Eindimensionale stochastische Differentialgleichungen ohne Drift mit zeitabhängigen Koeffizienten

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades

doctor rerum naturalium

vorgelegt dem Rat der
Fakultät für Mathematik und Informatik
der Friedrich-Schiller-Universität Jena

von Dipl.-Math. Peter Raupach,
geboren am 10. Januar 1967 in Leipzig

Inhaltsverzeichnis

Bezeichnungen

$\mathcal{B}_M$	Borel-σ-Algebra des metrischen Raumes M
$\sigma(U)$	von U erzeugte σ-Algebra
$\mathbb{R}_+$	$[0,\infty)$
$\mathbb{Q}_+$	$\mathbb{Q}\cap\mathbb{R}_+$
$C_{\mathbb{R}_+}$	Raum der stetigen reellen Funktionen auf $\mathbb{R}_+$
$\overline{\mathbb{R}}$	Ein-Punkt-Kompaktifizierung von $\mathbb{R}$
$\bowtie$	unendlich ferner Punkt in $\overline{\mathbb{R}}$
E	Raum der stetigen explodierenden Funktionen (s. S. 8)
E_+	(s. S. 8)
$S(x)$	Explosionszeit von $x\in E$ (s. S. 8)
$D^m(x)$	(s. S. 8)
$\lvert\cdot\rvert_e$	euklidische Norm in $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$
$N(\mu,\sigma^2)$	Normalverteilung mit Erwartungswert μ und Streuung σ^2
$a\wedge b$	$\min(a,b)$
$a\vee b$	$\max(a,b)$
$[a]^+$	$a\vee 0$
λ	Lebesgue-Maß auf $[\mathbb{R}_+\times\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}}]$
λ^1	Lebesgue-Maß auf $[\mathbb{R}_+,\mathcal{B}_{\mathbb{R}_+}]$
B^c	Komplement der Menge B
$\overline{B}$	Abschluß von B
$\mathring{B}$	Inneres von B
∂B	Rand von B
I_B	Indikatorfunktion von B
$\mathbb{F}\circ T$	durch T zeittransformierte Filtration $\mathbb{F}$ (s. S. 16)
$\mathbf{W}$	Wiener-Maß auf $[C_{\mathbb{R}_+},\mathcal{B}_{C_{\mathbb{R}_+}}]$
$\mathbf{E}^{\mathbf{P}}Y$	Erwartungswert von Y unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbf{P}$
$\mathrm{card}B$	Mächtigkeit der Menge B
$N(f)$	Menge der Nullstellen einer reellen Funktion f
$F(f)$	(s. S. 34)
$K_{t,m}$	$[0,t]\times[-m,m]$; $t,m\geqslant 0$
K_m	$K_{m,m}$
X^τ	in τ gestoppter Prozeß X
$f\big\vert_B$	Einschränkung der Funktion f auf die Menge B
$\mathop{\times}\limits_I X_i$	kartesisches Produkt der Räume X_i über die Indexmenge $I\ni i$
$\bigotimes\limits_I \mathcal{F}^i$	Produkt-σ-Algebra über die Indexmenge $I\ni i$

1 Einleitung

Wir betrachten die driftfreie eindimensionale stochastische Differentialgleichung

$$(\star) \qquad X_t = x_0 + \int_0^t b(s, X_s)\, dB_s\,,$$

wobei B einen eindimensionalen Wienerprozeß (eine Brownsche Bewegung), b eine reelle Borel-meßbare Funktion auf $[0,\infty) \times \mathbb{R}$ und x_0 eine reelle Zahl bezeichnet. Man unterscheidet verschiedene Lösungsbegriffe:

(a) Ein beliebiger Wienerprozeß B wird vorgegeben und dazu ein Prozeß X gesucht, der $(\star)$ erfüllt.

(b) Man sieht den Wienerprozeß als Bestandteil der Lösung an. Gesucht wird also ein *Paar* aus einem Wienerprozeß B und einem Prozeß X, welches $(\star)$ erfüllt. Der Wienerprozeß B kann also auch nachträglich aus einem geeigneten X konstruiert werden. Ein solches X heißt *schwache* Lösung von $(\star)$.

In der vorliegenden Arbeit werden schwache Lösungen betrachtet. Ein Weg zur Konstruktion schwacher Lösungen eindimensionaler stochastischer Differentialgleichungen ist die Methode der Zeittransformation. Dieses Verfahren wurde bereits von vielen Autoren angewandt (siehe etwa [11], Teil I, § 15; [12], III.2; [9]). Die vorliegende Arbeit knüpft an die Dissertation [21] von T. Senf an.

Der Methode der Zeittransformation liegt folgender Gedanke zugrunde: Jede Lösung von $(\star)$ ist ein (möglicherweise explodierendes) stetiges lokales Martingal bis zu einer Stoppzeit. Ein solcher Prozeß kann als Wienerprozeß dargestellt werden, dessen Zeitskala in geeigneter Weise zufällig transformiert wurde.[1] Dieser Umstand wird zur Konstruktion von $(\star)$-Lösungen ausgenutzt: Man gibt einen Wienerprozeß vor und sucht nach einer derartigen zufälligen Transformation der Zeitskala, daß sich der zeittransformierte Wienerprozeß als schwache Lösung von $(\star)$ erweist.

Sei $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ eine Filtration und W ein adaptierter Wienerprozeß, dessen Zuwächse $W_t - W_s$ von $\mathcal{F}_s$ unabhängig sind ($0 \leqslant s < t < \infty$). Eine geeignete Zeittransformation in Form eines wachsenden Prozesses A ist dann gefunden, wenn jedes A_t einerseits eine Stoppzeit bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ ist und andererseits die Gleichung

$$(\triangle) \qquad A_t = \int_0^t b^2(s, W \circ A_s)\, ds$$

löst. Es gibt genau dann schwache Lösungen zu $(\star)$, wenn $(\triangle)$ lösbar ist.

In der vorliegenden Arbeit soll die stochastische Differentialgleichung $(\star)$ mit Hilfe der Zeittransformationsgleichung $(\triangle)$ untersucht werden.

Für $(\star)$ und $(\triangle)$ sind verschiedene Eindeutigkeitsbegriffe sinnvoll, insbesondere die Eindeutigkeit in Verteilung und die pfadweise Eindeutigkeit. Das Hauptresultat von Kapitel 3 besagt, daß für $(\triangle)$ alle eingeführten Eindeutigkeitsdefinitionen zusammenfallen und äquivalent zur Eindeutigkeit in Verteilung der Lösungen von $(\star)$ sind.

[1] Nötigenfalls muß dazu der Wahrscheinlichkeitsraum um einen weiteren, unabhängigen Wienerprozeß „bereichert“ werden.

Damit sind Eindeutigkeit in Verteilung und Existenz schwacher Lösungen von ($\star$) vollständig durch ($\triangle$) charakterisiert.

Den zahlreich vorhandenen Existenzaussagen für schwache Lösungen von ($\star$) ist zumeist eigen, daß man entweder Stetigkeitsforderungen an b stellt oder anderenfalls Nullstellen von b, falls sie überhaupt zugelassen werden, nach Möglichkeit ignoriert. Das Verhalten einer Lösung in der Nähe der Nullstellen ist aber auch für nichtstetige b interessant; zum Beispiel, weil sich gerade dort zu entscheiden scheint, ob eine Lösung eindeutig in Verteilung ist.[2] Im Kapitel 5 werden analytische Bedingungen für b gesucht, die die Existenz einer Lösung von ($\triangle$) bei vorgegebenem Wienerprozeß mit beliebigem Startpunkt sichern. Dabei gehen wir von besonders einfachen Funktionen aus, für die ($\triangle$)-Lösungen dank der klassischen Sätze bereitstehen, und steigen mittels monotoner Approximation solcher Lösungen in zwei Schritten schließlich zu einer Klasse meßbarer Funktionen auf. Für diese Funktionen wird ein einfacher Existenzsatz formuliert, der „wesentliche“ Nullstellen zuläßt; ein durch eine entsprechende ($\triangle$)-Lösung zeittransformierter Wienerprozeß $W \circ A$ kann in so einem Fall Teile der Menge aller Nullstellen von b konstant durchlaufen. Ebenso kann aber auch die Menge aller Aufenthaltszeitpunkte in den Nullstellen von b nirgends dicht und dennoch von positivem Maß sein.

Alternativ können Existenzaussagen auch mit Hilfe von Straffheitsargumenten getroffen werden ([22], [20]). Bei der in dieser Arbeit durchgeführten *direkten* Konstruktion der Lösungen von ($\triangle$) kann aber darüberhinaus nachgewiesen werden, daß die Werte der konstruierten Lösungen Stoppzeiten zur kleinstmöglichen Filtration sind, an die der Wienerprozeß adaptiert ist.[3] Solche Lösungen heißen *rein*. Diese Eigenschaft ist von selbständigem Interesse, da sie eng mit der Eindeutigkeit von ($\triangle$) und der sogenannten Darstellbarkeitseigenschaft stetiger lokaler Martingale zusammenhängt. Wir gehen darauf in Kapitel 4 ein.

Es seien ein festes b und ein Wienerprozeß W mit der Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ gegeben. Die Klasse aller ($\triangle$)-Lösungen zu b, W und $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ ist ein Verband: Maximum und Minimum zweier Lösungen sind wieder Lösung. In Kapitel 6 geben wir eine einfache und gleichzeitig recht allgemeine hinreichende Bedingung für die Existenz eines maximalen und eines minimalen (= extremalen) Elements in diesem Verband an. Wir stellen weiterhin fest, daß extremale Lösungen nicht von der verwendeten Filtration abhängen. Vielmehr sind sie *rein*, wenn es zu jedem Wienerprozeß extremale Lösungen gibt. In diesem Fall können wir auch zeigen, daß jeweils alle maximalen und alle minimalen Lösungen dasselbe Verteilungsgesetz haben.

Den Abschluß bilden Vergleichssätze für extremale Lösungen. Sie können – wie das Konzept der extremalen Lösung überhaupt – für Eindeutigkeitsaussagen nützlich sein.

Extremale ($\triangle$)-Lösungen haben, abgesehen von ihrem theoretischen Wert, auch eine anschauliche Interpretation: Die durch solche Lösungen zeittransformierten Wienerprozesse kann man sich als Beispiel eines extrem „ruhigen“ bzw. „unruhigen“ Verhaltens einer ($\star$)-Lösung vorstellen.

Einige Hilfsätze sind im Interesse einer kompakteren Darstellung in einem Anhang zusammengefaßt.

---

[2] Man vergleiche die folgende Aussage: Für Funktionen b mit $0 < \lambda \leqslant b^2 \leqslant \Lambda < \infty$, $\lambda, \Lambda \in \mathbb{R}$ ist die Lösung von ($\star$) eindeutig in Verteilung (s. [25] 7.3.3).

[3] unter allen Filtrationen, die die sogenannten *üblichen Bedingungen* erfüllen;

Ich danke Herrn Prof. Dr. Engelbert für die Anregung zu diesem Dissertationsthema, vor allem aber für seine engagierte Unterstützung während der letzten Jahre ganz herzlich.

2 Grundlagen

2.1 Standard-Borel-Räume

Es sei $[\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}]$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathcal{A}$ eine σ-Unteralgebra von $\mathcal{F}$. Mit $\mathbf{E}\left(I_A \middle| \mathcal{A}\right)(\omega)$, $\omega \in \Omega$, $A \in \mathcal{A}$, bezeichnen wir die bedingte Erwartung der Indikatorfunktion von A unter $\mathcal{A}$. Diese ist bekanntlich nur $\mathbf{P}$-f.-s. eindeutig definiert. Läßt man A die σ-Algebra $\mathcal{F}$ durchlaufen, dann sind bestimmte Versionen von $\mathbf{E}\left(I_A \middle| \mathcal{A}\right)(\omega)$ als bedingtes Wahrscheinlichkeitsmaß unter $\mathcal{A}$ interpretierbar. Dabei ist es einleuchtend, gewisse Forderungen zu stellen.

Definition 2.1 Eine Abbildung $\mathbf{P}(\cdot, \cdot) : \Omega \times \mathcal{F} \to [0, 1]$ heißt *reguläres bedingtes Wahrscheinlichkeitsmaß unter* $\mathcal{A}$, falls gilt:

(i) Für jedes $\omega \in \Omega$ ist $\mathbf{P}(\omega, \cdot)$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $[\Omega, \mathcal{F}]$.

(ii) $\mathbf{P}(\cdot, A)$ ist $\mathcal{A}$-meßbar für jedes $A \in \mathcal{F}$, und es gilt

$$\mathbf{P}(A) = \int_{\Omega} \mathbf{P}(\omega, A)\mathbf{P}(d\omega) \, .$$

(iii) Es gibt ein $N \in \mathcal{A}$ mit $\mathbf{P}(N) = 0$ derart, daß $\mathbf{P}(\omega, A) = I_A(\omega)$ gilt für jedes $\omega \notin N$ und jedes $A \in \mathcal{A}$.

Es ist allgemein bekannt, daß man eine solche reguläre bedingte Wahrscheinlichkeit finden kann, wenn Ω ein polnischer Raum ist, $\mathcal{F}$ die σ-Algebra der Borelmengen und $\mathcal{A}$ abzählbar erzeugt ist (s. etwa [25], 1.1.6 und 1.1.8). Parthasarathy zeigte, daß dies auch noch für allgemeinere Räume zutrifft. Für einen metrischen Raum X sei $\mathcal{B}_X$ die σ-Algebra der Borelmengen.

Definition 2.2 Ein meßbarer Raum $[\Omega, \mathcal{F}]$ heißt *separabel*, wenn für jedes $\omega \in \Omega$ die Einermenge $\{\omega\}$ in $\mathcal{F}$ enthalten ist.

Definition 2.3 Seien $[\Omega, \mathcal{F}]$, $[\Omega', \mathcal{F}']$ meßbare Räume. Die σ-Algebren $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}'$ heißen *σ-isomorph*, falls es eine Bijektion $\pi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ mit den folgenden Eigenschaften gibt:

- $(\pi(A))^c = \pi(A^c)$ für alle $A \in \mathcal{F}$;
- $\bigcup_{i=1}^{\infty} \pi(A_i) = \pi\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)$ für $A_i \in \mathcal{F}$, $i \in \mathbb{N}$;

Definition 2.4 $[\Omega, \mathcal{F}]$ heißt *Standard-Borel-Raum*, falls es einen polnischen Raum X gibt, dessen Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}_X$ zu $\mathcal{F}$ σ-isomorph ist.

Es ist nicht überraschend, auf diesen Räumen zu einem Wahrscheinlichkeitsmaß bedingte reguläre Wahrscheinlichkeiten zu finden. Wir formulieren die entsprechende Aussage für den Fall einer meßbaren Abbildung aus einem Standard-Borel-Raum auf einen anderen Standard-Borel-Raum. Zu einer Abbildung π sei $\pi^{-1}(B)$ das Urbild der Menge B.

Satz 2.5 (K. R. Parthasarathy) ([19] V.8.1) *Seien* $[\Omega, \mathcal{F}]$, $[\Omega', \mathcal{F}']$ *separable Standard-Borel-Räume,* $\mathbf{P}$ *ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf* $[\Omega, \mathcal{F}]$ *und* $\pi : \Omega \to \Omega'$ *eine* $\mathcal{F}/\mathcal{F}'$-*meßbare surjektive Abbildung. Sei weiterhin* $\mathbf{P}' := \mathbf{P} \circ \pi^{-1}$ *das von* π *in* Ω' *erzeugte*

Bildmaß. Dann gibt es ein reguläres bedingtes Wahrscheinlichkeitsmaß von $\mathbf{P}$ *unter* π, *d. h. eine Abbildung*

$$\mathbf{P}(\cdot,\cdot) : \Omega' \times \mathcal{F} \to [0,1]$$

mit den Eigenschaften

(i) *Für jedes* $\omega' \in \Omega'$ *ist* $\mathbf{P}(\omega',\cdot)$ *ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf* $[\Omega,\mathcal{F}]$.

(ii) $\mathbf{P}(\cdot, A)$ *ist* $\mathcal{F}'$*-meßbar für jedes* $A \in \mathcal{F}$, *und es gilt für jedes* $A' \in \mathcal{F}'$

$$\mathbf{P}(A \cap \pi^{-1}(A')) = \int_{A'} \mathbf{P}(\omega', A)\mathbf{P}'(d\omega')\,.$$

(iii) *Es gibt ein* $N' \in \mathcal{F}'$ *mit* $\mathbf{P}'(N') = 0$ *und* $\mathbf{P}(\omega', \pi^{-1}(A')) = I_{A'}(\omega')$ *für jedes* $\omega' \notin N'$ *und jedes* $A' \in \mathcal{F}'$.

Satz 2.6 ([19] V.2.3) *Es seien* $[\Omega,\mathcal{F}]$, $[\Omega',\mathcal{F}']$ *Standard-Borel-Räume und* $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}'$ *die Produkt-*σ*-Algebra von* $\mathcal{F}$ *und* $\mathcal{F}'$. *Dann ist* $[\Omega \times \Omega', \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}']$ *ein Standard-Borel-Raum. Gilt* $A \in \mathcal{F}$, *so ist auch die Spur* $[A, A \cap \mathcal{F}]$ *ein Standard-Borel-Raum.*

Die σ-Isomorphie eines Standard-Borel-Raumes $[\Omega,\mathcal{F}]$ zur Borel-σ-Algebra des polnischen Raumes ist oft nicht direkt beschreibbar, denn $\mathcal{F}$ ist meist nur durch ein Erzeugendensystem bestimmt. In der folgenden speziellen Situation kann man aber schon vom Erzeugendensystem schließen.

Definition 2.7 Auf einem meßbaren Raum $[\Omega,\mathcal{F}]$ heißt ein nichtleeres $A \in \mathcal{F}$ *Atom*, falls aus $B \subseteq A$, $B \in \mathcal{F}$ stets $B = A$ oder $B = \emptyset$ folgt.

Satz 2.8 ([19] V.4.1) *Es sei* $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine wachsende Folge von* σ*-Algebren auf* Ω *und* $\mathcal{F} = \sigma\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n\right)$. *Ist jedes* $[\Omega,\mathcal{F}_n]$ *ein Standard-Borel-Raum und gilt für jede fallende Folge* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *von Atomen* $A_n \in \mathcal{F}_n$ *stets* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$, *dann ist auch* $[\Omega,\mathcal{F}]$ *ein Standard-Borel-Raum.*

2.2 Explodierende Funktionen

Für diese Arbeit ist der Begriff der stetigen explodierenden Funktion grundlegend. Wir führen in diesem Abschnitt keine Beweise aus und verweisen hierzu auf [21]. Mit $\overline{\mathbb{R}}$ bezeichnen wir die Ein-Punkt-Kompaktifizierung von $\mathbb{R}$ nach Alexandrov und mit $\bowtie$ den unendlich fernen Punkt. Sei $\mathbb{R}_+ := [0,\infty)$. Für eine Funktion $x : \mathbb{R}_+ \to \overline{\mathbb{R}}$ führen wir ein:

$$\begin{aligned} S(x) &:= \inf\{t \in \mathbb{R}_+ \,:\, x(t) = \bowtie\}\,, \quad \inf\emptyset := \infty\,; \\ D^m(x) &:= \inf\{t \in \mathbb{R}_+ \,:\, |x(t)| \geqslant m\}\,, \quad m \in \mathbb{N}\,. \end{aligned}$$

Als den *Raum der stetigen explodierenden Funktionen* bezeichnen wir die Menge

$$E := \left\{ x : \mathbb{R}_+ \to \overline{\mathbb{R}} \;:\; \begin{array}{l} x : [0, S(x)) \to \mathbb{R} \text{ ist stetig, } x|_{[S(x),\infty)} \equiv \bowtie \\ D^m(x) < S(x) \text{ für } S(x) < \infty,\ m \in \mathbb{N} \end{array} \right\}.$$

Sei außerdem

$$E_+ := \{x \in E \,:\, x(0) = 0,\ x \text{ wächst monoton auf } [0, S(x))\}\,.$$

Wir bemerken, daß ein $x \in E$ im Falle $S(x) < \infty$ schon *vor* dem Zeitpunkt $S(x)$ jeden beschränkten Bereich überschreiten („explodieren“) muß. Die Größe $S(x)$ heißt *Explosionszeit.* In E_+ kann man wegen des Wachstums der Funktionen den unendlich fernen Punkt $\bowtie$ mit $+\infty$ identifizieren. Wir können E metrisieren, etwa durch

$$d_E(x,y) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \sup_{t\in[0,n]} \left(|x(t) \wedge n \vee (-n) - y(t) \wedge n \vee (-n)| \wedge 1\right)$$

für $x, y \in E$. Der metrische Raum (E, d_E) ist separabel, aber nicht vollständig. Weiterhin stimmt die Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}_E$ mit der von den Zylindermengen erzeugten σ-Algebra überein. Sei X_t die Koordinatenabbildung in E zur Zeit $t \geqslant 0$, also $X_t(x) = x(t)$, $x \in E$, und

$$\mathcal{E}_t := \sigma(X_s,\, 0 \leqslant s \leqslant t)\,, \quad t \geqslant 0\,.$$

Dann ist $(\mathcal{E}_t)_{t\geqslant 0}$ eine Filtration und $\mathcal{B}_E = \sigma\left(\bigcup_{t\geqslant 0} \mathcal{E}_t\right)$. Die meßbaren Abbildungen $D^m(x)$ und $S^m(x) := D^m(x) \wedge m$, $x \in E$, sind dann für $(\mathcal{E}_t)_{t\geqslant 0}$ Stoppzeiten, was leicht einzusehen ist, wenn man in Betracht zieht, daß ein $x \in E$ schon durch alle Koordinatenabbildungen X_t mit rationalem $t < S(x)$ eindeutig bestimmt ist. Wie allgemein bekannt, ist nun

$$\mathcal{E}_{S^m} := \{B \in \mathcal{B}_E \,:\, B \cap \{x \in E \,:\, S^m(x) \leqslant s\} \in \mathcal{E}_s\,,\ s \geqslant 0\}$$

eine σ-Algebra. Es gilt offenbar $S^m(x) < S^{m+1}(x)$, $m \in \mathbb{N}$, $x \in E$. Torsten Senf zeigt nun in [21], Kap. 2,

- daß $\mathcal{B}_E$ von $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{E}_{S^m}$ erzeugt wird;
- daß jedes $[E, \mathcal{E}_{S^m}]$ ein Standard-Borel-Raum ist, da $\mathcal{E}_{S^m}$ σ-isomorph zur σ-Algebra des Standard-Borel-Raums $[C_{\mathbb{R}_+}, \mathcal{E}_{S^m} \cap C_{\mathbb{R}_+}]$ ist, wobei $C_{\mathbb{R}_+}$ den metrischen Raum aller stetigen reellen Funktionen auf $\mathbb{R}_+$ bezeichnet;
- daß zu jeder fallenden Folge $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ von Atomen $A_m \in \mathcal{E}_{S^m}$ der Durchschnitt $\bigcap_{m\in\mathbb{N}} A_m$ nicht leer ist.

Da $\{x\} \in \mathcal{B}_E$ für jedes $x \in E$ gilt, folgt mit Satz 2.8:

Satz 2.9 $[E, \mathcal{B}_E]$ *ist ein separabler Standard-Borel-Raum.*

Man überzeugt sich leicht von der Tatsache $E_+ \in \mathcal{B}_E$. Nach Satz 2.6 ist dann $[E_+, \mathcal{B}_{E_+}]$ ein Standard-Borel-Raum. Der Raum der stetigen Funktionen $C_{\mathbb{R}_+}$ ist mit der Metrik

$$d_C(x,y) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \sup_{t\in[0,n]} \left(|x(t) - y(t)| \wedge 1\right)\,, \quad x, y \in C_{\mathbb{R}_+}$$

ein polnischer Raum, also trivialerweise ein separabler Standard-Borel-Raum. Wiederum nach Satz 2.6 ist dann wegen $\mathcal{B}_{C_{\mathbb{R}_+}} \otimes \mathcal{B}_{E_+} = \mathcal{B}_{C_{\mathbb{R}_+}\times E_+}$ auch $\left[C_{\mathbb{R}_+} \times E_+, \mathcal{B}_{C_{\mathbb{R}_+}\times E_+}\right]$ ein separabler Standard-Borel-Raum. Die Projektion $\pi(w,x) := w$, $(w,x) \in C_{\mathbb{R}_+} \times E_+$ ist offenbar $\mathcal{B}_{C_{\mathbb{R}_+}\times E_+}\Big/\mathcal{B}_{C_{\mathbb{R}_+}}$-meßbar und surjektiv. Mit Satz 2.5 erhalten wir dann das folgende Ergebnis:

Satz 2.10 *Ist* $\mathbf{P}$ *ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf* $[C_{\mathbb{R}_+} \times E_+, \mathcal{B}_{C_{\mathbb{R}_+}\times E_+}]$*, so gibt es eine reguläres bedingtes Wahrscheinlichkeitsmaß unter* π*.*

2.3 Der Wahrscheinlichkeitsraum

Es seien ein reellwertiger stochastischer Prozeß $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $[\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}]$ und die Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ gegeben, bestehend aus Teil-σ-Algebren von $\mathcal{F}$. Ist X an $\mathbb{F}$ adaptiert, so schreiben wir $(X, \mathbb{F})$. Die kleinstmögliche derartige Filtration zu gegebenem X ist $\mathbb{F}^X := (\mathcal{F}_t^X)_{t\geqslant 0}$ mit

$$\mathcal{F}_t^X := \sigma(X_s,\, 0 \leqslant s \leqslant t)\,, \quad t \geqslant 0\,.$$

Weiter bezeichnet

$$\mathcal{N}^{\mathbf{P}} := \{A \subseteq \Omega \,:\, \exists A' \in \mathcal{F} \text{ mit } A \subseteq A',\ \mathbf{P}(A') = 0\}$$

die Klasse der $\mathbf{P}$-Nullmengen. Im Falle $\mathcal{N}^{\mathbf{P}} \subseteq \mathcal{F}$ heißt der Wahrscheinlichkeitsraum *vollständig*. Wir schreiben für eine beliebige Teil-σ-Algebra $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$

$$\mathcal{N}^{\mathbf{P}} \vee \mathcal{A} := \sigma(\mathcal{N}^{\mathbf{P}} \cup \mathcal{A})\,.$$

Eine Filtration $\mathbb{F}$ heißt *rechtsstetig*, wenn $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+} := \bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon}$, $t \geqslant 0$, gilt. Wir sagen, $\mathbb{F}$ erfülle die *üblichen Bedingungen*, wenn $\mathbb{F}$ rechtsstetig ist und $\mathcal{F}_0$ bereits $\mathcal{N}^{\mathbf{P}}$ enthält. Außerdem führen wir die von $\mathbb{F}$ abgeleiteten Filtrationen

$$\mathbb{F}^{\mathbf{P}} := \left(\mathcal{F}_t^{\mathbf{P}}\right)_{t\geqslant 0} := \left(\mathcal{F}_t \vee \mathcal{N}^{\mathbf{P}}\right)_{t\geqslant 0} \quad \text{und} \quad \mathbb{F}_+^{\mathbf{P}} := \left(\mathcal{F}_{t+}^{\mathbf{P}}\right)_{t\geqslant 0} := \left(\mathcal{F}_{t+} \vee \mathcal{N}^{\mathbf{P}}\right)_{t\geqslant 0}$$

ein (es gilt $\bigcap_{\varepsilon>0}\left(\mathcal{F}_{t+\varepsilon} \vee \mathcal{N}^{\mathbf{P}}\right) = \left(\bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon}\right) \vee \mathcal{N}^{\mathbf{P}}$). Haben wir für zwei Filtrationen $\mathbb{F}$, $\mathbb{G}$ die Relation $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{G}_t$, $t \geqslant 0$, dann schreiben wir $\mathbb{F} \leqslant \mathbb{G}$ und nennen $\mathbb{F}$ kleiner oder gleich $\mathbb{G}$. Es handelt sich demnach bei $\mathbb{F}_+^{\mathbf{P}}$ um die kleinste Filtration, die größer oder gleich $\mathbb{F}$ ist und die üblichen Bedingungen erfüllt. Im Falle $\mathbb{F} = \mathbb{F}^X$ schreiben wir

$$\mathbb{G}^X := \left(\mathbb{F}^X\right)^{\mathbf{P}}\,.$$

Handelt es sich bei Ω um einen Funktionenraum mit Argumenten in $\mathbb{R}_+$, etwa um $C_{\mathbb{R}_+}$, dann ist die Koordinatenabbildung $X_t(x) := x(t)$, $t \geqslant 0$, $x \in C_{\mathbb{R}_+}$, ein stochastischer Prozeß. Wenn wir etwas lax vom „stochastischen Prozeß x“ sprechen, ist der Prozeß der Koordinatenabbildung gemeint. Ein Prozeß X mit stetigen oder explodierenden stetigen Pfaden induziert im Raum $[C_{\mathbb{R}_+}, \mathcal{B}_{C_{\mathbb{R}_+}}]$ bzw. $[E, \mathcal{B}_E]$ das mit $\mathbf{P}^X$ bezeichnete Bildmaß. Es heißt die *Verteilung* von X.

Definition 2.11 $\mathbb{F}$ sei eine Filtration auf $[\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}]$. Ein stetiger adaptierter Prozeß $(W, \mathbb{F})$ heißt *in x_0 startender Wienerprozeß*, falls $W_0 = x_0$ $\mathbf{P}$-f.-s. für ein $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt und für alle $0 \leqslant s < t < \infty$ der Zuwachs $W_t - W_s$ von $\mathcal{F}_s$ unabhängig ist und $N(0, t-s)$-verteilt.

Die Zahl $x_0 \in \mathbb{R}$ wird in dieser Arbeit stets der $\mathbf{P}$-fast-sichere Startpunkt aller betrachteten Wienerprozesse und Lösungen stochastischer Differentialgleichungen sein. Wir gehen nicht näher auf ihn ein und treffen keine von x_0 abhängigen Aussagen. Sei daher nun x_0 beliebig fixiert. Wir nennen einen in x_0 startenden Wienerprozeß, der an eine Filtration adaptiert ist, welche die üblichen Bedingungen erfüllt, einen *üblichen Wienerprozeß*. Bekanntlich ist ein üblicher Wienerprozeß $(W, \mathbb{F})$ ein stetiges lokales Martingal mit der ($\mathbf{P}$-f.-s. eindeutigen) quadratischen Variation $\langle W \rangle_t = t$, $t \geqslant 0$. Der folgende Satz von Paul Lvy besagt, daß dies bereits die Wienerprozesse unter allen $\mathbb{F}$-adaptierten stetigen lokalen Martingalen mit dem Startwert x_0 charakterisiert (s. [15] Th. 3.3.16).

Satz 2.12 (P. Lévy) *Die Filtration $\mathbb{F}$ erfülle die üblichen Bedingungen. Ein $\mathbf{P}$-f.-s. in x_0 startendes stetiges lokales Martingal $(X, \mathbb{F})$ mit der quadratischen Variation $\langle X \rangle_t = t$, $t \geqslant 0$, $\mathbf{P}$-f.-s. ist ein (üblicher) Wienerprozeß.*

An dieser Stelle sei bereits erwähnt, daß ein Wienerprozeß $(W, \mathbb{G}^W)$ die sogenannte Darstellbarkeitseigenschaft besitzt (s. Definition 4.1). Für solche Prozesse ist die Filtration $\mathbb{G}^W$ bereits rechtsstetig (s. [5], Proposition 1). Sie erfüllt also die üblichen Bedingungen. Daher ist ein Wienerprozeß $\left(W, \mathbb{G}^W\right)$ ein *üblicher* Wienerprozeß. Wir müssen aber teilweise mit größeren Filtrationen arbeiten. Hierbei gilt folgendes:

Lemma 2.13 *Sei $(W, \mathbb{F})$ ein Wienerprozeß auf $[\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}]$, dessen Filtration nicht die üblichen Bedingungen erfüllen muß. Dann ist $(W, \mathbb{F}_+^{\mathbf{P}})$ ein (üblicher) Wienerprozeß.*

Beweis: Ein quadratisch integrierbares Martingal $(M, \mathbb{F})$ ist ein ebensolches bezüglich $\mathbb{F}^{\mathbf{P}}$. Für Martingale $(M, \mathbb{F}^{\mathbf{P}})$ gilt generell

$$\mathbf{E}\left(M_{t+} \,\middle|\, \mathcal{F}_{s+}^{\mathbf{P}}\right) = M_{s+} \quad \mathbf{P}\text{-f.-s.}\,, \quad 0 \leqslant s \leqslant t < \infty\,.$$

Auf das stetige W angewendet, heißt das

$$\mathbf{E}\left(W_t \,\middle|\, \mathcal{F}_{s+}^{\mathbf{P}}\right) = W_s \quad \mathbf{P}\text{-f.-s.}\,, \quad 0 \leqslant s \leqslant t < \infty\,,$$

so daß $(W, \mathbb{F}_+^{\mathbf{P}})$ ein Martingal ist. Da $\langle W \rangle_t = t$, $t \geqslant 0$, $\mathbf{P}$-f.-s. auch für $(W, \mathbb{F}_+^{\mathbf{P}})$ gilt, folgt mit Satz 2.12 die Behauptung. ■

Sei S eine $\mathbb{F}$-Stoppzeit. Ein $\overline{\mathbb{R}}$-wertiger Prozeß $(X, \mathbb{F})$ heißt *stetiges lokales Martingal bis* S, wenn es eine wachsende Folge von $\mathbb{F}$-Stoppzeiten $\tau_n < S$, $n \in \mathbb{N}$, gibt, die $\mathbf{P}$-f.-s. gegen S konvergiert, und wenn für jedes $n \in \mathbb{N}$ der in τ_n gestoppte Prozeß $(X_{\cdot \wedge \tau_n}, \mathbb{F})$ ein stetiges lokales Martingal ist. Mit X^τ sei der in τ abgestoppte Prozeß X bezeichnet.

Jedem stetigen lokalen Martingal $(M, \mathbb{F})$ ist $\mathbf{P}$-f.-s. eindeutig die quadratische Variation $(\langle M \rangle, \mathbb{F})$ in der Weise zugeordnet, daß $(M^2 - \langle M \rangle, \mathbb{F})$ ein stetiges lokales Martingal ist. Wir betrachten kurzzeitig zwei stetige lokale Martingale $(M, \mathbb{F})$, $(M', \mathbb{F})$, die sich bis zu einer Stoppzeit τ nicht unterscheiden mögen. In diesem Fall gleichen sich $\mathbf{P}$-f.-s. auch $\langle M \rangle$ und $\langle M' \rangle$ bis τ, was durch Abstoppen und mit Hilfe des „optional sampling“-Theorems leicht nachprüfbar ist. Daher kann man auch einem stetigen lokalen Martingal $(X, \mathbb{F})$ bis zur Stoppzeit S eine quadratische Variation $\mathbf{P}$-f.-s. eindeutig zuordnen. Bildet nämlich τ_n die bewußte gegen S konvergente Folge von Stoppzeiten, so setzen wir

$$\langle X \rangle_t := \begin{cases} \langle X^{\tau_n} \rangle_t & : \ \exists\, n \text{ mit } \tau_n > t \\ +\infty & : \ t \geqslant S \end{cases}\,.$$

Da für $n \leqslant m$ offensichtlich

$$X_{t \wedge \tau_n}^{\tau_n} = X_{t \wedge \tau_n}^{\tau_m}\,, \quad t \geqslant 0\,, \quad \mathbf{P}\text{-f.-s.}$$

gilt, ist diese Definition $\mathbf{P}$-f.-s. korrekt. Auf der $\mathbf{P}$-Ausnahmemenge sei $\langle X \rangle$ gleich Null.

Wir betrachten jetzt ein X mit Pfaden in E. Offenbar ist $\langle X \rangle$ an $\mathbb{F}$ adaptiert und ein wachsender und in Null startender, auf $[0, S(X))$ stetiger Prozeß mit $\langle X \rangle|_{[S(X),\infty)} \equiv +\infty$ $\mathbf{P}$-fast-sicher. Gilt auch noch $\langle X \rangle_{S(X)-} = \langle X \rangle_{S(X)}$ $\mathbf{P}$-f.-s., so liegen die Pfade von $\langle X \rangle$ $\mathbf{P}$-f.-s. in E_+. Für $S(X) = \infty$ ist dabei nichts zu zeigen. Im Falle $S(X) < \infty$ liefert die folgende Aussage u. a. das Gewünschte (vgl. auch [6], Lemma 2).

Lemma 2.14 *Sei X mit Pfaden in E ein stetiges lokales Martingal bis $S(X)$.*

(i) *Es gilt $\langle X\rangle_{S(X)-} = +\infty$ auf $\{S(X) < \infty\}$ $\mathbf{P}$-f.-s.*

(ii) *Auf $\{\langle X\rangle_\infty < +\infty\}$ existiert $\mathbf{P}$-f.-s. der endliche Grenzwert $X_\infty = \lim_{t\to\infty} X_t$.*

Folglich hat $\langle X\rangle$ $\mathbf{P}$-f.-s. Pfade in E_+.

Beweis: (i) Wir wollen zunächst die Stoppzeitenfolge aus der Definition des stetigen lokalen Martingals bis $S(X)$ durch eine spezielle Folge ersetzen. Sei τ^n eine wachsende Folge von Stoppzeiten mit $\tau^n < S(X)$, $\lim_{n\to\infty}\tau^n = S(X)$ $\mathbf{P}$-f.-s., für die $(X^{\tau^n}, \mathbb{F})$ ein stetiges lokales Martingal ist. Jeder Prozeß $(X^{\tau^n\wedge D^m(X)}, \mathbb{F})$ ist ebenfalls ein – obendrein beschränktes – stetiges lokales Martingal und daher ein Martingal. Mit majorisierter Konvergenz rechnet man wegen der Stetigkeit und Beschränktheit von $X^{D^m(X)}$ leicht nach, daß auch $(X^{D^m(X)}, \mathbb{F})$ ein stetiges (und beschränktes) Martingal ist. Die Größe

$$\tau_n := \inf\{s \geqslant 0 \,:\, \langle X\rangle_s > n\}\,, \quad \inf\emptyset := \infty$$

ist eine Stoppzeit und daher $(X^{\tau_n\wedge D^m(X)}, \mathbb{F})$ nach dem „optional sampling"-Theorem für festes m und n ein beschränktes stetiges Martingal. Demnach gilt

$$\mathbf{E}X^2_{t\wedge\tau_n\wedge D^m(X)} = x_0^2 + \mathbf{E}\langle X\rangle_{t\wedge\tau_n\wedge D^m(X)} \leqslant x_0^2 + n\,, \tag{2.15}$$

das heißt, die Familie $(X_{t\wedge\tau_n\wedge D^m(X)})_{t\geqslant 0, m\in\mathbb{N}}$ ist für festes n gleichmäßig integrierbar. Für fixiertes t und n ist aber auch $(X_{t\wedge\tau_n\wedge D^m(X)}, \mathcal{F}_{t\wedge\tau_n\wedge D^m(X)})_{m\in\mathbb{N}}$ ein gleichmäßig integrierbares Martingal. Nach einem Satz von Doob (s. [23], Satz VII.4.1) konvergiert dann $X_{t\wedge\tau_n\wedge D^m(X)}$ für $m\to\infty$ $\mathbf{P}$-f.-s. gegen eine quadratisch integrierbare, o. B. d. A. endliche Zufallsgröße $Y_{t,n}$ mit

$$\mathbf{E}Y^2_{t,n} \leqslant x_0^2 + n\,. \tag{2.16}$$

Da die Pfade von X in E liegen, gilt auf $\{S(X) < \infty\}$ die Gleichung $\left|X_{D^m(X)}\right| = m$. Wegen

$$X_{t\wedge\tau_n\wedge D^m(X)} \xrightarrow{m\to\infty} Y_{t,n} \quad \mathbf{P}\text{-f.-s.}$$

und der Endlichkeit von $Y_{t,n}$ muß daher auf $\{S(X) < \infty\}$ $\mathbf{P}$-f.-s. die Relation $t\wedge\tau_n < S(X)$ gelten. Da t und n beliebig waren, erhalten wir auf $\{S(X) < \infty\}$ nun $\tau_n < S(X) = S(\langle X\rangle)$ $\mathbf{P}$-f.-s., $n\in\mathbb{N}$. In diesem Fall ist aber $\langle X\rangle_{\tau_n} = n$, womit $\lim_{t\uparrow S(X)}\langle X\rangle_t = +\infty = \langle X\rangle_{S(X)}$ folgt.

(ii) Sei $0 \leqslant s \leqslant t < \infty$. Es gilt für jedes $m\in\mathbb{N}$

$$\mathbf{E}\left(X_{t\wedge\tau_n\wedge D^m(X)}\middle|\,\mathcal{F}_s\right) = X_{s\wedge\tau_n\wedge D^m(X)} \quad \mathbf{P}\text{-f.-s.} \tag{2.17}$$

Nach (i) ist $t\wedge\tau_n < S(X)$ $\mathbf{P}$-f.-s. für $S(X) < \infty$ und beliebige t, n. Für $S(X) = \infty$ dagegen ist das trivial. Die rechte Seite von (2.17) konvergiert also mit $m\to\infty$ $\mathbf{P}$-f.-s. gegen $X_{s\wedge\tau_n}$. Nach der Maximalungleichung von Doob gilt wegen (2.15) für die Zufallsgröße $M := \sup_{m\in\mathbb{N}}\left|X_{t\wedge\tau_n\wedge D^m(X)}\right|$ die Abschätzung

$$\mathbf{E}M^2 = \mathbf{E}\sup_{m\in\mathbb{N}}\left(X_{t\wedge\tau_n\wedge D^m(X)}\right)^2 \leqslant 4\sup_{m\in\mathbb{N}}\mathbf{E}X^2_{t\wedge\tau_n\wedge D^m(X)} \leqslant 4(x_0 + n)\,,$$

so daß wir mit M über eine integrierbare Größe verfügen, die die Folge $\left(|X_{t\wedge\tau_n\wedge D^m(X)}|\right)_{m\in\mathbb{N}}$ majorisiert. Auf Grund des Satzes über die Konvergenz bedingter Erwartungswerte ([23], II §7, Satz 2) konvergiert damit die linke Seite von (2.17) **P**-f.-s. gegen $\mathbf{E}\,(X_{t\wedge\tau_n}\,|\,\mathcal{F}_s)$. Folglich ist auch $(X^{\tau_n},\mathbb{F})$ für festes n ein Martingal, das wegen (2.16) gleichmäßig integrierbar ist. Solche Martingale haben aber **P**-f.-s. einen endlichen Grenzwert für $t\to\infty$ (s. z. B. [15], Problem 1.3.19), das heißt, X_{τ_n} ist **P**-f.-s. für alle $n\in\mathbb{N}$ endlich. Wegen

$$\{\langle X\rangle_\infty<\infty\}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{\tau_n=\infty\}$$

folgt daraus die Behauptung. ■

2.4 Stochastische Differentialgleichungen und Zeittransformation

2.4.1 Lösungsbegriff für die stochastische Differentialgleichung

Wir betrachten die eindimensionale stochastische Differentialgleichung

$$X_t=x_0+\int_0^t b(s,X_s)\,dB_s$$

mit dem zeitabhängigen Borel-meßbaren Diffusionskoeffizienten

$$b:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$$

und dem üblichen Wienerprozeß $(B,\mathbb{F})$. Es ist sinnvoll, auch sogenannte explodierende Lösungen zu betrachten – in unserem Fall heißt das, als Lösungen Prozesse zuzulassen, die mit positiver Wahrscheinlichkeit bereits zu endlicher Zeit jeden beschränkten Bereich in $\mathbb{R}$ verlassen.

Sei nun ein vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum $[\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P}]$ gegeben.

Definition 2.18 Ein Prozeß $(X,\mathbb{F})$ auf $[\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P}]$ heißt *schwache Lösung der stochastischen Differentialgleichung*

$$\text{(SDE)}\qquad X_t=x_0+\int_0^t b(s,X_s)\,dB_s\,,\quad t<S(X)\,,\quad \mathbf{P}\text{-f.-s.}\,,$$

wenn es einen üblichen Wienerprozeß $(B,\mathbb{F})$ gibt, so daß folgende drei Eigenschaften erfüllt sind:

(I) X hat Pfade in E.

(II) X ist $\mathbb{F}$-adaptiert.

(III) Es gilt

$$\text{(2.19)}\quad X_{t\wedge D^m(X)}=x_0+\int_0^{t\wedge D^m(X)} b(s,X_s)\,dB_s\,,\quad t\geqslant 0\,,\quad m\in\mathbb{N}\,,\quad \mathbf{P}\text{-f.-s.}$$

Soll in (SDE) der Koeffizient b besonders ausgezeichnet werden, schreiben wir (SDE)(b).

Die Filtration $\mathbb{F}$ ist als rechtsstetig vorausgesetzt. Daher ist die zufällige Zeit $D^m(X)$ für jeden rechtsstetigen oder linksstetigen $\mathbb{F}$-adaptierten Prozeß X eine $\mathbb{F}$-Stoppzeit, weshalb $D^m(X)$ auch eine Stoppzeit für Prozesse mit Pfaden aus E ist. Durch Forderung (II) ist damit der Integrand in (2.19) progressiv meßbar.

Offenbar haben wir es bei einer (SDE)-Lösung mit einem stetigen lokalen Martingal bis $S(X)$ zu tun. Dies ergäbe im Verein mit (III) bereits einen konsistenten Lösungsbegriff, der nur das Verhalten eines Prozesses bis zu einem vorgegebenen „Zeithorizont" in Form der Stoppzeit $S(X)$ berücksichtigt. Die Pfade einer Lösung könnten dann mit positiver Wahrscheinlichkeit für $t \uparrow S(X)$ endliche linksseitige Grenzwerte haben und anschliessend nach $\bowtie$ springen. Es wäre demnach möglich, aus einer nichtexplodierenden Lösung nachträglich eine „explodierende" zu machen, indem man die Pfade der Lösung ab einer beliebigen gegebenen Stoppzeit auf den Wert $\bowtie$ setzt. Man erhielte also eine Lösung bis zu dieser Stoppzeit. Eigenschaft (I) erzwingt dagegen, daß es sich bei einem endlichen „Zeithorizont" um den Zeitpunkt einer *echten* Explosion in folgendem Sinne handelt: Der Pfad verläßt im Falle $S(X) < \infty$ für $t \uparrow S(X)$ jeden beschränkten Bereich.

Die quadratische Variation einer explodierenden (SDE)-Lösung ist von spezieller Gestalt. Wegen (2.19) erhalten wir zunächst

$$\text{(2.20)} \qquad \left\langle X^{D^m(X)} \right\rangle_t = \int_0^{t \wedge D^m(X)} b^2(s, X_s)\, ds\,, \quad t \geqslant 0\,, \quad m \in \mathbb{N}\,, \quad \mathbf{P}\text{-f.-s.}$$

Gemäß der Definition von $\langle X \rangle$ folgt

$$\text{(2.21)} \qquad \langle X \rangle_t = \int_0^t b^2(s, X_s)\, ds\,, \quad t < S(X)\,, \quad \mathbf{P}\text{-f.-s.}$$

Da X Pfade in E hat, liegen nach Lemma 2.14 die Pfade von $\langle X \rangle$ $\mathbf{P}$-f.-s. in E_+. Auf der Ausnahmemenge setzen wir $\langle X \rangle$ gleich Null.

