Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea in Fisica

OPERATORI COVARIANTI PER ROTAZIONI, OPERATORI TENSORIALI IRRIDUCIBILI E TEOREMA DI WIGNER-ECKART

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Roberto Zucchini

Presentata da:
Matteo Moretti

Sessione estiva
Anno Accademico 2018-2019

Sommario

In questa tesi viene innanzitutto analizzato il legame tra la simmetria rotazionale e il momento angolare di un sistema quantistico. Vengono poi studiate le proprietà generali degli operatori covarianti per rotazione, in particolare gli operatori scalari, vettoriali e diadici. Viene quindi esposta la teoria generale degli operatori tensoriali irriducibili che permette una trattazione unificata delle varie tipologie di operatori covarianti. Vengono in particolare studiati due teoremi fondamentali: il teorema di Wigner-Eckart e della proiezione. Sono illustrate infine alcune applicazioni.

Indice

Capitolo 1

Introduzione

In meccanica classica il momento angolare di un sistema isolato si conserva. Questa legge fisica è una conseguenza della simmetria rotazionale dell'hamiltoniana del sistema. Cioè il valore dell'energia non subisce variazioni e l'hamiltoniana rimane la stessa funzione delle variabili canoniche quando il sistema è soggetto ad una rotazione rigida attorno ad un asse. Questa importante proprietà è conseguenza dell'isotropia dello spazio in assenza di campi esterni: tutte le direzioni dello spazio sono fisicamente equivalenti.

Anche in meccanica quantistica, in un sistema isolato, le componenti cartesiane del momento angolare sono costanti del moto. In questo caso, tuttavia, le singole componenti non sono osservabili quantistiche compatibili, cioè non possono essere misurate simultaneamente senza interferenza. Matematicamente questo si manifesta come la non commutatività delle componenti vettoriali dell'operatore momento angolare, il quale, a sua volta, riflette la non commutatività delle rotazioni. Un'altra importante differenza dal caso classico è l'esistenza, accanto al momento angolare orbitale, di un'altra forma di momento angolare, lo spin, che è un grado di libertà interno privo di corrispondente classico.

La relazione tra rotazioni e momento angolare consiste nel fatto che il momento angolare è il generatore infinitesimale delle rotazioni. Le proprietà del momento angolare quantistico e la sua relazione alla simmetria rotazionale sono richiamate brevemente nel capitolo 3. Gli osservabili quantistici vengono classificati in base alle loro proprietà di covarianza sotto rotazioni. Le principali tipologie di osservabili rotazionalmente covarianti sono quelli scalari, vettoriali, diadici, analizzati in dettaglio nel capitolo 3.

La teoria degli operatori tensoriali irriducibili, esposta nel capitolo 4, fornisce una trattazione unificata degli operatori rotazionalmente covarianti. Operatori scalari, vettoriali, diadici, sono infatti casi speciali particolarmente rilevanti di operatori tensoriali.

I risultati principali della teoria degli operatori tensoriali irriducibili sono i teoremi di Wigner-Eckart e della proiezione, che vengono formulati e dimostrati nel capitolo 5. Questi hanno importanti e molteplici applicazioni in fisica nucleare, atomica e molecolare. Alcune di queste verranno illustrate.

Capitolo 2

Richiami sul momento angolare e coefficienti di Clebsch-Gordan

In questo capitolo verranno richiamate le formule fondamentali riguardanti momento angolare e coefficienti di Clebsch-Gordan. Poiché l'obiettivo di questo elaborato non è l'affronto di questi due argomenti, ci limiteremo a farne un sommario.

Iniziamo con l'introdurre una base sferica orientata.
Come è noto, una *base ortonormale orientata* è un insieme di tre vettori reali $\mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, 3$, $\mathbf{e}_i^* = \mathbf{e}_i$, che soddisfano le seguenti relazioni:

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{i,j} \tag{2.0.1}$$

$$\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \sum_{i=1}^{3} \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_k. \tag{2.0.2}$$

Ogni vettore $\mathbf{a}$ si può esprimere come:

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{3} a_i \mathbf{e}_i, \qquad a_i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i. \tag{2.0.3}$$

Per due vettori $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ si ha che:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i \tag{2.0.4}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} a_i b_j \mathbf{e}_k. \tag{2.0.5}$$

Similmente, una *base sferica orientata* è un insieme di tre vettori complessi $\mathbf{e}_\alpha$, $\alpha = -1, 0, +1$ tale che $\mathbf{e}_\alpha^* = \mathbf{e}_{-\alpha}$, che soddisfano le seguenti relazioni:

$$\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta = 2^{|\alpha|}\delta_{-\alpha,\beta} \tag{2.0.6}$$

$$\mathbf{e}_\alpha \times \mathbf{e}_\beta = -i\delta_{\alpha,0}\beta\mathbf{e}_\beta + i\delta_{\beta,0}\alpha\mathbf{e}_\alpha - i\delta_{-\alpha,\beta}(\alpha-\beta)\mathbf{e}_0. \tag{2.0.7}$$

Ogni vettore $\mathbf{a}$ si può esprimere come:

$$\mathbf{a} = \sum_{\alpha=-1}^{+1} 2^{-|\alpha|} a_{-\alpha}\mathbf{e}_\alpha, \qquad a_\alpha = \mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_\alpha. \tag{2.0.8}$$

Per due vettori $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ si ha che:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \sum_{\alpha=-1}^{+1} 2^{-|\alpha|} a_{-\alpha} b_\alpha \tag{2.0.9}$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -\frac{i}{2}\sum_{\alpha=-1}^{+1} \alpha\left[(a_0 b_{-\alpha} - b_0 a_{-\alpha})\mathbf{e}_\alpha + a_{-\alpha} b_\alpha \mathbf{e}_0\right]. \tag{2.0.10}$$

Una base sferica orientata e una base ortonormale orientata sono in corrispondenza 1 a 1. I vettori della base sferica, associati a quelli della base ortonormale sono dati da:

$$\mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_3, \qquad \mathbf{e}_{\pm1} = \mathbf{e}_1 \pm i\mathbf{e}_2. \tag{2.0.11}$$

I vettori della base ortonormale, associati a quelli della base sferica sono dati da:

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_{+1} + \mathbf{e}_{-1}), \qquad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{2i}(\mathbf{e}_{+1} - \mathbf{e}_{-1}), \qquad \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_0. \tag{2.0.12}$$

Analogamente, le componenti di un vettore $\mathbf{a}$ espresse in una base sferica associata ad una base ortonormale sono date da:

$$\mathbf{a}_0 = \mathbf{a}_3, \qquad \mathbf{a}_{\pm1} = \mathbf{a}_1 \pm i\mathbf{a}_2, \tag{2.0.13}$$

mentre le componenti di $\mathbf{a}$ espresse tramite una base ortonormale associata ad una base sferica sono date da:

$$\mathbf{a}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{a}_{+1} + \mathbf{a}_{-1}), \qquad \mathbf{a}_2 = \frac{1}{2i}(\mathbf{a}_{+1} - \mathbf{a}_{-1}), \qquad \mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_0. \tag{2.0.14}$$

2.1 Richiami sul momento angolare

Chiamiamo $\hat{\boldsymbol{l}}$ e $\hat{\boldsymbol{s}}$ gli operatori di momento angolare orbitale e di spin, rispettivamente. É noto che:

$$[\hat{l}_i, \hat{l}_j] = i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} \hat{l}_k \tag{2.1.1}$$

$$[\hat{s}_i, \hat{s}_j] = i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} \hat{s}_k. \tag{2.1.2}$$

Definiamo la somma di $\hat{\boldsymbol{l}}$ e $\hat{\boldsymbol{s}}$ come momento angolare totale con:

$$\hat{\boldsymbol{j}} = \hat{\boldsymbol{l}} + \hat{\boldsymbol{s}}. \tag{2.1.3}$$

Poiché i due momenti angolari $\hat{\boldsymbol{l}}$ e $\hat{\boldsymbol{s}}$ sono indipendenti, il loro commutatore è nullo:

$$[\hat{l}_i, \hat{s}_j] = 0. \tag{2.1.4}$$

Da questo segue che anche le componenti di $\hat{\boldsymbol{j}}$ commutano esattamente come quelle di $\hat{\boldsymbol{l}}$ e $\hat{\boldsymbol{s}}$:

$$[\hat{j}_i, \hat{j}_j] = i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} \hat{j}_k. \tag{2.1.5}$$

Supponiamo ora di avere un sistema composto da due o più parti indicizzate dall'indice a. Allora, i momenti angolari orbitale e di spin totali sono dati da:

$$\hat{\boldsymbol{L}} = \sum_a \hat{\boldsymbol{l}}_a \tag{2.1.6}$$

$$\hat{\boldsymbol{S}} = \sum_a \hat{\boldsymbol{s}}_a. \tag{2.1.7}$$

Poiché i momenti angolari $\hat{\boldsymbol{l}}_a$ e $\hat{\boldsymbol{s}}_a$ di sistemi diversi sono indipendenti, i commutatori tra di essi sono nulli:

$$[\hat{\boldsymbol{l}}_a, \hat{\boldsymbol{l}}_b] = 0 \tag{2.1.8a}$$

$$[\hat{\boldsymbol{s}}_a, \hat{\boldsymbol{s}}_b] = 0 \tag{2.1.8b}$$

$$[\hat{\boldsymbol{l}}_a, \hat{\boldsymbol{s}}_b] = 0, \tag{2.1.8c}$$

per $a \neq b$.

Il momento angolare totale del sistema sarà dato allora da:

$$\hat{\boldsymbol{J}} = \hat{\boldsymbol{L}} + \hat{\boldsymbol{S}}. \tag{2.1.9}$$

Dalle relazioni (2.1.8) segue che le relazioni di commutazione delle componenti di $\hat{\boldsymbol{L}}$, $\hat{\boldsymbol{S}}$ e $\hat{\boldsymbol{J}}$ sono le stesse relazioni che valgono per le componenti di $\hat{\boldsymbol{l}}$, $\hat{\boldsymbol{s}}$ e $\hat{\boldsymbol{j}}$:

$$[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} \hat{L}_k \tag{2.1.10}$$

$$[\hat{S}_i, \hat{S}_j] = i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} \hat{S}_k \tag{2.1.11}$$

$$[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} \hat{J}_k. \tag{2.1.12}$$

Da ora in poi parleremo di $\hat{\boldsymbol{j}}$ inteso come momento angolare generico. Allora, per $\hat{\boldsymbol{j}}$ valgono le relazioni di commutazione:

$$[\hat{j}_i, \hat{j}_j] = i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} \hat{j}_k, \tag{2.1.13}$$

che sono scritte esattamente come la (2.1.5), con la differenza però che ora $\hat{\boldsymbol{j}}$ non è necessariamente somma di $\hat{\boldsymbol{l}}$ e $\hat{\boldsymbol{s}}$.
Definiamo il modulo quadro di $\hat{\boldsymbol{j}}$ come:

$$\hat{j}^2 = \hat{\boldsymbol{j}}^2 = \sum_i \hat{j}_i^2. \tag{2.1.14}$$

L'operatore $\hat{j}^2$ commuta con le componenti di $\hat{\boldsymbol{j}}$:

$$[\hat{j}^2, \hat{j}_i] = 0. \tag{2.1.15}$$

Poiché sia $\hat{j}_i$ che $\hat{j}^2$ rappresentano degli osservabili, allora, per un principio della meccanica quantistica, tali operatori sono autoaggiunti:

$$\hat{j}_i^\dagger = \hat{j}_i \tag{2.1.16}$$

$$\hat{j}^{2\dagger} = \hat{j}^2. \tag{2.1.17}$$

É conveniente esprimere le componenti di $\hat{\boldsymbol{j}}$ tramite una base sferica orientata $\mathbf{e}_\alpha$, associata ad una base ortonormale orientata $\mathbf{e}_i$, tramite le relazioni (2.0.11) e (2.0.12):

$$\hat{j}_0 = \hat{j}_3, \qquad \hat{j}_{\pm 1} = \hat{j}_1 \pm i\hat{j}_2 \tag{2.1.18}$$

$$\hat{j}_1 = \frac{1}{2}(\hat{j}_{+1} + \hat{j}_{-1}), \qquad \hat{j}_2 = \frac{1}{2i}(\hat{j}_{+1} - \hat{j}_{-1}), \qquad \hat{j}_3 = \hat{j}_0. \tag{2.1.19}$$

Le componenti sferiche obbediscono allora alle seguenti regole di commutazione:

$$[\hat{j}_0, \hat{j}_{\pm 1}] = \pm\hbar\hat{j}_{\pm 1} \tag{2.1.20}$$

$$[\hat{j}_{\pm 1}, \hat{j}_{\pm 1}] = 0 \tag{2.1.21}$$

$$[\hat{j}_{\pm 1}, \hat{j}_{\mp 1}] = \pm 2\hbar\hat{j}_0. \tag{2.1.22}$$

Inoltre, valgono le seguenti regole di aggiunzione:

$$\hat{j}_0^{\dagger} = \hat{j}_0 \tag{2.1.23}$$

$$\hat{j}_{\pm 1}{}^{\dagger} = \hat{j}_{\mp 1}. \tag{2.1.24}$$

L'operatore $\hat{j}^2$ è dato da

$$\hat{j}^2 = \hat{j}_{\pm 1}\hat{j}_{\mp 1} + \hat{j}_0^2 \mp \hbar\hat{j}_0, \tag{2.1.25}$$

e naturalmente commuta con $\hat{j}_0$ e $\hat{j}_{\pm 1}$, dato che questi sono combinazioni lineari di $\hat{j}_1$, $\hat{j}_2$ e $\hat{j}_3$:

$$[\hat{j}^2, \hat{j}_{\pm 1}] = 0 \tag{2.1.26}$$

$$[\hat{j}^2, \hat{j}_0]. \tag{2.1.27}$$

Poiché le componenti $\hat{j}_i$ non commutano tra di loro, non esiste una base ortonormale di autoket comuni ai $\hat{j}_i$, però si può costruire un insieme massimale di operatori autoaggiunti commutanti utilizzando $\hat{j}_0$ e $\hat{j}^2$. Gli autoket comuni di $\hat{j}_0$ e $\hat{j}^2$ si organizzano in multipletti caratterizzati dal numero quantico semi intero non negativo j, ogni multipletto $|j, m\rangle$ contiene $2j + 1$ elementi, indicizzati dal numero quantico m che prende valori nel range $-j, -j + 1, \ldots, j - 1, j$.
Si ha poi che:

$$\hat{j}^2 |j, m\rangle = |j, m\rangle \hbar^2 j(j + 1) \tag{2.1.28}$$

$$\hat{j}_0 |j, m\rangle = |j, m\rangle \hbar m \tag{2.1.29}$$

$$\hat{j}_{\pm 1} |j, m\rangle = |j, m \pm 1\rangle \hbar \left(j(j + 1) - m(m \pm 1)\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.1.30}$$

Infine, assumendo che i ket $|j, m\rangle$ siano normalizzabili:

$$\langle j, m' | j, m \rangle = \delta_{m',m}. \tag{2.1.31}$$

Le proprietà (2.1.28) e (2.1.29) sono le relazioni agli autovalori degli operatori $\hat{j}^2$ e $\hat{j}_0$, mentre, per la proprietà (2.1.30), l'operatore $\hat{j}_{\pm 1}$ si dice anche *operatore di scala* perché applicato ad un proprio autoket con un certo valore del numero quantico m, ne alza o abbassa il valore di una unità.

Consideriamo un sistema descritto da due momenti angolare $\hat{j}_1$ e $\hat{j}_2$, allora, per quanto detto poco fa, grazie all'equazione (2.1.5):

$$[\hat{j}_{1i}, \hat{j}_{1j}] = i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} \hat{j}_{1k} \tag{2.1.32}$$

$$[\hat{j}_{2i}, \hat{j}_{2j}] = i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} \hat{j}_{2k}, \tag{2.1.33}$$

e, per le (2.1.16), (2.1.17)

$$\hat{j}_{1i}^\dagger = \hat{j}_{1i}, \qquad \hat{j}_1^{2\dagger} = \hat{j}_1^2 \tag{2.1.34}$$

$$\hat{j}_{2i}^\dagger = \hat{j}_{2i}, \qquad \hat{j}_2^{2\dagger} = \hat{j}_2^2. \tag{2.1.35}$$

Inoltre, se i due momenti angolari sono compatibili, allora sono anche commutanti:

$$[\hat{j}_{1i}, \hat{j}_{2i}] = 0. \tag{2.1.36}$$

Allora gli operatori $\hat{j}_1^2$, $\hat{j}_{10}$, $\hat{j}_2^2$, $\hat{j}_{20}$ formano un insieme massimale di operatori autoaggiunti commutanti a partire da $\hat{\boldsymbol{j}}_1$ e $\hat{\boldsymbol{j}}_2$. Analogamente al caso precedente, gli autoket comuni di $\hat{j}_1^2$, $\hat{j}_{10}$, $\hat{j}_2^2$, $\hat{j}_{20}$ si organizzano in multipletti di autoket $|j_1, m_1, j_2, m_2\rangle$ caratterizzato dai numeri quantici semi interi non negativi j_1 e j_2, contenente $(2j_1+1)(2j_2+1)$ elementi indicizzati da m_1 e m_2, rispettivamente nei range $-j_1, -j_1+1, \ldots, j_1-1, j_1$ e $-j_2, -j_2+1, \ldots, j_2-1, j_2$.
Si ha quindi che:

$$\hat{j}_{10} |j_1, m_1, j_2, m_2\rangle = |j_1, m_1, j_2, m_2\rangle \hbar m_1 \tag{2.1.37}$$

$$\hat{j}_{20} |j_1, m_1, j_2, m_2\rangle = |j_1, m_1, j_2, m_2\rangle \hbar m_2 \tag{2.1.38}$$

$$\hat{j}_{1\pm 1} |j_1, m_1, j_2, m_2\rangle = |j_1, m_1 \pm 1, j_2, m_2\rangle \hbar (j_1(j_1+1) - m_1(m_1 \pm 1))^{\frac{1}{2}} \tag{2.1.39}$$

$$\hat{j}_{2\pm 1} |j_1, m_1, j_2, m_2\rangle = |j_1, m_1, j_2, m_2 \pm 1\rangle \hbar (j_2(j_2+1) - m_2(m_2 \pm 1))^{\frac{1}{2}} \tag{2.1.40}$$

$$\hat{j}_1^2 |j_1, m_1, j_2, m_2\rangle = |j_1, m_1, j_2, m_2\rangle \hbar^2 j_1(j_1+1) \tag{2.1.41}$$
$$\hat{j}_2^2 |j_1, m_1, j_2, m_2\rangle = |j_1, m_1, j_2, m_2\rangle \hbar^2 j_2(j_2+1). \tag{2.1.42}$$

Infine, assumendo che i ket $|j_1, m_1, j_2, m_2\rangle$ siano normalizzabili:

$$\langle j_1, m_1', j_2, m_2' | j_1, m_1, j_2, m_2 \rangle = \delta_{m_1', m_1} \delta_{m_2', m_2}. \tag{2.1.43}$$

Indichiamo la somma di $\hat{\boldsymbol{j}}_1$ e $\hat{\boldsymbol{j}}_2$ con

$$\hat{\boldsymbol{J}} = \hat{\boldsymbol{j}}_1 + \hat{\boldsymbol{j}}_2.$$

Allora $\hat{\boldsymbol{J}}$ obbedisce alle relazioni di commutazione (2.1.5):

$$[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} \hat{J}_k,$$

con le regole di autoaggiunzione:

$$\hat{J}_i^\dagger = \hat{J}_i.$$

Inoltre valgono le seguenti:

$$[\hat{J}_i, \hat{j}_1^2] = 0$$
$$[\hat{J}_i, \hat{j}_2^2] = 0.$$

L'operatore modulo quadro di $\hat{\boldsymbol{J}}$, $\hat{J}^2$ è anch'esso autoaggiunto e commuta con $\hat{j}_{1i}$ e $\hat{j}_{2i}$ e quindi anche con i rispettivi moduli quadri $\hat{j}_1^2$ e $\hat{j}_2^2$:

$$\hat{J}^{2\dagger} = \hat{J}^2$$
$$[\hat{J}^2, \hat{j}_1^2] = 0$$
$$[\hat{J}^2, \hat{j}_2^2] = 0.$$

Gli operatori $\hat{j}_1^2$, $\hat{j}_2^2$, $\hat{J}^2$ e $\hat{J}_0$ formano allora un insieme massimale di operatori autoaggiunti commutanti a partire da $\hat{\boldsymbol{j}}_1$ e $\hat{\boldsymbol{j}}_2$. Chiamo ora $\mathcal{E}(j_1, j_2)$ il sottospazio generato dai ket $|j_1, m_1, j_2, m_2\rangle$. Tale sottospazio ha dimensione $(2j_1+1)(2j_2+1)$ ed è invariante sotto gli operatori $\hat{j}_1^2$, $\hat{j}_{10}$, $\hat{j}_2^2$, $\hat{j}_{20}$. Allora, poiché gli operatori $\hat{j}_1^2$, $\hat{j}_2^2$, $\hat{J}^2$ e $\hat{J}_0$ sono costruiti a partire da $\hat{\boldsymbol{j}}_1$ e $\hat{\boldsymbol{j}}_2$, $\mathcal{E}(j_1, j_2)$ è invariante anche per $\hat{j}_1^2$, $\hat{j}_2^2$, $\hat{J}^2$ e $\hat{J}_0$. Grazie a questo fatto, esiste una base di autoket di $\hat{j}_1^2$, $\hat{j}_2^2$, $\hat{J}^2$ e $\hat{J}_0$ data da $|j_1, j_2, J, M\rangle$, dove J varia nel range $|j_1 - j_2|, |j_1 - j_2| + 1, \ldots, j_1 + j_2 - 1, j_1 + j_2$.

Si ha quindi che:

$$\hat{j}_1^2 \left|j_1, j_2, J, M\right\rangle = \left|j_1, j_2, J, M\right\rangle \hbar^2 j_1(j_1+1) \tag{2.1.44}$$
$$\hat{j}_2^2 \left|j_1, j_2, J, M\right\rangle = \left|j_1, j_2, J, M\right\rangle \hbar^2 j_2(j_2+1) \tag{2.1.45}$$
$$\hat{J}^2 \left|j_1, j_2, J, M\right\rangle = \left|j_1, j_2, J, M\right\rangle \hbar^2 J(J+1) \tag{2.1.46}$$
$$\hat{J}_0 \left|j_1, j_2, J, M\right\rangle = \left|j_1, j_2, J, M\right\rangle \hbar M \tag{2.1.47}$$
$$\hat{J}_{\pm 1} \left|j_1, j_2, J, M\right\rangle = \left|j_1, j_2, J, M \pm 1\right\rangle \hbar (J(J+1) - M(M \pm 1))^{\frac{1}{2}} \tag{2.1.48}$$

Infine, assumendo che i ket $\left|j_1, j_2, J, M\right\rangle$ siano normalizzabili:

$$\left\langle j_1, j_2, J, M' \middle| j_1, j_2, J, M \right\rangle = \delta_{M',M} \tag{2.1.49}$$

Si noti che la disuguaglianza quantistica $|j_1 - j_2| \leq J \leq j_1 + j_2$ è la controparte di quella classica vettoriale $||\boldsymbol{j}_1| - |\boldsymbol{j}_2|| \leq |\boldsymbol{J}| \leq |\boldsymbol{j}_1| + |\boldsymbol{j}_2|$.

Le due basi $\left|j_1, m_1, j_2, m_2\right\rangle$ e $\left|j_1, j_2, J, M\right\rangle$ sono legate dalle relazioni:

$$\left|j_1, j_2, J, M\right\rangle = \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} \left|j_1, m_1, j_2, m_2\right\rangle \left\langle j_1, m_1, j_2, m_2 \middle| j_1, j_2, J, M\right\rangle \tag{2.1.50}$$
$$\left|j_1, m_1, j_2, m_2\right\rangle = \sum_{J=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \sum_{M=-J}^{J} \left|j_1, j_2, J, M\right\rangle \left\langle j_1, j_2, J, M \middle| j_1, m_1, j_2, m_2\right\rangle . \tag{2.1.51}$$

Nelle equazioni (2.1.50) e (2.1.51), i coefficienti del cambio di base $\left\langle j_1, m_1, j_2, m_2 \middle| j_1, j_2, J, M\right\rangle$ e $\left\langle j_1, j_2, J, M \middle| j_1, m_1, j_2, m_2\right\rangle$ si scrivono in forma più compatta come $\left\langle j_1, j_2, m_1, m_2 \middle| J, M\right\rangle$ e $\left\langle J, M \middle| j_1, j_2, m_1, m_2\right\rangle$ e si dicono *coefficienti di Clebsch-Gordan*.

