



Bedingte Varianz und Kovarianz

1

Worum geht es in diesem Modul?

- Beispiel: Baldwin-Täuschung
- Bedingte Varianz und Kovarianz
- Eigenschaften der bedingten Varianz und der bedingten Kovarianz
- Bedingte Korrelationen und Partialkorrelation
- Das Webersche Gesetz für Herstellungsexperimente

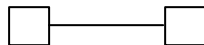


Beispiel: Baldwin-Täuschung I

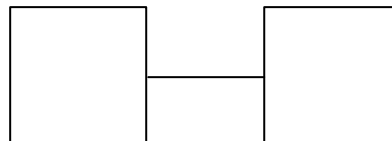
2



(a) $X = 1$



(b) $X = 2$



(c) $X = 3$

Abbildung 12.1. Drei Baldwin-Figuren.



Beispiel: Baldwin-Täuschung II

3

Tabelle 12.1. Bedingte Verteilungen der Urteile.

Y (Urteil in mm)	$P(Y = y X = 1)$	$P(Y = y X = 2)$	$P(Y = y X = 3)$
13	0,1	0,0	0,1
14	0,2	0,0	0,2
15	0,4	0,05	0,4
16	0,2	0,1	0,2
17	0,1	0,2	0,1
18	0,0	0,3	0,0
19	0,0	0,2	0,0
20	0,0	0,1	0,0
21	0,0	0,05	0,0



Baldwin-Täuschung: mögliche Werte

4

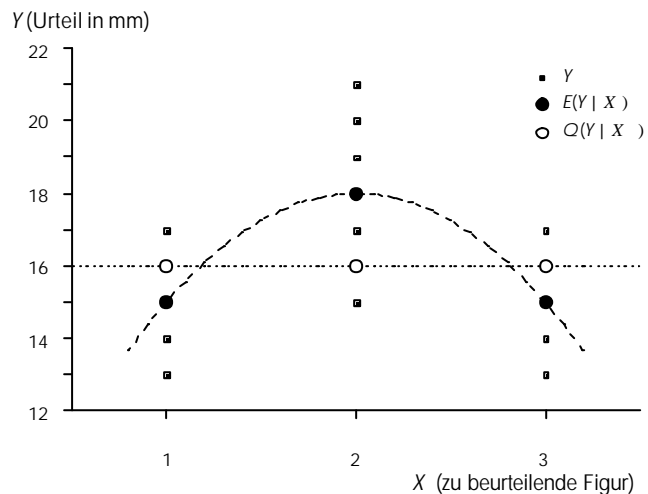


Abbildung 12.2. Idealisierte Darstellung der möglichen Werte der Urteilsvariablen Y für die drei zu beurteilenden Figuren.



Baldwin Illusion: bedingte Varianz

5

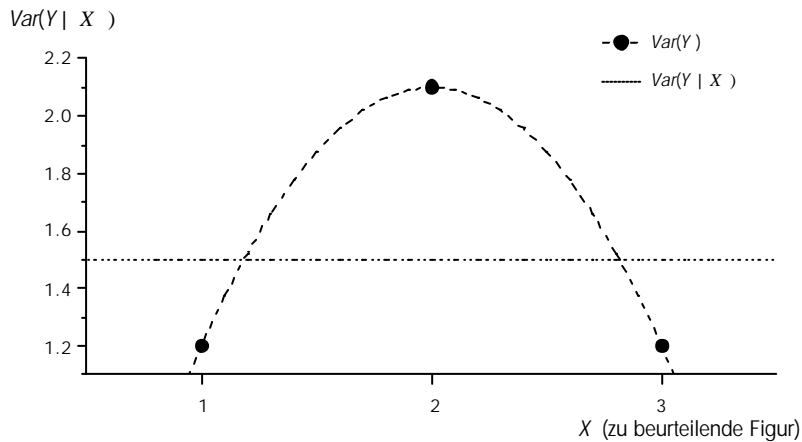


Abbildung 12.3. Darstellung der bedingten Varianz der Urteilsvariablen Y für die drei verschiedenen Werte von X .



Bedingte Kovarianz: Definition

6

Definition 12.1. Seien Y_1 und Y_2 zwei numerische Zufallsvariablen mit endlichen Erwartungswerten und endlichen Varianzen und X eine (ein- oder mehrdimensionale) Zufallsvariable (mit beliebiger Wertemenge), alle drei auf dem gleichen Wahrscheinlichkeitsraum. Außerdem seien:

$$\mathbf{e}_1 := Y_1 - E(Y_1|X) \quad \text{und} \quad \mathbf{e}_2 := Y_2 - E(Y_2|X)$$

die Residuen von Y_1 bzw. Y_2 bezüglich ihrer Regression auf X . Die bedingte Kovarianz von Y_1 und Y_2 gegeben X ist dann definiert durch:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Y_1, Y_2|X) &:= E\left[[Y_1 - E(Y_1|X)] \cdot [Y_2 - E(Y_2|X)] \mid X \right] \\ &= E(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2|X) \end{aligned}$$



Bedingte Varianz: Definition

7

Definition 12.2. Seien Y eine numerische Zufallsvariable mit endlichem Erwartungswert und endlicher Varianz und X eine (ein- oder mehrdimensionale) Zufallsvariable (mit beliebiger Wertemenge), beide auf dem gleichen Wahrscheinlichkeitsraum. Die *bedingte Varianz* von Y gegeben X ist dann die bedingte Kovarianz von Y mit sich selbst. In Formeln:

$$\text{Var}(Y|X) := \text{Cov}(Y, Y|X).$$

Die *bedingte Streuung* oder *bedingte Standardabweichung* von Y gegeben X ist definiert durch:

$$\text{Std}(Y|X) := +\sqrt{\text{Var}(Y|X)},$$

d.h. als positive Quadratwurzel aus der bedingten Varianz $\text{Var}(Y|X)$.



