

Prov. T
22/123

T
16
66



UNIVERSIDAD DE GRANADA
Facultad de Ciencias
Fecha 14-9-98
ENTRADA NUM. 2799

RENORMALIZACIÓN DIFERENCIAL DE TEORÍAS SIMÉTRICAS

Manuel Pérez-Victoria Moreno de Barreda

Tesis Doctoral
Departamento de Física Teórica y del Cosmos
Universidad de Granada

BIBLIOTECA UNIVERSITARIA
GRANADA
Nº Documento 619689174
Nº Copia 121234784

Septiembre de 1998

UNIVERSIDAD DE GRANADA
9 SET. 1998
COMISION DE DOCTORADO

D. Francisco del Águila Giménez, Catedrático de la Universidad de Granada,

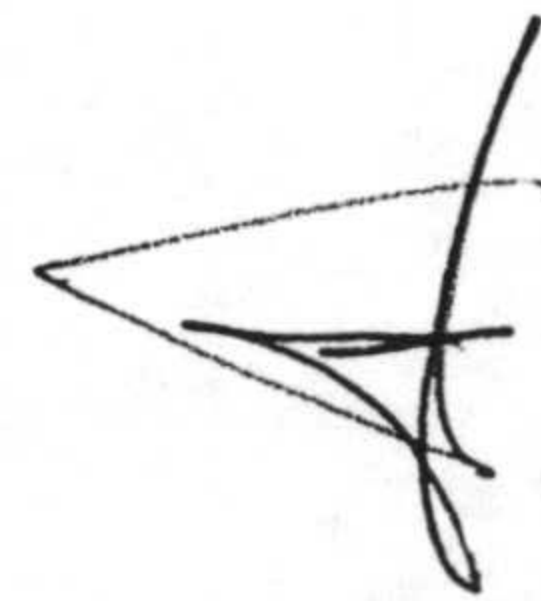
CERTIFICA: que la presente memoria, *Renormalización Diferencial de Teorías Simétricas*, ha sido realizada bajo su dirección en el Departamento de Física Teórica y del Cosmos de la Universidad de Granada, y que constituye la tesis doctoral de D. Manuel Pérez-Victoria Moreno de Barreda.

Granada, 5 de Septiembre de 1998.

El doctorando,



Fdo. Manuel Pérez-Victoria
Moreno de Barreda



Fdo. Francisco del Águila Giménez.

Agradecimientos

Deseo expresar mi sincero agradecimiento a aquellas personas que, directa o indirectamente, han hecho posible la realización de esta tesis. También agradezco a esta tesis el haber entrecruzado algunas de nuestras "líneas de mundo".

En primer lugar, doy las gracias a Paco del Águila por su orientación, su apoyo y confianza en mí, y por la oportunidad de adentrarme en el fascinante reino de las partículas elementales. Espero haber aprendido algo de su visión intuitiva de la Física y del mundo a distintas escalas, así como de su entusiasmo y capacidad de trabajo.

Gracias a Alessandro Culatti y a Ramón Muñoz Tapia por su colaboración, por su amistad, y por compartir tanto los momentos de "lo entiendo todo" como los de "no entiendo nada". A Thomas Hahn le agradezco su intenso e imprescindible trabajo en los desarrollos informáticos de esta tesis.

Gracias a los miembros del grupo y a la conexión astrofísica por haber hecho agradable y divertido mi trabajo diario, y por su disponibilidad. En particular agradezco a Juan Antonio Aguilar y a Jorge Jiménez su generosa guía por las sendas del Linux y alrededores, y a Ximo Prades por la revisión crítica del manuscrito final. También menciono de forma especial a mis supercompañeros de despacho: a José Ignacio, por su amistad y por mostrarme el camino aquí y en distintos rincones del mundo; a Javi, por los buenos momentos compartidos y por ser mejor compañero de trabajo que compañero de mus (por falta de compenetración, que no de sabiduría); a Juan Antonio, de nuevo, por sus amenos (y continuos) comentarios; a Mónica porque lo prometido es deuda; y a Rigoberto, ¿por qué no?

A los Profesores Woigang Hollik y Dan Freedman les agradezco sendas invitaciones a la Universidad de Karlsruhe y al MIT, donde he desarrollado parte de este trabajo. En especial doy las gracias a los miembros del Institut für Teoretische Physik de la Universidad de Karlsruhe por una estancia muy agradable y por permitirme el uso posterior de sus ordenadores. También agradezco a los Profesores Manfred Böhm y Graham Ross sus invitaciones a las Universidades de Würzburg y Oxford.

A mis estupendos compañeros de carrera y amigos para siempre, junto con la rama farmacéutica y resto de la panda, gracias por haberme ayudado a llegar hasta aquí, por vuestra fidelidad y por tantos buenos momentos, y perdón por no haberos dedicado todo el tiempo que os merecéis. Gracias especialmente a Fernando por haber compartido su

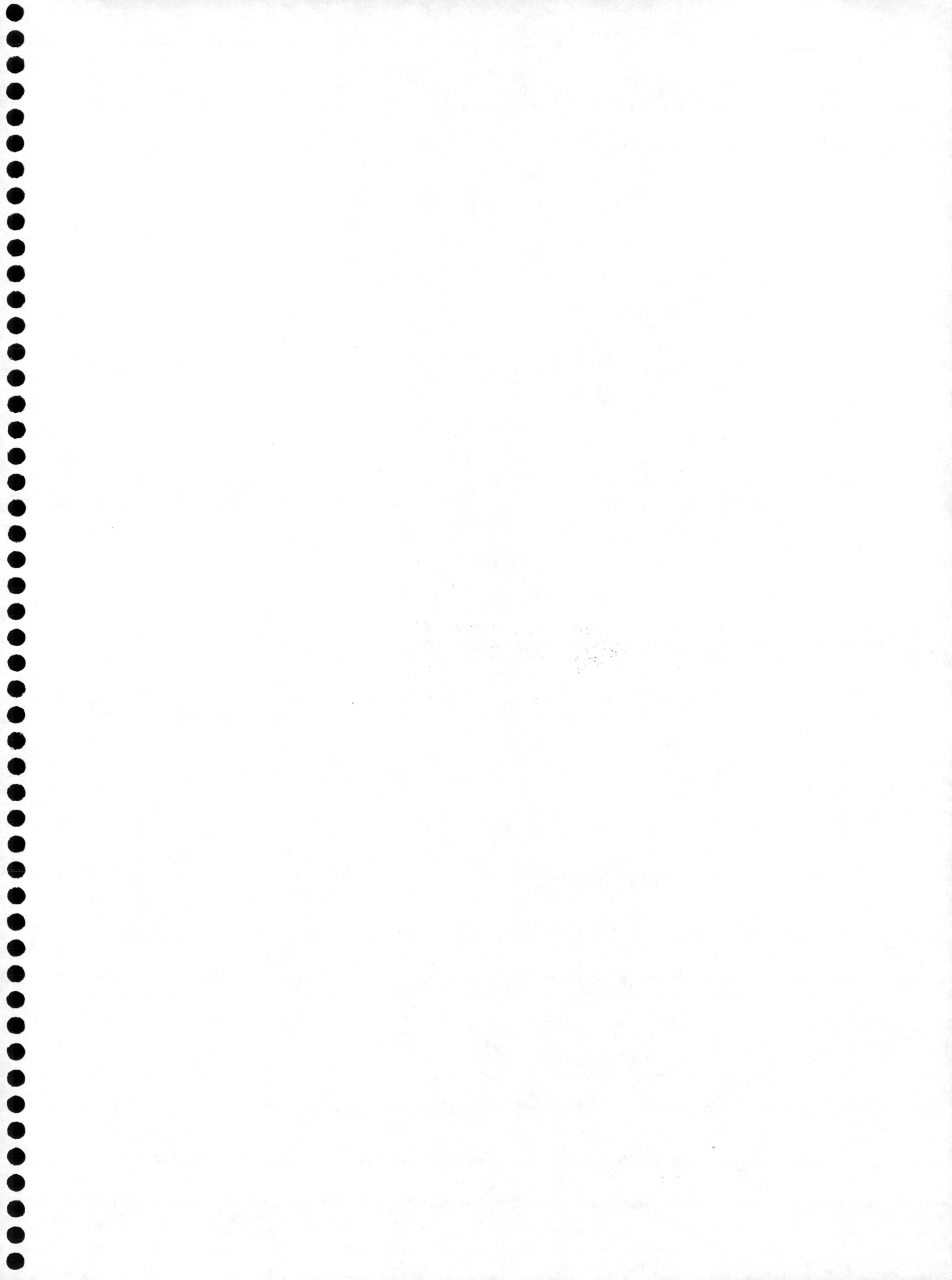
pasión por la Física y por la vida, y a Gloria, porque sí. También a aquellos amigos que, por suerte, nada tienen que ver con la Física. A Mamen le agradezco orientación, "motivación extrínseca" y muchas más cosas.

El agradecimiento a mi familia no es renormalizable. Gracias por lo que soy. A Illo y a mi padre debo en gran medida mi curiosidad por la realidad a todos los niveles. Gracias también a Thorin por su cariño incondicional.

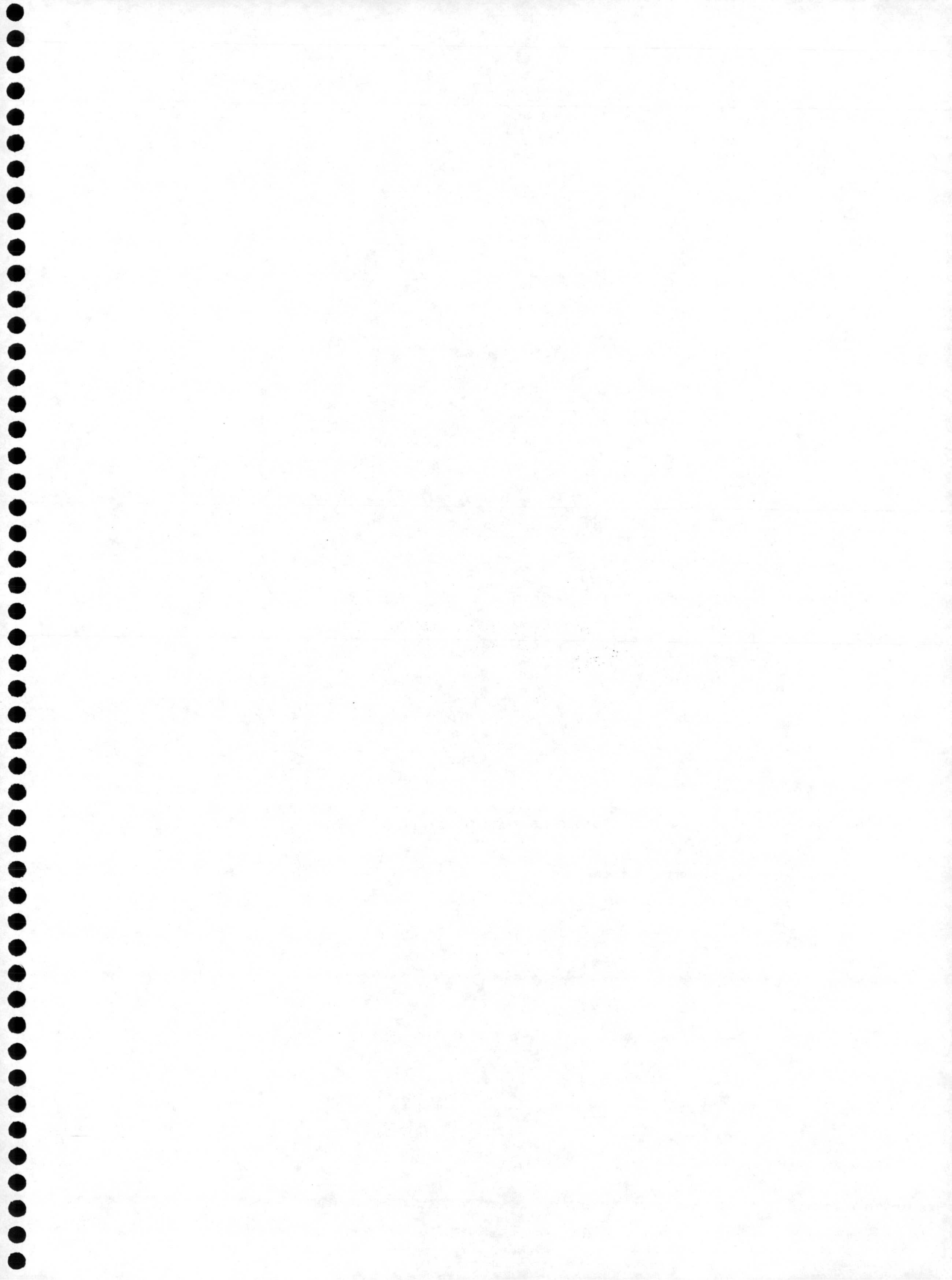
Gracias a Dios . . . por fin he terminado.

Se miente más de la cuenta
por falta de fantasía:
también la verdad se inventa.

Antonio Machado



A mi madre y a mi padre



Introducción

The White Rabbit put on his spectacles.
“Where shall I begin, please your Majesty?” he asked.
“Begin at the beginning,” the King said gravely, “and go on till you come to the end: then stop.”

Lewis Carroll

La teoría cuántica de campos nació a finales de los años veinte con el objeto de unificar los principios de mecánica cuántica y relatividad especial. Tras medio siglo de continuos e interesantes desarrollos, se ha convertido en el marco fundamental para describir y entender los componentes elementales de la materia y sus interacciones. Desde sus comienzos, se ha sabido que la teoría cuántica de campos está plagada de divergencias, debido al infinito número de grados de libertad espacio-temporales que interviene en cualquier proceso. Fue por tanto necesario inventar un procedimiento, llamado **renormalización**, para dar sentido a la teoría y obtener predicciones finitas.

Esencialmente, la renormalización consiste en absorber las divergencias en una redefinición de los parámetros originales de la teoría—que no son observables— de modo que los resultados para observables físicos sean finitos. Esta idea toma distintas formas en distintos métodos de renormalización. Por supuesto, es fundamental que el procedimiento sea coherente, de manera que se mantengan propiedades fundamentales en teoría cuántica de campos como unitariedad o invariancia Lorentz. En muchos métodos de renormalización, el primer paso es regularizar la teoría, esto es, introducir un nuevo parámetro (el regulador) tal que los cálculos sean finitos salvo en cierto límite, en que se recupera la teoría original. La regularización permite manipular los infinitos y expresar los parámetros originales en función de parámetros renormalizados (o equivalentemente, añadir *contratérminos*), de modo que se cancelen las partes que divergen en el límite en que se elimina el regulador. No obstante, también es posible abstraer las divergencias directamente sin regularización intermedia, como en el método de Bogoliubov, Parasiuk, Hepp y Zimmermann (BPHZ). La ventaja de los métodos sin regulador es que los cálculos involucran un parámetro menos, lo que evita la aparición de términos que son irrelevantes al final. Salvo en casos muy particulares, la complejidad de las teorías impide resolver exactamente su dinámica, por lo que se recurre a métodos aproximados. De

estos, el desarrollo en serie perturbativa es el más ampliamente utilizado (como prueba el hecho de que se hable de “métodos no perturbativos”), debido en gran medida a que un único formalismo permite tratar diversas teorías. En esta tesis, consideraremos únicamente renormalización en teoría de perturbaciones. De hecho, casi siempre nos restringiremos al primer orden en correcciones cuánticas.

Por otro lado, una de las ideas centrales en la física del siglo XX es la de **simetría**, entendiendo por tal el hecho de que haya “cosas que podemos hacer a las leyes físicas, o a nuestra manera de representar las leyes físicas, que no originen diferencias, y dejen todos sus efectos invariantes” [1]. Así, por ejemplo, todas las teorías relativistas son simétricas bajo el grupo propio de Lorentz. En muchos casos de interés la simetría es local, esto es, la teoría es invariante bajo transformaciones con parámetros dependientes del espacio-tiempo. Se habla entonces de simetría o invariancia *gauge*. Todas las interacciones conocidas pueden caracterizarse por teorías con invariancia *gauge* bajo distintos grupos de transformación: $SU(2) \times U(1)$ para la interacción electrodébil, $SU(3)$ para la fuerte y el grupo de Poincaré para la gravitatoria. En ocasiones, la simetría está rota, ya sea por términos explícitos asimétricos en la acción, porque el vacío no es invariante (ruptura espontánea) o porque la simetría no puede realizarse cuánticamente (anomalía). Aun en tales casos, la simetría aproximada proporciona información relevante. Un ejemplo ilustre es la simetría *gauge* $SU(2) \times U(1)$ de la interacción electrodébil, que está espontáneamente rota, quedando sólo la simetría $U(1)$ asociada a la interacción electromagnética. Otro aspecto importante de las simetrías es que van asociadas a leyes de conservación, esto es, a que determinadas magnitudes no varíen en el tiempo. Así, la invariancia de una teoría bajo traslaciones temporales implica la célebre ley de conservación de la energía.

De lo dicho se sigue la importancia de que el programa de renormalización preserve las simetrías relevantes de una teoría. De otro modo, acabaríamos con una teoría distinta y posiblemente patológica. El objetivo es claro, pero en la práctica la regularización y/o substracción de divergencias puede romper algunas de las simetrías que interesa mantener. Es necesario entonces corregir la teoría renormalizada con contratérminos finitos para recuperarlas¹. Obviamente, es más conveniente, tanto en cálculos explícitos como en demostraciones formales, que el método de renormalización preserve directamente las simetrías relevantes. Distintos métodos son adecuados para distintas simetrías, pero no existe un método universal que preserve todas las simetrías interesantes en física de partículas. El método más utilizado es regularización dimensional (combinado con substracción mínima), debido a su relativa sencillez y al hecho de que preserva invariancia *gauge*. No obstante, regularización dimensional presenta problemas en teorías quirales. En particular, no respeta supersimetría.

En 1991 D.Z. Freedman, K. Johnson y J.I. Latorre introdujeron un nuevo método de renormalización llamado **renormalización diferencial**² [2]. Este método traba-

¹En ocasiones es imposible recuperar la simetría. Este efecto se llama anomalía y tiene relevancia física.

²En el artículo original se usaba el término “regularización y renormalización diferencial” y en

ja directamente sobre diagramas de Feynman en espacio de posiciones y no introduce ningún regulador ni contratérminos explícitos. En el espacio de posiciones, las divergencias ultravioletas se manifiestan como singularidades en ciertos puntos del espacio-tiempo que conducen a expresiones mal definidas. La idea de renormalización diferencial es sustituir tales expresiones por derivadas de expresiones menos singulares. Aunque el método ha demostrado ser bastante sencillo y potente para ciertas aplicaciones, posee una importante limitación cuando se aplica a teorías con simetrías: en general, estas sólo son respetadas tras un ajuste *a posteriori* de la arbitrariedad intrínseca al procedimiento. Por tanto, al menos en su versión original, renormalización diferencial no preserva automáticamente las simetrías de una teoría, como hace regularización dimensional en el caso de invariancia *gauge*.

El propósito de este trabajo es precisamente buscar una solución a este problema. La solución que proponemos es parcial, pues sólo la concretamos al nivel de un bucle (primer orden en teoría de perturbaciones), aunque esperamos que las ideas expuestas aquí puedan generalizarse a órdenes superiores. Más que una versión alternativa de renormalización diferencial, proponemos un procedimiento para calcular en renormalización diferencial (que corresponde sencillamente a una elección de esquema). El interés del procedimiento, que hemos bautizado como *renormalización diferencial restringida*, es que directamente proporciona resultados simétricos, sin necesidad de ningún ulterior ajuste. La observación esencial que lleva a esta propuesta es que las ambigüedades inherentes a renormalización diferencial están causadas por manipulaciones que están mal definidas en el caso de expresiones demasiado singulares. Se trata entonces de usar únicamente un conjunto mínimo y coherente de manipulaciones, de modo que se eviten desde un principio las ambigüedades. Además, requerimos que estas manipulaciones sean compatibles con las simetrías que deseamos mantener. En estos desarrollos han colaborado F. del Águila, A. Culatti y R. Muñoz Tapia.

La organización de esta memoria es la siguiente. Tras una introducción general en el Capítulo 1 al método de renormalización diferencial, en el Capítulo 2 describimos en detalle el método de renormalización diferencial restringida, y damos todas las expresiones explícitas necesarias para cálculos a un bucle en teorías renormalizables. En el Capítulo 3 analizamos interesantes relaciones con otros métodos de renormalización, especialmente regularización mediante reducción dimensional. En el Capítulo 4 describimos una serie de programas informáticos que hemos desarrollado para realizar cálculos automatizados en renormalización diferencial restringida. El Capítulo 5 contiene la aplicación del método a teorías *gauge* Abelianas (electrodinámica cuántica espinorial y escalar) y no Abelianas (cromodinámica cuántica), y a teorías supersimétricas (en concreto, el cálculo de las correcciones de supergravedad al momento magnético anómalo de partículas de espín 1/2). En todos los casos comprobamos que, efecti-

la literatura posterior se habla en algunas ocasiones de "regularización diferencial" y en otras de "renormalización diferencial". Estrictamente, "regularización" se refiere a la parametrización de las divergencias mientras que "renormalización" es el proceso completo, incluyendo la substracción de divergencias. En esta tesis usaremos esta terminología, aunque en ocasiones emplearemos laxamente la palabra "renormalización" para designar una substracción.

vamente, el método preserva las simetrías relevantes. El Capítulo 7 está dedicado al caso de simetrías anómalas, ilustrado mediante la anomalía triangular de Adler, Bell y Jackiw. Finalmente, presentamos las conclusiones y comentamos futuros proyectos. Los apéndices contienen las convenciones empleadas y la derivación de las identidades de Slavnov-Taylor para teorías *gauge* no Abelianas.

Capítulo 1

Renormalización diferencial

Man's unhappiness, as I construe, comes of his greatness; it is because there is an Infinite in him, which with all his cunning he cannot quite bury under the Finite.

Thomas Carlyle

1.1 Introducción a renormalización diferencial

Las funciones de Green de una teoría cuántica de campos en espacio de coordenadas deben ser distribuciones temperadas. El problema de las divergencias ultravioletas aparece porque el producto de distribuciones temperadas no es cerrado y puede llevar a expresiones demasiado singulares para ser integrables con una función de prueba general. Estos productos de distribuciones, que en teoría de perturbaciones aparecen al multiplicar propagadores, están bien definidos como distribuciones sobre funciones de prueba cuyo soporte no contiene un entorno de los puntos coincidentes del espacio-tiempo. Desde este punto de vista, renormalizar consiste en extender tales objetos a distribuciones sobre el espacio de todas las funciones de prueba, de modo que la extensión coincida con la distribución original en el subespacio donde ésta está bien definida [3, 4]. Renormalización diferencial proporciona una prescripción para encontrar tal extensión: escribir las distribuciones originales como derivadas de distribuciones bien definidas en todo el espacio. La expresión resultante es una distribución temperada sobre todo el espacio si las derivadas se entienden en el sentido de teoría de distribuciones, esto es, actuando por partes sobre las funciones de prueba [2]. Más precisamente, si $\varphi(x_1, \dots, x_n)$, con x_i puntos de un espacio-tiempo D -dimensional, es una distribución temperada definida únicamente sobre el espacio $\mathcal{S}(R^{Dn} \setminus P)$ de funciones prueba cuyo soporte no contiene un entorno P del conjunto de puntos singulares, renormalización diferencial define la expresión renormalizada como la distribución sobre todo el espacio

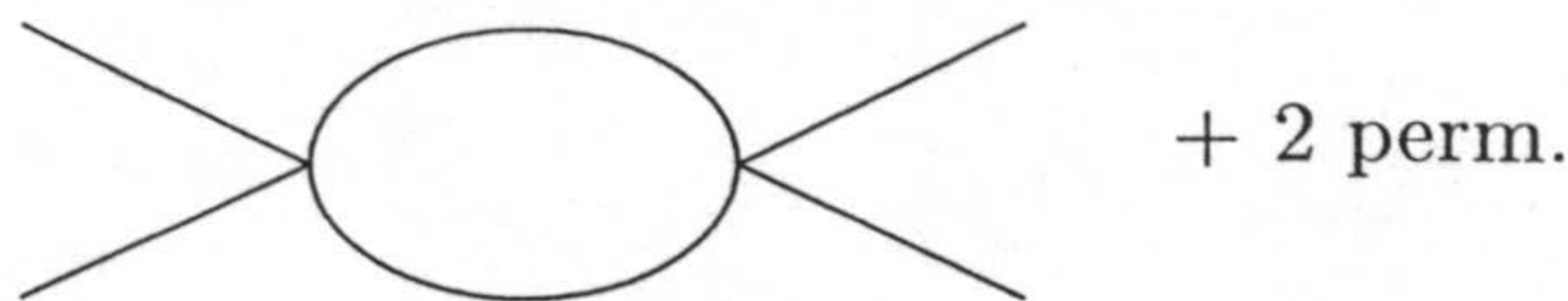


Figura 1.1: Diagrama a un bucle que contribuye al vértice de cuatro puntos en la teoría ϕ^4 .

$\mathcal{S}(R^{Dn})$

$$\varphi^R(x_1, \dots, x_n) \equiv \mathcal{O}\psi(x_1, \dots, x_n), \quad (1.1)$$

donde \mathcal{O} es un operador diferencial, ψ es una distribución temperada sobre $\mathcal{S}(R^{Dn})$ y la restricción de $\varphi^R(x_1, \dots, x_n)$ al subespacio $\mathcal{S}(R^{Dn} \setminus P)$ coincide con $\varphi(x_1, \dots, x_n)$. Más adelante veremos hasta qué punto esta prescripción proporciona una extensión única. En la práctica, encontrar la expresión renormalizada supone resolver una ecuación diferencial para los puntos no coincidentes.

Es conveniente ilustrar estas ideas mediante un ejemplo concreto. Siguiendo la Ref. [2], consideremos la corrección a 1 bucle de la función “una-partícula-irreducible” (1PI) de 4 puntos en una teoría escalar sin masa ϕ^4 en 4 dimensiones. El propagador de Feynman en espacio de posiciones es $\Delta(x-y) = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{(x-y)^2}$ y la regla de Feynman para el vértice es $-\lambda$. Salvo en el Capítulo 4, usaremos por simplicidad el espacio Euclídeo, aunque renormalización diferencial puede aplicarse igualmente al espacio de Minkowski. El diagrama que contribuye a este orden está representado en la Fig. 1.1. Usando las reglas de Feynman la correspondiente amplitud es

$$\Gamma(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{\lambda^2}{2} \frac{1}{16\pi^4} \delta(x_1 - x_2) \delta(x_3 - x_4) \frac{1}{(x_1 - x_3)^4} + 2 \text{ perm.} \quad (1.2)$$

Aunque el propagador es una distribución bien definida, para cada permutación hemos multiplicado dos propagadores entre los mismos puntos, lo que da lugar a la expresión $\frac{1}{x^4}$ (con x la diferencia entre dos puntos) que es demasiado singular en $x = 0$ para permitir una transformada de Fourier. Ésta sería logarítmicamente divergente, por lo que diremos que $\frac{1}{x^4}$ tiene una “singularidad logarítmica”. De igual modo designaremos el “grado de singularidad” de una expresión en espacio de posiciones por el grado de divergencia de la correspondiente transformada de Fourier. Obsérvese que la Ec. 1.2 está bien definida para puntos separados. Renormalización diferencial nos dice que busquemos una función G tal que

$$\frac{1}{x^4} = \square G(x^2) \quad (1.3)$$

para $x \neq 0$. $\square = \partial_\mu \partial_\mu$ es el Laplaciano en 4 dimensiones, con $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}$. En realidad, extraer una sola derivada hubiera sido suficiente en este caso. La razón para “sobresubstraer” usando dos derivadas contraídas (así como requerir que la función G dependa del

escalar x^2) es que de esta manera se preserva la invariancia Lorentz de forma manifiesta. Resolviendo la ecuación diferencial 1.3 encontramos la solución general

$$G(x^2) = -\frac{1}{4} \frac{\log x^2 M^2}{x^2} + c, \quad (1.4)$$

donde c y M son constantes de integración. La constante aditiva c no contribuye a la Ec. 1.3 y podemos suprimirla. En cambio, la constante con dimensiones de masa M es necesaria para hacer adimensional el argumento del logaritmo y juega un papel fundamental en el método de renormalización diferencial. Obsérvese que $G(x^2)$ es menos singular que $1/x^4$. La expresión renormalizada de $1/x^4$,

$$\left[\frac{1}{x^4} \right]^R = -\frac{1}{4} \square \frac{\log x^2 M^2}{x^2}, \quad (1.5)$$

es una distribución temperada que admite transformada de Fourier:

$$\begin{aligned} \int d^4x e^{ip \cdot x} \left[\frac{1}{x^4} \right]^R &= -p^2 \int d^4x e^{ip \cdot x} \left(-\frac{1}{4} \right) \frac{\log x^2 M^2}{x^2} \\ &= -\pi^2 \log \left(\frac{p^2}{M^2} \right), \end{aligned} \quad (1.6)$$

donde $\bar{M} = 2M/\gamma_E$ y $\gamma_E = 1.781\dots$ es la constante de Euler. Aquí hemos usado la prescripción fundamental de renormalización diferencial: integración formal por partes de modo que las derivadas actúen sobre la función de prueba, en este caso la exponencial. Los términos de superficie, que serían divergentes, son descartados. Aquí está la "magia" del método: implícitamente estamos substrayendo términos de superficie divergentes. Usando la Ec. 1.5 en la Ec. 1.2 obtenemos la amplitud renormalizada:

$$\begin{aligned} \Gamma^R(x_1, x_2, x_3, x_4) &= -\frac{\lambda^2}{128\pi^4} \delta(x_1 - x_2) \delta(x_3 - x_4) \square \frac{\log(x_1 - x_3)^2 M^2}{(x_1 - x_3)^2} \\ &\quad + 2 \text{ perms.} \end{aligned} \quad (1.7)$$

La expresión renormalizada en espacio de momentos se sigue directamente de la Ec. 1.6:

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}^R(p_1, p_2, p_3, p_4) &= -\frac{\lambda^2}{32\pi^2} \log \left[\frac{(p_1 + p_2)^2 (p_2 + p_3)^2 (p_1 + p_3)^2}{\bar{M}^6} \right] \\ &\quad \times (2\pi)^4 \delta \left(\sum_i p_i \right). \end{aligned} \quad (1.8)$$

La dependencia de la amplitud renormalizada en la constante arbitraria M es

$$\delta\Gamma^R = \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} \delta(x_2 - x_1) \delta(x_3 - x_1) \delta(x_4 - x_1) \frac{\delta M}{M}, \quad (1.9)$$

que tiene la misma forma que la función de 4 puntos a nivel árbol. Por tanto, cambios en la constante M pueden absorberse en una redefinición de la constante de acoplamiento λ . Esto es un indicio de que las amplitudes renormalizadas con renormalización

diferencial satisfacen ecuaciones del grupo de renormalización, siendo M la escala de renormalización. Cálculos a órdenes superiores confirman esta sospecha (aunque no existe aún una demostración rigurosa), indicando que renormalización diferencial trata de forma adecuada diagramas con subdivergencias.

Como al resolver la ecuación diferencial sólo hemos pedido que la expresión original y la renormalizada coincidan en puntos separados, está claro que aún queda la libertad de añadir a la expresión renormalizada términos locales, es decir, distribuciones que sólo dependan del valor de las funciones de prueba (o sus derivadas) en el origen. Esto significa que, una vez fijada la expresión renormalizada para puntos no coincidentes, existe cierta ambigüedad en la expresión final sobre todo el espacio (en el sentido de distribuciones). Esta ambigüedad corresponde a combinaciones lineales con coeficientes arbitrarios de funciones delta de Dirac y sus derivadas. En principio, serían posibles términos con un número arbitrario de derivadas actuando sobre funciones delta. Para impedirlo, introducimos un nuevo requisito (que puede sustituir la definición original de la renormalización). Dijimos que las amplitudes desnudas estaban bien definidas como distribuciones sobre el espacio de funciones de prueba cuyo soporte no incluye un entorno de los puntos singulares. En realidad este espacio puede extenderse a funciones de prueba que valen cero en los puntos singulares y cuyas r primeras derivadas también se anulan en esos puntos, siendo r el grado de singularidad de la expresión desnuda. Requerimos entonces que la expresión renormalizada coincida con la expresión original en este espacio extendido de funciones prueba donde ambas están bien definidas. Este requisito es más fuerte que el original y prohíbe términos cuyos coeficientes tengan dimensiones de masa negativas. Por ejemplo, supongamos que a la expresión renormalizada de la Ec. 1.5 añadimos el término $b\Box\delta(x)$ donde, por análisis dimensional, $[b] = -2$. Al actuar sobre la función de prueba $x^2 e^{ix\cdot p}$, que vale cero en $x = 0$, este término da un valor no nulo: $8b$. Como tanto $1/x^4$ como el miembro derecho de la Ec. 1.5 dan el mismo resultado, $4\pi^2/p^2$, se sigue que el coeficiente b ha de ser nulo. El único término local que podemos añadir a la Ec. 1.5 es de la forma $a\delta(x)$, con a una constante adimensional arbitraria. Al actuar sobre la función de prueba considerada arriba este término da un resultado nulo y lo mismo ocurre para cualquier función que se anule en $x = 0$. En realidad, por lo visto anteriormente en relación con la dependencia en la escala de renormalización, añadir este término local es equivalente a una redefinición de M en la Ec. 1.5. Por lo tanto, en este caso, M parametriza toda la ambigüedad del proceso de renormalización. En general, es posible añadir funciones delta y derivadas de funciones delta con coeficientes cuyas dimensiones están comprendidas entre 0 y $d - 4$, siendo d la dimensión de la expresión original (sin considerar masas, si las hubiera). El coeficiente de dimensión $d - 4$ siempre puede absorberse en una redefinición de la escala logarítmica. Por ejemplo, la expresión renormalizada más general de $1/x^6$ es

$$\left[\frac{1}{x^6}\right]^R = -\frac{1}{32}\Box\Box\frac{\log x^2 M'^2}{x^2} + \mu^2\delta(x), \quad (1.10)$$

donde hemos suprimido el posible término proporcional a $\Box\delta(x)$ por ser equivalente a una redefinición de M' , y la constante μ tiene dimensiones de masa. En principio,

M , M' y μ son independientes. Fijar sus valores supone determinar el esquema de renormalización.

Hasta ahora en ninguno de los ejemplos considerados han aparecido masas. Las masas están relacionadas con el comportamiento a grandes distancias y no deberían interferir en el proceso de renormalización. De hecho, todo lo dicho anteriormente se aplica igualmente a teorías masivas. No se necesita ningún nuevo principio. La única diferencia es que antes de renormalizar, la teoría ya tiene un parámetro con dimensiones por lo que no es absolutamente necesario (aunque sí conveniente) introducir una escala de renormalización independiente. Desde un punto de vista práctico, las ecuaciones diferenciales a resolver son más complicadas debido a la forma del propagador masivo en espacio de coordenadas:

$$\Delta_m(x-y) = \frac{1}{4\pi^2} \frac{mK_1(m|x-y|)}{|x-y|} \quad (1.11)$$

donde K_1 es una función modificada de Bessel, tal y como se define en la Ref. [5] y $|x| = \sqrt{x^2}$. En adelante, cuando no haya posibilidad de confusión, utilizaremos la notación " x " para designar tanto el vector x como su módulo $|x|$. La función a 4 puntos a un bucle en el caso de escalares masivos contiene la función singular $m^2 K_1^2(mx)/x^2$, que se comporta como $1/x^4$ en $x \sim 0$. Resolviendo la correspondiente ecuación diferencial se obtiene [6]

$$\left[\frac{m^2 K_1^2(mx)}{x^2} \right]^R = \frac{1}{2} (\square - 4m^2) \frac{mK_0(mx)K_1(mx)}{x} + \pi^2 \log \frac{\bar{M}^2}{m^2} \delta(x), \quad (1.12)$$

donde \bar{M} se define como antes. Nótese que suprimiendo el último término tendríamos una expresión válida que no contiene más escala que m . Esto es lo mismo que tomar $\bar{M} = m$ y lleva a un esquema de renormalización dependiente de la masa. La expresión más general incluye un término local. La forma explícita que hemos elegido hace que el límite sin masa de la expresión renormalizada coincida con $[1/x^4]^R$ y da lugar a un esquema independiente de la masa. Obsérvese también el operador $\square - 4m^2$, que está relacionado con el umbral de producción de dos partículas de masa m .

Para terminar esta introducción, veamos brevemente la relación entre las prescripciones de regularización diferencial y el procedimiento habitual de añadir contratérminos a la acción. Para ello, seguimos literalmente la Ref. [2] e introducimos en el primer ejemplo un *cutoff* ultravioleta, excluyendo una pequeña bola B_ϵ de radio ϵ en torno al origen:

$$\int_{R^4 \setminus B_\epsilon} d^4x f(x) \square \frac{\log x^2 M^2}{x^2} = - \int_{R^4 \setminus B_\epsilon} d^4x \partial_\mu f(x) \partial_\mu \frac{\log x^2 M^2}{x^2} - \int_{S_\epsilon} d\sigma_\mu f(x) \partial_\mu \frac{\log x^2 M^2}{x^2}, \quad (1.13)$$

donde $d\sigma_\mu = \epsilon^3 \hat{x}_\mu d\hat{x}$ es el elemento de volumen normal de la 3-esfera S_ϵ , que es la frontera de B_ϵ . La primera integral está bien definida en el límite $\epsilon \rightarrow 0$. La segunda

integral, en cambio, diverge en ese límite. Desarrollando en ϵ , su contribución es

$$\int_{S_\epsilon} d\sigma_\mu f(x) \partial_\mu \frac{\log x^2 M^2}{x^2} = 4\pi^2 f(0)(1 - \log \epsilon^2 M^2) + O(\epsilon). \quad (1.14)$$

La divergencia correspondiente en el vértice de 4 puntos, al ser local, puede cancelarse añadiendo a la acción un contratérmino proporcional a $\int d^4x (1 - \log \epsilon^2 M^2) \phi^4(x)$. La prescripción de integración formal por partes de renormalización diferencial, que directamente suprime la integral de superficie, es por tanto equivalente a la adición de contratérminos divergentes a la acción. Estos resultados fueron generalizados a órdenes mayores (hasta tres bucles en una teoría ϕ^4) por D.Z. Freedman, K. Johnson, R. Muñoz Tapia y X. Vilasís-Cardona [7]. Por supuesto, que renormalización diferencial sea equivalente a la inclusión de contratérminos locales en la acción está relacionado con que el hecho de que se satisfaga la ecuación del grupo de renormalización. En la Ref. [7] se comprobó además que tales contratérminos son hermíticos, lo que asegura la unitariedad de la teoría renormalizada. Aunque estos estudios son importantes para investigar las propiedades de renormalización diferencial, el método en sí no requiere invocar ninguna regularización ni el uso de contratérminos¹. En este sentido se parece al método BPHZ [3, 9, 10]. Al igual que en este esquema, el correcto tratamiento de las subdivergencias sólo está asegurado por la correcta estructuración de las substracciones. Este es el tema de la siguiente sección.

1.2 Renormalización diferencial a órdenes superiores

Como en cualquier método de renormalización, la estrategia general para tratar diagramas con un número arbitrario de bucles con renormalización diferencial comienza por identificar y renormalizar los subdiagramas divergentes. El resultado no será en general una distribución bien definida, con lo que hay que repetir el proceso hasta que se renormaliza la divergencia global. Más adelante describiremos este procedimiento con más precisión, pero antes veamos un ejemplo, de nuevo en la teoría ϕ^4 sin masa: la renormalización de la corrección a tres bucles a la función de 2 puntos. Una vez más seguimos la Ref. [2]. El único diagrama que contribuye está representado en la Fig. 1.2 y su expresión desnuda es

$$\Sigma(x_1, x_2) = \frac{1}{4} \frac{\lambda^3}{(4\pi^2)^5} \frac{1}{(x_1 - x_2)^2} \int d^4u \frac{1}{(x_1 - u)^4 (u - x_2)^4}. \quad (1.15)$$

Cada factor dentro de la integral se renormaliza usando la Ec. 1.5, lo que suaviza su comportamiento cuando el punto interno u se acerca a x_1 o a x_2 :

$$\begin{aligned} \int d^4u \frac{1}{(x_1 - u)^4 (u - x_2)^4} &\rightarrow \frac{1}{16} \square_{x_1} \square_{x_2} \int d^4u \frac{\log(x_1 - u)^2 M^2 \log(u - x_2)^2 M^2}{(x_1 - u)^2 (u - x_2)^2} \\ &= \frac{-\pi^2}{4} \square_{x_1} \frac{\log^2(x_1 - x_2)^2 M^2}{(x_1 - x_2)^2}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

¹En nuestra opinión, la expansión a cortas distancias (como la considerada aquí) usada en la Ref. [8] tiene poco que ver con renormalización diferencial, además de violar invariancia *gauge*.

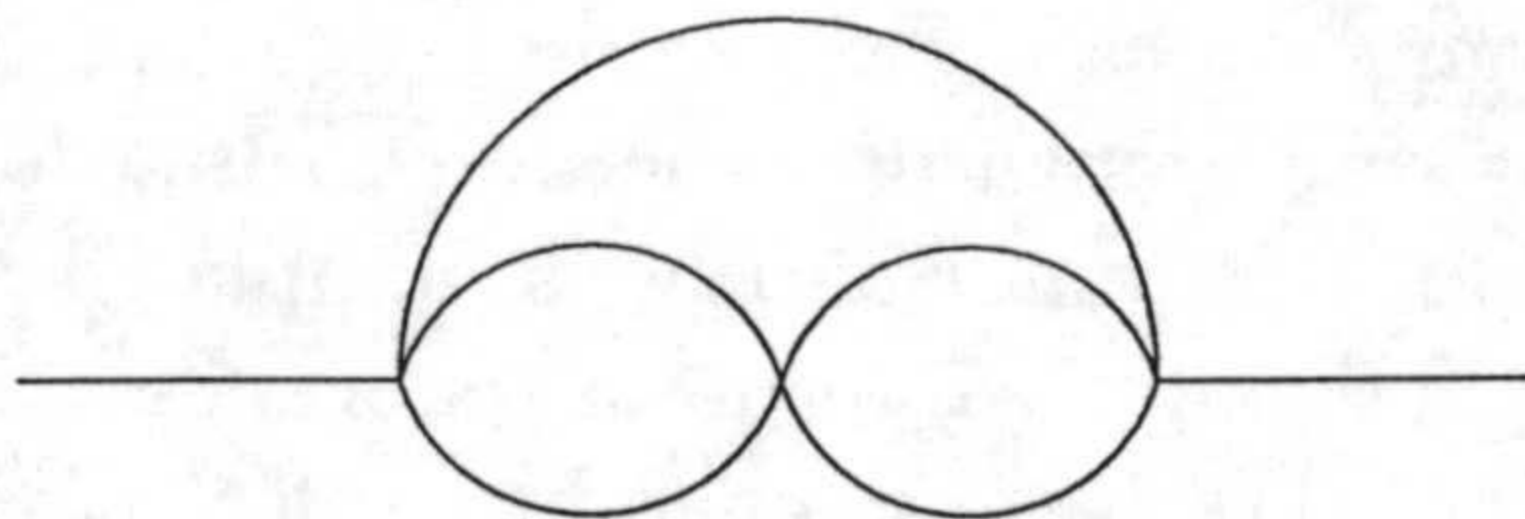


Figura 1.2: Diagrama de Feynman que contribuye a tres bucles a la autoenergía del campo escalar en una teoría ϕ^4 .