Unter (I) und (II) impliziert Eigenschaft (III) die Gleichung (2.21). In [21], Satz 3.1.3, wird die Umkehrung in folgendem Sinne bewiesen:

Satz 2.22 *Der auf* $[\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}]$ *gegebene Prozeß* $(X, \mathbb{F})$ *erfülle* (I), (II) *und* (2.21). $\mathbb{F}$ *genüge den üblichen Bedingungen. Dann hat* (SDE)(b) *eine schwache Lösung.*

Beweis: Wir führen den Beweis nicht in allen Einzelheiten aus und verweisen ansonsten auf [21]. Sei auf $[\Omega', \mathcal{F}', \mathbf{P}']$ ein üblicher Wienerprozeß $(B', \mathbb{F}')$ definiert. Wir nennen dann den Wahrscheinlichkeitsraum

$$[\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}}] := [\Omega \times \Omega', \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}', \mathbf{P} \otimes \mathbf{P}']$$

eine *Erweiterung* von $[\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}]$ und

$$\tilde{X}(\omega, \omega') := X(\omega)\,, \quad \tilde{B}(\omega, \omega') := B'(\omega')\,, \quad (\omega, \omega') \in \Omega \times \Omega'$$

die *natürlichen Einbettungen* von X bzw. B' in $\tilde{\Omega}$, für die u. a. $\langle \tilde{X} \rangle_t(\omega, \omega') = \langle X \rangle_t(\omega)$, $\langle \tilde{B} \rangle_t(\omega, \omega') = t$, $t \geqslant 0$, $\tilde{\mathbf{P}}$-f.-s. gilt. Mit $\tilde{\mathbb{F}} := (\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{F}'_t)_{t \geqslant 0}$ ist $(\tilde{X}, \tilde{\mathbb{F}})$ ein stetiges lokales Martingal bis $S(\tilde{X})$ und $(\tilde{B}, \tilde{\mathbb{F}})$ ein Wienerprozeß. Wir setzen

$$\begin{aligned} B_t \quad := \quad & \int_0^t b^{-1}(s, \tilde{X}_s) I_{[0, S(\tilde{X}))}(s)\, I_{\{b \neq 0\}}(s, \tilde{X}_s)\, d\tilde{X}_s + \int_0^t I_{[S(\tilde{X}), \infty)}(s)\, d\tilde{B}_s \\ & + \int_0^t I_{[0, S(\tilde{X}))}(s)\, I_{\{b = 0\}}(s, \tilde{X}_s)\, d\tilde{B}_s\,, \quad t \geqslant 0\,. \end{aligned}$$

Durch Abstoppen überzeugt man sich, daß diese stochastischen Integrale wohldefiniert und $\tilde{\mathbb{F}}_+^{\tilde{\mathbf{P}}}$-adaptiert sind. Für die quadratische Variation ergibt sich mit (2.21)

$$\begin{aligned}\langle B\rangle_t &= \int_0^t b^{-2}(s,\tilde X_s)\, I_{[0,S(\tilde X))}(s)\, I_{\{b\neq 0\}}(s,\tilde X_s)\, d\langle \tilde X\rangle_s + \int_0^t I_{[S(\tilde X),\infty)}(s)\, ds \\ &\quad + \int_0^t I_{[0,S(\tilde X))}(s)\, I_{\{b=0\}}(s,\tilde X_s)\, ds \\ &= \int_0^t b^{-2}(s,\tilde X_s)\, I_{[0,S(\tilde X))}(s)\, I_{\{b\neq 0\}}(s,\tilde X_s) b^2(s,\tilde X_s)\, ds \\ &\quad + \int_0^t I_{[S(\tilde X),\infty)}(s)\, ds + \int_0^t I_{[0,S(\tilde X))}(s)\, I_{\{b=0\}}(s,\tilde X_s)\, ds \\ &= t\,, \quad t \geqslant 0\,, \quad \mathbf{P}\text{-f.-s.}\,,\end{aligned}$$

so daß $\left(B, \tilde{\mathbb{F}}_+^{\tilde{\mathbf{P}}}\right)$ nach Satz 2.12 ein üblicher Wienerprozeß ist. Es gilt weiterhin

$$\begin{aligned}\left\langle \int_0^{\cdot\wedge D^m(\tilde X)} I_{\{b=0\}}(s,\tilde X)\, d\tilde X_s \right\rangle_t &= \int_0^{t\wedge D^m(\tilde X)} I_{\{b=0\}}(s,\tilde X_s) b^2(s,\tilde X_s)\, ds \\ &= 0\,, \quad t \geqslant 0\,, \quad m\in\mathbb{N}\,, \quad \mathbf{P}\text{-f.-s.},\end{aligned}$$

also

$$\int_0^{\cdot\wedge D^m(\tilde X)} I_{\{b=0\}}(s,\tilde X)\, d\tilde X_s \equiv 0\,, \quad m\in\mathbb{N}\,, \quad \mathbf{P}\text{-f.-s.}$$

und damit wegen $D^m(\tilde X) < S(\tilde X)$, $m\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\int_0^{t\wedge D^m(\tilde X)} b(s,\tilde X_s)\, dB_s &= \int_0^{t\wedge D^m(\tilde X)} b(s,\tilde X_s) b^{-1}(s,\tilde X_s) I_{\{b\neq 0\}}(s,\tilde X_s)\, d\tilde X_s \\ &\quad + \int_0^{t\wedge D^m(\tilde X)} I_{\{b=0\}}(s,\tilde X_s)\, d\tilde X_s \\ &= \int_0^{t\wedge D^m(\tilde X)} d\tilde X_s = \tilde X_{t\wedge D^m(\tilde X)} - x_0\,, \quad t\geqslant 0\,, \quad m\in\mathbb{N}\,, \quad \mathbf{P}\text{-f.-s.}\end{aligned}$$

Der Prozeß $\left(\tilde X, \tilde{\mathbb{F}}_+^{\tilde{\mathbf{P}}}\right)$ ist also eine schwache (SDE)(b)-Lösung. ■

2.4.2 Zeittransformation

Wir führen zunächst ein Resultat über Zeittransformationen unter dem Integral an. Es sei $A:\mathbb{R}_+\to[0,\infty]$ eine wachsende Funktion. Die wachsende und rechtsstetige Funktion

(2.23) $$T_t := \inf\{s\geqslant 0 \,:\, A_s > t\}\,, \quad t\geqslant 0\,, \quad \inf\emptyset := \infty$$

mit Werten in $[0,\infty]$ wird *rechtsstetige Inverse* von A genannt. Liegt ein A außerdem in E_+, dann gilt $A_{T_t} = A_\infty \wedge t$, und T ist auf $[0, A_\infty]$ streng wachsend.

Lemma 2.24 *Für jede meßbare nichtnegative Funktion g auf $\mathbb{R}_+$ sind die folgenden Lebesgue-Stieltjes-Integrale wohldefiniert und erfüllen die Gleichheit*

$$\int_0^t g(s)\, dA_s = \int_0^{A_t} g(T_s)\, ds$$

(s. [8], Lemma 1.6).

Gegeben sei der vollständige Wahrscheinlichkeitsraum $[\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}]$ und die Filtration $\mathbb{F}$, die die üblichen Bedingungen erfüllen soll. Sei außerdem τ eine $\mathbb{F}$-Stoppzeit. Wir definieren die σ-Algebra

$$\mathcal{F}_\tau := \{B \in \mathcal{F} \,:\, B \cap \{\tau \leqslant s\} \in \mathcal{F}_s,\ s \geqslant 0\}\,.$$

Für eine weitere Stoppzeit $\sigma \geqslant \tau$ **P**-f.-s. gilt offenbar $\mathcal{F}_\sigma \supseteq \mathcal{F}_\tau$.

Definition 2.25 Ein Prozeß T mit Werten in $[0,\infty]$ heißt $\mathbb{F}$-*Zeittransformation*, wenn $T_s \leqslant T_t$ **P**-f.-s. für beliebige $0 \leqslant s \leqslant t < \infty$ gilt und jedes T_t eine $\mathbb{F}$-Stoppzeit ist.

Die Familie $\mathbb{F}\circ T := (\mathcal{F}_{T_t})_{t\geqslant 0}$ ist offenbar eine Filtration, und T ist $(\mathbb{F}\circ T)$-adaptiert. Erfüllt $\mathbb{F}$ die üblichen Bedingungen und ist T rechtsstetig, dann erfüllt auch $\mathbb{F}\circ T$ die üblichen Bedingungen. Haben wir einen rechtsstetigen wachsenden Prozeß $(A, \mathbb{F})$, so rechnet man leicht nach, daß der durch (2.23) definierte rechtsstetige wachsende Prozeß T eine $\mathbb{F}$-Zeittransformation ist – vorausgesetzt, $\mathbb{F}$ ist rechtsstetig. Umgekehrt ist dann A eine $\mathbb{F}\circ T$-Zeittransformation.

Der folgende Satz modifiziert das wohlbekannte Theorem von Dambis und Dubins & Schwarz.

Satz 2.26 *Sei $(X, \mathbb{F})$ ein stetiges lokales Martingal bis $S(X)$ mit Pfaden in E, wobei $\mathbb{F}$ den üblichen Bedingungen genügen möge. Bezeichnet T die rechtsstetige Inverse zu $\langle X\rangle$, so ist der Prozeß $(W, \mathbb{G}) := (X\circ T, \mathbb{F}\circ T)$ mit der Definition*

$$(X\circ T)_t(\omega) := \begin{cases} X_{T_t(\omega)}(\omega) & : \ T_t(\omega) < S(X(\omega)) \\ X_\infty(\omega) & : \ \lim_{t\to\infty} X_t(\omega) \textit{ existiert und ist endlich, } T_t(\omega) = \infty \\ x_0 & : \ \textit{sonst} \end{cases}$$

*ein **P**-f.-s. stetiges lokales Martingal mit*

$$\langle W\rangle_t = t \wedge \langle X\rangle_\infty \quad \mathbf{P}\text{-}\textit{f.-s.} \tag{2.27}$$

In einer geeigneten Erweiterung des Wahrscheinlichkeitsraums finden wir einen üblichen Wienerprozeß $(\tilde W, \tilde{\mathbb{G}})$ derart, daß für die natürlichen Einbettungen $\tilde X, \langle \tilde X\rangle, \tilde T$ gilt:

$$\tilde W_{t\wedge\langle\tilde X\rangle_\infty} = \tilde X_{\tilde T_t}\,, \quad \tilde W_{\langle\tilde X\rangle_t} = \tilde X_t\,, \quad t \geqslant 0\,, \quad \mathbf{P}\text{-}\textit{f.-s.} \tag{2.28}$$

Beweis: Wir stellen fest, daß $(X\circ T, \mathbb{F}\circ T)$ ein **P**-f.-s. stetiger adaptierter Prozeß ist:

- Die Konstanzintervalle von X und $\langle X\rangle$ fallen **P**-f.-s. zusammen (s. [6], Prop. 1), so daß $X\circ T$ auf $[0, \langle X\rangle_{S(X)-})$ **P**-f.-s. stetig ist (vgl. [15], Probl. 3.4.5 (iv)).
- Auf $\{\langle X\rangle_\infty = \infty\}$ ist $T_t < S(\langle X\rangle) = S(X)$ **P**-f.-s. für $t \geqslant 0$, da $\langle X\rangle$ nach Lemma 2.14 **P**-f.-s. Pfade in E hat. Folglich ist hier $X\circ T$ auf $[0,\infty)$ stetig. Auf $\{\langle X\rangle_\infty < \infty\}$ dagegen existiert **P**-f.-s. der endliche Grenzwert $\lim_{t\to\infty} X_t$ (Lemma 2.14)

Der Rest des Beweises verläuft wie bei dem wohlbekannten Analogon dieses Satzes für stetige lokale Martingale (s. [15], Probl. 3.4.7). ■

Umgekehrt gilt:

Satz 2.29 *Sei* $(W,\mathbb{F})$ *ein üblicher Wienerprozeß und* A *eine* $\mathbb{F}$*-Zeittransformation mit Pfaden in* E_+*. Dann ist der Prozeß* $(X, \mathbb{F}\circ A)$ *mit*

$$(2.30)\qquad X_t(\omega) := \begin{cases} W_{A_t(\omega)}(\omega) & : \ t < S(A(\omega))\,,\ \limsup_{s\to\infty} |W_s(\omega)| = +\infty \\ \bowtie & : \ t \geqslant S(A(\omega))\,,\ \limsup_{s\to\infty} |W_s(\omega)| = +\infty \\ x_0 & : \ \text{sonst} \end{cases}$$

für $t \geqslant 0$*,* $\omega \in \Omega$ *ein stetiges lokales Martingal bis* $S(A)$ *mit Pfaden in* E*, und es gilt* $S(X) = S(A)$ $\mathbf{P}$*-f.-s. und*

$$(2.31)\qquad \langle X\rangle_t = A_t\,,\quad t \geqslant 0\,,\quad \mathbf{P}\text{-}f.\text{-}s.$$

Beweis: Die Pfade von X liegen offensichtlich in E, wobei der Fall $\limsup_{s\to\infty}|W_s(\omega)| < \infty$ nur in einer $\mathbf{P}$-Ausnahmemenge auftritt. Ebenso ist mit dem oben Gesagten evident, daß X und A an $\mathbb{F}\circ A$ adaptiert sind. Wir definieren T_m, $m \in \mathbb{N}$, nach (2.23) und erhalten eine wachsende Folge von $(\mathbb{F}\circ A)$-Stoppzeiten, die gegen $S(A)$ konvergieren und auf $\{S(A) < \infty\}$ kleiner als $S(A)$ sind. Außerdem gilt $A_{T_m} = A_\infty \wedge m$. Für $m \in \mathbb{N}$, $t \geqslant 0$ bekommt man nun

$$X_t^{T_m} = W_{A_{T_m}\wedge A_t} = W_{A_\infty\wedge m\wedge A_t} = W_{m\wedge A_t}\,.$$

Aus dem „optional sampling"-Theorem folgt, daß $(W_{m\wedge A_t}, \mathcal{F}_{A_t})_{t\geqslant 0}$ ein stetiges Martingal ist mit

$$(2.32)\qquad \langle W_{m\wedge A_\cdot}\rangle_t = m\wedge A_t\,,\quad t\geqslant 0\,,\quad \mathbf{P}\text{-f.-s.}\,,\quad m\in\mathbb{N}\,.$$

Also ist $(X, \mathbb{F}\circ A)$ wegen $T_m \xrightarrow{m\to\infty} S(A)$ ein stetiges lokales Martingal bis $S(A)$. Gleichung (2.31) ergibt sich nun aus (2.32) mit $m\to\infty$. Aus (2.31) folgt $S(\langle X\rangle) = S(A)$ $\mathbf{P}$-f.-s. und mit der Definition von $\langle X\rangle$ daraus $S(X) = S(A)$ $\mathbf{P}$-f.-s. ■

Bemerkung 2.33 Ist W ein Wienerprozeß und A ein wachsender Prozeß mit Werten in $[0,\infty]$, so definieren wir $W\circ A$ gemäß (2.30).

Wir wenden jetzt die Sätze 2.26 und 2.29 auf eine (SDE)-Lösung $(X,\mathbb{F})$ an und setzen hierbei voraus, daß der Wahrscheinlichkeitsraum bereits geeignet erweitert wurde, so daß es einen üblichen Wienerprozeß $(W,\mathbb{G})$ mit $(X,\mathbb{F}) = (W\circ\langle X\rangle, \mathbb{G}\circ\langle X\rangle)$ gibt. Man erhält, da (2.21) von X erfüllt wird:

$$(2.34)\qquad \langle X\rangle_t = \int_0^t b^2\left(s, W\circ\langle X\rangle_s\right) ds\,,\quad t\geqslant 0\,,\quad \mathbf{P}\text{-f.-s.}$$

Statt direkt (SDE)-Lösungen zu konstruieren, erweist es sich oft als einfacher, zu einem Wienerprozeß Zeittransformationen wie z. B. $\langle X\rangle$ zu finden, die (2.34) lösen. Wir führen daher die folgenden Begriffe ein:

Definition 2.35 Sei $f : \mathbb{R}_+\times\mathbb{R} \to [0,\infty]$ eine meßbare Funktion und $[\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P}]$ ein vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum. Ein Prozeß A mit Pfaden in E_+ heißt *schwache Lösung der Zeittransformationsgleichung*, wenn es einen üblichen Wienerprozeß $(W,\mathbb{F})$ gibt, so daß

$$(\mathrm{Z})\qquad A_t = \int_0^t f(s, W\circ A_s)\, ds\,,\quad t < S(A)\,,\quad \mathbf{P}\text{-f.-s.}$$

gilt und A eine $\mathbb{F}$-Zeittransformation ist. Wir nennen dann $((W,\mathbb{F}),A)$ ein *Lösungspaar*. Entsprechend ist (Z) schwach lösbar, wenn es irgendein Lösungspaar gibt. Mit $\mathcal{L}_{W,\mathbb{F}}(f)$ sei die Menge aller Prozesse bezeichnet, die mit $(W,\mathbb{F})$ ein Lösungspaar bilden. Wir schreiben (Z)(f) für (Z), wenn f betont werden soll. Die Gleichung (Z)(f) heißt *stark lösbar*, wenn man zu jedem *vorgegebenen* üblichen Wienerprozeß $(W,\mathbb{F})$ eine (Z)(f)-Lösung findet.

Insbesondere kann man bei starker Lösbarkeit einen Wienerprozeß mit der speziellen Filtration $\mathbb{G}^W$ vorgeben. In Analogie zum starken Lösungsbegriff bei stochastischen Differentialgleichungen kann man sich eine entsprechende starke Lösung A – deren Werte A_s, $s \geqslant 0$, sämtlich $\mathbb{G}^W$-Stoppzeiten sind – als „output" des Wienerprozesses denken: Abgesehen von einer $\mathbf{P}$-Ausnahmemenge, bestimmt der Verlauf von W bis zur Zeit $t \geqslant 0$ den Verlauf von A bis zum Erreichen des Wertes t. Wir betrachten solche Lösungen speziell in Kapitel 4.

Offenbar ist (Z)(f) schwach lösbar, wenn es stark lösbar ist. Es folgt nun die grundlegende Aussage, welche uns überhaupt ermöglicht, die stochastische Differentialgleichung (SDE) mit Hilfe von (Z) zu untersuchen.

Satz 2.36 *Die Gleichung* (SDE)(b) *ist genau dann schwach lösbar, wenn* (Z)(b^2) *schwach lösbar ist.*

Beweis: Sei X eine Lösung von (SDE)(b) für einen geeigneten Wienerprozeß. Also erfüllt X die Gleichung (2.21). Auf einem erweiterten Wahrscheinlichkeitsraum gibt es dann nach Satz 2.26 einen üblichen Wienerprozeß $(\tilde{W}, \tilde{\mathbb{G}})$, so daß für die natürliche Einbettung $\tilde{X}$ Eigenschaft (2.28) erfüllt ist. Hierbei ist $\langle \tilde{X} \rangle$ eine $\tilde{\mathbb{G}}$-Zeittransformation. Die Gleichung (2.21) gilt auch auf dem erweiterten Wahrscheinlichkeitsraum, so daß sich nach Einsetzen

$$\langle \tilde{X} \rangle_t = \int_0^t b^2 \left(s, \tilde{W} \circ \langle \tilde{X} \rangle_s \right) ds \,, \quad t < S(\langle \tilde{X} \rangle) \,, \quad \mathbf{P}\text{-f.-s.}$$

ergibt. Also ist $((\tilde{W}, \tilde{\mathbb{G}}), \langle \tilde{X} \rangle)$ ein Lösungspaar zu (Z)(b^2).
Sei $((W, \mathbb{F}), A)$ ein (Z)(b^2)-Lösungspaar. Nach Satz 2.29 erfüllt $(W \circ A, \mathbb{F} \circ A)$ wegen (2.31) Gleichung (2.21), so daß es mit Satz 2.22 eine schwache (SDE)(b)-Lösung gibt. ■

Bemerkung 2.37 Der Begriff einer starken (Z)(b^2)-Lösung ist trotz der oben erwähnten Analogie weit entfernt von dem einer starken (SDE)(b)-Lösung. So gibt es etwa für das bekannte Beispiel von Tanaka mit $x_0 = 0$, $b(t,x) = 2I_{(0,\infty)}(x) - 1$, $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, $b^2 \equiv 1$ offensichtlich starke (Z)(b^2)-Lösungen, aber keine starke (SDE)(b)-Lösung (s. [15], Bsp. 5.3.5). In Kapitel 5 werden wir einen beliebigen üblichen Wienerprozeß vorgeben und dazu starke (Z)(b^2) Lösungen finden.

2.4.3 Eine Ungleichung von Krylov

Die Konstruktion der starken (Z)-Lösungen erfolgt durch monotone Approximation. Dabei sind Erwartungswerte gewisser Integrale von Funktionen über (SDE)-Lösungen abzuschätzen. Hierzu ist die folgende Variante einer Ungleichung von Krylov ein machtvolles Werkzeug (s. [16], § 7). Wir setzen für $t \geqslant 0$, $m \in \mathbb{N}$

$$K_{t,m} := [0,t] \times [-m,m] \quad \text{und} \quad K_m := K_{m,m} \,.$$

Lemma 2.38 *Es sei λ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, $\psi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to [0,\infty]$ eine meßbare Funktion und X eine* (SDE)(b)*-Lösung zur meßbaren Funktion $b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Seien außerdem $t \geqslant 0$ und $m \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann gibt es eine nur von m abhängige Konstante C_m, so daß gilt:*

$$\text{(2.39)} \quad \mathbf{E} \int_0^{t \wedge D^m(X)} \psi(s, X_s) \, |b(s, X_s)| \, ds \leqslant C_m \left(\int_{K_{t,m}} \psi^2 \, d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} = C_m \|\psi\|_{L^2(K_{t,m},\lambda)} \,.$$

Für ein (Z)(b^2)*-Lösungspaar* $((W, \mathbb{F}), A)$ *gilt*

$$\mathbf{E} \int_0^{t \wedge D^m(W \circ A)} \psi(s, W \circ A_s) \, |b(s, W \circ A_s)| \, ds \leqslant C_m \|\psi\|_{L^2(K_{t,m},\lambda)} \,. \tag{2.40}$$

Zum Beweis: Ein Beweis von (2.39) findet sich in [20]. Nach Satz 2.36 ist die Einbettung von $W \circ A$ in einen geeigneten erweiterten Wahrscheinlichkeitsraum eine schwache (SDE)(b)-Lösung. Es folgt (2.40), da sich bei dieser Gleichung im ursprünglichen wie erweiterten Wahrscheinlichkeitsraum auf der linken Seite derselbe Erwartungswert ergibt. ■

3 Eindeutigkeit

Für Lösungen stochastischer Differentialgleichungen sind verschiedene Eindeutigkeitsbegriffe sinnvoll. So heißt eine (SDE)(b)-Lösung *eindeutig in Verteilung*, wenn für zwei beliebige Lösungen X, X', die möglicherweise auf verschiedenen Wahrscheinlichkeitsräumen $[\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}]$, $[\Omega', \mathcal{F}', \mathbf{P}']$ definiert sind, $\mathbf{P}^X = (\mathbf{P}')^{X'}$ gilt. Eine (SDE)(b)-Lösung heißt *pfadweise eindeutig*, wenn für zwei (SDE)(b)-Lösungen X, X' bzgl. *desselben* Wienerprozesses stets $X_t = X'_t$, $t \geqslant 0$ $\mathbf{P}$-f.-s. gilt. In analoger Weise können wir diese Begriffe auch auf die Zeittransformationsgleichung anwenden.

Definition 3.1 Seien auf $[\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathbf{P}_1]$ und $[\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathbf{P}_2]$ die (Z)(f)-Lösungspaare $((W^1, \mathbb{F}^1), A^1)$ bzw. $((W^2, \mathbb{F}^2), A^2)$ gegeben. Eine (Z)(f)-Lösung heißt *eindeutig in Verteilung*, wenn die Verteilungsgesetze zweier beliebiger (Z)(f)-Lösungen gleich sind, d. h., wenn $\mathbf{P}_1^{A^1} = \mathbf{P}_2^{A^2}$ gilt.
Ein *Lösungspaar* zu (Z)(f) heißt *eindeutig in Verteilung*, falls die Verteilungsgesetze aller (Z)(f)-Lösungspaare gleich sind, d. h., wenn $\mathbf{P}_1^{(W^1,A^1)} = \mathbf{P}_2^{(W^2,A^2)}$ gilt.
Die Lösung von (Z)(f) heißt *pfadweise eindeutig*, falls für einen beliebigen üblichen Wienerprozeß $(W, \mathbb{F})$ auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $[\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}]$ und zwei beliebige Lösungen $A, A' \in \mathcal{L}_{W,\mathbb{F}}(f)$ stets $A_t = A'_t$, $t \geqslant 0$, $\mathbf{P}$-f.-s. gilt.

Wir werden sehen, daß die Eindeutigkeit von (SDE)-Lösungen in Verteilung in enger Beziehung zu den Eindeutigkeitsbegriffen der (Z)-Lösungen steht. Zunächst erhalten wir eine Aussage über die Abgeschlossenheit von $\mathcal{L}_{W,\mathbb{F}}(f)$ bzgl. Maximum- und Minimumbildung. Es sei $(A^1 \wedge A^2)_t := A^1_t \wedge A^2_t$, $t \geqslant 0$, und $(A^1 \vee A^2)_t := A^1_t \vee A^2_t$, $t \geqslant 0$, für reellwertige stochastische Prozesse A^1 und A^2. Für eine reelle Zahl a sei $[a]^+ := a \vee 0$.

Lemma 3.2 *Es sei f eine lokal integrierbare Funktion auf $\mathbb{R}_+$ und $F(t) := \int_0^t f(s)\,ds$, $t \geqslant 0$. Dann gilt*

$$[F(t)]^+ = \int_0^t f(s) I_{\{F(s)>0\}}\,ds\,, \quad t \geqslant 0\,.$$

(Beweis s. Lemma A21)

Satz 3.3 *Eine Lösungsmenge $\mathcal{L}_{W,\mathbb{F}}(f) \neq \emptyset$ ist ein Verband bzgl. $\wedge$ und $\vee$.*

Beweis: Zu zeigen ist:

$$A^1, A^2 \in \mathcal{L}_{W,\mathbb{F}}(f) \quad \Rightarrow \quad A^1 \wedge A^2, A^1 \vee A^2 \in \mathcal{L}_{W,\mathbb{F}}(f)\,.$$

Maximum und Minimum zweier Stoppzeiten sind wieder Stoppzeiten. Daher sind $A^1 \vee A^2$ und $A^1 \wedge A^2$ wie A^1 und A^2 $\mathbb{F}$-Zeittransformationen. Mit (Z)(f) und Lemma 3.2 gilt für ein $t < S(A^1) \vee S(A^2)$ $\mathbf{P}$-f.-s.:

$$\begin{aligned}
A^1_t \wedge A^2_t &= A^1_t - \left[A^1_t - A^2_t\right]^+ = A^1_t - \left[\int_0^t \left(f(s, W \circ A^1_s) - f(s, W \circ A^2_s)\right) ds\right]^+ \\
&= A^1_t - \int_0^t \left(f(s, W \circ A^1_s) - f(s, W \circ A^2_s)\right) I_{\{A^1_s - A^2_s > 0\}}\,ds \\
&= \int_0^t f(s, W \circ A^1_s)\left(1 - I_{\{A^1_s > A^2_s\}}\right) ds + \int_0^t f(s, W \circ A^2_s) I_{\{A^1_s > A^2_s\}}\,ds \\
&= \int_0^t f(s, W \circ (A^1_s \wedge A^2_s))\,ds\,,
\end{aligned}$$

das heißt, es ist $A^1 \wedge A^2 \in \mathcal{L}_{W,\mathbb{F}}(f)$ (analog für $A^1 \vee A^2$). ■

Im Gegensatz zu $\mathcal{L}_{W,\mathbb{F}}(f)$ ist die Menge $\mathcal{L}^{\mathrm{SDE}}_{B,\mathbb{G}}(b)$ aller (SDE)(b)-Lösungen bei gegebenem Integrator $(B,\mathbb{G})$ und gegebenem b im allgemeinen kein Verband. Aus der Verbandsstruktur von $\mathcal{L}^{\mathrm{SDE}}_{B,\mathbb{G}}(b)$ kann man nämlich unter gewissen (geringfügigen) Forderungen an b bereits schließen, daß sich die (SDE)-Lösungen in $\mathcal{L}^{\mathrm{SDE}}_{B,\mathbb{G}}(b)$ $\mathbf{P}$-f.-s. gleichen; das heißt, dieser Verband ist trivial (s. [21], Bew. zu Satz 4.2.1).

Bevor wir zum Hauptresultat dieses Kapitels kommen, sind einige technische Vorbereitungen zu treffen.

Lemma 3.4 *Für zwei Prozesse A^1, A^2 auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum mit Pfaden in E_+ und gleichen Verteilungsgesetzen $\mathbf{P}^{A^1} = \mathbf{P}^{A^2}$ gelte $A^1_t \leqslant A^2_t$, $t \geqslant 0$, $\mathbf{P}$-f.-s. Dann sind A^1 und A^2 $\mathbf{P}$-f.-s. identisch.*

Beweis: Sei $t \in \mathbb{R}_+$ und $K \in \mathbb{N}$. Sei weiterhin $B^K_i := A^i_t \wedge K$, $i = 1,2$. Dann ist $B^K_2 - B^K_1 \geqslant 0$ $\mathbf{P}$-f.-s. und wegen $\mathbf{P}^{B^K_1} = \mathbf{P}^{B^K_2}$ außerdem $\mathbf{E}B^K_1 = \mathbf{E}B^K_2$, das heißt $\mathbf{E}\left(B^K_2 - B^K_1\right) = 0$. Eine $\mathbf{P}$-f.-s. nichtnegative Zufallsgröße mit Erwartungswert Null ist $\mathbf{P}$-f.-s. identisch Null. Folglich gilt $B^K_1 = B^K_2$ $\mathbf{P}$-f.-s., und wir erhalten $\mathbf{P}(A^1_t = A^2_t) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{K\in\mathbb{N}}\left\{B^K_1 = B^K_2\right\}\right) = 1$. Da E_+ separabel ist, folgt die Behauptung für alle $t \geqslant 0$. ■

Lemma 3.5 *Es seien $[\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathbf{P}_1]$ und $[\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathbf{P}_2]$ Wahrscheinlichkeitsräume und*

$$(W^k, A^k) : [\Omega_k, \mathcal{F}_k] \to \left[C_{\mathbb{R}_+} \times E_+, \mathcal{B}_{C_{\mathbb{R}_+} \times E_+}\right], \quad k = 1,2$$

meßbare Abbildungen, deren Verteilungsgesetze $\mathbf{P}_k^{(W^k,A^k)}$ gleich sein mögen. Weiterhin soll

$$\mathbf{P}_k\left(\limsup_{t\to\infty} \left|W^k_t\right| = +\infty\right) = 1\,, \quad k = 1,2\,, \tag{3.6}$$

gelten. Dann sind die gemäß (2.30) definierten Abbildungen $W^1 \circ A^1$ und $W^2 \circ A^2$ stochastische Prozesse mit Pfaden in E, und es gilt $\mathbf{P}_1^{W^1\circ A^1} = \mathbf{P}_2^{W^2\circ A^2}$.

Beweis: Die Menge

$$\tilde{C}_{\mathbb{R}_+} := \left\{ w \in C_{\mathbb{R}_+} \ : \ \limsup_{t\to\infty} |w(t)| = +\infty \right\}$$

gehört zu $\mathcal{B}_{C_{\mathbb{R}_+}}$, so daß $\left[\tilde{C}_{\mathbb{R}_+} \times E_+, \mathcal{B}_{\tilde{C}_{\mathbb{R}_+} \times E_+}\right]$ ein Standard-Borel-Raum ist (s. Abschnitt 2.2). Wir können daher die Bildmaße $\mathbf{P}_k^{(W^k,A^k)}$ wegen (3.6) auf den meßbaren Raum $\left[\tilde{C}_{\mathbb{R}_+} \times E_+, \mathcal{B}_{\tilde{C}_{\mathbb{R}_+} \times E_+}\right]$ einschränken. Sei die Abbildung $g : \tilde{C}_{\mathbb{R}_+} \times E_+ \to E$ definiert durch

$$g(w,x) := W \circ x := \begin{cases} w(x(t)) & : \quad t < S(x) \\ \bowtie & : \quad t \geqslant S(x) \end{cases} .$$

Wir zeigen die $\mathcal{B}_{\tilde{C}_{\mathbb{R}_+} \times E_+} \big/ \mathcal{B}_E$-Meßbarkeit von g. Wegen der $\mathcal{F}_k \big/ \mathcal{B}_{\tilde{C}_{\mathbb{R}_+} \times E_+}$-Meßbarkeit von (W^k, A^k) ist die Verknüpfung $g(W^k, A^k)$ dann $\mathcal{F}_k / \mathcal{B}_E$-meßbar, wobei W^k zuvor auf der $\mathbf{P}_k$-Ausnahmemenge von (3.6) auf eine Funktion $w \in \tilde{C}_{\mathbb{R}_+}$ abgeändert wurde. Für ein beliebiges $B \in \mathcal{B}_E$ folgt daraus

$$\mathbf{P}_1(W^1 \circ A^1 \in B) = \mathbf{P}_1^{(W^1,A^1)}(g^{-1}(B)) = \mathbf{P}_2^{(W^2,A^2)}(g^{-1}(B)) = \mathbf{P}_2(W^2 \circ A^2 \in B)\,,$$

und die Behauptung ist gezeigt. Es reicht, die Beziehung $g^{-1}(B) \in \mathcal{B}_{\tilde{C}_{\mathbb{R}_+} \times E_+}$ für Mengen der Gestalt $B = \{y \in E \,:\, y(t) \in (a,b)\}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, $t \geqslant 0$ nachzuweisen, denn diese bilden ein Erzeugendensystem für $\mathcal{B}_E$. Wir haben

$$g^{-1}(B) = \left\{ (w,x) \in \tilde{C}_{\mathbb{R}_+} \times E_+ \,:\, (w \circ x)(t) \in (a,b) \right\}.$$

Es sei $\mathbb{Q}_+$ die Menge aller nichtnegativen rationalen Zahlen. Wir zeigen nun

$$(3.7)\quad g^{-1}(B) = \bigcup_{q=1}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{s \in \mathbb{Q}_+} \left\{ (w,x) \in \tilde{C}_{\mathbb{R}_+} \times E_+ \,:\, \begin{array}{l} x(t) \in (s - m^{-1}, s + m^{-1}), \\ w(s) \in (a + q^{-1}, b - q^{-1}) \end{array} \right\}.$$

Die Menge $\{\ldots\}$ auf der rechten Seite gehört offensichtlich zu $\mathcal{B}_{\tilde{C}_{\mathbb{R}_+} \times E_+}$, so daß wir, falls (3.7) gilt, auch $g^{-1}(B) \in \mathcal{B}_{\tilde{C}_{\mathbb{R}_+} \times E_+}$ erhalten. Wir zeigen zuerst die Relation „$\subseteq$“:

Sei $g(w,x) \in B$, also $(w \circ x)(t) \in (a,b)$. Wegen der Offenheit von (a,b) existiert ein $q \in \mathbb{N}$, so daß auch noch $(w \circ x)(t) \in (a + q^{-1}, b - q^{-1})$ gilt. Da w stetig ist, gibt es weiterhin ein $r > 0$ mit

$$w((x(t) - r, x(t) + r)) \subseteq (a + q^{-1}, b - q^{-1}).$$

Wir finden nun für ein beliebig gewähltes $m \in \mathbb{N}$ ein $s_m \in \mathbb{Q}_+$ derart, daß $|x(t) - s_m| < r \wedge m^{-1}$ ist. Damit existiert zu q und m ein s_m aus $\mathbb{Q}_+$ mit

$$x(t) \in (s_m - m^{-1}, s_m + m^{-1}) \quad \text{und} \quad w(s_m) \in (a + q^{-1}, b - q^{-1}).$$

Das heißt, (w,x) ist ein Element der rechten Seite von (3.7).

Zum Beweis der Relation „$\supseteq$“ nehmen wir nun an, wir hätten ein $(w,x) \in \tilde{C}_{\mathbb{R}_+} \times E_+$ und ein $q \in \mathbb{N}$, so daß für alle $m \in \mathbb{N}$ geeignete $s_m \in \mathbb{Q}_+$ mit

$$x(t) \in (s_m - m^{-1}, s_m + m^{-1}) \quad \text{und} \quad w(s_m) \in (a + q^{-1}, b - q^{-1})$$

existieren. Mit $m \to \infty$ müssen diese s_m gegen $x(t)$ konvergieren und damit $w(s_m)$ gegen $(w \circ x)(t)$. Die $w(s_m)$ sind aber Elemente von $(a + q^{-1}, b - q^{-1})$, das heißt, $(w \circ x)(t)$ liegt in $[a + q^{-1}, b - q^{-1}] \subseteq (a,b)$. Man erhält also $(w,x) \in g^{-1}(B)$. ■

Wir untersuchen nun den Zusammenhang der verschiedenen Eindeutigkeitsbegriffe für (Z)-Lösungen. Es zeigt sich, daß sie alle zusammenfallen. Beim Beweis übertragen wir sinngemäß ein Verfahren aus dem bekannten Satz von Yamada und Watanabe, der insbesondere besagt, daß die pfadweise Eindeutigkeit von (SDE)-Lösungen die Eindeutigkeit in Verteilung nach sich zieht (s. [27]).

Satz 3.8 *Sei $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to [0,\infty]$ meßbar. Folgende Eigenschaften sind äquivalent:*

(I) *Das Lösungspaar zu* (Z)(f) *ist eindeutig in Verteilung.*

(II) *Die* (Z)(f)*-Lösung ist eindeutig in Verteilung.*

(III) *Die* (Z)(f)*-Lösung ist pfadweise eindeutig.*

Bemerkung 3.9 Wir nennen daher im Falle (I) bis (III) die (Z)-Lösung schlicht *eindeutig*.

Beweis: Die Inklusion (I) $\Rightarrow$ (II) ist trivial.

(II) $\Rightarrow$ (III): Seien auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $[\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}]$ ein üblicher Wienerprozeß $(W, \mathbb{F})$ und zwei beliebige $A^1, A^2 \in \mathcal{L}_{W,\mathbb{F}}(f)$ gegeben. Nach Voraussetzung gilt $\mathbf{P}^{A^1} = \mathbf{P}^{A^2}$ und für jedes weitere $A \in \mathcal{L}_{W,\mathbb{F}}(f)$ ebenfalls $\mathbf{P}^A = \mathbf{P}^{A^1}$. Nach Lemma 3.3 liegen auch $\underline{A} := A^1 \wedge A^2$ und $\overline{A} := A^1 \vee A^2$ in $\mathcal{L}_{W,\mathbb{F}}(f)$, für die dann $\mathbf{P}^{\underline{A}} = \mathbf{P}^{\overline{A}}$ gilt. Außerdem haben wir $\underline{A}_t \leqslant A^i_t \leqslant \overline{A}_t$, $t \geqslant 0$, $\mathbf{P}$-f.-s., $i = 1, 2$. Mit Lemma 3.4 folgt dann $\underline{A}_t = \overline{A}_t$, $t \geqslant 0$, $\mathbf{P}$-f.-s., also $A^1_t = A^2_t$, $t \geqslant 0$, $\mathbf{P}$-f.-s.[4]

(III) $\Rightarrow$ (I): Es gelte (III), und die Lösungspaare $((W^i, \mathbb{F}^i), A^i)$ seien auf den Wahrscheinlichkeitsräumen $[\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mathbf{P}_i]$ gegeben $(i = 1, 2)$. Die Abbildungen (W^i, A^i) induzieren auf dem Raum $\left[C_{\mathbb{R}_+} \times E_+, \mathcal{B}_{C_{\mathbb{R}_+} \times E_+}\right]$ die Verteilungsmaße

$$\mathbf{P}^i := \mathbf{P}_i^{(W^i, A^i)}, \quad i = 1, 2 .$$

Die Randverteilung der ersten Komponente des Produktraumes $C_{\mathbb{R}_+} \times E_+$ ist dann das Wienermaß $\mathbf{W}$, die der zweiten das jeweilige Verteilungsgesetz von A^i. Wir definieren nun einen weiteren Wahrscheinlichkeitsraum, in dem einige Randverteilungen den Maßen $\mathbf{P}^i$ entsprechen. Nach Satz 2.10 gibt es für die Projektion $\pi(w, x) := w$, $(w, x) \in C_{\mathbb{R}_+} \times E_+$, ein reguläres bedingtes Wahrscheinlichkeitsmaß von $\mathbf{P}^i$ unter π, also eine Abbildung

$$\mathbf{P}^i_*(\,\cdot\,,\,\cdot\,) \;:\; C_{\mathbb{R}_+} \times \mathcal{B}_{C_{\mathbb{R}_+} \times E_+} \to [0, 1]$$

mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $\mathbf{P}^i_*(w, \cdot)$ ist für alle $w \in C_{\mathbb{R}_+}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\left[C_{\mathbb{R}_+} \times E_+, \mathcal{B}_{C_{\mathbb{R}_+} \times E_+}\right]$;

(ii) $\mathbf{P}^i_*(\cdot, B)$ ist für alle $B \in \mathcal{B}_{C_{\mathbb{R}_+} \times E_+}$ bezüglich $\mathcal{B}_{C_{\mathbb{R}_+}}$ meßbar, und für $B' \in \mathcal{B}_{C_{\mathbb{R}_+}}$ gilt

$$\mathbf{P}^i\left((B' \times E_+) \cap B\right) = \int_{B'} \mathbf{P}^i_*(w, B)\mathbf{W}(dw) .$$

(iii) Es gibt ein $N \in \mathcal{B}_{C_{\mathbb{R}_+}}$ mit $\mathbf{W}(N) = 0$, so daß für jedes $w \notin N$ und jedes $B' \in \mathcal{B}_{C_{\mathbb{R}_+}}$ die Gleichung $\mathbf{P}^i_*(w, B' \times E_+) = I_{B'}(w)$ gilt.

Uns interessiert die bedingte Verteilung von A^i unter W^i bzw. im Wahrscheinlichkeitsraum $\left[C_{\mathbb{R}_+} \times E_+, \mathcal{B}_{C_{\mathbb{R}_+} \times E_+}, \mathbf{P}^i\right]$ die bedingte Verteilung von $x \in E_+$ unter $w \in C_{\mathbb{R}_+}$. Wir führen deshalb die Abbildung $\mathbf{P}^i(\,\cdot\,,\,\cdot\,) : C_{\mathbb{R}_+} \times \mathcal{B}_{E_+} \to [0, 1]$ mittels

$$\mathbf{P}^i(w, B) := \mathbf{P}^i_*(w, C_{\mathbb{R}_+} \times B), \quad w \in C_{\mathbb{R}_+}, \quad B \in \mathcal{B}_{E_+}, \tag{3.10}$$

ein. Für $B \in \mathcal{B}_{E_+}$, $B' \in \mathcal{B}_{C_{\mathbb{R}_+}}$ gilt entsprechend

$$\mathbf{P}^i(B' \times B) = \int_{B'} \mathbf{P}^i(w, B)\mathbf{W}(dw) .$$

[4]Tatsächlich nutzen wir hier nur die schwächere Voraussetzung, daß die Verteilungen aller Lösungen zu *demselben* Wienerprozeß gleich sind.

Wir betrachten nun den meßbaren Raum $\left[C_{\mathbb{R}_+} \times E_+ \times E_+, \mathcal{B}_{C_{\mathbb{R}_+} \times E_+ \times E_+}\right]$ und darauf das Wahrscheinlichkeitsmaß

$$\mathbf{P}(B) := \int_{C_{\mathbb{R}_+}} \int_{E_+} \int_{E_+} I_B(w, x_1, x_2) \mathbf{P}^1(w, dx_1) \mathbf{P}^2(w, dx_2) \mathbf{W}(dw), \ B \in \mathcal{B}_{C_{\mathbb{R}_+} \times E_+ \times E_+} .$$

Offensichtlich gilt dann

$$\mathbf{P}(B \times E_+ \times D) = \mathbf{P}^2(B \times D) \quad \text{und} \quad \mathbf{P}\left(B \times D \times E_+\right) = \mathbf{P}^1(B \times D)$$

für $B \in \mathcal{B}_{C_{\mathbb{R}_+}}$, $D \in \mathcal{B}_{E_+}$. Also erfüllt das Paar (w, x_i) aus (w, x_1, x_2) $\mathbf{P}$-f.-s. die Gleichung (Z)(f) unter $\mathbf{P}$ $(i = 1, 2)$, denn natürlich ist $\mathbf{P}^i$ auf ebenjenen Paaren (w, x) konzentriert, die (Z)(f) erfüllen. Um zu zeigen, daß (w, x_i) auf $\left[C_{\mathbb{R}_+} \times E_+ \times E_+, \mathcal{B}_{C_{\mathbb{R}_+} \times E_+ \times E_+} \vee \mathcal{N}^{\mathbf{P}}, \mathbf{P}\right]$ ein *Lösungspaar* ist, benötigen wir noch eine Filtration $\mathbb{K}$ dergestalt, daß

(a) $(w, \mathbb{K})$ ein üblicher Wienerprozeß ist und

(b) x_i eine $\mathbb{K}$-Zeittransformation.

Es ist $X_s : C_{\mathbb{R}_+} \to \mathbb{R}$ die Koordinatenabbildung $X_s(x) = x_s$, $x \in C_{\mathbb{R}_+}$. Wir definieren für $t \geqslant 0$ folgende Teil-σ-Algebren von $\mathcal{B}_{C_{\mathbb{R}_+}}$ bzw. $\mathcal{B}_{E_+}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_t &:= \sigma(X_s : 0 \leqslant s \leqslant t)\,; \\ \mathcal{D}_t &:= \sigma\left(\{x \in E_+ : x(u) \leqslant s\} : u \in \mathbb{R}_+, 0 \leqslant s \leqslant t\right) . \end{aligned} \tag{3.11}$$

Wir führen weiterhin die Filtrationen $\mathbb{B} := (\mathcal{B}_t)_{t \geqslant 0}$, $\mathbb{D} := (\mathcal{D}_t)_{t \geqslant 0}$ und das Produkt zweier Filtrationen $\mathbb{B} \otimes \mathbb{D} := (\mathcal{B}_t \otimes \mathcal{D}_t)_{t \geqslant 0}$ ein. Es wird nun gezeigt, daß

$$\mathbb{K} := (\mathbb{B} \otimes \mathbb{D} \otimes \mathbb{D})_+^{\mathbf{P}} \tag{3.12}$$

die gewünschten Eigenschaften erfüllt. Nach Konstruktion von $\mathbb{D}$ und $\mathbb{B}$ ist x_i offensichtlich eine $\mathbb{B} \otimes \mathbb{D} \otimes \mathbb{D}$-Zeittransformation und w außerdem $\mathbb{B} \otimes \mathbb{D} \otimes \mathbb{D}$-adaptiert. Um (a) zu beweisen, ist noch die Unabhängigkeit eines Zuwachses $(w(t) - w(s))$ von $\mathcal{K}_s$ für beliebige $0 \leqslant s \leqslant t < \infty$ zu zeigen. Wegen Lemma 2.13 genügt es, wenn wir die Unabhängigkeit von $\mathcal{B}_s \otimes \mathcal{D}_s \otimes \mathcal{D}_s$ beweisen, wofür auch schon die Unabhängigkeit von den Elementen eines $\cap$-abgeschlossenen Erzeugendensystems von $\mathcal{B}_s \otimes \mathcal{D}_s \otimes \mathcal{D}_s$ ausreicht, z. B. für das System $\{B \times D_1 \times D_2 : B \in \mathcal{B}_s, D_1, D_2 \in \mathcal{D}_s\}$ (s. [1], Korollar 6.4).

Wir zeigen jedoch zunächst, daß w im Wahrscheinlichkeitsraum $\left[C_{\mathbb{R}_+} \times E_+, \mathcal{B}_{C_{\mathbb{R}_+} \times E_+}, \mathbf{P}^i\right]$ bezüglich der Filtration $\mathbb{B} \otimes \mathbb{D}$ ein Wienerprozeß ist. Entsprechend ist die Unabhängigkeit von $(w(t) - w(s))$ und $\mathcal{B}_s \otimes \mathcal{D}_s$ zu zeigen, wofür in diesem Raum die Unabhängigkeit von Mengen $B \times D$ für $B \in \mathcal{B}_s$, $D \in \mathcal{D}_s$ und Mengen $\left\{(w, x) \in C_{\mathbb{R}_+} \times E_+ : w(t) - w(s) \in \Gamma\right\}$ für $\Gamma \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ hinreicht. Wir können dabei etwa spezielle D der Form

$$D := \left\{ x \in E_+ : \begin{array}{l} x(u_1) \leqslant s_1, \ldots, x(u_n) \leqslant s_n, u_j \in \mathbb{R}_+, \\ s_j \in [0, s], j = 1 \ldots n \in \mathbb{N} \end{array} \right\} \tag{3.13}$$

wählen, deren Gesamtheit ein $\cap$-abgeschlossenes Erzeugendensystem für $\mathcal{D}_s$ bildet. Da A^i eine $\mathbb{F}^i$-Zeittransformation ist, erhalten wir

$$\{A^i \in D\} = \bigcap_{k=1}^{n} \underbrace{\{A^i_{u_k} \leqslant s_k\}}_{\in \mathcal{F}^i_{s_k}} \in \mathcal{F}^i_s .$$

Es folgt, da $(W^i, \mathbb{F}^i)$ ein Wienerprozeß ist,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}^i(B \times D \cap \{w(t) - w(s) \in \Gamma\}) &= \mathbf{P}_i(\underbrace{\{W^i \in B\} \cap \{A^i \in D\}}_{\in \mathcal{F}^i_s} \cap \{W^i_t - W^i_s \in \Gamma\}) \\ &= \mathbf{P}_i(W^i \in B,\, A^i \in D)\, \mathbf{P}_i(W^i_t - W^i_s \in \Gamma) \\ &= \mathbf{P}^i(B \times D)\, \mathbf{P}^i(w(t) - w(s) \in \Gamma)\,.\end{aligned}$$

Damit sind wir in der Lage zu zeigen:

Lemma 3.14 *Sei $s \geqslant 0$. Für Mengen $D \in \mathcal{D}_s$ ist $\mathbf{P}^i(\,\cdot\,, D)$ bezüglich $(\mathcal{B}_s)^{\mathbf{W}} \cap \mathcal{B}_{C_{\mathbb{R}_+}}$ meßbar.*

Beweis: (für $i = 1$) Es sei $C^{(s)} := \big\{w(\,\cdot\, \wedge s) \,:\, w \in C_{\mathbb{R}_+}\big\}$. Die Projektion

$$\pi_s : C_{\mathbb{R}_+} \times E_+ \to C^{(s)}\,, \quad \pi_s(w, x) := w(\,\cdot\, \wedge s)\,, \quad (w, x) \in C_{\mathbb{R}_+} \times E_+\,,$$

ist $(\mathcal{B}_s \otimes \{\emptyset, E_+\}) / \mathcal{B}_{C^{(s)}}$-meßbar und surjektiv. Da $C^{(s)} \in \mathcal{B}_{C_{\mathbb{R}_+}}$ gilt und nach Satz 2.6 $[C^{(s)}, \mathcal{B}_{C^{(s)}}]$ ein Standard-Borel-Raum ist, gibt es nach Satz 2.10 ein reguläres bedingtes Wahrscheinlichkeitsmaß $\tilde{\mathbf{P}}^1_s(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ von $\mathbf{P}^1$ unter π_s. Insbesondere ist dann die Abbildung $C^{(s)} \ni w' \mapsto \tilde{\mathbf{P}}^1_s(w', B)$ für alle $B \in \mathcal{B}_{C_{\mathbb{R}_+} \times E_+}$ bzgl. $\mathcal{B}_{C^{(s)}}$ meßbar. Da das Abstoppen $C_{\mathbb{R}_+} \ni w \mapsto w(\,\cdot\, \wedge s) \in C^{(s)}$ seinerseits eine $\mathcal{B}_s / \mathcal{B}_{C^{(s)}}$-meßbare Abbildung ist, erhalten wir mit $\tilde{\mathbf{P}}^1_s(w(\,\cdot\, \wedge s), B)$, $w \in C_{\mathbb{R}_+}$, $B \in \mathcal{B}_{C_{\mathbb{R}_+} \times E_+}$, eine bedingte Verteilung von (w, x) unter w, die nun allerdings $\mathcal{B}_s$-meßbar ist. Analog zu (3.10) sei dann $\mathbf{P}^1_s(\cdot, \cdot)$ die $\mathcal{B}_s$-meßbare bedingte Verteilung von x unter w im Wahrscheinlichkeitsraum $[C_{\mathbb{R}_+} \times E_+, \mathcal{B}_{C_{\mathbb{R}_+} \times E_+}, \mathbf{P}^1]$, d. h., es gilt:

(i) $\mathbf{P}^1_s(w, \cdot)$ ist für alle $w \in C_{\mathbb{R}_+}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\big[E_+, \mathcal{B}_{E_+}\big]$.

