



Getriebelehre

Eine Theorie des Zwanglaufes und der
ebenen Mechanismen

Von

Martin Grübler

Professor an der Technischen Hochschule zu Dresden

Mit 202 Textfiguren



Berlin

Verlag von Julius Springer
1917

Handwritten signature: Julius Springer

Alle Rechte,
insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten.
Copyright 1917 by Julius Springer in Berlin.

Vorwort.

Zur Herausgabe dieses Buches veranlaßte mich die Tatsache, daß in den vorhandenen Werken über Kinematik die eigentliche „Zwanglauflehre“ meist sehr nebensächlich oder gar nicht behandelt wird, während sie nach meiner Überzeugung die Grundlage, bzw. den Ausgangspunkt einer wissenschaftlich-systematischen Behandlung der Mechanismen und Getriebe bilden müßte. Denn alle Mechanismen und Maschinen sind Sonderfälle zwangläufiger kinematischer Ketten, und die Bedingungen aufzustellen, unter denen eine kinematische Kette zwangläufig beweglich wird, ist die Aufgabe der „Zwanglauflehre“. Folglich hat letztere die grundlegende Stellung in einer jeden Maschinengetriebelehre, wie sie nach Ampère von Reuleaux, und Grashof als ein wesentlicher und notwendiger Teil der Maschinenlehre gefordert wurde.

Es ist auffällig, wie wenig z. B. der Satz bekannt ist und benützt wird, daß die Eigenschaft der Zwangläufigkeit der kinematischen Ketten im allgemeinen nicht von den Abmessungen der Kettenglieder abhängt, sondern lediglich von einer sehr einfachen ganzzahligen Beziehung zwischen der Zahl der Kettenglieder und der ihrer beweglichen Verbindungen. Und wenn man beachtet, wie außerordentlich groß die Zahl ganz verschiedenartiger Mechanismen ist, die aus einer einzigen zwangläufigen kinematischen Kette hervorgehen, so ersieht man sofort, wie übersichtlich und einfach sowohl die Analyse, als die Synthese der Mechanismen durch die Zurückführung der letzteren auf die kinematischen Ketten wird. Vielleicht geben die Anregungen durch dieses Buch Veranlassung zur Einführung von Vorlesungen über Maschinengetriebelehre und deren Grundlage, der Zwanglauflehre, denn der Nutzen, den die Zwanglauflehre für eine zusammenfassende und systematische Behandlung der Mechanismen und Maschinen hat, ist so augenfällig, daß man wohl ihn sich nicht entgehen lassen wird. Hierzu kommt, daß die wesentlichen Hilfsmittel für die Untersuchung der Bewegungsvorgänge in den Mechanismen zeichnerischer Art sind, die sich auf verhältnismäßig wenig Sätze stützen, so daß der Verbreitung

der bezüglichen Methoden in technischen Kreisen keine wesentlichen Schwierigkeiten im Wege stehen.

Das vorliegende Buch beschränkt sich auf die ebenen Mechanismen, weil nur bei diesen die zeichnerischen Hilfsmittel zur Untersuchung der Bewegungsvorgänge unmittelbar Verwendung finden können. Auch werden räumliche Mechanismen z. Z. nur selten angewendet, was z. T. wohl darin begründet liegt, daß ihre Theorie die mathematische Analysis nicht entbehren kann und auch wegen der natürlichen Schwierigkeiten noch nicht genügend entwickelt ist, um die für die Anwendungen erforderliche Durchsichtigkeit und Einfachheit zu bieten.

Was die Terminologie anlangt, so habe ich mich in der Hauptsache der von Reuleaux und Grashof herrührenden angeschlossen, jedoch für einzelne Benennungen andere eingeführt, wie z. B. „Schiebepaare“ statt Prismenpaare und „Drehpaare“ statt Drehkörperpaare. Das geschah, um dem mehr phoronomischen Gesichtspunkt Rechnung zu tragen, der für diesen Wissenszweig kennzeichnend ist.

Besonderen Wert lege ich auf die Verwendung der entwickelten Sätze für die Aufsuchung neuer Mechanismen, also für die Synthese der letzteren. Noch ist auf diesem Gebiete viel zu tun; trotzdem habe ich mich entschlossen, die wenigen Sätze und Konstruktionen hier zu veröffentlichen, die dem gesteckten Ziele näher zu kommen geeignet erscheinen. Möchte dieser Versuch eine freundliche Aufnahme finden.

Die wesentlichsten Sätze und Konstruktionen aus der geometrischen Bewegungslehre wurden dem Buche in möglichster Kürze eingegliedert, um dem Leser die zur zeichnerischen Untersuchung der Bewegungsvorgänge in den Getrieben erforderlichen Hilfsmittel gleich an die Hand geben zu können.

Das letzte Kapitel über den Beschleunigungszustand habe ich der Vollständigkeit wegen angefügt, trotzdem die in ihm enthaltenen Aufgaben in ihrer Bedeutung für die technischen Anwendungen sehr zurücktreten gegen die in den vorausgehenden Abschnitten behandelten. Auch war es mir darum zu tun, den Nachweis zu liefern, daß der Beschleunigungszustand der kinematischen Ketten zeichnerisch verhältnismäßig einfach gefunden werden kann, selbst in zusammengesetzteren Fällen, und ferner, daß es einen Weg zum Ziele gibt, der den bekannten Nachteil zeichnerischer Methoden zur Ermittlung der Beschleunigungen nicht hat, nämlich von Punkten abhängig zu werden, die zumeist außerhalb des Zeichnungsraumes liegen.

Auffallen wird es wohl, daß ich es unterließ, Literaturnachweise zu geben. Das geschah aus zwei Gründen. Sollen nämlich

diese Nachweise vollständig sein, so bedürfen sie eines großen Raumes, und das entsprach nicht dem einen leitenden Gedanken des Buches, ein möglichst kurzer Leitfaden zu sein. Andererseits ist in der bekannten Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften (Leipzig, B. G. Teubner), und zwar im Band IV, 1, Kinematik von A. Schönflies und M. Grübler, S. 190 u. f. ein so umfassender Literaturnachweis enthalten, daß auf diesen hier verwiesen werden darf. Nur ein Werk möchte ich hier hervorheben, das sowohl wegen seiner grundlegenden wissenschaftlichen Bedeutung, als der zahlreichen Anwendungen besonders genannt zu werden verdient, und auf das ich mich vielfach gestützt habe; es ist dies das „Lehrbuch der Kinematik“ von L. Burmester (Leipzig 1888, Arthur Felix). Ferner bedarf bezüglich der Systematik und der Terminologie auch die theoretische Maschinenlehre (Band I, Kinematik) von G. Grashof der Erwähnung. Daß Reuleaux das Verdienst zukommt, die Zwanglauflehre (Kinematik im Sinne von Ampère) begründet und den wichtigen Grundbegriff der kinematischen Kette eingeführt zu haben, kann als bekannt vorausgesetzt werden.

An dieser Stelle möchte ich noch meinem früheren Assistenten, Herrn Dr. H. Alt hier für die Sorgfalt danken, mit der er die zahlreichen Figuren zeichnete, sowie dem Verleger für das Entgegenkommen bezüglich meiner die Drucklegung des Buches betreffenden Wünsche.

Dresden, Oktober 1917.

Martin Grübler.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Vorwort	III
Kap. 1. Grundbegriffe und Erklärungen.	
Nr. 1. Die Elementenpaare	1
" 2. Unterscheidung nach dem Bewegungsgebiet	2
" 3. Unterscheidung nach der Art der Berührung	2
" 4. Unterscheidung nach dem Freiheitsgrad	2
" 5. Die Zwangläufigkeit der Elementenpaare	3
" 6. Niedere Elementenpaare	3
" 7. Höhere Elementenpaare	5
" 8. Bildsame Elemente	6
" 9. Die kinematischen Ketten	6
" 10. Mechanismen, Getriebe und Maschinen	7
Kap. 2. Die kinematische Analyse.	
Nr. 11. Die Feststellung der Art der Kette	8
" 12. Übertragungsmechanismus von Bonjour	9
" 13. Ventilsteuerung von W. Gillisen	10
" 14. Der Zusammenhang zwischen den Maschinen, Mechanismen und kinematischen Ketten	12
Kap. 3. Die Bedingungen der Zwangläufigkeit für die ebenen geschlossenen kinematischen Ketten.	
Nr. 15. Die Zwangläufigkeit der ebenen Drehpaarketten	13
" 16. Folgerungen	15
" 17. Die sechs- und achtgliedrigen Drehpaarketten	16
" 18. Die Gelenkketten	18
" 19. Die Zwangläufigkeit der niederen Elementenpaarketten	19
" 20. Die Schiebepaarketten	25
" 21. Die höheren Elementenpaarketten	25
" 22. Beispiele	28
" 23. Ketten mit wechselnder Gliederzahl	30
Kap. 4. Die übergeschlossenen kinematischen Ketten.	
Nr. 24. Übergeschlossene Gelenkketten	31
" 25. Übergeschlossene Umschlußpaarketten	37
" 26. Übergeschlossene höhere Elementenpaarketten	38
Kap. 5. Die komplane Bewegung einer starren Ebene.	
Nr. 27. Die Elementarbewegung	39
" 28. Die Rollkurven	41

	Seite
Nr. 29. Die Hüllkurvenpaare	43
„ 30. Der Geschwindigkeitszustand der Ebene	45
„ 31. Geschwindigkeitspläne	48
„ 32. Die Beschleunigung	51
Kap. 6. Die Relativbewegung von drei und mehr komplanen Ebenen.	
Nr. 33. Die Relativbewegung dreier Ebenen	55
„ 34. Die Relativbewegung beliebig vieler Ebenen	59
Kap. 7. Bewegungs- und Geschwindigkeitszustand der zwang- läufigen ebenen kinematischen Ketten.	
Nr. 35. Kennzeichnung der Aufgabe	62
„ 36. Die dreigliedrigen Ketten	63
„ 37. Das Gelenkviereck und seine Sonderfälle	68
„ 38. Die niederen Elementenpaarketten	75
„ 39. Beispiele für die Untersuchung von höheren Elementenpaarketten .	87
Kap. 8. Grenz-, Verzweigungs- und Wechsellagen.	
Nr. 40. Sonderlagen der Kettenglieder gegeneinander	94
„ 41. Die Grenzlagen	97
„ 42. Die Verzweigungs- und Wechsellagen	100
Kap. 9. Die Aufsuchung neuer Mechanismen.	
Nr. 43. Ziele und Bedingungen der Synthese	102
„ 44. Die Forderung der Zwangläufigkeit	103
„ 45. Die Forderung bestimmter gegenseitiger Lagen	107
„ 46. Die Forderung bestimmter Bahnen, Geschwindigkeiten und Be- schleunigungen	112
Kap. 10. Der Beschleunigungszustand der kinematischen Ketten.	
Nr. 47. Die Krümmung der Bahnkurven	116
„ 48. Der Beschleunigungszustand der Ebene	124
„ 49. Der Beschleunigungszustand der Relativbewegungen dreier Ebenen	131
„ 50. Beschleunigungszustand des Gelenkviereckes und seiner Sonderfälle	137
„ 51. Die Ermittlung des Beschleunigungszustandes der kinematischen Ketten	145

Erstes Kapitel.

Grundbegriffe und Erklärungen.

1. Die Elementenpaare.

Eine jede Maschine kann aufgefaßt werden als eine bewegliche Verbindung starrer Körper, die infolge ihrer dauernden Berührungen in ihren gegenseitigen Bewegungen beschränkt sind. Die Teile der Körper, in denen sie sich berühren, heißen die Elemente der Maschine, oder auch kurz Elemente; je zwei sich berührende Elemente bilden ein sog. Elementenpaar.

So sind z. B. der Zapfen einer Welle und das ihn umschließende Lager ein Elementenpaar, ferner die Schraubenmutter und die Spindel, auf der sich erstere bewegt, endlich die beiden gerade in Berührung (im Eingriff) befindlichen Zähne eines Zahnräderpaares usw.

Die Art und Weise, wie die Elemente eines Paares in stetiger Berührung erhalten werden, nennt man die Schließung oder den Schluß des Paares. Man unterscheidet selbständig und unselbständig geschlossene Paare. Unter einem selbständig geschlossenen Paar versteht man ein solches, bei dem die Gestalt der Elemente den Schluß erzwingt, wie z. B. bei Schraubenmutter und -spindel, oder bei dem Zapfen und dem ihn umschließenden Lager. Unselbständig geschlossene Paare heißen die, bei denen der Schluß durch besondere Hilfsmittel erzielt wird. Man verwendet hauptsächlich zwei Arten des Schlusses, und zwar entweder den Kraftschluß, bei dem eine Kraft den Schluß herbeiführt, wie z. B. zwischen Schneide und Pfanne einer Hebelwaage, wo die Schwere den Schluß erzwingt (s. Fig. 1), oder den Kettenschluß, der durch die Verbindung der Elemente mit anderen beweglichen Teilen der Maschine herbeigeführt wird, wie z. B. bei Daumenscheiben und Klinken in den Steuerungsmechanismen (s. Fig. 2).

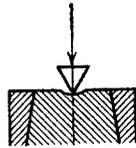


Fig. 1.

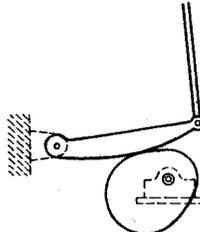


Fig. 2.

Die Elementenpaare werden in mehrfacher Hinsicht unterschieden, bzw. in Gruppen eingeteilt.

2. Unterscheidung nach dem Bewegungsgebiet.

Das Bewegungsgebiet, d. i. die Gesamtheit der Lagen eines Punktes des Elementes in seiner Bewegung gegen das andere Element des Paares kann entweder ein begrenzter Raum, eine Fläche oder eine Kurve sein. Demgemäß unterscheidet man:

- a) raumläufige Paare (Beispiel: Kugel und sie in einem größten Kreise berührender Hohlzylinder),
- b) flächenläufige Paare (Beispiel: das Kugelpaar oder Kugelgelenk, bei dem die Flächen konzentrische Kugelflächen sind),
- c) kurvenläufige Paare, deren Elemente sich so gegeneinander bewegen müssen, daß die Bahnen ihrer Punkte ganz bestimmte Kurven sind. Das wichtigste derartige Paar ist das Schraubenpaar, bei dem die Bahnkurven Schraubenlinien sind und seine Sonderfälle, das Drehkörperpaar (bei dem die Steigung der Schraubenlinien gleich Null ist) und das Prismenpaar (bei dem die Steigung unendlich groß ist).

3. Unterscheidung nach der Art der Berührung.

Die Berührung der Elemente kann erfolgen

- a) in Punkten. Beispiele: Kugel zwischen parallelen ebenen Platten, ferner die Präzisionsverzahnung von Olivier,
- b) in Kurven. Beispiele: Die Zahnflanken der Stirn- und Kegelszahnäder, die sich in Geraden berühren, ferner das Kreisringpaar, dessen Elemente sich in Kreisen berühren,
- c) in Flächen. Beispiele: Das Kugelpaar (Kugelgelenk), das Plattenpaar, das Kreiszyylinderpaar, das Schraubenpaar usf. Derartige Paare nennt man auch Umschlußpaare.

4. Unterscheidung nach dem Freiheitsgrade.

Jede Elementarbewegung eines freien starren Körpers läßt sich bekanntlich zurückführen auf drei Schiebungen längs dreier nicht in einer Ebene liegenden Geraden und drei Drehungen um diese Geraden. Da diese sechs Bewegungen beim freien Körper keiner Beschränkung unterworfen sind, so sagt man, der freie Körper habe sechs Grade der Freiheit. Der Freiheitsgrad vermindert sich bei dem nicht frei beweglichen Körper, und zwar um die Zahl der Bewegungsbeschränkungen, denn durch letztere werden die vorgenannten sechs Elementarbewegungen z. T. unmöglich, z. T. voneinander abhängig. Bezeichnet man die Anzahl der Bewegungsbeschränkungen mit b , so ist der Freiheitsgrad

$$f = 6 - b.$$

Es kann also f alle Werte von 0 bis 6 haben. So ist z. B. bei dem Paar, das von einer Kugel und zwei sie berührenden parallelen ebenen Platten gebildet wird, $b=1$, weil die Schiebung der Kugel senkrecht zur Ebene der Platten unmöglich ist; sonach wird in diesem Falle der Freiheitsgrad $f=5$. Ferner hat z. B. das aus einer Kugel und dem sie in einem größten Kreise berührenden Hohlkreiszyylinder bestehende Paar den Freiheitsgrad $f=4$, weil nur eine Schiebung in Richtung der Zylinderachse möglich, also $b=2$ ist usf. Man erkennt leicht, daß die Punkte eines starren Körpers, dessen Bewegung nur einen Freiheitsgrad besitzt, auf ganz bestimmten Kurven sich zu bewegen gezwungen sind. Derartige Bewegungen nennt man auch zwangläufig, und dementsprechend die Paare, für welche $f=1$ ist, zwangläufig geschlossene oder kurz zwangläufige Elementenpaare. Die zwangläufigen Paare sind also kurvenläufig. Solche Paare sind z. B. das Schraubenpaar und seine Sonderfälle.

5. Die Zwangläufigkeit der Elementenpaare.

Die Zwangläufigkeit der Relativbewegung der Elemente eines Paares kann lediglich durch die Form der Elemente herbeigeführt werden, in welchem Falle das Paar selbständig zwangläufig heißt. Ein solches Paar ist z. B. das Schraubenpaar, denn die Berührung beider Elemente in Schraubenflächen hat zur Folge, daß jeder Punkt des einen Elementes sich gegen das andere in einer Schraubenlinie bewegt. Bei den nicht selbständig zwangläufigen Paaren dagegen bedarf es noch besonderer Hilfsmittel, um die Zwangläufigkeit der gegenseitigen Bewegungen der Elemente zu erzwingen. Als solche werden angewendet entweder der Kraftschluß, wie z. B. bei den Reibungsrändern, die infolge der Reibung aufeinander rollen und somit durch sie zwangläufig werden, oder der Kettenschluß, wie z. B. bei zwei Kurvenscheiben S_1 und S_2 (s. Fig. 3), die gegen einen Körper K sich um parallele Achsen drehen müssen, und hierdurch zwangläufig beweglich werden.

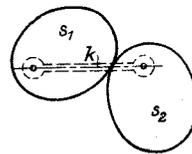


Fig. 3.

Für die weiteren Untersuchungen sind die Mittel, durch die die Elementenpaare zu geschlossenen und zwangläufigen gemacht werden, ohne Bedeutung; wir werden daher im folgenden die Elementenpaare immer als zwangläufig geschlossen voraussetzen.

6. Niedere Elementenpaare.

Ein Elementenpaar wird ein niederes genannt, wenn bei der Relativbewegung der Elemente ein jeder Punkt dieselbe Bahnkurve

durchläuft, ob er nun dem einen oder dem anderen Element angehörig betrachtet wird. Sind a und b die Elemente eines niederen Paares, so beschreibt demnach ein Punkt B von b gegen a dieselbe Bahn, wie der mit B zusammenfallende Punkt A des Elementes a bei der Umkehrung der Bewegung, d. i. bei der Bewegung von a gegen b . Ein niederes Paar ist also dadurch ausgezeichnet, daß die Umkehrung der Bewegung der Elemente die Bahnen der Punkte nicht ändert. Das läßt sich kurz auch so ausdrücken: ein niederes Elementenpaar ist umkehrbar. Als ein Beispiel sei das Schraubenpaar genannt, bei dem ein jeder Punkt dieselbe Schraubenspinde oder die Schraubennutter in Ruhe erhält.

Man überzeugt sich leicht, daß die niederen Paare die Eigenschaft haben, sich in Flächen berühren zu können, also Umschlußpaare zu sein. Das ist nur bei Berührungsflächen möglich, die in sich selbst verschieblich sind, wie z. B. die Schrauben- und Rotationsflächen, sowie die Ebenen. Die wichtigsten niederen Paare sind das Schraubenpaar und seine Sonderfälle, das Drehkörper- und das Prismenpaar. Beim Schraubenpaar erfolgt die Berührung der Elemente in Schraubenflächen, beim Drehkörperpaar in Rotations- und beim Prismenpaar in ebenen Flächen. Wichtiger als die Art der Berührungsflächen ist die Art der Bewegung der Elemente gegeneinander. Beim Schraubenpaar ist die Relativbewegung eine Schraubung, beim Drehkörperpaar eine Drehung um die geometrische Achse der die Elemente begrenzenden Rotationsflächen, und beim Prismenpaar eine geradlinige Schiebung in Richtung der Prismenkanten. Dementsprechend mögen die beiden letzteren Paare kurz auch als Drehpaar bzw. Schiebepaar bezeichnet werden.

Für die späteren Untersuchungen ist die Ausführungsart der Umschlußpaare ohne Bedeutung, weshalb wir in allen Fällen, wo eine Drehung des einen Elementes gegen das andere um eine bestimmte in letzterem festliegende Achse stattfindet, nur von einem Drehpaar sprechen, auch wenn dieses nicht als Umschlußpaar im engeren Sinne des Wortes ausgeführt ist, wie z. B. bei Schneide und Pfanne (s. Fig. 1), oder wenn es aus Stein und Kulissee (s. Fig. 4), oder endlich als Exzenter und Ring (s. Fig. 5) besteht. Das gleiche soll auch von den Prismenpaaren gelten, ob sie nun als Schieber oder als Kreuzkopf und Führungsliniale oder als Stab und Hülse uns ent-

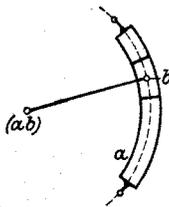


Fig. 4.

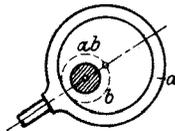


Fig. 5.

gegentreten; sie mögen alle durch Schiebepaare ersetzt gedacht und als solche bezeichnet werden.

7. Höhere Elementenpaare.

Höhere Elementenpaare heißen die Paare, bei denen ein Punkt, je nachdem er dem einen oder dem andern Element eines Paares angehört, verschiedene Bahnen beschreibt, die also nicht umkehrbar sind. Als Beispiel werde das Reibungsräderpaar (Fig. 6) angeführt, bei dem der Punkt A als dem Rade a zugehörig eine gestreckte Epitrochoide (g) gegen das Rad b beschreibt, während derselbe Punkt als Punkt B des Rades b eine verschlungene Epitrochoide (v) gegen a durchläuft. Ganz ähnlich ist es bei den Zahnradpaaren, den Kurvenscheiben usw. Die Berührung der Elemente kann hierbei nur in Kurven oder Punkten erfolgen.

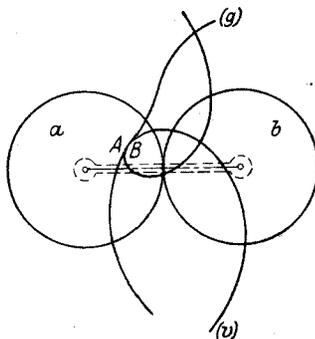


Fig. 6.

Die höheren Paare sind entweder selbständig oder unselbständig zwangläufig. Im ersten Falle (dem seltner vorkommenden) ist die Form der Elemente so gewählt, daß durch sie die gegenseitige Bewegung der Elemente zu einer völlig bestimmten wird. Als Beispiele mögen die Kurvenscheiben im umschließenden Rahmen genannt werden und deren Sonderfälle, das Kurvenzweieck im Dreieck (Fig. 7) und das Kurvendreieck im Quadrat (Fig. 8).

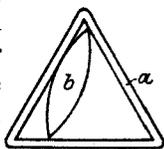


Fig. 7.

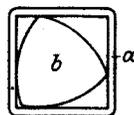


Fig. 8.

Weit wichtiger und häufiger sind die unselbständigen Paare, zu denen die Zahnräder, die unrunder Räder, die Daumenscheiben usf. gehören. Sie werden zwangläufig beweglich entweder durch Kraftschluß, wie z. B. das Hebadaumenpaar der Pochstempel durch die Schwerkraft oder durch den Kettenschluß, wie z. B. das aus einer Kurvenscheibe a von konstanter Breite und dem Rahmen b bestehende Paar, bei dem die Zwangläufigkeit der gegenseitigen Bewegungen der Elemente dadurch herbeigeführt wird, daß beide gegen denselben Körper sich zu drehen, bzw. zu verschieben genötigt sind (s. Fig. 9).

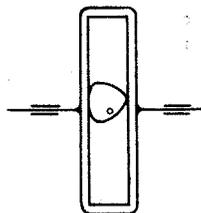


Fig. 9.

8. Bildsame Elemente.

Hierunter versteht man solche, die ihre Gestalt zwar ändern, aber in einer bestimmten Richtung als starr angesehen und daher mit starren Körpern kinematisch gepaart werden können. Solche sind: α) Seile, Bänder und Ketten, die als Zugkraftorgane bezeichnet werden; β) Flüssigkeiten in geschlossenen Gefäßen, die zur Übertragung einer Bewegung mittels Flüssigkeitsdruckes verwendet und deshalb Druckkraftorgane genannt werden; γ) Federn, die infolge ihrer Gestaltsänderung Zug- oder Druckkräfte entwickeln, durch die sie einen Kraftschluß bewirken und damit eine Bewegung veranlassen.

Die Paarung der bildsamen Elemente mit starren Körpern ist in den Anwendungen stets eine solche, daß die Bewegungsübertragung auch durch starre Verbindungen, oder durch bewegliche Verbindungen mittels starrer Elemente erzeugt werden könnte, wie z. B. bei einem Seiltrieb, in dem zwei Seilscheiben durch ein Seil zwangläufig verbunden sind, die Bewegungsübertragung vom Element a auf b ersetzt werden könnte entweder durch das Zahnräderpaar $a'b'$, oder durch eine Koppelstange c , die gelenkig an a und b angeschlossen ist (s. Fig. 10). Deshalb bedürfen die Paare mit bildsamen Elementen in den folgenden Untersuchungen, soweit sich diese auf Bewegungsvorgänge, insbesondere auf die Erzeugung zwangläufiger Bewegungen erstrecken, keiner besonderen Berücksichtigung.

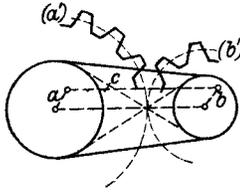


Fig. 10.

9. Die kinematischen Ketten.

Unter einer kinematischen Kette versteht man eine durch Elementenpaare vermittelte solche Verbindung von Körpern, durch die die letzteren in ihrer gegenseitigen Beweglichkeit beschränkt werden. Die Körper selbst, die zunächst als starr vorausgesetzt werden, heißen die Glieder der Kette. So ist z. B. in Fig. 11 eine Kette schematisch dargestellt, die aus acht Gliedern besteht, die untereinander durch Drehpaare beweglich verbunden sind.

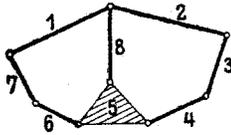


Fig. 11.

Die Anzahl der Elemente, die ein Glied enthält, ist ebenso groß, wie die Anzahl der Glieder, mit denen es in beweglicher Verbindung steht, also durch Elementenpaare verbunden ist. Wir nennen ein Glied singular, binär, ternär, quaternär, sede-

när usf., je nachdem die Anzahl der in ihm enthaltenen Elemente 1, 2, 3, 4, 5 usf. ist. In der Kette Fig. 11 z. B. sind alle Glieder binär bis auf das Glied 5, das ein ternäres Glied ist.

Die Kette heißt geschlossen, wenn jedes Glied mit wenigstens zwei anderen Gliedern mittels verschiedener Elementenpaare verbunden ist, offen, wenn letzteres nicht zutrifft. In einer offenen Kette, wie z. B. der gewöhnlichen Hebelwage (Fig. 12), treten singuläre Glieder (1, 3 und 4) auf, während letztere in geschlossenen Ketten unmöglich sind. Die Kette wird zwangläufig genannt, wenn die Punkte jedes Gliedes gegen jedes andere Glied sich in bestimmten Bahnkurven voneinander abhängig bewegen. Die Kette heißt eben, wenn die Bahnen der Relativbewegungen aller Glieder in parallelen Ebenen liegen, räumlich, wenn letzteres nicht der Fall ist.

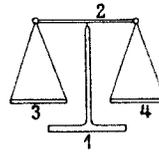


Fig. 12.

Man nennt eine Kette eine niedere Elementenpaarkette oder auch Umschlußpaarkette, wenn in ihr nur niedere oder Umschlußpaare auftreten. Sind in der Kette nur Drehpaare vorhanden, soll sie Drehpaarkette heißen; sind nur Schiebepaare darin, Schiebepaar-(Prismenpaar-)Kette. Die Kette heiße höhere Elementenpaarkette, wenn neben niederen auch höhere Elementenpaare in ihr vorkommen.

10. Mechanismen, Getriebe und Maschinen.

Ein Mechanismus ist eine zwangläufige geschlossene kinematische Kette, von der ein Glied festgestellt, d. h. gegen einen bestimmten Körper (z. B. den Erdkörper oder einen Schiffskörper) in Ruhe gehalten wird. So viel Glieder eine Kette enthält, so viel verschiedene Mechanismen können im allgemeinen aus ihr erhalten werden. So ergeben sich z. B. aus dem ebenen Gelenkviereck (13) vier verschiedene Mechanismen, da jedes der vier Glieder festgehalten werden kann (s. Fig. 13).

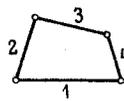


Fig. 13.

Ein Getriebe ist ein Mechanismus, in dem ein bestimmtes Glied die Bewegung der übrigen hervorruft, also das treibende ist. In der Regel ist das treibende Glied mit dem ruhenden unmittelbar beweglich verbunden. Aus einem Mechanismus gehen sonach im allgemeinen mehrere Getriebe hervor, wie z. B. aus dem Schubkurbelmechanismus das Kurbelschubgetriebe (s. Fig. 14), falls das Glied 2 das treibende ist

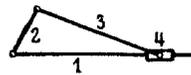


Fig. 14.

(an Pumpen verwendet), und das Schubkurbelgetriebe, dessen treibendes Glied 4 ist, z. B. in der Kolbendampfmaschine, wo die treibende Kraft am Kolben, bzw. Kreuzkopf angreift.

Eine Maschine ist ein Getriebe mit dem Zwecke bestimmter Kräftewirkung, bzw. Arbeitsverrichtung.

Betrachtet man an den Mechanismen, Getrieben und Maschinen nur die Bewegungsvorgänge, so lassen sie sich folglich als Sonderfälle von zwangläufig geschlossenen kinematischen Ketten auffassen. Denn die Relativbewegungen der Glieder einer solchen Kette sind an und für sich genau die gleichen, wie in dem Mechanismus, der aus der Kette durch Festlegung eines Gliedes, und in dem Getriebe, das aus letzterem durch Wahl eines weiteren Gliedes als treibendem hervorgeht. Es deckt sich sonach eine Hauptaufgabe der Lehre von den Mechanismen und Getrieben mit der der Lehre von den kinematischen Ketten und deren Bewegungen, weshalb auf letztere hier allein eingegangen werden soll, da die Anwendungen auf die Mechanismen und Getriebe, soweit sie der Bewegungslehre angehören, nur Wiederholungen sein würden.

Wenn aber Mechanismen und Getriebe Sonderfälle von zwangläufig geschlossenen kinematischen Ketten sind, so entsteht von selbst die Frage: Aus welcher Kette ist ein vorgelegter Mechanismus oder ein gegebenes Getriebe entstanden, bzw. wie findet man diese Kette? Die Antwort auf diese Frage wird durch die sogenannte kinematische Analyse des Mechanismus oder der Maschine gegeben.

Zweites Kapitel.

Die kinematische Analyse.

11. Die Feststellung der Art der Kette.

Es sind eine ganze Reihe von Gesichtspunkten, die bei der kinematischen Analyse in Rücksicht gezogen werden müssen. Zunächst ist die Anzahl und die Art der Elementenpaare zu ermitteln, die in einem vorgelegten Mechanismus oder einer Maschine auftreten; insbesondere ist festzustellen, ob nur niedere oder auch höhere Elementenpaare vorhanden sind, weil es hiervon abhängt, ob die Kette eine niedere oder höhere Elementenpaarkette ist. Ferner muß untersucht werden, ob die Elementenpaare zwangläufig sind oder nicht, und ob sie selbständig oder unselbständig zwangläufig sind. Weiter ist nachzusehen, ob singuläre Glieder auftreten, weil in diesem Falle die Kette eine offene wäre, während bei Ab-

wesenheit singulärer Glieder die Kette eine geschlossene sein müßte. Vor allem muß auch untersucht werden, ob alle Glieder gegen das ruhende Glied des Mechanismus ebene Bewegungen ausführen oder nicht, da im ersteren Falle die Kette eine ebene, im letzteren eine räumliche wäre. Endlich muß die Anzahl der sich gegeneinander bewegenden Glieder ermittelt werden, wobei das ruhende Glied (das Maschinengestell) mitzuzählen ist. Es empfiehlt sich, auf Grund dieser Feststellungen die erhaltene kinematische Kette schematisch aufzuzeichnen, d. h. ohne Rücksicht auf die Ausführungsform der Elementenpaare und der einzelnen Glieder, weil erst hierdurch der rechte Einblick in die Art der Kette gewonnen wird. Auf welche Weise man aus gegebenen Mechanismen die schematische Darstellung der entsprechenden kinematischen Ketten erhält, soll an zwei Beispielen erläutert werden.

12. Übertragungsmechanismus von Bonjour.

Der Zweck dieses in Fig. 15 dargestellten Mechanismus ist die Änderung der Expansion einer Dampfmaschine mit Schiebersteuerung vom Regulator aus. Er wird dadurch erreicht, daß die nach der Regulatorhülse führende Stange z den Hebel 2 in drehende Bewegung gegen das Maschinengestell 1 bringt und die mit 2 gelenkig verbundene Stange 3 die Kurbel 4 in Bewegung setzt, die durch die Stange 5 die im Schieberkasten der

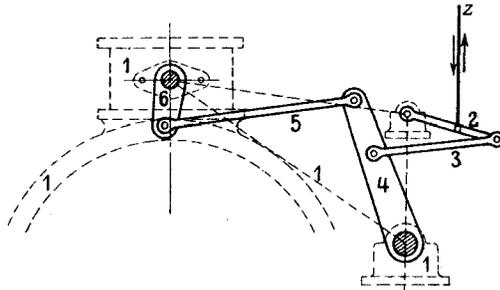


Fig. 15.

Dampfmaschine drehbar gelagerte Kurbel 6 dreht. Mit der Kurbel 6 ist die Regulierwelle starr verbunden, die mittels Schraubengewinde die Expansionsschieberplatten gegeneinander verschiebt. Dieser Mechanismus kann unabhängig von der Art, wie der Hebel 2 in Bewegung gesetzt wird, also ohne Hinzunahme der zum Regulator führenden Stange z und ohne Hinzunahme der Expansionsschieberplatten angesehen und demgemäß aus 6 Gliedern bestehend betrachtet werden, die untereinander nur durch Drehpaare mit parallelen Achsen verbunden sind. Die Kette ist demnach eine ebene Drehpaarkette von 6 Gliedern und 7 Drehpaaren. Vier von den Gliedern sind binär, und zwar die Glieder 2, 3, 5 und 6; zwei dagegen ternär, nämlich 1 und 4. Da die Kette keine singulären Glieder enthält, ist sie eine geschlossene. Daß sie zwangsläufig ist, soll später gezeigt

werden. Um die Kette schematisch darstellen zu können, sehen wir von der Ausführungsform der Glieder ganz ab und betrachten sie als komplian bewegliche starre Ebenen, die Drehpaare als gemeinsame Punkte, um die sie sich gegenseitig drehen, also gelenkig verbunden sind. Damit ergibt sich zunächst die in Fig. 16 schematisch dargestellte Kette, in der die Gelenkpunkte — die stets mit den beiden Zahlen der verbundenen Glieder bezeichnet sind — dieselbe gegenseitige Lage haben, wie in dem Mechanismus Fig. 15

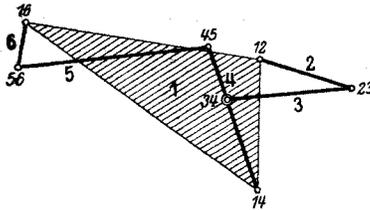


Fig. 16.

die Drehpaar-Achsen. Da indes nachgewiesen werden kann, daß die Abmessungen der Glieder, bzw. die gegenseitigen Lagen der Drehpaar-Achsen eines jeden Gliedes keinen Einfluß auf die Zwangsläufigkeit der Bewegung des Mechanismus haben, so können wir z. B. die drei Gelenkpunkte 14, 34 und 45, die in dem Mechanismus auf einer Geraden liegen, als Eckpunkte eines beliebigen Dreieckes

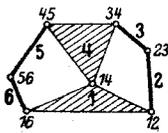


Fig. 17.

wählen, und ebenso die Entfernungen der Gelenkpunkte auf den anderen Gliedern willkürlich ändern. Hierdurch entsteht eine schematische Darstellung der dem Mechanismus zugrunde liegenden Drehpaarkette, wie wir sie später immer benutzen; sie hat den Vorzug großer Übersichtlichkeit (s. Fig. 17). Selbstverständlich dürfen die Abmessungen der Kettenglieder nicht so gewählt werden,

daß hierdurch die Zahl der Kettenglieder geändert wird, also z. B. die Entfernung der Gelenkpunkte eines binären Gliedes nicht gleich Null genommen werden.

13. Ventilsteuerung von W. Gillisen (D. R. P. Nr. 107 642).

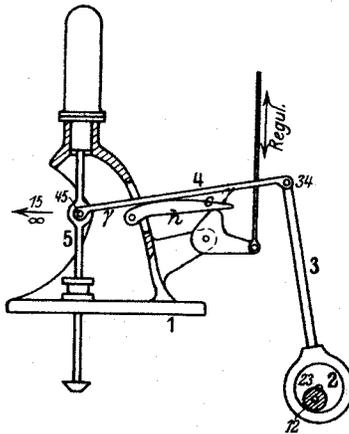


Fig. 18a.

zweier Zylinderflächen, deren Leitkurven die sich berührenden Kur-

ven c und γ sind. Der Hebel h ist während des normalen Ganges der Dampfmaschine in Ruhe, denn er wird nur bewegt, wenn der Regulator in Tätigkeit tritt, und das ist nur bei Störungen des normalen Ganges der Fall. Folglich kann der Hebel h als dem Maschinengestell 1 zugehörig betrachtet werden. Das Elementenpaar ist unselbständig, da es nur ein Hüllkurvenpaar (c, γ) aufweist. Der Hebel 4 ist gelenkig in dem Drehpaar 34 an die Exzenterstange 3 angeschlossen, die durch das Exzenter 2 mit der Steuerungswelle 12 beweglich verbunden ist. Hierdurch wird erreicht, daß sich die Exzentermitte 23 auf einem Kreise um 12 bewegt, also genau so, als ob das Glied 2 eine Kurbel von der Länge $12 \div 23$ wäre, die sich gegen 1 um 12 dreht. Diesen Umstand benutzen wir zur Vereinfachung der schematischen Darstellung der zugrunde liegenden kinematischen Kette, indem wir das Exzenter durch die Kurbel 2 in Fig. 18 b ersetzen.

Ferner tritt in dem Mechanismus ein Schiebepaar auf, das durch die Ventilstange 5 und deren Führung im Maschinengestell gebildet wird. Wir stellen es wie in Fig. 18 b schematisch durch eine Stange 5 dar, die in einer mit dem Maschinengestell 1 starr verbundenen Hülse gleitet, und bezeichnen es mit 15_{∞} , um anzudeuten, daß die Bewegung von 5 gegen 1 als eine Drehung um den unendlich fernen Drehpunkt 15 aufgefaßt werden kann. Die Stange 5 ist

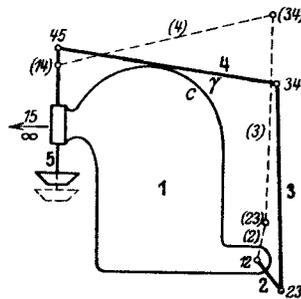


Fig. 18 b.

mit dem Hebel 4 gelenkig durch das Drehpaar 45 verbunden. Dieses Drehpaar ruht, solange das Ventil in Ruhe bleibt, und das ist der Fall während der Expansion und dem Ausströmen des Dampfes. Während dieser Periode ist sonach das Glied 5 in Ruhe gegen 1; es kann demnach mit 1 starr verbunden gedacht werden. Die Anzahl der gegeneinander sich bewegenden Glieder des Mechanismus beträgt folglich während dieses Vorganges nur 4 und dementsprechend ist die zugrunde liegende Kette eine viergliedrige Drehpaarkette, ein sogenanntes Gelenkviereck, dessen 4 Gelenkpunkte 12, (23), (34) und (14) (s. Fig. 18 b) sind. Somit erkennt man, daß der gesamte Bewegungsvorgang in zwei verschiedene Teile zerfällt. Während des einen Teiles, nämlich während des Einströmens des Dampfes bewegt sich das Ventil 5; die entsprechende Kette besteht aus 5 Gliedern und ist eine zwangläufige höhere Elementenpaarkette, wie später gezeigt werden soll. Während des anderen Teiles (der Expansion) dagegen bleibt das Glied 5 gegen 1 in Ruhe, und zwar solange sich die Kurven c und γ nicht

berühren. Die entsprechende Kette besteht dann nur aus 4 sich gegeneinander bewegenden Gliedern, und zwar sind diese 1, 2, 3 und 4, wie schon oben erwähnt, die Glieder eines zwangsläufigen Gelenkviereckes.

14. Der Zusammenhang zwischen den Maschinen, Mechanismen und kinematischen Ketten.

Die beiden behandelten Beispiele zeigen aber nicht nur, durch welche Überlegungen man zu der kinematischen Kette gelangt, die einer gegebenen Maschine oder einem Mechanismus zugrunde liegt, sondern auch, daß die Abhängigkeit der Bewegungen der Glieder voneinander in dem Mechanismus die gleiche ist, wie in der entsprechenden kinematischen Kette. Denn daß man ein Glied der kinematischen Kette (in unseren beiden Fällen das Glied 1) in Ruhe hält, hat keinen Einfluß auf die relativen Bewegungen der übrigen Glieder gegen das ruhende Glied und gegeneinander. Ist sonach die entsprechende kinematische Kette zwangsläufig beweglich, so ist es notwendig auch der Mechanismus, der durch in Ruhehalten eines der Glieder aus ihr hervorgeht, vorausgesetzt, daß die Abmessungen der Glieder und die Ausführungsformen der Elementenpaare auf die Zwangsläufigkeit der Bewegungen keinen Einfluß haben. Da diese Voraussetzung später als richtig erwiesen wird, so erkennt man, welche Bedeutung die kinematische Analyse für die Untersuchung der Bewegungsvorgänge in den Mechanismen besitzt. Es wird sich nämlich herausstellen, daß einer großen Zahl von Mechanismen und Maschinen die ganz gleiche kinematische Kette zugrunde liegt. Die Hilfsmittel und Wege, die zur Kenntnis der Bewegungsvorgänge, Geschwindigkeitsdiagramme usw. der kinematischen Kette führen, lassen sich daher auf alle die so verschiedenartig gestalteten Mechanismen und Maschinen übertragen, die aus ihr durch entsprechende Wahl des ruhenden Gliedes und der Gliederformen hervorgehen. Das gewährt aber nicht nur eine große Übersichtlichkeit der Bewegungsvorgänge, sondern auch wesentliche Vereinfachungen in der theoretischen Behandlung der Mechanismen. Noch größer aber sind die Vorteile, welche die schematische Darstellung der kinematischen Ketten für die Aufsuchung neuer Mechanismen gewährt.

Da alle unsere Maschinen, Getriebe und Mechanismen zwangsläufig beweglich sind, und diese als Sonderfälle entsprechender kinematischer Ketten aufgefaßt werden können, so ist demnach die wichtigste Frage: unter welchen Bedingungen ist eine kinematische Kette zwangsläufig? Denn die Antwort auf diese Frage sagt uns

zugleich, unter welchen Bedingungen eine Maschine, ein Getriebe oder ein Mechanismus zwangsläufig beweglich ist.

Früher hat man diese Frage in komplizierteren Fällen entweder durch die Anfertigung von Modellen, oder auf mühsamem zeichnerischen Wege zu beantworten gesucht, wobei nicht selten Irrtümer unterliefen. Es wird im folgenden dargetan, daß die Antwort recht einfach und allgemein ist, denn die Bedingung der Zwangsläufigkeit besteht in einer ganzzahligen Beziehung zwischen der Zahl der Kettenglieder und der sie verbindenden Elementenpaare.

Drittes Kapitel.

Die Bedingungen der Zwangsläufigkeit für die ebenen geschlossenen kinematischen Ketten.

15. Die Zwangsläufigkeit der ebenen Drehpaarketten.

Wir bezeichnen mit n_2 die Anzahl aller in der Kette enthaltenen binären, mit n_3 die aller ternären, ..., mit n_i die Anzahl aller i Elemente enthaltenden Glieder, endlich mit n die Anzahl aller Glieder der Kette überhaupt. Dann ist, wie ohne weiteres ersichtlich,

$$n_2 + n_3 + \dots + n_i + \dots = n,$$

wofür wir kürzer setzen:

$$\sum_2 (n_i) = n. \dots \dots \dots (1)$$

Bezeichnet ferner g die Anzahl aller Drehpaare in der Kette, so ist die Anzahl aller Elemente, da jedes Paar aus 2 Elementen besteht,

$$e = 2g.$$

Die Anzahl e aller Elemente ist aber auch, wie leicht ersichtlich,

$$= 2n_2 + 3n_3 + \dots + i n_i + \dots = \sum_2 (i n_i);$$

es besteht folglich die Beziehung

$$\sum_2 (i n_i) = 2g. \dots \dots \dots (2)$$

Um in möglichst einfacher Weise zur Bedingungsgleichung der Zwangsläufigkeit zu gelangen, wollen wir uns die Kettenglieder durch starre Ebenen parallel den Ebenen der Bahnen ersetzt denken und sie alle in einer Ebene liegend, also komplan beweglich annehmen. Das ist möglich, weil alle Gliederpunkte senkrecht zu jenen Ebenen kongruente gleichliegende Bahnen beschreiben. Ferner denken wir uns die Drehpaare durch die Schnittpunkte ihrer Achsen mit den betreffenden Ebenen ersetzt; je zwei durch ein Drehpaar verbundene

Glieder, bzw. die sie ersetzenden Ebenen haben folglich einen Punkt gemeinsam, um den sich die Ebenen gegenseitig drehen und den wir ihren Gelenkpunkt nennen wollen. Wir beziehen die Kette durch die Koordinaten ihrer Gelenkpunkte auf ein ebenes rechtwinkliges Koordinatensystem, und zwar seien $x_{hp} y_{hp}$ die Koordinaten des Gelenkpunktes G_{hp} , welcher den Ebenen E_h und E_p gemeinsam ist, ferner $x_{hq} y_{hq}$ die entsprechenden Koordinaten des Gelenkpunktes G_{hq} . Da A_{hp} und A_{hq} in der Ebene E_h liegen und diese starr ist, so besteht zwischen deren Koordinaten die Gleichung

$$(x_{hp} - x_{hq})^2 + (y_{hp} - y_{hq})^2 = l_{pq}^2, \quad \dots \quad (A)$$

welche ausdrückt, daß sich die Entfernung $\sqrt{A_{hp}A_{hq}} = l_{pq}$ während der Bewegung der Ebene E_h nicht ändert. Bekanntlich sind $2i - 3$ solcher voneinander unabhängiger Gleichungen (A) notwendig und hinreichend, um auszudrücken, daß die i Gelenkpunkte in der Ebene E_h ihre gegenseitige Lage nicht ändern, also die Ebene starr ist. Da in der Kette n_i Glieder mit i Elementen vorhanden sind, so trägt für sie die Anzahl der Gleichungen (A), welche Bedingungsgleichungen der Starrheit genannt werden, $(2i - 3)n_i$, folglich für die ganze Kette

$$\sum (2i - 3)n_i.$$

Sie sind die einzigen Gleichungen, denen die Koordinaten der Gelenkpunkte zu genügen haben. Folglich müssen zwischen den Änderungen δx , δy der Koordinaten $\sum (2i - 3)n_i$ Gleichungen der Form

$$(x_{hp} - x_{hq})(\delta x_{hp} - \delta x_{hq}) + (y_{hp} - y_{hq})(\delta y_{hp} - \delta y_{hq}) = 0 \quad \dots \quad (B)$$

bestehen, aus denen sich die δx und δy bestimmen lassen.

Ist die Kette zwangläufig beweglich, so müssen alle Gelenkpunkte gegen ein als ruhend angenommenes Kettenglied nach Gestalt und Größe ganz bestimmte Bahnen beschreiben, sobald einem der Glieder gegen das ruhende Glied eine mögliche Bewegung erteilt wird. Folglich müssen auch die Bahnelemente aller Gelenkpunkte in jeder gegenseitigen Lage der Glieder ganz bestimmte werden, und das ist der Fall, wenn die Änderungen δx , δy alle bestimmte sind. Da es nun notwendig ist und hinreicht, drei dieser auf ein Glied bezüglichen Änderungen gleich Null zu setzen, um auszudrücken, daß dieses Glied ruht, und ferner die Wahl einer der beiden Änderungen δx , δy der Koordinaten eines Gelenkpunktes, der nicht zugleich dem ruhenden Glied angehört, das Bahnelement dieses Punktes völlig bestimmt, wenn die Kette zwangläufig ist, so erkennt man, daß durch die Wahl von 4 der $2g$ Änderungen δx , δy in einer zwangläufigen Drehpaarkette alle übrigen $2g - 4$ völlig

bestimmt sein müssen. Die Ermittlung dieser Änderungen geschieht aber durch die Gleichungen (B); deren Anzahl muß also $2g - 4$ betragen. Soll also die Kette zwangsläufig beweglich sein, so muß die Beziehung

$$\sum_2 (2i - 3)n_i = 2g - 4 \dots \dots \dots (Ia)$$

bestehen. Diese läßt sich, wie folgt, umformen. Es ist

$$\sum_2 (2i - 3)n_i = 2 \sum_2 (in_i) - 3 \sum_2 (n_i),$$

folglich unter Benutzung von (1) und (2)

$$= 4g - 3n;$$

sonach geht (Ia) über in

$$2g - 3n + 4 = 0. \dots \dots \dots (I)$$

Diese Relation ist eine solche zwischen der Anzahl aller Glieder und der sie verbindenden Drehpaare, also ganzzahlig und unabhängig von den Abmessungen der Kettenglieder und deren gegenseitigen Lagen, vorausgesetzt, daß die Kettenglieder starr, also die auf jedes Kettenglied bezüglichen Gleichungen (A) voneinander unabhängig sind. Unter der letzteren Voraussetzung ist folglich die Gleichung (I) die notwendige und hinreichende Bedingung der Zwangsläufigkeit für die ebenen geschlossenen Drehpaarketten.

16. Folgerungen.

Da aus (I)

$$g = \frac{3}{2}n - 2$$

folgt, so erkennt man, daß die Anzahl n der Glieder einer zwangsläufig geschlossenen ebenen Drehpaarkette eine **gerade** ist.

Ersetzt man in (I) n und g mittels der Relationen (1) und (2), so ergibt sich eine Gleichung, aus der

$$n_2 = 4 + \sum_4 (i - 3)n_i$$

folgt. Damit erhält man, weil die Summe rechts nur positive Glieder enthält, den Satz:

Die Anzahl der binären Glieder einer zwangsläufig geschlossenen ebenen Drehpaarkette ist unabhängig von der Anzahl der ternären Glieder und beträgt mindestens 4.

Um zu erkennen, welchen Wert i in einer zwangsläufigen Kette von n Gliedern höchstens erreichen kann, bilden wir eine zwangsläufige geschlossene Kette aus einem i Elemente enthaltenden Gliede mit einer möglichst kleinen Zahl von Gliedern. Wir nehmen jenes Glied 1 zum ruhenden und schließen in jedem der i Gelenkpunkte

ein weiteres Glied gelenkig an (s. Fig. 19). Um die Glieder 2, 3, 4, ... i in von 1 abhängige Bewegungen zu bringen, ist die Verbindung mit 1 unmittelbar, oder nacheinander (wie in Fig. 19 dargestellt) durch je ein weiteres Glied erforderlich, derart, daß $i-1$ Gelenkvierecke entstehen. Die Anzahl n' der Glieder dieser Kette ist $= 1 + i + i - 1 = 2i$, die Anzahl der Drehpaare $g' = i + 2(i-2) + 2 = 3i - 2$; folglich ist

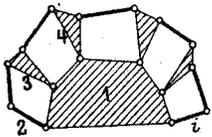


Fig. 19.

$$2g' - 3n' + 4 = 6i - 6i - 4 + 4 = 0,$$

also die Kette zwangläufig. Im allgemeinen wird die Zahl n der Glieder einer derartigen Kette größer als n' sein; setzen wir daher, falls a eine positive ganze Zahl bedeutet,

$$n = n' + a = 2i + a,$$

so folgt umgekehrt

$$i = \frac{n - a}{2}.$$

Damit wird erkannt, daß

$$\max(i) = \frac{n}{2}.$$

Daher der Satz: Die Anzahl der Elemente in einem Gliede einer n -gliedrigen zwangläufig geschlossenen ebenen kinematischen Kette beträgt höchstens $\frac{n}{2}$.

17. Die sechs- und achtgliedrigen Drehpaarketten.

Da diese in den Anwendungen sehr häufig auftreten, so sollen sie hier einzeln aufgeführt werden.

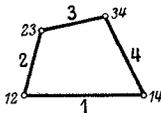


Fig. 20.

Zunächst aber sei erwähnt, daß aus (I) für $n=2$ $g=1$ folgt, also die dem Drehpaar entsprechende Lösung, und ferner für $n=4$ $g=4$, deren entsprechende Kette das ebene Gelenkviereck (Fig. 20) ist.

Falls in (I) $n=6$ gesetzt wird,

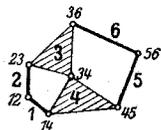


Fig. 21 a.

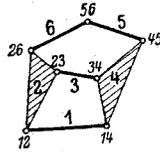


Fig. 21 b.

so erhält man $g=7$ und ferner aus (1) und (2) $n_2=4$, $n_3=2$. Dieser Lösung ordnen sich nur zwei verschiedene Ketten zu, die in Fig. 21 a und 21 b schematisch dargestellt sind. Der Unterschied

beider Ketten besteht nun darin, daß die Kette 21 a (von Burmester Wattscher Mechanismus genannt) zwei Gelenkvierecke ent-

hält, die von den Gliedern 1234 bzw. 3456 gebildet werden, dagegen die Kette 21b (in der Terminologie Burmesters Stephensonscher Mechanismus) nur ein Gelenkviereck 1234.

Für $n = 8$ findet sich aus (I) $g = 10$ und aus (1) und (2) ergeben sich dann folgende drei Gruppen von Lösungen, welche alle möglichen achthgliedrigen Drehpaarketten umfassen:

$$(A) \begin{cases} n_2 = 4 \\ n_3 = 4 \\ n_4 = 0 \end{cases} \quad (B) \begin{cases} n_2 = 5 \\ n_3 = 2 \\ n_4 = 1 \end{cases} \quad (C) \begin{cases} n_2 = 6 \\ n_3 = 0 \\ n_4 = 2 \end{cases}$$

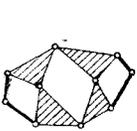


Fig. 22a.

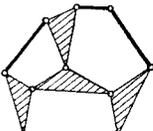


Fig. 22b.

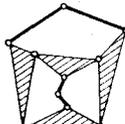


Fig. 22c.

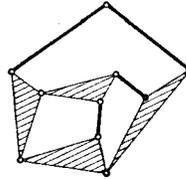


Fig. 22d.

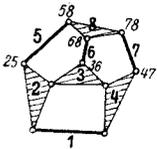


Fig. 22e.

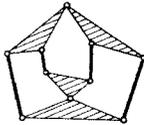


Fig. 22f.

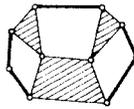


Fig. 23a.

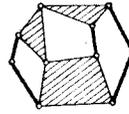


Fig. 23b.

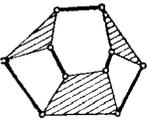


Fig. 23c.

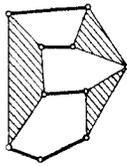


Fig. 23d.

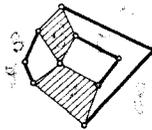


Fig. 24a.

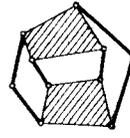


Fig. 24b.

Der Gruppe (A) entsprechen die in den Fig. 22a, b, c, d, e, f dargestellten sechs Ketten, der Gruppe (B) die in den Fig. 23a, b, c, d dargestellten vier Ketten, und der Gruppe (C) die beiden Ketten Fig. 24a und b. Der Unterschied zwischen den Ketten einer jeden Gruppe beruht wie bei den sechsgliedrigen Ketten auf der Anordnung der Glieder; es treten in den Ketten solche mit drei und zwei Gelenkvierecken auf, aber auch solche mit nur einem oder ohne Gelenkviereck¹⁾.

¹⁾ Einen Weg, auf dem man zu den verschiedenen Anordnungen der Glieder gelangen kann, habe ich in der Zeitschrift *Civilingenieur* 1880, S. 168 mitgeteilt.

sonst würde dieses Glied aus der Kette verschwinden, also die Anzahl n der Kettenglieder kleiner werden.