La expresión resultante de sustituir la Ec. 1.16 en la Ec. 1.15 contiene aún una singularidad global cuadrática en $x_1 = x_2$. Para renormalizarla, buscamos una función $J(x^2)$ que cumpla

$$\begin{aligned} \square\square J(x^2) &= \frac{1}{x^2} \square \frac{\log^2 x^2 M^2}{x^2} \\ &= 8 \frac{1 - \log x^2 M^2}{x^6}, \quad x \neq 0. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Resolviendo la ecuación diferencial se obtiene (manteniendo sólo las constantes de integración relevantes)

$$J(x^2) = \frac{1}{8} \frac{\log^2 x^2 M^2 + 3 \log x^2 M^2}{x^2}. \quad (1.18)$$

Obsérvese que la escala en el término con el logaritmo al cuadrado está determinada por la escala asignada al subdiagrama a un bucle, en tanto que la del logaritmo sencillo es independiente. Esto no es más que el grupo de renormalización en acción: las potencias más altas de logaritmos están determinadas por potencias más bajas asociadas a subdiagramas, mientras que el término con $\log x^2 M^2$ refleja la singularidad global y proporciona la contribución a tres bucles a la dimensión anómala del campo. Un posible esquema de renormalización resulta de elegir $M' = M$. Poniendo todo junto, la corrección a tres bucles de la amplitud renormalizada es

$$\Sigma^R(x_1, x_2) = -\frac{\pi^2}{128} \frac{\lambda^3}{(4\pi^2)^5} \square\square \frac{\log^2(x_1 - x_2)^2 M^2 + 3 \log(x_1 - x_2)^2 M^2}{(x_1 - x_2)^2}. \quad (1.19)$$

Estas ideas fueron sistematizadas por J.I. Latorre, C. Manuel y X. Vilasís-Cardona en la Ref. [11]. El procedimiento es recursivo. En primer lugar, se define una substracción (o, equivalentemente, una "substitución") para diagramas primitivamente divergentes. Identidades como la Ec. 1.5 definen una substracción para divergencias que ocurren cuando dos puntos coinciden. Cuando las divergencias ocurren al coincidir más de dos puntos, el problema se reduce al caso anterior eligiendo un par de ellos e integrando sobre los demás². Esto es posible gracias a que no hay divergencias cuando todos los puntos menos uno se hacen coincidir, y está relacionado con el hecho de

²Este método de reducción puede invalidarse por la aparición de divergencias infrarrojas al efectuar las integrales. Aunque no existe una demostración rigurosa a todo orden, estas divergencias se evitan en todos los casos estudiados (hasta cinco bucles) con el simple truco de elegir los puntos adecuados e insertar una función adecuada que sea igual a la unidad en los puntos singulares [12].

que la substracción a realizar es local. En segundo lugar, la renormalización de diagramas con subdivergencias se organiza de acuerdo con una fórmula de bosques [10]. Esto garantiza que las amplitudes renormalizadas cumplan las ecuaciones del grupo de renormalización. Un aspecto interesante de la renormalización en espacio de coordenadas, recalado en la Ref. [11], es que, cuando se efectúan substracciones locales, las regiones potencialmente divergentes se mantienen separadas por la estructura de la fórmula de recurrencia de Bogoliubov [3]. Las divergencias solapadas, que ocurren al intersectar dos o más subdiagramas divergentes que no están incluidos uno en el otro, no representan un problema extra ya que una vez que las subdivergencias dentro de cada subdiagrama han sido “curadas”, las regiones problemáticas de cada subdiagrama permanecen claramente separadas. Por tanto, pueden tratarse por separado mediante una substracción local adecuada y la substracción final, después de “curar” todas las subdivergencias, será siempre local.

Aunque tal y como anunciamos en la introducción, en este trabajo sólo se considera renormalización perturbativa, es interesante hacer notar que renormalización diferencial también ha sido aplicada a cálculos no perturbativos [13, 14].

1.3 Renormalización diferencial y simetrías

La motivación original para proponer este nuevo método de renormalización era la esperanza de que respetara las simetrías de las teorías *gauge* quirales y supersimétricas. En esta sección veremos que renormalización diferencial sólo respeta las simetrías cuando estas se imponen explícitamente. En la teoría cuántica las simetrías se traducen en un conjunto de identidades de Ward [15] entre las funciones de Green. Hemos por tanto de estudiar si renormalización diferencial preserva estas identidades. Consideraremos como ejemplo QED (electrodinámica cuántica) con electrones sin masa. La simetría *gauge* abeliana de la teoría, incluso rota con un término (lineal) de fijación del *gauge*, implica una serie de identidades de Ward, conocidas como identidades de Ward-Takahashi [15, 16]. La renormalización diferencial de la polarización del vacío a un bucle da el resultado (ver Ref. [2] para más detalles)

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^R(x) = & -\frac{1}{3} \frac{1}{(4\pi^2)^2} (\partial_\mu \partial_\nu - \delta_{\mu\nu} \square) \square \frac{\log x^2 M_1^2}{x^2} \\ & - \delta_{\mu\nu} \left(\frac{1}{16\pi^2} \log \frac{M_2^2}{M_1^2} \square \delta(x) - \frac{8}{\pi^2} \mu^2 \delta(x) \right), \end{aligned} \quad (1.20)$$

donde x es la diferencia entre los dos puntos de la función, M_1 es la escala de renormalización de la parte logarítmicamente singular y M_2 y μ son escalas de renormalización (asociadas a $\square \delta(x)$ y $\delta(x)$, respectivamente) de la parte con singularidad cuadrática. Una identidad de Ward-Takahashi exige que la polarización del vacío sea transversa. Por tanto, debemos tomar $M_1 = M_2$ y $\mu = 0$. En otros casos la relación entre escalas de renormalización no es tan sencilla. Por ejemplo, la identidad de Ward-Takahashi que relaciona el vértice, V_μ , con la autoenergía del electrón, Σ , sólo se satisface cuando

las escalas de renormalización de ambas amplitudes cumplen la relación $\log \frac{M_\Sigma}{M_V} = \frac{1}{4}$ [2]³. Estas relaciones entre escalas dependen en general de las manipulaciones efectuadas para encontrar la forma renormalizada de cada amplitud.

Llegados a este punto es natural hacerse dos preguntas: ¿Es posible siempre ajustar las escalas de renormalización de forma que se cumplan las identidades de Ward deseadas? y si es así, ¿cuándo es necesario considerar escalas independientes? La respuesta a la primera pregunta es afirmativa salvo en el caso de anomalías. Las anomalías se manifiestan en renormalización diferencial como falta de libertad en la elección de escalas para satisfacer las identidades de Ward correspondientes. La respuesta a la segunda pregunta en la literatura es de carácter práctico y algo tautológica: introduzca escalas independientes allí donde sea necesario (distintas amplitudes, distintas estructuras tensoriales ...). En realidad, existe una respuesta general y sencilla, que además clarifica el sí a la primera pregunta: es necesaria una escala independiente para cada estructura correspondiente a un término en el Lagrangiano. De hecho, los ajustes de escalas son equivalentes a la adición de contratérminos finitos al Lagrangiano, y es sabido que este procedimiento puede restaurar cualquier simetría no anómala. De todos modos la situación no es muy satisfactoria ya que exige estudiar explícitamente las identidades de Ward después de cada cálculo. En el siguiente capítulo proponemos un procedimiento para fijar desde un principio la ambigüedad del método de modo que se verifiquen directamente las identidades de Ward.

1.4 Otras versiones de renormalización diferencial

Aunque nuestro procedimiento se basa en la versión original de renormalización diferencial que hemos discutido hasta el momento, no está de más recordar que existen otras versiones de renormalización diferencial.

Destacamos la versión desarrollada por V.A. Smirnov en una serie de artículos [12, 18, 19, 20], basada en extraer el operador diferencial $\hat{S} = \frac{1}{2} \partial_\alpha x_\alpha$ en lugar del Laplaciano. Por ejemplo,

$$\left[\frac{1}{x^4} \right]^R = \hat{S} \frac{\log M^2 x^2}{x^4}. \quad (1.21)$$

Para divergencias más fuertes se usan, en lugar de \hat{S} , operadores adimensionales con más derivadas y en el caso de líneas masivas se usan las propiedades de homogeneidad de los diagramas de Feynman para generalizar el operador \hat{S} a

$$\hat{S} = \frac{1}{2} \left(\partial_\alpha x_\alpha - m \frac{\partial}{\partial m} \right). \quad (1.22)$$

Según Smirnov, la ventaja de este sistema es que no es necesario reducir el problema de renormalización a funciones de dos puntos. Por tanto, renormalización diferencial se

³Estos resultados fueron obtenidos en el *gauge* de Feynman. En un *gauge* más general es necesario introducir más escalas de renormalización independientes, de modo que al final exista la libertad suficiente para imponer la identidad de Ward-Takahashi [17].

puede aplicar a diagramas de complejidad arbitraria y no existe el riesgo de divergencias infrarrojas. Más aún, las mismas ideas pueden aplicarse directamente al espacio de momentos. El problema de esta versión de renormalización diferencial es que la operación de renormalización no conmuta con diferenciación. Ello hace que las identidades de Ward y otras propiedades de teoría cuántica de campos no se preserven. Sin embargo, al igual que en la versión original, es posible ajustar las escalas de renormalización para recuperar las propiedades deseadas. Por otro lado, gracias a que en su versión es posible modificar sólo determinados propagadores de un diagrama de Feynman, Smirnov propuso un procedimiento de renormalización diferencial que preserva invariancia *gauge* en QED [21]. Se trata sencillamente de modificar únicamente los propagadores de fotones (que actúan de espectadores en las identidades de Ward-Takahashi) dejando intactos los propagadores de electrones. De esta manera es posible renormalizar la teoría a todo orden manteniendo invariancia *gauge* (salvo la polarización del vacío a un bucle que debe tratarse independientemente). Sin embargo esta idea depende totalmente de la estructura de QED y no puede generalizarse a teorías *gauge* no abelianas o con otras simetrías.

Un enfoque cualitativamente distinto es el de O. Schnetz en la Ref. [22]. Su versión de renormalización diferencial parte de la observación siguiente: en la transformada de Fourier de expresiones singulares como $1/x^4$ y $1/x^6$ uno puede realizar primero la integral en variables angulares (que es convergente) y aislar la divergencia en una integral radial. Es posible entonces dar una definición de esta integral renormalizada. Comparando con los resultados de la transformada de Fourier de $[1/x^4]^R$ y $[1/x^6]^R$ renormalizadas con renormalización diferencial, se encuentra que la universalidad de la renormalización de la integral radial requiere una relación determinada entre las escalas de renormalización de $[1/x^4]^R$ y $[1/x^6]^R$. De esta manera puede encontrarse una elección “natural” de todas las escalas de renormalización diferencial. Lamentablemente, tal elección viola invariancia *gauge*, por lo que no resulta muy práctica. En realidad el método de Schnetz, llamado renormalización natural, termina separándose bastante de renormalización diferencial. En cierto modo se trata de un método “matemático”, que extiende la teoría de distribuciones a un espacio de funciones de prueba singulares, de forma que el producto de distribuciones tenga sentido.

Finalmente, en la Ref. [23] se investigó la posibilidad de utilizar renormalización diferencial para tratar divergencias infrarrojas. Los autores entendieron como fracaso el hecho de que se obtuvieran distintos resultados para distintos órdenes de integración. En opinión de Smirnov, en cambio, “la situación no parece inconsistente: estos resultados diferentes corresponden de hecho a distintas definiciones de la renormalización infrarroja que involucra, como en su análogo ultravioleta, una arbitrariedad finita natural” [12]. El mismo Smirnov propone en la Ref. [20] una generalización de su versión para tratar divergencias infrarrojas.

Capítulo 2

Renormalización diferencial restringida

En este capítulo describimos un método para cálculos a primer orden con renormalización diferencial que proporciona automáticamente resultados simétricos. Para motivarlo, dedicamos inicialmente una sección a la arbitrariedad que aparece en renormalización diferencial y otro a la relación entre el principio de acción cuántico y renormalización.

2.1 Ambigüedades en renormalización diferencial

En principio, podría pensarse que una forma de preservar las simetrías en renormalización diferencial es asignar siempre la misma escala a la renormalización de expresiones idénticas y que, en todo caso, habría que relacionar al final las escalas correspondientes a expresiones distintas. Incluso cabría confiar en que tal relación fuera universal, esto es, no dependiera del lugar o la teoría donde aparecen esas expresiones. Esta idea no es directamente válida debido a que es necesario manipular las expresiones originales dadas por las reglas de Feynman para llevarlas a una forma tal que se puedan efectuar las substituciones de renormalización diferencial. Al estar mal definidas estas expresiones, es posible que distintas manipulaciones conduzcan a distintos resultados antes de renormalizar. Consideremos por ejemplo la expresión logarítmicamente singular $\frac{1}{x^2} \log x^2 \mu^2$, que puede aparecer a un bucle en expansiones en masa y cálculos en un *gauge* covariante general, o bien a órdenes mayores tras renormalizar subdiagramas divergentes. Si actuamos con el Laplaciano sobre el logaritmo, se obtiene $4/x^4$. En cambio, si usamos la regla de Leibniz para mover una de las derivadas sobre $1/x^2$ y actuamos después con estas, resulta la expresión

$$\partial_\alpha \left(\frac{1}{x^2} \partial_\alpha \log x^2 \mu^2 \right) - \partial_\alpha \frac{1}{x^2} \partial_\alpha \log x^2 \mu^2 = 4\pi^2 \delta(x) + \frac{4}{x^4}, \quad (2.1)$$

que difiere en un término local de la anterior. Si renormalizamos siempre $\frac{1}{x^4}$ con la misma escala, es obvio que el resultado final será distinto según las manipulaciones previas que hayamos efectuado. Esto ocurre porque, aunque las operaciones realizadas están bien definidas para cada factor aislado, no lo están cuando multiplicamos por un factor singular tal que el conjunto no es una buena distribución. Otra forma de exponerlo es que las expresiones desnudas son distribuciones sobre un espacio restringido de funciones de prueba, con lo que valen lo mismo (en este sentido) si se les añade un término local (que da cero sobre cualquier función de prueba de ese espacio). Este fenómeno es equivalente al conocido hecho de que ciertas operaciones en el espacio de momentos, como una traslación de la variable de integración, estén mal definidas cuando las integrales divergen.

Para evitar este tipo de ambigüedades es necesario usar sólo un conjunto mínimo y coherente de operaciones, de tal manera que el resultado sea único. Por otro lado, nos interesa que las operaciones permitidas no violen las simetrías relevantes de la teoría considerada. Este tema quedará más claro tras la discusión en la siguiente sección.

2.2 Renormalización y el principio de acción cuántico

Muchas de las propiedades estructurales de las teorías cuánticas de campos, como identidades de Ward, ecuaciones de movimiento (de Schwinger-Dyson) o ecuaciones del grupo de renormalización están contenidas en el principio de acción de Schwinger [24], que nos dice cómo cambian las funciones de Green de una teoría ante una variación de sus campos (cuánticos o externos) o de sus parámetros. La versión renormalizada fue desarrollada en las Refs. [25]. Este *principio de acción cuántico* caracteriza a cualquier orden las propiedades de localidad y grado de divergencia de las posibles rupturas de simetría originadas en la renormalización. Si se verifica el principio de acción cuántico, tales rupturas pueden ser eliminadas mediante la introducción de contratérminos finitos asimétricos (ver, por ejemplo, la Ref [26]). Nosotros estamos interesados más bien en el principio de acción cuántico "exacto", es decir, en que los términos asimétricos sean directamente nulos. A continuación describimos brevemente el principio de acción cuántico y su relación con las identidades de Ward. Esta exposición está basada en la de la Ref. [27].

Consideremos una teoría descrita por el la acción $S = \int dx \mathcal{L}$, con Lagrangiano $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I$, donde la parte libre es de la forma $\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \phi_i(x) D_{ij} \phi_j(x)$ y D_{ij} es un operador diferencial de segundo orden. Designaremos por ϕ el conjunto de campos $\{\phi_i\}$. El principio de acción cuántico se expresa más concisamente en términos del funcional generador de funciones de Green conexas, dado por la serie de Gell-Mann-Low¹

$$W[J] = \langle \exp\left\{-\int d^4x \mathcal{L}_I(\phi(x))\right\} \rangle_c^0, \quad (2.2)$$

¹Usamos aquí la notación de la Ref [27], que difiere de la usada en el resto de la memoria (ver Apéndice A).

donde $\langle \rangle_c^0$ designa la parte conexa del valor esperado en el vacío del producto temporalmente ordenado, evaluado en la teoría libre dada por \mathcal{L}_0 . Suponemos además que \mathcal{L}_I contiene un término de fuentes $J(x)\phi(x)$, que permiten expresar las funciones de Green (conexas) como derivadas funcionales de W . El principio de acción afirma que variaciones de los campos $\delta\phi_i(x) = P_i^a(\phi(x))\delta\epsilon^a(x)$, con P_i funciones polinómicas, dejan el funcional generador invariante:

$$0 = \langle \delta S \exp\{-\int d^4x \mathcal{L}_I(\phi(x))\} \rangle_c^0, \quad (2.3)$$

donde δS es la parte lineal en $\delta\epsilon$ de $S[\phi + \delta\phi] - S[\phi]$, que puede escribirse como

$$\delta S = \int dx P_i^a(\phi(x)) \left[\frac{\delta S}{\delta\phi_i(x)} - \partial_\mu \frac{\delta S}{\delta\partial_\mu\phi_i(x)} \right] \delta\epsilon^a(x). \quad (2.4)$$

El principio de acción cuántico también describe la variación del funcional generador respecto a campos externos o a parámetros de la teoría, pero aquí nos restringimos a las Ecs. 2.3 y 2.4, de las que pueden derivarse las identidades de Ward. En efecto, tomemos (como ejemplo) transformaciones infinitesimales bajo cierto grupo de Lie,

$$\delta\phi_i(x) = t_{ij}^a \phi_j(x) \delta\epsilon^a(x). \quad (2.5)$$

La Ec. 2.4 para $P_i^a(\phi) = t_{ij}^a \phi_j$ se reduce a

$$\delta S = \int dx \left(\delta_a \mathcal{L}(x) - \partial_\mu \mathcal{J}_\mu^a(x) \right) \delta\epsilon^a(x), \quad (2.6)$$

con las definiciones $\delta_a \mathcal{L}(x) = t_{ij}^a \phi_j(x) \frac{\delta S}{\delta\phi_i(x)}$ y $\mathcal{J}_\mu^a(x) = \frac{\delta S}{\delta\partial_\mu\phi_i(x)} t_{ij}^a \phi_j(x)$. Aislado el término de las fuentes, la Ec. 2.3 da directamente la identidad de Ward

$$0 = \langle [\partial^\mu \mathcal{J}_\mu^a(x) - \delta_a \bar{\mathcal{L}}(x) - J_i(x) t_{ij}^a \phi_j(x)] \exp\{-\int dx \mathcal{L}_I(\phi(x))\} \rangle_c^0, \quad (2.7)$$

donde $\bar{\mathcal{L}}$ es el Lagrangiano sin término de fuentes. Esta derivación puede extenderse trivialmente a otras transformaciones de simetría (ver, por ejemplo, el caso de BRST [28] en el Apéndice B).

Todas estas identidades son solamente formales, pues involucran objetos mal definidos a causa de las divergencias ultravioletas. La renormalización puede invalidarlas, debido fundamentalmente (en teoría de perturbaciones) al tratamiento asimétrico de \mathcal{L}_0 y \mathcal{L}_I en la definición de W mediante diagramas de Feynman: \mathcal{L}_0 determina las líneas y \mathcal{L}_I los vértices. Separando estas dos partes podemos reescribir la Ec. 2.3 como

$$\begin{aligned} & \langle P_i^a(\phi(x)) D_{ij} \phi_j(x) \exp\{-\int dx \mathcal{L}_I(\phi(x))\} \rangle_c^0 = \\ & - \langle P_i^a(\phi(x)) \left[\frac{\delta S_I}{\delta\phi_i(x)} - \partial_\mu \frac{\delta S_I}{\delta\partial_\mu\phi_i(x)} \right] \exp\{-\int d^4x \mathcal{L}_I(\phi(x))\} \rangle_c^0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

La reducción de la Ec. 2.8 a diagramas de Feynman se expresa en la siguiente propiedad: *insertar en una línea el operador D_{ij} es equivalente a la contracción de esa línea a un punto, es decir, a substituir el correspondiente propagador por una función delta* (para una discusión diagramática, ver la Ref. [29]). Como todos los propagadores estándar son de la forma

$$(D^{-1})_{ij} = \mathcal{Z}_{ij} \Delta_m(x), \quad (2.9)$$

con $D_{ij} \mathcal{Z}_{jk} = -\delta_{ik} (\square - m^2)$, esta propiedad se reduce a

$$F(\square^x - m^2) \Delta_m(x) = F(-\delta(x)), \quad (2.10)$$

donde F representa el resto del diagrama de Feynman. Una renormalización perturbativa que conmute con el principio de acción cuántico debe preservar esta ecuación, que en principio no está bien definida cuando F es demasiado singular. Además deben preservarse otras propiedades que hemos usado implícitamente, y que no están bien definidas en el caso de expresiones singulares. En la Ref. [27] se demostró que regularización dimensional con substracción mínima respeta estas propiedades y por tanto el principio de acción cuántico. En renormalización diferencial no disponemos de ningún regulador explícito para dar sentido a estas identidades. Sin embargo, podemos usar la ambigüedad inherente al método para imponer condiciones sencillas que aseguren la validez de las propiedades relevantes. Un punto delicado es que la definición de las substracciones de subdivergencias puede verse afectada por el hecho de que un diagrama 1P-reducible puede hacerse 1P-irreducible al contraer una línea. Nosotros no nos preocuparemos por esta importante sutileza ya que nos restringimos al nivel de un bucle.

Para concretar esta discusión un tanto formal, y ver en la práctica qué tipo de condiciones hemos de imponer, consideremos la identidad de Ward-Takahashi del vértice en QED (sin masa):

$$(\partial_\mu^x - \partial_\mu^y) V_\mu(x, y) = ie (\Sigma(x) \delta(y) - \Sigma(y) \delta(x)), \quad (2.11)$$

donde V_μ es el vértice 1PI de un fotón y dos electrones, Σ es la autoenergía del electrón y $x = x_1 - x_2$, $y = x_2 - x_3$, con $x_{1,2,3}$ los puntos externos (siendo x_2 el punto asignado al campo del fotón). Para funciones desnudas a un bucle es fácil derivar formalmente esta identidad. Trabajando en el *gauge* de Feynman y usando las reglas de Feynman de QED en espacio de coordenadas (dadas en el capítulo siguiente),

$$\begin{aligned} (\partial_\mu^x - \partial_\mu^y) V_\mu(x, y) &= (\partial_\mu^x - \partial_\mu^y) [(-ie)^3 \gamma_\alpha \not{\partial}^x \Delta(x) \gamma_\mu \not{\partial}^y \Delta(y) \gamma_\alpha \Delta(x+y)] \\ &= ie^3 [\gamma_\alpha \not{\partial}^x \not{\partial}^x \Delta(x) \not{\partial}^y \Delta(y) \gamma_\alpha \Delta(x+y) \\ &\quad - \gamma_\alpha \not{\partial}^x \Delta(x) \not{\partial}^y \not{\partial}^y \Delta(y) \gamma_\alpha \Delta(x+y) \\ &\quad + \gamma_\alpha \not{\partial}^x \Delta(x) \gamma_\mu \not{\partial}^y \Delta(y) \gamma_\alpha (\partial_\mu^x - \partial_\mu^y) \Delta(x+y)] \\ &= ie^3 [-\delta(x) \gamma_\alpha \not{\partial}^y \Delta(y) \gamma_\alpha \Delta(x+y) \\ &\quad + \delta(y) \gamma_\alpha \not{\partial}^x \Delta(x) \gamma_\alpha \Delta(x+y)] \\ &= ie [-\delta(x) \Sigma(y) + \delta(y) \Sigma(x)]. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Las manipulaciones efectuadas en la Ec. 2.12 son sólo formales porque estamos tratando con expresiones singulares (en $x = y$). Enumerémoslas cuidadosamente. En primer lugar y de forma implícita, hemos realizado el cambio de variables descrito arriba para pasar de $x_{1,2,3}$ a x e y . Después hemos utilizado la regla de Leibniz para hacer que las derivadas externas actúen sobre los propagadores fermiónicos $S = \not{\partial}\Delta$. A continuación hemos usado la ecuación que han de satisfacer estos propagadores, $\not{\partial}S = -\delta$, que puede descomponerse en dos pasos: reemplazar $\not{\partial}\not{\partial}$ por \square y usar la ecuación del propagador escalar, $\square\Delta = -\delta$. Por otro lado, la simetría de $\Delta(x + y)$ bajo el intercambio de x e y implica que $(\partial_\mu^x - \partial_\mu^y)\Delta(x + y)$ se anula. Finalmente, la definición de la función delta de Dirac justifica la última igualdad. Cuando estas expresiones mal definidas son regularizadas o renormalizadas, algunas de estas operaciones pueden no estar justificadas. Por ejemplo, si el propagador fermiónico fuese regulado inocentemente *à la* Pauli-Villars², $S^{PV} = \not{\partial}(\Delta - \Delta_\Lambda)$, con Δ_Λ el propagador de Feynman de masa Λ , la ecuación del propagador sería modificada: $\not{\partial}S^{PV} = -\Lambda^2\Delta_\Lambda$, y la tercera igualdad en la Ec. 2.12 no sería válida. Otros dos ejemplos, estudiados en la literatura de renormalización diferencial, son los reguladores utilizados en las Refs. [2] y [7], respectivamente. El primero es el *cutoff* ultravioleta descrito en la Sección 1.1. Esta regularización invalida el cambio de variables y el uso directo de la función delta. El segundo regulador modifica los propagadores, invalidando la ecuación del propagador tal y como se usa en la Ec. 2.12.

Nuestro objetivo es encontrar un esquema de renormalización diferencial que preserve directamente las identidades de Ward (y posiblemente el principio de acción cuántico, aunque no todos sus aspectos han sido analizados). Una posibilidad es usar las mismas identidades de Ward para definir la renormalización de un diagrama a partir de otro relacionado [2, 19, 30, 31]. Sin embargo, esto no es suficiente ya que la renormalización de un diagrama debe ser independiente de la combinación particular en que aparece en distintas identidades de Ward. En lugar de ello, exigiremos que las manipulaciones realizadas para derivar perturbativamente identidades de Ward, tal y como hicimos en la Ec. 2.12, sean siempre válidas al nivel de expresiones renormalizadas. En otras palabras, requeriremos que renormalización diferencial conmute con tales manipulaciones. En las siguientes secciones mostramos como esto puede conseguirse al nivel de un bucle sin más que imponer un conjunto pequeño de reglas.

2.3 Reglas de renormalización diferencial restringida

En esta sección damos las prescripciones esenciales de nuestro método, que llamamos renormalización diferencial restringida (RDR). La siguiente sección está dedicada al uso de estas prescripciones para renormalizar cualquier diagrama con un bucle. Usaremos el término "reglas" para designar aquellas igualdades que postulamos como válidas,

²El método usual para regular QED *à la* Pauli-Villars sólo modifica el propagador del fotón, que como vemos no afecta a la Ec. 2.12. Lo mismo ocurre con el procedimiento de Smirnov mencionado anteriormente.

así como las operaciones que pasan de uno al otro miembro de las igualdades. Distinguiamos dos tipos de reglas. Las primeras sencillamente afirman que la operación de renormalización conmuta con operaciones algebraicas "triviales" como la suma, el álgebra de Dirac (en cuatro dimensiones), o la aplicación de la regla de Leibniz. Las reglas del segundo tipo son extensiones de identidades entre distribuciones:

1. *Reducción diferencial*: las expresiones singulares se sustituyen por derivadas de distribuciones bien definidas. Distinguiamos dos pasos:
 - (a) Las expresiones con comportamiento singular peor que logarítmico se reducen a derivadas de expresiones logarítmicamente singulares sin introducir constantes dimensionales extra.
 - (b) Las expresiones logarítmicamente singulares se escriben como derivadas de distribuciones bien definidas introduciendo una escala logarítmica. Al nivel de un bucle la identidad 1.5 es suficiente. Esta identidad también se aplica a expresiones masivas una vez desarrolladas en serie en la masa. De esta manera, se introduce una única constante con dimensiones en todo el proceso: la constante M de la Ec. 1.5. Esta escala juega el papel de escala del grupo de renormalización.
2. *Integración formal por partes*: las derivadas totales actúan formalmente por partes sobre funciones de prueba. En relación con esto, como las derivadas totales no incrementan el grado de singularidad, pedimos que diferenciación conmute con la operación de renormalización:

$$[\partial F]^R = \partial F^R, \quad (2.13)$$

donde F es una expresión arbitraria (singular o no).

3. *Regla de renormalización de la función delta*:

$$[F(x, x_1, \dots, x_n)\delta(x - y)]^R = [F(x, x_1, \dots, x_n)]^R\delta(x - y). \quad (2.14)$$

4. Validez general de la *ecuación del propagador*:

$$\left[F(x, x_1, \dots, x_n)(\square^x - m^2)\Delta_m(x) \right]^R = \left[F(x, x_1, \dots, x_n)(-\delta(x)) \right]^R. \quad (2.15)$$

Las dos primeras reglas son esencialmente las prescripciones del método de renormalización diferencial. La primera regla tiene distinto carácter que el resto. Su misión es relacionar expresiones singulares con expresiones bien comportadas. La prohibición de introducir escalas dimensionales fuera de logaritmos sirve para fijar totalmente el esquema, salvo por la elección de la escala de renormalización universal, M . Las

2.4. PROCEDIMIENTO DE RENORMALIZACIÓN DIFERENCIAL RESTRINGIDA 21

otras tres reglas, en cambio, son identidades matemáticas válidas cuando se aplican a una función F suficientemente bien comportada. Las reglas extienden formalmente su rango de aplicabilidad a expresiones más generales, exigiendo que conmuten con la operación de renormalización. Estas reglas han sido usadas en la literatura para reducir funciones de tres o más puntos a funciones de dos puntos, pero, como veremos más adelante, sus implicaciones llevan mucho más lejos hasta el punto de determinar completamente la renormalización de cualquier función que aparezca a un bucle. La ecuación del propagador masivo escalar 2.15 proporciona la información necesaria para tratar los propagadores que aparecen en teorías usuales. En efecto, la ecuación para un propagador fermiónico se sigue directamente tras el uso de $\not{\partial}\not{\partial} = \square$, y como veremos, la ecuación para el propagador de un bosón de *gauge* en un *gauge* covariante general se puede derivar de los dos primeros términos en el desarrollo en masa de la Ec. 2.15.

Estas reglas son compatibles entre sí (como muestran *a posteriori* los resultados de la siguiente sección) y permiten renormalizar cualquier digrama de Feynman a un bucle. Otras posibles operaciones pueden ser incompatibles con ellas e introducir ambigüedades. Uno puede aún realizar tales operaciones siempre que se siga el rastro a los términos locales arbitrarios que se generan. Estos términos pueden fijarse después imponiendo compatibilidad con las reglas de RDR. En particular, dos operaciones peligrosas son la diferenciación explícita (ver la Sección 2.1) y la contracción de índices (como veremos más adelante). Estas dos operaciones no conmutan en general con RDR.

2.4 Procedimiento de renormalización diferencial restringida

El uso provechoso de las reglas descritas requiere sistematizar el procedimiento. Distinguimos dos fases. En la primera, los diagramas de Feynman (a un bucle) se expresan en términos de un conjunto de *funciones básicas* que serán definidas en breve. Esto se consigue haciendo un cambio de variables adecuado y utilizando las operaciones permitidas por el primer tipo de reglas. Además realizamos todas las contracciones de índices Lorentz posibles. Esta prescripción es necesaria porque la contracción de índices no conmuta con RDR. Aunque agranda el conjunto de funciones básicas (al distinguir índices contraídos y sin contraer), hace que su renormalización sea universal. Volveremos sobre este punto más adelante. En la segunda fase se substituyen las funciones básicas por su valor renormalizado. La renormalización de las funciones básicas se hace previamente de una vez por todas y es universal, es decir, no depende del cálculo particular o del lugar en que aparezcan estas funciones.

Supondremos de momento que un *gauge* de tipo Feynman es elegido en el caso de que aparezcan campos *gauge*, de forma que sus propagadores sean proporcionales al propagador de Feynman escalar. Al nivel de un bucle, cualquier digrama de Feynman en espacio de coordenadas es una combinación lineal de productos de funciones delta

y propagadores escalares $\Delta_{m_i}(x_i - x_{i+1})$, con operadores diferenciales \mathcal{O}^{x_i} actuando sobre ellos. Los operadores diferenciales son productos de derivadas con índices libres o contraídos o bien el operador identidad. Todos los puntos x_i son externos y aparecen en forma cíclica. Los coeficientes de la combinación contienen constantes como factores de grupo, matrices de Dirac, la métrica o el tensor de Levi-Civita. Teniendo en cuenta la regla 3 ignoraremos en la discusión siguiente las posibles funciones delta, así como los coeficientes constantes. Usando la regla de Leibniz cada término de un diagrama puede escribirse como suma de derivadas totales del conjunto completo de propagadores, con todas las derivadas internas actuando únicamente sobre un propagador elegido adecuadamente:

$$\begin{aligned} & \mathcal{O}_1^{x_1} \Delta_{m_1}(x_1 - x_2) \mathcal{O}_2^{x_2} \Delta_{m_2}(x_2 - x_3) \cdots \mathcal{O}_n^{x_n} \Delta_{m_n}(x_n - x_1) \\ &= \mathcal{O}_1^{z_1} \Delta_{m_1}(z_1) \mathcal{O}_2^{z_2} \Delta_{m_2}(z_2) \cdots \mathcal{O}_n^{-z_1} \Delta_{m_n}(z_1 + z_2 + \cdots + z_{n-1}) \\ &= \sum_i \mathcal{O}_{ext(i)} [\Delta_{m_1}(z_1) \Delta_{m_2}(z_2) \cdots \mathcal{O}_{int(i)}^{z_1} \Delta_{m_n}(z_1 + z_2 + \cdots + z_{n-1})]. \end{aligned} \quad (2.16)$$

En la primera línea hemos realizado un cambio conveniente de variables: $z_1 = x_1 - x_2$, $z_2 = x_2 - x_3$, \dots , $z_{n-1} = x_{n-1} - x_n$, $z_n = x_n$. Esto elimina una variable (z_n) debido a la invariancia translacional de los diagramas de Feynman. Además, como cada z_i aparece únicamente en uno de los primeros $n - 1$ propagadores y en el último, es trivial usar la regla de Leibniz para hacer actuar todas las derivadas sobre el último propagador y así obtener la segunda igualdad. Merced a la regla 2, la renormalización del gráfico se reduce a renormalizar expresiones de la forma

$$\begin{aligned} & F_{m_1 m_2 \dots m_{n-1} m_n}^{(n)}[\mathcal{O}](z_1, z_2, \dots, z_{n-1}) \equiv \\ & \Delta_{m_1}(z_1) \Delta_{m_2}(z_2) \cdots \Delta_{m_{n-1}}(z_{n-1}) \mathcal{O}^{z_1} \Delta_{m_n}(z_1 + z_2 + \cdots + z_{n-1}), \end{aligned} \quad (2.17)$$

que llamamos *funciones básicas*. En el caso de que todos las masas sean cero, suprimiremos los correspondientes subíndices. En teorías renormalizables en 4 dimensiones los diagramas singulares a un bucle involucran funciones básicas con cuatro propagadores como mucho y no más derivadas que propagadores. Todas las funciones básicas singulares que aparecen en esta clase importante de teorías (en el *gauge* de Feynman) están mostradas en la Tabla 2.1. Denotamos A, B, T y Q las funciones básicas con uno, dos, tres y cuatro propagadores, respectivamente. En adelante usaremos x, y, z en lugar de $z_{1,2,3}$, respectivamente, y supondremos que son los argumentos ordenados de las funciones básicas salvo que se diga lo contrario (por ejemplo, $T[\square] \equiv T[\square](x, y)$). La renormalización de las funciones básicas se lleva a cabo usando las reglas 1-4. Este es el tema de la siguiente sección.

2.5 Renormalización de las funciones básicas

En general, la renormalización de las funciones básicas singulares se realiza en dos pasos. Primero se resuelve una ecuación diferencial en los puntos no singulares, para expresar

	logarítmico	lineal	cuadrático	cúbico
1 prop.			$A_m[1]$	$A_m[\partial_\mu]$
2 props.	$B_{m_1 m_2}[1]$	$B_{m_1 m_2}[\partial_\mu]$	$B_{m_1 m_2}[\square]$ $B_{m_1 m_2}[\partial_\mu \partial_\nu]$	
3 props.	$T_{m_1 m_2 m_3}[\square]$ $T_{m_1 m_2 m_3}[\partial_\mu \partial_\nu]$	$T_{m_1 m_2 m_3}[\square \partial_\mu]$ $T_{m_1 m_2 m_3}[\partial_\mu \partial_\nu \partial_\rho]$		
4 props.	$Q_{m_1 m_2 m_3 m_4}[\square \square]$ $Q_{m_1 m_2 m_3 m_4}[\square \partial_\mu \partial_\nu]$ $Q_{m_1 m_2 m_3 m_4}[\partial_\mu \partial_\nu \partial_\rho \partial_\sigma]$			

Tabla 2.1: Funciones básicas para teorías renormalizables en 4 dimensiones (en *gauges* tipo Feynman). Las líneas están ordenadas según el número de propagadores, y las columnas según el grado de singularidad. La función A, que aparece en *tadpoles*, se define como $A_m[\mathcal{O}] = \mathcal{O} \Delta_m(x) \delta(x)$.

las funciones básicas como derivadas de distribuciones bien definidas. Un truco útil en el caso de estructuras tensoriales complejas es descomponerlas en la parte de la traza y la parte sin traza: la primera lleva la singularidad más fuerte pero es más simple, en tanto que la segunda es menos singular. Al resultado que da la ecuación diferencial se le añaden los términos locales más generales permitidos por contaje de potencias (tal y como se discutió en la Sección 1.1) y por la simetría de la función. En segundo lugar, los términos locales se fijan de acuerdo con las reglas de RDR. La regla 1 no es más que una condición inicial para los términos locales, mientras que las demás relacionan de forma recurrente los términos locales de distintas funciones básicas. Normalmente, las funciones básicas más sencillas se pueden expresar directamente en términos de otras funciones que hayan sido renormalizadas previamente, lo que simplifica el procedimiento. En esta sección renormalizamos las funciones básicas “elementales” utilizando la regla 1, y derivamos relaciones de recurrencia a partir de las reglas 2-4, que permiten obtener la renormalización de cualquier función básica a partir las funciones ya renormalizadas. A continuación dedicamos dos subsecciones a la renormalización explícita de todas las funciones básicas de la Tabla 2.1. Por simplicidad nos enfrentamos primero a las funciones sin masa y discutimos después las pequeñas modificaciones necesarias en el caso masivo. Finalmente, otra subsección está dedicada a estudiar las expresiones que aparecen al trabajar en un *gauge* de Lorentz general.

Consideremos primero la renormalización de $B[1]$ y $A[1]$ (sin masas). La aplicación

directa de la regla 1b (Ec. 1.5) da

$$B^R[1] = \frac{1}{(4\pi^2)^2} \left[\frac{1}{x^4} \right]^R = -\frac{1}{64\pi^4} \square \frac{\log x^2 M^2}{x^2}. \quad (2.18)$$

Por otro lado, el hecho de que $A[1] = \Delta(x)\delta(x)$ es local, junto con el conteo de potencias implica que el valor renormalizado más general de esta función es de la forma

$$A^R[1] = (a\square + \mu^2)\delta(x). \quad (2.19)$$

La regla 1a prohíbe introducir la constante con dimensiones μ , con lo que el segundo término de la ecuación se anula. La Ec. 2.18 y $\mu = 0$ en la Ec. 2.19, basadas en la regla 1, son las condiciones iniciales del proceso de renormalización. Esta regla no se necesitará de aquí en adelante. Como mostraremos en la subsección siguiente, la regla 3 implica que el primer término de la Ec. 2.19 también ha de anularse, con lo que esta ecuación se reduce a

$$A^R[1] = 0. \quad (2.20)$$

Para resolver las ecuaciones diferenciales para funciones masivas utilizamos relaciones de recurrencia entre funciones modificadas de Bessel [5]. Los términos locales de $B_{m_1 m_2}^R[1]$ y $A_m^R[1]$ se fijan de forma que en el límite sin masa recuperemos $B^R[1]$ y $A^R[1]$, respectivamente. De esta manera encontramos

$$\begin{aligned} B_{m_1 m_2}^R[1] &= \frac{1}{(4\pi^2)^2} \left[\frac{m_1 K_1(m_1 x) m_2 K_1(m_2 x)}{x^2} \right]^R \\ &= \frac{1}{32\pi^4} \left\{ \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} [\square - (m_1 + m_2)^2] \frac{K_0(m_1 x) K_1(m_2 x) + K_0(m_2 x) K_1(m_1 x)}{x} \right. \\ &\quad \left. + 2\pi^2 \left(\log \frac{\bar{M}^2}{m_1 m_2} + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \log \frac{m_2}{m_1} \right) \delta(x) \right\}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

donde como siempre $\bar{M} = 2M/\gamma_E$. La función de un punto masiva, $A_m^R[1]$ está determinada por $A^R[1]$ y $B_{m_1 m_2}^R[1]$, como veremos más adelante. Aquí anticipamos el resultado:

$$A_m^R[1] = \frac{1}{16\pi^2} m^2 (1 - \log \frac{\bar{M}^2}{m^2}) \delta(x). \quad (2.22)$$

La renormalización del resto de funciones básicas se obtiene de $B_{m_1 m_2}^R[1]$ y $A_m^R[1]$ ($B^R[1]$ y $A^R[1]$ en el caso sin masa) por relaciones de recurrencia basadas en las reglas 2, 3 y 4. Estas relaciones se siguen de la regla de Leibniz y dos operaciones: *separación de puntos* y *contracción de puntos*. La separación de puntos permite relacionar una función básica renormalizada genérica con n propagadores y r derivadas, $F_{m_1 \dots m_n}^{(n)R}[\mathcal{O}^{(r)}]$, con funciones básicas renormalizadas con $n+1$ propagadores y r , $r+1$ y $r+2$ derivadas. Usando las reglas,

$$\begin{aligned} &F_{m_1 \dots m_n}^{(n)R}[\mathcal{O}](z_1, \dots, z_{n-1}) \delta(z_n) \\ &= [\Delta_{m_1}(z_1) \dots \Delta_{m_{n-1}}(z_{n-1}) \mathcal{O}^{z_1} \Delta_{m_n}(z_1 + \dots + z_{n-1}) \delta(z_n)]^R \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [\Delta_{m_1}(z_1) \dots \Delta_{m_{n-1}}(z_{n-1}) \mathcal{O}^{z_1} \Delta_{m_n}(z_1 + \dots + z_{n-1} + z_n) \delta(z_n)]^R \\
&= - \left[\Delta_{m_1}(z_1) \dots \Delta_{m_{n-1}}(z_{n-1}) \mathcal{O}^{z_1} \Delta_{m_n}(z_1 + \dots + z_{n-1} + z_n) (\square^{z_n} - m_{n+1}^2) \Delta_{m_{n+1}}(z_n) \right]^R \\
&= (m_{n+1}^2 - \square^{z_n}) F_{m_1 \dots m_{n-1} m_{n+1} m_n}^{(n+1)R} [\mathcal{O}](z_1, \dots, z_n) \\
&\quad + 2 \partial_\rho^{z_n} F_{m_1 \dots m_{n-1} m_{n+1} m_n}^{(n+1)R} [\mathcal{O} \partial_\rho](z_1, \dots, z_n) \\
&\quad - F_{m_1 \dots m_{n-1} m_{n+1} m_n}^{(n+1)R} [\mathcal{O} \square](z_1, \dots, z_n). \tag{2.23}
\end{aligned}$$

Por otro lado, la contracción de puntos relaciona una función básica renormalizada con un Laplaciano y r derivadas con funciones básicas renormalizadas con un propagador menos y $0, 1, \dots, r$ derivadas:

$$\begin{aligned}
&F_{m_1 \dots m_{n+1}}^{(n+1)R} [\mathcal{O} \square](z_1, \dots, z_n) \\
&= [\Delta_{m_1}(z_1) \dots \Delta_{m_n}(z_n) \mathcal{O}^{z_1} \square^{z_1} \Delta_{m_{n+1}}(z_1 + \dots + z_n)]^R \\
&= - \left[\Delta_{m_1}(z_1) \dots \Delta_{m_n}(z_n) \mathcal{O}^{z_1} \left(\delta(z_1 + \dots + z_n) - m_{n+1}^2 \Delta_{m_{n+1}}(z_1 + \dots + z_n) \right) \right]^R \\
&= \sum_i \mathcal{O}_i^{z_n} \left(F_{m_1 \dots m_n}^{(n)R} [\mathcal{O}'_i](z_1, \dots, z_{n-1}) \delta(z_1 + \dots + z_n) \right) \\
&\quad + m_{n+1}^2 F_{m_1 \dots m_{n+1}}^{(n+1)R} [\mathcal{O}](z_1, \dots, z_n). \tag{2.24}
\end{aligned}$$

\mathcal{O}_i (\mathcal{O}'_i) es un operador diferencial con r_i ($r - r_i$) derivadas, para $0 \leq r_i \leq r$. Nótese que la contracción y la separación de puntos no son operaciones inversas una de la otra debido a las diferentes funciones delta en el miembro izquierdo de la Ec. 2.23 y en el derecho de la Ec. 2.24. Esto permite obtener información no trivial cuando la Ec. 2.24 se inserta en la Ec. 2.23. A continuación veremos cómo el uso combinado de estas operaciones fija la renormalización de todas las funciones básicas (de teorías renormalizables). En los casos más sencillos algunos pasos intermedios pueden evitarse. Las expresiones renormalizadas de las funciones básicas de uno y dos puntos están recogidas en las Tablas 2.2 y 2.3 y las de funciones de tres y cuatro puntos, en la Tabla 2.4. Para permitir un uso más directo de estas tablas, las funciones A y B sin masa están dadas en la Tabla 2.2 aunque pueden obtenerse de las masivas (dadas en la Tabla 2.3) tomando el límite apropiado. En cambio, las expresiones de T y Q en la Tabla 2.4 pueden aplicarse directamente para cualquier valor de las masas.