(ii) $\mathbf{P}^1_s(\cdot, D)$ ist für alle $D \in \mathcal{B}_{E_+}$ bezüglich $\mathcal{B}_s$ meßbar, und für $B \in \mathcal{B}_s$ gilt

$$\mathbf{P}^1\,(B \times D) = \int_B \mathbf{P}^1_s(w, D) \mathbf{W}(dw)\,. \tag{3.15}$$

Das Lemma ist bewiesen, wenn wir für $D \in \mathcal{D}_s$

$$\mathbf{P}^1(\cdot, D) = \mathbf{P}^1_s(\cdot, D) \quad \mathbf{W}\text{-f.-s.} \tag{3.16}$$

zeigen. Dann ist $\mathbf{P}^1(\,\cdot\,, D)$ nämlich sowohl bzgl. $\mathcal{B}^{\mathbf{W}}_s$ als auch $\mathcal{B}_{C_{\mathbb{R}_+}}$ meßbar (nach Eigenschaft (ii) des bedingten Wahrscheinlichkeitsmaßes). Für (3.16) reicht es, für beliebige beschränkte $\mathcal{B}_{C_{\mathbb{R}_+}}$-meßbare $F : C_{\mathbb{R}_+} \to \mathbb{R}$ die Gleichung

$$\int_{C_{\mathbb{R}_+}} F(w) \mathbf{P}^1(w, D) \mathbf{W}(dw) = \int_{C_{\mathbb{R}_+}} F(w) \mathbf{P}^1_s(w, D) \mathbf{W}(dw)$$

nachzuweisen. Solche F haben eine Darstellung als Itô-Integral bezüglich des Wienerprozesses $(w, \mathbb{G}^w)$ mit einem bzgl. $\mathbb{G}^w$ progressiv meßbaren Integranden Φ:

$$F(w) = c + \int_0^\infty \Phi_u \, dw(u) \quad \mathbf{W}\text{-f.-s.}$$

(vgl. [15], Th. 3.4.18). Wir spalten das Integral in die Integrationsbereiche $[0,s]$, (s,∞) auf und erhalten

$$\begin{aligned}
\int_{C_{\mathbb{R}_+}} F(w)\mathbf{P}^1(w,D)\mathbf{W}(dw) &= \int_{C_{\mathbb{R}_+}} F(w)\int_D \mathbf{P}^1(w,dx)\,\mathbf{W}(dw) \\
&= \int_{C_{\mathbb{R}_+}\times E_+} F(w)I_D(x)\mathbf{P}^1(dw\,dx) \\
&= c\int_{C_{\mathbb{R}_+}\times E_+} I_D(x)\mathbf{P}^1(dw\,dx) \\
&\quad + \int_{C_{\mathbb{R}_+}\times E_+} I_D(x)\int_0^s \Phi_u\,dw(u)\,\mathbf{P}^1(dw\,dx) \\
&\quad + \int_{C_{\mathbb{R}_+}\times E_+} I_D(x)\int_s^\infty \Phi_u\,dw(u)\,\mathbf{P}^1(dw\,dx)\,.
\end{aligned}$$

In $\left[C_{\mathbb{R}_+}\times E_+, \mathcal{B}_{C_{\mathbb{R}_+}\times E_+}, \mathbf{P}^1\right]$ ist $(w, \mathbb{B}\otimes\mathbb{D})$ ein Wienerprozeß und damit $\int_0^\cdot \Phi_u\,dw(u)$, da beschränkt, im Wahrscheinlichkeitsraum $\left[C_{\mathbb{R}_+}\times E_+, \mathcal{B}_{C_{\mathbb{R}_+}\times E_+}, \mathbf{P}^1\right]$ ein Martingal bezüglich $(\mathbb{B}\otimes\mathbb{D})_+^{\mathbf{P}^1}$, so daß für den letzten Summanden wegen $D\in\mathcal{D}_s$ gilt:

$$\begin{aligned}
\int_{C_{\mathbb{R}_+}\times E_+} I_D(x)\int_s^\infty \Phi_u\,dw(u)\,\mathbf{P}^1(dw\,dx) &= \mathbf{E}^{\mathbf{P}^1} I_D(x)\int_s^\infty \Phi_u\,dw(u) \\
&= \mathbf{E}^{\mathbf{P}^1} I_D(x)\;\mathbf{E}^{\mathbf{P}^1}\left(\int_s^\infty \Phi_u\,dw(u)\middle|\,\mathcal{B}_s\otimes\mathcal{D}_s\right) \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

Wir erhalten mit (3.15), da $\int_0^s \Phi_u\,dw(u)$ im Wahrscheinlichkeitsraum $[C_{\mathbb{R}_+}, \mathcal{B}_{C_{\mathbb{R}_+}}, \mathbf{W}]$ bezüglich $(\mathcal{B}_s)^{\mathbf{W}}$ meßbar ist:

$$\begin{aligned}
&\int_{C_{\mathbb{R}_+}} F(w)\mathbf{P}^1(w,D)\mathbf{W}(dw) \\
&\quad = c\int_{C_{\mathbb{R}_+}} \mathbf{P}^1(w,D)\mathbf{W}(dw) + \int_{C_{\mathbb{R}_+}\times D}\int_0^s \Phi_u\,dw(u)\,\mathbf{P}^1(dw\,dx) \\
&\quad = c\int_{C_{\mathbb{R}_+}} \mathbf{P}_s^1(w,D)\mathbf{W}(dw) + \int_{C_{\mathbb{R}_+}}\int_0^s \Phi_u\,dw(u)\,\mathbf{P}_s^1(w,D)\mathbf{W}(dw)\,. \qquad (3.17)
\end{aligned}$$

Der Prozeß $\left(\int_0^\cdot \Phi_u\,dw(u), \mathbb{G}^w\right)$ ist in $[C_{\mathbb{R}_+}, \mathcal{B}_{C_{\mathbb{R}_+}}, \mathbf{W}]$ ein Martingal, so daß

$$\mathbf{E}^{\mathbf{W}}\left(\int_s^\infty \Phi_u\,dw(u)\middle|\,\mathcal{B}_s\right) = 0$$

gilt. Wegen der $\mathcal{B}_s$-Meßbarkeit von $\mathbf{P}_s^1(\cdot,D)$ können wir dann in (3.17) die Integrationsgrenze durch ∞ ersetzen, so daß wir auf der rechten Seite

$$\int_{C_{\mathbb{R}_+}} F(w)\mathbf{P}_s^1(w,D)\mathbf{W}(dw)$$

erhalten. ∎

Wir zeigen nun die Unabhängigkeit von Ereignissen $\{w(t)-w(s)\in\Gamma\}$ mit $\Gamma\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ und Ereignissen der Gestalt $B\times D_1\times D_2$, $B\in\mathcal{B}_s$, $D_1,D_2\in\mathcal{D}_s$. Nach Lemma 3.14 gilt

$$
\begin{aligned}
(3.18)\qquad & \mathbf{P}\left(\{w(t)-w(s)\in\Gamma\}\cap(B\times D_1\times D_2)\right)\\
&= \int_{\left\{w\in C_{\mathbb{R}_+}\,:\,w(t)-w(s)\in\Gamma\right\}\cap B} \mathbf{P}^1(w,D_1)\mathbf{P}^2(w,D_2)\mathbf{W}(dw)\\
&= \int_{C_{\mathbb{R}_+}} \mathbf{P}^1_s(w,D_1)\mathbf{P}^2_s(w,D_2)I_B(w)I_\Gamma(w(t)-w(s))\mathbf{W}(dw)\\
&= \mathbf{E}^{\mathbf{W}}\,\mathbf{P}^1_s(w,D_1)\mathbf{P}^2_s(w,D_2)I_B(w)\;\mathbf{E}^{\mathbf{W}}\Big(I_\Gamma(w(t)-w(s))\Big|\mathcal{B}_s\Big)\\
&= \int_B \mathbf{P}^1_s(w,D_1)\,\mathbf{P}^2_s(w,D_2)\,\mathbf{W}(dw)\,\mathbf{W}(w(t)-w(s)\in\Gamma)\\
&= \mathbf{P}(B\times D_1\times D_2)\,\mathbf{P}(w(t)-w(s)\in\Gamma)\,.
\end{aligned}
$$

Der Prozeß $(w,\mathbb{K})$ ist also in $\left[C_{\mathbb{R}_+}\times E_+\times E_+,\mathcal{N}^{\mathbf{P}}\vee\mathcal{B}_{C_{\mathbb{R}_+}\times E_+\times E_+},\mathbf{P}\right]$ ein üblicher Wienerprozeß. Folglich sind $((w,\mathbb{K}),x_1)$ und $((w,\mathbb{K}),x_2)$ Lösungspaare zu (Z). Nach Voraussetzung gleichen sich dann x_1 und x_2 $\mathbf{P}$-f.-s., so daß für beliebige $\Gamma\in\mathcal{B}_{C_{\mathbb{R}_+}}$, $\Lambda\in\mathcal{B}_{E_+}$ gilt:

$$
\begin{aligned}
(3.19)\qquad & \mathbf{P}_1\left((W^1,A^1)\in\Gamma\times\Lambda\right)\\
&= \mathbf{P}^1(\Gamma\times\Lambda)=\mathbf{P}\left(\Gamma\times\Lambda\times C_{\mathbb{R}_+}\right)=\mathbf{P}\left((\Gamma\times\Lambda\times C_{\mathbb{R}_+})\cap\{x_1=x_2\}\right)\\
&= \mathbf{P}\left(\Gamma\times C_{\mathbb{R}_+}\times\Lambda\right)=\mathbf{P}^2(\Gamma\times\Lambda)=\mathbf{P}_2\left((W^2,A^2)\in\Gamma\times\Lambda\right)\;.
\end{aligned}
$$

Damit ist die Gleichheit der Verteilungsgesetze von (W^1,A^1) und (W^2,A^2) gezeigt. ■

Folgerung 3.20 *Ist* (Z)(f) *eindeutig lösbar, dann finden wir einen Operator* $F:C_{\mathbb{R}_+}\to E_+$ *dergestalt, daß* $A=F(W)$ $\mathbf{P}$*-f.-s. für irgendein Lösungspaar* $((W,\mathbb{F}),A)$ *gilt. Dieser Operator ist* $\left(\mathcal{B}^{\mathbf{W}}_s\cap\mathcal{B}_{C_{\mathbb{R}_+}}\right)\Big/\mathcal{D}_s$*-meßbar für jedes* $s\geqslant 0$*. Mit anderen Worten implizieren schwache Existenz und Eindeutigkeit der* (Z)(f)*-Lösung die Existenz starker* (Z)(f)*-Lösungen. Hat man nämlich irgendein Lösungspaar gefunden, so gewinnt man aus ihm den Operator* F *und mit dessen Hilfe Lösungen zu jedem beliebigen üblichen Wienerprozeß.*

Beweis: Wir nehmen an, die Wahrscheinlichkeitsräume $[\Omega_i,\mathcal{F}_i,\mathbf{P}_i]$ aus dem Beweisschritt „(III) ⇒ (I)“ von Satz 3.8 seien identisch und darauf das Lösungspaar $((W,\mathbb{F}),A)$ gegeben. Wir nennen die Verteilung von (W,A) nun $\mathbf{P}^1$ und das bedingte Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbf{P}^1(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$. Außerdem benutzen wir das dort konstruierte Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbf{P}$. Wegen der Eindeutigkeit haben wir

$$
\begin{aligned}
1 &= \mathbf{P}(x_1=x_2)\\
&= \int_{C_{\mathbb{R}_+}\times E_+\times E_+} I_{\{x_1=x_2\}}\,\mathbf{P}^1(w,dx_1)\,\mathbf{P}^1(w,dx_2)\,\mathbf{W}(dw)\\
(3.21)\qquad &= \int_{C_{\mathbb{R}_+}} \mathbf{P}^1\otimes\mathbf{P}^1(w,\{x_1=x_2\})\,\mathbf{W}(dw)\,,
\end{aligned}
$$

wobei $\mathbf{P}^1\otimes\mathbf{P}^1(w,\cdot)$ das Produktmaß von $\mathbf{P}^1(w,\cdot)$ und $\mathbf{P}^1(w,\cdot)$ ist. Folglich gilt für $\mathbf{W}$-fast alle $w\in C_{\mathbb{R}_+}$:

$$
(3.22)\qquad \left(\mathbf{P}^1\otimes\mathbf{P}^1\right)(w,\{x_1=x_2\})=1\,.
$$

Die Menge N all der w, für die (3.22) nicht gilt, liegt nach Eigenschaft (ii) regulärer bedingter Wahrscheinlichkeiten in $\mathcal{B}_{C_{\mathbb{R}_+}}$. Bei einem Produkt-Wahrscheinlichkeitsmaß kann die gesamte Masse aber nur dann auf der Diagonale $\{x_1 = x_2\}$ liegen, wenn es ein Produkt zweier gleicher Diracmaße ist.[5] Zu allen w, für die (3.22) gilt, gibt es darum ein $x(w) \in E_+$, so daß

$$\mathbf{P}^1(w, \cdot) = \delta_{x(w)}$$

ist. Wir bezeichnen mit $\underline{0}$ die Nullfunktion in E_+ und setzen

$$F(w) := \begin{cases} x(w) & : \quad w \in N^c \\ \underline{0} & : \quad w \in N \end{cases} .$$

Nach Lemma 3.14 ist $\mathbf{P}^1(\cdot, D)$ für ein $D \in \mathcal{D}_s$ bezüglich $\mathcal{B}_s^{\mathbf{W}} \cap \mathcal{B}_{C_{\mathbb{R}_+}}$ meßbar. Gleichzeitig gilt $\mathbf{P}^1(w, D) = \delta_{F(w)}(D) = I_D(F(w))$ für alle $w \in N^c$. Wir haben also

$$\begin{aligned} F^{-1}(D) &= N \cap F^{-1}(D) \cup N^c \cap F^{-1}(D) \\ &= N \cap F^{-1}(D \cap \{\underline{0}\}) \cup N^c \cap (I_D \circ F)^{-1}(\{1\}) \\ &= N \cap F^{-1}(D \cap \{\underline{0}\}) \cup N^c \cap (\mathbf{P}^1(\cdot, D))^{-1}(\{1\}) \,. \end{aligned}$$

Das Urbild $F^{-1}(D \cap \{\underline{0}\})$ ist entweder leer oder Obermenge von N, und das Urbild $(\mathbf{P}^1(\cdot, D))^{-1}(\{1\})$ liegt in $\mathcal{B}_s^{\mathbf{W}} \cap \mathcal{B}_{C_{\mathbb{R}_+}}$. Wegen $N \in \mathcal{B}_{C_{\mathbb{R}_+}}$ liegt dann auch $F^{-1}(D)$ selbst in $\mathcal{B}_s^{\mathbf{W}} \cap \mathcal{B}_{C_{\mathbb{R}_+}}$. Der Operator F ist also $\mathcal{B}_s^{\mathbf{W}} \cap \mathcal{B}_{C_{\mathbb{R}_+}} \big/ \mathcal{D}_s$-meßbar.
Man setzt nun in (3.21) die Menge $\{x_1 = x_2 = F(w)\}$ statt $\{x_1 = x_2\}$ ein und erhält

$$\mathbf{P}(x_1 = x_2 = F(w)) = 1 \,.$$

Wie in (3.19) rechnet man aus, daß auch $(W, F(W))$ unter $\mathbf{P}_1$ die Gleichung (Z)(f) erfüllt. Weiterhin wird in Folgerung 3.23 gezeigt, daß $F(W)$ eine $\mathbb{F}$-Zeittransformation ist. Also ist $((W, \mathbb{F}), F(W))$ ein Lösungspaar. Die pfadweise Eindeutigkeit liefert dann $A_t = F(W)(t)$, $t \geqslant 0$, $\mathbf{P}$-f.-s. ■

Folgerung 3.23 *Ist* (Z)(f) *eindeutig lösbar und* $((W, \mathbb{F}), A)$ *ein Lösungspaar, dann ist* A *sogar eine* $\mathbb{G}^W$*-Zeittransformation.*

Beweis: A ist genau dann eine $\mathbb{G}^W$-Zeittransformation, wenn $\mathcal{G}_s^W \big/ \mathcal{D}_s$-Meßbarkeit bei $A : \Omega_1 \to E_+$ für jedes $s \geqslant 0$ vorliegt, denn dies ist gerade dann der Fall, wenn für beliebige $0 \leqslant r \leqslant s$ und $t \geqslant 0$ die Menge $\{A_t \leqslant r\}$ in $\mathcal{G}_s^W$ liegt (insbesondere also für $r = s$). Zu zeigen ist daher wegen $A_t = F(W)(t)$, $t \geqslant 0$, $\mathbf{P}$-f.-s. die $\mathcal{G}_s^W \big/ \mathcal{D}_s$-Meßbarkeit von $F \circ W$ für jedes s. Sei s fixiert. Der Operator F ist $\mathcal{B}_s^{\mathbf{W}} \cap \mathcal{B}_{C_{\mathbb{R}_+}} \big/ \mathcal{D}_s$-meßbar und W, da stetig und $\mathbb{F}^W$-adaptiert, $\mathcal{F}_s^W \big/ \mathcal{B}_s$-meßbar. Man rechnet leicht nach, daß dann W auch $\mathcal{G}_s^W \big/ \mathcal{B}_s^{\mathbf{W}}$-meßbar ist. Also erhalten wir die $\mathcal{G}^W \big/ \mathcal{D}_s$-Meßbarkeit der Komposition $F \circ W$. ■

Es folgt nun das Hauptresultat dieses Kapitels – die Charakterisierung der Eindeutigkeit von (SDE)-Lösungen in Verteilung mit Hilfe des Eindeutigkeitsbegriffs für (Z).

Satz 3.24 *Sei* $b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ *meßbar. Dann sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:*

[5] Für ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $[\Omega, \mathcal{F}]$ und ein $A \in \mathcal{F}$ gilt im Falle $\mu \otimes \mu(\omega_1 = \omega_2) = 1$ nämlich $\mu(A) = \mu \otimes \mu(A \times \Omega \cap \{\omega_1 = \omega_2\}) = \mu \otimes \mu(A \times A) = \mu^2(A)$. Daraus folgt $\mu(A) \in \{0, 1\}$. Es gibt also ein $\omega \in \Omega$ mit $\mu = \delta_\omega$.

(i) *Die schwache Lösung von* (SDE)(b) *ist eindeutig in Verteilung.*

(ii) *Die* (Z)(b^2)*-Lösung ist eindeutig.*

Beweis: (ii) $\Rightarrow$ (i): Es seien mit X^1 und X^2 zwei auf den Wahrscheinlichkeitsräumen $[\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathbf{P}_1]$ bzw. $[\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathbf{P}_2]$ definierte schwache (SDE)(b)-Lösungen gegeben. Wir können voraussetzen, daß die Wahrscheinlichkeitsräume bereits geeignet erweitert wurden, so daß wir nach Satz 2.26 und 2.36 zu solchen üblichen Wienerprozessen $(W^1, \mathbb{G}^1)$, $(W^2, \mathbb{G}^2)$ gelangen, daß sowohl $W^i \circ \langle X^i \rangle = X^i$, $i = 1, 2$, gilt als auch $((W^1, \mathbb{G}^1), \langle X^1 \rangle)$ bzw. $((W^2, \mathbb{G}^2), \langle X^2 \rangle)$ Lösungspaare von (Z)(b^2) unter $\mathbf{P}_1$ bzw. $\mathbf{P}_2$ sind. Die Verteilungen eines Prozesses und seiner Einbettung in einen erweiterten Wahrscheinlichkeitsraum sind gleich. Wir nutzen jetzt Eigenschaft (I) in Satz 3.8. Die Paare $((W^1, \mathbb{G}^1), \langle X^1 \rangle)$ und $((W^2, \mathbb{G}^2), \langle X^2 \rangle)$ haben also nach Voraussetzung dieselben Verteilungsgesetze. Wir können sicherstellen, daß alle Pfade von $\langle X^1 \rangle$ bzw. $\langle X^2 \rangle$ in E_+ liegen. Da für die Wienerprozesse W^i

$$\mathbf{P}_i \left(\limsup_{t \to \infty} \left| W_t^i \right| = +\infty \right) = 1$$

gilt, erfüllen $((W^1, \mathbb{G}^1), \langle X^1 \rangle)$ und $((W^2, \mathbb{G}^2), \langle X^2 \rangle)$ die Voraussetzungen von Lemma (3.5), so daß wir

$$\mathbf{P}_1^{X^1} = \mathbf{P}_1^{W^1 \circ A^1} = \mathbf{P}_2^{W^2 \circ A^2} = \mathbf{P}_2^{X^2}$$

erhalten.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Seien (W^1, A^1) und (W^2, A^2) beliebige (Z)(b^2)-Lösungspaare auf $[\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathbf{P}_1]$ bzw. $[\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathbf{P}_2]$. Dann sind nach Voraussetzung $X^1 := W^1 \circ A^1$ und $X^2 := W^2 \circ A^2$ schwache (SDE)(b)-Lösungen (auf nötigenfalls erweiterten Wahrscheinlichkeitsräumen) mit den gleichen Verteilungsgesetzen. Hat man eine Zerlegung $\Pi = \{t_0 = 0, t_1, t_2, \ldots\}$ von $\mathbb{R}_+$ mit $\lim_{j \to \infty} t_j = \infty$ und $\|\Pi\| := \sup_{j \in \mathbb{N}} (t_j - t_{j-1}) < \infty$, so genügen zu den in $D^m(X^i)$ abgestoppten Prozessen $X^{i,m} := X^i_{\cdot \wedge D^m(X^i)}$ die Prozesse der endlichen Quadratsummen

$$S_t^{\Pi,i,m} := \sum_{j=1}^{\infty} \left(X^{i,m}_{t_j \wedge t} - X^{i,m}_{t_{j-1} \wedge t} \right)^2, \quad t \geqslant 0,$$

ebenfalls den gleichen Verteilungsgesetzen, da $X^{1,m}$ und $X^{2,m}$ dieselbe Verteilung haben. Dies ist leicht einzusehen, denn das Abstoppen in $D^m(\,\cdot\,)$

$$\mathbf{D}_m : E \to C_{\mathbb{R}_+}, \quad \mathbf{D}_m(x) := x^{D^m(x)}, \quad x \in E,$$

ist eine stetige und daher $\mathcal{B}_E / \mathcal{B}_{C_{\mathbb{R}_+}}$-meßbare Abbildung, so daß die Verkettungen $\mathbf{D}_m \circ X^1$ und $\mathbf{D}_m \circ X^2$ in $[C_{\mathbb{R}_+}, \mathcal{B}_{C_{\mathbb{R}_+}}]$ dasselbe Bildmaß induzieren. Es sei $m \in \mathbb{N}$ vorerst fest und $C_b^u(C_{\mathbb{R}_+})$ die Klasse aller gleichmäßig stetigen beschränkten Funktionale auf $C_{\mathbb{R}_+}$. Auf kompakten Intervallen konvergiert $S^{\Pi,i,m}$ mit $\|\Pi\| \to 0$ in Wahrscheinlichkeit gleichmäßig gegen die quadratische Variation $\langle X^{i,m} \rangle = A^i_{\cdot \wedge D^m(X^i)}$, was zur Konvergenz in Wahrscheinlichkeit bezüglich der Metrik d_c in $C_{\mathbb{R}_+}$ äquivalent ist. Im polnischen Raum $(C_{\mathbb{R}_+}, d_c)$ zieht die Konvergenz in Wahrscheinlichkeit die schwache Konvergenz nach sich; man rechnet nämlich leicht aus (z. B. analog [1], Satz 5.1), daß für alle $F \in C_b^u(C_{\mathbb{R}_+})$ gilt:

$$\mathbf{E}^{\mathbf{P}^i} F(S^{\Pi,i,m}) \to \mathbf{E}^{\mathbf{P}^i} F(A^i_{\cdot \wedge D^m(X^i)}), \quad \|\Pi\| \to 0, \quad i = 1, 2.$$

Wegen der Gleichheit der linken Seiten für $i = 1, 2$ erhalten wir

$$\mathbf{E}^{\mathbf{P}^1} F(A^1_{\cdot \wedge D^m(X^1)}) = \mathbf{E}^{\mathbf{P}^2} F(A^2_{\cdot \wedge D^m(X^2)}) \,, \quad F \in C^u_b(C_{\mathbb{R}_+}) \,. \tag{3.25}$$

Aus dem monotonen Klassensatz folgt mit Hilfe des Satzes von B. Levi unmittelbar die Gleichung (3.25) auch für alle $\sigma\left(C^u_b(C_{\mathbb{R}_+})\right)$-meßbaren beschränkten Funktionale. Wegen $\sigma\left(C^u_b(C_{\mathbb{R}_+})\right) = \mathcal{B}_{C_{\mathbb{R}_+}}$ ergibt sich daraus die Übereinstimmung der Verteilungsgesetze von $A^{1,m} := A^1_{\cdot \wedge D^m(X^1)}$ und $A^{2,m} := A^2_{\cdot \wedge D^m(X^2)}$ für jedes $m \in \mathbb{N}$. Wir wählen nun spezielle, in ihrer Gesamtheit maßbestimmende Zylinder aus $\mathcal{B}_{E_+}$. Seien $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}_+$, $s_1, \ldots, s_n \in \mathbb{R}_+$. Wegen der $\mathbf{P}$-f.-s. monoton wachsenden Konvergenz $A^{i,m}_t \xrightarrow{m\to\infty} A^i_t$, $t \geqslant 0$, $i = 1, 2$, erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_1\left(A^1_{t_1} \leqslant s_1, \ldots, A^1_{t_n} \leqslant s_n\right) &= \mathbf{P}_1\left(\bigcap_{m\in\mathbb{N}} \left\{A^{1,m}_{t_1} \leqslant s_1, \ldots, A^{1,m}_{t_n} \leqslant s_n\right\}\right) \\
&= \lim_{m\to\infty} \mathbf{P}_1\left(A^{1,m}_{t_1} \leqslant s_1, \ldots, A^{1,m}_{t_n} \leqslant s_n\right) \\
&= \lim_{m\to\infty} \mathbf{P}_2\left(A^{2,m}_{t_2} \leqslant s_2, \ldots, A^{2,m}_{t_n} \leqslant s_n\right) \\
&\;\vdots \\
&= \mathbf{P}_2\left(A^2_{t_2} \leqslant s_2, \ldots, A^2_{t_n} \leqslant s_n\right) \,.
\end{aligned}$$

Folglich haben A^1 und A^2 dieselbe Verteilung. ∎

4 Reine Lösungen

Nach Folgerung 3.23 zieht die Eindeutigkeit einer Lösung $A \in \mathcal{L}_{W,\mathbb{F}}(f)$ die Eigenschaft nach sich, daß A eine $\mathbb{G}^W$-Zeittransformation ist. Solche speziellen Lösungen sind auch von allgemeinem Interesse, da diese Eigenschaft eng mit der sogenannten Darstellbarkeitseigenschaft verknüpft ist.

Definition 4.1 Sei $[\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}]$ ein vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathbb{F}$ eine Filtration mit $\mathcal{F}_0 \supseteq \mathcal{N}^{\mathbf{P}}$. Wir sagen, ein stetiges lokales Martingal $(X, \mathbb{F})$ habe die *Darstellbarkeitseigenschaft*, wenn es zu jedem in 0 startenden stetigen lokalen Martingal $(Y, \mathbb{F})$ einen vorhersagbaren Prozeß $(Z, \mathbb{F})$ gibt, so daß gilt:

$$Y_t = \int_0^t Z_s \, dX_s \,, \quad t \geqslant 0 \,, \quad \mathbf{P}\text{-f.-s.}$$

Wie bereits für den Wienerprozeß bemerkt, ist für ein $(X, \mathbb{G}^X)$ mit der Darstellbarkeitseigenschaft bereits $\mathbb{G}^X$ rechtsstetig (s. [5], Prop. 1).

Die Darstellbarkeitseigenschaft ist z. B. nützlich, um die Eindeutigkeit von (SDE)-Lösungen in Verteilung nachzuweisen. So gilt etwa folgende Aussage ([21], Satz 4.3.4):

Satz 4.2 (T. Senf) *Sei $b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ meßbar. Für jede* (SDE)(b)*-Lösung $(X, \mathbb{F})$ bis zur Explosionszeit*[6] *$S(X)$ seien die folgenden Bedingungen erfüllt:*

(i) *Jeder der gestoppten Prozesse $\left(X^{D^m(X)}, \mathbb{G}^{X^{D^m(X)}}\right)$ hat die Darstellbarkeitseigenschaft ($m \in \mathbb{N}$).*

(ii) *Es ist*

(4.3) $$b^2(s, X_s(\omega)) > 0 \quad (\lambda^1 \otimes \mathbf{P})\text{-}\textit{fast-überall auf } [0, S(X)).$$

Dabei bezeichnet λ^1 das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}_+$.

Dann ist die Lösung von (SDE)(b) *eindeutig in Verteilung.*

Definition 4.4 Sei $(W, \mathbb{G}^W)$ ein Wienerprozeß und $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to [0, \infty]$ meßbar. Ein $A \in \mathcal{L}_{W,\mathbb{G}^W}(f)$ heißt *reine Lösung*.

Die Eindeutigkeit einer (Z)-Lösung impliziert demnach Reinheit. Der Zusammenhang von Reinheit und Darstellbarkeitseigenschaft besteht nun in folgendem:

Satz 4.5 *Sei W ein Wienerprozeß, $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to [0, \infty]$ meßbar und A eine reine* (Z)(f)*-Lösung zu W. Dann hat für $X := W \circ A$ jedes gestoppte $(X^{D^m(X)}, \mathbb{G}^{X^{D^m(X)}})$ die Darstellbarkeitseigenschaft ($m \in \mathbb{N}$ beliebig).*

Beweis: Offensichtlich ist $D^m(W)$ eine $\mathbb{G}^W$-Stoppzeit und damit der Prozeß $D^m(W) \wedge A_t$, $t \geqslant 0$, eine stetige (nichtexplodierende) $\mathbb{G}^W$-Zeittransformation. Es gilt

$$A_t \wedge D^m(W) = A_t \wedge A_\infty \wedge D^m(W) = A_t \wedge A_{D^m(W \circ A)} = A_{t \wedge D^m(X)} \,, \quad t \geqslant 0 \,, \quad m \in \mathbb{N} \,,$$

[6] Hier wird für die Lösung nicht die Existenz eines Wienerprozesses als Integrator verlangt, sondern nur die eines in $S(X)$ gestoppten Wienerprozesses. Insofern verschärfen sich die Voraussetzungen des Satzes.

(s. dazu auch S. 40) und folglich

$$W_{A_t \wedge D^m(W)} = X_{t\wedge D^m(X)} = X_t^{D^m(X)}\,, \quad t \geqslant 0\,, \quad m \in \mathbb{N}\,.$$

Nach [7], Th. 5 hat dann $(X^{D^m(X)}, \mathbb{G}^{X^{D^m(X)}})$ die Darstellbarkeitseigenschaft. ■

Wir sind damit in der Lage, eine analoge Behauptung zu Satz 4.2 aufzustellen, wobei generell zu bemerken ist, daß auf (4.3) – auch in Satz 4.2 – verzichtet werden kann.

Satz 4.6 *Sei $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to [0,\infty]$ meßbar und jede zu einem beliebigen Wienerprozeß gegebene* (Z)(f)*-Lösung rein. Dann ist* (Z)(f) *– falls überhaupt – eindeutig lösbar. Entsprechend sind alle schwachen* (SDE)$(f^{\frac{1}{2}})$*-Lösungen eindeutig in Verteilung.*

Beweis: Seien auf $[\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mathbf{P}_i]$, $i = 1,2$, die (Z)(f)-Lösungspaare $((W^i, \mathbb{F}^i), A^i)$ gegeben. Sie induzieren in $[C_{\mathbb{R}_+} \times E_+, \mathcal{B}_{C_{\mathbb{R}_+} \times E_+}]$ die Bildmaße $\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^2$. Im Beweis zu Satz 3.8 wurde klar, daß die Koordinatenabbildung von $(w,x) \in C_{\mathbb{R}_+} \times E_+$ mit der Filtration $(\mathbb{B} \otimes \mathbb{D})_+^{\mathbf{P}^i}$ in $\left[C_{\mathbb{R}_+} \times E_+, \mathcal{B}_{C_{\mathbb{R}_+} \times E_+} \vee \mathcal{N}^{\mathbf{P}^i}, \mathbf{P}^i\right]$ ein Lösungspaar ist ($i = 1,2$). Für ein $a \in (0,1)$ ist (w,x) auch unter $\mathbf{Q} := a\mathbf{P}^1 + (1-a)\mathbf{P}^2$ ein Lösungspaar mit der Filtration $(\mathbb{B} \otimes \mathbb{D})_+^{\mathbf{Q}}$, denn $(w, \mathbb{B} \otimes \mathbb{D})$ bleibt auch unter $\mathbf{Q}$ ein Wienerprozeß; ebenso wie $\mathbf{P}_1$ und $\mathbf{P}_2$ ist $\mathbf{Q}$ auf der Klasse aller Paare konzentriert, die (Z)(f) erfüllen. Die restlichen Eigenschaften von Lösungspaaren bleiben trivialerweise erhalten. Nach Voraussetzung ist x unter $\mathbf{Q}$ eine reine Lösung zu w. Also hat im Wahrscheinlichkeitsraum $[C_{\mathbb{R}_+} \times E_+, \mathcal{B}_{C_{\mathbb{R}_+} \times E_+} \vee \mathcal{N}^{\mathbf{Q}}, \mathbf{Q}]$ nach Satz 4.5 jedes durch

$$Z_t^m := (w \circ x)(t \wedge D^m(w \circ x))\,, \quad t \geqslant 0\,,$$

definierte stetige lokale Martingal $(Z^m, \mathbb{G}^{Z^m})$ die Darstellbarkeitseigenschaft. Sei

$$\mathcal{G}_\infty^{Z^m} := \sigma\left(\bigcup_{t\geqslant 0} \mathcal{G}_t^{Z^m}\right).$$

In der konvexen Menge $\mathcal{M}_{\mathrm{loc}}^{\mathrm{c}}(Z^m, \mathbb{G}^{Z^m})$ aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf $[C_{\mathbb{R}_+} \times E_+, \mathcal{G}_\infty^{Z^m}]$, bezüglich derer sich $(Z^m, \mathbb{G}^{Z^m})$ als stetiges lokales Martingal erweist, ist dann $\mathbf{Q}$ ein Extrempunkt (s. [14]). Weil aber auch $\mathbf{P}^1$ und $\mathbf{P}^2$ zu dieser Menge gehören und

$$\mathbf{Q}|_{\mathcal{G}_\infty^{Z^m}} = a\mathbf{P}^1|_{\mathcal{G}_\infty^{Z^m}} + (1-a)\mathbf{P}^2|_{\mathcal{G}_\infty^{Z^m}}$$

ist, folgt

$$\mathbf{P}^1|_{\mathcal{G}_\infty^{Z^m}} = \mathbf{P}^2|_{\mathcal{G}_\infty^{Z^m}}\,, \quad m \in \mathbb{N}\,,$$

insbesondere also

$$\mathbf{P}_1^{(W^1\circ A^1)^{D^m(W^1\circ A^1)}} = (\mathbf{P}^1)^{Z^m} = (\mathbf{P}^2)^{Z^m} = \mathbf{P}_2^{(W^2\circ A^2)^{D^m(W^2\circ A^2)}}\,. \tag{4.7}$$

Wir setzen $X^i := W^i \circ A^i$ und $X^{i,m} := (X^i)^{D^m(X^i)}$, $i = 1,2$. Seien nun ein $n \in \mathbb{N}$, $D_1, \ldots, D_n \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ und $0 \leqslant t_1 < \ldots < t_n < \infty$ gegeben. Die Verteilung eines stetigen explodierenden Prozesses X wird eindeutig durch alle Mengen der Gestalt

$$\{X_{t_1} \in D_1,\ \ldots,\ X_{t_n} \in D_n,\ S(X) > t_n\} \tag{4.8}$$

mit irgendwelchen D_i, t_i, n bestimmt, denn diese bilden ein offensichtlich $\cap$-abgeschlossenes Erzeugendensystem. So hat nämlich jeder Einerzylinder $\{X_t \in D\}$ mit $t \geqslant 0$, $D \in \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$ im Falle $\bowtie \in D$ die Darstellung

$$\{X_t \in D\} = \{S(X) > t\}^c \cup \{X_t \in D \setminus \{\bowtie\}\} \cap \{S(X) > t\}$$

und im Falle $\bowtie \notin D$

$$\{X_t \in D\} = \{X_t \in D, S(X) > t\}\,,$$

also stets eine Darstellung durch Mengen der Gestalt (4.8). Einerzylinder aber bilden bereits ein Erzeugendensystem von E.

Mit (4.7) erhalten wir nun

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}_1\left(S(X^1) > t_n, X^1_{t_1} \in D_1, \ldots, X^1_{t_n} \in D_n\right) \\
&= \lim_{m\to\infty} \mathbf{P}_1\left(D^m(X^1) > t_n, X^1_{t_1} \in D_1, \ldots, X^1_{t_n} \in D_n\right) \\
&= \lim_{m\to\infty} \mathbf{P}_1\left(\sup_{0\leqslant s\leqslant t_n} \left|X^1_s\right| < m, X^1_{t_1} \in D_1, \ldots, X^1_{t_n} \in D_n\right) \\
&= \lim_{m\to\infty} \mathbf{P}_1\left(\sup_{0\leqslant s\leqslant t_n} \left|X^{1,m}_s\right| < m, X^{1,m}_{t_1} \in D_1, \ldots, X^{1,m}_{t_n} \in D_n\right) \\
&= \lim_{m\to\infty} \mathbf{P}_2\left(\sup_{0\leqslant s\leqslant t_n} \left|X^{2,m}_s\right| < m, X^{2,m}_{t_1} \in D_1, \ldots, X^{2,m}_{t_n} \in D_n\right) \\
&\vdots \\
&= \mathbf{P}_2\left(S(X^2) > t_n, X^2_{t_1} \in D_1, \ldots, X^2_{t_n} \in D_n\right)\,.
\end{aligned}$$

Also gilt $\mathbf{P}_1^{X^1} = \mathbf{P}_2^{X^2}$. Dies ist die Situation im Teil „(i) $\Rightarrow$ (ii)“ des Beweises zu Satz 3.24. Es folgt damit $\mathbf{P}_1^{A^1} = \mathbf{P}_2^{A^2}$, d. h., die (Z)($f$)-Lösung ist eindeutig. ■

Unter verschiedenen Voraussetzungen an f werden wir die Existenz reiner (Z)-Lösungen zeigen. Diese Voraussetzungen markieren Bereiche, innerhalb deren man *hoffen* kann, Bedingungen für die Eindeutigkeit der Lösung zu finden.

5 Existenz

Es gibt für meßbare zeitabhängige Funktionen b auf $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ neben den klassischen Sätzen verschiedene Aussagen über die Existenz schwacher (SDE)-Lösungen. Torsten Senf zeigte den folgenden Satz:

Satz 5.1 (T. Senf) ([21], 3.5.1) *Die Funktionen b^2 und b^{-2} seien bzgl. λ lokal integrierbar*[7]*, d. h., für jedes $K_m = [0,m] \times [-m,m]$, $m \in \mathbb{N}$ gelte*

$$\int_{K_m} b^2 \, d\lambda < \infty \quad \textit{und} \quad \int_{K_m} b^{-2} \, d\lambda < \infty \, . \tag{5.2}$$

Dann hat (SDE)(b) *eine schwache Lösung.*

Beim Beweis wurden in einem ersten Schritt unter strengeren Bedingungen für b^{-2} zu einem gegebenen Wienerprozeß $(W, \mathbb{F})$ starke (Z)(b)-Lösungen konstruiert, indem man mit monotoner Approximation wachsende, $\mathbb{F}$-adaptierte Prozesse T fand, die die Gleichung

$$T_t = \int_0^t b^{-2}(T_s, W_s) \, ds \, , \quad t \geqslant 0 \, , \quad \mathbf{P}\text{-f.-s.} \tag{5.3}$$

lösen. Deren rechtsstetige Inverse ist dann eine (Z)(b^2)-Lösung zu $(W, \mathbb{F})$. In einem weiteren Schritt wurde dann mit Hilfe von Straffheitsargumenten ein Häufungspunkt in einer Klasse von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $[E, \mathcal{B}_E]$ gefunden, in welchem sich die identische Abbildung als Lösung von (2.21) erweist. Man kann mit Satz 2.36 hieraus eine schwache (Z)(b^2)-Lösung und eine schwache (SDE)(b)-Lösung gewinnen. Die (Z)(b^2)-Lösung wächst $\mathbf{P}$-f.-s. streng monoton – man kann nämlich b^2 unter der Bedingung (5.2) o. B. d. A. als positiv voraussetzen, wenn man nur *irgendeine* Lösung sucht.

A. Rozkosz und L. Słomiński schwächten die Voraussetzungen in folgender Weise ab: Sei für eine Funktion $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ mit $N(f)$ die Menge aller Nullstellen von f bezeichnet und

$$F(f) := \left\{ x \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \, : \, x \in U \, , \, U \text{ offen} \Rightarrow \int_U f^{-1} \, d\lambda = +\infty \right\} . \tag{5.4}$$

Satz 5.5 (Rozkosz, Słomiński) *Für jeden Punkt $(t,x) \in F(b^2)$ sei*

$$b^2(s,x) = 0 \quad \textit{für } \lambda^1\textit{-fast-alle } s \in [t, \infty) \, , \tag{5.6}$$

wobei λ^1 das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}_+$ bezeichnet. Ist außerdem b^2 lokal integrierbar, so gibt es eine schwache (SDE)(b)*-Lösung.*

Die Lösung wird hier gewonnen, indem man eine Folge von (SDE)-Lösungen zu anderen Koeffizienten gewinnt, die der Funktion b in allen Punkten mit einer festgelegten Mindestentfernung zu $F(b^2)$ gleichen und ansonsten den Bedingungen von Satz 5.1 genügen. Die zugehörigen Lösungsverteilungen setzt man fort und stoppt einen Prozeß mit der Verteilung des Grenzmaßes beim ersten Erreichen jener Teilmenge von $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ ab, für die (5.6) gilt. Das Verfahren des Abstoppens erinnert an den Fall zeitunabhängiger Koeffizienten, bei dem die Bedingung $F(b^2) \subseteq N(b)$ notwendig und hinreichend für die Existenz von (SDE)(b)-Lösungen für alle Startpunkte x_0 ist (s. [8]).

[7] Wir vereinbaren für nichtnegative Funktionen auf der Menge $N(f)$ aller Nullstellen von f grundsätzlich $f^{-1}|_{N(f)} := +\infty$.

Im Falle der Zeitabhängigkeit erscheinen aber auch Koeffizienten b mit räumlich *und* zeitlich beschränkten Nullstellenmengen $N(b) \subseteq \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ als natürlich – bis hin zu völlig singulären Mengen. Die Pfade einer entsprechenden (SDE)-Lösung wären dann beim Durchlaufen von $N(b)$ gegebenenfalls nur auf *endlichen* Zeitintervallen konstant oder könnten sich in $N(b)$ auch auf singulären Teilmengen des Zeitstrahls aufhalten. Hat man z. B. eine nirgends dichte, abgeschlossene Menge $F \subseteq \mathbb{R}_+$ mit positivem Lebesgue-Maß, dann gibt es zu dem Koeffizienten $b(t,x) := I_{F^c}(t)$, $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, offenbar die deterministische (Z)(b^2)-Lösung $A_t := \lambda^1([0,t] \cap F^c)$, $t \geqslant 0$. In einem erweiterten Wahrscheinlichkeitsraum ist dann $W \circ A$ eine schwache (SDE)(b)-Lösung. Die Zeittransformation A wächst zwar streng monoton (wegen der Dichtheit der offenen Menge F^c), aber die stetige Inverse T ist nicht überall absolutstetig (wegen $\lambda^1(F) > 0$). Man sieht hieran, daß die Methode, $\mathbb{F}$-adaptierte Lösungen von (5.3) zu suchen, in solchen Fällen schwerlich zum Ziel führt. Eine separate Betrachtung der gegebenenfalls auftretenden Sprünge von T ist ebenfalls nur in günstigen Spezialfällen praktikabel. Wir verfolgen daher in „Umkehrung“ des Verfahrens von T. Senf ein Programm, bei dem man die Methode der monotonen Approximation auf die Zeittransformation A selbst anwendet.

Zunächst werden starke (Z)(b^2)-Lösungen für Lipschitz-stetige b bereitgestellt, indem man mit einem klassischen Existenzsatz pfadweise eindeutige (SDE)(b)-Lösungen gewinnt. Diese sind dann auch eindeutig in Verteilung. Wir erhalten daher starke, eindeutige und reine (Z)(b^2)-Lösungen, welche außerdem einem Vergleichssatz genügen: Man bekommt zu einer monotonen Folge Lipschitz-stetiger Funktionen und einem festen Wienerprozeß eine **P**-f.-s. ebenso geordnete Folge von (Z)-Lösungen. Damit sind monotone Approximationen möglich – die Existenz von Grenzprozessen solcher Lösungsfolgen ist unter gewissen Annahmen gesichert. Wir approximieren in geeigneter Weise

- stetige Funktionen von unten durch Lipschitz-stetige;
- nach unten halbstetige Funktionen von unten durch stetige (in zwei verschiedenen Fällen);
- meßbare Funktionen von oben durch nach unten halbstetige.

Anschließend wird mit Hilfe der Ungleichung von Krylov (Lemma 2.38) nachgewiesen, daß die Grenzprozesse der zugehörigen monotonen (Z)-Lösungsfolgen auch Lösungen zur approximierten Funktion sind.

5.1 Lipschitz-stetige Koeffizienten

Satz 5.7 *Die Funktion $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ sei beschränkt. Die Wurzel $f^{\frac{1}{2}}$ sei in beiden Argumenten gleichzeitig global Lipschitz-stetig, d. h., es gebe eine Konstante C mit*

$$\left| f^{\frac{1}{2}}(x) - f^{\frac{1}{2}}(y) \right| \leqslant C|x-y|_e\,, \quad x,y \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}\,,$$

wobei $|\cdot|_e$ die euklidische Norm in $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ bezeichnet.[8] *Dann ist (Z)(f) stark lösbar. Die Lösung ist eindeutig und rein.*

[8] Wir sagen kurz *global Lipschitz-stetig*.

