Statik fester Körper

Ein Lehrbuch für den öffentlichen und eignen Unterricht

von

D. Johann August Grunert

Lehrer der Mathematik und Physik an dem Lyceum zu Torgau und der Mathematik an der Königlichen Kriegsschule der sechsten Division daselbst Ehrenmitgliede der Königlich-Preußischen Akademie gemeinnütziger Wissenschaften zu Erfurt

Mit sieben Kupfertafeln

Halle
bey Carl August Kümmel
1826

Vorrede.

Obgleich unsre mathematische Literatur schon manche gute und zum Theil vortreffliche Werke über die mechanischen Wissenschaften von Brandes, Eytelwein, Ide, Langsdorf, Umpfenbach, *) und unter den ältern von Kästner und Karsten besitzt; so ist an Werken dieser Art doch kein Ueberfluß, und insbesondere scheint es mir noch an einem Werke zu fehlen, welches die Mechanik, als reine Wissenschaft vom Gleichgewichte und von der Bewegung, möglichst vollständig in analytischem Gewande, den Ansichten der neuern Mathematiker gemäß, darstellte. Eytelwein's Werk über Statik fester Körper, vortrefflich in seiner Art und unstreitig einen der ersten Plätze in unsrer Literatur der Mechanik einnehmend, eilt, seinem Zwecke übrigens entsprechend, zu bald zu Anwendungen, und ist mehr im Geiste der ältern Mathematiker gearbeitet, obgleich es nicht mit dem Hebel, sondern mit dem Parallelogramm der Kräfte beginnt. Die Mechanik fester Körper desselben Verfassers, in seinem bekannten Lehrbuche der Mechanik fester Körper und der Hydraulik, scheint bloß der Hydraulik wegen, gewissermaßen als Mittel, um zum

*) Das Lehrbuch von Umpfenbach: Die Lehre von dem Gleichgewichte und der Bewegung fester und flüssiger Körper, Mainz 1825, 8., erschien erst, als Seite 5. (Einleitung) schon abgedruckt war. Es ist am meisten den neuern Ansichten gemäß bearbeitet, aber ein bloßes Compendium über die ganze Mechanik, und als solches ist seine Brauchbarkeit allerdings nicht zu verkennen.

Zwecke zu gelangen, bearbeitet zu seyn, und enthält daher nur wenige Sätze. Das Lehrbuch von Brandes trägt nur die leichtern Lehren vor, und der Verfasser entfernt sich ganz von dem analytischen Wege. Die Beweise sind nicht selten weitläufig und ermüdend, und führen doch nur zu sehr beschränkten Resultaten. Im ersten Theile ist der Gebrauch des höhern Calculs ganz vermieden, und nur erst im zweyten Theile, welcher der eigentlichen Mechanik gewidmet ist, zeigt der Verfasser auf Herrn Professor Bessel's Rath die Anwendung desselben in besondern Anmerkungen, weil ihm dieser berühmte Mathematiker bemerklich machte, daß junge Leute, wenn sie auch die Sache selbst schon völlig übersehen, doch nicht sogleich ein Werk zu verstehen im Stande sind, das weitere Ausführungen mit Hülfe der Analysis enthält. Indeß werden erste Anfänger aus diesem Werke immer die Mechanik mit Nutzen studiren, und sich dadurch zum Studium größerer analytischer Werke vorbereiten. Ueber die übrigen oben genannten Schriften lassen sich ähnliche Bemerkungen mit größerm oder geringerm Rechte machen. Ich beginne daher mit dem vorliegenden Lehrbuche der Statik fester Körper ein Werk, welches die Mechanik in ihrem reinen Theile nach den Ansichten der neuern französischen Mathematiker möglichst vollständig darstellen soll, den Grundsatz festhaltend, daß in ein Lehrbuch der reinen Mechanik Anwendungen auf die Architectur, die Maschinenlehre, u. s. w. eben so wenig gehören, als die Operationen der Feldmeßkunst in die Elemente des Euclides, da überdies Anwendungen jener Art, sollen sie wirklich von praktischem Nutzen seyn, keine geringe Masse empirischer Kenntnisse voraussetzen, und daher nicht bloß das Resultat reiner, a priori gewonnener Erkenntniß sind. Damit sey übrigens durchaus nicht den Anwendungen dieser Art ihr wohlbegründeter Werth abgesprochen. Ich werde es mir vielmehr angelegen seyn lassen, auch diese Anwendungen in einen Lehrbegriff zusammenzufassen, wenn ich erst bey ausdauernder Gesundheit, und bey mehrerer Muße, als mein jetziger sehr geschäftsvoller Wirkungskreis mir darbietet, auch die übrigen Theile der reinen Mechanik nach denselben Grundsätzen, wie das vorliegende Lehrbuch der Statik fester Körper, bearbeitet habe. Erlaubt es mir der Beyfall der Kenner und meine Muße, so sollen dem vorliegenden Werke in nicht gar zu langen Zeiträumen die eigentliche Mechanik fester Körper, und die Statik und Mechanik flüssiger Körper folgen. Jeder einzelne Theil soll aber ein für sich bestehendes Werk bilden, und nur in so fern mit den übrigen in Verbindung stehen, als die in ihm enthaltenen Sätze durch Sätze der übrigen begründet werden. In der eigentlichen Mechanik werde ich es mir vorzüglich angelegen seyn lassen, die Sätze vollständig zu entwickeln, welche zur Begründung der Lehren der physischen Astronomie unbedingt nothwendig sind.

Was nun vorliegendes Werk über Statik fester Körper insbesondere betrifft; so bin ich von dem Parallelogramm der Kräfte ausgegangen, und schmeichle mir, daß meine mehrfache Darstellung dieses Grundprincips manche Eigenthümlichkeit an sich trägt, die man auch an andern Stellen des Werkes nicht verkennen wird. Aus diesem Princip sind in dem ersten Haupttheile die allgemeinen Bedingungen des Gleichgewichts vollständig abgeleitet worden, und im fünften Kapitel habe ich zugleich auf die verschiedenen Arten, die Lehren der Statik darzustellen, aufmerksam gemacht. Die wichtige und interessante Theorie der Momente der Kräfte im Raume, und der allgemeine Beweis des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten, sind nicht übergangen. Der zweyte Haupttheil ist der Anwendung der im ersten erworbenen Kenntnisse auf die Bestimmung des Schwerpunktes gewidmet, und kann bey der Ausführlichkeit, mit welcher dieser Gegenstand bearbeitet worden, wie ich glaube, zugleich als eine gute Uebung in der Integralrechnung und im höhern Calcul überhaupt dienen. Der berühmte Mathematiker, von welchem der S. 264. §. 95. mitgetheilte interessante Satz über den Schwerpunkt herrührt, ist, da ich dieses schreibe, leider! aus unsrer Mitte geschieden und hinübergegangen zum Schauen ewigen Lichtes und ewiger Wahrheit. Ich betraure in ihm mit vielen Andern meinen vortrefflichsten, mir ewig unvergeßlichen, Lehrer, und Deutschland einen seiner ausgezeichnetsten Gelehrten. Der allgemeine Beweis dieses Satzes, und der Beweis für den besondern Fall des Vierecks mit zwey parallelen Seiten, rühren von mir selbst her, indem ich den Satz bloß als ein Corollarium von §. 93. betrachte. Einen Beweis für das Trapezium hatte auch Mollweide, welcher Pfaff, leider! schon vorangegangen ist, an den Entdecker geschrieben, wie Pfaff's Papiere, die gewiß überhaupt noch Vieles, was zur Förderung der Wissenschaft geeignet ist, enthalten, ausweisen werden. Der dritte Haupttheil enthält die Theorie des Gleichgewichts der an völlig biegsamen geraden Linien wirkenden Kräfte, und die allgemeine Theorie der Kettenlinie, wobey ich bemüht gewesen bin, die Eigenschaften dieser höchst interessanten Curve vollständig zu entwickeln. Hierauf folgt die Entwickelung der Gleichung der elastischen Linie; die Theorie der von Johann Bernoulli zuerst sogenannten Curven des Gleichgewichts; die Vertheilung des Drucks auf die Unterstützungspunkte; und das Wichtigste von der Stabilität. In einem Anhange sind noch einige Sätze vom Schwerpunkte mitgetheilt. Was die Vertheilung des Drucks betrifft, so ist auch dieser Gegenstand als rein-mechanische Theorie behandelt worden. In dem Falle, wenn die Stützen in einer geraden Linie liegen und die unterstützte Linie vermöge ihrer Elasticität einige Biegung erleidet, welcher für die Anwendung auf architectonische Gegenstände von großer Wichtigkeit ist, habe ich die möglichste Allgemeinheit in der Entwickelung und Aufstellung der hierher gehörigen Formeln zu erreichen gesucht, da Euler, obgleich er diesem Gegenstande seine besondere Aufmerksamkeit schenkte, die Elasticität der Linie ganz unberücksichtigt gelassen, und Eytelwein die Formeln nur für einige specielle Fälle nach einer Methode entwickelt hat, die, bey großer Weitläufigkeit, den Gang der Untersuchung nicht übersehen läßt. Für Pflicht halte ich es indeß, zu bemerken, daß meine Entwickelung mit der von Eytelwein gegebenen auf gleichen Principien beruhet, und ihr von dieser gleichsam das Daseyn gegeben worden ist. Von Geschichte und Literatur glaube ich so viel in das Lehrbuch selbst aufgenommen zu haben, daß es, ohne in eigentliche historische Untersuchungen sich einzulassen, doch eine möglichst deutliche Ansicht von dem ältern und gegenwärtigen Zustande der Wissenschaft gibt.

Die äußere Ausstattung des Werkes macht meinem Herrn Verleger, und die Einrichtung des Druckes, auf dessen Deutlichkeit und Correctheit besondere Sorgfalt verwandt worden ist, meinem Vater, indem derselbe auch die Correctur selbst besorgt hat, gewiß alle Ehre. Die mit dem Drucke analytischer Werke verbundenen eigenthümlichen Schwierigkeiten können nur die gehörig beurtheilen, welche sich schon mit Unternehmungen dieser Art beschäftigt haben.

Möchten denn gründliche Mathematiker und unpartheyische Männer diesem Werke denselben Beyfall schenken, welcher meinen frühern Schriften zu Theil geworden ist! Möchte auch mancher wissenschaftliche Praktiker, — denn auch namentlich solche Leser wünsche ich diesem Werke, ungeachtet seiner rein-theoretischen Tendenz, — mir sein Urtheil und seine Bemerkungen über dasselbe nicht vorenthalten! Möchte mein Streben nach Gründlichkeit, und mein fortgesetzter Eifer, zur weitern und allgemeinern Verbreitung der Wissenschaft und zur Erleichterung ihres Studiums in dem deutschen Vaterlande nach Kräften beyzutragen, auch in dieser Arbeit erkannt werden! Möchte denn endlich auch die Vorsehung mir die gute Gesundheit, welche mich jetzt beglückt, erhalten, und mir bald ein Wirkungskreis zu Theil werden, welcher bey etwas größerer Muße und bedeutendern literarischen Hülfsmitteln mir erlaubt, dieses angefangene Werk über die ganze Mechanik mit der Zeit zu vollenden, und auch an manche andere, noch mehr eigenthümliche, Arbeiten die letzte Hand legen zu können!

Torgau
am 3ten August 1825.

Der Verfasser.

Inhalt.

Einleitung. S. 1. — 9.

Die allgemeinen Bedingungen des Gleichgewichts. S. 11. — 229.

Erstes Kapitel. Von dem Gleichgewichte auf einen freyen Punkt wirkender Kräfte. S. 13. — 77.

I. Gleichgewicht unter zwey auf einen freyen Punkt wirkenden Kräften. S. 14. — 15.

II. Gleichgewicht unter drey auf einen freyen Punkt wirkenden Kräften. S. 15. — 51.

III. Gleichgewicht unter vier auf einen freyen Punkt wirkenden Kräften. S. 51. — 61.

IV. Allgemeine Bedingungen des Gleichgewichts mehrerer auf einen freyen Punkt wirkender Kräfte. S. 62. — 77.

Zweytes Kapitel. Von dem Gleichgewichte nach parallelen Richtungen an einem freyen Systeme wirkender Kräfte. S. 78. — 107.

I. Von dem Gleichgewichte paralleler Kräfte, deren Richtungen alle in einer Ebene liegen. S. 79. — 91.

II. Von dem Gleichgewichte paralleler Kräfte, deren Richtungen nicht alle in einer Ebene liegen. S. 91. — 107.

Drittes Kapitel. Von dem Gleichgewichte nach willkührlichen Richtungen in einer freyen Ebene wirkender Kräfte. S. 108. — 123.

Viertes Kapitel. Von dem Gleichgewichte nach willkührlichen Richtungen auf ein freyes System wirkender Kräfte. S. 124. — 142.

Fünftes Kapitel. Von dem Gleichgewichte der Kräfte, welche auf ein nicht völlig freyes System wirken. S. 143. — 185.

I. Kräfte, welche auf einen Punkt wirken. S. 143. — 160.

II. Parallele Kräfte. S. 160. — 181.

A. Parallele Kräfte in einer Ebene. S. 160. — 179.

B. Parallele Kräfte im Raume. S. 179. — 181.

III. Kräfte in einer Ebene. S. 181. — 182.

IV. Kräfte im Raume. S. 182. — 185.

Sechstes Kapitel. Von dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten. S. 186. — 203.

Allgemeinster Ausdruck des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten. S. 187. — 188.

Betrachtung des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten in zwey besondern Fällen. S. 189. — 192.

Allgemeiner Beweis des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten. S. 192. — 203.

Siebentes Kapitel. Von den Momenten der Kräfte im Raume. S. 204. — 229.

Die Lehre vom Schwerpunkte. S. 231. — 445.

Achtes Kapitel. Erklärung des Schwerpunktes. Allgemeine Sätze über denselben. Sätze, welche sich durch die bloße Elementarmathematik ohne Hülfe der Differenzial- und Integralrechnung beweisen lassen. S. 233. — 293.

Neuntes Kapitel. Von der Bestimmung des Schwerpunktes krummliniger Figuren. S. 294. — 340.

Anhang zum neunten Kapitel. Integration der Formein $\frac{dx}{\sqrt{2ax - x^2}}$, $\frac{xdx}{\sqrt{2dx - x^2}}$, und $\frac{x^2dx}{\sqrt{2ax - x^2}}$. S. 341. — 344.

Zehntes Kapitel. Von der Bestimmung des Schwerpunktes durch Umdrehung um eine Axe erzeugter Körper. S. 345. — 358.

Elftes Kapitel. Von der Bestimmung des Schwerpunktes krummer Linien. S. 359. — 385.

Zwölftes Kapitel. Von der Bestimmung des Schwerpunktes durch Umdrehung erzeugter Flächen. S. 386. — 425.

Anhang. Ueber Guldin's Regel. S. 426. — 428.

Dreyzehntes Kapitel. Formeln für den Schwerpunkt der Curven von doppelter Krümmung; für Flächen, die auf drey coordinirte Ebenen bezogen werden; und für durch solche Flächen begränzte Körper. S. 429. — 445.

Gleichgewicht der Kräfte an biegsamen Seilen und elastischen Ruthen; Curven des Gleichgewichts; Vertheilung des Drucks; und Stabilität. S. 447. — 618.

Vierzehntes Kapitel. Von dem Gleichgewichte an einer völlig biegsamen und unausdehnbaren geraden Linie wirkender Kräfte. S. 449. — 470.

Funfzehntes Kapitel. Von der Kettenlinie. S. 471. — 538.

I. Von der gemeinen Kettenlinie. S. 474. — 529.

II. Von der Curve, nach welcher ein völlig biegsames Seil gekrümmt ist, an welchem in allen Punkten Kräfte wirken. S. 530. — 538.

Sechzehntes Kapitel. Von den elastischen Linien. S. 539. — 553.

Siebzehntes Kapitel. Curven des Gleichgewichts. S. 554. — 563.

Achtzehntes Kapitel. Von der Vertheilung des Drucks auf die Unterstützungspunkte. S. 564. — 610.

Neunzehntes Kapitel. Von der Stabilität. S. 611. — 618.

Anhang. Noch einige Sätze vom Schwerpunkte. S. 619. — 631.

Einleitung.

1.

Jeder bestimmte Punkt hat im unendlichen Raume seinen bestimmten Ort; wenn man von dem Orte eines Körpers oder überhaupt einer ausgedehnten Größe spricht, so hat man gewöhnlich nur einen bestimmten Punkt dieser Größe im Auge. Man kann aber auch unter dem Orte einer ausgedehnten Größe den bestimmten Theil des unendlichen Raumes, welchen sie ausfüllt, verstehen.

Ruhe und Bewegung sind die Grundbegriffe der ganzen Mechanik. Den erstern erklärt man gewöhnlich als das Bleiben oder Verharren an demselben Orte, und den letztern als die stetige Veränderung des Ortes. Indeß sind diese Erklärungen, insbesondere die zweyte, nicht völlig richtig. Denn man denke sich nur die Erde, oder überhaupt eine Kugel, welche sich um eine feste Axe dreht, so befindet sie sich augenscheinlich in Bewegung, und verändert doch ihren Ort, d. i. den bestimmten Theil des unendlichen Raumes, welchen sie ausfüllt, nicht. Wir setzen daher hier die bestimmtern Erklärungen der beiden obigen metaphysischen Begriffe, welche der größte Metaphysiker aller Zeiten davon gegeben hat, her.

Nach Kant, in seinen metaphysischen Anfangsgründen der Naturwissenschaft, Riga 1786, 8. S. 5. u. 10., ist:

Bewegung eines Dinges die Veränderung der äußern Verhältnisse desselben zu einem gegebenen Raume, und

Ruhe die beharrliche Gegenwart (praesentia perdurabilis) an demselben Orte; beharrlich aber ist nach Kant das, was eine Zeit hindurch existirt, d. i. dauert.

Indem sich in dem obigen Beyspiele die Erde um ihre Axe dreht, verändert sie ihren Ort nicht, aber ihr Verhältniß zum äußern Raume ändert sich doch, da sie z. B. dem Monde in vier und zwanzig Stunden ihre verschiedenen Seiten zukehrt, woraus denn, wie Kant a. a. O. noch hinzufügt, verschiedene wandelbare Wirkungen auf der Erde erfolgen.

2.

Alles das, was eine Bewegung hervorzubringen oder zu hindern im Stande ist, heißt bewegende Kraft oder auch bloß Kraft, und die Wissenschaft von den Wirkungen der bewegenden Kräfte ist im allgemeinsten Sinne des Worts die Mechanik, welche aber in mehrere Theile zerfällt.

Entweder wird nämlich durch die Wirkung einer oder mehrerer bewegenden Kräfte wirklich Bewegung hervorgebracht, oder die Kräfte wirken so auf und gegen einander, daß keine wirkliche Bewegung erfolgt, sondern der Zustand der Ruhe dauernd statt findet. In dem letztern Falle sagt man, die Kräfte seyen unter einander im Gleichgewichte, oder, es finde überhaupt ein Gleichgewicht statt. Hiernach zerfällt die Mechanik im allgemeinsten Sinne des Wortes in zwey große Haupttheile:

I) Mechanik im engern Sinne oder Dynamik, d. i. die Wissenschaft von den Wirkungen der Kräfte, in so fern sie wirkliche Bewegung hervorbringen, oder die Wissenschaft von der Bewegung.

II) Statik, d. i. die Wissenschaft von den Wirkungen der Kräfte, in so fern sie unter einander im Gleichgewichte sind, oder die Wissenschaft von dem Gleichgewichte.

3.

Unter dem Aggregatzustande eines physischen Körpers versteht man die Art und Weise, wie seine materiellen Theile unter einander zusammenhängen. Gewöhnlich und zuerst unterscheidet man drey verschiedene Aggregatzustände: den Zustand der Festigkeit, den Zustand der Tropfbarkeit, und den Zustand der Ausdehnsamkeit oder Expansibilität; die beiden letztern auch unter dem gemeinschaftlichen Namen des Zustandes der Flüssigkeit.

Feste Körper im physischen Sinne sind solche, deren Theile so unter einander zusammenhängen, daß sie nur durch eine merkliche und beträchtliche Kraft von einander getrennt und auf einander verschoben werden können. In der reinen Mechanik wird aber der Zustand dieser Körper als völlig unveränderlich angenommen, was für Kräfte auch auf sie wirken mögen.

Flüssige Körper sind solche, deren Theile durch eine ganz unmerkliche Kraft von einander getrennt und auf einander verschoben werden können.

Tropfbar-flüssige oder tropfbare Körper sind solche flüssige Körper, welche sich unsern Sinnen als zusammenhängende Massen ohne Zwischenräume darstellen, und der Erfahrung zufolge in kleinen Mengen eine sphärische Gestalt annehmen oder Tropfen bilden, sobald die wechselseitige Anziehung ihrer Theile nicht durch andere Kräfte gestört wird. (Gren's Grundriß der Naturlehre, sechste Auflage, Halle 1820, S. 78.) Der gemeinste Körper dieser Art ist das Wasser.

Ausdehnsame oder expansible Körper sind solche flüssige Körper, welche ebenfalls zusammenhängende Massen ohne Zwischenräume darstellen, welche aber ein stetes Bestreben haben, sich in einen größern Raum auszudehnen. Der gemeinste Körper dieser Art ist die atmosphärische Luft.

In ältern Lehrbüchern der Naturlehre heißt die Luft gewöhnlich ein elastischer Körper: Elasticität ist aber eine Modification der Festigkeit, ein inneres Bestreben, die Gestalt wieder herzustellen, wenn sie durch irgend eine äußere Gewalt, durch Ausdehnung, Zusammenpressung, Beugung, u. s. w., verändert worden ist. Dieses Bestreben, die Gestalt zu erhalten, findet sich aber bey der Luft und allen luftartigen Körpern gar nicht.

Weitere Belehrung hierüber suche man in den Lehrbüchern der Physik.

4.

Nach den so eben erläuterten drey Aggregatzuständen der Körper zerfällt sowohl die **Dynamik** als auch die **Statik** in drey Haupttheile.

Nämlich die erstere in:

1) **Mechanik im engsten Sinne**, **Dynamik im engern Sinne**, oder auch **Geodynamik**, d. i. die Wissenschaft von der Bewegung bey festen Körpern, in welcher aber zugleich auch die allgemeinen Bewegungsgesetze, welche unter gewissen Bedingungen auch für flüssige Körper gelten, vorgetragen werden.
2) **Hydrodynamik** oder **Hydraulik**, d. i. die Wissenschaft von der Bewegung bey tropfbar-flüssigen Körpern.
3) **Aërodynamik** oder **Pneumatik**, d. i. die Wissenschaft von der Bewegung bey ausdehnsamen oder expansibeln Körpern.

Auf ähnliche Art zerfällt die Statik in:

1) **Statik im engern Sinne**, auch **Geostatik**, d. i. die Wissenschaft von dem Gleichgewichte bey festen Körpern, welche aber zugleich auch die allgemeinen Gesetze des Gleichgewichts, die unter gewissen Bedingungen auch bey flüssigen Körpern gelten, enthält.
2) **Hydrostatik**, d. i. die Wissenschaft von dem Gleichgewichte bey tropfbar-flüssigen Körpern.
3) **Aërostatik**, d. i. die Wissenschaft von dem Gleichgewichte bey ausdehnsamen Körpern.

Einige Schriftsteller, z. B. **Poisson**, in seinem unten anzuführenden Werke, nennen auch überhaupt **Hydrodynamik** und **Hydrostatik** die Wissenschaften von der Bewegung und dem Gleichgewichte bey flüssigen Körpern, so wie denn überhaupt in dem Gebrauche dieser Namen noch einige Willkühr statt findet.

Wie groß das Feld der Mechanik im weitesten Sinne des Worts ist, sieht man aus dieser Uebersicht ihrer Theile. Unter allen diesen Wissenschaften ist aber die Statik fester Körper zuerst einigermaßen ausgebildet worden, denn schon Archimedes, welcher daher als der Vater der ganzen Mechanik betrachtet werden muß, hat einige ihrer wichtigsten Grundgesetze entdeckt. Man macht daher, und auch noch aus andern Gründen, immer den Anfang mit dem Studium der statischen Wissenschaften, und namentlich der Statik fester Körper. Das vorliegende Werk, welches diese Wissenschaft nach ihrem jetzigen Standpunkte möglichst vollständig darstellen soll, kann daher ohne alle weitere mechanische Vorkenntnisse verstanden werden.

Alle Anwendungen der mechanischen Wissenschaften auf die Baukunst, das Maschinenwesen u. s. w. begreift man unter dem Namen der praktischen Mechanik und der Maschinenlehre. Auch ist insbesondere die Statik fester Körper sehr reich an Anwendungen dieser Art, welche aber für jetzt außer unserm Plane liegen.

5.

Die wichtigsten Schriften, welche ich bey der Ausarbeitung dieses Lehrbuchs vorzüglich zu Rathe gezogen habe, sind, nach der Zeitfolge geordnet, folgende:

Archimedis Opera, methodo nova illustrata et succincte demonstrata. Per Isaacum Barrow. Londini 1675. 4. — p. 105. — 121.: De planorum aequilibriis sive centra gravitatum in planis, vulgo de aequiponderantibus, Lib. I. — p. 135. — 144.: De aequiponderantibus, Lib. II.

Nouvelle Mécanique ou Statique, par Pierre Varignon. Deux Tomes. 4. Paris 1725.

Man sieht aus dem Titel dieses Buchs, daß man in älterer Zeit unter dem Namen Mechanik gewöhnlich bloß die Statik vortrug, und beide Wörter als gleichbedeutend gebrauchte, da überhaupt die eigentliche Mechanik nur aus wenigen Sätzen über den Fall der Körper, das Pendel u. s. w. bestand.

A. G. Kästner's Anfangsgründe der Mathematik. Zweyter Theil. Erste Auflage. Göttingen 1759. Vierte Auflage. 1792. 8.

W. J. G. Karsten's Lehrbegriff der gesammten Mathematik. Dritter Theil. Erste Auflage. Greifswald 1769. Zweyte Auflage. 1790. 8.

Dessen Anfangsgründe der mathematischen Wissenschaften. Zweyter Band. Greifswald 1780. 8.

Traité élémentaire de Statique, à l'usage des écoles de la Marine, par Gaspard Monge. Première édition. Paris 1786. Cinquième édition, revue par M. Hachette. Paris 1810. (Deutsch von E. M. Hahn. Berlin 1806. 8.)

K. Ch. Langsdorf's Grundlehren der mechanischen Wissenschaften, welche die Statik und Mechanik, die Hydrostatik, Aërometrie, Hydraulik und Maschinenlehre enthalten. Erlangen 1802. 8.

J. J. Ide's System der reinen und angewandten Mechanik fester Körper. Zwey Theile. Berlin 1802. 8.

J. A. Eytelwein's Handbuch der Statik fester Körper. Mit vorzüglicher Rücksicht auf ihre Anwendung in der Architectur. Drey Theile. Berlin 1808. 8. — Der dritte Theil auch mit dem besondern Titel: Theorie derjenigen transscendenten krummen Linien, welche vorzüglich bey statischen Untersuchungen vorkommen.

Ein Hauptwerk im Deutschen.

Élémens de Statique, par L. B. Francoeur. Paris et Petersbourg 1810. 8.

Traité de Mécanique, par S. D. Poisson. Tome I. II. Paris 1811. 8.

Ein Buch, welches, als ein Hauptwerk im Französischen, bey Ausarbeitung des vorliegenden Buches häufig mit großem Nutzen zu Rathe gezogen wurde.

Leçons de Statique, à l'usage des aspirans à l'école impériale polytechnique, par J. G. Garnier. Paris 1811. 8.

H. W. Brandes Lehrbuch der Gesetze des Gleichgewichts und der Bewegung fester und flüssiger Körper. Erster Theil. Leipzig 1817. (Die Statik enthaltend.) Zweyter Theil. Leipzig 1818.

Élémens de Statique, suivis d'un Mémoire sur la théorie des momens et des aires, par L. Poinsot. Troisième édition. Paris 1821. 8.

Die Jahreszahl der ersten Auflage habe ich nicht auffinden können.

Noch andere Schriften werden im Laufe des Werkes genannt werden.

6.

In dieser und der folgenden Nummer fassen wir noch einige Bemerkungen zusammen, welche für das Folgende von Wichtigkeit sind.

1) Eine Kraft ist offenbar desto größer, je größer die Wirkung ist, welche sie hervorbringt, und es ist klar, daß überhaupt die Kräfte im geraden Verhältnisse der Wirkungen, welche sie hervorbringen, stehen, indem nämlich z. B. offenbar eine Kraft doppelt so groß als eine andere ist, wenn die Wirkung, welche die erstere hervorbringt, doppelt so groß ist, wie die Wirkung, welche die letztere unter denselben Umständen hervorbringt. Man sieht leicht, wie es auf diese Art möglich wird, Kräfte mit einander zu vergleichen. Man kann sich selbst irgend eine Kraft von bestimmter Größe vorstellen, welche als Maaß aller übrigen Kräfte betrachtet wird, und so jede gegebene Kraft durch eine Zahl in Beziehung auf die als Maaßeinheit angenommene Kraft ausdrücken. Kommen nun in den Rechnungen, die im Folgenden häufig zu führen seyn werden, Kräfte z.B. als Multiplicatoren, Divisoren u. s. w. vor, so hat man sich darunter immer die unbenannten Zahlen zu denken, welche das Verhältniß dieser Kräfte zu der als Einheit zum Grunde gelegten Kraft ausdrücken.

2) Hauptsächlich ist auch hier zu erläutern, was man sich unter der geometrischen Darstellung einer Kraft zu denken hat. Kräfte werden nämlich geometrisch dargestellt, wenn man eine gerade Linie von bestimmter Länge als Einheit zum Grunde legt, und auf den Richtungen der Kräfte, d. i. den geraden Linien, nach welchen sie ihre Angriffspunkte zu bewegen streben, von den Angriffspunkten aus Stücke abschneidet, welche sich zu der angenommenen Lineareinheit eben so verhalten, wie die gegebenen Kräfte zu der angenommenen Krafteinheit. Die gefundenen gera-

den Linien heißen dann die **geometrischen Darstellungen der gegebenen Kräfte**, und verhalten sich also zu einander wie die gegebenen Kräfte selbst. Man sieht, wie es auf diese Art möglich wird, mit gegebenen Kräften geometrische Constructionen vorzunehmen, und man hat also in solchen Fällen für die Kräfte selbst immer ihre geometrischen Darstellungen zu setzen.

3) Noch ist hier zu erklären, was man unter einem **Systeme von Punkten** oder **Kräften** zu verstehen hat, da dieser Ausdruck im Folgenden öfters vorkommen wird. Unter einem Systeme von Punkten versteht man nämlich eine gewisse Anzahl geometrischer Punkte, welche in einem solchen Zusammenhange unter einander stehen, daß ihre gegenseitige Lage durch keine, auch noch so große, Kraft geändert werden kann. Ein System von Kräften ist jede Anzahl von Kräften, welche in ein gegebenes System von Punkten auf irgend eine Art wirken.

7.

Die folgenden Sätze, welche in der Folge häufig angewandt werden, sind als Grundsätze der Statik zu betrachten:

1) Wenn mehrere Kräfte unter einander im Gleichgewichte sind, so kann man, ohne das Gleichgewicht zu stören, ihrem Systeme so viele neue Kräfte beyfügen, als man will, wenn nur die letztern unter sich im Gleichgewichte sind; und eben so kann man von dem gegebenen Systeme auch so viele für sich im Gleichgewichte sich befindende Kräfte wegnehmen, als man will, ohne das Gleichgewicht im geringsten zu stören, so daß nämlich die übrig bleibenden Kräfte ebenfalls unter sich im Gleichgewichte seyn werden. — Eben so leicht wird auch erhellen, daß, wenn mehrere Kräfte im Gleichgewichte sind, und dem Systeme einige nicht im Gleichgewichte sich befindende Kräfte beygefügt werden, das Gleichgewicht dann nicht mehr bestehen kann, und daß, wenn an einem Systeme sich nicht im Gleichgewichte befindender Kräfte von diesen Kräften an ihren Angriffspunk-

ken und nach ihren Richtungen beliebige, aber gleiche Vielfache angebracht werden, diese neuen Kräfte auch nicht im Gleichgewichte seyn können.

2) Jede Kraft kann man, ohne in ihrer Wirkung nur die geringste Aenderung hervorzubringen, in jeden Punkt ihrer Richtung versetzen.

3) Sind Kräfte an einem völlig freyen Systeme im Gleichgewichte, so werden sie offenbar noch im Gleichgewichte bleiben, wenn man sich in diesem Systeme einen Punkt, eine gerade Linie u. s. w. als fest, und das System um diesen Punkt oder diese gerade Linie als drehbar denkt.

Alle diese Sätze sind für sich klar und bedürfen keines Beweises. Was den zweyten insbesondere betrifft, so muß natürlich der Punkt, in welchen die Kraft nach und in ihrer Richtung versetzt wird, mit dem gegebenen Systeme in einer gewissen Verbindung stehen, so daß die Wirkung der Kraft auf das System möglich wird. Die Art der Wirkung einer Kraft hängt offenbar bloß von ihrer Größe und der Lage ihrer Richtungslinie, unter der obigen Bedingung aber nicht von der Entfernung ihres Angriffspunktes von dem gegebenen Systeme ab. Bleibt also die Größe der Kraft und die Lage der Richtungslinie ungeändert, so bleibt auch ihre Wirkung völlig ungeändert.

Verschiedene wichtige Bemerkungen, besonders über die Art, wie die Lage der Richtung einer Kraft bestimmt wird, versparen wir bis zu den Stellen, wo von diesen Bestimmungen zuerst Gebrauch gemacht wird.

Die
allgemeinen Bedingungen
des Gleichgewichts.

Erstes Kapitel.

Von dem Gleichgewichte auf einen freyen Punkt wirkender Kräfte.

§. 1.

Wenn mehrere Kräfte P, P', P'', P''' u. s. w. auf einen freyen Punkt A wirken, so werden diese Kräfte, vorausgesetzt, daß sie nicht unter einander im Gleichgewichte sind, den Punkt A offenbar mit vereinter Gewalt nach einer gewissen Richtung bewegen, und folglich dieselbe Wirkung hervorbringen, als wenn nur eine Kraft R nach dieser Richtung auf den Punkt A wirkte. Diese Kraft R, welche also nach ihrer Richtung ganz dieselbe Wirkung hervorbringt, wie die Kräfte P, P', P'', P''' u. s. w. zusammen, heißt die aus diesen resultirende Mittelkraft oder auch bloß ihre Resultirende, und jene Kräfte heißen in Beziehung auf die Resultirende die Seitenkräfte. Läßt man auf den Punkt A eine Kraft R' wirken, welche der Kraft R gleich, aber (rücksichtlich ihrer Richtung) gerade entgegengesetzt ist; so ist klar, daß diese Kraft mit den Kräften P, P', P'', P''' u. s. w. im Gleichgewichte ist. Diese Kraft R' wollen wir im Folgenden die den Kräften P, P', P'', P''' u. s. w. äquipollente Mittelkraft oder auch bloß ihre Aequipollente nennen. — Ist R der Richtung und Größe nach gegeben, so ist es auch R', und umgekehrt.

Aus den obigen Begriffen folgt unmittelbar, daß, ohne die Wirkung zu ändern, für die Seitenkräfte immer die Resultirende gesetzt werden kann, und umgekehrt. Anstatt einiger Kräfte ihre Resultirende setzen, heißt: diese Kräfte zusammensetzen. — Zusammensetzung der Kräfte. — Setzt man aber anstatt einer Kraft zwey, drey oder mehrere andere Kräfte, von welchen jene die Resultirende ist; so nennt man dies: die einfache Kraft in zwey, drey oder mehrere Kräfte zerlegen. — Zerlegung der Kräfte.

Wir wollen nun die Bedingungen des Gleichgewichts untersuchen, wenn zwey, drey, vier oder mehrere Kräfte auf einen freyen Punkt, welcher immer A genannt werden soll, wirken.

I.

Gleichgewicht unter zwey auf einen freyen Punkt wirkenden Kräften.

§. 2.

Wenn zwey Kräfte P und P' auf einen freyen Punkt wirken, so schließen ihre Richtungen entweder einen Winkel ein oder nicht. Im ersten Falle kann offenbar kein Gleichgewicht zwischen P und P' statt finden, denn die beiden Kräfte werden den Punkt A augenscheinlich mit vereinter Gewalt nach einer Richtung bewegen, welche zwischen den Schenkeln des von den Richtungen der Kräfte P und P' eingeschlossenen Winkels liegt. Schließen aber diese Richtungen keinen Winkel mit einander ein, sondern liegen in einer geraden Linie, so können folgende Fälle eintreten:

1) Sind die Kräfte P und P' beide nach derselben Seite von A aus gerichtet, so können sie offenbar nicht im Gleichgewichte seyn, sondern es entspringt aus ihnen eine nach ihrer gemeinschaftlichen Richtung gerichtete Resultirende, welche $= P + P'$ ist.

2) Sind die Richtungen der beiden Kräfte einander gerade entgegengesetzt, so sind sie im Gleichgewichte, wenn sie einander gleich sind, d. i. wenn $P = P'$ ist. Sind sie ungleich, z. B. $P > P'$, so entspringt aus ihnen eine Resultirende, welche $= P - P'$ ist, und nach der Richtung von P, d. i. überhaupt nach der Richtung der größern Kraft, wirkt. Die Aequipollente ist offenbar ebenfalls $= P - P'$, aber nach der Richtung der kleinern Kraft P' gerichtet.

So wie man in der analytischen Geometrie Linien, welche, von einem Punkte aus, nach einander gerade entgegengesetzten Richtungen hin liegen, als entgegengesetzte Größen betrachtet, (M. s. z. B. mein Lehrbuch der Kegelschnitte, Leipzig 1824, §. 6. ff.): so betrachtet man auch in der Statik, wenn mehrere Kräfte in einer geraden Linie auf einen Punkt wirken, alle auf der einen, gewöhnlich der rechten, Seite wirkende Kräfte als positiv, und alle nach der andern Seite hin wirkende als negativ.

Hieraus und aus den vorhergehenden Betrachtungen erhellet leicht, daß die beiden Kräfte P und P' im Gleichgewichte sind, wenn $P+P'=0$ ist, und umgekehrt, vorausgesetzt, daß die eine der beiden Kräfte nach der obigen Bestimmung als positiv, die andere aber als negativ betrachtet wird. Auch ist jetzt ohne weitere Erläuterung klar, daß, wenn mehr als zwey Kräfte, P, P', P'', P''' u. s. w., in einer geraden Linie auf einen freyen Punkt wirken, diese Kräfte unter der obigen Voraussetzung nur dann im Gleichgewichte sind, wenn

$$P+P'+P''+P'''+\ldots\ldots=0$$

ist, und umgekehrt.

II.

Gleichgewicht unter drey auf einen freyen Punkt wirkenden Kräften.

§. 3.

Wir werden die Untersuchung über das Gleichgewicht dreyer auf einen freyen Punkt wirkender Kräfte so anstellen, daß wir untersuchen, welches die Richtung und Größe der Resultirenden zweyer auf einen freyen Punkt A wirkender Kräfte P und P', deren Richtungen einen Winkel mit einander einschließen, (denn die andern Fälle sind sehr leicht, und schon in I. enthalten,) ist, und demnach folgende Aufgabe auflösen:

Zwey auf einen freyen Punkt A wirkende Kräfte P und P', deren Richtungen einen Winkel mit einander einschließen, sind der Richtung und Größe nach gegeben; man soll Richtung und Größe der Resultirenden R (oder der Aequipollenten R') finden.

Diese Aufgabe ist sehr wichtig, weil auf ihr das ganze System der Statik beruht, und mehrere der berühmtesten Mathematiker haben sich daher mit ihrer Auflösung beschäftigt. Ein ausführliches Lehrbuch der Statik wird einige der bedeutendern Untersuchungen über einen so wichtigen Gegenstand mittheilen müssen, wozu wir also jetzt schreiten. Die allgemeinsten Bedingungen für das Gleichgewicht einer willkührlichen Anzahl auf einen freyen Punkt wirkender Kräfte gründen sich auf die in dem gegenwärtigen Abschnitte vorkommenden Sätze, und werden weiter unten ausführlich untersucht werden.

Erste Auflösung.

§. 4.

Erster Fall. Wenn die beiden Kräfte P und P' einander gleich sind, so daß man die beiden Kräfte P und P hat.

1) Richtung der Resultirenden. Die Richtung der Resultirenden muß mit den Richtungen der Seitenkräfte offenbar in einer Ebene liegen. Denn wäre dies nicht der Fall, so würde auch die Richtung der Aequipollenten mit den Richtungen der Seitenkräfte nicht in einer Ebene liegen, und dessen ungeachtet würden diese drey Kräfte im Gleichgewichte seyn. Daß dies aber unter der obigen Voraussetzung nicht der Fall seyn kann, und daß die drey Kräfte den Punkt A vielmehr nach einer gewissen Richtung, welche in dem von ihren Richtungen gebildeten körperlichen Winkel liegt, bewegen müssen, ist klar, so daß also die obige Voraussetzung falsch ist, und die Richtung der Resultirenden folglich mit den Richtungen der Seitenkräfte in einer Ebene liegt. Da aber,

weil nach der Voraussetzung die beiden Seitenkräfte einander gleich sind, kein Grund vorhanden ist, daß sich die Richtung der Resultirenden, welche augenscheinlich durch den Punkt A gehen muß, mehr nach der Richtung der einen als nach der Richtung der andern Seitenkraft hinneigen müßte; so erhellet, daß die Richtung der erstern den von der letztern eingeschlossenen Winkel halbirt, wodurch also die Richtung der Resultirenden vollkommen bestimmt ist.

2) Größe der Resultirenden. Es ist klar, daß die Größe der Resultirenden bloß von der Größe der Kraft P, und dem von beiden Seitenkräften eingeschlossenen Winkel, welchen wir durch $2x$ bezeichnen wollen, abhängt, so daß also, nach der aus den ersten Elementen der Functionentheorie hinlänglich bekannten Bezeichnung,

$$R = f(P, x)$$

ist. Um die Form dieser Function näher zu bestimmen, stelle man folgende Betrachtungen an.

Bringt man an dem Punkte A jede der drey Kräfte P, $P' (= P)$, R', α Mahl, wo α eine positive ganze Zahl bezeichnet, nach ihrer Richtung an, so ist klar, daß αP, $\alpha P'$ und $\alpha R'$ im Gleichgewichte sind, wenn P, P' und R' es sind, und daß jene es nicht sind, wenn diese es nicht sind, (Einl. 7. 1.).

Sind daher P, P', R' im Gleichgewichte, so sind es auch $\frac{1}{\beta} P$, $\frac{1}{\beta} P'$, $\frac{1}{\beta} R'$; denn wären diese Kräfte nicht im Gleichgewichte, so wären es nach dem Obigen auch $\beta\left(\frac{1}{\beta} P\right)$, $\beta\left(\frac{1}{\beta} P'\right)$, $\beta\left(\frac{1}{\beta} R'\right)$, d. i. P, P', R', nicht, wie doch angenommen wurde.

Sind also P, P', R' im Gleichgewichte, so sind es auch $\frac{1}{\beta} P$, $\frac{1}{\beta} P'$, $\frac{1}{\beta} R'$, und folglich auch $\alpha\left(\frac{1}{\beta} P\right)$, $\alpha\left(\frac{1}{\beta} P'\right)$, $\alpha\left(\frac{1}{\beta} R'\right)$, d. i. $\frac{\alpha}{\beta} P$, $\frac{\alpha}{\beta} P'$, $\frac{\alpha}{\beta} R'$, für jedes ganze positive α und β, nach denselben Richtungen wie P, P', R'.

An dem Punkte A lasse man jetzt nach denselben Richtungen wie P und P' ein Paar andere gleiche Kräfte Q und Q' wirken, so fällt nach Nummer 1. die Richtung der Aequipollenten $\mathfrak{R}'$ dieser beiden Kräfte mit der Richtung der Kraft R' zusammen. Sey nun

$$P : Q = \beta : \alpha,$$

wo β und α ein Paar positive ganze Zahlen bezeichnen. (Völlig genau, wenn P und Q commensurabel sind; näherungsweise, aber ohne allen merklichen Fehler, wenn P und Q incommensurabel sind.) Also $Q = \frac{\alpha}{\beta} P = Q'$. Nach dem Obigen sind aber $\frac{\alpha}{\beta} P$, $\frac{\alpha}{\beta} P'$, $\frac{\alpha}{\beta} R'$, und folglich Q, Q', $\frac{\alpha}{\beta} R'$ im Gleichgewichte; aber auch Q, Q' und $\mathfrak{R}'$ sind nach der Annahme nach denselben Richtungen im Gleichgewichte; also ist $\mathfrak{R}' = \frac{\alpha}{\beta} R'$, und folglich $\mathfrak{R}$ (die Resultirende aus Q und Q') $= \frac{\alpha}{\beta} R$. Ist also $Q = \frac{\alpha}{\beta} P$, so ist $\mathfrak{R} = \frac{\alpha}{\beta} R$, und folglich

$$\frac{Q}{P} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\mathfrak{R}}{R} \text{ oder } \frac{R}{P} = \frac{\mathfrak{R}}{Q}.$$

Der Bruch $\frac{R}{P}$ ist also, wie sich auch P ändern mag, eine constante Größe, wenn nur der Winkel $2x$ oder x ungeändert bleibt, und hängt daher bloß von diesem Winkel ab, so daß also

$$\frac{R}{P} = \varphi x \text{ und folglich } R = P \,.\, \varphi x \text{ ist. *)}$$

*) Wünschte man für den Fall der Incommensurabilität noch eine etwas strengere Darstellung, so könnte man etwa auf folgende Art verfahren. Es sey

$$P : \pi = \beta : \alpha \text{ und } P : \pi' = \beta : \alpha + 1,$$

wo $\pi < Q$ und $\pi' > Q$ ist, β und α aber positive ganze Zahlen sind. Die aus π, π Resultirende sey $= \rho$, und die aus π', π' Resultirende $= \rho'$. Alle ähnliche Kräfte wirken offenbar nach einerley Richtung; und da $\pi < Q$, $\pi' > Q$ ist, so ist natürlich auch $\rho < \mathfrak{R}$ und $\rho' > \mathfrak{R}$. Da aber π und π' nach

Seyen nun AP und AP' (Fig. 1.) die Richtungen der gleichen Kräfte P und P', und AR, welche den Winkel PAP'

---

aus der Geometrie bekannten Methoden einander beliebig nahe gebracht werden können, so gilt dies offenbar auch von den entsprechenden Resultirenden ρ und ρ'. Ganz wie im Texte ist nun

$$\frac{\pi}{P} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\rho}{R}; \; \frac{\pi'}{P} = \frac{\alpha+1}{\beta} = \frac{\rho'}{R}.$$

Aber $\frac{\pi}{P} < \frac{Q}{P}$ und $\frac{\pi'}{P} > \frac{Q}{P}$. Also

auch $\frac{\rho}{R} < \frac{Q}{P}$ und $\frac{\rho'}{R} > \frac{Q}{P}$, oder

$$\frac{\rho}{Q} < \frac{R}{P} \text{ und } \frac{\rho'}{Q} > \frac{R}{P}.$$

Wäre nun $\frac{R}{P}$ nicht $= \frac{\mathfrak{R}}{Q}$, so sey

1) $\frac{R}{P} = \frac{\mathfrak{R}}{Q} + \delta$, und man mache $\rho' - \rho < \delta Q$, welches immer möglich ist, da ρ und ρ' nach dem Obigen einander beliebig nahe gebracht werden können. Also $\frac{\rho'}{Q} - \frac{\rho}{Q} < \delta$, $\frac{\rho'}{Q} < \frac{\rho}{Q} + \delta$, und folglich um so mehr $\frac{R}{P} < \frac{\rho}{Q} + \delta$, und, weil nach dem Obigen $\rho < \mathfrak{R}$ ist, noch mehr $\frac{R}{P} < \frac{\mathfrak{R}}{Q} + \delta$, welches gegen die Annahme. Wäre aber

2) $\frac{R}{P} = \frac{\mathfrak{R}}{Q} - \delta$, so mache man wieder $\rho' - \rho < \delta Q$. Also $\frac{\rho'}{Q} - \frac{\rho}{Q} < \delta$, und folglich $\frac{\rho}{Q} > \frac{\rho'}{Q} - \delta$. Also um so mehr $\frac{R}{P} > \frac{\rho'}{Q} - \delta$, und demnach, weil $\rho' > \mathfrak{R}$ ist, $\frac{R}{P} > \frac{\mathfrak{R}}{Q} - \delta$, welches wieder gegen die Annahme ist.

Es kann folglich $\frac{R}{P}$ weder $= \frac{\mathfrak{R}}{Q} + \delta$ noch $= \frac{\mathfrak{R}}{Q} - \delta$ seyn, und es ist also $\frac{R}{P} = \frac{\mathfrak{R}}{Q}$, w. z. b. w.

halbirt, (Num. 1.), sey die Richtung ihrer Resultirenden. $\angle PAR = \angle P'AR$ ist $= x$. Man nehme $\angle BAP = \angle PAC = \angle P'AD = P'AE = z$, und denke sich jede der beiden gleichen Kräfte P und P' in zwey gleiche Seitenkräfte Q und Q' nach AB, AC und AD, AE zerlegt; so ist nach dem Obigen

$$P = Q \cdot \varphi z = P',$$

wo φx und φz, wie aus den ersten Elementen der Functionentheorie bekannt ist, Functionen bezeichnen, welche von x und z auf einerley Art abhängen.

Die Resultirende der gleichen Kräfte nach AB und AE ist nach AR gerichtet, und $=$

$$\mathfrak{R} = Q \cdot \varphi(x+z),$$

weil $\angle BAR = \angle EAR = x + z$ ist.

Eben so ist die Resultirende der nach AC und AD gerichteten gleichen Kräfte nach AR gerichtet, und $=$

$$r = Q \cdot \varphi(x-z),$$

weil $\angle CAR = \angle DAR = x - z$ ist.

Die Kräfte nach AB, AC, AD und AE lassen sich für P und P' nach AP und AP' setzen. Also kann man auch die Resultirende jener für die Resultirende dieser setzen, und es ist demnach, da die Resultirenden alle nach AR gerichtet sind:

$$\mathfrak{R} + r = R, \text{ d. i.}$$

$$Q \cdot \varphi(x+z) + Q \cdot \varphi(x-z) = P \cdot \varphi x,$$

$$\text{oder } Q \cdot \varphi(x+z) + Q \cdot \varphi(x-z) = Q \cdot \varphi z \cdot \varphi x,$$

$$\varphi(x+z) + \varphi(x-z) = \varphi x \cdot \varphi z,$$

für jedes x und z.

Es kommt nun darauf an, die Natur der Function φx oder φz zu bestimmen, welches am besten durch Entwickelung in eine Reihe geschehen wird.

§. 5.

Zu dem Ende setze man

$$\varphi x = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots \text{*)}$$ Also

*) Diese Annahme gründet sich auf die Voraussetzung, daß sich die Function φx in eine nach den positiven ganzen Potenzen

$$\varphi z = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \ldots,$$
$$\varphi(x+z) = A + B(x+z) + C(x+z)^2 + D(x+z)^3 + \ldots,$$
$$\varphi(x-z) = A + B(x-z) + C(x-z)^2 + D(x-z)^3 + \ldots,$$

---

von x fortschreitende Reihe entwickeln lasse. Ich habe an verschiedenen Stellen der ersten Sammlung meiner mathematischen Abhandlungen, Altona 1822; 4., auf die Nothwendigkeit, diese Voraussetzung, wenn sie nicht vielleicht durch die Entwickelung selbst gerechtfertigt wird, in jedem Falle, wo die Methode der unbestimmten Coefficienten angewandt wird, zu rechtfertigen, aufmerksam gemacht. Die Mathematiker, welche diese Methode gebrauchen, scheinen mir eine solche Rechtfertigung zuweilen mit Unrecht zu unterlassen. Freylich ist diese Rechtfertigung öfters Schwierigkeiten unterworfen. In dem vorliegenden Falle möchte sie sich wohl nicht anders als etwa auf folgende Art geben lassen. Es ist ein sehr bekannter trigonometrischer Satz, daß immer

$$\operatorname{Cos} x \,.\, \operatorname{Cos} z = \tfrac{1}{2}\operatorname{Cos}(x+z) + \tfrac{1}{2}\operatorname{Cos}(x-z),$$

oder

$$2\operatorname{Cos} x \,.\, \operatorname{Cos} z = \operatorname{Cos}(x+z) + \operatorname{Cos}(x-z)$$

ist. Multiplicirt man auf beiden Seiten mit 2, so erhält man:

$$4\operatorname{Cos} x \,.\, \operatorname{Cos} z = 2\operatorname{Cos}(x+z) + 2\operatorname{Cos}(x-z)$$

oder

$$2\operatorname{Cos} x \,.\, 2\operatorname{Cos} z = 2\operatorname{Cos}(x+z) + 2\operatorname{Cos}(x-z).$$

Vergleicht man diese Gleichung mit unsrer allgemeinen Gleichung $\varphi x \,.\, \varphi z = \varphi(x+z) + \varphi(x-z)$, so erhellet, daß $2\operatorname{Cos} x$ oder $2\operatorname{Cos} z$ offenbar ein Werth von φx oder φz ist. Dieser Werth von φx läßt sich in eine nach den positiven ganzen Potenzen von x fortschreitende Reihe entwickeln, wie ich in der oben angeführten Schrift S. 17. ff. unabhängig von der Methode der unbestimmten Coefficienten gezeigt habe. Vielleicht gibt es aber einen allgemeinern Ausdruck von φx als $2\operatorname{Cos} x$, aus welchem aber offenbar $2\operatorname{Cos} x$ erhalten werden muß, wenn man einer gewissen Größe in demselben einen bestimmten Werth beylegt. Da sich also $2\operatorname{Cos} x$ in eine Reihe entwickeln läßt, welche man aus dem allgemeinen Ausdrucke von φx durch die Substitution einer bestimmten Größe für eine allgemeinere erhält, so muß sich φx im allgemeinen Sinne offenbar ebenfalls durch eine nach den positiven ganzen Potenzen von x fortschreitende Reihe ausdrücken lassen, und dies ist die Reihe, welche wir oben für φx angenommen haben, deren Coefficienten im Verfolg des Paragraphen bestimmt werden.

da die gleichen Functionszeichen andeuten, daß φx, φz, $\varphi(x+z)$ und $\varphi(x-z)$ auf einerley Art von ihren veränderlichen Größen abhängen.

Nun ist aber nach §. 4.:

$$\varphi x \,.\, \varphi z = \varphi(x+z) + \varphi(x-z). \quad \text{Also}$$

$$(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots)(A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots)$$
$$= \begin{cases} \;\;\; A + B(x+z) + C(x+z)^2 + D(x+z)^3 + \ldots \\ + A + B(x-z) + C(x-z)^2 + D(x-z)^3 + \ldots \end{cases}$$

Entwickelt man nun die beiden Theile dieser Gleichung, so ist klar, daß das von x und z unabhängige Glied auf der einen Seite A^2 und auf der andern $2A$ seyn wird, so daß also $A^2 = 2A$ und folglich $A = 2$ ist. Aus

$$\varphi x = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$$

folgt aber für $x = 0$: $\varphi 0 = A$; also $\varphi 0 = 2$. Setzt man nun in der Gleichung

$$\varphi x \,.\, \varphi z = \varphi(x+z) + \varphi(x-z)$$

$x = z$ und dann $x = 0$; so erhält man

$$\varphi x \,.\, \varphi x = \varphi 2x + \varphi 0, \text{ und}$$
$$\varphi 0 \,.\, \varphi z = \varphi z + \varphi(-z). \quad \text{D. i.}$$
$$(\varphi x)^2 = 2 + \varphi 2x, \; 2\varphi z = \varphi z + \varphi(-z).$$

Also auch $2\varphi x = \varphi x + \varphi(-x)$, oder $\varphi x = \varphi(-x)$. D. i.

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots =$$
$$= A - Bx + Cx^2 - Dx^3 + Ex^4 - \ldots,$$

und folglich

$$B = -B, \; D = -D, \; F = -F, \text{ u. s. w.},$$
$$2B = 0, \; 2D = 0, \; 2F = 0, \text{ u. s. w.},$$
$$B = D = F = \ldots = 0.$$

Also

$$\varphi x = A + Cx^2 + Ex^4 + Gx^6 + Hx^8 + \ldots$$

oder

$$\varphi x = A + \overset{1}{A}x^2 + \overset{2}{A}x^4 + \overset{3}{A}x^6 + \overset{4}{A}x^8 + \ldots,$$

und folglich

$$\varphi 2x = A + 2^2 \,.\, \overset{1}{A}x^2 + 2^4 \,.\, \overset{2}{A}x^4 + 2^6 \,.\, \overset{3}{A}x^6 + 2^8 \,.\, \overset{4}{A}x^8 + \ldots$$

Es war aber

$$(\varphi x)^2 = 2 + \varphi 2x. \quad \text{Also}$$

$$(A+\overset{1}{A}x^2+\overset{2}{A}x^4+\overset{3}{A}x^6+\overset{4}{A}x^8+\dots)^2=$$
$$=4+2^2.\overset{1}{A}x^2+2^4.\overset{2}{A}x^4+2^6.\overset{3}{A}x^6+2^8.\overset{4}{A}x^8+\dots,$$
weil $A+2=2+2=4$ ist.

Entwickelt man nun diese Gleichung, so erhält man, wenn man A^2 auf der einen und 4 auf der andern Seite gegen einander aufhebt:

$$2^2.\overset{1}{A}x^2+2^4.\overset{2}{A}x^4+2^6.\overset{3}{A}x^6+2^8.\overset{4}{A}x^8+\dots=$$
$$=\left\{\begin{array}{r|r|r|r|l} A\overset{1}{A}\,x^2 & +A\overset{2}{A}\,x^4 & +A\overset{3}{A}\,x^6 & +A\overset{4}{A}\,x^8 & +\dots \\ +\overset{1}{A}A & +\overset{1}{A}\overset{1}{A} & +\overset{1}{A}\overset{2}{A} & +\overset{1}{A}\overset{3}{A} & +\dots \\ & +\overset{2}{A}A & +\overset{2}{A}\overset{1}{A} & +\overset{2}{A}\overset{2}{A} & +\dots \\ & & +\overset{3}{A}A & +\overset{3}{A}\overset{1}{A} & +\dots \\ & & & +\overset{4}{A}A & +\dots \end{array}\right.$$

Hieraus ergeben sich folgende Gleichungen zur Bestimmung der Coefficienten:

1) $A\overset{1}{A}+\overset{1}{A}A=2^2.\overset{1}{A}=4\overset{1}{A}$; d. i.

$$2\overset{1}{A}+2\overset{1}{A}=4\overset{1}{A}=4\overset{1}{A},$$

woraus $\overset{1}{A}$ nicht bestimmt werden kann, da die Gleichung identisch ist. Dessen ungeachtet nehme man aber $\overset{1}{A}$ einstweilen als bekannt an, und bestimme die übrigen Coefficienten durch dasselbe.

2) $2^4.\overset{2}{A}=A\overset{2}{A}+\overset{1}{A}\overset{1}{A}+\overset{2}{A}A$

$$=2\overset{2}{A}+\overset{1}{A}\overset{1}{A}+2\overset{2}{A}=4\overset{2}{A}+\overset{1}{A}{}^2.$$
$$(2^4-4)\overset{2}{A}=12\overset{2}{A}=\overset{1}{A}{}^2,\ 24\overset{2}{A}=2\overset{1}{A}{}^2;$$
$$1.2.3.4.\overset{2}{A}=2\overset{1}{A}{}^2,\ \overset{2}{A}=\frac{2\overset{1}{A}{}^2}{1.2.3.4}.$$

3) $2^6.\overset{3}{A}=A\overset{3}{A}+\overset{1}{A}\overset{2}{A}+\overset{2}{A}\overset{1}{A}+\overset{3}{A}A$

$$=2\overset{3}{A}+\frac{2\overset{1}{A}{}^3}{1.2.3.4}+\frac{2\overset{1}{A}{}^3}{1.2.3.4}+2\overset{3}{A}$$

$$= 4\overset{3}{A} + \frac{4\overset{1}{A}^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 4\overset{3}{A} + \frac{\overset{1}{A}^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

$$(2^6 - 4)\overset{3}{A} = 60\overset{3}{A} = \frac{\overset{1}{A}^3}{1 \cdot 2 \cdot 3};$$

$$120\overset{3}{A} = 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \overset{3}{A} = \frac{2\overset{1}{A}^3}{1 \cdot 2 \cdot 3};$$

$$\overset{3}{A} = \frac{2\overset{1}{A}^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}.$$

4) $2^8 \cdot \overset{4}{A} = A\overset{4}{A} + \overset{1}{A}\overset{3}{A} + \overset{2}{A}\overset{2}{A} + \overset{3}{A}\overset{1}{A} + \overset{4}{A}A$

$$= 2\overset{4}{A} + \frac{2\overset{1}{A}^4}{1 \ldots 6} + \frac{4\overset{1}{A}^4}{1 \ldots 4 \cdot 1 \ldots 4} + \frac{2\overset{1}{A}^4}{1 \ldots 6} + 2\overset{4}{A}$$

$$= 4\overset{4}{A} + \frac{4\overset{1}{A}^4}{1 \ldots 6} + \frac{\overset{1}{A}^4}{1 \ldots 4 \cdot 6}$$

$$= 4\overset{4}{A} + \frac{4\overset{1}{A}^4}{1 \ldots 6} + \frac{5\overset{1}{A}^4}{1 \ldots 6} = 4\overset{4}{A} + \frac{9\overset{1}{A}^4}{1 \ldots 6}.$$

$$(2^8 - 4)\overset{4}{A} = 252\overset{4}{A} = \frac{9\overset{1}{A}^4}{1 \ldots 6};$$

$$28\overset{4}{A} = \frac{\overset{1}{A}^4}{1 \ldots 6},\ 56\overset{4}{A} = \frac{2\overset{1}{A}^4}{1 \ldots 6};$$

$$7 \cdot 8 \cdot \overset{4}{A} = \frac{2\overset{1}{A}^4}{1 \ldots 6},\ \overset{4}{A} = \frac{2\overset{1}{A}^4}{1 \ldots 8}.$$

5) Man könnte auf diese Art immer weiter gehen; das Gesetz liegt aber schon vor Augen. Es ist nämlich allgemein:

$$\overset{n}{A} = \frac{2\overset{1}{A}^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 2n}.$$

Um nun dieses Gesetz allgemein zu beweisen, nehme man an, daß es für $\overset{1}{A}$, $\overset{2}{A}$, $\overset{3}{A}$, $\overset{4}{A}$, u. s. w. bis $\overset{n}{A}$ gelte; so läßt sich zeigen, daß es auch für $\overset{n+1}{A}$ gelten muß, und folglich allgemein ist, da es vorher bis $\overset{4}{A}$ durch Induction bewiesen worden ist. Es ist nämlich aus der obigen Gleichung, mittelst welcher die Coefficienten der Reihe für φx bestimmt werden:

$$2^{2n+2}\cdot\overset{n+1}{A} = A\overset{n+1}{A} + \overset{1}{A}\overset{n}{A} + \overset{2}{A}\overset{n-1}{A} + \ldots + \overset{n}{A}\overset{1}{A} + \overset{n+1}{A}A,$$

wie leicht erhellet. Da nun nach der Voraussetzung das bemerkte Gesetz bis $\overset{n}{A}$ gilt und $A = 2$ ist; so ist

$$(2^{2n+2}-2^2)\overset{n+1}{A} = \left\{\begin{array}{l}\frac{2\overset{1}{A}}{1.2}\cdot\frac{2\overset{1}{A}^{n}}{1..2n} + \frac{2\overset{1}{A}^{2}}{1..4}\cdot\frac{2\overset{1}{A}^{n-1}}{1..(2n-2)} + \frac{2\overset{1}{A}^{3}}{1..6}\cdot\frac{2\overset{1}{A}^{n-2}}{1..(2n-4)}\\ + \ldots + \frac{2\overset{1}{A}^{n}}{1..2n}\cdot\frac{2\overset{1}{A}}{1.2}\end{array}\right\}$$

$$= 2^2\cdot\overset{1}{A}^{n+1}\cdot\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{1.2}\cdot\frac{1}{1..2n} + \frac{1}{1..4}\cdot\frac{1}{1..(2n-2)} + \frac{1}{1..6}\cdot\frac{1}{1..(2n-4)}\\ + \ldots + \frac{1}{1..2n}\cdot\frac{1}{1.2}\end{array}\right\}$$

$$= \frac{2^2\cdot\overset{1}{A}^{n+1}}{1..(2n+2)}\left\{\begin{array}{l}\frac{(2n+2)(2n+1)}{1.2} + \frac{(2n+2)..(2n-1)}{1..4}\\ + \frac{(2n+2)..(2n-3)}{1..6} + \ldots + \frac{(2n+2)..3}{1..2n}\end{array}\right\}$$

$$= \frac{2^2\cdot\overset{1}{A}^{n+1}}{1..(2n+2)}\left\{{}_{2n+2}\overset{2}{\mathfrak{B}} + {}_{2n+2}\overset{4}{\mathfrak{B}} + {}_{2n+2}\overset{6}{\mathfrak{B}} + \ldots + {}_{2n+2}\overset{2n}{\mathfrak{B}}\right\},$$

wenn man Thibaut's bekannte Bezeichnung der Binomialcoefficienten gebraucht. (M. s. Grundriß der allgemeinen Arithmetik oder Analysis, von B. F. Thibaut, Göttingen, erster Theil, 1809, 8., S. 44.)

Nun ist aber nach einem sehr bekannten Satze von den Binomialcoefficienten allgemein:

$${}_{\alpha+1}\overset{m}{\mathfrak{B}} = {}_{\alpha}\overset{m}{\mathfrak{B}} + {}_{\alpha}\overset{m-1}{\mathfrak{B}},$$

welches sich leicht auf folgende Art beweisen läßt:

$${}_{\alpha}\overset{m}{\mathfrak{B}} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-m+2)(\alpha-m+1)}{1\,.\,.(m-1)m},$$

$$ {}^{\alpha}\overset{m-1}{\mathfrak{B}} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-m+2)}{1\ldots(m-1)}, $$

$$ {}^{\alpha}\overset{m}{\mathfrak{B}} + {}^{\alpha}\overset{m-1}{\mathfrak{B}} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-m+2)}{1\ldots(m-1)}\left\{\frac{\alpha-m+1}{m}+1\right\} $$

$$ = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-m+2)}{1\ldots(m-1)}\cdot\frac{\alpha+1}{m} $$

$$ = \frac{(\alpha+1)\alpha\ldots(\alpha-m+2)}{1\ldots m} = {}^{\alpha+1}\overset{m}{\mathfrak{B}}, $$

w. z. b. w.

Zerlegt man also nach diesem Satze alle Binomialcoefficienten in der Gleichung, so erhält man, wenn man zu gleicher Zeit auf beiden Seiten durch 2 dividirt:

$$ (2^{2n+1}-2)\overset{n+1}{A} = \frac{2\overset{1}{A}^{n+1}}{1\ldots(2n+2)}\left\{\begin{array}{l} {}^{2n+1}\overset{1}{\mathfrak{B}} + {}^{2n+1}\overset{2}{\mathfrak{B}} + {}^{2n+1}\overset{3}{\mathfrak{B}} + {}^{2n+1}\overset{4}{\mathfrak{B}} + \ldots \\ \quad\ldots + {}^{2n+1}\overset{2n-1}{\mathfrak{B}} + {}^{2n+1}\overset{2n}{\mathfrak{B}} \end{array}\right. $$

Nach dem binomischen Lehrsatze (M. s. z. B. die erste Sammlung meiner mathematischen Abhandlungen, S. 97. ff.) ist aber

$$ (1+1)^{2n+1} = 2^{2n+1} = 1 + {}^{2n+1}\overset{1}{\mathfrak{B}} + {}^{2n+1}\overset{2}{\mathfrak{B}} + {}^{2n+1}\overset{3}{\mathfrak{B}} + \ldots + {}^{2n+1}\overset{2n}{\mathfrak{B}} + $$

Also

$$ (2^{2n+1}-2)\overset{n+1}{A} = \frac{2\overset{1}{A}^{n+1}}{1\ldots(2n+2)}\cdot(2^{2n+1}-2), $$

und folglich

$$ \overset{n+1}{A} = \frac{2\overset{1}{A}^{n+1}}{1\ldots(2n+2)}, $$

so daß also das bemerkte Gesetz für $\overset{n+1}{A}$ gilt, wenn es bis $\overset{n}{A}$ gilt, und daher allgemein ist, weil es vorher bis $\overset{4}{A}$ bewiesen worden.

Es ist also

$$ \varphi x = A + \overset{1}{A}x^2 + \overset{2}{A}x^4 + \overset{3}{A}x^6 + \ldots + \overset{n}{A}x^{2n} + \ldots $$

$$=2+\frac{2\overset{1}{A}x^2}{1.2}+\frac{2\overset{1}{A}{}^2x^4}{1..4}+\frac{2\overset{1}{A}{}^3x^6}{1..6}+\ldots+\frac{2\overset{1}{A}{}^nx^{2n}}{1..2n}+\ldots$$

$$=2\left\{1+\frac{\overset{1}{A}x^2}{1.2}+\frac{\overset{1}{A}{}^2x^4}{1..4}+\frac{\overset{1}{A}{}^3x^6}{1..6}+\ldots+\frac{\overset{1}{A}{}^nx^{2n}}{1..2n}+\ldots\right\}.$$

Setzt man nun $\sqrt{(-\overset{1}{A})}=a$; so ist $a^2=-\overset{1}{A}$, $a^4=\overset{1}{A}{}^2$, $a^6=-\overset{1}{A}{}^3$, $a^8=\overset{1}{A}{}^4$, $a^{10}=-\overset{1}{A}{}^5$, u. s. w. Also $\overset{1}{A}=-a^2$, $\overset{1}{A}{}^2=a^4$, $\overset{1}{A}{}^3=-a^6$, $\overset{1}{A}{}^4=a^8$, $\overset{1}{A}{}^5=-a^{10}$, u. s. w. Folglich

$$\varphi x=2\left\{1-\frac{(ax)^2}{1.2}+\frac{(ax)^4}{1..4}-\frac{(ax)^6}{1..6}+\frac{(ax)^8}{1..8}-\ldots\right\},$$

d. i. $\varphi x=2\,.\,\mathrm{Cos}\,ax$.

(M. s. die erste Sammlung meiner mathematischen Abhandlungen, S. 20. ff.) Also

$$R=2P\,\mathrm{Cos}\,ax.$$

Es ist nun bloß noch die constante Größe a zu bestimmen. Um zu dieser Bestimmung zu gelangen, setze man ein Mahl, der Winkel $2x$ werde $=180^\circ$ oder $x=90^\circ$, so sind die beiden gleichen Seitenkräfte einander gerade entgegengesetzt und ihre Resultirende ist also offenbar $=0$, so daß also

$$0=2P\,.\,\mathrm{Cos}\,(a\,.\,90^\circ)=2P\,.\,\mathrm{Cos}\,\frac{a\pi}{2}.$$

Folglich $\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}a\pi=0$. Aus der Trigonometrie ist aber bekannt, daß bloß die Cosinus der Bögen

$$\pm\frac{\pi}{2},\ \pm3\cdot\frac{\pi}{2},\ \pm5\cdot\frac{\pi}{2},\ \pm7\cdot\frac{\pi}{2},\ \text{u. s. w.}$$

$=0$ sind. Daher ist $a=\pm(2n+1)$, wo es aber ganz gleichgültig ist, ob man $a=2n+1$ oder $=-(2n+1)$ setzt, weil bekanntlich immer $\mathrm{Cos}\,\alpha=\mathrm{Cos}\,(-\alpha)$ ist. Man setze demnach $a=2n+1$ und suche nun n zu bestimmen. Es ist aber $n=0$. Denn wäre $n>0$, so setze man ein Mahl den Winkel $x=\frac{90^\circ}{2n+1}$, so ist

$$R = 2P\mathrm{Cos}\,ax = 2P\mathrm{Cos}\left[(2n+1)\,.\,\frac{90^\circ}{2n+1}\right]$$

$= 2P\mathrm{Cos}\,90^\circ = 0$, welches aber unmöglich ist, weil $2n+1$, wegen $n > 0$, > 1, und folglich $x < 90^\circ$ oder $2x < 180^\circ$ ist; denn in diesem Falle kann die Resultirende augenscheinlich nicht $= 0$ seyn, sondern hat eine gewisse Größe. Es ist also $n = 0$, und folglich $a = 1$, $\varphi x = 2\mathrm{Cos}\,x$, und die Resultirende

$$R = 2P\mathrm{Cos}\,x,$$

welche jetzt also auch der Größe nach völlig bestimmt ist.

In Beziehung auf die Anmerkung zu §. 5. erhellet also jetzt, daß es keinen andern und allgemeinern Werth als $2\mathrm{Cos}\,x$ für φx gibt, welcher der Gleichung

$$\varphi(x+z) + \varphi(x-z) = \varphi x\,.\,\varphi z$$

genügte.

§. 6.

Ist der Gebrauch der Differenzialrechnung verstattet, so kann man die Function φx auf eine weit kürzere Art als vorher aus der Gleichung

$$\varphi x\,.\,\varphi z = \varphi(x+z) + \varphi(x-z)$$

entwickeln.

Es ist nämlich nach dem Taylor'schen Lehrsatze

$$\varphi(x+z) = \varphi x + \frac{d\varphi x}{dx}\cdot\frac{z}{1} + \frac{d^2.\varphi x}{dx^2}\cdot\frac{z^2}{1.2} + \frac{d^3.\varphi x}{dx^3}\cdot\frac{z^3}{1.2.3} + \ldots,$$

$$\varphi(x-z) = \varphi x - \frac{d\varphi x}{dx}\cdot\frac{z}{1} + \frac{d^2.\varphi x}{dx^2}\cdot\frac{z^2}{1.2} - \frac{d^3.\varphi x}{dx^3}\cdot\frac{z^3}{1.2.3} + \ldots$$

Also $\varphi(x+z) + \varphi(x-z) =$

$$= 2\left\{\varphi x + \frac{d^2.\varphi x}{dx^2}\cdot\frac{z^2}{1.2} + \frac{d^4.\varphi x}{dx^4}\cdot\frac{z^4}{1..4} + \frac{d^6.\varphi x}{dx^6}\cdot\frac{z^6}{1..6} + \ldots\right\},$$

$$\frac{\varphi(x+z) + \varphi(x-z)}{\varphi x} = \varphi z =$$

$$= 2\left\{1 + \frac{d^2.\varphi x}{\varphi x.dx^2}\cdot\frac{z^2}{1.2} + \frac{d^4.\varphi x}{\varphi x.dx^4}\cdot\frac{z^4}{1..4} + \frac{d^6.\varphi x}{\varphi x.dx^6}\cdot\frac{z^6}{1..6} + \ldots\right\}.$$

Da nun aber φz kein x enthält, so können auch die Coefficienten

$$\frac{d^2 . \varphi x}{\varphi x . dx^2}, \frac{d^4 . \varphi x}{\varphi x . dx^4}, \frac{d^6 . \varphi x}{\varphi x . dx^6}, \text{ u. s. w.}$$

kein x enthalten, und sind folglich constante Größen. Setzt man also

$$\frac{d^2 . \varphi x}{\varphi x . dx^2} = b, \text{ oder } \frac{d^2 . \varphi x}{dx^2} = b\varphi x; \text{ so ist}$$

$$\frac{d^4 . \varphi x}{dx^4} = b . \frac{d^2 . \varphi x}{dx^2} = b . b\varphi x = b^2 . \varphi x;$$

$$\frac{d^6 . \varphi x}{dx^6} = b^2 . \frac{d^2 . \varphi x}{dx^2} = b^2 . b\varphi x = b^3 . \varphi x;$$

$$\frac{d^8 . \varphi x}{dx^8} = b^3 . \frac{d^2 . \varphi x}{dx^2} = b^3 . b\varphi x = b^4 . \varphi x;$$

u. s. w. u. s. w.

Also

$$\varphi z = 2\left\{1 + \frac{bz^2}{1 . 2} + \frac{b^2 . z^4}{1 .. 4} + \frac{b^3 . z^6}{1 .. 6} + \dots\right\},$$

und, wenn man $\sqrt{-b} = a$ setzt, auf ähnliche Art wie in §. 5.:

$$\varphi z = 2\left\{1 - \frac{(az)^2}{1 . 2} + \frac{(az)^4}{1 .. 4} - \frac{(az)^6}{1 .. 6} + \dots\right\},$$

d. i. $\varphi z = 2 \operatorname{Cos} az$ oder $\varphi x = 2 \operatorname{Cos} ax$, und folglich wie in §. 5.:

$$R = P . \varphi x = 2P . \operatorname{Cos} ax = 2P . \operatorname{Cos} x.$$

Diese Entwickelung ist in der That weit kürzer und eleganter, als die unsrige in dem vorhergehenden Paragraphen; ich brauche aber hier nicht zu wiederholen, was von berühmten Mathematikern schon öfters über den Gebrauch der höhern Analysis bey Beweisen oder Auflösungen von Elementarsätzen gesagt worden ist. (M. s. z. B. in dieser Beziehung: Analytische Trigonometrie, von G. S. Klügel, Braunschweig 1770, 8., S. 235. — 236.)

Stellt man jetzt in Fig. 2. die gleichen Kräfte P und P' auf ihren Richtungen AP und AP' durch die gleichen Linien

Ap und Ap' dar, beschreibt das Parallelogramm $ApRp'$, und zieht die Diagonale AR, so wird von derselben der Winkel PAP' halbirt, und durch sie also die Richtung der Mittelkraft R dargestellt. Der Winkel pAR ist $= x$. Fällt man von p auf AR das Perpendikel pt, so ist, weil pAR ein gleichschenkliger Triangel ist, $At = tR$, und $At = Ap \,.\, \mathrm{Cos}\, x = P \,.\, \mathrm{Cos}\, x$. Also $AR = 2 \,.\, At = 2P \,.\, \mathrm{Cos}\, x$, so daß also auch die Größe der Resultirenden durch die Diagonale AR dargestellt wird. Die Diagonale AR des Rhombus $ApRp'$ ist also die geometrische Darstellung der Resultirenden R, (Einl. 6, 2.).

§. 7.

Zweyter Fall. Wenn die beiden Kräfte P und P' einander nicht gleich sind.

1) Wenn die Richtungen der Kräfte P und P' einen rechten Winkel PAP' (Fig. 3.) einschließen, seyen Ap und Ap' die geometrischen Darstellungen der Kräfte P und P'. Man beschreibe das Rechteck $ApRp'$, ziehe AR und pp', und beschreibe das Parallelogramm $pqAq'p'$. Nach einer bekannten Eigenschaft des Rechtecks ist $At = pt = tp' = Rt$, und die Parallelogramme $ptAq$ und $Atp'q'$ sind folglich Rhomben. Daher kann man für die Kräfte Ap und Ap' die Kräfte Aq, $2 \,.\, At$ und Aq' setzen, (§. 6.). Da aber Aq und Aq' offenbar einander gleich und gerade entgegengesetzt sind, so bleibt bloß noch die Kraft $2 \,.\, At = AR$ nach AR als Resultirende von Aq, $2 \,.\, At$, Aq', oder von AP und AP', oder P und P'. Die Diagonale AR des Rechtecks $ApRp'$ ist also die geometrische Darstellung der Resultirenden der Kräfte P und P'.

2) Schließen die Richtungen der Kräfte P und P' keinen rechten Winkel ein, so seyen wieder Ap und Ap' (Fig. 4.) ihre geometrischen Darstellungen. Man beschreibe das Parallelogramm $pAp'R$, ziehe AR, errichte auf AR durch A ein Perpendikel, und fälle auf dieses und auf AR von den

punkten p und p' die Perpendikel pq, pt, $p'q'$ und $p't'$. Für Ap und Ap' kann man nach 1. die Kräfte Aq, At, Aq' und At' setzen. Jeder, der mit den Elementen der Geometrie vertraut ist, kann aber leicht zeigen, daß $\Delta Apt \cong \Delta Rp't'$, und folglich $pt = p't'$ und $At = Rt'$, also auch $At' = Rt$, ist. Es ist also auch $Aq = Aq'$, und es bleiben folglich, weil diese beiden Kräfte einander gleich und gerade entgegengesetzt sind, nur noch die Kräfte At und At', so daß also die aus Aq, At, Aq', At', oder aus Ap und Ap', d. i. aus P und P', Resultirende, $= At \pm At' = At \pm Rt$, (wo die obern Zeichen für Fig. 4. a., die untern für Fig. 4. b. gelten,) $= AR$ ist. Die Diagonale AR ist also die geometrische Darstellung der aus P und P' resultirenden Mittelkraft R.

Nimmt man nun alles Bisherige zusammen, so überzeugt man sich leicht von folgendem allgemeinen Satze:

Die Diagonale des mit den geometrischen Darstellungen zweyer auf einen freyen Punkt wirkender Kräfte beschriebenen Parallelogramms ist die geometrische Darstellung der aus diesen beiden Kräften Resultirenden.

Natürlich ist hier die durch den Angriffspunkt der Kräfte gehende Diagonale zu verstehen.

Man nennt diesen höchst wichtigen und merkwürdigen Satz, auf den sich das ganze System der Statik gründet, gewöhnlich den Satz von dem Parallelogramm der Kräfte. Man hat ihn auf verschiedene Arten zu beweisen gesucht. Auf die Gleichung $\varphi(x+z) + \varphi(x-z) = \varphi x \,.\, \varphi z$ hat zuerst d'Alembert in den Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, 1784, den Beweis gegründet, (M. s. Elémens de Statique, par Francoeur, p. 111.), hat aber bey der Entwickelung der Function φx in eine Reihe die Integralrechnung gebraucht. Die sinnreiche Entwickelung durch die Differenzialrechnung in §. 6. gehört Poisson an, der sie zuerst in der Correspondance sur l'école polytechnique, Janvier 1808, Num. 9., vorgetragen, und dann auch in seinen Traité de Mécanique, Tom. I. p. 13. sqq., auf genommen hat. Auch in mehrern andern französischen Lehrbüchern findet man diesen Beweis, aber immer mit Hülfe der Differenzialrechnung nach Poisson geführt, z. B. in den Leçons de Statique, par J. G. Garnier, p. 253. sqq., und in den Élémens de Statique, par L. B. Francoeur, p. 111. sqq.

Wir sind in §. 5. ohne Hülfe der Differenzialrechnung zu denselben Resultaten gelangt. Mehrere historische und literarische Bemerkungen werden späterhin vorkommen, wenn wir erst noch zwey Beweise des wichtigen Satzes mitgetheilt haben werden, einen ebenfalls analytischen, und einen ganz elementaren. Wir haben mit den analytischen Beweisen den Anfang gemacht, um dem Leser gleich anfangs anzudeuten, daß unser Werk hauptsächlich analytischer Natur ist.

Zweyte Auflösung.

§. 8.

Erster Fall. Wenn die Richtungen der Kräfte P und P' einen rechten Winkel einschließen.

1) Größe der Resultirenden. Die Resultirende sey, wie gewöhnlich, R, und x der Winkel, welchen ihre Richtung mit der Richtung der Kraft P einschließt, also $90^\circ - x = \frac{1}{2}\pi - x$ der mit der Richtung der Kraft P' eingeschlossene Winkel. Es ist klar, daß, wenn sich R und x ändern, sich auch P und P' ändern müssen, so daß also diese beiden Kräfte offenbar Functionen von R und x sind, welches wir so ausdrücken:

$$P = f(R, x), \quad P' = f'(R, x),$$

oder

$$P = f(R, x), \quad P' = f(R, \tfrac{1}{2}\pi - x),$$

wo zu bemerken ist, daß gleiche Functionszeichen ähnliche Functionen bezeichnen. Es ist nämlich klar, daß P' ganz auf dieselbe Art von R und $\frac{1}{2}\pi - x$ abhängen muß, wie P von R und x abhängt.

P, P' und R' sind im Gleichgewichte; also auch αP, $\alpha P'$, $\alpha R'$, wenn α eine positive ganze Zahl bedeutet, (Einl. 7. 1.). Auch sind $\frac{1}{\beta}P$, $\frac{1}{\beta}P'$, $\frac{1}{\beta}R'$ im Gleichgewichte. Denn wäre dies nicht der Fall, so könnten auch $\beta\left(\frac{1}{\beta}P\right)$, $\beta\left(\frac{1}{\beta}P'\right)$, $\beta\left(\frac{1}{\beta}R'\right)$, d. i. P, P', R', nicht im Gleichgewichte seyn, (a. a. O.), wie vorausgesetzt wurde. Folglich sind auch $\alpha\left(\frac{1}{\beta}P\right)$, $\alpha\left(\frac{1}{\beta}P'\right)$ und $\alpha\left(\frac{1}{\beta}R'\right)$, d. i. $\frac{\alpha}{\beta}P$, $\frac{\alpha}{\beta}P'$ und $\frac{\alpha}{\beta}R'$, nach denselben Richtungen wie P, P' und R' im Gleichgewichte, (a. a. O.). Wären nun nach denselben Richtungen drey andere Kräfte Q, Q' und $\mathfrak{R}'$ im Gleichgewichte, und es ist $\mathfrak{R}' = \frac{\alpha}{\beta}R'$, (völlig genau, im Falle der Commensurabilität; näherungsweise, aber ohne allen merklichen Fehler, im Falle der Incommensurabilität,) so ist $Q = \frac{\alpha}{\beta}P$, $Q' = \frac{\alpha}{\beta}P'$, weil nach dem Obigen $\frac{\alpha}{\beta}P$, $\frac{\alpha}{\beta}P'$ und $\frac{\alpha}{\beta}R'$ nach denselben Richtungen im Gleichgewichte sind.*)

---

*) Um dies völlig deutlich einzusehen, ist folgender Satz, welcher auch sonst seinen Nutzen haben kann, zu beweisen:

Sind an dem Punkte A (Fig. 5.) nach den Richtungen Ap, Aq, Ar drey Kräfte p, q, r im Gleichgewichte; so können nach denselben Richtungen mit der Kraft r nicht zwey andere Kräfte p' und q' im Gleichgewichte seyn.

