de la força respecte del punt A. Les unitats en el S.I. són N m.

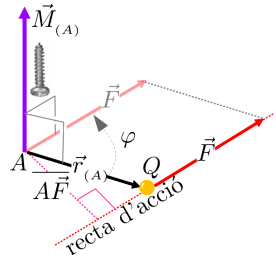


Fig. 2.5: Moment de la força $\vec{F}$ respecte del punt A. Regla del cargol

Recordem que, com a conseqüència del producte vectorial, la direcció del moment d'una força és perpendicular al pla format pels vectors $\vec{r}_{(A)}$ i $\vec{F}$. Encara més, pel fet que el primer vector del producte vectorial (2.10) és una posició, el mòdul pot ser calculat amb la senzilla expressió (vegeu la figura 2.5):

$$M_{(A)} = F\ r_{(A)} \sin\varphi = F\ \overline{AF} \tag{2.11}$$

on $\overline{AF} = r_{(A)} \sin\varphi$ és també la distància entre el punt A i la **recta d'acció** de la força $\vec{F}$. El sentit ve donat per la regla del cargol.

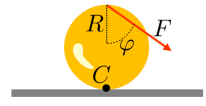


Figura de l'enunciat 2.3.1

Problema 2.3.1. Calculeu el moment de la força $\vec{F}$ aplicada sobre l'esfera, al punt indicat a la figura, respecte del punt de contacte amb el terra C.

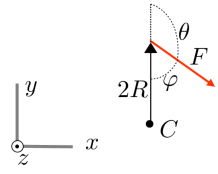


Figura de la solució 2.3.1

Solució

En podem trobar el moment fent explícitament el producte vectorial. Observant la figura, $\vec{r}_{(C)} = 2R(0,1,0)$ i $\vec{F} = F(\sin\varphi, -\cos\varphi, 0)$, i així

$$\vec{M}_{(C)} = \vec{r}_{(C)} \times \vec{F} = 2RF \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & -\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} = -2RF\sin\varphi\,\hat{k}$$

També podem procedir aplicant la regla del cargol, amb la qual podem dir $\vec{M}_{(C)} = -M_{(C)}\,\hat{k}$, i calcular el mòdul segons (2.11)

$$M_{(C)} = F\,\overline{C\vec{F}} = F\,2R\sin\varphi$$

■

➔ **Moment angular**. Es defineix el moment angular d'una partícula respecte d'un punt A, $\vec{L}_{(A)}$ com el moment de la quantitat de moviment $\vec{p}$ aplicada al punt Q on és la partícula (vegeu la figura 2.6).

$$\vec{L}(A) = \vec{r}_{(A)} \times \vec{p} \tag{2.12}$$

on $\vec{r}_{(A)}$ és el vector posició del punt Q d'aplicació de la quantitat de moviment, respecte del punt A. És important que el punt A sigui un punt fix del sistema de referència.

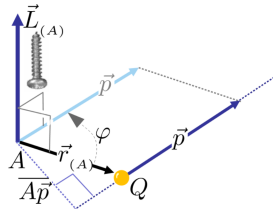


Fig. 2.6: Moment angular $\vec{L}_{(A)}$. Regla del cargol

Les unitats del moment angular en el S.I. són $\mathrm{kg\,m^2/s}$.

Recordem que, a causa del producte vectorial, la direcció del moment angular és perpendicular al pla format pels vectors $\vec{r}_{(A)}$ i $\vec{p}$. Encara més, pel fet que el primer vector del producte vectorial (2.12) és una posició, el mòdul pot ser calculat amb la senzilla expressió:

$$L_{(A)} = p\ \overline{A\vec{p}} \tag{2.13}$$

on $\overline{A\vec{p}}$ és la distància entre el punt A i la recta d'acció de la quantitat de moviment $\vec{p}$. El sentit ve donat per la regla del cargol.

La llei de moviment de Newton implica que es compleixi:

$$\frac{d\vec{L}_{(A)}}{dt} = \vec{M}_{(A)} \tag{2.14}$$

Demostració. Multiplicant ambdós membres de la llei de moviment de Newton $m\frac{d\,\vec{v}}{dt} = \vec{F}$ per $\vec{r}_{(A)}\times$ i tenint en compte que $\vec{r}_{(A)} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r}_{(A)} \times \vec{p})$ (ja que $\dot{\vec{r}}_{(A)} = \vec{v}$ i $\vec{v} \times \vec{p} = 0$), n'obtenim el resultat. ■

Hem demostrat que l'equació de moviment del Newton implica (2.14), però no que siguin equivalents: (2.14) **no implica** la llei de moviment de Newton.

(2.14) permet interpretar que el moment de la força és la causa de la variació del moment angular i enunciar:

➔ ***Teorema de la conservació del moment angular***. *Si el moment de la força que actua sobre la partícula respecte d'un punt A és nul, el moment angular respecte del mateix punt es manté constant.*

Observem que tant el moment angular com el moment d'una força depenen del punt A respecte d'on es calculi. Pot passar que respecte de A tinguem $\vec{M}_{(A)} = 0$ i, en canvi, respecte d'un altre punt B tinguem $\vec{M}_{(B)} \neq 0$.

La nul·litat del moment d'una força i, per tant, la conservació del moment angular, es dóna si la resultant de les forces que s'apliquen sobre la partícula és nul·la, però

també en altres casos bastant més interessants, com quan el vector $\vec{r}_{(A)}$ i la força $\vec{F}$ són paral·lels. És per això que, àdhuc en el cas d'una sola partícula, farem servir l'equació (2.14) per tal de solucionar alguns problemes interessants.

Com veurem més endavant, el teorema de conservació del moment angular és especialment important en el cas d'un sistema de partícules, i en particular, en el sòlid rígid.

➔ **Impuls angular**. Es defineix l'impuls angular $\vec{Y}$ subministrat pel moment d'una força $\vec{M}_{(A)}$ en l'interval $t_1 \to t_2$ com el vector

$$\vec{Y}_{(A)} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_{(A)} dt \tag{2.15}$$

Les unitats de l'impuls angular en el S.I. són $\mathrm{kg\,m^2/s}$.

➔ ***Teorema del moment angular***. *L'increment del moment angular és igual a l'impuls $\vec{Y}$ subministrat*

$$\vec{Y}_{(A)} = \Delta \vec{L}_{(A)} \tag{2.16}$$

Demostració. Només cal considerar (2.14) en la forma $d\vec{L}_{(A)} = \vec{M}_{(A)} dt$ i integrar a l'interval $t_1 \to t_2$ ■

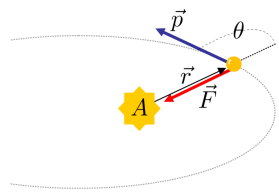


Figura de la solució 2.3.2

Problema 2.3.2. Se sap que els planetes tenen trajectòries el·líptiques amb el Sol (que considerem fix) en un dels focus. Demostreu la segona llei de Kepler.

Solució

Prenem moments respecte del punt A en el Sol. El moment de la força és nul i, per tant, el moment angular es conserva:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \text{ct}$$

Com que la direcció del moment angular és fixa, només el mòdul conté la informació rellevant

$$m\, r\, v \sin\theta = \text{ct}$$

Tenint en compte que el mòdul de la velocitat el podem escriure com $v = \frac{d\ell}{dt}$, resulta

$$r\, \frac{d\ell}{dt} \sin\theta = \text{ct}$$

Observant la figura, les àrees escombrades pel vector posició durant un temps formen triangles que, en general, són escalens, com el triangle **A** de la figura. A més, la longitud de la trajectòria entre els dos vèrtex, $\Delta\ell$, no coincideix amb el costat corresponent del triangle. Si considerem un temps $\Delta t \to dt$, el planeta haurà recorregut

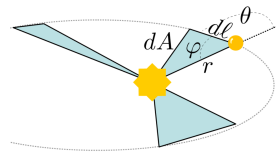


Figura de la solució 2.3.2

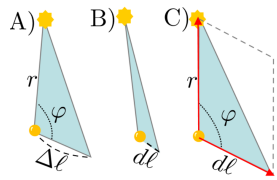


Figura de la solució 2.3.2

$\Delta\ell \to d\ell$ i tindrem el triangle **B** de la figura. Ara la longitud de la trajectòria entre els dos vèrtexs, $d\ell$, coincideix amb el costat corresponent del triangle. El podem ampliar per veure'l bé, com el **C** de la figura. L'àrea dA escombrada pel vector posició en un dt és així igual a l'àrea del triangle **C** de la figura. Sabent que el mòdul del producte vectorial de dos vectors posició és l'àrea del paral·lelogram que formen, l'àrea del nostre triangle serà

$$dA = \frac{1}{2} r\, d\ell \sin\varphi = \frac{1}{2} r\, d\ell \sin\theta$$

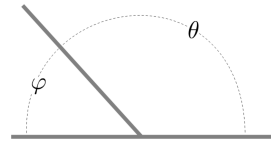


Figura de la solució 2.3.2

així, comparant aquest resultat amb el que hem obtingut de la conservació del moment angular, podem concloure

$$\frac{dA}{dt} = \text{ct}$$

que constitueix la segona llei de Kepler: *les àrees escombrades pel vector posició del planeta en temps iguals són iguals.* ■

Fig. 2.7: Johannes Kepler (1571-1630) va ser un astrònom i matemàtic alemany

2.4 Treball, energia cinètica i energia potencial. Potència

Treball i energia són conceptes molt relacionats, que tenen un paper cabdal en el món de la física, més enllà de la mecànica.

Treball d'una força

Per al cas simple d'una partícula que es mou rectilíniament una distància Δx sota els efectes d'una força constant F, paral·lela i amb el mateix sentit que el desplaçament i potser amb la presència d'una força de fricció (vegeu la figura 2.8), el treball de F es defineix a partir del producte de la força F i el desplaçament Δx:

Fig. 2.8: Una partícula es desplaça rectilíniament sota l'acció d'una força de direcció igual al vector desplaçament

$$W = F\,\Delta x \tag{2.17}$$

Si el moviment és rectilini i la força aplicada és constant, però forma un angle θ respecte al desplaçament (vegeu la figura 2.9), el treball és:

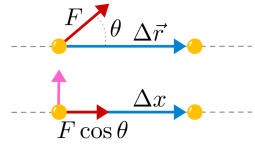


Fig. 2.9: Una partícula es desplaça rectilíniament $\Delta\vec{r}$ sota l'acció d'una força $\vec{F}$ constant. Només la component de la força en la direcció del desplaçament fa que la partícula avanci per la trajectòria

$$W = F\,\Delta x \cos\theta = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r} \tag{2.18}$$

Observem que, en aquest cas, només es considera la component de la força en la direcció del desplaçament, mentre que la component perpendicular no realitza cap treball.

Per al cas general en què la força no sigui constant i el camí C seguit per la partícula no sigui rectilini (vegeu la figura 2.10), per calcular el treball entre dos punts P_1 i P_2 cal considerar desplaçaments infinitesimals $d\vec{r}$ al llarg del camí i fer la suma de tots els treballs $\vec{F}\cdot d\vec{r}$.

➔ **Treball d'una força**. Definim el treball W d'una força $\vec{F}$ al llarg d'un camí C

de P_1 i P_2 per la integral

$$W = \int_{C:P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \tag{2.19}$$

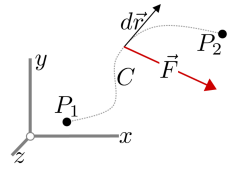


Fig. 2.10: Treball realitzat per una força $\vec{F}$ de P_1 a P_2 al llarg del camí C

Si el camí el coneixem per l'expressió paramètrica $\vec{r}(\lambda) = (x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda))$, $P_1 = \vec{r}(\lambda_1)$ i $P_2 = \vec{r}(\lambda_2)$, i podem explicitar la integral del treball

$$W = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{d\lambda} d\lambda = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left(F_x \frac{dx}{d\lambda} + F_y \frac{dy}{d\lambda} + F_z \frac{dz}{d\lambda} \right) d\lambda \tag{2.20}$$

El concepte de treball és de gran importància, tant des del punt de vista teòric com pràctic. Els ingredients per al càlcul del treball són: una força $\vec{F}$ i un camí C amb dos punts sobre aquest. Aquesta força i aquest camí no tenen per què estar relacionats. En destaquem les dues interpretacions següents:

➔ **1)** Si la força $\vec{F}$ és la causa que fa moure la partícula pel camí C, llavors el camí el podem parametritzar amb el temps t. $\vec{r}(t)$ és la trajectòria temporal i compleix $\vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t) = m\vec{a}$. Aquesta interpretació té un interès eminentment pràctic. El treball esdevé, en aquest cas, una mesura de l'efectivitat de la força en desplaçar la partícula. Podem fer molta força i poc treball (poc desplaçament) o poca força i molt treball (molt desplaçament). El treball així entès s'aproxima moltíssim al concepte quotidià que tenim de *treball*, no tan com a mesura de *l'esgotament* sinó com a mesura de l'eficàcia en la transformació realitzada a l'entorn (en el nostre cas, el desplaçament de la partícula). Més endavant veurem les forces conservatives que, seguint amb aquesta interpretació, són especialment eficaces.

➔ **2)** No necessàriament el camí C ha de ser una solució de l'equació de moviment amb la força $\vec{F}$. És a dir, si $\vec{r}(t)$ és una trajectòria temporal que passa per C i m la massa de la partícula a la qual apliquem la força $\vec{F}$, no té per què passar que $\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}(t)$. Si la força només depèn de la posició, $\vec{F}(\vec{r})$, podem calcular el treball d'una mateixa funció força per diferents camins. Ni tan sols ens cal apel·lar a la presència de la partícula. Aquesta interpretació, com veurem, tindrà un interès teòric.

Els conceptes de potència i energia cinètica estan relacionats amb el de treball per la interpretació **1)**, com veurem a continuació. En canvi, el concepte d'energia potencial requerirà de la interpretació més abstracta **2)**.

➔ **Potència d'una força**. Es defineix potència efectuada per una força $\vec{F}$ a cada instant com el ritme de treball que realitza la força sobre la partícula

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \tag{2.21}$$

Energia cinètica

L'energia cinètica d'una partícula, de massa m i que es mou a una velocitat $\vec{v}$, es defineix com la capacitat per fer un treball, associada al fet que està en moviment. Així, si combinem la definició de treball, $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$, amb la segona llei de Newton, $\vec{F} = m\vec{a}$, i la definició de velocitat, $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, de la qual obtenim $d\vec{r} = \vec{v}dt$, podem escriure

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int \vec{F} \cdot \vec{v}\, dt = \int m\,\vec{a} \cdot \vec{v}\, dt \tag{2.22}$$

Ara, tenint en compte $\vec{a} \cdot \vec{v}\, dt = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}dt = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\vec{v}^2\right) dt = d\left(\frac{1}{2}\vec{v}^2\right)$, n'obtenim

$$W = \int \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\,v^2\right) dt = \int d\left(\frac{1}{2}m\,v^2\right) \tag{2.23}$$

➔ **Energia cinètica**. Definim l'energia cinètica, E_c, d'una partícula de massa m, que es mou a una velocitat $\vec{v}$, com

$$E_c = \frac{1}{2}m\,v^2 \tag{2.24}$$

➔ ***Teorema del treball-energia***. *El treball realitzat per una força sobre una partícula és igual a l'increment de la seva energia cinètica.*

$$W = \Delta E_c \tag{2.25}$$

També es coneix amb el nom de **teorema de les forces vives o de l'energia cinètica**.

Demostració. Només cal acabar de fer la integral final de (2.23) amb els límits d'integració $\int_{\text{ini}}^{\text{fi}}$ i tenir en compte la definició d'energia cinètica (2.24): $\int_{\text{ini}}^{\text{fi}} d\left(\frac{1}{2}m\,v^2\right) = E_{c:\text{fi}} - E_{c:\text{ini}}$ ■

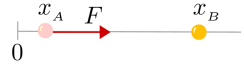


Fig. 2.11: Cas unidimensional. Treball realitzat per una força $\vec{F}$ de x_A a x_B per l'únic camí possible

Energia potencial

L'energia potencial d'una partícula, sotmesa a una força conservativa, és la capacitat per realitzar un treball pel fet d'ocupar una determinada posició a l'espai.

Considerem el cas senzill d'una partícula que es mou en una dimensió (utilitzarem per aquesta la coordenada x) sota els efectes d'una força que només depèn de la posició, $F(x)$. Per aquest tipus de força, sempre es pot definir una funció diferenciable $U(x)$ tal que la seva derivada canviada de signe és la força $F(x)$:

$$F = -\frac{dU}{dx} \tag{2.26}$$

Aquest és un exemple de força conservativa. L'energia potencial queda definida com

$$U(x) = U(0) - \int_0^x F dx \tag{2.27}$$

El treball que fa la força $F(x)$ en moure una partícula entre els punts inicial x_A i final x_B és:

$$W = \int_{x_A}^{x_B} F(x)dx = -\int_{x_A}^{x_B} \frac{dU(x)}{dx}dx = -\int_{x_A}^{x_B} dU(x) = U(x_A) - U(x_B) \tag{2.28}$$

El concepte d'energia potencial i de força conservativa es pot generalitzar si en fem les definicions adequades.

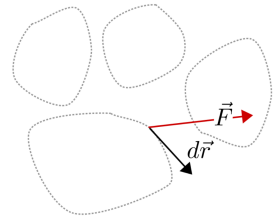


Fig. 2.12: Possibles camins tancats

➔ **Força conservativa**. Una força $\vec{F}(\vec{r})$ és conservativa si, per a tot camí tancat, el treball realitzat és nul (vegeu la figura 2.12)

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \tag{2.29}$$

Si $\vec{F}(\vec{r})$ és conservativa, el treball realitzat per anar d'un punt a un altre no depèn del camí concret que emprem, ja que, observant la figura 2.13

$$\oint_{C_1 \cup C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{P_1:C_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{P_2:C_2}^{P_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{P_1:C_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{P_1:C_2}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \tag{2.30}$$

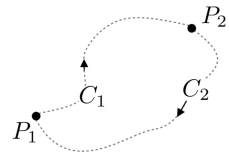


Fig. 2.13: Podem anar i tornar a P_1 per un camí tancat que passi per P_2, que podem interpretar com format per dos camins diferents, C_1 i C_2, que van de P_1 a P_2

i si la força és conservativa

$$\int_{P_1:C_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{P_1:C_2}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \tag{2.31}$$

En no dependre del camí, la integral de treball es podrà expressar com una funció només dependent dels punts de sortida i arribada, P_1 i P_2,

$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(P_1, P_2) \tag{2.32}$$

Ara, tenint en compte les propietats generals de les integrals definides

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{P_1}^{P_0} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{P_0}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \tag{2.33}$$

$$= \int_{P_1}^{P_0} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{P_2}^{P_0} \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(P_1, P_0) - f(P_2, P_0) \tag{2.34}$$

➔ **Energia potencial d'una força conservativa**. L'energia potencial associada a una força conservativa es defineix com la funció dependent del punt de l'espai P, $U(P)$, segons

$$U(P) - U(P_0) = -\int_{P_0}^{P} \vec{F} \cdot d\vec{r} \tag{2.35}$$

La integral només depèn dels punts $P = (x, y, z)$ i $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Aquest últim es diu que és un punt de referència. Així doncs, el valor de l'energia potencial $U(x, y, z)$ s'expressa en termes d'un valor de referència $U(x_0, y_0, z_0)$ per una determinada posició (x_0, y_0, z_0). Si ens convé, sempre podrem ajustar la funció potencial U de manera que el valor al punt de referència sigui nul, $U(P_0) = U(x_0, y_0, z_0) = 0$. Per exemple, per al cas d'una partícula unida a una molla, l'energia potencial es pot prendre com a nul·la quan la molla no està deformada (ni estirada ni comprimida). Per al cas de la força gravitatòria que s'exerceixen dues partícules d'una determinada massa, l'energia potencial es pot prendre com a nul·la quan la distància entre ambdues partícules és infinita. El fet de prendre un punt o un altre com a referència només fa que introduir una indeterminació d'una constant en la definició de l'energia potencial. Veurem que aquesta constant no té cap rellevància i a la pràctica el que importa és la *funció energia potencial* com a primitiva de la integral: $U(\vec{r}) = -\int \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

De la definició d'energia potencial, tenim que

$$U(P) = -\int_{0}^{P} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{P}^{0} \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(P, 0) \tag{2.36}$$

Així, combinant (2.33) i (2.36),

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = U(P_1) - U(P_2) = -\int_{P_1}^{P_2} dU \tag{2.37}$$

➔ **Treball d'una força conservativa**. El treball d'una força conservativa és igual a la disminució de la seva energia potencial

$$W = -\Delta U \tag{2.38}$$

Si coneixem l'energia potencial U associada a una força $\vec{F}$ però no coneixem la força, la podem trobar tenint en compte que $\vec{F} \cdot d\vec{r} = -dU = -\vec{\nabla} U \cdot d\vec{r}$ i, per tant,

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U \tag{2.39}$$

En general, és més pràctic fer servir la definició de potencial com a integral primitiva, en lloc d'utilitzar els límits d'integració, i afegir una constant no determinada,

que podem escollir a conveniència

$$U(\vec{r}) = -\int \vec{F} \cdot d\vec{r} + \text{constant} \tag{2.40}$$

No ens ha de preocupar el coneixement d'aquesta constant. El que té significat és el treball o la força i aquests depenen de les *diferències* de potencial. Només les diferències de potencial tindran un significat físic perquè són les que estan directament relacionades amb el treball o la força.

Saber si una força donada és o no conservativa, fent servir literalment la definició de força conservativa, és del tot inviable, ja que hauríem d'anar provant tots els camins tancats que ens puguem imaginar. Si trobem un camí tancat en què el treball és diferent de zero podem dir que no es conservativa, però si no el trobem haurem, de seguir buscant! Un criteri força senzill en alguns casos és: si en fer la integral de treball $\int \vec{F} \cdot d\vec{r}$ no ens és necessari especificar un camí concret, és que la força és conservativa. En general, sempre podem escriure

$$\int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int F_x dx + \int F_y dy + \int F_z dz$$

Si F_x només depèn de x, F_y només depèn de y i F_z només depèn de z, les tres integrals sempre es podran fer i la força serà conservativa. Si, per exemple, F_y depèn de x, necessitarem conèixer una relació entre les coordenades x i y per poder integrar, i això vol dir que necessitarem escollir un camí. Aquest criteri es pot fer servir també en casos d'alta simetria, com en el cas de les forces gravitatòria i electrostàtica (les dues tenen simetria esfèrica), que veurem al capítol 3.

En el cas general, hi ha tècniques per saber si una força donada és o no conservativa. Però tant la seva aplicació com la seva demostració queden fora de l'abast d'aquest curs.

Energia mecànica

➔ **Energia mecànica**. Si la força és conservativa, es defineix l'energia mecànica com la suma de les energies cinètica i potencial

$$E = E_c + U \tag{2.41}$$

Aplicant el resultat del teorema de les forces vives entre dues situacions diferents ini (inicial) i fi (final), per les quals les energies cinètica i potencial són $E_{c:\text{ini}}$, U_{ini} i $E_{c:\text{fi}}$, U_{fi}, tenim:

$$W = E_{c:\text{fi}} - E_{c:\text{ini}} = -(U_{\text{fi}} - U_{\text{ini}}) \tag{2.42}$$

d'on obtenim $E_{c:\text{fi}} + U_{\text{fi}} = E_{c:\text{ini}} + U_{\text{ini}}$ o, més sintèticament

$$E_{\text{fi}} = E_{\text{ini}} \tag{2.43}$$

➔ ***Teorema de la conservació de l'energia mecànica***: *Si una partícula està sotmesa únicament a forces conservatives, el valor numèric de l'energia mecànica es manté constant al llarg del temps.*

Habitualment, es diu que *l'energia mecànica es conserva*.

Podem deduir la conservació de l'energia derivant respecte del temps directament la funció energia $E(\vec{r},\vec{v}) = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + U(\vec{r})$ i tenint en compte que

1) $\vec{F}\cdot d\vec{r} = -dU$ permet escriure $\frac{dU}{dt} = -\vec{F}\cdot\vec{v}$.

2) $\frac{d\vec{v}^2}{dt} = 2\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}$.

3) La derivada és total; és una derivada sobre la trajectòria temporal i, per tant, es compleix $m\vec{a} = \vec{F}$

Utilitzant aquests tres fets, n'obtenim:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}m\frac{d\vec{v}^2}{dt} + \frac{dU}{dt} = m\vec{v}\cdot\vec{a} - \vec{F}\cdot\vec{v} = \left(m\cdot\vec{a} - \vec{F}\right)\cdot\vec{v} = 0 \qquad (2.44)$$

Si a la partícula hi actuen diverses forces, unes de conservatives i altres de no conservatives, les podem agrupar. $\vec{F}$ serà la resultant de les forces conservatives i $\vec{F}_{NC}$ serà la resultant de les forces no conservatives. Per un cantó, tenim que el treball de totes les forces serà $W = W_C + W_{NC}$ i per l'altre, l'equació de moviment serà $m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_{NC}$. Només $\vec{F}$ té una energia potencial associada: $W_C = \int \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\Delta U$.

Ara l'energia no es conservarà, però podrem escriure una modificació de (2.43)

$$E_{\text{fi}} - E_{\text{ini}} = W_{NC} \qquad (2.45)$$

i també una modificació de (2.44)

$$\frac{dE}{dt} = \vec{F}_{NC}\cdot\vec{v} \qquad (2.46)$$

➔ **La unitat de treball i energia** en el S.I. és el joule (J): $1\,\text{J} = 1\,\text{N}\,\text{m}$

➔ **La unitat de potència** en el S.I. és el watt (W): $1\,\text{W} = 1\,\frac{\text{J}}{\text{s}}$

Problema 2.4.1. Sobre una partícula actua la força $\vec{F} = (y^2 - x^2)\,\hat{\imath} + 3xy\,\hat{\jmath}$ (unitats S.I.). Trobeu el treball efectuat per $\vec{F}$ en moure's la partícula del punt $(0,0)$ al $(2,4)$ seguint:

a) la recta $y = 2x$

b) la paràbola $y = x^2$

c) És conservativa?

Solució

a) La recta $y = 2x$. En general, per calcular el treball necessitarem conèixer la trajectòria geomètrica en forma paramètrica, $\vec{r}(\lambda)$, i la força $\vec{F}$ i el desplaçament $d\vec{r}$ sobre aquesta trajectòria. La forma paramètrica de la recta $y = 2x$ es pot escriure utilitzant el paràmetre λ com $\vec{r}(\lambda) = (\lambda, 2\lambda)$ amb $\lambda \in [0;2]$. Si substituïm a la força, n'obtenim $\vec{F} = \left(((2\lambda)^2 - \lambda^2), 3\lambda \cdot 2\lambda\right) = 3\lambda^2\,(1;2)$ i, si diferenciem $\vec{r}(\lambda)$ n'obtenim $d\vec{r} = (1;2)\,d\lambda$.

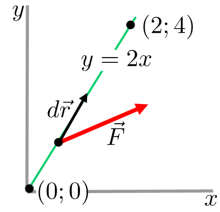


Figura de la solució de l'apartat **a** de 2.4.1

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^2 3\lambda^2\,(1;2) \cdot (1;2)\,d\lambda = 15 \int_0^2 \lambda^2 d\lambda = \boxed{40\ \text{J}}$$

b) La paràbola $y = x^2$. En aquest cas, la forma paramètrica pot ser escrita: $\vec{r}(\lambda) = (\lambda, \lambda^2)$ amb $\lambda \in [0,2]$. La força sobre la trajectòria és $\vec{F} = \left(((\lambda^2)^2 - \lambda^2), 3\lambda \cdot \lambda^2\right) = (\lambda^4 - \lambda^2, 3\lambda^3)$ i el desplaçament sobre la trajectòria $d\vec{r} = (1,2\lambda)\,d\lambda$. N'obtenim

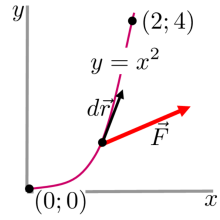


Figura de la solució de l'apartat **b** de 2.4.1

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^2 \left(\lambda^4 - \lambda^2, 3\lambda^3\right) \cdot (1;2\lambda)\,d\lambda = \int_0^2 \left(7\lambda^4 - \lambda^2\right) d\lambda = \boxed{42{,}13\ \text{J}}$$

No és conservativa perquè, com a mínim, hi ha un cas en què el treball entre dos punts depèn del camí. Observem que, si hagués donat el mateix, no podríem assegurar que fos conservativa. ■

Problema 2.4.2. Amb una velocitat inicial adequada i a causa de la força $\vec{F} = -4(x, y)$ una partícula de massa 4 es mou del punt $(2;0)$ al punt $(0;3)$ per la trajectòria $\vec{r}(t) = (2\cos t, 3\sin t)$ (totes les magnituds estan expressades en unitats del S.I.):

a) Proveu que aquesta trajectòria és possible.

b) Calculeu el treball de la força entre aquests dos punts a través d'un camí arbitrari.

c) És aquesta força conservativa? Trobeu-ne l'energia potencial associada.

d) Calculeu l'energia mecànica i proveu explícitament que es conserva sobre la trajectòria donada.

Solució

a): Hem de provar que la trajectòria compleix la llei de moviment de Newton per a aquesta força: $\vec{F} \stackrel{?}{=} m\ddot{\vec{r}}$.

La força sobre la trajectòria és

$$\vec{F} = -4(x, y) = -4\vec{r} = -4(2\cos t, 3\sin t)$$

L'acceleració

$$\dot{\vec{r}} = (-2\sin t, 3\cos t)$$
$$\ddot{\vec{r}} = (-2\cos t, -3\sin t)$$

Així

$$m\,\ddot{\vec{r}} = -4(2\cos t, 3\sin t)$$

que és el mateix que $\vec{F}$ i, per tant, es compleix la llei de moviment.

b) i **c)**: Per l'estructura que té la força, del tipus $\vec{F} = (F_x(x), F_y(y), F_z(z))$, veiem que és conservativa. L'energia potencial és

$$U = -\int \vec{F}\cdot d\vec{r} = 4\int (x dx + y dy) = 4\left(\int x dx + y dy\right) = 2(x^2+y^2) + C$$

El treball demanat és

$$W = -\Delta U = -\left(U(0{,}3) - U(2{,}0)\right) = -10\ \text{J}$$

d): L'energia del sistema és

$$E = E_c + U = \frac{1}{2}4\,v^2 + 2(x^2+y^2) + C$$

Substituint la trajectòria, tenint en compte que $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$ i simplificant, trobem

$$E = \frac{1}{2}4(4\sin^2 t + 9\cos^2 t) + 2(4\cos^2 t + 9\sin^2 t) + C = 26 + C$$

E és manté constant. ■

Problema 2.4.3. Una massa de 5 kg puja per un pla inclinat 30° amb l'horitzontal, amb una velocitat constant de 15 m/s. Calculeu la potència desenvolupada per la força que la fa pujar.

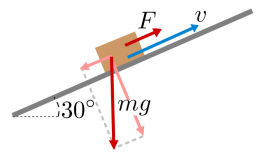


Figura de la solució de 2.4.3

Solució

Si la força que la fa pujar és $\vec{F}$ i la velocitat és $\vec{v}$, la potència serà $P = \frac{dW}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v}$.

La força que fa que la massa pugi ha de contrarestar el component del pes paral·lel al pla inclinat i, com que la velocitat és constant, la força total es nul·la. Així, la força esmentada té el mateix mòdul que el component del pes: $F = mg\sin 30°$ i, com que aquesta força té el mateix sentit que la velocitat,

$$P = \vec{F}\cdot\vec{v} = Fv = mgv\sin 30° = 367{,}5\ \text{W}$$ ■

Problema 2.4.4. Trobeu l'expressió de l'energia potencial associada a la força $\vec{F} = \left(-kx + \frac{a}{x^3}\right)\hat{\imath}$.

Solució

$$U = -\int \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int F dx = -\int \left(-kx + a/x^3\right) dx = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{a}{2x^2} + C$$ ■

2.5 Algunes forces

A manera d'exemples útils, aplicarem els conceptes que s'han tractat a un seguit de forces, aplicades a una partícula, que més endavant ens apareixeran en diferents contextos. En tractar-les en un mateix bloc, ens farà veure com en són, d'útils, els conceptes d'aquest tema i apreciar què tenen en comú i en el que difereixen.

Força nul·la

$\vec{F} = 0$. L'equació de moviment és:

$$m\,\vec{a} = 0 \Rightarrow \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = 0 \tag{2.47}$$

Integrant dos cops $\vec{r}(t) = \vec{C}_1 + \vec{C}_2\,t$. Si tenim en compte les condicions inicials $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$ i $\dot{\vec{r}}(t_0) = \vec{v}_0$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{r}(t_0) = \vec{r}_0 = \vec{C}_1 + \vec{C}_2\,t_0 \\ \dot{\vec{r}}(t_0) = \vec{v}_0 = \vec{C}_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \vec{C}_2 = \vec{v}_0 \\ \vec{C}_1 = \vec{r}_0 - \vec{v}_0\,t_0 \end{array}\right.$$

n'obtenim finalment

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0\,(t - t_0) \tag{2.48}$$

La funció energia potencial és $dU = -\vec{F}\cdot d\vec{r} = 0 \Rightarrow U = \text{ct}$. Es conserva l'energia que serà només energia cinètica. També es conserven la quantitat de moviment i el moment angular.

Força constant

$\vec{F} = \text{ct}$. El moviment està contingut en el pla definit per la velocitat inicial i la força (vegeu la figura 2.14), ja que, segons la llei de moviment de Newton, els canvis de direcció del vector velocitat tenen la direcció del vector força: $d\vec{v} = \frac{\vec{F}}{m}dt$.

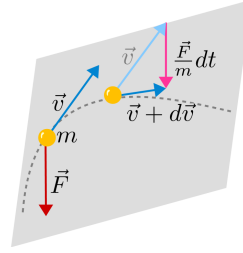


Fig. 2.14: Força constant en una direcció no especificada

L'equació de moviment és

$$m\,\vec{a} = \vec{F} \Rightarrow \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{\vec{F}}{m} = \text{ct} \tag{2.49}$$

integrant dos cops $\vec{r}(t) = \vec{C}_1 + \vec{C}_2\;t + \frac{1}{2}\frac{\vec{F}}{m}t^2$ i tenint en compte les condicions inicials $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$ i $\dot{\vec{r}}(t_0) = \vec{v}_0$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{r}(t_0) = \vec{r}_0 = \vec{C}_1 + \vec{C}_2\,t_0 + \frac{1}{2}\frac{\vec{F}}{m}t_0^2 \\ \dot{\vec{r}}(t_0) = \vec{v}_0 = \vec{C}_2 + \frac{\vec{F}}{m}t_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \vec{C}_2 = \vec{v}_0 - \frac{\vec{F}}{m}t_0 \\ \vec{C}_1 = \vec{r}_0 - \vec{v}_0 t_0 + \frac{1}{2}\frac{\vec{F}}{m}t_0^2 \end{array}\right.$$

obtenim l'expressió de la trajectòria

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0\,(t - t_0) + \frac{1}{2}\frac{\vec{F}}{m}(t - t_0)^2 \tag{2.50}$$

Si escollim el sistema de referència de manera que el pla del moviment sigui (x, y) amb l'eix y en la direcció de la força $\vec{F} = (0, F)$ (vegeu la figura 2.15)

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{x0}\,(t - t_0) \\ y(t) = y_0 + v_{y0}\,(t - t_0) + \frac{1}{2}\frac{F}{m}(t - t_0)^2 \end{cases}$$

$\vec{F} = \text{ct}$ és una força conservativa, ja que podem hi trobar l'energia potencial associada

$$U = -\int \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\vec{F} \cdot \vec{r} + \text{ct} \qquad (2.51)$$

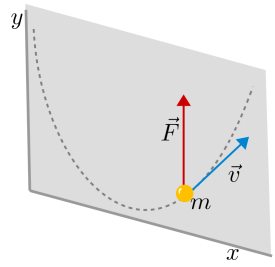


Fig. 2.15: Força constant en la direcció i el sentit de les y creixents

Un cas important (però no l'únic!) és el d'una partícula de massa m, sotmesa al camp gravitatori, $\vec{g} = \text{constant}$, proper a la Terra o a qualsevol planeta (vegeu la figura 2.16).

$$m\,\vec{a} = \vec{F} = m\vec{g} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \vec{g} = \text{ct} \qquad (2.52)$$

Amb l'elecció d'eixos que s'ha fet anteriorment i escollint el sentit positiu de l'eix y en sentit contrari a la força $\vec{g} = (0, -g)$, resulta

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{x0}\,(t - t_0) \\ y(t) = y_0 + v_{y0}\,(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2 \end{cases}$$

i l'energia potencial resulta, fent servir (2.51), $U = m\,g\,y + \text{ct}$.

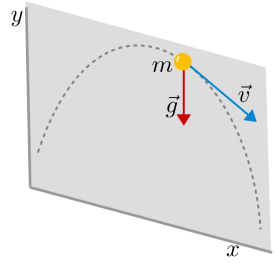


Fig. 2.16: Camp gravitatori g constant en la direcció i el sentit de les y decreixents

Un altre cas d'interès és el d'una partícula de massa m i càrrega elèctrica q sota l'acció d'un camp elèctric constant $\vec{E} = \text{ct}$ (vegeu la figura 2.17)

$$m\,\vec{a} = \vec{F} = q\,\vec{E} \Rightarrow \vec{a} = \frac{q\,\vec{E}}{m} = \text{ct}$$

Amb l'elecció d'eixos que s'ha fet anteriorment i escollint el sentit positiu de l'eix y en sentit del camp $\vec{E}$

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{x0}\,(t - t_0) \\ y(t) = y_0 + v_{y0}\,(t - t_0) + \frac{1}{2}\frac{q\,E}{m}(t - t_0)^2 \end{cases}$$

i l'energia potencial resulta, fent servir (2.51), $U = -q\,E\,y + \text{ct}$.

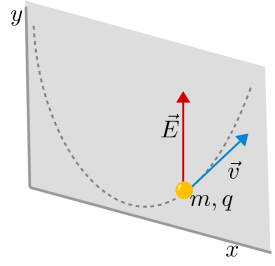


Fig. 2.17: Camp elèctric constant E en la direcció i el sentit de les y creixents

$\vec{F}(\vec{r})$ moviment unidimensional

Si la força té una direcció fixa, amb una elecció adequada dels eixos podem expressar-la com $\vec{F} = F(\vec{r})\,\hat{\imath}$. Si la velocitat inicial té la direcció de la força, la força no farà variar la direcció de la velocitat i el moviment pot ser descrit amb una única coordenada x (vegeu la figura 2.18)

$$m\,\ddot{x} = F(x)$$

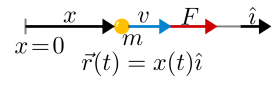


Fig. 2.18: Moviment unidimensional

La força sempre serà conservativa, ja que

$$U(x) = -\int \vec{F}\,(\vec{r})\,d\vec{r} = -\int F\,(x)\,dx$$

i la integral sempre es podrà fer.

L'energia mecànica es conserva. Aquest fet el podem aprofitar per trobar la trajectòria. $E =$ constant i també

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + U(x) = \text{ct}$$

que podem entendre com a equació diferencial per trobar la trajectòria $x(t)$. Podem fer separació de variables x i t i integrar: t de t_0 a t i x de $x(t_0)$ a $x(t)$. La integral de t es immediata:

$$\int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} = \sqrt{\frac{2}{m}}(t - t_0) \tag{2.53}$$

Si coneixem explícitament la funció $U(x)$, sempre podrem integrar i, un cop fet, aïllar $x(t)$. Les dues constants que han d'aparèixer a la trajectòria són E i $x_0 = x(t_0)$. Malgrat que el problema queda formalment resolt, cal dir que la integració que resta per fer pot arribar a ser molt embolicada.

Moviment unidimensional harmònic

És un cas particular de l'apartat que acabem de tractar.

$$F = -k\,x + F_0$$

S'acostuma a escriure en la forma $F = -k(x - x_0)$, és a dir, $x = x_0$ és la posició per a la qual la força s'anul·la: $x_0 = \frac{F_0}{k}$ (vegeu la figura 2.19)

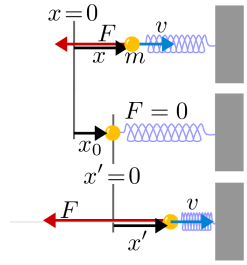


Fig. 2.19: Moviment unidimensional harmònic

Fet això, es pren un nou sistema de referència, x', de manera que $x' = x - x_0$. La força s'expressarà com $F = -k\,x'$. Per comoditat, reanomenem la coordenada x' com x. En definitiva, la força que volem tractar és

$$F = -k\,x$$

L'equació de moviment és

$$m\,\ddot{x} = -k\,x$$

L'energia potencial

$$U(x) = -\int (-kx)\,dx = \frac{1}{2}k\,x^2 + \text{ct}$$

i en podem trobar la trajectòria fent la integral (2.53), que ara és

$$\int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{E - \frac{1}{2}k\,x^2}} = \sqrt{\frac{2}{m}}(t - t_0)$$

Traient factor comú $\frac{k}{2}$ de l'arrel del denominador (per això multipliquem i dividim E per $\frac{k}{2}$), el primer membre es pot escriure

$$\sqrt{\frac{2}{k}} \int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2E}{k} - x^2}}$$

i, tenint en compte

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$$

obtenim, un cop substituïts els límits d'integració i igualant al segon membre,

$$\sqrt{\frac{2}{k}}\left\{\arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{2E}}x\right) - \arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{2E}}x_0\right)\right\} = \sqrt{\frac{2}{m}}(t - t_0)$$

Ara, aïllant x, trobem la trajectòria

$$x(t) = A\sin\left(\omega\,(t - t_0) + \varphi_0\right) \tag{2.54}$$

amb $A = \sqrt{\frac{2E}{k}}$, $\sin\varphi_0 = \frac{x_0}{A}$, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Recordem que també comptem amb la relació $E = \frac{1}{2}m\,v_0^2(t_0)^2 + \frac{1}{2}k\,x_0^2$. Fixem-nos que la relació entre A i E es pot escriure també $E = \frac{1}{2}kA^2$.

Estudiarem amb profunditat els moviments harmònics al capítol 6.

Forces centrals

Es tracta de forces la recta d'acció de les quals sempre passa per un mateix punt. Exemples: la força gravitatòria que el Sol (o qualsevol massa) fa sobre tota altra partícula o la força electrostàtica que qualsevol càrrega fixa fa sobre tota partícula carregada. Però també la tensió d'una corda que passa per una petita politja, lligada a un cos en un dels seus extrems (vegeu la figura 2.20). En aquesta figura 2.20, la tensió T_B pot ser una força constant però la tensió T és una força central!

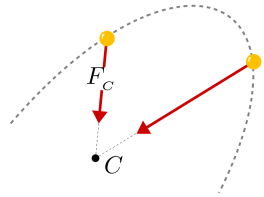


Fig. 2.20: Força central

Totes les forces centrals compleixen la segona llei de Kepler.

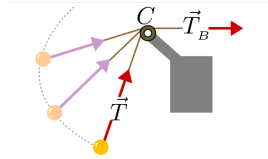


Fig. 2.21: Força central causada per la tensió d'una corda que passa per una petita politja

Demostració. El moment $\vec{M}_{(C)}$ de la força respecte del punt C sempre és nul. Tenint en compte $\frac{d\vec{L}_{(C)}}{dt} = \vec{M}_{(C)}$ deduïm $\frac{d\vec{L}_{(C)}}{dt} = 0$. El moment angular respecte de C es conserva al llarg del moviment i, segons el que hem vist a la secció 2.3, això és equivalent a la segona llei de Kepler. ■

Energia potencial d'una força central del tipus $\vec{F} = -F(r)\ \hat{r}$ (vegeu la figura 2.22)

Provem de fer la integral de treball independentment del camí:

$$\int \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int F\,\hat{r} \cdot d\vec{r}$$

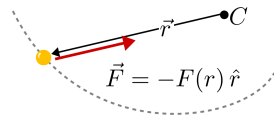


Fig. 2.22: Expressió vectorial d'una força central

Ara

$$\left.\begin{array}{l} d(\vec{r}\cdot\vec{r}) = 2\vec{r}\cdot d\vec{r} \\ dr^2 = 2rdr \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{r}\cdot d\vec{r} = rdr \Rightarrow \hat{r}\cdot d\vec{r} = dr$$

Per tant, la integral involucra una sola variable r sense que haguem escollit cap camí particular. Les forces centrals del tipus $\vec{F} = -F(r)\ \hat{r}$ són conservatives, amb una energia potencial associada

$$U = \int F(r)\ dr + \text{ct} \tag{2.55}$$

Exemple: força que el Sol (fix, de massa M) fa sobre un planeta (partícula de massa m)

$$\vec{F} = -G\frac{mM}{r^2}\ \hat{r}$$

L'energia potencial, substituint la força anterior a (2.55), és:

$$U = -G\frac{mM}{r} + \text{ct}$$

Forces no conservatives

Una força s'anomena ***giroscòpica*** quan no es pot definir la funció energia potencial, però $\frac{dE}{dt} = 0$. Des d'un punt de vista energètic, es poden considerar conservatives, ja que no dissipen energia. Un força s'anomena ***dissipativa*** quan no es pot definir la funció energia potencial i, a més, $\frac{dE}{dt} < 0$

Forces giroscòpiques

L'exemple més conegut de força giroscòpica és la força de Lorentz $\vec{F}_B$: un camp magnètic $\vec{B}$ que actua sobre una partícula carregada q que es mou a una velocitat $\vec{v}$

$$\vec{F}_B = q\ \vec{v} \times \vec{B} \tag{2.56}$$

Suposem que la partícula està sotmesa a una força conservativa $\vec{F}$, amb energia potencial $U(\vec{r})$, i a una força de Lorentz (2.56). Segons el que hem vist, amb relació a l'energia i les forces no conservatives, (2.46), tindrem

$$\frac{dE}{dt} = \vec{v}\cdot\left(q\ \vec{v}\times\vec{B}\right) = 0$$

L'energia es conserva!

Forces de fricció seca

Quan un objecte dur llisca en contacte amb una superfície no llisa i que aquí suposem en repòs, sigui per la presència de la gravetat o per alguna altra força que el pressioni, en el contacte apareixen forces distribuïdes sobre l'objecte que, si és petit, podem descompondre en dues: una de perpendicular a la superfície de contacte, que anomenem ***normal***, N, i una altra que s'oposa al moviment i que anomenem ***fricció seca***, F_f. Experimentalment, per a superfícies prou llises i dures, el mòdul de la força de fricció seca, mentre l'objecte és en moviment, és $F_f = \mu_c N$, on μ_c és el **coeficient de fricció cinètic o dinàmic**, que depèn de la naturalesa de les superfícies en contacte. La força F_f es pot expressar en la forma vectorial següent (vegeu la figura 2.23)

$$\vec{F}_f = -F_f \frac{\vec{v}}{v}, \quad F_f = \mu_c N \tag{2.57}$$

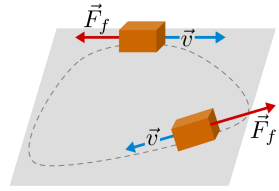


Fig. 2.23: La força de fricció dinàmica té sentit contrari a la velocitat

Així, queda clar que és una força que depèn de la velocitat (no del mòdul, però si de la direcció i el sentit!). Només si la superfície que provoca la força de fricció està en repòs podem dir que *sempre s'oposa al moviment*. És la dependència de la velocitat la que fa que no sigui possible trobar una funció energia potencial. Quan volem fer la integral de treball, ens és necessari saber per quin camí passa l'objecte.

Suposem que la partícula està sotmesa a la força conservativa $\vec{F}$, amb energia potencial $U(\vec{r})$, i a una força de fricció seca. Segons el que hem vist amb relació a l'energia i les forces no conservatives, (2.46), tindrem

$$\frac{dE}{dt} = \vec{v} \cdot \left(-F_f \frac{\vec{v}}{v} \right) = -F_f \, v$$

La força de fricció seca és dissipativa. Des del punt de vista de la mecànica, aquesta energia *desapareix*. La interpretació física que es dona a aquest fet (més enllà de la mecànica) la trobem aplicant el principi de conservació de l'energia o primer principi de la termodinàmica: una part d'aquesta energia augmenta l'energia interna del sistema i l'altra es dissipa en forma de calor/radiació. Però, per a això, cal que ens endinsem una mica en la termodinàmica i això queda fora de l'abast d'aquest curs.

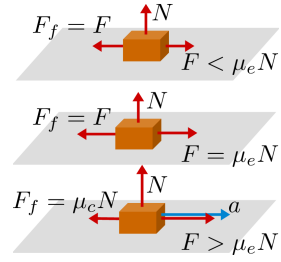


Fig. 2.24: Evolució de la força de fricció

Hem vist com afecta la fricció seca quan l'objecte, generalment pel fet d'estar sotmès a una altra força que supera la fricció, es mou. Però què passa si l'objecte no es mou?

Si, sobre el bloc de la figura 2.24 s'aplica una força F i entre la superfície que suporta el bloc i aquest hi ha fricció, s'observa que la força de fricció evoluciona de la manera següent:

Si la força no és prou gran, el bloc no es mou i $F_f = F$. Si anem augmentant F s'arriba a un valor frontera, $F = \mu_e N$, en què, malgrat que el bloc encara no es mou, $F_f = F$, qualsevol augment de F, per petit que sigui, el farà moure. Diem que està en **moviment imminent**. El coeficient μ_e s'anomena ***coeficient de fricció estàtic***. Si continuem augmentant F, $F > \mu_e N$, el bloc es mou i la força de fricció experimenta una davallada fins al valor $F_f = \mu_c N$. El coeficient μ_c és, com ja hem comentat més amunt, el coeficient de fricció cinètic o dinàmic. Sempre $\mu_e > \mu_c$. A la gràfica de la figura 2.25, podem veure l'evolució de la força de fricció F_f en funció de la força aplicada F.

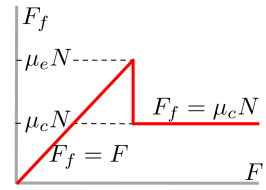


Fig. 2.25: Evolució de la força de fricció F_f en funció de la força aplicada F

Nota: Malgrat que en els problemes reals cal tenir en compte aquest comportament i, per tant, l'existència dels dos coeficients, en aquest curs, si no diem el contrari, parlarem del coeficient de fricció μ sense especificar i entendrem que $\mu = \mu_e = \mu_c$.

Problema 2.5.1. Una partícula de 2 kg rellisca per un pla inclinat de 2 m d'altura. Partint des de la part de dalt amb velocitat nul·la, arriba al final amb una velocitat de 5 m/s. Calculeu la pèrdua d'energia deguda a la força de fricció i el valor d'aquesta, considerada constant, si entre el pla i l'horitzontal hi ha un angle de 45°. Quant val el coeficient de fricció dinàmic?

Solució

La pèrdua d'energia mecànica és l'increment d'energia mecànica, canviat de signe:

$$E = \tfrac{1}{2}mv^2 + mgz$$
$$-\Delta E = -\left(E_{\text{fi}} - E_{\text{ini}}\right) = E_{\text{ini}} - E_{\text{fi}} =$$
$$\left(\tfrac{1}{2}m\, v_{\text{ini}}^2 + mgh_{\text{ini}}\right) - \left(\tfrac{1}{2}m\, v_{\text{fi}}^2 + mgh_{\text{fi}}\right) = \boxed{14{,}2\ \text{J}}$$

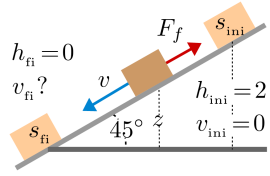


Figura de la solució de 2.5.1

La variació d'energia és deguda al treball de la força de fricció:

$$\Delta E = W_f = \int_{\text{ini}}^{f\,i} \vec{F}_f \cdot d\vec{r} = -\int_{s_{\text{ini}}}^{s_{\text{fi}}} F_f\, ds = -F_f(s_{\text{fi}} - s_{\text{ini}}) = -F_f \frac{h_{\text{ini}}}{\sin 45^\circ}$$

on $ds = |d\vec{r}|$ és la longitud recorreguda per la partícula al llarg del pla inclinat i la força de fricció $\vec{F}_f$ té sempre la mateixa direcció i sentit contrari a la velocitat.

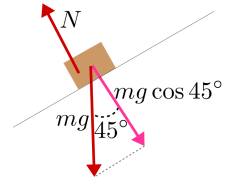


Figura de la solució de 2.5.1

Finalment, la força de fricció és

$$\boxed{F_f = -\frac{\Delta E}{\left(\frac{h_{\text{ini}}}{\sin 45^\circ}\right)} = 5{,}02\ \text{N}}$$

El coeficient de fricció dinàmica és

$$F_f = \mu N \Rightarrow \boxed{\mu = \frac{F_f}{N} = \frac{F_f}{mg\cos 45^0} = 0{,}36} \qquad \blacksquare$$

Forces de fricció viscosa

Experimentalment, se sap que la fricció d'un cos en un fluid (fricció viscosa o aerodinàmica) depèn de la forma del cos, de les característiques materials de la

superfície, del tipus de fluid i de la velocitat del cos (respecte del fluid, que aquí considerem en repòs). Una bona aproximació a aquest tipus de fricció és, en règim laminar (vegeu la figura 2.26 superior),

$$\vec{F}_b = -b\vec{v} \quad b > 0 \tag{2.58}$$

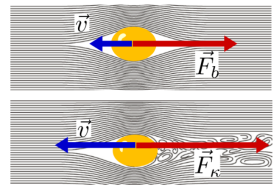


Fig. 2.26: Superior: el règim laminar es dona per altes viscositats del fluid i baixes velocitats relatives. Inferior: el règim turbulent es dona per baixes viscositats del fluid i altes velocitats relatives

No és conservativa. Suposem que la partícula està sotmesa a la força conservativa $\vec{F}$, amb energia potencial $U(\vec{r})$, i a una força de fricció viscosa. Segons el que hem vist amb relació a l'energia i les forces no conservatives (2.46), tindrem

$$\frac{dE}{dt} = \vec{v}\cdot(-b\vec{v}) = -b\,v^2$$

Si el règim és turbulent (vegeu la figura 2.26 inferior), la força de fricció es pot aproximar segons

$$\vec{F}_\kappa = -\kappa v^2\,\hat{v} \quad \kappa > 0 \tag{2.59}$$

Problema 2.5.2. Una partícula dins un medi viscós està sotmesa a una força constant, a més de la força de fricció deguda a la viscositat.

a) Demostreu que la partícula acaba tenint una velocitat constant i determineu el valor d'aquesta velocitat.

b) Apliqueu el resultat al cas de caiguda dins d'un medi viscós.

Solució

a) La força que actua sobre la partícula és $\vec{F}_T = \vec{F} + \vec{F}_b = m\vec{a}$, essent $\vec{F}$ =constant i $\vec{F}_b = -b\vec{v}$, amb $b > 0$ constant.

Observant la figura, podem veure que $\vec{F}_b$ tendeix a fer disminuir la component de la velocitat normal a $\vec{F}$, de manera que $\vec{F}$ i també la pròpia $\vec{F}_b$ s'aniran alineant amb $\vec{F}$. Aquest procés s'acabarà quan $\vec{F}_T = 0$, és a dir, quan la velocitat arribi a un valor $\vec{v}_L$ tal que $\vec{F} - b\vec{v}_L = 0$. Aïllant

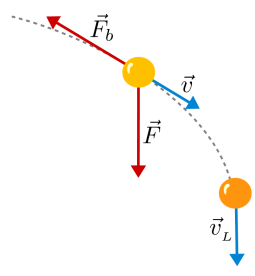


Figura de la solució de 2.5.2

$$\vec{v}_L = \frac{\vec{F}}{b}$$

Cal dir que aquest és un valor límit. $\vec{v} = \frac{\vec{F}}{b}$ és una possible solució de l'equació de moviment que necessita una velocitat inicial determinada $\vec{v}_0 = \frac{\vec{F}}{b}$. La solució general per a l'evolució de la velocitat a partir d'una velocitat inicial $\vec{v}_0$ la podem extreure integrant $m\vec{a} = \vec{F} - b\vec{v}$, que podem escriure $\dot{\vec{v}} + \frac{b}{m}\vec{v} = \frac{b}{m}\vec{v}_L$. La solució d'aquesta equació és

$$\vec{v}(t) = (\vec{v}_0 - \vec{v}_L)\,\mathrm{e}^{-\frac{b}{m}t} + \vec{v}_L$$

Podem veure que, per a $t \to \infty$, tenim $\vec{v} \to \vec{v}_L$.

b)

$$\vec{F} = m\vec{g} \Rightarrow \quad \vec{v}_L = \frac{m\vec{g}}{b}$$

■

Forces que només depenen del temps

Són forces de la forma $\vec{F}_t = \vec{F}_t(t)$. No són conservatives pel fet que depenen explícitament del temps. Suposem que la partícula està sotmesa a la força conservativa $\vec{F}$, amb energia potencial $U(\vec{r})$, i a una força $\vec{F}_t = \vec{F}_t(t)$. Segons el que hem vist amb relació a l'energia i les forces no conservatives, (2.46), tindrem

$$\frac{dE}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{F}_t$$

Si la partícula només està sotmesa a $\vec{F}_t$, la integració formal de l'equació de moviment és senzilla

$$m\,\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_t(t) \Rightarrow \vec{r}(t) = \frac{1}{m}\int\left(\int \vec{F}_t(t)\,dt\right)dt \qquad (2.60)$$

Les condicions inicials $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$ i $\dot{\vec{r}}(t_0) = \vec{v}_0$ determinen les dues constants d'integració.

Problema 2.5.3. Una partícula de massa m en repòs a $\vec{r} = (0;0;0)$ està sotmesa a la força depenent del temps $\vec{F} = \vec{F}_0 \sin \Omega t$.

a) Trobeu la trajectòria temporal.

b) Quina velocitat inicial fa que el moviment sigui el mateix que el provocat per una molla?

Solució

a) Trobem la velocitat

$$\vec{v} = \frac{1}{m}\int \vec{F}dt = \frac{1}{m}\int \vec{F}_0 \sin \Omega t\; dt = -\frac{\vec{F}_0}{m\Omega}\cos \Omega t + C_1$$

Trobem la posició

$$\vec{r} = \int \vec{v}dt = -\frac{\vec{F}_0}{m\Omega^2}\sin \Omega t + \vec{C}_1 t + \vec{C}_2$$

En trobem les constants d'integració

$$\vec{r}(0) = (0,0,0) \Rightarrow \vec{C}_2 = (0,0,0)$$
$$\vec{v}(0) = (0,0,0) \Rightarrow \vec{C}_1 = \tfrac{\vec{F}_0}{m\Omega}$$

N'obtenim

$$\vec{r}(t) = \frac{\vec{F}_0}{m\Omega}\left(t - \frac{1}{\Omega}\sin \Omega t\right)$$

b) Per a una molla

$$\vec{r} = \vec{A}\sin(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow \ddot{\vec{r}} = -\vec{A}\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow \vec{F} = -m\vec{A}\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0)$$

Si comparem aquesta força amb la donada a l'enunciat, cal que $\varphi_0 = \pi$, $\omega = \Omega$ i $\vec{A} = \frac{\vec{F}_0}{m\Omega^2}$. Així

$$\vec{r} = \frac{\vec{F}_0}{m\Omega^2}\sin(\Omega t + \pi) \Rightarrow \dot{\vec{r}} = \frac{\vec{F}_0}{m\Omega}\cos(\Omega t + \pi) \Rightarrow \vec{v}(0) = -\frac{\vec{F}_0}{m\Omega}$$ ■

→3

3 Dinàmica de N partícules

Introducció

Estudiarem l'extensió de les lleis i els conceptes introduïts per a una partícula a N partícules. També veurem els sistemes de partícules lligades, en especial el cas del sòlid rígid. Considerarem el cas d'un sistema finit de N partícules discretes de posicions $\vec{r}_i$ i masses m_i (vegeu la figura 3.1), però també ni podem incloure els sistemes continus, amb un número $N \to \infty$ de partícules amb posicions $\vec{r}$ i masses $dm = \rho\, dv$, on ρ és la densitat (vegeu la figura 3.2). Per això *només* ens cal entendre les sumes, amb $N \to \infty$, $m_i \to dm = \rho dv$ i $\vec{r}_i \to \vec{r}$, com a integrals:

$$\sum_{i=1}^{N} f(\vec{r}_i)\; m_i \to \int_V f(\vec{r})\, \rho dv \tag{3.1}$$

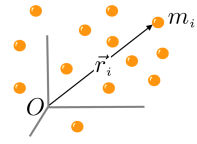


Fig. 3.1: Sistema de N partícules

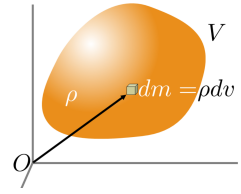


Fig. 3.2: Un cos continu com a sistema de $N \to \infty$ partícules

3.1 Forces entre partícules. Segona i tercera lleis de Newton

Sobre cada partícula d'un sistema de N partícules poden actuar diferents menes de forces. Si tenim en compte el seu origen, les podem classificar en dos conjunts separats: forces externes i forces internes.

➔ **Forces externes**. Són causades per agents físics que no pertanyen al sistema considerat. La resultant de totes les forces externes que actua sobre la partícula i l'anomenarem $\vec{F}_i$ (vegeu la figura 3.3).

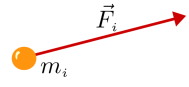


Fig. 3.3: La causa de la força externa $\vec{F}_i$ es troba fora del sistema

➔ **Forces internes**. Són les forces que les partícules del sistema es fan entre elles. $\vec{F}_{ij}$ és la força que la partícula i fa a la partícula j (vegeu la figura 3.4).

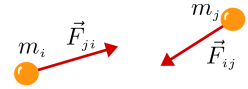


Fig. 3.4: La causa de la força interna $\vec{F}_{ij}$ és la interacció entre les partícules

La consideració que estem tractant amb partícules fa que $\vec{F}_{ii} = 0$. Les equacions de moviment del sistema de N partícules provenen d'aplicar la segona llei de Newton a cada partícula. Seran N equacions vectorials.

➔ ***Segona llei de Newton o llei de moviment per a N partícules***:

$$\vec{F}_i + \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ji} = m_i \vec{a}_i \tag{3.2}$$

Solucionar directament aquestes equacions és molt difícil. Per sort, no sempre estem interessats a trobar la trajectòria de totes i cadascuna de les partícules del sistema. Sigui com sigui, ens caldrà trobar mètodes generals que permetin extreure algunes característiques interessants del comportament del sistema. Un fet que simplifica molt aquestes equacions és que s'observa que les forces internes compleixen sempre la condició d'acció i reacció. Newton elevà aquesta condició a la categoria de llei.

➔ ***Tercera llei de Newton o principi d'acció i reacció***. *La força que actua sobre la partícula i a causa de la partícula j té el mateix mòdul i direcció, però sentit contrari, que la força que actua sobre la j a causa de la i :* $\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$

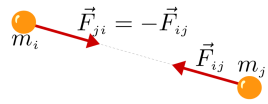


Fig. 3.5: La llei d'acció i reacció entre dues partícules, la partícula m_i i la m_j

Fixem-nos que, per tal de complir aquesta llei, és necessari que les interaccions es propaguin de forma instantània. Si no fos així, podríem moure la partícula i i, per alguns instants, la partícula j no se n'assabentaria, cosa que incompliria la tercera llei. En la relativitat no es compleix aquest llei!

En la formulació de Newton, encara que originàriament no s'explicités, s'entén que la recta d'acció de les dues forces és la mateixa. Nosaltres ho entendrem així. Vegeu la figura 3.5.

3.2 Força resultant i centre de masses

Agafem totes les equacions de moviment per a cada partícula (3.2) i les sumem. El membre de l'esquerra és la suma de totes les forces, independentment d'on estiguin aplicades. D'aquesta suma, en direm ***força resultant*** $\vec{F}$. Com a conseqüència del principi d'acció-reacció, $\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} = 0$; per tant, la suma de les forces internes és nul·la. Així, en fer la suma de totes les forces del sistema per trobar la resultant $\vec{F}$, només sobreviuen les externes. La força resultant $\vec{F}$ és la suma de les forces externes.

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{F}_i + \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ji} \right) = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \tag{3.3}$$

Si la força resultant $\vec{F}$ l'apliquéssim a una partícula que tingués una massa suma de les masses de totes les partícules, $m = \sum_{i=1}^{N} m_i$, l'acceleració d'aquesta partícula deguda a la força $\vec{F}$ seria $\vec{a}_{CM}$ segons

$$\vec{F} = m\,\vec{a}_{CM} \tag{3.4}$$

El punt on se situa aquesta hipotètica partícula s'anomena ***centre de masses*** del sistema i s'indica per CM (vegeu la figura 3.6). El vector posició del CM l'indicarem per $\vec{r}_{CM}$. Si $\vec{F} = 0$, el CM és mou a velocitat constant, $\vec{a}_{CM} = 0$. En aquest cas, es pot utilitzar el CM com a origen d'un sistema de referència inercial: és el **sistema de referència del centre de masses** (SRC).

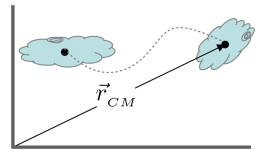


Fig. 3.6: El CM representa bé el moviment global d'un núvol

El punt CM, d'alguna manera, representa una posició aproximada i global del sistema. Pensem, per exemple, que el sistema és un núvol. Aquest núvol, en general, va viatjant d'aquí cap allà, a la vegada que va canviant de forma. En molts casos, no ens interessa estudiar el canvi de forma però si el moviment global. Aquest està ben representat per la trajectòria traçada pel centre de masses $\vec{r}_{CM}$.

Si coneixem la resultant com a funció de la posició i la velocitat del CM, (3.4) és l'equació de moviment per al CM que permet, conegudes la posició i velocitat inicial, trobar la trajectòria $\vec{r}_{CM}(t)$. Un problema que caldrà resoldre és trobar la posició i velocitat del centre de masses, a l'instant inicial, conegudes les posicions i velocitats de totes les partícules en aquest instant.

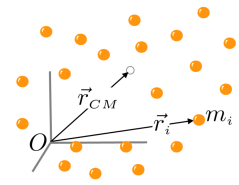


Fig. 3.7: La massa i posició de les N partícules, m_i i $\vec{r}_i$, determinen $\vec{r}_{CM}$

Per a cada instant, la posició del CM, $\vec{r}_{CM}$, es pot trobar si coneixem les posicions i masses de totes les partícules en aquest mateix instant $\vec{r}_i$, m_i (vegeu la figura 3.7):

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \tag{3.5}$$

Demostració. Tenint en compte la suma de les equacions de moviment de les N partícules, (3.2) i la definició de CM (3.4), tenim

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i = m\,\vec{a}_{CM} \Rightarrow \vec{a}_{CM} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i$$

que podem reescriure com

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\vec{r}_{CM} - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i\right) = 0$$

i integrar. Ens apareixeran dues constants d'integració $\vec{C}_1$ i $\vec{C}_2$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i + \vec{C}_1 + \vec{C}_2\, t$$

Ara, si tenim una sola partícula, $N = 1$, volem que, en tot instant, el CM estigui allà on és aquesta partícula, és a dir, $\vec{r}_{CM} = \vec{r}_1, \Rightarrow \vec{r}_1 = \vec{r}_1 + \vec{C}_1 + \vec{C}_2\, t \Rightarrow \vec{C}_1 = \vec{C}_2 = 0$ i l'expressió de $\vec{r}_{CM}$ coincideix amb (3.5), que és el que volíem demostrar. ■

Si el sistema és un **cos continu** (vegeu la figura 3.8), tindrem

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{m}\int_{Cos} \vec{r}\, dm \tag{3.6}$$

Si el cos és un **sòlid rígid**, el CM és un punt solidari al cos. Si aquest només efectua **moviments de translació**, el moviment del sòlid queda completament determinat pel moviment del CM.

A la pràctica, tindrem en compte que, **si el moviment del sòlid és únicament de translació**, tots els punts tenen la mateixa velocitat: **qualsevol punt del sòlid és vàlid per descriure la velocitat del** CM.

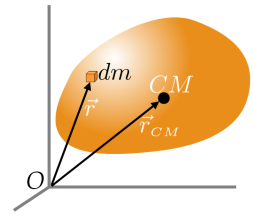
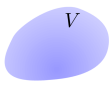
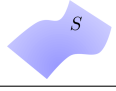
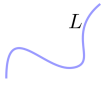


Fig. 3.8: CM d'un cos continu

CM de volums, superfícies i corbes

En general, un cos qualsevol (per exemple, un asteroide) s'estendrà en les tres dimensions de l'espai, a més d'ocupar un volum. En molts casos, malgrat estendre's en les tres dimensions, el cos pot ser tractat com a superfície, per exemple, una antena parabòlica de comunicació. En altres casos, estenent-se també en tres dimensions, el cos pot ser tractat com una corba, per exemple una molla helicoïdal. A la taula 3.1, podeu veure com tractar aquests casos en termes de la densitat de massa. ρ, σ i μ són les densitats de massa volúmica, superficial i lineal, respectivament.

	$dm = \rho\, dv \Rightarrow$	$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{\int \rho\, dv} \int \vec{r}\rho\, dv$	$\overset{\text{Hom}}{=} \frac{1}{V} \int \vec{r}\, dv$
	$dm = \sigma\, ds \Rightarrow$	$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{\int \sigma\, ds} \int \vec{r}\sigma\, ds$	$\overset{\text{Hom}}{=} \frac{1}{S} \int \vec{r}\, ds$
	$dm = \mu\, d\ell \Rightarrow$	$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{\int \mu\, d\ell} \int \vec{r}\mu\, d\ell$	$\overset{\text{Hom}}{=} \frac{1}{L} \int \vec{r}\, d\ell$

Taula 3.1: CM de cossos continus: volums, superfícies i línies

Un cos **homogeni** té densitat constant. En els cossos homogenis, el CM coincideix amb el **centre geomètric o de simetria** CS. El CS és fàcil de trobar si el cos té suficients elements de simetria. En aquest cas, el CS és el punt comú a tots els elements de simetria (eixos, plans, punt).

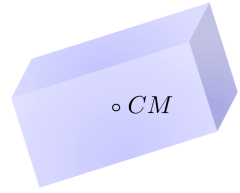


Fig. 3.9: El CM d'un cos homogeni coincideix amb el centre geomètric o de simetria CS

Si un cos voluminós homogeni, de densitat ρ, té la forma de superfície gruixuda de gruix h constant i la seva curvatura és negligible, podem tractar-lo com un cos superficial de densitat σ. Per trobar σ en termes de ρ, només cal tenir en compte que un tros S de cos tindrà un volum $V = Sh$ i una massa que podem trobar utilitzant ρ o bé σ. Així, $m = \rho V = \sigma S$; per tant, $\sigma = \rho h$.

Si un cos voluminós homogeni, de densitat ρ, té la forma de corba gruixuda de gruix de secció s constant i la seva curvatura és negligible, podem tractar-lo com un cos lineal de densitat μ. Per trobar μ en termes de ρ, només cal tenir en compte que un tros L de cos tindrà un volum $V = Ls$ i una massa que podem trobar utilitzant ρ o

bé μ. Així, $m = \rho V = \mu L$; per tant, $\mu = \rho s$.

CM de cossos simples

Simple aquí vol dir que coneixem el seu CS o bé , en general, el CM. A la taula de la pàgina 335, teniu les expressions per trobar el centre de simetria d'alguns cossos homogenis simples que podem fer servir al llarg del llibre. No estan inclosos els casos en què el CS queda totalment determinat per simetria, com el cercle, l'esfera, el rectangle, etc.

CM de cossos compostos

Sigui un conjunt de cossos simples C_i , $i = 1, ..., N$, de masses m_i i posicions del CM, $\vec{r}^{\,(i)}_{CM}$, coneguts, que formen un cos compost (vegeu la figura 3.10). La posició del CM del cos compost val:

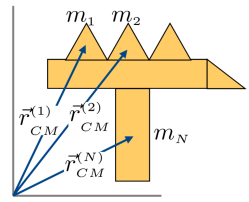


Fig. 3.10: El CM d'un cos compost es pot expressar, fent una descomposició convenient en cossos simples, en termes de les masses, m_i, i les posicions del CM, $\vec{r}^{\,(i)}_{CM}$, de cada cos simple

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i\,\vec{r}^{\,(i)}_{CM} \tag{3.7}$$

Demostració. Com que coneixem m_i i $\vec{r}^{\,(i)}_{CM}$ i sabem que $\vec{r}^{\,(i)}_{CM} = \frac{1}{m_i}\int_{C_i}\vec{r}\,dm$, podem obtenir el que val cadascuna de les integrals $\int_{C_i}\vec{r}\,dm$

$$\int_{C_i}\vec{r}\,dm = m_i\,\vec{r}^{\,(i)}_{CM} \tag{3.8}$$

L'expressió per a la posició del CM (3.6) del cos compost, considerat un cos únic continu, s'estén al domini d'integració que abraça tot el cos C, és a dir, $C = C_1 \cup ... \cup C_N$, on C_i és el domini de cadascun dels cossos:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{m}\int_{C_1\cup...\cup C_N}\vec{r}\,dm$$

Si trenquem la integral estesa al domini d'integració $C_1 \cup ... \cup C_N$ com a suma d'integrals en cada subdomini d'integració C_i , i substituïm les integrals segons (3.8), tenim

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{m}\left(\int_{C_1}\vec{r}\,dm + ... + \int_{C_N}\vec{r}\,dm\right) = \frac{1}{m}\left(m_1\,\vec{r}^{\,(1)}_{CM} + ... + m_N\,\vec{r}^{\,(N)}_{CM}\right)$$

és a dir,

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i\,\vec{r}^{\,(i)}_{CM}$$

■

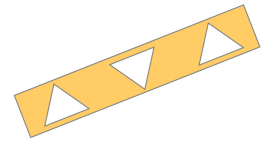


Fig. 3.11: Podem interpretar la suma de masses de manera que el signe positiu vol dir "afegir massa" i el negatiu "treure massa"

Si interpretem les masses m_i com $m_i > 0 \Rightarrow$ afegir; $m_i < 0 \Rightarrow$ treure, podem tractar un cos compost de cossos i forats simples (vegeu la figura 3.11).

Problema 3.2.1. A la taula següent, es mostren les posicions i les velocitats, en un instant donat, d'un sistema de tres partícules. En aquest instant, determineu:

i	1	2	3
m_i(kg)	2	3	5
$\vec{r}_i$(m)	$(-10;-10)$	$(30;10)$	$(10;20)$
$\vec{v}_i$(m/s)	$(10;30)$	$(-20;-10)$	$(10;-10)$

Taula del problema 3.2.1: masses, posicions i velocitats

a) la posició del centre de masses del sistema i **b)** la velocitat del centre de masses del sistema.

Solució

a)

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{3} m_i \vec{r}_i}{m} = \frac{2(-10;-10) + 3(30;10) + 5(10;20)}{10} = \boxed{(12;11)\,\text{m}}$$

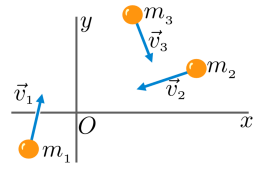


Figura de la solució 3.2.1

b)

$$\vec{v}_{CM} = \dot{\vec{r}}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{3} m_i \dot{\vec{r}}_i}{m} = \frac{2(10;30) + 3(-20;-10) + 5(10;-10)}{10} = \boxed{(1;-2)\,\text{m/s}}$$

■

Problema 3.2.2. Donada la xapa plana i homogènia representada a la figura, trobeu-ne el centre de masses.

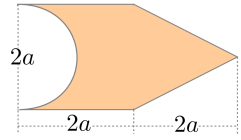


Figura de l'enunciat 3.2.2

Solució

Per simetria, tenim: $\boxed{y_{CM} = 0}$.

Es tracta d'una figura plana i homogènia $\sigma = \text{ct}$. En lloc de masses m_i, podem utilitzar superfícies S_i. Descomponem la xapa en tres peces, peça 1: un quadrat de xapa; peça 2: un triangle de xapa ; peça 3: un forat de xapa. Vegeu la figura. Tindrem

$$x_{CM} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i\, x_{CM}^{(i)} = \frac{1}{\sigma S}\sum_{i=1}^{N} \sigma S_i\, x_{CM}^{(i)} = \frac{1}{S}\sum_{i=1}^{N} S_i\, x_{CM}^{(i)}$$

tenint en compte el signe " $-$" si es tracta d'un forat!

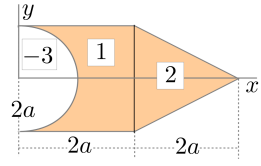


Figura de la solució 3.2.2

$$\left.\begin{array}{l} x_{CM} = \frac{1}{S_1+S_2-S_3}\left\{S_1\, x_{CM}^{(1)} + S_2\, x_{CM}^{(2)} - S_3\, x_{CM}^{(3)}\right\} \\ S_1 = 4a^2;\quad S_2 = \frac{1}{2}2a\,2a\;;\quad S_3 = \frac{1}{2}\pi a^2 \\ x_{CM}^{(1)} = a;\quad x_{CM}^{(2)} = 2a + \frac{1}{3}2a;\quad x_{CM}^{(3)} = \frac{4a}{3\pi} \end{array}\right\} \Rightarrow \qquad \boxed{x_{CM} = 1{,}96a}$$

■

3.3 Quantitat de moviment

La **quantitat de moviment $\vec{P}$ d'un sistema de partícules** es defineix com la suma de les quantitats de moviment de cada partícula.

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i = m\vec{v}_{CM} \tag{3.9}$$

L'equació de moviment del CM es pot escriure

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} \tag{3.10}$$

➔ ***Teorema de la conservació de la quantitat de moviment***. *Si la resultant d'un sistema de partícules és nul·la, la quantitat de moviment $\vec{P}$ es manté constant al llarg del temps, mentre que les partícules es mouen per una trajectòria solució de les equacions de moviment.*

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \tag{3.11}$$

També es pot escriure fent servir l'expressió integrada entre dos instants t_{ini} i t_{fi}

$$\vec{P}_{\text{ini}} = \vec{P}_{\text{fi}} \tag{3.12}$$

Habitualment, es diu que *la quantitat de moviment es conserva*. Observem que sempre que no hi hagi forces externes al sistema la quantitat de moviment es conservarà.

Problema 3.3.1. Una cobra reial de longitud L i massa m distribuïda uniformement, reposa estirada al terra. La cobra decideix aixecar-se verticalment i ho fa a una velocitat v uniforme (la punta de la cua no es belluga en cap moment). Quina és la força de reacció del terra sobre la part del cos que hi toca? Doneu el resultat en funció de L, m, v i el camp gravitatori g.

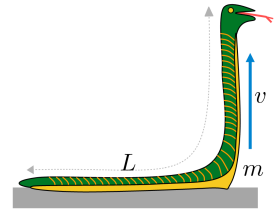


Figura de l'enunciat 3.3.1

Solució

Anomenem x a la porció de serp que roman en contacte amb el terra i y la part vertical. Observeu que tant x com y aniran variant mentre la serp s'aixeca. Són funcions del temps t. Vegeu la figura. La longitud total de la serp és, per a tot t, L; així, $x+y=L$ i com que aquesta expressió val per a tot t: $\dot{x}+\dot{y}=0$. Si, a més, tenim en compte que v és la velocitat constant en la direcció i sentit de y, tenim les relacions

$$\dot{y} = v \; ; \;\; \dot{x} = -v \;\; ; \; \ddot{x} = \;\; \ddot{y} = 0 \tag{3.13}$$

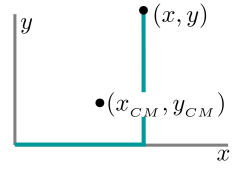


Figura de la solució 3.3.1

Podem calcular la posició del centre de masses, per a tot t, en funció de x i y. En qualsevol instant, la serp és un cos lineal format per dos segments homogenis rectes de longituds x i y, per tant,

$$\vec{r}_{CM} = (x_{CM}, y_{CM}) = \frac{1}{L}\left(\frac{x}{2}x + xy, \frac{y}{2}y\right) \tag{3.14}$$

Si derivem respecte del temps (3.14) i tenim en compte (3.13),

$$\dot{\vec{r}}_{CM} = \frac{1}{L} y\, v\, (-1; 1) \tag{3.15}$$

La quantitat de moviment del sistema la podrem escriure com

$$\vec{P} = m\dot{\vec{r}}_{CM} = \frac{m}{L} y\, v\, (-1; 1) \tag{3.16}$$

La resultant de les forces que actuen sobre la serp serà deguda al pes i a la força de reacció del terra F, és a dir, $m(0,-g)+\vec{F}$ (vegeu la figura). Tindrem així

$$\frac{d\vec{P}}{dt}=\frac{m}{L}v^2\,(-1;1)=m(0,-g)+\vec{F}\Rightarrow \boxed{\vec{F}=\left(-\frac{m}{L}v^2, mg+\frac{m}{L}v^2\right)}$$ ■

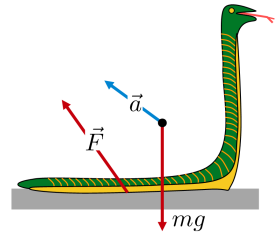


Figura de la solució 3.3.1

3.4 Moment angular

El **moment angular $\vec{L}_{(A)}$ d'un sistema de partícules respecte d'un punt A fix** (vegeu la figura 3.12) es defineix com la suma dels moments angulars de cada partícula respecte d'aquest punt

$$\vec{L}_{(A)}=\sum_{i=1}^{N}\vec{L}_{(A)i}=\sum_{i=1}^{N}\vec{r}_{i(A)}\times m_i\vec{v}_i \tag{3.17}$$

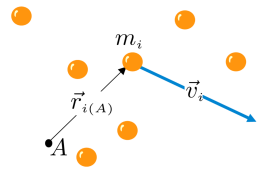


Fig. 3.12: Moment angular d'un sistema de partícules respecte d'un punt fix A

Si derivem respecte del temps,

$$\frac{d\vec{L}_{(A)}}{dt}=\sum_{i=1}^{N}\left(\dot{\vec{r}}_{i(A)}\times m_i\vec{v}_i+\vec{r}_{i(A)}\times m_i\vec{a}_i\right) \tag{3.18}$$

Ara, tenint en compte que el punt A és fix, $\dot{\vec{r}}_{(A)i}=\vec{v}_i$, el primer producte vectorial de (3.18) s'anul·la. Per al segon producte vectorial, tindrem en compte les equacions de moviment de les N partícules, $m_i\vec{a}_i=\vec{F}_i+\sum_{j=1}^{N}\vec{F}_{ji}$. Així, tenim

$$\frac{d\vec{L}_{(A)}}{dt}=\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{r}_{i(A)}\times\left[\vec{F}_i+\sum_{j=1}^{N}\vec{F}_{ji}\right]\right) \tag{3.19}$$

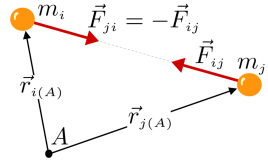


Fig. 3.13: Moment de les forces internes

El moment total de les forces internes s'anul·la admetent que les forces d'acció-reacció tenen la mateixa recta d'acció (vegeu la figura 3.13):

$$\vec{r}_{i(A)}\times\vec{F}_{ji}+\vec{r}_{j(A)}\times\vec{F}_{ij}=(\vec{r}_{j(A)}-\vec{r}_{i(A)})\times\vec{F}_{ij}=0$$

Per tant, n'obtenim

$$\frac{d\vec{L}_{(A)}}{dt}=\vec{M}_{(A)} \tag{3.20}$$

on $\vec{M}_{(A)}$ és el moment total de les forces. Observem que només les forces externes intervenen en $\vec{M}_{(A)}$.

$$\vec{M}_{(A)}=\sum_{i=1}^{N}\vec{r}_{i(A)}\times\vec{F}_i \tag{3.21}$$

➔ ***Teorema de la conservació del moment angular***. *Si el moment resultant de les forces externes respecte d'un punt A és nul, $\vec{M}_{(A)} = 0$, el moment angular $\vec{L}_{(A)}$ es manté constant al llarg del temps, mentre que les partícules es mouen per una trajectòria solució de les equacions de moviment:*

$$\frac{d\vec{L}_{(A)}}{dt} = 0 \tag{3.22}$$

També es pot escriure fent servir l'expressió integrada entre dos instants t_{ini} i t_{fi}

$$\vec{L}_{(A)\text{ini}} = \vec{L}_{(A)\text{fi}} \tag{3.23}$$

Habitualment, es diu que *el moment angular es conserva*.

Si el sistema de partícules es mou **només per translació**, $\vec{v}_i = \vec{v}$, el moment angular del sistema, $\vec{L}_{(A)}$, es pot expressar

$$\vec{L}_{(A)} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_{i(A)} \times m_i \vec{v}_i = \left(\sum_{i=1}^{N} \vec{r}_{i(A)} m_i \right) \times \vec{v} = \vec{r}_{CM(A)} \times \vec{P} \tag{3.24}$$

Es pot demostrar que les relacions anteriors també són vàlides si $A = CM$, encara que el CM estigui en moviment. Cal anar amb compte i no agafar punts $A \neq CM$ en moviment! En aquesta secció és millor considerar A fix. Més endavant, quan estudiem el sòlid rígid, demostrarem i utilitzarem $A = CM$.

Problema 3.4.1. A la taula següent, tenim les posicions i les velocitats en un instant donat d'un sistema de tres partícules.

Taula del problema 3.4.1: masses, posicions i velocitats

i	1	2	3
m_i(kg)	2	3	5
$\vec{r}_i$(m)	$(-10;-10)$	$(30;10)$	$(10;20)$
$\vec{v}_i$(m/s)	$(10;30)$	$(-20;-10)$	$(10;-10)$

En aquest instant, determineu:

a) la quantitat de moviment total,

b) el moment angular total respecte de l'origen.

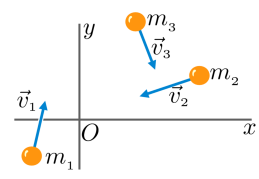


Figura de la solució 3.4.1

Solució

a) Del problema 3.2.1, tenim $\vec{v}_{CM} = (1;-2)\,\text{m/s}$ i, per tant, $\vec{P} = m\vec{v}_{CM} = 10(1;-2) = (10;-20)\,\text{kg m/s}$

b) Compte! No podem fer servir $\vec{L} = \vec{r}_{CM} \times \vec{P}$, ja que les velocitats de les partícules són diferents. Hem de fer servir $\vec{L} = \sum_{i=1}^{3} \vec{L}_i$:

$$\vec{L}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 = 2 \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -10 & -10 & 0 \\ 10 & 30 & 0 \end{vmatrix} = -400\hat{k}$$

$$\vec{L}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{p}_2 = 3 \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 30 & 10 & 0 \\ -20 & -10 & 0 \end{vmatrix} = -300\hat{k}$$

$$\vec{L}_3 = \vec{r}_3 \times \vec{p}_3 = 5 \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 10 & 20 & 0 \\ 10 & -10 & 0 \end{vmatrix} = -1500\hat{k}$$

N'obtenim $\vec{L} = \sum_{i=1}^{3} \vec{L}_i = \boxed{-2200\,\hat{k}\ \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}}}$ ■

Problema 3.4.2. Un camió transporta una caixa homogènia, rectangular, de 2 m d'altura i 1 m de llargada. El coeficient de fricció caixa-camió és 0,4. Calculeu:

a) La màxima acceleració del camió sense que la caixa llisqui (sabem que abans no bolca).

b) Si fixem la caixa amb un eix sense fricció per A, el valor màxim de l'acceleració del camió sense que la caixa bolqui

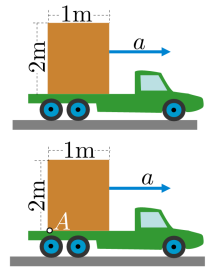


Figura de l'enunciat 3.4.2

Solució

a) $\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow (\mu N, N - mg) = m(a, 0) \Rightarrow a = \mu g = 0{,}4 \times 9{,}8 = \boxed{3{,}92\,\text{m/s}^2}$

b) Fem servir $\frac{d\vec{L}_{(O)}}{dt} = \vec{M}_{(O)}$ amb els moments calculats respecte de l'origen (vegeu la figura). Per al càlcul dels moments, podem fer servir la regla del cargol.