Obsérvese que es fundamental en nuestro procedimiento distinguir funciones básicas con operadores diferenciales cuyos índices están o no contraídos, debido a que la contracción de índices Lorentz no conmuta en general con RDR. Por ejemplo, de la Tabla 2.4,

$$T^R[\square] = [\delta_{\mu\nu} T[\partial_\mu \partial_\nu]]^R \neq \delta_{\mu\nu} T^R[\partial_\mu \partial_\nu]. \tag{2.25}$$

Esto justifica nuestra prescripción de contraer índices antes de identificar las funciones básicas.

$$A^R[1] = 0$$

$$A^R[\partial_\mu] = 0$$

$$B^R[1] = -\frac{1}{64\pi^4} \square \frac{\log x^2 M^2}{x^2}$$

$$B^R[\partial_\mu] = \frac{1}{2} \partial_\mu B^R[1]$$

$$B^R[\square] = 0$$

$$B^R[\partial_\mu \partial_\nu] = \frac{1}{3} (\partial_\mu \partial_\nu - \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} \square) B^R[1] + \frac{1}{288\pi^2} (\partial_\mu \partial_\nu - \delta_{\mu\nu} \square) \delta(x)$$

Tabla 2.2: Expresiones renormalizadas de funciones básicas sin masa de uno y dos puntos.

2.5.1 Funciones básicas con masa nula

Veamos cómo se obtienen las fórmulas de las Tablas 2.2, 2.3 y 2.4, comenzando por simplicidad con el caso no masivo. Empecemos con las funciones básicas de un punto. Vimos antes que la regla 1a implicaba $A^R[1] = a \square \delta(x)$, con a una constante adimensional, en principio arbitraria. Consideremos ahora la expresión $A^R[1] \delta(y)$. Usando la regla 3,

$$\begin{aligned} A^R[1](x) \delta(y) &= [\Delta(x) \delta(x)]^R \delta(y) = [\Delta(x) \delta(x) \delta(x+y)]^R \\ &= A^R[1](x) \delta(x+y). \end{aligned} \quad (2.26)$$

La integración en x lleva a la ecuación

$$\delta(y) \int d^4x A^R[1](x) = A^R[1](y), \quad (2.27)$$

que, usando la regla 2, requiere $a = 0$. Por tanto, como anticipamos,

$$A^R[1] = 0. \quad (2.28)$$

Similarmente, localidad y contaje de potencias implican que $A^R[\partial_\mu] = [\partial_\mu \Delta(x) \delta(x)]^R$ es de la forma

$$A^R[\partial_\mu] = (a' \square + \mu'^2) \partial_\mu \delta(x), \quad (2.29)$$

y el mismo argumento usado antes implica $a' = \mu' = 0$, y por tanto

$$A^R[\partial_\mu] = 0. \quad (2.30)$$

Luego las funciones de un punto sin masa son cero en RDR. (Los mismos resultados se obtienen con la forma general de separación y contracción de puntos)

Consideremos ahora las funciones básicas de dos puntos. $B^R[1]$ ya fue hallado anteriormente. $B^R[\partial_\mu]$ puede obtenerse fácilmente usando la regla de Leibniz y el hecho de que los dos propagadores involucrados son idénticos:

$$B^R[\partial_\mu] = [\Delta(x)\partial_\mu\Delta(x)]^R = \partial_\mu[\Delta(x)\Delta(x)]^R - [\partial_\mu\Delta(x)\Delta(x)]^R \quad (2.31)$$

y entonces

$$B^R[\partial_\mu] = \frac{1}{2}\partial_\mu[(\Delta(x))^2]^R = \frac{1}{2}\partial_\mu B^R[1]. \quad (2.32)$$

$B^R[\square]$ se obtiene directamente de $A^R[1]$ utilizando la regla 4:

$$B^R[\square] = [\Delta(x)\square\Delta(x)]^R = -[\Delta(x)\delta(x)]^R = -A^R[1] = 0. \quad (2.33)$$

Este es el ejemplo más sencillo de contracción de puntos. La renormalización de $B[\partial_\mu\partial_\nu]$ es más complicada. En primer lugar, su expresión renormalizada más general es

$$B^R[\partial_\mu\partial_\nu] = \frac{1}{3}(\partial_\mu\partial_\nu - \frac{1}{4}\delta_{\mu\nu}\square)B^R[1] + \frac{1}{16\pi^2}[f\partial_\mu\partial_\nu + \delta_{\mu\nu}(g\square + \mu''^2)]\delta(x), \quad (2.34)$$

donde el primer término resulta de resolver una ecuación diferencial para $x \neq 0$ y f , g y μ'' son coeficientes arbitrarios con dimensión 0, 0 y 2, respectivamente, que parametrizan la ambigüedad en términos locales³. En segundo lugar, aplicando la regla 4 a la función delta en $A[\partial_\mu]$ encontramos

$$0 = A^R[\partial_\mu] = -\partial_\mu B^R[\square] + B^R[\partial_\mu\square] = B^R[\partial_\mu\square], \quad (2.35)$$

y usando la regla de Leibniz para mover las derivadas sobre el primer (idéntico) propagador y las Ecs. 2.32 and 2.33,

$$B^R[\partial_\mu\square] = -\frac{1}{2}\partial_\mu\square B^R[1] + 2\partial_\rho B^R[\partial_\mu\partial_\rho] - B^R[\partial_\mu\square]. \quad (2.36)$$

Insertando la Ec. 2.35 en la Ec. 2.36, encontramos la ecuación

$$-\frac{1}{2}\square\partial_\mu B^R[1] + 2\partial_\rho B^R[\partial_\mu\partial_\rho] = 0. \quad (2.37)$$

Si sustituimos la Ec. 2.34 en la Ec. 2.37 encontramos $\mu'' = 0$ y $g = -f$. Por el momento, f permanece arbitrario. Será fijado más adelante a partir de la relación entre $B^R[\partial_\mu\partial_\nu]$ y $T^R[\partial_\mu\partial_\nu\partial_\rho]$.

³El coeficiente dimensional μ'' está prohibido por la regla 1a, pero aquí usaremos relaciones de recurrencia y la condición inicial $A^R[1] = 0$ para probar que se anula, mostrando así, en este caso, que la regla 1a es compatible con las demás reglas.

La renormalización de las funciones básicas de tres puntos que contienen un Laplaciano se obtiene directamente via contracción de puntos, que las relaciona con funciones de dos puntos ya renormalizadas:

$$T^R[\square] = -B^R[1]\delta(x+y), \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned} T^R[\square\partial_\mu] &= -\partial_\mu^y(B^R[1](x)\delta(x+y)) - B^R[\partial_\mu](x)\delta(x+y) = \\ &= -\frac{1}{2}(\partial_\mu^x + \partial_\mu^y)(B^R[1]\delta(x+y)). \end{aligned} \quad (2.39)$$

Para funciones T con estructura de índices más compleja, aplicamos separación de puntos a la correspondiente función B con una derivada menos. $T^R[\partial_\mu\partial_\nu]$ puede descomponerse en una parte sin traza y otra con traza, más un posible término local arbitrario (pero simétrico ante $\mu \leftrightarrow \nu$ y ante $x \leftrightarrow y$, y con la dimensión correcta):

$$T^R[\partial_\mu\partial_\nu] = T[\partial_\mu\partial_\nu - \frac{1}{4}\delta_{\mu\nu}\square] + \frac{1}{4}\delta_{\mu\nu}T^R[\square] + \frac{1}{64\pi^2}b\delta_{\mu\nu}\delta(x)\delta(y). \quad (2.40)$$

La parte sin traza es finita y la dejamos intacta, y la traza ya ha sido renormalizada, así que sólo hemos de fijar el coeficiente adimensional b . Separando puntos,

$$B^R[\partial_\mu](x)\delta(y) = -\square^y T[\partial_\mu] + 2\partial_\rho^y T^R[\partial_\mu\partial_\rho] - T^R[\square\partial_\mu]. \quad (2.41)$$

La forma más simple de resolver esta ecuación para b es integrar en x . (La integración del punto "separado", y en este caso, lleva en general a una tautología.) Obtenemos de esta manera el valor $b = -\frac{1}{2}$. El mismo proceso puede aplicarse a $T^R[\partial_\mu\partial_\nu\partial_\rho]$. Su descomposición en partes con y sin traza es

$$\begin{aligned} T^R[\partial_\mu\partial_\nu\partial_\rho] &= T[\partial_\mu\partial_\nu\partial_\rho - \frac{1}{6}(\delta_{\mu\nu}\partial_\rho + \delta_{\mu\rho}\partial_\nu + \delta_{\nu\rho}\partial_\mu)\square] \\ &+ \frac{1}{12}(\delta_{\mu\nu}(\partial_\rho^x + \partial_\rho^y) + \delta_{\mu\rho}(\partial_\nu^x + \partial_\nu^y) + \delta_{\nu\rho}(\partial_\mu^x + \partial_\mu^y)) \\ &\times \left(-B^R[1]\delta(x+y) + \frac{1}{16\pi^2}c\delta(x)\delta(y) \right), \end{aligned} \quad (2.42)$$

donde hemos usado la Ec. 2.39. La separación de puntos de $B^R[\partial_\mu\partial_\nu]$, seguida de contracción de puntos de las funciones T con un Laplaciano, lleva a

$$\begin{aligned} B^R[\partial_\mu\partial_\nu](x)\delta(y) &= -\square^y T^R[\partial_\mu\partial_\nu] + 2\partial_\rho^y T^R[\partial_\mu\partial_\nu\partial_\rho] \\ &+ (\partial_\mu^x\partial_\nu^y + \partial_\mu^y\partial_\nu^x)(B^R[1](x)\delta(x+y)) \\ &+ B^R[\partial_\mu\partial_\nu](x)\delta(x+y). \end{aligned} \quad (2.43)$$

Integrando en x después de insertar las Ecs. 2.40 y 2.42, resulta

$$\begin{aligned} 0 &= -\square^y \int d^4x T[\partial_\mu\partial_\nu - \frac{1}{4}\delta_{\mu\nu}\square] + 2\partial_\rho^y \int d^4x T[\partial_\mu\partial_\nu\partial_\rho - \frac{1}{6}(\delta_{\mu\nu}\partial_\rho + \delta_{\mu\rho}\partial_\nu + \delta_{\nu\rho}\partial_\mu)\square] \\ &+ \frac{1}{16\pi^2} \left[\left(\frac{1}{8} + \frac{c}{6} - f \right) \delta_{\mu\nu} \square^y + \left(\frac{c}{3} + f \right) \partial_\mu^y \partial_\nu^y \right] \delta(y), \end{aligned} \quad (2.44)$$

que proporciona dos ecuaciones (una para cada estructura tensorial) que determinan los coeficientes f y c . Calculando las integrales (finitas) encontramos $f = \frac{1}{18}$ y $c = -\frac{1}{3}$.

Para funciones básicas de cuatro puntos, que son como mucho logarítmicamente singulares, la situación es similar. Las funciones Q con al menos un Laplaciano son contraídas directamente a funciones T :

$$Q^R[\square\square] = -\square^z (T[1]\delta(x+y+z)) - 2\partial_\rho^z (T[\partial_\rho](x,y)\delta(x+y+z)) - T^R[\square](x,y)\delta(x+y+z), \quad (2.45)$$

$$Q^R[\square\partial_\mu\partial_\nu] = -\partial_\mu^z\partial_\nu^z (T[1]\delta(x+y+z)) - \partial_\mu^z (T[\partial_\nu](x,y)\delta(x+y+z)) - \partial_\nu^z (T[\partial_\mu](x,y)\delta(x+y+z)) - T^R[\partial_\mu\partial_\nu](x,y)\delta(x+y+z). \quad (2.46)$$

Finalmente, la renormalización de $Q[\partial_\mu\partial_\nu\partial_\rho\partial_\sigma]$ requiere de nuevo el uso combinado de separación y contracción de puntos. La descomposición en partes con y sin traza no es única en este caso. La posibilidad más sencilla es

$$Q^R[\partial_\mu\partial_\nu\partial_\rho\partial_\sigma] = Q[\partial_\mu\partial_\nu\partial_\rho\partial_\sigma - \frac{1}{24}(\delta_{\mu\nu}\delta_{\rho\sigma} + \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} + \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho})\square\square] + \frac{1}{24}(\delta_{\mu\nu}\delta_{\rho\sigma} + \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} + \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho}) \times (Q^R[\square\square] + \frac{1}{16\pi^2} d \delta(x)\delta(y)\delta(z)). \quad (2.47)$$

La separación de puntos de $T^R[\partial_\mu\partial_\nu\partial_\rho]$ da

$$T^R[\partial_\mu\partial_\nu\partial_\rho](x,y)\delta(z) = -\square^z Q[\partial_\mu\partial_\nu\partial_\rho] + 2\partial_\sigma^z Q^R[\partial_\mu\partial_\nu\partial_\rho\partial_\sigma] - Q^R[\square\partial_\mu\partial_\nu\partial_\rho], \quad (2.48)$$

y la contracción de puntos de $Q^R[\square\partial_\mu\partial_\nu\partial_\rho]$ más integración en x,y proporcionan la ecuación

$$0 = -\square^z \int d^4x d^4y Q[\partial_\mu\partial_\nu\partial_\rho] + 2\partial_\sigma^z \int d^4x d^4y Q^R[\partial_\mu\partial_\nu\partial_\rho\partial_\sigma] + \int d^4y T^R[\partial_\mu\partial_\nu\partial_\rho](y,z). \quad (2.49)$$

Insertando la Ec. 2.48 y la expresión obtenida para $T^R[\partial_\mu\partial_\nu\partial_\rho]$, y calculando las integrales, encontramos $d = \frac{5}{6}$, lo que completa la renormalización de $Q[\partial_\mu\partial_\nu\partial_\rho\partial_\sigma]$.

2.5.2 Funciones básicas masivas

El caso masivo es análogo al caso sin masa. La inclusión de masas no cambia el grado de singularidad de las partes más singulares. Las operaciones de separación y contracción de puntos pueden usarse del mismo modo, aunque ahora las expresiones resultantes contendrán términos adicionales proporcionales a las masas (ver Ecs. 2.23 y 2.24). Con el objeto de usar (cuando sea posible) la regla de Leibniz en forma "simétrica",

descomponemos las funciones básicas en dos trozos, uno simétrico en las masas—que es tratado como en el caso no masivo—y otro antisimétrico—que es menos singular.

Ilustremos las nuevas características del caso masivo general. La renormalización de $A_m[1] = \Delta_m(x)\delta(x)$, es algo más complicada que la de $A[1]$. La expresión renormalizada ha de ser de la forma

$$A_m^R[1] = (\tilde{a}\square + \tilde{\mu}^2)\delta(x). \quad (2.50)$$

El mismo argumento usado para $A^R[1]$ prohíbe el término proporcional a $\square\delta(x)$. Por otro lado, usando la regla 4 y moviendo las derivadas hacia el propagador masivo obtenemos

$$\begin{aligned} A_m^R[1] &= -[\Delta_m(x)\square\Delta(x)]^R \\ &= -\square B_{0m}^R[1] + 2\partial_\rho B_{0m}^R[\partial_\rho] + A^R[1] - m^2 B_{0m}^R[1]. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Luego, integrando esta igualdad (con la regla 2),

$$\tilde{\mu}^2 = -m^2 \int d^4x B_{0m}^R[1]. \quad (2.52)$$

Por tanto sólo tenemos que integrar la Ec. 2.21 y tomar el límite $m_1 \rightarrow 0$. (Las integrales de expresiones que contienen funciones modificadas de Bessel pueden calcularse fácilmente usando las técnicas descritas más adelante en la Sección 2.6.) El resultado está dado en la Ec. 2.22. Obsérvese que $\tilde{\mu}$ es proporcional a m , como debe ser por compatibilidad con la regla 1a.

$A_m^R[\partial_\mu]$ se renormaliza de forma análoga a $A^R[\partial_\mu]$. $B_{m_1 m_2}^R[1]$ fue dado anteriormente, mientras que $B_{m_1 m_2}^R[\partial_\mu]$ se obtiene generalizando la Ec. 2.32 con la descomposición mencionada más arriba:

$$\begin{aligned} B_{m_1 m_2}^R[\partial_\mu] &= \\ &= \frac{1}{2} (B_{m_1 m_2}^R[\partial_\mu] + B_{m_2 m_1}^R[\partial_\mu]) + \frac{1}{2} (B_{m_1 m_2}^R[\partial_\mu] - B_{m_2 m_1}^R[\partial_\mu]) \\ &= \frac{1}{2} \partial_\mu B_{m_1 m_2}^R[1] \\ &+ \frac{1}{64\pi^4} \left[m_2^2 K_0(m_2 x) \partial_\mu \frac{K_1(m_1 x)}{x} - m_1^2 K_0(m_1 x) \partial_\mu \frac{K_1(m_2 x)}{x} \right]. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Por otro lado, $B_{m_1 m_2}[\square]$ al igual que las funciones T y Q se renormalizan siguiendo el caso no masivo, pero incluyendo términos proporcionales a las masas, que aparecen al usar la regla 4 con el propagador masivo. Por ejemplo:

$$B_{m_1 m_2}^R[\square] = m_2^2 B_{m_1 m_2}^R[1] - A_{m_1}^R[1] \quad (2.54)$$

(compárese con la Ec. 2.33). Finalmente, $B_{m_1 m_2}[\partial_\mu \partial_\nu]$ requiere algo más de trabajo para resolver la ecuación diferencial. Después los términos locales [32] son fijados análogamente a los de $B^R[\partial_\mu \partial_\nu]$. El resultado final está dado en la Tabla 2.3.

2.5.3 Gauge más generales

Para *gauges* distintos del de Feynman la forma del propagador de los bosones de *gauge* no es tan sencilla, lo que hace que debamos tratar con expresiones más generales que las consideradas hasta el momento. Aquí estudiaremos el caso de un *gauge* de Lorentz general (aunque de forma menos completa que para el *gauge* de Feynman) y veremos que las mismas reglas de RDR permiten renormalizar cualquier diagrama. El propagador de un bosón de *gauge* es

$$\Delta_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{16\pi^2} (\delta_{\mu\nu} \square + (a-1) \partial_\mu \partial_\nu) \log x^2 s^2, \quad (2.55)$$

donde a es el parámetro de *gauge* y s una constante irrelevante con dimensiones de masa. La ecuación que deseamos que verifique para funciones singulares es una generalización de la ecuación que lo define:

$$\left[F (\delta_{\mu\nu} \square - (1 - \frac{1}{a}) \partial_\mu \partial_\nu) \Delta_{\nu\rho}(x) \right]^R = [-F \delta_{\mu\rho} \delta(x)]^R, \quad (2.56)$$

que es equivalente (para a arbitrario) a la dos ecuaciones

$$[F \square \Delta(x)]^R = [-F \delta(x)]^R, \quad (2.57)$$

$$[F \square \bar{\Delta}(x)]^R = [F \Delta(x)]^R, \quad (2.58)$$

donde $\bar{\Delta}(x) = 1/16\pi^2 \log x^2 s^2$. Ambas ecuaciones pueden derivarse de la ecuación del propagador escalar masivo 2.15 en la regla 4 al desarrollar en la masa.

El conjunto de funciones básicas debe extenderse para incluir logaritmos. Aquí estudiaremos sólo las funciones básicas de dos y tres puntos necesarias para la renormalización a un bucle de QED sin masa en un *gauge* de Lorentz general:

$$\bar{B} = \Delta(x) \mathcal{O} \bar{\Delta}(x), \quad (2.59)$$

$$\bar{T} = \Delta(x) \Delta(y) \mathcal{O} \bar{\Delta}(x+y), \quad (2.60)$$

\bar{B} y \bar{T} tienen grado de singularidad $r-2$ y $r-4$, respectivamente, siendo r el número de derivadas en \mathcal{O} . Usando las Ecs. 2.57 y 2.58 y los mismos métodos descritos anteriormente, es inmediato hallar las expresiones renormalizadas de estas funciones básicas, que están recogidas en la Tabla 2.5.

2.6 Transformadas de Fourier

Para terminar este capítulo, damos las herramientas e identidades necesarias para obtener las transformadas de Fourier de cualquier expresión renormalizada con RDR. Como las expresiones renormalizadas son distribuciones temperadas, sus transformadas

están bien definidas sin necesidad de ningún regulador. La transformada de Fourier de una distribución $f(x_1, \dots, x_n)$, donde x_i son variables cuatridimensionales, es

$$\hat{f}(p_1, \dots, p_n) = \int d^4x_1 \dots d^4x_n e^{ix_1 \cdot p_1} \dots e^{ix_n \cdot p_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (2.61)$$

Gracias a la regla 2, las derivadas totales dan directamente

$$\partial_\mu^{x_j} \rightarrow -ip_{j\mu}. \quad (2.62)$$

Las funciones delta dan lugar a transformadas de Fourier reducidas cuyos argumentos son combinaciones lineales de los momentos originales. Por ejemplo,

$$f(x_1, \dots, x_{n-1})\delta(x_{n-1} + x_n) \rightarrow \hat{f}(p_1, \dots, p_{n-1} - p_n). \quad (2.63)$$

Por lo tanto, sólo necesitamos las transformadas de Fourier de las funciones básicas renormalizadas. Realizaremos transformadas en las variables z_i introducidas antes, lo que equivale a usar conservación del momento para eliminar uno de los momentos externos. La transformada de Fourier de funciones básicas que son finitas sin necesidad de renormalización es simplemente una convolución en el espacio de momentos:

$$\begin{aligned} & \hat{F}_{m_1 \dots m_n}^{(n)}[\mathcal{O}](p_1, \dots, p_{n-1}) \\ &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\hat{\mathcal{O}}(k)}{[k^2 + m_n^2][(k - p_1)^2 + m_1^2] \dots [(k - p_{n-1})^2 + m_{n-1}^2]} \\ &\equiv I_{m_n m_1 \dots m_{n-1}}^{(n)}[\hat{\mathcal{O}}](p_1, \dots, p_{n-1}), \end{aligned} \quad (2.64)$$

donde hemos usado que la transformada del propagador es $\hat{\Delta}_m(p) = \frac{1}{p^2 + m^2}$. Las integrales $I^{(n)}$ aparecen en los cálculos usuales a un bucle en espacio de momentos, y pueden calcularse con técnicas estándar.

Para encontrar las transformadas de Fourier de las funciones básicas de las Tablas 2.2, 2.3 y 2.4 basta con usar, además de la Ec. 2.6, las siguientes integrales:

$$\int d^4x e^{ix \cdot p} \frac{\log x^2 M^2}{x^2} = \frac{4\pi^2}{p^2} \log \frac{\bar{M}^2}{p^2}, \quad (2.65)$$

$$\int d^4x e^{ix \cdot p} \frac{m K_1(mx)}{x} = 4\pi^2 \frac{1}{p^2 + m^2}, \quad (2.66)$$

$$\int d^4x e^{ix \cdot p} K_0(mx) = 8\pi^2 \frac{1}{(p^2 + m^2)^2}, \quad (2.67)$$

$$\int d^4x e^{ix \cdot p} K_0(m_1 x) \mathcal{O} \frac{m_2 K_1(m_2 x)}{x} = 32\pi^4 I_{m_2 m_1 m_1}^{(3)}[\hat{\mathcal{O}}](p, p), \quad (2.68)$$

$$\int d^4x e^{ix \cdot p} \frac{m_1 K_1(m_1 x)}{x} \mathcal{O} K_0(m_2 x) = 32\pi^4 I_{m_2 m_2 m_1}^{(3)}[\hat{\mathcal{O}}](0, p). \quad (2.69)$$

Las transformadas que involucran funciones de Bessel modificadas han sido obtenidas usando las siguientes relaciones de recurrencia:

$$\square \frac{K_1(x)}{x} = \frac{K_1(x)}{x} - 4\pi^2 \delta(x), \quad (2.70)$$

$$\square K_2(x) = K_0(x) - 8\pi^2 \delta(x), \quad (2.71)$$

$$\square K_0(x) = K_0(x) - 2 \frac{K_1(x)}{x}, \quad (2.72)$$

$$\square K_1^2(x) = 2(K_0^2(x) + K_1^2(x)) - 4\pi^2 \delta(x), \quad (2.73)$$

$$\square(K_1^2(x) - K_0^2(x)) = 4 \frac{K_0(x)K_1(x)}{x} - 4\pi^2 \delta(x). \quad (2.74)$$

Todas las expresiones en estas igualdades son distribuciones temperadas. Las funciones delta son necesarias para hacerlas válidas en el origen. En las Tablas 2.6, 2.7 y 2.8 recogemos las transformadas de Fourier de las funciones básicas renormalizadas de las Tablas 2.2, 2.3 y 2.4, respectivamente. Las transformadas de las funciones con barra se siguen directamente de estas tablas.

Estas transformadas de Fourier pueden usarse para encontrar las amplitudes renormalizadas en el espacio de momentos. De hecho, también es posible realizar directamente la reducción a funciones básicas en el espacio de momentos. Las funciones básicas singulares en el espacio de momentos son integrales divergentes que pueden identificarse con sus correspondientes funciones básicas en espacio de posiciones. Es posible entonces sustituirlas sin más por las transformadas de Fourier de las funciones básicas renormalizadas. Este procedimiento define RDR en el espacio de momentos. Nótese, sin embargo, que la renormalización propiamente dicha ha sido previamente realizada (una vez para siempre) en el espacio de posiciones.

$$A_m^R[1] = \frac{1}{16\pi^2} m^2 (1 - \log \frac{\bar{M}^2}{m^2}) \delta(x)$$

$$A_m^R[\partial_\mu] = 0$$

$$B_{m_1 m_2}^R[1] = \frac{1}{32\pi^4} \left\{ \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} [\square - (m_1 + m_2)^2] \frac{K_0(m_1 x) K_1(m_2 x) + K_0(m_2 x) K_1(m_1 x)}{x} \right. \\ \left. + 2\pi^2 \left(\log \frac{\bar{M}^2}{m_1 m_2} + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \log \frac{m_2}{m_1} \right) \delta(x) \right\}$$

$$B_{m_1 m_2}^R[\partial_\mu] = \frac{1}{2} \partial_\mu B_{m_1 m_2}^R[1] + \frac{1}{64\pi^4} \left[m_2^2 K_0(m_2 x) \partial_\mu \frac{m_1 K_1(m_1 x)}{x} - m_1^2 K_0(m_1 x) \partial_\mu \frac{m_2 K_1(m_2 x)}{x} \right]$$

$$B_{m_1 m_2}^R[\square] = m_2^2 B_{m_1 m_2}^R[1] - A_{m_1}^R[1]$$

$$B_{m_1 m_2}^R[\partial_\mu \partial_\nu] = \frac{1}{2} \left(\partial_\mu B_{m_1 m_2}^R[\partial_\nu] - \partial_\nu B_{m_2 m_1}^R[\partial_\mu] \right) + \frac{1}{8} \delta_{\mu\nu} \left(B_{m_1 m_2}^R[\square] + B_{m_2 m_1}^R[\square] \right) \\ + \frac{1}{3} (\partial_\mu \partial_\nu - \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} \square) B_{m_1 m_2}^R[1] \\ + \frac{1}{192\pi^4} \left\{ \left[m_1^2 \frac{m_1 K_1(m_1 x)}{x} (\partial_\mu \partial_\nu - \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} \square) K_0(m_2 x) \right. \right. \\ \left. \left. + m_2^2 \frac{m_2 K_1(m_2 x)}{x} (\partial_\mu \partial_\nu - \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} \square) K_0(m_1 x) \right] \right. \\ \left. - \left[m_1^2 K_0(m_1 x) (\partial_\mu \partial_\nu - \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} \square) \frac{m_2 K_1(m_2 x)}{x} \right. \right. \\ \left. \left. + m_2^2 K_0(m_2 x) (\partial_\mu \partial_\nu - \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} \square) \frac{m_1 K_1(m_1 x)}{x} \right] \right\} \\ + \frac{1}{16\pi^2} \left[\frac{1}{18} (\partial_\mu \partial_\nu - \delta_{\mu\nu} \square) + \frac{1}{8} (m_1^2 + m_2^2) \delta_{\mu\nu} \right] \delta(x)$$

Tabla 2.3: Expresiones renormalizadas de funciones básicas masivas de uno y dos puntos.

$$T_{m_1 m_2 m_3}^R[\square] = m_3^2 T_{m_1 m_2 m_3}[1] - B_{m_1 m_2}^R[1] \delta(x + y)$$

$$T_{m_1 m_2 m_3}^R[\partial_\mu \partial_\nu] = T_{m_1 m_2 m_3}[\partial_\mu \partial_\nu - \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} \square] + \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} T_{m_1 m_2 m_3}^R[\square] - \frac{1}{128\pi^2} \delta_{\mu\nu} \delta(x) \delta(y)$$

$$T_{m_1 m_2 m_3}^R[\square \partial_\mu] = m_3^2 T_{m_1 m_2 m_3}[\partial_\mu] - B_{m_1 m_2}^R[\partial_\mu] \delta(x + y) - \partial_\mu^y (B_{m_1 m_2}^R[1] \delta(x + y))$$

$$\begin{aligned} T_{m_1 m_2 m_3}^R[\partial_\mu \partial_\nu \partial_\rho] &= T_{m_1 m_2 m_3}[\partial_\mu \partial_\nu \partial_\rho - \frac{1}{6} (\delta_{\mu\nu} \partial_\rho + \delta_{\mu\rho} \partial_\nu + \delta_{\nu\rho} \partial_\mu) \square] \\ &+ \frac{1}{6} (\delta_{\mu\nu} T_{m_1 m_2 m_3}^R[\square \partial_\rho] + \delta_{\mu\rho} T_{m_1 m_2 m_3}^R[\square \partial_\nu] + \delta_{\nu\rho} T_{m_1 m_2 m_3}^R[\square \partial_\mu]) \\ &- \frac{1}{576\pi^2} (\delta_{\mu\nu} (\partial_\rho^x + \partial_\rho^y) + \delta_{\mu\rho} (\partial_\nu^x + \partial_\nu^y) + \delta_{\nu\rho} (\partial_\mu^x + \partial_\mu^y)) (\delta(x) \delta(y)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{m_1 m_2 m_3 m_4}^R[\square \square] &= m_4^2 Q_{m_1 m_2 m_3 m_4}[\square] - \square^z (T_{m_1 m_2 m_3}[1] \delta(x + y + z)) \\ &- 2\partial_\rho^z (T_{m_1 m_2 m_3}[\partial_\rho] \delta(x + y + z)) - T_{m_1 m_2 m_3}^R[\square] \delta(x + y + z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{m_1 m_2 m_3 m_4}^R[\square \partial_\mu \partial_\nu] &= m_4^2 Q_{m_1 m_2 m_3 m_4}[\partial_\mu \partial_\nu] - \partial_\mu^z \partial_\nu^z (T_{m_1 m_2 m_3}[1] \delta(x + y + z)) \\ &- \partial_\mu^z (T_{m_1 m_2 m_3}[\partial_\nu] \delta(x + y + z)) - \partial_\nu^z (T_{m_1 m_2 m_3}[\partial_\mu] \delta(x + y + z)) \\ &- T_{m_1 m_2 m_3}^R[\partial_\mu \partial_\nu] \delta(x + y + z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{m_1 m_2 m_3 m_4}^R[\partial_\mu \partial_\nu \partial_\rho \partial_\sigma] &= Q_{m_1 m_2 m_3 m_4}[\partial_\mu \partial_\nu \partial_\rho \partial_\sigma - \frac{1}{24} (\delta_{\mu\nu} \delta_{\rho\sigma} + \delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\sigma} + \delta_{\mu\sigma} \delta_{\nu\rho}) \square \square] \\ &+ \frac{1}{24} (\delta_{\mu\nu} \delta_{\rho\sigma} + \delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\sigma} + \delta_{\mu\sigma} \delta_{\nu\rho}) (Q_{m_1 m_2 m_3 m_4}^R[\square \square] + \frac{5}{96\pi^2} \delta(x) \delta(y) \delta(z)) \end{aligned}$$

Tabla 2.4: Expresiones renormalizadas de las funciones básicas de tres y cuatro puntos. Las funciones con operadores diferenciales sin traza son directamente finitas.

$$\bar{B}^R[\square] = B^R[1]$$

$$\bar{B}^R[\partial_\mu \partial_\nu] = \frac{1}{4}(B^R[1]\delta_{\mu\nu} - \frac{1}{32\pi^4}\partial_\mu \partial_\nu \frac{1}{x^2})$$

$$\bar{T}^R[\square\square] = T^R[\square]$$

$$\bar{T}^R[\square\partial_\mu \partial_\nu] = T^R[\partial_\mu \partial_\nu]$$

Tabla 2.5: Expresiones renormalizadas de las funciones básicas con barra necesarias para QED en un *gauge* general.

$$\hat{A}^R[1] = 0$$

$$\hat{A}^R[\partial_\mu] = 0$$

$$\hat{B}^R[1] = \frac{1}{16\pi^2} \log \frac{\bar{M}^2}{p^2 - i\epsilon}$$

$$\hat{B}^R[\partial_\mu] = -\frac{1}{2}ip_\mu \hat{B}^R[1]$$

$$\hat{B}^R[\square] = 0$$

$$\hat{B}^R[\partial_\mu \partial_\nu] = -\frac{1}{3}(p_\mu p_\nu - \frac{1}{4}p^2 \delta_{\mu\nu}) \hat{B}^R[1] - \frac{1}{288\pi^2}(p_\mu p_\nu - p^2 \delta_{\mu\nu})$$

Tabla 2.6: Transformadas de Fourier de las funciones básicas renormalizadas sin masa de uno y dos puntos. La pequeña parte imaginaria en los logaritmos, aquí y en la tabla siguiente, permite continuar analíticamente estas fórmulas a la región de Minkowski ($p^2 < 0$).

$$\hat{A}_m^R[1] = \frac{1}{16\pi^2} m^2 (1 - \log \frac{\bar{M}^2}{m^2})$$

$$\hat{A}_m^R[\partial_\mu] = 0$$

$$\hat{B}_{m_1 m_2}^R[1] = \frac{1}{16\pi^2} \left\{ \frac{m_2^2 - m_1^2}{p^2} \log \frac{m_2}{m_1} + \log \frac{\bar{M}^2}{m_1 m_2} + C_{m_1 m_2}(p) \right\}$$

$$\begin{aligned} \hat{B}_{m_1 m_2}^R[\partial_\mu] = & -\frac{1}{2} i p_\mu \left[\hat{B}_{m_1 m_2}^R[1] + \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{p^2} \left(m_1^2 - m_2^2 + \log \frac{m_1}{m_2} (m_1^2 + m_2^2 + \frac{(m_1^2 - m_2^2)^2}{p^2}) \right) \right. \\ & \left. + (m_1^2 - m_2^2) C_{m_1 m_2}(p) \right] \end{aligned}$$

$$\hat{B}_{m_1 m_2}^R[\square] = m_2^2 \hat{B}_{m_1 m_2}^R[1] - \hat{A}_{m_1}^R[1]$$

$$\begin{aligned} \hat{B}_{m_1 m_2}^R[\partial_\mu \partial_\nu] = & -\frac{i}{2} \left(p_\mu \hat{B}_{m_1 m_2}^R[\partial_\nu] - p_\nu \hat{B}_{m_2 m_1}^R[\partial_\mu] \right) + \frac{1}{8} \delta_{\mu\nu} \left(\hat{B}_{m_1 m_2}^R[\square] + \hat{B}_{m_2 m_1}^R[\square] \right) \\ & - \frac{1}{3} (p_\mu p_\nu - \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} p^2) \hat{B}_{m_1 m_2}^R[1] \\ & - \frac{1}{6} \left\{ \left[m_1^2 I_{m_2 m_2 m_1}^{(3)} [k_\mu k_\nu - \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} k^2](0, p) + m_2^2 I_{m_1 m_1 m_2}^{(3)} [k_\mu k_\nu - \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} k^2](0, p) \right] \right. \\ & \left. - \left[m_1^2 I_{m_2 m_1 m_1}^{(3)} [k_\mu k_\nu - \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} k^2](p, p) + m_2^2 I_{m_1 m_2 m_2}^{(3)} [k_\mu k_\nu - \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} k^2](p, p) \right] \right\} \\ & - \frac{1}{16\pi^2} \left[\frac{1}{18} (p_\mu p_\nu - \delta_{\mu\nu} p^2) - \frac{1}{8} (m_1^2 + m_2^2) \delta_{\mu\nu} \right] \end{aligned}$$

donde

$$C_{m_1 m_2}(p) = -\frac{\lambda^{1/2}}{2p^2} \left(\log(p^2 + m_1^2 + m_2^2 + \lambda^{1/2} + i\epsilon) - \log(p^2 + m_1^2 + m_2^2 - \lambda^{1/2} - i\epsilon) \right),$$

$$\lambda = (p^2 + (m_1 + m_2)^2) (p^2 + (m_1 - m_2)^2)$$

Tabla 2.7: Transformadas de Fourier de las funciones básicas renormalizadas masivas de uno y dos puntos. Las integrales $I^{(3)}$ están definidas en el texto. El momento k es la variable de integración.

$$\hat{T}_{m_1 m_2 m_3}^R[\square] = m_3^2 I_{m_1 m_2 m_3}^{(3)}[1](p_x, p_y) - \hat{B}_{m_1 m_2}^R[1](p_x - p_y)$$

$$\hat{T}_{m_1 m_2 m_3}^R[\partial_\mu \partial_\nu] = -I_{m_1 m_2 m_3}^{(3)}[k_\mu k_\nu - \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} k^2](p_x, p_y) + \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} \hat{T}_{m_1 m_2 m_3}^R[\square](p_x, p_y) - \frac{1}{128\pi^2} \delta_{\mu\nu}$$

$$\hat{T}_{m_1 m_2 m_3}^R[\square \partial_\mu] = -i m_3^2 I_{m_1 m_2 m_3}^{(3)}[k_\mu](p_x, p_y) - \hat{B}_{m_1 m_2}^R[\partial_\mu](p_x - p_y) + i p_{y\mu} \hat{B}_{m_1 m_2}^R[1](p_x - p_y)$$

$$\begin{aligned} \hat{T}_{m_1 m_2 m_3}^R[\partial_\mu \partial_\nu \partial_\rho] &= i I_{m_1 m_2 m_3}^{(3)}[k_\mu k_\nu k_\rho - \frac{1}{6}(\delta_{\mu\nu} k_\rho + \delta_{\mu\rho} k_\nu + \delta_{\nu\rho} k_\mu) k^2](p_x, p_y) \\ &+ \frac{1}{6} \left(\delta_{\mu\nu} \hat{T}_{m_1 m_2 m_3}^R[\square \partial_\rho](p_x, p_y) + \delta_{\mu\rho} \hat{T}_{m_1 m_2 m_3}^R[\square \partial_\nu](p_x, p_y) \right. \\ &+ \left. \delta_{\nu\rho} \hat{T}_{m_1 m_2 m_3}^R[\square \partial_\mu](p_x, p_y) \right) \\ &+ \frac{i}{576\pi^2} (\delta_{\mu\nu} (p_{x\rho} + p_{y\rho}) + \delta_{\mu\rho} (p_{x\nu} + p_{y\nu}) + \delta_{\nu\rho} (p_{x\mu} + p_{y\mu})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{Q}_{m_1 m_2 m_3 m_4}^R[\square \square] &= -m_4^2 I_{m_1 m_2 m_3 m_4}^{(4)}[k^2](p_x, p_y, p_z) + p_z^2 I_{m_1 m_2 m_3}^{(3)}[1](p_x - p_z, p_y - p_z) \\ &+ 2 p_{z\rho} I_{m_1 m_2 m_3}^{(3)}[k_\rho](p_x - p_z, p_y - p_z) - \hat{T}_{m_1 m_2 m_3}^R[\square](p_x - p_z, p_y - p_z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{Q}_{m_1 m_2 m_3 m_4}^R[\square \partial_\mu \partial_\nu] &= -m_4^2 I_{m_1 m_2 m_3 m_4}^{(4)}[k_\mu k_\nu](p_x, p_y, p_z) + p_{z\mu} p_{z\nu} I_{m_1 m_2 m_3}^{(3)}[1](p_x - p_z, p_y - p_z) \\ &+ p_{z\mu} I_{m_1 m_2 m_3}^{(3)}[k_\nu](p_x - p_z, p_y - p_z) + p_{z\nu} I_{m_1 m_2 m_3}^{(3)}[k_\mu](p_x - p_z, p_y - p_z) \\ &- \hat{T}_{m_1 m_2 m_3}^R[\partial_\mu \partial_\nu](p_x - p_z, p_y - p_z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{Q}_{m_1 m_2 m_3 m_4}^R[\partial_\mu \partial_\nu \partial_\rho \partial_\sigma] &= I_{m_1 m_2 m_3 m_4}^{(4)}[k_\mu k_\nu k_\rho k_\sigma - \frac{1}{24}(\delta_{\mu\nu} \delta_{\rho\sigma} + \delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\sigma} + \delta_{\mu\sigma} \delta_{\nu\rho}) k^4](p_x, p_y, p_z) \\ &+ \frac{1}{24} (\delta_{\mu\nu} \delta_{\rho\sigma} + \delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\sigma} + \delta_{\mu\sigma} \delta_{\nu\rho}) \left(\hat{Q}_{m_1 m_2 m_3 m_4}^R[\square \square](p_x, p_y, p_z) + \frac{5}{96\pi^2} \right) \end{aligned}$$

Tabla 2.8: Transformadas de Fourier de las funciones básicas renormalizadas de tres y cuatro puntos. p_x , p_y y p_z son los momentos conjugados de las coordenadas x , y y z . Suponemos que las funciones básicas en espacio de momentos en el miembro de la izquierda dependen de p_x, p_y (para funciones T) y p_x, p_y, p_z (para funciones Q). Las integrales $I^{(n)}$ están definidas en el texto. El momento k es la variable de integración.

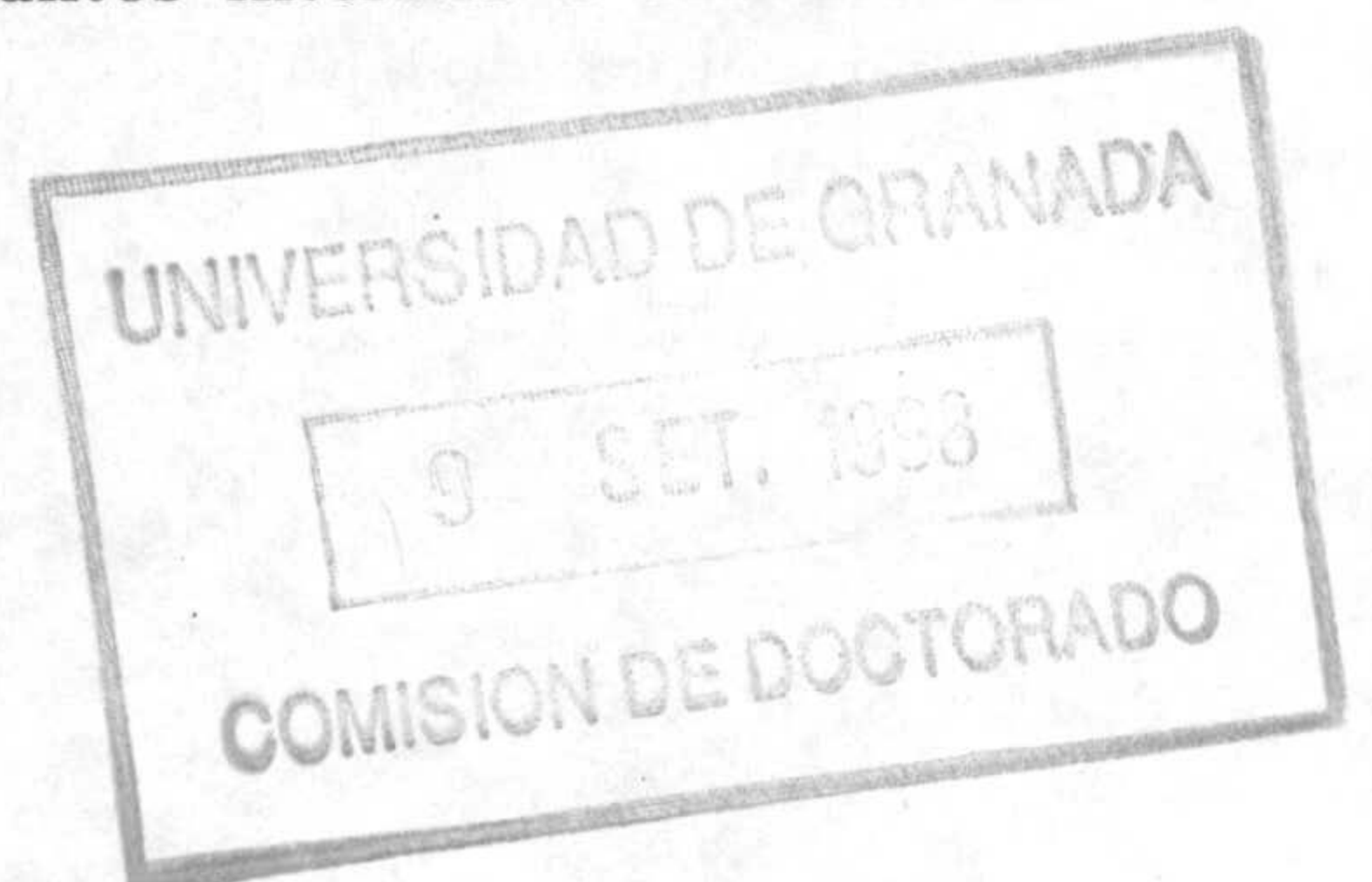
Capítulo 3

Relación con otros métodos de renormalización

En este capítulo encontramos una relación sorprendente (a primera vista, al menos): al nivel de un bucle, RDR proporciona resultados equivalentes al método de regularización por reducción dimensional. A órdenes mayores no podemos decir nada de momento, ya que RDR sólo ha sido desarrollada a un bucle. Antes de probar esta equivalencia, comparamos brevemente el método general de renormalización diferencial con otros esquemas de renormalización.