Beweis: Es ist bekannt, daß die Gleichung (SDE)($f^{\frac{1}{2}}$) Lösungen hat, die überdies pfadweise eindeutig sind und nicht explodieren (s. z. B. [15], Sätze 5.2.9, 5.2.13). Da pfadweise Eindeutigkeit die Eindeutigkeit in Verteilung nach sich zieht, gibt es mit den Sätzen 2.36, 3.24 und Folgerung 3.20 starke eindeutige (Z)(f)-Lösungen. Nach Folgerung 3.23 sind diese rein. ■

5.1.1 Monotonieeigenschaften der (Z)-Lösungen im Lipschitz-Fall

Bemerkung Ein Formel-Apostroph wird in dieser Arbeit nur als zusätzliche Auszeichnung, *nicht* für die Ableitung einer Funktion verwendet.

Es seien zwei beschränkte $f, f' : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ gegeben, so daß $f^{\frac{1}{2}}, (f')^{\frac{1}{2}}$ Lipschitz-stetig sind und $f(x) \leqslant f'(x)$, $x \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, gilt. Wir geben nun einen üblichen Wienerprozeß $(W, \mathbb{F})$ vor und betrachten beliebige $A \in \mathfrak{L}_{W,\mathbb{F}}(f)$, $A' \in \mathfrak{L}_{W,\mathbb{F}}(f')$. Wie verhalten sich A_t und A'_t für ein $t \geqslant 0$ zueinander? Es zeigt sich, daß sich die Ordnungsrelation der Funktionen auf die der zugehörigen Lösungen überträgt. Wir beweisen dazu einen allgemeinen Vergleichssatz für Lösungen von Integralungleichungen. Das Innere einer Menge M in einem metrischen Raum sei mit $\mathring{M}$ bezeichnet.

Lemma 5.8 *Es seien $g, g' : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to [0, \infty]$ Funktionen mit den folgenden Eigenschaften:*

$$g(x) \geqslant g'(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+\,; \tag{5.9}$$

$$\{x \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \,:\, g(x) = g'(x)\} = N(g - g') \subseteq \mathring{N}(g')\,. \tag{5.10}$$

Die Funktion g sei nach unten halbstetig und g' nach oben halbstetig. Weiterhin seien $y, y' \in E_+$. Für sie möge gelten:

$$y(t) - y(s) \;\geqslant\; \int_s^t g(u, y(u))\, du\,, \quad 0 \leqslant s \leqslant t < S(y)\,; \tag{5.11}$$

$$y'(t) - y'(s) \;\leqslant\; \int_s^t g'(u, y'(u))\, du\,, \quad 0 \leqslant s \leqslant t < S(y')\,; \tag{5.12}$$

Dann ist $y(t) \geqslant y'(t)$, $t \geqslant 0$.

Beweis: Für $t \geqslant S(y) \vee S(y')$ ist nichts zu zeigen. Wir nehmen an, es gäbe ein $\tilde{t} > 0$ mit $y'(\tilde{t}) > y(\tilde{t})$, welches dann o. B. d. A. im Intervall $(0, S(y) \wedge S(y'))$ liegt. Für

$$t^* := \inf\big\{t \geqslant 0 \,:\, y'(s) > y(s) \text{ für alle } s \in \big[t, \tilde{t}\big]\big\}$$

gilt offensichtlich $t^* < \tilde{t}$ und $y(t^*) = y'(t^*)$. Außerdem ist t^* ein Häufungspunkt der Menge $\big\{t \in [t^*, \tilde{t}] \,:\, g'(t, y'(t)) > 0\big\}$, denn sonst wäre $g'(t, y'(t)) \equiv 0$ auf einem Intervall $[t^*, t^* + \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, und y' dann wegen (5.12) dort konstant. Dies stünde aber im Widerspruch zur Definition von t^*, da $y \in E_+$ nicht fallen kann. Wegen der Stetigkeit von y' (zumindest bis $\tilde{t}$) ist nun auch der Punkt $(t^*, y'(t^*)) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ ein Häufungspunkt von $N^c(g')$, also Element von $\overline{N^c(g')}$. Mit (5.10) folgt

$$g(t^*, y(t^*)) - g'(t^*, y'(t^*)) > 0\,.$$

Die Funktionen $g(s, y(s))$ und $-g'(s, y'(s))$, $s \geqslant 0$, sind nun als Verkettung von stetigen und nach unten halbstetigen Funktionen ihrerseits nach unten halbstetig ebenso wie ihre

Summe. Folglich finden wir ein *positives* $\delta < \tilde{t} - t^*$, so daß $g(t, y(t)) - g'(t, y'(t)) > 0$ auch für alle $t \in [t^*, t^* + \delta]$ gilt. Es ergibt sich dann

$$\begin{aligned} y(t^* + \delta) - y'(t^* + \delta) &= y(t^* + \delta) - y(t^*) - [y'(t^* + \delta) - y'(t^*)] \\ &\geqslant \int_{t^*}^{t^*+\delta} [g(u, y(u)) - g'(u, y'(u))]\, du > 0\,. \end{aligned}$$

Dies steht im Widerspruch zur Definition von t^*. ■

Satz 5.13 *Die Funktionen* $f^{\frac{1}{2}}, f'^{\frac{1}{2}}$ *seien global Lipschitz-stetig und beschränkt. Seien außerdem die* (Z)*-Lösungen* $A \in \mathcal{L}_{W,\mathbb{F}}(f)$, $A' \in \mathcal{L}_{W,\mathbb{F}}(f')$ *zu einem auf* $[\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}]$ *definierten üblichen Wienerprozeß* $(W, \mathbb{F})$ *gegeben. Gilt* $f'(x) \leqslant f(x)$, $x \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, *so folgt*

$$A'_t \leqslant A_t\,, \quad t \geqslant 0\,, \quad \mathbf{P}\text{-f.-s.} \tag{5.14}$$

Beweis: Sei $f_n(t, x) := f(t, x) + n^{-1}$, $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es $\mathbf{P}$-f.-s. pfadweise eindeutig bestimmte $A^n \in \mathcal{L}_{W,\mathbb{F}}(f_n)$, $n \in \mathbb{N}$, denn wegen der Lipschitz-Stetigkeit von $f^{\frac{1}{2}}$ ist auch $(f_n)^{\frac{1}{2}}$ Lipschitz-stetig und ebenfalls beschränkt. Sei nun $\omega \in \Omega$ so gewählt, daß für dieses ω die Gleichungen (Z)(f), (Z)(f') und (Z)(f_n), $n \in \mathbb{N}$, gelten. Da dies für jede dieser Gleichungen $\mathbf{P}$-f.-s. der Fall ist, bildet die Gesamtheit aller solcher ω eine Menge vom Maß 1, die wir Ω^* nennen. Wir erhalten dann für $t, u \geqslant 0$ und $\omega \in \Omega^*$:

$$f'(t, W_u(\omega)) \leqslant f(t, W_u(\omega)) < \ldots < f_{n+1}(t, W_u(\omega)) < f_n(t, W_u(\omega)) < \ldots < f_1(t, W_u(\omega))\,.$$

Die Funktion $g(t, u) := f(t, W_u(\omega))$ (g', g_n entsprechend) ist stetig, und es gilt

$$A_t(\omega) = \int_0^t g(s, A_s(\omega))\, ds\,, \quad t \geqslant 0$$

(für A', A^n entsprechend) und außerdem

$$g_n(t, u) = g(t, u) + n^{-1}\,, \quad (t, u) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+\,.$$

Mit Lemma 5.8 erhalten wir

$$A_t(\omega) \leqslant \ldots \leqslant A_t^{n+1}(\omega) \leqslant A_t^n(\omega) \leqslant \ldots \leqslant A_t^1(\omega)\,, \quad t \geqslant 0\,, \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

vor allem aber

$$A'_t(\omega) \leqslant \ldots \leqslant A_t^{n+1}(\omega) \leqslant A_t^n(\omega) \leqslant \ldots \leqslant A_t^1(\omega)\,, \quad t \geqslant 0\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Sei

$$A_t^*(\omega) := \begin{cases} \lim_{n\to\infty} A_t^n(\omega) & : \ \omega \in \Omega^* \\ 0 & : \ \text{sonst} \end{cases}\,, \quad t \geqslant 0\,.$$

Nun haben wir mit A^* als monotonem Limes einer auf Ω^* fallenden Folge stetiger wachsender Prozesse eine stetige $\mathbb{F}$-Zeittransformation, denn einerseits ist das Infimum einer $\mathbf{P}$-f.-s. monoton fallenden Folge von $\mathbb{F}$-Stoppzeiten selbst eine Stoppzeit, wenn $\mathbb{F}$ den üblichen Bedingungen genügt – andererseits ist $A(\omega)$ stetig, da alle f_n durch eine gemeinsame Konstante C beschränkt und damit die Pfade $(A^n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ für ein $\omega \in \Omega^*$ gleichgradig stetig sind. Es ist nämlich

$$A_t^n(\omega) - A_s^n(\omega) \leqslant \int_s^t C\, du \leqslant C(t - s)\,, \quad 0 \leqslant s \leqslant t < \infty\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Offensichtlich gilt $A'_t \leqslant A^*_t$ **P**-f.-s., $t \geqslant 0$. Zeigen wir nun, daß auch A^* in $\mathcal{L}_{W,\mathbb{F}}(f)$ liegt, so folgt aus der Eindeutigkeit der (Z)(f)-Lösungen $A_t = A^*_t$ **P**-f.-s., $t \geqslant 0$, und damit die Behauptung. Sei wieder $\omega \in \Omega^*$ und $t \geqslant 0$:

$$\begin{aligned}
&\left| A^*_t(\omega) - \int_0^t f(s, W(\omega) \circ A^*_s(\omega))\, ds \right| \\
&= \left| A^*_t(\omega) - \int_0^t g(s, A^*_s(\omega))\, ds \right| \\
&\leqslant |A^*_t(\omega) - A^n_t(\omega)| + \int_0^t \left| g(s, A^*_s(\omega)) - \big(g(s, A^n_s(\omega)) + n^{-1}\big) \right| ds \\
&\leqslant |A^*_t(\omega) - A^n_t(\omega)| + \int_0^t |g(s, A^*_s(\omega)) - g(s, A^n_s(\omega))|\, ds + n^{-1} t\,.
\end{aligned}$$

Der erste und der letzte Summand des untersten Ausdruckes konvergieren für $n \to \infty$ gegen Null. Der Integrand des mittleren Summanden ist beschränkt und konvergiert mit $n \to \infty$ punktweise gegen Null. Mit majorisierter Konvergenz erhalten wir somit nach Grenzübergang

$$A^*_t = \int_0^t f(s, W \circ A^*_s) \quad \mathbf{P}\text{-f.-s.}\,, \quad t \geqslant 0\,,$$

und wegen der Stetigkeit von A^* dieselbe Gleichung für alle $t \geqslant 0$ **P**-f.-s. ■

5.2 Stetige Koeffizienten

Wir betrachten nun (Z)(f) für stetige f. Diese werden durch geeignete Lipschitz-stetige Funktionen approximiert, und der Grenzprozeß der zugehörigen (Z)-Lösungen erweist sich als Lösung für (Z)(f). Gegeben sei wiederum ein vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum $[\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}]$ und auf diesem ein üblicher Wienerprozeß $(W, \mathbb{F})$.

Satz 5.15 *Sei $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ stetig. Dann existiert zu $(W, \mathbb{F})$ eine reine (Z)(f)-Lösung.*

Beweis: Es sei

$$f_n^{\frac{1}{2}}(x) := n \wedge \inf_{y \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}} \left(f^{\frac{1}{2}}(y) + n|x-y|_e \right)\,, \quad x \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}\,, \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{5.16}$$

Man überprüft leicht, daß die beschränkten $f_n^{\frac{1}{2}}$ Lipschitz-stetig sind, punktweise gegen $f^{\frac{1}{2}}$ konvergieren und daß

$$f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant \ldots \leqslant f(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}\,,$$

gilt (s. [18] XV, §4, Satz 10). Außerdem sind $N(f)$ und $N(f_n)$ gleich. Wir bekommen nun mit Satz 5.7 eine Folge von reinen $A^n \in \mathcal{L}_{W,\mathbb{F}}(f_n)$, für die $A^{n+1}_t \geqslant A^n_t$, $t \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, **P**-f.-s. nach Satz 5.13 gilt. Wir definieren **P**-f.-ü. eindeutig

$$A_t := \lim_{n \to \infty} A^n_t\,, \quad t \geqslant 0\,,$$

und erhalten eine linksstetige wachsende $\mathbb{G}^W$-Zeittransformation, die jedoch auch den Wert $+\infty$ annehmen kann. Linksstetigkeit liegt hier vor, weil die Grenzfunktion einer wachsenden Folge stetiger Funktionen nach unten halbstetig ist und wachsende nach unten halbstetige Funktionen linksstetig sind. Weiterhin ist A rein, weil die A^n rein sind und das $\mathbf{P}$-fast-sichere Supremum einer Folge von $\mathbb{G}^W$-Stoppzeiten wieder eine $\mathbb{G}^W$-Stoppzeit ist. Wir haben

$$D^m := D^m(W \circ A) \leqslant D^m(W \circ A^n), \quad m, n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}\text{-f.-s.} \tag{5.17}$$

und außerdem $\lim_{m\to\infty} D^m = S(W \circ A) = S(A)$. Für die Behauptung ist nun nachzuweisen, daß gilt:

$$A_{t\wedge D^m} = \int_0^{t\wedge D^m} f(s, W \circ A_s)\, ds \quad \mathbf{P}\text{-f.-s.}, \quad t \geqslant 0, m \in \mathbb{N}; \tag{5.18}$$

$$A_{S(A)-} = A_{S(A)} \quad \mathbf{P}\text{-f.-s.} \tag{5.19}$$

Wegen (5.18) sind die Pfade von A $\mathbf{P}$-f.-s. stetig auf $[0, S(A))$ und können ansonsten auf Null gesetzt werden. Mit (5.19) wird gesichert, daß die Pfade $\mathbf{P}$-f.-s. in E_+ liegen.

Zu (5.18): Wir fixieren o. B. d. A. ein $\omega \in \Omega$, so daß alle Gleichungen (Z)(f_n) und die Eigenschaft (5.17) erfüllt sind und schätzen unter Ausnutzung von (Z)(f_n) wie folgt ab:

$$\begin{aligned}
&\left| A_{t\wedge D^m}(\omega) - \int_0^{t\wedge D^m} f(s, W(\omega) \circ A(\omega)_s)\, ds \right| \\
&\leqslant \; |A_{t\wedge D^m}(\omega) - A^n_{t\wedge D^m}(\omega)| + \left| A^n_{t\wedge D^m} - \int_0^{t\wedge D^m} f(s, W(\omega) \circ A^n_s(\omega))\, ds \right| \\
&\quad + \left| \int_0^{t\wedge D^m} (f(s, W \circ A^n_s(\omega)) - f(s, W(\omega) \circ A_s(\omega)))\, ds \right| \\
&\leqslant \; |A_{t\wedge D^m}(\omega) - A^n_{t\wedge D^m}(\omega)| + \int_0^{t\wedge D^m} |f - f_n|\, (s, W(\omega) \circ A^n_s(\omega))\, ds \\
&\quad + \int_0^{t\wedge D^m} |f(s, W \circ A^n_s(\omega)) - f(s, W(\omega) \circ A_s(\omega))|\, ds,
\end{aligned}$$

wobei der erste Summand der rechten Seite nach Konstruktion von A gegen Null konvergiert. Die Argumente von $f, f_1, f_2, \ldots$ verlassen für $t \leqslant D^m$ nicht den Bereich $K_{t,m}$. Auf einem Kompaktum konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f. Der zweite Summand kann daher durch den mit $n \to \infty$ verschwindenden Ausdruck

$$2t \max_{x\in K_{t,m}} |f(x) - f_n(x)|$$

abgeschätzt werden, und der dritte Term verschwindet mit $n \to \infty$ auf Grund der punktweisen Konvergenz des Integranden (da f stetig ist) mit majorisierter Konvergenz. Damit ist (5.18) gezeigt.

Zu (5.19): Sei T die rechtsstetige Inverse von A. Nach Lemma A4 ist T auch Grenzprozeß der rechtsstetigen Inversen T^n von A^n:

$$T_t = \lim_{n\to\infty} T^n_t, \quad t \geqslant 0.$$

Weist man nach, daß T auf $\{T_\infty < \infty\}$ $\mathbf{P}$-f.-s. streng monoton wächst, dann ist (5.19) gezeigt. Dies geschieht unter allgemeineren Voraussetzungen im folgenden Satz. ■

Bezeichnung: Zu einem beliebigen Maß μ auf $[\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}}]$ und $p \geqslant 1$ bezeichne $L^p_{\text{loc}}(\mu)$ den Raum der bezüglich μ lokal p-integrierbaren Funktionen.

Satz 5.20 *Es seien $f_n, f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to [0,\infty]$, $n \in \mathbb{N}$, meßbare lokal integrierbare Funktionen. Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wachse punktweise monoton, und es gelte $f_n(x) \leqslant f(x)$, $x \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, und außerdem $N(f_n) = N(f)$, $n \in \mathbb{N}$. Weiterhin seien auf $[\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}]$ ein üblicher Wienerprozeß $(W, \mathbb{F})$ und derartige $A^n \in \mathcal{L}_{W,\mathbb{F}}(f_n)$, $n \in \mathbb{N}$, gegeben, daß $A_t^{n+1} \geqslant A_t^n$, $t \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}$-f.-s. gilt. Mit T^n sei die rechtsstetige Inverse zu A^n bezeichnet. Für den $\mathbf{P}$-f.-s. wohldefinierten Prozeß $T_t := \lim_{n\to\infty} T_t^n$, $t \geqslant 0$, gilt im Falle $T_\infty < \infty$ $\mathbf{P}$-f.-s.:*

$$T_u - T_{u'} \geqslant \int_{u'}^{u} h(T_s, W_s)\, ds\,, \quad 0 \leqslant u' \leqslant u < \infty\,, \tag{5.21}$$

für eine geeignete Funktion h mit Werten in $(0,1]$. Der Prozeß T wächst also $\mathbf{P}$-f.-s. streng monoton.

Beweis: Wir setzen $X^n := W \circ A^n$ gemäß (2.30) und erhalten die folgenden beiden Aussagen:

Lemma 5.22 *Seien $\varphi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ meßbar und beschränkt und $m, n \in \mathbb{N}$, $t, u \in \mathbb{R}_+$ beliebig. Dann existiert eine nur von m abhängige Konstante C_m mit der Eigenschaft*

$$\mathbf{E} \int_0^{D^m(W)\wedge A_t^n \wedge u} \varphi\left(T_s^n, W_s\right) ds \leqslant C_m \left\| \varphi f^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^2(K_{t,m},\lambda)} .$$

Beweis: Jedes A^n hat Pfade in E_+. Daher gilt

$$A^n_{D^m(X^n)} = A^n_{\inf\left\{s\geqslant 0 : \left|W_{A_s^n}\right| \geqslant m\right\}} = \inf\left\{A_s^n \,:\, \left|W_{A_s^n}\right| \geqslant m\right\} = A_\infty^n \wedge D^m(W) \quad \mathbf{P}\text{-f.-s.}$$

und außerdem $A^n_{T_t^n} = A^n_\infty \wedge t$, $t \geqslant 0$. Man überzeugt sich dann leicht von der Gleichung $D^m(W) \wedge A_t^n \wedge u = A^n_{D^m(X^n)\wedge t \wedge T_u^n}$ und erhält mit den Lemmata 2.24 und 2.38

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} \int_0^{D^m(W)\wedge A_t^n \wedge u} \varphi\left(T_s^n, W_s\right) ds &= \mathbf{E} \int_0^{A^n_{t\wedge D^m(X^n)\wedge T_u^n}} \varphi\left(T_s^n, W_s\right) ds \\
&= \mathbf{E} \int_0^{t\wedge D^m(X^n)\wedge T_u^n} \varphi\left(s, X_s^n\right) dA_s^n \\
&= \mathbf{E} \int_0^{t\wedge D^m(X^n)\wedge T_u^n} \varphi f_n\left(s, X_s^n\right) ds \\
&\leqslant \mathbf{E} \int_0^{t\wedge D^m(X^n)} \varphi f^{\frac{1}{2}} f_n^{\frac{1}{2}}\left(s, X_s^n\right) ds \\
&\leqslant C_m \left\| \varphi f^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^2(K_{t,m},\lambda)} .
\end{aligned}$$

■

Lemma 5.23 *Unter denselben Bedingungen wie in Lemma 5.22 gilt ebenfalls*

$$\mathbf{E} \int_0^{D^m(W)\wedge A_t \wedge u} \varphi\left(T_s, W_s\right) ds \leqslant C_m \left\| \varphi f^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^2(K_{t,m},\lambda)} .$$

Beweis: Wir ersetzen für ein festes $k \in \mathbb{N}$ zunächst in der oberen Integrationsgrenze die Größe A_t durch A_t^k. Wir wenden Lemma A1 an und setzen $[X, \mathcal{X}] := \left[\Omega \times [0,u], \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}_{[0,u]}\right]$

und $Y := \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. Weiterhin seien auf $[X, \mathfrak{X}]$ das Maß κ und auf $[Y, \mathcal{B}_Y]$ das Maß η definiert durch

$$\begin{aligned} \kappa(d\omega\, ds) &:= I_{\left[0, D^m(W(\omega)) \wedge A_t^k(\omega) \wedge u\right)}(s)\, ds\, \mathbf{P}(d\omega)\,; \\ \eta(dx) &:= f(x) I_{K_{t,m}}(x) \lambda(dx)\,, \quad x \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Das Maß η ist wegen der lokalen Integrierbarkeit von f endlich auf Y. Weiterhin sei $h_n(\omega, s) := (T_s^n(\omega), W_s(\omega))$, $h(\omega, s) := (T_s(\omega), W_s(\omega))$ und $\psi(h_n(\omega, s)) := \varphi(T_s^n(\omega), W_s(\omega))$, $\omega \in \Omega$, $s \in [0, u]$. Wir bemerken, daß h_n κ-fast-überall gegen h konvergiert. Nach Voraussetzung gilt für $n \geqslant k$ wegen $A_t^k \leqslant A_t^n$ $\mathbf{P}$-f.-s.

$$\begin{aligned} \int_X \psi(h_n(\omega, s))\, \kappa(d\omega\, ds) &= \mathbf{E} \int_0^{D^m(W) \wedge A_t^k \wedge u} \varphi\left(T_s^n, W_s\right)\, ds \\ &\leqslant C_m \left\| \varphi f^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^2(K_{t,m}, \lambda)} = C_m \left\| \psi \right\|_{L^2(Y, \eta)}\,. \end{aligned}$$

Die Voraussetzungen von Lemma A1 sind damit erfüllt, so daß folgt:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \int_0^{D^m(W) \wedge A_t^k \wedge u} \varphi\left(T_s, W_s\right)\, ds &= \int_X \psi(h(\omega, s))\, \kappa(d\omega\, ds) \leqslant C_m \|\psi\|_{L^2(Y, \eta)} \\ &= C_m \left\| \varphi f^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^2(K_{t,m}, \lambda)}\,, \quad k \in \mathbb{N}\,. \end{aligned}$$

Auf Grund der $\mathbf{P}$-f.-s. monoton wachsenden Konvergenz $A_t^k \xrightarrow{k \to \infty} A_t$ und der Nichtnegativität des Integranden folgt die Behauptung mit dem Satz von B. Levi. ■

1) Es gelte außer den Voraussetzungen zusätzlich $f(x) < \infty$, $x \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. Wir betrachten ein festes $\omega \in \Omega$, für das

- die Gleichungen (Z)(f_n), $n \in \mathbb{N}$, erfüllt seien,
- $A_t^n(\omega)$ monoton wachsend gegen $A_t(\omega)$ für alle $t \geqslant 0$ konvergiere und
- $D^m(W) < \infty$, $m \in \mathbb{N}$, gelten möge.

Die Gesamtheit Ω^* aller solcher ω hat das Maß 1. Nach Voraussetzung gelte außerdem $T_\infty(\omega) < \infty$, so daß für $0 \leqslant u' \leqslant u < \infty$ ab einem gewissen n^* ebenfalls $0 \leqslant T_{u'}^n(\omega) \leqslant T_u^n(\omega) < \infty$ gilt. Mit $\tau_i := D^i(W(\omega)) \wedge A_i^i(\omega)$, $i \in \mathbb{N}$, gilt natürlich auch $T_{\tau_i \wedge u'}^n(\omega) \leqslant T_{\tau_i \wedge u}^n(\omega) < \infty$ für $n \geqslant n^*$ und irgendein i. Wir bemerken, daß wegen $S(A(\omega)) = T_\infty(\omega) < \infty$ für festes $i' \geqslant S(A(\omega))$ die Konvergenz $A_{i'}^i(\omega) \xrightarrow{i \to \infty} \infty$ gelten muß und folglich erst recht $A_i^i(\omega) \xrightarrow{i \to \infty} \infty$, woraus mit $D^i(W(\omega)) \xrightarrow{i \to \infty} \infty$ schließlich

(5.24)
$$\tau_i \xrightarrow{i \to \infty} \infty$$

folgt. Sei $N := N(f_n) = N(f)$. Für $n \geqslant n^*$ und beliebige $0 \leqslant t' < t \leqslant u$ gilt wegen $A_{T_t^n}^n = t$

$$T_t^n(\omega) - T_{t'}^n(\omega) = \int_{T_{t'}^n(\omega)}^{T_t^n(\omega)} ds \geqslant \int_{T_{t'}^n(\omega)}^{T_t^n(\omega)} I_{N^c}(s, W \circ A_s^n(\omega))\, ds$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{T^n_{t'}(\omega)}^{T^n_t(\omega)} (I_{N^c} \underbrace{f_n^{-1}}_{\geqslant f^{-1}} + I_N)\, \underbrace{f_n\,(s, W \circ A^n_s(\omega))\, ds}_{=dA^n_s(\omega)} \\
&\geqslant \int_{T^n_{t'}(\omega)}^{T^n_t(\omega)} \left(I_{N^c} f^{-1} + I_N\right)(s, W \circ A^n_s(\omega))\, dA^n_s(\omega) \\
&= \int_{t'}^{t} \left(I_{N^c} f^{-1} + I_N\right)(T^n_s(\omega), W_s(\omega))\, ds \\
&\geqslant \int_{t'}^{t} \underbrace{1 \wedge (I_{N^c} f^{-1} + I_N)}_{=:\, h}(T^n_s(\omega), W_s(\omega))\, ds\,.
\end{aligned}
$$

Wir setzen für t und t' die Größen $\tau_i \wedge u$ bzw. $\tau_i \wedge u'$ ein und erhalten

$$
T^n_{u\wedge\tau_i}(\omega) - T^n_{u'\wedge\tau_i}(\omega) \geqslant \int_{u'\wedge\tau_i}^{u\wedge\tau_i} h(T^n_s(\omega), W_s(\omega))\, ds\,. \tag{5.25}
$$

Wir zeigen jetzt für $k, m \in \mathbb{N}$ und $t, u \in \mathbb{R}_+$:

$$
\mathbf{E} \int_0^{D^m(W)\wedge A^k_t \wedge u} |h(T^n_s, W_s) - h(T_s, W_s)|\, ds \xrightarrow{n\to\infty} 0\,. \tag{5.26}
$$

Die Funktion h ist beschränkt und das Maß η mit $\eta(dx) := f(x)\,\lambda(dx)$ auf $K_{t,m}$ endlich, so daß h in $L^2(K_{t,m}, \eta)$ liegt. In diesem Raum sind die stetigen Funktionen dicht. Wir finden also eine Folge $(h_q)_{q\in\mathbb{N}}$ von stetigen Funktionen auf $K_{t,m}$, die in $L^2(K_{t,m}, \eta)$ gegen h konvergieren und o. B. d. A. eine gemeinsame Schranke haben. Wir schätzen ab für $n \geqslant k$ unter Verwendung von $A^k_t(\omega) \leqslant A^n_t(\omega) \leqslant A_t(\omega)$:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E} \int_0^{D^m(W)\wedge A^k_t\wedge u} |h(T^n_s, W_s) - h(T_s, W_s)|\, ds \\
&\leqslant \mathbf{E} \int_0^{D^m(W)\wedge A^n_t\wedge u} |h - h_q|\,(T^n_s, W_s) ds + \mathbf{E} \int_0^{D^m(W)\wedge A_t\wedge u} |h - h_q|\,(T_s, W_s) ds \\
&\quad + \mathbf{E} \int_0^{D^m(W)\wedge A^k_t\wedge u} |h_q(T^n_s, W_s) - h_q(T_s, W_s)|\, ds
\end{aligned} \tag{5.27}
$$

und bemerken, daß der letzte Summand auf Grund des Satzes von der majorisierten Konvergenz für alle $q \in \mathbb{N}$ mit $n \to \infty$ verschwindet, da die Argumente auch hier den Bereich $K_{t,m}$ nicht verlassen. Wir erhalten nun nach Anwendung von Lemma 5.22 und 5.23

$$
\lim_{n\to\infty} \mathbf{E} \int_0^{D^m(W)\wedge A^k_t\wedge u} |h(T^n_s, W_s) - h(T_s, W_s)|\, ds \leqslant 2C_m \|h - h_q\|_{L^2(K_{t,m},\eta)} \xrightarrow{q\to\infty} 0
$$

und gehen zu einer geeigneten Teilfolge n_i über, unter der diese Konvergenz $\mathbf{P}$-f.-s. für festes m, k, t und u erfolgt, also

$$
\int_0^{D^m(W)\wedge A^k_t\wedge u} h(T^{n_i}_s, W_s)\, ds \xrightarrow{i\to\infty} \int_0^{D^m(W)\wedge A^k_t\wedge u} h(T_s, W_s)\, ds \quad \mathbf{P}\text{-f.-s.} \tag{5.28}
$$

Das Integral ist stetig in der oberen Integrationsgrenze, so daß wir sogar eine gemeinsame $\mathbf{P}$-Ausnahmemenge für alle m, k, t und u finden.

Wir kehren zu dem fest gewählten ω zurück und fordern o. B. d. A. zusätzlich, daß für ω die Konvergenz (5.28) zutreffen möge für alle m, k, t und u. Wegen (5.24) gibt es ein i^*, so daß $\tau_{i^*} \geqslant u$ gilt. Wir erhalten mit (5.25) und (5.28)

$$\begin{aligned}
T_u(\omega) - T_{u'}(\omega) &= \lim_{i\to\infty} \left(T_u^{n_i}(\omega) - T_{u'}^{n_i}(\omega)\right) = \lim_{i\to\infty} \left(T^{n_i}_{\tau_{i^*}\wedge u}(\omega) - T^{n_i}_{\tau_{i^*}\wedge u'}(\omega)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(T^{n_i}_{D^{i^*}(W)\wedge A^{i^*}_{i^*}\wedge u}(\omega) - T^{n_i}_{D^{i^*}(W)\wedge A^{i^*}_{i^*}\wedge u'}(\omega)\right) \\
&\geqslant \lim_{n\to\infty} \int_{D^{i^*}(W)\wedge A^{i^*}_{i^*}\wedge u'}^{D^{i^*}(W)\wedge A^{i^*}_{i^*}\wedge u} h\left(T^{n_i}_s(\omega), W_s(\omega)\right)\, ds \\
&= \int_{D^{i^*}(W)\wedge A^{i^*}_{i^*}\wedge u'}^{D^{i^*}(W)\wedge A^{i^*}_{i^*}\wedge u} h\left(T_s(\omega), W_s(\omega)\right)\, ds = \int_{u'}^{u} h(T_s(\omega), W_s(\omega))\, ds \\
&> 0\,.
\end{aligned}$$

2) Wir geben nun die Bedingung $f(x) < \infty$, $x \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, wieder auf. Sei

$$U := \{x \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \,:\, f(x) = \infty\}\,.$$

Wegen $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\lambda)$ ist $\lambda(U) = 0$ und wegen $N = N(f_n) = N(f)$, $n \in \mathbb{N}$, außerdem $U \subseteq N^c(f_n)$. Es seien

$$\tilde{f} := f I_{U^c} + I_U \quad \text{und} \quad \tilde{f}_n := f_n I_{U^c} + I_U\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Dies sind nun *endliche* Funktionen, welche die Voraussetzungen erfüllen. Können wir zeigen, daß die $A^n \in \mathfrak{L}_{W,\mathbb{F}}(f_n)$ auch (Z)($\tilde{f}_n$)-Lösungen zu $(W, \mathbb{F})$ sind, dann finden wir nach Teil 1) in

$$h := \left(I_{N^c} \tilde{f}^{-1} + I_N\right) \wedge 1$$

die gewünschte Funktion mit positiven Werten. Für den Nachweis der Beziehung $A^n \in \mathfrak{L}_{W,\mathbb{F}}(\tilde{f}_n)$ reicht es offenbar zu zeigen, daß für jedes $t \geqslant 0$ und $m, n \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{E} \int_0^{t\wedge D^m(X^n)} \left| f_n - \tilde{f}_n \right| (s, X^n_s)\, ds = 0$$

gilt, denn dann sind die Integrale auf der rechten Seite von (Z)(f_n) bzw. (Z)($\tilde{f}_n$) **P**-f.-s. identisch. Nach Lemma 2.38 gilt wegen $U \subseteq N^c(f_n)$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E} \int_0^{t\wedge D^m(X^n)} \left| f_n - \tilde{f}_n \right| (s, X^n_s)\, ds \\
&= \mathbf{E} \int_0^{t\wedge D^m(X^n)} |f_n - 1| I_U(s, X^n_s)\, ds \leqslant \mathbf{E} \int_0^{t\wedge D^m(X^n)} \infty \cdot I_U(s, X^n_s)\, ds \\
&= \mathbf{E} \int_0^{t\wedge D^m(X^n)} \infty \cdot I_U\, f_n^{\frac{1}{2}}(s, X^n_s)\, ds \leqslant C_m \left\| \infty \cdot I_U \right\|_{L^2(K_{t,m},\lambda)} \\
&= 0
\end{aligned}$$

wegen $\lambda(U) = 0$. ∎

Bemerkung 5.29 Für zwei stetige Funktionen $f, g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ mit $f(x) \leqslant g(x)$, $x \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, gilt auch $f_n(x) \leqslant g_n(x)$, $x \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, wenn wir dieselbe Bildungsvorschrift (5.16) verwenden. Nach Satz 5.13 gilt dann für die (Z)-Lösungen zu $(W, \mathbb{F})$

$$A_t^{f_n} \leqslant A_t^{g_n}\,, \quad t \geqslant 0\,, \quad \mathbf{P}\text{-f.-s.}$$

Damit überträgt sich diese Relation auch auf die Grenzprozesse A^f aus $\mathcal{L}_{W,\mathbb{F}}(f)$ bzw. A^g aus $\mathcal{L}_{W,\mathbb{F}}(g)$.

5.3 Halbstetige Koeffizienten

Gegenstand dieses Abschnittes ist die Gleichung (Z)(f) für Funktionen, die *nach unten halbstetig* (nicht notwendig endlich) sind und eine Integrabilitätsbedingung erfüllen. Wir nutzen aus, daß man f punktweise und monoton von unten durch stetige Funktionen approximieren kann. Der Grenzprozeß einer Folge geeigneter zugehöriger (Z)-Lösungen erweist sich als (Z)(f)-Lösung. Wir betrachten hierbei zwei Situationen:

(a) Die Funktion f ist nicht gegen Null beschränkt. Dann müssen die approximierenden stetigen Funktionen in der Nähe ihrer Nullstellen von spezieller Gestalt sein, um die Konvergenz unter Ausnutzung der Ungleichung von Krylov abzusichern. Dies macht aus beweistechnischen Gründen die Einschränkung $f \in L^2_{\mathrm{loc}}(\lambda)$ erforderlich.

(b) Die Funktion f ist gleichmäßig gegen Null beschränkt. In diesem Fall reicht die Bedingung $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\lambda)$ aus.

Bemerkung 5.30 Zum späteren Beweis bloßer Existenz von (Z)-Lösungen für allgemeinere Funktionen wäre Fall (b) ausreichend. Für die Vergleichssätze in Kapitel 6 wird jedoch der Fall (a) benutzt.

Wir betrachten eine nach unten halbstetige Funktion $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to [0, \infty]$. Ihre Nullstellenmenge ist abgeschlossen wie jedes Urbild nach unten halbstetiger Funktionen von Intervallen $[-\infty, x]$, $x \in \mathbb{R}$.

Lemma 5.31 *Sei $f \in L^2_{\mathrm{loc}}(\lambda)$ mit Werten in $[0, \infty]$ nach unten halbstetig. Dann existiert eine derartige Funktion $g^* : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to [0, \infty]$, daß gilt:*

(i) *$g^* \geqslant f^{-1}$ auf $N^c(f)$, $g^* \equiv +\infty$ auf $N(f)$;*

(ii) *g^* ist auf $N^c(f)$ stetig und hat positive Werte;*

(iii)

$$\int_{K_m} f^2 (g^* - f^{-1})\, d\lambda < \infty\,, \quad m \in \mathbb{N}\,.$$

Beweis: Die Konstruktion von g^* erfolgt sukzessive auf einer monoton wachsenden Folge von Kompakta, die $N^c(f)$ ausschöpfen, deren Ränder aber positive Abstände zu $N(f)$ und zueinander haben. Sei

$$N_m := \left\{ x \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \,:\, \exists y \in N(f) : |x - y|_e < m^{-1} \right\}, \quad m \in \mathbb{N}\,,$$

und $V_m := K_m \setminus N_m$. Jedes V_m ist kompakt. Offenbar gilt

(a) $\bigcup_{m=1}^{\infty} V_m = N^c(f)$;

(b) $x \in V_m,\ y \in N(f) \ \Rightarrow\ |x-y| \geqslant m^{-1}$;

(c) $x \in V_m,\ y \in V_{m+1}^c \ \Rightarrow\ |x-y| > (m(m+1))^{-1} > (m+1)^{-2}$.

Die Funktion f^{-1} ist offenbar nach oben halbstetig und nimmt deshalb auf Kompakta ihr Maximum an. Da f^{-1} auf V_m endlich ist, wird dort ein endliches Maximum angenommen, das heißt, $f^{-1}I_{V_m}$ ist beschränkt für jedes m. Eine solche Schranke sei $M_m \in \mathbb{N}$, für die wir o. B. d. A. monotones Wachstum in m annehmen. Die Indikatorfunktion einer abgeschlossenen Menge ist nach oben halbstetig, ebenso das Produkt zweier nichtnegativer nach oben halbstetiger Funktionen. Daher ist $f^{-1}I_{V_m}$ eine nach oben halbstetige und nach oben durch M_m beschränkte Funktion. Wir können sie von oben punktweise durch die monoton fallende Folge von Lipschitz-stetigen Funktionen

$$\begin{aligned} g_{n,m}(x) \quad &:= \sup_{y \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}} \left[I_{V_m} \left(f^{-1}(y) \vee n^{-1} \right) - n|x-y|_e \right]^+ \\ &= \sup_{y \in V_m} \left[\left(f^{-1}(y) \vee n^{-1} \right) - n|x-y|_e \right]^+ , \quad x \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} , \quad n \in \mathbb{N} , \end{aligned}$$

approximieren. Die $g_{n,m}$ haben dann dieselbe Schranke M_m wie $f^{-1}I_{V_m}$, positive Werte in V_m, und es gilt

$$g_{n,m}(x) \geqslant f^{-1}(x) I_{V_m}(x) , \quad x \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} , \quad n \in \mathbb{N} .$$

Das Maß μ auf $[\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}}]$ mit $\mu(dx) = f^2(x)\lambda(dx)$ ist wegen $f \in L^2_{\mathrm{loc}}(\lambda)$ endlich auf $K_{(m+1)M_m} = [0,(m+1)M_m] \times [-(m+1)M_m, (m+1)M_m]$, und $g_{n,m}$ verschwindet außerhalb von $K_{(m+1)M_m}$, so daß die Funktion $M_m I_{K_{(m+1)M_m}}$ eine μ-integrierbare Majorante zu $f^{-1}I_{V_m}$ und $g_{n,m}$ auf $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ ist. Wir finden daher mit majorisierter Konvergenz ein $l_m \in \mathbb{N}$, so daß für $n \geqslant l_m$ gilt:

$$(5.32) \qquad \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}} \left(g_{n,m} - f^{-1} I_{V_m} \right) f^2 \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}} \left(g_{n,m} - f^{-1} I_{V_m} \right) \, d\mu \leqslant 2^{-m} .$$

Also ist l_m eine hinreichend große Lipschitz-Konstante für $g_{l_m,m}$ derart, daß alle $g_{n,m}$, $n \geqslant l_m$, im Raum $L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \mu)$ nahe genug an $f^{-1}I_{V_m}$ liegen. Dies reicht aber noch nicht aus. Wir setzen

$$(5.33) \qquad n_m := l_m \vee \left((m+1)^2 M_m \right) , \quad m \in \mathbb{N} .$$

Man kann $(l_m)_{m \in \mathbb{N}}$ und damit $(n_m)_{m \in \mathbb{N}}$ o. B. d. A. wachsend wählen. Wir definieren $\gamma_m := g_{n_m,m}$ und

$$(5.34) \qquad g^*(x) := \begin{cases} \sup_{m \in \mathbb{N}} \gamma_m(x) & : \ x \in N^c(f) \\ +\infty & : \ x \in N(f) \end{cases} , \quad x \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} ,$$

und bemerken, daß die Bedingung (i) offenbar erfüllt ist, denn jedes $x \in N^c(f)$ ist Element eines bestimmten V_m, so daß wir $g^*(x) \geqslant g_{n_m,m}(x) \geqslant f^{-1}(x)$ erhalten. Außerdem liegen alle Werte von $g^*|_{N^c(f)}$ in $(0,\infty)$.

Zu (ii): Wir zeigen, daß auf Grund der ausreichend großen Wahl von n_m an der Supremumsbildung in (5.34) für ein festes $x \in N^c(f)$ tatsächlich nur endlich viele Funktionen (genauer: drei) beteiligt sind – ebenso, wie für alle Punkte einer hinreichend kleinen Umgebung U von x. In U ist dann g^* natürlich stetig. Es gilt nämlich

$$(5.35) \qquad x \in V_m \quad \Rightarrow \quad \gamma_{m+2}(x) \leqslant \gamma_{m+1}(x) ,$$

denn es ist

$$\begin{aligned}
&\gamma_{m+2}(x) \\
&= \sup_{y\in V_{m+2}} \left[(f^{-1}(y)\vee n_{m+2}^{-1}) - n_{m+2}|x-y|_e\right]^+ \\
&= \sup_{y\in V_{m+2}\setminus V_{m+1}} \left[(f^{-1}(y)\vee n_{m+2}^{-1}) - n_{m+2}|x-y|_e\right]^+ \\
&\quad \vee \sup_{y\in V_{m+1}} \left[(f^{-1}(y)\vee n_{m+2}^{-1}) - n_{m+2}|x-y|_e\right]^+ \\
&\leqslant \underbrace{\sup_{y\in V_{m+2}\setminus V_{m+1}} [M_{m+2} - n_{m+2}|x-y|_e]^+}_{=:\,S_1} \vee \underbrace{\sup_{y\in V_{m+1}} \left[(f^{-1}(y)\vee n_{m+2}^{-1}) - n_{m+2}|x-y|_e\right]^+}_{=:\,S_2}\,.
\end{aligned}$$

Wegen $n_{m+2} \geqslant n_{m+1}$ ist $S_2 \leqslant \gamma_{m+1}(x)$. Weiterhin gilt mit (c) (s. S. 45) und (5.33) für $x \in V_m$, $y \in V_{m+2} \setminus V_{m+1}$

$$n_{m+2}|x-y| \geqslant M_{m+2}(m+3)^2(m+1)^{-2} \geqslant M_{m+2}\,,$$

so daß wir $S_1 = 0$ und folglich (5.35) erhalten. Daraus ergibt sich unmittelbar

$$x \in V_m \quad \Rightarrow \quad \gamma_{m+r}(x) \leqslant \gamma_{m+1}(x)\,, \quad r \geqslant 2\,,$$

und somit

$$g^*(x) = \bigvee_{i=1}^{m+1} \gamma_i(x)\,. \tag{5.36}$$

Insbesondere für $x \in \mathring{V}_m$ (dem Inneren von V_m) finden wir dann ein offenes $U \ni x$, so daß (5.36) für alle $x' \in U$ gilt. Da sich jedes $x \in N^c(f)$ in einem $\mathring{V}_m$ befindet, ist die Stetigkeit von g^* auf N^c gezeigt.

Zu (iii): Liegt ein x für ein bestimmtes $m \geqslant 2$ in $V_{m+1} \setminus V_m$, so ist $\gamma_{m-1}(x) = 0$ und erst recht $\gamma_k(x) = 0$ für $k = 1, \ldots, m-2$. Wir erhalten also mit (5.36) die Darstellung

$$g^*(x) = \gamma_m(x) \vee \gamma_{m+1}(x) \vee \gamma_{m+2}(x)\,, \quad x \in V_{m+1} \setminus V_m\,, \quad m \in \mathbb{N}\,.$$

Für eine allgemeine Formel setzen wir $\gamma_0 \equiv 0$, $V_0 := \emptyset$, womit sich für $x \in N^c(f)$ ergibt:

$$\begin{aligned}
g^*(x) &= \sum_{m=1}^{\infty} I_{V_m\setminus V_{m-1}}(x)\, g^*(x) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} (\gamma_{m-1}(x) \vee \gamma_m(x) \vee \gamma_{m+1}(x))\, I_{V_m\setminus V_{m-1}}(x)\,.
\end{aligned}$$

Mit Hilfe von (5.32) können wir nun das Integral abschätzen:

$$\begin{aligned}
&\int_{K_m} \left(g^* - f^{-1}\right)\, d\mu \\
&\leqslant \int_{N^c} \left(g^* - f^{-1}\right)\, d\mu \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \int_{V_m\setminus V_{m-1}} (\underbrace{\gamma_{m-1} \vee \gamma_m \vee \gamma_{m+1}}_{\geqslant f^{-1}} - f^{-1})\, d\mu
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \int_{V_m \setminus V_{m-1}} \left(\left[\gamma_{m-1} - f^{-1}\right]^+ + \left[\gamma_m - f^{-1}\right]^+ + \left[\gamma_{m+1} - f^{-1}\right]^+ \right) d\mu \\
&\leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \int_{V_m \setminus V_{m-1}} \gamma_{m-1}\, d\mu + \sum_{m=1}^{\infty} \int_{V_m} (\gamma_m - f^{-1})\, d\mu + \sum_{m=1}^{\infty} \int_{V_{m+1}} (\gamma_{m+1} - f^{-1})\, d\mu \\
&\leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}} \left(\gamma_{m-1} - f^{-1} I_{V_{m-1}}\right) d\mu + \sum_{m=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}} \left(\gamma_m - f^{-1} I_{V_m}\right) d\mu \\
&\quad + \sum_{m=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}} \left(\gamma_{m+1} - f^{-1} I_{V_{m+1}}\right) d\mu \\
&\leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \left(2^{-m} + 2^{-m} + 2^{-(m+1)}\right) \\
&< \infty\,.
\end{aligned}
$$

■

Bemerkung 5.37 Die konstruierte Funktion g^* ist auf N^c positiv und damit $(g^*)^{-1}$ auf $N^c(f)$ stetig. Auf $N(f)$ gilt $(g^*)^{-1} \equiv 0$, also ist $(g^*)^{-1}$ auch auf $\mathring{N}$ stetig. Wir benötigen jedoch eine Funktion mit den Eigenschaften von $(g^*)^{-1}$, die auf *ganz* $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ stetig ist.