Könnte dies nämlich der Fall seyn, so bringe man die Kräfte p, q, r, p', q' an dem Punkte A so an, wie Fig. 5. zeigt, so sind die sechs Kräfte im Gleichgewichte. Da die Kräfte r sich aufheben, so sind p, q, p', q' für sich im Gleichgewichte. Wäre nun p nicht $= p'$, so kann offenbar auch q nicht $= q'$ seyn, weil, wenn $q = q'$ wäre, p und p' für sich im Gleichgewichte seyn müßten, woraus $p = p'$, gegen die Voraussetzung, folgen würde. — Sey nun 1) $p > p'$, und

Es ist also

$$\frac{Q}{P} = \frac{Q'}{P'} = \frac{\mathfrak{R}'}{R'} = \frac{\alpha}{\beta}, \text{ oder}$$

$$\frac{P}{R'} = \frac{Q}{\mathfrak{R}'}, \quad \frac{P'}{R'} = \frac{Q'}{\mathfrak{R}'}, \text{ oder}$$

$$\frac{P}{R} = \frac{Q}{\mathfrak{R}}, \quad \frac{P'}{R} = \frac{Q'}{\mathfrak{R}}, \text{ *)}$$

---

a) $q > q'$. Die beiden größern Kräfte p und q würden den Punkt A offenbar nach ihrer Seite pq hin bewegen, und es wäre kein Gleichgewicht. b) $q < q'$. Die beiden größern Kräfte p und q' würden den Punkt A nach der Seite pq' bewegen, und es wäre kein Gleichgewicht. — 2) $p < p'$, und a) $q > q'$. Die beiden größern Kräfte p' und q würden den Punkt A nach der Seite $p'q$ bewegen. b) $q < q'$. Die beiden größern Kräfte p' und q' würden A nach der Seite $p'q'$ hin bewegen. Es muß also $p = p'$ seyn, woraus unmittelbar folgt, daß auch $q = q'$ ist. Der Satz ist also bewiesen.

*) Im Falle der Incommensurabilität kann man auch folgendes strengere Verfahren anwenden. Seyen nämlich ρ und ρ' zwey nach der Richtung von R' und $\mathfrak{R}'$ gerichtete Kräfte, welche mit der Kraft R' commensurabel sind, so daß

$$\rho : R' = \alpha : \beta, \quad \rho' : R' = \alpha + 1 : \beta,$$

und $\rho < \mathfrak{R}'$, $\rho' > \mathfrak{R}'$ ist, wo aber nach bekannten Methoden die Kräfte ρ und ρ' einander so nahe gebracht werden können, als man will, so daß $\rho' - \rho$ kleiner als jede gegebene Größe werden kann. Die Seitenkräfte von ρ und ρ' nach den Richtungen der Kräfte P, P' und Q, Q' seyen respectiv: π, λ und π', λ', so ist nach dem im Texte Bewiesenen:

$$\frac{P}{R'} = \frac{\pi}{\rho} = \frac{\pi'}{\rho'}, \quad \frac{P'}{R'} = \frac{\lambda}{\rho} = \frac{\lambda'}{\rho'}.$$

Wäre nun

1) $\dfrac{P}{R'} = \dfrac{Q}{\mathfrak{R}'} + \delta$, so mache man $\pi' - \pi < \mathfrak{R}'\delta$, welches möglich ist, da man die Kräfte ρ und ρ' einander beliebig nahe bringen kann, und nach der vorhergehenden Anmerkung jede Kraft nur auf eine Art in zwey Seitenkräfte nach bestimmten Richtungen zerlegt werden kann. Also

$$\frac{\pi'}{\mathfrak{R}'} - \frac{\pi}{\mathfrak{R}'} < \delta, \quad \frac{\pi'}{\mathfrak{R}'} < \frac{\pi}{\mathfrak{R}'} + \delta.$$

und der Bruch $\frac{P}{R}$ oder $\frac{P'}{R}$ ist folglich eine constante Größe und hängt demnach bloß von x ab, so daß also

$$\frac{P}{R} = \varphi x, \quad \frac{P'}{R} = \psi x, \text{ oder}$$
$$P = R \,.\, \varphi x, \quad P' = R \,.\, \psi x, \text{ oder}$$
$$P = R \,.\, \varphi x, \quad P' = R \,.\, \varphi(\tfrac{1}{2}\pi - x)$$

ist, wodurch die Form der Function $f(R, x)$ und $f'(R, x)$ näher bestimmt wird.

Aber $\rho' > \mathfrak{R}'$, und folglich $\frac{\pi'}{\rho'} < \frac{\pi'}{\mathfrak{R}'}$, und demnach auch

$$\frac{P}{R'} < \frac{\pi}{\mathfrak{R}'} + \delta, \text{ da } \frac{\pi'}{\rho'} = \frac{P}{R'}.$$

Da nun $\rho < \mathfrak{R}'$ ist, so ist offenbar auch $\pi < Q$, und folglich $\frac{\pi}{\mathfrak{R}'} < \frac{Q}{\mathfrak{R}'}$. Also um so mehr $\frac{P}{R'} < \frac{Q}{\mathfrak{R}'} + \delta$, gegen die Voraussetzung.

2) Wäre $\frac{P}{R'} = \frac{Q}{\mathfrak{R}'} - \delta$, so mache man wieder $\pi' - \pi < \mathfrak{R}'\delta$. Also $\frac{\pi'}{\mathfrak{R}'} - \frac{\pi}{\mathfrak{R}'} < \delta$, oder $\frac{\pi}{\mathfrak{R}'} > \frac{\pi'}{\mathfrak{R}'} - \delta$. Aber $\rho < \mathfrak{R}'$. Also $\frac{\pi}{\rho} > \frac{\pi}{\mathfrak{R}'}$, d. i. $\frac{P}{R'} > \frac{\pi}{\mathfrak{R}'}$, weil $\frac{\pi}{\rho} = \frac{P}{R'}$ ist, und folglich um so mehr $\frac{P}{R'} > \frac{\pi'}{\mathfrak{R}'} - \delta$. Aber $\pi' > Q$, weil $\rho' > \mathfrak{R}'$ ist. Also $\frac{\pi'}{\mathfrak{R}'} > \frac{Q}{\mathfrak{R}'}$, und folglich um so mehr $\frac{P}{R'} > \frac{Q}{\mathfrak{R}'} - \delta$, wieder gegen die Voraussetzung.

Es kann also $\frac{P}{R'}$ weder größer noch kleiner als $\frac{Q}{\mathfrak{R}'}$ seyn, so daß also $\frac{P}{R'} = \frac{Q}{\mathfrak{R}'}$ seyn muß. Ganz eben so zeigt man, daß $\frac{P'}{R'}$ auch im Falle der Incommensurabilität $= \frac{Q'}{\mathfrak{R}'}$ seyn muß.

Um nun R zu bestimmen, denke man sich in Fig. 6. auf AR durch A das Perpendikel pp' errichtet, und P nach Ap und AR in die Kräfte p, q, so wie P' nach Ap' und AR in die Kräfte p', q' zerfällt; so ist nach dem eben Bewiesenen:

$$p = P \cdot \psi x = P \cdot \frac{P'}{R} = \frac{PP'}{R},$$

$$q = P \cdot \varphi x = P \cdot \frac{P}{R} = \frac{P^2}{R},$$

$$p' = P' \cdot \varphi x = P' \cdot \frac{P}{R} = \frac{PP'}{R},$$

da $\angle\, p'AR = \angle\, PAP = 90°$, und folglich, wenn man auf beiden Seiten $\angle\, RAP'$ abzieht, $p'AP' = PAR = x$ ist;

$$q' = P' \cdot \psi x = P' \cdot \frac{P'}{R} = \frac{P'^2}{R}.$$

Die Kräfte p, p' sind also gleich und einander gerade entgegengesetzt, und heben sich folglich auf, so daß als Resultirende aus p, q, p', q', oder aus P und P', die Kraft $q + q'$ bleibt. Es ist also

$$R = q + q' = \frac{P^2}{R} + \frac{P'^2}{R} = \frac{P^2 + P'^2}{R},$$

$$R^2 = P^2 + P'^2, \quad R = \sqrt{P^2 + P'^2}.$$

Die Größe der Resultirenden wird also durch die Diagonale des mit den geometrischen Darstellungen der Kräfte P und P' construirten Rechtecks dargestellt, welches aus dem Vorhergehenden und dem pythagoräischen Lehrsatze unmittelbar folgt.

§. 9.

2) Richtung der Resultirenden. Durch folgende Betrachtungen kann man verschiedene Gleichungen zwischen φx und ψx finden.

Da $P = R \cdot \varphi x$ und $P' = R \cdot \psi x$ ist; so ist

$$P^2 = R^2 \cdot (\varphi x)^2, \quad P'^2 = R^2 \cdot (\psi x)^2,$$

$$P^2 + P'^2 = R^2 \cdot (\varphi x)^2 + R^2 \cdot (\psi x)^2 = R^2 \cdot [(\varphi x)^2 + (\psi x)^2].$$

Aber $P^2 + P'^2 = R^2$ (§. 8.). Also

$$(\varphi x)^2 + (\psi x)^2 = 1.$$

Auch ist nach §. 8.:

$$P' = R \, . \, \psi x = R \, . \, \varphi (\tfrac{1}{2}\pi - x), \text{ und}$$

$$P = R \, . \, \varphi x = R \, . \, \psi (\tfrac{1}{2}\pi - x). \quad \text{Also}$$

$$\psi x = \varphi (\tfrac{1}{2}\pi - x), \quad \varphi x = \psi (\tfrac{1}{2}\pi - x).$$

Um noch andere Gleichungen zwischen φx und ψx zu finden, lasse man in Fig. 7. P um p wachsen, und errichte auf AR durch A ein Perpendikel; so wird die Richtung der aus $P + p$ und P' Resultirenden weiter nach AP hin fallen, also der Winkel x um einen Winkel $\mathfrak{R}AR = y$ abnehmen, und der Winkel $\frac{1}{2}\pi - x$ um eben so viel wachsen. Das Increment p denke man sich nach AR und dem Perpendikel Ap'' in die Kräfte p' und p'' zerlegt. Die Resultirende von p, P, P' sey $\mathfrak{R}$; die Resultirende von P, P' ist R: also $\mathfrak{R}$ die Resultirende von p und R. p ist aber die Resultirende von p' und p''; also $\mathfrak{R}$ die Resultirende von p', p'', R, d. i. von $p' + R$ und p''. Hieraus und aus §. 8. folgt, daß

$$p' + R = \mathfrak{R} \, . \, \varphi y, \quad p'' = \mathfrak{R} \, . \, \psi y. \quad \text{Auch}$$

$$p' = p \, . \, \varphi x, \quad p'' = p \, . \, \psi x;$$

$$P + p = \mathfrak{R} \, . \, \varphi (x - y), \quad P = R \, . \, \varphi x.$$

Also

$$p' = \mathfrak{R} \, . \, \varphi y - R = p \, . \, \varphi x,$$

$$p'' = p \, . \, \psi x = \mathfrak{R} \, . \, \psi y.$$

$$\mathfrak{R} \, . \, \varphi x \, . \, \varphi y - R \, . \, \varphi x = p \, . \, (\varphi x)^2,$$

$$\mathfrak{R} \, . \, \psi x \, . \, \psi y = p \, . \, (\psi x)^2,$$

$$\mathfrak{R} \, . \, \varphi x \, . \, \varphi y + \mathfrak{R} \, . \, \psi x \, . \, \psi y - R \, . \, \varphi x = p,$$

weil $(\varphi x)^2 + (\psi x)^2 = 1$ ist.

$$\mathfrak{R} \, . \, \varphi x \, . \, \varphi y + \mathfrak{R} \, . \, \psi x \, . \, \psi y = p + R \, . \, \varphi x$$

$$= p + P = \mathfrak{R} \, . \, \varphi (x - y).$$

$$\varphi (x - y) = \varphi x \, . \, \varphi y + \psi x \, . \, \psi y,$$

wenn man mit $\mathfrak{R}$ auf beiden Seiten dividirt.

Auch ist

$$P' = \mathfrak{R} \, . \, \psi (x - y) = R \, . \, \psi x$$

$$= \mathfrak{R} \, . \, \varphi y \, . \, \psi x - p' \, . \, \psi x$$

$$= \mathfrak{R} \, . \, \varphi y \, . \, \psi x - p \, . \, \varphi x \, . \, \psi x$$

$$= \mathfrak{R} \cdot \phi y \cdot \psi x - \frac{\mathfrak{R} \cdot \psi y}{\psi x} \cdot \phi x \cdot \psi x$$
$$= \mathfrak{R} \cdot \phi y \cdot \psi x - \mathfrak{R} \cdot \psi y \cdot \phi x.$$

Also

$$\psi(x-y) = \phi y \cdot \psi x - \psi y \cdot \phi x.$$

Es ist also

$$\phi(x-y) = \phi x \cdot \phi y + \psi x \cdot \psi y, \text{ und}$$
$$\psi(x-y) = \psi x \cdot \phi y - \phi x \cdot \psi y.$$

Dies gilt für jedes x. Also auch

$$\phi(\tfrac{1}{2}\pi - x - y) = \phi(\tfrac{1}{2}\pi - x) \cdot \phi y + \psi(\tfrac{1}{2}\pi - x) \cdot \psi y,$$
$$\psi(\tfrac{1}{2}\pi - x - y) = \psi(\tfrac{1}{2}\pi - x) \cdot \phi y - \phi(\tfrac{1}{2}\pi - x) \cdot \psi y.$$

Nach dem Obigen ist aber

$$\phi x = \psi(\tfrac{1}{2}\pi - x), \quad \psi x = \phi(\tfrac{1}{2}\pi - x).$$

Also auch

$$\phi(\tfrac{1}{2}\pi - x - y) = \phi[\tfrac{1}{2}\pi - (x+y)] = \psi(x+y),$$
$$\psi(\tfrac{1}{2}\pi - x - y) = \psi[\tfrac{1}{2}\pi - (x+y)] = \phi(x+y),$$

und folglich

$$\psi(x+y) = \psi x \cdot \phi y + \phi x \cdot \psi y,$$
$$\phi(x+y) = \phi x \cdot \phi y - \psi x \cdot \psi y.$$

Für $x = y$ geben die obigen Gleichungen

$$\phi 0 = \phi x \cdot \phi x + \psi x \cdot \psi x = (\phi x)^2 + (\psi x)^2 = 1,$$
$$\psi 0 = \psi x \cdot \phi x - \phi x \cdot \psi x = 0,$$
$$\phi 2x = \phi x \cdot \phi x - \psi x \cdot \psi x = (\phi x)^2 - (\psi x)^2$$
$$= (\phi x)^2 - [1 - (\phi x)^2]$$
$$= (\phi x)^2 - 1 + (\phi x)^2, \text{ d. i.}$$
$$\phi 2x = 2 \cdot (\phi x)^2 - 1.$$

Für $x = 0$ erhält man

$$\phi(-y) = \phi 0 \cdot \phi y + \psi 0 \cdot \psi y = \phi y,$$

oder $\phi(-x) = \phi x$.

Um nun ϕx, welches wir aus der Gleichung $\phi 2x = 2 \cdot (\phi x)^2 - 1$ bestimmen wollen, durch eine Reihe auszudrücken, setze man

$$\phi x = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots, \text{ *)}$$

*) Daß diese Annahme verstattet ist, folgt auf ähnliche Art wie in der Anmerkung zu §. 5. aus der Vergleichung der allgemeinen Gleichung $\phi 2x = 2 \cdot (\phi x)^2 - 1$ mit der bekannten Formel $\cos 2x = 2 \cdot \cos x^2 - 1$.

so ist

$$\varphi(-x) = A - Bx + Cx^2 - Dx^3 + Ex^4 - \ldots .$$

Also, weil $\varphi x = \varphi(-x)$ ist:

$$B = -B,\ D = -D,\ F = -F, \text{ u. s. w.,}$$

$$2B = 0,\ 2D = 0,\ 2F = 0, \text{ u. s. w.;}$$

$$B = D = F = \ldots = 0;$$

und demnach

$$\varphi x = A + Cx^2 + Ex^4 + Gx^6 + Ix^8 + \ldots$$

$$= A + \overset{1}{A}x^2 + \overset{2}{A}x^4 + \overset{3}{A}x^6 + \overset{4}{A}x^8 + \ldots,$$

$$\varphi 2x = A + 2^2.\overset{1}{A}x^2 + 2^4.\overset{2}{A}x^4 + 2^6.\overset{3}{A}x^6 + 2^8.\overset{4}{A}x^8 + \ldots,$$

$$\varphi 0 = 1; \text{ also } A = 1.$$

$$2.(\varphi x)^2 = \varphi 2x + 1. \text{ Also}$$

$$2 + 2^2.\overset{1}{A}x^2 + 2^4.\overset{2}{A}x^4 + 2^6.\overset{3}{A}x^6 + \ldots =$$

$$= 2.\left\{\begin{array}{l|l|l|l}
AA + A\overset{1}{A} & x^2 + A\overset{2}{A} & x^4 + A\overset{3}{A} & x^6 + \ldots \\
 + \overset{1}{A}A & + \overset{1}{A}\overset{1}{A} & + \overset{1}{A}\overset{2}{A} & + \ldots \\
 & + \overset{2}{A}A & + \overset{2}{A}\overset{1}{A} & + \ldots \\
 & & + \overset{3}{A}A & + \ldots
\end{array}\right\}$$

Hieraus ergeben sich folgende Gleichungen zur Bestimmung der Coefficienten, wenn man sich die Gleichung auf beiden Seiten durch 2 dividirt denkt:

1) $2\overset{1}{A} = A\overset{1}{A} + \overset{1}{A}A = \overset{1}{A} + \overset{1}{A} = 2\overset{1}{A}$, woraus sich keine Bestimmung von $\overset{1}{A}$ ergibt.

2) $2^3.\overset{2}{A} = A\overset{2}{A} + \overset{1}{A}\overset{1}{A} + \overset{2}{A}A$

$$= 2\overset{2}{A} + \overset{1}{A}{}^2,$$

$$(2^3 - 2)\overset{2}{A} = 6\overset{2}{A} = 1.2.3.\overset{2}{A} = \overset{1}{A}{}^2,$$

$$1.2.3.4.\overset{2}{A} = (2\overset{1}{A})^2,\quad \overset{2}{A} = \frac{(2\overset{1}{A})^2}{1.2.3.4}.$$

3) $2^5.\overset{3}{A} = A\overset{3}{A} + \overset{1}{A}\overset{2}{A} + \overset{2}{A}\overset{1}{A} + \overset{3}{A}A$

$$= 2\overset{3}{A} + 2\overset{1}{A}\overset{2}{A},$$

$$(2^5 - 2)\overset{3}{A} = 30\overset{3}{A} = 5 \cdot 6 \cdot \overset{3}{A} = \frac{(2\overset{1}{A})^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}.$$

Also $\overset{3}{A} = \dfrac{(2\overset{1}{A})^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}$.

4) Auf diese Art könnte man weiter gehen; das Gesetz fällt aber schon in die Augen, indem offenbar

$$\overset{n}{A} = \frac{(2\overset{1}{A})^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 2n}$$

seyn wird.

Um dieses Gesetz allgemein zu beweisen, nehme man an, daß es bis $\overset{n}{A}$ gelte. Nun ist aus der Gleichung:

$$2^{2n+1} \cdot \overset{n+1}{A} = A\overset{n+1}{A} + \overset{1}{A}\overset{n}{A} + \overset{2}{A}\overset{n-1}{A} + \ldots + \overset{n}{A}\overset{1}{A} + \overset{n+1}{A}A$$

$$= 2\overset{n+1}{A} + \overset{1}{A}\overset{n}{A} + \overset{2}{A}\overset{n-1}{A} + \ldots + \overset{n}{A}\overset{1}{A},$$

$$(2^{2n+1} - 2)\overset{n+1}{A} = \overset{1}{A}\overset{n}{A} + \overset{2}{A}\overset{n-1}{A} + \ldots + \overset{n}{A}\overset{1}{A}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{2\overset{1}{A}}{1 \cdot 2} \cdot \dfrac{(2\overset{1}{A})^n}{1 \ldots 2n} + \dfrac{(2\overset{1}{A})^2}{1 \ldots 4} \cdot \dfrac{(2\overset{1}{A})^{n-1}}{1 \ldots (2n-2)} + \ldots \\ \ldots + \dfrac{(2\overset{1}{A})^n}{1 \ldots 2n} \cdot \dfrac{2\overset{1}{A}}{1 \cdot 2} \end{array} \right.$$

$$= (2\overset{1}{A})^{n+1} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{1 \cdot 2} \cdot \dfrac{1}{1 \ldots 2n} + \dfrac{1}{1 \ldots 4} \cdot \dfrac{1}{1 \ldots (2n-2)} + \ldots \\ \ldots + \dfrac{1}{1 \ldots 2n} \cdot \dfrac{1}{1 \cdot 2} \end{array} \right\}$$

$$= \frac{(2\overset{1}{A})^{n+1}}{1 \ldots (2n+2)} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{(2n+2)(2n+1)}{1 \cdot 2} + \dfrac{(2n+2) \ldots (2n-1)}{1 \ldots 4} + \ldots \\ \ldots + \dfrac{(2n+2) \ldots 3}{1 \ldots 2n} \end{array} \right\}$$

$$= \frac{(2\overset{1}{A})^{n+1}}{1 \ldots (2n+2)} \cdot \left\{ {}_{2n+2}\overset{2}{\mathfrak{B}} + {}_{2n+2}\overset{4}{\mathfrak{B}} + \ldots + {}_{2n+2}\overset{2n}{\mathfrak{B}} \right\}$$

$$=\frac{(2\overset{1}{A})^{n+1}}{1\,.\,.\,(2n+2)}\cdot\left\{{}^{2n+1}\overset{1}{\mathfrak{B}}+{}^{2n+1}\overset{2}{\mathfrak{B}}+{}^{2n+1}\overset{3}{\mathfrak{B}}+{}^{2n+1}\overset{4}{\mathfrak{B}}+\,.\,.+{}^{2n+1}\overset{2n}{\mathfrak{B}}\right\}$$

$$=\frac{(2\overset{1}{A})^{n+1}}{1\,.\,.\,(2n+2)}\cdot\left\{(1+1)^{2n+1}-2\right\}=\frac{(2\overset{1}{A})^{n+1}}{1\,.\,.\,(2n+2)}\cdot(2^{2n+1}-2).$$

Also

$$\overset{n+1}{A}=\frac{(2\overset{1}{A})^{n+1}}{1\,.\,.\,(2n+2)},$$

so daß also das bemerkte Gesetz für $\overset{n+1}{A}$ gilt, wenn es bis $\overset{n}{A}$ gilt, und demnach allgemein ist, weil es vorher bis $\overset{3}{A}$ durch Induction bewiesen.

Es ist folglich

$$\varphi x=1+\frac{2\overset{1}{A}}{1\,.\,2}x^2+\frac{(2\overset{1}{A})^2}{1\,.\,.\,4}x^4+\frac{(2\overset{1}{A})^3}{1\,.\,.\,6}x^6+\,.\,.\,.\,.$$

Setzt man nun $\sqrt{(-2\overset{1}{A})}=a$; so ist $-2\overset{1}{A}=a^2$, $(2\overset{1}{A})^2=a^4$, $-(2\overset{1}{A})^3=a^6$, $(2\overset{1}{A})^4=a^8$, u. s. w. Also

$$\varphi x=1-\frac{a^2}{1\,.\,2}x^2+\frac{a^4}{1\,.\,.\,4}x^4-\frac{a^6}{1\,.\,.\,6}x^6+\,.\,.\,.$$

$$=1-\frac{(ax)^2}{1\,.\,2}+\frac{(ax)^4}{1\,.\,.\,4}-\frac{(ax)^6}{1\,.\,.\,6}+\,.\,.\,.,$$

d. i. $\varphi x=\operatorname{Cos} ax$, (M. s. meine mathematischen Abhandlungen, Samml. 1. S. 20. ff.), und folglich, weil $(\varphi x)^2+(\psi x)^2=1$, und auch $(\operatorname{Cos} ax)^2+(\operatorname{Sin} ax)^2=1$ ist: $\psi x=\operatorname{Sin} ax$, wo nun bloß noch die constante Größe a zu bestimmen ist.

Es ist

$$P=R\,.\operatorname{Cos} ax,\ P'=R\,.\operatorname{Sin} ax.$$

Negativ kann a nicht seyn, weil sonst $\operatorname{Sin} ax$, und folglich auch $R\,.\operatorname{Sin} ax$, d. i. P', negativ würde, welches nicht der Fall seyn kann, weil die Kräfte P und P' immer positiv sind, indem hier keine Entgegensetzung statt finden kann. Nun ist klar, daß $P=0$ und $P'=R$ seyn muß, wenn wir $x=90^\circ=\frac{1}{2}\pi$ setzen. Also $0=R\,.\operatorname{Cos}(a\,.\,90^\circ)$, oder $\operatorname{Cos}(a\,.\,90^\circ)$

$= 0$, und folglich $a = 2n + 1$, (s. Seite 27.), für jedes positive ganze n. Wäre nun $n > 0$, so sey ein Mahl $x = \frac{90^\circ}{2n+1}$; also $P = R \,.\, \mathrm{Cos}\left[(2n + 1) \,.\, \frac{90^\circ}{2n+1}\right] = R \,.\, \mathrm{Cos}\, 90^\circ = 0$, welches nicht möglich ist, da $2n + 1 > 1$, und folglich $\frac{90^\circ}{2n+1}$, d. i. $x < 90^\circ$, ist. Es muß also $n = 0$, und folglich $a = 1$ seyn, so daß also $P = R \,.\, \mathrm{Cos}\, x$ und $P' = R \,.\, \mathrm{Sin}\, x$ ist. Also

$$\mathrm{Cos}\, x = \frac{P}{R},\ \mathrm{Sin}\, x = \frac{P'}{R}.$$

Sind nun AP und AP' (Fig. 8.) die geometrischen Darstellungen der Kräfte P und P'; so ist, wenn man das Rechteck $APRP'$ beschreibt und die Diagonale AR zieht, AR die geometrische Darstellung der Größe der Resultirenden R, (§. 8.). Also

$$\mathrm{Cos}\, PAR = \frac{AP}{AR} = \frac{P}{R} = \mathrm{Cos}\, x,$$

$$\mathrm{Sin}\, PAR = \frac{AP'}{AR} = \frac{P'}{R} = \mathrm{Sin}\, x,$$

und folglich $\angle PAR = x$, so daß also die Diagonale AR auch die Richtung der Kraft R darstellt, und demnach die geometrische Darstellung dieser Kraft ist.

§. 10.

Zweyter Fall. Wenn die Richtungen der Kräfte P und P' keinen rechten Winkel einschließen,

kann man den Satz von dem Parallelogramm der Kräfte wie in §. 7. 2. mit Hülfe von §. 9. beweisen.

Die hier gegebene zweyte Auflösung der Aufgabe in §. 3., welche zugleich ein Beweis des Satzes von dem Parallelogramm der Kräfte ist, gehört dem Wesentlichen nach dem berühmten Laplace. Jedoch unterscheidet sich die hier gegebene Darstellung von der seinigen in mehrern wesentlichen

Stücken. Laplace bedient sich nicht bloß der Differenzialrechnung, sondern auch einer Integration. Unsre Darstellung beruht bloß auf der niedern Analysis. Immer wird der geübtere Schüler aber auch die Darstellung des großen Meisters, aus dessen Feder nur Vortreffliches fließen kann, mit großem Nutzen studiren. (M. s. Traité de Mécanique céleste, par Laplace, Tom. I. §. 1. sqq.; oder: Mechanik des Himmels, von Laplace, aus dem Französischen von Burckhardt, erster Theil, Berlin 1800, 4., S. 1. — 7.)

Wie sich die beiden gegebenen Auflösungen der Aufgabe in §. 3. von einander unterscheiden, fällt leicht in die Augen. Die erste bestimmt zuerst Richtung und Größe der Resultirenden für gleiche Seitenkräfte, geht dann zu ungleichen Seitenkräften, die unter einem rechten Winkel wirken, über, und betrachtet dann den allgemeinsten Fall. Die zweyte aber bestimmt zuerst die Größe und dann die Richtung der Resultirenden für zwey ungleiche, unter einem rechten Winkel wirkende Seitenkräfte, und betrachtet dann sogleich den allgemeinsten Fall auf dieselbe Art wie bey der ersten Auflösung.

Dritte Auflösung.

§. 11.

Diese Auflösung, welche eigentlich als ein synthetischer Beweis des in §. 7. aufgestellten Satzes von dem Parallelogramm der Kräfte anzusehen, und zuerst von Duchayla in der Correspondance sur l'école polytechnique, Num. 4., gegeben worden ist, wird von mehrern französischen Schriftstellern in ihren Lehrbüchern der Statik mitgetheilt. (M. s. z. B. Poisson Traité de Mécanique, Tom. I. p. 473. — Garnier Leçons de Statique, p. 8. — Francoeur Elémens de Statique, p. 9.) Wir nehmen sie vorzüglich deßhalb in dieses Lehrbuch auf, weil sie bloß auf ganz elementaren Principien beruht, wogegen die beiden vorhergehenden Darstellungen höhere Sätze voraussetzten. Die Pfeile in den hierher gehörigen Figuren (Fig. 9. — 11.) bezeichnen die Gegen-den, nach welchen die Kräfte, bey deren Bezeichnungen sie in den Figuren stehen, hin wirken. Diese Bemerkung wird auch späterhin noch einige Mahl ihre Anwendung finden, weßhalb wir sie an dieser Stelle ein für alle Mahl gemacht haben wollen.

§. 12.

Zuerst ist folgender Satz zu beweisen:

Wenn der Satz von dem Parallelogramm der Kräfte in Beziehung auf die Richtung der Resultirenden für die Kräfte P, p und P, q bey demselben Richtungswinkel gilt; so gilt er bey dem nämlichen Richtungswinkel auch für die Kräfte P und $p+q$.

Um dies zu beweisen, nehme man, wenn $\angle BAC = \angle DCF$ (Fig. 9.) der Richtungswinkel der gegebenen Kräfte ist, von den Punkten A und C an die Linien AB, AC und CF den gegebenen Kräften P, p und q gemäß, und construire die Parallelogramme $ABCD$ und $CDEF$, so daß also auch $ABCFED$ ein Parallelogramm wird, wie aus geometrischen Gründen sehr leicht erhellet. Nach der Voraussetzung sind also die Diagonalen AD und CE die Richtungen der aus P, p und aus P, q resultirenden Kräfte R, r, und es sind folglich an den Punkten A und C die sechs nach AB, AC, AG, CD, CF, CI wirkenden Kräfte P, p, R, P, q, r unter einander im Gleichgewichte. Fügt man zu diesen sechs Kräften noch die drey an dem Punkte D nach DB, DC und DH wirkenden Kräfte p, P, R hinzu; so werden, weil diese drey Kräfte nach der Voraussetzung für sich im Gleichgewichte sind, an den Punkten A, C, D nach den Richtungen AB, AC, AG, CD, CF, CI, DB, DC, DH die neun Kräfte P, p, R, P, q, r, p, P, R unter sich im Gleichgewichte seyn. Die gleichen Kräfte P an C und D nach CD und DC, so wie auch die gleichen Kräfte R an D und A nach DH und AG, heben sich aber offenbar auf, und können demnach dem Gleichgewichte unbeschadet weggelassen werden, so daß also an den Punkten A, C, D die fünf Kräfte

P, p, q, r, p nach AB, AC, CF, CI, DB für sich, im Gleichgewichte seyn werden. Nach Einl. 7. 2. kann man aber dem Gleichgewichte des ganzen Systems unbeschadet die Kräfte q (an C nach CF), r (an C nach CI) und p (an D nach DB) in die Punkte A (nach AF), E (nach EI) und E (nach EB) versetzen, so daß also jetzt noch die vier Kräfte P an A nach AB, $p+q$ an A nach AF, r an E nach EI und p an E nach EB unter einander im Gleichgewichte seyn werden. Hieraus erhellet ganz offenbar, daß die Richtung der aus P und $p+q$ (in A nach AB und AF) Resultirenden durch den Punkt E hindurchgehen muß. Sie geht aber offenbar auch durch A, und wird also durch die Diagonale des Parallelogramms $AFEB$, welches mit den geometrischen Darstellungen AB und AF der Kräfte P und $p+q$ construirt worden ist, dargestellt, so daß folglich der obige Satz bewiesen ist.

§. 13.

Aus dem in dem vorhergehenden Paragraphen bewiesenen Satze läßt sich der Satz von dem Parallelogramm der Kräfte, was zunächst die Richtung der Resultirenden betrifft, für jede zwey unter einem willkührlichen Winkel auf einen Punkt wirkende commensurable Seitenkräfte P und P' beweisen.

Sey nämlich p das gemeinschaftliche Maaß dieser beiden Kräfte, und $P = mp$, $P' = np$. Nach §. 4. 1. gilt der Satz von dem Parallelogramm der Kräfte für den von den Kräften P und P' eingeschlossenen Richtungswinkel, was nämlich die Richtung der Resultirenden betrifft, für die beiden gleichen Kräfte p, p. Also für p, p; p, p, und folglich nach dem vorhergehenden Paragraphen für $p, 2p$. Also für p, p; $p, 2p$, und demnach aus demselben Grunde auch für $p, 3p$. Also für p, p; $p, 3p$, und demnach wieder auch für $p, 4p$. Also auf dieselbe Art für

$$p,\ 5p;\ p,\ 6p;\ p,\ 7p;\ \text{u. s. w.};\ p,\ np.$$

Der Satz von dem Parallelogramm der Kräfte in Beziehung auf die Richtung der Resultirenden gilt also für np, p; np, p. Also nach dem Satze in §. 12. für $np, 2p$. Also für

np, $2p$; np, p, und folglich aus demselben Grunde für np, $3p$. Also wieder für np, $3p$; np, p, d. i., nach §. 12., auch für np, $4p$, und auf dieselbe Art für

np, $5p$; np, $6p$; np, $7p$; u. s. w.; np, mp,

d. i. für die Kräfte P', P oder P, P' für ihren Richtungswinkel.

In dem Falle, wenn die beiden Kräfte P und P' incommensurabel sind, verfährt Duchayla auf folgende Art. — Man nehme an, AP und AP' (Fig. 10.) seyen die geometrischen Darstellungen der Kräfte P, P', und construire das Parallelogramm $APP'R$. Gesetzt nun, die Diagonale AR dieses Parallelogramms wäre nicht die Richtung der aus P und P' Resultirenden, so sey es die Linie AS, welche $P'R$ in dem Punkte S schneide. Durch S ziehe man ST parallel mit RP oder AP', und denke sich AP' in eine gewisse Anzahl gleicher Theile, deren jeder kleiner als PT sey, eingetheilt, welches offenbar immer möglich ist. (M. vergl. indeß auch Euclidis Elementa, lib. X. prop. I.) *) Trägt man nun einen dieser Theile, so oft es angeht, auf AP auf, so wird augenscheinlich einer der Theilpunkte, welchen wir U nennen wollen, zwischen T und P fallen, so daß man jetzt zwey commensurable Kräfte AP' und AU hat, deren Resultirende, was ihre Richtung anbetrifft, durch die Diagonale AV des Parallelogramms $AP'VU$ dargestellt wird, nach dem zu Anfange dieses Paragraphen Bewiesenen. AS ist also die Richtung der Resultirenden von AP' und AP, und AV die Richtung der Resultirenden von AP' und AU. Hierin wird man aber leicht eine Ungereimtheit bemerken. Denn AP' bleibt in beiden Fällen sich gleich, AP ist aber $> AU$, und es muß also die Richtung der aus AP' und AP Resultirenden augenscheinlich mehr nach AP hin geneigt seyn, als die Richtung der aus AP' und AU Resultirenden. Hiervon findet aber, wie wir gesehen haben, gerade das Gegentheil statt, und die Richtung der aus AP und AP' Resul-

*) Bey Citaten aus dem Euclides bediene ich mich immer der Barrow'schen lateinischen Uebersetzung, Cantabrigiae 1655. 12.

tirenden kann also nicht in die Lage AS, (so daß sie RP' in einem Punkte über R schneidet,) fallen. Auf dieselbe Art zeigt man, daß die Richtung dieser Resultirenden auch nicht die Linie PR in einem Punkte wie S' schneiden kann, woraus also folgt, daß sie durch den Punkt R gehen muß, und folglich auch in dem Falle der Incommensurabilität durch die Diagonale AR des Parallelogramms $APRP'$ dargestellt wird.

§. 14.

In Beziehung auf die Größe der Resultirenden führt Duchayla den Beweis auf folgende Art. — AB und AC (Fig. 11.) seyen die geometrischen Darstellungen der Kräfte P und P'; so ist nach §. 13. die Diagonale AD des Parallelogramms $ABCD$ die Richtung der aus ihnen Resultirenden R. Daher sind die Kräfte $P = AB$, $P' = AC$ und R, nach AB, AC und AR, im Gleichgewichte. Also ist P nach AP die Aequipollente von P' nach AC und R nach AR, und folglich, wenn man AB nach E verlängert und $AE = AB = P$ macht, AE die geometrische Darstellung der aus P' nach AC und R nach AR Resultirenden. Zieht man nun CE und EF parallel mit AC, so ist $CEFA$ ein Parallelogramm, weil nach dem Obigen $AE = AB$, d. i. parallel und gleich CD, und folglich CE parallel mit AD oder FA ist. Nach §. 13. ist also AE die Richtung der aus AC und AF Resultirenden. AE war aber auch, wie wir so eben gesehen haben, die Richtung der aus AC und R Resultirenden. Also ist $AF = R$, weil, wenn $AF \gtrless R$ wäre, die Richtung der aus AC und AF Resultirenden sich offenbar mehr oder weniger nach AF hinneigen müßte, als die Richtung der aus AC und R Resultirenden. Da nun aber $AF = EC = AD$ ist, so ist R auch $= AD$, und folglich der Satz von dem Parallelogramm der Kräfte auch in Beziehung auf die Größe der Resultirenden bewiesen.

§. 15.

Eine Spur des durch die vorhergehenden drey Beweise nun, wie ich glaube, in völliges Licht gesetzten wichtigen Satzes von dem Parallelogramm der Kräfte kommt schon in den Werken des berühmten niederländischen Mathematikers Simon Stevin aus Brügge, (st. 1633,) welcher in Diensten des Prinzen Moritz von Nassau stand, vor. Der eigentliche Entdecker scheint aber der berühmte, allgemein bekannte, Galilei, (1592 bis 1642,) welchem die mechanischen Wissenschaften überhaupt so Vieles verdanken, zu seyn, obgleich auch er den ganzen Nutzen des wichtigen Theorems nicht gekannt haben mag. Dem berühmten französischen Mathematiker Pierre Varignon, (geb. zu Caen im Jahre 1654, gest. zu Paris im December 1722,) welcher sehr viel über die Mechanik überhaupt geschrieben hat, gebührt das Verdienst, die Wichtigkeit des Satzes als statisches Grundgesetz, um die Lehren der Statik auf dasselbe zu gründen, erkannt zu haben, obgleich bemerkt zu werden verdient, daß gleichzeitig mit Varignon der durch verschiedene Schriften bekannte Lamy ähnliche Gedanken gehabt und bekannt gemacht hat. Die hierher gehörigen Schriften dieser beiden Mathematiker sind:

Projet d'une nouvelle Mécanique, avec un examen de l'opinion de Monf. Borelli fur les propriétés des poids fuspendus par des cordes, par Varignon. Paris 1687. 4.

Diese Schrift ist als eine Vorläuferinn der folgenden ausführlichern, schon Einl. 5. angeführten, welche aber erst nach Varignon's Tode erschienen ist, zu betrachten.

Nouvelle Mécanique ou Statique, par Varignon. 2 Tomes. Paris 1725. 4.

Nouvelle Manière de démontrer les principaux theorémes des élémens de Méchanique etc., par Lamy. Paris 1687. 12.

Seit Varignon's Zeiten gründet man die Lehren der Statik in Frankreich fast allgemein auf das Parallelogramm der Kräfte. In Deutschland thut man dies noch nicht so allgemein, obgleich z. B. Eytelwein, nach ihm Brandes und einige Andere, den von den französischen Mathematikern eingeschlagenen Weg gleichfalls betreten haben.

Sehr viele Mathematiker haben sich bemüht, Beweise des Satzes von dem Parallelogramm der Kräfte aufzufinden. Man findet dessen Geschichte in folgenden zwey Schriften:

Demonstrationum compositionis virium expositio, de iisque judicium. Auctore J. H. Westphal. Gottingae 1817. 4.

Praecipuorum inde a Neutone conatuum, compositionem virium demonstrandi, recensio. Auctore C. Jacobi. Gottingae 1817. 4.

Diese beiden Schriften sind zwey Bearbeitungen einer von der göttingischen philosophischen Fakultät den Studirenden dasiger Universität vorgelegten Preisfragen, von denen erstere den Preis, letztere das Accessit erhielt.

Besonders ist noch zum Nachlesen zu empfehlen der von Eytelwein in seinem Handbuche der Statik fester Körper, Th. 1. S. 12. — 21., gegebene Beweis, und ein analytischer Beweis in den Annales de Mathématique, par Gergonne, Tom. XII. 1822, p. 261. (Démonstration analytique du parallélogramme des forces, par M. B. D. C.)

Den Satz durch Versuche zu bewahrheiten lehren z. B.

Physices elementa mathematica experimentis confirmata. Auctore G. J. 's Gravesande. Leid. 2 Tom. 1714. 4. 1742. 4.

Leçons de Physique, par l'Abbé Nollet. Tom. II. Huitième édition, Paris 1775, p. 1. sqq.

§. 16.

Jetzt kann man nun leicht jede zwey gegebene auf einen freyen Punkt A (Fig. 12.) wirkende Kräfte P und P' in eine Kraft R auf dem Wege der Construction zusammensetzen, (§. 1.). Zu diesem Ende nehme man nämlich auf den Richtungen der Kräfte P und P' von A aus die Linien AP und AP' diesen Kräften gemäß, beschreibe mit PAP' das Parallelogramm $PAP'R$ und ziehe dessen Diagonale AR; so ist diese die geometrische Darstellung der aus P und P' resultirenden Kraft R, (§. 3. — 14.), welche gefunden werden sollte.

Will man Richtung und Größe der Resultirenden durch Rechnung finden, so bezeichne man den von den Richtungen der Kräfte P und P' eingeschlossenen Winkel PAP' durch α, und den von der gesuchten Richtung der Resultirenden mit der Richtung der Kraft P eingeschlossenen Winkel durch ϱ; so ist, wenn man die Construction wie vorher macht, nach bekannten Sätzen der ebenen Trigonometrie:

$$AR^2 = AP'^2 + P'R^2 - 2AP'.P'R.\operatorname{Cos} AP'R.$$

Aber $\angle AP'R = 180° - PAP' = 180° - \alpha$, und folglich $\operatorname{Cos} AP'R = -\operatorname{Cos}\alpha$; $AR = R$, $AP' = P'$, $P'R = AP = P$. Also

$$R^2 = P^2 + P'^2 + 2PP'.\operatorname{Cos}\alpha,$$
$$R = \sqrt{P^2 + P'^2 + 2PP'.\operatorname{Cos}\alpha}.$$

Der Winkel PAR ist $= \varrho$ und $PRA = RAP' = \alpha - \varrho$. Also

$$\operatorname{Sin} PAR : \operatorname{Sin} PRA = PR : AP,$$
$$\operatorname{Sin}\varrho : \operatorname{Sin}(\alpha - \varrho) = P' : P,$$
$$\operatorname{Sin}\varrho : \operatorname{Sin}\alpha.\operatorname{Cos}\varrho - \operatorname{Cos}\alpha.\operatorname{Sin}\varrho = P' : P,$$
$$\operatorname{Tg}\varrho : \operatorname{Sin}\alpha - \operatorname{Cos}\alpha.\operatorname{Tg}\varrho = P' : P,$$
$$P.\operatorname{Tg}\varrho = P'.\operatorname{Sin}\alpha - P'.\operatorname{Cos}\alpha.\operatorname{Tg}\varrho,$$
$$P.\operatorname{Tg}\varrho + P'.\operatorname{Cos}\alpha.\operatorname{Tg}\varrho = P'.\operatorname{Sin}\alpha,$$
$$\operatorname{Tg}\varrho = \frac{P'.\operatorname{Sin}\alpha}{P + P'.\operatorname{Cos}\alpha},$$

und offenbar auf dieselbe Art oder bloß durch gehörige Vertauschung der Zeichen:

$$\operatorname{Tg}(\alpha - \varrho) = \operatorname{Tg}\varrho' = \frac{P.\operatorname{Sin}\alpha}{P' + P.\operatorname{Cos}\alpha}.$$

Sey z. B., wie in Eytelwein's Statik, Th. 1. S. 26., $P = 40$ Pfund, $P' = 50$ Pfund, $\alpha = 120°$; so ist

$$R = \sqrt{1600 + 2500 - 2.40.50.0,5}$$
$$= 45,83 \text{ Pfund};$$

$$\operatorname{Tg}\varrho = \frac{50.0,5.\sqrt{3}}{40 - 50.0,5} = \operatorname{Tg} 70° 53' 36''$$

$= \operatorname{Tg} 250° 53' 36''$, wo aber ϱ offenbar $= 70° 53' 36''$ zu setzen ist, da es augenscheinlich $< \alpha$, d. i. $< 120°$ seyn muß. Man wird in jedem Falle leicht beurtheilen können, welchen der beiden Werthe, die man für ϱ erhält, man für ϱ

nehmen muß, da dieser Winkel offenbar immer ein spitzer Winkel seyn muß.

Man wird leicht übersehen, daß, in Beziehung auf zwey Kräfte, alle Aufgaben über die Zusammensetzung so wie auch über die Zerlegung der Kräfte bloße Aufgaben der ebenen Trigonometrie sind. Wir verweilen daher, um den Raum für schwierigere Untersuchungen zu sparen, nicht länger hierbey. Nur bemerken wir noch, daß jede Kraft $R = AR$ (Fig. 8.) immer leicht in zwey Kräfte nach auf einander senkrechten Richtungen AP und AP' zerlegt werden kann. Man braucht nur von dem Punkte R auf diese Richtungen die Perpendikel RP und RP' zu fällen, so sind AP und AP' die gesuchten Seitenkräfte. Setzt man den Winkel $RAP = \alpha$, so ist $AP = AR \,.\, \text{Cos}\,\alpha$, und $AP' = AR \,.\, \text{Sin}\,\alpha$, oder $P = R \,.\, \text{Cos}\,\alpha$, und $P' = R \,.\, \text{Sin}\,\alpha$, wenn P und P', wie gewöhnlich, die beiden Seitenkräfte bezeichnen.

III.

Gleichgewicht unter vier auf einen freyen Punkt wirkenden Kräften.

§. 17.

Aufgabe. Drey auf den freyen Punkt A (Fig. 13.) wirkende Kräfte P, P', P'' seyen durch die Linien AP, AP', AP'' geometrisch dargestellt; die geometrische Darstellung der aus diesen Kräften Resultirenden R zu finden.

Auflösung. Mit AP', AP'' und dem Winkel $P'AP''$ beschreibe man in der Ebene dieses Winkels das Parallelogramm $AP'rP''$ und ziehe dessen Diagonale Ar, so ist diese die geometrische Darstellung der aus AP' und AP'' Resultirenden, (§. 7.). Ferner beschreibe man mit Ar, AP und dem Winkel PAr in der Ebene dieses Winkels das Parallelogramm $PArR$ und ziehe dessen Diagonale AR, so ist diese die geometrische Darstellung der aus Ar und AP Resultirenden, (§. 7.), und folglich auch die gesuchte geometrische Darstellung der aus AP', AP'' und AP, oder P, P', P'', Resultirenden, (§. 1.).

Jetzt lege man durch die Winkel PAP', PAP'', $P''rR$ und $P'rR$ Ebenen, und durch PR eine Ebene, die mit $AP'rP''$ parallel ist, welches immer möglich ist, weil PR nach der Construction parallel mit Ar ist. Diese Ebenen begränzen einen Körper, welcher ein Parallelepipedon ist, wie auf folgende Art leicht gezeigt werden kann. Nach der Construction ist AP'' parallel mit $P'r$ und AP parallel mit rR; also die Ebene PAP'' parallel mit der Ebene $P'rR$, (Euclidis Elementa, lib. XI. prop. XV.). Eben so ist nach der Construction AP' parallel mit rP'', und AP parallel mit rR; also die Ebene PAP' parallel mit der Ebene RrP'', nach demselben Satze des Euclides. Nun ist aber nach der Construction auch die Ebene $PD'RD''$ parallel mit der Ebene $AP'rP''$, so daß also der Körper $ARD'P''$ von sechs Ebenen eingeschlossen wird, deren jede zwey gegenüber liegende einander parallel sind. Dieser Körper ist folglich, wie oben behauptet wurde, ein Parallelepipedon, (Euclidis Elementa, lib. XI. def. XXX.). Die geometrische Darstellung AR der aus P, P', P'' Resultirenden ist die Diagonale dieses Parallelepipedons, welches mit den geometrischen Darstellungen AP, AP', AP'' der Kräfte P, P', P'' construirt werden kann, und man nennt dieses Parallelepipedon daher, dem Parallelogramm der Kräfte analog, gewöhnlich das Parallelepipedon der Kräfte.

§. 18.

Aufgabe. Richtung und Größe der aus den drey Kräften P, P', P'' Resultirenden R durch Rechnung zu finden.

Auflösung. Wir erinnern hier zuerst an folgenden geometrischen Satz, dessen Beweis nur selten in den geometrischen Elementarbüchern angetroffen wird:

Die Summe der Quadrate der beiden Diagonalen eines Parallelogramms ist der Summe der Quadrate seiner vier Seiten gleich.

Der Beweis kann auf folgende Art leicht geführt werden. Bey dem Parallelogramm $ABCD$ (Fig. 14.) fälle man von B und A auf die Seiten AC und BD, oder ihre Verlängerung, die Perpendikel BE und AF; so ist, nach Euclides, (Elementa, lib. II. propp. XII. XIII.):

$$BC^q = AB^q + AC^q - 2AC \times AE,$$
$$AD^q = AB^q + BD^q - 2BD \times BF.$$

Aber $AC = BD$ und $AE = BF$. Also auch $2AC \times AE = 2BD \times BF$, und folglich durch Addition der beiden obigen Gleichungen:

$$BC^q + AD^q = AB^q + AB^q + AC^q + BD^q,$$

oder, weil $AB = CD$ und $AB^q = CD^q$ ist:

$$BC^q + AD^q = AB^q + CD^q + AC^q + BD^q,$$

w. z. b. w.

Auch vermittelst bekannter trigonometrischen Formeln läßt sich dieser Satz sehr einfach beweisen; wir verweilen aber nicht länger dabey, sondern kehren nun zu unserm eigentlichen Gegenstande zurück.

Die nach den Ecken P, D', D'', R des Parallelepipedons in Fig. 13. gezogenen Diagonallinien desselben bezeichne man der Kürze wegen durch D, D', D'', R, und einen von den Richtungen zweyer durch P und Q bezeichneter Kräfte eingeschlossenen Winkel überhaupt durch (P, Q); so erhellet, mittelst des vorhergehenden Satzes von dem Parallelogramm, mit Zuziehung einiger leichten und sehr bekannten stereometrischen und trigonometrischen Sätze, ohne weitere Erläuterung die Richtigkeit folgender Gleichungen:

$$R^2 + D'^2 = 2P''^2 + 2P^2 + 2P'^2 + 4PP' . \operatorname{Cos}(P, P'),$$
$$D'^2 + D''^2 = 2P^2 + 2P'^2 + 2P''^2 - 4P'P'' . \operatorname{Cos}(P', P''),$$
$$R^2 + D''^2 = 2P'^2 + 2P^2 + 2P''^2 + 4PP'' . \operatorname{Cos}(P, P'').$$

Folglich, wenn man die zweyte dieser Gleichungen von der dritten abzieht und die erste beybehält:

$$R^2 + D'^2 = 2P^2 + 2P'^2 + 2P''^2 + 4PP' . \mathrm{Cos}(P, P'),$$
$$R^2 - D'^2 = 4PP'' . \mathrm{Cos}(P, P'') + 4P'P'' . \mathrm{Cos}(P', P''),$$

woraus durch Addition folgt:

$$2R^2 = 2P^2 + 2P'^2 + 2P''^2 + 4PP' . \mathrm{Cos}(P, P')$$
$$+ 4PP'' . \mathrm{Cos}(P, P'') + 4P'P'' . \mathrm{Cos}(P', P''),$$
$$R^2 = P^2 + P'^2 + P''^2 + 2PP' . \mathrm{Cos}(P, P')$$
$$+ 2PP'' . \mathrm{Cos}(P, P'') + 2P'P'' . \mathrm{Cos}(P', P''),$$
$$R = \sqrt{\left\{\begin{array}{l} P^2 + P'^2 + P''^2 + 2PP' . \mathrm{Cos}(P, P') \\ \quad + 2PP'' . \mathrm{Cos}(P, P'') + 2P'P'' . \mathrm{Cos}(P', P'') \end{array}\right\}},$$

ein Ausdruck der Größe der Resultirenden durch die Seitenkräfte und die Winkel, unter welchen sie gegen einander geneigt sind.

Ist das Parallelepipedon ein rechtwinkliges, so ist

$$\angle(P, P') = \angle(P, P'') = \angle(P', P'') = 90°,$$
$$\mathrm{Cos}(P, P') = \mathrm{Cos}(P, P'') = \mathrm{Cos}(P', P'') = 0,$$

und folglich

$$R^2 = P^2 + P'^2 + P''^2, \; R = \sqrt{P^2 + P'^2 + P''^2}.$$

Leicht erhellet, daß im rechtwinkligen Parallelepipedon immer

$$P = R . \mathrm{Cos}(P, R); \; P' = R . \mathrm{Cos}(P', R); \; P'' = R . \mathrm{Cos}(P'', R)$$

ist. Also

$$P^2 + P'^2 + P''^2 = R^2 . \{\mathrm{Cos}^2(P, R) + \mathrm{Cos}^2(P', R) + \mathrm{Cos}^2(P'', R)\},$$

d. i. $R^2 = R^2 . \{\mathrm{Cos}^2(P, R) + \mathrm{Cos}^2(P', R) + \mathrm{Cos}^2(P'', R)\}$,

oder $\mathrm{Cos}^2(P, R) + \mathrm{Cos}^2(P', R) + \mathrm{Cos}^2(P'', R) = 1$,

so daß also, wenn die Richtungen der Seitenkräfte auf einander senkrecht sind, das Quadrat der Resultirenden gleich der Summe der Quadrate der Seitenkräfte, und die Summe der Quadrate der Cosinusse der Winkel, welche von der Richtung der Resultirenden mit den Richtungen der drey Seitenkräfte eingeschlossen werden, der Einheit gleich ist.

Was für geometrische Eigenschaften des Parallelepipedons in diesem Satze liegen, ist ohne weitere Erinnerung klar. Der Satz wird im Folgenden noch seine Anwendung finden.

Die Richtung der Resultirenden wird am besten durch die Winkel (P, R), (P', R) und (P'', R) bestimmt, deren Cosinusse auf folgende Art gefunden werden können. Die beiden Theile folgender Gleichungen sind bloß verschiedene Ausdrücke von $PR^2 = Ar^2$, $P'R^2 = AD''^2$, und $P''R^2 = AD'^2$, woraus ihre Richtigkeit erhellet:

$$R^2 + P^2 - 2PR.\mathrm{Cos}(P, R) = P'^2 + P''^2 + 2P'P''.\mathrm{Cos}(P', P''),$$
$$R^2 + P'^2 - 2P'R.\mathrm{Cos}(P', R) = P^2 + P''^2 + 2PP''.\mathrm{Cos}(P, P''),$$
$$R^2 + P''^2 - 2P''R.\mathrm{Cos}(P'', R) = P^2 + P'^2 + 2PP'.\mathrm{Cos}(P, P').$$

Also

$$\mathrm{Cos}(P, R) = \frac{R^2 + P^2 - P'^2 - P''^2 - 2P'P''.\mathrm{Cos}(P', P'')}{2PR},$$

und folglich, wenn man für R^2 und R die vorher gefundenen Werthe setzt:

$$\mathrm{Cos}(P, R) = \frac{2P^2 + 2PP'.\mathrm{Cos}(P, P') + 2PP''.\mathrm{Cos}(P, P'')}{2P\sqrt{\left\{\begin{array}{l} P^2 + P'^2 + P''^2 + 2PP'.\mathrm{Cos}(P, P') \\ \quad + 2PP''.\mathrm{Cos}(P, P'') + 2P'P''.\mathrm{Cos}(P', P'') \end{array}\right\}}}$$

$$= \frac{P + P'.\mathrm{Cos}(P, P') + P''.\mathrm{Cos}(P, P'')}{\sqrt{\left\{\begin{array}{l} P^2 + P'^2 + P''^2 + 2PP'.\mathrm{Cos}(P, P') \\ \quad + 2PP''.\mathrm{Cos}(P, P'') + 2P'P''.\mathrm{Cos}(P', P'') \end{array}\right\}}}.$$

Aehnliche Ausdrücke für $\mathrm{Cos}(P', R)$ und $\mathrm{Cos}(P'', R)$ findet man auf ähnliche Art, oder durch Vertauschung der Zeichen in dem Ausdrucke für $\mathrm{Cos}(P, R)$ mit den entsprechenden. Folgende Formeln sind zur Bestimmung der Größe und Richtung der Resultirenden R hinreichend:

$$R = \sqrt{\left\{\begin{array}{l} P^2 + P'^2 + P''^2 + 2PP'.\mathrm{Cos}(P, P') \\ \quad + 2PP''.\mathrm{Cos}(P, P'') + 2P'P''.\mathrm{Cos}(P', P'') \end{array}\right\}},$$

$$\mathrm{Cos}(P, R) = \frac{P + P'.\mathrm{Cos}(P, P') + P''.\mathrm{Cos}(P, P'')}{R},$$

$$\mathrm{Cos}(P', R) = \frac{P' + P.\mathrm{Cos}(P, P') + P''.\mathrm{Cos}(P', P'')}{R},$$

$$\mathrm{Cos}(P'', R) = \frac{P'' + P'.\mathrm{Cos}(P', P'') + P.\mathrm{Cos}(P, P'')}{R}.$$

Aus den obigen drey Gleichungen erhält man noch, wenn man auf beiden Seiten addirt:

$$3R^2 + P^2 + P'^2 + P''^2$$
$$- 2R\{P.\mathrm{Cos}(P, R) + P'.\mathrm{Cos}(P', R) + P''.\mathrm{Cos}(P'', R)\}$$

$$=2P^2+2P'^2+2P''^2$$
$$+2PP'.\mathrm{Cos}(P,P')+2PP''.\mathrm{Cos}(P,P'')+2P'P''.\mathrm{Cos}(P',P''),$$
d. i.
$$3R^2-2R\{P.\mathrm{Cos}(P,R)+P'.\mathrm{Cos}(P',R)+P''.\mathrm{Cos}(P'',R)\}$$
$$=P^2+P'^2+P''^2$$
$$+2PP'.\mathrm{Cos}(P,P')+2PP''.\mathrm{Cos}(P,P'')+2P'P''.\mathrm{Cos}(P',P''),$$
oder nach dem Vorhergehenden:
$$3R^2-2R\{P.\mathrm{Cos}(P,R)+P'.\mathrm{Cos}(P',R)+P''.\mathrm{Cos}(P'',R)\}=R^2,$$
$$3R-2\{P.\mathrm{Cos}(P,R)+P'.\mathrm{Cos}(P',R)+P''.\mathrm{Cos}(P'',R)\}=R,$$
$$2R=2\{P.\mathrm{Cos}(P,R)+P'.\mathrm{Cos}(P',R)+P''.\mathrm{Cos}(P'',R)\}.$$
Also $R=P.\mathrm{Cos}(P,R)+P'.\mathrm{Cos}(P',R)+P''.\mathrm{Cos}(P'',R)$, ein Ausdruck der Größe der Resultirenden durch die Seitenkräfte und die von der Richtung der Resultirenden und den Richtungen der Seitenkräfte eingeschlossenen Winkel.

Noch eine merkwürdige Gleichung kann man aus dem zuerst gefundenen Ausdrucke für R^2 ableiten. Es ist nämlich
$$R^2=P^2+P'^2+P''^2$$
$$+2PP'.\mathrm{Cos}(P,P')+2PP''.\mathrm{Cos}(P,P'')+2P'P''.\mathrm{Cos}(P',P''),$$
$$D^2=P^2+P'^2+P''^2$$
$$-2PP'.\mathrm{Cos}(P,P')-2PP''.\mathrm{Cos}(P,P'')+2P'P''.\mathrm{Cos}(P',P''),$$
$$D'^2=P^2+P'^2+P''^2$$
$$+2PP'.\mathrm{Cos}(P,P')-2PP''.\mathrm{Cos}(P,P'')-2P'P''.\mathrm{Cos}(P',P''),$$
$$D''^2=P^2+P'^2+P''^2$$
$$-2PP'.\mathrm{Cos}(P,P')+2PP''.\mathrm{Cos}(P,P'')-2P'P''.\mathrm{Cos}(P',P'').$$
Die drey letzten Gleichungen folgen leicht aus der ersten, welche oben bewiesen worden, und einer bloßen Betrachtung der Figur, (Fig. 13.). Addirt man nun auf beiden Seiten der Gleichheitszeichen, so erhält man:
$$R^2+D^2+D'^2+D''^2=4(P^2+P'^2+P''^2),$$
worin der geometrische Satz liegt, daß auch in jedem Parallelepipedon die Summe der Quadrate der vier Diagonallinien der Summe der Quadrate seiner zwölf Kanten gleich ist.

Was die Zerlegung einer Kraft in drey Seitenkräfte betrifft, so bemerken wir nur, daß in dem Falle, wenn die Richtungen der drey Seitenkräfte auf einander senkrecht sind, die drey Seitenkräfte, wie wir auch schon oben gesehen haben, folgende sind:

$P = R \cdot \mathrm{Cos}(P,R), P' = R \cdot \mathrm{Cos}(P',R), P'' = R \cdot \mathrm{Cos}(P'',R).$

§. 19.

Man kann sich auch die Aufgabe vorlegen, die Neigungswinkel der Richtung der Resultirenden gegen die Seitenflächen des Parallelepipedons der Kräfte zu finden, wobey man auf folgende Art verfahren kann. Der Abkürzung wegen setze man jedoch $AP = P = a$, $AP' = P' = b$, $AP'' = P'' = c$; $\angle(P, P') = \alpha$, $\angle(P', P'') = \beta$, und $\angle(P, P'') = \gamma$. Von P denke man sich auf AP' ein Perpendikel $= x$ gefällt; die Linie zwischen A und dem Fuße dieses Perpendikels sey $= y$; durch den Endpunkt von y errichte man auf AP' ein Perpendikel z, so lang, daß es die Linie AP'' schneidet, und verbinde P und den auf AP'' liegenden Endpunkt von z durch eine gerade Linie v: so ist, wenn wir den von den Perpendikeln x und z eingeschlossenen Winkel, d. i. den Neigungswinkel der Ebenen AD' und Ar gegen einander, durch φ, und das zwischen A und dem Endpunkte von z auf AP'' liegende Stück durch w bezeichnen:

$$x = a \,\mathrm{Sin}\,\alpha, \quad y = a \,\mathrm{Cos}\,\alpha;$$
$$z = a \,\mathrm{Cos}\,\alpha \,\mathrm{Tg}\,\beta, \quad w = a \,\mathrm{Cos}\,\alpha \,\mathrm{Sec}\,\beta;$$
$$v^2 = x^2 + z^2 - 2xz \cdot \mathrm{Cos}\,\varphi$$
$$= a^2 + w^2 - 2aw \cdot \mathrm{Cos}\,\gamma.$$

Also

$$a^2 \cdot \mathrm{Sin}\alpha^2 + a^2 \cdot \mathrm{Cos}\alpha^2 \cdot \mathrm{Tg}\beta^2 - 2a^2 \cdot \mathrm{Sin}\alpha \cdot \mathrm{Cos}\alpha \cdot \mathrm{Tg}\beta \cdot \mathrm{Cos}\varphi$$
$$= a^2 + a^2 \cdot \mathrm{Cos}\,\alpha^2 \cdot \mathrm{Sec}\,\beta^2 - 2a^2 \cdot \mathrm{Cos}\,\alpha \cdot \mathrm{Sec}\,\beta \cdot \mathrm{Cos}\,\gamma,$$
$$\mathrm{Sin}\,\alpha^2 + \mathrm{Cos}\,\alpha^2 \cdot \mathrm{Tg}\,\beta^2 - 2\mathrm{Sin}\,\alpha \,\mathrm{Cos}\,\alpha \,\mathrm{Tg}\,\beta \,\mathrm{Cos}\,\varphi$$
$$= 1 + \mathrm{Cos}\,\alpha^2 \cdot \mathrm{Sec}\,\beta^2 - 2\mathrm{Cos}\,\alpha \,\mathrm{Sec}\,\beta \,\mathrm{Cos}\,\gamma,$$
$$\mathrm{Sin}\alpha^2 \cdot \mathrm{Cos}\beta^2 + \mathrm{Cos}\alpha^2 \cdot \mathrm{Sin}\beta^2 - 2\mathrm{Sin}\alpha \,\mathrm{Cos}\alpha \,\mathrm{Sin}\beta \,\mathrm{Cos}\beta \,\mathrm{Cos}\varphi$$
$$= \mathrm{Cos}\,\beta^2 + \mathrm{Cos}\,\alpha^2 - 2\mathrm{Cos}\,\alpha \,\mathrm{Cos}\,\beta \,\mathrm{Cos}\,\gamma,$$

$$2\,\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,\beta\,\mathrm{Cos}\,\beta\,\mathrm{Cos}\,\phi$$
$$= 2\,\mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\beta\,\mathrm{Cos}\,\gamma - \mathrm{Cos}\,\alpha^2.\,\mathrm{Cos}\,\beta^2 - \mathrm{Cos}\,\alpha^2.\,\mathrm{Cos}\,\beta^2$$
$$= 2\,\mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\beta\,\mathrm{Cos}\,\gamma - 2\,\mathrm{Cos}\,\alpha^2.\,\mathrm{Cos}\,\beta^2$$
$$= 2\,(\mathrm{Cos}\,\gamma - \mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\beta)\,\mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\beta,$$
$$\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,\beta\,\mathrm{Cos}\,\phi = \mathrm{Cos}\,\gamma - \mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\beta,$$
$$\mathrm{Cos}\,\phi = \frac{\mathrm{Cos}\,\gamma - \mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\beta}{\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,\beta}.$$

Also $\mathrm{Sin}\,\phi^2 = 1 - \mathrm{Cos}\,\phi^2 =$
$$= \frac{\mathrm{Sin}\,\alpha^2.\mathrm{Sin}\,\beta^2 - \mathrm{Cos}\,\gamma^2 + 2\mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\beta\,\mathrm{Cos}\,\gamma - \mathrm{Cos}\,\alpha^2\,\mathrm{Cos}\,\beta^2}{\mathrm{Sin}\,\alpha^2.\,\mathrm{Sin}\,\beta^2}$$
$$= \frac{1 - \mathrm{Cos}\,\alpha^2 - \mathrm{Cos}\,\beta^2 - \mathrm{Cos}\,\gamma^2 + 2\mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\beta\,\mathrm{Cos}\,\gamma}{\mathrm{Sin}\,\alpha^2.\,\mathrm{Sin}\,\beta^2},$$
$$\mathrm{Sin}\,\phi = \frac{\sqrt{1 - \mathrm{Cos}\,\alpha^2 - \mathrm{Cos}\,\beta^2 - \mathrm{Cos}\,\gamma^2 + 2\mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\beta\,\mathrm{Cos}\,\gamma}}{\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,\beta}.$$

Die Höhe des Parallelepipedons in Beziehung auf Ar als Grundfläche sey h; so ist $h = x\,\mathrm{Sin}\,\phi = a\,\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,\phi$
$$= \frac{a}{\mathrm{Sin}\,\beta}\sqrt{1 - \mathrm{Cos}\,\alpha^2 - \mathrm{Cos}\,\beta^2 - \mathrm{Cos}\,\gamma^2 + 2\mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\beta\,\mathrm{Cos}\,\gamma}.$$

Bezeichnet nun ψ den Neigungswinkel der Diagonale AR gegen die Fläche Ar, so ist $h = R\,\mathrm{Sin}\,\psi$, oder $\mathrm{Sin}\,\psi = \frac{h}{R}$, d. i. $\mathrm{Sin}\,\psi$
$$= \frac{a\sqrt{1 - \mathrm{Cos}\,\alpha^2 - \mathrm{Cos}\,\beta^2 - \mathrm{Cos}\,\gamma^2 + 2\mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\beta\,\mathrm{Cos}\,\gamma}}{R\,\mathrm{Sin}\,\beta}$$
$$= \frac{a\sqrt{1 - \mathrm{Cos}\,\alpha^2 - \mathrm{Cos}\,\beta^2 - \mathrm{Cos}\,\gamma^2 + 2\mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\beta\,\mathrm{Cos}\,\gamma}}{\mathrm{Sin}\,\beta\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\,\mathrm{Cos}\,\alpha + 2bc\,\mathrm{Cos}\,\beta + 2ac\,\mathrm{Cos}\,\gamma}}$$
nach dem vorhergehenden Paragraphen. Also $\mathrm{Sin}\,\psi$
$$= \frac{a}{\mathrm{Sin}\,\beta}\sqrt{\frac{1 - \mathrm{Cos}\,\alpha^2 - \mathrm{Cos}\,\beta^2 - \mathrm{Cos}\,\gamma^2 + 2\mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\beta\,\mathrm{Cos}\,\gamma}{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\,\mathrm{Cos}\,\alpha + 2bc\,\mathrm{Cos}\,\beta + 2ac\,\mathrm{Cos}\,\gamma}}.$$

Bezeichnet man die Wurzelgröße, in welche $\frac{a}{\mathrm{Sin}\,\beta}$ multiplicirt ist, durch L, und die Neigungswinkel der Diagonale

AR gegen die Seitenflächen PAP'' und PAP' respective durch ψ' und ψ''; so ist, wie leicht erhellen wird,

$$\operatorname{Sin}\psi = \frac{aL}{\operatorname{Sin}\beta};\ \operatorname{Sin}\psi' = \frac{bL}{\operatorname{Sin}\gamma};\ \operatorname{Sin}\psi'' = \frac{cL}{\operatorname{Sin}\alpha}.$$

Also

$$\operatorname{Sin}\psi \operatorname{Sin}\beta = aL,\ \operatorname{Sin}\psi' \operatorname{Sin}\gamma = bL,\ \operatorname{Sin}\psi'' \operatorname{Sin}\alpha = cL;$$
$$\operatorname{Sin}\psi \operatorname{Sin}\beta + \operatorname{Sin}\psi' \operatorname{Sin}\gamma + \operatorname{Sin}\psi'' \operatorname{Sin}\alpha = (a+b+c)L,$$
$$a+b+c = \frac{1}{L}\{\operatorname{Sin}\psi\operatorname{Sin}\beta + \operatorname{Sin}\psi'\operatorname{Sin}\gamma + \operatorname{Sin}\psi''\operatorname{Sin}\alpha\}.$$

Auch hat man folgende Relationen:

$$\frac{\operatorname{Sin}\psi \operatorname{Sin}\beta}{a} = \frac{\operatorname{Sin}\psi' \operatorname{Sin}\gamma}{b} = \frac{\operatorname{Sin}\psi'' \operatorname{Sin}\alpha}{c},$$
$$bc\operatorname{Sin}\psi \operatorname{Sin}\beta = ac\operatorname{Sin}\psi' \operatorname{Sin}\gamma = ab\operatorname{Sin}\psi'' \operatorname{Sin}\alpha,$$
$$\operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin}\beta \operatorname{Sin}\gamma \operatorname{Sin}\psi \operatorname{Sin}\psi' \operatorname{Sin}\psi'' = abcL^3,\ \text{u. s. w.}$$

Man leitet aus dem Vorhergehenden auch leicht einen merkwürdigen Ausdruck für den Inhalt I des Parallelepipedons der Kräfte durch $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ her. Der Inhalt der Grundfläche $AP'rP''$ ist nämlich offenbar $= c \,.\, b\operatorname{Sin}\beta = bc\operatorname{Sin}\beta$, und folglich $I = hbc\operatorname{Sin}\beta$, d. i.

$$I = bc\operatorname{Sin}\beta \cdot \frac{a}{\operatorname{Sin}\beta}\sqrt{1 - \operatorname{Cs}\alpha^2 - \operatorname{Cs}\beta^2 - \operatorname{Cs}\gamma^2 + 2\operatorname{Cs}\alpha\operatorname{Cs}\beta\operatorname{Cs}\gamma},$$

oder

$$I = abc\sqrt{1 - \operatorname{Cos}\alpha^2 - \operatorname{Cos}\beta^2 - \operatorname{Cos}\gamma^2 + 2\operatorname{Cos}\alpha\operatorname{Cos}\beta\operatorname{Cos}\gamma}.$$

Man kann diesen Ausdruck auch noch auf eine andere sehr merkwürdige Form bringen. Man weiß nämlich aus dem Vorhergehenden, daß

$$\operatorname{Cos}\varphi = \frac{\operatorname{Cos}\gamma - \operatorname{Cos}\alpha\operatorname{Cos}\beta}{\operatorname{Sin}\alpha\operatorname{Sin}\beta}\ \text{ist.}$$

Also nach bekannten trigonometrischen Sätzen:

$$2\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}\varphi^2 = 1 - \frac{\operatorname{Cos}\gamma - \operatorname{Cos}\alpha\operatorname{Cos}\beta}{\operatorname{Sin}\alpha\operatorname{Sin}\beta}$$
$$= \frac{\operatorname{Sin}\alpha\operatorname{Sin}\beta + \operatorname{Cos}\alpha\operatorname{Cos}\beta - \operatorname{Cos}\gamma}{\operatorname{Sin}\alpha\operatorname{Sin}\beta}$$
$$= \frac{\operatorname{Cos}(\alpha-\beta) - \operatorname{Cos}\gamma}{\operatorname{Sin}\alpha\operatorname{Sin}\beta},$$

$$2\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}\varphi^2 = 1 + \frac{\mathrm{Cos}\,\gamma - \mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\beta}{\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,\beta}$$

$$= \frac{\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,\beta + \mathrm{Cos}\,\gamma - \mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\beta}{\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,\beta}$$

$$= \frac{\mathrm{Cos}\,\gamma - (\mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\beta - \mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,\beta)}{\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,\beta}$$

$$= \frac{\mathrm{Cos}\,\gamma - \mathrm{Cos}\,(\alpha + \beta)}{\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,\beta}.$$

Also $\mathrm{Sin}\,\varphi^2 = 4\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\varphi^2 \,.\, \mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}\varphi^2$

$$= \frac{[\mathrm{Cos}\,\gamma - \mathrm{Cos}\,(\alpha + \beta)]\,[\mathrm{Cos}\,(\alpha - \beta) - \mathrm{Cos}\,\gamma]}{\mathrm{Sin}\,\alpha^2 \,.\, \mathrm{Sin}\,\beta^2}.$$

Da aber bekanntlich überhaupt

$$\mathrm{Cos}\,A - \mathrm{Cos}\,B = 2\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(B - A)\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(B + A)$$

ist, so ist

$$\mathrm{Cos}\,\gamma - \mathrm{Cos}\,(\alpha + \beta) = 2\,\mathrm{Sin}\,\frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} \,.\, \mathrm{Sin}\,\frac{\alpha + \beta - \gamma}{2},$$

$$\mathrm{Cos}\,(\alpha - \beta) - \mathrm{Cos}\,\gamma = 2\,\mathrm{Sin}\,\frac{\beta + \gamma - \alpha}{2} \,.\, \mathrm{Sin}\,\frac{\alpha + \gamma - \beta}{2},$$

Also $\mathrm{Sin}\,\varphi^2$

$$= \frac{4\,\mathrm{Sin}\,\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} \,.\, \mathrm{Sin}\,\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2} \,.\, \mathrm{Sin}\,\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2} \,.\, \mathrm{Sin}\,\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}}{\mathrm{Sin}\,\alpha^2 \,.\, \mathrm{Sin}\,\beta^2}$$

$\mathrm{Sin}\,\varphi$

$$= \frac{2\sqrt{\mathrm{Sin}\,\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} \,.\, \mathrm{Sin}\,\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2} \,.\, \mathrm{Sin}\,\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2} \,.\, \mathrm{Sin}\,\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}}}{\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,\beta}$$

$$= \frac{\sqrt{1 - \mathrm{Cos}\,\alpha^2 - \mathrm{Cos}\,\beta^2 - \mathrm{Cos}\,\gamma^2 + 2\,\mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\beta\,\mathrm{Cos}\,\gamma}}{\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,\beta}$$

nach dem Obigen.

Also

$$\sqrt{1 - \mathrm{Cos}\,\alpha^2 - \mathrm{Cos}\,\beta^2 - \mathrm{Cos}\,\gamma^2 + 2\,\mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\beta\,\mathrm{Cos}\,\gamma} =$$

$$= 2\sqrt{\mathrm{Sin}\,\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} \,.\, \mathrm{Sin}\,\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2} \,.\, \mathrm{Sin}\,\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2} \,.\, \mathrm{Sin}\,\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}}.$$

d folglich $I =$

$$2abc\sqrt{\mathrm{Sin}\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}.\mathrm{Sin}\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}.\mathrm{Sin}\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}.\mathrm{Sin}\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}}.$$

Setzt man $\alpha+\beta+\gamma=\Sigma$; so ist

$$\beta+\gamma-\alpha=\alpha+\beta+\gamma-2\alpha=\Sigma-2\alpha,$$
$$\alpha+\gamma-\beta=\alpha+\beta+\gamma-2\beta=\Sigma-2\beta,$$
$$\alpha+\beta-\gamma=\alpha+\beta+\gamma-2\gamma=\Sigma-2\gamma,$$

d folglich

$$=2abc\sqrt{\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}\Sigma\,.\,\mathrm{Sin}(\tfrac{1}{2}\Sigma-\alpha)\,.\,\mathrm{Sin}(\tfrac{1}{2}\Sigma-\beta)\,.\,\mathrm{Sin}(\tfrac{1}{2}\Sigma-\gamma)}.$$

Der Inhalt einer dreyseitigen Pyramide, deren in einem unkte zusammenlaufende Kanten a, b, c, und die von diesen eingeschlossenen Winkel α, β, γ sind, ist offenbar $=\frac{1}{6}I$; lso

$$=\tfrac{1}{3}abc\sqrt{\mathrm{Sin}\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}.\mathrm{Sin}\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}.\mathrm{Sin}\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}.\mathrm{Sin}\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}}$$

$$=\tfrac{1}{3}abc\sqrt{\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}\Sigma\,.\,\mathrm{Sin}(\tfrac{1}{2}\Sigma-\alpha)\,.\,\mathrm{Sin}(\tfrac{1}{2}\Sigma-\beta)\,.\,\mathrm{Sin}(\tfrac{1}{2}\Sigma-\gamma)}.$$

Diese Formeln sind sehr bequem zur logarithmischen Rechung und haben Aehnlichkeit mit der bekannten Formel für den nhalt des Dreyecks aus seinen drey Seiten. Wir haben uns iese Abschweifung erlaubt, weil sie zugleich zeigt, wie die Forel für Sin ψ zur logarithmischen Rechnung bequemer eingeichtet werden kann. Es ist nämlich

$$\mathrm{Sin}\,\psi=\frac{2a}{R\mathrm{Sin}\beta}\sqrt{\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}\Sigma\mathrm{Sin}(\tfrac{1}{2}\Sigma-\alpha)\mathrm{Sin}(\tfrac{1}{2}\Sigma-\beta)\mathrm{Sin}(\tfrac{1}{2}\Sigma-\gamma)},$$

$$\mathrm{Sin}\,\psi'=\frac{2b}{R\mathrm{Sin}\gamma}\sqrt{\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}\Sigma\mathrm{Sin}(\tfrac{1}{2}\Sigma-\alpha)\mathrm{Sin}(\tfrac{1}{2}\Sigma-\beta)\mathrm{Sin}(\tfrac{1}{2}\Sigma-\gamma)},$$

$$\mathrm{Sin}\,\psi''=\frac{2c}{R\mathrm{Sin}\alpha}\sqrt{\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}\Sigma\mathrm{Sin}(\tfrac{1}{2}\Sigma-\alpha)\mathrm{Sin}(\tfrac{1}{2}\Sigma-\beta)\mathrm{Sin}(\tfrac{1}{2}\Sigma-\gamma)}.$$

In diesem und dem vorhergehenden Paragraphen haben wir also zwey Methoden, die Richtung der Resultirenden dreyer Kräfte zu bestimmen, kennen gelernt: Ein Mahl, durch die mit den Richtungen der Seitenkräfte eingeschlossenen Winkel; und dann durch die Neigungswinkel gegen die Seitenflächen des Parallelepipedons der Kräfte.

IV.

Allgemeine Bedingungen des Gleichgewichts mehrerer auf einen freyen Punkt wirkender Kräfte.

§. 20.

Wir haben hier zuerst eine Uebereinkunft zu treffen, auf welche Art wir die Lage der Richtungen der auf den freyen Punkt A wirkenden Kräfte P, P', P'', P''' u. s. w. bestimmen wollen. Obgleich wir hierbey im Allgemeinen den Grundsätzen der analytischen Geometrie gemäß verfahren müssen, so sind doch noch einige besondere Bemerkungen in dieser Beziehung nöthig, welche den Gegenstand dieses Paragraphen ausmachen werden.

1) Bestimmung der Lage der Richtungen in Beziehung auf eine gerade Linie als Axe, wenn alle Richtungen in einer Ebene liegen, und in Beziehung auf eine Ebene und eine in ihr gezogene gerade Linie, wenn die Kräfte nach willkührlichen Richtungen im Raume wirken.

Liegen nämlich alle Richtungen in einer Ebene, so ziehe man in dieser Ebene durch den gemeinschaftlichen Angriffspunkt A eine willkührliche gerade Linie, welche man als Axe annimmt, und bestimme die Lage der Richtungen der Kräfte durch die Winkel, welche sie mit dem auf der rechten Seite des Punktes A liegenden Theile der angenommenen Axe einschließen, so daß man diese Winkel immer von der rechten nach der linken Seite hin von 0° bis 360° zählt. Daß auf diese Art die Lage der Richtungen in jedem Falle ohne Zweydeutigkeit bestimmt wird, liegt vor Augen. Die Neigungswinkel der Richtungen der Kräfte P, P', P'', P''' u. s. w. gegen die angenommene Axe sollen im Folgenden respective durch α, α', α'', α''' u. s. w. bezeichnet werden.

Wirken die obigen Kräfte aber nach willkührlichen Richtungen im Raume, so lege man durch den gemeinschaftlichen Angriffspunkt eine willkührliche Ebene, und ziehe in ihr durch enselben Punkt eine willkührliche gerade Linie. Um nun die age der Richtungen zu bestimmen, suche man ihre Projectio- en auf die angenommene Ebene, bestimme die Lage dieser Projectionen in Beziehung auf die in der Ebene angenommene erade Linie als Axe ganz auf dieselbe Art, wie vorher die La- e der Richtungen selbst, und füge nun noch die Neigungs- winkel der Richtungen der gegebenen Kräfte gegen die ange- ommene Ebene bey, d. i. die spitzen Winkel, welche die Rich- ungen mit ihren Projectionen einschließen, und nehme diese Winkel positiv oder negativ, je nachdem die entsprechenden Richtungen über oder unter der angenommenen Ebene liegen. Es ist klar, daß auf diese Art die Lage der Richtungen in je- em Falle ohne alle Zweydeutigkeit bestimmt wird. In Bezie- ung auf die Kräfte P, P', P'', P''' u. s. w. sollen im Fol- enden die Neigungswinkel der Projectionen gegen die ange- ommene Axe respective durch α, α', α'', α''' u. s. w., die Nei- ungswinkel der Richtungen gegen die angenommene Ebene ber durch β, β', β'', β''' u. s. w. bezeichnet werden.

Die erstern Winkel sind immer positiv und wachsen von $0°$ bis $360°$; die letztern sind nie größer als $90°$, aber positiv oder negativ, je nachdem die Richtung der entsprechenden Kraft über oder unter der angenommenen Ebene liegt.

2) **Bestimmung der Lage der Richtungen in Beziehung auf zwey auf einander senkrechte und durch den Punkt A gehende gerade Linien oder Axen, wenn alle Richtungen in einer Ebene lie- gen, und in Beziehung auf drey auf einander senkrechte und durch den Punkt A gehende ge- rade Linien oder Axen, wenn die Kräfte nach willkührlichen Richtungen im Raume wirken.**

Liegen die Richtungen alle in einer Ebene, so ziehe man in dieser Ebene durch den Punkt A zwey auf einander senkrechte Axen aA' und bB', (Fig. 15.), und bestimme die Lage der Richtungen durch die Winkel, welche sie mit den Li- nien AA' und AB' einschließen, indem man diese Winkel von AA' und AB' über und unter aA', und rechts und links von

bB' von 0° bis 180° zählt, so daß also diese Winkel immer positiv sind und 180° nie übersteigen. Daß auf diese Art die Lage der Richtungen in jedem Falle ohne alle Zweydeutigkeit bestimmt wird, erhellet leicht aus der Betrachtung eines besondern Falles. Seyen nämlich die beiden mit AA' und AB' eingeschlossenen Winkel der Richtung irgend einer Kraft respective α, β, und z. B. $\alpha > 90°$ und auch $\beta > 90°$, wobey zu bemerken, daß keiner dieser beiden Winkel $> 180°$ seyn kann. Da $\alpha > 90°$ ist, so muß die zu bestimmende Richtung nothwendig links von bB' liegen; und weil auch $\beta > 90°$ ist, so muß sie unter aA' liegen; woraus also erhellet, daß sie in den rechten Winkel aAb fallen muß, und ihre Lage folglich durch die Winkel α und β völlig bestimmt seyn wird.

In Beziehung auf die Kräfte P, P', P'', P''' u. s. w. werden die Neigungswinkel ihrer Richtungen gegen AA' und AB' in der Folge respective durch α, α', α'', α''' u. s. w. und β, β', β'', β''' u. s. w. bezeichnet.

Wirken die obigen Kräfte nach willkührlichen Richtungen im Raume, so nehme man drey auf einander senkrechte und durch den Punkt A gehende Axen aA', bB', cC' (Fig. 16.) an, und bestimme die Neigungswinkel der Richtungen der Kräfte gegen AA', AB' und AC' auf ähnliche Art wie vorher, indem man immer diese Winkel von AA', AB' und AC' an auf beiden Seiten der Linien aA', bB' und cC' von 0° bis 180° zählt, so daß sie nie negativ genommen werden. Daß auch auf diese Art die Lage der Richtungen völlig bestimmt wird, erhellet leicht aus der Betrachtung des folgenden Falles.

Die Neigungswinkel der Richtung irgend einer Kraft gegen AA', AB', AC' seyen respective α, β, γ, und es sey z. B. $\alpha > 90°$, $\beta < 90°$, $\gamma > 90°$, wo zu bemerken, daß keiner dieser Winkel $> 180°$. Weil $\alpha > 90°$ ist, so liegt die zu bestimmende Richtung offenbar links von der Ebene $bC'B'c$; weil $\beta < 90°$, über der Ebene $A'C'ac$; und weil $\gamma > 90°$, hinter der Ebene $A'baB'$: also offenbar in dem körperlichen Winkel $AaB'c$, so daß also die zu bestimmende Richtung durch die Winkel α, β, γ völlig bestimmt wird.

Und daß dies auch in allen übrigen Fällen durch die angewandte Methode geschehe, ist klar.