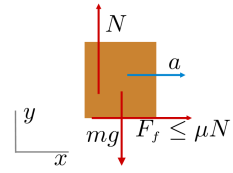


Figura de la solució 3.4.2

Per al moment angular, tindrem en compte que el moviment és de translació. N'hi ha prou a utilitzar el vector velocitat situat al CM (vegeu la figura). Obtenim $\vec{L}_{(O)} = -1mv\,\hat{k}$. Per al moment de les forces, tindrem en compte que ens situem a l'instant en què la caixa és a punt de bolcar. En aquest instant, la normal passa pel punt A, ja que només al punt A hi ha contacte entre la caixa i el camió. N'obtenim

$$\vec{M}_{(O)} = -\left\{(\overline{OA} + 0{,}5)mg - \overline{OA}\ N\right\}\hat{k} = -0{,}5\ mg\ \hat{k}$$

així, derivant respecte del temps $\vec{L}_{(O)}$ i igualant al moment de les forces

$$-1ma\hat{k} = -0{,}5\ mg\ \hat{k}$$

Per tant, $a = 0{,}5g = \boxed{4{,}9\,\text{m/s}^2}$ ■

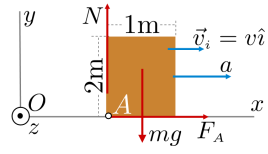


Figura de la solució 3.4.2

3.5 Treball, energia cinètica i energia potencial

Treball

El concepte de treball, entès segons la interpretació **1** de la secció 2.4, pot ser aplicat aquí per a cada força per separat. També el concepte de força conservativa i energia potencial associada a una força.

Per tal de definir el concepte d'energia del sistema sencer, estenem la interpretació **2** de la secció 2.4 a totes les partícules i forces del sistema.

Anomenem ***configuració*** del sistema en un instant donat el conjunt de posicions de cadascuna de les partícules del sistema.

El treball W realitzat per totes les forces del sistema sobre cada partícula, $\vec{F}_i + \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ji}$, quan aquestes passen d'una configuració $P_1 = \{P_{i1}\}$ a una altra $P_2 = \{P_{i2}\}$ a través d'un camí $C = \{C_i\}$ és (vegeu la figura 3.14)

$$W = \sum_{i=1}^{N} \int_{C:P_1}^{P_2} \left(\vec{F}_i + \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ji} \right) d\vec{r}_i \tag{3.25}$$

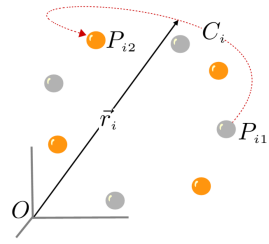


Fig. 3.14: El sistema passa de la configuració P_1 a la configuració P_2. Hi ha molts camins $C = \{C_i\}$ que ens passen d'una configuració a l'altra

Energia cinètica o capacitat cinètica de fer treball

Un càlcul molt semblant al realitzat a la secció 2.4 ens porta al concepte d'energia cinètica

$$\begin{aligned} W &= \sum_{i=1}^{N} \int_{C:P_1}^{P_2} \left(\vec{F}_i + \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ji} \right) \cdot d\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} \int_{C:P_1}^{P_2} m_i \vec{a}_i \cdot d\vec{r}_i \\ &= \ldots = \int_{P_1}^{P_2} d\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \end{aligned}$$

En conseqüència, definim l'**energia cinètica E_c d'un sistema de N partícules**

$$E_c = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \, v_i^2 \tag{3.26}$$

i podem enunciar el teorema següent:

➔ ***Teorema del treball-energia***:

$$W = \Delta E_c \tag{3.27}$$

També es coneix amb el nom de **teorema de les forces vives o de l'energia cinètica**.

Energia potencial o capacitat estàtica de fer treball

Les forces sobre cada partícula són les externes i les d'interacció entre les partícules $\vec{F}_i + \sum_{j=1} \vec{F}_{ji}$. Si totes les forces són conservatives, tindrem energies potencials

$U_i,\ U_{ij}$ que compleixen

$$\vec{F}_i = -\frac{\partial U_i}{\partial \vec{r}_i}\ ;\ \vec{F}_{ji} = -\frac{\partial U_{ji}}{\partial \vec{r}_i}\,,\quad U_{ii} = 0 \tag{3.28}$$

Com a conseqüència del principi d'acció-reacció, junt amb el fet de ser conservatives, les forces només depenen de la posició de les partícules segons $\vec{F}_{ji} = f_{(ji)}(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$ on $f_{(ji)} = f_{(ij)}$ només depèn de la distància entre les partícules i i j.[1] Això permet escollir U_{ij}, que compleix (3.28), només depenent de la distància entre les partícules i simètric $U_{ji} = U_{ij}$. L'anomenem **energia (potencial) d'interacció**.

[1] Podem pensar en els casos gravitatori i electrostàtic i veure que compleixen aquestes condicions

Si el sistema passa d'una configuració de posicions P_1 a una altra P_2 per un camí C (vegeu la figura 3.14), el treball és

$$W = \sum_{i=1}^{N} \int_{C:P_1}^{P_2} \left(\vec{F}_i + \sum_{j=1} \vec{F}_{ji} \right) \cdot d\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} \int_{C:P_1}^{P_2} \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i \ + \ \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \int_{C:P_1}^{P_2} \vec{F}_{ji} \cdot d\vec{r}_i \tag{3.29}$$

➔ *El treball de les forces conservatives és igual a la disminució de l'energia potencial:*

$$W = -\Delta U \tag{3.30}$$

amb l'energia potencial del sistema de N partícules, U, definida com

$$U = \sum_{i=1}^{N} U_i + \sum_{i=1}^{N} \sum_{i<j}^{N} U_{ij} \tag{3.31}$$

Demostració. El primer terme de l'ultim membre de (3.29) es pot escriure

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{C:P_1}^{P_2} \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = -\sum_{i=1}^{N} \int_{:P_1}^{P_2} dU_i \tag{3.32}$$

Amb el segon terme de l'ultim membre, cal anar una mica més amb compte. En un primer pas, hi afegim els termes (canviant la i per la j) $\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \int_{C:P_1}^{P_2} \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_j$ i tot sumat resulta ser igual als que ja hi són, així que també dividim per 2

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \int_{C:P_1}^{P_2} \vec{F}_{ji} \cdot d\vec{r}_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \int_{C:P_1}^{P_2} (\vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_j + \vec{F}_{ji} \cdot d\vec{r}_i) = \ldots \tag{3.33}$$

Ara substituïm les forces en funció dels seus potencials segons (3.28)

$$\ldots = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \int_{C:P_1}^{P_2} \left(\frac{\partial U_{ij}}{\partial \vec{r}_j} \cdot d\vec{r}_j + \frac{\partial U_{ji}}{\partial \vec{r}_i} \cdot d\vec{r}_i \right) = \ldots \tag{3.34}$$

Recordem que podem fer $U_{ji} = U_{ij}$. A més, tindrem en compte que U_{ij} només depèn de $\vec{r}_i$ i $\vec{r}_j$ i, per tant, el diferencial és $dU_{ij} = \frac{\partial U_{ij}}{\partial \vec{r}_j} \cdot d\vec{r}_j + \frac{\partial U_{ij}}{\partial \vec{r}_i} \cdot d\vec{r}_i$. Podem escriure (3.34) com

$$\ldots = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \int_{C:P_1}^{P_2} dU_{ij} = \ldots \tag{3.35}$$

i, finalment, per tal de no sumar més termes dels necessaris, restringim la suma de j a només termes $i < j$, i podem eliminar així el factor $\frac{1}{2}$.

$$\ldots = -\int_{C:P_1}^{P_2} d\left(\sum_{i=1}^{N} \sum_{i<j}^{N} U_{ij} \right) \tag{3.36}$$

Tenint en compte les expressions anteriors, (3.29, 3.32-3.36), podem definir l'energia potencial U del sistema de N partícules com a (3.31) i obtenim (3.30). ■

Energia mecànica

Definim l'**energia mecànica E d'un sistema conservatiu de N partícules** com

$$E = E_c + U \tag{3.37}$$

Derivant respecte del temps i seguint passos anàlegs als de la secció 2.4, obtenim, com es podia esperar:

➔ ***Teorema de la conservació de l'energia mecànica***. *El valor numèric de l'energia mecànica d'un sistema conservatiu de N partícules, es manté constant al llarg del temps, mentre les partícules es mouen per una trajectòria solució de les equacions de moviment.*

$$\frac{dE}{dt} = 0 \tag{3.38}$$

També es pot escriure fent servir l'expressió integrada entre dos instants t_{ini} i t_{fi}

$$E_{\text{ini}} = E_{\text{fi}} \tag{3.39}$$

Habitualment, es diu que *l'energia mecànica es conserva*.

Si hi ha forces no conservatives (NC), aquestes no s'inclouen a l'energia (no se'ls pot associar una energia potencial) i l'energia mecànica, en general, no es conserva. Sí que podem dir:

➔ ***Teorema de l'energia mecànica***. *El treball de les forces no conservatives és igual a l'increment d'energia mecànica del sistema:*

$$W_{NC} = \Delta E \tag{3.40}$$

Observem que l'energia encara es pot conservar si ens restringim a moviments pels quals les NC "no treballen": $W_{NC} = 0$. Més endavant, quan tractem dels sistemes amb lligams, farem servir aquesta condició.

Com veurem més endavant, a la secció 3.11, en el cas d'un **sòlid rígid**, el treball de les forces internes és nul; per tant, $W = \Delta E_c$, on W és el treball de les forces externes. Si, a més, el moviment és únicament de **translació**, $v_i = v_{CM}$, tenim $E_c = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m v_{CM}^2$. Així, l'energia mecànica d'un **sòlid rígid restringit a moviments de translació** és

$$E = \frac{1}{2} m v_{CM}^2 + U \tag{3.41}$$

on U és, en aquest cas, la suma d'energies potencials de les forces conservatives externes al sòlid.

Problema 3.5.1. Dues partícules de masses 2 kg i 3 kg estan lligades entre elles amb una corda i en contacte amb una molla, com es veu a la figura. Tant la molla com la corda tenen massa negligible. La molla té una constant recuperadora de 12000 N/m i està comprimida una longitud de 10 cm. Tallem la corda. Trobeu la velocitat de cada partícula

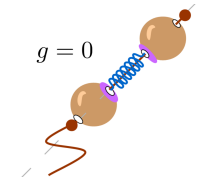


Figura de l'enunciat 3.5.1

Solució

Per conveniència, definim $m_1 = 2\,\text{kg}$, $m_2 = 3\,\text{kg}$, $k = 12000\,\text{N/m}$ i $L = 0{,}1\,\text{m}$.

Les causes del moviment estan alineades segons l'eix x; així, podem aplicar el principi de simetria (vegeu la secció 1.4) per deduir que les velocitats de les dues partícules estaran alineades amb l'eix x: $\vec{v}_1 = (v_1; 0; 0)$ i $\vec{v}_2 = (v_2; 0; 0)$.

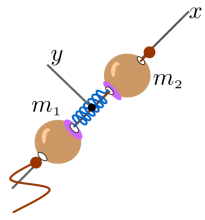


Figura de la solució 3.5.1

Aplicant la conservació de la quantitat de moviment entre els instants just abans i just després del tall de la corda:

$$0 = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 \Rightarrow 2v_1 + 3v_2 = 0$$

Podem fer el mateix amb l'energia:

$$\frac{1}{2} k L^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \Rightarrow 60 = v_1^2 + \frac{3}{2} v_2^2$$

d'on obtenim $v_1 = \pm 6$ i $v_2 = \mp 4$. Utilitzant el fet que la molla es descomprimeix (encara no ho havíem utilitzat!), els signes queden determinats i n'obtenim:

$$\vec{v}_1 = (-6; 0; 0)\,\text{m/s} \; ; \; \vec{v}_2 = (4; 0; 0)\,\text{m/s}$$

■

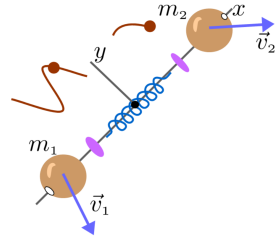


Figura de la solució 3.5.1

Problema 3.5.2. A la taula següent, es mostren les posicions i velocitats en un instant donat d'un sistema de tres partícules.

En aquest instant, determineu:

i	1	2	3
m_i(kg)	2	3	5
$\vec{r}_i$(m)	$(-10;-10)$	$(30;10)$	$(10;20)$
$\vec{v}_i$(m/s)	$(10;30)$	$(-20;-10)$	$(10;-10)$

Taula del problema 3.5.2: masses, posicions i velocitats.

a) l'energia cinètica del sistema.

b) L'energia cinètica associada al moviment del centre de masses (tota la massa concentrada al CM amb la velocitat d'aquest)

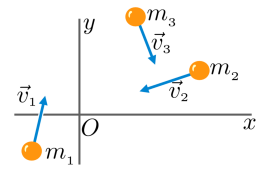


Figura de la solució 3.5.2

Solució

a)

$$E_c = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\left\{2(10^2+30^2)+3(20^2+10^2)+5(10^2+10^2)\right\} = \boxed{2250\,\text{J}}$$

b) Del problema 3.2.1, tenim $\vec{v}_{CM} = (1,-2)$ m/s. L'energia cinètica d'una partícula de massa $m = 10$ kg que es mou amb la velocitat del CM és

$$\frac{1}{2} m\, v_{CM}^2 = \frac{1}{2} 10 \cdot (1^2+2^2) = \boxed{25\,\text{J}}$$

que, en general, no coincideix amb l'energia cinètica del sistema. ■

3.6 Xocs

Un **xoc** és el procés en què dues partícules o més, que només interaccionen a molt curta distància, es troben en un punt i un instant,i modifiquen, en conseqüència, les seves velocitats (vegeu la figura 3.15).

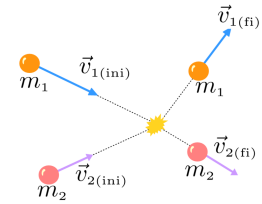


Fig. 3.15: Només en el moment del xoc hi ha forces

Ens restringirem a dues partícules. Considerem dos instants en què les partícules estan prou allunyades i **no interaccionen**: (ini) inicial, just abans del xoc; (fi) final, just després del xoc. Suposarem que les forces externes són molt més febles que les degudes al xoc, de manera que l'impuls de les primeres entre (ini) i (fi) és negligible.

També ens restringirem a **xocs sense fricció**. Això vol dir que, quan es produeix el contacte entre les dues partícules, que ara visualitzarem com a cossos esfèrics (vegeu les figures 3.16 o 3.17), no hi ha forces tangents al pla tangent al contacte o **pla de xoc** i, per tant, no hi ha bescanvi de moment angular. Si les partícules o cossos tinguessin una rotació inicial, mantindrien aquesta rotació després del xoc.

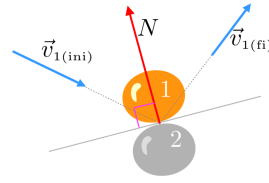


Fig. 3.16: Pla de xoc

Hi podem aplicar la conservació de la quantitat de moviment total. Tindrem:

$$\vec{P}_{(\text{ini})} = \vec{P}_{(\text{fi})} \qquad (3.42)$$

Encara que no coneixem la geometria del xoc (el pla de xoc, vegeu la figura 3.16), podrem tractar els xocs completament elàstics i completament inelàstics.

➔ **Xocs completament elàstics**. Són xocs en els quals es conserva l'energia, $E(\text{ini}) = E(\text{fi})$, que podem escriure en termes de l'energia cinètica, atès que abans i després no hi ha forces o aquestes són negligibles. Així, per a xocs completament elàstics,

$$E_{c(\text{ini})} = E_{c(\text{fi})} \tag{3.43}$$

La condició de xoc elàstic i la conservació consegüent de l'energia requereix una explicació. Es pot pensar que una pilota "elàstica" conservarà l'energia quan boti a terra. I essencialment és cert, sempre que comptabilitzem tots els termes de l'energia cinètica de la pilota. Abans del xoc, l'energia de la pilota serà de translació. Un cop fet el xoc, la pilota tindrà energia cinètica de translació i també energia de vibració interna deguda precisament a l'elasticitat del material. Només si aquesta és negligible podrem dir que el xoc és elàstic en el sentit que li volem donar aquí: en aquest capítol, entenem que els objectes que xoquen no acumulen energia de vibració i el sentit que donem a "xoc elàstic" és el de conservació de l'energia, sense considerar els possibles termes d'energia interna, com és el cas de la vibració.

➔ **Xocs completament inelàstics**:

Implosió. Les dues partícules queden unides (imploten) i forma una sola partícula després del xoc, $\vec{v}_{1(\text{fi})} = \vec{v}_{2(\text{fi})}$.

Explosió. Una única partícula explota i dóna lloc a dues partícules, $\vec{v}_{1(\text{ini})} = \vec{v}_{2(\text{ini})}$.

➔ **Xocs parcialment elàstics**. Si podem conèixer la geometria del contacte, si coneixem el pla de xoc (vegeu la figura (3.16), i tenim en compte que el xoc és sense fricció, és a dir, que l'única força que actua en el moment del xoc és normal al pla de xoc, de cada partícula només canviaran les components de la quantitat de moviment en la direcció de la normal, mentre que les components de la quantitat de moviment tangents al pla de xoc es conservaran. Així, indicant per $||$ les components tangents al pla de xoc:

$$\vec{p}_{i||(\text{ini})} = \vec{p}_{i||(\text{fi})} \Rightarrow \vec{v}_{i||(\text{ini})} = \vec{v}_{i||(\text{fi})} \; i = 1{,}2 \tag{3.44}$$

Si el xoc és completament elàstic o completament inelàstic, podem utilitzar les condicions de conservació de l'energia o d'explosió o implosió que hem donat més amunt. Si el xoc és parcialment elàstic i es coneix el pla de xoc es defineix el **coeficient de restitució** e (vegeu la figura 3.17). Si indiquem amb $\perp$ la component normal al pla de xoc, el coeficient de restitució és

$$e = \left| \frac{v_{1\perp(\text{fi})} - v_{2\perp(\text{fi})}}{v_{1\perp(\text{ini})} - v_{2\perp(\text{ini})}} \right| \tag{3.45}$$

El coeficient de restitució e és una quantitat que depèn del material dels cossos. Es pot mesurar utilitzant (3.45).

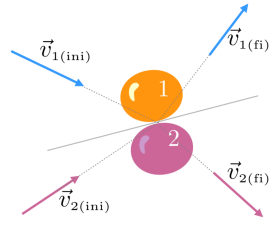


Fig. 3.17: e és una relació entre velocitats relatives normals al pla de xoc

➔ **Xocs contra un terra**. Podem considerar també el xoc d'una sola partícula amb un terra o paret (vegeu la figura 3.18). Ara, hi ha forces externes, la reacció del terra. Tenim $\vec{P}(\text{ini}) \neq \vec{P}(\text{fi})$. Si el xoc és sense fricció, la força externa només té component normal al terra. Com passa en el cas de dues partícules, $\vec{p}_{||(\text{ini})} = \vec{p}_{||(\text{fi})} \Rightarrow \vec{v}_{||(\text{ini})} = \vec{v}_{||(\text{fi})}$

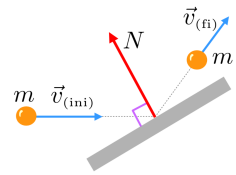


Fig. 3.18: Xoc contra una paret

Si el xoc es completament elàstic, tindrem $v^2_{\perp(\text{ini})} = v^2_{\perp(\text{fi})}$. Si és parcialment elàstic, el coeficient de restitució es pot definir ara segons

$$e = \left| \frac{v_{\perp(\text{fi})}}{v_{\perp(\text{ini})}} \right| \tag{3.46}$$

e depèn, en aquest cas, del material constituent del cos i del terra o paret. Es pot mesurar utilitzant (3.46).

Problema 3.6.1. Calculeu les velocitats després del xoc de les boles de la figura (que correspon al moment del xoc), de masses iguals, tenint en compte que són llises amb un coeficient de restitució de 0,9.

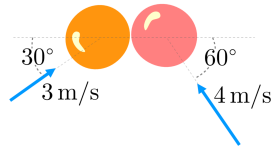


Figura de l'enunciat 3.6.1

Solució

Fem servir la notació A per abans del xoc i D per després del xoc .

Segons les dades reflectides a la figura, tenim $\vec{v}_{A1} = (3\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{2})$ i $\vec{v}_{A2} = (-2; 2\sqrt{3})$

De la conservació dels moments paral·lels al pla de xoc de cada partícula,

$$v_{yD1} = 1{,}5\,\text{m/s} \;\; ; \;\; v_{yD2} = 3{,}46\,\text{m/s} \tag{1}$$

De la conservació del moment total: $m\vec{v}_{A1} + m\,\vec{v}_{A2} = m\vec{v}_{D1} + m\,\vec{v}_{D2}$

La component d'aquesta equació en la direcció y es compleix automàticament amb els valors (1) trobats. Només prenem la component x:

$$3\frac{\sqrt{3}}{2} - 2 = v_{xD1} + v_{xD2} \tag{2}$$

Del coneixement del coeficient de restitució n'obtenim

$$\pm 0{,}9 = \frac{v_{xD1} - v_{xD2}}{3\frac{\sqrt{3}}{2} - (-2)} \tag{3}$$

Ara hem de solucionar les equacions (2) i (3). Escollim la solució que representa que les dues boles no s'entrecreuen, és a dir, $v_{xD2} - v_{xD1} > 0$

N'obtenim: $v_{xD1} = -1{,}77\,\text{m/s}$; $v_{xD2} = 2{,}36\,\text{m/s}$ ■

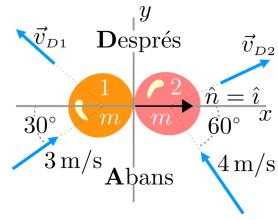


Figura de la solució 3.6.1

3.7 Interacció gravitatòria i electromagnètica

Llei de la gravitació universal

Pels volts de 1687, Isaac Newton enuncià la llei de la gravitació universal. Aquesta llei unificava les lleis de Kepler i donava així una explicació més fonamental de

les tres lleis, que fins llavors només s'havien pogut derivar de manera empírica per observació directa del moviment dels planetes al voltant del Sol. La llei de la gravitació de Newton no és una regla per predir el moviment dels planetes. Es tracta d'una llei que compleixen tots els cossos pel fet de tenir massa, ja siguin planetes, pedres, qualsevol altre objecte o, en general, partícules (vegeu la figura 3.19).

➔ ***Llei de la gravitació universal***

$$\vec{F}_{ij} = -G\frac{m_i m_j}{r_{ij}^2}\hat{r}_{ij} \tag{3.47}$$

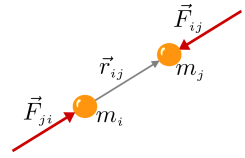


Fig. 3.19: Interacció gravitatòria entre dues masses

on $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_j - \vec{r}_i$, $G = 6{,}673 \times 10^{-11}\ \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$ és la constant de gravitació universal, i m_i i m_j són les **masses gravitatòries** de cadascuna de les partícules que interaccionen.

Un fet experimental molt notable és que, per a tota partícula, la massa gravitatòria, les m que apareixen a la llei de gravitació (3.47), es pot expressar en les mateixes unitats que la massa inercial, les m que apareixen a la llei de moviment $\vec{F} = m\vec{a}$, i, per a una mateixa partícula, té igual valor numèric. Newton ja va veure que, en la seva teoria, aquests eren dos conceptes diferents i que calia trobar una explicació a la seva igualtat. La constatació experimental d'aquesta igualtat és el germen del **principi d'equivalència**, que Albert Einstein va fer servir per desenvolupar la versió relativista de la gravitació de Newton, la relativitat general. Segons el principi d'equivalència, la massa inercial i gravitatòria d'una partícula són exactament iguals perquè es tracta del mateix concepte.

Si prenem com a exemple la interacció entre dos protons, $m_p = 9{,}109 \times 10^{-31}$ kg, separats una distància atòmica típica de $r = 1\,\text{Å} = 10^{-10}$ m, n'obtenim de (3.47)

$$|F_G| = G\frac{m_p^2}{r^2} = 5{,}54 \times 10^{-51}\,\text{N} \tag{3.48}$$

L'energia d'interacció gravitatòria entre dues partícules és

$$U_{ij} = -G\frac{m_i m_j}{r_{ij}} \tag{3.49}$$

L'energia d'interacció gravitatòria d'un sistema de tres partícules és

$$U = U_{12} + U_{13} + U_{23} = -G\left(\frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}}\right) \tag{3.50}$$

Fig. 3.20: Charles-Augustin de Coulomb (1737-1806) fou un físic i enginyer militar francès

Llei de Coulomb

La llei de Coulomb va ser formulada per Charles-Augustin de Coulomb a partir dels mesuraments que va fer el 1785 amb una balança de torsió de la força d'atracció i repulsió entre càrregues elèctriques (vegeu la figura 3.21).

Llei de Coulomb

$$\vec{F}_{ij} = K\frac{Q_i Q_j}{r_{ij}^2}\hat{r}_{ij} \tag{3.51}$$

on $K = 8{,}987 \times 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}$ és la constant d'interacció electrostàtica, i Q_i i Q_j són les càrregues elèctriques de cadascuna de les partícules interaccionen mesurades en la unitat de càrrega elèctrica del sistema internacional, el **coulomb** (C): $[Q] = \text{C}$.

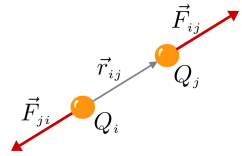


Fig. 3.21: Interacció electrostàtica entre dues càrregues

Si prenem com a exemple la interacció entre dos protons, $Q_p = 1{,}602 \times 10^{-19}\,\text{C}$, separats una distància atòmica típica de $r = 1\text{Å} = 10^{-10}\,\text{m}$, n'obtenim

$$|F_E| = K\frac{Q_p^2}{r^2} = 2{,}31 \times 10^{-8}\,\text{N} \tag{3.52}$$

L'energia d'interacció electrostàtica entre dues partícules és

$$U_{ij} = K\frac{Q_i Q_j}{r_{ij}} \tag{3.53}$$

l'energia d'interacció electrostàtica d'un sistema de 3 partícules és

$$U = U_{12} + U_{13} + U_{23} = K\left(\frac{Q_1Q_2}{r_{12}} + \frac{Q_1Q_3}{r_{13}} + \frac{Q_2Q_3}{r_{23}}\right) \tag{3.54}$$

Observeu que les dues lleis d'interacció exposades són quasi idèntiques pel que fa a la geometria (la dependència de les forces amb les posicions). L'única diferència, en aquest aspecte, és que una és atractiva i l'altra és repulsiva. Això vol dir que, per a partícules idèntiques, la interacció gravitatòria provoca una força d'atracció i l'electrostàtica, una de repulsió. Difereixen en les "càrregues" i les constants d'interacció. Comparant els resultats en el cas dels dos protons, podem dir que la interacció electromagnètica és unes 10^{43} vegades més intensa que la gravitatòria!

Problema 3.7.1. A la taula següent, es donen les càrregues i posicions d'un sistema de tres partícules. Determineu-ne l'energia potencial total.

i	1	2	3
$Q_i(\mu\text{C})$	-2	3	5
$\vec{r}_i(\text{m})$	$(-10;-10)$	$(30;10)$	$(10;20)$

Taula del problema 3.7.1: càrregues i posicions

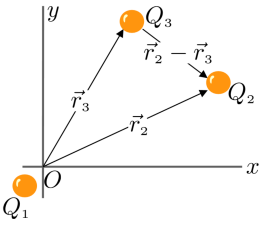


Figura de la solució 3.7.1

Solució

$$U = U_{12} + U_{13} + U_{23} = K\left(\frac{Q_1Q_2}{r_{12}} + \frac{Q_1Q_3}{r_{13}} + \frac{Q_2Q_3}{r_{23}}\right)$$

$$r_{12} = \sqrt{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2} = \sqrt{40^2 + 20^2} = 44{,}72$$

$$r_{13} = \sqrt{(\vec{r}_1 - \vec{r}_3)^2} = \sqrt{20^2 + 30^2} = 36{,}05$$

$$r_{23} = \sqrt{(\vec{r}_2 - \vec{r}_3)^2} = \sqrt{20^2 + 10^2} = 22{,}36$$

$$U = 9\times\ 10^9\left(\frac{-2\times 3}{44{,}72} + \frac{-2\times 5}{36{,}05} + \frac{3\times 5}{22{,}36}\right)10^{-12} = \boxed{2{,}33\times 10^{-3}\,\text{J}}$$ ■

3.8 Lligams i reaccions. Desplaçaments possibles i desplaçaments virtuals. Reaccions ideals

Un sistema de N partícules sense lligams requereix $3N$ dades per expressar-ne la posició. Diem que té $3N$ **graus de llibertat**. Si les partícules estan lligades, el nombre de graus de llibertat és més petit. Vegem-ne alguns exemples.

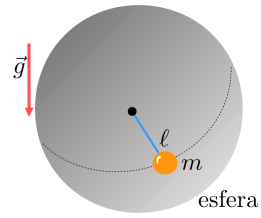


Fig. 3.22: La partícula està obligada a moure's per la superfície d'una esfera

Pèndol simple. Una partícula és obligada a moure's per la superfície d'una esfera de radi ℓ (vegeu la figura 3.22). Podem pensar que, en lloc d'una corda, que es pot arrugar, el que hi ha és una tija rígida de massa negligible. En un extrem, hi ha la partícula, i a l'altre una articulació puntual. El sistema té dos graus de llibertat.

Sòlid rígid. El podem considerar constituït per un conjunt de partícules obligades a mantenir constants les seves distàncies relatives (vegeu la figura 3.23). Segons això, el sòlid rígid tindrà sis graus de llibertat, ja que les posicions de totes les partícules queden totalment determinades, respecte d'una posició de referència, si coneixem la translació (tres graus de llibertat) i la rotació (tres graus de llibertat) del sòlid respecte a la referència (vegeu la figura 3.24).

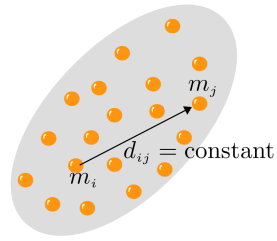


Fig. 3.23: Les partícules mantenen fixes les distàncies entre elles

Pèndol forçat. Un pèndol com l'anterior, però ara l'esfera és obligada a moure's horitzontalment per mitjà d'un actuador (vegeu la figura 3.25). En aquest cas, l'actuador és la mà que desplaça a voluntat el punt de l'extrem de la tija on hi ha l'articulació. El moviment de l'actuador és conegut $x(t)$. També té dos graus de llibertat.

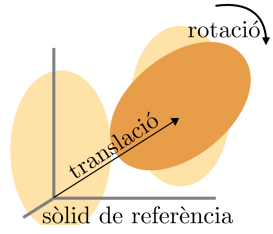


Fig. 3.24: Les posicions de les partícules queden determinades si coneixem la translació i la rotació del sòlid respecte del sòlid de referència

Lligams

Cada partícula i del sistema queda caracteritzada per la seva massa i el seu vector posició

$$\{m_i, \vec{r}_i\}\,, \quad \vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i), \quad i = 1, ..., N$$

Les posicions poden estar sotmeses a lligams. Considerem només **lligams geomètrics**, és a dir, que no depenen de les velocitats, encara que sí que poden dependre del temps. En aquest últim cas, el lligam rep el nom d'***actuador***. Si tenim L graus de llibertat és perquè tenim $3N - L$ lligams independents. En general, els lligams geomètrics es poden expressar en la forma:

$$f_a(\vec{r}_i, t) = 0 \quad , a = 1, ...3N - L \tag{3.55}$$

Una forma molt convenient d'expressar els lligams és la paramètrica. Anomenant els L paràmetres $q_1, ..., q_L$, la mateixa expressió (3.55) pot ser escrita com

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, ..., q_L, t) \tag{3.56}$$

En general, considerem els lligams com a dades del problema.

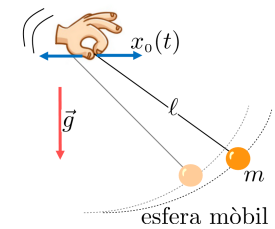


Fig. 3.25: Sacsegem a voluntat un pèndol simple

Exemple. Una partícula és obligada a moure's per una corba determinada de l'espai $f(x, y, z) = 0$, ja que passa per un filferro al qual donem justament la forma d'aquesta corba. Només observant la forma del filferro, podem determinar el lligam $f(x, y, z) = 0$.

Si, per exemple, la corba és una circumferència en el pla (x, y) de radi ℓ, l'expressió (3.55) corresponent seria

$$x^2 + y^2 - \ell^2 = 0$$

i la forma paramètrica (3.56) la podríem escriure amb un únic paràmetre $q_1 = \theta$

$$\begin{aligned} x &= \ell \ \cos\theta \\ y &= \ell \ \sin\theta \end{aligned}$$

Si el filferro és una recta en el pla (x, y), tindrem l'expressió (3.55) corresponent

$$ax + b - y = 0$$

on a i b seran constants conegudes. La forma paramètrica (3.56) la podem escriure fent $q_1 = q$ com

$$\begin{aligned} x &= q \\ y &= aq + b \end{aligned}$$

Desplaçaments possibles i virtuals

Els **desplaçaments possibles** $d\vec{r}_i$ del sistema són desplaçaments compatibles amb els lligams. Per exemple, en el cas de la partícula enllaçada al filferro (vegeu la figura 3.26), el desplaçament possible ha de seguir per la trajectòria que assenyala el filferro. Diem que els desplaçaments possibles són desplaçaments compatibles amb els lligams. Això vol dir que, si fem desplaçaments $d\vec{r}_i$, la condició del lligam $f_a(\vec{r}_i, t) = 0$ se seguirà complint per a la nova posició. És a dir,

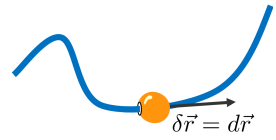


Fig. 3.26: Només observant la forma del filferro podem determinar el lligam

$$df_a = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f_a}{\partial \vec{r}_i} \cdot d\vec{r}_i + \frac{\partial f_a}{\partial t} dt = 0 \qquad (3.57)$$

on observem que també hem tingut en compte la variació dt, ja que el desplaçament possible triga un cert temps a fer-se.

Podem utilitzar la forma paramètrica dels lligams per trobar els desplaçaments possibles $d\vec{r}_i$ en termes dels L paràmetres q_a

$$d\vec{r}_i = \sum_{a=1}^{L} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_a} \, dq_a + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \, dt \qquad (3.58)$$

Definim els **desplaçaments virtuals** $\delta\vec{r}_i$ del sistema com aquells desplaçaments que es fan sense variació de temps, és a dir, "congelant el temps". Si ens imaginem

que estem gravant una pel·lícula on a l'escena es veu un pèndol oscil·lant que, a més, és sacsejat per una mà (vegeu la figura 3.27), llavors el desplaçament possible seria el que estem gravant i que podem veure més tard com a pel·lícula acabada. El desplaçament virtual correspondria a aturar la gravació, desplaçar la partícula sense que la mà es mogui i, en acabar aquest desplaçament, continuar la gravació.

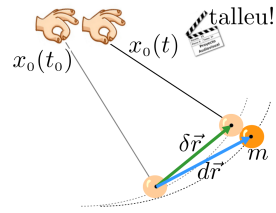


Fig. 3.27: La subtil diferència entre desplaçament possible i virtual

Des del punt de vista matemàtic els desplaçaments virtuals compleixen

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f_a}{\partial \vec{r}_i} \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \tag{3.59}$$

o, en la forma paramètrica,

$$\delta\vec{r}_i = \sum_{a=1}^{L} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_a}\, dq_a \tag{3.60}$$

Fixem-nos que, **si els lligams no depenen del temps**, $\delta\vec{r}_i = d\vec{r}_i$. Com que al llarg d'aquest curs no tractem amb lligams dependents del temps, tampoc no fem una distinció especial entre desplaçaments possibles i virtuals. Només excepcionalment, al capítol 9, considerem lligams dependents del temps i ens passa que $\delta\vec{r}_i \neq d\vec{r}_i$.

Reaccions

Per tal que les partícules es moguin d'acord amb els lligams, aquests fan forces sobre les partícules. Són les anomenades ***forces de reacció*** $\vec{R}_i$.

Si, sobre cada partícula i del sistema actua, a més de $\vec{R}_i$, la força $\vec{F}_i$ (en general coneguda) podem escriure les equacions de moviment (segona llei de Newton)

$$\vec{F}_i + \vec{R}_i - m_i\vec{a}_i = 0 \quad i = 1, ..., N \tag{3.61}$$

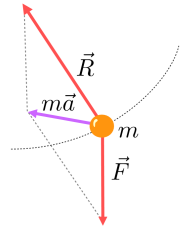


Fig. 3.28: En el cas del pèndol, la força de reacció $\vec{R}_i$ és la que exerceix la tija

Aquestes equacions cal completar-les amb els lligams (3.55) o (3.56).

El problema que ens trobem és que, així com els lligams són en general coneguts, les reaccions que fan els lligams $\vec{R}_i$ no són conegudes. Com hem comentat, les forces de reacció $\vec{R}_i$ són les forces que fan els lligams, de manera que les partícules es moguin segons "manen" aquests i, és clar, també segons les lleis de moviment de Newton (3.61). A les equacions (3.61), les $\vec{R}_i$ són incògnites. Només una part de les $\vec{r}_i(t)$ són incògnites ja que, com els lligams són coneguts, coneixerem una part de la trajectòria de les partícules. Per exemple, en el cas del pèndol (vegeu la figura 3.28), restringit al pla vertical, ja sabem per on passa la partícula. Només ens falta saber amb quina velocitat ho fa o, més concretament, només ens falta saber $\theta(t)$.

En el cas de la partícula que passa pel filferro (vegeu la figura 3.29), també coneixem la trajectòria. Si el filferro no presenta fricció, podem dir que la reacció $\vec{R}$ és normal al filferro.

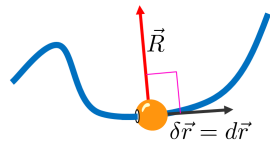


Fig. 3.29: En absència de fricció, la reacció del filferro és normal a aquest

Reaccions ideals

Una propietat molt interessant que observem en els casos representats a les figures 3.28 i 3.29 és que la reacció és normal al desplaçament. En el cas representat a la figura 3.30, el que és normal a la reacció és el desplaçament virtual, $\vec{R} \cdot \delta\vec{r} = 0$, però no el desplaçament possible, $\vec{R} \cdot d\vec{r} \neq 0$.

El fet que la reacció sigui normal al desplaçament vol dir que el treball d'aquesta força és nul quan el sistema fa el desplaçament. De fet, el que ens interessa no és que, una per una, les reaccions no treballin. Encara que per separat poguessin treballar, en tenim prou que en conjunt no treballin. Moguts per aquest interès, definim els conjunts de reaccions ideals.

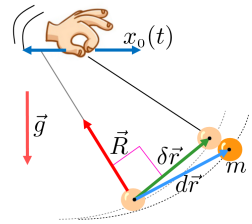


Fig. 3.30: La tensió R és normal al desplaçament virtual $\delta\vec{r}$ però no al desplaçament possible $d\vec{r}$

➔ **Conjunt de reaccions ideals**. Un conjunt de reaccions $\vec{R}_i \quad i = 1, ...S$ és anomenat ***conjunt de reaccions ideals*** si compleixen

$$\sum_{i=1}^{S} \vec{R}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \tag{3.62}$$

Aquesta important propietat se satisfà en moltíssimes situacions. En termes generals, podem avançar que, en absència de fricció dissipativa, les reaccions són ideals. Vegem-ne un parell de casos.

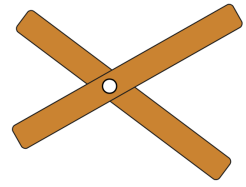


Figura de l'enunciat 3.8.1

Problema 3.8.1. Demostreu que les forces de reacció en una articulació sense fricció (anomenada també *articulació puntual*) són ideals

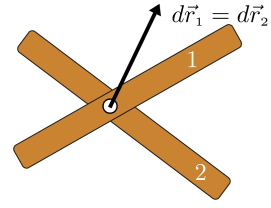


Figura de la solució 3.8.1

Solució

El punt on hi ha l'articulació és ocupat per una partícula del cos 1, de posició $\vec{r}_1$, i una altra del cos 2, de posició $\vec{r}_2$. Com a conseqüència del lligam, es mouen igual $\vec{r}_1 = \vec{r}_2$. Si diferenciem $d\vec{r}_1 = d\vec{r}_2$, que podem escriure $d\vec{r}_1 - d\vec{r}_2 = 0$

Les forces de reacció $\vec{R}_1$ i $\vec{R}_2$ compleixen la llei d'acció-reacció, $\vec{R}_2 = -\vec{R}_1$. Si ara calculem el treball

$$\vec{R}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \vec{R}_2 \cdot d\vec{r}_2 = \vec{R}_1 \cdot (d\vec{r}_1 - d\vec{r}_2) = 0$$

Per tant, el conjunt de forces $\vec{R}_1$ i $\vec{R}_2$ són un conjunt de reaccions ideals. ■

Problema 3.8.2. Demostreu que les forces de reacció en un contacte lliis entre dos sòlids en moviment són ideals.

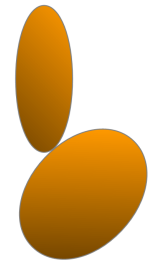


Figura de l'enunciat 3.8.2

Solució

Els sòlids tenen velocitats $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ respecte de l'observador en repòs. En tot instant, el cos 1 es mou amb velocitat relativa respecte al cos 2, $\vec{v}_{1(2)}$, *en la direcció del pla de contacte*. Les forces de reacció $\vec{R}_2 = -\vec{R}_1$ són normals a aquest pla i, per tant, normals a la velocitat relativa, és a dir, $\vec{R}_1 \cdot \vec{v}_{1(2)} = 0$.

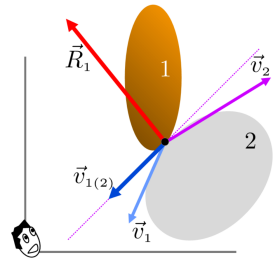


Figura de la solució 3.8.2

Podem escriure

$$0 = \vec{R}_1 \cdot (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = \tfrac{1}{dt}\vec{R}_1 \cdot (d\vec{r}_1 - d\vec{r}_2) = \\ \tfrac{1}{dt}\left(\vec{R}_1 \cdot d\vec{r}_1 - \vec{R}_1 \cdot d\vec{r}_2\right) = \tfrac{1}{dt}\left(\vec{R}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \vec{R}_2 \cdot d\vec{r}_2\right)$$

on $d\vec{r}_1$ i $d\vec{r}_2$ seran els desplaçaments possibles. Per tant, les reaccions al contacte són un conjunt de reaccions ideals. ■

3.9 Equació general de la dinàmica o principi de D'Alembert

Volem escriure unes equacions de moviment en què apareguin els lligams però no les forces de reacció. Això és, reescriure la segona llei de Newton tenint en compte que els lligams formen part de les dades del problema i, en canvi, les reaccions d'aquests no són coneguts.

El conjunt de forces que actuen sobre el sistema es classifica en dos subconjunts: les reaccions $\vec{R}_i$ i la resta de forces, $\vec{F}_i$, que es poden anomenar ***forces directament aplicades***.

➔ ***Equació general de la dinàmica***. *Si totes les reaccions del sistema són ideals, les equacions de moviment de Newton són equivalents a*

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_i - m_i\vec{a}_i\right) \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \tag{3.63}$$

Observem que a les equacions que s'extreuen de (3.63):

➔ **1)** No apareixen les forces de reacció.

➔ **2)** S'obtenen tantes equacions independents com graus de llibertat.

L'equació general de la dinàmica va tenir una primera versió deguda a Jean le Rond D'Alembert amb el nom de principi de D'Alembert amb l'enunciat:

Qualsevol posició del sistema en moviment pot ser entesa com una posició d'equilibri si afegim a les forces externes les forces d'inèrcia.

Aquest enunciat s'entendrà més endavant en el context de l'estàtica i en relació amb el principi dels treballs virtuals. De tota manera, no farem servir aquesta interpretació.

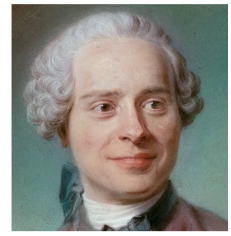


Fig. 3.31: Jean le Rond D'Alembert (1717-1783) fou un matemàtic i filòsof francès

La demostració de l'equació general de la dinàmica (3.63) no és difícil, des del punt de vista matemàtic, encara que conceptualment pugui sorprendre.

Demostració. Volem demostrar que

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{R}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \tag{3.64}$$

i

$$\vec{F}_i + \vec{R}_i = m_i\vec{a}_i \tag{3.65}$$

són equivalents a

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\vec{F}_i - m_i\vec{a}_i\right) \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \tag{3.66}$$

Demostració (3.64,3.65) $\Rightarrow$ (3.66): Si multipliquem (3.65) per $\delta\vec{r}_i$ i sumem, obtenim

$$0 = \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{F}_i + \vec{R}_i - m_i\vec{a}\right) \cdot \delta\vec{r}_i$$

i, si tenim en compte (3.65), obtenim (3.66).

Demostració (3.66) $\Rightarrow$ (3.64,3.65): Observem que ara les reaccions no estan determinades. Han de complir obligar el sistema a moure's pels lligams. Així queden determinades amb $\vec{R}_i = m_i\vec{a}_i - \vec{F}_i$ i, òbviament, es compleix (3.65). Si multipliquem (3.65) per $\delta\vec{r}_i$ i sumem n'obtenim $\sum_{i=1}^{N} \left(\vec{F}_i + \vec{R}_i - m_i\vec{a}\right)_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0$. Ara, tenint en compte (3.66), obtenim (3.64). ■

3.10 Sistema amb lligams conservatiu. Conservació de l'energia

Considerem un sistema amb lligams conservatiu: un sistema de partícules amb lligams independents del temps, amb totes les reaccions $\vec{R}_i$ ideals i que les altres forces, $\vec{F}_i$, (internes i/o externes) són conservatives. Això vol dir que existirà la funció energia potencial U

$$U = -\int \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i \tag{3.67}$$

➔ ***Teorema de la conservació de l'energia mecànica***. *Si definim l'energia mecànica d'un sistema de N partícules amb lligams conservatiu com*

$$E = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2 + U \tag{3.68}$$

on U està definit segons (3.67), el valor numèric de l'energia mecànica es manté constant al llarg del temps, mentre les partícules es mouen per una trajectòria solució de les equacions de moviment:

$$\frac{dE}{dt} = 0 \tag{3.69}$$

Demostració. Apliquem l'equació general de la dinàmica prenent com a desplaçaments possibles els desplaçaments reals del sistema (els desplaçaments que compleixen l'equació general de la dinàmica) i dividim pel temps, dt , que s'ha esmerçat a realitzar-los

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_i - m_i\vec{a}_i\right)\cdot\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i\cdot\frac{d\vec{r}_i}{dt} - \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{a}_i\cdot\vec{v}_i \qquad (3.70)$$

$$= -\left(\frac{dU}{dt} + \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2\right) = 0 \qquad (3.71)$$

■

Habitualment, es diu que *l'energia mecànica es conserva*. La conservació de l'energia també es pot escriure fent servir l'expressió integrada entre dos instants, t_{ini} i t_{fi}

$$E_{\text{ini}} = E_{\text{fi}} \qquad (3.72)$$

➜ Recordem que és necessari que els lligams siguin independents del temps per tal que es conservi l'energia. No n'hi ha prou que les forces directament aplicades siguin conservatives i les reaccions, ideals. Ens cal també que els desplaçaments virtuals coincideixin amb els possibles, $\delta\vec{r}_i = d\vec{r}_i$. Al llarg de tot el llibre, només considerem lligams independents del temps. Només al capítol 9 estudiem lligams que poden dependre del temps.

➜ En el cas de sistemes conservatius d'un grau de llibertat aquest resultat és suficient per trobar la trajectòria temporal del sistema.

Cal precisar que $d\vec{r}_i$ de (3.67) són els desplaçaments possibles de les partícules sobre les quals s'apliquen les forces, que no té per què coincidir amb els desplaçaments dels punts de l'espai on s'apliquen les forces. Aquest important matís el podem veure en l'exemple següent.

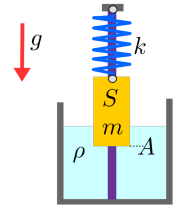


Figura de l'enunciat 3.10.1

Problema 3.10.1. La molla està relaxada quan la cara inferior A del prisma, llarg, de secció S i massa m, que pot lliscar sense fricció per la guia fixa, és al nivell del líquid, de densitat ρ. Si el deixem anar des de la posició descrita, fins a quina profunditat z arribarà A.

Nota: El recipient és prou gran per què el nivell del líquid no es mogui.

Solució

Es tracta d'un sòlid rígid que es pot moure només per translació. Prenem l'eix z en la direcció i el sentit de $\vec{g}$ amb origen al nivell fix del líquid. En aquestes condicions, la coordenada del punt A és z. Quan $z = 0$, la molla no fa força i l'empenyiment d'Arquimedes és nul. El desplaçament infinitesimal possible de qualsevol partícula del sòlid és $d\vec{r} = dz\hat{k}$.

El sistema és conservatiu i, en conseqüència, podem aplicar la conservació de l'energia entre les situacions inicial i final. Per poder escriure els diferents termes d'energia potencial, considerem que el punt A està enfonsat fins a z:

U_g: la força pes és $\vec{P} = mg\hat{k}$ i l'energia potencial associada $U_g = -\int (mg\hat{k}) \cdot (dz\,\hat{k}) = -mgz$.

U_k: la força que fa la molla és $\vec{F}_k = -kz\hat{k}$ i l'energia potencial associada, $U_k = -\int (-kz\hat{k}) \cdot (dz\,\hat{k}) = \frac{1}{2}kz^2$.

U_E: l'empenyiment d'Arquimedes (vegeu la secció 4.3) és $\vec{E} = -\rho g S z\,\hat{k}$ i l'energia potencial associada, $U_E = -\int (-\rho g S z\hat{k}) \cdot (dz\,\hat{k}) = \frac{1}{2}\rho g S z^2$.

Fixem-nos que sempre el desplaçament que prenem és el de les partícules del cos on s'aplica la força corresponent. En especial, observem que no ens és necessari saber quin és, a cada instant, el punt d'aplicació de l'empenyiment d'Arquimedes E, que estudiarem al capítol següent, on veurem que, quan A és a z, l'empenyiment E està aplicat a $z/2$ i, per tant el desplaçament dels punts d'aplicació de E és $dz/2$. Però, insistim, hem pres els desplaçament possibles dz de les **partícules del cos**, encara que aquestes puguin ser diferents durant el procés.

L'energia mecànica del sistema és

$$E(z,\dot{z}) = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 - mgz + \frac{1}{2}kz^2 + \frac{1}{2}\rho g S z^2 = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 - mgz + \frac{1}{2}\left(k + \rho g S\right) z^2$$

aplicant la seva conservació, tenim $E(0,0) = E(z,0) \Rightarrow$ $z = \dfrac{2mg}{k + \rho g S}$ ■

Problema 3.10.2. Una partícula lligada a una corda, de massa negligible i que en tot moment es manté tensa, oscil·la en un pla vertical. Trobeu l'equació de moviment utilitzant la conservació de l'energia.

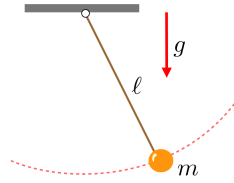


Figura de l'enunciat 3.10.2

Solució

Observem que la tensió de la corda T és sempre normal al desplaçament possible de la partícula. Es tracta d'una reacció ideal. A banda de les reaccions, tenim la força de la gravetat, que és conservativa. Podem expressar el lligam en forma paramètrica com

$$x = \ell\ \sin\theta$$
$$y = \ell\ \cos\theta$$

L'energia del sistema és $E = \frac{1}{2}mv^2 - mg\ell\cos\theta$ on $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ que, en termes de θ, és $v = \ell\dot{\theta}$. Així obtenim

$$E = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - mg\ell\cos\theta$$

i, aplicant la conservació de l'energia,

$$0 = \frac{dE}{dt} = m\ell^2\ \dot{\theta}\ \ddot{\theta} + mg\ell\sin\theta\ \dot{\theta}$$

Tenint en compte que busquem solucions permeses pels lligams $\dot{\theta} \neq 0$, n'obtenim l'equació de moviment

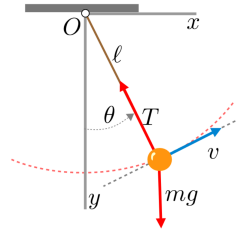


Figura de la solució 3.10.2

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell}\sin\theta$$ ■

Problema 3.10.3. El clau C fix de la figura està a una distància vertical d d'on és fixada la corda lligada a la boleta de massa m. Demostreu que, per tal que, deixant-la anar, pugui donar una volta completa al cercle centrat en el clau, cal que $d \geq 0{,}6L$

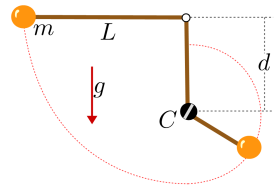


Figura de l'enunciat 3.10.3

Solució

És un sistema lligat conservatiu amb lligams ideals. Farem servir la conservació de l'energia necànica $E_{\text{ini}} = E_{\text{fi}}$ entre les posicions ini, amb $v = 0$ i $y = 0 \Rightarrow E_{\text{ini}} = 0$, i fi amb y i $v \Rightarrow E_{\text{fi}} = \frac{1}{2}mv^2 - mgy$.

Al punt en vermell de la figura, tenim $y = d - (L - d)$. Substituint a la conservació de l'energia i aïllant la velocitat, trobem

$$v = \sqrt{2g(2d - L)} \tag{3.73}$$

A la vegada, aquesta velocitat ha de ser suficient per tal que la corda no s'arrugui. Així, al punt on menys velocitat té ha de passar que la tensió T de la corda la mantingui tensa, és a dir, $T \geq 0$. Escrivint l'equació de moviment en la direcció de la tensió, tenint en compte que l'acceleració normal és $a_n = \frac{v^2}{L-d}$,

$$mg + T = m\frac{v^2}{L - d}$$

Aïllant v i imposant que $T \geq 0$, tenim

$$v \geq \sqrt{g(L - d)} \tag{3.74}$$

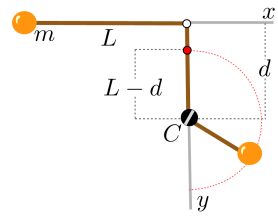


Figura de la solució 3.10.3

Combinant (3.73) i (3.74)

$$\sqrt{2g(2d - L)} \geq \sqrt{g(L - d)} \Rightarrow 4d - 2L \geq L - d \Rightarrow d \geq \frac{3}{5}L$$ ■

Problema 3.10.4. Els blocs de la figura es deixen anar partint del repòs. No hi ha fregament al terra horitzontal ni a les politges i a la corda , aquestes de massa negligible. Determineu l'acceleració dels blocs i la tensió de cada corda.

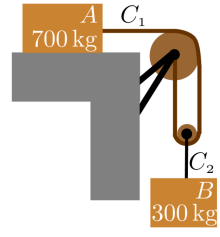


Figura de l'enunciat 3.10.4

Solució

És un sistema lligat conservatiu. Atès que quan fem un desplaçament possible dx, el tros de corda dx que avança, un cop passada la politja, s'ha de repartir entre els dos segments de corda, tenim $dy = \frac{1}{2}dx$ i, dividint per dt, $\dot{y} = \frac{1}{2}\dot{x}$.

L'energia del sistema la podem escriure, utilitzant directament els valors numèrics de les masses, com

$$E = \frac{1}{2}700\,\dot{x}^2 + \frac{1}{2}300\,\dot{y}^2 - 300 \times 9{,}81\,y = 387{,}5\,\dot{x}^2 - 2943y$$

Derivant respecte del temps,

$$\dot{E} = 2 \times 387{,}5 \dot{x}\, \ddot{x} - 2943 \dot{y}$$

Substituint el lligam $\dot{y} = \frac{1}{2}\dot{x}$ i imposant la conservació de l'energia,

$$(775\, \ddot{x} - 1471{,}5)\dot{x} = 0$$

Tenint en compte que busquem solucions compatibles amb els lligams, $\dot{x} \neq 0$, obtenim

$$\boxed{\ddot{x} = 1{,}8987\,\mathrm{m/s^2}} \qquad \boxed{\ddot{y} = 0{,}94935\,\mathrm{m/s^2}}$$

Aplicant ara la segona llei de Newton per a cada bloc,

$$T_1 = 700\, \ddot{x} \Rightarrow \boxed{T_1 = 1329{,}1\,\mathrm{N}}$$

$$300 \times 9{,}81 - T_2 = 300\, \ddot{y} \Rightarrow \boxed{T_2 = 2658{,}2\,\mathrm{N}}$$

■

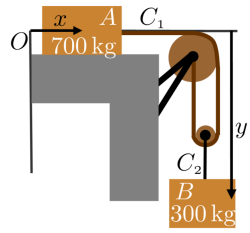


Figura de la solució 3.10.4

Problema 3.10.5. El bloc B de 6 kg es deixa caure lliscant per la falca A de 15 kg, recolzada al terra horitzontal sense fricció. Calculeu les acceleracions de A i B.

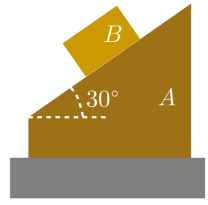


Figura de l'enunciat 3.10.5

Solució

No hi ha fricció, no hi ha forces externes en la direcció del terra horitzontal. La conservació de la quantitat de moviment horitzontal imposa

$$m_A \dot{x}_A + m_B \dot{x}_B = 0 \Rightarrow$$

$$\dot{x}_A = -\frac{m_B}{m_A}\dot{x}_B = -\frac{2}{5}\dot{x}_B \tag{3.75}$$

A la figura, veiem que la velocitat de B relativa a A té una inclinació de 30° (tinguem en compte que el pla inclinat es mou!)

$$\vec{v}_{B(A)} = (\dot{x}_B - \dot{x}_A, \dot{y}_B - \dot{y}_A) \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot{y}_B}{(\dot{x}_B - \dot{x}_A)} = \tan 30^\circ \quad \Rightarrow$$

$$\dot{y}_B = \frac{7}{5\sqrt{3}}\dot{x}_B \tag{3.76}$$

Ara utilitzem la conservació de l'energia. Per això escrivim l'energia en termes de $\dot{x}_B$ i y_B, derivem respecte del temps i igualem a zero

$$E = \tfrac{1}{2}m_A\dot{x}_A^2 + \tfrac{1}{2}m_B(\dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2) + m_B g y_B = 6{,}16\,\dot{x}_B^2 + 58{,}86 y_B$$

$$\dot{E} = 0 = 12{,}32\,\dot{x}_B\ddot{x}_B + 47{,}576\dot{x}_B \Rightarrow \boxed{\ddot{x}_B = -\frac{47{,}576}{12{,}32} = -3{,}86\,\mathrm{m/s^2}}$$

Substituint a les relacions (3.75) i (3.76) derivades respecte del temps, en resulta

$$\boxed{\ddot{y}_B = -3{,}12\,\mathrm{m/s^2}} \qquad \boxed{\ddot{x}_A = 1{,}545\,\mathrm{m/s^2}}$$

■

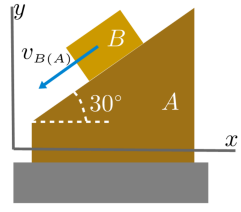


Figura de la solució 3.10.5

Problema 3.10.6. Una massa $m = 0{,}5\,\text{kg}$ llisca sense fricció en un pla vertical al llarg d'un filferro ($d = 0{,}8\,\text{m}$). La molla té $\ell = 25\,\text{cm}$ de longitud natural i $k = 600\,\text{N/m}$. Si la massa es deixa anar sense velocitat inicial quan $b = 30\,\text{cm}$, determineu:

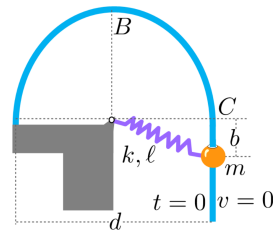


Figura de l'enunciat 3.10.6

a) la velocitat quan arriba a C

b) la velocitat quan arriba a B.

Solució

Es tracta d'un sistema conservatiu amb lligam ideal. Les forces conservatives són el pes i la que exerceix la molla. L'energia, com a funció de x, y i v, es pot escriure

$$E(x,y,v) = \frac{1}{2}mv^2 + mgy + \frac{1}{2}k\left(\ell - \sqrt{x^2+y^2}\right)^2 \qquad (3.77)$$

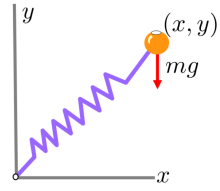


Figura de la solució 3.10.6

on x i y han d'estar sobre el filferro que és el lligam. Imposem la conservació de l'energia entre el punt inicial i els indicats a cada apartat. L'energia al punt inicial és

$$E = \frac{1}{2}m0^2 + mg(-0{,}3) + \frac{1}{2}k\left(\ell - \sqrt{0{,}4^2 + (-0{,}3)^2}\right)^2 = 17{,}2785\,\text{J}$$

a)

$$\frac{1}{2}m\,v_C^2 + mg\,0 + \frac{1}{2}\,k\,\,(\ell - 0{,}4)^2 = 17{,}2785 \Rightarrow \boxed{v_C = 6{,}48953\,\text{m/s}}$$

b)

$$\frac{1}{2}m\,v_B^2 + mg\,0{,}4 + \frac{1}{2}\,k\,\,(\ell - 0{,}4)^2 = 17{,}2785 \Rightarrow \boxed{v_B = 5{,}85372\,\text{m/s}}$$ ■

3.11 Sòlid rígid

Un sòlid rígid és un sistema de partícules i de posicions $\vec{r}_i$ amb els lligams geomètrics

$$(\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2 = \text{ct} \qquad (3.78)$$

Reaccions ideals

➔ Les forces de cohesió d'un sòlid rígid formen un conjunt de reaccions ideals.

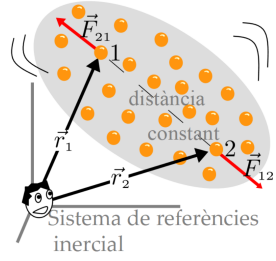


Fig. 3.32: En un sòlid rígid, les forces internes són les forces de reacció dels lligams que mantenen la distància constant entre les partícules

Demostració. Analitzem dues qualssevol de les moltes partícules del sòlid, 1 i 2, de vectors posició $\vec{r}_1$ i $\vec{r}_2$, respectivament (vegeu la figura 3.32). Les forces de cohesió del sòlid (forces internes) són les reaccions dels lligams. Per a les dues partícules, $\vec{F}_{12}$ i $\vec{F}_{21}$ compliran la tercera llei de Newton:

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} \quad ; \quad \vec{F}_{12} \propto (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \qquad (3.79)$$

Els desplaçaments possibles (=virtuals) $d\vec{r}_1$ i $d\vec{r}_2$ compliran

$$0 = d(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)^2 = 2(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\cdot(d\vec{r}_2 - d\vec{r}_1) = 0 \qquad (3.80)$$

La condició de reaccions ideals per a aquestes dues partícules és $\vec{F}_{21}\cdot d\vec{r}_1+\vec{F}_{12}\cdot d\vec{r}_2 = 0$ i és això el què hem de demostrar. Tenint en compte (3.79) i (3.80)

$$\vec{F}_{21}\cdot d\vec{r}_1+\vec{F}_{12}\cdot d\vec{r}_2 = -\vec{F}_{12}\cdot d\vec{r}_1+\vec{F}_{12}\cdot d\vec{r}_2 = \vec{F}_{12}\cdot(d\vec{r}_2-d\vec{r}_1) \;\propto\; (\vec{r}_2-\vec{r}_1)\cdot(d\vec{r}_2-d\vec{r}_1)=0$$

Podem estendre aquest resultat a totes les parelles de partícules del sòlid i, per tant, el conjunt forces de cohesió d'un sòlid rígid és ideal. ■

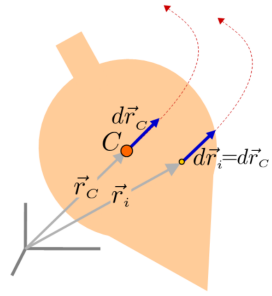


Fig. 3.33: Translació sense rotació

Desplaçaments possibles

Prenem en el sòlid un punt de referència C, de posició $\vec{r}_C$ (vegeu la figura 3.33). La posició de qualsevol altre punt del sòlid es pot escriure $\vec{r}_i = \vec{r}_C + \vec{r}_{i(C)}$. Podem així descompondre els desplaçaments possibles $d\vec{r}_i$ com

$$d\vec{r}_i = d\vec{r}_C + d\vec{r}_{i(C)} \tag{3.81}$$

Si substituïm $\vec{r}_i = \vec{r}_C + \vec{r}_{i(C)}$ a la condició (3.78), el resultat no depèn de $\vec{r}_C$. Així, qualsevol $d\vec{r}_C$ es possible. Quan el desplaçament possible té la forma

$$d\vec{r}_i = d\vec{r}_C \tag{3.82}$$

diem que es tracta d'una **translació**.

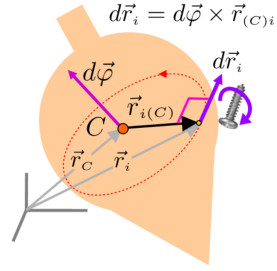


Fig. 3.34: Rotació sense translació

Ens queda per veure quines restriccions imposa (3.78) sobre $d\vec{r}_{i(C)}$. La condició és

$$d\left(\vec{r}_i-\vec{r}_j\right)^2 = 2(\vec{r}_{i(C)}-\vec{r}_{j(C)})\cdot(d\vec{r}_{i(C)}-d\vec{r}_{j(C)}) = 0 \tag{3.83}$$

La solució d'aquestes equacions ens dóna l'expressió dels desplaçaments possibles respecte del punt C, $d\vec{r}_{j(C)}$ que anomenem ***rotacions respecte de*** C(vegeu la figura 3.34).

➔ *L'expressió general d'un desplaçament possible de rotació respecte del punt C és*

$$d\vec{r}_{i(C)} = d\vec{\varphi}\times\vec{r}_{i(C)} \tag{3.84}$$

on $d\vec{\varphi}$ és un vector infinitesimal qualsevol (tres graus de llibertat).

El vector $d\vec{\varphi}$ defineix la rotació infinitesimal del conjunt del cos, no al voltant d'un punt, la rotació entesa com un *canvi d'orientació* del cos a l'espai. La direcció de $d\vec{\varphi}$ representa la direcció de **l'eix instantani de rotació**; el sentit de $d\vec{\varphi}$, amb la regla del cargol, representa el sentit de la rotació, i el mòdul representa l'angle (infinitesimal) d'aquesta rotació.

Cal comentar que el símbol d, emprat a $d\vec{\varphi}$, no pot significar, en general, diferenciació. Diem que, en general, $d\vec{\varphi}$ no és integrable; no podem trobar (no existeix!)

$\vec{\varphi}$ per a una rotació qualsevol. Si que ho podem fer si, per exemple, la direcció de $\vec{\varphi}$ es manté constant.

Demostració. Volem demostrar que (3.84) és solució de (3.83). Si prenem $\vec{r}_j = \vec{r}_C \Rightarrow \vec{r}_{j(C)} = \vec{r}_{C(C)} = 0$ de (3.83), n'obtenim

$$\vec{r}_{i(C)} \cdot d\vec{r}_{i(C)} = 0 \tag{3.85}$$

si ara utilitzem (3.85) en fer els productes a (3.83) obtenim

$$\vec{r}_{i(C)} \cdot d\vec{r}_{j(C)} + \vec{r}_{j(C)} \cdot d\vec{r}_{i(C)} = 0 \tag{3.86}$$

(3.85) i (3.86) són les condicions que han de complir els desplaçaments possibles $d\vec{r}_{i(C)}$. (3.85) ens diu $d\vec{r}_{i(C)} \perp \vec{r}_{i(C)}$ i, per tant, podem expressar com $d\vec{r}_{i(C)} = d\vec{\varphi}_i \times \vec{r}_{i(C)}$. Substituint a (3.86), ens queda

$$\vec{r}_{i(C)} \cdot (d\vec{\varphi}_j \times \vec{r}_{j(C)}) + \vec{r}_{j(C)} \cdot (d\vec{\varphi}_i \times \vec{r}_{i(C)}) = 0$$

que, tenint en compte la propietat vectorial $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}$, podem reescriure com

$$(\vec{r}_{i(C)} \times \vec{r}_{j(C)}) \cdot (d\vec{\varphi}_j - d\vec{\varphi}_i) = 0$$

i com que això ha de passar per a tota parella de partícules i, j del cos $\Rightarrow$ $d\vec{\varphi}_j = d\vec{\varphi}_i = d\vec{\varphi}$ ■

Un desplaçament (infinitesimal) possible general serà la composició d'una translació i una rotació, és a dir,

$$d\vec{r}_i = d\vec{r}_C + d\vec{\varphi} \times \vec{r}_{i(C)} \tag{3.87}$$

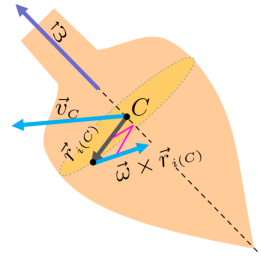


Fig. 3.35: Velocitat instantània de la partícula i d'un sòlid rígid en rotació

3.12 Tòpics de cinemàtica del sòlid

Si la relació (3.87) es divideix, membre a membre, per dt, s'obté l'expressió de la velocitat instantània de qualsevol partícula del sòlid, $\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt}$, en funció de la velocitat, $\vec{v}_C = \frac{d\vec{r}_C}{dt}$, del punt de referència C i de la **velocitat angular** $\vec{\omega}$, $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$ (vegeu la figura 3.35):

$$\vec{v}_i = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{r}_{i(C)} \tag{3.88}$$

La velocitat angular es pot entendre com la velocitat instantània de rotació del cos segons l'eix instantani de direcció $\vec{\omega}$ i sentit el d'un cargol dextrogir que avança segons el sentit de $\vec{\omega}$. Fixem-nos que els diferents punts del sòlid poden tenir diferents velocitats $\vec{v}_i$, però el sòlid té **una** velocitat angular $\vec{\omega}$.

L'aplicació de la relació (3.88) a dues partícules qualssevol i i j del sòlid es pot escriure de la forma

$$\begin{cases} \vec{v}_i = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{r}_{i(C)} \\ \vec{v}_j = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{r}_{j(C)} \end{cases}$$

Si restem membre a membre aquestes dues expressions, en resulta

$$\vec{v}_i - \vec{v}_j = \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \tag{3.89}$$

perquè $\vec{r}_{i(C)} - \vec{r}_{j(C)} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$.

D'acord amb les propietats del producte vectorial, és evident que

$$(\vec{v}_i - \vec{v}_j) \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j) = 0 \tag{3.90}$$

$$(\vec{v}_i - \vec{v}_j) \cdot \vec{\omega} = 0 \tag{3.91}$$

d'on es dedueix que el vector velocitat relativa entre dues partícules és, en tot moment, perpendicular als vectors posició relativa i velocitat angular (vegeu la figura 3.36).

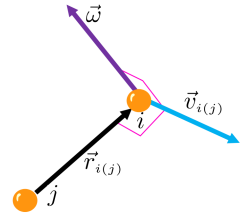


Fig. 3.36: Posició i velocitat relatives de dues partícules d'un sòlid en rotació

El punt i on $\vec{v}_i = 0$ s'anomena ***centre instantani de rotació*** (CIR). Vegeu la figura 3.37. Segons (3.90) $\vec{r}_{CIR(j)}$ compleix

$$\vec{v}_j \cdot \vec{r}_{CIR(j)} = 0 \tag{3.92}$$

En general, el CIR no es pot identificar amb cap punt solidari amb el sòlid.

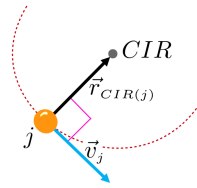


Fig. 3.37: Centre instantani de rotació (CIR)

Problema 3.12.1. L'escala $\overline{AB}$ de 3 m de longitud , llisca per la paret i el terra. Quan l'angle θ val $30°$, l'extrem inferior de l'escala es mou cap a la dreta amb una velocitat de 2,0 m/s. Determineu la velocitat de l'extrem superior i la velocitat angular en aquest instant.

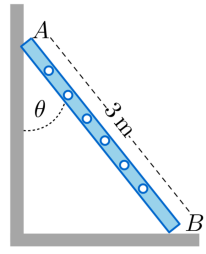


Figura de l'enunciat 3.12.1

Solució

Si s'aplica l'equació (3.89) als punts A i B de l'escala, en resulta

$$\vec{v}_A - \vec{v}_B = \vec{\omega} \times (\vec{r}_A - \vec{r}_B) \tag{1}$$

Prenent el sistema d'eixos que es mostra a la figura i tenint en compte que $\vec{r}_A - \vec{r}_B = (-L\sin\theta, L\cos\theta, 0)$, que $\vec{v}_A = (0; -v_A; 0)$, $\vec{v}_B = (v_B; 0; 0)$ i $\vec{\omega} = (0; 0; \omega)$, (1) resulta

$$(0, -v_A, 0) - (v_B, 0; 0) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -L\sin\theta & L\cos\theta & 0 \end{vmatrix}$$

Resolent el determinant, queda

$$-v_B\hat{\imath} - v_A\hat{\jmath} = -L\omega\cos\theta\,\hat{\imath} - L\omega\sin\theta\,\hat{\jmath}$$

i, igualant les corresponents components, s'arriba que

$$v_B = \omega L\cos\theta$$
$$v_A = \omega L\sin\theta$$

Substituint les dades proporcionades a l'enunciat, $L = 3$ m, $v_B = 2$ m/s i $\theta = 30°$, s'obté finalment

$$v_A = 1{,}155\,\text{m/s}\ ,\quad \omega = 0{,}77\,\text{rad/s}$$

■

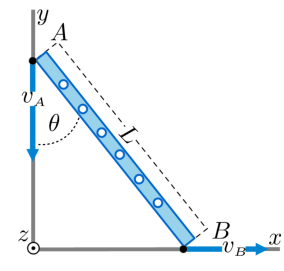


Figura de la solució 3.12.1

Problema 3.12.2. A l'instant representat a la figura, la corredissa A s'està movent cap a la dreta a una velocitat $v_A = 3\,\mathrm{m/s}$. Trobeu la velocitat angular ω del braç $\overline{AB}$ i la velocitat v_B de la corredissa B.

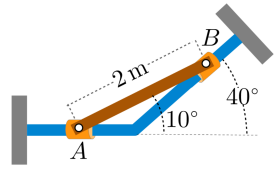


Figura de l'enunciat 3.12.2

Solució

Igual que al problema 3.12.1, l'aplicació de l'equació (3.89) als punts A i B de la barra que uneix ambdues corredisses amb la barra permet escriure

$$\vec{v}_A - \vec{v}_B = \vec{\omega} \times (\vec{r}_A - \vec{r}_B)$$

Prenent el sistema d'eixos que es mostra a la figura de la solució i tenint en compte que

$$\vec{r}_A - \vec{r}_B = -L\cos 10^\circ\,\hat{\imath} - L\sin 10^\circ\,\hat{\jmath}$$

i que $\vec{v}_A = v_A\hat{\imath}$, $\vec{v}_B = v_B\cos 40^\circ\hat{\imath} + v_B\sin 40^\circ\hat{\imath}$ i $\vec{\omega} = \omega\hat{k}$, aquesta darrera expressió es pot escriure de la forma

$$(v_A;0;0) - (v_B\cos 40^0; v_B\sin 40^0; 0) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -L\cos 10^0 & -L\sin 10^0 & 0 \end{vmatrix}$$

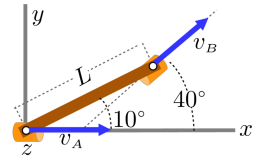


Figura de la solució 3.12.2

Resolent el determinant, queda

$$v_A\hat{\imath} - v_B\cos 40^\circ\hat{\imath} - v_B\sin 40^\circ\hat{\jmath} = -L\omega\sin 10^\circ\hat{\imath} - L\omega\cos 10^\circ\hat{\jmath}$$

i, igualant les corresponents components, s'arriba que

$$\begin{aligned} v_A - v_B\cos 40^\circ &= \omega L\sin 10^\circ \\ v_B\sin 40^\circ &= \omega L\cos 10^\circ \end{aligned}$$

La resolució d'aquest sistema, a partir de les dades proporcionades per l'enunciat del problema, permet obtenir v_B i ω:

$$v_B = 3{,}41\,\mathrm{m/s}\,,\quad \omega = 1{,}113\,\mathrm{rad/s}$$ ■

Rodolament

Considerem un sòlid rígid que es mou sense perdre el contacte amb un terra pla (figura 3.38). El punt B del sòlid en contacte amb el terra va canviant amb el temps i la velocitat relativa al terra d'aquest punt, $\vec{v}_B - \vec{v}_{\text{terra}}$, pot ser diferent de zero o no. En el primer cas, es diu que el sòlid **roda i llisca**, mentre que en el segon, que **roda sense lliscar** (o que **rodola**).

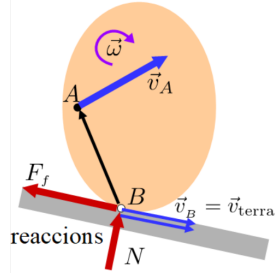


Fig. 3.38: Sòlid rígid en moviment sobre una superfície plana fixa

Aplicant l'equació (3.88) als punts A i B del sòlid (vegeu la figura 3.38), en resulta

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times (\vec{r}_A - \vec{r}_B)$$

Si el sòlid roda sense lliscar, $\vec{v}_B = \vec{v}_{\text{terra}}$ i l'expressió anterior es pot escriure com

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{\text{terra}} + \vec{\omega} \times (\vec{r}_A - \vec{r}_B)$$

Si $\vec{v}_{\text{terra}} = 0$, $\vec{v}_A$ és perpendicular a la recta que uneix el punt A amb el punt B de contacte instantani del sòlid amb el terra. Si tenim en compte que $\vec{\omega}$ i $\vec{r}_A - \vec{r}_B$ són vectors perpendiculars, queda

$$v_A = \omega \overline{AB} \tag{3.93}$$

d'on resulta que v_A és directament proporcional la distància $\overline{AB}$. D'aquesta manera, s'obté una distribució de vectors velocitat instantània en el sòlid, tal com es mostra a figura 3.39. El punt B és, en aquest cas, el centre instantani de rotació (CIR), definit a (3.92). En molts casos, el sòlid tindrà una secció circular de radi R. Si l'equació (3.93) s'aplica ara als punts C, centre, i B del sòlid, $\overline{BC} = R$, s'obté

$$v_C = \omega R$$

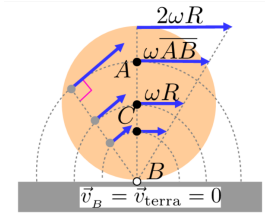


Fig. 3.39: Distribució de velocitats en el pla del moviment d'un sòlid que roda sense lliscar sobre un terra

Nota 1: Quan el sòlid roda sense lliscar, el fet que el punt en contacte amb el terra (punt B a les figures 3.38 i 3.39) tingui instantàniament velocitat relativa nul·la fa que les reaccions del terra sobre el cos, aplicades al punt de contacte (normal N i de fricció F_f a la figura 3.38) siguin ideals. Això és especialment important pel que fa a la fricció, perquè la normal ja ho és, d'ideal, en cas que hi hagi lliscament.

Nota 2: Si el sòlid roda sense lliscar, $F_f \leq \mu_e N$, mentre que, si roda i llisca, $F_f = \mu_c N$, on μ_e i μ_c són, respectivament, els coeficients de fregament estàtic i dinàmic entre el cos i el terra.

3.13 Equacions de moviment del sòlid rígid

L'equació general de la dinàmica per al sòlid rígid sotmès a forces externes $\vec{F}_i$ la trobem prenent com a desplaçaments virtuals $\delta\vec{r}_i = d\vec{r}_C + d\vec{\varphi} \times \vec{r}_{i(C)}$:

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\vec{F}_i - m_i\vec{a}_i\right) \cdot d\vec{r}_C + \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{F}_i - m_i\vec{a}_i\right) \cdot (d\vec{\varphi} \times \vec{r}_{(C)\,i}) = 0 \tag{3.94}$$

Recordem que podem fer que $d\vec{r}_C$ i $d\vec{\varphi}$ tinguin qualsevol *valor infinitesimal*, inclòs el zero, i que són independents entre si. Així, si a (3.94) fem $d\vec{\varphi} = 0$ i $d\vec{r}_C$ té un valor arbitrari, obtenim $\sum_{i=1}^{N} \left(\vec{F}_i - m_i\vec{a}_i\right) = 0$, equació que ja hem tractat anteriorment però que ara permet enunciar:

➔ *L'equació de moviment del sòlid associada a les translacions es pot escriure*

$$\vec{F} = m\,\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{P}}{dt} \tag{3.95}$$

Per trobar l'equació de moviment associada a les rotacions, cal treballar una mica més.

➜ *L'equació de moviment del sòlid rígid associada a les rotacions es pot escriure*

$$\frac{d\vec{L}_{(C)}}{dt} = \vec{M}_{(C)} \tag{3.96}$$

on C és el CM o bé, en cas d'existir, un punt fix solidari amb el cos. $\vec{L}_{(C)}$ i $\vec{M}_{(C)}$ són, respectivament, el moment angular del sòlid i el moment de les forces externes respecte del punt C i referits al sistema de referència inercial.

Demostració. Fem $d\vec{r}_C = 0$ a l'equació general de la dinàmica (3.94), n'obtenim

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\left(\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i \right) \cdot \left(d\vec{\varphi} \times \vec{r}_{i(C)} \right) \right) = 0 \tag{3.97}$$

Tenint en compte la relació $\vec{A} \cdot \left(\vec{B} \times \vec{C} \right) = - \left(\vec{A} \times \vec{C} \right) \cdot \vec{B}$ amb $\vec{A} = \vec{F}_i - m_i \ddot{\vec{r}}_i$, $\vec{B} = d\vec{\varphi}$ i $\vec{C} = \vec{r}_{i(C)}$, obtenim

$$-\sum_{i}^{N} \left(\left(\vec{F}_i - m_i \ddot{\vec{r}}_i \right) \times \vec{r}_{i(C)} \right) \cdot d\vec{\varphi} = 0 \tag{3.98}$$

que, com que $d\vec{\varphi}$ és arbitrari, ens diu

$$\sum_{i}^{N} \left(\left(\vec{F}_i - m_i \ddot{\vec{r}}_i \right) \times \vec{r}_{i(C)} \right) = 0 \tag{3.99}$$

El terme $\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}_i \times \vec{r}_{i(C)}$ es pot reescriure com

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}_i \times \vec{r}_{i(C)} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i \times \vec{r}_{i(C)} - \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i \times \dot{\vec{r}}_{i(C)}$$

i amb $\vec{r}_i = \vec{r}_C + \vec{r}_{i(C)} \Rightarrow \dot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{r}}_C + \dot{\vec{r}}_{i(C)}$ tenim, sempre que escollim com a punt C el CM o bé, en cas d'existir, un punt fix del cos ($\dot{\vec{r}}_C = 0$)

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i \times \dot{\vec{r}}_{i(C)} = \dot{\vec{r}}_C \times \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_{i(C)} = 0$$

L'equació (3.99) queda finalment

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_{i(C)} \times m_i \dot{\vec{r}}_i = \sum_{i} \left(\vec{r}_{i(C)} \times \vec{F}_i \right) \tag{3.100}$$

que no és més que l'expressió (3.96) explicitada. ■

Les equacions de moviment (3.95) i (3.96) ja les havíem trobat anteriorment, a les seccions 3.3 i 3.4, encara que amb un sentit lleugerament diferent. Allà sorgien com a combinacions lineals d'equacions per a cada partícula, amb la qual cosa el seu compliment esdevenia necessari per a un sistema qualsevol de N partícules. A més, el punt respecte del qual calculàvem els moments havia de ser un punt fix (encara que el sistema fos en moviment).[2] Ara són el resultat d'aplicar l'equació general de la dinàmica al sòlid rígid i, per tant, **per a un sòlid rígid són necessàries i suficients**. És a dir, conegudes la posició i la velocitat en un instant i les forces que actuen sobre el sòlid, permeten predir el seu futur (i passat). Podem així concloure respecte a les equacions de moviment en la forma (3.95) i (3.96): si C és fix no solidari amb el sòlid, són necessàries; si C és el CM o un punt fix solidari amb el cos, són necessàries i suficients.

[2] Allà ja vam avançar que es podia utilitzar també el CM

Un altre aspecte destacable és que, si el moment respecte del CM de les forces que actuen sobre el sòlid és nul, el moviment del sòlid rígid es pot descriure només amb (3.95) i podem interpretar que es comporta com una partícula de la mateixa massa concentrada al punt CM.

Sistemes de forces equivalents

Les equacions de moviment del sòlid permeten definir els conjunts de forces que causaran els mateixos efectes sobre un sòlid rígid. Observant només el moviment del sòlid no podríem saber si el causant és un conjunt de forces o l'altre.

➔ **Sistemes de forces equivalents**. Si dos conjunts de forces aplicades sobre el mateix sòlid rígid tenen igual resultant i igual moment resultant (respecte del mateix punt), causaran els mateixos efectes físics sobre el sòlid. Diem que són dos sistemes de forces equivalents.

Problema 3.13.1. Un cotxe de massa m i amplada entre rodes $2a$ viatja a una velocitat de mòdul v constant sobre una pista horitzontal, de manera que el seu CM, a una altura h de la pista, descriu una circumferència de radi $R \gg a$. Trobeu quina és la velocitat màxima a què pot viatjar sense bolcar.

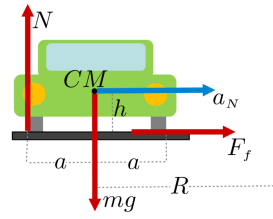


Figura de la solució 3.13.1

Solució

Tindrem en compte que el cotxe és força més petit que el radi de curvatura R, de manera que les forces de fricció en el contacte rodes-carretera que en principi apunten radialment són pràcticament paral·leles.

En qualsevol cas, el moviment de translació CM queda determinat per:

$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow N = mg \; ; F_f = ma_N = m\frac{v^2}{R}$$

El moviment és a velocitat uniforme. Mentre el cotxe no bolqui, el moment angular serà constant. És a dir, el cotxe sí que efectua una rotació però aquesta és uniforme.

Així, si $\vec{L}_{(CM)}$ és constant,

$$\Rightarrow \quad \frac{d\vec{L}_{(CM)}}{dt} = 0$$

En tenim prou a calcular el moment de les forces respecte del CM i igualar a zero, $\vec{M}_{(CM)} = 0$. Observant la figura,

$$\vec{M}_{(CM)} = 0 = (Na - F_f h; 0; 0) \Rightarrow Na - F_f h = 0$$

i, combinant amb les equacions de la translació, n'obtenim: $v = \sqrt{gRa/h}$ ■

Problema 3.13.2. Quines condicions cal que compleixi una politja sense fricció a l'eix per tal que la tensió de la corda, de massa negligible, sigui igual a les dues bandes?

