Teil I: Wahrscheinlichkeitstheorie

- Kapitel 2. Wahrscheinlichkeit (wird heute behandelt)
- Kapitel 3: Bedingte Wahrscheinlichkeit
- Kapitel 4: Zufallsvariablen
- Kapitel 5: Erwartungswerte, Varianz, Kovarianz und Korrelation

Kapitel 2. Wahrscheinlichkeit

Überblick

- Beispiele
- Wahrscheinlichkeitsraum
- Eigenschaften der Wahrscheinlichkeit

Beispiele

Beispiel 1: Würfelwurf

$\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_6\}$

Beispiel 2: zweifacher Münzwurf

$\Omega = \{(K, K), (K, Z), (Z, K), (Z, Z)\}$

Beispiel 3: Psychologisches Testen

$\Omega = \Omega_U \times \Omega_O$

Beispiel 4: Ein typisches psychologisches Experiment

$\Omega = \Omega_U \times \Omega_X \times \Omega_Y$

Wahrscheinlichkeitsraum

Ein *Wahrscheinlichkeitsraum* repräsentiert das beobachtete Zufallsexperiment. Er besteht aus den folgenden drei Komponenten

- die *Menge der möglichen Ergebnisse* des betrachteten Zufallsexperiments
- die *Menge der möglichen Ereignisse* und
- das *Wahrscheinlichkeitsmaß*

Zufallsexperiment, Ergebnis, Ereignis und Wahrscheinlichkeit

Der Wahrscheinlichkeitsraum $\langle \Omega, \mathfrak{A}, P \rangle$ repräsentiert das betrachtete

Zufallsexperiment, wobei:

- Ω die *Menge aller möglichen Ergebnisse* eines Zufallsexperiments
- $\mathfrak{A}$ die *Menge aller möglichen Ereignisse* $A \subset \Omega$ und
- $P: \mathfrak{A} \rightarrow [0, 1]$ das *Wahrscheinlichkeitsmaß auf* $\mathfrak{A}$

Die Menge der möglichen Ergebnisse

Beispiel 1: Würfelwurf

$\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_6\}$

Beispiel 2: zweifacher Münzwurf

$\Omega = \{(K, K), (K, Z), (Z, K), (Z, Z)\}$

Beispiel 3: psychologisches Testen

$\Omega = \Omega_U \times \Omega_O$

Die Menge der möglichen Ereignisse: Beispiel 1

Mögliche Ereignisse sind immer Teilmengen der Menge der möglichen Ergebnisse Ω

Beispiel 1 (zweifacher Münzwurf):

$\mathfrak{A} = \{\emptyset, \Omega, \{(K, K)\}, \{(K, Z), (Z, K), (Z, Z)\}\}$

Die Menge der möglichen Ereignisse: Beispiel 2

zweifacher Münzwurf

Die Menge aller Teilmengen von Ω

$$\mathfrak{A} := \big\{\emptyset, \Omega, \{\langle Z, Z\rangle\}, \{\langle Z, K\rangle\}, \{\langle K, Z\rangle\}, \{\langle K, K\rangle\},$$
$$\{\langle Z, Z\rangle, \langle Z, K\rangle\}, \{\langle Z, Z\rangle, \langle K, Z\rangle\}, \{\langle Z, Z\rangle, \langle K, K\rangle\},$$
$$\{\langle Z, K\rangle, \langle K, Z\rangle\}, \{\langle Z, K\rangle, \langle K, K\rangle\}, \{\langle K, Z\rangle, \langle K, K\rangle\},$$
$$\{\langle Z, Z\rangle, \langle Z, K\rangle, \langle K, Z\rangle\}, \{\langle Z, Z\rangle, \langle Z, K\rangle, \langle K, K\rangle\},$$
$$\{\langle Z, Z\rangle, \langle K, Z\rangle, \langle K, K\rangle\}, \{\langle Z, K\rangle, \langle K, Z\rangle, \langle K, K\rangle\}\big\}$$

Einige mögliche Ereignisse beim psychologischen Testen: Beispiel

Tabelle 2.1.
Einige Ereignisse und ihre formalsprachliche Darstellung

Inhaltliches Ereignis	Formale Darstellung als Teilmenge von $\Omega = \Omega_U \times \Omega_O$
Fritz wird gezogen	$\{\text{Fritz}\} \times \Omega_O$
Fritz oder Franz werden gezogen	$\{\text{Fritz}, \text{Franz}\} \times \Omega_O$
Die erste Aufgabe wird gelöst	$\Omega_U \times \{+\} \times \{+, -\}$
Fritz wird gezogen und löst beide Aufgaben	$\{\langle \text{Fritz}, +, + \rangle\}$

Anwendung und Interpretation

- Problem: Wahrscheinlichkeiten sind in der Regel unbekannt
- Ziel: Schätzung der Wahrscheinlichkeiten oder anderer Kenngrößen
- Wahrscheinlichkeiten sind *theoretische* Größen
- Beispiel: Münzwurfexperiment

Definition s -Algebra

Definition 2.1.
Sei $\mathfrak{A}$ eine Menge von Teilmengen einer Menge Ω. Die Menge $\mathfrak{A}$ heißt dann σ-A*lgebra*, wenn gelten:

(a) $\Omega \in \mathfrak{A}$;

(b) wenn $A \in \mathfrak{A}$, dann $\overline{A} \in \mathfrak{A}$ ($\overline{A}$ ist das Komplement von A);

(c) wenn $A_1, A_2, \ldots$ eine Folge von Elementen aus $\mathfrak{A}$ ist, dann ist auch deren Vereinigung $A_1 \cup A_2 \cup \ldots$ Element von $\mathfrak{A}$.