Die von den Richtungen der Kräfte P, P', P'', P''' u. s. w. mit AA', AB', AC' eingeschlossenen Winkel sollen in der Folge respective durch α, α', α'', α''' u. s. w., β, β', β'', β''' u. s. w., γ, γ', γ'', γ''' u. s. w. bezeichnet werden.

§. 21.

Aufgabe. Eine Kraft P, welche man als zu einem Systeme in *einer* Ebene wirkender Kräfte gehörend betrachtet, in zwey Kräfte nach zwey auf einander senkrechten, durch den gemeinschaftlichen Angriffspunkt A gehenden Richtungen zu zerlegen.

Auflösung. 1) **Wenn man die erste Bestimmungsart der Lage der Richtungen für Kräfte in einer Ebene gebraucht,**

seyen die beiden auf einander senkrechten Richtungen, in welche die Kraft P zerlegt werden soll, die angenommene Axe aA', und eine auf ihr senkrechte, durch den Punkt A gehende, gerade Linie bB', (Fig. 17.). Wir bemerken hier auch in Beziehung auf andere in der Folge vorkommende Fälle, daß Kräfte, welche nach AA' und AB' wirken, als positiv, die nach Aa und Ab wirkenden aber als negativ angesehen werden sollen, auf ähnliche Art, wie in der analytischen Geometrie die auf AA', AB', Aa und Ab liegenden Abscissen und Ordinaten. (M. vergl. auch §. 2.) Nimmt man auf diese Bemerkung Rücksicht, so wird in Verbindung mit §. 16. aus den vier Zeichnungen in Fig. 17. erhellen, daß die beiden Seitenkräfte, in welche die Kraft P zerlegt werden soll, in allen Fällen durch die Producte

$P \mathrm{Cos}\,\alpha$ (für die in aA' wirkende Kraft)

und $P \mathrm{Sin}\,\alpha$ (für die in bB' wirkende Kraft)

dargestellt werden.

2) Gebraucht man die zweyte Bestimmungsweise der Lage der Richtungen in Beziehung auf in einer Ebene wirkende Kräfte,

so seyen wieder die beiden Axen, auf welche die Richtung der Kraft P bezogen wird, die Richtungen, nach welchen diese Kraft in zwey Seitenkräfte zerlegt werden soll. Aus den vier Zeichnungen in Fig. 18. wird leicht erhellen, daß die beiden gesuchten Seitenkräfte durch die Producte

$P\mathrm{Cos}\,\alpha$ (für die in aA' wirkende Kraft)
und $P\mathrm{Cos}\,\beta$ (für die in bB' wirkende Kraft)

dargestellt werden.

§. 22.

Aufgabe. Eine gegebene Kraft P, welche man als zu einem Systeme nach willkührlichen Richtungen im Raume wirkender Kräfte gehörend betrachtet, in zwey oder in drey Kräfte nach auf einander senkrechten und durch den gemeinschaftlichen Angriffspunkt A gehenden Richtungen zu zerlegen.

Auflösung. 1) Wenn man die erste Bestimmungsweise der Lage der Richtungen in Beziehung auf nach willkührlichen Richtungen im Raume wirkende Kräfte gebraucht,

so soll die Kraft P in zwey Seitenkräfte zerlegt werden, deren eine nach einer auf der angenommenen Ebene in A senkrecht stehenden Linie, die andere aber nach der Projection der Richtung der Kraft P wirkt. Aus den vier Zeichnungen in Fig. 19. in Verbindung mit §. 20. erhellet leicht, daß die beiden gesuchten Seitenkräfte in jedem Falle durch die Producte

$P\mathrm{Cos}\,\beta$ (für die nach der Projection wirkende Kraft)
und $P\mathrm{Sin}\,\beta$ (für die senkrecht auf die angenommene Ebene wirkende Kraft)

dargestellt werden. Da $\mathrm{Sin}\,\beta$ bekanntlich immer $= -\mathrm{Sin}(-\beta)$ ist, so ist klar, daß durch das Product $P\mathrm{Sin}\,\beta$ auf die positive oder negative Lage der Richtung der senkrecht auf die angenommene Ebene wirkenden Seitenkraft Rücksicht genommen wird, wie auch die Zeichnungen in Fig. 19., wo in den beiden letzten Fällen β als negativ zu betrachten ist, deutlich zeigen. Weil aber bekanntlich immer $\text{Cos}\,\beta = \text{Cos}\,(-\beta)$ ist, so wird durch das Product $P\,\text{Cos}\,\beta$ nicht auf die Lage der Richtung der zweyten Seitenkraft in der angenommenen Ebene Rücksicht genommen, welches aber auch, wie die Folge zeigen wird, bey den Anwendungen, die wir hiervon machen werden, nicht nöthig ist. Die Producte $P\,\text{Cos}\,\beta$ sind immer positiv.

2) Wenn man die zweyte Bestimmungsweise der Lage der Richtungen in Beziehung auf nach willkührlichen Richtungen im Raume wirkende Kräfte gebraucht,

so soll die Kraft P in drey nach den angenommenen auf einander senkrechten und durch den Punkt A gehenden Axen wirkende Seitenkräfte zerlegt werden. Die nach AA', AB', AC' (Fig. 16.) wirkenden Kräfte sollen als positiv, die nach Aa, Ab, Ac wirkenden aber als negativ betrachtet werden. Ist nun AP (Fig. 20.) die nach aA', bB', cC' zu zerlegende Kraft, so erhält man, wie aus dem Satze von dem Parallelepipedon der Kräfte leicht erhellet, die drey gesuchten Seitenkräfte, wenn man von P auf die drey gegebenen Richtungslinien die Perpendikel Pp, Pq, Pr fällt. Die drey Seitenkräfte werden dann durch die Linien Ap, Aq, Ar geometrisch dargestellt. In der Figur ist der Fall vorgestellt, wenn $\alpha > 90°$, $\beta < 90°$, $\gamma < 90°$ ist. In diesem Falle ist

$$Ap = -P\,\text{Cos}\,\alpha,\quad Aq = P\,\text{Cos}\,\beta,\quad Ar = P\,\text{Cos}\,\gamma,$$

und die drey gesuchten Seitenkräfte sind

$$-Ap = P\,\text{Cos}\,\alpha,\quad Aq = P\,\text{Cos}\,\beta,\quad Ar = P\,\text{Cos}\,\gamma,$$

und werden folglich durch die drey Producte

$$P\,\text{Cos}\,\alpha,\quad P\,\text{Cos}\,\beta,\quad P\,\text{Cos}\,\gamma,$$

mit Beziehung auf die positive oder negative Lage ihrer Richtungen, ausgedrückt. Daß diese Ausdrücke der Seitenkräfte in jedem Falle gültig sind, läßt sich in jedem Falle leicht auf eine der obigen Methode ganz ähnliche Art zeigen. Der Anfänger wird leicht jeden der acht Fälle, wenn AP in einen der acht von aA', bB', cC' gebildeten körperlichen Winkel fällt, für sich betrachten können, und wird für die Seitenkräfte immer die obigen Ausdrücke finden.

§. 23.

Aufgabe. Die allgemeinen Bedingungen des Gleichgewichts mehrerer in einer Ebene auf den freyen Punkt A wirkender Kräfte P, P', P'', P''' u. s. w. zu finden.

Auflösung. 1) **Wenn man die erste Bestimmungsart der Lage der Richtungen gebraucht,** so zerlege man jede der gegebenen Kräfte nach §. 21. 1. in zwey Seitenkräfte, von denen die eine in der angenommenen Axe aA', (Fig. 15.), die andere in der auf aA' durch A senkrechten Linie bB' wirkt. Die Seitenkräfte nach aA' sind nach §. 21. 1.:

$$P\,\mathrm{Cos}\,\alpha,\ P'\,\mathrm{Cos}\,\alpha',\ P''\,\mathrm{Cos}\,\alpha'',\ P'''\,\mathrm{Cos}\,\alpha''',\ \text{u. s. w.},$$

und die Seitenkräfte nach bB':

$$P\,\mathrm{Sin}\,\alpha,\ P'\,\mathrm{Sin}\,\alpha',\ P''\,\mathrm{Sin}\,\alpha'',\ P'''\,\mathrm{Sin}\,\alpha''',\ \text{u. s. w.}$$

Nun ist klar, daß, wenn die Kräfte P, P', P'', P''' u. s. w. im Gleichgewichte sind, auch die nach aA' und bB' wirkenden Kräfte unter einander im Gleichgewichte seyn müssen, und umgekehrt. Die Kräfte nach aA' und bB' sind aber bloß unter einander im Gleichgewichte, wenn die nach aA' und bB' wirkenden Kräfte jede für sich im Gleichgewichte sind; denn es erhellet leicht, daß, wenn aus den Kräften nach aA', oder aus denen nach bB', oder aus jedem dieser beiden Systeme zu gleicher Zeit eine reelle Kraft resultirte, die nach aA' und bB' wirkenden Kräfte nicht unter einander im Gleichgewichte seyn könnten. Daher sind auch, wenn die Kräfte P, P', P'', P''' u. s. w. im Gleichgewichte sind, die nach aA' und die nach bB' wirkenden Kräfte jede für sich im Gleichgewichte, und umgekehrt; oder es ist, wenn die Kräfte P, P', P'', P''' u. s. w. im Gleichgewichte sind,

$$P \operatorname{Cos}\alpha + P' \operatorname{Cos}\alpha' + P'' \operatorname{Cos}\alpha'' + P''' \operatorname{Cos}\alpha''' + \ldots = 0$$

und $P \operatorname{Sin}\alpha + P' \operatorname{Sin}\alpha' + P'' \operatorname{Sin}\alpha'' + P''' \operatorname{Sin}\alpha''' + \ldots = 0$, und umgekehrt, (§. 2.).

Diese beiden Gleichungen nennt man allgemeine Bedingungen des Gleichgewichts mehrerer in einer Ebene auf einen freyen Punkt wirkender Kräfte. Finden nämlich für irgend einen Fall des Gleichgewichts wie oben gewisse Gleichungen statt, und tritt umgekehrt das Gleichgewicht in diesem Falle ein, wenn diese Gleichungen erfüllt werden; so nennt man diese Gleichungen allgemeine Bedingungen oder auch bloß Bedingungen des Gleichgewichts in jenem Falle. Dieser Ausdruck wird im Folgenden noch öfters gebraucht werden, und wir haben daher für nöthig gehalten, seine Bedeutung hier ein für alle Mahl genau zu bestimmen.

2) Gebraucht man die zweyte Bestimmungsweise der Lage der Richtungen,

so kann man durch ein dem vorhergehenden ganz ähnliches Raisonnement mit Hülfe von §. 21. 2. zeigen, daß, wenn die Kräfte P, P', P'', P''' u. s. w. im Gleichgewichte sind, immer

$$P \operatorname{Cos}\alpha + P' \operatorname{Cos}\alpha' + P'' \operatorname{Cos}\alpha'' + P''' \operatorname{Cos}\alpha''' + \ldots = 0$$

und $P \operatorname{Cos}\beta + P' \operatorname{Cos}\beta' + P'' \operatorname{Cos}\beta'' + P''' \operatorname{Cos}\beta''' + \ldots = 0$ ist, und umgekehrt,

so daß also auch diese Gleichungen, nach der kurz vorher gegebenen Bestimmung, Bedingungen des Gleichgewichts mehrerer in einer Ebene auf einen freyen Punkt wirkender Kräfte sind.

§. 24.

Aufgabe. Die allgemeinen Bedingungen des Gleichgewichts mehrerer nach willkührlichen Richtungen im Raume auf einen freyen Punkt wirkender Kräfte P, P', P'', P''' u. s. w. zu finden.

Auflösung. 1) Gebraucht man die erste Bestimmungsart der Lage der Richtungen in dem vorliegenden Falle,

so zerlege man jede der gegebenen Kräfte auf die in §. 22. 1. gelehrte Art in zwey Seitenkräfte nach den Projectionen der Richtungen und nach einer auf der angenommenen Ebene in dem Angriffspunkte senkrechten geraden Linie. Die Kräfte nach der Senkrechten sind nach §. 22. 1.:

$P \operatorname{Sin}\beta$, $P' \operatorname{Sin}\beta'$, $P'' \operatorname{Sin}\beta''$, $P''' \operatorname{Sin}\beta'''$, u. s. w.,

mit Berücksichtigung ihrer positiven oder negativen Wirkung in Beziehung auf den Punkt A. Die Kräfte nach den Projectionen sind

$P \operatorname{Cos}\beta$, $P' \operatorname{Cos}\beta'$, $P'' \operatorname{Cos}\beta''$, $P''' \operatorname{Cos}\beta'''$, u. s. w.,

welche immer positiv sind. Durch ein dem in §. 23. 1. angewandten ganz ähnliches Raisonnement läßt sich zeigen, daß, wenn die gegebenen Kräfte unter einander im Gleichgewichte sind, jedes der beiden letztern durch die Zerlegung erhaltenen Systeme für sich im Gleichgewichte seyn muß, und umgekehrt, so daß also, wie aus §. 23. 1. folgt, wenn die Kräfte P, P', P'', P''' u. s. w. im Gleichgewichte sind, immer

$$P \operatorname{Sin}\beta + P' \operatorname{Sin}\beta' + P'' \operatorname{Sin}\beta'' + P''' \operatorname{Sin}\beta''' + \ldots = 0,$$
$$P \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Cos}\alpha + P' \operatorname{Cos}\beta' \operatorname{Cos}\alpha' + P'' \operatorname{Cos}\beta'' \operatorname{Cos}\alpha'' + \ldots = 0,$$
$$P \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Sin}\alpha + P' \operatorname{Cos}\beta' \operatorname{Sin}\alpha' + P'' \operatorname{Cos}\beta'' \operatorname{Sin}\alpha'' + \ldots = 0$$

ist, und umgekehrt.

Diese Gleichungen sind also allgemeine Bedingungen des Gleichgewichts mehrerer nach willkührlichen Richtungen im Raume auf einen freyen Punkt wirkender Kräfte.

2) Gebraucht man die zweyte Bestimmungsart der Lage der Richtungen für nach willkührlichen Richtungen im Raume wirkende Kräfte,

so zerlege man jede der gegebenen Kräfte nach §. 22. 2. in drey Seitenkräfte nach den drey angenommenen Axen, so erhellet wieder wie in §. 23. 1., daß, wenn die gegebenen Kräfte im Gleichgewichte sind, jedes der drey neuen durch die Zerlegung erhaltenen Systeme für sich im Gleichgewichte seyn muß, und umgekehrt.

Sind also die Kräfte P, P', P'', P''' u. s. w. im Gleichgewichte, so ist nach §. 22. 2. und §. 2.:

$$P \operatorname{Cos} \alpha + P' \operatorname{Cos} \alpha' + P'' \operatorname{Cos} \alpha'' + P''' \operatorname{Cos} \alpha''' + \ldots = 0,$$
$$P \operatorname{Cos} \beta + P' \operatorname{Cos} \beta' + P'' \operatorname{Cos} \beta'' + P''' \operatorname{Cos} \beta''' + \ldots = 0,$$
$$P \operatorname{Cos} \gamma + P' \operatorname{Cos} \gamma' + P'' \operatorname{Cos} \gamma'' + P''' \operatorname{Cos} \gamma''' + \ldots = 0,$$

und umgekehrt.

Diese Gleichungen sind also auch Bedingungen des Gleichgewichts mehrerer nach willkührlichen Richtungen im Raume auf einen freyen Punkt wirkender Kräfte.

§. 25.

Aufgabe. Größe und Richtung der den an dem Punkte A wirkenden Kräften P, P', P'', P''' u. s. w. Aequipollenten zu finden.

Auflösung. 1) Die Richtungen der gegebenen Kräfte liegen alle in einer Ebene.

Die zweyte Bestimmungsart der Lage der Richtungen gebrauchend, sey R' die Größe der Aequipollenten, und φ, ψ die von ihrer Richtung mit den angenommenen Axen eingeschlossenen Winkel, nach den Bestimmungen in §. 20. 2. Da die Kräfte R', P, P', P'', P''' u. s. w. im Gleichgewichte seyn sollen, so ist nach §. 23. 2.:

$$R' \operatorname{Cos} \varphi + P \operatorname{Cos} \alpha + P' \operatorname{Cos} \alpha' + P'' \operatorname{Cos} \alpha'' + \ldots = 0,$$
$$R' \operatorname{Cos} \psi + P \operatorname{Cos} \beta + P' \operatorname{Cos} \beta' + P'' \operatorname{Cos} \beta'' + \ldots = 0,$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$P \operatorname{Cos} \alpha + P' \operatorname{Cos} \alpha' + P'' \operatorname{Cos} \alpha'' + \ldots = \mathfrak{A},$$
$$P \operatorname{Cos} \beta + P' \operatorname{Cos} \beta' + P'' \operatorname{Cos} \beta'' + \ldots = \mathfrak{B}$$

setzen:

$$R' \operatorname{Cos} \varphi + \mathfrak{A} = 0, \quad R' \operatorname{Cos} \psi + \mathfrak{B} = 0;$$
$$R' \operatorname{Cos} \varphi = -\mathfrak{A}, \quad R' \operatorname{Cos} \psi = -\mathfrak{B};$$
$$R'^2 . \operatorname{Cos} \varphi^2 = \mathfrak{A}^2, \quad R'^2 . \operatorname{Cos} \psi^2 = \mathfrak{B}^2;$$
$$R'^2 . (\operatorname{Cos} \varphi^2 + \operatorname{Cos} \psi^2) = \mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2.$$

Aus Fig. 18. erhellet aber, daß immer $\varphi + \psi = 90^\circ$, oder $\varphi - \psi = 90^\circ$, oder $\varphi + \psi = 270^\circ$, oder $\psi - \varphi = 90^\circ$, d. i. $\psi = 90^\circ - \varphi$, oder $\psi = \varphi - 90^\circ$, oder $\psi = 270^\circ - \varphi$, oder $\psi = 90^\circ + \varphi$, und folglich

$\mathrm{Cos}\,\psi = \mathrm{Cos}\,90^\circ . \mathrm{Cos}\,\varphi + \mathrm{Sin}\,90^\circ . \mathrm{Sin}\,\varphi = \mathrm{Sin}\,\varphi$,
oder $\mathrm{Cos}\,\psi = \mathrm{Cos}\,\varphi . \mathrm{Cos}\,90^\circ + \mathrm{Sin}\,\varphi . \mathrm{Sin}\,90^\circ = \mathrm{Sin}\,\varphi$,
oder $\mathrm{Cos}\,\psi = \mathrm{Cos}\,270^\circ . \mathrm{Cos}\,\varphi + \mathrm{Sin}\,270^\circ . \mathrm{Sin}\,\varphi = -\mathrm{Sin}\,\varphi$,
oder $\mathrm{Cos}\,\psi = \mathrm{Cos}\,90^\circ . \mathrm{Cos}\,\varphi - \mathrm{Sin}\,90^\circ . \mathrm{Sin}\,\varphi = -\mathrm{Sin}\,\varphi$,
also immer $\mathrm{Cos}\,\psi = \pm \mathrm{Sin}\,\varphi$, und folglich $\mathrm{Cos}\,\psi^2 = \mathrm{Sin}\,\varphi^2$ ist. Daher immer

$$\mathrm{Cos}\,\varphi^2 + \mathrm{Cos}\,\psi^2 = \mathrm{Cos}\,\varphi^2 + \mathrm{Sin}\,\varphi^2 = 1,$$

und folglich

$$R'^2 = \mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2, \quad R' = \sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2},$$

wodurch die Größe der Resultirenden bestimmt ist.

Aus den Gleichungen

$$R'\,\mathrm{Cos}\,\varphi = -\mathfrak{A}, \quad R'\,\mathrm{Cos}\,\psi = -\mathfrak{B}$$

folgt:

$$\mathrm{Cos}\,\varphi = -\frac{\mathfrak{A}}{R'} = -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2}},$$

$$\mathrm{Cos}\,\psi = -\frac{\mathfrak{B}}{R'} = -\frac{\mathfrak{B}}{\sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2}},$$

wodurch φ und ψ, welche nie größer als 180° werden, und also nun Größe und Richtung der Aequipollenten völlig bestimmt sind.

Die Resultirende R ist $= R'$, und der Aequipollenten direct entgegengesetzt. Die von ihrer Richtung mit den angenommenen Axen eingeschlossenen Winkel sind, wie leicht erhellet, $180^\circ - \varphi$ und $180^\circ - \psi$.

Man merke hier auch die Gleichung

$$\mathrm{Cos}\,\varphi^2 + \mathrm{Cos}\,\psi^2 = 1,$$

welche in der Folge von Nutzen seyn kann. Also

$$\mathrm{Cos}\,\psi = \pm \mathrm{Sin}\,\varphi.$$

Um die Gleichung der geraden Linie zu bestimmen, in welcher die Richtung der Resultirenden und Aequipollenten liegt, nehme man aA' (Fig. 15.) als Axe der x, bB' als Axe der y, und A als Anfang der Coordinaten an. Der Winkel, welchen die gerade Linie, deren Gleichung gesucht wird, mit dem positiven Theile AA' der Axe der x einschließt, sey $= \varepsilon$. Man muß folgende Fälle unterscheiden:

a) Liegt die Richtung der Aequipollenten in dem Winkel $B'AA'$; so ist offenbar $\varepsilon = \varphi$, und $\mathrm{Cos}\,\psi = \mathrm{Sin}\,\varphi$. Also

$$\mathrm{Tg}\,\varepsilon = \mathrm{Tg}\,\varphi = \frac{\mathrm{Sin}\,\varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi} = \frac{\mathrm{Cos}\,\psi}{\mathrm{Cos}\,\varphi} = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}.$$

b) Liegt die Richtung der Aequipollenten in dem Winkel aAB'; so ist wieder offenbar $\varepsilon = \varphi$, und $\mathrm{Cos}\,\psi = \mathrm{Sin}\,\varphi$, weil $\mathrm{Cos}\,\psi$ positiv, da $\psi < 90°$, und $\mathrm{Sin}\,\varphi$ positiv, weil $\varphi > 90°$, aber $< 180°$. Also

$$\mathrm{Tg}\,\varepsilon = \mathrm{Tg}\,\varphi = \frac{\mathrm{Sin}\,\varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi} = \frac{\mathrm{Cos}\,\psi}{\mathrm{Cos}\,\varphi} = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}.$$

c) Liegt die Richtung der Aequipollenten in dem Winkel aAb; so ist $\varepsilon = 180° - \varphi$, weil ε der Neigungswinkel der ganzen über A hinaus verlängerten Linie, in welcher die Richtung der Resultirenden und Aequipollenten liegt, gegen den positiven Theil AA' der Axe der x ist. ψ sowohl als auch φ ist $> 90°$, aber $< 180°$, und folglich $\mathrm{Cos}\,\psi = -\mathrm{Sin}\,\varphi$, da $\mathrm{Cos}\,\psi$ negativ, $\mathrm{Sin}\,\varphi$ aber positiv ist. Also

$$\mathrm{Tg}\,\varepsilon = -\mathrm{Tg}\,\varphi = \frac{-\mathrm{Sin}\,\varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi} = \frac{\mathrm{Cos}\,\psi}{\mathrm{Cos}\,\varphi} = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}.$$

d) Liegt die Richtung der Aequipollenten in dem Winkel bAA'; so ist $\varepsilon = 180° - \varphi$, wie vorher. ψ ist $> 90°$ und $< 180°$, aber $\varphi < 90°$. Also $\mathrm{Cos}\,\psi = -\mathrm{Sin}\,\varphi$, weil $\mathrm{Cos}\,\psi$ negativ, $\mathrm{Sin}\,\varphi$ aber positiv ist. Also

$$\mathrm{Tg}\,\varepsilon = -\mathrm{Tg}\,\varphi = \frac{-\mathrm{Sin}\,\varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi} = \frac{\mathrm{Cos}\,\psi}{\mathrm{Cos}\,\varphi} = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}},$$

wie vorher.

Es ist also immer $\mathrm{Tg}\,\varepsilon = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}$, und folglich die gesuchte Gleichung:

$$y = x\,\mathrm{Tg}\,\varepsilon = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}\,x.$$

(M. vergl. mein Lehrbuch der Kegelschnitte, S. 16. ff.) Also auch

$$\mathfrak{A}y = \mathfrak{B}x, \text{ oder } \mathfrak{A}y - \mathfrak{B}x = 0.$$

2) Wirken die gegebenen Kräfte nach willkührlichen Richtungen im Raume,

so ist, wenn wir die Winkel, unter welchen die Richtungen der Aequipollenten gegen die drey angenommenen Axen, (wir gebrauchen die zweyte Bestimmungsart der Lage der Richtungen,) geneigt sind, durch φ, ψ, χ bezeichnen, nach §. 24.2. für das Gleichgewicht:

$$R' \operatorname{Cos}\varphi + P\operatorname{Cos}\alpha + P'\operatorname{Cos}\alpha' + P''\operatorname{Cos}\alpha'' + \ldots = 0,$$
$$R' \operatorname{Cos}\psi + P\operatorname{Cos}\beta + P'\operatorname{Cos}\beta' + P''\operatorname{Cos}\beta'' + \ldots = 0,$$
$$R' \operatorname{Cos}\chi + P\operatorname{Cos}\gamma + P'\operatorname{Cos}\gamma' + P''\operatorname{Cos}\gamma'' + \ldots = 0,$$

oder, wenn wir

$$P\operatorname{Cos}\alpha + P'\operatorname{Cos}\alpha' + P''\operatorname{Cos}\alpha'' + \ldots = \mathfrak{A},$$
$$P\operatorname{Cos}\beta + P'\operatorname{Cos}\beta' + P''\operatorname{Cos}\beta'' + \ldots = \mathfrak{B},$$
$$P\operatorname{Cos}\gamma + P'\operatorname{Cos}\gamma' + P''\operatorname{Cos}\gamma'' + \ldots = \mathfrak{C}$$

setzen:

$$R'\operatorname{Cos}\varphi + \mathfrak{A} = 0, \quad R'\operatorname{Cos}\psi + \mathfrak{B} = 0, \quad R'\operatorname{Cos}\chi + \mathfrak{C} = 0;$$
$$R'\operatorname{Cos}\varphi = -\mathfrak{A}, \quad R'\operatorname{Cos}\psi = -\mathfrak{B}, \quad R'\operatorname{Cos}\chi = -\mathfrak{C};$$
$$R'^2.\operatorname{Cos}\varphi^2 = \mathfrak{A}^2, \quad R'^2.\operatorname{Cos}\psi^2 = \mathfrak{B}^2, \quad R'^2.\operatorname{Cos}\chi^2 = \mathfrak{C}^2;$$
$$R'^2.(\operatorname{Cos}\varphi^2 + \operatorname{Cos}\psi^2 + \operatorname{Cos}\chi^2) = \mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2.$$

Bezeichnen jetzt ein Mahl φ', ψ', χ' die spitzen Winkel, welche die Richtung der Aequipollenten mit den zunächst liegenden Theilen der drey angenommenen Axen einschließt; so ist nach §. 18.:

$$\operatorname{Cos}\varphi'^2 + \operatorname{Cos}\psi'^2 + \operatorname{Cos}\chi'^2 = 1.$$

Es erhellet aber leicht, daß die Winkel φ, ψ, χ entweder die Winkel φ', ψ', χ' selbst sind, oder einen oder einige derselben zu 180° ergänzen. Daher ist immer, wie leicht aus den ersten Elementen der Trigonometrie erhellet, zwar nicht

$$\operatorname{Cos}\varphi = \operatorname{Cos}\varphi', \quad \operatorname{Cos}\psi = \operatorname{Cos}\psi', \quad \operatorname{Cos}\chi = \operatorname{Cos}\chi';$$

aber

$$\operatorname{Cos}\varphi = \pm\operatorname{Cos}\varphi', \quad \operatorname{Cos}\psi = \pm\operatorname{Cos}\psi', \quad \operatorname{Cos}\chi = \pm\operatorname{Cos}\chi';$$

und folglich

$$\operatorname{Cos}\varphi^2 = \operatorname{Cos}\varphi'^2, \quad \operatorname{Cos}\psi^2 = \operatorname{Cos}\psi'^2, \quad \operatorname{Cos}\chi^2 = \operatorname{Cos}\chi'^2.$$

Also auch immer

$$\mathrm{Cos}\,\varphi^2 + \mathrm{Cos}\,\psi^2 + \mathrm{Cos}\,\chi^2 = 1;$$

eine bemerkenswerthe Gleichung, welche öfters angewandt wird. Hieraus, verglichen mit dem Obigen, folgt, daß

$$R'^2 = \mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2, \quad R' = \sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2},$$

$$\mathrm{Cos}\,\varphi = -\frac{\mathfrak{A}}{R'} = -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2}},$$

$$\mathrm{Cos}\,\psi = -\frac{\mathfrak{B}}{R'} = -\frac{\mathfrak{B}}{\sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2}},$$

$$\mathrm{Cos}\,\chi = -\frac{\mathfrak{C}}{R'} = -\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2}}.$$

Hierdurch sind Lage und Größe der Aequipollenten völlig bestimmt, da keiner der Winkel φ, ψ, χ größer als 180° wird.

Die Resultirende ist $= R'$, und die Neigungswinkel ihrer Richtung gegen die drey angenommenen Axen sind $180° - \varphi$, $180° - \psi$, $180° - \chi$.

Man nehme aA', bB', cC' (Fig. 20.) als Axen der x, y, z, und AA', AB', AC' als ihre positiven Theile an. Die Gleichungen der Projectionen der geraden Linie, in welcher die Richtungen der Aequipollenten und Resultirenden liegen, auf die Ebene der xz und yz sind

$$x = Az \text{ und } y = Bz;$$

weil die Linie durch den Anfang A der Coordinaten geht. (M. s. mein Lehrbuch der Kegelschnitte, §. 9.)

Die Coordinaten der Endpunkte der Projectionen der geometrischen Darstellung der Kraft R' seyen x', y', z'; so ist

$$x' = Az', \quad y' = Bz'.$$

Denkt man sich aber nun die Kraft R' nach den drey angenommenen Axen aA', bB', cC' in drey Seitenkräfte zerlegt, so erhellet mit Hülfe von Elem. lib. XI. prop. XI. leicht, daß die Coordinaten x', y', z' diesen Seitenkräften in jedem Falle gleich sind, und daß folglich nach §. 22. 2.:

$$x' = R'\,\mathrm{Cos}\,\varphi, \quad y' = R'\,\mathrm{Cos}\,\psi, \quad z' = R'\,\mathrm{Cos}\,\chi.$$

Also $\dfrac{x'}{z'} = \dfrac{\mathrm{Cos}\,\varphi}{\mathrm{Cos}\,\chi}$, $\dfrac{y'}{z'} = \dfrac{\mathrm{Cos}\,\psi}{\mathrm{Cos}\,\chi}$.

Aber auch $\frac{x'}{z'} = A$, $\frac{y'}{z'} = B$, und folglich

$$A = \frac{\operatorname{Cos}\varphi}{\operatorname{Cos}\chi},\ B = \frac{\operatorname{Cos}\psi}{\operatorname{Cos}\chi}.$$

Also $x = \frac{\operatorname{Cos}\varphi}{\operatorname{Cos}\chi}.z$, $y = \frac{\operatorname{Cos}\psi}{\operatorname{Cos}\chi}.z$,

oder $x \operatorname{Cos}\chi = z \operatorname{Cos}\varphi$, $y \operatorname{Cos}\chi = z \operatorname{Cos}\psi$.

Nach dem Vorhergehenden ist aber

$$\operatorname{Cos}\varphi = -\frac{\mathfrak{A}}{R'},\ \operatorname{Cos}\psi = -\frac{\mathfrak{B}}{R'},\ \operatorname{Cos}\chi = -\frac{\mathfrak{C}}{R'}.$$

Also $\frac{\operatorname{Cos}\varphi}{\operatorname{Cos}\chi} = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}}$, $\frac{\operatorname{Cos}\psi}{\operatorname{Cos}\chi} = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}}$, und folglich

$$x = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}}z,\ y = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}}z,$$

oder $\mathfrak{C}x = \mathfrak{A}z$, $\mathfrak{C}y = \mathfrak{B}z$, woraus $\mathfrak{B}x = \mathfrak{A}y$.

Dies sind die Gleichungen der Projectionen der geraden Linie, in welcher die Richtungen der Resultirenden und Aequipollenten liegen. Je zwey dieser Gleichungen sind also als die Gleichungen der geraden Linie, in welcher die Richtungen der Resultirenden und Aequipollenten liegen, anzusehen. (M. s. Essai de Géométrie analytique, appliquée aux courbes et aux surfaces du second ordre, par J. B. Biot, cinquième édition, Paris 1813, 8., p. 43.)

Bezeichnen jetzt x', y', z' die Coordinaten in Beziehung auf ein neues System coordinirter Ebenen, welche mit den primitiven Coordinatenebenen parallel sind, und will man die Linie, in welcher die Richtungen der Aequipollenten und Resultirenden liegen, auf jenes neue System beziehen; so muß man, wenn a, b, c die Coordinaten des Anfangspunktes des neuen Systems in Beziehung auf das primitive bezeichnen, in den obigen Gleichungen

$$x' + a,\ y' + b,\ z' + c$$

für x, y, z setzen, wie aus §. 35. oder §. 38. 1. meines Lehrbuches der Kegelschnitte leicht erhellet. Durch diese Substitution erhält man folgende Gleichungen:

$$\mathfrak{C}(x'+a)=\mathfrak{A}(z'+c),$$
$$\mathfrak{C}(y'+b)=\mathfrak{B}(z'+c),$$
$$\mathfrak{B}(x'+a)=\mathfrak{A}(y'+b).$$

Bedeuten jetzt a', b' c' die Coordinaten des Anfangspunktes des primitiven Systems in Beziehung auf das secundäre; so ist offenbar

$$a=-a',\ b=-b',\ c=-c',$$

und folglich

$$\mathfrak{C}(x'-a')=\mathfrak{A}(z'-c'),$$
$$\mathfrak{C}(y'-b')=\mathfrak{B}(z'-c'),$$
$$\mathfrak{B}(x'-a')=\mathfrak{A}(y'-b').$$

§. 26.

Soll die Richtung und Größe der Resultirenden mehrerer auf einen freyen Punkt A (Fig. 21.) wirkender Kräfte durch Construction gefunden werden, so mag man am leichtesten auf folgende Art verfahren.

Die Linien AP, AP', AP'', AP''', AP'''' seyen die geometrischen Darstellungen der gegebenen Kräfte. Durch P ziehe man die Linie Pr parallel und gleich mit AP', durch r die Linie rr' parallel und gleich mit AP'', durch r' die Linie $r'r''$ parallel und gleich mit AP''', und durch r'' die Linie $r''R$ parallel und gleich mit AP''''. Zieht man sodann AR, so ist diese die geometrische Darstellung der gesuchten Resultirenden. Zieht man nämlich Ar, rP', Ar', $r'P''$, Ar'', $r''P'''$ und $P'''R$, so erhellet leicht, daß die Vierecke $APrP'$, $Arr'P''$, $Ar'r''P'''$ und $Ar''RP''''$ Parallelogramme sind. Daher ist Ar die Resultirende von AP und AP'; Ar' die Resultirende von Ar und AP'', d. i. von AP, AP' und AP''; Ar'' die Resultirende von Ar' und AP''', d. i. von AP, AP', AP'' und AP'''; AR die Resultirende von Ar'' und AP'''', d. i. von AP, AP', AP'', AP''' und AP'''', wie verlangt wurde. Es erhellet übrigens leicht, daß die gelehrte Construction ausführbar ist, die Richtungen der gegebenen Kräfte mögen alle in einer Ebene oder in verschiedenen Ebenen liegen. Auch der Beweis kann immer auf die obige Art geführt werden. Die Aequipollente ist der Resultirenden gleich, der Lage nach ihr aber direct entgegengesetzt.

Zweytes Kapitel.

Von dem Gleichgewichte nach parallelen Richtungen an einem freyen Systeme wirkender Kräfte.

§. 27.

Die nach parallelen Richtungen, welche alle in einer oder in mehrern Ebenen liegen können, wirkenden Kräfte sollen auch in diesem Kapitel durch P, P', P'', P''' u. s. w., und ihre Angriffspunkte respective durch A, A', A'', A''' u. s. w. bezeichnet werden. Es wird angenommen, daß alle diese Punkte mit einander in einer festen Verbindung stehen und ein System von Punkten bilden. Uebrigens denken wir uns das ganze System als frey, kein Punkt in demselben wird als fest und unbeweglich angenommen; nur die Verbindung und gegenseitige Lage der Angriffspunkte wird als unveränderlich gedacht. Die Bedingungen des Gleichgewichts bey Systemen, in denen ein Punkt oder eine gerade Linie als fest gedacht wird, werden späterhin in einem besondern Kapitel betrachtet.

Die Resultirende paralleler Kräfte ist auf ähnliche Art, wie im ersten Kapitel, eine Kraft, welche dieselbe Wirkung, wie die parallelen Kräfte, hervorbringt; die Aequipollente dagegen ist eine Kraft, welche den parallelen Kräften das Gleichgewicht hält. Ueberhaupt gelten diese beiden Begriffe nicht bloß in dem Falle des vorigen und dieses Kapitels, sondern für Kräfte überhaupt, welche auf irgend eine Art in ein ganz freyes oder zum Theil festes System von Punkten wirken, welches wir hier ein für alle Mahl bemerken. Die Resultirende soll durch R, die Aequipollente durch R' bezeichnet werden. R ist immer $= R'$, die Richtungen dieser beiden Kräfte sind aber einander direct entgegengesetzt.

Wir betrachten nun zuerst den Fall, wenn die Richtungen aller parallelen Kräfte in einer Ebene liegen.

I.

Von dem Gleichgewichte paralleler Kräfte, deren Richtungen alle in einer Ebene liegen.

A.

Für zwey Kräfte.

§. 28.

Zwey parallele Kräfte P und P' (Fig. 22.) können offenbar nur im Gleichgewichte seyn, wenn sie nach entgegengesetzten Seiten hin wirken. Wären aber die Richtungen wie in der Figur einander nicht **gerade** entgegengesetzt, so ziehe man zwischen den Richtungen das Perpendikel AA', und man wird sich vorstellen können, daß die beiden Kräfte an den Endpunkten dieses Perpendikels wirken, weil man jede Kraft unbeschadet ihrer Wirkung in jeden Punkt ihrer Richtung versetzen kann, (Einleit. 7. 2.). Wären nun die beiden Kräfte P und P' mit einander im Gleichgewichte, so würden sie auch nach Einleit. 7. 3. noch im Gleichgewichte seyn, wenn man sich einen Punkt C dieser Linie als fest, und die Linie AA' um diesen Punkt als drehbar dächte. Daß aber unter dieser Annahme kein Gleichgewicht statt finden kann, ist klar, weil die Kräfte P und P' die Linie AA' offenbar mit vereinter Gewalt von der linken nach der rechten Seite hin, (nämlich von A ausgehend,) um den Punkt C drehen werden. **Es können also zwey nach parallelen Richtungen wirkende Kräfte nur dann im Gleichgewichte seyn, wenn ihre Richtungen einander gerade entgegengesetzt sind, wozu denn, als nothwendige Bedingung des Gleichgewichts, noch kommen muß, daß die beiden Kräfte einander gleich seyn müssen,** (§. 2.).

In einem Systeme paralleler Kräfte werden immer die Kräfte, welche nach einer Seite hin, (in diesem Kapitel nach unten,) wirken, alle als **positiv**, und die nach der andern Seite, (in diesem Kapitel also nach oben,) wirkenden Kräfte als negativ betrachtet, die Richtungen der Kräfte mögen alle in einer Ebene oder in verschiedenen Ebenen liegen.

Auch wird in einem Systeme paralleler Kräfte, deren Richtungen alle in einer Ebene liegen, eine gerade Linie, welche die Richtungen aller Kräfte durchschneidet, und in ihr ein bestimmter Punkt angenommen, worauf die Kräfte bezogen werden. Die angenommene Linie soll die Axe und der Punkt der Anfang genannt werden. Die Entfernungen der Punkte, in welchen die Richtungen der Kräfte die Axe schneiden, von dem Anfange, sollen die Abscissen der Kräfte genannt, und in Beziehung auf die Kräfte P, P', P'', P''' u. s. w. durch x, x', x'', x''' u. s. w. bezeichnet werden. Sie werden ganz den Grundsätzen der analytischen Geometrie gemäß als positiv oder negativ betrachtet, je nachdem sie auf der einen, (gewöhnlich der rechten,) oder andern, (d. i. der linken,) Seite des Anfanges liegen.

Unter diesen Voraussetzungen kann man, wie ohne weitere Erläuterung erhellen wird, die oben ausgesprochenen Bedingungen des Gleichgewichts zwischen zwey parallelen Kräften analytisch auf folgende Art ausdrücken:

Wenn zwey Kräfte P und P', deren Richtungen einander parallel sind, im Gleichgewichte sind, so ist für irgend eine angenommene Axe und jeden Anfang

$$P + P' = 0, \quad Px + P'x' = 0,$$

und umgekehrt.

B.

Für drey Kräfte.

§. 29.

Es ist klar, daß drey Kräfte P, P', P'' nicht im Gleichgewichte seyn können, wenn sie alle drey nach einer Seite hin wirken. Daher müssen immer zwey nach einer, und die dritte muß nach der entgegengesetzten Seite hin wirken. Eben so leicht erhellet auch, daß, soll ein Gleichgewicht statt finden können, zwischen den Richtungen der beiden nach einerley Seite hin wirkenden Kräfte die Richtung der dritten Kraft liegen muß. Gesetzt nämlich, die drey Kräfte P, P', P'' in Fig. 23. könnten unter einander im Gleichgewichte seyn, so ziehe man eine auf den drey Richtungen senkrechte Linie $AA'A''$. Nach Einleit. 7. 2. kann man die drey Kräfte, ohne das Gleichgewicht zu stören, in die Punkte A, A', A'' versetzen; auch wird nach Einleit. 7. 3. das Gleichgewicht noch fortbestehen, wenn man sich die Linie $AA'A''$ um einen festen Punkt C drehbar denkt. Daß dies aber nicht möglich ist, fällt in die Augen, denn die drey Kräfte werden die Linie $AA'A''$ offenbar mit vereinter Gewalt von der linken nach der rechten Hand hin, (wenn man sich nämlich die Bewegung als bey A anfangend denkt,) um den Punkt C drehen. Die drey Kräfte P, P', P'' können also nicht unter einander im Gleichgewichte seyn, und es muß demnach, wie oben behauptet wurde, immer zwischen den Richtungen der beiden nach einerley Seite hin wirkenden Kräfte die Richtung der dritten Kraft liegen.

§. 30.

Wir wollen nun annehmen, P und P'' seyen die beiden nach einerley Seite hin wirkenden Kräfte; so ist klar, daß, sollen die drey Kräfte P, P', P'' unter einander im Gleichgewichte seyn, die Kraft P' der aus P und P'' Resultirenden gleich und gerade entgegengesetzt seyn muß. Es wird daher darauf ankommen, diese Resultirende der Größe und Richtung nach zu bestimmen. Zu dem Ende denke man sich irgend eine Linie $AA'A''$ (Fig. 24.) gezogen, welche die Richtungen der Kräfte P und P'' in den Punkten A und A'' schneidet, bringe an den Punkten A und A'' irgend zwey gleiche in der Linie $AA'A''$ nach entgegengesetzten Seiten hin wirkende Kräfte $AQ = A''Q = Q$ an, und vollende die Parallelogramme $AQPB$ und $A''QP''C$; so kann man, nach dem Satze von dem Parallelogramm der Kräfte, anstatt der Kräfte P, P'' die

Kräfte AQ, AB, $A''Q$, $A''C$ setzen, oder, weil AQ und $A''Q$, als gleich und gerade entgegengesetzt, einander offenbar aufheben, auch bloß die beiden Kräfte AB und $A''C$. Verlängert man nun die Linien AB und $A''C$, so werden sie sich offenbar in einem gewissen Punkte D schneiden, weil $\angle BAA'' + \angle CA''A < \angle PAA'' + \angle P''A''A$, d. i. $< 180°$ ist. Die Kräfte AB und CA'' kann man sich unbeschadet ihrer Wirkung in den Punkt D versetzt denken, indem man auf den Verlängerungen der Linien AD und $A''D$ die Linie $DF = AB$ und $DE = A''C$ nimmt. Vollendet man nun das Parallelogramm $DEFG$, und zieht die Diagonale DG, so ist diese die geometrische Darstellung der aus DF und DE, d. i. aus $A''C$ und AB, oder aus P und P'' Resultirenden, deren Richtung und Größe nun auf folgende Art in Beziehung auf Richtung und Größe der Kräfte P und P'' noch näher bestimmt werden können.

Man verlängere $A''P''$, bis $P''H = AP$ ist, und ziehe CH; so ist $\Delta CP''H \cong \Delta APB$. Denn es ist $\angle CP''H = \angle AA''P'' = \angle PAQ = \angle APB$, $CP'' = A''Q = AQ = PB$, und $P''H = AP$ nach der Construction. Also $\angle HCP'' = \angle PBA$, und $CH = AB$. Folglich $\angle GED = \angle FDA'' = \angle DAA'' + \angle DA''A = \angle PBA + \angle A''CP'' = \angle HCP'' + \angle A''CP'' = \angle HCA''$. Nun ist aber auch nach der Construction $A''C = DE$, und $CH = AB = DF = GE$. Also $\Delta A''CH \cong \Delta DEG$, und folglich $DG = A''H = A''P'' + P''H = A''P'' + AP$, und $\angle EDG = \angle CA''H$; folglich DG oder $A'G$ parallel mit $A''P''$ und AP. Es ist demnach offenbar $\Delta APB \sim \Delta ADA'$, und $\Delta A''CP'' \sim \Delta A'DA''$, wenn A' der Punkt ist, in welchem die Richtung der Resultirenden die Linie AA'' schneidet. Also

$$AP : PB = A'D : AA',$$
$$CP'' : A''P'' = A'A'' : A'D;$$

und folglich, weil $PB = AQ = A''Q = CP''$ ist:

$$AP : A''P'' = A'A'' : AA', \text{ oder}$$
$$P : P'' = A'A'' : AA', \text{ oder}$$
$$P . AA' = P'' . A'A''.$$

Aus dem Bisherigen erhellet also, daß die aus P und P'' Resultirende der Summe dieser beiden Kräfte gleich ist, und nach einer Richtung wirkt, welche den Richtungen der Kräfte P und P'' parallel ist. Auch ist, wenn A, A'' und A' die Durchschnittspunkte der Richtungen der Kräfte P, P'' und ihrer Resultirenden mit irgend einer geraden Linie sind, immer

$$P : P'' = A'A'' : AA', \text{ oder}$$
$$P \,.\, AA' = P'' \,.\, A'A''.$$

Sind folglich die parallelen Kräfte P, P', P'' **im Gleichgewichte, so muß offenbar die Kraft** P' **der aus** P **und** P'' **Resultirenden gleich und gerade entgegengesetzt seyn, so daß also**

$$P' = P + P'', \text{ und}$$
$$P : P'' = A'A'' : AA', \text{ oder}$$
$$P \,.\, AA' = P'' \,.\, A'A''$$

ist.

Auch kann man umgekehrt behaupten, **daß die drey parallelen Kräfte** P, P', P'' **in Fig. 24., wo** P' **zwischen** P **und** P'' **liegt, im Gleichgewichte sind, wenn** $P' = P + P''$, **und**

$$P : P'' = A'A'' : AA', \text{ oder}$$
$$P \,.\, AA' = P'' \,.\, A'A''$$

ist, weil unter dieser Voraussetzung, da die Kraft P' zwischen den nach einerley Seite wirkenden Kräften P und P'' liegt, offenbar die Kraft P' der aus P und P'' Resultirenden gleich und gerade entgegengesetzt ist.

Aus dem in diesem Paragraphen Vorgetragenen erhellet auch, daß es für zwey parallele nach einerley Seite hin wirkende Kräfte immer eine Resultirende gibt, woraus man leicht schließt, daß es für jede Anzahl nach einerley Seite hin wirkender parallelen Kräfte immer eine Resultirende gibt, weil man offenbar für die Resultirende der beiden ersten Kräfte und die dritte Kraft eine neue Resultirende, für diese und die vierte Kraft wieder eine Resultirende suchen kann, u. s. f. bis zu Ende. Die letzte Resultirende wird dann offenbar die gesuchte

Resultirende aller Kräfte seyn. Diese Bemerkung ist wegen des Folgenden wichtig.

§. 31.

Wir wollen jetzt annehmen, die drey Kräfte P, P', P'' seyen unter einander im Gleichgewichte; so muß nach §. 29. die eine, (wir wollen setzen P',) zwischen den beiden andern liegen, und die erstere muß den beiden letztern entgegengesetzt wirken, wie in Fig. 25. angenommen worden. Man ziehe nun eine willkührliche Axe, welche die Richtungen der drey Kräfte in A, A', A'' schneidet, und nehme in dieser Axe einen willkührlichen Punkt M als Anfang an; so kann dieser Punkt die in Fig 25. a. b. c. d. dargestellten verschiedenen Lagen haben. Betrachtet man nun P und P'' als positiv und P' als negativ, also $-P'$ als positiv; so ist, weil die drey Kräfte im Gleichgewichte sind, nach §. 30.:

$$P + P'' = -P', \text{ oder } P + P' + P'' = 0.$$

Für den Fall Fig. 25. a. ist

$$MA = x,\quad MA' = x',\quad MA'' = x'';$$
$$AA' = MA' - MA = x' - x;$$
$$A'A'' = MA'' - MA' = x'' - x'.$$

Also nach §. 30.:

$$P(x' - x) = P''(x'' - x'),$$
$$Px' - Px = P''x'' - P''x',$$
$$(P + P'')x' = Px + P''x'',$$
$$-P'x' = Px + P''x'',$$
$$Px + P'x' + P''x'' = 0.$$

Für den Fall Fig. 25. b. ist

$$-MA = x,\quad MA' = x',\quad MA'' = x'';$$
$$AA' = MA + MA' = -x + x' = x' - x;$$
$$A'A'' = MA'' - MA' = x'' - x'.$$

Also nach §. 30. wie vorher:

$$Px + P'x' + P''x'' = 0.$$

Für den Fall Fig. 25. c. ist

$$-MA = x,\quad -MA' = x',\quad MA'' = x'';$$
$$AA' = MA - MA' = -x + x' = x' - x;$$

$$A'A'' = MA' + MA'' = -x' + x'' = x'' - x';$$

und folglich wieder

$$Px + P'x' + P''x'' = 0.$$

Für den Fall Fig. 25. d. ist

$$-MA = x, \quad -MA' = x', \quad -MA'' = x'';$$
$$AA' = MA - MA' = -x + x' = x' - x;$$
$$A'A'' = MA' - MA'' = -x' + x'' = x'' - x';$$

und folglich wieder

$$Px + P'x' + P''x'' = 0.$$

Sind also die drey Kräfte P, P', P'' im Gleichgewichte, so ist immer

$$P + P' + P'' = 0,$$

und für jede angenommene Axe und jeden Anfang

$$Px + P'x' + P''x'' = 0.$$

Man kann dieses auch umkehren. Ist nämlich für irgend eine Axe und irgend einen in ihr angenommenen Anfang

$$P + P' + P'' = 0, \text{ und}$$
$$Px + P'x' + P''x'' = 0;$$

so sind die Kräfte P, P', P'' im Gleichgewichte, welches man auf folgende Art beweisen kann. Weil $P + P' + P'' = 0$ ist, so sind offenbar zwey der Kräfte P, P', P'' nach einer, und die dritte nach der andern Seite hin gerichtet. Erstere seyen P, P''; letztere P'. Für erstere gibt es also nach §. 30. eine Resultirende R oder Aequipollente R', welche folglich mit P und P' im Gleichgewichte ist, so daß also, wenn y die der Kraft R' entsprechende Abscisse bezeichnet, nach dem Vorhergehenden

$$P + P'' + R' = 0, \quad Px + P''x'' + R'y = 0$$

ist. Aber nach der Voraussetzung

$$P + P' + P'' = 0, \quad Px + P'x' + P''x'' = 0;$$

und folglich

$$P + P' + P'' = P + P'' + R',$$
$$Px + P'x' + P''x'' = Px + P''x'' + R'y.$$

Also $P' = R'$, $P'x' = R'y$, $x' = y$; so daß folglich die Kraft P' der Kraft R' gleich ist, und die Richtungen beider

Kräfte zusammenfallen, weil sie den Richtungen der Kräfte P, P'' nach der Voraussetzung und nach §. 30. beide parallel sind, und $x' = y$ ist. Also sind, wie zu beweisen war, die Kräfte P, P', P'' im Gleichgewichte.

$P + P' + P'' = 0$ und $Px + P'x' + P''x'' = 0$ sind also die Bedingungen des Gleichgewichts zwischen drey parallelen Kräften.

C.

Für jede Anzahl von Kräften.

§. 32.

1) Seyen zuerst die vier Kräfte P, P', P'', P''' im Gleichgewichte.

Es muß offenbar unter diesen Kräften zwey geben, welche nach derselben Seite hin gerichtet sind, und für die es folglich eine Resultirende gibt. Diese beiden Kräfte seyen P und P', und R ihre Resultirende; so ist offenbar R mit P'', P''', und R', welches $= - R$, mit P, P' im Gleichgewichte, da die vier Kräfte P, P', P'', P''' nach der Voraussetzung im Gleichgewichte sind. Ist also y die Abscisse der Kraft R oder R'; so ist nach §. 31.:

$$P + P' + R' = 0, \quad Px + P'x' + R'y = 0,$$
$$P'' + P''' + R = 0, \quad P''x'' + P'''x''' + Ry = 0.$$

Also durch Addition:

$$P + P' + P'' + P''' + R + R' = 0,$$
$$Px + P'x' + P''x'' + P'''x''' + Ry + R'y = 0.$$

Aber

$$R + R' = 0, \text{ und } Ry + R'y = 0.$$

Also

$$P + P' + P'' + P''' = 0,$$
$$Px + P'x' + P''x'' + P'''x''' = 0.$$

2) Man habe jetzt fünf Kräfte P, P', P'', P''', P'''', welche unter einander im Gleichgewichte seyen;

so gibt es unter diesen Kräften gewiß wieder zwey nach derselben Seite hin wirkende Kräfte. Diese beiden Kräfte seyen P, P', und R ihre Resultirende; so sind die Kräfte P'', P''', P'''', R, und auch die Kräfte P, P', R' im Gleichgewichte. Ist also wieder y die Abscisse der Kraft R oder R'; so ist nach §. 31. und Nummer 1.:

$$P + P' + R' = 0,\quad Px + P'x' + R'y = 0;$$
$$P'' + P''' + P'''' + R = 0,\quad P''x'' + P'''x''' + P''''x'''' + Ry = 0.$$

Also

$$P + P' + P'' + P''' + P'''' + R + R' = 0,$$
$$Px + P'x' + P''x'' + P'''x''' + P''''x'''' + Ry + R'y = 0.$$

Aber

$$R + R' = 0,\quad Ry + R'y = 0;$$

und folglich

$$P + P' + P'' + P''' + P'''' = 0,$$
$$Px + P'x' + P''x'' + P'''x''' + P''''x'''' = 0.$$

3) Man könnte auf diese Art weiter gehen. Es erhellet aber schon aus dem Bisherigen deutlich die Allgemeinheit des folgenden Satzes:

Wenn mehrere parallele Kräfte P, P', P'', P''', P'''' u. s. w. im Gleichgewichte sind; so ist immer für jede angenommene Axe und jeden Anfang in derselben

$$P + P' + P'' + P''' + P'''' + \ldots = 0,$$
$$Px + P'x' + P''x'' + P'''x''' + P''''x'''' + \ldots = 0.$$

Man kann aber auch umgekehrt behaupten:

Wenn für irgend eine Axe und einen in derselben angenommenen Anfang

$$P + P' + P'' + P''' + P'''' + \ldots = 0,$$
$$Px + P'x' + P''x'' + P'''x''' + P''''x'''' + \ldots = 0$$

ist; so sind die parallelen Kräfte P, P', P'', P''' u. s. w. im Gleichgewichte.

Um dies zu beweisen, setze man, die nach einer Seite wirkenden Kräfte seyen P, P'', P'''' u. s. w., und die nach der entgegengesetzten Seite wirkenden P', P''', P''''' u. s. w.; denn daß ein Theil der Kräfte nach der einen, und die übrigen nach der andern Seite wirken müssen, ist eine unmittelbare Folge aus der ersten der beiden obigen Gleichungen. Die Resultirende der erstern sey R, und die Resultirende der letztern $\mathfrak{R}$; die Abscissen von R und $\mathfrak{R}$ in Beziehung auf die angenommene Axe und den angenommenen Anfang seyen aber respective y, z: so ist nach dem vorigen Satze

$$P + P'' + P'''' + \ldots + R' = 0,$$
$$Px + P''x'' + P''''x'''' + \ldots + R'y = 0,$$

und

$$P' + P''' + P''''' + \ldots + \mathfrak{R}' = 0,$$
$$P'x' + P'''x''' + P'''''x''''' + \ldots + \mathfrak{R}'z = 0.$$

Die Resultirenden R, $\mathfrak{R}$ oder Aequipollenten R', $\mathfrak{R}'$ sind möglich, (§. 30.), und den gegebenen Kräften, also auch unter sich, parallel.

Durch Addition erhält man aus den obigen Gleichungen:

$$P + P' + P'' + P''' + P'''' + P''''' + \ldots + R' + \mathfrak{R}' = 0,$$
$$Px + P'x' + P''x'' + P'''x''' + P''''x'''' + P'''''x''''' + \ldots$$
$$\ldots + R'y + \mathfrak{R}'z = 0.$$

Aber nach der Voraussetzung

$$P + P' + P'' + P''' + P'''' + P''''' + \ldots = 0,$$
$$Px + P'x' + P''x'' + P'''x''' + P''''x'''' + P'''''x''''' + \ldots = 0.$$

Folglich

$$R' + \mathfrak{R}' = 0, \quad R'y + \mathfrak{R}'z = 0.$$

Also $\mathfrak{R}' = -R'$, $R'y - R'z = 0$, $R'y = R'z$, $y = z$.

Die Aequipollenten R' und $\mathfrak{R}'$ sind demnach, weil sie einander parallel sind, offenbar einander gleich und gerade entgegengesetzt, so daß also die gegebenen Kräfte im Gleichgewichte sind, w. z. b. w.

Die Gleichungen

$$P + P' + P'' + P''' + P'''' + \ldots = 0,$$
$$Px + P'x' + P''x'' + P'''x''' + P''''x'''' + \ldots = 0$$

sind also die Bedingungen des Gleichgewichts paralleler Kräfte in einer Ebene in willkührlicher Anzahl.

Die angenommene Axe und der Anfang sind alle Mahl ganz willkührlich.

§. 33.

Soll die Resultirende R oder Aequipollente R' mehrerer parallelen Kräfte P, P', P'', P''' u. s. w. in einer Ebene gefunden werden, so nehme man eine willkührliche Axe und in ihr einen willkührlichen Anfang an, und bezeichne die Abscissen der gegebenen Kräfte wie vorher, die Abscisse der gesuchten Kraft aber durch y; so ist nach §. 32.:

$$P + P' + P'' + P''' + \ldots + R' = 0,$$
$$Px + P'x' + P''x'' + P'''x''' + \ldots + R'y = 0.$$

Also
$$R' = -(P + P' + P'' + P''' + \ldots),$$
oder
$$R = P + P' + P'' + P''' + \ldots,$$
$$y = \frac{Px + P'x' + P''x'' + P'''x''' + \ldots}{P + P' + P'' + P''' + \ldots}.$$

Wenn hier
$$P + P' + P'' + P''' + \ldots = 0$$
ist, ohne daß
$$Px + P'x' + P''x'' + P'''x''' + \ldots = 0$$
ist; so wird $y = \infty$, und die Resultirende oder Aequipollente ist also eine Kraft, welche gleich Null ist, und in einer unendlichen Entfernung vom Anfange wirkt. Dies zeigt an, daß es eigentlich gar keine Resultirende oder Aequipollente in dem obigen Falle gibt.

Wir wollen ein Mahl annehmen, die nach der einen Seite hin wirkenden Kräfte seyen P, P'' u. s. w., und P', P''' u. s. w. seyen die nach der entgegengesetzten Seite hin wirkenden. Die Resultirende der erstern sey R, und $\mathfrak{R}$ die der letztern. Die Abscissen dieser beiden Kräfte seyen y, z; so ist

$$P + P'' + \ldots + R' = 0, \quad Px + P''x'' + \ldots + R'y = 0;$$
$$P' + P''' + \ldots + \mathfrak{R}' = 0, \quad P'x' + P'''x''' + \ldots + \mathfrak{R}'z = 0;$$
$$R' = -(P + P'' + \ldots), \quad \mathfrak{R}' = -(P' + P''' + \ldots).$$

Aber nach der Voraussetzung
$$P + P' + P'' + P''' + \ldots = 0.$$

Also
$$P + P'' + \ldots = -(P' + P''' + \ldots),$$
und folglich $\mathfrak{R}' = -R'$, oder auch $\mathfrak{R} = -R$.

Durch Addition folgt ferner aus den obigen Gleichungen:
$Px + P'x' + P''x'' + P'''x''' + \ldots + R'y + \mathfrak{R}'z = 0.$
Nach der Voraussetzung aber

$$Px + P'x' + P''x'' + P'''x''' + \ldots \text{ nicht} = 0.$$

Also auch $R'y + \mathfrak{R}'z$ nicht $= 0$, d. i. $R'y - R'z$ nicht $= 0$, oder $y - z$ nicht $= 0$, oder y nicht $= z$.

Hieraus erhellet, daß die gegebenen parallelen Kräfte sich unter der obigen Voraussetzung nicht auf eine Kraft reduciren lassen, wie auch schon oben bemerkt ist, sondern bloß auf zwey gleiche entgegengesetzte, aber nicht gerade entgegengesetzte Kräfte.

Zwey solche gleiche entgegengesetzte, aber nicht gerade entgegengesetzte, parallele Kräfte, (un couple bey verschiedenen französischen Schriftstellern über die Statik, z. B. bey Poinsot, Garnier, u. A., in den in der Einleitung (5.) angeführten Werken,) lassen sich, ohne ihre Wirkung zu ändern, auf unendlich viele Arten durch zwey solche Kräfte ersetzen, wie auf folgende Art leicht gezeigt werden kann.

Man habe in A und B (Fig. 26.) die beiden gleichen auf- und abwärts wirkenden parallelen Kräfte P, nehme nun irgend eine Kraft Q an, und bestimme den Punkt C in der Linie AB so, daß

$$Q : P = AB : BC,$$
$$Q . BC = P . AB$$

ist. Sodann bringe man die Kraft Q in jedem der beiden Punkte B und C auf- und abwärts wirkend an, aber immer parallel mit den Richtungen der Kräfte P, wie die Figur zeigt; so wird hierdurch die Wirkung der Kräfte P in A und B offenbar nicht geändert, weil die neu angebrachten Kräfte sich je zwey einander aufheben. Da aber $P . AB = Q . BC$, und die in B aufwärts wirkende Kraft $= P + Q$ ist; so sind nach §. 30. die in A und C abwärts wirkenden Kräfte P, Q mit der in B aufwärts wirkenden Kraft $P + Q$ im Gleichgewichte, so daß man also diese Kräfte, ohne die Wirkung aller Kräfte, oder, was dasselbe ist, der Kräfte P in A und B, zu verändern, weglassen kann. Dann bleibt die in B abwärts und die in C aufwärts wirkende Kraft Q übrig, welche also dieselbe Wirkung hervorbringen, wie die Kräfte P, und folglich für diese gesetzt werden können, ohne ihre Wirkung zu ändern. Da es unendlich viele Fälle geben kann, in welchen $P.AB = Q.BC$ ist, so gibt es auch unendlich viele Paare gleicher entgegengesetzt, aber nicht gerade entgegengesetzt, wirkender parallelen Kräfte, durch welche die Kräfte P ersetzt werden können.

Nach dem Obigen kann man also auch die parallelen Kräfte P, P', P'', P''' u. s. w., wenn zwar

$$P + P' + P'' + P''' + \ldots = 0,$$

aber nicht $Px + P'x' + P''x'' + P'''x''' + \ldots = 0$ ist, auf unendlich viele Arten durch zwey gleiche entgegengesetzt, aber nicht gerade entgegengesetzt, wirkende parallele Kräfte ersetzen, nie aber auf eine einzige Kraft reduciren.

Garnier sagt S. VI. der Vorrede zu seinen angeführten Leçons de Statique: „Le couple forme dans la Stati-„que un symbole du genre de ∞, en ce sens, „qu'il y a alors l'impossibilité de remplacer l'effet de ces „deux forces par celui d'une force unique, impossibilité, „qui s'étend à deux forces quelconques non situées dans „un même plan....„

II.

Von dem Gleichgewichte paralleler Kräfte, deren Richtungen nicht alle in einer Ebene liegen.

§. 34.

Auch in diesem Abschnitte sollen die Kräfte, deren Gleichgewicht wir untersuchen, wieder durch P, P', P'', P''' u. s. w., und ihre Angriffspunkte durch A, A', A'', A''' u. s. w. bezeichnet werden. Die Lage dieser Punkte im Raume soll nach der in der analytischen Geometrie gewöhnlichen Methode bestimmt werden. Wir nehmen nämlich drey auf einander senkrechte

Ebenen als Coordinatenebenen an, und fällen auf sie von allen gegebenen Punkten Perpendikel, so werden durch diese Perpendikel die orthographischen Projectionen der gegebenen Punkte auf die angenommenen Ebenen bestimmt. Bey jeder der drey Coordinatenebenen wird eine positive und eine negative Seite angenommen. Die auf jener liegenden Perpendikel oder Coordinaten der gegebenen Punkte werden als positiv, die auf der andern liegenden als negativ betrachtet. Unter diesen Voraussetzungen seyen die Coordinaten der Angriffspunkte respective x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z''; x''', y''', z'''; u. s. w. Die Ebene, auf welche die durch x, x', x'' u. s. w. bezeichneten Perpendikel gefällt werden, heiße die Ebene der x, und man wird nun auch leicht einsehen, was man unter der Ebene der y und der Ebene der z zu verstehen hat. Auch werden wir die Durchschnittslinien der drey angenommenen Ebenen die Axen nennen, und zwar die Axe der x, oder der y, oder der z, je nachdem sie den durch x, x', x'' u. s. w. bezeichneten Coordinaten, oder den durch y, y', y'' u. s. w. bezeichneten, oder den durch z, z', z'' u. s. w. bezeichneten parallel sind. Auch soll die Ebene, in welcher die Axe der x und der y liegt, die Ebene der xy genannt werden, und ähnliche Begriffe sind mit den Ebenen der xz und yz zu verbinden. Es ist klar, daß z. B. Ebene der z und Ebene der xy eine und dieselbe Ebene bezeichnen; eben so Ebene der y und Ebene der xz; und Ebene der x und Ebene der yz. Wir werden uns nach Bequemlichkeit der einen oder der andern Bezeichnung bedienen.

§. 35.

Aufgabe. Richtung und Größe der Resultirenden R oder Aequipollenten R' mehrerer nach parallelen Richtungen im Raume wirkender Kräfte P, P', P'', P''' u. s. w. zu finden.

Auflösung. 1) Für zwey Kräfte P, P' an den Punkten A, A'.

Was zuerst die Größe der Aequipollenten betrifft, so ist nach §. 33.:

$$P + P' + R' = 0,$$

wodurch die Größe der Aequipollenten bestimmt wird. Es ist nämlich $R' = -(P + P')$, und folglich $R = P + P'$.

Was die Richtung der Aequipollenten betrifft; so erhellet zuvörderst aus dem Vorhergehenden, daß sie den Richtungen der gegebenen Kräfte parallel ist und mit ihnen in einer Ebene liegt, so daß es daher bloß darauf ankommt, einen Punkt zu bestimmen, durch welchen sie gehen muß. Zu dem Ende ziehe man die Linie AA', und nenne C den Punkt, in welchem die Richtung der Resultirenden diese Linie schneidet. Die Abstände dieses Punktes von den Ebenen der x, y und z seyen X, Y, Z. Um nun X zu bestimmen, nehme man an,

a) daß die Linie AA' die Ebene der x in einem gewissen Punkte B schneide, und bezeichne durch α den (spitzen) Neigungswinkel der Linie AA' gegen die Ebene der x; durch n, n', n'' aber die Abstände der Punkte A, A', C von dem Punkte B, indem man diese Abstände als positiv oder negativ betrachtet, je nachdem sie auf der positiven oder negativen Seite der Ebene der x liegen: so ist offenbar

$$x = n \operatorname{Sin} \alpha, \quad x' = n' \operatorname{Sin} \alpha, \quad X = n'' \operatorname{Sin} \alpha,$$

und, weil $\operatorname{Sin} \alpha$ positiv ist, positiv oder negativ, je nachdem n, n', n'' positiv oder negativ sind, d. i. je nachdem die Punkte A, A', C, oder, was dasselbe ist, die Coordinaten x, x', X, auf der positiven oder negativen Seite der Ebene der x liegen, wie erfordert wird. Nun ist aber nach §. 32. oder 33.:

$$Pn + P'n' + R'n'' = 0; \text{ also auch}$$

$$Pn \operatorname{Sin} \alpha + P'n' \operatorname{Sin} \alpha + R'n'' \operatorname{Sin} \alpha = 0,$$

$$\text{d. i. } Px + P'x' + R'X = 0.$$

b) Schnitte die Linie AA' die Ebene der x nicht, und wäre derselben folglich parallel; so ist offenbar $x = x' = X$, und also, weil nach dem Obigen $P + P' + R' = 0$ ist, ebenfalls

$$Px + P'x' + R'X = 0.$$

Es ist also immer

$$P + P' + R' = 0 \text{ und } Px + P'x' + R'X = 0.$$

Was so eben in Beziehung auf die Ebene der x bewiesen worden ist, gilt auf dieselbe Art auch von den Ebenen der y und z, so daß man also folgende vier Gleichungen:

$$P + P' + R' = 0,$$
$$Px + P'x' + R'X = 0,$$
$$Py + P'y' + R'Y = 0,$$
$$Pz + P'z' + R'Z = 0,$$

welche zur Bestimmung der Größe und Richtung der Aequipollenten oder Resultirenden hinreichend sind, erhält.

Will man statt der Aequipollenten die Resultirende in diese Gleichungen einführen, so braucht man bloß $-R$ für R' zu setzen, wodurch man erhält:

$$P + P' - R = 0,$$
$$Px + P'x' - RX = 0,$$
$$Py + P'y' - RY = 0,$$
$$Pz + P'z' - RZ = 0;$$

und folglich

$$R = P + P',\ X = \frac{Px + P'x'}{P + P'},\ Y = \frac{Py + P'y'}{P + P'},\ Z = \frac{Pz + P'z'}{P + P'}.$$

Ist hier $P + P' = 0$, und z. B. auch $Px + P'x' = 0$, so ist auch nach dem Vorhergehenden $Pn \operatorname{Sin} \alpha + P'n' \operatorname{Sin} \alpha = 0$, d. i. $Pn + P'n' = 0$, und die beiden Kräfte P und P' sind also nach §. 32. im Gleichgewichte, woraus denn nach demselben Paragraphen folgt, daß auch $Pm + P'm' = 0$, $Pm \operatorname{Sin} \beta + P'm' \operatorname{Sin} \beta = 0$; $Pp + P'p' = 0$, $Pp \operatorname{Sin} \gamma + P'p' \operatorname{Sin} \gamma = 0$, wenn m, m', β und p, p', γ dasselbe in Beziehung auf die Ebenen der y und z bezeichnen, was n, n', α in Beziehung auf die Ebene der x bedeuten. Nun ist aber $m \operatorname{Sin} \beta = y$, $m' \operatorname{Sin} \beta = y'$; $p \operatorname{Sin} \gamma = z$, $p' \operatorname{Sin} \gamma = z'$; und folglich auch

$$Py + P'y' = 0,\ Pz + P'z' = 0.$$

In diesem Falle also, wo X, Y und Z alle drey $= \frac{0}{0}$ werden, sind die beiden Kräfte P und P' im Gleichgewichte, und ihre Resultirende und Aequipollente $= 0$.

Ist aber $P + P' = 0$, ohne daß z. B. $Px + P'x' = 0$ ist; so sind die beiden Kräfte nicht im Gleichgewichte, weil sonst nach §. 32. $Pn + P'n' = 0$, $Pn \operatorname{Sin} \alpha + P'n' \operatorname{Sin} \alpha = 0$, d. i. $Px + P'x' = 0$ seyn würde, gegen die Annahme. Also sind auch $Py + P'y'$ und $Pz + P'z'$ nicht $= 0$; denn wären sie $= 0$, so wären auch

$$Pm \operatorname{Sin} \beta + P'm' \operatorname{Sin} \beta = 0, \quad Pp \operatorname{Sin} \gamma + P'p' \operatorname{Sin} \gamma = 0;$$
$$Pm + P'm' = 0, \quad Pp + P'p' = 0;$$

und folglich nach §. 32. die beiden Kräfte im Gleichgewichte, gegen das Obige. Ist also $P + P' = 0$, und z. B. $Px + P'x'$ nicht $= 0$; so ist auch weder $Py + P'y' = 0$, noch $Pz + P'z' = 0$, und man erhält also für X, Y, Z in diesem Falle unendlich große Werthe. Dies zeigt, wie aus §. 33. erhellet, an, daß die beiden Kräfte P und P' nicht auf eine Kraft reducirt werden können, sondern daß sie sich, ohne ihre Wirkung zu ändern, auf unendlich viele Arten durch zwey parallele Kräfte ersetzen lassen.

2) Für mehr als zwey Kräfte in willkührlicher Anzahl.

Die nach der einen Seite hin wirkenden Kräfte seyen P, P'', P'''' u. s. w., und die nach der entgegengesetzten hin wirkenden seyen P', P''', P''''' u. s. w. Die Punkte, an welchen diese Kräfte wirken, seyen respective A, A'', A'''' u. s. w., und A', A''', A''''' u. s. w. Man ziehe nun die Linie AA'', und bezeichne durch c den Punkt, in welchem die Richtung der Resultirenden r der Kräfte P, P'' die Linie AA'' schneidet, und durch φ, ψ, χ die Coordinaten dieses Punktes in Beziehung auf die drey angenommenen Coordinatenebenen; so ist nach Nummer 1.:

$$P + P'' - r = 0,$$
$$Px + P''x'' - r\varphi = 0,$$

$$Py + P''y'' - r\psi = 0,$$
$$Pz + P''z'' - r\chi = 0.$$

Zieht man nun die Linie cA'''', und bezeichnet durch c'' den Punkt, in welchem die Richtung der Resultirenden r'' der Kräfte r und P''''; d. i. der Kräfte P, P'', P'''', die Linie cA'''' schneidet, und durch φ'', ψ'', χ'' die Coordinaten des Punktes c''; so ist nach Nummer 1.:

$$r + P'''' - r'' = 0,$$
$$r\varphi + P''''x'''' - r''\varphi'' = 0,$$
$$r\psi + P''''y'''' - r''\psi'' = 0,$$
$$r\chi + P''''z'''' - r''\chi'' = 0.$$

Also, wenn man die sich aus diesen Gleichungen ergebenden Werthe von r, $r\varphi$, $r\psi$ und $r\chi$ in die vorhergehenden Gleichungen setzt:

$$P + P'' + P'''' - r'' = 0,$$
$$Px + P''x'' + P''''x'''' - r''\varphi'' = 0,$$
$$Py + P''y'' + P''''y'''' - r''\psi'' = 0,$$
$$Pz + P''z'' + P''''y'''' - r''\chi'' = 0.$$

Jetzt ziehe man wieder die Linie $c''A''''''$, und lasse c'''', r'''', φ'''', ψ'''', χ'''' etwas Aehnliches wie c, r, φ, ψ, χ bedeuten; so ist wieder nach Nummer 1.:

$$r'' + P'''''' - r'''' = 0,$$
$$r''\varphi'' + P''''''x'''''' - r''''\varphi'''' = 0,$$
$$r''\psi'' + P''''''y'''''' - r''''\psi'''' = 0,$$
$$r''\chi'' + P''''''z'''''' - r''''\chi'''' = 0.$$

Also durch Substitution wie vorher:

$$P + P'' + P'''' + P'''''' - r'''' = 0,$$
$$Px + P''x'' + P''''x'''' + P''''''x'''''' - r''''\varphi'''' = 0,$$
$$Py + P''y'' + P''''y'''' + P''''''y'''''' - r''''\psi'''' = 0,$$
$$Pz + P''z'' + P''''z'''' + P''''''z'''''' - r''''\chi'''' = 0.$$

Man sieht jetzt schon, wie man auf diese Art immer weiter gehen kann. Bezeichnet man also die Resultirende aller Kräfte P, P'', P'''' u. s. w. durch $\mathfrak{R}$, den letzten der Punkte c, c'', c'''' u. s. w. durch $\mathfrak{C}$, und seine Coordinaten durch Φ, Υ, Ω; so ist

$$P + P'' + P'''' + P'''''' + \ldots - \mathfrak{R} = 0,$$
$$Px + P''x'' + P''''x'''' + P''''''x'''''' + \ldots - \mathfrak{R}\Phi = 0,$$
$$Py + P''y'' + P''''y'''' + P''''''y'''''' + \ldots - \mathfrak{R}\Psi = 0,$$
$$Pz + P''z'' + P''''z'''' + P''''''z'''''' + \ldots - \mathfrak{R}\Omega = 0.$$

Bedeuten nun $\mathfrak{R}_{,}$, $\mathfrak{C}'$ und Φ', Ψ', Ω' dasselbe in Beziehung auf die Kräfte P', P''', P''''' u. s. w., was $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{C}$, Φ, Ψ, Ω in Beziehung auf die Kräfte P, P'', P'''' u. s. w. bezeichnen; so ist offenbar ganz auf dieselbe Art:

$$P' + P''' + P''''' + \ldots - \mathfrak{R}_{,} = 0,$$
$$P'x' + P'''x''' + P'''''x''''' + \ldots - \mathfrak{R}_{,}\Phi' = 0,$$
$$P'y' + P'''y''' + P'''''y''''' + \ldots - \mathfrak{R}_{,}\Psi' = 0,$$
$$P'z' + P'''z''' + P'''''z''''' + \ldots - \mathfrak{R}_{,}\Omega' = 0.$$

Jetzt ziehe man die Linie $\mathfrak{C}\mathfrak{C}'$, bezeichne durch R die Resultirende von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}_{,}$, d. i. von P, P', P'', P''' u. s. w., durch C den Punkt, in welchem die Richtung der Kraft R die Linie $\mathfrak{C}\mathfrak{C}'$ schneidet, und durch X, Y, Z die Coordinaten von C; so ist nach Nummer I.:

$$\mathfrak{R} + \mathfrak{R}_{,} - R = 0,$$
$$\mathfrak{R}\Phi + \mathfrak{R}_{,}\Phi' - RX = 0,$$
$$\mathfrak{R}\Psi + \mathfrak{R}_{,}\Psi' - RY = 0,$$
$$\mathfrak{R}\Omega + \mathfrak{R}_{,}\Omega' - RZ = 0,$$

und folglich aus den beiden vorhergehenden Systemen von Gleichungen:

$$P + P' + P'' + P''' + \ldots - R = 0,$$
$$Px + P'x' + P''x'' + P'''x''' + \ldots - RX = 0,$$
$$Py + P'y' + P''y'' + P'''y''' + \ldots - RY = 0,$$
$$Pz + P'z' + P''z'' + P'''z''' + \ldots - RZ = 0,$$

oder

$$P + P' + P'' + P''' + \ldots + R' = 0,$$
$$Px + P'x' + P''x'' + P'''x''' + \ldots + R'X = 0,$$
$$Py + P'y' + P''y'' + P'''y''' + \ldots + R'Y = 0,$$
$$Pz + P'z' + P''z'' + P'''z''' + \ldots + R'Z = 0,$$

wenn man statt der Resultirenden die Aequipollente gebraucht.

Diese Gleichungen reichen hin zur Bestimmung der Richtung und Größe der Resultirenden oder Aequipollenten, da, wie aus Nummer 1. und der ganzen vorhergehenden Darstellung erhellet, die Richtung dieser beiden Kräfte offenbar den Richtungen der gegebenen Kräfte parallel ist.

Aus den obigen Gleichungen folgt:

$$R = P + P' + P'' + P''' + \ldots,$$

$$X = \frac{Px + P'x' + P''x'' + P'''x''' + \ldots}{P + P' + P'' + P''' + \ldots},$$

$$Y = \frac{Py + P'y' + P''y'' + P'''y''' + \ldots}{P + P' + P'' + P''' + \ldots},$$

$$Z = \frac{Pz + P'z' + P''z'' + P'''z''' + \ldots}{P + P' + P'' + P''' + \ldots}.$$

Ist hier $P + P' + P'' + P''' + \ldots = 0$,
und auch z. B. $Px + P'x' + P''x'' + P'''x''' + \ldots = 0$; so ist offenbar $\mathfrak{R} + \mathfrak{R}_{,} = 0$, und $\mathfrak{R}\Phi + \mathfrak{R}_{,}\Phi' = 0$. Also sind nach Nummer 1. die Kräfte $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_{,}$, d. i. die Kräfte P, P', P'', P''' u. s. w., im Gleichgewichte, und folglich auch $\mathfrak{R}\Psi + \mathfrak{R}_{,}\Psi' = 0$, $\mathfrak{R}\Omega + \mathfrak{R}_{,}\Omega' = 0$, d. i.

$$Py + P'y' + P''y'' + P'''y''' + \ldots = 0,$$
$$Pz + P'z' + P''z'' + P'''z''' + \ldots = 0.$$

Ist also der gemeinschaftliche Nenner der obigen Brüche für X, Y, Z, und ein Zähler $= 0$, so sind alle drey Zähler $= 0$, und die gegebenen Kräfte sind in diesem Falle, wo $X = Y = Z = \frac{0}{0}$ wird, im Gleichgewichte.

Ist aber $P + P' + P'' + P''' + \ldots = 0$,
und z. B. $Px + P'x' + P''x'' + P'''x''' + \ldots$ nicht $= 0$; so ist offenbar $\mathfrak{R} + \mathfrak{R}_{,} = 0$, und $\mathfrak{R}\Phi + \mathfrak{R}_{,}\Phi'$ nicht $= 0$. Also nach Nummer 1. auch weder $\mathfrak{R}\Psi + \mathfrak{R}_{,}\Psi'$, noch $\mathfrak{R}\Omega + \mathfrak{R}_{,}\Omega' = 0$, d. i.

weder $Py + P'y' + P''y'' + P'''y''' + \ldots = 0$,
noch $Pz + P'z' + P''z'' + P'''z''' + \ldots = 0$.

Ist also der gemeinschaftliche Nenner der für X, Y, Z gefundenen Brüche $=0$, einer der drey Zähler aber nicht $=0$, so ist kein Zähler $=0$, und man erhält also für X, Y, Z unendlich große Werthe. Man kann, wie aus Nummer 1. folgt, in diesem Falle die Kräfte $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_{,}$, und folglich auch die gegebenen Kräfte P, P', P'', P''' u. s. w., nicht auf eine Kraft reduciren, sondern sie können, ohne ihre Wirkung zu ändern, bloß durch zwey ihnen allen parallele Kräfte, aber auf unendlich viele Arten, ersetzt werden. $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}_{,}$, welche in diesem Falle einander gleich sind, sind ein Paar solcher Kräfte. Wie ihre Größe und die Lage ihrer Angriffspunkte durch Φ, Ψ, Ω, und Φ', Ψ', Ω' zu bestimmen sind, wird leicht aus dem Obigen erhellen.

§. 36.

Der durch die Coordinaten

$$X = \frac{Px + P'x' + P''x'' + P'''x''' + \ldots}{P + P' + P'' + P''' + \ldots},$$

$$Y = \frac{Py + P'y' + P''y'' + P'''y''' + \ldots}{P + P' + P'' + P''' + \ldots},$$

$$Z = \frac{Pz + P'z' + P''z'' + P'''z''' + \ldots}{P + P' + P'' + P''' + \ldots}$$

in dem vorhergehenden Paragraphen bestimmte Punkt C hat viele höchst merkwürdige Eigenschaften, und soll hier, in Uebereinstimmung mit mehrern, hauptsächlich französischen, Schriftstellern, das **Centrum der parallelen Kräfte** genannt werden. Wir werden indeß diesen Punkt für einen gewissen Fall des Gleichgewichts noch unter einem andern Namen kennen lernen, und besonders unter diesem zweyten Namen ist er in der Statik und der Mechanik überhaupt von vielfältigem Gebrauche. Hier wollen wir nur auf ein Paar merkwürdige Eigenschaften desselben aufmerksam machen.

Es ist klar, daß die obigen Ausdrücke der Coordinaten von C ungeändert bleiben, wenn nur P, P', P'' u. s. w., x, x', x'' u. s. w., y, y', y'' u. s. w., und z, z', z'' u. s. w.

ungeändert bleiben; d. i., wenn die Kräfte selbst keine Veränderung erleiden, und auch die Lage ihrer Angriffspunkte dieselbe bleibt. Man kann sich also alle gegebene Kräfte um ihre Angriffspunkte um einen willkührlichen Winkel gedreht denken, so daß sie jedoch immer unter einander parallel bleiben; das Centrum der parallelen Kräfte wird keine Veränderung erleiden, und die Resultirende dieser Kräfte wird immer durch das Centrum C gehen, wenn nur die Größe der Kräfte und die Lage ihrer Angriffspunkte ungeändert bleibt. Die Richtungen der Resultirenden aller parallelen Kräfte von derselben Größe und an denselben Angriffspunkten gehen also durch einen Punkt, welcher das Centrum der parallelen Kräfte ist. Uebrigens ist klar, daß man auch das Coordinatensystem willkührlich verändern kann, und daß bloß die gegenseitige Lage der Angriffspunkte dieselbe bleiben muß, wenn, bey unveränderter Größe der Kräfte, die obigen Behauptungen ihre Anwendung finden sollen.

Denkt man sich die parallelen Kräfte an einem festen Körper, den wir ohne Schwere annehmen wollen, wirkend, und das Centrum der parallelen Kräfte unterstützt, so daß sich der Körper um diesen Punkt drehen kann; so werden die parallelen Kräfte immer im Gleichgewichte seyn, wie man auch den Körper drehen mag, wenn nur die Kräfte immer einander parallel bleiben.

§. 37.

Wir wollen nun noch die Gleichungen der geraden Linie suchen, in welcher die Richtungen der Resultirenden und Aequipollenten liegen, werden aber der Abkürzung wegen die Größen

$$P + P' + P'' + P''' + \ldots,$$
$$Px + P'x' + P''x'' + P'''x''' + \ldots,$$
$$Py + P'y' + P''y'' + P'''y''' + \ldots,$$
$$Pz + P'z' + P''z'' + P'''z''' + \ldots$$

respective durch ΣP, ΣPx, ΣPy und ΣPz bezeichnen; eine Bezeichnung, deren wir auch in der Folge uns zuweilen bedienen werden. ΣP ist übrigens $= R$, und kann daher auch durch R kurz angedeutet werden.

