

OPORTUNIDADES QUE EMERGEN DE LA RELACIÓN ENTRE PERSPECTIVAS: ANÁLISIS DEL CONOCIMIENTO Y/O COMPETENCIA DOCENTE

Opportunities that emerge from the relationship between perspectives: analysis of knowledge and/or teaching competence

Badillo, E.^a y Fernández, C.^b

^aUniversitat Autònoma de Barcelona, ^bUniversidad de Alicante

Resumen

La evolución de la investigación en Educación Matemática en las dos últimas décadas muestra una riqueza de perspectivas teóricas. En particular, en la investigación sobre conocimiento y desarrollo profesional del profesor de matemáticas, las diferentes perspectivas teóricas proporcionan herramientas conceptuales, teóricas y metodológicas para abordar la complejidad del análisis del conocimiento, creencias, competencias e identidad profesional del profesor. Esta comunicación analiza nexos y diferencias entre las tres perspectivas teóricas que han abordado el análisis de la narrativa de Rosa (i) Conocimiento Especializado del Profesor (MTSK), (ii) Mirada Profesional y (iii) Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas (CCDM). Finalmente se discuten las oportunidades que emergen de la relación entre éstas.

Palabras clave: *nexos y diferencias, perspectivas teorías, oportunidades, profesor de matemáticas.*

Abstract

The evolution of research in Mathematics Education in the last two decades shows a wealth of theoretical perspectives. Particularly, in the field of research on mathematics teacher's knowledge and professional development, the theoretical perspectives provide conceptual, theoretical and methodological tools to address the complexity of the analysis of knowledge, beliefs, competencies and professional identity of the teacher. This communication is focused on analyzing links and differences between the three theoretical perspectives that have analyzed Rosa's narrative (i) Specialized Teacher Knowledge (MTSK), (ii) Professional Noticing and (iii) Didactic-Mathematical Knowledge and Competencies (CCDM). Finally, opportunities that emerge from the relationship between these theoretical perspectives are discussed.

Keywords: *links and differences, theoretical perspectives, opportunities, mathematics teacher.*

INTRODUCCIÓN

Las investigaciones en el campo de la Educación Matemática en las últimas décadas han pasado de centrarse en el estudio de la complejidad del alumnado y la epistemología de los tópicos matemáticos al estudio del profesorado, otorgándole un papel protagónico y determinante en la relación didáctica (Artigue, 2013). Las investigaciones centradas en el profesor, inicialmente se interesaron en el análisis de sus creencias, concepciones, conocimientos y práctica profesional, caracterizándolos para comprender sus interrelaciones, cómo se construyen y cómo se desarrollan (Even y Ball, 2009).

Recientemente, la investigación en el análisis del conocimiento y las competencias profesionales del profesor de matemáticas en formación, ha aumentado de forma considerable. Esto puede estar influenciado por la madurez y el avance de los resultados de las investigaciones sobre el profesor, con las aportaciones de las diferentes perspectivas teóricas, que muestran que la tarea de enseñar

matemáticas requiere del desarrollo de conocimientos y competencias profesionales específicas para el profesor de matemáticas (Ball, Lubienski y Mewborn, 2001; Ball, Thames y Phelps, 2008; Carrillo y Climent, 2011; Fernández, Sánchez-Matamoros, Valls y Callejo, 2018; Godino, Giacomone, Font y Pino-Fan, 2018; Jacobs, Lamb y Philipp, 2010; Llinares, 2012; Mason, 2002; Shulman, 1986; van Es y Sherin, 2008).

Por otra parte, se constata el incremento de espacios de discusión sobre la comparación y articulación de marcos teóricos (Drijvers, Godino, Font y Trouche, 2013; Font, Trigueros, Badillo y Rubio, 2016; Haspekian, Bikner-Ahsbahs y Artigue, 2013; Radford, 2008; Scheiner, Montes, Godino, Carrillo y Pino-Fan, 2017; Weber, Walkington y McGalliard, 2015). Concretamente, uno de los grupos de trabajo del CERME ha dedicado sesiones a reflexionar sobre “Diferentes aproximaciones teóricas y perspectivas de investigación en Educación Matemática” (Bikner-Ahsbahs y Prediger, 2014; Prediger, Arzarello, Bosch y Lenfant, 2008). Bikner-Ahsbahs y Prediger (2010) consideran que la articulación de teorías para dar respuesta a problemas de investigación complejos, es un indicador de avance y madurez del campo de investigación en Educación Matemática. Estos autores resaltan que la diversidad teórica es una fuente de enriquecimiento y un gran desafío para la Educación Matemática, al tiempo que ven la articulación entre teorías como un punto de partida para avanzar en el desarrollo de los cuerpos teóricos de nuestra disciplina científica.

En esta comunicación nos centraremos en analizar relaciones entre tres perspectivas teóricas sobre el conocimiento y aprendizaje del profesor de matemáticas, con amplias aportaciones a nivel nacional e internacional: Competencia docente mirar profesionalmente (*Professional noticing*), Conocimiento Especializado del Profesor (*MTSK*) y Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas (*CCDM*).

NETWORKING ENTRE TEORÍAS: UNA OPORTUNIDAD PARA AVANZAR EN LA INVESTIGACIÓN CENTRADA EN EL PROFESOR

Una condición necesaria para promover una red entre las teorías es proporcionar nuevos espacios conceptuales donde las teorías y sus conexiones se convierten en objetos de discurso e investigación (Radford, 2008). Estos espacios de diálogo entre teorías permiten la objetivación y referencia a nuevas entidades conceptuales que se conectan, a través del “combinar” o “sintetizar” constructos teóricos o herramientas analíticas, para dar cuenta con mayor rigor y profundidad de un fenómeno didáctico o de un problema de investigación (Prediger, Bikner-Ahsbahs y Arzarello, 2008). En el caso de la investigación sobre el aprendizaje de los estudiantes para maestro, el análisis de una narrativa escrita por una futura maestra en la fase de observación durante el periodo de prácticas de enseñanza desde tres perspectivas teóricas, permite generar puntos de encuentros, de divergencia y de complementariedad que pueden enriquecer la línea de investigación sobre la caracterización del conocimiento y competencias profesionales del profesor, y sobre cómo se desarrollan en entornos de formación inicial y permanente.

Raford (2008) señala que el papel del lenguaje y, de manera particular, del metalenguaje al conectar dos o más teorías no es el de borrarlas a través de la asimilación uniforme. Por el contrario, el *networking* entre teoría es una estrategia que debe asegurar posibles formas de conexiones de los diferentes elementos o constructos heterogéneos de cada perspectiva para enriquecer el análisis del problema abordado. En este sentido, Prediger et al. (2008) resaltan dos características de las estrategias de red a la hora de vincular marcos teóricos. Por un lado, consideran que es necesario respetar el pluralismo y/o modularidad de enfoques teóricos autónomos; y, por otro lado, resalta la necesidad de reducir la multiplicidad desconectada de enfoques teóricos en la disciplina científica. Como una forma de comenzar la interconexión de teorías proponen tres estrategias, dependiendo del objetivo: (1) comprender cada teoría y hacer que las propias teorías sean comprensibles; (2) comparar y contrastar, que implica caracterizar similitudes y diferencias entre ellas; y, (3) hacer una

coordinación local de los elementos de diferentes teorías de una manera más o menos armoniosa para investigar un cierto problema de investigación.