Bedingte Varianz: Rechenregeln

8

- (i) $\text{Var}(Y|X) = E(Y^2|X) - E(Y|X)^2$
- (ii) $\text{Var}(Y|X) = 0$, falls $Y = \alpha$
- (iii) $\text{Var}(\alpha + Y|X) = \text{Var}(Y|X)$
- (iv) $\text{Var}(\alpha \cdot Y|X) = \alpha^2 \text{Var}(Y|X)$
- (v) $\text{Var}(\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2|X)$
 $= \alpha_1^2 \text{Var}(Y_1|X) + \alpha_2^2 \text{Var}(Y_2|X) + 2\alpha_1 \alpha_2 \text{Cov}(Y_1, Y_2|X)$
- (vi) $\text{Var}[f(X) \cdot Y|X] = f(X)^2 \cdot \text{Var}(Y|X)$
- (vii) $E[\text{Var}(Y|X)] = \text{Var}(\mathbf{e}) = E(\mathbf{e}^2)$



Bedingte Kovarianz: Rechenregeln

9

- (viii) $Cov(Y_1, Y_2 | X) = E(Y_1 \cdot Y_2 | X) - E(Y_1 | X) \cdot E(Y_2 | X)$
- (ix) $Cov(Y_1, Y_2 | X) = 0$, falls $Y_1 = \alpha$ oder $Y_2 = \alpha$
- (x) $Cov(\alpha_1 + Y_1, \alpha_2 + Y_2 | X) = Cov(Y_1, Y_2 | X)$
- (xi) $Cov(\alpha_1 Y_1, \alpha_2 Y_2 | X) = \alpha_1 \alpha_2 Cov(Y_1, Y_2 | X)$
- (xii) $Cov(\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2, \beta_1 Z_1 + \beta_2 Z_2 | X)$
 $= \alpha_1 \beta_1 Cov(Y_1, Z_1 | X) + \alpha_1 \beta_2 Cov(Y_1, Z_2 | X)$
 $+ \alpha_2 \beta_1 Cov(Y_2, Z_1 | X) + \alpha_2 \beta_2 Cov(Y_2, Z_2 | X)$
- (xiii) $Cov[f_1(X) \cdot Y_1, f_2(X) \cdot Y_2 | X] = f_1(X) \cdot f_2(X) \cdot Cov(Y_1, Y_2 | X)$.
- (xiv) $E[Cov(Y_1, Y_2 | X)] = Cov(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = E(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2)$



Bedingte Korrelation: Definition

10

Definition 12.3. Unter den gleichen Voraussetzungen wie in Definition 12.1. ist die *bedingte Korrelationsfunktion* zweier numerischer Zufallsvariablen Y_1 und Y_2 gegeben X definiert durch:

$$Kor(Y_1, Y_2 | X) := \frac{Cov(Y_1, Y_2 | X)}{Std(Y_1 | X) \cdot Std(Y_2 | X)},$$

und die *bedingte Korrelation* gegeben $X = x$ durch:

$$Kor(Y_1, Y_2 | X = x) := \frac{Cov(Y_1, Y_2 | X = x)}{Std(Y_1 | X = x) \cdot Std(Y_2 | X = x)}.$$



Partialkorrelation: Definition

11

Definition 12.3. Unter den gleichen Voraussetzungen wie in Definition 12.1 ist die *Partialkorrelation* zweier numerischer Zufallsvariablen Y_1 und Y_2 bzgl. X definiert durch

$$\text{Kor}(Y_1, Y_2 \cdot X) := \frac{\text{Cov}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)}{\text{Std}(\mathbf{e}_1) \cdot \text{Std}(\mathbf{e}_2)},$$

wobei \mathbf{e}_i , $i = 1, 2$, das Residuum bzgl. der Regression $E(Y_i | X)$ ist.



Partialkorrelation: Theorem

12

Theorem 12.1. Für die Partialkorrelation zweier numerischer Zufallsvariablen Y_1 und Y_2 bzgl. X gilt:

$$\text{Kor}(Y_1, Y_2 \cdot X) = \frac{\text{Kor}(Y_1, Y_2) - R_{Y_1|X} R_{Y_2|X} \text{Kor}[E(Y_1 | X), E(Y_2 | X)]}{\sqrt{1 - R_{Y_1|X}^2} \cdot \sqrt{1 - R_{Y_2|X}^2}}.$$

Dabei bezeichnen $R_{Y_1|X}^2$ und $R_{Y_2|X}^2$ die Determinationskoeffizienten der beiden Regressionen $E(Y_i | X)$. Im Fall, dass die Regressionen $E(Y_i | X) = \alpha_{i0} + \alpha_{i1}X$, $i = 1, 2$, linear sind, gilt auch:

$$\text{Kor}(Y_1, Y_2 \cdot X) = \frac{\text{Kor}(Y_1, Y_2) - \text{Kor}(Y_1, X) \cdot \text{Kor}(Y_2, X)}{\sqrt{1 - \text{Kor}(Y_1, X)^2} \cdot \sqrt{1 - \text{Kor}(Y_2, X)^2}}.$$