Überdies besteht für die Gelenkketten die Bedingungsgleichung (I) der Zwangläufigkeit fort, wenn man nur unter g die Zahl versteht, welche sich ergibt, wenn man alle $(i-1)$ fachen Gelenke wie $i-1$ Drehpaare zählt, wie aus der Art der Ableitung der Gelenkketten aus den Drehpaarketten unmittelbar ersichtlich wird. So erhält man z. B. für die Kette Fig. 26 $g=7$, denn sie enthält außer 3 Drehpaaren noch 2 zweifache Gelenke, welche je wie zwei Drehpaare zu zählen sind. Da die Kette $n=6$ Glieder enthält, so genügt sie folglich der Bedingungsgleichung (I). In der gleichen Weise ergibt sich für die achtgliedrige Kette Fig. 27 $g=10$, wie erforderlich, da $n=8$ ist.

Beispiele für die Anwendung der Gelenkketten liefern u. a. die Selbstgreifer, von denen einer der in Fig. 28a skizzierten Greifer von Temperley (D.R.P. Nr. 206548) ist. Ihm liegt die in Fig. 28b gezeichnete achtgliedrige Gelenkkette zugrunde, welche aus der Kette Fig. 24b dadurch hervorgeht, daß die beiden Vierecke bzw. quaternären Glieder in ternäre Glieder übergeführt werden und zwar, indem man die in 28b mit s' und s'' bezeichneten Vierecksseiten zu Null macht.

Die Zurückführung der Abmessungen auf Null in den einzelnen ternären, quaternären usf. Gliedern einer Drehpaarkette kann so weit getrieben werden, daß die Kette nur noch binäre Glieder enthält. Eine solche Kette ist z. B. die in Fig. 26 dargestellte; sie ist die einzige sechsgliedrige

Kette dieser Art. Achtgliedrige Gelenkketten mit ausschließlich binären Gliedern gibt es nur die beiden in den Fig. 29a und 29b dargestellten. Die erstere enthält zwei einfache und vier zweifache Gelenke; die Zahl g hat also hier den Betrag $2 + 4(3-1) = 10$, wie nach Relation (I) erforderlich ist, da $n=8$. Die Kette 29b dagegen besitzt vier einfache und zwei dreifache Gelenke, womit sich wieder $g = 4 + 2(4-1) = 10$ findet. Beide Ketten sind demnach zwangläufig.

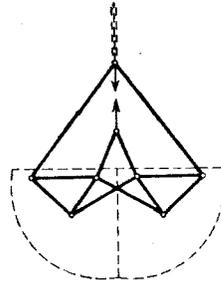


Fig. 28a.

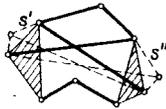


Fig. 28b.

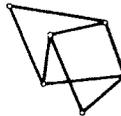


Fig. 29a.

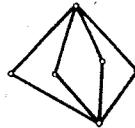


Fig. 29b.

19. Die Zwangläufigkeit der niederen Elementenpaarketten.

Unter diesen — auch Umschlußpaarketten genannten — Ketten verstanden wir die ebenen kinematischen Ketten, in denen außer Drehpaaren auch Schiebepaare auftreten. Da die Drehpaare den Schiebepaaren insofern gleichartig sind, als sie eine bestimmte Relativbewegung der verbundenen Glieder bedingen, nämlich eine geradlinige Schiebung, statt der Drehung, und die Schiebung auch als eine Drehung um eine unendlich ferne Achse aufgefaßt werden kann, so ließe sich zunächst erwarten, daß die Ersetzung der Drehpaare in einer ebenen zwangläufigen Drehpaarkette durch Schiebepaare keine Änderung der Zwangläufigkeit herbeiführt. Dem ist jedoch im allgemeinen nicht so.

Schon das einfache Beispiel des Gelenkviereckes (Fig. 30) zeigt die Abweichungen, wenn man in ihm die Drehpaare zum Teil durch Schiebepaare ersetzt. Wird z. B. in Fig. 30 das Drehpaar 14 durch ein Schiebepaar ersetzt, so erhält man die Schubkurbelkette Fig. 31, welche bekanntlich zwangläufig ist. Werden zwei Drehpaare durch

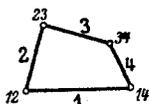


Fig. 30.

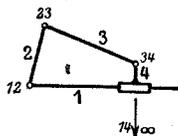


Fig. 31.

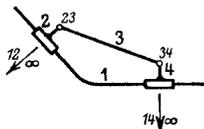


Fig. 32.

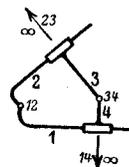


Fig. 33.

Schiebepaare ersetzt, so erhält man entweder die Kreuzschleifenkette (Fig. 32) oder die Winkelschleifenkette (Fig. 33), die beide ebenfalls zwangläufig sind. Werden dagegen drei Drehpaare durch Schiebepaare ersetzt, so erhält man die in Fig. 34 dargestellte

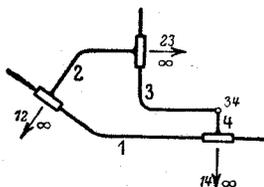


Fig. 34.

Kette, die keine zwangläufig bewegliche Umschlußpaarkette von $n=4$ Gliedern sein kann. Denn das Glied 4 kann sich nicht gegen 1 drehen, folglich auch nicht 2 gegen 4 und 3 gegen 4, weshalb das Drehpaar 34 überflüssig ist, da die Glieder 3 und 4 sich wie ein einziges starres Glied bewegen. Anders ausgesprochen heißt dies, daß die Kette nur aus drei

gegeneinander beweglichen Gliedern besteht, also keine viergliedrige zwangläufige Kette ist. Und wenn alle vier Drehpaare in dem Gelenkviereck durch Schiebepaare ersetzt werden, so ist die entstehende viergliedrige Schiebepaarkette nicht mehr zwangläufig, sondern willkürlich beweglich, wie man sich leicht überzeugt.

Dieses Beispiel zeigt klar, daß die Ketten, welche man aus zwangläufigen Drehpaarketten dadurch erhält, daß man einzelne oder alle Drehpaare durch Schiebepaare ersetzt, nicht unter allen Umständen zwangläufig bleiben. Vielmehr ist die Erhaltung der Zwangläufigkeit an drei Beschränkungen, bzw. Voraussetzungen geknüpft, die zunächst aufgestellt und begründet werden sollen.

1. Beschränkung: Ist ein Kettenglied ausschließlich durch Schiebepaare mit anderen Gliedern verbunden, so dürfen die Schubrichtungen nicht alle parallel untereinander sein. Ist z. B. a' ein derartiges Kettenglied (s. Fig. 35), das mit den Gliedern b und c der Kette durch Schiebepaare mit parallelen Schubrichtungen verbunden ist, so kann es unabhängig von der Relativbewegung der Glieder b und c willkürlich verschoben, also z. B. in die Lage a' gebracht werden, wie unmittelbar ersichtlich ist. Das widerspricht aber der Definition der Zwangläufigkeit der Kette, zufolge deren kein Glied der Kette eine willkürliche Bewegung haben darf.

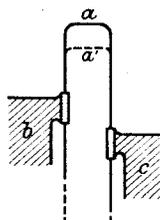


Fig. 35.

2. Beschränkung: Eine ebene Umschlußpaarkette ist nur dann zwangläufig, wenn binäre nur Schiebepaarelemente enthaltende Glieder nicht unmittelbar verbunden sind.

Es seien b und c (s. Fig. 36) zwei nur Schiebepaarelemente enthaltende binäre Glieder der Kette, die in unmittelbarer Verbindung stehen. Diese Glieder lassen sich, wie man sich leicht überzeugt, in die willkürlich gewählten Lagen b' und c' bringen, ohne daß die Glieder a und d , und folglich auch die übrigen Kettenglieder bewegt zu werden brauchen. Zuzufolge der Definition der Zwangläufigkeit hat also die Kette, der die vier Glieder a, b, c, d angehören, nicht die Eigenschaft, zwangläufig beweglich zu sein.

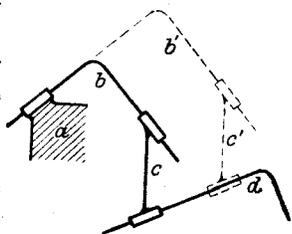


Fig. 36.

Eine Ausnahme hiervon macht nur die Dreischiebepaarkette oder sog. Keilkette (s. Fig. 37a und b), die nur aus drei binären ausschließlich durch Schiebepaare verbundenen Gliedern a, b und c besteht. Sie ist zwangläufig, weil,

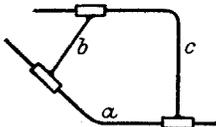


Fig. 37a

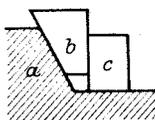


Fig. 37b.

wenn b gegen a sich bewegt, bei willkürlichen Schubrrichtungen auch c sich gegen a und b bewegen muß.

3. Beschränkung: Um diese möglichst kurz aussprechen zu können, wollen wir in einer geschlossenen ebenen Drehpaarkette jede Gruppe von Gliedern, die in sich zurücklaufend paarweise

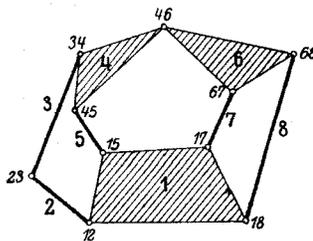


Fig. 38.

beweglich verbunden sind, eine geschlossene Gliedergruppe nennen. So bilden z. B. in der Kette (Fig. 38) die Glieder 1, 2, 3, 4, ferner 1, 2, 3, 5, 6, 7; 1, 4, 5, 6, 7 usw. geschlossene Gliedergruppen. Die Drehpaare, bzw. Gelenke, welche die Glieder einer derartigen Gruppe verbinden, bilden also ein geschlossenes Polygon; dieses mag Gelenkpolygon genannt werden. Solche Gelenkpolygone sind in Fig. 38 z. B. 12, 23, 34, 45, 15, oder 17, 18, 68, 67 usw. Unter Benutzung dieser Beziehungsweise läßt sich die dritte Beschränkung, wie folgt, aussprechen:

Ersetzt man in einer zwangsläufigen Gelenkkette einen Teil der Drehpaare durch Schiebepaare, so ist die entstehende Umschlußpaarkette nur dann zwangsläufig, wenn in jedem der ursprünglichen Gelenkpolygone wenigstens zwei Drehpaare, bzw. Gelenke verbleiben.

Zum Beweise denken wir uns die k Drehpaare, welche die k Glieder G_1, G_2, \dots, G_k einer geschlossenen Gliedergruppe beweglich verbinden, alle bis auf eines durch Schiebepaare ersetzt, und zwar sei dieses Drehpaar das, welches G_k mit G_1 verbindet. Da die Schiebepaare eine Richtungsveränderung der durch sie verbundenen Glieder unmöglich machen, so kann sich auch die Richtung von G_1 gegen G_k nicht ändern und folglich, da G_1 und G_k die Drehachse des sie verbindenden Gelenkes gemeinsam haben, überhaupt keine Relativbewegung beider Glieder stattfinden. Die beiden Glieder G_1 und G_k würden sich sonach wie ein einziges starres Glied bewegen, und das steht in Widerspruch mit der Voraussetzung, daß alle k Glieder gegeneinander in Bewegung sein sollen. Folglich müssen in jeder geschlossenen Gliedergruppe wenigstens zwei Drehpaare, bzw. Gelenke auftreten, wenn die entstehende Umschlußpaarkette zwangsläufig bleiben soll.

Diese Betrachtungen zusammengefaßt führen zu folgendem wichtigen Satz:

Bezeichnet g die Anzahl aller Dreh- und Schiebepaare der Kette und n die Anzahl ihrer Glieder, so ist sie zwangsläufig, wenn sie der Beziehung (I), nämlich

(I) $g = \frac{1}{2}n$

$$2g - 3n + 4 = 0$$

genügt und 1. kein Glied ausschließlich parallele Schiebepaarelemente enthält, 2. binäre nur Schiebepaarelemente enthaltende Glieder nicht unmittelbar verbunden sind und 3. in keiner geschlossenen Gliedergruppe weniger als zwei Drehpaare auftreten.

Als ein Beispiel soll die Einzylinderdampfmaschine mit Verteilungs- und Expansionschieber behandelt werden, die in Fig. 39a schematisch dargestellt ist. Die ihr zugrunde liegende

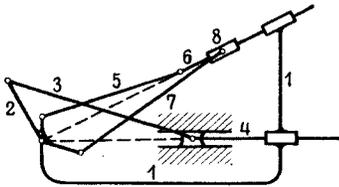


Fig. 39a.

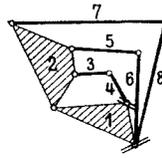


Fig. 39b.

Drehpaar- bzw. Gelenkkette stellt Fig. 39b dar¹⁾. Man ersieht aus ihr, daß das Drehpaar 14 durch ein Schiebepaar zu ersetzen ist, und ebenso das zweifache Gelenk 168 durch Schiebepaare mit derselben Schubrichtung²⁾. Würde der Schieberspiegel parallel der Zylinderachse, so erhielten alle drei Schiebepaare dieselbe Schubrichtung. Das hebt aber die Zwangläufigkeit der Kette nicht auf, weil das Glied 1 noch ein Drehpaarelement besitzt. Da auch in keiner der geschlossenen Gliedergruppen weniger als drei Drehpaare vorhanden sind, so ist die Kette zwangläufig.

Als umfassenderes Beispiel mag ferner noch die Lokomotivenumsteuerung von Heusinger behandelt werden, die in Fig. 40a skizziert ist. Einschließlich des Maschinengestelles (1) besteht der Mechanismus aus $n = 12$ Gliedern, zwischen

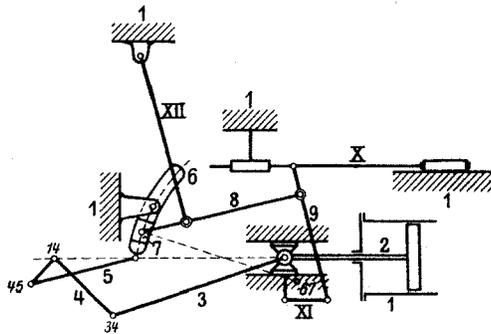


Fig. 40a.

¹⁾ Diese Kette stimmt mit der in Fig. 24a (S. 17) dargestellten überein, wenn man zwei der Drehpaare in dem einen quaternären Glied zusammenlegt.

²⁾ In Fig. 39b sind die durch Schiebepaare ersetzten Gelenke zweifach durchstrichen. Diese Kennzeichnung ist auch weiterhin beibehalten worden.

denen 14 Drehpaare und 2 Schiebepaare die beweglichen Verbindungen vermitteln. Es ist sonach hier

$$g = 14 + 2 = 16 = \frac{2}{3} n - 2,$$

wie nach (I) erforderlich. Daß ferner auch die drei Beschränkungen,

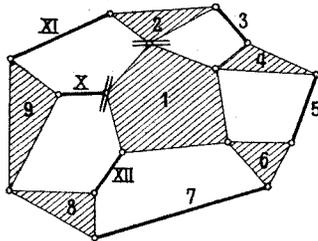


Fig. 40b.

unter denen die Gleichung (I) das Kriterium der Zwangläufigkeit darstellt, davon überzeugt man sich leicht, wenn man die dem Mechanismus zugrunde liegende Gelenkkette (Fig. 40b) aufzeichnet, in der die Drehpaare 12 und 1X durch Schiebepaare ersetzt sind.

Es wäre irrig, anzunehmen, daß die zwangläufigen Umschlußpaarketten

alle diesem Satze sich unterordnen. Denn wenn z. B. eine geschlossene Gliedergruppe nur Schiebepaare enthält, so ist der Schluß, auf dem die 3. Beschränkung beruht, hinfällig, wie schon das Beispiel der Dreischiebepaarkette (Fig. 37 a) zeigt, ferner die in

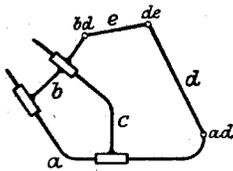


Fig. 41.

Fig. 41 dargestellte Kette, die aus der Dreischiebepaarkette dadurch hervorgeht, daß man an zwei der drei Glieder zwei weitere Glieder mittels Drehpaaren anschließt, in vorliegendem Falle an die Glieder *a* und *b* die Glieder *d* und *e* mittels der Drehpaare *bd*, *ae* und *de*.

Für derartige Umschlußpaarketten, in denen also geschlossene Gliedergruppen ohne Drehpaare enthalten sind, tritt vielmehr als Kriterium der Zwangläufigkeit an Stelle der Gleichung (I) die folgende:

$$2g - 3n + 4 = \gamma,$$

in welcher *g* und *n* die frühere Bedeutung haben, dagegen γ die Anzahl aller voneinander unabhängigen geschlossenen Gliedergruppen der Kette bezeichnet, in denen nur Schiebepaare auftreten. So genügt z. B. die Kette Fig. 41 vorstehender Relation, denn für sie ist $\gamma = 1$ (die Gruppe der Glieder *a*, *b* und *c* enthält nur Schiebepaare), ferner ist $g = 6$, $n = 5$. Selbstredend bleiben die Beschränkungen 1 und 2 auch für diese Ketten bestehen, und die Beschränkung 3 bestimmt, daß keine geschlossenen Gliedergruppen mit einem Drehpaar in der Kette enthalten sein dürfen. Da derartige Umschlußpaarketten kaum je angewendet werden dürften, so soll hier nicht weiter auf sie eingegangen und auf die Abhandlung: Allgemeine Eigenschaften der zwangläufigen ebenen kinematischen

Ketten von Martin Grübler (Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbefleißes 64 [1885] S. 179) verwiesen werden.

20. Schiebepaarketten.

Unter diesen verstehen wir alle Ketten, in denen nur Schiebepaare auftreten. Für sie wird die Bedingungsgleichung der Zwangläufigkeit eine andere als (I), und zwar ergibt sie sich durch folgende Überlegung. Die Lage eines jeden Gliedes wird bestimmt durch die beiden Elemente derjenigen Schiebepaare, in denen es mit zwei anderen Kettengliedern verbunden ist. Denken wir uns nun eines der Kettenglieder als ruhend, ein zweites, das mit diesem durch ein Schiebepaar unmittelbar verbunden ist, als treibendes Glied, so erfordern die übrigen $n - 2$ Glieder der Kette zur Bestimmung ihrer Lage gegen das ruhende Glied $2(n - 2)$ Schiebepaare. Zu diesen tritt noch das Schiebepaar, welches das treibende Glied mit dem ruhenden verbindet; es ist folglich die Anzahl der notwendigen und im allgemeinen auch hinreichenden Schiebepaare zur zwangläufigen Bestimmtheit der Lagen der Glieder gegen das ruhende

$$s = 2(n - 2) + 1 = 2n - 3.$$

Diese Gleichung ist in Verbindung mit den Beschränkungen 1 und 2 des vorhergehenden Abschnittes das notwendige und hinreichende Kriterium der Zwangläufigkeit für die ebenen Schiebepaarketten.

Die bekannteste Schiebepaarkette ist die schon behandelte Keilkette (Fig. 37 a, bzw. 37b); sie genügt dieser Relation, da $s = n = 3$ ist.

Die viergliedrige Schiebepaarkette ($n = 4$) muß nach obiger Beziehung $s = 2 \cdot 4 - 3 = 5$ Schiebepaare enthalten; Fig. 42 stellt diese Kette schematisch dar.

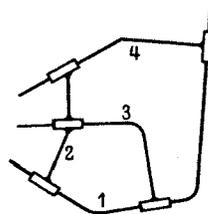


Fig. 42.

Weiter auf die Schiebepaarketten einzugehen, ist unnötig, da sie als Getriebe infolge der hohen Reibungswiderstände kaum angewendet werden.

21. Die ebenen höheren Elementenpaarketten.

Die Bedingungsgleichung der Zwangläufigkeit für die höheren Elementenpaarketten, die wir kurz HEP-Ketten nennen wollen, läßt sich dadurch gewinnen, daß man diese Ketten ohne Änderung ihrer Bewegungsverhältnisse auf Umschlußpaarketten zurückführt. Das ist möglich, wenn man den Umstand benutzt, daß die Zwangläufigkeit der gegenseitigen Bewegungen der Kettenglieder nicht abhängt von der besonderen Art dieser Bewegungen. Dementsprechend lassen

sich die gegenseitigen Bewegungen der beiden Elemente eines höheren Paares auch erzwingen durch Umschlußpaare unter Einschaltung von Hilfsgliedern.

Bei dem unselbständig zwangsläufigen höheren Elementenpaar (Fig. 43), das am häufigsten angewendet wird, geschieht das in der Weise, daß ein Hilfsglied H mit den beiden Elementen G_1 und G_2 des Paares durch Drehpaare P_1 und P_2 beweglich verbunden wird. Dann bilden die drei Glieder G_1 , G_2 und H zusammen mit

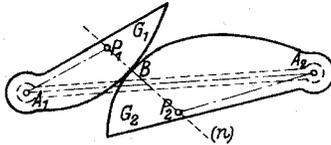


Fig. 43.

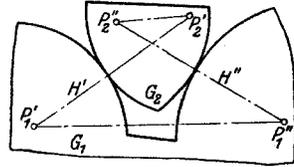


Fig. 44.

dem die Drehpaare A_1 und A_2 starr verbindenden Gliede K das Gelenkviereck $A_1 P_1 P_2 A_2$ (in der Figur strichpunktiert) und dieses ist ja zwangsläufig beweglich. Bei dem selbständig zwangsläufigen höheren Paar (Fig. 44) sind zwei Hilfsglieder H' und H'' nötig, die mit den beiden Elementen G_1 und G_2 des höheren Paares durch Drehpaare gelenkig verbunden das Gelenkviereck $P_1' P_2' P_2'' P_1''$ ergeben. In beiden Fällen bewegen sich dann die Glieder G_1 und G_2 dieser Gelenkvierecke wenigstens momentan gegeneinander genau so, wie sie es als Element des höheren Paares tun würden; es wird also durch die Ersetzung der höheren Paare durch Gelenkvierecke an den Bewegungsverhältnissen der Kettenglieder nichts geändert.

Ersetzen wir demnach in einer HEP-Kette alle höheren Elementenpaare in der angegebenen Weise durch Gelenkvierecke, so ist die entstehende Umschlußpaarkette zwangsläufig, wenn es die HEP-Kette war und umgekehrt. Bezeichnen wir nun mit h_u die Anzahl aller unselbständigen und mit h_s die Anzahl aller selbständigen höheren Paare der Kette, mit n die Anzahl ihrer Glieder und mit g die aller vorhandenen Umschlußpaare, so ist die Anzahl n' der Glieder in der Umschlußpaarkette, die aus der HEP-Kette durch Einschaltung der Hilfsglieder entsteht,

$$n' = n + h_u + 2 h_s,$$

ferner die Anzahl der Umschlußpaare

$$g' = g + 2 h_u + 4 h_s.$$

Wenn nun die entstandene Umschlußpaarkette zwangsläufig ist, so genügt sie der Relation (I); es ist also

$$2g' - 3n' + 4 = 0.$$

Nach Einführung der Werte für n' und g' ergibt sich daraus

$$h_u + 2h_s + 2g - 3n + 4 = 0.$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$h_u + 2h_s = h,$$

zählen also jedes selbständige höhere Elementenpaar wie zwei unselbständige, so wird noch einfacher

$$1 \cdot h + 2 \cdot g - 3 \cdot n + 4 = 0. \quad (I^*)$$

Diese Gleichung stellt unter den früher angeführten 3 Beschränkungen die Bedingungsgleichung der Zwangsläufigkeit für die HEP-Ketten dar.

Von den Sätzen, die aus denen für die Dreh- und Umschlußpaarketten geltenden (s. S. 15 und 16) hervorgehen, indem man die Elemente der höheren Paare in den Zahlen n_i berücksichtigt, seien nur folgende kurz erwähnt:

1. braucht n hier keine gerade Zahl zu sein;
2. kann die Anzahl i der Elemente in einem Gliede bis zu

$$\max(i) = \frac{n + h}{2}$$

wachsen;

3. muß die Mindestzahl der Elemente in einem Gliede ≥ 3 sein, falls nur höhere Elementenpaare dieses Glied mit anderen Kettengliedern verbinden.

Bei Benutzung der Gleichung (I*) ist eine besondere Vorsicht bezüglich der Unterscheidung von unselbständig und selbständig zwangsläufigen höheren Elementenpaaren nötig. So sind z. B. alle Zahnradpaare als unselbständige höhere Paare aufzufassen, wenn ihre Achsen in demselben Kettengliede (dem sog. Steg) drehbar gelagert sind. Denn die Bewegungsübertragung von einem Zahnrad zum andern erfolgt zwangsläufig, wenn auch nur ein Zahnflankenpaar in Eingriff ist; also entspricht diese der des unselbständigen höheren Elementenpaares (Fig. 43). Und wenn die Berührung der Elemente an mehr als einer Stelle stattfindet, also z. B. mehrere Zahnflankenpaare in Eingriff sind, so ist dies eine Folge der besonderen Dimensionierung, bzw. Formgebung, nicht aber eine Notwendigkeit für die Bewegungsübertragung. Ganz ähnlich ist dies bei den Riemenscheiben- und Reibungsräderpaaren (s. Fig. 45), die ebenfalls als unselbständige höhere Paare zu behandeln sind, wie man leicht erkennt, wenn man deren Bewegungsübertragung durch die eines Gelenkviereckes ersetzt.

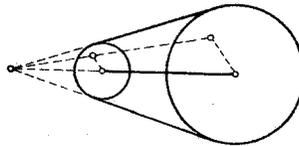


Fig. 45.

Bei den selbständig zwangläufigen höheren Elementenpaaren ist die Berührung der Glieder in zwei Stellen ausreichend für die Bewegungsübertragung (wie in Fig. 45), und wenn aus anderen Gründen, z. B. wegen des Schlusses, eine Berührung in 3 und mehr Stellen herbeigeführt wird, wie z. B. bei dem Kurvendreieck im Viereck (s. Fig. 46), so hat man gleichwohl für jedes derartige Paar in Gleichung (I*) die Zahl h nur um 2 zu vermehren. In allen diesen Fällen gibt die Ersetzung des Elementenpaares durch ein Gelenkviereck den erwünschten Aufschluß.

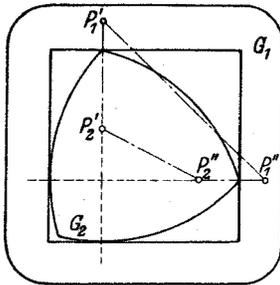


Fig. 46.

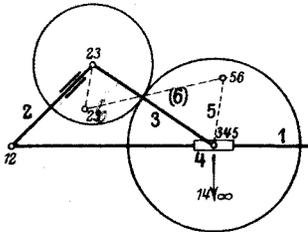


Fig. 47 a.

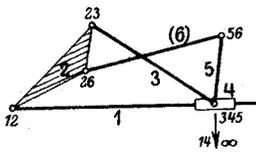


Fig. 47 b.

22. Beispiele.

Der Mechanismus der Langlochbohrmaschine von Whitworth, den Fig. 47 a schematisch darstellt, enthält ein Zahnradpaar 2, 5; das Zahnrad 2 ist mit dem Gliede 2 des Mechanismus starr verbunden, bildet also mit ihm ein Glied, während das Zahnrad 5 drehbar um das Gelenk 345 gelagert ist, das die Koppel 3 des Schubkurbelgetriebes 1234 mit der Hülse 4 gelenkig verbindet. Das Zahnradpaar ist mit seinen Drehachsen in dem Gliede 3 gelagert und muß sonach als ein unselbständig zwangläufiges höheres Elementenpaar aufgefaßt werden. Ersetzen wir es mittels des Hilfsgliedes (6) durch die Drehpaare 26 und 56, so geht die dem Mechanismus zugrunde liegende HEP-Kette in die Umschlußpaarkette über, die Fig. 47 b darstellt. Daß aber die HEP-Kette, welche dem Mechanismus zugrunde liegt, zwangläufig ist, erkennt man leicht, wenn man beachtet, daß bei dieser

$n = 5$, $g = 5$ (denn das zweifache Gelenk 345 zählt nach dem früheren wie zwei Drehpaare) und $h = h_u = 1$ ist; sonach wird

$$1 + 2 \cdot 5 - 3 \cdot 5 + 4 = 0,$$

wie erforderlichlich.

Als weiteres Beispiel kann die Ventilsteuerung von Gillisen dienen, die bereits auf S. 10 ausführlicher besprochen wurde. In diesem Mechanismus kommt das höhere Elementenpaar c, γ (siehe Fig. 18a) nur für die Periode der Ventilbewegung, also der Dampf-

einströmung in Frage, und während dieser besteht die dem Mechanismus zugrunde liegende HEP-Kette (s. Fig. 18 b) aus $n = 5$ Gliedern, die durch 4 Drehpaare, ein Schiebepaar und ein unselbständiges höheres Elementenpaar (c, γ) beweglich verbunden sind. Es ist demnach wie in dem vorhergehenden Beispiel $h = h_u = 1$, $g = 4 + 1 = 5$ und folglich die Relation (I*) erfüllt. Da auch den drei Beschränkungen durch die HEP-Kette Fig. 18 b genügt wird, so ist sie demnach zwangläufig. Während der Periode der Expansion ruht das Ventil 5 auf seinem Sitz, der Hebel (4) berührt das ruhende Glied 1 nicht mehr, und der Mechanismus geht in das Gelenkviereck 12, (23), (34), (14) über, das ja ebenfalls zwangläufig beweglich ist.

Endlich mag noch ein Beispiel einer HEP-Kette mit einem selbständigen höheren Elementenpaar behandelt werden, und zwar derjenigen, die der Ventilsteuerung von Pröll-Schwabe (s. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1907, S. 132ff.) zugrunde liegt. Diese Steuerung, die in Fig. 48 schematisch dargestellt ist, besitzt eine kreiszylindrische Rolle 5, deren Drehachse mit der des Gelenkes 34 zusammenfällt, und die auf einer im Hebel 6 gelegenen Zylinderfläche von bestimmter Gestalt rollt. Die Glieder 5 und 6 der Kette sind demnach

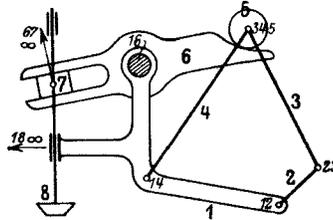


Fig. 48.

durch ein selbständig zwangläufiges höheres Elementenpaar mit Kettenschluß beweglich verbunden; folglich ist hier, da weitere höhere Elementenpaare nicht in der Kette auftreten, $h_s = 1$ und $h = 2$, $h_s = 2$. Berücksichtigen wir weiter, daß das Gelenk 345 ein zweifaches ist, ferner daß in der Kette zwei Schiebepaare und 5 Drehpaare auftreten, und sonach $g = 2 + 5 + 2 = 9$ eingesetzt werden muß, so liefert die Beziehung (I*) mit $n = 8$

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 9 - 2 \cdot 8 + 4 = 0,$$

wie erforderlich, da die Steuerung zwangläufig beweglich ist. Während der Expansionsperiode bleiben die Glieder 5, 6, 7, 8 in relativer Ruhe, der Mechanismus reduziert sich dann auf das Gelenkviereck 1234.

Von rein theoretischem Interesse sind die HEP-Ketten, die nur höhere Elementenpaare enthalten. Für diese geht (I*) über in

$$h = 3n - 4.$$

Hieraus findet sich für $n = 2$, also für ein Gliederpaar $h = 2$, wie erforderlich, da ein Glied nur bei zwei Elementen zwangläufig beweglich

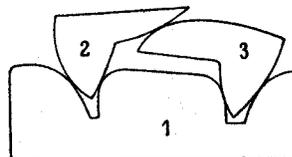


Fig. 49.

Glieder 1 und 2, sowie 3 und 4, die gleiche Länge haben. Bewegt sich nun das Glied 2 gegen 1, bis es mit ihm zusammenfällt, dann fallen auch die Drehachsen der Drehpaare 14 und 23 zusammen, und die Glieder 3 und 4 ebenfalls. Diese Lage wird zur Wechsellage, sobald von dieser aus die Glieder 3 und 4 in relativer Ruhe gegeneinander bleiben, sich also wie ein einziges starres Glied weiter bewegen. Dasselbe gilt dann auch von den Gliedern 1 und 2. Es geht sonach das Gelenkviereck durch die Wechsellage in eine bewegliche Verbindung zweier Glieder, nämlich in ein Drehpaar über, dessen Drehachse die gemeinschaftliche Achse von 14 und 23 ist.

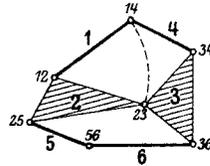


Fig. 51.

Verbindet man mit den Gliedern 2 und 3 dieses Getriebes zwei weitere Glieder 5 und 6 durch Drehpaare, so erhält man eine sechsgliedrige zwangsläufige Drehpaarkette (Fig. 51) mit einer Wechsellage, durch die sie in das Gelenkviereck 2365 übergehen kann. In solcher Weise lassen sich Umschlußpaarketten mit Wechsellagen sehr vielfacher Art finden. Da sie jedoch bisher nicht angewendet worden sind, so soll auf sie nicht weiter eingegangen werden.

Viertes Kapitel.

Die übergeschlossenen ebenen Umschlußpaarketten.

24. Übergeschlossene Gelenkketten.

Es gibt kinematische Ketten, die zwangsläufig beweglich sind, und doch der Gleichung (I) nicht genügen, wie z. B. die sog. Dreiparallelkurbelkette, die in Fig. 52 dargestellt ist. Diese Kette hat $n=5$ bewegliche Glieder und $g=6$ Drehpaare. Da hier

$$\frac{3}{2}n - 2 = \frac{11}{2},$$

so folgt:

$$g > \frac{3}{2}n - 2;$$

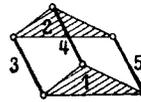


Fig. 52.

die Kette genügt also der Beziehung (I) nicht. Trotzdem ist sie zwangsläufig beweglich, wie man sich auf geometrischem Wege leicht überzeugt, denn jeder beliebigen Lage der Kurbel 3 gegen das Glied 1 ordnen sich ganz bestimmte Lagen der Glieder 2, 4 und 5 zu. Der Grund für diese scheinbare Ausnahme liegt in dem Umstande, daß die Kette nur infolge der besonderen Abmessungen der Kettenglieder beweglich wird. Bei beliebigen Abmessungen ist sie dagegen ein in sich völlig unbewegliches Gebilde, nämlich ein

sog. ebenes einfaches Fachwerk, wie es Fig. 53 darstellt. Die Dreiparallelkurbelkette ist sonach ein Ausnahmefall, aber nicht der einer zwangsläufig beweglichen kinematischen Kette, sondern der eines Fachwerkes, das im allgemeinen ein starres Gebilde darstellt. Denn das Fachwerk Fig. 53 geht in die Dreiparallelkurbelkette Fig. 52 dadurch über, daß die binären Glieder 3, 4 und 5 gleich lang und die beiden ternären Glieder 1 und 2 als kongruente Dreiecke gewählt werden.

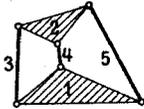


Fig. 53.

Derartige Ketten heißen übergeschlossen, weil sie mehr Glieder und Elementenpaare enthalten, als zur Erzeugung der Zwangsläufigkeit notwendig sind. Denn man erkennt im obigen Beispiel unmittelbar, daß die Relativbewegung der Glieder 1 und 2 dieselbe bleibt, wenn man eines der drei Glieder 3, 4 oder 5 beseitigt. Geschieht dies aber, so erhält man ein Gelenkviereck, insbesondere ein Gelenkparallelogramm, und dieses ist zwangsläufig beweglich.

Umgekehrt ersieht man hieraus, daß man aus im allgemeinen zwangsläufig beweglichen kinematischen Ketten übergeschlossene ableiten kann, indem man an zwei der Glieder ein weiteres mittels je eines Elementenpaares beweglich anschließt. Im allgemeinen geht hierdurch die Kette in eine unbewegliche Verbindung der Glieder über, die nur in ganz besonderen Fällen, und zwar bei entsprechend gewählten voneinander abhängigen Abmessungen der Kettenglieder beweglich wird.

Eine übergeschlossene Drehpaarkette, die aus einer zwangsläufigen Drehpaarkette durch Zufügung eines binären Gliedes mittels zweier Drehpaare entstanden ist, würde

$$n_0 = n + 1$$

Glieder und

$$g_0 = g + 2$$

Drehpaare enthalten, falls die entsprechenden Zahlen für die ursprüngliche Kette n und g waren. Da letztere zwangsläufig vorausgesetzt wurde, für sie also die Beziehung (I) besteht, d. i.

$$2g - 3n + 4 = 0,$$

so folgt nach Einsetzung der Werte $n = n_0 - 1$, $g = g_0 - 2$

$$g_0 = \frac{3}{2}n_0 - \frac{3}{2};$$

für die übergeschlossene Kette gilt demnach die Beziehung

$$g_0 > \frac{3}{2}n_0 - 2.$$

Die gleiche Beziehung gilt selbstverständlich auch für alle die übergeschlossenen Drehpaarketten, die aus einer zwangsläufigen Drehpaarkette dadurch entstanden, daß mehrere Glieder beweglich angeschlossen wurden.

Da die übergeschlossenen Drehpaarketten mehr Glieder und Elementenpaare enthalten, als zur Erzielung der zwangläufigen Bewegung nötig sind und außerdem ihre Beweglichkeit an z. T. komplizierte Bedingungsgleichungen für die Abmessungen der Kettenglieder gebunden ist, so werden sie nur ganz selten unmittelbar verwendet. Es soll deshalb auf sie im allgemeinen hier nicht näher eingegangen werden. Da sie aber zur Synthese von Mechanismen und zur Erzielung bestimmter Bewegungen manchmal mit Vorteil benutzt werden können, so mögen die wichtigsten und bekanntesten derselben hier kurz besprochen werden.

Übergeschlossene Drehpaarketten kann man aus ebenen Fachwerken dadurch ableiten, daß man die Bedingungsgleichungen für die Abmessungen der Kettenglieder aufsucht, unter denen das Fachwerk in ein Gebilde von endlicher Beweglichkeit übergeht. Diese Bedingungsgleichungen ergeben sich daraus, daß die Determinante der Bedingungsgleichungen (A) der Starrheit der Fachwerksglieder (s. S. 14) identisch verschwinden muß.

Einfacher und zwar auf geometrischem Wege wird man zu Gruppen von übergeschlossenen Drehpaarketten geführt durch gewisse kinematisch-geometrische Eigenschaften des gelenkigen Parallelogrammes und Antiparallelogrammes.

Bei dem Gelenkparallelogramm beschreiben die sämtlichen Punkte einer Seite kongruente gleichliegende Kreise um die entsprechenden Punkte der Gegenseite. Daher lassen sich je zwei derartige Punkte durch einen starren Stab (Kurbel) von gleicher Länge und Richtung verbinden, wie in dem Dreiparallelkurbelgetriebe (Fig. 52). Auf dem letzteren beruht u. a. die Robervalsche Wage (s. Fig. 54), sowie in

mehrfacher Wiederholung das Buchanansche Ruderrad (s. Fig. 55).

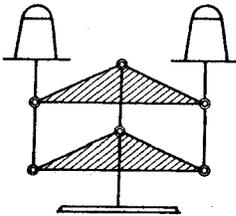


Fig. 54.

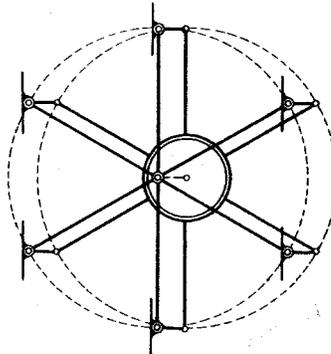


Fig. 55.

Eine weitere geometrische Eigen-

schaft des Gelenkparallelogrammes besteht darin, daß die 4 Punkte M , N , P , Q auf den 4 Gliedern des Gelenkparallelogrammes A , B , C , D (s. Fig. 56), die in einer Geraden liegen, diese letztere Eigenschaft in allen gegenseitigen Lagen der 4 Glieder bewahren. Hält man nun einen der

4 Punkte, z. B. M , fest und bewegt N auf irgendeiner Kurve (n), so beschreiben P und Q ähnliche und ähnlich liegende Kurven. Auf dieser Eigenschaft beruht der bekannte Storchschnabel (Pantograph) zur ähnlichen Vergrößerung oder Verkleinerung von Zeichnungen. Ist die Kurve (n) ein Kreis, so sind folglich die Bahnen der Punkte P und Q auch Kreise, deren Mittelpunkte M_p und M_q mit M_n auf einer Geraden durch M liegen. Letztere Punkte lassen sich aber mit den Punkten N , P und Q paarweise durch starre Stäbe (Kurbeln) verbinden, ohne daß hierdurch eine Änderung der zwangläufigen Beweglichkeit der Kette herbeigeführt würde, und so entsteht eine übergeschlossene Gelenkkette von $n=8$ Gliedern und $g=11$ Drehpaaren, für die

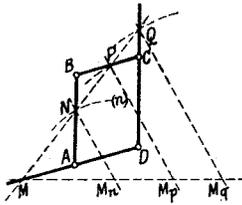


Fig. 56.

$$g > \frac{3}{2}n - 2$$

ist. Diese Kette ist also im allgemeinen, d. h. bei beliebigen Abmessungen der Kettenglieder unbeweglich; sie geht in eine zwangläufig bewegliche Kette nur über, falls $ABCD$ ein Parallelogramm ist und die 4 Punkte M , N , P , Q auf einer Geraden liegen.

Eine andere übergeschlossene Kette erhält man aus der Eigenschaft des Gelenkparallelogrammes, daß die Punkte P und Q zweier zusammenstoßender Seiten BC und CD (Fig. 57) des Parallelogramms ähnliche Kurven beschreiben, falls $\triangle PBC \sim \triangle CDQ$ und A in Ruhe bleibt. Wählt man nun als Bahn (q) des Punktes Q einen Kreis, so beschreibt auch P einen solchen und die Kreismittelpunkte M_p und M_q bilden mit A ein starres Dreieck, das ruht.

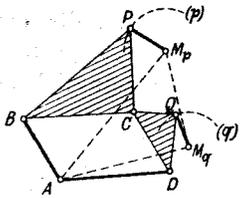


Fig. 57.

Verbindet man nun P mit M_p und Q mit M_q durch starre Stäbe (Kurbeln) gelenkig, so entsteht eine übergeschlossene Drehpaarkette, die von Sylvester herrührt. Die Anzahl ihrer Glieder ist $n=7$, die der Drehpaare $g=9$, da das Gelenk in A ein dreifaches, also wie 2 Drehpaare zu zählen ist; folglich hat man

$$g > \frac{3}{2}n - 2.$$

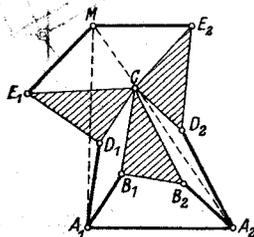


Fig. 58.

Auf einer Verbindung zweier derartiger Ketten beruht die übergeschlossene Gelenkkette, die den Satz von Roberts über die dreifache Erzeugung einer sog. Koppelkurve verwirklicht. Es sei (Fig. 58) $A_1 B_1 B_2 A_2$ ein beliebiges Gelenk-

viereck und C ein willkürlich gewählter Punkt seiner Koppel B_1B_2 . Die Kurve, die C bei der Bewegung der Koppel gegen den ruhend gedachten Steg A_1A_2 beschreibt, heißt dann die Koppelkurve von C . Schließt man nun an A_1 und C , bzw. A_2 und C je ein weiteres Gliederpaar gelenkig an, so, daß $A_1B_1CD_1$ und $A_2B_2CD_2$ Gelenkparallelogramme werden, und wählt auf D_1C den Punkt E_1 , auf D_2C den Punkt E_2 so, daß

$$\triangle B_1B_2C \sim \triangle D_1CE_1 \sim \triangle CD_2E_2,$$

dann beschreiben E_1 und E_2 Kreise um einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt M , dessen Lage gegen den ruhend gedachten Steg A_1A_2 durch die Beziehung

$$\triangle A_1A_2M \sim \triangle B_1B_2C$$

eindeutig bestimmt ist. Verbindet man E_1 und E_2 mit M gelenkig durch starre Stäbe, so entsteht eine übergeschlossene Gelenkkette, die 4 ternäre und 6 binäre, insgesamt also $n=10$ Glieder besitzt. Diese letzteren werden durch 4 zweifache und 6 einfache Gelenke beweglich verbunden; es ist also hier $g=2 \cdot 4 + 6 = 14$ und folglich

$$g > \frac{3}{2}n - 2.$$

Diese zehngliedrige übergeschlossene Kette ist dadurch ausgezeichnet, daß sie drei Gelenkvierecke enthält, deren Koppeln B_1B_2 , D_1E_1 und D_2E_2 einen Punkt, nämlich C gemeinsam haben. Dieser Punkt beschreibt demnach in allen drei Gelenkvierecken dieselbe Koppelkurve, eine Eigenschaft, die sich mit Vorteil bei der Synthese neuer Mechanismen verwerten läßt.

Der Robertssche Satz erfährt eine Einschränkung, wenn an die Stelle des Gelenkviereckes $A_1B_1B_2A_2$ eine Schubkurbelkette $A_1B_1B_2A_2\infty$ (s. Fig. 58a) tritt, weil es dann nur zwei verschiedene Schubkurbelketten gibt, deren gemeinsamer Koppelpunkt C dieselbe Koppelkurve beschreibt. Denn wenn A_2 in das Unendliche rückt, also B_2 auf einer Geraden β_2 der ruhenden Ebene sich bewegt, so wird nicht nur A_1A_2 unendlich groß, sondern auch A_2B_2 , und folglich auch das Dreieck CD_2E_2 , weil $CD_2 \parallel B_2A_2$ ist. Da auch M ins Unendliche fällt, so liegen folglich sämtliche Gelenkpunkte des ursprünglichen Gelenkviereckes $A_2D_2E_2M$ im Unendlichen und kommt letzteres also nicht mehr in Betracht. Da M der Mittelpunkt des Kreises ist, den E_1 gegen die ruhende Ebene beschreibt, und nun ins Unendliche fällt, so beschreibt in dieser Kette auch E_1 eine Ge-

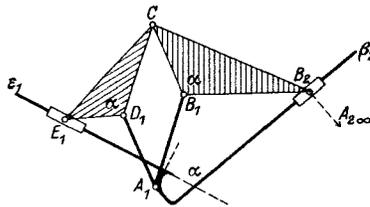


Fig. 58a.

rade (ε_1) gegen die ruhende Ebene, die mit β_2 denselben Winkel α einschließt, der bei B_1 , bzw. D_1 in den beiden ähnlichen Dreiecken CB_1B_2 und $E_1D_1C_1$ auftritt.

Wird noch ein weiteres Drehpaar der Schubkurbelkette durch ein Schiebepaar ersetzt werden, so verliert der Robertssche Satz seine Bedeutung, weil dann auch das dritte Gelenkviereck $A_1D_1E_1M$ der ursprünglichen Kette ins Unendliche rückt, d. h. die Koppelkurve nur von einem Punkte der Koppel der einen viergliedrigen Kette (einer Kreuzschleifenkette Fig. 32 oder einer Winkelschleifenkette Fig. 33) beschrieben würde.

Ein anderes Prinzip, übergeschlossene Gelenkketten zu bilden, ist das der Inversion. Zwei Punkte P und Q heißen invers gegen einen Punkt O , wenn

$$OP \cdot OQ = \text{const.}$$

Derartige Punkte sind z. B. die Schnittpunkte P und Q einer beliebigen zu AC , bzw. BD parallelen Geraden mit den beiden Seiten AB und CD eines sog. Antiparallelogrammes $ABCD$ (s. Fig. 59), in dem $AB = CD$ und $AD = BC$ ist. Bezüglich des Schnittpunktes O besteht dann die Beziehung

$$OP \cdot OQ = \text{const.}$$

Die analoge Beziehung besteht für den Schnittpunkt R . Wird nun O festgehalten und P auf einer beliebigen Kurve p bewegt, so beschreibt Q die zu letztere inverse (kreisverwandte) Kurve q . Ist p ein Kreis mit dem Mittelpunkt M_p (s. Fig. 60), so wird auch q

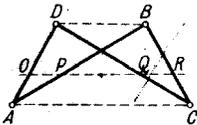


Fig. 59.

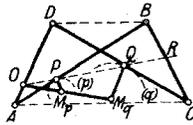


Fig. 60.

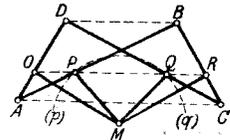


Fig. 61.

ein Kreis, dessen Mittelpunkt M_q mit M_p und O auf einer Geraden liegt. Verbindet man P mit M_p und Q mit M_q durch starre Stäbe, so erhält man folglich eine übergeschlossene Gelenkkette von $n = 7$ Gliedern und $g = 9$ Drehpaaren, wie sie Fig. 60 darstellt.

Geht der Kreis p durch Q , so fällt mit ihm der Kreis q zusammen, und dann beschreibt auch R einen Kreis, der durch O geht und denselben Mittelpunkt M hat, wie p . In diesem besonderen Falle erhält man durch Einfügung der drei Kurbeln MP , MQ und MR eine übergeschlossene Gelenkkette von $n = 8$ Gliedern und $g = 11$ Drehpaaren, da M ein dreifaches Gelenk wird (s. Fig. 61).

Eine allgemeinere derartige Kette erhält man, wenn man sich mit den 4 Gliedern des Antiparallelogramms je einen Punkt starr verbunden denkt derart, daß die 4 Dreiecke (s. Fig. 62) ABO , BCP , CDQ , DAR ähnlich und die Winkel

$$\angle OAB = \angle PCB = \angle QCD = \angle RAD = \varphi$$

sind. Dann bilden die 4 Punkte O , P , Q , R die Ecken eines Parallelogramms. Wählen wir einen dieser Punkte, z. B. O als Fixpunkt, so beschreiben P und Q inverse Kurven, und zwar beide Kreise, wenn z. B. P auf einem Kreise geführt wird. Verbindet man wieder die Punkte P und Q mit den Kreismittelpunkten durch starre Kurbeln, so erhält man eine übergeschlossene Drehpaarkette mit $n=7$ Gliedern und $g=9$, für die $g > \frac{3}{2}n - 2$ ist.

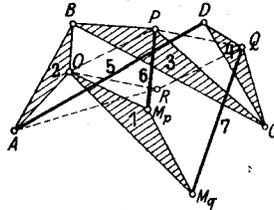


Fig. 62.

Eine besondere Gruppe von übergeschlossenen Gelenkketten bilden die sog. Brennpunktsmechanismen, auf die Burmester zuerst aufmerksam machte. Ist (Fig. 63) $ABCD$ ein beliebiges Gelenkviereck, so läßt sich auf jedem der 4 Glieder ein Punkt (T , U , V , W) finden, der mit einem bestimmten Punkte F durch starre binäre Glieder TF , UF usw.

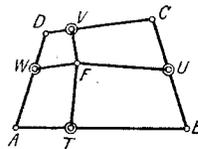


Fig. 63.

beweglich verbunden werden kann, ohne daß hierdurch die Zwangläufigkeit der Bewegung des Gelenkviereckes aufgehoben wird. Es ergibt sich hierdurch eine übergeschlossene Drehpaarkette mit $n=8$ Gliedern und $g=11$ Drehpaaren, die zweifach übergeschlossen ist, da man 2 der vier Glieder TF , UF , VF und WF beseitigen kann, ohne die Zwangläufigkeit der Bewegungen der nachbleibenden Ketten aufzuheben.

25. Übergeschlossene Umschlußpaarketten.

Ein bekanntes Beispiel einer solchen Kette erhält man aus der Kreuzschleifenkette (s. Fig. 32), wenn man beachtet, daß die Bewegung des Gliedes AB (s. Fig. 64) gegen das ruhende Glied die Hypozykloidenbewegung des Cardano ist. Bei dieser rollt ein Kreis (π) in einem ruhenden Kreise (p); es beschreibt also der Mittelpunkt

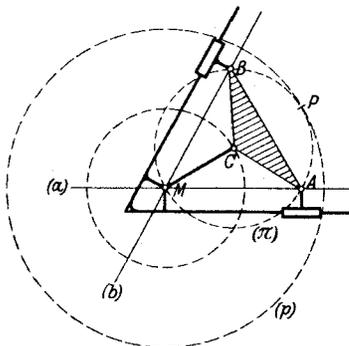


Fig. 64.

C von (π) einen Kreis um den Schnittpunkt M der Geraden a und b , auf denen die Punkte A und B sich zu bewegen gezwungen sind. Folglich läßt sich C mit M durch eine starre Gerade gelenkig verbinden, ohne hierdurch die Beweglichkeit der übrigen Kettenglieder aufzuheben. Durch diese Verbindung, d. i. durch Einschaltung eines weiteren Gliedes in die ursprünglich viergliedrige Umschlußpaarkette erhalten wir eine übergeschlossene Umschlußpaarkette, für welche $n = 5$, $g = 6$, also $g > \frac{3}{2}n - 2$ ist.

Übergeschlossene Umschlußpaarketten erhält man ferner aus allen genauen und angenäherten Geradfürungen, indem man z. B. den

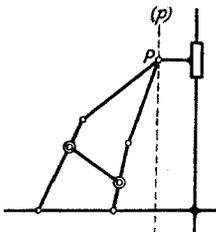


Fig. 65.

Punkt P (Fig. 65), der die Gerade (p) beschreibt, gelenkig mit einem Gliede verbindet, das durch ein Schiebepaar mit zu (p) paralleler Schubrichtung beweglich an das ruhende Glied der Kette angeschlossen wird, wie das die Figur andeutet. Denn trotz Einschaltung eines weiteren Gliedes behält die Kette ihre Beweglichkeit, wenn die erstere in der angegebenen Weise bewirkt wird. Beispiele liefern die Geradfürungen von Peaucellier, Kempe und

Hart, sowie die angenäherten Geradfürungen von Roberts, Watt, Evans, Tschebischeff, Burmester u. a. Geradfürungen werden an sich in der Gegenwart nur ganz selten angewendet und dann naturgemäß ohne den erwähnten Überschluß durch ein Schiebepaar; es liegt also keine Veranlassung vor, auf sie näher einzugehen, ebensowenig wie auf die sonst noch möglichen übergeschlossenen Umschlußpaarketten.

26. Übergeschlossene höhere Elementenpaarketten.

Der Überschluß kann erfolgen sowohl durch niedere als höhere Elementenpaare. Im ersteren Falle sind die Bedingungen der Möglichkeit eines Überschusses dieselben, wie für die Umschlußpaarketten; auf letztere kann deshalb hier verwiesen werden.

Wie auf S. 27 und 28 schon hervorgehoben wurde, sind die in den HEP-Ketten verwendeten unselbständig und selbständig zwangsläufigen höheren Elementenpaare in den weitaus häufigsten Fällen übergeschlossen und folglich sind es auch die entsprechenden Ketten; es bedarf daher dieser Fall keiner besonderen Behandlung. Wohl aber könnte es eintreten, daß ein Kettenglied einer zwangsläufig beweglichen Umschlußpaar- oder HEP-Kette, das eine bestimmte Bewegung gegen ein anderes Glied besitzt, mit letzterem durch ein höheres Elementenpaar beweglich verbunden werden soll. Das ist nur möglich, wenn das letztere Paar bestimmten Bedingungen

genügt, und zwar wenn das eine Element von dem anderen vollständig abhängig ist. Worin diese Abhängigkeit besteht, soll im Kapitel 5 auseinandergesetzt werden; hier mag die Bemerkung genügen, daß derartige Fälle wohl nur ganz selten vorkommen, weil an die Ketten gewöhnlich nur die Anforderung gestellt wird, daß sie bei beliebig wählbaren Abmessungen und willkürlicher Formgebung zwangsläufig sind. Dieser Forderung entsprechen die übergeschlossenen Ketten nicht.

Fünftes Kapitel.

Die komplane Bewegung einer starren Ebene.

27. Die Elementarbewegung.

Die Bewegung einer starren Ebene heißt komplan, wenn alle ihre Lagen sich in einer anderen Ebene befinden. Es ist leicht ersichtlich, daß die Lage einer starren Ebene E gegen eine andere Ebene E_0 , die der Anschaulichkeit wegen als ruhend vorausgesetzt werden mag, vollständig und eindeutig bestimmt ist durch die Lagen irgend zweier ihrer Punkte A und B (Fig. 66).

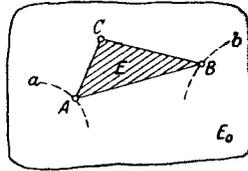


Fig. 66.

Denn jeder beliebige weitere Punkt C wird dann in seiner Lage vollständig und eindeutig bestimmt durch das Dreieck ABC , dessen drei Seiten unveränderlich sind. Falls A' und B' die neuen Lagen von A und B bezeichnen, so erhält man die neue Lage C' des Punktes C , indem man $\triangle A'B'C' \cong \triangle ABC$ konstruiert. Da das für alle Punkte von E gilt, so bestimmt folglich die Lage von A und B die Lage aller Punkte der Ebene E vollständig und eindeutig.

die Lage aller Punkte

Als wichtige Folgerung ergibt sich, daß die Bahnen aller Punkte der Ebene E vollständig und eindeutig bestimmt sind durch die Bahnen irgend zweier ihrer Punkte. In Fig. 66 seien a und b die (ganz willkürlich wählbaren) Bahnen der Punkte A und B .

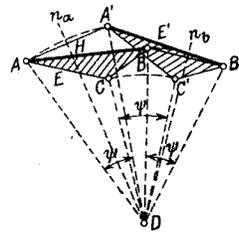


Fig. 67.

Satz: Eine Ebene läßt sich in jede beliebige komplane Lage bringen durch Drehung um einen eindeutig bestimmten Punkt derselben.