Somos conscientes de que incluso la conexión más simple entre teorías requiere diálogo. Sin embargo, un diálogo entre teorías es mucho más complejo de lo que puede parecer a primera vista. Raford (2008) afirma que el diálogo entre teorías requiere de un esfuerzo para ser entendidas y para entender lo que dice la otra teoría. Al menos en principio, la estrategia de *networking* de “comparación” y “contraste” entre teorías es siempre posible, puesto que es factible y accesible buscar similitudes y/o diferencias. Sin embargo, se considera que son más complicadas las estrategias de “coordinación entre teorías” en la búsqueda de la “coordinación local” de los elementos conceptuales o para “sintetizar teorías” (Prediger et al., 2008).

Teniendo en cuenta las reflexiones anteriores, en esta comunicación proponemos un espacio de diálogo entre tres teorías usadas para analizar un mismo conjunto de datos: Competencia docente mirar profesionalmente (*Professional noticing*), Conocimiento especializado del profesor (MTSK) y Conocimientos y competencias didáctico-matemáticas (CCDM). Para ello, partimos del análisis de las herramientas que ofrecen estas tres perspectivas teóricas, intentando explicitar nexos y divergencias que emergen del uso de las herramientas en el análisis de una narrativa escrita por una futura maestra cuando describe e interpreta una situación de aula (narrativa de Rosa). A continuación, en primer lugar, nos centraremos en las relaciones entre los constructos y herramientas del MTSK y la Competencia Mirar Profesionalmente. Posteriormente, abordaremos las relaciones entre el MTSK y el CCDM. Finalmente, se relacionan los constructos y herramientas del CCDM y la Competencia Mirar Profesionalmente.

CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR (MTSK) Y COMPETENCIA MIRAR PROFESIONALMENTE

Sherin (2007) describe “profesional visión” (mirar profesionalmente) como dos principales procesos: atender selectivamente y razonar basándose en el conocimiento (*knowledge-based reasoning*). El primer proceso requiere la habilidad de atender a los aspectos relevantes de una situación de enseñanza-aprendizaje. El segundo proceso requiere razonar sobre los aspectos identificados para interpretarlos. En este sentido, la competencia mirar profesionalmente implica el uso del conocimiento de matemáticas y de didáctica de la matemática para determinar lo que es relevante de una situación de enseñanza-aprendizaje e interpretar la situación estableciendo relaciones con ideas teóricas (conocimiento teórico). Por tanto, la competencia mirar profesionalmente implica que los profesores/maestros usen su conocimiento (Stürmer, Könings y Seidel, 2013) y que conecten el conocimiento y la práctica profesional (Seidel, Stürmer, Prenzel, Jahn y Schäfer, 2017).

En particular, la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes, implica tres destrezas: atender a las estrategias de los estudiantes; interpretar su comprensión; y, decidir cómo responder teniendo en cuenta la comprensión de los estudiantes (Jacobs et al., 2010). Para atender a las estrategias de los estudiantes es necesario identificar detalles matemáticos importantes en las respuestas de los estudiantes. Interpretar la comprensión requiere coordinar lo que se ha identificado (atender) con lo que se conoce sobre la comprensión matemática de un concepto particular (es decir, establecer relaciones con ideas y principios teóricos). Por tanto, se requiere de un conocimiento que permita explicar los procedimientos usados por los estudiantes diferenciando e interpretando su corrección, explicar el origen de los errores y distinguir diferentes niveles de comprensión (conocimiento sobre cómo un concepto matemático se desarrolla a lo largo del tiempo y sus conexiones con otros conceptos matemáticos). Desde la perspectiva del MTSK, este conocimiento estaría relacionado con el *Conocimiento de los temas* (KoT), *Conocimiento de la Estructura de las Matemáticas* (KSM), *Conocimiento de la Práctica Matemática* (KPM) y *Conocimiento de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas* (KFLM).

Finalmente, decidir cómo responder teniendo en cuenta la comprensión de los estudiantes implica usar conocimiento sobre qué aspectos del concepto son más fáciles o más difíciles para los estudiantes, sobre los modelos de progresión del aprendizaje (conocimiento sobre cómo un concepto matemático se desarrolla a lo largo del tiempo) y sobre materiales y recursos. Desde la perspectiva del MTSK, este conocimiento estaría relacionado con el *Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas* (KMT), el *Conocimiento de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas* (KFLM) y el *Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas* (KMLS). Cabe mencionar que, aunque se han relacionado algunos subdominios de conocimiento del MTSK con las diferentes destrezas, no significa que el resto de subdominios no estén implicados en las diferentes destrezas de atender, interpretar y decidir.

Por tanto, la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes implica la habilidad de usar el conocimiento matemático y el conocimiento didáctico del contenido (MTSK) para atender, interpretar y decidir; por lo que las perspectivas teóricas MTSK y Mirada Profesional muestran relaciones (Figura 1). En el estudio de Thomas, Jong, Fisher y Schack (2017) se muestran relaciones entre MKT (Ball et al., 2008) y la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes. Estos autores concluyen que hay muchas superposiciones entre la construcción de estos marcos teóricos ya que para hacer interpretaciones del pensamiento matemático de los estudiantes se requiere de un conocimiento matemático especializado -concretamente implica una fuerte conexión con el conocimiento de contenido pedagógico que es uno de los dominios del marco MKT (por ejemplo, *Conocimiento del contenido y estudiantes*; *Conocimiento de contenido y enseñanza*). Sin embargo, afirman que tal conocimiento matemático especializado es necesario, pero, en última instancia, no es suficiente para desarrollar una mirada profesional eficazmente, ya que la mirada profesional no implica solo tener este conocimiento sino usarlo en situaciones prácticas como interpretar y decidir.

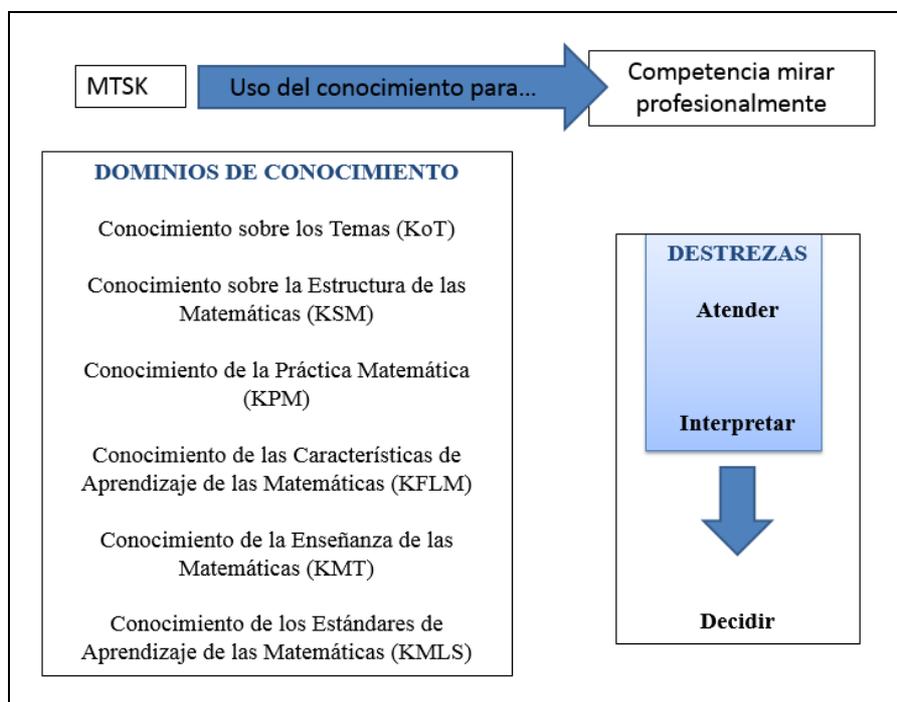


Figura 1. MTSK y la Competencia Mirar Profesionalmente el Pensamiento Matemático de los Estudiantes

Mostramos a continuación ejemplos de estas relaciones utilizando el análisis realizado a la narrativa de Rosa desde ambas perspectivas teóricas (Contreras, Carrillo y Climent, 2018; Llinares, 2018).