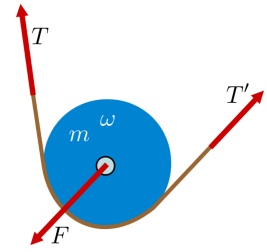


Figura de l'enunciat 3.13.2

Solució

Els moments els calculem respecte del CM, situat al centre de la politja:

$$\vec{L}_{(CM)} = \sum_i \vec{r}_{i(CM)} \times m_i \vec{v}_i$$

Descomponem la velocitat en velocitat de translació i de rotació: $\vec{v}_i = \vec{v}_{CM} + \vec{v}_{i(CM)}$

El terme de translació esdevé nul: $\underbrace{\left(\sum_i m_i \vec{r}_{i(CM)}\right)}_{=0} \times \vec{v}_{CM} = 0$

Així, tenim

$$\vec{L}_{(CM)} = \sum_i \vec{r}_{i(CM)} \times m_i \vec{v}_{i(CM)} \Rightarrow \frac{d\vec{L}_{(CM)}}{dt} = \sum_i \vec{r}_{i(CM)} \times m_i \vec{a}_{i(CM)}$$

Pel que fa als moments de les forces respecte del CM

$$\vec{M}_{(CM)} = (T'R - TR)\,\hat{k}$$

Tensions iguals $\Leftrightarrow \vec{M}_{(CM)} = 0 \Leftrightarrow \sum_i \vec{r}_{i(CM)} \times m_i \vec{a}_{i(CM)} = 0$

Aquesta anul·lació pot donar-se per:

1) Politja de massa negligible ($m_i \to 0$). Pot rotar i desplaçar-se arbitràriament.

2) Politja en rotació uniforme ($\vec{r}_{i(CM)} \times \vec{a}_{i(CM)} = 0$). Pot tenir dimensions i massa arbitrària i pot desplaçar-se arbitràriament.

Si la politja té un radi negligible, cal anar amb compte: la rotació es pot fer molt gran, de manera que el producte no té per què ser nul! ■

3.14 Parell de forces

S'anomena ***parell de forces*** un sistema de forces aplicat sobre un sòlid rígid equivalent a dues forces iguals, de sentits contraris i amb rectes d'acció paral·leles; per tant, de força resultant nul·la i de moment resultant no nul (vegeu la figura 3.40).

➔ **El moment d'un parell de forces és independent del punt respecte del qual es calculi.**

Demostració. Ho podem veure calculant el moment del parell: tenint en compte la figura 3.40,

$$\vec{M} = \vec{r}_+ \times \vec{F} - \vec{r}_- \times \vec{F} = (\vec{r}_+ - \vec{r}_-) \times \vec{F} = \vec{r}_\mp \times \vec{F}$$

■

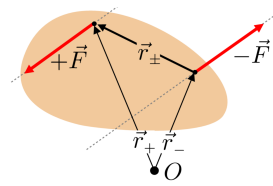


Fig. 3.40: Parell de forces

➔ El mòdul del moment d'un parell, el podem expressar com

$$M = Fd \tag{3.101}$$

on d és la distància entre les rectes d'acció de les forces del parell. Aquesta distància s'anomena **braç del parell de forces**. Per tant, el moment d'un parell depèn de la distància entre les forces (braç) i del valor de les forces.

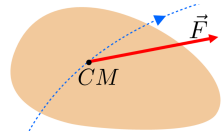


Fig. 3.41: Una força $\vec{F}$ aplicada al CM és la causa d'una translació pura: si el sòlid està inicialment en repòs, l'efecte de la força $\vec{F}$ és moure el CM sense rotació del sòlid

És molt habitual conèixer els parells $\vec{M}_i$ aplicats sobre un sòlid i no les forces que els constitueixen. Això no ens impedeix determinar el moviment del sòlid fent servir les equacions (3.95) i (3.96). Els parells $\vec{M}_i$ formen part dels termes additius en la determinació del moment total $\vec{M}_{(C)}$. Un parell normal al pla del paper es pot representar amb els símbols $\curvearrowleft$ o $\curvearrowright$, que ens indiquen el sentit del parell.

➔ **Translació pura**. A la figura 3.41, s'aplica només una força al CM d'un sòlid. Segons les equacions de moviment (3.95) i (3.96) amb $C = M$, l'efecte que té sobre el sòlid, si inicialment està en repòs, és una translació del CM sense cap rotació, moviment que anomenem *translació pura*.

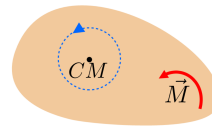


Fig. 3.42: Un parell $\vec{M}$ és la causa d'una rotació pura: si el sòlid està inicialment en repòs, l'efecte del parell $\vec{M}$ és fer-lo girar al voltant del CM. El CM es manté en repòs

➔ **Rotació pura**. A la figura 3.42, s'aplica només un parell $\vec{M}$ al mateix sòlid. Tenint en compte de nou les equacions de moviment, l'efecte que té sobre el sòlid, si inicialment està en repòs, és una rotació al voltant del CM sense que aquest es mogui, moviment que anomenem *rotació pura*.

Treball, potència i energia d'un parell

El treball que fa un parell $\vec{M}$ aplicat a un sòlid rígid és el treball que fan les forces constituents del parell. Si expressem el parell amb dues forces, $\vec{F}_+ = \vec{F}$ i $\vec{F}_- = -\vec{F}$, aplicades als punts del sòlid $\vec{r}_+$ i $\vec{r}_-$, tenim $\vec{M} = (\vec{r}_+ - \vec{r}_-) \times \vec{F}$. El treball serà

$$W = \int \left(\vec{F}_+ \cdot d\vec{r}_+ + \vec{F}_- \cdot d\vec{r}_- \right) = \int \vec{F} \cdot (d\vec{r}_+ - d\vec{r}_-)$$

on hem omès l'especificació dels límits d'integració.

Les forces del parell estan aplicades a punts del cos i aquests punts poden anar canviant. Ara bé, com ja hem vist al problema 3.10.1, els desplaçaments $d\vec{r}_\pm$ són desplaçaments de les partícules del cos, en aquest cas del sòlid rígid. Si tenim en compte (3.87), podem escriure $d\vec{r}_+ - d\vec{r}_- = d\vec{\varphi} \times (\vec{r}_+ - \vec{r}_-)$ i $\vec{F} \cdot (d\vec{r}_+ - d\vec{r}_-) =$

$\vec{F}\cdot(d\vec{\varphi}\times(\vec{r}_+-\vec{r}_-))=\left((\vec{r}_+-\vec{r}_-)\times\vec{F}\right)\cdot d\vec{\varphi}$. N'obtenim l'expressió per al treball i la potència fets per un parell aplicat a un sòlid rígid:

$$W=\int \vec{M}\cdot d\vec{\varphi}\ ;\ P=\vec{M}\cdot\vec{\omega} \tag{3.102}$$

essent $\vec{\omega}=\frac{d\vec{\varphi}}{dt}$ la velocitat angular del sòlid.

Si el parell té direcció constant $\hat{u}$, $\vec{M}=M\hat{u}$, i el sòlid es mou segons el mateix eix, $d\vec{\varphi}=d\varphi\,\hat{u}$, l'expressió del treball W i la potència P resulten

$$W=\int_{\varphi_{\text{ini}}}^{\varphi_{\text{fi}}} M\,d\varphi\ ;\ P=M\omega \tag{3.103}$$

Si el parell M només depèn de φ, podrem escriure l'energia potencial associada al parell de la forma

$$U=-\int M(\varphi)\,d\varphi \tag{3.104}$$

➜ Si el parell és constant, tenim

$$U=-M\varphi \tag{3.105}$$

➜ Si el parell té la forma $M=-\kappa\varphi$, com és el cas de la molla de la figura 3.43, on κ seria la constant de recuperació de la molla (unitats N m rad^{-1}), l'energia potencial corresponent resulta

$$U=\frac{1}{2}\kappa\varphi^2 \tag{3.106}$$

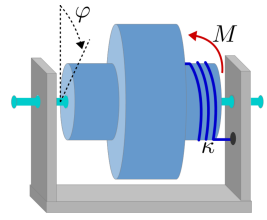


Fig. 3.43: La molla de constant κ proporciona un parell $M=-\kappa\varphi$ al sòlid quan es deforma un angle φ

4 Estàtica dels sòlids rígids

Introducció

En aquest capítol, tractarem de l'estàtica del sòlid rígid. Veurem quines condicions s'han de donar perquè el sòlid estigui en repòs. Emprant l'equivalència dels sistemes de forces, aprendrem a representar adequadament els sistemes de forces més comuns que actuen sobre els sòlids (vegeu la figura 4.1) trobarem, per anul·lació del moment resultant, en quins punts cal aplicar les resultants.

Aplicarem les equacions de moviment capgirant el que usualment prenem com a dades i incògnites. Les dades seran, a banda d'algunes forces, el moviment del sòlid que volem que romangui en repòs. També veurem què diu l'equació general de la dinàmica en aquest cas: equació general de l'estàtica o principi dels treballs virtuals.
Si els lligams són ideals i les forces conservatives, veurem que el principi dels treballs virtuals ens porta a reduir el problema de l'equilibri i l'estabilitat d'aquest equilibri, a l'estudi de la geomètrica de la funció energia potencial.

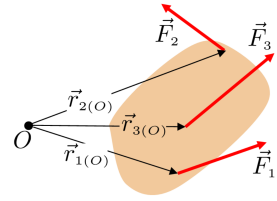


Fig. 4.1: Sòlid sotmès a forces aplicades a diferents punts

4.1 Estàtica del sòlid: condicions d'equilibri

Diem que un sòlid rígid està en equilibri quan les acceleracions de translació i rotació són nul·les. Així, un sòlid en repòs està en equilibri, però també un sòlid que es mou amb velocitat uniforme i/o que té una rotació uniforme. El que és important és que, si les condicions inicials del sòlid són de repòs i aquest està en equilibri, romandrà en repòs. Així com als capítols precedents hem plantejat el problema dinàmic mirant d'esbrinar quins efectes o moviment causaven forces conegudes i, per tant, el moviment era la nostra incògnita, ara el que volem saber és quines forces causen un efecte conegut: l'acceleració nul·la. Les forces són ara la nostra incògnita. No totes, és clar. En general, es tractarà de trobar les forces no conegudes que, amb les forces conegudes i els condicionants geomètrics o lligams,

fan que el sòlid estigui en equilibri.

Partirem de les equacions de moviment d'un sòlid rígid (3.95,3.96), que ja hem vist al capítol 3. Si el sòlid es troba en equilibri, n'obtenim:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = 0 \;\; ; \;\; \vec{M}_{(O)} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_{i(O)} \times \vec{F}_i = 0 \qquad (4.1)$$

Podem enunciar:

➔ ***Condició d'equilibri del sòlid rígid***. *La condició necessària i suficient perquè un sòlid rígid estigui en equilibri és que la resultant i el moment resultant de les forces que actuen sobre el sòlid siguin nuls.*

Propietats i relacions

A continuació, veurem una sèrie de propietats i relacions que ens seran d'utilitat.

➔ **a) El punt O respecte del qual calculem els moments a les equacions d'equilibri (4.1) pot ser qualsevol punt fix de l'espai.**

Això és una conseqüència de les equacions de moviment del sòlid, deduïdes a la secció 3.11. Allà comentàvem que el punt C podia ser, si existia, un punt fix del sòlid o, en general, el centre de masses. En el cas de l'estàtica, el sòlid està en repòs i, per tant, C pot ser qualsevol punt solidari amb el sòlid.

➔ **b) Les forces sobre un sòlid rígid són vectors lliscants.**

Aquesta propietat es compleix tant si el sòlid està en equilibri com si no, encara que en aquest últim cas cal precisar que es compleix per a cada instant. Podem fer *lliscar* la força per la seva recta d'acció traslladant el punt d'aplicació a un altre punt qualsevol d'aquesta recta, ja que el moment respecte a un punt fix O serà el mateix (vegeu la figura 4.2).

Demostració 1 Podem fer la demostració partint de la definició de moment d'una força

$$\vec{r}_{1(O)} \times \vec{F} = (\vec{r}_{1(O)} + \vec{r}_{2(O)} - \vec{r}_{2(O)}) \times \vec{F} = \vec{r}_{2(O)} \times \vec{F} + (\vec{r}_{1(O)} - \vec{r}_{2(O)}) \times \vec{F} = \vec{r}_{2(O)} \times \vec{F}$$

■

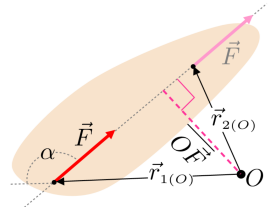


Fig. 4.2: Les forces sobre un sòlid rígid són vectors lliscants

Demostració 2 Segons hem vist al capítol 2, podem calcular el moment utilitzant la regla del cargol i (2.11). En el nostre cas, seria

$$M_{(O)} = F\,\overline{OF}$$

Com que la força $\vec{F}$, els punts d'aplicació sobre la seva recta d'acció i el punt O estan en un mateix pla, la direcció i de sentit del moment seran els mateixos i el mòdul

només dependrà de $\overline{O\vec{F}}$, és a dir, de la distància entre el punt O i la recta d'acció de $\vec{F}$, que és independent del punt d'aplicació de $\vec{F}$ sobre aquesta recta (vegeu la figura 4.2). ■

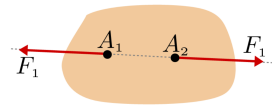


Fig. 4.3: Les condicions d'equilibri imposen aquesta configuració per a les forces $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$

➔ **c) Si sobre un sòlid en equilibri actuen només dues forces, aquestes han de ser necessàriament d'igual mòdul, de sentits contraris i tenir la mateixa recta d'acció** (vegeu la figura 4.3).

Demostració. Volem que el sòlid de la figura 4.4 estigi en equilibri. La resultant ha de ser nul·la, $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$. El sistema de la figura 4.4 és doncs un parell. El moment resultant també s'haurà d'anul·lar. Segons l'expressió del moment d'un parell (3.101), la distància entre les rectes d'acció de les forces, d, haurà de ser zero. És a dir, les forces del parell tenen la recta d'acció coincident: el sistema de forces de la figura 4.4 ha de ser com el de la figura 4.3. ■

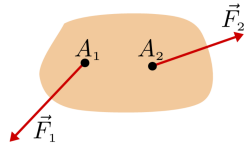


Fig. 4.4: $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ forces no conegudes

Problema 4.1.1. Calculeu la reacció al punt C (força i moment) necessària per tal que l'esfera, de pes negligible, es mantingui en equilibri.

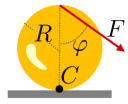


Figura de l'enunciat 4.1.1

Solució

Anomenem $\vec{C}$ la força de reacció del punt C sobre l'esfera i M_C el parell de reacció. Les equacions d'equilibri de forces respecte dels eixos de la figura són

$$F\sin\varphi + C_x = 0$$
$$-F\cos\varphi + C_y = 0$$

i l'equació d'equilibri per al moments, prenent moments respecte del punt C (recordem que podem fer-ho respecte de qualsevol punt)

$$M_C - F\sin\varphi\, 2R = 0$$

Trobem així

$$\vec{C} = -F\sin\varphi\,\hat{\imath} + F\cos\varphi\hat{\jmath} \qquad \vec{M}_C = 2RF\sin\varphi\,\hat{k}$$

■

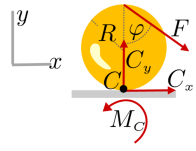


Figura de la solució 4.1.1

Problema 4.1.2. A la figura, es mostren les forces aplicades a un sòlid rígid, de pes negligible, que resulta estar en equilibri. Què val d?

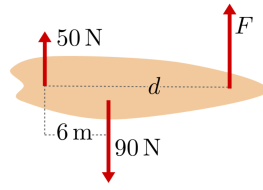


Figura de l'enunciat 4.1.2

Solució

No ens cal calcular la força F. Expressem la condició d'equilibri dels moments prenent moments respecte del punt d'aplicació de la força F

$$90\,(d-6) - 50\,d = 0$$

i aillem d

$$d = 13{,}5\,\text{m}$$

■

4.2 Pes i centre de gravetat

El pes d'un cos és la força que el camp gravitatori de la Terra exerceix sobre cadascuna de les seves partícules (vegeu la figura 4.5). Es considera la gravetat terrestre $\vec{g}$ constant com a conseqüència de les dimensions relativament petites del cos que es vol tractar respecte de la Terra. Si no diem el contrari, prendrem el valor estàndard $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$.

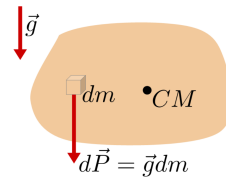


Fig. 4.5: El camp gravitatori actua sobre cadascuna de les partícules d'un cos

➔ *El moment de les forces pes sobre un cos respecte al CM és nul.*

Demostració. La posició del CM respecte d'ell mateix és, òbviament, zero, $\vec{r}_{CM(CM)} = 0$. Per tant, $\frac{1}{m}\int \vec{r}_{(CM)} dm = 0$. Així, tenim

$$\vec{M}_{(CM)} = \int \vec{r}_{(CM)} \times d\vec{P} = \int \vec{r}_{(CM)} \times \vec{g}\, dm = \left(\int \vec{r}_{(CM)}\, dm\right) \times \vec{g} = 0$$

on hem utilitzat que $\vec{g}$ és constant en treure-la de la integral. ■

Aquesta important propietat del CM fa que en aquest context se l'anomeni ***centre de gravetat***, CG, del cos.

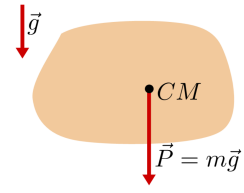


Fig. 4.6: Un sistema de forces equivalents molt senzill és el del pes aplicat al $CG = CM$

A efectes mecànics, i segons el que sabem dels sistemes de forces equivalents, explicat al final de la secció 3.11, podrem substituir les forces de cadascuna de les parts del cos per la força pes resultant aplicada al CM o CG (vegeu la figura 4.6). Aquesta força pes tindrà la mateixa resultant i el mateix moment resultant (nul) respecte al CM que el sistema de forces pes, $d\vec{P} = \vec{g}dm$, de cada diferencial de massa, dm, del cos. Recordem que aquesta substitució la podem fer perquè el cos és un sòlid rígid.

4.3 Forces sobre sòlids degudes a fluids gravitants. Principi d'Arquimedes

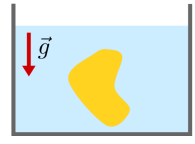


Fig. 4.7: Sòlid submergit en un fluid

En aquest apartat, estudiarem les forces que els fluids fan sobre els sòlids i els seus punts d'aplicació.

Considerem un cub sòlid submergit en un fluid (vegeu la figura 4.7). Com en tot contacte, hi haurà forces normals i tangents. En una situació general, estàtica o no, si el fluid és no viscós les diferents capes del fluid llisquen; es pot dir que no hi ha fregament ni entre les capes del fluid ni entre el fluid i el sòlid. Observant la figura 4.8, encara que la superfície del sòlid no sigui llisa, la no viscositat del fluid fa que no hi hagi força de fricció entre el sòlid i el fluid. Per tant, les forces tangents en el contacte són nul·les i només es tenen en compte les forces normals, que actuen de forma distribuïda per la superfície del contacte (vegeu la figura 4.8). Si la situació que tractem és estàtica, malgrat ser el fluid viscós, les forces de fricció viscosa (proporcionals a la velocitat) seran nul·les i la força sobre la superfície serà normal.

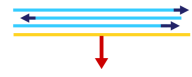


Fig. 4.8: Encara que la superfície del sòlid sigui aspra, si el fluid és no viscós no provocarà forces tangents

Concepte de pressió

Definim la **pressió** p deguda a un fluid com la força normal per unitat de superfície que actua sobre la superfície d'un sòlid submergit en el fluid (vegeu la figura 4.9)

$$p = \frac{dF}{dS} \tag{4.2}$$

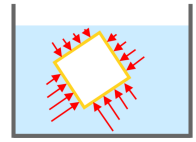


Fig. 4.9: Distribució de forces normals sobre el sòlid provocades pel fluid gravitant

Si considerem cubs cada vegada més petits, veiem que el concepte de pressió és independent de l'existència d'una superfície material. Dependrà de les característiques del fluid i del punt on la vulguem avaluar (vegeu la figura 4.10).

A la figura 4.10, podem dir que la pressió on hi ha el cub és p, també en el cas que no hi sigui el cub.

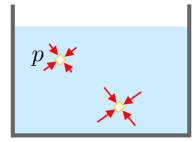


Fig. 4.10: Podem parlar de pressió encara que no hi hagi cap sòlid submergit

Unitats de pressió

En el sistema internacional, la pressió es mesura en pascal (Pa)

- $1\,\text{Pa} = 1\,\text{N/m}^2$

També són molt utilitzades altres unitats com:

- mil·libar (mbar): $1\,\text{mbar} = 1\,\text{hPa}$
- atmosfera (atm): $1\,\text{atm} = 1{,}013 \times 10^5\,\text{Pa}$
- mil·límetres de mercuri (mmHg): $750\,\text{mmHg} = 1\,\text{atm}$

Pressió d'un fluid en un camp gravitatori uniforme

Considerem un volum diferencial de fluid en forma de cilindre vertical de base S i altura dz (vegeu la figura 4.11). z és la **profunditat**, una coordenada que té la direcció i el sentit de $\vec{g}$ amb origen al nivell del fluid. La força que fa aquesta porció de fluid sobre la base del cilindre és igual al pes del líquid que hi ha dins el cilindre.

$$dF = dm\,g = \rho S dz\; g$$

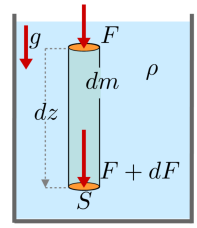


Fig. 4.11: Volum diferencial de fluid en forma de cilindre vertical

Per tant,

$$dp = \rho g\; dz \tag{4.3}$$

Si el fluid és líquid, podrem considerar-lo incompressible, és a dir, la seva densitat ρ serà constant en tot punt del líquid. Integrant l'equació anterior, obtenim la diferència de pressions entre dos punts que estan a diferent altura o profunditat

$$\Delta p = \rho g\; \Delta z \tag{4.4}$$

En un fluid homogeni ($\rho = \text{ct}$), tancat o no, punts d'igual altura, respecte qualsevol referència, tenen la mateixa pressió. Les pressions a igual altura poden ser diferents quan en el recipient hi ha més d'un fluid en contacte o, en general, quan el fluid no és homogeni.

Donat que la densitat d'un gas és molt més petita que la d'un líquid, la diferència de pressió entre dos punts a diferent altura, en els gasos serà molt menor que en els líquids. Així, per exemple, si tenim un recipient on coexisteixen líquids i gasos, les diferències de pressió en el cas dels gasos serà negligible.

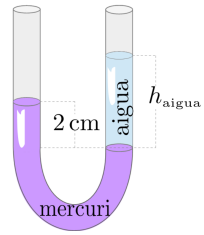


Figura de l'enunciat 4.3.1

Problema 4.3.1. Omplim una branca d'un tub en forma de **U**, obert pels dos extrems, amb aigua i mercuri. Si la diferència entre els nivells de mercuri és de $h_{\text{Hg}} = 2\,\text{cm}$, calculeu l'altura de la columna d'aigua h_{aigua}.

Dades: $\rho_{\text{Hg}} = 13 \times 10^3\,\text{kgm}^{-3}$, $\rho_{\text{aigua}} = 10^3\,\text{kgm}^{-3}$

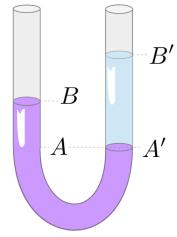


Figura de la solució 4.3.1

Solució

Com que les diferències de pressió a l'aire són negligibles respecte de les dels líquids, els dos nivells B i B' en contacte amb l'aire tenen la mateixa pressió. Els dos punts A i A' connectats amb el mercuri tenen la mateixa pressió. Així, la pressió provocada l'altura h_{Hg} de mercuri serà igual a la provocada per l'altura h_{aigua} de l'aigua:

$$\rho_{\text{Hg}} g h_{\text{Hg}} = \rho_{\text{aigua}} g h_{\text{aigua}}$$

aïllant h_{aigua}

$$h_{\text{aigua}} = \frac{\rho_{\text{Hg}} h_{\text{Hg}}}{\rho_{\text{aigua}}} = 26\,\text{cm}$$

■

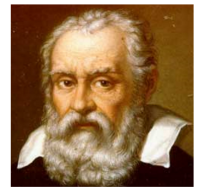


Fig. 4.12: Arquimedes de Siracusa (287 aC-212 aC)

Principi d'Arquimedes

➔ ***Principi d'Arquimedes.*** *Tot cos submergit en un fluid gravitant experimenta una força d'**empenyiment** vertical cap amunt, E, igual al pes del líquid que desplaça*

$$E = P_{\text{fluid}} \tag{4.5}$$

*L'empenyiment E està aplicat a un punt, el **centre d'empenyiment** CE, situat al centre de masses del fluid desplaçat, CM_{fluid}.*

$$CE = CM_{\text{fluid}} \tag{4.6}$$

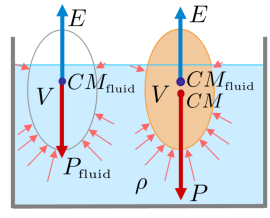


Fig. 4.13: A la dreta, la distribució de forces que el fluid provoca sobre un sòlid submergit en un fluid. A l'esquerra, la mateixa distribució actuaria sobre una superficie que tingués la mateixa forma que el sòlid de la dreta

Demostració. A la figura 4.13 es pot veure, a la dreta, un cos mig submergit un volum V en un fluid, i, a la seva esquerra, una superfície, amb la mateixa forma que el cos original, que tanca una part de fluid V igual a la desplaçada pel cos original. Com que aquesta part de fluid V està en equilibri, el pes del fluid tancat, P_{fluid}, serà igual a la resultant de les forces distribuïdes degudes a la pressió, és a dir, a empenyiment E: $E = P_{\text{fluid}}$. Si, a més, el fluid és incompressible, tindrem $E = \rho g V$.

El punt d'aplicació de E serà el centre de masses del fluid tancat a la superfície (CM_{fluid}). Ja que E aplicat a CE és conseqüència exclusivament de les forces que el fluid exerceix sobre la superfície, serà el mateix que rebrà el cos original, de la mateixa forma que la superfície i igualment submergit, encara que el seu pes sigui diferent. ■

Problema 4.3.2. En un recipient, que conté aigua de densitat $\rho_a = 1\,\text{g/cm}^3$ i oli de densitat $\rho_{\text{oli}} = 0{,}8\,\text{g/cm}^3$, hi ha un cilindre, de $H = 15\,\text{cm}$ d'altura i $\rho = 0{,}9\,\text{g/cm}^3$ de densitat, que es troba surant en equilibri amb el seu eix en posició vertical. Si veiem que el cilindre sobresurt una altura $z = 0{,}8\,\text{cm}$ per sobre del nivell superior de l'oli, calculeu l'altura x i y del cilindre submergit, respectivament, en l'aigua i en l'oli.

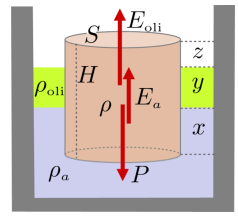


Figura de l'enunciat 4.3.2

Solució

L'equació d'equilibri de forces verticals és $E_{\text{oli}} + E_a - P = 0$, on $E_{\text{oli}} = \rho_{\text{oli}} g\ Sy$ és l'empenyiment degut a l'oli, $E_a = \rho_a g\ Sx$ és l'empenyiment degut a l'aigua i $P = \rho g\, SH$ és el pes del cilindre. S'ha de complir també $H = x+y+z$. Substituint, obtenim el sistema:

$$\begin{cases} \rho_{\text{oli}} y + \rho_a x - \rho H = 0 \\ H = x + y + z \end{cases}$$

que, tenint en compte les dades de l'enunciat, podem resoldre per x i y. Trobem:

$x = 10{,}7\,\text{cm}$ i $y = 3{,}5\,\text{cm}$ ■

Forces sobre superfícies planes

Volem calcular la resultant i el punt d'aplicació de les forces d'un fluid incompressible sobre una superfície plana amb un angle d'inclinació qualsevol.

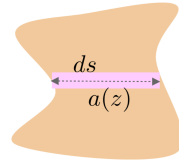


Fig. 4.14: Element de superfície ds horitzontal d'amplada $a(z)$ d'una supefície plana submergida en un fluid

Observant les figures 4.14 i 4.15, la força dF que el líquid fa sobre la superfície ds és $dF = pdS$, amb $p = \rho g z$. Si tenim en compte que ρ i g són constants, podem escriure

$$F = \rho g \int z\, ds \tag{4.7}$$

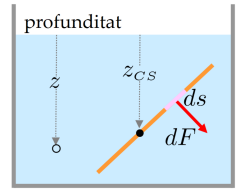


Fig. 4.15: Força, dF, feta pel fluid sobre l'element de superfície ds i profunditat del CS, z_{CS}

La profunditat z (vegeu la figura 4.15) del centre de simetria CS, z_{CS} de la superfície és

$$z_{CS} = \frac{1}{S} \int z ds \tag{4.8}$$

Així, obtenim, substituint la integral de (4.7) fent servir (4.8)

$$F = \rho g z_{CS} S \tag{4.9}$$

Per tant, podrem calcular la força resultant sobre una superfície plana multiplicant la pressió a la profunditat z_{CS} per l'àrea de la superfície plana.

Si l'amplada de la superfície, a, és constant, $S = aL$, és senzill de calcular la profunditat z_{CS} del seu centre de simetria (vegeu la figura 4.16)

$$z_{CS} = z_1 + \frac{1}{2}(z_2 - z_1) = \frac{1}{2}(z_2 + z_1)$$

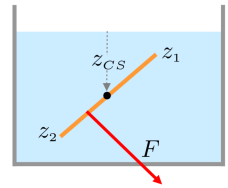


Fig. 4.16: Força resultant, F, del fluid sobre la superfície d'amplada constant horitzontal i profunditat z_1 i z_2 dels seus extrems

Substituint a (4.9), obtenim

$$F = \rho g \, \frac{1}{2}(z_2 + z_1) \, aL \tag{4.10}$$

El punt d'aplicació de la resultant, x_F (vegeu la figura 4.17), el trobarem imposant (si és possible) que el moment total respecte d'aquest punt sigui nul. Observant la figura 4.17, la condició de la nul·litat del moment respecte de x_F la podem expressar com

$$\int (x - x_F) \, dF = 0 \tag{4.11}$$

d'on, aïllant x_F

$$x_F = \frac{1}{F} \int x \, dF \tag{4.12}$$

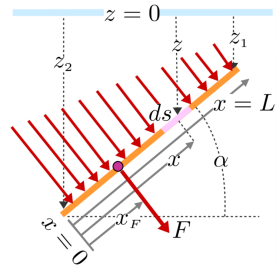


Fig. 4.17: Distribució de les forces dF sobre cada element ds en funció de la profunditat i coordenada x que localitza cada un dels ds de la superfície

Si tenim en compte que estem estudiant el cas $a = \text{ct}$, $ds = a dx$ i $dF = \rho g z \, dx$. (4.12) pot ser escrita, tenint en compte també (4.10),

$$x_F = \frac{2}{L(z_2 + z_1)} \int x \, z \, dx \tag{4.13}$$

A la integral anterior, s'hi barregen dues variables, x i z, que no són independents. La relació entre aquestes variables serà lineal, $z = Ax + B$, i podem trobar les constants A i B per les condicions $x = 0 \Rightarrow z = z_2$ i $x = L \Rightarrow z = z_1$. Alternativament, observant la figura 4.17, podem expressar el sinus de l'angle α com $\sin\alpha = \frac{z_2 - z_1}{L} = \frac{z_2 - z}{x}$. Trobarem

$$z = z_2 - \frac{z_2 - z_1}{L} x \tag{4.14}$$

i, substituint a (4.13) amb els límits d'integració per la variable x de $x = 0$ fins a $x = L$

$$x_F = \frac{2}{L(z_2 + z_1)} \int_0^L x \, (z_2 - \frac{z_2 - z_1}{L} x) \, dx \tag{4.15}$$

fent la integral trobem, finalment,

$$x_F = \frac{L(z_2 + 2z_1)}{3(z_2 + z_1)} \tag{4.16}$$

Problema 4.3.3. El recipient d'1 m d'amplada té una comporta $\overline{AB}$ de massa negligible que s'aguanta gràcies a les forces F_1 i F_2 perpendiculars a la comporta, tal com indica la figura. Trobeu els valors mínims d'aquestes forces que fan que la comporta estigui en equilibri.

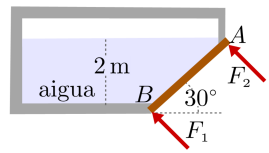


Figura de l'enunciat 4.3.3

Solució

L'amplada és $a = 1$ m. Podem trobar $\overline{AB}$:

$$\overline{AB} = L = \frac{2}{\sin 30^\circ} = 4 \text{ m}$$

Aplicant l'expressió (4.9), amb $z_1 = 0$ i $z_2 = 2$ m, n'obtenim

$$F_{\text{aigua}} = 10^3 \cdot 9{,}81 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 = 39240 \text{ N}$$

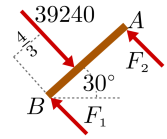


Figura de la solució 4.3.3

El punt d'aplicació el trobem amb (4.16)

$$x_F = \frac{4 \cdot (2 + 2 \cdot 0) \cdot 1}{3(2+0)} = \frac{4}{3} \text{ m}$$

Ara apliquem les equacions d'equilibri de forces i moments. Tinguem en compte que volem els valors mínims i, per tant, les reaccions dels suports als punts A i B sobre la comporta seran nuls. Els moments, els calcularem respecte de B.

$$\begin{cases} \sum \vec{F}_i = 0 \ : \quad F_1 + F_2 - F_{\text{aigua}} = 0 \\ \sum \vec{M}_{(B)i} = 0 \ : F_1 \ L - \ F_{\text{aigua}} \ x_F = 0 \end{cases}$$

solucionem per F_1 i F_2

$$F_1 = 13080 \text{ N} \ ; \ F_2 = 26160 \text{ N}$$

■

4.4 Lligams i forces de reacció

Si el sòlid en equilibri presenta suports o, en general, lligams (cordes, contactes, rodets, articulacions...) i volem resoldre les equacions d'equilibri, el que fem és substituir els lligams per forces de reacció. S'anomena ***diagrama del sòlid lliure*** (DSL) el diagrama en què es representa el sòlid i on s'han substituït tots els lligams per les forces de reacció corresponents. Les reaccions són forces externes, d'entrada no conegudes. A la taula de la pàgina 336, es presenta una llista de possibles lligams per a un sòlid amb les reaccions corresponents.

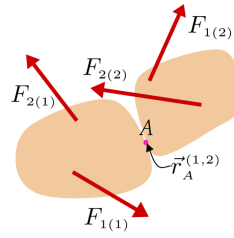


Fig. 4.18: Forces externes $F_{i(1)}$ i $F_{i(2)}$ sobre els sòlids 1 i 2, respectivament, que presenten un contacte en A

4.5 Estàtica de N sòlids rígids

Si tenim N sòlids $i = 1{,}2{,}3...$ sotmesos cadascun d'ells a forces externes i amb possibles contactes entre ells, podem fer el diagrama del sòlid lliure del conjunt o per a cada sòlid per separat. En cas de voler representar el diagrama del sòlid lliure del conjunt de cossos, les forces de contactes serien internes i s'anul·larien

dos a dos, amb la qual cosa no les hauríem d'incloure ni en el diagrama ni en les equacions d'equilibri. Vegeu la figura 4.18.

En cas de voler representar cada sòlid per separat, les forces de contacte seran forces externes al sòlid sobre el qual actuen. Les forces de contacte compleixen la llei d'acció i reacció $\vec{F}_{A(ji)} = -\vec{F}_{A(ij)}$, i tindran sentits oposats si les apliquem en un cos o en l'altre. Vegeu la figura 4.19.

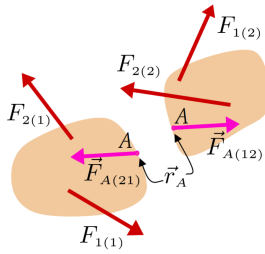


Fig. 4.19: Si fem el DSL de cada sòlid, hem d'incloure les forces de reacció en el contacte A, $\vec{F}_{A(ji)} = -\vec{F}_{A(ij)}$

Cadascun dels N sòlids complirà les equacions d'equilibri $\vec{F}_i = 0$ i $\vec{M}_{i(P_i)} = 0$, que han d'incloure les forces de reacció.

Suposem, en presència de la gravetat, dos blocs de masses m_A i m_B, un sobre l'altre i sobre un pla inclinat d'angle θ. Vegeu la figura 4.20. Quan representem les forces en el diagrama del conjunt dels dos blocs sense el pla inclinat, dibuixem les forces externes, com el pes del bloc A i del B, les forces de contacte entre el pla i el bloc B, normal i tangent o fricció.

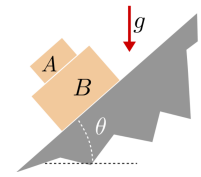


Fig. 4.20: Dos blocs, A i B, en contacte sobre un pla inclinat

Si volem representar el diagrama de cada bloc per separat, a més d'incloure les forces comentades anteriorment, s'hi hauran d'afegir també les forces de contacte entre A i B, normal i tangent o fricció. Com es pot observar a la figura 4.21, tant la normal com la fricció entre el bloc A i el B tenen sentits oposats quan es representen en el bloc A o en el B.

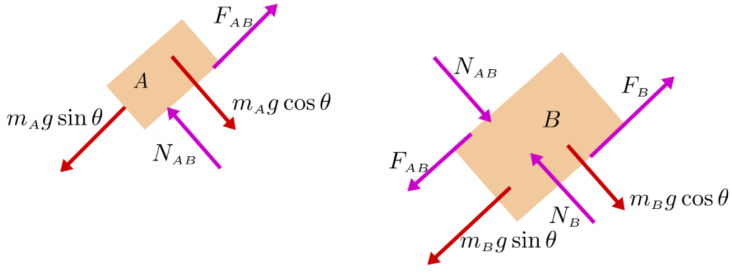


Fig. 4.21: Diagrames del sòlid lliure (DSL), dels blocs A i B

Problema 4.5.1. La barra de la figura, de 80 cm de llargada i 20 kg de massa, està articulada sense fricció en el punt fix A . Quin parell (moment) ha de fer la manovella sobre la barra per aguantar el bloc de 100 kg i quina és la força que actua sobre la barra al punt A (dues components).

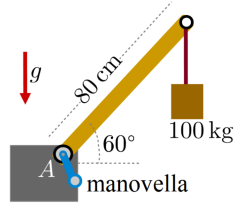


Figura de l'enunciat 4.5.1

Solució

El bloc de 100 kg fa una tensió a la corda de valor $P_1 = 100 \cdot 9{,}81 = 980\,\text{N}$ i el pes de la barra $P_2 = 20 \cdot 9{,}81 = 196{,}2\,\text{N}$ aplicada al CM de la barra. Utilitzem les equacions d'equilibri per a la barra i prenem els moments respecte del punt A (vegeu la figura):

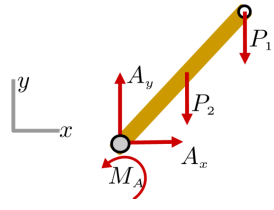


Figura del la solució 4.5.1

$x)\ A_x = 0$

$y)\ A_y - P_1 - P_2 = 0$

$A)\ M_A - P_1 0{,}8 \cos 60° - P_2 0{,}4 \cos 60° = 0$ d'on obtenim

$$A_x = 0$$
$$A_y = 1177{,}2\,\text{N}$$
$$M_A = 431{,}64\,\text{Nm}$$

■

Problema 4.5.2. Les dues barres homogènies tenen longituds i masses diferents. Les articulacions A i B i la politja a D no tenen fricció. $\overline{CD} \gg \ell_1 + \ell_2$ i, per tant, la corda $\overline{CD}$ es manté sempre horitzontal. Trobeu els angles α i β en la configuració d'equilibri del sistema utilitzant les equacions d'equilibri dels moments.

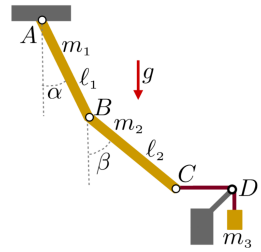


Figura de l'enunciat 4.5.2

Solució

Tenint en compte l'equilibri del cos que penja de la corda, la tensió de la corda és $T = m_3 g$.

Serem curosos en plantejar les equacions d'equilibri de forces per al sistema format per les dues barres, atès que no estem interessats a trobar les reaccions a les articulacions A i B. Farem servir l'equació de la nul·litat dels moments de manera adequada. Si considerem només la barra $\overline{BC}$, l'equació de la nul·litat del moment respecte de B és

$$m_3 g \ell_2 \cos\beta - m_2 g \frac{\ell_2}{2} \sin\beta = 0 \qquad (1)$$

d'on trobem $\tan\beta = \dfrac{2m_3}{m_2}$

Si ara considerem les dues barres, l'equació de la nul·litat del moment respecte de A és

$$m_3 g(\ell_2 \cos\beta + \ell_1 \cos\alpha) - m_2 g \left(\ell_1 \sin\alpha + \frac{\ell_2}{2} \sin\beta\right) - m_1 g \frac{\ell_1}{2} \sin\alpha = 0$$

que, tenint en compte (1), queda

$$m_3 \cos\alpha - m_2 \sin\alpha - m_1 \frac{1}{2} \sin\alpha = 0$$

i, aïllant, trobem $\tan\alpha = \dfrac{m_3}{\frac{m_1}{2} + m_2}$

■

4.6 Principi dels treballs virtuals

Considerem un sistema de sòlids sotmesos a forces directament aplicades conegudes, $\vec{F}_a$, que poden incloure, per exemple, la gravetat o la força d'una molla, i amb lligams ideals, com el de la figura 4.22. Suposem que coneixem les forces directament aplicades $\vec{F}_a$. Això vol dir que coneixem aquestes forces com a funció del punt on s'apliquen. Si $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ són el pes o una força constant, conèixer

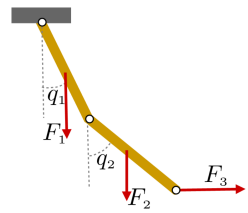


Fig. 4.22: Dues barres articulades sotmeses a les forces directament aplicades $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ i $\vec{F}_3$

aquestes forces és conèixer el valor numèric del mòdul (a banda de la direcció i el sentit). En el cas de $\vec{F}_3$ és conèixer-la com a funció del punt d'aplicació $\vec{r}_3$. El que considerem incògnites en aquest plantejament és la configuració del sistema. En el cas de la figura (es tracta d'un sistema amb dos graus de llibertat), les incògnites són els angles q_1 i q_2 que les dues barres fan amb la vertical. En podríem trobar la solució plantejant les equacions de l'estàtica per a dos cossos. Si ho féssim així, ens apareixerien totes les forces de reacció com a noves incògnites no volgudes. Recordant que a l'equació general de la dinàmica no apareixen les forces de reacció ideals, podem utilitzar-la en el nostre plantejament, és a dir, en un cas d'estàtica.

➔ ***Equació general de l'estàtica***. *La condició necessària i suficient per què un sistema de sòlids amb lligams ideals estigui en equilibri, en una determinada posició, és que, per a qualsevol desplaçament virtual des d'aquesta posició, la suma dels treballs virtuals de les forces directament aplicades (les que no són reaccions dels lligams) sigui nul·la:*

$$\sum_{a=1} \vec{F}_a \cdot \delta\vec{r}_a = 0 \tag{4.17}$$

Demostració. És immediata. Partint de l'equació general de la dinàmica (3.63), tenint en compte que en l'equilibri $\vec{a}_i = 0$, queda com (4.17).

Observem que, en lloc d'emprar l'índex $i = 1, ..., N$, emprem l'índex a. Amb això volem indicar que, en suprimir les acceleracions, no ens cal comptabilitzar que els passa a totes les m_i i, com que les forces estaran, en general, aplicades a tant sols unes poques partícules, podem emprar un índex a que numeri tan sols aquestes forces i les partícules sobre les quals actuen, $\vec{r}_a$. ■

L'expressió (4.17) es coneix habitualment amb el nom de **principi dels treballs virtuals** (PTV). En aquesta equació, s'inclouen les forces externes, per exemple els pesos aplicats als CM de cada sòlid, però no les forces de reacció ideals, com ja s'ha comentat a la secció 3.9.

Si coneixem els lligams, podrem saber els moviments possibles i, per tant, els graus de llibertat L del sistema. El nombre de graus de llibertat serà igual al nombre de paràmetres o variables independents. Així, per exemple, si ens fixem en el problema 4.6.2 de la pàgina 129, com que es tracta d'un conjunt de dues barres articulades amb un extrem fixat, el sistema té dos graus de llibertat i, per tant, podem donar la seva posició amb els valors dels dos angles α i β, que seran els paràmetres o variables que cal tenir en compte a l'equació.

Si el sistema té L paràmetres independents q_i , amb $i = 1, ..., L$, i coneixem els lligams en la forma $\vec{r}_a = \vec{r}_a(q_1, q_2, ...)$, l'expressió dels desplaçaments virtuals serà

$$\delta\vec{r}_a = d\vec{r}_a = \sum_{i=1}^{L} \frac{\partial\vec{r}_a}{\partial q_i} dq_i$$

Aplicant-ho a l'equació (4.17) del PTV, n'obtenim L equacions d'equilibri, tantes com incògnites q_i.

$$\sum_{a=1} \vec{F}_a \cdot \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_i} = 0 \tag{4.18}$$

Les solucions $q_i = q_{eq\,i}$ són les posicions d'equilibri del sistema

Problema 4.6.1. Si el sistema de la figura està en equilibri, determineu la relació entre les forces F i P en funció de l'angle θ d'equilibri.

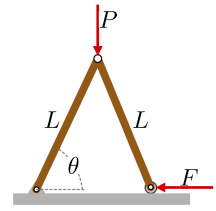


Figura de l'enunciat 4.6.1

Solució

El sistema és conservatiu perquè les forces $\vec{P}$ i $\vec{F}$ són constants i perquè els lligams tenen reaccions ideals. Així el PTV s'expressa

$$\vec{P} \cdot d\vec{r}_P + \vec{F} \cdot d\vec{r}_F = 0 \tag{1}$$

on $d\vec{r}_P$ i $d\vec{r}_F$ són els desplaçaments virtuals dels punts d'aplicació de les forces $\vec{P} = (0, -P)$ i $\vec{F} = (-F, 0)$.

El sistema té un únic grau de llibertat expressat, pel paràmetre angle θ. Observant la figura i tenint en compte els eixos escollits, $\vec{r}_P = (L\cos\theta, L\sin\theta)$ i $\vec{r}_F = (2L\cos\theta, 0)$. Diferenciant, n'obtenim els desplaçaments possibles

$$d\vec{r}_P = (-L\sin\theta, L\cos\theta)\, d\theta$$
$$d\vec{r}_F = (-2L\sin\theta, 0)\, d\theta$$

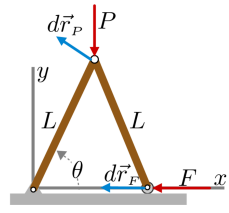


Figura de la solució 4.6.1

Substituint les forces i els desplaçaments a (1) tenim $(-PL\cos\theta + F2L\sin\theta)d\theta = 0$ i com $d\theta$ és un desplaçament possible qualsevol

$$-PL\cos\theta + F2L\sin\theta = 0$$

d'on, aïllant, obtenim

$$\tan\theta = \frac{P}{2F}$$

■

Problema 4.6.2. Les dues barres homogènies tenen longituds i masses diferents. Les articulacions A i B i la politja a D no tenen fricció. $\overline{CD} \gg \ell_1 + \ell_2$ i, per tant, la corda $\overline{CD}$ es manté sempre horitzontal. Trobeu els angles α i β en la configuració d'equilibri del sistema utilitzant el principi dels treballs virtuals

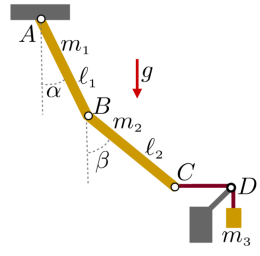


Figura de l'enunciat 4.6.2

Solució

Tenint en compte l'equilibri del cos que penja de la corda, la tensió de la corda és $T = m_3 g$.

Utilitzem un sistema d'eixos (x, y) de manera que l'origen és al punt A, l'eix x és horitzontal i creix cap a la dreta i y vertical i creix cap avall.

L'expressió del PVT serà $\vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_2 + \vec{T}_3 \cdot d\vec{r}_3 = 0$ que, explicitant $\vec{F}_1 = (0, m_1 g)$, $\vec{F}_2 = (0, m_2 g)$ i $\vec{T} = (m_3 g, 0)$, resulta

$$m_1 dy_1 + m_2 dy_2 + m_3 dx_3 = 0 \tag{1}$$

on ja hem eliminat la g de l'expressió. Els desplaçaments $d\vec{r}_1$, $d\vec{r}_2$ i $d\vec{r}_3$ no són independents, sinó que depenen dels dos angles α i β

$$\begin{aligned} y_1 &= \tfrac{\ell_1}{2}\cos\alpha \;\Rightarrow\; dy_1 = -\tfrac{\ell_1}{2}\sin\alpha\, d\alpha \\ y_2 &= \ell_1\cos\alpha + \tfrac{\ell_2}{2}\cos\beta \;\Rightarrow\; dy_2 = -\ell_1\sin\alpha\, d\alpha - \tfrac{\ell_2}{2}\sin\beta\, d\beta \\ x_3 &= \ell_1\sin\alpha + \ell_2\sin\beta \;\Rightarrow\; dx_3 = \ell_1\cos\alpha\, d\alpha + \ell_2\cos\beta\, d\beta \end{aligned}$$

Substituint a (1), obtenim

$$\begin{aligned} -m_1\frac{\ell_1}{2}\sin\alpha\, d\alpha \;+\; & m_2\left(-\ell_1\sin\alpha\, d\alpha - \frac{\ell_2}{2}\sin\beta\, d\beta\right) \\ +\; & m_3(\ell_1\cos\alpha\, d\alpha + \ell_2\cos\beta\, d\beta) = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Si ara tenim en compte que $d\alpha$ i $d\beta$ són desplaçaments possibles independents, podem considerar (2) amb $d\alpha \neq 0$ i $d\beta = 0$

$$-m_1\frac{1}{2}\sin\alpha - m_2\sin\alpha + m_3\cos\alpha = 0 \tag{3}$$

i també $d\alpha = 0$ i $d\beta \neq 0$

$$-m_2\frac{1}{2}\sin\beta + m_3\cos\beta = 0 \tag{4}$$

De (3) i (4), n'obtenim $\tan\alpha = \dfrac{m_3}{\frac{m_1}{2}+m_2}$ i $\tan\beta = \dfrac{2m_3}{m_2}$, resultat ja obtingut al problema 4.5.2 utilitzant les equacions d'equilibri dels moments. ■

4.7 Equilibri i estabilitat de sistemes conservatius

Equilibri

Considerem ara que tenim un sistema conservatiu, això és, amb les mateixes condicions que el de la secció anterior i, a més, totes les forces directament aplicades $\vec{F}_a$ són conservatives, és a dir, cada força té associada una energia potencial i, per tant,

$$\sum_{a=1} \vec{F}_a \cdot d\vec{r}_a = -dU$$

on U és l'energia potencial del sistema. El PTV es pot escriure ara

$$dU = 0 \tag{4.19}$$

Explicitant, les equacions d'equilibri es poden escriure com una condició geomètrica sobre la funció potencial:

➔ *La posició d'equilibri* $q_{eq} = \{q_{eq1}, q_{eq2}, ..., q_{eqL}\}$ *d'un sistema conservatiu correspon al punt en què l'energia potencial és extremal*

$$\left.\frac{\partial U}{\partial q_i}\right|_{q=q_{eq}} = 0 \quad i = 1, ..., L \tag{4.20}$$

Estabilitat

Si el sistema està a la posició d'equilibri q_{eq}, amb $E_c = 0$, la seva energia és $E = U_{ext}$, on $_{ext}$ vol dir extremal. Si li donem energia cinètica $E_{c\,ini}$, que sempre és positiva, el sistema es mourà amb energia mecànica $E = U_{ext} + E_{c\,ini} =$ constant.

A les figures 4.23 i 4.24, podem veure les gràfiques de l'energia potencial (blau) i mecànica (rosa) al voltant d'un extremal per a un sistema qualsevol. Es podria tractar d'una muntanya russa. En aquest cas, la forma de la guia coincideix amb la forma de la funció potencial.

Segons quin sigui el tipus d'extremal de la posició q_{eq} d'equilibri, podem dir:

➔ q_{eq} **és una posició d'equilibri estable**. Quan $U(q_{eq})$ és un mínim tenim que $U > U_{min}$. Com que $E = U_{min} + E_{c\,ini} =$ constant i el sistema no es pot allunyar gaire de la posició q_{eq}, pot arribar fins que $E_c = 0$

➔ q_{eq} **és una posició d'equilibri inestable**. Quan $U(q_{eq})$ és un màxim o un punt d'inflexió. Si és un màxim tenim que $U < U_{max}$. Com $E = U_{max} + E_{c\,ini} =$ constant el sistema s'allunya molt de la posició q_{eq}, $E_c \neq 0$ i va creixent. Si és un punt d'inflexió i va cap a la zona $U > U_{inf}$, es comporta com en el cas de mínim, arriba al punt $E_c = 0$ i retorna anant a parar a la zona $U < U_{inf}$ i li passa el mateix que en el cas de màxim: $E_c \neq 0$ i va creixent.

➔ q_{eq} **és una posició d'equilibri indiferent**. Quan en un entorn finit de q_{eq} U és constant.

Per a un sistema d'un sol grau de llibertat q, $q = q_{eq}$, la condició d'equilibri (4.20) es redueix a

$$\left.\frac{dU}{dq}\right|_{q=q_{eq}} = 0 \tag{4.21}$$

Per estudiar l'estabilitat de la posició q_{eq}, analitzem la segona derivada al punt $q = q_{eq}$.

➔ Si passa que

$$\left.\frac{d^2U}{dq^2}\right|_{q=q_{eq}} > 0 \tag{4.22}$$

llavors $q = q_{eq}$ és un punt d'equilibri estable.

➔ Si passa que

$$\left.\frac{d^2U}{dq^2}\right|_{q=q_{eq}} < 0 \tag{4.23}$$

llavors $q = q_{eq}$ és un punt d'equilibri inestable.

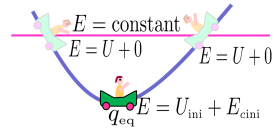


Fig. 4.23: La vagoneta està situada en un mínim de la muntanya russa. Si l'empentem poc, és a dir, si li donem una mica de $E_{c\,ini}$, l'energia mecànica serà $E = U_{min} + E_{c\,ini}$ i serà constant. La vagoneta es mourà al voltant del mínim entre les dues posicions en què $E = U$ ja que, més enllà, hauria de ser $E_c < 0$ per complir $E =$ constant i això no pot ser.

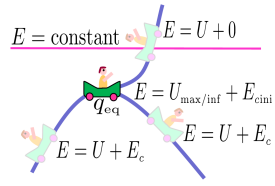


Fig. 4.24: La vagoneta està situada en un màxim o un punt d'inflexió de la muntanya russa. Si l'empentem poc, és a dir, si li donem una mica de $E_{c\,ini}$, l'energia mecànica serà $E = U_{max/inf} + E_{c\,ini}$. Si és un màxim, anirà augmentant la E_c doncs estarà en una zona on $U < U_{max}$ i cal que es compleixi $E =$constant. Si és un punt d'inflexió i va cap a la zona on $U > U_{inf}$, no podrà anar més enllà de $E = U$, és adir $E_c = 0$ i tornarà cap avall augmentant, ara si, la seva E_c.

➔ Si passa que

$$\left.\frac{d^2U}{dq^2}\right|_{q=q_{\text{eq}}} = 0 \qquad (4.24)$$

s'han de examinar el signe de les derivades d'ordre superior:

➔**L'equilibri és estable** si l'ordre de la primera derivada no nul·la és parell i el seu signe és positiu.

➔**L'equilibri és indiferent** si totes les derivades successives són nul·les.

➔**L'equilibri és inestable** en tots els altres casos.

Problema 4.7.1. Les dues barres homogènies tenen longituds i masses diferents. Les articulacions A i B i la politja a D no tenen fricció. $\overline{CD} \gg \ell_1 + \ell_2$ i, per tant, la corda $\overline{CD}$ es manté sempre horitzontal. Trobeu els angles α i β en la configuració d'equilibri del sistema utilitzant que el sistema és conservatiu.

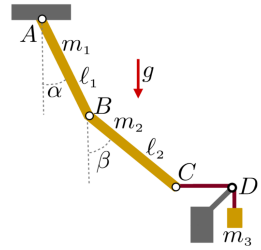


Figura de l'enunciat 4.7.1

Solució

L'energia potencial del sistema en funció dels dos graus de llibertat, els angles α i β, és

$$U = -m_1 g\frac{\ell_1}{2}\cos\alpha - m_2 g\left(\ell_1\cos\alpha + \frac{\ell_2}{2}\cos\beta\right) - m_3 g(\ell_1\sin\alpha + \ell_2\sin\beta) \quad (1)$$

Les dues equacions d'equilibri són

$$\begin{aligned}\tfrac{\partial U}{\partial\alpha} = 0 &\Rightarrow \tfrac{1}{2}m_1\sin\alpha + m_2\sin\alpha - m_3\cos\alpha = 0\\ \tfrac{\partial U}{\partial\beta} = 0 &\Rightarrow \tfrac{1}{2}m_2\sin\beta - m_3\cos\beta = 0\end{aligned}$$

d'on obtenim $\tan\alpha = \dfrac{m_3}{\frac{m_1}{2}+m_2}$ i $\tan\beta = \dfrac{2m_3}{m_2}$, resultat ja obtingut als problemes 4.5.2 i 4.6.2 per d'altres mètodes. ■

Problema 4.7.2. En el sistema de la figura, les barres tenen massa negligible. Ni les articulacions A i B ni el rodet C, de massa negligible, tenen fricció. La molla, de massa negligible, té constant recuperadora k i longitud natural $L_k = 0{,}6\,\text{m}$. De l'articulació A penja un bloc de massa $m = 75\,\text{kg}$. Trobeu el valor de k que fa que l'angle θ d'equilibri sigui $\theta_{\text{eq}} = 35°$. **Altres dades:** $L = 1{,}2\,\text{m}$, $L_0 = 0{,}85\,\text{m}$

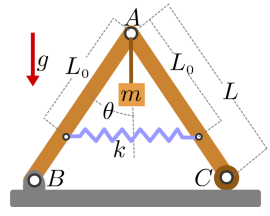


Figura de l'enunciat 4.7.2

Solució

L'energia potencial del sistema és

$$U(\theta) = mgL\cos\theta + \frac{1}{2}k(2L_0\sin\theta - L_k)^2$$

i la condició d'equilibri

$$\frac{dU(\theta)}{d\theta} = -mgL\sin\theta + k(2L_0\sin\theta - L_k)2L_0\cos\theta = 0$$

La constant de la molla k ha de complir aquesta condició per a l'angle $\theta_{\text{eq}} = 35°$.
N'obtenim:

$$k = \frac{mgL\tan\theta_{\text{eq}}}{2L_0(2L_0\sin\theta_{\text{eq}} - L_k)} = 969{,}54\,\text{N/m}$$ ■

Problema 4.7.3. La barra homogènia de longitud L i massa m pot lliscar sense fricció. La molla està relaxada quan $\theta = 90°$. Quin valor ha de tenir la constant de recuperació k de la molla de manera que $\theta = 45°$ sigui una posició d'equilibri.

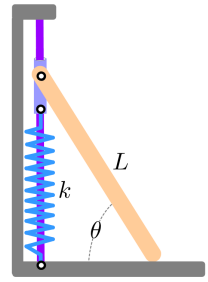


Figura de l'enunciat 4.7.3

Solució

L'energia potencial del sistema és

$$U(\theta) = mg\frac{L}{2}\sin\theta + \frac{1}{2}k(L - L\sin\theta)^2$$

i la condició d'equilibri

$$\frac{dU(\theta)}{d\theta} = mg\frac{L}{2}\cos\theta - kL^2(1-\sin\theta)\cos\theta$$

La constant de la molla k ha de complir aquesta condició per a l'angle $\theta_{\text{eq}} = 45°$.

$$\frac{dU}{d\theta}(\theta_{\text{eq}}) = 0$$

N'obtenim:

$$k = \frac{mg}{2L\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$ ■

→5

5 Dinàmica del sòlid rígid en el pla

Introducció

Un sòlid rígid efectua un moviment pla si la direcció de l'eix de rotació es manté constant. Tota partícula del sòlid efectua el moviment en un pla normal a l'eix de rotació. De tots aquests plans, el que conté el centre de masses del sòlid s'anomena ***pla del moviment*** (vegeu la figura 5.1).

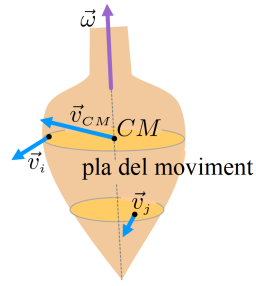


Fig. 5.1: Moviment d'un sòlid rígid en un pla

D'acord amb aquesta definició, en el moviment pla del sòlid rígid, els vectors velocitat angular $\vec{\omega}$ i acceleració angular $\vec{\alpha}$ seran en tot moment paral·lels entre si i perpendiculars al pla del moviment. El moviment d'un sòlid rígid es desenvolupa en un pla perquè:

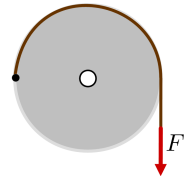


Fig. 5.2: Sòlid rígid que gira entorn d'un eix fix

a) Hi ha lligams externs que l'obliguen a moure's en un pla.

Exemple 1: una politja que gira al voltant d'un eix fix (vegeu la figura 5.2).

Exemple 2: una xapa plana que es mou sobre un pla (vegeu la figura 5.3).

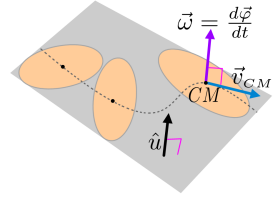


Fig. 5.3: Xapa plana en moviment sobre un pla

b) El sòlid té simetria plana, les forces exteriors estan en el pla de simetria del sòlid i les velocitats inicials, també.

Exemple 3: una xapa plana llançada en un pla vertical que coincideix amb el seu propi pla (vegeu la figura 5.4).

Exemple 4: una esfera homogènia baixant per un pla inclinat partint del repòs (vegeu la figura 5.5).

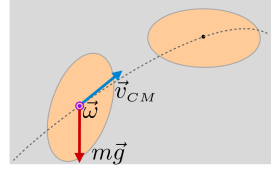


Fig. 5.4: Xapa plana en moviment en un pla vertical

c) Les forces exteriors al sòlid són equivalents a una resultant que passa pel CM i un moment resultant nul o en la direcció de l'eix del sòlid. La rotació inicial del sòlid té la direcció d'aquest mateix eix.

Exemple 5: un disc llançat amb rotació inicial segons l'eix del disc en presència de la gravetat. El seu CM efectua una paràbola i la direcció de rotació és constant. (vegeu la figura 5.6).

Exemple 6: en presència de la gravetat, una baldufa gira segons un eix vertical que passa pel CM i pel vèrtex de contacte amb el terra. La resultant i el moment resultant són nuls. El seu CM es mourà en moviment uniforme i la direcció de rotació serà constant (vegeu la figura 5.1).

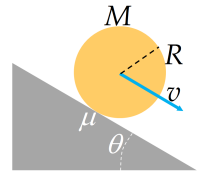


Fig. 5.5: Esfera en moviment sobre un pla inclinat

En tots aquests casos, i d'acord amb el que s'ha vist a la secció 3.11, els desplaçaments possibles de les partícules del sòlid rígid seran un subconjunt de

$$d\vec{r}_i = d\vec{r}_C + d\vec{\varphi} \times \vec{r}_{i(C)} \tag{5.1}$$

La restricció que hem d'imposar és mantenir constant l'eix de rotació. Si $\hat{u}$ és el vector unitari i constant en la direcció de l'eix de rotació, els desplaçaments possibles de rotació passaran de tres graus de llibertat, representats pel caràcter vectorial de $d\vec{\varphi}$, a un grau de llibertat, representat per $d\varphi$ segons:

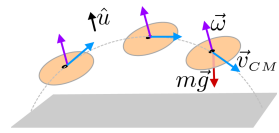


Fig. 5.6: Un disc manté la direcció de rotació mentre el CM traça una paràbola

$$d\vec{\varphi} = \hat{u}\ d\varphi \tag{5.2}$$

En aquest curs, tractarem exclusivament dels moviments del sòlid rígid en un pla. Les relacions vàlides en general les indicarem amb **3 D** i les que només sigui vàlides per a moviments plans les indicarem amb **2 D**. Val a dir que, en aquest tema, s'utilitzarà la nomenclatura del sistema de partícules que s'ha vist al capítol 3, tenint en compte que per a cossos continus les expressions en forma de sumatoris es converteixen en integrals sobre tot el cos (expressió (3.1) de la introducció del capítol 3).

5.1 Equació de translació 3 D

D'acord amb l'equació (3.95) de la secció 3.11, l'equació de moviment del sòlid rígid associada a les translacions és

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = m\vec{a}_{CM} \tag{5.3}$$

on $\vec{F}$ és la resultant de les forces exteriors al sòlid. L'equació de moviment de translació del sòlid és, doncs, la del moviment del seu CM (figura 5.7).

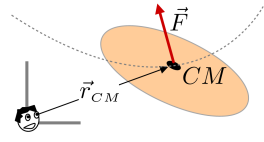


Fig. 5.7: Dinàmica de translació del sòlid

5.2 Equació de rotació per al moviment pla (2 D). Moment d'inèrcia

Sent el moviment en un pla, la rotació del sòlid rígid queda reduïda a una sola component en la direcció del vector velocitat angular de rotació $\vec{\omega}$, que és una direcció fixa de l'espai $\hat{u}$ i és perpendicular al pla del moviment. A la secció 3.11

s'ha deduït l'equació general de la dinàmica de rotació del sòlid rígid

$$\frac{d\vec{L}_{(C)}}{dt} = \vec{M}_{(C)} \tag{5.4}$$

amb

$$\vec{L}_{(C)} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_{i(C)} \times m_i \vec{v}_i \tag{5.5}$$

$$\vec{M}_{(C)} = \sum_{a} \vec{r}_{a(C)} \times \vec{F}_a \tag{5.6}$$

on C pot ser o bé el centre de massa, CM, o un punt fix del sòlid, si existeix, i $\vec{r}_{a(C)}$ és el vector posició del punt d'aplicació de la força exterior al sòlid $\vec{F}_a$ respecte de C. L'equació de rotació del sòlid en el seu moviment pla es pot obtenir projectant l'equació vectorial (5.4) sobre la direcció del seu eix de rotació definit pel seu vector $\hat{u}$. Això és així perquè la velocitat angular es podrà escriure com $\vec{\omega} = \omega\hat{u}$, on ω és la component del vector $\vec{\omega}$ en la direcció $\hat{u}$. ω és l'únic grau de llibertat de rotació que té el sòlid. En termes dels desplaçaments possibles, tenim $d\vec{\varphi} = d\varphi\hat{u}$. Ara, tenint en compte l'equació general de la dinàmica per a les rotacions, equació (3.98), obtenim, per a les rotacions amb eix fix, $d\vec{\varphi} = d\varphi\hat{u}$:

$$\frac{d\vec{L}_{(C)}}{dt} \cdot \hat{u} = \vec{M}_{(C)} \cdot \hat{u} \tag{5.7}$$

Com que $\hat{u}$ és un vector constant (5.7), es pot expressar de la forma següent:

$$\frac{dL_{(C)}}{dt} = M_{(C)} \tag{5.8}$$

on

$$L_{(C)} = \vec{L}_{(C)} \cdot \hat{u} = \left(\sum_{i=1}^{N} \vec{r}_{i(C)} \times m_i \vec{v}_i \right) \cdot \hat{u} \tag{5.9}$$

$$M_{(C)} = \vec{M}_{(C)} \cdot \hat{u} = \left(\sum_{a} \vec{r}_{a(C)} \times \vec{F}_a \right) \cdot \hat{u} \tag{5.10}$$

són, respectivament, el **moment angular** i el **moment de les forces respecte de l'eix de rotació fix** $\hat{u}$ que passa per C.

Segons (3.88), amb $\vec{\omega} = \omega\hat{u}$, tenim

$$\vec{v}_i = \vec{v}_C + \omega\ \hat{u} \times \vec{r}_{i(C)}$$

i substituint a $L_{(C)}$ de (5.9), queda

$$L_{(C)} = \left(\sum_{i} \vec{r}_{i(C)} \times m_i \left[\vec{v}_C + \omega\ \hat{u} \times \vec{r}_{i(C)} \right] \right) \cdot \hat{u}$$

i expandint

$$L_{(C)} = \left(\sum_i \vec{r}_{i(C)} \times m_i \vec{v}_C\right) \cdot \hat{u} + \left(\sum_i m_i \vec{r}_{i(C)} \times [\,\hat{u} \times \vec{r}_{i(C)}]\right) \cdot \omega \hat{u}$$

El primer terme de la dreta és nul si C és el CM, ja que $\sum_i m_i \vec{r}_{i(CM)} = m\vec{r}_{CM(CM)} = 0$, o un **punt fix** del sòlid rígid, ja que $\vec{v}_C = 0$. En aquestes condicions,

$$L_{(C)} = \left(\sum_i m_i \vec{r}_{i(C)} \times [\,\hat{u} \times \vec{r}_{i(C)}]\right) \cdot \omega \hat{u}$$

Tenint en compte la relació vectorial

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = (\vec{C} \times \vec{A}) \cdot \vec{B} \tag{5.11}$$

extreta de (1.13), $L_{(C)}$ pot ser expressat com

$$L_{(C)} = \vec{L}_{(C)} \cdot \hat{u} = \sum_{i=1}^{N} m_i\, r^2_{i(|C)} \omega$$

on $r_{i(|C)} = |\hat{u} \times \vec{r}_{i(C)}|$ és la distància entre la partícula m_i i l'eix $\hat{u}$ que passa per C. Vegeu la figura 5.8.

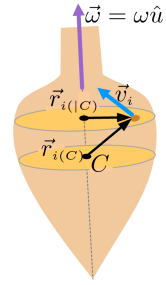


Fig. 5.8: Velocitat d'una partícula qualsevol del sòlid rígid en el seu moviment pla

➔ Definim el **moment d'inèrcia del sòlid respecte a l'eix de rotació que passa per** C

$$I_{(C)} = \sum_{i=1}^{N} m_i\, r^2_{i(|C)} \tag{5.12}$$

Podem escriure el moment angular respecte de l'eix que passi per C com

$$L_{(C)} = I_{(C)}\, \omega \tag{5.13}$$

de manera que l'equació del sòlid per a rotacions planes queda

$$\frac{dL_{(C)}}{dt} = M_{(C)} \tag{5.14}$$

En el cas més general, les forces externes al sòlid, $\vec{F}_a$, poden tenir qualsevol direcció però només les components normals a l'eix contribuiran al moment en la direcció de l'eix. Aquí ja suposarem que les forces $\vec{F}_a$ que intervenen en l'expressió del moment són normals a l'eix. D'acord amb la relació (5.11), M_C es pot expressar de la forma

$$M_{(C)} = \vec{M}_{(C)} \cdot \hat{u} = \sum_a \left(\vec{r}_{a(C)} \times \vec{F}_a\right) \cdot \hat{u} = \sum_a (\hat{u} \times \vec{r}_{a(C)}) \cdot \vec{F}_a$$

però com que (vegeu la figura 5.9) $\hat{u} \times \vec{r}_{a(C)} = \hat{u} \times \vec{r}_{a(|C)}$, $M_{(C)}$ es pot escriure

$$M_{(C)} = \sum_a (\hat{u} \times \vec{r}_{a(|C)}) \cdot \vec{F}_a$$

Aplicant de nou (5.11), en resulta

$$M_{(C)} = \sum_a \left(\vec{r}_{a(|C)} \times \vec{F}_a\right) \cdot \hat{u} = \sum_a F_a d_a \qquad (5.15)$$

on d_a és la distància de la recta d'acció de $\vec{F}_a$ respecte de l'eix de rotació C .

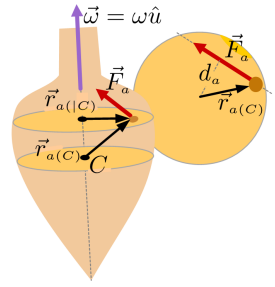


Fig. 5.9: Una força externa $\vec{F}_a$ actuant sobre un sòlid rígid

Un aspecte que cal destacar és que $I_{(C)}$ és invariant per a translacions i rotacions planes del cos, és a dir, no canvia de valor pel fet que el cos faci translacions o rotacions planes. És una característica intrínseca del cos respecte a l'eix de rotació que passa per C (essent C un punt fix o bé el CM). $I_{(C)}$ podria variar si es canviés la forma del cos, és a dir, si el cos deixés de ser rígid.

Per tant, en el cas d'un sòlid rígid, el moment d'inèrcia respecte d'un eix $I_{(C)}$ no canvia amb el temps i l'equació fonamental de la rotació per a un sòlid en moviment pla (5.14) es pot escriure de la forma

$$M_{(C)} = I_{(C)}\,\alpha \qquad (5.16)$$

on $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$ és l'acceleració angular. L'expressió (5.16) té una gran analogia amb l'equació fonamental de la dinàmica de translació $\vec{F} = m\vec{a}$: si la massa m (inercial) es pot entendre com la mesura de la tendència a mantenir la velocitat de translació, el moment d'inèrcia $I_{(C)}$ es pot entendre com la mesura de la tendència a mantenir la velocitat angular de rotació.

Alguns moments d'inèrcia respecte d'un eix de cossos homogenis

A la taula de la pàgina 337, es mostren els moments d'inèrcia de sòlids rígids homogenis ben coneguts, respecte als eixos que s'hi indiquen i que passen pel seu centre de masses.

Algunes propietats dels moments d'inèrcia respecte d'un eix

El moment d'inèrcia d'un sòlid rígid respecte d'un eix presenta, entre altres, dues propietats importants:

➔ ***Superposició de moments d'inèrcia:*** *Si tenim dos cossos 1 i 2 amb moments d'inèrcia respecte al mateix eix que passa per C, $I_{(C)1}$ i $I_{(C)2}$, el moment d'inèrcia, $I_{(C)}$ del cos compost és*

$$I_{(C)} = I_{(C)1} + I_{(C)2} \qquad (5.17)$$

Aquesta teorema es dedueix fàcilment de la definició de moment d'inèrcia respecte d'un eix com a sumatori o integral sobre el cos. Com en el cas del centre de masses de cossos compostos, equació (3.7), podrem també descompondre un cos en cossos simples (de moment d'inèrcia respecte de l'eix requerit conegut) i trobar el moment d'inèrcia del cos compost amb (5.17). Podrem, de nou, considerar cossos amb forats simplement interpretant que la suma de (5.17) significa afegir massa. Si volem treure massa, haurem de restar.

➔ ***Teorema de Steiner:*** *Si un sòlid rígid té moments d'inèrcia $I_{(C)}$ i $I_{(CM)}$ respecte a dos eixos paral·lels que passen, respectivament, per C i CM, llavors*

$$I_{(C)} = I_{(CM)} + md^2 \tag{5.18}$$

on m és la massa del sòlid i d és la distància entre ambdós eixos.

Demostració. Els moments d'inèrcia $I_{(C)}$ i $I_{(CM)}$ del sòlid respecte a dos eixos paral·lels que passen, respectivament, per un punt C i pel centre de masses CM (vegeu la figura 5.10) s'expressen de la forma:

$$I_{(C)} = \sum_{i=1}^{N} m_i\, r_{i(|C)}^2$$

$$I_{(CM)} = \sum_{i=1}^{N} m_i\, r_{i(|CM)}^2$$

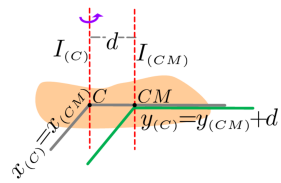


Fig. 5.10: Teorema de Steiner

Observant la figura 5.10, si $x_{i(CM)}$ i $y_{i(CM)}$ són les coordenades d'una partícula del sòlid de massa m_i respecte de CM i $x_{i(C)}$ i $y_{i(C)}$ són les coordenades de la mateixa partícula respecte de C, tenim que $x_{i(C)} = x_{i(CM)}$ i $y_{i(C)} = y_{i(CM)} + d$. Així,

$$r_{i(|C)}^2 = x_{i(C)}^2 + y_{i(C)}^2 = {x_{i(CM)}}^2 + (y_{i(CM)} + d)^2$$

En aquestes condicions, $I_{(C)}$ es pot escriure de la forma

$$I_{(C)} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(x_{i(CM)}^2 + (y_{i(CM)} + d)^2\right)$$

és a dir,

$$I_{(C)} = \sum_{i=1}^{N} m_i({x_{i(CM)}}^2 + {y_{i(CM)}}^2) + 2\left(\sum_{i=1}^{N} m_i y_{i(CM)}\right) d + \left(\sum_{i=1}^{N} m_i\right) d^2$$

Ara només cal tenir en compte que, en virtut de la definició de centre de masses, $\sum_{i=1}^{N} m_i y_{i(CM)} = 0$. Els dos termes que no s'anul·len són $I_{(CM)}$ i md^2. ■

Problema 5.2.1. Una roda de radi R, massa m i moment d'inèrcia I, té un eix de radi $|x|$ i se la sotmet a una força horitzontal constant F que actua per mitjà d'una corda enrotllada i fixada a l'eix. Tal com es veu a la figura, utilitzem $x > 0$ per

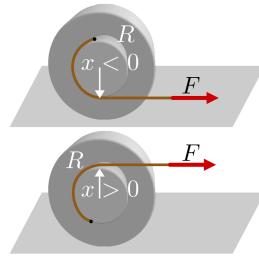


Figura de l'enunciat 5.2.1

indicar que la força constant F s'aplica per sobre del centre i $x < 0$ per indicar que s'aplica per sota. Calculeu l'acceleració de la roda (sense oblidar el sentit de gir) i la força de fricció necessària (també amb el sentit) en funció de x, si la roda es mou rodant sense lliscar.

Solució

S'analitza la situació en què la força F s'aplica per sobre del centre ($x > 0$). Els resultats seran també vàlids per a $x < 0$.

D'acord amb l'esquema de forces que actuen sobre el cos, les equacions de moviment es poden escriure de la forma

$$\begin{cases} F - F_f = ma \ ; \quad N - mg = 0 \\ Fx + F_f R = I\alpha \end{cases}$$

a les quals cal afegir la condició que el cos roda sense lliscament

$$v = \omega R \Rightarrow a = \alpha R$$

De la primera equació de translació, trobem

$$F_f = F - ma$$

i, substituint a la segona,

$$Fx + FR - maR = \frac{I}{R}a$$

d'on es dedueix que l'acceleració de la roda a és

$$a = \frac{F\,(R+x)}{mR + \frac{I}{R}} = \frac{F}{m}\frac{\left(1+\frac{x}{R}\right)}{\frac{I}{mR^2}+1}$$

i s'observa que és positiva, és a dir, la roda es desplaçarà cap a la dreta en el mateix sentit que la força F.

Pel que fa a la força de fregament F_f, amb el valor de a obtingut és fàcil de deduir que

$$F_f = F\left(\frac{\frac{I}{mR^2} - \frac{x}{R}}{\frac{I}{mR^2}+1}\right)$$

D'aquesta expressió, es veu que el sentit de F_f el determina el signe de $\frac{I}{mR^2} - \frac{x}{R}$, de manera que, si $I > mRx$, F_f va en contra de F; si $I < mRx$, F_f té el mateix sentit que F, i si $I = mRx$, F_f és nul·la.

La situació en què $x < 0$ es pot analitzar simplement considerant aquesta possibilitat en les expressions trobades per $x > 0$, és a dir, fent la substitució $x = -|x|$. Tenim, per a l'acceleració:

$$a = \frac{F\,(R-|x|)}{mR + \frac{I}{R}} = \frac{F}{m}\frac{\left(1-\frac{|x|}{R}\right)}{\frac{I}{mR^2}+1}$$

i per a la força de fricció:

$$F_f = F\left(\frac{\frac{I}{mR^2} + \frac{|x|}{R}}{\frac{I}{mR^2}+1}\right)$$

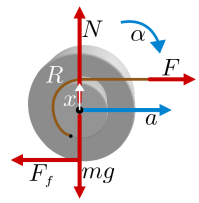


Figura de la solució 5.2.1, amb $x > 0$

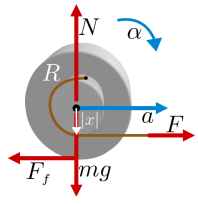


Figura de la solució 5.2.1, amb $x < 0$

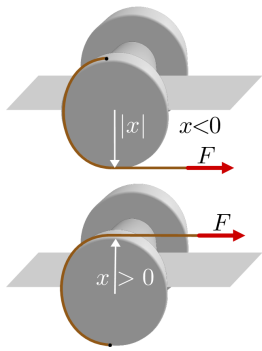


Figura de la solució 5.2.1, amb $|x| > R$

d'on es dedueix que, en ser $|x| < R$, el cos es mourà cap a la dreta i la força de fregament sempre estarà dirigida cap a l'esquerra.

També es pot analitzar el cas en què $|x| > R$.

Si $x > 0$: a va en el sentit de F.

Si $x < 0$: a va en sentit contrari a F. ■

Problema 5.2.2. Un bloc cúbic de massa m està en repòs sobre un terra completament llis quan rep una força horitzontal $F = 3mg$ a una altura $h = \frac{7}{8}b$. Quan valen les acceleracions $\vec{a}$ del seu centre de masses i de rotació α a l'instant inicial?

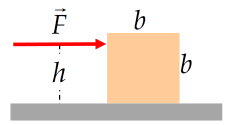


Figura de l'enunciat 5.2.2

Solució

Cal esperar que el bloc tendeixi a girar i el seu centre de masses a desplaçar-se en el sentit indicat a la figura, de manera que el CM del cub es traslladarà en el pla $x - y$ amb una acceleració $\vec{a}$ i girarà entorn d'un eix perpendicular al pla de la figura de l'enunciat que passa pel seu CM amb una acceleració angular α. La solució a la situació plantejada, la proporciona l'equació de la dinàmica de translació (dues components)

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

i la de rotació (una component)

$$M_{(CM)} = I_{(CM)}\ \alpha$$

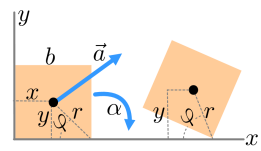


Figura de la solució 5.2.2

La distribució de forces que actuen sobre el sòlid es mostra a la segona figura de la solució, en què veiem que la normal deguda al pla horitzontal s'ha dibuixat al vèrtex dret del cub, ja que és aquí on actuarà quan inicií la rotació. Les dues equacions de moviment de translació del centre de masses del cub es poden escriure de la forma següent (en què tenim en compte que $F = 3mg$)

$$3mg = ma_x \ ; \quad N - mg = ma_y$$

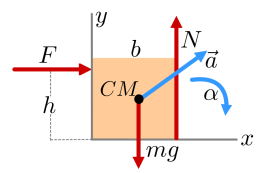


Figura de la solució 5.2.2

La de la rotació, tenint en compte que, per a un cub homogeni de costat b, el moment d'inèrcia respecte del seu CM és $I = \frac{1}{6}m\ b^2$, resulta

$$3mg\left(\frac{7b}{8} - \frac{b}{2}\right) - N\frac{b}{2} = \frac{1}{6}m\ b^2\alpha$$

D'acord amb les figures anteriors,

$$y = r\sin\varphi$$

Derivant respecte del temps, en resulta

$$\dot{y} = r\cos\varphi\ \ \dot{\varphi}$$

i tornant a derivar i fent $\ddot{y} = a_y$ i $\ddot{\varphi} = \alpha$,

$$a_y = -r\sin\varphi\ \ \dot{\varphi}^2 + r\cos\varphi\ \ \alpha$$

D'acord amb les condicions del problema, abans de rebre la força F i, per tant, a l'instant inicial, $\dot{\varphi} = 0$. També en aquest instant, $r\cos\varphi = \frac{b}{2}$. Obtenim la relació d'acceleracions a_y i α a l'instant inicial:

$$a_y = \frac{b}{2}\alpha$$

De la component x de l'equació de translació del centre de masses es dedueix que

$$a_x = 3g$$

La component y de l'equació de translació del centre de masses, a l'instant inicial, es pot escriure com

$$N = mg + m\frac{b}{2}\alpha$$

i, si substituim a l'equació de la rotació, en resulta

$$3mg\left(\frac{7b}{8} - \frac{b}{2}\right) - \left(mg + m\frac{b}{2}\alpha\right)\frac{b}{2} = \frac{1}{6}m\,b^2\alpha$$

Aïllant α, tenim

$$\alpha = \frac{3g}{2b}$$

i, substituint a l'expressió per a a_y trobada més amunt,

$$a_y = \frac{3g}{4}$$

A l'inici de la solució, hem comentat que "Cal esperar..." Ara podem corroborar que la solució trobada és la correcta pel fet que es compleix també $N = \frac{7}{4}mg > 0$. Si passés que $N < 0$, la solució no seria la correcta, ja que $N < 0$ ens indicaria que hi ha quelcom més que un contacte amb el terra. ■

Problema 5.2.3. Considerem un robot semblant al de la figura, amb les característiques següents: massa total, $M = 85\,\text{kg}$; massa i moment d'inèrcia de les rodes i el rotor del motor, $m = 20\,\text{kg}$ i $I = 0{,}6\,\text{kg}\,\text{m}^2$; radi de les rodes, $R = 0{,}2\,\text{m}$; distància del centre de les rodes al centre de masses del robot, $d = 1\,\text{m}$

Figura de l'enunciat 5.2.3

Inicialment, el robot està en repòs. Per arrencar en línia recta, el motor actua sobre les rodes aplicant-t'hi un parell (moment) $\mathcal{M} = 25\,\text{N}\,\text{m}$, que provoca que el robot avanci. Suposant que les rodes no rellisquen, quant val l'acceleració del robot i quin angle cal que s'inclini per evitar caure?

Solució

A la figura, podem veure un esquema del robot mentre avança amb acceleració a. El conjunt no és un sòlid rígid, però està format per dues parts que sí que ho són. El parell que acciona les rodes és degut a forces internes. Per això, ens cal considerar les dues parts per separat: les rodes amb la part de motor que gira solidàriament amb aquestes (rotor) i el cos del robot que no efectua cap rotació. El parell que provoca

el motor és $\mathcal{M}$ que, junt amb N' i F, constitueixen les forces internes en el contacte entre les dues parts considerades. Les forces internes actuaran a cada part complint el principi d'acció i reacció. $(M-m)g$ és el pes del cos del robot i mg, el pes de les rodes. La normal N i la fricció F_f són degudes al contacte de la roda amb el terra. Les rodes no rellisquen, rodolen, $\alpha R = a$.