Beweis: Es seien E und E' zwei beliebige Lagen der Ebene (s. Fig. 67), bestimmt durch die Lagen A und B , bzw. A' und B' zweier ihrer Punkte. Verbindet man A mit A' , halbiert diese Strecke

und errichtet im Halbierungspunkte H eine Senkrechte n_a zu $\overline{AA'}$, so bewirkt die Drehung der E um jeden Punkt auf n_a , daß A einen Kreisbogen beschreibt, der durch A' geht. Das gleiche gilt von B . Wählt man daher als Drehpunkt der Ebene den Schnittpunkt D der beiden Mittelsenkrechten n_a und n_b , so führt die Drehung der Ebene um ihn sowohl A nach A' als auch B nach B' . Nach dem Vorhergehenden wird sonach die ganze Ebene E durch Drehung um D in die neue Lage E' übergeführt.

Als Folgerung hieraus ergibt sich, daß bei dieser Drehung jeder beliebige Punkt C einen Kreisbogen $\widehat{CC'}$ beschreibt, dessen Zentriwinkel $\angle CDC'$ derselbe ist, wie der der Punkte A und B . Dieser Winkel

$$\angle CDC' = \angle ADA' = \angle BDB' = \psi$$

heißt der Drehwinkel. Bezeichnet $\overline{CD} = r$ den Abstand des Punktes C vom Drehpunkt D , so ist die Länge des Kreisbogens

$$\widehat{CC'} = s = r \cdot \psi.$$

Sind die Strecken $\overline{AA'}$ und $\overline{BB'}$ unendlich klein, so ist auch die Lagenänderung der Ebene eine unendlich kleine, eine sogenannte Elementarbewegung. Aus dem Vorhergehenden folgt ohne weiteres, daß jede beliebige Elementarbewegung einer Ebene eine Drehung um einen eindeutig bestimmten Punkt ist; letzterer wird augenblicklicher Drehpunkt, Drehpol oder Momentanzentrum genannt. Beachtet man, daß bei einer Elementarbewegung der Ebene die Strecken $\overline{AA'}$ und $\overline{BB'}$ mit den Elementen

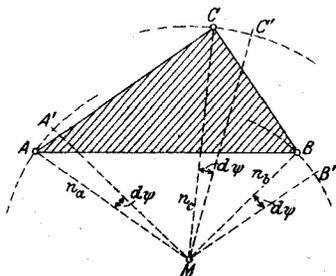


Fig. 68.

der Bahnen a bzw. b der Punkte A und B zusammenfallen, so gehen die Mittelsenkrechten n_a und n_b hier über in Bahnnormalen der Kurven a und b in den Punkten A und B . In dem Schnittpunkt M der letzteren (s. Fig. 68) liegt sonach der augenblickliche Drehpol und ist als solcher eindeutig bestimmt. Das Bahnelement $\overline{CC'}$ eines beliebigen Punktes C ist offenbar das Element der Bahn

c , die C beschreibt, und da die Mittelsenkrechte auch hier in die Bahnnormale n_c übergeht, so finden wir als wichtige Folgerung: Die Verbindungsstrahlen der Punkte der Ebene mit dem Drehpol sind die augenblicklichen Normalen der Bahnen der Punkte. Die Bahntangenten stehen senkrecht zu ihnen und enthalten die einzelnen Bahnelemente. Der Drehwinkel ψ geht bei einer Elementarbewegung

über in den ∞ kleinen Winkel $d\psi$ und das Bahnelement des Punktes C wird

$$\overline{CC'} = ds = r \cdot d\psi,$$

falls, wie vorher, $\overline{MC} = r$ gesetzt wird.

28. Die Rollkurven.

Wird die Bewegung der Ebene E gegen die ruhende Ebene E_0 bestimmt durch die Bahnen a und b der Punkte A und B , so ergibt sich im Schnittpunkt M der Bahnnormalen n_a und n_b das Momentanzentrum für die betreffende Lage von E . Für jede andere Lage E' , E'' usf. erhält man im allgemeinen einen anderen Punkt M' , M'' , ... von E_0 als Drehpol (Fig. 69), und letztere Punkte liegen auf einer Kurve m , welche ruhende Polkurve oder auch Polbahn genannt wird. Mit dem Punkte M von E_0 fällt immer ein entsprechender Punkt M von E zusammen und die Punkte M in E bilden ebenfalls eine Kurve, welche in Fig. 69 mit μ bezeichnet ist, bewegliche Polkurve genannt wird.

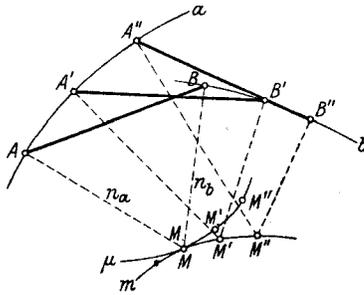


Fig. 69.

Es läßt sich unschwer zeigen, daß die beiden Kurven m und μ sich in M bzw. M berühren und aufeinander rollen, d. h. daß bei der Bewegung von E in die beliebige Lage E' sich der Berührungspunkt auf beiden Kurven um die gleiche Länge vorwärts bewegt, also

$$\widehat{MM'} = \widehat{MM'}$$

ist. Es seien E , E' , E'' drei endlich verschiedene Lagen von E (Fig. 70) und D , D' die Drehpunkte, um welche die Ebene E gedreht werden muß, damit sie aus der Lage E in die Lage E' , bzw. aus E' nach E'' kommt. Ist die Ebene in der Lage E , so werde der mit D zusammenfallende Punkt von E mit Δ bezeichnet, während der Punkt von E , der nach erfolgter Drehung von E nach E' mit D' zusammenfällt, mit Δ' bezeichnet werde. Da Δ und Δ' Punkte der starren Ebene E sind und bei der Drehung Δ in Ruhe

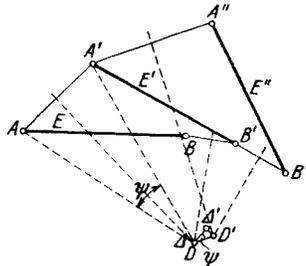


Fig. 70.

bleibt, so muß Δ' einen Kreisbogen $\Delta'D'$ beschreiben, der Δ' nach

D' führt und dessen Zentriwinkel gleich dem Drehwinkel der Ebene ist. Sonach muß $\overline{AA'} = \overline{DD'}$ sein.

Sind die drei Lagen E , E' und E'' unendlich benachbart, so gehen die Punkte D und D' in M und M' , A und A' in M bzw. M' über, der Drehwinkel wird unendlich klein, bzw. hat Null zur Grenze, und es ist dann $\overline{MM'}$ ein Element der Kurve m , $\overline{MM'}$ ein solches von μ . Beide Kurvenelemente haben einen Punkt (M , M') gemeinsam, sind in der Richtung nur unendlich wenig verschieden und gleich groß; es ist also $\overline{MM'} = \overline{MM'}$, d. h. auf beiden Kurven m und μ wandert der Berührungspunkt bei einer unendlich kleinen Bewegung der Ebene um das gleiche Stück vorwärts. Da man nun die endliche Bewegung als eine Aufeinanderfolge unendlich vieler Elementarbewegungen ansehen kann, so berühren sich die beiden Polkurven in jeder Lage der Ebene E gegen E_0 , und es wandert der Berührungspunkt auf beiden Kurven um die gleiche Länge weiter. Letzteren Bewegungsvorgang nennt man bekanntlich das Wälzen oder Rollen (auch reines Rollen) der Kurven aufeinander, weshalb die beiden Polkurven auch die Rollkurven (Rouletten) der Bewegung genannt werden. Da die Polkurven durch die Bahnen a und b der Punkte A und B vollständig und eindeutig bestimmt sind und die Bahnen a und b willkürlich gewählt werden können, so gibt es im allgemeinen stets ein und nur ein derartiges Rollkurvenpaar m und μ . Der Berührungspunkt beider Kurven ändert sowohl auf m als auf μ seine Lage; er ist also weder ein Punkt von E_0 noch von E . Dieser Berührungspunkt, der mit P bezeichnet und künftig kurz Pol der Bewegung der Ebene E genannt werde, fällt momentan stets mit M und M' zusammen.

Die Bewegung, welche E gegen E_0 vollzieht und die durch die beiden Punktbahnen a und b bestimmt wird, läßt sich hiernach auch erzeugen, wenn man die in E liegende Kurve μ auf der in E_0 liegenden Kurve m zu rollen zwingt. Da die Kurven m und μ an keine Beschränkung gebunden sind, so lassen sich alle möglichen komplanen Bewegungen starrer Ebenen durch das Rollen einer Kurve auf einer anderen Kurve erzeugen.

Hält man die Ebene E mit μ in Ruhe und läßt m auf μ rollen, so erhält man die sogenannte umgekehrte Bewegung, d. i. die von E_0 gegen E . Diese ist im allgemeinen ganz verschieden von der ursprünglichen, wie man sofort ersieht, wenn man z. B. μ als Kreis, m als Gerade wählt.

Ist die Bewegung von E durch zwei Punktbahnen bestimmt, so kann man nicht nur m als geometrischen Ort der Schnittpunkte der Bahnnormalen zeichnerisch finden, sondern auch μ auf die

gleiche Weise, indem man die Bewegung umkehrt. Das Beispiel des Gelenkviereckes (Fig. 71) zeigt das unmittelbar. Hält man das Glied $K_a K_b$ in Ruhe, so finden wir die Polkurve m als geometrischen Ort der Normalen $K_a A$ und $K_b B$. Wird dagegen das Glied AB in Ruhe erhalten und $K_a K_b$ bewegt, so beschreiben K_a und K_b um A bzw. B Kreise und es findet sich μ in der ganz gleichen Weise, wie vorher m , nämlich als Ort der Schnittpunkte der Radien AK_a und BK_b .

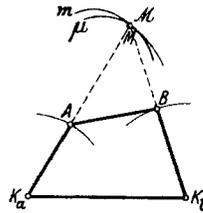


Fig. 71.

29. Die Hüllkurvenpaare.

Eine beliebige Kurve γ der Ebene E nimmt bei der Bewegung der letzteren unendlich viele Lagen ein (Fig. 72), und diese haben eine Kurve c gemeinsam, welche die γ in allen Lagen berührt oder einhüllt; man nennt daher c die einhüllende Kurve der γ , oder auch kurz Einhüllende (Envelope). Ferner nennt man γ die Hüllkurve, c die Hüllbahn und beide Kurven zusammen ein Hüllkurvenpaar. Ist z. B. γ eine Gerade, so sind deren Lagen bei Bewegung der Ebene die Tangenten der Hüllbahn. Ein solches Hüllkurvenpaar bilden u. a. auch die beiden Rollkurven, denn die Kurve μ berührt in allen Lagen die ruhende Polkurve m .

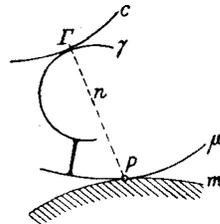


Fig. 72.

Es ist leicht ersichtlich, daß die gemeinsame Normale n im Berührungspunkte I des Hüllkurvenpaares durch den Pol P gehen muß. Denn I als Punkt der Ebene E beschreibt ein Bahnelement senkrecht zum Polstrahl PI und dieses Element liegt in der Tangente, die γ und c gemeinsam ist; folglich muß der Polstrahl PI senkrecht zu dieser Tangente stehen, also in die gemeinsame Normale beider Kurven (die sogenannte Berührungsnormale) fallen.

Umgekehrt folgt hieraus: Bewegt sich eine Ebene so, daß eine in ihr liegende Kurve γ längs einer Kurve c der ruhenden Ebene gleitet, bzw. sie dauernd berührt, so liegt der Pol der Bewegung der Ebene jeweils in der Berührungsnormale des Hüllkurvenpaares.

Daraus erhellt weiter, daß nicht nur die momentane, sondern auch die endliche Bewegung einer Ebene gegen eine andere Ebene durch zwei Hüllkurvenpaare vollständig und eindeutig bestimmt ist, denn die beiden Berührungsnormale der Paare schneiden sich jeweilig im Pol P (Fig. 73). Damit folgt zugleich, daß auch hier,

wie früher ein Rollkurvenpaar (m, μ) auftritt, das als geometrischer Ort der Punkte M und M' zeichnerisch bestimmt werden kann.

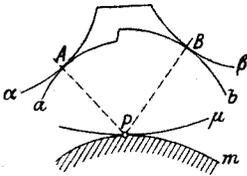


Fig. 73.

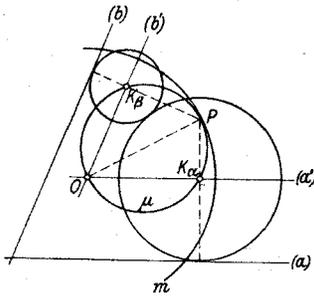


Fig. 74.

Wählt man z. B. α und β in Fig. 73 als Kreise, a und b als Geraden, so erhält man die S. 37 schon erwähnte Hypozykloidenbewegung des Cardano. Denn die Mittelpunkte K_α und K_β der Kreise (s. Fig. 74) beschreiben bei der Bewegung der E Parallelen a' und b' zu a bzw. b . Die Rollkurven werden Kreise mit dem Durchmesser Verhältnis 1:2, und zwar ist O der Mittelpunkt des ruhenden Kreises m , während der auf m rollende Kreis μ durch die vier Punkte O, K_α, P, K_β geht.

Die Erzeugung der ebenen zwangläufigen Bewegung durch zwei Hüllkurvenpaare ist die allgemeinste Art der Bewegungserzeugung; alle anderen gehen aus ihr durch Spezialisierung der Kurven hervor. Dabei ist zu beachten, daß im allgemeinen Falle

die Hüllkurve auf ihrer Hüllbahn gleichzeitig rollt und gleitet, und nur in dem Falle, in dem der Berührungspunkt des Hüllkurvenpaares momentan in den Pol fällt, ein reines Rollen eintritt. Letztere Bemerkung ist von Bedeutung für die Verzahnungen.

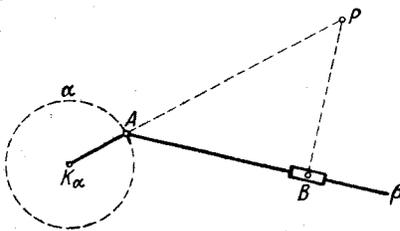


Fig. 75.

Recht häufig ist der Fall, daß die eine oder andere Kurve eines Paares sich auf einen Punkt zusammenzieht. Letzteres ist möglich und auch anschaulich, indem man sich die betreffende Kurve als Kreis denkt, dessen Durchmesser gegen Null abnimmt. Würde man

z. B. in Fig. 73 sich α und β auf Punkte zusammengezogen denken, so erhielte man die ebene Bewegung, von der wir ausgingen, nämlich die, welche durch die Bahnen zweier Punkte bestimmt wird. Ziehen sich dagegen a und b auf Punkte zusammen, so würde sich die Umkehr der letzteren Bewegung ergeben.

Wählt man z. B. in Fig. 73 α als Punkt, a als Kreis mit dem Mittelpunkt K_α (s. Fig. 75), dagegen β als Gerade, und b als Punkt

so erhält man das bekannte Kurbelschubgetriebe, in dem sich der Pol P der gegebenen Lage als Schnittpunkt des Kreisradius $K_a A$ und der Normalen zu β findet.

30. Der Geschwindigkeitszustand der Ebene.

In 26 wurde nachgewiesen, daß die einzelnen Punkte der Ebene, die eine unendlich kleine Drehung um den Pol ausführt, Bahnelemente $\overline{AA'}$ (s. Fig. 76) beschreiben, die im gleichen Sinne senkrecht zu den Verbindungsstrahlen AP der Punkte mit dem Pol P stehen und die Größe

$$\overline{AA'} = du = r \cdot d\psi$$

haben, falls $\overline{AP} = r$ gesetzt und der unendlich kleine Drehwinkel der Ebene mit $d\psi$ bezeichnet wird. Die augenblickliche Geschwindigkeit des Punktes A ist nun bekanntlich

$$v_A = \frac{du}{dt};$$

folglich wird

$$v_A = \frac{du}{dt} = r \cdot \frac{d\psi}{dt} = r \cdot \omega,$$

falls ω die momentane Winkelgeschwindigkeit der Ebene bezeichnet. Diese Geschwindigkeit hat die Richtung der Tangente an die Bahn des Punktes A ; sie ist demnach senkrecht zu dem Strahl AP gerichtet, und zwar gleichsinnig mit der Drehung der Ebene, also mit ω .

Man erkennt sofort, daß alle Punkte der Ebene auf einem Kreise um den Pol P der Größe nach die gleiche Geschwindigkeit $r \cdot \omega$ haben, und daß die Geschwindigkeiten der Punkte auf einer Geraden durch den Pol mit dem Abstand vom Pol wachsen. Stellt man diese Geschwindigkeiten, wie üblich, durch gerichtete Strecken (Vektoren) dar, so liegen die Endpunkte dieser Strecken ebenfalls auf einer Geraden durch den Pol (s. Fig. 76). Ferner ergibt sich die Geschwindigkeit des Punktes M der bewegten Ebene, der momentan mit dem Pol P zusammenfällt, zu Null¹⁾.

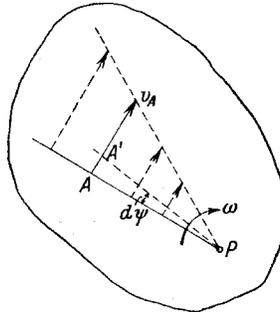


Fig. 76.

¹⁾ Die Geschwindigkeit des Poles (welche Wechselgeschwindigkeit genannt wird) ist dagegen im allgemeinen von Null verschieden; denn der Pol ist kein Punkt der E , sondern der Berührungspunkt des Polkurvenpaares und bewegt sich als solcher auf beiden Kurven, wie das Beispiel des auf einer ruhenden Geraden rollenden Kreises (Wagenrad) lehrt.

Die Geschwindigkeiten aller Punkte der Ebene in einer gegebenen Lage der Ebene sind nach Größe und Richtung völlig bestimmt durch den Pol und die Winkelgeschwindigkeit, wie aus dem Vorstehenden hervorgeht. Umgekehrt ist die Winkelgeschwindigkeit völlig bestimmt durch die Bahngeschwindigkeit eines Punktes der Ebene und die Lage des Poles.

Die Geschwindigkeiten der Punkte Γ einer Geraden γ haben die Eigenschaft, daß ihre Komponenten in Richtung der Geraden gleich sind, und zwar gleich der Geschwindigkeit v_γ des Fußpunktes Γ_0 des Lotes $P\Gamma_0$ auf die Gerade γ (Fig. 77). Denn die Punkte Γ der Geraden sind unter sich starr verbunden und müssen sich deshalb in Richtung der Geraden mit derselben Geschwindigkeit bewegen. Da Γ_0 der Punkt ist, in dem γ die Hüllbahn c dieser Geraden berührt, also auf c gleitet, so nennt man Γ_0 den Gleitungspunkt der Geraden und v_γ die Gleitungsgeschwindigkeit von γ . Hiernach erhält man

$$v_\gamma = \overline{P\Gamma_0} \cdot \omega.$$

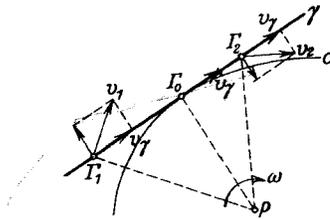


Fig. 77.

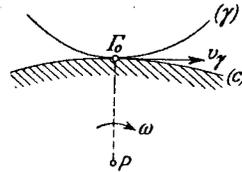


Fig. 78.

Die gleiche Beziehung gilt auch für die Gleitungsgeschwindigkeit jedes beliebigen Hüllkurvenpaares. Denn der Punkt Γ_0 beschreibt bei der Drehung der Ebene um P das gleiche Bahnelement, ob er nun einer Geraden oder einer beliebigen Kurve γ angehört, die c in Γ_0 berührt (s. Fig. 78).

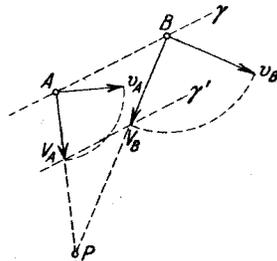


Fig. 79.

Für die zeichnerische Ermittlung der Punktgeschwindigkeiten ist am einfachsten die Verwendung der sogenannten orthogonalen oder senkrechten Geschwindigkeiten. Man versteht unter letzteren die um einen rechten Winkel in einen oder anderen Sinne gedrehten Geschwindigkeiten. So ist z. B. (s. Fig. 79) V_A die um 90° gedrehte

Geschwindigkeit v_A des Punktes A , V_B die entsprechende Größe für den Punkt B .

Man beweist nun leicht, daß die Verbindungslinie $V_A V_B$ der Endpunkte der senkrechten Geschwindigkeiten zweier Punkte A und B parallel ist der Verbindungslinie AB dieser Punkte.

Denn da

$$v_A = V_A = \overline{PA} \cdot \omega, \quad v_B = V_B = \overline{PB} \cdot \omega,$$

so folgt

$$\overline{PV_A} : \overline{PV_B} = \overline{PA}(1 - \omega) : \overline{PB}(1 - \omega) = \overline{PA} : \overline{PB},$$

und damit

$$\overline{V_A V_B} \parallel \overline{AB}.$$

Als weitere Folgerung hieraus ergibt sich, daß (s. Fig. 79) die Gerade $\gamma' \parallel \gamma$ ist, also der sehr brauchbare Satz:

Die Endpunkte der senkrechten Geschwindigkeiten der Punkte einer Geraden liegen auf einer Parallelen zu letzterer.

Mittels dieses Satzes erhält man z. B. den Endpunkt der senkrechten Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes C der Ebene (s. Fig. 80) aus den beiden senkrechten Geschwindigkeiten der Punkte A und B , indem man die Parallelen durch V_A zu \overline{AC} und durch V_B zu \overline{BC} zum Schnitt bringt, womit sich V_C findet.

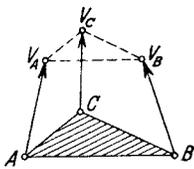


Fig. 80.

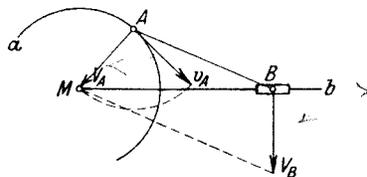


Fig. 81.

Sehr vorteilhaft wird die Verwendung der senkrechten Geschwindigkeiten besonders dann, wenn der Punkt A , dessen Geschwindigkeit v_A gegeben ist, sich auf einem Kreis gleichförmig bewegt. Da der Maßstab, nach dem die Geschwindigkeiten durch Strecken dargestellt werden, ganz willkürlich ist, so wählt man den Vektor V_A gleich dem Radius MA des Kreises (s. Fig. 81) und legt den Endpunkt V_A nach dem Mittelpunkt M des Kreises α . Will man nun z. B. in einem Kurbelschubgetriebe (Fig. 81) für verschiedene Lagen des Punktes B (des Kreuzkopfes) die senkrechten Geschwindigkeiten des letzteren ermitteln, so zieht man einfach die Gerade $\overline{MV_B} \parallel \overline{AB}$, womit V_B gefunden ist. Die Wiederholung dieses Verfahrens für verschiedene Lagen von B liefert leicht das Geschwindigkeitsdiagramm des Punktes B .

31. Geschwindigkeitspläne.

Unter einem Geschwindigkeitsplan oder -diagramm werde jede zeichnerische Darstellung des Änderungsgesetzes der Geschwindigkeit mit dem Orte des bewegten Punktes auf seiner Bahn verstanden.

Der bekannteste Geschwindigkeitsplan ist das sogenannte Geschwindigkeitswegediagramm, das gewöhnlich nur bei geradlinigen Bewegungen angewandt wird. Man erhält es, indem man die Wegstrecke $OA = u$, die der Punkt auf seiner geradlinigen Bahn durchläuft, als Abszisse, seine Geschwindigkeit $v = V = \overline{AB}$ als Ordinate einer Kurve (s. Fig. 82) aufträgt und die Kurve ε aus einer genügend großen Anzahl von Punkten zeichnet. Dieser Geschwindigkeitsplan, dessen wertvollste Eigenschaft in Nr. 32 dar-

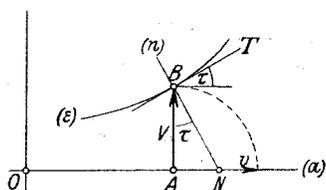


Fig. 82.

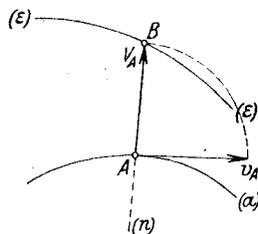


Fig. 83.

gelegt werden soll, läßt sich auch bei krummliniger Bahn verwenden; man braucht nur die Bahnkurve zu rektifizieren, d. h. auf eine Gerade abzuwickeln.

Viel einfacher aber ist es und zumeist auch weit geeigneter für die Zwecke der Geschwindigkeitspläne, die senkrechte Geschwindigkeit $V = \overline{AB}$ (s. Fig. 83) vom bewegten Punkt A aus auf der Normalen n der Bahn a anzutragen. Die Schaulinie ε , die sich als Ort der Punkte B so ergibt, hat ähnliche wertvolle Eigenschaften, wie das Geschwindigkeitswegediagramm; wir wollen sie den Plan der senkrechten Geschwindigkeiten oder kurz den V -Plan der Bewegung des Punktes A nennen.

Zwei Fälle mögen hier besonders unterschieden werden. Entweder kann A auf seiner gegebenen Bahn sich hin und zurück bewegen, wie z. B. bei der Kurbelschwinge, die weiter unten als Beispiel behandelt werden soll, oder aber eine geschlossene, in sich zurücklaufende Bahnkurve beschreiben. Während im ersteren Falle die Schaulinie ε durch die Bahn in die beiden, auf den Hin- und den Rückgang bezüglichen Teile zerlegt wird, ist das bei einer geschlossenen Kurve nicht mehr der Fall. Da man aber $\overline{AB} = V$ nach der einen oder anderen Seite auf der Normalen auftragen

kann, so empfiehlt es sich, die äußere konvexe Seite der Bahn hierzu zu wählen, weil andernfalls die Schaulinie ε zu gedrängt und wenig übersichtlich werden kann, ja sogar Singularitäten erhalten, die mit der Bewegung nichts zu tun haben.

Als Beispiel für den ersten Fall möge die Kurbelschwinge behandelt werden, die in Fig. 84 dargestellt ist. Die beiden Kurbeln $M_A A$ und $M_B B$ sind durch die Koppelstange AB beweglich verbunden. Setzen wir voraus, daß die Kurbel $M_A A$ gleichförmig rotiert, so beschreibt A seine Kreisbahn mit konstanter Geschwindigkeit v_a . Wir wählen dann den Maßstab für die Darstellung der Geschwindigkeiten so, daß v_a durch eine Strecke von der Länge $\overline{M_A A}$ dargestellt wird und drehen diese von links nach rechts um A , so daß der Endpunkt V_A der senkrechten Geschwindigkeit von A mit M_A zusammenfällt, weil dann V_A für alle Lagen von A dort bleibt. Nun finden wir V_B , indem wir einfach $V_A V_B \parallel AB$ ziehen. Wiederholen wir diese Konstruktion für eine genügend große Zahl von Lagen, so erhalten wir sofort den V -Plan für den Punkt B . Der untere Teil von ε bezieht sich dann auf den Hingang des Punktes B von B' bis B'' , der obere auf den Rückgang.

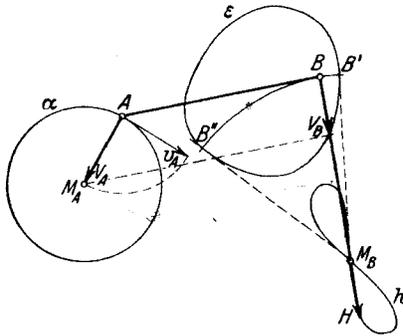


Fig. 84.

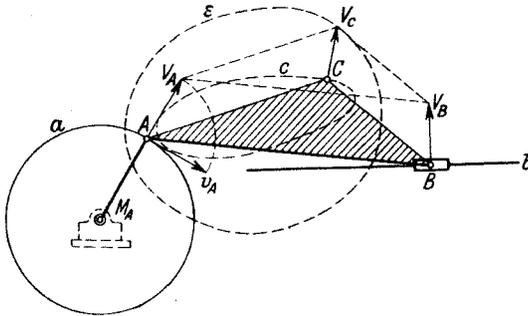


Fig. 85.

Als Beispiel für den zweiten Fall sei der V -Plan für einen Koppelpunkt C des exzentrischen Kurbelschubgetriebes gewählt, das Fig. 85 darstellt. Der Endpunkt A der Kurbel $M_A A$ durchlaufe seine Kreisbahn a mit konstanter Geschwindigkeit v_a ,

dann wählen wir hier die senkrechte Geschwindigkeit V_A von beliebiger Größe und tragen sie nach außen gerichtet auf der Bahnnormalen $M_A A$ auf. Die senkrechte Geschwindigkeit des auf der Geraden b geführten Punktes B ergibt sich dann durch die Parallele $V_A V_B$ zu AB unmittelbar, und die von C , indem wir $V_A V_C \parallel AC$ und $V_B V_C \parallel BC$ ziehen; im Schnittpunkt V_C beider Parallelen liegt der Endpunkt V_C der Strecke $\overline{CV_C}$, die V_C darstellt. Die Wiederholung dieses Verfahrens für verschiedene Lagen der Koppel AB führt dann in der bisherigen Weise auf die Kurve ε , also den V -Plan von C . Die Bahn c des Punktes C ist hier eine geschlossene Kurve; es wäre daher unzweckmäßig gewesen, hätte man wie vorher den Endpunkt V_A mit M_A zusammenfallen lassen, weil dann V_C in das Innere, bzw. auf die konkave Seite von c fällt und dann ε sich sehr wenig übersichtlich gestaltet.

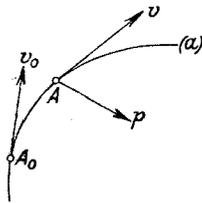


Fig. 86 a.

Ein anderer Geschwindigkeitsplan, der häufig verwendet wird, ist der Hodograph (nach Hamilton), der in folgender Weise erhalten wird. Ist a die Bahn des Punktes A (s. Fig. 86 a) und v seine Geschwindigkeit, so stellen

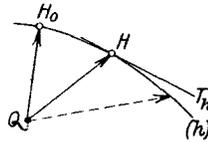


Fig. 86 b.

wir letztere nach einem beliebigen Maßstab durch eine Strecke dar und tragen diese von einem willkürlich gewählten Punkte Q (s. Fig. 86 b) aus in Richtung von v an, derart, daß $\overline{QH} \perp v$ ist. Der geometrische Ort der Punkte H , die sich so ergeben, ist eine Kurve h , die der Hodograph der Bewegung des Punktes A genannt wird, während Q der Pol des Hodographen heißt.

Der Hodograph hat ebenfalls sehr brauchbare Eigenschaften, die jedoch erst im folgenden Abschnitt dargelegt werden sollen, da sie in engstem Zusammenhang mit der Beschleunigung stehen.

In der gleichen Weise, wie die v lassen sich auch die senkrechten Geschwindigkeiten V benutzen, um die Hodographen aufzuzeichnen. Diese Hodographen der senkrechten Geschwindigkeiten unterscheiden sich von den vorher erwähnten nur dadurch, daß sie um 90° in dem einen oder anderen Sinne um den Pol Q gedreht erscheinen, während ihre Eigenschaften zur Beurteilung der Bewegungsvorgänge völlig erhalten bleiben.

In Fig. 84 ist der Hodograph der senkrechten Geschwindigkeiten für den Punkt B gezeichnet worden, und zwar mit dem Punkte M_B als Pol. Man erhält ihn einfach, indem man für alle Lagen des Punktes B $\overline{M_B H} = \overline{BV_B}$ macht. Die Kurve h erhält hier die schleifenartige Gestalt, welche die Figur zeigt, und zwar bezieht sich

die untere Schleife auf den Hingang, die obere auf den Rückgang des Punktes B . Die Veränderlichkeit der Geschwindigkeit kommt durch die Kurve h ebenso zur Anschauung wie im V -Plan.

32. Die Beschleunigung.

Ist die Bewegung eines Punktes geradlinig, so fällt bekanntlich die Beschleunigung des Punktes in die Bahngerade und hat, wenn du das Bahnelement und $v = \frac{du}{dt}$ die Geschwindigkeit des Punktes bezeichnen, die Größe

$$p = \frac{dv}{dt} = v \frac{dv}{du}.$$

Der letztere Ausdruck und damit auch b läßt sich aber geometrisch in sehr einfacher Weise aus dem V -Plan ableiten. Es sei (s. Fig. 82) a die Bahn, $AB = V = v$ die senkrechte Geschwindigkeit und ε der V -Plan des Punktes A . Die Tangente BT an ε in B schließe mit a den Winkel τ ein, dann ist

$$\tan \tau = \frac{dV}{du} = \frac{dv}{du}.$$

Folglich erhält man

$$p = v \cdot \tan \tau = V \cdot \tan \tau = \overline{AN},$$

wie aus der Figur unmittelbar ersichtlich wird, da BN die Normale zur Kurve a in B ist. Die Strecke AN heißt bekanntlich die Subnormale der Kurve ε ; wir finden sonach den bekannten Satz, daß bei der geradlinigen Bewegung eines Punktes die Beschleunigung durch die Subnormale im V -Plan dargestellt wird.

Diese bekannte Konstruktion läßt sich auch benutzen, um die Tangentialbeschleunigung der krummlinigen Bewegung eines Punktes geometrisch zu ermitteln; es ist nur nötig, die Bahnkurve zu rektifizieren, d. h. auf eine Gerade abzuwickeln und über letzterer den V -Plan des Punktes aufzuzeichnen, weil dann die Subnormale desselben die Tangentialbeschleunigung darstellt, wie man leicht erkennt.

Die etwas umständliche und oft wenig genaue Rektifikation der Bahnkurve und die Aufzeichnung des zugehörigen V -Planes läßt sich umgehen und durch eine einfache und zugleich genauere Konstruktion der Tangentialbeschleunigung ersetzen in allen Fällen, in denen man den Krümmungsmittelpunkt der Bahnkurve kennt oder einfach ermitteln kann, wie folgende Betrachtung zeigt.

Es sei (s. Fig. 87) p die Beschleunigung des Punktes A , der die Bahn a mit der Geschwindigkeit v durchläuft. Zerlegen wir p



in Komponenten in Richtung der Bahnnormalen n und der Bahntangente AT , so ist erstere, die sog. Tangentialbeschleunigung

letztere

$$p_t = \frac{dv}{dt} = v \frac{dv}{du},$$

die letzte, die sog. Normal- oder Zentripetalbeschleunigung

$$p_n = \frac{v^2}{\rho},$$

falls $\rho = \overline{AK}$ den Krümmungshalbmesser der Bahn a im Punkte A bezeichnet. Zeichnen wir nun den V -Plan für den Punkt A und ziehen die Senkrechte \overline{BN} zur Tangente BT_ε an die Schaulinie ε im Punkte B , welche die Bahntangente AT in N schneidet, und verbinden dann N mit dem Krümmungsmittelpunkte K durch eine Gerade, so schneidet diese die durch B gelegte Parallele zu AT in dem Punkte C . Die Strecke \overline{BC} stellt nun die gesuchte Tangentialbeschleunigung p_t dar, wie leicht erweisbar ist. Es sei

$$\angle CBT_\varepsilon = \angle ABN = \varphi,$$

dann ist, wenn $d\tau$ den unendlich kleinen Winkel zwischen den beiden Tangenten in den unendlich benachbarten Punkten A und A' der Bahn a bezeichnet,

$$\overline{AA'} = du = \rho \cdot d\tau \quad \text{und} \quad \overline{BB'} = \overline{KB} \cdot d\tau;$$

folglich, weil

$$\overline{B'V'} = dV$$

$$\tan \varphi = \frac{\overline{B'V'}}{\overline{BB'}} = \frac{dV}{\overline{KB} \cdot d\tau} = \frac{dV}{(\rho + V) \cdot d\tau} = \frac{\rho}{\rho + V} \cdot \frac{dV}{du} = \frac{\rho}{\rho + V} \cdot \frac{dv}{du}.$$

Sonach wird

$$p_t = v \frac{dv}{du} = \frac{\rho + V}{\rho} \cdot V \cdot \tan \varphi = \frac{\rho + V}{\rho} \cdot \overline{AN} = \overline{BC},$$

was zu beweisen war.

Mit dieser einfachen Konstruktion läßt sich leicht die von

$$p_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{V^2}{\rho}$$

verknüpfen. Man ziehe $\overline{BD} \parallel \overline{KN}$ und ferner $\overline{DE} \parallel \overline{NB}$, dann ist

$$\overline{AE} = p_n = \frac{V^2}{\rho},$$

wie sich aus der Ähnlichkeit der Dreiecke KAN und BAD , bzw. BAN und EAD sofort ergibt.

Aus $\overline{BC} = p_t$ und $\overline{AE} = p_n$ findet man dann durch Zusammensetzung unmittelbar die totale Beschleunigung p .

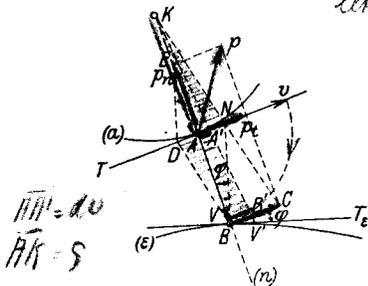


Fig. 87.

Der Zusammenhang zwischen dem Hodographen und der Beschleunigung p wird durch folgende Erwägung aufgedeckt. Sind v und v' (s. Fig. 88a) die Geschwindigkeiten eines Punktes in zwei

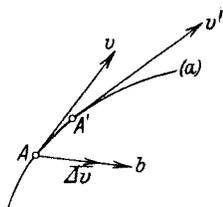


Fig. 88a.

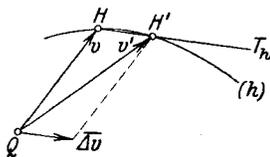


Fig. 88b.

unendlich benachbarten Lagen A und A' , so nennt man bekanntlich den Unterschied zwischen v und v' nach Größe und Richtung die Elementarbeschleunigung des Punktes. Letztere ist die unendlich kleine Geschwindigkeit $\overline{\Delta v}$, die man mit v nach dem Parallelogramm der Geschwindigkeiten zusammensetzen muß, um als resultierende Geschwindigkeit v' zu erhalten. Trägt man daher v und v' (Fig. 88b) von einem beliebigen Punkte Q aus nach Größe und Richtung an, macht also $\overline{QH} \equiv v$, $\overline{QH'} \equiv v'$, so ist $\overline{HH'} \equiv \overline{\Delta v}$ die Elementarbeschleunigung des Punktes A . Die Beschleunigung p selbst ist der Grenzwert

$$p = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\overline{\Delta v}}{\Delta t} \right]$$

und hat die Richtung, die $\overline{\Delta v}$ besitzt. Sonach ist p parallel der Tangente an die Hodographenkurve h im Punkte H . Im Hodograph der senkrechten Geschwindigkeiten dagegen ist p parallel der Normalen von h . Durch den Hodographen ist folglich die Richtung der totalen Beschleunigung p mit der Genauigkeit angebar, mit der man Tangenten an Kurven zeichnen kann.

Die letzterwähnte Eigenschaft des Hodographen ermöglicht in bestimmten Fällen Rückschlüsse auf den Bewegungsvorgang. Wenn z. B. der Pol so liegt, daß man eine Tangente an die Hodographenkurve h legen kann, so hat die Beschleunigung die Richtung von v ,

also der Bahntangente. Folglich ist $p_n = \frac{v^2}{\rho} = 0$, und da $v > 0$, so

muß $\rho = \infty$ werden, d. h. die Bahn besitzt in solchem Falle an der betreffenden Stelle einen Wendepunkt.

Wenn dagegen $v = 0$ ist, also der Pol auf der Hodographenkurve selbst liegt, so sind zwei verschiedene Fälle möglich. Entweder bewegt sich der Punkt auf seiner Bahn wieder rückwärts, kehrt also die Bewegung um, dann muß der Hodograph in Q einen Wende-

punkt haben (s. Fig. 89), wie aus der Aufzeichnung von h unmittelbar hervorgeht. Die Wendetangente in Q ist parallel der Bahntangente im Umkehrpunkte A_0 der Bahn. Oder aber die Kurve h verläuft wie in Fig. 90, also auf derselben Seite der Tangente in Q ; dann

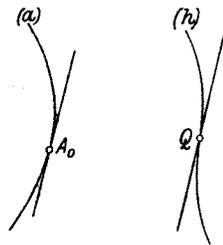


Fig. 89.

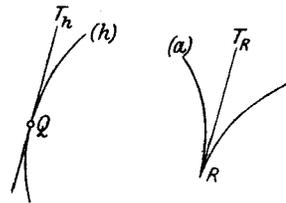


Fig. 90.

besitzt notwendig die Bahn an der betreffenden Stelle einen Rückkehrpunkt (eine Spitze) R und die Rückkehrtangente T_R im Punkte R ist parallel der Tangente T_h an den Hodographen im Pol Q .

Mit den entsprechenden Änderungen gelten diese Schlüsse auch für den Hodographen der senkrechten Geschwindigkeiten. Demgemäß zeigt letzterer in dem Beispiel der Kurbelschwinge (S. 49, Fig. 84) zwei Wendepunkte, die den beiden Umkehrstellen B' und B'' des Punktes B auf seiner Kreisbahn sich zuordnen. Ein Beispiel für das andere Vorkommnis bietet die Bewegung eines jeden Punktes der beweglichen Polkurve, da dieser notwendig eine Bahn mit Rückkehrpunkt beschreibt, wie man leicht erkennt.

Schließlich möge noch darauf hingewiesen werden, daß eine Verbindung des V -Planes mit einem Hodographen sowohl die Größe der Beschleunigung p , als auch der Zentripetalbeschleunigung p_n zeichnerisch zu finden gestattet (wenn auch naturgemäß nur angenähert) selbst dann, wenn der Krümmungsmittelpunkt K der Bahn nicht gegeben ist. Es läßt sich, wie schon hervorgehoben, die

Tangentialbeschleunigung $p_t = v \frac{dv}{du}$ aus dem V -Plan finden, der sich

ergibt, wenn man die Bahnkurve rektifiziert. Aus dem Hodographen findet man ferner die Richtung der totalen Beschleunigung p mittels der Hodographentangente. Somit erhält man aus p_t und dieser Richtung p selbst, und als Komponente in der Bahnnormalen auch

$p_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{V^2}{\rho}$. Indem man die in Fig. 87 mitgeteilte Konstruktion

von p_n im umgekehrten Sinne verwendet, erhält man die Lage des Krümmungsmittelpunktes K mit der entsprechenden durch die Zeichnung bedingten Annäherung. Dieses Verfahren zur Bestimmung von K ist in manchen Fällen sehr viel kürzer, als das, das aus

den geometrischen Beziehungen zwischen den Krümmungen der Bahnkurven folgt.

Sechstes Kapitel.

Die Relativbewegungen von drei und mehr komplanen Ebenen.

33. Die Relativbewegungen dreier Ebenen.

Für die Relativbewegungen dreier Ebenen besteht der folgende grundlegende

Satz: Die drei Pole der Relativbewegungen dreier komplaner starrer Ebenen liegen auf einer Geraden.

Es seien die Elementarbewegungen der Ebene E_2 gegen E_1 und von E_3 gegen E_1 bekannt, folglich auch die Lagen der entsprechenden Pole P_{21} und P_{31} (s. Fig. 91). Um die Relativbewegung von E_3 gegen E_2 zu finden, erteilen wir E_1 die entgegengesetzte Drehung um P_{21} , die E_2 gegen E_1 ausführt. Hierdurch kommt E_2 zur Ruhe und E_3 führt eine Drehung gegen

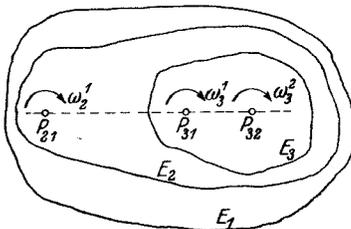


Fig. 91.

E_3 aus, die sich aus den Drehungen von E_3 gegen E_1 um P_{31} und von E_1 gegen E_2 um P_{21} zusammensetzt. Da nun P_{31} , aufgefaßt als Punkt von E_3 , nur die Bewegung mit E_1 gegen E_2 ausführt, so ist das Bahnelement dieses Punktes senkrecht zu dem Verbindungsstrahl mit dem Drehpunkte P_{21} , also auch senkrecht zu $\overline{P_{21}P_{31}}$. Die Relativbewegung von E_3 gegen E_2 ist nun eine Drehung um P_{32} , und da P_{31} als Punkt von E_3 sich bei dieser Bewegung senkrecht zu dem Verbindungsstrahl $\overline{P_{31}P_{32}}$ des Punktes P_{31} mit dem Pol P_{32} bewegt, so muß $\overline{P_{31}P_{32}}$ mit $\overline{P_{21}P_{31}}$ zusammenfallen, also P_{32} in der Geraden $\overline{P_{21}P_{31}}$ liegen.

Kürzer läßt sich dieser Satz, wie folgt, beweisen. Der Pol P_{32} der Relativbewegung von E_3 gegen E_2 fällt zusammen mit dem Punkte der Ebene E_3 , der sich momentan in relativer Ruhe gegen E_2 befindet. Nun sind bekanntlich zwei Punkte in relativer Ruhe, wenn sie gleiche und gleichgerichtete Geschwindigkeiten haben. Das ist aber bei zusammenfallenden Punkten der Ebenen E_2 und E_3 nur möglich, wenn diese Punkte in der Polgeraden $\overline{P_{21}P_{31}}$ liegen, denn dann sind die beiden Geschwindigkeiten senkrecht zu jener Geraden und folglich gleichgerichtet. Wählt man noch diese zusammenfallenden Punkte P_{32} so, daß ihre Geschwindig-

keiten gleich groß werden, so ist damit die Lage des Poles P_{32} eindeutig bestimmt, und zugleich die Richtigkeit obigen Satzes erwiesen.

Die letzterwähnte Bestimmung der Lage des Poles P_{32} auf der Polgeraden läßt sich zeichnerisch leicht durchführen. Bezeichnet ω_2^1 die Winkelgeschwindigkeit der Drehung E_2 gegen E_1 um P_{21} mit dem in Fig. 92 durch den Pfeil angedeuteten Drehsinn, so wird die Geschwindigkeit v_2^1 eines beliebigen Punktes A_2 von E_2 auf der Polgeraden gleich $\overline{P_{21}A_2} \cdot \omega_2^1$ und senkrecht zu $\overline{P_{21}A_2}$; analog ist $v_3^1 = \overline{P_{31}A_3} \cdot \omega_3^1$ die Geschwindigkeit von dem beliebigen Punkte A_3 der Ebene E_3 . Diese beiden Punktgeschwindigkeiten werden nach Größe und Richtung einander gleich nur für die beiden zusammenfallenden Punkte P_{32} der Ebenen E_2 und E_3 auf der Polgeraden, die der Bedingung

$$\overline{P_{21}P_{32}} \cdot \omega_2^1 = \overline{P_{31}P_{32}} \cdot \omega_3^1$$

genügen. Vorstehende Bedingungsgleichung in Verbindung mit der anderen

$$\overline{P_{21}P_{32}} - \overline{P_{31}P_{32}} = \overline{P_{21}P_{31}}$$

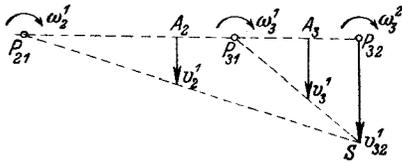


Fig. 92.

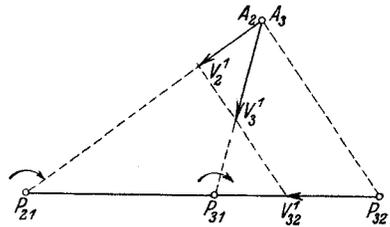


Fig. 93.

bestimmt die Lage von P_{32} eindeutig auf der Polgeraden. Zeichnerisch findet man P_{32} , indem man v_2 und v_3 durch Vektoren darstellt, die man in A_2 , bzw. A_3 anträgt. Verbindet man die Endpunkte der Vektoren mit den bezüglichen Polen durch Gerade, so schneiden sich diese in einem Punkte S und dieser ist der Endpunkt des Vektors, der die gemeinsame Geschwindigkeit v_{32}^1 der in P_{32} zusammenfallenden Punkte der Ebenen E_2 und E_3 darstellt. Fällt man also von S ein Lot auf die Polgerade, so liegt im Fußpunkte desselben der gesuchte Pol P_{32} .

Einfacher und zugleich allgemeiner wird die Ermittlung von P_{32} durch Verwertung der senkrechten Geschwindigkeiten. Es sei A_2 (s. Fig. 93) ein beliebiger Punkt von E_2 und V_2^1 seine senkrechte Geschwindigkeit gegen E_1 . Ferner sei A_3 der mit A_2 augenblicklich zusammenfallende Punkt von E_3 und V_3^1 seine senkrechte Geschwindigkeit. Nach dem Satze, daß die Endpunkte der senkrechten Ge-

schwindigkeiten der Punkte einer Geraden auf einer Parallelen zu letzterer liegen, erhalten wir für jeden weiteren Punkt der Ebenen E_2 , bzw. E_3 die senkrechte Geschwindigkeit durch das Ziehen entsprechender Parallelen. Sollen die beiden Geschwindigkeiten gleichgerichtet sein, so müssen die zusammenfallenden Punkte beider Ebenen auf $\overline{P_{21}P_{31}}$ liegen, und wenn sie gleiche Größe erhalten sollen, muß der Endpunkt der gemeinsamen senkrechten Geschwindigkeit V_{32}^1 auf der Geraden liegen, die die Endpunkte V_2^1 und V_3^1 der Vektoren verbindet. Zieht man sonach eine Parallele durch A_2 zu $\overline{V_2^1V_3^1}$, so schneidet diese die Polgerade in dem gesuchten Pol P_{32}^1 .

Aus den letzteren Darlegungen folgt leicht, daß die senkrechte Geschwindigkeit V_3^2 der Relativbewegung des Punktes A_3 gegen die Ebene E_2 sich unmittelbar findet, wenn man durch den Vektor-Endpunkt V_3^1 (s. Fig. 94) eine Parallele zu $\overline{P_{21}A_2}$ zieht; diese schneidet den Strahl $\overline{P_{32}A_3}$ im Endpunkte des Vektors V_3^2 . Es ist also hiernach in Bestätigung eines bekannten Satzes über die Relativbewegungen V_3^2 die resultierende Geschwindigkeit aus V_3^1 und $-V_2^1 = V_1^2$, die als Diagonale des entsprechenden Parallelogrammes der Geschwindigkeiten gefunden wird.

Berücksichtigt man ferner, daß die Relativbewegung von E_1 gegen E_2 eine Drehung um denselben Pol P_{31} mit gleicher Winkelgeschwindigkeit, nur im entgegengesetzten Drehsinn ist, und folglich die Bahngeschwindigkeit v_1^2 des Punktes A_1 der Ebene E_1 , der augenblicklich mit A_2 zusammenfällt, gleich aber entgegengesetzt gerichtet ist der Geschwindigkeit v_2^1 des Punktes A_2 , so erkennt man nicht nur, daß die beiden entsprechenden senkrechten Geschwindigkeiten V_2^1 und V_1^2 , in dem Punkte A_1 angetragen, nach entgegengesetzten Seiten in der Geraden $\overline{P_{21}A_1}$ liegen, sondern auch, daß die senkrechten Geschwindigkeiten der drei zusammenfallenden Punkte A_1 , A_2 und A_3 in letzteren angetragen die Diagonalen eines Sechseckes bilden, dessen Gegenseiten paarweise parallel sind (s. Fig. 94). Dieses Geschwindigkeits-

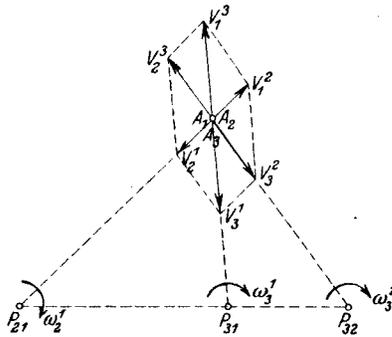


Fig. 94.

sechseck hat für die zeichnerische Ermittlung der Geschwindigkeiten große Vorteile, denn es genügt demnach die Kenntnis einer der sechs Geschwindigkeiten, um alle übrigen zu finden, wenn nur die drei Pole der Relativbewegungen der drei Ebenen gegeben sind.

Die Winkelgeschwindigkeit der Relativbewegung von E_3 gegen E_2 läßt sich leicht aus der Beziehung ermitteln, daß der Winkel $\Delta\varphi_3^2$, um den sich die Ebene E_3 gegen E_2 in der verschwindend kleinen Zeit Δt dreht, gleich der Differenz der Drehwinkel $\Delta\varphi_3^1$ und $\Delta\varphi_2^1$ ist, wie Fig. 95 unmittelbar ersichtlich macht, also die Gleichung

$$\Delta\varphi_3^2 = \Delta\varphi_3^1 - \Delta\varphi_2^1$$

besteht. Da allgemein der Drehwinkel

$$\Delta\varphi = \omega \cdot \Delta t$$

ist, so folgt aus voriger Beziehung sofort

$$\omega_3^2 = \omega_3^1 - \omega_2^1,$$

wobei angenommen wurde, daß die Drehungen um P_{21} und P_{31} gleichsinnig sind und $\omega_3^1 > \omega_2^1$ ist.

Haben die beiden Drehungen entgegengesetzten Drehsinn, so wird, wie leicht ersichtlich,

$$\omega_3^2 = \omega_3^1 + \omega_2^1;$$

es liegt dann der Pol P_{32} notwendig zwischen P_{21} und P_{31} , nicht aber, wie im vorgehenden Falle außerhalb der Strecke $\overline{P_{21}P_{31}}$.

Beide Relationen lassen sich durch die eine

$$\omega_3^2 = \omega_3^1 \mp \omega_2^1$$

oder auch

$$\omega_2^1 + \omega_3^2 + \omega_3^1 = 0$$

ersetzen; im letzteren Falle hat man nur dem Drehsinn durch entsprechende Vorzeichen Rechnung zu tragen.

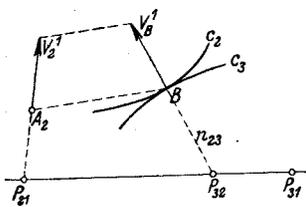


Fig. 96.

In den weitaus meisten Fällen ist die Lage des Poles P_{32} nicht durch die Winkelgeschwindigkeiten bestimmt, sondern durch die Bedingung, daß die Bewegung von E_2 gegen E_1 auf E_3 durch ein Hüllkurvenpaar (c_2, c_3) übertragen wird, wie in Fig. 96 angedeutet ist. Dann liegt der Pol P_{32} in der Berührungsnormale n_{23} des Hüllkurvenpaares,

und, da er außerdem auf der Polgeraden sich befinden muß, im Schnittpunkt der letzteren mit n_{23} . Ist nun z. B. ω_2^1 gegeben, so finden sich ω_3^1 und ω_3^2 aus den beiden früheren Relationen

$$\overline{P_{21}P_{32}} \cdot \omega_2^1 = \overline{P_{31}P_{32}} \cdot \omega_3^1$$

und

$$\omega_3^2 = \omega_3^1 \mp \omega_2^1$$

zu

$$\omega_3^1 = \frac{\overline{P_{21} P_{32}}}{P_{31} P_{32}} \cdot \omega_2^1$$

und

$$\omega_3^2 = \frac{\overline{P_{21} P_{31}}}{P_{31} P_{32}} \cdot \omega_2^1.$$

Einer besonderen Berücksichtigung bedarf der Fall, daß einer der drei Pole ins Unendliche rückt, weil dann die entsprechende Bewegung keine Drehung, sondern eine Schiebung wird. Wandert z. B. der Pol P_{32} ins Unendliche, was eintritt, wenn in Fig. 96 die Berührungsnormale n_{23} der Polgeraden parallel wird, so ergibt die letzte Relation mit $\overline{P_{31} P_{32}} = \infty$

$$\omega_3^2 = 0;$$

folglich wird hier

$$\omega_3^1 = \omega_2^1$$

und ein beliebiger Punkt A_3 der Ebene E_3 auf der Polgeraden erhält als Geschwindigkeit der Relativbewegung von E_3 gegen E_2

$$\overline{P_{21} A_3} \cdot \omega_2^1 + \overline{P_{31} A_3} \omega_3^1 = (\overline{P_{21} A_3} + \overline{P_{31} A_3}) \omega_2^1 = \overline{P_{21} P_{31}} \cdot \omega_2^1,$$

also einen von der Lage des Punktes A_3 unabhängigen Wert. Daraus folgt, daß alle Punkte A_3 der Polgeraden die gleiche und auch gleichgerichtete (nämlich senkrecht zur Polgeraden) relative Geschwindigkeit besitzen, und das ist gleichbedeutend mit der Behauptung, daß die Ebene E_3 sich gegen E_2 senkrecht zur Polgeraden schiebend bewegt.

Zeichnerisch findet man die Schiebungsgeschwindigkeit v_3^2 , bzw. V_3^2 in der genau gleichen Weise aus einer Punktgeschwindigkeit (V_2^1 oder V_3^1), wie dies in Fig. 94 dargestellt ist; nur wird V_3^2 hier parallel zur Polgeraden.

Fallen zwei der Pole ins Unendliche, so ist das auch mit dem dritten der Fall, d. h. dann sind alle Relativbewegungen der drei Ebenen Schiebungen; die Schiebungsgeschwindigkeiten bilden das gleiche Sechseck wie bei Drehungen und können daher in der gleichen Weise gefunden werden, wenn nur die Schiebungsrichtungen gegeben sind.