En el fragmento de narrativa de la Figura 2, se observa que Rosa tiene el conocimiento de algunas dificultades de los alumnos en el uso de la secuencia numérica (nombres de algunos números) o en

contar los números en lugar del número de saltos. Esto correspondería a conocimiento de fortalezas y dificultades en el aprendizaje del contenido que es parte del *Conocimiento de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas* (MTSK). Además, las dificultades de la secuencia numérica identificadas por Rosa se corresponden con los niveles de dominio de la secuencia numérica, lo que puede indicar que tiene el conocimiento de esta teoría de aprendizaje. Esto correspondería con el conocimiento sobre Formas de Aprendizaje que es parte también del *Conocimiento de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas* (KFLM). Desde la mirada profesional, Rosa identifica respuestas de estudiantes que muestran dificultades y las interpreta identificando que “no tienen asentado el conteo (confusión de los números)” y “no son capaces de llevar la pista para determinar los números contados de a hasta b ”. Desde esta perspectiva, Rosa usa su conocimiento sobre el aprendizaje del conteo (*Conocimiento de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas* (KFLM)) para poder identificar e interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes.

<p>Fragmento de la narrativa de Rosa. “La actividad se divide en dos partes. En la primera de ellas, la profesora pregunta a los alumnos cuánto le falta a un número para llegar a otro, para lo cual, los alumnos, haciendo uso de su ficha, han de poner el dedo índice sobre el primer número mencionado y contar el número de "saltos" que dan hasta llegar al otro número. Por ejemplo, ¿Cuánto le falta al 5 para llegar al 9? Los niños ponen entonces su dedo sobre el número 5 y van contando saltos hasta llegar al 9. Algunos alumnos muestran dificultades en esta parte de la actividad, bien por no reconocer los números que dice la maestra (por ejemplo, una alumna confunde el 13 con el 30), no tener asentado el conteo o realizar el procedimiento contando, en lugar de los saltos entre los dos números dictados por la maestra, los números que hay entre estos dos (ej. del 5 al 9 hay tres porque entre estos dos números hay uno (6), dos (7) y tres (8)), o bien, comenzar a contar desde el primer número incluyéndolo (ej. del 5 al 9 hay cinco porque cuento uno (5), dos (6), tres (7), cuatro (8) y cinco (9))”</p>	
MTSK	Mirada profesional
<p>“La estudiante para maestro muestra conocer algunas dificultades de los alumnos con el procedimiento de uso de la tabla para resolver cuánto falta: en el uso de la secuencia numérica (con los nombres de algunos números o con el orden de estos) o en contar los números en lugar del número de saltos (incluyendo primer y último número o ninguno de los dos). Por otro lado, las dificultades asociadas al aprendizaje de la secuencia numérica se corresponden con los niveles de dominio de la secuencia numérica, lo que identificamos como un indicio de que pudiera conocer esta referencia como teoría de aprendizaje” (Contreras et al., 2018)</p>	<p>“Rosa describe algunas respuestas de los estudiantes para mostrar las dificultades que estos afrontaban con la secuencia numérica y las estrategias de conteo. En particular sobre el reconocimiento de los números y sobre el procedimiento de llevar la “pista” para determinar los números contados de a hasta b” (Llinares, 2018)</p>

Figura 2. Ejemplo de uso del Conocimiento de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas (dominio KFLM del MTSK) para interpretar el pensamiento de los estudiantes (destreza interpretar-noticing)

En el fragmento de narrativa de la Figura 3, se observa que Rosa tiene el conocimiento sobre una secuenciación de contenidos en Educación Primaria (primero las restas sin llevar y después las restas con llevadas). Este conocimiento es parte del *Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas* (dominio KMLS del MTSK). Desde la mirada profesional, Rosa, teniendo en cuenta que los alumnos no habían tenido dificultades con la actividad propuesta, propone continuar con las restas con llevadas. Aunque no propone una actividad específica que ayude a los estudiantes a seguir progresando en su comprensión, define un nuevo objetivo de aprendizaje determinado por la organización del currículum. En esta ocasión, Rosa está usando el conocimiento sobre la organización del currículum para decidir cómo continuar.

Fragmento de la narrativa de Rosa. “Una vez los niños hayan asentado el procedimiento para realizar operaciones de sustracción en las que las cifras del minuendo sean mayores que las del sustraendo (restas sin llevada), podría utilizarse el mismo procedimiento para realizar restas con llevada”.	
MTSK	Mirada profesional
“Rosa parece considerar (indicio) que cuando se introduce la resta, primero deben trabajarse restas sin llevada para pasar después a las restas con llevada. Lo asociamos a conocimiento sobre la secuenciación de contenidos en Educación Primaria” (Contreras et al., 2018)	“Con relación a los niños que Rosa asume que no tienen dificultades, el foco de atención sobre lo que hacer a continuación adopta una perspectiva curricular. Así el foco se sitúa en la realización de restas llevando y en el mecanismo del algoritmo [...] Aunque esta decisión de acción, no es una tarea específica se apoya en la identificación de un nuevo objetivo de aprendizaje determinado por la organización del currículum” (Llinares, 2018)

Figura 3. Ejemplo de uso del Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (dominio KMLS del MTSK) para decidir cómo continuar (destreza decidir-noticing)

CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR (MTSK) Y CONOCIMIENTOS Y COMPETENCIAS DIDÁCTICO-MATEMÁTICAS (CCDM)

El Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticas (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007), ha desarrollado una perspectiva teórica de Conocimientos y Competencias Didáctico Matemáticas (CCDM) para analizar los procesos de reflexión del profesor sobre su práctica (Godino, Giacomone, Font y Pino-Fan, 2018). Esta perspectiva permite el encaje de la noción de conocimiento con la noción de competencia del profesor. Sin embargo, para buscar nexos con la perspectiva del MTSK nos centraremos en la parte de los conocimientos didáctico-matemáticos (CDM), que según esta perspectiva pueden organizarse de acuerdo a las dimensiones *matemática*, *didáctica* y *meta didáctico-matemática*. La dimensión *matemática* hace referencia a los conocimientos que necesita construir un profesor sobre las matemáticas escolares a enseñar (Figura 4). Es decir, al conocimiento que permite a los profesores resolver tareas matemáticas propias del nivel educativo en el que impartirán clase (conocimiento común-CMC) y vincular los objetos matemáticos de dicho nivel educativo con objetos matemáticos que se estudiarán en niveles posteriores (conocimiento ampliado). La dimensión *didáctica* de los conocimientos necesarios para comprender los procesos de enseñanza y aprendizaje de matemáticas, requieren un conocimiento profundo de las matemáticas escolares y su interacción con aspectos cognitivos y afectivos de los estudiantes, recursos y medios, interacciones en el aula y aspectos ecológicos. Así proponen seis subcategorías para caracterizar el conocimiento *didáctico-matemático* que usa el maestro/profesor al describir y explicar las prácticas docentes: (1) *Faceta epistémica* (CFE), relacionada con el conocimiento especializado de la dimensión *matemática* (uso de diversas representaciones, argumentos, estrategias de resolución de problemas y significados parciales de un objeto matemático); (2) *Faceta cognitiva* (CFC), relacionada con el conocimiento sobre los aspectos cognitivos de los estudiantes (dificultades, errores, conflictos, aprendizaje, etc.); (3) *Faceta afectiva* (CFA), se refiere a los conocimientos sobre los aspectos afectivos, emocionales y actitudinales de los estudiantes; (4) *Faceta interaccional*, relacionada con el conocimiento sobre las interacciones que se suscitan en el aula (profesor-estudiantes, estudiante-estudiante, estudiante-recursos, etc.); (5) *Faceta mediacional* (CFM), relacionada con el conocimiento sobre los recursos y medios que pueden potenciar los aprendizajes de los estudiantes, y sobre los tiempos designados para la enseñanza; y, (6) *Faceta ecológica* (CFEC), relacionada con el conocimiento sobre los aspectos curriculares, contextuales, sociales, políticos, económicos..., que influyen en la gestión de los aprendizajes de los estudiantes. Finalmente, la dimensión *meta didáctico-matemática* se focaliza en los conocimientos que debe tener un profesor para poder sistematizar la reflexión sobre su práctica y así emitir juicios valorativos sobre su propia práctica o sobre la práctica de otros.

Por su parte, la perspectiva teórica del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK) propone herramientas y constructos teóricos para caracterizar el conocimiento que un

maestro/profesor pone en juego en el diseño, gestión, evaluación y análisis de la práctica. El MTSK asume que el conocimiento de los profesores de matemáticas es especializado en su globalidad y no se puede separar del contexto del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas en el que emerge (Scheiner, Montes, Godino, Carrillo y Pino-Fan, 2017). El grado de especialización del conocimiento afecta a todos los subdominios y las relaciones entre ellos. Así, definen dos dominios del conocimiento especializado: (1) Conocimiento profundo de la matemática elemental (KM) que incluye *Conocimiento de los Temas (KoT)*, *Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM)* y *Conocimiento de la Estructura de las Matemáticas (KSM)*; y, (2) conocimiento pedagógico del contenido (PCK), entendido como una yuxtaposición de conocimiento pedagógico y conocimiento del contenido matemático, incluye *Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT)*, *Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM)* y *Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS)*.

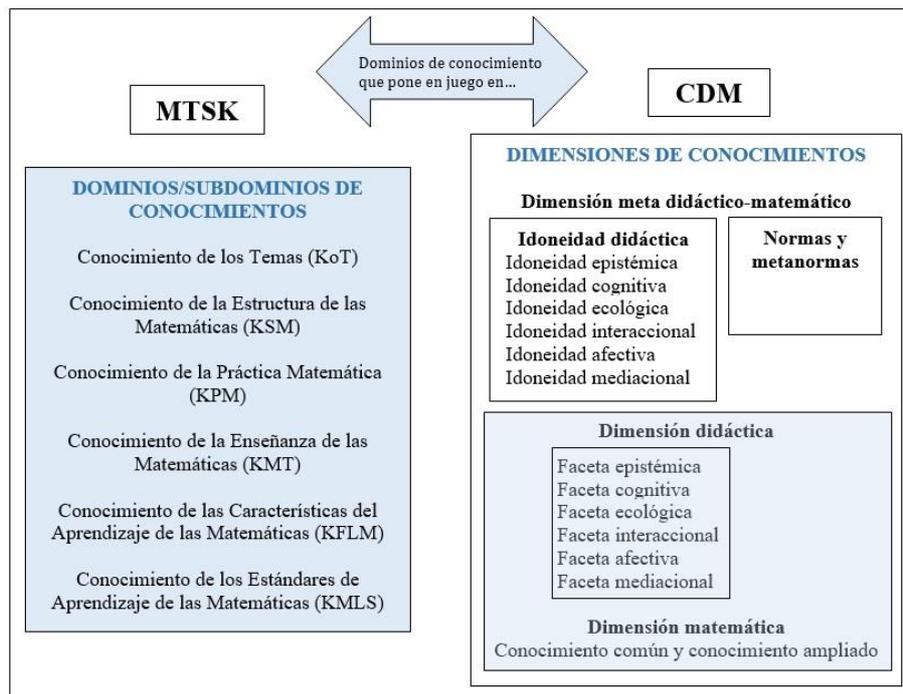


Figura 4. Dominios y subdominios del conocimiento del MTSK y el CDM para describir y explicar el conocimiento que usa Rosa en la Narrativa

En el fragmento de narrativa de la Figura 5, desde del CDM, se considera que Rosa tiene un *Conocimiento Común* (CMC) relacionado con la definición de resta que le ayuda a asociar los objetivos de aprendizaje con la realización de un conjunto de prácticas (implícitamente *conocimiento ampliado*). Igualmente considera que evidencia un conocimiento *didáctico-matemático* que le permite identificar aspectos epistémicos en las prácticas; por tanto, muestra evidencias de la *faceta epistémica* (CFE) que relaciona con el conjunto de prácticas, centradas en la aplicación correcta de los procedimientos de conteo, la resta sin llevadas y el uso de las representaciones simbólica de los números hasta el 100. También consideran que Rosa muestra aspectos de la *faceta cognitiva* (CFC) cuando hace referencia explícita al aprendizaje de los alumnos en relación a la resta; y, de la *faceta ecológica* (CFEC) cuando habla de la secuenciación de los contenidos a partir de su conocimiento sobre el currículo y la progresión de aprendizaje de los contenidos.