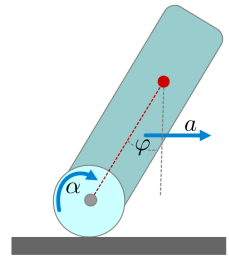


Figura de la solució 5.2.3

Tenim les equacions de moviment següents:

(1) Translació horitzontal de les rodes: $F_f - F = ma$

(2) Translació vertical de les rodes: $N - (N' + mg) = 0$

(3) Rotació de les rodes: $\mathcal{M} - F_f R = I\alpha$

(4) Translació horitzontal del cos : $F = (M-m)a$

(5) Translació vertical del cos: $N' - (M-m)g = 0$

(6) Rotació del cos: $\mathcal{M} + Fd\cos\varphi - N'd\sin\varphi = 0$

Per solucionar el nostre problema, en tenim prou amb (1), (3) i (4) i la condició de rodolar. Si de (1) i (4) aïllem F i F_f, trobem $F_f = Ma$. Aquesta equació la podem obtenir també considerant el robot sencer (malgrat que no és un sòlid rígid). Substituïm a (3) amb $\alpha = a/R$ i aïllem a. N'obtenim:

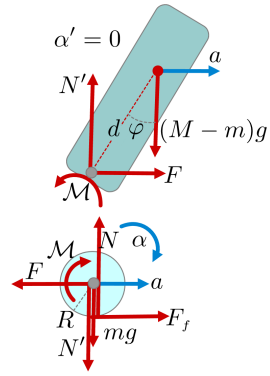


Figura de la solució 5.2.3

$$a = \frac{\mathcal{M}\,R}{I + M\,R^2} = 1{,}25\,\mathrm{m/s^2}$$

Substituint F amb el resultat anterior a (6) i aïllant φ, trobem:

$$\sin\varphi = 0{,}165048 \Rightarrow \varphi = 0{,}165807\,\mathrm{rad} = 9{,}5^\circ$$ ■

5.3 Energia cinètica de rotació i translació. Conservació de l'energia

En aquest apartat, es tracta de deduir una expressió ben simple per a l'energia cinètica d'un sòlid rígid en moviment pla. Partim de l'expressió de l'energia cinètica d'un sistema de N partícules (3.26):

$$E_c = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i\, v_i^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i\, \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i \qquad (5.19)$$

Com que segons (3.88), $\vec{v}_i = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{r}_{i(C)}$, (5.19) es pot escriure com

$$E_c = \frac{1}{2} m v_C^2 + \vec{v}_C \cdot \left(\vec{\omega} \times \sum_{i=1}^{N} m_i\, \vec{r}_{i(C)} \right) + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i\, \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{i(C)}\right)^2 \qquad (5.20)$$

El primer terme és nul si C és un punt fix, ja que $\vec{v}_C = 0$, i és l'energia cinètica de translació si $C = CM$. El segon terme és nul tant si C és un punt fix, atès que $\vec{v}_C = 0$, com si $C = CM$, ja que $\sum_{i=1}^{N} m_i\, \vec{r}_{i(CM)} = 0$.

Per tractar de l'últim terme, tindrem en compte que $\vec{\omega} \times \vec{r}_{i(C)} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{i(\perp C)}$, ja que la component $\vec{r}_{i(C)}$ paral·lela a $\vec{\omega}$ no contribueix al producte vectorial amb $\vec{\omega}$.

Tenint en compte que $\vec{\omega}$ i $\vec{r}_{i(|C)}$ són perpendiculars i, per tant, $|\vec{\omega} \times \vec{r}_{i(|C)}| = \omega r_{i(|C)}$.

$$(\vec{\omega} \times \vec{r}_{i(|C)})^2 = (\vec{\omega} \times \vec{r}_{i(|C)}) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_{i(|C)}) = \omega^2 r^2_{i(|C)} \tag{5.21}$$

Substituint (5.21) a (5.20), un cop anul·lat el segon terme, tenim

$$E_c = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \, \vec{r}^{\,2}_{i(|C)} \, \omega^2 = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} I_{(C)} \, \omega^2 \tag{5.22}$$

Si $C = CM$ (5.22) és

$$E_c = \frac{1}{2} m v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{(CM)} \, \omega^2 \tag{5.23}$$

i l'energia cinètica del sòlid té dos termes: el primer associat a la translació del CM i el segon a la rotació al voltant del CM.

Si C és un punt fix, (5.22) és

$$E_c = \frac{1}{2} I_{(C)} \, \omega^2 \tag{5.24}$$

i l'energia cinètica del sòlid té només un terme associat a la rotació al voltant de C.

Les expressions (5.23, 5.24) són vàlides també per 3 D, encara que, en aquest cas, $I_{(CM)}$ (o bé $I_{(C)}$, si C és fix) no serà constant, ja que la direcció de l'eix de rotació no serà fixa. Per a 2 D, la direcció sí que és fixa i $I_{(CM)}$ (o bé $I_{(C)}$, si C és fix) és constant.

Finalment, no és difícil demostrar el corresponent teorema de conservació de l'energia:

➔ ***Conservació de l'energia***. *Per a un sòlid rígid sotmès a forces externes que, o bé siguin conservatives, amb una energia potencial conjunta U, o bé siguin de lligam amb reaccions ideals, la seva energia mecànica $E = E_c + U$ es conserva al llarg del moviment.*

En el cas d'un sistema de sòlids rígids amb forces de les mateixes característiques que en el cas anterior, l'energia serà la suma de les energies de cada sòlid i també es conservarà al llarg del moviment.

Problema 5.3.1. Una massa $m_1 = 1\,\text{kg}$ penja de l'extrem d'una corda de pes negligible que passa per una politja sense fregament (vegeu la figura) i que està enrotllada a un cilindre homogeni de massa $m_2 = 8\,\text{kg}$ i radi $R = 10\,\text{cm}$, que gira sense lliscar en un pla horitzontal. Trobeu:

a) L'acceleració de la massa m_1.

b) La tensió de la corda.

c) L'acceleració angular del cilindre.

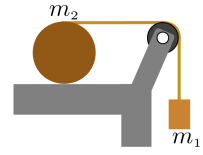


Figura de l'enunciat 5.3.1

Solució

a) Tenint en compte que totes les forces que actuen sobre el sistema o bé són conservatives o no fan treball en el seu desplaçament, es pot aplicar el principi de conservació de la seva energia mecànica E. Aquesta es pot escriure de la forma

$$E = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 - m_1 g y_1$$

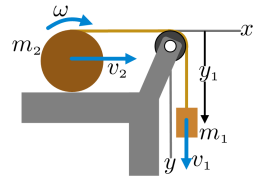


Figura de la solució 5.3.1

on, en tractar-se d'un cilindre massís, $I = \frac{1}{2}m_2 R^2$.

Donat que el cilindre roda sense lliscar sobre la superfície horitzontal i la corda no rellisca,

$$v_2 = \omega R \;\; ; \;\; v_1 = 2\omega R \;\Rightarrow v_2 = \frac{v_1}{2}$$

i també les derivades temporals

$$\alpha = \frac{a_1}{2R} \;\; ; \;\; a_2 = \frac{a_1}{2}$$

Apliquem la conservació de l'energia imposant que la seva derivada temporal sigui nul·la:

$$\dot{E} = 0 = (m_1 + \frac{m_2}{4} + \frac{I}{4R^2})v_1 a_1 - m_1 g v_1$$

d'on resulta

$$a_1 = \frac{m_1 g}{m_1 + \frac{3m_2}{8}} = 2{,}45\,\mathrm{m/s^2}$$

b) Per tal de determinar la tensió de la corda, es pot aplicar l'equació de translació a m_1

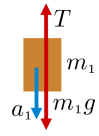


Figura de la solució 5.3.1

$$m_1 g - T = m_1 a_1 \Rightarrow T = m_1 g - m_1 a_1 = 7{,}35\,\mathrm{N}$$

c) L'acceleració angular del cilindre val

$$\alpha = \frac{a_1}{2R} = 12{,}25\,\mathrm{rad/s^2}$$

■

Problema 5.3.2. En un instant concret, un cilindre homogeni de massa M i radi R es deixa caure des del repòs de dalt d'un pla inclinat un angle θ amb l'horitzontal. Sabent que roda sense lliscar, determineu:

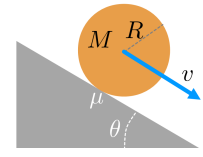


Figura de l'enunciat 5.3.2

a) L'acceleració lineal de baixada del cilindre.

b) La velocitat que assoleix al final del pla inclinat, després de rodar-hi una distància L.

c) El coeficient mínim de fricció μ entre el cilindre i el pla compatible amb el rodolament.

Solució

a) Com que les forces que actuen sobre el cilindre o són conservatives (el seu pes) o no fan treball al llarg del seu moviment (la reacció normal del pla inclinat i la força de fricció en el desplaçament de rodar sense lliscar), es pot aplicar el principi de

conservació de l'energia mecànica E, prenent com a origen de l'energia potencial gravitatòria la base del pla inclinat. L'energia mecànica E es pot expressar de la forma

$$E = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + Mgh$$

De la figura, s'observa que l'altura h del centre de massa del cilindre en un instant qualsevol del seu moviment es pot expressar com

$$h = (L - x)\sin\theta + R\cos\theta$$

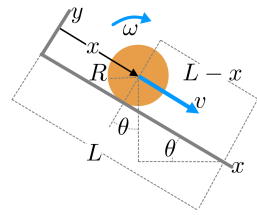


Figura de la solució 5.3.2

Per tant, l'energia mecànica del cilindre es pot escriure com

$$E = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 - Mgx\sin\theta + \text{constant}$$

i de la nul·litat de la seva derivada temporal es dedueix, amb $\dot{x} = v = \omega R$, $\ddot{x} = a = \alpha R$ i $I = \frac{1}{2}MR^2$, essent I el moment d'inèrcia del cilindre respecte de l'eix que passa pel seu CM i és perpendicular al pla de la figura,

$$\dot{E} = 0 = \frac{3M}{2}va - Mgv\sin\theta$$

d'on resulta

$$a = \frac{2}{3}g\sin\theta$$

b) El centre de massa del cilindre descriu un moviment uniformement accelerat en la seva davallada pel pla inclinat, amb una acceleració a i amb velocitat inicial nul·la. Per tant, la velocitat que assolirà al final del pla inclinat, després d'haver recorregut una distància L sobre el mateix, valdrà

$$v = \sqrt{2aL} = \sqrt{2\frac{2}{3}gL\sin\theta} = \sqrt{\frac{4}{3}gL\sin\theta}$$

c) Es tracta de trobar la força de fregament que actua entre el cilindre i el pla inclinat. Si tenim en compte la llei de Newton per a la translació en la direcció normal i la rotació, podem escriure

$$N - Mg\cos\theta = 0$$
$$F_f R = I\alpha$$

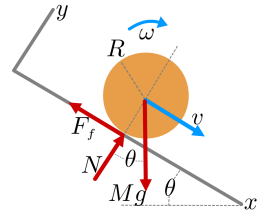


Figura de la solució 5.3.2

d'on obtenim

$$N = Mg\cos\theta$$
$$F_f = \frac{I\alpha}{R}$$

Ara, el coeficient de fricció μ és

$$\mu = \frac{F_f}{N}$$

si substituïm F_f, N, $I = \frac{1}{2}MR^2$ i $\alpha = \frac{a}{R}$ amb l'acceleració a trobada a l'apartat **a**, n'obtenim

$$\mu = \frac{Ia}{R^2 Mg\cos\theta} = \frac{1}{3}\tan\theta$$

■

Problema 5.3.3. Un disc circular en repòs de $0{,}5\,\text{m}$ de radi i $4\,\text{kg}\,\text{m}^2$ de moment d'inèrcia pot girar al voltant de l'eix fix, que passa pel seu centre, i porta una corda enrotllada a la seva perifèria. S'estira de la corda amb una força constant de $2\,\text{N}$ durant $10\,\text{s}$. Calculeu, suposant que no hi ha fregament, la longitud de la corda desenrotllada en aquest temps.

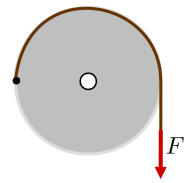


Figura de l'enunciat 5.3.3

Solució

Sobre el disc, a part de la força F, hi actuen el pes i la reacció de l'eix. Ambdues tenen el punt d'aplicació al centre del disc, que és un punt fix. Per tant, no treballen. La força vertical F aplicada a la perifèria del disc és constant; per tant, és conservativa. Es pot afirmar que l'energia mecànica del disc, formada per la cinètica i la potencial associada a F, es mantindrà constant durant la seva rotació. Tenint en compte que el vector de posició del punt d'aplicació de la força F, en un instant donat del moviment, és $\vec{r} = (R, y)$ i que $\vec{F} = (0, F)$, l'energia potencial associada a F és

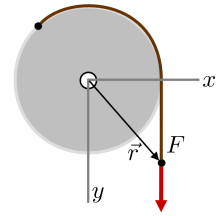


Figura de la solució 5.3.3

$$U = -\vec{F} \cdot \vec{r} = -Fy$$

L'energia mecànica E del disc serà

$$E = \frac{1}{2} I\omega^2 - Fy$$

i la seva derivada temporal, tenint en compte que $\dot{y} = v$ i $v = \omega R$

$$\dot{E} = I\omega\alpha - F\omega R$$

d'on s'obté l'acceleració angular del disc

$$\alpha = \frac{FR}{I}$$

i l'acceleració a amb què davalla al punt d'aplicació de la força F

$$a = \alpha R = \frac{FR^2}{I} = 0{,}125\,\text{m/s}^2$$

Tenint en compte que aquest punt parteix del repòs i que descriu un moviment rectilini i uniformement accelerat amb acceleració a, la longitud L de corda desenrotllada durant $10\,\text{s}$ val

$$L = \frac{1}{2} a t^2 = 6{,}25\,\text{m}$$ ■

Problema 5.3.4. Dues masses de 1 i $2\,\text{kg}$ estan unides per una corda inextensible i sense massa que passa, sense lliscar, per una politja cilíndrica d'$1{,}35\,\text{kg}$ amb un eix fix, que pot girar sense fricció. Calculeu les tensions de la corda.

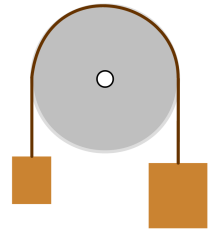


Figura de l'enunciat 5.3.4

Solució

Tenint en compte que les forces de reacció de l'eix de la politja i el seu pes són forces els punts d'aplicació de les quals no es desplacen en el moviment de rotació i que $m_1 g$ i $m_2 g$ són forces conservatives, es pot aplicar el principi de conservació de l'energia

mecànica E del sistema. Aquesta energia es pot escriure com (vegeu a la figura el sistema de referències considerat)

$$E = \frac{1}{2}m_1v^2 - m_1gy_1 + \frac{1}{2}m_2v^2 - m_2gy_2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

En les condicions del problema, $\dot{y}_1 = -v$, $\dot{y}_2 = v$, $v = \omega R$ i $a = \alpha R$ on ω i α són, respectivament, la velocitat angular i l'acceleració angular de la politja, i $I = \frac{1}{2}MR^2$ és el moment d'inèrcia de la politja respecte a l'eix de rotació, que passa pel seu centre i és perpendicular al pla de la figura (M és la massa de la politja i R, el seu radi).

$$E = \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2})v^2 - m_1gy_1 - m_2gy_2$$

Atès que E es conserva, la seva derivada serà nul·la:

$$\dot{E} = 0 = (m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2})va - (m_2 - m_1)gv$$

D'aquesta darrera expressió, substituint també I, ja es pot trobar l'acceleració a:

$$a = \frac{(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}} = 2{,}67\,\mathrm{m/s^2}$$

Les acceleracions d'un cos i l'altre, malgrat ser iguals en mòdul, com a vectors tenen sentit oposat. Per tal de calcular ara les tensions de la corda, cal analitzar per separat la dinàmica de m_1 i m_2. Pel que fa a m_1, tenint en compte que el seu moviment és ascendent, la seva dinàmica queda reflectida en l'equació següent:

$$T_1 - m_1g = m_1a$$

d'on obtenim

$$T_1 = m_1(g + a) = 12{,}47\,\mathrm{N}$$

Pel que fa a m_2, tenint en compte que el seu moviment és descendent, la seva dinàmica queda reflectida en l'equació següent:

$$m_2g - T_2 = m_2a$$

d'on resulta

$$T_2 = m_2(g - a) = 14{,}47\,\mathrm{N}$$

■

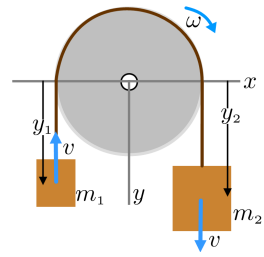


Figura de la solució 5.3.4 $m_1 = 1\,\mathrm{kg}$, $m_2 = 2\,\mathrm{kg}$

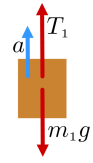


Figura de la solució 5.3.4. Diagrama del sòlid lliure m_1

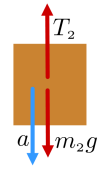


Figura de la solució 5.3.4. Diagrama del sòlid lliure m_2

Problema 5.3.5. Una roda de 6 cm de radi té un eix de 2 cm de radi. El conjunt té un moment d'inèrcia de $0{,}004\,\mathrm{kg\,m^2}$ i una massa de 3 kg. La roda està recolzada sobre el terra i no llisca. Determineu el sentit de gir de la roda i la seva acceleració si, partint del repòs, estirem horitzontalment d'una corda enrotllada a l'eix amb una força de 5 N, com es veu a la figura.

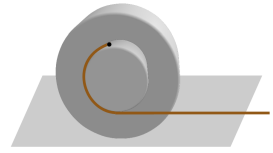


Figura de l'enunciat 5.3.5

Solució

Totes les forces que actuen sobre la roda o bé són conservatives o bé no fan treball en el seu desplaçament de rodolament sense lliscament. En conseqüència, es tracta d'un sistema conservatiu. La seva energia mecànica E es pot expressar de la forma

$$E = \frac{1}{2}Mv^2 + MgR + \frac{1}{2}I\omega^2 - \vec{F}\cdot\vec{r}_A + C$$

on $\vec{r}_A = (x_A, R)$ i, per tant, $U_F = -\vec{F}\cdot\vec{r}_A = -Fx_A$ és l'energia potencial associada a la força $F = 2\,\text{N}$ aplicada horitzontalment, amb C una constant.

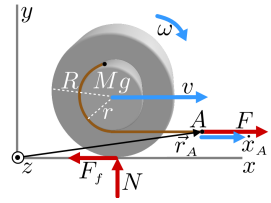


Figura de la solució 5.3.5

Com que E es conserva, la seva derivada temporal serà nul·la:

$$\dot{E} = 0 = Mva + I\omega\alpha - F\dot{x}_A$$

on $\dot{x}_A$ és la velocitat dels punts de la corda, com A, $\vec{v}_A = (\dot{x}_A, 0,0)$. Si la corda no llisca sobre l'eix, aquesta velocitat també és la del punt de contacte de la roda amb la corda (vegeu la figura de la solució). Si fem servir $\vec{v}_A = \vec{v} + \vec{\omega}\times(\vec{r}_A - \vec{r})$, on, observant la figura, $\vec{r} = (x, R, 0)$i $\vec{v} = (v, 0,0)$ són, respectivament el vector posició i la velocitat del centre del cilindre i $\vec{\omega} = (0,0,-\omega)$, trobem

$$\dot{x}_A = v - \omega r$$

Si aquesta expressió se substitueix en la provinent de la conservació de l'energia mecànica, junt amb $v = \omega R$ i $a = \alpha R$, trobem

$$\dot{E} = 0 = \left(M + \frac{I}{R^2}\right)va - F(1 - \frac{r}{R})v$$

i s'obté finalment

$$a = \frac{F(1-\frac{r}{R})}{M + \frac{I}{R^2}} = 0{,}81\,\text{m/s}$$

$a > 0$ implica que $\alpha = \frac{a}{R} > 0$. Tenint en compte que hem pres el sentit positiu cap a la dreta i v inicial nul·la, d'acord amb la figura, la roda es desplaça cap a la dreta girant en sentit horari. ■

6 Petites oscil·lacions

Introducció

Els fenòmens oscil·latoris són molt importants. Tot allò que ens envolta tendeix a estar en una posició d'equilibri estable. El mar està en equilibri estable. Les onades són petites oscil·lacions al voltant de l'equilibri. Una estructura, un edifici, està en equilibri estable. Qualsevol pertorbació que rebi, si no el trenca, provocarà petites oscil·lacions al voltant de l'equilibri.

L'aproximació base al comportament intern de la matèria sòlida és la rigidesa, que és una configuració d'equilibri estable. La primera aproximació al moviment intern de la matèria sòlida són les petites oscil·lacions al voltant de la configuració de rigidesa.

L'estudi de les petites oscil·lacions és, doncs, una primera aproximació a l'estudi del comportament dinàmic de molts sistemes que, en primera instància, ens apareixen com a inamovibles i que, per qualsevol causa, *trontollen*. És molt notable que aquest estudi, el puguem dur a terme sense entrar en detall sobre les causes que provoquen l'alteració de l'estat d'equilibri.

6.1 Petites oscil·lacions al voltant d'una posició d'equilibri estable

Considerem un sistema conservatiu d'un grau de llibertat x d'energia potencial $U(x)$ que té una posició d'equilibri estable x_0. Això vol dir que $U(x)$ compleix

$$\frac{dU}{dx}(x_0) = 0 \quad , \quad \frac{d^2U}{dx^2}(x_0) = k > 0 \tag{6.1}$$

Redefinim el sistema de referència, de manera que la posició d'equilibri sigui $x_0 = 0$. Considerem petites desviacions x al voltant de la posició d'equilibri $x_0 = 0$. Fem un desenvolupament en sèrie de Taylor de $U(x)$ i ens quedem al primer ordre

significatiu, és a dir, al primer ordre en què obtenim un resultat diferent de zero.

$$U(x) = U(0) + \frac{dU}{dx}(0)\, x + \frac{1}{2}\frac{d^2U}{dx^2}(0)\, x^2 + O[x^3] \approx \frac{1}{2}\, k\, x^2 + \text{constant} \quad (6.2)$$

A la figura 6.1, tenim un exemple que il·lustra la situació genèrica. En un pla vertical, donem la forma que vulguem, $y(x)$, a una guia, de manera que tingui un mínim, on situem l'origen del sistema de referències $x = 0$. Enfilem una petita boleta de massa m i la deixem reposar al punt $x = 0$. Li donem una petita empenta i observem el moviment que fa al voltant de $x = 0$. L'energia potencial serà

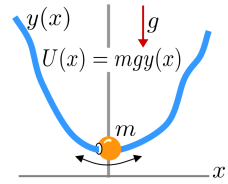


Fig. 6.1: Una petita boleta enfilada en un filferro efectua oscil·lacions harmòniques al voltant de la posició d'equilibri estable

$$U(x) = mg\, y(x) \approx \frac{1}{2} k\, x^2 \quad ; \quad k = mg\, \frac{d^2y}{dx^2}(0)$$

L'energia cinètica serà

$$E_c = \frac{1}{2} m\, v^2 \; ; \quad v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \dot{x}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

i, com que a prop de la posició d'equilibri $\frac{dy}{dx} \approx 0$, tenim $E_c \approx \frac{1}{2} m\, \dot{x}^2$. L'energia mecànica resulta ser, per a petites desviacions de la posició d'equilibri,

$$E \approx \frac{1}{2} m\, \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k\, x^2 \quad (6.3)$$

L'equació de moviment per a petites desviacions de la posició d'equilibri serà doncs $m\, \ddot{x} = -k\, x$ i, per tant, el sistema efectuarà oscil·lacions harmòniques al voltant d'aquesta. No només les molles oscil·len harmònicament. De fet, podem enunciar que:

➔ *Qualsevol sistema amb una posició d'equilibri estable, si parteix prop d'aquesta posició amb una velocitat inicial petita, efectuarà un moviment harmònic.*

En aquest capítol, x és una variable de posició del sistema (pot ser una longitud o un angle...), de manera que $x = 0$ és la posició d'equilibri estable al voltant de la qual el sistema oscil·la. En aquestes condicions, x s'anomena ***elongació***.

6.2 Moviment harmònic simple (MHS)

A la figura 6.2, podem veure el tren d'aterratge d'un avió. Si el vincle entre la roda i el cos de l'avió fos rígid, en entrar en contacte amb la pista hi hauria una trencadissa considerable. Per això, entre la roda i el cos de l'avió s'interposa un element elàstic, com una molla. Com a conseqüència de la molla, en entrar en contacte amb la pista, el cos de l'avió inicia un moviment oscil·latori harmònic vertical que no s'atura. És un **moviment harmònic simple (MHS)**. El que volem és caracteritzar el moviment harmònic simple sense posar el focus d'atenció en la causa concreta

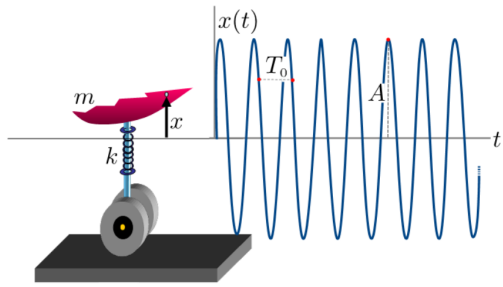


Fig. 6.2: La molla del tren d'aterratge d'un avió provoca que aquest faci un moviment oscil·latori harmònic iniciat en el contacte amb la pista

que el provoca en cada cas. El moviment oscil·latori vertical de l'avió és molt semblant al moviment horitzontal de la boleta de la figura 6.1, malgrat que el primer és provocat per la gravetat i la guia i el segon, per la molla. Volem una caracterització d'aquests casos, que ens permeti tractar-los amb les mateixes expressions de la teoria, sense que haguem d'anar retocant les fórmules segons si es tracta d'un cas o un altre. Ens podem guiar per l'equació de moviment $m\,\ddot{x} = -k\,x$.

Equació canònica del MHS

Diem que un sistema d'un grau de llibertat x fa un moviment harmònic simple si l'equació de moviment pot ser escrita en la forma canònica:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{6.4}$$

en què ω_0 s'anomena ***pulsació lliure***.

Solució general del MHS

La solució general de l'equació canònica del MHS és

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0) \tag{6.5}$$

on A i φ_0 són constants d'integració.

La demostració és immediata. Només cal derivar dos cops l'expressió (6.5) i substituir x i $\ddot{x}$ a l'equació canònica (6.4) per veure que es compleix idènticament.

A i φ_0 s'anomenen, respectivament, ***amplitud*** i ***fase inicial*** i, com ja hem dit, són constants d'integració. Es poden fixar si coneixem les condicions inicials per a qualsevol instant t_0, $x(t_0)$ i $\dot{x}(t_0)$. L'argument de la funció trigonomètrica sin, $\varphi(t) = \omega_0 t + \varphi_0$, s'anomena ***fase***. Així, la fase inicial és $\varphi_0 = \varphi(0)$.

Des del punt de vista del seu significat físic, destaquem els conceptes següents:

➔ **Període lliure**. És el mínim temps T_0 que ha de transcórrer perquè es repeteixin els mateixos valors de x i $\dot{x}$. És a dir, $x(t + T_0) = x(t)$ i $\dot{x}(t + T_0) = \dot{x}(t)$. Per

això, cal que la fase torni a tenir el mateix valor (mòdul 2π), és a dir, $\varphi(t+T_0) = \varphi(t) + 2\pi$. N'obtenim $\omega_0 T_0 = 2\pi$.

➔ **Freqüència lliure**. És l'invers del període lliure.

$$T_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{\omega_0} \tag{6.6}$$

➔ **Amplitud**. És el màxim valor que pot atènyer l'elongació $x(t)$. L'amplitud és, doncs, el factor $A > 0$ de la funció trigonomètrica de l'elongació $x(t)$ de (6.5).

Exemple de moviment harmònic simple

Un exemple evident i senzill en què podem aplicar tot el que hem après és el d'una esfera homogènia lligada a l'extrem d'una molla, amb l'altre extrem fixat, en presència de la gravetat.

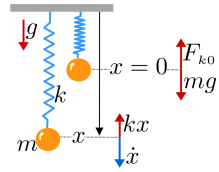


Fig. 6.3: Partícula lligada a una molla. La gravetat afecta la ubicació del punt d'equilibri, però no el moviment respecte d'aquest punt

Deixem que l'esfera *trobi* la posició d'equilibri. No estem ara interessats a saber on és aquesta. Situem l'origen del sistema de referències allà on sigui la posició d'equilibri, tal com es veu a la figura 6.3. La coordenada x és l'elongació, ja que $x = 0$ és el punt d'equilibri. En aquest punt, les forces que actuen són el pes mg i, en sentit contrari, la força de la molla F_{k0}, que, en tractar-se d'una posició d'equilibri, tindrà el mateix mòdul que el pes, $F_{k0} = mg$.

Donem una petita empenta (translació vertical) arbitrària a l'esfera. Quan és a la posició x, movent-se a una velocitat $\dot{x}$, les forces que actuen són el pes i, en sentit contrari, la força de la molla F_k. Aquesta última, la podem descompondre com $F_k = F_{k0} + kx$. Com que $F_{k0} = mg$, la suma de forces que actuen, $(mg - F_k)\hat{\imath}$, és $-kx\hat{\imath}$. L'equació de moviment de Newton és, doncs, $m\ddot{x} = -kx$. Escrita en forma canònica, resulta

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \tag{6.7}$$

Comparant amb l'equació canònica del MHS, deduïm que es tracta d'un moviment harmònic simple, caracteritzat per la pulsació lliure $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. El període és, segons (6.6), $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$. Observem que la gravetat no apareix a l'equació de moviment. La gravetat afecta la ubicació del punt d'equilibri, però no el moviment respecte d'aquest punt.

6.3 Moviment harmònic esmorteït (MHE)

Introduïm una força d'esmorteïment viscós, del tipus $-b\dot{x}$, en el tren d'aterratge de l'avió (vegeu la figura 6.4).

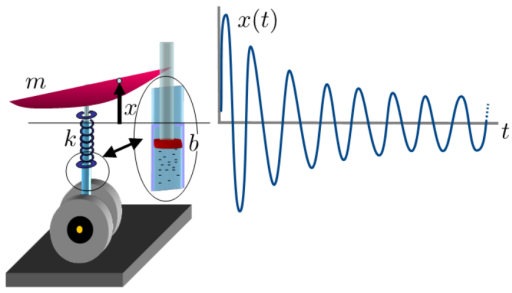


Fig. 6.4: La molla i l'amortidor del tren d'aterratge d'un avió provoca que aquest efectuï un moviment oscil·latori harmònic esmorteït iniciat en el contacte amb la pista

Ara, les oscil·lacions del cos de l'avió es van fent cada cop més petites. Diem que és un **moviment harmònic esmorteït (MHE)**.

És important observar que, atès que la força d'esmorteïment és proporcional a la velocitat, la posició d'equilibri del sistema esmorteït és exactament la mateixa que la del mateix sistema sense la força d'esmorteïment.

Mirem de caracteritzar el moviment harmònic esmorteït sense posar el focus d'atenció en la causa concreta que el provoca en cada cas. En aquest cas, ens guiarem per l'equació de moviment $m\,\ddot{x} = -b\dot{x} - k\,x$.

Equació canònica del MHE

Diem que un sistema d'un grau de llibertat x efectua un moviment harmònic esmorteït si l'equació de moviment pot ser escrita en la forma canònica:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{6.8}$$

on ω_0 se segueix anomenant *pulsació lliure*. γ s'anomena ***paràmetre d'esmorteïment*** i està relacionat, com veurem, amb la força d'esmorteïment.

Molts cops, haurem de distingir entre el paràmetre d'esmorteïment γ i el coeficient de fricció b. Per això, observem que, independentment del que sigui x, les unitats de γ són s^{-1}. Les unitats de b han de ser tals que bv tingui unitats de força, N. Així, $[b] = \mathrm{N\,s\,m^{-1}} = \mathrm{kg\,s^{-1}}$

Solució general del MHE

La solució general de l'equació canònica del MHE té diferent forma segons els valors relatius de ω_0 i γ.

Moviment oscil·latori: $\omega_0 > \gamma$

La solució general es pot expressar com

$$x(t) = A\ \mathrm{e}^{-\gamma t}\sin(\omega\, t + \varphi_0) \tag{6.9}$$

on A i φ_0 són constants d'integració i

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \tag{6.10}$$

és la **pulsació**.

La demostració és immediata, encara que més embolicada que en el cas del MHS. Només cal derivar dos cops l'expressió (6.9) i substituir x, $\dot{x}$ i $\ddot{x}$ a l'equació canònica (6.8) per veure que, tenint en compte (6.10), es compleix idènticament.

A i φ_0 s'anomenen, respectivament, ***amplitud inicial*** i ***fase inicial*** i, com ja hem dit, són constants d'integració. Es poden fixar si coneixem les condicions inicials per a qualsevol instant t_0, $x(t_0)$ i $\dot{x}(t_0)$. L'argument de la funció trigonomètrica sin, $\varphi(t) = \omega t + \varphi_0$, s'anomena ***fase***. Així la fase inicial és $\varphi_0 = \varphi(0)$.

Ara els conceptes anàlegs als de període lliure i amplitud no poden ser exactament els mateixos. Sí que podem mirar de fer-ne una generalització comúna.

➔ **Amplitud variable**. És el factor $A(t) = A\,\mathrm{e}^{\gamma t}$, amb $A > 0$, de la funció trigonomètrica de l'elongació $x(t)$ de (6.9). L'amplitud variable és l'envolupant de l'elongació: a la figura 6.5, es veu com l'amplitud variable té un contacte tangent prop de cada màxim local de l'elongació.

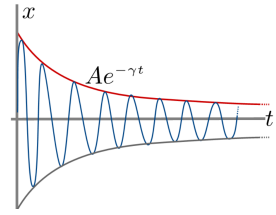


Fig. 6.5: L'amplitud variable té un contacte tangent prop de cada màxim local de l'elongació

➔ **Període**. És el mínim temps T que ha de transcórrer perquè es repeteixin els mateixos valors de **relació d'elongació** $\frac{x(t)}{A(t)}$ i de **relació de velocitat d'elongació** $\frac{\dot{x}(t)}{\omega A(t)}$. Per això, com en el cas lliure, cal que la fase torni a tenir el mateix valor mòdul 2π, és a dir, $\varphi(t+T) = \varphi(t) + 2\pi$. N'obtenim $\omega T = 2\pi$.

➔ **Freqüència**. És l'invers del període.

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} \tag{6.11}$$

Moviment sobreesmorteït: $\omega_0 < \gamma$

A la figura 6.6, podem veure que, a causa del fort esmorteïment, l'elongació no arriba a oscil·lar. La forma oscil·lant de la solució general no és la adequada. Com que $\omega_0 < \gamma$, ω esdevé imaginària. Les constants d'integració A i φ_0 haurien de prendre valors imaginaris per fer que l'elongació esdevingués real. Tot això es pot fer i la solució general pren, en aquest cas, la forma

$$x(t) = C_1\ \mathrm{e}^{-\gamma_{(+)} t} + C_2\ \mathrm{e}^{-\gamma_{(-)} t} \tag{6.12}$$

Fig. 6.6: Gràfiques de l'elongació per a diferents valors de γ en el cas sobreesmorteït

on C_1 i C_2 són constants d'integració que es poden fixar si en coneixem les condicions inicials i

$$\gamma_{(\pm)} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \tag{6.13}$$

La demostració és immediata. Només cal derivar dos cops l'expressió (6.12) i substituir x, $\dot{x}$ i $\ddot{x}$ a l'equació canònica (6.8) per veure que, tenint en compte (6.13), es compleix idènticament.

Moviment crític: $\omega_0 = \gamma$

És el cas que separa els dos anteriors. Des del punt de vista matemàtic, cap de les dues solucions anteriors representa bé el moviment crític ja que, malgrat no aparèixer magnituds imaginàries, només contenen una constant d'integració. Es senzill demostrar que, si $\omega_0 = \gamma$, la solució general de l'equació (6.8), amb dues constants d'integració, és

$$x(t) = (C_1 + C_2\, t)\, \mathrm{e}^{-\gamma t} \tag{6.14}$$

on C_1 i C_2 són constants d'integració que es poden fixar si coneixem les condicions inicials.

Exemple de moviment harmònic esmorteït

Seguint amb l'exemple de l'esfera homogènia lligada a l'extrem d'una molla, amb l'altre extrem fixat, en presència de la gravetat, ara envoltem l'esfera d'un fluid que causa una força de fricció viscosa de coeficient b i també un empenyiment d'Arquimedes. En ser l'esfera homogènia, el centre d'empenyiment coincideix amb el centre de masses.

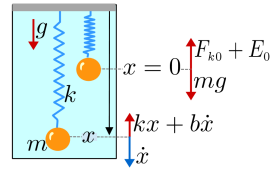


Fig. 6.7: Esfera homogènia lligada a una molla i envoltada de fluid. El punt d'equilibri és independent de la força viscosa. La força resultant no depèn ni de la gravetat ni de l'empenyiment

Deixem que l'esfera *trobi* la posició d'equilibri. Situem l'origen del sistema de referències allà on sigui la posició d'equilibri, tal com es veu a la figura 6.7. La coordenada x és l'elongació, atès que $x = 0$ és el punt d'equilibri. En aquest punt, les forces que actuen són el pes mg i, en sentit contrari, la força de la molla i l'empenyiment d'Arquimedes $F_{k0} + E_0$ que, en tractar-se d'una posició d'equilibri, sumades tindran el mateix mòdul que el pes, $F_{k0} + E_0 = mg$.

Donem una empenta (translació vertical) arbitrària a l'esfera. Quan és a la posició x, movent-se amb velocitat $\dot{x}$, les forces que hi actuen són el pes i, en sentit contrari, la força de la molla, la fricció i l'empenyiment $F_k + b\dot{x} + E_0$. Com que $F_k = F_{k0} + kx$ i $F_{k0} + E_0 = mg$, tenim que la suma de forces que actuen, $(mg - E_0 - F_k - b\dot{x})\hat{\imath}$, és $(-kx - b\dot{x})\hat{\imath}$. L'equació de moviment de Newton és, doncs, $m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}$. Escrita en forma canònica, resulta

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \tag{6.15}$$

Comparant amb l'equació canònica del MHE, deduïm que es tracta d'un moviment harmònic esmorteït, caracteritzat per la pulsació lliure $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ i el paràmetre d'esmorteïment $\gamma = \frac{b}{2m}$. Depenent dels valors relatius de ω_0 i γ, es tractarà d'un moviment oscil·latori, sobreesmorteït o crític.

Problema 6.3.1. Una politja, de moment d'inèrcia respecte al seu eix I, efectua petites oscil·lacions esmorteïdes girant sense fricció a l'eix: la corda té massa negligible, es manté sempre tensa i en cap moment llisca. Fixades a terra i als extrems hi ha un parell de molles iguals, de massa negligible i constant recuperadora k. Un disc, de massa negligible, rep per fricció aerodinàmica una força $-bv$, essent v la velocitat del disc i b constant. Per a petites oscil·lacions, determineu:

a) l'equació de moviment,

b) la trajectòria i

c) el període.

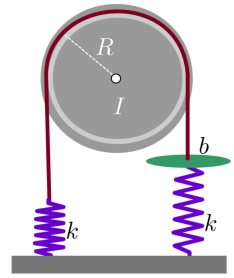


Figura de l'enunciat 6.3.1

Solució

Com a elongació, prenem l'angle φ, de manera que en equilibri $\varphi = 0$.

a) L'equació de moviment de rotació per a la politja $M = I\alpha$ serà

$$-2kR\varphi R - bR\dot{\varphi}R = I\ddot{\varphi}$$

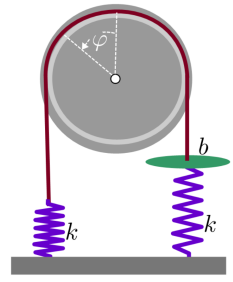


Figura de la solució 6.3.1

Això és així perquè, quan estem en equilibri les dues molles fan un moment igual i de sentit contrari $M_{Ek0} + M_{Dk0} = 0$; quan girem un angle φ en el sentit positiu (vegeu la figura), la molla esquerra fa un moment més petit, ja que s'ha escurçat $R\varphi$, $M_{Ek} = M_{Ek0} - k\ R\varphi\ R$, i la de la dreta, més gran, ja que s'ha allargat $R\varphi$, $M_{Dk} = M_{Dk0} + k\ R\varphi\ R$. Així, el moment resultant de l'acció de les molles és $M_{Dk} + M_{Ek} = -2k\ R\varphi\ R$. El moment fet per la força de fricció viscosa $-bv = -bR\dot{\varphi}$ és $-bvR = -bR\dot{\varphi}R$.

Escrivim l'equació de moviment en forma canònica:

$$\ddot{\varphi} + \frac{b\ R^2}{I}\dot{\varphi} + \frac{2kR^2}{I}\varphi = 0$$

i, per comparació,

$$\gamma = \frac{bR^2}{2I} \ \ ; \ \ \omega_0 = \sqrt{\frac{2kR^2}{I}}$$

b) La trajectòria, d'acord amb l'enunciat, és la corresponent a un moviment oscil·lant:

$$\varphi(t) = A_\varphi\ \mathrm{e}^{-\gamma t}\ \sin(\omega t + \xi_0) \ \ ; \ \ \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{\frac{R^2}{I}\left(2k - \frac{b^2\ R^2}{4I}\right)}$$

on A_φ és l'amplitud angular i ξ_0, la fase inicial

c) El període és

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{R^2}{I}\left(2k - \frac{b^2R^2}{4I}\right)}}$$

■

6.4 Moviment harmònic forçat (MHF)

Ara suposem que la pista d'aterratge de l'avió dels apartats anteriors conté un seguit de guals que li confereixen una forma sinusoidal (vegeu la figura 6.8). El cos de l'avió rep, com a conseqüència, una força de tipus sinusoidal que perllonga el moviment malgrat l'esmorteïment. Com és aquest moviment a la llarga? Quina relació hi ha entre la molla, l'esmorteïment i la freqüència dels guals, per una banda, i el moviment vertical del cos de l'avió, per l'altra? Diem que el sistema està forçat o que hi actua una **excitació** externa.

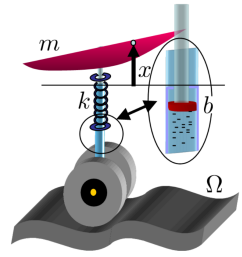


Fig. 6.8: La pista no és perfectament horitzontal i plana. Els guals que té li confereixen una forma sinusoidal. Això provoca que el moviment oscil·latori esmorteït del cos de l'avió no s'acabi. El cos de l'avió rep una força sinusoidal d'excitació deguda als guals de la pista que mantenen el moviment

Mirem de caracteritzar el moviment harmònic forçat sense posar el focus d'atenció en la causa concreta que, en cada cas, el provoca. En aquest cas, ens guiarem amb l'equació de moviment $m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} + F_E(t)$, on F_E és una força d'excitació externa que suposem sinusoidal.

Equació canònica del MHF

Diem que un sistema d'un grau de llibertat x efectua un moviment harmònic forçat si l'equació de moviment pot ser escrita en la forma:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = B\sin(\Omega t + \theta_0) \tag{6.16}$$

on ω_0 se segueix anomenant *pulsació lliure*, γ *paràmetre d'esmorteïment*, i hi apareixen tres noves constants B, Ω i θ_0, que estan relacionades, com veurem, amb l'amplitud, la freqüència i la fase inicial de la força (o parell) d'excitació, respectivament.

Solució general del MHF

Com que l'equació (6.16) és lineal respecte de $x(t)$, la solució general es pot escriure com la suma de la solució general de l'equació homogènia $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$, $x_h(t)$, que coincideix amb l'equació de moviment del MHE, i una solució particular $x_p(t)$ de (6.16). $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$. $x_h(t)$ és la solució corresponent del MHE que, en qualsevol dels tres casos, és un moviment esmorteït que desapareix amb el temps. Aquest temps, que depèn del paràmetre d'esmorteïment, el podem avaluar com $t \gg \gamma^{-1}$, de manera que el factor $\mathrm{e}^{-\gamma t} \sim 0$. Diem que $x_h(t)$ és el terme **transitori**. La solució particular x_p es troba per tempteig. Partim de

$$x_p(t) = A_p\sin(\Omega t + \theta_0 - \varphi_p) \tag{6.17}$$

on A_p i φ_p són constants que cal ajustar per tal que (6.17) efectivament compleixi l'equació (6.16). Si substituïm $x_p(t)$, $\dot{x}_p(t)$ i $\ddot{x}_p(t)$, trobats a partir de (6.17), a (6.16), n'obtenim

$$\tan\varphi_P = \frac{2\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \quad ; \quad \sin\varphi_P \geq 0 \tag{6.18}$$

$$A_p = \frac{B}{\Omega\sqrt{4\gamma^2 + \left(\Omega - \frac{\omega_0^2}{\Omega}\right)^2}} \tag{6.19}$$

Per tant, la solució general del MHF (6.16) es pot escriure com un terme transitori x_h, solució general del MHE, més un terme **estacionari** x_p, definit segons (6.17) amb una amplitud particular A_p segons (6.19) i una fase inicial $\theta_0 - \varphi_p$, on φ_p és definit segons (6.18). φ_p pot ser entès com la diferència de fase entre l'excitació i l'elongació.

Per exemple, en el cas oscil·latori, $\omega_0 > \gamma$, la solució general és

$$x(t) = A\ \mathrm{e}^{-\gamma t}\sin(\omega\, t + \varphi_0) + A_p \sin(\Omega\, t + \theta_0 - \varphi_p) \tag{6.20}$$

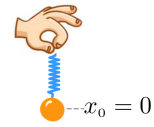


Fig. 6.9: En lloc de fixar l'extrem superior de la molla al sostre, l'agafem amb la mà. Si mantenim la mà ben quieta, el punt d'equilibri és el mateix d'abans i no es mou $x_0 = 0$

on A i φ_0 són constants d'integració. A l'inici del moviment no hi ha una pulsació definida. Es tracta d'una superposició de dos moviments harmònics de pulsacions respectives ω i Ω. Passat un temps, $t \gg \gamma^{-1}$, podem considerar que el terme transitori desapareix i només ens queda el terme estacionari. El terme estacionari $x_p(t)$ és un moviment oscil·latori harmònic de pulsació Ω, determinada per l'excitador, i d'amplitud A_p i fase inicial $\theta_0 - \varphi_p$ que no estan relacionades amb les condicions inicials. Estan fixades per magnituds presents a l'equació de moviment i, per tant, al sistema: B, ω_0, γ, Ω i θ_0.

Exemple de moviment harmònic forçat

Seguim amb l'exemple de l'esfera lligada a l'extrem d'una molla, en les mateixes condicions que a l'apartat anterior. Ara, però, mantenim l'altre extrem de la molla amb la mà. Vegeu la figura 6.9.

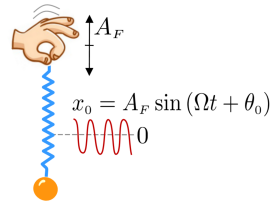


Fig. 6.10: Si belluguem la mà verticalment, amb un moviment sinusoidal d'amplitud A_F i pulsació Ω, provocarem que el punt d'equilibri es bellugui al voltant de 0 segons $x_0 = A_F \sin(\Omega\, t + \theta_0)$.

Amb la mà quieta, l'equació de moviment serà exactament la mateixa que en el cas de la molla fixada al sostre, equació (6.15), que podem escriure en la forma

$$m\ddot{x} = -b\dot{x} - k(x - x_0) \tag{6.21}$$

encara que ara és $x_0 = 0$.

Si belluguem la mà en direcció vertical, amb un moviment sinusoidal d'amplitud A_F i pulsació Ω, provocarem que el punt d'equilibri es bellugui al voltant de $x = 0$ segons $x_0 = A_F \sin(\Omega\, t + \theta_0)$. Vegeu la figura 6.10. Aquesta excitació externa provoca que la força de la molla canviï a través del canvi de x_0. Substituint el nou valor de x_0 a (6.21), n'obtenim

$$m\,\ddot{x} = -b\,\dot{x} - k(\,x - A_F \sin(\Omega t + \theta_0))$$

que es pot escriure

$$m\,\ddot{x} = -b\,\dot{x} - kx + kA_F\,\sin(\Omega t + \theta_0)$$

on veiem que l'efecte de bellugar la mà és l'aparició d'una força que actua sobre l'esfera $F = kA_F\,\sin(\Omega t + \theta_0)$. Si l'expressem de forma canònica

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\,\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{kA_F}{m}\,\sin(\Omega t + \theta_0) \tag{6.22}$$

n'obtindrem les mateixes expressions per a ω_0 i γ i també $B = \frac{kA_F}{m}$.

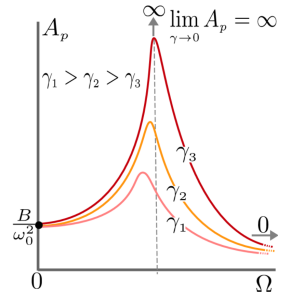


Fig. 6.11: Gràfiques de $A_p(\Omega)$ per a diferents valors del paràmetre d'esmorteïment $\gamma_1 > \gamma_2 > \gamma_3 >$. S'observa que, si $\omega_0^2 > 2\gamma^2$ hi ha un màxim. Quan $\gamma \to 0$, el màxim se situa a $\Omega = \omega_0$ i tendeix a infinit. Quan $\Omega \to \infty$, resulta $A_p(\infty) \to 0$. Quan $\Omega \to 0$, el sistema oscil·la amb una amplitud $A_p = \frac{B}{\omega_0^2}$. En aquest últim cas, si es tractés de l'esfera de l'exemple, $B = \frac{kA_F}{m}$ i s'obté $A_p = A_F$, és a dir, l'esfera puja i baixa sense que la molla es deformi

Fenòmens de ressonància

Com hem comentat, les característiques del moviment oscil·lant que resulta d'aplicar un excitador a un cert sistema no vénen determinades per les condicions inicials, sinó per magnituds que, o bé són del sistema o bé de l'excitador. En particular, l'amplitud A_p té un valor determinat per una certa combinació d'aquestes magnituds segons (6.19). Estudiarem A_p com a funció de Ω, ja que Ω és la magnitud present a (6.19) que no pertany al sistema sinó a l'excitador. La qüestió és, fixats els valors del sistema, ω_0 i γ, hi ha algun valor de Ω que faci que A_p sigui especialment gran? Les gràfiques de $A_p(\Omega)$ es poden veure a la figura 6.11 per a diferents valors de γ. En general, sempre que $\omega_0^2 > 2\gamma^2$, $A_p(\Omega)$ presenta un màxim. A quin valor de Ω correspon el màxim? Això és senzill de respondre, ja que només hem de derivar $A_p(\Omega)$ respecte de Ω, igualar a zero i aïllar Ω.

➔ **Ressonància d'amplitud**. Sempre que $\omega_o^2 > 2\gamma^2$, la pulsació d'excitació Ω que fa que l'amplitud d'elongació A_p tingui un màxim, que anomenem ***pulsació de ressonància d'amplitud*** Ω_{RA}, és

$$\Omega_{RA} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} \tag{6.23}$$

A més de la ressonància d'amplitud, té també interès la ressonància de velocitat, és a dir, la pulsació Ω per a la qual l'amplitud de velocitat $\Omega A_p(\Omega)$ té un valor màxim.

➔ **Ressonància de velocitat**. La pulsació d'excitació Ω que fa que l'amplitud de velocitat ΩA_p tingui un màxim, que anomenem ***pulsació de ressonància de velocitat*** Ω_{RV}, és

$$\Omega_{RV} = \omega_0 \tag{6.24}$$

És un fet notable que, en ressonància de velocitat, la diferència de fase entre excitació i elongació, φ_p, és, segons (6.18), $\frac{\pi}{2}$.

La ressonància de velocitat està molt relacionada amb les qüestions energètiques, com veurem a la pròxima subsecció.

Energia i potència

L'expressió de l'energia dependrà del sistema concret que tractem. Tot i això, sabent que, per al MHS, $\dot{E} = 0$ ha de ser l'equació de moviment, podem deduir que l'energia d'un moviment harmònic sempre es podrà escriure

$$E = \frac{1}{2} M_I \dot{x}^2 + \frac{1}{2} M_I \omega_0^2 x^2 \tag{6.25}$$

on M_I és un factor que conté la inèrcia. Per exemple, en cas que es tracti d'un cos que oscil·la per translació, M_I serà simplement la massa, com en el cas de l'exemple de l'esfera lligada a una molla que hem tractat al llarg d'aquest capítol.

Si es tracta d'un MHE oscil·lant amb $\gamma \ll \omega_0$, podem escriure l'energia en la forma aproximada

$$E = \frac{1}{2} M_I \omega_0^2 A(t)^2 = \mathrm{e}^{-2\gamma t} E(0) \tag{6.26}$$

Si es tracta d'un MHF, l'energia no es conserva a causa de la presència de la fricció i de l'excitació externa. En aquest cas, podrem escriure

$$\dot{E} = -2 M_I \gamma \dot{x}^2 + M_I B \sin(\Omega t + \theta_0)\ \dot{x} \tag{6.27}$$

ja que, si desenvolupem $\dot{E}$ segons (6.25), (6.27) és l'equació de moviment del MHF.

Quan estem en la fase estacionària, la mitjana de l'energia en un període, $\bar{E}$, es conserva, atès que si calculem $\bar{E}$

$$\bar{E} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} E\, dt = \frac{1}{4} M_I A_p^2 (\omega_0^2 + \Omega^2) \tag{6.28}$$

podem observar que $\bar{E}$ no depèn de t. Si que hi ha dissipació per fricció, però la mitjana de la suma de la potència d'excitació i la dissipació s'anul·len.

La mitjana de la potència d'excitació, $\bar{P}$, és, tenint en compte el terme de potència de l'excitador, és a dir, el segon terme del membre de la dreta de (6.27)

$$\begin{aligned} \bar{P} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} P dt &= \tfrac{1}{T} \int_t^{t+T} M_I B \sin(\Omega t + \theta_0)\ \dot{x} dt \\ &= \frac{1}{2} M_I B A_p \Omega \sin\varphi_p = \frac{1}{2} Z A_p^2 \Omega^2 \sin\varphi_p \end{aligned} \tag{6.29}$$

on Z s'anomena ***impedància mecànica***:

$$Z = \frac{F_0}{A_p \Omega} = M_I \sqrt{4\gamma^2 + \left(\Omega - \frac{\omega_0^2}{\Omega}\right)^2} \tag{6.30}$$

i $F_0 = M_I B$.

Com veiem, si la pulsació Ω coincideix amb la de ressonància de velocitat, $\Omega = \omega_0$, $A_p\Omega$ serà màxima i $\sin\varphi_p = 1$. Així, podem dir:

➔ **Potència d'excitació màxima**. En ressonància de velocitat, la potència mitjana desenvolupada per l'excitador és màxima.

La diferència entre Ω_{RV} i Ω_{RA} és

$$\frac{\Omega_{RV} - \Omega_{RA}}{\Omega_{RV}} = \left(\frac{\gamma}{\omega_0}\right)^2 + O\left(\left(\frac{\gamma}{\omega_0}\right)^4\right) \tag{6.31}$$

Per a esmorteïments relativament petits, $\gamma \ll \omega_0$, tindrem $\Omega_{RV} = \Omega_{RA} \simeq \omega_0$. En aquests casos, és exclusivament la pulsació lliure ω_0 la que caracteritza el comportament ressonant del sistema.

→7

7 Ones mecàniques

Introducció

Fins ara, hem estudiat la matèria en un model de sòlid rígid. Ara considerem l'estructura interna d'aquesta matèria. Prenem un bloc de material sòlid homogeni i hi fem una ullada per dins. No cal que arribem al nivell atòmic! N'hi ha prou que considerem volums suficientment grans perquè, en situació d'equilibri, la quantitat de matèria que continguin es mantingui constant. Aquestes porcions interaccionen les unes amb les altres. Podem construir un model representant cada volum de matèria per una partícula. Les diferents partícules les unim amb molles que, per a petites desviacions de l'equilibri, sabem que, pel que hem après al capítol capítol 6, representen bé les forces d'interacció (vegeu la figura 7.1).

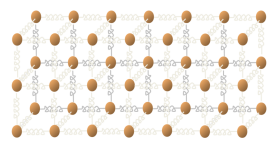


Fig. 7.1: Model de matèria més enllà de la rigidesa

Fet això, si desplaçem sobtadament una de les partícules de la posició d'equilibri, internament tot comença a vibrar! Diem que pel medi es propaga una ona (vegeu la figura 7.2).

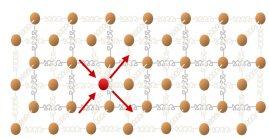


Fig. 7.2: El desplaçament sobtat de només una de les partícules provocarà la propagació d'una ona pel medi

En aquest capítol, estudiarem com tractar els moviments interns de la matèria, quan aquesta deixa de ser rígida i passa a tenir propietats elàstiques.

7.1 Ones

Si **pertorbem** localment alguna de les propietats d'un medi, la pertorbació es transmetrà a tot el medi. La propagació d'aquesta pertorbació s'anomena ***ona*** o ***moviment ondulatori***. Pel fet que tractem de pertorbacions mecàniques, pertorbacions d'algunes de les propietats dels medis materials, diem que tractem amb **ones mecàniques**. Si no hi ha confusió, en direm simplement ones. El punt o conjunt de punts on es produeix la pertorbació inicial s'anomena ***focus***.

Pensem en algunes experiències quotidianes relacionades amb les ones.

a) Si tibem d'un punt d'una corda tensa (vegeu la figura 7.3 (a)), observarem com la deformació produïda es transmet a una velocitat v (vegeu la figura 7.3 (b)).

Si la corda està més tensa, la velocitat de propagació serà més gran.

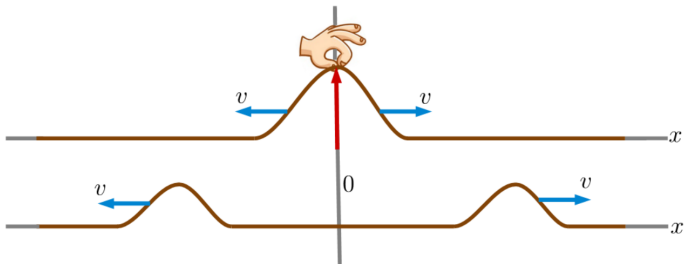


Fig. 7.3: Propagació d'una pertorbació en una corda tensa

b) Si donem un cop de martell a una via del tren, al cap de poc, una persona allunyada notarà la vibració causada tocant la via amb la mà.

c) Si tirem una pedra a l'aigua d'un estany, observem com la pertorbació es va estenent circularment per tota la superfície, a una velocitat constant.

d) Si fem explotar un petard, la ràpida combustió de la pólvora provoca el desplaçament dels gasos que comprimeixen la capa esfèrica d'aire més pròxima al petard. Com que l'aire és molt elàstic, després de ser comprimit s'expandeix, comprimint la capa esfèrica que envolta la primera capa. I així, successivament. El resultat és una ona sonora que es propaga esfèricament per l'aire.

Totes les ones mecàniques tenen uns trets comuns que són:

- Hi ha un **medi** i una propietat d'aquest medi que pot ser pertorbada. Aquesta pertorbació l'anomenem ***funció d'ona*** o ***camp***. En equilibri, la funció d'ona és nul·la.

  – En el cas d'una corda tensa, la corda defineix l'eix x (vegeu la figura 7.3). La funció d'ona és el desplaçament transversal y de cada punt de la corda respecte de la seva posició d'equilibri, $y = 0$. Com que cada punt de la corda queda determinat per la seva posició x, i el desplaçament y de cada punt depèn del temps, l'ona a tota la corda queda caracteritzada per una funció de dues variables, $y(x, t)$, que és la funció d'ona de la corda.

- En les ones mecàniques, les partícules que constitueixen el medi, de mitjana, no es mouen; només oscil·len lleugerament al voltant de la seva posició d'equilibri. Les ones no transporten matèria. Sí que podem dir que les ones propaguen energia i quantitat de moviment.

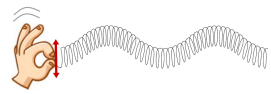


Fig. 7.4: Una molla llarga representa bé un model de medi continu unidimensional. Podem generar una ona transversal desplaçant transversalment algunes espires de la molla llarga

Si la velocitat d'oscil·lació és perpendicular a la direcció de propagació, diem que es tracta d'***ones transversals*** (vegeu la figura 7.4).

Si la velocitat d'oscil·lació té la mateixa direcció que la de propagació, diem que es tracta d'***ones longitudinals*** (vegeu la figura 7.5).

Si la pertorbació és un desplaçament, longitudinal o transversal, en podem dir ***elongació***, d'acord amb el que hem vist al capítol 6.

Si la pertorbació inicial és molt breu, l'ona que es propaga pel medi s'anomena ***pols ondulatori***. Aquest és el cas de la figura 7.3.

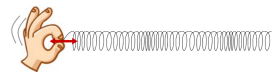


Fig. 7.5: Ona longitudinal provocada pel desplaçament longitudinal d'algunes espires en una molla llarga

Si la pertorbació inicial consisteix en una oscil·lació durant un cert interval de temps Δt, el que tindrem és un **tren d'ones**. A la figura 7.6, es mostra un tren d'ones harmòniques. Si l'interval Δt és molt gran, $\Delta t \to \infty$, el tren d'ones harmòniques s'haurà convertit en una **ona harmònica**. Les ones harmòniques, com veurem ben aviat, són un cas ideal d'ones molt important.

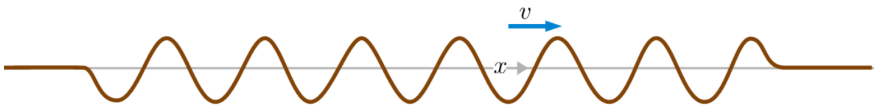


Fig. 7.6: Un cas particular de tren d'ones. Si la pertorbació inicial consisteix en una oscil·lació harmònica que es perllonga un temps Δt, s'obté un tren d'ones harmòniques de longitud $v\Delta t$

Fronts d'ona

Un medi s'anomena ***homogeni*** si, fixada una direcció, la velocitat de propagació és independent del punt que considerem.

Un medi s'anomena ***isòtrop*** si la velocitat de propagació és la mateixa en totes les direccions; en cas contrari, és ***anisòtrop***.

Un medi s'anomena ***no dispersiu*** si, a cada punt, totes les ones tenen la mateixa velocitat.

Un medi s'anomena ***no dissipatiu*** si el medi no absorbeix l'energia que transporta l'ona.

S'anomena ***medi ideal*** el medi que és, a la vegada, homogeni, isòtrop, no dispersiu i no dissipatiu. En un medi ideal, la velocitat de propagació de les ones és constant.

S'anomenen ***fronts d'ona*** les regions del medi connectades per punts amb un mateix valor de la pertorbació. Dels punts d'un front d'ones, se'n diu que estan ***en fase***. La direcció de propagació és perpendicular als fronts d'ona.

En un medi ideal, si el focus és puntual o esfèric, el front d'ones serà esfèric. Si el focus és pla, el front d'ones també ho serà. Lluny del focus, un front d'ones esfèric esdevé aproximadament pla (vegeu la figura 7.7). En un medi ideal, una **ona plana** o unidimensional és la causada per un focus pla. A la pràctica, lluny d'un focus puntual o localitzat, tindrem una ona plana. En un medi ideal, una ona plana es

caracteritza perquè té una única direcció de propagació amb velocitat constant.

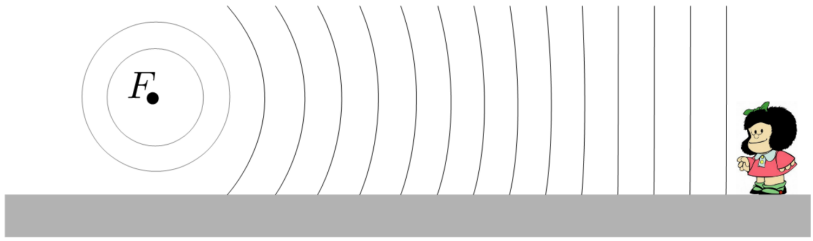


Fig. 7.7: Un focus puntual dona lloc a fronts d'ona esfèrics. Lluny del focus, aquests fronts d'ona són aproximadament plans. Lluny del focus, podem tractar l'ona com a plana

Les ones en una corda tensa o en una barra llarga i estreta són exemples d'ones planes o unidimensionals, ja que es propaguen només en una direcció.

L'aire de l'atmosfera, en una franja d'uns pocs metres i sense gradients de temperatura importants, es pot considerar un medi ideal per a les ones sonores.

Els fronts d'ona donen una imatge molt clara de la propagació de les ones. De fet, l'estudi de les ones va començar al segle XVII quan Christiaan Huygens va introduir el principi que porta el seu nom.

Fig. 7.8: Christiaan Huygens (1629-1695) va ser un matemàtic, físic i astrònom neerlandès

➔ ***Principi de Huygens***. *Qualsevol punt d'un front d'ona és susceptible de convertir-se en un nou focus emissor d'ones idèntiques a les que el van originar.*

Aquest principi permet explicar i preveure fenòmens com la reflexió, la refracció i, sobretot, la difracció de les ones. Huygens va establir el seu principi per demostrar que la llum és algun tipus d'ona, en contra de l'opinió de Newton, que creia que la llum no era més que un feix de partícules. Ja al el segle XIX, primer Fresnel i després Kirchhoff van millorar l'enunciat del principi i, de fet, Kirchhoff va demostrar que era una conseqüència de l'equació d'ones, que veurem a la secció 7.2. Com que en aquest text estudiarem les ones des del punt de vista de la mecànica, no tractarem el principi de Huygens. Només al final del capítol 8 comentarem què és la difracció.

7.2 Ones planes i equació d'ones

Ones planes: la funció d'ona

Tractarem de les ones planes en un medi ideal. Per aquest tipus de medi:

a) la velocitat de propagació v és una constant característica del medi i

b) la pertorbació conserva la forma mentre es propaga (vegeu la figura 7.9)

Amb aquestes dues condicions, una ona plana, descrita per la funció d'ona y, que

en situació d'equilibri val $y = 0$, serà qualsevol funció y de x i t de la forma

$$y(x,t) = y(x - vt) \qquad \text{o bé} \qquad y(x,t) = y(x + vt) \tag{7.1}$$

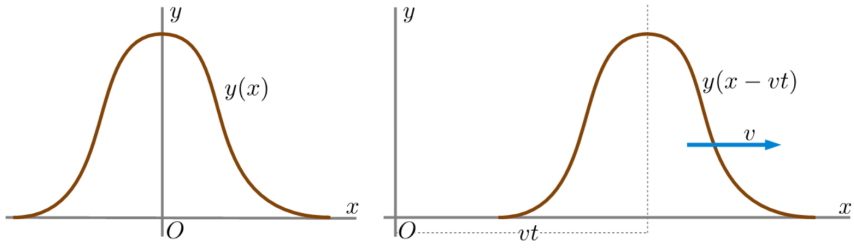


Fig. 7.9: La mateixa pertorbació a l'instant inicial $t = 0$ i en un instant posterior t en què s'ha propagat en el sentit de les x creixents

Observant la figura 7.9, podem veure que $y(x - vt)$ compleix les condicions **a** i **b**. Els fronts d'ona seran els punts que tenen el mateix argument de la funció d'ona, és a dir, punts en què $x - vt = C$, essent C una constant. Així, per a qualsevol instant t, els fronts d'ona són del tipus $x = C + vt =$ constant. Per a cada t són plans, d'aquí ve el nom d'ones planes (vegeu la figura 7.10). Aquests plans viatgen a la velocitat $\dot{x} = v$. Així $y = y(x - vt)$ representa una pertorbació que es propaga en el sentit creixent de l'eix x a velocitat v. $y = y(x + vt)$ representa una pertorbació que es propaga en el sentit decreixent de l'eix x a velocitat v.

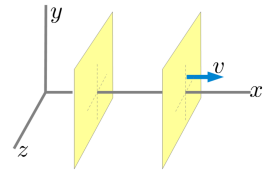


Fig. 7.10: Els fronts d'ona d'una ona plana són plans paral·lels entre si

Cal distingir entre la velocitat d'oscil·lació i la de propagació. Si l'ona és plana i viatja en la direcció de l'eix x, tindrà la forma genèrica $y(x,t)$.

➜ La **velocitat d'oscil·lació**, v_{osc}, és

$$v_{\text{osc}}(x,t) = \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} \tag{7.2}$$

➜ La **velocitat de propagació** v_{prop}, per a un medi ideal, és la velocitat $v_{\text{prop}} = |\dot{x}|$ tal que $y = y\big(x(t),t\big)$ és constant. Així:

$$\frac{dy}{dt} = 0 = \frac{\partial y}{\partial x}\,\dot{x} + \frac{\partial y}{\partial t}$$

d'on resulta

$$v_{\text{prop}} = |\dot{x}| = \left| \frac{\frac{\partial y}{\partial t}}{\frac{\partial y}{\partial x}} \right| \tag{7.3}$$

Si l'ona és transversal, $\vec{v}_{\text{osc}} \perp \vec{v}_{\text{prop}}$ i, si és longitudinal, $\vec{v}_{\text{osc}} \| \vec{v}_{\text{prop}}$. Si el medi és ideal, sabem que l'ona plana té la forma $y(x,t) = y(x \pm vt)$ i la velocitat de propagació resulta ser $v_{\text{prop}} = v$.

Ones planes: equació d'ones

Si tenim en compte els dos sentits possibles de propagació, una ona plana pot tenir la forma

$$y(x,t) = y(x - \varepsilon v t) \qquad \text{on} \qquad \varepsilon = \pm 1 \tag{7.4}$$

Totes les possibles ones planes d'un medi es poden caracteritzar per una equació diferencial que tingui per incògnita $y(x,t)$ i que pot dependre de v, que és una característica del medi, però no de ε.

Per trobar aquesta equació, eliminant ε, haurem de derivar (7.4). Ara bé, $y(x,t) = Y(u)$, on $u = x + \varepsilon v t$. Aplicant la regla de la cadena

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{dY}{du}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{dY}{du} \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{d^2Y}{du^2}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{d^2Y}{du^2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{dY}{du}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{dY}{du}\varepsilon v \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{d^2Y}{du^2}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{d^2Y}{du^2}\varepsilon^2 v^2$$

Com que $\varepsilon = \pm 1$, $\varepsilon^2 = 1$, amb les derivades segones eliminem ε. Eliminant $\frac{d^2Y}{du^2}$, trobem l'**equació d'ones** planes:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \tag{7.5}$$

que és l'equació d'ones que es propaguen en una sola direcció, la x. Per a ones propagant-se en diferents direccions, fronts d'ona no plans, cal considerar les tres dimensions de l'espai x, y, z. Anomenant ψ la funció d'ona, i amb raonaments semblants als que s'han fet per a una dimensió, l'equació d'ones és

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \tag{7.6}$$

Principi de superposició

L'equació d'ones (7.5) és una equació en derivades parcials **lineal**. La demostració és senzilla: siguin $y_1(x,t)$ i $y_2(x,t)$ dues ones, és a dir, dues funcions que satisfan l'equació d'ones

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} = 0$$

Qualsevol combinació lineal de les dues, $ay_1 + by_2$, amb a i b constants arbitràries, compleix l'equació d'ones (7.5):

$$\frac{\partial^2 (ay_1 + by_2)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 (ay_1 + by_2)}{\partial t^2} = a\left[\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2}\right] + b\left[\frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2}\right] = 0$$

El fet que l'equació d'ones sigui lineal significa que està d'acord amb el **principi de superposició**, que simplifica extraordinàriament el comportament i l'estudi de les ones.

➔ ***Principi de superposició de les ones***. *Si per un medi es propaga més d'una ona, cadascuna es propaga sense veure's afectada per les altres.*

Com que $y_1(x,t) = f(x - vt)$ i $y_2(x,t) = g(x + vt)$ són solucions de l'equació d'ones, aplicant el principi de superposició trobem la **solució general de l'equació d'ones**

$$y(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt) \tag{7.7}$$

on f i g són dues funcions arbitràries.

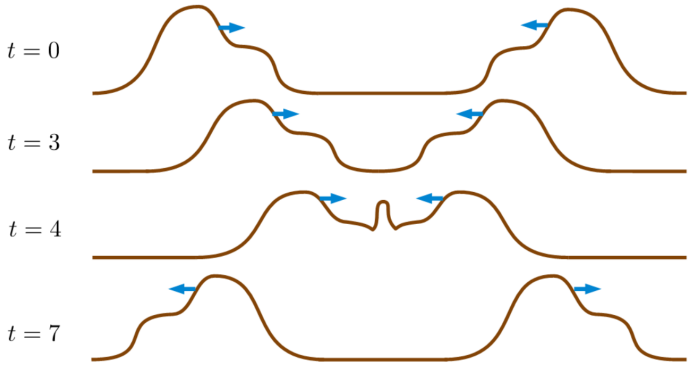


Fig. 7.11: Si en una corda es propaguen dos polsos de sentits contraris, l'elongació de cada punt de la corda serà la suma d'elongacions que produirien cadascun dels polsos per separat

A la figura 7.11, podem veure un cas que il·lustra el principi de superposició.

Problema 7.2.1. A l'instant $t = 0$, es dóna un cop a una cadena llarga i tensa, que inicia la propagació d'una ona plana (pols ondulatori) que es pot expressar com

$$y(x,t) = \frac{1}{12 + (x + 14t)^2} \tag{7.8}$$

on x i y estan en m i el temps t en s. $y(x,t)$ és semblant a la que es mostra a la figura 7.9.

a) Comproveu que aquesta funció és una ona plana i trobeu la velocitat a què es propaga. Quant valdrà la màxima elongació que experimentarà cada petita baula de la cadena a mesura que es propaga l'ona?

b) Si $y(x,t)$ és un pols, quina amplada aproximada podem dir que té?

c) Quant val la velocitat d'oscil·lació d'un punt qualsevol x de la cadena?

d) A l'instant $t = 0$, quins punts tindran la màxima velocitat d'oscil·lació?

Solució

a) Efectivament, la funció $y(x,t)$ de (7.8) es pot expressar en la forma: $y = f(x-vt)$; per tant, és una ona que es propaga a la velocitat de $14\,\mathrm{m/s}$ en el sentit decreixent de les x. També podem veure-ho comprovant que satisfà l'equació d'ones (7.5).

Per a una x determinada, la màxima elongació y serà quan el denominador de (7.8) sigui mínim: $x + 14t = 0$. Així doncs, per a cada x, la màxima y serà: $y_{\max} = 1/12 = 0{,}0833\ \mathrm{m}$.

b) Per a un valor estimatiu, prenem com a amplada del pols la distància entre els punts de la corda que tinguin una elongació $y = 1/10\, y_{\max}$. Com que la forma del pols no canvia, podem treballar a $t = 0$,

$$\frac{1}{10}\,\frac{1}{12} \approx \frac{1}{12 + x^2} \qquad \text{d'on} \qquad x \approx \pm 10\ \mathrm{m}$$

Per tant, l'amplada del pols és de l'ordre dels $20\,\mathrm{m}$.

c) Per trobar la velocitat d'oscil·lació, hem de derivar y

$$v_{\text{osc}} = \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{-28(x+14t)}{\left[12 + (x+14t)^2\right]^2}$$

d) Per a un t donat, el punt x del pols que tindrà la màxima velocitat d'oscil·lació ve donat per

$$\frac{\partial v_{\text{osc}}}{\partial x} = 0 \;= \frac{-28 \cdot 14\left[12 + (x+14t)^2\right] + 112(x+14t)^2}{\left[12 + (x+14t)^2\right]^3}$$

d'on $(x + 14t)^2 = 4$ Si $t = 0$, llavors $x = \pm 2\,\mathrm{m}$. Atès que la forma del pols es manté, els dos punts amb màxima velocitat d'oscil·lació estan a $2\,\mathrm{m}$ del màxim del pols. ■

Ones harmòniques

A la figura 7.12, la vareta d'un vibrador descriu un moviment harmònic simple (MHS) de pulsació ω. Una corda indefinidament llarga, tensa, té un extrem fixat a la vareta. El moviment es transmet a la corda i la seva propagació és una ona. Si no hi ha dissipació, passat un temps, l'ona abastarà un tram molt llarg de corda, de manera que podrem dir que tots els punts de la corda allunyats de l'extrem faran un MHS. Com que el MHS de la vareta no s'atura, tots els punts de la corda, en tot moment, fan un MHS.

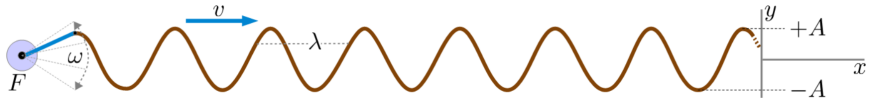


Fig. 7.12: La vareta descriu un moviment harmònic simple (MHS) que es propaga a la corda tensa fixada al seu extrem

L'ona de la figura 7.12 és una ona plana que s'anomena ***ona harmònica***. Una ona harmònica que es propaga en el sentit creixent de les x és una funció de la forma

$y(x,t) = f(x-vt)$ en què cada punt x fa un MHS de pulsació ω. Aquests requisits ens imposen la forma general

$$y(x,t) = A\sin(kx - \omega t + \phi) \tag{7.9}$$

on A, k, ω i ϕ són constants amb $\frac{\omega}{k} = v$. Així, tindrem

$$y(x,t) = A\sin(k(x - vt) + \phi) \tag{7.10}$$

i es compleix $y(x,t) = f(x - vt)$.

Els paràmetres que caracteritzen una ona harmònica són:

- **Amplitud** A. És la magnitud que proporciona les dimensions físiques a y. Si és una ona de desplaçament, A té dimensions de longitud. Si és una ona sonora de pressió, A té dimensions de pressió.

- **Període** T (s en el S.I.). Si filmem un punt de la corda, situat horitzontalment a $x = x_0$, llavors $y(t) = y(x_0,t)$ és el moviment vertical d'aquest punt. A la figura 7.13, es representa $y(t)$. T és el període temporal de l'ona o simplement **període**.

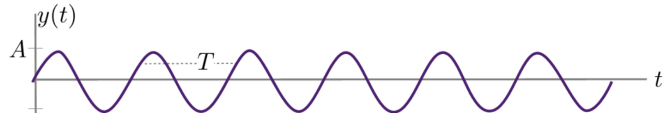


Fig. 7.13: Moviment harmònic simple efectuat per la pertorbació y en el punt x_0 al llarg del temps t

- **Pulsació o freqüència angular** ω (rad/s en el S.I.). Podem trobar la relació amb el període tenint en compte la definició d'aquest últim:

$$kx - \omega(t+T) + \phi = kx - \omega t + \phi - 2\pi$$

d'on trobem

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

- **Freqüència** f (s^{-1} = Hz en el S.I., Hz= hertz). $f = 1/T$

- **Longitud d'ona** λ (m en el S.I.). Si aturem el temps, $t = t_0$, llavors $y(x) = y(x,t_0)$ és una "foto" de l'ona. A la figura 7.14, es representa $y(x)$. λ és el període espacial de l'ona.

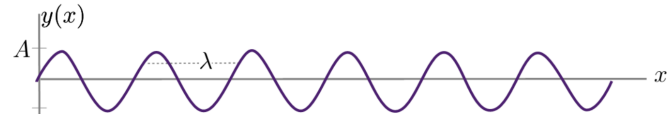


Fig. 7.14: Forma de la funció d'ona y a l'instant t_0 al llarg de la coordenada x del medi

- **Nombre d'ones** k (rad/m en el S.I.). Podem trobar la relació entre k i la longitud d'ona tenint en compte la definició d'aquesta última

$$k(x+\lambda) - \omega t + \phi = kx - \omega t + \phi + 2\pi$$

d'on trobem

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

- **Velocitat de propagació o de fase** v (m/s en el S.I.). Podem trobar la relació amb ω i k, tenint en compte que la fase ha de ser una funció de $x - vt$:

$$kx - \omega t + \phi = k(x - \frac{\omega}{k}t) + \phi = k(x - vt) + \phi$$

així

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$$

- **Fase** $\varphi(x,t)$ (rad en el S.I.). És l'argument de la funció sinus de (7.9): $\varphi(x,t) = kx - \omega t + \phi$. Es mesura en rad, mai en graus! Així, ϕ és la **fase inicial**, a $t = 0$, i l'origen $x = 0$. Els punts amb la mateixa fase presenten el mateix estat de moviment.

  Un **desfasament** és un increment de la fase $\Delta\varphi$:

  – Entre dos punts x al mateix instant t: $\Delta\varphi = \varphi(x_2,t) - \varphi(x_1,t) = k(x_2 - x_1)$. Si $x_2 = x_1 + n\lambda$, amb n enter, aquests dos punts tenen la mateixa fase, mòdul 2π.

  – Entre dos instants t al mateix punt x: $\Delta\varphi = \varphi(x,t_2) - \varphi(x,t_1) = \omega(t_2 - t_1)$.

  Amb el valor adequat de ϕ, la mateixa ona (7.9) es pot escriure de diverses maneres. Per exemple,

$$y(x,t) = A\cos(kx - \omega t + \phi') = A\sin(\omega t - kx + \phi'')$$

  Per avaluar desfasaments entre dues funcions harmòniques, les dues s'han d'expressar en forma de sin o les dues en forma de cos. En aquest text, optarem per sin.

Si l'ona es propaga en el sentit contrari, decreixent en x, com que $y = f(x + vt)$, tindrem $y(x,t) = A\sin(kx + \omega t + \phi)$.

Problema 7.2.2. Per una corda es propaga l'ona harmònica següent

$$y(x,t) = 3 \times 10^{-3} \cos\left[200\pi\left(t - \frac{x}{20}\right)\right] \qquad (1)$$

on totes les magnituds estan en el S.I. Per a aquesta ona, esbrineu quant valen:

a) l'amplitud, el període, la freqüència, la longitud d'ona i la velocitat de fase;

b) la velocitat i l'acceleració transversals màximes d'un punt qualsevol de la corda;

c) la distància que separa dos punts consecutius separats per un desfasament de $\pi/3$ rad.

Solució

Per fer que (1) s'assembli a (7.9), es pot escriure com

$$y = 3\times10^{-3}\sin\left(10\pi x - 200\pi t\ + \frac{\pi}{2}\right) = A\sin\left(kx-\omega t+\frac{\pi}{2}\right) \qquad (2)$$

a) Ara, comparant (2) amb (7.9), n'obtenim:

Amplitud:	$A = 3\times10^{-3}$ m
Nombre d'ona:	$k = 10\pi = 31{,}42$ rad/m
Freqüència angular:	$\omega = 200\pi = 628{,}3$ rad/s
Longitud d'ona:	$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{1}{5} = 0{,}20$ m
Període:	$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{100} = 0{,}010$ s
Velocitat de fase:	$c = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = 20$ m/s

b) Tots els punts de la corda fan un MHS en la direcció de l'eix y. La velocitat i l'acceleració d'oscil·lació vénen donades per

$$v_{\text{osc}} = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A\cos(kx-\omega t+\phi)$$
$$a_{\text{osc}} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 A\sin(kx-\omega t+\phi) = -\omega^2 y(x,t)$$

Els màxims valen

- Màxima velocitat: $v_{\text{max}} = \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{max} = \omega A = 0{,}6\pi = 1{,}885\,\text{m/s}$
- Màxima acceleració: $a_{\text{max}} = \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)_{max} = \omega^2 A = 120\pi^2 = 1184\,\text{m/s}^2$

c) La diferència de fase val $\Delta\varphi = k\Delta x$. Així, si $\Delta\varphi = \pi/3$ rad, tenim

$$\Delta x = \frac{\Delta\varphi}{k} = \lambda\frac{\Delta\varphi}{2\pi} = \frac{1}{30} = 0{,}0333\,\text{m}$$ ■

7.3 De les lleis de Newton a l'equació d'ones

La mecànica newtoniana prediu l'existència d'ones en els medis elàstics i dóna l'expressió de la velocitat de propagació en funció de les propietats del medi.

Ones en una corda tensa

Sigui una corda tensa molt flexible, de densitat lineal μ (kg/m en el S.I. d'unitats), per la qual es propaga una ona transversal. La posició de la corda en equilibri

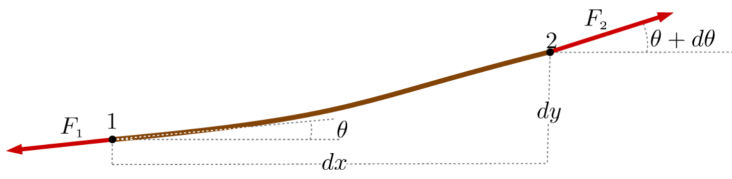


Fig. 7.15: Un diferencial de corda

defineix l'eix x. A la figura 7.15, es mostra un diferencial de corda, el corresponent entre els punts 1 i 2, en moviment i les dues tensions $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ a què està sotmès.

Aplicarem la segona llei de Newton a aquest diferencial de corda, que tractarem com una partícula. Tractarem el problema per a petites oscil·lacions i grans tensions. En conseqüència:

- $\theta \ll 1$ i $\sin\theta \approx \tan\theta \approx \theta$
- El diferencial de corda només té un moviment apreciable transversalment.
- $dm = \mu\, dx$.
- Les tensions $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ tenen el mateix mòdul: $F_1 \approx F_2 \approx F$.
- La corda tensa en equilibri és horitzontal. La força pes es pot negligir.

Amb aquestes suposicions, la suma de les forces transversals que actuen sobre $dm = \mu dx$ és

$$\begin{aligned} F_y &= F_{1_y} + F_{2_y} = -F\sin\theta + F\sin(\theta + d\theta) \approx \\ &\approx F(-\theta + \theta + d\theta) = F\, d\theta \end{aligned}$$

Com que el pendent del diferencial de corda és la derivada

$$\tan\theta \approx \theta = \frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial x}$$

tenim

$$d\theta = \frac{d\theta}{dx}\, dx = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\, dx$$

D'altra banda, l'acceleració transversal val $a_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$. Així doncs, la segona llei de Newton, $F_y = dm\, a_y$, és

$$F\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\, dx = \mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{7.11}$$

d'on resulta l'equació d'ones

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\mu}{F}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \tag{7.12}$$

de la qual deduïm, per comparació amb (7.5), que la velocitat de propagació de les ones és

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \tag{7.13}$$

Si introduïm la secció S de la corda a l'expressió (7.13), n'obtenim

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{F/S}{\mu/S}} = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \tag{7.14}$$

on ρ és la densitat volúmica. Tornem a veure que la velocitat de propagació està relacionada amb les característiques del medi segons $\sqrt{\frac{\text{esforç}}{\text{densitat}}}$.

Problema 7.3.1. Un fil recte i llarg d'acer, de $0{,}50$ mm de radi, es penja del sostre. Si en suspenem de l'extrem lliure un cos de 10 kg de massa, determineu la velocitat del pols que es propaga pel fil si desplacem transversalment una mica un punt qualsevol i el deixem anar.
Dada. La densitat de l'acer és $\rho_{\text{acer}} = 7{,}80 \times 10^3\ \text{kg/m}^3$.

Solució
Apliquem la fórmula (7.13), prenent com a tensió del fil: $F = mg = (10\,\text{kg}) \times (9{,}81\ \text{m/s}^2) = 98{,}1\,\text{N}$.
La densitat lineal del fil és

$$\mu = \frac{m}{\ell} = \frac{\rho\pi r^2\,\ell}{\ell} = \rho\pi r^2 = 6{,}123 \times 10^{-3}\ \text{kg/m}$$

Per tant, la velocitat és $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = 126{,}5\,\text{m/s}$ ■

Model simple de barra sòlida

Sigui una cadena molt llarga, recta, de N parelles molla-partícula idèntiques, connectades entre si, com s'il·lustra a la figura 7.16. Les molles tenen constant recuperadora k i les partícules, massa m. h és la distància entre partícules en equilibri. Fixem-nos en una massa qualsevol, i, inicialment en equilibri a la posició x_i. La massa anterior és a x_{i-1} i la posterior a x_{i+1}.