Lemma 5.38 *Sei f eine nichtnegative Funktion aus $L^2_{\mathrm{loc}}(\lambda)$ und $N \subseteq \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ eine abgeschlossene Menge. Dann existiert eine stetige Funktion $h : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, für die gilt:*

(i) $h\big|_N \equiv 0$, $h\big|_{N^c} > 0$;

(ii)

$$\int_{K_m} f^2 h^{-1} I_{N^c}\, d\lambda < \infty\,, \quad m \in \mathbb{N}\,. \tag{5.39}$$

Beweis: Für $B, C \subseteq \mathbb{R}^2$ sei $\operatorname{diam}(B) := \sup\{|x-y| \,:\, x, y \in B\}$ und

$$\operatorname{dist}(B, C) := \inf\{|x-y| \,:\, x \in B, y \in C\}\,.$$

Nach einem Überdeckungssatz von Whitney gibt es zur offenen Menge N^c eine Folge $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von nichtleeren offenen Quadraten in $\mathbb{R}^2$, deren Ränder zu den Koordinatenachsen parallel sind, und eine Konstante $S \in \mathbb{N}$, so daß gilt:

(a) $N^c = \left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} Q_k\right) \cap \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$;

(b) jeder Punkt von N^c ist von höchstens S Quadraten überdeckt;

(c)

$$\operatorname{diam}(Q_k) \leqslant 2\operatorname{dist}(Q_k, N)\,, \quad k \in \mathbb{N}\,, \tag{5.40}$$

(s. [24], VI, §1).[9] Wir nehmen o. B. d. A. weiterhin an, daß jedes Quadrat zumindest einen Punkt in $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ und die maximale Kantenlänge Eins hat. Sei nun ein Quadrat Q_k mit

[9] In [24] ist der Überdeckungssatz für offene Mengen des $\mathbb{R}^2$ formuliert. Die oben beschriebene Überdeckung erreicht man, indem erst $\mathbb{R}^2 \setminus N$ überdeckt wird (das im Gegensatz zu $N^c = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \setminus N$ auch in $\mathbb{R}^2$ offen ist) und anschließend alle Q_k mit $Q_k \cap \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} = \emptyset$ entfernt werden.

dem Mittelpunkt $x_k \in \mathbb{R}^2$ und der Kantenlänge $2r_k$ gegeben. Nach Lemma A6 existiert zu diesem Quadrat eine stetige Funktion $g_k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$, für die mit der Bezeichnung

$$\bar{f} : \mathbb{R}^2 \to [0,\infty]\,, \quad \bar{f}(x) := \begin{cases} f(x) & : \quad x \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \\ 0 & : \quad \text{sonst} \end{cases}$$

das Folgende gilt:

$$(5.41) \quad g_k \leqslant 1\,, \quad g_k\big|_{Q_k^c} \equiv 0\,, \quad g_k(x_k) = 1\,, \quad g_k\big|_{Q_k} > 0\,, \quad \int_{Q_k} \bar{f}^2 g_k^{-1}\, d\lambda \leqslant 2 \int_{Q_k} \bar{f}^2\, d\lambda\,.$$

Es sei μ das Maß auf $\mathbb{R}^2$ mit der Dichte $\bar{f}$ bzgl. λ. Wegen $f \in L^2_{\text{loc}}(\lambda)$ ist μ lokal endlich. Wir setzen mit $K_m = [0,m] \times [-m,m]$

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_1 &:= \{k \in \mathbb{N} : Q_k \cap K_1 \neq \emptyset\}\,, \\ \mathcal{Q}_{m+1} &:= \{k \in \mathbb{N} : Q_k \cap K_{m+1} \neq \emptyset,\ k \notin \mathcal{Q}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{Q}_m\}\,, \quad m \in \mathbb{N}\,, \end{aligned}$$

so daß die $\mathcal{Q}_m$ eine disjunkte Zerlegung von $\mathbb{N}$ bilden. Mit $(q_k^{(m)})_{k=1}^{N(m)}$ sei die (endliche oder unendliche) Folge bezeichnet, die die Elemente von $\mathcal{Q}_m$ in ihrer natürlichen Reihenfolge aufzählt ($N(m) = \text{card}(\mathcal{Q}_m)$; $m \in \mathbb{N}$). Wir wählen ein festes $m \in \mathbb{N}$ mit $N(m) = \infty$. Es gilt dann

$$\bigcup_{k \in \mathcal{Q}_m} Q_k \subseteq [-1, m+1] \times [-(m+1), m+1]\,,$$

so daß wir auf Grund der höchstens S-fachen Überdeckung irgendwelcher Q_k mit Lemma A17 erhalten:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \mu\left(Q_{q_k^{(m)}}\right) &\leqslant S\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} Q_{q_k^{(m)}}\right) \leqslant S\mu([-1,m+1] \times [-(m+1), m+1]) \\ &< \infty\,. \end{aligned}$$

Nach Lemma A8 gibt es Folgen $\left(c_k^{(m)}\right)_{k \in \mathbb{N}}$, $c_k^{(m)} \geqslant 1$, $c_k^{(m)} \xrightarrow{k \to \infty} \infty$, so daß auch

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(m)} \mu\left(Q_{q_k^{(m)}}\right)$$

endlich ist. Für alle endlichen $N(m)$ setzen wir $c_k^{(m)} := 1$, $k = 1, \ldots, N(m)$. Im Falle $N(m) = \infty$ sei etwas lax mit $\{1, \ldots, N(m)\}$ die Menge $\mathbb{N}$ bezeichnet. Nun definieren wir die gesuchte Funktion h durch

$$h(x) := \sup_{m \in \mathbb{N}} \sup_{k \in \{1,\ldots,N(m)\}} \left(c_k^{(m)}\right)^{-1} g_{q_k^{(m)}}(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}\,.$$

Für jedes $x \in Q_k$ gilt $h(x) > 0$, was mit (a) die Eigenschaft $h\big|_{N^c} > 0$ impliziert. Offenbar verschwindet h auf N, so daß (i) erfüllt ist.

Stetigkeit von h: Ein Punkt $x \in N^c$ ist Element von höchstens S offenen Quadraten, deren Durchschnitt eine offene Umgebung von x bildet. In dieser Umgebung ist dann h ein Maximum *endlich* vieler stetiger Funktionen $(c_k^{(m)})^{-1} g_{q_k^{(m)}}$ und darum dort stetig. Sei nun $x \in N$. Liegt x im Inneren von N, so ist h wegen (i) in einer Umgebung um x identisch

Null und damit in x stetig. Für ein $x \in \partial N$ gilt $h(x) = 0$. Sei nun $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen x konvergente Folge von Punkten, die o. B. d. A. alle in N^c liegen. Wegen $h \geqslant 0$ ist für die Stetigkeit in x die Gleichung $\limsup_{n\to\infty} h(y_n) = 0$ zu zeigen. Da jede Funktion g_k ihr Maximum im Mittelpunkt x_k von Q_k hat, gilt

$$\begin{aligned} h(y_n) &\leqslant \max\{h(x_k) \,:\, y_n \in Q_k\} \\ &= \max\left\{ (c_k^{(m)})^{-1} \,:\, y_n \in Q_{q_k^{(m)}} \text{ für irgendein } k, m \right\}. \end{aligned}$$

Da alle y_n und x in einem K_{m^*} für ein geeignetes $m^* \in \mathbb{N}$ liegen, reicht es, wenn wir zeigen:

$$\liminf_{n\to\infty} \min\left[\bigcup_{m\leqslant m^*} \left\{ c_k^{(m)} \,:\, y_n \in Q_{q_k^{(m)}} \right\} \right] = \infty\,.$$

Gehen wir vom Gegenteil aus, so finden wir eine Teilfolge $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ und geeignete Folgen $(m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ bzw. $(k_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit Werten in $\{1,\ldots,m^*\}$ bzw. $\{1,\ldots,N(m_i)\}$ oder $\mathbb{N}$ (falls $N(m) = \infty$) derart, daß

$$c_{k_i}^{(m_i)} \leqslant M < \infty \quad \text{und} \quad y_{n_i} \in Q_{q_{k_i}^{(m_i)}}\,, \quad i \in \mathbb{N}\,,$$

gilt. Da wir aber $c_k^{(m)} \xrightarrow{k\to\infty} \infty$ für jedes $m \in \mathbb{N}$ haben bzw. die Folge im Falle $N(m) < \infty$ ohnehin endlich ist, bilden dann nicht nur die m_i, sondern auch die k_i eine *beschränkte* Folge natürlicher Zahlen. Wir können also zu einer konstanten Teilfolge $\tilde{m}_i \equiv \tilde{m} \in \mathbb{N}$, $\tilde{k}_i \equiv \tilde{k} \in \mathbb{N}$ ($(\tilde{n}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ Teilfolge von $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$) übergehen. Demnach muß $y_{\tilde{n}_i} \in \tilde{Q} := Q_{q_{\tilde{k}}^{\tilde{m}}}$, $i \in \mathbb{N}$, gelten. Jedes Quadrat, also auch $\tilde{Q}$, hat aber nach (5.40) einen positiven Abstand zu N. Das steht im Widerspruch zur Konvergenz von $(y_{\tilde{n}_i})_{i\in\mathbb{N}}$. Folglich ist h stetig.

(ii): Sei $m^* \in \mathbb{N}$ gegeben. Wir bemerken, daß für $m > m^*$ und beliebiges $k \leqslant N(m)$ bzw. $k \in \mathbb{N}$ die Menge $Q_{q_k^{(m)}} \cap K_{m^*}$ leer ist. Darum erhalten wir auf Grund von (5.41) und der Definition von h:

$$\begin{aligned} \int_{K_{m^*}} f^2 I_{N^c} h^{-1}\, d\lambda &= \int_{\bigcup_{m=1}^{m^*} \bigcup_{k=1}^{N(m)} Q_{q_k^{(m)}} \cap \mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} f^2 h^{-1}\, d\lambda \leqslant \sum_{m=1}^{m^*} \sum_{k=1}^{N(m)} \int_{Q_{q_k^{(m)}}} \left(\bar{f}\right)^2 h^{-1}\, d\lambda \\ &\leqslant \sum_{m=1}^{m^*} \sum_{k=1}^{N(m)} c_k^{(m)} \int_{Q_{q_k^{(m)}}} \left(\bar{f}\right)^2 g_k^{-1}\, d\lambda \\ &\leqslant 2 \sum_{m=1}^{m^*} \sum_{k=1}^{N(m)} c_k^{(m)} \int_{Q_{q_k^{(m)}}} \left(\bar{f}\right)^2 d\lambda \\ &= 2 \sum_{m=1}^{m^*} \underbrace{\sum_{k=1}^{N(m)} c_k^{(m)} \mu\left(Q_{q_k^{(m)}}\right)}_{<\infty} \\ &< \infty\,. \end{aligned}$$

■

Wir konstruieren nun die für den Fall (a) (s. S. 44) erforderliche Folge stetiger Funktionen.

Lemma 5.42 *Es sei* $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to [0,\infty]$ *eine nach unten halbstetige Funktion aus* $L^2_{\text{loc}}(\lambda)$. *Dann gibt es eine monoton wachsende Folge nichtnegativer stetiger Funktionen*

$f_n \leqslant f$, die punktweise gegen f konvergiert und für die einerseits $N(f) = N(f_n)$ und andererseits folgendes gilt:

$$\int_{K_m} (f - f_n)^2 f_n^{-1}\, d\lambda \xrightarrow{n\to\infty} 0\,, \quad m \in \mathbb{N}\,. \tag{5.43}$$

Beweis: In Gestalt von

$$\tilde{f}_n(x) := \inf_{y\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} \left(f(y) + n|x-y|_e\right)\,, \quad x \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}\,, \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

hat man stetige Funktionen gefunden, die alle gewünschten Eigenschaften außer (5.43) erfüllen. Mit den in Lemma 5.31 und 5.38 erklärten Funktionen g^* bzw. h (für $N = N(f)$) setzen wir

$$f_n(x) := \tilde{f}_n(x) \vee \left(h(x) \wedge (g^*(x))^{-1}\right)\,.$$

In $\mathring{N}(f)$ und $N^c(f)$ ist $(g^*)^{-1}$ stetig und damit erst recht f_n. Für ein $x \in \partial N$ und eine Folge $x_m \to x$ gilt

$$\lim_{x_m\to x} \left(h(x_m) \wedge (g^*(x_m))^{-1}\right) \leqslant \lim_{x_m\to x} h(x_m) = 0\,.$$

Also ist f_n auch dort und folglich auf ganz $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ stetig. Andererseits haben wir $(g^*(x))^{-1} \leqslant f(x)$, $x \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, so daß $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenso wie $\left(\tilde{f}_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monotone, punktweise von unten gegen f konvergente Folge ist. Weiterhin sind die Nullstellenmengen von f_n und f identisch. Wir erhalten für $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\int_{K_m} (f - f_n)^2 f_n^{-1}\, d\lambda &\leqslant \int_{K_m} f^2 (h^{-1} \vee g^*)\, d\lambda \\
&= \int_{K_m} f^2 \underbrace{\left(h^{-1} \vee g^* - f^{-1}\right)}_{\geqslant 0} d\lambda + \underbrace{\int_{K_m} f\, d\lambda}_{<\infty}\,.
\end{aligned}$$

Im ersten Summanden ergibt sich

$$\begin{aligned}
\int_{K_m} f^2 \left(h^{-1} \vee g^* - f^{-1}\right) d\lambda &= \int_{K_m\cap\{g^*\geqslant h^{-1}\}} f^2 (g^* - f^{-1})\, d\lambda \\
&\quad + \int_{K_m\cap\{g^*<h^{-1}\}} f^2 (h^{-1} - f^{-1})\, d\lambda \\
&\leqslant \int_{K_m} f^2 (g^* - f^{-1})\, d\lambda + \int_{K_m} f^2 h^{-1}\, d\lambda \\
&< \infty
\end{aligned}$$

nach (iii) (Lemma 5.31) und (ii) (Lemma 5.38). Demnach ist $f^2(h^{-1} \vee g^*)$ eine integrierbare Majorante von $(f - f_n)^2 f_n^{-1}$. Die Behauptung folgt mit majorisierter Konvergenz, denn f_n^{-1} fällt in n, so daß $(f - f_n)^2 f_n^{-1}$ punktweise gegen Null konvergiert. ■

Wir wenden uns wieder der Zeittransformationsgleichung (Z)(f) zu, nun für nach unten halbstetige f im Fall (a) (S. 44).

Satz 5.44 *Es seien ein auf $[\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}]$ definierter üblicher Wienerprozeß $(W, \mathbb{F})$ und eine nach unten halbstetige Funktion $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to [0, \infty]$ aus $L^2_{\mathrm{loc}}(\lambda)$ gegeben. Dann existiert zu $(W, \mathbb{F})$ eine reine (Z)(f)-Lösung A.*

Beweis: Wir approximieren f monoton durch stetige Funktionen f_n wie in Lemma 5.42, so daß (5.43) erfüllt ist. Mit Hilfe von Satz 5.15 erhalten wir reine (Z)(f_n)-Lösungen A^n zu $(W, \mathbb{F})$, für die wir nach Bemerkung 5.29

$$A_t^1 \leqslant A_t^2 \leqslant \ldots \leqslant A_t^n \leqslant \ldots\,, \quad n \in \mathbb{N}\,, \quad t \geqslant 0\,, \quad \mathbf{P}\text{-f.-s.}$$

voraussetzen können. Wegen $L^2_{\mathrm{loc}}(\lambda) \subseteq L^1_{\mathrm{loc}}(\lambda)$ sind die Voraussetzungen von Satz 5.20 erfüllt. Also hat der (wohldefinierte linksstetige) Grenzprozeß $A_t := \lim_{n\to\infty} A_t^n$ zu seiner Explosionszeit im Falle $S(A) < \infty$ den linksseitigen Grenzwert $+\infty$. Analog zu Satz 5.15 ist A eine $\mathbb{F}$-Zeittransformation (in Wahrheit eine $\mathbb{G}^W$-Zeittransformation), so daß zum Beweis der Behauptung nur noch das Analogon zu (5.18)

$$A_{t\wedge D^m} = \int_0^{t\wedge D^m} f(s, W\circ A_s)\,ds\,, \quad t \geqslant 0\,, \quad m \in \mathbb{N}\,, \quad \mathbf{P}\text{-f.-s.} \tag{5.45}$$

mit $D^m := D^m(W\circ A)$ nachzuweisen ist. Diese Gleichung ist gezeigt, wenn für jedes $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}\left(\left|A_{t\wedge D^m} - \int_0^{t\wedge D^m} f(s, W\circ A_s)\,ds\right| > \varepsilon\right) = 0\,, \quad t \geqslant 0\,, \quad m \in \mathbb{N}\,, \tag{5.46}$$

gilt. Mit Hilfe der Dreiecksungleichung, der Chebyshev-Ungleichung und des einfachen Schlusses

$$|a| + |b| > \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |a| > \frac{\varepsilon}{2} \text{ oder } |b| > \frac{\varepsilon}{2}$$

können wir, da A^n die Gleichung (Z)(f_n) löst, für $q, n \in \mathbb{N}$ wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\left(\left|A_{t\wedge D^m} - \int_0^{t\wedge D^m} f(s, W\circ A_s)\,ds\right| > \varepsilon\right)\\
&\quad\leqslant \mathbf{P}\left(|A_{t\wedge D^m} - A^n_{t\wedge D^m}| > \frac{\varepsilon}{2}\right)\\
&\qquad + \mathbf{P}\left(\left|\int_0^{t\wedge D^m} \left(f(s, W\circ A_s) - f_n(s, W\circ A_s^n)\right)\,ds\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right)\\
&\quad\leqslant \mathbf{P}\left(|A_{t\wedge D^m} - A^n_{t\wedge D^m}| > \frac{\varepsilon}{2}\right) + \frac{2}{\varepsilon}\mathbf{E}\int_0^{t\wedge D^m} |f - f_q|(s, W\circ A_s)\,ds\\
&\qquad + \frac{2}{\varepsilon}\mathbf{E}\int_0^{t\wedge D^m} |f_n - f_q|(s, W\circ A_s^n)\,ds\\
&\qquad + \frac{2}{\varepsilon}\mathbf{E}\int_0^{t\wedge D^m} |f_q(s, W\circ A_s) - f_q(s, W\circ A_s^n)|\,ds\\
&\quad =: I_1 + I_2 + I_3 + I_4\,.
\end{aligned} \tag{5.47}$$

Wir fixieren q. Der erste Summand I_1 verschwindet mit $n \to \infty$, denn $A^n_{t\wedge D^m}$ konvergiert sogar $\mathbf{P}$-f.-s. gegen $A_{t\wedge D^m}$. Ebenso verschwindet I_4 für $n \to \infty$, denn der Integrand in I_4 konvergiert $\lambda \otimes \mathbf{P}$-f.-ü. gegen Null wegen der Stetigkeit von f_q und W. Da $D^m(W\circ A) \leqslant D^m(W\circ A^n)$ $\mathbf{P}$-f.-s. für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, die Argumente von f_q folglich $K_{t,m}$ nicht verlassen und f_q als stetige Funktion lokal beschränkt ist, gibt es eine Konstante als integrierbare Majorante, so daß mit dem Satz von Lebesgue $I_4 \xrightarrow{n\to\infty} 0$ folgt. Die Funktion f_n konvergiert monoton gegen f. In I_3 können wir daher f_n für $q \leqslant n$ durch f ersetzen, wodurch sich der Integrand nur vergrößert. Es gilt nun mit Lemma 2.38 für $q \leqslant n$ wegen $f_n^{-1} \leqslant f_q^{-1}$ und $N(f_n) \subseteq N(f - f_q)$

$$\begin{aligned}
\frac{\varepsilon}{2} I_3 &\leqslant \mathbf{E} \int_0^{t \wedge D^m} |f - f_q|(s, W \circ A_s^n)\, ds \leqslant \mathbf{E} \int_0^{t \wedge D^m(W \circ A^n)} |f - f_q|(s, W \circ A_s^n)\, ds \\
&= \mathbf{E} \int_0^{t \wedge D^m(W \circ A^n)} |f - f_q| f_n^{\frac{1}{2}} f_n^{-\frac{1}{2}}(s, W \circ A_s^n)\, ds \\
&\leqslant C_m \left(\int_{K_{t,m}} (f - f_q)^2 f_n^{-1}\, d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant C_m \left(\int_{K_{t,m}} (f - f_q)^2 f_q^{-1}\, d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} . \qquad (5.48)
\end{aligned}$$

Diese Ungleichung ist aber auch richtig, wenn man A^n durch A ersetzt. Dazu zeigen wir zunächst die Gültigkeit einer ähnlichen Abschätzung mit stetigem Integranden: Sei $r \in \mathbb{N}$, $r \geqslant q$ beliebig. Es ist

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} \int_0^{t \wedge D^m} |f_r - f_q|(s, W \circ A_s)\, ds &= \mathbf{E} \int_0^{t \wedge D^m} \lim_{n \to \infty} |f_r - f_q|(s, W \circ A_s^n)\, ds \\
&= \lim_{n \to \infty} \mathbf{E} \int_0^{t \wedge D^m} |f_r - f_q|(s, W \circ A_s^n)\, ds \qquad (5.49) \\
&\leqslant C_m \left(\int_{K_{t,m}} (f_r - f_q)^2 f_q^{-1}\, d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} .
\end{aligned}$$

Dabei gilt (5.49) auf Grund der Stetigkeit von $|f_r - f_q|$, deren lokaler Beschränktheit, der Tatsache, daß $(s, W \circ A_s^n)$ für $s \leqslant D^m$ nur Werte in $K_{t,m}$ annimmt, und majorisierter Konvergenz. Lassen wir nun r gegen ∞ laufen, so ergibt sich mit monotoner Konvergenz

$$(5.50) \qquad \frac{\varepsilon}{2} I_2 = \mathbf{E} \int_0^{t \wedge D^m} |f - f_q|(s, W \circ A_s)\, ds \leqslant C_m \left(\int_{K_{t,m}} (f - f_q)^2 f_q^{-1}\, d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Wir setzen (5.48) und (5.50) in (5.47) ein und erhalten mit (5.43)

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P} \left(\left| A_{t \wedge D^m} - \int_0^{t \wedge D^m} f(s, W \circ A_s)\, ds \right| > \varepsilon \right) \\
&\leqslant \lim_{q \to \infty} \lim_{n \to \infty} (I_1 + I_2 + I_3 + I_4) \\
&\leqslant \lim_{q \to \infty} \left[\lim_{n \to \infty} (I_1 + I_2) + \frac{4}{\varepsilon} C_m \left(\int_{K_{t,m}} (f - f_q)^2 f_q^{-1}\, d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\
&= 0 ,
\end{aligned}$$

so daß (5.45) bewiesen ist. ■

Bemerkung 5.51 Wie wir im Beweis zu Satz 6.45 feststellen werden, erfolgt in Satz 5.44 die Konstruktion der minimalen Lösung von (Z)(f).

Bemerkung 5.52 Die Bedingung $f \in L^2_{\mathrm{loc}}(\lambda)$ in Satz 5.44 ist eher technischer Natur, wie bei der Konstruktion von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deutlich wurde. Man kann, die Existenz von Lösungen für nach unten halbstetige f aus $L^p_{\mathrm{loc}}(\lambda)$ mit $p \in (1,2]$ vorausgesetzt, Lösungen für nach unten halbstetige Funktionen aus $L^{\frac{2p}{p+1}}_{\mathrm{loc}}(\lambda)$ monoton approximieren. Durch vollständige Induktion gelangt man absteigend von $p = 2$ sukzessive zu (Z)-Lösungen für nach unten halbstetige $L^p_{\mathrm{loc}}(\lambda)$-Funktionen mit $p \in (1,2]$. Dies wird hier wegen des hohen Aufwandes – gemessen am Gewinn – nicht ausgeführt.

Wir behandeln nun Fall (b) (s. S. 44), betrachten also eine nach unten halbstetige und gleichmäßig nach unten durch $C > 0$ beschränkte Funktion. Hier erweist sich die Betrachtung der rechtsstetigen Inversen T und der Gleichung (5.3) als günstiger. Dies wurde in ähnlicher Weise in [21] durchgeführt.

Lemma 5.53 *Sei $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to [C,\infty]$ meßbar, $C > 0$, $(W,\mathbb{F})$ ein üblicher Wienerprozeß und A mit Pfaden in E_+ eine $\mathbb{F}$-Zeittransformation. Genau dann liegt A in $\mathfrak{L}_{W,\mathbb{F}}(f)$, wenn die rechtsstetige Inverse T die Gleichung*

$$T_t = \int_0^t f^{-1}(T_s, W_s)\,ds\,, \quad t \geqslant 0\,, \quad \mathbf{P}\text{-f.-s.} \tag{5.54}$$

erfüllt.

Beweis: 1) Der Prozeß A erfülle (Z)(f). Wegen $C \leqslant f$ gilt $A_\infty = \infty$ $\mathbf{P}$-f.-s. und $A_{T_t} = t$, $t \geqslant 0$, $\mathbf{P}$-f.-s., also schließlich

$$\begin{aligned} T_t &= \int_0^{T_t} ds = \int_0^{T_t} f^{-1}(s, W\circ A_s) f(s, W\circ A_s)\,ds \\ &= \int_0^{T_t} f^{-1}(s, W\circ A_s)\,dA_s\,, \quad t \geqslant 0\,, \quad \mathbf{P}\text{-f.-s.} \end{aligned}$$

Mit Lemma 2.24 folgt

$$T_t = \int_0^{A_{T_t}} f^{-1}(T_s, W\circ A\circ T_s)\,ds = \int_0^t f^{-1}(T_s, W_s)\,ds\,, \quad t \geqslant 0\,, \quad \mathbf{P}\text{-f.-s.}$$

2) Es gelte (5.54). Da T wegen $T_s \leqslant Cs$, $s \leqslant 0$, $\mathbf{P}$-f.-s. stetig ist und nicht explodiert, haben wir $T\circ A_t = t \wedge T_\infty = t \wedge S(A)$, $t \geqslant 0$, $\mathbf{P}$-f.-s. Für $t < S(A)$ ergibt sich also $\mathbf{P}$-f.-s.:

$$\begin{aligned} A_t &= \int_0^{A_t} f^{-1}(T_s, W_s)\, f(T_s, W_s)\,ds = \int_0^{A_t} f(T_s, W_s)\,dT_s = \int_0^t f(T\circ A_s, W\circ A_s)\,ds \\ &= \int_0^t f(s, W\circ A_s)\,ds\,. \end{aligned}$$

■

Bemerkung 5.55 Läßt man die Bedingung $0 < C \leqslant f$ fallen und fordert $T_{(A_\infty)-} = T_{A_\infty}$, so impliziert (5.54) (für $t < A_\infty$) immerhin noch (Z)(f).

Satz 5.56 *Sei $C > 0$ und $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to [C,\infty]$ nach unten halbstetig und lokal integrierbar. Dann gibt es zum üblichen Wienerprozeß $(W,\mathbb{F})$ eine reine (Z)(f)-Lösung.*

Beweis: Durch die stetigen Funktionen

$$f_n(x) := \inf_{y \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}} (f(y) + |x-y|_e) , \quad x \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} , \quad n \in \mathbb{N} ,$$

wird f von unten punktweise monoton approximiert. Es ist dann auch $f_n \geqslant C > 0$, und wir erhalten mit Satz 5.15 und Bemerkung 5.29 eine **P**-f.-s. wachsende Folge von reinen $A^n \in \mathfrak{L}_{W,\mathbb{F}}(f_n)$. Mit Lemma 5.53 haben wir dann für die rechtsstetige Inverse T^n von A^n

$$T_t^n = \int_0^t f_n^{-1}(T_s^n, W_s)\, ds , \quad t \geqslant 0 , \quad \mathbf{P}\text{-f.-s.} , \quad n \in \mathbb{N} . \tag{5.57}$$

Wegen der gleichmäßigen Beschränktheit aller f_n^{-1} durch $0 \leq f_n^{-1} \leq C^{-1}$, $n \in \mathbb{N}$, gilt mit (5.57) für $0 \leq s < t < \infty$:

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} (T_t^n - T_s^n) \leq \int_s^t C^{-1}\, du \leq C^{-1}(t-s) \quad \mathbf{P}\text{-f.-s.} ,$$

das heißt, die T^n sind **P**-f.-s. gleichmäßig stetig. Damit ist der Grenzprozeß $T_t := \lim_{n\to\infty} T_t^n$, $t \geqslant 0$, **P**-f.-s. definiert und stetig. Im Falle der Nicht-Konvergenz setzt man ihn etwa auf die identische Funktion $T_t = t$, $t \geqslant 0$. Nach Lemma A4 ist T **P**-f.-s. gleich der rechtsstetigen Inversen von $A_t := \lim_{n\to\infty} A_t^n$, $t \geqslant 0$. Wir zeigen nun, daß T Gleichung (5.54) erfüllt. Offensichtlich gilt $D^m(W) \xrightarrow{m\to\infty} \infty$. Wegen der Stetigkeit von T reicht es daher aus, die Gleichung

$$\mathbf{P}\left(\left| T_{t\wedge D^m(W)} - \int_0^{t\wedge D^m(W)} f^{-1}(T_s, W_s)\, ds \right| > \varepsilon \right) = 0$$

für alle $m \in \mathbb{N}$, $t \geqslant 0$ und beliebige $\varepsilon > 0$ zu zeigen. Wir schätzen wie in (5.47) ab und erhalten für ein $q \leqslant n$:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\left(\left|T_{t\wedge D^m(W)} - \int_0^{t\wedge D^m(W)} f^{-1}(T_s, W_s)\,ds\right| > \varepsilon\right)\\
&\leqslant \frac{1}{\varepsilon}\mathbf{E}\left|T_{t\wedge D^m(W)} - \int_0^{t\wedge D^m(W)} f^{-1}(T_s, W_s)\,ds\right|\\
&\leqslant \frac{1}{\varepsilon}\mathbf{E}\left|T_{t\wedge D^m(W)} - T^n_{t\wedge D^m(W)}\right| + \frac{1}{\varepsilon}\mathbf{E}\int_0^{t\wedge D^m(W)} \left|f_q^{-1} - f_n^{-1}\right|(T^n_s, W_s)\,ds \qquad (5.58)\\
&\quad + \frac{1}{\varepsilon}\mathbf{E}\int_0^{t\wedge D^m(W)} \left|f_q^{-1}(T^n_s, W_s) - f_q^{-1}(T_s, W_s)\right|\,ds\\
&\quad + \frac{1}{\varepsilon}\mathbf{E}\int_0^{t\wedge D^m(W)} \left|f_q^{-1} - f^{-1}\right|(T_s, W_s)\,ds\\
&=: I_1 + I_2 + I_3 + I_4\,.
\end{aligned}$$

Für Prozesse mit rechtsstetigen Pfaden ist **P**-fast-sichere Konvergenz für alle t äquivalent zur Konvergenz für alle t **P**-f.-s.; daher konvergiert auch $T^n_{t\wedge D^m(W)} \xrightarrow{n\to\infty} T_{t\wedge D^m(W)}$ **P**-f.-s. Weiterhin ist T^n_t **P**-f.-s. durch $C^{-1}t$ beschränkt, also geht I_1 gegen Null für $n \to \infty$. Darüberhinaus ist der Integrand in I_4 beschränkt, und f_q^{-1} konvergiert monoton gegen f^{-1} für $q \to \infty$. Mit dem Satz von B. Levi gilt dann $I_4 \xrightarrow{q\to\infty} 0$. In I_3 dagegen konvergiert T^n_s gegen T_s, $s \geqslant 0$, **P**-f.-s., so daß für jedes feste $q \in \mathbb{N}$ der beschränkte Integrand $\left|f_q^{-1}(T^n_s, W_s) - f_q^{-1}(T_s, W_s)\right|$ fast überall bezüglich $\lambda \otimes \mathbf{P}$ gegen Null konvergiert. Mit majorisierter Konvergenz folgt $I_3 \xrightarrow{n\to\infty} 0$ für festes $q \in \mathbb{N}$. Den Integranden in I_2 können wir durch $|f_q^{-1} - f^{-1}|$ abschätzen. Zum Beweis der Konvergenz von

$$\tilde{I}_2 := \mathbf{E}\int_0^{t\wedge D^m(W)} \left|f_q^{-1} - f^{-1}\right|(T^n_s, W_s)\,ds \qquad (5.59)$$

benötigen wir folgende Aussage:

Lemma 5.60 *Für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine nur von $m \in \mathbb{N}$ abhängige Konstante C_m, so daß für jede meßbare nichtnegative Funktion φ auf $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ gilt:*

$$\mathbf{E}\int_0^{t\wedge D^m(W)} \varphi(T^n_s, W_s)\,ds \leqslant C_m \left(\int_{[0,C^{-1}t]\times[-m,m]} \varphi^2 f\,d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Beweis: Sei $X^n := W \circ A^n$. Weil A^n Pfade in E_+ hat und $A^n_\infty = \infty$ **P**-f.-s. ist, erhalten wir

$$A^n_{D^m(X^n)} = D^m(W) \quad \mathbf{P}\text{-f.-s.}$$

(s. a. S. 40). Weiterhin gilt $A^n_{T^n_t} = t$, $t \geqslant 0$, **P**-f.-s., so daß sich insgesamt

$$A^n_{T^n_t\wedge D^m(X^n)} = t \wedge D^m(W) \quad \mathbf{P}\text{-f.-s.}$$

ergibt. Wir transformieren mit Lemma 2.24 die Zeitskala unter dem Integral, wobei wir $\varphi(s, W\circ A^n_s)$ für das dortige $g(s)$ und $T^n_t \wedge D^m(X^n)$ als obere Integrationsgrenze einsetzen. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\int_0^{T^n_t\wedge D^m(X^n)} \varphi(s, W\circ A^n_s)\,dA^n_s &= \int_0^{A^n_{T^n_t\wedge D^m(X^n)}} \varphi\left(T^n_s, W\circ A^n_{T^n_s}\right)\,ds\\
&= \int_0^{t\wedge D^m(W)} \varphi(T^n_s, W_s)\,ds\,, \quad t \geqslant 0 \quad \mathbf{P}\text{-f.-s.}
\end{aligned}$$

Lemma 2.38 impliziert nun mit $T_t^n \leqslant C^{-1}t$ **P**-f.-s. und $dA_s^n = f_n(s, W \circ A_s^n)\, ds$ **P**-f.-s. die Abschätzung

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E} \int_0^{t\wedge D^m(W)} \varphi(T_s^n, W_s)\, ds \\
&\quad\leqslant \mathbf{E} \int_0^{(C^{-1}t)\wedge D^m(X^n)} \varphi(s, W\circ A_s^n)\, dA_s^n \\
&\quad\leqslant \mathbf{E} \int_0^{(C^{-1}t)\wedge D^m(X^n)} \varphi(s, W\circ A_s^n)\, f_n^{\frac{1}{2}}(s, W\circ A_s^n)\, f^{\frac{1}{2}}(s, W\circ A_s^n)\, ds \\
&\quad\leqslant C_m \left(\int_{[0,C^{-1}t]\times[-m,m]} \varphi^2 f\, d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} .
\end{aligned}
$$

■

Es ergibt sich also in (5.59)

$$
\tilde{I}_2 \leqslant C_m \left(\int_{[0,C^{-1}t]\times[-m,m]} \left(f_q^{-1} - f^{-1}\right)^2 f\, d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} .
$$

Da f lokal integrierbar ist und $(f_q^{-1} - f^{-1})^2 \leqslant C^{-2}$ gilt, folgt mit majorisierter Konvergenz $\tilde{I}_2 \xrightarrow{q\to\infty} 0$. Insgesamt bekommen wir in (5.58)

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(\left| T_{t\wedge D^m(W)} - \int_0^{t\wedge D^m(W)} f^{-1}(T_s, W_s)\, ds \right| > \varepsilon \right) &\leqslant \lim_{q\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \left(I_1 + \frac{1}{\varepsilon}\tilde{I}_2 + I_3 + I_4 \right) \\
&= 0\, .
\end{aligned}
$$

Damit ist (5.54) gezeigt und nach Lemma 5.53

$$
A_t = \int_0^t f(s, W\circ A_s)\, ds\,, \quad t < S(A)\,, \quad \mathbf{P}\text{-f.-s.}
$$

Wir folgern wie in Satz 5.44, daß A eine $\mathbb{G}^W$-Zeittransformation ist und $A_{S(A)-} = A_{S(A)}$ **P**-f.-s. gilt. Also liegt A in $\mathfrak{L}_{W,\mathbb{F}}(f)$ und ist rein. ■

Bemerkung 5.61 Sind zwei nach unten halbstetige Funktionen $f(x) \leqslant g(x)$, $x \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, wie in Satz 5.44 bzw. 5.56 gegeben, so findet man leicht Approximationsfolgen $f_n \uparrow f$, $g_n \uparrow g$ wie in Lemma 5.42 bzw. Satz 5.56, für die dann auch $f_n \leqslant g_n$, $n \in \mathbb{N}$, gilt. Man konstruiert zu gegebenem $(W, \mathbb{F})$ nach Satz 5.15 die (Z)(f_n)- bzw. (Z)(g_n)-Lösungen, für die nach Bemerkung 5.29 die Ungleichung $A_t^{f_n} \leqslant A_t^{g_n}$, $t \geqslant 0$, **P**-f.-s., $n \in \mathbb{N}$, gilt, woraus für die Grenzprozesse dieselbe Relation folgt. Die Grenzprozesse sind (Z)-Lösungen zu f bzw. g. Haben wir also eine monotone Folge von nach unten halbstetigen Funktionen aus $L^2_{\mathrm{loc}}(\lambda)$ bzw. von gleichmäßig nach unten beschränkten und nach unten halbstetigen Funktionen aus $L^1_{\mathrm{loc}}(\lambda)$, dann finden wir dazu eine **P**-f.-s. monotone Folge von (Z)-Lösungen.

5.4 Meßbare Koeffizienten

Wir kommen nun zum Hauptresultat über die Existenz starker und reiner (Z)-Lösungen für eine meßbare nichtnegative Funktion unter einer Integrabilitätsbedingung und einer Bedingung, die das Verhältnis von $N(f)$ zur Menge der singulären Punkte von f^{-1} bestimmt. Dabei wird f durch eine fallende Folge geeigneter nach unten halbstetiger Funktionen approximiert. Sei $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ eine meßbare Funktion und

$$F(f) := \left\{ x \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \, : \, \int_U f^{-1} \, d\lambda = +\infty \text{ für jede Umgebung } U \text{ von } x \right\}.$$

Wir bemerken, daß $F(f)$ abgeschlossen ist und $\lambda(N(f) \setminus F(f)) = 0$ gilt; man überlegt sich leicht, daß es anderenfalls eine fallende Folge offener und gegen eine Einermenge $\{x\}$ konvergenter Kugeln $U_n \subseteq F^c(f)$ mit $\lambda(U_n \cap (N(f) \setminus F(f))) > 0$ gäbe.[10] Auf $U_n \cap (N(f) \setminus F(f))$ gilt $f \equiv 0$, so daß $\int_{U_n} f^{-1} \, d\lambda = \infty$ folgen würde. Das hieße aber $x \in F(f)$.

Wir wollen zunächst die Voraussetzungen für den Existenzsatz vereinfachen. Dazu zeigen wir, daß es ausreicht, sich für unsere Existenzaussage auf Funktionen mit der Eigenschaft $F(f) = N(f)$ zu beschränken.

Satz 5.62 *Es sei $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ meßbar, $\bar{f} := f + I_{N(f)\setminus F(f)}$ und $(W, \mathbb{F})$ ein üblicher Wienerprozeß. Gilt $F(f) \subseteq N(f)$, dann ist*

$$\mathfrak{L}_{W,\mathbb{F}}(\bar{f}) \subseteq \mathfrak{L}_{W,\mathbb{F}}(f) \, .$$

Beweis: Sei $A \in \mathfrak{L}_{W,\mathbb{F}}(\bar{f})$. Dann gilt für $W \circ A$ nach Lemma 2.38

$$\mathbf{E} \int_0^{t \wedge D^m(W \circ A)} \psi(\bar{f})^{\frac{1}{2}}(s, W \circ A_s) \, ds \leqslant C_m \left(\int_{K_{t,m}} \psi^2 \, d\lambda \right)^{\frac{1}{2}}$$

für ein meßbares nichtnegatives ψ, so daß wir erhalten:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \int_0^{t \wedge D^m(W \circ A)} \left| \bar{f} - f \right| (s, W \circ A_s) \, ds &= \mathbf{E} \int_0^{t \wedge D^m(W \circ A)} I_{N(f)\setminus F(f)}(s, W \circ A_s) \, ds \\ &= \mathbf{E} \int_0^{t \wedge D^m(W \circ A)} I_{N(f)\setminus F(f)} \left(\bar{f}\right)^{\frac{1}{2}} (s, W \circ A_s) \, ds \\ &\leqslant C_m \left(\int_{K_{t,m}} I_{N(f)\setminus F(f)} \, d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} = 0 \, . \end{aligned}$$

Damit gilt nun

$$\int_0^{t \wedge D^m(W \circ A)} \bar{f}(s, W \circ A) \, ds = \int_0^{t \wedge D^m(W \circ A)} f(s, W \circ A) \, ds \, , \quad t \geqslant 0 \, , \quad \mathbf{P}\text{-f.-s.}, \quad m \in \mathbb{N} \, ,$$

also die Behauptung. ∎

Satz 5.63 *Sei $(W, \mathbb{F})$ ein üblicher Wienerprozeß und $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ eine meßbare Funktion mit den folgenden Eigenschaften:*

(i) *$F(f) \subseteq N(f)$;*

(ii) *$f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\lambda)$.*

---

[10] siehe dazu den Überdeckungssatz von Whitney

Dann gibt es eine reine Lösung $A \in \mathcal{L}_{W,\mathbb{F}}(f)$.

Beweis: Statt (i) können wir nach Satz 5.62 o. B. d. A.

$$F(f) = N(f) \tag{5.64}$$

voraussetzen. Die Nullstellenmenge $N(f)$ ist nun im übrigen abgeschlossen. Es sei μ das Maß auf $[\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}}]$ mit der Dichte f^{-1} bzgl. des Lebesguemaßes. Die Menge F_μ aus (A10) ist mit $F(f)$ identisch. Nun liegt $f \in L^1_{\text{loc}}(\lambda)$ auch in $L^2_{\text{loc}}(\mu)$, so daß wir nach Lemma A9 eine fallende Folge $\left(\tilde{f}_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ von nach unten halbstetigen lokal integrierbaren Funktionen mit den Eigenschaften $\tilde{f}_n(x) \geqslant f(x)$, $x \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $N(\tilde{f}_n) = N(f) = F(f) = F_\mu$, $n \in \mathbb{N}$, und $\tilde{f}_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ in $L^2_{\text{loc}}(\mu)$ finden. Sei jetzt $f_n := \tilde{f}_n + n^{-1}$. Dann gehört f_n im allgemeinen nicht mehr zu $L^2_{\text{loc}}(\mu)$, aber es gilt für beliebiges $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\int_{K_m} (f_n - f)^2 f_n^{-1}\, d\lambda &= \int_{K_m} \left(\tilde{f}_n + n^{-1} - f\right)^2 \left(\tilde{f}_n + n^{-1}\right)^{-1} d\lambda \\
&\leqslant 2\int_{K_m} \left(\tilde{f}_n - f\right)^2 \left(\tilde{f}_n + n^{-1}\right)^{-1} d\lambda + 2\int_{K_m} n^{-2} \left(\tilde{f}_n + n^{-1}\right)^{-1} d\lambda \\
&\leqslant 2\int_{K_m} \left(\tilde{f}_n - f\right)^2 f^{-1}\, d\lambda + 2n^{-1}\lambda(K_m) \xrightarrow{n\to\infty} 0\,. \qquad (5.65)
\end{aligned}$$

Die f_n erfüllen die Voraussetzungen von Satz 5.56, so daß wir nach Bemerkung 5.61 eine **P**-f.-s. monoton fallende Folge $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ von reinen (Z)(f_n)-Lösungen zu $(W, \mathbb{F})$ konstruieren können. Der Grenzprozeß $A_t := \lim_{n\to\infty} A^n_t$, $t \geqslant 0$, ist dann **P**-f.-s. wohldefiniert (und wird auf der Ausnahmemenge auf Null gesetzt), ist eine $\mathbb{G}^W$-Zeittransformation ($\inf_{n\in\mathbb{N}} A^n_t$ ist eine Stoppzeit, da $\mathbb{G}^W$ die üblichen Bedingungen erfüllt) und besitzt rechtsstetige Pfade, denn ein solcher Pfad ist als Grenzfunktion einer fallenden Folge stetiger Funktionen nach oben halbstetig und daher, da wachsend, rechtsstetig. Es genügt, analog zu (5.46)

$$\mathbf{P}\left(\left|A_{t\wedge D^m(W\circ A)} - \int_0^{t\wedge D^m(W\circ A)} f(s, W\circ A_s)\, ds\right| > \varepsilon\right) = 0\,, \quad t \geqslant 0\,,\ m \in \mathbb{N}\,,\ \varepsilon > 0\,, \tag{5.66}$$

und

$$A_{S(A)-} = A_{S(A)} \quad \mathbf{P}\text{-f.-s.} \tag{5.67}$$

zu zeigen. Wir können dabei $D^m(W\circ A)$ in (5.66) durch $D^m := D^m(W\circ A^m) \leqslant D^m(W\circ A)$ ersetzen, da auch $D^m(W\circ A^m)$ **P**-f.-s. gegen $S(W\circ A)$ konvergiert; es gilt nämlich für ein beliebiges festes $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{m\to\infty} D^m(W\circ A^m) \geqslant \lim_{m\to\infty} D^m(W\circ A^n) = S(A^n) \quad \mathbf{P}\text{-f.-s.},$$

also auch

$$S(A) = \sup_{n\in\mathbb{N}} S(A^n) \leqslant \lim_{m\to\infty} D^m(W\circ A^m) \leqslant S(A) \quad \mathbf{P}\text{-f.-s.}$$

Wie in Satz 5.44 schätzen wir die linke Seite von (5.66) ab durch

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\left(|A_{t\wedge D^m} - A^n_{t\wedge D^m}| > \frac{\varepsilon}{2}\right) + \frac{2}{\varepsilon}\mathbf{E}\int_0^{t\wedge D^m} |f_n - f|(s, W\circ A^n_s)\, ds \\
&+\frac{2}{\varepsilon}\mathbf{E}\int_0^{t\wedge D^m} |f(s, W\circ A^n_s) - f(s, W\circ A_s)|\, ds \\
&=: I_1 + I_2 + I_3 \qquad (5.68)
\end{aligned}$$

und zeigen, daß I_1, I_2 und I_3 für $n \to \infty$ gegen Null konvergieren. Dies ist für I_1 offensichtlich. Mit Lemma 2.38 ergibt sich für $n \geqslant m$ und eine meßbare Funktion $\psi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ wegen $f_n \geqslant n^{-1}$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \int_0^{t \wedge D^m} \psi(s, W \circ A_s^n)\, ds &\leqslant \mathbf{E} \int_0^{t \wedge D^m(W \circ A^n)} \psi f_n^{\frac{1}{2}} f_n^{-\frac{1}{2}}(s, W \circ A_s^n)\, ds \\ &\leqslant C_m \left(\int_{K_{t,m}} \psi^2 f_n^{-1}\, d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} . \end{aligned} \tag{5.69}$$

Setzen wir $\psi = |f_n - f|$, so ergibt sich mit (5.65) schließlich $I_2 \xrightarrow{n \to \infty} 0$.

Zu I_3: Jedes $\tilde{f}_n$ läßt sich von unten durch eine monoton wachsende Folge $(f_{n,k})_{k \in \mathbb{N}}$ von stetigen Funktionen approximieren. Nach Lemma A9 gilt $\tilde{f}_n \in L^2_{\text{loc}}(\mu)$ und $0 \leqslant \tilde{f}_n - f_{n,k} \leqslant \tilde{f}_n$, so daß $f_{n,k}$ mit majorisierter Konvergenz auch in $L^2_{\text{loc}}(\mu)$ gegen $\tilde{f}_n$ konvergiert. Außerdem können die $f_{n,k}$ so gewählt werden, daß $N(f_{n,k}) = N(\tilde{f}_n) = N(f)$, $n, k \in \mathbb{N}$, gilt (hier wird die Abgeschlossenheit von $N(f)$ ausgenutzt). Suchen wir uns zu jedem $\tilde{f}_n$ ein geeignetes $f_{n,k(n)}$ derart, daß

$$\left\| \tilde{f}_n - f_{n,k(n)} \right\|_{L^2(K_n, \mu)} \leqslant n^{-1}$$

ist, so haben wir mit $h_n := f_{n,k(n)}$ stetige Funktionen gefunden, die für jedes feste $K_{t,m}$ in $L^2(K_{t,m}, \mu)$ gegen f konvergieren. Wir schätzen nun I_3 ab ($q \in \mathbb{N}$ fest, beliebig):

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{2} I_3 &\leqslant \mathbf{E} \int_0^{t \wedge D^m} |f - h_q|(s, W \circ A_s^n)\, ds \\ &\quad + \mathbf{E} \int_0^{t \wedge D^m} |f - h_q|(s, W \circ A_s)\, ds \\ &\quad + \mathbf{E} \int_0^{t \wedge D^m} |h_q(s, W \circ A_s^n) - h_q(s, W \circ A_s)|\, ds \\ &=: J_1 + J_2 + J_3 . \end{aligned}$$

Der letzte Summand J_3 konvergiert mit festem q für $n \to \infty$ mit majorisierter Konvergenz gegen Null. Wir nutzen (5.69) aus und schätzen die dortige rechte Seite ab durch

$$C_m \left(\int_{K_{t,m}} \psi^2 f^{-1}\, d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} = C_m \|\psi\|_{L^2(K_{t,m}, \mu)} .$$

Daraus ergibt sich für $n \geqslant m$

$$J_1 \leqslant C_m \|f - h_q\|_{L^2(K_{t,m}, \mu)} .$$

Eine adäquate Ausage benötigen wir noch für J_2.