3.1 Relación de renormalización diferencial con otros esquemas

El hecho de que renormalización diferencial se aplique directamente a los diagramas de Feynman y de que la substracción de las divergencias se realice sin necesidad de regularización ni contratérminos explícitos, es común al método de renormalización BPHZ [3, 9, 10]. Recordemos que en este método, definido en espacio de momentos, las integrales divergentes se renormalizan substrayendo los primeros términos en el desarrollo de Taylor en momentos externos del integrando. La organización de la substracción de subdivergencias también es la misma en ambos métodos. La principal diferencia entre ellos viene del hecho de que renormalización diferencial permite una escala de renormalización arbitraria, que refleja las distintas formas en que puede extenderse una distribución mal definida. Por contra, en BPHZ la escala natural viene dictada por los momentos externos. Esto da lugar a problemas infrarrojos en teorías sin masa, que son mucho más fácilmente tratables con renormalización diferencial. Con frecuencia, los cálculos en espacio de posiciones son más sencillos y producen expresiones más compactas, gracias a que posponen las integrales en puntos internos a órdenes más altos.



La relación de renormalización diferencial con regularización dimensional [33, 34] fue analizada al nivel de un bucle en la Ref. [35]. Aplicando ambos esquemas a algunos diagramas sencillos en espacio de posiciones, y usando substracción mínima para regularización dimensional, los autores encontraron que ambos esquemas diferían en términos locales finitos. En realidad, no podía ser de otro modo ya que cualquier esquema de renormalización correcto debe dar el mismo resultado a primer orden, salvo términos locales finitos. Por supuesto, estos términos pueden originar diferencias infinitas a órdenes mayores. Por otra parte, recordemos que la idea de integración por partes también es útil en el marco de regularización dimensional [36]. Regularización dimensional será discutida con más detalle en la siguiente sección.

También se ha conjeturado que las prescripciones de renormalización diferencial podrían derivarse de una regularización mediante "derivadas más altas" (que suele usarse junto a Pauli-Villars para tratar teorías supersimétricas) [37]. No existe sin embargo, que sepamos, ningún argumento a favor de tal aseveración.

Más interesante es la reciente demostración en la Ref. [38] de que renormalización diferencial es equivalente al método de Epstein-Glaser [39], también conocido como teoría de perturbaciones causal. Este método realiza una substracción de Taylor modificada sobre las funciones de prueba. Cuando esto se lleva al nivel de distribuciones se obtienen las identidades de renormalización diferencial. Este resultado proporciona una prueba indirecta de la validez de renormalización diferencial a todos los órdenes, ya que es sabido que el método de Epstein-Glaser da lugar a una matriz S que cumple todos los requisitos de teoría cuántica de campos. En la Ref. [38] se observa además que ambos métodos son esencialmente equivalentes a BPHZ cuando se trasladan a espacio de momentos.

3.2 Equivalencia entre RDR y reducción dimensional

Revisamos primero los métodos de regularización dimensional y reducción dimensional, presentándolos de tal manera que sea más sencilla la comparación con RDR.

Regularización dimensional se ha constituido en el método más conveniente y usado para calcular correcciones radiativas en teorías *gauge*. Las expresiones divergentes se regularizan continuando analíticamente los momentos (y otros cuadvectores) en el número de dimensiones, D , y extendiendo los covariantes Lorentz (γ_μ , $\delta_{\mu\nu}$, etc.) a D dimensiones. La segunda parte se consigue tratando los covariantes como objetos formales que obedecen ciertas identidades algebraicas [33]. Los diagramas de Feynman regularizados dimensionalmente son funciones meromórficas del parámetro complejo D , y los polos en $D = 4$ pueden substraerse coherentemente a todo orden. La substracción mínima de los polos define una renormalización que satisface los requisitos usuales de causalidad, unitariedad, cumplimiento de identidades de Ward, etc. Sólo aparecen problemas en las identidades que dependen de la naturaleza cuatridimensional de los objetos involucrados. Tal es el caso de las identidades de Fierz o de relaciones que

usan el tensor de Levi-Civita. En particular la extensión de γ_5 a D dimensiones es problemática. Las prescripciones coherentes de las Refs. [27, 33, 40] llevan a anomalías espúreas que han de ser corregidas a mano con contratérminos finitos [41], por lo que en cálculos explícitos es más usual seguir las convenciones de la Ref. [42] y trabajar con una γ_5 anticonmutante.

Para solucionar los problemas de regularización dimensional y, en particular, preservar supersimetría, W. Siegel propuso una variación del método conocida como **regularización por reducción dimensional** [43]. La idea es continuar los momentos de integración a D dimensiones manteniendo al tiempo cuadridimensionales todos los otros tensores y espinores. Por tanto este método trabaja con dos tipos de objetos, D -dimensionales y 4-dimensionales, relacionados por

$$\delta_{\mu\nu}\hat{\delta}_{\nu\rho} = \hat{\delta}_{\mu\rho}, \quad (3.1)$$

donde $\delta_{\mu\nu}$ es la métrica 4-dimensional ($\delta_{\mu\mu} = 4$) y $\hat{\delta}_{\mu\nu}$ es la métrica D -dimensional ($\hat{\delta}_{\mu\mu} = D$). Esta identidad, característica de reducción dimensional de 4 a D dimensiones, es necesaria para la validez de las ecuaciones de movimiento e invariancia *gauge* en la teoría regulada. El álgebra de Dirac, incluyendo γ_5 , se realiza en 4 dimensiones. Desafortunadamente esta regularización es incoherente [44]. Sin embargo, los problemas aparecen a órdenes superiores y el método ha sido aplicado con éxito a cálculos a primeros órdenes en teorías supersimétricas.

La equivalencia entre RDR y el método de reducción dimensional es debida, en primer lugar, a un hecho sencillo: **las funciones básicas reguladas dimensionalmente cumplen automáticamente las relaciones impuestas por las reglas 2 a 4 de RDR** (esto es más fácil de apreciar cuando se trabaja en espacio de momentos). Por tanto, las posibles discrepancias sólo pueden surgir a través de las condiciones iniciales (esto es, la renormalización de las funciones escalares de uno y dos puntos). Ahora bien, tales discrepancias pueden absorberse en la elección de la escala de renormalización¹, luego las funciones básicas son idénticas salvo elección de esquema. Hemos comprobado explícitamente que las funciones básicas en espacio de momentos de las Tablas 2.6, 2.7 y 2.8 coinciden con las correspondientes integrales en regularización dimensional en el esquema \overline{MS} , si la escala de RDR se redefine como $\log \bar{M}^2 = \log \mu^2 + 2$, donde μ es la escala de renormalización del método dimensional. En segundo lugar, y a diferencia de regularización dimensional convencional, el álgebra fuera de las funciones básicas es considerada cuadridimensional tanto en RDR como en reducción dimensional. En tercer y último lugar, la distinción de RDR entre índices contraídos y libres es imitada en reducción dimensional por la Ec. 3.1 y el límite $D \rightarrow 4$. Para ilustrar esto, consideremos la función básica en espacio de momentos $\hat{T}^R[\square]$, que difiere de $\delta_{\mu\nu}\hat{T}^R[\partial_\mu\partial_\nu]$ por un término independiente del momento (luego local), $1/(32\pi^2)$ (ver

¹Recordemos que en regularización dimensional las constantes dimensionales fuera de logaritmos son necesariamente cero. Esto coincide con el esquema que hemos escogido para las divergencias no logarítmicas.

Tabla 2.8). En reducción dimensional tendríamos

$$\begin{aligned}
 \delta_{\mu\nu} \hat{T}^D[\partial_\mu \partial_\nu] &= \delta_{\mu\nu} \left(\hat{\delta}_{\mu\nu} C_{00}^D + \sum_{i,j=1}^2 p_{i\mu} p_{j\nu} C_{ij}^D \right) \\
 &= \hat{\delta}_{\mu\mu} C_{00}^D + \sum_{i,j=1}^2 p_i \cdot p_j C_{ij}^D \\
 &= DC_{00}^D + \sum_{i,j=1}^2 p_i \cdot p_j C_{ij}^D \\
 &= 4C_{00}^D - \frac{1}{32\pi^2} + \sum_{i,j=1}^2 p_i \cdot p_j C_{ij}^D + O(D-4), \quad (3.2)
 \end{aligned}$$

donde los coeficientes C^D son integrales en D dimensiones y hemos usado la Ec. 3.1. El término constante extra proviene de multiplicar D por la parte proporcional a $1/(D-4)$ en C_{00}^D y proporciona (en el límite $D \rightarrow 4$, efectuado tras substracción mínima) la misma corrección que RDR al caso de índices contraídos. Lo mismo ocurre en general, ya que en reducción dimensional da igual contraer los índices antes o después de efectuar las integrales. Si los contraemos antes resultan directamente las funciones básicas de RDR. Nótese que regularización dimensional convencional introduce D 's extras provenientes de deltas contraídas ($\hat{\delta}_{\mu\mu}$) fuera de las funciones básicas. Además, las reglas de Feynman en regularización dimensional contienen D explícitamente en algunas teorías.

A primera vista, esta coincidencia resulta sorprendente, ya que los principios y el procedimiento de ambos métodos son substancialmente distintos. Recordemos no obstante que, a un bucle, dos esquemas de renormalización pueden diferir a lo sumo en términos finitos locales. Parece que, a este nivel, el requisito de que un método respete invariancia *gauge* y supersimetría en cualquier cálculo determina totalmente estos términos (salvo por la libertad de escoger la escala de renormalización). De alguna manera, con RDR hemos pedido una renormalización invariante en cuatro dimensiones [45], y ocurre que reducción dimensional con substracción mínima da una realización explícita de tal renormalización. La equivalencia de ambos métodos al nivel de un bucle tiene consecuencias prácticas y teóricas. Desde un punto de vista práctico, sabemos que la aplicación de ambos métodos va a proporcionar los mismos resultados, por lo que podemos utilizar el que mejor se adapte al cálculo considerado. De hecho, en el capítulo siguiente veremos cómo las técnicas de RDR y reducción dimensional pueden combinarse en una única implementación para cálculos automatizados por ordenador. El lado negativo es que RDR no constituye (a este nivel) una alternativa a reducción dimensional. Desde el punto de vista de teoría de la renormalización, la equivalencia es muy interesante y puede explotarse en ambos sentidos. Por un lado, es posible que a órdenes mayores RDR (al ser más flexible) supere las incoherencias de reducción dimensional. Por otro, la experiencia existente en el método de reducción dimensional puede emplearse para investigar la extensión de RDR a órdenes mayores.

Capítulo 4

Cálculos automatizados

“All I wanted to say,” bellowed the computer, “is that my circuits are now irrevocably committed to calculating the Answer to the Ultimate Question of Life, the Universe, and Everything.” He paused and satisfied himself that he now had everyone’s attention, before continuing more quietly. “But the program will take me a little while to run.”

Fook glanced impatiently at his watch.

“How long?” he said.

“Seven and half million years,” said Deep Thought.

(...)

Douglas Adams

En este capítulo presentamos una serie de programas informáticos para el cálculo automático de amplitudes renormalizadas con RDR. En primer lugar nos referimos brevemente a un programa en *Mathematica* para el uso de RDR en espacio de coordenadas. El programa, sencillamente, toma una expresión escrita en espacio de coordenadas y la descompone en funciones básicas, siguiendo exactamente los pasos descritos en la Sección 2.4. Si se desea, las funciones básicas se substituyen por su valor renormalizado. Es posible también realizar la transformada de Fourier de toda la expresión. (Realmente, las transformadas de Fourier de las amplitudes renormalizadas están incorporadas directamente en una subrutina.) Las transformadas de Fourier pueden evaluarse numéricamente. Por ejemplo, para calcular la expresión renormalizada en espacio de momentos de la polarización del vacío en QED sin masa, bastan tres líneas de *Mathematica*:

```
<<CDR.m;  
VP=e^2 trace[gamma[mu]**fprop[mph,x]**gamma[nu]**fprop[mph,-x]];  
Factor[MomCalculate[VP,2]/.mph->0]
```

con el resultado

$$-\frac{e^2 \left(-1 + 3 \operatorname{Log} \left[\frac{M_b^2}{p \cdot p} \right] \right) (\operatorname{delta}[\mu, \nu] p \cdot p - p[\mu] p[\nu])}{36\pi^2} \quad (4.1)$$

La entrada es el diagrama tal y como se escribe usando las reglas de Feynman en espacio de coordenadas, con ****** indicando un producto no conmutativo (que se usa tanto para matrices de Dirac como para derivadas) y `fprop[m,z]` el propagador fermiónico de masa m y variable z . `mph` es una masa pequeña que se usa para regular divergencias infrarrojas en pasos intermedios, y que hemos hecho cero al final. `MomCalculate` realiza todas las operaciones y da el resultado en espacio de momentos (el 2 indica que tratamos con una función de 2 puntos). Hemos usado además la función `Factor` de *Mathematica* para hacer explícita la estructura transversa de la polarización del vacío.

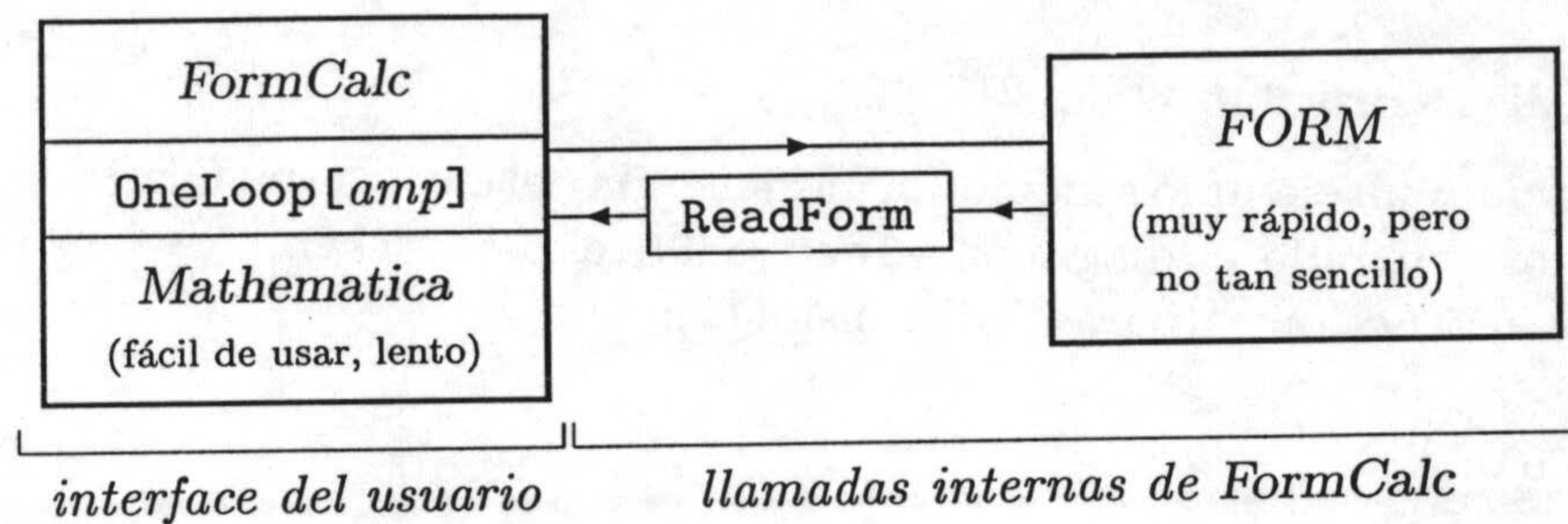
Este pequeño programa, aunque rudimentario y lento para cálculos que involucran gran número de diagramas, tiene la ventaja de ser bastante versátil. Nosotros lo hemos usado para realizar los cálculos explícitos en espacio de coordenadas descritos en el siguiente capítulo, y sobre todo, para comprobar (en combinación con *LoopTools* que será descrito más adelante) que RDR respeta las identidades de Ward en las teorías que hemos estudiado. Sin embargo, aplicaciones como el cálculo de correcciones radiativas en el Modelo Estándar requieren utilizar programas más sofisticados. Es por ello que, con la imprescindible colaboración de T. Hahn, hemos desarrollado dos paquetes para el cálculo eficiente en espacio de momentos de amplitudes a un bucle.

Debido a la similitud discutida en el capítulo anterior entre RDR y los métodos dimensionales, ha sido posible implementar dos posibilidades en un sólo esfuerzo: cálculos en regularización dimensional o cálculos en RDR/reducción dimensional. Nos referiremos a ambas posibilidades como cálculos en D o en 4 dimensiones, respectivamente. La evaluación de un diagrama a un bucle con estos paquetes procede en dos pasos: En *FormCalc* las expresiones simbólicas de los diagramas, tal y como se obtienen de *FeynArts* [46], son simplificadas algebraicamente de forma que la salida pueda usarse casi directamente en un programa numérico, en Fortran o C++, por ejemplo. *LoopTools* es el segundo paquete y proporciona la implementación numérica de las funciones a un bucle necesarias para programas que usen la salida de *FormCalc*. A continuación describimos brevemente estos programas.

4.1 *FormCalc*

FormCalc es un programa basado en *Mathematica* para calcular diagramas a un bucle en RDR o en regularización dimensional. El programa lee entradas provenientes de *FeynArts*, que genera diagramas de Feynman y sus expresiones algebraicas para una teoría dada, y proporciona un resultado finito simplificado y adecuado para cálculos numéricos. La estructura de *FormCalc* es bastante simple: prepara las expresiones simbólicas de los diagramas en un fichero de entrada para *FORM* [47], corre *FORM*, y

recoge los resultados. Esta interacción es transparente para el usuario. De esta forma *FormCalc* combina la velocidad de *FORM* con el poderoso conjunto de instrucciones de *Mathematica* y el último facilita considerablemente el ulterior procesamiento de los resultados. El siguiente diagrama muestra esquemáticamente cómo *FormCalc* interactúa con *FORM*:



Esquemáticamente, el procedimiento que sigue *FormCalc* para calcular diagramas a un bucle es el siguiente:

1. Calcula las trazas y simplifica el álgebra de Dirac en 4 o D dimensiones, según la opción escogida.
2. Escribe todo en términos de funciones básicas, que en espacio de momentos son integrales escalares o tensoriales.
3. Descompone las integrales tensoriales en covariantes Lorentz construidos con los momentos externos y el tensor métrico (ver las Refs. [48, 49] para más detalles). Los coeficientes de estos tensores son integrales escalares.
4. Añade los términos locales necesarios según el método usado:
 - (a) Para cálculos en 4 dimensiones añade los términos locales de RDR cuando dos o más índices coinciden.
 - (b) Para cálculos en D dimensiones añade términos locales para productos de D por una integral divergente: $DI \rightarrow 4I + c$, con I la integral y c el coeficiente de su polo $\frac{1}{D-4}$. Después, hace $D = 4$ fuera de las integrales.

Las integrales escalares y coeficientes de integrales tensoriales son comunes a ambas opciones, y pueden evaluarse numéricamente usando *LoopTools*.

La función principal de *FormCalc* es *OneLoop* (el nombre no es estrictamente correcto pues trabaja también con diagramas árbol). Se usa del siguiente modo:

```
<< FormCalc.m;
$Dimension = 4;
amps = << myamps.m;
alldiags = OneLoop[amps];
```

Hemos supuesto que el fichero `myamps.m` contiene las amplitudes generadas por *FeynArts*. La dimensión— D para regularización dimensional o 4 para RDR / reducción dimensional—es elegida con `$Dimension`. Alternativamente, si uno quiere evaluar solamente un subconjunto de diagramas,

```
somediags = OneLoop[ Pick[amps, {3, 5, {21, 29}}] ]
```

calculará los diagramas 3, 5, y del 21 al 29.

Consideremos un ejemplo sencillo: la autoenergía del electrón en QED (ver Fig 5.2). Una vez hemos generado el diagrama `electronSE.amp` con *FeynArts*, basta con usar las siguientes instrucciones (para D dimensiones):

```
<< FormCalc.m;
$OnShell = False;
$Dimension = D;
OneLoop[<< electronSE.amp] //. Abbreviations[]
```

que dan el resultado

$$\begin{aligned}
 & - \frac{EL^2 \text{ME B0}[\text{Pair}[k[1], k[1]], \text{ME2}, 0]}{4 \text{Pi}^2} - \\
 & \frac{EL^2 \text{B1}[\text{Pair}[k[1], k[1]], \text{ME2}, 0] \text{ga}[k[1]]}{8 \text{Pi}^2} - \\
 & \frac{EL^2 (-2 \text{ME} + \text{ga}[k[1]])}{16 \text{Pi}^2} \quad (4.2)
 \end{aligned}$$

Igualmente, el resultado en 4 dimensiones se reproduce sin más que hacer `$Dimension = 4`, lo que resulta en

$$\begin{aligned}
 & - \frac{EL^2 \text{ME B0}[\text{Pair}[k[1], k[1]], \text{ME2}, 0]}{4 \text{Pi}^2} - \\
 & \frac{EL^2 \text{B1}[\text{Pair}[k[1], k[1]], \text{ME2}, 0] \text{ga}[k[1]]}{8 \text{Pi}^2} \quad (4.3)
 \end{aligned}$$

Aquí `Pair` indica un producto escalar, `ga[k[1]]` es \not{k}_1 y `B0` y `B1` son los coeficientes de las integrales tensoriales con dos propagadores (ver Ref. [49]). La orden `$Onshell = False` desactiva la opción por defecto de poner las partículas externas sobre su capa másica. El resto de la notación debería ser obvio. Un aspecto importante de *FormCalc* es que proporciona expresiones en las cuales las cadenas de espinores, productos escalares con vectores de polarización y otras estructuras han sido recogidas y abreviadas. El uso de abreviaturas reduce significativamente el tamaño de las amplitudes. Las definiciones pueden recuperarse usando `Abbreviations[]`, como hemos hecho en este ejemplo. Vemos que ambos cálculos difieren en un término constante. Aún más

completa que `OneLoop`, la función `ProcessFile` puede procesar ficheros enteros, separando los resultados en parte bosónica y fermiónica, lo que es comunmente necesario, por ejemplo para sumar sobre generaciones de fermiones. `ProcessFile` se utiliza de la siguiente forma:

```
ProcessFile["vertex.amp", "results/vertex"]
```

Esta instrucción lee las amplitudes en `vertex.amp` y produce `results/vertex.m`, que contiene la parte bosónica, y `results/vertexF.m`, que contiene la parte fermiónica. Para más detalles sobre el uso de *FormCalc* véanse las Refs. [50, 51].

4.2 *LoopTools*

LoopTools proporciona las integrales escalares y coeficientes de integrales tensoriales necesarias para la evaluación numérica del código producido por *FormCalc*. *LoopTools* sigue las convenciones de la Ref. [49]. La referencia completa a las funciones implementadas puede encontrarse en las Refs. [50, 51]. Ya que, como vimos en el capítulo anterior, estas funciones son esencialmente iguales en regularización dimensional, reducción dimensional y RDR, podemos emplear expresiones únicas para cualquiera de estos métodos. De hecho, *LoopTools* se basa en el paquete *FF*, de gran fiabilidad, que calcula numéricamente integrales en regularización dimensional. Además de las integrales escalares de *FF*, *LoopTools* incorpora también los coeficientes de integrales tensoriales de uno hasta cuatro propagadores. *LoopTools* ofrece tres interfaces: Fortran, C++ y *Mathematica*, con lo que la mayoría de las preferencias de programación deberían estar servidas. Aquí damos un ejemplo trivial del uso de *LoopTools* en *Mathematica*:

```
In[1]:= Install["bca"]
```

```
Out[1]= LinkObject[bca, 1, 1]
```

```
In[2]:= B0[1000, 50, 80]
```

```
Out[2]= -4.40593 + 2.70414 I
```

La escala de renormalización y la masa usada para regular las posibles divergencias infrarrojas pueden cambiarse con las funciones `Mudim` y `Lambda`, respectivamente.

4.3 Cálculos con *FormCalc* y *LoopTools*

Para realizar cálculos “reales” en teorías como el Modelo Estándar usando estos paquetes, los pasos a seguir son, típicamente:

Paso	Programa	tiempo típico de CPU
1. Generar diagramas	<i>FeynArts</i>	3 min.
2. Simplificar analíticamente	<i>FormCalc</i>	10 min.
3. Producir código Fortran	(<i>NumPrep</i>)	3 min.
4. Compilar (con programa conductor)	<i>LoopTools</i>	7 min.

Los tiempos de ejecución son para el cálculo completo del proceso $ZZ \rightarrow ZZ$ a un bucle (unos 500 diagramas) [52], usando un Pentium PC estándar en Linux. Este cálculo está contenido como demostración en la distribución de *FormCalc*. Para evaluar numéricamente las expresiones producidas por *FormCalc* es conveniente convertirlas a un programa en Fortran (podría usarse *Mathematica* directamente, pero el proceso se hace muy lento para amplitudes grandes). La forma más sencilla de hacerlo en *Mathematica* es usando la función *FortranForm*. Junto con el programa de demostración incluimos un programa más sofisticado llamado *NumPrep*, que además de traducir a código Fortran realiza algunas simplificaciones, como agrupar integrales dependientes o independientes del ángulo (de forma que estas sólo necesiten ser calculadas una vez). Estas simplificaciones dependen del proceso a calcular, por lo que el programa necesita modificaciones para tratar otros procesos. El código Fortran producido por *NumPrep* necesita, además de las funciones facilitadas por *LoopTools*, un pequeño programa “conductor”, *num.F*, que proporciona los parámetros, cinemática, etc. necesarios. De nuevo, más detalles pueden encontrarse en las Refs. [50, 51].

4.4 Requerimientos y disponibilidad de los programas

FormCalc y *LoopTools* deben compilarse y correr sin cambios en cualquier plataforma basada en Unix. En particular han sido comprobados en DEC Alpha, HP 9000, y Linux. *FormCalc* necesita *Mathematica* 2.2 o superior incluyendo el compilador de MathLink (*mcc*), y *FORM* 2 o superior¹. *LoopTools* requiere un compilador de Fortran-77, la utilidad GNU *make*, y los compiladores GNU C y C++ (*gcc,g++*).

Los programas *FormCalc* y *LoopTools* pueden obtenerse via WWW en

<http://www-itp.physik.uni-karlsruhe.de/formcalc> and

<http://www-itp.physik.uni-karlsruhe.de/looptools>, respectivamente. Los

paquetes contienen un manual completo con instrucciones de instalación y la descripción detallada de cada función. *FeynArts* está disponible en

<ftp://ftp.physik.uni-wuerzburg.de/pub/hep/index.html>.

¹*FormCalc* también funciona con *FORM* 1, pero entonces no puede simplificar completamente las cadenas de espinores con fermiones externos.

Capítulo 5

Aplicaciones

(...)

“All right,” said Deep Thought. “The Answer to the Great Question ...”

“Yes ...!”

“Of Life, the Universe and Everything ...” said Deep Thought.

“Yes ...!”

“Is ...” said Deep Thought, and paused.

“Yes ...!”

“Is ...”

“Yes ...!!! ...?”

“Forty-two,” said Deep Thought, with infinite majesty and calm.

Douglas Adams

En este capítulo aplicamos RDR a diversas teorías *gauge* y supersimétricas. En particular estudiamos QED espinorial y escalar y QCD, prestando especial atención a las identidades de Ward correspondientes, y realizamos un cálculo particular en un modelo de supergravedad. En todos los casos se preservan las simetrías relevantes.

5.1 Renormalización de QED

Comenzamos con el paradigma de teoría cuántica de campos: QED (electrodinámica cuántica). El Lagrangiano en el espacio Euclídeo e incluyendo un término de fijación del *gauge* es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{a}{2} (\partial_\mu A_\mu)^2 + \bar{\Psi} (\mathcal{D} + m) \Psi, \quad (5.1)$$

donde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ es el tensor electromagnético y D la derivada covariante definida como $D_\mu \Psi = \partial_\mu \Psi + ieA_\mu$. Las correspondientes reglas de Feynman están

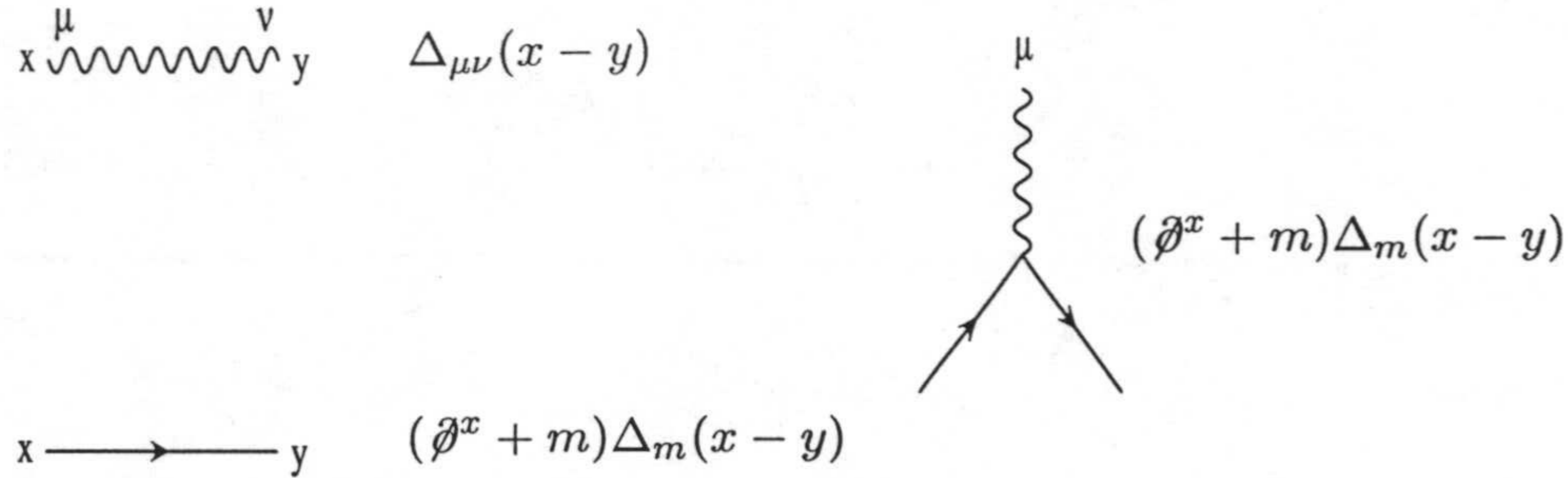


Figura 5.1: Reglas de Feynman para QED. Las líneas onduladas representan fotones y las sólidas electrones. El propagador del fotón en un *gauge* de Lorentz general es $\Delta_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{16\pi^2}(\delta_{\mu\nu}\square + (a-1)\partial_\mu\partial_\nu) \log x^2 s^2$. El álgebra de Dirac en el espacio Euclídeo está dada por $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu}$.

dadas en la Fig. 5.1. Este Lagrangiano, salvo por el término de fijación del *gauge*, es invariante bajo las transformaciones de *gauge* (infinitesimales)

$$\delta\Psi(x) = ie\Psi(x)\delta\lambda(x), \quad (5.2)$$

$$\delta\bar{\Psi}(x) = -ie\bar{\Psi}(x)\delta\lambda(x), \quad (5.3)$$

$$\delta A_\mu(x) = -\partial_\mu\delta\lambda(x). \quad (5.4)$$

Esto implica una serie de identidades de Ward-Takahashi entre las funciones de Green de la teoría. Veremos explícitamente que renormalización diferencial restringida respeta estas identidades en cálculos a un bucle. Los diagramas que contribuyen a las funciones de Green 1PI divergentes a un bucle están representados en la Fig. 5.2.

Consideremos en primer lugar la **polarización del vacío** (que tomamos en el capítulo anterior como ejemplo del uso de nuestro pequeño programa en *Mathematica*). A un bucle, esta amplitud no depende del *gauge* elegido. Aplicando las reglas de Feynman al diagrama (a) de la Fig. 5.2 se obtiene la expresión

$$\Pi_{\mu\nu}(x_1, x_2) = \Pi_{\mu\nu}(x) = e^2 \text{Tr}[\gamma_\mu(\not{\partial} + m)\Delta_m(x)\gamma_\nu(-\not{\partial} + m)\Delta_m(x)]. \quad (5.5)$$

Debido a invariancia translacional la amplitud sólo depende de $x = x_1 - x_2$. Simplificando el álgebra de Dirac y empleando la regla de Leibniz esta ecuación puede escribirse en términos de funciones básicas:

$$\Pi_{\mu\nu}(x) = 4e^2 \left\{ (m^2\delta_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\square - \partial_\mu\partial_\nu) B_{mm}[1] + 2B_{mm}[\partial_\mu\partial_\nu] - \delta_{\mu\nu}B_{mm}[\square] \right\} \quad (5.6)$$

y substituyendo por las funciones renormalizadas de la Tabla 2.3 se obtiene la polarización del vacío renormalizada:

$$\Pi_{\mu\nu}^R(x) = -\frac{4e^2}{(4\pi^2)^2} (\partial_\mu\partial_\nu - \delta_{\mu\nu}\square) \left[\frac{1}{6}(\square - 4m^2) \left(\frac{mK_0(mx)K_1(mx)}{x} \right) \right]$$

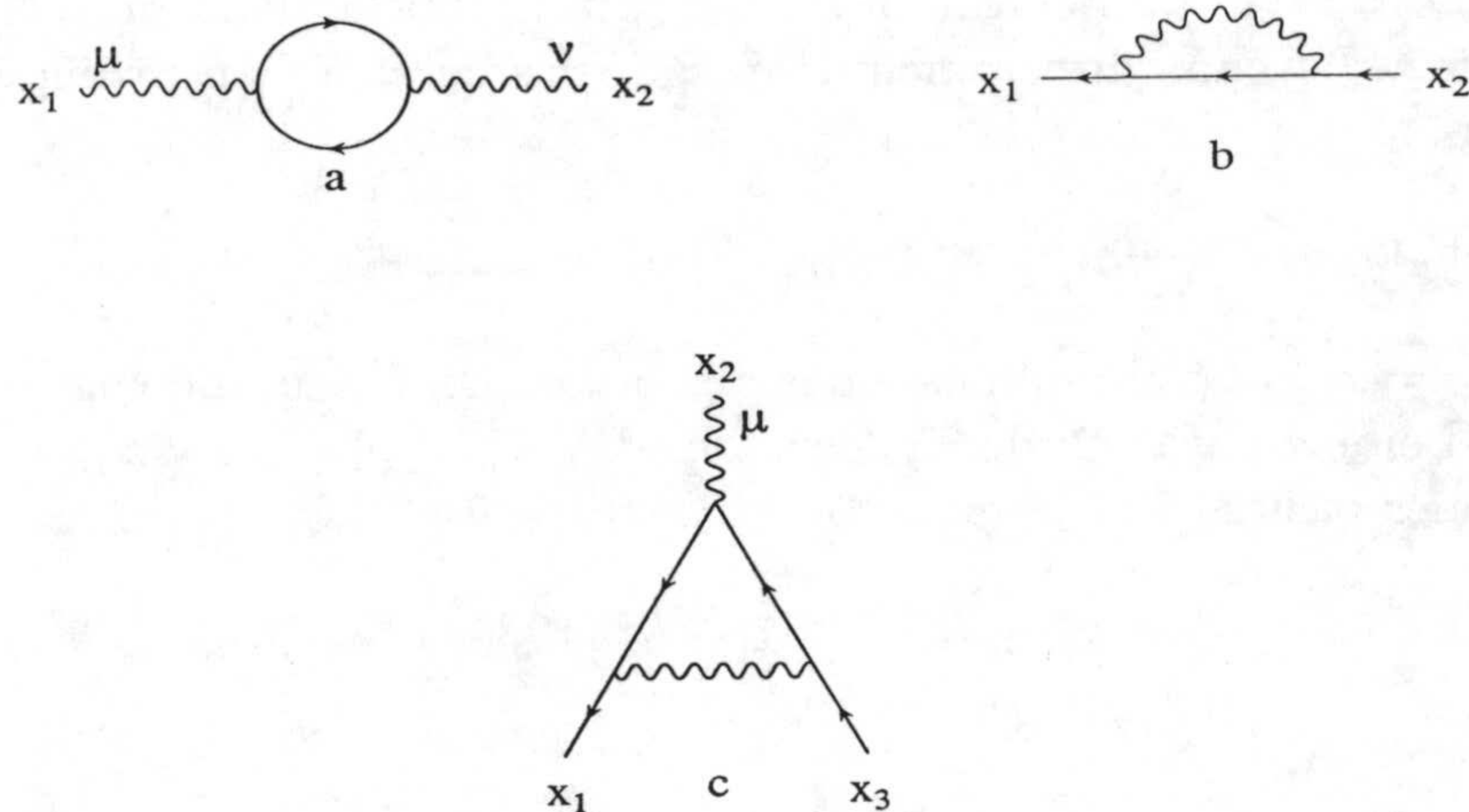


Figura 5.2: Diagramas de Feynman que contribuyen a la polarización del vacío (a), autoenergía del electrón (b) y corrección al vértice (c) en QED.

$$-\frac{1}{2}m^2(K_0^2(mx) - K_1^2(mx)) + \frac{1}{3}\pi^2(\log \frac{\bar{M}^2}{m^2} + \frac{2}{3})\delta(x), \quad (5.7)$$

que es directamente transversa, tal y como exige invariancia *gauge* a través de la identidad de Ward-Takahashi $\partial_\mu \Pi_{\mu\nu}^R = 0$. (Para mostrar explícitamente la forma transversa hemos realizado algunas manipulaciones bien definidas sobre las funciones de Bessel modificadas.)

Como en el resto de funciones de Green las masas no juegan ningún papel relevante en lo que a renormalización se refiere, consideramos únicamente el caso de electrones sin masa, para así obtener fórmulas más compactas. La **autoenergía del electrón** a un bucle viene dada por el diagrama (b) de la Fig. 5.2. En el *gauge* de Feynman ($a = 1$), la expresión desnuda es

$$\Sigma(x) = e^2 \gamma_\mu \Delta_{\mu\nu}(x) \not{\partial} \Delta(x) \gamma_\nu, \quad (5.8)$$

que en términos de funciones básicas se reduce a

$$\Sigma(x) = -2e^2 B[\not{\partial}]. \quad (5.9)$$

El valor renormalizado es, usando la Tabla 2.2,

$$\Sigma^R(x) = \frac{1}{64\pi^4} e^2 \not{\partial} \square \frac{\log x^2 M^2}{x^2}. \quad (5.10)$$

En un *gauge* general hay que usar además las funciones de la Tabla 2.5. El resultado renormalizado es

$$\begin{aligned} \Sigma^R(x) = e^2 \left\{ \frac{1}{4} \frac{1}{(4\pi^2)^2} \not{\partial} \square \frac{\log x^2 M^2}{x^2} \right. \\ \left. + (a-1) \left[\frac{1}{4} \frac{1}{(4\pi^2)^2} \not{\partial} \square \frac{\log x^2 M^2}{x^2} + \frac{1}{16\pi^2} \not{\partial} \delta(x) \right] \right\}. \quad (5.11) \end{aligned}$$

Discutamos ahora a la **corrección del vértice** a un bucle, dada por el diagrama (c) de la Fig. 5.2. Leyendo directamente de las reglas de Feynman tenemos, en el *gauge* de Feynman,

$$V_\mu(x, y) = (-ie)^3 \gamma_\alpha \not{\partial}^x \Delta(x) \gamma_\mu \not{\partial}^y \Delta(y) \gamma_\alpha \Delta(x + y), \quad (5.12)$$

con $x = x_1 - x_2$ e $y = x_2 - x_3$. Simplificando el álgebra de Dirac y usando sistemáticamente la regla de Leibniz para reordenar las derivadas, $V_\mu(x, y)$ puede expresarse en términos de funciones básicas T:

$$V_\mu(x, y) = ie^3 \{ 2\gamma_b \gamma_\mu \gamma_a (\partial_a^x \partial_b^y T[1] - \partial_a^x T[\partial_b] - \partial_b^y T[\partial_a]) + 2\gamma_\mu T[\square] - 4\gamma_a T[\partial_a \partial_\mu] \}. \quad (5.13)$$

La expresión renormalizada se obtiene directamente de la Tabla 2.4:

$$V_\mu^R(x, y) = ie^3 \{ 2\gamma_b \gamma_\mu \gamma_a (\partial_a^x \partial_b^y T[1] - \partial_a^x T[\partial_b] - \partial_b^y T[\partial_a]) - 4\gamma_a T[\partial_a \partial_\mu - \frac{1}{4} \delta_{a\mu} \square] - \frac{1}{4} \frac{1}{(4\pi^2)^2} \gamma_\mu \square \frac{\log x^2 M^2}{x^2} \delta(x + y) - \frac{1}{8} \frac{1}{4\pi^2} \gamma_\mu \delta(x) \delta(y) \}. \quad (5.14)$$

El resultado correspondiente en un *gauge* general es

$$V_\mu^R(x, y) = ie^3 \{ -2\gamma_b \gamma_\mu \gamma_a (\partial_a^x \partial_b^y \bar{T}[\square] + \partial_a^x \bar{T}[\partial_b \square] - \partial_b^y \bar{T}[\partial_a \square]) + 4\gamma_a T[\partial_a \partial_\mu - \frac{1}{4} \delta_{a\mu} \square] - \frac{1}{4} \frac{1}{(4\pi^2)^2} \gamma_\mu \square \frac{\log x^2 M^2}{x^2} \delta(x - y) - \frac{1}{8} \frac{1}{4\pi^2} \gamma_\mu \delta(x) \delta(y) + (a - 1) [\gamma_\rho \gamma_a \gamma_\mu \gamma_b \gamma_\sigma (\partial_a^x \partial_b^y \bar{T}[\partial_\rho \partial_\sigma] + \partial_a^x \bar{T}[\partial_b \partial_\rho \partial_\sigma] - \partial_b^y \bar{T}[\partial_a \partial_\rho \partial_\sigma]) - \frac{1}{4} \frac{1}{(4\pi^2)^2} \gamma_\mu \square \frac{\log x^2 M^2}{x^2} \delta(x - y)] \}. \quad (5.15)$$

El vértice y la autoenergía del electrón renormalizados deben verificar la identidad de Ward-Takahashi

$$(\partial_\mu^x - \partial_\mu^y) V_\mu^R(x, y) = ie (\Sigma^R(x) \delta(y) - \Sigma^R(y) \delta(x)), \quad (5.16)$$

que ya fue discutida en la Sección 2.2. Recordemos que en renormalización diferencial convencional esta identidad sólo se cumple si se impone cierta relación entre las escalas de renormalización de ambos diagramas (más una relación extra en el caso de un *gauge* general). En RDR, en cambio, la identidad se satisface directamente, sin necesidad de ningún ajuste *a posteriori*. Para comprobar que esto es así, es necesario verificar que la actuación de ambos miembros de la Ec. 5.16 sobre una función de prueba arbitraria da el mismo resultado. En general, un método conveniente es realizar la transformada de Fourier (esto es, escoger la función de prueba $\phi(x, y) = e^{ix \cdot p} e^{iy \cdot p'}$), que retiene toda

la información de la distribución. En otras palabras, podemos estudiar la identidad de Ward en espacio de momentos,

$$-i(p_\mu - p'_\mu)\hat{V}_\mu^R(p, p') = ie(\hat{\Sigma}^R(p') - \hat{\Sigma}^R(p)). \quad (5.17)$$

Las transformadas de Fourier de las Ecs. 5.10 y 5.14 son, respectivamente,

$$\hat{\Sigma}^R(p) = -i\frac{e^2}{16\pi^2} \not{p} \log\left(\frac{p^2}{M^2}\right) \quad (5.18)$$

y

$$\begin{aligned} \hat{V}_\mu^R(p, p') = ie^3 \{ & \gamma_b \gamma_\mu \gamma_a (-p_a p'_b \hat{T}[1] + ip_a \hat{T}[\partial_b] + ip'_b \hat{T}[\partial_a]) \\ & + 4\gamma_a \hat{T}[\partial_a \partial_\mu - \frac{1}{4} \delta_{a\mu} \square] \\ & - \frac{1}{16\pi^2} \gamma_\mu (\log\left(\frac{(p-p')^2}{M^2}\right) + \frac{1}{2}) \}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Para simplificar las integrales estudiemos el límite $p' \rightarrow 0$, que es suficiente en este caso (y equivalente a integrar en y con la identidad como función de prueba). Las integrales que necesitamos se reducen a

$$\hat{T}[\partial_\alpha] \xrightarrow{p' \rightarrow 0} \frac{i}{16\pi^2} \frac{p_\alpha}{p^2}, \quad (5.20)$$

$$\hat{T}[\partial_\alpha \partial_\beta - \frac{1}{4} \delta_{\alpha\beta} \square] \xrightarrow{p' \rightarrow 0} -\frac{1}{32\pi^2} \frac{p_\alpha p_\beta - \frac{1}{4} \delta_{\alpha\beta} p^2}{p^2}, \quad (5.21)$$

mientras que $\hat{T}^R[1]$ es logarítmicamente divergente infrarrojo por lo que $p'_\alpha \hat{T}[1] \xrightarrow{p' \rightarrow 0} 0$. Con estos valores encontramos para ambos miembros de la Ec. 5.17, en el límite $p' \rightarrow 0$, el mismo resultado:

$$-\frac{e^3}{16\pi^2} \not{p} \log \frac{p^2}{M^2}. \quad (5.22)$$

Con las mismas técnicas hemos comprobado que RDR también preserva la identidad de Ward-Takahashi cuando se trabaja en un *gauge* general, así como para electrones masivos.