34. Die Relativbewegungen von beliebig vielen komplanen Ebenen.

Ist n die Anzahl der sich gegeneinander bewegenden Ebenen, so hat jede dieser Ebenen gegen die $n - 1$ übrigen eine relative Bewegung; folglich ist die Anzahl aller verschiedenen Relativbewegungen der n Ebenen

$$n(n - 1).$$

Diese Relativbewegungen sind im allgemeinen Drehungen um einen Punkt, den Pol, und da der Pol der Drehung von E_h gegen E_i derselbe ist, wie der von E_i gegen E_h , so ist die Anzahl aller Pole folglich

$$p = \frac{1}{2} n(n-1).$$

Diese p Pole liegen zu je dreien auf einer Geraden, und zwar sind es die drei Pole der Relativbewegungen je dreier Ebenen. Daraus geht hervor, daß z. B. durch den Pol P_{hi} der beiden Ebenen E_h und E_i $n-2$ Polgerade gehen müssen, denn mit den beiden Ebenen E_h und E_i läßt sich jede der $n-2$ übrigen Ebenen zu je dreien kombinieren. Da durch jeden Pol $n-2$ Polgerade gehen, aber nur zu je dreien der Ebenen eine Polgerade gehört, so ist die Anzahl aller Polgeraden

$$a = \frac{1}{3} p(n-2) = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

So ergibt sich z. B. für

$n = 3$	$p = 3$	$a = 1$
$= 4$	$= 6$	$= 4$
$= 5$	$= 10$	$= 10$
$= 6$	$= 15$	$= 20$ usf.

Die p Pole sind alle eindeutig bestimmt, wenn die sämtlichen Relativbewegungen einer Ebene gegen die übrigen $n-1$ Ebenen es sind. Da durch zwei gegebene Pole der Relativbewegungen dreier Ebenen die Polgerade bestimmt ist, so können nacheinander die Pole sämtlicher Relativbewegungen der n Ebenen zeichnerisch durch das Ziehen von Geraden unmittelbar oder mittelbar bestimmt werden, denn die entsprechenden Polgeraden schneiden sich in den unbekanntenen Polen. Zugleich erkennt man, daß die Polgeraden von einander abhängig sind, sobald $n \geq 5$ ist; denn durch jeden Pol gehen $n-2$ Polgerade. Hierin liegt zugleich eine Kontrolle für die Richtigkeit und Genauigkeit der Zeichnung. Im folgenden Kapitel werden Beispiele für die zeichnerische Ermittlung der Pole mittels der Polgeraden gegeben.

Wenn die gegenseitigen Bewegungen von n Ebenen durch h ihnen gemeinsame Hüllkurvenpaare zu bestimmten werden sollen, so muß, wie man ohne Schwierigkeit erkennt, mindestens

$$h = 3n - 4$$

sein. Denn wählen wir eine der n Ebenen als ruhend gedachte Bezugsebene, so werden die Bewegungen der übrigen $n-1$ Ebenen zu bestimmten durch je zwei Hüllkurvenpaare, insgesamt also durch $2(n-1)$. Hierzu treten noch für die Abhängigkeit der Bewegungen der $n-1$ Ebenen untereinander $n-2$ solcher Paare, denn be-

trachten wir irgendeine der $n - 1$ Ebenen als treibende, so müssen die $n - 2$ übrigen getriebenen Ebenen mit der treibenden durch je ein Hüllkurvenpaar verbunden werden, damit die getriebenen Ebenen in von der treibenden Ebene abhängige Bewegung kommen. Es ist sonach

$$h = 2(n - 2) + n - 2 = 3n - 4.$$

Diese Zahl stimmt mit der aus Gleichung (I*) (S. 27) für $g = 0$ folgenden ganz überein, und da letztere für beliebige Anordnung der höheren Elementenpaare gilt, so läßt sich hieraus der Schluß ziehen, daß im allgemeinen die Hüllkurvenpaare beliebig auf die Ebenen verteilt werden können, wenn hierbei nur auf jede der n Ebenen mindestens drei verschiedene Hüllkurven entfallen. Erwägt man nun weiter, daß durch die h Hüllkurvenpaare die gegenseitigen Bewegungen der n Ebenen zu bestimmten werden, so müssen auch die p Pole völlig bestimmt sein; es muß demnach möglich sein, die $p = \frac{n(n-1)}{2}$ Pole der Relativbewegungen der n Ebenen mittels der $h = 3n - 4$ Berührungsnormalen der Hüllkurvenpaare zu bestimmen.

Wählt man in einer Ebene 2 Hüllkurven als konzentrische Kreise, so dreht sich diese Ebene gegen die Ebene, in der die beiden anderen Kurven liegen, die diese Kreise berühren, dauernd um den gemeinsamen Mittelpunkt der letzteren; beide Ebenen können folglich ohne Änderung ihres gegenseitigen Bewegungszustandes durch ein Drehpaar (Gelenk) verbunden werden. Wählt man ferner zwei Hüllkurven in einer Ebene als parallele Gerade, so vollzieht die Ebene gegen die Ebene, in der die zugehörigen Hüllkurven zweier Paare liegen, eine geradlinige Schiebung; demnach können beide Ebenen durch ein Schiebepaar verbunden werden. Man erkennt sonach, daß jedes Dreh- und Schiebepaar an die Stelle zweier Hüllkurvenpaare tritt, und daß, wenn g die Anzahl aller Dreh- und Schiebepaare bezeichnet, $2g$ Hüllkurvenpaare durch g Umschlußpaare ersetzt werden können. Bezeichnet h dann die Anzahl aller übrigen Hüllkurvenpaare, so haben wir in obiger Gleichung h durch $2g + h$ zu ersetzen, wodurch sie in

$$h + 2g - 3n + 4 = 0,$$

also in die Gleichung (I*) (S. 27) übergeht. Die Gleichung (I*) ist aber die Bedingungsgleichung der Zwangsläufigkeit der HEP-Ketten, womit erkannt wird, daß die p Pole einer zwangsläufigen höheren Elementenpaarkette völlig und eindeutig durch die Umschlußpaare und die Berührungsnormalen der Hüllkurvenpaare bestimmt sein und sich, wie vorher erörtert, durch das Ziehen von Geraden unmittelbar zeichnerisch finden lassen müssen. Es ist dabei zu be-

achten, daß in jedem Drehpaar, bzw. in dessen Achse dauernd der Pol der Relativbewegung derjenigen beiden Ebenen (Kettenglieder) liegt, die durch das Drehpaar verbunden sind, und daß bei einem Schiebepaar der Pol dauernd im Unendlichen sich befindet, und zwar in der Senkrechten zur Schubrichtung des Paares.

Siebentes Kapitel.

Bewegungs- und Geschwindigkeitszustand der zwangläufigen ebenen kinematischen Ketten.

35. Kennzeichnung der Aufgaben.

Das Ziel der folgenden Darlegungen ist die Untersuchung des Bewegungs- und Geschwindigkeitszustandes der zwangläufigen ebenen kinematischen Ketten, insbesondere die Mitteilung der zeichnerischen Methoden, die die nötigen Aufschlüsse über die gegenseitigen Bewegungen der Glieder, namentlich also über die Bahnen, Geschwindigkeiten und Geschwindigkeitspläne bestimmter Gliederpunkte zu geben geeignet sind. Die Aufgaben, die die Maschinentechnik in dieser Hinsicht stellt, beziehen sich meist auf die Untersuchung der Mechanismen, Getriebe und Maschinen, und zwar besonders der Bewegungen einzelner Glieder des Mechanismus gegen ein bestimmtes, ruhend gedachtes Glied, das in den weitaus häufigsten Fällen das Maschinengestell bildet. Mit letzterem unmittelbar verbunden ist meist das treibende Glied, dessen Bewegung gegen das ruhende gegeben, bzw. bekannt sein muß, wenn die von letzterer abhängigen Bewegungen der anderen Glieder gegen das ruhende bestimmt werden sollen.

Die erwähnten Aufgaben sind zweierlei Art. Einerseits bedarf man der Kenntnis der Lagen der Glieder gegen das ruhende Glied, wenn die des treibenden (soweit dies die Zwangläufigkeit seiner Bewegung zuläßt) gegen das ruhende Glied willkürlich gewählt werden, und im Zusammenhange damit die der Bahnen bestimmter Gliederpunkte. Andererseits aber der Geschwindigkeitspläne gewisser Punkte der getriebenen Glieder. Man hat die erstere Aufgabe früher zeichnerisch gelöst durch die Aufsuchung von möglichst viel Lagen der bewegten Punkte, um aus ihnen den Verlauf der Bahn möglichst genau zu erhalten. Viel genauer ergibt sich aber eine Bahnkurve trotz einer geringeren Anzahl von Lagen des bewegten Punktes, wenn man zugleich die Bahntangenten in den einzelnen Lagen anzugeben vermag. Das ist leicht möglich, wenn man den Pol der Bewegung des betreffenden Gliedes gegen das ruhende

kennt, denn die Verbindungslinie des Punktes, dessen Bahn man sucht, mit dem Pol ist die Bahnnormale. Der Pol aber läßt sich zeichnerisch meist recht einfach finden, und zwar lediglich durch das Ziehen von Geraden, sei es nun unmittelbar oder mittelbar. Denn das zeichnerische Verfahren der Aufsuchung des Poles beruht auf dem einfachen Satz, daß die drei Pole der Relativbewegungen dreier Ebenen in einer Geraden liegen. Man erhält folglich die Pole nacheinander als Schnittpunkte von sogenannten Polgeraden wie schon S. 60 erörtert wurde und weiterhin an zahlreichen Beispielen erläutert werden soll.

Noch zweckmäßiger, weil meist erheblich einfacher, ist die Ermittlung der senkrechten Geschwindigkeiten, durch die sowohl die Bahntangenten als auch die Pole, soweit nötig, mitgefunden werden können. Denn in den weitaus meisten Fällen sind die Geschwindigkeitspläne das Endziel der Untersuchung eines Mechanismus, und da die hierzu erforderlichen senkrechten Geschwindigkeiten in die Bahnnormalen fallen, die letzteren aber durch die Pole der betreffenden Gliederbewegungen gehen, so erhält man zugleich mit jenen Plänen die Bahnen der Gliederpunkte bestimmt durch einzelne Lagen jener Punkte und der zugehörigen Bahntangenten, bzw. -normalen. Es kommt also im Grunde die zeichnerische Untersuchung der Bewegungen in einem Mechanismus auf die Ermittlung einerseits der gegenseitigen Lagen der Glieder und andererseits der senkrechten Geschwindigkeiten bestimmter Gliederpunkte hinaus, und da letztere nichts weiter erfordert, als das Ziehen von parallelen Geraden, wie auf S. 47 dargetan, so wird diese Methode der Untersuchung von Mechanismen ebenso einfach wie allgemein anwendbar. Allerdings gibt es verwickeltere Fälle, in denen diese Methode nicht unmittelbar zum Ziele führt; aber anwendbar bleibt sie trotzdem, da es nur gewisser Hilfskonstruktionen, die auf demselben Grundgedanken beruhen, bedarf, um das Endziel zu erreichen.

Im folgenden soll nun diese Methode an vielen Beispielen auseinandergesetzt werden, und zwar zunächst an den dreigliedrigen Ketten; auf diese sollen die viergliedrigen folgen und schließlich die mit fünf und mehr Gliedern.

36. Die dreigliedrigen Ketten.

Sieht man von der schon kurz besprochenen Dreischiebepaarkette (s. S. 21) ab, so gibt es in den Anwendungen nur dreigliedrige Ketten mit einem unselbständigen höheren Elementenpaar und zwei Umschlußpaaren. Für diese Ketten ist demnach

$$n = 3, \quad h_u = h = 1, \quad g = 2$$

zu setzen, womit der Bedingungsgleichung (I*, S. 27) der Zwangläufigkeit genügt wird.

Sind die beiden Umschlußpaare Drehpaare, so ergibt sich die in Fig. 97 dargestellte Kette, in der sich die Glieder 2 und 3 gegen das Glied 1 um die Gelenke 12, bzw. 13 drehen, während sich 2 und 3 in dem höheren Elementenpaar $c_2 c_3$ (Hüllkurvenpaar)

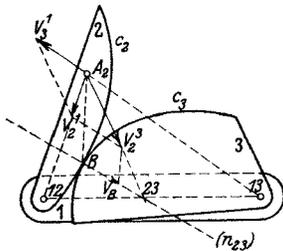


Fig. 97.

dauernd berühren. Es liegt demnach der Pol der Relativbewegung des Gliedes 2 gegen 1 dauernd in dem Gelenkpunkt 12 und ebenso der von 3 gegen 1 in 13. Die Polgerade der drei Glieder ist folglich die Verbindungslinie von 12 mit 13; auf ihr muß nach dem Satz auf S. 55 der Pol 23 der Relativbewegung von 2 gegen 3 liegen, und zwar in dem Punkt, in dem die augenblickliche Beruhungsnormale n_{23} des Hüllkurvenpaares die Polgerade schneidet.

Ist V_2^1 die senkrechte Geschwindigkeit des dem Gliede 2 angehörigen Punktes A_2 gegen das ruhend gedachte Glied 1, so findet sich sofort die relative senkrechte Geschwindigkeit V_2^3 der Bewegung des Punktes A_2 gegen das Glied 3 durch Zerlegen von V_2^1 mittels des Parallelogramms der Geschwindigkeiten in Komponenten nach den Richtungen von $A_2 \div 23$ und $A_2 \div 13^1$; die erstere Komponente ist V_2^3 , die letztere ist die senkrechte Geschwindigkeit V_3^1 der Relativbewegung des Punktes A_3 auf dem Gliede 3, der augenblicklich mit A_2 zusammenfällt, gegen das ruhende Glied 1. Die Gleitungsgeschwindigkeit V_B des Hüllkurvenpaares ist die senkrechte Geschwindigkeit des Beruhungspunktes B der Hüllkurven; sie ergibt sich, indem man $V_B V_3^2 \parallel BA_2$ zieht, wie früher nachgewiesen.

Eine ausgedehnte Verwendung findet diese Kette bei den Zahnraderpaaren, denn den Verzahnungen der Stirnräder und der Bewegungsübertragung durch diese liegt der Bewegungsvorgang zugrunde, der sich in der Kette Fig. 97 abspielt. Dem Steg, in dem die beiden Zahnräder drehbar gelagert sind, entspricht das Glied 1 der Kette, während die beiden Zahnräder den Gliedern 2 und 3 entsprechen. Das Hüllkurvenpaar $c_2 c_3$ in jener Kette stellt die Flanken der beiden Zähne dar, die sich augenblicklich in Eingriff befinden. Daß gleichzeitig noch weitere Zähne in Eingriff sind, ist nebensächlich und ändert an der zugrunde liegenden Auffassung nichts. Es werden die Zahnflanken aller Zähne nur in solcher Weise voneinander abhängig gemacht, daß der gleichzeitige

¹⁾ Vergleiche hierzu S. 56.

Eingriff mehrerer Zähne möglich wird. Die Relativbewegung beider Räder besteht in dem Rollen zweier Kreise, der Teilkreise, aufeinander; in deren Berührungspunkt liegt der Pol 23 der Relativbewegung von 2 und 3. Da sonach diese Relativbewegung vorgeschrieben ist, müssen die Kurven c_2 und c_3 derart gewählt werden, daß diese Bewegung zustande kommt. Das ist der Fall, wenn die Berührungsnormale n_{23} des Hüllkurvenpaares in allen Lagen des letzteren stets durch denselben Punkt P_{23} (s. Fig. 98) der Polgeraden geht. Dieser Forderung läßt sich auf zwei verschiedenen Wegen der Ermittlung solcher Hüllkurvenpaare genügen. Entweder wählt man eine der beiden Hüllkurven, z. B. c_2 , willkürlich und sucht c_3 als Einhüllende der Lagen von c_2 auf, welche letztere Kurve bei der Relativbewegung vom Gliede 3 gegen 2 einnimmt, was rein zeichnerisch möglich ist. Oder aber man läßt auf beiden Teilkreisen (π_2 und π_3 in Fig. 98) eine beliebige Hilfskurve h rollen;

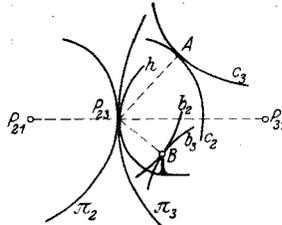


Fig. 98.

denn dann beschreibt jeder Punkt B der mit h starr verbundenen Ebene in der Ebene des Gliedes 2 eine Kurve b_2 und in 3 eine Kurve b_3 , die b_2 berührt, wie leicht ersichtlich, da der beschreibende Punkt B dieselbe Lage und Verbindungslinie mit dem Pol besitzt, wenn h die Teilkreise in deren Berührungspunkte berührt. Bei der Zykloidenverzahnung ist h ein Kreis, bei der Evolventenverzahnung eine Gerade. Näher soll hierauf nicht eingegangen werden, da die Theorie der Verzahnung in der einschlägigen Literatur sehr viel und ausführlich behandelt worden ist.

Eine fernerweite Verwendung findet diese Kette in den Kapselräderwerken, die der in den Zahnradpaaren auf das engste verwandt ist. Zwei Räder, die in einem geschlossenen Gehäuse um parallele Achsen drehbar gelagert sind, berühren sich in großen zahnartigen Ansätzen und bewegen sich möglichst dicht in dem Gehäuse (der Kapsel), das in eine Flüssigkeit eintaucht. Durch die Drehung der Räder wird die Flüssigkeit in Bewegung gesetzt und kann nicht zurückfließen, da die in Eingriff befindlichen Zähne den Raum zwischen den Achsen abschließen. Auch auf diese Anwendung der Kette soll hier nicht näher eingegangen werden, da die Kapselräderwerke in den Büchern von Reuleaux¹⁾ und Burmester²⁾ sehr ausführlich behandelt sind.

¹⁾ Theoretische Kinematik. S. 393.

²⁾ Lehrbuch der Kinematik. S. 229.

Fällt einer der drei Pole dauernd ins Unendliche, so ist die entsprechende Bewegung eine Schiebung. Es führe z. B. das Glied 3 eine geradlinige Schiebung aus (in der behandelten Kette Fig. 97 ist die bewegliche Verbindung zwischen 3 und 1 dann durch ein Schiebepaar zu ersetzen), so fällt der Pol 31 dauernd ins Unendliche, während der Pol 21 im Endlichen verbleibt und die Polgerade dadurch bestimmt ist, daß sie durch 21 senkrecht zur Schubrichtung geht. Auf dieser Geraden schneidet wie vorher die augenblickliche Berührungsnormale des Hüllkurvenpaares den Pol 23 aus.

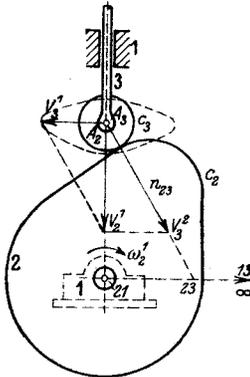


Fig. 99.

Als Anwendung dieser Kette möge das polare Schubkurbelgetriebe (s. Fig. 99) behandelt werden. Das Glied 1 bildet das ruhend gedachte Maschinengestell, gegen das sich das Glied 2, als sogenannte unrunde Scheibe ausgeführt, um die Achse 21 dreht. Das Glied 3 dagegen vollzieht gegen 1 eine geradlinige Schiebung, da es mit 1 durch ein Schiebepaar verbunden ist. Die Glieder 2 und 3 berühren sich in Zylinderflächen, und zwar ist gewöhnlich die mit 3 verbundene eine Kreiszyylinderfläche, deren Achse in A_3 liegt. Dreht sich die unrunde Scheibe 2, so vollzieht

3 eine durch die Form des Profils der unrunden Scheibe bedingte Schiebung. An der Bewegung von 3 wird nichts geändert, wenn der Kreiszyylinder nicht starr mit dem Gliede 4 verbunden, sondern als Rolle ausgeführt wird, die sich um eine durch A_3 gehende Achse drehen kann. Der Zweck der letzteren Anordnung ist lediglich, die gleitende Reibung zwischen den Gliedern 2 und 3 zu beseitigen, bzw. sie durch die ganz erheblich kleinere wälzende Reibung zu ersetzen. Da das Profil der unrunden Scheibe hier an die Stelle der Kurve c_3 , und der Kreis um A_3 an die Stelle von c_3 tritt, so erhält man für jede Stellung der unrunden Scheibe den Pol 23, indem man von A_3 aus das Lot auf c_2 fällt, das auf der Polgeraden den Punkt 23 ausscheidet. Bezeichnet ω_2^1 die Winkelgeschwindigkeit der Drehung der Scheibe 2 gegen 1, so findet sich die Größe der senkrechten Geschwindigkeit V_2^1 des Punktes A_2 , der augenblicklich mit A_3 sich deckt, aus der Beziehung

$$V_2^1 = \overline{A_2} \div 21 \cdot \omega_2^1.$$

Die augenblickliche Schiebungsgeschwindigkeit V_3^1 des Gliedes 3 ist dieselbe wie die des Punktes A_3 , und diese finden wir als senkrechte Geschwindigkeit sofort, indem wir durch den Endpunkt von

V_2^1 die Parallele zu n_{23} ziehen, die auf der Senkrechten zur Schubrichtung den Endpunkt von V_3^1 ausschneidet. Indem man diese einfache Konstruktion für eine genügend große Anzahl von Lagen des Gliedes 3 wiederholt, erhält man sofort den Geschwindigkeitsplan, der in Nr. 29 unter dem Namen des Geschwindigkeitswegediagrammes behandelt wurde. Die Gleitungsgeschwindigkeit des Hüllkurvenpaares ist hier ohne Bedeutung, da die Rolle auf der unrundern Scheibe rollt, statt zu gleiten.

Ersetzt man in der ursprünglichen Kette (Fig. 97) beide Drehpaare durch Schiebepaare, so erhält man die in Fig. 100 schematisch gezeichnete Kette, in der 2 und 3 mit dem ruhend gedachten Gliede 1 durch Schiebepaare verbunden sind, während die Bewegungsübertragung von 2 auf 3 wieder durch ein unselbständiges höheres Elementenpaar bewirkt wird, das in

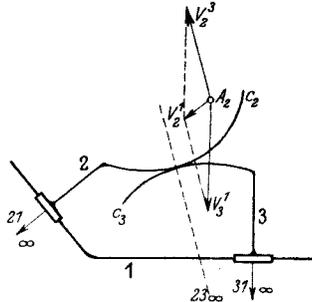


Fig. 100.

der Figur durch das Hüllkurvenpaar c_2, c_3 angedeutet ist. Bei dieser Kette liegen die beiden Pole 21 und 31 dauernd im Unendlichen, also nicht nur die Polgerade, sondern auch der Pol 23 der Relativbewegung von 2 gegen 3, woraus folgt, daß letztere ebenfalls eine Schiebung ist, die sich in der Richtung der gemeinsamen Tangente des Hüllkurvenpaares vollzieht. Hieraus ergibt sich mit Rücksicht darauf, daß die senkrechten Geschwindigkeiten senkrecht zur Schubrichtung stehen, sofort die zeichnerische Ermittlung zweier der Schiebungsgeschwindigkeiten, wenn die dritte gegeben ist. Es sei diese die von 2 gegen 1, die wir in einem beliebigen Punkte A_2 von 2 antragen, und zwar senkrecht zur Schubrichtung von 2 gegen 1; sie sei mit V_2^1 bezeichnet. Ziehen wir nun durch A_2 eine Senkrechte zur Schubrichtung von 3 gegen 1, sowie eine solche zur Schubrichtung von 2 gegen 3 (d. i. eine Parallele zur Berührungsnormale n_{23} des Hüllkurvenpaares c_2, c_3), so schneiden die entsprechenden Parallelen durch den Endpunkt von V_2^1 die gesuchten Schiebungsgeschwindigkeiten V_3^1 und V_2^3 auf ihnen aus. Es ist zu beachten, daß sich hierbei die Richtung von V_2^3 stetig ändert, und zwar in Abhängigkeit von der Gestalt der Hüllkurven.

Eine Anwendung dieser Kette zeigt das Parallelschubkurvengetriebe (s. Fig. 101). Die Glieder 2 und 3 führen geradlinige Schiebungen gegen das Maschinengestell 1 aus, die gewöhnlich senkrecht zueinander gerichtet sind. Die Hüllkurve c_3 ist hier ein Kreis, der Querschnitt einer Rolle, der die zwecks Erzielung be-

stimmter Bewegungen von 3 gegen 1 entsprechend gestaltete Hüllkurve c_2 berührt. Die Ermittlung der Geschwindigkeiten bleibt die gleiche wie die im allgemeinen Fall vorher angegebene, und deren Wiederholung für verschiedene Lagen ergibt das Geschwindigkeits-Diagramm der Bewegung von 3 gegen 1.

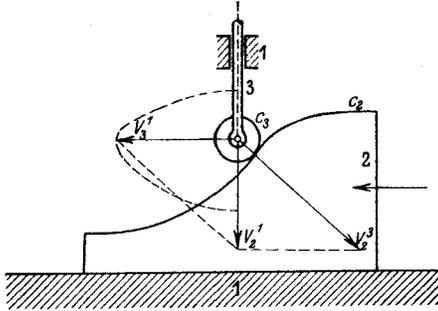


Fig. 101.

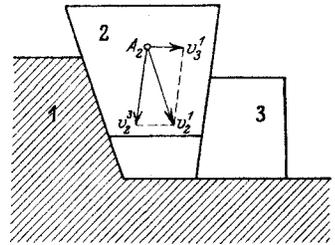


Fig. 102.

Würde eine der beiden Hüllkurven in der letzten Kette durch eine Gerade ersetzt werden, dann bleibt auch die Schubrichtung von 2 gegen 3 dauernd die gleiche, und zwar die dieser Geraden, wie man sofort ersieht. Die gegenseitigen Bewegungen der drei Glieder sind dann dieselben, wie die in der Dreischiebepaar- oder Keilkette genannten Kette (s. Fig. 102), und die Schiebengeschwindigkeiten der Glieder bestimmen sich genau so wie im vorhergehenden Falle.

37. Das Gelenkviereck und seine Sonderfälle.

Wohl am häufigsten wird zur Erzielung bestimmter Bewegungen das Gelenkviereck in der Maschinentechnik verwendet. Das Gelenkviereck besteht aus vier Gliedern, die paarweise durch Drehpaare mit parallelen Achsen verbunden sind. Man unterscheidet an ihm

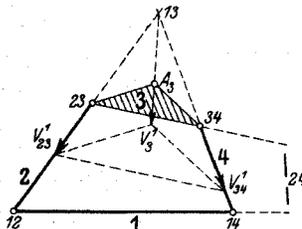


Fig. 103.

das ruhende Glied, den sogenannten Steg, das in Fig. 103 mit 1 bezeichnet ist, ferner die beiden Arme oder Kurbeln (2 und 4) und endlich die Koppel (3). In den vier Drehpaaren (Gelenken) liegen dauernd die Pole der Relativbewegungen von den Gliedern 2 und 4 gegen 1, bzw. 3, deren Zahl 4 beträgt. Die Anzahl der Pole aller Relativbewegungen ist aber hier = 6, und

zwar treten zu den gegebenen Polen 12, 23, 34, 14 noch die beiden

13 und 24. Diese lassen sich hier nach dem Satze, daß die drei Pole der Relativbewegungen dreier Ebenen in einer Geraden liegen, sofort als Schnittpunkte der Gegenseiten des Gelenkviereckes erhalten. Diese Bestimmungsweise von Polen als Schnittpunkte je zweier Polgeraden läßt sich in einer sehr übersichtlichen und kurzen Form darstellen, die später viel gebraucht wird und deshalb schon hier eine Stelle finden soll. Die drei Pole 12, 23 und 13 liegen auf einer Geraden, ebenso die Pole 14, 34 und 13; beide Geraden schneiden sich in 13, dem gesuchten Pole der Relativbewegung der Koppel 3 gegen den Steg 1. Dies drücken wir kurz nach Burmester in folgendem Schema aus:

$$\begin{array}{l} 12 - 23 \\ 14 - 34 \end{array} > 13,$$

in dem besonders zu beachten ist, daß die beiden Ziffern, deren Zusammenstellung den Pol ergibt (hier 1 und 3), den man sucht, in jeder der beiden Zeilen nur je einmal auftreten, während die dritte Zahl (hier 2) zweimal auftritt. Das gleiche gilt von der zweiten Zeile, in der 1 und 3 nur je einmal, 4 dagegen zweimal vorkommt.

Das Schema der Ermittlung des Poles 24 ist entsprechend

$$\begin{array}{l} 12 - 14 \\ 23 - 34 \end{array} > 24.$$

Die gegenseitigen Bewegungen der vier Glieder sind sehr abhängig von den Abmessungen der Glieder, d. s. die Entfernungen der beiden Drehachsen in den einzelnen Gliedern. Letztere bedingen die ganz verschiedenartigen

Gestaltungen der Koppelkurven, d. s. die Bahnen der Punkte der Koppel 3 bei ihrer Bewegung gegen den Steg 1. Rein zeichnerisch erhält man die Koppelkurve a_3 eines beliebigen Punktes A_3 der Koppel, indem man eine genügend große Anzahl von Lagen der letzteren aufsucht, womit man zugleich die Lagen von A_3 findet. Die Kurve, die diese Lagen verbindet, wird viel genauer gezeichnet werden können unter Benutzung ihrer Tangenten, die

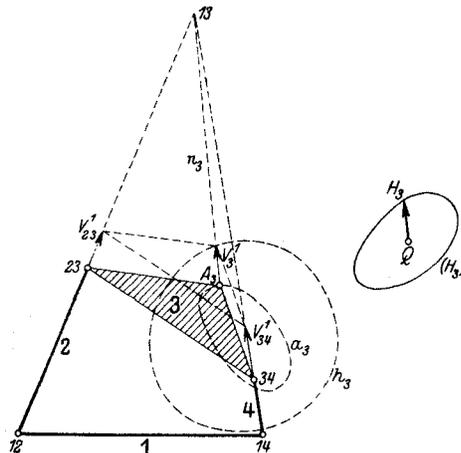


Fig. 104.

sich als Senkrechte zu den Verbindungsstrahlen n_3 der Punkte mit dem bezüglichen Pol 13 leicht ergeben (s. Fig. 104). Die senkrechte

Geschwindigkeit V_3^1 von A_3 ermittelt man wie früher durch das Zeichnen einer Parallelen durch den Punkt V_{23}^1 bis zum Strahl $13 - A_3$. Man findet aber auch den gesuchten Endpunkt V_3^1 leicht, wenn man erst V_{34}^1 ermittelt und dann die Parallelen zu $23 - A_3$ und $34 - A_3$ zum Schnitt bringt (s. Fig. 104). Letzterer Weg ist vorzuziehen, weil er nicht versagt, auch wenn der Pol 13 außerhalb des Zeichnungsraumes liegt. Durch Wiederholung des Verfahrens für eine genügend große Zahl von Lagen des Punktes A_3 erhält man zugleich mit seiner Bahn auch den V -Plan, wobei zu beachten, daß die senkrechten Geschwindigkeiten in den Bahnnormalen liegen, also die für die Aufzeichnung der Bahn so vorteilhaften Bahntangenten mitbestimmen. Daß man auch den Hodographen (H_3) der senkrechten Geschwindigkeiten auf diesem Wege erhält, ist leicht ersichtlich; er befindet sich neben Fig. 104 und Q ist der Pol des Hodographen. Besonders einfach und bequem wird das Verfahren, wenn die Geschwindigkeit V_{23}^1 des Gelenkpunktes 23 konstant ist, also Kurbel 2 sich gleichförmig gegen 1 dreht; denn dann läßt sich der Endpunkt von V_{23}^1 nach 12 legen (weil der Maßstab für die Geschwindigkeitsvektoren willkürlich ist) und bleibt so immer in der gleichen Lage.

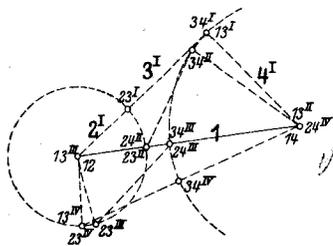


Fig. 105.

Wie man leicht erkennt, können besondere Lagenbeziehungen der 6 Pole des Gelenkviereckes dadurch eintreten, daß eine der beiden Kurbeln entweder mit 1 oder mit 3 in eine Gerade fallen. Fallen z. B. 2 und 3 in eine Gerade (s. Fig. 105), so rückt der Pol 13 (in Fig. 105 mit 13^I bezeichnet) in das Gelenk 34^I ; es entspricht dieser Lage von 2 demnach, wie man leicht erkennt, eine Grenz-

lage der Kurbel 4. Der Pol 24^I dagegen liegt im Gelenk 12. Wenn ferner 2 mit 1 in einer Geraden liegt, so rückt 13^{II} in das Gelenk 14 und 24^{II} in das Gelenk 23^{II} . Wenn weiter die Glieder 4 und 1 in eine Gerade fallen, so liegt der Pol 13^{III} in 12 und 24^{III} in 34^{III} , und endlich rücken die Pole 13^{IV} nach 23^{IV} und 24^{IV} nach 14, wenn die Glieder 3 und 4 in einer Geraden liegen.

Eine Besonderheit der Bewegung der Glieder gegeneinander bedeutet es auch, wenn einer der beiden Pole 13 oder 24 in das Unendliche fällt. Das tritt ein, wenn entweder die beiden Kurbeln 2 und 4 oder Koppel 3 und Steg 1 in parallele Lage geraten. Im ersteren Falle ist die Relativbewegung der Glieder 1 und 3, im letzteren die von 2 und 4 eine augenblickliche Schiebung.

Die erwähnten Pollagen treten ein bei ganz willkürlichen Ab-

messungen der Gliedlängen des Gelenkvierecks. Weitere Besonderheiten können durch entsprechende Beziehungen zwischen den Gliedlängen herbeigeführt werden. Die bekanntesten sind die folgenden.

Wenn die Summe der Längen zweier gelenkig verbundener Glieder gleich der Summe der beiden anderen Längen ist, also z. B. $l_1 + l_2 = l_3 + l_4$, so erhält man ein sogenanntes durchschlagendes Gelenkviereck, das die Eigentümlichkeit aufweist, daß alle vier Gelenke und folglich alle sechs Pole in eine Gerade fallen, wenn dies mit 2 der vier Glieder der Fall ist (s. Fig. 106). Eine unmittelbare zeichnerische Bestimmung der Pole 13 und 24 ist dann ausgeschlossen, wohl aber eine mittelbare durch Aufzeichnung der ruhenden Polkurve in der Umgebung dieser Lage, denn letztere schneidet die Polgerade in den gesuchten Polen. Ferner lassen sich auch die beiden Pole auf Grund von projektiven Beziehungen, und zwar als die Doppelpunkte einer durch die vier Gelenkpunkte bestimmten involutorischen Punktreihe ermitteln.

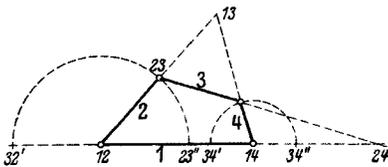


Fig. 106.

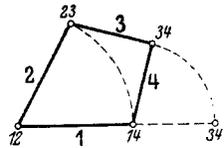


Fig. 107.

Haben die beiden Glieder, die in zwei gegenüberliegenden Gelenken zusammenstoßen, je gleiche Längen, ist also z. B. $l_1 = l_2$ und $l_3 = l_4$, so erhält man ein sogenanntes gleichschenkliges Gelenkviereck, das ebenfalls zu den durchschlagenden Gelenkvierecken gehört (s. Fig. 107). Bei diesem gibt es eine sogenannte Wechsellage, in der die an sich viergliedrige Kette in eine zweigliedrige, d. i. ein Drehpaar überzugehen vermag. Es ist das die Lage, in der das Gelenk 23 mit 14 zusammenfällt (s. Fig. 107), denn dann können sich die Glieder 3 und 4 wie ein einziges starres Glied gegen die ebenfalls zusammenfallenden Glieder 1 und 2 um die gemeinsame Achse der Gelenke 14 und 23 drehen und bilden folglich nur ein Drehpaar. Ist in diesem Gelenkviereck das Verhältnis der Gliedlängen wie 1:2, so wird es Gallowaysche Drehpaarkette genannt.

Sind die Gegenglieder des Gelenkviereckes gleich lang, so wird die entsprechende Kette Zwillingsskurbelkette genannt. Zwei besondere Formen derselben werden unterschieden, die Parallelkurbelkette und die Antiparallelkurbelkette (symmetrisches Zwillingsskurbelgetriebe nach Grashof). Bei ersterem sind die

Glieder gegenseitig parallel (s. Fig. 108) und es fallen die Pole 13 und 24 in allen Lagen in das Unendliche. Das bedeutet, daß die Relativbewegungen der Glieder 3 und 1, bzw. 2 und 4 Schiebungen sind mit den Geschwindigkeiten der Gelenkpunkte als Schiebungsgeschwindigkeiten. Bezeichnen wir die Schiebungsgeschwindigkeit des Gliedes 3 gegen 1 mit v_{34}^1 , die entsprechende senkrechte Geschwindigkeit mit V_{34}^1 , so haben alle Punkte von 3, also auch die Gelenkpunkte 23 und 34 die gleiche und gleichgerichtete Geschwindigkeit V_{34}^1 , und aus dieser finden sich nach früherem (Kap. 6, Nr. 33) die senkrechten Geschwindigkeiten des Punktes 34 gegen 2 und des mit ihm zusammenfallende Punktes des Gliedes 2 gegen 1 durch das Parallelogramm dieser Geschwindigkeiten.

Bei der Antiparallelkurbelkette (Fig. 109) liegen die Pole 13 und 24 im Endlichen und man erkennt leicht, daß die Polkurven

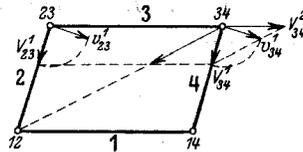


Fig. 108.

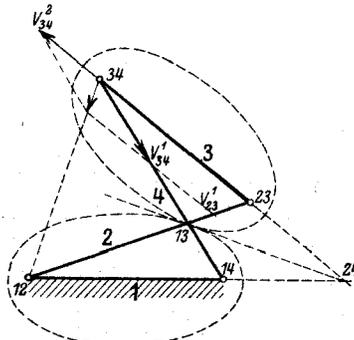


Fig. 109.

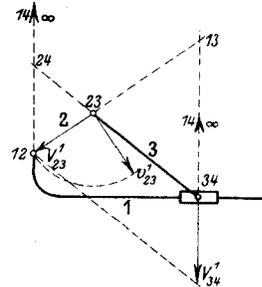


Fig. 110.

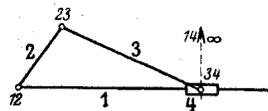


Fig. 110 a.

der Bewegung von 3 gegen 1 kongruente, symmetrisch zur Geraden 13—24 gelegene Kegelschnitte sind, deren Brennpunkte in den Gelenkpunkten liegen, und zwar Ellipsen, wenn 1 und 3 die kürzeren, Hyperbeln, wenn sie die längeren Glieder sind. Die besonderen Pollagen sind ganz ähnlich denen der durchschlagenden Kurbelkette und können in der gleichen Weise bestimmt werden. Die Geschwindigkeitsbeziehungen haben keine Besonderheit und lassen sich vom allgemeinen Gelenkviereck ohne weiteres auf diese Kette übertragen.

Ersetzt man in einem Gelenkviereck eines der vier Drehpaare

durch ein Schiebepaar, so erhält man die allgemeine Schubkurbelkette (Fig. 110), aus der verschiedene Mechanismen und Getriebe hervorgehen je nach dem Gliede, das zum ruhenden und das zum treibenden benutzt wird.

Ist z. B. 1 das ruhende, 2 das treibende Glied, so heißt das entsprechende Getriebe Schubkurbelgetriebe, wie es u. a. bei Pumpen verwendet wird. Es sei v_{23}^1 die Geschwindigkeit des Kurbelzapfens, V_{23}^1 die entsprechende senkrechte Geschwindigkeit, so finden wir sofort die Schubgeschwindigkeit V_{34}^1 des Gliedes 4 gegen 1 durch das Ziehen einer Parallelen zur Koppel 3 durch den Endpunkt von V_{23}^1 . Dreht sich die Kurbel gleichförmig, so wählt man den Maßstab der Geschwindigkeiten so, daß der Endpunkt von V_{23}^1 in 12 fällt, denn dann liegen alle diese Endpunkte in 12. Der V -Plan von 34 wird somit rasch erhalten und aus ihm nach Nr. 30 die Beschleunigung der Bewegung des Gliedes 4 gegen 1.

Besonders häufig wird die zentrische Schubkurbelkette verwendet, bei welcher die Gerade, auf der 34 sich bewegt, durch 12 geht (s. Fig. 110a). Die Geschwindigkeitskonstruktion bleibt hier die gleiche, wie im allgemeineren Falle.

Hält man in der Kette 110 das Glied 3 fest und wählt 2 zum treibenden, so entsteht das schwingende Kurbelschleife genannte Getriebe (s. Fig. 111). Hier findet sich die Gleitungsgeschwindigkeit von 1 gegen 3 als zur Schubrichtung senkrechte Komponente V_1^3 von der senkrechten Geschwindigkeit V_{12}^3 , welche der Gelenkpunkt 12 gegen 3 besitzt. Ist V_{12}^3 unveränderlich, so wird der Hodograph von V_1^3 ein Kreis.

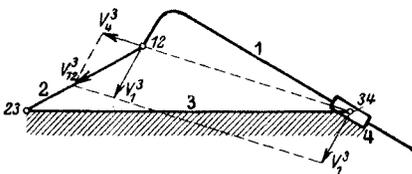


Fig. 111.

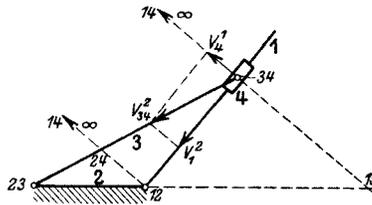


Fig. 112.

In dem rotierende Kurbelschleife genannten Mechanismus (Fig. 112) ist das Glied 2 in Ruhe und dann dreht sich das Glied 3 wie eine Kurbel um 23 gegen 2. Bezeichnet V_{34}^2 die senkrechte Geschwindigkeit von 34 gegen 2, so stellt die senkrechte Komponente V_4^1 die Gleitungsgeschwindigkeit von 4 gegen 1 dar, während die andere Komponente V_1^2 die Geschwindigkeit ist, mit welcher der augenblicklich mit 34 zusammenfallende Punkt von 1 sich gegen 2 bewegt. Ist V_{34}^2 konstant, so wird man, um den V -Plan für V_4^1

recht einfach zu erhalten, wie in allen ähnlichen Fällen den Endpunkt von V_{34}^2 mit 23 zusammenfallen lassen, also den Geschwindigkeitsmaßstab entsprechend wählen.

Werden in dem Gelenkviereck zwei Drehpaare durch Schiebepaare ersetzt, so entstehen zwei verschiedene Ketten, je nachdem die Schiebepaare in einem Gliede liegen oder nicht.

Gehören beide Schiebepaare demselben Gliede an, so heißt die entsprechende Kette Kreuzschieberkette, die durch Fig. 113 dargestellt wird. Hier ist 1 das Glied, das nur Schiebepaare enthält; demgemäß vollziehen die Glieder 2 und 4 geradlinige Schiebungen und die drei Pole 12, 14 und 24 liegen dauernd im Unendlichen. Ist die Schiebungsgeschwindigkeit V_{23}^1 von 2 gegen 1 gegeben, also die senkrechte Geschwindigkeit des Gelenkpunktes 23 gegen 1, so erhält man sofort die Geschwindigkeit V_{34}^1 des Gelenkpunktes 34 durch das Ziehen der entsprechenden Parallelen

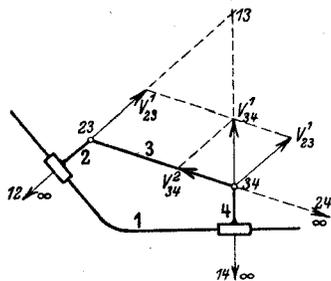


Fig. 113.

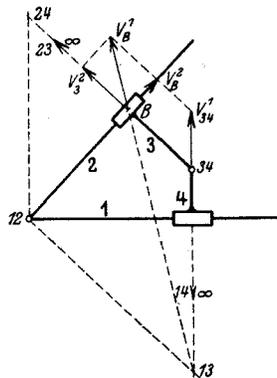


Fig. 114.

zu 3. Zerlegt man V_{34}^1 in Komponenten in Richtung von 34—23 und von V_{23}^1 , so ist erstere die Schiebungsgeschwindigkeit V_{34}^2 des Gliedes 4 gegen 2.

Wenn dagegen die beiden Schiebepaare in zwei verschiedenen Gliedern liegen, so ergibt sich die sog. Winkelschleifenkette (Fig. 114). Die Pole 23 und 14 liegen dauernd im Unendlichen und die Pole 13 und 24 bilden Ecken eines Parallelogramms, dessen andere beide Ecken 12 und 34 sind. Ist nun V_{34}^1 die Schiebungsgeschwindigkeit von 4 gegen 1, so folgt die senkrechte Geschwindigkeit des auf 2 liegenden Fußpunktes B des Lotes 34—B auf die Gerade 2 durch das Ziehen einer Parallelen zu 34—23 $_{\infty}$ durch V_{34}^1 ; letztere schneidet auf der Geraden 13—B den Endpunkt V_B^1 dieser Geschwindigkeit aus. Die Zerlegung von V_B^1 in die rela-

tive Schiebungsgeschwindigkeit V_3^2 und die Drehungsgeschwindigkeit V_B^2 des Punktes B um 12 wird, wie in früheren Fällen, durch das Parallelogramm der senkrechten Geschwindigkeiten vermittelt.

38. Die niederen Elementenpaarketten.

In Nr. 35 ist bereits das Verfahren der zeichnerischen Untersuchung der kinematischen Ketten im allgemeinen gekennzeichnet worden; es kann sich daher hier nur noch darum handeln, es an einigen Beispielen zu erläutern. Hierbei sind zwei Hilfssätze, bzw. -Konstruktionen oft von Vorteil, weshalb diese vorausgeschickt werden mögen.

Es seien E_1 und E_2 zwei in A_{12} gelenkig verbundenen Ebenen (s. Fig. 115); von E_1 werde der Punkt A_1 mit der Geschwindigkeit v_1 und von E_2 der Punkt A_2 mit v_2 augenblicklich gegen die ruhende Ebene bewegt. Dann findet sich sofort der Endpunkt des Vektors, der die senkrechte Geschwindigkeit V_{12} des Gelenkpunktes A_{12} darstellt, als Schnittpunkt der beiden Parallelen, die zu A_1A_{12} durch V_1 , bzw. zu A_2A_{12} durch V_2 gelegt werden, wie aus dem auf S. 47 bewiesenen Satze über die senkrechten Geschwindigkeiten der Punkte einer Geraden sofort hervorgeht. Da der Pol der Bewegung einer Ebene in der Geraden liegt, die die senkrechte Geschwindigkeit eines ihrer Punkte enthält, so erkennt man, daß der Pol P_1 der Ebene E_1 im Schnitt der Verlängerung von V_1 mit der von V_{12} liegt, ebenso P_2 im Schnitt von V_2 und V_{12} , während der Pol P_{12} der Relativbewegung von E_1 gegen E_2 dauernd mit A_{12} zusammenfällt. Die Gerade, in der V_{12} liegt, ist die Polgerade der drei Ebenen E_1 , E_2 und der ruhenden Ebene.

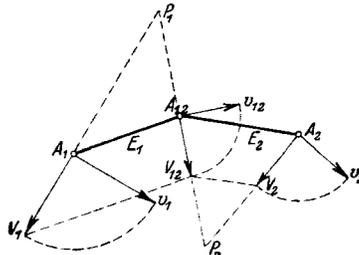


Fig. 115.

Diese Konstruktion ist z. B. sofort anwendbar bei der sechsgliedrigen Kette Fig. 21 b, um die senkrechte Geschwindigkeit des Gelenkpunktes 56 zu ermitteln. Denkt man sich die senkrechte Geschwindigkeit vom Punkt 23 gegeben, so findet man zunächst durch das Ziehen dreier Parallelen die Geschwindigkeiten von 26, 34 und 45 und folglich nach dem eben entwickelten Hilfssatz die Geschwindigkeit und die Bahnnormale von 56.

Die Punkte A_1 und A_2 in Fig. 115 sind ebenso wie A_{12} als Drehpaare zu denken, welche die entsprechenden Kettenglieder gelenkig verbinden. Diese Drehpaare können aber in Umschlußpaar-

ketten z. T. durch Schiebepaare ersetzt sein, und dieser Umstand bedingt eine Abänderung des Verfahrens.

Ist in Fig. 115a das den Punkt A_1 ersetzende Gelenk durch ein Schiebepaar vertreten, welches E_1 mit dem Kettengliede a beweglich verknüpft, so muß man zunächst die senkrechte Geschwindigkeit V_a des Punktes von α ermitteln, der augenblicklich mit A_{12} zusammenfällt. Das ist nach dem Früheren zeichnerisch leicht, da der Geschwindigkeitszustand von α als bekannt voraussetzen ist. Würden wir die relative Schiebungsgeschwindigkeit V_{1a} von E_1 gegen α mit V_a zusammensetzen, so müßten wir die gesuchte Geschwindigkeit V_{12} des Gelenkpunktes A_{12} erhalten. Da V_{1a} senkrecht zur Schubrichtung steht, so liegt folglich der Endpunkt V_{12} auf dem Lote, das vom Endpunkt V_a auf die Schubrichtung gefällt wird. Da andererseits V_{12} auch auf der Parallelen zu $A_2 A_{12}$ durch V_2 liegen muß, so schneidet letztere das erwähnte Lot in dem gesuchten Endpunkte V_{12} . Die Komponente von V_{12} senkrecht zur Schubrichtung ist die relative Schiebungsgeschwindigkeit V_{1a} . Die Polgerade ist wie vorher die, in welcher V_{12} liegt; sie wird in P_1 von dem Lot auf die Schubrichtung, gefällt vom Pol P_a des Gliedes α , geschnitten, während die V_2 enthaltende Gerade P_2 ausschneidet.

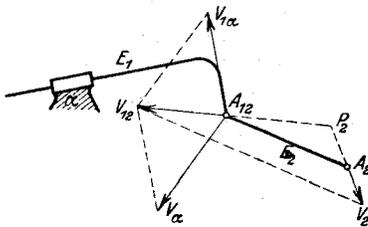


Fig. 115 a.

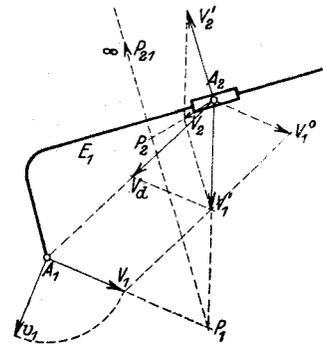


Fig. 115 b.

Wird dagegen A_{12} durch ein Schiebepaar ersetzt (s. Fig. 115 b), so findet sich der Geschwindigkeitszustand beider Ebenen E_1 und E_2 , die dann die gleiche Winkelgeschwindigkeit ($\omega_1 = \omega_2$) haben, durch folgende Überlegung. Die gegebene Geschwindigkeit V_2 des Gelenkpunktes A_2 kann entstanden gedacht werden durch Zusammensetzung der Geschwindigkeit V_1' des Punktes von E_1 , der augenblicklich mit A_2 zusammenfällt, und der relativen Schiebungsgeschwindigkeit V_2^1 des Gliedes 2 gegen 1, also nach dem Schema

$$V_2 = V_1' \hat{+} V_2^1;$$

denn die Bewegung vom Glied 2 gegen das ruhende Glied setzt sich zusammen aus der Bewegung von 1 gegen das ruhende Glied

und der (relativen) Schiebung von 2 gegen 1. Die Geschwindigkeit V_1' läßt sich aber nicht unmittelbar bestimmen, sondern wieder nach der gleichen Auffassung der Bewegung vom Glied 1 durch Zusammensetzung der Geschwindigkeit $V_1^0 \neq V_1$ und der Geschwindigkeit V_a , welche der mit A_2 sich deckende Punkt vom Glied 1 infolge der Drehung von 1 um A_1 hat; denn die Bewegung von Glied 1 gegen das ruhende Glied kann erzeugt werden durch eine Schiebung mit V_1 und eine Drehung der Ebene E_1 mit der Winkelgeschwindigkeit ω_1 um A_1 . Man findet sonach

$$V_1' = V_1^0 \hat{+} V_a,$$

d. h. durch das Parallelogramm der Geschwindigkeiten, dessen eine Seite $V_1^0 \neq V_1$ und dessen andere Seite V_a ist. Nun hat V_a die Richtung $A_2 A_1$; es liegt sonach der Endpunkt V_1' auf der Parallelen $V_1 V_1^0$ zu $A_1 A_2$. Andererseits war aber $V_2 = V_1' \hat{+} V_2^1$, und weil V_2^1 senkrecht zur Schubrichtung ist, befindet sich der Punkt V_1' in einer Senkrechten zur Schubrichtung durch den Punkt V_2 . Diese Senkrechte schneidet sonach die Parallele $V_1 V_1^0$ zu $A_1 A_2$ im Endpunkt V_1' , womit zugleich V_2^1 und V_a bestimmt werden, wie aus Fig. 115b unmittelbar hervorgeht. Durch V_a ist aber ω_1 und damit ω_2 bestimmt. Die Gerade, in der V_1' liegt, enthält den Pol P_1 von E_1 gegen das ruhende Glied; letzterer wird als Schnittpunkt dieser Geraden mit der Verlängerung von V_1 gefunden, während die Polgerade in der Senkrechten von P_1 auf die Schubrichtung liegt, die von der Verlängerung von V_2 im Pol P_2 geschnitten wird. Auf dieser Geraden liegt auch der unendlich ferne Pol P_{21} der Relativbewegung von E_2 gegen E_1 .

Ein weiterer Hilfssatz bezieht sich auf die Bewegung einer Ebene E (s. Fig. 116), welche in dreien ihrer Punkte A_k ($k=1, 2, 3$) gelenkig mit drei anderen Ebenen E_k verbunden ist und von denen je ein Punkt L_k mit gegebener Geschwindigkeit v_k^0 bewegt wird. Wir suchen den Geschwindigkeitszustand der vier Ebenen E und E_k , oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Geschwindigkeiten v_k der drei Punkte A_k . Hierzu gelangen wir am kürzesten mit Benutzung der senkrechten Geschwindigkeiten unter Anwendung des auf S. 47 bewiesenen Satzes. Legen wir z. B. durch den Endpunkt

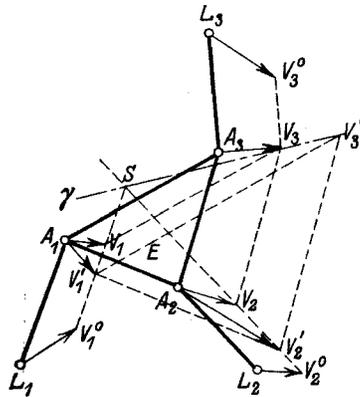


Fig. 116.

V_1^0 der senkrechten Geschwindigkeit von L_1 die Parallele zu L_1A_1 , so liegt auf dieser der Endpunkt V_1 der senkrechten Geschwindigkeit von A_1 ; ebenso V_2 auf der Parallelen zu L_2A_2 durch V_2^0 . Andererseits müssen nach demselben Satze sich die beiden Endpunkte V_1 und V_2 auf einer Parallelen zu A_1A_2 befinden. Wählen wir also z. B. V_1' als Endpunkt der Geschwindigkeit von A_1 , so erhalten wir sofort V_2' im Schnitt der Parallelen $V_1'V_2'$ und $V_2^0V_2'$. Dann aber ergibt sich V_3' als Schnittpunkt der Parallelen $V_1'V_3'$ zu A_1A_3 und der Parallelen $V_2'V_3'$ zu A_2A_3 . Würden wir V_1' anders wählen, so erhielten wir einen anderen Punkt V_3' . Nun erkennt man leicht, daß der geometrische Ort der Punkte V_3' eine Gerade γ ist, welche durch den Schnittpunkt S der beiden Parallelen $V_1^0V_1'$ und $V_2^0V_2'$ geht. Haben wir sonach außer S noch einen Punkt V_3' auf dem angegebenen Wege bestimmt, d. h. durch irgendeine Annahme der Lage von V_1' , so ist die Gerade γ der geometrische Ort für V_3 , und weil V_3 auch auf der Parallelen zu L_3A_3 durch V_3^0 liegen muß, so erhalten wir die wahre Lage von V_3 als Schnittpunkt der letzteren Parallelen mit γ . Dann finden sich weiter V_2 und V_1 durch das Ziehen der Parallelen zu A_3A_2 und A_3A_1 , durch V_3 bis zum Schnitt mit V_2^0S bzw. V_1^0S . Als Kennzeichen der Richtigkeit dieses zeichnerischen Verfahrens kann man benutzen, daß die drei Geraden, in denen die V_k liegen, sich in einem Punkte, und zwar dem Pol der Bewegung der Ebene E schneiden müssen. Die Pole der Ebenen E_k ergeben sich entsprechend in den Schnittpunkten je der beiden Geraden, in denen V_k und V_k^0 liegen. Als Beispiele für die Anwendung dieses Verfahrens seien die Ketten Fig. 22e und 23c angeführt.

Treten an die Stelle der Gelenke A_k und L_k z. T. Schiebepaare, so werden die Änderungen des Verfahrens ganz ähnlich, wie im vorhergehenden Falle; sie sollen deshalb nicht besonders behandelt werden.