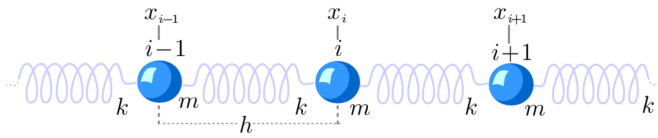


Fig. 7.16: Model simple de barra sòlida en equilibri

Quan per aquesta cadena hi passa una ona, les posicions de les masses variaran. La massa i es desplaçarà s_i.

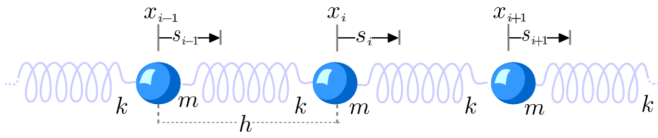


Fig. 7.17: Model simple de barra sòlida en equilibri quan una ona es propaga longitudinalment

Observant la figura 7.17, podem escriure l'equació de moviment de la partícula i aplicant-hi la segona llei de Newton:

$$m\,\frac{d^2 s_i}{dt^2} = +k(s_{i+1} - s_i) - k(s_i - s_{i-1})$$

que, multiplicant i dividint per h, podem reescriure com

$$\frac{m}{h}\,\frac{d^2 s_i}{dt^2} = kh\left\{\frac{\left(\frac{s_{i+1}-s_i}{h}\right) - \left(\frac{s_i - s_{i-1}}{h}\right)}{h}\right\} \tag{7.15}$$

Si h és molt petita i N molt gran, podem fer el pas al continu: mantenint la longitud de la cadena, $L = Nh$, finita, fem $N \to \infty$, a la vegada que $h \to 0$. En lloc de pensar que la partícula i, de posició d'equilibri x_i, és desplaçada s_i, pensarem que la partícula de posició d'equilibri x és desplaçada s. En aquest cas, s passa a ser una funció contínua de x i del temps t, $s(x,t)$. Així, podem aproximar el membre de la dreta de (7.15) per derivades parcials:

$$\lim_{h\to 0}\left\{\frac{\left(\frac{s_{i+1}-s_i}{h}\right) - \left(\frac{s_i - s_{i-1}}{h}\right)}{h}\right\} = \lim_{h\to 0}\frac{\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)_x - \left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)_{x+h}}{h} = \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} \tag{7.16}$$

D'altra banda, la derivada ordinària del membre de l'esquerra de (7.15) la podem entendre com a derivada parcial ja que s_i és ara $s(x,t)$. Per tant, de (7.16), (7.15) acaba quedant com l'equació d'ones

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\,\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0 \qquad \text{amb} \qquad v = h\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{7.17}$$

És a dir, a la cadena de molles-masses, una pertorbació longitudinal es propaga d'una massa a la següent com una ona de velocitat v donada per (7.17).

Com ja hem comentat, (7.17) és correcta si la longitud h és molt petita respecte de la longitud d'ona de l'ona harmònica que es propagui per la cadena. Si l'ona que es propaga no és una ona harmònica sinó un pols ondulatori, h ha de ser molt més petita que l'amplada del pols.

No cal que h sigui la longitud natural de la molla. Si ho és, podem entendre que, en equilibri, la cadena no està sotmesa a cap tensió externa. Si no ho és, entendrem que, en equilibri, la cadena està sotmesa a una tensió o compressió externa constant.

Malgrat que es tracta d'un model, podem reescriure la velocitat de propagació (7.17), introduint la secció S de la cadena, com

$$v = h\sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{hk/S}{m/(hS)}} = \sqrt{\frac{\tau_1}{\rho}} \tag{7.18}$$

on $\rho = \frac{m}{hS}$ és la densitat volúmica mitjana de la cadena i $\tau_1 = \frac{hk}{S}$ pot entendre's com l'esforç que fa que la deformació sigui $\Delta L = L$ La tensió corresponent és $F = \tau_1 S$.

Ones longitudinals i transversals en una barra sòlida

Considerem una barra llarga, homogènia, de longitud L, secció recta uniforme S i densitat volúmica ρ (vegeu la figura 7.18). La barra té un comportament elàstic lineal per tracció/compressió longitudinal. Això vol dir que, si s'aplica a cadascun dels dos extrems de la barra una força F de tracció (positiva, cap enfora) o de compressió (negativa, cap endins), la barra s'allargarà o s'escurçarà, respectivament, una petita longitud ΔL proporcional a l'esforç F/S

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{Y}\frac{F}{S} \tag{7.19}$$

on Y és el **mòdul de Young** que caracteritza l'elasticitat de la barra, té dimensions de pressió i se sol mesurar en GPa $= 10^9$ Pa.

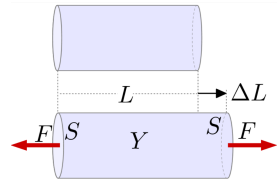


Fig. 7.18: Barra llarga, homogènia, de longitud L, secció recta uniforme S i densitat volúmica ρ, sotmesa a una força de tracció F

Podem tractar la barra seguint el model de molles-masses que hem estudiat anteriorment. En particular, podem utilitzar (7.18) per a la velocitat de les ones longitudinals a la barra. L'esforç τ_1 el trobem a partir de (7.19) amb $\Delta L = L$, és a dir, $\tau_1 = Y$. La velocitat de propagació de les ones longitudinals a la barra, v_L, serà així

$$v_L = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \tag{7.20}$$

A la taula 7.1, es donen el mòdul de Young, la densitat i la velocitat v_{long} de les ones longitudinals per barres de diversos materials.

	Y	G	ρ	v_{long}	v_{tran}	Z
	($\times 10^9$ Pa)	($\times 10^9$ Pa)	(kg/m^3)	(m/s)	(m/s)	(rayl)
Acer	200	78	7800	5064	3160	$39{,}5\times 10^6$
Alumini	70	26	2700	5092	3100	$13{,}7\times 10^6$
Coure	130	49	8900	3821	2350	$34{,}0\times 10^6$
Vidre	$\sim$60	$\sim$24	$\sim$2500	$\sim$4900	$\sim$3100	$\sim 12{,}3\times 10^6$

Taula 7.1: Mòdul de Young, densitat i velocitats de les ones longitudinals i transversals per a barres de diversos materials. Z és la impedància acústica específica definida al capítol següent

La velocitat (7.20) és vàlida per a barres primes i llargues. En sòlids extensos, la velocitat de les ones longitudinals ve donada per aquesta expressió, multiplicada

per un factor que té en compte altres característiques elàstiques dels materials. Així, per exemple, per a l'acer, el factor de correcció és $1{,}15$ i la velocitat que en resulta, és $5790\,\mathrm{m/s}$.

En els sòlids també es propaguen ones transversals. En aquest cas, la propagació depèn del **mòdul de cisallament o torsió**, G, que relaciona el moment d'un parell de forces aplicades a les cares d'una "llesca de barra" amb la deformació caracteritzada per l'angle θ (vegeu la figura 7.19)

$$\theta = \frac{1}{G}\,\frac{F}{S}$$

La velocitat de les ones transversals v_T, que donem sense demostració, és

$$v_T = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \tag{7.21}$$

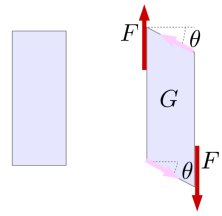


Fig. 7.19: El mòdul G relaciona el moment aplicat a una l'llesca de barra"amb la deformació caracteritzada per θ

que també té la forma $\sqrt{\frac{\text{esforç}}{\text{densitat}}}$. A la taula 7.1, es donen els valors de G per a alguns materials. Es pot demostrar que, per a qualsevol material, $G < Y$. Així

➜ *Per a un mateix material, la velocitat de les ones longitudinals és més gran que la de les ones transversals.*

En els fluids, $G = 0$ i la conseqüència és:

➜ *En el si dels fluids, només es propaguen ones longitudinals.*

Els terratrèmols són la manifestació a la superfície de la Terra de les **ones sísmiques** que es generen quan, en un punt de l'escorça terrestre, xoquen o es mouen grans blocs rocallosos. Les ones sísmiques que es creen comporten ones longitudinals, transversals i d'altres. Parteixen del focus, l'hipocentre, i es propaguen com a ones esfèriques. Sabem que les ones longitudinals són més ràpides (es coneix bastant bé la velocitat mitjana d'aquestes ones) que les transversals i es detecten fàcilment pel fet que arriben abans als observatoris sísmics. Amb tres observatoris que registrin els terratrèmols ja es pot determinar, per triangulació, la posició de l'hipocentre.

Ones longitudinals en un fluid

Sigui una ona plana longitudinal que es propaga en la direcció de l'eix x per un medi fluid. Considerem un tub de fluid, en la direcció de propagació, de secció recta constant S que, en equilibri, té densitat uniforme ρ. L'ona es pot descriure com una **ona de desplaçament** o com una **ona de densitat**.

En el primer cas, la pertorbació és el desplaçament, s, de cada secció recta del tub. Així, la secció inicialment a x passa a estar $x+s$, on s dependrà de x i de t: $s(x,t)$.

A la figura 7.20 (a), es mostra, en equilibri, abans que passi l'ona, el tub i un diferencial o "llesca" de tub limitat per les seccions x_1 i $x_2 = x_1 + dx$. El volum d'aquest diferencial és $S\,dx$ i la massa, $dm = \rho\,S\,dx$.

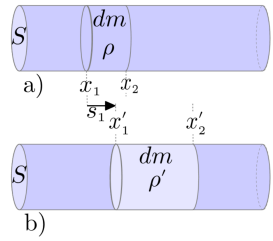


Fig. 7.20: Tub de fluid en la direcció de propagació

A la figura 7.20 (b) es mostra el mateix tub però quan està passant l'ona. Les seccions rectes que limitaven la massa dm a les posicions x_1 i x_2 han passat a estar a $x'_1 = x_1 + s_1$ i $x'_2 = x_2 + s_2$, essent $s_2 = s_1 + ds$. El volum d'aquesta nova llesca diferencial és ara $S\,(dx + ds)$.

Com que ha canviat el volum que ocupava la massa dm, també ha hagut de canviar la densitat en el nou diferencial de volum, que passa de la d'equilibri ρ a $\rho + \rho_p$. La massa dm pot ser expressada com

$$dm = \quad \rho\,S\,dx = (\rho + \rho_p)\,S\,(dx + ds)$$

d'on resulta

$$\rho_p = -(\rho + \rho_p)\frac{ds}{dx}$$

Si ens restringim a l'estudi de petites pertorbacions, $\rho_p \ll \rho$ i, per tant, $\rho + \rho_p \approx \rho$. Com que s és una funció de x i de t, podem escriure ds/dx com una derivada parcial. Obtenim així la relació entre l'ona de densitat i l'ona de desplaçament

$$\rho_p = -\rho\,\frac{\partial s}{\partial x} \tag{7.22}$$

Una pertorbació de densitat ρ_p provoca una pertorbació de pressió p o **pressió acústica**:

$$p \approx dp = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_C d\rho \approx \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_C \rho_p$$

i, tenint en compte (7.22)

$$p = -\rho \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_C \frac{\partial s}{\partial x}$$

és a dir,

$$p = -B\,\frac{\partial s}{\partial x} \tag{7.23}$$

on B és una magnitud pròpia de cada fluid, anomenada ***mòdul de compressibilitat*** que, per a petites variacions de pressió o densitat, és constant. El subíndex C en la derivada anterior és per indicar com es fa el procés de compressió. B té dimensions de pressió i es mesura en Pa. Tenim

$$B = \rho \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_C \qquad \text{o també} \qquad B = -V \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_C \tag{7.24}$$

Podem escriure (7.24) per a petites variacions de volum $\partial V \approx \Delta V$ i pressió $\partial p \approx p$ (vegeu la figura 7.21)

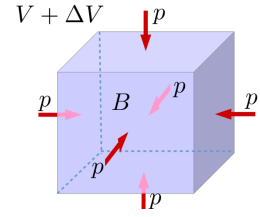


Fig. 7.21: Mòdul de compressibilitat B

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{1}{B}\,p \tag{7.25}$$

A la figura 7.22, es mostra un cilindre llarg de fluid, de secció recta S. Més concretament, es mostra una "llesca" de longitud dx i massa dm. La cara de l'esquerra de la llesca, situada a x, està sotmesa a la pressió $p(x)$ i la cara de la dreta, situada a $x + dx$, sotmesa a la $p(x + dx)$. La força total sobre la llesca, $dF = -F' + F$, val

$$dF = \big[-p(x + dx) + p(x)\big] S = -S\,dp \tag{7.26}$$

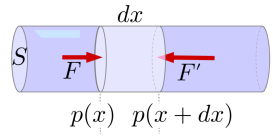


Fig. 7.22: Una llesca de tub de fluid de longitud dx i massa dm

Apliquem la segona llei de Newton a la llesca, $dF = dm\ a$

$$dm\ a = dm\,\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \rho\, S\, dx\,\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$$

i, considerant (7.26) i (7.23),

$$dF = -S\,dp = -S\,B\,\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}\,dx$$

d'on resulta

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\,\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0 \qquad \text{amb} \qquad v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \tag{7.27}$$

que és l'equació de les ones longitudinals en el si d'un fluid.

Fins ara no hem especificat si el fluid és un líquid o un gas. Aquesta dada ens cal per calcular (7.24), ja que la derivada $(dp/d\rho)_C$ depèn del procés C de compressió que es faci. En el cas dels líquids, el procés és purament mecànic i el mòdul B és constant. A la taula 7.2, tenim el mòdul B i la densitat ρ d'alguns líquids, així com la velocitat v de les ones corresponents.

Líquid	B ($\times 10^9$ Pa)	ρ (kg/m^3)	v (m/s)	Z (rayl)
Aigua	2,1	1000	1450	$1{,}45\times10^6$
Glicerina	4,8	1261	1950	$2{,}46\times10^6$
Mercuri	27	13600	1400	$19{,}0\times10^6$

Taula 7.2: Velocitat de les ones en líquids. Z és la impedància acústica específica definida al capítol següent

Ones sonores en un gas

En comprimir un gas, augmenta la densitat, varia la temperatura i hi ha transport de calor. Els dos processos més importants de compressió o expansió d'un gas són l'**isotèrmic** i l'**adiabàtic**. Segons la termodinàmica, les compressions isotèrmiques d'un gas ideal, per a les quals $pV = \text{const.}$, comporten un transport de calor que permet mantenir constant la temperatura. En les compressions adiabàtiques, no hi

ha transport de calor. Els processos ràpids solen representar-se bé per processos adiabàtics.

En les ones sonores, les compressions i les expansions són tan ràpides i els gasos tan mals conductors de la calor que les podem considerar processos adiabàtics. La relació entre la pressió i el volum en el cas d'un gas ideal és $pV^\gamma = \text{const.}$, i entre la pressió i la densitat $p/\rho^\gamma = \text{const.}$, on γ és el **coeficient adiabàtic** del gas. Si el gas és monoatòmic, $\gamma = 5/3$ i, si és diatòmic, $\gamma = 7/5$. L'aire pot ser considerat diatòmic.

Per als processos adiabàtics d'un gas ideal, el mòdul B (7.24), tenint en compte $p/\rho^\gamma = \text{const.}$, és

$$B = \rho \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_{\text{adiab}} = \gamma\, p \tag{7.28}$$

Així doncs, a partir de (7.27) i (7.28), la velocitat de propagació d'una ona sonora en un gas ideal és

$$v = \sqrt{\frac{\gamma\, p}{\rho}} \tag{7.29}$$

D'acord amb l'equació d'estat dels gasos ideals, $p = \frac{\rho}{M} RT$, on M és la massa molar del gas, en kg, T és la temperatura absoluta, en kelvin, K; i R és la constant universal dels gasos, $R = 8{,}314\,\text{Jmol}^{-1}\text{K}^{-1}$, la velocitat del so en un gas ideal es pot escriure com

$$v = \sqrt{\frac{\gamma\, R\, T}{M}} \tag{7.30}$$

Donat el gas, la velocitat només depèn de la temperatura.

A la taula 7.3, s'indiquen els valors de la velocitat del so en alguns gasos ideals a $15°C$ i la densitat del gas a $1\,\text{atm} = 1{,}013 \times 10^5\,\text{Pa}$.

Gas	ρ (kg/m^3)	v (m/s)	Z (rayl)
Heli, He	0,169	916	155
Hidrogen, H_2	0,0845	1295	109
Aire	1,23	340	418

Taula 7.3: Velocitat del so en gasos, a $15°\text{C} = 288{,}2\,\text{K}$. Z és la impedància acústica específica definida al capítol següent

7.4 Anàlisi i síntesi de Fourier

El principi de superposició ens diu que, si tenim dues ones harmòniques planes en un medi de velocitat de propagació v,

$$y_1(x,t) = A_1 \sin(\omega_1 t - k_1 x + \varphi_{10}) \qquad y_2(x,t) = A_2 \sin(\omega_2 t - k_2 x + \varphi_{20})$$

on ω_1, k_1, ω_2, k_2 cal que compleixin $v = \frac{\omega_1}{k_1} = \frac{\omega_2}{k_2}$, la superposició de les dues, $y_1 + y_2$, també és una ona que es propaga en aquest medi.

Si $f(u)$ és una funció periòdica de u, de període T, llavors $f(u+T) = f(u)$, per a qualsevol u. El **teorema de Fourier** ens diu que tota funció periòdica de u, $f(u)$, de període T, pot ser descomposta com una suma de funcions harmòniques[1]

$$f(u) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\omega_n u + \varphi_n) \tag{7.31}$$

on les freqüències ω_n són múltiples enteres de la **freqüència fonamental** $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$

$$\omega_n = n\,\omega_1 \qquad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

i la funció

$$f_1 = A_1 \sin(\omega_1 u + \varphi_1)$$

és l'**harmònic fonamental**. Els altres termes, $A_2 \sin(\omega_2 u + \varphi_2)$, etc., són els **harmònics superiors**.

Pel que fa a les amplituds A_n, les relacions A_n/A_1 (i les fases φ_n) són característiques de cada funció $f(u)$.

A (7.31), la funció $f(u)$ és una funció periòdica. Per tal que es tracti d'una ona periòdica, només cal fer la substitució

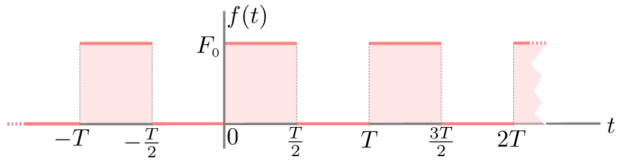
$$u = t - \frac{x}{v}$$

➔ ***Anàlisi de Fourier***. *Tota ona $y(x-vt)$ periòdica pot ser descomposta en ones harmòniques.*

Donada l'ona periòdica $y(x-vt)$, sempre la podem expressar en la forma

$$y(x-vt) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega_1 t - nk_1 x + \varphi_n) \qquad v = \frac{\omega_n}{k_n} = \frac{n\omega_1}{nk_1} \tag{7.32}$$

Fig. 7.23: Ona quadrada positiva



Quan descomponem una ona en ones harmòniques, diem que fem l'**anàlisi de Fourier de l'ona**. Combinant-ho amb el principi de superposició, podem dir:

➔ ***Síntesi de Fourier***. *Tota ona periòdica pot ser sintetitzada a partir de la superposició d'ones harmòniques.*

[1] Si la funció no és periòdica, també es pot fer una descomposició en funcions harmòniques semblant a (7.31), però la diferència és que, en lloc d'un sumatori per a $\omega_n = n\omega_1$, el que tindrem és una integral i les ω passen a ser valors continus

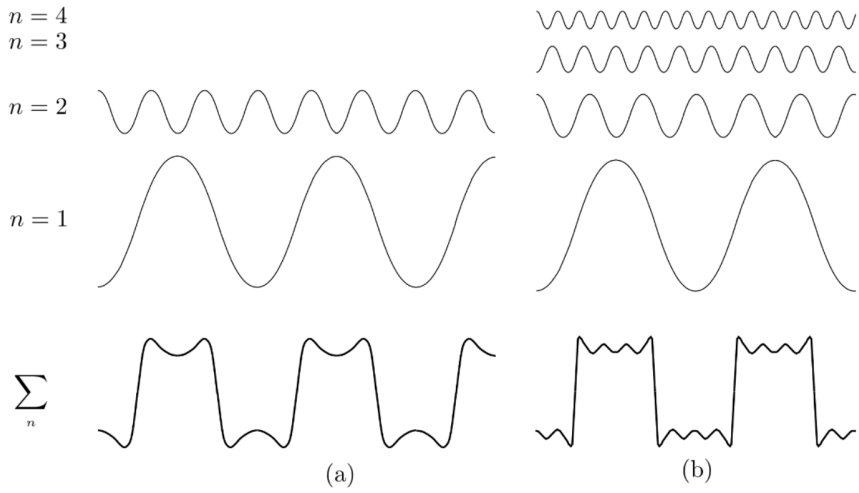


Fig. 7.24: Primers termes de la sèrie de Fourier corresponent a l'ona quadrada positiva

Quan construïm una ona a partir d'ones harmòniques, diem que fem la **síntesi de Fourier** de l'ona.

Exemple. Sigui $f(t)$ l'**ona quadrada positiva** (vegeu la figura 7.23) definida com:

$$f(t) = \begin{cases} F_0\,, & \text{si } 0 < t < T/2 \\ 0\,, & \text{si } T/2 < t < T \end{cases}$$

Es pot demostrar que la funció anterior es pot descompondre en la sèrie de Fourier de sinus següent:

$$f(t) = \frac{F_0}{2} + F_0\,\frac{2}{\pi}\left(\sin t + \frac{\sin 3t}{3} + \frac{\sin 5t}{5} + \ldots\right) \qquad (7.33)$$

A la figura 7.24, s'han representat els primers termes de la sèrie (7.33), $n = 1$, $n = 2$, ..., i les sumes respectives, $\sum_n$. A la columna (a), només hi ha els dos primers termes i, a la (b), els quatre primers. S'observa que la suma de només quatre termes és una bona aproximació de la funció (7.33). A la gràfica de la figura 7.25, es mostren les amplituds relatives, A_n/A_1, en funció de la freqüència, ω_n, per a $n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$. L'estudi d'un senyal periòdic s'anomena ***anàlisi espectral***.

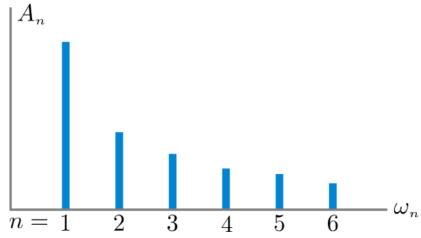


Fig. 7.25: Anàlisi espectral de l'ona quadrada positiva

8 Fenòmens ondulatoris

Introducció

En aquest capítol, estudiem fenòmens relacionats amb les ones. Alguns d'aquests fenòmens estan molt lligats a característiques específiques de les ones, com el principi de superposició. D'altres estan relacionats amb aspectes energètics, quan entenem les ones com un fenomen de propagació i distribució de l'energia a través del medi. Començarem estudiant aquests últims.

8.1 Potència i intensitat de les ones planes

Sabem que, en una ona el que es propaga és una pertorbació d'alguna de les propietats del medi. Això comporta sempre la propagació d'energia.

Potència d'una ona harmònica en una corda

Calculem ara la potència que transporta l'ona harmònica $y(x,t) = A\sin(kx-\omega t)$ quan es propaga per una corda de densitat lineal μ sotmesa a la tensió F. Fixem-nos que, si no hi ha pèrdues, aquesta potència ha de ser la mateixa que subministra el focus origen de les ones.

Com hem vist a la secció 7.3, la component transversal y de la tensió F que el tram de corda de la dreta fa sobre el tram esquerre és (vegeu la figura 7.15)

$$F_y = F\,\sin\theta \approx F\,\tan\theta = F\,\frac{\partial y}{\partial x}$$

Aquesta força transmet, cap a la dreta, una potència d'excitació instantània P_{exc} donada pel producte de F_y per la velocitat transversal $\partial y/\partial t$ de cada element de la corda

$$P_{\text{exc}} = \frac{dW}{dt} = F_y\frac{\partial y}{\partial t} \approx F\,\frac{\partial y}{\partial x}\,\frac{\partial y}{\partial t} \tag{8.1}$$

Si l'ona és harmònica, (8.1) es pot escriure

$$P_{\text{exc}} = F\,k\omega A^2\,\cos^2(kx-\omega t)$$

Com que $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$ i $k = \omega/v$, l'expressió per P_{exc} es pot escriure com

$$P_{\text{exc}} = \mu\omega^2 v\, A^2\, \cos^2(kx - \omega t) \tag{8.2}$$

Aquesta potència oscil·la entre 0 i $\mu\omega^2 v\, A^2$. A la pràctica, té més interès la potència mitjana $\bar{P}_{\text{exc}}$, que podem calcular com la integral de P_{exc} durant un període T dividida per T, és a dir,

$$\bar{P}_{\text{exc}} = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} P_{\text{exc}}\, dt \tag{8.3}$$

Substituint (8.2), trobem

$$\bar{P}_{\text{exc}} = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2\, v \tag{8.4}$$

El problema següent tracta de trobar el resultat (8.4) d'una forma alternativa més directa.

Problema 8.1.1. Calculeu l'energia per unitat de longitud que té una corda per la qual es propaga una ona harmònica i, després, la potència necessària que s'ha d'anar subministrant a la corda per mantenir l'ona.

Solució

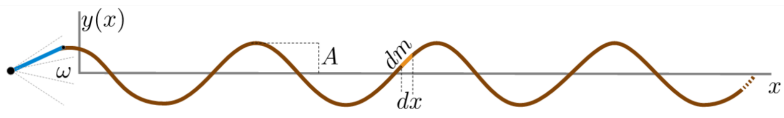


Figura de la solució 8.1.1

Considerem l'ona harmònica $y = A\sin(kx - \omega t)$ que es propaga a la velocitat v a través d'una corda de densitat lineal μ. Cada diferencial de corda pot entendre's com una partícula de massa $dm = \mu\, dx$ sotmesa a un MHS d'amplitud A i freqüència ω (vegeu la figura).

De l'estudi del MHS, sabem que l'element dm té l'energia dE, donada per

$$dE = \frac{1}{2}(\omega^2\, dm)\, A^2 = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2\, dx$$

Per tant, l'energia per unitat de longitud de la corda val

$$\frac{dE}{dx} = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2$$

Per propagar una ona harmònica, cal anar cedint l'energia al llarg del temps en una forma contínua i sense interrupcions. Per exemple, lligant un extrem de la corda a una plaqueta vibratòria controlada per un petit motor. L'energia que en un dt passarà, a la velocitat v, per un punt donat serà la que té l'element de corda $dx = v\, dt$. La potència, entesa com l'energia transportada dE en un dt, $P = \frac{dE}{dt}$ serà

$$P = \frac{dE}{dt} = \frac{dE}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 v$$

que coincideix amb la potència d'excitació mitjana $\bar{P}_{\text{exc}}$ (8.4). ■

Intensitat d'una ona sonora plana

Quina potència mitjana transporta una ona harmònica longitudinal que es propaga per un medi contingut en tub molt llarg de secció recta S? El medi pot ser sòlid o fluid. Com a l'exemple anterior, ens basarem en el MHS d'un diferencial o "llesca" de medi del tub, situat a x i de gruix dx. Si el medi té una densitat ρ, la massa del diferencial val $dm = \rho\, S\, dx$ (vegeu la figura 8.1).

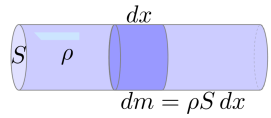


Fig. 8.1: Llesca de medi del tub, situat a x i de gruix dx

Com que la massa dm situada a x descriu un MHS segons l'ona harmònica $s(x,t) = A\sin(\omega t - kx)$, podem dir que

- Té una energia cinètica dE_c:

$$dE_c = \frac{1}{2}\, dm \left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{2}\rho\, S\, dx\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t - kx)$$

- Té una energia potencial elàstica dU. La massa és $dm = \rho\, S\, dx$. Per tant, l'energia potencial associada és

$$dU = \frac{1}{2}\, dm\, \omega^2\, s^2 = \frac{1}{2}\rho\, S\, dx\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t - kx)$$

- L'energia total és, doncs,

$$dE = dE_c + dU = \frac{1}{2}\,\rho\, dx\, \omega^2 A^2\, S$$

Aquesta energia està continguda en el volum $dV = S\, dx = S\, v\, dt$. Per tant, $dm = \rho\, dV = \rho\, S\, v\, dt$. Així, l'energia que travessa S en cada dt és

$$dE = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2\, S\, v\, dt$$

Definim la **impedància acústica específica** del medi com

$$Z = \rho v \tag{8.5}$$

L'energia dE anterior es pot escriure

$$dE = \frac{1}{2} Z\omega^2 A^2\, S\, dt$$

i la potència d'una ona plana harmònica a través d'una superfície transversal S com

$$P_s = \frac{1}{2} Z\omega^2 A^2\, S \tag{8.6}$$

Definim la **intensitat d'una ona** com la potència que es transmet per unitat de superfície transversal

$$I = \frac{dP_s}{dS} \tag{8.7}$$

La intensitat associada a la potència (8.6) és

$$I = \frac{dP_s}{dS} = \frac{dE}{S\,dt} = \frac{1}{2} Z(\omega A)^2 \tag{8.8}$$

En el S.I., la unitat d'intensitat és $\mathrm{W/m^2}$. La unitat de la impedància acústica específica (8.5) és el $\mathrm{kg/m^2 s}$ = rayl (en honor de Lord Rayleigh). Les taules 7.1, 7.2 i 7.3 proporcionen les impedàncies de diversos medis.

Intensitat de les ones sonores planes com a ones de pressió

A (7.23) hem vist que la pressió acústica, p, es relaciona amb l'elongació s en la forma

$$p = -B\,\frac{\partial s}{\partial x} \tag{8.9}$$

Si l'ona és harmònica, $s(x,t) = A\,\mathrm{sin}(\omega t - kx)$ i la pressió acústica serà

$$p(x,t) = -B\,\frac{\partial s}{\partial x} = BAk\ \mathrm{sin}(\omega t - kx + \pi/2) \tag{8.10}$$

d'on trobem el següent:

- L'ona de pressió, $p(x,t)$ està desfasada $\pi/2$ rad respecte de l'ona de desplaçament, $s(x,t)$. Quan l'elongació s és, en valor absolut, màxima, la pressió acústica és zero, i a l'inrevés.
- De (8.10) i (7.27), trobem que l'amplitud de l'ona de pressió, $\mathcal{P}$, es relaciona amb l'amplitud de l'ona de desplaçament A en la forma

$$\mathcal{P} = BAk = \rho v^2\, A\,\frac{\omega}{v} = \rho\omega v\, A \tag{8.11}$$

La intensitat de les ones sonores, segons (8.8) amb (8.5), la podem expressar en funció de $\mathcal{P}$, tenint en compte (8.11),

$$I = \frac{1}{2} Z(\omega A)^2 = \frac{1}{2}\,\frac{\mathcal{P}^2}{Z} \tag{8.12}$$

Nivell d'intensitat i decibels

A l'espècie humana, l'interval de freqüències audible va de 20 Hz a 20 kHz. Els sons per sota de 250 Hz es qualifiquen de **greus** o tons baixos. Per sobre de 5 kHz, es qualifiquen d'**aguts** o tons alts. Per sota de 20 Hz, arlem d'**infrasons** i, per sobre dels 20 kHz, d'**ultrasons**.

La intensitat mínima audible o llindar depèn de la freqüència. En els humans, entre 500 Hz i 5000 Hz és $I_0 = 10^{-12}\,\mathrm{W/m^2}$ i creix quan la freqüència és lluny

d'aquest interval. Així, la intensitat llindar per 100 Hz o 18 kHz és de l'ordre de 1000 vegades I_0.

A la pràctica, per expressar la intensitat sonora rebuda per una persona, s'utilitza el **nivell d'intensitat**, β, que es relaciona amb la intensitat I a través del logaritme decimal:

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0} \tag{8.13}$$

on I_0 és la intensitat mínima esmentada, de $10^{-12}\,\mathrm{W/m^2}$. β es dóna en **decibels**, dB.

El nivell d'intensitat β més dèbil que es pot captar és de $\beta = 0$, que correspon a $I = I_0$. El nivell d'intensitat corresponent al llindar del so dolorós és de 120 dB, correponent a $I = 1\,\mathrm{W/m^2}$. Entre 10 dB i 110 dB, hi ha totes les intensitats habituals:

- en una biblioteca tranquil·la, el so pot estar entre 30 i 40 dB;
- al carrer, amb trànsit moderat, entre 50 i 70 dB;
- a prop d'una màquina molt sorollosa, uns 100 dB, etc.

A la figura 8.2, es mostra un sonòmetre, aparell que mesura els nivells d'intensitat en situacions quotidianes.

Fig. 8.2: Sonòmetre per mesurar el nivell d'intensitat del so de les situacions quotidianes. Els sonòmetres responen a la pressió de l'ona sonora

Problema 8.1.2. Si els sons més forts i els més fluixets que podem sentir estan entre els 120 dB i els 0 dB, a quines amplituds d'ona de desplaçament i d'ona de pressió acústica en l'aire es corresponen?

Solució

Tenint en compte (8.12), les amplituds A del desplaçament i de la pressió acústica $\mathcal{P}$ en funció de la intensitat del so valen

$$A = \frac{1}{2\pi f}\sqrt{\frac{2I}{Z}} \quad , \quad \mathcal{P} = \sqrt{2ZI}$$

amb $Z = 418$ rayl, com s'indica a la taula 7.3. Pel que fa a la intensitat, segons (8.13), tenim

$$I = I_0\, 10^{\beta/10}\,, \qquad \text{amb} \quad I_0 = 10^{-12}\ \mathrm{W/m^2}$$

Utilitzant aquestes expressions, n'obtenim la taula següent:

f	$\beta =$	0 dB	60 dB	120 dB
100 Hz	A (m)=	$1{,}10 \times 10^{-10}$	$1{,}10 \times 10^{-7}$	$1{,}10 \times 10^{-4}$
5 kHz	A (m)=	$2{,}20 \times 10^{-12}$	$2{,}20 \times 10^{-9}$	$2{,}20 \times 10^{-6}$
-	$\mathcal{P}$ (Pa)=	$2{,}89 \times 10^{-5}$	$2{,}89 \times 10^{-2}$	28,9

Taula de la solució 8.1.2. Amplituds per a dues freqüències i tres nivells d'intensitat.

■

Atenuació per absorció

Quan una ona es propaga per un **medi absorbent**, hi una pèrdua d'energia o una **atenuació per absorció**. Experimentalment, sabem que la pèrdua d'intensitat d'una ona plana, dI, en travessar un gruix dx, és proporcional al gruix i a la intensitat I incident. El factor de proporcionalitat s'anomenat ***coeficient d'absorció del medi***, α:

$$dI = -\alpha\, I\, dx \tag{8.14}$$

on el signe indica que la intensitat disminueix. Integrant (8.14), tenim

$$\int_{I_0}^{I} \frac{dI}{I} = \int_0^x -\alpha\, dx \Rightarrow \boxed{I = I_0\ \mathrm{e}^{-\alpha\, x}} \tag{8.15}$$

La intensitat d'una ona plana disminueix exponencialment en propagar-se per un medi absorbent.

8.2 Potència i intensitat de les ones esfèriques

Quan el focus subministra una potència determinada, aquesta es reparteix uniformement pel front d'ona. La intensitat de l'ona és la potència mitjana transmesa per unitat d'àrea normal a la direcció de propagació de l'ona. La intensitat de l'ona en els punts de l'esfera de radi r, centrada en el focus, és

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} \tag{8.16}$$

Si el medi no dissipa energia, la potència mitjana que travessa la superfície d'una esfera de radi r_1 ha de ser la mateixa que la que més tard travessa la de radi r_2, $r_2 > r_1$ (vegeu la figura 8.3). Si I_1 i I_2 són les intensitats respectives, tindrem

$$P = 4\pi r_1^2\, I_1 = 4\pi r_2^2\, I_2$$

és a dir,

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \tag{8.17}$$

Per tant, malgrat que el medi no sigui absorbent, una ona esfèrica manifesta una **atenuació geomètrica**.

➔ *La intensitat d'una ona esfèrica és inversament proporcional al quadrat de la distància al focus.*

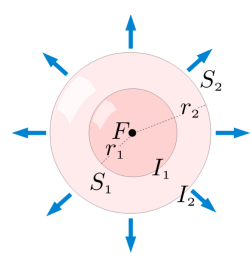


Fig. 8.3: Una ona esfèrica

Com que la intensitat és proporcional al quadrat de l'amplitud, el resultat anterior ens proporciona un argument físic per entendre que les amplituds de les ones esfèriques siguin inversament proporcionals a la distància r al focus. Si a $r = r_0$, l'amplitud és s_0, llavors

$$s(r,t) = \frac{s_0\, r_0}{r} \sin(kr - \omega t) \tag{8.18}$$

on hem substituït el kx de les ones planes (7.9) per kr perquè ara la coordenada r acompleix el mateix paper de x a les ones planes. Els fronts d'ona són esferes de radi r concèntriques amb el focus situat a $r = 0$.

En un medi absorbent, una ona esfèrica experimenta una atenuació geomètrica i per absorció. Tenint en compte (8.18) i (8.15), tenim

$$I(r) = I_0 \frac{r_0^2}{r^2}\, \mathrm{e}^{-\alpha r} \qquad s(r,t) = A_0 \frac{r_0}{r}\, \mathrm{e}^{-\alpha r/2} \sin(kr - \omega t) \tag{8.19}$$

Aquestes expressions són vàlides per a les ones sonores a l'aire. Prop del focus, l'atenuació dominant és la geomètrica. Lluny del focus, l'atenuació dominant és per absorció.

Problema 8.2.1. Un altaveu emet amb una potència $P = 0{,}5$ W uniformement en totes les direccions.

a) Quin nivell d'intensitat té un punt A situat a 10 m de l'altaveu?

b) A quina distància el so té un nivell d'intensitat de 100 dB?

c) Quants altaveus, tots iguals al de l'enunciat, haurien d'estar junts perquè el nivell d'intensitat al punt A s'incrementés en 20 dB?

Solució

a) Només s'han d'aplicar les expressions (8.13) i (8.16)

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} = 3{,}98 \times 10^{-4}\ \text{W/m}^2$$

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0} = 10 \log \frac{3{,}98 \times 10^{-4}}{10^{-12}} = 86{,}0\ \text{dB}$$

b) Utilitzem de nou (8.13) i (8.16) però ara la incògnita és r:

$$100 = 10 \log \frac{\left(\frac{0{,}5}{4\pi r^2}\right)}{10^{-12}}$$

aïllant r, resulta: $r = 1{,}99$ m

c) Si a l'apartat **a** el nivell era β, ara serà $\beta' = \beta + 20$. Com que la intensitat I de n altaveus (no coherents) serà n vegades la intensitat d'un altaveu

$$\beta + 20 = 10 \log \frac{nI}{I_0} = 10 \log n + 10 \log \frac{I}{I_0} = 10 \log n + \beta$$

d'on obtenim

$$n = 10^{20/10} = 10^2 = 100$$

■

8.3 Transmissió i reflexió d'una ona en un canvi de medi

En el medi 1, es propaga una ona harmònica plana en la direcció i el sentit de l'eix x. Què passa quan l'ona incideix en $x = 0$, on hi ha un canvi de medi? Per simplificar, considerem el cas en què la frontera entre els dos medis, 1 i 2, és normal a l'ona incident. L'estudi de la incidència obliqua donaria lloc al fenomen de la **refracció**.

Analitzarem ones longitudinals en els medis 1 i 2, que podem caracteritzar per les seves impedàncies acústiques específiques Z_1 i Z_2 i velocitats de propagació v_1, v_2, respectivament. Els subíndexs I, R i T faran referència a les ones incident, reflectida i transmesa. Les densitats dels medis són, segons (8.5), $\rho_1 = Z_1/v_1$ i $\rho_2 = Z_2/v_2$ i suposarem que la frontera és a $x = 0$ (vegeu la figura 8.4).

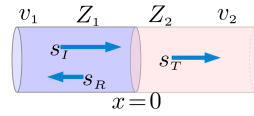


Fig. 8.4: Ones longitudinals en un canvi de medi

Les ones incident, reflectida i transmesa són

$$\begin{aligned} s_I(x - v_1 t) &= A_I \sin(\omega_I t - k_I x), \quad s_R(x + v_1 t) = A_R \sin(\omega_R t + k_R x + \varphi_R) \\ s_T(x - v_2 t) &= A_T \sin(\omega_T t - k_T x + \varphi_T) \end{aligned} \tag{8.20}$$

amb les condicions

$$v_1 = \frac{\omega_I}{k_I} = \frac{\omega_R}{k_R} \qquad v_2 = \frac{\omega_T}{k_T} \tag{8.21}$$

Utilitzant el principi de superposició, tenim

$$s_1(x,t) = s_I(x,t) + s_R(x,t) \qquad s_2(x,t) = s_T(x,t) \tag{8.22}$$

S'han de satisfer les condicions següents:

a) Continuïtat del medi: a tot instant de temps t, en el pla $x = 0$ entre medis, s'ha de complir

$$s_1(0,t) = s_2(0,t) \tag{8.23}$$

que, tenint en compte (8.22) i (8.20), és

$$A_I \sin(\omega_I t) + A_R \sin(\omega_R t + \varphi_R) = A_T \sin(\omega_T t + \varphi_T) \tag{8.24}$$

b) Conservació de l'energia: si els medis no són dissipatius, la intensitat de l'ona reflectida més la de l'ona transmesa han de ser igual a la de l'ona incident: $I_I = I_R + I_T$. Segons (8.8), tenim

$$Z_1 \omega_R^2 A_R^2 + Z_2 \omega_T^2 A_T^2 = Z_1 \omega_I^2 A_I^2 \tag{8.25}$$

c) Conservació de la quantitat de moviment: observant la figura 8.4, podem entendre la situació com una serie continua de xocs, d'esquerra a dreta. A $x = 0$, i per a tot t, en un dt, la massa $dm_1 = Sv_1 dt$ (S és la secció del tub), que va a la velocitat d'oscil·lació $\frac{\partial s_I}{\partial t}(0,t)$, xoca amb una massa $dm_2 = Sv_2 dt$ en

repòs. De resultes del xoc, dm_1 i dm_2 tenen velocitats $\frac{\partial s_R}{\partial t}(0,t)$ i $\frac{\partial s_T}{\partial t}(0,t)$ respectivament. La conservació de la quantitat de moviment es pot escriure

$$\frac{Z_1^2}{\rho_1}\frac{\partial s_1}{\partial x}(0,t) = \frac{Z_2^2}{\rho_2}\frac{\partial s_2}{\partial x}(0,t) \tag{8.26}$$

que, si cal, podem explicitar, tenint en compte les expressions (8.20).

Amb aquestes tres condicions, es pot demostrar:

1) Les freqüències ω_R i ω_T són iguals a la freqüència incident, ω_I:

$$\omega_I = \omega_R = \omega_T \equiv \omega \tag{8.27}$$

2) Els canvis de fase φ_R i φ_T són 0 o π. Com que $\varphi = \pi$ és equivalent a $\varphi = 0$ amb una amplitud negativa, prenem $\varphi_R = \varphi_T = 0$ i donem la possibilitat que $A_{TR} \lessgtr 0$.

Tenint en compte (8.24), per al cas particular $\omega t = \pi/2$, i (8.25), trobem les igualtats

$$A_I + A_R = A_T \quad , \quad Z_1 A_R^2 + Z_2 A_T^2 = Z_1 A_I^2 \tag{8.28}$$

de les quals obtenim

$$\frac{A_R}{A_I} = a_R \qquad \text{amb} \qquad a_R = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \tag{8.29}$$

$$\frac{A_T}{A_I} = a_T \qquad \text{amb} \qquad a_T = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \tag{8.30}$$

on a_R i a_T són els **coeficients de reflexió i transmissió d'amplitud**.

Les intensitats de les ones incident, reflectida i transmesa són

$$I_I = \frac{1}{2}Z_1\omega^2 A_I^2 \qquad I_R = \frac{1}{2}Z_1\omega^2 A_R^2 \qquad I_T = \frac{1}{2}Z_2\omega^2 A_T^2$$

Tenint en compte (8.29) i (8.30), trobem

$$\frac{I_R}{I_I} = p_R \qquad \text{amb} \qquad p_R = a_R^2 = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}\right)^2 \tag{8.31}$$

$$\frac{I_T}{I_I} = p_T \qquad \text{amb} \qquad p_T = \frac{Z_2}{Z_1}a_T^2 = \frac{4Z_1Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} \tag{8.32}$$

on p_R i p_T són els **coeficients de reflexió i transmissió de potència**.

Amb aquestes relacions, podem fer la taula següent de casos segons el valor relatiu de les impedàncies Z_1 i Z_2: És a dir:

a)	Si $Z_1 \sim Z_2$:	$a_R \approx 0$	$a_T \approx 1$,	$p_R \approx 0$,	$p_T \approx 1$
b)	Si $Z_1 \ll Z_2$:	$a_R \approx -1$	$a_T \approx 0$,	$p_R \approx 1$,	$p_T \approx 0$
c)	Si $Z_1 < Z_2$:	$a_R < 1$	$a_T > 0$,		
d)	Si $Z_1 > Z_2$:	$a_R > 0$	$a_T > 0$,		

Taula 8.1: Coeficients de reflexió i transmissió per a diferents relacions de les impedàncies

a) Si les impedàncies són semblants, gairebé tota la intensitat passa a l'ona transmesa.

b) Si les impedàncies són molt diferents, gairebé tota la intensitat es reflecteix—vegeu un exemple al problema 8.3.1.

c) Si $Z_1 < Z_2$, llavors $A_R < 0$, és a dir, l'ona reflectida experimenta un canvi de fase de π.

Els coeficients de reflexió i transmissió per a ones harmòniques han resultat ser independents de la freqüència. En conseqüència, els coeficients obtinguts es poden aplicar també a ones no harmòniques.

Problema 8.3.1. Una ona sonora plana que es propaga per l'aire incideix normalment a l'aigua d'una piscina. Quin percentatge d'intensitat passa a l'aigua? Quants decibels disminueix el nivell d'intensitat en passar a l'aigua?

Solució

Segons les taules 7.3 i 7.2, la impedància de l'aire és 418 rayl i la de l'aigua, $1{,}45 \times 10^6$ rayl. Utilitzant (8.32), trobem que la potència que passa a l'aigua és

$$p_T = 0{,}00115 = 0{,}115\%$$

Podem dir que el 99,88% de la intensitat es reflecteix.

Segons (8.13), la pèrdua del nivell d'intensitat en passar a l'aigua val

$$\Delta\beta = 10 \log \frac{I_{\text{aigua}}}{I_0} - 10 \log \frac{I_{\text{aire}}}{I_0} = 10 \log \frac{I_{\text{aigua}}}{I_{\text{aire}}} = 10 \log p_T = -29{,}4 \text{ dB}$$ ■

8.4 Interferències i batecs

Superposició de dues ones harmòniques

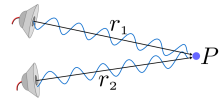


Fig. 8.5: Dues ones planes harmòniques es troben en un punt P

Quan dues ones harmòniques de la mateixa freqüència ω es troben en un punt P, aquest oscil·la harmònicament (vegeu la figura 8.5).

Si el punt P està a una distància r_1 del focus F_1 i a r_2 del F_2, les elongacions en el punt P poden ser escrites

$$s_1(r_1, t) = A_1 \sin(\omega t - k r_1 + \varphi_1) \qquad s_2(r_2, t) = A_2 \sin(\omega t - k r_2 + \varphi_2) \quad (8.33)$$

L'elongació resultant a P és la superposició de s_1 i s_2

$$s(P,t) = s_1(r_1,t) + s_2(r_2,t)$$

Fent servir la notació $\phi_1 = -kr_1 + \varphi_1$ i $\phi_2 = -kr_2 + \varphi_2$, tenim

$$\begin{aligned} s(P,t) &= A_1 \sin(\omega t + \phi_1) + A_2 \sin(\omega t + \phi_2) = \\ &= \sin\omega t[A_1\cos\phi_1 + A_2\cos\phi_2] + \cos\omega t[A_1\sin\phi_1 + A_2\sin\phi_2] \end{aligned} \qquad (8.34)$$

Volem escriure aquesta suma en la forma

$$s(P,t) = A_R \sin(\omega t + \phi) \qquad (8.35)$$

on ens cal A_R i ϕ. Per això, desenvolupem (8.35) i identifiquem amb (8.34)

$$s(P,t) = \sin\omega t\, A_R\cos\phi + \cos\omega t\, A_R\sin\phi$$

N'obtenim

$$\tan\phi = \frac{A_1\sin\phi_1 + A_2\sin\phi_2}{A_1\cos\phi_1 + A_2\cos\phi_2} \qquad (8.36)$$

$$A_R^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\phi_1 - \phi_2) \qquad (8.37)$$

En el cas més simple en què $A_1 = A_2 = A$, llavors queda

$$A_R = 2A\cos\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) \qquad \phi = \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} \qquad (8.38)$$

Interferències

Suposem que les amplituds de les dues ones són iguals. $s(P,t)$ és

$$s(P,t) = A_R\sin(\omega t + \phi) = 2A\cos\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right)\sin\left(\omega t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right)$$

Substituint ϕ_1 i ϕ_2 i fent $\Delta r = r_2 - r_1$, $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, n'obtenim [1]

$$s(P,t) = 2A\cos\left(\frac{k\Delta r}{2} - \frac{\Delta\varphi}{2}\right)\sin\left(\omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)$$

$s(P,t)$ és un MHS d'amplitud

$$A_R = 2A\cos\left(\frac{k\Delta r}{2} - \frac{\Delta\varphi}{2}\right) \qquad (8.39)$$

A_R depèn de la diferència de camins recorreguts, Δr, i del desfasament inicial entre les dues ones, $\Delta\varphi$. Destaquem:

[1] Recordem que $\sin\alpha + \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\ \sin\frac{\alpha+\beta}{2}$

- **Interferència constructiva**: l'amplitud A_R és màxima, $A_{R_{\max}} = 2A$, si

$$\pi\frac{\Delta r}{\lambda} - \frac{\Delta\varphi}{2} = 2n\,\frac{\pi}{2}\,, \qquad n = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots \tag{8.40}$$

- **Interferència destructiva**: l'amplitud A_R és nul·la, $A_{R_{\min}} = 0$, si

$$\pi\frac{\Delta r}{\lambda} - \frac{\Delta\varphi}{2} = (2n+1)\,\frac{\pi}{2}\,, \qquad n = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots \tag{8.41}$$

També destaquem dos casos molt habituals:

- Les dues ones estan *en fase*: $\Delta\varphi = 0 + 2n\,\pi,\ n = \pm1,\ \pm2,\ \ldots$,

$$\text{Int. constructiva:} \qquad \Delta r = \ 2n\,\frac{\lambda}{2} \tag{8.42}$$

$$\text{Int. destructiva:} \qquad \Delta r = \ (2n+1)\,\frac{\lambda}{2} \tag{8.43}$$

- Les dues ones estan *en oposició de fase*: $\Delta\varphi = \pi \pm 2n\pi$:

$$\text{Int. constructiva:} \qquad \Delta r = \ (2n+1)\,\frac{\lambda}{2} \tag{8.44}$$

$$\text{Int. destructiva:} \qquad \Delta r = \ 2n\,\frac{\lambda}{2} \tag{8.45}$$

Si les amplituds no són iguals, les condicions d'interferència són les mateixes. Ni el mínim d'amplitud, $A_{R_{\min}}$, serà nul ni el màxim, $A_{R_{\max}}$, serà $2A$. N'obtindrem

$$A_{R_{\min}} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2} = |A_1 - A_2| \tag{8.46}$$

$$A_{R_{\max}} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2} = A_1 + A_2 \tag{8.47}$$

Interferències i coherència

En tot el que hem dit respecte a la interferència, hi ha un detall fonamental: el desfasament inicial $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ ha de ser constant al llarg del temps. Això es compleix si els focus són fonts emissores coherents. Les **fonts coherents** són focus que proporcionen ones les diferències de fase de les quals són independents del temps.

Problema 8.4.1. Dues persones estan cantant amb la mateixa potència. Encara que emetin en la mateixa freqüència, les ones emeses no seran coherents.

a) Si en un punt P, situat a la mateixa distància de les dues persones, la intensitat d'una de les dues és I, quant val la intensitat al punt P i en quants decibels s'incrementa el nivell d'intensitat si canten tots dos?

Les ones són ara emeses per dos altaveus coherents de la mateixa freqüència i interfereixen en P constructivament.

b) Quant val la intensitat total a P? Quin és el nivell d'intensitat?

Solució

a) En no complir-se la condició de coherència, no hi ha cap interferència i les intensitats són proporcionals a l'energia. La intensitat total és la suma de les dues intensitats, és a dir: $I_{\text{total}} = I + I = 2I$.

El nivell d'intensitat, en passar d'una veu a dues veus (passem de I a $2I$), s'incrementa en: $\Delta\beta_{nc} = 10\ln 2 = 3{,}0\,\text{dB}$. El subíndex $_{nc}$ vol dir no coherent.

b) En una ona harmònica, la intensitat és proporcional al quadrat de l'amplitud A: $I = \alpha A^2$. Si a P hi ha una interferència constructiva, l'amplitud a P valdrà $2A$ i la intensitat corresponent serà

$$I_{\text{total}} = \alpha(2A)^2 = 4\,\alpha A^2 = 4I$$

I el nivell d'intensitat s'incrementa en: $\Delta\beta_c = 10\ln 2^2 = 20\ln 2 = 2\Delta\beta_{nc} = 6{,}0\,\text{dB}$.

■

Problema 8.4.2. Dos altaveus, A i B, coherents i en fase, emeten ones sonores de la mateixa freqüència que arriben amb la mateixa intensitat a un oient O situat a $4\,\text{m}$ de A i a $3\,\text{m}$ de B. Quines freqüències f_n no podrà sentir bé l'oient?

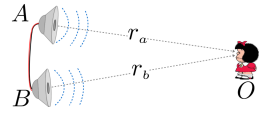


Figura de l'enunciat 8.4.2

Dada: la temperatura és de $15°\text{C}$; per tant, la velocitat del so és $340\,\text{m/s}$.

Solució

Com que els altaveus emeten amb coherència, les ones sonores dels dos altaveus experimentaran interferències. Les freqüències f que l'oient tindrà dificultats per sentir o no sentirà, seran les que provoquin interferències destructives. Per tant, com que els altaveus emeten en fase, hem d'aplicar la igualtat (8.43): $\Delta r = (2n+1)\lambda/2$, amb $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ Com que $\lambda = v/f$ i $\Delta r = r_b - r_a = 1\,\text{m}$, la condició d'interferència destructiva és

$$\Delta r = (2n+1)\frac{\lambda}{2} = (2n+1)\frac{v}{2f}$$

és a dir,

$$f_{\text{dest}} = (2n+1)\frac{v}{2\,\Delta r}$$

Amb les dades $\Delta r = 1\,\text{m}$, $v = 340\,\text{m/s}$, i $(2n+1) = 1,\ 3,\ 5,\ \ldots$, trobem

$$f_{\text{dest}} = 170\,\text{Hz},\ 510\,\text{Hz},\ 850\,\text{Hz},\ 1190\,\text{Hz},\ldots \text{ etc.}$$

■

Batecs

Es produeixen **batecs** quan superposem en un punt P dues ones harmòniques de freqüències lleugerament diferents. Suposem que, a P, tenen la mateixa amplitud (vegeu la figura 8.5 de la pàgina 198)

$$s_1(r_1,t) = A\,\sin(\omega_1 t - k_1 r_1 + \varphi_1) \qquad s_2(r_2,t) = A\,\sin(\omega_2 t - k_2 r_2 + \varphi_1) \tag{8.48}$$

amb $\omega_2 \gtrsim \omega_1$: $\omega_2 = \omega_1 + \Delta\omega$ amb $\Delta\omega \ll \omega = \frac{\omega_1+\omega_2}{2}$. Sumant s_1 i s_2, amb $\phi_1 = -k_1 r_1 + \varphi_1$ i $\phi_2 = -k_2 r_2 + \varphi_2$ obtenim l'elongació del punt P, $s(P,t)$,

$$s(P,t) = 2A\cos\left(\frac{t\,\Delta\omega}{2} + \frac{\phi_1-\phi_2}{2}\right)\sin\left(\omega t + \frac{\phi_1+\phi_2}{2}\right) \tag{8.49}$$

que és semblant a la d'un MHS de freqüència ω, pràcticament la mateixa que la de les ones originals, però amb una amplitud A_R

$$A_R = 2A\cos\left(\frac{t\,\Delta\omega}{2} + \phi\right) \tag{8.50}$$

A_R depèn harmònicament del temps, amb freqüència $\Delta\omega/2$. ϕ és una fase que conté la dependència en r_1 i r_2 i que, per a un punt fixat P, és una constant.

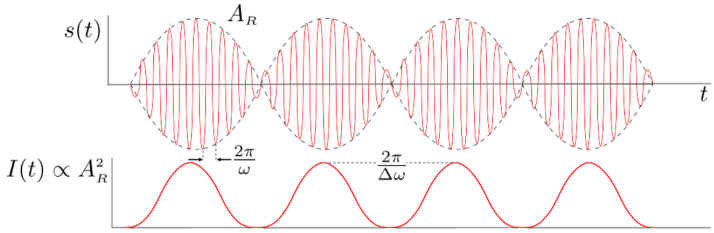


Fig. 8.6: Batecs. Gràfiques per a l'elongació i la intensitat

La intensitat $I \propto A_R^2$ té un període que és la meitat que el de l'amplitud A_R (vegeu la gràfica de la figura 8.6). Per tant, si, per exemple, es tracta d'ones sonores, el receptor situat a P percep la intensitat dels batecs amb una freqüència doble que la de (8.50)

$$\omega_{\text{bat}} = |\omega_2 - \omega_1| = \Delta\omega \tag{8.51}$$

Una forma molt simple de produir batecs sonors és, com es mostra a la figura 8.7, fent sonar simultàniament dos diapasons de freqüències lleugerament diferents, per exemple, $f = 440\,\text{Hz}$ i $f' = 437\,\text{Hz}$. Els batecs faran que la intensitat variï amb una freqüència $f_{\text{bat}} = \Delta f = 440 - 437 = 3\,\text{Hz}$.

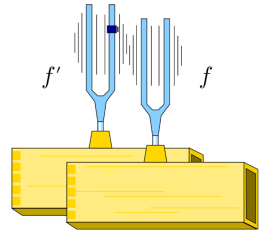


Fig. 8.7: Producció de batecs amb dos diapasons molt semblants

8.5 Ones estacionàries

A la secció 8.3, hem vist que, quan una ona arriba a un canvi de medi, una part d'aquesta es reflecteix. Si les impedàncies són molt diferents, pràcticament tota l'ona es reflecteix. Això és el que passa quan una ona arriba al final del medi i

el següent és molt diferent. Com que en la realitat tots els medis són limitats, a la propagació de l'ona inicial caldrà superposar l'ona reflectida al final del medi. Aquesta última podria presentar un canvi de fase de π rad.

Estudiem la superposició de dues ones planes harmòniques de la mateixa amplitud i freqüència però que es propaguen en sentits contraris. Una pot ser la inicial i l'altra, la reflectida. Tenim

$$y_1(x,t) = A\sin(\omega t - kx + \varphi_1) \qquad y_2(x,t) = A\sin(\omega t + kx + \varphi_2) \quad (8.52)$$

on φ_1 i φ_2 són constants. Aplicant (8.35, 8.38), trobem que $y = y_1 + y_2$ és

$$y(x,t) = 2A\,\cos(kx+\phi)\sin(\omega t + \phi') \quad (8.53)$$

on $\phi = (\varphi_1 - \varphi_2)/2$, $\phi' = (\varphi_1 + \varphi_2)/2$. Veurem que ϕ i ϕ' són irrellevants.

La superposició de dues ones és sempre una ona. Per tant, (8.53) ho és. Però també veiem que aquesta ona no es propaga: tot punt x fa un MHS de freqüència ω i amplitud A_R que depèn de x en la forma

$$A_R(x) = 2A\,\cos(kx+\phi) \quad (8.54)$$

però que no depèn de t. Hi ha punts que mai no oscil·len, $A_R = 0$; són els **nodes**. D'altres oscil·len sempre amb la màxima amplitud, $2A$; són els **ventres o antinodes**.

Com que $k = 2\pi/\lambda$, les posicions dels ventres i nodes són, segons (8.54),

$$\begin{cases} \text{Ventres:} & \cos(kx+\phi) = \pm 1, \quad \text{d'on} & \frac{2\pi}{\lambda}x_n + \phi = n\,\pi \\ \text{Nodes:} & \cos(kx+\phi) = 0, \quad \text{d'on} & \frac{2\pi}{\lambda}x_n + \phi = (2n+1)\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

on $n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$ La distància entre dos nodes o dos ventres consecutius, n i $n+1$, és

$$x_{n+1} - x_n = \frac{\lambda}{2} \quad (8.55)$$

A la figura 8.8, es mostra un medi que experimenta ones estacionàries. Hi veiem quatre nodes (N) i tres ventres (V). La figura mostra la gràfica de la pertorbació $y(x,t_i)$ en sis instants t_i diferents $i = 1,2,\ldots$.

Ones estacionàries en cordes finites

Considerem una corda de longitud L, sotmesa a una tensió F, amb els dos extrems fixos. Que els extrems estiguin fixats vol dir no es bellugaran. Fem vibrar un punt de la corda i provoquem una ona harmònica. És l'ona inicial. Aquesta ona arribarà a un dels extrems i es reflectirà, superposant-se al llarg de tota la corda,

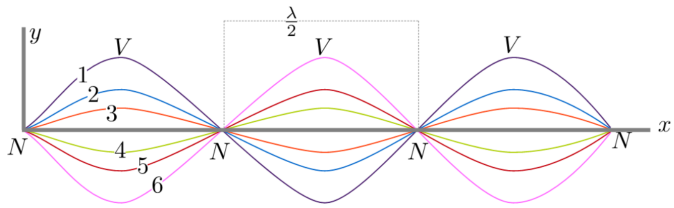


Fig. 8.8: Ones estacionàries en un medi. Els diferents instants els hem destacat amb diferents colors

les ones inicial i reflectida. Aquesta superposició és la que hem vist que dóna lloc a ones estacionàries. Però també haurem de veure què passa amb l'ona reflectida quan arriba a l'extrem oposat de la corda: donarà lloc a una nova reflexió, que s'haurà de superposar a les anteriors. I així indefinidament. En general, en una corda de longitud L, no hi ha ones estacionàries. La solució d'ona estacionària només es donarà quan dos dels nodes N coincideixin amb els dos extrems fixos. Això passa només per a determinades freqüències. A la figura 8.9, es mostren tres casos possibles d'una corda amb els extrems fixats, sotmesa a ones estacionàries: la longitud L de la corda ha de ser un múltiple enter de mitja longitud d'ona, la distància entre node i node o ventre i ventre. És a dir,

$$L = n\,\frac{\lambda}{2}\,, \qquad \text{on} \quad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \tag{8.56}$$

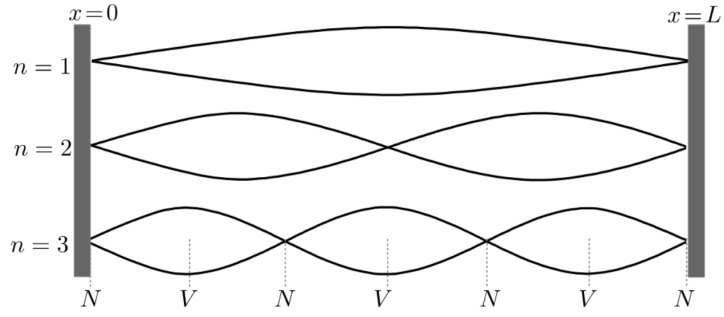


Fig. 8.9: Tres casos possibles d'ones estacionàries en una corda amb els extrems fixats

Només les longituds d'ona λ que satisfacin (8.56) són possibles. Si la velocitat de les ones a la corda és $v = \sqrt{F/\mu}$, amb $\lambda = v/f$, obtenim que les úniques freqüències f que produiran ones estacionàries són

$$f_n = n\,\frac{v}{2L} \tag{8.57}$$

on $n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$.

➜ $f_1 = \frac{v}{2L}$ és la freqüència més baixa o **freqüència fonamental**. Si $n = 2$, $n = 3$... són el **segon harmònic**, el **tercer harmònic**, i en general s'anomenen harmònics superiors. El conjunt de freqüències f_n són les **freqüències pròpies** i les formes d'oscil·lar corresponents, els **modes normals d'oscil·lació**. A les freqüències pròpies sovint també se les anomena **freqüències de ressonància**.

A la figura 8.9, podem veure un esquema de la corda en els modes fonamental, segon i tercer.

Problema 8.5.1. A la figura, es mostra una corda, de densitat $0{,}65\,\mathrm{g/m}$, que té un extrem fixat a una paret i a l'altre, després de passar per una politja, i se li lliga un pes mg. Es pot considerar que els dos extrems estan fixats. La longitud de la corda fins a la politja és de $L = 31{,}6\,\mathrm{cm}$. Al costat de la corda, hem col·locat un altaveu A que emet un so que fem variar entre els $500\,\mathrm{Hz}$ i els $1500\,\mathrm{Hz}$. Observem que la corda només entra en ressonància a les freqüències $880\,\mathrm{Hz}$ i $1320\,\mathrm{Hz}$. Trobeu la tensió a la qual està sotmesa la corda i a quins harmònics corresponen aquestes freqüències.

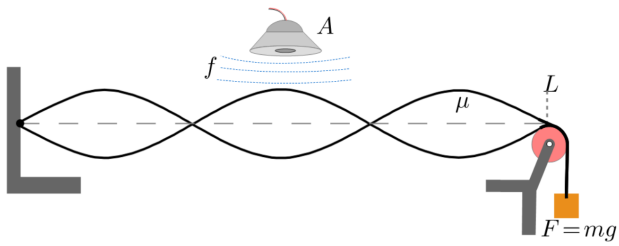


Figura de l'enunciat 8.5.1

Solució

Si la freqüència de l'altaveu A es fa variar de forma contínua i només hi ha ressonància a $880\,\mathrm{Hz}$ i $1320\,\mathrm{Hz}$, és que aquestes freqüències es corresponen amb dos valors consecutius de les possibles freqüències de les ones estacionàries: la corresponent al mode n i el $n+1$, sense saber, en principi, a quin valor natural correspon n. Ara bé, per (8.57), tenim que

$$f_{n+1} - f_n = f_1 = \frac{v}{2L} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

és a dir,

$$1320 - 880 = \frac{1}{0{,}361}\sqrt{\frac{mg}{0{,}65 \times 10^{-3}}}$$

d'on trobem que la tensió de la corda és: $F = mg = 50{,}26\,\mathrm{N}$

Com que $f_1 = 440\,\mathrm{Hz}$, el nombre de l'harmònic de les freqüències de ressonància trobades és $n = \frac{880\ \mathrm{Hz}}{440\ \mathrm{Hz}} = 2$ i $n+1 = 3$ ■

Ones estacionàries en tubs finits

Estudiem la formació d'ones estacionàries longitudinals en un medi gasós contingut en un tub. Si el tub està **tancat pels dos extrems**, l'aire del tub en contacte amb les parets del tub no podrà vibrar. El comportament de les ones de desplaçament en aquest tub és el mateix que el de les ones en una corda amb els extrems fixos. Si L és la longitud del tub i $v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$ la velocitat de propagació, les freqüències

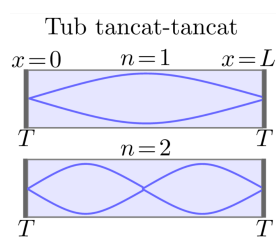


Fig. 8.10: Tub tancat pels dos extrems

f_n que produeixen ones estacionàries són les donades per (8.57). A la figura 8.10, es mostra un tub de longitud L, tancat pels dos extrems, vibrant segons el primer i el segon harmònic de l'ona de desplaçament.

Si els extrems estan oberts, a una distància petita d'aquests extrems, proporcional al diàmetre del tub, hi ha un ventre de desplaçament. Per simplicitat, no tindrem en compte aquest **efecte de boca**. A la figura 8.11, es mostren els dos primers harmònics per a aquest cas. S'observa que les posicions de nodes i ventres estan transposades respecte del cas del tub tancat pels dos extrems. Les freqüències possibles per a ones estacionàries són les mateixes (8.57) que les corresponents al mateix tub amb els dos extrems tancats.

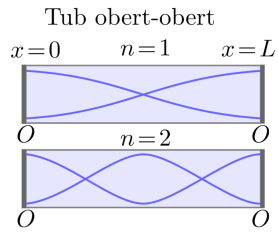


Fig. 8.11: Tub obert pels dos extrems

➜ *En els tubs tancat-tancat i obert-obert, són possibles tots els harmònics*

Si un dels extrems és tancat i l'altre és obert, hi haurà un node de desplaçament a l'extrem tancat i un ventre a l'extrem obert. A la figura 8.12, es mostren els esquemes dels tres primers casos de longitud d'ona més gran. Si $n = 1,\ 2,\ 3,\ ...$ és la seqüència d'harmònics (8.57), els possibles harmònics n_s en el tub tancat-obert cal que compleixin

$$L = (2n-1)\frac{\lambda}{4} = n_s\frac{\lambda}{4} \qquad \text{on} \qquad n_s = 1,\ 3,\ 5,\ ...$$

I, com que $v = \lambda f$, llavors les úniques freqüències f que donen lloc a les ones estacionàries en un tub tancat-obert són

[-10mm]

$$f_{n_s} = n_s\frac{v}{4L},\ n_s = 1,\ 3,\ 5... \tag{8.58}$$

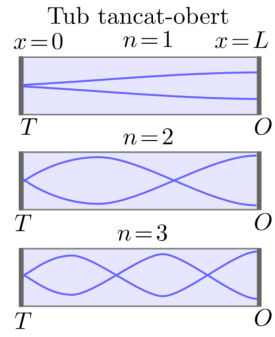


Fig. 8.12: Tub amb un extrem tancat i l'altre obert

➜ La freqüència més baixa o **freqüència fonamental**, $n_s = 1$, és $f_1 = \frac{v}{4L}$. Les freqüències dels harmònics superiors s'obtenen de (8.58).

➜ *En un tub tancat-obert, només són possibles els harmònics senars.*

➜ Com que l'ona de pressió està desfasada $\pi/2$rad respecte de l'ona de desplaçament, els nodes i els ventres de l'ona de pressió estan intercanviats respecte dels de l'ona de desplaçament.

Figura de l'enunciat 8.5.2

Problema 8.5.2. La longitud de la caixa de ressonància d'un diapasó, tancada per un extrem, de freqüència 440 Hz és de 17,0 cm. És adequada aquesta longitud?

Solució

Si prenem la velocitat del so com 343 m/s, corresponent a l'aire a uns 20°C, aplicant (8.58), per a $n_s = 1,\ 3,\ 5...$, tenim

$$f_{n_s} = 440\ \text{Hz} = n_s\frac{v}{4L}$$

d'on

$$L = n_s \frac{343}{4 \cdot 440} = n_s 0{,}195 \text{ m}$$

Per a $n_s = 1$, obtenim $19{,}5\,\text{cm} \neq 17{,}0\,\text{cm}$. La longitud de la caixa no sembla ser l'adequada. La longitud de la caixa és l'adequada si tenim en compte l'efecte de boca. ■

Ressonància

D'una manera molt semblant al què succeeix en els sistemes oscil·lants d'un grau de llibertat, que hem estudiat al capítol 6 (objectes puntuals o de 0 dimensions), els objectes d'una, dues i tres dimensions també poden experimentar fenòmens de ressonàncies. En aquest capítol hem estudiat objectes d'una dimensió (cordes, barres, tubs...) però el que comentarem és extensible a d'altres dimensions.

Un objecte qualsevol és un medi limitat susceptible de vibrar per l'excitació de les ones que hi arriben dels medis adjacents. Per les característiques geomètriques i els materials, aquest objecte tindrà unes freqüències pròpies. Diem que l'objecte **entra en ressonància** quan l'excitador extern vibra en alguna de les freqüències pròpies de l'objecte i provoca ones estacionàries d'aquesta freqüència.

Un bon exemple el trobem en el comportament dels instruments musicals.

➔ La freqüència fonamental f_1 d'un instrument musical es correspon amb el **to** o **nota** musical. La relació de les amplituds dels harmònics superiors respecte de la fonamental, A_2/A_1, A_3/A_1,..., determina el **timbre** de l'instrument. Un do de clarinet i de flauta tenen el mateix to però diferent timbre.

A la figura 8.13, es mostra l'anàlisi espectral del do_4 d'un piano i la forma de l'ona corresponent. Fixeu-vos que el terme dominant és l'harmònic fonamental, 261 Hz, i que disminueixen ràpidament les amplituds dels dos harmònics següents. Hi ha instruments que són més rics en harmònics, és a dir, en què la successió A_n/A_1 disminueix més lentament.

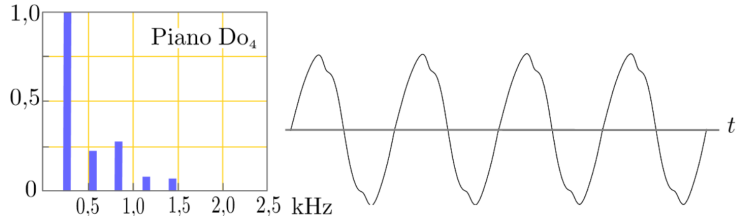


Fig. 8.13: Relació d'amplituds per al do central o do_4 del piano i l'ona resultant de la superposició

En molts casos, les ressonàncies impliquen unes amplituds i/o acceleracions tan grans que poden arribar a ser destructives i que convé evitar. En altres casos, les ressonàncies poder ser molt útils. Així, un sistema amb diverses freqüències de ressonància pot actuar com un **filtre** de freqüències.

Un exemple de filtre es mostra a la figura 8.14. Una corda molt llarga està unida pel seu extrem dret a una barra elàstica prima, que està agafada pel centre amb una mordassa. A l'extrem simètric oposat de la barra, es lliga una segona corda molt llarga. Per la corda esquerra arriba una ona progressiva incident y_I de freqüència ω_I. Aquesta ona incident proporciona l'excitació sobre la barra. La barra, amb el

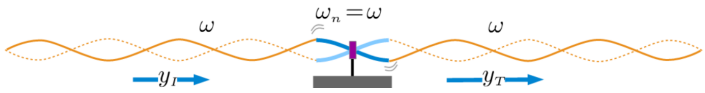


Fig. 8.14: Una corda molt llarga unida a una barra elàstica

punt central fixat (node) i els extrems lliures (ventres), pot vibrar transversalment amb un determinat conjunt de freqüències[2] f_n. Si la freqüència de l'ona incident coincideix amb un dels modes de vibració de la barra, es produiran ones estacionàries transversals a la barra que donaran lloc a una ona transmesa y_T a la corda dreta. Diem que hi ha ressonància entre l'ona incident i la barra. En cas contrari, la barra no vibrarà (almenys de forma notable) i tampoc no hi haurà ona transmesa.

[2] Per a les vibracions longitudinals, una barra en les condicions descrites vibra a les freqüències $f_n = nf_1$, amb $f_1 = \frac{v}{2L}$, i $n = 1, 2, 3, \ldots$, és a dir, les mateixes a les quals vibra un tub amb els dos extrems tancats o oberts. Les vibracions transversals són més complexes que les longitudinals i la relació $f_n \neq nf_1$ no és vàlida, però si que hi ha unes freqüències pròpies f_n

Si la freqüència de l'ona incident coincideix amb una de les pròpies de la barra, $\omega = \omega_n$, les ones en les cordes es transmetran, és a dir,

$$y_I(x,t) = A\cos(\omega t - kx)$$
$$y_{\text{barra}} = A\cos k_n x \cos\omega_n t$$
$$y_T(x,t) = A\cos(\omega t - k\,[x - L] + \pi)$$

Si no coincideix, no hi haurà ona transmesa. Si per la corda de l'esquerra arriba una superposició de moltes freqüències, la barra només permetrà la transmissió a la corda de la dreta de les ones de freqüències que coincideixin amb alguna de les freqüències pròpies de la barra. Canviant la barra, canviaran les freqüències pròpies que es transmetran; la barra fa de "filtre", afavorint el pas d'unes freqüències i impedint-ne el pas de la resta.

Problema 8.5.3. A la figura, es mostren dues habitacions, separades per una paret P que les aïlla acústicament excepte per un tub prim, obert pels dos costats, de longitud L que les comunica. En una de les habitacions, a prop del tub, un generador de so D emet amb freqüència f i intensitat I_a.

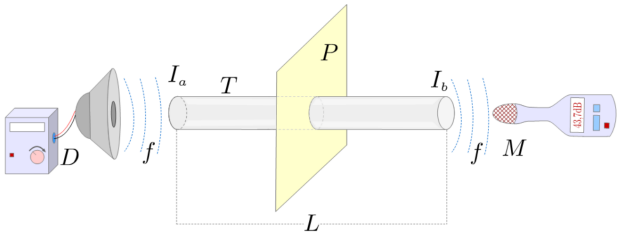


Figura de l'enunciat de 8.5.3

A l'altra habitació, un sonòmetre M mesura la I_b del so que arriba a través del tub. A continuació es repeteix l'emissió i el mesurament de I_b per a diverses freqüències

f. Suposant que totes les intensitats I_a emeses són iguals, com són les intensitats I_b mesurades en funció de la freqüència f?

Solució

Cada intensitat rebuda I_b depèn molt de la freqüència f del so: si aquesta és la fonamental del tub, $f_1 = v/2L$, o una dels seus múltiples, $f_n = n\,f_1$, hi haurà una ressonància i la intensitat I_b serà màxima. Però, a mesura que la freqüència f s'allunya d'una d'aquestes freqüències pròpies del tub, la intensitat I_b del so disminueix fins arribar a un mínim. Si el radi del tub és relativament gran, les màximes I_b seran poc inferiors a I_a i les mínimes, pràcticament zero. El tub actua de filtre acústic. ■

8.6 Efecte Doppler i ones de xoc

Efecte Doppler

Fig. 8.15: Christian Andreas Doppler (1803-1853) va ser un matemàtic i físic austríac

S'anomena **efecte Doppler** la variació de la freqüència de les ones rebudes per un observador a causa del moviment relatiu entre aquest i la font. Quan un tren se'ns acosta, sentim el seu xiulet més agut que quan està aturat i més greu quan s'allunya.

A la figura 8.16, l'observador O mesura la freqüència f_O de les ones que li arriben, emeses per la font F, amb una freqüència f_F.

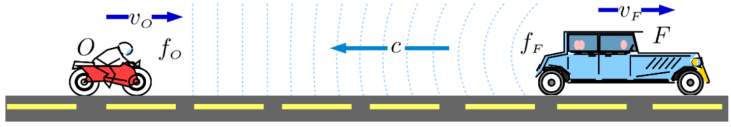


Fig. 8.16: Efecte Doppler

Sigui c la velocitat de l'ona i siguin v_F i v_O les velocitats constants de F i O (positives en el sentit de O cap a F).

Suposem que la font F, en un determinat instant t_1, emet un front d'ona i passat un període $T_F = 1/f_F$, a l'instant $t_2 = t_1 + T_F$, emet el següent, etc. Si x_{F0} és la distància de l'observador a la font a l'instant t_1, aquests fronts d'ona arribaran a l'observador-receptor als instants t'_1, t'_2, etc, donats per les relacions

$$v_O\,(t'_1 - t_1) = x_{F0} - c\,(t'_1 - t_1) \qquad v_O\,(t'_2 - t_1) = x_{F0} + v_F T_F - c\,(t'_2 - t_1 - T_F)$$

D'aquí trobem que el període T_O de l'ona que arriba a l'observador és

$$T_O = t'_2 - t'_1 = \frac{c + v_F}{c + v_O}\,T_F$$

o, en termes de freqüències,

$$\frac{f_O}{c + v_O} = \frac{f_F}{c + v_F} \tag{8.59}$$

S'ha de tenir present que les velocitats v_O i v_F són respecte del medi. Si es tracta d'ones sonores i el medi és aire i fa vent, a l'expressió (8.59) cal utilitzar les velocitats relatives a l'aire, tenint en compte el vent.

L'efecte Doppler té moltes aplicacions pràctiques: radars per detectar excessos de velocitat en el trànsit, sonars utilitzats en la navegació marítima, ecografies.... Una bona part del coneixement de l'astrofísica està basat en l'efecte Doppler que experimenten les ones electromagnètiques emeses per les estrelles i galàxies en moviment respecte de la Terra.

Problema 8.6.1. Dos estudiants, A i B, porten diapasons iguals de $f_d = 440\,\text{Hz}$ en vibració. Si A s'està quiet i B s'allunya d'ell a $v_b = 6\,\text{m/s}$, quants batecs per segon, per causa de l'efecte Doppler, sentiran l'un i l'altre? Suposeu que no fa vent i que la velocitat del so és de $c = 340\,\text{m/s}$.

Solució

Aplicant l'expressió anterior (8.59) sobre l'efecte Doppler als dos casos, queda que les freqüències que senten A i B, f'_a i f'_b, respectivament, del diapasó de l'altre, són

$$f'_a = \frac{c}{c+v_b} f_d \qquad\qquad f'_b = \frac{c-v_b}{c} f_d$$

Fixeu-vos que, si v_b és bastant més petita que c, les dues freqüències són molt semblants. Les freqüències dels batecs són

$$f_a^{\text{bat}} = f_d - f'_a = \frac{v_b}{c+v_b} f_d = 7{,}63\,\text{Hz}\,; \quad f_b^{\text{bat}} = f_d - f'_f = \frac{v_b}{c} f_d = 7{,}76\,\text{Hz}$$ ■

Ones de xoc

Les **ones de xoc** es produeixen quan la font emissora es mou més ràpidament que les ones que emet. Són exemples d'ones de xoc les produïdes pels avions quan van a una velocitat superior a la del so, o les dues branques del solc que deixa a l'aigua un vaixell en desplaçar-se.

A la figura 8.17, una font F d'ones esfèriques es mou en la direcció de l'eix x a velocitat constant v_F superior a la de les ones emeses, de velocitat c. A l'instant $t = 0$, la font F és a $x_0 = 0$ i emet un front d'ona que a l'instant $t_N = N\Delta t$ (a la figura 8.17, hem pres $N = 5$) serà una esfera de radi $r_0 = Nc\Delta t$. A l'instant $t_1 = \Delta t$, quan és a $x = v_F\Delta t$, emet un altre front, que a t_N tindrà un radi $r_1 = 4c\Delta t$. I així successivament. A l'instant $t_N = N\Delta t$, F emet un front que, en aquest mateix instant, té radi zero.

Com s'aprecia clarament a la figura, per a qualsevol N, aquesta successió d'ones esfèriques dóna lloc a una envolupant cònica que concentra tots els fronts d'ona: és

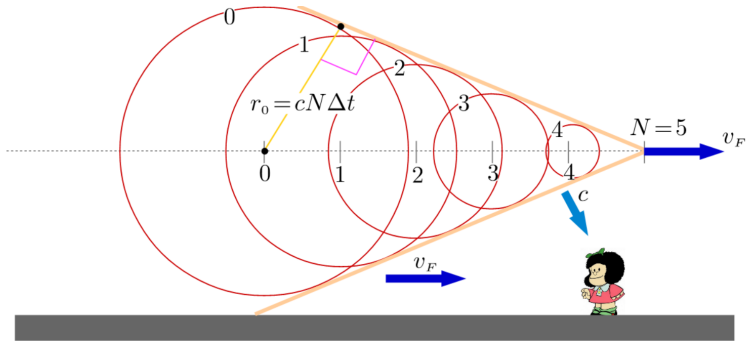


Fig. 8.17: Ones de xoc

l'anomenada **ona de xoc**, que viatja darrere mateix de la font d'ones. El semiangle d'obertura del con θ compleix $\sin\theta = cN\Delta t/(v_F N\Delta t)$, és a dir,

$$\sin\theta = \frac{c}{v_F} \tag{8.60}$$

L'ona de xoc es desplaça a la mateixa velocitat v_F que la font F mentre que l'ona ho fa a velocitat c.

8.7 Difracció

Considerem una ona plana que incideix en una paret que li impedeix el pas excepte per un forat. Si el forat no és molt petit, l'ona passa sense alterar la direcció que portava. Molt aproximadament, continua sent una ona plana. Si el forat és molt i molt petit, el medi situat en el forat actua com un focus emissor d'ones esfèriques que es propaguen a l'altra banda de la paret. A la figura 8.18, s'il·lustren molt

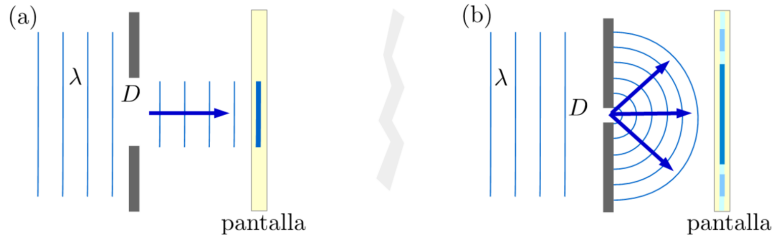


Fig. 8.18: Model per entendre la difracció

esquemàticament aquests comportaments, que són els casos extrems d'un conjunt de fenòmens, coneguts amb el nom de **difracció**, que ocorren quan un objecte d'unes dimensions equiparables a la longitud d'ona s'interposa en el camí d'aquesta ona.

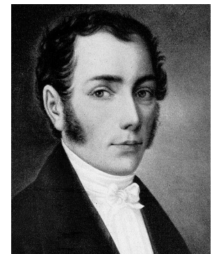


Fig. 8.19: Joseph von Fraunhofer (1787–1826) fou un òptic alemany

Difracció de Fraunhofer

Una situació de difracció molt interessant és l'observació de la difracció de les ones en passar a través d'una obertura circular, de diàmetre D, feta a una distància molt

més gran que D (vegeu la figura 8.20). És la **difracció de Fraunhofer**. Un ona plana de longitud d'ona λ incideix normal l'obertura.