Finalmente, la renormalización completa de QED exigiría calcular también la función de Green 1PI de cuatro fotones. Aunque esta función es finita, por contaje de potencias contiene una singularidad logarítmica que sólo se cancela gracias a invariancia *gauge* abeliana. Por ello, esta función es potencialmente ambigua y sería interesante ver que la correspondiente identidad de Ward-Takahashi se verifica en RDR. No obstante, en lugar de realizar estos cálculos aquí, nos referimos a los cálculos correspondientes en QCD, que contienen los de QED en el límite Abelian. En cuanto a las ecuaciones del grupo de renormalización, RDR no introduce diferencias respecto a renormalización diferencial convencional a un bucle, por lo que dirigimos al lector a la Ref. [17], donde QED fue estudiada hasta dos bucles.

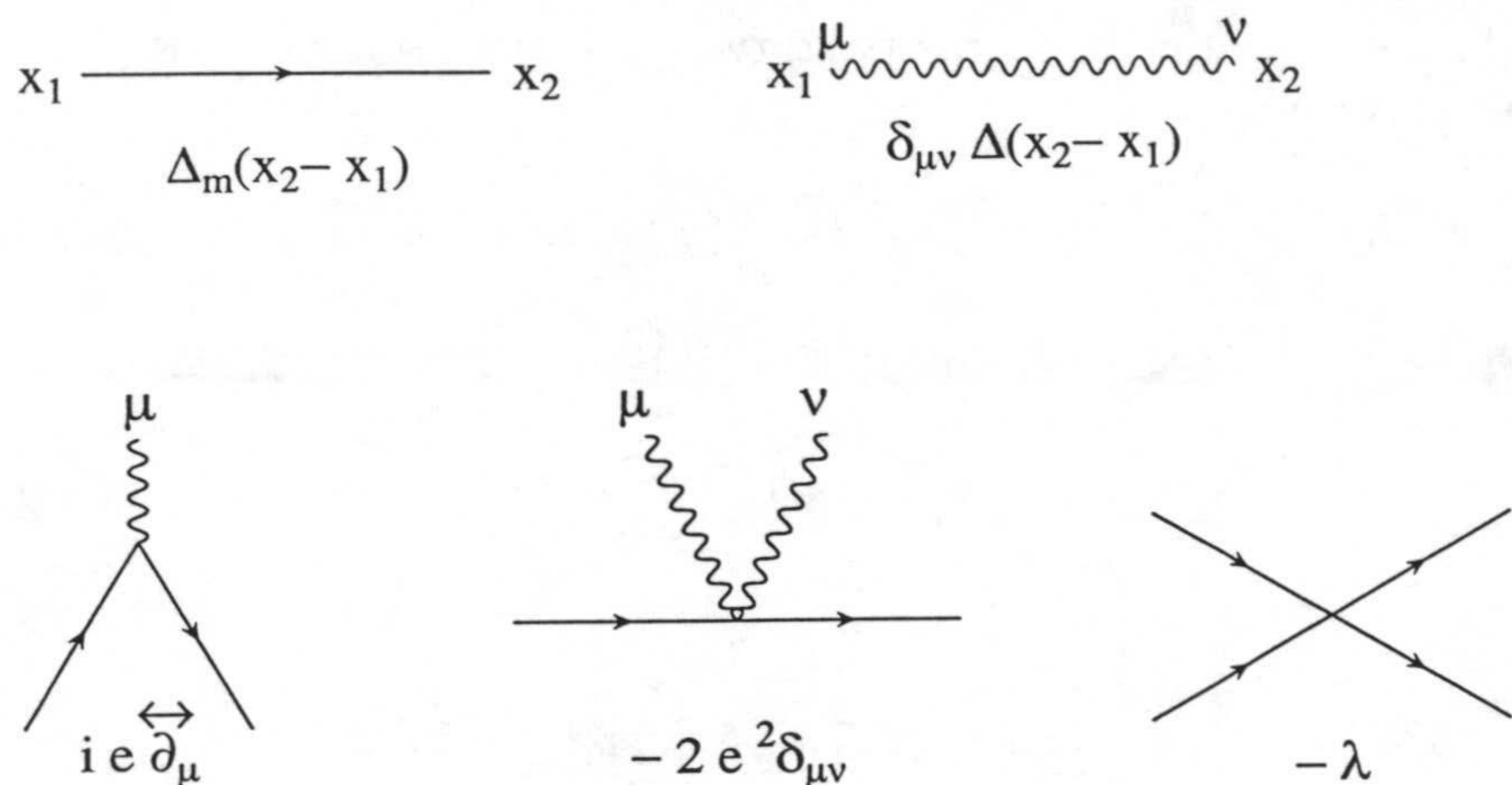


Figura 5.3: Reglas de Feynman de QED escalar. Las líneas onduladas corresponden a fotones y las líneas sólidas a escalares. En el acoplamiento trilineal, $\overleftrightarrow{\partial}_\mu = \overrightarrow{\partial}_\mu - \overleftarrow{\partial}_\mu$, con $\overrightarrow{\partial}_\mu$ ($\overleftarrow{\partial}_\mu$) actuando sobre el escalar entrante (saliente).

5.2 Renormalización de QED escalar

La presencia de acoplamientos derivativos hace de QED escalar la teoría más simple que contiene todas las funciones básicas de la Tabla 2.1. En este contexto, las técnicas del Capítulo 2 pueden ser completamente ilustradas. Calculamos a un bucle las funciones de Green 1PI de dos, tres y cuatro puntos, que son las únicas que requieren renormalización. Las funciones de un punto son directamente cero. A continuación, tras escribir el Lagrangiano de la teoría y las reglas de Feynman, calculamos estas funciones de Green usando RDR, recuperamos los valores conocidos de las funciones β y dimensiones anómalas de QED escalar, y comprobamos que las identidades de Ward dadas por invariancia *gauge* abeliana se satisfacen. Aquí y en los cálculos de las siguientes secciones trabajaremos en el *gauge* de Feynman.

El Lagrangiano de QED escalar en espacio Euclídeo y en el *gauge* de Feynman es

$$\mathcal{L}_E = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} (\partial_\mu A_\mu)^2 + (\partial_\mu - ieA_\mu) \phi^\dagger (\partial_\mu + ieA_\mu) \phi + m^2 \phi^\dagger \phi + \frac{\lambda}{4} (\phi^\dagger \phi)^2. \quad (5.23)$$

Las correspondientes reglas de Feynman están dadas en la Fig. 5.3. Las transformaciones *gauge* son análogas a las de QED espinorial.

Los dos diagramas de Feynman que contribuyen a la polarización del vacío, (a1) y (a2), están dibujados en la Fig 5.4. Sus contribuciones son:

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{(a1)}(x) &= -e^2 \Delta_m(x) \overleftrightarrow{\partial}_\mu \overleftrightarrow{\partial}_\nu \Delta_m(x), \\ \Pi_{\mu\nu}^{(a2)}(x) &= -2e^2 \delta_{\mu\nu} \Delta_m(x) \delta(x), \end{aligned} \quad (5.24)$$

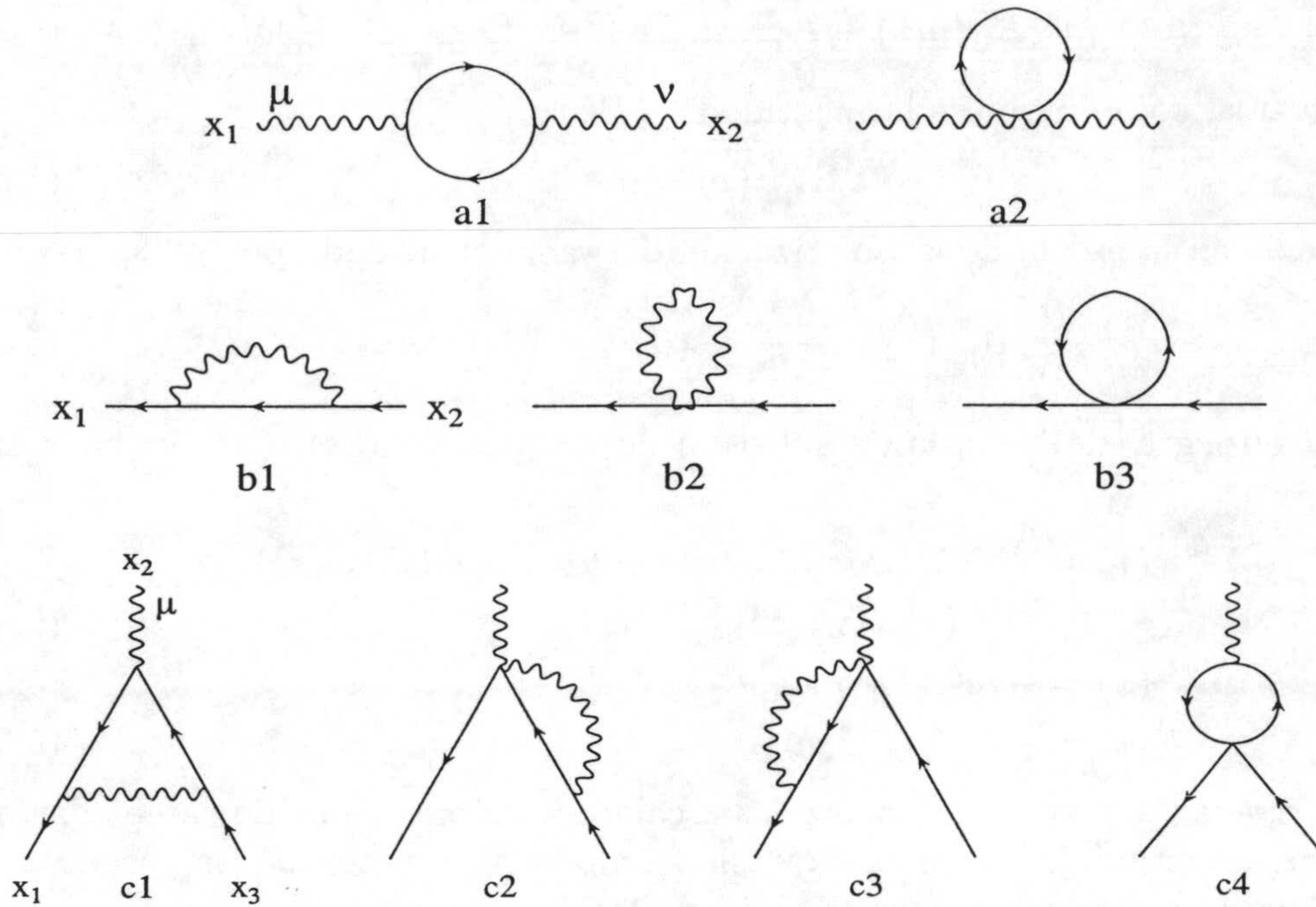


Figura 5.4: Diagramas de Feynman que contribuyen a la polarización del vacío (a), autoenergía del escalar (b) y vértice fotón-escalar-escalar (c).

donde $A \overleftrightarrow{\partial}_\mu B = A\partial_\mu B - \partial_\mu AB$. En términos de funciones básicas la Ec. 5.24 se reescribe como

$$\begin{aligned}\Pi_{\mu\nu}^{(a1)}(x) &= -e^2(4B_{mm}[\partial_\mu\partial_\nu] - \partial_\mu\partial_\nu B_{mm}[1]), \\ \Pi_{\mu\nu}^{(a2)}(x) &= -2e^2\delta_{\mu\nu}A_m.\end{aligned}\quad (5.25)$$

Substituyendo por las funciones renormalizadas de la Tabla 2.3, encontramos una expresión finita para cada diagrama:

$$\begin{aligned}\Pi_{\mu\nu}^{(a1)R}(x) &= -\frac{e^2}{(4\pi^2)^2}\{(\partial_\mu\partial_\nu - \delta_{\mu\nu}\square)\left[\frac{1}{6}(\square - 4m^2)\left(\frac{mK_0(mx)K_1(mx)}{x}\right.\right. \\ &\quad \left.\left.+ m^2(K_0^2(mx) - K_1^2(mx))\right) + \frac{1}{3}\pi^2\left(\log\frac{\bar{M}^2}{m^2} - \frac{4}{3}\right)\delta(x)\right] \\ &\quad \left. + \delta_{\mu\nu}[2\pi^2m^2\left(\log\frac{\bar{M}^2}{m^2} - 1\right)\delta(x)]\right\},\end{aligned}\quad (5.26)$$

$$\Pi_{\mu\nu}^{(a2)R}(x) = \frac{e^2}{(4\pi^2)^2}2\pi^2m^2\left(\log\frac{\bar{M}^2}{m^2} - 1\right)\delta_{\mu\nu}\delta(x).\quad (5.27)$$

Los términos longitudinales se cancelan en la suma:

$$\Pi_{\mu\nu}^R(x) = -\frac{e^2}{(4\pi^2)^2}(\partial_\mu\partial_\nu - \delta_{\mu\nu}\square)\left[\frac{1}{6}(\square - 4m^2)\left(\frac{mK_0(mx)K_1(mx)}{x}\right)\right]$$

$$+ m^2(K_0^2(mx) - K_1^2(mx)) + \frac{1}{3}\pi^2(\log \frac{\bar{M}^2}{m^2} - \frac{4}{3})\delta(x)], \quad (5.28)$$

que es transversa, como requiere la identidad de Ward

$$\partial_\mu \Pi_{\mu\nu}^R(x) = 0. \quad (5.29)$$

La dependencia en la escala de la polarización del vacío viene dada por

$$M \frac{\partial}{\partial M} \Pi_{\mu\nu}^R(x) = -\frac{e^2}{24\pi^2} (\partial_\mu \partial_\nu - \delta_{\mu\nu} \square) \delta(x). \quad (5.30)$$

La **autoenergía del escalar** se obtiene de los gráficos (b1), (b2) y (b3) de la Fig 5.4:

$$\begin{aligned} \Sigma^{(b1)}(x) = & -e^2 [\square (\Delta(x)\Delta_m(x)) + 2\partial_\alpha (\Delta(x)\partial_\alpha \Delta_m(x)) \\ & + \Delta(x)\square \Delta_m(x)], \end{aligned} \quad (5.31)$$

$$\Sigma^{(b2)}(x) = -4e^2 \Delta(x)\delta(x), \quad (5.32)$$

$$\Sigma^{(b3)}(x) = -\lambda \Delta_m(x)\delta(x), \quad (5.33)$$

donde las derivadas que actuaban sobre los escalares externos han sido cambiadas por menos derivadas actuando sobre la expresión amputada completa. En términos de funciones básicas, la autoenergía renormalizada total es

$$\Sigma^R(x) = -e^2 (\square B_{0m}^R[1] + 2\partial_\rho B_{0m}^R[\partial_\rho] + B_{0m}^R[\square] + 4A^R[1]) - \lambda A_m^R[1]. \quad (5.34)$$

La expresión explícita se puede obtener usando las Tablas 2.2 y 2.3:

$$\begin{aligned} \Sigma^R(x) = & \frac{-e^2}{32\pi^4} \left\{ (2\square + m^2) \left[(\square - m^2) \frac{K_0(mx)}{x} + 2\pi^2 \log \frac{\bar{M}^2}{m^2} \delta(x) \right] \right. \\ & \left. + m^2 \partial_\mu \left[K_0(mx) \partial_\mu \frac{1}{x^2} \right] \right\} - \frac{\lambda}{16\pi^2} m^2 (1 - \log \frac{\bar{M}^2}{m^2}) \delta(x). \end{aligned} \quad (5.35)$$

La parte dependiente de la escala es

$$M \frac{\partial}{\partial M} \Sigma^R(x) = \left(-\frac{e^2}{8\pi^2} (2\square + m^2) + \frac{\lambda}{8\pi^2} m^2 \right) \delta(x). \quad (5.36)$$

Los diagramas que contribuyen al **vértice fotón-escalar-escalar**, (c1)-(c4), se muestran en la Fig. 5.4. Sus expresiones renormalizadas en términos de funciones básicas son

$$\begin{aligned} V_\mu^{(c1)R} = & -ie^3 \left\{ -2T_{mm0}^R[\square \partial_\mu] + (\partial_\mu^x + \partial_\mu^y) T_{mm0}^R[\square] + 4(\partial_\alpha^x + \partial_\alpha^y) T_{mm0}^R[\partial_\mu \partial_\alpha] \right. \\ & - 8\partial^x \cdot \partial^y T_{mm0}^R[\partial_\mu] - 2(\partial_\mu^x + \partial_\mu^y)(\partial_\alpha^x + \partial_\alpha^y) T_{mm0}^R[\partial_\alpha] \\ & \left. + 4(\partial_\mu^x + \partial_\mu^y) \partial^x \cdot \partial^y T[1] \right\}, \end{aligned} \quad (5.37)$$

$$V_\mu^{(c2)R} = -2ie^3 \left\{ \partial_\mu^y B_{0m}^R[1](y) + B_{0m}^R[\partial_\mu](y) \right\} \delta(x), \quad (5.38)$$

$$V_\mu^{(c3)R} = -2ie^3 \left\{ \partial_\mu^x B_{0m}^R[1](x) + B_{0m}^R[\partial_\mu](x) \right\} \delta(y), \quad (5.39)$$

$$V_\mu^{(c4)R} = 0, \quad (5.40)$$

donde $x = x_1 - x_2$, $y = x_2 - x_3$. El diagrama (c4), que es proporcional a λ , se anula directamente debido a sus propiedades bajo conjugación de carga. El vértice renormalizado resulta de la suma de las Ecs. 5.37-5.39 y del uso de las Tablas 2.3 y 2.4. La expresión explícita es larga y poco interesante por sí sola, por lo que no la escribimos aquí. No obstante, ha sido utilizada para el cálculo de las identidades de Ward correspondientes. La dependencia en la escala de renormalización es

$$M \frac{\partial}{\partial M} V_\mu^R(x, y) = -i \frac{e^3}{4\pi^2} (\partial_\mu^x + \partial_\mu^y) \delta(x) \delta(y). \quad (5.41)$$

La función vértice y la autoenergía renormalizadas satisfacen la identidad de Ward

$$(\partial_\mu^x - \partial_\mu^y) V_\mu^R(x, y) = ie(\Sigma^R(x) \delta(y) - \Sigma(y)^R \delta(x)), \quad (5.42)$$

como puede comprobarse usando las técnicas explicadas en el caso de QED. Obsérvese que la parte de la identidad de Ward proporcional a λ (proviniente de los diagramas (b3) y (b4)) se satisface trivialmente, ya que ambos miembros son cero. En general, los diagramas proporcionales a λ forman un subconjunto invariante *gauge*.

Los diagramas 1PI que contribuyen a la **colisión fotón-escalar** ($V_{\mu\nu}$), (d1)-(d7), y **fotón-fotón** ($V_{\mu\nu\rho\sigma}$), (e1)-(e3), y a la **colisión escalar-escalar** (V), (f1)-(f9), están dibujados en las Figs. 5.5 y 5.6, respectivamente. Como en casos previos, las funciones de Green renormalizadas se obtienen desarrollando en funciones básicas y cambiando éstas por sus expresiones renormalizadas en las Tablas 2.2-2.4. Los resultados finales son demasiado largos, incluso en términos de funciones básicas, como para escribirlos aquí. Nosotros los hemos calculado con el mencionado programa en *Mathematica*. Las dependencias en la escala se obtienen directamente. Para el vértice fotón-fotón-escalar-escalar la dependencia es

$$M \frac{\partial}{\partial M} V_{\mu\nu}^R(x, y, z) = \delta_{\mu\nu} \frac{e^4}{2\pi^2} \delta(x) \delta(y) \delta(z), \quad (5.43)$$

con $x = x_1 - x_2$, $y = x_2 - x_3$, $z = x_3 - x_4$. Obsérvese que no hay parte proporcional a λ . En realidad, las Ecs. 5.41 y 5.43 se siguen de invariancia *gauge* y la Ec. 5.30. La dependencia de escala del vértice de cuatro fotones se cancela al sumar todos los diagramas, tal y como requiere la renormalizabilidad de la teoría. Finalmente, la dependencia del vértice de cuatro escalares en la escala de renormalización viene dada por

$$M \frac{\partial}{\partial M} V(x, y, z) = \frac{1}{16\pi^2} (24e^4 - 4e^2\lambda + 5\lambda^2) \delta(x) \delta(y) \delta(z). \quad (5.44)$$

Nótese que hay una parte independiente de λ , reflejando el hecho bien conocido de que un autoacoplamiento cuártico para los escalares es necesario en el Lagrangiano para renormalizabilidad multiplicativa. Las identidades de Ward para las funciones de cuatro puntos son más transparentes en términos de los puntos externos originales:

$$\partial_\mu^{x_3} V_{\mu\nu}^R(x_1, x_2, x_3, x_4) = ie V_\nu^R(x_1, x_4, x_2) (\delta(x_1 - x_3) - \delta(x_2 - x_3)), \quad (5.45)$$

$$\partial_\mu^{x_1} V_{\mu\nu\rho\sigma}^R(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0, \quad (5.46)$$

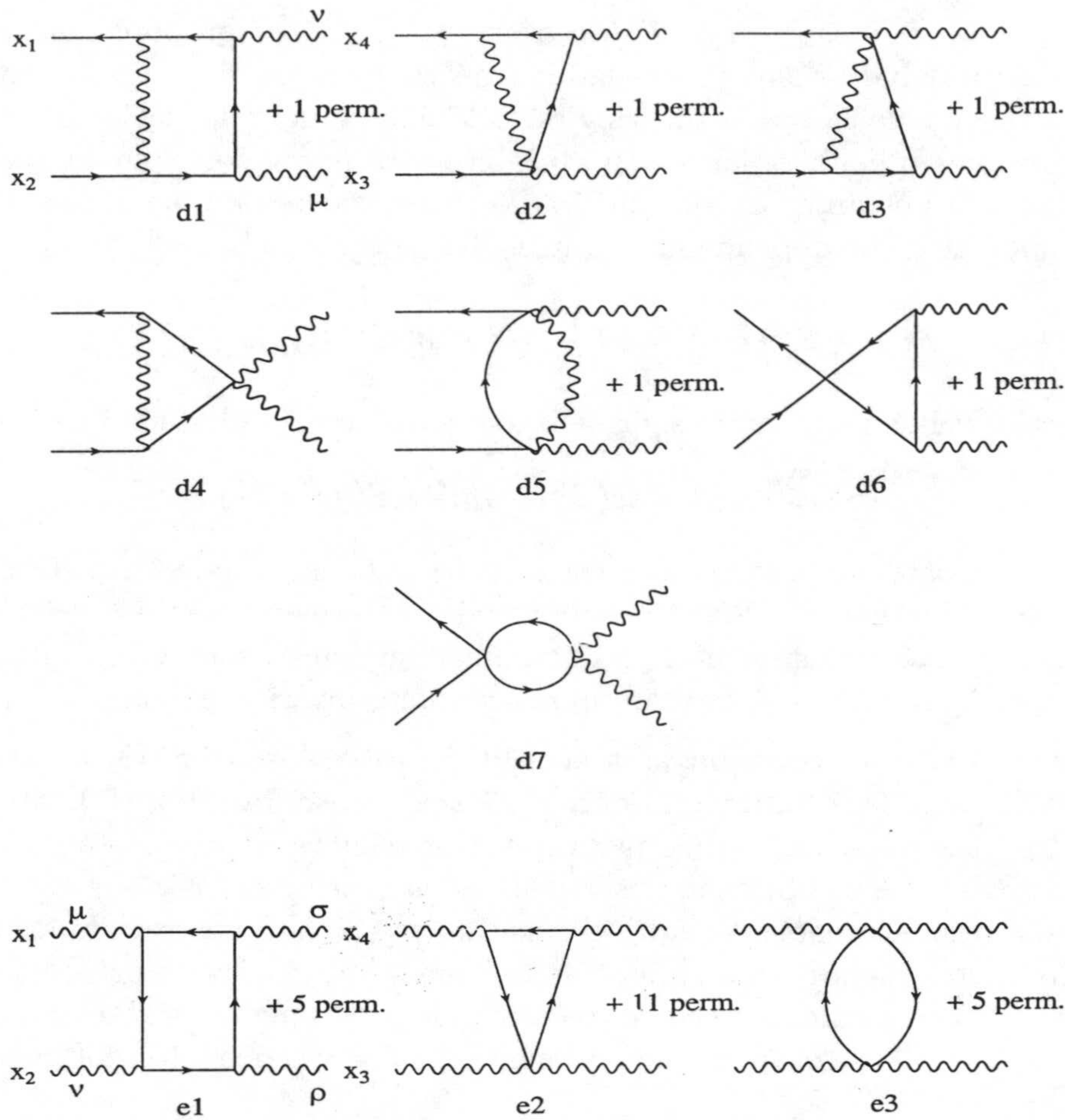


Figura 5.5: Diagramas de Feynman que contribuyen a la colisión fotón-escalar (d) y fotón-fotón (e). Las permutaciones incluyen diagramas con flujo de carga opuesto.

junto con las identidades relacionadas con las Ecs. 5.45 y 5.46 por simetría Bose. No existe ninguna identidad de Ward que relacione V con otras funciones de Green singulares. En términos de las variables x, y, z , las Ecs. 5.45 y 5.46 se escriben

$$(\partial_\mu^z - \partial_\mu^y)V_{\mu\nu}^R(x, y, z) = ieV_\nu^R(x + y + z, -y - z)[\delta(x + y) - \delta(y)], \quad (5.47)$$

$$\partial_\mu^x V_{\mu\nu\rho\sigma}^R(x, y, z) = 0. \quad (5.48)$$

Las partes dependientes de escala de $V_{\mu\nu}^R$ y $V_{\mu\nu\rho\sigma}^R$ satisfacen trivialmente las Ecs. 5.47 y 5.48. El mérito de RDR está en proporcionar también las partes independientes de escala correctas en las identidades de Ward. Para comprobar que esto es realmente así, hemos seguido el método descrito en el caso de QED, utilizando nuestro programa en *Mathematica* para llevar a cabo las operaciones algebraicas y *LoopTools* para calcular numéricamente las integrales finitas que aparecen. Usando momentos no excepcionales

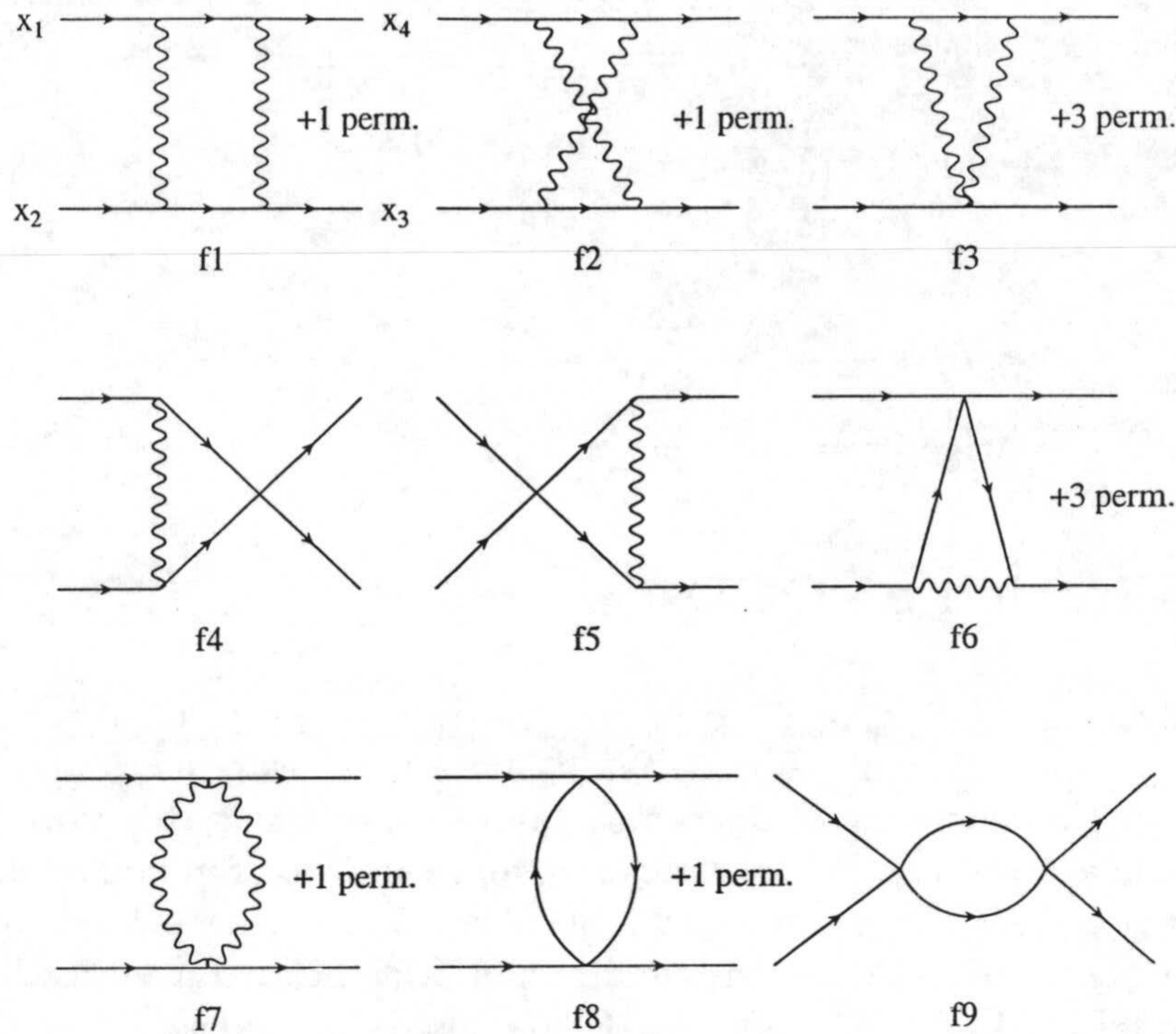


Figura 5.6: Diagramas de Feynman que contribuyen a la colisión escalar-escalar (f).

fuera de la capa de masas nos aseguramos de que las integrales no contienen divergencias infrarrojas. El resultado es que, efectivamente, se cumplen todas las identidades de Ward.

Para concluir esta sección calculamos las funciones β y dimensiones anómalas a primer orden. La ecuación del grupo de renormalización para cualquier amplitud renormalizada es

$$\left(M \frac{\partial}{\partial M} + \beta_e \frac{\partial}{\partial e} + \beta_\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} + \gamma_m m \frac{\partial}{\partial m} - n_\phi \gamma_\phi - n_A \gamma_A \right) \Gamma^{R(n_\phi, n_A)} = 0, \quad (5.49)$$

donde $\gamma_{\phi, A}$ son las dimensiones anómalas de los correspondientes campos y $\Gamma^{R(n_\phi, n_A)}$ es la función de Green 1PI renormalizada de n_ϕ campos escalares y n_A fotones¹. La parte a nivel árbol de las funciones Γ puede leerse directamente de las reglas de Feynman en la Fig. 5.3, en tanto que la dependencia en la escala a un bucle viene dada por las Ecs. 5.30, 5.36, 5.41, 5.43 y 5.44. Utilizando la Ec. 5.49 para las amplitudes relevantes se obtiene

$$\gamma_A = \frac{e^2}{48\pi^2}, \quad (5.50)$$

¹El único efecto de la dependencia en el parámetro de *gauge* es cancelar el correspondiente término a nivel árbol en la ecuación para la polarización del vacío.

$$\gamma_\phi = -\frac{e^2}{8\pi^2}, \quad (5.51)$$

$$\gamma_m = \frac{\lambda - 3e^2}{16\pi^2}, \quad (5.52)$$

$$\beta_e = \frac{e^3}{48\pi^2}, \quad (5.53)$$

$$\beta_\lambda = \frac{24e^4 - 12e^2\lambda + 5\lambda^2}{16\pi^2}. \quad (5.54)$$

Nótese que $\beta_e = e\gamma_A$, como exige invariancia *gauge*.

5.3 Renormalización de QCD

En esta sección aplicamos RDR a una teoría con invariancia *gauge* no Abeliana y estudiamos las correspondientes identidades de Ward, llamadas en este caso identidades de Slavnov-Taylor [53]. En concreto, consideramos una teoría de Yang-Mills con grupo *gauge* $SU(N_c)$ acoplada a N_f fermiones de Dirac en la representación fundamental, esto es, a QCD con N_c colores y N_f sabores de quark. El cálculo de la autoenergía del gluón y del triple vértice de gluones, usando renormalización diferencial convencional, fue efectuado en las Refs. [2] y [54], respectivamente. El método del campo *background* (“de fondo”) fue usado en esos cálculos porque conlleva identidades de Ward más sencillas y, en relación con ello, permite determinar la función β a partir de la función de dos gluones. Nosotros, en cambio, usaremos el formalismo convencional, precisamente por la misma razón: deseamos probar RDR en el caso más complejo, y mostrar que preserva las identidades de Slavnov-Taylor más que las identidades de tipo Ward-Takahashi del método del *background*. No obstante, para comparar con las Refs. [2] y [54], también hemos aplicado RDR a los cálculos en campo *background* mencionados.

Los argumentos de la Sección 2.2 se aplican igualmente al caso de invariancia *gauge* no Abeliana, ya que no dependen de la estructura del Lagrangiano. Una nueva característica de este caso es la aparición de operadores compuestos en las identidades de Slavnov-Taylor (en la forma de Zinn-Justin [55], que usaremos aquí). En la Ref. [2] ya se mostró que renormalización diferencial puede aplicarse sin cambios a diagramas con inserciones de operadores compuestos. Lo mismo ocurre en el procedimiento restringido. La renormalización de los operadores se define por la renormalización de las correspondientes funciones de Green.

El Lagrangiano de QCD en el *gauge* de Feynman, incluyendo términos de fantasmas, es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a + \frac{1}{2} (\partial_\mu A_\mu^a)(\partial_\nu A_\nu^a) + \partial_\mu \bar{\eta}^a (D_\mu \eta)^a + \sum_{i=1}^{N_f} \bar{\Psi}_i (\mathcal{D} + m_i) \Psi_i, \quad (5.55)$$

con

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \quad (5.56)$$

$$(D_\mu \eta)^a = \partial_\mu \eta^a + g f^{abc} A_\mu^b \eta^c, \quad (5.57)$$

$$D_\mu \Psi_i = \partial_\mu \Psi_i - ig A_\mu^a T^a \Psi_i. \quad (5.58)$$

T^a son los generadores de $SU(N_c)$ en la representación fundamental, y f^{abc} las constantes de estructura. Este Lagrangiano es invariante bajo la transformación BRST [28]

$$\delta A_\mu^a = -(D_\mu \eta)^a \delta \lambda \equiv s A_\mu^a \delta \lambda, \quad (5.59)$$

$$\delta \bar{\eta}^a = -\partial_\mu A_\mu^a \delta \lambda \equiv s \bar{\eta}^a \delta \lambda, \quad (5.60)$$

$$\delta \eta^a = -\frac{g}{2} f^{abc} \eta^b \eta^c \delta \lambda \equiv s \eta^a \delta \lambda, \quad (5.61)$$

$$\delta \Psi_i = -g T^a \eta^a \Psi_i \delta \lambda \equiv s \Psi_i \delta \lambda, \quad (5.62)$$

$$\delta \bar{\Psi}_i = -g \bar{\Psi}_i T^a \eta^a \delta \lambda \equiv s \bar{\Psi}_i \delta \lambda, \quad (5.63)$$

donde $\delta \lambda$ es un parámetro de Grassman constante. Para obtener identidades de Slavnov-Taylor sencillas para funciones de Green 1PI es conveniente añadir al Lagrangiano términos fuente no sólo para los campos elementales sino también para sus variaciones BRST (ver Apéndice B):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_f = - & \left(J_\mu^a A_\mu^a + \bar{\eta}^a \xi^a + \bar{\xi}^a \eta^a + \sum_{i=1}^{N_f} (\bar{\Psi}_i \chi_i + \bar{\chi}_i \Psi_i) \right. \\ & \left. + K_\mu^a (s A_\mu^a) + L^a (s \eta^a) + \sum_{i=1}^{N_f} (\bar{N}_i (s \Psi_i) + (s \bar{\Psi}_i) N_i) \right). \end{aligned} \quad (5.64)$$

Las reglas de Feynman en espacio de posiciones, incluyendo las correspondientes a inserciones de las variaciones BRST de los campos, están recogidas al final de esta sección en la Fig. 5.14. A continuación damos las expresiones renormalizadas de todas las funciones de Green 1PI (de campos elementales) a un bucle que son singulares, a saber, las autoenergías del gluón, quarks y fantasmas, y los vértices de quarks y fantasmas con un gluón, y de tres y cuatro gluones (las funciones de un punto son directamente cero por razones de simetría). Los correspondientes diagramas de Feynman están representados en las Figs. 5.7–5.12. Los diagramas con inserciones de variaciones BRST (Fig. 5.13) también han sido calculadas pero aquí no daremos los resultados explícitos.

Para comenzar, describamos con cierto detalle la renormalización de la **autoenergía del gluón**. (Para las demás amplitudes daremos directamente los resultados renormalizados.) Los diagramas (a1)-(a4) de la Fig. 5.7 dan las siguientes contribuciones:

$$\begin{aligned} \langle A_\mu^a(x_1) A_\nu^b(x_2) \rangle^{(a1)} = & \frac{1}{2} g^2 N_c \delta^{ab} \Delta(x) \left[\delta_{\mu\sigma} (D_\rho - \partial_\rho) + \delta_{\sigma\rho} (\partial_\mu - \overleftarrow{\partial}_\mu) + \delta_{\rho\mu} (\overleftarrow{\partial}_\sigma - D_\sigma) \right] \\ & \left[\delta_{\sigma\nu} (\partial_\rho - D_\rho) + \delta_{\nu\rho} (D_\sigma - \overleftarrow{\partial}_\sigma) + \delta_{\rho\sigma} (\overleftarrow{\partial}_\nu - \partial_\nu) \right] \Delta(x), \end{aligned} \quad (5.65)$$

$$\langle A_\mu^a(x_1) A_\nu^b(x_2) \rangle^{(a2)} = -6g^2 N_c \delta^{ab} \delta_{\mu\nu} \Delta(x) \delta(x), \quad (5.66)$$

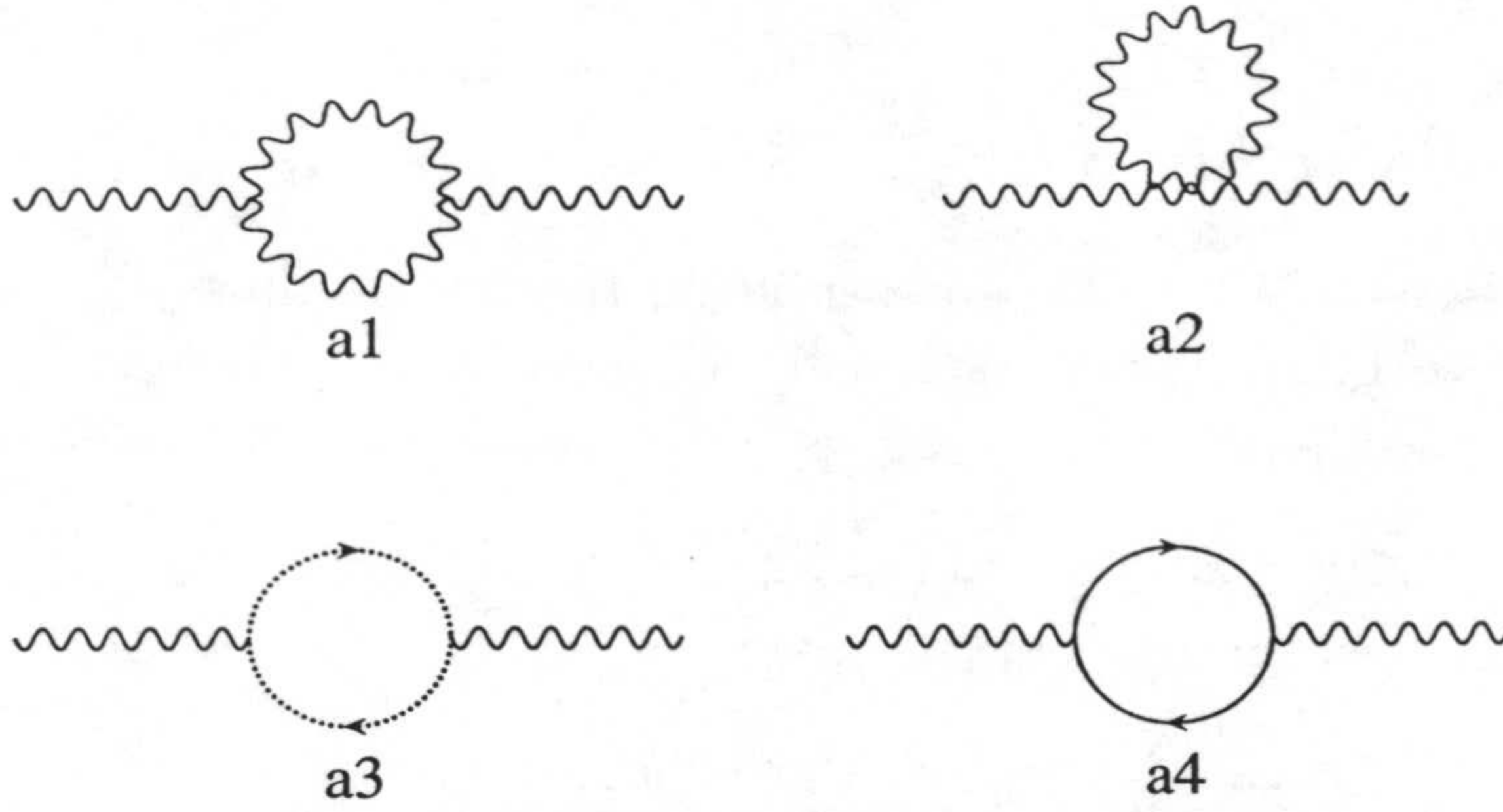


Figura 5.7: Diagramas de Feynman que contribuyen a la autoenergía del gluón (a).

$$\langle A_\mu^a(x_1) A_\nu^b(x_2) \rangle^{(a3)} = -g^2 N_c \delta^{ab} \partial_\mu \Delta(x) \partial_\nu \Delta(x), \quad (5.67)$$

$$\langle A_\mu^a(x_1) A_\nu^b(x_2) \rangle^{(a4)} = - \sum_{i=1}^{N_f} \frac{1}{2} g^2 \delta^{ab} \text{Tr}[\not{\partial} \Delta_{m_i}(x) \gamma_\mu \not{\partial} \Delta_{m_i}(x) \gamma_\nu], \quad (5.68)$$

donde una vez más $x = x_1 - x_2$. En esta sección usaremos la notación del Apéndice A para indicar más claramente la dependencia de cada campo en los puntos espacio-temporales, lo que será conveniente a la hora de escribir las ecuaciones de Slavnov-Taylor. La notación $\langle \rangle$ indica aquí funciones de Green 1PI al nivel de un bucle. Hemos usado D_α para indicar derivadas parciales que actúan sobre los gluones externos, que por la regla de Leibniz se reducen a menos derivadas de la expresión amputada. Desarrollando las Ecs. 5.65–5.68 en funciones básicas tenemos

$$\langle A_\mu^a(x_1) A_\nu^b(x_2) \rangle^{(a1)} = \frac{1}{2} g^2 N_c \delta^{ab} \{ (2\partial_\mu \partial_\nu - 5\delta_{\mu\nu} \square) B[1] + 5(\partial_\mu B[\partial_\nu] + \partial_\nu B[\partial_\mu]) + 2\delta_{\mu\nu} \partial_\sigma B[\partial_\sigma] - 10B[\partial_\mu \partial_\nu] - 2\delta_{\mu\nu} B[\square] \}, \quad (5.69)$$

$$\langle A_\mu^a(x_1) A_\nu^b(x_2) \rangle^{(a2)} = -6g^2 N_c \delta^{ab} \delta_{\mu\nu} A[1], \quad (5.70)$$

$$\langle A_\mu^a(x_1) A_\nu^b(x_2) \rangle^{(a3)} = -g^2 N_c \delta^{ab} \{ \partial_\mu B[\partial_\nu] - B[\partial_\mu \partial_\nu] \}, \quad (5.71)$$

$$\langle A_\mu^a(x_1) A_\nu^b(x_2) \rangle^{(a4)} = \sum_{i=1}^{N_f} \left[\left(-2\partial_\mu \partial_\nu + \delta_{\mu\nu} (\square + 2m_i^2) \right) B_{m_i m_i}[1] - 2B_{m_i m_i}[\square] + 4B_{m_i m_i}[\partial_\mu \partial_\nu] \right], \quad (5.72)$$

La autoenergía del gluón renormalizada se obtiene substituyendo las funciones básicas por sus valores renormalizados. Para obtener una expresión explícita más compacta, consideremos el caso de quarks sin masa. La suma de los diagramas renormalizados da entonces

$$\langle A_\mu^a(x_1) A_\nu^b(x_2) \rangle^R = -\frac{1}{144\pi^2} g^2 \delta^{ab} (\partial_\mu \partial_\nu - \delta_{\mu\nu} \square) \left[(15N_c - 6N_f) \frac{1}{4\pi^2} \square \frac{\log x^2 M^2}{x^2} + 2(N_c - N_f) \delta(x) \right], \quad (5.73)$$



Figura 5.8: Diagramas de Feynman que contribuyen a la autoenergía de los quarks (b) y de los fantasmas (c).

que es transversa tal y como exige la correspondiente identidad de Slavnov-Taylor. La dependencia en la escala de renormalización (para quarks con o sin masa) es

$$M \frac{\partial}{\partial M} \langle A_\mu^a(x_1) A_\nu^b(x_2) \rangle^R = \frac{1}{24\pi^2} g^2 \delta^{ab} (5N_c - 2N_f) (\partial_\mu \partial_\nu - \delta_{\mu\nu} \square) \delta(x). \quad (5.74)$$

En el método del campo *background*, la autoenergía del gluón *background* renormalizada con RDR vale (para quarks sin masa)

$$\langle B_\mu^a(x_1) B_\nu^b(x_2) \rangle^R = -\frac{1}{144\pi^2} g^2 \delta^{ab} (\partial_\mu \partial_\nu - \delta_{\mu\nu} \square) \left[(33N_c - 6N_f) \frac{1}{4\pi^2} \square \frac{\log x^2 M^2}{x^2} + 2(N_c - N_f) \delta(x) \right], \quad (5.75)$$

y difiere del resultado (para $N_f=0$) en la Ref. [2] por un término local finito. La función β de QCD, $\beta = -\frac{g^3}{48\pi^2} (11N_c - 2N_f)$, coincide con la dimensión anómala del campo *background*, que puede leerse directamente de la dependencia de escala de la Ec. 5.75.