Desde el MTSK, se considera que Rosa pone en juego su conocimiento sobre *procedimientos* relacionados con el *Conocimiento de los Temas* (KoT). Por una parte, se señala que Rosa evidencia conocimiento de *procedimientos* cuando identifica la estrategia del conteo para calcular restas sin

llevar y prepararles para el de la resta llevando, al tiempo que resaltan que hay indicios de que propone como adecuado este *procedimiento* también para restas con llevada. Por otro lado, consideran que la definición que hace Rosa del segundo objetivo es una oportunidad para seguir indagando en su conocimiento sobre *procedimientos*, ya que permitiría profundizar en si realmente asocia el cálculo de la diferencia entre dos números del menor al mayor a restas sin llevar y sobre el tipo de relaciones que se establece entre la llevada y la resta (Contreras et al, 2018). En relación con el conocimiento de Rosa de los *fundamentos*, hay indicios tanto de la influencia del algoritmo convencional de la resta, cuando identifica el valor posicional de las cifras y números de la resta y cuando reconoce la posicionalidad como base de dicho algoritmo; como de su conocimiento sobre el sistema de numeración decimal. Este tipo de *Conocimiento de los Temas* del MTSK, se puede relacionar con las componentes del conocimiento matemático del CDM (conocimiento común y conocimiento ampliado). Sin embargo, una diferencia en este dominio del conocimiento del profesor es que el marco del MTSK no distingue entre el conocimiento común y el ampliado, puesto que consideran que la naturaleza del conocimiento del profesor es especializado al referirse de manera directa a la matemática como objeto de enseñanza y aprendizaje (Scheiner, Montes, Godino, Carrillo, y Pino-Fan, 2017). En cuanto a la caracterización del conocimiento didáctico del contenido, desde el MTSK consideran que hay indicios de su *Conocimiento de las Características del aprendizaje de Matemática (KFML)*, más concretamente de las *Expectativas de aprendizaje* y de la *Secuenciación de temas*, cuando Rosa parece reconocer la posicionalidad como uno de los *fundamentos* del algoritmo convencional de la resta, lo que llevaría a asociar el procedimiento de la tabla para la resolución de situaciones de cuánto falta a la posicionalidad. Igualmente, evidencia conocimiento de los *Estándares de Aprendizaje de las matemáticas (KMLS)* cuando relaciona la definición de las expectativas del aprendizaje con la secuenciación de los temas anteriores y posteriores. En el análisis del fragmento (Contreras et al., 2018), consideran que la naturaleza de este conocimiento especializado es propio de la maestra en cuanto que emerge en el contexto de análisis de una situación de enseñanza y aprendizaje de matemática. Estos subdominios de conocimiento del dominio didáctico del contenido del MTSK que usa Rosa en la Narrativa, se podrían relacionar con algunas de las componentes de la dimensión *didáctica* del CDM. Concretamente, en el análisis realizado por Font et al. (2018), se usan explícitamente algunas herramientas de la faceta *epistémica*, de la faceta *cognitiva* y de la faceta *ecológica*.

Fragmento de la narrativa de Rosa. ¿Cuál/es son el objetivo/s de aprendizaje pretendidos en la actividad (qué es lo que se pretende conseguir con la realización de esta tarea-actividad)? [• Asimilar el procedimiento de conteo para realizar restas sin llevar y prepararles para el de la resta llevando. • Resolver adecuadamente operaciones de sustracción en las que las cifras del minuendo sean mayores que las del sustraendo (restas sin llevar). • Utilizar la estrategia del conteo. • Reconocer los números hasta el 100]”.	
MTSK	CDM
“Rosa incluye entre los objetivos y contenidos de la sesión: “Reconocer los números hasta el 100” [O3 35], aprender la “serie numérica” [C5 42] y la “Identificación del valor posicional de las cifras y números de la resta” [C6 43]. Aquí observamos de nuevo, además de la influencia del algoritmo convencional de la resta (en [43]), cómo influye su conocimiento del sistema de numeración decimal en su comprensión de la situación. Rosa parece reconocer (indicio) la posicionalidad como uno de los fundamentos del algoritmo convencional de la resta, lo que llevaría	“Rosa responde a la pregunta 2 (sobre objetivos de aprendizaje) considerando que el resultado del aprendizaje del alumno consiste en una lista de prácticas (que se supone el alumno podría realizar en el futuro) (líneas 29-34 de la narrativa). La segunda y la tercera de sus respuestas a esta consigna son prácticas que consisten en aplicar correctamente los procedimientos de conteo y de resta sin llevadas. La última se refiere al uso correcto de las representaciones simbólicas de los números hasta el 100 y la primera puede considerarse en cierta manera equivalente a la tercera. De su respuesta a la consigna 2 se infiere que Rosa tiene un conocimiento matemático común (CMC) que le permite realizar las prácticas que comenta (aunque esta inferencia hay que matizarla a partir de sus respuestas posteriores y ponerla en cuestión, por ejemplo, en la respuesta a la consigna 3 tiene una confusión con la definición de resta).

<p>a asociar el procedimiento de la tabla para la resolución de situaciones de cuánto falta a la posicionalidad. En lo anterior, identificamos también que Rosa parece conocer objetivos de aprendizaje propios del primer ciclo de Primaria ligados a la numeración. Más adelante encontramos otro indicio de que identifica la posicionalidad como base del algoritmo de la resta.” (Contreras et al., 2018)</p>	<p>Por otra parte, se infiere que Rosa tiene un conocimiento didáctico-matemático que le permite identificar aspectos epistémicos en la actividad realizada por el alumno (en este caso prácticas) (CFE). También se puede considerar que Rosa muestra conocimientos correspondientes a la faceta cognitiva del modelo CDM (CFC) ya que la consigna 2 se refiere a los aprendizajes de los alumnos pretendidos; si nos fijamos en la primera de sus respuestas vemos que está manejando la idea de conocimiento previo; y también a la faceta ecológica (CFEC) del modelo CDM (conocimiento de los contenidos del currículo y su programación temporal)” (Font et al., 2018)</p>
--	--

Figura 5. Ejemplo de la caracterización del Conocimiento que Rosa manifiesta en el fragmento de la Narrativa desde el MTSK y el CDM

COMPETENCIA MIRAR PROFESIONALMENTE Y CONOCIMIENTOS Y COMPETENCIAS DIDÁCTICO-MATEMÁTICAS (CCDM)

Tal y como expone Font et al. (2018) en su trabajo, las herramientas teóricas del modelo CCDM permiten responder a la pregunta: ¿qué conocimientos y competencias docentes ponen en juego los profesores cuando describen, explican y valoran la práctica docente? Este modelo considera dos competencias clave del profesor, la competencia matemática y la competencia de análisis e intervención didáctica. Con relación al conocimiento, este modelo tiene en cuenta tres grandes dimensiones: (i) matemática que refiere al conocimiento que permite a los profesor resolver problemas o tareas matemáticas (común) y vincular los objetos matemáticos de dicho nivel educativos con objetos matemáticos que se estudiarán en niveles posteriores (ampliado), (ii) didáctica del CDM que se desglosa en seis categorías: *faceta epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica*, y (iii) metadidáctica que se refiere al conocimiento necesario para reflexionar sobre la propia práctica, valorar el proceso de instrucción y realizar un rediseño. El núcleo fundamental de la competencia de análisis e intervención didáctica es diseñar, aplicar y valorar secuencias de aprendizaje propias y de otros mediante técnicas de análisis didácticos y criterios de calidad, y está formada por varias subcompetencias: (i) subcompetencia en el análisis de la actividad matemática, (ii) subcompetencia de análisis y gestión de configuraciones didácticas y su efecto sobre el aprendizaje (articulación de las acciones del profesor y los alumnos en torno a una tarea y un contenido determinado), (iii) subcompetencia de análisis normativo y (iv) subcompetencia de valoración de la idoneidad didáctica de procesos de instrucción que tiene seis facetas implicadas: idoneidad epistémica, idoneidad cognitiva, idoneidad interaccional, idoneidad mediacional, idoneidad afectiva e idoneidad ecológica. “La idoneidad didáctica de un proceso de instrucción se define como el grado en que dicho proceso reúne ciertas características que permiten calificarlo como óptimo o adecuado para conseguir la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes (aprendizaje) y los significados institucionales pretendidos o implementados (enseñanza) teniendo en cuenta la circunstancias y recursos disponibles (entorno)” (Font et al., 2018). Un alto grado de idoneidad didáctica implica articular de forma coherente y sistémica los seis criterios de idoneidad comentados anteriormente.