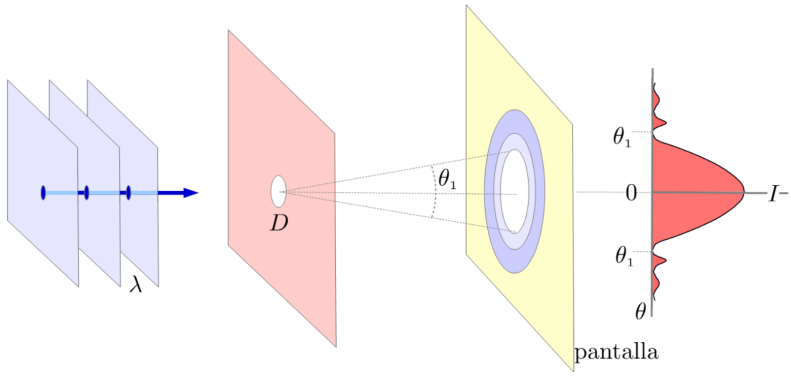


Fig. 8.20: Difracció de Fraunhofer. L'observació del fenomen es fa en una pantalla

La intensitat de l'ona difractada, observada a la pantalla, en funció de l'angle θ, es reparteix des d'un valor màxim a $\theta = 0$ fins a un mínim per a l'angle θ_1. És la **taca d'Airy**. Per a valors $\theta > \theta_1$, la intensitat va passant per una sèrie de màxims i mínims, cada cop més debilitats. A la taca d'Airy, determinada per l'angle θ_1, es concentra el 84% de la intensitat difractada per l'obertura. Es pot demostrar i corroborar experimentalment que l'angle θ_1 ve donat per

$$\sin\theta_1 = 1{,}22\,\frac{\lambda}{D} \tag{8.61}$$

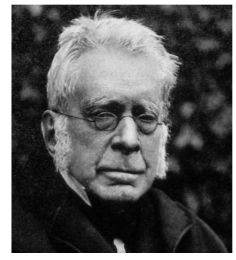


Fig. 8.21: Sir George Biddell Airy (1801-1892) fou un astrònom i matemàtic anglès

9 Equacions de Lagrange

Introducció

Aquest capítol només justifica la seva presència per tal que, qui ho vulgui, pugui tenir un tast de la mecànica analítica i la seva relació amb la mecànica newtoniana a través de l'equació general de la dinàmica explicada al capítol 3. Partint d'aquesta, es dedueixen les equacions de moviment de Lagrange per a sistemes amb lligams geomètrics dependents del temps, que serien l'extensió a L graus de llibertat de les equacions trobades al capítol 3 per a sistemes conservatius emprant la funció energia mecànica del sistema. Veurem com podem definir la funció de Lagrange o lagrangiana i com, a partir d'aquesta, trobem les L equacions de moviment de segon ordre que permeten trobar el moviment del sistema. No anem més enllà perquè l'únic objectiu és fer el pont entre la mecànica newtoniana i la analítica en general, que es pot trobar en multitud de textos.

9.1 Equacions de Lagrange de segona classe

Partim de l'equació general de la dinàmica, explicada a la secció 3.9

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i \right) \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \tag{9.1}$$

Fig. 9.1: Joseph Louis Lagrange (1736-1813) va ser un matemàtic, físic i astrònom italià que després va viure a Prússia i França

Tractarem com a molt amb lligams geomètrics que poden dependre del temps. Suposarem que tenim els lligams expressats en forma paramètrica, amb paràmetres $\{q_1, q_2, ..., q_L\}$:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, ..., q_L, t) \tag{9.2}$$

essent L el nombre de graus de llibertat del sistema. Tenim

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{a=1}^{L} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_a} dq_a \tag{9.3}$$

El terme de (9.1) que conté les forces $\vec{F}_i$ es pot escriure

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_{a=1}^{L} Q_a dq_a$$

on

$$Q_a = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_a} \tag{9.4}$$

s'anomenen **forces generalitzades**, que sempre es podran expressar com a funció dels paràmetres q_a o **coordenades generalitzades**. Observem que les unitats de Q_a no són necessàriament unitats de força (és a dir, newtons) ni tan sols totes les Q_a tindran, en general, les mateixes unitats. Les unitats de les Q_a dependran de les unitats de q_a. Sí que passarà que $Q_a\, dq_a$ tindrà unitats d'energia (és a dir, joules).

El terme de (9.1) que conté l'acceleració es pot escriure

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i \cdot \delta\vec{r}_i &= \sum_{a=1}^{L}\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\dot{\vec{r}}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_a} dq_a \\ &= \sum_{a=1}^{L} \left(\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_a} - \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_a} \right) dq_a \end{aligned} \tag{9.5}$$

Tenint en compte que

$$\dot{\vec{r}}_i = \sum_{b=1}^{L} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_b}\dot{q}_b + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$$

obtenim

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_a} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_a} \tag{9.6}$$

i

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_a} = \sum_{b=1}^{L} \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_b \partial q_a}\dot{q}_b + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_a \partial t} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_a} \tag{9.7}$$

Amb (9.6, 9.7), podem escriure (9.5) com

$$\sum_{a=1}^{L} \left(\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_a} - \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_a} \right) dq_a = \sum_{a=1}^{L} \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_a} - \frac{\partial E_c}{\partial q_a} \right) dq_a$$

de manera que l'equació general de la dinàmica (9.1) pren la forma

$$\sum_{a=1}^{L} \left\{ Q_a - \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_a} - \frac{\partial E_c}{\partial q_a} \right) \right\} dq_a$$

on E_c és l'energia cinètica del sistema com a funció de les coordenades generalitzades i el temps, és a dir, $E_c(q_a, \dot{q}_b, t)$.

Finalment, tenint en compte que dq_a són desplaçaments arbitraris, n'obtenim les **equacions de Lagrange de segona classe**

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_a} - \frac{\partial E_c}{\partial q_a} = Q_a \tag{9.8}$$

9.2 Equacions de Lagrange

Si les forces $\vec{F}_i$ són conservatives, tindrem

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = -dU = -\sum_{a=1}^{L} \frac{\partial U}{\partial q_a} dq_a$$

i, per tant,

$$Q_a = -\frac{\partial U}{\partial q_a} \tag{9.9}$$

on U serà funció de les q_a i potser de t, però no de $\dot{q}_a$. Sense necessitat de passar per les forces $\vec{F}_i$, si les forces generalitzades Q_a compleixen (9.9), amb $U(q_a, t)$, direm que el sistema té **forces potencials** i U és la seva energia potencial. Si $U(q_a)$ no depèn del temps, diem que les forces generalitzades són conservatives.

Si definim la **funció de Lagrange** $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L} = E_c - U \tag{9.10}$$

i tenim en compte que U no depèn de $\dot{q}_a$, podem escriure les equacions (9.8) per a sistemes amb forces potencials, utilitzant la funció de Lagrange $\mathcal{L}$, en forma d'**equacions de Lagrange**:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} = 0 \tag{9.11}$$

Si no totes les forces $\vec{F}_i$ són conservatives, les equacions de Lagrange adopten la forma

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} = Q_a \tag{9.12}$$

on Q_a vindran donades segons (9.4) només tenint en compte les forces no conservatives o, en general, les que no hagin estat incloses en la lagrangiana a través de l'energia potencial.

Les equacions de Lagrange tenen algunes propietats importants que analitzem tot seguit.

Lagrangianes equivalents

Si dues lagrangianes $\mathcal{L}$ i $\mathcal{L}'$ difereixen en una funció de la forma $\frac{d\Omega(q_a,t)}{dt}$, $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{d\Omega}{dt}$, les equacions de lagrange associades són iguals. La demostració és immediata i equival a demostrar la identitat

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_a}\left(\frac{d\Omega}{dt}\right) - \frac{\partial}{\partial q_a}\left(\frac{d\Omega}{dt}\right) = 0$$

que es pot fer sense fer servir les equacions de Lagrange.

Conservació de l'energia

Si definim la funció $\mathcal{H} = \sum_a \dot{q}_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} - \mathcal{L}$ i fem servir les equacions de Lagrange, es compleix $\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$. És senzill veure que, si les forces són conservatives i els lligams no depenen del temps, $\mathcal{L}$ no dependrà del temps, l'energia mecànica E coincidirà amb $\mathcal{H}$ i es conservarà. La funció $\mathcal{H}$ és el germen d'un objecte de gran importància que s'anomena ***funció de Hamilton o hamiltonià***.

Fig. 9.2: Emmy Noether (1882-1935) fou una matemàtica alemanya

Conservació i simetria: teorema de Noether

Donada una transformació infinitesimal contínua de coordenades $q_a \to q_a + \delta q_a$ la lagrangiana es transforma $\mathcal{L} \to \mathcal{L} + \delta\mathcal{L}$

$$\delta\mathcal{L} = \sum_a \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} \delta q_a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} \delta \dot{q}_a \right)$$

Si *fem servir les equacions de Lagrange*, podem escriure

$$\delta\mathcal{L} = \frac{d}{dt} \sum_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} \delta q_a$$

➔ Una transformació infinitesimal, $q_a \to q_a + \delta q_a$, és una **transformació de simetria** si deixa invariant la forma de les equacions de moviment pel fet de transformar la lagrangiana en una d'equivalent, $\delta\mathcal{L} = \frac{d\delta\Omega}{dt}$, *sense fer servir les equacions de Lagrange*. Podem, doncs, enunciar un teorema de gran importància en la física moderna:

➔ ***Teorema de Noether***. *Si la lagrangiana $\mathcal{L}$ té la simetria $q_a \to q_a + \delta q_a$ llavors hi ha unes quantitats que es conserven (són constants quan el sistema es mou segon les equacions de moviment)*

$$\sum_a \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} + \frac{\partial \Omega}{\partial q_a} \right) \delta q_a = \text{constant} \tag{9.13}$$

El cas més senzill és quan la lagrangiana no depèn d'alguna de les coordenades q_a, per exemple q_1. Podem dir que la lagrangiana és simètrica respecte de transformacions $q_1 \to q_1 + \delta q_1$ i tenim una quantitat conservada

$$p_1 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} = \text{constant} \tag{9.14}$$

Principi de Hamilton

Les equacions de Lagrange (9.11) es poden obtenir, suposant que ja coneixem la funció de Lagrange $\mathcal{L}(q_a, \dot{q}_a, t)$, a partir del principi de Hamilton. Per enunciar

aquest principi, primer cal definir el **funcional d'acció** S. Si $q_{a1}(t_1)$ i $q_{a2}(t_2)$ són les configuracions inicials i finals del sistema, el funcional d'acció es defineix en funció de les trajectòries $q_a(t)$ que van de $q_{a1}(t_1)$ a $q_{a2}(t_2)$ en la forma

$$S[q_a(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_a(t), \dot{q}_a(t), t)\, dt \tag{9.15}$$

Fig. 9.3: William Rowan Hamilton (1805-1865) va ser un matemàtic, físic i astrònom britànic irlandès

➔ ***Principi de Hamilton***. *Donat un sistema amb lagrangiana $\mathcal{L}(q_a(t), \dot{q}_a(t), t)$, la trajectòria que seguirà el sistema de $q_{a1}(t_1)$ a $q_{a2}(t_2)$ és un extremal del funcional d'acció $S[q_a(t)]$ respecte de les trajectòries que passen per aquestes dues configuracions:*

$$\frac{\delta S[q_a(t)]}{\delta q_a(t)} = 0 \tag{9.16}$$

El principi de Hamilton també es coneix amb el nom de **principi de mínima acció** i és emprat en múltiples situacions en física moderna.

Vegem ara alguns exemples senzills, d'un grau de llibertat, que podem tractar amb els mètodes d'aquest capítol.

Problema 9.2.1. A la figura, podem veure un pèndol forçat format per una massa m agafada a l'extrem d'una tija, rígida i de massa negligible. La mà agafa l'altre extrem de la tija i el desplaça horitzontalment $x_0(t)$ respecte de la seva posició no forçada $x_0 = 0$. Trobeu la lagrangiana i l'equació de moviment del pèndol i particulariteu per a petites oscil·lacions per als casos següents:

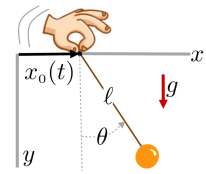


Figura de l'enunciat 9.2.1

a) el pèndol oscil·la sense fricció,

b) hi ha una fricció viscosa, que podem expressar com una força $-b\vec{v}$, essent $\vec{v}$ la velocitat de la massa m.

Solució

Es tracta d'un sistema amb lligams. Si la posició de la massa m és $\vec{r} = (x, y)$, el lligam és $(x - x_0(t))^2 + y^2 = \ell^2$. Si $x_0 = 0$, tenim el pèndol usual.

El sistema té un grau de llibertat, que representarem amb l'angle θ. Tenim $\vec{r} = (x_0 + \ell \sin\theta, \ell\cos\theta)$ i $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = (\dot{x}_0 + \ell\dot{\theta}\cos\theta, -\ell\dot{\theta}\sin\theta)$

L'energia cinètica és $E_c = \frac{1}{2}m\left[(\dot{x}_0 + \ell\dot{\theta}\cos\theta)^2 + (-\ell\dot{\theta}\sin\theta)^2\right]$ i la potencial $U = -mg\ell\cos\theta$. La lagrangiana és, doncs,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + mg\ell\cos\theta + m\dot{x}_0\dot{\theta}\ell\cos\theta \tag{1}$$

Les equacions de moviment les trobem a partir de (1)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = m\ell^2\ddot{\theta} + mg\ell\sin\theta + m\ddot{x}_0\ell\cos\theta = 0$$

Si considerem petites oscil·lacions $\sin\theta \approx \theta$ i $\cos\theta \approx 1$ n'obtenim

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = -\frac{\ddot{x}_0}{\ell}$$

i si el moviment forçat $x_0(t)$ és harmònic, la massa m efectua oscil·lacions harmòniques forçades com les que hem vist a la secció 6.4, però sense fricció.

Per incloure la fricció, expressada com una força $-b\vec{v}$, tindrem, segons (9.4)

$$Q = -b\dot{\vec{r}} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = -b\ell(\dot{x}_0 \cos\theta + \ell\dot{\theta}) \tag{2}$$

I ara obtindrem les equacions de lagrange segons (9.12), és a dir,

$$m\ell^2\ddot{\theta} + mg\ell\sin\theta + m\ddot{x}_0\ell\cos\theta = -b\ell(\dot{x}_0\cos\theta + \ell\dot{\theta})$$

que, per a petites oscil·lacions, és

$$\ddot{\theta} + \frac{b}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = -\frac{\ddot{x}_0}{\ell} - \frac{b}{m}\frac{\dot{x}_0}{\ell} \tag{3}$$

Com veiem, la fricció afecta el comportament del terme forçat. Serà un moviment harmònic forçat (MHF) com els descrits a 6.4 només si el terme de la dreta de (3) té la forma $B\sin(\Omega t + \theta_0)$, és a dir, si el moviment de x_0 compleix

$$\ddot{x}_0 - \frac{b}{m}\dot{x}_0 = \ell B\sin(\Omega t + \theta_0)$$

i, essencialment, això vol dir que x_0 tingui la forma

$$x_0(t) = \frac{mB}{\Omega(\Omega^2 m^2 + b^2)}\left(b\cos[\Omega t + \theta_0] - m\Omega\sin[\Omega t + \theta_0]\right) \qquad \blacksquare$$

Problema 9.2.2. A la figura, podem veure un sistema forçat, format per una massa m agafada de l'extrem d'una molla, de massa negligible. La mà agafa l'altre extrem de la molla i el desplaça verticalment, de manera que desplaça $x_0(t)$ la posició d'equilibri del sistema $x_0 = 0$. Trobeu la lagrangiana i l'equació de moviment per als casos següents:

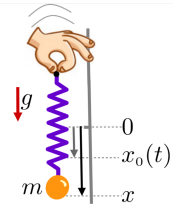


Figura de l'enunciat 9.2.2

a) el sistema oscil·la sense fricció,

b) hi ha una fricció viscosa, que podem expressar com una força $-b\vec{v}$, essent $\vec{v}$ la velocitat de la massa m.

Solució

En aquest cas, no es tracta d'un sistema amb lligams. La força neta que rep la massa m és $\vec{F} = -k(x - x_0(t))\hat{\imath}$. No és una força conservativa, ja que depèn del temps, però si que és potencial: $U = \frac{1}{2}k(x - x_0(t))^2$. L'energia cinètica és $E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$. La lagrangiana és

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}k(x - x_0(t))^2 \tag{1}$$

Les equacions de Lagrange resulten

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = m\ddot{x} + kx - kx_0(t) = 0$$

L'equació canònica és

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}x_0(t)$$

Si tenim en compte la fricció viscosa, tindrem $Q = -b\dot{x}$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = m\ddot{x} + kx - kx_0(t) = -b\dot{x}$$

L'equació canònica és, en aquest cas,

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}x_0(t)$$ ■

1 Problemes i qüestions

Problema 1.5.2. Es vol estudiar la situació següent: una bola massissa baixa per un pla inclinat un angle α respecte a l'horitzontal. Segons el que sabem, l'acceleració amb què baixa la bola és

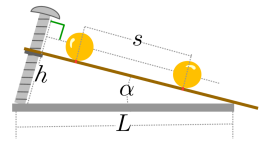


Figura de l'enunciat 1.5.2

$$a = g\ \sin\alpha = g\frac{h}{L} \tag{1}$$

de manera que el moviment és uniformement accelerat

$$s = \frac{1}{2}at^2 \tag{2}$$

De fet, però, l'acceleració corresponent al moviment del centre de la bola no pot ser la donada per (1), ja que l'energia potencial gravitatòria no tan sols es converteix en energia cinètica de translació, sinó també en energia cinètica de rotació entorn del seu centre. Això pot comportar que l'acceleració de l'esfera es redueixi en un cert factor $Q < 1$

$$a = Q\ g\frac{h}{L} \tag{3}$$

És aquest factor Q el que volem determinar experimentalment

Per un recorregut s fixat i conegut, es cronometren els temps de descens de la bola per a diversos valors de h. Utilitzant (2), es determina l'acceleració de baixada en cada cas. S'hi han portat a terme mesuraments successius incrementant h en una quantitat constant, corresponent a una volta de cargol (pas de rosca) d. Si l'altura inicial és h_0 i es va augmentant en n voltes del cargol (amb $n = 1{,}2{,}3, \ldots$), l'altura assolida per a cada valor de n és

$$h_n = h_0 + nd \tag{4}$$

Dades: dimensions del pla inclinat $s = 35{,}3\,\text{cm}$; $L = 48{,}6\,\text{cm}$; pas de rosca del cargol $d = 0{,}70\,\text{mm}$; acceleració de la gravetat $g = 9{,}81\,\text{m/s}^2$; els mesuraments realitzats els podeu veure a la taula.

a) Trobeu l'acceleració a en funció de n , h_0 ,Q, d, L i g.

b) Representeu els punts (n, a) d'acord amb els mesuraments realitzats i utilitzant (2).

Taula del problema 1.5.2

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
t(s)	4,44	3,92	3,60	3,29	3,10	2,85	2,75	2,57	2,48	2,36	2,30	2,23

c) Trobeu **gràficament** la recta que s'ajusta millor a aquests punts.

d) Trobeu per **regressió lineal** la recta que s'ajusta millor a aquests punts.

e) Utilitzant la recta d'ajust trobada a **d** i l'expressió trobada a **a**, deduïu els valors del factor Q i h_0.

f) Trobeu l'error del pendent i l'ordenada a l'origen de la recta d'ajust i calculeu, a continuació, l'error propagat al factor Q.

Qüestió 1.7.1. Una partícula descriu una trajectòria caracteritzada per un vector posició $\vec{r} = \sin(t)\ \hat{\imath} + \cos(t)\hat{\jmath} + 2t\hat{k}$ (Unitats S.I.). El radi de curvatura de la trajectòria és:

a) $5/2\,\mathrm{m}$

b) $2/5\,\mathrm{m}$

c) $5\,\mathrm{m}$

d) $\sqrt{5}\,\mathrm{m}$

e) $\frac{1}{\sqrt{5}}\,\mathrm{m}$

Qüestió 1.7.2. Una partícula descriu una trajectòria circular, de radi $1{,}5\,\mathrm{m}$, amb una acceleració tangencial $2t$ (en unitats S.I.). A $t = 0$, la partícula es troba en repòs. El mòdul de l'acceleració de la partícula a $t = 1{,}2\,\mathrm{s}$ serà:

a) $1{,}38\,\mathrm{m/s^2}$

b) $3{,}10\,\mathrm{m/s^2}$

c) $1{,}44\,\mathrm{m/s^2}$

d) $2{,}40\,\mathrm{m/s^2}$

e) $2{,}77\,\mathrm{m/s^2}$

→ 2P

2 Problemes i qüestions

Qüestió 2.1.1. Sobre un cos de $4\,\text{kg}$ que es mou en la direcció de l'eix x, s'aplica una força en la mateixa direcció, representada a la figura. A l'instant inicial, el cos passa per $x = 0$ movent-se en el mateix sentit que la força amb una velocitat de $3\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$. La velocitat a la posició $x = 8\,\text{m}$ serà:

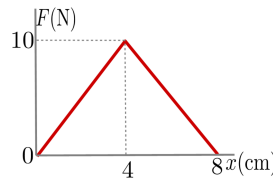


Figura de l'enunciat 2.1.1

a) la mateixa que a $x = 0$

b) $\sqrt{29}\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$

c) $\sqrt{20}\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$

d) $7\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$

e) $\sqrt{11}\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$

Qüestió 2.1.2. La segona llei de Newton afirma que:

a) Si apliquem una força variable a un cos lliure, aquesta és directament proporcional a l'acceleració produïda en el cos.

b) Cossos amb masses diferents són accelerats per una mateixa força amb acceleracions directament proporcionals a les masses.

c) Cossos amb la mateixa massa reben acceleracions inversament proporcionals a les forces aplicades.

d) La força no es crea ni es destrueix.

e) Cap de les anteriors.

Qüestió 2.1.3. El bloc de la figura està lligat a una corda, d'$1{,}5\,\text{m}$ i massa negligible, que forma un angle de $30°$ amb l'horitzontal. La velocitat angular val:

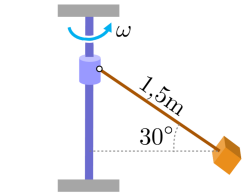


Figura de l'enunciat 2.1.3

a) $7{,}62\,\mathrm{rad/s}$

b) $4{,}62\,\mathrm{rad/s}$

c) $5{,}62\,\mathrm{rad/s}$

d) $6{,}62\,\mathrm{rad/s}$

e) $3{,}62\,\mathrm{rad/s}$

Problema 2.1.5. Un objecte de $5\,\mathrm{kg}$ està sotmès a una força que varia amb la posició de l'objecte $\vec{F} = \frac{2}{5}x\ \hat{\imath}$ (S.I.) . Si parteix de $x_0 = 25\,\mathrm{m}$, quina velocitat inicial v_0 farà que arribi just a $x = 0$?

Ajuda. Per mirar d'integrar l'equació de moviment i trobar la velocitat multipliqueu ambdós membres per la velocitat i tingueu en compte que $v = \frac{dx}{dt}$

Solució: $v_0 = -7{,}07\,\mathrm{m/s}$

Problema 2.1.6. Un objecte de $m = 4\,\mathrm{kg}$ està sotmès a l'acció de dues forces, $\vec{F}_1 = \hat{\imath} - 2\hat{\jmath}$ i $\vec{F}_2 = \hat{\imath} + \hat{\jmath}$. Calculeu l'acceleració, la velocitat i la posició (vector i mòdul) de l'objecte en el temps $t = 3\,\mathrm{s}$ si a $t = 0$ està en repòs a l'origen de coordenades.

Solució: $\vec{a} = \frac{1}{4}\left(2\hat{\imath} - \hat{\jmath}\right)\ \mathrm{m/s^2}$, $a = \frac{\sqrt{5}}{4}\,\mathrm{m/s^2}$, $\vec{v}\,(3) = \frac{3}{4}\,(2\hat{\imath} - \hat{\jmath})\,\mathrm{m/s}$, $v\,(3) = \frac{3\sqrt{5}}{4}\mathrm{m/s}$, $\vec{r}\,(3) = \frac{9}{8}\,(2\hat{\imath} - \hat{\jmath})\ \mathrm{m}$, $r\,(3) = \frac{9\sqrt{5}}{8}\mathrm{m}$

Qüestió 2.2.1. Una pilota de tenis de $80\,\mathrm{g}$ xoca normalment contra una paret vertical. Tant abans com després del xoc, la pilota es mou amb una velocitat horitzontal de mòdul $30\,\mathrm{m/s}$. El mòdul de l'impuls que fa la paret sobre la pilota val:

a) 0

b) $9{,}6\,\mathrm{Ns}$

c) $2{,}4\,\mathrm{Ns}$

d) $4{,}8\,\mathrm{Ns}$

e) Manquen dades per calcular-lo

Qüestió 2.2.2. Una pilota de $60\,\mathrm{g}$ es deixa caure des d'una altura de $2\,\mathrm{m}$. Rebota fins a una altura d'$1{,}8\,\mathrm{m}$. Calculeu quant varia la quantitat de moviment durant el xoc amb el terra?.

a) $0{,}422\,\mathrm{kg\,m/s}$

b) $0{,}365\,\mathrm{kg\,m/s}$

c) $0{,}731\,\mathrm{kg\,m/s}$

d) $0{,}227\,\mathrm{kg\,m/s}$

e) $1{,}246\,\mathrm{kg\,m/s}$

Qüestió 2.2.3. El vector posició d'una partícula de massa $m = 2\,\mathrm{kg}$ és $\vec{r}(t) = (3t^4 + 1{,}2t, 0)$ (unitats S.I.). És cert que:

a) la direcció de la força no és constant.

b) El moviment és rectilini.

c) A $t = 0$, el moment angular respecte a l'origen és nul.

d) A $t = 0$, la quantitat de moviment de la partícula és $\vec{p} = (0\ ,\ 2\ ,\ 0)$.

e) L'impuls subministrat per la força al primer segon és $\vec{I} = (24\ ,\ 0\ ,\ 0)$.

Qüestió 2.2.4. Un cos de $3\,\mathrm{kg}$ es mou rectilíniament segons $\vec{r}(t) = (1250 + 20t - 0{,}5t^2)\hat{\imath}$, per a $t \geq 0$ (unitats S.I.). És cert que:

a) la velocitat inicial és $1250\ \hat{\imath}$

b) La velocitat inicial és nul·la.

c) La quantitat de moviment inicial és $60\ \hat{\imath}$

d) La força aplicada al cos és $3\ \hat{\imath}$

e) La força aplicada al cos és $-1{,}5\ \hat{\imath}$

Problema 2.2.3. Una partícula de $2\,\mathrm{kg}$ és inicialment al punt $\vec{r}(0) = (0{,}0)$, on té una velocitat $\vec{v}(0) = (0{,}2)\,\mathrm{m/s}$. Si, a partir d'aquest punt, comença a actuar una força $\vec{F}(t) = (8, -4)\,\mathrm{N}$, calculeu:

a) $\vec{r}(t)$, $\vec{v}(t)$ i $\vec{a}(t)$

b) On serà la partícula per a $t = 5\,\mathrm{s}$?

c) Per a quin temps la velocitat a l'eix y serà nul·la.

d) Escriviu l'equació de la trajectòria de la partícula.

Solució: a) $\vec{a}(t) = (4, -2)$, $\vec{v}(t) = (4t, 2 - 2t)$, $\vec{r}(t) = (2t^2, 2t - t^2)$ b) $\vec{r}(5) = (50, -15)$ c) 1 s ; d) $y = 2\left(\frac{x}{2}\right)^{1/2} - \frac{x}{2}$

Qüestió 2.3.1. La trajectòria d'una partícula de massa 2 kg és $\vec{r}(t) = -3t^2\ \hat{\imath} + (5t\ + 4)\ \hat{\jmath}$ (unitats S.I.). El moment angular respecte de l'origen de coordenades val (unitats S.I.):

a) $\vec{L}(t) = 6t(5t\ + 28)\ \hat{k}$

b) $\vec{L}(t) = 30t^2\ \hat{k}$

c) $\vec{L}(t) = (5t\ + 8)\ \hat{k}$

d) $\vec{L}(t) = (30t\ + 8)\ \hat{k}$

e) $\vec{L}(t) = 6t(5t\ + 8)\ \hat{k}$

Problema 2.3.3. La pastilla, de massa m, efectua una trajectòria circular, de velocitat angular ω, lligada a la corda, de longitud ℓ, que té l'altre extrem fixat al passador, que pot girar sense fricció al voltant de l'eix, a una alçada $h = \ell/2$. Si augmentem h en $\Delta h = h/5$, quin serà l'augment $\Delta\omega$?

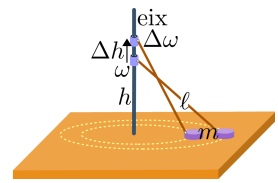


Figura de l'enunciat 2.3.3

Solució: $\Delta\omega = \frac{11}{64}\omega$

Problema 2.3.4. Una petita pastilla de 250 g llisca per una taula horitzontal mentre és lligada a un fil inextensible que passa per un orifici que agafem per l'extrem. La pastilla descriu una trajectòria circular de 500 mm de radi. Anem estirant del fil i, conseqüentment, reduïm el radi de la trajectòria fins a deixar-lo en 200 mm. Si la velocitat inicial de la pastilla és de 5 m/s, determineu-ne la velocitat al final.

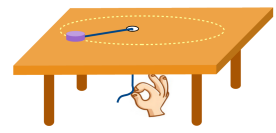


Figura de l'enunciat 2.3.4

Solució: 12,5 m/s

Problema 2.3.5. Una massa puntual de 2 kg descriu la trajectòria: $x = t^3$; $y = t - 2t^2$; $z = t^4/4$ en què t és el temps. Calculeu als 2 s:

a) els vectors velocitat i acceleració.

b) el vector quantitat de moviment.

c) el moment angular respecte del punt $P = (7, -7{,}3)$.

d) la força que actua sobre la massa puntual.

Solució: a) $\vec{v} = 12\ \hat{\imath} - 7\ \hat{\jmath} + 8\hat{k}$, $\vec{a} = 12\ \hat{\imath} - 4\ \hat{\jmath} + 12\hat{k}$ b) $\vec{p} = 24\ \hat{\imath} - 14\ \hat{\jmath} + 16\hat{k}$ c) $\vec{L}_{(P)} = 30\ \hat{\imath} + 8\ \hat{\jmath} - 38\ \hat{k}$ d) $\vec{F} = 24\ \hat{\imath} - 8\ \hat{\jmath} + 24\hat{k}$

Problema 2.3.6. Una partícula lligada a una corda, de massa negligible i longitud ℓ, oscil·la en el pla vertical.

a) Trobeu l'equació de moviment utilitzant la llei de moviment del moment angular

b) Especifiqueu-ne el resultat per a petites oscil·lacions.

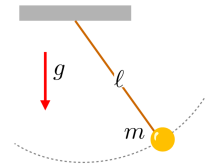


Figura de l'enunciat 2.3.6

Solució: a) $\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell}\sin\theta$ b) $\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell}\theta$

Qüestió 2.4.1. Una partícula de massa 2 kg es mou en la direcció de l'eix x, sotmesa a una força conservativa l'energia potencial de la qual és $U = x^4 - 8x^2$ (unitats S.I.). És cert que:

a) la força és nul·la per a $x = \pm 1$

b) L'acceleració a $x = 0$ és màxima.

c) La força que actua sobre la partícula té per expressió $F = -x^4 + 8x^2$

d) La força que actua sobre la partícula té per expressió $F = -\frac{x^5}{5} + \frac{8}{3}x^3$

e) L'acceleració en $x = 1$ val $6\,\mathrm{m/s^2}$

Qüestió 2.4.2. A la figura, es mostra una corba d'energia potencial en funció d'una variable x. Quina de les gràfiques següents de la força en funció d'aquesta variable és compatible amb la gràfica $U(x)$?

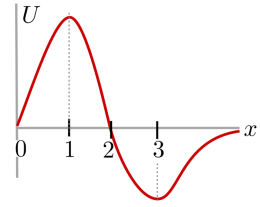
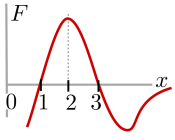
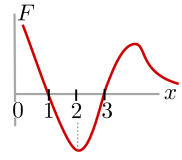
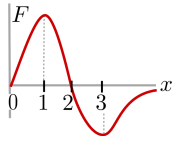
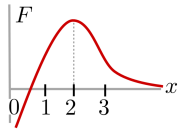


Figura de l'enunciat 2.4.2

a)


b)


c)




d)

e) Si no es coneix l'energia cinètica, no es pot determinar la força a partir de $U(x)$

Qüestió 2.4.3. La força que s'exerceix sobre un cos de 15 kg que es desplaça en la direcció de l'eix x varia amb la posició en la forma indicada a la figura. És cert que:

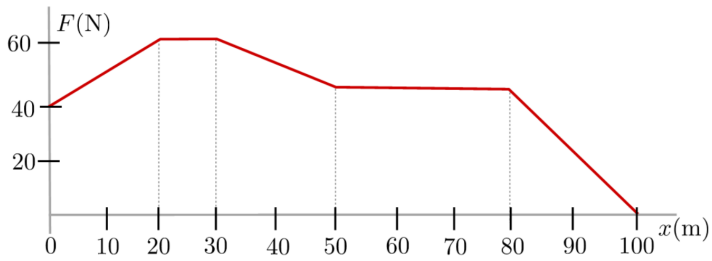


Figura de l'enunciat 2.4.3

a) quan el cos passa de la posició $x = 0$ a $x = 50$ m, l'energia potencial disminueix en 2600 J.

b) Quan el cos passa de la posició $x = 80$ m a $x = 100$ m, l'energia cinètica disminueix en 400 J.

c) Al tram des de $x = 50$ m fins a $x = 80$ m, el moviment és uniforme.

d) La velocitat màxima assolida pel cos es dóna en el tram des de $x = 20$ m fins a $x = 30$ m.

e) Cap de les altres quatre afirmacions és certa.

Qüestió 2.4.4. Un cos de 0,15 kg de massa es mou al llarg de l'eix x en un camp de forces del qual l'energia potencial U es representa a la figura. Deixem el cos al punt C amb una velocitat de 4 m/s en el sentit positiu de l'eix x. És cert que:

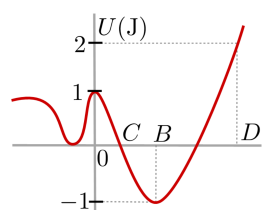


Figura de l'enunciat 2.4.4

a) l'energia mecànica del cos és 0,3 J.

b) la velocitat al punt B és 3,4 m/s.

c) la velocitat a $x = 0$ és nul·la.

d) Al punt B, l'energia mecànica del cos és mínima.

e) El cos no pot arribar al punt D.

Qüestió 2.4.5. Una partícula de $80\,\mathrm{g}$ es mou al llarg de l'eix x per acció d'una força conservativa. La seva energia potencial val $U = x^4 - 2x^2$ (unitats S.I.). Si l'energia mecànica de la partícula val $3\,\mathrm{J}$, la seva velocitat màxima serà:

a) $2{,}4\,\mathrm{m/s}$

b) $10\,\mathrm{m/s}$

c) $8\,\mathrm{m/s}$

d) $6{,}79\,\mathrm{m/s}$

e) $3{,}8\,\mathrm{m/s}$

Qüestió 2.4.6. Una partícula es mou per efecte d'una única força conservativa. Podem afirmar que:

a) en qualsevol trajectòria, la variació d'energia potencial entre les posicions inicial i final de la trajectòria és sempre nul·la.

b) si la partícula descriu un moviment circular uniforme, la variació de l'energia potencial entre dos punts d'aquesta trajectòria és nul·la.

c) l'increment de l'energia mecànica de la partícula pot ser positiu o negatiu, depenent del signe del treball de la força.

d) l'energia potencial de la partícula augmenta si el treball de la força és positiu.

e) Cap de les altres quatre afirmacions és correcta.

Qüestió 2.4.7. Si deixem caure una pedra des de la torre d'un castell i negligim la resistència de l'aire, és cert que:

a) el treball de la força gravitatòria és nul.

b) l'energia potencial de la pedra no varia.

c) l'energia cinètica de la pedra no varia.

d) l'energia mecànica de la pedra no varia.

e) el treball de la força gravitatòria és negatiu.

Qüestió 2.4.8. L'energia potencial d'una partícula de $5\,\text{kg}$ de massa que es mou en la direcció de l'eix x està indicada a la figura. Podem afirmar que:

a) la posició $x = 0$ és d'equilibri estable.

b) la posició $x = 0$ és d'equilibri inestable.

c) l'acceleració en $x = 0$ és $-0{,}4\,\text{m/s}^2$.

d) l'acceleració en $x = 2\,\text{m}$ és $-2\,\text{m/s}^2$.

e) el treball de la força quan la partícula passa de $x = 0$ a $x = 2\,\text{m}$ és $4\,\text{J}$.

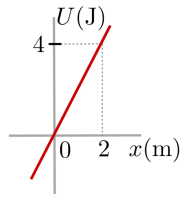


Figura de l'enunciat 2.4.8

Qüestió 2.4.9. La força que actua sobre una partícula, de massa $4\,\text{kg}$, és $\vec{F} = 6z\,\hat{k}$. Si v és el mòdul de la velocitat, l'energia mecànica és, excepte en una constant (totes les unitats en el S.I.):

a) $E = 2v^2 - 3z$

b) $E = 4v^2 - 3z^2$

c) $E = 2v^2 - 3z^2$

d) $E = 2v^2 + 3z$

e) $E = 2v^2 - \frac{1}{3}z^3$

Problema 2.4.5. Una partícula de massa m es mou en un camp de forces d'energia potencial associada $U = 16 - (x^2 + y^2)$, en unitats S.I.

a) Determineu les equacions de les superfícies equipotencials en les quals $U = 0$, $U = 12$ i $U = 18$. Són totes possibles? Dibuixeu-ne la primera.

b) Trobeu el lloc geomètric dels punts amb U màxim. Quant val l'energia potencial màxima?

c) Trobeu l'expressió analítica del camp de forces l'energia potencial del qual és la donada.

d) Quina força actua sobre la partícula al punt $P_0 = (1; 1; 0)$? Si parteix de P_0 en repòs, quina és la velocitat més gran que pot assolir en algun instant posterior?

e) Calculeu el treball realitzat per la força per portar la partícula des de P_0 fins a $P = (22; 22; 0)$.

Solució: a) $x^2+y^2=16$, $x^2+y^2=4$, no existeix; b) $x^2+y^2=0$, $U_{\max}=16\,\text{J}$; c) $\vec{F}=2x\hat{\imath}+2y\hat{\jmath}$; d) $\vec{F}=2\hat{\imath}+2\hat{\jmath}$, $v=\infty$; e) $W=966\,\text{J}$

Problema 2.4.6. Una partícula està sotmesa a una força $F=-kx+a/x^3$. Trobeu l'expressió de l'energia potencial U.

Solució: $U=\frac{1}{2}kx^2+\frac{a}{2x^2}+\text{ct}$

Problema 2.4.7. Donada la força $\vec{F}=(3x-4y)\hat{\imath}+(4x+2y)\,\hat{\jmath}$, calculeu:

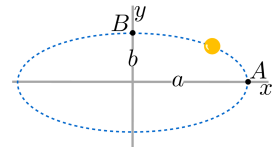


Figura de l'enunciat 2.4.7

a) el treball realitzat per $\vec{F}$ en portar la partícula de A a B i el realitzat en una volta completa al llarg de l'el·lipse amb a i b, respectivament, els semieixos major i menor: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

b) És conservativa la força $\vec{F}$? Per què?

Nota. Forma paramètrica d'una el·lipse centrada a l'origen:

$$\vec{r}(\lambda)=(x,y)=(a\cos\lambda\ ,\ b\ \sin\lambda)$$

Solució: a) $\frac{2b^2-3a^2}{2}+2\pi ab$, $8\pi ab$; b) no

Problema 2.4.8. La força que actua sobre una partícula s'expressa com $\vec{F}=-ax^2\,\hat{\imath}$, on a és una constant. Calculeu la funció energia potencial prenent $U=0$ per a $x=0$ i dibuixeu el gràfic de U en funció de x.

Solució: $U=\frac{1}{3}ax^3$

Problema 2.4.9. Un cos de 2 kg de massa es pot desplaçar pel pla horitzontal xy on actua la força $\vec{F}=2xy\,\hat{\imath}+x^3\hat{\jmath}$.

a) Calculeu el treball d'aquesta força en el camí que va de $A=(1,1)$ a $B=(5,9)$ seguint la recta que uneix ambdós punts.

b) Calculeu el treball entre A i B quan el camí passa per $C=(5,1)$, seguint les direccions dels eixos x i y en els trajectes AC i CB respectivament.

c) Es pot associar una energia potencial a aquesta força?

Substituïm la força anterior per una altra $\vec{F}=-2x\ \hat{\imath}$. Deixem el cos al punt A amb una velocitat de $8\,\text{m/s}$ en la direcció de l'eix x en sentit positiu.

d) Determineu l'increment d'energia potencial en el desplaçament AC.

e) Fins a quin punt arribarà el cos en el seu moviment?

f) Amb quina velocitat passarà per la posició d'equilibri?

Nota. Les forces estan expressades en N i les distàncies, en m.

Solució: a) $W = 453{,}3\,\text{J}$; b) $W = 1024\,\text{J}$; c) Força no conservativa, no es pot definir una energia potencial; d) $\Delta U = 24\,\text{J}$; e) Arriba fins al punt $(8{,}06;\,1)\,\text{m}$; f) $v = 8{,}06\,\text{m/s}$.

Problema 2.4.10. Un cos de 2 kg de massa es mou cap a dalt en un pla inclinat $30°$ respecte a l'horitzontal, desplaçant-se 10 m. Sobre el cos actuen les tres forces tal com s'indica a la figura. Calculeu el treball total fet pel sistema de forces que actua sobre el cos, així com la potència desenvolupada si les forces són aplicades durant 60 s.

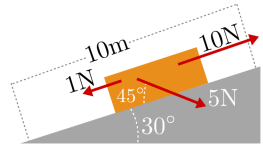


Figura de l'enunciat 2.4.10

Solució: $W = 27{,}4\,\text{J}$; $P = 0{,}456\,\text{W}$

Problema 2.4.11. Un objecte de 5 kg està sotmès a una força que varia amb la posició de l'objecte, tal com mostra la figura. Si parteix del repòs a $x = 0$, quina serà la seva velocitat a $x = 25\,\text{m}$ i a $x = 50\,\text{m}$?

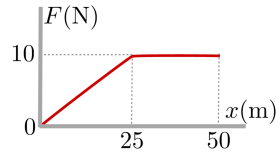


Figura de l'enunciat 2.4.11

Solució: $v_{25} = 7{,}07\,\text{m s}^{-1}$; $v_{50} = 12{,}25\,\text{m s}^{-1}$

Qüestió 2.5.1. Premem una caixa de massa m contra una paret vertical amb una força horitzontal de magnitud F. Si el coeficient estàtic de fregament amb la paret és μ, el valor mínim de F perquè la caixa no llisqui cap avall és:

a) mg

b) μmg

c) $\sqrt{1-\mu^2}mg$

d) $\frac{mg}{\mu}$

e) $mg\sqrt{\mu}$

Qüestió 2.5.2. Una partícula de massa m es mou sobre l'eix x i és atreta cap a l'origen de coordenades per una força $F = -k/x$, on k és una constant positiva. Si parteix del repòs des del punt x_0, quina velocitat portarà quan passi pel punt $x = x_0/2$?

a) $v = \sqrt{\frac{k}{m}}$

b) $v = \sqrt{\frac{2k}{m} \ln 2}$

c) $v = \sqrt{\frac{2k}{m}}$

d) $v = \frac{k}{m}\ \mathrm{e}^{-\frac{kx_0}{m}}$

e) Cap de les altres

Qüestió 2.5.3. La figura representa un pla inclinat 30° amb dues molles idèntiques de constant $k = 20\,\mathrm{N/m}$, una a la part superior i l'altra a la part inferior del pla. Un cos de 2 N de pes es deixa anar sense velocitat inicial des de la posició indicada a la figura, estant la molla de la part superior comprimida una distància x_1 (en metres). A l'inici del moviment, el cos es troba 50 cm per damunt de l'extrem de la molla inferior. ¿Què ha de valer el treball de la força de fricció (en joules) existent entre el cos i el pla per tal que la compressió màxima de la molla inferior sigui també x_1?

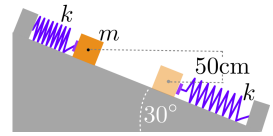


Figura de l'enunciat 2.5.3

a) $W_f = -(x_1 + 1)$

b) $W_f = -(x_1^2 + 1)$

c) $W_f = -\frac{(4x_1+2)}{20}$

d) $W_f = -20x_1^2$

e) Sense conèixer la longitud natural de les molles, no es pot saber.

Qüestió 2.5.4. Una partícula està sotmesa a una força central dirigida a un punt O. Podem afirmar:

a) L'energia cinètica de la partícula es manté constant.

b) La trajectòria de la partícula està continguda en un pla i la seva quantitat de moviment es manté constant.

c) El moment angular de la partícula respecte del punt O és nul.

d) L'impuls angular de la força respecte del punt O és nul.

e) La trajectòria de la partícula és circular.

Qüestió 2.5.5. Donades les forces següents, digueu quines són conservatives:

A) Força de fricció seca feta sobre una capsa que llisca.

B) Força feta sobre un cos per una molla que segueix la llei de Hooke.

C) Força de la gravetat.

D) Força sobre un cotxe a causa de la resistència de l'aire.

a) A, B i C

b) A i D

c) B i C

d) C i D

e) A, C i D

Problema 2.5.4. El cos P de la figura adjunta té una massa $m = 5\,\text{kg}$ i gira a una velocitat angular de $20\,\text{rev/min}$ al voltant de l'eix EE' sobre una superfície (fixa) cònica llisa. El cos està subjectat a l'eix mitjançant una corda, de massa negligible i longitud $0{,}5\,\text{m}$, paral·lela a la superfície quan P la toca. Si $\alpha = 45°$, determineu:

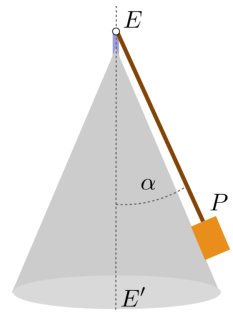


Figura de l'enunciat 2.5.4

a) la reacció de la superfície sobre el cos.

b) la tensió de la corda.

c) la velocitat angular del cos a la qual se separarà de la superfície.

Solució: a) $29{,}6\,\text{N}$; b) $40{,}13\,\text{N}$; c) $5{,}26\,\text{rad/s}$

Problema 2.5.5. Un cos petit de massa $m = 5\,\text{kg}$ cau des del punt A sense velocitat inicial, pel carril representat a la figura.

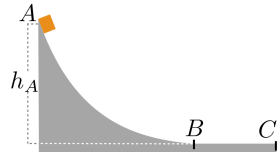


Figura de l'enunciat 2.5.5

Només hi ha fricció al tram BC, de longitud $4\,\text{m}$, i el punt A està situat a una altura $h_A = 2\,\text{m}$. Sabent que el cos queda aturat al punt C, calculeu el coeficient de fricció entre el cos lliscant i el terra en el tram BC.

Solució: $\mu = 0{,}5$

Problema 2.5.6. Deixem lliure un bloc de $2\,\text{kg}$ sobre un pla inclinat sense fricció a $4\,\text{m}$ d'una molla de constant $k = 100\,\text{N/m}$. El pla està inclinat $30°$.

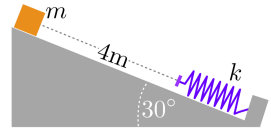


Figura de l'enunciat 2.5.6

a) Calculeu la compressió màxima de la molla, suposant que no té massa.

b) Si hi ha fricció i el coeficient de fricció entre la massa i el pla és $0{,}2$, calculeu-ne la compressió màxima.

c) En el darrer cas, en què hi ha fricció, fins a quina distància recorrerà el bloc pel pla després de separar-se de la molla?

Solució: a) $0{,}989\,\text{m}$; b) $0{,}783\,\text{m}$; c) $1{,}54\,\text{m}$

Problema 2.5.7. Per tal de desviar els electrons en un oscil·loscopi, s'utilitza un camp elèctric constant de $2000\,\text{N/C}$. Tenint en compte que a l'inici els electrons tenen una velocitat de $10^6\,\text{m/s}$, calculeu la desviació quan han recorregut $1\,\text{cm}$ en la direcció normal al camp elèctric.

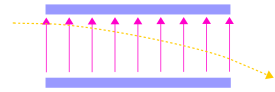


Figura de l'enunciat 2.5.7

Solució: $1{,}76\,\text{cm}$

Problema 2.5.8. L'any 2009, es va inaugurar el gran col·lisionador d'hadrons (LHC) a Ginebra per tal d'estudiar les propietats de les partícules subatòmiques.

Històricament, això s'ha fet en cambres de boira en què les partícules deixen un rastre de gotetes de condensació. Per tal de determinar la càrrega d'aquestes partícules i la seva massa, s'han utilitzat camps magnètics. La força que sent una partícula carregada en travessar un camp magnètic és $\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$, on q és la càrrega de la partícula, v és la seva velocitat i $\vec{B}$ és el camp magnètic. Demostreu que una partícula carregada dintre d'un camp magnètic descriu una òrbita circular de radi $R = \frac{mv}{qB}$, on m és la massa de la partícula i v és la seva velocitat.

Figura de l'enunciat 2.5.8. Trajectòries de partícules subatòmiques en el si d'un camp magnètic

Problema 2.5.9. Els núvols estan situats uns $2\,\text{km}$ de distància de la superfície terrestre. Calculeu la velocitat amb què caurien les gotes a terra si no existís fregament amb l'aire. Refeu el càlcul tenint en compte el fregament amb l'aire ($b = 10^{-4}\,\text{kg/s}$) i que la massa de les gotes és d'uns $0{,}1\,\text{g}$.

Solució: $197\,\text{m/s}$, $9{,}8\,\text{m/s}$.

Problema 2.5.10. Una partícula de $4\,\text{kg}$ de massa es mou al llarg de l'eix x segons $x(t) = t + 2\,t^3$, (x en m i t en s). Calculeu:

a) l'energia cinètica en funció del temps,

b) l'acceleració de la partícula i la força que actua sobre ella en funció del temps,

c) la potencia subministrada a la partícula en funció del temps,

d) el treball fet per la força de $t = 0$ a $t = 2\,\text{s}$.

Solució: a) $(2 + 24t^2 + 72t^4)\,\text{J}$; b) $12t\,\text{m/s}^2$, $48t\,\text{N}$; c) $(48t + 288t^3)\,\text{W}$; d) $1248\,\text{J}$

Problema 2.5.11. Sobre un tauler horitzontal es col·loquen dues pastilles, A i B,

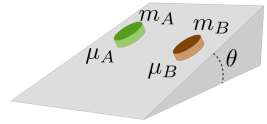


Figura de l'enunciat 2.5.11

de masses m_A i m_B, amb coeficients de fricció pastilla-tauler μ_A i μ_B (fricció dinàmica = estàtica). Anem inclinant el tauler.

a) Quina és la condició necessària per què A inicïi el moviment abans que B?

b) Quina és la condició necessària per què els dos cossos llisquin junts?

c) Complint-se la condició anterior, calculeu el valor de θ que fa que el moviment de A i B sigui uniforme.

d) Calculeu l'acceleració del moviment quan θ és més gran que el valor trobat a c).

Solució: a) $\mu_A < \mu_B$; b) $\mu_A = \mu_B$; c) $\tan\theta = \mu_A = \mu_B$; d) $a = g(\sin\theta - \mu\cos\theta)$

3 Problemes i qüestions

Qüestió 3.2.1. Un filferro semicircular homogeni de massa m se subjecta tal com indica la figura mitjançant una articulació a O. En equilibri, θ val:

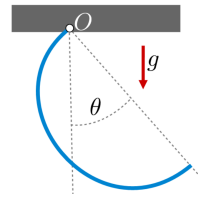


Figura de l'enunciat 3.2.1

a) $25{,}1^\circ$

b) $23{,}0^\circ$

c) $32{,}5^\circ$

d) $39{,}5^\circ$

e) No pot estar en equilibri.

Qüestió 3.2.2. Un filferro homogeni està doblegat en forma de triangle, tal com indica la figura. Les coordenades del seu CM són:

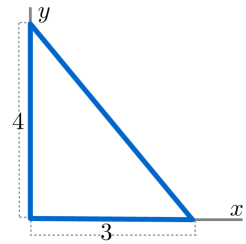


Figura de l'enunciat 3.2.2

a) $(1; 4/3)$

b) $(1; 3/2)$

c) $(3/2; 2)$

d) $(1; 2)$

e) Cap de les altres respostes és correcta.

Qüestió 3.2.3. L'objecte de la figura està constituït per dos filferros de longitud L i densitat lineal λ, situats en el pla xy, i per un quart de circumferència de densitat lineal 2λ, situat en el pla yz. La coordenada z del centre de masses val:

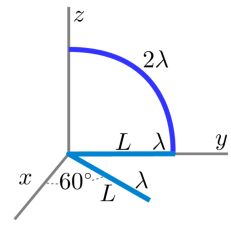


Figura de l'enunciat 3.2.3

a) $2L/(2+\pi)$

b) $2L/\pi$

c) $2L/(4+\pi)$

d) $L/2$

e) $L/4$

Qüestió 3.2.4. Quina és la coordenada z del CM del quart de con homogeni, d'altura h, de la figura?

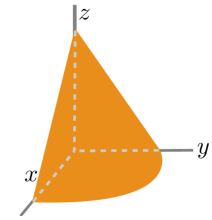


Figura de l'enunciat 3.2.4

a) $h/16$

b) $h/8$

c) $h/4$

d) $h/3$

e) $h/2$

Qüestió 3.2.5. Una làmina rectangular homogènia de 4×8 cm de costat té un forat circular de radi 1 cm. El centre C del forat es troba a una distancia b del centre O del rectangle i està situat sobre l'eix de simetria, tal com es pot veure a la figura. Per tal que el centre de masses de la làmina sigui un punt de la perifèria del forat, b ha de valer:

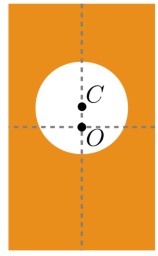


Figura de l'enunciat 3.2.5

a) 0,90 cm

b) 0,50 cm

c) 0,30 cm

d) 0,70 cm

e) 0,85 cm

Qüestió 3.2.6. Un cotxe de 1500 kg es mou cap a l'oest amb una velocitat de 20 m/s i un camió de 3000 kg es mou cap a l'est amb una velocitat de 16 m/s. Calculeu la velocitat del centre de masses del sistema.

a) 10 m/s cap a l'oest

b) 4 m/s cap a l'est

c) 2 m/s cap a l'est

d) 5 m/s cap a l'oest

e) 8 m/s cap a l'est

Qüestió 3.2.7. Les coordenades del CM de la peça de la figura, en forma de sector circular de radi R, són:

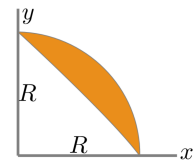


Figura de l'enunciat 3.2.7

a) $x = y = 0{,}50R$

b) $x = y = 0{,}33R$

c) $x = y = 0{,}58R$

d) $x = y = 0{,}62R$

e) $x = y = R$

Qüestió 3.2.8. La peça de la figura té una densitat volúmica uniforme. La part superior és un cilindre de radi r i altura h i la inferior és una semiesfera de radi $2r$. Per aconseguir que el CM de la peça estigui sobre la base del cilindre, s'ha de complir:

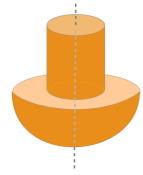


Figura de l'enunciat 3.2.8

a) $h = \sqrt{2}r$

b) $h = r/2$

c) $h = 2r$

d) $h = r$

e) $h = 2\sqrt{2}r$

Qüestió 3.2.9. Quines són les coordenades del centre de masses de la xapa homogènia de la figura, formada per un quadrat i un cercle?

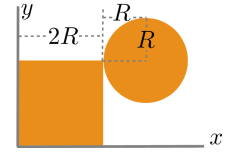


Figura de l'enunciat 3.2.9

a) $x_{CM} = R$; $y_{CM} = 1{,}44R$

b) $x_{CM} = R$; $y_{CM} = 2R$

c) $x_{CM} = 2{,}52R$; $y_{CM} = 1{,}76R$

d) $x_{CM} = 1{,}88R$; $y_{CM} = 2R$

e) $x_{CM} = 1{,}88R$; $y_{CM} = 1{,}44R$

Qüestió 3.2.10. La distància des del centre de la base del barret de copa, fet de làmina homogènia, al centre de masses és:

Figura de l'enunciat 3.2.10

a) $\frac{H^2 r}{R}$

b) $\frac{R^2 r + r^2 R}{H^2 + 2Rr}$

c) $\frac{H^2 r + r^2 H}{R^2 + 2Hr}$

d) $\frac{H^2 R + R^2 H}{r^2 + 2HR}$

e) $\frac{R^2 r}{H}$

Problema 3.2.3. Determineu el CM de la tija homogènia de la figura (unitats S.I.).

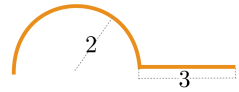


Figura de l'enunciat 3.2.3

Solució. Amb l'origen de (x, y) a l'esquerra de l'inici del semicercle: $(3{,}13; 0{,}8)$

Problema 3.2.4. Un corró massís té la forma indicada a la figura. El corró està construït a partir d'un cilindre massís al qual traiem un tros semiesfèric d'una base i l'afegim a l'altra base. Trobeu-ne el centre de masses en cas que $a = 40\,\text{cm}$ i $d = 20\,\text{cm}$.

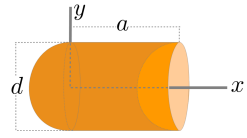


Figura de l'enunciat 3.2.4

Solució: $x_{CM} = 40/3\,\text{cm}$

Problema 3.2.5. A la figura, es mostra un tren format per tres vagons les masses dels quals són $m_A = 21 \times 10^3\,\text{kg}$, $m_B = 18 \times 10^3\,\text{kg}$, $m_C = 24 \times 10^3\,\text{kg}$. Els tres vagons estan units per dues cadenes de masses negligibles.

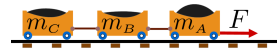


Figura de l'enunciat 3.2.5

Si sobre el primer vagó s'aplica una força paral·lela a la via de $F = 70\,\text{kN}$, i suposem que no hi ha friccions i que la via és recta, determineu l'acceleració a amb què es desplacen els tres vagons i les tensions T de les dues cordes:

a) si la via és horitzontal,

b) si la via està inclinada un angle $\theta = 15°$ cap amunt.

Solució:

a) $a = 1{,}11\,\text{m/s}^2$; $T_{AB} = 46{,}7\,\text{kN}$; $T_{BC} = 26{,}7\,\text{kN}$

b) $a' = -1{,}43\,\text{m/s}^2$; $T'_{AB} = 46{,}7\,\text{kN}$; $T'_{BC} = 26{,}7\,\text{kN}$

Qüestió 3.3.1. La condició necessària i suficient perquè la quantitat de moviment d'un sistema de partícules es conservi exigeix que:

a) Es conservi l'energia mecànica del sistema.

b) El centre de masses del sistema estigui en repòs.

c) Les forces externes que actuïn siguin conservatives.

d) La resultant de les forces externes sigui nul·la.

e) Les forces internes del sistema siguin conservatives.

Problema 3.3.2. Imaginem que un astronauta de $75\,\mathrm{kg}$, que porta una eina de $5\,\mathrm{kg}$ (total $= 80\,\mathrm{kg}$) en un "passeig espacial" a fora de la nau, se li trenca el cable que l'uneix amb la nau. Hi hauria alguna manera de tornar? Si s'allunya de la nau a una velocitat de $2\,\mathrm{m/s}$, seria factible tornar, o per sempre més restaria a l'espai?

Solució. Llançant l'eina a una velocitat respecte de la nau $> 32\,\mathrm{m/s}$.

Problema 3.3.3. Un nen de $40\,\mathrm{kg}$ és a l'extrem d'una plataforma de $80\,\mathrm{kg}$ i $2\,\mathrm{m}$ de longitud. El nen es desplaça fins a l'extrem oposat de la plataforma. Suposarem que no hi ha fregament entre la plataforma i el terra.

a) ¿Quant es desplaça el centre de masses del sistema format per la plataforma i el nen?

b) ¿Quant es desplaça el nen respecte al terra? ¿Quant es desplaça la plataforma respecte al terra?

c) Si el nen corre sobre la plataforma a una velocitat constant de $0{,}5\,\mathrm{m/s}$ (respecte a la plataforma), amb quina velocitat es mou la plataforma?

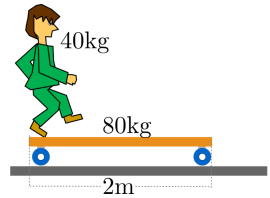


Figura de l'enunciat 3.3.3

Solució: a) No es desplaça; **b)** El nen es mou $4/3\,\mathrm{m}$ i la plataforma, $2/3\,\mathrm{m}$ en sentit oposat; **c)** $v = -1/6\,\mathrm{m/s}$

Qüestió 3.4.1. Un sistema està format per dues partícules de la mateixa massa m. En un instant determinat, una d'elles està en repòs al punt $(0{,}0{,}0)$ i l'altra, situada a $(0, L, 0)$, es mou amb velocitat $\vec{v} = v\,\hat{\imath}$. El moment angular del sistema respecte del punt $(0, L/2{,}0)$ és:

a) $2mLv\,\hat{\imath}$

b) $-\frac{mLv}{2}\hat{k}$

c) $2mLv\ \hat{k}$

d) $\frac{mLv}{2}\hat{\imath}$

e) $mv\ \hat{k}$

Qüestió 3.4.2. Dues partícules de masses $m_1 = 10\,\text{kg}$ i $m_2 = 20\,\text{kg}$ es mouen respecte d'un sistema de referència inercial segons $\vec{r}_1 = 2t^2\ \hat{\imath}+3\hat{\jmath}$ i $\vec{r}_2 = 4t^2\ \hat{\imath}-3\hat{\jmath}$. Quant val el moment angular del sistema respecte de l'origen?

Nota. Totes les unitats estan expressades en el S.I.

a) $\vec{L} = -600t\ \hat{k}$

b) $\vec{L} = -360t^2\ \hat{k}$

c) $\vec{L} = 12t\ \hat{k}$

d) $\vec{L} = 360t\ \hat{k}$

e) $\vec{L} = -12t\ \hat{k}$

Qüestió 3.4.3. Dues partícules de masses $m_1 = 10\,\text{kg}$ i $m_2 = 20\,\text{kg}$ es mouen respecte d'un sistema de referència inercial segons $\vec{r}_1 = 2t^2\ \hat{\imath}+3\hat{\jmath}$ i $\vec{r}_2 = 4t^2\ \hat{\imath}-3\hat{\jmath}$. Quant val el moment resultant de les forces respecte de l'origen?

Nota. Totes les unitats estan expressades en el S.I.

a) $\vec{M} = 12\ \hat{k}$

b) $\vec{M} = 600t\ \hat{k}$

c) $\vec{M} = 360\ \hat{k}$

d) $\vec{M} = -600\ \hat{k}$

e) $\vec{M} = -360t\ \hat{k}$

Problema 3.4.3. En patinatge artístic, és comú augmentar la velocitat angular tot encongint les mans. En una primera aproximació, podem suposar que els braços tenen una massa negligible pel fet de portar unes peses a cada mà i que la resta de cos és molt propera a l'eix de gir. Calculeu la relació entre la velocitat angular inicial i final, si la patinadora encongeix les mans des d'una distància d'1 m del cos a 20 cm.

Solució: $\omega_{\text{fi}}/\omega_{\text{ini}} = 25$

Problema 3.5.3. Un nen de massa $m = 35\,\text{kg}$ és a l'extrem d'un carretó de massa $M = 70\,\text{kg}$ que inicialment està parat i que pot rodar lliurement (vegeu la figura). En un instant determinat, el nen fa un salt amb una velocitat de sortida $v_0 = 5\,\text{m/s}$ i un angle $\theta = 30°$ amb el terra, i cau justament a l'altre extrem del carretó.

Negligint qualsevol tipus de fricció, determineu:

a) la velocitat amb què es desplaça cap enrere el carretó mentre el nen és a l'aire durant el salt;

b) la distància que recorre el nen respecte de terra;

c) la distància que recorre el carretó i la seva longitud;

d) la velocitat del carretó una vegada el nen ha aterrat a l'altre extrem.

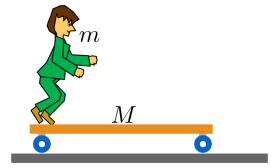


Figura de l'enunciat 3.5.3

Solució: a) $2{,}17\,\text{m/s}$; **b)** $2{,}21\,\text{m}$; **c)** $1{,}11\,\text{m}$ i $3{,}31\,\text{m}$; **d)** 0

Problema 3.5.4. Un bloc de $50\,\text{kg}$ està en contacte amb una molla de constant elàstica $300\,\text{N/m}$ i de massa negligible i comprimida $0{,}2\,\text{m}$. El conjunt està sobre una vagoneta de $75\,\text{kg}$ (les rodes són de massa negligible) i el deixem anar. Determineu les velocitats del bloc i de la vagoneta a partir de l'instant en què el bloc, lliscant sense fricció sobre la vagoneta, perd el contacte amb la molla.

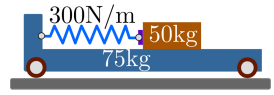


Figura de l'enunciat 3.5.4

Solució

v: velocitat del bloc, positiva cap a la dreta. V: velocitat de la vagoneta, positiva cap a l'esquerra.

Conservació de la quantitat de moviment: $0 = 50v - 75V$

Conservació de l'energia: $\frac{1}{2}300 \cdot 0{,}2^2 = \frac{1}{2}50v^2 + \frac{1}{2}75V^2$

Resolent el sistema i prenent la solució positiva, que és la que està d'acord amb el fet que la molla està inicialment comprimida:

$$v = 0{,}3795\,\text{m/s} \;;\; V = 0{,}2540\,\text{m/s}$$ ■

Problema 3.6.2. Una bola de $8\,\text{kg}$ de massa, amb una velocitat de $5\,\text{m/s}$, xoca sense fricció amb una altra, d'igual radi, de $6\,\text{kg}$ i en repòs, sobre un terra horitzontal llis.

Determineu la velocitat i la direcció de la segona bola, si la primera és desviada, a conseqüència del xoc, $30°$ respecte de la direcció inicial, suposant que el terra i les boles són llises i el xoc és elàstic.

Solució. Dues solucions possibles, $5{,}68\,\text{m/s}$, $-5{,}9°$ i $3{,}35\,\text{m/s}$, $-54{,}1°$. Els angles, respecte de la direcció inicial.

Problema 3.6.3. Una bola de massa $m = 0{,}5\,\text{kg}$ se subjecta, mitjançant una corda inextensible i de massa negligible, de longitud $L = 1\,\text{m}$. Se separa la massa $90°$ respecte a la posició d'equilibri i es deixa caure. En arribar a la part inferior de la trajectòria, la bola xoca de forma inelàstica amb un bloc de massa $M = 3\,\text{kg}$, que es troba en repòs sobre una superfície. Sabent que el coeficient de restitució entre la bola i el bloc és $e = 0{,}8$ i que el coeficient de fricció entre el bloc i la superfície horitzontal és $\mu = 0{,}2$, determineu:

a) la velocitat del bloc i de la bola després de la col·lisió;

b) el treball realitzat per la força de fricció fins que el bloc de massa M s'atura, i

c) l'altura assolida per la bola després de la col·lisió.

Solució: a) m retrocedeix a una velocitat de $2{,}40\,\text{m/s}$ i M avança a una velocitat d'$1{,}14\,\text{m/s}$; **b)** $-1{,}95J$; **c)** $0{,}29\,\text{m}$

Problema 3.6.4. Un bloc de $13\,\text{kg}$ es troba en repòs sobre una superfície horitzontal. Llancem horitzontalment contra ell una massa de $400\,\text{g}$ d'argila que hi queda adherida. El bloc i l'argila llisquen $15\,\text{cm}$ sobre la superfície. Si el coeficient de fricció és $0{,}4$, quina és la velocitat inicial de l'argila?

Solució: $36{,}4\,\text{m/s}$

Problema 3.6.5. Un objecte de $11\,\text{kg}$ explota en tres trossos de masses $m_1 = 4\,\text{kg}$, $m_2 = 6\,\text{kg}$ i m_3, amb velocitats coplanàries $\vec{v}_1 = (v_{1x}, 3)$, $\vec{v}_2 = (4, v_{2y})$ i $\vec{v}_3 = (0; 2)$. Calculeu v_{1x} i v_{2y}.

Solució: $v_{1x} = -6{,}00\,\text{m/s}$; $v_{2y} = -2{,}33\,\text{m/s}$

Problema 3.6.6. Un ocellet de $125\,\text{g}$ que vola a $0{,}6\,\text{m/s}$ està a punt de capturar una abella de $5\,\text{g}$ que vola perpendicularment a $15\,\text{m/s}$. Quina serà la velocitat de l'ocellet just després de capturar l'abella?

Solució: $0{,}816\,\text{m/s}$

Problema 3.6.7. Deixem anar una esfera d'$1\,\text{kg}$ d'una altura d'$1{,}8\,\text{m}$, que rebota sobre una placa de $5\,\text{kg}$ i arriba a una altura màxima d'$1{,}5\,\text{m}$. Determineu:

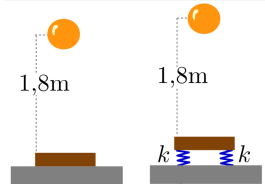


Figura de l'enunciat 3.6.7

a) el coeficient de restitució en aquest cas, i

b) l'altura màxima a què arribaria l'esfera si la placa estigués suportada per dues molles de constant elàstica $k = 2\,\text{kN/m}$ cadascuna i el xoc fos completament elàstic.

c) Calculeu la màxima deformació de les molles.

Solució: a) $0{,}913$; **b)** $0{,}8\,\mathrm{m}$; **c)** $0{,}07\,\mathrm{m}$

Problema 3.6.8. Des d'una torre de $95\,\mathrm{m}$ d'altura es deixa caure una pedra i, un segon més tard, es llança una segona pedra idèntica des del terra cap amunt i per la mateixa vertical. Ambdues xoquen frontalment i elàsticament al punt mitjà de la torre. Calculeu:

a) les velocitats de les pedres just després del xoc,

b) l'altura a la que arriba la primera pedra després del xoc, i

c) l'altura a la que arribaria la segona pedra si no hagués xocat.

Solució: $\begin{matrix} x- \\ y \end{matrix}$ **a)** $30{,}5\,\mathrm{m/s}$ i $-12{,}32\,\mathrm{m/s}$ **b)** $7{,}74\,\mathrm{m}$ **c)** $55{,}225\,\mathrm{m}$.

Problema 3.6.9. Una bola de $4\,\mathrm{kg}$ de massa es mou sobre un terra horitzontal perfectament llis, a una velocitat, respecte del sistema de referències (x, y) fixat al terra, de $(20; 0)\,\mathrm{m/s}$ i xoca amb una altra de $6\,\mathrm{kg}$ que es mou a una velocitat de $(10; 10)\,\mathrm{m/s}$.

a) Si les dues boles surten enganxades a conseqüència del xoc, determineu la velocitat (vectorial) del conjunt.

b) Calculeu, en aquest últim cas, l'energia (de translació) dissipada en el xoc.

c) Les dues boles són llises i tenen el mateix radi. El xoc és totalment elàstic. Trobeu les dues possibles velocitats (vectorial) de la segona bola, si sabem que la primera surt en la direcció i sentit $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Solució: a) $(14; 6)\,\mathrm{m/s}$; **b)** $240\,\mathrm{J}$; **c)** $(9{,}81; 2{,}19)\,\mathrm{m/s}$ i $(19{,}39; 7{,}72)\,\mathrm{m/s}$

Problema 3.7.2. S'anomena ***velocitat d'escapament*** associada a un planeta (o estrella) la velocitat mínima per tal que un cos s'escapi (sortint de la superfície del planeta, arribi fins a l'infinit amb velocitat nul·la). Demostreu que aquesta velocitat és $v = \sqrt{2GM/R}$ on G és la constant gravitatòria, M és la massa del planeta i R és el seu radi.

S'anomena ***forat negre*** un astre amb velocitat d'escapament igual a la velocitat de la llum ($c = 3 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$). Res no es pot escapar! Calculeu quin radi hauria de tenir el Sol ($M_{\text{Sol}} = 2 \times 10^{3}0\,\mathrm{kg}$) per tal que es comportés com un forat negre.

Solució: $R_{\text{Sol}} = 2{,}93\,\mathrm{km}$

Problema 3.7.3. Demostreu que l'energia total d'un cos en òrbita circular al voltant d'un planeta (el planeta es pot considerar fix) és la meitat de la seva energia potencial.

Problema 3.7.4. La vida al planeta Terra tal com la coneixem desapareixerà d'aquí a 10^9 anys perquè la brillantor del Sol creixerà fins a eliminar tota possibilitat de supervivència. Per tal d'evitar-ho tenim dues possibilitats (segons Korycansky *et al.*): emigrar a un altre planeta o augmentar el radi de l'òrbita del planeta Terra d'$1{,}5 \times 10^{11}$ m fins a $2{,}2 \times 10^{11}$ m. (aproximem l'òrbita de la Terra a una circumferència amb el Sol fix al centre). La primera possibilitat implica que tota la biomassa del planeta (que suposarem de massa $m_{\text{bio}} = 10^{20}$ kg) abandoni el lligam amb el camp gravitatori terrestre, és a dir, que assoleixi la velocitat d'escapament. A partir d'aquestes dades, quin mètode és més factible energèticament (quin "costa" menys energia): fer emigrar tota la biomassa o canviar l'òrbita del planeta?

Dades: $M_{\text{Sol}} = 2 \times 10^{30}$ kg i $R_{\text{Terra}} = 6 \times 10^6$ m.

> [Problema inspirat en l'article "Astronomical engineering: a strategy for modifying planetary orbits" publicat a la revista *Astrophysics and Space Science*, de D. G. Korycansky *et Al.* Al seu torn, l'autor s'inspira en uns càlculs fets per Carl Sagan l'any 1993 (Pollack & Sagan,1993).]

Solució. Cost energètic de canviar l'òrbita de la Terra: $8{,}4 \times 10^{32}$ J. Cost energètic d'emigrar de la Terra: $6{,}57 \times 10^{27}$ J

Problema 3.7.5. Es pot calcular l'acceleració a la superfície terrestre a partir de dades de l'òrbita de la Lluna, tal com va fer Newton. Calculeu aquest valor a partir de les dades de la Lluna que es proposen: $T = 28$ dies, $R_{\text{orbita}} = 3{,}8 \times 10^8$ m, $R_{\text{Terra}} = 6{,}37 \times 10^6$ m. Compareu aquest resultat amb el valor de $g = 9{,}81\,\text{m/s}^2$ conegut per a la superfície terrestre.

Solució: $g = 9{,}1\,\text{m/s}^2$

Problema 3.7.6. Calculeu la força d'atracció gravitatòria que sent un nen acabat de néixer, de 2 kg de massa, deguda a la llevadora, que suposarem de 70 kg de massa, si aquesta és a una distància $d = 0{,}5$ m del nadó. Calculeu l'atracció gravitatòria que sent el mateix nen deguda al planeta Mart, de massa $M_{\text{mart}} = 6{,}4185 \times 10^{23}$ kg, si és a una distància de $d = 5{,}9 \times 10^7$ km. Raoneu a partir de les dades obtingudes si, segons l'astrologia, els planetes definissin el caràcter de les persones ¿Podria això ser degut a la interacció gravitatòria?

Solució: $F_{\text{nen}-\text{metge}} = 3{,}7 \times 10^{-8}\,\text{N}$; $F_{\text{nen}-\text{Mart}} = 7{,}92 \times 10^{-9}\,\text{N}$

Qüestió 3.10.1. La partícula de la figura, de massa 1 kg, és obligada a passar pel filferro sense fricció. En tot moment hi actua la resultant de les forces externes: $\vec{F} = -4y^3\,\hat{\jmath}$. Si la deixem anar sense velocitat inicial al punt A, quina velocitat tindrà quan passi per B? **Nota**. Totes les unitats s'expressen en el S.I.

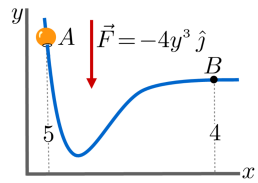


Figura de l'enunciat 3.10.1

a) 19,20 m/s

b) 27,17 m/s

c) 13,58 m/s

d) 11,04 m/s

e) 7,81 m/s

Problema 3.10.7. Una corredora de 3 kg cau sense velocitat inicial i llisca sense fregament en un pla vertical per la guia de la figura. La molla a la qual està unida té una constant recuperadora de 4 N/cm. La longitud natural de la molla és de 60 cm. Trobeu la velocitat de la corredora quan passa per B. On s'aturarà?

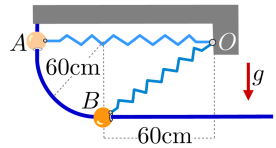


Figura de l'enunciat 3.10.7

Solució: $v_B = 7{,}18$ m/s. S'atura al punt C, $\overline{BC} = 1{,}72$ m

Problema 3.10.8. Un cos de massa m, de petites dimensions, es deixa caure des del punt A pel carril de la figura. Si el cos llisca sense fricció i $h_A = 3R$, on R és el radi de la circumferència, trobeu:

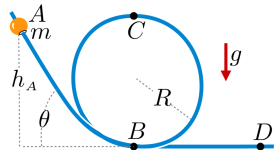


Figura de l'enunciat 3.10.8

a) la força que exerceix el cos sobre el carril als punts B i C, i

b) el valor de l'altura del punt A perquè la força en el punt C sigui nul·la.

Solució: a) $F_B = m\frac{v_B^2}{R} + mg = 7mg$ i $F_C = m\frac{v_C^2}{R} - mg = mg$; **b)** $h'_A = \frac{5}{2}R$

Problema 3.10.9. Una boleta de massa 0,1 kg està enfilada en una guia en forma d'el·lipse amb $a = \sqrt{2}$ i $b = \sqrt{3}$, respectivament, els semieixos de l'el·lipse: $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1$. A més, hi ha un camp de forces $\vec{F} = (3x - 4y)\hat{\imath} + (4x + 2y)\,\hat{\jmath}$. La boleta surt del punt A a una velocitat $\vec{v}_A = 10\,\hat{\jmath}$ (vegeu la figura). Calculeu:

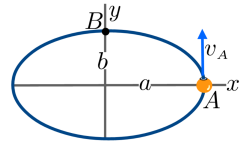


Figura de l'enunciat 3.10.9

a) la velocitat amb què la partícula passa pel punt B i

b) la velocitat amb què torna a passar pel punt A.

Nota 1. Totes les magnituds estan donades en el S.I.; **Nota 2**. Equació paramètrica d'una el·lipse: $\vec{r}(\lambda) = (a\cos\lambda, b\sin\lambda)$

Solució: a) $v_B = 20{,}2$ m/s; **b)** $v'_A = 36{,}5$ m/s.

Problema 3.10.10. Un carret, de massa m, és accelerat sense fricció a través de la força proporcionada per la corda (de massa negligible) lligada a la bola de massa m que cau lliscant pel tub. La politja (petita i sense fricció) i el tub són solidaris a la plataforma per on es desplaça el carret i, juntament amb aquesta, tenen massa de $2m$ i llisquen per una guia horitzontal. Trobeu la velocitat V de la plataforma en funció de la coordenada y de la bola (vegeu la figura) si, estant tot aturat, deixem anar el carret quan la bola és a $y = 0$.

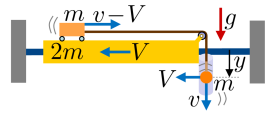


Figura de l'enunciat 3.10.10

Nota. Les velocitats de la figura estan referides a un observador en repòs.

Solució: a) $V = \sqrt{\frac{1}{14} g y}$

Problema 3.10.11. El carret, de massa m, és accelerat sense fricció per la força proporcionada per la molla (de massa negligible) lligada a la plataforma, de massa $2m$, que llisca per una guia sense fricció. Trobeu la velocitat v del carret quan l'allargament de la molla val $x < L$, si, estant tot aturat, deixem anar el carret quan l'allargament de la molla és $x = L$.

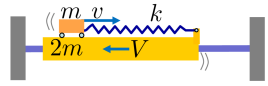


Figura de l'enunciat 3.10.11

Nota. Les velocitats de la figura estan referides a un observador en repòs.

Solució: a) $v = \sqrt{\frac{2k}{3m}\left(L^2 - x^2\right)}$

Qüestió 3.12.1. Un cilindre homogeni de radi R es desplaça en un pla vertical per una superfície horitzontal rodant i lliscant. Si, en un instant donat, la velocitat del centre de masses és v cap a la dreta i la del punt de contacte amb la superfície és $\frac{v}{2}$ també cap a la dreta, el mòdul de la velocitat angular en aquest instant és:

a) $\frac{2v}{3R}$

b) $\frac{3v}{4R}$

c) $\frac{v}{2R}$

d) $\frac{4v}{3R}$

e) $\frac{3v}{2R}$

Problema 3.13.3. Dues partícules de masses $m_1 = 3\,\text{kg}$ i $m_2 = 6\,\text{kg}$ estan unides per una barra rígida de massa negligible. Inicialment, es troben en repòs i se les sotmet, respectivament, a l'acció de les forces, ambdues expressades en N, $\vec{F}_2 = 3\hat{\jmath}$ i $\vec{F}_1 = 6\hat{\imath} - 6\hat{\jmath}$, tal com es mostra a la figura. Determineu el CM i la quantitat de moviment del sistema en funció del temps.

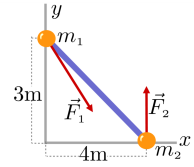


Figura de l'enunciat 3.13.3

Solució: $\vec{R}_{CM} = \left(\frac{t^2}{3} + \frac{8}{3}\right)\hat{\imath} + \left(1 - \frac{t^2}{6}\right)\hat{\jmath}\ (\text{m})$ i $\vec{P}\,(t) = 6t\,\hat{\imath} - 3t\hat{\jmath}\ (\text{kgms}^{-1})$

Problema 3.13.4. El quadrat de la figura té el CM al centre. Si apliquem **només** dues forces de $2\,\mathrm{N}$ tal com s'indica a la figura, girarà en sentit horari o en sentit antihorari?

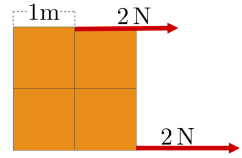


Figura de l'enunciat 3.13.4

Solució: El quadrat no gira.

Problema 3.13.5. Una barra homogènia d'$1\,\mathrm{kg}$ i $80\,\mathrm{cm}$ de longitud se situa en un pla vertical entre dues parets paral·leles llises separades $40\,\mathrm{cm}$. La barra es lliga a una molla, de constant recuperadora $k = 50\,\mathrm{N/m}$, com s'indica a la figura.

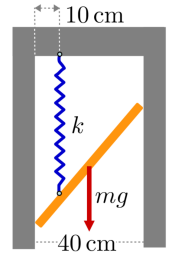


Figura de l'enunciat 3.13.5

Amb la barra situada de manera que la molla està relaxada (longitud natural), la deixem caure. Quan arriba al punt en què inicia la pujada, determineu:

a) la distància que ha recorregut la barra;

b) la força que la molla fa a la barra i l'acceleració d'aquesta, i

c) les forces que les parets fan sobre la barra.

Solució: a) $39{,}2\,\mathrm{cm}$; **b)** $19{,}62\,\mathrm{N}$ (ascendent), $9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$ (ascendent); **c)** iguals i de sentit contrari, de mòdul $2{,}83\,\mathrm{N}$

→ 4P

4 Problemes i qüestions

Problema 4.2.1. La peça de la figura està feta amb dos filferros diferents. El de la part horitzontal té una densitat lineal que és el doble del de la part semicircular. Quina relació hi ha d'haver entre a i r si es vol que, quan es pengi la peça del punt P, es mantingui en equilibri tal com es veu a la figura?

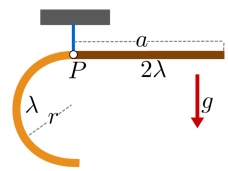


Figura de l'enunciat 4.2.1

Solució: $a = \sqrt{2}\, r$

Qüestió 4.3.1. El pistó de la figura, de superfície S, exempt de fregament, es troba en equilibri sota l'acció de la força que li fa l'aigua. El gas dins del recipient té una pressió P. Sabent que la densitat de l'aigua és ρ, i si P_a és la pressió atmosfèrica, el pes del pistó és:

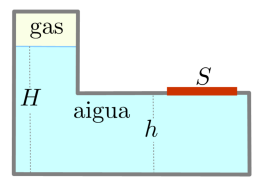


Figura de l'enunciat 4.3.1

a) $(H-h)\rho g S$

b) $(P-Pa)S + h\rho g S$

c) $(P-Pa)S + (H-h)\rho g S$

d) $H\rho g S$

e) $h\rho g S$

Qüestió 4.3.2. El cos massís de la figura està constituït per dos cubs A i B, homogenis i de densitat $900\,\mathrm{kg/m^3}$, soldats entre si de forma que els seus centres de massa estiguin a la mateixa vertical. Els volums de A i B són $1\,\mathrm{m^3}$ i $8\,\mathrm{m^3}$, respectivament. El cos està en equilibri surant en aigua amb el cub B totalment submergit, tal com es pot veure a la figura. El centre d'empenyiment en aquesta situació d'equilibri es troba a una distància de la superfície lliure de l'aigua, que val:

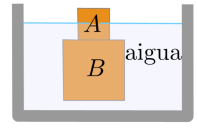


Figura de l'enunciat 4.3.2

a) 1,115 m

b) 1,087 m

c) 1,057 m

d) 1,500 m

e) 1,322 m

Qüestió 4.3.3. Un cub d'aresta a i densitat $600\,\mathrm{kg/m^3}$ sura en un líquid estant la tercera part de l'aresta submergida en el líquid. Sabem que, si sobre el cub afegim un cilindre de la mateixa densitat però de $2\,\mathrm{m^3}$ de volum, el cub estarà totalment submergit amb la seva base superior enrasada amb la superfície del líquid. Quina serà longitud de l'aresta a?

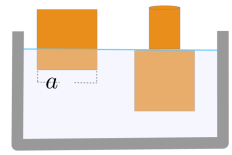


Figura de l'enunciat 4.3.3

a) 3 m

b) 1,5 m

c) 1 m

d) 0,5 m

e) 2,5 m

Qüestió 4.3.4. Al recipient de la figura, la pressió manomètrica del gas 2 és $P_2 = 51300\,\mathrm{Pa}$. Sabent que les densitats dels líquids són $\rho_1 = 3\,\mathrm{g/cm^3}$ i $\rho_2 = 1\,\mathrm{g/cm^3}$, la pressió del gas 1 serà ($g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$):

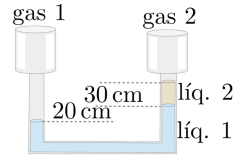


Figura de l'enunciat 4.3.4

a) 60129 Pa

b) 72240 Pa

c) −20340 Pa

d) 54328 Pa

e) 129354 Pa

Qüestió 4.3.5. El cos de la figura d'1,5 m d'amplada, està format per dos cossos de densitats diferents, tal com s'indica a la figura. El centre d'empenyiment es troba a una profunditat:

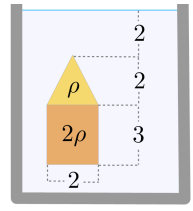


Figura de l'enunciat 4.3.5

a) 4,96 m

b) 6,05 m

c) 4,74 m

d) 5,22 m

e) 5,47 m

Qüestió 4.3.6. El cos esfèric de la figura està constituït per dues semiesferes massisses de densitats una el doble de l'altra. El lliguem a una corda i el submergim en un líquid fins a la meitat, tal com es veu a la figura. En aquesta situació, la distància entre el centre d'empenyiment i el centre de masses del cos val:

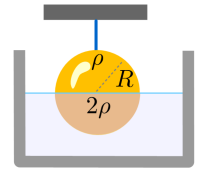


Figura de l'enunciat 4.3.6

a) $R/7$

b) $R/2$

c) $R/6$

d) $R/4$

e) $R/8$

Problema 4.3.4. Deixem caure una gota de mercuri de 13 g en un got ple d'aigua de 20 cm de profunditat. Calculeu quant trigarà la gota a arribar al fons del got

a) si no tenim en compte l'empenyiment d'Arquimedes i

b) tenint en compte l'empenyiment d'Arquimedes.