Man denke sich ein neues System coordinirter Ebenen, welches das Centrum der parallelen Kräfte als Anfangspunkt hat und dem primitiven Systeme parallel ist; so ist, wenn φ, ψ, χ die von der Richtung der Resultirenden oder Aequipollenten mit den neuen Coordinatenaxen eingeschlossenen Winkel bezeichnen, nach §. 25. gegen das Ende:

$$x' \operatorname{Cos} \chi = z' \operatorname{Cos} \varphi, \quad y' \operatorname{Cos} \chi = z' \operatorname{Cos} \psi,$$

wo x', y', z' die Coordinaten in Beziehung auf das neue System sind. Die Coordinaten des Anfangspunktes des primitiven Systems in Beziehung auf das neue sind offenbar $-X$, $-Y$, $-Z$, wo X, Y, Z die Werthe in §. 36. haben. Die gesuchten Gleichungen in Beziehung auf das primitive System sind also

$$(x-X) \operatorname{Cos}\chi = (z-Z) \operatorname{Cos}\varphi, \quad (y-Y) \operatorname{Cos}\chi = (z-Z) \operatorname{Cos}\psi.$$

(M. vergl. §. 25. am Ende.) Also, weil nach §. 36.

$$X = \frac{\Sigma Px}{R}, \quad Y = \frac{\Sigma Py}{R}, \quad Z = \frac{\Sigma Pz}{R}:$$

$$\left(x - \frac{\Sigma Px}{R}\right) \operatorname{Cos}\chi = \left(z - \frac{\Sigma Pz}{R}\right) \operatorname{Cos}\varphi,$$

$$\left(y - \frac{\Sigma Py}{R}\right) \operatorname{Cos}\chi = \left(z - \frac{\Sigma Pz}{R}\right) \operatorname{Cos}\psi.$$

Also

$$z = x \frac{\operatorname{Cos}\chi}{\operatorname{Cos}\varphi} + \frac{\Sigma Pz}{R} - \frac{\operatorname{Cos}\chi}{\operatorname{Cos}\varphi} \cdot \frac{\Sigma Px}{R},$$

$$z = y \frac{\operatorname{Cos}\chi}{\operatorname{Cos}\psi} + \frac{\Sigma Pz}{R} - \frac{\operatorname{Cos}\chi}{\operatorname{Cos}\psi} \cdot \frac{\Sigma Py}{R},$$

oder

$$z = x \frac{\operatorname{Cos}\chi}{\operatorname{Cos}\varphi} + \frac{\operatorname{Cos}\varphi \Sigma Pz - \operatorname{Cos}\chi \Sigma Px}{R \operatorname{Cos}\varphi},$$

$$z = y \frac{\operatorname{Cos}\chi}{\operatorname{Cos}\psi} + \frac{\operatorname{Cos}\psi \Sigma Pz - \operatorname{Cos}\chi \Sigma Py}{R \operatorname{Cos}\psi},$$

oder auch

$$z = x\frac{\operatorname{Cos}\chi}{\operatorname{Cos}\phi} + \frac{\operatorname{Cos}\phi\Sigma Pz - \operatorname{Cos}\chi\Sigma Px}{\operatorname{Cos}\phi\Sigma P},$$

$$z = y\frac{\operatorname{Cos}\chi}{\operatorname{Cos}\psi} + \frac{\operatorname{Cos}\psi\Sigma Pz - \operatorname{Cos}\chi\Sigma Py}{\operatorname{Cos}\psi\Sigma P}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhält man leicht

$$y = x\frac{\operatorname{Cos}\psi}{\operatorname{Cos}\phi} + \frac{\operatorname{Cos}\phi\Sigma Py - \operatorname{Cos}\psi\Sigma Px}{\operatorname{Cos}\phi\Sigma P}.$$

Dies ist, wie leicht erhellen wird, die Gleichung der geraden Linie, in welcher die Richtungen der Aequipollenten und Resultirenden liegen, wenn alle parallele Kräfte in einer Ebene liegen.

§. 38.

Um die Bedingungen des Gleichgewichts paralleler Kräfte im Raume zu finden, nehme man zuerst an, die parallelen Kräfte P, P', P'', P''', P'''' u. s. w. seyen im Gleichgewichte, so kann man eine jede als die Aequipollente der übrigen betrachten. Man nehme jetzt zwey, den Richtungen der gegebenen Kräfte parallele, Ebenen an, und bezeichne die Abstände der Angriffspunkte, indem man jeder der beiden Ebenen eine positive und eine negative Seite beylegt, von diesen beiden Ebenen respective durch x, x', x'', x''' u. s. w., und y, y', y'', y''' u. s. w.

Sieht man nun z. B. P als die Aequipollente der übrigen Kräfte an; so ist nach §. 35.:

$$P + P' + P'' + P''' + \ldots = 0,$$
$$Px + P'x' + P''x'' + P'''x''' + \ldots = 0,$$
$$Py + P'y' + P''y'' + P'''y''' + \ldots = 0.$$

Dies umkehrend, kann man aber auch behaupten, daß, wenn

$$P + P' + P'' + P''' + \ldots = 0,$$

und in Beziehung auf irgend zwey den Richtungen der parallelen Kräfte parallele Ebenen

$$Px + P'x' + P''x'' + P'''x''' + \ldots = 0,$$
$$Py + P'y' + P''y'' + P'''y''' + \ldots = 0$$

ist, die parallelen Kräfte im Gleichgewichte sind.

Um dies zu beweisen, nehme man an, die nach der einen Seite wirkenden Kräfte seyen P, P'', P'''' u. s. w., und die nach der entgegengesetzten wirkenden P', P''', P''''' u. s. w.; die Aequipollente der erstern sey $\mathfrak{R}'$, die der letztern aber r'; die Entfernungen der Richtungen der Kräfte $\mathfrak{R}'$ und r' von den beiden angenommenen Ebenen seyen X, Y und X', Y': so ist nach §. 35.:

$$\mathfrak{R}' + P + P'' + P'''' + \ldots = 0,$$
$$\mathfrak{R}'X + Px + P''x'' + P''''x'''' + \ldots = 0,$$
$$\mathfrak{R}'Y + Py + P''y'' + P''''y'''' + \ldots = 0,$$

und eben so

$$r' + P' + P''' + P''''' + \ldots = 0,$$
$$r'X' + P'x' + P'''x''' + P'''''x''''' + \ldots = 0,$$
$$r'Y' + P'y' + P'''y''' + P'''''y''''' + \ldots = 0.$$

Also durch Addition dieser Gleichungen:

$$\mathfrak{R}' + r' + P + P' + P'' + P''' + \ldots = 0,$$
$$\mathfrak{R}'X + r'X' + Px + P'x' + P''x'' + P'''x''' + \ldots = 0,$$
$$\mathfrak{R}'Y + r'Y' + Py + P'y' + P''y'' + P'''y''' + \ldots = 0.$$

Da nun nach der Voraussetzung

$$P + P' + P'' + P''' + \ldots = 0,$$
$$Px + P'x' + P''x'' + P'''x''' + \ldots = 0,$$
$$Py + P'y' + P''y'' + P'''y''' + \ldots = 0$$

ist; so ist

$$\mathfrak{R}' + r' = 0,\ \mathfrak{R}'X + r'X' = 0,\ \mathfrak{R}'Y + r'Y' = 0.$$

Also $\mathfrak{R}' = -r'$, und folglich

$$-r'X + r'X' = 0,\ -r'Y + r'Y' = 0,$$
$$r'X' = r'X,\ \ r'Y' = r'Y,$$
$$\text{d. i. } X = X',\ \ Y = Y'.$$

Da $\mathfrak{R}' = -r'$ ist, so sind diese beiden Kräfte einander gleich und entgegengesetzt. Weil aber ferner $X = X'$ und $Y = Y'$ ist, und die Richtungen der Kräfte $\mathfrak{R}'$, r' den Richtungen der gegebenen Kräfte, (§. 35.), also auch sich selbst parallel sind, so fallen jene Richtungen offenbar in eine gerade Linie, und die beiden Kräfte R', r' sind also einander gleich und gerade entgegengesetzt, d. i. diese beiden Kräfte, und folglich auch die gegebenen parallelen Kräfte, sind im Gleichgewichte, w. z. b. w.

Die Gleichungen

$$P+P'+P''+P'''+\ldots=0,$$
$$Px+P'x'+P''x''+P'''x'''+\ldots=0,$$
$$Py+P'y'+P''y''+P'''y'''+\ldots=0,$$

die letztern beiden in Beziehung auf zwey willkührliche, den Richtungen der gegebenen Kräfte parallele, Ebenen, sind also die Bedingungen des Gleichgewichts paralleler Kräfte im Raume.

Unter dem Moment einer Kraft in Beziehung auf eine Ebene versteht man das Product aus der Kraft in das von ihrem Angriffspunkte auf die Ebene gefällte Perpendikel, und ein solches Moment ist, unter Voraussetzung paralleler Kräfte, positiv oder negativ, je nachdem die Kraft und das Perpendikel einerley oder entgegengesetzte Vorzeichen haben. Gebraucht man diesen Begriff, so kann man die in diesem Paragraphen bewiesenen Sätze auch auf folgenden Ausdruck bringen:

Sind parallele Kräfte im Raume im Gleichgewichte, so ist immer die (algebraische) Summe dieser Kräfte $=0$, und die (algebraische) Summe der Momente in Beziehung auf zwey willkührliche, den Richtungen der gegebenen Kräfte parallele, Ebenen ist ebenfalls $=0$, und umgekehrt.

Weiter unten wird noch eine andere Art von Momenten vorkommen.

§. 39.

Den Schluß dieses Kapitels mögen zwey Aufgaben machen, deren Auflösung nach den vorgetragenen Gründen leicht ist.

1) An einer geraden Linie wirken n parallele Kräfte, welche eine arithmetische Progression bilden, deren erstes Glied $= P$ und Differenz $= p$ ist, in gleichen Abständen $= a$ von einander. Man soll Größe und Richtung der Resultirenden R finden.

Auflösung. Den Angriffspunkt der Kraft P nehme man als Anfangspunkt; so ist nach §. 33.:

$$R = P + (P + p) + (P + 2p) + \ldots + (P + (n-1)p),$$
$$Ry = P.0 + (P+p).a + (P+2p).2a + \ldots$$
$$\ldots + (P + (n-1)p).(n-1)a.$$

Also

$$R = nP + p(1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + (n-1))$$
$$= nP + \frac{n(n-1)p}{2} = \left\{2P + (n-1)p\right\}.\frac{n}{2};$$

$$Ry = \begin{cases} Pa\left\{1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + (n-1)\right\} \\ + pa\left\{1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + (n-1)^2\right\} \end{cases}$$
$$= Pa.\frac{n(n-1)}{2} + pa.\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$
$$= \frac{n(n-1)a}{2}\left\{P + \frac{(2n-1)p}{3}\right\}$$
$$= \frac{n(n-1)a}{2}.\frac{3P + (2n-1)p}{3};$$

$$y = \frac{n(n-1)a}{2}.\frac{3P + (2n-1)p}{3}.\frac{2}{n}.\frac{1}{2P + (n-1)p}$$
$$= \frac{(n-1)a}{3}.\frac{3P + (2n-1)p}{2P + (n-1)p}.$$

Ueber die hier gebrauchte Summation der Quadratzahlen s. m. z. B. mein Lehrbuch der Kegelschnitte, §. 75.

2) An einer geraden Linie wirken, in gleichen Abständen ($= a$) von einander, nach parallelen Richtungen n Kräfte, welche eine geometrische Progression bilden,

deren erstes Glied $= P$ und Exponent $= p$ ist. Man soll Größe und Richtung der Resultirenden finden.

Auflösung. Auf ähnliche Art wie vorher ist

$$R = P + Pp + Pp^2 + Pp^3 + \ldots + Pp^{n-1},$$

$$Ry = P.0 + Pp.a + Pp^2.2a + Pp^3.3a + \ldots + Pp^{n-1}.(n-1)a.$$

Also

$$R = \frac{Pp^n - P}{p-1} = \frac{P(p^n-1)}{p-1},$$

$$Ry = Ppa\left\{1 + 2p + 3p^2 + 4p^3 + \ldots + (n-1)p^{n-2}\right\}.$$

Die Summe der eingeschlossenen Reihe zu finden, setze man

$$S = 1 + p + p^2 + p^3 + p^4 + \ldots + p^{n-1},$$

so ist

$$\frac{dS}{dp} = 1 + 2p + 3p^2 + 4p^3 + \ldots + (n-1)p^{n-2}.$$

Aber $S = \frac{p^n - 1}{p-1}$. Also

$$\frac{dS}{dp} = \frac{(p-1).np^{n-1} - (p^n-1)}{(p-1)^2}$$

$$= \frac{np^{n-1}(p-1) - p^n + 1}{(p-1)^2},$$

und folglich

$$1 + 2p + 3p^2 + \ldots + (n-1)p^{n-2} = \frac{np^{n-1}(p-1) - p^n + 1}{(p-1)^2}.$$

Man kann aber auch ohne Differenzialrechnung diese Summe auf folgende Art finden. Sey nämlich

$$z = 1 + 2p + 3p^2 + 4p^3 + \ldots + (n-1)p^{n-2};$$

so ist

$$pz = p + 2p^2 + 3p^3 + 4p^4 + \ldots + (n-1)p^{n-1}.$$

Also

$$(1-p)z = 1 + p + p^2 + p^3 + \ldots + p^{n-2} - (n-1)p^{n-1}$$

$$= \frac{p^{n-1}-1}{p-1} - (n-1)p^{n-1}$$

$$= \frac{p^{n-1} - 1 - (n-1)(p-1)p^{n-1}}{p-1}$$

$$= \frac{p^{n-1} - 1 - n(p-1)p^{n-1} + (p-1)p^{n-1}}{p-1}$$

$$= \frac{p^{n-1} - 1 - np^{n-1}(p-1) + p^n - p^{n-1}}{p-1}$$

$$= \frac{-1 - np^{n-1}(p-1) + p^n}{p-1}$$

$$= \frac{np^{n-1}(p-1) - p^n + 1}{1-p}.$$

Also $z = \dfrac{np^{n-1}(p-1) - p^n + 1}{(1-p)^2}$

$$= \frac{np^{n-1}(p-1) - p^n + 1}{(p-1)^2},$$

wie vorher.

Es ist folglich

$$Ry = Ppa\left\{\frac{np^{n-1}(p-1) - p^n + 1}{(p-1)^2}\right\},$$

$$y = \frac{Ppa}{R}\left\{\frac{np^{n-1}(p-1) - p^n + 1}{(p-1)^2}\right\}$$

$$= \frac{p-1}{P(p^n-1)} \cdot Ppa \cdot \left\{\frac{np^{n-1}(p-1) - p^n + 1}{(p-1)^2}\right\}$$

$$= \frac{pa\{np^{n-1}(p-1) - p^n + 1\}}{(p-1)(p^n-1)}.$$

Hierdurch und durch den obigen Ausdruck für R ist Richtung und Größe der Resultirenden völlig bestimmt, da sie den gegebenen Kräften parallel ist.

Aehnliche Aufgaben würden sich leicht mehrere auffinden lassen. Die beiden obigen sind entlehnt aus

D. C. L. Lehmus Lehrbuch der angewandten Mathematik, erstes Bändchen, das System der Statik enthaltend, Berlin 1818, 8., S. 49. — 51.

Drittes Kapitel.

Von dem Gleichgewichte nach willkührlichen Richtungen in einer freyen Ebene wirkender Kräfte.

§. 40.

Die Bezeichnung der Kräfte und ihrer Angriffspunkte bleibt wie in dem vorigen Kapitel. Zur Bestimmung der Lage der Richtungen werden zwey rechtwinklige Coordinatenaxen angenommen, und die Coordinaten der Angriffspunkte in Beziehung auf diese beiden Axen werden durch x, y; x', y'; x'', y''; u. s. w., die Winkel, welche die Richtungen mit den beiden Axen einschließen, aber durch α, β; α', β'; α'', β''; u. s. w. bezeichnet. Was die nähere Bestimmung dieser Winkel betrifft, so muß man sich eigentlich durch jeden Angriffspunkt zwey Parallelen mit den beiden angenommenen Axen gezogen denken, und die von den Richtungen mit diesen Parallelen eingeschlossenen Winkel, nach der Bestimmung in §. 20. 2., sind eigentlich die Winkel α, β; α', β'; α'', β''; u. s. w. Diese Winkel sind also immer positiv und nicht größer als 180°.

§. 41.

Aufgabe. Richtung und Größe der Resultirenden (oder Aequipollenten) mehrerer nach willkührlichen Richtungen in einer Ebene wirkender Kräfte zu finden.

Auflösung. Jede der gegebenen Kräfte zerlege man in zwey Seitenkräfte, von denen die eine der Axe der x, die andere der Axe der y parallel wirkt. Diese Seitenkräfte sind nach §. 21. 2.:

$$P \operatorname{Cos} \alpha,\quad P' \operatorname{Cos} \alpha',\quad P'' \operatorname{Cos} \alpha'',\quad P''' \operatorname{Cos} \alpha''', \text{ u. s. w.},$$

$$P \operatorname{Cos} \beta,\quad P' \operatorname{Cos} \beta',\quad P'' \operatorname{Cos} \beta'',\quad P''' \operatorname{Cos} \beta''', \text{ u. s. w.},$$

von denen die ersten der Axe der x, die andern der Axe der y

parallel sind. Die Resultirende der ersten sey $\mathfrak{R}$, und die der andern r; so ist nach §. 33.:

$$\mathfrak{R} = P\,\mathrm{Cos}\,\alpha + P'\,\mathrm{Cos}\,\alpha' + P''\,\mathrm{Cos}\,\alpha'' + P'''\,\mathrm{Cos}\,\alpha''' + \ldots,$$
$$r = P\,\mathrm{Cos}\,\beta + P'\,\mathrm{Cos}\,\beta' + P''\,\mathrm{Cos}\,\beta'' + P'''\,\mathrm{Cos}\,\beta''' + \ldots,$$

wenn es, wie wir für's erste annehmen wollen, sowohl für die ersten als auch für die andern eine Resultirende gibt. Die Fälle, wo es keine Resultirenden gibt, sollen nachher betrachtet werden.

Sind nun X, Y die Entfernungen der Richtungen der Resultirenden r, $\mathfrak{R}$ von den beiden Coordinatenaxen, d. i. die Coordinaten des Durchschnittspunktes dieser beiden Richtungen; so ist nach §. 33.:

$$\mathfrak{R}Y = yP\,\mathrm{Cos}\,\alpha + y'P'\,\mathrm{Cos}\,\alpha' + y''P''\,\mathrm{Cos}\,\alpha'' + y'''P'''\,\mathrm{Cos}\,\alpha''' + \ldots,$$
$$rX = xP\,\mathrm{Cos}\,\beta + x'P'\,\mathrm{Cos}\,\beta' + x''P''\,\mathrm{Cos}\,\beta'' + x'''P'''\,\mathrm{Cos}\,\beta''' + \ldots$$

Die Winkel, welche die Richtung der aus den gegebenen Kräften, oder, was dasselbe ist, aus den Kräften $\mathfrak{R}$, r, Resultirenden R mit den beiden Axen einschließt, seyen φ, ψ; so ist nach §. 21. und §. 25.:

$$R^2 = \mathfrak{R}^2 + r^2,\quad \mathfrak{R} = R\,\mathrm{Cos}\,\varphi,\quad r = R\,\mathrm{Cos}\,\psi,$$

und folglich, wenn man Alles zusammennimmt:

$$R = \sqrt{\left\{\begin{matrix}(P\,\mathrm{Cos}\,\alpha + P'\,\mathrm{Cos}\,\alpha' + P''\,\mathrm{Cos}\,\alpha'' + \ldots)^2 \\ + (P\,\mathrm{Cos}\,\beta + P'\,\mathrm{Cos}\,\beta' + P''\,\mathrm{Cos}\,\beta'' + \ldots)^2\end{matrix}\right\}},$$

$$X = \frac{xP\,\mathrm{Cos}\,\beta + x'P'\,\mathrm{Cos}\,\beta' + x''P''\,\mathrm{Cos}\,\beta'' + x'''P'''\,\mathrm{Cos}\,\beta''' + \ldots}{P\,\mathrm{Cos}\,\beta + P'\,\mathrm{Cos}\,\beta' + P''\,\mathrm{Cos}\,\beta'' + P'''\,\mathrm{Cos}\,\beta''' + \ldots},$$

$$Y = \frac{yP\,\mathrm{Cos}\,\alpha + y'P'\,\mathrm{Cos}\,\alpha' + y''P''\,\mathrm{Cos}\,\alpha'' + y'''P'''\,\mathrm{Cos}\,\alpha''' + \ldots}{P\,\mathrm{Cos}\,\alpha + P'\,\mathrm{Cos}\,\alpha' + P''\,\mathrm{Cos}\,\alpha'' + P'''\,\mathrm{Cos}\,\alpha''' + \ldots},$$

$$\mathrm{Cos}\,\varphi = \frac{P\,\mathrm{Cos}\,\alpha + P'\,\mathrm{Cos}\,\alpha' + P''\,\mathrm{Cos}\,\alpha'' + P'''\,\mathrm{Cos}\,\alpha''' + \ldots}{R},$$

$$\mathrm{Cos}\,\psi = \frac{P\,\mathrm{Cos}\,\beta + P'\,\mathrm{Cos}\,\beta' + P''\,\mathrm{Cos}\,\beta'' + P'''\,\mathrm{Cos}\,\beta''' + \ldots}{R}.$$

Durch diese Ausdrücke ist die Größe der Resultirenden bestimmt, ein Punkt, durch welchen ihre Richtung gehen muß, und die Winkel, welche diese Richtung mit den angenommenen Axen einschließt, so daß also Größe und Richtung der Resultirenden völlig bestimmt sind, wie verlangt wurde.

Wir haben jetzt nur noch die Fälle zu untersuchen, wo man unbestimmte oder unmögliche Werthe erhält, wobey wir der Abkürzung wegen die Zähler der obigen Brüche für X, Y durch Z und Z' bezeichnen wollen. Sey nun:

1) $\mathfrak{R} = 0$, $r = 0$.

a) $Z = 0$, $Z' = 0$; so wird $R = 0$, $X = Y = \frac{0}{0}$, $\text{Cos}\,\varphi = \text{Cos}\,\psi = \frac{0}{0}$. Aus §. 32. erhellet, daß in diesem Falle sowohl die der Axe der x, als auch die der Axe der y parallelen Kräfte für sich, und folglich auch die gegebenen Kräfte im Gleichgewichte sind.

b) $Z = 0$, Z' nicht $= 0$. In diesem Falle ist $X = \frac{0}{0}$, $Y = \infty$, $\text{Cos}\,\varphi = \text{Cos}\,\psi = \frac{0}{0}$, da auch $R = 0$. Die der Axe der y parallelen Kräfte sind nach §. 32. im Gleichgewichte, die der Axe der x parallel wirkenden aber nicht. Letztere lassen sich nach §. 33. nicht auf eine Resultirende, sondern nur auf zwey gleiche und entgegengesetzte, aber nicht gerade entgegengesetzte, Kräfte reduciren, welches daher auch von den gegebenen Kräften selbst gilt.

c) Ist Z nicht $= 0$, aber $Z' = 0$; so gilt dasselbe, wie vorher, welches sich leicht zeigen läßt.

d) Ist weder $Z = 0$ noch $Z' = 0$; so lassen sich sowohl die der Axe der x, als auch die der Axe der y parallel wirkenden Kräfte nur auf zwey gleiche entgegengesetzte, aber nicht gerade entgegengesetzte, Kräfte, nicht auf eine Kraft, reduciren. X und Y sind in diesem Falle beide $= \infty$. Sind nun diese vier Kräfte p, p und q, q, wie in Fig. 27.; so kann man, wie diese Figur zeigt, jede zwey p, q, in eine Kraft t zusammensetzen, und es erhellet leicht, daß diese Kräfte t einander gleich und entgegengesetzt, in den meisten Fällen aber nicht gerade entgegengesetzt, sind, so daß sich also auch in diesem Falle die gegebenen Kräfte nur auf zwey parallele gleiche entgegengesetzte, aber nicht gerade entgegengesetzte, Kräfte reduciren lassen, und es folglich nicht eine Resultirende gibt. Doch sieht man leicht ein, daß in einem gewissen Falle hier auch das Gleichgewicht eintreten kann, wenn die beiden Kräfte t einander gerade entgegengesetzt sind, welches statt findet, wenn $e = e' \operatorname{Tang} \alpha$ ist, wo e die Entfernung der Richtungen der Kräfte p, e' die Entfernung der Richtungen der Kräfte q von einander, und α den Winkel bezeichnet, welchen die Richtung der Kraft t mit der Richtung der Kraft p einschließt, wie in der Figur angedeutet ist. In dem vorliegenden Falle reduciren sich also die gegebenen Kräfte entweder auf zwey gleiche parallele entgegengesetzte, aber nicht gerade entgegengesetzte, Kräfte, oder sie sind im Gleichgewichte. Ob das Eine oder das Andere statt findet, muß in jedem Falle besonders beurtheilt werden.

2) $\mathfrak{R} = 0$, r nicht $= 0$.

a) $\mathfrak{Z} = 0$, und auch $\mathfrak{Z}' = 0$. In diesem Falle sind die der Axe der x parallel wirkenden Kräfte für sich im Gleichgewichte. R ist $= r$, $X = 0$, $Y = \frac{0}{0}$, $\operatorname{Cos} \varphi = 0$, $\operatorname{Cos} \psi = \frac{r}{r} = 1$. Die Resultirende ist also $= r$, und wirkt in der Axe der y.

b) $\mathfrak{Z} = 0$, aber $\mathfrak{Z}'$ nicht $= 0$. Die der Axe der x parallel wirkenden Kräfte lassen sich in diesem Falle nur auf zwey gleiche parallele entgegengesetzte, aber nicht gerade entgegengesetzte, Kräfte reduciren. Für die der Axe der y parallel wirkenden Kräfte gibt es aber eine Resultirende. Es ist

$$R = r,\ X = 0,\ Y = \infty,\ \operatorname{Cos} \varphi = 0,\ \operatorname{Cos} \psi = \frac{r}{r} = 1.$$

Die Resultirende ist also $= r$, und wirkt in der Axe der y in einer unendlichen Entfernung vom Anfange der Coordinaten, welches aber hier keinen Einfluß haben kann, da jede Kraft in jeden Punkt ihrer Richtung versetzt werden kann, ohne ihre Wirkung zu ändern.

c) $\mathfrak{Z}$ nicht $= 0$, aber $\mathfrak{Z}' = 0$. Es ist wieder $R = r$, $X = \frac{\mathfrak{Z}}{r}$,

$Y = \frac{0}{0}$, $\text{Cos}\,\varphi = 0$, $\text{Cos}\,\psi = \frac{r}{r} = 1$. Die Resultirende ist also $= r$ und der Axe der y parallel.

d) $\mathfrak{Z}$ nicht $= 0$, $\mathfrak{Z}'$ nicht $= 0$. Wie vorher $R = r$, $X = \frac{\mathfrak{Z}}{r}$, $Y = \infty$, $\text{Cos}\,\varphi = 0$, $\text{Cos}\,\psi = \frac{r}{r} = 1$. Die Resultirende ist also wieder $= r$ und der Axe der y parallel.

Wir wollen unter den vier vorhergehenden Fällen nur diesen letzten etwas näher betrachten. Es ist aus §. 33. klar, daß sich die der Axe der x parallel wirkenden Kräfte nur auf zwey gleiche parallele entgegengesetzte, aber nicht gerade entgegengesetzte, Kräfte q, q (Fig. 28.) reduciren lassen; für die der Axe der y parallel wirkenden Kräfte gibt es aber eine Resultirende p. Setzt man nun die Kraft p und die eine Kraft q in eine Kraft t, diese aber und die andere Kraft q wieder in eine Kraft p' zusammen, so erhellet aus dem Satze von dem Parallelogramm der Kräfte leicht, daß p', die Resultirende aller gegebenen Kräfte, der Kraft p parallel und gleich ist; d. i. die Resultirende aller Kräfte ist $= r$ $(= p)$, und der Axe der y parallel, wie oben behauptet wurde.

3) Der Fall:

$$\mathfrak{R} \text{ nicht } = 0, \text{ aber } r = 0,$$

läßt sich wie der vorhergehende betrachten.

Um die Gleichung der Richtung der Resultirenden zu finden, bemerke man, daß

$$y = Ax + B$$

die Form dieser Gleichung ist. (M. s. mein Lehrbuch der Kegelschnitte, S. 9. ff.) Also, da der Punkt, dessen Coordinaten X, Y sind, in dieser Richtungslinie liegt, auch

$$Y = AX + B, \text{ und folglich}$$

$$y - Y = A(x - X).$$

Ist aber ε der Winkel, unter welchem die Richtung gegen die Axe der x geneigt ist, so ist nach §. 25. 1.:

$$\text{Tg}\,\varepsilon = \frac{\text{Cos}\,\psi}{\text{Cos}\,\varphi} = \frac{r}{R} : \frac{\mathfrak{R}}{R} = \frac{r}{\mathfrak{R}}.$$

Aber $A = \mathrm{Tg}\,\varepsilon$, (A. a. O. §. 10.). Also

$$y - Y = \frac{r}{\Re}(x - X),$$

$$\Re(y - Y) = r(x - X),$$

$$\Re y - rx = \Re Y - rX,$$

und, wenn man jetzt $\Re Y - rX =$
$= P(y \operatorname{Cos}\alpha - x \operatorname{Cos}\beta) + P'(y' \operatorname{Cos}\alpha' - x'' \operatorname{Cos}\beta'') + \ldots$
$= A$ setzt:

$$\Re y - rx = A.$$

§. 42.

Um nun die allgemeinen Bedingungen des Gleichgewichts mehrerer nach willkührlichen Richtungen in einer Ebene wirkender Kräfte zu finden, nehme man zuerst an, die Kräfte P, P', P'', P''' u. s. w. seyen unter einander im Gleichgewichte; so kann man jede als die Aequipollente der übrigen betrachten, und die Resultirende aller ist $= 0$. Also ist nach §. 41.:

$$0 = (P \operatorname{Cos}\alpha + P' \operatorname{Cos}\alpha' + P'' \operatorname{Cos}\alpha'' + \ldots)^2$$
$$+ (P \operatorname{Cos}\beta + P' \operatorname{Cos}\beta' + P'' \operatorname{Cos}\beta'' + \ldots)^2.$$

Die Summe zweyer Quadrate kann aber offenbar nur $= 0$ werden, wenn die Wurzel eines jeden $= 0$ ist, so daß also

$$P \operatorname{Cos}\alpha + P' \operatorname{Cos}\alpha' + P'' \operatorname{Cos}\alpha'' + P''' \operatorname{Cos}\alpha''' + \ldots = 0,$$
$$P \operatorname{Cos}\beta + P' \operatorname{Cos}\beta' + P'' \operatorname{Cos}\beta'' + P''' \operatorname{Cos}\beta''' + \ldots = 0.$$

Betrachtet man aber die Kraft P, welche an einem Punkte, dessen Coordinaten x, y sind, wirkt, als die Aequipollente der übrigen; so ist nach §. 41.:

$$x = \frac{x' P' \operatorname{Cos}\beta' + x'' P'' \operatorname{Cos}\beta'' + x''' P''' \operatorname{Cos}\beta''' + \ldots}{P' \operatorname{Cos}\beta' + P'' \operatorname{Cos}\beta'' + P''' \operatorname{Cos}\beta''' + \ldots},$$

$$y = \frac{y' P' \operatorname{Cos}\alpha' + y'' P'' \operatorname{Cos}\alpha'' + y''' P''' \operatorname{Cos}\alpha''' + \ldots}{P' \operatorname{Cos}\alpha' + P'' \operatorname{Cos}\alpha'' + P''' \operatorname{Cos}\alpha''' + \ldots}.$$

Nach dem Obigen ist aber

$$P' \operatorname{Cos}\beta' + P'' \operatorname{Cos}\beta'' + P''' \operatorname{Cos}\beta''' + \ldots = -P \operatorname{Cos}\beta,$$
$$P' \operatorname{Cos}\alpha' + P'' \operatorname{Cos}\alpha'' + P''' \operatorname{Cos}\alpha''' + \ldots = -P \operatorname{Cos}\alpha.$$

Also

$$x = \frac{x' P' \operatorname{Cos}\beta' + x'' P'' \operatorname{Cos}\beta'' + x''' P''' \operatorname{Cos}\beta''' + \ldots}{-P \operatorname{Cos}\beta},$$

$$y = \frac{y'P'\operatorname{Cos}\alpha' + y''P''\operatorname{Cos}\alpha'' + y'''P'''\operatorname{Cos}\alpha''' + \ldots}{-P\operatorname{Cos}\alpha},$$

$$-xP\operatorname{Cos}\beta = x'P'\operatorname{Cos}\beta' + x''P''\operatorname{Cos}\beta'' + x'''P'''\operatorname{Cos}\beta''' + \ldots,$$

$$-yP\operatorname{Cos}\alpha = y'P'\operatorname{Cos}\alpha' + y''P''\operatorname{Cos}\alpha'' + y'''P'''\operatorname{Cos}\alpha''' + \ldots,$$

$$o = yP\operatorname{Cos}\alpha + y'P'\operatorname{Cos}\alpha' + y''P''\operatorname{Cos}\alpha'' + y'''P'''\operatorname{Cos}\alpha''' + \ldots,$$

$$o = xP\operatorname{Cos}\beta + x'P'\operatorname{Cos}\beta' + x''P''\operatorname{Cos}\beta'' + x'''P'''\operatorname{Cos}\beta''' + \ldots,$$

$$o = P(y\operatorname{Cos}\alpha - x\operatorname{Cos}\beta) + P'(y'\operatorname{Cos}\alpha' - x'\operatorname{Cos}\beta') + \ldots.$$

Sind also die Kräfte P, P', P'', P''' u. s. w. an den Punkten A, A', A'', A''' u. s. w., deren Coordinaten x, y; x', y'; x'', y''; x''', y'''; u. s. w. sind, im Gleichgewichte: so ist immer

$$P\operatorname{Cos}\alpha + P'\operatorname{Cos}\alpha' + P''\operatorname{Cos}\alpha'' + P'''\operatorname{Cos}\alpha''' + \ldots = o,$$

$$P\operatorname{Cos}\beta + P'\operatorname{Cos}\beta' + P''\operatorname{Cos}\beta'' + P'''\operatorname{Cos}\beta''' + \ldots = o,$$

$$P(y\operatorname{Cos}\alpha - x\operatorname{Cos}\beta) + P'(y'\operatorname{Cos}\alpha' - x'\operatorname{Cos}\beta') + \ldots = o.$$

Daß dies aber auch umgekehrt gelte, läßt sich auf folgende Art beweisen.

Da nach der Voraussetzung

$$P'\operatorname{Cos}\alpha' + P''\operatorname{Cos}\alpha'' + P'''\operatorname{Cos}\alpha''' + \ldots = -P\operatorname{Cos}\alpha,$$

$$P'\operatorname{Cos}\beta' + P''\operatorname{Cos}\beta'' + P'''\operatorname{Cos}\beta''' + \ldots = -P\operatorname{Cos}\beta,$$

und folglich weder die eine noch die andere der Größen zur Linken des Gleichheitszeichens $= o$ ist; so gibt es, wie aus §. 41. erhellet, eine Resultirende der Kräfte P', P'', P''' u. s. w., welche wir durch R bezeichnen wollen, so daß also nach §. 41.:

$$R^2 = (P'\operatorname{Cos}\alpha' + P''\operatorname{Cos}\alpha'' + \ldots)^2 + (P'\operatorname{Cos}\beta' + P''\operatorname{Cos}\beta'' + \ldots)^2,$$

d. i.

$$R^2 = P^2 . \operatorname{Cos}\alpha^2 + P^2 . \operatorname{Cos}\beta^2$$
$$= P^2 . (\operatorname{Cos}\alpha^2 + \operatorname{Cos}\beta^2)$$

ist. Nun ist aber nach §. 25. 1. immer $\operatorname{Cos}\alpha^2 + \operatorname{Cos}\beta^2 = 1$; also $R^2 = P^2$, oder $R = P$, denn die Kräfte werden hier immer als positiv betrachtet.

Sind X, Y die Coordinaten eines Punktes in der Richtung der Kraft R; so ist nach §. 41.:

$$X = \frac{x'P'\operatorname{Cos}\beta' + x''P''\operatorname{Cos}\beta'' + x'''P'''\operatorname{Cos}\beta''' + \ldots}{-P\operatorname{Cos}\beta},$$

$$Y = \frac{y'P'\operatorname{Cos}\alpha' + y''P''\operatorname{Cos}\alpha'' + y'''P'''\operatorname{Cos}\alpha''' + \ldots}{-P\operatorname{Cos}\alpha},$$

$$-PX\operatorname{Cos}\beta = x'P'\operatorname{Cos}\beta' + x''P''\operatorname{Cos}\beta'' + x'''P'''\operatorname{Cos}\beta''' + \ldots,$$
$$-PY\operatorname{Cos}\alpha = y'P'\operatorname{Cos}\alpha' + y''P''\operatorname{Cos}\alpha'' + y'''P'''\operatorname{Cos}\alpha''' + \ldots,$$
$$PY\operatorname{Cos}\alpha - PX\operatorname{Cos}\beta = P(Y\operatorname{Cos}\alpha - X\operatorname{Cos}\beta)$$
$$= -P'(y'\operatorname{Cos}\alpha' - x'\operatorname{Cos}\beta') - P''(y''\operatorname{Cos}\alpha'' - x''\operatorname{Cos}\beta'') - \ldots$$
$= P(y\operatorname{Cos}\alpha - x\operatorname{Cos}\beta)$ (nach der Voraussetzung).

Also
$$Y\operatorname{Cos}\alpha - X\operatorname{Cos}\beta = y\operatorname{Cos}\alpha - x\operatorname{Cos}\beta,$$
$$(Y - y)\operatorname{Cos}\alpha = (X - x)\operatorname{Cos}\beta.$$

Ist nun $Y' = AX' + B$ die Gleichung der Richtung der Kraft P; so ist, weil x, y die Coordinaten eines in dieser Richtung liegenden Punktes sind, auch $y = Ax + B$, und folglich durch Subtraction:
$$Y' - y = A(X' - x).$$

Bezeichnet aber ε den Winkel, unter welchem diese Richtung gegen die Axe der x geneigt ist; so ist $A = \operatorname{Tg}\varepsilon$, und nach §. 25. 1.: $\operatorname{Tg}\varepsilon = \frac{\operatorname{Cos}\beta}{\operatorname{Cos}\alpha}$. Also
$$Y' - y = \frac{\operatorname{Cos}\beta}{\operatorname{Cos}\alpha}(X' - x),$$
$$(Y' - y)\operatorname{Cos}\alpha = (X' - x)\operatorname{Cos}\beta.$$

Aus der Vergleichung dieser Gleichung mit der Gleichung
$$(Y - y)\operatorname{Cos}\alpha = (X - x)\operatorname{Cos}\beta$$
erhellet, daß der Punkt der Richtung der Kraft R, dessen Coordinaten X, Y sind, in der Richtung der Kraft P liegt, und folglich beide Richtungen einen Punkt mit einander gemein haben.

Sind nun φ, ψ die Winkel, welche die Richtung der Kraft R mit den Axen der x und y einschließt; so ist nach §. 41.:
$$\operatorname{Cos}\varphi = \frac{-P\operatorname{Cos}\alpha}{R} = \frac{-P\operatorname{Cos}\alpha}{P} = -\operatorname{Cos}\alpha,$$
$$\operatorname{Cos}\psi = \frac{-P\operatorname{Cos}\beta}{R} = \frac{-P\operatorname{Cos}\beta}{P} = -\operatorname{Cos}\beta,$$
so daß also, weil die Winkel α, β, φ, ψ, $180°$ nicht übersteigen, $\varphi = 180° - \alpha$ und $\psi = 180° - \beta$ ist.

Nimmt man jetzt alles Vorhergehende zusammen, so ist klar, daß die Kraft P und die Resultirende R der Kräfte P', P'', P''' u. s. w. gleich und gerade entgegengesetzt, und die Kräfte P, P', P'', P''' u. s. w. folglich unter einander im Gleichgewichte sind, w. z. b. w.

Man kann also jetzt schließen, daß die Gleichungen

$$P \operatorname{Cos} \alpha + P' \operatorname{Cos} \alpha' + P'' \operatorname{Cos} \alpha'' + P''' \operatorname{Cos} \alpha''' + \ldots = 0,$$
$$P \operatorname{Cos} \beta + P' \operatorname{Cos} \beta' + P'' \operatorname{Cos} \beta'' + P''' \operatorname{Cos} \beta''' + \ldots = 0,$$
$$P(y \operatorname{Cos} \alpha - x \operatorname{Cos} \beta) + P'(y' \operatorname{Cos} \alpha' - x' \operatorname{Cos} \beta') + \ldots = 0$$

die **Bedingungen des Gleichgewichts mehrerer in einer Ebene nach willkührlichen Richtungen wirkender Kräfte sind.**

§. 43.

Die im vorhergehenden Paragraphen angegebenen Bedingungen des Gleichgewichts in einer Ebene wirkender Kräfte lassen sich aber noch auf einen andern merkwürdigen Ausdruck bringen. Ehe wir indeß weiter gehen, ist noch ein sehr wichtiger Begriff zu erläutern, von dem wir früher absichtlich noch nicht gesprochen haben. Unter dem **Moment einer Kraft in Beziehung auf einen Punkt**, welcher der **Mittelpunkt der Momente** genannt wird, versteht man das Product der Kraft in das von dem Mittelpunkte der Momente auf ihre Richtung gefällte Perpendikel, und es erhellet aus dieser Erklärung, daß Momente dieser Art von den Momenten in Beziehung auf eine Ebene, welche wir im vorigen Kapitel kennen gelernt haben, wesentlich unterschieden sind. Wirken alle Kräfte in einer Ebene, so sollen die Momente als positiv oder negativ betrachtet werden, je nachdem die in ihnen als Factor enthaltene Kraft die Ebene, in welcher alle Kräfte wirken, um den Mittelpunkt der Momente nach der einen, (gewöhnlich von der linken nach der rechten,) oder nach der andern, (gewöhnlich von der rechten nach der linken,) Seite hin zu drehen strebt. Die von dem Mittelpunkte der Momente auf die Richtungen der Kräfte P, P', P'', P''' u. s. w. gefällten Perpendikel sollen respective durch p, p', p'', p'''

u. s. w., und die Momente folglich durch Pp, $P'p'$, $P''p''$, $P'''p'''$ u. s. w. bezeichnet werden.

§. 44.

Unter den Voraussetzungen des vorhergehenden Paragraphen läßt sich folgender Satz beweisen:

Wenn die in einer Ebene wirkenden Kräfte P, P', P'', P''' u. s. w. im Gleichgewichte sind, so ist in Beziehung auf jeden Punkt C in der Ebene, als Mittelpunkt der Momente, die (algebraische) Summe der Momente $= 0$; d. i.:

$$Pp + P'p' + P''p'' + P'''p''' + \ldots = 0.$$

Um diesen wichtigen und merkwürdigen Satz zu beweisen, denke man sich

1) Drey Kräfte P, P', P'', deren Richtungen sich in dem Punkte A schneiden, (Fig. 29.).

Der Mittelpunkt C der Momente muß offenbar immer zwischen den Richtungen zweyer der gegebenen Kräfte liegen. Wir wollen daher annehmen, er liege zwischen den Richtungen der Kräfte P und P', denn es ist klar, daß durch diese Annahme die Allgemeinheit des Beweises nicht gefährdet wird. Man verlängere nun die Richtung der dritten Kraft P'' nach B und unterscheide folgende Fälle:

a) Der Punkt C liege in dem Winkel PAB, wie in Fig. 29. a. und Fig. 29. a'. Für beide Figuren ist, wenn man $AC = m$ setzt,

das Moment von P, $= mP \operatorname{Sin} \alpha$;

das Moment von P', $= -mP' \operatorname{Sin} (\beta + \gamma)$;

das Moment von P'', $= mP'' \operatorname{Sin} \beta$.

Folglich die Summe der Momente $=$

$$S = mP \operatorname{Sin} \alpha - mP' \operatorname{Sin} (\beta + \gamma) + mP'' \operatorname{Sin} \beta.$$

Aus dem Satze von dem Parallelogramm der Kräfte folgt aber, daß

$$P'' = P \operatorname{Cos} (\alpha + \beta) + P' \operatorname{Cos} \gamma, \text{ und}$$

$$P : P' = \operatorname{Sin} \gamma : \operatorname{Sin} (\alpha + \beta).$$

Also
$$P'\operatorname{Cos}\gamma = P'' - P\operatorname{Cos}(\alpha+\beta),$$
$$P'\operatorname{Sin}\gamma = P\operatorname{Sin}(\alpha+\beta);$$
$$P'\operatorname{Sin}\beta\operatorname{Cos}\gamma = P''\operatorname{Sin}\beta - P\operatorname{Cos}(\alpha+\beta)\operatorname{Sin}\beta,$$
$$P'\operatorname{Cos}\beta\operatorname{Sin}\gamma = P\operatorname{Sin}(\alpha+\beta)\operatorname{Cos}\beta;$$
$$\begin{aligned} P'\operatorname{Sin}\beta\operatorname{Cos}\gamma + P'\operatorname{Cos}\beta\operatorname{Sin}\gamma &= P'\operatorname{Sin}(\beta+\gamma) = \\ &= P''\operatorname{Sin}\beta + P\operatorname{Sin}(\alpha+\beta)\operatorname{Cos}\beta - P\operatorname{Cos}(\alpha+\beta)\operatorname{Sin}\beta \\ &= P''\operatorname{Sin}\beta + P[\operatorname{Sin}(\alpha+\beta)\operatorname{Cos}\beta - \operatorname{Cos}(\alpha+\beta)\operatorname{Sin}\beta] \\ &= P''\operatorname{Sin}\beta + P\operatorname{Sin}(\alpha+\beta-\beta) = P''\operatorname{Sin}\beta + P\operatorname{Sin}\alpha; \end{aligned}$$
$$P\operatorname{Sin}\alpha - P'\operatorname{Sin}(\beta+\gamma) + P''\operatorname{Sin}\beta = 0;$$
$$mP\operatorname{Sin}\alpha - mP'\operatorname{Sin}(\beta+\gamma) + mP''\operatorname{Sin}\beta = 0.$$
Also $S = 0$, w. z. b. w.

b) Der Punkt C liege auf AB, wie in Fig. 29. b. Es ist in diesem Falle

das Moment von P, $= mP\operatorname{Sin}\alpha$;
das Moment von P', $= -mP'\operatorname{Sin}\beta$;
das Moment von P'', $= 0$.

Also $S = mP\operatorname{Sin}\alpha - mP'\operatorname{Sin}\beta$.

Auf ähnliche Art wie vorher ist aber
$$P : P' = \operatorname{Sin}\beta : \operatorname{Sin}\alpha.$$
Also
$$P\operatorname{Sin}\alpha = P'\operatorname{Sin}\beta,$$
$$P\operatorname{Sin}\alpha - P'\operatorname{Sin}\beta = 0,$$
$$mP\operatorname{Sin}\alpha - mP'\operatorname{Sin}\beta = 0;$$
d. i. $S = 0$.

c) Der Punkt C liege in dem Winkel BAP', wie in Fig. 29. c. und Fig. 29. c'. Es ist

das Moment von P, $= mP\operatorname{Sin}(\alpha+\beta)$;
das Moment von P', $= -mP'\operatorname{Sin}\gamma$;
das Moment von P'', $= -mP''\operatorname{Sin}\beta$.

Folglich
$$S = mP\operatorname{Sin}(\alpha+\beta) - mP'\operatorname{Sin}\gamma - mP''\operatorname{Sin}\beta.$$

Nach dem Parallelogramm der Kräfte ist aber
$$P'' = P\operatorname{Cos}\alpha + P'\operatorname{Cos}(\beta+\gamma),$$
$$P : P' = \operatorname{Sin}(\beta+\gamma) : \operatorname{Sin}\alpha.$$

Also
$$P'\,\mathrm{Cos}(\beta+\gamma)=P''-P\,\mathrm{Cos}\,\alpha,$$
$$P'\,\mathrm{Sin}(\beta+\gamma)=P\,\mathrm{Sin}\,\alpha;$$
$$P'\,\mathrm{Cos}(\beta+\gamma)\,\mathrm{Sin}\,\beta=P''\,\mathrm{Sin}\,\beta-P\,\mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,\beta,$$
$$P'\,\mathrm{Sin}(\beta+\gamma)\,\mathrm{Cos}\,\beta=P\,\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\beta.$$
Also durch Subtraction:
$$P'[\mathrm{Sin}(\beta+\gamma)\,\mathrm{Cos}\,\beta-\mathrm{Cos}(\beta+\gamma)\,\mathrm{Sin}\,\beta]$$
$$=P'\,\mathrm{Sin}(\beta+\gamma-\beta)=P'\,\mathrm{Sin}\,\gamma=$$
$$=P\,\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\beta-P''\,\mathrm{Sin}\,\beta+P\,\mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,\beta$$
$$=P(\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\beta+\mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,\beta)-P''\,\mathrm{Sin}\,\beta$$
$$=P\,\mathrm{Sin}(\alpha+\beta)-P''\,\mathrm{Sin}\,\beta.$$
Also
$$P\,\mathrm{Sin}(\alpha+\beta)-P'\,\mathrm{Sin}\,\gamma-P''\,\mathrm{Sin}\,\beta=0,$$
$$mP\,\mathrm{Sin}(\alpha+\beta)-mP'\,\mathrm{Sin}\,\gamma-mP''\,\mathrm{Sin}\,\beta=0;$$
d. i. $S=0$.

Für drey in einer Ebene wirkende Kräfte, welche, ohne nach parallelen Richtungen zu wirken, im Gleichgewichte sind, und deren Richtungen folglich in einem Punkte zusammenlaufen, ist demnach
$$Pp+P'p'+P''p''=0,$$
d. i. die Summe der Momente in Beziehung auf jeden Punkt, als Mittelpunkt der Momente, $=0$.

2) Die drey Kräfte P, P', P'' mögen jetzt nach parallelen Richtungen wirken.

Man nehme in §. 32. den Anfangspunkt als Mittelpunkt der Momente an, und die Axe der x sey auf den Richtungen der Kräfte senkrecht; so ist nach §. 32.:
$$Px+P'x'+P''x''=0,$$
wo x, x', x'' positiv oder negativ sind, je nachdem sie rechts oder links von dem Anfangspunkte der Momente liegen. Die Kräfte sind hier positiv oder negativ, je nachdem sie ab- oder aufwärts wirken. Sey nun

a) P positiv und auch x positiv, so ist Px positiv, und offenbar auch das Moment Pp, (wo P, p beide als positiv betrachtet werden,) positiv. Also $Px=Pp$.

b) Sey P positiv und x negativ, so ist Px negativ. Das Moment Pp ist auch negativ. Also $Px = Pp$.

c) Ist P negativ und x positiv, so ist Px negativ. Das Moment Pp ist auch negativ. Also $Px = Pp$.

d) Ist endlich P negativ und x negativ, so ist Px positiv. Das Moment Pp ist ebenfalls positiv. Also $Pp = Px$.

P und p sind in den Momenten immer positiv, und die Momente selbst sind nach der oben gegebenen Bestimmung positiv oder negativ, je nachdem die in ihnen als Factor enthaltene Kraft das System von der linken nach der rechten, oder von der rechten nach der linken Seite hin zu drehen strebt.

Es ist also immer $Px = Pp$, und eben so $P'x' = P'p'$, $P''x'' = P''p''$. Da nun

$$Px + P'x' + P''x'' = 0 \text{ ist, so ist}$$
$$\text{auch } Pp + P'p' + P''p'' = 0, \text{ w. z. b. w.}$$

Wir können jetzt also annehmen, daß der zu beweisende Satz von den Momenten für jede drey in einer Ebene wirkende Kräfte gilt.

3) Man habe nun Kräfte in willkührlicher Anzahl, welche, nach willkührlichen Richtungen in einer Ebene wirkend, im Gleichgewichte sind.

a) Für vier Kräfte P, P', P'', P'''.

Es ist klar, daß unter vier Kräften immer zwey, z. B. P und P', seyn müssen, für welche es eine Aequipollente R' gibt; und da die vier Kräfte nach der Voraussetzung im Gleichgewichte sind, so ist die Resultirende R die Aequipollente der andern beiden Kräfte P'' und P'''. Bezeichnet man nun die Abstände der Richtungen der Kräfte R und R' von dem Mittelpunkte der Momente durch r und r'; so ist nach dem Vorhergehenden

$$Pp + P'p' + R'r' = 0,$$
$$P''p'' + P'''p''' + Rr = 0.$$

Also durch Addition:

$$Pp + P'p' + P''p'' + P'''p''' + Rr + R'r' = 0.$$

Da aber die Kräfte R und R' gleich und gerade entgegengesetzt sind, so ist offenbar

$$Rr = -R'r', \text{ und } Rr + R'r' = 0.$$

Also

$$Pp + P'p' + P''p'' + P'''p''' = 0,$$

so daß folglich der zu beweisende Satz auch für vier Kräfte gilt.

b) Man habe jetzt fünf Kräfte P, P', P'', P''', P''''; so müssen unter ihnen offenbar zwey, z. B. P, P', seyn, für welche es eine Aequipollente R' gibt, und die Aequipollente der andern Kräfte P'', P''', P'''' ist dann, weil die fünf Kräfte nach der Voraussetzung unter einander im Gleichgewichte sind, die Resultirende R der vorigen zwey.

Nach 1., 2. und 3. a. ist also

$$Pp + P'p' + R'r' = 0,$$
$$P''p'' + P'''p''' + P''''p'''' + Rr = 0,$$

und folglich durch Addition:

$$Pp + P'p' + P''p'' + P'''p''' + P''''p'''' + Rr + R'r' = 0.$$

Wie vorher aber offenbar $Rr + R'r' = 0$. Also

$$Pp + P'p' + P''p'' + P'''p''' + P''''p'''' = 0,$$

so daß der zu beweisende Satz auch für fünf Kräfte richtig ist.

Man sieht jetzt schon, wie man auf dem vorgezeichneten Wege immer weiter gehen kann, und überzeugt sich daher, daß für jede Anzahl von Kräften allgemein

$$Pp + P'p' + P''p'' + P'''p''' + \ldots = 0$$

ist, w. z. b. w.

§. 45.

Aus §. 42. und §. 44. folgt, daß, wenn die in einer Ebene wirkenden Kräfte P, P', P'', P''' u. s. w. im Gleichgewichte sind, immer

$$P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + P'''\cos\alpha''' + \ldots = 0,$$
$$P\cos\beta + P'\cos\beta' + P''\cos\beta'' + P'''\cos\beta''' + \ldots = 0,$$
$$Pp + P'p' + P''p'' + P'''p''' + \ldots = 0$$

ist; die beiden ersten Gleichungen in Beziehung auf irgend zwey rechtwinklige Coordinatenaxen, die letzte in Beziehung auf einen willkührlichen Mittelpunkt der Momente.

Man kann diesen Satz aber auch umkehren, welches sich auf folgende Art zeigen läßt.

Aus §. 41. erhellet, daß es, unter Voraussetzung obiger Gleichungen, immer eine Resultirende R der Kräfte P', P'', P''' u. s. w. gibt, und daß

$$R^2 = (P'\text{Cos}\alpha' + P''\text{Cos}\alpha'' + ..)^2 + (P'\text{Cos}\beta' + P''\text{Cos}\beta'' + ..)^2$$
$$= P^2\text{Cos}\,\alpha^2 + P^2\text{Cos}\,\beta^2 = P^2(\text{Cos}\,\alpha^2 + \text{Cos}\,\beta^2).$$

Aber nach §. 25. 1. $\text{Cos}\,\alpha^2 + \text{Cos}\,\beta^2 = 1$. Also $R^2 = P^2$, und folglich $R = P$. Sind nun φ, ψ die Winkel, welche die Richtung der Kraft R mit den beiden Coordinatenaxen einschließt; so ist nach §. 41. und wegen unsrer Voraussetzung:

$$\text{Cos}\,\varphi = \frac{-P\text{Cos}\,\alpha}{R} = \frac{-P\text{Cos}\,\alpha}{P} = -\text{Cos}\,\alpha,$$

$$\text{Cos}\,\psi = \frac{-P\text{Cos}\,\beta}{R} = \frac{-P\text{Cos}\,\beta}{P} = -\text{Cos}\,\beta.$$

Also, weil die Winkel 180° nicht übersteigen, $\varphi = 180° - \alpha$, $\psi = 180° - \beta$.

Hieraus erhellet, daß die Kraft R der Kraft P gleich, parallel und entgegengesetzt ist; ob aber gerade entgegengesetzt, oder nicht, ist nun noch zu untersuchen.

Ist r das von dem Mittelpunkte der Momente auf die Richtung der Kraft R gefällte Perpendikel; so ist nach dem vorhergehenden Satze, von welchem wir hier den umgekehrten beweisen:

$$R'r + P'p' + P''p'' + P'''p''' + \ldots = 0.$$

Also $R'r = -P'p' - P''p'' - P'''p''' - \ldots.$

Nach der Voraussetzung aber

$$Pp + P'p' + P''p'' + P'''p''' + \ldots = 0,$$

und folglich

$$Pp = -P'p' - P''p'' - P'''p''' - \ldots.$$

Also $R'r = Pp$. Aber $R' = R = P$, wie wir oben sahen; also $r = p$.

Die parallelen Richtungen der Kräfte R und P liegen also in gleichen Entfernungen vom Mittelpunkte der Momente, und sind demnach entweder einander gerade entgegengesetzt, oder liegen auf beiden Seiten des Mittelpunkts der Momente, gleich weit von demselben entfernt. Wäre jedoch das Letztere der Fall, so müßte man Rr als $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$ betrachten, wenn man Pp als $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$ betrachtet. Da aber nach dem Obigen $R'r = Pp$, und offenbar $Rr = -R'r$ zu setzen ist; so ist $Rr = -Pp$, und die Momente der beiden Kräfte R und P sind demnach einander entgegengesetzt, welches nur statt finden kann, wenn sie auf einer Seite des Mittelpunktes der Momente liegen. Die Kraft R ist also der Kraft P gleich und gerade entgegengesetzt, und die Kräfte P, P', P'', P''' u. s. w. sind folglich unter einander im Gleichgewichte, w. z. b. w.

Die Bedingungen des Gleichgewichts mehrerer nach willkührlichen Richtungen in einer Ebene wirkender Kräfte werden daher auch durch folgende drey Gleichungen ausgedrückt:

$$P\operatorname{Cos}\alpha + P'\operatorname{Cos}\alpha' + P''\operatorname{Cos}\alpha'' + P'''\operatorname{Cos}\alpha''' + \ldots = 0,$$
$$P\operatorname{Cos}\beta + P'\operatorname{Cos}\beta' + P''\operatorname{Cos}\beta'' + P'''\operatorname{Cos}\beta''' + \ldots = 0,$$
$$Pp + P'p' + P''p'' + P'''p''' + \ldots = 0;$$

die ersten beiden in Beziehung auf zwey willkührliche rechtwinklige Coordinatenaxen, die letzte in Beziehung auf irgend einen Mittelpunkt der Momente.

Viertes Kapitel.

Von dem Gleichgewichte nach willkührlichen Richtungen im Raume auf ein freyes System wirkender Kräfte.

§. 46.

Die Kräfte werden wie vorher durch P, P', P'', P''' u. s. w., und ihre Angriffspunkte respective durch A, A', A'', A''' u. s. w. bezeichnet. Zur Bestimmung der Lage der Angriffspunkte werden drey rechtwinklige Coordinatenaxen angenommen. Die Coordinaten der Angriffspunkte sind respective x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z''; x''', y''', z'''; u. s. w., und die von den Richtungen der Kräfte mit den angenommenen Axen eingeschlossenen Winkel: α, β, γ; α', β', γ'; α'', β'', γ''; α''', β''', γ'''; u. s. w., nach §. 20. 2., mit Zuziehung einer ähnlichen Bemerkung, wie in §. 40., über die genauere Bestimmung dieser Winkel.

§. 47.

Aufgabe. Drey auf einen Punkt mit den angenommenen Coordinatenaxen parallel wirkende Kräfte auf ein System mit der Axe der z parallel wirkender Kräfte und ein System in der Ebene xy wirkender Kräfte zu bringen.

Auflösung. Die drey gegebenen Kräfte sollen durch p, q, r bezeichnet werden; die erste sey der Axe der x, die zweyte der Axe der y, und die dritte der Axe der z parallel. Ihr Angriffspunkt sey A, dessen Coordinaten x, y, z seyen. Der Anfangspunkt der Coordinaten werde in den Figuren durch O bezeichnet.

1) Man kann, ohne die Wirkung der nach $Ap \rightarrow$ (Fig. 30. a.) gerichteten Kraft p zu ändern, in A zwey nach entgegengesetzten Richtungen parallel mit der Axe der z wirkende

Kräfte g anbringen, wie die Figur zeigt. g nach $Ag \uparrow$ und p nach $Ap \rightarrow$ setze man in eine Kraft R nach $AR \uparrow$ zusammen, und verlängere deren Richtung, bis sie die Ebene der xy in B schneidet. Sodann versetze man die Kraft R in diesen Punkt, und zerlege sie in zwey Kräfte, deren eine in der Ebene der xy parallel mit der Axe der x, und die andere parallel mit der Axe der z wirkt; so sind diese Kräfte, wie aus dem Satze von dem Parallelogramm der Kräfte unmittelbar folgt, offenbar $= p$ nach $Bp \rightarrow$ und $= g$ nach $Bg \uparrow$, parallel mit Ox und Oz. Diese beiden Kräfte und die Kraft g nach $Ag \downarrow$ kann man also für die Kraft p setzen.

2) Nun setze man in Fig. 30. b. die Kraft q nach $Aq \leftarrow$ und die Kraft g nach $Ag \downarrow$ in eine Kraft $\mathfrak{R}$ nach $A\mathfrak{R} \downarrow$ zusammen, versetze letztere in den Punkt B', wo ihre Richtung die Ebene der xy schneidet, und zerlege sie hier in q nach $B'q \leftarrow$, (parallel mit Oy), und g nach $B'g \downarrow$, (parallel mit Oz); so kann man also für die Kraft q nach $Aq \leftarrow$, die Kräfte q nach $B'q \leftarrow$, g nach $B'g \downarrow$, und g nach $Ag \uparrow$ setzen.

3) Für p nach $Ap \rightarrow$ (Fig. 30. a.) und q nach $Aq \leftarrow$ (Fig. 30. b.) kann man also p nach $Bp \rightarrow$, g nach $Bg \uparrow$, und g nach $Ag \downarrow$, (Fig. 30. a.), q nach $B'q \leftarrow$, g nach $B'g \downarrow$, und g nach $Ag \uparrow$, (Fig. 30. b.), d. i. p nach $Bp \rightarrow$, q nach $B'q \leftarrow$, g nach $Bg \uparrow$, und g nach $B'g \downarrow$, setzen.

4) Für die drey gegebenen Kräfte p, q, r kann man daher die in der Ebene der xy wirkenden Kräfte p nach $Bp \rightarrow$, q nach $B'q \leftarrow$, (Fig. 30. a. b.), und die der Axe der z parallelen Kräfte g nach $Bg \uparrow$, g nach $B'g \downarrow$, (Fig. 30. a. b.), und r setzen, so daß also unsrer Aufgabe Genüge geleistet ist.

Wir bemerken hier, daß die Kräfte p, q in der Ebene der xy nach denselben Seiten hin gerichtet sind, wie die gegebenen Kräfte p, q in A, und respective mit der Axe der x und y parallel wirken, wie leicht erhellet. Die Kräfte g an den Punkten B und B' in Fig. 30. a. b. wirken nach entgegengesetzten Seiten.

Sehr wichtig ist es, die Coordinaten der Punkte B und B' zu kennen, welche sich auf folgende Art bestimmen lassen.

Die Coordinaten von B seyen X, Y; so ist in Fig. 30. a.

$$X = + CB = + Cp - Bp = x - Bp.$$

Nach dem Satze von dem Parallelogramm der Kräfte ist aber, wenn man R durch die Linie AB darstellt: $Bg : Bp = g : p$, oder $z : Bp = g : p$. Also $Bp = \frac{pz}{g}$, und folglich $X = x - \frac{pz}{g}$. Y ist offenbar $= y$, und die dritte Coordinate des Punktes B ist, weil dieser Punkt in der Ebene der xy liegt, $=$ Null.

Die Coordinaten des Punktes B' in Fig. 30. b. seyen X', Y'; so ist offenbar $X' = x$, und

$$Y' = + B'D = + pD + B'p = y + B'p.$$

Setzt man nun, auf ähnliche Art wie vorher, $\mathfrak{R} = AB'$; so ist nach dem Satze von dem Parallelogramm der Kräfte $pA : B'p = g : q$, d. i. $z : B'p = g : q$. Also $B'p = \frac{qz}{g}$, und folglich $Y' = y + \frac{qz}{g}$.

Die Coordinaten der Punkte B und B' sind hier bloß für den in Fig. 30. a. b. dargestellten Fall gefunden worden. Die gefundenen Ausdrücke sind aber allgemein, wovon man sich durch die Betrachtung einiger andern Fälle überzeugen kann; nur muß man bemerken, daß die Kräfte p, q als positiv oder negativ zu betrachten sind, je nachdem sie nach der Seite der positiven oder negativen x, y hin wirken. Allgemeiner und wissenschaftlicher ist indeß wohl folgende Darstellung.

In Fig. 30. a. denke man sich die ganze Figur auf die Ebene der xz projicirt, und durch O eine Parallele mit AB gezogen; so ist die Gleichung dieser Parallele: $Z = AX$. Ist nun p positiv, so fällt die Parallele offenbar in den Winkel xOz selbst, und es ist, da A, als die Tangente eines spitzen Winkels, (M. s. mein Lehrbuch der Kegelschnitte, §. 10.), und auch p, so wie g, positiv sind, weil letzteres hier immer als positiv betrachtet wird, offenbar $g = A.p$. Ist p negativ, so fällt die Parallele in den Nebenwinkel von xOz, und p sowohl als A ist negativ, g aber wird als positiv betrachtet; also wieder $g = A.p$, so daß also immer $A = \frac{g}{p}$ ist.

Die Gleichung der Linie AB ist nach §. 14. meines Lehrbuches der Kegelschnitte:

$$Z = AX + B,$$

wo A dieselbe Bedeutung, wie vorher, hat, und folglich $= \frac{g}{p}$ ist. Da diese Linie aber durch den Punkt A, dessen Coordinaten x, y, z sind, geht; so ist

$$z = Ax + B.$$

Also $Z - z = A(X - x) = \frac{g}{p}(X - x)$. Folglich für $Z = 0$:

$$-z = \frac{g}{p}(X - x), \quad -\frac{pz}{g} = X - x, \quad X = x - \frac{pz}{g}.$$

Die Coordinaten von B sind also offenbar überhaupt:

$$x - \frac{pz}{g}, \; y, \; 0.$$

In Fig. 30. b. denke man sich die ganze Figur auf die Ebene der yz projicirt, und denke sich durch O eine Parallele mit AB' gezogen; so ist die Gleichung dieser Parallele: $Z' = A'Y'$. Es ist klar, daß diese Parallele, wenn q positiv ist, in den Nebenwinkel von yOz fällt, so daß also A', als die Tangente eines stumpfen Winkels, negativ, und folglich g, welches immer als positiv betrachtet wird, nicht $= A'q$, sondern $= -A'q$ zu setzen ist. Ist q negativ, so fällt die Parallele in den Winkel yOz selbst, und A' ist positiv; also, da q negativ ist, wieder nicht $g = A'q$, sondern $= -A'q$, und es ist folglich immer $A' = -\frac{g}{q}$. Die Gleichung der Linie AB' selbst ist wie vorher:

$$Z' = A'Y' + B'.$$

Da aber diese Linie durch A geht; so ist

$$z = A'y + B'.$$

Also $Z' - z = A'(Y' - y) = -\frac{g}{q}(Y' - y)$. Folglich für $Z' = 0$:

$$-z = -\frac{g}{q}(Y' - y), \quad \frac{qz}{g} = Y' - y, \quad Y' = y + \frac{qz}{g}.$$

Die Coordinaten von B' sind also:

$$x,\ y+\frac{qz}{g},\ o.$$

Man sieht also aus dieser Darstellung, welcher man die Allgemeinheit nicht wird absprechen können, wenn nur die angewandten Sätze aus der analytischen Geometrie, wie ich an den angeführten Stellen meines Lehrbuches der Kegelschnitte gethan zu haben glaube, völlig allgemein bewiesen sind, daß die schon oben für den besondern Fall der Figur gefundenen Ausdrücke der Coordinaten von B und B' für alle Fälle gelten.

§. 48.

Aufgabe. Die Bedingungen des Gleichgewichts nach willkührlichen Richtungen im Raume wirkender Kräfte zu finden.

Auflösung. Jede der gegebenen Kräfte, welche hier immer als positiv betrachtet werden, zerlege man in drey den Coordinatenaxen parallele Kräfte; so sind diese Kräfte mit Rücksicht auf die positive oder negative Lage ihrer Richtungen nach §. 22. 2.:

$$P\,\mathrm{Cos}\,\alpha,\ P\,\mathrm{Cos}\,\beta,\ P\,\mathrm{Cos}\,\gamma,\ \text{für } P \text{ an } A;$$
$$P'\,\mathrm{Cos}\,\alpha',\ P'\,\mathrm{Cos}\,\beta',\ P'\,\mathrm{Cos}\,\gamma',\ \text{für } P' \text{ an } A';$$
$$P''\,\mathrm{Cos}\,\alpha'',\ P''\,\mathrm{Cos}\,\beta'',\ P''\,\mathrm{Cos}\,\gamma'',\ \text{für } P'' \text{ an } A'';$$
$$P'''\,\mathrm{Cos}\,\alpha''',\ P'''\,\mathrm{Cos}\,\beta''',\ P'''\,\mathrm{Cos}\,\gamma''',\ \text{für } P''' \text{ an } A''';$$
u. s. w. u. s. w.

Nach §. 47. bringe man nun jedes dieser Systeme dreyer Kräfte auf ein System mit der Axe der z parallel wirkender Kräfte und ein System in der Ebene der xy wirkender Kräfte. Diese Kräfte sind nebst den Coordinaten ihrer Angriffspunkte in folgender Tabelle dargestellt. Zu bemerken ist noch, wie aus §. 47. erhellet, daß die in der Ebene der xy wirkenden Kräfte mit der Axe der x oder y parallel sind, und nach derselben Seite hin wirken, wie die ihnen entsprechenden unter den obigen Kräften.

	Parallel mit der Axe der z.	In der Ebene der xy.	Ob parallel mit der Axe der x od. y.	Coordinaten der Angriffspunkte.
Für den Punkt A.	$P \operatorname{Cos} \gamma$	〃	〃	$x,\ y,\ z$
	$+g$	〃	〃	$x - \frac{zP \operatorname{Cos} \alpha}{g},\ y,\ 0$
	$-g$	〃	〃	$x,\ y + \frac{zP \operatorname{Cos} \beta}{g},\ 0$
	〃	$P \operatorname{Cos} \alpha$	Axe der x	$x - \frac{zP \operatorname{Cos} \alpha}{g},\ y,\ 0$
	〃	$P \operatorname{Cos} \beta$	Axe der y	$x,\ y + \frac{zP \operatorname{Cos} \beta}{g},\ 0$
Für den Punkt A'.	$P' \operatorname{Cos} \gamma'$	〃	〃	$x',\ y',\ z'$
	$+g$	〃	〃	$x' - \frac{z'P' \operatorname{Cos} \alpha'}{g},\ y',\ 0$
	$-g$	〃	〃	$x',\ y' + \frac{z'P' \operatorname{Cos} \beta'}{g},\ 0$
	〃	$P' \operatorname{Cos} \alpha'$	Axe der x	$x' - \frac{z'P' \operatorname{Cos} \alpha'}{g},\ y',\ 0$
	〃	$P' \operatorname{Cos} \beta'$	Axe der y	$x',\ y' + \frac{z'P' \operatorname{Cos} \beta'}{g},\ 0$
Für den Punkt A''.	$P'' \operatorname{Cos} \gamma''$	〃	〃	$x'',\ y'',\ z''$
	$+g$	〃	〃	$x'' - \frac{z''P'' \operatorname{Cos} \alpha''}{g},\ y'',\ 0$
	$-g$	〃	〃	$x'',\ y'' + \frac{z''P'' \operatorname{Cos} \beta''}{g},\ 0$
	〃	$P'' \operatorname{Cos} \alpha''$	Axe der x	$x'' - \frac{z''P'' \operatorname{Cos} \alpha''}{g},\ y'',\ 0$
	〃	$P'' \operatorname{Cos} \beta''$	Axe der y	$x'',\ y'' + \frac{z''P'' \operatorname{Cos} \beta''}{g},\ 0$
Für den Punkt A'''.	$P''' \operatorname{Cos} \gamma'''$	〃	〃	$x''',\ y''',\ z'''$
	$+g$	〃	〃	$x''' - \frac{z'''P''' \operatorname{Cos} \alpha'''}{g},\ y''',\ 0$
	$-g$	〃	〃	$x''',\ y''' + \frac{z'''P''' \operatorname{Cos} \beta'''}{g},\ 0$
	〃	$P''' \operatorname{Cos} \alpha'''$	Axe der x	$x''' - \frac{z'''P''' \operatorname{Cos} \alpha'''}{g},\ y''',\ 0$
	〃	$P''' \operatorname{Cos} \beta'''$	Axe der y	$x''',\ y''' + \frac{z'''P''' \operatorname{Cos} \beta'''}{g},\ 0$

u. s. w. u. s. w.

Die gegebenen Kräfte lassen sich also, wie vorstehende Tabelle zeigt, immer auf ein System mit der Axe der z parallel, und ein System in der Ebene der xy wirkender Kräfte bringen, und es ist klar, daß die gegebenen Kräfte unter einander im Gleichgewichte sind, wenn jedes dieser beiden Systeme für sich im Gleichgewichte ist. Man kann dies aber auch umkehren, und kann behaupten, daß, wenn die gegebenen Kräfte im Gleichgewichte sind, jedes der beiden Systeme, auf welche die gegebenen Kräfte sich bringen lassen, für sich im Gleichgewichte seyn muß, welches sich auf folgende Art leicht beweisen läßt. Sind nämlich die gegebenen Kräfte im Gleichgewichte, so sind die Kräfte in den beiden Systemen, auf welche sich jene bringen lassen, offenbar unter einander im Gleichgewichte. Man nehme nun ein Mahl an, die der Axe der z parallel wirkenden seyen nicht für sich im Gleichgewichte. Das Gleichgewicht der Kräfte beider Systeme muß offenbar fortdauern, wenn man sich in der Ebene der xy eine feste gerade Linie denkt, um welche sich die Ebene der xy drehen läßt. Thut man dies aber, so kann man die in der Ebene der xy wirkenden Kräfte entfernen, ohne das Gleichgewicht zu stören, weil ihre Wirkungen von der festen geraden Linie offenbar ganz aufgehoben werden. Wären aber nun, wie angenommen wurde, die der Axe der z parallel wirkenden nicht für sich im Gleichgewichte, so würden sie die Ebene der xy um die angenommene gerade Linie drehen, und das Gleichgewicht bestünde also, gegen das Obige, nicht fort. Die der Axe der z parallelen Kräfte, und folglich, da die Kräfte in beiden Systemen unter einander im Gleichgewichte sind, auch die in der Ebene der xy wirkenden Kräfte, sind also für sich im Gleichgewichte, w. z. b. w.

Man bezeichne jetzt die positiven Werthe der Größen

$P \operatorname{Cos} \alpha$, $P' \operatorname{Cos} \alpha'$, $P'' \operatorname{Cos} \alpha''$, $P''' \operatorname{Cos} \alpha'''$, u. s. w.;

$P \operatorname{Cos} \beta$, $P' \operatorname{Cos} \beta'$, $P'' \operatorname{Cos} \beta''$, $P''' \operatorname{Cos} \beta'''$, u. s. w.

respective durch Π, Π', Π'', Π''' u. s. w.; $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}', \mathfrak{P}'', \mathfrak{P}'''$ u. s. w.

Die Winkel, welche die Richtungen der Kräfte Π, Π', Π'' u. s. w. in der Ebene der xy mit der Axe der y einschließen, sind, wie aus §. 47. erhellet, alle $= 90°$, und die Cosinusse dieser Winkel also alle $= 0$. Dagegen sind die Winkel, welche die Richtungen derselben Kräfte mit der Axe der x einschließen, $= 0$ oder $= 180°$, ihre Cosinusse also $= +1$ oder $= -1$ zu setzen, je nachdem diese Kräfte nach der Seite der positiven oder negativen x gerichtet sind. Etwas ganz Aehnliches ist über die Kräfte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{P}''$ u. s. w. zu bemerken.

Dies vorausgesetzt, so ist nach dem Obigen und nach §. 42. und §. 38., wenn die gegebenen Kräfte P, P', P'' u. s. w. im Gleichgewichte sind oder im Gleichgewichte seyn sollen:

$$\left.\begin{array}{l} \Pi.(\pm 1)+\Pi'.(\pm 1)+\Pi''.(\pm 1)+\Pi'''.(\pm 1)+\ldots \\ +\mathfrak{P}.0 \quad +\mathfrak{P}'.0 \quad +\mathfrak{P}''.0 \quad +\mathfrak{P}'''.0+\ldots \end{array}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{array}{l} \Pi.0 \quad +\Pi'.0 \quad +\Pi''.0 \quad +\Pi'''.0+\ldots \\ +\mathfrak{P}.(\pm 1)+\mathfrak{P}'.(\pm 1)+\mathfrak{P}''.(\pm 1)+\mathfrak{P}'''.(\pm 1)+\ldots \end{array}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{array}{l} \Pi\left\{y.(\pm 1)-\left(x-\frac{zP\mathrm{Cos}\alpha}{g}\right).0\right\}+\Pi'\left\{y'.(\pm 1)-\left(x'-\frac{z'P'\mathrm{Cos}\alpha'}{g}\right).0\right\}+\ldots \\ +\mathfrak{P}\left\{\left(y+\frac{zP\mathrm{Cos}\beta}{g}\right).0-x.(\pm 1)\right\}+\mathfrak{P}'\left\{\left(y'+\frac{z'P'\mathrm{Cos}\beta'}{g}\right).0-x'.(\pm 1)\right\}+\ldots \end{array}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{array}{l} P\mathrm{Cos}\gamma+P'\mathrm{Cos}\gamma'+P''\mathrm{Cos}\gamma''+P'''\mathrm{Cos}\gamma'''+\ldots \\ +g+g+g+g+\ldots \quad -g-g-g-g-\ldots \end{array}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{array}{l} Px\mathrm{Cos}\gamma+P'x'\mathrm{Cos}\gamma'+P''x''\mathrm{Cos}\gamma''+P'''x'''\mathrm{Cos}\gamma'''+\ldots \\ +g\left(x-\frac{zP\mathrm{Cos}\alpha}{g}\right)+g\left(x'-\frac{z'P'\mathrm{Cos}\alpha'}{g}\right)+g\left(x''-\frac{z''P''\mathrm{Cos}\alpha''}{g}\right)+\ldots \\ -gx-gx'-gx''-gx'''-\ldots\ldots \end{array}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{array}{l} Py\mathrm{Cos}\gamma+P'y'\mathrm{Cos}\gamma'+P''y''\mathrm{Cos}\gamma''+P'''y'''\mathrm{Cos}\gamma'''+\ldots \\ +gy+gy'+gy''+gy'''+\ldots\ldots \\ -g\left(y+\frac{zP\mathrm{Cos}\beta}{g}\right)-g\left(y'+\frac{z'P'\mathrm{Cos}\beta'}{g}\right)-g\left(y''+\frac{z''P''\mathrm{Cos}\beta''}{g}\right)+\ldots \end{array}\right\}=0.$$

Diese sechs Gleichungen sind also die gesuchten Bedingungen des Gleichgewichts nach willkührlichen Richtungen im Raume wirkender Kräfte.

Man kann aber diese Gleichungen vereinfachen und leicht auf folgende reduciren:

$$\Pi.(\pm 1) + \Pi'.(\pm 1) + \Pi''.(\pm 1) + \Pi'''.(\pm 1) + \ldots = 0,$$

$$\mathfrak{P}.(\pm 1) + \mathfrak{P}'.(\pm 1) + \mathfrak{P}''.(\pm 1) + \mathfrak{P}'''.(\pm 1) + \ldots = 0,$$

$$\left.\begin{array}{l} \Pi y.(\pm 1) + \Pi' y'.(\pm 1) + \Pi'' y''.(\pm 1) + \Pi''' y'''.(\pm 1) + \ldots \\ - \mathfrak{P} x.(\pm 1) - \mathfrak{P}' x'.(\pm 1) - \mathfrak{P}'' x''.(\pm 1) - \mathfrak{P}''' x'''.(\pm 1) - \ldots \end{array}\right\} = 0,$$

$$P \operatorname{Cos}\gamma + P' \operatorname{Cos}\gamma' + P'' \operatorname{Cos}\gamma'' + P''' \operatorname{Cos}\gamma''' + \ldots = 0,$$

$$\left.\begin{array}{l} P x \operatorname{Cos}\gamma + P' x' \operatorname{Cos}\gamma' + P'' x'' \operatorname{Cos}\gamma'' + P''' x''' \operatorname{Cos}\gamma''' + \ldots \\ - P z \operatorname{Cos}\alpha - P' z' \operatorname{Cos}\alpha' - P'' z'' \operatorname{Cos}\alpha'' - P''' z''' \operatorname{Cos}\alpha''' - \ldots \end{array}\right\} = 0,$$

$$\left.\begin{array}{l} P y \operatorname{Cos}\gamma + P' y' \operatorname{Cos}\gamma' + P'' y'' \operatorname{Cos}\gamma'' + P''' y''' \operatorname{Cos}\gamma''' + \ldots \\ - P z \operatorname{Cos}\beta - P' z' \operatorname{Cos}\beta' - P'' z'' \operatorname{Cos}\beta'' - P''' z''' \operatorname{Cos}\beta''' - \ldots \end{array}\right\} = 0.$$

Betrachtet man jetzt das Product $\Pi.(\pm 1) = \pm \Pi$ näher, so erhellet aus dem Obigen, daß das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem die Kraft Π nach der Seite der positiven oder negativen x gerichtet ist. In dem Producte $P \operatorname{Cos}\alpha$, dessen positiver Werth Π ist, ist aber nach §. 22. 2. durch $\operatorname{Cos}\alpha$ schon auf die positive oder negative Lage der Richtung der durch dieses Product dargestellten Kraft gehörig Rücksicht genommen, und man kann daher $P \operatorname{Cos}\alpha$ für $\Pi.(\pm 1)$ setzen, welches eben so von allen Producten, wie $\Pi.(\pm 1)$ oder $\mathfrak{P}.(\pm 1)$, gilt, so daß sich also jetzt die obigen sechs Gleichungen in folgende verwandeln:

$$P \operatorname{Cos}\alpha + P' \operatorname{Cos}\alpha' + P'' \operatorname{Cos}\alpha'' + P''' \operatorname{Cos}\alpha''' + \ldots = 0,$$

$$P \operatorname{Cos}\beta + P' \operatorname{Cos}\beta' + P'' \operatorname{Cos}\beta'' + P''' \operatorname{Cos}\beta''' + \ldots = 0,$$

$$\left.\begin{array}{l} P y \operatorname{Cos}\alpha + P' y' \operatorname{Cos}\alpha' + P'' y'' \operatorname{Cos}\alpha'' + P''' y''' \operatorname{Cos}\alpha''' + \ldots \\ - P x \operatorname{Cos}\beta - P' x' \operatorname{Cos}\beta' - P'' x'' \operatorname{Cos}\beta'' - P''' x''' \operatorname{Cos}\beta''' - \ldots \end{array}\right\} = 0,$$

$$P \operatorname{Cos}\gamma + P' \operatorname{Cos}\gamma' + P'' \operatorname{Cos}\gamma'' + P''' \operatorname{Cos}\gamma''' + \ldots = 0,$$

$$\left.\begin{array}{l} P x \operatorname{Cos}\gamma + P' x' \operatorname{Cos}\gamma' + P'' x'' \operatorname{Cos}\gamma'' + P''' x''' \operatorname{Cos}\gamma''' + \ldots \\ - P z \operatorname{Cos}\alpha - P' z' \operatorname{Cos}\alpha' - P'' z'' \operatorname{Cos}\alpha'' - P''' z''' \operatorname{Cos}\alpha''' - \ldots \end{array}\right\} = 0,$$

$$\left.\begin{array}{l} P y \operatorname{Cos}\gamma + P' y' \operatorname{Cos}\gamma' + P'' y'' \operatorname{Cos}\gamma'' + P''' y''' \operatorname{Cos}\gamma''' + \ldots \\ - P z \operatorname{Cos}\beta - P' z' \operatorname{Cos}\beta' - P'' z'' \operatorname{Cos}\beta'' - P''' z''' \operatorname{Cos}\beta''' - \ldots \end{array}\right\} = 0.$$

Bringt man nun endlich diese Gleichungen auf ihren einfachsten Ausdruck, so erhält man folgende sechs Gleichungen als Bedingungen des Gleichgewichts nach willkührlichen Richtungen im Raume auf ein freyes System wirkender Kräfte:

$$P\,\mathrm{Cos}\,\alpha + P'\,\mathrm{Cos}\,\alpha' + P''\,\mathrm{Cos}\,\alpha'' + P'''\,\mathrm{Cos}\,\alpha''' + \ldots = 0,$$
$$P\,\mathrm{Cos}\,\beta + P'\,\mathrm{Cos}\,\beta' + P''\,\mathrm{Cos}\,\beta'' + P'''\,\mathrm{Cos}\,\beta''' + \ldots = 0,$$
$$P\,\mathrm{Cos}\,\gamma + P'\,\mathrm{Cos}\,\gamma' + P''\,\mathrm{Cos}\,\gamma'' + P'''\,\mathrm{Cos}\,\gamma''' + \ldots = 0,$$
$$P(y\,\mathrm{Cos}\,\alpha - x\,\mathrm{Cos}\,\beta) + P'(y'\,\mathrm{Cos}\,\alpha' - x'\,\mathrm{Cos}\,\beta') + \ldots = 0,$$
$$P(x\,\mathrm{Cos}\,\gamma - z\,\mathrm{Cos}\,\alpha) + P'(x'\,\mathrm{Cos}\,\beta' - z'\,\mathrm{Cos}\,\alpha') + \ldots = 0,$$
$$P(z\,\mathrm{Cos}\,\beta - y\,\mathrm{Cos}\,\gamma) + P'(z'\,\mathrm{Cos}\,\beta' - y'\,\mathrm{Cos}\,\gamma') + \ldots = 0.$$

§. 49.

Aufgabe. Größe und Richtung der Resultirenden mehrerer nach willkührlichen Richtungen im Raume wirkender Kräfte zu finden.