2.2 Richiami sui coefficienti di Clebsch-Gordan

Abbiamo visto che i coefficienti di Clebsch-Gordan $\langle j_1, j_2, m_1, m_2 | J, M \rangle$ sono i coefficienti del cambio di base tra gli autoket comuni degli operatori $\hat{j}_1^2$, $\hat{j}_{10}$, $\hat{j}_2^2$, $\hat{j}_{20}$ e $\hat{j}_1^2$, $\hat{j}_2^2$, $\hat{J}^2$, $\hat{J}_0$ che vivono in $\mathcal{E}(j_1, j_2)$. Tali coefficienti hanno valori tutti tabulati, e rispettano alcune condizioni chiamate *regole di selezione*.
Un primo insieme di tali regole è:

$$|j_1 - j_2| \leq J \leq |j_1 + j_2| \tag{2.2.1a}$$
$$|J - j_2| \leq j_1 \leq |J + j_2| \tag{2.2.1b}$$
$$|J - j_1| \leq j_2 \leq |J + j_1|. \tag{2.2.1c}$$

Cioè i numeri quantici j_1, j_2 e J devono rispettare la *disuguaglianza triangolare*; queste tre regole sono equivalenti, cioè, data una delle tre, si ricavano le altre due.
Il secondo insieme di regole è dato da:

$$-j_1 \leq m_1 \leq j_1 \tag{2.2.2a}$$
$$-j_2 \leq m_2 \leq j_2, \tag{2.2.2b}$$

dalle quali deriva che:

$$-J \leq M \leq J. \tag{2.2.3}$$

I coefficienti di Clebsch-Gordan soddisfano le seguenti relazioni:

$$M \langle j_1, j_2, m_1, m_2 | J, M \rangle = (m_1 + m_2) \langle j_1, j_2, m_1, m_2 | J, M \rangle \tag{2.2.4}$$

$$\begin{aligned}(J(J+1) - M(M \pm 1))^{\frac{1}{2}} \langle j_1, j_2, m_2, m_2 | J, M \pm 1 \rangle \\ = \langle j_1, j_2, m_1 \mp 1, m_2 | J, M \rangle (j_1(j_1+1) - m_1(m_1 \mp 1))^{\frac{1}{2}} \\ + \langle j_1, j_2, m_1, m_2 \mp 1 | J, M \rangle (j_2(j_2+1) - m_2(m_2 \mp 1))^{\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{2.2.5}$$

Dalla (2.2.4) deriva la seguente regola di selezione:

$$M = m_1 + m_2. \tag{2.2.6}$$

Dalla (2.2.5), invece, si può notare che tutti i coefficienti di Clebsch-Gordan con J fissato $\langle j_1, j_2, m_1, m_2 | J, M \rangle$ possono essere ottentuti a partire da $\langle j_1, j_2, m_1, m_2 | J, J \rangle$ e da $\langle j_1, j_2, m_1, m_2 | J, -J \rangle$ utilizzando rispettivamente il segno inferiore o superiore dell'equazione.

É possibile scegliere la fase dei coefficienti di Clebsch-Gordan $\langle j_1, j_2, m_1, m_2 | J, M\rangle$ in modo tale che essi siano tutti reali, cioè che valga la seguente proprietà:

$$\langle J, M | j_1, j_2, m_1, m_2\rangle = \langle j_1, j_2, m_1, m_2 | J, M\rangle^* = \langle j_1, j_2, m_1, m_2 | J, M\rangle\,. \tag{2.2.7}$$

Vale la seguente *regola di scambio*:

$$\langle j_2, j_1, m_2, m_1 | J, M\rangle = (-1)^{j_1+j_2-J}\,\langle j_1, j_2, m_1, m_2 | J, M\rangle\,. \tag{2.2.8}$$

Sono soddisfatte inoltre le seguenti relazioni di ortonormalità:

$$\sum_{m_1=-j_1}^{j_1}\sum_{m_2=-j_2}^{j_2}\left\langle J', M' \middle| j_1, j_2, m_1, m_2\right\rangle \langle j_1, j_2, m_1, m_2 | J, M\rangle = \delta_{J',J}\delta_{M',M} \tag{2.2.9a}$$

$$\sum_{J=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2}\sum_{M=-J}^{J}\left\langle j_1, j_2, m_1', m_2' \middle| J, M\right\rangle \langle J, M | j_1, j_2, m_1, m_2\rangle = \delta_{m_1',m_1}\delta_{m_2',m_2}. \tag{2.2.9b}$$

Esistono tante altre proprietà di questi coefficienti che non staremo a citare, ma alcune di esse verranno richiamate nel seguito, nel momento del bisogno.

Capitolo 3

Rotazioni, momento angolare e operatori rotazionalmente covarianti

3.1 Legame tra rotazioni e momento angolare

In questa sezione verranno trattate le rotazioni e il loro legame col momento angolare. Diamo la definizione di gruppo.

Definizione 1 (di gruppo)**.** Un gruppo è un insieme G dotato di operazione binaria $\circ$ chiusa rispetto a tale insieme, che soddisfa le seguenti proprietà:

- Associatività:
$$\forall a, b, c \in G \quad (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$$
- Esistenza dell'elemento neutro:
$$\exists! e \in G \quad : \quad a \circ e = e \circ a = a \quad \forall a \in G$$
- Esistenza dell'elemento inverso:
$$\forall a \in G \quad \exists! a^{-1} \quad : \quad a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$$

Definizione 2 (di rotazione)**.** Si dice rotazione, in cinematica, una mappa lineare sullo spazio delle configurazioni che preserva le distanze tra i punti.
Una rotazione è data da una diade $\boldsymbol{R}$ agente su un vettore $\mathbf{x}$ nel seguente modo:

$$\mathbf{x'} = \boldsymbol{R} \cdot \mathbf{x}, \quad \text{con } |\mathbf{x}'| = |\mathbf{x}|. \tag{3.1.1}$$

Le rotazioni formano un gruppo. Infatti:

- Se $\boldsymbol{R}$ e $\boldsymbol{S}$ sono due rotazioni, anche $\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{S}$ è una rotazione. In generale $\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{S} \neq \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{R}$.
- La rotazione nulla si indica con $\mathbf{1}$ e agisce su un vettore $\mathbf{x}$ lasciandolo invariato: $\mathbf{x} = \mathbf{1x}$
- Per ogni rotazione $\boldsymbol{R}$ esiste la sua inversa $\boldsymbol{R}^{-1}$: $\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{R}^{-1} = \boldsymbol{R}^{-1}\cdot\boldsymbol{R} = \mathbf{1}$

Una rotazione è caratterizzata da un angolo di rotazione φ e da un asse di rotazione dato da un vettore unitario $\mathbf{u}$. Allora scriveremo $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{\Lambda}(\varphi, \mathbf{u})$. Le proprietà di gruppo si scrivono nel modo seguente:

- Se $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{\Lambda}(\alpha, \mathbf{a})$ e $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{\Lambda}(\beta, \mathbf{b})$, allora $\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{S} = \boldsymbol{\Lambda}(\theta(\alpha, \beta, \mathbf{a}, \mathbf{b}), \mathbf{u}(\alpha, \beta, \mathbf{a}, \mathbf{b}))$ dove θ e $\mathbf{n}$ sono generalmente funzioni complicate di α, β, $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$
- La rotazione nulla è $\mathbf{1} = \boldsymbol{\Lambda}(0, \mathbf{u})$, dove $\mathbf{u}$ è indeterminato
- Se $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{\Lambda}(\varphi, \mathbf{u})$, allora $\boldsymbol{R}^{-1} = \boldsymbol{\Lambda}(-\varphi, \mathbf{u})$, oppure $\boldsymbol{R}^{-1} = \boldsymbol{\Lambda}(\varphi, -\mathbf{u})$

Il vettore posizione $\mathbf{x}$ ruotato di un angolo infinitesimo $\delta\varphi$ attorno ad un asse $\mathbf{u}$ è dato da:

$$\mathbf{x}' = \boldsymbol{\Lambda}(\delta\varphi, \mathbf{u})\cdot\mathbf{x} = \mathbf{x} + \delta\varphi\mathbf{u}\times\mathbf{x} + o(\delta\varphi^2). \tag{3.1.2}$$

Allora vale:

$$\boldsymbol{\Lambda}(\delta\varphi, \mathbf{u}) = \mathbf{1} - \delta\varphi * \mathbf{u} + o(\delta\varphi^2), \tag{3.1.3}$$

dove $*\mathbf{u}$ è una diade antisimmetrica definita come segue.
Sia $\mathbf{v}$ un vettore. La diade antisimmetrica $*\mathbf{v}$ è una matrice 3×3 data da:

$$*\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & v_3 & -v_2 \\ -v_3 & 0 & v_1 \\ v_2 & -v_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.1.4}$$

Una rotazione finita può essere espressa come composizione di infinite rotazioni infinitesime:

$$\boldsymbol{\Lambda}(\varphi, \mathbf{u}) = \lim_{N\to\infty} \boldsymbol{\Lambda}\left(\frac{\varphi}{N}, \mathbf{u}\right)^N = \lim_{N\to\infty} (1 - \delta\varphi * \mathbf{u})^N = e^{-\varphi * \mathbf{u}}. \tag{3.1.5}$$

Le rotazioni agiscono sugli stati. Se s è uno stato preparato da un dispositivo D e $\boldsymbol{R}$ è una rotazione, allora lo stato ruotato ${}^{R}s$ è definito come lo stato preparato dal dispositivo ${}^{R}D$ ottenuto ruotando D in accordo con $\boldsymbol{R}$. Poiché (si assume che) lo spazio è isotropo, esso ha le stesse proprietà in tutte le direzioni, e per questo, se s è sovrapposizione di

s' e s'' con due pesi, allora ${}^{R}s$ è sovrapposizione di ${}^{R}s'$ e ${}^{R}s''$ con gli stessi pesi. Infatti, questi pesi sono legati alle probabilità di misurazione, ma poiché lo spazio è isotropo, tali misure non sono affette dalle rotazioni.
Ogni stato s è rappresentato da un ket $|\psi\rangle$ definito a meno di un fattore di fase moltiplicativo. Allora lo stato ruotato ${}^{R}s$ è rappresentato dal ket $\left|{}^{R}\psi\right\rangle$. Questa mappatura non è unica a causa dell'arbitrarietà del fattore di fase. Come detto poco fa, uno stato può essere sovrapposizione di due o più stati e questo si riflette nella linearità dello spazio in cui vivono i ket: $|\psi\rangle = a\,|\psi'\rangle + b\,|\psi''\rangle$. Scegliendo in modo furbo il fattore di fase si può rendere la mappa $|\psi\rangle \mapsto \left|{}^{R}\psi\right\rangle$ lineare. Allora deve esistere un operatore lineare che agisce in questo modo sui ket:

$$\left|{}^{R}\psi\right\rangle \equiv \hat{U}(\boldsymbol{R})\,|\psi\rangle\,. \tag{3.1.6}$$

L'invarianza dei pesi degli stati implica che il modulo quadrato del prodotto scalare di due ket rimanga invariato dopo una rotazione di tali ket:

$$\left|\langle\psi'|\psi\rangle\right|^2 = \left|\left\langle{}^{R}\psi'\middle|{}^{R}\psi\right\rangle\right|^2, \tag{3.1.7}$$

ma per questa condizione è sufficiente che

$$\langle\psi'|\psi\rangle = \left\langle{}^{R}\psi'\middle|{}^{R}\psi\right\rangle. \tag{3.1.8}$$

Allora $\hat{U}(\boldsymbol{R})$ deve essere anche unitario.

Dimostrazione. Basta combinare la (3.1.6) con la (3.1.8)

$$\langle\psi'|\hat{1}|\psi\rangle = \langle\psi'|\psi\rangle = \left\langle{}^{R}\psi'\middle|{}^{R}\psi\right\rangle = \left(\langle\psi'|\,\hat{U}(\boldsymbol{R})^{\dagger}\right)\left(\hat{U}(\boldsymbol{R})\,|\psi\rangle\right) \Rightarrow \hat{U}(\boldsymbol{R})^{\dagger}\hat{U}(\boldsymbol{R}) = \hat{1}.$$

Poiché questo vale per ket $|\psi\rangle$ e $|\psi'\rangle$ arbitrari, allora $\hat{U}(\boldsymbol{R})^{\dagger} = \hat{U}(\boldsymbol{R})^{-1}$ □

Operare due rotazioni $\boldsymbol{R}$ e $\boldsymbol{S}$ su uno stato s è equivalente ad operare la rotazione $\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{S}$:

$${}^{S}\left({}^{R}s\right) = {}^{S\cdot R}s$$

e i ket si trasformano nel seguente modo:

$$\left|{}^{S}\left({}^{R}\psi\right)\right\rangle = z(\boldsymbol{S},\boldsymbol{R},|\psi\rangle)\left|{}^{S\cdot R}\psi\right\rangle$$

dove $z(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{R}, |\psi\rangle)$ è la fase, che in generale è una funzione non banale di $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{S}$ e $|\psi\rangle$. Allora, per la definizione (3.1.6) si ha che:

$$\hat{U}(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{R}) |\psi\rangle = z(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{R}, |\psi\rangle)\hat{U}(\boldsymbol{S})\hat{U}(\boldsymbol{R}) |\psi\rangle \, . \tag{3.1.9}$$

Poiché a sinistra dell'uguaglianza, l'espressione è lineare in $|\psi\rangle$, lo deve essere anche a destra e dunque z è indipendente da $|\psi\rangle$:

$$z(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{R}, |\psi\rangle) = z(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{R}).$$

Il ket $|\psi\rangle$ è arbitrario, quindi dalla (3.1.9)

$$\hat{U}(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{R}) = z(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{R})\hat{U}(\boldsymbol{S})\hat{U}(\boldsymbol{R}). \tag{3.1.10}$$

Per ogni rotazione $\boldsymbol{R}$ siamo liberi di ridefinire l'operatore rotazione $\hat{U}(\boldsymbol{R})$ in $\zeta(\boldsymbol{R})\hat{U}(\boldsymbol{R})$, dove $\zeta(\boldsymbol{R})$ è il fattore di fase, che dipende solo dalla rotazione. Questa ridefinizione non cambia il valore fisico di $\hat{U}(\boldsymbol{R})$. Infatti, per ogni ket $|\psi\rangle$ rappresentante lo stato s, il ket $\left|{}^{R}\psi\right\rangle$ sarà alterato solo di una fase, senza cambiare lo stato ${}^{R}s$, che continua ad essere rappresentato da $\left|{}^{R}\psi\right\rangle$
Sfruttando questa proprietà, possiamo scegliere la fase dell'operatore rotazione in modo tale che per la rotazione inversa $\hat{U}^{-1}$ di $\hat{U}$ valga che $\hat{U}(\boldsymbol{R}^{-1}) = \hat{U}(\boldsymbol{R})^{-1}$, mentre per la rotazione nulla valga che $\hat{U}(\mathbf{1}) = \hat{1}$
Per una rotazione infinitesima di angolo $\delta\varphi$ vale la seguente relazione:

$$\hat{U}(\boldsymbol{\Lambda}(\delta\varphi, \mathbf{u})) = \hat{1} - i\hbar^{-1}\delta\varphi\mathbf{u} \cdot \hat{\boldsymbol{j}} + o(\delta\varphi^2) \tag{3.1.11}$$

per qualche operatore $\hat{\boldsymbol{j}}$. Il fattore $-i\hbar^{-1}$ è stato introdotto per convenienza. Se scriviamo $\hat{U}$ come nella (3.1.11), allora abbiamo che l'operatore $\hat{\boldsymbol{j}}$ è autoaggiunto e soddisfa la seguente relazione:

$$[\mathbf{a} \cdot \hat{\boldsymbol{j}}, \mathbf{b} \cdot \hat{\boldsymbol{j}}] = ih\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \hat{\boldsymbol{j}} \tag{3.1.12}$$

per $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ vettori arbitrari

Dimostrazione. Dalla definizione (3.1.11):

$$\hat{U}(\boldsymbol{\Lambda}(\delta\varphi, \mathbf{u}))^{\dagger} = \hat{1} + i\hbar^{-1}\delta\varphi\mathbf{u} \cdot \hat{\boldsymbol{j}}^{\dagger} + o(\delta\varphi^2) \tag{3.1.13}$$

$$\hat{U}(\boldsymbol{\Lambda}(\delta\varphi, \mathbf{u}))^{-1} = \hat{1} + i\hbar^{-1}\delta\varphi\mathbf{u} \cdot \hat{\boldsymbol{j}}^{-1} + o(\delta\varphi^2). \tag{3.1.14}$$

Poiché $\hat{U}^\dagger = \hat{U}^{-1}$ allora $\hat{\boldsymbol{j}}^\dagger = \hat{\boldsymbol{j}}^{-1}$, cioè $\hat{\boldsymbol{j}}$ è autoaggiunto. Considerando due rotazioni infinitesime $\boldsymbol{\Lambda}(\delta\alpha, \mathbf{k})$ e $\boldsymbol{\Lambda}(\delta\beta, \mathbf{n})$:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\Lambda}(\delta\alpha, \mathbf{k})^{-1} \cdot \boldsymbol{\Lambda}(\delta\beta, \mathbf{n})^{-1} \cdot \boldsymbol{\Lambda}(\delta\alpha, \mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\Lambda}(\delta\beta, \mathbf{n}) \\
&= (\mathbf{1} + \delta\alpha * \mathbf{k}) \cdot (\mathbf{1} + \delta\beta * \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{1} - \delta\alpha * \mathbf{k}) \cdot (\mathbf{1} - \delta\beta * \mathbf{n}) + \mathbf{o}(\delta\alpha^{\mathbf{2}}, \delta\beta^{\mathbf{2}}) \\
&= \mathbf{1} + \delta\alpha\delta\beta(*\mathbf{k} \cdot *\mathbf{n} - *\mathbf{n} \cdot *\mathbf{k}) + o(\delta\alpha^2, \delta\beta^2).
\end{aligned} \tag{3.1.15}$$

Poiché $(*\mathbf{k} \cdot *\mathbf{n} - *\mathbf{n} \cdot *\mathbf{k}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{k} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{x}) - \mathbf{n} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{x}) = -\mathbf{x} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{n}) = - * (\mathbf{k} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{x}$, allora $*\mathbf{k} \cdot *\mathbf{n} - *\mathbf{n} \cdot *\mathbf{k} = - * (\mathbf{k} \times \mathbf{n})$ e la (3.1.15) diventa:

$$\boldsymbol{\Lambda}(\delta\alpha, \mathbf{k})^{-1} \cdot \boldsymbol{\Lambda}(\delta\beta, \mathbf{n})^{-1} \cdot \boldsymbol{\Lambda}(\delta\alpha, \mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\Lambda}(\delta\beta, \mathbf{n}) = \mathbf{1} - \delta\alpha\delta\beta * (\mathbf{k} \times \mathbf{n}) + o(\delta\alpha^2, \delta\beta^2). \tag{3.1.16}$$

Utilizzando la (3.1.11) nella (3.1.16) si ha che:

$$\hat{U}(\boldsymbol{\Lambda}(\delta\alpha, \mathbf{k})^{-1} \cdot \boldsymbol{\Lambda}(\delta\beta, \mathbf{n})^{-1} \cdot \boldsymbol{\Lambda}(\delta\alpha, \mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\Lambda}(\delta\beta, \mathbf{n})) = \mathbf{1} - i\hbar^{-1}\delta\alpha\delta\beta\mathbf{k} \times \mathbf{n} \cdot \hat{\boldsymbol{j}} + o(\delta\alpha^2, \delta\beta^2). \tag{3.1.17}$$

D'altra parte, per la (3.1.9)

$$\begin{aligned}
&\hat{U}(\boldsymbol{\Lambda}(\delta\alpha, \mathbf{k})^{-1} \cdot \boldsymbol{\Lambda}(\delta\beta, \mathbf{n})^{-1} \cdot \boldsymbol{\Lambda}(\delta\alpha, \mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\Lambda}(\delta\beta, \mathbf{n})) \\
&= (\hat{1} + i\hbar\delta\alpha\mathbf{k} \cdot \hat{\boldsymbol{j}})(\hat{1} + i\hbar\delta\beta\mathbf{n} \cdot \hat{\boldsymbol{j}})(\hat{1} - i\hbar\delta\alpha\mathbf{k} \cdot \hat{\boldsymbol{j}})(\hat{1} - i\hbar\delta\beta\mathbf{n} \cdot \hat{\boldsymbol{j}}) + o(\delta\alpha^2, \delta\beta^2) \\
&= \hat{1} - \hbar^2\delta\alpha\delta\beta[\mathbf{k} \cdot \hat{\boldsymbol{j}}, \mathbf{n} \cdot \hat{\boldsymbol{j}}] + o(\delta\alpha^2, \delta\beta^2).
\end{aligned} \tag{3.1.18}$$

Uguagliando la (3.1.17) con la (3.1.18), con $\mathbf{k}$ e $\mathbf{n}$ al posto di $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ si ottiene la (3.1.12) □

Siano $\hat{j}_i$ le componenti di $\hat{\boldsymbol{j}}$ rispetto ad una base ortonormale orientata $\mathbf{e}_i$.
Allora, nella (3.1.12), ponendo $\mathbf{a} = \mathbf{e}_i$ e $\mathbf{b} = \mathbf{e}_j$, si ha che:

$$[\hat{j}_i, \hat{j}_j] = i\hbar \sum \epsilon_{ijk}\hat{j}_k. \tag{3.1.19}$$

Si riconosce in $\hat{\boldsymbol{j}}$ l'operatore momento angolare, infatti quest'ultima relazione è uguale alle (2.1.5). Inoltre l'equazione (3.1.11) identifica $\hat{\boldsymbol{j}}$ come generatore infinitesimo dell'operatore rotazione. Per una rotazione finita si ha poi che:

$$\hat{U}(\boldsymbol{\Lambda}(\varphi, \mathbf{u})) = \exp\Big(-i\hbar^{-1}\varphi\mathbf{u} \cdot \hat{\boldsymbol{j}}\Big). \tag{3.1.20}$$

Dimostrazione. Utilizzando la (3.1.5)

$$\begin{aligned}\hat{U}(\mathbf{\Lambda}(\delta\varphi,\mathbf{u})) &= \hat{U}\left(\lim_{N\to\infty}\mathbf{\Lambda}\left(\frac{\varphi}{N},\mathbf{u}\right)^N\right) = \lim_{N\to\infty}\hat{U}\left(\mathbf{\Lambda}\left(\frac{\varphi}{N},\mathbf{u}\right)\right)^N \\ &= \lim_{N\to\infty}\left(\hat{1} - i\hbar^{-1}\frac{\varphi}{N}\mathbf{u}\cdot\hat{\boldsymbol{j}}\right)^N = \exp\Big(-i\hbar^{-1}\delta\varphi\mathbf{u}\cdot\hat{\boldsymbol{j}}\Big). \end{aligned} \tag{3.1.21}$$

□

Prendiamo ora in considerazione gli autobra $\langle\mathbf{x}|$ dell'operatore $\hat{\boldsymbol{q}}$, cioè $\langle\mathbf{x}|\,\hat{\boldsymbol{q}} = \mathbf{x}\,\langle\mathbf{x}|$. L'ipotesi di lavoro è la seguente:

$$\langle\mathbf{x}|\,\hat{U}(\boldsymbol{R})^\dagger = \langle\boldsymbol{R}\cdot\mathbf{x}|\,. \tag{3.1.22}$$