Dades: $\rho_{Hg} = 13 \times 10^3\,\text{kgm}^{-3}$; $\rho_{\text{aigua}} = 10^3\,\text{kgm}^{-3}$

Solució: a) $a = g$, $t = 0{,}202\,\text{s}$; b) $a = g(1 - \rho_{\text{aigua}}/\rho_{Hg})$, $t = 0{,}210\,\text{s}$

Problema 4.3.5. La xarxa de clavegueram de dues poblacions està unida per una sèrie de conductes soterrats. Un dia la pressió atmosfèrica al poble A és de $P_A = 1{,}035 \times 10^5$ Pa i a la població B, de $P_B = 1{,}03 \times 10^5$ Pa. Feu l'esquema de la figura tot indicant en quin pou l'altura de l'aigua serà més gran i per què. Calculeu la diferència de l'altura de l'aigua al pou de la població A i de la població B.

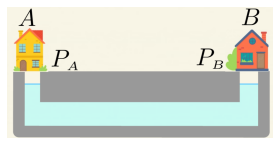


Figura de l'enunciat 4.3.5

Solució: 0,051 m

Problema 4.3.6. Quan un vaixell com el de la figura és sobre l'aigua, una part en resta submergida. Si anomenem h l'altura de l'aigua respecte al fons del vaixell, en quin cas l'altura h serà més gran, si el vaixell és en aigua dolça o en aigua salada?

El vaixell de la figura té un volum total de $100\,\text{m}^3$ i una massa de $2000\,\text{kg}$. Calculeu quin percentatge del volum del vaixell és dins el mar. Si el mateix vaixell és en aigua de riu, calculeu quin percentatge del volum serà ara sota l'aigua.

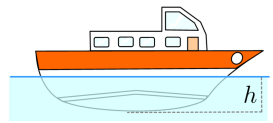


Figura de l'enunciat 4.3.6

Dades: $\rho_{\text{mar}} = 1{,}025 \times 10^3\,\text{kg}\,\text{m}^{-3}$, $\rho_{\text{riu}} = 10^3\,\text{kg}\,\text{m}^{-3}$

Solució. En aigua de mar, $1{,}95\%$; en aigua de riu. $2{,}00\%$

Problema 4.3.7. Un recipient conté aigua i aire, com es veu a la figura. Quina és la pressió manomètrica, P_m, a A, B, C i D?

Nota: $P_m = P - P_{at}$.

Solució. $P_{mA} = 11760\,\text{Pa}$, $P_{mB} = P_{mC} = -2940\,\text{Pa}$, $P_{mD} = -17600\,\text{Pa}$

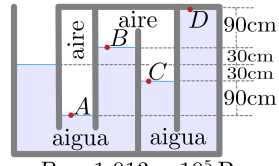


Figura de l'enunciat 4.3.7

Qüestió 4.5.1. El cilindre de la figura (de massa M) es manté en equilibri a causa de la força F de la corda (solidària al cilindre) i de la fricció entre el cilindre i la paret (de coeficient μ). Indiqueu quina de les respostes és certa:

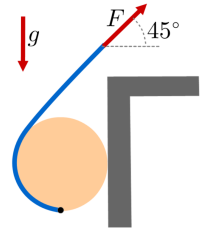


Figura de l'enunciat 4.5.1

a) En equilibri es verifica que $F < Mg$.

b) En equilibri es verifica que $F > Mg$.

c) Només hi haurà equilibri si $\mu > \tan 45°$.

d) Si F és molt més gran que Mg, la força de fricció i el pes del cilindre tenen el mateix sentit.

e) És impossible que hi hagi equilibri perquè sobre el cilindre actuen tres forces coplanàries no concurrents.

Qüestió 4.5.2. El bloc triangular homogeni de la figura de pes P té una altura h i base b. El coeficient de fricció entre el terra i el bloc és μ. En condicions de lliscament i bolcada imminent, indiqueu quina de les respostes és certa:

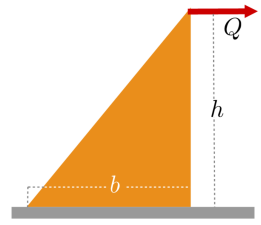


Figura de l'enunciat 4.5.2

a) $\mu = \frac{b}{3h}$

b) $\mu = \frac{2b}{3h}$

c) Si $Q = 0$, el bloc no pot estar mai en equilibri.

d) Si $h > b$, el bloc sempre girarà abans de lliscar.

e) Les altres afirmacions són errònies.

Qüestió 4.5.3. Es vol fer bolcar sense lliscar el cos homogeni, de pes W, aplicant la força F tal com es mostra. El coeficient de fregament μ entre el bloc i el terra horitzontal ha de ser:

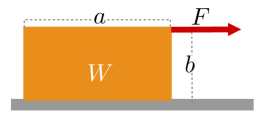


Figura de l'enunciat 4.5.3

a) $\mu < \frac{a}{2b}$

b) $\mu = \frac{a}{2b}$

c) $\mu > \frac{a}{2b}$

d) $\mu = \frac{F}{W}$

e) Cap de les altres

Qüestió 4.5.4. Si l'aigua es comporta com un fluid perfecte, indiqueu quina de les respostes és certa:

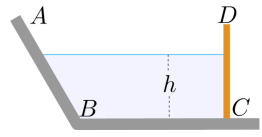


Figura de l'enunciat 4.5.4

a) La força de l'aigua sobre la paret $\overline{AB}$ del dipòsit de la figura és horitzontal i s'aplica a una altura $h/3$.

b) L'empenyiment de l'aigua sobre un cos que sura en equilibri pot tenir una direcció arbitrària, depenent de la forma del cos.

c) Cap de les altres respostes és certa.

d) Si la barrera $\overline{CD}$ de la figura es recolza sobre el fons a C, sense fregament, és possible mantenir-la en equilibri mitjançant una força F adient, aplicada a una altura $h/2$.

e) La força de l'aigua sobre el fons $\overline{BC}$ del dipòsit té una component horitzontal cap a l'esquerra.

Qüestió 4.5.5. El mur d'un embassament té la secció trapezoidal indicada a la figura. L'altura és h i la longitud en la direcció transversal a la figura és ℓ. Si g és l'acceleració de la gravetat i ρ és la densitat de l'aigua, el mòdul de la força que exerceix l'aigua sobre el mur és

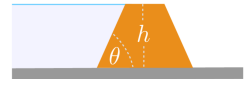


Figura de l'enunciat 4.5.5

a) $F = \frac{\rho g h^2 \ell}{2 \sin\theta}$

b) $F = \frac{\rho g h^2 \ell}{3}$

c) $F = \frac{\rho g h^2 \ell}{2}$

d) $F = \frac{\rho g h^2 \ell}{2 \cos\theta}$

e) No es pot calcular amb les dades proporcionades.

Qüestió 4.5.6. S'enganxa una bola de massa $0{,}3\,\text{kg}$ al punt A d'un filferro que té forma de semicircumferència de radi $50\,\text{cm}$ i centre C. El filferro és homogeni i té una massa de $0{,}2\,\text{kg}$. Quan pengem el conjunt en la forma indicada a la figura, l'angle θ, un cop assolida la posició d'equilibri, serà:

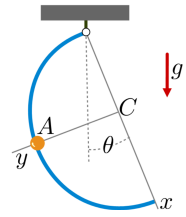


Figura de l'enunciat 4.5.6

a) $14{,}4°$

b) $17{,}6°$

c) $40{,}5°$

d) $32{,}5°$

e) $30{,}3°$

Qüestió 4.5.7. Una esfera massissa homogènia de pes W i radi R està suspesa de la paret per mitjà d'un fil de massa negligible i longitud $5/3R$, tal com es veu a la figura. El punt A, unió de l'esfera amb el fil, està sobre la vertical que passa pel centre de l'esfera. En el contacte entre la paret i l'esfera al punt B no hi ha fricció. Si T és la tensió del fil i B la reacció a la paret, podem afirmar que:

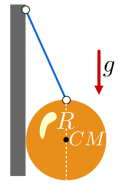


Figura de l'enunciat 4.5.7

a) $T = \frac{5}{3}W$

b) $B = \frac{4}{3}W$

c) $B = \frac{3}{4}W$

d) La reacció de la paret a B és nul·la, atès que no hi ha fricció.

e) L'esfera no pot estar en equilibri en la posició que s'indica a l'enunciat.

Qüestió 4.5.8. Una anella prima i homogènia de radi R i pes P, situada sobre el pla inclinat de la figura, s'aguanta amb un cable $\overline{CB}$, paral·lel al pla inclinat, essent la seva tensió T. Si μ és el coeficient de fricció entre el pla inclinat i l'anella i aquesta es troba en condicions de moviment imminent, indiqueu quina de les respostes és certa:

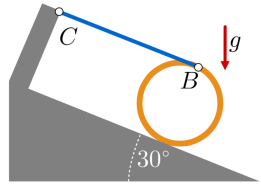


Figura de l'enunciat 4.5.8

a) $\mu = 0{,}29$

b) $\mu = 0{,}45$

c) $\mu = 0{,}84$

d) $\mu = \tan 60°$

e) $\mu = \tan 30°$

Qüestió 4.5.9. La tensió màxima que suporta el cable de la figura és de 600 N. La barra, articulada al punt A amb la paret, té un pes de 800 N i una longitud de 8 m. Per mantenir-la en equilibri en posició horitzontal, la distància màxima del seu CM a l'extrem A ha de ser:

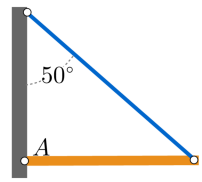


Figura de l'enunciat 4.5.9

a) 4 m

b) 3,51 m

c) 4,63 m

d) 3,25 m

e) 3,86 m

Qüestió 4.5.10. Sobre un bloc cúbic homogeni de 3 m de costat i pes P s'apliquen dues forces horitzontals de mòdul $F = 160$ N amb les seves línies d'acció paral·leles i desplaçades 0,3 m de la posició del centre de masses del bloc, tal com es veu a la figura. El coeficient de fricció amb el terra és 0,2. Indiqueu quina de les respostes és certa:

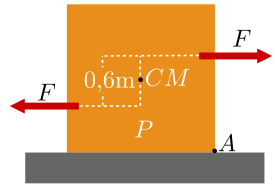


Figura de l'enunciat 4.5.10

a) Per tal que el bloc estigui en equilibri, el valor mínim de P ha de ser 192 N.

b) Per tal que el bloc estigui en equilibri, el valor mínim de P ha de ser 64 N.

c) Estant en equilibri, la component normal de la força de contacte amb el terra passa pel centre de masses del bloc.

d) Si $P = 80$ N, el bloc està en equilibri i la component normal de la força de contacte amb el terra passa pel punt A.

e) Si $P = 80$ N, el bloc està en equilibri i la força de fricció val 16 N.

Qüestió 4.5.11. El sistema de la figura està en equilibri. La tensió del fil horitzontal $\overline{BC}$ (en kp) és, si la barra $\overline{AC}$ té massa negligible respecte a 100 kg:

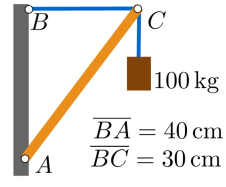


Figura de l'enunciat 4.5.11

a) 75

b) 100

c) 50

d) 125

e) Cap de les anteriors.

Qüestió 4.5.12. Si una biga es recolza simplement pels extrems A i B, i suporta dues càrregues verticals de 1000 N, una aplicada en un punt mitjà i l'altra sobre el suport A, és cert que:

a) La biga no està en equilibri perquè el moment resultant respecte de B no és nul

b) La biga no està en equilibri perquè el moment resultant respecte de A no és nul.

c) La reacció a A és triple que a B.

d) La reacció a A és el doble que a B.

e) La reacció a B és de 1000 N.

Qüestió 4.5.13. Una comporta articulada al punt A sense fricció, d'amplada a, separa dos líquids de densitats ρ i $\rho/2$. Quina ha de ser la relació entre les alçades H_1 i H_2 dels líquids perqué la comporta no es mogui?

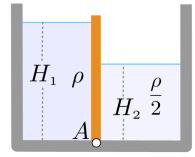


Figura de l'enunciat 4.5.13

a) $\frac{H_2}{H_1} = 2$

b) $\frac{H_2}{H_1} = \sqrt{2}$

c) $\frac{H_2}{H_1} = \sqrt[3]{2}$

d) $\frac{H_2}{H_1} = \frac{1}{2}$

e) $\frac{H_2}{H_1} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

Qüestió 4.5.14. La comporta, de massa m quadrada i articulada sense fricció, s'aguanta en equilibri inclinada un angle θ a causa del fluid de densitat ρ. En aquesta situació, $\tan\theta$ és:

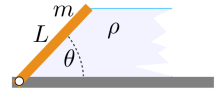


Figura de l'enunciat 4.5.14

a) $\frac{3m}{2\rho L^3}$

b) $\frac{3m}{\rho L^3}$

c) $\frac{m}{\rho L^3}$

d) $\frac{2m}{3\rho L^3}$

e) $\frac{m}{3\rho L^3}$

Qüestió 4.5.15. Quina ha de ser la tensió mínima de la corda per tal que la comporta de la figura, de pes negligible, amplada L, i articulada sense fricció per l'aresta inferior, aguanti el líquid de densitat ρ del dipòsit obert per la part superior, tal com s'indica a la figura.

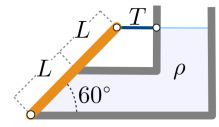


Figura de l'enunciat 4.5.15

a) $T = \frac{3}{4}\rho g L^3$

b) $T = \rho g L^3$

c) $T = \frac{1}{2}\rho g L^3$

d) $T = \frac{\sqrt{3}}{2}\rho g L^3$

e) $T = \frac{1}{3}\rho g L^3$

Qüestió 4.5.16. L'escala homogènia de la figura està recolzada pel punt A a la paret llisa i pel B al terra rugós. Se sap que rellisca quan $\theta \leq 30°$. El coeficient de fricció amb el terra val:

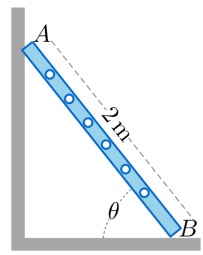


Figura de l'enunciat 4.5.16

a) $\mu = 0{,}766$

b) $\mu = 0{,}866$

c) $\mu = 0{,}666$

d) $\mu = 0{,}566$

e) $\mu = 0{,}966$

Qüestió 4.5.17. Donat el sistema de la figura, determineu el coeficient de fricció μ que fa que el cos 2 estigui en condicions de moviment imminent de baixada, si $m_1 = m$, $m_2 = 2m$ i $\theta = \frac{\pi}{3}$. La corda té massa negligible i l'eix de la politja no frega.

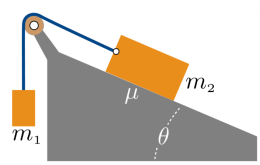


Figura de l'enunciat 4.5.17

a) 1,23

b) 1,46

c) 0,32

d) 2,46

e) 0,73

Problema 4.5.3. El bloc homogeni de massa m, de dimensions $a \times b \times b$, està en equilibri, en la posició indicada a la figura, a causa d'estar mig submergit en un líquid, de densitat ρ , i d'estar lligat a una corda pel centre de l'aresta inferior. Trobeu la massa m del bloc.

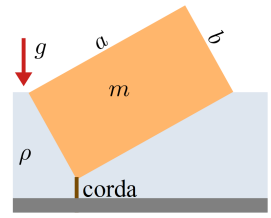


Figura de l'enunciat 4.5.3

Dades: $a = 4\,\text{m}$, $b = 3\,\text{m}$ i $\rho = 10^3\,\text{kg/m}^3$.

Solució: $m = 12000\,\text{kg}$

Problema 4.5.4. Una barra pesant, uniforme, de longitud $2a$ i pes W, es recolza tal com indica la figura en una semiesfera buida, llisa, de radi r. Trobeu l'angle ϕ d'equilibri i les reaccions a A i C.

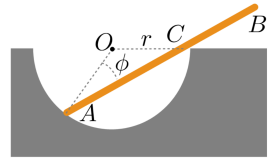


Figura de l'enunciat 4.5.4

Solució: $\cos\phi = \frac{a+\sqrt{a^2+32r^2}}{8r}$, $C = \frac{Wa}{2r}$, $A = W\,\tan\phi$

Problema 4.5.5. Una barra homogènia de $5\,\text{m}$ i pes P està col·locada entre dues parets verticals separades $4\,\text{m}$. La paret A és llisa i el coeficient de fricció estàtica entre la barra i la paret B és 0,9. Un objecte de pes $3P$ es pot fixar sobre diferents punts la barra. A quina distància x de la paret B es pot fixar l'objecte sense que es perdi l'equilibri?

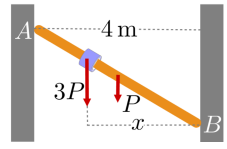


Figura de l'enunciat 4.5.5

Solució: $x > 3{,}78\,\text{m}$

Problema 4.5.6. L'extrem d'un canal d'aigua està format per una comporta de pes negligible $\widehat{ABC}$, articulada sense fricció a B i $1{,}2\,\text{m}$ d'amplada. Calculeu la relació h/b per a la qual la reacció a A és zero.

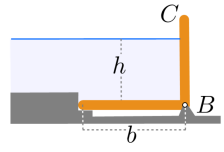


Figura de l'enunciat 4.5.6

Solució: $\frac{h}{b} = \sqrt{3}$

Problema 4.5.7. Un bloc A uniforme d'1 kg de massa està situat sobre un pla horitzontal rugós de coeficient $\mu = 0{,}2$. Aquest bloc està lligat a una corda horitzontal a una altura h. La corda passa per dues politges C i D sense massa ni fricció.

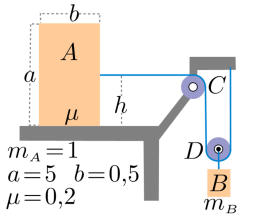


Figura de l'enunciat 4.5.7. Totes les unitats en el S.I.

a) Si $h = 0{,}3\,\text{m}$, determineu el mínim valor de la massa del cos B que fa que el cos A perdi l'equilibri.

b) El mateix que l'apartat **a** si $h = 4\,\text{m}$.

Solució: a) $m_B = 0{,}400\,\text{kg}$; b) $m_B = 0{,}125\,\text{kg}$

Problema 4.5.8. Un armari de 60 kg està muntat sobre unes rodes que es poden bloquejar per evitar que rodin. El coeficient de fricció és 0,3. Si $h = 80\,\text{cm}$, determineu el mòdul de la força P necessària per moure l'armari cap a la dreta:

a) Si totes les rodes estan bloquejades.

b) Si les rodes B estan bloquejades i les A poden girar lliurement.

c) Si les rodes A estan bloquejades i les B poden girar lliurement.

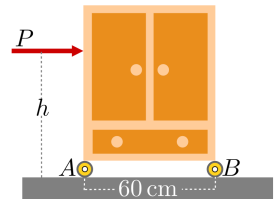


Figura de l'enunciat 4.5.8

Solució: a) $P = 176{,}4\,\text{N}$; b) $P = 147{,}0\,\text{N}$; c) $P = 63{,}0\,\text{N}$

Problema 4.5.9. Determineu la tensió del cable $\overline{AB}$ que aguanta un pal $\overline{BD}$ sense lliscar. El pal té una massa de 18 kg. Suposeu que no hi ha fricció.

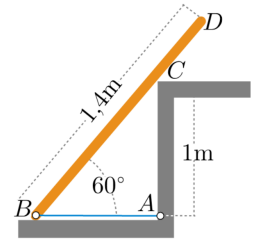


Figura de l'enunciat 4.5.9

Solució: $T = 46{,}4\,\text{N}$

Problema 4.5.10. La barra de la figura està subjecta al terra mitjançant el cable $\overline{AH}$. La massa de la barra és d'1 kg i està formada per dos trams homogenis de densitat diferent ($\overline{BC}$ té densitat lineal doble que $\overline{AB}$). De l'extrem C penja un cos de 5 kg. El sistema està equilibrat i el recolzament a B no és llis. Determineu:

a) La tensió del cable.

b) La força de fricció entre la barra i el terra a B.

c) Hi hauria equilibri si el coeficient de fricció a B fos de 0,5?

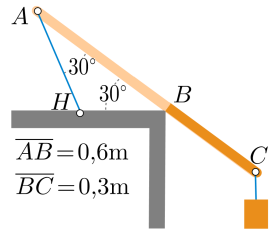


Figura de l'enunciat 4.5.10

Solució: a) $T = 40{,}3\,\text{N}$; b) $F = 64{,}3\,\text{N}$; c) No

Problema 4.5.11. Un disc de radi R i massa M està sobre una superfície horitzontal, recolzat contra un graó d'altura $h = R/2$. Es vol fer pujar el disc pel graó mitjançant una força de mòdul F aplicada al seu eix (vegeu la figura). Determineu el valor mínim de F perquè el disc pugi pel graó, així com el mòdul i la direcció de la força que el graó fa sobre el disc.

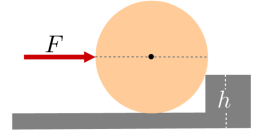


Figura de l'enunciat 4.5.11

Solució: $F = Mg\sqrt{3}$, $N = 2Mg$, angle de N amb l'horitzontal: 30°

Problema 4.5.12. Una placa rectangular uniforme $\overline{AB}$, de 1600 kg, separa dos dipòsits que contenen aigua. La placa està articulada a la part inferior, té una amplada de 3 m i es troba en equilibri per l'acció del cable $\overline{BC}$. Determineu la tensió d'aquest cable.

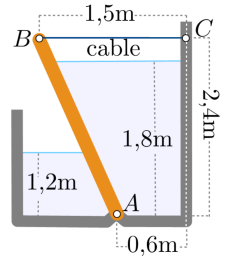


Figura de l'enunciat 4.5.12

Solució: $T = 12512\,\text{N}$

Problema 4.5.13. Una comporta d'altura $\overline{AB} = 1,2\text{m}$, pes de 5000 N, amplada de $L = 3$ m i articulada sense fricció al punt A separa un recipient en dues parts. A la primera part, fins a una altura $H_1 = 0{,}6$ m, hi ha un fluid de densitat $\rho_1 = 1{,}3$ g/cm³. A la segona, fins a una altura $H_2 = 1{,}5$ m, hi ha un fluid de densitat $\rho_2 = 1{,}8$ g/cm³ . Per mantenir la comporta en equilibri, es fa intervenir una molla de constant recuperadora $k = 3 \times 10^5$ N/m. Determineu:

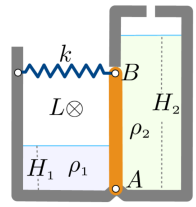


Figura de l'enunciat 4.5.13

a) la força que cada fluid fa sobre la comporta i...

b) els seus respectius punts d'aplicació;

c) la força que l'articulació fa en el punt A de la comporta i

d) la força que, per mantenir l'equilibri de la comporta, fa la molla i l'allargament o escurçament que experimenta.

Solució: Amb els eixos

,

a) $\vec{F}_1 = (6{,}887; 0) \times 10^3\text{N}$; $\vec{F}_2 = (-57{,}212; 0) \times 10^3\text{N}$

b) $\vec{r}_{F1} = (0; 0{,}20)$ m ; $\vec{r}_{F2} = (0; 0{,}467)$ m

c) $\vec{A} = (29{,}201; 5) \times 10^3$ N d) $\vec{F}_k = (21{,}117; 0) \times 10^3$ N ; $\Delta\ell = -0{,}070$ m

Problema 4.5.14. El dipòsit de la figura té 3 m d'amplada. Quina altura de mercuri h donarà lloc a un moment respecte de C sobre la comporta $\overline{CB}$ per l'acció dels dos líquids, de valor 2×10^5 Nm, en sentit horari?

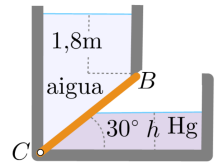


Figura de l'enunciat 4.5.14

Dades: Densitat del mercuri: $13{,}6\,\text{g/cm}^3$. Distància $\overline{CB} = 2{,}5\,\text{m}$

Solució: $h = 0{,}23\,\text{m}$

Qüestió 4.7.1. Una partícula de 20 kg de massa rep l'acció d'una força conservativa d'energia potencial $U(x) = 5(x-2)^2 + 25$ (x en m i U en J). Quina de les següents afirmacions és certa:

a) La posició d'equilibri de la partícula és $x = -2\,\text{m}$.

b) L'energia potencial a la posició d'equilibri és 25 J.

c) La posició d'equilibri de la partícula és inestable

d) Si deixem la partícula sense velocitat a la posició $x = 0$, es desplaçarà en el sentit negatiu de l'eix x.

e) L'energia mecànica de la partícula pot ser negativa per a determinats valors de x.

Qüestió 4.7.2. Donat un sistema conservatiu amb un grau de llibertat, d'energia potencial $U(x)$, quina de les següents afirmacions és certa:

a) Per tenir equilibri estable a $x = x_A$, cal que en aquesta posició $U(x_A) = 0$.

b) La posició $x = x_A$ no pot ser d'equilibri estable si $\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=x_A} = 0$.

c) Per tal que una posició $x = x_A$ sigui d'equilibri indiferent, és condició necessària i suficient que $\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=x_A} = 0$

d) En una posició d'equilibri inestable, l'energia mecànica és màxima.

e) Cap de les altres quatre afirmacions és certa.

Qüestió 4.7.3. La barra articulada sense fricció de la figura és homogènia i pesa $P = 200$ N. La molla té constant elàstica k i longitud natural $\ell_N = 0{,}5$ m. Quin ha de ser el valor de k perquè $\theta = \frac{\pi}{4}$ sigui una posició d'equilibri?

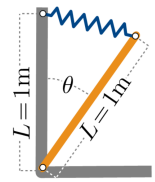


Figura de l'enunciat 4.7.3

a) $144{,}2\,\mathrm{N/m}$

b) $288{,}4\,\mathrm{N/m}$

c) $576{,}8\,\mathrm{N/m}$

d) $96{,}3\,\mathrm{N/m}$

e) $192{,}3\,\mathrm{N/m}$

Problema 4.7.4. La figura representa la secció vertical d'una porta de ventilació, homogènia i de 60 kg de massa, articulada, sense fricció, a O. La porta està controlada per un cable accionat pel ressort que passa per la petita politja sense fricció, situada a A. La constant recuperadora del ressort és $160\,\mathrm{N/m}$ i la seva deformació és nul·la quan $\theta = 0$. Determineu l'angle θ d'equilibri i analitzeu el tipus d'equilibri.

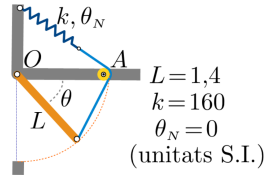


Figura de l'enunciat 4.7.4

Solució: $\theta = 0{,}9202$ rad $= 52{,}72°$, estable

Problema 4.7.5. En el mecanisme que s'indica a la figura, exempt de fricció, A és una articulació i C pot lliscar per la paret. Trobeu la posició y d'equilibri i la tensió T de la molla $\overline{AC}$. La longitud de repòs de la molla és h i k és la seva constant recuperadora.

Solució: $y = h + \frac{P}{2k}$, $T = \frac{P}{2}$

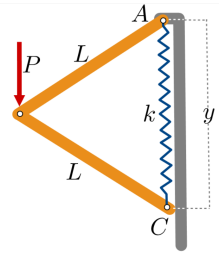


Figura de l'enunciat 4.7.5

Problema 4.7.6. Donat el potencial $U(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 10$ (unitats S.I.), el punt $x = 1$ és d'equilibri estable, inestable o indiferent?

Solució: Estable

Problema 4.7.7. Es fan servir dues barres $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$, de 0,6 m, per sostenir un pes de 500 N.
Determineu el valor de la constant recuperadora k per a ambdues molles sabent que hi ha equilibri per $\theta = 30°$. Suposeu negligibles els pesos de les barres i les friccions. Les molles tenen la seva longitud natural per a $\theta = 0°$. Demostreu que l'equilibri és estable. Entre C i el terra no hi ha fregament. L'extrem superior de la molla vertical es pot moure horitzontalment; per això, té la posició vertical sempre.

Solució: $k = 1029{,}6\,\mathrm{Nm}^{-1}$

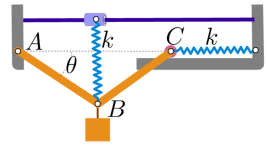


Figura de l'enunciat 4.7.7

Problema 4.7.8. El dibuix representa una finestra homogènia AB de pes 100 N, que pot girar, sense fricció, al voltant de A i que s'aguanta per l'acció d'un fil que, lligat a B, passa per una politja C sense fricció i està lligat a una molla horitzontal de constant recuperadora $k = 100\,\mathrm{N/m}$. La molla té la seva longitud natural si $\theta = 30°$. Si $\overline{AB} = \overline{AC} = 1{,}20$ m, trobeu l'angle θ d'equilibri del sistema.

Solució: $\theta = 180°$ i $\theta = 52{,}7°$

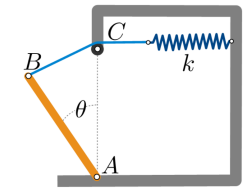


Figura de l'enunciat 4.7.8

Problema 4.7.9. Quatre barres articulades, sense fricció, formen un rombe $\widehat{ABCD}$ sostingut a A i sotmès a l'acció de les forces donades P i Q, tal com es veu a la figura. Determineu la configuració d'equilibri del sistema definida per l'angle θ.

Solució: $P = Q\tan\theta$

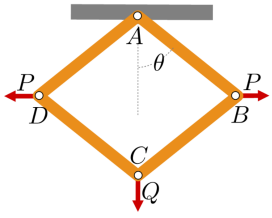


Figura de l'enunciat 4.7.9

Problema 4.7.10. En el sistema de la figura, sense fricció i la barra $\overline{AC}$ de pes negligible, trobeu l'angle θ d'equilibri.

Dades: $a = 50$ cm, $k = 100\,\mathrm{N/m}$, longitud natural de la molla$= 50$ cm, $P = 10$ N.

Solució: $\theta = 77{,}4°$ i $\theta = 180°$

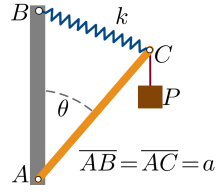


Figura de l'enunciat 4.7.10

Problema 4.7.11. Determineu la posició d'equilibri del sistema. Les barres tenen pes negligible, $\overline{AD}$ és la longitud natural de la molla i no hi ha fricció.

Solució: $\sin\theta = 0$ i, si $\frac{P}{4ka} \leq 1$, $\cos\theta = \frac{P}{4ka}$

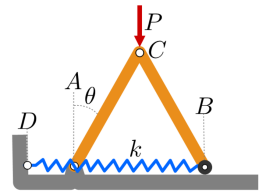


Figura de l'enunciat 4.7.11

Problema 4.7.12. S'aplica una càrrega vertical W al mecanisme de la figura. La constant recuperadora de la molla és k; la seva longitud natural correspon a quan $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ estan horitzontals. Suposant que les barres no pesen i que no hi ha fricció, trobeu l'expressió que relaciona θ, W, a i k, quan el mecanisme està en equilibri.

Solució: $(1-\cos\theta)\tan\theta = \frac{W}{4ka}$

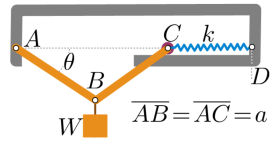


Figura de l'enunciat 4.7.12

Problema 4.7.13. Una boleta, de massa m, es pot moure sense fricció per la guia. Està sotmesa a la gravetat i, a través d'una corda, inextensible i de massa negligible, que passa per la petita politja O (exempta de fricció), a l'acció d'una molla de massa negligible i constant recuperadora k. La molla està relaxada quan l'extrem de la corda que agafa la boleta el desenganxem i el portem al punt O.

a) Trobeu la posició (x, y) d'equilibri en funció de m, g, k i L.

b) Determineu-ne el tipus d'equilibri.

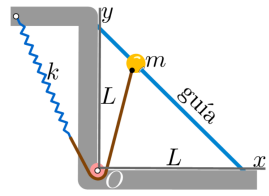


Figura de l'enunciat 4.7.13

Solució: a) $x_{eq} = \frac{L}{2}\left(\frac{mg}{kL} + 1\right)$; b) estable

Problema 4.7.14. La barra uniforme $\overline{AB}$ de la figura, de 150 N de pes i $L = 0{,}9$ m de longitud, pot lliscar per una guia vertical sense fricció. La molla de constant $k = 250\,\mathrm{N/m}$, unida al punt B de la barra, té la seva longitud natural quan $\theta = 0$. Negligint les forces de fricció amb el terra, determineu:

a) les posicions d'equilibri.

b) el tipus d'equilibri.

c) la reacció a A per les diferents posicions d'equilibri.

d) ¿Quin seria el treball que faria la molla si el sistema es desplacés des de la posició $\theta = 10°$ fins a $\theta = 30°$?

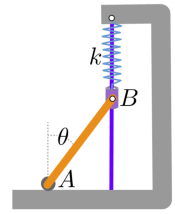


Figura de l'enunciat 4.7.14

Solució: a) $\theta_1 = 0°$ i $\theta_2 = 48{,}2°$; b) θ_1 inestable i θ_2 estable; c) $A_1 = 150\,\mathrm{N}$, $A_2 = 75\,\mathrm{N}$; d) $W_{\text{molla}} = -1{,}79\,\mathrm{J}$

Problema 4.7.15. El sistema de la figura està en equilibri. Les barres tenen un pes negligible i està exempt de fricció. Expresseu la relació entre P i F en funció de l'angle θ.

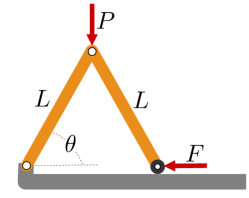


Figura de l'enunciat 4.7.15

Solució: $\frac{P}{F} = 2\tan\theta$

Problema 4.7.16. Un saltamartí, també anomenat tossut, és un ninot amb simetria de revolució i amb la base semiesfèrica, de manera que després de copejar-lo sempre torna a la posició vertical inicial. Quina condició ha de complir el centre de masses del conjunt?

Figura de l'enunciat 4.7.16

Solució: El CM ha d'estar per sota de la base de la semiesfera.

.

Problema 4.7.17. El sistema de la figura està format per dues molles de constants $k = 100\,\mathrm{N/m}$ i una barra homogènia de massa 30 kg i 2 m de longitud. L'extrem A de la barra es pot moure sense fregament en la direcció horitzontal x i l'altre extrem B sobre una paret vertical, també exempta de fricció. Ambdues molles presenten la mateixa longitud natural que correspon a la posició vertical de la barra. Calculeu:

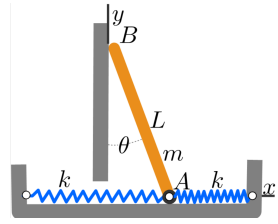


Figura de l'enunciat 4.7.17

a) Els valors de x corresponents a les dues posicions d'equilibri que presenta el sistema.

b) El treball de la molla de la dreta (W_{MD}) quan la barra es desplaça, en el sentit negatiu de l'eix x, entre aquestes dues posicions.

c) El treball de la força gravitatòria (W_G) en aquest desplaçament.

Solució: a) 0 i 1,8598 m; b)172,92 J; c) $-186{,}03$ J

Problema 4.7.18. Un carret de massa M (rodes de massa negligible), amb una sobrecàrrega M_1 i M_2, se situa en un pla inclinat i es lliga per un extrem a una molla (constant k i longitud natural ℓ_n) i per l'altra, a una corda (sempre tensa) que passa a través d'una politja (massa negligible i sense fricció), de la qual penja una massa m.

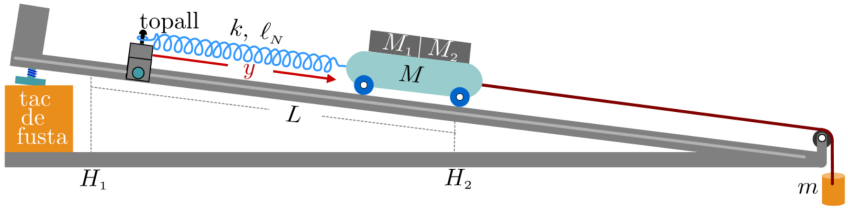


Figura de l'enunciat 4.7.18

a) Escriviu l'expressió de l'energia mecànica del sistema en funció de la coordenada y (l'energia pot tenir una constant additiva, independent de y).

b) Trobeu la posició d'equilibri y_0.

c) Imposant la conservació de l'energia, trobeu l'equació de moviment.

d) Escriviu l'equació de moviment en funció de la coordenada x, per a la qual la posició d'equilibri és $x = 0$.

e) Com es mou el carret si el deixem anar des de 5 cm cap avall de la posició d'equilibri? I si ho fem 5 cm cap amunt?

f) Quina és la distància màxima (respecte la posició d'equilibri) des de la qual podem deixar anar el carret sense que la corda s'arrugui?

Dades: $M = 0{,}487\,\text{kg};$, $M_1 = 0{,}494\,\text{kg}$, $M_2 = 0{,}289\,\text{kg};$, $L = 60\,\text{cm}$, $H_1 = 8{,}13\,\text{cm}$, $H_2 = 1{,}22\,\text{cm}$, $m = 105\,\text{g}$, $k = 3{,}63\,\text{N/m}$ i $\ell_n = 9{,}5\,\text{cm}$

Solució:

a) $E = \frac{1}{2}(M+M_1+M_2+m)\dot{y}^2 - (M+M_1+M_2)gy\sin\alpha - mgy + \frac{1}{2}k(y-\ell_n)^2$
$\sin\alpha = 0{,}115$

b) $y_0 = \frac{((M+M_1+M_2)\ \sin\alpha + m)g + k\ell_n}{k}$.

c) $(M + M_1 + M_2 + m)\ \ddot{y} = ((M + M_1 + M_2) \quad \sin\alpha + m\ )g - k(y - \ell_n)$

d) $(M + M_1 + M_2 + m)\ \ddot{x} = -k\ x$

e) $x(t) = 0{,}05\cos\omega t$; $x(t) = -0{,}05\cos\omega t$; $\omega = \sqrt{\frac{k}{M+M_1+M_2+m}}$

f) distància $d = A < \frac{g}{\omega^2}$

Problema 4.7.19. $U(x)$ és la funció energia potencial d'una força en funció de la coordenada cartesiana x.

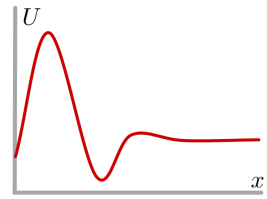


Figura de l'enunciat 4.7.19

a) Dibuixeu el gràfic adjunt, tot indicant esquemàticament el mòdul, la direcció i el sentit de les forces a diferents punts de la corba.

Indiqueu, fent us del gràfic:

b) On serà màxima la força, on serà zero, on serà atractiva i repulsiva?

c) Quins punts d'equilibri hi ha i com són aquests punts?

Si suposem que aquesta corba representa el potencial d'interacció entre dos àtoms:

d) Per a quina energia quedaran lligats els dos àtoms?

Problema 4.7.20. Una vareta homogènia de massa m i longitud $R\sqrt{3}$ es recolza sense fricció a l'interior d'una cavitat esfèrica de radi R. Es fixa en un extrem de la vareta una massa $m/2$. Quin és l'angle α d'equilibri? De quin tipus d'equilibri es tracta?

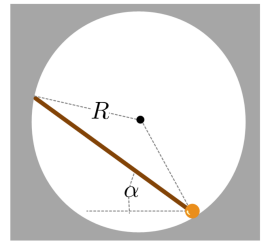


Figura de l'enunciat 4.7.20

Solució: $\alpha = 30°$, estable

Problema 4.7.21. Determineu les posicions d'equilibri de la barra homogènia de longitud $L = 1\,\text{m}$ i pes $10\,\text{N}$ sobre la qual actua una molla de constant recuperadora $k = 10\,\text{N/m}$. ℓ_N és la longitud natural de la molla, essent llisos els contactes amb la paret i el terra.

Solució: $x = 0$ i $x = 0{,}866\,\text{m}$

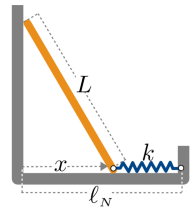


Figura de l'enunciat 4.7.21

→ 5P

5 Problemes i qüestions

Qüestió 5.2.1. Sobre la cinemàtica del sòlid rígid en general, quina de les afirmacions següents és la certa?

a) Si un sòlid fa un moviment de translació pura, cap punt del sòlid no pot descriure un moviment curvilini.

b) Dos punts d'un mateix sòlid poden tenir velocitats angulars diferents.

c) La condició cinemàtica de la rigidesa només és aplicable a moviments plans.

d) La velocitat relativa de dos punts d'un sòlid en moviment no pot ser mai nul·la.

e) Totes les afirmacions anteriors són falses.

Qüestió 5.2.2. A la figura, es mostra un disc de radi R que roda sense lliscar sobre una superfície plana. La velocitat del centre O del disc és constant i val v_0. Quina de les afirmacions següents és falsa?

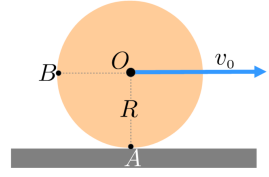


Figura de l'enunciat 5.2.2

a) La velocitat angular del disc és $\omega = \frac{v_0}{R}$.

b) La velocitat del punt A del cos és zero.

c) La velocitat del punt B és $v_B = \sqrt{2}v_0$.

d) L'acceleració del punt A del cos és zero.

e) Malgrat que al punt de contacte A pot haver-hi fricció, aquesta no treballa.

Qüestió 5.2.3. Sabem que els punts A i B d'un sòlid rígid (vegeu la figura) que efectua un moviment en el pla x, y tenen, en un instant determinat, les posicions i velocitats següents (en m i m/s):

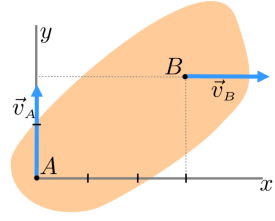


Figura de l'enunciat 5.2.3

$$\vec{r}_A = (0;0)\ ;\ \vec{v}_A = (0;3)\ ;\ \vec{r}_B = (3;2)\ ;\ \vec{v}_B = (v_B;0)$$

Amb relació a la velocitat angular ω del sòlid (en rad/s) i v_B (en m/s), quina de les respostes següents és certa:

a) $v_B = 3$ i $\omega = 2$

b) $v_B = 2$ i $\omega = 2$

c) $v_B = 2$ i $\omega = 1$

d) $v_B = \sqrt{13}$ i $\omega = 1$

e) Sense conèixer prèviament v_B, no es pot deduir res.

Qüestió 5.2.4. Un disc de massa m baixa rodant sense lliscar per una pla inclinat una distància d. Si l'angle del pla amb l'horitzontal és α i el coeficient de fregament disc-pla és μ, l'energia dissipada pel fregament val

a) 0

b) $d\mu mg\cos\alpha$

c) $d\mu mg\sin\alpha$

d) $d\mu mg\tan\alpha$

e) $d\mu mg$

Qüestió 5.2.5. Un triangle equilàter de massa total m està format per tres varetes homogènies de longitud b i està disposat segons es mostra a la figura. El seu moment d'inèrcia respecte de l'eix z és

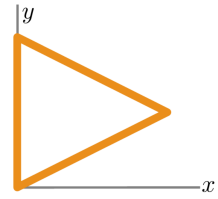


Figura de l'enunciat 5.2.5

a) $\frac{3mb^2}{7}$

b) $\frac{mb^2}{3}$

c) $\frac{mb^2}{2}$

d) $\frac{3mb^2}{4}$

e) $\frac{mb^2}{4}$

Qüestió 5.2.6. Un anell de radi r i massa m baixa rodant sense lliscar per un pla inclinat un angle α. En un instant donat, el seu centre de massa té una velocitat v. En aquest instant, el mòdul del moment angular de l'anell respecte al punt O (vegeu la figura) és

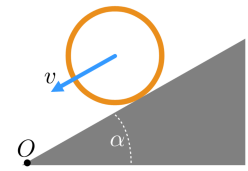


Figura de l'enunciat 5.2.6

a) mvr

b) $\frac{3mvr}{2}$

c) $2mvr$

d) $\frac{mvr}{2}$

e) $mvr \sin\alpha$

Qüestió 5.2.7. Una ballarina que vol augmentar la seva velocitat de rotació ha d'apropar els braços al cos perquè així:

a) augmenta el moment angular,

b) redueix l'esforç,

c) augmenta la quantitat de moviment,

d) redueix el moment d'inèrcia,

e) augmenta la resistència física.

Qüestió 5.2.8. Quatre partícules, $m_1 = m_3 = 3\,\text{kg}$ i $m_2 = m_4 = 4\,\text{kg}$ estan, en els vèrtexs d'un quadrat, unides per varetes de massa negligible. La longitud del costat del quadrat és $L = 2\,\text{m}$. El moment d'inèrcia respecte d'un eix perpendicular al pla de les partícules i que passa per m_4 val:

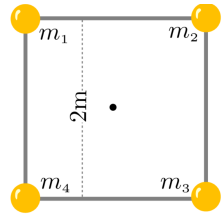


Figura de l'enunciat 5.2.8

a) $88\,\text{kgm}^2$

b) $40\,\text{kgm}^2$

c) $56\,\text{kgm}^2$

d) $20{,}5\,\text{kgm}^2$

e) $19{,}8\,\text{kgm}^2$

Qüestió 5.2.9. Una barra de longitud L està parada, en posició horitzontal, a una altura H respecte d'una taula (vegeu la figura). Es deixa anar i cau tot mantenint la seva orientació. Quan ha baixat una distància H, un dels seus extrems topa amb un dels extrems de la taula i la barra comença a girar de manera que el seu extrem queda fixat a la taula i permet que giri sense fricció. La velocitat angular amb la qual la barra inicia la rotació és:

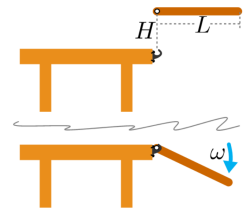


Figura de l'enunciat 5.2.9

a) $\frac{\sqrt{2gH}}{3L}$

b) $\frac{\sqrt{gH}}{L}$

c) $\frac{3\sqrt{2gH}}{2L}$

d) $\frac{\sqrt{2gH}}{L}$

e) $\frac{3\sqrt{gH}}{2L}$

Qüestió 5.2.10. Un aixecador de peses aixeca la pesa m_2, per tal de canviar-la, mantenint la m_1 tocant al terra. Quan forma un angle de $30°$ li cau de les mans. Quant val l'acceleració angular α del conjunt en aquest instant?

Dades: Les peses es poden considerar puntuals, la massa de la barra és negligible i $L = 2\,\text{m}$.

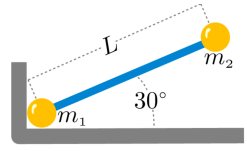


Figura de l'enunciat 5.2.10.

a) $2{,}5\ \text{rad/s}^2$

b) $9{,}8\ \text{rad/s}^2$

c) $4{,}2\ \text{rad/s}^2$

d) $19{,}2\ \text{rad/s}^2$

e) $4{,}9\ \text{rad/s}^2$

Qüestió 5.2.11. Quina de les afirmacions següents és certa:

a) Si dos cossos tenen les mateixes dimensions i la mateixa massa, el seu moment d'inèrcia respecte del mateix eix és igual.

b) El teorema de Steiner demostra que el moment d'inèrcia respecte de l'eix que passa pel CM és menor que respecte de qualsevol altre eix paral·lel a aquest.

c) Com la massa, el moment d'inèrcia és una quantitat característica del cos.

d) El moment d'inèrcia d'un cos respecte d'un eix depèn de la velocitat angular del cos.

e) Dos cossos de massa diferent tenen sempre moment d'inèrcia diferent, respecte del mateix eix.

Qüestió 5.2.12. El bloc cúbic i homogeni de la figura llisca sense fricció a una velocitat v pel terra horitzontal fins que troba un topall al qual queda enganxat, però que no li impedeix girar lliurement. La velocitat angular del bloc, just després del xoc amb el topall, és:

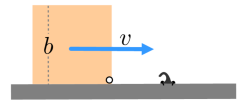


Figura de l'enunciat 5.2.12

a) $\frac{v}{2b}$

b) $\frac{5v}{7b}$

c) $\frac{9v}{7b}$

d) $\frac{v}{b}$

e) $\frac{3v}{4b}$

Qüestió 5.2.13. Un disc de radi $R = 25$ cm gira al voltant de l'eix de simetria, fix i sense fricció, amb una velocitat angular de $\omega_0 = 37\,\text{rad/s}$. El moment d'inèrcia respecte de l'eix val $I = 0{,}5\,\text{kg}\,\text{m}^2$. Per aturar-lo, apliquem una força $F = 2\,\text{N}$ a la pastilla de fre de coeficient de fricció $\mu = 1{,}5$. El temps que triga el disc a aturar-se és:

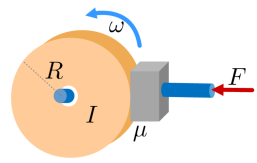


Figura de l'enunciat 5.2.13

a) 34,7 s

b) 54,7 s

c) 14,7 s

d) 44,7 s

e) 24,7 s

Qüestió 5.2.14. Una barra homogènia, de longitud $h = 0{,}8$ m i massa $m = 0{,}40$ kg, pot girar sense fricció al voltant del punt fix A. Un objecte puntual de massa $m_b = 0{,}05$ kg i velocitat $v_b = 10$ m/s impacta horitzontalment i queda incrustat a l'extrem superior de la barra. El mòdul de la velocitat de l'extrem inferior de la barra just després de l'impacte serà:

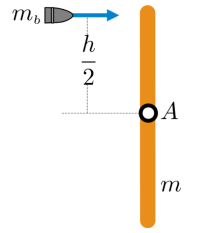


Figura de l'enunciat 5.2.14

a) $1{,}73$ m/s

b) $3{,}73$ m/s

c) $5{,}73$ m/s

d) $4{,}73$ m/s

e) $2{,}73$ m/s

Qüestió 5.2.15. Quant val el moment d'inèrcia de la politja respecte de l'eix normal al pla de la figura que passa pel punt A? La politja està formada per una anella, de radi R i massa m, i una barra, de longitud R i massa m.

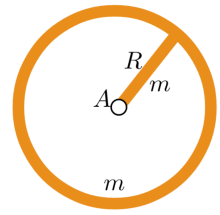


Figura de l'enunciat 5.2.15

a) $13/12\ mR^2$

b) $4/3\ mR^2$

c) $5/6\ mR^2$

d) $7/12\ mR^2$

e) mR^2

Qüestió 5.2.16. El moment d'inèrcia respecte de l'eix, indicat a la figura, d'un cilindre massís de radi R i densitat ρ, amb un forat longitudinal cilíndric de radi $R/2$, val:

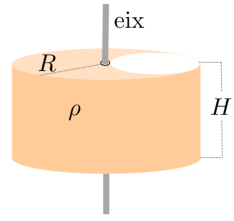


Figura de l'enunciat 5.2.16

a) $\frac{13}{50}\rho\pi H R^4$

b) $\frac{13}{21}\rho\pi H R^4$

c) $\frac{13}{21}\rho\pi H R^3$

d) $\frac{13}{32}\rho\pi R^4$

e) $\frac{13}{32}\rho\pi H R^4$

Problema 5.2.4. Una petita esfera de massa m i $20\,\mathrm{m/s}$ de velocitat horitzontal impacta i es queda adherida a l'extrem d'una peça rígida, que reposa penjada verticalment de l'articulació sense fricció A, formada per una barra i un disc, els dos homogenis de massa m (vegeu la figura). Quant val la velocitat angular del conjunt just després de l'impacte?

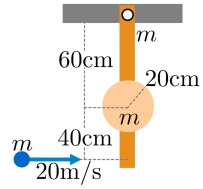


Figura de l'enunciat 5.2.4

Solució

El moment d'inèrcia respecte del punt A després de l'impacte I_A és

$$I_A = \frac{1}{12}m1^2 + m0{,}5^2 + \frac{1}{2}m0{,}2^2 + m0{,}6^2 + m1^2 = 1{,}713333m$$

Utilitzant la conservació del moment angular respecte del punt A abans i després de l'impacte,

$$m20 \cdot 1 = I_A\omega$$

d'on obtenim

$$\omega = 11{,}6732\,\text{rad/s}$$

■

Problema 5.2.5. Determineu l'equació de moviment d'una anella de radi R que rodola sense lliscar per un pla inclinat.

Problema 5.2.6. A les Olimpíades de Barcelona (1992), es va desplaçar una gran quantitat de gent d'arreu del mon a la Ciutat Comtal. Si imaginem la Terra com una esfera homogènia de massa $M = 6 \times 10^24\,\text{kg}$, hi van acudir un total d'un milió de persones, amb una mitjana de $80\,\text{kg}$ de massa:

a) Demostreu que la relació entre els períodes abans (T) i durant les Olimpíades (T_{Ol}) és $\frac{T_{\text{Ol}}}{T} = 1 + \frac{5m}{3M}(\frac{3}{2}\cos^2\theta - 1)$, on m és la massa del conjunt de persones desplaçades i θ la latitud.

b) Calculeu numèricament aquesta relació per al cas de les Olimpíades de Barcelona.

c) Quantes persones s'haurien d'aglutinar per tal que el període fos $1\,\text{s}$ més gran?

Solució: b) $\frac{T_{\text{Ol}}}{T} = 1$ (de fet $1{,}00000000000000001$).

Problema 5.2.7. Una esfera massissa homogènia de massa m roda sense lliscar per un pla horitzontal accelerada per una força F paral·lela al pla i aplicada al CM. Calculeu:

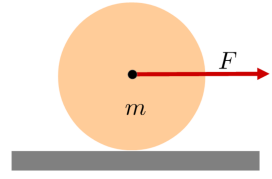


Figura de l'enunciat 5.2.7

a) L'acceleració de l'esfera.

b) La força de fricció seca amb el pla.

Solució: a) $\frac{5F}{7m}$; b) $-\frac{2F}{7}$

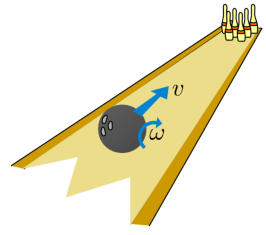


Figura de l'enunciat 5.2.8

Problema 5.2.8. En el joc de bitlles, una bola es pot assimilar a una esfera uniforme de $7\,\text{kg}$ i $300\,\text{mm}$ de diàmetre. Tirem una bola amb una velocitat inicial $v_0 = 6\,\text{m/s}$ i una velocitat angular inicial $\omega_0 = 0$. Si el coeficient de fricció dinàmic bola-pista és de $\mu = 0{,}1$, determineu:

a) El temps t_f que triga la bola en comença a rodar sense lliscar.

b) La velocitat v_f i la velocitat angular a l'instant t_f.

Solució: a) $t_f = 1{,}747\,\text{s}$; b) $v_f = 4{,}286\,\text{m/s}$, $\omega_f = 28{,}57\,\text{rad/s}$

Problema 5.2.9. Un volant muntat sobre un eix es posa en rotació mitjançant un cos de massa m. El moment d'inèrcia total respecte de l'eix del volant val I i M_f és el valor del moment de les forces de resistència dels coixinets de l'eix.

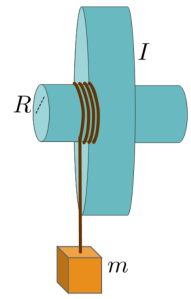


Figura de l'enunciat 5.2.9

a) Quin és el valor de l'acceleració angular de la roda?

b) Quina és la velocitat angular quan el cos ha baixat una distància h?

Solució: a) $\alpha = \frac{mRg - M_f}{I + mR^2}$; b) $\omega = \sqrt{2\frac{mRg - M_f}{I + mR^2}\frac{h}{R}}$

Problema 5.2.10. Una barra uniforme de $60\,\text{cm}$ de longitud i $15\,\text{N}$ de pes penja d'un passador sense fricció. Una bala de $22{,}7\,\text{g}$ impacta amb una velocitat de $540\,\text{m/s}$ i hi queda incrustada. Determineu la velocitat angular de la barra immediatament després de l'impacte.

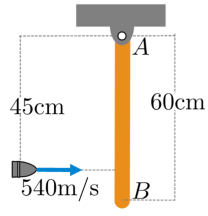


Figura de l'enunciat 5.2.10

Solució: $\omega = 29{,}3\,\text{rad/s}$

Problema 5.2.11. Un cilindre homogeni de radi $R = 0{,}4\,\text{m}$ està lliure sobre l'extrem de la cabina de la plataforma d'un camió inicialment aturat. El camió engega amb una acceleració constant $a = 0{,}7\,\text{m/s}^2$.

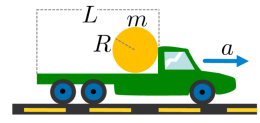


Figura de l'enunciat 5.2.11

Si hi ha prou fricció entre la plataforma i el cilindre perquè aquest rodi sense lliscar, determineu quant de temps triga a caure del camió si la longitud de la plataforma és $L = 4{,}5\,\text{m}$.

Solució: $4{,}19\,\text{s}$

Qüestió 5.3.1. La barra homogènia de la figura pot girar lliurement al voltant de l'articulació fixa de l'extrem esquerre. Si parteix del repòs en posició horitzontal, quin serà el mòdul de la seva velocitat angular quan arribi a la posició vertical?

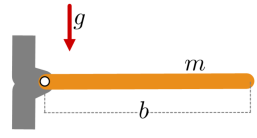


Figura de l'enunciat 5.3.1

a) $\sqrt{\frac{3g}{b}}$

b) $\sqrt{\frac{2g}{b}}$

c) $\sqrt{\frac{3g}{2b}}$

d) $\sqrt{\frac{3g}{5b}}$

e) $\sqrt{\frac{5g}{3b}}$

Qüestió 5.3.2. Un cilindre buit i un de massís, del mateix radi i massa, estan situats a d'alt d'un pla inclinat. Es deixen anar al mateix instant i els dos rodolen sense lliscar. És cert que:

a) Els dos arriben a la base del pla simultàniament, ja que tenen la mateix massa, el mateix radi i baixen des de la mateixa altura.

b) A cada instant els dos tenen la mateixa energia cinètica.

c) Com que hi ha d'haver fricció perquè rodin, no es pot conservar l'energia mecànica en cap dels dos cilindres.

d) A la base del pla, els dos tenen la mateixa energia cinètica.

e) Com que el pes és aplicat al CM, el moment angular de cada cilindre es conserva mentre baixen rodant pel pla.

Qüestió 5.3.3. Un cèrcol roda sense lliscar. Quant val el quocient entre la seva energia cinètica de rotació i la seva energia cinètica de translació, $\frac{E_{\text{rot}}}{E_{\text{trans}}}$?

a) 1

b) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

d) 2

e) $\sqrt{2}$

Qüestió 5.3.4. Indiqueu quina de les respostes és certa:

a) La variació de l'energia cinètica d'un sòlid rígid és igual al treball de les forces externes.

b) L'energia cinètica d'un sòlid rígid movent-se en un pla es pot expressar com $E_c = \frac{1}{2}\, I_{CM}\, \omega^2$.

c) La variació de l'energia cinètica d'un sistema de partícules és igual al treball de les forces internes.

d) L'energia cinètica d'un sistema de partícules, de massa total m, es pot expressar com $E_c = \frac{1}{2}\ m\ v_{CM}^2$.

e) La variació de l'energia cinètica d'un sistema de partícules és igual al treball de les forces externes.

Qüestió 5.3.5. L'energia cinètica d'un carretó de quatre rodes, de massa $M + 4m$, essent m la massa de cada roda, de radi R i moment d'inèrcia respecte del seu eix $\frac{1}{8}mR^2$, que es mou rectilíniament sobre un pla a velocitat v, sense que cap roda llisqui, és:

a) $\frac{1}{2}(M + \frac{1}{8}m)v^2$

b) $\frac{1}{2}(3M + 7m)v^2$

c) $\frac{1}{3}(2M + 3m)v^2$

d) $\frac{1}{4}(2M + 9m)v^2$

e) $\frac{1}{4}(M + \frac{1}{8}m)v^2$

Qüestió 5.3.6. La barra rígida de la figura penja de l'articulació A, exempta de fricció. Una bala impacta i queda incrustada a B. La magnitud que es conserva durant l'impacte és:

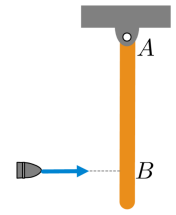


Figura de l'enunciat 5.3.6

a) El moment angular respecte del punt B.

b) L'energia mecànica.

c) La quantitat de moviment.

d) El moment angular respecte del punt A.

e) La component horitzontal de la quantitat de moviment.

Problema 5.3.6. Un cilindre de massa M està unit mitjançant una corda inextensible i sense pes, a un cos de massa m. La corriola la podeu considerar sense massa i que no frega a l'eix. L'angle del pla inclinat és $45°$. El cilindre roda sense lliscar per sobre el pla inclinat.
Dades: $M = 20\,\text{kg}$, $m = 5\,\text{kg}$, $R = 0{,}3\,\text{m}$

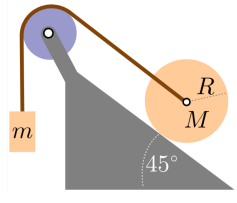


Figura de l'enunciat 5.3.6

Calculeu:

a) L'acceleració amb què es mou el sistema.

b) La tensió de la corda.

Solució: a) $a = 2{,}56\,\text{m/s}^2$; b) $T = 61{,}85\,\text{N}$

Problema 5.3.7. Una politja, d'eix fix sense fricció, homogènia, de massa M i moment d'inèrcia I respecte de l'eix, té dues cordes, de massa negligible i inextensibles, enrotllades sense lliscar: la primera, a un radi r_1 amb l'altre extrem fixat a un bloc de massa m_1, i la segona, a un radi r_2 amb l'altre extrem fixat a un bloc de massa m_2.

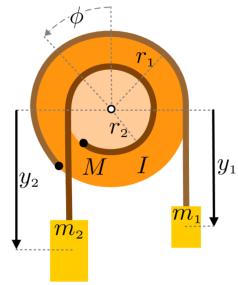


Figura de l'enunciat 5.3.7

a) Escriviu l'energia mecànica del sistema en funció de y_1, y_2, $\dot{y}_1$, $\dot{y}_2$,ϕ i $\dot{\phi}$.

b) Trobeu les relacions de lligam entre $\dot{y}_1$, $\dot{y}_2$ i $\dot{\phi}$.

c) Trobeu l'energia del sistema en funció de y_1, y_2, ϕ i $\dot{\phi}$ i l'equació de moviment per a ϕ.

Amb les dades numèriques: $r_1 = 40\,\text{cm}$, $r_2 = 30\,\text{cm}$, $m_1 = 15\,\text{kg}$, $m_2 = 40\,\text{kg}$ i $I = 4{,}6\,\text{kgm}^2$:

d) Trobeu l'acceleració angular de la politja i l'acceleració lineal dels blocs. Indiqueu, per a cada bloc, si la translació és ascendent o descendent.

e) Partint del repòs al mateix nivell, $y_{10} = y_{20}$, quina serà la distància entre els blocs passats $0{,}8\,\text{s}$.

Solució

a) L'energia mecànica del sistema en funció de y_1, y_2, ϕ i $\dot{\phi}$ és

$$E = \frac{1}{2}m_1\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{y}_2^2 + \frac{1}{2}I\dot{\phi}^2 - m_1gy_1 - m_2gy_2$$

b) Els lligams són $\dot{y}_1 = -r_1\dot{\phi}$ i $\dot{y}_2 = r_2\dot{\phi}$

c) L'energia mecànica del sistema en funció de y_1, y_2, ϕ i $\dot{\phi}$ és

$$E = \frac{1}{2}\left(m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + I\right)\dot{\phi}^2 - m_1gy_1 - m_2gy_2$$

Aplicant la conservació de l'energia, tenim

$$\dot{E} = 0 = \left(m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + I\right)\dot{\phi}\ddot{\phi} + m_1gr_1\dot{\phi} - m_2gr_2\dot{\phi}$$

d'on, aïllant $\ddot{\phi}$, trobem l'equació de moviment

$$\ddot{\phi} = \frac{m_2r_2 - m_1r_1}{m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + I}g$$

d) $\ddot{\phi} = 5{,}55283\,\text{rad/s}^2$; $\ddot{y}_1 = -r_1\ddot{\phi} = -2{,}22113\,\text{m/s}^2$; per tant, puja. $\ddot{y}_2 = r_2\ddot{\phi} = 1{,}66585\,\text{m/s}^2$; per tant, baixa.

e) Amb les dades inicials a $t = 0$, $y_1(0) = y_{10}$, $y_2(0) = y_{20}$ i $\dot{y}_1(0) = 0$, $\dot{y}_2(0) = 0$, i tenint en compte que les acceleracions són constants, tenim:

$$y_1 = y_{10} + \tfrac{1}{2}\ddot{y}_1 t^2$$
$$y_2 = y_{20} + \tfrac{1}{2}\ddot{y}_2 t^2$$

d'on obtenim

$$y_2 - y_1 = \frac{1}{2}\left(\ddot{y}_2 - \ddot{y}_1\right) t^2$$

substituint les acceleracions i $t = 0{,}8\,\text{s}$

$$|y_2 - y_1| = 1{,}24383\,\text{m}$$ ■

Problema 5.3.8. Calculeu la velocitat final del CM d'una esfera homogènia que es deixa caure rodant sense lliscar per un pla inclinat fins a un desnivell h. Feu el càlcul...

a) aplicant les equacions de moviment del sòlid rígid,

b) aplicant la conservació de l'energia.

Solució: $v_{CM} = \sqrt{\frac{10}{7}gh}$

Problema 5.3.9. Un disc homogeni de 20 cm de radi i 5 kg de massa pot girar sense fricció en un pla vertical al voltant del seu eix fix. Una corda de massa negligible està enrotllada al seu voltant i en penja una massa de 2 kg que deixem anar. La corda no llisca. Calculeu l'acceleració angular del disc i l'acceleració de caiguda de la massa de 2 kg.

Solució: $\alpha = 21{,}8\ \text{rad/s}^2$, $a = 4{,}36\ \text{m/s}^2$

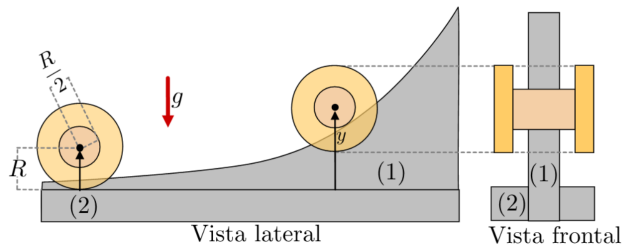


Figura de l'enunciat 5.3.10

Problema 5.3.10. Deixem anar rodolant (sense lliscar) amb una velocitat angular inicial ω_1 el carret de la figura, homogeni, de massa m i moment d'inèrcia $I_{(CM)} =$

$\frac{1}{3}mR^2$, per la guia (1) des d'una altura $y = 3R$. En tot moment rodola i no hi ha cap fricció dissipativa. Quina velocitat del $CM v_2$, i velocitat angular ω_2, tindrà el carret després d'entrar en contacte amb el pla horitzontal (2)?

Nota: Expresseu els resultats en funció ω_1, R i de la gravetat g.

Solució: $v_2 = \sqrt{3gR + \frac{7}{16}R^2\omega_1^2}$, $\omega_2 = \sqrt{\frac{3g}{R} + \frac{7}{16}\omega_1^2}$

Problema 5.3.11. Una pilota petita de massa $m = 100\,\text{g}$ rebota elàstica i horitzontalment a l'extrem inferior B d'una barra de massa $M = 6\,\text{kg}$ i longitud $L = 50\,\text{cm}$, articulada sense fricció a l'extrem superior A. La barra està inicialment en repòs. Si la velocitat de la pilota just abans del xoc és de $30\,\text{m/s}$ i surt en direcció horitzontal, determineu:

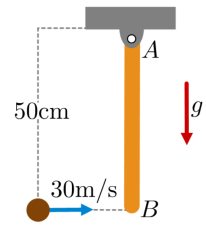


Figura de l'enunciat 5.3.11

a) el mòdul de la velocitat de la pilota i la velocitat angular de la barra just després de rebotar;

b) l'angle màxim, respecte de la vertical, a què arriba la barra (l'angle inicial és zero), i

c) el mòdul de la velocitat del centre de masses de la barra quan torna a passar per la posició inicial.

Solució: a) $27{,}143\,\text{m/s}$, $5{,}714\,\text{rad/s}$; b) $63{,}56°$; c)$1{,}43\,\text{m/s}$

Problema 5.3.12. Una roda de Maxwell és un giny com el que es veu a la figura. La corda té massa negligible; l'eix té un radi r; el moment d'inèrcia de la roda+eix és I i la seva massa, m. Si partint del repòs baixa una altura h, quant valen les velocitats finals de rotació i translació?

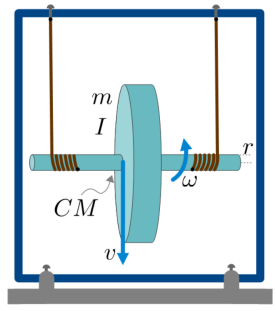


Figura de l'enunciat 5.3.12

Solució: $v = \sqrt{\frac{2mgh}{m+I/r^2}}$ i $\omega = \sqrt{\frac{2mgh}{mr^2+I}}$

Problema 5.3.13. Trobeu l'equació de moviment de la barra homogènia de massa m i longitud L quan oscil·la al voltant d'un eix que passa a una distància d del seu centre de masses.

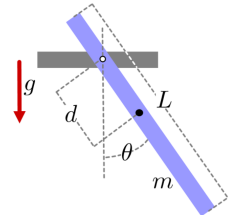


Figura de l'enunciat 5.3.13

Solució: $\ddot{\theta} + \frac{gd}{\frac{1}{12}L^2+d^2}\sin\theta = 0$

6 Problemes i qüestions

Qüestió 6.2.1. Una partícula de massa m es deixa anar des d'una altura h damunt d'un platet d'una balança on queda adherida (vegeu la figura). El platet té massa m i la balança equival a una molla de constant k. El període de les oscil·lacions posteriors serà

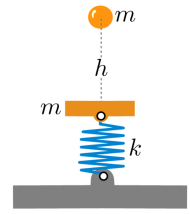


Figura de l'enunciat 6.2.1

a) $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

b) $T = \pi\sqrt{\frac{8m}{k}}$

c) $T = 2\pi\sqrt{\frac{mh}{kg}}$

d) $T = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g} + \frac{2m}{k}}$

e) $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k} + \frac{h}{g}}$

Qüestió 6.2.2. Els tres sistemes de la figura consten de molles de la mateixa constant elàstica, de massa negligible, unides a un mateix cos de massa m. No hi ha fregament en cap contacte. En tots els casos, el cos de massa m pot realitzar un moviment harmònic simple. Si designem T_1, T_2 i T_3 els períodes d'oscil·lació en cada cas, es complirà que:

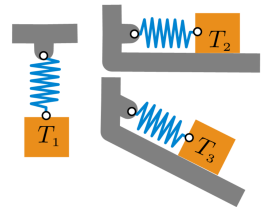


Figura de l'enunciat 6.2.2

a) $T_1 > T_2 = T_3$

b) $T_1 = T_2 < T_3$

c) $T_1 = T_2 = T_3$

d) $T_1 < T_2 = T_3$

e) Cal conèixer el valor de la constant elàstica per ordenar els períodes.

Qüestió 6.2.3. Una massa penjada d'una molla oscil·la tal com s'indica a la gràfica, que representa l'elongació en funció del temps. A l'instant t_1 la massa té:

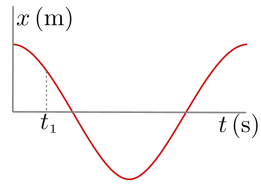


Figura de l'enunciat 6.2.3

a) velocitat $\dot{x}$ positiva i acceleració $\ddot{x}$, positiva.

b) velocitat$\dot{x}$ positiva i acceleració $\ddot{x}$, negativa.

c) velocitat $\dot{x}$ negativa i acceleració $\ddot{x}$, positiva.

d) velocita, $\dot{x}$ negativa i acceleració $\ddot{x}$, negativa.

e) velocita, $\dot{x}$ positiva i acceleració $\ddot{x}$, nul·la.

Qüestió 6.2.4. La massa $M = 10\,\text{kg}$ de la figura oscil·la sobre una plataforma horitzontal sense fricció unida a dues molles de constants $k_1 = 100\,\text{N/m}$ i $k_2 = 50\,\text{N/m}$. Quina de les següents afirmacions és certa:

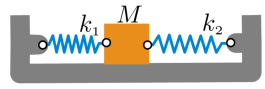


Figura de l'enunciat 6.2.4

a) El període d'oscil·lació és $2{,}81\,\text{s}$.

b) El període d'oscil·lació és $3{,}44\,\text{s}$.

c) El període d'oscil·lació és $1{,}86\,\text{s}$.

d) Si inclinem la plataforma girant-la 30° al voltant del punt A en sentit horari, el període d'oscil·lació serà el mateix que quan està en posició horitzontal.

e) Cap de les altres quatre respostes és correcta.

Qüestió 6.2.5. Un pèndol simple oscil·la de manera que:

a) Com més longitud, el període és més gran.

b) Com menys longitud, el període és més gran.

c) Com més longitud, el període és més petit.

d) El període no depèn de la massa, llevat que aquesta sigui petita, de manera que augmenta amb aquesta.

e) Totes les respostes anteriors són falses.

Problema 6.2.1. Una esfera homogènia de radi r i massa m rodola en un pla vertical per la superfície interior d'un semicilindre fix de radi $R > r$. Trobeu l'energia mecànica i el període de les petites oscil·lacions en funció de R, r i g.

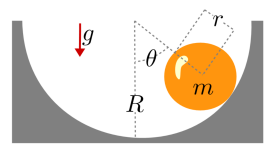


Figura de l'enunciat 6.2.1

Solució

Es tracta d'un sistema conservatiu d'un grau de llibertat:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 - mg\,(R-r)\cos\theta$$

amb $I = \frac{2}{5}mr^2$ i $v = \omega r = (R-r)\,\dot{\theta}$. Obtenim

$$E(\theta,\dot{\theta}) = \frac{7}{10}m\,(R-r)^2\,\dot{\theta}^2 - mg\,(R-r)\cos\theta$$

L'equació de moviment la podem extreure de

$$\dot{E} = 0 = \frac{7}{5}m\,(R-r)^2\,\dot{\theta}\ddot{\theta} + mg\,(R-r)\sin\theta\,\dot{\theta}$$

que, per a petites oscil·lacions, podem escriure

$$\ddot{\theta} + \frac{5g}{7\,(R-r)}\theta = 0$$

Comparant amb l'expressió canònica del MHS,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{5g}{7\,(R-r)}}$$

que correspon a un període

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{7\,(R-r)}{5g}}$$

■

Problema 6.2.2. Un cos presenta un moviment harmònic simple de $5{,}2$ cm d'amplitud. Se sap que, quan l'elongació és de $3{,}4$ cm, la velocitat és de $49{,}8$ cm/s. Es pregunta la fase del moviment. Hi ha prou informació? I per al càlcul del període? Trobeu tot el que pugueu a partir de la informació que teniu.

Solució: $T = 0{,}50$ s; $\theta = 0{,}7121$ rad ($x = A\sin\theta$)

Problema 6.2.3. Un cos de 2 kg de massa està en repòs sobre un pla horitzontal llis i està subjecte a dos ressorts horitzontals de constants recuperadores $k_1 = 100$ N/m i $k_2 = 200$ N/m. La llargada de cadascun dels dos ressorts no deformats és de 40 cm. S'estiren els extrems lliures dels ressorts i se subjecten a dues parets fixes separades 120 cm. Determineu la posició d'equilibri del cos. Quina és la freqüència d'oscil·lació entorn de la posició d'equilibri?

Solució: $66{,}7$ cm; $f = 1{,}95$ Hz

Problema 6.2.4. Una partícula que es mou amb moviment harmònic simple té una velocitat de $16\,\text{cm/s}$ i de $12\,\text{cm/s}$ quan passa a $3\,\text{cm}$ i $4\,\text{cm}$ del centre de vibració, respectivament. Calculeu-ne l'amplitud i el període.

Solució: $A = 5\,\text{cm}$; $T = 1{,}57\,\text{s}$

Problema 6.2.5. Un massa puntual realitza un moviment harmònic simple. Quan l'elongació és $+10\,\text{cm}$ movent-se cap al punt d'equilibri, la seva energia cinètica val $10^{-5}\,\text{J}$ i la seva energia potencial també val $10^{-5}\,\text{J}$. Si la massa és de $2\,\text{g}$, trobeu l'amplitud, el període i la fase del moviment.

Solució: $A = 14{,}1\,\text{cm}$, $T = 6{,}28\,\text{s}$, $\theta = 3\pi/4\,\text{rad}$ ($x = A\sin\theta$)

Problema 6.2.6. Una boia cilíndrica de $4\,\text{m}$ d'altura, $2\,\text{m}$ de radi i $40000\,\text{kg}$ de massa flota verticalment a l'aigua. Si fa petites oscil·lacions verticals, trobeu-ne el període d'oscil·lació.

Solució: $T = 3{,}58\,\text{s}$

Problema 6.2.7. Dos cilindres idèntics de massa M i secció S estan disposats com indica la figura i estan submergits parcialment en aigua. Negligint la massa de la politja, les friccions i la inèrcia de l'aigua, determineu el període d'oscil·lació del sistema de pesos quan són separats lleugerament de la seva posició d'equilibri.

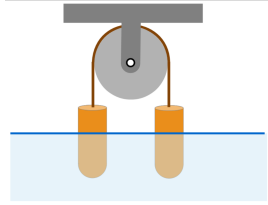


Figura de l'enunciat 6.2.7

Solució: $T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{Sg\rho}}$

Problema 6.2.8. En un tub en U de secció constant, col·locat de manera que ambdues branques estan verticals, s'introdueix un líquid que ocupa una longitud L d'aquest tub. Inicialment, es desequilibra i, en conseqüència, comença a oscil·lar al voltant de la seva posició d'equilibri. Suposant que el líquid sigui incompressible i que no hi hagi friccions, demostreu que el líquid oscil·larà amb moviment harmònic i trobeu-ne el període corresponent.

Solució: $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{2g}}$

Problema 6.2.9. Un cos de $100\,\text{g}$ penja d'un llarg ressort. Si l'estirem fent-lo baixar $10\,\text{cm}$ per sota de la seva posició d'equilibri i el deixem anar, vibra amb un període de $2\,\text{s}$.

a) Amb quina velocitat passa per la seva posició d'equilibri?

b) Quina acceleració té quan està $5\,\text{cm}$ per sobre d'aquesta posició?

c) En el moviment ascendent, quant de temps necessita per desplaçar-se des d'un punt situat 5 cm per sota de la seva posició d'equilibri a un altre punt situat 5 cm per sobre?

d) Quant s'escurçarà el ressort en treure el cos?

Solució: a) sentit ↑ i mòdul $v = 31{,}4\,\text{cm/s}$; b) sentit ↓ i mòdul $a = 49{,}3\,\text{cm/s}^2$; c) $t = 0{,}33\,\text{s}$; d) $\Delta\ell = 99{,}3\,\text{cm}$

Problema 6.2.10. Un cos de 12 kg de massa penja d'un ressort. Se sap que, si l'estirem fins que la llargària augmenta 10 cm i el deixem anar, s'inicia un moviment d'oscil·lació d'1,45 s de període. Es demana:

a) En realitzar oscil·lacions, quant de temps triga, movent-se cap baix, a desplaçar-se des d'un punt situat 3 cm per sobre de la seva posició d'equilibri fins a un altre que està 6 cm per sota d'aquesta posició?

b) Quina és la velocitat del cos en passar per aquesta última posició?

c) Quant s'escurçarà el ressort si, estant en repòs, traiem el cos de 12 kg?

Solució: a) $t = 0{,}22\,\text{s}$; b) $v = -0{,}347\,\text{m/s}$; c) $\Delta\ell = 0{,}52\,\text{m}$

Problema 6.2.11. Dos ressorts, de constants recuperadores $k_1 = 1200\,\text{N/m}$ i $k_2 = 600\,\text{N/m}$, s'uneixen en sèrie. L'extrem lliure de k_1 penja d'un punt i de l'extrem lliure de k_2 es penja un cos de $m = 10\,\text{kg}$. Trobeu:

a) El període de les oscil·lacions lliures que pot realitzar el cos.

b) Calculeu-lo també suposant que els ressorts estan connectats en paral·lel.

Solució: a) $T = 0{,}99\,\text{s}$; b) $T = 0{,}47\,\text{s}$

Problema 6.2.12. Per la gola d'una politja, la massa de la qual es pot considerar concentrada a la seva perifèria, hi passa un fil inextensible i de massa negligible. D'un dels seus extrems penja una massa M i l'altre està lligat a una molla vertical, l'altre extrem de la qual està fixat al terra (vegeu la figura). Si la massa de la politja és $m = 800\,\text{g}$, la del cos que penja és $M = 200\,\text{g}$ i la molla, de massa negligible, té una constant $k = 16\,\text{N/m}$, calculeu el període de les petites oscil·lacions del sistema.

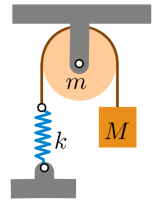


Figura de l'enunciat 6.2.12

Solució: 1,57 s

Problema 6.2.13. En penjar una massa M d'una molla (que suposem sense massa i no deformada al principi), s'allarga 2,5 m. Així estant li donem un cop cap a dalt,

de manera que surt amb una velocitat $v = 2\,\mathrm{m/s}$. Trobeu la trajectòria de la massa M.

Solució: $y = 1{,}01\,\mathrm{sin}(1{,}98t)$ (S.I.)

Problema 6.2.14. Un cos d'1 kg unit a l'extrem d'una molla comença el seu moviment quan és a la posició $x = 1\,\mathrm{m}$, amb una velocitat inicial $v = 2\,\mathrm{m/s}$. Si el període (T) del moviment es de π s, calculeu l'elongació màxima de la molla (A) i trobeu la trajectòria. Calculeu la velocitat i l'acceleració màximes i per a quines posicions es produeixen.

Solució: (S.I.) $A = \sqrt{2}$; $x = \sqrt{2}\,\mathrm{sin}(2t + \pi/4)$; $v_{\text{max}} = \pm 2\sqrt{2}$ $(x = 0)$; $a_{\text{max}} = \pm 4\sqrt{2}$,$(x = \pm\sqrt{2})$

Problema 6.2.15. Un model senzill que s'utilitza actualment per descriure les proteïnes presents al nostre cos consta senzillament de boles que constituirien els aminoàcids (d'uns 10^{-24} kg de massa) unides per molles de constant elàstica $k = 5 \times 10^{-20}\,\mathrm{N/m}$. Calculeu la freqüència de vibració dels aminoàcids si suposem que el model és vàlid.

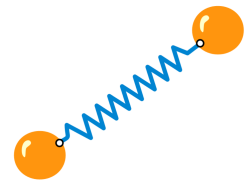


Figura de l'enunciat 6.2.15

Solució: $f = 71\,\mathrm{Hz}$

Problema 6.2.16. Construïm un pèndol a partir de dues varetes uniformes idèntiques a i b, cada una de longitud L i massa m, unides en angle recte en forma de **T**, unint el centre de la vareta a amb l'extrem de b. Pengem el pèndol per l'extrem lliure de la vareta b, fent-lo oscil·lar en un pla vertical.

a) Calculeu el moment d'inèrcia respecte l'eix de rotació.

b) Trobeu les expressions de l'energia cinètica i potencial en funció de l'angle de l'eix del pèndol respecte de la vertical.

c) Deduïu-ne l'equació de moviment.

d) Trobeu el període de les petites oscil·lacions.

Solució: a) $I = \frac{17}{12}mL^2$; b) $E_c = \frac{17}{24}mL^2\dot{\theta}^2$; $U = \frac{3mgL}{2}(1 - \cos\theta)$; c) $\ddot{\theta} + \frac{18}{17}\frac{g}{L}\sin\theta = 0$; d) $T = 2\pi\sqrt{\frac{17L}{18g}}$

Problema 6.2.17. El moviment d'un oscil·lador harmònic simple ve descrit per l'equació $x\,(t) = 4\,\mathrm{sin}\,(0{,}2t + 0{,}3)$, amb x en m i t en s.

a) Calculeu l'amplitud, el període, la freqüència i la fase inicial del moviment.

b) Determineu la velocitat i l'acceleració en funció del temps, així com les

condicions inicials.

c) Quin és el desfasament entre l'elongació i la velocitat? I entre l'elongació i l'acceleració?

d) Calculeu la posició, la velocitat i l'acceleració a $t = 5\,\text{s}$.

Solució: a) $A = 4$ m; $\varphi_0 = 0{,}3$ rad; $f_0 = 0{,}032\ \text{s}^{-1}$; b) $v\,(t) = 0{,}8\cos\,(0{,}2t + 0{,}3)$; $a\,(t) = -0{,}16\sin\,(0{,}2t + 0{,}3)$ (unitats S.I.); $x\,(0) = 1{,}18$ m; $v\,(0) = 0{,}76\ ^{\text{m}}/_{\text{s}}$; c) $^{\pi}/_{2}$; π; d) $x\,(5) = 3{,}85$ m ;$v\,(5) = 0{,}21\ ^{\text{m}}/_{\text{s}}$; $a\,(5) = -0{,}154\ ^{\text{m}}/_{\text{s}^2}$

Problema 6.2.18. Una partícula d'1 kg realitza un moviment harmònic simple d'amplitud $0{,}5$ m. A l'instant $t = 0$ passa per la posició d'equilibri amb una velocitat de $\dot{x}(0) = +2\,\text{m/s}$.

a) Calculeu-ne la freqüència i el període.

b) Determineu-ne l'elongació i la velocitat en funció del temps.

c) Calculeu-ne la força i les energies cinètica i potencial quan la partícula està a $0{,}2$ m de la seva posició d'equilibri.

Solució: a)$f_0 = 0.637\,\text{Hz}$; $T_0 = 1{,}57\,\text{s}$; b) $x = 0{,}5\sin\,(4t)$; $v = 2\cos\,(4t)$; c) $F = 3{,}2$ N; $E_c = 1{,}68$ J; $U = 0{,}32$ J

Problema 6.2.19. Al mecanisme de la figura, la constant recuperadora de la molla val $k = 100\,\text{N/m}$; la massa de la politja, cilíndrica i homogènia, és $M = 4\,\text{kg}$, i el radi $R = 30\,\text{cm}$. La massa del bloc és $m = 1\,\text{kg}$. La corda no rellisca en cap moment i no hi ha fricció a l'eix. Trobeu l'equació de moviment i el període.