Lemma 5.70 *Für ein meßbares $\psi \in L^2_{\text{loc}}(\mu)$ mit endlichen Werten und der Eigenschaft $N(\psi) \supseteq N(f) = F(f)$ gilt*

$$\mathbf{E} \int_0^{t \wedge D^m} \psi(s, W \circ A_s)\, ds \leqslant C_m \|\psi\|_{L^2(K_{t,m}, \mu)} . \tag{5.71}$$

Beweis: 1) Sei ψ stetig. Auf Grund majorisierter Konvergenz folgt wegen der lokalen Beschränktheit von ψ mit (5.69)

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\int_0^{t\wedge D^m}\psi(s,W\circ A_s)\,ds &= \mathbf{E}\int_0^{t\wedge D^m}\lim_{n\to\infty}\psi(s,W\circ A^n_s)\,ds\\ &= \lim_{n\to\infty}\mathbf{E}\int_0^{t\wedge D^m}\psi(s,W\circ A^n_s)\,ds\\ &\leqslant C_m\|\psi\|_{L^2(K_{t,m},\mu)}\,.\end{aligned}$$

2) Sei ψ meßbar. Dann erfüllen ψ und μ die Voraussetzungen von Lemma A9, so daß man eine Folge von nach unten halbstetigen Funktionen $\psi_i \geqslant \psi$ mit $N(\psi)\supseteq N(\psi_i)\supseteq F(f)=F_\mu$ findet, die in $L^2_{\mathrm{loc}}(\mu)$ monoton gegen ψ konvergieren. Die ψ_i ihrerseits sind von unten monoton durch stetige $\psi_{i,k}$ approximierbar. Für die $\psi_{i,k}$ gilt (5.71) nach 1). Mit monotoner Konvergenz folgt dann

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\int_0^{t\wedge D^m}\psi_i(s,W\circ A_s)\,ds &= \lim_{k\to\infty}\mathbf{E}\int_0^{t\wedge D^m}\psi_{i,k}(s,W\circ A_s)\,ds\\ &\leqslant \lim_{k\to\infty}C_m\|\psi_{i,k}\|_{L^2(K_{t,m},\mu)} = C_m\left\|\lim_{k\to\infty}\psi_{i,k}\right\|_{L^2(K_{t,m},\mu)}\\ &= C_m\|\psi_i\|_{L^2(K_{t,m},\mu)}\,,\end{aligned}$$

das heißt, (5.71) gilt auch für ψ_i. Da $\|\psi_i\|_{L^2(K_{t,m},\mu)}<\infty$ gilt, folgt wiederum mit monotoner Konvergenz die Ungleichung für die punktweise Grenzfunktion $\tilde\psi(x) := \lim_{i\to\infty}\psi_i(x)$, $x\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$. Die Funktion ψ gleicht dieser μ-fast-überall, punktweise gilt aber sogar $\psi(x)\leqslant\tilde\psi(x)$, $x\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$. Es folgt (5.71). ■

Wir können nun Lemma 5.70 auf $\psi=|f-h_q|$ anwenden und damit abschätzen:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\varepsilon}{2}I_3 &\leqslant \lim_{q\to\infty}\lim_{n\to\infty}(J_1+J_2+J_3)\\ &\leqslant \lim_{q\to\infty}\Big(\|f-h_q\|_{L^2(K_{t,m},\mu)}+\|f-h_q\|_{L^2(K_{t,m},\mu)}+\lim_{n\to\infty}J_3\Big)\\ &= 0\,.\end{aligned}$$

Also ist (5.66) gezeigt. Es bleibt noch (5.67) nachzuweisen. Siehe dazu das folgende Analogon zu Satz 5.20. ■

Satz 5.72 *Es seien $f_n, f:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}\to[0,\infty]$, $n\in\mathbb{N}$, meßbare Funktionen aus $L^1_{\mathrm{loc}}(\lambda)$ und $(W,\mathbb{F})$ ein üblicher Wienerprozeß. Weiter bilde $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge mit $f_n(x)\geqslant f(x)$, $x\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$. Haben wir eine $\mathbf{P}$-f.-s. monoton fallende Folge von $A^n\in\mathfrak{L}_{W,\mathbb{F}}(f_n)$, $n\in\mathbb{N}$, dann gilt für die rechtsstetige Inverse T des Grenzprozesses $A_t:=\lim_{n\to\infty}A^n_t$, $t\geqslant 0$, auf dem Ereignis $\{T_\infty<\infty\}$ $\mathbf{P}$-f.-s.*

$$T_u - T_{u'} \geqslant \int_{u'}^u h(T_s,W_s)\,ds\,,\quad 0\leqslant u'\leqslant u<\infty\,, \tag{5.73}$$

mit einer geeigneten Funktion $h:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}\to(0,1]$. Daher ist T auf $\{T_\infty<\infty\}$ eine $\mathbf{P}$-f.-s. streng wachsende Funktion.

Beweis: Es sei T^n die rechtsstetige Inverse von A^n und

$$T^*_t := \lim_{n\to\infty}T^n_t = \sup_{n\in\mathbb{N}}T^n_t\,,\quad t\geqslant 0\,,\quad \mathbf{P}\text{-f.-s.}$$

Zunächst wählen wir ein ω, für das die monotone Konvergenz der $A^n(\omega)$ erfolgt, $T_\infty(\omega) < \infty$ gilt und alle (Z)-Gleichungen erfüllt sind, und stellen fest, daß λ^1-fast-überall $T^*(\omega)$ mit $T(\omega)$ übereinstimmt: Für $t \in \mathbb{R}_+$ gilt nämlich einerseits

$$\begin{aligned}
T_t(\omega) &= \inf\{s \geqslant 0 \,:\, A_s(\omega) > t\} \\
&= \inf\left(\bigcup_{\varepsilon>0}\left\{s \geqslant 0 \,:\, \inf_{n\in\mathbb{N}} A^n_s(\omega) \geqslant t+\varepsilon\right\}\right) \\
&= \inf\left(\bigcup_{\varepsilon>0}\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\{s \geqslant 0 \,:\, A^n_s(\omega) \geqslant t+\varepsilon\}\right) \\
&= \inf_{\varepsilon>0}\sup_{n\in\mathbb{N}}\inf\{s \geqslant 0 \,:\, A^n_s(\omega) \geqslant t+\varepsilon\} \\
&= \inf_{\varepsilon>0}\sup_{n\in\mathbb{N}} T^n_{(t+\varepsilon)-}(\omega) \leqslant \inf_{\varepsilon>0}\sup_{n\in\mathbb{N}} T^n_{t+\varepsilon}(\omega) = \inf_{\varepsilon>0} T^*_{t+\varepsilon}(\omega) \\
&= T^*_{t+}(\omega)\,,
\end{aligned}$$

andererseits aber

$$T_t(\omega) = \inf_{\varepsilon>0}\sup_{n\in\mathbb{N}} T^n_{(t+\varepsilon)-}(\omega) \geqslant \inf_{\varepsilon>0}\sup_{n\in\mathbb{N}} T^n_{t+\frac{\varepsilon}{2}}(\omega) = T^*_{t+}\,,$$

also insgesamt $T_t(\omega) = T^*_{t+}(\omega)$. Dies impliziert $T_t(\omega) = T^*_t(\omega)$ auf den Stetigkeitspunkten von $T^*(\omega)$. Die Menge aller Sprungstellen von $T^*(\omega)$ ist aber abzählbar.

Wir können daher auch (5.73) für T^* zeigen, denn an den Stellen $\{t \geqslant 0 \,:\, T^*_t(\omega) < T_t(\omega)\}$ hat T ohnehin einen Sprung. Völlig analog zu Lemma 5.22, nur unter Berücksichtigung der hier geltenden Ungleichung $f_1(x) \geqslant f_n(x)$, $x \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, und $A_t \leqslant A^n_t$, $t \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}$-f.-s. können wir zeigen: Für ein meßbares und beschränktes $\varphi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ und $t, u \geqslant 0$, $m \in \mathbb{N}$ gibt es eine nur von m abhängige Konstante C_m, so daß gilt:

$$\mathbf{E}\int_0^{D^m(W)\wedge A_t\wedge u} \varphi(T^n_s, W_s)\,ds \leqslant C_m \left\|\varphi f_1^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^2(K_{t,m},\lambda)}\,. \tag{5.74}$$

Ebenso zeigen wir

$$\mathbf{E}\int_0^{D^m(W)\wedge A_t\wedge u} \varphi(T^*_s, W_s)\,ds \leqslant C_m \left\|\varphi f_1^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^2(K_{t,m},\lambda)}\,. \tag{5.75}$$

Im Unterschied zu Lemma 5.23 wählen wir hier

$$\begin{aligned}
\kappa(d\omega\, ds) &:= I_{[0,D^m(W(\omega))\wedge A_t(\omega)\wedge u)}(s)\,ds\,\mathbf{P}(d\omega)\,; \\
\eta_1(dx) &:= f_1(x) I_{K_{t,m}}(x)\lambda(dx)\,, \quad x \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}\,,
\end{aligned}$$

und T^* statt T. Die Voraussetzungen von Lemma A1 sind dann wegen $f_1 \in L^1_{\mathrm{loc}}(\lambda)$ (s. hierzu Lemma A9) ebenfalls erfüllt, so daß sich unmittelbar (5.75) aus (5.74) ergibt. Wir kehren zu dem gewählten $\omega \in \{T_\infty < \infty\} \subseteq \{A_\infty = \infty\}$ zurück. Wegen $A^n_t(\omega) \geqslant A_t(\omega)$, $t \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, gilt $A^i_i(\omega) \xrightarrow{i\to\infty} \infty$, so daß auch $\tau_i(\omega) = D^i(W(\omega)) \wedge A^i_i(\omega)$ gegen ∞ konvergiert. Wir wählen nun $0 \leqslant u' < u < \infty$ und erhalten analog zu (5.25)

$$T^n_{u\wedge\tau_i}(\omega) - T^n_{u'\wedge\tau_i}(\omega) \geqslant \int_{u'\wedge\tau_i}^{u\wedge\tau_i} \underbrace{1 \wedge f_1^{-1}}_{=:\,h}(T^n_s(\omega), W_s(\omega))\,ds\,. \tag{5.76}$$

($N(f_1)$ ist leer). Analog zu (5.26) können wir jetzt für $m \in \mathbb{N}$, $t, u \in \mathbb{R}_+$

$$\mathbf{E}\int_0^{D^m(W)\wedge A_t\wedge u} |h(T_s^n, W_s) - h(T_s^*, W_s)|\,ds \xrightarrow{n\to\infty} 0 \tag{5.77}$$

zeigen, wobei wir hier eine Folge stetiger Funktionen $h_q : K_{t,m} \to \mathbb{R}_+$ wählen, die nunmehr in $L^2(K_{t,m}, \eta_1)$ gegen h konvergiert. Wir bekommen die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\int_0^{D^m(W)\wedge A_t\wedge u} |h(T_s^n, W_s) - h(T_s^*, W_s)|\;ds \\
&\quad\leqslant\; \mathbf{E}\int_0^{D^m(W)\wedge A_t\wedge u} |h-h_q|\,(T_s^n, W_s)ds + \mathbf{E}\int_0^{D^m(W)\wedge A_t\wedge u} |h-h_q|\,(T_s^*, W_s)ds \\
&\qquad+\mathbf{E}\int_0^{D^m(W)\wedge A_t\wedge u} |h_q(T_s^n, W_s) - h_q(T_s^*, W_s)|\,ds
\end{aligned}$$

und erhalten mit majorisierter Konvergenz (für den letzten Term) und mit (5.74) und (5.75)

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\int_0^{D^m(W)\wedge A_t\wedge u} |h(T_s^n, W_s) - h(T_s^*, W_s)|\,ds \leqslant 2C_m \|h-h_q\|_{L^2(K_{t,m},\eta_1)} \xrightarrow{q\to\infty} 0\,.$$

Wir können auch hier eine Teilfolge $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ auswählen, so daß

$$\int_0^{D^m(W)\wedge A_t\wedge u} h(T_s^{n_i}, W_s)\,ds \xrightarrow{i\to\infty} \int_0^{D^m(W)\wedge A_t\wedge u} h(T_s^*, W_s)\,ds \tag{5.78}$$

für alle $m \in \mathbb{N}$, $t, u \in \mathbb{R}_+$ **P**-f.-s. gilt. Setzen wir für das bereits fixierte ω auch noch (5.78) voraus, so ergibt sich wie im Beweis von Satz 5.20 (s. S. 43) für ein i^* mit $\tau_i > u$ für $i \geqslant i^*$:

$$\begin{aligned}
T_u^*(\omega) - T_{u'}^*(\omega) &= \lim_{i\to\infty}\Big(T^{n_i}_{\tau_{i^*}\wedge u}(\omega) - T^{n_i}_{\tau_{i^*}\wedge u'}(\omega)\Big) \\
&\geqslant \lim_{n\to\infty}\int_{\tau_{i^*}\wedge u'}^{\tau_{i^*}\wedge u} h\left(T_s^{n_i}(\omega), W_s(\omega)\right)\,ds \\
&= \int_{\tau_{i^*}\wedge u'}^{\tau_{i^*}\wedge u} h\left(T_s^*(\omega), W_s(\omega)\right)\,ds = \int_{u'}^{u} h(T_s^*(\omega), W_s(\omega))\,ds \\
&> 0\,.
\end{aligned}$$

■

Bemerkung 5.79 Wie auch in den anderen Approximationsstufen können wir uns zu $f \leqslant g$, die die Voraussetzungen von Satz 5.63 erfüllen, (Z)-Lösungen $A_t^f \leqslant A_t^g$, $t \geqslant 0$, **P**-f.-s. konstruieren. Hat man nämlich nach Satz 5.63 die zugehörigen Folgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von nach unten halbstetigen Funktionen konstruiert, so ist offenbar auch $(f_n \wedge g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine geeignete fallende Folge von nach unten halbstetigen Funktionen für die Approximation von f. Zu diesen bekommt man nach Bemerkung 5.61 (Z)-Lösungsfolgen $A_t^{f_n\wedge g_n} \leqslant A_t^{g_n}$, $t \geqslant 0$, **P**-f.-s., so daß sich für die Grenzprozesse $A_t^f \leqslant A_t^g$, $t \geqslant 0$, **P**-f.-s. ergibt.

Bemerkung 5.80 Unter der Voraussetzung $f \in L^2_{\mathrm{loc}}(\lambda)$, $N(f) = F(f)$ läßt sich auch eine Lösung durch eine Folge von $A^n \in \mathfrak{L}_{W,\mathbb{F}}(f_n)$ approximieren, für die bereits $N(f_n) =$

$F(f_n) = F(f)$ gilt. Man unterläßt hierbei, die $\tilde{f}_n$ aus dem Beweis von Satz (5.63) um n^{-1} zu vergrößern, und verwendet einfach $\tilde{f}_n$. Da f in $L^2_{\mathrm{loc}}(\lambda)$ liegt, erhalten wir dies auch für $\tilde{f}_n$, so daß wir mit Hilfe von Satz 5.44 eine $\mathbf{P}$-f.-s. fallende Folge von $\tilde{A}^n \in \mathfrak{L}_{W,\mathbb{F}}(\tilde{f}_n)$ konstruieren können. Der Rest des Beweises der Konvergenz verläuft analog, wobei zu beachten ist, daß (5.69) nur gegeben ist, wenn $N(\psi) \supseteq N(\tilde{f}_n)$ gilt. Dies ist für $\psi := \left|\tilde{f}_n - f\right|$ der Fall.

Vergleichen wir die hier gewonnenen $\tilde{A}^n \in \mathfrak{L}_{W,\mathbb{F}}(\tilde{f}_n)$ mit den $A^n \in \mathfrak{L}_{W,\mathbb{F}}(f_n)$ aus Satz 5.63, so ergibt sich nach Bemerkung 5.61 zunächst $\tilde{A}^n_t \leqslant A^n_t$, $t \geqslant 0$, $\mathbf{P}$-f.-s., $n \in \mathbb{N}$. Für die $(\mathrm{Z})(f)$-Lösungen $\tilde{A} := \lim_{n\to\infty} \tilde{A}^n$ und $A := \lim_{n\to\infty} A^n$ folgt daraus $\tilde{A}_t \leqslant A_t$, $t \geqslant 0$, $\mathbf{P}$-f.-s. Im allgemeinen sind $\tilde{A}$ und A echt verschieden. Wir betrachten etwa zum Startpunkt $x_0 = 0$ den einfachen Koeffizienten

$$f(t,x) := 1 - I_{\{0\}}(x)\,, \quad t \in \mathbb{R}_+\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

der bereits nach unten halbstetig ist. Wir können daher die eben beschriebene, zu Satz 5.63 alternative Approximation durch $\tilde{f}_n$ auslassen ($\tilde{f}_n \equiv f$, $n \in \mathbb{N}$). In Satz 5.44 wird f nun von unten durch stetige f_n mit der Eigenschaft

$$\int_{K_m} (f - f_n)^2 f_n^{-1}\, d\lambda \xrightarrow{n\to\infty} 0\,, \quad m \in \mathbb{N}\,,$$

approximiert, z. B. durch $f_n(t,x) := 1 \wedge |x|^{\frac{1}{n}}$, $n \geqslant 2$. Unabhängig von der konkreten Gestalt der f_n muß wegen $f_n(x) \leqslant f(x)$, $x \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, in jedem Fall

$$f_n\big|_{[0,\infty)\times\{0\}} \equiv 0$$

gelten. Die $f_n^{\frac{1}{2}}$ werden in Satz 5.15 durch Lipschitz-stetige Funktionen $f_{n,k}^{\frac{1}{2}}$ approximiert, die auf $[0,\infty) \times \{0\}$ ebenfalls verschwinden müssen. Für solche Funktionen gibt es aber auf Grund der Eindeutigkeit von $(\mathrm{Z})(f_{n,k})$ nur die Lösungen $A^{f_{n,k}} \equiv 0$ $\mathbf{P}$-f.-s. Folglich sind auch alle in Satz 5.15 konstruierten $A^{f_n} \in \mathfrak{L}_{W,\mathbb{F}}(f_n)$ gleich Null ebenso wie $A^f = \lim_{n\to\infty} A^{f_n}$. In Satz 5.63 dagegen wird eine Lösung zu $\bar{f} := f + I_{N(f)\setminus F(f)} \equiv 1$ gesucht. Dies ist offensichtlich (und eindeutig in $\mathfrak{L}_{W,\mathbb{F}}(\bar{f})$) die Zeittransformation $A_t = t$, $t \geqslant 0$, $\mathbf{P}$-f.-s.

Fordert man, daß es für ein f zu *jedem* Startpunkt x_0 eine $(\mathrm{Z})(f)$-Lösung geben soll, so ist im Falle zeitunabhängiger f die Bedingung $F(f) \subseteq N(f)$ sogar notwendig für die Existenz aller Lösungen (s. [9]). Die Bedingungen von Satz 5.63 für zeitabhängige Koeffizienten sind jedoch weit davon entfernt, notwendig zu sein. So ist es für Existenz und Eindeutigkeit von (Z)-Lösungen vollkommen unerheblich, wenn man einen gegebenen Koeffizienten auf einer Menge $\{t\} \times \mathbb{R}$ für irgendein $t \in \mathbb{R}_+$ verändert. Aber eine Änderung auf einer Menge $\mathbb{R}_+ \times \{x\}$ für ein bestimmtes $x \in \mathbb{R}$ kann sich sehr stark auswirken, wie das obige Beispiel zeigt: Zu den Koeffizienten f und $\bar{f}$ gibt es ganz verschiedene Lösungsmengen. Die Bedingungen von Satz 5.63 dagegen sind invariant gegenüber einer Vertauschung von Orts- und Zeitargument (abgesehen vom Definitionsbereich).

Der folgende Satz zeigt eine Möglichkeit, die Voraussetzungen abzuschwächen, indem man dem Unterschied zwischen Zeitargument t und Ort x Rechnung trägt: Verläuft der durch eine $(\mathrm{Z})(f)$-Lösung zeittransformierte Wienerprozeß $W \circ A$ auf einem Zeitintervall konstant, so muß f dort nicht identisch Null sein, sondern nur λ^1-fast-überall. Daher ist auf Streifen der Form $\mathbb{R}_+ \times \{x\}$ eine gewisse „Verschmutzung“ der Nullstellenbereiche mit anderen Werten möglich. Jedoch muß einschränkend berücksichtigt werden, daß die Aufenthaltszeiten von $W \circ A$ in $N(f)$ bzw. $F(f)$ singuläre Mengen sein können.

Bezeichnung Für $B \subseteq \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$ sei

$$B_x := \{t \geqslant 0 \,:\, (t,x) \in B\}$$

der *Schnitt* von B bei x. Weiter bezeichne ∂B den Rand von B.

Satz 5.81 *Sei $(W, \mathbb{F})$ ein üblicher Wienerprozeß und $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ lokal integrierbar. Es gelte*

(i) $\partial F(f) \subseteq N(f)$;

(ii) $\lambda^1(F_x \setminus N_x) = 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$.

Dann gibt es zu $(W, \mathbb{F})$ eine reine (Z)(f)*-Lösung.*

Beweis: Wir setzen $\tilde f := f I_{F^c(f)}$. Offenbar gilt $F(\tilde f) \subseteq N(\tilde f)$, so daß es nach Satz 5.63 ein reines $A \in \mathfrak{L}_{W,\mathbb{F}}(\tilde f)$ gibt. Sei $X := W \circ A$. Wir zeigen $A \in \mathfrak{L}_{W,\mathbb{F}}(f)$, wozu es ausreicht, die Gleichung

$$\int_0^t \left| f(s,X_s) - \tilde f(s,X_s) \right| ds = \int_0^t f(s,X_s) I_{F(f)}(s,X_s)\, ds = 0\,,\ t < S(A),\ \mathbf{P}\text{-f.-s.} \tag{5.82}$$

zu verifizieren. Wir fixieren ein $\omega \in \Omega$, für das (Z)($\tilde f$) erfüllt ist, und ein $t < S(A(\omega))$. Für ein $B \subseteq \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ sei

$$V_\omega(B) := \{s \in [0,t] \,:\, (s, X_s(\omega)) \in B\}\,.$$

Wir fassen hier $V_\omega(B)$ aus Bequemlichkeitsgründen als Menge in $\mathbb{R}$ auf. Die Abbildung $s \mapsto (s, X_s(\omega))$ auf $[0,t]$ ist stetig, weshalb $V_\omega(F(f))$ als Urbild von $F(f)$ abgeschlossen ist. Sei nun (a,b) ein in $V_\omega(F(f))$ gelegenes offenes Intervall. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\tilde f(\,\cdot\,, X_\cdot(\omega))\big|_{(a,b)} \equiv 0 \qquad &\Rightarrow \qquad \int_a^b \tilde f(s, X_s(\omega))\, ds = 0 \\
&\Leftrightarrow \qquad A_a(\omega) = A_b(\omega) \\
&\Leftrightarrow \qquad X_a(\omega) = X_s(\omega)\,, \quad s \in [a,b]\,.
\end{aligned}$$

Damit können wir schreiben:

$$\int_a^b f I_{F(f)}\,(s, X_s(\omega))\, ds = \int_a^b f I_{F(f)}\,(s, X_a(\omega))\, ds = 0\,, \tag{5.83}$$

denn wegen (ii) ist der Integrand der rechten Seite λ^1-f.-ü. gleich Null. Wir betrachten nun das Integral über ganz $V_\omega(F(f))$. Zunächst gilt die (elementar nachzurechnende) Inklusion

$$(0,t) \cap \partial V_\omega(F(f)) \subseteq V_\omega(\partial F(f))$$

und damit wegen (i)

$$f(\,\cdot\,, X_\cdot(\omega))\big|_{(0,t)\cap\partial V_\omega(F(f))} = 0\,. \tag{5.84}$$

Wir haben, da $V_\omega(F(f))$ abgeschlossen ist, die disjunkte Zerlegung

$$V_\omega(F(f)) = \partial V_\omega(F(f)) \cup \mathring{V}_\omega(F(f)) .$$

Das Innere $\mathring{V}_\omega(F(f))$ ist als offene Menge in $\mathbb{R}$ darstellbar als abzählbare Vereinigung disjunkter offener Intervalle :

$$\mathring{V}_\omega(F(f)) = \bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i) .$$

Nun gilt wegen (5.83) und (5.84)

$$\begin{aligned}
&\int_0^t f(s, X_s(\omega)) I_{F(f)}(s, X_s(\omega))\, ds \\
&= \int_{V_\omega(F(f))\cap(0,t)} f(s, X_s(\omega))\, ds \\
&= \int_{\partial V_\omega(F(f))\cap(0,t)} f(s, X_s(\omega))\, ds + \sum_{i=1}^{\infty} \int_{a_i}^{b_i} f(s, X_s(\omega))\, ds \\
&= 0 .
\end{aligned}$$

Damit ist das Integral in (5.82) $\mathbf{P}$-f.-s. identisch Null. Also liegt A auch in $\mathfrak{L}_{W,\mathbb{F}}(f)$. ∎

5.5 Fazit

Die Sätze 5.63 und 5.81 bilden die Hauptresultate des Kapitels. Dabei kommt Satz 5.63 die größere Bedeutung zu, weil einerseits seine Voraussetzungen besonders einfach sind und andererseits der Beweis eine explizite Konstruktionsvorschrift für reine (Z)-Lösungen enthält. Wir formulieren den Inhalt hier für die stochastische Differentialgleichung.

Satz 5.85 *Es sei $b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine lokal quadratisch integrierbare Funktion. Nimmt b in jedem Punkt aus $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, für den b^{-2} in keiner noch so kleinen Umgebung des Punktes integrierbar ist, den Wert Null an, dann hat* (SDE)(b) *schwache Lösungen.*

6 Extremale Lösungen

Wir haben in Satz 3.3 gesehen, daß zu gegebenem üblichen Wienerprozeß $(W, \mathbb{F})$ die Lösungsmenge $\mathcal{L}_{W,\mathbb{F}}(f)$, falls nicht leer, ein Verband ist. Gilt weiterhin $F(f) \subseteq N(f)$ und ist f lokal integrierbar, dann enthält $\mathcal{L}_{W,\mathbb{F}}(f)$ reine Lösungen. Es stellt sich die Frage, wann dieser Verband ein maximales oder minimales („extremales") Element hat. Wir vergleichen dabei die Elemente in der Halbordnung „$\leqslant$ **P**-f.-s.", d. h. wir meinen $A \leqslant A'$ **P**-f.-s., falls $\mathbf{P}(A_t \leqslant A'_t,\, t \geqslant 0) = 1$ gilt. Wegen der Separabilität von E_+ ist dazu die Relation $\mathbf{P}(A_t \leqslant A'_t) = 1$, $t \geqslant 0$, äquivalent. In Satz 6.20 finden wir für die Existenz extremaler Lösungen eine hinreichende Bedingung. Über die Eigenschaften dieser Lösungen oder ihre Approximation ist damit freilich noch wenig gesagt.

Extremale (Z)-Lösungen haben eine anschauliche Interpretation. Den Koeffizienten $f(t, x)$ kann man etwa als Maß für die Stärke der „Fluktuation" in einem ökonomischen System zu bestimmter Zeit t an einem bestimmten Ort x ansehen. Bei einer (Z)-Lösung A entspricht dieser „Fluktuation" das Wachstum von A, wenn sich $W \circ A_t$ in x befindet. Da ein maximales $A^{\max}$ am stärksten wächst, ist $W \circ A^{\max}$ als Beispiel eines Systemverhaltens mit der größtmöglichen Fluktuation interpretierbar; der Prozeß $W \circ A^{\max}$ „zappelt" am meisten „hin und her". Entsprechend kann man sich $W \circ A^{\min}$ als das „ruhigste" Verhalten vorstellen, das möglich ist. Zum Beispiel im Rahmen von Aktienmodellen entspräche der maximalen Lösung ein besonders aktives Händlerverhalten, der minimalen ein besonders träges (ungeachtet des Wertes eines Modells ohne Drift).

Wir betrachten nun ein fixiertes f und einen festen Wienerprozeß W, aber verschiedene Filtrationen $\mathbb{F}$, $\mathbb{F}'$, die die üblichen Bedingungen erfüllen und bzgl. derer W ein Wienerprozeß ist. Solche Filtrationen sollen *zulässig* heißen. Gilt nun $\mathbb{F} \leqslant \mathbb{F}'$, dann ergibt sich offenbar

$$\mathcal{L}_{W,\mathbb{F}}(f) \subseteq \mathcal{L}_{W,\mathbb{F}'}(f)\,.$$

Ist A in $\mathcal{L}_{W,\mathbb{F}}(f)$ maximal (minimal) und A' in $\mathcal{L}_{W,\mathbb{F}'}(f)$ maximal (minimal), so erhält man

$$A_t \leqslant A'_t \quad (A_t \geqslant A'_t)\,, \quad t \geqslant 0\,, \quad \mathbf{P}\text{-f.-s.}$$

Hat aber die Filtration tatsächlich einen Einfluß auf die maximale Lösung? Klar ist: handelt es sich bei extremalen Lösungen stets um *reine* Lösungen, so ist die Wahl der zulässigen Filtration ohne Belang, denn eine reine extremale Lösung in $\mathcal{L}_{W,\mathbb{F}}(f)$ ist bereits extremal in $\mathcal{L}_{W,\mathbb{G}^W}(f)$, und grundsätzlich gilt $\mathbb{G}^W \leqslant \mathbb{F}$ für alle zulässigen $\mathbb{F}$. Extremale Elemente in einem Verband sind aber stets eindeutig. Für alle zulässigen Filtrationen $\mathbb{F}$ haben dann die $\mathcal{L}_{W,\mathbb{F}}(f)$ dieselbe maximale und minimale Lösung.

Es erweist sich, daß in der Tat alle extremalen Lösungen rein sind, wenn wir ihre Existenz für das fixierte f und *alle* üblichen Wienerprozesse voraussetzen können (wofür wir im Existenzsatz eine hinreichende Bedingung vorfinden). Eng damit verbunden ist nämlich die Frage, ob alle maximalen (minimalen) (Z)-Lösungen dieselbe Verteilung haben. Dies ist der Fall. Man kann dann ähnlich wie in Kapitel 3 argumentieren, um die Existenz von Operatoren $F^{\max}$ bzw. $F^{\min}$ zu zeigen, deren Argument der Wienerprozeß und deren Wert die jeweilige extremale Lösung ist. Analog ergibt sich die Reinheit der Lösungen.

Abschließend wenden wir uns Vergleichssätzen zu: Für ein f gebe es extremale (Z)-Lösungen. Vergrößern wir f derart, daß auch für die neue Funktion extremale Lösungen existieren – haben sich dann auch die extremalen Lösungen vergrößert? Oder ist es sogar möglich, daß eine extremale Lösung zur vergrößerten Funktion *kleiner* ist? (Für Gewöhnliche Integralgleichungen gibt es dafür Beispiele.) Als Teilantwort auf diese Frage werden zwei Vergleichssätze vorgestellt. Grob formuliert gilt eine Vergleichsaussage des Typs

$$f \leqslant f' \qquad \Rightarrow \qquad A_t^{f,\text{extr}} \leqslant A_t^{f',\text{extr}}\,, \quad t \geqslant 0\,, \quad \mathbf{P}\text{-f.-s.}$$

- für *maximale* Lösungen, wenn man eine nach *oben* halbstetige Funktion g findet, die f und f' *trennt*, wenn also $f \leqslant g \leqslant f'$ punktweise gilt;
- für *minimale* Lösungen, wenn man eine nach *unten* halbstetige Funktion findet, die f und f' trennt.

6.1 Existenz

Zunächst eine technische Hilfsaussage. Es sei $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to [0, \infty]$ meßbar und $\mu \ll \lambda$ das Maß auf $[\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}}]$ mit der Dichte f^{-1}bzgl. λ.

Lemma 6.1 *Sei $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ lokal integrierbar. Die Nullstellenmenge $N(f)$ sei abgeschlossen, und es gelte $N(f) \supseteq F(f)$. Dann gibt es eine Folge von stetigen Funktionen $h_q : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ mit den folgenden Eigenschaften:*

- $N(h_q) = N(f)$ *;*
- $\int_{K_m} (f - h_q)^2 f^{-1}\, d\lambda \xrightarrow{q\to\infty} 0\,,\ m \in \mathbb{N}.$

Beweis: Offenbar erfüllen f und μ die Voraussetzungen von Lemma A9. Wir finden daher eine Folge $(\tilde{f}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach unten halbstetiger Funktionen, so daß die Gleichung

$$\int_{K_m} (\tilde{f}_n - f)^2 f^{-1}\, d\lambda \xrightarrow{n\to\infty} 0\,, \quad m \in \mathbb{N}\,, \tag{6.2}$$

erfüllt ist. Außerdem gilt

$$N(f) \supseteq N(\tilde{f}_n) \supseteq F(f)\,. \tag{6.3}$$

Setzen wir $f_n := \tilde{f}_n I_{N^c(f)}$, so ist f_n wegen der Abgeschlossenheit von $N(f)$ ebenfalls nach unten halbstetig. Da stets $\lambda(N(f) \setminus F(f)) = 0$ gilt, folgt

$$\lambda\left(N(f) \setminus N(\tilde{f}_n)\right) = 0\,,$$

so daß λ-fast-überall bzw. μ-fast-überall $f_n = \tilde{f}_n$ ist und damit (6.2) auch für f_n gilt. Die nach unten halbstetigen Funktionen f_n können von unten monoton durch stetige nichtnegative Funktionen $f_{n,k}$ approximiert werden, für die $N(f_{n,k}) = N(f_n) = N(f)$ gilt. Da die f_n und $f_{n,k}$ nichtnegative Funktionen sind, bildet f_n für $(f_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine integrierbare Majorante in $L^2(K_m, \mu)$ für jedes $m \in \mathbb{N}$, so daß

$$\int_{K_m} (f_n - f_{n,k})^2 f^{-1}\, d\lambda \xrightarrow{k\to\infty} 0\,, \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

folgt. Durch Auswahl einer geeigneten „Diagonal"-Folge von Funktionen $h_q := f_{q,k(q)}$ gelangen wir zur gewünschten Folge. ■

Gegeben sei eine nichtnegative Funktion $f \in L^1_{\text{loc}}(\lambda)$ und ein üblicher Wienerprozeß $(W, \mathbb{F})$ auf $[\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}]$.

Definition 6.4 Ein $A \in \mathcal{L}_{W,\mathbb{F}}(f)$ heißt *maximal (minimal)*, wenn $A_t \geqslant A'_t$ ($A_t \leqslant A'_t$), $t \geqslant 0$, $\mathbf{P}$-f.-s. für alle $A' \in \mathcal{L}_{W,\mathbb{F}}(f)$ gilt. *Extremal* bedeutet „maximal oder minimal“.

Wir wollen nun untersuchen, unter welchen Bedingungen $\mathcal{L}_{W,\mathbb{F}}(f)$ ein in diesem Sinne extremales Element enthält.

Lemma 6.5 *Es sei eine $\mathbf{P}$-f.-s. fallende Folge $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ von wachsenden Prozessen aus $\mathcal{L}_{W,\mathbb{F}}(f)$ gegeben. Ferner sei $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ lokal integrierbar, $N(f)$ abgeschlossen und $F(f) \subseteq N(f)$. Dann existiert ein Grenzprozeß i. S. der $\mathbf{P}$-fast-sicheren Konvergenz, welcher ebenfalls zu $\mathcal{L}_{W,\mathbb{F}}(f)$ gehört.*

Beweis: Wir können o. B. d. A. annehmen, daß $(A^n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ für *alle* $\omega \in \Omega$ eine fallende Funktionenfolge bildet. Anderenfalls setzt man $\tilde{A}^n_t(\omega) := \min_{k=1,\dots,n} A^k_t(\omega)$, $t \geqslant 0$. Es ist dann $\tilde{A}^n_t = A^n_t$, $t \geqslant 0$, $\mathbf{P}$-f.-s., so daß die $\tilde{A}^n$ ebenfalls (Z)(f) lösen, jedoch fallend sind für alle $\omega \in \Omega$. Für jedes ω ist dann die monotone Grenzfunktion $A_t(\omega) := \lim_{n\to\infty} A^n_t(\omega)$, $t \geqslant 0$, wohldefiniert und rechtsstetig auf $[0, S(A(\omega)))$. Wir zeigen nun $A \in \mathcal{L}_{W,\mathbb{F}}(f)$. Dazu muß $A_{S(A)-} = A_{S(A)}$ $\mathbf{P}$-f.-s. gelten, was aus Satz 5.72 folgt, wenn wir dort $f_n := f$, $n \in \mathbb{N}$, setzen. Wegen der Rechtsstetigkeit von $\mathbb{F}$ ist A außerdem eine $\mathbb{F}$-Zeittransformation. Mit der Bezeichnung $D^m := D^m(W \circ A^m)$ reicht es nun zu zeigen, daß für alle $m \in \mathbb{N}$ und alle $t \geqslant 0$

$$A_{t\wedge D^m} = \int_0^{t\wedge D^m} f(s, W \circ A_s)\, ds \quad \mathbf{P}\text{-f.-s.} \tag{6.6}$$

gilt. Wir benötigen dazu zwei Abschätzungen. Seien $X := W \circ A$ und $X^n := W \circ A^n$.

Lemma 6.7 *Sei $\psi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ meßbar. Es gelte $N(\psi) \supseteq N(f)$ und $n \geqslant m \in \mathbb{N}$. Dann existiert eine nur von m abhängige Konstante C_m mit*

$$\mathbf{E}\int_0^{t\wedge D^m} \psi(s, X^n_s)\, ds \leqslant C_m \|\psi\|_{L^2(K_{t,m},\mu)}\,.$$

Beweis: X^n genügt den Voraussetzungen von Lemma 2.38, so daß wir wegen $\psi|_{N(f)} \equiv 0$ und $D^m \leqslant D^m(X^n)$ erhalten:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\int_0^{t\wedge D^m} \psi(s, X^n_s)\, ds &= \mathbf{E}\int_0^{t\wedge D^m} \left(\psi f^{\frac{1}{2}} f^{-\frac{1}{2}}\right)(s, X^n_s)\, ds \\ &\leqslant C_m \left\|\psi f^{-\frac{1}{2}}\right\|_{L^2(K_{t,m},\lambda)} = C_m \|\psi\|_{L^2(K_{t,m},\mu)}\,.\end{aligned}$$

■

Lemma 6.8 *Sei ψ wie in Lemma 6.7, $N(\psi) \supseteq N(f)$ und $\psi \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mu)$. Dann gilt*

$$\mathbf{E}\int_0^{t\wedge D^m} \psi(s, X_s)\, ds \leqslant C_m \|\psi\|_{L^2(K_{t,m},\mu)} \tag{6.9}$$

Beweis: (vgl. auch Lemma 5.70) 1) Sei ψ stetig. Mit Lemma 6.7 und majorisierter Konvergenz folgt (6.9).

2) Sei ψ meßbar. Es gibt nach Lemma A9 eine fallende Folge $\left(\tilde{\psi}_i\right)_{i\in\mathbb{N}}$ nach unten halbstetiger Funktionen aus $L^2_{\mathrm{loc}}(\mu)$ mit $N(\psi) \supseteq N(\tilde{\psi}_i) \supseteq F(f)$, die von oben in $L^2_{\mathrm{loc}}(\mu)$ gegen ψ

konvergiert. Setzen wir $\psi_i := \tilde{\psi}_i I_{N^c(f)}$, so ist ψ_i wegen der Abgeschlossenheit von $N(f)$ immer noch nach unten halbstetig. Es gilt außerdem $\psi(x) \leqslant \psi_i(x)$, $x \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, $\psi_i \xrightarrow{i\to\infty} \psi$ in $L^2_{\mathrm{loc}}(\mu)$ und wegen $N(\psi_i) \supseteq N(f)$ auch $\psi_i|_{N(f)} \equiv 0$, $i \in \mathbb{N}$. Approximieren wir ψ_i von unten durch stetige nichtnegative $\psi_{i,k}$, so gilt erst recht $\psi_{i,k}|_{N(f)} \equiv 0$ und damit (6.9) für $\psi_{i,k}$, $i,k \in \mathbb{N}$, nach 1). Wie im Beweis zu Lemma 5.70 erhalten wir mit monotoner Konvergenz (6.9) auch für ψ_i. Nun gilt:

$$\mathbf{E}\int_0^{t\wedge D^m} \psi(s,X_s)\,ds \leqslant \mathbf{E}\int_0^{t\wedge D^m} \psi_i(s,X_s)\,ds \leqslant C_m\|\psi_i\|_{L^2(K_{t,m},\mu)} < \infty\,.$$

Wegen $\|\psi_i\|_{L^2(K_{t,m},\mu)} \xrightarrow{i\to\infty} \|\psi\|_{L^2(K_{t,m},\mu)}$ (auf Grund monotoner Konvergenz) folgt die Behauptung. ■

Wir setzen den Beweis von Lemma 6.5 fort. Analog zur Methode der Existenzsätze wählen wir ein beliebiges $\varepsilon > 0$ und schätzen mit Hilfe der Chebyshev-Ungleichung ab:

$$\begin{aligned}(6.10)\quad &\mathbf{P}\left(\left|A_{t\wedge D^m} - \int_0^{t\wedge D^m} f(s,X_s)\,ds\right| > \varepsilon\right)\\ &\leqslant \mathbf{P}\left(|A^n_{t\wedge D^m} - A_{t\wedge D^m}| > \frac{\varepsilon}{2}\right) + \frac{2}{\varepsilon}\mathbf{E}\int_0^{t\wedge D^m} |f(s,X^n_s) - f(s,X_s)|\,ds\,.\end{aligned}$$

Der erste Summand in (6.10) konvergiert mit $n \to \infty$, da nach Voraussetzung schon $A^n_t \xrightarrow{n\to\infty} A_t$, $t \geqslant 0$, $\mathbf{P}$-f.-s. gilt. Wir zeigen nun, daß der zweite Summand mit $n \to \infty$ verschwindet. Nach Lemma 6.1 finden wir eine Folge stetiger Funktionen $(h_q)_{q\in\mathbb{N}}$ mit $N(h_q) = N(f)$, die in $L^2_{\mathrm{loc}}(\mu)$ gegen f konvergiert. Die Menge

$$N(|h_q - f|) \supseteq N(f) \cap N(h_q)$$

ist wegen $N(f) = N(h_q)$ Obermenge von $N(f)$, so daß dann Lemma 6.7 und 6.8 folgendes ergeben:

$$\begin{aligned}(6.11)\quad &\mathbf{E}\int_0^{t\wedge D^m(W)} |f(s,X^n_s) - f(s,X_s)|\,ds\\ &\leqslant \mathbf{E}\int_0^{t\wedge D^m(W)} |f(s,X^n_s) - h_q(s,X^n_s)|\,ds\\ &\quad+\mathbf{E}\int_0^{t\wedge D^m(W)} |h_q(s,X_s) - f(s,X_s)|\,ds\\ &\quad+\mathbf{E}\int_0^{t\wedge D^m(W)} |h_q(s,X^n_s) - h_q(s,X_s)|\,ds\\ &\leqslant 2C_m\|f - h_q\|_{L^2(K_{t,m},\mu)} + \mathbf{E}\int_0^{t\wedge D^m(W)} |h_q(s,X^n_s) - h_q(s,X_s)|\,ds\,.\end{aligned}$$

Mit dem üblichen Argument der lokalen Beschränktheit folgt

$$\mathbf{E}\int_0^{t\wedge D^m(W)} |h_q(s,X^n_s) - h_q(s,X_s)|\,ds \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

für jedes $q \in \mathbb{N}$. Damit gilt

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}\int_0^{t\wedge D^m(W)} |f(s,X^n_s) - f(s,X_s)|\,ds \leqslant 2C_m\|f - h_q\|_{L^2(K_{t,m},\mu)}\,,\quad q \in \mathbb{N}\,,$$

so daß die linke Seite gleich Null ist. ■

Satz 6.12 *Die Funktion f erfülle die Voraussetzungen von Lemma 6.5. Dann enthält $\mathfrak{L}_{W,\mathbb{F}}(f)$ ein minimales Element, d. h. eine* (Z)(f)*-Lösung bzgl.* $(W, \mathbb{F})$*, die* $\mathbf{P}$*-f.-s. kleiner oder gleich allen anderen solchen Lösungen ist.*

Beweis: Zunächst ist $\mathfrak{L}_{W,\mathbb{F}}(f)$ nicht leer nach Satz 5.63. Wir zeigen die Existenz einer absteigenden Folge von $\mathbb{F}$-Stoppzeitprozessen aus $\mathfrak{L}_{W,\mathbb{F}}(f)$, die das Infimum realisiert, also eine Folge $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} A^n_t \leqslant A_t$, $t \geqslant 0$, $\mathbf{P}$-f.-s. für alle $A \in \mathfrak{L}_{W,\mathbb{F}}(f)$ und alle $t \in \mathbb{R}_+$. Aus Lemma 6.5 folgt dann die Behauptung. Wir wählen uns eine streng monotone wachsende, stetige beschränkte reelle Funktion auf $[0, \infty]$, etwa $\arctan(\cdot)$, und ein $t \in \mathbb{Q}_+$. Wir setzen $\arctan(\infty) := \frac{\pi}{2}$. Für jedes $A \in \mathfrak{L}_{W,\mathbb{F}}(f)$ existieren die stets endlichen Werte $\mathbf{E}\arctan(A_t) \in [0, \frac{\pi}{2}]$ und $\inf\{\mathbf{E}\arctan(A_t) : A \in \mathfrak{L}_{W,\mathbb{F}}(f)\}$. Wir können eine Folge von Lösungen auswählen, die dieses Infimum realisiert. Sei dies $(A^{n,t})_{n\in\mathbb{N}}$, wobei wir solche Folgen für alle $t \in \mathbb{Q}_+$ gewinnen:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\arctan A^{n,t}_t = \inf_{A'\in\mathfrak{L}_{W,\mathbb{F}}(f)} \mathbf{E}\arctan A'_t .$$

Weiterhin sei $\left(\tilde{A}^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Aufzählung der Prozeßfamilie $\{A^{n,t} : n \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{Q}_+\}$. Wir setzen $A^n_t := \min_{i=1,\dots,n} \tilde{A}^n_t$, $t \geqslant 0$, und bemerken, daß die A^n eine für alle ω in n fallende Folge bilden und wegen Lemma 3.3 in $\mathfrak{L}_{W,\mathbb{F}}(f)$ liegen. Vor allem aber gilt für jedes $t \in \mathbb{Q}_+$

$$\lim_{n\to\infty} A^n_t = \inf_{n\in\mathbb{N}} \tilde{A}^n_t \leqslant \inf_{n\in\mathbb{N}} A^{n,t}_t ,$$

womit sich für die Erwartungswerte mit dem Lemma von Fatou folgendes ergibt:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\arctan \lim_{n\to\infty} A^n_t &\leqslant \mathbf{E}\arctan \inf_{n\in\mathbb{N}} A^{n,t}_t = \mathbf{E} \inf_{n\in\mathbb{N}} \arctan A^{n,t}_t \\ &\leqslant \inf_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{E}\arctan A^{n,t}_t = \inf_{A'\in\mathfrak{L}_{W,\mathbb{F}}(f)} \mathbf{E}\arctan A'_t , \quad t \in \mathbb{Q}_+ .\end{aligned}$$

Der Grenzprozeß $A_t := \lim_{n\to\infty} A^n_t$, $t \geqslant 0$, liegt nach Lemma 6.5 in $\mathfrak{L}_{W,\mathbb{F}}(f)$, so daß folgt:

$$\mathbf{E}\arctan A_t = \inf_{A'\in\mathfrak{L}_{W,\mathbb{F}}(f)} \mathbf{E}\arctan A'_t , \quad t \in \mathbb{Q}_+ .$$

Für jedes $A' \in \mathfrak{L}_{W,\mathbb{F}}(f)$ liegt auch $A \wedge A'$ in $\mathfrak{L}_{W,\mathbb{F}}(f)$. Es ist für alle $t \in \mathbb{Q}_+$ dann $\mathbf{E}\arctan(A_t \wedge A'_t) = \mathbf{E}\arctan(A_t)$ und wegen der strengen Montonie von $\arctan(\cdot)$ folglich $A_t \wedge A'_t = A_t$ $\mathbf{P}$-f.-s., also $A_t \leqslant A'_t$ $\mathbf{P}$-f.-s. für alle $t \in \mathbb{Q}_+$. Dies impliziert $A_t \leqslant A'_t$ $\mathbf{P}$-f.-s. für alle $t \in \mathbb{R}_+$. ■

Bemerkung 6.13 Aus demselben Grunde wie in Bemerkung 5.80 ist unter der Voraussetzung $F(f) \subseteq N(f)$, $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\lambda)$ die Abgeschlossenheit von $N(f)$ kein notwendiges Kriterium für die Existenz einer minimalen Lösung. Es gibt aber Beispiele, bei denen gerade diese Bedingung verletzt ist und keine minimale Lösung existiert.