Se $\boldsymbol{R} = \mathbf{\Lambda}(\delta\varphi,\mathbf{u})$, allora si ha che:

$$\begin{aligned}\langle\mathbf{x}|\,\hat{U}(\boldsymbol{R})^\dagger &= \langle\mathbf{x}|\,\hat{U}(\mathbf{\Lambda}(\delta\varphi,\mathbf{u}))^\dagger = \left\langle\mathbf{\Lambda}(\delta\varphi,\mathbf{u})^{-1}\cdot\mathbf{x}\right| = \left\langle\mathbf{x}+\delta\varphi\mathbf{u}\times\mathbf{x}+o(\delta\varphi^2)\right| \\ &= \langle\mathbf{x}| + \delta\varphi\mathbf{u}\cdot\mathbf{x}\times\boldsymbol{\nabla}\,\langle\mathbf{x}| + o(\delta\varphi^2) = \langle\mathbf{x}| + i\hbar\delta\varphi\mathbf{u}\cdot(-i\hbar^{-1})\mathbf{x}\times\boldsymbol{\nabla}\,\langle\mathbf{x}| + o(\delta\varphi^2) \\ &= \langle\mathbf{x}| + i\hbar^{-1}\delta\varphi\mathbf{u}\cdot\langle\mathbf{x}|\,\hat{\boldsymbol{l}} + o(\delta\varphi^2) = \langle\mathbf{x}|\,(\hat{1} + i\hbar^{-1}\delta\varphi\mathbf{u}\cdot\hat{\boldsymbol{l}}) + o(\delta\varphi^2).\end{aligned}$$

E si conclude che

$$\hat{U}(\mathbf{\Lambda}(\delta\varphi,\mathbf{u})) = \hat{1} + i\hbar^{-1}\delta\varphi\mathbf{u}\cdot\hat{\boldsymbol{l}} + o(\delta\varphi^2). \tag{3.1.23}$$

Dall'equazione (3.1.23) si vede che l'operatore rotazione infinitesima è legato all'operatore momento angolare orbitale.
Si può generalizzare questo risultato anche al caso di sistemi dotati di spin. In questo caso l'operatore $\hat{\boldsymbol{q}}$ non è più un insieme completo di operatori autoaggiunti commutanti, quindi aggiungiamo l'operatore $\hat{\boldsymbol{s}}$. Applicando una rotazione $\boldsymbol{R}$ ad un autobra di $\hat{\boldsymbol{q}}$ che chiameremo $\langle\mathbf{x},m_s|$, esso sarà ancora autobra di $\hat{\boldsymbol{q}}$, ma non è più autobra di $\hat{\boldsymbol{s}}$. La corretta generalizzazione dell'equazione (3.1.22) è:

$$\langle\mathbf{x},m_s|\,\hat{U}(\boldsymbol{R})^\dagger = \sum_{m_s'=-s}^{s} D^{(s)}_{m_s m_s'}(\boldsymbol{R})\left\langle\boldsymbol{R}\cdot\mathbf{x},m_s'\right| \tag{3.1.24}$$

dove $D^{(s)}_{m_s m_s'}$ è una matrice $(2s+1)\times(2s+1)$ dipendente da $\boldsymbol{R}$ e dallo spin s. Per una rotazione infinitesima si ha allora:

$$\langle \mathbf{x}, m_s | \hat{U}(\boldsymbol{\Lambda}(\delta\varphi, \mathbf{u}))^\dagger = \sum_{m'_s=-s}^{s} (\delta_{m_s,m'_s} + i\delta\varphi \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\varsigma}^{(s)}_{m_s m'_s} + o(\delta\varphi^2)) \left\langle \mathbf{x} + \delta\varphi \mathbf{u} \times \mathbf{x} + o(\delta\varphi^2), m_s \right| . \tag{3.1.25}$$

Analogamente a quanto fatto poco fa:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}, m_s | \hat{U}(\boldsymbol{\Lambda}(\delta\varphi, \mathbf{u}))^\dagger &= \langle \mathbf{x}, m_s | + \delta\varphi \mathbf{u} \times \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\nabla} \langle \mathbf{x}, m_s | + \sum_{m'_s=-s}^{s} i\delta\varphi \mathbf{u} \times \mathbf{x} + o(\delta\varphi^2) \\ &= \langle \mathbf{x}, m_s | + i\hbar^{-1}\delta\varphi \mathbf{u} \cdot \left[-i\hbar \mathbf{x} \times \boldsymbol{\nabla} \langle \mathbf{x}, m_s | + \sum_{m'_s=-s}^{s} \hbar \boldsymbol{\varsigma}^{(s)}_{m_s m'_s} \langle \mathbf{x}, m_s | \right] + o(\delta\varphi^2) \\ &= \langle \mathbf{x}, m_s | \left(\hat{1} + i\hbar^{-1}\delta\varphi \mathbf{u} \cdot (\hat{\boldsymbol{l}} + \hat{\boldsymbol{s}}) \right) + o(\delta\varphi^2) \end{aligned} \tag{3.1.26}$$

dove $\langle \mathbf{x}, m_s | \hat{\boldsymbol{s}} = \sum_{m'_s=-s}^{s} \hbar \boldsymbol{\varsigma}^{(s)}_{m_s m'_s} \langle \mathbf{x}, m_s |$, cioè $\hat{\boldsymbol{s}}$ è l'operatore momento angolare di spin. Dunque dall'equazione (3.1.11) si ha che $\hat{\boldsymbol{j}} = \hat{\boldsymbol{l}} + \hat{\boldsymbol{s}}$ è l'operatore momento angolare totale.

3.2 Operatori rotazionalmente covarianti

Operatori scalari

Un osservabile A si dice *scalare* rispetto ad un momento angolare $\hat{\boldsymbol{j}}$ se per ogni stato s e rotazione $\boldsymbol{R}$ se le probabilità dei risultati di misurazione di A negli stati ruotato e non ruotato, ${}^{R}s$ e s rispettivamente, sono uguali, cioè i valori medi sono uguali: $\langle A\rangle_s = \langle A\rangle_{{}^{R}s}$. In termini matematici:

$$\langle {}^{R}\psi|\hat{A}|{}^{R}\psi\rangle = \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle \tag{3.2.1}$$

e utilizzando l'equazione (3.1.6) si ha che

$$\langle\psi|\hat{U}(\boldsymbol{R})^{\dagger}\hat{A}\hat{U}(\boldsymbol{R})|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle \Rightarrow \hat{U}(\boldsymbol{R})^{\dagger}\hat{A}\hat{U}(\boldsymbol{R}) = \hat{A} \tag{3.2.2}$$

Per una rotazione infinitesima si ha che

$$[\mathbf{a}\cdot\hat{\boldsymbol{j}}, \hat{A}] = 0. \tag{3.2.3}$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}\hat{A} &= \hat{U}(\boldsymbol{R})^{\dagger}\hat{A}\hat{U}(\boldsymbol{R}) = \hat{U}(\boldsymbol{\Lambda}(\delta\varphi,\mathbf{u}))^{\dagger}\hat{A}\hat{U}(\boldsymbol{\Lambda}(\delta\varphi,\mathbf{u}))\\ &= (\hat{1} + i\hbar^{-1}\delta\varphi\mathbf{u}\cdot\hat{\boldsymbol{j}})\hat{A}(\hat{1} - i\hbar^{-1}\delta\varphi\mathbf{u}\cdot\hat{\boldsymbol{j}}) + o(\delta\varphi^2)\\ &= \hat{A} + i\hbar^{-1}\delta\varphi\mathbf{u}\cdot\hat{\boldsymbol{j}}\hat{A} - i\hbar^{-1}\delta\varphi\hat{A}\mathbf{u}\cdot\hat{\boldsymbol{j}} + o(\delta\varphi^2)\end{aligned}$$

Ne consegue che

$$\hat{A} = \hat{A} + i\hbar^{-1}\delta\varphi[\mathbf{u}\cdot\hat{\boldsymbol{j}}, \hat{A}] \Rightarrow [\mathbf{u}\cdot\hat{\boldsymbol{j}}, \hat{A}] = 0. \tag{3.2.4}$$

□

Dunque, se $\mathbf{e}_i$ è una base ortonormale orientata e $\hat{j}_i$ sono le componenti di $\hat{\boldsymbol{j}}$ rispetto a tale base, allora

$$[\hat{j}_i, \hat{A}] = 0. \tag{3.2.5}$$

Per vederlo basta scegliere $\mathbf{a}$ come $\mathbf{e}_i$

In generale si dice che un operatore è scalare rispetto ad un momento angolare $\hat{\boldsymbol{j}}$ se rispetta la (3.2.3) o la (3.2.5). Anche j^2 è un operatore scalare, infatti $[j^2, j_i] = 0$

Se $\hat{A}$ e $\hat{B}$ sono operatori scalari, anche $\hat{A}\hat{B}$ lo è

Dimostrazione.

$$[\mathbf{a}\cdot\hat{\boldsymbol{j}}, \hat{A}\hat{B}] = [\mathbf{a}\cdot\hat{\boldsymbol{j}}, \hat{A}]\hat{B} + \hat{A}[\mathbf{a}\cdot\hat{\boldsymbol{j}}, \hat{B}] = 0. \tag{3.2.6}$$

□

Operatori vettoriali

Un'osservabile $\mathbf{V}$ si dice *vettoriale* rispetto ad un momento angolare se per ogni stato s e rotazione $\boldsymbol{R}$, la probabilità di misurazione di $\boldsymbol{R} \cdot \mathbf{V}$ nello stato non ruotato s è uguale alla probabilità di misurazione di $\mathbf{V}$ nello stato ${}^{R}s$ ruotato, cioè $\langle \boldsymbol{R} \cdot \mathbf{V} \rangle_s = \langle \mathbf{V} \rangle_{{}^{R}s}$. In termini matematici:

$$\left\langle {}^{R}\psi \middle| \hat{\mathbf{V}} \middle| {}^{R}\psi \right\rangle = \boldsymbol{R} \cdot \langle \psi | \hat{\mathbf{V}} | \psi \rangle \tag{3.2.7}$$

e utilizzando l'equazione (3.1.6) si ha che

$$\begin{aligned} \langle \psi | \hat{U}(\boldsymbol{R})^{\dagger} \hat{\mathbf{V}} \hat{U}(\boldsymbol{R}) | \psi \rangle = \boldsymbol{R} \cdot \langle \psi | \hat{\mathbf{V}} | \psi \rangle \Rightarrow \\ \hat{U}(\boldsymbol{R})^{\dagger} \hat{\mathbf{V}} \hat{U}(\boldsymbol{R}) = \boldsymbol{R} \cdot \hat{\mathbf{V}}. \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

Per una rotazione infinitesima si ha che

$$[\mathbf{a} \cdot \hat{\boldsymbol{j}}, \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{V}}] = i\hbar \mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{V}}. \tag{3.2.9}$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\Lambda}(\delta\varphi, \mathbf{u}) \cdot \hat{\mathbf{V}} &= \mathbf{b} \cdot (\mathbf{1} - \delta\varphi * \mathbf{u}) \cdot \hat{\mathbf{V}} + o(\delta\varphi^2) = \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{V}} + \delta\varphi \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \times \hat{\mathbf{V}} + o(\delta\varphi^2) \\ &= \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{V}} - \delta\varphi \mathbf{u} \times \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{V}} + o(\delta\varphi^2). \end{aligned} \tag{3.2.10}$$

D'altra parte

$$\begin{aligned} \hat{U}(\boldsymbol{\Lambda}(\delta\varphi, \mathbf{u}))^{\dagger} \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{V}} \hat{U}(\boldsymbol{\Lambda}(\delta\varphi, \mathbf{u})) &= (\hat{1} + i\hbar^{-1} \delta\varphi \mathbf{u} \cdot \hat{\boldsymbol{j}}) \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{V}} (\hat{1} - i\hbar^{-1} \delta\varphi \mathbf{u} \cdot \hat{\boldsymbol{j}}) + o(\delta\varphi^2) \\ &= \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{V}} + i\hbar^{-1} \delta\varphi [\mathbf{u} \cdot \hat{\boldsymbol{j}}, \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{V}}] + o(\delta\varphi^2). \end{aligned} \tag{3.2.11}$$

Per l'equazione (3.2.8), uguagliando la (3.2.10) alla (3.2.11) si ritrova

$$[\mathbf{u} \cdot \hat{\boldsymbol{j}}, \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{V}}] = i\hbar \mathbf{u} \times \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{V}} \tag{3.2.12}$$

che è equivalente alla (3.2.9). □

Se $\hat{j}_i$ e $\hat{V}_i$ sono le componenti di $\hat{\boldsymbol{j}}$ e $\hat{\mathbf{V}}$ rispetto ad una base ortonormale orientata $\mathbf{e}_i$ si ha che:

$$[\hat{j}_i, \hat{V}_j] = i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} \hat{V}_k. \tag{3.2.13}$$

Dimostrazione. Basta porre $\mathbf{a} = \mathbf{e}_i$ e $\mathbf{b} = \mathbf{e}_j$ nell'equazione (3.2.9) ed esprimere il prodotto vettoriale tramite la sommatoria e il tensore completamente antisimmetrico. $\square$

In generale di dice che un operatore $\hat{\mathbf{V}}$ è vettoriale rispetto ad un momento angolare $\hat{\boldsymbol{j}}$ se vale l'equazione (3.2.9) o la (3.2.13).
Se $\hat{A}$ e $\hat{\mathbf{X}}$ sono due operatori scalare e vettoriale, rispettivamente, allora gli operatori $\hat{A}\hat{\mathbf{X}}$ e $\hat{\mathbf{X}}\hat{A}$ sono entrambi operatori vettoriali.

Dimostrazione.

$$[\mathbf{u}\cdot\hat{\boldsymbol{j}}, \mathbf{b}\cdot\hat{A}\hat{\mathbf{X}}] = [\mathbf{u}\cdot\hat{\boldsymbol{j}}, \hat{A}]\mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{X}} + \hat{A}[\mathbf{u}\cdot\hat{\boldsymbol{j}}, \mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{X}}] = i\hbar\hat{A}\mathbf{u}\times\mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{X}} = i\hbar\mathbf{u}\times\mathbf{b}\cdot\hat{A}\hat{\mathbf{X}}. \tag{3.2.14}$$

Quindi $\hat{A}\hat{\mathbf{X}}$ soddisfa la (3.2.9). Similmente si dimostra lo stesso per $\hat{\mathbf{X}}\hat{A}$. $\square$

Se $\hat{\mathbf{X}}$ e $\hat{\mathbf{Y}}$ sono operatori vettoriali, allora $\hat{\mathbf{X}}\times\hat{\mathbf{Y}}$ e $\hat{\mathbf{Y}}\times\hat{\mathbf{X}}$ sono operatori vettoriali.

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
&[\mathbf{a}\cdot\hat{\boldsymbol{j}}, \mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{X}}\times\hat{\mathbf{Y}}] = -[\mathbf{a}\cdot\hat{\boldsymbol{j}}, \hat{\mathbf{X}}\cdot\mathbf{b}\times\hat{\mathbf{Y}}] = -[\mathbf{a}\cdot\hat{\boldsymbol{j}}, \hat{\mathbf{X}}]\cdot\mathbf{b}\times\hat{\mathbf{Y}} - \hat{\mathbf{X}}\cdot[\mathbf{a}\cdot\hat{\boldsymbol{j}}, \mathbf{b}\times\hat{\mathbf{Y}}] \\
&= -[\mathbf{a}\cdot\hat{\boldsymbol{j}}, \hat{\mathbf{X}}]\cdot\mathbf{b}\times\hat{\mathbf{Y}} + \mathbf{b}\times\hat{\mathbf{X}}\cdot[\mathbf{a}\cdot\hat{\boldsymbol{j}}, \hat{\mathbf{Y}}] = i\hbar(\mathbf{a}\times\hat{\mathbf{Y}}\cdot\mathbf{b}\times\hat{\mathbf{X}} - \mathbf{a}\times\hat{\mathbf{X}}\cdot\mathbf{b}\times\hat{\mathbf{Y}}) \\
&= i\hbar(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\hat{\mathbf{X}}\cdot\hat{\mathbf{Y}} - \mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{X}}\mathbf{a}\cdot\hat{\mathbf{Y}} - \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}\hat{\mathbf{X}}\cdot\hat{\mathbf{Y}} + \mathbf{a}\cdot\hat{\mathbf{X}}\mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{Y}}) \\
&= i\hbar\mathbf{a}\times\mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{X}}\times\hat{\mathbf{Y}}
\end{aligned} \tag{3.2.15}$$

dove è stato usato che $[\mathbf{a}\cdot\hat{\boldsymbol{j}}, \hat{\mathbf{X}}] = i\hbar\mathbf{a}\times\hat{\mathbf{X}}$ e $[\mathbf{a}\cdot\hat{\boldsymbol{j}}, \hat{\mathbf{Y}}] = i\hbar\mathbf{a}\times\hat{\mathbf{Y}}$. Queste si possono verificare esplicitando le componenti di $\hat{\mathbf{X}}$ e $\hat{\mathbf{Y}}$ rispetto ad una base ortonormale orientata $\mathbf{e}_i$ e sfruttando quanto trovato in equazione (3.2.13).
L'equazione(3.2.15) appena trovata mostra che $\hat{\mathbf{X}}\times\hat{\mathbf{Y}}$ è un operatore vettoriale. Similmente si dimostra lo stesso per $\hat{\mathbf{Y}}\times\hat{\mathbf{X}}$. $\square$

Operatori diadici simmetrici a traccia nulla

Una diade simmetrica a traccia nulla è una matrice 3×3 con le seguenti proprietà:

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^t \tag{3.2.16}$$

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}) = 0. \tag{3.2.17}$$

Un'osservabile diadico è *simmetrico e a traccia nulla* se per ogni stato s e rotazione $\boldsymbol{R}$ la probabilità dei risultati di misurazione di $\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{R}^t$ nello stato s non ruotato è uguale alla probabilità di misurazione di $\boldsymbol{Q}$ nello stato ruotato ${}^{R}s$, cioè $\boldsymbol{R} \cdot \langle \boldsymbol{Q} \rangle_s \cdot \boldsymbol{R}^t = \langle \boldsymbol{Q} \rangle_{{}^{R}s}$. In termini matematici:

$$\left\langle {}^{R}\psi \middle| \widehat{\boldsymbol{Q}} \middle| {}^{R}\psi \right\rangle = \boldsymbol{R} \cdot \langle \psi | \widehat{\boldsymbol{Q}} | \psi \rangle \cdot \boldsymbol{R}^t. \tag{3.2.18}$$

Il fatto che la diade sia simmetrica e a traccia nulla si traduce, per l'operatore $\widehat{\boldsymbol{Q}}$ nelle richieste:

$$\widehat{\boldsymbol{Q}} = \widehat{\boldsymbol{Q}}^t \tag{3.2.19}$$

$$\mathrm{tr}(\widehat{\boldsymbol{Q}}) = 0. \tag{3.2.20}$$

Utilizzando l'equazione (3.1.6) nella (3.2.18) si ha che:

$$\begin{aligned} \left\langle {}^{R}\psi \middle| \widehat{\boldsymbol{Q}} \middle| {}^{R}\psi \right\rangle = \langle \psi | \hat{U}(\boldsymbol{R})^\dagger \widehat{\boldsymbol{Q}} \hat{U}(\boldsymbol{R}) | \psi \rangle = \boldsymbol{R} \cdot \langle \psi | \widehat{\boldsymbol{Q}} | \psi \rangle \cdot \boldsymbol{R}^t \Rightarrow \\ \hat{U}(\boldsymbol{R})^\dagger \widehat{\boldsymbol{Q}} \hat{U}(\boldsymbol{R}) = \boldsymbol{R} \cdot \widehat{\boldsymbol{Q}} \cdot \boldsymbol{R}^t. \end{aligned} \tag{3.2.21}$$

Per una rotazione infinitesima si ha che:

$$[\mathbf{a} \cdot \hat{\boldsymbol{j}}, \mathbf{b} \cdot \widehat{\boldsymbol{Q}} \cdot \mathbf{c}] = i\hbar \left(\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \widehat{\boldsymbol{Q}} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \widehat{\boldsymbol{Q}} \cdot \mathbf{a} \times \mathbf{c} \right). \tag{3.2.22}$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} &\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\Lambda}(\delta\varphi, \mathbf{u}) \cdot \widehat{\boldsymbol{Q}} \cdot \boldsymbol{\Lambda}(\delta\varphi, \mathbf{u})^t \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{1} - \delta\varphi * \mathbf{u}) \cdot \widehat{\boldsymbol{Q}} \cdot (\mathbf{1} + \delta\varphi * \mathbf{u}) \cdot \mathbf{c} + o(\delta\varphi^2) \\ &= \mathbf{b} \cdot \widehat{\boldsymbol{Q}} \cdot \mathbf{c} + \delta\varphi \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \times \widehat{\boldsymbol{Q}} \cdot \mathbf{c} - \delta\varphi \mathbf{b} \cdot \widehat{\boldsymbol{Q}} \cdot \mathbf{u} \times \mathbf{c} + o(\delta\varphi^2) \\ &= \mathbf{b} \cdot \widehat{\boldsymbol{Q}} \cdot \mathbf{c} - \delta\varphi \mathbf{u} \times \mathbf{b} \cdot \widehat{\boldsymbol{Q}} \cdot \mathbf{c} - \delta\varphi \mathbf{b} \cdot \widehat{\boldsymbol{Q}} \cdot \mathbf{u} \times \mathbf{c} + o(\delta\varphi^2). \end{aligned} \tag{3.2.23}$$

D'altra parte

$$\begin{aligned} &\hat{U}(\boldsymbol{\Lambda}(\delta\varphi, \mathbf{u}))^\dagger \mathbf{b} \cdot \widehat{\boldsymbol{Q}} \cdot \mathbf{c} \hat{U}(\boldsymbol{\Lambda}(\delta\varphi, \mathbf{u})) = (\hat{1} + i\hbar^{-1}\delta\varphi \mathbf{u} \cdot \hat{\boldsymbol{j}}) \mathbf{b} \cdot \widehat{\boldsymbol{Q}} \cdot \mathbf{c} (\hat{1} - i\hbar^{-1}\delta\varphi \mathbf{u} \cdot \hat{\boldsymbol{j}}) \\ &= \mathbf{b} \cdot \widehat{\boldsymbol{Q}} \cdot \mathbf{c} + i\hbar^{-1}\delta\varphi (\mathbf{u} \cdot \hat{\boldsymbol{j}} \mathbf{b} \cdot \widehat{\boldsymbol{Q}} \cdot \mathbf{c} - \mathbf{b} \cdot \widehat{\boldsymbol{Q}} \cdot \mathbf{c} \mathbf{u} \cdot \hat{\boldsymbol{j}}) + o(\delta\varphi^2) \\ &= \mathbf{b} \cdot \widehat{\boldsymbol{Q}} \cdot \mathbf{c} + i\hbar^{-1}\delta\varphi [\mathbf{u} \cdot \hat{\boldsymbol{j}}, \mathbf{b} \cdot \widehat{\boldsymbol{Q}} \cdot \mathbf{c}]. \end{aligned} \tag{3.2.24}$$

Per l'equazione (3.2.21), uguagliando la (3.2.23) e la (3.2.24) si ritrova

$$[\mathbf{u} \cdot \hat{\boldsymbol{j}}, \mathbf{b} \cdot \widehat{\boldsymbol{Q}} \cdot \mathbf{c}] = i\hbar \left(\mathbf{u} \times \mathbf{b} \cdot \widehat{\boldsymbol{Q}} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \widehat{\boldsymbol{Q}} \cdot \mathbf{u} \times \mathbf{c} \right), \tag{3.2.25}$$

che è equivalente alla (3.2.22). □

Siano $\hat{j}_i$ e $\widehat{Q}_{ij}$ le componenti di $\hat{\boldsymbol{j}}$ e $\widehat{\boldsymbol{Q}}$ rispetto ad una base ortonormale orientata $\mathbf{e}_i$. Le condizioni di simmetria e annullamento della traccia si traducono in:

$$\widehat{Q}_{ij} = \widehat{Q}_{ji} \tag{3.2.26}$$

$$\sum_i \widehat{Q}_{ii} = 0. \tag{3.2.27}$$

Allora vale la seguente relazione:

$$[\hat{j}_i, \widehat{Q}_{jk}] = i\hbar \sum_l (\epsilon_{ijl}\widehat{Q}_{lk} + \epsilon_{ikl}\widehat{Q}_{jl}). \tag{3.2.28}$$

Dimostrazione. É sufficiente porre $\mathbf{a} = \mathbf{e}_i$, $\mathbf{b} = \mathbf{e}_j$ e $\mathbf{c} = \mathbf{e}_k$ nella (3.2.22) ed esprimere i prodotti vettoriali tramite la sommatoria e il tensore completamente antisimmetrico. □