Auflösung. Die gesuchte Resultirende sey $= R$, und φ, ψ, χ seyen die von ihrer Richtung mit den Coordinatenaxen eingeschlossenen Winkel; X, Y, Z seyen die Coordinaten ihres Angriffspunktes. Der Abkürzung wegen setze man

$$P\,\mathrm{Cos}\,\alpha + P'\,\mathrm{Cos}\,\alpha' + P''\,\mathrm{Cos}\,\alpha'' + P'''\,\mathrm{Cos}\,\alpha''' + \ldots = \mathfrak{A},$$
$$P\,\mathrm{Cos}\,\beta + P'\,\mathrm{Cos}\,\beta' + P''\,\mathrm{Cos}\,\beta'' + P'''\,\mathrm{Cos}\,\beta''' + \ldots = \mathfrak{B},$$
$$P\,\mathrm{Cos}\,\gamma + P'\,\mathrm{Cos}\,\gamma' + P''\,\mathrm{Cos}\,\gamma'' + P'''\,\mathrm{Cos}\,\gamma''' + \ldots = \mathfrak{C};$$

so ist nach §. 48.:

$$R\,\mathrm{Cos}\,(180^\circ - \varphi) + \mathfrak{A} = 0,$$
$$R\,\mathrm{Cos}\,(180^\circ - \psi) + \mathfrak{B} = 0,$$
$$R\,\mathrm{Cos}\,(180^\circ - \chi) + \mathfrak{C} = 0,$$

da R die Resultirende und nicht die Aequipollente seyn soll. Also

$$-R\,\mathrm{Cos}\,\varphi + \mathfrak{A} = 0,\quad -R\,\mathrm{Cos}\,\psi + \mathfrak{B} = 0,$$
$$-R\,\mathrm{Cos}\,\chi + \mathfrak{C} = 0;$$
$$R\,\mathrm{Cos}\,\varphi = \mathfrak{A},\quad R\,\mathrm{Cos}\,\psi = \mathfrak{B},\quad R\,\mathrm{Cos}\,\chi = \mathfrak{C};$$
$$R^2(\mathrm{Cos}\,\varphi^2 + \mathrm{Cos}\,\psi^2 + \mathrm{Cos}\,\chi^2) = \mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2.$$

Aber nach §. 25. 2.:

$$\mathrm{Cos}\,\varphi^2 + \mathrm{Cos}\,\psi^2 + \mathrm{Cos}\,\chi^2 = 1.$$

Also

$$R^2 = \mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2, \text{ und}$$
$$R = \sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2},$$
$$\operatorname{Cos}\phi = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2}},$$
$$\operatorname{Cos}\psi = \frac{\mathfrak{B}}{\sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2}},$$
$$\operatorname{Cos}\chi = \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2}}.$$

Ferner setze man der Abkürzung wegen

$$P(y \operatorname{Cos}\alpha - x \operatorname{Cos}\beta) + P'(y' \operatorname{Cos}\alpha' - x' \operatorname{Cos}\beta') + \ldots = A,$$
$$P(x \operatorname{Cos}\gamma - z \operatorname{Cos}\alpha) + P'(x' \operatorname{Cos}\gamma' - z' \operatorname{Cos}\alpha') + \ldots = B,$$
$$P(z \operatorname{Cos}\beta - y \operatorname{Cos}\gamma) + P'(z' \operatorname{Cos}\beta' - y' \operatorname{Cos}\gamma') + \ldots = C;$$

so ist nach §. 48.:

$$R[Y \operatorname{Cos}(180^\circ - \phi) - X \operatorname{Cos}(180^\circ - \psi)] + A = 0,$$
$$R[X \operatorname{Cos}(180^\circ - \chi) - Z \operatorname{Cos}(180^\circ - \phi)] + B = 0,$$
$$R[Z \operatorname{Cos}(180^\circ - \psi) - Y \operatorname{Cos}(180^\circ - \chi)] + C = 0,$$

d. i.

$$-R(Y \operatorname{Cos}\phi - X \operatorname{Cos}\psi) + A = 0,$$
$$-R(X \operatorname{Cos}\chi - Z \operatorname{Cos}\phi) + B = 0,$$
$$-R(Z \operatorname{Cos}\psi - Y \operatorname{Cos}\chi) + C = 0;$$

oder

$$R(Y \operatorname{Cos}\phi - X \operatorname{Cos}\psi) = A,$$
$$R(X \operatorname{Cos}\chi - Z \operatorname{Cos}\phi) = B,$$
$$R(Z \operatorname{Cos}\psi - Y \operatorname{Cos}\chi) = C;$$

oder

$$A - Y \,.\, R \operatorname{Cos}\phi + X \,.\, R \operatorname{Cos}\psi = 0,$$
$$B - X \,.\, R \operatorname{Cos}\chi + Z \,.\, R \operatorname{Cos}\phi = 0,$$
$$C - Z \,.\, R \operatorname{Cos}\psi + Y \,.\, R \operatorname{Cos}\chi = 0;$$

und folglich, weil nach dem Obigen $R \operatorname{Cos}\phi = \mathfrak{A}$, $R \operatorname{Cos}\psi = \mathfrak{B}$, $R \operatorname{Cos}\chi = \mathfrak{C}$ ist:

$$A - \mathfrak{A}Y + \mathfrak{B}X = 0,$$
$$B - \mathfrak{C}X + \mathfrak{A}Z = 0,$$
$$C - \mathfrak{B}Z + \mathfrak{C}Y = 0.$$

Versucht man, aus diesen drey Gleichungen z. B. X zu bestimmen, so erhält man

$$B\mathfrak{B} - \mathfrak{B}\mathfrak{C}X + \mathfrak{A}\mathfrak{B}Z = 0,$$
$$C\mathfrak{A} - \mathfrak{A}\mathfrak{B}Z + \mathfrak{A}\mathfrak{C}Y = 0;$$
$$B\mathfrak{B} + C\mathfrak{A} - \mathfrak{B}\mathfrak{C}X + \mathfrak{A}\mathfrak{C}Y = 0,$$
$$A\mathfrak{C} - \mathfrak{A}\mathfrak{C}Y + \mathfrak{B}\mathfrak{C}X = 0;$$
$$A\mathfrak{C} + B\mathfrak{B} + C\mathfrak{A} = 0;$$

also keinen Werth von X.

Auf dasselbe Resultat kommt man auch bey der Bestimmung von Y und Z, und erhält also mittelst der obigen drey Gleichungen keine bestimmten Werthe von X, Y, Z. Man sieht aber leicht ein, daß es hier nicht auf einen bestimmten Angriffspunkt der Resultirenden ankömmt, sondern überhaupt nur auf irgend einen in ihrer Richtung liegenden Punkt, oder, was dasselbe ist, auf die Gleichungen der Richtung. Diese Gleichungen sind aber in der That die obigen, welche auch auf folgende Art ausgedrückt werden können:

$$\mathfrak{A}Y - \mathfrak{B}X = A,$$
$$\mathfrak{C}X - \mathfrak{A}Z = B,$$
$$\mathfrak{B}Z - \mathfrak{C}Y = C,$$

so daß also nun Richtung und Größe der Resultirenden bestimmt sind.

Die oben gefundene Gleichung zwischen A, B, C, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ ist an sich merkwürdig, und wird aus den obigen drey Gleichungen am leichtesten abgeleitet, wenn man diese Gleichungen nach der Reihe mit $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}$ multiplicirt, wodurch man erhält:

$$A\mathfrak{C} - \mathfrak{A}\mathfrak{C}Y + \mathfrak{B}\mathfrak{C}X = 0,$$
$$B\mathfrak{B} - \mathfrak{B}\mathfrak{C}X + \mathfrak{A}\mathfrak{B}Z = 0,$$
$$C\mathfrak{A} - \mathfrak{A}\mathfrak{B}Z + \mathfrak{A}\mathfrak{C}Y = 0.$$

Addirt man nun diese Gleichungen zu einander, so erhält man nach gehöriger Abkürzung

$$A\mathfrak{C} + \mathfrak{B}B + C\mathfrak{A} = 0,$$

die schon oben gefundene Gleichung.

Diese Gleichung ist für die Lehre vom Gleichgewichte nach willkührlichen Richtungen im Raume wirkender Kräfte von sehr grosser Wichtigkeit. Der ganzen in diesem Paragraphen geführten Untersuchung liegt, wie Jedem, welcher das Vorgetragene nochmahls mit Aufmerksamkeit überblickt, in die Augen fallen wird, die Voraussetzung zum Grunde, daß es für die gegebenen Kräfte P, P', P'' u. s. w. eine Resultirende gibt. Man kann daher behaupten, daß, wenn es für gegebene Kräfte P, P', P'' u. s. w. im Raume eine Resultirende gibt, immer

$$A\mathfrak{C} + B\mathfrak{B} + C\mathfrak{A} = 0$$

ist, und daß demnach umgekehrt, wenn diese Gleichung nicht statt findet, die gegebenen Kräfte nicht auf eine Resultirende gebracht werden können.

Man kann aber auch ferner behaupten, daß, wenn die Gleichung

$$A\mathfrak{C} + B\mathfrak{B} + C\mathfrak{A} = 0$$

statt findet, die Kräfte P, P', P'' u. s. w. im Raume immer auf eine Resultirende gebracht werden können, vorausgesetzt, daß nicht zu gleicher Zeit $\mathfrak{A} = 0$, $\mathfrak{B} = 0$, $\mathfrak{C} = 0$ ist.

Der Beweis hiervon kann auf folgende Art geführt werden.

Da nach der Voraussetzung nicht zu gleicher Zeit $\mathfrak{A} = 0$, $\mathfrak{B} = 0$, $\mathfrak{C} = 0$ ist; so ist die Größe $\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2$ nicht $= 0$, und die Ausdrücke

$$R = \sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2},$$

$$\operatorname{Cos}\varphi = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2}},$$

$$\operatorname{Cos}\psi = \frac{\mathfrak{B}}{\sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2}},$$

$$\operatorname{Cos}\chi = \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2}}$$

erhalten also bestimmte Werthe, welche weder $= \infty$ noch $= \frac{0}{0}$ sind, so daß also die Größen R, $\operatorname{Cos}\varphi$, $\operatorname{Cos}\psi$, $\operatorname{Cos}\chi$

völlig bestimmt sind, und man erhält leicht aus den obigen Ausdrücken:

$$R \operatorname{Cos} \varphi = \mathfrak{A}, \quad R \operatorname{Cos} \psi = \mathfrak{B}, \quad R \operatorname{Cos} \chi = \mathfrak{C};$$

$$R \operatorname{Cos}(180^\circ - \varphi) = -\mathfrak{A}, \quad R \operatorname{Cos}(180^\circ - \psi) = -\mathfrak{B},$$
$$R \operatorname{Cos}(180^\circ - \chi) = -\mathfrak{C};$$

$$R \operatorname{Cos}(180^\circ - \varphi) + \mathfrak{A} = 0, \quad R \operatorname{Cos}(180^\circ - \psi) + \mathfrak{B} = 0,$$
$$R \operatorname{Cos}(180^\circ - \chi) + \mathfrak{C} = 0.$$

Da nun von den drey Größen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ nach der Voraussetzung wenigstens Eine nicht $= 0$ ist, so wollen wir setzen, es sey z. B. die Größe $\mathfrak{A}$ nicht $= 0$. Unter dieser Voraussetzung nehme man folgende zwey Gleichungen:

$$\mathfrak{A}Y - \mathfrak{B}X = A,$$
$$\mathfrak{C}X - \mathfrak{A}Z = B,$$

mit den drey unbekannten Größen X, Y, Z an, gebe der Größe X einen willkührlichen bestimmten Werth, und bestimme Y, Z so, daß sie den angenommenen Gleichungen genügen, welches immer möglich ist. Denn man erhält durch leichte Rechnung

$$Y = \frac{A + \mathfrak{B}X}{\mathfrak{A}}, \quad Z = \frac{\mathfrak{C}X - \mathfrak{B}}{\mathfrak{A}};$$

völlig bestimmte Werthe, welche auch nicht $= \infty$, weil nach der Voraussetzung $\mathfrak{A}$ nicht $= 0$. Wäre $\mathfrak{B}$ nicht $= 0$, so müßte man die Gleichungen

$$\mathfrak{A}Y - \mathfrak{B}X = A,$$
$$\mathfrak{B}Z - \mathfrak{C}Y = C,$$

und Y willkührlich annehmen, und dann X, Z bestimmen. Eben so müßte man, wäre $\mathfrak{C}$ nicht $= 0$, die Gleichungen

$$\mathfrak{C}X - \mathfrak{A}Z = B,$$
$$\mathfrak{B}Z - \mathfrak{C}Y = C$$

annehmen, Z sodann willkührlich annehmen, und hieraus X und Y bestimmen. Wir wollen jedoch bey unsrer ersten Voraussetzung bleiben. Man wird leicht übersehen, wie der Beweis in jedem Falle zu führen ist.

Die drey unter der ersten Voraussetzung bestimmten Größen X, Y, Z, welche also den Gleichungen

$$\mathfrak{A}Y - \mathfrak{B}X = A,$$
$$\mathfrak{C}X - \mathfrak{A}Z = B$$

genügen, nehme man jetzt als Coordinaten eines Punktes an, welchen wir durch M bezeichnen wollen. Dieser Punkt ist nämlich der Durchschnittspunkt dreyer Ebenen, welche in den Entfernungen X, Y, Z von den drey Coordinatenebenen parallel mit diesen Ebenen gelegt werden. Man lasse nun die oben bestimmte, unter den Winkeln φ, ψ, χ gegen die Coordinatenaxen wirkende, Kraft R an dem so eben bestimmten Punkte M wirken, und schließe ferner, wie folgt.

Es war
$$\mathfrak{A}Y - \mathfrak{B}X = A,$$
$$\mathfrak{C}X - \mathfrak{A}Z = B.$$
Also
$$A - \mathfrak{A}Y + \mathfrak{B}X = 0,$$
$$B - \mathfrak{C}X + \mathfrak{A}Z = 0;$$
und folglich
$$A\mathfrak{C} - \mathfrak{A}\mathfrak{C}Y + \mathfrak{B}\mathfrak{C}X = 0,$$
$$B\mathfrak{B} - \mathfrak{B}\mathfrak{C}X + \mathfrak{A}\mathfrak{B}Z = 0.$$
Also durch Addition:
$$A\mathfrak{C} + B\mathfrak{B} + \mathfrak{A}\mathfrak{B}Z - \mathfrak{A}\mathfrak{C}Y = 0,$$
und folglich
$$A\mathfrak{C} + B\mathfrak{B} + C\mathfrak{A} + \mathfrak{A}\mathfrak{B}Z - \mathfrak{A}\mathfrak{C}Y = C\mathfrak{A}.$$

Aber nach der Voraussetzung
$$A\mathfrak{C} + B\mathfrak{B} + C\mathfrak{A} = 0.$$
Also
$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}Z - \mathfrak{A}\mathfrak{C}Y = C\mathfrak{A},$$
und, weil $\mathfrak{A}$ nach der Voraussetzung nicht $= 0$:
$$\mathfrak{B}Z - \mathfrak{C}Y = C,$$
oder $C - \mathfrak{B}Z + \mathfrak{C}Y = 0$, so daß also
$$A - \mathfrak{A}Y + \mathfrak{B}X = 0,$$
$$B - \mathfrak{C}X + \mathfrak{A}Z = 0,$$
$$C - \mathfrak{B}Z + \mathfrak{C}Y = 0.$$

Nun war aber nach dem Obigen
$$R \operatorname{Cos}\varphi = \mathfrak{A}, \quad R \operatorname{Cos}\psi = \mathfrak{B}, \quad R \operatorname{Cos}\chi = \mathfrak{C}.$$
Also

$$A - RY\,\mathrm{Cos}\,\varphi + RX\,\mathrm{Cos}\,\psi = 0,$$
$$B - RX\,\mathrm{Cos}\,\chi + RZ\,\mathrm{Cos}\,\varphi = 0,$$
$$C - RZ\,\mathrm{Cos}\,\psi + RY\,\mathrm{Cos}\,\chi = 0;$$

$$-R(Y\,\mathrm{Cos}\,\varphi - X\,\mathrm{Cos}\,\psi) + A = 0,$$
$$-R(X\,\mathrm{Cos}\,\chi - Z\,\mathrm{Cos}\,\varphi) + B = 0,$$
$$-R(Z\,\mathrm{Cos}\,\psi - Y\,\mathrm{Cos}\,\chi) + C = 0;$$

$$R[Y\,\mathrm{Cos}\,(180^\circ - \varphi) - X\,\mathrm{Cos}\,(180^\circ - \psi)] + A = 0,$$
$$R[X\,\mathrm{Cos}\,(180^\circ - \chi) - Z\,\mathrm{Cos}\,(180^\circ - \varphi)] + B = 0,$$
$$R[Z\,\mathrm{Cos}\,(180^\circ - \psi) - Y\,\mathrm{Cos}\,(180^\circ - \chi)] + C = 0.$$

Man hat also jetzt folgende sechs Gleichungen:

$$R\,\mathrm{Cos}\,(180^\circ - \varphi) + \mathfrak{A} = 0,$$
$$R\,\mathrm{Cos}\,(180^\circ - \psi) + \mathfrak{B} = 0,$$
$$R\,\mathrm{Cos}\,(180^\circ - \chi) + \mathfrak{C} = 0,$$
$$R[Y\,\mathrm{Cos}\,(180^\circ - \varphi) - X\,\mathrm{Cos}\,(180^\circ - \psi)] + A = 0,$$
$$R[X\,\mathrm{Cos}\,(180^\circ - \chi) - Z\,\mathrm{Cos}\,(180^\circ - \varphi)] + B = 0,$$
$$R[Z\,\mathrm{Cos}\,(180^\circ - \psi) - Y\,\mathrm{Cos}\,(180^\circ - \chi)] + C = 0.$$

Dies sind die sechs Bedingungen des Gleichgewichts nach willkührlichen Richtungen im Raume wirkender Kräfte, welches leicht erhellet, wenn man sich für $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, A, B, C ihre Werthe gesetzt denkt. Daher sind die gegebenen Kräfte P, P', P'' u. s. w. nach §. 48. mit der Kraft R an einem Punkte, dessen Coordinaten X, Y, Z sind, unter den Winkeln $180^\circ - \varphi$, $180^\circ - \psi$, $180^\circ - \chi$ gegen die Coordinatenaxen, im Gleichgewichte, und die Kraft R an einem Punkte, dessen Coordinaten X, Y, Z sind, unter den Winkeln φ, ψ, χ gegen die Coordinatenaxen, ist also die Resultirende der gegebenen Kräfte, so daß es also, wie behauptet wurde, eine Resultirende gibt. R, X, Y, Z, $\mathrm{Cos}\,\varphi$, $\mathrm{Cos}\,\psi$, $\mathrm{Cos}\,\chi$ sind durch das Obige völlig bestimmt.

Wir können also jetzt folgenden allgemeinen Satz behaupten, und in der Folge anwenden:

1) Wenn es für die nach willkührlichen Richtungen im Raume wirkenden Kräfte P, P', P'' u. s. w. eine Resultirende gibt, so ist immer

$$A\mathfrak{C} + B\mathfrak{B} + C\mathfrak{A} = 0.$$

2) Wenn

$$A\mathfrak{C} + B\mathfrak{B} + C\mathfrak{A} \text{ nicht } = 0$$

ist, so gibt es für die obigen Kräfte nicht eine Resultirende.

3) Wenn

$$A\mathfrak{C} + B\mathfrak{B} + C\mathfrak{A} = 0,$$

und nicht zu gleicher Zeit $\mathfrak{A} = 0$, $\mathfrak{B} = 0$, $\mathfrak{C} = 0$ ist, so gibt es für die obigen Kräfte eine Resultirende.

§. 50.

In dem Vorhergehenden sind die allgemeinen Bedingungen des Gleichgewichts nach willkührlichen Richtungen im Raume wirkender Kräfte gefunden, und Größe und Richtung der Resultirenden solcher Kräfte bestimmt worden. Wir wollen jetzt am Schlusse dieses Kapitels nur noch zeigen, daß, in dem Falle, wo es nicht eine Resultirende der Kräfte P, P', P'' u. s. w. (§. 49.) gibt, diese Kräfte doch immer auf zwey Kräfte reducirt werden können.

Man bestimme zu dem Ende eine Kraft S und ihre Neigungswinkel φ', ψ', χ' gegen die Axen, indem man voraussetzt, daß diese Kraft durch den Anfang der Coordinaten als ihren Angriffspunkt geht, so, daß die Gleichung

$$A\mathfrak{C}' + B\mathfrak{B}' + A\mathfrak{A}' = 0,$$

wo

$$\mathfrak{A}' = S\operatorname{Cos}\varphi' + P\operatorname{Cos}\alpha + P'\operatorname{Cos}\alpha' + \ldots,$$
$$\mathfrak{B}' = S\operatorname{Cos}\psi' + P\operatorname{Cos}\beta + P'\operatorname{Cos}\beta' + \ldots,$$
$$\mathfrak{C}' = S\operatorname{Cos}\chi' + P\operatorname{Cos}\gamma + P'\operatorname{Cos}\gamma' + \ldots,$$
$$A = P(y\operatorname{Cos}\alpha - x\operatorname{Cos}\beta) + P'(y'\operatorname{Cos}\alpha' - x'\operatorname{Cos}\beta') + \ldots,$$
$$B = P(x\operatorname{Cos}\gamma - z\operatorname{Cos}\alpha) + P'(x'\operatorname{Cos}\gamma' - z'\operatorname{Cos}\alpha') + \ldots,$$
$$C = P(z\operatorname{Cos}\beta - y\operatorname{Cos}\gamma) + P'(z'\operatorname{Cos}\beta' - y'\operatorname{Cos}\gamma') + \ldots$$

zu setzen ist, erfüllt wird. Daß dies immer möglich ist, erhellet leicht, denn man braucht bloß drey der Größen S, φ', ψ', χ' willkührlich anzunehmen, und die vierte aus der obigen Bedingungsgleichung zu bestimmen. Nun bringe man in dem Anfangspunkte der Coordinaten die Kraft S nach ihrer und nach einer dieser gerade entgegengesetzten Richtung an, so wird dadurch die Wirkung der Kräfte P, P', P'' u. s. w. nicht geändert. Für die Kraft S unter den Winkeln φ', ψ', χ' und die Kräfte P, P', P'' u. s. w. setze man ihre Resultirende R, denn es gibt nach §. 49. eine Resultirende dieser Kräfte, weil

$$A\mathfrak{C}' + B\mathfrak{B}' + A\mathfrak{A}' = 0$$

ist, und die Wirkung der Kräfte P, P', P'' u. s. w. wird also durch die Kraft R und die Kraft S unter den Winkeln $180° - \varphi'$, $180° - \psi'$, $180° - \chi'$ dargestellt, so daß also jene Kräfte auf zwey Kräfte gebracht sind, w. z. b. w.

Da immer drey der Größen S, φ', ψ', χ' willkührlich sind, so erhellet, daß diese Reduction auf zwey Kräfte auf unendlich viele Arten angestellt werden kann.

Wenn die Größen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ zu gleicher Zeit $= 0$ sind; so ist

$$\mathfrak{A}' = S \operatorname{Cos} \varphi', \quad \mathfrak{B}' = S \operatorname{Cos} \psi', \quad \mathfrak{C}' = S \operatorname{Cos} \chi'.$$

Die aus S, P, P' u. s. w. Resultirende R ist demnach nach §. 49.:

$$= \sqrt{\mathfrak{A}'^2 + \mathfrak{B}'^2 + \mathfrak{C}'^2} = S \sqrt{\operatorname{Cos} \varphi'^2 + \operatorname{Cos} \psi'^2 + \operatorname{Cos} \chi'^2}$$
$$= S$$

und die Cosinusse der von der Richtung der Resultirenden R mit den Axen eingeschlossenen Winkel sind

$$= \frac{\mathfrak{A}'}{\sqrt{\mathfrak{A}'^2 + \mathfrak{B}'^2 + \mathfrak{C}'^2}} = \frac{\mathfrak{A}'}{S} = \operatorname{Cos} \varphi',$$

$$= \frac{\mathfrak{B}'}{\sqrt{\mathfrak{A}'^2 + \mathfrak{B}'^2 + \mathfrak{C}'^2}} = \frac{\mathfrak{B}'}{S} = \operatorname{Cos} \psi',$$

$$= \frac{\mathfrak{C}'}{\sqrt{\mathfrak{A}'^2 + \mathfrak{B}'^2 + \mathfrak{C}'^2}} = \frac{\mathfrak{C}'}{S} = \operatorname{Cos} \chi',$$

woraus unmittelbar folgt, daß sich in diesem Falle die gegebenen Kräfte auf zwey gleiche entgegengesetzte und unter einander parallele Kräfte zurückführen lassen.

Bezeichnen nun X, Y, Z die Coordinaten eines Punktes in der Richtung der Kraft R; so hat man nach §. 49. folgende Gleichungen:

$$A - \mathfrak{A}'Y + \mathfrak{B}'X = 0,$$
$$B - \mathfrak{C}'X + \mathfrak{A}'Z = 0,$$
$$C - \mathfrak{B}'Z + \mathfrak{C}'Y = 0.$$

Aus diesen Gleichungen erhellet, daß die Richtung der Kraft K nicht durch den Anfang der Coordinaten gehen kann, weil sonst $X = Y = Z = 0$ seyn müßte, woraus folgte, daß auch $A = B = C = 0$ wäre. Dann wären aber, weil nach der Voraussetzung auch $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{C} = 0$ ist, nach §. 49. die Kräfte P, P', P'' u. s. w. im Gleichgewichte. Sind diese Kräfte also, wie wir hier annehmen, nicht im Gleichgewichte; so lassen sie sich in unserm Falle nur auf zwey gleiche einander parallele und entgegengesetzte, aber nicht gerade entgegengesetzte, Kräfte reduciren, weil die Kraft S nach dem Obigen durch den Anfang der Coordinaten geht.

Fünftes Kapitel.

Von dem Gleichgewichte der Kräfte, welche auf ein nicht völlig freyes System wirken.

I.

Kräfte, welche auf einen Punkt wirken.

§. 51.

Ehe wir zu unserm eigentlichen Gegenstande übergehen, schicken wir, um nicht auf andere, den Anfängern weniger zugängliche, Werke verweisen zu müssen, folgende Betrachtungen aus der analytischen Geometrie voraus.

Die Natur der Flächen wird bekanntlich durch Gleichungen zwischen drey veränderlichen Größen in Beziehung auf drey willkührliche, meistens auf einander senkrechte, Coordinatenaxen dargestellt. Wir wollen jetzt die Winkel zu bestimmen suchen, welche eine Ebene, die eine gegebene krumme Fläche in einem gewissen Punkte berührt, mit jeder der Coordinatenebenen einschließt. Die Coordinaten des gegebenen Punktes seyen x, y, z, und die Gleichung der Fläche zwischen diesen drey Coordinaten werde durch $L = 0$ dargestellt.

Durch den gegebenen Punkt B in Fig. 31. denke man sich mit den Ebenen der xz und yz zwey parallele Ebenen gelegt, welche die Ebene der xy in den mit Ax und Ay parallelen Linien ED und EC, und die gegebene Fläche in zwey gewissen krummen Linien von einfacher Krümmung schneiden. An diese Linien ziehe man durch den Punkt B die Tangenten BD und BC, so ist BCD die, die gegebene krumme Fläche in dem Punkte B tangirende, Ebene, und der Winkel EFB, welchen man erhält, wenn man von E ein Perpendikel auf CD fällt und BF zieht, ist, wie aus Euclides Elementen, lib. XI. prop. XI., leicht folgt, der Neigungswinkel der Ebene BCD gegen die Ebene der xy. ED und EC sind die Subtangenten des

Punktes B bey den beiden vorher erwähnten Curven von einfacher Krümmung, und folglich

$$ED = \frac{zdx}{dz}, \text{ und}$$

$$EC = \frac{zdy}{dz},$$

z im ersten Falle als Function von x, im andern als Function von y betrachtet; im ersten Falle wird y, im andern x als constant angesehen. Nun ist aber, weil ED parallel Ax, und CE parallel Ay, $\angle CED = \angle xAy = 90°$, und folglich

$$CD = \sqrt{CE^2 + ED^2}$$

$$= z\sqrt{\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2}.$$

Weil aber EF auf CD senkrecht ist, so ist

$$CD : CE = ED : EF; \text{ d. i.}$$

$$z\sqrt{\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2} : \frac{zdy}{dz} = \frac{zdx}{dz} : EF.$$

$$EF = \frac{z \cdot \frac{dx}{dz} \cdot \frac{dy}{dz}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2}}$$

$$= \frac{z \cdot \frac{dx}{dz} \cdot \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} \cdot \frac{dz}{dy}}{\frac{dz}{dx} \cdot \frac{dz}{dy}\sqrt{\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2}}$$

$$= \frac{z}{\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 \cdot \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 \cdot \left\{\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2\right\}}}$$

$$= \frac{z}{\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}.$$

$$BF^2 = BE^2 + EF^2$$

$$= z^2 + \frac{z^2}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}$$

$$= \frac{z^2 . \left\{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\}}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}.$$

$$BF = \frac{z\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}.$$

Setzt man nun den Winkel $EFB = \alpha$, so ist $\mathrm{Cos}\,\alpha = \frac{EF}{BF}$, und folglich

$$\mathrm{Cos}\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}.$$

Aehnliche Ausdrücke findet man auch für die Cosinusse der Neigungswinkel gegen die andern Coordinatenebenen.

Man denke sich jetzt durch B eine Normallinie auf die gegebene krumme Fläche, d. i. ein Perpendikel auf die tangirende Ebene, gelegt, und denke sich durch B drey mit den angenommenen Coordinatenaxen parallele gerade Linien gezogen, um die von der Normale mit den drey angenommenen Axen eingeschlossenen Winkel, die wir durch ε, ε', ε'' bezeichnen wollen, zu bestimmen. Die Normale liegt in der Ebene des Dreyecks BEF, und es ist klar, daß der von ihr mit EB, d. i. mit der Axe der z, eingeschlossene Winkel, d. i. ε'', $= \alpha$ ist, nach Euclides Elementen, lib. VI. prop. VIII. Es ist folglich

$$\mathrm{Cos}\,\varepsilon'' = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}.$$

Bezeichnet man nun die partiellen Differenzialquotienten der Function L von drey veränderlichen Größen x, y, z respective durch $\frac{dL}{dx}$, $\frac{dL}{dy}$, $\frac{dL}{dz}$; so ist

$$\operatorname{Cos} \varepsilon'' = \frac{\frac{dL}{dz}}{\frac{dL}{dz}\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}$$

$$= \frac{dL}{dz} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dL}{dz}\right)^2+\left(\frac{dL}{dz}\right)^2\cdot\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dL}{dz}\right)^2\cdot\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}$$

$$= \frac{dL}{dz} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dL}{dz}\right)^2\cdot\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dL}{dz}\right)^2\cdot\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+\left(\frac{dL}{dz}\right)^2}}.$$

Nach der Lehre von der Differenziation der Gleichungen, worüber die bekannten Werke über die Differenzialrechnung nachgesehen werden müssen, ist aber, da hier, wie oben bemerkt wurde, in $\frac{dz}{dx}$ die Größe y, und in $\frac{dz}{dy}$ die Größe x als constant betrachtet wird:

$$\frac{dL}{dx} + \frac{dL}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = 0,$$

$$\frac{dL}{dy} + \frac{dL}{dz} \cdot \frac{dz}{dy} = 0,$$

und folglich

$$\frac{dL}{dx} = -\frac{dL}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}, \quad \frac{dL}{dy} = -\frac{dL}{dz} \cdot \frac{dz}{dy};$$

$$\left(\frac{dL}{dx}\right)^2 = \left(\frac{dL}{dz}\right)^2 \cdot \left(\frac{dz}{dx}\right)^2, \quad \left(\frac{dL}{dy}\right)^2 = \left(\frac{dL}{dz}\right)^2 \cdot \left(\frac{dz}{dy}\right)^2.$$

Also

$$\operatorname{Cos} \varepsilon'' = \frac{dL}{dz} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dL}{dx}\right)^2+\left(\frac{dL}{dy}\right)^2+\left(\frac{dL}{dz}\right)^2}},$$

und folglich ganz auf ähnliche Art:

$$\operatorname{Cos} \varepsilon = \frac{dL}{dx} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dL}{dx}\right)^2+\left(\frac{dL}{dy}\right)^2+\left(\frac{dL}{dz}\right)^2}},$$

$$\text{Cos}\,\varepsilon' = \frac{dL}{dy} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dL}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz}\right)^2}},$$

$$\text{Cos}\,\varepsilon'' = \frac{dL}{dz} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dL}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz}\right)^2}}.$$

Alle Differenzialquotienten sind partiell. Jeder dieser Cosinusse hat wegen der Quadratwurzel zwey Werthe, einen positiven und einen negativen, von denen jener dem spitzen, dieser dem stumpfen Neigungswinkel entspricht.

Seyen jetzt ε, ε', ε'' die Winkel, welche der eine nach der Ebene der xy hin liegende Theil der Normale, vom Anfangspunkte der Coordinaten an genommen, mit den drey Axen einschließt; so ist in dem in Fig. 31. dargestellten Falle, wie leicht erhellet, nach den Bestimmungen in §. 20. 2. $\varepsilon > 90°$, $\varepsilon' > 90°$, $\varepsilon'' > 90°$, und folglich die Cosinusse dieser Winkel alle negativ. Auch sind die Winkel, welche die Berührungslinien BD und BC mit den Axen ED und EC einschließen, beide größer als 90°, (nach der in §. 9. zu Anfang meines Lehrbuches der Kegelschnitte gegebenen Bestimmung,) und folglich nach der allgemeinen Theorie der Tangenten sowohl $\frac{dz}{dx}$, als auch $\frac{dz}{dy}$ negativ. Nun war

$$\frac{dL}{dx} = -\frac{dL}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}, \quad \frac{dL}{dy} = -\frac{dL}{dz} \cdot \frac{dz}{dy},$$

und $\frac{dL}{dx}$, $\frac{dL}{dy}$, $\frac{dL}{dz}$ haben also alle dasselbe Vorzeichen. Denn ist $\frac{dL}{dz}$ z. B. negativ, so sind, weil $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ negativ sind, die Producte $-\frac{dL}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$, $-\frac{dL}{dz} \cdot \frac{dz}{dy}$, d. i. $\frac{dL}{dx}$, $\frac{dL}{dy}$, ebenfalls negativ. Ist $\frac{dL}{dz}$ positiv, so sind die Producte $-\frac{dL}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$, $-\frac{dL}{dz} \cdot \frac{dz}{dy}$, d. i. $\frac{dL}{dx}$,

$\frac{dL}{dy}$, ebenfalls positiv. Da nun $\mathrm{Cos}\,\varepsilon$, $\mathrm{Cos}\,\varepsilon'$, $\mathrm{Cos}\,\varepsilon''$ alle drey negativ sind, und auch $\frac{dL}{dx}$, $\frac{dL}{dy}$, $\frac{dL}{dz}$ alle dasselbe Vorzeichen haben; so ist klar, daß man in den obigen Ausdrücken für $\mathrm{Cos}\,\varepsilon$, $\mathrm{Cos}\,\varepsilon'$, $\mathrm{Cos}\,\varepsilon''$ überall den positiven oder negativen Werth von

$$\sqrt{\left(\frac{dL}{dx}\right)^2+\left(\frac{dL}{dy}\right)^2+\left(\frac{dL}{dz}\right)^2}$$

setzen muß. Durch ein ähnliches Raisonnement kann man sich in jedem andern Falle überzeugen, daß, vorausgesetzt, daß die Winkel ε, ε', ε'' nach der Bestimmung in §. 20. 2. genommen werden, in den obigen Ausdrücken für die Cosinusse dieser Winkel überall entweder der positive oder der negative Werth der obigen Wurzelgröße zu setzen ist. Man hat hierbey, wie auch vorher geschehen, immer die allgemeine Theorie der Tangenten zu Hülfe zu nehmen, wodurch sich in jedem Falle leicht ergeben wird, was für Vorzeichen den Differenzialquotienten $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ zugeschrieben werden müssen. Man kann also

$$\mathrm{Cos}\,\varepsilon = V.\frac{dL}{dx},\quad \mathrm{Cos}\,\varepsilon' = V.\frac{dL}{dy},\quad \mathrm{Cos}\,\varepsilon'' = V.\frac{dL}{dz}$$

setzen, wo

$$V = \pm\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dL}{dx}\right)^2+\left(\frac{dL}{dy}\right)^2+\left(\frac{dL}{dz}\right)^2}}$$

und überall entweder das obere oder das untere Vorzeichen zu nehmen ist.

Zugleich erhellet auch leicht und ohne weitere Erläuterung, daß das eine Vorzeichen immer dem einen, auf die concave Seite der gegebenen Fläche fallenden, das andere aber dem andern, auf die convexe Seite der gegebenen Fläche fallenden, Theile der Normale entspricht.

§. 52.

Wir wollen jetzt annehmen, der Punkt B, auf welchen die Kräfte P, P', P'', P''' u. s. w. wirken, sey auf irgend einer krummen Fläche, deren Gleichung $L = 0$ sey, beweglich, jedoch so, daß er nicht von der Fläche entfernt werden kann. Sind die Kräfte P, P', P'', P''' u. s. w. im Gleichgewichte, so wird offenbar die Richtung ihrer Resultirenden R auf der Fläche senkrecht seyn, und umgekehrt. Sind also die gegebenen Kräfte im Gleichgewichte, so ist nach §. 51. und §. 24. 2.:

$$-R\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon + P\,\mathrm{Cos}\,\alpha + P'\,\mathrm{Cos}\,\alpha' + P''\,\mathrm{Cos}\,\alpha'' + \ldots = 0,$$
$$-R\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon' + P\,\mathrm{Cos}\,\beta + P'\,\mathrm{Cos}\,\beta' + P''\,\mathrm{Cos}\,\beta'' + \ldots = 0,$$
$$-R\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon'' + P\,\mathrm{Cos}\,\gamma + P'\,\mathrm{Cos}\,\gamma' + P''\,\mathrm{Cos}\,\gamma'' + \ldots = 0,$$

wo

$$\mathrm{Cos}\,\varepsilon = V.\frac{dL}{dx},\quad \mathrm{Cos}\,\varepsilon' = V.\frac{dL}{dy},\quad \mathrm{Cos}\,\varepsilon'' = V.\frac{dL}{dz},$$

$$V = \pm \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dL}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz}\right)^2}}$$

ist; $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$ aber die Winkel bezeichnen, welche der Theil der Normale, in welchem die Resultirende wirkt, mit den drey Axen einschließt. Also der Abkürzung wegen:

$$-RV.\frac{dL}{dx} + \mathfrak{A} = 0,\quad -RV.\frac{dL}{dy} + \mathfrak{B} = 0,\quad -RV.\frac{dL}{dz} + \mathfrak{C} = 0,$$

$$M\frac{dL}{dx} + \mathfrak{A} = 0,\quad M\frac{dL}{dy} + \mathfrak{B} = 0,\quad M\frac{dL}{dz} + \mathfrak{C} = 0,$$

für $-RV = M$.

Finden diese drey Gleichungen statt; so ist auch

$$M\frac{dL}{dx}.\frac{dL}{dy} + \mathfrak{A}\frac{dL}{dy} = 0,$$
$$M\frac{dL}{dy}.\frac{dL}{dx} + \mathfrak{B}\frac{dL}{dx} = 0.$$

Also

$$\mathfrak{A}\frac{dL}{dy} - \mathfrak{B}\frac{dL}{dx} = 0,$$ und auf ähnliche Art:

$$\mathfrak{B}\frac{dL}{dz} - \mathfrak{C}\frac{dL}{dy} = 0,$$ und

$$\mathfrak{C}\frac{dL}{dx} - \mathfrak{A}\frac{dL}{dz} = 0.$$

Diese Gleichungen finden also immer statt, wenn die gegebenen Kräfte im Gleichgewichte sind.

Man nehme jetzt umgekehrt an, daß zwey dieser drey Gleichungen, z. B.

$$\mathfrak{A}\frac{dL}{dy} - \mathfrak{B}\frac{dL}{dx} = 0,$$

$$\mathfrak{B}\frac{dL}{dz} - \mathfrak{C}\frac{dL}{dy} = 0,$$

statt finden, und seyen φ, ψ, χ die Winkel, welche die Resultirende der Kräfte P, P', P'' u. s. w. mit den drey Axen einschließt; so erhellet leicht, daß die dritte der obigen Gleichungen immer aus den beiden angenommenen folgt. Nach §. 25. ist

$$\operatorname{Cos}\varphi = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2}},$$

$$\operatorname{Cos}\psi = \frac{\mathfrak{B}}{\sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2}},$$

$$\operatorname{Cos}\chi = \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2}}.$$

Nun ist nach der Voraussetzung

$$\mathfrak{A}^2 . \left(\frac{dL}{dy}\right)^2 = \mathfrak{B}^2 . \left(\frac{dL}{dx}\right)^2,$$

$$\mathfrak{B}^2 . \left(\frac{dL}{dy}\right)^2 = \mathfrak{B}^2 . \left(\frac{dL}{dy}\right)^2,$$

$$\mathfrak{C}^2 . \left(\frac{dL}{dy}\right)^2 = \mathfrak{B}^2 . \left(\frac{dL}{dz}\right)^2.$$

Also

$$(\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2) . \left(\frac{dL}{dy}\right)^2 = \mathfrak{B}^2 . \left\{\left(\frac{dL}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz}\right)^2\right\},$$

$$\frac{\mathfrak{A}^2}{(\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2) . \left(\frac{dL}{dy}\right)^2} = \frac{\mathfrak{A}^2}{\mathfrak{B}^2 . \left\{\left(\frac{dL}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz}\right)^2\right\}},$$

$$\frac{\mathfrak{A}^2}{\mathfrak{A}^2+\mathfrak{B}^2+\mathfrak{C}^2}=\frac{\mathfrak{A}^2.\left(\frac{dL}{dy}\right)^2}{\mathfrak{B}^2.\left\{\left(\frac{dL}{dx}\right)^2+\left(\frac{dL}{dy}\right)^2+\left(\frac{dL}{dz}\right)^2\right\}},$$

$$\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{\mathfrak{A}^2+\mathfrak{B}^2+\mathfrak{C}^2}}=\frac{\mathfrak{A}.\frac{dL}{dy}}{\mathfrak{B}\sqrt{\left(\frac{dL}{dx}\right)^2+\left(\frac{dL}{dy}\right)^2+\left(\frac{dL}{dz}\right)^2}}$$

$$=\frac{dL}{dx}.\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dL}{dx}\right)^2+\left(\frac{dL}{dy}\right)^2+\left(\frac{dL}{dz}\right)^2}}.$$

Hieraus, und aus ganz ähnlichen Rechnungen, ergibt sich, daß

$$\operatorname{Cos}\varphi=\frac{dL}{dx}.\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dL}{dx}\right)^2+\left(\frac{dL}{dy}\right)^2+\left(\frac{dL}{dz}\right)^2}},$$

$$\operatorname{Cos}\psi=\frac{dL}{dy}.\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dL}{dx}\right)^2+\left(\frac{dL}{dy}\right)^2+\left(\frac{dL}{dz}\right)^2}},$$

$$\operatorname{Cos}\chi=\frac{dL}{dz}.\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dL}{dx}\right)^2+\left(\frac{dL}{dy}\right)^2+\left(\frac{dL}{dz}\right)^2}},$$

d. i. $\operatorname{Cos}\varphi=\operatorname{Cos}\varepsilon$, $\operatorname{Cos}\psi=\operatorname{Cos}\varepsilon'$, $\operatorname{Cos}\chi=\operatorname{Cos}\varepsilon''$, oder $\varphi=\varepsilon$, $\psi=\varepsilon'$, $\chi=\varepsilon''$, so daß also die Richtung der aus den gegebenen Kräften Resultirenden auf der gegebenen Fläche senkrecht ist, und die Kräfte folglich im Gleichgewichte sind.

Die Bedingungen des Gleichgewichts mehrerer auf einen Punkt, der sich von einer gegebenen Fläche, deren Gleichung $L=0$ ist, nicht entfernen kann, wirkender Kräfte sind also

$$\mathfrak{A}\frac{dL}{dy}-\mathfrak{B}\frac{dL}{dx}=0,$$

$$\mathfrak{B}\frac{dL}{dz}-\mathfrak{C}\frac{dL}{dy}=0,$$

oder auch zwey andere der drey obigen Gleichungen, z. B.

$$\mathfrak{A}\frac{dL}{dy} - \mathfrak{B}\frac{dL}{dx} = 0,$$

$$\mathfrak{C}\frac{dL}{dx} - \mathfrak{A}\frac{dL}{dz} = 0,$$

wo

$$\mathfrak{A} = P\operatorname{Cos}\alpha + P'\operatorname{Cos}\alpha' + P''\operatorname{Cos}\alpha'' + \ldots,$$
$$\mathfrak{B} = P\operatorname{Cos}\beta + P'\operatorname{Cos}\beta' + P''\operatorname{Cos}\beta'' + \ldots,$$
$$\mathfrak{C} = P\operatorname{Cos}\gamma + P'\operatorname{Cos}\gamma' + P''\operatorname{Cos}\gamma'' + \ldots.$$

Wäre der Punkt B durch seine Coordinaten x, y, z nicht gegeben, sondern man wollte den Punkt auf der gegebenen Fläche, in welchem die gegebenen Kräfte unter den gegebenen Neigungswinkeln gegen die Coordinatenaxen im Gleichgewichte sind, bestimmen; so würden die drey Gleichungen

$$L = 0, \quad \mathfrak{A}\frac{dL}{dy} - \mathfrak{B}\frac{dL}{dx} = 0, \quad \mathfrak{B}\frac{dL}{dz} - \mathfrak{C}\frac{dL}{dy} = 0$$

zur Bestimmung der drey unbekannten Coordinaten x, y, z hinreichend seyn. Diese Coordinaten sind von der jedesmahligen Beschaffenheit der Gleichung $L = 0$ abhängig, und müssen durch Elimination aus den obigen drey Gleichungen bestimmt werden, welches freylich, wenn die Gleichung $L = 0$ den ersten Grad übersteigt, mit Schwierigkeiten und Weitläufigkeit verknüpft seyn kann. Das Problem ist rein algebraisch, und wir müssen daher hier auf die Lehrbücher der Algebra, unter andern auf

Meyer Hirsch Sammlung von Aufgaben aus der Theorie der algebraischen Aufgaben, erster Theil, Berlin 1809, 8., S. 103. — 145.,

wo die Lehre von der Elimination ausführlich abgehandelt ist, verweisen.

Wenn der Punkt B bloß auf der gegebenen Fläche liegt und von derselben entfernt werden kann, so reichen die oben gefundenen Bedingungen zu dem Gleichgewichte nicht hin, indem zu denselben noch hinzukommen muß, daß die Resultirende R eine solche Richtung hat, daß der Punkt B an die gegebene

Fläche angedrückt wird. Liegt also der Punkt B auf der concaven Seite, so muß die Kraft R nach der convexen Seite hin gerichtet seyn; liegt B aber auf der convexen Seite, so muß R nach der concaven Seite wirken. Um nun die Richtung der Kraft R zu bestimmen, muß man (M. s. Poisson Traité de Mécanique, Tom. I. §. 24.) auf folgende Art verfahren.

Man nehme den auf der concaven Seite der gegebenen Fläche liegenden Theil der Normale in B als Axe der positiven x an, so fallen die Axen der y und z offenbar in die tangirende Ebene, und es ist, da die Richtung der Resultirenden in die Normale, d. i. in die Axe der x, fallen muß, offenbar $\varepsilon' = \varepsilon'' = 90°$, und $\varepsilon = 0$ oder $= 180°$, je nachdem die Richtung der Resultirenden auf die concave oder convexe Seite der gegebenen Fläche fällt. Es ist also $\operatorname{Cos}\varepsilon' = \operatorname{Cos}\varepsilon'' = \operatorname{Cos}\psi = \operatorname{Cos}\chi = 0$, und folglich nach dem Obigen

$$0 = \frac{dL}{dy} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dL}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz}\right)^2}}$$

$$= \frac{dL}{dz} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dL}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz}\right)^2}}.$$

Also $\frac{dL}{dy} = \frac{dL}{dz} = 0$, so daß sich folglich die beiden obigen Bedingungsgleichungen

$$\mathfrak{A}\frac{dL}{dy} - \mathfrak{B}\frac{dL}{dx} = 0,$$

$$\mathfrak{A}\frac{dL}{dz} - \mathfrak{C}\frac{dL}{dx} = 0$$

in folgende:

$$-\mathfrak{B}\frac{dL}{dx} = 0, \quad -\mathfrak{C}\frac{dL}{dx} = 0,$$

oder, weil $\frac{dL}{dx}$ nicht $= 0$, indem $\operatorname{Cos}\varepsilon = \operatorname{Cos}\varphi$ nicht $= 0$ ist, in

$$+\mathfrak{B}=0,\quad -\mathfrak{C}=0, \text{ oder}$$
$$\mathfrak{B}=0,\quad \mathfrak{C}=0$$
verwandeln.

Diese beiden Bedingungsgleichungen sind aber in dem in Rede stehenden Falle für das Gleichgewicht, wie oben schon bemerkt worden, nicht hinreichend. Man muß noch folgende Betrachtung anstellen. Es ist nämlich nach dem Obigen

$$-R\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon+\mathfrak{A}=0,$$

oder, da $\mathrm{Cos}\,\varepsilon=\pm 1$ ist:

$$\mp R+\mathfrak{A}=0,$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem R auf die concave oder convexe Seite der gegebenen Fläche fällt. Also, nach derselben Bestimmung,

$$R=\pm\mathfrak{A}.$$

R ist aber immer positiv. Soll nun R auf die concave Seite fallen, so muß $+\mathfrak{A}$ positiv, d. i. $\mathfrak{A}$ positiv seyn; soll R dagegen auf die convexe Seite fallen, so muß $-\mathfrak{A}$ positiv, d. i. $\mathfrak{A}$ negativ seyn. Ist demnach $\mathfrak{A}$ positiv, so fällt R auf die concave Seite, und es fällt auf die convexe Seite, wenn $\mathfrak{A}$ negativ ist. Liegt also B auf der convexen Seite der gegebenen Fläche, so muß $\mathfrak{A}$ positiv seyn, wenn ein Gleichgewicht statt finden soll; liegt aber B auf der concaven Seite, so muß für das Gleichgewicht $\mathfrak{A}$ negativ seyn.

$\mathfrak{A}$ ist $=P\,\mathrm{Cos}\,\alpha+P'\,\mathrm{Cos}\,\alpha'+P''\,\mathrm{Cos}\,\alpha''+\ldots$, wo aber die Winkel α, α', α'' u. s. w. natürlich in Beziehung auf den auf der concaven Seite liegenden Theil der Normale als Axe der positiven x zu nehmen sind. Man hat hier im Allgemeinen die Gründe, nach welchen das Gleichgewicht zu beurtheilen ist; die Anwendung auf besondere Fälle wird keinen Schwierigkeiten unterworfen seyn.

Die Kraft R bestimmt den Druck, welchen die gegebene Fläche in jedem Falle von den Kräften P, P', P'' u. s. w. leidet.

§. 53.

Unter einer **schiefen Ebene** versteht man jede gegen den Horizont geneigte Ebene. Sey ACD in Fig. 32. die Ebene des Neigungswinkels $CAD = \varepsilon$ einer schiefen Ebene, und AC ihr Durchschnitt mit der Ebene des Neigungswinkels. An dem Punkte B wirken zwey Kräfte P und P' nach BE, senkrecht auf AD, und nach BC. A sey der Anfang und AD die Axe der x. Da hier eigentlich bloß von dem Gleichgewichte auf einer geraden Linie die Rede ist, so hat man $z = 0$ zu setzen, und auch $\mathfrak{C}$ ist $= 0$, weil offenbar $\gamma = \gamma' = 90°$ ist.

Die Gleichung der Linie AC ist $y = Ax + B$, oder

$$y - Ax - B = 0,$$

wo $y - Ax - B = L$ zu setzen ist. Also $\frac{dL}{dx} = -A$, $\frac{dL}{dy} = 1$. α ist $= 90°$; $\beta = 180°$; $\alpha' = \varepsilon$; $\beta' = 90° - \varepsilon$. Also

$$\mathfrak{A} = P \operatorname{Cos} \alpha + P' \operatorname{Cos} \alpha' = P' \operatorname{Cos} \varepsilon,$$

$$\mathfrak{B} = P \operatorname{Cos} \beta + P' \operatorname{Cos} \beta' = -P + P' \operatorname{Sin} \varepsilon.$$

$\mathfrak{C}$ ist, wie schon bemerkt, $= 0$, so wie auch z, und folglich auch $\frac{dL}{dz} = 0$ zu setzen, da eigentlich gar kein z in L vorkommt. Die Normalkraft ist, wenn wir den Punkt B auf AC annehmen, offenbar gegen AD hin gerichtet, und der Punkt B wird an AC angedrückt, so daß also für das Gleichgewicht folgende Gleichung hinreicht:

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B}A = 0, \text{ d. i.}$$

$$P' \operatorname{Cos} \varepsilon + A(P' \operatorname{Sin} \varepsilon - P) = 0,$$

oder, weil A bekanntlich $= \operatorname{Tg} \varepsilon$:

$$P' \operatorname{Cos} \varepsilon + \operatorname{Tg} \varepsilon (P' \operatorname{Sin} \varepsilon - P) = 0,$$

$$P' \operatorname{Cos} \varepsilon^2 + P' \operatorname{Sin} \varepsilon^2 - P \operatorname{Sin} \varepsilon = 0,$$

$$P' (\operatorname{Sin} \varepsilon^2 + \operatorname{Cos} \varepsilon^2) - P \operatorname{Sin} \varepsilon = 0,$$

$$P' = P \operatorname{Sin} \varepsilon.$$

Aber $CD = AC \,.\, \operatorname{Sin} \varepsilon$. Also

$$P' = P \,.\, \frac{CD}{AC}, \quad P' \,.\, AC = P \,.\, CD;$$

$$P : P' = AC : CD.$$

Dies wird gewöhnlich so ausgedrückt: Die Last (P) verhält sich im Falle des Gleichgewichts zu der nach der Richtung der schiefen Ebene wirkenden

Kraft (P'), wie die Länge der schiefen Ebene zu ihrer Höhe.

Wirkte die Kraft P' parallel mit AD, nach BF; so wäre wie vorher $\alpha = 90°$, $\beta = 180°$, und nun $\alpha' = 0$, $\beta' = 90°$. Also

$$\mathfrak{A} = P \operatorname{Cos} \alpha + P' \operatorname{Cos} \alpha' = P',$$
$$\mathfrak{B} = P \operatorname{Cos} \beta + P' \operatorname{Cos} \beta' = -P.$$

Für das Gleichgewicht also

$$P' - AP = 0,$$
$$P' = AP, \text{ oder } P' = P \operatorname{Tg} \varepsilon.$$

Aber $CD = AD . \operatorname{Tg} \varepsilon$, $\operatorname{Tg} \varepsilon = \frac{CD}{AD}$;

$$P' = P . \frac{CD}{AD}, \; P' . AD = P . CD;$$
$$P : P' = AD : CD.$$

Wirkt also die Kraft P' mit AD parallel, so verhält sich für das Gleichgewicht die Last (P) zur Kraft (P'), wie die Grundlinie AD der schiefen Ebene zu ihrer Höhe CD.

Man denkt sich hier nämlich den Punkt B als schwer, welcher mit einer Kraft P nach BE auf die schiefe Ebene drückt, und nennt daher den Punkt B oder vielmehr die Kraft P die Last, welche von einer Kraft P' nach BC oder BF auf der schiefen Ebene erhalten werden soll.

Auf ähnliche Art hat man sich in jedem andern Falle zu verhalten.

§. 54.

Auf eine Parabel wirke in einem Punkte, dessen Coordinaten x, y sind, eine Kraft P senkrecht auf die große Axe; man soll eine nach der Tangente in dem gegebenen Punkte gerichtete Kraft P' finden, welche mit der Kraft P im Gleichgewichte ist.

Die Bedingungsgleichungen sind hier, weil wieder $z = 0$, $\mathfrak{C} = 0$ ist:

$$L = 0, \; \mathfrak{A} \frac{dL}{dy} - \mathfrak{B} \frac{dL}{dx} = 0.$$

Der Winkel, welchen die Tangente mit der großen Axe einschließt, sey $= \varepsilon$; so ist nach §. 48. meines Lehrbuches der Kegelschnitte $\mathrm{Tg}\,\varepsilon = \frac{y}{2x}$. L ist $= y^2 - px$; also

$$\frac{dL}{dy} = 2y, \quad \frac{dL}{dx} = -p.$$

$$\alpha = 90^\circ, \quad \beta = 180^\circ, \quad \alpha' = \varepsilon, \quad \beta' = 90^\circ - \varepsilon;$$

$$\mathrm{Cos}\,\alpha = 0, \quad \mathrm{Cos}\,\beta = -1, \quad \mathrm{Cos}\,\alpha' = \mathrm{Cos}\,\varepsilon, \quad \mathrm{Cos}\,\beta' = \mathrm{Sin}\,\varepsilon.$$

$$\mathfrak{A} = P\,\mathrm{Cos}\,\alpha + P'\,\mathrm{Cos}\,\alpha' = P'\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon,$$

$$\mathfrak{B} = P\,\mathrm{Cos}\,\beta + P'\,\mathrm{Cos}\,\beta' = -P + P'\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon.$$

Also

$$2yP'\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon + p\,(P'\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon - P) = 0,$$

$$2yP'\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon + pP'\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon - pP = 0,$$

$$(2y\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon + p\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon)\,P' = pP,$$

$$P' = \frac{pP}{2y\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon + p\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon}$$

$$= \frac{pP : \mathrm{Cos}\,\varepsilon}{2y + p\,\mathrm{Tg}\,\varepsilon}.$$

$$\frac{y}{2x} = \mathrm{Tg}\,\varepsilon = \frac{\mathrm{Sin}\,\varepsilon}{\mathrm{Cos}\,\varepsilon} = \frac{\sqrt{1 - \mathrm{Cos}\,\varepsilon^2}}{\mathrm{Cos}\,\varepsilon},$$

$$\frac{y^2}{4x^2} = \frac{1 - \mathrm{Cos}\,\varepsilon^2}{\mathrm{Cos}\,\varepsilon^2}, \quad y^2\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon^2 = 4x^2\,(1 - \mathrm{Cos}\,\varepsilon^2),$$

$$\mathrm{Cos}\,\varepsilon^2 . (y^2 + 4x^2) = 4x^2, \quad \mathrm{Cos}\,\varepsilon^2 = \frac{4x^2}{y^2 + 4x^2},$$

$$\mathrm{Cos}\,\varepsilon = \frac{2x}{\sqrt{y^2 + 4x^2}}.$$

$$pP : \mathrm{Cos}\,\varepsilon = \frac{pP\sqrt{y^2 + 4x^2}}{2x},$$

$$2y + p\,\mathrm{Tg}\,\varepsilon = 2y + \frac{py}{2x} = \frac{4xy + py}{2x}.$$

$$P' = \frac{pP\sqrt{y^2 + 4x^2}}{4xy + py} = \frac{pP\sqrt{y^2 + 4x^2}}{y\,(4x + p)}$$

$$= \frac{pP\sqrt{px + 4x^2}}{y\,(4x + p)} = \frac{pP\sqrt{(4x + p)\,x}}{y\,(4x + p)}$$

$$= \frac{pP\sqrt{x}\,.\sqrt{4x+p}}{y(4x+p)} = \frac{pP\sqrt{x}}{y\sqrt{4x+p}}$$

$$= \frac{pP\sqrt{x}}{\sqrt{px}\,.\sqrt{4x+p}} = \frac{P\sqrt{p}\,.\sqrt{px}}{\sqrt{px}\,.\sqrt{4x+p}} = \frac{P\sqrt{p}}{\sqrt{4x+p}}.$$

Setzt man den Radius vector des gegebenen Punktes $= v$; so ist bekanntlich $v = x + \frac{1}{4}p$. (M. s. mein Lehrbuch der Kegelschnitte, §. 42. Zus. 7.) Also $4v = 4x + p$, und folglich

$$P' = \frac{P\sqrt{p}}{\sqrt{4v}},\ P'^2 = \frac{P^2p}{4v},$$

$$4v : p = P^2 : P'^2.$$

Die Quadrate der Kräfte P und P' verhalten sich also wie der vierfache Radius vector zu dem Parameter.

Setzt man die Normale $= n$; so ist nach §. 52. a. a. O. $n^2 = pv$, und folglich

$$P'^2 = \frac{P^2p}{4v} = \frac{P^2p^2}{4pv} = \frac{P^2p^2}{4n^2},$$

$$4n^2 : p^2 = P^2 : P'^2,$$

$$2n : p = P : P',$$

so daß sich also die Kraft P zur Kraft P' verhält, wie die doppelte Normale zu dem Parameter.

Ist die Subnormale $= s$; so ist nach §. 52. a. a. O. $s = \frac{1}{2}p$. Nun war $pP = 2nP'$; also $\frac{1}{2}pP = nP'$; d. i. $sP = nP'$. Also

$$P : P' = n : s.$$

Die Kraft P verhält sich also zur Kraft P' wie die Normale zur Subnormale.

Bey der Ellipse ist bekanntlich, wenn man die Coordinaten aus dem Mittelpunkte rechnet:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2),$$

$$a^2y^2 = a^2b^2 - b^2x^2,$$

$$a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0,$$

$$L = a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2,$$

$$\frac{dL}{dy} = 2a^2y, \quad \frac{dL}{dx} = 2b^2x.$$

$$\alpha = 90^\circ, \quad \beta = 180^\circ, \quad \alpha' = \varepsilon, \quad \beta' = 90^\circ - \varepsilon;$$

$$\operatorname{Cos}\alpha = 0, \ \operatorname{Cos}\beta = -1, \ \operatorname{Cos}\alpha' = \operatorname{Cos}\varepsilon, \ \operatorname{Cos}\beta' = \operatorname{Sin}\varepsilon.$$

$$\mathfrak{A} = P\operatorname{Cos}\alpha + P'\operatorname{Cos}\alpha' = P'\operatorname{Cos}\varepsilon,$$

$$\mathfrak{B} = P\operatorname{Cos}\beta + P'\operatorname{Cos}\beta' = -P + P'\operatorname{Sin}\varepsilon.$$

$$P'\operatorname{Cos}\varepsilon \,.\, 2a^2y - (P'\operatorname{Sin}\varepsilon - P) \,.\, 2b^2x = 0.$$

$$a^2yP'\operatorname{Cos}\varepsilon - b^2xP'\operatorname{Sin}\varepsilon + Pb^2x = 0.$$

$$P' = \frac{Pb^2x}{b^2x\operatorname{Sin}\varepsilon - a^2y\operatorname{Cos}\varepsilon}.$$

Nach §. 102. a. a. O. ist

$$\operatorname{Tg}\varepsilon = -\frac{b^2x}{a^2y} = \frac{\operatorname{Sin}\varepsilon}{\operatorname{Cos}\varepsilon},$$

$$\frac{b^4x^2}{a^4y^2} = \frac{\operatorname{Sin}\varepsilon^2}{\operatorname{Cos}\varepsilon^2} = \frac{\operatorname{Sin}\varepsilon^2}{1 - \operatorname{Sin}\varepsilon^2},$$

$$b^4x^2(1 - \operatorname{Sin}\varepsilon^2) = a^4y^2\operatorname{Sin}\varepsilon^2,$$

$$\operatorname{Sin}\varepsilon^2 = \frac{b^4x^2}{b^4x^2 + a^4y^2},$$

$$\operatorname{Sin}\varepsilon = \frac{b^2x}{\sqrt{b^4x^2 + a^4y^2}}.$$

$$P' = \frac{Pb^2x : \operatorname{Sin}\varepsilon}{b^2x - a^2y\operatorname{Cotg}\varepsilon};$$

$$Pb^2x : \operatorname{Sin}\varepsilon = \frac{Pb^2x\sqrt{b^4x^2 + a^4y^2}}{b^2x}$$

$$= P\sqrt{b^4x^2 + a^4y^2},$$

$$b^2x - a^2y\operatorname{Cotg}\varepsilon = b^2x + a^2y \,.\, \frac{a^2y}{b^2x}$$

$$= \frac{b^4x^2 + a^4y^2}{b^2x}.$$

$$P' = \frac{Pb^2x\sqrt{b^4x^2 + a^4y^2}}{b^4x^2 + a^4y^2}$$

$$= \frac{Pb^2x}{\sqrt{b^4x^2 + a^4y^2}}.$$

Ist nun die Normale $= n$, und die Subnormale $= s$; so ist nach §. 104. a. a. O. $n = \frac{1}{a^2}\sqrt{b^4x^2 + a^4y^2}$, $s = \frac{b^2x}{a^2}$. Also $P' = \frac{Pb^2x}{a^2n} = \frac{P}{n} \cdot \frac{b^2x}{a^2} = \frac{Ps}{n}$, $nP' = Ps$, und folglich

$$P : P' = n : s,$$

so daß sich also auch hier, wie bey der Parabel, die Kraft P zur Kraft P' wie die Normale zur Subnormale verhält.

Daß dies der Fall seyn muß, und nicht bloß bey den Kegelschnitten, sondern bey allen Curven gelten muß, wird leicht aus einer Zeichnung mittelst des Parallelogramms der Kräfte und der Aehnlichkeit der Dreyecke erhellen. Wir haben die obige Rechnung nur angestellt, um die Anwendung der allgemeinen Formeln zu zeigen. Zugleich erhellet aber auch hieraus, wie man sich zu verhalten hat, wenn der Punkt, an welchem die Kräfte wirken, sich auf einer Curve befindet. Curven von doppelter Krümmung kann man immer als Durchschnitte zweyer krummen Flächen betrachten.

II.

Parallele Kräfte.

A.

Parallele Kräfte in einer Ebene.

§. 55.

Man nehme in der Ebene, in welcher alle Kräfte wirken, einen Punkt A als fest an, um welchen jedoch die Ebene gedreht werden kann. Um die Bedingungen des Gleichgewichts für diesen Fall zu finden, lege man die Axe der x durch den Punkt A, und bezeichne die gegebenen Kräfte, wie immer, durch P, P', P'' u. s. w. Sind nun diese Kräfte im Gleichgewichte, so muß es offenbar eine in dem Punkte A mit ihnen parallel wirkende Kraft R' geben, welche, wenn man sich den

Punkt A als frey denkt, ihnen das Gleichgewicht hält, und umgekehrt. Die Bedingungen des Gleichgewichts der parallelen Kräfte R', P, P', P'' u. s. w. in der völlig freyen Ebene sind aber nach §. 32.:

$$R' + P + P' + P'' + P''' + \ldots = 0,$$

$$R'X + Px + P'x' + P''x'' + P'''x''' + \ldots = 0,$$

oder, wenn man den Punkt A als Anfang der x nimmt:

$$R' + P + P' + P'' + P''' + \ldots = 0,$$

$$Px + P'x' + P''x'' + P'''x''' + \ldots = 0.$$

Denkt man sich nun aber den Punkt A wieder als fest, so vertritt er die Stelle der Kraft R und jeder andern Kraft, so daß also die Gleichung

$$R' + P + P' + P'' + P''' + \ldots = 0$$

in jedem Falle als erfüllt zu betrachten ist, und für das Gleichgewicht mehrerer paralleler, in einer um einen Punkt drehbaren Ebene wirkender, Kräfte ist also die einzige Bedingung

$$Px + P'x' + P''x'' + P'''x''' + \ldots = 0$$

hinreichend.

R' ist offenbar der Druck, welchen der Drehpunkt A von den Kräften P, P', P'' u. s. w. im Falle des Gleichgewichts nach ihrer Richtung erleidet. Nach dem Obigen ist

$$R' = -P - P' - P'' - P''' - \ldots.$$

Durch das Vorzeichen des Ausdrucks auf der rechten Seite wird die Richtung der Kraft R', welche den Kräften P, P', P'' u. s. w. das Gleichgewicht hält, bestimmt. Der Druck auf den Punkt A ist der Kraft R' offenbar entgegengesetzt, und daher, wenn man diesen Druck durch N bezeichnet, mit Beziehung auf Größe und Richtung des Drucks:

$$N = P + P' + P'' + P''' + \ldots,$$

so daß also der Druck der algebraischen Summe der parallelen Kräfte gleich ist.

Nimmt man die Axe der x senkrecht auf den Richtungen der gegebenen Kräfte an, so sind die Producte Px, $P'x'$, $P''x''$, $P'''x''$ u. s. w. die Momente der gegebenen Kräfte in Beziehung auf den Drehpunkt A, als Mittelpunkt der Momente. Die x sind hier als positiv oder negativ betrachtet, je nachdem sie rechts oder links von A liegen; die Kräfte werden aber als positiv oder negativ betrachtet, je nachdem sie ab- oder aufwärts wirken. Die Momente sind positiv oder negativ, je nachdem die beiden Factoren gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben. Es wird aber leicht erhellen, daß die Momente aller der Kräfte positiv sind, welche die Ebene von der linken nach der rechten Seite herumzudrehen streben, und die Momente der Kräfte, welche die Ebene nach der entgegengesetzten Seite herumzudrehen streben, sind negativ. Bezeichnet man also jetzt alle Kräfte, welche die Ebene nach der einen Seite hin zu drehen streben, durch P, P', P'', P''' u. s. w.; ihre Entfernungen vom Drehpunkte durch p, p', p'', p''' u. s. w.; die Kräfte, welche die Ebene nach der entgegengesetzten Seite zu drehen streben, durch Q, Q', Q'', Q''' u. s. w.; und ihre Entfernungen vom Drehpunkte durch q, q', q'', q''' u. s. w., indem man alle diese Größen als positiv betrachtet: so verwandelt sich die obige Bedingungsgleichung für das Gleichgewicht in folgende:

$$Pp + P'p' + P''p'' + \ldots - Qq - Q'q' - Q''q'' - \ldots = 0,$$

oder

$$Pp + P'p' + P''p'' + P'''p''' + \ldots = Qq + Q'q' + Q''q'' + Q'''q''' + \ldots,$$

worin folgender merkwürdige Satz liegt:

Wenn mehrere in einer um einen Punkt drehbaren Ebene nach parallelen Richtungen wirkende Kräfte im Gleichgewichte sind; so ist immer die Summe der Momente der Kräfte, welche die Ebene nach der einen Seite zu drehen streben, der Summe der Momente der Kräfte gleich, welche die Ebene nach der entgegengesetzten Seite hin zu drehen streben, und umgekehrt.

§. 56.

Unter einem mathematischen Hebel versteht man jede unbiegsame gerade oder krumme Linie von einfacher oder doppelter Krümmung ohne Schwere, welche um einen Punkt, welcher der Ruhepunkt oder das Hypomochlium genannt wird, beweglich ist.

Die Bedingung des Gleichgewichts der in der Ebene des Hebels von einfacher Krümmung nach parallelen Richtungen wirkenden Kräfte ist in dem im vorhergehenden Paragraphen bewiesenen Satze enthalten. Wirken bloß zwey Kräfte am Hebel auf diese Art, so ist die Bedingung des Gleichgewichts die Gleichung:

$$Pp = Qq \text{ oder } P : Q = q : p,$$

so daß also, wenn bey zwey Kräften ein Gleichgewicht statt findet, die Kräfte sich verkehrt wie ihre Entfernungen vom Ruhepunkte verhalten, und umgekehrt.

Dieser Satz ist von Archimedes entdeckt, und in seiner Schrift: De aequiponderantibus, lib. I. prop. VI. VII., bewiesen, obgleich sein Beweis, wie schon Barrow (an dem Einleit. 5. a. O. S. 113.) geurtheilt hat, nicht von allem Zweifel frey ist. Die beiden Bücher des Archimedes: De aequiponderantibus, sind als das erste mathematische System der Statik anzusehen. Nur mögen, wie ebenfalls schon Barrow geurtheilt hat, diese zwey Bücher entweder nicht frey von Verstümmelungen sich erhalten, oder Archimedes mag an sie nicht die vollendende Hand gelegt haben, wie er bey seinen andern Schriften gethan hat, da z. B. die Lehre vom Schwerpunkte der Hauptgegenstand dieser Bücher ist, und doch nirgends eine Erklärung dieses Punktes, ganz gegen die Gewohnheit der Alten, in ihnen zu finden ist.

Aus dem obigen Gesetze des Hebels erhellet, daß an dem Hebel die kleinste Kraft mit der größten Last im Gleichgewichte seyn kann, wenn nur jene in einer hinlänglich großen Entfernung vom Ruhepunkte angebracht ist, und Archimedes konnte daher schon in dieser Beziehung zu dem Könige Hiero, seinem Verwandten, welcher über die Wirkungen, die er durch seine Maschinen hervorbrachte, erstaunt war, die bekannten Worte sagen: Da mihi ubi consistam, et terram movebo, wenn auch diese Worte wohl eigentlich in einer andern Beziehung gesprochen waren. (M. s. Bossut Versuch einer Geschichte der Mathematik, aus dem Französ. von Reimer, erster Theil, Hamburg 1804, 8., S. 154. 155.)

Noch sehe man über den Hebel und den archimedischen Beweis des Hauptsatzes:

Observations on the fundamental property of the lever, with a proof of the principle assumed by Archimedes in his demonstration, by S. Vince. Philosophical Transact. 1794. P. I. p. 35. seqq.

§. 57.

Hier ist, wie es mir scheint, der schicklichste Ort, etwas über die verschiedenen Systeme der Statik zu sagen. Man kann, wenn man den einen Weg verfolgt, wie in diesem Lehrbuche geschehen ist, von dem Satze von dem Parallelogramm der Kräfte ausgehen, und hierauf das Gesetz des Hebels gründen. Seit Varignon's Zeiten betritt man diesen Weg häufig in Frankreich, und auch in verschiedene neuere deutsche Lehrbücher von Eytelwein, Brandes, (m. s. Einleit. 5.), u. A. ist diese Methode übergegangen, worüber schon oben in §. 15. das Nöthige gesagt und die hierher gehörigen Schriften angeführt worden.

Bey einem analytischen und über die Elemente hinaus gehenden Vortrage der Statik scheint dieser Weg viele Vorzüge zu haben, weßhalb er auch in diesem Werke, in Uebereinstimmung mit den neuesten französischen Lehrbüchern, vorzüglich dem oft angeführten Traité de Mécanique, par Poisson, betreten worden ist. Bey dem Vortrage der ersten Elemente für Anfänger, welche nur die Anfangsgründe der Geometrie und etwa der ebenen Trigonometrie mitbringen, mag jedoch der umgekehrte Weg, wo man von dem oben bewiesenen Gesetze des Hebels ausgeht, auch seine Vorzüge haben. Auf diese Art sind die Elemente der Statik in den meisten ältern deutschen Lehrbüchern der angewandten Mathematik von Kästner, Karsten, Lorenz, Huth, u. A. vorgetragen.

Bey diesem zweyten, dem in diesem Werke befolgten also gerade entgegengesetzten, Vortrage der Statik ist ein bündiger, von dem Parallelogramm der Kräfte und jedem höhern Satze unabhängiger, Beweis des Grundgesetzes für das Gleichgewicht am Hebel von der größten Wichtigkeit. Archimedes Beweis ist, wie schon erinnert, noch Zweifeln unterworfen, und neuere Mathematiker sind daher bemüht gewesen, einen bündigern zu finden. Hierher gehören die Bemühungen von de la Hire, (Traité de Mécanique, Paris 1695, prop. I — IV.), Maclaurin, (Account of Sir Isaac Newton's philosophical discoveries, Buch 7. Kap. 3.), und Kästner, (Theoria vectis et compositionis virium evidentius exposita, Lipsiae 1753, 4.), und die Lehrbücher der angewandten Mathematik von Kästner, Karsten, Lorenz, u. A. Alle drey Beweise beruhen auf denselben Gründen. (M. s. Karsten's Lehrbegriff, Th. 3. S. 35.) Den Kästner'schen Beweis, als den in die meisten deutschen Lehrbücher übergegangenen, wollen wir, der Wichtigkeit der Sache wegen, und weil der Beweis an sich merkwürdig ist, in dem folgenden Paragraphen mittheilen.

§. 58.

Man hat bey diesem Beweise zwischen dem Hebel der ersten Art und dem Hebel der zweyten Art zu unterscheiden, auch ist zu bemerken, daß der ganze Beweis in Beziehung auf Gewichte, welche man sich an Fäden nach verticalen Richtungen wirkend denkt, geführt wird. Der Hebel wird als eine gerade Linie angenommen, und heißt ein Hebel der ersten Art oder ein zweyarmiger Hebel (Vectis heterodromus), wenn der Ruhepunkt zwischen den beiden Aufhängepunkten, d. i. den Punkten, an welchen die Gewichte angebracht sind, liegt; ein Hebel der zweyten Art oder ein einarmiger Hebel (Vectis homodromus) ist aber ein Hebel, bey welchem die Aufhängepunkte beide auf einer Seite des Ruhepunktes liegen.

Als Grundsätze werden folgende zwey Sätze angenommen:

1) Zwey gleiche Gewichte, welche am zweyarmigen Hebel in gleichen Entfernungen vom Ruhepunkte wirken, sind im Gleichgewichte; denn es ist kein Grund vorhanden, daß auf der einen Seite des Hebels ein Uebergewicht statt finden sollte, welcher nicht auch auf die andere Seite anwendbar wäre. Da nun der Hebel als unbiegsam angenommen wird, so muß offenbar ein Gleichgewicht statt finden, welches behauptet wurde.

2) Sind zwey Gewichte P, Q am zweyarmigen Hebel im Gleichgewichte, so leidet der Ruhepunkt einen Druck $= P + Q$ nach verticaler Richtung; und wenn man daher, indem man sich den Hebel als völlig frey denkt, in dem Ruhepunkte eine Kraft $= P + Q$ vertical aufwärts wirken läßt, so werden die drey Kräfte P, Q, $P + Q$ im Gleichgewichte seyn.

Dieser letzte Satz mag freylich nicht alle zu einem Grundsatze nöthige Evidenz besitzen; indeß ist die Art, wie Kästner von diesen einfachen Sätzen zu höhern Wahrheiten fortschreitet, an sich merkwürdig, und verdient beachtet zu werden. Auch wird bald nachher eine Rechtfertigung des zweyten Satzes vorkommen. Wir gehen nun zu dem Beweise selbst über.

1) An dem zweyarmigen Hebel AB, (Fig. 33.), dessen Ruhepunkt C ist, sind nach Grundsatz 1. die beiden gleichen Gewichte P in den gleichen Entfernungen $AC = BC = a$ im Gleichgewichte.

2) Das Gleichgewicht dauert fort, wenn man, wie in Fig. 34., eine Kraft $2P$ in C vertical aufwärts wirken läßt, (Grundsatz 2.), und, indem man das Gewicht P in A wegnimmt, den Punkt A sich als fest denkt, so daß der Hebel um ihn gedreht werden kann. Es ist also am einarmigen Hebel das einfache Gewicht in der doppelten Entfernung vom Ruhepunkte, im Gleichgewichte mit dem doppelten Gewichte in der einfachen Entfernung.

3) Jetzt denke man sich den Hebel in Fig. 34. wie in Fig. 35. nach D verlängert, so daß $AD = AC = a$ ist, und lasse in D und C zwey Gewichte $= 2P$ vertical abwärts wirken, so dauert, nach Nummer 1. und Einleit. 7. 1., das Gleichgewicht fort. Es wird aber auch noch fortdauern, wenn man die beiden sich aufhebenden Kräfte in C wegläßt, so daß also auch am zweyarmigen Hebel das einfache Gewicht in der doppelten Entfernung mit dem doppelten Gewichte in der einfachen Entfernung im Gleichgewichte ist.

4) Das Gleichgewicht wird nach Grundsatz 2. noch fortdauern, wenn man anstatt des festen Punktes A in A eine Kraft $= 2P + P = 3P$, wie in Fig. 36., vertical aufwärts wirken läßt, und den Punkt D, die Kraft $2P$ wegnehmend, sich als fest denkt, so daß also am einarmigen Hebel die einfache Kraft in der dreyfachen Entfernung mit der dreyfachen Kraft in der einfachen Entfernung im Gleichgewichte ist.

5) Nun denke man sich wieder in Fig. 37. den Hebel in Fig. 36. nach E verlängert, so daß $DE = AD = a$ ist, und lasse in E und A zwey Kräfte $= 3P$ vertical abwärts wirken; so wird das Gleichgewicht des Hebels in Fig. 36., nach Nummer 1. und Einleit. 7. 1., fortdauern. Es wird aber auch noch fortdauern, wenn man die sich aufhebenden Gewichte $3P$ in A (Fig. 37.) wegnimmt, so daß also auch am Hebel der ersten Art das einfache Gewicht in der dreyfachen Entfernung mit dem dreyfachen Gewichte in der einfachen Entfernung im Gleichgewichte ist.

6) Man könnte auf diese Art immer weiter gehen, das allgemeine Gesetz erhellet aber schon. Es ist nämlich an dem Hebel beider Arten das einfache Gewicht in der $n$fachen Entfernung mit dem $n$fachen Gewichte in der einfachen Entfernung im Gleichgewichte.

Um die Allgemeinheit dieses Gesetzes zu beweisen, nehme man an, daß es überhaupt für das $n$fache gilt, so wird sich auf folgende Art zeigen lassen, daß es auch für das $(n+1)$ fache gilt. An dem Hebel AB der ersten Art in Fig. 38. sey $AC = a$, $BC = na$, und nach der Voraussetzung nP in A mit P in B im Gleichgewichte. Jetzt denke man sich in C, indem man diesen Punkt als völlig frey annimmt, eine Kraft $(n+1)P$ vertical aufwärts wirkend, so sind die Kräfte nP in A, P in B und $(n+1)P$ nach Grundsatz 2. im Gleichgewichte, welches auch noch fortbestehen wird, wenn man sich den Punkt A als fest, und den Hebel um ihn drehbar denkt, so daß also an dem einarmigen Hebel AB (Fig. 39.) das einfache Gewicht P in der Entfernung $AB = (n+1)a$ mit dem $(n+1)$ fachen Gewichte $(n+1)P$ in der einfachen Entfernung $AC = a$ im Gleichgewichte ist. Nun denke man sich den Hebel AB über den Ruhepunkt A hinaus verlängert, bis $AD = a$ ist, und lasse in D und C zwey gleiche Gewichte $(n+1)P$ vertical abwärts wirken; so besteht das Gleichgewicht, nach Nummer 1. und Einleit. 7. 1., fort. Es wird aber auch noch fortdauern, wenn man die sich aufhebenden Gewichte in C wegnimmt, so daß also auch am zweyarmigen Hebel DB die einfache Kraft P in der $(n+1)$ fachen Entfernung AB vom Ruhepunkte A, mit der $(n+1)$ fachen Kraft $(n+1)P$ in D in der einfachen Entfernung AD im Gleichgewichte ist, und das bemerkte Gesetz also für $n+1$ gilt, wenn es für n gilt. Das Gesetz ist aber oben bis zum Dreyfachen bewiesen; also gilt es auch für das Vierfache; also für das Fünffache; u. s. w.; also allgemein.

7) Mit Hülfe des im Vorhergehenden bewiesenen Satzes läßt sich nun folgender allgemeine Satz beweisen:

Wenn zwey an einem Hebel der einen oder der andern Art wirkende Kräfte sich umgekehrt wie ihre Entfernungen vom Ruhepunkte verhalten, so sind sie im Gleichgewichte.

Man muß bey dem Beweise zwey Fälle unterscheiden:

a) **Das Verhältniß der Gewichte P und Q ist rational, oder P und Q sind commensurabel.**

An dem Hebel der ersten oder zweyten Art in Fig. 40., dessen Ruhepunkt C ist, sey nach der Voraussetzung

$$P : Q = CB : AC = n : m,$$

wo n und m ein Paar positive ganze Zahlen sind, da nach der Hypothesis die Gewichte P und Q commensurabel sind. Es ist folglich $mP = nQ$; und wenn man $CB = na$ setzt, so ist $AC = ma$. Man nehme nun auf beiden Seiten des Ruhepunktes $C\alpha = C\beta = a$, und lasse in α und β die Gewichte nQ und mP vertical abwärts wirken; so ist, nach dem in Nummer 6. bewiesenen Gesetze, nQ mit Q und mP mit P im Gleichgewichte. Daher sind die vier Kräfte P, Q, mP und nQ unter einander im Gleichgewichte. Nach Nummer 1. sind aber, weil $C\alpha = C\beta$ und $mP = nQ$ ist, mP und nQ für sich im Gleichgewichte, so daß sie sich aufheben, und, ohne das Gleichgewicht der vier Kräfte zu stören, weggelassen werden können, woraus das Gleichgewicht der beiden Kräfte P und Q in A und B folgt, w. z. b. w.

b) Das Verhältniß der Gewichte P und Q ist irrational, oder diese beiden Kräfte sind incommensurabel.

Da $Q : P = AC : CB$, und $Q : P$ irrational ist, so ist es auch $AC : CB$. Man kann aber immer die Exponenten zweyer rationalen Verhältnisse, die wir durch $\frac{CB'}{AC}$ und $\frac{CB''}{AC}$ bezeichnen wollen, angeben, zwischen welchen der Exponent $\frac{CB}{AC}$ liegt, so daß $\frac{CB}{AC} > \frac{CB'}{AC}$ und $\frac{CB}{AC} < \frac{CB''}{AC}$ ist, nach bekannten Sätzen. Sey nun

$$AC : CB' = Q' : P,$$
$$AC : CB'' = Q'' : P;$$

so ist, weil nach der Voraussetzung auch

$$AC : CB = Q : P \text{ ist:}$$

$$\frac{P}{Q} = \frac{CB}{AC}, \quad \frac{P}{Q'} = \frac{CB'}{AC}, \quad \frac{P}{Q''} = \frac{CB''}{AC}.$$

Also

$$\frac{P}{Q} > \frac{P}{Q'}, \quad \frac{P}{Q} < \frac{P}{Q''},$$
$$Q < Q', \quad Q > Q''.$$

Denkt man sich nun die Kräfte Q' und Q'' in den Punkten B' und B'' wirkend, so ist jede für sich mit der Kraft P in A im Gleichgewichte. Man kann aber die Gränzen $\frac{CB'}{AC}$ und $\frac{CB''}{AC}$ von $\frac{CB}{AC}$, und folglich auch die Gränzen Q' und Q'' von Q einander beliebig nähern, so daß sie um nichts Merkliches von einander, und von Q, unterschieden sind, und das Gleichgewicht einer jeden mit P wird immer fortdauern, woraus erhellet, daß auch Q mit P im Gleichgewichte seyn muß, da seine Gränzen, welche ihm beliebig genähert werden können, es sind.