Wenden wir uns nunmehr zu den eingangs erwähnten erläuterten Beispielen, so möge als ein Beispiel für die Aufzeichnung der Bahnen der in Fig. 117 skizzierte Support zum Abdrehen von Riemenscheiben mit balliger Lauffläche von H. Krause gewählt

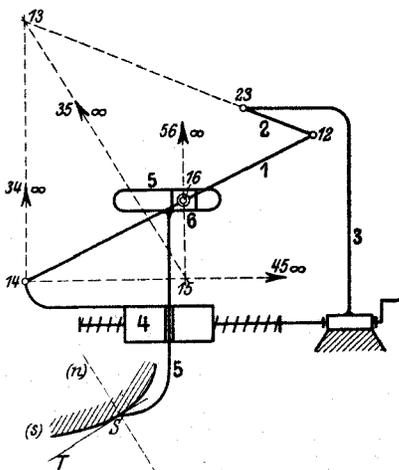


Fig. 117.

werden. Wesentlich ist an diesem Mechanismus, daß das Glied 5, welches den Stichel trägt, gegen das ruhende Glied 3 eine Schiebung ausführt, denn dann und nur dann beschreiben alle Punkte von 5, also auch die Stichelspitze S , die gewünschte Meridiankurve der Riemenscheibe in derselben Gestalt und Lage, unabhängig von der Stellung des Stichels im Glied 5. Diese Schiebung von 5 gegen 3 wird hier dadurch erreicht, daß das Glied 5 mit 4 einerseits, und das Glied 4 mit 3 andererseits durch je ein Schiebepaar verbunden ist, denn dann muß nach dem Früheren auch 5 gegen 3 eine Schiebung vollziehen. Allerdings ist in Wirklichkeit 4 mit 3 durch ein Schraubenpaar verbunden, doch kommt von letzterem die Drehung der Spindel gegen 3 nicht in Betracht, sondern nur die fortschreitende Bewegung des die Schraubenmutter darstellenden Supportes 4, die in gleicher Weise durch ein Schiebepaar bewirkt werden könnte. Da die Relativbewegungen der Glieder 3, 4 und 5 Schiebungen sind, so fallen die Pole 34, 35 und 45 ins Unendliche; folglich muß die Normale (n) der Bahn (s) der Stichelspitze S durch den unendlich fernen Pol 35_{∞} gehen. Letztere aber braucht man, weil die Senkrechte zu ihr die Tangente ST an die Bahnkurve (s) zu zeichnen ermöglicht und die Kurve (s) dann um so genauer gezeichnet werden kann. Die Richtung der Normalen (n) findet man aber durch die der Polgeraden 13—15, auf welcher 35 liegen muß. Die beiden Pole 13 und 15 ergeben sich leicht, wenn man beachtet, daß dieser Mechanismus aus der Kette Fig. 21a (S. 16) dadurch hervorgeht, daß die Gelenke 34, 45 und 56 (s. Fig. 117a, in welcher diese Gelenke durch \parallel bezeichnet sind) durch Schiebepaare ersetzt wurden. Wie man nun in Fig. 115a die Pole 13 und 15 aus den entsprechenden Gelenkvierecken nach den Schemen

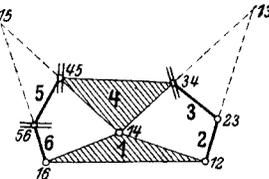


Fig. 117 a.

$$\begin{array}{l} 12 - 23 > 13, \\ 14 - 45 > 15 \\ 14 - 34 > 13, \\ 16 - 56 > 15 \end{array}$$

findet, so auch in Fig. 115, wenn man nur beachtet, daß die Pole 34, 45 und 56 senkrecht zu den betreffenden Schubrichtungen im Unendlichen liegen. Die gesuchte Normale (n) ist dann parallel der Verbindungslinie von 13 und 15. Nebenbei sei bemerkt, daß hier auch die Pole 36 und 46 dauernd im Unendlichen liegen, also die entsprechenden Relativbewegungen des Gliedes 6 gegen 3 und 4 Schiebungen sind.

Als weiteres Beispiel mag die langsam laufende Steuerung für Dampfmaschinen von Frikart (Zeitschrift des Vereines deutscher

Ingenieure, 1909, S. 1746) behandelt werden, die in Fig. 118 schematisch dargestellt ist. Es bezeichnet 1 das ruhende Glied (das Maschinengestell) und 2 das Exzenter, dessen Welle um die Achse 12 sich drehend doppelt so viel Umdrehungen macht, als die Hauptwelle der Dampfmaschine. Das Glied 3 bildet die Koppel des Ge-

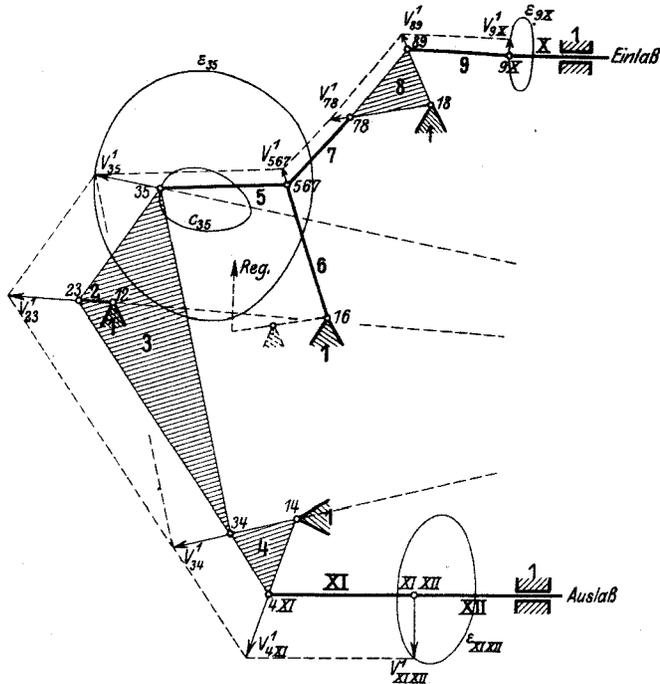


Fig. 118.

lenkviereckes 12—23—31—41, an die in 35 die Stange 5 angelenkt ist. Die drei Glieder 5, 6 und 7 sind durch das zweifache Gelenk 567 beweglich verbunden, von dem das Glied 6 nach dem Endpunkte 16 des Regulierhebels führt; letzterer ist als ruhend, also dem Gliede 1 angehörig anzusehen, da das Gelenk 16 während der ungestörten Bewegung des Motors in Ruhe bleibt. Durch das Glied 7 wird der Winkelhebel 8 bewegt, welcher mittels der Stange 9 die Bewegung auf den Einlaßschieber X überträgt. Eine ähnliche Übertragung erfolgt von dem Gliede 4 aus durch die Stange XI auf den Auslaßschieber XII. Daß diese Steuerung zwangsläufig ist, erkennt man sofort, denn die $n = 12$ Glieder sind durch $g = 16$ niedere Elementenpaare verbunden, nämlich durch 12 Drehpaare, ein zweifaches

Gelenk, das wie 2 Drehpaare zählt, und 2 Schiebepaare; es wird also der Zwangläufigkeitsbedingung (s. S. 15)

$$g = \frac{3}{2}n - 2$$

genügt.

Um den Bewegungsvorgang kennen zu lernen, ist es notwendig, für eine Reihe von Lagen der Kurbel 2 die entsprechenden Lagen der Gelenkpunkte 35, 567, 78 usw. zu bestimmen. Hierzu ist eine genaue Aufzeichnung der Bahn c_{35} des Punktes 35 (der sogenannten Koppelkurve) erforderlich und das geschieht am besten wieder mit Zuhilfenahme der Bahntangenten. Da man aber außerdem der Kenntnis der Geschwindigkeiten der Schieberbewegungen bedarf, so ermittelt man zweckmäßig zugleich mit den Lagen des Punktes 35 die senkrechte Geschwindigkeit V_{35}^1 des letzteren gegen das ruhende Glied 1 in der früher angegebenen Weise, denn V_{35}^1 fällt der Richtung nach mit der Normalen der Bahn c_{35} zusammen. In der erwähnten Absicht wählt man die senkrechte Geschwindigkeit V_{23}^1 des Gelenkpunktes 23 (s. Fig. 118) nach beliebigem Maßstab und erhält zunächst durch die Parallele zu 23—34 die Geschwindigkeit V_{34}^1 des Punktes 34 und im Schnittpunkte der Parallelen zu 23—35 und 34—35 den Endpunkt des V_{35}^1 darstellenden Vektors. Dieser Vektor ergibt uns zugleich die Bahnnormale des Punktes 35, und damit die Tangente an diese Bahn c_{35} , womit letztere trotz einer verhältnismäßig kleinen Zahl von Lagen des Punktes 35 recht genau aufgezeichnet werden kann. Zugleich mit c_{35} erhält man den V -Plan dieses Punktes; die entsprechende Kurve ist in Fig. 116 mit ϵ_{35} bezeichnet. Hat man V_{35}^1 , so findet man, und zwar nur durch das Ziehen von Parallelen, wie in der Figur angedeutet ist, die senkrechten Geschwindigkeiten der Punkte 567, 78, 89 und 9X, und da V_{9X}^1 die senkrechte Geschwindigkeit des Einlaßschiebers ist, so ergibt sich durch Wiederholung dieses Verfahrens für eine genügend große Zahl von Lagen der V -Plan ϵ_{9X} des Einlaßschiebers. Nunmehr kann man mit Hilfe des letzteren und der Bahnkurve c_{35} für jede Schieberstellung die Geschwindigkeit und die zugehörige Lage des Exzenters finden. Auf dem gleichen Wege ermittelt man auch den V -Plan des Auslaßschiebers. Die Beschleunigungen lassen sich dann ebenfalls bestimmen, und zwar mittels der Subnormalen der V -Pläne nach dem in Nr. 32 angegebenen Verfahren.

Schließlich werde als ein zusammengesetzteres Beispiel noch die schon früher (S. 23, Fig. 40a und 40b) angeführte Umsteuerung für Lokomotiven von Heusinger von Waldegg (Walschaert) behandelt, die in Fig. 119 schematisch dargestellt ist. Dieser Mechanismus besteht aus 12 Gliedern, von denen der Lokomotivrahmen als ruhendes Glied (1) anzusehen ist. Kolben, Kolbenstange und

Kreuzkopf bilden das treibende mit 2 bezeichnete Glied, das durch die Pleuelstange 3 die Bewegung der Hauptwelle mit Kurbel 4 erzwingt. Mit letzterer starr verbunden ist eine zweite Kurbel, die durch die Lenkstange 5 die Kulisse 6 in schwingende Bewegung um den ruhenden Gelenkpunkt 16 versetzt wird. Durch die kreiszylindrische Kulisse wird der Stein 7 so geführt, daß er eine Drehung gegen die Kulisse um die geometrische Achse 67 der die Kulisse innen begrenzenden Kreiszyylinderflächen auszuführen gezwungen ist, so daß der Gelenkpunkt 78 des Drehpaares, welches den Stein 7 mit der Stange 8 gelenkig verbindet, einen Kreisbogen um den Punkt (67) beschreibt. Dieser Kreisbogen geht in allen Lagen der Kulisse durch den ruhenden Gelenkpunkt 16. Die Stange 8 ist einerseits im Gelenk 8XII mit der Aufhängestange XII verbunden, die im Endpunkt 1XII des Steuerhebels aufgehängt um ihn gegen den Lokomotivrahmen schwingt, andererseits mit der Stange 9 im Gelenk 89. Die Stange 9 bewegt den Schieber durch die Schieberstange X, mit der sie durch das Gelenk 9X in Verbindung steht. Ihr anderer Endpunkt 9XI wird aber auf einem Kreisbogen geführt, welchen dieser selbe Punkt als Endpunkt der Lenkstange XI gegen den Kreuzkopf 2 beschreibt; mit letzterem ist das Glied XI durch das Drehpaar 2XI gelenkig verbunden.

Daß die dem Mechanismus zugrunde liegende Umschlußpaarkette von $n = 12$ Gliedern zwangsläufig ist, wurde schon S. 24 nachgewiesen und dort auch die Gelenkkette schematisch gezeichnet (s. Fig. 40b), aus der der Mechanismus hervorgeht, wenn man die Drehpaare 12 und 1X durch Schiebepaare ersetzt, sowie die Verbindung der Glieder 6 und 8 statt durch eine Kulisse durch das Gelenk 67. Diese schematische Darstellung der Kette, die in Fig. 119a in etwas größerem Maßstabe wiederholt wurde, läßt erkennen, daß in ihr nur zwei Gelenkvierecke auftreten, nämlich die beiden folgenden: 12, 23, 34, 14 und 14, 45, 56, 16. Das hat zur Folge, daß sich nicht alle Glieder in ihrer richtigen Lage gegen das als ruhend gedachte Glied aufzeichnen lassen, wenn man die Lage des treibenden Gliedes 2 gegen 1 willkürlich wählt. Es bedarf zur Erreichung dieses Zieles vielmehr eines Umweges, und zwar des folgenden.

Einer gewählten Stellung des Gliedes 2 gegen 1 entspricht eine bestimmte Stellung sowohl von 4, als von 6 gegen 1, womit man zugleich die Lage des Gelenkpunktes 67 zeichnerisch unmittelbar erhält. Ferner wählt man das Glied XII zunächst in einer beliebigen Lage und findet damit die zugehörige Lage des Gelenkpunktes 78 als Schnittpunkt der Kreise, die man um 8XII mit dem Radius 8XII—78 und um 67 mit dem Radius 67—78 schlägt. Da sonach auch die entsprechende Lage des Gliedes 8 erhalten wird,

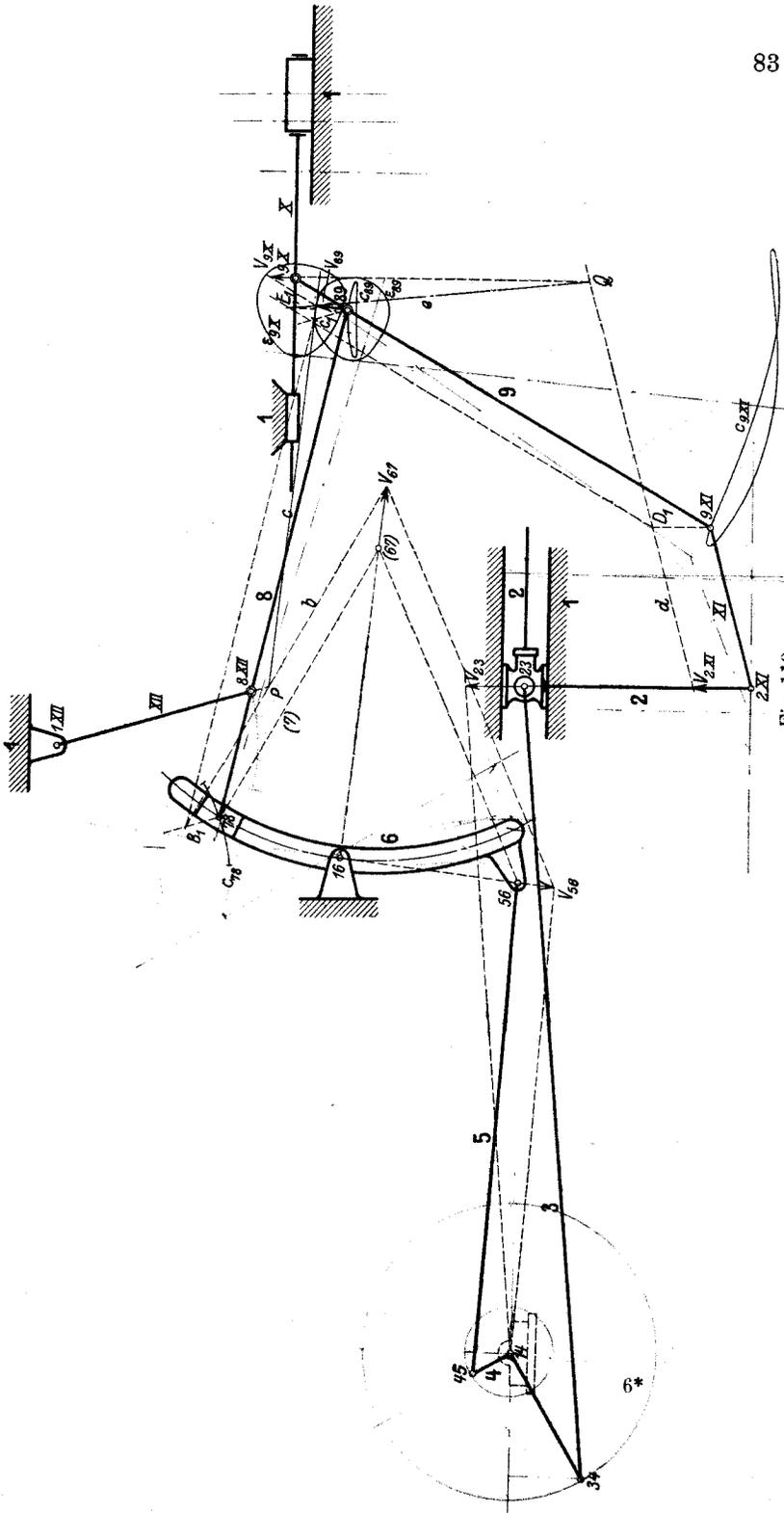


Fig. 119.

so ist die Lage von 89 gefunden, die sich den gewählten Lagen von 2 und XII zuordnet. Ändert man nun die Lage von XII, behält aber die von 2 (also auch die von 6) bei, so beschreibt 89 eine Kurve c' , die man zeichnerisch leicht findet; sie ist der geometrische Ort der wahren Lage des Punktes 89. Nach dem gleichen Verfahren erhält man aber eine Kurve c'' als geometrischen Ort des Punktes 89, wenn man letzteren als Punkt des Gliedes 9 auffaßt. Durch die Lage von 2 gegen 1 ist ja auch die des Punktes 2XI bestimmt; wählt man nun die Lage von X, also die des Punktes 9X, so findet man die entsprechende Lage von 89 als Eckpunkt des Dreieckes 9X, 9XI, 89, und durch Lagenänderung von X die Kurve c'' . Im Schnittpunkte beider Kurven erhält man sonach die wahre Lage des Punktes 89, die sich der Lage des Gliedes 2 gegen 1 zuordnet. Hat man diese, dann finden sich, wie leicht ersichtlich, die Lagen aller übrigen Glieder 7, 8, 9, X, XI, XII, die der gewählten Lage von 2 gegen 1 entsprechen.

Dieses Verfahren zur Aufzeichnung der Lagen der Glieder und der Bahnen der Gelenkpunkte ist zwar etwas umständlich, aber unumgänglich, wenn man diese Lagen genauer haben will. Natürlich wird man von den beiden Hilfskurven c' und c'' nur ein so kleines Stück aufzeichnen, als zur Ermittlung ihres Schnittpunktes nötig ist. Bei einiger Übung wird man mit je 3 Punkten für ein Kurvenstück auskommen, durch die der Verlauf des letzteren hinreichend genau bestimmt ist.

Indem man dieses Verfahren für alle erforderlichen Lagen des Gliedes 2 wiederholt, erhält man die Bahnkurven der Gelenkpunkte 78, 89 und 9XI aus den Lagen der letzteren, und zwar um so genauer, je größer die Zahl dieser Lagen gewählt wird. Indes läßt sich diese Zahl erheblich einschränken, wenn man die Tangenten an die Bahnkurven zugleich mit den Lagen der Gelenkpunkte ermittelt, und das ist möglich ohne Aufsuchung der entsprechenden Pole 17, 18 und 19, indem man die senkrechte Geschwindigkeit der Gelenkpunkte aufsucht. Damit verknüpft sich der weitere Vorteil, daß man die V-Pläne der betreffenden Gelenkpunkte erhält und damit ein weiteres Ziel der zeichnerischen Analyse der Bewegungsvorgänge erreicht. Freilich ist die zeichnerische Bestimmung der senkrechten Geschwindigkeiten hier auch nicht unmittelbar möglich, wohl aber in verhältnismäßig einfacher Weise mittelbar, wie die folgende Überlegung zeigt.

Um die Geschwindigkeiten der Gelenkpunkte zu ermitteln, gehen wir von dem Glied 4 aus, weil dieses der Kurbelwelle des Mechanismus entspricht und als um seine Achse 14 gegen 1 gleichförmig sich drehend vorausgesetzt werden kann. Dementsprechend ist die

Geschwindigkeit des Kurbelzapfens 34 konstant und können wir den Endpunkt V_{34} der senkrechten Geschwindigkeit von 34 nach 14 legen, womit der Geschwindigkeitsmaßstab bestimmt ist. Für alle Lagen des Gliedes 4 gegen 1 bleibt dann 14 der Endpunkt des Vektors V_{34} . Zugleich ist 14 dann der dauernde Endpunkt des Vektors V_{45} , der die senkrechte Geschwindigkeit von 45 darstellt. Zieht man durch 14 eine Parallele zum Stab 5, so trifft diese nach dem Früheren die Gerade 16—56 im Endpunkte V_{56} des Vektors, der die senkrechte Geschwindigkeit von 56 darstellt und die Parallele durch diesen Punkt zu 56—67 schneidet 16—67 im Endpunkte des Vektors V_{67} . Die Endpunkte der Vektoren aller Punkte der Stange 7

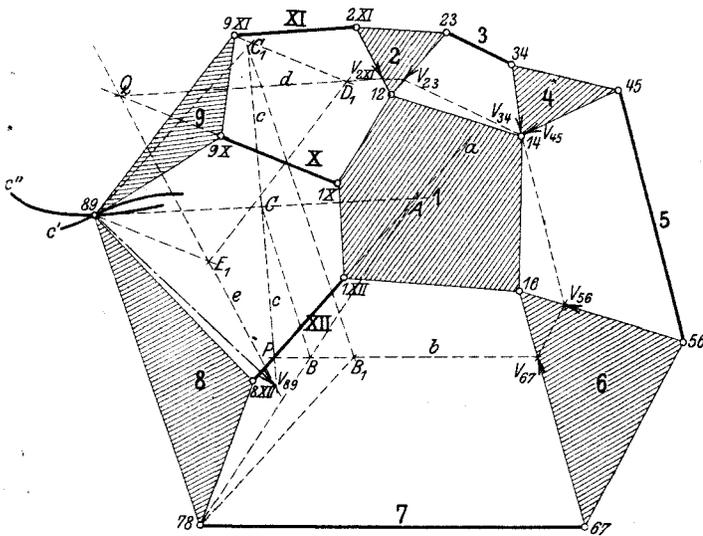


Fig. 119a.

liegen dann auf der Parallelen 6 zu 7 durch V_{67} und dieser Umstand läßt sich zur Ermittlung der senkrechten Geschwindigkeiten der Eckpunkte des Dreieckes 8 verwerten, wenn man beachtet, daß diese drei Vektoren sich im Pol 18 des Gliedes 8 gegen 1 schneiden müssen, also in einem Punkte A der Geraden a , in der die Stange XII augenblicklich liegt. Denn die drei Pole 18, 1XII und 8XII müssen auf einer Geraden liegen, also auf a , da diese die Polgerade der drei Glieder 1, 8 und XII ist. Wäre nun z. B. der Punkt A jener Pol 18, so müßten die Vektoren V_{78} und V_{89} in den Geraden liegen, welche 78 und 89 mit A verbinden. Andererseits ist aber die Verbindungslinie BC der Endpunkt dieser Vektoren parallel zur Geraden 78—89, und so ergibt sich C als Schnittpunkt

dieser Parallelen mit dem Strahl $A-89$. Der geometrische Ort der Punkte C ist aber als Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlen zweier perspektivischer Strahlbüschel eine Gerade c , die sich einfach zeichnen läßt. Denn einerseits geht sie durch den Punkt P , in welchem die Gerade b die Gerade a trifft, andererseits durch jenen eben bestimmten Punkt C . Man kann aber auch A als unendlich fernen Punkt auf a wählen, dann werden die Strahlen $78-B_1$ und $89-C_1$ parallel zu a , und man erhält C_1 als Schnittpunkt von $89-C_1$ und der Parallelen B_1C_1 durch B_1 zu $78-89$. In ganz gleicher Weise erhält man einen weiteren geometrischen Ort für den Endpunkt des Vektors V_{89} , indem man benutzt, daß die Vektoren der Eckpunkte des Dreieckes 9 sich im Pol 19 schneiden müssen, und dieser in der Geraden liegt, mit welcher der Stab X zusammenfällt. Denn durch die Parallele zu 3 durch 14 erhält man zunächst V_{23} und damit V_{2XI} , und die Parallele d zu XI durch letzteren Punkt ist der geometrische Ort des Endpunktes der senkrechten Geschwindigkeit V_{9XI} des Punktes 9XI. Die Gerade d schneidet die Verlängerung des Stabes X in einem Punkte Q , durch welchen die Gerade e , d. i. der geometrische Ort des Endpunktes V_{89} gehen muß. Einen weiteren Punkt E_1 von e erhalten wir wie vorher, indem wir durch 9XI und 89 Parallelen zu X legen; die letztere liefert im Schnittpunkt E_1 mit der Parallelen zu 9XI—89 durch D_1 den gesuchten weiteren Punkt von e . Die beiden Geraden c und e aber schneiden sich in dem Endpunkte des Vektors V_{89} , d. i. dem der senkrechten Geschwindigkeit des Gelenkpunktes 89 in seiner Bewegung gegen 1. Rückwärts ergeben sich dann nur durch das Ziehen einiger Parallelen die senkrechten Geschwindigkeiten der Punkte 78 und 9XI, und damit zugleich die Tangenten an die Bahnen dieser Punkte.

Die Übertragung dieser Konstruktionen auf den Mechanismus selbst ist in Fig. 119 durchgeführt, und zwar mit genau denselben Bezeichnungen. Zu beachten ist hierbei nur, daß die Verbindung zwischen den Gliedern 6 und 7 mittels der Kulissee durch das Drehpaar 67 ersetzt wurde, demnach der Stein 7 durch die Stange 67—78, die in der Figur mit (7) bezeichnet ist. Das Dreieck 6 hat also die Eckpunkte 16, 56 und 67. Ferner tritt an die Stelle der Stange X der Schieber X, wobei das Gelenk 1X ins Unendliche gerückt zu denken ist, und zwar in einer Senkrechten zur Schubrichtung durch den Punkt 9X. Die letztere Senkrechte tritt in Fig. 117 an die Stelle der Geraden, in welcher in Fig. 119a die Stange X liegt. Die Hilfskurven c' und c'' sind in die Fig. 119 nicht eingetragen worden, um sie möglichst durchsichtig zu halten. Dagegen würden die Bahnen der Gelenkpunkte 78, 89 und 9XI ein-

gezeichnet, weil deren Verlauf für die Bewegungsvorgänge an dem Umsteuerungsmechanismus besonders kennzeichnend ist; sie tragen die Bezeichnungen c_{78} , c_{89} und c_{9XI} . Alle drei Bahnen sind in sich zurücklaufende Kurven, und wenn dies bei c_{78} nicht hervortritt, so liegt das daran, daß die Bahnpunkte beim Hin- und Rückgang viel zu nahe aneinander liegen, um sie bei dem kleinen Maßstabe der Figur zeichnerisch trennen zu können.

Für die Ermittlung der Geschwindigkeitsvektoren bzw. der V -Pläne ist zu beachten, daß der Gelenkpunkt 2XI als Punkt des Kreuzkopfes 2 die Schiebungsgeschwindigkeit des letzteren besitzt, also $V_{2XI} = V_{21}$ zu machen ist. Letztere aber finden wir in bekannter Weise aus der senkrechten Geschwindigkeit des Kurbelzapfens, deren Endpunkt mit 14 zusammengelegt wurde, weil V_{34} als unveränderlich angesehen werden kann. Die zeichnerische Ermittlung von V_{89} bleibt die ganz gleiche, wie in Fig. 119a; der Endpunkt des Vektors V_{89} ist der Schnittpunkt der Geraden c und e , die wie in Fig. 119a ermittelt werden. Auf diesem Wege ist auch der V -Plan des Punktes 89 gezeichnet worden, der in der Figur mit ε_{89} bezeichnet ist. Aus V_{89} erhält man leicht die Schiebergeschwindigkeit V_{9X} durch eine Parallele zu 9, welche die Senkrechte zur Schubrichtung durch den Punkt 9X im Endpunkte V_{9X} dieses Vektors schneidet. Die Wiederholung dieses Verfahrens führt auf den V -Plan des Schiebers, der mit ε_{9X} bezeichnet ist. Wie man aus den V -Plänen die Beschleunigungen der betreffenden Punkte erhält, wurde in Nr. 32 auseinandergesetzt.

39. Beispiele für die Untersuchung von höheren Elementenpaarketten.

Die in Nr. 36 behandelten dreigliedrigen Ketten sind in der Hauptsache solche mit höheren Elementenpaaren. Es werden daher die im folgenden angeführten HEP-Ketten, deren Gliederzahl eine größere ist, im Grunde nach den gleichen Verfahren untersucht werden können, die dort verwendet wurden.

Als erstes Beispiel möge das bekannte Rädervorgelege behandelt werden, das durch Fig. 120 schematisch dargestellt wird. Es besteht aus den beiden Zahnradpaaren 1, 2 und 2, 3; die beiden um dieselbe Achse sich drehenden Zahnräder 2 sind als starr verbunden, also als ein Glied zu denken. Die Achsen der Zahnräder, nämlich 14, 24 und 34, liegen in dem

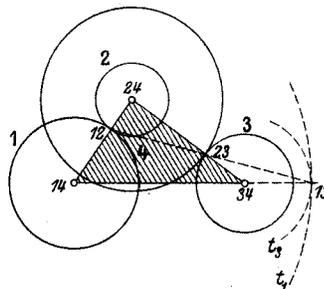


Fig. 120.

ruhend gedachten Gliede 4; das Vorgelege besteht demnach aus 4 Gliedern und ist, wie man sich unmittelbar leicht überzeugt, zwangsläufig. In den Berührungspunkten 12 und 23 der Teilkreise liegen die Pole der Relativbewegungen der Räder 1 gegen 2 und 2 gegen 3; folglich ergibt sich der Pol 13 der Relativbewegung von 1 gegen 3 als Schnittpunkt der entsprechenden Polgeraden nach dem Schema

$$\begin{array}{l} 12 - 23 \\ 14 - 34 \end{array} > 13.$$

Damit wird zugleich erkannt, daß man die beiden Räderpaare des Vorgeleges, um die gleiche Bewegung von 3 gegen 1 zu erzielen, durch ein einziges innen verzahntes Räderpaar ersetzen könnte, dessen Teilkreise t_1 mit dem Mittelpunkt in 14 und t_3 mit 34 als Mittelpunkt sind. Bezeichnen ω_1^4 und ω_3^4 die Winkelgeschwindigkeiten der Räder 1 und 3 gegen 4, so findet sich nach Nr. 33 (S. 56) sofort

$$\omega_3^4 = \frac{13 - 14}{13 - 34} \cdot \omega_1^4.$$

Dasselbe Verhältnis wie die Winkelgeschwindigkeiten haben auch die Umlauf- und die Zähnezahlen der Räder.

Liegen die drei Achsen der Räder in einer Ebene, bzw. die drei Drehpunkte 14, 24 und 34 in einer Geraden (s. Fig. 120a), so

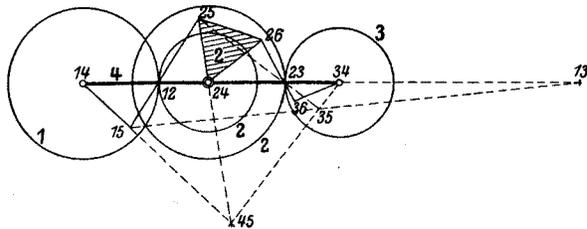


Fig. 120a.

läßt sich die zeichnerische Ermittlung des Poles 13 nicht in der Weise ausführen, wie in Fig. 118. Dagegen führt der Ersatz der Bewegungsübertragung mittels eines unselbständigen höheren Elementenpaares durch ein Gelenkviereck, wie er in Fig. 43 bereits enthalten ist, hier sofort zum Ziele. Wir schalten ein Hilfsglied 5 ein, das mit 1 durch das Drehpaar 15, mit 2 durch 25 gelenkig verbunden wird, und zwar derart, daß die Gerade (Stange) 15—25 durch 12 geht; dann bleibt die momentane Bewegung von 1 gegen 2 dieselbe. Ebenso verfahren wir mit dem Räderpaar 2, 3 unter Einschaltung des Hilfsgliedes 6, d. i. der Stange 26—36. Hierdurch erhalten wir eine zwangsläufige sechsgliedrige Drehpaarkette, in der

sich der gesuchte Pol 13 durch das Zeichnen von Geraden nach folgendem Schema findet:

$$\begin{array}{l} 14 - 15 \\ 24 - 25 \end{array} > 45; \quad \begin{array}{l} 23 - 25 \\ 34 - 45 \end{array} > 35; \quad \begin{array}{l} 15 - 35 \\ 12 - 23 \end{array} > 13.$$

Man übersieht sofort, daß die 6 Pole 12, 13, 14, 23, 24, 34 die Schnittpunkte der 6 Seiten eines vollständigen Vierseits (15, 25, 35, 45) mit einer Geraden, nämlich der Polgeraden 14 — 34, sind.

Als ein weiteres Beispiel mag die Schiebersteuerung für Viertakt-Verbrennungsmaschinen von Tiercé (D. R. P. 252542, Klasse 46b) behandelt werden, deren Mechanismus in Fig. 121 schematisch dargestellt ist. Er besteht einschließlich des Maschinengestelles 1 aus 5 Gliedern, von denen die Kurbel 2 das treibende ist, während das Glied 5 die Schiebersteuerung bewirkt, die der Zweck dieses Mechanismus ist. Die Glieder 1 bis 5 sind aufeinanderfolgend durch die Drehpaare 12, 23, 34 und 45 verbunden, während ein Schieberpaar 15_∞ das Glied 5 mit dem Maschinengestell 1 beweglich verbindet. Die Drehpaare 23 und 34 sind zugleich die Drehachsen eines Zahnradpaares (2, 4); das Zahnrad 2 bildet mit der Kurbel 2 ein starres Glied, und ebenso das Zahnrad 4 mit der Kurbel 4. Da die Achsen der beiden Zahnräder im Gliede 3 festgelagert sind, so bildet dem früheren zufolge dieses

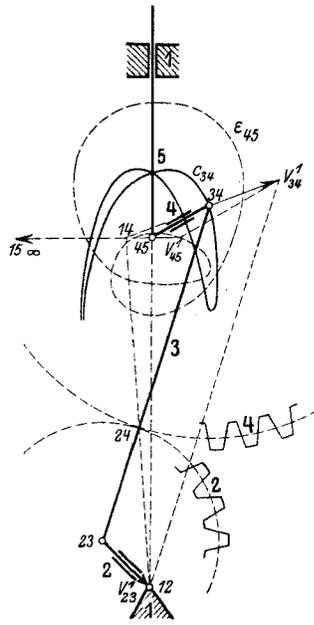


Fig. 121.

Paar (2, 4) ein höheres unselbständiges Paar, und da sonst höhere Elementenpaare nicht in der Kette auftreten, so hat man $h = 1$ zu setzen. Ferner ist die Anzahl aller Umschlußpaare $g = 4 + 1 = 5$ und die Anzahl der Kettenglieder $n = 5$, womit ersichtlich wird, daß die dem Mechanismus zugrunde liegende HEP-Kette der Bedingungsgleichung (I*) der Zwangläufigkeit

$$h + 2g - 3n + 4 = 0$$

genügt. Da die Radien der Teilkreise der Zahnräder im Verhältnis 1:2 stehen, so folgt, daß sich die Bewegung des Schiebers 5 erst nach zwei Umläufen der Kurbel 2, bzw. des mit letzterer starr verbundenen Zahnrades wiederholt.

Versucht man nun, die Schieberstellung zu finden, die sich einer gewählten Stellung der Kurbel 2 gegen das ruhende Glied 1

zuordnet, so ersieht man sofort, daß dies unmittelbar gar nicht möglich ist, denn die 5 Glieder der Kette bilden ein bewegliches Fünfeck 12, 23, 34, 45, 51, in dem die gegenseitigen zwangsläufigen Bewegungen der Glieder erst durch das höhere Elementenpaar herbeigeführt werden, das die Glieder 2 und 4 beweglich voneinander abhängig macht. Wohl aber läßt sich das gesteckte Ziel mittelbar erreichen, wenn man zunächst das Glied 3 als ruhendes wählt, weil man die einander zugeordneten Lagen der Glieder 2 und 4 dann aus der Beziehung erhält, daß die Teilkreise beider Zahnräder aufeinanderrollen. Mit Rücksicht auf das Radienverhältnis 1:2 der Teilkreise, bzw. das Verhältnis 2:1 der Drehwinkel der Räder gegen Glied 3 ergibt sich sonach folgende einfache Konstruktion. Man teilt den Kreis, den der Gelenkpunkt 12 um 23 gegen 3 beschreibt, in etwa 6 oder 8 gleiche Teile, und den Kreis des Punktes 45 um 34 in die doppelte Anzahl (12 oder 16), und zwar von der Zentrale 23 — 34 beider Kreise, bzw. dem Punkte 24 ausgehend im Drehsinne der Räder, dann entsprechen den aufeinanderfolgenden Teilpunkten auf den beiden letzteren Kreisen einander zugeordnete Lagen der Gelenkpunkte 12 und 45 und man erhält zu jeder Lage der Kurbel 2 gegen 3 die Entfernung 12 — 45. Nunmehr läßt sich zu jeder Lage der Kurbel 2 auch gegen 1 die zugeordnete Lage von 45 auf der ruhenden Geraden 12 — 45 finden und mittels der beiden unveränderlichen Längen 23 — 34 und 45 — 34 die zugeordnete Lage von 34. Die Bahn c_{34} , die der Punkt 34 gegen 1 beschreibt, ist hierbei von besonderem Interesse, da sie mit der eigenartigen Bewegung des Schieberpunktes 45 in engstem Zusammenhange steht. Ferner aber bedarf man ihrer, um die Aufgabe zu lösen, zu einer gewählten Schieberstellung die zugehörige Lage der Kurbel (des Exzenters) 2 zu finden. Man schneidet mit der Zirkelweite 34 — 45 von der gewählten Lage 45 aus auf c_{34} die Punkte aus, welche die entsprechenden Lagen von 34 sind und erhält denn mittels der Stangenlänge 23 — 34 von 34 aus die zugehörigen Lagen von 23 auf dem Kurbelkreis, den 23 um 12 beschreibt. Es ist sonach nötig, die Kurve c_{34} möglichst genau zu zeichnen, und das geschieht mit Hilfe der Bahntangenten, die sich am einfachsten zugleich mit der senkrechten Geschwindigkeit des Punktes 34 ergeben.

Um letztere zu ermitteln, haben wir zu beachten, daß sie die Richtung des Strahles hat, der den Punkt 34 mit dem Pol 14 des Gliedes 4 gegen 2 verbindet. Diesen Pol finden wir aber als Schnittpunkt zweier Polgeraden nach dem Schema (s. Fig. 120)

$$\begin{array}{l} 12 - 24 \\ 15_x - 45 \end{array} > 14.$$

Die Geschwindigkeit der Kurbel 2 ist als gegeben und unveränderlich anzusehen; wir wählen deshalb den Zeichnungsmaßstab für die senkrechte Geschwindigkeit des Punktes 23 so, daß der Endpunkt des entsprechenden Vektors mit 12 zusammenfällt. Dann findet sich der Endpunkt V_{34}^1 der senkrechten Geschwindigkeit des Punktes 34 gegen das Glied 1 als Schnittpunkt des vorerwähnten Strahles 14 bis 34 mit der Parallelen zur Stange 23 — 34 durch 12, denn 12 ist zugleich der Endpunkt des Vektors V_{23}^1 . Die gesuchte Tangente an die Bahn c_{34} im Punkte 34 ist dann die Senkrechte zu V_{34}^1 . Da das Glied 5 eine geradlinige Schiebung gegen 1 ausführt, so steht die senkrechte Geschwindigkeit V_{45}^1 des Gliedes 5 gegen 1 senkrecht zur Schiebungsrichtung, d. i. der Geraden 12 — 45; nach früherem erhalten wir sofort den Endpunkt der senkrechten Geschwindigkeit V_{45}^1 des Punktes 45 als Schnittpunkt der Geraden 15_{∞} — 45 mit der Parallelen zu 34 — 45 durch V_{34}^1 (s. Fig. 120). Durch Wiederholung dieser Konstruktion für die verschiedenen Lagen des Punktes 45 ergibt sich der V -Plan dieses Punktes in Gestalt der in der Figur mit ε_{45} bezeichneten Kurve. Die letztere zeigt bei dem Mechanismus von Tiercé senkrechte Symmetrie zur Geraden 12 — 45, ebenso die Bahnkurve c_{34} . In Fig. 120 dagegen sind die Abmessungen der Glieder zum Zwecke besserer Übersichtlichkeit zum Teil willkürlich gewählt, woraus sich die Unsymmetrie beider Kurven erklärt.

Als letztes Beispiel diene die Vorrichtung zum Anlassen von Verbrennungskraftmaschinen von Sulzer (D. R. P. 252675, Kl. 46 c), die Fig. 122 schematisch darstellt¹⁾. Sie besteht aus $n=7$ Gliedern, von denen 1 das ruhende Maschinengestell ist. Die unrunde Scheibe 2, die sich um die Achse 12 gleichförmig dreht, treibt die Bewegung an, und zwar mittels der Rolle 3, die im Gliede 4 um die Achse 34 drehbar gelagert ist. Das Glied 4 dreht sich um die Achse 14 gegen 1 und steht mit dem Hebel 5, der sich um die Achse 15 gegen 1 dreht, durch ein unselbständiges höheres Elementenpaar in Verbindung. Das letzterem entsprechende Hüllkurvenpaar (c_4, c_5) berührt sich in B ; n_{45} bezeichnet in Fig. 121 die Berührungsnormale beider Kurven. In dem zweiten Schenkel des Hebels 5 gleitet geradlinig der Stein 6, den das Drehpaar 67 gelenkig mit der Ventilstange 7 verbindet. Die Rolle 3 wird kraftschlüssig mit der Scheibe 2 in Berührung gebracht und rollt demgemäß auf ihr; die beiden Glieder 2 und 3 sind sonach durch ein selbständiges höheres Elementenpaar beweglich verbunden. Da nur

¹⁾ Die Figur stellt nur einen Teil der Vorrichtung dar, der aber einen für sich bestehenden selbständigen Mechanismus bildet.

noch ein unselbständiges höheres Elementenpaar in dem Mechanismus auftritt, so hat man folglich $h = 2 + 1 = 3$ zu setzen. Die Anzahl der Drehpaare beträgt 5, die der Schiebepaare 2; folglich ist $g = 5 + 2 = 7$. Da auch $n = 7$, so wird der Bedingungsgleichung der Zwangläufigkeit

$$h + 2g - 3n + 4 = 3 + 2 \cdot 7 - 3 \cdot 7 + 4 = 0$$

genügt; die Kette ist sonach bei ganz beliebigen Abmessungen zwangläufig.

Die Kette würde auch zwangläufig sein, wenn man sich die Rolle 3 mit dem Gliede 4 starr verbunden denkt. Die Kette würde dann ein Glied weniger haben, so daß $n = 6$ wäre. Ferner fiel das Drehpaar 34 fort und an Stelle des selbständigen höheren Elementenpaares träte ein unselbständiges, da die Rolle dann auf der Scheibe 2 gleiten würde. Es wäre dann $g = 6$, $h = 2$ und sonach würde der Bedingungsgleichung der Zwangläufigkeit ebenfalls genügt, wie man sich sofort überzeugt. Der Grund für die Verwendung einer Rolle ist ohne weiteres ersichtlich, denn dann tritt an die Stelle der gleitenden Reibung die viel geringere rollende.

Um die Ventileröffnung zu erhalten, die einer bestimmten Stellung der unrunder Scheibe 2 entspricht, ist es nötig, die zugeordnete Lage des Gelenkpunktes 67 zeichnerisch zu ermitteln. Das geschieht am einfachsten, wenn man in jeder Lage der Scheibe, für die man die zugeordnete Lage von 67 sucht, die äquidistante Kurve zu dem Scheibenumfang zeichnet, die 34 beschreiben würde, wenn man die Scheibe 2 festhielte und die Rolle 3 auf ihr rollen ließe. Schneidet man diese Kurve durch den Kreis vom Radius 14—34 mit 14 als Mittelpunkt, so erhält man zunächst die zugeordnete Stellung des Hebels 4. Die entsprechende Stellung des Hebels 5 ergibt sich aus der Benutzung des Umstandes, daß die Kurve c_5 sich mit dem Hebel 5 um 15 gegen 1 dreht; hierbei ist es zweckmäßig, den geometrischen Ort der Berührungspunkte B (die sog. Eingriffslinie bei Zahnrädern) aufzuzeichnen. Schließlich findet man die Stellung des Gelenkpunktes 67 auf der Ventilstange als den Schnittpunkt der Ventilstange mit der Geraden 15—67, welche letztere sich stets um denselben Winkel dreht, wie das Glied 5. Will man die Ventileröffnung durch eine Schaulinie darstellen, so läßt sich das am zweckmäßigsten mittels eines Polardiagrammes tun, das man erhält, wenn man auf der Symmetrieachse der Scheibe 2 die Größe des Weges des Punktes 67 von seiner Ruhelage aus aufträgt.

Der V -Plan des Punktes 67 ergibt sich verhältnismäßig einfach in folgender Weise. Denkt man sich den Punkt 34 als Punkt der

Scheibe 2, so fällt die senkrechte Geschwindigkeit V_{34}^2 dieses Punktes in den Strahl 12—34 und kann nach irgendeinem Maßstab als Vektor an 34 angetragen werden. Der obere Index 2 in V_{34}^2 soll hierbei, wie überhaupt in Fig. 121 das Glied bezeichnen, dem der betreffende Punkt (hier 34) als zugehörig zu betrachten ist, während die Bezeichnung des ruhenden Gliedes wegfallen kann, da alle in der Figur auftretenden Geschwindigkeiten sich nur auf die Bewegungen der betreffenden Punkte gegen das ruhende Maschinen-gestell 1 beziehen. Beiläufig sei bemerkt, daß man den Endpunkt des Vektors V_{34}^2 auch mit 12 zusammenfallen lassen könnte, indem man den Geschwindigkeitsmaßstab entsprechend wählt, was dann zweckmäßig ist, wenn die Scheibe 2 (wie zumeist der Fall)

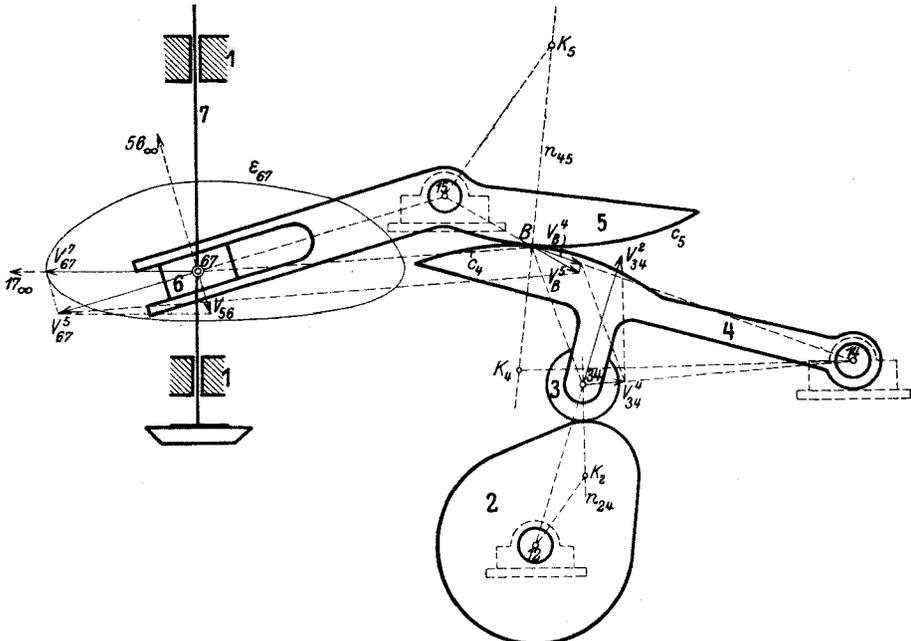


Fig. 122.

sich gleichförmig dreht; denn der Vektor V_{34}^2 ändert seine Größe proportional der Entfernung 12—34 und es liegt dann dauernd der Endpunkt des Vektors in 12. Im vorliegenden Falle wurde lediglich aus Rücksicht auf die Übersichtlichkeit der Figur jener Vektor nach der entgegengesetzten Seite und in einem willkürlich gewählten Maßstabe aufgetragen. Die Geschwindigkeit von 34 als Punkt des Hebels 4, d. i. der Vektor V_{34}^4 ergibt sich dann nach dem Früheren (vgl. Fig. 97), indem man durch den Endpunkt V_{34}^2

eine Parallele zur Normalen n_{34} der Scheibe 2 und Rolle 3 in deren Berührungspunkte legt; diese schneidet den Strahl 14—34 im Endpunkte V_{34}^4 des gesuchten Vektors. Nunmehr findet sich (ebenfalls wie in Fig. 97) die Geschwindigkeit V_B^4 des Berührungspunktes B des Hüllkurvenpaares, wenn man letzteren als Punkt des Gliedes 4 auffaßt, indem man durch den Endpunkt V_{34}^4 eine Parallele zu 34— B legt; diese trifft die Gerade 14— B im gesuchten Endpunkte V_B^4 . Die Geschwindigkeit V_B^5 des Punktes B als Punkt des Gliedes 5 ergibt die Parallele zur Normalen n_{45} des Hüllkurvenpaares c_4, c_5 ; sie schneidet den Strahl 15— B im Endpunkt V_B^5 . Nunmehr erhält man die senkrechte Geschwindigkeit V_{67}^5 des Punktes von 5, der sich augenblicklich mit 67 deckt, durch die Parallele $V_B^5—V_{67}^5$ zu $B—67$, die auf dem Strahl 15—67 dem Vektor V_{67}^5 abschneidet, und schließlich durch die Senkrechte zu V_{67}^5 den Vektor V_{67}^7 , d. i. die senkrechte Geschwindigkeit eines Punktes der Ventilstange 7. Durch Wiederholung dieser Konstruktion für eine genügende Anzahl von Lagen der Scheibe 2 erhält man den gesuchten V -Plan ϵ_{67} des Punktes 67 als geometrischen Ort der Endpunkte V_{67}^7 .

Achstes Kapitel.

Grenz-, Verzweigungs- und Wechsellagen.

40. Sonderlagen der Kettenglieder.

Innerhalb der unendlich vielen Lagen, die die Kettenglieder bei ihren gegenseitigen Bewegungen einnehmen, gibt es im allgemeinen immer einzelne Lagen, die sich durch besondere Eigenschaften auszeichnen; wir wollen sie Sonderlagen nennen. Die Eigenschaften, die diese Sonderlagen kennzeichnen, sind zweierlei Art. Entweder sind sie unabhängig von den Abmessungen der Kettenglieder, treten also im allgemeinen auf, oder aber nicht, in welchem letzterem Falle die Abmessungen bestimmte Bedingungen zu erfüllen haben, damit eine Sonderlage der letzteren Art auftritt. Es sollen diese Vorkommnisse zunächst an dem Beispiel des Gelenkviereckes erläutert werden.

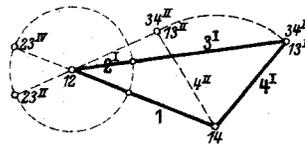


Fig. 123.

Es sei das in Fig. 123 dargestellte Gelenkviereck eine sogenannte Schwingskurbelkette, d. h. die Abmessungen seien so gewählt, daß die Kurbel 2 gegen das ruhend gedachte Glied 1 einen vollen Umlauf vollziehen kann. Dann schwingt die Kurbel 4 zwischen zwei Lagen

4^I und 4^{II} hin und her, die sich zeichnerisch leicht ermitteln lassen; sie mögen Grenzlagen genannt werden.

Für diese beiden Lagen ist kennzeichnend, daß die drei Gelenkpunkte 12, 23 und 34 in eine Gerade fallen, also einerseits 23^I und 34^I , und andererseits 23^{II} und 34^{II} mit 12 in einer Geraden liegen. Aus diesen besonderen Lagen der Gelenkpunkte folgt, daß der Pol 13 dann mit 23^I , bzw. 34^{II} zusammenfällt, während der Pol 24 mit 12 in Deckung sich befindet.

Aus letzterem Umstand läßt sich weiter ableiten, daß die Winkelgeschwindigkeit ω_4^1 des Gliedes 4 gegen das ruhende Glied 1 zu Null wird, wenn dieses Glied sich in einer Grenzlage befindet. Das ersieht man auch ohne weiteres aus dem Nullwerden der Bahngeschwindigkeit des Gelenkpunktes 34 in den beiden Umkehrpunkten 34^I und 34^{II} seiner Bewegung, da ja der andere Gelenkpunkt 14 ruht. Es lassen sich sonach die beiden Grenzlagen des Gliedes 4 auch auffassen als Lagen, für die die Winkelgeschwindigkeit gegen das Glied 1 zu Null wird.

Die erwähnten Grenzlagen erhalten eine besondere Bedeutung für die aus der angeführten Schwingkurbelkette hervorgehenden Getriebe, und zwar dann, wenn 1 das ruhende und 4 das treibende Glied ist. In diesem Falle kann die Winkelgeschwindigkeit der Kurbel 2 in jeder der beiden Lagen *I* und *II* alle möglichen Werte haben, also auch den Wert Null und dann kann diese Kurbel sich aus einer solchen Lage entweder in dem einen oder anderen Sinne weiter drehen, d. h. der Drehsinn der Kurbel 2 wird dann unbestimmt. In Wirklichkeit verhindern die bewegten Massen im allgemeinen diese Unbestimmtheit infolge ihrer Trägheit; doch könnte durch die Mitwirkung von Kräften in besonderen Fällen doch eine solche eintreten.

Eine weitere Eigentümlichkeit des behandelten Getriebes zeigt sich, falls auf das treibende Glied 4 Arbeit verrichtende Kräfte wirken. Während in einer beliebigen gegenseitigen Lage der Glieder diese Kräfte eine Änderung des Geschwindigkeitszustandes in dem Getriebe herbeiführen, bzw. das Getriebe in Bewegung versetzen, falls es in Ruhe war, ist das in jeder der beiden Grenzlagen nicht der Fall, weil die Arbeit der Kräfte bei einer unendlich kleinen Bewegung des Gliedes 4 aus einer Grenzlage Null sein muß. Man nennt deshalb die Grenzlagen in Getrieben auch Todlagen.

Nicht in allen Gelenkvierecken treten Grenzlagen auf, wie z. B. in den Doppelkurbelgetrieben und deren Sonderfällen, dem Parallel- und dem Antiparallelkurbelgetriebe (s. Fig. 108 u. 109). Dafür kann aber eine Sonderlage der Glieder in gewissen Gelenkvierecken nicht

allgemeiner Art eintreten, wenn die Abmessungen der Glieder gewisse Bedingungen erfüllen. Das ist z. B. der Fall bei dem durchschlagenden Gelenkviereck, das schon in Nr. 34 (S. 71, Fig. 106) behandelt wurde. In diesem treten keine Grenzlagen auf, wohl aber hat es Sonderlagen, wenn die vier Gelenkpunkte in eine Gerade fallen, was nur möglich ist, wenn die Summe der Gliedlängen zweier zusammenstoßender Glieder gleich der Summe der beiden andern Gliedlängen ist. Befindet sich die Kette in einer solchen Lage (s. Fig. 124), so erkennt man leicht, daß die unmittel-

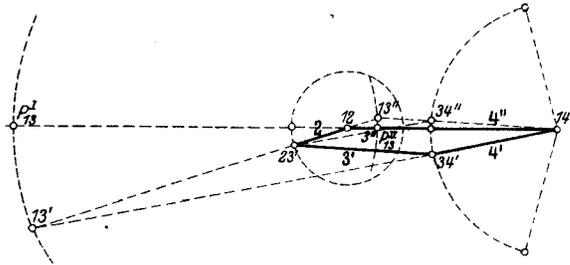


Fig. 124.

bare Bestimmung der Pole 13 und 24 als Schnittpunkte von Polgeraden hier versagt. Aber es ergibt sich weiter, daß einer dieser Lage *I* benachbarten Lage der Kurbel 2, die durch die Lage 23' des Gelenkpunktes 23 bestimmt ist, sich zwei verschiedene Lagen 34' und 34'' des Punktes 34 zuordnen, und somit zwei verschiedene Lagen des Gelenkviereckes. In dem einen Falle ist das Gelenkviereck ein offenes mit den Polen 13' und 24', und im zweiten Falle ein gekreuztes mit den Polen 13'' und 24''. Aus der Verschiedenheit der Lage der Pole 13' und 13'' erkennt man, daß die ruhende Polkurve, wenn man sie in der früher (S. 42) erwähnten Weise aufzeichnet, die Polgerade 12 — 14 in zwei verschiedenen Punkten (13') und (13'') schneiden muß und folglich die bewegliche Polkurve des Gliedes 3 die erstere in der Lage *I* des Gelenkviereckes in zwei Punkten berührt. Je nachdem nun der Berührungspunkt beider Kurven (der Pol 13) seine Bewegung auf demselben Zweige der ruhenden Polkurve fortsetzt, oder nicht, ist die Bewegung der Koppel 3 stetig oder unstetig, d. h. bleibt der Pol in (13') oder springt nach (13'') über. Entsprechend den beiden Zweigen der ruhenden Polkurve kann sich sonach auch die Bewegung der Glieder des Gelenkviereckes verzweigen, weshalb man eine solche Lage eine Verzweigungslage nennt.

Kennzeichnend für eine solche Lage ist demnach, daß die Polgeraden, deren Schnittpunkt im allgemeinen Falle den Pol ein-

deutig bestimmt, in eine Gerade fallen, also kurz gesagt, das Zusammenfallen von Polgeraden.