In generale si dice che un operatore diadico $\widehat{\boldsymbol{Q}}$ che soddisfa le equazioni (3.2.19) e (3.2.20) è operatore diadico simmetrico a traccia nulla rispetto ad un momento angolare $\hat{\boldsymbol{j}}$ se soddisfa la (3.2.22) o la (3.2.28).
Siano $\hat{\mathbf{X}}$ e $\hat{\mathbf{Y}}$ due operatori vettoriali. Il loro prodotto diadico simmetrico a traccia nulla è definito dalla seguente formula:

$$\hat{\mathbf{X}} \circ \hat{\mathbf{Y}} = \frac{1}{2}\left(\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{Y}} + (\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{Y}})^t\right) - \frac{1}{3}\hat{\mathbf{X}} \cdot \hat{\mathbf{Y}}\mathbf{1}. \tag{3.2.29}$$

Dimostrazione. Verifichiamo che la diade $\hat{\mathbf{X}} \circ \hat{\mathbf{Y}}$ sia effettivamente simmetrica e a traccia nulla.

$$\frac{1}{2}\left(\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{Y}} + (\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{Y}})^t\right)^t - \frac{1}{3}\hat{\mathbf{X}} \cdot \hat{\mathbf{Y}}\mathbf{1}^t = \frac{1}{2}\left((\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{Y}})^t + \hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{Y}}\right) - \frac{1}{3}\hat{\mathbf{X}} \cdot \hat{\mathbf{Y}}\mathbf{1} \tag{3.2.30}$$

$$\frac{1}{2}\left(\mathrm{tr}(\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{Y}}) + \mathrm{tr}((\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{Y}})^t)\right) - \frac{1}{3}\hat{\mathbf{X}} \cdot \hat{\mathbf{Y}}\mathrm{tr}(\mathbf{1}) = \frac{1}{2}2\hat{\mathbf{X}} \cdot \hat{\mathbf{Y}} - \frac{1}{3}3\hat{\mathbf{X}} \cdot \hat{\mathbf{Y}} = 0. \tag{3.2.31}$$

La (3.2.30) prova la simmetria, mentre la (3.2.31) prova l'annullamento della traccia di $\hat{\mathbf{X}} \circ \hat{\mathbf{Y}}$.
Ora bisogna provare che $\hat{\mathbf{X}} \circ \hat{\mathbf{Y}}$ soddisfi l'equazione (3.2.22)

$$\begin{aligned}
&\left[\mathbf{a} \cdot \hat{\boldsymbol{j}}, \mathbf{b} \cdot \left(\frac{1}{2}(\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{Y}} + (\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{Y}})^t) - \frac{1}{3}\hat{\mathbf{X}} \cdot \hat{\mathbf{Y}}\mathbf{1}\right) \cdot \mathbf{c}\right] \\
&= \left[\mathbf{a} \cdot \hat{\boldsymbol{j}}, \frac{1}{2}\left(\mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{X}}\mathbf{c} \cdot \hat{\mathbf{Y}} + \mathbf{c} \cdot \hat{\mathbf{X}}\mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{Y}}\right) - \frac{1}{3}\hat{\mathbf{X}} \cdot \hat{\mathbf{Y}}\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}\right] \\
&= \frac{1}{2}[\mathbf{a} \cdot \hat{\boldsymbol{j}}, \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{X}}]\mathbf{c} \cdot \hat{\mathbf{Y}} + \frac{1}{2}\mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{X}}[\mathbf{a} \cdot \hat{\boldsymbol{j}}, \mathbf{c} \cdot \hat{\mathbf{Y}}] + \frac{1}{2}[\mathbf{a} \cdot \hat{\boldsymbol{j}}, \mathbf{c} \cdot \hat{\mathbf{X}}]\mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{Y}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{2}\mathbf{c}\cdot\hat{\mathbf{X}}[\mathbf{a}\cdot\hat{\boldsymbol{j}},\mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{Y}}]-\frac{1}{3}[\mathbf{a}\cdot\hat{\boldsymbol{j}},\hat{\mathbf{X}}\cdot\hat{\mathbf{Y}}]\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}\\
=&\frac{i\hbar}{2}\Big(\mathbf{a}\times\mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{X}}\mathbf{c}\cdot\hat{\mathbf{Y}}+\mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{X}}\mathbf{a}\times\mathbf{c}\cdot\hat{\mathbf{Y}}+\mathbf{a}\times\mathbf{c}\cdot\hat{\mathbf{X}}\mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{Y}}+\mathbf{c}\cdot\hat{\mathbf{X}}\mathbf{a}\times\mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{Y}}\Big)\\
=&\,i\hbar(\mathbf{a}\times\mathbf{b}\cdot\left[\frac{1}{2}(\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{Y}}+(\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{Y}})^t)-\frac{1}{3}\hat{\mathbf{X}}\cdot\hat{\mathbf{Y}}\mathbf{1}\right]\cdot\mathbf{c}\\
&+\mathbf{b}\cdot\left[\frac{1}{2}(\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{Y}}+(\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{Y}})^t)-\frac{1}{3}\hat{\mathbf{X}}\cdot\hat{\mathbf{Y}}\mathbf{1}\right]\cdot\mathbf{a}\times\mathbf{c}).
\end{aligned}
$$

L'ultimo termine nel terzo passaggio si annulla in virtù della (3.2.3) perché $\hat{\mathbf{X}}\cdot\hat{\mathbf{Y}}$ è un operatore scalare. L'ultimo passaggio mostra che $\hat{\mathbf{X}}\circ\hat{\mathbf{Y}}$ è una diade simmetrica a traccia nulla. □

Se $\widehat{\boldsymbol{R}}$ e $\widehat{\boldsymbol{S}}$ sono operatori diadici simmetrici a traccia nulla, allora il loro prodotto scalare $\widehat{\boldsymbol{R}}\cdot\cdot\widehat{\boldsymbol{S}}$ è un operatore scalare.

Dimostrazione. Si noti che la relazione (3.2.22) si può scrivere nella forma

$$
[\mathbf{a}\cdot\hat{\boldsymbol{j}},\mathbf{A}\cdot\cdot\widehat{\boldsymbol{Q}}]=i\hbar(\mathbf{a}\times\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\times\mathbf{a})\cdot\cdot\widehat{\boldsymbol{Q}}, \tag{3.2.32}
$$

dove $\boldsymbol{A}$ è una diade numerica data da $\mathbf{bc}$, con $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ vettori numerici. Se $\boldsymbol{A}$ è simmetrica, allora $[\mathbf{a}\cdot\hat{\boldsymbol{j}},\boldsymbol{A}\cdot\cdot\widehat{\boldsymbol{Q}}]=2i\hbar\mathbf{a}\times\boldsymbol{A}\cdot\cdot\widehat{\boldsymbol{Q}}$ e grazie a questa si ha che:

$$
\begin{aligned}
[\mathbf{a}\cdot\hat{\boldsymbol{j}},\widehat{\boldsymbol{R}}\cdot\cdot\widehat{\boldsymbol{S}}]&=[\mathbf{a}\cdot\hat{\boldsymbol{j}},\widehat{\boldsymbol{R}}]\cdot\cdot\widehat{\boldsymbol{S}}+\widehat{\boldsymbol{R}}\cdot\cdot[\mathbf{a}\cdot\hat{\boldsymbol{j}},\widehat{\boldsymbol{S}}]\\
&=2i\hbar(\mathbf{a}\times\widehat{\boldsymbol{R}}\cdot\cdot\widehat{\boldsymbol{S}}+\widehat{\boldsymbol{R}}\times\mathbf{a}\cdot\cdot\widehat{\boldsymbol{S}})=0,
\end{aligned} \tag{3.2.33}
$$

dove abbiamo usato il fatto che $\mathbf{D}\times\mathbf{e}\cdot\cdot\boldsymbol{E}=\boldsymbol{D}\cdot\cdot\mathbf{e}\times\boldsymbol{E}$, con $\boldsymbol{D}$ e $\boldsymbol{E}$ diadi numeriche e $\mathbf{e}$ vettore numerico. □

Se $\widehat{\boldsymbol{R}}$ è un operatore diadico simmetrico a traccia nulla e $\hat{\mathbf{X}}$ un operatore vettoriale, allora $\widehat{\boldsymbol{R}}\cdot\hat{\mathbf{X}}$ e $\hat{\mathbf{X}}\cdot\widehat{\boldsymbol{R}}$ sono operatori vettoriali.

Dimostrazione.

$$
\begin{aligned}
&[\mathbf{a}\cdot\hat{\boldsymbol{j}},\mathbf{b}\cdot\widehat{\boldsymbol{R}}\cdot\hat{\mathbf{X}}]=[\mathbf{a}\cdot\hat{\boldsymbol{j}},\mathbf{b}\cdot\widehat{\boldsymbol{R}}]\cdot\hat{\mathbf{X}}+\mathbf{b}\cdot\widehat{\boldsymbol{R}}\cdot[\mathbf{a}\cdot\hat{\boldsymbol{j}},\hat{\mathbf{X}}]\\
&=i\hbar(\mathbf{a}\times\mathbf{b}\cdot\widehat{\boldsymbol{R}}\cdot\hat{\mathbf{X}}+\mathbf{b}\cdot\widehat{\boldsymbol{R}}\cdot\mathbf{a}\times\hat{\mathbf{X}})+i\hbar\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\cdot\widehat{\boldsymbol{R}})\cdot\hat{\mathbf{X}}\\
&=i\hbar(\mathbf{a}\times\mathbf{b}\cdot\widehat{\boldsymbol{R}}\cdot\hat{\mathbf{X}}).
\end{aligned}
$$

Con questa abbiamo dimostrato che $\widehat{\boldsymbol{R}}\cdot\hat{\mathbf{X}}$ è un operatore vettoriale. Similmente si dimostra per $\hat{\mathbf{X}}\cdot\widehat{\boldsymbol{R}}$. □

Capitolo 4

Operatori tensoriali e legame con operatori rotazionalmente covarianti

4.1 Operatori tensoriali

Sia $\hat{\boldsymbol{j}}$ un momento angolare. Un *operatore tensoriale irriducibile di rango k*, rispetto a $\hat{\boldsymbol{j}}$, è una collezione di $2k+1$ operatori $\widehat{T}(k,q)$, con k intero positivo e $q = -k, -k+1, \ldots, k-1, k$ tale che:

$$[\hat{j}_0, \widehat{T}(k,q)] = \hbar q \widehat{T}(k,q) \tag{4.1.1}$$

$$[\hat{j}_{\pm 1}, \widehat{T}(k,q)] = \hbar \left(k(k+1) - q(q\pm 1)\right)^{\frac{1}{2}} \widehat{T}(k, q\pm 1). \tag{4.1.2}$$

Per ogni operatore tensoriale di rango k definiamo il suo aggiunto $\widehat{T}^*(k,q)$ nel seguente modo:

$$\widehat{T}^*(k,q) = (-1)^{k-q} \widehat{T}(k,-q)^\dagger \tag{4.1.3}$$

dove il simbolo † indica l'aggiunzione ordinaria.
Verifichiamo che $\widehat{T}^*(k,q)$ è veramente un operatore tensoriale.

Dimostrazione. Bisogna verificare che $\widehat{T}^*(k,q)$ soddisfi le equazioni (4.1.1) e (4.1.2). Utilizzando la definizione di operatore tensoriale aggiunto (4.1.3) insieme alle (4.1.1):

$$\begin{aligned}
[\hat{j}_0, \widehat{T}^*(k,q)] &= (-1)^{k-q}[\hat{j}_0, \widehat{T}(k,-q)^\dagger] = (-1)^{k-q}[\widehat{T}(k,-q), \hat{j}_0]^\dagger = -(-1)^{k-q}[\hat{j}_0, \widehat{T}(k,-q)]^\dagger \\
&= -(-1)^{k-q}\widehat{T}(k,-q)^\dagger(-q)\hbar = (-1)^{k-q}\hbar q \widehat{T}(k,-q)^\dagger \\
&= q\hbar \widehat{T}^*(k,q).
\end{aligned}$$

Questa soddisfa la (4.1.1). Utilizzando nuovamente la (4.1.3), insieme alla (4.1.2):

$$\begin{aligned}[\hat{j}_{\pm1}, \widehat{T}^*(k,q)] &= [\hat{j}_{\pm1}, \widehat{T}(k,-q)^\dagger](-1)^{k-q} = [\widehat{T}(k,-q), \hat{j}_{\mp1}]^\dagger (-1)^{k-q} \\ &= \widehat{T}(k,-q)^\dagger \hbar (k(k+1) + q(-q \mp 1))^{\frac{1}{2}} (-1)^{k-q} \\ &= (-1)^{k-q} \widehat{T}(k,-q)^\dagger \hbar \left(k(k+1) - q(q \pm 1)\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \widehat{T}^*(k,q) \hbar \left(k(k+1) - q(q \pm 1)\right)^{\frac{1}{2}} . \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

Questa invece soddisfa la (4.1.2).

□

Si ha poi che

$$\widehat{T}^{**}(k,q) = \widehat{T}(k,q). \tag{4.1.5}$$

Infatti: $\widehat{T}^{**}(k,q) = (-1)^{k-q}[\widehat{T}^*(k,-q)]^\dagger = (-1)^{2(k-q)} \widehat{T}(k,q)^{\dagger\dagger} = \widehat{T}(k,q)$.
Un operatore tensoriale $\widehat{T}(k,q)$ si dice autoaggiunto se:

$$\widehat{T}^*(k,q) = \widehat{T}(k,q). \tag{4.1.6}$$

Cioè $\widehat{T}(k,q)$ è autoaggiunto se:

$$\widehat{T}(k,q)^\dagger = (-1)^{k-q} \widehat{T}(k,-q). \tag{4.1.7}$$

Siano $\widehat{T}_1(k_1,q_1)$ e $\widehat{T}_2(k_2,q_2)$ due operatori tensoriali di rango k_1 e k_2, rispettivamente, siano poi $|k_1 - k_2| \le k \le k_1 + k_2$ e $q = -k, -k+1, \ldots, k-1, k$. Definiamo *operatore prodotto diretto di* $\widehat{T}_1$ *e* $\widehat{T}_2$, per ogni k, l'operatore dato da

$$\widehat{T}_1 \otimes \widehat{T}_2(k,q) = \sum_{q_1=-k_1}^{k_1} \sum_{q_2=-k_2}^{k_2} \langle k_1, k_2, q_1, q_2 | k, q \rangle \, \widehat{T}_1(k_1,q_1) \widehat{T}_2(k_2,q_2), \tag{4.1.8}$$

dove $\langle k_1, k_2, q_1, q_2 | k, q \rangle$ sono coefficienti di Clebsch-Gordan.
Verifichiamo che $\widehat{T}_1 \otimes \widehat{T}_2(k,q)$ è un operatore tensoriale di rango k.

Dimostrazione. Come prima, bisogna verificare che $\widehat{T}_1 \otimes \widehat{T}_2(k,q)$ soddisfi le equazioni (4.1.1) e (4.1.2). Utilizzando la definizione di prodotto diretto (4.1.8) e la relazione

(4.1.1):

$$
\begin{aligned}
&[\hat{j}_0, \widehat{T}_1 \otimes \widehat{T}_2(k,q)] = \sum_{q_1=-k_1}^{k_1} \sum_{q_2=-k_2}^{k_2} \langle k_1, k_2, q_1, q_2 | k, q \rangle \, [\hat{j}_0, \widehat{T}_1(k_1,q_1) \widehat{T}_2(k_2,q_2)] \\
&= \sum_{q_1=-k_1}^{k_1} \sum_{q_2=-k_2}^{k_2} \langle k_1, k_2, q_1, q_2 | k, q \rangle \left[[\hat{j}_0, \widehat{T}_1(k_1,q_1)] \widehat{T}_2(k_2,q_2) + \widehat{T}_1(k_1,q_1) [\hat{j}_0, \widehat{T}_2(k_2,q_2)] \right] \\
&= \sum_{q_1=-k_1}^{k_1} \sum_{q_2=-k_2}^{k_2} \langle k_1, k_2, q_1, q_2 | k, q \rangle \left[\hbar q_1 \widehat{T}_1(k_1,q_1) \widehat{T}_2(k_2,q_2) + \hbar q_2 \widehat{T}_1(k_1,q_1) \widehat{T}_2(k_2,q_2) \right] \\
&= \sum_{q_1=-k_1}^{k_1} \sum_{q_2=-k_2}^{k_2} \langle k_1, k_2, q_1, q_2 | k, q \rangle \, \hbar (q_1 + q_2) \widehat{T}_1(k_1,q_1) \widehat{T}_2(k_2,q_2) \\
&= \sum_{q_1=-k_1}^{k_1} \sum_{q_2=-k_2}^{k_2} \langle k_1, k_2, q_1, q_2 | k, q \rangle \, \hbar q \widehat{T}_1(k_1,q_1) \widehat{T}_2(k_2,q_2) \\
&= \hbar q \widehat{T}_1 \otimes \widehat{T}_2.
\end{aligned}
$$

Questa soddisfa la (4.1.1). Utilizzando ancora la definizione (4.1.8) e la relazione (4.1.2):

$$
\begin{aligned}
&[\hat{j}_{\pm 1}, \widehat{T}_1 \otimes \widehat{T}_2(k,q)] \\
&= \sum_{q_1=-k_1}^{k_1} \sum_{q_2=-k_2}^{k_2} \langle k_1, k_2, q_1, q_2 | k, q \rangle \, [\hat{j}_{\pm 1}, \widehat{T}_1(k_1,q_1) \widehat{T}_2(k_2,q_2)] \\
&= \sum_{q_1=-k_1}^{k_1} \sum_{q_2=-k_2}^{k_2} \langle k_1, k_2, q_1, q_2 | k, q \rangle \\
&\qquad\qquad \times [\hbar \left(k_1(k_1+1) - q_1(q_1 \pm 1) \right)^{\frac{1}{2}} \widehat{T}_1(k_1, q_1 \pm 1) \widehat{T}_2(k_2,q_2) \\
&\qquad\qquad\qquad + \hbar \left(k_2(k_2+1) - q_2(q_2 \pm 1) \right)^{\frac{1}{2}} \widehat{T}_1(k_1,q_1) \widehat{T}_2(k_2, q_2 \pm 1)] \\
&= \hbar \sum_{q_1=-k_1}^{k_1} \sum_{q_2=-k_2}^{k_2} [\left(k_1(k_1+1) - q_1(q_1 \mp 1) \right)^{\frac{1}{2}} \langle k_1, k_2, q_1 \mp 1, q_2 | k, q \rangle \\
&\qquad\qquad + \left(k_2(k_2+1) - q_2(q_2 \mp 1) \right)^{\frac{1}{2}} \langle k_1, k_2, q_1, q_2 \mp 1 | k, q \rangle] \widehat{T}_1(k_1,q_1) \widehat{T}_2(k_2,q_2) \\
&= \hbar \sum_{q_1=-k_1}^{k_1} \sum_{q_2=-k_2}^{k_2} \left(k(k+1) - q(q \pm 1) \right)^{\frac{1}{2}} \langle k_1, k_2, q_1, q_2 | k, q \rangle \, \widehat{T}_1(k_1,q_1) \widehat{T}_2(k_2,q_2) \\
&= \left(k(k+1) - q(q \pm 1) \right)^{\frac{1}{2}} \widehat{T}_1 \otimes \widehat{T}_2(k,q).
\end{aligned}
$$

Nel terzultimo passaggio sono stati sostituiti gli indici di somma q_1 e q_2, rispettivamente,

con $q_1 \mp 1$ e $q_2 \mp 1$, ma questo non cambia in alcun modo il risultato, perché si tratta di un semplice shifting del range di somma. Nel penultimo passaggio invece si è fatto uso della proprietà dei coefficienti di Clebsch-Gordan (2.2.5) .
Dunque questa soddisfa la (4.1.2). $\square$

Vale la seguente proprietà:

$$(\widehat{T}_1 \otimes \widehat{T}_2)^*(k,q) = \widehat{T}_2^* \otimes \widehat{T}_1^*(k,q). \tag{4.1.9}$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
(\widehat{T}_1 \otimes \widehat{T}_2)^*(k,q) &= (-1)^{k-q}\widehat{T}_2 \otimes \widehat{T}_1(k,-q)^\dagger \\
&= (-1)^{k-q}\left[\sum_{q_1=-k_1}^{k_1}\sum_{q_2=-k_2}^{k_2}\langle k_1,k_2,q_1,q_2|k,-q\rangle\,\widehat{T}_1(k_1,q_1)\widehat{T}_2(k_2,q_2)\right]^\dagger \\
&= (-1)^{k-q}\sum_{q_1=-k_1}^{k_1}\sum_{q_2=-k_2}^{k_2}\langle k_1,k_2,-q_1,-q_2|k,-q\rangle\,\widehat{T}_2(k_2,-q_2)^\dagger\widehat{T}_1(k_1,-q_1)^\dagger \\
&= (-1)^{k-q}\sum_{q_1=-k_1}^{k_1}\sum_{q_2=-k_2}^{k_2}(-1)^{k_1+k_2-k}\langle k_1,k_2,q_1,q_2|k,q\rangle\,\widehat{T}_2(k_2,-q_2)^\dagger\widehat{T}_1(k_1,-q_1)^\dagger \\
&= \sum_{q_1=-k_1}^{k_1}\sum_{q_2=-k_2}^{k_2}(-1)^{k_1-q_1}(-1)^{k_2-q_2}\langle k_1,k_2,q_1,q_2|k,q\rangle\,\widehat{T}_2(k_2,-q_2)^\dagger\widehat{T}_1(k_1,-q_1)^\dagger \\
&= \widehat{T}_2^* \otimes \widehat{T}_1^*(k,q).
\end{aligned}$$

Nel terzultimo passaggio è stata usata la seguente proprietà di simmetria dei coefficienti di Clebsch-Gordan:

$$\langle k_1,k_2,q_1,q_2|k,q\rangle = (-1)^{k_1+k_2-k}\langle k_1,k_2,-q_1,-q_2|k,-q\rangle$$

$\square$

Siano $\widehat{T}_1(k,q)$ e $\widehat{T}_2(k,q)$ due operatori tensoriali dello stesso rango k. Definiamo il prodotto scalare tra $\widehat{T}_1(k,q)$ e $\widehat{T}_2(k,q)$ nel seguente modo:

$$\widehat{T}_1 \bullet \widehat{T}_2 = \widehat{T}_1 \otimes \widehat{T}_2^*(0,0). \tag{4.1.10}$$

Esplicitamente si ha che

$$\widehat{T}_1 \bullet \widehat{T}_2 = \frac{1}{(2k+1)^{1/2}} \sum_{q=-k}^{k} \widehat{T}_1(k,q)\widehat{T}_2(k,q)^\dagger. \tag{4.1.11}$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
\widehat{T}_1 \otimes \widehat{T}_2^*(0,0) &= \sum_{q_1=-k}^{k}\sum_{q_2=-k}^{k} \langle k,k,q_1,q_2|0,0\rangle\, \widehat{T}_1(k,q_1)(-1)^{k-q_2}\widehat{T}_2(k,-q_2)^\dagger \\
&= \sum_{q_1=-k}^{k}\sum_{q_2=-k}^{k} \frac{\delta_{q_1+q_2,0}(-1)^{k-q_1}}{(2k+1)^{1/2}}\widehat{T}_1(k,q_1)(-1)^{k-q_2}\widehat{T}_2(k,-q_2)^\dagger \\
&= \frac{1}{(2k+1)^{1/2}}\sum_{q_1=-k}^{k}\sum_{q_2=-k}^{k} \delta_{q_1+q_2,0}\widehat{T}_1(k,q_1)(-1)^{k-q_1-q_2}\widehat{T}_2(k,-q_2)^\dagger \\
&= \frac{1}{(2k+1)^{1/2}}\sum_{q=-k}^{k} \widehat{T}_1(k,q)\widehat{T}_2(k,-q)^\dagger.
\end{aligned}$$

Nel secondo passaggio è stata usata una proprietà dei coefficienti di Clebsch-Gordan:

$$\langle k,k,q_1,q_2|0,0\rangle = \delta_{q_1+q_2,0}(-1)^{k-q_1}/(2k+1).$$

$\square$

Si noti che:

$$(\widehat{T}_1 \bullet \widehat{T}_2)^\dagger = \widehat{T}_2 \bullet \widehat{T}_1. \tag{4.1.12}$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
(\widehat{T}_1 \bullet \widehat{T}_2)^\dagger &= \frac{1}{(2k+1)^{1/2}}\left[\sum_{q=-k}^{k} \widehat{T}_1(k,q)\widehat{T}_2(k,-q)^\dagger\right]^\dagger \\
&= \frac{1}{(2k+1)^{1/2}}\sum_{q=-k}^{k} \widehat{T}_2(k,q)\widehat{T}_1(k,-q)^\dagger \\
&= \widehat{T}_2 \bullet \widehat{T}_1.
\end{aligned}$$

$\square$

4.2 Legame tra operatori tensoriali e operatori rotazionalmente covarianti

Gli operatori rotazionalmente covarianti sono correlati agli operatori tensoriali. Dalla definizione di operatore tensoriale irriducibile si ha che ogni operatore di rango k è una collezione di $2k+1$ operatori; si pensi ad un operatore scalare, esso è un singolo operatore e dunque può essere accomunato ad un operatore tensoriale di rango 0; si pensi ora ad un operatore vettoriale o diadico simmetrico a traccia nulla, essi sono collezioni, rispettivamente, di 3 e 5 operatori, proprio come un operatore tensoriale di rango 1 e di rango 2. Vediamo ora di trovare dei legami, da un punto di vista matematico più rigoroso tra operatori rotazionalmente covarianti e tensoriali.