In Fig. 41., wo die Kräfte P und Q nach parallelen Richtungen unter schiefen Winkeln auf den Hebel AB wirken, sey

$$P:Q = CB:AC.$$

Man ziehe durch C ein Perpendikel DE auf die Richtungen der Kräfte P und Q, so ist offenbar $\Delta ACD \sim \Delta BCE$, und folglich

$$CB:AC = CE:CD. \text{ Also}$$

$$P:Q = CE:CD,$$

und die Kräfte P, Q sind also am Hebel DE im Gleichgewichte. Man kann sie aber nach A und B versetzen, und sie sind also auch am Hebel AB im Gleichgewichte, so daß folglich der vorher bewiesene Satz auch gilt, wenn die Kräfte nicht unter rechten Winkeln auf den Hebel wirken.

§. 59.

Aus dem im vorhergehenden Paragraphen bewiesenen Gesetze des Hebels läßt sich der Satz von dem Parallelogramm der Kräfte auf verschiedene Arten ableiten. Den Kästner'schen Beweis des letztern Satzes findet man recht gut dargestellt in dem Lehrbegriff der Mathematik von Karsten, Th. 3. §. 45. ff., und in den andern Karsten'schen und Kästner'schen Schriften. Eine kürzere Deduction will ich hier aus den Leçons de Statique, par J. G. Garnier, p. 48., mittheilen, weil ich mich dabey auf frühere in diesem Werke bewiesene Sätze beziehen kann.

An dem Punkte A in Fig. 42. wirken zwey commensurable Kräfte $P = mp = (n + n')p$ und $Q = np$, nach den Richtungen AC und AB. Die Linien AC und AB seyen den Kräften P und Q proportional genommen, so daß $AC = ma = (n + n')a$, $AB = na$ ist. Man nehme jetzt $AF = n'a$, $AE = na$, und lasse in F und E zwey Kräfte np und $n'p$ parallel mit P wirken; so lassen sich diese beiden Kräfte, weil $np + n'p = (n + n')p = P$, und

$$n'p : np = n' : n = AF : AE$$

ist, nach §. 58. für P setzen, und die Resultirende von $n'p$, np und Q wird mit der Resultirenden von P und Q einerley seyn. Man denke sich jetzt die Kraft Q in den Punkt F versetzt, welches bekanntlich verstattet ist; so halbirt die Richtung Fr der Resultirenden r der gleichen Kräfte Q und np in F nach FB und FH den Winkel HFB, (§. 4. 1.). Für P und Q kann man also die Kräfte $n'p$ in E und r in F setzen, so daß also die Resultirende dieser mit der Resultirenden jener einerley seyn muß. Die Resultirende von $n'p$ und r muß durch G, die Resultirende von P und Q durch A gehen; daher ist GAD die Richtung der Resultirenden von P und Q. Es ist nun $\angle BFr = \angle rFH = \angle EFG = \angle FGE$; also das Dreyeck FEG gleichschenklig, und folglich $GE = EF = (n + n')a = ma = AC$. Also, wenn man CD parallel mit AB zieht, $\Delta\, CAD \cong \Delta\, EAG$, und folglich $CD = EA = na = AB$. Also, wenn man BD zieht, $CABD$ ein Parallelogramm, und AD, die Richtung der Resultirenden, seine Diagonale. Sind also die Kräfte P, Q commensurabel, so ist der Satz von dem Parallelogramm der Kräfte durch das Vorhergehende in Beziehung auf die Richtung der Resultirenden bewiesen.

Für incommensurable Kräfte und in Beziehung auf die Größe der Resultirenden kann man wie in §. 13. (im letzten Absatze) und §. 14. verfahren, wobey wir nicht länger verweilen. Es kam uns hier nur darauf an, zu zeigen, daß man sowohl von dem Parallelogramm der Kräfte zu dem Grundgesetze des Hebels übergehen, als auch den umgekehrten Weg einschlagen kann. Die beiden Systeme der Statik, welche man in den meisten Lehrbüchern befolgt findet, beruhen, wie auch schon bemerkt worden, auf diesem Unterschiede in der Behandlung.

§. 60.

Absichtlich habe ich mich bey dem Kästner'schen Beweise in §. 58. für das Gesetz des Hebels etwas länger verweilt, weil dieser Beweis in alle Lehrbücher unsrer ältern deutschen Klassiker übergegangen ist, und auch jetzt noch häufig vorgetragen wird. Es ist aber auch schon bemerkt worden, daß der Beweis nicht von jedem Vorwurfe frey ist, was wenigstens die beiden Sätze betrifft, welche ihm als Axiome zum Grunde liegen. Ich will hier nun noch einen Beweis mittheilen, welcher dem Kästner'schen Beweise zugleich als Ergänzung dienen kann. Es ist dieser Beweis dem sehr ähnlich, welchen man in den französischen Lehrbüchern findet, die, synthetisch abgefaßt, für den ersten Unterricht bestimmt sind, und daher nicht von dem Parallelogramm der Kräfte, wie die analytischen Werke, sondern von dem Hebel ausgehen. (M. s. z. B. die Einleit. 5. genannten Werke von Monge, S. 4. u. ff., und Poinsot, S. 22. u. ff.)

1) Jede Kraft läßt sich unbeschadet ihrer Wirkung in jeden Punkt ihrer Richtung versetzen, vorausgesetzt, daß die Richtung selbst unverändert bleibt. (M. s. Einleit. 7. 2.)

2) Die Resultirende oder Aequipollente zweyer auf einen Punkt wirkender Kräfte liegt in der durch die Richtungen dieser Kräfte bestimmten Ebene.

Läge die Resultirende oder Aequipollente nicht in dieser Ebene, so ist doch kein Grund vorhanden, daß sie z. B. über der Ebene liegen müßte, denn aus demselben Grunde müßte sie offenbar auch unter der Ebene liegen. Beides zugleich kann nicht statt finden, und die Resultirende oder Aequipollente muß daher in der bestimmten Ebene liegen. (M. vergl.

§. 4. 1.) — Zugleich ist klar, daß die Richtung der Resultirenden oder Aequipollenten durch den gemeinschaftlichen Angriffspunkt der beiden gegebenen Kräfte gehen muß.

3) Die Richtung der Resultirenden von zwey gleichen auf einen Punkt wirkenden Kräften halbirt den von den Richtungen der letztern eingeschlossenen Winkel.

Nach Nummer 2. liegt die Richtung der Resultirenden in der von den Richtungen der gegebenen Kräfte bestimmten Ebene; und da nun kein Grund vorhanden ist, daß sie sich mehr nach der einen als nach der andern Kraft hinneigen sollte, so muß sie offenbar den von den Richtungen beider eingeschlossenen Winkel halbiren. (M. vergl. §. 4. 1.)

4) Drey gleiche Kräfte, welche auf einen Punkt wirken, und deren Richtungen den Kreis, dessen Centrum der gemeinschaftliche Angriffspunkt ist, in drey gleiche Theile eintheilen, sind im Gleichgewichte.

Denn es ist durchaus kein Grund vorhanden, daß der gemeinschaftliche Angriffspunkt nach irgend einer Richtung bewegt werden sollte, welcher nicht eben so auch für jede andere ähnliche Richtung statt fände. Die Bewegung nach beiden Richtungen zu gleicher Zeit kann aber nicht eintreten, und es muß daher offenbar ein Gleichgewicht statt finden.

5) Die Resultirende oder Aequipollente von zwey gleichen parallelen, und nach derselben Gegend hin wirkenden, Kräften ist der Summe dieser Kräfte gleich; ihre Richtung ist den Richtungen der beiden gegebenen Kräfte parallel, und halbirt die Entfernung der beiden letztern Richtungen von einander.

In Fig. 43. kann man sich nach Nummer 1. die beiden gleichen Kräfte P an den beiden Endpunkten A, B einer auf den parallelen Richtungen beider Kräfte senkrechten geraden Linie AB wirkend denken. Man beschreibe jetzt um A und B

zwey Kreise, und theile diese von a und d an in drey gleiche Theile ab, bc, ac, und de, ef, df. An A und B lasse man nach den Richtungen Ab, Ac, Be, Bf noch vier gleiche Kräfte, deren jede $= P$ ist, wirken; so sind nach Nummer 4. sowohl die drey Kräfte an A, als auch die drey Kräfte an B, folglich alle sechs Kräfte unter einander im Gleichgewichte, und es ist daher klar, daß die Resultirende oder Aequipollente der beiden gegebenen Kräfte nach Aa und Bd mit der Aequipollenten oder Resultirenden der vier Kräfte nach Ab, Ac, Be, Bf einerley ist. Um die Resultirende der letztern Kräfte zu finden, verlängere man Ac, Be und Ab, Bf, bis sie sich in D und E schneiden, und denke sich die beiden gleichen Kräfte nach Ac und Be in den Punkt D, die beiden andern nach Ab und Bf in den Punkt E nach ihren Richtungen versetzt. Nun ist offenbar $\angle CAD = \angle CBD = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$, und eben so $\angle CAE = \angle CBE = 90^\circ - (180^\circ - 120^\circ) = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$. Also sind die Triangel ABD und ABE gleichschenklig und congruent, und $\angle ADB = \angle AEB = 180^\circ - 2 \cdot 30^\circ = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$. Nach Nummer 3. halbirt die Resultirende der gleichen Kräfte (P) nach Ac, Be den Winkel ADB, und eben so halbirt die Resultirende der gleichen Kräfte (P) nach Ab, Bf den Winkel AEB, und jede Resultirende ist, weil $\angle ADB = \angle AEB = 120^\circ$ ist, nach Nummer 4. $= P$. Da nun die Triangel ADB, AEB gleichschenklig sind, so fallen die Richtungen beider Resultirenden zusammen, die gemeinschaftliche Richtung ist auf AB senkrecht, und halbirt AB in C. Die erste Resultirende ist nach DF, die andere nach EF gerichtet, und die gesammte Resultirende ist also, da jede einzeln $= P$ ist, $= P + P = 2P$, d. i. der Summe der beiden gegebenen Kräfte, gleich. Da nun die Resultirende der gleichen Kräfte nach Ab, Ac, Be, Bf, welche wir so eben bestimmt haben, nach dem Obigen die Aequipollente der beiden gegebenen Kräfte ist, so ist unser Satz bewiesen.

6) **Die Resultirende oder Aequipollente jeder zwey parallelen und nach derselben Gegend**

hin wirkenden Kräfte P, Q ist diesen beiden Kräften parallel und ihrer Summe gleich.

Man mache die Construction in Fig. 44. wie vorher in Fig. 43., nur setze man anstatt der Kraft P in B immer die Kraft Q, so daß also die Resultirende oder Aequipollente der gegebenen Kräfte P, Q in A, B nach Aa, Bd, einerley seyn wird mit der Aequipollenten oder Resultirenden der vier Kräfte P, Q in D nach Dg, Dh, und P, Q in E nach EA, EB. Die Richtung der Resultirenden der ersten beiden Kräfte in D sey GDF. Da nun nach dem Vorhergehenden die Triangel ADB und AEB congruent, und folglich die Winkel ADB und AEB gleich sind; so haben die beiden Kräfte P, Q in E offenbar dieselbe Resultirende wie die beiden Kräfte in D. Zieht man daher EGH, so ist offenbar $\angle AEG = \angle ADG$, und folglich EGH die Richtung der Resultirenden der beiden Kräfte P, Q in E. Für die vier Kräfte in D und E kann man also zwey gleiche Kräfte in G nach GD und GH setzen, und die Linie GK, welche den Winkel HGD halbirt, ist folglich nach Nummer 3. die Richtung der Resultirenden der beiden gleichen Kräfte in G, d. i. der vier Kräfte in D und E, oder die Richtung der Aequipollenten der beiden gegebenen Kräfte in A und B. Nun ist

$$x = 180^\circ - (\alpha + \beta) = \beta + y,$$
$$y = \angle cAE + \alpha.$$

Aber $\angle cAE = 180^\circ - \angle bAc$
$$= 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ.$$

Also $y = 60^\circ + \alpha$, und folglich
$$x = \beta + y = \alpha + \beta + 60^\circ, \text{ oder}$$
$$\alpha + \beta = x - 60^\circ.$$
$$x = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 180^\circ - (x - 60^\circ)$$
$$= 180^\circ - x + 60^\circ$$
$$= 240^\circ - x,$$
$$2x = 240^\circ, \quad x = 120^\circ.$$

Also ist der Winkel x dem Winkel cAa gleich, und folglich GK parallel mit Aa oder Bd, so daß also die Richtung der

Aequipollenten der beiden gegebenen parallelen Kräfte mit ihren Richtungen parallel ist, w. z. b. w.

Um zu beweisen, daß die Resultirende oder Aequipollente von P und Q in A und B, $= P + Q$ ist, setze man diese Kraft $= R$; so werden in Fig. 45. die drey Kräfte P, Q, R nach AP, BQ und GK im Gleichgewichte seyn. Man bringe nun die Kraft Q noch in A und die Kraft P noch in B an, nehme $BG' = AG$, und ziehe $G'K'$ parallel mit GK; so sind auch die drey Kräfte Q, P, R in A, B und G', und folglich die vier Kräfte $P + Q$ und R in A, B, G, G' unter einander im Gleichgewichte. Die Resultirende der gleichen Kräfte $P + Q$ in A und B ist nach Nummer 5. $= 2(P + Q)$, und wirkt in C, der Mitte von AB, so daß also die drey Kräfte R und $2(P + Q)$ in G, G' und C im Gleichgewichte sind. Da aber $AC = BC$ und $AG = BG'$ ist, so ist auch $CG = CG'$, und die Resultirende der beiden gleichen Kräfte R in G und G' ist also $= 2R$ und wirkt in C, (Num. 5.). Daher ist $2R = 2(P + Q)$, und folglich R, die Resultirende der Kräfte P, Q in A, B, $= P + Q$, w. z. b. w.

Beide Theile unsers Satzes sind also bewiesen.

Ich glaube, daß in dem Vorhergehenden die Sätze, welche der Kästner'sche Beweis als für sich klare Sätze annimmt, die aber, wie wir im vorhergehenden Paragraphen bemerkten, in der That nicht alle zu einem Grundsatze nöthige Evidenz haben, streng bewiesen sind, und das Vorhergehende mag daher als Ergänzung des Kästner'schen Beweises und des Vortrages der Elemente der Statik in den ältern deutschen Lehrbüchern überhaupt dienen.

7) An A und B der Linie AB (Fig. 46.) wirken nach parallelen Richtungen die Kräfte P, Q, und C sey der Punkt, durch welchen ihre Resultirende oder Aequipollente geht; so ist immer

$$P : Q = CB : AC.$$

Man muß bey dem Beweise zwey Fälle unterscheiden, je nachdem die beiden Kräfte P und Q commensurabel oder incommensurabel sind.

Im ersten Falle sey

$$P:Q = m:n,$$

wo m und n zwey positive ganze Zahlen sind. Ist $P = Q$, so folgt aus Nummer 5. unmittelbar, daß $AC = CB$, und folglich wirklich

$$P:Q = CB:AC$$

ist. Ist aber P nicht $= Q$, so nehme man den Punkt D in AB so an, daß $P:Q = AD:BD = m:n$ ist, welches immer leicht möglich ist, indem man AB nur in $m + n$ gleiche Theile zu theilen braucht. Darauf verlängere man AB nach beiden Seiten hin, bis $AE = AD$ und $BF = BD$ ist, so ist $ED:FD = 2m:2n$, und ED enthält also $2m$ solcher Theile, deren FD $2n$, oder AD m, oder BD n enthält. Nach der Voraussetzung ist auch $P:Q = m:n$ oder $= 2m:2n$, so daß also $P = 2mp$ ist, wenn $Q = 2np$ ist. In der Mitte jedes der $2m + 2n$ gleichen Theile, welche EF enthält, bringe man nach paralleler Richtung mit P oder Q eine Kraft $= p$ an; so ist offenbar nach Nummer 5. die Kraft $m \cdot 2p = 2mp = P$ in der Mitte A der Linie ED die Resultirende der $2m$ Kräfte in den Mitten der Theile dieser Linie, deren jede $= p$ ist, und die Kraft $n \cdot 2p = 2np = Q$ in B, der Mitte der Linie DF, ist die Resultirende der $2n$ Kräfte, deren ebenfalls jede $= p$, in den Mitten der Theile der Linie DF. Die Resultirende der Kräfte P und Q in A und B ist also einerley mit der Resultirenden der $2m + 2n$ Kräfte $(= p)$ in den Mitten der $2m + 2n$ Theile der Linie EF. Die Resultirende dieser Kräfte ist aber nach Nummer 5. offenbar $= (m + n) \cdot 2p = (2m + 2n) p = 2mp + 2np = P + Q$, und geht durch die Mitte der Linie EF. C ist demnach die Mitte von EF, und folglich $CE = CF = \frac{1}{2}EF$. Aber nach der Construction $AD + DB = EA + BF$, d. i. $AB = EA + BF$. Also $AB = \frac{1}{2}EF = CE$, und folglich $AB - AC = CE - AC$, oder $CB = EA = AD$. Also auch $CB + CD = AD + CD$, oder $BD = AC$. Aber $AD:BD = m:n$. Also auch $CB:AC = m:n = P:Q$, w. z. b. w.

Sind die Kräfte P und Q incommensurabel, so setze man, ihre Resultirende ginge nicht durch den Punkt C, für welchen $P : Q = BC : AC$ ist, sondern durch einen Punkt H zwischen A und C. Nun theile man AB in so viele gleiche Theile, daß ein solcher Theil kleiner als CH ist, welches offenbar immer möglich ist; so wird einer der Theilpunkte nothwendig zwischen H und C fallen. Ist K dieser Theilpunkt, so sind AK und KB zwey commensurable Linien. Wenn nun $KB : KA = P : Q'$ ist, so geht nach dem Vorhergehenden die Resultirende der commensurabeln Kräfte P und Q' in A und B durch den Punkt K. Da nun $KB > BC$, $KA < CA$ ist; so ist $\frac{KB}{KA} > \frac{BC}{CA}$, und folglich $\frac{P}{Q'} > \frac{P}{Q}$, d. i. $\frac{1}{Q'} > \frac{1}{Q}$, oder $Q' < Q$. Nun sind offenbar die sechs Kräfte P, P, $P + Q$, $P + Q'$, Q, Q' — so angebracht, wie in Fig. 47. — im Gleichgewichte. Also auch die drey Kräfte $P + Q$, $P + Q'$, $Q - Q'$, so angebracht, wie in Fig. 47. a. Daß dies aber, da kein Punkt am Hebel als fest angenommen wird, nicht möglich ist, fällt in die Augen, und der Punkt, durch welchen die Resultirende von P und Q geht, kann also nicht zwischen A und C liegen. Eben so zeigt man, daß dieser Punkt auch nicht zwischen B und C liegen kann, und er muß folglich in C fallen, wo $P : Q = BC : AC$ ist, w. z. b. w.

8) Der fünften von Hachette besorgten Ausgabe der Statik von Monge ist S. 28. 29. ein zweyter Beweis des Parallelogramms der Kräfte, in Beziehung auf die Richtung der Resultirenden, beygefügt, den ich hier, seiner Einfachheit wegen, noch mittheile.

In Fig. 48. sey, wie gewöhnlich, $P : Q = AB : AC$, das Parallelogramm $ABCD$ beschrieben, und seine Diagonale gezogen. An C bringe man nach CM und CM' zwey gleiche Kräfte $= Q$ an, so ist die Resultirende der Kräfte P und Q nach AB, AC, einerley mit der Resultirenden der Kräfte P, Q, Q, Q nach AB, CM, CM', AC, weil die beiden Kräfte Q nach CM und CM' sich aufheben. Die Resultirende der gleichen Kräfte Q nach CM' und AC ist nach CH gerichtet, wodurch der Winkel $M'CQ$ halbirt wird, (Num. 3.). Die Resultirende der Kräfte P nach AB und Q nach CM, ist nach FG gerichtet, welche den Richtungen der Kräfte P und Q parallel ist, und der Punkt G hat nach Nummer 7. eine solche Lage, daß $P:Q = CG:AG$ ist. Der Durchschnittspunkt von CH und FG sey E, so geht die Resultirende der vier Kräfte nach AB, AC, CM, CM', d. i. der beiden gegebenen Kräfte, durch E. Da nun $\angle M'CH = \angle GEC = \angle HCQ = \angle ECG$ ist, so ist $CG = GE$. Also $P:Q = GE:AG$. Aber nach der Voraussetzung $P:Q = AB:AC = CD:AC$. Also $GE:AG = CD:AC$, und die Punkte A, E, D liegen mithin in einer geraden Linie, so daß also E in der Diagonale AD liegt. Die Resultirende der gegebenen Kräfte geht nun durch E, und offenbar auch durch A; also ist sie nach AE, d. i. nach AD, oder der Diagonale des Parallelogramms $ABCD$, gerichtet, w. z. b. w.

In Beziehung auf die Größe der Resultirenden wird der Satz ganz so wie in dem Beweise von Duchayla bewiesen.

So haben wir also nun fünf verschiedene Beweise des Parallelogramms der Kräfte kennen gelernt.

B.

Parallele Kräfte im Raume.

§. 61.

Man nehme wieder an, es gebe in dem Systeme der parallelen Kräfte einen festen Punkt A, um welchen sich das System drehen läßt. Die Kräfte seyen, wie immer, P, P' P'' u. s. w. Sind nun diese Kräfte im Gleichgewichte, so muß ihre Resultirende offenbar durch den Punkt A gehen, oder es muß eine Kraft R' geben, welche, in dem Punkte A angebracht, wenn man sich diesen Punkt als frey denkt, mit den gegebenen Kräften im Gleichgewichte ist, und umgekehrt. Legt man nun die beiden, den gegebenen Kräften parallelen, Ebenen in §. 38. durch den Punkt A; so sind nach §. 38. die Bedingungen des Gleichgewichts unter den Kräften R', P, P', P'' u. s. w.:

$$R' + P + P' + P'' + P''' + \ldots = 0,$$
$$R'.0 + Px + P'x' + P''x'' + P'''x''' + \ldots = 0,$$
$$R'.0 + Py + P'y' + P''y'' + P'''y''' + \ldots = 0;$$

oder

$$R' + P + P' + P'' + P''' + \ldots = 0,$$
$$Px + P'x' + P''x'' + P'''x''' + \ldots = 0,$$
$$Py + P'y' + P''y'' + P'''y''' + \ldots = 0.$$

Denkt man sich aber jetzt den Punkt A wieder als fest, so kann er die Stelle jeder Kraft, also auch die Stelle der Kraft R', vertreten, und die erste dieser Gleichungen wird also in jedem Falle erfüllt, so daß also die Bedingungen des Gleichgewichts der Kräfte P, P', P'' u. s. w. sind:

$$Px + P'x' + P''x'' + P'''x''' + \ldots = 0,$$
$$Py + P'y' + P''y'' + P'''y''' + \ldots = 0;$$

oder:

Wenn mehrere parallele Kräfte im Raume, die in ein System wirken, das einen festen Punkt hat, um welchen es beweglich ist, im Gleichgewichte sind; so ist immer die Summe der Momente in Beziehung auf zwey willkührliche, durch den Punkt A gehende, den Richtungen der gegebenen Kräfte parallele, Ebenen $= 0$, und umgekehrt. (M. vergl. §. 38.)

Die Kraft R' bestimmt den Druck, welchen der feste Punkt A im Falle des Gleichgewichts erleidet. Es ist aus der ersten der obigen drey Gleichungen:

$$R' = -P - P' - P'' - P''' - \ldots;$$

die Richtung des Drucks N ist aber der Richtung der Kraft R' offenbar gerade entgegengesetzt, und folglich

$$N = P + P' + P'' + P''' + \ldots,$$

so daß also auch hier, wie in §. 55., der Druck der Summe der parallelen Kräfte gleich ist.

Das hier Bewiesene enthält auch die Bedingungen des Gleichgewichts paralleler Kräfte an einem Hebel, welcher eine Curve von doppelter Krümmung ist. (M. s. §. 56.)

III.

Kräfte in einer Ebene.

§. 62.

Man nehme wieder an, daß in der Ebene, in welcher die gegebenen Kräfte P, P', P'' u. s. w. nach willkührlichen Richtungen wirken, ein Punkt A fest sey, um welchen sich die Ebene drehen läßt, und lege durch diesen Punkt zwey willkührliche Coordinatenaxen. Sind die gegebenen Kräfte im Gleichgewichte, so muß ihre Resultirende offenbar durch den Punkt A gehen, oder es muß eine durch diesen Punkt gehende Kraft R' geben, welche, wenn man sich den Punkt als frey denkt, ihnen das Gleichgewicht hält, und umgekehrt. Die Bedingungen des Gleichgewichts unter den Kräften R', P, P', P'' u. s. w. sind nach §. 45.:

$$R'\text{Cos}\,\varphi + P\text{Cos}\,\alpha + P'\text{Cos}\,\alpha' + P''\text{Cos}\,\alpha'' + \ldots = 0,$$
$$R'\text{Cos}\,\psi + P\text{Cos}\,\beta + P'\text{Cos}\,\beta' + P''\text{Cos}\,\beta'' + \ldots = 0,$$
$$R'.0 + Pp + P'p' + P''p'' + P'''p''' + \ldots = 0,$$

oder anstatt der letzten Gleichung nach §. 42.:

$$P(y\text{Cos}\,\alpha - x\text{Cos}\,\beta) + P'(y'\text{Cos}\,\alpha' - x'\text{Cos}\,\beta') + \ldots = 0.$$

Denkt man sich nun den Punkt A wieder als fest, so kann er die Stelle jeder, nach irgend einer Richtung wirkenden, Kraft, also auch der Kraft R', vertreten, und die beiden ersten Gleichungen sind daher immer als erfüllt anzusehen, so daß folglich die Gleichung

$$Pp + P'p' + P''p'' + P'''p''' + \ldots = 0,$$

oder

$$P(y\text{Cos}\,\alpha - x\text{Cos}\,\beta) + P'(y'\text{Cos}\,\alpha' - x'\text{Cos}\,\beta') + \ldots = 0,$$

die Bedingungsgleichung für das Gleichgewicht der in einer um einen festen Punkt drehbaren Ebene wirkenden Kräfte ist.

Bezeichnet man jetzt die Kräfte, welche die Ebene um den Punkt A nach der einen Seite hin zu drehen streben, durch P, P', P'', P''' u. s. w., und die Entfernungen ihrer Richtungen von dem Punkte A durch p, p', p'', p''' u. s. w.; die Kräfte aber, welche die Ebene nach der andern Seite um A zu drehen streben, durch Q, Q', Q'', Q''' u. s. w., und die Entfernungen ihrer Richtungen von A durch q, q', q'', q''' u. s. w., und betrachtet Alles als positiv: so ist die Bedingungsgleichung für das Gleichgewicht der Kräfte P, P', P'' u. s. w., Q, Q', Q'' u. s. w.:

$$Pp + P'p' + P''p'' + \ldots - Qq - Q'q' - Q''q'' - \ldots = 0,$$

oder

$$Pp + P'p' + P''p'' + \ldots = Qq + Q'q' + Q''q'' + \ldots,$$

so daß also, wenn mehrere in einer um einen festen Punkt drehbaren Ebene wirkende Kräfte im Gleichgewichte sind, in Beziehung auf den festen Punkt als Mittelpunkt der Momente, die Summe der Momente der Kräfte, welche die Ebene nach der einen Seite hin um den Mittelpunkt der Momente zu drehen streben, der Summe der Momente der Kräfte gleich ist, welche die Ebene nach der andern Seite hin um den Mittelpunkt der Momente zu drehen streben, und umgekehrt; auf ähnliche Art, wie in §. 55.

Richtung und Größe des Drucks auf den festen Punkt werden aus den beiden ersten der drey obigen Gleichungen durch R', $\text{Cos}\,\phi$ und $\text{Cos}\,\psi$ leicht bestimmt.

IV.

Kräfte im Raume.

§. 63.

1) Wir wollen zuerst annehmen, in dem Systeme sey ein fester Punkt A, um welchen sich das System drehen läßt.

Durch den Punkt A lege man drey auf einander senkrechte Axen, die als Axen der x, y und z angenommen werden. Sind nun die gegebenen Kräfte P, P', P'' u. s. w. im Gleichgewichte, so muß es offenbar eine Kraft R' geben, welche, in dem als frey gedachten Punkte A angebracht, ihnen das Gleichgewicht hält, und umgekehrt. Die Bedingungen des Gleichgewichts der Kräfte R', P, P', P'' u. s. w. sind nach §. 48.:

$$R'\mathrm{Cos}\,\varphi + P\mathrm{Cos}\,\alpha + P'\mathrm{Cos}\,\alpha' + P''\mathrm{Cos}\,\alpha'' + \ldots = 0,$$
$$R'\mathrm{Cos}\,\psi + P\mathrm{Cos}\,\beta + P'\mathrm{Cos}\,\beta' + P''\mathrm{Cos}\,\beta'' + \ldots = 0,$$
$$R'\mathrm{Cos}\,\chi + P\mathrm{Cos}\,\gamma + P'\mathrm{Cos}\,\gamma' + P''\mathrm{Cos}\,\gamma'' + \ldots = 0,$$
$$P(y\,\mathrm{Cos}\,\alpha - x\,\mathrm{Cos}\,\beta) + P'(y'\mathrm{Cos}\,\alpha' - x'\mathrm{Cos}\,\beta') + \ldots = 0,$$
$$P(x\,\mathrm{Cos}\,\gamma - z\,\mathrm{Cos}\,\alpha) + P'(x'\mathrm{Cos}\,\gamma' - z'\mathrm{Cos}\,\alpha') + \ldots = 0,$$
$$P(z\,\mathrm{Cos}\,\beta - y\,\mathrm{Cos}\,\gamma) + P'(z'\mathrm{Cos}\,\beta' - y'\mathrm{Cos}\,\gamma') + \ldots = 0,$$

da, nach der Annahme der Axen, für R' $x = y = z = 0$ ist.

Denkt man sich nun den Punkt A wieder als fest, so vertritt er die Stelle jeder Kraft; also auch der Kraft R', und die ersten drey Gleichungen können daher immer als erfüllt angesehen werden, so daß also die Bedingungen des Gleichgewichts

$$P(y\,\mathrm{Cos}\,\alpha - x\,\mathrm{Cos}\,\beta) + P'(y'\mathrm{Cos}\,\alpha' - x'\mathrm{Cos}\,\beta') + \ldots = 0,$$
$$P(x\,\mathrm{Cos}\,\gamma - z\,\mathrm{Cos}\,\alpha) + P'(x'\mathrm{Cos}\,\gamma' - z'\mathrm{Cos}\,\alpha') + \ldots = 0,$$
$$P(z\,\mathrm{Cos}\,\beta - y\,\mathrm{Cos}\,\gamma) + P'(z'\mathrm{Cos}\,\beta' - y'\mathrm{Cos}\,\gamma') + \ldots = 0$$

sind.

Die drey ersten der obigen sechs Gleichungen dienen zur Bestimmung der Richtung und Größe des Drucks auf den Punkt A.

2) Sey jetzt das System der gegebenen Kräfte um eine feste gerade Linie als Axe beweglich.

Man nehme die Axe des Systems als Axe der z an, so lassen sich die gegebenen Kräfte nach §. 47. und §. 48. auf ein der Axe z paralleles System und ein System in der Ebene der xy wirkender Kräfte bringen. Auf das erste System ist bey der Bestimmung der Bedingungen des Gleichgewichts für den in Rede stehenden Fall gar nicht Rücksicht zu nehmen, weil die Axe des Systems als fest und folglich als unverschiebbar angenommen wird. Ist das gegebene System im Gleichgewichte, so muß es auch das in der Ebene der xy wirkende System seyn, und umgekehrt, und die Bedingungen des Gleichgewichts für das gegebene System sind also mit den Bedingungen des Gleichgewichts für das System der Kräfte in der Ebene der xy einerley. Die in der Ebene der xy wirkenden Kräfte sind aber nach der Tabelle in §. 48.:

$$P\operatorname{Cos}\alpha,\ P'\operatorname{Cos}\alpha',\ P''\operatorname{Cos}\alpha'',\ P'''\operatorname{Cos}\alpha''',\ \text{u. s. w.};$$
$$P\operatorname{Cos}\beta,\ P'\operatorname{Cos}\beta',\ P''\operatorname{Cos}\beta'',\ P'''\operatorname{Cos}\beta''',\ \text{u. s. w.};$$

und daher, wenn man wie in §. 48. die positiven Werthe dieser Größen durch Π, Π', Π'', Π''' u. s. w., $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{P}''$, $\mathfrak{P}'''$ u. s. w. bezeichnet, die Bedingung für das Gleichgewicht nach §. 62. und nach der Tabelle in §. 48., da der Durchschnittspunkt der Ebene der xy mit der Axe des Systems als ein fester Punkt in der Ebene der xy angesehen werden kann:

$$\left.\begin{array}{l}
\Pi\left\{y\cdot(\pm 1)-\left(x-\dfrac{zP\operatorname{Cos}\alpha}{g}\right)\cdot 0\right\} \\
\qquad +\Pi'\left\{y'\cdot(\pm 1)-\left(x'-\dfrac{z'P'\operatorname{Cos}\alpha'}{g}\right)\cdot 0\right\}+\ldots \\
+\mathfrak{P}\left\{\left(y+\dfrac{zP\operatorname{Cos}\beta}{g}\right)\cdot 0-x\cdot(\pm 1)\right\} \\
\qquad +\mathfrak{P}'\left\{\left(y'+\dfrac{z'P'\operatorname{Cos}\beta'}{g}\right)\cdot 0-x'\cdot(\pm 1)\right\}+\ldots
\end{array}\right\}=0,$$

oder

$$\left.\begin{array}{l}
\Pi y\cdot(\pm 1)+\Pi' y'\cdot(\pm 1)+\Pi'' y''\cdot(\pm 1)+\ldots \\
-\mathfrak{P}x\cdot(\pm 1)-\mathfrak{P}'x'\cdot(\pm 1)-\mathfrak{P}''x''\cdot(\pm 1)+\ldots
\end{array}\right\}=0,$$

d. i. wie in §. 48.:

$$\left.\begin{array}{l}
Py\operatorname{Cos}\alpha+P'y'\operatorname{Cos}\alpha'+P''y''\operatorname{Cos}\alpha''+\ldots \\
-Px\operatorname{Cos}\beta-P'x'\operatorname{Cos}\beta'-P''x''\operatorname{Cos}\beta''-\ldots
\end{array}\right\}=0,$$

oder

$$P(y\operatorname{Cos}\alpha-x\operatorname{Cos}\beta)+P'(y'\operatorname{Cos}\alpha'-x'\operatorname{Cos}\beta')+\ldots=0,$$

welches die gesuchte Bedingungsgleichung für das Gleichgewicht ist.

Hieraus, verglichen mit Nummer 1., erhellet, daß, wenn ein System nach willkührlichen Richtungen im Raume wirkender Kräfte, in welchem ein Punkt als fest angenommen wird, im Gleichgewichte ist, dieses System in Beziehung auf jede drey auf einander senkrechte und durch den festen Punkt gehende Drehaxen im Gleichgewichte ist, und umgekehrt.

Durch die positiven Kräfte Π, Π', Π'', Π''' u. s. w., $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{P}''$, $\mathfrak{P}'''$ u. s. w. kann man übrigens die Bedingungen des Gleichgewichts der Kräfte P, P', P'' u. s. w. auch noch auf folgende Art ausdrücken. Man nehme nämlich den Punkt, in welchem die Ebene der xy die feste Axe des Systems schneidet, als Mittelpunkt der Momente an, und bezeichne die von dem Mittelpunkte der Momente auf die Richtungen der obigen Kräfte gefällten Perpendikel durch die entsprechenden kleinen Buchstaben; so ist nach §. 62. die Bedingung für das Gleichgewicht der Kräfte Π, Π', Π'' u. s. w., $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$ $\mathfrak{P}''$ u. s. w.:

$$\Pi\pi + \Pi'\pi' + \Pi''\pi'' + \ldots - \mathfrak{P}\mathfrak{p} - \mathfrak{P}'\mathfrak{p}' - \mathfrak{P}''\mathfrak{p}'' - \ldots = 0,$$

und hieraus läßt sich leicht ableiten, daß, wenn die Kräfte P, P', P'' u. s. w. im Gleichgewichte sind, die Summe der Momente der unter den Kräften Π, Π', Π'' u. s. w., $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{P}''$ u. s. w., welche das System nach der einen Seite um die feste Axe zu drehen streben, der Summe der Momente der unter den Kräften Π, Π', Π'' u. s. w., $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{P}''$ u. s. w. gleich ist, welche das System nach der andern Seite um die feste Axe zu drehen streben, und umgekehrt.

Hierin sind auch die Bedingungen des Gleichgewichts paralleler Kräfte im Raume, deren System sich um eine feste Axe drehen läßt, enthalten.

Sechstes Kapitel.

Von dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten.

§. 64.

Das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten ist ein sehr allgemeines statisches Gesetz, und darf daher in einem ausführlichen Lehrbuche nicht fehlen. Eytelwein bemerkt in der Vorrede zu seinem Handbuche der Statik ganz richtig, daß es sich durch seine Allgemeinheit und Einfachheit vorzüglich empfehle, um in schwierigen Fällen dem Praktiker, welcher nicht sogleich mit allen Hülfsmitteln der Statik vertraut ist, zur Führerinn zu dienen, oder es nach vollendeter Auflösung einer schwierigen Aufgabe als Prüfungsmittel der Richtigkeit der Auflösung zu gebrauchen. Eytelwein gibt aber keinen allgemeinen Beweis, sondern beweiset es nur für ein Paar besondere Fälle im ersten Theile auf S. 42. ff. und S. 77. ff. Mir ist kein besserer Beweis bekannt, als der, welchen Poisson im siebenten Kapitel des ersten Buches seines oft angeführten Traité de Mécanique vorträgt. Der Beweis gehört nicht eigentlich Poisson an, sondern ist, wie der Verfasser S. 251. selbst sagt, „un développement de celle, que M. Laplace a „donné dans le premier livre de la Mécanique céleste, „pour un système de points liés entre eux d'une manière „invariable. Nous l'avons étendue au cas où ces points „ou plusieurs d'entre eux, conservent la liberté de glisser „le long des fils flexibles qui les unissent.„ Ich werde daher in diesem Kapitel den von Poisson gegebenen Beweis mit einigen Erläuterungen vortragen, und ganz dem von ihm eingeschlagenen Wege folgen, indem ich zuerst den allgemeinen Ausdruck des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten geben, es dann auf zwey besondere Fälle anwenden, und zuletzt den allgemeinen Beweis führen werde.

§. 65.

Allgemeinster Ausdruck des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten.

Es ist hier zuvörderst zu erläutern, was man in der Statik unter der virtuellen Geschwindigkeit eines Punktes, an welchem eine Kraft wirkt, versteht. A (Fig. 49.) sey der gegebene Punkt, an welchem die Kraft P nach der Richtung AP wirkt. Wenn man nun den Punkt A, ohne daß die Richtung der Kraft P sich ändert, durch den unendlich kleinen Raum $A\mathfrak{A}$ sich bewegen läßt, so nennt man $A\mathfrak{A}$ die virtuelle Geschwindigkeit des Punktes A. Fällt man von $\mathfrak{A}$ auf die anfängliche Richtung der Kraft P ein Perpendikel $a\mathfrak{A}$, so heißt Aa die auf der Richtung der Kraft genommene virtuelle Geschwindigkeit des Punktes A, und diese auf den Richtungen der Kräfte genommenen virtuellen Geschwindigkeiten werden als positiv oder negativ angesehen, je nachdem sie, wie in Fig. 49. a., in die Richtung der Kraft selbst, oder, wie in Fig. 49. b., in die Verlängerung der Richtung der Kraft nach der entgegengesetzten Seite des Angriffspunktes hin fallen.

Das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten selbst ist nun folgendes:

Wenn man irgend einem Systeme unter einander verbundener Punkte, an welchen Kräfte im Gleichgewichte sind, eine unendlich kleine Bewegung mittheilt, so daß weder die Verbindung und Lage der Punkte unter sich, noch die Richtung der Kräfte auf irgend eine Art geändert wird; so ist die Summe der Producte, welche man erhält, wenn man die Kräfte in die auf ihren Richtungen genommenen virtuellen Geschwindigkeiten ihrer Angriffspunkte multiplicirt, gleich Null.

Umgekehrt wird dieses Princip auf folgende Art ausgedrückt:

Wenn in ein System unter einander verbundener Punkte Kräfte wirken, und es ist die Summe der Producte, welche man erhält, wenn man die Kräfte in die auf ihren Richtungen genommenen virtuellen Geschwindigkeiten ihrer Angriffspunkte multiplicirt, für jede unendlich kleine Bewegung, welche man auf die obige Art dem Systeme mittheilen kann, gleich Null; so sind die in das System wirkenden Kräfte unter einander im Gleichgewichte.

Die erste Idee von diesem sehr allgemeinen Satze mag in den Schriften des Galilei vorkommen. Die große Allgemeinheit desselben, und die Erkennung seines Nutzens bey der Auflösung statischer Aufgaben, ist aber ohne Zweifel Johann Bernoulli zuzuschreiben, wie aus einem von ihm im Jahre 1717 an Varignon geschriebenen Briefe erhellet, den Letzterer in den neunten Abschnitt seiner schon angeführten Nouvelle Mécanique eingerückt hat. Varignon zeigt in diesem Abschnitte den Nutzen des Satzes durch verschiedene Anwendungen. Lagrange hat in seiner Mécanique analytique das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten als einen ersten Grundsatz der Statik betrachtet, und daraus alle übrige Sätze hergeleitet. Freylich ist dieses Werk, weil sich das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten als Axiom ohne Beweis nicht annehmen läßt, nicht brauchbar, die Statik und Mechanik daraus zu erlernen, sondern es ist mehr als ein analytisches Kunstwerk zu betrachten, völlig würdig dem Genie seines Urhebers. Zugleich enthält es aber auch die Auflösung mancher wichtigen und schwierigen mechanischen Aufgabe.

Alle andere solche allgemeine Gesetze des Gleichgewichts, welche man entdeckt hat, und, wie Lagrange behaupten zu können glaubt, auch die, welche man vielleicht noch entdecken wird, sind nichts anderes als das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten, oder des Bestrebens nach Geschwindigkeit, wie man es auch nennt, dieses nur aus verschiedenem Gesichtspunkte betrachtet und anders ausgedrückt.

§. 66.

Betrachtung des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten in zwey besondern Fällen.

Man habe einen um C beweglichen Hebel AA', (Fig. 50.), an welchem die Kräfte P und P' nach den Richtungen AP und $A'P'$ wirken. Dem Hebel kann nur eine Bewegung mitgetheilt werden, und es ist daher, wenn p und p' die auf den Richtungen der Kräfte genommenen virtuellen Geschwindigkeiten der Punkte A und A' bezeichnen, nach dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten

$$Pp + P'p' = 0$$

die Bedingung für das Gleichgewicht am Hebel.

Man nehme an, der Hebel habe sich um einen unendlich kleinen Bogen gedreht, und sey in die Lage $\mathfrak{A}C\mathfrak{A}'$ gekommen, so sind $A\mathfrak{A}$, $A'\mathfrak{A}'$ die virtuellen Geschwindigkeiten der Punkte A, A', und wenn man auf die Richtungen der Kräfte die Perpendikel $a\mathfrak{A}$, $a'\mathfrak{A}'$ fällt, $-aA$ und $a'A'$ die auf den Richtungen der Kräfte genommenen virtuellen Geschwindigkeiten. Also $p = -aA$, und $p' = a'A'$. Fällt man nun von C auf die Richtungen der Kräfte die Perpendikel CB und CB', so läßt sich leicht zeigen, daß $\Delta\, aA\mathfrak{A} \sim \Delta\, ABC$, und $\Delta\, a'A'\mathfrak{A}' \sim \Delta\, A'B'C$ ist. Denn

$$\angle\, \mathfrak{A}AB = \angle\, CAB + \angle\, CA\mathfrak{A} = \angle\, CAB + R,$$

da $\angle\, CA\mathfrak{A}$, weil der Drehungswinkel unendlich klein ist, gleich einem rechten Winkel zu setzen ist. Aber

$$\angle\, \mathfrak{A}AB = \angle\, A\mathfrak{A}a + \angle\, a = \angle\, A\mathfrak{A}a + R,$$

und folglich $\angle\, A\mathfrak{A}a + R = \angle\, CAB + R$, so daß also $\angle\, A\mathfrak{A}a = \angle\, CAB$, und, weil $\angle\, Aa\mathfrak{A} = \angle\, ABC = R$ ist, demnach $\Delta\, Aa\mathfrak{A} \sim \Delta\, ABC$.

Da ferner aus ähnlichem Grunde wie vorher $\angle\, CA'\mathfrak{A}' = R = \angle\, CA'B' + \angle\, a'A'\mathfrak{A}' = \angle\, a'\mathfrak{A}'A' + \angle\, a'A'\mathfrak{A}'$ ist, so ist $\angle\, CA'B' = \angle\, a'\mathfrak{A}'A'$; und weil $\angle\, CB'A' = \angle\, \mathfrak{A}'a'A' = R$ ist, so ist auch $\Delta\, CA'B' \sim \Delta\, a'A'\mathfrak{A}'$.

Es ist also

$$AC : BC = A\mathfrak{A} : Aa,$$
$$A'C : B'C = A'\mathfrak{A}' : A'a',$$

oder, wenn man $BC = q$, $B'C = q'$ setzt:

$$-Aa = p = -\frac{q \cdot A\mathfrak{A}}{AC}, \text{ und}$$

$$A'a' = p' = \frac{q' \cdot A'\mathfrak{A}'}{A'C}.$$

Also die Bedingung des Gleichgewichts:

$$-P \cdot \frac{q \cdot A\mathfrak{A}}{AC} + P' \cdot \frac{q' \cdot A'\mathfrak{A}'}{A'C} = 0.$$

Nun ist aber, da, wegen der unendlichen Kleinheit der Winkel $AC\mathfrak{A}$, $A'C\mathfrak{A}'$, die Linien $A\mathfrak{A}$ und $A'\mathfrak{A}'$ mit den Bögen zwischen AA' und $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'$ zusammenfallen, nach bekannten Sätzen

$$A\mathfrak{A} : AC = A'\mathfrak{A}' : A'C,$$

und folglich $\frac{A\mathfrak{A}}{AC} = \frac{A'\mathfrak{A}'}{A'C}$, so daß also die Bedingung des Gleichgewichts sich in

$$-Pq + P'q' = 0, \text{ oder } Pq = P'q',$$

oder

$$P : P' = q' : q$$

verwandelt.

Diese Proportion ist aber in §. 56. aus ganz andern Gründen bewiesen worden, und das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten findet sich also in diesem Falle bestätigt.

Man habe jetzt zwey schiefe Ebenen ABC und $A'BC$, (Fig. 51.), von einerley Höhe BC. Auf der einen liege der schwere Körper a und auf der andern der schwere Körper a'. a und a' seyen Punkte in diesen Körpern, in welchen man sich die ganzen Gewichte dieser Körper vereinigt denken kann, *) so daß also die Gewichte dieser Körper als in a und a' nach den auf der Horizontalen AA' senkrechten Verticalen ad und $a'd'$

*) Man nehme dies hier als eine bloße Hypothese an. In dem folgenden Haupttheile, welcher die Lehre vom Schwerpunkte ausführlich abhandelt, wird man weitere Aufklärung hierüber erhalten.

wirkende Kräfte, die wir durch P und P' bezeichnen wollen, betrachtet werden können. Die Körper sind durch einen in a und a' befestigten und über die Rolle bey B gehenden Faden, welcher den Linien AB und $A'B$ parallel ist, mit einander verbunden. Sind p und p' wieder die auf den Richtungen der Kräfte genommenen virtuellen Geschwindigkeiten der Punkte a und a', so ist, da nur eine Bewegung des Systems statt finden kann,

$$Pp + P'p' = 0$$

wieder die Bedingung des Gleichgewichts, nach dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten.

Läßt man die beiden Körper sich nun bewegen, so daß sie nach b und b' kommen, so sind ab und $a'b'$ die virtuellen Geschwindigkeiten von a und a', und in diesem Falle offenbar einander gleich, da der verbindende Faden immer einerley Länge behält. Fällt man von b und b' die Perpendikel bc und $b'c'$ auf ad und $a'd'$, so ist $p = ac$ und $p' = -a'c'$, so daß also die Bedingung des Gleichgewichts

$$P.ac - P'.a'c' = 0$$

ist.

Die Triangel bac, BAC und $b'a'c'$, $BA'C$ sind offenbar einander ähnlich. Also, wenn man $AB = l$, $A'B = l'$, $BC = h$, und $ab = a'b' = v$ setzt:

$$AB : BC = ab : ac, \quad l : h = v : ac;$$
$$A'B : BC = a'b' : a'c', \quad l' : h = v : a'c';$$
$$ac = \frac{hv}{l}, \quad a'c' = \frac{hv}{l'}.$$

Also

$$P.\frac{hv}{l} - P'.\frac{hv}{l'} = 0,$$

$$\frac{P}{l} - \frac{P'}{l'} = 0, \quad Pl' - P'l = 0, \quad Pl' = P'l,$$

oder $P : P' = l : l'$, so daß sich also die Gewichte der beiden Körper wie die Längen der schiefen Ebenen verhalten müssen.

Dasselbe läßt sich leicht auf folgende Art aus dem Parallelogramm der Kräfte herleiten.

Man setze die Winkel bey A und A', $= \alpha$ und $= \alpha'$, und zerlege nun jede der beiden Kräfte P und P' in zwey Seitenkräfte, die eine senkrecht auf der schiefen Ebene, die andere parallel mit ihrer Länge. Die Seitenkräfte von P sind $P \operatorname{Cos} \alpha$, $P \operatorname{Sin} \alpha$, und eben so die Seitenkräfte von P': $P' \operatorname{Cos} \alpha'$, $P' \operatorname{Sin} \alpha'$. Die auf den schiefen Ebenen senkrechten Kräfte $P \operatorname{Cos} \alpha$ und $P' \operatorname{Cos} \alpha'$ werden von den schiefen Ebenen aufgehoben, und es ist daher klar, daß für das Gleichgewicht $P \operatorname{Sin} \alpha = P' \operatorname{Sin} \alpha'$ seyn muß. Nun ist aber

$$h = l \operatorname{Sin} \alpha, \quad h = l' \operatorname{Sin} \alpha'. \text{ Also}$$

$$P \cdot \frac{h}{l} = P' \cdot \frac{h}{l'}, \text{ oder}$$

$$\frac{P}{l} = \frac{P'}{l'}, \quad Pl' = P'l, \text{ oder}$$

$$P : P' = l : l',$$

wie vorher.

Das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten findet sich also auch in diesem Falle bewährt. Es ließen sich leicht mehrere Beyspiele geben; die beiden obigen, aus Poisson entlehnten, sind aber hinreichend, um den Sinn dieses Gesetzes deutlich zu machen und die Art seiner Anwendung zu zeigen. Wer mehrere Beyspiele verlangt, findet Befriedigung in einem Aufsatze von Bossut, welcher von Garnier in seine Leçons de Statique, chap. VIII. p. 181. — 198., aufgenommen worden ist. Wir wenden uns nun zu dem allgemeinen Beweise des wichtigen Satzes.

Allgemeiner Beweis des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten.

§. 67.

Wir haben es für's Erste bloß mit dem ersten Theile des Satzes zu thun, und wollen zunächst beweisen, daß derselbe gilt, wenn mehrere Kräfte nach willkührlichen Richtungen auf einen Punkt wirken.

Auf den Punkt A wirken die Kräfte P, P', P'', P''' u. s. w. nach willkührlichen Richtungen im Raume. Ihre Resultirende, welche es bekanntlich immer gibt, sey $= Q$. Man lasse nun die Lage des Punktes A sich ändern, und ihn in $\mathfrak{A}$ kommen, und zerlege jede der Kräfte Q, P, P', P'', P''' u. s. w. in dem Punkte A in zwey andere Kräfte, eine nach $A\mathfrak{A}$, und die andere nach einer auf dieser Linie senkrechten Linie. Sind nun $a, \alpha, \alpha', \alpha'', \alpha'''$ u. s. w. die Winkel, welche die Richtungen der Kräfte Q, P, P', P'', P''' u. s. w. mit der Linie $A\mathfrak{A}$ einschließen; so sind bekanntlich die Zusammensetzenden dieser Kräfte: $Q \operatorname{Cos} a$, $Q \operatorname{Sin} a$; $P \operatorname{Cos} \alpha$, $P \operatorname{Sin} \alpha$; $P' \operatorname{Cos} \alpha'$, $P' \operatorname{Sin} \alpha'$; $P'' \operatorname{Cos} \alpha''$, $P'' \operatorname{Sin} \alpha''$; $P''' \operatorname{Cos} \alpha'''$, $P''' \operatorname{Sin} \alpha'''$; u. s. w. Da nun die Kräfte $-Q, P, P', P''$ u. s. w. im Gleichgewichte sind, so sind es offenbar auch die Kräfte $-Q \operatorname{Cos} a$, $-Q \operatorname{Sin} a$, $P \operatorname{Cos} \alpha$, $P \operatorname{Sin} \alpha$, $P' \operatorname{Cos} \alpha'$, $P' \operatorname{Sin} \alpha'$, $P'' \operatorname{Cos} \alpha''$, $P'' \operatorname{Sin} \alpha''$ u. s. w. unter einander, woraus man ferner leicht schließt, daß sowohl die Kräfte

$$-Q \operatorname{Sin} a, \quad P \operatorname{Sin} \alpha, \quad P' \operatorname{Sin} \alpha', \quad P'' \operatorname{Sin} \alpha'' \quad \text{u. s. w.}$$

als auch die Kräfte

$$-Q \operatorname{Cos} a, \quad P \operatorname{Cos} \alpha, \quad P' \operatorname{Cos} \alpha', \quad P'' \operatorname{Cos} \alpha'' \quad \text{u. s. w.}$$

für sich im Gleichgewichte seyn müssen. Denn gäbe es von einer dieser beiden Reihen von Kräften, oder von beiden, eine Resultirende, die nicht $= 0$ wäre; so müßte es, wie leicht ohne Weiteres erhellet, von allen Kräften eine Resultirende geben, die nicht $= 0$ wäre, welches aber nicht möglich ist, da die Kräfte unter einander im Gleichgewichte sind.

Die Kräfte der zweyten Reihe wirken in einer geraden Linie, und ihre Summe muß daher, weil sie im Gleichgewichte sind, $= 0$ seyn, so daß also

$$-Q \operatorname{Cos} a + P \operatorname{Cos} \alpha + P' \operatorname{Cos} \alpha' + P'' \operatorname{Cos} \alpha'' + \ldots = 0$$

oder

$$Q \operatorname{Cos} a = P \operatorname{Cos} \alpha + P' \operatorname{Cos} \alpha' + P'' \operatorname{Cos} \alpha'' + \ldots$$

ist.

Setzt man nun die Linie $A\mathfrak{A} = m$, so sind die auf den Richtungen der Kräfte Q, P, P', P'' u. s. w. genommenen virtuellen Geschwindigkeiten, die wir durch q, p, p', p'' u. s. w.

bezeichnen wollen, offenbar $= m\,\mathrm{Cos}\,a$, $m\,\mathrm{Cos}\,\alpha$, $m\,\mathrm{Cos}\,\alpha'$, $m\,\mathrm{Cos}\,\alpha''$, $m\,\mathrm{Cos}\,\alpha'''$, u. s. w. Also

$$mQ\,\mathrm{Cos}\,a = mP\,\mathrm{Cos}\,\alpha + mP'\,\mathrm{Cos}\,\alpha' + mP''\,\mathrm{Cos}\,\alpha'' + \ldots,$$

$$Q\,.\,m\,\mathrm{Cos}\,a = P.\,m\,\mathrm{Cos}\,\alpha + P'.\,m\,\mathrm{Cos}\,\alpha' + P''.\,m\,\mathrm{Cos}\,\alpha'' + \ldots,$$

$$Qq = Pp + P'p' + P''p'' + P'''p''' + \ldots$$

Sind nun die Kräfte P, P', P'', P''' u. s. w. im Gleichgewichte; so ist ihre Resultirende $Q = 0$, und demnach

$$Pp + P'p' + P''p'' + P'''p''' + \ldots = 0,$$

w. z. b. w.

Es erhellet hieraus zugleich, daß das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten für einen Punkt nicht auf eine unendlich kleine Veränderung der Lage des Angriffspunktes eingeschränkt ist, sondern auch für jede endliche Veränderung gilt, da $A\mathfrak{A}$ oder m ganz willkührlich ist.

Bis jetzt haben wir angenommen, daß der Punkt A völlig frey sey. Ist aber dieser Punkt genöthigt, auf einer Fläche zu bleiben, so ist es nicht nöthig, daß die Resultirende $Q = 0$ sey, sondern diese Resultirende muß nur nach der durch den Punkt A gehenden Normale gerichtet seyn. Die Bewegung des Punktes A kann nur in der gegebenen Fläche geschehen. Ist nun die Veränderung der Lage unendlich klein, so fällt die unendlich kleine $A\mathfrak{A}$ mit der durch den Punkt A gehenden tangirenden Ebene, auf welcher die Richtung der Kraft Q senkrecht ist, zusammen, und es ist demnach offenbar $q = 0$, so daß also auch in diesem Falle aus der allgemeinen Gleichung

$$Qq = Pp + P'p' + P''p'' + P'''p''' + \ldots$$

sich die Gleichung des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten:

$$Pp + P'p' + P''p'' + P'''p''' + \ldots = 0,$$

ergibt.

Ist der Punkt A genöthigt, auf einer Curve zu bleiben, so braucht man in dem vorigen Raisonnement bloß Tangente für tangirende Ebene zu setzen, und alles Uebrige bleibt ungeändert. Wenn ein Gleichgewicht unter P, P', P'', P''' u. s. w. statt findet, so ist immer

$$Pp + P'p' + P''p'' + P'''p''' + \ldots = 0.$$

In den beiden letztern Fällen gilt das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten indeß bloß für Bewegungen auf der Fläche oder der Curve. Für Bewegungen, welche den Punkt von der Fläche oder Curve entfernen, sind noch andere Bestimmungen nöthig, die sich aus dem, was im vorhergehenden Kapitel da gewesen ist, in jedem besondern Falle beurtheilen lassen.

§. 68.

Wir wollen jetzt ferner die verschiedenen Arten betrachten, auf welche Punkte mit einander verbunden seyn können. Es sind drey Arten denkbar. Die Punkte sind nämlich entweder durch starre unbiegsame gerade Linien verbunden, oder durch unausdehnbare, aber völlig biegsame gerade Linien oder Fäden ohne Dicke, und im letztern Falle kann man annehmen, daß die Fäden entweder an den Punkten befestigt sind, oder daß die letztern auf den erstern wie Ringe verschiebbar sind, und längs ihnen hin gleiten können. Auch können sich im letztern Falle mehrere Fäden in einem Ringe durchkreuzen.

Sind nun die Kräfte P, P', P'', P''' u. s. w. an den Punkten A, A', A'', A''' u. s. w. im Gleichgewichte, so erleidet offenbar jede der verbindenden Linien, die man nun entweder als unbiegsam oder biegsam betrachten kann, eine Spannung, d. i., es ist eben so, als wenn jede verbindende Linie an ihren zwey Endpunkten von zwey gleichen und entgegengesetzten Kräften gezogen würde; denn daß man diese beiden Kräfte als gleich annehmen muß, ist klar, weil im entgegengesetzten Falle offenbar kein Gleichgewicht statt finden könnte. Findet ein Gleichgewicht in dem Systeme statt, so muß augenscheinlich jede verbindende Linie nach beiden Seiten hin gleich stark gezogen werden, d. i. sie muß überall gleich gespannt seyn. Sind die verbindenden Linien biegsam, und gehen durch Ringe, so ist die Spannung offenbar in der ganzen Linie und in allen ihren durch die Ringe von einander getrennten Theilen gleich stark, da diese Theile offenbar nicht als einzelne verbindende Linien betrachtet werden dürfen, und die Spannung sich durch die ganze durch die Ringe gehende biegsame Linie gleich vertheilen wird. Auf dieses Princip der Spannungen, auf welches wir späterhin nochmahls zurückkommen werden, gründet sich vorzüglich der Laplace-Poisson'sche Beweis des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten, welchen ich nun vortragen werde, und der Anfänger muß sich daher bemühen, den Sinn des Princips der Spannungen wohl aufzufassen, weil sonst das Folgende an Deutlichkeit verlieren wird. Vorher müssen wir uns jedoch noch einige Bezeichnungen bekannt machen, die Poisson sehr schicklich gebraucht, um den Beweis deutlicher und kürzer darstellen zu können.

Sind A, A'; oder A, A''; A'', A'''; u. s. w. die Endpunkte einer verbindenden Linie, so sollen die in den Linien AA', AA'', $A''A'''$, u. s. w. herrschenden Spannungen durch $[A, A']$, $[A, A'']$, $[A'', A''']$, u. s. w. bezeichnet werden. Die Entfernungen der Punkte A, A'; A, A''; A'', A'''; u. s. w. von einander, d. i. die Linien AA', AA'', $A''A'''$, u. s. w., sollen durch (A, A'), (A, A''), (A'', A'''), u. s. w. bezeichnet werden. Die Veränderungen dieser Linien, wenn beide Endpunkte eine unendlich kleine Veränderung erleiden, sollen respective durch $\delta.(A, A')$, $\delta.(A, A'')$, $\delta.(A'', A''')$, u. s. w. bezeichnet werden. Erleidet aber in (A, A') bloß der Punkt A oder der Punkt A' eine unendlich kleine Veränderung, so sollen die daraus resultirenden Veränderungen der Entfernung (A, A') respective durch $\delta_{,}.(A, A')$ und $\delta_{,}'.(A, A')$ bezeichnet werden, so daß also auf dieselbe Art die Veränderungen der Entfernungen (A, A''), (A'', A'''), welche aus einer unendlich kleinen Veränderung eines der Punkte A, A''; A'', A'''; entspringen, respective durch $\delta_{,}.(A, A'')$, $\delta_{,}''.(A, A'')$, $\delta_{,}''.(A'', A''')$, $\delta_{,}'''.(A'', A''')$, bezeichnet werden sollen, und auf die nämliche Art in allen ähnlichen Fällen.

Eine wichtige Bemerkung, auf welche Vieles in dem Folgenden sich stützt, ist, daß die aus der unendlich kleinen Veränderung beider Endpunkte entspringende Veränderung einer geraden Linie der Summe der aus den unendlich kleinen Veränderungen der einzelnen Endpunkte entspringenden Veränderungen gleich ist, so daß also nach unsrer Bezeichnung z. B.

$$\delta.(A, A') = \delta_{,}.(A, A') + \delta_{,}'.(A, A'),$$
$$\delta.(A, A'') = \delta_{,}.(A, A'') + \delta_{,}''.(A, A''),$$
$$\delta.(A'', A''') = \delta_{,}''.(A'', A''') + \delta_{,}'''.(A'', A'''),$$

u. s. w.

Für die der Theorie der Differenziale der Functionen mit mehrern veränderlichen Größen kundigen Anfänger ist diese Bemerkung eine bekannte Sache; für die Unkundigern folgende Erläuterung.

Die Coordinaten der Punkte A, A' seyen x, y; x', y'; so ist bekanntlich (M. s. mein Lehrbuch der Kegelschnitte, §. 18.)

$$(A, A') = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}.$$

Verändern sich nun x, y um Δx, Δy, und x', y' um $\Delta x'$, $\Delta y'$; so ist der neue Werth von (A, A'), welchen wir durch $(A, A')'$ bezeichnen wollen:

$$= \sqrt{[(x+\Delta x)-(x'+\Delta x')]^2 + [(y+\Delta y)-(y'+\Delta y')]^2}$$
$$= \sqrt{[(x-x')+(\Delta x-\Delta x')]^2 + [(y-y')+(\Delta y-\Delta y')]^2}$$
$$= \sqrt{\left\{\begin{matrix}(x-x')^2 + (y-y')^2 + 2(x-x')(\Delta x-\Delta x') \\ +2(y-y')(\Delta y-\Delta y') + (\Delta x-\Delta x')^2 + (\Delta y-\Delta y')^2\end{matrix}\right\}},$$

und folglich nach dem binomischen Lehrsatze

$$= \begin{cases}(A, A') \\ + \frac{1}{(A, A')}.[2(x-x')(\Delta x-\Delta x') + 2(y-y')(\Delta y-\Delta y')] \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{cases}$$

wo alle folgende Glieder höhere Potenzen der Incremente Δx, $\Delta x'$, Δy, $\Delta y'$, oder Producte aus diesen Incrementen enthalten, so daß also diese Glieder, da die Incremente unendlich klein sind, vernachlässigt werden, und folglich

$$(A, A')' = \begin{cases}(A, A') \\ + \frac{1}{(A, A')}.[2(x-x')(\Delta x-\Delta x') + 2(y-y')(\Delta y-\Delta y')]\end{cases}$$

oder $\delta.(A, A')$

$$= \frac{1}{(A, A')}.[2(x-x')(\Delta x-\Delta x')+2(y-y')(\Delta y-\Delta y')]$$

ist.

Hieraus ergeben sich leicht $\delta_{/}.(A, A')$ und $\delta_{/}'.(A, A')$, wenn man $\Delta x = \Delta y = 0$, oder $\Delta x' = \Delta y' = 0$ setzt, wodurch man erhält:

$\delta_{/}.(A, A')$

$$= \frac{1}{(A, A')}.[-2(x-x').\Delta x' - 2(y-y').\Delta y'],$$

$\delta_{/}'.(A, A')$

$$= \frac{1}{(A, A')}.[2(x-x').\Delta x + 2(y-y').\Delta y],$$

woraus leicht folgt, daß

$$\delta_{/}.(A, A') + \delta_{/}'.(A, A') = \delta.(A, A')$$

ist, w. z. b. w.

Man betrachte nun irgend einen der gegebenen Punkte, z. B. A, an welchem die Kraft P wirkt. Dieser Punkt ist mit den andern Punkten durch die Linien AA', AA'', AA''' u. s. w. verbunden; und da Alles im Gleichgewichte ist, so ist die Kraft P offenbar mit den Spannungen der letztern Linien im Gleichgewichte. Theilt man nun dem ganzen Systeme eine unendlich kleine Bewegung mit, so daß das ganze System übrigens völlig unverändert bleibt, und bezeichnet die auf den Linien AA', AA'', AA''' u. s. w. und auf der Richtung der Kraft P genommenen virtuellen Geschwindigkeiten des Punktes A respective durch t', t'', t''' u. s. w. und durch p, die Spannungen der in A zusammenstoßenden Linien aber auf die oben angezeigte Art; so ist nach dem in §. 67. Bewiesenen:

$$Pp + [A, A'].t' + [A, A''].t'' + [A, A'''].t''' + \ldots = 0.$$

Wäre nun aber in Fig. 52. die Linie AA' durch die Veränderung des Systems in die Lage $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'$ gekommen, so ist, wenn man von $\mathfrak{A}$ auf AA' das Perpendikel $\mathfrak{A}a$ fällt, $t' = Aa$. Nun ist $Aa = AA' - A'a$. Aber $A'a^2 = \mathfrak{A}A'^2 - \mathfrak{A}a^2$, wo $\mathfrak{A}a$, und um so mehr $\mathfrak{A}a^2$, unendlich klein ist, weil die Veränderung des Systems als unendlich klein vorausgesetzt wird. Also kann man $\mathfrak{A}a^2$ vernachlässigen, woraus man erhält: $A'a^2 = \mathfrak{A}A'^2$, $A'a = \mathfrak{A}A'$, so daß folglich

$$Aa = AA' - \mathfrak{A}A', \text{ d. i. } t' = \delta_{/} . (A, A')$$

ist. Auf dieselbe Art ist

$$t'' = \delta_{/} . (A, A''), \quad t''' = \delta_{/} . (A, A'''), \text{ u. s. w.},$$

und folglich

$$\left.\begin{array}{l} Pp + [A, A'] . \delta_{/} . (A, A') + [A, A''] . \delta_{/} . (A, A'') \\ \qquad + [A, A'''] . \delta_{/} . (A, A''') + \ldots \end{array}\right\} = 0.$$

Dasselbe Raisonnement ist auf alle andere Punkte des Systems auf dieselbe Art anwendbar, und man hat demnach folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} Pp + [A, A'] . \delta_{/} . (A, A') + [A, A''] . \delta_{/} . (A, A'') \\ \qquad + [A, A'''] . \delta_{/} . (A, A''') + \ldots \end{array}\right\} = 0,$$

$$\left.\begin{array}{l} P'p' + [A', A] . \delta_{/}' . (A', A) + [A', A''] . \delta_{/}' . (A', A'') \\ \qquad + [A', A'''] . \delta_{/}' . (A', A''') + \ldots \end{array}\right\} = 0,$$

$$\left.\begin{array}{l} P''p'' + [A'', A] . \delta_{/}'' . (A'', A) + [A'', A'] . \delta_{/}'' . (A'', A') \\ \qquad + [A'', A'''] . \delta_{/}'' . (A'', A''') + \ldots \end{array}\right\} = 0,$$

$$\left.\begin{array}{l} P'''p''' + [A''', A] . \delta_{/}''' . (A''', A) + [A''', A'] . \delta_{/}''' . (A''', A') \\ \qquad + [A''', A''] . \delta_{/}''' . (A''', A'') + \ldots \end{array}\right\} = 0,$$

u. s. w. u. s. w.,

wo das Gesetz, nach welchem diese Gleichungen gebildet werden, klar vor Augen liegt.

Durch Addition erhält man:

$$\left.\begin{array}{l} Pp + P'p' + P''p'' + P'''p''' + \ldots \\ + [A, A'] . \delta_{/} . (A, A') + [A, A''] . \delta_{/} . (A, A'') \\ \qquad + [A, A'''] . \delta_{/} . (A, A''') + \ldots \\ + [A', A] . \delta_{/}' . (A', A) + [A', A''] . \delta_{/}' . (A', A'') \\ \qquad + [A', A'''] . \delta_{/}' . (A', A''') + \ldots \\ + [A'', A] . \delta_{/}'' . (A'', A) + [A'', A'] . \delta_{/}'' . (A'', A') \\ \qquad + [A'', A'''] . \delta_{/}'' . (A'', A''') + \ldots \\ + [A''', A] . \delta_{/}''' . (A''', A) + [A''', A'] . \delta_{/}''' . (A''', A') \\ \qquad + [A''', A''] . \delta_{/}''' . (A''', A'') + \ldots \end{array}\right\} = 0.$$

$+ \ldots\ldots$

Da nun nach dem obigen Gesetze der Spannungen immer die Spannung $[A, A'] = [A', A]$, oder $[A', A''] = [A'', A']$, u. s. w. ist; so verwandelt sich obige Gleichung, wenn man immer je zwey Glieder in eins zusammenfaßt, in folgende:

$$\left.\begin{aligned}
&Pp + P'p' + P''p'' + P'''p''' + \ldots \\
&+ [A, A'] . [\delta_{,} . (A, A') + \delta_{,}' . (A', A)] \\
&+ [A, A''] . [\delta_{,} . (A, A'') + \delta_{,}'' . (A'', A)] \\
&+ [A, A'''] . [\delta_{,} . (A, A''') + \delta_{,}''' . (A''', A)] \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ [A', A''] . [\delta_{,}' . (A', A'') + \delta_{,}'' . (A'', A')] \\
&+ [A', A'''] . [\delta_{,}' . (A', A''') + \delta_{,}''' . (A''', A')] \\
&+ [A', A''''] . [\delta_{,}' . (A', A'''') + \delta_{,}'''' . (A'''', A')] \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ [A'', A'''] . [\delta_{,}'' . (A'', A''') + \delta_{,}''' . (A''', A'')] \\
&+ [A'', A''''] . [\delta_{,}'' . (A'', A'''') + \delta_{,}'''' . (A'''', A'')] \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ [A''', A''''] . [\delta_{,}''' . (A''', A'''') + \delta_{,}'''' . (A'''', A''')] \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} = 0,$$

und folglich, weil $\delta_{,} . (A, A') + \delta_{,}' . (A', A) = \delta . (A, A')$ ist, u. s. w.:

$$\left.\begin{aligned}
&Pp + P'p' + P''p'' + P'''p''' + \ldots \\
&+ [A, A'] . \delta . (A, A') + [A, A''] . \delta . (A, A'') \\
&\qquad\qquad + [A, A'''] . \delta . (A, A''') + \ldots \\
&+ [A', A''] . \delta . (A', A'') + [A', A'''] . \delta . (A', A''') \\
&\qquad\qquad + [A', A''''] . \delta . (A', A'''') + \ldots \\
&+ [A'', A'''] . \delta . (A'', A''') + [A'', A''''] . \delta . (A'', A'''') + \ldots \\
&+ [A''', A''''] . \delta . (A''', A'''') + \ldots \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} = 0.$$

Da aber bey der Bewegung des Systems, wenn das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten gelten soll, nach §. 65. keine Veränderung in der gegenseitigen Lage der zuerst als fest angenommenen Punkte A, A', A'' u. s. w. vorgehen darf; so müssen offenbar die durch δ bezeichneten Differenzen alle $= 0$ seyn, und obige Gleichung verwandelt sich folglich in

$$Pp + P'p' + P''p'' + P'''p''' + \ldots = 0,$$

d. i. die Gleichung des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten.

In dem Falle, wo bewegliche Ringe in dem Systeme vorkommen, gilt die obige Gleichung auch, wenn die Ringe an den Fäden, an welchen sie sich befinden, herabgeglitten sind, wenn nur die Länge der ganzen Fäden ungeändert geblieben ist. Seyen nämlich z. B. A'' und A'''' die festen Endpunkte eines Fadens, an welchem sich die Ringe A''', A, A' befinden, so daß die Ringe und Endpunkte in der Ordnung A'', A', A, A''', A'''' auf einander folgen. In diesem Falle sind die Spannungen in den Theilen $A''A'$, $A'A$, AA''', $A'''A''''$ nach dem Obigen alle einander gleich, die Veränderungen $\delta.(A', A'')$, $\delta.(A, A')$, $\delta.(A, A''')$, $\delta.(A''', A'''')$ sind aber nicht $= 0$, indeß ist doch, da die Länge des ganzen Fadens ungeändert bleiben soll, offenbar

$$\delta.(A', A'') + \delta.(A, A') + \delta.(A, A''') + \delta.(A''', A'''') = 0.$$

Die Glieder in der obigen Gleichung mit diesen Veränderungen sind in die einander gleichen Spannungen

$$[A', A''],\ [A, A'],\ [A, A'''],\ [A''', A'''']$$

multiplicirt, und die Summe dieser Glieder hat also die Form:

$$M.\{\delta.(A', A'') + \delta.(A, A') + \delta.(A, A''') + \delta.(A''', A'''')\},$$

oder ist $= 0$, da der eine Factor $= 0$ ist.

Hieraus, in Verbindung mit dem Obigen, erhellet nun ganz deutlich, daß unsre obige Hauptgleichung auch in dem Falle beweglicher Ringe sich auf die Gleichung des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten

$$Pp + P'p' + P''p'' + P'''p''' + \ldots = 0$$

reducirt, und der erste Theil unsers zu beweisenden allgemeinen Satzes ist nun für alle Fälle, wie es mir scheint, deutlich bewiesen. Laplace hatte den Beweis bloß für ein völlig unveränderliches System geführt, Poisson hat ihn aber auch auf den Fall beweglicher Ringe ausgedehnt, welches kein unwichtiges Verdienst ist.

§. 69.

Wir gehen nun zu dem Beweise des zweyten Theiles, der Umkehrung des so eben bewiesenen Satzes, über, indem wir nämlich zeigen werden, daß, wenn die Gleichung

$$Pp + P'p' + P''p'' + P'''p''' + \ldots = 0$$

für alle Bewegungen, die sich dem Systeme der Kräfte P, P', P'', P''' u. s. w. geben lassen, richtig ist, diese Kräfte im Gleichgewichte seyn müssen.

Um dies zu beweisen, nehme man an, die Kräfte P, P', P'', P''' u. s. w. wären nicht im Gleichgewichte, sondern brächten eine Bewegung des Systems hervor, so würden die Punkte A, A', A'', A''' u. s. w. am Anfange der Bewegung unendlich kleine gerade Linien durchlaufen, und man würde das Gleichgewicht herstellen können, wenn man an den Punkten A, A', A'', A''' u. s. w. nach, diesen Linien, die wir durch $A\mathfrak{A}$, $A'\mathfrak{A}'$, $A''\mathfrak{A}''$, $A'''\mathfrak{A}'''$ u. s. w. bezeichnen, gerade entgegengesetzten Richtungen gewisse Kräfte wirken ließe, die wir durch R, R', R'', R''' u. s. w. bezeichnen wollen. Die auf den Richtungen dieser Kräfte genommenen virtuellen Geschwindigkeiten der Punkte A, A', A'', A''' u. s. w. seyen r, r', r'', r''' u. s. w.; so ist nach dem vorhergehenden Paragraphen, da P, P', P'', P''' u. s. w., R, R', R'', R''' u. s. w. unter einander im Gleichgewichte sind:

$$\left.\begin{array}{r} Pp + P'p' + P''p'' + P'''p''' + \ldots \\ + Rr + R'r' + R''r'' + R'''r''' + \ldots \end{array}\right\} = 0,$$

oder, da nach der Voraussetzung

$$Pp + P'p' + P''p'' + P'''p''' + \ldots = 0$$

ist,

$$Rr + R'r' + R''r'' + R'''r''' + \ldots = 0;$$

eine Gleichung, welche für jede Bewegung, die man dem Systeme geben kann, statt finden muß.

Nimmt man nun, was wegen der angenommenen eignen Bewegung des nicht im Gleichgewichte sich befindenden Systems offenbar immer möglich ist, die virtuellen Geschwindigkeiten r, r', r'' u. s. w. so, daß sie in die Linien fallen, nach welchen sich die Punkte A, A', A'', A''' u. s. w. zu bewegen streben, d. i. in den Verlängerungen der Richtungen der Kräfte R, R', R'', R''' u. s. w.; so sind die Größen r, r', r'', r''' u. s. w. offenbar alle negativ, und den Linien $A\mathfrak{A}$, $A'\mathfrak{A}'$, $A''\mathfrak{A}''$, $A'''\mathfrak{A}'''$ u. s. w. gleich. Dessen ungeachtet muß die Gleichung

$$Rr + R'r' + R''r'' + R'''r''' + \ldots = 0,$$

deren erster Theil, da R, R', R'', R''' u. s. w. alle positiv, r, r', r'', r''' u. s. w. aber alle negativ sind, aus lauter negativen Gliedern besteht, statt finden. Dies ist aber nicht möglich, wenn nicht alle Glieder einzeln genommen $= 0$ sind, so daß also $Rr = 0$, $R'r' = 0$, $R''r'' = 0$, $R'''r''' = 0$, u. s. w. seyn muß. Die Größen r, r', r'', r''' u. s. w. sind nicht $= 0$, da man natürlich bloß an den Punkten des Systems, die sich wirklich zu bewegen streben, wenn man das Gleichgewicht als nicht statt findend voraussetzt, die Kräfte R, R', R'', R''' u. s. w. angebracht hat. Daher ist

$$R = R' = R'' = R''' = \ldots = 0,$$

d. h. es strebt kein Punkt des Systems, sich zu bewegen, und das System wird sich daher im Gleichgewichte befinden, w. z. b. w.

Das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten ist also nun vollständig bewiesen. Zwey Anwendungen sind schon oben da gewesen. Einige Folgerungen aus demselben werden späterhin noch vorkommen.

Siebentes Kapitel.

Von den Momenten der Kräfte im Raume.

§. 70.

In einem ausführlichen Lehrbuche der Statik dürfen gewisse Sätze von den Momenten der Kräfte im Raume nicht fehlen, theils, weil diese Sätze an sich sehr merkwürdig sind und mit verschiedenen geometrischen Sätzen von den Projectionen in naher Beziehung stehen, theils, weil sie uns auf einfachere Ausdrücke einiger früher schon bewiesenen Bedingungen des Gleichgewichts führen werden. Es mögen diese Sätze zum Theil von Euler herrühren, worüber die Nova Acta Petropolitana, Tom. VII., nachzusehen sind. Man findet sie aber auch in den öfters angeführten Werken von Poisson, (T. I. p. 99.—118.), und Poinsot, (p. 297. seqq.), auf verschiedene Arten bewiesen.

Zunächst beweisen wir folgenden Satz von den Projectionen, welcher auch späterhin in diesem Werke noch angewandt werden wird.

§. 71.

Lehrsatz. Die Projection jeder ebenen Figur auf einer Ebene ist, ihrem Inhalte nach, dem Producte gleich, welches man erhält, wenn man den Flächeninhalt der gegebenen Figur mit dem Cosinus des Neigungswinkels der beiden gegebenen Ebenen gegen einander multiplicirt.

Beweis. Sey in Fig. 53. $AB'C$ die Projection des Dreyecks ABC auf einer gewissen, durch die Seite AC gehenden, Ebene; so ist, nach dem hier als bekannt vorausgesetzten Begriffe der Projection, die Linie BB' auf der Projectionsebene senkrecht. Fällt man nun von B auf AC das Perpendikel BD und zieht $B'D$, so ist nach Euclides Elementen, lib. XI. prop. XI., auch diese Linie auf AC senkrecht, und daher BDB' der Neigungswinkel der Ebenen ABC und $AB'C$ gegen einander, welchen wir $= \alpha$ setzen wollen, wo zu bemerken, daß α nie größer als $90°$ ist. Es ist also

$$\triangle\, ABC = \tfrac{1}{2} AC \,.\, BD, \quad \triangle\, AB'C = \tfrac{1}{2} AC \,.\, B'D,$$
$$B'D = BD \,.\, \mathrm{Cos}\,\alpha,$$
$$\triangle\, AB'C = \tfrac{1}{2} AC \,.\, BD \,.\, \mathrm{Cos}\,\alpha = \triangle\, ABC \,.\, \mathrm{Cos}\,\alpha,$$

womit der Satz für den vorliegenden Fall bewiesen ist.

Ist aber jetzt ABC (Fig. 54.) irgend ein Dreyeck in der Ebene KMN, und $A'B'C'$ seine Projection auf irgend einer Ebene, welche gegen jene unter dem Winkel α geneigt ist; so ziehe man durch C die Linie CD mit MN parallel, und denke sich durch diese Linie eine Ebene parallel mit der angenommenen Projectionsebene gelegt, und das gegebene Dreyeck auf diese Ebene projicirt: so wird diese neue Projection, welche wir durch $A''DB''C$ bezeichnen wollen, nach bekannten stereometrischen Sätzen der Projection $A'B'C'$ offenbar congruent seyn, und mit der Ebene ABC auch den Winkel α einschließen. Nach dem Vorhergehenden ist nun

$$\triangle\, A''DC = \triangle\, ADC \,.\, \mathrm{Cos}\,\alpha, \quad \triangle\, B''DC = \triangle\, BDC \,.\, \mathrm{Cos}\,\alpha.$$

Also

$$\begin{aligned}\triangle\, A''DB''C &= \triangle\, A''DC + \triangle\, B''DC \\ &= \triangle\, ADC \,.\, \mathrm{Cos}\,\alpha + \triangle\, BDC \,.\, \mathrm{Cos}\,\alpha \\ &= (\triangle\, ADC + \triangle\, BDC)\, \mathrm{Cos}\,\alpha \\ &= \triangle\, ABC \,.\, \mathrm{Cos}\,\alpha,\end{aligned}$$

d. i. $\triangle\, A'B'C' = \triangle\, ABC \,.\, \mathrm{Cos}\,\alpha$, w. z. b. w.

Fiele die Parallele nicht innerhalb des Triangels ABC, wie in der Figur angenommen worden, sondern außerhalb; so würde man die Dreyecke $A''DC$ und $B''DC$, anstatt sie, wie vorher, zu einander zu addiren, von einander subtrahiren müssen. Immer wird man aber offenbar dasselbe Resultat erhalten.

Sey nun irgend eine geradlinige Figur gegeben, und durch Diagonalen in die Dreyecke Δ, Δ', Δ'' u. s. w., ihre Projection aber in die entsprechenden Dreyecke δ, δ', δ'' u. s. w. zerlegt; so ist nach dem Bewiesenen:

$$\delta = \Delta \operatorname{Cos} \alpha, \quad \delta' = \Delta' \operatorname{Cos} \alpha, \quad \delta'' = \Delta'' \operatorname{Cos} \alpha, \text{ u. s. w.}$$

Also

$$\delta + \delta' + \delta'' + \ldots = \Delta \operatorname{Cos} \alpha + \Delta' \operatorname{Cos} \alpha + \Delta'' \operatorname{Cos} \alpha + \ldots$$
$$= (\Delta + \Delta' + \Delta'' + \ldots) \operatorname{Cos} \alpha,$$

d. i., wenn die gegebene Figur durch F, ihre Projection aber durch P bezeichnet wird:

$$P = F \operatorname{Cos} \alpha,$$

und unser Satz ist demnach für jede gegebene geradlinige Figur bewiesen. Da aber eine krummlinige Figur als ein Polygon mit unendlich vielen Seiten betrachtet werden kann, so gilt der Satz auch für krummlinige Figuren, und ist demnach allgemein.

Einen andern einfachen Beweis dieses Satzes s. m. auch in Essais de Géométrie sur les plans et les surfaces courbes: (Élémens de Géométrie déscriptive), par S. F. Lacroix, quatrième édition, Paris 1812, 8., p. 47.

§. 72.

Aufgabe. Von dem Durchschnittspunkte dreyer auf einander senkrechter Axen gehen zwey gerade Linien aus, welche mit den drey Axen nach den gewöhnlichen Bestimmungen die Winkel α, β, γ und α', β', γ' einschließen. Man soll den von den beiden Linien eingeschlossenen Winkel x finden.

Auflösung. $AB = b$ und $AC = c$ in Fig. 55. seyen die beiden Linien, deren Winkel $BAC = x$ gefunden werden soll. Man ziehe $BC = a$, und fälle von B und C auf die Ebene $A'AC'$ die Perpendikel BG, CH; ziehe GH und CD damit parallel; fälle von G und H auf AC' und AA' die Perpendikel GF, HE und GL, HM: so ist nach bekannten trigonometrischen Sätzen

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \,.\, AC \,.\operatorname{Cos} BAC,$$

d. i. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \operatorname{Cos} x$.

Auch ist immer

$$a^2 = BC^2 = BD^2 + CD^2.$$

Leicht wird aber erhellen, daß für jeden möglichen Fall $BD = \pm BG \pm CH$ ist, wo sich nicht gerade die obern und untern Zeichen auf einander beziehen sollen, wie es wohl sonst bey dieser Schreibart gewöhnlich ist. Also offenbar immer

$$BD^2 = (b \operatorname{Cos} \beta - c \operatorname{Cos} \beta')^2,$$

die Winkel mögen kleiner oder größer als 90° seyn.