Desde la mirada profesional, se responde a la pregunta cómo usan el conocimiento (matemático y de didáctica de la matemática) los estudiantes para maestro/profesor en tareas profesionales como la de interpretar la comprensión de los estudiantes y la de proponer actividades que ayuden al estudiante en su progreso conceptual. Por tanto, desde esta perspectiva “no se responde al qué conocimiento o qué competencias tienen los maestros”, sino responde “al cómo usan el conocimiento para hacer una tarea profesional”. Esta perspectiva teórica (competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes) está centrada en desarrollar en los estudiantes para profesor las destrezas de identificar detalles matemáticos importantes en las respuestas de los estudiantes e interpretar la comprensión para proponer futuras actividades que

ayuden al estudiante a seguir progresando en su comprensión. Analizando los constructos de ambas perspectivas teóricas, parece que la competencia mirar profesionalmente las situaciones de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas tiene cierta similitud con algunas de las subcompetencias de análisis e intervención didáctica que trata de “valorar” (reflexionar sobre) la propia práctica o la de otros: subcompetencia en el análisis de la actividad matemática, subcompetencia de análisis y gestión de configuraciones didácticas y su efecto sobre el aprendizaje y subcompetencia de valoración de la idoneidad didáctica de los procesos de instrucción (en particular, *facetas epistémica y cognitiva*) (Figura 6). Así, para poder atender a las estrategias de los estudiantes, los estudiantes para maestro necesitan analizar los elementos matemáticos implicados en la actividad y los que están usando los estudiantes (subcompetencia en el análisis de la actividad matemática). La destreza de interpretar se centra “en el aprendizaje del estudiante”, es decir, qué comprensión tiene el estudiante sobre el concepto matemático (subcompetencia de análisis y gestión de configuraciones didácticas y su efecto sobre el aprendizaje). La destreza decidir implica proponer una decisión centrada en el progreso conceptual del estudiante (subcompetencia de valoración de la idoneidad didáctica del proceso de instrucción– *facetas epistémica y cognitiva*; aunque también podrían estar implicadas la *faceta ecológica* –aspectos del currículo y *mediacional* –recursos).

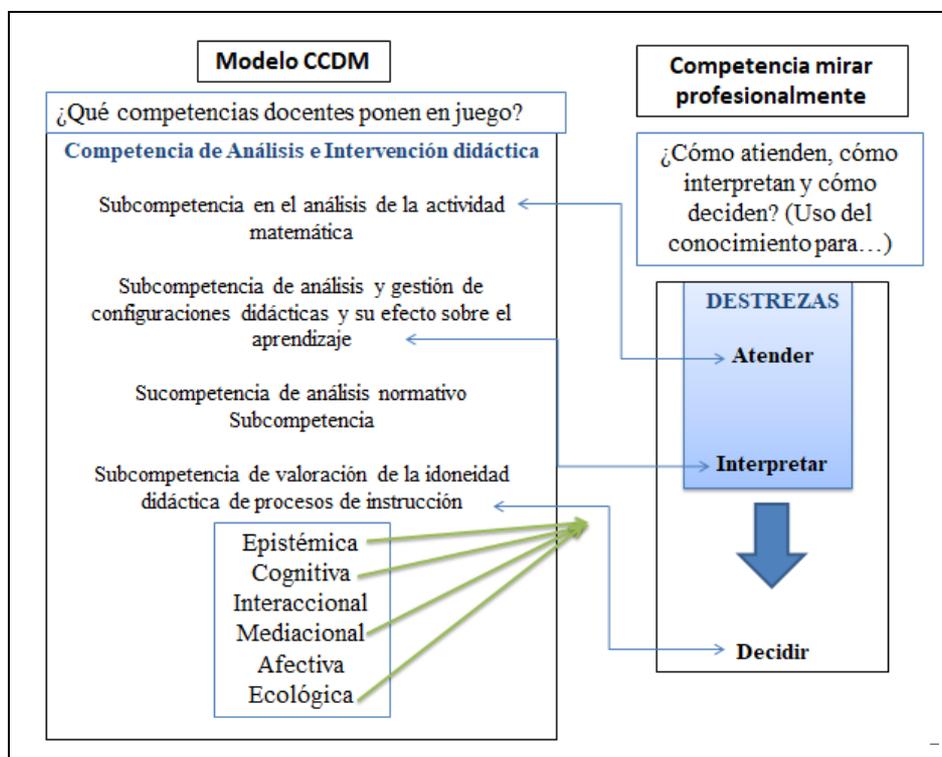


Figura 6. Relaciones entre la perspectiva teórica mirar profesionalmente y el CCDM

En el fragmento de narrativa de la Figura 7, desde el modelo CCDM se infiere que Rosa tiene un nivel 1 de la subcompetencia de valoración de la idoneidad didáctica ya que en su propuesta mejora la *idoneidad cognitiva* (conseguir más aprendizaje trabajando los conocimientos previos), la *idoneidad interaccional* (diseña tareas más simples) y la *idoneidad de recursos* (incorpora el uso de regletas). Desde esta perspectiva, para estar en nivel 2 debería haber realizado un análisis detallado de aspectos siguiendo un modelo de análisis. Desde la mirada profesional, se ha inferido que aunque Rosa propone el uso de material concreto (regletas), no considera diferentes fases del modelo de progresión de la comprensión de los niños con relación a los procedimientos de contar para decidir cómo continuar (faceta cognitiva desde el CCDM). Es decir, no usa conocimiento sobre cómo los niños aprenden los procesos de contar ni cómo el material concreto puede apoyar este progreso conceptual para decidir cómo continuar.