Operatori scalari

Iniziamo cercando relazioni tra operatori scalari e tensoriali di rango 0.
Se $\hat{A}$ è un operatore scalare abbiamo visto che valgono le relazioni di commutazione $[\hat{j}_i, \hat{A}] = 0$. In componenti sferiche si ha allora:

$$[\hat{j}_0, \hat{A}] = 0 \tag{4.2.1}$$

$$[\hat{j}_{\pm 1}, \hat{A}] = 0. \tag{4.2.2}$$

Dunque, se vedo $\hat{A}$ come $\hat{A}(0,0)$, le relazioni (4.1.1) e (4.1.2) danno che:

$$[\hat{j}_0, \widehat{A}(0,0)] = 0 \times \hbar \widehat{A}(0,0) = 0$$

$$[\hat{j}_{\pm 1}, \widehat{A}(0,0)] = \hbar(0(0+1) - 0(0 \pm 1))^{\frac{1}{2}} \widehat{A}(0,0) = 0.$$

Inoltre, per quanto riguarda l'aggiunzione, si ha che se $\hat{A}$ è autoggiunto, lo è anche $\widehat{A}(0,0)$:

$$\widehat{A}^*(0,0) = (-1)^{0-0} \widehat{A}(0,0)^\dagger = \widehat{A}(0,0).$$

Cioè $\widehat{A}(0,0)$ è autoaggiunto:

$$\widehat{A}^*(0,0) = \widehat{A}(0,0). \tag{4.2.3}$$

Allora diremo che un $\hat{A}$ è un operatore scalare se e solo se l'operatore tensoriale

$$\widehat{A}(0,0) = \hat{A} \tag{4.2.4}$$

è un operatore tensoriale di rango 0. Inoltre $\hat{A}$ è autoaggiunto se e solo e $\widehat{A}(0,0)$ lo è.

Operatori vettoriali

Vediamo ora le relazioni tra operatori vettoriali e operatori tensoriali di rango 1. Le relazioni di commutazione già viste, che riportiamo $[\hat{j}_i, \hat{V}_j] = i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} \hat{V}_k$, si possono esprimere in coordinate sferiche tramite le relazioni

$$\hat{V}_0 = \hat{V}_3 \qquad \hat{j}_0 = \hat{j}_3 \tag{4.2.5}$$
$$\hat{V}_{\pm 1} = \hat{V}_1 \pm i\hat{V}_2 \qquad \hat{j}_{\pm 1} = \hat{j}_1 \pm i\hat{j}_2 \tag{4.2.6}$$

che danno le seguenti:

$$[\hat{j}_0, \hat{V}_0] = 0 \tag{4.2.7a}$$
$$[\hat{j}_0, \hat{V}_{\pm 1}] = \pm\hbar \hat{V}_{\pm 1} \tag{4.2.7b}$$
$$[\hat{j}_{\pm 1}, \hat{V}_0] = \mp\hbar \hat{V}_{\pm 1} \tag{4.2.7c}$$
$$[\hat{j}_{\pm 1}, \hat{V}_{\pm 1}] = 0 \tag{4.2.7d}$$
$$[\hat{j}_{\pm 1}, \hat{V}_{\mp 1}] = \pm 2\hbar \hat{V}_0. \tag{4.2.7e}$$

Dimostrazione. Basta esprimere le precedenti relazioni tramite le (4.2.5) e (4.2.6) e utilizzare le regole di commutazione (3.2.13). □

L'operatore vettoriale $\hat{\mathbf{V}}$ è autoaggiunto se, in coordinate sferiche:

$$\hat{V}_0^\dagger = \hat{V}_0 \tag{4.2.8a}$$
$$\hat{V}_{\pm 1}{}^\dagger = \hat{V}_{\mp 1}. \tag{4.2.8b}$$

Dimostrazione. Infatti, $\hat{\mathbf{V}}$ è autoaggiunto se $\hat{V}_i^\dagger = \hat{V}_i$ e quindi

$$\hat{V}_0^\dagger = \hat{V}_3^\dagger = \hat{V}_3 = \hat{V}_0$$
$$\hat{V}_{\pm 1}{}^\dagger = (\hat{V}_1 \pm i\hat{V}_2)^\dagger = (\hat{V}_1 \mp i\hat{V}_2) = \hat{V}_{\mp 1}.$$

□

Allora si può pensare a $\hat{\mathbf{V}}$ come ad un operatore tensoriale di rango 1, $\widehat{V}(1,q)$, con $q = -1, 0, 1$.

Dunque, dalle equazioni (4.1.1) e (4.1.2), $\widehat{V}(1,q)$ è operatore tensoriale di rango 1 se:

$$[\hat{j}_0, \widehat{V}(1,0)] = 0 \tag{4.2.9a}$$

$$[\hat{j}_0, \widehat{V}(1,\pm 1)] = \pm\hbar\widehat{V}(1,\pm 1) \tag{4.2.9b}$$

$$[\hat{j}_{\pm 1}, \widehat{V}(1,0)] = 2^{1/2}\hbar\widehat{V}(1,\pm 1) \tag{4.2.9c}$$

$$[\hat{j}_{\pm 1}, \widehat{V}(1,\pm 1)] = 0 \tag{4.2.9d}$$

$$[\hat{j}_{\pm 1}, \widehat{V}(1,\mp 1)] = 2^{1/2}\hbar\widehat{V}(1,0) \tag{4.2.9e}$$

Inoltre, $\widehat{V}(1,q)$ è un operatore tensoriale autoaggiunto se:

$$\widehat{V}(1,0)^\dagger = -\widehat{V}(1,0) \tag{4.2.10a}$$

$$\widehat{V}(1,\pm 1)^\dagger = \widehat{V}(1,\mp 1). \tag{4.2.10b}$$

Dimostrazione. Infatti $\widehat{V}(1,q)^* = (-1)^{1-q}\widehat{V}(1,-q)^\dagger$. Sostituendo a q i valori $-1, 0, 1$ si arriva subito alle (4.2.10a) e (4.2.10b). □

Per quanto detto $\mathbf{\hat{V}}$ è un operatore vettoriale se e solo gli operatori

$$\widehat{V}(1,0) = i\hat{V}_0 \tag{4.2.11a}$$

$$\widehat{V}(1,\pm 1) = \frac{\mp i}{2^{1/2}}\hat{V}_{\pm 1} \tag{4.2.11b}$$

costituiscono un operatore tensoriale di rango 1. In tal caso $\mathbf{\hat{V}}$ è autoaggiunto se e solo se $\widehat{V}(1,q)$ è operatore tensoriale autoggiunto.

Dimostrazione. Supponiamo che $\mathbf{\hat{V}}$ sia un operatore vettoriale per cui valgano le regole di commutazione (4.2.7) e $\widehat{V}(1,q)$ un operatore tensoriale definito tramite le (4.2.11). Allora l'operatore tensoriale $\widehat{V}(1,q)$ soddisfa le seguenti

$$[\hat{j}_0, \widehat{V}(1,0)] = [\hat{j}_0, i\hat{V}_0] = 0$$

$$[\hat{j}_0, \widehat{V}(1,\pm 1)] = \frac{\mp i}{2^{1/2}}[\hat{j}_0, \hat{V}_{\pm 1}] = -\frac{i\hbar}{2^{1/2}}\hat{V}_{\pm 1} = \pm\hbar\widehat{V}(1,\pm 1)$$

$$[\hat{j}_{\pm 1}, \widehat{V}(1,0)] = [\hat{j}_{\pm 1}, \hat{V}_0] = \mp\hbar\widehat{V}(1,\pm 1) = 2^{1/2}\hbar\widehat{V}(1,\pm 1)$$

$$[\hat{j}_{\pm 1}, \widehat{V}(1,\pm 1)] = \frac{\mp i}{2^{1/2}}[\hat{j}_{\pm 1}, \hat{V}_{\pm 1}] = 0$$

$$[\hat{j}_{\pm 1}, \widehat{V}(1,\mp 1)] = \frac{\pm i}{2^{1/2}}[\hat{j}_{\pm 1}, \hat{V}_{\pm 1}] = 2^{1/2}i\hbar\hat{V}_0 = 2^{1/2}\hbar\widehat{V}(1,0).$$

Con queste $\widehat{V}(1,q)$ soddisfa le (4.2.9) e costituisce un operatore tensoriale di rango 1. Analogamente si dimostra il viceversa. Cioè partendo da un operatore tensoriale per il quale valgono le (4.2.9) e scegliendo un $\hat{\mathbf{V}}$, le cui componenti sferiche sono in accordo con le (4.2.11), queste obbediscono alle (4.2.7). Così si è dimostrata la relazione tra operatori tensoriali di rango 1 e operatori vettoriali.
Supponendo ora che l'operatore vettoriale $\hat{\mathbf{V}}$ sia autoaggiunto, cioè che valgano le (4.2.8), le componenti dell'operatore tensoriale $\widehat{V}(1,q)$ soddisfano

$$\hat{V}^*(1,0) = -\widehat{V}(1,0)^\dagger = -(i\hat{V}_0)^\dagger = i\hat{V}_0 = \widehat{V}(1,0)$$
$$\hat{V}^*(1,\pm1) = \widehat{V}(1,\mp1)^\dagger = \left(\frac{\pm i}{2^{1/2}}\hat{V}_{\mp1}\right)^\dagger = \frac{\mp i}{2^{1/2}}\hat{V}_{\pm1} = \widehat{V}(1,\pm1).$$

Con queste $\widehat{V}(1,q)$ soddisfa le (4.2.10). Analogamente si dimostra il viceversa. Cioè, partendo da un operatore tensoriale autoaggiunto, per il quale valgono le (4.2.10), le componenti sferiche di $\hat{\mathbf{V}}$ obbediscono alle relazioni (4.2.8).

□

Operatori diadici simmetrici a traccia nulla

Vediamo ora le relazioni tra operatori diadici simmetrici e traccia nulla e operatori tensoriali di rango 2. Le relazioni di commutazione già viste che riportiamo $[\hat{j}_i, \widehat{Q}_{jk}] = i\hbar\sum_l(\epsilon_{ijl}\widehat{Q}_{lk} + \epsilon_{ikl}\widehat{Q}_{jl})$, scritte in base sferica generano le seguenti relazioni:

$$\widehat{Q}_{00} = \widehat{Q}_{33} \tag{4.2.12a}$$
$$\widehat{Q}_{\pm10} = \widehat{Q}_{13} \pm i\widehat{Q}_{23} \tag{4.2.12b}$$
$$\widehat{Q}_{\pm1\pm1} = \widehat{Q}_{11} - \widehat{Q}_{22} \pm 2i\widehat{Q}_{12}. \tag{4.2.12c}$$

Le alte componenti si ricavano dalle condizioni di simmetria e annullamento della traccia: $\widehat{Q}_{0\pm1} = \widehat{Q}_{31} \pm i\widehat{Q}_{32} = \widehat{Q}_{13} \pm i\widehat{Q}_{23} = \widehat{Q}_{\pm10}$ e $\widehat{Q}_{\pm1\mp1} = \widehat{Q}_{11} - \widehat{Q}_{22} = -\widehat{Q}_{33} = -\widehat{Q}_{00}$. In termini di queste le relazioni di commutazioni prendono la forma:

$$[\hat{j}_0, \widehat{Q}_{00}] = 0 \tag{4.2.13a}$$
$$[\hat{j}_0, \widehat{Q}_{\pm10}] = \pm\hbar\widehat{Q}_{\pm10} \tag{4.2.13b}$$
$$[\hat{j}_0, \widehat{Q}_{\pm1\pm1}] = \pm2\hbar\widehat{Q}_{\pm1\pm1} \tag{4.2.13c}$$
$$[\hat{j}_{\pm1}, \widehat{Q}_{00}] = \mp2\hbar\widehat{Q}_{\pm10} \tag{4.2.13d}$$
$$[\hat{j}_{\pm1}, \widehat{Q}_{\pm10}] = \mp\hbar\widehat{Q}_{\pm1\pm1} \tag{4.2.13e}$$

$$[\hat{j}_{\pm1}, \widehat{Q}_{\mp10}] = \mp 3\hbar \widehat{Q}_{\pm1\mp1} \tag{4.2.13f}$$
$$[\hat{j}_{\pm1}, \widehat{Q}_{\pm1\pm1}] = 0 \tag{4.2.13g}$$
$$[\hat{j}_{\pm1}, \widehat{Q}_{\mp1\mp1}] = \pm 4\hbar \widehat{Q}_{\mp10}. \tag{4.2.13h}$$

Dimostrazione. Sia $\mathbf{e}_\alpha$ una base sferica orientata. Utilizzando le regole di commutazione (3.2.22) con $\mathbf{a} = \mathbf{e}_\alpha$, $\mathbf{b} = \mathbf{e}_\beta$ e $\mathbf{c} = \mathbf{e}_\gamma$ e sapendo che:

$$\begin{aligned}
[\hat{j}_\alpha, \widehat{Q}_{\beta\gamma}] &= [\mathbf{e}_\alpha \cdot \hat{\boldsymbol{j}}, \mathbf{e}_\beta \cdot \widehat{\boldsymbol{Q}} \cdot \mathbf{e}_\gamma] = i\hbar(\mathbf{e}_\alpha \times \mathbf{e}_\beta \cdot \widehat{\boldsymbol{Q}} \cdot \mathbf{e}_\gamma + \mathbf{e}_\beta \cdot \widehat{\boldsymbol{Q}} \cdot \mathbf{e}_\alpha \times \mathbf{e}_\gamma) \\
&= \hbar[\delta_{\alpha0}\beta\mathbf{e}_\beta - \delta_{\beta0}\alpha\mathbf{e}_\alpha + \delta_{-\alpha\beta}(\alpha-\beta)\mathbf{e}_0) \cdot \widehat{\boldsymbol{Q}} \cdot \mathbf{e}_\gamma \\
&\qquad + \mathbf{e}_\beta \cdot \widehat{\boldsymbol{Q}} \cdot (\delta_{\alpha0}\gamma\mathbf{e}_\gamma - \delta_{\gamma0}\alpha\mathbf{e}_\alpha - \delta_{-\alpha\gamma}(\alpha-\gamma)\mathbf{e}_0)],
\end{aligned}$$

scrivendo quest'ultimo passaggio per tutte le $\alpha, \beta, \gamma = -1, 0, +1$ si ottengono le (4.2.13).

□

Le relazioni di autoaggiunzione si hanno per:

$$\widehat{Q}_{00}{}^\dagger = \widehat{Q}_{00} \tag{4.2.14a}$$
$$\widehat{Q}_{\pm10}{}^\dagger = \widehat{Q}_{\mp10} \tag{4.2.14b}$$
$$\widehat{Q}_{\pm1\pm1}{}^\dagger = \widehat{Q}_{\mp1\mp1}. \tag{4.2.14c}$$

Dimostrazione. L'operatore $\widehat{\boldsymbol{Q}}$ è autoaggiunto se $Q_{ij}^\dagger = Q_{ij}$, quindi in coordinate sferiche:

$$\begin{aligned}
&\widehat{Q}_{00}{}^\dagger = \widehat{Q}_{33}{}^\dagger = \widehat{Q}_{33} = \widehat{Q}_{00} \\
&\widehat{Q}_{\pm10}{}^\dagger = (\widehat{Q}_{13} \pm \widehat{Q}_{23})^\dagger = \widehat{Q}_{13} \mp \widehat{Q}_{23} = \widehat{Q}_{\mp10} \\
&\widehat{Q}_{\pm1\pm1}{}^\dagger = (\widehat{Q}_{11} - \widehat{Q}_{22} \pm i\widehat{Q}_{12})^\dagger = \widehat{Q}_{11} - \widehat{Q}_{22} \mp i\widehat{Q}_{12} = \widehat{Q}_{\mp1\mp1}.
\end{aligned}$$

□

Allora definisco $\widehat{Q}(2,q)$, con $q = -2, -1, 0, 1, 2$. Esso è un operatore tensoriale se soddisfa le equazioni (4.1.1) e (4.1.2), cioè se:

$$[\hat{j}_0, \widehat{Q}(2,0)] = 0 \tag{4.2.15a}$$
$$[\hat{j}_0, \widehat{Q}(2,\pm1)] = \pm\hbar\widehat{Q}(2,\pm1) \tag{4.2.15b}$$
$$[\hat{j}_0, \widehat{Q}(2,\pm2)] = \pm2\hbar\widehat{Q}(2,\pm2) \tag{4.2.15c}$$
$$[\hat{j}_{\pm1}, \widehat{Q}(2,0)] = 6^{1/2}\hbar\widehat{Q}(2,\pm1) \tag{4.2.15d}$$
$$[\hat{j}_{\pm1}, \widehat{Q}(2,\pm1)] = 2\hbar\widehat{Q}(2,\pm2) \tag{4.2.15e}$$

$$[\hat{j}_{\pm 1}, \widehat{Q}(2,\mp 1)] = 6^{1/2}\hbar \widehat{Q}(2,0) \tag{4.2.15f}$$

$$[\hat{j}_{\pm 1}, \widehat{Q}(2,\pm 2)] = 0 \tag{4.2.15g}$$

$$[\hat{j}_{\pm 1}, \widehat{Q}(2,\mp 2)] = 2\hbar \widehat{Q}(2,\mp 1). \tag{4.2.15h}$$

Dall'equazione (4.1.7) l'operatore $\widehat{Q}(2,q)$ è autoaggiunto se:

$$\widehat{Q}(2,0)^\dagger = \widehat{Q}(2,0) \tag{4.2.16a}$$

$$\widehat{Q}(2,\pm 1)^\dagger = -\widehat{Q}(2,\mp 1) \tag{4.2.16b}$$

$$\widehat{Q}(2,\pm 2)^\dagger = \widehat{Q}(2,\mp 2). \tag{4.2.16c}$$

Per quanto detto, $\widehat{\boldsymbol{Q}}$ è un operatore diadico simmetrico a traccia nulla se e solo se gli operatori

$$\widehat{Q}(2,0) = -\frac{3^{1/2}}{2^{1/2}}\widehat{Q}_{00} \tag{4.2.17a}$$

$$\widehat{Q}(2,\pm 1) = \pm\widehat{Q}_{\pm 10} \tag{4.2.17b}$$

$$\widehat{Q}(2,\pm 2) = -\frac{1}{2}\widehat{Q}_{\pm 1 \pm 1} \tag{4.2.17c}$$

costituiscono un operatore tensoriale di rango 2. In tal caso $\widehat{\boldsymbol{Q}}$ è autoaggiunto se e solo se $\widehat{Q}(2,q)$ è autoaggiunto.

Dimostrazione. Supponiamo che $\widehat{\boldsymbol{Q}}$ sia un operatore diadico simmetrico a traccia nulla, allora le sue componenti soddisfano le relazioni (4.2.13), supponiamo inoltre che $\widehat{Q}(2,q)$ sia espresso tramite le relazioni (4.2.17), allora valgono le seguenti:

$$[\hat{j}_0, \widehat{Q}(2,0)] = [\hat{j}_0, -\frac{3^{1/2}}{2^{1/2}}\widehat{Q}_{00}] = 0$$

$$[\hat{j}_0, \widehat{Q}(2,\pm 1)] = [\hat{j}_0, \pm\widehat{Q}_{\pm 10}] = \hbar\widehat{Q}_{\pm 10} = \hbar\widehat{Q}(2,\pm 1)$$

$$[\hat{j}_0, \widehat{Q}(2,\pm 2)] = [\hat{j}_0, -\frac{1}{2}\widehat{Q}_{\pm 1\pm 1}] = \pm\hbar\widehat{Q}_{\pm 1\pm 1} = \pm 2\hbar\widehat{Q}(2,\pm 2)$$

$$[\hat{j}_{\pm 1}, \widehat{Q}(2,0)] = [\hat{j}_{\pm 1}, -\frac{3^{1/2}}{2^{1/2}}\widehat{Q}_{00}] = -\frac{3^{1/2}}{2^{1/2}}(\mp 1)\hbar\widehat{Q}_{\pm 10} = 6^{1/2}\hbar\widehat{Q}(2,\pm 1)$$

$$[\hat{j}_{\pm 1}, \widehat{Q}(2,\pm 1)] = [\hat{j}_{\pm 1}, \pm\widehat{Q}_{\pm 10}] = \pm(\mp\hbar)\widehat{Q}_{\pm 1\pm 1} = -\widehat{Q}_{\pm 1\pm 1} = 2\hbar\widehat{Q}(2,\pm 2)$$

$$[\hat{j}_{\pm 1}, \widehat{Q}(2,\mp 1)] = [\hat{j}_{\pm 1}, \mp\widehat{Q}_{\mp 10}] = \mp[\hat{j}_{\pm 1}, \widehat{Q}_{\mp 10}] = \mp(\mp 3\hbar)\widehat{Q}_{\pm 1\mp 1} = -3\hbar\widehat{Q}_{00} = 6^{1/2}\hbar\widehat{Q}(2,0)$$

$$[\hat{j}_{\pm 1}, \widehat{Q}(2,\pm 2)] = [\hat{j}_{\pm 1}, -\frac{1}{2}\widehat{Q}_{\pm 1\pm 1}] = 0$$

$$[\hat{j}_{\pm 1}, \widehat{Q}(2,\mp 2)] = [\hat{j}_{\pm 1}, -\frac{1}{2}\widehat{Q}_{\mp 1\mp 1}] = -\frac{1}{2}(\pm 4\hbar)\widehat{Q}_{\mp 10} = 2\hbar\widehat{Q}(2,\mp 1).$$

Così, $\widehat{Q}(2,q)$ soddisfa le (4.2.15). In modo analogo si dimostra il viceversa, cioè, se supponiamo che $\widehat{Q}(2,q)$ è un operatore tensoriale di rango 2, allora soddisferà le relazioni (4.2.15), se poi $\widehat{\boldsymbol{Q}}$ è un operatore per il quale valgono le (4.2.17), allora si arriva a provare che $\widehat{\boldsymbol{Q}}$ soddisfa anche le equazioni (4.2.13). Così si è dimostrata la relazione tra operatori diadici simmetrici a traccia nulla e operatori tensoriali di rango 2.
Supponendo ora che l'operatore diadico simmetrico a traccia nulla $\widehat{\boldsymbol{Q}}$ sia autoaggiunto, cioè che valgano le (4.2.14), allora le componenti dell'operatore tensoriale $\widehat{Q}(2,q)$ soddisfano

$$
\begin{aligned}
&\widehat{Q}(2,0)^\dagger = -\frac{3^{1/2}}{2^{1/2}}\widehat{Q}_{00}^\dagger = -\frac{3^{1/2}}{2^{1/2}}\widehat{Q}_{00} = \widehat{Q}(2,0)\\
&\widehat{Q}(2,\pm1)^\dagger = \pm(\widehat{Q}_{\pm10})^\dagger = \pm\widehat{Q}_{\mp10} = -\widehat{Q}(2,\mp1)\\
&\widehat{Q}(2,\pm2)^\dagger = -\frac{1}{2}(\widehat{Q}_{\pm1\pm1})^\dagger = -\frac{1}{2}\widehat{Q}_{\mp1\mp1} = \widehat{Q}(2,\mp2).
\end{aligned}
$$

In modo analogo si dimostra il viceversa. □

Siano $\hat{A}$ un operatore scalare e $\hat{\mathbf{V}}$ un operatore vettoriale, siano poi $\widehat{A}(0,0)$ e $\widehat{V}(1,q)$ i corrispondenti operatori tensoriali. Allora valgono le seguenti:

$$(\widehat{A}\otimes\widehat{V})(1,q) = (\widehat{A}\widehat{V})(1,q) \tag{4.2.18a}$$

$$(\widehat{V}\otimes\widehat{A})(1,q) = (\widehat{V}\widehat{A})(1,q). \tag{4.2.18b}$$

dove $\widehat{A}\widehat{V}$ e $\widehat{V}\widehat{A}$ sono operatori tensoriali di ragno 1 associati agli operatori $\hat{A}\hat{\mathbf{V}}$ e $\hat{\mathbf{V}}\hat{A}$

Dimostrazione. Come dimostrato il precedenza $\hat{A}\hat{\mathbf{V}}$ e $\hat{\mathbf{V}}\hat{A}$ sono operatori vettoriali. Le loro componenti sferiche sono date da:

$$
\begin{aligned}
&(\hat{A}\hat{\mathbf{V}})_0 = \hat{A}\hat{\mathbf{V}}_0\\
&(\hat{A}\hat{\mathbf{V}})_{\pm1} = \hat{A}\hat{\mathbf{V}}_{\pm1}.
\end{aligned}
$$

Quindi, come visto in precedenza, le componenti sferiche dell'operatore tensoriale $\widehat{A}\widehat{V}(1,q)$ sono date da:

$$
\begin{aligned}
&\widehat{A}\widehat{V}(1,0) = i\hat{A}\hat{\mathbf{V}}_0\\
&\widehat{A}\widehat{V}(1,\pm1) = \frac{\mp i}{2^{1/2}}\hat{A}\hat{\mathbf{V}}_{\pm1}.
\end{aligned}
$$

Consideriamo ora l'operatore tensoriale prodotto degli operatori $\widehat{A}(0,0)$ e $\widehat{V}(1,q)$:

$$(\widehat{A} \otimes \widehat{V})(1,q) = \sum_{q=-1}^{1} \langle 0,1,0,q|1,q\rangle\, \widehat{A}(0,0)\widehat{V}(1,q).$$

In particolare, le singole componenti risultano essere:

$$(\widehat{A} \otimes \widehat{V})(1,0) = \langle 0,1,0,0|1,0\rangle\, \widehat{A}(0,0)\widehat{V}(1,0) = i\hat{A}\hat{\mathbf{V}}_0$$
$$(\widehat{A} \otimes \widehat{V})(1,\pm 1) = \langle 0,1,0,\pm 1|1,\pm 1\rangle\, \widehat{A}(0,0)\widehat{V}(1,\pm 1) = \frac{\mp i}{2^{1/2}}\hat{A}\hat{\mathbf{V}}_{\pm 1}.$$

Quanto visto dimostra la (4.2.18a), per dimostrare la (4.2.18b) il procedimento è analogo.