Beispiel 6.14 Sei

$$f(t, x) := f(x) := \begin{cases} 0 & : \ \exists n \text{ mit } 1 + 2^{-n} = x \\ 1 & : \ \text{sonst} \end{cases} , \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} ,$$

und $(W, \mathbb{F})$ ein üblicher Wienerprozeß mit dem Startpunkt Null. Der Prozeß $A_t := t$, $t \geqslant 0$, liegt in $\mathfrak{L}_{W,\mathbb{F}}(f)$, denn für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist

$$\int_0^\infty I_{\{x\}}(W_s)\, ds = 0 \quad \mathbf{P}\text{-f.-s.} ,$$

so daß wir

$$A_t - \int_0^t f(W \circ A_s)\, ds = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t I_{\{1+2^{-n}\}}(W_s)\, ds = 0\,, \quad t \geqslant 0\,, \quad \mathbf{P}\text{-f.-s.}$$

erhalten. Weiterhin bildet auch

$$A_t^n := t \wedge \inf\left\{s \geqslant 0 \,:\, W_s \geqslant 1 + 2^{-n}\right\}, \quad t \geqslant 0\,, \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

eine absteigende Folge von (Z)(f)-Lösungen. Diese konvergiert offenbar gegen den Prozeß

$$A_t^* := t \wedge \tau\,, \quad t \geqslant 0\,, \quad \text{mit } \tau := \inf\{s \geqslant 0 \,:\, W_s > 1\}\,.$$

Zwar ist A^* eine $\mathbb{F}$-Zeittransformation (sogar eine reine), gehört aber nicht zu $\mathfrak{L}_{W,\mathbb{F}}(f)$, denn es ist $\tau < \infty$ **P**-f.-s., $W\tau = 1$ **P**-f.-s. und $f(1) = 1$, so daß (Z)(f) für $t > \tau$ nicht erfüllt ist. Eine andere $\mathbb{F}$-Zeittransformation $A'_t \leqslant A^*_t$, $t \geqslant 0$, **P**-f.-s. kann ebenfalls nicht Lösung sein, denn es ist dann $W_{A'_s} \leqslant 1$, $s \geqslant 0$, **P**-f.-s., also $f(W_{A'_s}) = 1$, $s \geqslant 0$, **P**-f.-s., das heißt, $A'_t = t$, $t \geqslant 0$, **P**-f.-s. Es gilt aber $\tau < \infty$ **P**-f.-s. Hat man also irgendein $A \in \mathfrak{L}_{W,\mathbb{F}}(f)$, so findet man ein $t > 0$ und ein $n \in \mathbb{N}$ derart, daß $A^n \wedge A \in \mathfrak{L}_{W,\mathbb{F}}(f)$ zur Zeit t mit positiver Wahrscheinlichkeit echt kleiner als A ist. Somit gibt es keine minimale (Z)(f)-Lösung.

Wir untersuchen nun maximale Lösungen und erhalten das Analogon zu Lemma 6.5.

Lemma 6.15 *Es sei eine* **P***-f.-s. wachsende Folge* $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *von Elementen aus* $\mathfrak{L}_{W,\mathbb{F}}(f)$ *gegeben. Im übrigen mögen die Voraussetzungen aus Lemma 6.5 gelten. Dann existiert ein Grenzprozeß, welcher ebenfalls zu* $\mathfrak{L}_{W,\mathbb{F}}(f)$ *gehört.*

Beweis: Der Grenzprozeß $A_t := \lim_{n\to\infty} A_t^n$, $t \geqslant 0$, ist wohldefiniert, wachsend und linksstetig (da wachsend und nach oben halbstetig) für $t < S(A)$. Der Fall $A_{S(A)-} < A_{S(A)+}$ ist nach Satz 5.20 **P**-f.-s. ausgeschlossen, so daß es reicht zu zeigen, daß $X := W \circ A$ für $t \geqslant 0$, $m \in \mathbb{N}$ die Gleichung

$$A_{t\wedge D^m(X)} = \int_0^{t\wedge D^m(X)} f(s, X_s)\, ds \quad \mathbf{P}\text{-f.-s.} \tag{6.16}$$

erfüllt. Die Folge $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ wächst monoton, so daß $D^m(X) = D^m(W \circ A) \leqslant D^m(W \circ A^n)$ gilt. Wir erhalten also für ein ψ wie in Lemma 6.7

$$\mathbf{E} \int_0^{t\wedge D^m(X)} \psi(s, X_s^n)\, ds \leqslant C_m \|\psi\|_{L^2(K_{t,m},\mu)} \tag{6.17}$$

und darüberhinaus für ein ψ wie in Lemma 6.8

$$\mathbf{E} \int_0^{t\wedge D^m(X)} \psi(s, X_s)\, ds \leqslant C_m \|\psi\|_{L^2(K_{t,m},\mu)}\,. \tag{6.18}$$

Der Beweis hierzu ist analog zu Lemma 6.8; lediglich D^m muß durch $D^m(X)$ ersetzt werden. Mit (6.17) und (6.18) ist nun dieselbe Abschätzung wie in (6.11) möglich, so daß die Behauptung wie in Satz 6.12 folgt. Hierbei muß wiederum D^m durch $D^m(X)$ ersetzt werden.

Satz 6.19 *Für f seien die Voraussetzungen von Lemma 6.5 erfüllt. Dann enthält* $\mathfrak{L}_{W,\mathbb{F}}(f)$ *ein maximales Element.*

Beweis: erfolgt wie zu Satz 6.12, jedoch unter Verwendung von Lemma 6.15 statt Lemma 6.5, wobei Minima durch Maxima ersetzt werden. ■

Zusammenfassend ergibt sich:

Satz 6.20 *Es sei* $(W, \mathbb{F})$ *ein üblicher Wienerprozeß und* $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *eine meßbare Funktion mit den folgenden Eigenschaften:*

(i) $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\lambda)$;

(ii) $N(f) \supseteq F(f)$;

(iii) $N(f)$ *ist abgeschlossen.*

Dann ist $\mathcal{L}_{W,\mathbb{F}}(f)$ *nicht leer und hat ein maximales und ein minimales Element.*

6.2 Maximale und Fundamentallösungen

Wir betrachten in diesem Abschnitt zeitunabhängige (Z)-Koeffizienten $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$. Die Mengen $N(f)$ und $F(f)$ seien analog auf $\mathbb{R}$ definiert. Wir setzen $F(f) \subseteq N(f)$ voraus. Diese einfache Bedingung ist sogar notwendig und hinreichend für die Existenz von schwachen (SDE)($f^{\frac{1}{2}}$)-Lösungen zu allen Startpunkten $x_0 \in \mathbb{R}$ (s. [10], (4.17)). Sei $(X, \mathbb{F})$ eine schwache (SDE)($f^{\frac{1}{2}}$)-Lösung und

$$D_{F(f)}(X) := \inf\{s \geqslant 0 \,:\, X_s \in F(f)\}\,.$$

Definition 6.21 Die (SDE)-Lösung X heißt *Fundamentallösung*, wenn

$$f(X_s) > 0 \quad (\lambda^1 \otimes \mathbf{P})\text{-f.-ü. auf } [0, D_{F(f)}(X)) \tag{6.22}$$

gilt.

Fundamentallösungen sind eindeutig in Verteilung ([10], (4.22)). Ein wachsender $\mathbb{F}$-adaptierter rechtsstetiger Prozeß V mit $V_0 = 0$ heißt $(X, \mathbb{F})$-*Zeitverzögerung*, wenn folgende Gleichung erfüllt ist:

$$\int_0^\infty I_{N^c(f) \cup F(f)}(X_s)\, dV_s = 0 \quad \mathbf{P}\text{-f.-s.}$$

Ist dann U die rechtsstetige Inverse von $t + V_t$, $t \geqslant 0$, so nennen wir $(X \circ U, \mathbb{F} \circ U)$ den *durch V zeitverzögerten Prozeß*. Der wachsende Prozeß U ist eine $\mathbb{F}$-Zeittransformation. Für die quadratische Variation ergibt sich

$$\langle X \circ U \rangle_t = \langle X \rangle_{U_t}\,, \quad t \geqslant 0\,, \quad \mathbf{P}\text{-f.-s.}$$

Jede (SDE)($f^{\frac{1}{2}}$)-Lösung läßt sich aus einer Fundamentallösung durch Zeitverzögerung rekonstruieren[11] (s. [10], (4.61)). Da stets $U_t \leqslant t$, $t \geqslant 0$, gilt, wird bei Zeitverzögerung die quadratische Variation verkleinert. Es leuchtet daher ein, wenn sich die quadratische Variation einer Fundamentallösung in folgendem Sinne als maximal erweist:

Satz 6.23 *Seien eine meßbare Funktion* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *und ein üblicher Wienerprozeß gegeben. Wir haben mit* $A \in \mathcal{L}_{W,\mathbb{F}}(f)$ *genau dann eine maximale Lösung, wenn* $W \circ A$ *eine Fundamentallösung (in einem ggf. erweiterten Wahrscheinlichkeitsraum) ist.*

[11] nötigenfalls nach geeigneter Erweiterung des Wahrscheinlichkeitsraums

Beweis: (vgl. a. [10], (4.61)) Es sei

$$C_t := \int_0^t f^{-1}(W_s)\, ds\,, \quad t \geqslant 0\,,$$

und A^* die rechtsstetige Inverse von C. Dann ist $W \circ A^*$ eine Fundamentallösung zu (SDE)$(f^{\frac{1}{2}})$ (ebenda), und A^* liegt nach Satz 2.36 in $\mathfrak{L}_{W,\mathbb{F}}(f)$. Gleichzeitig ist A^* maximal: Sei $A' \in \mathfrak{L}_{W,\mathbb{F}}(f)$ beliebig und T' die rechtsstetige Inverse von A'. Dann gilt mit Lemma 2.24 und (Z)(f) für A'

$$\begin{aligned} T'_t &\geqslant \int_0^{T'_t} I_{N^c(f)}(W \circ A'_s)\, ds = \int_0^{T'_t} \left(I_{N^c(f)} f^{-1} + \infty I_{N(f)}\right) f(W \circ A'_s)\, ds \\ &= \int_0^{T'_t} \left(I_{N^c(f)} f^{-1} + \infty I_{N(f)}\right) (W \circ A'_s)\, dA'_s = \int_0^{A'_\infty \wedge t} \left(I_{N^c(f)} f^{-1} + \infty I_{N(f)}\right) (W_s)\, ds \\ &= \int_0^{A'_\infty \wedge t} f^{-1}(W_s)\, ds\,, \quad t \geqslant 0\,, \quad \mathbf{P}\text{-f.-s.} \end{aligned}$$

Für $t \geqslant A'_\infty$ ist $T'_t = \infty$, so daß wir insgesamt

$$T'_t \geqslant \int_0^t f^{-1}(W_s)\, ds = C_t\,, \quad t \geqslant 0\,, \quad \mathbf{P}\text{-f.-s.}$$

und damit $A'_t \leqslant A^*_t$, $t \geqslant 0$, $\mathbf{P}$-f.-s. erhalten. Maximale Lösungen sind pfadweise eindeutig, so daß der zeittransformierte Wienerprozeß *jeder* maximalen Lösung fundamental ist.

Zu einem $A \in \mathfrak{L}_{W,\mathbb{F}}(f)$ sei nun $W \circ A$ eine Fundamentallösung. Da dies auch für die (maximale) Lösung A^* zutrifft und Fundamentallösungen eindeutig in Verteilung sind, folgt $\mathbf{P}^{W\circ A} = \mathbf{P}^{W \circ A^*}$ und nach Teil „(i) ⇒ (ii)“ des Beweises von Satz 3.24

$$\mathbf{P}^A = \mathbf{P}^{A^*}\,.$$

Da aber A^* maximal ist, erhalten wir mit Lemma 3.4

$$A_t = A^*_t\,, \quad t \geqslant 0\,, \quad \mathbf{P}\text{-f.-s.}$$

Also ist A selbst maximal in $\mathfrak{L}_{W,\mathbb{F}}(f)$. ■

Wir erkennen, daß für zeitunabhängige Koeffizienten die maximale Lösung A^* nach Konstruktion offenbar rein ist. Es gilt, diese Eigenschaft auch im zeitabhängigen Fall zu beweisen.

Im Sinne der zu Beginn des Kapitels vorgestellten Interpretation erweist sich – nicht überraschend – auch die Fundamentallösung als Beispiel extrem „unruhigen“ Verhaltens in einem System. Zumindest insofern ist der Begriff der maximalen (Z)-Lösung eine natürliche Fortsetzung des Begriffes der fundamentalen (SDE)-Lösung auf zeitabhängige Koeffizienten. Freilich ist i. a. weder eine Charakterisierung der maximalen Lösung im Sinne von (6.22) möglich noch zu erwarten, daß man durch Zeitverzögerung einer maximalen Lösung überhaupt zu Lösungen gelangt.

6.3 Verteilungsgesetze extremaler Lösungen

6.3.1 Lösungsmaße

Ein auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $[\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}]$ definiertes (Z)-Lösungspaar $((W, \mathbb{F}), A)$ hat Pfade in $C_{\mathbb{R}_+} \times E_+$ und induziert auf $\left[C_{\mathbb{R}_+} \times E_+, \mathcal{B}_{C_{\mathbb{R}_+} \times E_+}\right]$ das Bildmaß (die Verteilung) $\mathbf{Q} = \mathbf{P}^{W,A}$. Im Beweis zu Satz 3.8 wird die Filtration $\mathbb{B} \otimes \mathbb{D}$ auf $[C_{\mathbb{R}_+} \times E_+, \mathcal{B}_{C_{\mathbb{R}_+} \times E_+} \vee \mathcal{N}^{\mathbf{Q}}, \mathbf{Q}]$ eingeführt und gezeigt, daß dann die identische Abbildung in $C_{\mathbb{R}_+} \times E_+$ unter $\mathbf{Q}$ das (Z)-Lösungspaar $((w, (\mathbb{B} \otimes \mathbb{D})_+^{\mathbf{Q}}), x)$ bildet. Nach Konstruktion der Filtration ist x stets eine $(\mathbb{B} \otimes \mathbb{D})_+^{\mathbf{Q}}$-Zeittransformation (sogar schon eine $(\{\emptyset, C_{\mathbb{R}_+}\} \otimes \mathbb{D})$-Zeittransfomation). Abgesehen von der Forderung, daß sich die Wahrscheinlichkeitsmasse auf Paaren (w, x) konzentriert, die (Z)(f) erfüllen, und davon, daß die Projektion $(w, x) \mapsto w$ das Wienermaß induziert, liegt das entscheidende Kriterium darin, ob $(w, \mathbb{B} \otimes \mathbb{D})$ ein Wienerprozeß unter $\mathbf{Q}$ ist oder nicht. Wir betrachten nun die Klasse aller solcher Bildmaße:

$$\mathcal{L}(f) := \left\{ \mathbf{Q} \ : \ \begin{array}{l} \mathbf{Q} \text{ ist ein W-Maß auf } \left[C_{\mathbb{R}_+} \times E_+, \mathcal{B}_{C_{\mathbb{R}_+} \times E_+}\right] \\ \left(\left(w, (\mathbb{B} \otimes \mathbb{D})_+^{\mathbf{Q}}\right), x\right) \text{ ist (Z)}(f)\text{-Lösungspaar unter } \mathbf{Q} \end{array} \right\}$$

Ein Element von $\mathcal{L}(f)$ heißt *Lösungsmaß*. Wir führen nun eine Halbordnung auf $\mathcal{L}(f)$ ein. Sei $\mathcal{E}$ das System aller Mengen der Gestalt

$$\text{(6.24)} \quad \left\{(w, x) \in C_{\mathbb{R}_+} \times E_+ \ : \ w(t_i) \leqslant c_i,\ i = 1, \ldots, m,\ x(s_j) \leqslant d_j,\ j = 1, \ldots, n\right\}$$

mit $0 \leqslant t_1 < \ldots < t_m < \infty$, $m \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant s_1 < \ldots < s_n < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{R}$, $d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{R}_+$.

Definition 6.25 Seien $\mathbf{Q}, \mathbf{Q}' \in \mathcal{L}(f)$. Wir schreiben $\mathbf{Q} \leqslant \mathbf{Q}'$, falls $\mathbf{Q}(B) \geqslant \mathbf{Q}'(B)$ für alle $B \in \mathcal{E}$ gilt.

Lemma 6.26 *Die Relation „$\leqslant$“ ist eine Halbordnung.*

Beweis: Reflexivität und Transitivität sind trivial erfüllt. Die Relation ist aber auch antisymmetrisch: $\mathbf{Q} \leqslant \mathbf{Q}'$ und $\mathbf{Q} \geqslant \mathbf{Q}'$ implizieren $\mathbf{Q}(B) = \mathbf{Q}'(B)$, $B \in \mathcal{E}$. Das System $\mathcal{E}$ erzeugt $\mathcal{B}_{C_{\mathbb{R}_+} \times E_+}$ und ist $\cap$-abgeschlossen, also eine maßbestimmende Klasse, so daß $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}'$ folgt. ■

Lemma 6.27 *Sei $(W, \mathbb{F})$ ein üblicher Wienerprozeß und gelte für $A^1, A^2 \in \mathcal{L}_{W,\mathbb{F}}(f)$:*

$$A_t^1 \leqslant A_t^2\,, \quad t \geqslant 0\,, \quad \mathbf{P}\text{-f.-s.}$$

Dann gilt $\mathbf{P}^{(W,A^1)} \leqslant \mathbf{P}^{(W,A^2)}$.

Beweis: Sei $B \in \mathcal{E}$ wie in (6.24). Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{(W,A^1)}(B) &= \mathbf{P}\left(A_{s_j}^1 \leqslant d_j,\ W_{t_i} \leqslant c_i,\ i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n\right) \\ &= \mathbf{P}\left(A_{s_j}^1 \leqslant A_{s_j}^2,\ A_{s_j}^1 \leqslant d_j,\ W_{t_i} \leqslant c_i,\ i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n\right) \\ &\geqslant \mathbf{P}\left(A_{s_j}^2 \leqslant d_j,\ W_{t_i} \leqslant c_i,\ i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n\right) \\ &= \mathbf{P}^{(W,A^2)}(B)\,. \end{aligned}$$

■

Wir nennen ein Lösungsmaß $\mathbf{Q} \in \mathcal{L}(f)$ *maximal* (*minimal*), wenn $\mathbf{Q} \geqslant \mathbf{Q}'$ für jedes $\mathbf{Q}' \in \mathcal{L}(f)$ ($\mathbf{Q} \leqslant \mathbf{Q}'$ für jedes $\mathbf{Q}' \in \mathcal{L}(f)$) gilt.

Satz 6.28 *Sei $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ meßbar. Gibt es zu jedem üblichen Wienerprozeß $(W, \mathbb{F})$ eine maximale (minimale) (Z)(f)-Lösung, so hat $\mathcal{L}(f)$ ein maximales (minimales) Element. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn $F(f) \subseteq N(f)$ gilt, f lokal integrierbar ist und $N(f)$ abgeschlossen.*

Beweis: Zunächst stellen wir fest, daß $\mathcal{E}$ durch ein abzählbares System $\mathcal{E}^* \subseteq \mathcal{E}$ ersetzt werden kann – etwa durch die Familie von Mengen wie in (6.24) mit $t_i, c_i, s_j, d_j \in \mathbb{Q}$. Diese bilden ebenfalls eine maßbestimmende Klasse, und man rechnet elementar nach:

$$\mathbf{Q}(B) \geqslant \mathbf{Q}'(B)\,,\ \forall B \in \mathcal{E} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{Q}(B) \geqslant \mathbf{Q}'(B)\,,\ \forall B \in \mathcal{E}^*\,.$$

Sei $(B_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Aufzählung von $\mathcal{E}^*$. Gesucht ist ein maximales Lösungsmaß, also ein $\mathbf{Q}^* \in \mathcal{L}(f)$ mit

$$\mathbf{Q}^*(B_j) = \inf_{\mathbf{Q}\in\mathcal{L}(f)} \mathbf{Q}(B_j)\,, \quad j \in \mathbb{N}\,.$$

Offenbar gibt es für jedes j eine Folge $\left(\mathbf{Q}_i^{(j)}\right)_{i\in\mathbb{N}}$ von Elementen aus $\mathcal{L}(f)$ mit

$$\lim_{i\to\infty} \mathbf{Q}_i^{(j)}(B_j) = \inf_{\mathbf{Q}\in\mathcal{L}(f)} \mathbf{Q}(B_j)\,. \tag{6.29}$$

Wir konstruieren nun einen Wahrscheinlichkeitsraum, auf dem verschiedene Prozesse mit ein und demselben Wienerprozeß (Z)(f)-Lösungspaare mit den Lösungsmaßen $\mathbf{Q}_i^{(j)}$ bilden. Es gibt – wie im Beweis zu Satz 3.8 ausgeführt – bedingte reguläre Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathbf{Q}_i^{(j)}(\,\cdot\,,\,\cdot\,) : C_{\mathbb{R}_+} \times \mathcal{B}_{E_+} \to [0,1]$ mit den Eigenschaften:

(i) Die Abbildung $\mathbf{Q}_i^{(j)}(w,\,\cdot\,)$ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\left[E_+, \mathcal{B}_{E_+}\right]$ für alle $w \in C_{\mathbb{R}_+}$;

(ii) Die Abbildung $\mathbf{Q}_i^{(j)}(\,\cdot\,,\Gamma)$ ist für alle $\Gamma \in \mathcal{B}_{E_+}$ bezüglich $\mathcal{B}_{C_{\mathbb{R}_+}}$ meßbar;

(iii) für $B \in \mathcal{B}_{E_+}$, $B' \in \mathcal{B}_{C_{\mathbb{R}_+}}$ gilt

$$\mathbf{Q}_i^{(j)}(B' \times B) = \int_{B'} \mathbf{Q}_i^{(j)}(w, B)\,\mathbf{W}(dw) \tag{6.30}$$

($\mathbf{W}$ ist das Wienermaß).

Wir betrachten den meßbaren Raum

$$[M, \mathcal{M}] := \left[\ \mathop{\times}_{\mathbb{N}^2} E_+, \bigotimes_{\mathbb{N}^2} \mathcal{B}_{E_+}\right].$$

Ist $I = \{(i_k, j_k) : k = 1, \ldots, n\}$ eine endliche Teilmenge des $\mathbb{N}^2$, so bezeichne $\pi_I : M \to E_+^n$ die Projektion $\pi_I(x) := (x_{(i_k,j_k)})_{k=1,\ldots,n}$, $x \in M$. Auf $[M, \mathcal{M}]$ definieren wir nun die durch $w \in C_{\mathbb{R}_+}$ parametrisierte Familie von Produktmaßen

$$\mathbf{Q}(w,\,\cdot\,) := \bigotimes_{\mathbb{N}^2} \mathbf{Q}_i^{(j)}(w,\,\cdot\,)\,, \quad w \in C_{\mathbb{R}_+}\,,$$

wobei die rechte Seite dasjenige eindeutig bestimmte Wahrscheinlichkeitsmaß auf $[M,\mathcal{M}]$ bezeichnet, für welches

$$\bigotimes_{\mathbb{N}^2} \mathbf{Q}_i^{(j)}\left(w, \pi_I^{-1}(\Gamma_1 \times \ldots \times \Gamma_n)\right) = \prod_{k=1}^n \mathbf{Q}_{i_k}^{(j_k)}(w, \Gamma_k) \tag{6.31}$$

für beliebige $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n \in \mathcal{B}_{E_+}$, $I \subseteq \mathbb{N}^2$, $\mathrm{card} I = n$, $n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist (s. etwa [1], §9). Für Zylindermengen B aus

$$\mathcal{R} := \left\{ \pi_I^{-1}(\Gamma_1 \times \ldots \times \Gamma_n) \ : \ \begin{array}{l} \Gamma_1, \ldots, \Gamma_n \in \mathcal{B}_{E_+},\ n \in \mathbb{N}, \\ I \subseteq \mathbb{N}^2,\ \mathrm{card} I = n \end{array} \right\}$$

ist $\mathbf{Q}(\,\cdot\,, B)$ nach (6.31) und (ii) offenbar $\mathcal{B}_{C_{\mathbb{R}_+}}$-meßbar. Wir bemerken, daß mit den Definitionen von $\mathcal{B}_s$ und $\mathcal{D}_s$ aus (3.11) für $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n \in \mathcal{D}_s$ die Abbildung

$$w \mapsto \mathbf{Q}\left(w, \pi_I^{-1}(\Gamma_1 \times \ldots \times \Gamma_n)\right)$$

auch $\mathcal{B}_s^{\mathbf{W}} \cap \mathcal{B}_{C_{\mathbb{R}_+}}$-meßbar ist (s. auch Lemma 3.14). Das Integral

$$\mathbf{Q}(B' \times B) := \int_{B'} \mathbf{Q}(w, B) \mathbf{W}(dw)\,, \quad B' \in \mathcal{B}_{C_{\mathbb{R}_+}}\,, \quad B \in \mathcal{R}\,,$$

ist auf dem Halbring $\left\{ B' \times B \ : \ B' \in \mathcal{B}_{C_{\mathbb{R}_+}}, B \in \mathcal{R} \right\}$, welcher $\mathcal{B}_{C_{\mathbb{R}_+}} \otimes \mathcal{M}$ erzeugt, ein Maß mit $\mathbf{Q}(C_{\mathbb{R}_+} \times M) = 1$, so daß wir $\mathbf{Q}$ eindeutig zu einem Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{B}_{C_{\mathbb{R}_+}} \otimes \mathcal{M}$ fortsetzen können. Dabei ist die Randverteilung der ersten Komponente das Wienermaß und $\mathbf{Q}\left((\pi^0, \pi_{\{(i,j)\}})^{-1}(\,\cdot\,)\right) = \mathbf{Q}_i^{(j)}(\,\cdot\,)$ für $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, wobei π_0 die Projektion $\pi^0 : C_{\mathbb{R}_+} \times M \ni (w,x) \mapsto w \in C_{\mathbb{R}_+}$ bezeichnet. Mit der Filtration

$$\mathbb{M} := (\mathcal{M}_s)_{s \geqslant 0} := \left(\mathcal{B}_s \otimes \bigotimes_{\mathbb{N}^2} \mathcal{D}_s \right)_{s \geqslant 0}$$

ausgestattet, ist $(w, \mathbb{M})$ auf $\left[C_{\mathbb{R}_+} \times M, \mathcal{B}_{C_{\mathbb{R}_+}} \otimes \mathcal{M}, \mathbf{Q}\right]$ ein Wienerprozeß, denn wir erhalten für $D = \pi_I^{-1}(\Gamma_1 \times \ldots \times \Gamma_n)$, $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n \in \mathcal{D}_s$, $I \subseteq \mathbb{N}^2$, $\mathrm{card} I = n$, $t \geqslant s \geqslant 0$, $B \in \mathcal{B}_s$, $\Gamma \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}_+}$ wie in (3.18)

$$\begin{aligned}
&\mathbf{Q}\left(\{w(t) - w(s) \in \Gamma\} \cap (B \times D)\right) \\
&= \int_{C_{\mathbb{R}_+}} I_{\{w(t)-w(s) \in \Gamma\}}\, I_B(w) \prod_{k=1}^n \mathbf{Q}_{i_k}^{(j_k)}(w, \Gamma_k)\, \mathbf{W}(dw) \\
&= \mathbf{E}^{\mathbf{W}} \left[\mathbf{E}^{\mathbf{W}} \left(I_{\{w(t)-w(s) \in \Gamma\}} \,|\mathcal{B}_s \right)\, I_B(w) \prod_{k=1}^n \mathbf{Q}_{i_k}^{(j_k)}(w, \Gamma_k) \right] \\
&= \mathbf{W}\left(w(t) - w(s) \in \Gamma\right) \mathbf{E}^{\mathbf{W}} \left[I_B(w) \prod_{k=1}^n \mathbf{Q}_{i_k}^{(j_k)}(w, \Gamma_k) \right] \\
&= \mathbf{Q}(w(t) - w(s) \in \Gamma)\, \mathbf{Q}(B \times D)\,.
\end{aligned}$$

Wegen der $\cap$-Abgeschlossenheit des Systems

$$\tilde{\mathcal{R}}_s := \left\{ B \times \pi_I^{-1}(\Gamma_1 \times \ldots \times \Gamma_n) \ : \ \begin{array}{l} B \in \mathcal{B}_s,\ \Gamma_1, \ldots, \Gamma_n \in \mathcal{D}_s, \\ n \in \mathbb{N},\ I \subseteq \mathbb{N}^2,\ \mathrm{card} I = n \end{array} \right\}$$

ist dann $w(t) - w(s)$ auch von $\sigma\left(\tilde{\mathcal{R}}_s\right) = \mathcal{M}_s$ unabhängig. Nach Lemma 2.13 ist w auch bzgl. $\mathbb{M}_+^{\mathbf{Q}}$ ein (nun üblicher) Wienerprozeß. Folglich sind die Prozesse $x_{i,j} = \pi_{\{(i,j)\}}(x)$ sämtlich Elemente von $\mathcal{L}_{\left(w,\mathbb{M}_+^{\mathbf{Q}}\right)}(f)$ im Wahrscheinlichkeitsraum $[C_{\mathbb{R}_+} \times M, \mathcal{N}^{\mathbf{Q}} \vee (\mathcal{B}_{C_{\mathbb{R}_+}} \otimes \mathcal{M}), \mathbf{Q}]$. In $\mathcal{L}_{\left(w,\mathbb{M}_+^{\mathbf{Q}}\right)}(f)$ gibt es nach Voraussetzung eine maximale Lösung $A^{\max}$, für die also insbesondere $A_t^{\max} \geqslant x_{i,j}(t)$ $\mathbf{Q}$-f.-s., $t \geqslant 0$, $i,j \in \mathbb{N}$, gilt. Mit Lemma 6.27 folgt $\mathbf{Q}^{w,A^{\max}} \geqslant \mathbf{Q}_i^{(j)}$, $i,j \in \mathbb{N}$, also u. a.

$$\mathbf{Q}^{w,A^{\max}}(B_j) \leqslant \mathbf{Q}_i^{(j)}(B_j)\,, \quad i,j \in \mathbb{N}\,.$$

Das ergibt mit (6.29)

$$\mathbf{Q}^{w,A^{\max}}(B_j) = \inf_{\mathbf{Q} \in \mathcal{L}(f)} \mathbf{Q}(B_j)\,, \quad j \in \mathbb{N}\,,$$

da $\mathbf{Q}^{w,A^{\max}}$ selbst in $\mathcal{L}(f)$ liegt. Die Klasse $\mathcal{E}^*$ ist maßbestimmend, also folgt $\mathbf{Q}^{w,A^{\max}} \geqslant \mathbf{Q}$ für alle $\mathbf{Q} \in \mathcal{L}(f)$. Der Beweis für minimale Lösungen verläuft völlig analog. ■

6.3.2 Eindeutigkeit der Verteilungen, Reinheit

Satz 6.32 *Es gelten die Voraussetzungen von Satz 6.28. Sei* $\mathbf{Q}^*$ *das maximale bzw. minimale Lösungsmaß in* $\mathcal{L}(f)$*. Dann existiert ein derartiger eindeutig bestimmter Operator* $F^{\max} : C_{\mathbb{R}_+} \to E_+$ *bzw.* $F^{\min}$*, daß für irgendeinen üblichen Wienerprozeß* $(W, \mathbb{F})$ *auf* $[\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}]$ *der Prozeß* $F^{\max}(W)$ *bzw.* $F^{\min}(W)$ *eine reine* (Z)(f)*-Lösung zu* $(W, \mathbb{F})$ *ist und*

$$\mathbf{P}^{W,F^{\max}(W)} = \mathbf{Q}^* \qquad \textit{bzw.} \qquad \mathbf{P}^{W,F^{\min}(W)} = \mathbf{Q}^* \tag{6.33}$$

gilt. Dieser Operator ist $\mathcal{B}_s^{\mathbf{W}} \cap \mathcal{B}_{C_{\mathbb{R}_+}} \big/ \mathcal{D}_s$*-meßbar für jedes* $s \in \mathbb{R}_+$*.*

Beweis: Wir nehmen an, $\mathbf{Q}^*$ sei maximal, und führen wie im Beweis zu Satz 3.8 das reguläre bedingte Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbf{Q}^*(w, \cdot\,)$ von $x \in E_+$ unter $w \in C_{\mathbb{R}_+}$ im Wahrscheinlichkeitsraum $[C_{\mathbb{R}_+} \times E_+, \mathcal{B}_{C_{\mathbb{R}_+} \times E_+}, \mathbf{Q}^*]$ ein und konstruieren analog das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbf{Q}$ auf $[C_{\mathbb{R}_+} \times E_+ \times E_+, \mathcal{B}_{C_{\mathbb{R}_+} \times E_+ \times E_+}]$ mit

$$\mathbf{Q}(dw\, dx_1\, dx_2) = \mathbf{Q}^*(w, dx_1)\, \mathbf{Q}^*(w, dx_2)\, \mathbf{W}(dw)\,. \tag{6.34}$$

Mit der Filtration $\mathbb{K}$ aus (3.12) sind $((w, \mathbb{K}), x_1)$ und $((w, \mathbb{K}), x_2)$ dann (Z)(f)-Lösungspaare unter $\mathbf{Q}$ – ebenso wie $((w, \mathbb{K}), x_1 \vee x_2)$ (s. Lemma 3.3). Mit Lemma 6.27 folgt $\mathbf{Q}^{w, x_1 \vee x_2} \geqslant \mathbf{Q}^{w,x_1} = \mathbf{Q}^*$ und wegen der Maximalität von $\mathbf{Q}^*$ schließlich $\mathbf{Q}^{w,x_1} = \mathbf{Q}^{w,x_1 \vee x_2}$. Lemma 3.4 ergibt dann $x_1(t) = x_1(t) \vee x_2(t)$, $t \geqslant 0$, $\mathbf{Q}$-f.-s. und wegen der Austauschbarkeit der Indizes $x_1(t) = x_2(t)$, $t \geqslant 0$, $\mathbf{Q}$-f.-s. Wir können nun wie in Folgerung 3.20 fortfahren und erhalten auf dieselbe Weise den Operator $F^{\max}$, für den dann $\mathbf{Q}(x_1 = x_2 = F^{\max}(w))) = 1$ gilt und der $\mathcal{B}_s^{\mathbf{W}} \cap \mathcal{B}_{C_{\mathbb{R}_+}} \big/ \mathcal{D}_s$-meßbar für alle $s \in \mathbb{R}_+$ ist. Weiterhin gilt für $(W, \mathbb{F})$, welches in $[C_{\mathbb{R}_+}, \mathcal{B}_{C_{\mathbb{R}_+}}]$ das Wienermaß induziert:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left((W, F^{\max}(W)) \text{ erfüllt (Z)}(f)\right) &= \mathbf{W}\left((w, F^{\max}(w)) \text{ erfüllt (Z)}(f)\right) \\
&= \mathbf{Q}\left((w, F^{\max}(w)) \text{ erfüllt (Z)}(f)\right) \\
&= \mathbf{Q}\left((w, x_1) \text{ erfüllt (Z)}(f)\right) \\
&= 1\,.
\end{aligned}$$

Mit anderen Worten ist $((W,\mathbb{F}), F^{\max}(W))$ ein (Z)(f)-Lösungspaar, wenn $F^{\max}(W)$ eine $\mathbb{F}$-Zeittransformation ist. Analog zu Folgerung 3.23 ist aber $F^{\max}(W)$ sogar eine $\mathbb{G}^W$-Zeittransformation. Der Beweis für $F^{\min}$ verläuft in derselben Weise. ■

Satz 6.35 *Die Funktion $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ sei meßbar. Weiter gebe es zu jedem üblichen Wienerprozeß $(W,\mathbb{F})$ eine maximale bzw. minimale (Z)(f)-Lösung. Dann ist diese rein und $\mathbf{P}$-f.-s. identisch mit $F^{\max}(W)$ bzw. $F^{\min}(W)$. Die Verteilungsgesetze aller maximalen bzw. aller minimalen Lösungspaare sind gleich.*

Beweis: Es sei auf $[\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}]$ ein üblicher Wienerprozeß $(W,\mathbb{F})$ gegeben. Die Lösung A sei maximal in $\mathcal{L}_{W,\mathbb{F}}(f)$. Nach Satz 6.28 und 6.32 gibt es in $\mathcal{L}(f)$ ein maximales Lösungsmaß $\mathbf{Q}^*$ (so daß also $\mathbf{P}^{W,A} \leqslant \mathbf{Q}^*$ gilt) und den Operator $F^{\max}$, für den $\mathbf{P}^{W,F^{\max}(W)} = \mathbf{Q}^*$ gilt und $\big((W,\mathbb{G}^W), F^{\max}(W)\big)$ ein (Z)(f)-Lösungspaar unter $\mathbf{P}$ bildet. Da A maximal in $\mathcal{L}_{W,\mathbb{F}}(f)$ ist, haben wir $F^{\max}(W)_t \leqslant A_t$ $\mathbf{P}$-f.-s., $t \geqslant 0$, und nach Lemma 6.27 $\mathbf{Q}^* = \mathbf{P}^{W,F^{\max}(W)} \leqslant \mathbf{P}^{W,A}$, also insgesamt $\mathbf{Q}^* = \mathbf{P}^{W,A}$. Mit Lemma 3.3 folgt $F^{\max}(W)(t) = A_t$, $t \geqslant 0$, $\mathbf{P}$-f.-s., so daß auch A eine $\mathbb{G}^W$-Zeittransformation ist. Der Beweis für $F^{\min}$ verläuft analog. ■

Folgerung 6.36 *Ist f lokal integrierbar, $N(f)$ abgeschlossen und gilt $F(f) \subseteq N(f)$, dann gibt es zu jedem üblichen Wienerprozeß eine pfadweise und in Verteilung eindeutige, reine maximale bzw. minimale Lösung.*

Bemerkung 6.37 Stroock und Varadhan behandeln in [25] das *Martingalproblem*, welches in enger Beziehung zu (SDE) steht. Die Lösungen dieses Problems sind Familien von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf einem kanonischen Raum $\left[C^n_{\mathbb{R}_+}, \mathcal{B}_{C^n_{\mathbb{R}_+}}\right]$. Im Falle der Nicht-Eindeutigkeit dieser Lösungen benutzen die Autoren eine ähnliche Extremaleigenschaft wie die unsere, um zu einer streng markovschen Lösungsfamilie[12] zu gelangen. Für uns ergibt sich daraus eine (hier nicht weiter ausgeführte) Folgerung: Ist $b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige und beschränkte Funktion, dann haben die durch extremale (Z)-Lösungen zeittransformierten Wienerprozesse die strenge Markov-Eigenschaft (s. [25], Kap. 12, insbesondere 12.4.1).

6.4 Vergleichssätze für extremale Lösungen

In Kapitel 5 haben wir gesehen, daß man auf jeder Approximationsstufe innerhalb der jeweils betrachteten Funktionenklasse zu zwei Funktionen $f \leqslant g$ speziell konstruierte Lösungen $A^f \leqslant A^g$ finden kann. Haben nun $\mathcal{L}_{W,\mathbb{F}}(f)$ und $\mathcal{L}_{W,\mathbb{F}}(g)$ extremale Lösungen, so liegt die Vermutung nahe, daß dann auch für diese besonders ausgezeichneten Lösungen $A^{f,\max}_t \leqslant A^{g,\max}_t$ bzw. $A^{f,\min}_t \leqslant A^{g,\min}_t$, $t \geqslant 0$, $\mathbf{P}$-f.-s.gilt. Dies ist vergleichsweise bei deterministischen Integralgleichungen im allgemeinen nicht gegeben, wie folgende Konstruktion illustriert:

Beispiel 6.38 Sei die nach oben halbstetige Funktion

$$f'(t,u) := \begin{cases} 1 & : \quad u = t \\ \frac{1}{2} & : \quad \text{sonst} \end{cases}$$

auf $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ gegeben und $f := f' + \frac{1}{4}$. Wir betrachten die Gleichung

$$y(t) = \int_0^t g(s, y(s))\, ds\,, \quad t \geqslant 0\,. \tag{6.39}$$

[12] streng markovsch im zeitabhängigen Sinne

Man sieht unmittelbar, daß (6.39) für $g = f'$ genau die Lösungen $y_1(t) = t$ und $y_2(t) = \frac{1}{2}t$ hat und für $g = f$ die einzige Lösung $z(t) = \frac{3}{4}t$. Obwohl $f'(t,u) < f(t,u)$ auf ganz $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ gilt, ist die maximale Lösung y_1 für $g = f'$ echt größer als die maximale Lösung z für $g = f$.

Bei einer stochastischen Integralgleichung wie (Z)(f) hat dagegen der Wienerprozeß W einen regularisierenden Einfluß; grob gesprochen ist eine Konstruktion, die sich wie im o. a. Beispiel auswirkt, nur unter Berücksichtigung der Pfade von W zu bewerkstelligen. Die große Masse der anderen Pfade von W „zerstört" dann aber diese Konstruktionen. Die folgenden Vergleichssätze machen deutlich, daß man für (Z)(f) zu allgemeineren Aussagen als im deterministische Fall kommt, welche dann freilich nur **P**-f.-s. Gültigkeit haben.

Definition 6.40 Seien Funktionen $g_1, g_2 : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ gegeben. Wir sagen, eine Funktion h *trennt* g_1 und g_2, wenn

$$g_1(x) \leqslant h(x) \leqslant g_2(x),\ x \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \quad \text{oder} \quad g_1(x) \geqslant h(x) \geqslant g_2(x),\ x \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R},$$

gilt.

Satz 6.41 *Es seien mit $f, f' : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ meßbare Funktionen aus $L^1_{\text{loc}}(\lambda)$ gegeben, für die $f'(x) \leqslant f(x)$, $x \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, gelten möge, und darüberhinaus ein üblicher Wienerprozeß $(W, \mathbb{F})$. Wir setzen voraus, daß sowohl $\mathfrak{L}_{W,\mathbb{F}}(f)$ als auch $\mathfrak{L}_{W,\mathbb{F}}(f')$ maximale Elemente haben und außerdem $F(f) \subseteq N(f)$ gilt. Dies ist also insbesondere gegeben, wenn $N(f)$ und $N(f')$ abgeschlossen sind, f' und f in $L^1_{\text{loc}}(\lambda)$ liegen und $F(f') \subseteq N(f')$, $F(f) \subseteq N(f)$ gilt. Ferner gebe es eine nach oben halbstetige Funktion f^*, die f' und f trennt. Dann gilt*

$$A_t^{f',\max} \leqslant A_t^{f,\max}\,, \quad t \geqslant 0\,, \quad \mathbf{P}\text{-}f.\text{-}s. \tag{6.42}$$

Beweis: Wir betrachten ein beliebiges $A' \in \mathfrak{L}_{W,\mathbb{F}}(f')$. Wegen $f^* \geqslant f'$ gilt nun

$$A'_t - A'_s \leqslant \int_s^t f^*(u, W \circ A'_u)\, du\,, \quad 0 \leqslant s \leqslant t < S(A')\,, \quad \mathbf{P}\text{-f.-s.} \tag{6.43}$$

Die Funktion $\bar{f} := f + I_{N(f)\setminus F(f)}$ erfüllt mit $f \in L^1_{\text{loc}}(\lambda)$ und $F(f) \subseteq N(f)$ die Voraussetzungen von Satz 5.63, so daß es eine fallende Folge von nach unten halbstetigen lokal integrierbaren Funktionen $\tilde{f}_n$ gibt, die in $L^2_{\text{loc}}(\mu)$ gegen $\bar{f}$ konvergiert. Dabei ist $\mu \ll \lambda$ mit $\frac{d\mu}{d\lambda} = (\bar{f})^{-1}$. Mit $f_n := \tilde{f}_n + n^{-1}$ wurden im Beweis zu Satz 5.63 geeignete $A^n \in \mathfrak{L}_{W,\mathbb{F}}(f_n)$ gefunden, die **P**-f.-s. gegen ein $A \in \mathfrak{L}_{W,\mathbb{F}}(\bar{f})$ konvergierten, welches dann auch zu $\mathfrak{L}_{W,\mathbb{F}}(f)$ gehört. Nun gilt offensichtlich $f_n(x) > f^*(x)$, $x \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. Wir fixieren ein $\omega \in \Omega$, für welches (6.43) von $(W_\cdot(\omega), A'_\cdot(\omega))$ erfüllt wird ebenso wie (Z)(f_n) von $(W_\cdot(\omega), A^n_\cdot(\omega))$ und für das $A^n_\cdot(\omega)$ punktweise monoton gegen $A_\cdot(\omega)$ konvergiert (das ist **P**-f.-s. der Fall). Wir setzen $g_n(t,u) := f_n(t, W_u(\omega))$ und $g^*(t,u) := f^*(t, W_u(\omega))$ für $(t,u) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann sind wegen der Stetigkeit von $W_\cdot(\omega)$ die g_n nach unten halbstetig und g^* nach oben halbstetig. Außerdem gilt $g_n(t,u) > g^*(t,u)$ auf $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. Nun löst $A^n(\omega)$ die Ungleichung (5.11) mit g_n statt des dortigen g. Dagegen $A'(\omega)$ löst (5.12) mit g^* statt g'. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ liefert dann Lemma 5.8:

$$A^n_t(\omega) \geqslant A'_t(\omega)\,, \quad t \geqslant 0\,.$$

Mit $A^n_t(\omega) \downarrow A_t(\omega)$ folgt $A_t(\omega) \geqslant A'_t(\omega)$, $t \geqslant 0$. Wir haben damit zu einem beliebigen A' aus $\mathfrak{L}_{W,\mathbb{F}}(f')$ ein majorisierendes $A \in \mathfrak{L}_{W,\mathbb{F}}(f)$ gefunden. Da dies insbesondere auch für $A^{f',\max}$ möglich ist, folgt erst recht die Behauptung (6.42). ■

Folgerung 6.44 *Gibt es zu einer nach oben halbstetigen Funktion $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\lambda)$ mit $F(f) \subseteq N(f)$ eine maximale (Z)(f)-Lösung, so ist diese mit der in Satz 5.63 konstruierten Lösung* **P**-*f.-s. identisch. Dies ist also insbesondere dann der Fall, wenn zusätzlich Stetigkeit auf dem Abschluß der Nullstellenmenge von f vorliegt.*

Beweis: Man setze in Satz 6.41 $f' = f^* = f$ und im Beweis $A^{f,\max}$ für das beliebige $A' \in \mathfrak{L}_{W,\mathbb{F}}(f')$. Weiterhin ist eine nichtnegative nach oben halbstetige Funktion f genau dann in allen Punkten von $\overline{N(f)}$ stetig, wenn $N(f)$ abgeschlossen ist. Satz 6.20 sichert die Existenz einer maximalen Lösung. ■

Satz 6.45 *Seien $(W, \mathbb{F})$ ein üblicher Wienerprozeß und $f, f' : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ meßbare Funktionen in der Relation $f'(x) \leqslant f(x)$, $x \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. Ferner gelte $F(f') \subseteq N(f')$. Die Lösungsmengen $\mathfrak{L}_{W,\mathbb{F}}(f')$ und $\mathfrak{L}_{W,\mathbb{F}}(f)$ mögen minimale Lösungen besitzen.*[13] *Außerdem gebe es eine nach unten halbstetige Funktion $f^* \in L^2_{\mathrm{loc}}(\lambda)$, die f' und f trennt. Dann gilt*

$$A_t^{f',\min} \leqslant A_t^{f,\min}, \quad t \geqslant 0, \quad \mathbf{P}\text{-}f.\text{-}s.$$

Beweis: Der Grundgedanke des Beweises ist derselbe wie in Satz 6.41. Jedoch treten durch die notwendige Nichtnegativität aller Funktionen größere technische Schwierigkeiten auf. Sei $A \in \mathfrak{L}_{W,\mathbb{F}}(f)$ beliebig. Dann gilt

$$A_t - A_s \geqslant \int_s^t f^*(u, W \circ A_u)\, du, \quad 0 \leqslant s \leqslant t < S(A), \quad \mathbf{P}\text{-f.-s.}. \tag{6.46}$$

Wir gehen in zwei Schritten vor. Zuerst konstruieren wir ein $A^* \in \mathfrak{L}_{W,\mathbb{F}}(f^*)$, das **P**-f.-s. kleiner oder gleich A ist. Dieses A^* erweist sich im übrigen als die minimale Lösung in $\mathfrak{L}_{W,\mathbb{F}}(f^*)$. Anschließend finden wir ein $A' \in \mathfrak{L}_{W,\mathbb{F}}(f')$ mit $A'_t \leqslant A^*_t$, $t \geqslant 0$, **P**-f.-s.