Eine noch weitergehende Besonderheit tritt bei dem durchschlagenden Gelenkviereck ein, wenn es gleichschenkelig ist, d. h. wenn zwei der in einem Gelenkpunkt zusammenstoßenden Glieder gleiche Länge haben, wie z. B. 1 und 2 in Fig. 124 a. Fällt nämlich 2 mit 1 zusammen, so muß dies auch mit 3 und 4 der Fall sein, und weil dann die beiden Gelenkpunkte 14 und 23^I dieselbe Drehachse

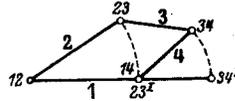


Fig. 124 a.

haben, so können sich die Glieder 3 und 4 aus jener Lage so bewegen, als ob sie ein einziges starres Glied wären. Das Gelenkviereck geht sonach in ein zwangsläufiges Elementenpaar über, indem die Zahl der sich gegeneinander bewegenden Glieder von 4 auf 2 sinkt, also die Gliederzahl der Kette in solcher Lage wechselt. Einer derartigen Lage wird deshalb eine Wechsellage genannt.

Die genannten drei Sonderlagen, nämlich die Grenz-, Verzweigungs- und Wechsellagen sollen im folgenden etwas allgemeiner behandelt werden.

41. Die Grenzlagen.

Bezüglich der Bahnkurven der Punkte eines Kettengliedes sind nur zwei Fälle möglich. Entweder beschreibt der Punkt eine in sich zurücklaufende, d. i. geschlossene Bahnkurve, oder aber bewegt er sich auf einem Teil einer Kurve hin und zurück. Im letzteren Falle hat die Bewegung des Punktes das Kennzeichen einer schwingenden Bewegung und dementsprechend Umkehrpunkte, in denen der Punkt momentan zur Ruhe kommt. Befinden sich zwei Punkte eines Gliedes gleichzeitig in Umkehrpunkten ihrer Bahnen, so ist das Glied in einer Grenzlage, denn durch die Bewegung zweier Punkte ist die komplane Bewegung einer starren Ebene und demnach des Kettengliedes völlig bestimmt. Da zwei Punkte des Gliedes die Bahngeschwindigkeit Null haben sollen, so folgt daraus, daß die Winkelgeschwindigkeit des Gliedes in einer Grenzlage Null sein muß. Es lassen sich daher Grenzlagen eines Gliedes gegen ein anderes Glied der Kette als solche definieren, in denen die Winkelgeschwindigkeit des Gliedes gegen jenes andere Glied momentan gleich Null ist. Das tritt nun im allgemeinen nur ein, wenn zwei Pole der Relativbewegungen dreier Glieder zusammenfallen, wie die folgende Betrachtung lehrt.

Es seien P_{hi} , P_{hk} , P_{ik} die Pole, ω_i^h , ω_k^h , ω_k^i die Winkelgeschwindigkeiten der Relativbewegungen dreier komplaner Ebenen, so besteht zufolge Nr. 33 (S. 56) die Beziehung (s. Fig. 125)

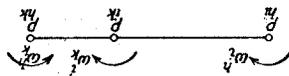


Fig. 125.

$$\overline{P_{hi}P_{ik}} \cdot \omega_i^h = \overline{P_{hk}P_{ik}} \cdot \omega_k^h,$$

vermittels deren entweder die Lage des Poles P_{ik} auf der Polgeraden bestimmt werden kann, wenn P_{hi} und P_{hk} gegeben

sind, oder aber die Winkelgeschwindigkeit ω_k^h und dann auch $\omega_k^i = \omega_i^h \pm \omega_k^h$, falls P_{ik} bekannt ist. Aus vorstehender Bezeichnung folgt nun:

Fällt P_{ik} mit P_{hk} zusammen, ist also $\overline{P_{hk}P_{ik}} = 0$, so wird notwendig

$$\omega_i^h = 0,$$

d. h. die Ebene G_i hat gegen G_h eine Grenzlage. Fällt dagegen P_{ik} mit P_{hi} zusammen, ist sonach $\overline{P_{hi}P_{ik}} = 0$, so wird

$$\omega_k^h = 0$$

sein müssen, und dann befindet sich die Ebene G_k gegen G_h in einer Grenzlage.

Hierans geht hervor, daß das Zusammenfallen von zweien der drei Pole der Relativbewegungen dreier komplaner Ebenen im allgemeinen als das Kennzeichen der Grenzlagen angesehen werden kann. Auf die Glieder einer zwangsläufigen Kette angewandt erhalten wir hieraus den Satz: Fällt der Pol der Relativbewegung zweier Glieder zusammen mit einem der Pole dieser Glieder gegen ein drittes Kettenglied, so befindet sich eines der ersteren gegen das dritte in einer Grenzlage.

An diesem Satze ändert sich nichts, wenn einer der drei Pole dauernd im Unendlichen liegt. Es ist nur zu beachten, daß das Zusammenfallen eines Poles mit einem unendlich fernen Pole nur eintreten kann, wenn ersterer in derselben Richtung ins Unendliche rückt, in der sich der andere im Unendlichen befindet.

Ein Beispiel soll das Gesagte erläutern.

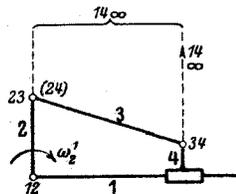


Fig. 126.

In der beistehend skizzierten Schubkurbelkette (s. Fig. 126) ist die Lage der Glieder so gewählt, daß der Pol 13 des Gliedes 3 gegen 1 in das Unendliche fällt. In dieser Lage fällt der Pol 24 momentan mit dem Gelenkpunkt 23 zusammen und der Pol 13 mit dem dauernd im Unendlichen liegenden Pol 14 ∞ des Gliedes 4 gegen 1, weil die beiden letz-

teren Glieder durch ein Schiebepaar verbunden sind. Die Richtung, in der 13 ins Unendliche rückt, ist dann die senkrecht zur Schubrichtung, also die, in der 14 ∞ liegt. Nach dem Vorhergehenden ist daher

$$\omega_3^4 = 0,$$

d. h. die Glieder 3 und 4 bewegen sich momentan wie ein einziges starres Glied, das gegen 1 eine Schiebung ausführt; ferner befindet sich das Glied 3 gegen 4 in einer Grenzlage, wie man auch unmittelbar leicht erkennt. Dasselbe Ergebnis schließt man nach dem Vorhergehenden aus dem Umstande, daß in der gezeichneten Lage der Glieder der Pol 24 mit 23 zusammenfällt.

Zugleich erweist das behandelte Beispiel, daß die auf S. 59 gezogene Folgerung: Fallen zwei der drei Pole dreier komplaner Ebenen ins Unendliche, so ist das auch mit dem dritten der Fall, eine Ausnahme erleidet, sobald die unendlich fernen Pole zusammenfallen, bzw. in derselben Richtung im Unendlichen liegen. Denn dann bleibt ein Pol (hier 34) und somit auch die Polgerade im Endlichen, während im allgemeinen die letztere zur unendlich fernen Geraden wird, auf der die Pole getrennt liegen.

Der Umstand, daß die Grenzlagen von Kettengliedern durch das Zusammenfallen entsprechender Pole gekennzeichnet sind, ist von besonderem Vorteil für die bezüglichen Untersuchungen an Getrieben, indem man als zwei der drei in Frage kommenden Glieder das ruhende und das treibende Glied wählt, während als drittes jedes übrige in Frage kommen kann. Das ist insofern nicht unwesentlich, als sich hierbei nicht nur für das getriebene, sondern auch für das treibende Glied Grenzlagen ergeben können, die das Bewegungsgebiet des letzteren und damit des ganzen Getriebes beschränken.

So wird z. B. in der durch Fig. 127 dargestellten sechsgliedrigen Kette durch die Glieder 5 und 6 das Bewegungsgebiet der Schwingkurbelkette, die aus den Gliedern 1, 2, 3 und 4 besteht, ganz erheblich eingeschränkt.

Würden die Glieder 5 und 6 größere Längen haben, so könnte die Kurbel 2 einen vollen Umlauf vollziehen und dementsprechend die Schwinge 4 zwischen den mit *i* und *a* bezeichneten Lagen pendeln. Bei den gewählten Maßen dagegen kann die Kurbel 2 nur zwischen den beiden Lagen schwingen, die in der Figur mit $23'$, bzw. $23''$ bezeichnet sind, und demgemäß 4 zwischen $34'$ und $34''$, weil in diesen beiden Lagen die Glieder 5 und 6 in eine Gerade fallen, bzw. die Gelenkpunkte 25 und 46 sich in einem Maximum ihrer Entfernung befinden. Und es leuchtet ohne weiteres ein,

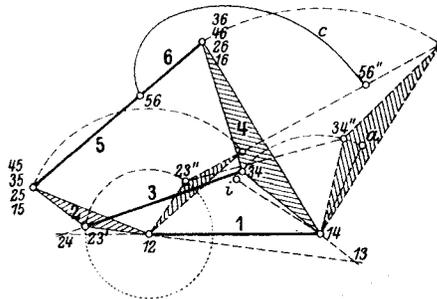


Fig. 127.

daß man das Bewegungsgebiet der Kettenglieder auf ein unendlich kleines beschränken könnte, wenn man die Gelenkpunkte 25 und 46 im Minimum ihrer Entfernung durch zwei Glieder 5 und 6 gelenkig verbinden würde, deren Längen zusammen jenem Minimum gleich sind.

Die in Fig. 127 dargestellte Kette hat in ihren beiden Grenzlagen das Besondere, daß mit Ausnahme von den Polen 13 und 24 alle übrigen Pole mit zwei Gelenkpunkten zusammenfallen, und zwar 15, 35 und 45 mit 25, 16, 26 und 36 mit 46. Hieraus geht hervor, daß die Winkelgeschwindigkeiten der Relativbewegungen der 4 Glieder des Gelenkviereckes, nämlich ω_2^1 , ω_3^1 , ω_4^1 , ω_3^2 , ω_4^2 und ω_4^3 , Null sein müssen, also letzteres sich momentan wie ein starres Gebilde bewegt.

42. Verzweigungs- und Wechsellagen.

Wie schon bei dem durchschlagenden Gelenkviereck in Nr. 37 hervorgehoben wurde, treten Verzweigungslagen in kinematischen Ketten allgemeiner Art, d. h. mit willkürlichen Abmessungen der Glieder nicht auf, sondern nur in solchen, deren Abmessungen bestimmte Bedingungen erfüllen. Kennzeichnend für die Verzweigungs-

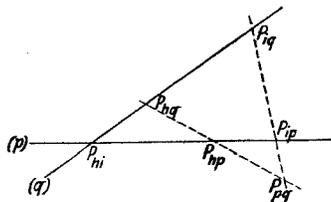


Fig. 128.

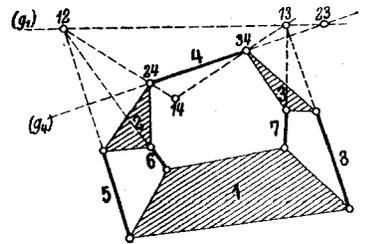


Fig. 129 a.

lagen ist, daß die Polgeraden zweier Ebenen gegen zwei dritte Ebenen zusammenfallen, ohne daß entsprechende Pole zusammenfallen. Den Ebenen E_h , E_i und E_p sei die Polgerade (p), den Ebenen E_h , E_i und E_q die Polgerade (q) zugeordnet (s. Fig. 128), dann schneiden sich die beiden Polgeraden im allgemeinen nach dem Schema

$$\begin{array}{l} hp - ip \\ hq - iq \end{array} > hi$$

in dem Pol P_{hi} , der damit eindeutig bestimmt wird. Fallen beide Geraden in eine zusammen, so läßt sich P_{hi} auf diesem Wege nicht mehr bestimmen und es bedarf der Berücksichtigung der Krümmungsverhältnisse der Bahnen, um die Ermittlung der Lage des Poles P_{hi}

zu ermöglichen. Um ein Beispiel für ein derartiges Vorkommnis anzuführen, werde die achtgliedrige Gelenkkette Fig. 23c benutzt, für welche die Bestimmung der Pole für die Relativbewegungen der Glieder 1, 2, 3, und 4 in Fig. 129a durchgeführt ist. Die beiden Polgeraden (g_1) und (g_4) schneiden sich im Pol 23; ferner ist die Lage des Poles 14 nach dem Schema

$$\begin{matrix} 12 - 24 \\ 13 - 34 \end{matrix} > 14$$

eindeutig bestimmt. Hat aber die Kette entsprechende Abmessungen, so kann der in Fig. 129b dargestellte Fall eintreten, daß die Geraden (g_1) und (g_4) zusammenfallen, und dann wird nicht nur die Lage des Poles 23, sondern auch die von 14 unbestimmt. Es läßt sich nun nachweisen, daß in diesem Falle ähnlich, wie bei dem durchschlagenden Gelenkviereck für jeden der beiden Pole sich zwei verschiedene Lagen ergeben, und daß die Bewegung dann eine Unstetigkeit erleidet, wenn der Pol aus der einen Lage in die andere überspringt. Für das Glied 4 z. B. bedeutet das, daß der Pol 14 seine Lage sprungweise wechselt, und die Drehung des Gliedes 4 gegen 1 in der Verzweigungslage plötzlich in eine ganz andere übergehen kann. Aus diesem Grunde müssen Verzweigungsanlagen in Getrieben vermieden werden, und das ist durch entsprechende Abänderung einzelner Abmessungen leicht zu erreichen.

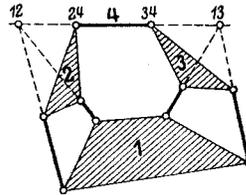


Fig. 129b.

In noch höherem Maße gilt letzteres von den Wechsellagen, wie sie in dem Falle des gleichschenkligen durchschlagenden Gelenkviereckes gekennzeichnet wurden. Man hat ja zur Vermeidung des Übelstandes, daß die Zahl der bewegten Glieder in einer Wechsellage sich ändert, verschiedene Hilfsmittel, wie z. B. den Überschuß der Kette durch niedere oder höhere Elementenpaare; indes dürfte es in den Fällen der Anwendung immer möglich sein, Ketten zu finden, die die geforderten Bewegungsbedingungen erfüllen, ohne eine Wechsellage aufzuweisen.

Treten in einer Kette mehrere Wechsellagen auf, so kann es sogar vorkommen, daß bei dem Zusammenfallen solcher Lagen die Kette in einer derartigen mehrfachen Wechsellage ihre Zwangsläufigkeit verliert. Ein Beispiel zeigt Fig. 130. Die sechsgliedrige Kette kann in der Wechsellage in eine offene dreigliedrige Gelenkkette übergehen, in der die Glieder 1 und 2, 3 und 4, 5 und

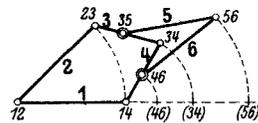


Fig. 130.

6 je ein Gliederpaar bilden, das sich wie ein starres Gebilde bewegt, und zwar um die zusammenfallenden Gelenkachsen 14 und 23, bzw. 35 und 46 gegen das andere Paar dreht. Eine dreigliedrige Kette mit zwei Drehpaaren ist aber nicht zwangläufig.

Neuntes Kapitel.

Die Synthese der Mechanismen und Getriebe.

43. Ziele und Bedingungen der Synthese.

Unter der Synthese der Mechanismen und Getriebe wollen wir die Aufsuchung neuer Mechanismen und Getriebe verstehen, deren Zweck durch bestimmte Bewegungen ihrer Glieder erreicht wird. Das Ziel der Synthese ist demnach, einen Mechanismus so anzuordnen und zu bemessen, daß die gegenseitigen Bewegungen seiner Glieder den Verlauf nehmen, wie ihn der Zweck des Mechanismus oder Getriebes erfordert. Aufgabe der Theorie hierbei ist es, aus den wissenschaftlichen Ergebnissen der Bewegungslehre diejenigen Sätze und Regeln abzuleiten, welche die Erreichung des genannten Zieles ermöglichen, wobei alle nicht phoronomischen Gesichtspunkte, wie z. B. dynamische und technologische, ausgeschlossen bleiben sollen. In dieser Hinsicht ist noch viel zu tun, so entwickelt auch die Theorie der komplizierten Bewegungen starrer Ebenen und der kinematischen Ketten in der Gegenwart ist. Denn letztere hat sich in der Hauptsache auf die Analyse der Bewegungsvorgänge erstreckt, während synthetische Fragen und Aufgaben nur wenig berührt wurden. Im folgenden sollen nun gerade diese aufgenommen und zum Teil bearbeitet werden, um hierdurch wenigstens zu einigen Sätzen und Regeln allgemeinerer Art zu gelangen. Die Gesichtspunkte, die den nachstehenden Ausführungen zugrunde gelegt wurden, führen auf gewisse phoronomische Forderungen an die Mechanismen, aus denen die Bedingungen hervorgehen, denen die Abmessungen der Glieder der Mechanismen genügen müssen, falls jene Forderungen erfüllt werden sollen.

Bei der Aufsuchung neuer Mechanismen kommt es, unabhängig von ihrem Zweck, zunächst darauf an, daß einzelne Glieder des Mechanismus gegen das ruhende oder ein anderes Glied bestimmte Bewegungen vollziehen, die von der Bewegung des treibenden Gliedes abhängig sind. Diese Abhängigkeit wird bedingt durch die Zwangläufigkeit der gegenseitigen Bewegungen der Glieder des Mechanismus; letzterer muß sonach aus einer zwangläufigen kinematischen Kette hervorgehen. Aus dieser Forderung der Zwang-

läufigkeit allein schon ergeben sich bestimmte Regeln, auf die weiterhin eingegangen werden soll.

Ferner wird an die Bewegungen der Kettenglieder häufig die Anforderung gestellt, daß ein Glied bestimmte Lagen gegen das ruhende einnehme, wenn ein anderes sich in gegebenen Stellungen befindet. Dieser Forderung läßt sich verhältnismäßig einfach genügen, wenn die Anzahl der Lagen, die einander in diesem Sinne zugeordnet sein sollen, drei nicht übersteigt; sie ist aber auch erfüllbar bis zu fünf Lagen.

Was endlich die Bewegungsvorgänge selbst anlangt, also Bahnen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen betrifft, so werden häufig Bedingungen gestellt, die entweder streng oder nur näherungsweise erfüllt werden sollen. In den seltensten Fällen werden bestimmte Bahnen gefordert, wie z. B. geradlinige, oder Kreisbahnen. Meist bestehen die bezüglichen Forderungen darin, daß die Bahnen an bestimmten Stellen bestimmte Eigenschaften haben sollen. Einer derartigen Forderung läßt sich, falls sie nur innerhalb des Möglichen liegt, meist streng entsprechen. Weniger gilt letzteres von den Geschwindigkeiten und Beschleunigungen geführter Punkte, wobei es aber nicht auf absolute Werte der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen ankommt, sondern auf relative.

Im folgenden werden diese Forderungen im einzelnen behandelt und dann Wege angegeben, bzw. angedeutet, wie ihnen zu entsprechen ist, selbstredend innerhalb der Grenzen, wie sie durch die Entwicklung der bezüglichen Theorie zur Zeit als bekannt zu betrachten sind.

44. Die Forderung der Zwangläufigkeit.

Jeder Mechanismus, jedes Getriebe muß in erster Linie zwangläufig beweglich sein, also aus einer zwangläufigen kinematischen Kette hervorgehen. Es ist wichtig, daß diese Bedingung erfüllt werden kann ohne jede Rücksicht auf die Abmessungen der Glieder. Es genügt, die Anzahl n der Glieder einer kinematischen Kette, die der in letzterer auftretenden höheren Elementenpaare h und die der niederen g so zu wählen, daß der Bedingungsgleichung der Zwangläufigkeit I^* (S. 27) genügt und zugleich den Einschränkungen für die niederen Elementenpaare auf S. 23 entsprechen wird. Die Bedingungsgleichung I^* hat nur ganzzahlige Lösungen für n , g und h , wodurch schon eine Einschränkung bezüglich der in Frage kommenden Ketten verursacht wird. Eine weitere wird vielfach dadurch bedingt, daß h nicht ganz beliebig ist, sondern die Anzahl der selbstständigen höheren Elementenpaare durch den Zweck des Mechanismus vorgeschrieben wird. Durch letzteren wird endlich auch

noch die Mindestzahl der Elemente, die in einem Kettengliede auftreten müssen, zumeist bestimmt sein, so daß man hieraus unter Benutzung der Folgerungen auf S. 16 und S. 27 einen Schluß auf die Mindestzahl der Kettenglieder ziehen kann. Allerdings ist damit die erforderliche kinematische Kette noch nicht bestimmt, denn es gibt, wie die Beispiele der sechs- und achtgliedrigen Gelenkketten gezeigt haben, bei denselben Werten für n , g und h noch immer eine ganze Gruppe von Ketten, die infolge der Anordnung der Elementenpaare zwischen den Gliedern auf ganz verschiedenartige Bewegungsvorgänge führen. Das ist aber an sich kein Nachteil, da die Zwecke des Mechanismus unter Umständen gewisse Anordnungen von vornherein ausschließen, während andere wieder sich zufolge von dynamischen und technologischen Gesichtspunkten als ungeeignet erweisen. So bleibt dann meist eine kleinere Anzahl von Ketten übrig, für die n einen möglichst kleinen Wert hat und die dann für den Zweck des Mechanismus sich verschieden eignen werden. An dem Beispiel der Ventilsteuerungen für Dampfmaschinen mag der vorstehende Gedankengang noch näher erläutert werden.

Das Einlaßventil wird nur während der Einströmung des Dampfes in den Zylinder gehoben, also durch den Steuerungsmechanismus in Bewegung gesetzt; während der übrigen Zeit einer vollen Umdrehung der Hauptwelle der Dampfmaschine bleibt es in Ruhe. Sonach bedarf es eines Mechanismus, der aus einer Kette mit un stetigem Bewegungsvorgang abzuleiten ist. Wir betrachten zunächst den Mechanismus, der während der Hebung des Ventiles tätig ist; für diesen sind folgende Gesichtspunkte maßgebend. Das Ventil führt beim Hub eine geradlinige Schiebung gegen den Zylinder, also gegen das ruhende Maschinengestell aus; es ist folglich durch ein Schiebepaar mit letzterem zu verbinden. Der Antrieb zu dieser Bewegung erfolgt von der Hauptwelle der Dampfmaschine, die durch ein Drehpaar mit dem Maschinengestell verbunden ist. Endlich bedarf es noch der beweglichen Verbindung eines Gliedes des Mechanismus mit dem Regulator; diese wird zumeist durch ein Drehpaar bewirkt. Das Maschinengestell als Glied der gesuchten zwangläufigen kinematischen Kette enthält sonach mindestens $i=3$ Elemente von niederen Paaren, und da wir (S. 16) bewiesen haben, daß $\max(i) = \frac{n}{2}$ ist, so folgt umgekehrt bei gegebenem i

$$\min(i) = 2i,$$

also hier

$$n \geq 6.$$

Es kommt nun weiter in Frage, ob die Kette eine Umschlußpaarkette ($h=0$) oder eine höhere Elementenpaarkette sein soll. Wir wollen beide Möglichkeiten erörtern.

Wählen wir zunächst eine Umschlußpaarkette, so folgt für diese mit $n=6$ aus dem Früheren, daß $g = \frac{3}{2}n - 2 = 7$ ist, und da es nur die beiden sechsgliedrigen Ketten Fig. 21a und 21b gibt, so würde nur zwischen diesen zu wählen sein. Nun enthält die Kette 21b nur ein Gelenkviereck; die Abhängigkeit der Bewegungen ist folglich nicht so groß, wie in der anderen Kette, in der zwei Gelenkvierecke auftreten. Wir wählen folglich die Kette 21b, in der wir eines der Drehpaare durch ein Schiebepaar ersetzen, wodurch die Zwangläufigkeit der Kette nicht geändert wird. Eines der ternären Glieder wählen wir zum ruhenden Maschinengestell 1 und das binäre Glied 2 zum treibenden (s. Fig. 131). Das ternäre Glied 3, welches mit 2 durch das Drehpaar 23 verbunden ist, werde durch das binäre Glied 4 mit dem Regulatorhebel beweglich verbunden, und da letzterer während des normalen Ganges der Maschine in Ruhe ist, so haben wir das Drehpaar 14 ebenfalls in Ruhe, also dem Glied 1 angehörig zu betrachten. Somit bilden die vier Glieder 1, 2, 3 und 4 das einzige Gelenkviereck 12, 23, 34, 14 dieser Kette. Mit 3 ist die Stange 5 gelenkig verbunden, welche zur Hülse 6

führt, die während der Öffnung des Ventils mit diesem starr verbunden zu denken ist. Dies wird dadurch erreicht, daß diese Hülse auf der Ventilstange gleiten kann und infolge eines Anschlages auf letzterer sie mitnimmt. Kommt dann das Ventil bei seiner Abwärtsbewegung auf den Sitz, dann kann sich gleichwohl die Hülse weiter bewegen und die zugrunde liegende Kette bleibt dieselbe sechsgliedrige. Wie man die Abmessungen der Kettenglieder zu wählen hat, um den Zweck der Steuerung zu erreichen, soll weiterhin dargelegt werden. Ob es aber möglich ist, hierbei auch gewissen dynamischen Anforderungen, wie z. B. der Vermeidung von Stößen usw. zu entsprechen, ist eine Frage, auf die nicht näher eingegangen werden soll. Jedenfalls haben die bekannten Ventilsteuerungen ohne höhere Elementenpaare, wie z. B. die beiden von Collmann (D.R.P. Nr. 2714 und 14437) eine größere Zahl von Gliedern, nämlich $n=8$, bzw. $n=10$.

In vieler Hinsicht vorteilhafter für den Zweck der Ventilsteuerungen sind die aus HEP-Ketten abgeleiteten Mechanismen, da die Anordnung und Gestalt der höheren Elementenpaare, sowie der Kettenschluß der letzteren einer größeren Anzahl von Be-

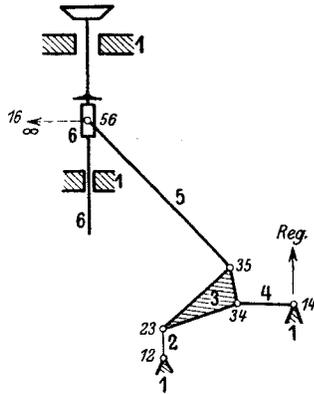


Fig. 131.

dingungen zu genügen erlaubt. Was zunächst die HEP-Ketten selbst anlangt, die für den Zweck der Ventilsteuerungen in Frage kommen, so mögen in nachstehender Zusammenstellung die Ketten angeführt werden, welche aus den ganzzahligen Lösungen der Bedingungsgleichung I* der Zwangläufigkeit hervorgehen für den Fall, daß $h \leq 3$ und $n \leq 8$ ist.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
$h = \dots$	1	1	1	2	2	2	3	3	3
$n = \dots$	3	5	7	4	6	8	3	5	7
$g = \dots$	2	5	8	3	6	9	1	4	7

Von diesen neun Ketten kommen die dreigliedrigen I und VII nicht in Frage, weil sie eine Berücksichtigung der Regulierung ausschließen. Die übrigen Ketten sind jedoch zumeist bei Ventilsteuerungen verwendet worden, so z. B. die Ketten V, VI und VIII bei Schwingdaumensteuerungen, die Ketten II und III bei Wälzhebelsteuerungen usf. Auf sie soll nicht näher eingegangen werden, da es ja ein leichtes ist, durch Analyse einer jeden derartigen Steuerung die Kette abzuleiten, aus der der Mechanismus hervorgegangen ist (vgl. Kap. 2). Nur mag erwähnt werden, daß eine jede Rolle die Zahl der beweglichen Glieder um 1, die Zahl h der unselbständigen Elementenpaare um 2 vermehrt, ferner daß die als Wälzhebel bezeichneten Paare als unselbständige höhere Elementenpaare zu betrachten sind, da der Bewegungsvorgang derselbe bleibt, ob der eine Hebel auf dem anderen rollt oder nur gleitet. Der letztere Fall ist der allgemeine, da die beiden Hüllkurven des höheren Elementenpaares dann ganz willkürlich gewählt werden können, während im ersten Falle die eine der beiden Kurven völlig bestimmt ist durch die Wahl der anderen und die Bedingung des Rollens; es ist dann streng genommen die Kette zu einer übergeschlossenen geworden.

Im allgemeinen kann die Frage nach der Kette, welche einem Mechanismus zugrunde zu legen ist, nicht in bestimmter oder gar eindeutiger Weise beantwortet werden. Vielmehr hängt die Wahl der Kette meist von Umständen ab, die weniger phoronomischer, als dynamischer und technologischer Natur sind. Jedenfalls wird man, nachdem die Frage entschieden ist, ob in der Kette höhere Elementenpaare auftreten dürfen oder nicht, mit einer Kette von möglichst kleiner Gliederzahl auszukommen suchen, und erst dann zu einer mit höherer übergehen, wenn es sich ergeben sollte, daß es nicht möglich ist, den Bewegungs- und sonstigen Bedingungen mit einer kleineren Zahl von Gliedern zu genügen. Und da ferner bei gegebener Gliederzahl mehrere Ketten möglich sind, so muß in

jedem einzelnen Falle ermittelt werden, welche der Ketten sich am besten eignet, wobei zu beachten, daß es um so eher möglich ist, gestellten Bewegungsbedingungen durch eine Kette zu entsprechen, je kleiner die Anzahl der in ihr auftretenden Gelenkvierecke ist.

45. Die Forderung bestimmter Lagen.

Eine häufig wiederkehrende Aufgabe bei der Konstruktion von Mechanismen ist die, die Abmessungen der Glieder so zu bestimmen, daß ein gewisses Glied des Mechanismus zwei oder mehr bestimmte Lagen gegen das ruhende Glied einnimmt, wenn ein anderes gegebene Lagen hat, wie z. B. der Schieber oder das Einlaßventil einer Kolbendampfmaschine, wenn der Kolben gegebene Lagen (Beginn und Ende der Einströmung des Dampfes) hat. Derartige Lagen zweier Glieder des Mechanismus wollen wir der Kürze halber einander zugeordnete Lagen nennen.

Die Lösung der Aufgabe ist wesentlich abhängig von der Art der beweglichen Verbindung zwischen den beiden Gliedern. Wir wollen sie hier durchführen unter der Annahme, daß zwischen den beiden Gliedern nur ein Glied eingeschaltet werde, das durch je ein Drehpaar mit den beiden andern Gliedern verbunden wird. Ferner wollen wir zunächst annehmen, daß die beiden Glieder des Mechanismus nur zwei einander zugeordnete Lagen einnehmen sollen.

Unter diesen beiden Annahmen läßt sich die fragliche Aufgabe wie folgt aussprechen: Es seien E_1' und E_1'' zwei gegebene Lagen eines Gliedes, bzw. einer Ebene E_1' , E_2' und E_2'' die diesen zugeordneten Lagen eines Gliedes, bzw. einer Ebene E_2 , wobei zu beachten, daß die letzteren Lagen ebenfalls ganz willkürlich gewählt werden sollen; wir suchen den Punkt C_1 auf der Ebene E_1 , welcher mit einem gegebenen Punkte C_2 auf E_2 durch ein weiteres Glied (eine weitere Ebene) mittels entsprechender Drehpaare in beiden Punkten beweglich zu verbinden ist derart, daß die Ebene E_2 in die Lagen E_2' bzw. E_2'' kommt, wenn sich E_1 in den Lagen E_1' bzw. E_1'' befindet. Mit anderen Worten: es ist C_1 so zu bestimmen, daß $C_1''C_2'' = C_1'C_2'$. Zwecks Lösung dieser Aufgabe suchen wir die relative Lage (C_2'') des Punktes C_2 gegenüber der Lage E_1' der Ebene

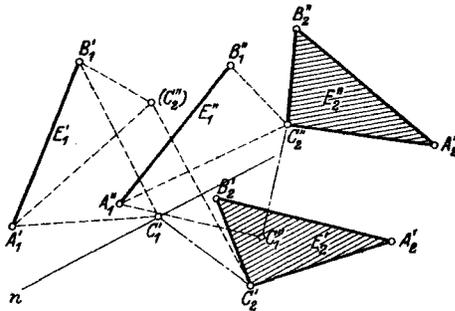


Fig. 132.

E_1 auf, und zwar, indem wir (s. Fig. 132) benutzen, daß die Lagen der Ebenen E_1 und E_2 durch die je zweier Punkte derselben, nämlich A_1 und B_1 bzw. A_2 und B_2 , bestimmt sind. Denn dann brauchen wir nur

$$\triangle A_1' B_1' (C_2'') \cong \triangle A_1'' B_1'' C_2''$$

zu konstruieren, um die gesuchte relative Lage (C_2'') des Punktes C_2 gegen E_1' zu erhalten. Der gesuchte Punkt C_1 in der Lage C_1' muß dann von C_2' ebenso weit entfernt sein wie von (C_2''); er muß sonach auf der sogenannten Mittelsenkrechten n der beiden Punkte C_2' und (C_2'') liegen, d. i. auf einer Geraden, welche die Strecke $\overline{C_2' (C_2'')}$ in deren Halbierungspunkte unter einem rechten Winkel trifft. Jeder Punkt C_1 der Ebene E_1 , der auf n liegt, entspricht sonach der gestellten Forderung, daß er, mit dem Punkte C_2 durch eine starre Ebene (Stange) gelenkig verbunden, die Ebene E_2 aus der Lage E_2' in die Lage E_2'' überführt, wenn sich E_1 von E_1' nach E_1'' bewegt.

Wenden wir diese Konstruktion auf ein Gelenkviereck (s. Fig. 133) an, in dem die beiden Kurbeln E_1 und E_2 gegen den Steg $B_1 B_2$ zwei einander zugeordnete Lagen haben sollen und ist C_2 der Punkt auf E_2 , der mit einem Punkte C_1 auf E_1 entsprechend durch eine

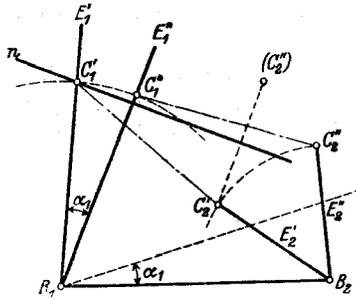


Fig. 133.

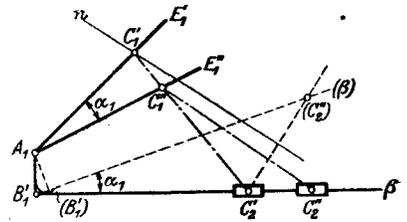


Fig. 134.

Stange (die Koppel) verbunden werden soll, so findet man zunächst (C_2'') hier einfacher, indem man das Dreieck $B_1 B_2 C_2''$ um den Winkel α_1 dreht, welcher die Ebene E_1 aus der Lage E_1'' in die E_1' zurückführt. Die Mittelsenkrechte n der beiden Punkte C_2' und (C_2'') schneidet dann auf der Kurbel E_1' den gesuchten Punkt C_1' aus, der mit C_2' durch die Stange $C_1' C_2'$ gelenkig zu verbinden ist, um die Zuordnung beider Kurbellagen zu bewirken. Selbstredend könnte aber jeder andere Punkt der Kurbel E_1 , der auf n gelegen ist, hierzu verwendet werden.

Bei der Schubkurbelkette wird die Konstruktion noch einfacher, wenn es sich um gegebene Lagen C_2' und C_2'' des Schiebers handelt (s. Fig. 134), die zwei bestimmten Kurbelstellungen E_1' und E_1'' zu-

geordnet sein sollen. Wir drehen die Stange (β), auf welcher der Schieber gleitet, um A_1 als Drehpunkt um den Winkel α_1 , welchen die beiden Kurbellagen einschließen, und erhalten, indem wir $(B_1')(C_2'')$ $= B_1'C_2''$ machen, sofort die gesuchte relative Lage des Punktes C_3 gegen E_1' . Die Mittelsenkrechte n zu C_1' und (C_3'') schneidet dann die Kurbel E_1' in C_1' , und $\overline{C_1'C_2'} = \overline{C_1''C_2''}$ ist die gesuchte Koppel der Schubkurbelkette.

Die mitgeteilte Konstruktion läßt sich in vielen Fällen mit Vorteil verwerten, insbesondere bei Schieber- und Ventilsteuerungen. Auch bedingt es in letzterem Falle keinen wesentlichen Unterschied der Konstruktion, wenn derselben Lage des einen Punktes gegen das ruhende Glied zwei verschiedene Lagen des anderen Gliedes zugeordnet werden. Suchen wir z. B. in der durch die Fig. 131 dargestellten Ventilsteuerung einen Punkt C_1 auf dem Gliede 5 (s. Fig. 135), welcher mit einem Punkte der Ventilstange 6 durch eine Stange 5 so gelenkig zu verbinden ist, daß zwei bestimmte Lagen der Steuerwelle, bzw. der Kurbel 2 sich dieselbe Lage von 6 (nämlich bei Öffnung und Schluß des Ventils am Anfang und Ende des Dampfeintrittes in den Zylinder) zuordnet, so verfahren wir in der gleichen Weise wie vorher, indem wir zunächst die der Kurbelstellung 2'' zugeordnete Lage der Koppel 3 in dem Gelenkviereck 12, 23, 34, 14 ermitteln, und dann, da hier die Lage 56'' des willkürlich auf 6 angenommenen Gelenkpunktes 56 mit der Lage 56' zusammenfällt,

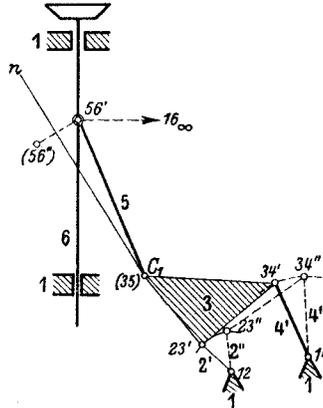


Fig. 135.

$$\triangle 23'34'(56'') \cong \triangle 23''34''56'$$

konstruieren. Auf der Mittelsenkrechten n beider Punkte 56' und (56'') wird dann der Punkt C_1 , d. i. der Gelenkpunkt 35, willkürlich gewählt.

Es leuchtet ohne weiteres ein, daß die mitgeteilte Konstruktion auf die Zuordnung dreier Lagen zweier Kettenglieder ausgedehnt werden kann. Denn die Zuordnung zweier Lagen bestimmt eine Gerade, die Mittelsenkrechte n , auf der der gesuchte Punkt beliebig gewählt werden kann; indem man diese Mittelsenkrechte sowohl für die erste und zweite, als auch die zweite und dritte (oder erste und dritte) Lage bestimmt, erhält man im Schnittpunkt

beider Mittelsenkrechten den Punkt, der mit dem gegebenen Punkte des anderen Gliedes durch eine starre Stange gelenkig zu verbinden ist, um die Zuordnung der drei Lagen beider Glieder herbeizuführen.

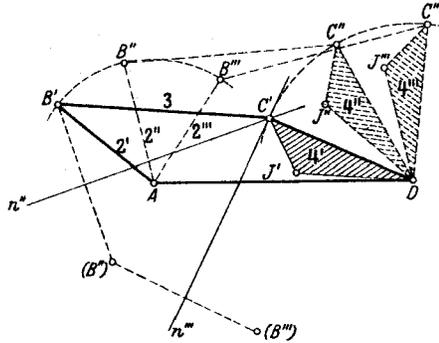


Fig. 136.

In Fig. 136 ist diese Konstruktion für ein Gelenkviereck durchgeführt, in dem den drei willkürlichen Lagen $2', 2'', 2'''$ der Kurbel 2 die ebenfalls ganz willkürlich gewählten Lagen $4', 4'', 4'''$ der Kurbel 4 zugeordnet sein sollen, und zwar sei B der auf 2 gegebene Punkt, welcher durch die Koppel 3 mit dem noch zu ermittelnden Punkt C des Gliedes 4 verbunden werden soll.

In dieser Absicht ermitteln wir wie vorher die relative Lage von B'' gegen $4'$, indem wir den Steg AD um D drehen, und zwar um den Winkel $J'DJ''$, so daß dann $4''$ nach $4'$ gelangt und B'' nach (B'') , oder, was auf dasselbe hinauskommt, indem wir

$$\triangle DJ'(B'') \cong \triangle DJ''B''$$

konstruieren; die Mittelsenkrechte der Punkte B' und (B'') sei n'' . Ferner ermitteln wir in der gleichen Weise die Lage des Punktes (B''') durch Drehung des Steges um den Winkel $J'''DJ'$, und zeichnen die Mittelsenkrechte n''' der Punkte (B'') und (B''') . Im Schnittpunkt C' von n'' und n''' liegt der gesuchte Punkt C , der mit B durch die Koppel 3 gelenkig verbunden die geforderte Zuordnung der beiden Kurbeln bewirkt.

Als weiteres Beispiel kann die Aufgabe dienen, den Punkt C_1 in Fig. 135 so zu bestimmen, daß die Eröffnung des Ventils einen gegebenen Betrag erreicht, also der Punkt $56'''$ von $56'$ eine gegebene Entfernung besitzt. Ferner sei u. a. auf die Kette Fig. 129a hingewiesen, welche sich oft angewandt findet, da in ihr die Koppeln 2 und 3 der beiden Gelenkvierecke durch die sie gelenkig verbindenden Stange 4 in mindestens drei ganz willkürlich gewählten Lagen einander zugeordnet werden können.

Die Zuordnung dreier Lagen zweier Glieder einer Kette durch die gelenkige Verbindung zweier Punkte mittels einer starren Stange ist für jeden beliebigen Punkt des einen oder anderen Gliedes möglich; mit anderen Worten: einer der beiden verbundenen Punkte kann ganz willkürlich angenommen werden. Daraus folgt einer-

seits, daß die Punkte beider Glieder in bestimmter Weise einander geometrisch zugeordnet sind, und das läßt sich zur Lösung von mancherlei hier sich bietenden Aufgaben verwerten. Andererseits aber, daß zur völligen Bestimmung der Lagen beider Punkte die Zuordnung von mehr als drei Lagen der zu verbindenden Glieder gefordert werden kann. Die bezüglichlichen Untersuchungen, welche zuerst — allerdings unter ganz anderen Gesichtspunkten — von Burmester¹⁾ durchgeführt worden sind, haben zu dem Ergebnis geführt, daß sich vier willkürliche Lagen beider Glieder einander zuordnen lassen, wenn der zu wählende Punkt auf einer durch diese vier Lagen völlig bestimmten Kurve 3. Ordnung liegt; diese Kurve wurde von Burmester Mittelpunktkurve genannt. Der zugeordnete Punkt des anderen Gliedes muß sich dann ebenfalls auf einer ganz bestimmten gleichartigen Kurve 3. Ordnung, der Kreispunktkurve, befinden. Ein Eingehen auf diese Kurven und ihre Konstruktion würde hier zu viel Raum erfordern; es sei deshalb auf das Lehrbuch der Kinematik von Burmester (S. 599 u. f.) verwiesen. Ferner haben die genannten Untersuchungen ergeben, daß sich auch fünf ganz willkürliche Lagen zweier Glieder in dieser Weise einander zuordnen lassen; in diesem Falle sind aber die Punkte in jedem der beiden Glieder ganz bestimmte und ihre Anzahl beträgt 4. Bezüglich der Ermittlung dieser 4 Punktpaare sei ebenfalls auf das genannte Lehrbuch der Kinematik von Burmester verwiesen.

Eine weitere, häufig vorkommende Aufgabe tritt uns an HEP-Ketten entgegen, und zwar ist es die, die Hüllkurven der höheren Elementenpaare so zu bestimmen, daß die Kettenglieder in einer größeren Anzahl von gegebenen Lagen einander zugeordnet werden. Die einfachste derartige Aufgabe bietet die dreigliedrige Kette Fig. 97 (S. 64) mit einem unselbständigen höheren Elementenpaar. In dieser können die Glieder 2 und 3 in einer beliebig großen Zahl von Lagen gegen das Glied 1 einander zugeordnet werden, und dies geschieht dadurch, daß die Hüllkurven c_2 und c_3 des höheren Elementenpaares entsprechend bestimmt werden. Letzteres ist auch dann immer möglich, wenn die eine der beiden Hüllkurven willkürlich gewählt wird (z. B. als Gerade oder Kreisbogen), vorausgesetzt, daß nicht weitere Anforderungen an die gegenseitige Bewegung beider Glieder

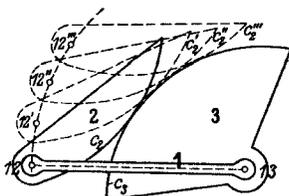


Fig. 137.

¹⁾ Civilingenieur 1876, Bd. 22, S. 597 und ferner: 1877, Bd. 23, S. 227 und 319.

bzw. Elemente gestellt werden, wie z. B. die des Rollens aufeinander. Wählt man nun z. B. c_2 willkürlich (s. Fig. 137), so findet sich die Kurve c_3 den gegebenen Lagen von c_2 gegen 1 entsprechend wie folgt. Wir zeichnen zunächst die gegebenen Lagen von 1 gegen 3, indem wir uns letzteres Glied in Ruhe denken, und darnach die Lagen des Gliedes 2 gegen 1 so, daß 2' die gegebene Lage gegen 1', 2'' die gegen 1'' usw. erhält. Auf diesem Wege finden wir die relativen Lagen von 2 gegen 3 und sonach auch die Lagen der Hüllkurve c_2 gegen 3. Es ist dann die Einhüllende dieser Kurven c_2 , c_2' , c_2'' usf. die gesuchte Hüllkurve c_3 , welche die Berührung der beiden Elemente in den gegebenen Lagen der Glieder 2 und 3 gegen 1 herstellt.

Die Konstruktion bleibt mit unwesentlichen Abänderungen die gleiche, wenn an die Stelle der Drehpaare 12 und 13 in vorstehender Kette Schiebepaare treten, wie das in den Ketten Fig. 99 und 100 der Fall ist.

Bei HEP-Ketten, in denen die Glieder mit höheren Elementen nicht in einem Kettengliede gelagert sind, sondern in verschiedenen, wie z. B. in den Wälzhebel-Ventilsteuerungen mit beweglichem Drehpunkt, verfährt man in ganz ähnlicher Weise, um die Hüllkurven eines höheren Elementenpaares so zu bestimmen, daß gegebene Lagen der Kettenglieder durch das Elementenpaar einander zugeordnet werden. Man wählt das Glied, in welchem das Element liegt, dessen Hüllkurve zu finden ist, als ruhendes und zeichnet dann die Kette in den gegebenen relativen Lagen, womit man auch die Lagen des Gliedes erhält, in dem sich die willkürlich gewählte Hüllkurve befindet. Die Einhüllende der Lagen dieser Kurve stellt die Lösung der Aufgabe dar. Gehört das eine der höheren Elemente an sich dem ruhenden Gliede an, wie zumeist in den erwähnten Steuerungen, so wird die Aufzeichnung der gesuchten Elementenhüllkurve ganz besonders einfach.

46. Die Forderung bestimmter Bahnen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen.

Bezüglich der Bahnen, welche die Punkte von Gliedern einer Kette gegen ein anderes Glied beschreiben, werden zwei wesentlich verschiedene Forderungen gestellt. Entweder soll die Bahn eine gewisse Besonderheit in ihrem Verlaufe an bestimmter Stelle haben, z. B. einen Wendepunkt oder einen Rückkehrpunkt. Beiden Forderungen kann leicht entsprochen werden. Im ersteren Falle braucht der Punkt nur auf einem gewissen Kreise zu liegen, der weiterhin noch besprochen werden soll, im letzteren auf der beweglichen Polkurve. Oder aber es soll die Bahnkurve über ihre ganze Länge in

bestimmter Weise verlaufen, bzw. eine bestimmte geometrische Gestalt haben, also z. B. eine Gerade, ein Kreis oder sonst eine Kurve sein. Dieser letzteren Forderung zu genügen ist im allgemeinen recht schwierig, denn es setzt die Kenntnis der Bahnkurven voraus, welche die Punkte des fraglichen Kettengliedes gegen das ruhende beschreiben, und die Abhängigkeit der Gestalt der Bahnen von den Abmessungen der Kettenglieder. In dieser Hinsicht fehlt es noch vielfach an den erforderlichen vorausgehenden Untersuchungen; nur für das Gelenkviereck und seine Sonderfälle liegen sie in der wünschenswerten Ausführlichkeit vor. Besonders die Bahnen der auf der Koppel des Gelenkviereckes liegenden Punkte, die sogenannten Koppelkurven, sind bezüglich ihrer Gestalt und des Einflusses der Längen der Glieder des Gelenkviereckes auf letztere so weitgehend und gründlich untersucht worden, daß die vorliegenden Ergebnisse alle in den Anwendungen auftauchenden Fragen zu beantworten vermögen.

Da die viergliedrigen Ketten besonders häufig verwendet werden, so ist es angezeigt, hier auf den Vorteil hinzuweisen, den unter Umständen die Anwendung des Satzes von Roberts (s. S. 34, Fig. 58 und 58a) mit sich bringt. Diesem Satz zufolge können zu jedem Gelenkviereck noch zwei weitere Gelenkvierecke gefunden werden, deren Koppelkurven die gleichen sind, wie die des ursprünglichen Gelenkviereckes. Denn wenn z. B. die Verbindung eines Gelenkviereckes, das den Bewegungsanforderungen gemäß bestimmt wurde, mit dem Maschinengestell in der gefundenen Lage aus Festigkeits- oder anderen Rücksichten unzweckmäßig ist, so läßt sich ohne Änderung des Bewegungsvorganges eines der beiden anderen Gelenkvierecke verwenden, welche der Satz von Roberts liefert.

Was ferner die Frage nach den Umschlußpaarketten anlangt, in denen einzelne Punkte geradlinige oder Kreisbahnen gegen ein Kettenglied beschreiben, so sei darauf hingewiesen, daß die Antwort hierauf in der Hauptsache durch die übergeschlossenen Gelenk-, bzw. Umschlußpaarketten gegeben wird, denn durch den Überschuß werden ja gewisse Punkte gezwungen, sich gegen bestimmte Kettenglieder auf Geraden oder Kreisen zu bewegen. Allerdings bestehen für die Abmessungen der Glieder derartiger Ketten eine Reihe von Beziehungen, durch die der Verwendungsbereich der Ketten eingeschränkt wird. Immerhin bleiben noch bei einzelnen dieser Ketten, wie z. B. der in den Fig. 57, 61, 63 und 65 dargestellten, noch verschiedene Abmessungen willkürlich wählbar, und diese können dann unter entsprechenden Verhältnissen so bestimmt werden, daß der technologische Zweck des Mechanismus erreicht wird. Natürlich können die Glieder, die den Überschuß

der Kette bewirken, bei der Ausführung weggelassen werden, da sie zur Erzielung der Zwangläufigkeit des Mechanismus unnötig sind.

Wie man bezüglich der Lagen und Bahnen von Gliederpunkten gewisse Anforderungen an einen zu konstruierenden Mechanismus stellen kann, so ist dies auch bezüglich der Geschwindigkeiten der Fall. Insbesondere häufig kommt die Aufgabe vor, einen Punkt in einem Kettengliede, der mit einem willkürlich gewählten Punkte eines anderen Gliedes durch eine starre Stange gelenkig verbunden

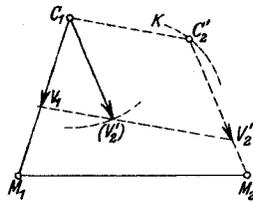


Fig. 138a.

werden soll, so zu bestimmen, daß die Geschwindigkeiten beider Punkte in einem gegebenen Größenverhältnis stehen. Die Lösung dieser Aufgabe wird sehr einfach bei dem Gelenkviereck; deshalb soll zunächst diese gegeben werden.

Es sei $M_1 C_1$ (s. Fig. 138a) der eine Arm des Gelenkviereckes und M_2 der Drehpunkt des anderen. Bezeichnet C_2' einen beliebigen Punkt auf dem letzteren Arm, so steht die senkrechte Geschwindigkeit V_2' von C_2' mit der von C_1 in dem bekannten Zusammenhang, daß die Gerade $V_1 V_2' \parallel C_1 C_2'$ ist. Wäre nun die Größe von V_2 gegeben und wir legen durch C_1 die Parallele zu $M_2 C_2'$, so müßte auf letzterer durch die Gerade $V_1 V_2'$ eine Strecke $C_1(V_2')$ abgeschnitten werden von der Größe V_2 . Umgekehrt würde C_2' sich als Schnittpunkt der Parallelen zu $C_1(V_2')$ durch M_2 und der Parallelen $C_1 C_2'$ zu $V_1(V_2')$ durch C_1 ergeben, wenn man die Strecke $C_1(V_2')$, die der Größe nach die gegebene Geschwindigkeit V_2 darstellt, in beliebiger Richtung an C_1 anträgt. Ändert man diese Richtung, so ergibt sich ein anderer Punkt für C_2 . Sonach findet sich als geometrischer Ort der Punkte C_2 eine Kurve k , die sich zeichnerisch einfach ermitteln läßt. Jeder Punkt von k entspricht der gestellten Anforderung an das gesuchte Gelenkviereck, d. h. wird er mit C_1 durch eine starre Stange gelenkig verbunden, so hat die Geschwindigkeit von C_2 in der gewählten Lage die gegebene Größe.

Hieraus ersieht man, daß man dem gesuchten Gelenkviereck noch eine weitere Bedingung auferlegen kann, z. B. die, daß die beiden Arme des Gelenkviereckes noch in je einer weiteren Lage einander zugeordnet sein sollen, oder, daß die Geschwindigkeiten von C_1 und C_2 in einer weiteren Lage von C_1 ein gegebenes Größenverhältnis haben. Im ersteren Falle braucht man nur die entsprechende Mittelsenkrechte zu konstruieren, auf der C_2 ebenfalls liegen muß, und diese schneidet die Kurve k in bestimmten Punkten, von denen jeder den beiden Bedingungen entspricht. Im zweiten

Falle dagegen wird man das angegebene Verfahren für die andere Lage von C_1 wiederholen und erhält dann wie vorher eine weitere Kurve k ; jeder der Schnittpunkte beider Kurven gibt eine Lösung der Aufgabe.

Die Übertragung dieser Lösung auf den allgemeinen Fall, daß C_1 und C_2 Punkte von irgend zwei Gliedern einer Kette sind, ist sehr leicht zu vollziehen. Es treten dann an Stelle der Punkte M_1 und M_2 die Pole beider Glieder gegen das ruhende Glied der Kette, während die Konstruktion der Kurve k die ganz gleiche bleibt. Ein geeignetes anschauliches Beispiel liefert wieder die Kette Fig. 129 a, in welcher der Gelenkpunkt 34 in der vorerwähnten Weise bestimmt werden kann, falls der Punkt 24 beliebig gewählt wurde.

Eine verwandte Aufgabe ist die, den Punkt C_2 so zu bestimmen, daß zwei Lagen zweier Glieder einander zugeordnet werden und das Verhältnis der Geschwindigkeiten der Punkte C_1 und C_2 in einer der beiden Lagen ein vorgeschriebenes ist, oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Geschwindigkeit von C_2 in einer der beiden Lagen eine gegebene Größe haben soll. Zur Lösung derselben benutzen wir zunächst, daß der Punkt C_2 (s. Fig. 138 b) auf der Nr. 45 bestimmten Mittelsenkrechten n_2 zu den Punkten C_1' und (C_1'') liegen muß. Ist nun P_1' der

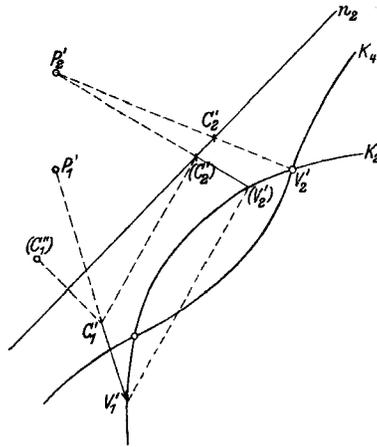


Fig. 138 b.

Pol des einen Gliedes in der ersten Lage, C_1' die entsprechende Lage des Punktes C_1 auf diesem Gliede, und $C_1'V_1'$ die gegebene senkrechte Geschwindigkeit von C_1' , bezeichnet ferner P_2' den Pol des anderen Gliedes in der zugeordneten Lage, und ist (C_2') ein beliebiger Punkt dieses Gliedes auf n_2 , so erhält man, da C_1 und C_2 durch eine starre Stange gelenkig verbunden zu denken sind, die entsprechende senkrechte Geschwindigkeit (V_2') des Punktes (C_2') durch Ziehen der Parallelen $V_1'(V_2')$ zu $C_1'(C_2')$; denn der Endpunkt (V_2') des genannten Vektors liegt auf dem Strahl $P_2'(C_2')$. Suchen wir die Punkte (V_2') für alle Punkte C_2 auf n_2 , so ersehen wir, daß sie einen Kegelschnitt k_2 bilden, denn die (V_2') ergeben sich als Schnittpunkte der Strahlen zweier projektiver Strahlbüschel, deren Träger P_2' , bzw. V_1' sind. Andererseits soll aber C_2' eine gegebene Geschwindigkeit V_2' besitzen; es liegen sonach die Punkte V_2' auf einer Kurve k_4 , die man er-

normalen der Bahn a , die sich im Krümmungsmittelpunkt K der Bahn schneiden. Errichten wir in P die Senkrechte PP_1 zu AP , so ist

$$\triangle KPP_1 \sim \triangle KAA'$$

und folglich

$$\overline{KP} : \overline{KA} = \overline{PP_1} : \overline{AA'}$$

Setzen wir zur Abkürzung $\overline{PA} = \varrho$, $\overline{PK} = r$ und $\overline{PP'} = d\sigma$, so ist

$$\overline{PP_1} = \overline{PP'} \cdot \cos \alpha = d\sigma \cdot \cos \alpha,$$

falls α den spitzen Winkel zwischen \overline{PA} und der Polkurvennormalen n bezeichnet. Beachten wir weiter, daß

$$\overline{AA'} = \varrho \cdot d\psi,$$

so folgt aus vorstehender Proportion

$$r : r + \varrho = d\sigma \cdot \cos \alpha : \varrho d\psi$$

oder

$$\cos \alpha \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\varrho} \right) = \frac{d\psi}{d\sigma}.$$

Liegt der Schnittpunkt K der beiden benachbarten Bahnnormalen nicht, wie in Fig. 139, auf verschiedenen Seiten von P , sondern auf derselben Seite wie A , wird also $\overline{AK} = \varrho - r$, so nimmt die vorstehende Gleichung die Form

$$\cos \alpha \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\varrho} \right) = \frac{d\psi}{d\sigma}$$

an. Beide Formen lassen sich in der gemeinsamen Gestalt

$$\cos \alpha \left(\frac{1}{r} \pm \frac{1}{\varrho} \right) = \frac{d\psi}{d\sigma}$$

vereinigen.