La **autoenergía de los quarks** está dada por el diagrama (b) de la Fig. 5.8 y es proporcional a la autoenergía del electrón en QED. La autoenergía renormalizada del quark i es

$$\begin{aligned} \langle \Psi_i^A(x_1) \bar{\Psi}_i^B(x_2) \rangle^R &= g^2 \delta^{AB} \frac{N_c^2 - 1}{N_c} \left(B_{0m_i}^R[\not{\partial}] - 2m_i B_{0m_i}^R[1] \right) \\ &= \frac{1}{64\pi^4} g^2 \delta^{AB} \frac{N_c^2 - 1}{N_c} \left\{ (\not{\partial} - 4m_i) \left[(\square - m_i^2) \frac{K_0(m_i x)}{x} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2\pi^2 \log \frac{\bar{M}^2}{m_i^2} \delta(x) \right] + m_i^2 K_0(m_i x) \not{\partial} \frac{1}{x^2} \right\}, \end{aligned} \quad (5.76)$$

y su dependencia en la escala de renormalización viene dada por

$$M \frac{\partial}{\partial M} \langle \Psi_i^A(x_1) \bar{\Psi}_i^B(x_2) \rangle^R = \frac{1}{16\pi^2} g^2 \delta^{AB} \frac{N_c^2 - 1}{N_c} (\not{\partial} - 4m_i) \delta(x). \quad (5.77)$$

A la **autoenergía de los fantasmas** a un bucle contribuye sólo el diagrama (c) de la Fig: 5.8. Su renormalización se reduce a

$$\begin{aligned} \langle \eta^a(x_1) \bar{\eta}^b(x_2) \rangle^R &= -\frac{1}{2} g^2 N_c \delta^{ab} \square B^R[1] \\ &= \frac{1}{128\pi^4} g^2 \delta^{ab} N_c \square \square \frac{\log x^2 M^2}{x^2}, \end{aligned} \quad (5.78)$$

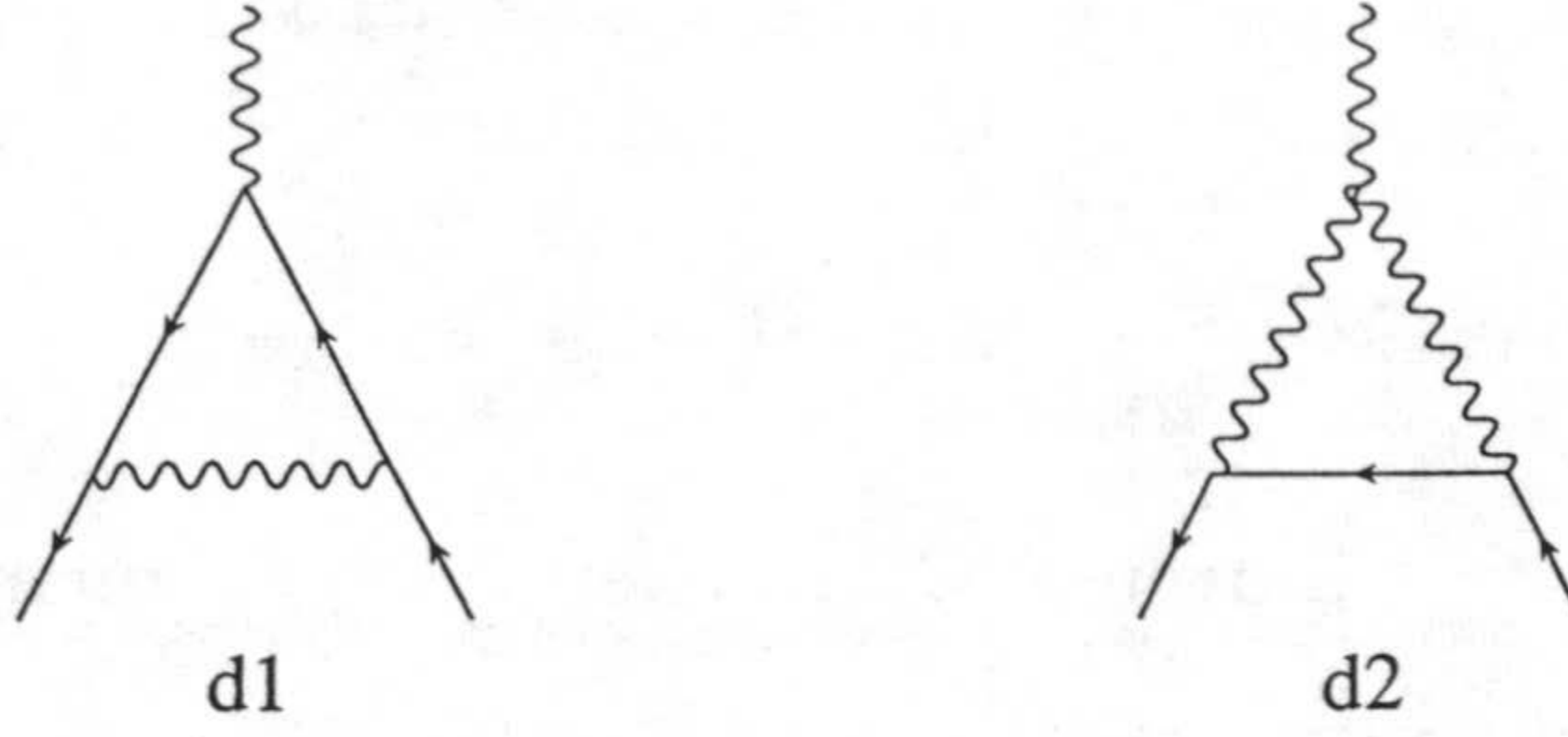


Figura 5.9: Diagramas de Feynman que contribuyen al vértice gluón-quark-quark (d).

cuya dependencia de escala es

$$M \frac{\partial}{\partial M} \langle \eta^a(x_1) \bar{\eta}^b(x_2) \rangle^R = -\frac{1}{16\pi^2} g^2 \delta^{ab} N_c \square \delta(x). \quad (5.79)$$

Para las funciones a tres puntos usamos como siempre las variables $x = x_1 - x_2$, $y = x_2 - x_3$. Para evitar expresiones demasiado largas, sólo damos las expresiones renormalizadas en términos de funciones básicas. Los diagramas que contribuyen al **vértice gluón-quark-quark**, (d1) y (d2), están representados en la Fig. 5.9. La expresión renormalizada es

$$\begin{aligned} \langle \Psi_i^A(x_1) \bar{\Psi}_i^B(x_3) A_\mu^c(x_2) \rangle^R = & -ig^3 (T^a)^{BA} \left\{ \frac{1}{N_c} \left[(-2m_i \partial_\mu^+ + m_i^2 \gamma_\mu \right. \right. \\ & + \not{\partial}^x \gamma_\mu \not{\partial}^y) T_{m_i m_i 0}[1] + (4m_i \delta_{\mu\alpha} - \gamma_\alpha \gamma_\mu \not{\partial}^y - \not{\partial}^x \gamma_\mu \gamma_\alpha) T_{m_i m_i 0}[\partial_\alpha] \\ & - \gamma_\mu T_{m_i m_i 0}^R[\square] + 2T_{m_i m_i 0}^R[\partial_\mu \not{\partial}] \left. \right] + N_c \left[\frac{3}{2} m_i (\not{\partial}^y \gamma_\mu + \gamma_\mu \not{\partial}^x) T_{00 m_i}[1] \right. \\ & + \left. \left(\frac{3}{2} (\not{\partial}^x \gamma_\mu \gamma_\alpha + \gamma_\alpha \gamma_\mu \not{\partial}^y) + \gamma_\mu \partial_\alpha^+ - 2\gamma_\alpha \partial_\mu^+ - \delta_{\mu\alpha} (3m_i + 2\not{\partial}^+) \right) T_{00 m_i}[\partial_\alpha] \right. \\ & \left. \left. + \gamma_\mu T_{00 m_i}^R[\square] + 2T_{00 m_i}^R[\partial_\mu \not{\partial}] \right] \right\}, \quad (5.80) \end{aligned}$$

donde hemos introducido la notación $\partial^+ = \partial^x + \partial^y$. La dependencia en la escala se reduce a

$$M \frac{\partial}{\partial M} \langle \Psi_i^A(x_1) \bar{\Psi}_i^B(x_2) A_\mu^a(x_3) \rangle^R = \frac{i}{16\pi^2} g^3 (T^a)^{BA} \left(3N_c - \frac{1}{N_c} \right) \gamma_\mu \delta(x) \delta(y). \quad (5.81)$$

Para el **vértice de gluón-fantasma-fantasma** (diagramas (e1) y (e2) de la Fig. 5.10) tenemos

$$\begin{aligned} \langle \eta^b(x_1) \bar{\eta}^c(x_3) A_\mu^a(x_2) \rangle^R = & \frac{1}{2} g^3 N_c f^{abc} \left\{ \partial^x \cdot \partial^y \partial_\mu^y T[1] \right. \\ & \left. + \left(\delta_{\mu\alpha} (\square^y - 2\partial^x \cdot \partial^y) + \partial_\mu^- \partial_\alpha^y + \partial_\mu^y \partial_\alpha^- \right) T[\partial_\alpha] + \partial_\mu^y T^R[\square] \right\}, \quad (5.82) \end{aligned}$$

donde $\partial^- = \partial^x - \partial^y$ y $\partial^x \cdot \partial^y = \partial_\alpha^x \partial_\alpha^y$. La dependencia en la escala es

$$M \frac{\partial}{\partial M} \langle \eta^b(x_1) \bar{\eta}^c(x_2) A_\mu^a(x_3) \rangle^R = \frac{1}{16\pi^2} N_c f^{abc} \delta(x_1 - x_3) \partial_\mu^{x_2} \delta(x_2 - x_3). \quad (5.83)$$

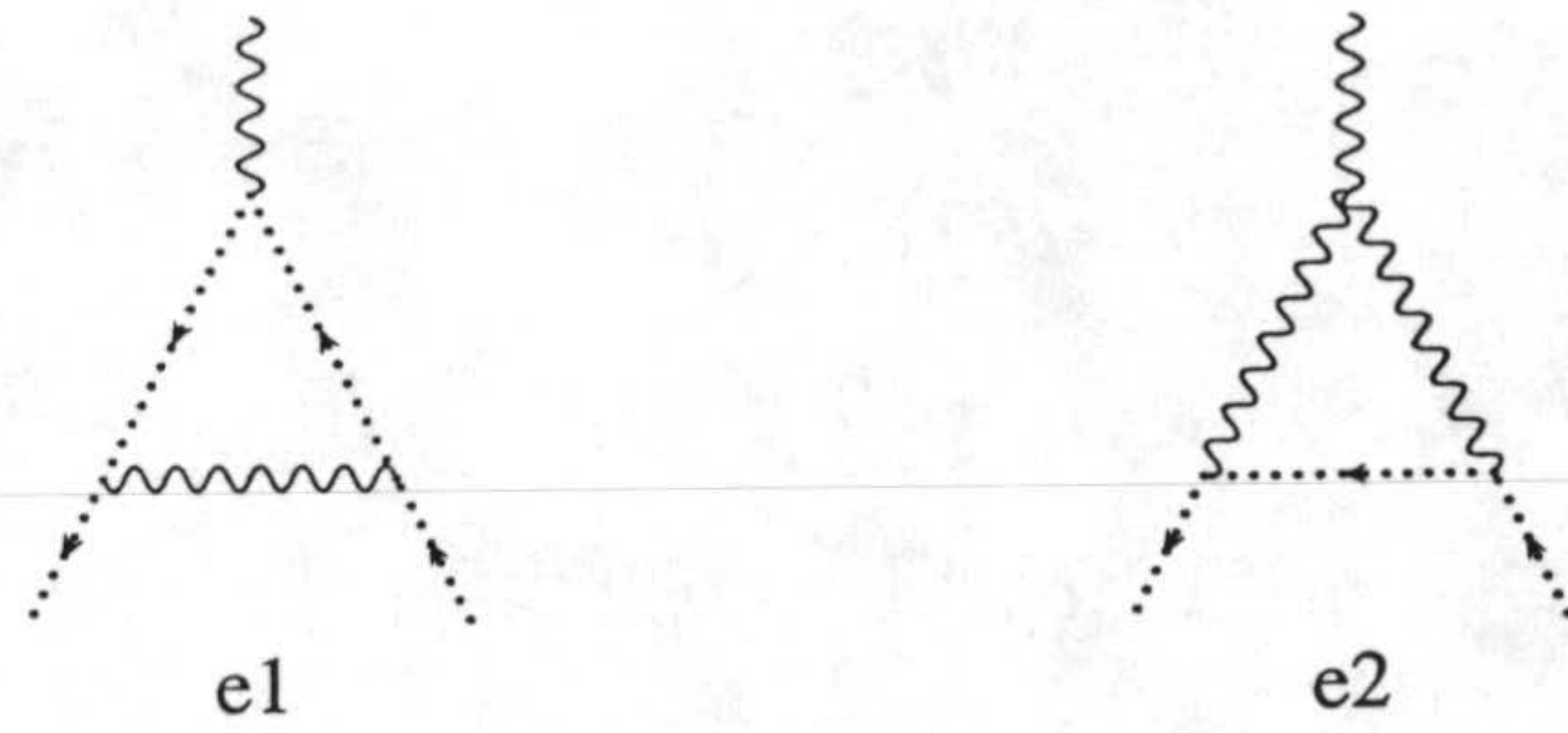


Figura 5.10: Diagramas de Feynman que contribuyen al vértice de gluón-fantasma-fantasma (e).

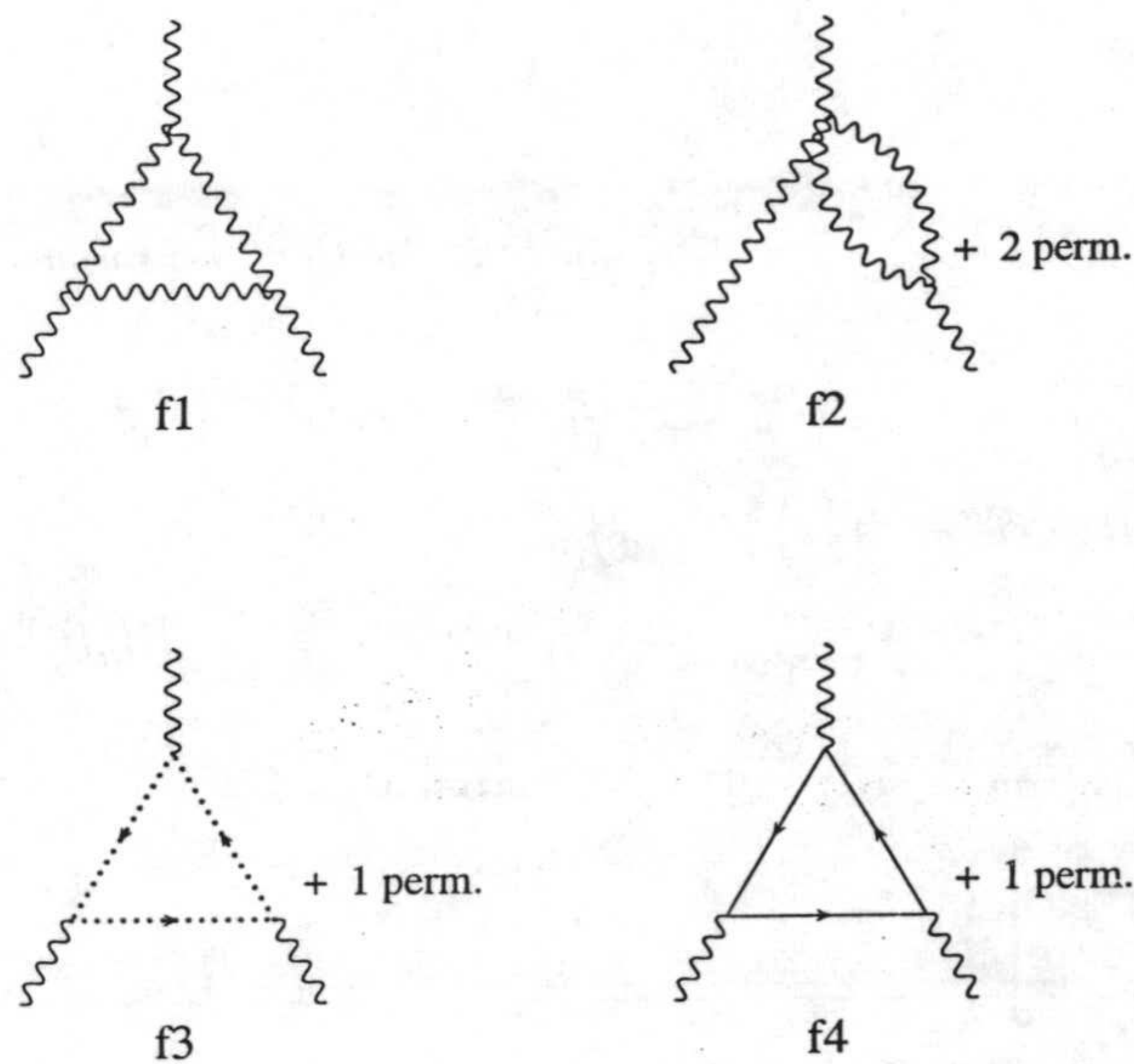


Figura 5.11: Diagramas de Feynman que contribuyen al vértice de tres gluones (f). Las permutaciones incluyen los posibles flujos de carga.

Aquí hemos vuelto a las variables originales para hacer explícito que la dependencia de escala tiene la misma forma que el correspondiente término en el Lagrangiano, como debe ocurrir.

La expresión renormalizada del **vértice de tres gluones** (diagramas (f1)-(f4) de la Fig. 5.11) es bastante larga, incluso en términos de funciones básicas. La dividimos en la parte puramente *gauge* y la parte fermiónica. Los resultados son

$$\begin{aligned}
 \langle A_\mu^a(x_1) A_\nu^b(x_3) A_\rho^c(x_2) \rangle^{GR} &= g^3 f^{abc} N_c \\
 &\times \left\{ \left[\frac{9}{4} \delta_{\nu\rho} \partial_\mu^- (B[1](x) \delta(x+y)) + \frac{9}{4} (\delta_{\mu\nu} \partial_\rho^x - \delta_{\mu\rho} \partial_\nu^x) B[1](x) \delta(y) \right. \right. \\
 &\left. \left. + \frac{1}{2} \left(3 \partial_\rho^y \partial_\mu^x \partial_\nu^- + \delta_{\mu\nu} (\square^x + 3 \partial^x \cdot \partial^y) \partial_\rho^y + \delta_{\mu\rho} (5 \square^x \partial_\nu^y - 2(\square^y + 2 \partial^x \cdot \partial^y) \partial_\nu^x) \right) \right] T[1] \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \left(\delta_{\mu\nu} (\partial_\rho^x \partial_\alpha^y - 3\partial_\rho^x \partial_\alpha^x) + \delta_{\mu\rho} (8\partial_\nu^x \partial_\alpha^x - 4\partial_\nu^y \partial_\alpha^x - 3\partial_\nu^y \partial_\alpha^y) \right. \\
& + \delta_{\rho\alpha} \left(8\partial_\mu^y \partial_\nu^x - 2\partial_\mu^x \partial_\nu^y - 3\partial_\mu^x \partial_\nu^x + \delta_{\mu\nu} (\square^x - 7\partial^x \cdot \partial^y) \right) \\
& + \delta_{\mu\alpha} \left(6\partial_\nu^y \partial_\rho^y - 13\partial_\nu^x \partial_\rho^y - \partial_\nu^y \partial_\rho^x - 3\partial_\nu^x \partial_\rho^x + \delta_{\nu\rho} (\square^x - 10\square^y + 10\partial^x \cdot \partial^y) \right) \left. \right) T[\partial_\alpha] \\
& + \frac{1}{2} \left(2\delta_{\mu\nu} \partial_\rho^x + \delta_{\mu\rho} (2\partial_\nu^y - 5\partial_\nu^x) \right) T^R[\square] + 4\partial_\rho^x T^R[\partial_\mu \partial_\nu] + 4\partial_\nu^y T^R[\partial_\mu \partial_\rho] \\
& + \delta_{\mu\nu} \partial_\alpha^x T^R[\partial_\alpha \partial_\rho] + \delta_{\mu\rho} \partial_\alpha^y T^R[\partial_\alpha \partial_\nu] - 4T^R[\partial_\mu \partial_\nu \partial_\rho] \\
& + \left. \begin{array}{l} x \leftrightarrow y \\ \mu \leftrightarrow \nu \end{array} \right\} \tag{5.84}
\end{aligned}$$

para la parte púramente *gauge* y

$$\begin{aligned}
\langle A_\mu^a(x_1) A_\nu^b(x_3) A_\rho^c(x_2) \rangle^{FR} & = 2g^3 f^{abc} \sum_{i=1}^{N_f} \left\{ \left[m_i^2 (\delta_{\mu\nu} \partial_\rho^x - \delta_{\mu\rho} \partial_\nu^-) T_{m_i m_i m_i}[1] \right. \right. \\
& + \left(\delta_{\mu\nu} \partial_\rho^x \partial_\alpha^y - \delta_{\mu\rho} (\partial_\nu^x \partial_\alpha^y - \partial_\nu^y \partial_\alpha^x) + \frac{1}{2} \delta_{\rho\alpha} (\partial_\mu^y \partial_\nu^x - \partial_\mu^x \partial_\nu^y - \delta_{\mu\nu} (\partial^x \cdot \partial^y + m_i^2)) \right. \\
& + \delta_{\mu\alpha} (-\partial_\nu^x \partial_\rho^y - \partial_\nu^y \partial_\rho^x + \delta_{\nu\rho} (\partial^x \cdot \partial^y - m_i^2)) \left. \right) T_{m_i m_i m_i}[\partial_\alpha] \\
& - (\delta_{\mu\nu} \partial_\rho^x - \delta_{\mu\rho} \partial_\nu^-) T_{m_i m_i m_i}^R[\square] + 2\partial_\rho^x T_{m_i m_i m_i}^R[\partial_\mu \partial_\nu] + 2\partial_\nu^y T_{m_i m_i m_i}^R[\partial_\mu \partial_\rho] \\
& - 2\delta_{\mu\rho} \partial_\alpha^x T_{m_i m_i m_i}^R[\partial_\alpha \partial_\nu] + \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} T_{m_i m_i m_i}^R[\square \partial_\rho] + \delta_{\mu\rho} T_{m_i m_i m_i}^R[\square \partial_\nu] \\
& \left. \left. - 2T_{m_i m_i m_i}^R[\partial_\mu \partial_\nu \partial_\rho] \right] + \begin{array}{l} x \leftrightarrow y \\ \mu \leftrightarrow \nu \end{array} \right\} \tag{5.85}
\end{aligned}$$

para la parte fermiónica. La simetría Bose de los tres gluones no es obvia debido al uso de las variables x e y . Tan sólo la simetría bajo el intercambio de $A_\mu^a(x_1)$ y $A_\nu^b(x_3)$ (correspondiente a $(x, y, a, \mu) \leftrightarrow (-y, -x, b, \nu)$) es explícita. La variación completa con la escala, en función de las variables originales, vale

$$\begin{aligned}
M \frac{\partial}{\partial M} \langle A_\mu^a(x_1) A_\nu^b(x_3) A_\rho^c(x_2) \rangle^R & = \frac{1}{12\pi^2} g^3 f^{abc} (N_c - N_f) \\
& \times \left[\delta_{\mu\nu} (\partial_\rho^{x_1} - \partial_\rho^{x_3}) + \delta_{\nu\rho} (\partial_\mu^{x_3} - \partial_\mu^{x_2}) + \delta_{\rho\mu} (\partial_\nu^{x_2} - \partial_\nu^{x_1}) \right] \\
& [\delta(x_1 - x_2) \delta(x_2 - x_3)] . \tag{5.86}
\end{aligned}$$

En la Ref. [54], se encontró que el vértice de tres gluones en el formalismo del campo *background* (con quarks sin masa) es invariante conforme para puntos no coincidentes, si se usa el *gauge* de Feynman. Este hecho, junto con el cumplimiento de las identidades de Ward, implica que esta función de tres puntos debe ser combinación lineal de dos tensores conformes antisimétricos bajo permutaciones, llamados $D_{\mu\nu\rho}^{\text{symm}}(x_1, x_2, x_3)$ y $C_{\mu\nu\rho}^{\text{symm}}(x_1, x_2, x_3)$ [56]. La expresión explícita del vértice en función de estos tensores también fue dada en la Ref. [54]. Renormalización diferencial fue entonces empleada

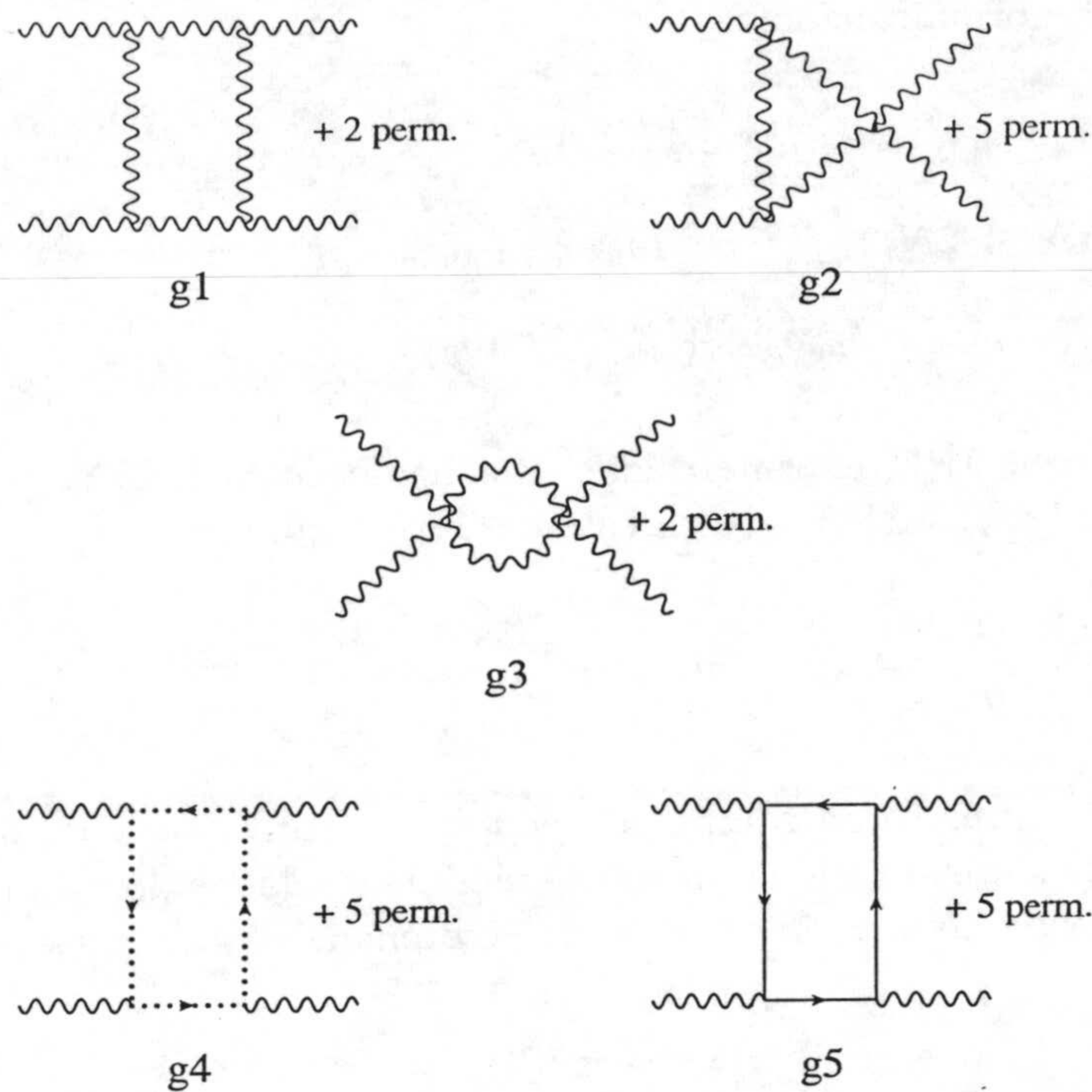


Figura 5.12: Diagramas de Feynman que contribuyen al vértice de cuatro gluones (g). Las permutaciones incluyen los posibles flujos de carga.

para tratar las singularidades en los puntos coincidentes. Por supuesto, la renormalización rompe la invariancia conforme, pero la identidad de Ward que relaciona el vértice de tres gluones *background* con la autoenergía del gluón *background* fue impuesta ajustando adecuadamente las escalas de renormalización. Nosotros hemos aplicado RDR a la renormalización de los tensores conformes D^{symm} and C^{symm} , y hemos comprobado que la amplitud resultante satisface directamente la identidad de Ward (si se usa el resultado que hemos dado para la autoenergía del gluón *background* renormalizada)². Nuestros resultados difieren de los resultados finales de la citada referencia en términos finitos locales. Tales discrepancias se deben al hecho de que, mientras que en RDR todo está fijado desde un comienzo, en renormalización diferencial convencional las escalas pueden elegirse, en general, de más de una manera para preservar las identidades de Ward relevantes.

Finalmente, hemos calculado el **vértice de cuatro gluones**, dado por los diagramas (g1)-(g5) de la Fig. 5.12, pero la expresión final es demasiado larga, incluso en términos de funciones básicas, como para escribirla aquí. Tan sólo damos la parte que

²Es importante que las expresiones que hemos usado para los tensores llevan a la misma forma de la amplitud desnuda que el uso de las reglas de Feynman y de la regla de Leibniz. Por tanto, no se introduce ninguna ambigüedad en el proceso previo a nuestro cálculo.

depende de la escala de renormalización:

$$M \frac{\partial}{\partial M} \langle A_\mu^a(x_1) A_\nu^b(x_2) A_\rho^c(x_3) A_\sigma^d(x_4) \rangle^R =$$

$$- \frac{1}{24\pi^2} g^4 (N_c + 2N_f) \left[f^{abr} f^{cdr} (\delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\sigma} - \delta_{\mu\sigma} \delta_{\nu\rho}) \right.$$

$$\left. + f^{acr} f^{dbr} (\delta_{\mu\sigma} \delta_{\nu\rho} - \delta_{\mu\nu} \delta_{\rho\sigma}) + f^{adr} f^{bcr} (\delta_{\mu\nu} \delta_{\rho\sigma} - \delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\sigma}) \right]. \quad (5.87)$$

Las funciones de Green 1PI renormalizadas que hemos calculado satisfacen la ecuación del grupo de renormalización, que en este caso se escribe como

$$\left[M \frac{\partial}{\partial M} + \beta \frac{\partial}{\partial g} + \gamma_{m_i} m_i \frac{\partial}{\partial m_i} - n_A \gamma_A - n_\eta \gamma_\eta - \sum_{i=1}^{N_f} n_{\Psi_i} \gamma_{\Psi_i} \right] \Gamma^{R(n_A, n_\eta, n_{\Psi_1}, \dots)} = 0, \quad (5.88)$$

donde n_A , n_η y n_{Ψ_i} son el número de campos de *gauge*, de fantasmas y de quarks i , respectivamente. Los coeficientes pueden obtenerse fácilmente de las dependencias en escala de renormalización que hemos ido escribiendo. Obtenemos los valores estándar:

$$\beta = -\frac{g^3}{48\pi^2} (11N_c - 2N_f), \quad (5.89)$$

$$\gamma_A = -\frac{g^2}{48\pi^2} (5N_c - 2N_f), \quad (5.90)$$

$$\gamma_\eta = -\frac{g^2}{32\pi^2} N_c, \quad (5.91)$$

$$\gamma_{\Psi_i} = \frac{g^2}{32\pi^2} \frac{N_c^2 - 1}{N_c}, \quad (5.92)$$

$$\gamma_{m_i} = -\frac{3}{16\pi^2} g^2 \frac{N_c^2 - 1}{N_c}. \quad (5.93)$$

Nótese que N_c y $\frac{N_c^2 - 1}{2N_c}$ son, respectivamente, los operadores de Casimir de $SU(N_c)$ en la representación adjunta y fundamental. A diferencia del caso Abeliano y del método del campo *background*, la dimensión anómala del campo de *gauge* no está directamente relacionada con la función β . La misma función β se obtiene a partir de cualquiera de las funciones vértice, mostrando que hay un sólo acoplamiento g . Esto es consecuencia de las identidades de Slavnov-Taylor para las partes dependientes de la escala de renormalización.

En el Apéndice B derivamos de la simetría BRST las identidades de Slavnov-Taylor para funciones de Green 1PI. Usando los términos de fuentes dados por la Ec. 5.64 podemos escribir todas estas identidades como una identidad para la acción efectiva:

$$\int d^4x \left[\frac{\delta\Gamma}{\delta A} \frac{\delta\Gamma}{\delta K} - \frac{\delta\Gamma}{\delta\eta} \frac{\delta\Gamma}{\delta L} + \frac{\delta\Gamma}{\delta N} \frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\Psi}} - \frac{\delta\Gamma}{\delta\Psi} \frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{N}} + \frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\eta}} \partial A \right] = 0. \quad (5.94)$$

Hasta un bucle, los términos cuadráticos pueden ser "linealizados": Por otro lado, la

ecuación de movimiento del antifantasma,

$$\partial_\mu \frac{\delta\Gamma}{\delta K_\mu^a} + \frac{\delta\Gamma}{\delta \bar{\eta}^a} = 0, \quad (5.95)$$

que en el Apéndice B usamos para simplificar la identidad de la autoenergía del gluón, se verifica trivialmente en cualquier esquema de renormalización que conmute con diferenciación y preserve la estructura del Lagrangiano.

Al nivel de un bucle, y escribiendo explícitamente las partes a nivel árbol, las identidades de Slavnov-Taylor dadas en el Apéndice B tienen la forma siguiente (designando cada identidad por la función de Green con más campos elementales):

- *identidad de la autoenergía del gluón:*

$$0 = \partial_\mu^x \langle A_\mu^a(x) A_\nu^b(y) \rangle^R, \quad (5.96)$$

- *identidad del vértice gluón-quark-quark:*

$$\begin{aligned} 0 = & -ig\gamma_\mu (T^a)^{AB} \delta(x-y) \langle \eta^b(z) K_\mu^a(x) \rangle^R - \partial_\mu^z \langle \Psi_i^B(x) \bar{\Psi}_i^A(y) A_\mu^b(z) \rangle^R \\ & - (\not{\partial}^y + m_i) \langle \Psi_i^B(x) \eta^b(z) \bar{N}_i^A(y) \rangle^R - \langle \eta^b(z) \bar{\Psi}_i^A(y) N_i^B(x) \rangle^R (\not{\partial}^x - m_i) \\ & + ig(T^b)^{CB} \delta(x-z) \langle \Psi_i^C(x) \bar{\Psi}_i^A(y) \rangle^R \\ & - ig(T^b)^{AC} \delta(y-z) \langle \Psi_i^B(x) \bar{\Psi}_i^C(y) \rangle^R, \end{aligned} \quad (5.97)$$

- *identidad del vértice gluón-fantasma-fantasma:*

$$\begin{aligned} 0 = & \left[\partial_\mu^x \langle A_\mu^b(x) \eta^c(y) \bar{\eta}^d(z) \rangle^R + gf^{acd} \partial_\mu^z \left(\delta(y-z) \langle \eta^b(x) K_\mu^a(z) \rangle^R \right) \right] \\ & - \left[\begin{array}{l} b \leftrightarrow c \\ x \leftrightarrow y \end{array} \right] \\ & + \square^z \langle \eta^b(x) \eta^c(y) L^d(z) \rangle^R + gf^{abc} \delta(x-y) \langle \eta^a(x) \bar{\eta}^d(z) \rangle^R, \end{aligned} \quad (5.98)$$

- *identidad del vértice de tres gluones:*

$$\begin{aligned} 0 = & \left[gf^{adb} \delta(y-z) \langle A_\nu^c(x) A_\rho^a(y) \rangle^R - \square^x \langle \eta^b(z) A_\rho^d(y) K_\nu^c(x) \rangle^R \right. \\ & \left. - \partial_\nu^x \langle \eta^b(z) \bar{\eta}^c(x) A_\rho^d(y) \rangle^R \right] + \left[\begin{array}{l} c \leftrightarrow d \\ \nu \leftrightarrow \rho \\ x \leftrightarrow y \end{array} \right] \\ & + gf^{acd} \left(-\delta_{\mu\nu} (2\partial_\rho^x + \partial_\rho^y) + \delta_{\nu\rho} (\partial_\mu^x - \partial_\mu^y) + \delta_{\rho\mu} (\partial_\nu^x + 2\partial_\nu^y) \right) \\ & \left(\delta(x-y) \langle \eta^b(z) K_\mu^a(x) \rangle^R \right) - \partial_\mu^z \langle A_\mu^b(z) A_\nu^c(x) A_\rho^d(y) \rangle^R, \end{aligned} \quad (5.99)$$

- *identidad del vértice de cuatro gluones:*

$$\begin{aligned}
0 = & \left[g f^{acd} \left(-\delta_{\mu\nu} (2\partial_\rho^y + \partial_\rho^z) + \delta_{\nu\rho} (\partial_\mu^y - \partial_\mu^z) + \delta_{\rho\mu} (\partial_\nu^y + 2\partial_\nu^z) \right) \right. \\
& \left(\delta(y-z) \langle \eta^b(t) A_\sigma^e(x) K_\mu^a(y) \rangle^R \right) + g f^{bae} \delta(x-t) \langle A_\nu^c(y) A_\rho^d(z) A_\sigma^a(t) \rangle^R \\
& \left. - \square^x \langle A_\nu^c(y) A_\rho^d(z) \eta^b(t) K_\sigma^e(x) \rangle - \partial_\sigma^x \langle A_\nu^c(y) A_\rho^d(z) \eta^b(t) \bar{\eta}^e(x) \rangle \right] \\
& + \begin{bmatrix} e \leftrightarrow c \\ \sigma \leftrightarrow \nu \\ x \leftrightarrow y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \leftrightarrow d \\ \sigma \leftrightarrow \rho \\ x \leftrightarrow z \end{bmatrix} \\
& + g^2 \left(f^{acr} f^{der} (\delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\sigma} - \delta_{\mu\sigma} \delta_{\nu\rho}) + f^{adr} f^{ecr} (\delta_{\mu\sigma} \delta_{\nu\rho} - \delta_{\mu\nu} \delta_{\rho\sigma}) \right. \\
& \left. + f^{aer} f^{cdr} (\delta_{\mu\nu} \delta_{\rho\sigma} - \delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\sigma}) \right) \left(\delta(x-y) \delta(x-z) \langle \eta^b(t) K_\mu^a(x) \rangle^R \right) \\
& - \partial_\mu^t \langle A_\mu^b(t) A_\nu^c(y) A_\rho^d(z) A_\sigma^e(x) \rangle^R . \tag{5.100}
\end{aligned}$$

Los diagramas que contribuyen a las funciones de Green con inserciones de variaciones BRST están representados en la Fig. 5.13. Para verificar que todas estas identidades se satisfacen para las funciones de Green que hemos calculado, hemos usado de nuevo los programas del Capítulo 4 en la forma detallada anteriormente. Como avanzamos, RDR respeta las identidades de Slavnov-Taylor.

Con esto terminamos la aplicación de RDR a un conjunto bastante completo de teorías *gauge* en 4 dimensiones. La extensión del estudio de QCD a teorías de Yang-Mills con otros grupos de *gauge* se reduce en la práctica (para estos cálculos sencillos) a cambiar los Casimires de $SU(N)$ por los del nuevo grupo. La inclusión de escalares en una teoría *gauge* no abeliana no debería suponer mayor problema al ser una sencilla combinación de dos casos estudiados. En cuanto al tratamiento con RDR de teorías con simetría *gauge* espontáneamente rota, pensamos que no deben aparecer nuevos problemas, ya que RDR no depende de la estructura particular del Lagrangiano y las reglas de Feynman. De hecho, usando los programas *FormCalc* y *LoopTools* hemos comprobado, junto a T. Hahn, que RDR da una polarización del vacío transversa en el Modelo Estándar electrodébil, y hemos recuperado los resultados físicos conocidos para las colisiones elásticas fotón-fotón, Z-Z y W-W (estos ejemplos también prueban el tratamiento de escalares en teorías no abelianas). Finalmente, notemos que la equivalencia con el método de reducción dimensional da una explicación alternativa al hecho de que consigamos preservar invariancia *gauge* en RDR.