<p>Fragmento de la narrativa de Rosa. “En primer lugar, para aquellos alumnos que presentan dificultades en el reconocimiento y el recitado de los números hasta el 100, considero que lo primordial sería, en primer lugar, trabajar dichos aspectos. Para ello, llevaría a cabo la tarea planteada por la maestra primero con números hasta el 10, a continuación, hasta el 20, luego hasta el 30...</p> <p>Por otra parte, para aquellos que aun siendo capaces de reconocer los números hasta el 100 y recitar de manera ordenada la serie numérica no han podido llevar a cabo la actividad de manera adecuada, considero que podrían utilizarse materiales manipulativos, como, por ejemplo, las regletas. Empezaría primero por números de una sola cifra. Por ejemplo, para resolver $5-3$ o $5- \underline{\quad} = 3$, en primer lugar, cogería la regleta del cinco. Seguidamente, con regletas de uno, primero les haría hacer que comprueben que el 5 está formado por cinco unidades. Luego, comprobarían lo mismo con la regleta del dos. A continuación, colocarían la regleta del dos sobre la del cinco y, con regletas de uno, contarían cuántas necesitan para llegar a cinco, o bien, buscarían qué regleta necesitan para llegar a 5. Luego, lo haría con números de una decena, por ejemplo, $18-9$ o $18- \underline{\quad} =9$. Para ello, utilizaría una regleta de 10 y una de 8, colocadas una al lado de la otra formando el número 18. Después, pondrían la de 9 encima y buscarían qué regleta necesitan para tener 18”.</p>	
Mirada profesional	CCDM
<p>“Con relación a las decisiones para los niños que tienen dificultades, el foco se sitúa en el reconocimiento de los números y en la repetición de las actividades centradas en destrezas para determinar cuántos números hay <i>de a hasta b</i>. En este momento el uso de recursos (las regletas) parece que están dirigidas a la comprensión de la resta (y posiblemente la relación aditivas y sustractivas entre los números) y no tanto sobre el desarrollo de los procesos de contar.</p> <p>La propuesta de actividades de Rosa para los niños que tenían dificultades con los procedimientos de contar no considera diferentes fases del modelo de progresión de la comprensión de los niños. Aunque Rosa propone el uso de concretos para la resolución de operaciones, no continúa considerando otras fases en el desarrollo de los diferentes procedimientos de contar – hacia adelante, hacia atrás, ...-, contar desde el mayor, recordar hechos numéricos y modificarlos para encajarlos en la actividad propuestas, el uso del 10 como una unidad iterativa para contar, así como maneras de comprender los números como formados por unidades múltiples desde una perspectiva parte-todo (como por ejemplo ver el 15 formado por $7+7+1$, o $7+8$ o $10+5$). Desde esta perspectiva, Rosa no complementa el uso de manipulativos con iniciativas que permitan desarrollar a los niños construcciones mentales y estrategias más sofisticadas de contar al no apoyar sus decisiones sobre la enseñanza en un modelo de progresión de los procesos y estrategias de contar que apoyan el aprendizaje del número y las operaciones.” (Llinares, 2018)</p>	<p>“Los conocimientos que se infieren de la respuesta de Rosa [...] son de tipo epistémico (CFE) dado que diseña tareas más simples, de tipo cognitivo (CFC) ya que manifiesta la importancia del dominio de los conocimientos previos para conseguir el aprendizaje de los estudiantes y de tipo mediacional (FCM) pues se infiere conocimiento sobre los recursos y medios que pueden potenciar los aprendizajes de los estudiantes (las regletas). También se puede considerar que hay conocimientos de la faceta interaccional (CFI) (las tareas propuestas implican un cambio en la interacción, que se explica con detalle) y de la faceta ecológica (CFE) (conocimiento de los contenidos del currículo y su programación temporal)”.</p> <p>“se infiere un nivel uno de desarrollo de la subcompetencia de análisis de la idoneidad didáctica, ya que hace una valoración utilizando de manera implícita algún criterio de idoneidad didáctica y hace una propuesta de mejora con cierto sentido [...] En su respuesta a la consigna 10 mejora la idoneidad cognitiva (conseguir más aprendizaje trabajando los conocimientos previos); también mejora la idoneidad interaccional (diseña tareas más simples) y mejora la idoneidad de recursos (incorpora el uso de las regletas).” (Font et al., 2018)</p>

Figura 7. Relación entre la Mirada Profesional y el Modelo CCDM desde el análisis de la narrativa de Rosa

OPORTUNIDADES QUE EMERGEN DE LA RELACIÓN ENTRE LAS TRES PERSPECTIVAS

En el ejercicio de *networking* que hemos realizado, se ha implementado una estrategia de diálogo entre tres teorías desde un posicionamiento neutral y externo a ellas (Prediger et al., 2008), con el propósito de explicitar nexos y divergencias que emergen del uso de las herramientas que ofrece cada perspectiva para el análisis de una narrativa escrita por una futura maestra cuando describe una

situación de enseñanza de las matemáticas. La tarea no ha sido fácil y estamos convencidas que diferentes usuarios de las teorías podrían dar visiones complementarias o divergentes al análisis que hemos realizado (Radford, 2008; Bikner-Ahsbahs y Prediger, 2010).

Un aspecto clave que hemos encontrado con relación a los nexos entre las tres perspectivas es que todas coinciden en considerar que el conocimiento matemático es necesario, pero no suficiente para abordar la complejidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática (Thomas et al., 2017; Llinares, 2012, entre otros). Igualmente, las tres perspectivas consideran que hay una yuxtaposición entre las componentes del conocimiento del profesor necesarios para enseñar matemática y para reflexionar sobre situaciones de enseñanza y aprendizaje de la matemática (conocimiento matemático y conocimiento didáctico del contenido). Sin embargo, en este foco hay aproximaciones diferentes para abordar la relación entre estos dos dominios de conocimientos cuando los maestros/profesores se enfrentan a tareas profesionales concretas (dominios de conocimiento-MTSK, dimensiones de conocimiento y competencias-CCDM y estructura del argumento práctico-Mirada profesional).

Desde el MTSK, se caracterizan los dominios de conocimiento que moviliza Rosa en su narrativa. La mirada profesional permite comprender cómo Rosa usa el conocimiento de matemáticas y didáctica de las matemáticas para interpretar las situaciones de enseñanza considerando la estructura de sus argumentos prácticos. En este sentido, Rosa interpreta la situación de enseñanza mostrando las características de sus procesos de razonamiento sobre lo relevante de la práctica usando su conocimiento teórico.

Finalmente, el modelo CCDM, propone constructos para identificar qué conocimientos y competencias docentes ponen en juego los profesores cuando describen, explican y valoran la práctica docente. Por tanto, si bien es cierto que este modelo propone una relación entre competencias y conocimientos, esta relación está encaminada en la caracterización de conocimientos y competencias implícitas en el rediseño de la práctica y no entra en el desarrollo de las competencias docentes necesarias para la toma de decisiones fundamentas, tal y como propone la mirada profesional. La Figura 8, presenta posibles preguntas y objetivos que se podrían abordar usando las herramientas teóricas y analíticas desde cada una de las tres perspectivas, teniendo como contexto el análisis de la narrativa de Rosa.

MTSK	Mirada profesional	CCDM
¿Qué evidencias, indicios y oportunidades se pueden extraer acerca del conocimiento que Rosa pone en juego en su narrativa? Comprender el conocimiento del profesor de matemáticas desde la perspectiva del conocimiento que este usa en y para la práctica.	¿Cómo Rosa usa el conocimiento de matemáticas y el generado por las investigaciones en didáctica de la matemática cuando describe e interpreta una situación de enseñanza para decidir cómo actuar? Caracterizar cómo los estudiantes para maestro usan el conocimiento de matemáticas y el generado por las investigaciones en didáctica de la matemática cuando están intentando comprender una situación de enseñanza para decidir cómo actuar.	¿Qué conocimientos y competencias docentes pone en juego Rosa cuando describe, explica y valora la práctica docente? En particular ¿cuáles de las subcompetencias de la competencia de análisis de intervención didáctica se pueden evaluar? ¿Cuáles son los conocimientos que se infieren de la respuesta de Rosa, con qué dimensión y faceta del CDM se pueden asociar? Analizar los procesos de reflexión del profesor sobre su práctica

Figura 8. Cuadro comparativo de preguntas y objetivos de investigación que se pueden responder con las herramientas de las tres perspectivas teóricas

En este contexto de nexos y diferencias nos surgen preguntas, que podrían ampliarse en un debate con actores principales de las diferentes perspectivas, que pueden ayudar a avanzar a la línea de

investigación sobre conocimiento y competencias profesionales, al tiempo que podrían tener implicaciones directas en la formación inicial y permanente del profesorado.