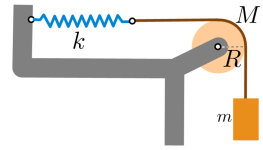


Figura de l'enunciat 6.2.19

Solució: $\ddot{x} + 33{,}33\ x = 0$ (unitats S.I.); $1{,}088$ s

Problema 6.2.20. La politja, les molles (de constants $3k$ i k) i la corda, inextensible, tenen massa negligible. La barra, de massa m , es desplaça poc verticalment respecte de la posició d'equilibri horitzontal. El període de les oscil·lacions val:

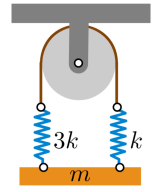


Figura de l'enunciat 6.2.20

Solució: $2\pi\sqrt{\frac{m}{3k}}$

Qüestió 6.3.1. L'amplitud de la vibració d'un oscil·lador amortit disminueix de 75 mm a 70 mm en un cicle. La massa oscil·lant és d'$1{,}2$ kg i el temps que triga a anar del centre a l'extrem de l'oscil·lació és $0{,}5$ s. La constant d'amortiment de la força de fregament viscós és:

a) $82{,}8 \times 10^{-3}\,\text{Ns/m}$

b) $165{,}6 \times 10^{-3}\,\mathrm{Ns/m}$

c) $34{,}5 \times 10^{-3}\,\mathrm{Ns/m}$

d) $331{,}2 \times 10^{-3}\,\mathrm{Ns/m}$

e) $69{,}0 \times 10^{-3}\,\mathrm{Ns/m}$

Qüestió 6.3.2. La massa M de 100 g pot oscil·lar horitzontalment respecte a la seva posició d'equilibri, sense fricció amb el terra, sota l'acció de quatre molles de constants recuperadores $k_1 = 10\,\mathrm{N/m}$, $k_2 = 20\,\mathrm{N/m}$, $k_3 = 10\,\mathrm{N/m}$ i $k_4 = 15\,\mathrm{N/m}$, i dos dispositius d'amortiment de constants $b_1 = 1/2\,\mathrm{Ns/m}$ i $b_2 = 1\,\mathrm{Ns/m}$. Podem afirmar que:

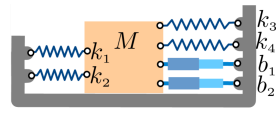


Figura de l'enunciat 6.3.2

a) En el S.I., l'equació de moviment és $\ddot{x} + 15\dot{x} + \frac{380}{3}x = 0$

b) En el S.I., l'equació de moviment és $\ddot{x} + \frac{10}{3}\dot{x} + 550x = 0$

c) En el S.I., l'equació de moviment és $\ddot{x} + \frac{10}{3}\dot{x} + \frac{600}{19}x = 0$

d) La constant d'amortiment equivalent valdrà $1/3\,\mathrm{Ns/m}$.

e) El període de les oscil·lacions serà de $0{,}283\,\mathrm{s}$.

Qüestió 6.3.3. Un sistema que pot oscil·lar presenta amortiment crític. En aquest cas:

a) La pulsació és petita.

b) Totes les oscil·lacions tenen la mateixa durada.

c) El moviment és aperiòdic.

d) L'elongació és funció exponencial positiva del temps.

e) Cap de les respostes anteriors no és vàlida.

Problema 6.3.2. Un oscil·lador amortit té una massa de 50 g i un període d'oscil·lació de 2 s. La seva amplitud disminueix un 5% cada cicle. Suposada l'equació de moviment en la forma $m\,\ddot{x} + b\,\dot{x} + k\,x = 0$, trobeu b i k.

Solució: $b = 2{,}56\,\mathrm{g/s}$, $k = 0{,}49\,\mathrm{N/m}$

Problema 6.3.3. Una partícula de $0{,}5$ g executa un moviment oscil·latori, essent l'amortiment proporcional a la velocitat. La freqüència de vibració és de $0{,}5$ Hz i l'amplitud es redueix a la meitat després de 10 s. Calculeu:

a) El factor d'amortiment.

b) Si el moviment fos provocat per una molla, la constant recuperadora k d'aquesta.

c) La freqüència que tindria si no existís l'amortiment.

Solució: a) $\gamma = 0{,}069$ s^{-1}; b) $k = 4{,}94{\cdot}10 - 3$ N/m; c) $f = 0{,}5$ Hz

Problema 6.3.4. D'una molla suspesa verticalment, se'n penja una massa m, amb la qual l'allargament és de $9{,}8$ cm. S'estira la massa cap avall i es deixa anar, amb la qual cosa es produeixen oscil·lacions. Es pregunta el valor que ha de prendre el coeficient b d'amortiment perquè:

a) Les oscil·lacions acabin després de 100 s (considereu que han acabat quan l'amplitud s'ha reduït a la mil·lèsima part del valor inicial).

b) El període de les oscil·lacions sigui el doble del període natural.

c) La massa retorni aperiòdicament a la posició d'equilibri.

Solució: En el S.I., a) b = $0{,}138$ m; b) $b = 17{,}3$ m; c) $b \geq 20$ m;

Problema 6.3.5. Un sòlid penja d'un ressort capaç d'oscil·lar verticalment. A manca d'amortiment el període val 2 s i, quan es connecta l'amortiment, té un període de $2{,}7$ s.

a) Determineu l'equació de l'elongació suposant que a l'instant inicial aquesta val 10 cm i la velocitat és nul·la.

b) Es demana el factor a pel qual s'ha de multiplicar la constant d'amortiment perquè s'assoleixi el valor crític.

Solució: a) $x(t) = 13{,}5\ \ \mathrm{e}^{-2{,}11t}\sin(2{,}33t + 0{,}83)$; b) $a = 1{,}49$

Problema 6.3.6. Un pèndol simple, de 10 g de massa, té un període de 2 s i una amplitud de 2°. A causa de la fricció amb l'aire, actua sobre el pèndol una força resistent, $-bv$, proporcional a la velocitat. Calculeu la constant d'amortiment b sabent que l'amplitud es redueix a $1{,}3^\circ$ després de deu oscil·lacions completes.

Solució: $b = 4{,}31 \times 10^{-4}$ Nsm^{-1}

Problema 6.3.7. Un pèndol està format per un fil d'1 m de longitud i massa negligible, del qual penja una esfera massissa d'1 cm de radi i 8 g de massa. El pèndol es mou submergit en un líquid d'1 g/cm^3 de densitat. L'esfera està sotmesa al seu pes, a l'empenyiment d'Arquimedes, a la tensió del fil i a una força de fricció viscosa $-bv$, en què $b = 1{,}6104\,\mathrm{Ns/m}$. Trobeu:

a) El període de les petites oscil·lacions suposant que $b = 0$.

b) El període de les petites oscil·lacions amb el valor de b de l'enunciat.

c) El temps que ha de transcórrer perquè l'amplitud del moviment passi de $\pi/36$ rad a $\pi/72$ rad.

d) El valor de b perquè l'amortiment sigui crític.

Solució: a) $T_0 = 2{,}91\,\mathrm{s}$; b) $T = 2{,}91\,\mathrm{s}$; c) $\Delta t = 69{,}31\,\mathrm{s}$; d) $b = 0{,}034\,\mathrm{Nsm^{-1}}$

Problema 6.3.8. Una massa està sotmesa a una força elàstica $\vec{F} = -k\vec{x}$ i a una força viscosa $\vec{F}_v = -b\vec{v}$ amb $b = 5\,\mathrm{Nsm^{-1}}$. L'elongació ve donada per $x\,(t) = 0{,}8\,\mathrm{e}^{-2{,}5t}\,\mathrm{sin}\,(\pi t - 0{,}3)$ amb x en m i t en s.

a) Calculeu-ne la massa i la constant recuperadora elàstica.

b) Calculeu-ne la posició i la velocitat quan $t = 1{,}2\,\mathrm{s}$.

c) Determineu-ne els instants als quals la massa passa per la seva posició d'equilibri amb velocitat positiva i negativa.

d) Determineu els instants als quals la massa es troba en els extrems amb x positiva i negativa.

Solució: a) $m = 1\,\mathrm{kg}$; $k = 16{,}1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$; b) $x\,(1{,}2\,\mathrm{s}) = 1{,}28\,\mathrm{cm}$; $v\,(1{,}2\,\mathrm{s}) = -0{,}0862\,\mathrm{ms^{-1}}$; c) $t = \frac{0{,}3}{\pi} \pm 2N$; $\quad t = \frac{0{,}3}{\pi} \pm (2N+1)$; d) $t = \frac{0{,}3}{\pi} + \frac{1}{2} \pm 2N$; $t = \frac{0{,}3}{\pi} - \frac{1}{2} \pm 2N$

Problema 6.3.9. Una partícula de 2 kg està sotmesa a una força elàstica de constant $k = 10\,\mathrm{Nm^{-1}}$. Si introduïm el sistema oscil·lant en un medi viscós, el període augmenta en un 10%.

a) Determineu les expressions de l'elongació, la velocitat i l'acceleració en funció del temps, agafant l'origen de temps quan $x > 0$ i $v = 0$ i sabent que l'elongació en aquest instant és de 5 m.

b) Calculeu el valor de l'amplitud després d'un cicle i la seva relació amb l'amplitud inicial.

c) Quant hauria de ser el valor de la constant d'esmorteïment perquè no oscil·lés?

Solució: a)

$$x\,(t) = 5{,}5\,\mathrm{e}^{-0{,}935t}\,\mathrm{sin}\,(2{,}03t + 1{,}14)$$
$$v\,(t) = \tfrac{dx}{dt} = 11{,}2\,\mathrm{e}^{-0{,}935t}\,\mathrm{cos}\,(2{,}03t + 1{,}14) - 5{,}14\,\mathrm{e}^{-0{,}935t}\,\mathrm{sin}\,(2{,}03t + 1{,}14)$$
$$a\,(t) = \tfrac{dv}{dt} = -17{,}9\,\mathrm{e}^{-0{,}935t}\,\mathrm{sin}\,(2{,}03t + 1{,}14) - 20{,}9\,\mathrm{e}^{-0{,}935t}\,\mathrm{cos}\,(2{,}03t + 1{,}14)$$

b) $A\,(T) = 0{,}304\,\mathrm{m};\ 0{,}055$; c) $b \geq 4\sqrt{5}\,\mathrm{kgs}^{-1}$

Qüestió 6.4.1. L'equació de moviment d'un oscil·lador forçat és $\ddot{x} = -\frac{7}{4}\dot{x} - 9x + \mathrm{sin}\,4t$. És cert que, en règim estacionari:

a) El sistema està en ressonància de velocitat.

b) L'amplitud de l'elongació decreix exponencialment.

c) L'elongació és $x = A\,\mathrm{sin}(4t - \frac{3\pi}{4})$.

d) La velocitat és $\dot{x} = v_0\,\mathrm{sin}(4t + \frac{\pi}{2})$.

e) L'elongació és $x = A\,\mathrm{cos}(3t + \frac{\pi}{4})$.

Qüestió 6.4.2. Al cap de cinc oscil·lacions, l'amplitud d'un oscil·lador és un factor e^{-1} més petita. Si ω_0 és la seva pulsació natural, la pulsació de ressonància d'amplitud serà

a) $\Omega_{RA} = 0{,}5\omega_0$

b) $\Omega_{RA} = 0{,}997\omega_0$

c) $\Omega_{RA} = 1{,}125\omega_0$

d) $\Omega_{RA} = 0{,}2\omega_0$

e) $\Omega_{RA} = \frac{1}{3}\omega_0$

Qüestió 6.4.3. Per un oscil·lador forçat, amb una força d'amortiment proporcional a la velocitat, de constant b, un cop assolit el règim estacionari, és cert que:

a) En ressonància d'elongació, la impedància mecànica és b.

b) En ressonància de velocitat, la potència mitjana dissipada per la força de fricció en un cicle és mínima.

c) En ressonància d'elongació, la diferència de fase entre la força harmònica aplicada i l'elongació és nul·la.

d) En ressonància de velocitat, la diferència de fase entre la força harmònica aplicada i l'elongació és $\frac{\pi}{2}$ rad.

e) La freqüència de ressonància de velocitat és més petita que la de ressonància d'elongació.

Qüestió 6.4.4. Una partícula de massa $0{,}2\,\text{kg}$ rep una força elàstica de constant k i una amortidora proporcional a la velocitat de constant $4\,\text{Ns/m}$. S'aplica a la partícula una força $F = F_0 \cos \omega_1 t$ i, un cop assolit el règim estacionari, la partícula oscil·la amb elongació $x = 0{,}6\cos(\omega_1 t - \frac{\pi}{2})$ (tot en unitats S.I.) . Podem afirmar que:

a) Si augmentem la freqüència de la força F, l'amplitud de l'elongació x de la partícula augmentarà.

b) La impedància mecànica val $4\,\text{Ns/m}$.

c) Falten dades per calcular la impedància mecànica.

d) Si augmentem la freqüència de la força F, l'amplitud de la velocitat de la partícula augmentarà.

e) La velocitat màxima de la partícula ha de ser $0{,}6\,\text{m/s}$.

Qüestió 6.4.5. Una partícula de $2\,\text{kg}$ de massa realitza oscil·lacions forçades en un medi viscós sota l'acció d'una força externa harmònica $F = 5\cos(3t)$ (totes les unitats en el S.I.). En règim estacionari, podem afirmar el següent:

a) L'elongació podria ser $x = A\cos(3t + \frac{\pi}{4})$.

b) L'acceleració de la partícula podria ser $a = 2{,}5\cos(3t)$.

c) La velocitat podria ser $v = v0\cos(2t)$.

d) Si l'acceleració fos $a = -0{,}2\cos(3t - \frac{\pi}{2})$, la partícula estaria en ressonància de velocitat.

e) Si la velocitat fos $v = 0{,}5\sin(3t)$, la partícula estaria en ressonància de velocitat.

Qüestió 6.4.6. Si, a un oscil·lador harmònic amortit s'aplica una força $F(t)$ harmònica i l'amplitud de les oscil·lacions que fa és màxima, la freqüència de la força és:

a) Una mica més gran que la pròpia de vibració del sistema a manca d'amortiment.

b) Més gran que la freqüència de vibració del sistema a manca de $F(t)$, estant amortit.

c) Més petita que la freqüència de vibració del sistema a manca de $F(t)$, estant amortit.

d) Igual a la freqüència amb què oscil·laria el sistema quan és amortit i sense força aplicada.

e) Igual a la de vibració lliure del sistema.

Qüestió 6.4.7. Quina de les següents respostes és certa:

a) En un sistema massa-molla-amortidor excitat amb una força harmònica, les pulsacions de ressonància d'amplitud i de velocitat coincideixen si la força viscosa és negligible.

b) La impedància mecànica d'un sistema massa-molla-amortidor és igual al coeficient de proporcionalitat entre la força viscosa i la velocitat.

c) La potència mitjana dissipada per les oscil·lacions harmòniques forçades és màxima quan hi ha ressonància d'amplitud.

d) El període de les oscil·lacions harmòniques amortides depèn de l'amplitud.

e) Cap de les altres quatre afirmacions és certa.

Qüestió 6.4.8. En el moviment amortit, essent x l'elongació i $F_f = -b\dot{x}$ la força de fricció, quina de les respostes següents és certa:

a) Si és oscil·latori, el període és més petit que el que tindria el sistema sense amortiment.

b) Si el factor d'amortiment γ fos igual a la pulsació que tindria el sistema sense amortiment, el moviment no seria oscil·latori.

c) Si és oscil·latori, com més petit sigui el factor d'amortiment γ, més ràpidament disminueix l'amplitud.

d) Cap de les altres quatre afirmacions és certa.

e) Si el sistema fos subamortit i, a més, hi apliquéssim una força harmònica externa de forma que estigués en ressonància d'elongació, en aquestes condicions també oscil·laria amb la mateixa pulsació que la del moviment subamortit.

Qüestió 6.4.9. Una massa d'1 kg unida a un amortidor i a una molla de constants respectives 2 Ns/m i 5 N/m entra en ressonància per l'efecte d'un agent extern que li aplica una força $F_0 \sin(\Omega t)$. Podem afirmar que:

a) Si $\Omega = 2$ rad/s, el sistema està en ressonància d'amplitud.

b) Si $\Omega < 1 rad/s$, el sistema no oscil·la.

c) La impedància mecànica del sistema és 2 Ns/m si la ressonància és d'amplitud.

d) L'elongació està desfasada $\frac{\pi}{3}$ rad respecte a la força aplicada per l'agent extern si la ressonància és d'amplitud.

e) L'elongació està en fase amb la força aplicada per l'agent extern si la ressonància és d'amplitud.

Problema 6.4.1. Una massa d'1 kg està subjecta a una estructura mitjançant una molla elàstica. Se la sotmet a una força $F = F_0 \sin(\Omega t)$, amb $F_0 = 2{,}5$ N i Ω variable. S'observa la relació de la taula entre Ω i el d'amplitud A_P de la massa. Feu una estimació de la constant recuperadora k de la molla i la constant b d'amortiment.

Taula del problema 6.4.1

Ω (s^{-1})	14	20	26	32	36	40
A_p(cm)	0,31	0,42	0,78	1,10	0,85	0,41

Solució: $k = 1089\,\mathrm{Nm^{-1}}$; $b = 6{,}9\,\mathrm{Nsm^{-1}}$

Problema 6.4.2. Una massa de 3 g està sotmesa a una força restauradora d'1 N/m i a una d'amortidora de 0,1 Ns/m. Si se li aplica una força $F = 0{,}1\ \cos(10\pi t)$ (unitats S.I.), calculeu l'amplitud i la diferència de fase entre la força i la velocitat. Calculeu la impedància mecànica i trobeu la freqüència de ressonància de velocitat.

Solució: $A_P = 2{,}70$ cm; $\theta = 32{,}0°$; $Z = 0{,}12\,\mathrm{Nsm^{-1}}$; $f_{RV} = 2{,}91$ Hz

Problema 6.4.3. Una partícula de 10 g està sotmesa a l'acció d'una força recuperadora de 0,05 N/m i una força amortidora de 0,03 Ns/m. Si sobre aquesta partícula actua una força periòdica de 50 rad/s de pulsació i de 0,001 N d'amplitud, trobeu, en el règim estacionari:

a) La impedància mecànica.

b) La velocitat màxima.

c) La freqüència de ressonància de velocitat.

d) L'amplitud de velocitat en aquest cas.

Solució: a) $Z = 0{,}5\,\text{Nsm}^{-1}$; b) $v_{\text{max}} = 0{,}20\,\text{cms}^{-1}$; c) $f_{RV} = 0{,}36\,\text{Hz}$; d) $v_{\text{max}} = 3{,}33\,\text{cms}^{-1}$

Problema 6.4.4. De l'extrem d'una molla penja un cos de massa $5\,\text{kg}$. Se separa de la seva posició d'equilibri i s'observa que fa un MHS vertical que triga $0{,}4\,\text{s}$ a anar d'un extrem a l'altre de l'oscil·lació. L'energia mecànica de la partícula és de $100\,\text{J}$.

a) Calculeu el temps que triga el cos a anar de la posició $0{,}5\,\text{m}$ per sobre del centre d'oscil·lació fins a $0{,}2\,\text{m}$ per sota del centre, en el moviment descendent.

Si fem oscil·lar el sistema anterior en un medi viscós, la freqüència passa a ser el 90% de la que tenia en el MHS.

b) Calculeu el factor de reducció de l'amplitud en un interval de $0{,}5\,\text{s}$.

Apliquem al sistema una força harmònica de la mateixa freqüència que la de l'oscil·lació amortida. S'observa que, en estat estacionari, el sistema assoleix una velocitat màxima d'$1{,}5\,\text{ms}^{-1}$.

c) Què val l'amplitud de la força aplicada?

Solució: a) $t = 0{,}117\,\text{s}$; b) $\frac{A}{A_0} = 0{,}181$; c) $F_0 = 52{,}8\,\text{N}$

Problema 6.4.5. Una massa de $3\,\text{kg}$ experimenta un moviment harmònic simple en la direcció de l'eix x d'amplitud $10\,\text{cm}$ i període $3\,\text{s}$. Per $t = 2{,}5\,\text{s}$, la massa passa per la posició d'equilibri, $x = 0$, amb velocitat positiva.

a) Determineu l'elongació i la velocitat a $t = 0$.

En un instant en què la massa passa per la posició d'equilibri, desplaçant-se en el sentit positiu de l'eix x, es posa en marxa un dispositiu amortidor que proporciona una força de fricció viscosa proporcional a la velocitat, de coeficient $10\,\text{Ns/m}$.

b) Prenent com a nou origen de temps ($t = 0$) el moment en què es posa en marxa l'amortidor, escriviu l'expressió de la trajectòria i determineu tots els paràmetres que hi intervenen.

c) Calculeu l'energia cinètica del sistema en finalitzar el primer cicle d'oscil·lació.

Finalment, s'aplica sobre la massa una força periòdica $F = 5\cos(\Omega t)$ (unitats S.I.) també en la direcció de l'eix x.

d) Quina seria l'amplitud de les oscil·lacions forçades si el sistema estigués en ressonància de velocitat?

Solució: a) $x_0 = 0{,}087\,\text{m}$, $v_0 = 0{,}105\,\text{m/s}$

b) $x = 0{,}165\ \ \mathrm{e}^{-1{,}67t}\cos\left(1{,}27t + 3\pi/2\right)$; c) $E_c = 4{,}4 \times 10^{-9}$ J; d) $A = 0{,}239$ m

Problema 6.4.6. El cos de massa $m = 3$ kg situat sobre un pla horitzontal sense fricció està unit a dues molles de constants $k_1 = 7$ N/m i k_2, i a un amortidor de constant $b = 10$ Ns/m. S'aplica al cos una força harmònica $F = 4\sin(2t)$, en unitats S.I.

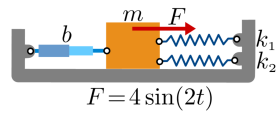


Figura de l'enunciat 6.4.6

a) Determineu el valor de k_2 per tal que en el moviment oscil·latori del cos la diferència de fases entre la força harmònica i l'elongació sigui $\frac{\pi}{2}$ rad.

Eliminem la molla de constant k_2.

b) Escriviu l'equació de l'elongació en funció del temps i determineu tots els paràmetres que hi intervenen.

c) Quina és la velocitat màxima que assoleix el cos en la seva oscil·lació?

Quan el cos es troba a l'extrem dret de l'oscil·lació n'eliminem la força harmònica.

d) Quin tipus de moviment amortit realitzarà el cos?

e) Determineu la equació que dóna la posició del cos en funció del temps i calculeu tots els paràmetres que hi intervenen.

Solució: a) $k_2 = 5$ N/m; b) $x = 0{,}194\ \ \sin\left(2t - 1{,}82\right)$; c) $v_{\max} = 0{,}388\ \mathrm{ms}^{-1}$; d) el sistema està sobreamortit; e) $x = 0{,}340\ \ \mathrm{e}^{-t} - 0{,}146\ \ \mathrm{e}^{-2{,}33t}$

Problema 6.4.7. Un tub en forma de **U**, amb una secció d'1,8 cm de diàmetre, conté 120 g d'etanol ($\rho = 787{,}4\ \mathrm{kg/m^3}$). En una de les rames, es provoca un petit desplaçament del líquid.

a) Si no hi hagués fricció del líquid amb les parets del tub, trobeu la pulsació natural de les seves oscil·lacions.

De fet, quan s'observen aquestes oscil·lacions, es comprova que la seva amplitud disminueix un 3,5% en cada període.

b) Quin és el període de les oscil·lacions amortides?

c) Amb quina freqüència s'hauria de bufar el líquid del tub per tal que el moviment oscil·lant tingués la màxima amplitud?

Solució: a) $5{,}72\ \mathrm{rads}^{-1}$; b) 1,1 s; c) 0,91 Hz

Problema 6.4.8. Un disc D de massa m_D, al qual s'ha afegit una massa m_1, està subjectat a una molla (de constant recuperadora k i massa equivalent m_u) i, a través

d'una corda i una politja P_2 (de massa negligible), a una segona massa m_2. El disc provoca una fricció aerodinàmica de coeficient b. El sistema pot ser forçat a oscil·lar mitjançant un motor que belluga harmònicament la molla amb una pulsació Ω.

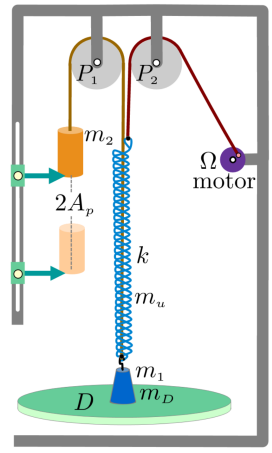


Figura de l'enunciat 6.4.8

Amb el motor aturat, desplacem verticalment la massa m_2 i deixem anar:

a) Escriviu l'equació de moviment utilitzant la coordenada y.

Posem en marxa el motor de manera que $y_m = y_{mo} + R\sin(\Omega t + \theta_0)$.

b) Trobeu la nova l'equació de moviment.

c) Escriviu l'equació de moviment de forma canònica (anomeneu x la nova coordenada) i identifiqueu-hi tots els paràmetres.

d) Representeu gràficament l'amplitud de les oscil·lacions forçades estacionàries en funció de la pulsació del motor.

Dades: $m = m_1 + m_D + m_2 + m_u = 0{,}80\,\text{kg}$; $k = 9{,}7\,\text{N/m}$; $R = 4\,\text{cm}$; $b = 1{,}5\,\text{Ns/m}$

Solució: unitats S.I.

a) $m\ddot{y} + b\dot{y} + k(y - y_m - \ell_{eq}) = 0$, amb $y_{eq} - y_m - \ell_{eq} = 0$

b) $m\ddot{y} + b\dot{y} + k(y - y_{mo} - \ell_{eq}) - kR\sin(\Omega t + \theta_0) = 0$

c) $\ddot{x} + 2\underbrace{\left(\frac{b}{2m}\right)}_{\gamma}\dot{x} + \underbrace{\left(\frac{k}{m}\right)}_{\omega_0^2}x = \underbrace{\left(\frac{kR}{m}\right)}_{B}\sin(\Omega t + \theta_0)$

d) $A_p(\Omega) = \frac{0{,}48}{\sqrt{3{,}52\Omega^2 + (\Omega^2 - 12{,}13)^2}}$

Problema 6.4.9. Un cos de 2 kg de massa es mou en un pla horitzontal en la direcció de l'eix x, sota l'acció d'una força recuperadora de constant $18\,\text{N/m}$ i en presència d'una força de fricció viscosa de coeficient $16\,\text{Ns/m}$.

Mitjançant un motor, s'aplica una força harmònica $F = F_0\sin\Omega t$ sobre el cos, també en la direcció de l'eix x. En condicions estacionàries, l'expressió de la trajectòria del cos és $x = 0{,}01\sin(\Omega t - \pi/2)$ (x en m i t en s).

a) Calculeu la pulsació Ω, la impedància mecànica i l'amplitud de la força.

b) Expresseu la velocitat del cos en funció del temps i calculeu el desfasament entre aquesta i la força.

Es desconnecta el motor:

c) Quin tipus de moviment fa el cos? Raoneu i justifiqueu numèricament la resposta.

Solució: a) 3 rad/s; 16 kg/s; 0,48 N; b) $0{,}03 \sin 3t$; 0

Problema 6.4.10. Considereu el sistema de la figura. Quan està en equilibri, $\ell = \ell_{\text{eq}}$. La politja gira entorn d'un eix fix que passa per O respecte del qual el moment d'inèrcia val I. Presenta una fricció de tipus viscós que l'afecta amb un moment respecte de l'eix $M_{\beta(O)} = -\beta\,\dot{\phi}$, on $\dot{\phi}$ és la velocitat angular i β una constant.

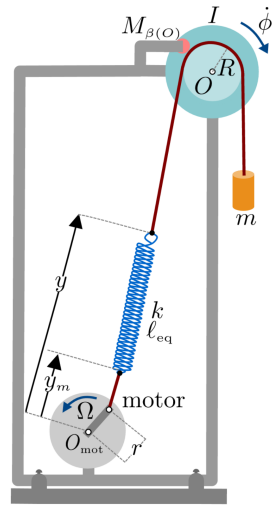


Figura de l'enunciat 6.4.10

Suposem que, en tot moment, la corda es manté tensa i no llisca. Amb el motor aturat, $L = \text{ct}$, desplacem verticalment la massa m i la deixem anar:

a) Escriviu l'equació de moviment utilitzant la coordenada y.

Posem en marxa el motor de manera que L deixa de ser constant i es pot expressar $L = \overline{CO}_{\text{mot}} + r\sin(\Omega t + \theta_0)$ pel fet que $\overline{CO}_{\text{mot}} \gg r$ (C és el punt de contacte corda-politja, que en aquesta aproximació es manté en repòs).

b) Trobeu la nova l'equació de moviment.

c) Escriviu l'equació de moviment de forma canònica (anomeneu x la nova coordenada) i identifiqueu-ne tots els paràmetres.

d) Representeu gràficament l'amplitud de les oscil·lacions forçades estacionàries en funció de la pulsació Ω del motor.

Dades:

$$R = 14\text{ mm};\ I = 6{,}0\times10^{-5}\text{ kg m}^2;\ r = 20\text{ mm}$$
$$m = 107\text{ g};\ k = 3{,}50\text{ N/m};\ \beta = 1{,}81\times10^{-4}\text{ N m s}$$

Solució (unitats S.I.):

a) $\left(\frac{I}{R^2}+m\right)\ddot{y} + \frac{\beta}{R^2}\dot{y} + k(y + \ell_{\text{eq}} - L) = 0$

b) $\left(\frac{I}{R^2}+m\right)\ddot{y} + \frac{\beta}{R^2}\dot{y} + k(y + \ell_{\text{eq}} - \overline{CO}_{\text{mot}}) - kr\sin(\Omega t + \theta_0) = 0$

c) $\ddot{x} + 2\underbrace{\left(\frac{\beta}{2R^2\left(\frac{I}{R^2}+m\right)}\right)}_{\gamma}\dot{x} + \underbrace{\left(\frac{k}{\frac{I}{R^2}+m}\right)}_{\omega_0^2}x = \underbrace{\left(\frac{kr}{\frac{I}{R^2}+m}\right)}_{B}\sin(\Omega t + \theta_0);$

$x = y + \ell_{\text{eq}} - \overline{CO}_{\text{mot}}$

d) $A_p(\Omega) = \frac{0{,}169}{\sqrt{5{,}00\Omega^2 + (\Omega^2 - 8{,}47)^2}}$

Problema 6.4.11. Una boia llastada per la seva part inferior, de massa total $m = 20$ kg, es manté en equilibri a $y = 0$, on y és una coordenada vertical, en un líquid

de densitat $\rho = 10^3 \text{kg/m}^3$. Per evitar oscil·lacions excessives, s'ha dissenyat de manera que presenti un esmorteïment $-80\ \dot{y}$ (unitats S.I.). La part cilíndrica de la boia, de radi $R = 0{,}25$ m, sempre toca el nivell de l'aigua. Determineu:

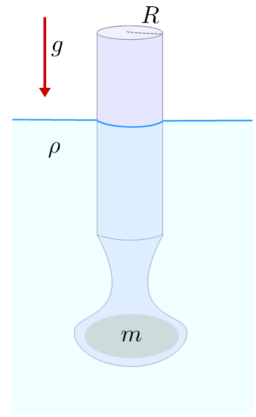


Figura de l'enunciat 6.4.11

a) l'equació diferencial de moviment per a la coordenada y;

b) el període de les oscil·lacions, i

c) la posició en funció del temps, $y(t)$, si li donem un cop quan està en equilibri de manera que la velocitat inicial és $\dot{y}_0 = -10$ m/s.

A causa d'un onatge suau i persistent, rep una força d'excitació vertical $F = 100\ \sin(10t)$ (unitats S.I.). Determineu:

d) la posició en funció del temps, $y(t)$, per al moviment estacionari.

Solució: a)$\ddot{y}+4\dot{y}+96{,}3y = 0$; b) $T = 0{,}654$ s; c) $y(t) = 1{,}041\ \text{e}^{-2t}\sin(9{,}60\ t+\pi)$; d) $y(t) = 0{,}1244\ \sin(10t - 1{,}66)$

Problema 6.4.12. Una partícula de 2 kg, unida a una molla de constant recuperadora de 18 N/m i a un esmorteïdor amb paràmetre d'esmorteïment $\gamma = 3\ \text{s}^{-1}$, fa un moviment rectilini en la direcció x, essent $x = 0$ el seu punt d'equilibri.

a) Escriviu l'equació de moviment.

A l'instant inicial, la partícula es troba en la posició $x = 0{,}3$ m, amb una velocitat $\dot{x} = -0{,}2$ m/s.

b) Escriviu l'expressió de la seva trajectòria.

Apliquem a la partícula una força harmònica en la direcció x, per tal que oscil·li amb una amplitud constant de $0{,}1$ m i triga $0{,}25$ s a anar d'un extrem a l'altre de l'oscil·lació:

c) Quin ha de ser el valor de l'amplitud d'aquesta força?

d) Quina velocitat màxima assolirà la partícula en aquestes condicions?

Solució: a) $\ddot{x} + 6\dot{x} + 9x = 0$; b) $x(t) = (0{,}3 + 0{,}7t)\,\text{e}^{-3t}$; c) $F_0 = 33{,}383$ N; d) $1{,}257$ m/s

7 Problemes i qüestions

Problema 7.2.3. La fotografia d'un pols ondulatori en una corda a l'instant $t = 0$ indica que la forma d'aquest és (unitats S.I.)

$$y(x, 0) = \frac{18 \times 10^{-3}}{8 + x^2}$$

Si l'elongació de la corda al punt $x = 5{,}20$ m i a l'instant $t = 0{,}40$ s és de $2{,}25$ mm, a quina velocitat es propaga aquesta ona? Si la densitat lineal de la corda és $0{,}280\,\mathrm{kg/m}$, a quina tensió està sotmesa?

Solució: $13{,}0\,\mathrm{m/s}$, $47{,}3\,\mathrm{N}$

Problema 7.2.4. Si A, B, C, k, ω i ϕ són constants, quines de les funcions següents representen ones? Quina és la velocitat de propagació en els casos afirmatius?

a) $y(x,t) = A\cos^2(kx - \omega t + \phi)$ **b)** $y(x,t) = A\cos kx\ \cos\omega t$
c) $y(x,t) = \frac{A}{(B\,x + C\,t)^2 + 1}$ **d)** $y(x,t) = \frac{A}{(B\,x^2 - C\,t^2) + 1}$

Solució: Són ones les funcions *a*, *b* i *c*. Les velocitats són: per a *a* i *b*, $v = \frac{\omega}{k}$; per a *c*, $v = \frac{C}{B}$.

Problema 7.2.5. Responeu les qüestions encadenades següents.

a) Escriviu una ona harmònica que es propagui cap a les x decreixents, de $8{,}0$ mm d'amplitud, 230 Hz de freqüència i $145\,\mathrm{m/s}$ de velocitat.

b) Quina distància hi ha entre dos punts que, en un instant donat, estan defasats $\pi/3$ rad?

c) Quina és la diferència de fase de l'elongació en el mateix punt entre dos instants de temps separats $1{,}5 \times 10^{-3}$ s?

Solució: a) $y = 8{,}0 \times 10^{-3}\,\mathrm{sin}(9{,}966x + 1445t)$; b) $0{,}1051$ m; c) $2{,}168$ rad

Problema 7.2.6. Dos punts x_1 i x_2 d'una corda, separats 1,20 m, per la qual passa una ona harmònica vibren, respectivament (en unitats S.I.),

$$y_1 = 0{,}020 \sin \pi \left(3t - \frac{1}{2}\right) \quad , \quad y_2 = 0{,}020 \sin \pi \left(3t - 1\right)$$

Calculeu la velocitat a la qual es propaga l'ona, la longitud d'ona i la funció d'ona.

Solució: 7,20 m/s, 4,80 m , $y(x,t) = 0{,}020 \ \sin 3\pi(t - x/7{,}20 - 1/6)$

Problema 7.2.7. Considereu l'ona $y(x,t) = 4\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{6} + \frac{x}{240}\right)\right]$, on y i x s'expressen en cm i t en s. Calculeu:

a) La diferència de fase, en un instant donat, entre dues partícules del medi separades 210 cm.

b) La diferència de fase entre dues posicions i el mateix instant sabent que la partícula del medi triga 1,0 s a anar d'una a l'altra d'aquestes posicions.

c) Si una determinada partícula, en un moment donat, presenta una elongació de 3,0 cm, quina serà la seva elongació 2,0 s més tard?

Solució: a) $7/4\pi$ rad; b) $\pi/3$ rad; c) $-3{,}79$ cm

Problema 7.2.8. Una ona harmònica transversal es propaga per una corda indefinida amb una velocitat de 4,0 m/s. En tot instant de temps, la distància mínima entre dos punts que estan en fase és de 20 cm. Se sap que, a l'origen, $x = 0$, i a l'instant inicial, $t = 0$, l'elongació és màxima de valor 20 cm. Trobeu:

a) L'amplitud, la longitud d'ona i el període.

b) L'elongació i la velocitat d'un punt $x = 0{,}25$ m, una vegada transcorreguts $t = 5/16$ s.

c) La distància mínima entre dos punts amb diferència de fase de $\pi/3$ rad.

d) La diferència de fase entre dos punts separats $\Delta x = 5$ cm

Solució: a) 20 cm, 0,20 m, 0,05 s; b) 20 cm, 0 m/s; c) 3,33 cm; d) $\pi/2$ rad

Problema 7.2.9. Una ona harmònica plana avança amb una velocitat de propagació de 32 m/s. L'amplitud val 2,3 cm i la freqüència, 60 Hz. Suposant que a l'origen $x = 0$ i a l'instant inicial $t = 0$ l'elongació és màxima, quant valen l'elongació, la velocitat i l'acceleració en un punt $x = 15{,}3$ m, una vegada han transcorregut $t = 2{,}60$ s.

Solució: $-0{,}88$ cm, $-8{,}01$ m/s, 1251 m/s^2

Problema 7.3.2. Una corda llarga, de densitat lineal $0{,}10\,\mathrm{kg/m}$ i sotmesa a $25\,\mathrm{N}$ de tensió, es fa vibrar a la freqüència de $20\,\mathrm{Hz}$ i provoca que es propagui una ona harmònica d'amplitud $1\,\mathrm{cm}$.

a) Calculeu la velocitat a la qual es propaga l'ona i la seva longitud d'ona.

b) Escriviu una funció d'ona d'aquesta ona sabent que, a l'instant inicial $t = 0$, l'elongació de la corda al punt origen $x = 0$ és $0{,}50\,\mathrm{cm}$.

c) A $t = 4\,\mathrm{s}$, quina elongació, velocitat i acceleració transversal té el punt de la corda situat a $x = 90\,\mathrm{cm}$?

Solució: a) $15{,}81\,\mathrm{m/s}$, $0{,}7905\,\mathrm{m}$; b) $y = 1\times10^{-2}\,\sin(\omega t - kx + \pi/6)$, $125{,}66\,\mathrm{rad/s}$, $7{,}948\,\mathrm{rad/m}$; c) $-0{,}3383\,\mathrm{cm}$, $118{,}3\,\mathrm{cm/s}$, $53{,}42\,\mathrm{m/s^2}$

Problema 7.3.3. Utilitzant l'anàlisi dimensional, esbrineu com poden ser les expressions que proporcionen les velocitats v de la propagació d'aquestes dues ones:

a) les ones per a una corda molt llarga, de densitat lineal μ i sotmesa a una tensió F;

b) les ones a la superfície de l'aigua, sobre un estany o el mar, causades pel pes del líquid, quan l'amplitud vertical de les ones és molt més petita que la profunditat h de l'aigua. Les magnituds de què poden dependre aquestes ones superficials són la densitat de l'aigua ρ, l'acceleració g de la gravetat i la profunditat h.

Solució: a) $v = k\sqrt{\frac{F}{\mu}}$; b) $v = k\sqrt{gh}$, on k és una constant sense dimensions (un estudi físic detallat mostra que val 1).

Problema 7.3.4. Es penja del sostre una cadena llarga i pesada, de longitud L i massa m. Es dóna un cop amb la mà a un dels dos extrems provocant un pols ondulatori que puja amunt, arriba al sostre, es reflecteix i baixa fins a l'altre extrem. Calculeu quant de temps tardarà el pols a pujar i baixar.

Solució: $\Delta t = 4\sqrt{\frac{L}{g}}$

Problema 7.3.5. La velocitat de les ones sonores a l'aire ve donada per (7.30):

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$$

on $\gamma = 1{,}40$, $R = 8{,}314\,\mathrm{J/molK}$ i M, la massa molar de l'aire, val $0{,}0290\,\mathrm{kg/mol}$. Fent les aproximacions que calguin, trobeu una expressió simple de la velocitat del so en funció de la temperatura t_C de l'aire en graus Celsius, °C, per a temperatures pròximes als 0°C.

Solució: En m/s, $v(t) = 331 + 0{,}606t_C$, si t_C en °C.

Problema 7.3.6. Quan un tub d'acer de 200 m de longitud es colpejat en un extrem, una persona col·locada a l'altre extrem escolta dos sons, com a resultat de dues ones longitudinals, una que es propaga pel tub i l'altra per l'aire, a $T = 20°\text{C}$. Quin és l'interval de temps entre ambdós sons?

Solució: 0,549 s

Problema 7.4.1. Amb algun programa de matemàtiques com, per exemple, el GeoGebra, comproveu gràficament que les dues funcions periòdiques següents són equivalents als desenvolupaments en les sèries de Fourier indicats:

a) *Valor absolut del* $\sin(\omega t)$: $f(t) = |\sin \omega t|$

$$f(t) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \cdot \left(\frac{\cos 2\omega t}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 4\omega t}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6\omega t}{5 \cdot 7} + \ldots \right)$$

b) *Serra triangular positiva*: $f(t) = t,\ 0 < t < 2\pi$

$$f(t) = \pi - 2 \left(\sin t + \frac{1}{2} \sin 2t + \frac{1}{3} \sin 3t + \ldots \right)$$

8 Problemes i qüestions

Problema 8.1.3. Fem vibrar un filferro tensat de forma que s'hi generen ones transversals de $120\,\text{Hz}$ freqüència i $2{,}30\,\text{mm}$ d'amplitud. La densitat del filferro és $0{,}010\,\text{kg/m}$ i està sotmès a una tensió de $100\,\text{N}$.

a) Quant valen la freqüència angular i el nombre d'ona?

b) Quanta energia per unitat de longitud té el filferro? Quina és la mínima potència que cal subministrar perquè l'amplitud de les ones es mantingui constant?

Solució: a) $754{,}0\,\text{rad/s}$, $7{,}540\,\text{rad/m}$; b) $0{,}01504\,\text{J/m}$, $1{,}504\,\text{W}$

Problema 8.2.2. Per una barra d'acer de $4\,\text{cm}$ de diàmetre es propaguen ones longitudinals d'amplitud $1{,}0 \times 10^{-5}\,\text{m}$ i freqüència $30\,\text{Hz}$. Calculeu:

a) La funció d'ona que es propaga al llarg de la barra.

b) L'energia de la barra per unitat de volum.

c) La potència mitjana i la intensitat que es propaguen a través de la barra.

Solució: a) $s = 1{,}0 \times 10^{-5}\,\sin(0{,}03722\,x - 188{,}5t)$ (unitats S.I.); b) $0{,}0139\,\text{J/m}^3$; c) $88{,}2\,\text{mW}$, $70{,}2\,\text{W/m}^2$

Problema 8.3.2. Responeu les qüestions encadenades següents.

a) Quina és la intensitat i el nivell d'intensitat d'una ona sonora a l'aire que té una amplitud de pressió acústica de $0{,}20\,\text{Pa}$? Quin percentatge representa aquesta amplitud respecte de la pressió atmosfèrica?

b) A quina amplitud de l'ona sonora de desplaçament es correspon si la freqüència del so és de $440\,\text{Hz}$?

Nota: Suposeu que la impedància acústica de l'aire és de $418\,\text{rayl}$.

Solució: a) $4{,}6 \times 10^{-5}\ \mathrm{W/m^2}$, $76{,}6\ \mathrm{dB}$, $2{,}0 \times 10^{-4}\%$; b) $1{,}73 \times 10^{-7}\ \mathrm{m}$

Problema 8.3.3. Una ona sonora plana a l'aire, de $100\ \mathrm{Hz}$ de freqüència, té una amplitud de $7{,}7 \times 10^{-6}\ \mathrm{m}$. Si la pressió de l'aire és d'$1\ \mathrm{atm} = 1033\ \mathrm{hPa}$ i la temperatura és de $15°\mathrm{C}$, determineu:

a) La impedància acústica de l'aire.

b) La intensitat i el nivell d'intensitat de l'ona sonora.

c) L'amplitud de l'ona de pressió acústica corresponent.

Solució: a) $425\ \mathrm{rayl}$; b) $4{,}97 \times 10^{-3}\ \mathrm{W/m^2}$, $97{,}0\ \mathrm{dB}$; c) $2{,}06\ \mathrm{P}$

Problema 8.3.4. Sabent que les impedàncies acústiques de l'aire i de l'aigua són $418\ \mathrm{rayl}$ i $1{,}45 \times 10^6$ rayl, respectivament, calculeu:

a) Quina és la raó de les amplituds de les pressions acústiques de dues ones de la mateixa freqüència, una a l'aigua i l'altra a l'aire, que tenen igual intensitat?

b) Si les amplituds de les pressions acústiques d'ambdues ones fossin iguals, quina seria la raó de les seves intensitats?

Solució: a) $58{,}9$; b) $2{,}88 \times 10^{-4}$

Problema 8.3.5. El so d'una explosió de $0{,}25\ \mathrm{s}$ de durada deixa de ser percebut a partir dels $80\ \mathrm{km}$ del punt en què s'ha produït. La intensitat llindar per a aquest so és $8 \times 10^{-12}\ \mathrm{W/m^2}$. Suposant que el so es propaga com una ona esfèrica sense pèrdues d'energia, determineu:

a) L'energia acústica involucrada en el so de l'explosió.

b) La distància a la qual el nivell d'intensitat és de $50\ \mathrm{dB}$.

c) Quantes explosions juntes i simultànies serien necessàries per tal que el nivell d'intensitat, a la distància de l'apartat *b*, fos de $70\ \mathrm{dB}$?

Solució: a) $0{,}161\ \mathrm{J}$; b) $253\ \mathrm{m}$; c) 100

Problema 8.3.6. La intensitat d'una ona plana s'ha reduït en un 30% després de travessar $12\ \mathrm{cm}$ d'un material absorbent.

a) Quant val el coeficient d'absorció del material per a aquest tipus d'ona?

b) Quina distància havia travessat l'ona a l'instant en què la intensitat era el 90% de la inicial?

Solució: a) $2{,}97\,\mathrm{m}^{-1}$; b) $3{,}55\,\mathrm{cm}$

Problema 8.3.7. Dos cables, de densitats diferents, se solden un a continuació de l'altre i se sotmeten a una tensió determinada. Es propaga una ona pel primer cable i, en arribar a la soldadura, una part es reflecteix i l'altra es transmet. Sabent que l'amplitud de l'ona reflectida és la meitat que la de l'ona transmesa i que la velocitat de les ones del primer cable és el doble de les del segon, calculeu:

a) Quina relació hi ha entre les amplituds de les tres ones?

b) Quin percentatge de la potència incident es transmet i quin es reflecteix?

Solució: a) $a_R = \frac{A_R}{A_I} = \frac{1}{3}$, $a_T = \frac{A_T}{A_I} = \frac{2}{3}$; b) $p_R = \frac{P_R}{P_I} = \frac{1}{9}$; $p_T = \frac{P_T}{P_I} = \frac{8}{9}$

Problema 8.3.8. Una ona harmònica longitudinal travessa una interfície acer $\rightarrow$ coure. L'ona incident té un període d'$1{,}0 \times 10^{-3}$ s i una longitud d'ona de $5{,}05\,\mathrm{m}$, essent la seva amplitud $2{,}0 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}$. Si s'observa que l'ona transmesa té una longitud d'ona de $3{,}71\,\mathrm{m}$, calculeu:

a) La velocitat de propagació de les ones en cada medi.

b) Els coeficients de transmissió i reflexió acer $\rightarrow$ coure.

c) La proporció d'energia que es reflecteix i transmet.

d) L'amplitud de l'ona reflectida.

Dades: Les densitats de l'acer i el coure emprats són $\rho_{\text{acer}} = 7850\,\mathrm{kg/m^3}$, $\rho_{\text{Cu}} = 8960\,\mathrm{kg/m^3}$, respectivament. Els mòduls de Young els trobareu a la taula 7.1.

Solució: a) $v_{\text{acer}} = 5050\,\mathrm{m/s}$, $v_{\text{Cu}} = 3710\,\mathrm{m/s}$; b) $1{,}088$; $0{,}0878$; c) $0{,}771\%$, $99{,}23\%$; d) $1{,}76 \times 10^{-7}\,\mathrm{m}$

Problema 8.3.9. En un sistema d'ecografia d'un hospital, el transductor —la part que emet els ultrasons— és d'alumini.

a) Considerant que els ultrasons surten de l'alumini, passen per l'aire i arriben al cos, quin percentatge de la potència dels ultrasons entra al cos?

b) Si ara interposem glicerina, en lloc d'aire, entre el transductor d'alumini i el cos, quant val ara el percentatge de la potència dels ultrasons que entra al cos?

Dades: Preneu la impedància acústica del cos com la de l'aigua, $1{,}45 \times 10^6$ rayl; per a les impedàncies de l'aire i de l'alumini, preneu 418 rayl i $13{,}7 \times 10^6$ rayl, i per a la glicerina, $2{,}46 \times 10^6$ rayl.

Solució: a) $1{,}41 \times 10^{-5}\%$; b) $48{,}2\%$

Problema 8.3.10. Considerem dos cables, de seccions S_1 i S_2 i densitats lineals μ_1 i μ_2, soldats en un punt i sotmesos a una tensió F. Les expressions per a les amplituds i potències transmeses i reflectides de les ones transversals es regeixen per les mateixes expressions que el cas longitudinal, amb la impedància corresponent: $Z_i = \rho_i v_i = \frac{\mu_i}{S_i}\sqrt{\frac{F}{\mu_i}} = \sqrt{F}\frac{\sqrt{\mu_i}}{S_i}$.

Apliqueu aquest coneixement al cas següent:

Dos cables, un de coure i l'altre d'acer, d'1 mm de radi cadascun, s'uneixen per tal de formar un cable més llarg. La tensió del conjunt és de 50 N. Una ona de 10 Hz es propaga des del coure cap a l'acer amb una amplitud de 2,0 mm.

a) Calculeu la longitud d'ona de l'ona a cada cable.

b) Calculeu els coeficients de transmissió i de reflexió.

Dades: Densitat del coure: $\rho_{Cu} = 8900\,\text{kg/m}^3$; densitat de l'acer: $\rho_{Ac} = 7800\,\text{kg/m}^3$

Solució: a) 4,23 m; 4,52 m; b) 1,033, 0,033

Problema 8.4.3. Una ona harmònica d'1 cm d'amplitud se superposa a una altra ona de 2 cm d'amplitud, desfasada respecte de la primera en $-\pi/3$ rad. Quins són l'amplitud i el desfasament de l'ona resultant respecte de la primera?

Solució: 2,646 cm, $-0{,}7137$ rad

Problema 8.4.4. Als punts $S_1 = (0{,}3)$ i $S_2 = (4{,}0)$ (unitats S.I.), hi ha dues fonts coherents d'ones sonores esfèriques de 100 Hz. Les d'amplituds a la distància d'1 m de les fonts són 1×10^{-3} Pa i 3×10^{-3} Pa, respectivament. El so es propaga a 340 m/s.

a) Si les fonts emeten en fase, quant valdrà l'amplitud de la pressió acústica a l'origen $(0{,}0)$?

b) En quant s'hauria d'avançar la segona font respecte de la primera per tal que, a l'origen $(0{,}0)$, hi hagués una interferència constructiva?

Solució: a) $0{,}190 \times 10^{-3}$ Pa; b) 1,85 rad

Problema 8.4.5. Com es mostra a la figura, el so d'un diapasó de 440 Hz entra en un tub per A, es bifurca en dues ones que van per dos camins, l'ABD i l'ACD, i després es tornen a ajuntar al punt D, on interfereixen. La longitud del camí ABD és 250 cm, mentre que la longitud màxima inicial del camí ACD és també 250 cm, però es va reduint lentament —mentre sona el diapasó— fins als 75 cm.

Si la velocitat del so és de 340 m/s, per quants mínims i màxims passa la intensitat

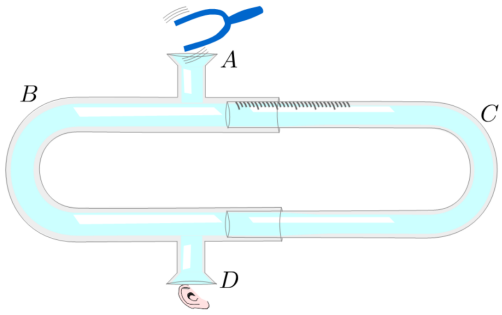


Figura de l'enunciat 8.4.5

del so resultant durant la reducció de la longitud ACD? **Solució:** Màxims, 2: $ACD = 173\,\text{cm}, 95\,\text{cm}$; mínims, 2: $ACD = 211\,\text{cm}, 134\,\text{cm}$.

Problema 8.4.6. Dos altaveus alineats amb una persona emeten coherentment ones planes sonores de la mateixa freqüència $440\,\text{Hz}$. La velocitat del so és de $340\,\text{m/s}$.

a) Si emeten en fase, a quines distàncies han d'estar els altaveus un de l'altre per tal que la persona no senti res?

b) Si segueixen emetent coherentment però ara la fase de l'altaveu més proxim està avançada $\pi/3$ rad respecte de l'altre, en quant canvien les distàncies anteriors?

Solució: a) $0{,}39\,\text{m}$, $1{,}16\,\text{m}$, $1{,}93\,\text{m}$...; b) Totes en $0{,}13\,\text{cm}$ menys

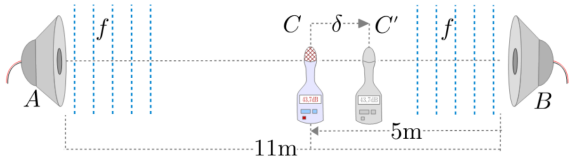


Figura de l'enunciat 8.4.7

Problema 8.4.7. En un laboratori, en el qual la velocitat del so és de $340\,\text{m/s}$, dos altaveus A i B, que emeten ones sonores planes de $791\,\text{Hz}$, estan encarats i separats $11\,\text{m}$, tal com es veu a la figura. Un sonòmetre C està situat sobre la recta que els uneix, a $5\,\text{m}$ del B. L'altaveu A proporciona una intensitat de $0{,}75\,\text{W/m}^2$ i el B de $0{,}25\,\text{W/m}^2$.

a) Si els dos altaveus emeten sense coherència, quant val el nivell d'intensitat β_0 registrat pel sonòmetre C?

b) Si els altaveus emeten coherentment i en fase, quina diferència de fase hi

haurà entre el so de A i B en arribar al sonòmetre C?

c) Quina distància mínima δ_1 hauríem de desplaçar el sonòmetre C cap a B per tal que experimentés un màxim d'intensitat? I quina δ_2 per experimentar un mínim?

d) Quin nivell d'intensitat mesurarà el sonòmetre en el màxim i en el mínim?

Solució: a) 120 dB; b) 2,051 rad; c) $\delta_1 = 14{,}5$ cm, $\delta_2 = 3{,}7$ cm; d) 122,7 dB, 111,3 dB

Problema 8.4.8. Dos altaveus S_1 i S_2 es troben sobre l'eix y a $y = \pm d/2$, com es veu a la figura. Per mitjà d'un amplificador d'audiofreqüència, se'ls fa emetre en fase sons de freqüència f.

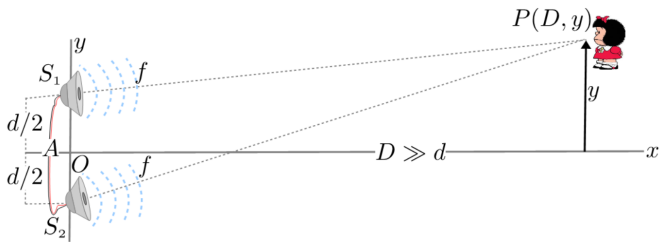


Figura de l'enunciat 8.4.8

Un observador es desplaça des de $y = 0$ per una recta paral·lela a l'eix y, situada a una gran distància D d'aquest eix. Si $d \ll D$ i $y \ll D$:

a) Demostreu que l'observador percebrà els primers màxims d'intensitat sonora a les distàncies

$$y_{\text{const}} = n\,\frac{D}{d}\,\frac{v}{f} \qquad \text{amb} \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

essent v la velocitat del so.

a) Amb $d = 2$ m i $D = 80$ m, i suposant $v = 340$ m/s, per a quina freqüència la distància entre dos màxims consecutius d'intensitat és de 3,0 m?

Solució: 4,53 kHz

Problema 8.4.9. Als punts $A = (0{,}4{,}0)$ i $B = (8{,}0{,}0)$ (unitats S.I.) de l'aire lliure hi ha dos focus sonors puntuals d'1 mW i 2 mW de potència, respectivament, que poden emetre en fase ones esfèriques. Si la velocitat del so és de 340 m/s, esbrineu:

a) La diferència de fase en què arriben les dues ones a l'origen si la freqüència de tots dos focus és 200 Hz.

b) Les freqüències compreses entre 200 Hz i 1500 Hz en què haurien d'emetre simultàniament els dos focus per tal que hi hagués una interferència destructiva a l'origen.

c) Quines són les intensitats amb què arriben les dues ones —per separat— a l'origen?

d) Si els focus emeten amb una freqüència en què hi ha una interferència destructiva a l'origen, quant val la intensitat del so? I si emeten quan n'hi ha una de constructiva?

Solució: a) 14,784 rad; b) 212,5 Hz, 255,0 Hz, ..., 1,445 kHz, 1,488 kHz; c) 4,97 μW/m^2, 2,49 μW/m^2; d) 0,427 μW/m^2, 14,50 μW/m^2

Problema 8.5.4. La freqüència fonamental d'una determinada corda d'un violí, de longitud L, és 196 Hz. Si el violinista vol obtenir una freqüència fonamental de 440 Hz, quina longitud cal que tingui la corda?

Solució: $0{,}445L$

Problema 8.5.5. La primera i l'última corda d'un piano estan afinades a 33 Hz i 4186 Hz, amb longituds 198 cm i 5,1 cm, respectivament. Si totes dues cordes estan sotmeses a la mateixa tensió, quant val el quocient entre les densitats lineals efectives de les dues cordes?

Solució: 10,68

Problema 8.5.6. A la figura, es mostra una vareta F que efectua vibracions sinusoidals de 100 Hz que exciten la corda horitzontal AB de longitud de 120 cm, tensionada per la massa M, de pes 2,25 N, que es manté pràcticament immòbil. S'obté així un sistema d'ones estacionàries que presenten un node en la proximitat immediata de l'extremitat A de la vareta i un altre node al punt B que està en contacte amb la politja. Entre aquests dos nodes, es troben quatre ventres. L'amplitud de les vibracions dels ventres és de 10 mm.

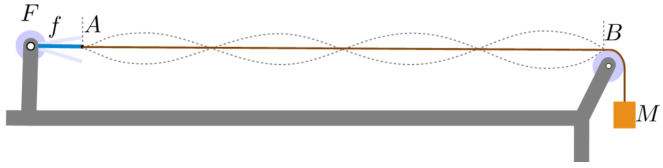


Figura de l'enunciat 8.5.6

Determineu:

a) La longitud d'ona de les vibracions i la seva velocitat de propagació.

b) La velocitat màxima d'un punt de la corda que correspon a un ventre.

c) L'amplitud de les vibracions del punt de la corda situat a 35 cm de l'extremitat A.

d) Quin hauria de ser el pes d'una nova massa M' suspesa de la corda si es volguessin inobtenir tres ventres en lloc de quatre?

Solució: a) 0,60 m, 60 m/s; b) 6,28 m/s; c) 5 mm; d) 4 N

Problema 8.5.7. Una ona estacionària en una corda elàstica de 6,00 m de longitud ve descrita per la funció (unitats S.I.):

$$y(x,t) = 2{,}0 \times 10^{-2} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\cos(\pi t)$$

a) Representeu esquemàticament l'ona estacionària, indicant les posicions dels nodes i dels ventres. En quin harmònic vibra la corda?

b) Calculeu la velocitat de propagació de l'ona a la corda.

c) Escriviu les funcions de les ones harmòniques que generen aquesta ona estacionària.

d) En quin instant estarà la corda completament recta?

e) En quins punts de la corda i per a quins instants la velocitat transversal serà màxima?. Quin valor tindrà aquesta velocitat?

f) Quan serà zero la velocitat transversal de la corda?

g) En quin percentatge s'hauria d'augmentar la tensió perquè es formessin ones estacionàries amb un ventre menys?

Solució: a) 3r harmònic; b) $v = 2{,}00$ m/s; c) $y_+(x,t) = 1{,}0\times10^{-2}\ \sin(x/2-\pi t)$, $y_-(x,t) = 1{,}0 \times 10^{-2}\ \sin(x/2+\pi t)$; d) $t = n + 1/2$ s, $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3...$; e) Als ventres, $x_v = 1,\ 3,\ 5$ m, per $t = n + 1/2$ s , $v = 6{,}28$ m/s; f) $t = n$ s; g) 125%

Problema 8.5.8. Dues cordes idèntiques, fixades pels extrems, de 100 g de massa i 1 m de longitud, estan sotmeses a tensions de 200 N i 205 N, respectivament.

a) Si les dues cordes vibren en el tercer harmònic, calculeu la freqüència dels batecs resultants de la superposició dels sons generats per cada corda.

A continuació, es fa vibrar únicament la corda de tensió 200 N amb l'harmònic fonamental. Si l'amplitud en un punt situat a 20 cm d'un extrem és d'1,0 cm, determineu:

b) La velocitat màxima del moviment transversal d'aquest punt de la corda.

b) L'elongació en aquest punt a l'instant $t = 0$, sabent que en aquest instant l'elongació al centre de la corda és màxima.

Solució: a) $0{,}833$ batecs/s; b) $\dot{y} = 1{,}41$ m/s; c) $y = 1{,}00$ cm

Problema 8.5.9. L'extrem A d'una corda horitzontal està fixat a la paret i l'altre B passa per una politja sense fricció i se li penja un cos de massa M.

Figura de l'enunciat 8.5.9

La freqüència del so fonamental emès per la corda és 392 Hz. Si el cos se submergeix totalment en aigua (vegeu la figura), la freqüència baixa a 343 Hz. Calculeu la densitat del cos.

Solució: 4270 g/cm^3

Problema 8.5.10. Una corda de $28{,}28$ cm de longitud i $0{,}050$ kg/m de densitat lineal s'uneix a una segona corda de densitat lineal la meitat que la de la primera.

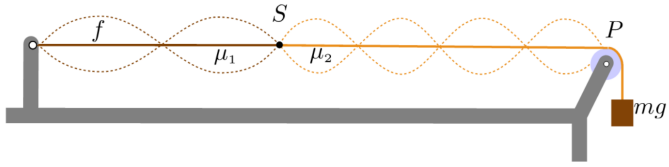


Figura de l'enunciat 8.5.10

Un dels extrems es fixa a una paret i l'altre es fa passar per una politja i se li penja un pes de 100 N. La longitud d'aquesta segona corda, entre la unió S i la politja P és de 100 cm.Volem que al llarg de totes dues cordes es formin ones estacionàries, de manera que al punt unió S hi hagi un node, tal com es mostra a la figura.

Quina és la freqüència més baixa que podem aplicar a les cordes. En aquest cas, quants ventres hi haurà al llarg de les dues cordes?

Solució: $158{,}1$ Hz, 7 ventres

Problema 8.5.11. Una corda, d'$1{,}40$ m de longitud i $2{,}00$ g de massa s'uneix a una altra, d'$1{,}00$ m de longitud i $4{,}98$ g de massa. El conjunt es fa vibrar a 120 Hz.

a) A quina tensió màxima s'han de sotmetre per tal que es formin ones estacionàries estant la soldadura en un node? Quants ventres hi haurà a cada corda en aquest cas?

b) Quines altres tensions inferiors també satisfan aquesta condició?

Solució: a) 17,9 N, 3 i 4 ventres; b) 4,48 N, 1,99 N...

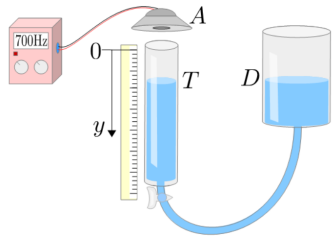


Figura de l'enunciat 8.5.12

Problema 8.5.12. Volem mesurar la velocitat del so a l'aire. Per això, com es mostra a la figura, disposem d'un altaveu A, que emet so harmònic del qual podem controlar la freqüència entre 400 i 1200 Hz, i d'un tub T d'1 m de longitud ple d'aigua fins a una altura que podem modificar pujant o baixant un dipòsit D.

La longitud d'aire del tub, y, la mesurem amb un regle paral·lel al tub. Amb l'altaveu funcionant a 700 Hz, anem baixant el nivell de l'aigua i observem que, quan $y_1 = 20{,}3$ cm, hi ha ressonància. Si continuem baixant, la posició següent del nivell per al qual hi ha ressonància és $y_2 = 44{,}6$ cm.

a) Quant val la velocitat del so a l'aire de l'interior del tub?

b) Amb una freqüència de 1000 Hz i amb l'aigua omplint totalment el tub, anem baixant el nivell fins a arribar a la primera posició de ressonància $y_1 = 10{,}0$ cm. Trobeu totes les altres posicions en què ressonarà el tub.

c) Si, després, es deixa el tub amb una columna d'aire fixa, $y = 50$ cm, per a quines freqüències ressonarà el tub?

Solució: a) $v = 340{,}2$ m/s; b) $y_2 = 27{,}0$ cm, $y_3 = 44{,}0$ cm, $y_4 = 61{,}0$ cm, $y_5 = 78{,}0$ cm, $y_6 = 95{,}0$ cm; c) 510 Hz, 851 Hz, 1191 Hz

Problema 8.5.13. Disposem d'un tub cilíndric obert pels dos extrems que excitem amb ones sonores de freqüència variable. S'observen dues freqüències de ressonància consecutives: 360 Hz i 540 Hz.

a) Si es tanca un dels dos extrems i l'excitem de nou: quines són les tres primeres freqüències en què ressonarà ara?

b) Si el tub té $0{,}950\,\text{m}$, quina és la temperatura de l'aire interior?

Solució: a) $90\,\text{Hz},\ 270\,\text{Hz},\ 450\,\text{Hz}$; b) $18{,}2^\circ\,\text{C}$

Problema 8.6.2. Un dia en què la temperatura és de 35°C, el conductor d'un tren exprés, que circula a $110\,\text{km/h}$, veu més endavant un tren de rodalies que va per la mateixa via. Per determinar la velocitat a la qual va el rodalies, fa sonar el seu xiulet de $1000\,\text{Hz}$ i escolta l'eco de $1060\,\text{Hz}$ de freqüència.

a) A quina velocitat es propaga el so?

b) Suposant que no fa vent, a quina velocitat es desplaça el tren de rodalies?

Solució: a) $352\,\text{m/s}$; b) $73{,}3\,\text{km/h}$

Problema 8.6.3. En un dia que no fa vent i la velocitat del so és de $340\,\text{m/s}$, una sirena que emet un so de $1000\,\text{Hz}$ es mou allunyant-se d'un observador en repòs i dirigint-se cap a un penya-segat a una velocitat de $36{,}0\,\text{km/h}$.

Quant val la diferència entre les freqüències de les dues ones sonores —la directa i la reflectida pel penya-segat— que arribaran a l'observador? A quina velocitat hauria d'anar la sirena per tal que es poguessin sentir pulsacions de $8{,}0\,\text{Hz}$?

Solució: $58{,}9\,\text{Hz},\ 4{,}90\,\text{km/h}$

Problema 8.6.4. Un detector de moviment d'un objecte podria consistir en una font d'ones harmòniques de freqüència f_0 i un detector de freqüència dels batecs f_b que s'obtenen en superposar les ones directes de la font amb les ones reflectides per l'objecte. Si l'objecte no es desplaça respecte de la font, $f_b = 0$. Si s'acosta a la font o se n'allunya a una velocitat v, molt més petita que la velocitat c de les ones en el medi, demostreu que la freqüència dels batecs és $f_b = 2f_0\frac{v}{c}$.

Problema 8.6.5. Un avió supersònic que es desplaça horitzontalment a Mach $= 1{,}50$,[1] passa per la vertical d'un observador que és a l'aire lliure un dia en què la velocitat mitjana del so és $335\,\text{m/s}$. Si aquest observador ha hagut d'esperar $3{,}20\,\text{s}$ per sentir l'avió des que el veu passar per sobre seu, a quina altura està volant l'avió?

Solució: $1438\,\text{m}$

[1] Mach $= M$ és la relació entre la velocitat d'un objecte, v, i la velocitat de les ones en el medi c: $M = \frac{v}{c}$

Solucions a les qüestions

Capítol 1

1.7.1: **c**, 1.7.2: **e**.

Capítol 2

2.1.1: **b**, 2.1.2: **a**, 2.1.3: **e**.

2.2.1: **d**, 2.2.2: **c**, 2.2.3: **e**, 2.2.4: **c**.

2.3.1: **e**.

2.4.1: **e**, 2.4.2: **a**, 2.4.3: **a**, 2.4.4: **e**, 2.4.5: **b**, 2.4.6: **b**, 2.4.7: **d**, 2.4.8: **c**, 2.4.9: **c**.

2.5.1: **d**, 2.5.2: **b**, 2.5.3: **a**, 2.5.4: **d**, 2.5.5: **c**.

Capítol 3

3.2.1: **c**, 3.2.2: **b**, 3.2.3: **a**, 3.2.4: **c**, 3.2.5: **a**, 3.2.6: **b**, 3.2.7: **c**, 3.2.8: **e**, 3.2.9: **e**, 3.2.10: **c**.

3.3.1: **d**.

3.4.1: **b**, 3.4.2: **d**, 3.4.3: **c**.

Capítol 4

4.3.1: **c**, 4.3.2: **b**, 4.3.3: **c**, 4.3.4: **a**, 4.3.5: **a**, 4.3.6: **d**.

4.5.1: **a**, 4.5.2: **a**, 4.5.3: **c**, 4.5.4: **c**, 4.5.5: **a**, 4.5.6: **c**, 4.5.7: **e**, 4.5.8: **a**, 4.5.9: **e**, 4.5.10: **b**, 4.5.11: **a**, 4.5.12: **c**, 4.5.13: **c**, 4.5.14: **b**, 4.5.15: **e**, 4.5.16: **b**, 4.5.17: **e**.

4.7.1: **b**, 4.7.2: **e**, 4.7.3: **b**.

Capítol 5

5.2.1: **e**, 5.2.2: **d**, 5.2.3: **c**, 5.2.4: **a**. 5.2.5: **c**, 5.2.6: **c**, 5.2.7: **d**, 5.2.8: **c**, 5.2.9: **c**, 5.2.10: **c**, 5.2.11: **b**, 5.2.12: **e**, 5.2.13: **e**, 5.2.14: **e**, 5.2.15: **b**, 5.2.16: **e**.

5.3.1: **a**, 5.3.2: **d**, 5.3.3: **a**, 5.3.4: **a**, 5.3.5: **d**, 5.3.6: **d**.

Capítol 6

6.2.1: **b**, 6.2.2: **c**, 6.2.3: **d**, 6.2.4: **d**, 6.2.5: **a**.

6.3.1: **a**, 6.3.2: **e**, 6.3.3: **c**.

6.4.1: **c**, 6.4.2: **b**, 6.4.3: **d**, 6.4.4: **b**, 6.4.5: **d**, 6.4.6: **c**, 6.4.7: **a**, 6.4.8: **b**, 6.4.9: **d**.

Taules

Relacions trigonomètriques

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\ \cos\beta \pm \cos\alpha\ \sin\beta$
$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\ \tan\beta}$
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\ \cos\beta \mp \sin\alpha\ \sin\beta$
$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
$\sin(0) = 0, \sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}, \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin(\frac{\pi}{2}) = 1, \sin(\pi) = 0,$
$\cos(0) = 1, \cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}, \cos(\frac{\pi}{2}) = 0, \cos(\pi) = -1$

Derivades

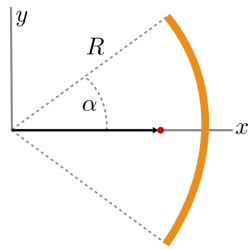
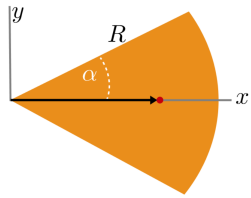
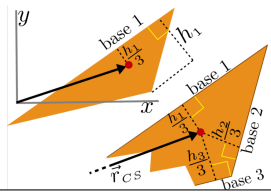
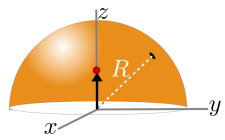
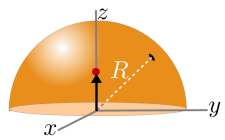
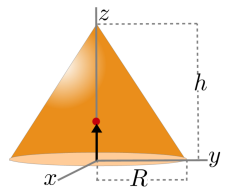
Funció: $F(x)$	**Derivada:** $\frac{dF(x)}{dx}$
$a\,f(x)+g(x)$	$a\,\frac{df(x)}{dx}+\frac{dg(x)}{dx}$
$f(x)g(x)$	$\frac{df(x)}{dx}g(x)+f(x)\frac{dg(x)}{dx}$
$\frac{f(x)}{g(x)}=f(x)g(x)^{-1}$	$\frac{\frac{df(x)}{dx}g(x)-f(x)\frac{dg(x)}{dx}}{g(x)^2}$
$f(x)^n$	$n\,f(x)^{n-1}\frac{df(x)}{dx}$
$f(g(x))$	$\frac{df(g)}{dg}(x)\ \frac{dg(x)}{dx}$
$f^{-1}(x)$ $f^{-1}(x)$ és la funció inversa de f; per exemple, $y=\arcsin x$ és inversa de $x=\sin y$	$\left.\frac{1}{\frac{df(y)}{dy}}\right\vert_{y=f^{-1}(x)}$
e^x	e^x
a^x	$a^x\ \ln a$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_{(a)} x$	$\frac{1}{x\ln a}$

Integrals

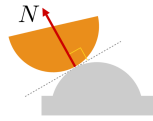
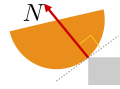
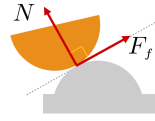
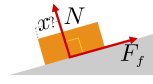
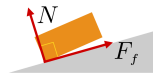
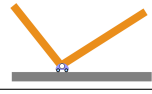
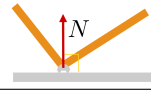
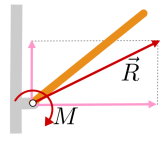
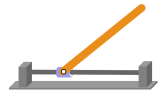
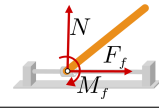
Funció: $F(x)$	**Integral:** $\int F(x)\,dx$
$a\,f(x)+g(x)$	$a\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx$
x^n amb $n\neq -1$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$\frac{1}{x}=x^{-1}$	$\ln x$
e^x	e^x
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\tan x$	$\ln(\cos x)$
$\ln x$	$-x+x\ln x$
$\frac{1}{(x-a)(x-b)}$	$\frac{1}{a-b}\ln\frac{x-a}{x-b}$
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\arcsin\frac{x}{a}$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$	$\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})$

Centres de massa

$\vec{r}_{CM}$ de cossos homogenis simples respecte dels sistemes de referència que s'hi indiquen

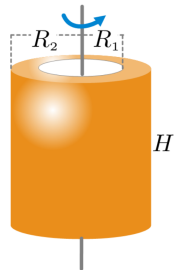
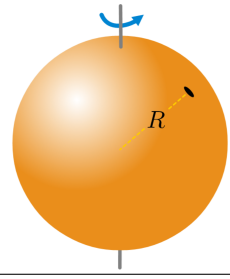
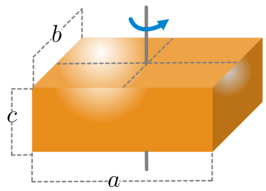
Arc de circumferència		$L = 2R\alpha$ $\vec{r}_{CS} = \left(\frac{R\,\sin\alpha}{\alpha}\ ,\ 0\right)$
Sector de cercle		$S = R^2\alpha$ $\vec{r}_{CS} = \left(\frac{2R\,\sin\alpha}{3\alpha}\ ,\ 0\right)$
Triangle arbitrari		$S = \frac{1}{2}b\,h$ La distància d'una base i al CS és $\frac{1}{3}$ de la corresponent altura h_i
Closca semiesfèrica (sense la tapa inferior)		$S = 2\pi R^2$ $\vec{r}_{CS} = \left(0, 0, \frac{R}{2}\right)$
Semiesfera (massísa)		$V = \frac{2\pi R^3}{3}$ $\vec{r}_{CS} = \left(0, 0, \frac{3R}{8}\right)$
Con (massís)		$V = \frac{\pi R^2 h}{3}$ $\vec{r}_{CS} = \left(0, 0, \frac{h}{4}\right)$

Reaccions dels suports

Cable o corda tensa. La força que fa el cable és en la direcció del cable. El sentit sempre és el de la banda del cable o la força s'anul·la (cable no tens).		
Contacte regular llis: reacció N normal al pla tangent a la superfície regular en el punt de contacte.		
Contacte regular/singular llis. Reacció N normal al pla tangent a la superfície regular en el punt de contacte.		
Contactes rugosos. A la reacció normal N, cal afegir-hi una força de fricció F_f. En cas que els cossos no es moguin, $\|F_f\| \leq \mu \ \|N\|$, on μ és el coeficient de fricció estàtic. Al màxim valor de $\|F_f\|$, s'hi arriba quan hi ha imminència de moviment.		
Contactes extensos. Reacció N normal a la superfície de contacte. No té per què passar pel centre de masses.		
Contactes extensos (bolcada imminent). Reacció N normal a la superfície de suport aplicada en el punt on es concentra el contacte.		
Rodets (sense fricció). És el mateix cas que els contactes llisos.		
Articulació. Reacció $\vec{R}$, en general desconeguda, que en 2D són dues components. Si hi ha fricció (entre les superfícies en contacte a la zona de l'articulació) o no hi ha articulació sinó encastament, cal afegir un parell de moment M. El seu valor màxim dependrà de la naturalesa del contacte.		
Guies. Reacció normal a la guia. Si el contacte és rugós, cal afegir-hi la fricció F_f i pot ser també un parell de fricció M_f.		

Moments d'inèrcia

I de cossos homogenis simples respecte dels eixos que s'hi indiquen.

Cilindre		gruixut: $I = \frac{1}{2} m \left(R_1^2 + R_2^2\right)$ disc: $H = 0$ massís: $R_1 = 0$ prim: $R_1 = R_2$
Esfera		massissa: $I = \frac{2}{5} m R^2$ buida: $I = \frac{2}{3} m R^2$
Ortoedre		ortoedre / rectangle: $I = \frac{1}{12} m \left(a^2 + b^2\right)$ barra: $a = 0$ i $c = 0$

Constants

Nom de la constant:	**Valor:**
Nombre π	$3,1415926536$
Nombre $e = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	$2,718281285$
Constant de Coulomb, $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$	$8,987551788 \times 10^9 \ \frac{\mathrm{Nm^2}}{\mathrm{C}}$
Càrrega elemental, e	$1,602177 \times 10^{-19}\mathrm{C}$
Nombre d'Avogadro, N_A	$6,022137 \times 10^{23}$
Constant de Boltzman, k	$1,380658 \times 10^{23} \ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$
Constant dels gasos ideals, $R = N_A\, k$	$8,31451 \ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol\,K}}$
Constant de gravitació, G	$6,6726 \times 10^{-11} \frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{kg^2}}$
Massa de l'electró, m_e	$9,109390 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
Massa del protó, m_p	$1,672622 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
Massa del neutró, m_n	$1,674929 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
Velocitat de la llum, c	$2,99792458 \times 10^8 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
Acceleració de la gravetat a la superfície de la Terra, g	Valor estàndard: $9,81 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}$. A Barcelona: $9,804 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}$
Radi de la Terra, R_T	$6370\,\mathrm{km}$
Massa de la Terra, M_T	$5,98 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$

Glossari

A

alçada CAST: *altura*. Alçària, especialment d'una persona o d'un animal. Exemple: *l'alçada d'un cavall. Quant fas d'alçada?*

alçària CAST: *altura*. Dimensió d'un cos en direcció vertical. Exemple: *l'alçària d'una muntanya. L'alçària d'un arbre. Una alçària de vint pams. Fa vint pams d'alçària. L'alçària d'un triangle, d'una piràmide, d'un con*.

altitud Altura d'un punt de la Terra respecte al nivell del mar.

altura Distància vertical d'un punt a la superfície de la Terra o a qualsevol altre terme de comparació. En geometria, és la línia imaginària que es pot traçar des d'un vèrtex o des del pla superior d'una figura geomètrica fins a la base, i de manera perpendicular a aquesta. Per extensió, és també la longitud d'aquesta línia. Exemple: *altura d'un triangle. Altura d'un cilindre. Vola a una gran altura. Enlairar-se fins a una altura de mil metres*.

amplada La més petita de les dimensions d'una figura plana, formant angle amb la més gran o llargada. Exemple: *un tauló de vint centímetres d'amplada. La taula del menjador fa una amplada de 120* cm.

axial Direcció axial: segons un eix.

B

barra Tros de fusta, de ferro o d'una altra substància, rígid, de forma cilíndrica o prismàtica, molt més llarg que gruixut.

boia CAST: *boya*. Cos flotant per indicar el nivell de líquid en un dipòsit o bé per a mantenir-lo entre determinats límits prefixats.

C

celeritat Mòdul del vector velocitat.

cercle *CAST: círculo*. Porció d'un pla limitada per una circumferència.

circumferència Corba plana els punts de la qual equidisten tots d'un punt interior, el centre.

contacte Dos cossos estan en contacte si només es toquen però no estan enganxats ni articulats.

corró *CAST: rodillo*. Cilindre que, posat sota una cosa de molt pes, serveix per arrossegar-la amb més facilitat.
Cilindre pesant de pedra o de ferro que, fent-lo rodar sobre alguna cosa, serveix per aplanar-la, compactar-la, aixafar-la, etc.

cèrcol *CAST: aro*. Corona cilíndrica de fusta o de ferro amb què jugaven els infants fent-la rodar amb la mà o amb un pal curt.

D

diametral Punts diametralment oposats: dos punts de la circumferència o esfera pertanyents a un mateix diàmetre.

diferència de... Diferència de F: $ddF = F_{\text{inicial}} - F_{\text{final}}$.

dimensió **1)** Expressió d'una magnitud segons les magnituds físiques fonamentals. Exemple: *l'acceleració té dimensions de longitud dividida pel quadrat del temps*.
2) Extensió, grandària, mesura en ample i llarg, o en ample, llarg i alt. Exemple: *les dimensions d'una plaça, d'una sala, d'un vaixell*.
Parts mesurables d'un cos que en donen la proporció o la forma.
3) Paràmetre numèric que caracteritza aspectes geomètrics dels objectes. Exemple: *un bloc té tres dimensions, una corda té una dimensió*.

direcció Dues rectes tenen igual direcció si es poden superposar mitjançant una translació.

E

empenta *CAST: empujón*.

empenyiment *CAST: empuje*. Per exemple, l'empenyiment d'Arquimedes, definit a la pàgina 122.

F

falca *CAST: cuña*.

G

gruix Alçada d'un cos quan és sensiblement inferior a la llargada i a l'amplada. Exemple: *sis pams de llarg, dos d'ample i mig de gruix*.

H

horitzontal Pla horitzontal: pla perpendicular al camp gravitatori.

I

increment de... Increment de F: $\Delta F = F_{\text{final}} - F_{\text{inicial}}$.

L

llargada, llargària La més gran de les dimensions d'una figura plana, formant angle amb la més petita o amplada. Exemple: *un tauló de cinc metres de llargada. La taula del menjador fa una llargada de set metres i mig*.

llastar *CAST: lastrar*. Posar llast (a una cosa, especialment a una embarcació o a un globus aerostàtic). Llast (*CAST: lastre*): Pedres, trossos de ferro, sorra, etc., que es posen al fons de la nau, per donar-li més estabilitat.

lliscar *CAST: resbalar*. Moure's en contacte amb una superfície de manera que la velocitat relativa dels punts de les superfícies en contacte és no nul·la.

lliscar sense fricció Moure's en contacte amb una superfície de manera que la velocitat relativa dels punts de les superfícies en contacte és no nul·la amb una força de fricció nul·la.

longitudinal En la direcció de la longitud o llargària. Exemple: *eix longitudinal*.

M

manovella *CAST: manivela.* Element d'un mecanisme de transmissió que consisteix en una barra que per un extrem va fixada perpendicularment a un arbre i per l'altre extrem és accionada per imprimir a l'arbre un moviment de rotació.

medi CAST: *medio*. Substància a través de la qual obra una força, és transmès un efecte. Per exemple, una ona mecànica es propaga per un medi.
Fem notar que la substància i, per tant, el medi inclou tant la seva composició química (ferro, aigua..etc) com les característiques físiques en equilibri (pressió, densitat, temperatura, tensions, etc).

moment angular = moment cinètic. Definit a les pàgines 52, 82 i 137.

moment cinètic = moment angular. Definit a les pàgines 52, 82 i 137.

moment lineal = quantitat de moviment.

O

onatge CAST: *oleaje*. Moviment de les ones superficials causades per la gravetat en un líquid. Exemple: *les onades del mar*.

orientació Un sòlid rígid canvia l'orientació si la direcció d'alguna recta que uneix dos qualssevol dels seus punts canvia de direcció.

P

pressió atmosfèrica És la que exerceix l'atmosfera en el lloc on som. La pressió atmosfèrica estàndard, 1 atm (1 atmosfera), va ser definida com la pressió atmosfèrica mitjana al nivell del mar, que es va fixar exactament en 101325 Pa. No obstant això, a partir del 1982, l'Interdivisional Committee on Terminology, Nomenclature and Symbols (ICTNS) va recomanar que, a l'efecte d'especificar les propietats físiques de les substàncies, l'estàndard de pressió havia de definir-se exactament en 100 kPa. A part de ser un nombre rodó, aquest canvi té un avantatge pràctic perquè 100 kPa equivalen a una altitud aproximada de 112 m, que està propera a la mitjana de 194 m de la població mundial.
L'atmosfera (atm) és una unitat de pressió
$1\,\text{atm} = 101325\,\text{Pa} = 760\,\text{mmHg} = 1,01325\,\text{bar}$. Observeu que cal distingir entre

- pressió atmosfèrica,
- pressió atmosfèrica estàndard,
- unitat de pressió.

De fet, l'ICTNS és de creació recent (2002). Anteriorment era l'Interdivisional Committee on Nomenclature and Symbols (IDCNS). Ambdós institucions són filials de la International Union of Pure and Applied Chemistry (IUPAC).

pressió manomètrica = (pressió) - (pressió atmosfèrica).

prim De gruix negligible respecte de les altres dimensions i del radi de curvatura. Exemple: *una xapa prima*.

profunditat La profunditat z en un fluid és una coordenada que té la direcció i el sentit de l'acceleració de la gravetat $\vec{g}$ amb origen al nivell lliure del fluid.

propietats intensives Les propietats intensives són aquelles propietats físiques, (químiques, organolèptiques, etc.) que no depenen de la quantitat de matèria i són les que caracteritzen els materials des d'un punt de vista macroscòpic.

R

regla del cargol Regla per assignar un sentit al vector resultant d'un producte vectorial. Un cargol o vis dextrogir (els que usualment trobem a les ferreteries) avança quan el fem girar en el sentit horari.

rodar CAST: *rodar*. Un cos, en rodar, canvia l'orientació. En cas d'estar en contacte amb algun altre cos o terra, rodar no implica no relliscar.

rodolar CAST: *rodar sin resbalar*. Rodar en contacte amb una superfície sense lliscar. Mentre un cos rodola, la velocitat relativa dels punts en contacte de les superfícies és nul·la. Per rodolar és necessari comptar amb un determinat valor de la força tangent a les superfícies.

S

sentit Donada una direcció, tenim dos sentits. És a dir, podem definir dos vectors unitaris diferents en aquesta direcció.

substància Una substància és tota porció de matèria que comparteix determinades propietats intensives.

T

topall CAST: *tope*.

transversal Que va en una direcció normal a una direcció donada. Exemple: *dues posts paral·leles unides per llistons transversals. Secció transversal*.

V

vertical La direcció vertical és la que té a cada lloc el camp gravitatori.