1) In Satz 5.44 wird eine (Z)(f^*)-Lösung konstruiert, indem man f^* von unten monoton durch stetige f_n approximiert, für die

$$\int_{K_m} (f^* - f_n)^2 f_n^{-1}\, d\lambda \xrightarrow{n\to\infty} 0, \quad m \in \mathbb{N},$$

und außerdem $N(f_n) = N(f^*)$ gilt. Die Wurzeln der f_n approximieren wir ihrerseits nun punktweise von unten durch die folgenden Lipschitz-stetigen Funktionen:

$$f_{n,k}^{\frac{1}{2}}(x) := k \wedge \left[\inf_{y \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}} \left(f_n^{\frac{1}{2}}(y) + k|x-y|_e \right) - k^{-1} \right]^+, \quad x \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \quad k, n \in \mathbb{N}.$$

Wir erhalten damit offenbar $\mathring{N}(f_{n,k}) \supseteq N(f_n) = N(f^*)$ und

$$f_{n,k}(x) < f_n(x) \leqslant f^*(x), \quad x \in N^c(f^*), \quad k, n \in \mathbb{N}.$$

Die punktweise Konvergenz $f_{n,k} \xrightarrow{k\to\infty} f_n$ läßt sich leicht zeigen. Außerdem gilt $f_{n,k}(x) \leqslant f_{n,k+1}(x)$ und $f_{n,k}(x) \leqslant f_{n+1,k}(x)$ für $x \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, $k, n \in \mathbb{N}$. Mit den Sätzen 5.7 und 5.13 gewinnen wir Lösungen $A^{n,k} \in \mathfrak{L}_{W,\mathbb{F}}(f_{n,k})$, die **P**-f.-s. in derselben Weise geordnet sind. Nach Fixierung eines geeigneten ω wie in Satz 6.41 setzen wir nun

$$g_{n,k}(t,u) := f_{n,k}(t, W_u(\omega)) \quad \text{und} \quad g^*(t,u) := f^*(t, W_u(\omega)), \quad (t,u) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+.$$

[13] s. dazu Satz 6.20

Dann sind die $g_{n,k}$ stetig und g^* nach oben halbstetig. Man rechnet elementar nach, daß auch $\mathring{N}(g_{n,k}) \supseteq N(g^*)$ gilt für alle $n,k \in \mathbb{N}$. Demnach sind die Voraussetzungen von Lemma 5.8 für $g_{n,k}$ und g^* (anstelle g' und g) erfüllt, so daß mit (6.46) folgt:

$$A_t^{n,k}(\omega) \leqslant A_t(\omega)\,, \quad t \geqslant 0\,, \quad n,k \in \mathbb{N}\,. \tag{6.47}$$

Die Folge $\left(A^{n,k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ besitzt nun den **P**-f.-s. eindeutig bestimmten Grenzprozeß A^n ($n \in \mathbb{N}$). Mit (6.47) ergibt sich

$$A_t^n \leqslant A_t \quad , \quad t \geqslant 0\,, \quad \mathbf{P}\text{-f.-s.} \tag{6.48}$$

Außerdem ist A^n eine $\mathbb{G}^W$-Zeittransformation. Wir wollen zeigen, daß A^n in $\mathfrak{L}_{W,\mathbb{F}}(f_n)$ liegt. Im Beweis von Satz 5.15 wird für die Konvergenz der approximierenden Lösungen *gegen einen Prozeß* A^n*, der* (Z)(f_n) *für* $t < S(A^n)$ *erfüllt*, neben der Monotonie der Folge von Lipschitz-stetigen Funktionen lediglich die punktweise Konvergenz dieser Funktionen und die Stetigkeit der Grenzfunktion benötigt. Beides ist für $(f_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$ und f_n gegeben. Daher erfüllt A^n die Gleichung (Z)(f_n) mit $(W,\mathbb{F})$ für $t < S(A^n)$. Um *Lösung* von (Z)(f_n) zu sein, muß aber A^n auch **P**-f.-s. die Eigenschaft $A^n_{S(A^n)-} = A^n_{S(A^n)}$ haben. Diese können wir mit Satz 5.20 nicht nachweisen, da die Voraussetzung $N(f_{n,k}) = N(f_n)$ verletzt ist. Wir können aber zeigen, daß A^n mit der in Satz 5.15 konstruierten Lösung **P**-f.-s. übereinstimmt. Für diese gilt dann Satz 5.20, so daß schließlich auch A^n in $\mathfrak{L}_{W,\mathbb{F}}(f_n)$ liegt. Sei nun also

$$\left(\bar f_{n,k}(x)\right)^{\frac12} := k \wedge \inf_{y\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} \left(f_n^{\frac12}(y) + k|x-y|_e \right)\,, \quad x \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}\,, \quad k \in \mathbb{N}\,.$$

Dies sind die $f_n^{\frac12}$ approximierenden Funktionen aus Satz 5.15. Zu ihnen gehören dann die **P**-f.-s. eindeutig bestimmten Lösungen $\bar A^{n,k} \in \mathfrak{L}_{W,\mathbb{F}}(\bar f_{n,k})$, die gegen ein $\bar A^n \in \mathfrak{L}_{W,\mathbb{F}}(f_n)$ konvergieren. Es ist offenbar $f_{n,k}(x) \leqslant \bar f_{n,k}(x)$, $x \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, und nach Satz 5.13 dann $A_t^{n,k} \leqslant \bar A_t^{n,k}$, $t \geqslant 0$, **P**-f.-s., woraus für die Grenzprozesse zunächst einmal

$$A_t^n \leqslant \bar A_t^n\,, \quad t \geqslant 0\,, \quad \mathbf{P}\text{-f.-s.}\,, \quad n \in \mathbb{N}\,, \tag{6.49}$$

folgt. Die Funktionen

$$f^{\frac12}_{n,k,l} := f^{\frac12}_{n,k} \wedge \left(\bar f_{n,l}\right)^{\frac12}\,, \quad l \in \mathbb{N}\,,$$

sind Lipschitz-stetig und beschränkt, so daß es **P**-f.-s. eindeutig bestimmte $A^{n,k,l} \in \mathfrak{L}_{W,\mathbb{F}}(f_{n,k,l})$ gibt. Da $f_{n,k,l}$ für $k \to \infty$ punktweise gegen $\bar f_{n,l}$ konvergiert, können wir mit derselben Argumentation wie oben folgern, daß der Grenzprozeß $\tilde A^{n,l} := \lim_{k\to\infty} A^{n,k,l}$ die Gleichung (Z)($\bar f_{n,l}$) für $t < S\left(\tilde A^{n,l}\right)$ **P**-f.-s. erfüllt. Die Funktion $\bar f_{n,l}$ ist aber beschränkt, so daß $\tilde A^{n,l}$ **P**-f.-s. nicht explodiert, womit $S\left(\tilde A^{n,l}\right) = +\infty$ **P**-f.-s. gilt. Folglich ist $\tilde A^{n,l}$ *Lösung* von (Z)($\bar f_{n,l}$) zu $(W,\mathbb{F})$ und wegen der Eindeutigkeit der (Z)($\bar f_{n,l}$)-Lösungen **P**-f.-s. identisch mit $\bar A^{n,l}$. Mit Satz 5.13 haben wir aber auch

$$A_t^{n,k,l} \leqslant A_t^{n,k}\,, \quad t \geqslant 0\,, \quad \mathbf{P}\text{-f.-s.}\,, \quad k,l \in \mathbb{N}\,,$$

und somit

$$A_t^n = \lim_{k\to\infty} A_t^{n,k} \geqslant \lim_{k\to\infty} A_t^{n,k,l} = \tilde A_t^{n,l} = \bar A_t^{n,l}\,, \quad t \geqslant 0\,, \quad \mathbf{P}\text{-f.-s.}\,, \quad l \in \mathbb{N}\,.$$

Daraus folgt

$$A_t^n \geqslant \lim_{l\to\infty} \bar A_t^{n,l} = \bar A_t^n\,, \quad t \geqslant 0\,, \quad \mathbf{P}\text{-f.-s.}$$

und mit (6.49) schließlich $A_t^n = \bar{A}_t^n$, $t \geqslant 0$, $\mathbf{P}$-f.-s. Also ist $A^n \in \mathcal{L}_{W,\mathbb{F}}(f_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Der Grenzprozeß

$$A_t^* := \lim_{n\to\infty} A_t^n = \lim_{n\to\infty} \bar{A}_t^n\,, \quad t \geqslant 0\,, \quad \mathbf{P}\text{-f.-s.}$$

gehört nach Satz 5.44 zu $\mathcal{L}_{W,\mathbb{F}}(f^*)$. Für ihn gilt wegen (6.48)

$$A_t^* \leqslant A_t\,, \quad t \geqslant 0\,, \quad \mathbf{P}\text{-f.-s.} \tag{6.50}$$

Gleichzeitig sieht man hieran, daß in Satz 5.44 die minimale Lösung von $\mathcal{L}_{W,\mathbb{F}}(f^*)$ konstruiert wurde. Setzt man nämlich $f = f^*$ und $A = A^{f^*,\min}$, so folgt $A_t^* \leqslant A_t^{f^*,\min}$, $t \geqslant 0$, $\mathbf{P}$-f.-s.

2) Gesucht ist jetzt ein $A' \in \mathcal{L}_{W,\mathbb{F}}(f')$ mit $A'_t \leqslant A_t^*$ $\mathbf{P}$-f.-s., $t \geqslant 0$. Dazu modifizieren wir das in Bemerkung 5.80 beschriebene Approximationsverfahren. Wir setzen

$$\bar{f} := f' + I_{N(f')\setminus F(f')}$$

und erhalten eine λ-fast-überall mit f' übereinstimmende Funktion, die den Voraussetzungen von Bemerkung 5.80 genügt. Es gibt demnach eine fallende Folge nach unten halbstetiger Funktionen $\bar{g}_n \geqslant \bar{f}$ aus $L^2_{\mathrm{loc}}(\lambda)$ mit $N(\bar{g}_n) = N(\bar{f}) = F(\bar{f}) = F(f')$ und

$$\int_{K_m} \left(\bar{g}_n - \bar{f}\right)^2 \bar{f}^{-1}\, d\lambda \xrightarrow{n\to\infty} 0\,, \quad m \in \mathbb{N}\,. \tag{6.51}$$

Sei $g_n := \bar{g}_n \wedge f^*$ und $\tilde{f}(x) := \lim_{n\to\infty} g_n(x)$, $x \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. Dann ist die Nullstellenmenge

$$N(\tilde{f}) = N(g_n) = N(f^*) \cup N(\bar{g}_n) = N(f^*) \cup F(f')$$

abgeschlossen und außerdem $\lambda\left(\left\{x \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \,:\, \tilde{f} \neq f'\right\}\right) = 0$ und g_n nach unten halbstetig. Natürlich gilt (6.51) erst recht für g_n. Konstruieren wir $A^{g_n} \in \mathcal{L}_{W,\mathbb{F}}(g_n)$ nach Satz 5.44, so ergibt sich $A_t^{g_n} \leqslant A_t^*$, $t \geqslant 0$, $\mathbf{P}$-f.-s., da auch A^* nach Satz 5.44 konstruiert war und $g_n(x) \leqslant f^*(x)$, $x \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, gilt (s. Bem. 5.61). Demnach haben wir für den $\mathbf{P}$-f.-s. definierten Grenzprozeß $A'_t := \lim_{n\to\infty} A_t^{g_n}$, $t \geqslant 0$,

$$A'_t \leqslant A_t^* \quad \mathbf{P}\text{-f.-s.}\,, \quad t \geqslant 0\,. \tag{6.52}$$

Wir beweisen jetzt $A' \in \mathcal{L}_{W,\mathbb{F}}(\tilde{f})$. Da Satz 5.72 hier zutrifft, reicht es, wie in Satz 5.63 die Eigenschaft 5.66 für A' und $\tilde{f}$ zu zeigen. Wir benutzen die Abschätzung in 5.68 mit $\tilde{f}$ statt f, g_n statt f_n und $D^m := D^m(W \circ A^{g_m})$:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\left(\left|A'_{t\wedge D^m} - \int_0^{t\wedge D^m} \tilde{f}(s, W\circ A'_s)\,ds\right| > \varepsilon\right)\\
\leqslant\;& \mathbf{P}\left(|A'_{t\wedge D^m} - A^{g_n}_{t\wedge D^m}| > \frac{\varepsilon}{2}\right) + \frac{2}{\varepsilon}\mathbf{E}\int_0^{t\wedge D^m} \left|g_n - \tilde{f}\right|(s, W\circ A_s^{g_n})\,ds\\
&+\frac{2}{\varepsilon}\mathbf{E}\int_0^{t\wedge D^m} \left|\tilde{f}(s, W\circ A_s^{g_n}) - \tilde{f}(s, W\circ A'_s)\right|\,ds\\
=:\;& I_1 + I_2 + I_3\,.
\end{aligned}$$

Der erste Summand I_1 konvergiert offensichtlich gegen Null für $n \to \infty$. Weiter erhalten wir für $n \geqslant m$, $t \geqslant 0$ wegen $N(\tilde{f} - g_n) \supseteq N(\tilde{f}) = N(g_n)$ und $D^m \leqslant D^m(W \circ A^{g_n})$

$$\begin{aligned}
\frac{\varepsilon}{2} I_2 \;&\leqslant\; \mathbf{E}\int_0^{t\wedge D^m(W\circ A^{g_n})} \left|g_n - \tilde{f}\right| g_n^{\frac{1}{2}} g_n^{-\frac{1}{2}}\,(s, W\circ A_s^{g_n})\,ds\\
&\leqslant\; C_m\left(\int_{K_{t,m}} \left(g_n - \tilde{f}\right)^2 \tilde{f}^{-1}\,d\lambda\right)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{n\to\infty} 0\,.
\end{aligned}$$

Den letzten Summanden

$$I_3 = \frac{2}{\varepsilon}\mathbf{E}\int_0^{t\wedge D^m} \left|\tilde{f}(s, W\circ A_s^{g_n}) - \tilde{f}(s, W\circ A_s')\right| \, ds$$

können wir dagegen wie in Lemma 6.5 abschätzen. Analog zu Lemma 6.7 gilt für ein nichtnegatives ψ mit $N(\psi)\supseteq N(\tilde{f})$

$$\mathbf{E}\int_0^{t\wedge D^m} \psi(s, W\circ A_s^{g_n})\, ds \leqslant C_m \left\|\psi g_n^{-\frac{1}{2}}\right\|_{L^2(K_{t,m},\lambda)} \leqslant C_m \left\|\psi \tilde{f}^{-\frac{1}{2}}\right\|_{L^2(K_{t,m},\lambda)} . \tag{6.53}$$

Ist $N(\tilde{f})$ abgeschlossen, $N(\psi)\supseteq N(\tilde{f})$ und $\psi^2\tilde{f}^{-1}\in L^1_{\mathrm{loc}}(\lambda)$, dann erhalten wir das Analogon zu (6.9):

$$\mathbf{E}\int_0^{t\wedge D^m} \psi(s, W\circ A_s')\, ds \leqslant C_m \left\|\psi \tilde{f}^{-\frac{1}{2}}\right\|_{L^2(K_{t,m},\lambda)} . \tag{6.54}$$

Da außerdem die Voraussetzungen von Lemma 6.1 für $\tilde{f}$ erfüllt sind, können wir I_3 nun mit (6.53) und (6.54) wie in (6.11) abschätzen und bekommen schließlich $I_3 \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Folglich ist $A'\in\mathfrak{L}_{W,\mathbb{F}}(\tilde{f})$. Mit Lemma 2.38 gilt wegen $f'(x)\leqslant\tilde{f}(x)$, $x\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\int_0^{t\wedge D^m} \left|\tilde{f}-f'\right|(s, W\circ A_s')\, ds &= \mathbf{E}\int_0^{t\wedge D^m} \left|\tilde{f}-f'\right| \tilde{f}^{\frac{1}{2}}\tilde{f}^{-\frac{1}{2}}(s, W\circ A_s')\, ds \\
&\leqslant C_m\left(\int_{K_{t,m}} \left(\tilde{f}-f'\right)^2 \tilde{f}^{-1}\, d\lambda\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant C_m\left(\int_{K_{t,m}} \tilde{f} I_{\{\tilde{f}\neq f'\}}\, d\lambda\right)^{\frac{1}{2}} = 0\,,
\end{aligned}$$

so daß A' auch in $\mathfrak{L}_{W,\mathbb{F}}(f')$ liegt.

Mit (6.50) und (6.52) folgt die Behauptung. ■

7 Anhang

Lemma A1 *Es sei $[X, \mathcal{X}, \kappa]$ ein Maßraum mit dem endlichen Maß κ und Y eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Auf der Spur $\mathcal{B}_Y := Y \cap \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ sei ein endliches Maß η gegeben. Seien weiterhin $h_n, h : X \to Y$, $n \in \mathbb{N}$, derartige Funktionen, daß h_n mit $n \to \infty$ κ-fast-überall gegen h konvergiert. Gilt nun für alle meßbaren und beschränkten Funktionen $\psi : Y \to [0, \infty)$, ein $p \in [1, \infty)$ und alle $n \in \mathbb{N}$*

$$\text{(A2)} \qquad \int_X \psi(h_n(x))\, d\kappa \leqslant C \|\psi\|_{L^p(Y,\eta)}$$

für ein festes $C > 0$, dann gilt auch

$$\text{(A3)} \qquad \int_X \psi(h(x))\, d\kappa \leqslant C \|\psi\|_{L^p(Y,\eta)}$$

für alle solchen ψ.

Beweis: (a) Offensichtlich bleibt (A2) auch für beschränkte meßbare $\psi : Y \to \mathbb{R}$ richtig, denn für $|\psi|$ ist (A2) gegeben. Wir betrachten nun solche ψ, die überdies stetig sein sollen. Dann ist $\psi \circ h_n$ eine Folge gleichmäßig beschränkter Funktionen, die κ-fast-überall gegen $\psi \circ h$ konvergiert, so daß wir (A3) mit majorisierter Konvergenz erhalten.

(b) Mit der Klasse (C_b) aller stetigen beschränkten Funktionen ψ haben wir eine Klasse gefunden, für die (A3) gilt. C_b enthält alle Konstanten und ist ein Vektorraum, der gegen die Minimumbildung $\wedge$ abgeschlossen ist. Weisen wir nun nach, daß die Klasse M aller Funktionen, für die (A3) gilt, gegenüber beschränkter monotoner Konvergenz abgeschlossen ist, dann enthält M nach dem monotonen Klassensatz alle $\sigma(C_b)$-meßbaren beschränkten Funktionen (s. z. B. [4], (22.3)). Dies sind in unserem Falle die $\mathcal{B}_Y$-meßbaren, und die Behauptung ist dann gezeigt. Sei also $(\psi_r)_{r \in \mathbb{N}}$ eine gleichmäßig beschränkte wachsende Folge in M, die gegen die beschränkte Funktion ψ konvergiert. Wegen der Endlichkeit von κ und η sind Konstanten integrierbar, und wir haben mit monotoner Konvergenz $\int_X \psi_r(h(x))\, d\kappa \to \int_X \psi(h(x))\, d\kappa$ und mit majorisierter Konvergenz $\|\psi_r\|_{L^p(Y,\eta)} \to \|\psi\|_{L^p(Y,\eta)}$. Damit gilt (A3) auch für ψ, das heißt, es ist $\psi \in M$. Dasselbe gilt für eine analoge fallende Folge. ■

Lemma A4 *Es sei $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge von Funktionen aus E_+ und $A_t := \lim_{n\to\infty} A^n_t$, $t \geqslant 0$. Weiterhin seien T^n und T die rechtsstetigen Inversen von A^n bzw. A. Dann gilt*

$$T_t = \lim_{n\to\infty} T^n_t\,, \quad t \geqslant 0\,.$$

Beweis:

$$\begin{aligned} T_t &= \inf\{s \geqslant 0 \,:\, A_s > t\} = \inf\left\{s \geqslant 0 \,:\, \sup_{n\in\mathbb{N}} A^n_s > t\right\} = \inf \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{s \geqslant 0 \,:\, A^n_s > t\} \\ &= \inf_{n\in\mathbb{N}} \inf\{s \geqslant 0 \,:\, A^n_s > t\} = \inf_{n\in\mathbb{N}} T^n_t = \lim_{n\to\infty} T^n_t\,. \end{aligned}$$

■

Lemma A5 *Gegeben sei eine nichtnegative Funktion $\alpha \in L^1([0,1], \lambda)$. Dann existiert eine Funktion $e : [0,1] \to [1, \infty]$ mit folgenden Eigenschaften:*

(i) e ist stetig auf $[0,1)$;

(ii) $\lim_{x\to 1} e(x) = +\infty$, $e(1) = +\infty$, $e(0) = 1$;

(iii) $\int_0^1 \alpha(x)\, e(x)\, dx \leqslant 2 \int_0^1 \alpha(x)\, dx$.

Beweis: Für $\alpha(x) = 0$ λ-f.ü. auf einem Intervall $[1-\varepsilon, 1]$, $\varepsilon > 0$, ist die Behauptung trivial. Gelte nun $\int_x^1 \alpha(y)\, dy > 0$ für alle $x < 1$. Wir ermitteln zunächst eine Funktion $h : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ mit den Eigenschaften (i), (ii) und $\int_0^1 \alpha(x) h(x)\, dx < +\infty$. Dazu setzen wir (unter der Vereinbarung $0^{-1} := +\infty$)

$$h(x) := (G(x))^{-\frac{1}{3}} \quad \text{mit} \quad G(x) := \int_x^1 \alpha(y)\, dy\,, \quad x \in [0,1]\,.$$

Offensichtlich hat h die Eigenschaften (i) und (ii); es gilt aber auch

$$\begin{aligned} \int_0^1 \alpha(x) h(x)\, dx &= -\int_0^1 (G(x))^{-\frac{1}{3}} \left(-\alpha(x)\right) dx = -\int_0^1 (G(x))^{-\frac{1}{3}}\, dG(x) \\ &= -\int_{G(0)}^{G(1)} y^{-\frac{1}{3}}\, dy = \frac{3}{2} G(0)^{\frac{2}{3}} < \infty\,. \end{aligned}$$

Wir setzen nun $C := \frac{2}{3} G(0)^{\frac{1}{3}}$ und $e(x) := 1 + Ch(x)$, so daß wir

$$\int \alpha(x) e(x)\, dx = \int_0^1 \alpha(x)\, dx + C \int_0^1 \alpha(x) h(x)\, dx = 2 \int_0^1 \alpha(x)\, dx$$

erhalten. ■

Lemma A6 *Sei f eine nichtnegative Funktion aus $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2, \lambda)$ und Q ein Quadrat der Kantenlänge $2r_Q$. Dann gibt es eine stetige Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$, für die gilt:*

(i) $g\big|_{Q^c} \equiv 0$; $\quad 0 < g(x) \leqslant 1$ für $x \in \mathring{Q}$; $g(x) = 1$ im Mittelpunkt von Q;

(ii) $\int_Q f^2 g^{-1}\, d\lambda \leqslant 2 \int_Q f^2\, d\lambda$.

Beweis: Wir zeigen die Behauptung für ein o. B. d. A. achsenparalleles Q mit dem Mittelpunkt $(0,0)$. Sei $|\cdot|_m$ die Maximumnorm in $\mathbb{R}^2$. Das Integral von f^2 über Q kann man in ein iteriertes Integral umschreiben, wobei das innere Integral ein Wegintegral über die Ränder der Teilquadrate $\{x \in \mathbb{R} : |x|_m = r\}$, $r \leqslant r_Q$ ist und das äußere Integral diese Werte mit der entsprechenden Weglänge aufsummiert:

$$\text{(A7)} \qquad \int_Q f^2\, d\lambda = \int_0^{r_Q} 8r\, dr \int_{\{|x|_m = r\}} f^2(x)\, ds\,.$$

Da in (A7) die linke Seite endlich ist, muß dies auch die rechte sein, und die Funktion $\alpha^* : [0, r_Q] \to [0, \infty]$ mit

$$\alpha^*(r) := r \int_{\{|x|_m = r\}} f^2(x)\, ds$$

ist aus $L^1([0, r_Q], \lambda^1)$. Natürlich liegt dann

$$\alpha : [0,1] \to [0,\infty]\,, \quad \alpha(u) := \alpha^*(r_Q u)\,, \quad u \geqslant 0\,,$$

in $L^1([0,1],\lambda^1)$. Nach Lemma A5 gibt es eine auf $[0,1)$ stetige Funktion e mit $\lim_{x\to 1} e(x) = +\infty$, $e(x) \geqslant 1$, $x \in [0,1]$, für die $\int_0^1 \alpha(u)e(u)\,du \leqslant 2\int_0^1 \alpha(u)\,du$ gilt. Mit $g^* : \mathbb{R}_+ \to [0,1]$,

$$g^*(r) := \begin{cases} \left(e\left(\frac{r}{r_Q}\right)\right)^{-1} & : \quad 0 \leqslant r < r_Q \\ 0 & : \quad \text{sonst} \end{cases}$$

haben wir eine stetige Funktion mit den Eigenschaften $g^*(r) \leqslant 1$, $r \in \mathbb{R}_+$, und

$$\int_0^{r_Q} \alpha^*(r)\,(g^*(r))^{-1}\,dr = r_Q \int_0^1 \alpha(u)e(u)\,du \leqslant 2r_Q \int_0^1 \alpha(u)\,du = 2\int_0^{r_Q} \alpha^*(r)\,dr$$

gefunden. Wir setzen $g(x) := g^*(|x|_m)$. Offenbar erfüllt g sowohl Eigenschaft (i) als auch (ii), denn es gilt:

$$\begin{aligned} \int_Q f^2(x)g^{-1}(x)\,dx &= \int_0^{r_Q} 8r \int_{\{|x|_m=r\}} f^2(x)\,(g^*(r))^{-1}\,ds\,dr \\ &= \int_0^{r_Q} 8\,(g^*(r))^{-1}\,\alpha^*(r)\,dr \leqslant 2\int_0^{r_Q} 8\alpha^*(r)\,dr \\ &= 2\int_Q f^2(x)\,dx\,. \end{aligned}$$

■

Lemma A8 *Gegeben sei die konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ mit nichtnegativen Gliedern. Dann gibt es eine monoton wachsende Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $c_n \geqslant 1$, $c_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, so daß $\sum_{n=1}^{\infty} a_n c_n$ immer noch endlich ist.*

Beweis: Wir setzen

$$c_n := \left[\sup\left\{k \in \mathbb{N} : \sum_{i=n}^{\infty} a_n \leqslant \frac{1}{k^3}\right\} \vee 1\right] \wedge n\,, \quad \sup\emptyset := 0\,.$$

Dann gilt für alle $k \geqslant 2$: $c_n = k \;\Rightarrow\; \sum_{i=n}^{\infty} a_n \leqslant \frac{1}{k^3}$ und außerdem $c_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ wegen der Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty}$. Nun ergibt sich

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n c_n &= \sum_{c_n=1} a_n + 2\sum_{c_n=2} a_n + 3\sum_{c_n=3} a_n + \ldots \\ &\leqslant \sum_{c_n=1} a_n + 2 \sum_{n=\inf\{m\,:\,c_m=2\}}^{\infty} a_n + 3 \sum_{n=\inf\{m\,:\,c_m=3\}}^{\infty} a_n + \ldots \\ &\leqslant \sum_{c_n=1} a_n + 2\frac{1}{2^3} + 3\frac{1}{3^3} + \ldots \\ &< \infty\,. \end{aligned}$$

■

Lemma A9 *Sei $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ eine meßbare Funktion und μ ein Maß auf $[\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}}]$, das absolut stetig bzgl. des Lebesguemaßes λ ist. Es möge außerdem $f^{-1}(x) := \infty$ für $f(x) = 0$ und, wie in der Integrationstheorie üblich, $0 \cdot \infty = 0$ gelten. Wir führen ein:*

$$\begin{aligned} N(f) &:= \{x \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \,:\, f(x) = 0\}\,, \\ F_\mu &:= \{x \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \,:\, x \in U \text{ offen} \;\Rightarrow\; \mu(U) = +\infty\} \end{aligned} \qquad \text{(A10)}$$

und setzen für ein $p \in [1,\infty)$ voraus:

(i) $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mu)$;

(ii) $N(f) \supseteq F_\mu$.

Dann gibt es eine fallende Folge von nach unten halbstetigen nichtnegativen Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $L^p_{\mathrm{loc}}(\mu)$ dergestalt, daß

$$N(f) \supseteq N(f_n) \supseteq F_\mu \tag{A11}$$

gilt, $f(x) \leqslant f_n(x)$, $x \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, ist und f_n in $L^p_{\mathrm{loc}}(\mu)$ gegen f konvergiert, daß also gilt:

$$\int_{K_m} (f_n - f)^2 \, d\mu \xrightarrow{n\to\infty} 0 \,, \quad m \in \mathbb{N} \,. \tag{A12}$$

Liegt f außerdem in $L^q_{\mathrm{loc}}(\lambda)$ für ein $q \in [1,\infty)$, so kann man auch die Eigenschaft $f_n \in L^q_{\mathrm{loc}}(\lambda)$, $n \in \mathbb{N}$, erreichen.

Beweis: Sei zunächst $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mu)$. Wir führen die folgenden Urbilder von f ein:

$$\begin{aligned}
\tilde{B}^k_n &:= \left\{ x \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \,:\, \frac{k}{2^n} \leqslant f(x) < \frac{k+1}{2^n} \right\}, \quad k = 1,2,\ldots\,, \quad n = 1,2,\ldots\,; \\
B^k_n &:= \left\{ x \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \,:\, 2^{-(n+k+1)} \leqslant f(x) < 2^{-(n+k)} \right\}, \quad k = 0,1,2,\ldots\,, \quad n = 1,2,\ldots\,,
\end{aligned}$$

und außerdem die Treppenfunktionen

$$\bar{f}_n := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{2^n} I_{\tilde{B}^k_n} + \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-(n+k)} I_{B^k_n} \,, \quad n \in \mathbb{N} \,.$$

Offenbar gilt $f(x) \leqslant \bar{f}_n(x)$, $x \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, und $N(f) = N(\bar{f}_n)$, da f nur endliche Werte hat. Es ist aber auch

$$\begin{aligned}
\int_{K_m} \left(\bar{f}_n - f\right)^p \, d\mu &\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-pn} \int_{K_m} I_{\tilde{B}^k_n} \, d\mu + \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-p(n+k+1)} \int_{K_m} I_{B^k_n} \, d\mu \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \int_{K_m} f^p I_{\tilde{B}^k_n} \, d\mu + \sum_{k=0}^{\infty} \int_{K_m} f^p I_{B^k_n} \, d\mu \\
&= \int_{K_m} f^p \, d\mu < \infty \,, \quad m \in \mathbb{N} \,,
\end{aligned}$$

so daß $\bar{f}_n - f$ in $L^p_{\mathrm{loc}}(\mu)$ liegt und damit $\bar{f}_n$ ebenfalls. Im übrigen ist daher jede Menge $\tilde{B}^k_n \cap K_m$ oder $B^k_n \cap K_m$ von endlichem Maß μ. Wir wollen nun zeigen, daß μ für alle $\tilde{B}^k_n$, B^k_n von außen regulär ist. Wegen (ii) gilt $\tilde{B}^k_n \subseteq F^c$ und $B^k_n \subseteq F^c_\mu$ für alle k und n. Gerade F^c_μ erweist sich aber als der Bereich, auf dem μ von außen regulär ist:

Sei $M \subseteq F^c_\mu$ meßbar und gelte $\mu(M) < \infty$. Nach Definition von F_μ existiert zu jedem $x \in M$ eine offene Menge $U_x \ni x$, so daß $\mu(U_x) < \infty$ ist. Die U_x bilden eine offene Überdeckung von M. Nach einem Überdeckungssatz von Lindelöf sind dann auch schon abzählbar viele U_{x_i}, $i \in \mathbb{N}$, eine Überdeckung von M (s. [3]). Das Maß μ ist auf dem metrischen Unterraum U_{x_i} endlich und folglich dort regulär. Wir finden daher zu $U_{x_i} \cap M$ eine offene Teilmenge $\tilde{U}_i$ von U_{x_i} mit $\tilde{U}_i \supseteq U_{x_i} \cap M$ ($\tilde{U}_i$ ist offen in U_{x_i} und offen in $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$), so daß für ein beliebiges $\varepsilon > 0$

$$\mu\left(\tilde{U}_i \setminus M\right) = \mu\left(\tilde{U}_i \setminus (U_{x_i} \cap M)\right) \leqslant 2^{-i}\varepsilon$$

gilt. Die $\tilde{U}_i$ bilden ebenfalls eine offene Überdeckung von M, und für die offene Menge $M^\varepsilon := \bigcup_{i=1}^\infty \tilde{U}_i$ gilt:

$$\mu(M^\varepsilon) = \mu(M) + \mu(M^\varepsilon \setminus M) \leqslant \mu(M) + \sum_{i=1}^\infty \mu\left(\tilde{U}_i \setminus M\right) \leqslant \mu(M) + \varepsilon\,.$$

Folglich ist μ auf F_μ^c von außen regulär. Wir finden daher nun offene $\tilde{C}_{n,m}^k \supseteq \tilde{B}_n^k \cap K_m$ und $C_{n,m}^k \supseteq B_n^k \cap K_m$, so daß

$$\mu\left(\tilde{C}_{n,m}^k \setminus \tilde{B}_n^k \cap K_m\right) \leqslant 2^{-(m+pk)}(k+1)^{-p} \quad \text{und} \quad \mu\left(C_{n,m}^k \setminus B_n^k \cap K_m\right) \leqslant 2^{-m}$$

gilt. Trivialerweise haben wir auch $\tilde{C}_{n,m}^k \subseteq F_\mu^c$ und $C_{n,m}^k \subseteq F_\mu^c$ für alle k, n, m. Die Vereinigungen

$$\tilde{C}_n^k := \bigcup_{m=1}^\infty \tilde{C}_{n,m}^k \quad \text{und} \quad C_n^k := \bigcup_{m=1}^\infty C_{n,m}^k$$

sind offene Obermengen von $\tilde{B}_n^k$ bzw. B_n^k, für die wir

$$\text{(A13)} \qquad \mu\left(\tilde{C}_n^k \setminus \tilde{B}_n^k\right) \leqslant \sum_{m=1}^\infty \mu\left(\tilde{C}_{n,m}^k \setminus \tilde{B}_n^k \cap K_m\right) \leqslant 2^{-pk}(k+1)^{-p}$$

und entsprechend

$$\text{(A14)} \qquad \mu\left(C_n^k \setminus B_n^k\right) \leqslant \ldots \leqslant 1$$

erhalten. Wir definieren nun die Funktionen

$$\text{(A15)} \qquad \tilde{f}_n := \sum_{k=1}^\infty \frac{k+1}{2^n} I_{\tilde{C}_n^k} + \sum_{k=0}^\infty 2^{-(n+k)} I_{C_n^k}\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Die Indikatorfunktion einer offenen Menge ist nach unten halbstetig ebenso wie eine endliche Summe nach unten halbstetiger Funktionen. Also ist jede Partialsumme in (A15) nach unten halbstetig. Als Grenzfunktion einer wachsenden Folge nach unten beschränkter nach unten halbstetiger Funktionen ist dann auch jedes $\tilde{f}_n$ nach unten halbstetig. Offensichtlich gilt $\tilde{f}_n(x) \geqslant \bar{f}_n(x) \geqslant f(x)$, $x \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, und wegen $\tilde{C}_n^k \subseteq F_\mu^c$ bzw. $C_n^k \subseteq F_\mu^c$ außerdem $N(\tilde{f}_n) \supseteq F_\mu$. Für $\tilde{f}_n$ soll nun (A12) nachgewiesen werden. Mit monotoner Konvergenz, (A13) und (A14) ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{K_m} \left|\tilde{f}_n - \bar{f}_n\right|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left\|\tilde{f}_n - \bar{f}_n\right\|_{L^p(K_m,\mu)} \\
&= \left\|\sum_{k=1}^\infty \frac{k+1}{2^n} I_{\tilde{C}_n^k \setminus \tilde{B}_n^k} + \sum_{k=0}^\infty 2^{-(k+n)} I_{C_n^k \setminus B_n^k}\right\|_{L^p(K_m,\mu)} \\
&= \lim_{l\to\infty} \left\|\sum_{k=1}^l \frac{k+1}{2^n} I_{\tilde{C}_n^k \setminus \tilde{B}_n^k} + \sum_{k=0}^l 2^{-(k+n)} I_{C_n^k \setminus B_n^k}\right\|_{L^p(K_m,\mu)} \\
&\leqslant \lim_{l\to\infty} \left(\sum_{k=1}^l \left\|\frac{k+1}{2^n} I_{\tilde{C}_n^k \setminus \tilde{B}_n^k}\right\|_{L^p(K_m,\mu)} + \sum_{k=0}^l \left\|2^{-(k+n)} I_{C_n^k \setminus B_n^k}\right\|_{L^p(K_m,\mu)}\right)
\end{aligned}$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{2^n} \mu^{\frac{1}{p}} \left(\tilde{C}_n^k \setminus \tilde{B}_n^k \right) + \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-(n+k)} \mu^{\frac{1}{p}} \left(C_n^k \setminus B_n^k \right)$$

(A16) $$\leqslant 2^{-(n-1)} \xrightarrow{n\to\infty} 0\,.$$

Wie oben gezeigt, ist $0 \leqslant \bar{f}_n - f \leqslant f \in L^p(K_m, \mu)$. Da $\bar{f}_n$ punktweise gegen f konvergiert, geschieht dies mit majorisierter Konvergenz auch in $L^p(K_m, \mu)$ (f^p ist die Majorante), so daß wir aus (A16)

$$\left\| \tilde{f}_n - f \right\|_{L^p(K_m,\mu)} \xrightarrow{n\to\infty} 0\,, \quad m \in \mathbb{N}\,,$$

erhalten. Die Gleichung (A12) wird also von $\left(\tilde{f}_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ erfüllt. Setzen wir

$$f_n := \bigwedge_{k=1}^{n} \tilde{f}_n\,, \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

dann sind die f_n ebenfalls nach unten halbstetig, bilden eine monoton fallende Folge und erfüllen (A12) wegen $f(x) \leqslant f_n(x) \leqslant \tilde{f}_n(x)$, $x \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, erst recht. Offensichtlich gilt dann auch $N(f) \supseteq N(f_n) \supseteq F\mu$.

Sei nun f eine Funktion aus $L^p_{\text{loc}}(\mu) \cap L^q_{\text{loc}}(\lambda)$. Mit dem bisher Gezeigten läßt sich neben $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch eine Folge nach unten halbstetiger Funktionen $(f_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ konstruieren, die in $L^q_{\text{loc}}(\lambda)$ gegen f konvergiert und alle weiteren Eigenschaften der Behauptung erfüllt, denn F_λ ist leer. Setzen wir $g_n := f_n \wedge f_n^*$, $n \in \mathbb{N}$, dann haben wir sogar eine Folge nach unten halbstetiger Funktionen gefunden, die größer oder gleich f ist und sowohl in $L^p_{\text{loc}}(\mu)$ als auch $L^q_{\text{loc}}(\lambda)$ monoton gegen f konvergiert. ∎

Lemma A17 *Es sei $[M, \mathcal{M}, \mu]$ ein Maßraum und $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von $B_n \in \mathcal{M}$, die sich höchstens S-fach überdecken ($S \in \mathbb{N}$ fest), das heißt, für beliebige $i_1, \ldots, i_{S+1} \in \mathbb{N}$, $i_1 \neq i_2 \neq \ldots \neq i_{S+1}$ gelte stets $B_{i_1} \cap \ldots \cap B_{i_{S+1}} = \emptyset$. Dann ist*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \leqslant S\mu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right)\,.$$

Beweis: Wir setzen $C := \bigcup_{n=1}^\infty B_n$ und

$$C^k := \{x \in C \,:\, \operatorname{card}\{i \,:\, x \in B_i\} = k\}\,.$$

Nach Voraussetzung gilt dann $C = \bigcup_{k=1}^S C^k$, wobei die C^k offenbar disjunkt sind. Man kann C_k darstellen als die Vereinigung *der* Teile der Durchschnitte k verschiedener B_i, die nicht auch noch in anderen B_i enthalten sind: Für $i_1 \neq \ldots \neq i_k$, $k \in \{1, \ldots, S\}$ sei

$$C_{i_1,\ldots,i_k} := \bigcup_{n\neq i_1,\ldots,n\neq i_k} B_n\,.$$

Es ist demnach

(A18) $$C^k = \bigcup_{i_1<\ldots<i_k} \left(B_{i_1} \cap \ldots \cap B_{i_k} \setminus C_{i_1,\ldots,i_k}\right)\,.$$

Dabei bemerken wir, daß durch die Ordnung $i_1 < \ldots < i_k$ für verschiedene Multiindizes $(i_1, \ldots, i_k)$, $(i'_1, \ldots, i'_k)$ stets

$$\left(B_{i_1} \cap \ldots \cap B_{i_k} \setminus C_{i_1,\ldots,i_k}\right) \cap \left(B_{i'_1} \cap \ldots \cap B_{i'_k} \setminus C_{i'_1,\ldots,i'_k}\right) = \emptyset$$

folgt. Das heißt, die rechte Seite in (A18) ist eine *Zerlegung* von C^k. Statt C^k können wir in dieser Weise auch ein bestimmtes $B_n \cap C^k$ zerlegen. Wir erhalten dann

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\mu(B_n) &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{S}\mu(B_n\cap C^k) = \sum_{k=1}^{S}\sum_{n=1}^{\infty}\mu(B_n\cap C^k)\\
&= \sum_{k=1}^{S}\sum_{n=1}^{\infty}\mu\left(\bigcup_{\substack{n\neq i_1\neq\ldots\neq i_{k-1}\\ i_1<\ldots<i_{k-1}}}\left(B_n\cap B_{i_1}\cap\ldots\cap B_{i_{k-1}}\setminus C_{n,i_1,\ldots,i_{k-1}}\right)\right)\\
\text{(A19)}\qquad &= \sum_{k=1}^{S}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\substack{n\neq i_1\neq\ldots\neq i_{k-1}\\ i_1<\ldots<i_{k-1}}}\mu\left(B_n\cap B_{i_1}\cap\ldots\cap B_{i_{k-1}}\setminus C_{n,i_1,\ldots,i_{k-1}}\right)\\
&\ \vdots\ \ \text{(s. u.)}\\
\text{(A20)}\qquad &= \sum_{k=1}^{S}k\sum_{i_1<\ldots<i_k}\mu\left(B_{i_1}\cap\ldots\cap B_{i_k}\setminus C_{i_1,\ldots,i_k}\right)\\
&\leqslant S\sum_{k=1}^{S}\sum_{i_1<\ldots<i_k}\mu\left(B_{i_1}\cap\ldots\cap B_{i_k}\setminus C_{i_1,\ldots,i_k}\right)\\
&= S\sum_{k=1}^{S}\mu(C^k) = S\mu(C) = S\,\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right).
\end{aligned}$$

Die Umformung von (A19) nach (A20) ist richtig, da in der Summe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\substack{n\neq i_1\neq\ldots\neq i_{k-1}\\ i_1<\ldots<i_{k-1}}}\mu\left(B_n\cap B_{i_1}\cap\ldots\cap B_{i_{k-1}}\setminus C_{n,i_1,\ldots,i_{k-1}}\right)$$

für ein festes n' jeder Summand $B_{n'}\cap B_{i_1}\cap\ldots\cap B_{i_{k-1}}\setminus C_{n',i_1,\ldots,i_{k-1}}$ genau k-mal auftaucht, nämlich wenn $n=n'$, $n=i_1$, $\ldots$, $n=i_{k-1}$ ist. ∎

Lemma A21 *Es sei f eine lokal integrierbare Funktion auf $\mathbb{R}_+$ und $F(t):=\int_0^t f(s)\,ds$, $t\geqslant 0$. Dann gilt*

$$[F(t)]^+ = \int_0^t f(s)I_{\{F(s)>0\}}\,ds\ .$$

Beweis: Wir definieren $\varphi_n',\varphi_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$, $n\in\mathbb{N}$, durch

$$\varphi_n'(t) := \begin{cases} 0 & : \ t<0 \\ nt & : \ 0\leqslant t\leqslant \frac{1}{n} \\ 1 & : \ t\leqslant \frac{1}{n}\end{cases} \qquad \text{und} \quad \varphi_n(t) := \int_{-\infty}^{t}\varphi_n'(s)\,ds\,, \quad t\in\mathbb{R}\,.$$

Es gilt dann

$$\text{(A22)}\qquad \left|\varphi_n'(t)-I_{(0,\infty)}(t)\right| \leqslant I_{(0,\frac{1}{n})}(t) \quad \text{und} \quad \left|\varphi_n(t)-[t]^+\right|\leqslant\frac{1}{2n}\,,\quad t\in\mathbb{R}\,.$$

Die φ_n sind stetig differenzierbar und ihre Ableitungen gleich φ_n'. Daher gilt auf Grund der Kettenregel

$$\varphi_n(F(t)) = \int_0^t \varphi_n'(F(s))f(s)\,ds\ ,$$

wobei die linke Seite wegen (A22) für $n \to \infty$ gegen $[F(t)]^+$ konvergiert. Ebenso konvergiert $\varphi_n' \circ F \xrightarrow{n\to\infty} I_{\{F>0\}}$ punktweise; darüberhinaus ist $|f|$ für $(\varphi_n' \circ F) \cdot f$ und $f I_{\{F>0\}}$ eine integrierbare Majorante, so daß mit dem Satz von Lebesgue folgt:

$$\int_0^t \varphi_n'(F(s))f(s)\,ds \xrightarrow{n\to\infty} \int_0^t f(s) I_{\{F(s)>0\}}\,ds\ .$$

■

Literatur

[1] Bauer, H.: *Wahrscheinlichkeitstheorie.* de Gruyter, Berlin, New York 1991.

[2] Bauer, H.: *Maß- und Integrationstheorie.* de Gruyter, Berlin, New York 1992.

[3] Caratheodory, C.: *Vorlesungen über reelle Funktionen.* Chelsea, New York 1948.

[4] Dellacherie, C., et P.-A. Meyer: *Probabilits et potentiel.* Hermann, Paris 1975.

[5] Engelbert, H. J., and J. Hess: *Integral representation with respect to stopped continuous martingales.* Stochastics **4**, 121–142 (1980).

[6] Engelbert, H. J., and J. Hess: *Stochastic integrals of continuous local martingales I.* Math. Nachrichten **97**, 325–343 (1980).

[7] Engelbert, H. J., and J. Hess: *Stochastic integrals of continuous local martingales II.* Math. Nachrichten **100**, 249–269 (1981).

[8] Engelbert, H. J., and W. Schmidt: *On solutions of one-dimensional stochastic differential equations without drift.* Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **68**, 287–314 (1985).

[9] Engelbert, H. J., and W. Schmidt: *On one-dimensional stochastic differential equations with generalized drift.* In: Stochastic differential systems. Proceedings of the 4th IFIP-WG 7/1 working conference, Lecture Notes in Control and Information Sciences **69**, 143–155 Springer 1985.

[10] Engelbert, H. J., and W. Schmidt: *Strong Markov continuous local martingales and solutions of one-dimensional SDEs (part* III*).* Math. Nachr. **151**, 149–197 (1991).

[11] Gichman, I. I., and A. V. Skorochod: *Stochastic differential equations.* Springer 1972.

[12] Gichman, I. I., and A. V. Skorochod: *The theory of stochastic processes,* vol. III. Springer 1979.

[13] Ikeda, N., and S. Watanabe: *Stochastic differential equations and diffusion processes.* North-Holland, Amsterdam 1989.

[14] Jacod, J., et M. Yor: *Etudes des solutions extrmales et reprsentation intgrale des solutions pour certains problmes des martingales.* Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **38**, 83–125 (1977).

[15] Karatzas, I., and S. E. Shreve: *Brownian motion and stochastic calculus.* Springer 1988.

[16] Krylov, N. V.: *Controlled diffusion processes.* Springer 1982.

[17] Lakshmikantham, V., and G. S. Ladde and A. S. Vatsala: *Monotone iterative techniques for nonlinear differential equations.* Pitman, Boston 1985.

[18] Natanson, I. P.: *Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen.* Akademie-Verlag, Berlin 1961.

[19] Parthasarathy, K. R.: *Probability measures on metric spaces.* Academic Press, San Diego 1967.

[20] Rozkosz, A. and L. Słomiński: *On weak solutions of one-dimensional SDEs with time-dependent coefficients.* Stochastics Stochastics Rep. **42**, No. 3–4, 199–208 (1993).

[21] Senf, T.: *Stochastische Differentialgleichungen mit inhomogenen Koeffizienten.* Dissertation. Friedrich-Schiller-Universität Jena 1992.

[22] Senf, T.: *On one-dimensional stochastic differential equations without drift and with time-dependent diffusion coefficients.* Stochastics and Stochastics Reports **43**, 199–220 (1993).

[23] Širjaev, A. N.: *Wahrscheinlichkeit.* Deuscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1988.

[24] Stein, E. M.: *Singular integrals and differentiability properties of functions.* Princeton Univ. Press, Princeton 1986.

[25] Stroock, D. W., and S. R. S. Varadhan: *Multidimensional diffusion processes.* Springer 1979.

[26] Tolstov, G. P.: *Maß und Integral.* Akademie-Verlag, Berlin 1981

[27] Yamada, T., and S. Watanabe: *On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations.* J. Math. Kyoto Univ. 11-1, 155–167 (1971).