Denkt man sich nun von B und C Perpendikel auf die Ebenen $B'AC'$ und $A'AB'$ gefällt; so ist ganz eben so wie vorher

$$GH^2 = CD^2 = KH^2 + GK^2$$
$$= (b \operatorname{Cos} \alpha - c \operatorname{Cos} \alpha')^2 + (b \operatorname{Cos} \gamma - c \operatorname{Cos} \gamma')^2,$$

und folglich nach allem Obigen:

$$a^2 = \left\{ \begin{matrix} (b \operatorname{Cos} \alpha - c \operatorname{Cos} \alpha')^2 + (b \operatorname{Cos} \beta - c \operatorname{Cos} \beta')^2 \\ + (b \operatorname{Cos} \gamma - c \operatorname{Cos} \gamma')^2 \end{matrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{matrix} b^2 \operatorname{Cos} \alpha^2 - 2bc \operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Cos} \alpha' + c^2 \operatorname{Cos} \alpha'^2 \\ + b^2 \operatorname{Cos} \beta^2 - 2bc \operatorname{Cos} \beta \operatorname{Cos} \beta' + c^2 \operatorname{Cos} \beta'^2 \\ + b^2 \operatorname{Cos} \gamma^2 - 2bc \operatorname{Cos} \gamma \operatorname{Cos} \gamma' + c^2 \operatorname{Cos} \gamma'^2 \end{matrix} \right.$$

$$= \left\{ \begin{matrix} b^2 (\operatorname{Cos} \alpha^2 + \operatorname{Cos} \beta^2 + \operatorname{Cos} \gamma^2) \\ - 2bc (\operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Cos} \alpha' + \operatorname{Cos} \beta \operatorname{Cos} \beta' + \operatorname{Cos} \gamma \operatorname{Cos} \gamma') \\ + c^2 (\operatorname{Cos} \alpha'^2 + \operatorname{Cos} \beta'^2 + \operatorname{Cos} \gamma'^2) \end{matrix} \right.$$

$$= b^2 + c^2 - 2bc (\operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Cos} \alpha' + \operatorname{Cos} \beta \operatorname{Cos} \beta' + \operatorname{Cos} \gamma \operatorname{Cos} \gamma'),$$

weil bekanntlich nach §. 25. 2.

$$\operatorname{Cos} \alpha^2 + \operatorname{Cos} \beta^2 + \operatorname{Cos} \gamma^2 = \operatorname{Cos} \alpha'^2 + \operatorname{Cos} \beta'^2 + \operatorname{Cos} \gamma'^2 = 1$$

ist. Also nach dem Obigen:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \operatorname{Cos} x$$
$$= b^2 + c^2 - 2bc (\operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Cos} \alpha' + \operatorname{Cos} \beta \operatorname{Cos} \beta' + \operatorname{Cos} \gamma \operatorname{Cos} \gamma'),$$

und folglich

$$\operatorname{Cos} x = \operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Cos} \alpha' + \operatorname{Cos} \beta \operatorname{Cos} \beta' + \operatorname{Cos} \gamma \operatorname{Cos} \gamma',$$

wodurch der gesuchte Winkel x in jedem Falle bestimmt werden kann.

§. 73.

Wir haben jetzt zu erklären, was man unter dem Moment einer Kraft in Beziehung auf eine gewisse Axe zu verstehen hat.

Man denke sich nämlich die gegebene Kraft geometrisch dargestellt, und projicire ihre geometrische Darstellung auf eine Ebene, welche auf der gegebenen Axe senkrecht ist. Das Product dieser Projection in ihre Entfernung von dem Durchschnittspunkte der Axe mit der auf ihr senkrechten Ebene heißt das Moment der gegebenen Kraft in Beziehung auf die angenommene Axe.

Bezeichnet man das Moment der gegebenen Kraft in Beziehung auf den obigen Durchschnittspunkt als Mittelpunkt der Momente durch m, so ist klar, daß dieses Moment dem doppelten Flächeninhalte eines Dreyecks Δ gleich ist, welches man erhält, wenn man von den Endpunkten der geometrischen Darstellung der gegebenen Kraft nach dem Mittelpunkte der Momente gerade Linien zieht; d. i.

$$m = 2\Delta.$$

Auf dieselbe Art aber ist klar, daß das Moment μ der gegebenen Kraft in Beziehung auf die angenommene Axe dem doppelten Flächeninhalte eines Dreyecks δ gleich ist, welches man erhält, wenn man von den Endpunkten der Projection der geometrischen Darstellung der gegebenen Kraft nach dem Mittelpunkte der Momente gerade Linien zieht, so daß also

$$\mu = 2\delta.$$

Nun erhellet aber leicht, daß δ die Projection von Δ, und folglich nach §. 71. $\delta = \Delta \operatorname{Cos} \alpha$ ist, wenn man den Neigungswinkel der Ebene, in welcher die Dreyecke Δ und δ liegen, durch α bezeichnet. Also

$$\mu = 2\delta = 2\Delta \operatorname{Cos} \alpha = m \operatorname{Cos} \alpha.$$

Aus geometrischen Gründen folgt aber leicht, daß der Winkel α dem Winkel, welchen ein, auf die durch den Mittelpunkt der Momente und die geometrische Darstellung der gegebenen Kraft gelegte Ebene, errichtetes Perpendikel mit der angenommenen Axe einschließt, entweder selbst, oder der Ergänzung dieses Winkels zu 180° gleich ist, so daß also, wenn man diesen Winkel, welcher kleiner und größer als 90° seyn kann, durch α bezeichnet,

$$\mu = \pm m \operatorname{Cos} \alpha$$

ist, wobey aber zu bemerken, daß das Moment μ positiv oder negativ zu nehmen ist, je nachdem der Winkel α kleiner oder größer als 90° ist.

§. 74.

Lehrsatz. Wenn μ, μ', μ'' die Momente einer Kraft in Beziehung auf drey unter einander senkrechte Axen bezeichnen; so ist immer

$$m^2 = \mu^2 + \mu'^2 + \mu''^2,$$

wo m, wie im vorhergehenden Paragraphen, das Moment der gegebenen Kraft in Beziehung auf den gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt der drey senkrechten Axen bezeichnet.

Beweis. Man errichte durch den Mittelpunkt der Momente auf die durch diesen Punkt und die geometrische Darstellung der gegebenen Kraft gelegte Ebene ein Perpendikel, und bezeichne die von diesem Perpendikel mit den drey angenommenen Axen eingeschlossenen Winkel, den früher gegebenen Bestimmungen gemäß, durch α, α', α''; so ist nach dem vorhergehenden Paragraphen:

$$\mu = m \operatorname{Cos}\alpha, \quad \mu' = m \operatorname{Cos}\alpha', \quad \mu'' = m \operatorname{Cos}\alpha''.$$

Also

$$\mu^2 = m^2 . \operatorname{Cos}\alpha^2, \quad \mu'^2 = m^2 . \operatorname{Cos}\alpha'^2, \quad \mu''^2 = m^2 . \operatorname{Cos}\alpha''^2,$$

und folglich

$$\mu^2 + \mu'^2 + \mu''^2 = m^2 . \operatorname{Cos}\alpha^2 + m^2 . \operatorname{Cos}\alpha'^2 + m^2 . \operatorname{Cos}\alpha''^2$$
$$= m^2 (\operatorname{Cos}\alpha^2 + \operatorname{Cos}\alpha'^2 + \operatorname{Cos}\alpha''^2).$$

Aber nach §. 25. 2.

$$\operatorname{Cos}\alpha^2 + \operatorname{Cos}\alpha'^2 + \operatorname{Cos}\alpha''^2 = 1.$$

Also

$$m^2 = \mu^2 + \mu'^2 + \mu''^2,$$

wobey es, wegen der Quadrate, offenbar gar nicht auf die Zeichen der Momente μ, μ', μ'' ankommt.

§. 75.

Man nehme jetzt wieder die Momente der Kräfte, deren Momente μ, μ', μ'' sind, in Beziehung auf das auf der Ebene des Moments m durch den Mittelpunkt der Momente errichtete Perpendikel als Axe, und bezeichne diese neuen Momente durch ν, ν', ν''; so ist wie früher:

$$\nu = \mu \operatorname{Cos} \alpha, \quad \nu' = \mu' \operatorname{Cos} \alpha', \quad \nu'' = \mu'' \operatorname{Cos} \alpha''.$$

Also

$$\nu = m \operatorname{Cos} \alpha^2, \quad \nu' = m \operatorname{Cos} \alpha'^2, \quad \nu'' = m \operatorname{Cos} \alpha''^2,$$

und folglich

$$\nu + \nu' + \nu'' = m (\operatorname{Cos} \alpha^2 + \operatorname{Cos} \alpha'^2 + \operatorname{Cos} \alpha''^2),$$

d. i. $\nu + \nu' + \nu'' = m$,

ν, ν', ν'' alle als positiv betrachtet.

Nimmt man ferner die Momente der Kräfte, deren Momente ν, ν', ν'' sind, in Beziehung auf die drey auf einander senkrechten Axen; so sind diese Momente:

$$\nu \operatorname{Cos} \alpha, \quad \nu \operatorname{Cos} \alpha', \quad \nu \operatorname{Cos} \alpha'';$$
$$\nu' \operatorname{Cos} \alpha, \quad \nu' \operatorname{Cos} \alpha', \quad \nu' \operatorname{Cos} \alpha'';$$
$$\nu'' \operatorname{Cos} \alpha, \quad \nu'' \operatorname{Cos} \alpha', \quad \nu'' \operatorname{Cos} \alpha''.$$

Wenn nun diese Momente wieder in Beziehung auf die Axe der Momente ν, ν', ν'' genommen werden; so sind diese neuen Momente:

$$\nu \operatorname{Cos} \alpha^2, \quad \nu \operatorname{Cos} \alpha'^2, \quad \nu \operatorname{Cos} \alpha''^2;$$
$$\nu' \operatorname{Cos} \alpha^2, \quad \nu' \operatorname{Cos} \alpha'^2, \quad \nu' \operatorname{Cos} \alpha''^2;$$
$$\nu'' \operatorname{Cos} \alpha^2, \quad \nu'' \operatorname{Cos} \alpha'^2, \quad \nu'' \operatorname{Cos} \alpha''^2.$$

Die Summe dieser Momente ist

$$= \begin{cases} (\nu + \nu' + \nu'') \operatorname{Cos} \alpha^2 + (\nu + \nu' + \nu'') \operatorname{Cos} \alpha'^2 \\ \quad + (\nu + \nu' + \nu'') \operatorname{Cos} \alpha''^2 \end{cases}$$
$$= (\nu + \nu' + \nu'')(\operatorname{Cos} \alpha^2 + \operatorname{Cos} \alpha'^2 + \operatorname{Cos} \alpha''^2)$$
$$= \nu + \nu' + \nu'' = m.$$

Nimmt man nun die letztern Momente, die wir durch π, π', π'', π''' u. s. w. bezeichnen wollen, wieder in Beziehung auf die drey senkrechten Axen; so sind die neuen Momente:

$$\pi \operatorname{Cos} \alpha, \quad \pi \operatorname{Cos} \alpha', \quad \pi \operatorname{Cos} \alpha'';$$
$$\pi' \operatorname{Cos} \alpha, \quad \pi' \operatorname{Cos} \alpha', \quad \pi' \operatorname{Cos} \alpha'';$$

$$\pi''\mathrm{Cos}\,\alpha,\quad \pi''\mathrm{Cos}\,\alpha',\quad \pi''\mathrm{Cos}\,\alpha'';$$
$$\pi'''\mathrm{Cos}\,\alpha,\quad \pi'''\mathrm{Cos}\,\alpha',\quad \pi'''\mathrm{Cos}\,\alpha'';$$
u. s. w.

Alle diese Momente wieder in Beziehung auf die Axe der Momente ν, ν', ν'' genommen, erhält man als neue Momente:

$$\pi\,\mathrm{Cos}\,\alpha^2,\quad \pi\,\mathrm{Cos}\,\alpha'^2,\quad \pi\,\mathrm{Cos}\,\alpha''^2;$$
$$\pi'\mathrm{Cos}\,\alpha^2,\quad \pi'\mathrm{Cos}\,\alpha'^2,\quad \pi'\mathrm{Cos}\,\alpha''^2;$$
$$\pi''\mathrm{Cos}\,\alpha^2,\quad \pi''\mathrm{Cos}\,\alpha'^2,\quad \pi''\mathrm{Cos}\,\alpha''^2;$$
$$\pi'''\mathrm{Cos}\,\alpha^2,\quad \pi'''\mathrm{Cos}\,\alpha'^2,\quad \pi'''\mathrm{Cos}\,\alpha''^2;$$
u. s. w.

Die Summe dieser Momente ist

$$\begin{aligned}
&= (\pi + \pi' + \pi'' + \pi''' + \ldots\ldots)\,\mathrm{Cos}\,\alpha^2 \\
&\quad + (\pi + \pi' + \pi'' + \pi''' + \ldots)\,\mathrm{Cos}\,\alpha'^2 \\
&\quad + (\pi + \pi' + \pi'' + \pi''' + \ldots)\,\mathrm{Cos}\,\alpha''^2 \\
&= (\pi + \pi' + \pi'' + \pi''' + \ldots)\,(\mathrm{Cos}\,\alpha^2 + \mathrm{Cos}\,\alpha'^2 + \mathrm{Cos}\,\alpha''^2) \\
&= \pi + \pi' + \pi'' + \pi''' + \ldots,\ \text{d. i.} = m,
\end{aligned}$$

nach dem Vorhergehenden.

Hieraus ergibt sich nun folgendes allgemeine Gesetz:

Nennt man die auf die beschriebene Art erhaltenen Momente nach der Reihe Momente der ersten, zweyten, dritten, u. s. w. Ordnung; so ist die Summe der Momente von der zweyten, vierten, sechsten, u. s. w. Ordnung, alle Momente als positiv betrachtet, dem Momente der gegebenen Kraft in Beziehung auf den angenommenen Mittelpunkt der Momente gleich.

Ueber diesen Satz in geometrischer Beziehung sehe man:

Analytische Geometrie, von J. J. Littrow, Director der Sternwarte und Professor der Astronomie zu Wien, Wien 1823, 8., S. 58. 59.

Ueber die Theorie der Projectionen, welche mit der Theorie der Momente, wie aus §. 73. erhellet, in naher Beziehung steht, sehe man außer diesem Werke, Poisson und Lacroix a. d. aa. OO., auch noch besonders:

Recueil de diverses propositions de Géométrie, résolues et démontrées par l'Analyse algébrique, par Puissant, seconde édition, Paris 1809, 8., p. 236. — 240.,

worin die meisten hier vorkommenden Sätze in Beziehung auf Projectionen bewiesen sind.

§. 76.

Seyen nun mit Berücksichtigung der Vorzeichen die Momente einer Kraft in Beziehung auf drey unter einander senkrechte Axen wie oben:

$$\mu = m \operatorname{Cos} \alpha, \quad \mu' = m \operatorname{Cos} \alpha', \quad \mu'' = m \operatorname{Cos} \alpha'',$$

und es sey eine neue Axe gegeben, welche mit den drey primitiven Axen die Winkel β, β', β'' einschließe. Ist der von dieser Axe mit dem auf die Ebene des Moments m errichteten Perpendikel eingeschlossene Winkel $= x$; so ist nach §. 72.:

$$\operatorname{Cos} x = \operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Cos} \beta + \operatorname{Cos} \alpha' \operatorname{Cos} \beta' + \operatorname{Cos} \alpha'' \operatorname{Cos} \beta'',$$

und folglich

$$m \operatorname{Cos} x = m \operatorname{Cos} \alpha \,.\, \operatorname{Cos} \beta + m \operatorname{Cos} \alpha' \,.\, \operatorname{Cos} \beta' + m \operatorname{Cos} \alpha'' \,.\, \operatorname{Cos} \beta'',$$

d. i., wenn man das Moment der gegebenen Kraft in Beziehung auf die neue Axe mit Berücksichtigung des Vorzeichens, d. i. das Product $m \operatorname{Cos} x$, $= m'$ setzt:

$$m' = \mu \operatorname{Cos} \beta + \mu' \operatorname{Cos} \beta' + \mu'' \operatorname{Cos} \beta'';$$

eine Formel, nach welcher das Moment in Beziehung auf jede neue Axe gefunden werden kann, wenn die Momente in Beziehung auf drey unter einander senkrechte Axen gegeben sind.

Hat man nun mehrere Kräfte, deren Momente in Beziehung auf die drey primitiven Axen μ, μ', μ''; ν, ν', ν''; π, π', π''; $\varrho, \varrho', \varrho''$; u. s. w., und in Beziehung auf die neue Axe m', m'', m''', m'''' u. s. w. sind; so ist

$$\begin{aligned} m' &= \mu \operatorname{Cos} \beta + \mu' \operatorname{Cos} \beta' + \mu'' \operatorname{Cos} \beta'', \\ m'' &= \nu \operatorname{Cos} \beta + \nu' \operatorname{Cos} \beta' + \nu'' \operatorname{Cos} \beta'', \\ m''' &= \pi \operatorname{Cos} \beta + \pi' \operatorname{Cos} \beta' + \pi'' \operatorname{Cos} \beta'', \\ m'''' &= \varrho \operatorname{Cos} \beta + \varrho' \operatorname{Cos} \beta' + \varrho'' \operatorname{Cos} \beta'', \end{aligned}$$

u. s. w. u. s. w.

Also

$$m'+m''+m'''+m''''+\ldots = \begin{cases} (\mu+\nu+\pi+\varrho+\ldots\ldots)\,\mathrm{Cos}\,\beta \\ +(\mu'+\nu'+\pi'+\varrho'+\ldots\ldots)\,\mathrm{Cos}\,\beta' \\ +(\mu''+\nu''+\pi''+\varrho''+\ldots)\,\mathrm{Cos}\,\beta'', \end{cases}$$

d. i., wenn man die Summen der Momente in Beziehung auf die primitiven Axen und die neue Axe respective durch A, A', A'', B bezeichnet:

$$B = A\,\mathrm{Cos}\,\beta + A'\,\mathrm{Cos}\,\beta' + A''\,\mathrm{Cos}\,\beta''.$$

§. 77.

Nimmt man nun drey neue auf einander senkrechte und durch den Mittelpunkt der Momente gehende Axen an, bezeichnet die von ihnen mit den primitiven Axen eingeschlossenen Winkel durch β, β', β''; γ, γ', γ''; δ, δ', δ'', und die Summen der Momente in Beziehung auf diese Axen durch B, B', B''; so ist wie vorher:

$$B = A\,\mathrm{Cos}\,\beta + A'\,\mathrm{Cos}\,\beta' + A''\,\mathrm{Cos}\,\beta'',$$
$$B' = A\,\mathrm{Cos}\,\gamma + A'\,\mathrm{Cos}\,\gamma' + A''\,\mathrm{Cos}\,\gamma'',$$
$$B'' = A\,\mathrm{Cos}\,\delta + A'\,\mathrm{Cos}\,\delta' + A''\,\mathrm{Cos}\,\delta''.$$

Durch Erhebung zur zweyten Potenz erhält man:

$$B^2 = \begin{cases} A^2\,\mathrm{Cos}\,\beta^2 + A'^2\,\mathrm{Cos}\,\beta'^2 + A''^2\,\mathrm{Cos}\,\beta''^2 \\ + 2AA'\,\mathrm{Cos}\,\beta\,\mathrm{Cos}\,\beta' + 2AA''\,\mathrm{Cos}\,\beta\,\mathrm{Cos}\,\beta'' \\ \quad + 2A'A''\,\mathrm{Cos}\,\beta'\,\mathrm{Cos}\,\beta'', \end{cases}$$

$$B'^2 = \begin{cases} A^2\,\mathrm{Cos}\,\gamma^2 + A'^2\,\mathrm{Cos}\,\gamma'^2 + A''^2\,\mathrm{Cos}\,\gamma''^2 \\ + 2AA'\,\mathrm{Cos}\,\gamma\,\mathrm{Cos}\,\gamma' + 2AA''\,\mathrm{Cos}\,\gamma\,\mathrm{Cos}\,\gamma'' \\ \quad + 2A'A''\,\mathrm{Cos}\,\gamma'\,\mathrm{Cos}\,\gamma'', \end{cases}$$

$$B''^2 = \begin{cases} A^2\,\mathrm{Cos}\,\delta^2 + A'^2\,\mathrm{Cos}\,\delta'^2 + A''^2\,\mathrm{Cos}\,\delta''^2 \\ + 2AA'\,\mathrm{Cos}\,\delta\,\mathrm{Cos}\,\delta' + 2AA''\,\mathrm{Cos}\,\delta\,\mathrm{Cos}\,\delta'' \\ \quad + 2A'A''\,\mathrm{Cos}\,\delta'\,\mathrm{Cos}\,\delta'', \end{cases}$$

und folglich

$$B^2 + B'^2 + B''^2$$

$$= \begin{cases} A^2(\mathrm{Cos}\,\beta^2 + \mathrm{Cos}\,\gamma^2 + \mathrm{Cos}\,\delta^2) \\ + A'^2(\mathrm{Cos}\,\beta'^2 + \mathrm{Cos}\,\gamma'^2 + \mathrm{Cos}\,\delta'^2) \\ + A''^2(\mathrm{Cos}\,\beta''^2 + \mathrm{Cos}\,\gamma''^2 + \mathrm{Cos}\,\delta''^2) \\ + 2AA'(\mathrm{Cos}\,\beta\,\mathrm{Cos}\,\beta' + \mathrm{Cos}\,\gamma\,\mathrm{Cos}\,\gamma' + \mathrm{Cos}\,\delta\,\mathrm{Cos}\,\delta') \\ + 2AA''(\mathrm{Cos}\,\beta\,\mathrm{Cos}\,\beta'' + \mathrm{Cos}\,\gamma\,\mathrm{Cos}\,\gamma'' + \mathrm{Cos}\,\delta\,\mathrm{Cos}\,\delta'') \\ + 2A'A''(\mathrm{Cos}\,\beta'\,\mathrm{Cos}\,\beta'' + \mathrm{Cos}\,\gamma'\,\mathrm{Cos}\,\gamma'' + \mathrm{Cos}\,\delta'\,\mathrm{Cos}\,\delta''). \end{cases}$$

Die Winkel β, γ, δ; β', γ', δ'; $\beta'', \gamma'', \delta''$ sind offenbar die Winkel, welche die primitiven Axen mit den drey neuen auf einander senkrechten Axen einschließen. Daher ist

$$\mathrm{Cos}\,\beta^2 + \mathrm{Cos}\,\gamma^2 + \mathrm{Cos}\,\delta^2 = 1,$$
$$\mathrm{Cos}\,\beta'^2 + \mathrm{Cos}\,\gamma'^2 + \mathrm{Cos}\,\delta'^2 = 1,$$
$$\mathrm{Cos}\,\beta''^2 + \mathrm{Cos}\,\gamma''^2 + \mathrm{Cos}\,\delta''^2 = 1.$$

Bezeichnen aber x, x', x'' die von den drey neuen Axen eingeschlossenen Winkel; so ist nach §. 72.:

$$\mathrm{Cos}\,x = \mathrm{Cos}\,\beta\,\mathrm{Cos}\,\beta' + \mathrm{Cos}\,\gamma\,\mathrm{Cos}\,\gamma' + \mathrm{Cos}\,\delta\,\mathrm{Cos}\,\delta',$$
$$\mathrm{Cos}\,x' = \mathrm{Cos}\,\beta\,\mathrm{Cos}\,\beta'' + \mathrm{Cos}\,\gamma\,\mathrm{Cos}\,\gamma'' + \mathrm{Cos}\,\delta\,\mathrm{Cos}\,\delta'',$$
$$\mathrm{Cos}\,x'' = \mathrm{Cos}\,\beta'\,\mathrm{Cos}\,\beta'' + \mathrm{Cos}\,\gamma'\,\mathrm{Cos}\,\gamma'' + \mathrm{Cos}\,\delta'\,\mathrm{Cos}\,\delta''.$$

In unserm Falle ist aber $x = x' = x'' = 90^\circ$. Also $\mathrm{Cos}\,x = \mathrm{Cos}\,x' = \mathrm{Cos}\,x'' = 0$, und folglich

$$0 = \mathrm{Cos}\,\beta\,\mathrm{Cos}\,\beta' + \mathrm{Cos}\,\gamma\,\mathrm{Cos}\,\gamma' + \mathrm{Cos}\,\delta\,\mathrm{Cos}\,\delta',$$
$$0 = \mathrm{Cos}\,\beta\,\mathrm{Cos}\,\beta'' + \mathrm{Cos}\,\gamma\,\mathrm{Cos}\,\gamma'' + \mathrm{Cos}\,\delta\,\mathrm{Cos}\,\delta'',$$
$$0 = \mathrm{Cos}\,\beta'\,\mathrm{Cos}\,\beta'' + \mathrm{Cos}\,\gamma'\,\mathrm{Cos}\,\gamma'' + \mathrm{Cos}\,\delta'\,\mathrm{Cos}\,\delta''.$$

Also offenbar

$$B^2 + B'^2 + B''^2 = A^2 + A'^2 + A''^2,$$

woraus der merkwürdige Satz folgt: daß **die Summe der Quadrate der Momentensummen gegebener Kräfte, in Beziehung auf jede drey unter einander senkrechte Axen, eine constante Größe ist, wobey aber zu bemerken ist, daß die Momente nach den obigen Bestimmungen mit Beziehung auf ihre Vorzeichen zu nehmen sind.**

§. 78.

Mittelst der Gleichungen:

$$B = A \operatorname{Cos}\beta + A' \operatorname{Cos}\beta' + A'' \operatorname{Cos}\beta'',$$
$$B' = A \operatorname{Cos}\gamma + A' \operatorname{Cos}\gamma' + A'' \operatorname{Cos}\gamma'',$$
$$B'' = A \operatorname{Cos}\delta + A' \operatorname{Cos}\delta' + A'' \operatorname{Cos}\delta'',$$

kann man auch A, A', A'' durch B, B', B'' ausdrücken. Denn aus diesen Gleichungen folgt:

$$B \operatorname{Cos}\beta = A \operatorname{Cos}\beta^2 + A' \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Cos}\beta' + A'' \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Cos}\beta'',$$
$$B' \operatorname{Cos}\gamma = A \operatorname{Cos}\gamma^2 + A' \operatorname{Cos}\gamma \operatorname{Cos}\gamma' + A'' \operatorname{Cos}\gamma \operatorname{Cos}\gamma'',$$
$$B'' \operatorname{Cos}\delta = A \operatorname{Cos}\delta^2 + A' \operatorname{Cos}\delta \operatorname{Cos}\delta' + A'' \operatorname{Cos}\delta \operatorname{Cos}\delta'',$$

und folglich durch Addition:

$$B \operatorname{Cos}\beta + B' \operatorname{Cos}\gamma + B'' \operatorname{Cos}\delta$$
$$= \begin{cases} A(\operatorname{Cos}\beta^2 + \operatorname{Cos}\gamma^2 + \operatorname{Cos}\delta^2) \\ + A'(\operatorname{Cos}\beta \operatorname{Cos}\beta' + \operatorname{Cos}\gamma \operatorname{Cos}\gamma' + \operatorname{Cos}\delta \operatorname{Cos}\delta') \\ + A''(\operatorname{Cos}\beta \operatorname{Cos}\beta'' + \operatorname{Cos}\gamma \operatorname{Cos}\gamma'' + \operatorname{Cos}\delta \operatorname{Cos}\delta''), \end{cases}$$

d. i., nach dem Vorhergehenden:

$$A = B \operatorname{Cos}\beta + B' \operatorname{Cos}\gamma + B'' \operatorname{Cos}\delta,$$ und eben so
$$A' = B \operatorname{Cos}\beta' + B' \operatorname{Cos}\gamma' + B'' \operatorname{Cos}\delta',$$
$$A'' = B \operatorname{Cos}\beta'' + B' \operatorname{Cos}\gamma'' + B'' \operatorname{Cos}\delta''.$$

§. 79.

Aus der Gleichung

$$B^2 + B'^2 + B''^2 = A^2 + A'^2 + A''^2$$

folgt

$$B^2 = A^2 + A'^2 + A''^2 - B'^2 - B''^2,$$

oder

$$B = \sqrt{A^2 + A'^2 + A''^2 - B'^2 - B''^2},$$

woraus erhellet, daß die Momentensumme B am größten oder ein Maximum wird, wenn $B' = B'' = 0$ ist, und die größte Momentensumme ist daher

$$= \sqrt{A^2 + A'^2 + A''^2}. \text{ *)}$$

*) Ueber diesen Satz in Beziehung auf Projectionen s. m. auch eine Abhandlung von L'Huilier: Recherche de la plus grande des projections ortographiques d'un système de figures planes, données de grandeur sur des plans donnés de position dans l'espace, et de

Die Lage der Axe, in Beziehung auf welche die Summe der Momente am größten wird, kann auf folgende Art bestimmt werden.

Es ist nämlich nach §. 78.:

$$A = B\,\mathrm{Cos}\,\beta + B'\mathrm{Cos}\,\gamma + B''\mathrm{Cos}\,\delta,$$
$$A' = B\,\mathrm{Cos}\,\beta' + B'\mathrm{Cos}\,\gamma' + B''\mathrm{Cos}\,\delta',$$
$$A'' = B\,\mathrm{Cos}\,\beta'' + B'\mathrm{Cos}\,\gamma'' + B''\mathrm{Cos}\,\delta''.$$

Für die größte Momentensumme ist aber, wie wir so eben gesehen haben, $B' = B'' = 0$. Also

$$A = B\,\mathrm{Cos}\,\beta = \sqrt{A^2 + A'^2 + A''^2}\,.\,\mathrm{Cos}\,\beta,$$
$$A' = B\,\mathrm{Cos}\,\beta' = \sqrt{A^2 + A'^2 + A''^2}\,.\,\mathrm{Cos}\,\beta',$$
$$A'' = B\,\mathrm{Cos}\,\beta'' = \sqrt{A^2 + A'^2 + A''^2}\,.\,\mathrm{Cos}\,\beta'',$$

und folglich

$$\mathrm{Cos}\,\beta = \frac{A}{\sqrt{A^2 + A'^2 + A''^2}},$$
$$\mathrm{Cos}\,\beta' = \frac{A'}{\sqrt{A^2 + A'^2 + A''^2}},$$
$$\mathrm{Cos}\,\beta'' = \frac{A''}{\sqrt{A^2 + A'^2 + A''^2}},$$

wodurch die Winkel bestimmt werden, welche die Axe der größten Momentensumme mit den primitiven Axen einschließt. Durch diese Winkel ist aber die Lage dieser Axe völlig bestimmt.

§. 80.

Sey jetzt Φ der Winkel, welchen irgend eine Momentenaxe mit der Axe der größten Momentensumme einschließt, und ε, ε', ε'' seyen die Winkel, welche diese neue Axe mit den primitiven Axen einschließt; C aber sey die Summe der Momente in Beziehung auf diese neue Axe: so ist nach §. 76.:

$$C = A\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon + A'\mathrm{Cos}\,\varepsilon' + A''\mathrm{Cos}\,\varepsilon''.$$

---

la plus grande des projections ortographiques d'un triangle sphérique, in den Annales de Mathématiques, Tom. II. p. 49., so wie einen Aufsatz von Poisson in der Correspondance sur l'école polytechnique, Num. 10. 1808.

Für die Axe der größten Momentensumme ist aber nach dem vorhergehenden Paragraphen:

$$A = B\,\mathrm{Cos}\,\beta,\quad A' = B\,\mathrm{Cos}\,\beta',\quad A'' = B\,\mathrm{Cos}\,\beta''.$$

Also

$$C = B\,\mathrm{Cos}\,\beta\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon + B\,\mathrm{Cos}\,\beta'\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon' + B\,\mathrm{Cos}\,\beta''\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon'',$$

d. i.

$$C = B\,(\mathrm{Cos}\,\beta\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon + \mathrm{Cos}\,\beta'\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon' + \mathrm{Cos}\,\beta''\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon''),$$

oder nach §. 72.:

$$C = B\,\mathrm{Cos}\,\varphi,\ \text{oder}$$

$$C = \sqrt{A^2 + A'^2 + A''^2}\,.\,\mathrm{Cos}\,\varphi.$$

Eine unmittelbare Folge aus diesem Ausdrucke ist der merkwürdige Satz: daß die Summe der Momente in Beziehung auf alle gegen die Axe der größten Momentensumme unter gleichen Winkeln geneigte Axen dieselbe oder constant ist.

Für $\varphi = 90^\circ$ ist $\mathrm{Cos}\,\varphi = 0$, und folglich auch $C = 0$, so daß also für alle auf der Axe der größten Momentensumme senkrechte Axen die Summe der Momente $= 0$ ist.

§. 81.

Sey jetzt in Fig. 55. BC die geometrische Darstellung irgend einer Kraft, deren Richtung mit den drey angenommenen Axen die Winkel α, β, γ einschließe. GH ist die Projection von BC, und das Moment der Kraft GH in Beziehung auf A, als Mittelpunkt der Momente, ist das Moment der Kraft BC in Beziehung auf die Axe der z, d. i. auf die Axe AB'. Denkt man sich die Kraft BC parallel mit ihrer Richtung in H angebracht; so ist klar, daß GH die Kraft ist, welche man erhält, wenn man das, parallel mit sich selbst, nach H versetzte BC in zwey Seitenkräfte zerlegt, von denen die eine in der Ebene der xy, die andere parallel mit der Axe der z wirkt.

Eben so leicht wird aber auch erhellen, daß, wenn man die Kraft $BC = P$ setzt, die Kraft HG die Resultirende der beiden mit den Axen der x und y parallelen Kräfte $P\,\mathrm{Cos}\,\alpha$ und $P\,\mathrm{Cos}\,\beta$ ist. Die Momente dieser beiden Kräfte in Beziehung auf A, als Mittelpunkt der Momente, sind offenbar $Py \operatorname{Cos} \alpha$ und $-Px \operatorname{Cos} \beta$, mit gehöriger Berücksichtigung der Vorzeichen in Beziehung auf die Seiten, nach welchen die beiden Kräfte die Ebene der xy um den Mittelpunkt der Momente zu drehen streben. Bezeichnet nun m das Moment der Kraft GH, so ist nach §. 44.:

$$-m + Py \operatorname{Cos} \alpha - Px \operatorname{Cos} \beta = 0.$$

Also

$$m = Py \operatorname{Cos} \alpha - Px \operatorname{Cos} \beta, \text{ d. i.}$$
$$m = P(y \operatorname{Cos} \alpha - x \operatorname{Cos} \beta).$$

Errichtet man nun durch A auf die durch A und BC gelegte Ebene ein Perpendikel, und bezeichnet die Winkel, welche dieses Perpendikel mit den drey primitiven Axen einschließt, durch α', β', γ'; so ist bekanntlich das Moment der Kraft P in Beziehung auf die Axe der z, $= P \operatorname{Cos} \gamma' = m = P(y \operatorname{Cos} \alpha - x \operatorname{Cos} \beta)$, wo man nur die Lage des von A ausgehenden Perpendikels so anzunehmen hat, daß γ' kleiner oder größer als 90° ist, je nachdem das Moment m positiv oder negativ ist. Die Größe $P(y \operatorname{Cos} \alpha - x \operatorname{Cos} \beta)$ ist also das Moment der Kraft P in Beziehung auf die Axe der z.

Die Momente der Kraft P in Beziehung auf die Axen der x und y sind $= P \operatorname{Cos} \alpha'$ und $= P \operatorname{Cos} \beta'$, und es läßt sich zeigen, daß, wenn γ' nur so angenommen worden, daß mit gehöriger Berücksichtigung der Zeichen

$$P \operatorname{Cos} \gamma' = P(y \operatorname{Cos} \alpha - x \operatorname{Cos} \beta)$$

ist, immer auch

$$P \operatorname{Cos} \alpha' = P(z \operatorname{Cos} \beta - y \operatorname{Cos} \gamma),$$
$$\text{und } P \operatorname{Cos} \beta' = P(x \operatorname{Cos} \gamma - z \operatorname{Cos} \alpha)$$

seyn muß.

Seyen nämlich x, y, z die Coordinaten des Punktes C, und φ, ψ, χ die Winkel, welche die Linie AC mit den drey primitiven Axen einschließt. Das Perpendikel auf der Ebene ABC ist offenbar auch auf AC senkrecht, und folglich nach §. 72.:

$$0 = \operatorname{Cos} \alpha' \operatorname{Cos} \varphi + \operatorname{Cos} \beta' \operatorname{Cos} \psi + \operatorname{Cos} \gamma' \operatorname{Cos} \chi.$$

Es ist aber auch, wenn man sich durch A eine Parallele mit BC gezogen denkt, das Perpendikel auf der Ebene ABC auf dieser Parallele senkrecht, und demnach

$$0 = \mathrm{Cos}\,\alpha' \mathrm{Cos}\,\alpha + \mathrm{Cos}\,\beta' \mathrm{Cos}\,\beta + \mathrm{Cos}\,\gamma' \mathrm{Cos}\,\gamma.$$

Ferner ist, wenn wir $AC = a$ setzen:

$$x = a\,\mathrm{Cos}\,\varphi,\quad y = a\,\mathrm{Cos}\,\psi,\quad z = a\,\mathrm{Cos}\,\chi.$$

Also

$$\mathrm{Cos}\,\varphi = \frac{x}{a},\quad \mathrm{Cos}\,\psi = \frac{y}{a},\quad \mathrm{Cos}\,\chi = \frac{z}{a},$$

und folglich

$$0 = \frac{x}{a}\mathrm{Cos}\,\alpha' + \frac{y}{a}\mathrm{Cos}\,\beta' + \frac{z}{a}\mathrm{Cos}\,\gamma'.$$

Aus allem diesem ergeben sich folgende drey Gleichungen:

$$0 = x\,\mathrm{Cos}\,\alpha' + y\,\mathrm{Cos}\,\beta' + z\,\mathrm{Cos}\,\gamma',$$

$$0 = \mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\alpha' + \mathrm{Cos}\,\beta\,\mathrm{Cos}\,\beta' + \mathrm{Cos}\,\gamma\,\mathrm{Cos}\,\gamma',$$

$$\mathrm{Cos}\,\gamma' = y\,\mathrm{Cos}\,\alpha - x\,\mathrm{Cos}\,\beta,$$

welche letztere Gleichung nach dem Obigen ebenfalls als richtig vorausgesetzt wird.

Aus diesen Gleichungen erhält man zuvörderst:

$$x = -\frac{y\,\mathrm{Cos}\,\beta' + z\,\mathrm{Cos}\,\gamma'}{\mathrm{Cos}\,\alpha'},$$

$$x = \frac{y\,\mathrm{Cos}\,\alpha - \mathrm{Cos}\,\gamma'}{\mathrm{Cos}\,\beta}.$$

Also

$$-\frac{y\,\mathrm{Cos}\,\beta' + z\,\mathrm{Cos}\,\gamma'}{\mathrm{Cos}\,\alpha'} = \frac{y\,\mathrm{Cos}\,\alpha - \mathrm{Cos}\,\gamma'}{\mathrm{Cos}\,\beta},$$

$$-y\,\mathrm{Cos}\,\beta\,\mathrm{Cos}\,\beta' - z\,\mathrm{Cos}\,\beta\,\mathrm{Cos}\,\gamma' = y\,\mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\alpha' - \mathrm{Cos}\,\alpha'\,\mathrm{Cos}\,\gamma',$$

$$\mathrm{Cos}\,\alpha'\,\mathrm{Cos}\,\gamma' = z\,\mathrm{Cos}\,\beta\,\mathrm{Cos}\,\gamma' + y\,\mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\alpha' + y\,\mathrm{Cos}\,\beta\,\mathrm{Cos}\,\beta'$$

$$= z\,\mathrm{Cos}\,\beta\,\mathrm{Cos}\,\gamma' + y(\mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\alpha' + \mathrm{Cos}\,\beta\,\mathrm{Cos}\,\beta').$$

Aber wegen der zweyten Gleichung:

$$\mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\alpha' + \mathrm{Cos}\,\beta\,\mathrm{Cos}\,\beta' = -\mathrm{Cos}\,\gamma\,\mathrm{Cos}\,\gamma',$$

und folglich

$$\mathrm{Cos}\,\alpha'\,\mathrm{Cos}\,\gamma' = z\,\mathrm{Cos}\,\beta\,\mathrm{Cos}\,\gamma' - y\,\mathrm{Cos}\,\gamma\,\mathrm{Cos}\,\gamma',\ \text{d. i.}$$

$$\mathrm{Cos}\,\alpha' = z\,\mathrm{Cos}\,\beta - y\,\mathrm{Cos}\,\gamma.$$

Also auch

$$P\,\mathrm{Cos}\,\alpha' = P(z\,\mathrm{Cos}\,\beta - y\,\mathrm{Cos}\,\gamma).$$

Auf ähnliche Art ist

$$y = -\frac{x \operatorname{Cos}\alpha' + z \operatorname{Cos}\gamma'}{\operatorname{Cos}\beta'},$$

$$y = \frac{x \operatorname{Cos}\beta + \operatorname{Cos}\gamma'}{\operatorname{Cos}\alpha},$$

$$-\frac{x \operatorname{Cos}\alpha' + z \operatorname{Cos}\gamma'}{\operatorname{Cos}\beta'} = \frac{x \operatorname{Cos}\beta + \operatorname{Cos}\gamma'}{\operatorname{Cos}\alpha},$$

$$- x \operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Cos}\alpha' - z \operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Cos}\gamma' = x \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Cos}\beta' + \operatorname{Cos}\beta' \operatorname{Cos}\gamma',$$

$$- x \operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Cos}\alpha' - x \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Cos}\beta' - z \operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Cos}\gamma' = \operatorname{Cos}\beta' \operatorname{Cos}\gamma',$$

$$- x(\operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Cos}\alpha' + \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Cos}\beta') - z \operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Cos}\gamma' = \operatorname{Cos}\beta' \operatorname{Cos}\gamma',$$

$$\operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Cos}\alpha' + \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Cos}\beta' = - \operatorname{Cos}\gamma \operatorname{Cos}\gamma',$$

$$x \operatorname{Cos}\gamma \operatorname{Cos}\gamma' - z \operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Cos}\gamma' = \operatorname{Cos}\beta' \operatorname{Cos}\gamma',$$

$$x \operatorname{Cos}\gamma - z \operatorname{Cos}\alpha = \operatorname{Cos}\beta',$$

$$P(x \operatorname{Cos}\gamma - z \operatorname{Cos}\alpha) = P \operatorname{Cos}\beta'.$$

Die drey Größen:

$$P(z \operatorname{Cos}\beta - y \operatorname{Cos}\alpha),$$
$$P(x \operatorname{Cos}\gamma - z \operatorname{Cos}\alpha),$$
$$P(y \operatorname{Cos}\alpha - x \operatorname{Cos}\beta),$$

sind demnach die Momente der Kraft P in Beziehung auf die drey angenommenen senkrechten Axen, und können folglich als solche behandelt werden.

§. 82.

Mit Hülfe der hier bewiesenen Sätze lassen sich die Bedingungen des Gleichgewichts einer willkührlichen Anzahl im Raume wirkender Kräfte auf sehr einfache Art ausdrücken.

Nennt man nämlich die Axe, in Beziehung auf welche die Summe der Momente der gegebenen Kräfte am größten wird, die Hauptaxe, und die Summe ihrer Momente in Beziehung auf diese Axe die Hauptsumme der Momente; so kann man behaupten: daß mehrere an einem freyen Systeme wirkende Kräfte unter einander im Gleichgewichte sind, wenn ihre Resultirende und die Hauptsumme ihrer Momente gleich Null ist, und umgekehrt.

Die Momente der gegebenen Kräfte in Beziehung auf die drey senkrechten Axen sind nämlich nach dem vorhergehenden Paragraphen:

$$P(y\cos\alpha - x\cos\beta),\quad P(x\cos\gamma - z\cos\alpha),$$
$$P(z\cos\beta - y\cos\gamma);$$
$$P'(y'\cos\alpha' - x'\cos\beta'),\quad P'(x'\cos\gamma' - z'\cos\alpha'),$$
$$P'(z'\cos\beta' - y'\cos\gamma');$$
$$P''(y''\cos\alpha'' - x''\cos\beta''),\quad P''(x''\cos\gamma'' - z''\cos\alpha''),$$
$$P''(z''\cos\beta'' - y''\cos\gamma'');$$

u. s. w. u. s. w.;

und die Bedingungen des Gleichgewichts unter den Kräften P, P', P'' sind nach §. 48.:

$$P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + P'''\cos\alpha''' + \ldots = 0,$$
$$P\cos\beta + P'\cos\beta' + P''\cos\beta'' + P'''\cos\beta''' + \ldots = 0,$$
$$P\cos\gamma + P'\cos\gamma' + P''\cos\gamma'' + P'''\cos\gamma''' + \ldots = 0,$$
$$P(y\cos\alpha - x\cos\beta) + P'(y'\cos\alpha' - x'\cos\beta') + \ldots = 0,$$
$$P(x\cos\gamma - z\cos\alpha) + P'(x'\cos\gamma' - z'\cos\alpha') + \ldots = 0,$$
$$P(z\cos\beta - y\cos\gamma) + P'(z'\cos\beta' - y'\cos\gamma') + \ldots = 0,$$

oder nach der in §. 49. eingeführten Bezeichnung:

$$\mathfrak{A} = 0,\quad \mathfrak{B} = 0,\quad \mathfrak{C} = 0,\quad A = 0,\quad B = 0,\quad C = 0.$$

A, B, C sind die Summen der Momente in Beziehung auf die drey senkrechten Axen, und die Hauptsumme der Momente ist also nach §. 79.

$$= \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Die Resultirende ist nach §. 49.

$$= \sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2}.$$

Daher sind nach unsrer obigen Behauptung die Bedingungen des Gleichgewichts der gegebenen Kräfte im Raume:

$$\sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2} = 0,\quad \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = 0,$$

oder

$$\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2 = 0,\quad A^2 + B^2 + C^2 = 0.$$

Denn daß dies seine Richtigkeit hat, erhellet leicht. Finden nämlich diese Bedingungen statt, so ist nothwendig, wegen der Quadrate,

$$\mathfrak{A}=0,\ \mathfrak{B}=0,\ \mathfrak{C}=0,\ A=0,\ B=0,\ C=0;$$
und wenn dies ist, so ist
$$\mathfrak{A}^2+\mathfrak{B}^2+\mathfrak{C}^2=0,\ \ A^2+B^2+C^2=0.$$
Man kommt also immer wieder auf die schon in §. 48. bewiesenen Bedingungen des Gleichgewichts zurück.

In §. 49. ist zugleich bewiesen worden, daß, wenn die gegebenen Kräfte eine Resultirende haben, immer
$$A\mathfrak{C}+B\mathfrak{B}+C\mathfrak{A}=0$$
ist, woraus sich Folgendes ableiten läßt.

Zieht man nämlich durch den Mittelpunkt der Momente eine Parallele mit der Resultirenden, und bezeichnet die von dieser Parallelen mit den primitiven Axen eingeschlossenen Winkel durch φ, ψ, χ; die von der Hauptaxe mit denselben Axen eingeschlossenen Winkel aber durch φ', ψ', χ': so ist nach §. 49. und §. 79.:
$$\operatorname{Cos}\varphi=\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{\mathfrak{A}^2+\mathfrak{B}^2+\mathfrak{C}^2}},$$
$$\operatorname{Cos}\psi=\frac{\mathfrak{B}}{\sqrt{\mathfrak{A}^2+\mathfrak{B}^2+\mathfrak{C}^2}},$$
$$\operatorname{Cos}\chi=\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{\mathfrak{A}^2+\mathfrak{B}^2+\mathfrak{C}^2}},$$
$$\operatorname{Cos}\varphi'=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$
$$\operatorname{Cos}\psi'=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$
$$\operatorname{Cos}\chi'=\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$
oder, was dasselbe ist, wenn man der Abkürzung wegen
$$\mathfrak{D}=\sqrt{\mathfrak{A}^2+\mathfrak{B}^2+\mathfrak{C}^2},\ \ D=\sqrt{A^2+B^2+C^2}$$
setzt:
$$\mathfrak{A}=\mathfrak{D}\operatorname{Cos}\varphi,\ \ \mathfrak{B}=\mathfrak{D}\operatorname{Cos}\psi,\ \ \mathfrak{C}=\mathfrak{D}\operatorname{Cos}\chi;$$
$$A=D\operatorname{Cos}\varphi',\ \ B=D\operatorname{Cos}\psi',\ \ C=D\operatorname{Cos}\chi';$$
und folglich im Falle einer Resultirenden:

$$\mathfrak{D}D \cos\chi \cos\varphi' + \mathfrak{D}D \cos\psi \cos\psi' + \mathfrak{D}D \cos\varphi \cos\chi' = 0,$$
$$\cos\chi \cos\varphi' + \cos\psi \cos\psi' + \cos\varphi \cos\chi' = 0.$$

Da nun aus §. 79. u. §. 81. leicht erhellen wird, daß die Winkel φ', ψ', χ' respective die mit den Axen der z, y, x eingeschlossenen Winkel bedeuten; so ist, wenn man den von der Hauptaxe mit der, der Richtung der Resultirenden durch den Mittelpunkt der Momente parallel gezogenen, Linie eingeschlossenen Winkel durch x bezeichnet, nach §. 72.:

$$\cos x = \cos\varphi \cos\chi' + \cos\psi \cos\psi' + \cos\chi \cos\varphi',$$

d. i., nach dem Obigen, $\cos x = 0$, und folglich $x = 90°$, *so daß also im Falle einer Resultirenden die mit der Richtung der Resultirenden durch den Mittelpunkt der Momente gezogene Parallele auf der Hauptaxe der Momente senkrecht ist.*

Ist das System der Kräfte um einen festen Punkt beweglich; so sind, nach §. 63. 1.,

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0$$

die Bedingungen des Gleichgewichts, oder, was dasselbe ist,

$$\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = 0.$$

Sind also mehrere Kräfte an einem um einen festen Punkt beweglichen Systeme im Gleichgewichte; so ist die Hauptsumme der Momente $= 0$, und umgekehrt.

Ist endlich das System um eine feste Axe beweglich; so ist, nach §. 63. 2.,

$$A = 0$$

die einzige Bedingung des Gleichgewichts.

Man nehme die feste Axe als Axe der z an; so ist, wegen $A = 0$, $\cos\varphi' = 0$, d. i. $\varphi' = 90°$, oder die Hauptaxe der Momente ist auf der festen Axe des Systems senkrecht. Findet aber umgekehrt dies statt, so ist $\cos\varphi' = 0$, und folglich $A = 0$, oder die gegebenen Kräfte sind im Gleichgewichte.

Sind also mehrere Kräfte an einem um eine feste Axe beweglichen Systeme im Gleichgewichte; so ist die Hauptaxe der Momente auf der festen Axe des Systems senkrecht, und umgekehrt.

So lassen sich also die Bedingungen des Gleichgewichts bey im Raume wirkenden Kräften auf eine andere, und in gewisser Rücksicht einfachere, Art ausdrücken, als in dem fünften und sechsten Kapitel.

§. 83.

Bisher haben wir den Mittelpunkt der Momente als unveränderlich angenommen; wir wollen aber jetzt auch untersuchen, wie sich die Summen der Momente ändern, wenn der Anfang der Coordinaten oder der Mittelpunkt der Momente sich ändert.

Man nehme einen Punkt, dessen Coordinaten in Beziehung auf das primitive System $x_{\prime}, y_{\prime}, z_{\prime}$ seyen, als den neuen Mittelpunkt der Momente an, und lege durch diesen Punkt drey mit den primitiven parallele neue Axen. Das, was die Größen A, B, C in Beziehung auf diese neuen Axen werden, bezeichne man durch A', B', C', und die Coordinaten der Angriffspunkte der Kräfte P, P', P'' u. s. w. respective durch X, Y, Z; X', Y', Z'; X'', Y'', Z''; u. s. w.; so ist nach §. 38. 1. meines Lehrbuches der Kegelschnitte:

$$x = x_{\prime} + X,\ y = y_{\prime} + Y,\ z = z_{\prime} + Z;$$
$$x' = x_{\prime} + X',\ y' = y_{\prime} + Y',\ z' = z_{\prime} + Z';$$
$$x'' = x_{\prime} + X'',\ y'' = y_{\prime} + Y'',\ z'' = z_{\prime} + Z'';$$
u. s. w. u. s. w.

Da aber die neuen Axen den primitiven parallel sind; so bleiben die Winkel α, β, γ; α', β', γ'; α'', β'', γ''; u. s. w. in Beziehung auf die neuen Axen ungeändert, und es ist folglich:

$$A' = P(Y\operatorname{Cos}\alpha - X\operatorname{Cos}\beta) + P'(Y'\operatorname{Cos}\alpha' - X'\operatorname{Cos}\beta') + \ldots,$$
$$B' = P(X\operatorname{Cos}\gamma - Z\operatorname{Cos}\alpha) + P'(X'\operatorname{Cos}\gamma' - Z'\operatorname{Cos}\alpha') + \ldots,$$
$$C' = P(Z\operatorname{Cos}\beta - Y\operatorname{Cos}\gamma) + P'(Z'\operatorname{Cos}\beta' - Y'\operatorname{Cos}\gamma') + \ldots;$$

d. i.

$$A' = \begin{cases} P[(y - y_{\prime})\operatorname{Cos}\alpha - (x - x_{\prime})\operatorname{Cos}\beta] \\ \quad + P'[(y' - y_{\prime})\operatorname{Cos}\alpha' - (x' - x_{\prime})\operatorname{Cos}\beta'] + \ldots, \end{cases}$$

$$B' = \begin{cases} P[(x - x_{\prime})\operatorname{Cos}\gamma - (z - z_{\prime})\operatorname{Cos}\alpha] \\ \quad + P'[(x' - x_{\prime})\operatorname{Cos}\gamma' - (z' - z_{\prime})\operatorname{Cos}\alpha'] + \ldots, \end{cases}$$

$$C' = \begin{cases} P[(z - z_i)\operatorname{Cos}\beta - (y - y_i)\operatorname{Cos}\gamma] \\ \quad + P'[(z' - z_i)\operatorname{Cos}\beta' - (y' - y_i)\operatorname{Cos}\gamma'] + \cdots; \end{cases}$$

d. i.

$$A' = \begin{cases} P(y\operatorname{Cos}\alpha - x\operatorname{Cos}\beta) + P'(y'\operatorname{Cos}\alpha' - x'\operatorname{Cos}\beta') + \cdots \\ + x_i(P\operatorname{Cos}\beta + P'\operatorname{Cos}\beta' + P''\operatorname{Cos}\beta'' + \cdots) \\ - y_i(P\operatorname{Cos}\alpha + P'\operatorname{Cos}\alpha' + P''\operatorname{Cos}\alpha'' + \cdots), \end{cases}$$

$$B' = \begin{cases} P(x\operatorname{Cos}\gamma - z\operatorname{Cos}\alpha) + P'(x'\operatorname{Cos}\gamma' - z'\operatorname{Cos}\alpha') + \cdots \\ + z_i(P\operatorname{Cos}\alpha + P'\operatorname{Cos}\alpha' + P''\operatorname{Cos}\alpha'' + \cdots) \\ - x_i(P\operatorname{Cos}\gamma + P'\operatorname{Cos}\gamma' + P''\operatorname{Cos}\gamma'' + \cdots), \end{cases}$$

$$C' = \begin{cases} P(z\operatorname{Cos}\beta - y\operatorname{Cos}\gamma) + P'(z'\operatorname{Cos}\beta' - y'\operatorname{Cos}\gamma') + \cdots \\ + y_i(P\operatorname{Cos}\gamma + P'\operatorname{Cos}\gamma' + P''\operatorname{Cos}\gamma'' + \cdots) \\ - z_i(P\operatorname{Cos}\beta + P'\operatorname{Cos}\beta' + P''\operatorname{Cos}\beta'' + \cdots); \end{cases}$$

d. i.

$$A' = A + \mathfrak{B}x_i - \mathfrak{A}y_i,$$
$$B' = B + \mathfrak{A}z_i - \mathfrak{C}x_i,$$
$$C' = C + \mathfrak{C}y_i - \mathfrak{B}z_i,$$

wodurch die Größen A', B', C' in Beziehung auf die neuen Axen bestimmt werden.

§. 84.

Die Hauptsumme der Momente in Beziehung auf den neuen Mittelpunkt der Momente ist nach §. 79.

$$= \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}$$
$$= \sqrt{(A + \mathfrak{B}x_i - \mathfrak{A}y_i)^2 + (B + \mathfrak{A}z_i - \mathfrak{C}x_i)^2 + (C + \mathfrak{C}y_i - \mathfrak{B}z_i)^2}.$$

Da die Momente der gegebenen Kräfte in Beziehung auf gewisse Axen durch die Doppelten gewisser Dreyecke ausgedrückt werden, deren Grundlinien die Projectionen der Kräfte sind, und deren Spitzen in dem angenommenen Mittelpunkte der Momente liegen, und diese Dreyecke offenbar desto größer werden, je weiter man den Mittelpunkt der Momente von den Kräften entfernt nimmt; so ist klar, daß sich dem Wachsthume der Momente, und demnach auch der Größen A', B', C', und $A'^2 + B'^2 + C'^2$, keine Gränzen setzen lassen, oder daß es unter den Hauptsummen der Momente kein Maximum geben kann.

Um zu untersuchen, ob es unter diesen Hauptsummen ein Minimum gibt, muß man nach bekannten Regeln der Differenzialrechnung die partiellen Differenziale der Function

$$\sqrt{(A+\mathfrak{B}x_{,}-\mathfrak{A}y_{,})^2+(B+\mathfrak{A}z_{,}-\mathfrak{C}x_{,})^2+(C+\mathfrak{C}y_{,}-\mathfrak{B}z_{,})^2},$$

oder, was dasselbe ist, der Function

$$(A+\mathfrak{B}x_{,}-\mathfrak{A}y_{,})^2+(B+\mathfrak{A}z_{,}-\mathfrak{C}x_{,})^2+(C+\mathfrak{C}y_{,}-\mathfrak{B}z_{,})^2,$$

in Beziehung auf $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ gleich Null setzen, woraus sich die Relation zwischen den Coordinaten des Mittelpunktes der Momente, für welchen die Hauptsumme der Momente ein Minimum ist, ergeben wird.

Differenziirt man aber zuerst in Beziehung auf $x_{,}$; so erhält man

$$2(A+\mathfrak{B}x_{,}-\mathfrak{A}y_{,})\,.\,\mathfrak{B}dx_{,}-2(B+\mathfrak{A}z_{,}-\mathfrak{C}x_{,})\,.\,\mathfrak{C}dx_{,}$$

als partielles Differenzial in Beziehung auf $x_{,}$; d. i. also:

$$(A+\mathfrak{B}x_{,}-\mathfrak{A}y_{,})\mathfrak{B}-(B+\mathfrak{A}z_{,}-\mathfrak{C}x_{,})\mathfrak{C}=0,$$

und eben so

$$-(A+\mathfrak{B}x_{,}-\mathfrak{A}y_{,})\mathfrak{A}+(C+\mathfrak{C}y_{,}-\mathfrak{B}z_{,})\mathfrak{C}=0,$$
$$(B+\mathfrak{A}z_{,}-\mathfrak{C}x_{,})\mathfrak{A}-(C+\mathfrak{C}y_{,}-\mathfrak{B}z_{,})\mathfrak{B}=0;$$

d. i.

$$\mathfrak{B}^2x_{,}+\mathfrak{C}^2x_{,}-\mathfrak{A}\mathfrak{B}y_{,}-\mathfrak{A}\mathfrak{C}z_{,}+A\mathfrak{B}-B\mathfrak{C}=0,$$
$$\mathfrak{A}^2y_{,}+\mathfrak{C}^2y_{,}-\mathfrak{A}\mathfrak{B}x_{,}-\mathfrak{B}\mathfrak{C}z_{,}-A\mathfrak{A}+C\mathfrak{C}=0,$$
$$\mathfrak{A}^2z_{,}+\mathfrak{B}^2z_{,}-\mathfrak{A}\mathfrak{C}x_{,}-\mathfrak{B}\mathfrak{C}y_{,}+B\mathfrak{A}-C\mathfrak{B}=0;$$

oder

$$\mathfrak{A}^2x_{,}+\mathfrak{B}^2x_{,}+\mathfrak{C}^2x_{,}-\mathfrak{A}^2x_{,}-\mathfrak{A}\mathfrak{B}y_{,}-\mathfrak{A}\mathfrak{C}z_{,}+A\mathfrak{B}-B\mathfrak{C}=0,$$
$$\mathfrak{A}^2y_{,}+\mathfrak{B}^2y_{,}+\mathfrak{C}^2y_{,}-\mathfrak{A}\mathfrak{B}x_{,}-\mathfrak{B}^2y_{,}-\mathfrak{B}\mathfrak{C}z_{,}+C\mathfrak{C}-A\mathfrak{A}=0,$$
$$\mathfrak{A}^2z_{,}+\mathfrak{B}^2z_{,}+\mathfrak{C}^2z_{,}-\mathfrak{A}\mathfrak{C}x_{,}-\mathfrak{B}\mathfrak{C}y_{,}-\mathfrak{C}^2z_{,}+B\mathfrak{A}-C\mathfrak{B}=0;$$

oder

$$(\mathfrak{A}^2+\mathfrak{B}^2+\mathfrak{C}^2)x_{,}=\mathfrak{A}(\mathfrak{A}x_{,}+\mathfrak{B}y_{,}+\mathfrak{C}z_{,})+B\mathfrak{C}-A\mathfrak{B},$$
$$(\mathfrak{A}^2+\mathfrak{B}^2+\mathfrak{C}^2)y_{,}=\mathfrak{B}(\mathfrak{A}x_{,}+\mathfrak{B}y_{,}+\mathfrak{C}z_{,})+A\mathfrak{A}-C\mathfrak{C},$$
$$(\mathfrak{A}^2+\mathfrak{B}^2+\mathfrak{C}^2)z_{,}=\mathfrak{C}(\mathfrak{A}x_{,}+\mathfrak{B}y_{,}+\mathfrak{C}z_{,})+C\mathfrak{B}-B\mathfrak{A};$$

oder, weil nach §. 49.

$$\mathfrak{A}^2+\mathfrak{B}^2+\mathfrak{C}^2=R^2 \text{ ist,}$$

$$R^2 x_{,} = \mathfrak{A}(\mathfrak{A}x_{,} + \mathfrak{B}y_{,} + \mathfrak{C}z_{,}) + B\mathfrak{C} - A\mathfrak{B},$$
$$R^2 y_{,} = \mathfrak{B}(\mathfrak{A}x_{,} + \mathfrak{B}y_{,} + \mathfrak{C}z_{,}) + A\mathfrak{A} - C\mathfrak{C},$$
$$R^2 z_{,} = \mathfrak{C}(\mathfrak{A}x_{,} + \mathfrak{B}y_{,} + \mathfrak{C}z_{,}) + C\mathfrak{B} - B\mathfrak{A}.$$

Betrachtet man jetzt die drey ersten Gleichungen:

$$(A + \mathfrak{B}x_{,} - \mathfrak{A}y_{,})\mathfrak{B} - (B + \mathfrak{A}z_{,} - \mathfrak{C}x_{,})\mathfrak{C} = 0,$$
$$(B + \mathfrak{A}z_{,} - \mathfrak{C}x_{,})\mathfrak{A} - (C + \mathfrak{C}y_{,} - \mathfrak{B}z_{,})\mathfrak{B} = 0,$$
$$(C + \mathfrak{C}y_{,} - \mathfrak{B}z_{,})\mathfrak{C} - (A + \mathfrak{B}x_{,} - \mathfrak{A}y_{,})\mathfrak{A} = 0,$$

näher; so erhellet, daß die dritte eine unmittelbare Folge aus den beiden ersten ist. Denn aus den beiden ersten folgt:

$$(A + \mathfrak{B}x_{,} - \mathfrak{A}y_{,})\mathfrak{A}\mathfrak{B} - (B + \mathfrak{A}z_{,} - \mathfrak{C}x_{,})\mathfrak{A}\mathfrak{C} = 0,$$
$$(B + \mathfrak{A}z_{,} - \mathfrak{C}x_{,})\mathfrak{A}\mathfrak{C} - (C + \mathfrak{C}y_{,} - \mathfrak{B}z_{,})\mathfrak{B}\mathfrak{C} = 0.$$

Also durch Addition:

$$(A + \mathfrak{B}x_{,} - \mathfrak{A}y_{,})\mathfrak{A}\mathfrak{B} - (C + \mathfrak{C}y_{,} - \mathfrak{B}z_{,})\mathfrak{B}\mathfrak{C} = 0,$$

oder

$$(C + \mathfrak{C}y_{,} - \mathfrak{B}z_{,})\mathfrak{C} - (A + \mathfrak{B}x_{,} - \mathfrak{A}y_{,})\mathfrak{A} = 0,$$

d. i. die dritte Gleichung. Man hat also für das Minimum eigentlich bloß folgende zwey Gleichungen:

$$(A + \mathfrak{B}x_{,} - \mathfrak{A}y_{,})\mathfrak{B} - (B + \mathfrak{A}z_{,} - \mathfrak{C}x_{,})\mathfrak{C} = 0,$$
$$(B + \mathfrak{A}z_{,} - \mathfrak{C}x_{,})\mathfrak{A} - (C + \mathfrak{C}y_{,} - \mathfrak{B}z_{,})\mathfrak{B} = 0,$$

durch welche, da $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ die erste Dimension nicht übersteigen, die Lage einer geraden Linie bestimmt wird, (M. s. z. B. das §. 25. angeführte Werk von **Biot**, S. 43.), welche der geometrische Ort aller der Punkte ist, für welche, als Mittelpunkte der Momente, die Hauptsumme der Momente ein Minimum ist.

Zur Bestimmung der Größe der kleinsten Hauptsumme eliminire man in den drey oben zuletzt gefundenen Gleichungen die Größe $\mathfrak{A}x_{,} + \mathfrak{B}y_{,} + \mathfrak{C}z_{,}$; so erhält man:

$$R^2\mathfrak{B}x_{,} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}(\mathfrak{A}x_{,} + \mathfrak{B}y_{,} + \mathfrak{C}z_{,}) + B\mathfrak{B}\mathfrak{C} - A\mathfrak{B}^2,$$
$$R^2\mathfrak{A}y_{,} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}(\mathfrak{A}x_{,} + \mathfrak{B}y_{,} + \mathfrak{C}z_{,}) + A\mathfrak{A}^2 - C\mathfrak{A}\mathfrak{C},$$
$$R^2(\mathfrak{B}x_{,} - \mathfrak{A}y_{,}) = B\mathfrak{B}\mathfrak{C} + C\mathfrak{A}\mathfrak{C} - A\mathfrak{A}^2 - A\mathfrak{B}^2,$$
$$A\mathfrak{A}^2 + A\mathfrak{B}^2 + A\mathfrak{C}^2 + R^2(\mathfrak{B}x_{,} - \mathfrak{A}y_{,}) = A\mathfrak{C}^2 + B\mathfrak{B}\mathfrak{C} + C\mathfrak{A}\mathfrak{C},$$

$$AR^2 + R^2(\mathfrak{B}x_{,} - \mathfrak{A}y_{,}) = \mathfrak{C}(A\mathfrak{C} + B\mathfrak{B} + C\mathfrak{A}),$$
$$R^2(A + \mathfrak{B}x_{,} - \mathfrak{A}y_{,}) = \mathfrak{C}(A\mathfrak{C} + B\mathfrak{B} + C\mathfrak{A}),$$
$$A + \mathfrak{B}x_{,} - \mathfrak{A}y_{,} = \frac{\mathfrak{C}(A\mathfrak{C} + B\mathfrak{B} + C\mathfrak{A})}{R^2},$$

und eben so

$$B + \mathfrak{A}z_{,} - \mathfrak{C}x_{,} = \frac{\mathfrak{B}(A\mathfrak{C} + B\mathfrak{B} + C\mathfrak{A})}{R^2},$$
$$C + \mathfrak{C}y_{,} - \mathfrak{B}z_{,} = \frac{\mathfrak{A}(A\mathfrak{C} + B\mathfrak{B} + C\mathfrak{A})}{R^2}.$$

Also die kleinste Hauptsumme der Momente im Quadrat

$$= (A + \mathfrak{B}x_{,} - \mathfrak{A}y_{,})^2 + (B + \mathfrak{A}z_{,} - \mathfrak{C}x_{,})^2 + (C + \mathfrak{C}y_{,} - \mathfrak{B}z_{,})^2$$
$$= \frac{(\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2)(A\mathfrak{C} + B\mathfrak{B} + C\mathfrak{A})^2}{R^4}$$
$$= \frac{R^2(A\mathfrak{C} + B\mathfrak{B} + C\mathfrak{A})^2}{R^4}$$
$$= \frac{(A\mathfrak{C} + B\mathfrak{B} + C\mathfrak{A})^2}{R^2}$$
$$= \frac{(A\mathfrak{C} + B\mathfrak{B} + C\mathfrak{A})^2}{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2},$$

und folglich die kleinste Hauptsumme selbst

$$= \frac{A\mathfrak{C} + B\mathfrak{B} + C\mathfrak{A}}{\sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2}}$$

für alle Punkte der durch die beiden obigen Gleichungen bestimmten geraden Linie, als Mittelpunkte der Momente.

Da es nach §. 49. eine Resultirende gibt, wenn $A\mathfrak{C} + B\mathfrak{B} + C\mathfrak{A} = 0$, und nicht zu gleicher Zeit $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{C} = 0$ ist; so erhellet hieraus, daß es eine Resultirende gibt, wenn die kleinste Hauptsumme der Momente $= 0$ ist, und umgekehrt.

In dem Falle einer Resultirenden ist, wegen $A\mathfrak{C} + B\mathfrak{B} + C\mathfrak{A} = 0$:

$$A + \mathfrak{B}x_{,} - \mathfrak{A}y_{,} = 0,$$
$$B + \mathfrak{A}z_{,} - \mathfrak{C}x_{,} = 0,$$
$$C + \mathfrak{C}y_{,} - \mathfrak{B}z_{,} = 0,$$

Bezeichnen nun X, Y, Z die Coordinaten irgend eines Punktes der Richtung der Resultirenden; so ist nach §. 49.:

$$A + \mathfrak{B}X - \mathfrak{A}Y = 0,$$
$$B + \mathfrak{A}Z - \mathfrak{C}X = 0,$$
$$C + \mathfrak{C}Y - \mathfrak{B}Z = 0.$$

Hieraus, in Vergleichung mit den vorhergehenden Gleichungen, erhellet, daß *in dem Falle einer Resultirenden alle Punkte, wo die Hauptsumme der Momente ein Minimum wird, in der Richtung der Resultirenden liegen.*

In dem Falle, wo $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{C} = 0$ ist, in welchem es nach §. 50. nicht *eine* Resultirende, sondern nur zwey gleiche einander parallele Kräfte, die das System ersetzen, gibt, ist

$$A' = A + \mathfrak{B}x_{,} - \mathfrak{A}y_{,} = A,$$
$$B' = B + \mathfrak{A}z_{,} - \mathfrak{C}x_{,} = B,$$
$$C' = C + \mathfrak{C}y_{,} - \mathfrak{B}z_{,} = C;$$

also auch

$$A'^2 + B'^2 + C'^2 = A^2 + B^2 + C^2,$$

so daß also in diesem Falle die Hauptsumme der Momente constant ist, und es demnach kein Minimum gibt. Auch folgt aus den Ausdrücken für $\operatorname{Cos}\varphi'$, $\operatorname{Cos}\psi'$, $\operatorname{Cos}\chi'$ in §. 82. unmittelbar, daß in diesem Falle alle Hauptaxen der Momente einander parallel sind.

Die Lehre vom Schwerpunkte.

Achtes Kapitel.

Erklärung des Schwerpunktes. Allgemeine Sätze über denselben. Sätze, welche sich durch die bloße Elementarmathematik ohne Hülfe der Differenzial- und Integralrechnung beweisen lassen.

§. 85.

Die gemeinste Erfahrung lehrt, daß jeder physische Körper, wenn er nicht unterstützt ist, sich nach einer gewissen Richtung zur Erde bewegt, und so gewissermaßen immer den tiefsten Punkt einzunehmen strebt. Die Ursache dieser Erscheinung, die Kraft, durch welche diese Bewegung hervorgebracht wird, nennen wir die Schwere oder die Schwerkraft. Ihre Natur ist uns noch eben so unbekannt, wie die Natur aller sogenannten Grundkräfte, worüber das Weitere der Physik zu überlassen ist; aber die Gesetze ihrer Wirkungen sind von den Mathematikern und mathematischen Naturkundigen durch Speculation und Versuche vollkommener erforscht worden, als die Gesetze der Wirkungen irgend einer andern Naturkraft. Die Verdienste Galilei's, Newton's u. A. sind selbst den Nichtgelehrten bekannt. Die eigentliche Mechanik ertheilt hierüber den vollständigsten Unterricht. Hier haben wir es nur mit der ersten und allgemeinsten, oben angezeigten, Erscheinung zu thun.

Die Erfahrung hat ferner gelehrt, daß die Richtungen, nach welchen sich schwere frey fallende Körper an nicht zu weit von einander entfernten Orten zur Erde bewegen, alle einander parallel sind, und man kann sich daher vorstellen, daß jeder physische, aus einer unendlichen Menge materieller Theilchen, auf deren jeden die Schwere wirkt, bestehende Körper von einer unendlichen Menge unter einander parallel und nach einer Gegend hin wirkender Kräfte getrieben wird. In jedem physischen Körper muß es daher, wie aus der Theorie der parallelen Kräfte (§. 36.) erhellet, immer einen Punkt geben, welcher die Eigenschaft hat, daß der Körper, wenn dieser Punkt unterstützt ist, in allen Lagen in Ruhe ist. Es ist klar, daß dieser Punkt mit dem Centrum der parallelen Kräfte, welches wir a. a. O. kennen gelernt haben, einerley ist, für den Fall einer unendlichen Anzahl paralleler Kräfte, und daß es immer einen solchen Punkt in dem gegenwärtigen Falle gibt, erhellet ebenfalls aus §. 36., weil hier nie

$$P + P' + P'' + P''' + \ldots = 0$$

ist, indem alle Kräfte nach einerley Gegend hin wirken.

Man nennt diesen Punkt den Schwerpunkt des Körpers (Centrum gravitatis), jede durch ihn gehende gerade Linie einen Durchmesser der Schwere (Diameter gravitatis), und jede durch ihn gelegte Ebene eine Schwerebene oder eine Ebene der Schwere (Planum gravitatis). Eine Kraft, in dem Schwerpunkte eines Körpers nach einer gewissen Richtung angebracht, welche mit dem Körper im Gleichgewichte ist, ist die Aequipollente aller der Kräfte, welche in den Körper wirken, und wird gewöhnlich das Gewicht des Körpers genannt, obgleich das Gewicht eigentlich die Resultirende aller dieser Kräfte ist, welche aber der Aequipollenten gleich ist. Daß es in dem in Rede stehenden Falle immer eine Resultirende gibt, ist aus der Theorie der parallelen Kräfte klar, weil hier nie

$$P + P' + P'' + P''' + \ldots = 0$$

ist.

Alle Körper, deren Schwerpunkt im Folgenden gesucht wird, werden von gleichförmiger Dichtigkeit angenommen, d. h. daß die schwere Materie in ihnen völlig gleichförmig vertheilt ist, so daß gleiche Volumina gleich viele schwere Theile enthalten oder gleiches Gewicht haben. Wird im Folgenden der Schwerpunkt von Linien und Flächen gesucht, so hat man sich diese Linien und Flächen immer als ein stetiges System gleich schwerer Punkte zu denken, so daß gleiche Theile der

Linien und Flächen gleich viele schwere Punkte enthalten, oder gleiches Gewicht haben.

Der Schwerpunkt verschiedener Figuren ist zuerst von Archimedes gesucht worden. Seine Bücher: De aequiponderantibus, sind vorzüglich diesen Untersuchungen gewidmet. Doch kommt, wie auch schon oben von uns erwähnt worden ist, nirgends eine Erklärung des Schwerpunktes vor, welches als ein Beweis anzusehen ist, daß diese Bücher nicht vollständig und unverfälscht auf uns gekommen sind. Es ist ihrer schon bey Gelegenheit der Lehre vom Hebel im fünften Kapitel gedacht worden.

Barrow hat in seine Ausgabe der Archimedischen Schriften die Erklärungen des Schwerpunktes verschiedener Mathematiker der mittlern Zeit (S. 108.) aufgenommen. Wir theilen sie hier mit seinen eignen Worten mit:

Commandinus. Centrum gravitatis uniuscujusque figurae ſolidae eſt punctum illud intra poſitum, circa quod undique partes aequalium momentorum conſiſtunt.

Lucas Valerius. Cujuslibet figurae gravis centrum gravitatis eſt punctum illud, a quo ſuspenſum grave per ſe manet partibus quomodocunque circa conſtitutis.

Stevinus. Gravitatis centrum eſt, ex quo vel ſola cogitatione ſuspenſum corpus quemcunque ſitum dederis, illum retinet.

Idem. Gravitatis centrum eſt, per quod plana quaevis ducta corpus in duas partes aequilibres dividunt.

Commandin und Lucas Valerius haben eigne Schriften über den Schwerpunkt herausgegeben:

Federici Commandini Urbinatis liber de centro gravitatis ſolidorum. Bononiae 1565. Bey Archimedis De iis, quae vehuntur in aqua, libri duo, a Federico Commandino reſtituti. Bononiae 1565.

De centro gravitatis ſolidorum libri tres Lucae Valerii. Editio ſecunda. Bononiae 1661.

Stevin's erſte Erklärung iſt, wie es uns ſcheint, die deutlichſte, und ſtimmt ganz mit der oben von uns gegebenen überein. Seine zweyte Erklärung ist gewissermaßen der Inbegriff einer häufig anwendbaren Methode, den Schwerpunkt zu finden. Der Schwerpunkt ist nämlich bekannt, wenn man entweder die Lage zweyer durch ihn gehender gerader Linien, d. i. zweyer Durchmesser der Schwere, oder die Lage dreyer durch ihn gehender Ebenen, d. i. zweyer Schwereebenen, kennt. Der Name Stevin's ist in der Geschichte der Statik merkwürdig. Wir haben ihn schon oben bey Gelegenheit des Parallelogramms der Kräfte kennen gelernt. Man verdankt ihm die erste Theorie der schiefen Ebene auf einem directen Wege, ohne Anwendung der Theorie des Hebels, und mit gleichem Glücke hat er mehrere andere Fragen untersucht. (M. s. Bossut Versuch einer Geschichte der Mathematik, aus dem Französischen von Reimer, Th. 2. S. 50.) Seine Statik steht im zweyten Theile seiner Werke, und die Lehre vom Schwerpunkte im zweyten Buche, S. 457. Sie sind von dem bekannten Entdecker der Formel für den Inhalt des sphärischen Dreyecks aus seinen drey Winkeln, Albert Girard, herausgegeben, unter dem Titel:

Les Oeuvres mathématiques de Simon Stevin de Bruges, ... par Albert Girard. 4 Vol. Leyde 1634. Fol.

§. 86.

Aufgabe. Eine Linie, eine Fläche oder ein Körper sey in mehrere Theile getheilt, deren Schwerpunkte man kennt; man sucht den Schwerpunkt der ganzen Linie, der ganzen Fläche, des ganzen Körpers.

Auflösung. Wir bestimmen die Lage der Schwerpunkte in Beziehung auf drey auf einander senkrechte Coordinatenebenen. Die Gewichte der einzelnen Theile, d. h. also, die Resultirenden aller der Kräfte, welche in die einzelnen Theile wirken, seyen p, p', p'', p''' u. s. w., und die gegebenen Coordinaten ihrer Schwerpunkte respective: x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z''; x''', y''', z'''; u. s. w.; die Coordinaten des gesuchten Schwerpunktes seyen X, Y, Z.

Da nach dem vorhergehenden Paragraphen der Schwerpunkt mit dem Centrum der parallelen Kräfte einerley ist, so ist nach §. 36.:

$$X = \frac{px + p'x' + p''x'' + p'''x''' + \ldots}{p + p' + p'' + p''' + \ldots},$$

$$Y = \frac{py + p'y' + p''y'' + p'''y''' + \ldots}{p + p' + p'' + p''' + \ldots},$$

$$Z = \frac{pz + p'z' + p''z'' + p'''z''' + \ldots}{p + p' + p'' + p''' + \ldots}.$$

Bezeichnet man mit P das Gewicht der ganzen Linie, der ganzen Fläche oder des ganzen Körpers, so ist nach §. 35.:

$$P = p + p' + p'' + p''' + \ldots,$$

und folglich

$$X = \frac{px + p'x' + p''x'' + p'''x''' + \ldots}{P},$$

$$Y = \frac{py + p'y' + p''y'' + p'''y''' + \ldots}{P},$$

$$Z = \frac{pz + p'z' + p''z'' + p'''z''' + \ldots}{P};$$

oder

$$PX = px + p'x' + p''x'' + p'''x''' + \ldots,$$
$$PY = py + p'y' + p''y'' + p'''y''' + \ldots,$$
$$PZ = pz + p'z' + p''z'' + p'''z''' + \ldots.$$

Lägen die Schwerpunkte aller einzelnen Theile in einer Ebene, so nehme man diese Ebene als Ebene der xy an, so ist offenbar

$$z = z' = z'' = z''' = \ldots = 0,$$

und folglich auch PZ oder $Z = 0$, so daß also der gesuchte Schwerpunkt durch folgende zwey Gleichungen völlig bestimmt wird:

$$PX = px + p'x' + p''x'' + p'''x''' + \ldots,$$
$$PY = py + p'y' + p''y'' + p'''y''' + \ldots.$$

Lägen auf ähnliche Art die Schwerpunkte aller einzelnen Theile in einer geraden Linie, so nehme man diese Linie als Axe der x an; dann ist offenbar

$y = y' = y'' = y''' = \ldots = z = z' = z'' = z''' = \ldots = 0$; folglich auch $PY = PZ = 0$, und $Y = Z = 0$, so daß also die Lage des gesuchten Schwerpunktes durch folgende eine Gleichung völlig bestimmt wird:

$$PX = px + p'x' + p''x'' + p'''x''' + \ldots.$$

Diese höchst wichtigen Formeln kann man auch noch unter einer andern Form, unter welcher sie häufig gebraucht werden, darstellen.

Man bezeichne die Volumina der Theile, deren Gewichte P, p, p', p'', p''' u. s. w. sind, respective durch V, v, v', v'', v''' u. s. w. Da nach unsern obigen Bemerkungen angenommen wird, daß die schweren Theile völlig gleichförmig vertheilt sind; so ist offenbar:

$$P : p = V : v,$$
$$p' : p = v' : v,$$
$$p'' : p = v'' : v,$$
$$p''' : p = v''' : v,$$
u. s. w.

Also

$$P = \frac{pV}{v},\ p' = \frac{pv'}{v},\ p'' = \frac{pv''}{v},\ p''' = \frac{pv'''}{v},\ \text{u. s. w.},$$

und folglich

$$\frac{pV}{v} X = px + \frac{pv'}{v} x' + \frac{pv''}{v} x'' + \frac{pv'''}{v} x''' + \ldots,$$

$$\frac{pV}{v} Y = py + \frac{pv'}{v} y' + \frac{pv''}{v} y'' + \frac{pv'''}{v} y''' + \ldots,$$

$$\frac{pV}{v} Z = pz + \frac{pv'}{v} z' + \frac{pv''}{v} z'' + \frac{pv'''}{v} z''' + \ldots;$$

oder, wenn man jede dieser Gleichungen auf beiden Seiten mit v multiplicirt und durch p dividirt:

$$VX = vx + v'x' + v''x'' + v'''x''' + \ldots,$$
$$VY = vy + v'y' + v''y'' + v'''y''' + \ldots,$$
$$VZ = vz + v'z' + v''z'' + v'''z''' + \ldots.$$

Liegen alle Schwerpunkte in einer Ebene, so sind folgende zwey Gleichungen zur Bestimmung des gesuchten Schwerpunktes hinreichend:

$$VX = vx + v'x' + v''x'' + v'''x''' + \ldots,$$
$$VY = vy + v'y' + v''y'' + v'''y''' + \ldots.$$

Liegen alle Schwerpunkte in einer geraden Linie, so ist schon die eine Gleichung:

$$VX = vx + v'x' + v''x'' + v'''x''' + \ldots,$$

zur Bestimmung des gesuchten Schwerpunktes völlig hinreichend.

§. 87.

Erster Zusatz. Besteht eine Linie, eine Fläche oder ein Körper aus zwey Theilen, so liegt der Schwerpunkt der ganzen Linie, der ganzen Fläche oder des ganzen Körpers immer in der geraden Linie, welche die Schwerpunkte der beiden Theile mit einander verbindet.

Zweyter Zusatz. BAC (Fig. 56.) sey eine schwere Linie in einer Ebene, (eine Curve von einfacher Krümmung,) und AD, BC seyen auf einander senkrecht. Läßt sich nun die Ebene BAD so um AD drehen, daß sie, auf die Ebene ADC gelegt, diese deckt, so ist AD ein Durchmesser der Schwere der Linie BAC.

Da nämlich die Linien AB und AC völlig identisch sind, so müssen die Schwerpunkte beider gegen AD offenbar einerley Lage haben. Sind also, AD als Axe der x angenommen, x, y die Coordinaten des Schwerpunktes von AB, so sind x und $-y$ die Coordinaten des Schwerpunktes von AC. Bezeichnet man nun durch l die Länge der Linie AB und folglich auch, da beide einander gleich sind, von AC; so ist, wenn X, Y die Coordinaten des Schwerpunktes der ganzen Linie BAC sind, nach §. 86.:

$$(l + l) X = lx + lx,$$
$$(l + l) Y = ly - ly,$$
$$2lX = 2lx, \quad 2lY = 0.$$

Also $X = x$, $Y = 0$, und der Schwerpunkt der Linie BAC

liegt folglich in AD, welche demnach ein Durchmesser der Schwere ist, w. z. b. w.

Dritter Zusatz. Ist BAC (Fig. 57.) eine Ebene von solcher Beschaffenheit, daß die gerade Linie AD alle mit BC parallel gezogene Linien EF, GH u. s. w. halbirt, so ist AD ein Durchmesser der Schwere der Ebene BAC.

Um sich hiervon zu überzeugen, denke man sich die Ebene BAC durch Linien, welche mit BC parallel sind, in eine so große Menge schmaler Streifen getheilt, daß diese Streifen ohne Fehler als gerade Linien betrachtet werden können. Da nun nach der Voraussetzung alle diese Linien von AD halbirt werden, so müssen offenbar die Schwerpunkte ihrer Hälften in Beziehung auf AD auf gleiche Art liegen, und mithin die Ordinaten dieser Schwerpunkte auf beiden Seiten von AD einander gleich seyn. Sind demnach die Ordinaten der Schwerpunkte der Linien auf der linken Seite von AD, diese Linie als Axe der x angenommen, nach der Reihe y, y', y'', y''' u. s. w.; so sind $-y$, $-y'$, $-y''$, $-y'''$ u. s. w. die Ordinaten der Schwerpunkte auf der rechten Seite von AD. Die Längen der halbirten Parallelen seyen $2l$, $2l'$, $2l''$, $2l'''$ u. s. w., der Flächeninhalt der Figur $BACD$ sey F, und die Ordinate ihres Schwerpunktes sey Y; so ist nach §. 86.:

$$FY = \begin{cases} ly + l'y' + l''y'' + l'''y''' + \ldots \\ -ly - l'y' - l''y'' - l'''y''' - \ldots \end{cases}$$

$$= l(y-y) + l'(y'-y') + l''(y''-y'') + \ldots,$$

d. i. $FY = 0$, und folglich auch $Y = 0$, so daß also der Schwerpunkt der Figur $BACD$ in der Axe der x, d. i. in AD, liegt, und AD folglich ein Durchmesser der Schwere ist; w. z. b. w.