Das Verhältnis $\frac{d\psi}{d\sigma}$ hängt nicht von der Lage des Punktes A ab, denn $d\sigma$ ist das Bahnelement von m , bzw. μ , das bei dem Rollen von μ auf m abgewälzt wird. Es kann sonach hinsichtlich des geometrischen Zusammenhanges zwischen A und K

$$\frac{d\psi}{d\sigma} = \text{Const.}$$

gesetzt werden. Da

$$\frac{\cos \alpha}{\varrho} = \frac{1}{\delta}$$

die Gleichung eines Kreises durch A vom Durchmesser δ darstellt, der die Polkurven in P berührt (s. Fig. 140), ebenso

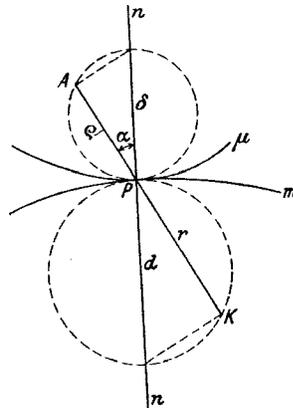


Fig. 140.

$$\frac{\cos \alpha}{r} = \frac{1}{d}$$

die Gleichung eines solchen Kreises durch K vom Durchmesser d , so besteht die Beziehung

$$\frac{1}{d} \pm \frac{1}{\rho} = \text{Const.},$$

Aus ihr geht hervor, daß jedem Punkt auf dem einen Kreis ein solcher auf dem anderen Kreis zugeordnet ist, also die beiden Kreise, bzw. ihre Durchmesser es ebenfalls sind. Man nennt deshalb die beiden Kreise einander konjugiert.

Beschreibt A augenblicklich einen Wendepunkt seiner Bahn, so wird $r = \infty$ und somit auch $d = \infty$. Die vorstehende Beziehung geht dann über in

$$\frac{1}{\delta_\infty} = \text{Const.},$$

oder, wenn wir $\delta_\infty = w$ setzen, in

$$\frac{1}{w} = \text{Const.}$$

Hieraus geht hervor, daß alle Punkte der Ebene, die augenblicklich Wendepunkte ihrer Bahnen beschreiben, auf einem Kreise liegen, der die Polkurven im Pol P berührt und den Durchmesser w hat. Man nennt ihn den Wendekreis, während die frühere Beziehung zwischen r und ρ , d. i. die Gleichung

$$\left(\frac{1}{r} \pm \frac{1}{\rho}\right) \cos \alpha = \frac{1}{w} \dots \dots \dots (1)$$

die Eulersche Gleichung genannt wird.

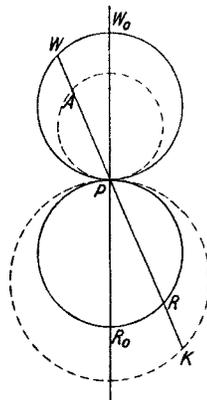


Fig. 141.

Der Strahl (s. Fig. 141) AP schneidet den Wendekreis in einem Punkte W , dem sogenannten Wendepunkte auf diesem Polstrahl, dessen Bahn hier eine Wendestelle hat, d. h. deren zugeordneter Krümmungsmittelpunkt im Unendlichen liegt. Es ist das der Punkt, dessen Bahnnormale $W'P'$ in der unendlich benachbarten Lage parallel zu WP wird. Hieraus folgt weiter für die Punkte der Ebene E auf dem Strahl AP , die innerhalb der Strecke PW , also innerhalb des Wendekreises liegen, daß die zugeordneten Krümmungsmittelpunkte K auf derselben

Seite des Strahles AP liegen. Oder anders ausgesprochen: Die Bahnen der Punkte der Ebene außerhalb des Wendekreises sind konkav, die innerhalb konvex gekrümmt gegen den Pol.

Die Polkurvennormale n schneidet den Wendekreis außer im

Pol noch in einem weiteren Punkte W_0 , der Wendepol genannt wird (s. Fig. 141). Dieser Punkt hat das Besondere, daß sein Bahnelement gleich und parallel dem Element $d\sigma$ der Polkurve m , also dem Bahnelement PP' des Poles P ist, weil die benachbarte Polkurvennormale $W_0'P' \parallel W_0P$ wird. Da nun

$$\overline{W_0W_0'} = \overline{PW_0} \cdot d\psi = w \cdot d\psi = d\sigma,$$

so erhält man für die Geschwindigkeit v_w des Wendepoles

$$v_w = \frac{d\sigma}{dt} = w \cdot \frac{d\psi}{dt} = w \cdot \omega,$$

falls $\omega = \frac{d\psi}{dt}$ die Winkelgeschwindigkeit der augenblicklichen Drehung der Ebene um den Pol bezeichnet. Andererseits ist $\frac{d\sigma}{dt}$ die Geschwindigkeit, mit der der Pol sich bewegt, die sogenannte Wechselgeschwindigkeit des Poles; sie findet sich sonach gleich und gleichgerichtet der Geschwindigkeit des Wendepoles.

Der Punkt der Ebene E , der augenblicklich mit P zusammenfällt, ist dadurch ausgezeichnet, daß in ihm auch der Krümmungsmittelpunkt seiner Bahn liegt, also der Krümmungsradius gleich Null ist. Das bedeutet, daß die Bahn dieses Punktes an dieser Stelle eine Spitze, auch Rückkehrpunkt genannt, besitzt. Es ist folglich die ruhende Polkurve m der geometrische Ort aller Rückkehrpunkte der Bahnen.

Für die unendlich fernen Punkte der Ebene E , für die also $\overline{PA} = \rho = \infty$, ergibt sich aus (1)

$$\frac{\cos \alpha}{r} = \frac{1}{w}$$

oder

$$r = w \cdot \cos \alpha.$$

Damit wird erkannt, daß der geometrische Ort der Krümmungsmittelpunkte der Bahnen, welche die unendlich fernen Punkte der Ebene E beschreiben, ein Kreis vom Durchmesser w des Wendekreises ist, der aber zu letzterem symmetrisch liegt (s. Fig. 141). Er deckt sich mit dem Wendekreis der umgekehrten Bewegung und wird Rückkehrkreis genannt, während der zu W_0 symmetrische Punkt R_0 der Rückkehrpol heißt.

Zwecks Ableitung einer einfachen Konstruktion der Krümmungsmittel-, bzw. Wendepunkte auf den Polstrahlen formen wir (1) in folgender Weise um. Wir führen den Krümmungshalbmesser $\overline{AK} = k$ der Bahn a des Punktes A ein, setzen demnach $r \perp \rho = k$, wodurch (1) in

$$\frac{k}{\rho \cdot r} = \frac{1}{w \cdot \cos \alpha} = \frac{1}{\overline{PW}}$$

übergeht. Beachtet man, daß $\overline{AW} = \pm(\overline{PA} - \overline{PW})$, so folgt mit $r = k \mp \rho$ hieraus

$$\overline{AW} = \frac{\rho^2}{k} \dots \dots \dots (2)$$

Diese Beziehung ermöglicht folgende einfache Konstruktion von K , wenn A , W und P gegeben sind: Man verbinde einen beliebig gewählten Punkt B außerhalb des Polstrahles (s. Fig. 142a und b)

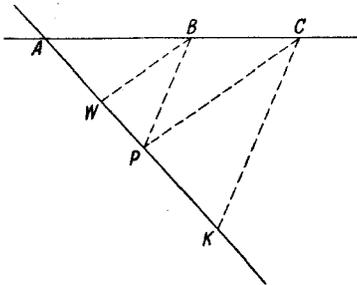


Fig. 142a.

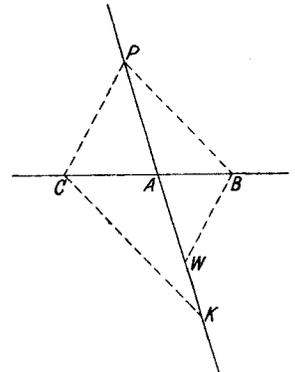


Fig. 142b.

mit A , W und P , ziehe $PC \parallel WB$ bis zum Schnittpunkt C mit der Geraden AB und $CK \parallel BP$, so schneidet CK den Polstrahl PA in dem gesuchten Krümmungsmittelpunkt K . Denn weil zufolge der Konstruktion

$$\triangle AWB \sim \triangle APC$$

und

$$\triangle APB \sim \triangle KAC,$$

so folgt

$$\overline{AW} : \overline{AP} = \overline{WB} : \overline{PC} = \overline{PA} : \overline{AK},$$

also

$$\overline{AW} = \frac{\overline{AP}^2}{\overline{AK}} = \frac{\rho^2}{k},$$

was zu beweisen war. Mittels derselben Konstruktion, nur in anderer Reihenfolge, erhält man den Wendepunkt W auf dem Polstrahl, wenn A , K und P gegeben sind.

Aus der Konstruktion lassen sich wesentliche Folgerungen für die Bewegung einer Ebene ableiten, die durch die Bahnen zweier ihrer Punkte bestimmt wird. Es seien (s. Fig. 143) A_1 und A_2 diese

Punkte, K_1 und K_2 die Krümmungsmittelpunkte ihrer Bahnen a_1 , bzw. a_2 , dann liegt der Pol P im Schnitt von K_1A_1 und K_2A_2 . Ist ferner C der Schnittpunkt von A_1A_2 und K_1K_2 , und wir ziehen $PB \parallel K_1K_2$ und legen durch B die Parallele zu PC , so schneidet diese die Polstrahlen PA_1 , bzw. PA_2 zufolge der vorigen Konstruktion in den Wendepunkten W_1 , bzw. W_2 , wie man unmittelbar erkennt. Nennt man die Gerade PC die Kollineationsachse, wie gebräuchlich, so ersieht man, daß die Verbindungslinie der Wendepunkte auf zwei Polstrahlen der zugeordneten Kollineationsachse parallel ist.

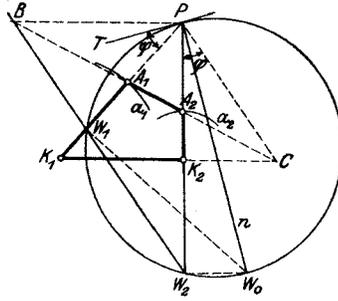


Fig. 143.

Errichtet man in W_1 und W_2 die Senkrechten zu den Polstrahlen PA_1 , bzw. PA_2 , so schneiden sich erstere im Wendepol W_0 . Damit ist zugleich die Polkurvennormale PW_0 festgelegt.

Da die vier Punkte P , W_1 , W_2 und W_0 auf dem Wendekreis liegen und die Tangente PT an letzteren (s. Fig. 143) zugleich die Polkurventangente ist, so folgt, daß

$$\angle TPW_1 = \angle PW_0W_1 = \angle PW_2W_1.$$

Da ferner

$$PC \parallel W_1W_2,$$

so muß auch

$$\angle PW_2W_1 = \angle CPW_2$$

sein, und so ergibt sich die als Bobillierscher Satz bekannte Beziehung

$$\angle TPA_1 = \angle CPA_2,$$

d. i. die Polkurventangente und die Kollineationsachse schließen mit den beiden gegebenen Polstrahlen gleiche Winkel im entgegengesetzten Sinne ein.

Aus diesem Satz geht nicht nur eine einfache Ermittlung der Polkurventangente hervor, die unabhängig von der Kenntnis des Wendekreises ist, sondern auch die Aronholdsche Konstruktion

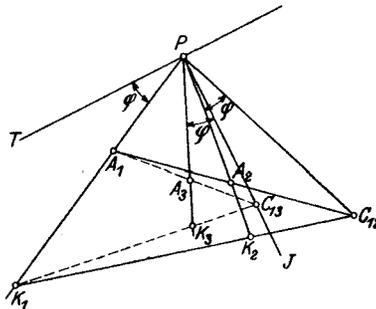


Fig. 144.

des Krümmungsmittelpunktes der Bahn eines beliebigen Punktes der Ebene. Es sei (s. Fig. 144) A_3 dieser Punkt, dann legen wir

durch den Pol P eine Gerade PJ , die mit PA_3 den Winkel TPA_1 im entgegengesetzten Sinne einschließt, d. h. wir machen

$$\angle A_3PJ = \angle A_1PT = \angle A_2PC_{1_2}.$$

Ziehen wir nun A_1A_3 bis zum Schnittpunkt C_{1_3} mit PJ , und verbinden C_{1_3} mit K_1 , so schneidet letztere Gerade den Polstrahl PA_3 im gesuchten Krümmungsmittelpunkt K_3 der Bahn des Punktes A_3 .

Als Beispiel werde die exzentrische Schubkurbelkette (s. Fig. 145) behandelt, in der sich der Punkt A_1 auf dem Kreise a_1 um K_1 , der Punkt A_2 auf der Geraden a_2 gegen das ruhende Glied bewegt. Hier fällt der Wendepunkt W_2 auf dem Polstrahl PA_2 mit A_2 zusammen, und da der vorher mit C bezeichnete Punkt sich als Schnittpunkt von A_2A_1 mit der Senkrechten zur Geraden a_2 durch K_1 findet, so schneidet die Parallele zu PC (der Kollinationsachse in diesem Falle) durch W_2 den Wendepunkt W_1 auf dem Polstrahl PA_1 aus. Der Wendepol W_0 liegt auf der Geraden a_2 , denn diese ist ja senkrecht zu PW_2 , und zwar in dem Punkte, in dem die Senkrechte zu PW_1 in W_1 die Gerade a_2 schneidet. Damit findet sich der Durchmesser PW_0 des Wendekreises, und letzterer selbst. Zugleich ersieht man, daß die Gerade a_2 der geometrische Ort der Wendepole W_0 ist. Ein Sonderfall tritt ein, wenn die Kurbel K_1A_1

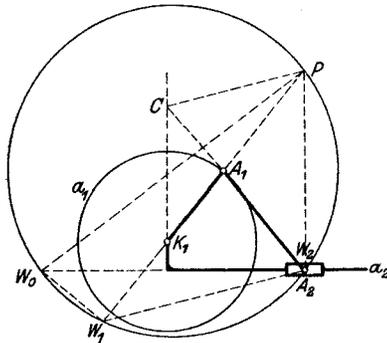


Fig. 145.

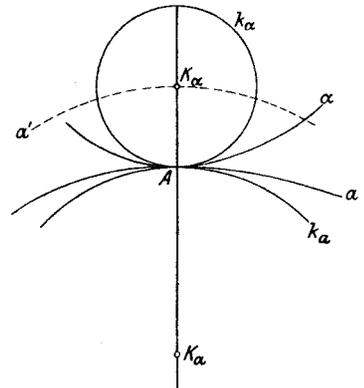


Fig. 146.

senkrecht zu a_2 steht; dann rückt der Pol P und mit ihm auch der Wendepunkt W_1 ins Unendliche und der Wendekreis geht in die Gerade über, die durch A_2 senkrecht zu a_2 gelegt wird.

Wird die Bewegung der Ebene nicht durch die Bahnen zweier ihrer Punkte bestimmt, wie bisher angenommen, sondern, wie in Nr. 29 erörtert, durch zwei Hüllkurvenpaare, so lassen sich die bisherigen Ergebnisse leicht auf diesen Fall übertragen, und zwar gestützt auf die folgende Überlegung. Gleitet ein Kreis k_a (siehe Fig. 146) längs einer beliebigen Kurve a , so beschreibt sein Mittel-

ordneter Punkte, woraus hervorgeht, daß der Wendepol als Wendepunkt auf der Polkurvennormalen mittels der Konstruktion Fig. 142 gefunden werden kann.

In dem besonderen Falle, daß die Hüllkurve eine Gerade ist, folgt aus dem Früheren, daß der Krümmungsmittelpunkt der zugehörigen Hüllbahn in dem Punkte R (s. Fig. 141) liegt, in dem das Lot vom Pol auf die einhüllende Gerade den Rückkehrkreis schneidet. Alle parallelen Geraden der Ebene hüllen sonach Kurven mit dem gemeinschaftlichen Krümmungsmittelpunkt R ein. Diejenige dieser Geraden, die durch R selbst geht, berührt dagegen ihre Hüllbahn in einem Rückkehrpunkte (d. i. einer Spitze), weil der Krümmungsradius der Bahn dann gleich Null ist. Die Gerade wird folglich zur Rückkehrtangente und alle Rückkehrtangenten der Ebene schneiden sich im Rückkehrpol R_0 . Der Rückkehrkreis selbst ist der geometrische Ort aller Rückkehrpunkte; daher sein Name.

48. Der Beschleunigungszustand der Ebene.

Es sei b die Beschleunigung eines beliebigen Punktes A (siehe Fig. 148) der Ebene, dessen Polstrahl mit der Polkurvennormalen den Winkel φ einschließt. Wir zerlegen b in die Tangential-Komponente b_t und die Normal-Komponente b_n , für welche die bekannten Beziehungen

$$b_t = \frac{dv}{dt} \quad \text{und} \quad b_n = \frac{v^2}{k}$$

gelten, unter v die Geschwindigkeit und unter $k = \overline{AK}$ den Krümmungshalbmesser der Bahn des Punktes A verstanden. Setzen wir

$\overline{PA} = \rho$ und bezeichnen mit ω die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit der Ebene, so ist $v = \rho \cdot \omega$; folglich findet sich

$$b_t = \rho \frac{d\omega}{dt} + \omega \cdot \frac{d\rho}{dt}$$

als Ausdruck für die Tangentialbeschleunigung, in der $\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon$ die augenblickliche Winkelbeschleunigung der Ebene ist, und ferner

$$b_n = \frac{\rho^2}{k} \cdot \omega^2 = \overline{AW} \cdot \omega^2,$$

weil zufolge Gleichung (2) auf S. 120 die Entfernung des Wendepunktes W auf dem Polstrahl PA von A , d. i. $\frac{\rho^2}{k} = \overline{AW}$ gesetzt

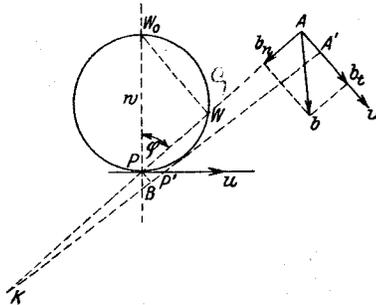


Fig. 148.

werden kann. Beachtet man, daß $\overline{PP'} = d\sigma$ das Wegelement des Poles auf der ruhenden Polkurve und $d\varrho$ die Abnahme von ϱ ist, während P nach P' wandert, so erhält man aus Fig. 148

$$\overline{BP'} = d\varrho = -d\sigma \cdot \sin \varphi,$$

womit b_t übergeht in

$$b_t = \varrho \cdot \varepsilon - \omega \cdot \frac{d\sigma}{dt} \cdot \sin \varphi.$$

Nun war aber $\frac{d\sigma}{dt} = v_w$ die Wechselgeschwindigkeit des Poles und diese wurde zu $v_w = w \cdot \omega$ gefunden; es ist sonach auch

$$b_t = \varrho \cdot \varepsilon - w \omega^2 \cdot \sin \varphi.$$

Ferner ergibt sich aus Fig. 148

$$\overline{AW} = \overline{PA} - \overline{PW} = \varrho - w \cos \varphi;$$

folglich geht b_n über in

$$b_n = \varrho \omega^2 - w \omega^2 \cos \varphi.$$

Die beiden Ausdrücke für b_t und b_n zeigen, daß sich die Beschleunigung b aus folgenden drei Komponenten zusammensetzt: 1. der tangential gerichteten Beschleunigung $\varrho \cdot \varepsilon$; 2. der normal nach dem Pol hin gerichteten Beschleunigung $\varrho \cdot \omega^2$; 3. der zur Polkurvennormalen parallelen Beschleunigung $b_0 = w \cdot \omega^2$, die die Richtung von P nach W_0 hin hat (s. Fig. 149). Unter Benutzung des Zeichens der geometrischen Addition $\hat{+}$ läßt sich sonach setzen:

$$b = b_t \hat{+} b_n = \varrho \cdot \varepsilon \hat{+} \varrho \cdot \omega^2 \hat{+} w \cdot \omega^2.$$

Für den augenblicklich mit dem Pol zusammenfallenden Punkt der Ebene ist $\varrho = 0$, folglich

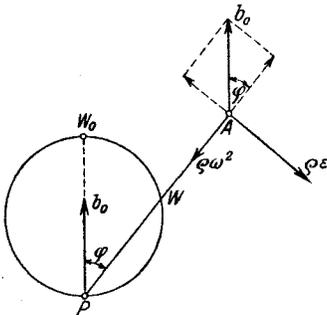


Fig. 149.

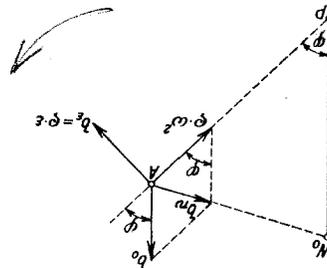


Fig. 150.

$$b = w \omega^2 = b_0;$$

diese Beschleunigung wird die Polbeschleunigung genannt. Sie ist es, die infolge des Lagenwechsels des Poles zu der Beschleunigung, die jeder Punkt der Ebene wegen deren Drehung um den ruhend gedachten Pol an sich haben würde, noch hinzutreten muß.

Setzt man b_0 und $\varrho \omega^2$ im Punkte A (s. Fig. 150) zu einer Be-

schleunigung $b_w = \rho \omega^2 \hat{+} w \omega^2$ zusammen, so geht letztere durch den Wendepol W_0 und ist der Entfernung $\overline{AW_0}$ proportional. Denn man erhält aus dem Parallelogramm der Beschleunigungen (s. d. Figur)

$$\begin{aligned} b_w &= \sqrt{(\rho \omega^2)^2 + (w \omega^2)^2 - 2 \rho \omega^2 w \omega^2 \cos \varphi} \\ &= \omega^2 \sqrt{\rho^2 + w^2 - 2 \rho w \cos \varphi} \\ &= \omega^2 \cdot \overline{AW_0}; \end{aligned}$$

ferner aus dem Sinussatz

$$\sin(b_w, \rho \omega^2) = \sin \varphi \cdot \frac{w \omega^2}{b_w} = \frac{w}{\overline{AW_0}} \cdot \sin \varphi,$$

also

$$\angle(b_w, \rho \omega^2) = \angle W_0 A P,$$

was zu beweisen war. Da wir oben

$$b = \rho \cdot \varepsilon \hat{+} \rho \omega^2 + w \cdot \omega^2$$

fanden, so läßt sich folglich auch

$$b = \rho \cdot \varepsilon \hat{+} b_w$$

setzen, womit erkannt wird, daß die Beschleunigung eines jeden Punktes der Ebene aus folgenden zwei Komponenten zusammengesetzt werden kann: 1. der tangential, d. i. senkrecht zu Polstrahl $\overline{PA} = \rho$ gerichteten Beschleunigung $b_\varepsilon = \rho \cdot \varepsilon$, die proportional ρ und nur von der Winkelbeschleunigung $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$ abhängig ist, und

die Triebbeschleunigung des Punktes A genannt werden möge; 2. der nach dem Wendepol hin gerichteten Beschleunigung $b_w = \overline{W_0 A} \cdot \omega^2$, die proportional dem Abstand $\overline{W_0 A}$ und nur von der Winkelgeschwindigkeit abhängig ist, und die Wendebeschleunigung von A heißen soll.

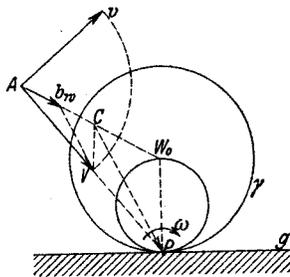


Fig. 151.

Dieses letztere Ergebnis läßt nun leicht erkennen, daß der augenblickliche Beschleunigungszustand einer Ebene völlig übereinstimmt mit dem der Ebene eines Kreises γ (s. Fig. 151), der auf einer Geraden g der ruhenden Ebene rollt, also im Grunde mit der eines rollenden Wagens.

Denn der Mittelpunkt des Kreises beschreibt hierbei eine Gerade; in ihm liegt sonach der Wendepol W_0 , und der Durchmesser des Wendekreises w ist gleich dem Radius R des Kreises γ . Infolge der Drehung der Ebene um W_0 , die der Drehung des Rades um seine Achse entspricht, erhalten die Punkte der Ebene die Zentripetalbeschleunigung $\overline{AW_0} \cdot \omega^2$, d. i. die

Wendebeschleunigung b_w . Zu dieser Beschleunigung tritt dann noch die Triebbeschleunigung $b_\varepsilon = \overline{PA} \cdot \varepsilon$, wenn die rollende Bewegung des Kreises eine beschleunigte ist; diese steht senkrecht zum Polstrahl \overline{PA} .

Die Wendebeschleunigung läßt sich sehr einfach konstruieren. Ist v die Bahngeschwindigkeit des Punktes A (s. Fig. 151) und V die senkrechte Geschwindigkeit desselben, so ziehen wir

$$VC \parallel PW_0$$

und

$$Vb_w \parallel PC;$$

dann stellt die Strecke $\overline{Ab_w}$ die Wendebeschleunigung b_w des Punktes A dar. Zum Beweise benutzen wir, daß

$$v = V = \overline{PA} \cdot \omega$$

und folglich

$$\begin{aligned} b_w &= \overline{W_0A} \cdot \omega^2 = \overline{W_0A} \cdot \omega \cdot \frac{V}{\overline{PA}} \\ &= \overline{AC} \cdot \frac{\overline{AV}}{\overline{PA}} \\ &= \overline{Ab_w}. \end{aligned}$$

Denn zufolge der angegebenen Konstruktion ist

$$\triangle AVC \sim \triangle APW_0.$$

sonach

$$\overline{AC} : \overline{AV} = \overline{AW_0} : \overline{AP}$$

oder

$$\overline{AC} = \overline{AW_0} \cdot \frac{V}{\overline{AP}} = \overline{AW_0} \cdot \omega;$$

da ferner

$$\triangle AVb_w \sim \triangle APC,$$

so findet sich daraus $\overline{Ab_w} = b_w$, wie oben mitgeteilt. Bei dieser Konstruktion ist aber zu beachten, daß durch sie der Maßstab für die Darstellung der Beschleunigungen durch Strecken zugleich mitbestimmt, d. h. durch den Geschwindigkeitsmaßstab festgelegt ist, und zwar wird, falls $V_I = \lambda$, d. h. falls die Länge λ die Geschwindigkeitseinheit V_I darstellt, die Beschleunigungseinheit

$$b_I = \frac{\lambda^2}{l_I},$$

unter l_I die Längeneinheit verstanden.

Eine weitere brauchbare Eigenschaft der Wendebeschleunigung b_w ist ihre Proportionalität mit dem Abstand $\overline{W_0A}$, denn aus dieser folgt, daß die Endpunkte der Vektoren, die die Beschleunigung b_w

und wird Gleichen- oder Wechselkreis (auch Tangentialkreis) genannt. Diese beiden Kreise, die zusammen die Bressesehen Kreise heißen, schneiden sich außer im Pol noch in einem zweiten Punkte G , dessen totale Beschleunigung folglich gleich Null sein muß. Dagegen ist die Beschleunigung des anderen Schnittpunktes, nämlich des mit dem Pol augenblicklich zusammenfallenden Punktes der Ebene nicht $= 0$, sondern $= b_0 = w \cdot \omega^2$, wie schon erwähnt, und zwar, weil der letztere Punkt sich in einem Rückkehrpunkte seiner Bahn befindet.

Die drei Punkte W_0 , G und H liegen in einer Geraden, die mit der Polkurventangente denselben Winkel β einschließt, wie die Gerade PG mit der Polkurvennormalen. Dieser Winkel ergibt sich aus der Beziehung

$$\tan \beta = \frac{\overline{PW_0}}{\overline{PH}} = \frac{w}{h} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

Der Punkt G wird der Beschleunigungspol genannt, und zwar auf Grund des Umstandes, daß die totalen Beschleunigungen b der Punkte der Ebene den Entfernungen \overline{AG} der Punkte von G proportional sind und mit \overline{AG} denselben Winkel β im gleichen Sinne einschließen. Das erkennt man wie folgt. Es ist

$$\begin{aligned} b &= \sqrt{b_t^2 + b_n^2} = \sqrt{(\varrho \varepsilon - w \omega^2 \sin \varphi)^2 + (\varrho \omega^2 - w \omega^2 \cos \varphi)^2} \\ &= \sqrt{\varrho^2 (\varepsilon^2 + \omega^4) + w^2 \omega^4 - 2 \varrho w \omega^2 (\varepsilon \sin \varphi + w^2 \cos \varphi)} \\ &= \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \cdot \sqrt{\varrho^2 + (w \cos \beta)^2} - 2 \varrho w \cos \beta (\cos \beta \cos \varphi + \sin \beta \sin \varphi) \\ &= \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \cdot \sqrt{\overline{PA}^2 + \overline{PG}^2} - 2 \overline{PA} \cdot \overline{PG} \cdot \cos(\varphi - \beta) \\ &= \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \cdot \overline{GA}, \end{aligned}$$

wie mittels der Ausdrücke für $\cos \beta = \frac{\omega^2}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}$, $\sin \beta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}$

sofort zu beweisen ist. Ferner folgt aus dem Parallelogramm der Beschleunigungen im Punkte A (s. Fig. 153), dessen Komponenten b'' und b' in Richtung von \overline{AG} und senkrecht zu \overline{AG} die Werte

$$b' = b \cdot \cos \gamma = \overline{GA} \cdot \varepsilon$$

und

$$b'' = b \cdot \sin \gamma = \overline{GA} \cdot \omega^2$$

haben müssen, wie aus

$$b = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \cdot \overline{AG} = \sqrt{(\overline{GA} \cdot \varepsilon)^2 + (\overline{GA} \cdot \omega^2)^2}$$

hervorgeht, daß

$$\tan \gamma = \frac{b'}{b''} = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = \tan \beta,$$

folglich

$$\gamma = \beta$$

Denken wir uns den Beschleunigungsvektor b_1 des Punktes A_1 um den Winkel β gedreht (s. Fig. 156), so daß sein Endpunkt B_1 in die Gerade GA_1 fällt, und beachten, daß diese Punkte B_1 für alle Beschleunigungen der Punkte einer Geraden g auf einer Parallelen g' zu g liegen müssen, weil die Vektoren $b_1 \doteq \overline{A_1 B_1}$ den Strecken GA_1 proportional sind, so ergibt sich der Endpunkt B des entsprechenden Vektors \overline{AB} eines beliebigen Punktes A im Schnittpunkt der Parallelen zu $A_1 A$ durch B_1 mit dem Strahl GA . Drehen wir dann \overline{AB} um β zurück, so erhalten wir die Beschleunigung $b \doteq \overline{Ab}$ in ihrer wahren Lage.

49. Der Beschleunigungszustand der Relativbewegungen dreier Ebenen.

Während sich der Geschwindigkeitszustand der Relativbewegungen dreier Ebenen außerordentlich einfach ergibt (vgl. Nr. 36), ist das bei dem Beschleunigungszustand nicht mehr der Fall. Allerdings besteht für die Winkelbeschleunigungen der drei Ebenen eine ebenso einfache Beziehung, wie für die Winkelgeschwindigkeiten, welche die Gestalt

$$\omega_2^1 + \omega_3^2 + \omega_1^3 = 0$$

hat (s. S. 58). Denn differenziert man diese nach der Zeit und benutzt die abkürzende Bezeichnung

$$\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon,$$

so folgt

$$\varepsilon_2^1 + \varepsilon_3^2 + \varepsilon_1^3 = 0,$$

d. h. die algebraische Summe der Winkelbeschleunigungen der Relativbewegungen dreier Ebenen ist in jedem Augenblicke gleich Null. Aber mit dieser Beziehung allein ist der relative Beschleunigungszustand noch nicht bestimmt, denn die Wendeschleunigungen der Systempunkte sind von den Winkelbeschleunigungen unabhängig; es bedarf also noch einer Beziehung zwischen den Wendeschleunigungen der drei Ebenen.

Bevor diese abgeleitet werden soll, sei erst darauf hingewiesen, daß in einem besonderen Falle sich die Beschleunigung der Relativbewegung eines Punktes gegen eine bewegte Ebene ebenso einfach findet, wie die Relativgeschwindigkeit, wenn nämlich die Ebene eine Schiebung ausführt. In diesem Falle ändert sich die Richtung der Ebene nicht und folglich ist die Richtungsänderung der Geschwindigkeit des Punktes gegen die bewegte Ebene dieselbe, wie gegen die ruhende. Daraus folgt, daß die Beschleunigung b_0 der Relativbewegung des Punktes gegen die bewegte Ebene — ganz

analog wie bei den Geschwindigkeiten — die resultierende Beschleunigung aus der Beschleunigung b des Punktes gegen die ruhende Ebene und der entgegengesetzt genommenen Beschleunigung — b_e

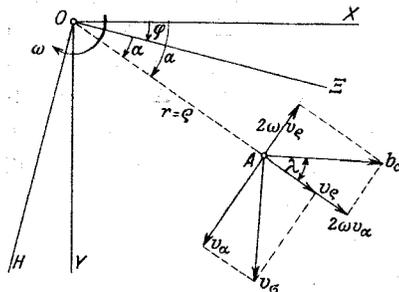


Fig. 157.

des Punktes der bewegten Ebene ist, der augenblicklich mit dem bewegten Punkte zusammenfällt, d. i.

$$b_a = b \uparrow (-b_e).$$

Wenn dagegen die Ebene eine Drehung aufführt, so tritt zu den beiden Beschleunigungen b und $-b_e$ noch eine dritte Komponente, was sich auf folgendem Wege erkennen läßt.

Es drehe sich die Ebene E um den festliegenden Punkt O (s. Fig. 157) gegen die ruhende Ebene und mit ihr die Achse $O\Xi$ gegen die ruhende Achse OX . Es sei der Drehwinkel $\angle(\Xi OX) = \varphi = f(t)$ eine bekannte Funktion der Zeit; dann ist die Winkelgeschwindigkeit der Drehung der Ebene um O

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = f'(t)$$

und die Winkelbeschleunigung

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = f''(t).$$

Zur Abkürzung werde im folgenden $\frac{du}{dt}$ mit \dot{u} und $\frac{d^2u}{dt^2}$ mit \ddot{u} bezeichnet, so daß

$$\omega = \dot{\varphi} \quad \text{und} \quad \varepsilon = \ddot{\varphi}$$

gesetzt werden kann. Der Punkt A vollziehe gegen die ruhende Ebene irgend eine Bewegung, welche durch die Polarkoordinaten $\overline{OA} = r$ und $\angle(AOX) = a$ gegeben sei. Bekanntlich sind dann die Komponenten der Geschwindigkeit v des Punktes A gegen die ruhende Ebene in Richtung von \overline{OA} und senkrecht dazu

$$v_r = \frac{dr}{dt} = \dot{r} \quad \text{und} \quad v_a = r \frac{da}{dt} = r \cdot \dot{a};$$

ferner die Beschleunigungskomponenten in den gleichen Richtungen

$$b_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{da}{dt} \right)^2 = \ddot{r} - r \dot{a}^2;$$

$$b_a = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{da}{dt} \right) = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{a}) = 2 \dot{a} \dot{r} + r \ddot{a}.$$

Um die Relativbewegung von A gegen die Ebene E zu finden, beziehen wir die Lage von A gegen E durch die Polarkoordinaten

$$\overline{OA} = \varrho \text{ und } \angle(AOE) = \alpha;$$

es ergeben sich dann die Komponenten der relativen Geschwindigkeit v_σ des Punktes gegen die Ebene E in der Richtung von \overline{OA} und senkrecht dazu

$$v_\varrho = \dot{\varrho} \text{ und } v_\alpha = \varrho \cdot \dot{\alpha},$$

und die der relativen Beschleunigung b_σ in den gleichen Richtungen

$$b_\varrho = \ddot{\varrho} - \varrho \dot{\alpha}^2 \text{ und } b_\alpha = \frac{1}{\varrho} \frac{d}{dt}(\varrho^2 \cdot \dot{\alpha}) = 2\dot{\varrho}\dot{\alpha} + \varrho \ddot{\alpha}.$$

Nun drücken sich aber, wie Fig. 157 ohne weiteres zeigt, die relativen Koordinaten ϱ und α durch r , a und φ wie folgt aus: es ist

$$\varrho = r \text{ und } \alpha = a - \varphi.$$

Setzen wir diese Werte in b_ϱ und b_α ein, so erhalten wir zunächst

$$b_\varrho = \ddot{r} - r(\dot{a} - \dot{\varphi})^2;$$

$$b_\alpha = 2r\dot{r}(\dot{a} - \dot{\varphi}) + r(\ddot{a} - \ddot{\varphi}).$$

Nach entsprechender Umformung und unter Benutzung der Ausdrücke für b_r , b_a , v_ϱ und v_α findet sich

$$b_\varrho = b_r + r\omega^2 + 2\omega v_\alpha$$

$$b_\alpha = b_a - r\varepsilon - 2\omega v_\varrho.$$

Hierin sind $-r\omega^2$ und $+r\varepsilon$ die Komponenten der Beschleunigung b_ε des Punktes der Ebene E , mit dem der bewegte Punkt A augenblicklich zusammenfällt; es ist sonach $b_\varepsilon = -r\omega^2 \hat{+} r\varepsilon$. Setzen wir sonach b_ϱ und b_α mittels des Beschleunigungsparallelogrammes zusammen, addieren also geometrisch b_ϱ und b_α , so ergibt sich

$$b_\sigma = b_\varrho \hat{+} b_\alpha = b_r \hat{+} b_a \hat{+} r\omega^2 \hat{+} (-r\varepsilon) \hat{+} 2\omega[v_\alpha \hat{+} (-v_\varrho)].$$

Hierin ist

$$b_r \hat{+} b_a = b,$$

$$r\omega^2 \hat{+} (-r\varepsilon) = -b_\varepsilon,$$

$$v_\varrho \hat{+} v_\alpha = v_\sigma.$$

Die Zusammensetzung von $2\omega v_\alpha$ und $-2\omega v_\varrho$ ergibt sonach, da die Komponente $2\omega v_\alpha$ die Richtung von ϱ , die Komponente $-2\omega v_\varrho$ dagegen senkrecht dazu und dem Drehsinn von ω entgegen gerichtet ist (s. Fig. 157), die Beschleunigung

$$b_\sigma = \sqrt{(2\omega v_\alpha)^2 + (2\omega v_\varrho)^2} = 2\omega \sqrt{v_\alpha^2 + v_\varrho^2} = 2\omega v_\sigma,$$

welche senkrecht zu v_σ steht, und zwar nach der Seite hin, welche sich dem Drehsinn der Ebene entgegensetzt. Diese Beschleunigung wird meist kurz die Zusatzbeschleunigung oder auch nach

ihrem Entdecker Coriolis die Coriolisbeschleunigung genannt. Daß b_c senkrecht zu v_o ist, folgt daraus, daß (s. die Figur)

$$\tan \lambda = \frac{2\omega v_e}{2\omega v_a} = \frac{v_e}{v_a},$$

also λ derselbe Winkel ist, den v_o mit v_a einschließt. Diese Beschleunigung b_c ist die dritte Komponente, die mit b und $-b_e$ zusammengesetzt die gesuchte relative Beschleunigung b_o liefert. Vorstehende Entwicklung liefert den bekannten Satz von Coriolis:

Die Beschleunigung b_o der relativen Beschleunigung eines Punktes gegen eine, um einen ruhenden Punkt sich drehende Ebene setzt sich aus folgenden drei Komponenten zusammen: 1. der Beschleunigung b , mit der sich der Punkt gegen die ruhende Ebene bewegt; 2. der entgegengesetzt genommenen Beschleunigung b_e des Punktes der Ebene, mit dem der bewegte Punkt augenblicklich zusammen fällt; 3. der Zusatzbeschleunigung b_c , welche durch die Beziehung

$$b_c = 2\omega v_o$$

der Größe nach bestimmt wird und senkrecht zur relativen Geschwindigkeit v_o des Punktes nach der Seite hin gerichtet ist, welche sich dem Drehsinn der Ebene entgegensetzt.

Nun hat dieser Satz zunächst nur Gültigkeit für den Fall, daß die Ebene eine Drehung um einen ruhenden Punkt ausführt. Doch ist verhältnismäßig leicht zu beweisen, daß er auch für jede allgemeine Bewegung einer Ebene gilt. Auf S. 126 wurde gezeigt, daß der augenblickliche Beschleunigungszustand einer irgendwie bewegten Ebene übereinstimmt mit dem eines Kreises, der auf einer Geraden (der Polkurventangente) rollt, dessen Mittelpunkt im Wendepol W_o liegt und dessen Radius gleich dem Durchmesser w des Wendekreises ist. Es läßt sich demnach die allgemeine Bewegung der Ebene entstanden denken durch Zusammensetzung der Drehung der Ebene um den Wendepol, deren Winkelgeschwindigkeit und -beschleunigung übereinstimmen mit denen der ursprünglichen Bewegung, mit einer Schiebung, deren Geschwindigkeit und Beschleunigung die des Wendepoles sind. Die Schiebung bedingt keine Änderung des Satzes von Coriolis, und die Drehung um den Wendepol erfolgt durch drei unendlich benachbarte Lagen der Ebene; letztere ist demnach für den Beschleunigungszustand der Ebene von demselben Einfluß, wie bei der Drehung um einen ruhenden Punkt.

Es läßt sich sonach der Satz von Coriolis auch auf die Re-

ativbewegung eines beliebig bewegtes Punktes gegen eine irgendwie bewegte Ebene anwenden. Es seien E_1, E_2, E_3 drei komplane Ebenen, E_1 sei die ruhende Ebene, gegen die E_2 und E_3 irgendwelche Bewegungen ausführen. Ist nun A_3 ein beliebiger Punkt von E_3 , so findet sich die Beschleunigung b_{32} der Relativbewegung von A_3 gegen E_2 nach dem Satze von Coriolis als die Resultierende aus folgenden drei Beschleunigungen: 1. der Beschleunigung b_{31} der Bewegung von A_3 gegen die ruhende Ebene E_1 ; 2. der entgegengesetzt genommenen Beschleunigung b_{21} der Bewegung des mit A_3 augenblicklich zusammenfallenden Punktes A_2 der Ebene E_2 gegen E_1 ; 3. der Zusatzbeschleunigung b_c , welche, wenn v_{32} die Geschwindigkeit der Relativbewegung von A_3 gegen E_2 bezeichnet, die Größe

$$b_c = 2\omega_{21} \cdot v_{32}$$

hat und senkrecht zu v_{32} nach der Seite hin gerichtet ist, welche sich dem Drehsinne von ω_{21} entgegensetzt. Bezeichnen wir die b_{21} entgegengesetzt gerichtete, aber sonst gleiche Beschleunigung mit b_{12} , so läßt sich der Inhalt des vorstehenden Satzes unter Benutzung des Symboles der Streckenaddition kurz durch die Beziehung

$$b_{32} = b_{31} \hat{+} b_{12} \hat{+} b_c$$

darstellen.

Die Zusatzbeschleunigung b_c kann man zeichnerisch leicht ermitteln. Es seien P_{21} und P_{31} die Pole der Bewegungen der Ebenen E_2 und E_3 gegen E_1 (s. Fig. 158) und ω_{21} bzw. ω_{31} die entsprechenden Winkelgeschwindigkeiten der Drehungen um die Pole. Ferner sei P_{32} der Pol der Relativbewegung von E_3 gegen E_2 und ω_{32} die entsprechende Winkelgeschwindigkeit. Ist A_2 ein beliebiger Punkt von E_2 und V_{21} , seine senkrechte Geschwindigkeit gegen E_1 , so erhalten wir zufolge Nr. 33 bzw. Fig. 93 und 94 die senkrechten Geschwindigkeiten V_{31} und V_{32} des mit A_2 augenblicklich zusammenfallenden Punktes A_3 der Ebene E_3 gegen E_1 , bzw. E_2 durch Ziehen der Geraden $V_{21}V_{31} \parallel A_2P_{32}$ und $V_{31}V_{32} \parallel A_2P_{21}$. Zieht man nun $V_{31}J \parallel V_{21}P_{32}$, so ist

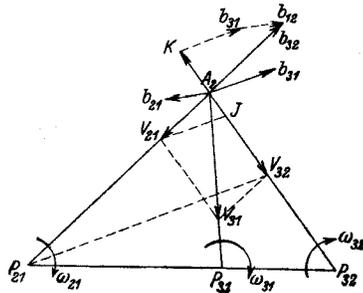


Fig. 158.

$$\overline{A_2J} = \frac{1}{2} b_c;$$

denn weil

$$\triangle A_2JV_{21} \sim \triangle A_2V_{32}P_{31},$$

verhält sich

$$\overline{A_2 J} : \overline{A_2 V_{32}} = \overline{A_2 V_{21}} : \overline{A_2 P_{21}},$$

und da

$$V_{21} = \overline{A_2 P_{21}} \cdot \omega_{21},$$

ferner

$$\overline{A_2 V_{32}} = V_{32} = v_{32}$$

ist, so folgt

$$\overline{A_2 J} = \frac{\overline{A_2 V_{21}}}{\overline{A_2 P_{21}}} \cdot \overline{A_2 V_{32}} = \frac{V_{21}}{\overline{A_2 P_{21}}} \cdot V_{32} = \omega_{21} \cdot v_{32} = \frac{1}{2} b_c.$$

Beachten wir, daß b_c senkrecht zu v_{32} , also in der Richtung von V_{32} nach der Seite hin anzutragen ist, die sich dem Drehsinn von ω_{21} entgegensetzt, so haben wir nur

$$\overline{A_3 K} = 2 \overline{A_2 J}$$

zu machen, um in der Strecke $\overline{A_3 K}$ die Beschleunigung b_c nach Größe und Richtung zu erhalten.

Dann findet man die relative Beschleunigung b_{32} des Punktes A_3 gegen die Ebene E_2 , indem man b_{31} im Punkte K anträgt und im Endpunkte von b_{31} die entgegengesetzt genommene Beschleunigung b_{21} des Punktes A_2 ; die Strecke, die den Endpunkt von b_{12} mit A_3 verbindet, stellt b_{32} nach Größe und Richtung dar.

Die Umkehrung der Aufgabe, nämlich die Ermittlung der Beschleunigung b_{31} aus der relativen Beschleunigung b_{32} und aus der Beschleunigung b_{21} kommt verhältnismäßig noch häufiger vor. Man erhält aus der Beziehung für b_{32} umgekehrt

$$b_{31} = b_{32} \hat{+} (-b_{12}) \hat{+} (-b_c),$$

an deren Stelle die folgende gesetzt werde:

$$b_{31} = b_{32} \hat{+} b_{21} \hat{+} b_\gamma.$$

Hierin bedeutet wie vorher b_{21} die Beschleunigung der Bewegung des mit A_3 augenblicklich zusammenfallenden Punktes A_2 auf E_2 gegen die ruhende Ebene E_1 und b_γ die im entgegengesetzten Sinne genommene Zusatzbeschleunigung b_c . Die vorstehende Beziehung enthält den folgenden Satz:

Ist die relative Bewegung einer Ebene E_3 gegen eine Ebene E_2 gegeben, welche eine bekannte Bewegung gegen die ruhende Ebene E_1 ausführt, so findet sich die Beschleunigung der Bewegung eines beliebigen Punktes A_3 der Ebene E_3 gegen E_1 als Resultierende aus folgenden drei Komponenten: 1. der Beschleunigung b_{32} der Relativbewegung von A_3 gegen E_2 , 2. der Beschleunigung b_{21} des mit A_3 augenblicklich zusammenfallenden Punktes A_2 der Ebene E_2 gegen E_1 , und 3. der Zusatzbeschleunigung b_γ , welche die Größe

$$b_\gamma = 2 \cdot \omega_{21} \cdot v_{32}$$

hat und senkrecht zu v_{32} nach der Seite hier aufzutragen ist, welche dem Drehsinn von ω_{21} entspricht.

Es ist sonach zu beachten, daß b_c und b_y entgegengesetzt gerichtet sind. Die Größe beider bleibt dieselbe, daher auch die Konstruktion der Strecke, welche b_y darstellt.

50. Der Beschleunigungszustand des Gelenkviereckes und seiner Sonderfälle.

Der Beschleunigungszustand des Gelenkviereckes läßt sich in sehr einfacher Weise ermitteln, und zwar ohne Zuziehung der Untersuchungen über die Krümmungsverhältnisse und den Beschleunigungszustand der Ebene, welche die vorausgehenden Abschnitte (Nr. 47, 48 und 49) enthalten. Und es ist wesentlich, daß der Weg, welcher im folgenden eingeschlagen und begründet wird, auch bei vielen zusammengesetzten kinematischen Ketten anwendbar bleibt.

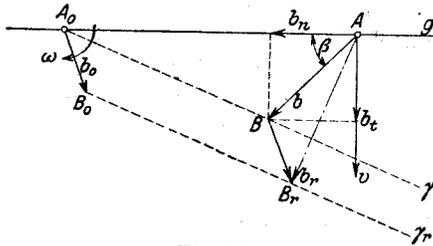


Fig. 159.

Die einfache Grundlage für diesen Weg bildet der Beschleunigungszustand einer Ebene, die sich um einen ruhenden Punkt dreht. Es sei A_0 (s. Fig. 159) der Drehpunkt, ω die Winkelgeschwindigkeit und $\epsilon = \frac{d\omega}{dt}$ die Winkelbeschleunigung der Ebene, ferner A ein beliebiger Punkt auf ihr und $v = \overline{A_0 A} \cdot \omega$ die Geschwindigkeit von A . Die Beschleunigung b des Punktes A möge durch den Vektor \overline{AB} dargestellt und in die Komponenten b_t in tangentialer und b_n in radialer Richtung zerlegt werden. Bekanntlich ist dann, falls $\overline{A_0 A} = r$ gesetzt wird,

$$b_t = r \cdot \epsilon$$

und

$$b_n = \frac{v^2}{r} = r \cdot \omega^2;$$

ferner findet sich

$$\tan \beta = \frac{b_t}{b_n} = \frac{\epsilon}{\omega^2}$$

unabhängig von r . Daraus folgt, daß die Beschleunigungen der Punkte auf einer Geraden g durch den Drehpunkt einander parallel und der Entfernung des Punktes vom Drehpunkte A_0 proportional sind. Die Endpunkte B der Beschleunigungsvektoren liegen sonach auf einer Geraden γ durch A_0 .

Vollzieht die Ebene außer der Drehung um A_0 noch eine Schiebung mit der Beschleunigung b_0 , welche durch den Vektor $\overline{A_0 B_0}$ (s. Fig. 159) dargestellt werden möge, so erhält jeder Punkt der Ebene in seiner Bewegung gegen die ruhende Ebene die Beschleunigung b_r , welche sich durch Zusammensetzung der Beschleunigungen b und b_0 mittels des Parallelogramms der Beschleunigungen ergibt; es ist

$$b_r = b \hat{+} b_0$$

und diese resultierende Beschleunigung wird durch den Vektor $\overline{A B_r}$ dargestellt, der sich durch geometrische Addition der Strecken $\overline{A B}$ und $\overline{B B_r} \neq b_0$ ergibt. Die Endpunkte B_r der Vektoren b_r liegen sonach für alle Punkte der Geraden g auf einer Parallelen γ_r zu γ .

Beachtet man, daß der $\angle A A_0 B$ für alle Punkte der Ebene der gleiche ist, so erkennt man leicht, daß die Endpunkte B_r der Vektoren b_r auf den Strahlen γ_r eines Strahlenbüschels liegen, das dem Büschel der Strahlen g kongruent ist und den Punkt B_0 als Träger besitzt. Hiernach lassen sich die Beschleunigungen b_r aller Punkte der Ebene zeichnerisch leicht ermitteln.

Dreht sich eine Ebene um einen ihrer Punkte A_0 , der auf einer gegebenen Kurve mit bestimmter Beschleunigung bewegt wird, so ist der Beschleunigungszustand der Ebene völlig bestimmt, wenn außer der Winkelgeschwindigkeit ω noch die Winkelbeschleunigung ε der Ebene gegen die ruhende Ebene bekannt ist. Denn die Bewegung der Ebene läßt sich auffassen als entstanden durch die Zusammensetzung einer Schiebung, welche durch die Bewegung des Drehpunktes A_0 bestimmt wird, und einer Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit ω und Winkelbeschleunigung ε um den Punkt A_0 gegen die Ebene, welche die Schiebung mit A_0 vollzieht; die Beschleunigung eines jeden Punktes der Ebene ergibt sich deshalb genau wie vorher durch Zusammensetzung von b und b_0 , d. h. $b_r = b \hat{+} b_0$.

Ist dagegen die Winkelbeschleunigung ε der Ebene nicht bekannt, so läßt sich b_r selbst nicht finden, sondern nur deren Komponente in der Richtung der Geraden $A A_0$. Das wird ersichtlich wie folgt. Vollzieht die Ebene die Schiebung mit A_0 ohne gleichzeitige Drehung, so müßte jeder Punkt der Geraden $A_0 A$ die gleiche Beschleunigungskomponente in Richtung dieser Geraden haben, wie A_0 ; sie sei $\overline{A_0 C_0}$ (s. Fig. 160). Da sich aber die Ebene um A_0 mit ω dreht, so erhält A noch eine Zentripetalbeschleunigung $b_z = \frac{v^2}{\overline{A_0 A}}$, falls

$$v = \overline{A_0 A} \cdot \omega$$

die Geschwindigkeit des Punktes A bei dieser Drehung ist. Stellt die Strecke $\overline{A J}$ die nach A_0 gerichtete Beschleunigung b_z dar und

setzt man diese mit der Komponente $\overline{A_0C_0}$ zusammen, d. h. macht man $\overline{JC} = \overline{A_0C_0}$, so ist \overline{AC} die Komponente der Beschleunigung b des Punktes A in Richtung der Geraden A_0A . Daraus geht aber hervor, daß der Endpunkt B des Vektors \overline{AB} , welcher die Beschleunigung b darstellt, in der Senkrechten n zu A_0A liegen muß, die in C errichtet wird.

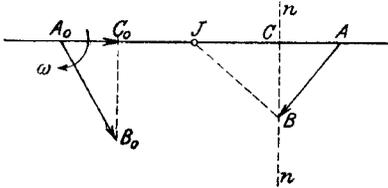


Fig. 160.

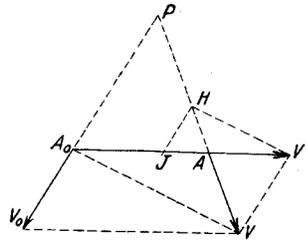


Fig. 161.

Diese Bemerkung ist von Wert für die Konstruktion von b , denn n ist ein geometrischer Ort für die Vektorendpunkte B , und letzterer läßt sich zeichnerisch einfach, wie folgt, ermitteln.

Es sei P der Pol der Ebene und V_0 die senkrechte Geschwindigkeit des Punktes A_0 . Dann findet man sofort die des Punktes A (s. Fig. 161) durch das Ziehen der Parallelen V_0V zu A_0A bis zum Schnittpunkt V mit PA . Die Geschwindigkeit, mit der sich A bei der Drehung der Ebene um A_0 bewegt, ist nun

$$v' = \overline{A_0A} \cdot \omega,$$

und, weil

$$V = v = PA \cdot \omega,$$

wird

$$v' = V' = V \cdot \frac{\overline{A_0A}}{PA}.$$

Wir erhalten sonach V' , indem wir $VV' \parallel PA_0$ ziehen. Als Zentripetalbeschleunigung b_z von A finden wir sonach

$$b_z = \frac{v'^2}{\overline{A_0A}} = \frac{V'^2}{\overline{A_0A}}$$

und den b_z darstellenden Vektor \overline{AJ} erhalten wir zeichnerisch, indem wir $V'H \parallel A_0V$ und $HJ \parallel PA_0$ ziehen. Denn aus der Ähnlichkeit der Dreiecke AJH und $AV'V$ einerseits und der Dreiecke $AV'V$ und AA_0P andererseits folgt

$$\overline{AJ} = \overline{AV'} \cdot \frac{\overline{AH}}{\overline{AV}} = \overline{AV'} \cdot \frac{\overline{AV'}}{\overline{A_0A}} = \frac{V'^2}{\overline{A_0A}},$$

was zu beweisen war.

Die Konstruktion der Strecke \overline{AJ} erfordert weder die Benutzung der Lage des Poles P , falls nur die Richtung von V bekannt ist, noch auch das Ziehen der Hilfslinien VV' , A_0V , $V'H$ und HJ , sondern nur das Anschneiden der Punkte V , V' , H und J ; sie ist also verhältnismäßig sehr einfach. Nur muß beachtet werden, daß der Maßstab, in dem die Beschleunigungen in Fig. 161 erhalten, bzw. durch Strecken dargestellt werden, schon durch den Geschwindigkeits- und den Zeichnungsmaßstab völlig bestimmt ist. Denn zeichnet man Fig. 161 in irgendeinem Maßstab und stellt den Vektor V_0 durch eine willkürlich gewählte Strecke dar, dann findet sich für die b_x darstellende Strecke \overline{AJ} eine ganz bestimmte Länge und dieser entspricht der Wert der Beschleunigung $b_x = \frac{v'^2}{A_0A}$; es ist so-

nach der Maßstab für die Darstellung der Beschleunigungen hierdurch völlig bestimmt.