□

Siano $\hat{\mathbf{X}}$ e $\hat{\mathbf{Y}}$ operatori vettoriali e siano $\widehat{X}(1,q)$ e $\widehat{Y}(1,q)$ i corrispondenti operatori tensoriali di rango 1. Allora valgono le seguenti:

$$\widehat{X} \otimes \widehat{Y}(0,0) = \frac{1}{3^{1/2}}(\widehat{X} \cdot \widehat{Y})(0,0) \tag{4.2.19a}$$
$$\widehat{X} \otimes \widehat{Y}(1,q) = -\frac{1}{2^{1/2}}(\widehat{X} \times \widehat{Y})(1,q) \tag{4.2.19b}$$
$$\widehat{X} \otimes \widehat{Y}(2,q) = (\widehat{X} \circ \widehat{Y})(2,q), \tag{4.2.19c}$$

dove a destra delle uguaglianze appaiono operatori tensoriali che sono i corrispondenti di $\hat{\mathbf{X}} \cdot \hat{\mathbf{Y}}$ scalare, $\hat{\mathbf{X}} \times \hat{\mathbf{Y}}$ vettoriale e $\hat{\mathbf{X}} \circ \hat{\mathbf{Y}}$ diadico simmetrico a traccia nulla.

Dimostrazione. Dimostriamo la prima delle (4.2.19). Il prodotto scalare di $\hat{\mathbf{X}}$ e $\hat{\mathbf{Y}}$ è un operatore scalare, come visto in precedenza. Esprimendo tale prodotto scalare tramite le componenti sferiche di $\hat{\mathbf{X}}$ e $\hat{\mathbf{Y}}$ si ha che:

$$\hat{\mathbf{X}} \cdot \hat{\mathbf{Y}} = \frac{1}{2}(\hat{X}_{-1}\hat{Y}_{+1} + \hat{X}_{+1}\hat{Y}_{-1}) + \hat{X}_0\hat{Y}_0.$$

Dunque l'operatore tensoriale associato ad un operatore scalare è un operatore tensoriale di rango 0:

$$(\widehat{X} \cdot \widehat{Y})(0,0) = \frac{1}{2}(\hat{X}_{-1}\hat{Y}_{+1} + \hat{X}_{+1}\hat{Y}_{-1}) + \hat{X}_0\hat{Y}_0. \tag{4.2.20}$$

Consideriamo ora l'operatore tensoriale prodotto degli operatori tensoriali $\widehat{X}(1,q)$ e

$\widehat{Y}(1,q)$, dalla (4.1.8)

$$\begin{aligned}\widehat{X}\otimes\widehat{Y}(0,0) &= \sum_{q_1=-1}^{1}\sum_{q_2=-1}^{1}\langle 1,1,q_1,q_2|0,0\rangle\,\widehat{X}(1,q_1)\widehat{Y}(1,q_2)\\ &= \langle 1,1,1,-1|0,0\rangle\,\widehat{X}(1,1)\widehat{Y}(1,-1)+\langle 1,1,-1,1|0,0\rangle\,\widehat{X}(1,-1)\widehat{Y}(1,1)\\ &+ \langle 1,1,0,0|0,0\rangle\,\widehat{X}(1,0)\widehat{Y}(1,0)\\ &= \frac{1}{3^{1/2}}\Big(\widehat{X}(1,1)\widehat{Y}(1,-1)+\widehat{X}(1,-1)\widehat{Y}(1,1)-\widehat{X}(1,0)\widehat{Y}(1,0)\Big)\,.\end{aligned}$$

Esprimendo $\widehat{X}(1,q)$ e $\widehat{Y}(1,q)$ in termini di $\hat{X}_0$, $\hat{X}_{\pm1}$, $\hat{Y}_0$, $\hat{Y}_{\pm1}$, tramite le relazioni (4.2.11) si trova:

$$\frac{1}{2\cdot 3^{1/2}}(\hat{X}_{+1}\hat{Y}_{-1}+\hat{X}_{-1}\hat{Y}_{+1}+2\hat{X}_0\hat{Y}_0). \tag{4.2.21}$$

Comparando la (4.2.20) con la (4.2.21) si trova la (4.2.19a).
Dimostriamo ora la (4.2.19b). Se esprimiamo il prodotto vettoriale $\hat{\mathbf{X}}\times\hat{\mathbf{Y}}$ in coordinate sferiche, abbiamo che:

$$\hat{\mathbf{X}}\times\hat{\mathbf{Y}} = \frac{i}{2^{1/2}}(\hat{X}_0\hat{Y}_{-1}-\hat{Y}_0\hat{X}_{-1})\mathbf{e}_{+1}-\frac{i}{2^{1/2}}(\hat{X}_{-1}\hat{Y}_{+1}-\hat{Y}_{-1}\hat{X}_{+1})\mathbf{e}_0+\frac{i}{2^{1/2}}(\hat{X}_0\hat{Y}_{+1}-\hat{Y}_0\hat{X}_{+1})\mathbf{e}_{-1}.$$

In particolare

$$(\hat{\mathbf{X}}\times\hat{\mathbf{Y}})_0 = (\hat{\mathbf{X}}\times\hat{\mathbf{Y}})\cdot\mathbf{e}_0 = -\frac{i}{2^{1/2}}(\hat{X}_{-1}\hat{Y}_{+1}-\hat{Y}_{-1}\hat{X}_{+1}) \tag{4.2.22a}$$

$$(\hat{\mathbf{X}}\times\hat{\mathbf{Y}})_{\pm1} = (\hat{\mathbf{X}}\times\hat{\mathbf{Y}})\cdot\mathbf{e}_{\pm1} = \pm i(\hat{X}_0\hat{Y}_{\pm1}-\hat{Y}_0\hat{X}_{\pm1}). \tag{4.2.22b}$$

Da queste ultime derivano quindi le seguenti:

$$(\widehat{X}\times\widehat{Y})(1,0) = \frac{1}{2}(\hat{X}_{-1}\hat{Y}_{+1}-\hat{Y}_{-1}\hat{X}_{+1}) \tag{4.2.23a}$$

$$(\widehat{X}\times\widehat{Y})(1,\pm1) = \frac{1}{2^{1/2}}(\hat{X}_0\hat{Y}_{\pm1}-\hat{Y}_0\hat{X}_{\pm1}). \tag{4.2.23b}$$

Consideriamo ora l'operatore tensoriale prodotto di $\widehat{X}(1,q)$ e $\widehat{Y}(1,q)$:

$$\widehat{X}\otimes\widehat{Y}(1,q) = \sum_{q_1=-1}^{1}\sum_{q_2=-1}^{1}\langle 1,1,q_1,q_2|1,q\rangle\,\widehat{X}(1,q_1)\widehat{Y}(1,q_2).$$

Da questa si ricavano le seguenti

$$
\begin{aligned}
\widehat{X}\otimes\widehat{Y}(1,0) &= \langle 1,1,0,0|1,0\rangle\,\widehat{X}(1,0)\widehat{Y}(1,0)\\
&\quad+\langle 1,1,1,-1|1,0\rangle\,\widehat{X}(1,1)\widehat{Y}(1,-1)+\langle 1,1,-1,1|1,0\rangle\,\widehat{X}(1,-1)\widehat{Y}(1,1)\\
&=\frac{1}{2^{1/2}}\left(\widehat{X}(1,1)\widehat{Y}(1,-1)-\widehat{X}(1,-1)\widehat{Y}(1,1)\right)\\
\widehat{X}\otimes\widehat{Y}(1,\pm1) &= \langle 1,1,\pm1,0|1,\pm1\rangle\,\widehat{X}(1,\pm1)\widehat{Y}(1,0)+\langle 1,1,0,\pm1|1,\pm1\rangle\,\widehat{X}(1,0)\widehat{Y}(1,\pm1)\\
&=\pm\frac{1}{2^{1/2}}\left(\widehat{X}(1,\pm1)\widehat{Y}(1,0)-\widehat{X}(1,0)\widehat{Y}(1,\pm1)\right).
\end{aligned}
$$

Esprimendo $\widehat{X}(1,q)$ e $\widehat{Y}(1,q)$ in termini di $\hat{X}_0$, $\hat{X}_{\pm1}$, $\hat{Y}_0$, $\hat{Y}_{\pm1}$, tramite le (4.2.11), si trova:

$$
\widehat{X}\otimes\widehat{Y}(1,0) = -\frac{1}{2}\frac{1}{2^{1/2}}(\hat{X}_{-1}\hat{Y}_{+1}-\hat{X}_{+1}\hat{X}_{-1}) \tag{4.2.24a}
$$

$$
\widehat{X}\otimes\widehat{Y}(1,\pm1) = \frac{1}{2}(\hat{X}_0\hat{Y}_{\pm1}-\hat{Y}_0\hat{X}_{\pm1}). \tag{4.2.24b}
$$

Comparando le equazioni (4.2.23) con le (4.2.24) si trova la (4.2.19b).
Dimostriamo ora la (4.2.19c). Se esprimiamo il prodotto diadico simmetrico a traccia nulla $\hat{\mathbf{X}}\circ\hat{\mathbf{Y}}$ in coordinate sferiche abbiamo che:

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathbf{X}}\circ\hat{\mathbf{Y}} &= \frac{1}{2}\left(\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{Y}}+(\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{Y}})^t\right)-\frac{1}{3}\hat{\mathbf{X}}\cdot\hat{\mathbf{Y}}\mathbf{1}\\
&=\frac{1}{4}\hat{X}_{-1}\hat{Y}_{-1}\mathbf{e}_{+1}\mathbf{e}_{+1}+\frac{1}{4}(\hat{X}_{-1}\hat{Y}_0+\hat{X}_0\hat{Y}_{-1})(\mathbf{e}_{+1}\mathbf{e}_0+\mathbf{e}_0\mathbf{e}_{+1})\\
&\qquad+\frac{1}{6}(\hat{X}_{-1}\hat{Y}_{+1}+\hat{X}_{+1}\hat{Y}_{-1}-4\hat{X}_0\hat{Y}_0)\times\left(\frac{1}{4}\mathbf{e}_{+1}\mathbf{e}_{-1}+\frac{1}{4}\mathbf{e}_{-1}\mathbf{e}_{+1}-\mathbf{e}_0\mathbf{e}_0\right)\\
&\qquad\qquad+\frac{1}{4}(\hat{X}_{+1}\hat{Y}_0+\hat{X}_0\hat{Y}_{+1})(\mathbf{e}_{-1}\mathbf{e}_0+\mathbf{e}_0\mathbf{e}_{-1})+\frac{1}{4}\hat{X}_{+1}\hat{Y}_{+1}\mathbf{e}_{-1}\mathbf{e}_{-1}.
\end{aligned}
$$

Dunque le componenti sferiche di $\hat{\mathbf{X}}\circ\hat{\mathbf{Y}}$ saranno date da:

$$
\begin{aligned}
(\hat{\mathbf{X}}\circ\hat{\mathbf{Y}})_{00} &= \mathbf{e}_0\cdot\hat{\mathbf{X}}\circ\hat{\mathbf{Y}}\cdot\mathbf{e}_0 = -\frac{1}{6}(\hat{X}_{-1}\hat{Y}_{+1}+\hat{X}_{+1}\hat{Y}_{-1}-4\hat{X}_0\hat{Y}_0)\\
(\hat{\mathbf{X}}\circ\hat{\mathbf{Y}})_{\pm10} &= \mathbf{e}_{\pm1}\cdot\hat{\mathbf{X}}\circ\hat{\mathbf{Y}}\cdot\mathbf{e}_0 = \frac{1}{2}(\hat{X}_{\pm1}\hat{Y}_0+\hat{X}_0\hat{Y}_{\pm1})\\
(\hat{\mathbf{X}}\circ\hat{\mathbf{Y}})_{\pm1\pm1} &= \mathbf{e}_{\pm1}\cdot\hat{\mathbf{X}}\circ\hat{\mathbf{Y}}\cdot\mathbf{e}_{\pm1} = \hat{X}_{\pm1}\hat{Y}_{\pm1}.
\end{aligned}
$$

Ricordando ora che gli operatori diadici simmetrici a traccia nulla possono essere scritti anche come operatori tensoriali di rango 2, grazie alle (4.2.17) ho che:

$$
\begin{aligned}
(\widehat{X} \circ \widehat{Y})(2,0) &= \frac{3^{1/2}}{2^{1/2}}(\hat{\mathbf{X}} \circ \hat{\mathbf{Y}})_{00} = \frac{1}{6^{1/2}2}(\hat{X}_{-1}\hat{Y}_{+1} + \hat{X}_{+1}\hat{Y}_{-1} - 4\hat{X}_0\hat{Y}_0) \\
(\widehat{X} \circ \widehat{Y})(2,\pm1) &= \pm(\hat{\mathbf{X}} \circ \hat{\mathbf{Y}})_{\pm10} = \pm\frac{1}{2}(\hat{X}_{\pm1}\hat{Y}_0 + \hat{X}_0\hat{Y}_{\pm1}) \\
(\widehat{X} \circ \widehat{Y})(2,\pm2) &= -\frac{1}{2}\hat{X}_{\pm1}\hat{Y}_{\pm1}.
\end{aligned}
$$

Consideriamo ora il prodotto diretto tra i tensori $\widehat{X}(1,q)$ e $\widehat{Y}(1,q)$:

$$
\widehat{X} \otimes \widehat{Y}(2,q) = \sum_{q_1=-1}^{1}\sum_{q_2=-1}^{1} \langle 1,1,q_1,q_2|2,q\rangle\, \widehat{X}(1,q_1)\widehat{Y}(1,q_2).
$$

Da questa si ricavano le seguenti

$$
\begin{aligned}
\widehat{X} \otimes \widehat{Y}(2,0) &= \langle 1,1,0,0|2,0\rangle\, \widehat{X}(1,0)\widehat{Y}(1,0) + \langle 1,1,1,-1|2,0\rangle\, \widehat{X}(1,1)\widehat{Y}(1,-1) \\
&\quad + \langle 1,1,-1,1|2,0\rangle\, \widehat{X}(1,-1)\widehat{Y}(1,-1) \\
&= \frac{1}{6^{1/2}}\left(\widehat{X}(1,1)\widehat{Y}(1,-1) + \widehat{X}(1,-1)\widehat{X}(1,1) + 2\widehat{X}(1,0)\widehat{Y}(1,0)\right) \\
\widehat{X} \otimes \widehat{Y}(2,\pm1) &= \langle 1,1,0,\pm1|2,\pm1\rangle\, \widehat{X}(1,0)\widehat{Y}(1,\pm1) + \langle 1,1,\pm1,0|2,\pm1\rangle\, \widehat{X}(1,\pm1)\widehat{Y}(1,0) \\
&= \frac{1}{2^{1/2}}\left(\widehat{X}(1,0)\widehat{Y}(1,\pm1) + \widehat{X}(1,\pm1)\widehat{Y}(1,0)\right) \\
\widehat{X} \otimes \widehat{Y}(2,\pm2) &= \langle 1,1,\pm1,\pm1|2,\pm2\rangle\, \widehat{X}(1,\pm1)\widehat{Y}(1,\pm1) \\
&= \widehat{X}(1,\pm1)\widehat{Y}(1,\pm1).
\end{aligned}
$$

Esprimendoli in termini di $\hat{X}_0$, $\hat{X}_{\pm1}$, $\hat{Y}_0$, $\hat{Y}_{\pm1}$,tramite le (4.2.11), si trova:

$$
\widehat{X} \otimes \widehat{Y}(2,0) = \frac{1}{2 \cdot 6^{1/2}}(\hat{\mathbf{X}} + \hat{Y}_{-1} + \hat{X}_{-1}\hat{Y}_{+1} - 4\hat{X}_0\hat{Y}_0) \tag{4.2.26a}
$$

$$
\widehat{X} \otimes \widehat{Y}(2,\pm1) = \pm\frac{1}{2}(\hat{X}_{\pm1}\hat{Y}_0 + \hat{X}_0\hat{Y}_{\pm1}) \tag{4.2.26b}
$$

$$
\widehat{X} \otimes \widehat{Y}(2,\pm2) = -\frac{1}{2}\hat{X}_{\pm1}\hat{Y}_{\pm1}. \tag{4.2.26c}
$$

Comparando le equazioni (4.2.25) con le (4.2.26) si trova la terza delle (4.2.19). $\square$

Siano $\hat{A}$, $\hat{B}$ operatori scalari, $\hat{\mathbf{X}}$, $\hat{\mathbf{Y}}$ operatori vettoriali, $\widehat{\boldsymbol{R}}$, $\widehat{\boldsymbol{S}}$ operatori diadici simmetrici a traccia nulla e siano $\widehat{A}(0,0)$, $\widehat{B}(0,0)$, $\widehat{X}(1,q)$, $\widehat{Y}(1,q)$, $\widehat{R}(2,q)$, $\widehat{S}(2,q)$ gli operatori tensoriali ad essi associati. Allora valgono le seguenti relazioni:

$$\widehat{A} \bullet \widehat{B} = \hat{A}\hat{B}^\dagger \tag{4.2.27a}$$

$$\widehat{X} \bullet \widehat{Y} = \frac{1}{3^{1/2}} \hat{\mathbf{X}} \cdot \hat{\mathbf{Y}}^\dagger \tag{4.2.27b}$$

$$\widehat{R} \bullet \widehat{S} = \frac{1}{5^{1/2}} \widehat{\boldsymbol{R}} \cdot \cdot \widehat{\boldsymbol{S}}^\dagger. \tag{4.2.27c}$$

Dimostrazione. Dalla definzione (4.1.10):

$$\widehat{A} \bullet \widehat{B} = \widehat{A} \otimes \widehat{B}^*(0,0) = (-1)^{0-0} \langle 0,0,0,0|0,0\rangle \, \widehat{A}(0,0)\widehat{B}(0,0)^\dagger = \widehat{A}(0,0)\widehat{B}(0,0)^\dagger = \hat{A}\hat{B}^\dagger.$$

Questa dimostra la (4.2.27a). Dimostriamo la (4.2.27b):

$$\begin{aligned}
\widehat{X} \bullet \widehat{Y} &= \frac{1}{3^{1/2}} \sum_{q=-1}^{1} \widehat{X}(1,q)\widehat{Y}(1,q)^\dagger \\
&= \frac{1}{3^{1/2}} \left(\widehat{X}(1,1)\widehat{Y}(1,1)^\dagger + \widehat{X}(1,0)\widehat{Y}(1,0)^\dagger + \widehat{X}(1,-1)\widehat{Y}(1,-1)^\dagger \right) \\
&= \frac{1}{2 \cdot 3^{1/2}} (\hat{X}_{+1}\hat{Y}_{+1}{}^\dagger + 2\hat{X}_0\hat{Y}_0{}^\dagger + \hat{X}_{-1}\hat{Y}_{-1}{}^\dagger).
\end{aligned}$$

Bisogna ora prestare attenzione che, se $\hat{\mathbf{V}}$ è un operatore vettoriale espresso in coordinate sferiche, in generale si ha che $\hat{V}^\dagger{}_\alpha \neq \hat{V}_\alpha{}^\dagger$, infatti:

$$\begin{aligned}
&\hat{V}_0{}^\dagger = \hat{V}_3{}^\dagger = \hat{V}^\dagger{}_3 = \hat{V}^\dagger{}_0 \\
&\hat{V}_{\pm 1}{}^\dagger = (\hat{V}_1 \pm i\hat{V}_2)^\dagger = \hat{V}_1{}^\dagger \pm (i\hat{V}_2)^\dagger = \hat{V}_1{}^\dagger \mp \hat{V}_2{}^\dagger = \hat{V}^\dagger{}_1 \mp \hat{V}^\dagger{}_2 = \hat{V}^\dagger{}_{\mp 1}.
\end{aligned}$$

Allora

$$\widehat{X} \bullet \widehat{Y} = \frac{1}{2 \cdot 3^{1/2}} (\hat{X}_{+1}\hat{Y}^\dagger_{-1} + 2\hat{X}_0\hat{Y}^\dagger_0 + \hat{X}_{-1}\hat{Y}^\dagger_{+1}) = \frac{1}{3^{1/2}} \hat{\mathbf{X}} \cdot \hat{\mathbf{Y}}^\dagger.$$

Questo dimostra la (4.2.27b).
Dimostriamo ora la (4.2.27c):

$$\begin{aligned}
\widehat{R} \bullet \widehat{S} &= \frac{1}{5^{1/2}} \sum_{q=-2}^{2} \widehat{R}(2,q)\widehat{S}(2,q)^\dagger \\
&= \frac{1}{5^{1/2}} \big(\widehat{R}(2,-2)\widehat{S}(2,-2)^\dagger + \widehat{R}(2,-1)\widehat{S}(2,-1)^\dagger \\
&\qquad\qquad + \widehat{R}(2,0)\widehat{S}(2,0)^\dagger + \widehat{R}(2,1)\widehat{S}(2,1)^\dagger + \widehat{R}(2,2)\widehat{S}(2,2)^\dagger \big) \\
&= \frac{1}{4 \cdot 5^{1/2}} (\widehat{R}_{+1+1}\widehat{S}_{+1+1}{}^\dagger + 4\widehat{R}_{+10}\widehat{S}_{+10}{}^\dagger + 6\widehat{R}_0\widehat{S}_0{}^\dagger + 4\widehat{R}_{-10}\widehat{S}_{-10}{}^\dagger + \widehat{R}_{-1-1}\widehat{S}_{-1-1}{}^\dagger).
\end{aligned}$$