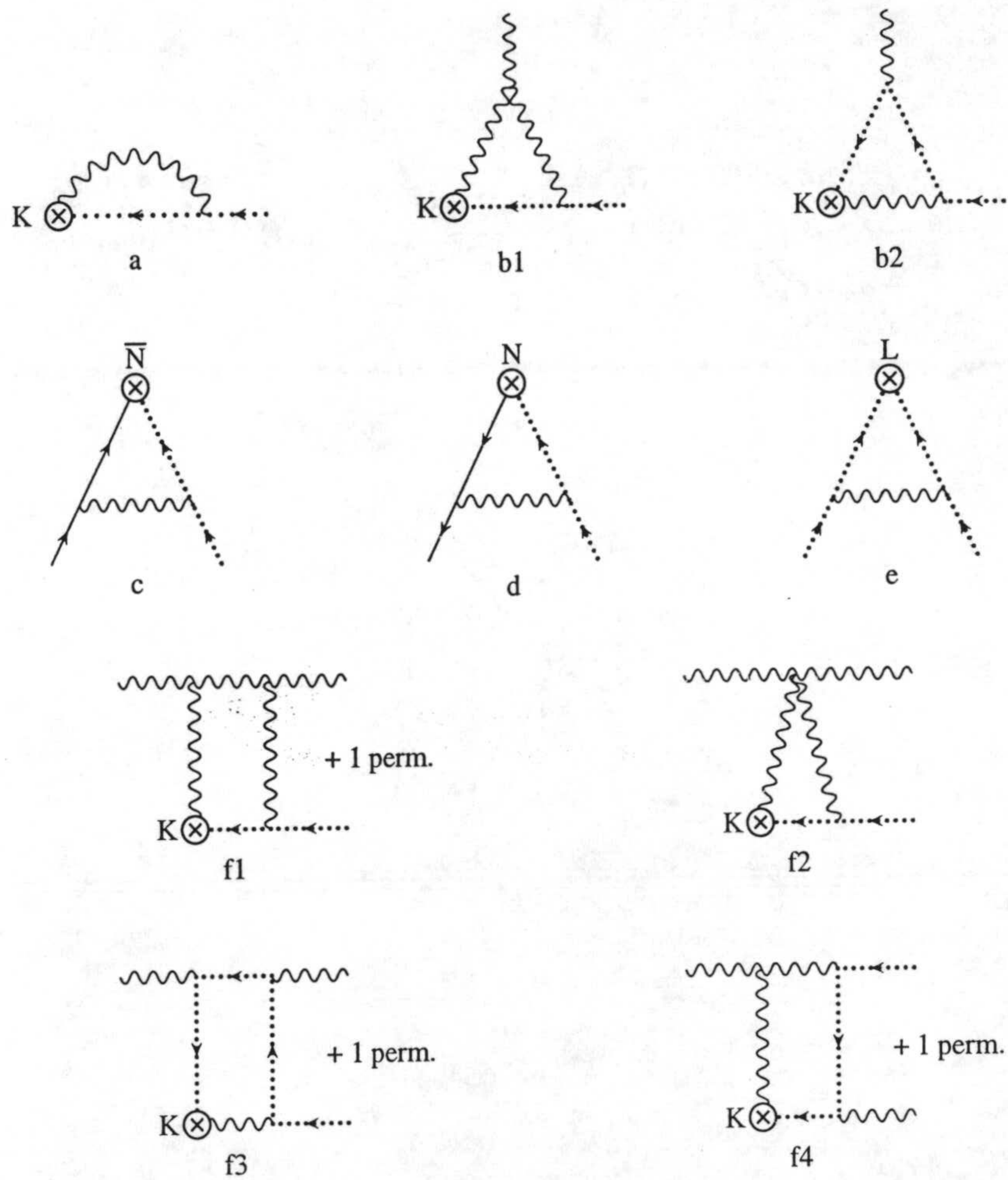


Figura 5.13: Diagramas de Feynman que contribuyen a las funciones de Green con inserciones de variaciones BRST. Los diagramas que contribuyen al vértice gluón-gluón-fantasma-fantasma, que es finito y aparece en la identidad de Slavnov-Taylor para el vértice de cuatro gluones, son idénticos a los diagramas (f1)-(f4), pero cambiando K por una línea externa de antifantasma.

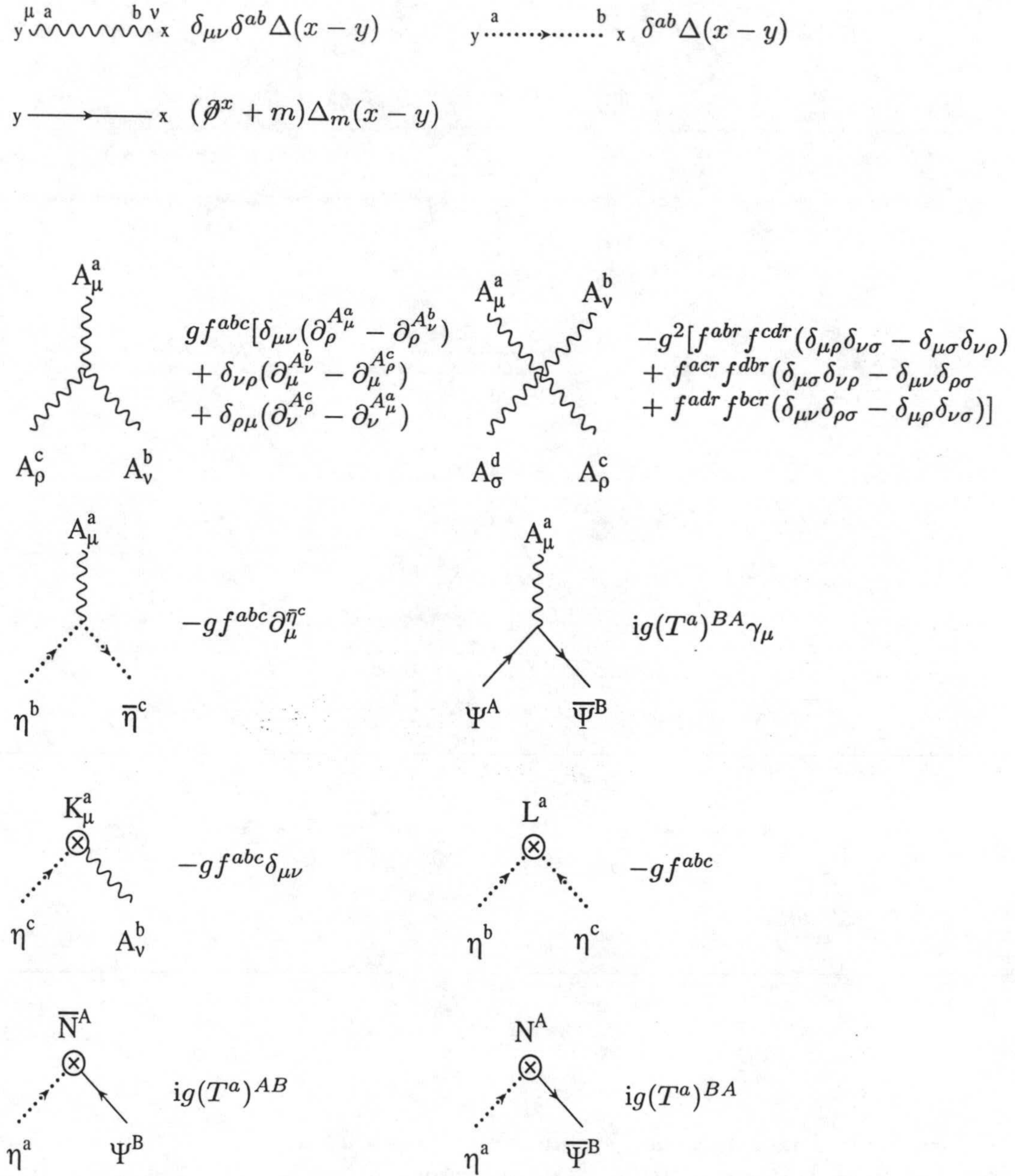


Figura 5.14: Reglas de Feynman para QCD, incluyendo inserciones de variaciones BRST. Las líneas onduladas corresponden a gluones, las sólidas a quarks y las de puntos a fantasmas. En los vértices, las derivadas (respecto a la variable espacio-temporal del vértice) actúan sobre el campo indicado por el superíndice.

5.4 Cálculos supersimétricos

La supersimetría es una simetría caracterizada por un álgebra graduada, que relaciona bosones con fermiones. Existen pocos métodos de regularización y renormalización que respeten supersimetría al tiempo que invariancia *gauge*. Algunas demostraciones formales utilizan regularización mediante derivadas más altas, suplementada por Pauli-Villars [58], aunque en casi todos los cálculos prácticos se emplea regularización por reducción dimensional. Aquí probaremos el comportamiento de RDR en teorías *gauge* supersimétricas (que por su relación con reducción dimensional necesariamente ha de ser bueno) a través de dos ejemplos concretos. Renormalización diferencial ha sido empleada anteriormente para cálculos supersimétricos en el formalismo de superespacio: en la Ref. [59] la función β a tres bucles del modelo de Wess-Zumino fue calculada, y en la Ref. [60] se aplicó renormalización diferencial a teorías *gauge* supersimétricas y se obtuvo la función β a dos y un bucle en el caso de SQED (superQED) y superYang-Mills puro, respectivamente. Recientemente, también se ha usado renormalización diferencial en cálculos no perturbativos en teorías *gauge* supersimétricas [14]. En el formalismo de supercampos, supersimetría se preserva manifiestamente; sin embargo, la situación es más complicada en el caso físicamente interesante de supersimetría rota, donde usualmente se prefiere trabajar con campos componentes (ver, sin embargo, la Ref. [61]). Nosotros utilizaremos el formalismo de componentes, donde no es inmediato que la renormalización respete supersimetría. En particular, calcularemos las correcciones de supergravedad al momento magnético anómalo de un leptón y comprobaremos que el resultado es compatible con supersimetría e invariancia *gauge*. Para abrir boca y anticipar una peculiaridad de este cálculo en supergravedad, consideramos primero la polarización del vacío en SQED.

5.4.1 La polarización del vacío en SQED

Este es tal vez el cálculo más sencillo posible en una teoría *gauge* supersimétrica. Trabajaremos con componentes en el *gauge* de Wess-Zumino. Los campos (físicos) son el electrón (un espinor de Dirac con masa m), los dos selectrones (uno para cada quiralidad del electrón y ambos con masa m), el fotón (un campo vectorial sin masa) y el fotino (un espinor de Majorana sin masa). Las reglas de Feynman necesarias están dadas en las secciones de QED y QED escalar. Realmente, el cálculo en este *gauge* no es más que la suma de la contribución de QED y dos veces la de QED escalar a la polarización del vacío, ya que los selectrones levógiro y dextrógiro dan la misma contribución y el fotino no interviene al nivel de un bucle. Recordemos que la contribución del bucle de electrones en términos de funciones básicas vale

$$\Pi_{\mu\nu}^{\text{QED}}(x) = 4e^2 \left\{ (m^2 \delta_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \square - \partial_\mu \partial_\nu) B_m[1] + 2B_m[\partial_\mu \partial_\nu] - \delta_{\mu\nu} B_m[\square] \right\}. \quad (5.101)$$

Por otro lado, usando la relación

$$A_m[1] = \Delta_m(x) \delta(x)$$

$$\begin{aligned}
&= -\Delta_m(x)(\square - m^2)\Delta_m(x) \\
&= -B_{mm}[\square] + m^2 B_{mm}[1]
\end{aligned} \tag{5.102}$$

(basada en la regla 4) para escribir el diagrama del *tadpole* en funciones básicas de dos puntos, la contribución de QED escalar es

$$\Pi_{\mu\nu}^{\text{QED esc.}}(x) = -e^2 \{4B_{mm}[\partial_\mu\partial_\nu] - 2B_{mm}[\square] + (2m^2 - \partial_\mu\partial_\nu)B_{mm}[1]\} \tag{5.103}$$

Sumando $\Pi_{\mu\nu}^{\text{QED}} + 2\Pi_{\mu\nu}^{\text{QED esc.}}$, se obtiene directamente un resultado transversal que depende sólo de una función básica:

$$\Pi_{\mu\nu}^{\text{SQED}}(x) = -2e^2(\partial_\mu\partial_\nu - \delta_{\mu\nu}\square)B_{mm}[1]. \tag{5.104}$$

La polarización del vacío es directamente invariante *gauge*, independientemente de cómo se renormalice $B_{mm}[1]$. Vemos además que no depende más que de una función básica escalar; las funciones con estructuras tensoriales y las divergencias cuadráticas se han cancelado en la suma. Esto no es más que un ejemplo de las celebradas cancelaciones que produce supersimetría, y que sólo son obvias desde un principio cuando se trabaja en superespacio. En el marco de nuestros estudios, el interés de tales cancelaciones es que, en este caso al menos, han eliminado las ambigüedades asociadas a la renormalización de funciones tensoriales. Obsérvese, sin embargo, que para que ello ha sido necesario expresar todos los diagramas en términos del mismo tipo de funciones (funciones B en este caso), y que esto se ha hecho “correctamente” gracias al uso de las reglas de RDR. La renormalización de la polarización del vacío en SQED se completa substituyendo $B_{mm}[1]$ por su valor renormalizado:

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mu\nu}^{\text{SQED } R}(x) &= -\frac{e^2}{(4\pi^2)^2}(\partial_\mu\partial_\nu - \delta_{\mu\nu}\square)[(\square - 4m^2)\frac{mK_0(mx)K_1(mx)}{x} \\
&\quad + 2\pi^2 \log \frac{\bar{M}^2}{m^2} \delta(x)].
\end{aligned} \tag{5.105}$$

Aunque los efectos de supersimetría han sido manifiestos, en este cálculo no hemos comprobado realmente si RDR respeta supersimetría o no. En el siguiente, en cambio, supersimetría dicta cual debe ser el resultado final, lo que proporciona un test directo de su compatibilidad con RDR.

5.4.2 Un cálculo en supergravedad

Cuando supersimetría se hace local, incluye la gravedad de modo natural. La teoría resultante, conocida como supergravedad [62], no es renormalizable, pero está constreñida por sus simetrías. Uno de los pocos cálculos finitos en gravedad es la corrección a un bucle al momento magnético anómalo de un leptón, $(g-2)_l$ [63]. En supergravedad (no rota), no sólo es finito $(g-2)_l$, sino que supersimetría requiere que se anule, al estar prohibido un término de Pauli en el Lagrangiano de un supermultiplete quirral [64, 65].

Por ello, el cálculo de este observable es un lugar ideal para estudiar métodos de regularización en supergravedad. Aunque el resultado sea finito, los diagramas individuales contienen divergencias, y su suma puede diferir según el método empleado para tratarlas. Los autores de las Refs. [66] y [67] realizaron el cálculo utilizando regularización dimensional y reducción dimensional en espacio de momentos. El primer método da un resultado no nulo, en tanto que con el segundo, que preserva supersimetría, se encuentra el cero esperado. Aquí repetiremos el cálculo con nuestro método. Tras la discusión de la Sección 3.2, está claro que debemos encontrar el mismo resultado de reducción dimensional. Otro aspecto interesante de este cálculo es que es la primera aplicación de RDR a una teoría no renormalizable. Esto exige extender el conjunto de funciones básicas a funciones con más derivadas; sin embargo, todas las funciones que no aparecen en la Tabla 2.1 se pueden reducir fácilmente a las de esta tabla usando las reglas de RDR.

El momento magnético anómalo de un leptón se define usualmente en el espacio de momentos como un límite estático. Si p y p' son los momentos entrantes de los leptones y q es el momento saliente del fotón, el vértice a todo orden puede expresarse (para leptones externos sobre su capa másica, y en teorías que conserven paridad) en función de dos factores de forma:

$$\Lambda_\mu(p, p') = ie[(F_1(q^2) + F_2(q^2))\gamma_\mu + \frac{F_2(q^2)}{2m}(p_\mu - p'_\mu)]. \quad (5.106)$$

El momento magnético anómalo se define entonces como

$$\frac{g-2}{2} = \lim_{q^2 \rightarrow 0} F_2(q^2). \quad (5.107)$$

Nosotros realizaremos todos los cálculos, incluyendo la renormalización propiamente dicha, en espacio de coordenadas. Después haremos una transformada de Fourier para imponer la ecuación de Dirac y el límite estático, y así extraer el valor del momento magnético anómalo.

Usaremos el Lagrangiano de supergravedad acoplada a SQED, obtenido tras imponer términos cinéticos canónicos (potencial de Kähler y función f minimal) y desarrollar la métrica curva ($g_{\mu\nu}$) en torno a la métrica plana ($\eta_{\mu\nu}$). El Lagrangiano de interacción en espacio de Minkowski está dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ee\gamma+\bar{e}\bar{e}\gamma+e\bar{e}\bar{\gamma}} = & -e\bar{\Psi} \not{A}\Psi - [ieA^\mu \phi_L^\dagger \overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi_L \\ & - e\sqrt{2}(\bar{\lambda}\phi_L^\dagger \mathcal{P}_L \Psi + \text{h.c.}) + (L \leftrightarrow R)] , \end{aligned} \quad (5.108)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{eeg+eeg\gamma} = & -\frac{\kappa}{4}h^{\alpha\beta}[(i\bar{\Psi}(\gamma_\alpha\partial_\beta + \gamma_\beta\partial_\alpha)\Psi + \text{h.c.}) \\ & - 2e\bar{\Psi}(\gamma_\alpha A_\beta + \gamma_\beta A_\alpha)\Psi] , \end{aligned} \quad (5.109)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{e\bar{e}\bar{g}+e\bar{e}\bar{g}\gamma} = & -\frac{\kappa}{\sqrt{2}}[\bar{\chi}^\nu \mathcal{P}_L (i\not{\partial} - m)\phi_L^\dagger \gamma_\nu \Psi \\ & + e\bar{\chi}^\nu \mathcal{P}_L \not{A}\phi_L^\dagger \gamma_\nu \Psi + \text{h.c.}] + (L \leftrightarrow R) , \end{aligned} \quad (5.110)$$



Figura 5.15: Diagramas de Feynman que contribuyen a $(g-2)_l$ en SQED a orden e^3 .

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\gamma\gamma g+\gamma\tilde{g}} = & \kappa[h^{\alpha\beta}(F_{\alpha\mu}F_{\beta}^{\mu} - \frac{1}{4}\eta_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) \\ & + (\frac{i}{8}\bar{\lambda}\gamma^{\nu}[\not{\partial}, \not{A}]\chi_{\nu} + \text{h.c.})], \end{aligned} \quad (5.111)$$

donde $\mathcal{P}_{R,L} = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)$ son los proyectores quirales y $\kappa^2 = 8\pi G_N$, con G_N la constante de Newton. Los términos cinéticos son los canónicos con el fotón en el *gauge* de Feynman y el gravitón en el *gauge* de de Donder. Utilizamos la siguiente notación para las partículas involucradas y sus correspondientes campos:

leptón	$\rightarrow e$,	Ψ ,	sleptones	$\rightarrow \tilde{e}_{L,R}$,	$\phi_{L,R}$,
fotón	$\rightarrow \gamma$,	A_{μ} ,	fotino	$\rightarrow \tilde{\gamma}$,	λ ,
gravitón	$\rightarrow g$,	$h_{\mu\nu}$,	gravitino	$\rightarrow \tilde{g}$,	χ_{μ} .

Hemos escrito el Lagrangiano en espacio de Minkowski para facilitar la comparación con trabajos anteriores, pero trabajaremos, como hasta ahora, en espacio Euclídeo. Las reglas de Feynman, escritas en espacio Euclídeo, están recogidas en las Figs. 5.17 y 5.18 al final de este capítulo.

Las correcciones de orden e^2 están dadas por los diagramas de SQED de la Fig. 5.15. La contribución de cada diagrama es finita y no ambigua, y la suma de ambos es cero [64]. Las correcciones gravitatorias a un bucle, dadas por los diagramas de la Fig. 5.16, son de orden $e\kappa^2$, y resultan de intercambios de un gravitón (diagramas D1-D5) o de un gravitino (diagramas D6-D10). Los cálculos detallados pueden encontrarse en la Ref. [31]. Aquí solamente subrayamos los aspectos más relevantes.

Usaremos de nuevo las variables $x = x_1 - x_2$, $y = x_2 - x_3$, donde x_1 y x_3 son los puntos asociados a los leptones saliente y entrante, respectivamente, y x_2 es el punto del fotón. Al igual que en el ejemplo discutido en SQED, es posible utilizar las reglas de RDR para escribir todos los diagramas en términos de un único tipo de función básica. Observemos que en las correcciones gravitatorias hay diagramas con dos topologías distintas: triángulos (D1, D4, D5, D6, D9 y D10) y burbujas (D2, D3, D7 y D8). Como las burbujas contienen una función delta de Dirac, es posible usar directamente la técnica de separación de puntos para escribirlas en términos de funciones básicas de tres puntos. A diferencia de lo hecho en el Capítulo 2, aquí elegimos “separar” el punto

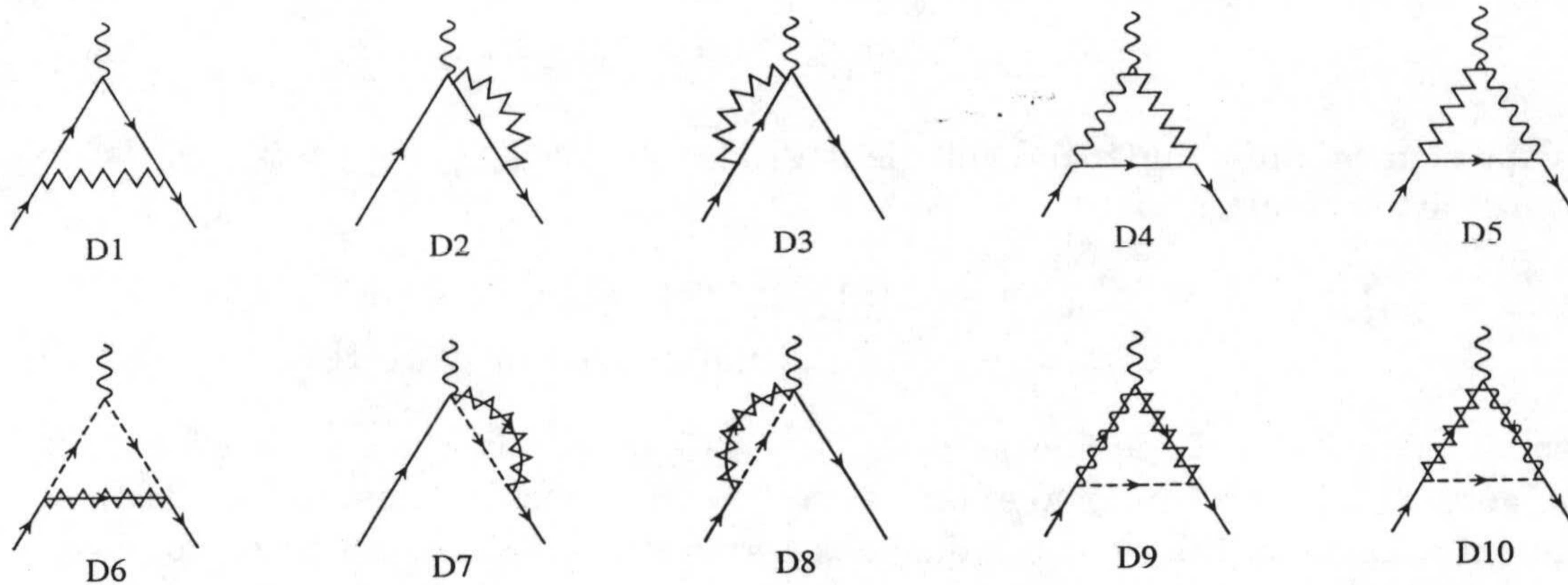


Figura 5.16: Diagramas de Feynman de orden $e\kappa^2$ que contribuyen a $(g-2)_l$ en supergravedad. En los diagramas D1-D5 se intercambia un gravitón y en los D6-D10 un gravitino.

correspondiente al propagador sin derivadas, de donde obtenemos las relaciones:

$$B_{0m}^R[1](x)\delta(y) = -(\square^y - m^2)T_{mm0}[1] + 2\partial_\sigma^y T_{mm0}[\partial_\sigma] - T_{mm0}^R[\square], \quad (5.112)$$

$$B_{0m}^R[\partial_\mu](x)\delta(y) = -\partial_\mu^x(\square^y - m^2)T_{mm0}[1] + (\square^y - m^2)T_{mm0}[\partial_\mu] \\ + 2\partial_\mu^x \partial_\sigma^y T_{mm0}[\partial_\sigma] - \partial_\mu^x T_{mm0}^R[\square] - 2\partial_\sigma^y T_{mm0}^R[\partial_\mu \partial_\sigma] \\ + T_{mm0}[\partial_\mu \square], \quad (5.113)$$

$$B_{0m}^R[\partial_\mu \partial_\nu](x)\delta(y) = -\partial_\mu^x \partial_\nu^x(\square^y - m^2)T_{mm0}[1] + \partial_\mu^x(\square^y - m^2)T_{mm0}[\partial_\nu] \\ + \partial_\nu^x(\square^y - m^2)T_{mm0}[\partial_\mu] + 2\partial_\mu^x \partial_\nu^x \partial_\sigma^y T_{mm0}[\partial_\sigma] \\ - \partial_\mu^x \partial_\nu^x T_{mm0}^R[\square] - (\square^y - m^2)T_{mm0}^R[\partial_\mu \partial_\nu] \\ - 2\partial_\mu^x \partial_\sigma^y T_{mm0}^R[\partial_\nu \partial_\sigma] - 2\partial_\nu^x \partial_\sigma^y T_{mm0}^R[\partial_\mu \partial_\sigma] \\ + \partial_\mu^x T_{mm0}^R[\partial_\nu \square] + \partial_\nu^x T_{mm0}^R[\partial_\mu \square] \\ + 2\partial_\sigma^y T_{mm0}^R[\partial_\mu \partial_\nu \partial_\sigma] - T_{mm0}^R[\partial_\mu \partial_\nu \square]. \quad (5.114)$$

La coherencia de RDR hace que estas relaciones lleven a las mismas expresiones renormalizadas que las encontradas en el Capítulo 2. La razón para separar el propagador sin derivadas es que de esta manera reproducimos más fielmente la estructura de los diagramas triangulares, y las cancelaciones de supersimetría se hacen explícitas al nivel de funciones básicas. En efecto, al igual que en la sección anterior, al sumar todos los diagramas escritos en esta forma las funciones básicas singulares con estructura escalar no trivial se cancelan, de manera que la parte del vértice que contribuye a $(g-2)_l$ es, para las correcciones gravitatorias (las de SQED dan cero trivialmente):

$$\frac{-ie\kappa^2}{2} \left\{ \left[2m^2 \partial_\mu^+ \gamma_\beta + 4m^3 \delta_{\mu\beta} - 8m \partial_\mu^+ \partial_\beta^+ \right] T_{mm0}[\partial_\beta] \right. \\ \left. + 8m \partial_\mu^+ T_{mm0}^R[\square] - 8m^3 \partial_\mu^+ T_{00m}[1] \right.$$

$$+8m\partial_\mu^+\partial_\beta^+T_{00m}[\partial_\beta] - 8m\partial_\mu^+T_{00m}^R[\square] \} . \quad (5.115)$$

Esta expresión es finita (independiente de la escala) ya que $T_{mm0}^R[\square]$ y $T_{00m}^R[\square]$ tienen la misma parte singular:

$$T_{00m}^R[\square] = T_{mm0}^R[\square] - (\Delta(x) - \Delta_m(x))\Delta_m(x)\delta(x+y) \\ - (\Delta(x) - \Delta_m(x))\Delta(x)\delta(x+y) + m^2T_{00m}[1]. \quad (5.116)$$

Haciendo la transformada de Fourier de la Ec. 5.115, usando la ecuación de Dirac para los espinores externos y tomando el límite estático (ecuación de Maxwell del fotón), se obtiene un valor nulo, tal y como requiere supersimetría. Además hemos comprobado la ausencia de términos no-invariantes *gauge*, proporcionales al momento del fotón, cuando los leptones están en sus capas másicas (y antes de tomar el límite estático). Esto corresponde en espacio de coordenadas al mantenimiento de la simetría $x \leftrightarrow y$.

En la Tabla 5.1 damos los resultados totales y para cada diagrama en distintos métodos de renormalización³. La columna RD recoge los resultados usando renormalización diferencial “parcialmente restringida”. Este fue el método empleado originalmente en la Ref. [31]: usar las reglas de RDR para relacionar las distintas funciones básicas, tal y como hemos explicado aquí, pero utilizar una descomposición *naïve* de las estructuras tensoriales (sin el término local necesario para asegurar la compatibilidad con las reglas). Como las funciones básicas tensoriales no contribuyen al resultado total, éste es igual al obtenido en RDR completa. Sin embargo, los resultados para cada diagrama y para las contribuciones totales del gravitón y del gravitino sí son distintas. Por otro lado, y como anunciamos, el resultado en RDR coincide diagrama a diagrama con el de reducción dimensional si se hace el cambio adecuado de escala. Como la dependencia en la escala de renormalización desaparece en la suma de los diagramas del gravitón (y del gravitino), ésta es exactamente igual en ambos métodos. No obstante, comparando con los resultados en regularización dimensional y renormalización diferencial “parcialmente restringida”, está claro que las correcciones gravitatorias a $(g-2)_l$ no están bien definidas en ausencia de supersimetría. Esto podría parecer sorprendente por ser el momento magnético anómalo un observable, pero tiene perfecto sentido si recordamos que gravedad es una teoría no renormalizable, que por tanto sólo puede ser entendida (en este contexto) como una teoría efectiva. Desde este punto de vista, sería posible añadir un término de Pauli al Lagrangiano con un coeficiente arbitrario, que corrija el momento magnético anómalo para ajustarlo al experimento (que sólo mide el $(g-2)_l$ “vestido”).

Resumiendo, hemos comprobado con este ejemplo que RDR es compatible con supersimetría, incluso en el caso, más singular, de supersimetría local. Un estudio completo exige considerar las identidades de Ward de supersimetría. En este cálculo y el considerado anteriormente, hemos observado que las funciones básicas con estructura

³Los resultados de RDR en la Ref. [68] contienen errores en las partes independientes de escala de algunos diagramas, por la omisión en el cálculo de un término local. No obstante, la contribución completa del gravitón y del gravitino dada allí es correcta.

tensorial no trivial se cancelan (debido a supersimetría) una vez se han escrito todos los diagramas del mismo modo, con las reglas de RDR. No está claro cuán general es este efecto, pero es probable que pueda entenderse empleando supercampos.



Diagram	Regularización dimensional	Reducción dimensional	RD	RDR
D1	$\frac{1}{3} \frac{1}{n-4} - \frac{61}{36}$	$\frac{1}{3} \frac{1}{n-4} - \frac{29}{18}$	$-\frac{1}{6} \log \left(\frac{\bar{M}^2}{m^2} \right) - \frac{25}{18}$	$-\frac{1}{6} \log \left(\frac{\bar{M}^2}{m^2} \right) - \frac{23}{18}$
D2+D3	$\frac{11}{3} \frac{1}{n-4} - \frac{32}{9}$	$\frac{11}{3} \frac{1}{n-4} - \frac{35}{9}$	$-\frac{11}{6} \log \left(\frac{\bar{M}^2}{m^2} \right) - \frac{11}{18}$	$-\frac{11}{6} \log \left(\frac{\bar{M}^2}{m^2} \right) - \frac{2}{9}$
D4+D5	$-4 \frac{1}{n-4} + 7$	$-4 \frac{1}{n-4} + 6$	$2 \log \left(\frac{\bar{M}^2}{m^2} \right) + 1$	$2 \log \left(\frac{\bar{M}^2}{m^2} \right) + 2$
Gravitón (D1+D2+D3 +D4+D5)	7/4	1/2	-1	1/2
D6	$\frac{8}{3} \frac{1}{n-4} - \frac{55}{18}$	$\frac{8}{3} \frac{1}{n-4} - \frac{37}{18}$	$-\frac{4}{3} \log \left(\frac{\bar{M}^2}{m^2} \right) + \frac{19}{18}$	$-\frac{4}{3} \log \left(\frac{\bar{M}^2}{m^2} \right) + \frac{11}{18}$
D7+D8	$\frac{4}{3} \frac{1}{n-4} - \frac{13}{9}$	$\frac{4}{3} \frac{1}{n-4} - \frac{4}{9}$	$-\frac{2}{3} \log \left(\frac{\bar{M}^2}{m^2} \right) + \frac{17}{18}$	$-\frac{2}{3} \log \left(\frac{\bar{M}^2}{m^2} \right) + \frac{8}{9}$
D9+D10	$-4 \frac{1}{n-4} + 4$	$-4 \frac{1}{n-4} + 2$	$2 \log \left(\frac{\bar{M}^2}{m^2} \right) - 1$	$2 \log \left(\frac{\bar{M}^2}{m^2} \right) - 2$
Gravitino (D6+D7+D8 +D9+D10)	-1/2	-1/2	1	-1/2
TOTAL (Graviton +Gravitino)	5/4	0	0	0

Tabla 5.1: Contribuciones de los diagramas en la Fig. 5.16 a $\left(\frac{g-2}{2}\right)_l$, en unidades de $\frac{G_N m^2}{\pi}$, obtenidas con regularización dimensional, reducción dimensional, renormalización diferencial “parcialmente restringida” y RDR.

$$x \xrightarrow{e} y \quad (\not{\partial}^x + m)\Delta_m(x - y)$$

$$x \xrightarrow{\tilde{e}} y \quad \Delta_m(x - y)$$

$$x \overset{\mu}{\text{---}} \overset{\gamma}{\text{~~~~~}} \overset{\nu}{\text{---}} y \quad \delta_{\mu\nu}\Delta(x - y)$$

$$x \overset{\tilde{\gamma}}{\text{~~~~~}} y \quad \not{\partial}^x \Delta(x - y)$$

$$x \overset{\mu\nu}{\text{---}} \overset{g}{\text{~~~~~}} \overset{\rho\sigma}{\text{---}} y \quad \frac{1}{2}(\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} + \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho} - \delta_{\mu\nu}\delta_{\rho\sigma})\Delta(x - y)$$

$$x \overset{\mu}{\text{---}} \overset{\tilde{g}}{\text{~~~~~}} \overset{\nu}{\text{---}} y \quad -\frac{1}{2}\gamma_\nu \not{\partial}^x \gamma_\mu \Delta(x - y)$$

Figura 5.17: Reglas de Feynman para propagadores en supergravedad-SQED. Hemos indicado a qué partícula corresponde cada propagador.

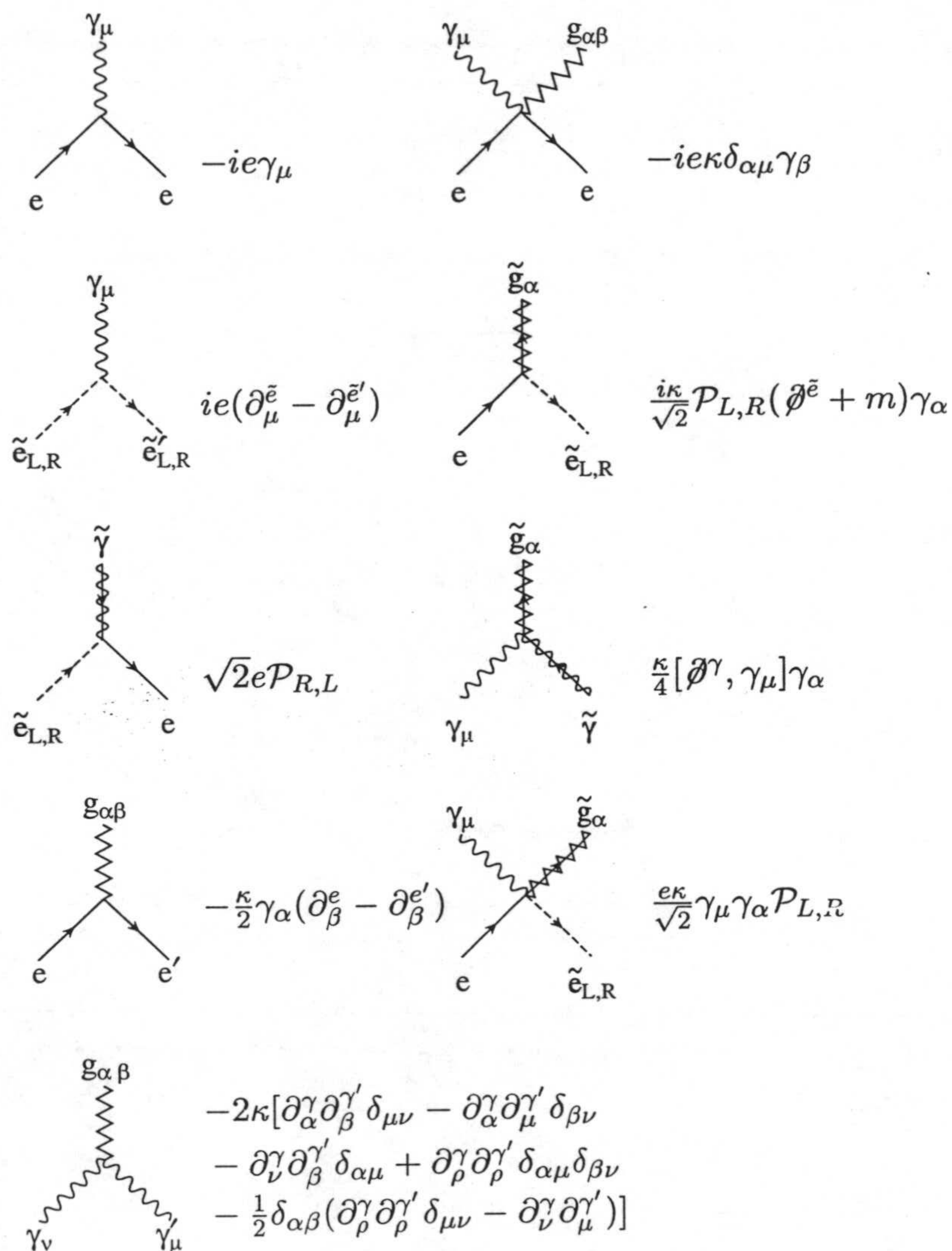


Figura 5.18: Reglas de Feynman para vértices de supergravedad-SQED. $\mathcal{P}_{R,L} = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)$ son los proyectores quirales. Los superíndices indican sobre qué campo actúan las derivadas. Las reglas para diagramas con flechas de carga y número fermiónico opuestas se obtienen de estas mediante la transformación $FR \rightarrow \gamma_5 FR^\dagger \gamma_5$.

Capítulo 6

Anomalías

Primero. Si toda excepción confirma la regla, una regla sin excepción será una regla sin confirmar, de ningún modo una “no-regla”.

Segundo. Una regla con excepciones será siempre más firme que una regla sin excepciones, a la cual faltaría la excepción que la confirmase.

Tercero. Tanto más regla será una regla cuanto más abunde en excepciones;

y

Cuarto. La regla ideal sólo contendría excepciones.

Antonio Machado

Cuando una simetría de la teoría clásica no se puede realizar a nivel cuántico se habla de *anomalía*. En términos de integrales de caminos, las anomalías se deben a que la medida no es invariante bajo tal simetría. Como ya hemos comentado, la ruptura de una simetría a nivel cuántico puede ser tan sólo un artefacto introducido por la regularización y/o renormalización de la teoría. En tal caso, llamado anomalía espúrea, es posible (y necesario) restablecer la simetría añadiendo contratérminos finitos al Lagrangiano. En el caso de auténticas anomalías, en cambio, es imposible restaurar la simetría de ese modo, lo que muestra que estamos ante una propiedad intrínseca de la teoría y no del método empleado. Lógicamente, una condición necesaria para la aparición de anomalías es que no exista ningún método de renormalización que preserve la simetría en cuestión. En renormalización diferencial, las anomalías se manifiestan como la imposibilidad de elegir las escalas de renormalización de forma que se preserven las simetrías correspondientes. La anomalía ABJ del triángulo [69], estudiada en las Refs. [2, 17], es un claro ejemplo: se pueden elegir las escalas de modo que se conserven las corrientes vectoriales o que se conserve la corriente axial, pero no existe ninguna elección para la cual se conserven todas a un tiempo.

En general, el origen de anomalías en RDR es la no conmutatividad del proceso de renormalización con la contracción de índices Lorentz, que a su vez proviene del hecho de que las reglas de RDR son incompatibles con esta operación. Un ejemplo directo en el

que no entraremos aquí es la anomalía de la traza: la traza del tensor energía-momento de una teoría invariante de escala, tomada después de renormalización, no es nula (a diferencia de lo que ocurre en la teoría clásica). Aquí consideraremos la anomalía ABJ del diagrama triangular a un bucle de una corriente axial y dos vectoriales, $T_{\mu\nu\lambda}$ (el índice λ corresponde a la corriente axial). Clásicamente, esta función de Green satisface las identidades de Ward (usando las variables x, y habituales)

$$\partial_\mu^x T_{\mu\nu\lambda}(x, y) = 0, \quad (6.1)$$

$$\partial_\nu^y T_{\mu\nu\lambda}(x, y) = 0, \quad (6.2)$$

$$(\partial_\lambda^x - \partial_\lambda^y) T_{\mu\nu\lambda}(x, y) = 0, \quad (6.3)$$

que dictan la conservación de las corrientes vectoriales y axial. La corrección a un bucle, aunque finita, contiene potenciales divergencias lineales que la hacen ambigua y dependiente del método usado para calcularla. Esta corrección contiene la traza de seis matrices de Dirac y una γ_5 . Aunque su valor es único en cuatro dimensiones, esta traza puede escribirse en distintas formas, que llevan a distintas combinaciones de funciones básicas (cada una con diferentes contracciones de las derivadas internas). Los resultados finales pueden diferir en términos finitos según la forma escogida, y en todos los casos al menos una de las tres identidades de Ward es violada. Normalmente es deseable preservar las identidades vectoriales, asociadas a invariancia *gauge* (de la que depende la renormalizabilidad de la teoría). Hemos comprobado que tal es la situación cuando se emplea la forma “democrática”

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\gamma_5 \gamma_\lambda \gamma_a \gamma_\nu \gamma_b \gamma_\mu \gamma_c] = & 4 (\epsilon_{\lambda a \nu b} \delta_{\mu c} - \epsilon_{\lambda a \nu \mu} \delta_{b c} + \epsilon_{\lambda a \nu c} \delta_{b \mu} \\ & + \epsilon_{\lambda a b \mu} \delta_{\nu c} + \epsilon_{\lambda \nu b c} \delta_{a \mu} - \epsilon_{\lambda a b c} \delta_{\mu \nu} + \epsilon_{\lambda a \mu c} \delta_{\nu b} - \epsilon_{\lambda \nu \mu c} \delta_{b a} + \epsilon_{\lambda b \mu c} \delta_{a \nu} \\ & + \epsilon_{a \nu b \mu} \delta_{\lambda c} + \epsilon_{a \nu \mu c} \delta_{\lambda b} - \epsilon_{a \nu b c} \delta_{\mu \lambda} + \epsilon_{\nu b \mu c} \delta_{\lambda a} + \epsilon_{\nu b \mu \lambda} \delta_{c a} - \epsilon_{a b \mu c} \delta_{\lambda \nu}). \end{aligned} \quad (6.4)$$

El resultado es entonces

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu\lambda}^R(x, y) = & ie^3 \{ 2 \text{Tr}(\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\lambda \gamma_\nu \gamma_a \gamma_b \gamma_c) \partial_c^x \partial_a^y T[\partial_b] - 16 (\epsilon_{\lambda \mu a b} \partial_a^x \partial_\nu^y - \epsilon_{\lambda \nu a b} \partial_\mu^x \partial_a^y) T[\partial_b] \\ & + 16 \epsilon_{\lambda b \mu a} \partial_a^x T[\partial_\nu \partial_b - \frac{1}{4} \delta_{\nu b} \square] + 16 \epsilon_{\lambda \nu b a} \partial_a^y T[\partial_\mu \partial_b - \frac{1}{4} \delta_{\mu b} \square] \\ & + \frac{1}{8\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\lambda a} (\partial_a^x + \partial_a^y) (\delta(x) \delta(y)) \}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

que satisface las ecuaciones

$$\partial_\mu^x T_{\mu\nu\lambda}^R(x, y) = 0, \quad (6.6)$$

$$\partial_\nu^y T_{\mu\nu\lambda}^R(x, y) = 0, \quad (6.7)$$

$$(\partial_\lambda^x - \partial_\lambda^y) T_{\mu\nu\lambda}^R(x, y) = \frac{ie^3}{2\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \partial_\lambda^x \partial_\rho^y (\delta(x) \delta(y)). \quad (6.8)$$

Por tanto, se preservan las identidades vectoriales y se rompe la conservación de la corriente axial, con el valor conocido de la anomalía.

Conclusiones

This is not the end. It is not even the beginning of the end. But it is, perhaps, the end of the beginning.