Definition Wahrscheinlichkeit, usw. 1

Definition 2.2
Seien $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra auf einer Menge Ω sowie $P\colon \mathfrak{A} \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf $\mathfrak{A}$.

Man betrachte die Bedingungen (Kolmogoroff-Axiome):

(a) $P(A) \geq 0$, für alle $A \in \mathfrak{A}$; *Nichtnegativität*

(b) ist $A_1, A_2, \ldots$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen $A_i \in \mathfrak{A}$, dann gilt: $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots$ σ-A*dditivität*

(c) $P(\Omega) = 1$. *Normierung*

Definition Wahrscheinlichkeit, usw. 2

Wenn die Bedingungen (a) bis (c) gelten, heißen:

(i) die Funktion P „*Wahrscheinlichkeitsmaß*“,

(ii) das Tripel $\langle \Omega, \mathfrak{A}, P \rangle$ „*Wahrscheinlichkeitsraum*“,

(iii) die Elemente $A_i \in \mathfrak{A}$ „*Ereignisse*“,

(iv) der Wert $P(A)$ „*Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A*“ ,

(v) die Mengen $\{\omega\}$, $\omega \in \Omega$, „*Elementarereignisse*“ und

(vi) die Menge Ω die „*Menge der möglichen Ergebnisse*“.

Beispiel für einen Wahrscheinlichkeitsraum

$$\Omega = \{(K, K), (K, Z), (Z, K), (Z, Z)\}$$

Tabelle 2.2.
Ereignisse und ihre Wahrscheinlichkeiten beim zweimaligen Münzwurf

$A_i \in \mathfrak{A}$	$P(A_i)$	Anmerkung
$A_0 = \varnothing$	0	
$A_1 = \Omega$	1	Bedingung (c) der Def. 2
$A_2 = \{\langle K, K\rangle\}$	1/4	faire Münze!
$A_3 = \{\langle K, Z\rangle\}$	1/4	dto.
$A_4 = \{\langle Z, K\rangle\}$	1/4	dto.
$A_5 = \{\langle Z, Z\rangle\}$	1/4	dto.
$A_6 = \{\langle K, K\rangle, \langle K, Z\rangle\}$	$P(A_2) + P(A_3) = 1/2$	Bedingung (b) der Def. 2
$A_7 = \{\langle K, K\rangle, \langle Z, K\rangle\}$	$P(A_2) + P(A_4) = 1/2$	dto.
$A_8 = \{\langle K, K\rangle, \langle Z, Z\rangle\}$	$P(A_2) + P(A_5) = 1/2$	dto.
$A_9 = \{\langle K, Z\rangle, \langle Z, K\rangle\}$	$P(A_3) + P(A_4) = 1/2$	dto.
$A_{10} = \{\langle K, Z\rangle, \langle Z, Z\rangle\}$	$P(A_3) + P(A_5) = 1/2$	dto.
$A_{11} = \{\langle Z, K\rangle, \langle Z, Z\rangle\}$	$P(A_4) + P(A_5) = 1/2$	dto.
$A_{12} = \{\langle K, K\rangle, \langle K, Z\rangle, \langle Z, K\rangle\}$	$P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) = 3/4$	dto.
$A_{13} = \{\langle K, K\rangle, \langle K, Z\rangle, \langle Z, Z\rangle\}$	$P(A_2) + P(A_3) + P(A_5) = 3/4$	dto.
$A_{14} = \{\langle K, K\rangle, \langle Z, K\rangle, \langle Z, Z\rangle\}$	$P(A_2) + P(A_4) + P(A_5) = 3/4$	dto.
$A_{15} = \{\langle K, Z\rangle, \langle Z, K\rangle, \langle Z, Z\rangle\}$	$P(A_3) + P(A_4) + P(A_5) = 3/4$	dto.

Eigenschaften der Wahrscheinlichkeit

Theorem 2.1

Seien $\langle \Omega, \mathfrak{A}, P \rangle$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und

$A, B \in \mathfrak{A}$ Ereignisse. Dann gelten:

(i) wenn $B \subset A$, dann $P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$ und $P(A) \geq P(B)$;

(ii) $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$;

(iii) für $\overline{A} := \Omega \setminus A$ gilt: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;

(iv) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Eigenschaften der Wahrscheinlichkeit (Diagramm)

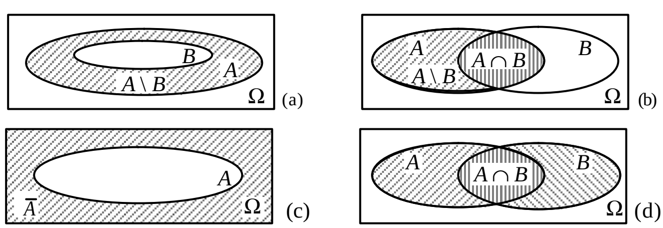

Abbildung 2.1

Venn-Diagramme zur Veranschaulichung der in Theorem 2.1 genannten Eigenschaften eines Wahrscheinlichkeitsmaßes