Prestando attenzione, come nel caso precedente, che in componenti sferiche in generale $\widehat{Q}^{\dagger}_{\alpha\beta} \neq \widehat{Q}_{\alpha\beta}{}^{\dagger}$, e utilizzando le seguenti relazioni

$$
\begin{aligned}
&\widehat{Q}_{00}{}^{\dagger} = \widehat{Q}_{33}{}^{\dagger} = \widehat{Q}^{\dagger}_{33} = \widehat{Q}^{\dagger}_{00} \\
&\widehat{Q}_{\pm 10}{}^{\dagger} = \widehat{Q}_{13}{}^{\dagger} \mp i\widehat{Q}_{23}{}^{\dagger} = \widehat{Q}^{\dagger}_{13} \mp i\widehat{Q}^{\dagger}_{23} = \widehat{Q}_{\mp 10} \\
&\widehat{Q}_{\pm 1\pm 1}{}^{\dagger} = \widehat{Q}_{11}{}^{\dagger} - \widehat{Q}_{22}{}^{\dagger} \mp 2i\widehat{Q}_{12}{}^{\dagger} = \widehat{Q}^{\dagger}_{11} - \widehat{Q}^{\dagger}_{22} \mp 2i\widehat{Q}^{\dagger}_{12} = \widehat{Q}^{\dagger}_{\mp 1\mp 1},
\end{aligned}
$$

si trova che:

$$
\widehat{R} \bullet \widehat{S} = \frac{1}{4 \cdot 5^{1/2}} (\widehat{R}_{+1+1}\widehat{S}^{\dagger}_{-1-1} + 4\widehat{R}_{+10}\widehat{S}^{\dagger}_{-10} + 6\widehat{R}_{00}\widehat{S}^{\dagger}_{00} + 4\widehat{R}_{-10}\widehat{S}^{\dagger}_{+10} + \widehat{R}_{-1-1}\widehat{S}^{\dagger}_{+1+1}) \tag{4.2.28}
$$

Per calcolare $\widehat{\boldsymbol{R}} \cdot\cdot \widehat{\boldsymbol{S}}$ è necessario utilizzare una generalizzazione della (2.0.9), tramite la quale:

$$
\boldsymbol{A} \cdot\cdot \boldsymbol{B} = \sum_{\alpha=-1}^{+1} \sum_{\beta=-1}^{+1} 2^{-|\alpha|-|\beta|} A_{\alpha\beta} B_{-\alpha-\beta},
$$

dove $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ sono diadi numeriche. Allora il prodotto $\widehat{\boldsymbol{R}} \cdot\cdot \widehat{\boldsymbol{S}}$ sarà dato da:

$$
\widehat{\boldsymbol{R}} \cdot\cdot \widehat{\boldsymbol{S}}^{\dagger} = \frac{1}{4} (\widehat{R}_{+1+1}\widehat{S}^{\dagger}_{-1-1} + 4\widehat{R}_{+10}\widehat{S}^{\dagger}_{-10} + 6\widehat{R}_{00}\widehat{S}^{\dagger}_{00} + 4\widehat{R}_{-10}\widehat{S}^{\dagger}_{+10} + \widehat{R}_{-1-1}\widehat{S}^{\dagger}_{+1+1}) \tag{4.2.29}
$$

Dunque confrontando la (4.2.29) con la (4.2.28) si dimostra la (4.2.27c). □

Capitolo 5

Teorema di Wigner-Eckart e applicazioni

5.1 Teorema di Wigner-Eckart

Sia $\widehat{T}(k,q)$ un operatore tensoriale di rango k rispetto ad un momento angolare $\hat{\boldsymbol{j}}$ e sia $|a,j,m\rangle$ un multipletto di autoket di $\hat{j}^2$ e $\hat{j}_0$ distinto dal numero quantico a. Allora vale la seguente relazione:

$$\left\langle a',j',m'\middle|\widehat{T}(k,q)\middle|a,j,m\right\rangle = \frac{\langle a',j'||T(k)||a,j\rangle}{(2j'+1)^{1/2}}\left\langle j',m'\middle|j,k,m,q\right\rangle \tag{5.1.1}$$

dove $\langle j',m'|j,k,m,q\rangle$ è un coefficiente di Clebsch-Gordan e $\langle a',j'||T(k)||a,j\rangle$ è detto elemento di matrice ridotto di $\widehat{T}(k,q)$ dipendente solo da a, a', j, j', k.
Il significato di questo teorema è che la dipendenza di $\langle a',j',m'|\widehat{T}(k,q)|a,j,m\rangle$ da m, m' e q è completamente determinata dalla simmetria rotazionale del sistema e data da un opportuno coefficiente di Clebsch-Gordan.

Dimostrazione. Utilizzando la relazione di commutazione tra operatori tensoriali irriducibili e $\hat{j}_0$ (4.1.1), insieme alla (2.1.29):

$$\begin{aligned}
&\hbar q\left\langle a',j',m'\middle|\widehat{T}(k,q)\middle|a,j,m\right\rangle = \left\langle a',j',m'\middle|\hbar q\widehat{T}(k,q)\middle|a,j,m\right\rangle = \left\langle a',j',m'\middle|[\hat{j}_0,\widehat{T}(k,q)]\middle|a,j,m\right\rangle \\
&= \left\langle a',j',m'\middle|\hat{j}_0\widehat{T}(k,q)\middle|a,j,m\right\rangle - \left\langle a',j',m'\middle|\widehat{T}(k,q)\hat{j}_0\middle|a,j,m\right\rangle \\
&= \hbar m'\left\langle a',j',m'\middle|\widehat{T}(k,q)\middle|a,j,m\right\rangle - \left\langle a',j',m'\middle|\widehat{T}(k,q)\middle|a,j,m\right\rangle\hbar m.
\end{aligned}$$

Da cui si trova che:

$$m + q = m'. \tag{5.1.2}$$

Utilizzando ora la relazione di commutazione tra operatori tensoriali irriducibili e operatori di scala $\hat{j}_{\pm 1}$ (4.1.2), insieme alle (2.1.30):

$$\begin{aligned}
&\hbar \left(k(k+1) - q(q \pm 1)\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle a', j', m' \middle| \widehat{T}(k, q \pm 1) \middle| a, j, m \right\rangle \\
&= \left\langle a', j', m' \middle| \hbar \left(k(k+1) - q(q \pm 1)\right)^{\frac{1}{2}} \widehat{T}(k, q \pm 1) \middle| a, j, m \right\rangle = \left\langle a', j', m' \middle| [\hat{j}_{\pm 1}, \widehat{T}(k, q)] \middle| a, j, m \right\rangle \\
&= \left\langle a', j', m' \middle| \hat{j}_{\pm 1} \widehat{T}(k, q) \middle| a, j, m \right\rangle - \left\langle a', j', m' \middle| \widehat{T}(k, q) \hat{j}_{\pm 1} \middle| a, j, m \right\rangle \\
&= \hbar (j'(j'+1) - m'(m' \mp 1))^{\frac{1}{2}} \left\langle a', j', m' \mp 1 \middle| \widehat{T}(k, q) \middle| a, j, m \right\rangle \\
&\qquad - \left\langle a', j', m' \middle| \widehat{T}(k, q) \middle| a, j, m \pm 1 \right\rangle \hbar (j(j+1) - m(m \pm 1))^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Da cui si trova che:

$$\begin{aligned}
&(j'(j'+1) - m'(m' \mp 1))^{\frac{1}{2}} \left\langle a', j', m' \mp 1 \middle| \widehat{T}(k, q) \middle| a, j, m \right\rangle \\
&\qquad = \left\langle a', j', m' \middle| \widehat{T}(k, q) \middle| a, j, m \pm 1 \right\rangle (j(j+1) - m(m \pm 1))^{\frac{1}{2}} \\
&\qquad\qquad + \left(k(k+1) - q(q \pm 1)\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle a', j', m' \middle| \widehat{T}(k, q \pm 1) \middle| a, j, m \right\rangle.
\end{aligned} \tag{5.1.3}$$

Le equazioni (5.1.2) e (5.1.3) mostrano che gli elementi di matrice $\langle a', j', m' | \widehat{T}(k, q) | a, j, m \rangle$ soddisfano le stesse regole di selezione dei coefficienti di Clebsch-Gordan $\langle j', m' | j, k, m, q \rangle$. Cioè gli elementi $\langle a', j', m' | \widehat{T}(k, q) | a, j, m \rangle$ sono proporzionali a $\langle a', j', j' | \widehat{T}(k, j' - j) | a, j, j \rangle$ con proporzionalità calcolabile, proprio come i coefficienti $\langle j', m' | j, k, m, q \rangle$ sono proporzionali a $\langle j', j' | j, k, j, j' - j \rangle$ con (la stessa) proporzionalità calcolabile. Esplicitamente:

$$\frac{\langle a', j', m' | \widehat{T}(k, q) | a, j, m \rangle}{\langle j', m' | j, k, m, q \rangle} = \frac{\langle a', j', j' | \widehat{T}(k, q) | a, j, j \rangle}{\langle j', j' | j, k, j, j' - j \rangle} = \frac{\langle a', j' || T(k) || a, j \rangle}{(2j+1)^{1/2}}. \tag{5.1.4}$$

□

In virtù delle regole di selezione (2.2.1) e (2.2.6) per i coefficienti di Clebsch-Gordan, gli elementi di matrice sono nulli se non vengono rispettate le relazioni

$$\left| j - j' \right| \leq k \leq j + j' \tag{5.1.5}$$

$$q = m' - m. \tag{5.1.6}$$

Inoltre valgono le seguenti relazioni:

$$\left\langle a', j' \middle| |T^*(k)| \middle| a, j \right\rangle = (-1)^{j-j'+k} \left\langle a', j' \middle| |T(k)| \middle| a, j \right\rangle^* \tag{5.1.7a}$$

$$\left\langle a', j', m' \middle| \widehat{T}_1 \bullet \widehat{T}_2 \middle| a, j, m \right\rangle = \frac{\langle a', j||T_1 \bullet T_2||a, j\rangle}{(2j+1)^{\frac{1}{2}}} \delta_{j,j'} \delta_{m,m'} \tag{5.1.7b}$$

$$\begin{aligned} \left\langle a', j \middle| |T_1 \bullet T_2| \middle| a, j \right\rangle &= \frac{1}{(2k+1)^{1/2}(2j+1)^{1/2}} \\ &\times \sum_{a''} \sum_{j''=|k-j|}^{k+j} \left\langle a', j \middle| |T_1(k)| \middle| a'', j'' \right\rangle \left\langle a, j \middle| |T_2(k)| \middle| a'', j'' \right\rangle^* . \end{aligned} \tag{5.1.7c}$$

Dimostrazione. Dimostriamo la (5.1.7a). Dal teorema di Wigner-Eckart si ha che:

$$\left\langle a', j', m' \middle| \widehat{T}^*(k, q) \middle| a, j, m \right\rangle = \frac{\langle a', j'||T^*(k)||a, j\rangle}{(2j'+1)^{1/2}} \left\langle j', m' \middle| j, k, m, q \right\rangle . \tag{5.1.8}$$

D'altra parte, per la definizione di operatore tensoriale aggiunto (4.1.3):

$$\begin{aligned} &\left\langle a', j', m' \middle| \widehat{T}^*(k, q) \middle| a, j, m \right\rangle = (-1)^{k-q} \left\langle a', j', m' \middle| \widehat{T}(k, -q)^\dagger \middle| a, j, m \right\rangle \\ &= (-1)^{k-q} \left\langle a, j, m \middle| \widehat{T}(k, -q) \middle| a', j', m' \right\rangle^* \\ &= (-1)^{k-q} \frac{\langle a, j||T(k)||a', j'\rangle^*}{(2j+1)^{1/2}} \left\langle j, m \middle| j', k, m', -q \right\rangle \\ &= (-1)^{k-q} \frac{\langle a, j||T(k)||a', j'\rangle^*}{(2j+1)^{1/2}} (-1)^{j-j'+q} \frac{(2j+1)^{1/2}}{(2j'+1)^{1/2}} \left\langle j', m' \middle| j, k, m, q \right\rangle \\ &= (-1)^{j-j'+k} \frac{\langle a, j||T(k)||a', j'\rangle^*}{(2j'+1)^{1/2}} \left\langle j', m' \middle| j, k, m, q \right\rangle . \end{aligned} \tag{5.1.9}$$

Nel penultimo passaggio è stata utilizzata una regola dei coefficienti di Clebsch-Gordan per la quale:

$$\langle J, M | j_1, j_2, m_1, m_2 \rangle = (-1)^{j_1 - J + m_2} \frac{(2J+1)^{1/2}}{(2j_1+1)^{1/2}} \langle j_1, m_1 | J, j_2, M, -m_2 \rangle$$

Confrontando la (5.1.8) con la (5.1.9), si trova la (5.1.7a).
Dimostriamo la (5.1.7b). Per la relazione sul prodotto scalare di operatori tensoriali (4.1.10):

$$\begin{aligned} &\left\langle a', j', m' \middle| \widehat{T}_1 \bullet \widehat{T}_2 \middle| a, j, m \right\rangle = \left\langle a', j', m' \middle| \widehat{T}_1 \otimes \widehat{T}_2^*(0,0) \middle| a, j, m \right\rangle \\ &= \frac{\langle a', j'||T_1 \otimes T_2^*(0)||a, j\rangle}{(2j'+1)^{1/2}} \left\langle j', m' \middle| j, 0, m, 0 \right\rangle = \frac{\langle a', j'||T_1 \otimes T_2^*(0)||a, j\rangle}{(2j'+1)^{1/2}} \delta_{j,j'} \delta_{m,m'} . \end{aligned}$$

L'ultimo passaggio è conseguenza delle regole di selezione dei coefficienti di Clebsch-Gordan (5.1.5) e (5.1.6). Con questo abbiamo dimostrato la (5.1.7b).
Dimostriamo la (5.1.7c). Per le condizioni di realtà (2.2.7) e ortogonalità (2.2.9a) dei coefficienti di Clebsch-Gordan, utilizzando la relazione (4.1.11), e il teorema di Wigner-Eckart si ha che:

$$
\begin{aligned}
\langle a', j, m | \widehat{T}_1 \bullet \widehat{T}_2 | a, j, m \rangle &= \frac{1}{(2k+1)^{1/2}} \sum_{q=-k}^{k} \langle a', j, m | \widehat{T}_1(k,q) \widehat{T}_2(k,q)^\dagger | a, j, m \rangle \\
= \frac{1}{(2k+1)^{1/2}} \sum_{q=-k}^{k} \sum_{a''} \sum_{j''} \sum_{m''=-j''}^{j''} & \langle a', j, m | \widehat{T}_1(k,q) | a'', j'', m'' \rangle \, \langle a, j, m | \widehat{T}_2(k,q) | a'', j'', m'' \rangle^* \\
= \frac{1}{(2k+1)^{1/2}} \sum_{a''} \sum_{j''=|k-j|}^{k+j} \sum_{q=-k}^{k} \sum_{m''=-j''}^{j''} & \frac{\langle a', j || T_1(k) || a'', j'' \rangle}{(2j+1)^{1/2}} \\
& \times \langle j, m | j'', k, m'', q \rangle \frac{\langle a, j || T_2(k) || a'', j'' \rangle^*}{(2j+1)^{1/2}} \langle j, m | j'', k, m'', q \rangle \\
= \frac{1}{(2k+1)^{1/2}(2j+1)} \sum_{a''} \sum_{j''=|k-j|}^{k+j} & \langle a', j || T_1(k) || a'', j'' \rangle \, \langle a, j || T_2(k) || a'', j'' \rangle^* . \qquad (5.1.10)
\end{aligned}
$$

Confrontando la (5.1.10) con la (5.1.7b) si trova la (5.1.7c). □

Sia $\hat{\boldsymbol{j}}$ un momento angolare. Nella famiglia degli operatori tensoriali di $\hat{\boldsymbol{j}}$ esiste una sottofamiglia di operatori tensoriali di rango k autoaggiunti definiti nel seguente modo:

$$\widehat{S}_0(0,0) = \hat{1} \qquad (5.1.11a)$$

$$\widehat{S}_k(k,q) = \frac{1}{2}(\widehat{j} \otimes \widehat{S}_{k-1} + \widehat{S}_{k-1} \otimes \widehat{j}). \qquad (5.1.11b)$$

Dove l'operatore tensoriale $\widehat{j}(1,q)$ è la generalizzazione dell'operatore vettoriale $\hat{\boldsymbol{j}}$, cioè:

$$
\begin{aligned}
\widehat{j}(1,0) &= i\hat{j}_0 \\
\widehat{j}(1,\pm 1) &= \frac{\mp i}{2^{1/2}} \hat{j}_{\pm 1}.
\end{aligned}
$$

Dimostrazione. Vogliamo mostrare che $\widehat{S}_k(k,q)$ è autoaggiunto, per farlo utilizzeremo il principio di induzione. Per $k=0$ si definisce $\widehat{S}_0(0,0) = \hat{1}$, che è autoaggiunto.
Supponendo che $\widehat{S}_{k-1}$ sia autoaggiunto, vediamo che anche $\widehat{S}_k$ lo è:

$$\widehat{S}_k^* = \frac{1}{2}\left[\widehat{j} \otimes \widehat{S}_{k-1}(k,q) + \widehat{S}_{k-1} \otimes \widehat{j}(k,q)\right]^* = \frac{1}{2}\left[(\widehat{j} \otimes \widehat{S}_{k-1}(k,q))^* + (\widehat{S}_{k-1} \otimes \widehat{j}(k,q))^*\right]$$

e poiché sia $\widehat{j}$ che $\widehat{S}_{k-1}$ sono autoaggiunti, allora $\widehat{j}^*(1,q) = \widehat{j}(1,q)$ e $\widehat{S}^*_{k-1}(k-1,q) = \widehat{S}_{k-1}(k-1,q)$, e $(\widehat{j} \otimes \widehat{S}_{k-1})^*(k,q) = \widehat{S}^*_{k-1} \otimes \widehat{j}^*(k,q)$, dunque si ha che:

$$\begin{aligned}\widehat{S}^*_k(k,q) &= \frac{1}{2}\left[\widehat{S}^*_{k-1} \otimes \widehat{j}^*(k,q) + \widehat{j}^* \otimes \widehat{S}^*_{k-1}(k,q)\right] = \frac{1}{2}\left[\widehat{S}_{k-1} \otimes \widehat{j}(k,q) + \widehat{j} \otimes \widehat{S}_{k-1}(k,q)\right] \\ &= \widehat{S}_k(k,q)\end{aligned}$$

□

5.2 Teorema della proiezione

Siano $\widehat{T}(k,q)$ un operatore tensoriale di rango k rispetto ad un momento angolare $\hat{\boldsymbol{j}}$, $\widehat{S}_k(k,q)$ un operatore tensoriale definito tramite le (5.1.11) e sia $|a,j,m\rangle$ base ortonormale di autoket comuni di $\hat{j}^2$ e $\hat{j}_0$. Allora vale il seguente risultato:

$$\left\langle a,j,m'\middle|\widehat{T}(k,q)\middle|a,j,m\right\rangle = \frac{\langle a,j||\widehat{T}\bullet\widehat{S}_k||a,j\rangle}{\langle a,j||\widehat{S}_k\bullet\widehat{S}_k||a,j\rangle}\left\langle a,j,m'\middle|\widehat{S}_k(k,q)\middle|a,j,m\right\rangle. \tag{5.2.1}$$

Dimostrazione. Come abbiamo visto, gli operatori tensoriali $\widehat{S}_k(k,q)$ sono tutti ottenuti a partire da $\hat{j}_0$ e $\hat{j}_{\pm1}$ e questi ultimi agiscono sui ket $|a,j,m\rangle$, che sono combinazioni lineari di $|a,j,m'\rangle$, quindi si può scrivere che:

$$\widehat{S}_k(k,q)\,|a,j,m\rangle = \sum_{m'=-k}^{k}\left|a,j,m'\right\rangle c_{m',m}(j,k,q), \tag{5.2.2}$$

dove $c_{m',m}(j,k,q)$ sono coefficienti complessi indipendenti da a. Dunque

$$\begin{aligned}\left\langle a',j',m'\middle|\widehat{S}_k(k,q)\middle|a,j,m\right\rangle &= \sum_{m''=-j}^{j}\left\langle a',j',m'\middle|a,j,m''\right\rangle c_{m'',m}(j,k,q) = \\ &= \sum_{m''=-j}^{j}\delta_{a',a}\delta_{j',j}\delta_{m',m''}c_{m'',m}(j,k,q) \\ &= \delta_{a',a}\delta_{j',j}c_{m',m}(j,k,q).\end{aligned} \tag{5.2.3}$$

D'altra parte, per il teorema di Wigner-Eckart (5.1.1) si ha che:

$$\left\langle a',j',m'\middle|\widehat{S}_k(k,q)\middle|a,j,m\right\rangle = \frac{\langle a',j'||S_k(k)||a,j\rangle}{(2j'+1)^{1/2}}\left\langle j',m'\middle|j,k,m,q\right\rangle. \tag{5.2.4}$$

Confrontando la (5.2.3) con la (5.2.4), e ricordando che i coefficienti di Clebsch-Gordan sono non nulli per $j'\neq j$, si trova che:

$$\left\langle a',j'\middle|\middle|S_k(k)\middle|\middle|a,j\right\rangle = \delta_{a',a}\delta_{j',j}\left\langle a,j||S_k(k)||a,j\right\rangle. \tag{5.2.5}$$

Utilizzando il teorema di Wigner-Eckart si ha che:

$$\left\langle a,j,m'\middle|\widehat{T}(k,q)\middle|a,j,m\right\rangle = \frac{\langle a,j||T(k)||a,j\rangle}{(2j+1)^{1/2}}\left\langle j,m'\middle|j,k,m,q\right\rangle \tag{5.2.6}$$

$$\left\langle a,j,m'\middle|\widehat{S}_k(k,q)\middle|a,j,m\right\rangle = \frac{\langle a,j||S_k(k)||a,j\rangle}{(2j+1)^{1/2}}\left\langle j,m'\middle|j,k,m,q\right\rangle. \tag{5.2.7}$$

Dalle ultime due segue che:

$$\left\langle a,j,m'\middle|\widehat{T}(k,q)\middle|a,j,m\right\rangle = \frac{\langle a,j||T(k)||a,j\rangle}{\langle a,j||S_k(k)||a,j\rangle}\left\langle a,j,m'\middle|\widehat{S}_k(k,q)\middle|a,j,m\right\rangle. \tag{5.2.8}$$

Utilizzando ora la (5.1.7c) e la (5.2.5):

$$\begin{aligned}
&\langle a,j||T\bullet S_k||a,j\rangle \\
&= \frac{1}{(2k+1)^{1/2}(2j+1)^{1/2}}\sum_{a''}\sum_{j''=|k-j|}^{k+j}\left\langle a,j\middle|\middle|T(k)\middle|\middle|a'',j''\right\rangle\left\langle a,j\middle|\middle|S_k(k)\middle|\middle|a'',j''\right\rangle^* \\
&= \frac{1}{(2k+1)^{1/2}(2j+1)^{1/2}}\sum_{a''}\sum_{j''=|k-j|}^{k+j}\left\langle a,j\middle|\middle|T(k)\middle|\middle|a'',j''\right\rangle\delta_{a,a''}\delta_{j,j''}\langle a,j||S_k(k)||a,j\rangle^* \\
&= \frac{1}{(2k+1)^{1/2}(2j+1)^{1/2}}\langle a,j||T(k)||a,j\rangle\;\langle a,j||S_k(k)||a,j\rangle^*. \qquad (5.2.9)
\end{aligned}$$

Con un calcolo analogo in cui sostituiamo $\widehat{S}_k(k,q)$ a $\widehat{T}(k,q)$ si trova che

$$\langle a,j||S_k\bullet S_k||a,j\rangle = \frac{1}{(2k+1)^{1/2}(2j+1)^{1/2}}|\,\langle a,j||S_k(k)||a,j\rangle|^2. \tag{5.2.10}$$

Dividendo la (5.2.9) per la (5.2.10) si trova:

$$\frac{\langle a,j||T(k)||a,j\rangle}{\langle a,j||S_k(k)||a,j\rangle} = \frac{\langle a,j||T\bullet S_k||a,j\rangle}{\langle a,j||S_k\bullet S_k||a,j\rangle}. \tag{5.2.11}$$

Da cui, inserendo la (5.2.11) nella (5.2.8) si dimostra il teorema della proiezione (5.2.1).
□

Il teorema della proiezione permette di calcolare in modo semplice gli elementi di matrice degli operatori rotazionalmente covarianti, rispetto ad una base ortonormale di autoket comuni per gli operatori $\hat{j}^2$ e $\hat{j}_0$.