Winston Churchill (sobre la victoria en Egipto)

La aplicación de renormalización diferencial en teorías con simetrías no triviales exige el estudio explícito de las identidades de Ward correspondientes. Salvo en el caso anómalo, la arbitrariedad inherente al método puede fijarse de forma que las amplitudes renormalizadas satisfagan estas identidades. Este procedimiento, aunque válido, no es muy conveniente en aplicaciones prácticas. En esta memoria hemos desarrollado un método para fijar la arbitrariedad de renormalización diferencial desde un principio, garantizando al mismo tiempo la validez automática de las identidades de Ward. De momento, esta *renormalización diferencial restringida* (RDR) sólo ha sido desarrollada al nivel de un bucle, pero confiamos en que las ideas expuestas aquí puedan generalizarse a órdenes superiores. RDR se basa en un conjunto de reglas que aseguran la coherencia de la renormalización de distintas expresiones y su compatibilidad con las identidades de Ward. En principio, estas reglas podrían utilizarse en el contexto de otros métodos de renormalización, aunque la libertad natural de renormalización diferencial permite su implementación directa. Empleando las reglas hemos obtenido todas las expresiones renormalizadas necesarias para cálculos a un bucle en teorías renormalizables en 4 dimensiones. Las expresiones renormalizadas para teorías no renormalizables o en otro número de dimensiones pueden hallarse siguiendo los mismos pasos descritos aquí. Todos estos desarrollos han sido recogidos en los artículos de las Refs. [70] y [71] (F. del Águila, A. Culatti, R. Muñoz-Tapia y M. Pérez-Victoria), y de la Ref. [72] (F. del Águila y M. Pérez-Victoria).

Hemos observado que, aun siendo métodos conceptual y operacionalmente distintos, RDR y regularización por reducción dimensional (con substracción mínima) producen resultados equivalentes, al nivel de un bucle. Este hecho ha sido usado para implementar nuestro método en una serie de programas para el cálculo automatizado de amplitudes a un bucle, que también permiten el uso de regularización dimensional. Tanto la equivalencia entre estos esquemas como la discusión de los programas están recogidos en la Ref. [50] (T. Hahn y M. Pérez-Victoria).

A continuación hemos aplicado RDR a una serie de teorías con invariancia *gauge*—ver las mencionadas Refs. [70] y [71] para el caso Abelian y la Ref. [73] (M. Pérez-Victoria) para el no-Abeliano—y supersimetría—Refs. [31] y [68] (F. del Águila, A. Culatti, R. Muñoz-Tapia y M. Pérez-Victoria)—y hemos verificado que en todos los casos se preservan las simetrías relevantes. Finalmente, hemos estudiado la aparición de anomalías en nuestro método—Ref. [74] (F. del Águila y M. Pérez-Victoria).

RDR es un método de renormalización relativamente sencillo que respeta todas las simetrías que han sido investigadas. El grado de sistematización que hemos logrado y su automatización en *FormCalc* y *LoopTools* permiten su utilización en cálculos prácticos a un bucle. Además, al ser equivalente a una elección de esquema particular en renormalización diferencial, es posible utilizar el procedimiento restringido a primer orden, y continuar después la renormalización a órdenes superiores usando renormalización diferencial convencional. Sin embargo, sólo la extensión del método restringido a órdenes arbitrarios puede convertirse en una alternativa real a métodos como regularización dimensional.

Estos estudios y desarrollos tienen continuación natural en distintos frentes. Al margen de aplicaciones de los programas descritos a cálculos fenomenológicos, son interesantes la aplicación de RDR a teorías efectivas o con distinto número de dimensiones, el estudio más profundo de anomalías, la comprobación de las identidades de Ward de supersimetría, etc. Pero probablemente el problema más urgente es la extensión de RDR a órdenes superiores. Tal extensión exige, al menos, generalizar el conjunto de reglas (por ejemplo, hay que especificar cómo tratar las integrales sobre puntos internos) e incorporar nuevos tipos de funciones básicas. Como propusimos anteriormente, la explotación de la similitud con reducción dimensional puede ser útil en este contexto.

Apéndice A

Funciones de Green en espacio Euclídeo

En este apéndice recogemos las convenciones que hemos usado para las funciones de Green en el espacio Euclídeo, y que esencialmente siguen las de la Ref. [75], que tienen la virtud de introducir un número mínimo de signos irrelevantes. Emplearemos formalismo de integral de caminos.

Sea $S = \int dx \mathcal{L}(x)$ la acción Euclídea de una teoría de campos cuánticos bosónicos, ϕ_i . El funcional generador de las funciones de Green (generales) se define mediante la integral de caminos

$$Z[J] = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ -S + \int dx J_i(x) \phi_i(x) \right\}, \quad (\text{A.1})$$

donde $J = \{J_i\}$ y $\phi = \{\phi_i\}$ designan el conjunto de fuentes y campos, respectivamente, y $N = Z[0]$ es una constante de normalización. Las funciones de Green (generales) son derivadas funcionales del funcional generador respecto a las fuentes:

$$\langle \phi_{i_1}(x_1) \dots \phi_{i_n}(x_n) \rangle_{\text{gen}} = \left[\frac{\delta}{\delta J_{i_1}(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta J_{i_n}(x_n)} Z[J] \right]_{J=0}. \quad (\text{A.2})$$

El generador de las funciones de Green conexas, W se define como

$$Z[J] = e^{W[J]}, \quad (\text{A.3})$$

de forma que éstas están dadas por

$$\langle \phi_{i_1}(x_1) \dots \phi_{i_n}(x_n) \rangle_{\text{con}} = \left[\frac{\delta}{\delta J_{i_1}(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta J_{i_n}(x_n)} W[J] \right]_{J=0}. \quad (\text{A.4})$$

Finalmente, el generador de las funciones de Green 1PI, o acción efectiva, se define por la transformada de Legendre

$$\Gamma[\phi_c] = \int dx J_i(x) \phi_{c_i}(x) - W[J], \quad (\text{A.5})$$

con los campos clásicos definidos como

$$\phi_{ci}(x) = \frac{\delta W[J]}{\delta J_i(x)}. \quad (\text{A.6})$$

De la Ec. A.5 se sigue trivialmente la relación dual (para vacío trivial, $\langle \phi_i \rangle_{\text{con}} = 0$),

$$J_i(x) = \left[\frac{\delta \Gamma[\phi_c]}{\delta \phi_{ci}(x)} \right]_{\phi_c=0}. \quad (\text{A.7})$$

A nivel árbol, la acción Euclídea es igual a la acción clásica S . Las funciones de Green 1PI son

$$\langle \phi_{i_1}(x_1) \dots \phi_{i_n}(x_n) \rangle_{\text{1PI}} = \left[\frac{\delta}{\delta \phi_{ci_1}(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta \phi_{ci_n}(x_n)} \Gamma[\phi_c] \right]_{\phi_c=0}. \quad (\text{A.8})$$

Si la acción contiene campos externos, K_j , acoplados a los campos cuánticos ϕ_i , generalizamos las definiciones y relaciones anteriores del siguiente modo:

$$Z[J, K] = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ -S + \int dx J_i(x) \phi_i(x) \right\} \quad (\text{A.9})$$

$$Z[J, K] = e^{W[J, K]},$$

$$\phi_{ci}[K](x) = \frac{\delta W[J, K]}{\delta J_i(x)}, \quad (\text{A.10})$$

$$\Gamma[\phi_c, K] = \int dx J_i(x) \phi_{ci}[K](x) - W[J, K], \quad (\text{A.11})$$

$$J_i(x) = \left[\frac{\delta \Gamma[\phi_c, K]}{\delta \phi_{ci}[K](x)} \right]_{\phi_{ci}[K]=0}, \quad (\text{A.12})$$

$$\frac{\delta \Gamma[\phi_c, K]}{\delta K_j(x)} = -\frac{\delta W[J, K]}{\delta K_j(x)}. \quad (\text{A.13})$$

Obsérvese que los campos externos son meros observadores en la transformada de Legendre. En adelante suprimiremos el subíndice c y el argumento K (si lo hay) del campo clásico $\phi_c[K]$. Las funciones de Green 1PI en presencia de campos externos se definen como

$$\langle \phi_{i_1}(x_1) \dots \phi_{i_n}(x_n) K_{j_1}(y_1) \dots K_{j_m}(y_m) \rangle_{\text{1PI}} = \left[\frac{\delta}{\delta \phi_{ci_1}(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta \phi_{ci_n}(x_n)} \frac{\delta}{\delta K_{j_1}(y_1)} \dots \frac{\delta}{\delta K_{j_m}(y_m)} \Gamma[\phi_c, K] \right]_{\phi_c=0}. \quad (\text{A.14})$$

Para campos fermiónicos, descritos por variables de Grassman, usamos las mismas definiciones pero cuidando el orden. Las derivadas funcionales las entendemos siempre como derivadas por la izquierda. Así, usando una notación que será útil en las aplicaciones, tenemos:

$$Z[\eta, \bar{\eta}] = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} \exp \left\{ -S + \int dx (\bar{\eta}(x) \Psi(x) + \bar{\Psi}(x) \eta(x)) \right\} \quad (\text{A.15})$$

y para la acción efectiva,

$$\Gamma[\Psi_c, \bar{\Psi}_c] = \int dx (\bar{\eta}(x)\Psi(x) + \bar{\Psi}(x)\eta(x)) - W[\eta, \bar{\eta}], \quad (\text{A.16})$$

donde ahora

$$\Psi_c(x) = \frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}(x)}, \quad \bar{\Psi}_c(x) = -\frac{\delta W}{\delta \eta(x)}. \quad (\text{A.17})$$

Se cumplen las relaciones duales siguientes:

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \Psi_c(x)} = -\bar{\eta}(x), \quad \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\Psi}_c(x)} = \eta(x). \quad (\text{A.18})$$

Nuestro convenio de signos para las funciones de Green es que éstas estén dadas directamente por derivadas de los funcionales generadores correspondientes. Así, por ejemplo:

$$\langle \Psi(x_1) \dots \Psi(x_n) \bar{\Psi}(y_1) \bar{\Psi}(y_m) \rangle_{\text{gen}} = \frac{\delta}{\delta \eta(y_1)} \dots \frac{\delta}{\delta \eta(y_m)} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(x_1)} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(x_n)} Z[\eta, \bar{\eta}]. \quad (\text{A.19})$$

Esta definición difiere en un factor $(-1)^m$ del valor esperado usual y de la definición en la Ref. [75]:

$$\begin{aligned} & \langle \Psi(x_1) \dots \Psi(x_n) \bar{\Psi}(y_1) \bar{\Psi}(y_m) \rangle_{\text{gen}} = \\ & (-1)^m \frac{1}{N} \int \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} \bar{\Psi}(y_1) \bar{\Psi}(y_m) \Psi(x_1) \Psi(x_n) \\ & \times \exp \left\{ -S + \int dx (\bar{\eta}(x)\Psi(x) + \bar{\Psi}(x)\eta(x)) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Las funciones de Green 1PI se definen del mismo modo:

$$\langle \Psi(x_1) \dots \Psi(x_n) \bar{\Psi}(y_1) \bar{\Psi}(y_m) \rangle_{\text{1PI}} = \frac{\delta}{\delta \Psi(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta \Psi(x_n)} \frac{\delta}{\delta \bar{\Psi}(y_1)} \frac{\delta}{\delta \bar{\Psi}(y_m)} \Gamma[\Psi, \bar{\Psi}]. \quad (\text{A.21})$$

Con nuestras definiciones, las reglas de Feynman para los vértices (tanto para bosones como para fermiones) se obtienen del Lagrangiano Euclídeo del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \text{vértice} & \rightarrow - (\text{coeficiente del término correspondiente en } \mathcal{L}) , \\ \text{propagador} & \rightarrow \text{inverso del coeficiente del término correspondiente en } \mathcal{L} . \end{aligned}$$

Apéndice B

Identidades de Slavnov-Taylor

En este Apéndice derivamos las identidades de Slavnov-Taylor de QCD a partir de su simetría BRST. Seguimos básicamente las Refs. [55, 75]. El Lagrangiano de QCD fue escrito en la Sección 5.3. En un *gauge* lineal general, $\mathcal{F}^a(A) = 0$, con $\mathcal{F}^a(A) = t_{\mu}^{ab} A_{\mu}^b$, y para un sólo sabor de quarks (para simplificar la notación) se escribe como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a + \frac{a}{2} \mathcal{F}^a(A) \mathcal{F}^a(A) + \partial_{\mu} \bar{\eta}^a (D_{\mu} \eta)^a + \bar{\Psi} (\mathcal{D} + m) \Psi. \quad (\text{B.1})$$

Las transformación BRST

$$\delta A_{\mu}^a = -(D_{\mu} \eta)^a \delta\lambda \equiv s A_{\mu}^a \delta\lambda, \quad (\text{B.2})$$

$$\delta \bar{\eta}^a = -a \mathcal{F}^a(A) \delta\lambda \equiv s \bar{\eta}^a \delta\lambda, \quad (\text{B.3})$$

$$\delta \eta^a = -\frac{g}{2} f^{abc} \eta^b \eta^c \delta\lambda \equiv s \eta^a \delta\lambda, \quad (\text{B.4})$$

$$\delta \Psi = -g T^a \eta^a \Psi \delta\lambda \equiv s \Psi \delta\lambda, \quad (\text{B.5})$$

$$\delta \bar{\Psi} = -g \bar{\Psi} T^a \eta^a \delta\lambda \equiv s \bar{\Psi} \delta\lambda, \quad (\text{B.6})$$

deja este Lagrangiano invariante. El funcional generador, incluyendo fuentes para las variaciones BRST, es

$$Z[J, \xi, \bar{\xi}, \chi, \bar{\chi}, K, L, N, \bar{N}] = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}(A, \eta, \bar{\eta}, \Psi, \bar{\Psi}) e^{-S+S_f}, \quad (\text{B.7})$$

con

$$S_f = \int dx \left(J_{\mu}^a A_{\mu}^a + \bar{\eta}^a \xi^a + \bar{\xi}^a \eta^a + \bar{\Psi} \chi + \bar{\chi} \Psi + K_{\mu}^a (s A_{\mu}^a) + L^a (s \eta^a) + \bar{N} (s \Psi) + (s \bar{\Psi}) N \right). \quad (\text{B.8})$$

Tras una transformación BRST, sólo los términos con fuentes de campos elementales cambian en $S_e = S - S_f$:

$$\delta S_e = - \int dx \left(J(s A) - a \mathcal{F} \xi + \bar{\xi}(s \eta) - (s \bar{\Psi}) \chi + \bar{\chi}(s \Psi) \right) \delta\lambda, \quad (\text{B.9})$$

donde hemos suprimido los índices repetidos. La invariancia de la medida de la integral de caminos implica

$$0 = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}(A, \eta, \bar{\eta}, \Psi, \bar{\Psi}) e^{-S_e} \int dx (J(sA) - a\mathcal{F}\xi + \bar{\xi}(s\eta) - (s\bar{\Psi})\chi + \bar{\chi}(s\Psi)) , \quad (\text{B.10})$$

que en términos de derivadas funcionales da la identidad de Slavnov-Taylor para el funcional generador Z :

$$0 = \int dx \left(J \frac{\delta}{\delta K} - a\xi\mathcal{F} \left(\frac{\delta}{\delta J} \right) + \bar{\xi} \frac{\delta}{\delta L} + \bar{\chi} \frac{\delta}{\delta \bar{N}} + \frac{\delta}{\delta N} \chi \right) Z . \quad (\text{B.11})$$

Como $\mathcal{F}(A)$ es lineal en A , también tenemos

$$0 = \int dx \left(J \frac{\delta}{\delta K} - a\xi\mathcal{F} \left(\frac{\delta}{\delta J} \right) + \bar{\xi} \frac{\delta}{\delta L} + \bar{\chi} \frac{\delta}{\delta \bar{N}} + \frac{\delta}{\delta N} \chi \right) W . \quad (\text{B.12})$$

Por otro lado, cambiando $\bar{\eta} \rightarrow \bar{\eta} + \delta\bar{\eta}$ en Z con $\delta\bar{\eta}$ arbitrario obtenemos la ecuación de movimiento

$$0 = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}(A, \eta, \bar{\eta}, \Psi, \bar{\Psi}) (s\mathcal{F}^a - \xi^a) e^{-S_e} , \quad (\text{B.13})$$

que en términos de Z y W se escribe como

$$\left(t_{\mu}^{ab} \frac{\delta}{\delta K_{\mu}^b} - \xi^a \right) Z = 0 , \quad (\text{B.14})$$

$$t_{\mu}^{ab} \frac{\delta}{\delta K_{\mu}^b} W = \xi^a . \quad (\text{B.15})$$

Para hallar estas identidades en función de la acción efectiva, hacemos la transformada de Legendre, usando

$$\begin{aligned} A_{\mu}^a &= \frac{\delta W}{\delta J_{\mu}^a} , & \eta^a &= \frac{\delta W}{\delta \xi^a} , & \bar{\eta}^a &= -\frac{\delta W}{\delta \bar{\xi}^a} , & \Psi &= \frac{\delta W}{\delta \bar{\chi}} , & \bar{\Psi} &= -\frac{\delta W}{\delta \chi} ; \\ J_{\mu}^a &= \frac{\delta \Gamma}{\delta A_{\mu}^a} , & \bar{\xi}^a &= -\frac{\delta \Gamma}{\delta \eta^a} , & \chi^a &= \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\eta}^a} , & \bar{\chi} &= -\frac{\delta \Gamma}{\delta \Psi} , & \chi &= \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\Psi}} ; \\ \frac{\delta \Gamma}{\delta K_{\mu}^a} &= -\frac{\delta W}{\delta J_{\mu}^a} , & \frac{\delta \Gamma}{\delta L^a} &= -\frac{\delta W}{\delta \xi^a} , & \frac{\delta \Gamma}{\delta N} &= -\frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}^a} , & \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{N}} &= -\frac{\delta W}{\delta \chi} . \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

El resultado es

$$0 = \int dx \left(-\frac{\delta \Gamma}{\delta A} \frac{\delta \Gamma}{\delta K} + \frac{\delta \Gamma}{\delta \eta} \frac{\delta \Gamma}{\delta L} + \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\Psi}} \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{N}} - \frac{\delta \Gamma}{\delta N} \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\Psi}} - a \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\eta}} \mathcal{F}(A) \right) \quad (\text{B.17})$$

para la identidad de Slavnov-Taylor, y

$$0 = t_{\mu}^{ab} \frac{\delta \Gamma}{\delta K_{\mu}^b} + \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\eta}^a} \quad (\text{B.18})$$

para la ecuación del movimiento de los fantasmas. En el *gauge* de Feynman tenemos $t_{\mu\nu}^{ab} = \delta^{ab} \partial_{\mu}$ y $a = 1$, con lo que las Ecs. B.17 y B.18 se reducen a las escritas en

la Sección 5.3. Las identidades correspondientes para las funciones de Green 1PI se obtienen derivando las Ecs. B.17 y B.18 respecto a los campos clásicos y haciéndolos cero. Es conveniente usar la conservación del número fermiónico y del número de fantasmas para anticipar qué funciones se anulan trivialmente.

Consideremos en primer lugar la ecuación del movimiento para la acción efectiva, Ec. B.18. A partir de ahora nos restringimos al *gauge* de Feynman y, como sólo estudiaremos funciones de Green 1PI, suprimimos tal subíndice. Haciendo la derivada funcional respecto a $\eta^b(y)$ y poniendo los campos a cero, tenemos:

$$\partial_\mu^x \langle \eta^b(y) K_\mu^a(x) \rangle + \langle \eta^b(y) \bar{\eta}^a(x) \rangle = 0. \quad (\text{B.19})$$

Como, usando las reglas de Feynman dadas en el texto, el propagador de los fantasmas tiene (a todo orden) una derivada actuando sobre el antifantasma externo, esta ecuación para amplitudes renormalizadas se cumple siempre que la renormalización no esté influenciada por tal derivada. Así ocurre en RDR. Por otro lado, por covariancia Lorentz y usando esta propiedad, tenemos necesariamente:

$$\langle \eta^b(y) K_\mu^a(x) \rangle = \partial_\mu^x F(x-y), \quad (\text{B.20})$$

$$\langle \eta^b(y) \bar{\eta}^a(x) \rangle = \partial_\nu G_\nu(x-y) = \partial_\nu \partial_\nu H(x-y), \quad (\text{B.21})$$

donde hemos hecho manifiesta la derivada externa sobre el antifantasma, que actúa por partes sobre el diagrama amputado. Usando la Ec. B.19, vemos que $H = -F$, de donde

$$\square^x \langle \eta^b(y) K_\mu^a(x) \rangle + \partial_\mu^x \langle \eta^b(y) \bar{\eta}^a(x) \rangle = 0. \quad (\text{B.22})$$

Esta ecuación del movimiento de los fantasmas generalizada será empleada en breve.

La primera identidad de Slavnov-Taylor que vamos a estudiar implica la transversalidad de la autoenergía de los gluones. En efecto, derivando funcionalmente la Ec. B.17 (en el *gauge* de Feynman) respecto a $\eta^b(y)$ y $A_\nu^c(z)$, encontramos

$$\int dx \langle A_\nu^c(z) A_\mu^a(x) \rangle \langle \eta^b(y) K_\mu^a(x) \rangle = \partial_\nu^z \langle \eta^b(y) \bar{\eta}^c(z) \rangle. \quad (\text{B.23})$$

Al nivel de un bucle podemos escribirla como

$$\begin{aligned} \partial_\nu^z \langle \eta^b(y) \bar{\eta}^c(z) \rangle = & \int dx \left[\langle A_\nu^c(z) A_\mu^a(x) \rangle^{(0)} \langle \eta^b(y) K_\mu^a(x) \rangle^{(1)} \right. \\ & \left. + \langle A_\nu^c(z) A_\mu^a(x) \rangle^{(1)} \langle \eta^b(y) K_\mu^a(x) \rangle^{(0)} \right], \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

donde los superíndices (0) y (1) indican el número de bucles. Escribiendo explícitamente las partes a nivel árbol y usando la ecuación del movimiento generalizada, Ec. B.22, la identidad de Slavnov-Taylor se reduce a

$$\partial_\mu^y \langle A_\nu^c(z) A_\mu^b(y) \rangle^{(1)} = 0. \quad (\text{B.25})$$

Utilizando inductivamente el mismo argumento se obtiene la misma identidad a cualquier orden:

$$\partial_\mu^y \langle A_\nu^c(z) A_\mu^b(y) \rangle = 0. \quad (\text{B.26})$$

El resto de identidades de Slavnov-Taylor son algo más complicadas. Se obtienen con el mismo procedimiento. Derivando respecto a $\eta^b(y)$, $\eta^c(z)$ y $\bar{\eta}^d(w)$ se obtiene una identidad para el vértice de fantasmas:

$$0 = \int dx \left[- \langle A_\mu^a(x) \eta^c(z) \bar{\eta}^d(w) \rangle \langle \eta^b(y) K_\mu^a(x) \rangle + \langle A_\mu^a(x) \eta^b(y) \bar{\eta}^d(w) \rangle \langle \eta^c(z) K_\mu^a(x) \rangle - \langle \eta^a(x) \bar{\eta}^d(w) \rangle \langle \eta^b(y) \eta^c(z) L^a(x) \rangle \right]. \quad (\text{B.27})$$

Del mismo modo, si derivamos respecto a $\eta^b(y)$, $\Psi^B(z)$ y $\bar{\Psi}^C(w)$ encontramos la identidad para el vértice de quarks:

$$0 = \int dx \left[\langle \Psi^B(z) \bar{\Psi}^C(w) A_\mu^a(x) \rangle \langle \eta^b(y) K_\mu^a(x) \rangle - \langle \Psi^A(x) \bar{\Psi}^C(w) \rangle \langle \Psi^B(z) \eta^b(y) \bar{N}^A(x) \rangle + \langle \eta^b(y) \bar{\Psi}^C(w) N^A(x) \rangle \langle \Psi^B(z) \bar{\Psi}^A(x) \rangle \right]. \quad (\text{B.28})$$

La identidad de Slavnov-Taylor para el triple vértice gluónico se obtiene derivando respecto a $A_\nu^c(z)$, $A_\rho^d(w)$ y $\eta^b(y)$:

$$0 = \left\{ \int dx \left[\frac{1}{2} \langle A_\mu^a(x) A_\nu^c(z) A_\rho^d(w) \rangle \langle \eta^b(y) K_\mu^a(x) \rangle + \langle A_\mu^a(x) A_\nu^c(z) \rangle \langle \eta^b(y) K_\mu^a(x) A_\rho^d(w) \rangle - \partial_\nu^z \langle \eta^b(y) \bar{\eta}^c(z) A_\rho^d(w) \rangle \right] + \begin{bmatrix} c \leftrightarrow d \\ \nu \leftrightarrow \rho \\ z \leftrightarrow w \end{bmatrix} \right\}. \quad (\text{B.29})$$

Derivando además respecto a $A_\sigma^e(t)$, obtenemos la identidad para el vértice de cuatro gluones:

$$0 = \left\{ \int dx \left[\frac{1}{3} \langle A_\mu^a(x) A_\nu^c(z) A_\rho^d(w) A_\sigma^e(t) \rangle \langle \eta^b(y) K_\mu^a(x) \rangle + \langle A_\mu^a(x) A_\nu^c(z) A_\rho^d(w) \rangle \langle \eta^b(y) K_\mu^a(x) A_\sigma^e(t) \rangle + \langle A_\mu^a(x) A_\sigma^e(t) \rangle \langle \eta^b(y) K_\mu^a(x) A_\nu^c(z) A_\rho^d(w) \rangle \right] + \begin{bmatrix} e \leftrightarrow d \\ \sigma \leftrightarrow \rho \\ t \leftrightarrow w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \leftrightarrow c \\ \sigma \leftrightarrow \nu \\ t \leftrightarrow z \end{bmatrix} \right\}. \quad (\text{B.30})$$

Las identidades de Slavnov-Taylor a un bucle, escritas en el texto, se derivan de éstas separando las partes a nivel árbol y a un bucle, y escribiendo explícitamente los valores a nivel árbol.

Bibliografía

- [1] R. Feynman, *The Character of the Physical Law*, (Penguin Books, London, 1992).
- [2] D.Z. Freedman, K. Johnson and J.I. Latorre, *Nucl. Phys.* **B371** (1992) 353.
- [3] N.N. Bogoliubov and O. Parasiuk, *Acta Math.* **97** (1957) 227.
- [4] R. Stora, *Differential algebras in lagrangean field theory*, EHT Lectures, January-February 1993.
- [5] M. Abramowitz and I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* (Dover, New York, 1972).
- [6] P.E. Haagensen and J.I. Latorre, *Phys. Lett.* **B283** (1992) 293.
- [7] D.Z. Freedman, K. Johnson, R. Muñoz-Tapia and X. Vilasis-Cardona, *Nucl. Phys.* **B395** (1993) 454.
- [8] M. Chaichian, W.F. Chen and H.C. Lee, *Phys. Lett.* **B409** (1997) 325.
- [9] K. Hepp, *Comm. Math. Phys.* **2** (1966) 301.
- [10] W. Zimmermann, *Comm. Math. Phys.* **15** (1969) 208; **11** (1968) 1.
- [11] J.I. Latorre, C. Manuel and X. Vilasis-Cardona, *Ann. Phys.* **231** (1994) 149.
- [12] V.A. Smirnov, *Nucl. Phys.* **B427** (1994) 325.
- [13] D.Z. Freedman, G. Lozano and N. Rius, *Phys. Rev.* **D49** (1994) 1054.
- [14] D. Anselmi, D.Z. Freedman, M.T. Grisaru, A.A. Johansen, BRX-TH-420, CPTH-S.553.0897, HUTP-97/A037, MIT-CTP-2666, hep-th/9708042.
- [15] J.C. Ward, *Phys. Rev.* **78** (1950) 1824.
- [16] Y. Takahashi, *Nuovo Cimento* **6** (1957) 370.
- [17] P.E. Haagensen and J.I. Latorre, *Ann. Phys.* **221** (1993) 77;
- [18] V.A. Smirnov and O.I. Zavyalov, *Theor. Math. Phys.* **96** (1993) 974.

- [19] V.A. Smirnov, *Z. Phys.* **C67** (1995) 531.
- [20] V.A. Smirnov, *Theor. Math. Phys.* **108** (1997) 953.
- [21] V.A. Smirnov, *Int. J. Mod. Phys.* **A12** (1997) 4241.
- [22] O. Schnetz, *J. Math. Phys.* **38** (1997) 738; Ph.D. Thesis, Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, 1995.
- [23] L.V. Avedeev, D.I. Kazakov and I.N. Kondrashuk, *Int. J. Mod. Phys.* **A9** (1994) 1067.
- [24] J. Schwinger, *Phys. Rev.* **82** (1951) 918;
C.S. Lam, *Nuovo Cimento* **38** (1965) 1754.
- [25] J.H. Lowenstein, *Phys. Rev.* **D4** (1971) 2281; *Commun. Math. Phys.* **24** (1971) 1;
Y.M.P. Lam, *Phys. Rev.* **D6** (1972) 2145; Y.M.P. Lam, *Phys. Rev.* **D7** (1973) 2943;
T.E. Clark and J.H. Lowenstein, *Nucl. Phys.* **B113** (1976) 109.
- [26] O. Piguet, S.P. Sorella, *Algebraic Renormalization: Perturbative Renormalization, Symmetries and Anomalies* (Springer, Berlin, 1995).
- [27] P. Breitenlohner and D. Maison, *Commun. Math. Phys.* **52** (1977) 11,39,55.
- [28] C. Becchi, A. Rouet and R. Stora, *Comm. Math. Phys.* **42** (1975) 127; *Ann. Phys.* **98** (1976) 287;
- [29] G. 't Hooft and M. Veltman, *Diagrammar*, CERN 73-9 (1973).
- [30] H. Osborn, sin publicar.
- [31] F. del Aguila, A. Culatti, R. Muñoz Tapia and M. Pérez-Victoria, *Nucl. Phys.* **B504** (1997) 532.
- [32] F. Cornet and J. Rico, *Phys. Lett.* **B412** (1997) 343.
- [33] G. 't Hooft and M. Veltman, *Nucl. Phys.* **B44** (1972) 189.
- [34] C.G. Bollini and J. Giambiagi, *Nuovo Cim.* **12 B** (1972) 20;
J.F. Ashmore, *Nuovo Cim. Lett.* **4** (1972) 289;
G.M. Cicuta and E. Montaldi, *Nuovo Cim. Lett.* **4** (1972) 329.
- [35] G. Dunne and N. Rius, *Phys. Lett.* **B293** (1992) 367.
- [36] K.G. Chetyrkin and F.V. Tkachov, *Nucl. Phys.* **B192** (1981) 159.
- [37] D.T. Stoyanov, INRNE-TH-96-5, hep-th/960460.
- [38] D. Prange, DESY-97-211, hep-th/9710225.

- [39] H. Epstein and V. Glaser, *The role of locality in perturbation theory*, Ann. Inst. H. Poincaré, A XIX (1973), no. 3, 211.
- [40] D.A. Akyeampong and R. Delbourgo, *Nuovo Cim* **17A** (1973) 578.
- [41] G. Bonneau, *Nucl. Phys.* **B177** (1981) 523.
- [42] M. Chanowitz, M. Furman, and I. Hinchliffe, *Nucl. Phys.* **B159** (1979) 225.
- [43] W. Siegel, *Phys. Lett.* **B84** (1979) 193;
D.M. Capper, D.R.T. Jones and P. van Nieuwenhuizen, *Nucl. Phys.* **B167** (1980) 479.
- [44] W. Siegel, *Phys. Lett.* **B94** (1980) 37.
- [45] L.V. Avdeev, D.I. Kazakov, M.Yu. Kalmykov, JINR-E2-94-388, hep-th/9411041.
- [46] J. Küblbeck, M. Böhm and A. Denner, *Comp. Phys. Commun.* **60** (1991) 165;
H. Eck and J. Küblbeck, *Guide to FeynArts 1.0*, Universität Würzburg (1992);
H. Eck, *FeynArts 2.0—A generic Feynman diagram generator*, Dissertation, Universität Würzburg (1995).
- [47] J.A.M. Vermaseren, *Symbolic Manipulation with FORM*, CAN, Amsterdam (1991).
- [48] G. Passarino and M. Veltman, *Nucl. Phys.* **B160** (1979) 151.
- [49] A. Denner, *Fortschr. Phys.* **41** (1993) 307.
- [50] T. Hahn and M. Pérez-Victoria, UG-FT-87/98, KA-TP-7-1998, hep-ph/9807565.
- [51] T. Hahn, *FormCalc and LoopTools user's guide*, available at <http://www-itp.physik.uni-karlsruhe.de/looptools>.
- [52] A. Denner, S. Dittmaier and T. Hahn, *Phys. Rev.* **D56** (1997) 117.
- [53] A.A. Slavnov, *Theor. Math. Phys.* **10** (1972) 152 (English translation: *Theor. and Math. Phys.* **10** (1972) 99);
J.C.Taylor, *Nucl. Phys.* **B33** (1971) 436.
- [54] D.Z. Freedman, G. Grignani, K. Johnson and N. Rius, *Ann. Phys.* **218** (1992) 75.
- [55] J. Zinn-Justin, in *Trends in Elementary Particle Theory, International Summer Institute on Theoretical Physics, Bonn 1974* (Springer-Verlag, Berlin, 1975); B.W. Lee, in *Methods in Field Theory, Les Houches 1975*, eds. R. Balian and J. Zinn-Justin (North-Holland, Amsterdam).
- [56] E.J. Schreier, *Phys. Rev.* **D3** (1971) 980.
- [57] P. Pascual and R. Tarrach, *QCD: Renormalization for the Practitioner* (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1984).

- [58] P. West, *Nucl. Phys.* **B268** (1986) 113;
M.K. Gaillard, *Phys. Lett.* **B342** (1995) 125; **B347** (1995) 284.
- [59] P.E. Haagensen, *Mod. Phys. Lett.* **A7** (1992) 893.
- [60] Yun S. Song, Ph.D. thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1996.
- [61] L. Girardello and M.T. Grisaru, *Nucl. Phys.* **B194** (1982) 65.
- [62] S. Ferrara, J. Scherk and P. van Nieuwenhuizen, *Phys. Rev. Lett.* **37** (1976) 1035;
S. Ferrara et al., *Nucl. Phys.* **B117** (1976) 333;
D.Z. Freedman and J.H. Schwarz, *Phys. Rev.* **D15** (1977) 1007;
S. Ferrara et al., *Phys. Rev.* **D15** (1977) 1013;
A. Dass, M. Fischler and M. Rocek, *Phys. Lett.* **B69** (1977) 1866;
E. Cremmer et al., *Nucl. Phys.* **B147** (1979) 105;
P. van Nieuwenhuizen, *Phys. Rep.* **C68** (1981) 189;
E. Cremmer et al., *Phys. Lett.* **B116** (1982) 231;
E. Cremmer et al., *Nucl. Phys.* **B212** (1983) 413;
R. Barbieri and S. Ferrara, *Surveys in H.E. Phys.* **4** (1983) 33.
- [63] F.A. Berends and R. Gastmans, *Phys. Lett.* **B55** (1975) 311.
- [64] S. Ferrara and E. Remiddi, *Phys. Lett.* **B53** (1974) 347;
- [65] S. Ferrara and M. Porrati, *Phys. Lett.* **B288** (1992) 85.
- [66] F. del Aguila, A. Mendez and F.X. Orteu, *Phys. Lett.* **B145** (1984) 70.
- [67] S. Bellucci, H. Cheng and S. Deser, *Nucl. Phys.* **B252** (1985) 389.
- [68] F. del Aguila, A. Culatti, R. Muñoz Tapia and M. Pérez-Victoria, International Workshop on Quantum Effects in MSSM, Universitat Autònoma de Barcelona, September 1997, hep-ph/9711474.
- [69] S. Adler, *Phys. Rev.* **177** (1969) 2426;
J.S. Bell and R. Jackiw, *Nuovo Cimento* **51** (1969) 47.
- [70] F. del Aguila, A. Culatti, R. Muñoz Tapia and M. Pérez-Victoria, *Phys. Lett.* **B419** (1998) 263.
- [71] F. del Aguila, A. Culatti, R. Muñoz Tapia and M. Pérez-Victoria, MIT-CTP-2705, UG-FT-86/98, hep-ph/9806451.
- [72] F. del Aguila and M. Pérez-Victoria, *Acta Phys. Polon.* **B28** (1997) 2279.
- [73] M. Pérez-Victoria, UG-FT-89/98, hep-th/9808071.
- [74] F. del Aguila, M. Pérez-Victoria, UG-FT-91-98, Zeuthen Workshop on Elementary Particle Theory: *Loops and Legs in Gauge Theories*, Rheinsberg, Germany, 19-24 Apr. 1998, to appear in *Acta Phys. Pol. B*, hep-ph/9808315.

- [75] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena* (Oxford University Press, New York, 1990).

Índice General

Introducción	1
1 Renormalización diferencial	5
1.1 Introducción a renormalización diferencial	5
1.2 Renormalización diferencial a órdenes superiores	10
1.3 Renormalización diferencial y simetrías	12
1.4 Otras versiones de renormalización diferencial	13
2 Renormalización diferencial restringida	15
2.1 Ambigüedades en renormalización diferencial	15
2.2 Renormalización y el principio de acción cuántico	16
2.3 Reglas de renormalización diferencial restringida	19
2.4 Procedimiento de renormalización diferencial restringida	21
2.5 Renormalización de las funciones básicas	22
2.5.1 Funciones básicas con masa nula	26
2.5.2 Funciones básicas masivas	29
2.5.3 <i>Gauge</i> más generales	31
2.6 Transformadas de Fourier	31
3 Relación con otros métodos de renormalización	39
3.1 Relación de renormalización diferencial con otros esquemas	39
3.2 Equivalencia entre RDR y reducción dimensional	40
4 Cálculos automatizados	43
4.1 <i>FormCalc</i>	44

4.2	<i>LoopTools</i>	47
4.3	Cálculos con <i>FormCalc</i> y <i>LoopTools</i>	47
4.4	Requerimientos y disponibilidad de los programas	48
5	Aplicaciones	49
5.1	Renormalización de QED	49
5.2	Renormalización de QED escalar	54
5.3	Renormalización de QCD	60
5.4	Cálculos supersimétricos	73
5.4.1	La polarización del vacío en SQED	73
5.4.2	Un cálculo en supergravedad	74
6	Anomalías	83
	Conclusiones	85
A	Funciones de Green en espacio Euclídeo	87
B	Identidades de Slavnov-Taylor	91
	Bibliografía	95

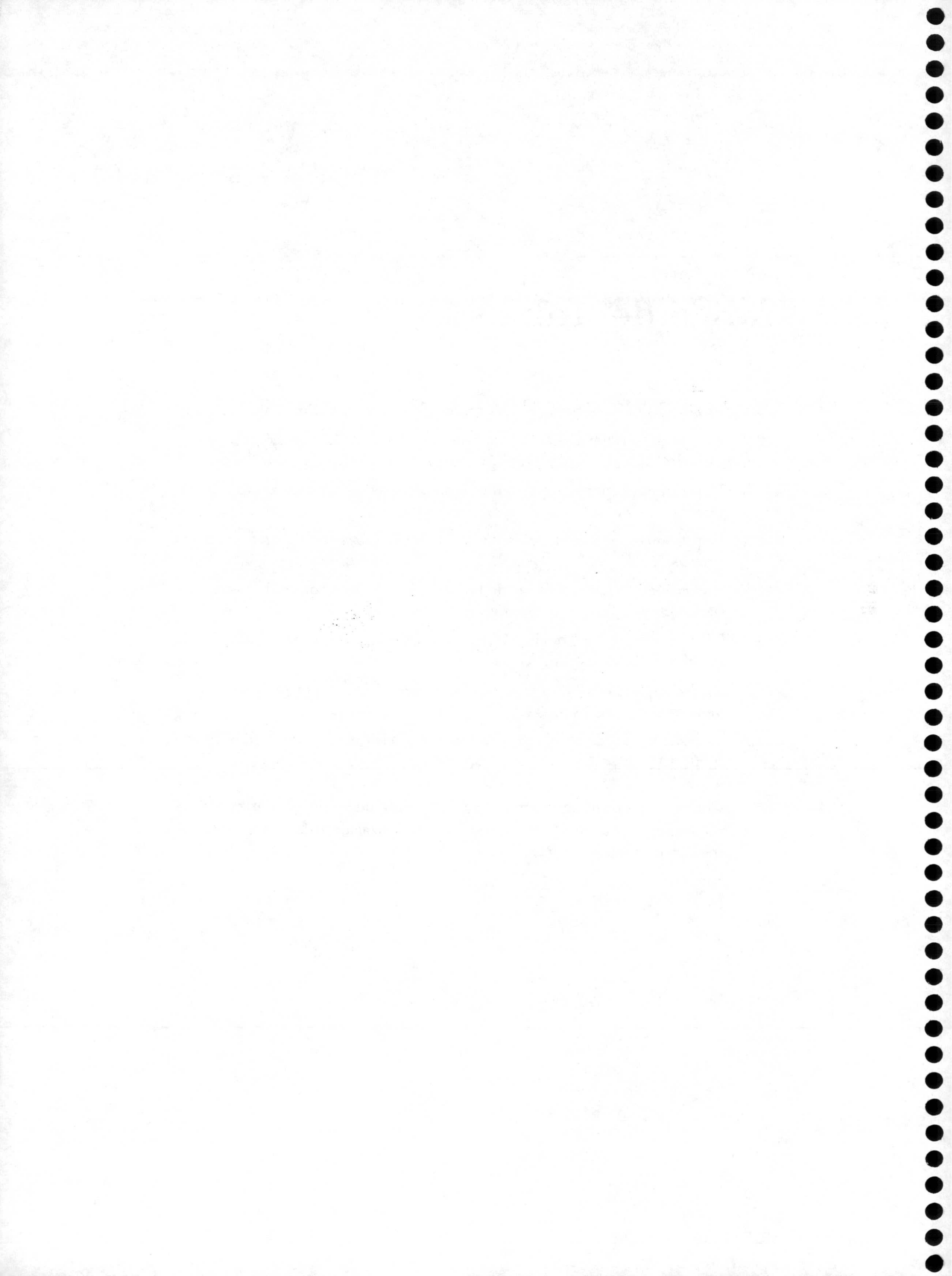
Índice de Figuras

1.1	Diagrama a un bucle que contribuye al vértice de cuatro puntos en la teoría ϕ^4	6
1.2	Diagrama de Feynman que contribuye a tres bucles a la autoenergía del campo escalar en una teoría ϕ^4	11
5.1	Reglas de Feynman para QED.	50
5.2	Diagramas de Feynman que contribuyen a la polarización del vacío (a), autoenergía del electrón (b) y corrección al vértice (c) en QED.	51
5.3	Reglas de Feynman de QED escalar.	54
5.4	Diagramas de Feynman que contribuyen a la polarización del vacío (a), autoenergía del escalar (b) y vértice fotón-escalar-escalar (c).	55
5.5	Diagramas de Feynman que contribuyen a la colisión fotón-escalar (d) y fotón-fotón (e).	58
5.6	Diagramas de Feynman que contribuyen a la colisión escalar-escalar (f).	59
5.7	Diagramas de Feynman que contribuyen a la autoenergía del gluón (a).	62
5.8	Diagramas de Feynman que contribuyen a la autoenergía de los quarks (b) y de los fantasmas (c).	63
5.9	Diagramas de Feynman que contribuyen al vértice gluón-quark-quark (d).	64
5.10	Diagramas de Feynman que contribuyen al vértice de gluón-fantasma-fantasma (e).	65
5.11	Diagramas de Feynman que contribuyen al vértice de tres gluones (f).	65
5.12	Diagramas de Feynman que contribuyen al vértice de cuatro gluones (g).	67
5.13	Diagramas de Feynman que contribuyen a las funciones de Green con inserciones de variaciones BRST.	71
5.14	Reglas de Feynman para QCD, incluyendo inserciones de variaciones BRST.	72

5.15	Diagramas de Feynman que contribuyen a $(g - 2)_l$ en SQED a orden e^3 .	76
5.16	Diagramas de Feynman que contribuyen a $(g - 2)_l$ en supergravedad a orden $e\kappa^2$	77
5.17	Reglas de Feynman para propagadores en supergravedad-SQED.	81
5.18	Reglas de Feynman para vértices de supergravedad-SQED.	82

Índice de Tablas

2.1	Funciones básicas para teorías renormalizables en 4 dimensiones	23
2.2	Expresiones renormalizadas de funciones básicas sin masa de uno y dos puntos.	26
2.3	Expresiones renormalizadas de funciones básicas masivas de uno y dos puntos.	34
2.4	Expresiones renormalizadas de las funciones básicas de tres y cuatro puntos.	35
2.5	Expresiones renormalizadas de las funciones básicas con barra necesarias para QED en un <i>gauge</i> general.	36
2.6	Transformadas de Fourier de las funciones básicas renormalizadas sin masa de uno y dos puntos.	36
2.7	Transformadas de Fourier de las funciones básicas renormalizadas masivas de uno y dos puntos.	37
2.8	Transformadas de Fourier de las funciones básicas renormalizadas de tres y cuatro puntos.	38
5.1	Correcciones de supergravedad a $\left(\frac{q-2}{2}\right)_l$ obtenidas con regularización dimensional, reducción dimensional, renormalización diferencial “parcialmente restringida” y RDR.	80



FRANK & ERNEST BOB THAVES