- ¿Qué pueden aportar las herramientas del MTSK y del CCDM en el diseño de experimentos de enseñanza que busca el desarrollo de la competencia mirada profesional?
- ¿La competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático aporta descriptores/niveles de desarrollo que permitirían hacer un análisis más fino de la competencia de análisis e intervención didáctica?
- ¿Cómo se complementan la Faceta Epistémica de la dimensión didáctica del CDM y los subdominios del conocimiento matemático del modelo MTSK? ¿Los procesos de rediseño de la práctica a partir de las herramientas del CCDM y del MTSK se podría considerar como experimentos de enseñanza que busca el desarrollo de la competencia de análisis e intervención didáctica en la misma dirección que la competencia mirar profesionalmente?

Para concluir este ejercicio, sería interesante implicar en el debate a los diferentes grupos de investigación que participan de este seminario formulando la siguiente pregunta: ¿Ven la necesidad de articular otras herramientas provenientes de los otros modelos para realizar análisis finos del conocimiento y/o las competencias profesionales del profesor de matemáticas en diferentes contextos y demandas profesionales?

Agradecimientos

Este trabajo se ha hecho en parte con el apoyo de los proyectos EDU2017-87411-R y EDU2015-65378-P, Agencia Estatal de Investigación, MINECO-Gobierno de España; Prometeo2017/135 de la Generalitat Valenciana, España; y SGR-2017-101. GIPEAM-AGAUR.

Referencias

- Artigue, M. (2013). La educación matemática como un campo de investigación. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 8(11), 43-59.
- Ball, D. L., Lubienski, S. y Mewborn, D. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching*, 4 (pp. 433-456). New York: Macmillan.
- Ball, D. L., Phelps, G. C. y Thames, M. H. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Bikner-Ahsbabs, A. y Prediger, S. (2010). Networking of theories - an approach for exploiting the diversity of theoretical approaches. En B. Sriraman y L. English (Eds.), *Theories of mathematics education: Seeking new frontiers* (pp. 483-506). New York: Springer.
- Bikner-Ahsbabs, A. y Prediger, S. (2014). *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education, Advances in Mathematics Education*. Switzerland: Springer International Publishing.
- Carrillo, J. y Climent, N. (2011). The development of teachers' expertise through their analysis of good practice in the mathematics classroom. *ZDM*, 43(6), 915-926.
- Contreras, L. C., Carrillo, J. y Climent, N. (2018). Aproximándonos al conocimiento especializado de una estudiante para maestro a partir de una narrativa. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 51-68). Gijón: SEIEM.
- Drijvers, P., Godino, J. D., Font, V. y Trouche, L. (2013). One episode, two lenses: A reflective analysis of student learning with computer algebra from instrumental and onto-semiotic perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, 82, 23-49.
- Even, R. y Ball, D. L. (2009). *The professional education and development of teachers of mathematics*. New York, NY: Springer.

- Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Valls, J. y Callejo, M. L. (2018). Noticing students' mathematical thinking: characterization, development and contexts. *AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática*, 13, 39-61.
- Font, V., Trigueros, M., Badillo, E. y Rubio, N. (2016). Mathematical objects through the lens of two different theoretical perspectives: APOS and OSA. *Educational Studies in Mathematics*, 91(1), 107-122.
- Font, V., Breda, A., Giacomone, B. y Godino, J. D. (2018). Análisis de narrativas de futuros profesores con el modelo de conocimientos y competencias didáctico-matemáticas (CCDM). En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 23-38). Gijón: SEIEM.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM*, 39(1-2), 127-135.
- Godino, J. D., Giacomone, B., Font, V. y Pino-Fan, L. (2018). Conocimientos profesionales en el diseño y gestión de una clase sobre semejanza de triángulos. Análisis con herramientas del modelo CCDM. *AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática*, 13, 63-83.
- Haspekian, M., Bikner-Ahsbabs, A. y Artigue, M. (2013). When the fiction of learning is kept: A case of networking two theoretical views. En A. Lindmeier y A. Heinze (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 3, pp. 9-16). Kiel, Germany: PME.
- Jacobs, V. A., Lamb, L. L. C. y Philipp, R. A. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41, 169-202.
- Llinares, S. (2012). Construcción de conocimiento y desarrollo de una Mirada profesional para la práctica de enseñar matemáticas en entornos en línea. *AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática*, 2, 53-70.
- Llinares, S. (2018). Escribir narrativas. De observar a mirar profesionalmente. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 39-50). Gijón: SEIEM.
- Mason, J. (2002). *Researching your own practice: the discipline of noticing*. Londres, Reino Unido: Routledge-Falmer.
- Prediger, S., Arzarello, F., Bosch, M. y Lenfant, A. (2008). Comparing, combining, coordinating-networking strategies for connecting theoretical approaches. Editorial for ZDM-issue 39 (2008) 2. *ZDM, The International Journal on Mathematics Education*, 40(2), 163-164.
- Prediger, S., Bikner-Ahsbabs, A. y Arzarello, F. (2008). How can networking strategies for connecting theoretical approaches help to develop theories in mathematics education? First reflections. *ZDM, The International Journal on Mathematics Education*, 40(2), 165-178.
- Radford, L. (2008). Connecting theories in mathematics education: Challenges and possibilities. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 40(2), 317-327.
- Scheiner, T., Montes, M. A., Godino, J. D., Carrillo, J. y Pino-Fan, L. R. (2017). What Makes Mathematics Teacher Knowledge Specialized? Offering Alternative Views. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 1-20.
- Seidel, T., Stürmer, K., Prenzel, M., Jahn, G. y Schäfer, S. (2017). Investigating pre-service teachers' professional vision within university-based teacher education. En D. Leutner et al. (Eds.), *Competence Assessment in Education, Methodology of Educational Measurement and Assessment* (pp. 93-109). Springer.
- Sherin, M. G. (2007). The development of teachers' professional vision in video clubs. En R. Goldman, R. Pea, B. Barron y S. J. Denny (Eds.), *Video research in the learning sciences* (pp. 383-395). Mahwah, N.J.: LEA.

- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Stürmer, K., Könings, K. D. y Seidel, T. (2013). Declarative knowledge and professional vision in teacher education: Effect of courses in teaching and learning. *British Journal of Educational Psychology*, 83(3), 467-483.
- Thomas, J., Jong, C., Fisher, M. H. y Schack, E. O. (2017). Noticing and knowledge: Exploring theoretical connections between professional noticing and mathematical knowledge for teaching. *The Mathematics Educator*, 26(2), 3-25.
- Van Es, E. A. y Sherin, M. G. (2008). Mathematics teachers' "learning to notice" in the context of a video club. *Teaching and Teacher Education*, 24, 244-276.
- Weber, E., Walkington, C. y McGalliard, W. (2015) Expanding Notions of "Learning Trajectories". *Mathematics Education, Mathematical Thinking and Learning*, 17(4), 253-272. doi: 10.1080/10986065.2015.1083836