5.3 Applicazioni

Siano $\hat{A}$, $\hat{\mathbf{V}}$ e $\widehat{\boldsymbol{Q}}$ operatori scalare, vettoriale e diadico simmetrico a traccia nulla. Le seguenti relazioni sono applicazioni del teorema della proiezione.

$$\left\langle a,j,m'\middle|\hat{A}\middle|a,j,m\right\rangle = \langle a,j,m_0|\hat{A}|a,j,m_0\rangle\,\delta_{m,m'} \tag{5.3.1a}$$

$$\left\langle a,j,m'\middle|\hat{\mathbf{V}}\middle|a,j,m\right\rangle = \frac{\langle a,j,m_0|\hat{\mathbf{V}}\cdot\hat{\boldsymbol{j}}|a,j,m_0\rangle}{\hbar^2 j(j+1)}\left\langle a,j,m'\middle|\hat{\boldsymbol{j}}\middle|a,j,m\right\rangle \tag{5.3.1b}$$

$$\left\langle a,j,m'\middle|\widehat{\boldsymbol{Q}}\middle|a,j,m\right\rangle = \frac{3}{2}\frac{\langle a,j,m_0|\widehat{\boldsymbol{Q}}\cdot\cdot\hat{\boldsymbol{j}}\hat{\boldsymbol{j}}|a,j,m\rangle}{\hbar^4 j(j+1)\left(j(j+1)-3/4\right)} \tag{5.3.1c}$$

$$\times\left\langle a,j,m'\middle|\frac{1}{2}\left(\hat{\boldsymbol{j}}\hat{\boldsymbol{j}}+(\hat{\boldsymbol{j}}\hat{\boldsymbol{j}})^t\right)-\frac{1}{3}\hat{j}^2\mathbf{1}\middle|a,j,m\right\rangle, \tag{5.3.1d}$$

dove m_0 è un qualsiasi valore, tra quelli ammessi di m.
Bisogna fare attenzione che la (5.3.1b) non può essere utilizzata per il valore di $j=0$ e la (5.3.1c) non può essere utilizzata per i valori di $j=0$ e $j=\frac{1}{2}$.

Dimostrazione. Per la definizione (5.1.11) dell'operatore $\widehat{S}_k$, si ha che $\widehat{S}_0(0,0)=\hat{1}$, inoltre scrivo l'operatore scalare $\hat{A}$ come operatore tensoriale di rango 0, $\widehat{A}(0,0)$. per la relazione (5.1.7b) e la (4.2.27a):

$$\langle a,j||A\bullet S_0||a,j\rangle = (2j+1)^{\frac{1}{2}}\langle a,j,m_0|\hat{A}\bullet\hat{1}|a,j,m_0\rangle = (2j+1)^{\frac{1}{2}}\langle a,j,m_0|\hat{A}|a,j,m_0\rangle,$$
$$\langle a,j||S_0\bullet S_0||a,j\rangle = (2j+1)^{\frac{1}{2}}\langle a,j,m_0|\hat{1}|a,j,m_0\rangle = (2j+1)^{\frac{1}{2}}.$$

Utilizzando ora il teorema della proiezione si ha che:

$$\begin{aligned}\left\langle a,j,m'\middle|\hat{A}\middle|a,j,m\right\rangle &= \frac{\langle a,j||A\bullet S_0||a,j\rangle}{\langle a,j||S_0\bullet S_0||a,j\rangle}\left\langle a,j,m'\middle|\hat{S}_0\middle|a,j,m\right\rangle\\ &= \langle a,j,m_0|\hat{A}|a,j,m_0\rangle\,\delta_{m,m'}.\end{aligned}$$

Con questa si dimostra la (5.3.1a).
L'operatore $\widehat{S}_k$ con $k=1$ è dato da

$$\widehat{S}_1(1,q) = \frac{1}{2}\left(\widehat{j}\otimes\widehat{S}_0(1,q)+\widehat{S}_0\otimes\widehat{j}(1,q)\right) = \widehat{j}(1,q).$$

Per le relazioni (5.1.7b) e (4.2.27b), insieme alla relazione agli autovalori di $\hat{j}^2$ (2.1.28):

$$\langle a,j||V\bullet S_1||a,j\rangle = (2j+1)^{\frac{1}{2}}\langle a,j,m_0|\widehat{V}\bullet\widehat{S}_1|a,j,m_0\rangle = \frac{1}{3^{1/2}}(2j+1)^{\frac{1}{2}}\langle a,j,m_0|\hat{\mathbf{V}}\cdot\hat{\boldsymbol{j}}|a,j,m_0\rangle,$$

$$\begin{aligned}\langle a,j||S_1\bullet S_1||a,j\rangle &= (2j+1)^{\frac{1}{2}}\,\langle a,j,m_0|\widehat{S}_1\bullet\widehat{S}_1|a,j,m_0\rangle = \frac{1}{3^{1/2}}(2j+1)^{\frac{1}{2}}\,\langle a,j,m_0|\hat{\boldsymbol{j}}\cdot\hat{\boldsymbol{j}}|a,j,m_0\rangle\\ &= \frac{1}{3^{1/2}}(2j+1)^{\frac{1}{2}}\,\langle a,j,m_0|\hat{j}^2|a,j,m_0\rangle = \frac{1}{3^{1/2}}(2j+1)^{\frac{1}{2}}\hbar^2(j(j+1)).\end{aligned}$$

Utilizzando il teorema della proiezione si ha che:

$$\begin{aligned}\left\langle a,j,m'\middle|\hat{\mathbf{V}}\middle|a,j,m\right\rangle &= \frac{\langle a,j||V\bullet S_1||a,j\rangle}{\langle a,j||S_1\bullet S_1||a,j\rangle}\left\langle a,j,m'\middle|\hat{\boldsymbol{S}}_1\middle|a,j,m\right\rangle\\ &= \frac{\langle a,j,m_0|\hat{\mathbf{V}}\cdot\hat{\boldsymbol{j}}|a,j,m_0\rangle}{\hbar^2(j(j+1))}\left\langle a,j,m'\middle|\hat{\boldsymbol{j}}\middle|a,j,m\right\rangle.\end{aligned}$$

Dove $\hat{\boldsymbol{S}}_1$ rappresenta l'operatore vettoriale corrispondente a $\widehat{S}_1$. Con questa si dimostra la (5.3.1b).
L'operatore $\widehat{S}_k$ con $k=2$ è dato da

$$\widehat{S}_2(2,q) = \frac{1}{2}\left(\widehat{j}\otimes\widehat{j}(2,q)+\widehat{j}\otimes\widehat{j}(2,q)\right) = (\widehat{j}\otimes\widehat{j})(2,q) = \widehat{j}\circ\widehat{j}(2,q).$$

Per le relazioni (5.1.7b) e (4.2.27c):

$$\begin{aligned}\langle a,j||Q\bullet S_2||a,j\rangle &= (2j+1)^{1/2}\,\langle a,j,m_0|\widehat{Q}\bullet\widehat{S}_2|a,j,m_0\rangle\\ &= \frac{1}{5^{1/2}}(2j+1)^{1/2}\,\langle a,j,m_0|\widehat{\boldsymbol{Q}}\cdot\cdot(\hat{\boldsymbol{j}}\circ\hat{\boldsymbol{j}})|a,j,m_0\rangle\,,\end{aligned}\tag{5.3.2}$$

$$\begin{aligned}\langle a,j||S_2\bullet S_2||a,j\rangle &= (2j+1)^{1/2}\,\langle a,j,m_0|\widehat{S}_2\bullet\widehat{S}_2|a,j,m_0\rangle\\ &= \frac{1}{5^{1/2}}(2j+1)^{1/2}\,\langle a,j,m_0|(\hat{\boldsymbol{j}}\circ\hat{\boldsymbol{j}})\cdot\cdot(\hat{\boldsymbol{j}}\circ\hat{\boldsymbol{j}})|a,j,m_0\rangle\,.\end{aligned}\tag{5.3.3}$$

Definendo come $[\hat{\boldsymbol{j}},\hat{\boldsymbol{j}}]$ come la matrice 3×3 data dagli elementi $[j_i,j_j]$, allora si ha che:

$$[\hat{\boldsymbol{j}},\hat{\boldsymbol{j}}] = \hat{\boldsymbol{j}}\hat{\boldsymbol{j}}-(\hat{\boldsymbol{j}}\hat{\boldsymbol{j}})^t = i\hbar*\hat{\boldsymbol{j}}. \tag{5.3.4}$$

Allora il prodotto diadico simmetrico a traccia nulla di $\hat{\boldsymbol{j}}$ con sé stesso è:

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{j}}\circ\hat{\boldsymbol{j}} &= \frac{1}{2}\left(\hat{\boldsymbol{j}}\hat{\boldsymbol{j}}+(\hat{\boldsymbol{j}}\hat{\boldsymbol{j}})^t\right)+\frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{j}}\hat{\boldsymbol{j}}-\frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{j}}\hat{\boldsymbol{j}}-\frac{1}{3}\hat{\boldsymbol{j}}\cdot\hat{\boldsymbol{j}}\mathbf{1}\\ &= \hat{\boldsymbol{j}}\hat{\boldsymbol{j}}-\frac{1}{2}i\hbar*\hat{\boldsymbol{j}}-\frac{1}{3}\hat{j}^2\mathbf{1} \qquad (5.3.5)\\ &= (\hat{\boldsymbol{j}}\hat{\boldsymbol{j}})^t+\frac{1}{2}i\hbar*\hat{\boldsymbol{j}}-\frac{1}{3}\hat{j}^2\mathbf{1}. \qquad (5.3.6)\end{aligned}$$

A seconda della convenienza si può usare una della due relazioni (5.3.5) o (5.3.6). Per quanto appena calcolato:

$$\widehat{\boldsymbol{Q}}\cdot\cdot(\hat{\boldsymbol{j}}\circ\hat{\boldsymbol{j}}) = \widehat{\boldsymbol{Q}}\cdot\cdot\left(\hat{\boldsymbol{j}}\hat{\boldsymbol{j}} - \frac{1}{2}i\hbar * \hat{\boldsymbol{j}} - \frac{1}{3}\hat{j}^2\mathbf{1}\right) = \widehat{\boldsymbol{Q}}\cdot\cdot\hat{\boldsymbol{j}}\hat{\boldsymbol{j}}, \tag{5.3.7}$$

dove il primo termine tra parentesi è l'unico che si salva, in quanto la diade $*\hat{\boldsymbol{j}}$ è antisimmetrica e contratta con $\widehat{\boldsymbol{Q}}$ che è simmetrica, si annulla, e poiché $\widehat{\boldsymbol{Q}}$ è a traccia nulla, contratta con la matrice unità si annulla.
Inserendo quest'ultima equazione nella (5.3.2) si ottiene che:

$$\langle a,j||Q \bullet S_2||a,j\rangle = \frac{1}{5^{1/2}}(2j+1)^{1/2}\,\langle a,j,m_0|\widehat{\boldsymbol{Q}}\cdot\cdot\hat{\boldsymbol{j}}\hat{\boldsymbol{j}}|a,j,m_0\rangle\,. \tag{5.3.8}$$

Inoltre, sfruttando entrambe le (5.3.5) e (5.3.6):

$$\begin{aligned}(\hat{\boldsymbol{j}}\circ\hat{\boldsymbol{j}})\cdot\cdot(\hat{\boldsymbol{j}}\circ\hat{\boldsymbol{j}}) &= \left(\hat{\boldsymbol{j}}\hat{\boldsymbol{j}} - \frac{1}{2}i\hbar * \hat{\boldsymbol{j}} - \frac{1}{3}\hat{j}^2\mathbf{1}\right)\cdot\cdot\left((\hat{\boldsymbol{j}}\hat{\boldsymbol{j}})^t + \frac{1}{2}i\hbar * \hat{\boldsymbol{j}} - \frac{1}{3}\hat{j}^2\mathbf{1}\right)\\ &= \frac{2}{3}\hat{j}^2\hat{j}^2 + \frac{\hbar^2}{2}\hat{j}^2 \ + \hat{\boldsymbol{j}}\cdot\hat{\boldsymbol{j}}\times\hat{\boldsymbol{j}} = \frac{2}{3}\hat{j}^2\hat{j}^2 + \frac{\hbar^2}{2}\hat{j}^2 + (i\hbar)^2\hat{\boldsymbol{j}}\cdot\hat{\boldsymbol{j}}\\ &= \frac{2}{3}\hat{j}^2\hat{j}^2 - \frac{\hbar^2}{2}\hat{j}^2 = \frac{2}{3}\hat{j}^2(\hat{j}^2 - \frac{3}{4}\hbar^2\mathbf{1}).\end{aligned} \tag{5.3.9}$$

Inserendo quest'ultima nella (5.3.3) e utilizzando ancora la relazione agli autovalori di $\hat{j}^2$ (2.1.28), si ottiene:

$$\langle a,j||S_2 \bullet S_2||a,j\rangle = \frac{1}{5^{1/2}}(2j+1)^{1/2}\frac{2}{3}\hbar^4(j(j+1))\left(j(j+1) - \frac{3}{4}\right). \tag{5.3.10}$$

Per il teorema della proiezione, utilizzando la (5.3.8) e la (5.3.10) si ha che:

$$\begin{aligned}\left\langle a,j,m'\middle|\widehat{\boldsymbol{Q}}\middle|a,j,m\right\rangle &= \frac{\langle a,j|Q\bullet S_2|a,j\rangle}{\langle a,j|S_2\bullet S_2|a,j\rangle}\,\langle a,j,m'|S_2|a,j,m\rangle\\ &= \frac{3}{2}\frac{\langle a,j,m_0|\widehat{\boldsymbol{Q}}\cdot\cdot\hat{\boldsymbol{j}}\hat{\boldsymbol{j}}|a,j,m\rangle}{\hbar^4 j(j+1)\,(j(j+1)-3/4)}\\ &\qquad\times\left\langle a,j,m'\middle|\frac{1}{2}\left(\hat{\boldsymbol{j}}\hat{\boldsymbol{j}} + (\hat{\boldsymbol{j}}\hat{\boldsymbol{j}})^t\right) - \frac{1}{3}\hat{j}^2\mathbf{1}\middle|a,j,m\right\rangle.\end{aligned}$$

Con questa si è dimostrata la (5.3.1c). □

L'equazione (5.3.1b) porta ad una interpretazione fisica intuitiva.
Supponiamo un sistema isolato dotato di momento angolare totale $\boldsymbol{j}$, poiché il sistema è isolato tale momento angolare si conserva. Supponiamo poi che $\boldsymbol{V}$ sia una grandezza

vettoriale che precede attorno a $\boldsymbol{j}$, per esempio il momento angolare orbitale o di spin, in presenza di accoppiamento spin-orbita. Allora, naturalmente, $\boldsymbol{V}$ non ha un valore costante, però il suo modulo $|\boldsymbol{V}|$ è costante. Se la precessione è molto rapida si ha che la media della componente normale a $\boldsymbol{j}$, cioè $\overline{\boldsymbol{V}}_{\perp}$, è praticamente nulla. La componente parallela invece non lo è, ma è data da

$$\overline{\boldsymbol{V}}_{\parallel} = \frac{\overline{\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{V}} \cdot \boldsymbol{j}}{\boldsymbol{j}^2}.$$

Confrontandola con la (5.3.1b) è evidente l'analogia strutturale.

Un esempio dell'equazione (5.3.1b) si ha quando si cerca di calcolare l'effetto perturbativo dato dall'immersione di un atomo in un campo magnetico non troppo forte. Quando un atomo viene immerso in un campo magnetico uniforme infatti, i suoi livelli energetici subiscono modifiche date dall'accoppiamento con il campo. In particolare, i livelli energetici degeneri subiscono uno splitting separandosi in più livelli vicini con energia di separazione determinata dall'intensità del campo magnetico. Se il campo magnetico è debole, allora si parla di *effetto Zeeman*. Il campo è debole nel senso appropriato, se l'energia di perturbazione che esso genera è molto minore dell'energia data dall'accoppiamento spin-orbita. L'energia di perturbazione $\widehat{W}$ è data da:

$$\widehat{W} = \frac{e}{2mc}\boldsymbol{\mathcal{H}} \cdot (\widehat{\boldsymbol{L}} + 2\widehat{\boldsymbol{S}}) = \mu_B \hbar^{-1} \mathcal{H}(\widehat{L}_0 + 2\widehat{S}_0), \tag{5.3.11}$$

dove μ_b è il magnetone di Bohr.
La direzione dell'asse di quantizzazione è stata scelta parallela alla direzione del campo magnetico. Gli autoket dell'hamiltoniana imperturbata sono $|n, L, S, J, M_j\rangle$, dove n indica un insieme di numeri quantici associati ad osservabili che commutano con l'operatore Hamiltoniano, cioè formano una rappresentazione di Heisenberg; gli altri quattro numeri quantici indicano rispettivamente numero quantico orbitale totale, di spin totale, di momento angolare totale e componente quantizzata del momento angolare totale. La degenerazione degli autovalori dell'energia è data dal numero $(2M_J + 1)$, in quanto l'operatore Hamiltoniano è scalare rispetto a $\hat{\boldsymbol{J}}$. É noto che per calcolare la correzione al primo ordine perturbativo dell'autovalore dell'energia è necessario diagonalizzare

$$\sum_{M'_J=-J}^{J} \sum_{M_J=-J}^{J} \left|n, L, S, J, M'_J\right\rangle \left\langle n, L, S, J, M'_J\right|\widehat{W}\left|n, L, S, J, M_J\right\rangle \left\langle n, L, S, J, M_J\right|. \tag{5.3.12}$$

Per la (5.3.11), gli elementi di matrice di $\widehat{W}$ diventano allora:

$$\begin{aligned}
&\left\langle n, L, S, J, M_J' \middle| \widehat{W} \middle| n, L, S, J, M_J \right\rangle \\
&\qquad = \mu_B \hbar^{-1} \mathcal{H} \left\langle n, L, S, J, M_J' \middle| \widehat{L}_0 + 2\widehat{S}_0 \middle| n, L, S, J, M_J \right\rangle, \qquad (5.3.13)
\end{aligned}$$

che si calcolano con il teorema della proiezione, nella forma dell'equazione (5.3.1b). Riferendoci a tale equazione abbiamo $\hat{\mathbf{V}} = \hat{\boldsymbol{L}} + 2\hat{\boldsymbol{S}}$ e applicheremo il teorema della proiezione alla componente 0 di $\hat{\mathbf{V}}$, cioè a $\hat{V}_0 = \hat{L}_0 + 2\hat{S}_0$. Dunque il calcolo degli elementi di matrice segue:

$$\begin{aligned}
&\left\langle n, L, S, J, M_J' \middle| \widehat{W} \middle| n, L, S, J, M_J \right\rangle \\
&\quad = \mu_B \hbar^{-1} \mathcal{H} \frac{\langle n, L, S, J, M_J' | (\widehat{\boldsymbol{L}} + 2\widehat{\boldsymbol{S}}) \cdot \widehat{\boldsymbol{J}} | n, L, S, J, M_J \rangle}{\hbar^2 J(J+1)} \\
&\qquad\qquad \times \left\langle n, L, S, J, M_J' \middle| \widehat{J}_0 \middle| n, L, S, J, M_J \right\rangle \\
&\quad = \mu_B \hbar^{-1} \mathcal{H} \frac{\langle n, L, S, J, M_J' | (\widehat{\boldsymbol{L}} + 2\widehat{\boldsymbol{S}}) \cdot \widehat{\boldsymbol{J}} | n, L, S, J, M_J \rangle}{\hbar^2 J(J+1)} \delta_{M_J', M_J} \hbar M_J \\
&\quad = \mu_B \mathcal{H} \frac{\langle n, L, S, J, M_J' | \widehat{\boldsymbol{L}}^2 + 2\widehat{\boldsymbol{S}}^2 + 3\widehat{\boldsymbol{L}} \cdot \widehat{\boldsymbol{S}} | n, L, S, J, M_J \rangle}{\hbar^2 J(J+1)} \delta_{M_J', M_J} M_J \\
&\quad = \mu_B \mathcal{H} \frac{\left\langle n, L, S, J, M_J' \middle| \frac{3}{2}\widehat{\boldsymbol{J}}^2 - \frac{1}{2}\widehat{\boldsymbol{L}}^2 + \frac{1}{2}\widehat{\boldsymbol{S}}^2 \middle| n, L, S, J, M_J \right\rangle}{\hbar^2 J(J+1)} \delta_{M_J', M_J} M_J \\
&\quad = \mu_B \mathcal{H} \left(\frac{3}{2} + \frac{S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)} \right) \delta_{M_J', M_J} M_J \\
&\quad = \mu_B \mathcal{H} g(L, S, J) \delta_{M_J', M_J} M_J. \qquad (5.3.14)
\end{aligned}$$

Nel terzultimo passaggio è stato utilizzato il fatto che

$$\widehat{\boldsymbol{J}}^2 = (\widehat{\boldsymbol{L}} + \widehat{\boldsymbol{S}})^2 = \widehat{\boldsymbol{L}}^2 + \widehat{\boldsymbol{S}}^2 + 2\widehat{\boldsymbol{L}} \cdot \widehat{\boldsymbol{S}},$$

da cui:

$$\widehat{\boldsymbol{L}} \cdot \widehat{\boldsymbol{S}} = \frac{1}{2} \left(\widehat{\boldsymbol{J}}^2 - \widehat{\boldsymbol{L}}^2 - \widehat{\boldsymbol{S}}^2 \right)$$

Inoltre, è stato introdotto il numero

$$g(L, S, J) = \frac{3}{2} + \frac{S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)},$$

che è detto *fattore di Landé*. Così, inserendo la (5.3.14) nella (5.3.12), si ottiene:

$$\begin{aligned}
&\sum_{M'_J=-J}^{J} \sum_{M_J=-J}^{J} \left|n, L, S, J, M'_J\right\rangle \left\langle n, L, S, J, M'_J\middle|\widehat{W}\middle|n, L, S, J, M_J\right\rangle \left\langle n, L, S, J, M_J\right| \\
&= \sum_{M'_J=-J}^{J} \sum_{M_J=-J}^{J} \left|n, L, S, J, M'_J\right\rangle \mu_B \mathcal{H} g(L, S, J) \delta_{M'_J, M_J} M_J \left\langle n, L, S, J, M_J\right| \\
&= g(L, S, J) \mu_B \mathcal{H} \sum_{M_J=-J}^{J} \left|n, L, S, J, M_J\right\rangle M_J \left\langle n, L, S, J, M_J\right|, \qquad (5.3.15)
\end{aligned}$$

che è in forma diagonale.
Si è visto quindi che tramite l'utilizzo del teorema della proiezione si semplifica notevolmente il calcolo degli elementi di matrice dati dall'energia di perturbazione.

Bibliografia

[1] E. U. Condon, G. H. Shortley (1953). *The theory of atomic spectra.* Cambridge University Press, Cambridge.

[2] A.R. Edmonds (1957). *Angular momentum in Quantum Mechamics.* Priceton University

[3] L.D. Landau, E.M. Lifshitz (1977). *Quantum Mechanics: Non-Relativistic theory 3.* Institute of Physical Problem USSR Academy of Science

[4] C. Cohen-Tannoudjii, B. Diu, F. Laloe (1977). *Quantum Mechanics, Volume 1, 2.* Wiley-Interscience, New York.

[5] J. J. Sakurai (1994). *Modern Quantum Mechanics Revised Edition.* Late, University of California, Los Angeles.

[6] R. Zucchini. *Quantum mechanics: Lecture notes.* Università di Bologna, AA 2018/2019