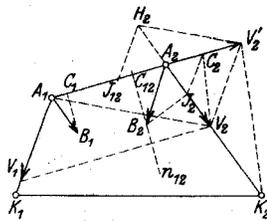


Fig. 162.

Liegt der Pol P innerhalb des Zeichnungsraumes, so läßt sich unter Umständen mit Vorteil der Punkt V_0 nach P legen, denn das hat zur Folge, daß dann J nach A_0 und sonach in Fig. 160 der Punkt C nach C_0 fällt. Die Konstruktion von n und folglich auch vom Vektor \overline{AB} wird dann sehr einfach.

Die Verbindung der beiden einfachen Konstruktionen, welche die Fig. 160 und 161 enthalten, ermöglicht nun sofort die Ermittlung des Beschleunigungszustandes eines Gelenkviereckes. Es sei (s. Fig. 162) $K_1A_1A_2K_2$ ein solches, $V_1 = \overline{A_1V_1}$ sei die senkrechte Geschwindigkeit und $b_1 = \overline{A_1B_1}$ die Beschleunigung von A_1 . Der Beschleunigungszustand der Koppel $\overline{A_1A_2}$ ist dann völlig bestimmbar, wenn wir noch die Beschleunigung b_2 des Punktes A_2 kennen. Für letztere erhält man nach dem Vorhergehenden einen geometrischen Ort, indem man $V_1V_2 \parallel A_1A_2$ zieht, ferner $V_2V_2' \parallel K_1A_1$, $V_2'H_2 \parallel A_1V_1$ und endlich $H_2J_{12} \parallel K_1A_1$; dann stellt die Strecke $\overline{A_2J_{12}}$ die Beschleunigung von A_2 hinsichtlich der Drehung von $\overline{A_1A_2}$ um A_1 dar. Zerlegen wir weiter den Vektor $\overline{A_1B_1}$ in Komponenten in Richtung von $\overline{A_1A_2}$ und einer zu $\overline{A_1A_2}$ senkrechten Geraden, und machen $\overline{J_{12}C_{12}} = \overline{A_1C_{12}}$, so ist der gesuchte geometrische Ort die Senkrechte n_{12} zu $\overline{A_1A_2}$ im Punkte C_{12} . Beachten wir weiter, daß die Komponente von b_2 in Richtung von $\overline{A_2K_2}$ die Zentripetalbeschleunigung $\frac{v_2^2}{K_2A_2} = \frac{V_2^2}{K_2A_2}$ ist und diese wie früher zeichnerisch erhalten wird, indem wir $V_2C_2 \parallel K_2V_2'$ und $C_2J_2 \parallel V_2'V_2$ ziehen, dann stellt $\overline{A_2J_2}$

diese Beschleunigung dar, und wir erhalten schließlich den Endpunkt B_2 des Beschleunigungsvektors $\overline{A_2 B_2}$ im Schnittpunkt von n_{12} mit der in J_2 senkrecht zu $A_2 K_2$ errichteten Geraden.

Zu beachten ist hierbei, daß die zentripetale Komponente $v_1^2 : \rho_1$ von b_1 durch $v_1 = V_1$ und $\rho_1 = \overline{K_1 A_1}$ völlig bestimmt und, wie früher angegeben, zu konstruieren ist. Damit wird zugleich der Beschleunigungsmaßstab für die tangentielle Komponente von b_1 bestimmt.

Eine wesentliche Vereinfachung der Konstruktion läßt sich dadurch erzielen, daß man die Endpunkte der Vektoren V_1 und V_2 in den Pol P legt. Dann geht n_{12} durch C_1 senkrecht $A_1 A_2$ und es liegen sonach B_1 und B_2 beide in derselben Normalen zu $A_1 A_2$. Jedoch ist der Nachteil dieser besonderen Anordnung, daß man für jede andere gegenseitige Lage der Glieder des Gelenkviereckes einen anderen Geschwindigkeitsmaßstab verwenden müßte, was für die Aufzeichnung von Geschwindigkeits- und Beschleunigungsplänen sich nicht zweckmäßig erweist.

Ein besonderer Vorteil ergibt sich, wenn V_1 konstant ist. Denn dann läßt sich zweckmäßig der Endpunkt des Vektors V_1 mit K_1 zusammenlegen, mit dem dann auch der Endpunkt der zentripetalen Beschleunigung $v_1^2 : \rho_1$ dauernd zusammenfällt. Da die tangentielle Komponente von A_1 in diesem Falle $= 0$ ist, so fällt weiter auch der Endpunkt B_1 des Vektors b_1 nach K_1 und man erhält C_1 als Fußpunkt des Lotes von K_1 auf $A_1 A_2$.

Die vorstehende Konstruktion versagt in den Grenzlagen des Gelenkviereckes, denn in diesen wird $v_2 = 0$ und folglich auch die Beschleunigung $v_2^2 : \overline{K_2 A_2}$. Sie läßt sich aber dann durch die folgende (s. Fig. 163) ersetzen, die darauf beruht, daß die totale Beschleunigung des Punktes A_2 in diesem Falle tangential zur Bahn, als senkrecht zu $A_2 K_2$ gerichtet ist. Wir beachten zunächst, daß sich die Komponente der Beschleunigung b_2 des Punktes A_2 wie vorher als Summe der Komponente von b_1 in Richtung von $A_1 A_2$ und der Beschleunigung $\overline{A_1 A_2} \cdot \omega_{12}^2$ der Drehung des Gliedes $A_1 A_2$ um A_1 ergibt, falls ω_{12} die Winkelgeschwindigkeit dieses Gliedes gegen das ruhende ist. Letztere Beschleunigung erhalten wir aber, indem wir durch A_1 eine beliebige Gerade legen und auf ihr den Punkt L_1 willkürlich annehmen. Dann ziehen wir $\overline{V_1 Q_1} \parallel \overline{A_2 L_1}$ und $\overline{Q_1 R_1} \parallel \overline{L_1 V_1}$ und erhalten in der Strecke $\overline{A_1 R_1}$ die gesuchte Be-

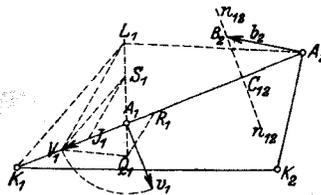


Fig. 163.

schleunigung $\overline{A_1 A_2} \cdot \omega_{12}^2$. Die Richtigkeit dieser Konstruktion erhellt daraus, daß in diesem Falle der Pol des Gliedes $\overline{A_1 A_2}$ in die Grenzlage A_2 fällt, und sonach

$$v_1 = \overline{A_2 A_1} \cdot \omega_{12}$$

werden muß. Demnach wird

$$\overline{A_1 A_2} \cdot \omega_{12}^2 = \frac{v_1^2}{\overline{A_1 A_2}} = \frac{V_1^2}{\overline{A_1 A_2}} = \overline{A_1 R_1},$$

wie aus der Ähnlichkeit der bezüglichen Dreiecke leicht hervorgeht. Nur ist zu beachten, daß diese Beschleunigung die Richtung von A_2 nach A_1 hin hat. Was ferner die Komponente von b_1 in Richtung von $\overline{A_1 A_2}$ anlangt, so ist diese, wie man sofort erkennt, gleich der Beschleunigung $v_1^2 : K_1 A_1 = V_1^2 : K_1 A_1$ und kann leicht erhalten werden, indem man $V_1 S_1 \parallel K_1 L_1$ und $S_1 J_1 \parallel L_1 V_1$ zieht, da die Strecke $\overline{A_1 J_1}$ diese Beschleunigung darstellt. Somit wird die gesuchte Komponente von b_2 in Richtung von $A_2 A_1$ gleich der Summe $\overline{R_1 A_1} + \overline{A_1 J_1} = \overline{R_1 J_1}$, die wir in A_2 antragen, d. i. $A_2 C_{12} = \overline{R_1 J_1}$ machen. Errichten wir schließlich in C_{12} die Senkrechte n_{12} zu $\overline{A_1 A_2}$, so schneidet diese die Bahntangente von A_2 im Endpunkte B_2 des Vektors $A_2 B_2$, der die gesuchte Beschleunigung darstellt.

Bei den viergliedrigen Ketten, in denen die Drehpaare z. T. durch Schiebepaare ersetzt sind, erfährt die angegebene allgemeine Konstruktion teilweise eine wesentliche Abänderung.

Für das Kurbelschubgetriebe (Fig. 164) vereinfacht sich die Konstruktion etwas durch den Umstand, daß die Beschleunigung von A_2 in der Schubrichtung liegt. Sonach schneidet hier die Normale n_{12} den Endpunkt B_2 des Beschleunigungsvektors $A_2 B_2$,

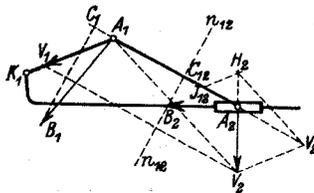


Fig. 164.

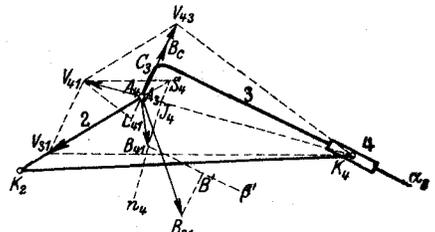


Fig. 165.

von A_2 aus der Geraden, auf der A_2 sich bewegt, unmittelbar aus. Die Strecke $\overline{A_2 C_{12}}$ aber ist gleich und gleichsinnig mit der Summe der Strecken $\overline{A_1 C_1}$ und $\overline{A_2 J_{12}}$, die wie früher zu ermitteln sind. Dreht sich die Kurbel $\overline{K_1 A_1}$ gleichförmig, wird also V_1 konstant, so wählt man zweckmäßig K_1 als Endpunkt des Vektors V_1 ; dann

fällt auch B_1 mit K_1 dauernd zusammen und C_1 ist der Fußpunkt des Lotes von K_1 auf die Gerade A_1A_2 . Von Interesse ist in diesem Falle der Zusammenhang zwischen der Beschleunigung und dem V -Plan des Punktes A_2 . Denn die Konstruktion der Beschleunigung als Subnormale der V -Kurve (s. S. 48 Fig. 82) zeigt unmittelbar, daß die Gerade, die B_2 in Fig. 164 mit dem Endpunkt V_2 verbindet, die Normale der V_2 -Kurve sein muß.

Bei der schwingenden Kurbelschleife (s. Fig. 165) wird die Änderung der Konstruktion nötig, weil der bisher mit A_2 bezeichnete Punkt ins Unendliche rückt. Es sei Fig. 165 eine allgemeine, also exzentrische Kurbelschleife, in der 1 das ruhende und 2 das treibende Glied sein möge. Für die Bewegung der Koppel 3 und der Hülse 4 ist es wesentlich, daß sie gegeneinander eine Schiebung vollziehen und sich folglich beide um denselben Winkel gegen 1 drehen; sie haben sonach auch die gleiche Winkelgeschwindigkeit und -beschleunigung. Gelingt es nun, die Beschleunigung eines Punktes des Gliedes 4, also z. B. des augenblicklich mit dem Gelenkpunkt A_3 zusammenfallenden Punktes A_4 gegen das ruhende Glied 1 zu ermitteln, so erhält man zugleich die Winkelbeschleunigung von 3 und 4, sowie die Schiebungsbeschleunigung der relativen Bewegung von 4 gegen 3. Um dies zu erreichen, bestimmen wir zunächst die senkrechte Geschwindigkeit der Relativbewegung von 4 gegen 3, indem wir durch den Endpunkt V_{31} der gegebenen Geschwindigkeit des Punktes A_3 gegen Glied 1 die Senkrechte zur Schubrichtung α_3 legen; diese schneidet auf dem Strahl K_4A_4 den Endpunkt V_{41} der Geschwindigkeit V_{41} des Punktes A_4 aus. Legen wir weiter $V_{41}V_{43} \parallel K_2A_4$, so trifft diese Parallele das Lot von A_4 auf die Schubrichtung im Endpunkt V_{43} der gesuchten relativen Schubgeschwindigkeit V_{43} . Nunmehr läßt sich nach früherem die Zentripetalbeschleunigung von A_4 infolge der Drehung der Hülse 4 um K_4 ermitteln, indem wir durch den Punkt V_{41} eine Parallele zu $V_{31}K_4$ legen, die den Strahl K_2A_4 in S_4 treffen möge, und dann $S_4J_4 \parallel V_{31}V_{41}$ ziehen; der Punkt J_4 ist der Endpunkt der gesuchten Zentripetalbeschleunigung $V_{41}^2 : K_4A_4$. Da letztere die Komponente der gesuchten Beschleunigung b_{41} des Punktes A_4 in Richtung von K_4A_4 ist, so liegt folglich der Endpunkt B_{41} der Beschleunigung b_{41} in der Senkrechten n_4 , die in J_4 zu A_4K_4 errichtet wird. Für B_{41} läßt sich aber noch ein weiterer geometrischer Ort angeben. Nach dem Satze von Coriolis ist die Beschleunigung der Relativbewegung des Punktes A_4 gegen das Glied 3

$$b_{43} = b_{31} \hat{+} (-b_{41}) \hat{+} b_c,$$

worin b_{31} die Beschleunigung von A_3 gegen 1 ist, b_{41} die gesuchte Beschleunigung von A_4 gegen 1, und

$$b_c = 2 \omega_{31} \cdot v_{43}$$

die Zusatzbeschleunigung bedeutet. Letztere kann entweder, wie auf S. 135, Fig. 158 angegeben, konstruiert werden, oder, falls der Pol P_{31} jener Figur außerhalb des Zeichnungsraumes liegt, wie folgt. Wir ziehen

$$\overline{V_{41} L_{41}} \parallel \overline{V_{43} K_4},$$

dann stellt die Strecke $\overline{A_4 L_{41}}$ die halbe Zusatzbeschleunigung, d. i. $\frac{1}{2} b_c$ dar. Denn da die Glieder 3 und 4 die gleiche Winkelgeschwindigkeit gegen 1 haben, so ist

$$\omega_{31} = \omega_{41} = \frac{V_{41}}{K_4 A_4},$$

folglich

$$\frac{1}{2} b_c = \frac{V_{41}}{K_4 A_4} \cdot v_{43} = \frac{V_{43}}{K_4 A_4} \cdot V_{41} \doteq \overline{A_4 L_{41}},$$

wie aus der Konstruktion hervorgeht. Da die Zusatzbeschleunigung

$$b_c \doteq 2 \cdot \overline{A_4 L_{41}}$$

senkrecht zu v_{43} , also in der Richtung von V_{43} nach der Seite hin anzutragen ist, die sich dem Drehsinn des Gliedes 3 entgegensetzt, so erhalten wir in der Strecke

$$\overline{A_4 B_c} = 2 \cdot \overline{A_4 L_{41}}$$

den b_c darstellenden Vektor nach Größe und Richtung. Setzen wir letzteren mit b_{31} zusammen, d. i. tragen ihn an dem Endpunkte B_{31} von b_{31} an, indem wir

$$\overline{B_{31} B'} \parallel \overline{A_4 B_c}$$

machen, so erhalten wir die Beschleunigung

$$b_{31} \hat{+} b_c \doteq \overline{A_4 B'}.$$

Unter Berücksichtigung des Umstandes, daß die Beschleunigung b_{43} die Schubrichtung hat und $-b_{43}$ mit $\overline{A_4 B'}$ zusammengesetzt die Beschleunigung

$$b_{41} = b_{31} \hat{+} b_c \hat{+} (-b_{43})$$

ergibt, erhalten wir sonach in der Parallelen β' zur Schubrichtung durch den Punkt B' einen weiteren geometrischen Ort für B_{41} . Im Schnittpunkt von n_4 und β' liegt sonach der gesuchte Endpunkt des die Beschleunigung b_{41} darstellenden Vektors. Die Komponente von b_{41} in Richtung der Senkrechten zu $K_4 A_4$ bestimmt die Winkelbeschleunigung des Gliedes 4 und damit zugleich die von 3.

Daß das eben beschriebene Verfahren zur Ermittlung des Beschleunigungszustandes auch bei der rotierenden Kurbelschleife (s. Fig. 112), nur in etwas geänderter Reihenfolge, Anwendung finden kann, bedarf keiner näheren Begründung.

Die Kreuzschieberkette (s. Fig. 113) gestattet die Ermittlung des Beschleunigungszustandes nach dem gleichen Verfahren, wie das Schubkurbelgetriebe, nur insofern vereinfacht, als die Beschleunigungen der beiden geführten Punkte bereits bekannte Richtungen, nämlich die der Schubrichtungen beider Schiebepaare haben.

Die Winkelschleifenkette endlich läßt die Ermittlung des Beschleunigungszustandes genau wie die schwingende Kurbelschleife zu, wovon man sich leicht überzeugt.

Auch bei den dreigliedrigen Ketten mit einem unselbständigen höheren Elementenpaar ermöglicht das Verfahren, das zur Kenntnis des Beschleunigungszustandes am Gelenkviereck führt, die Erreichung des gleichen Zieles. Denn der Bewegungszustand dieser Ketten (s. Fig. 166) durch drei unendlich benachbarte Lagen stimmt völlig überein

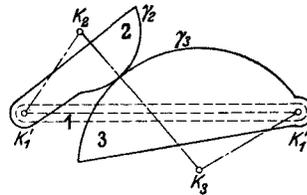


Fig. 166.

mit dem eines Gelenkviereckes, dessen Steg das Glied 1, dessen Koppel aber durch die Verbindungslinie der Krümmungsmittelpunkte K_2 und K_3 der beiden Hüllkurven γ_2 und γ_3 des höheren Elementenpaares gebildet wird. Mittels der gegebenen Beschleunigung des Punktes K_2 , der Winkelgeschwindigkeit der Koppel K_2K_3 und der des Gliedes 3 findet man wie vorher die Beschleunigung von K_3 und aus letzterer die Winkelbeschleunigung des Gliedes 3.

51. Die Ermittlung des Beschleunigungszustandes der kinematischen Ketten.

Es ist leicht zu übersehen, daß der zeichnerische Weg, der bei dem Gelenkviereck zur Kenntnis des Beschleunigungszustandes der bewegten Glieder gegen das ruhende führt, auch bei allen zwangsläufigen kinematischen Ketten größerer Gliederzahl als vier anwendbar ist, soweit diese aus einer Aneinanderreihung von Gelenkvierecken entstehen, wie sie Fig. 19 darstellt, falls in letzterer 1 das ruhende Glied ist. Das gilt auch für Ketten dieser Art, in denen ein Teil der Drehpaare durch Schiebepaare ersetzt ist und höhere Elementenpaare auftreten, da letztere nach dem früheren durch Gelenkverbindungen zwischen den fraglichen Gliedern ersetzt werden können. An einem Beispiel möge dieser Weg erläutert werden, da er vielfach Anwendung finden kann. Wir wählen dazu die schon behandelte Vorrichtung zum Anlassen von Verbrennungskraftmaschinen von Sulzer, die auf S. 91 u. f. schon behandelt wurde und in Fig. 122 schematisch dargestellt ist.

In dieser Kette treten außer Dreh- und Schiebepaaren auch höhere Elementenpaare auf und zwar die Elementenpaare 2, 3 und 4, 5. Ersteres ersetzen wir, falls K_2 der Krümmungsmittelpunkt der unrunder Scheibe an der Berührungsstelle ist, durch das Gelenkviereck 12, K_2 , 34, 14, indem wir die Punkte K_2 und 34 durch eine starre Stange als Hilfsglied verbunden denken. Ebenso verfahren wir mit dem Elementenpaar, das wir unter Einschaltung der die Krümmungsmittelpunkte K_4 und K_5 des Hüllkurvenpaares (c_4, c_5) gelenkig verbindenden Stange K_4K_5 in das Gelenkviereck 14, K_4 , K_5 , 15 umwandeln. Der Geschwindigkeitszustand dieses Mechanismus wurde schon S. 92 ermittelt und in Fig. 122 eingetragen. Um die Beschleunigung des Gelenkpunktes 67, die zugleich die des Ventils ist, zu finden, verfahren wir dem vorher angegebenen Grundgedanken folgend in der Weise, daß wir aus der bekannten Beschleunigung der unrunder Scheibe 2 zunächst die Beschleunigung von K_2 und aus dieser auf dem mitgeteilten Wege die von 34 konstruieren. Da die Scheibe 2 sich meist gleichförmig dreht, so wird die Beschleunigung von K_2 die Zentripetalbeschleunigung, die zeichnerisch sich leicht ergibt. Die Beschleunigung b_{34} des Punktes 34 verwenden wir nun zunächst zur Ermittlung der Beschleunigung des Punktes K_4 , was wieder sehr einfach ist, da 34 und K_4 beide dem um den ruhenden Punkt 14 sich drehenden Gliede 4 angehören. Die Kenntnis der Beschleunigung von K_4 ermöglicht weiterhin die Bestimmung der Beschleunigung von K_5 nach dem Verfahren am Gelenkviereck, das hier 14, K_4 , K_5 , 15 ist, und wenn man beachtet, daß das Glied 5 sich um den ruhenden Punkt 15 dreht, so läßt sich nunmehr leicht die Beschleunigung des Punktes finden, der augenblicklich mit dem Gelenkpunkt 67 zusammenfällt. Diese letztere Beschleunigung werde mit b_A^5 bezeichnet und in Fig. 167 durch den Vektor \overline{AB}_5 dargestellt, in der A die kurze Bezeichnung für den Gelenkpunkt 67 sein soll, während der Gelenkpunkt 15 hier mit C bezeichnet ist. Es ist beachtenswert, daß die vier Glieder 1, 5, 6 und 7 eine Winkelschleifenkette bilden und deshalb soll die Ermittlung der Beschleunigung b_A^1 des Punktes A , die in der Schubrichtung des Gliedes 7 liegt und durch den Vektor \overline{AB}_1^1 dargestellt werden mag, durchgeführt werden. Hierbei bedürfen wir der Kenntnis der relativen Geschwindigkeit v_{67} , mit der sich der Punkt A , bzw. der Stein 6 gegen das Glied 5 bewegt.

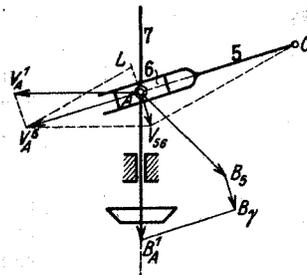


Fig. 167.

in der Schubrichtung des Gliedes 7 liegt und durch den Vektor \overline{AB}_1^1 dargestellt werden mag, durchgeführt werden. Hierbei bedürfen wir der Kenntnis der relativen Geschwindigkeit v_{67} , mit der sich der Punkt A , bzw. der Stein 6 gegen das Glied 5 bewegt.

Diese Geschwindigkeit wurde schon in Fig. 121 bestimmt und dort als senkrechte Geschwindigkeit mit V_{56} bezeichnet. Denn nach dem Satze von Coriolis ist

$$b_A^1 = b_A^5 \hat{\perp} b_{56} \hat{\perp} b_\gamma,$$

und hierin bedeutet b_γ die Zusatzbeschleunigung, welche die Größe

$$b_\gamma = 2 \cdot \omega_5 \cdot v_a = 2 \cdot \omega_5 \cdot V_{56}$$

hat und senkrecht zu AC gleichsinnig mit V_{56} ist. Die Beschleunigung b_γ kann leicht konstruiert werden. Man ziehe $V_A^5 L \parallel V_{56} C$ bis zum Schnittpunkt L mit der Senkrechten zu AC durch A , dann ist

$$\overline{AL} = \overline{AV_{56}} \cdot \frac{\overline{AV_A^5}}{\overline{CA}},$$

wie aus der Ähnlichkeit der gezeichneten Dreiecke $AV_A^5 L$ und ACV_{56} sofort hervorgeht. Da

$$V_A^5 = \overline{CA} \cdot \omega_5,$$

so folgt

$$\overline{AL} = \overline{AV_{56}} \cdot \omega_5 = V_{56} \cdot \omega_5 = \frac{1}{2} b_\gamma.$$

Unter Berücksichtigung der Richtung von b_γ tragen wir nun die Strecke $\overline{B_5 B_\gamma} \equiv 2 \cdot \overline{AL}$ im Punkte B_5 an und legen, da b_{56} die Schubrichtung \overline{CA} hat, eine Parallele zu \overline{CA} durch B_γ ; diese schneidet die Gerade 7 im Endpunkte B_A^1 der gesuchten Beschleunigung b_A^1 . Zugleich erhält man in der Strecke $\overline{B_\gamma B_A^1}$ den Vektor, welcher die Beschleunigung b_{56} darstellt.

Für andere Ketten dagegen reicht das angegebene Verfahren zur Ermittlung des Beschleunigungszustandes nicht aus, wie z. B. bei der sechsgliedrigen Kette Fig. 21 b, wie man leicht erkennt; es bedarf deshalb noch weiterer Hilfssätze und -konstruktionen, von denen die wichtigsten angeführt werden sollen.

Eine recht häufig anwendbare ist die folgende. Zwei in A_{12} (s. Fig. 168) gelenkig verbundene Ebenen E_1 und E_2 werden derart gegen die ruhende Ebene bewegt, daß je ein Punkt beider Ebenen gegebene Geschwindigkeiten und Beschleunigungen besitzt. Es habe A_1 die senkrechte Geschwindigkeit V_1 und die Beschleunigung $b_1 \equiv \overline{A_1 B_1}$, und A_2 die entsprechenden Vektoren V_2 und $b_2 \equiv \overline{A_2 B_2}$. Die senkrechte Geschwindigkeit V_{12} des Gelenkpunktes A_{12} ergibt sich dann nach früherem¹⁾, indem man durch den Endpunkt V_1 eine

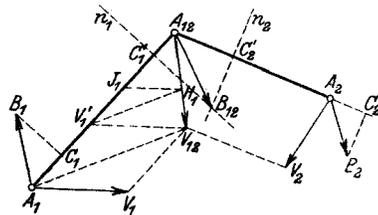


Fig. 168.

¹⁾ Vgl. S. 75 u. f., bzw. Fig. 115

Parallele zu $\overline{A_1 A_{12}}$, und durch V_2 eine solche zu $\overline{A_2 A_{12}}$ legt; der Schnittpunkt V_{12} beider ist der Endpunkt des Vektors V_{12} . Um auch die Beschleunigung b_{12} des Punktes A_{12} zu erhalten, benutzen wir das in Fig. 160 dargestellte Verfahren, indem wir die Normalen n für die Glieder $\overline{A_1 A_{12}}$ und $\overline{A_2 A_{12}}$ konstruieren, denn diese sind nach den früheren Erörterungen je ein geometrischer Ort für den Endpunkt B_{12} des gesuchten Beschleunigungsvektors $\overline{A_{12} B_{12}} = b_{12}$. Wir ermitteln also zunächst nach Fig. 161 den Punkt J_1 auf $\overline{A_1 A_{12}}$, indem wir $V_1' V_{12} \parallel A_1 V_1$ und $V_1' H_1 \parallel A_1 V_{12}$ ziehen, ferner $H_1 J_1 \parallel A_1 V_1$; dann machen wir $\overline{J_1 C_1'} = \overline{A_1 C_1}$ im gleichen Sinne und errichten in C_1 die Senkrechte n_1 zu $\overline{A_1 A_{12}}$. Auf n_1 liegt der gesuchte Punkt B_{12} . Verfahren wir in der gleichen Weise mit der Ebene E_2 , so erhalten wir die Normale n_2 zu $\overline{A_2 A_{12}}$ in C_2' und finden dann B_{12} als Schnittpunkt von n_1 und n_2 .

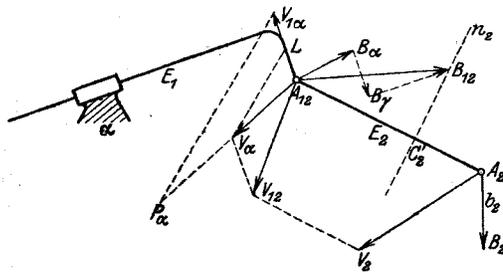


Fig. 169.

Die vorstehend mitgeteilte Konstruktion bedarf einer Änderung, falls an die Stelle eines der drei Gelenke ein Richtpaar tritt.

Wird A_1 (oder A_2) durch ein Richtpaar ersetzt (s. Fig. 169), so ermittelt man vorerst den Geschwindigkeitszustand von E_1 und E_2

nach dem S. 76 beschriebenen und in Fig. 115a dargestellten Verfahren, das uns die Bestimmung der weiterhin nötigen Geschwindigkeit $V_{1\alpha}$ lehrt, mit der sich das Glied 1 gegen das Glied α bewegt. Nunmehr benutzt man die Beschleunigung b_α des mit A_{12} zusammenfallenden Punktes auf dem Glied α (da der Beschleunigungszustand der Bewegung von α gegen das ruhende Glied als bekannt vorausgesetzt wird) und setzt mit ihr die Beschleunigung $b_{1\alpha}$ der Relativbewegung von 1 gegen α , sowie die Zusatzbeschleunigung b_γ zusammen, weil damit die gesuchte Beschleunigung b_{12} des Punktes A_{12} nach dem Satze von Coriolis, d. i. nach der Beziehung

$$b_{12} = b_\alpha \hat{+} b_{1\alpha} \hat{+} b_\gamma$$

erhalten wird. Hierin ist

$$b_\gamma = 2\omega_\alpha \cdot V_{1\alpha}$$

und

$$\omega_\alpha = \frac{V_\alpha}{P_\alpha A_{12}}$$

worin P_α den Pol der Bewegung des Gliedes α gegen das ruhende Glied bezeichnet. Sonach wird

$$\frac{1}{2} b_\gamma = \frac{V_\alpha}{P_\alpha A_{12}} \cdot V_{1\alpha}$$

und diese Beschleunigung wird dargestellt durch die Strecke

$$\overline{A_{12}L} = \frac{\overline{A_{12}V_\alpha}}{\overline{A_{12}P_\alpha}} \cdot \overline{A_{12}V_{1\alpha}},$$

die sich ergibt, wenn man $V_\alpha L \parallel P_\alpha V_{1\alpha}$ zieht. Da b_γ die Richtung von $V_{1\alpha}$ hat, so tragen wir die Strecke $\overline{B_\alpha B_\gamma} = 2 \cdot \overline{A_{12}V_{1\alpha}}$ gleichgerichtet mit $V_{1\alpha}$ an den Endpunkt B_α der Beschleunigung b_α an und legen durch B_γ die Parallele zur Schubrichtung, auf der der Endpunkt B_{12} des Vektors b_{12} liegen muß, da $b_{1\alpha}$ die Schubrichtung hat. Andererseits ist die Normale n_2 zu $\overline{A_2 A_{12}}$ im Punkte C_2' ebenfalls ein geometrischer Ort für B_{12} ; im Schnittpunkt von n_2 mit der erwähnten Parallelen zur Schubrichtung liegt sonach der gesuchte Endpunkt B_{12} des Beschleunigungsvektors b_{12} .

Ist dagegen das Gelenk A_{12} durch ein Schiebepaar vertreten (s. Fig. 170), so ermittelt man zunächst wieder den Geschwindigkeitszustand beider Ebenen nach dem S. 76, Fig. 115 b angegebenen Verfahren, wodurch man die Geschwindigkeit V_{31} und damit V_d erhält. Weiter bestimmt man

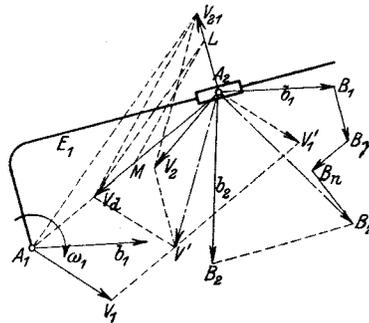


Fig. 170.

die relative Beschleunigung b_{21} des Gliedes 2 gegen 1, indem man sich die Beschleunigung b_2 des Punktes A_2 nach dem Satze von Coriolis zusammengesetzt denkt aus der Beschleunigung b_1' des Punktes auf Glied 1, der augenblicklich mit A_2 zusammenfällt, der gesuchten relativen Beschleunigung b_{21} und der Zusatzbeschleunigung $b_\gamma = 2 \omega_1 \cdot v_{21}$. Nun setzt sich nach dem Früheren b_1' zusammen aus der Beschleunigung b_1 des Punktes A_1 und der Beschleunigung b_α infolge der Drehung von 1 um A_1 , letztere aber aus der Zentripetalbeschleunigung

$$b_n = \overline{A_1 A_2} \cdot \omega_1^2 = \frac{V_d^2}{\overline{A_1 A_2}}$$

und der Tangentialbeschleunigung

$$b_t = \overline{A_1 A_2} \cdot \epsilon_1.$$

Von diesen beiden Komponenten läßt sich b_n nach dem früher an-

gegebenen Verfahren zeichnerisch leicht ermitteln, dagegen b_t nicht, weil die Winkelbeschleunigung ε_1 vom Glied 1 nicht bekannt ist. Wir konstruieren deshalb zunächst

$$\frac{1}{2} b_\gamma = \omega_1 \cdot v_{21} = \frac{V_a}{A_1 A_2} \cdot V_{21} = \frac{A_2 V_d}{A_1 A_2} \cdot \overline{A_2 V_{21}} = \overline{A_2 L},$$

indem wir $V_d L \parallel A_2 V_{21}$ ziehen; dann ist $2 \cdot \overline{A_2 L}$ im entgegengesetzten Sinne wie V_{21} in A_2 angetragen der Vektor, der b_γ darstellt. Zieht man ferner $LM \parallel V_{21} V_d$, so folgt aus der Ähnlichkeit der erhaltenen Dreiecke wie früher

$$\overline{A_2 M} = \frac{\overline{A_2 V_d^2}}{\overline{A_2 A_1}} = b_n.$$

Nunmehr tragen wir den Vektor $\overline{A_2 B_1} = b_1$ an A_2 an, in B_1 die Strecke $\overline{B_1 B_\gamma} = b_\gamma$ und in B_γ den Vektor $\overline{B_\gamma B_n} = b_n$ und legen durch B_γ eine Senkrechte zu $A_1 A_2$, durch den Endpunkt B_2 des Beschleunigungsvektors b_2 aber eine Parallele zur Schubrichtung. Ist B_2' der Schnittpunkt dieser Senkrechten mit der Parallelen, so stellt die Strecke $\overline{B_n B_2'}$ die Beschleunigung b_t und $\overline{B_2' B_2}$ die relative Beschleunigung b_{21} dar, weil $\overline{B_n B_2'} \perp A_1 A_2$ und $\overline{B_2' B_2}$ parallel der Schubrichtung ist und nach dem Satze von Coriolis

$$b_2 = b_1' \hat{+} b_{21} \hat{+} b_\gamma = b_1 \hat{+} b_n \hat{+} b_t \hat{+} b_{21} \hat{+} b_\gamma$$

sein muß. Da

$$\overline{B_n B_2'} = b_t = \overline{A_1 A_2} \cdot \varepsilon_1,$$

so hat man damit die Winkelbeschleunigung ε_1 gefunden, die zugleich die von E_2 ist, weil die beiden Glieder durch ein Schiebepaar verbunden sind und folglich gleiche Winkelgeschwindigkeiten und -beschleunigungen haben.

Als ein Beispiel möge der Kurbelantrieb für Kolbenpumpen von C. P. Holst behandelt werden. Das Getriebe (s. Fig. 171) besteht aus 6 Gliedern, von denen 2 die treibende Kurbel, 6 den getriebenen Pumpenkolben bezeichnet. Letztere ist mit dem ruhenden Glied 1

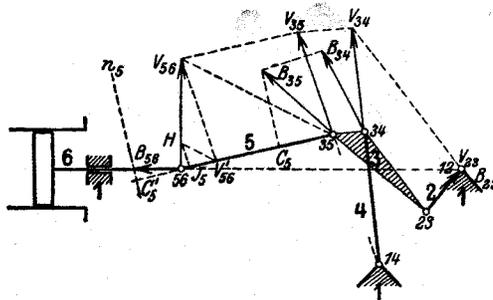


Fig. 171.

durch ein Schiebepaar verbunden; alle übrigen beweglichen Verbindungen sind Drehpaare. Die dem Getriebe zugrunde liegende Drehpaarkette ist in Fig. 21 b dargestellt. Die senkrechte Geschwin-

digkeit V_{23} des Kurbelzapfens 23 werde durch die Strecke $12 \div 23$ dargestellt; bei gleichförmiger Drehung der Kurbelwelle liegt sonach V_{23} dauernd in 12. Ziehen wir $V_{23}V_{34} \parallel 23 \div 34$ bis zur Geraden $14 \div 34$, so erhalten wir V_{34} und dann V_{35} als Schnittpunkt der Geraden $V_{23}V_{35} \parallel 23 \div 35$ und $V_{34}V_{35} \parallel 34 \div 35$. Legt man schließlich die Gerade $V_{35}V_{56} \parallel 35 \div 56$, so findet man im Schnittpunkt dieser mit der Senkrechten zur Schubrichtung die senkrechte Geschwindigkeit V_{56} des Gelenkpunktes 56 und damit die des Kolbens. Die Beschleunigung des letzteren ergibt sich auf folgendem Wege. In dem Gelenkviereck 12, 23, 34, 14 läßt sich die Beschleunigung b_{34} des Punktes 34, wie früher mitgeteilt, bestimmen; wir wollen sie unter der Annahme gleichförmiger Kurbeldrehung ermittelt denken, wobei der Endpunkt B_{23} des Vektors, der die Beschleunigung b_{23} des Kurbelzapfens darstellt, dauernd in 12 liegt, falls dies mit V_{23} der Fall ist. Dann ermitteln wir den Endpunkt B_{35} des Beschleunigungsvektors von 35, indem wir $\triangle B_{23}B_{34}B_{35} \sim \triangle 23, 34, 35$ machen, da dies der kürzeste Weg zur Bestimmung von b_{35} ist. Nunmehr suchen wir die Beschleunigung b_{56} des Kolbens, indem wir das der Fig. 170 zugrunde liegende Verfahren anwenden. In diesem Falle ist das dort mit α bezeichnete Glied das ruhende Glied 1, weshalb $\omega_\alpha = \omega_1 = 0$ und $V_\alpha = 0$ zu setzen ist; die dort mit $V_{1\alpha}$ bezeichnete Geschwindigkeit fällt mit V_{12} zusammen und stimmt hier mit V_{56} überein. Da ferner $b_\alpha = 0$ und auch $b_\gamma = 2\omega_\alpha \cdot v_{1\alpha} = 0$ wird, so ist hier

$$b_{56} = b_{61},$$

d. h. die Beschleunigung der Kolbenbewegung deckt sich mit der von 56, und da b_{61} die Schubrichtung hat, so erhalten wir hier erheblich einfacher den Endpunkt B_{56} des Beschleunigungsvektors von 56 als Schnittpunkt der Normalen n_5 zur Geraden $35 \div 56$ im Punkte C_5' mit der Geraden, auf der 56 sich bewegt. Der Punkt C_5' findet sich aber nach Fig. 161 und 160, indem wir $V_{56}V' \parallel 35 \div 35$, ferner $V'H \parallel 35 \div V_{56}$ und $HJ_5 \parallel V_{56}V'_{56}$ ziehen, und J_5C_5' gleich der Komponente $35 \div C_5$ von b_{35} in Richtung von $35 \div 56$ machen. Diese Lösung ergibt sich unmittelbar unter Berücksichtigung des Umstandes, daß die Richtung der Beschleunigung b_{56} die der Geraden ist, auf der sich 56 bewegt und die Normale n_5 der geometrische Ort für B_{56} .

Würde dagegen der Punkt 56 auf einem Kreise gegen 1 bewegt, d. h. 6 mit 1 wie in der Kette Fig. 21 b durch ein Drehpaar verbunden sein, so fände sich B_{56} als Schnittpunkt der Normalen n_5 und n_6 , wobei n_6 wie vorher angegeben zu bestimmen wäre. Weil aber hier 1 und somit 16 ruht, so sind Geschwindigkeit und

Beschleunigung von 16 gleich Null und es fällt C_6' mit J_6 zusammen, was die Konstruktion etwas vereinfacht.

Auf die zahlreichen Anwendungen des gegebenen Verfahrens z. B. bei den bekannten Umsteuerungen der Lokomotiven und Schiffe werde hier nur hingewiesen, da sie nur eine Wiederholung von Bekanntem ergeben. Es gibt aber auch Mechanismen und Getriebe, für welche die bisher entwickelten Methoden zur Bestimmung des Beschleunigungszustandes nicht ausreichen, wie z. B. bei allen, die aus den achtgliedrigen Ketten Fig. 22e und 23c hervorgehen. Hierzu ist vielmehr die folgende Erweiterung des Verfahrens nötig.

Eine Ebene E sei mit drei anderen Ebenen E_1 , E_2 und E_3 in den Punkten A_1 , A_2 und A_3 gelenkig verbunden (s. Fig. 172). In jeder der drei Ebenen E_k ($k=1, 2, 3$) werde ein beliebiger Punkt L_k mit gegebener Geschwindigkeit v_k^0 und Beschleunigung b_k^0 bewegt. Es sind die Geschwindigkeiten v_k und die Beschleunigungen b_k der drei Eckpunkte A_k des geführten Dreiecks $A_1A_2A_3$ zu ermitteln. Das erstere geschieht nach dem auf S. 77, Fig. 116 mitgeteilten

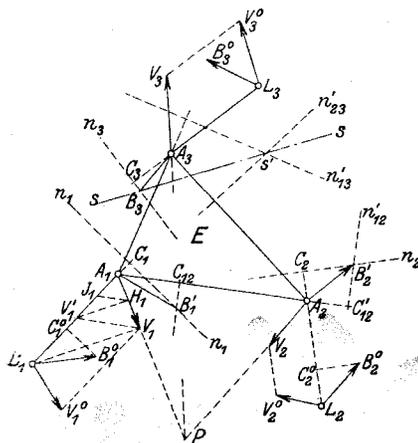


Fig. 172.

Verfahren, das zur zeichnerischen Bestimmung der drei senkrechten Geschwindigkeiten V_k der Punkte A_k führt; das muß vorausgehen, weil diese Vektoren für die Ermittlung der Beschleunigungen nötig sind. Zu letzterer übergehend, denken wir uns den Beschleunigungsvektor b_1^0 von L_1 durch die Strecke $L_1B_1^0$ dargestellt, dann läßt sich nach den Fig. 161 und 160 zunächst die Normale n_1 finden, die ein geometrischer Ort für den Endpunkt B_1 des Beschleunigungsvektors b_1 des Punktes A_1 ist. In

Fig. 172 ist die Konstruktion für den Punkt J_1 durchgeführt und dann $J_1C_1 = L_1C_1^0$ gemacht worden, wie nach Fig. 160 erforderlich. Kennen wir aber die Beschleunigung von A_1 , bzw. den Punkt B_1 , so ergeben sich nach demselben Verfahren entsprechende geometrische Orte für die Punkte B_2 und B_3 der den Punkten A_2 und A_3 zugeordneten Beschleunigungsvektoren $A_2B_2^0$ und $A_3B_3^0$; diese Normalen mögen unter der Annahme, daß $A_1B_1^0$ der Beschleunigungsvektor von A_1 sei, nach Anwendung des gleichen Verfahrens auf die Strecken A_1A_2 und A_1A_3

konstruiert und mit n'_{12} bzw. n'_{13} bezeichnet werden. Ermittelt man nun in der gleichen Weise die Normale n_2 für den Stab L_2A_2 , so liegt im Schnittpunkt von n_2 mit n'_{12} der Endpunkt B_2' des Beschleunigungsvektors von A_2 . Mit diesem und der Geschwindigkeit V_3 ergibt sich schließlich die Normale n'_{23} für die Dreiecksseite A_2A_3 , und da diese ein geometrischer Ort für B_3' ist und das gleiche für die Normale n'_{13} gilt, so liegt im Schnittpunkt S' von n'_{13} und n'_{23} der Endpunkt B_3' des Beschleunigungsvektors für A_3 . Würde man anstatt B_1' einen anderen Punkt auf n_1 gewählt haben, so erhielte man einen anderen Punkt B_2' auf n_2 , ferner andere Normalen n'_{23} und n'_{13} . Aber man erkennt aus dem Verfahren, daß die Parallelstrahlenbüschel der Normalen n'_{12} und n'_{23} zueinander perspektivisch sind, und folglich der Ort der Schnittpunkte einander zugeordneter Strahlen eine Gerade sein muß. Der Ort dieser Schnittpunkte S' ist in der Figur mit s bezeichnet. Er läßt sich zeichnerisch ohne Schwierigkeit ermitteln, indem man für B_1 irgend zwei Annahmen macht und die entsprechenden beiden Schnittpunkte S konstruiert; ihre Verbindungslinie ist die Gerade s . Letztere hat aber die wesentliche Eigenschaft, ein geometrischer Ort für B_3 zu sein, und da die gleiche Eigenschaft auch der Normalen n_3 zukommt, so liegt im Schnittpunkt von s mit n_3 der Endpunkt B_3 des Beschleunigungsvektors A_3B_3 . Nunmehr kann man rückwärtsgehend, leicht durch die Projektionen von A_3B_3 auf die Dreiecksseiten A_3A_1 und A_3A_2 die wahren Lagen von B_1 und B_2 finden, womit die gestellte Aufgabe ihre zeichnerische Lösung gefunden hat.

Die Anwendung auf die vorerwähnte achtegliedrige Kette Fig. 22 e gestaltet sich ganz der vorstehenden Konstruktion gemäß, falls 1 das ruhende Glied ist. Man geht von dem Gelenkviereck aus, das von den Gliedern 1, 2, 3 und 4 gebildet wird, und bestimmt zunächst nach dem früheren Verfahren Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der drei Gelenkpunkte 25, 36 und 47. Nunmehr lassen sich die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der Eckpunkte des Dreieckes 8 (s. Fig. 22 e) genau nach der vorher entwickelten Konstruktion bestimmen.

Ähnlich ist es bei der Kette Fig. 23 c, die sich auch in Fig. 129 a dargestellt findet. Bezeichnet wieder 1 das ruhende Glied, so läßt sich zunächst Geschwindigkeit und Beschleunigung des Gelenkpunktes 24 finden, falls 5 oder 6 das treibende Glied ist. Da ferner die Gelenkpunkte 17 und 18 in Ruhe sind, also deren Geschwindigkeiten und Beschleunigungen gleich Null, so erhält man nach dem gegebenen Verfahren sofort, und zwar in wesentlich vereinfachter Weise die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der Eckpunkte des Dreieckes 3.

Ist ein Teil der Drehpaare in diesen und verwandten Ketten durch Schiebepaare ersetzt, so müssen ganz ähnliche Abänderungen des Verfahrens Platz greifen, wie in den S. 148 u. f. behandelten Fällen, auf die jedoch der großen Zahl von Möglichkeiten wegen nicht eingegangen werden soll, zumal sie auch keine besonderen Schwierigkeiten aufweisen.

Was schließlich die höheren Elementenpaarketten anlangt, so bedürfen diese keiner besonderen Verfahren zur Ermittlung ihres Beschleunigungszustandes, nachdem gezeigt wurde, daß sich jedes selbständige wie unselbständige höhere Elementenpaar ohne Änderung des Beschleunigungszustandes durch Gelenkvierecke ersetzen, die Kette sich demnach in eine Umschlußpaarkette von dem gleichen Beschleunigungszustand umwandeln läßt.

Verlag von Julius Springer in Berlin W 9.

Taschenbuch für den Maschinenbau. Unter Mitwirkung hervorragender Fachmänner bearbeitet von Ingenieur **H. Dubbel**, Berlin. 1494 Seiten mit 2448 Textfiguren und 4 Tafeln. Zwei Teile. In Leinen gebunden.

In einem Bande Preis M. 16,—; in zwei Bänden M. 17,—.

Hilfsbuch für den Maschinenbau. Für Maschinentechniker sowie für den Unterricht an technischen Lehranstalten. Von Prof. **Fr. Freytag**, Königl. Baurat, Lehrer an den Technischen Staatslehranstalten in Chemnitz. Fünfte, erweiterte und verbesserte Auflage. Mit 1218 in den Text gedruckten Abbildungen, 1 farbigen Tafel, 9 Konstruktionstafeln und einer Beilage für Oesterreich.

Preis gebunden M. 10,—; in Leder gebunden M. 12,—.

Grundzüge der Kinematik. Von **A. Christmann**, Dipl.-Ing. in Berlin, und Dr.-Ing. **Baer**, Professor an der Technischen Hochschule in Breslau. Mit 161 Textfiguren.

Preis M. 4,80; gebunden M. 5,80.

Die Regelung der Kraftmaschinen. Berechnung und Konstruktion der Schwungräder, des Massenausgleichs und der Kraftmaschinenregler in elementarer Behandlung. Von Professor **Max Tolle**, Privatdozent an der Technischen Hochschule in Karlsruhe. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 463 Textfiguren und 19 Tafeln. Preis gebunden M. 26,—.

Technische Hydrodynamik. Von Dr. **Franz Präsil**, Professor an der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich. Mit 81 Textfiguren.

Preis gebunden M. 9,—.

Technische Thermodynamik. Von Prof. Dipl.-Ing. **W. Schüle**.

Erster Band: Die für den Maschinenbau wichtigsten Lehren nebst technischen Anwendungen. Dritte, erweiterte Auflage. Mit 214 Textfiguren und 7 Tafeln.

Preis gebunden M. 16,—.

Zweiter Band: Höhere Thermodynamik mit Einschluß der chemischen Zustandsänderungen, nebst ausgewählten Abschnitten aus dem Gesamtgebiet der technischen Anwendungen. Mit 155 Textfiguren und 3 Tafeln.

Preis gebunden M. 10,—.

Technische Wärmelehre der Gase und Dämpfe. Eine Einführung für Ingenieure und Studierende. Von **Franz Seufert**, Ingenieur und Oberlehrer an der Königl. höheren Maschinenbauschule in Stettin. Mit 25 Abbildungen und 5 Zahlentafeln.

Preis gebunden M. 2,80.

Technische Schwingungslehre. Einführung in die Untersuchung der für den Ingenieur wichtigsten periodischen Vorgänge in der Mechanik starrer, elastischer, flüssiger und gasförmiger Körper, sowie aus der Elektrizitätslehre von Dr. **Wilhelm Hort**, Dipl.-Ing. bei den Siemens-Schuckert-Werken. Mit 87 Textfiguren.

Preis M. 5,60; gebunden M. 6,40.

Gebundene Bücher z. Z. mit einem Aufschlag von 10% für Einbandmehrkosten.

Ingenieur-Mathematik. Lehrbuch der höheren Mathematik für die technischen Berufe. Von Dr.-Ing. Dr. phil. **Heinz Egerer**, Dipl.-Ing., vorm. Professor für Ingenieur-Mechanik und Material-Prüfung an der Technischen Hochschule Dronheim.

Erster Band: Niedere Algebra und Analysis. — Lineare Gebilde der Ebene und des Raumes in analytischer und vektorieller Behandlung. — Kegelschnitte. Mit 320 Textabbildungen und 575 vollständig gelösten Beispielen und Aufgaben. Preis gebunden M. 12,—.

Differential- und Integralrechnung (Infinitesimalrechnung). Für Ingenieure, insbesondere auch zum Selbststudium von Diplom-Ingenieur Dr. **W. Koestler**, Burgdorf, und Dr. **M. Tramer**, Zürich. Erster Teil: Grundlagen. Mit 221 Textfiguren und 2 Tafeln.

Preis M. 13,—; gebunden M. 14,—.

Die Differentialgleichungen des Ingenieurs. Darstellung der für die Ingenieurwissenschaften wichtigsten gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen, sowie der zu ihrer Lösung dienenden genauen und angenäherten Verfahren einschließlich der mechanischen und graphischen Hilfsmittel von Dipl.-Ing. Dr. phil. **W. Hort**, Ingenieur der Siemens-Schuckert-Werke. Mit 255 Figuren.

Preis gebunden M. 14,—.

Aufgaben aus der technischen Mechanik. Von Professor **Ferd. Wittenbauer**, Graz.

I. Band: Allgemeiner Teil. Dritte, verbesserte Auflage. 816 Aufgaben nebst Lösungen. Mit 610 Textfiguren. Preis gebunden M. 6,40.

II. Band: Festigkeitslehre. Zweite, verbesserte Auflage. 591 Aufgaben nebst Lösungen und einer Formelsammlung. Mit 490 Textfiguren.

Preis M. 6,—; gebunden M. 6,80.

III. Band: Flüssigkeiten und Gase. Zweite, verbesserte Auflage. 586 Aufgaben nebst Lösungen und einer Formelsammlung. Mit 396 Textfiguren.

Preis M. 9,—; gebunden M. 10,20.

Technische Mechanik. Ein Lehrbuch der Statik und Dynamik für Maschinen- und Bauingenieure. Von **Ed. Autenrieth**. Zweite Auflage. Neu bearbeitet von Prof. Dr.-Ing. **Max Enßlin** in Stuttgart. Mit 297 Textfiguren.

Preis gebunden M. 18,—.

Elastizität und Festigkeit. Die für die Technik wichtigsten Sätze und deren erfahrungsmäßige Grundlage. Von Dr.-Ing. **C. Bach**, Kgl. Württ. Staatsrat, Professor des Maschinen-Ingenieurwesens, Vorstand des Ingenieurlaboratoriums und der Materialprüfungsanstalt an der Kgl. Technischen Hochschule Stuttgart. Siebente, vermehrte Auflage. Unter Mitwirkung von Prof. **R. Baumann**, Stellvertreter des Vorstandes der Materialprüfungsanstalt an der Kgl. Technischen Hochschule Stuttgart. Mit in den Text gedruckten Abbildungen und 26 Tafeln in Lichtdruck. In Vorbereitung. Preis gebunden etwa M. 28,—.

Das Maschinen-Zeichnen. Begründung und Veranschaulichung der sachlich notwendigen zeichnerischen Darstellungen und ihres Zusammenhanges mit der praktischen Ausführung. Von **A. Biedler**, Professor an der Kgl. Technischen Hochschule zu Berlin. Zweite, neubearbeitete Auflage. Mit 436 Textfiguren.

Preis gebunden M. 10,—.

Gebundene Bücher z. Z. mit einem Aufschlag von 10% für Einbandmehrkosten.

Verlag von Julius Springer in Berlin W 9.

Taschenbuch für den Maschinenbau. Unter Mitwirkung hervorragender Fachmänner bearbeitet von Ingenieur **H. Dubbel**, Berlin. 1494 Seiten mit 2448 Textfiguren und 4 Tafeln. Zwei Teile. In Leinen gebunden.

In einem Bande Preis M. 16,—; in zwei Bänden M. 17,—.

Hilfsbuch für den Maschinenbau. Für Maschinentechniker sowie für den Unterricht an technischen Lehranstalten. Von Prof. **Fr. Freytag**, Königl. Baurat, Lehrer an den Technischen Staatslehranstalten in Chemnitz. Fünfte, erweiterte und verbesserte Auflage. Mit 1218 in den Text gedruckten Abbildungen, 1 farbigen Tafel, 9 Konstruktionstafeln und einer Beilage für Österreich.

Preis gebunden M. 10,—; in Leder gebunden M. 12,—.

Grundzüge der Kinematik. Von **A. Christmann**, Dipl.-Ing. in Berlin, und Dr.-Ing. **Baer**, Professor an der Technischen Hochschule in Breslau. Mit 161 Textfiguren.

Preis M. 4,80; gebunden M. 5,80.

Die Regelung der Kraftmaschinen. Berechnung und Konstruktion der Schwungräder, des Massenausgleichs und der Kraftmaschinenregler in elementarer Behandlung. Von Professor **Max Tolle**, Privatdozent an der Technischen Hochschule in Karlsruhe. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 463 Textfiguren und 19 Tafeln. Preis gebunden M. 26,—.

Technische Hydrodynamik. Von Dr. **Franz Präsil**, Professor an der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich. Mit 81 Textfiguren.

Preis gebunden M. 9,—.

Technische Thermodynamik. Von Prof. Dipl.-Ing. **W. Schüle**.

Erster Band: Die für den Maschinenbau wichtigsten Lehren nebst technischen Anwendungen. Dritte, erweiterte Auflage. Mit 214 Textfiguren und 7 Tafeln.

Preis gebunden M. 16,—.

Zweiter Band: Höhere Thermodynamik mit Einschluß der chemischen Zustandsänderungen, nebst ausgewählten Abschnitten aus dem Gesamtgebiet der technischen Anwendungen. Mit 155 Textfiguren und 3 Tafeln.

Preis gebunden M. 10,—.

Technische Wärmelehre der Gase und Dämpfe. Eine Einführung für Ingenieure und Studierende. Von **Franz Seufert**, Ingenieur und Oberlehrer an der Königl. höheren Maschinenbauschule in Stettin. Mit 25 Abbildungen und 5 Zahlentafeln.

Preis gebunden M. 2,80.

Technische Schwingungslehre. Einführung in die Untersuchung der für den Ingenieur wichtigsten periodischen Vorgänge in der Mechanik starrer, elastischer, flüssiger und gasförmiger Körper, sowie aus der Elektrizitätslehre von Dr. **Wilhelm Hort**, Dipl.-Ing. bei den Siemens-Schuckert-Werken. Mit 87 Textfiguren.

Preis M. 5,60; gebunden M. 6,40.

Gebundene Bücher z. Z. mit einem Aufschlag von 10% für Einbandmehrkosten.