Vierter Zusatz. Eine gerade Linie, welche durch die Schwerpunkte aller parallelen Schnitte eines Körpers geht, ist ein Durchmesser der Schwere dieses Körpers.

Man denke sich den Körper durch eine unendliche Menge paralleler Ebenen in eine unendliche Menge unendlich dünner Körper getheilt, welche ohne allen merklichen Fehler als Ebenen betrachtet werden können, und nehme die durch die Schwerpunkte aller dieser parallelen Ebenen gehende gerade Linie als Axe der x an; so sind die Ordinaten der Schwerpunkte aller unendlich dünnen Scheiben des Körpers $= 0$, und folglich ist auch nach den Formeln des vorhergehenden Paragraphen offenbar Y, d. i. die Ordinate des Schwerpunktes des ganzen Körpers, $= 0$, so daß also die durch die Schwerpunkte aller parallelen Schnitte gehende gerade Linie ein Durchmesser der Schwere ist, w. z. b. w.

Dasselbe gilt auch von Flächen und läßt sich völlig auf die nämliche Art beweisen. Die parallelen Schnitte sind in diesem Falle Linien.

Sind die parallelen Schnitte bey Körpern oder bey Flächen alle einander gleich, so wird leicht erhellen, daß der Schwerpunkt des ganzen Körpers oder der ganzen Fläche in dem Mittelpunkte der geraden Linie liegt, welche man zwischen den Schwerpunkten der beiden äußersten Schnitte ziehen kann. Nimmt man nämlich diese Linie als Axe und ihre Mitte als Anfang der Abscissen an, und bezeichnet die Größe jedes der parallelen Schnitte durch L, die Größe des ganzen Körpers oder der ganzen Fläche durch V, die Abscissen der Schwerpunkte der parallelen Schnitte auf beiden Seiten des Anfanges der Abscissen aber durch x, x', x'', x''' u. s. w., $-x$, $-x'$, $-x''$, $-x'''$ u. s. w., und die Abscisse des Schwerpunktes des ganzen Körpers oder der ganzen Fläche durch X; so ist nach den Formeln des vorhergehenden Paragraphen

$$VX = \begin{cases} Lx + Lx' + Lx'' + Lx''' + \ldots \\ -Lx - Lx' - Lx'' - Lx''' - \ldots \end{cases}$$

$$= L(x-x) + L(x'-x') + L(x''-x'') + \ldots,$$

d. i. $VX = 0$, $X = 0$, w. z. b. w.

Fünfter Zusatz. Leichte und unmittelbare Folgerungen aus den vorhergehenden Zusätzen sind folgende Sätze:

1) Der Schwerpunkt jeder geraden Linie ist ihr Mittelpunkt.

2) Der Schwerpunkt der Fläche und der Peripherie eines Kreises ist sein Mittelpunkt.

3) Der Schwerpunkt der Oberfläche und des Inhalts einer Kugel ist ihr Mittelpunkt.

4) Der Schwerpunkt der Seitenfläche und des Inhalts eines Cylinders ist der Mittelpunkt seiner Axe.

5) Da jede Diagonale eines Parallelogramms die andere Diagonale und alle dieser in dem Parallelogramm parallel gezogene gerade Linien halbirt, so ist jede Diagonale ein Durchmesser der Schwere, und der Schwerpunkt des Parallelogramms ist folglich der Durchschnittspunkt seiner beiden Diagonalen.

Bey den Beweisen dieser Sätze halten wir uns nicht auf. Jeder wird sie leicht aus den vorhergehenden Zusätzen abzuleiten im Stande seyn.

§. 88.

Aufgabe. Den Schwerpunkt eines Dreyecks zu finden.

Auflösung. ABC (Fig. 58.) sey das gegebene Dreyeck. Man halbire AB in C' und AC in B', und ziehe CC' und BB', so halbiren diese Linien, wie aus leichten geometrischen Sätzen erhellet, alle den Seiten AB und AC parallele Linien, und sind demnach Durchmesser der Schwere, (§. 87.). Der Schwerpunkt des Dreyecks liegt also in jeder dieser beiden Linien, und ist folglich ihr gemeinschaftlicher Durchschnittspunkt S.

Man könnte den Schwerpunkt auch durch den Durchschnitt der Linien CC' und AA', wenn A' die Mitte von BC ist, bestimmen, woraus erhellet, daß die drey geraden Linien, welche die Spitzen eines Dreyecks mit den Mittelpunkten der gegenüber stehenden Seiten verbinden, sich in einem Punkte, (d. i. im Schwerpunkte,) schneiden. Einen einfachen geometrischen Beweis dieses Satzes, deren sich übrigens mehrere führen lassen, s. m. in

E. G. Fischer's Lehrbuch der ebenen Geometrie für Schulen, (des Lehrbuches der Elementarmathematik erster Theil,) Berlin 1820, 8., S. 175. — 176.

Analytisch bewiesen ist der Satz in meinem Lehrbuche der Kegelschnitte, §. 27.

Zieht man $A'C'$, so ist diese Linie, weil $CA' = \frac{1}{2}BC$, $AC' = \frac{1}{2}AB$ ist, der Linie AC parallel, und folglich $\Delta A'SC' \sim \Delta ASC$. Also

$$SC' : SC = A'C' : AC = BA' : BC;$$

$$BA' : BC = 1 : 2 \text{ nach der Construction;}$$

$$SC' : SC = 1 : 2, \text{ und folglich } SC = 2SC'.$$

Eben so ist $SB = 2SB'$, $SA = 2SA'$.

Um also den Schwerpunkt eines Dreyecks zu finden, halbire man eine Seite AB in C', ziehe CC', und theile diese Linie in drey gleiche Theile; so ist der erste Theilpunkt, zunächst an AB, der gesuchte Schwerpunkt.

Den Schwerpunkt des Dreyecks hat Archimedes schon zu finden gelehrt. (De aequiponderantibus, I. 14.) Den letzten vorher bewiesenen Satz hat Archimedes nicht, obgleich er in I. 15. angewandt wird. Barrow hat ihn daher als ein Corollarium hinzugefügt und macht die Bemerkung:

„Hoc corollarium Archimedeis autographis excissse videtur: nam indemonstratum (opinor) non assumeret auctor; quod facit tamen in proxime sequenti.„

Eine sinnreiche Methode, den Schwerpunkt eines Dreyecks zu finden, theile ich hier noch aus den Élémens de Statique, par L. Poinsot, p. 176. — 178., mit.

Man halbire in Fig. 59. die drey Seiten des Triangels $AA'A''$ in S, S', S'', und beschreibe den Triangel $SS'S''$; so wird der gegebene Triangel in das Parallelogramm $SS'S''A'$ und die beiden congruenten Triangel ASS' und $A''S'S''$ getheilt. Ist nun a der Inhalt eines der letztern beiden Triangel, so ist, wie leicht erhellet, $2a$ der Inhalt des Parallelogramms, und $4a$ der Inhalt des gegebenen Triangels. Ist nun y der Abstand des Schwerpunktes des gegebenen Triangels von der Grundlinie AA'', und y' der Abstand des Schwerpunktes des Triangels ASS' von derselben Linie; so ist, wenn wir die Höhe des gegebenen Triangels durch h bezeichnen, weil offenbar der Abstand des Schwerpunktes des Parallelogramms von der Linie $AA'' = \frac{1}{2}h$ ist, (§. 87.), da er in der Diagonale SS'' liegt, nach den allgemeinen Formeln für den Schwerpunkt:

$$4ay = 2a \cdot \frac{h}{2} + ay' + ay'$$

$$= ah + 2ay', \text{ oder}$$

$$y = \tfrac{1}{4}h + \frac{y'}{2}.$$

Macht man nun in Beziehung auf den Triangel ASS' dieselbe Construction, und so fort, und bezeichnet die Abstände der Schwerpunkte der auf einander folgenden Triangel durch y', y'', y''', y'''' u. s. w.; so ist, weil die Höhen dieser Triangel offenbar $\frac{1}{2}h$, $\frac{1}{4}h$, $\frac{1}{8}h$, $\frac{1}{16}h$, u. s. w. sind:

$$y = \tfrac{1}{4}h + \frac{y'}{2},$$

$$y' = \tfrac{1}{4} \cdot \frac{h}{2} + \frac{y''}{2},$$

$$y'' = \tfrac{1}{4} \cdot \frac{h}{4} + \frac{y'''}{2},$$

$$y''' = \tfrac{1}{4} \cdot \frac{h}{8} + \frac{y''''}{2},$$

$$y'''' = \tfrac{1}{4} \cdot \frac{h}{16} + \frac{y'''''}{2},$$

u. s. w.

Die Abstände y', y'', y''' u. s. w. werden offenbar desto kleiner, je weiter man geht, und können kleiner als jede gegebene Größe gemacht werden. Daher erhält man durch successive Substitution für y folgende Ausdrücke:

$$
\begin{aligned}
y &= \tfrac{1}{4}h + \frac{y'}{2} \\
&= \tfrac{1}{4}h + \tfrac{1}{4}\cdot\frac{h}{4} + \frac{y''}{4} \\
&= \tfrac{1}{4}h + \tfrac{1}{4}\cdot\frac{h}{4} + \tfrac{1}{4}\cdot\frac{h}{16} + \frac{y'''}{8} \\
&= \tfrac{1}{4}h + \tfrac{1}{4}\cdot\frac{h}{4} + \tfrac{1}{4}\cdot\frac{h}{16} + \tfrac{1}{4}\cdot\frac{h}{64} + \frac{y''''}{16} \\
&= \tfrac{1}{4}h + \tfrac{1}{4}\cdot\frac{h}{4} + \tfrac{1}{4}\cdot\frac{h}{16} + \tfrac{1}{4}\cdot\frac{h}{64} + \tfrac{1}{4}\cdot\frac{h}{256} + \frac{y'''''}{32}
\end{aligned}
$$

u. s. w. u. s. w.,

und es ist folglich:

$$
\begin{aligned}
y &= \tfrac{1}{4}h + \tfrac{1}{4}\cdot\frac{h}{4} + \tfrac{1}{4}\cdot\frac{h}{16} + \tfrac{1}{4}\cdot\frac{h}{64} + \tfrac{1}{4}\cdot\frac{h}{256} + \text{in inf.} \\
&= \tfrac{1}{4}h\left\{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \ldots\right\} \\
&= \tfrac{1}{4}h \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \tfrac{1}{4}h \cdot \frac{1}{\frac{3}{4}} = \tfrac{1}{4}h \cdot \tfrac{4}{3} = \tfrac{1}{3}h.
\end{aligned}
$$

Der Schwerpunkt ist also von jeder Seite als Grundlinie um den dritten Theil der Höhe entfernt, und kann daher leicht durch den Durchschnitt zweyer in diesen Entfernungen mit zwey Seiten parallel gezogener gerader Linien gefunden werden. Es wird auch leicht erhellen, wie dies mit den vorhergehenden Sätzen über den Schwerpunkt zusammenstimmt.

§. 89.

Aufgabe. Die Coordinaten der drey Spitzen eines Dreyecks in Beziehung auf ein willkührliches Coordinatensystem seyen gegeben; die Coordinaten des Schwerpunktes zu finden.

Auflösung. Die gegebenen Coordinaten seyen x', y'; x'', y''; x''', y'''; so sind

$$\tfrac{1}{2}(x''+x'''),\quad \tfrac{1}{2}(y''+y''');$$
$$\tfrac{1}{2}(x'+x'''),\quad \tfrac{1}{2}(y'+y''');$$
$$\tfrac{1}{2}(x'+x''),\quad \tfrac{1}{2}(y'+y'')$$

die Coordinaten der Mittelpunkte der gegenüber liegenden Seiten, nach §. 17. meines Lehrbuches der Kegelschnitte.

Sind nun

$$y=Ax+B,\quad y=A'x+B',\quad y=A''x+B''$$

die Gleichungen der von den Spitzen nach den Mitten der gegenüber liegenden Seiten gezogenen geraden Linien; so ist

$$y'=Ax'+B,$$
$$\tfrac{1}{2}(y''+y''')=\tfrac{1}{2}A(x''+x''')+B,$$

oder

$$2y'=2Ax'+2B,$$
$$y''+y'''=A(x''+x''')+2B.$$

Also

$$2y'-y''-y'''=A(2x'-x''-x'''),$$
$$A=\frac{2y'-y''-y'''}{2x'-x''-x'''},$$

$$B=y'-Ax'=y'-\frac{(2y'-y''-y''')x'}{2x'-x''-x'''}$$
$$=\frac{2x'y'-x''y'-x'''y'-2x'y'+x'y''+x'y'''}{2x'-x''-x'''}$$
$$=\frac{(y''+y''')x'-(x''+x''')y'}{2x'-x''-x'''}.$$

Setzt man

$$y'+y''+y'''=s,\quad x'+x''+x'''=s';$$

so ist

$$A=\frac{3y'-(y'+y''+y''')}{3x'-(x'+x''+x''')}=\frac{3y'-s}{3x'-s'},$$
$$B=\frac{(y'+y''+y'''-y')x'-(x'+x''+x'''-x')y'}{3x'-(x'+x''+x''')}$$
$$=\frac{(s-y')x'-(s'-x')y'}{3x'-s'}$$

$$=\frac{sx'-x'y'-s'y'+x'y'}{3x'-s'}=\frac{sx'-s'y'}{3x'-s'}.$$

Es ist also

$$A=\frac{3y'-s}{3x'-s'},\quad B=\frac{sx'-s'y'}{3x'-s'};\ \text{und eben so}$$

$$A'=\frac{3y''-s}{3x''-s'},\quad B=\frac{sx''-s'y''}{3x''-s'};$$

$$A''=\frac{3y'''-s}{3x'''-s'},\quad B=\frac{sx'''-s'y'''}{3x'''-s'}.$$

Also sind die Gleichungen der drey von den Spitzen des Dreyecks nach den Mitten der gegenüber liegenden Seiten gezogenen geraden Linien:

$$y=\left(\frac{3y'-s}{3x'-s'}\right)x+\frac{sx'-s'y'}{3x'-s'}\quad [1.],$$

$$y=\left(\frac{3y''-s}{3x''-s'}\right)x+\frac{sx''-s'y''}{3x''-s'}\quad [2.],$$

$$y=\left(\frac{3y'''-s}{3x'''-s'}\right)x+\frac{sx'''-s'y'''}{3x'''-s'}\quad [3.].$$

Die Abscisse des Durchschnittspunktes der Linien [1.] und [2.], d. i. die Abscisse des Schwerpunktes, ist nach §. 16. meines Lehrbuches der Kegelschnitte:

$$=-\frac{\dfrac{sx'-s'y'}{3x'-s'}-\dfrac{sx''-s'y''}{3x''-s'}}{\dfrac{3y'-s}{3x'-s'}-\dfrac{3y''-s}{3x''-s'}}$$

$$=-\frac{(sx'-s'y')(3x''-s')-(sx''-s'y'')(3x'-s')}{(3y'-s)(3x''-s')-(3y''-s)(3x'-s')}$$

$$=-\frac{\left\{\begin{matrix}3sx'x''-3s'y'x''-ss'x'+s's'y'\\-3sx'x''+3s'x'y''+ss'x''-s's'y''\end{matrix}\right\}}{\left\{\begin{matrix}9y'x''-3sx''-3s'y'+ss'\\-9x'y''+3sx'+3s'y''-ss'\end{matrix}\right\}}$$

$$= -\frac{s'[3(x'y''-y'x'') - s(x'-x'') + s'(y'-y'')]}{3[-3(x'y''-y'x'') + s(x'-x'') - s'(y'-y'')]}$$
$$= \frac{s'[3(x'y''-y'x'') - s(x'-x'') + s'(y'-y'')]}{3[3(x'y''-y'x'') - s(x'-x'') + s'(y'-y'')]}$$
$$= \tfrac{1}{3}s' = \tfrac{1}{3}(x'+x''+x''').$$

Die Ordinate des Schwerpunktes findet man, wenn man den gefundenen Werth der Abscisse in die Gleichung [1.] setzt und y bestimmt. Also

$$y = \left(\frac{3y'-s}{3x'-s'}\right)\cdot\frac{s'}{3} + \frac{sx'-s'y'}{3x'-s'}$$
$$= \frac{(3y'-s)s' + 3(sx'-s'y')}{3(3x'-s')}$$
$$= \frac{3s'y' - ss' + 3sx' - 3s'y'}{3(3x'-s')}$$
$$= \frac{3sx'-ss'}{3(3x'-s')} = \frac{s(3x'-s')}{3(3x'-s')}$$
$$= \tfrac{1}{3}s = \tfrac{1}{3}(y'+y''+y''').$$

Die Coordinaten des Schwerpunktes sind also:

$$\tfrac{1}{3}(x'+x''+x'''),\quad \tfrac{1}{3}(y'+y''+y''').$$

Dächte man sich in den drey Spitzen eines Dreyecks drey gleich große Massen, deren Gewicht wir durch P bezeichnen wollen, so angebracht, daß die Spitzen des Dreyecks ihre Schwerpunkte sind; so ist, wenn wir die Coordinaten ihres gemeinschaftlichen Schwerpunktes durch X, Y bezeichnen:

$$\left.\begin{aligned}3PX &= Px' + Px'' + Px''' \\ 3PY &= Py' + Py'' + Py'''\end{aligned}\right\}(\S.\ 86.);$$

$$3PX = P(x'+x''+x'''),\quad 3PY = P(y'+y''+y''');$$
$$3X = x'+x''+x''',\quad 3Y = y'+y''+y''';$$
$$X = \tfrac{1}{3}(x'+x''+x'''),\quad Y = \tfrac{1}{3}(y'+y''+y''').$$

Drey gleiche Massen in den Spitzen eines Dreyecks und die Fläche des Dreyecks haben also einerley Schwerpunkt.

§. 90.

Lehrsatz. Die Summe der Quadrate der drey Seiten eines Dreyecks ist drey Mahl so groß als die Summe der Quadrate der drey Entfernungen des Schwerpunktes des Dreyecks von den drey Spitzen desselben.

Beweis. Den Zeichen im vorhergehenden Paragraphen die ihnen beygelegte Bedeutung lassend, seyen t', t'', t''' die drey Seiten des Dreyecks, und d', d'', d''' die Entfernungen des Schwerpunktes von den Spitzen des Dreyecks, in der Ordnung, wie letztere den Seiten t', t'', t''' gegenüber stehen. Nach §. 18. meines Lehrbuches der Kegelschnitte ist

$$d'^2 = (\tfrac{1}{3}s' - x')^2 + (\tfrac{1}{3}s - y')^2,$$
$$d''^2 = (\tfrac{1}{3}s' - x'')^2 + (\tfrac{1}{3}s - y'')^2,$$
$$d'''^2 = (\tfrac{1}{3}s' - x''')^2 + (\tfrac{1}{3}s - y''')^2.$$

$$(\tfrac{1}{3}s' - x')^2 + (\tfrac{1}{3}s' - x'')^2 + (\tfrac{1}{3}s' - x''')^2 =$$
$$= \begin{cases} \tfrac{1}{9}s'^2 - \tfrac{2}{3}s'x' + x'^2 \\ + \tfrac{1}{9}s'^2 - \tfrac{2}{3}s'x'' + x''^2 \\ + \tfrac{1}{9}s'^2 - \tfrac{2}{3}s'x''' + x'''^2 \end{cases}$$
$$= \tfrac{1}{3}s'^2 - \tfrac{2}{3}s'(x' + x'' + x''') + x'^2 + x''^2 + x'''^2$$
$$= \tfrac{1}{3}s'^2 - \tfrac{2}{3}s'^2 + x'^2 + x''^2 + x'''^2$$
$$= x'^2 + x''^2 + x'''^2 - \tfrac{1}{3}s'^2$$
$$= \tfrac{2}{3}(x'^2 + x''^2 + x'''^2 - x'x'' - x'x''' - x''x''')$$
$$= \tfrac{1}{3}\left\{\begin{matrix} x'^2 - 2x'x'' + x''^2 \\ + x''^2 - 2x''x''' + x'''^2 \\ + x'''^2 - 2x'''x' + x'^2 \end{matrix}\right\}$$
$$= \tfrac{1}{3}[(x' - x'')^2 + (x'' - x''')^2 + (x' - x''')^2],$$

und ganz auf dieselbe Art

$$(\tfrac{1}{3}s - y')^2 + (\tfrac{1}{3}s - y'')^2 + (\tfrac{1}{3}s - y''')^2 =$$
$$= \tfrac{1}{3}[(y' - y'')^2 + (y'' - y''')^2 + (y' - y''')^2].$$

Also

$$d'^2 + d''^2 + d'''^2 = \tfrac{1}{3}\left\{\begin{matrix} (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 \\ + (x'' - x''')^2 + (y'' - y''')^2 \\ + (x' - x''')^2 + (y' - y''')^2 \end{matrix}\right\},$$

d. i., nach §. 18. meines Lehrbuches der Kegelschnitte,

$$d'^2 + d''^2 + d'''^2 = \tfrac{1}{3}(t'^2 + t''^2 + t'''^2),$$
$$t'^2 + t''^2 + t'''^2 = 3(d'^2 + d''^2 + d'''^2),$$

w. z. b. w.

Auf andere Art ist der Satz bewiesen in Eytelwein's Handbuche der Statik, Th. 1. §. 98.

Ich mache bey dieser Gelegenheit nur noch auf folgenden Satz aufmerksam, dessen Beweis in §. 28. meines Lehrbuches der Kegelschnitte nachzusehen ist:

Der Schwerpunkt eines Dreyecks, der Mittelpunkt des um das Dreyeck beschriebenen Kreises und der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt der drey Höhen des Dreyecks liegen immer in einer geraden Linie.

§. 91.

Aufgabe. Den Schwerpunkt des Umfanges eines Dreyecks zu finden.

Auflösung. A, A', A'' seyen die drey Spitzen des Dreyecks, und in Beziehung auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem respective x, y; x', y'; x'', y'' die Coordinaten derselben. X, Y seyen die Coordinaten des gesuchten Schwerpunktes.

Die Schwerpunkte der Seiten AA', AA'' und $A'A''$ liegen nach §. 87. in den Mitten der Seiten, und die Coordinaten der Schwerpunkte sind folglich nach §. 17. meines Lehrbuches der Kegelschnitte:

$$\tfrac{1}{2}(x + x'),\ \ \tfrac{1}{2}(y + y');$$
$$\tfrac{1}{2}(x + x''),\ \ \tfrac{1}{2}(y + y'');$$
$$\tfrac{1}{2}(x' + x''),\ \ \tfrac{1}{2}(y' + y'');$$

und die Längen der entsprechenden Seiten nach §. 18. a. a. O.:

$$\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2},$$
$$\sqrt{(x - x'')^2 + (y - y'')^2},$$
$$\sqrt{(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2};$$

also nach §. 86.:

$$X\left\{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}+\sqrt{(x-x'')^2+(y-y'')^2} \atop +\sqrt{(x'-x'')^2+(y'-y'')^2}\right\}$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\tfrac{1}{2}(x+x')\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}+\tfrac{1}{2}(x+x'')\sqrt{(x-x'')^2+(y-y'')^2} \\ \quad +\tfrac{1}{2}(x'+x'')\sqrt{(x'-x'')^2+(y'-y'')^2},\end{array}\right.$$

$$Y\left\{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}+\sqrt{(x-x'')^2+(y-y'')^2} \atop +\sqrt{(x'-x'')^2+(y'-y'')^2}\right\}$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\tfrac{1}{2}(y+y')\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}+\tfrac{1}{2}(y+y'')\sqrt{(x-x'')^2+(y-y'')^2} \\ \quad +\tfrac{1}{2}(y'+y'')\sqrt{(x'-x'')^2+(y'-y'')^2}.\end{array}\right.$$

Also

$$X=\frac{\left\{(x+x')\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}+(x+x'')\sqrt{(x-x'')^2+(y-y'')^2} \atop +(x'+x'')\sqrt{(x'-x'')^2+(y'-y'')^2}\right\}}{\left\{2\left\{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}+\sqrt{(x-x'')^2+(y-y'')^2} \atop +\sqrt{(x'-x'')^2+(y'-y'')^2}\right\}\right\}},$$

$$Y=\frac{\left\{(y+y')\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}+(y+y'')\sqrt{(x-x'')^2+(y-y'')^2} \atop +(y'+y'')\sqrt{(x'-x'')^2+(y'-y'')^2}\right\}}{\left\{2\left\{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}+\sqrt{(x-x'')^2+(y-y'')^2} \atop +\sqrt{(x'-x'')^2+(y'-y'')^2}\right\}\right\}}.$$

Nimmt man der Abkürzung wegen A als Anfang der Abscissen und AA'' als Axe derselben an, so ist $x=y=y''$ $=0$, und folglich

$$X=\frac{x'\sqrt{x'^2+y'^2}+x''^2+(x'+x'')\sqrt{(x'-x'')^2+y'^2}}{2\left\{\sqrt{x'^2+y'^2}+x''+\sqrt{(x'-x'')^2+y'^2}\right\}},$$

$$Y=\frac{y'\left\{\sqrt{x'^2+y'^2}+\sqrt{(x'-x'')^2+y'^2}\right\}}{2\left\{\sqrt{x'^2+y'^2}+x''+\sqrt{(x'-x'')^2+y'^2}\right\}}.$$

Sey jetzt $AA'A''$ in Fig. 59. das gegebene Dreyeck, und S, S', S'' seyen die Mittelpunkte seiner Seiten. Man nehme S als Anfang und SS'', (welches parallel mit AA'',) als Axe der Abscissen eines neuen Coordinatensystems an, und bezeichne in Beziehung auf dieses System die Coordinaten der Punkte S, S', S'' respective durch α, β; α', β'; α'', β'', wo aber $\alpha = \beta = \beta'' = 0$ ist. Die Coordinaten des Mittelpunktes des in das Dreyeck $SS'S''$ beschriebenen Kreises in Beziehung auf das neue System seyen X', Y', und in Beziehung auf das alte System X'', Y''. Nach §. 23. und §. 24. meines Lehrbuches der Kegelschnitte ist

$$X' = \frac{\alpha''(\alpha' + \sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2})}{\alpha'' + \sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2} + \sqrt{(\alpha'' - \alpha')^2 + \beta'^2}},$$

$$Y' = \frac{\alpha''\beta'}{\alpha'' + \sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2} + \sqrt{(\alpha'' - \alpha')^2 + \beta'^2}}.$$

Auch ist nach §. 38. meines Lehrbuches der Kegelschnitte

$$X' = -\tfrac{1}{2}x' + X'', \quad Y' = \tfrac{1}{2}y' + (-Y'').$$

Die Coordinaten des Anfangspunktes A in Beziehung auf das System, dessen Anfang S und Abscissenaxe SS'' ist, und bey welchem die positiven Ordinaten von SS'' nach S' hin genommen werden, sind offenbar $-\tfrac{1}{2}x'$ und $\tfrac{1}{2}y'$. Bey dem Systeme, dessen Anfang A und Abscissenaxe AA'' ist, werden die positiven Ordinaten von AA'' nach A' hin genommen; deßhalb ist in der zweyten Gleichung $-Y''$ gesetzt worden. Es ist folglich

$$X'' = X' + \tfrac{1}{2}x', \quad Y'' = \tfrac{1}{2}y' - Y'.$$

Auf ähnliche Art ist aber auch

$$\alpha' = -\tfrac{1}{2}x' + \tfrac{1}{2}x'', \quad \beta' = \tfrac{1}{2}y', \quad \alpha'' = \tfrac{1}{2}x'',$$

wie leicht erhellet. Also

$$X'' = \tfrac{1}{2}x' + \frac{\tfrac{1}{2}x''\{-\tfrac{1}{2}x' + \tfrac{1}{2}x'' + \tfrac{1}{2}\sqrt{(x' - x'')^2 + y'^2}\}}{\tfrac{1}{2}x'' + \tfrac{1}{2}\sqrt{(x' - x'')^2 + y'^2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

$$= \tfrac{1}{2}x' + \frac{-x'x'' + x''^2 + x''\sqrt{(x' - x'')^2 + y'^2}}{2\{x'' + \sqrt{(x' - x'')^2 + y'^2} + \sqrt{x'^2 + y'^2}\}}$$

$$= \frac{x''^2 + (x' + x'')\sqrt{(x' - x'')^2 + y'^2} + x'\sqrt{x'^2 + y'^2}}{2\{x'' + \sqrt{(x' - x'')^2 + y'^2} + \sqrt{x'^2 + y'^2}\}},$$

$$Y'' = \tfrac{1}{2}y' - \frac{\tfrac{1}{2}x''.\tfrac{1}{2}y'}{\tfrac{1}{2}x'' + \tfrac{1}{2}\sqrt{(x'-x'')^2 + y'^2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

$$= \tfrac{1}{2}y' - \frac{x''y'}{2\{x'' + \sqrt{(x'-x'')^2 + y'^2} + \sqrt{x'^2 + y'^2}\}}$$

$$= \frac{y'\{\sqrt{(x'-x'')^2 + y'^2} + \sqrt{x'^2 + y'^2}\}}{2\{x'' + \sqrt{(x'-x'')^2 + y'^2} + \sqrt{x'^2 + y'^2}\}}.$$

Vergleicht man diese Ausdrücke von X'' und Y'' mit den oben gefundenen Ausdrücken für X, Y; so erhellet, daß $X'' = X$, $Y'' = Y$, und folglich der Schwerpunkt des Umfanges des Dreyecks $AA'A''$ mit dem Mittelpunkte des in das Dreyeck $SS'S''$ beschriebenen Kreises einerley ist.

Um also den Schwerpunkt des Umfanges des Dreyecks $AA'A''$ zu finden, halbire man seine drey Seiten in S, S', S'', beschreibe das Dreyeck $SS'S''$, und suche nach der aus der Elementargeometrie bekannten Methode den Mittelpunkt des in das Dreyeck $SS'S''$ beschriebenen Kreises; so ist dies der gesuchte Schwerpunkt.

Wir haben bey dem Beweise dieses merkwürdigen Satzes absichtlich den analytischen Weg gewählt; eine rein geometrische Betrachtung, die wir aus Garnier Leçons de Statique, p. 71., entlehnen, führt jedoch leichter zum Zwecke.

Die Gewichte der Seiten AA', AA'', $A'A''$, welche wir durch P, P', P'' bezeichnen wollen, denke man sich in den Schwerpunkten S, S', S'' der Seiten angebracht; so ist offenbar der Schwerpunkt des Umfanges des Dreyecks mit dem gemeinschaftlichen Schwerpunkte der drey Gewichte P, P', P'' einerley, welcher also gesucht werden muß. Zu dem Ende sey s der in der geraden Linie SS' liegende Schwerpunkt der Gewichte P und P' in S und S'; so ist nach bekannten oben bewiesenen Sätzen, wenn S als Anfang angenommen wird:

$$(P + P').Ss = P.0 + P'.SS', \text{ d. i.}$$
$$(P + P').Ss = P'.SS',$$

$$P' : P + P' = Ss : SS',$$
$$P' : P = Ss : SS' - Ss,$$
$$P' : P = Ss : sS'.$$

Aber offenbar

$$P' : P = AA'' : AA'$$
$$= SS'' : A'S$$
$$= SS'' : AS$$
$$= SS'' : S'S'',$$

weil, wegen der Construction und des Parallelismus der Linien SS'', AS' und AS, $S'S''$, offenbar $A'S = AS = S'S''$ ist. Es ist also

$$Ss : sS' = SS'' : S'S'',$$

und die Linie sS'' halbirt folglich nach Euclides Elementen, VI. 3., den Winkel $SS''S'$, so daß also der Schwerpunkt der drey Gewichte P, P', P'', oder des Umfanges des gegebenen Dreyecks, in der Linie sS'', welche den Winkel $SS''S'$ halbirt, liegt, und ganz auf ähnliche Art beweiset man, daß der gesuchte Schwerpunkt in jeder der die Winkel $S'SS''$ und $SS'S''$ halbirenden Linien liegen muß, und demnach, wie aus bekannten Sätzen der Elementargeometrie unmittelbar folgt, mit dem Mittelpunkte des in das Dreyeck $SS'S''$ beschriebenen Kreises einerley ist, w. z. b. w.

§. 92.

Aufgabe. Den Inhalt jedes Vielecks durch die Coordinaten seiner Winkelpunkte auszudrücken.

Auflösung. Wir betrachten zuerst das Dreyeck. $AA'A''$ in Fig. 60. sey das gegebene, und FB, AB; FB', $A'B'$; FB'', $A''B''$, d. i. x, y; x', y'; x'', y'', seyen die Coordinaten seiner Spitzen in Beziehung auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen Anfangspunkt F ist. Von A und A'' fälle man auf $A'B'$ die Perpendikel AE und $A''D$. Es ist offenbar

$$\Delta\, AA'A'' = \Delta\, AA'E + \Delta\, DA'A'' + \Delta\, CDA'' - \Delta\, ACE,$$
$$\Delta\, AA'E = \tfrac{1}{2}\, AE \,.\, EA' = \tfrac{1}{2}(x' - x)(y' - y),$$
$$\Delta\, DA'A'' = \tfrac{1}{2}\, A'D \,.\, DA'' = \tfrac{1}{2}(x'' - x')(y' - y'').$$

Nun erhellet leicht, daß $\triangle ACE \backsim \triangle CDA''$, und folglich

$$AE : A''D = CE : CD; \text{ also}$$
$$AE + A''D : A''D = CE + CD : CD,$$
$$AE : AE + A''D = CE : CE + CD;$$
$$\text{d. i. } BB'' : A''D = DE : CD,$$
$$AE : BB'' = CE : DE,$$
$$\text{oder } x'' - x : x'' - x' = y'' - y : CD,$$
$$x' - x : x'' - x = CE : y'' - y.$$

$$CD = \frac{(x'' - x')(y'' - y)}{x'' - x}, \quad CE = \frac{(x' - x)(y'' - y)}{x'' - x},$$

$$\triangle CDA'' = \tfrac{1}{2} DA'' . CD = \frac{(x'' - x')^2 . (y'' - y)}{2(x'' - x)},$$

$$\triangle ACE = \tfrac{1}{2} AE . CE = \frac{(x' - x)^2 . (y'' - y)}{2(x'' - x)},$$

$$\triangle CDA'' - \triangle ACE = \frac{[(x'' - x')^2 - (x' - x)^2](y'' - y)}{2(x'' - x)}$$
$$= \frac{(x'' - x' + x' - x)(x'' - x' - x' + x)(y'' - y)}{2(x'' - x)}$$
$$= \frac{(x'' - x)(x'' - 2x' + x)(y'' - y)}{2(x'' - x)}$$
$$= \tfrac{1}{2}(x'' - 2x' + x)(y'' - y).$$

Also $\triangle AA'A''$

$$= \tfrac{1}{2}\left\{(x' - x)(y' - y) + (x'' - x')(y' - y'') + (x'' - 2x' + x)(y'' - y)\right\}$$
$$= \tfrac{1}{2} . \left\{\begin{matrix} -x(y' - y) + x'(y' - y) + x''(y' - y'') \\ + x(y'' - y) - x'(y' - y'') + x''(y'' - y) \\ - 2x'(y'' - y) \end{matrix}\right\}$$
$$= \tfrac{1}{2}\left\{x(y'' - y') + x'(y - y'') + x''(y' - y)\right\}.$$

Dieser Ausdruck ist zwar nur für den in der Figur dargestellten Fall entwickelt worden; man kann sich aber leicht überzeugen, daß er auch in jedem andern Falle gelten muß, wenn man jeden möglichen Fall besonders betrachtet. Freylich wird dies in Weitläufigkeiten führen; ist man indeß mit den allgemeinen Formeln für die Transformation der Coordinaten vertraut, so läßt sich die Allgemeinheit der gefundenen Formel in völliger Strenge beweisen. Bezeichnen nämlich jetzt x, y; x', y'; x'', y'' die Coordinaten der Spitzen in Beziehung auf irgend ein anderes rechtwinkliges Coordinatensystem; so muß man, wie ich im dritten Kapitel meines Lehrbuches der Kegelschnitte völlig streng und allgemein bewiesen zu haben glaube, nach §. 38, 3. a. a. O., für x, y in der gefundenen Formel

$$a + x \operatorname{Cos}\alpha - y \operatorname{Sin}\alpha, \text{ und}$$
$$b + x \operatorname{Sin}\alpha + y \operatorname{Cos}\alpha$$

setzen. Dadurch erhält man, wenn Δ überhaupt den Inhalt des Dreyecks bezeichnet:

$$\Delta = \tfrac{1}{2}\left\{\begin{array}{l} (a + x \operatorname{Cs}\alpha - y \operatorname{Sin}\alpha)(b + x'' \operatorname{Sin}\alpha + y'' \operatorname{Cs}\alpha - b - x' \operatorname{Sin}\alpha - y' \operatorname{Cs}\alpha) \\ + (a + x' \operatorname{Cs}\alpha - y' \operatorname{Sin}\alpha)(b + x \operatorname{Sin}\alpha + y \operatorname{Cs}\alpha - b - x'' \operatorname{Sin}\alpha - y'' \operatorname{Cs}\alpha) \\ + (a + x'' \operatorname{Cs}\alpha - y'' \operatorname{Sin}\alpha)(b + x' \operatorname{Sin}\alpha + y' \operatorname{Cs}\alpha - b - x \operatorname{Sin}\alpha - y \operatorname{Cs}\alpha) \end{array}\right.$$

$$= \tfrac{1}{2}\left\{\begin{array}{l} (a + x \operatorname{Cos}\alpha - y \operatorname{Sin}\alpha)\,[(x'' - x') \operatorname{Sin}\alpha + (y'' - y') \operatorname{Cos}\alpha] \\ + (a + x' \operatorname{Cos}\alpha - y' \operatorname{Sin}\alpha)\,[(x - x'') \operatorname{Sin}\alpha + (y - y'') \operatorname{Cos}\alpha] \\ + (a + x'' \operatorname{Cos}\alpha - y'' \operatorname{Sin}\alpha)\,[(x' - x) \operatorname{Sin}\alpha + (y' - y) \operatorname{Cos}\alpha] \end{array}\right.$$

$$= \tfrac{1}{2}\left\{\begin{array}{l} a \operatorname{Sin}\alpha\,[(x'' - x') + (x - x'') + (x' - x)] \\ + a \operatorname{Cos}\alpha\,[(y'' - y') + (y - y'') + (y' - y)] \\ + \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Cos}\alpha \left[\begin{array}{l} x(x'' - x') + x'(x - x'') + x''(x' - x) \\ - y(y'' - y') - y'(y - y'') - y''(y' - y) \end{array}\right] \\ + \operatorname{Cos}\alpha^2 . [x(y'' - y') + x'(y - y'') + x''(y' - y)] \\ - \operatorname{Sin}\alpha^2 . [y(x'' - x') + y'(x - x'') + y''(x' - x)] \end{array}\right\}.$$

Aber

$$(x'' - x') + (x - x'') + (x' - x) = x'' - x' + x - x'' + x' - x = 0,$$
$$(y'' - y') + (y - y'') + (y' - y) = y'' - y' + y - y'' + y' - y = 0,$$
$$x(x'' - x') + x'(x - x'') + x''(x' - x)$$
$$= xx'' - xx' + xx' - x'x'' + x'x'' - xx'' = 0,$$
$$y(y'' - y') + y'(y - y'') + y''(y' - y)$$
$$= yy'' - yy' + yy' - y'y'' + y'y'' - yy'' = 0,$$
$$y(x'' - x') + y'(x - x'') + y''(x' - x)$$
$$= yx'' - yx' + y'x - y'x'' + y''x' - y''x$$
$$= - xy'' + xy' - x'y + x'y'' - x''y' + x''y$$
$$= - x(y'' - y') - x'(y - y'') - x''(y' - y).$$

Also

$$\Delta = \tfrac{1}{2}\left\{\begin{array}{l}\mathrm{Cos}\,\alpha^2.\,[x(y''-y')+x'(y-y'')+x''(y'-y)]\\ +\,\mathrm{Sin}\,\alpha^2.\,[x(y''-y')+x'(y-y'')+x''(y'-y)]\end{array}\right\}$$

$$= \tfrac{1}{2}[\mathrm{Cos}\alpha^2+\mathrm{Sin}\alpha^2][x(y''-y')+x'(y-y'')+x''(y'-y)]$$

$$= \tfrac{1}{2}[x(y''-y')+x'(y-y'')+x''(y'-y)],$$

und die gefundene Formel gilt also für jedes Coordinatensystem.

Bezeichnet man nun den Inhalt eines Dreyecks, Vierecks, Fünfecks, u. s. w. durch III, IV, V, u. s. w.; so ist ganz allgemein

$$\mathrm{III} = \tfrac{1}{2}\{x(y''-y')+x'(y-y'')+x''(y'-y)\}.$$

Die Coordinaten der auf einander folgenden Winkelspitzen eines Vierecks $AA'A''A'''$ seyen x, y; x', y'; x'', y''; x''', y'''; so ist

$$\Delta\, AA'A'' = \tfrac{1}{2}\{x(y''-y')+x'(y-y'')+x''(y'-y)\},$$

$$\Delta\, AA''A''' = \tfrac{1}{2}\{x(y'''-y'')+x''(y-y''')+x'''(y''-y)\}.$$

Also $\mathrm{IV} = \Delta\, AA'A'' + \Delta\, AA''A'''$, d. i.

$$\mathrm{IV} = \tfrac{1}{2}\{x(y'''-y')+x'(y-y'')+x''(y'-y''')+x'''(y''-y)\}.$$

Die Coordinaten der Spitzen eines Fünfecks $AA'A''A'''A''''$ seyen x, y; x', y'; x'', y''; x''', y'''; x'''', y''''; so ist

$$AA'A''A''' = \tfrac{1}{2}\{x(y'''-y')+x'(y-y'')+x''(y'-y''')+x'''(y''-y)\},$$

$$\Delta\, AA'''A'''' = \tfrac{1}{2}\{x(y''''-y''')+x'''(y-y'''')+x''''(y'''-y)\}.$$

Also $\mathrm{V} = AA'A''A''' + \Delta\, AA'''A''''$, d. i.

$$\mathrm{V} = \tfrac{1}{2}\{x(y''''-y')+x'(y-y'')+x''(y'-y''')+x'''(y''-y'''')+x''''(y'''-y)\}.$$

Vergleicht man die gefundenen Formeln mit einander und bezeichnet die Coordinaten der auf einander folgenden Winkelspitzen des $n$ecks $AA'A''A''' \ldots \overset{n-1}{A}$ nach der Reihe durch x, y; x', y'; x'', y''; x''', y'''; $\ldots \overset{n-1}{x}$, $\overset{n-1}{y}$; so wird man leicht bemerken, daß allgemein der Inhalt des $n$ecks

$$= \tfrac{1}{2}\left\{\begin{array}{l}x(\overset{n-1}{y}-y')+x'(y-y'')+x''(y'-y''')+x'''(y''-y'''')+\ldots\\ \ldots\ldots\ldots+\overset{n-2}{x}(\overset{n-3}{y}-\overset{n-1}{y})+\overset{n-1}{x}(\overset{n-2}{y}-y)\end{array}\right\}$$

ist. Man kann diese Formel leicht allgemein durch den Schluß von n auf $n+1$ beweisen. Seyen nämlich x, y; x', y'; x'', y''; x''', y'''; ... $\overset{n-1}{x}, \overset{n-1}{y}$; $\overset{n}{x}, \overset{n}{y}$ die Coordinaten der Winkelspitzen eines $(n+1)$ecks $AA'A'' \ldots \overset{n-1}{A}\overset{n}{A}$, und man nehme an, daß der Satz bis zum $n$ecke gelte; so gilt für den Inhalt des $n$ecks $AA' \ldots \overset{n-1}{A}$ der obige Ausdruck. Der Inhalt des Dreyecks $A\overset{n-1}{A}\overset{n}{A}$ ist nach dem Obigen

$$=\tfrac{1}{2}\{x(\overset{n}{y}-\overset{n-1}{y})+\overset{n-1}{x}(y-\overset{n}{y})+\overset{n}{x}(\overset{n-1}{y}-y)\}.$$

Der Inhalt des $(n+1)$ecks ist offenbar $= AA'A'' \ldots \overset{n-1}{A} + A\overset{n-1}{A}\overset{n}{A}$

$$=\tfrac{1}{2}\left\{\begin{array}{l} x(\overset{n-1}{y}-y')+x(\overset{n}{y}-\overset{n-1}{y}) \\ +x'(y-y'')+x''(y'-y''')+x'''(y''-y'''')+\ldots \\ \qquad\ldots\ldots+\overset{n-2}{x}(\overset{n-3}{y}-\overset{n-1}{y})+\overset{n-1}{x}(\overset{n-2}{y}-y)+\overset{n-1}{x}(y-\overset{n}{y}) \\ \qquad\qquad+\overset{n}{x}(\overset{n-1}{y}-y) \end{array}\right\}$$

$$=\tfrac{1}{2}\left\{\begin{array}{l} x(\overset{n}{y}-y')+x'(y-y'')+x''(y'-y''')+x'''(y''-y'''')+\ldots \\ \ldots\ldots+\overset{n-2}{x}(\overset{n-3}{y}-\overset{n-1}{y})+\overset{n-1}{x}(\overset{n-2}{y}-\overset{n}{y})+\overset{n}{x}(\overset{n-1}{y}-y) \end{array}\right\}$$

und der Satz gilt also offenbar für das $(n+1)$eck, wenn er für das $n$eck gilt, und ist demnach allgemein, weil er oben bis zum Fünfecke bewiesen worden ist.

Der hier bewiesene höchst merkwürdige Satz findet sich in: Geometrie der Stellung, von L. N. M. Carnot, aus dem Französischen von Schumacher, B. 2., Altona 1810, 8., S. 362. — 363.

Die Formel ist aber unrichtig ausgedrückt, und das Gesetz nicht bemerkbar. Ein Beweis ist nicht gegeben. Die Entdeckung wird Herrn Hofrath Gauß in Göttingen zugeschrieben, und bemerkt, „daß er selbst vielleicht bey einer andern Gelegenheit uns eine vollständigere Abhandlung über „diesen Gegenstand schenken werde„.

Wir bemerken hierbey noch, daß man die obigen Formeln auch auf folgende Art ausdrücken kann:

$$\mathrm{III} = \tfrac{1}{2}\left\{ y(x' - x'') + y'(x'' - x) + y''(x - x') \right\},$$

$$\mathrm{IV} = \tfrac{1}{2}\left\{ y(x' - x''') + y'(x'' - x) + y''(x''' - x') + y'''(x - x'') \right\},$$

$$\mathrm{V} =$$
$$\tfrac{1}{2}\left\{ y(x' - x'''') + y'(x'' - x) + y''(x''' - x') + y'''(x'''' - x'') + y''''(x - x''') \right\},$$

und allgemein der Inhalt des $n$ecks

$$= \tfrac{1}{2}\left\{ \begin{array}{l} y(x' - \overset{n-1}{x}) + y'(x'' - x) + y''(x''' - x') + y'''(x'''' - x'') + \ldots \\ \quad \ldots\ldots\ldots + \overset{n-2}{y}(\overset{n-1}{x} - \overset{n-3}{x}) + \overset{n-1}{y}(x - \overset{n-2}{x}) \end{array} \right\}.$$

§. 93.

Aufgabe. Den Schwerpunkt jedes Vielecks zu finden.

Erste Auflösung. 1) Ist das gegebene Vieleck ein Viereck, so ziehe man eine Diagonale desselben, und suche die Schwerpunkte der beiden Dreyecke, in welche das Viereck durch die gezogene Diagonale getheilt wird. Der Schwerpunkt des Vierecks liegt dann in der geraden Linie, welche die Schwerpunkte der beiden Dreyecke mit einander verbindet. Zieht man nun auch die zweyte Diagonale des Vierecks, und verfährt mit den beiden Dreyecken, in welche das Viereck dadurch getheilt wird, wie vorher; so erhält man eine zweyte Linie, in welcher der gesuchte Schwerpunkt liegen muß. Der gesuchte Schwerpunkt ist also der Durchschnittspunkt der beiden gefundenen Durchmesser der Schwere.

2) Ist das gegebene Vieleck ein Fünfeck, so theile man es durch eine Diagonale in ein Viereck und ein Dreyeck, und suche die Schwerpunkte dieser beiden Figuren nach dem Vorhergehenden; so ist die Linie, welche diese beiden Schwerpunkte mit einander verbindet, ein Durchmesser der Schwere des Fünfecks. Schneidet man durch eine andere Diagonale ein anderes Dreyeck ab, so kann man ganz auf dieselbe Art einen zweyten Durchmesser der Schwere des Fünfecks erhalten; der Durchschnittspunkt beider ist dann der gesuchte Schwerpunkt.

3) Ist das Vieleck ein Sechseck, so theile man es durch eine Diagonale in ein Fünfeck und ein Dreyeck, und suche nach dem Vorhergehenden die Schwerpunkte dieser beiden Figuren; so erhält man einen Durchmesser der Schwere des Sechsecks. Durch Abschneidung eines andern Dreyecks erhält man auf dieselbe Art einen zweyten Durchmesser der Schwere, und der Durchschnittspunkt beider ist der gesuchte Schwerpunkt.

Es erhellet, wie man auf diese Art immer weiter gehen kann.

Zweyte Auflösung. Man theile das gegebene Vieleck durch Diagonalen in Dreyecke, deren Flächenräume wir durch Δ, Δ', Δ'', Δ''' u. s. w. bezeichnen wollen. Die Coordinaten der Schwerpunkte dieser Dreyecke seyen respective X, Y; X', Y'; X'', Y''; X''', Y'''; u. s. w., und $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ seyen die Coordinaten des gesuchten Schwerpunktes in Beziehung auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem; so ist nach §. 86.:

$$\mathfrak{X} = \frac{\Delta X + \Delta' X' + \Delta'' X'' + \Delta''' X''' + \ldots}{\Delta + \Delta' + \Delta'' + \Delta''' + \ldots},$$

$$\mathfrak{Y} = \frac{\Delta Y + \Delta' Y' + \Delta'' Y'' + \Delta''' Y''' + \ldots}{\Delta + \Delta' + \Delta'' + \Delta''' + \ldots},$$

und man muß also, um die Coordinaten $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ zu finden, die Flächenräume der einzelnen Dreyecke, in welche das Vieleck getheilt worden, nach bekannten Sätzen der Geometrie, und die Coordinaten ihrer Schwerpunkte nach §. 89. berechnen.

Sey nun $AA'A''A''' \ldots \overset{n-1}{A}$ ein $n$eck, und x, y; x', y'; x'', y''; x''', y'''; $\ldots \overset{n-1}{x}, \overset{n-1}{y}$ die Coordinaten seiner Winkelpunkte. Nach §. 89. und §. 92. ist, wenn man von A nach allen Winkelpunkten Diagonalen zieht, und die entstehenden Dreyecke durch Δ, Δ', Δ'', Δ''', $\ldots \overset{n-3}{\Delta}$ bezeichnet:

$$X = \tfrac{1}{3}(x + x' + x''),$$
$$X' = \tfrac{1}{3}(x + x'' + x'''),$$
$$X'' = \tfrac{1}{3}(x + x''' + x''''),$$
$$X''' = \tfrac{1}{3}(x + x'''' + x'''''),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\overset{n-4}{X} = \tfrac{1}{3}(x + \overset{n-3}{x} + \overset{n-2}{x}),$$
$$\overset{n-3}{X} = \tfrac{1}{3}(x + \overset{n-2}{x} + \overset{n-1}{x});$$
$$Y = \tfrac{1}{3}(y + y' + y''),$$
$$Y' = \tfrac{1}{3}(y + y'' + y'''),$$
$$Y'' = \tfrac{1}{3}(y + y''' + y''''),$$
$$Y''' = \tfrac{1}{3}(y + y'''' + y'''''),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\overset{n-4}{Y} = \tfrac{1}{3}(y + \overset{n-3}{y} + \overset{n-2}{y}),$$
$$\overset{n-3}{Y} = \tfrac{1}{3}(y + \overset{n-2}{y} + \overset{n-1}{y});$$
$$\Delta = \tfrac{1}{2}\left\{x(y''-y') + x'(y-y'') + x''(y'-y)\right\},$$
$$\Delta' = \tfrac{1}{2}\left\{x(y'''-y'') + x''(y-y''') + x'''(y''-y)\right\},$$
$$\Delta'' = \tfrac{1}{2}\left\{x(y''''-y''') + x'''(y-y'''') + x''''(y'''-y)\right\},$$
$$\Delta''' = \tfrac{1}{2}\left\{x(y'''''-y'''') + x''''(y-y''''') + x'''''(y''''-y)\right\},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\overset{n-4}{\Delta} = \tfrac{1}{2}\left\{x(\overset{n-2}{y} - \overset{n-3}{y}) + \overset{n-3}{x}(y - \overset{n-2}{y}) + \overset{n-2}{x}(\overset{n-3}{y} - y)\right\},$$
$$\overset{n-3}{\Delta} = \tfrac{1}{2}\left\{x(\overset{n-1}{y} - \overset{n-2}{y}) + \overset{n-2}{x}(y - \overset{n-1}{y}) + \overset{n-1}{x}(\overset{n-2}{y} - y)\right\},$$
$$\Delta + \Delta' + \Delta'' + \Delta''' + \cdots\cdots + \overset{n-3}{\Delta} =$$
$$= \tfrac{1}{2}\left\{\begin{array}{l} x(\overset{n-1}{y} - y') + x'(y-y'') + x''(y'-y''') + x'''(y''-y'''') + \cdots \\ \qquad \cdots\cdots + \overset{n-2}{x}(\overset{n-3}{y} - \overset{n-1}{y}) + \overset{n-1}{x}(\overset{n-2}{y} - y) \end{array}\right\}.$$
$$x = \frac{\left\{\begin{array}{l} (x + x' + x'')\left\{x(y''-y') + x'(y-y'') + x''(y'-y)\right\} \\ + (x + x'' + x''')\left\{x(y'''-y'') + x''(y-y''') + x'''(y''-y)\right\} \\ + (x + x''' + x'''')\left\{x(y''''-y''') + x'''(y-y'''') + x''''(y'''-y)\right\} \\ + (x + x'''' + x''''')\left\{x(y'''''-y'''') + x''''(y-y''''') + x'''''(y''''-y)\right\} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ + (x + \overset{n-3}{x} + \overset{n-2}{x})\left\{x(\overset{n-2}{y} - \overset{n-3}{y}) + \overset{n-3}{x}(y - \overset{n-2}{y}) + \overset{n-2}{x}(\overset{n-3}{y} - y)\right\} \\ + (x + \overset{n-2}{x} + \overset{n-1}{x})\left\{x(\overset{n-1}{y} - \overset{n-2}{y}) + \overset{n-2}{x}(y - \overset{n-1}{y}) + \overset{n-1}{x}(\overset{n-2}{y} - y)\right\} \end{array}\right\}}{3 \cdot \left\{\begin{array}{l} x(\overset{n-1}{y} - y') + x'(y-y'') + x''(y'-y''') + x'''(y''-y'''') + \cdots \\ \qquad \cdots\cdots + \overset{n-2}{x}(\overset{n-3}{y} - \overset{n-1}{y}) + \overset{n-1}{x}(\overset{n-2}{y} - y) \end{array}\right\}}$$

und ganz auf dieselbe Art mittelst der obigen Ausdrücke:

$$\mathfrak{Y}=\frac{\left\{\begin{array}{l}(y+y'+y'')\{x(y''-y')+x'(y-y'')+x''(y'-y)\}\\ +(y+y''+y''')\{x(y'''-y'')+x''(y-y''')+x'''(y''-y)\}\\ +(y+y'''+y'''')\{x(y''''-y''')+x'''(y-y'''')+x''''(y'''-y)\}\\ +(y+y''''+y''''')\{x(y'''''-y'''')+x''''(y-y''''')+x'''''(y''''-y)\}\\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\\ +(y+\overset{n-3}{y}+\overset{n-2}{y})\{x(\overset{n-2}{y}-\overset{n-3}{y})+\overset{n-3}{x}(y-\overset{n-2}{y})+\overset{n-2}{x}(\overset{n-3}{y}-y)\}\\ +(y+\overset{n-2}{y}+\overset{n-1}{y})\{x(\overset{n-1}{y}-\overset{n-2}{y})+\overset{n-2}{x}(y-\overset{n-1}{y})+\overset{n-1}{x}(\overset{n-2}{y}-y)\}\end{array}\right\}}{3\cdot\left\{\begin{array}{l}x(\overset{n-1}{y}-y')+x'(y-y'')+x''(y'-y''')+x'''(y''-y'''')+\dots\\ \quad\dots\dots\dots+\overset{n-2}{x}(\overset{n-3}{y}-y)+\overset{n-1}{x}(\overset{n-2}{y}-y)\end{array}\right\}}$$

Um ein Beyspiel für diese sehr allgemeinen Formeln, deren Fortschreitungsgesetz leicht zu übersehen ist, zu geben, wähle ich das Beyspiel vom Trapezium $ABCD$ (Fig. 61.) aus Eytelwein's Statik, Th. 1. §. 104. Eytelwein setzt $x = y = 0$; $x' = AF = e$, $y' = BF = h$; $x'' = AE = AF + BC = e + b$, $y'' = h$; $x''' = AD = c$, $y''' = 0$. Also

$$x + x' + x'' = b + 2e;$$
$$x + x'' + x''' = e + b + c;$$
$$y + y' + y'' = h + h = 2h;$$
$$y + y'' + y''' = h;$$

$$x(y''-y') + x'(y-y'') + x''(y'-y) =$$
$$= -eh + (e+b)h = bh;$$
$$x(y'''-y'') + x''(y-y''') + x'''(y''-y) = ch;$$
$$x(y'''-y') + x'(y-y'') + x''(y'-y''') + x'''(y''-y) =$$
$$= -eh + (e+b)h + ch = (b+c)h.$$

Also

$$\mathfrak{X} = \frac{(b+2e)bh + (e+b+c)ch}{3(b+c)h}$$
$$= \frac{b^2 + 2be + ce + bc + c^2}{3(b+c)}$$
$$= \frac{b^2 + c^2 + bc + 2be + ce}{3(b+c)},$$

$$\mathfrak{y} = \frac{2h \,.\, bh + h \,.\, ch}{3(b+c)h} = \frac{2bh + ch}{3(b+c)} = \frac{(2b+c)h}{3(b+c)}.$$

Beides genau wie bey Eytelwein, S. 140.

§. 94.

Den Schwerpunkt des Trapeziums kann man auch auf folgende Art finden. In Fig. 62. halbire man die beiden parallelen Seiten AB, CD in E, F, und ziehe FE; so halbirt diese, wie leicht gezeigt werden kann, alle den Seiten AB, CD parallele gerade Linien, und ist folglich ein Durchmesser der Schwere. Ferner ziehe man AE, CF, und nehme $EG = \frac{1}{3}AE$, $FH = \frac{1}{3}CF$; so sind G und H die Schwerpunkte der Dreyecke ACD und ABC, und folglich auch GH ein Durchmesser der Schwere. Also S, der Durchschnittspunkt von FE und GH, der Schwerpunkt des Trapeziums. Zieht man GK und HL parallel mit AB und CD; so ist, weil $\Delta\, GSK$ offenbar $\sim \Delta\, SLH$:

$$GS : SH = SK : SL.$$

Weil aber S der Schwerpunkt des Trapeziums ist; so ist, wenn wir S als Anfang der Abscissen annehmen, nach den obigen allgemeinen Sätzen über den Schwerpunkt:

$$ABCD \,.\, 0 = ABC \,.\, SH - ACD \,.\, SG;$$

$$\text{d. i. } ABC \,.\, SH = ACD \,.\, SG,$$

$$ABC : ACD = SG : SH,$$

$$ABC : ACD = AB : CD,$$

$$AB : CD = SG : SH = SK : SL,$$

$$2AB : CD = 2SK : SL,$$

$$AB : 2CD = SK : 2SL,$$

$$2AB + CD : CD = 2SK + SL : SL,$$

$$2CD + AB : AB = 2SL + SK : SK,$$

$$2AB + CD : 2SK + SL = CD : SL,$$

$$2CD + AB : 2SL + SK = AB : SK.$$

Aber $AB : CD = SK : SL$, also auch

$AB : SK = CD : SL$, und folglich

$$2AB + CD : 2SK + SL = 2CD + AB : 2SL + SK,$$
$$2AB + CD : 2CD + AB = 2SK + SL : 2SL + SK.$$

Weil aber GK parallel CD, LH parallel CD, und $GE = \frac{1}{3} AE$, $FH = \frac{1}{3} FC$ ist; so ist $EK = LF = \frac{1}{3} FE = KL$. Also $2SK + SL = SK + SL + SK = SK + KL = SK + EK = SE$; $2SL + SK = SL + SL + SK = SL + LK = SL + LF = SF$; und folglich

$$2AB + CD : 2CD + AB = SE : SF.$$

Diese Proportion beweiset Archimedes in seinen Büchern: De aequiponderantibus, I. 15.

Man leitet aus ihr leicht folgende ab:

$$3AB + 3CD : 2CD + AB = EF : SF,$$
$$2AB + CD : 3AB + 3CD = ES : EF.$$

§. 95.

Herr Hofrath Pfaff in Halle, mein mir unvergeßlicher Lehrer, hat einen sehr merkwürdigen Satz über den Schwerpunkt des Vierecks gefunden, den er mir freundschaftlichst mitgetheilt hat. Vielleicht schenkt uns der große Geometer selbst ein Mahl über diesen und ähnliche Gegenstände eine ausführliche Abhandlung. Dieser Satz ist folgender:

$AA'A''A'''$ (Fig. 63.) sey ein willkührliches Viereck. Um seinen Schwerpunkt zu finden, halbire man die beiden gegenüber stehenden Seiten AA''' und $A'A''$ in D, C, ziehe CD, und halbire es in E. Sodann ziehe man die beiden Diagonalen AA'' und $A'A'''$, welche sich in B schneiden, ziehe BE, und verlängere es über E hinaus, bis $ES = \frac{1}{3} BE$ ist; so ist S der gesuchte Schwerpunkt des gegebenen Vierecks.

Der Beweis dieses in der That höchst merkwürdigen Satzes läßt sich, glaube ich, mittelst der obigen allgemeinen Formeln für die Coordinaten des Schwerpunktes jeder geradlinigen Figur auf folgende Art führen.

Man nehme A als Anfang und AA''' als Axe der Coordinaten an, und bezeichne die Coordinaten der vier Spitzen des Vierecks durch $0, 0$; x', y'; x'', y''; $x''', 0$; so ist nach §. 93.:

$$X = \frac{(x' + x'')(x''y' - x'y'') + (x'' + x''')x'''y''}{3(x''y' + x'''y'' - x'y'')},$$

$$Y = \frac{(y' + y'')(x''y' - x'y'') + y''y''x'''}{3(x''y' + x'''y'' - x'y'')}.$$

Sey nun $Y = AX + B$ die Gleichung der Diagonale AA''; so ist

$$0 = A \cdot 0 + B, \text{ d. i. } B = 0.$$

$$\text{Also } Y = AX,\ y'' = Ax'',\ A = \frac{y''}{x''};$$

$$Y = \frac{y''}{x''} X.$$

Ist $Y = AX + B$ die Gleichung der Diagonale $A'A'''$; so ist

$$y' = Ax' + B,$$
$$0 = Ax''' + B,$$

$$y' = A(x' - x'''),\quad A = \frac{y'}{x' - x'''},$$

$$B = -Ax''' = -\frac{y'x'''}{x' - x'''}, \text{ und also}$$

$$Y = \frac{y'}{x' - x'''} X - \frac{y'x'''}{x' - x'''}$$

die gesuchte Gleichung von $A'A'''$.

Die Coordinaten des Durchschnittspunktes der beiden Diagonallinien sind nach §. 16. meines Lehrbuches der Kegelschnitte

$$-\frac{-\dfrac{y'x'''}{x' - x'''}}{\dfrac{y'}{x' - x'''} - \dfrac{y''}{x''}} = \frac{y'x''x'''}{y'x'' - y''(x' - x''')},$$

$$\frac{-\dfrac{y''}{x''} \cdot -\dfrac{y'x'''}{x' - x'''}}{\dfrac{y'}{x' - x'''} - \dfrac{y''}{x''}} = \frac{y'y''x'''}{y'x'' - y''(x' - x''')}.$$

Die Coordinaten des Mittelpunktes der Seite $A'A''$ sind nach §. 17. meines Lehrbuches der Kegelschnitte

$$\tfrac{1}{2}(x'+x''),\quad \tfrac{1}{2}(y'+y''),$$

und die Coordinaten des Mittelpunktes der Seite AA''' sind

$$\tfrac{1}{2}x''',\ 0;$$

also die Coordinaten des Mittelpunktes der Linie CD

$$\tfrac{1}{2}\left\{\tfrac{1}{2}(x'+x'')+\tfrac{1}{2}x'''\right\}=\tfrac{1}{4}(x'+x''+x'''),$$

$$\tfrac{1}{2}\left\{\tfrac{1}{2}(y'+y'')+0\right\}=\tfrac{1}{4}(y'+y'').$$

Sind nun in Fig. 64. die Coordinaten der Punkte A, B: x, y; x', y', und ist $BE=\tfrac{1}{3}AB$; so kann man die Coordinaten des Punktes E leicht auf folgende Art finden.

Man ziehe durch A eine Parallele AG, und durch B eine Parallele BH mit CF; so ist

$$BE:AE=BH:AG=1:4,$$

d. i. $BH=KG=\tfrac{1}{4}AG=\tfrac{1}{3}AK=\tfrac{1}{3}(x'-x)$,

und folglich offenbar die gesuchte Abscisse

$$=x'+\tfrac{1}{3}(x'-x)=\frac{4x'-x}{3}.$$

Auf ähnliche Art ist

$$AE:BE=EG:EH=4:1,$$

d. i. $EH=\tfrac{1}{4}EG=\tfrac{1}{3}HG=\pm\tfrac{1}{3}(y'-y)$,

und folglich offenbar die gesuchte Ordinate

$$=y'\pm(\pm\tfrac{1}{3}(y'-y))=y'+\tfrac{1}{3}(y'-y)=\frac{4y'-y}{3}.$$

Wendet man dies nun auf unsern Fall an, so ist die Abscisse von $S=$

$$=\tfrac{1}{3}\left\{x'+x''+x'''-\frac{y'x''x'''}{y'x''-y''(x'-x''')}\right\}$$

$$=\tfrac{1}{3}\left\{x'+x''+x'''-\frac{y'x''x'''}{x''y'+x'''y''-x'y''}\right\}$$

$$=\frac{\left\{\begin{array}{l}(x'+x'')(x''y'-x'y'')+x'y''x'''+x''x'''y''+x''x'''y'+x'''x'''y''\\ \qquad\qquad\qquad\qquad -x'y''x''' \qquad\qquad\qquad -x''x'''y'\end{array}\right\}}{3(x''y'+x'''y''-x'y'')}$$

$$=\frac{(x'+x'')(x''y'-x'y'')+(x''+x''')x'''y''}{3(x''y'+x'''y''-x'y'')}.$$

Die Ordinate von S ist auf ähnliche Art

$$=\tfrac{1}{3}\left\{y'+y''-\frac{y'y''x'''}{x''y'+x'''y''-x'y''}\right\}$$

$$=\frac{(y'+y'')(x''y'-x'y'')+y'y''x'''+x'''y''y''-y'y''x'''}{3(x''y'+x'''y''-x'y'')}$$

$$=\frac{(y'+y'')(x''y'-x'y'')+y''y''x'''}{3(x''y'+x'''y''-x'y'')}.$$

Die Vergleichung dieser Ausdrücke mit den oben gefundenen Ausdrücken für die Coordinaten des Schwerpunktes des Vierecks zeigt die Identität der beiderseitigen Ausdrücke, so daß also der aufgestellte Satz streng analytisch bewiesen ist.

Für ein Viereck mit zwey parallelen Seiten in Fig. 65. läßt sich dieser Satz noch leicht genug auf folgende Art auf einem mehr elementaren Wege beweisen. C, D, E seyen wie vorher die Mitten von $A'A''$, AA''', CD. AA'' sey eine der beiden Diagonalen, und B deren Durchschnittspunkt mit CD; so ist offenbar

$$\triangle\, CBA'' \sim \triangle\, ABD. \quad \text{Also}$$

$$CB : BD = A''C : AD = A'A'' : AA''',$$

$$CB : CB + BD = A'A'' : A'A'' + AA''',$$

$$CB : CD = A'A'' : A'A'' + AA''',$$

$$CB = \frac{CD\,.\,A'A''}{A'A''+AA'''},$$

welches für jede der beiden Diagonalen gilt, woraus erhellet, daß beide durch denselben Punkt B von CD gehen. Also

$$BE = CE - CB = \tfrac{1}{2}CD - \frac{CD\,.\,A'A''}{A'A''+AA'''}$$

$$= \frac{CD\,.\,A'A'' + CD\,.\,AA''' - 2\,CD\,.\,A'A''}{2(A'A''+AA''')}$$

$$= \frac{CD\,(AA''' - A'A'')}{2\,(AA''' + A'A'')}.$$

Der Schwerpunkt des Trapeziums liegt bekanntlich in CD und sey daher S. Man ziehe nun durch A' und A'' mit CD die Parallelen $A'F$ und $A''G$; so ist bekanntlich E der Schwerpunkt des Parallelogramms $A'A''FG$, und die Schwerpunkte der Dreyecke $AA'F$, $A''A'''G$ liegen in einer Linie HK, welche durch einen Punkt L in CD, für welchen $LD = \frac{1}{3}CD$ ist, mit $A'A''$ oder AA''' parallel gezogen ist. Weil nun, wie leicht gezeigt werden kann, $\Delta AA'F = \Delta A''A'''G$ und $HL = LK$ ist; so ist nach bekannten Sätzen:

$$(\Delta AA'F + \Delta A''A'''G) . LS = A'A''FG . ES, \text{ d. i.}$$
$$\tfrac{1}{2}(AF + A'''G) . LS = A'A'' . ES,$$
$$(AF + A'''G) . LS = 2A'A'' . ES,$$
$$(AA''' - A'A'') . LS = 2A'A'' . ES,$$
$$LS : ES = 2A'A'' : AA''' - A'A'',$$
$$LS + ES : ES = AA''' + A'A'' : AA''' - A'A'',$$
$$EL : ES = AA''' + A'A'' : AA''' - A'A'',$$
$$EL = ED - LD = \tfrac{1}{2}CD - \tfrac{1}{3}CD$$
$$= \tfrac{3}{6}CD - \tfrac{2}{6}CD = \tfrac{1}{6}CD,$$
$$\tfrac{1}{6}CD : ES = AA''' + A'A'' : AA''' - A'A'',$$
$$ES = \frac{CD(AA''' - A'A'')}{6(AA''' + A'A'')}.$$

Also

$$BE : ES = \frac{CD(AA''' - A'A'')}{2(AA''' + A'A'')} : \frac{CD(AA''' - A'A'')}{6(AA''' + A'A'')}$$
$$= \tfrac{1}{2} : \tfrac{1}{6} = 3 : 1,$$

so daß demnach $ES = \frac{1}{3}BE$ ist, w. z. b. w.

§. 96.

Lehrsatz. C sey ein Punkt innerhalb eines Dreyecks $AA'A''$, (Fig. 66.). Von diesem Punkte seyen auf AA'' und AA' die Perpendikel CB' und CB'' gefällt, und auf denselben CD' und CD'' so genommen, daß

$$CD' : CD'' = AA' : AA''$$

ist. Zieht man nun die Linie $D'D''$, und fällt von C auf $A'A''$ ein Perpendikel CB, so wird $D'D''$ von der verlängerten CB in E halbirt.

Der Beweis hiervon kann auf folgende Art geführt werden. Da $\angle AB'C = \angle AB''C = R$ ist, so ist in dem Vierecke $AB'CB''$ $\angle A + \angle B'CB'' = 2R$. Verlängert man nun CB' nach F, bis $CF = CD''$ ist, und zieht FD'; so ist

$$\angle D'CF + \angle B'CB'' = 2R = \angle A + \angle B'CB''.$$

Also $\angle D'CF = \angle A$. Aber nach der Voraussetzung

$$CD' : CD'' = AA' : AA'', \text{ d. i.}$$

$$CD' : CF = AA' : AA''.$$

Also $\Delta\, CD'F \sim \Delta\, AA'A''$, und folglich $\angle CFD' = \angle A''$. Aber wie oben

$$\angle A'' + \angle BCB' = 2R = \angle FCB + \angle BCB'.$$

Also $\angle A'' = \angle FCB = \angle CFD'$. Daher FD' parallel mit CB oder CE, und folglich

$$CD'' : CF = ED'' : ED'.$$

Aber nach der Construction $CD'' = CF$, und folglich $ED' = ED''$, w. z. b. w.

Nimmt man nun auf dem Perpendikel CB das Stück CD so, daß

$$CD' : CD : CD'' = AA' : A'A'' : AA''$$

ist, und zieht die Linien DD', DD'', $D'D''$; so werden nach dem bewiesenen Satze diese Linien von den verlängerten Perpendikeln CB, CB', CB'' halbirt, und C ist also der Schwerpunkt des Dreyecks $DD'D''$ oder von drey gleichen in D, D', D'' befindlichen Massen.

Seyen jetzt von dem Punkte C innerhalb des Vierecks $AA'A''A'''$ (Fig. 67.) auf die Seiten die Perpendikel CB, CB', CB'', CB''' gefällt, und auf denselben die Linien CD, CD', CD'', CD''' so genommen, daß

$$CD : CD' : CD'' : CD''' = AA' : A'A'' : A''A''' : A'''A.$$

Nun ziehe man die Diagonale $A'A'''$, und fälle auf sie von C ein Perpendikel CE, welches man so lang nimmt, daß

$$CD : CD''' : CE = AA' : AA''' : A'A''';$$

so ist C nach dem Vorhergehenden der Schwerpunkt von drey gleichen Massen (P) in D, D''', E. Jetzt verlängere man CE, bis $Ce = CE$ ist, und ziehe durch e mit $A'A'''$ die Parallele fg. Da nun

$$CD' : CD'' : CE = A'A'' : A''A''' : A'A''',$$

so ist auch $CD' : CD'' : Ce = A'A'' : A''A''' : A'A'''$. Aber, weil fg parallel mit $A'A'''$ ist:

$$A'A'' : A''A''' : A'A''' = fA'' : gA'' : fg,$$

und folglich auch

$$CD' : CD'' : Ce = fA'' : gA'' : fg,$$

so daß also C der Schwerpunkt von drey gleichen Massen (P) in D', D'', e ist. Es ist also C sowohl der Schwerpunkt dreyer gleicher Massen (P) in D, D''', E, als auch der Schwerpunkt dreyer gleicher Massen (P) in D', D'', e, und die gleichen Massen (P) in D, D', D'', D''', E, e sind demnach im Gleichgewichte, wenn C unterstützt ist. Die beiden gleichen Massen in E, e heben aber, weil $CE = Ce$ ist, einander auf, und C ist also der Schwerpunkt von vier gleichen Massen in D, D', D'', D''', wenn, wie wir voraussetzten,

$$CD : CD' : CD'' : CD''' = AA' : A'A'' : A''A''' : A'''A$$

ist.

Nimmt man in dem Fünfecke $AA'A''A'''A''''$ (Fig. 68.) auf den von C auf die Seiten gefällten Perpendikeln $CB, CB', CB'', CB''', CB''''$ die Stücke $CD, CD', CD'', CD''', CD''''$ so, daß

$$CD : CD' : CD'' : CD''' : CD'''' = AA' : A'A'' : A''A''' : A'''A'''' : A''''A$$

ist; so läßt sich auf ganz ähnliche Art wie vorher, mittelst des von dem Dreyecke und Vierecke bewiesenen Satzes, zeigen, daß C der Schwerpunkt von fünf gleichen Massen in D, D', D'', D''', D'''' ist. Denn man ziehe die Diagonale $A''A''''$, fälle auf sie ein Perpendikel, und nehme auf demselben CE so, daß

$$CD : CD' : CD'''' : CE = AA' : A'A'' : A''''A : A''A''''$$

ist; so ist nach dem Vorhergehenden C der Schwerpunkt dreyer gleichen Massen (P) in D, D', D'''', E. Man verlängere CE, bis $Ce = CE$ ist, und ziehe fg durch e mit $A''A''''$ parallel. Da nun

$$CD'' : CD''' : CE = A''A''' : A'''A'''' : A''A''''$$

und $CE = Ce$ ist, so ist auch

$$CD'' : CD''' : Ce = A''A''' : A'''A'''' : A''A''''.$$

Nun ist aber, weil $A''A''''$ mit fg parallel ist,

$$A''A''' : A'''A'''' : A''A'''' = fA''' : gA''' : fg,$$

und C ist folglich der Schwerpunkt von drey gleichen Massen (P) in D'', D''', e. Daher ist C der Schwerpunkt von sieben gleichen Massen in D, D', D'', D''', D'''', E, e, und folglich, weil, wegen $CE = Ce$, die beiden gleichen Massen in E und e einander aufheben, auch der gemeinschaftliche Schwerpunkt von fünf gleichen Massen in D, D', D'', D''', D''''.

Man sieht leicht, wie man auf diese Art immer von einem Vielecke zu dem nächstfolgenden übergehen kann, und wird daher jetzt folgenden allgemeinen Satz behaupten können:

Wenn man von einem Punkte innerhalb eines Polygons auf seine Seiten Perpendikel fällt, und auf diesen von dem angenommenen Punkte aus Stücke abschneidet, welche sich wie die Seiten des Polygons verhalten; so ist der angenommene Punkt der Schwerpunkt von so viel gleichen Massen in den Endpunkten der abgeschnittenen Stücke, als das Polygon Seiten hat.

Ist das Vieleck ein $n$eck, und bezeichnet man jede der gleichen Massen durch P, die Coordinaten der Endpunkte der abgeschnittenen Stücke durch x, y; x', y'; x'', y''; x''', y'''; u. s. w., die Coordinaten des angenommenen Punktes aber durch X, Y in Beziehung auf irgend ein rechtwinkliges Coordinatensystem; so ist nach den allgemeinen Formeln für den Schwerpunkt immer

$$nPX = Px + Px' + Px'' + Px''' + \ldots,$$
$$nPY = Py + Py' + Py'' + Py''' + \ldots;$$

$$nPX = P(x + x' + x'' + x''' + \ldots),$$
$$nPY = P(y + y' + y'' + y''' + \ldots);$$

$$nX = x + x' + x'' + x''' + \ldots,$$
$$nY = y + y' + y'' + y''' + \ldots;$$

$$X = \frac{1}{n}(x + x' + x'' + x''' + \ldots),$$

$$Y = \frac{1}{n}(y + y' + y'' + y''' + \ldots).$$

Einen ganz ähnlichen Satz über die Polyeder hat L'Huilier in den Mémoires de Berlin, 1786, aufgestellt. Ich kenne diesen Satz nur aus

Recueil de diverses propositions de Géométrie, par Puissant, seconde édition, Paris 1809, 8., p. 226.,

wo derselbe ohne Beweis angeführt wird.

§. 97.

Aufgabe. Den Schwerpunkt einer dreyseitigen Pyramide zu finden.

Auflösung. Die Pyramide sey $AA'A''A'''$, (Fig. 69.). Um den Schwerpunkt zu finden, halbire man die Seite $A'A''$ in B und ziehe die Linien AB, $A'''B$; nehme sodann $Bs = \frac{1}{3} BA'''$, $Bs' = \frac{1}{3} BA$, und ziehe As, $A'''s'$: so ist der Durchschnittspunkt S dieser beiden Linien der gesuchte Schwerpunkt.

Der Beweis wird leicht geführt. s ist nämlich nach §. 88. der Schwerpunkt des Triangels $A'A''A'''$. Die Linie As geht also nach bekannten Sätzen der Stereometrie durch die ähnlich liegenden Punkte aller mit dem Triangel $A'A''A'''$ paralleler Schnitte der Pyramide, d. i. durch die Schwerpunkte aller dieser Schnitte, und ist folglich nach §. 87. ein Durchmesser der Schwere der Pyramide. Auf dieselbe Art zeigt man, daß $A'''s'$ ein Durchmesser der Schwere ist. Der Schwerpunkt der Pyramide liegt also in As und $A'''s'$, und ist folglich der Durchschnittspunkt S dieser beiden Linien.

Man ziehe jetzt die Linie ss'. Da $Bs = \frac{1}{3} BA'''$, $Bs' = \frac{1}{3} BA$ ist; so ist

$$Bs : BA''' = 1 : 3, \quad Bs' : BA = 1 : 3,$$

und folglich $Bs : BA''' = Bs' : BA$. Also ss' parallel mit AA''', und demnach $\Delta\, sSs' \sim \Delta\, SAA'''$. Also

$$ss' : AA''' = sS : AS.$$

Aber $ss' : AA''' = Bs : BA''' = 1 : 3$. Also $sS : AS = 1 : 3$, und folglich $sS = \frac{1}{3} AS$, oder $sS = \frac{1}{4} As$.

Hieraus ergibt sich folgender merkwürdige Satz:

Der Schwerpunkt einer dreyseitigen Pyramide wird gefunden, wenn man den Schwerpunkt einer Seitenfläche mit der gegenüber liegenden Spitze durch eine gerade Linie verbindet, und diese gerade Linie in vier gleiche Theile theilt. Der erste Theilpunkt, von der Seitenfläche an gerechnet, oder der dritte, von der Spitze an, ist der Schwerpunkt der Pyramide.

Zugleich folgt aus den vorhergehenden Betrachtungen, daß die vier von den Spitzen nach den Schwerpunkten der gegenüber liegenden Seiten gezogenen geraden Linien sich in einem Punkte, welcher der Schwerpunkt der Pyramide ist, schneiden.

So wie in §. 88. für das Dreyeck fügen wir auch hier in Beziehung auf die dreyseitige Pyramide noch eine sinnreiche Methode, den Schwerpunkt zu finden, aus Poinsot Élémens de Statique, p. 182. sqq., bey. Vorher aber folgende Bemerkungen über das dreyseitige Prisma.

Die gerade Linie, welche die Schwerpunkte der beiden parallelen Grundflächen mit einander verbindet, geht offenbar durch die Schwerpunkte aller den Grundflächen paralleler Schnitte, und ist demnach ein Durchmesser der Schwere des Prisma's. Die parallelen Schnitte sind in diesem Falle alle einander gleich, und der Schwerpunkt des Prisma's liegt also in der Mitte der die Schwerpunkte der beiden Grundflächen verbindenden Linie, (§. 87.). Ist also die Entfernung der beiden Grundflächen von einander, d. i. die Höhe des Prisma's, $= h$; so ist offenbar der Abstand des Schwerpunktes von jeder der beiden Grundflächen $= \frac{1}{2}h$. Die die Schwerpunkte der beiden Grundflächen verbindende gerade Linie ist offenbar den drey Seitenflächen des Prisma's parallel, und aus den Betrachtungen, die oben über den Schwerpunkt des Dreyecks angestellt worden sind, folgt unmittelbar mittelst einer leichten geometrischen Betrachtung, daß, wenn man die Entfernung irgend einer Kante des Prisma's von der gegenüber liegenden Seitenfläche $= h'$ setzt, die Entfernung des Schwerpunktes des Prisma's von dieser Seitenfläche $= \frac{1}{3}h'$ ist.

Dies vorausgesetzt, halbire man, um den Schwerpunkt der dreyseitigen Pyramide $AA'A''A'''$ (Fig. 70.) zu finden, die Seite AA' in B, und lege durch B eine Ebene BCD, parallel mit der Ebene $A'A''A'''$; so ist auch $AC = CA''$, $AD = DA'''$. Sodann lege man auch durch C eine Ebene CEF, parallel mit $AA'A'''$; so ist auch $A'E = A''E$, $A''F = A'''F$. Endlich lege man durch BC und CF eine Ebene $BCFG$, so ist diese Ebene offenbar den Linien $A'A''$ und AA''' parallel, und demnach BG parallel mit AA''' und parallel mit CF, auch FG parallel mit $A'A''$ und parallel mit BC, so daß also $BCFG$ ein Parallelogramm und $A'G = A'''G$ ist.

Durch die obige Construction wird die gegebene Pyramide in zwey einander offenbar congruente dreyseitige Pyramiden $ABCD$, $A''ECF$, und in zwey dreyseitige Prismen $BCDFGA'''$, $BCEFGA'$ getheilt. Das erstere Prisma hat mit der Pyramide $ABCD$ offenbar einerley Grundfläche BCD und gleiche Höhe; daher ist das Prisma drey Mahl so groß wie die Pyramide. Eben so hat das Prisma $BCEFGA'$ einerley Grundfläche ECF und gleiche Höhe mit der Pyramide $CEFA''$; daher ist ebenfalls dieses Prisma drey Mahl so groß wie die Pyramide. Setzen wir nun den Inhalt der Pyramide $ABCD = a$, so ist das Prisma $BCDFGA''' = 3a$, die Pyramide $ECFA'' = a$, das Prisma $BCEFGA' = 3a$, und folglich die ganze Pyramide $AA'A''A''' = 8a$. Man setze nun die Höhe der ganzen Pyramide $= h$, und den Abstand ihres Schwerpunktes von der Fläche $A'A''A''' = x$, den Abstand des Schwerpunktes der Pyramide $CEA''F$ von derselben Fläche aber $= x'$; so ist der Abstand des Schwerpunktes der Pyramide $ABCD$ von $A'A''A'''$ offenbar $= \frac{1}{2}h + x'$, der Abstand des Schwerpunktes des Prisma's $BCDFGA'''$ von $A'A''A''' = \frac{1}{4}h$, und der Abstand des Schwerpunktes des Prisma's $BCEFGA'$ von $A'A''A''' = \frac{1}{3} \cdot \frac{h}{2} = \frac{1}{6}h$. Also ist nach bekannten Sätzen vom Schwerpunkte:

$$8ax = ax' + a\left(x' + \frac{h}{2}\right) + 3a \cdot \frac{h}{4} + 3a \cdot \frac{h}{6}$$

$$= ax' + ax' + \frac{ah}{2} + \frac{3ah}{4} + \frac{ah}{2}$$

$$= 2ax' + \frac{4ah}{4} + \frac{3ah}{4}$$

$$= \frac{7ah}{4} + 2ax',$$

$$x = \tfrac{7}{32} \cdot h + \frac{x'}{4}.$$

Macht man nun ganz dieselbe Construction in Beziehung auf die Pyramide $CEFA''$, deren Höhe $= \frac{1}{2} h$ ist, und so fort in Beziehung auf alle ähnliche Pyramiden, deren Höhen $\frac{1}{4} h$, $\frac{1}{8} h$, $\frac{1}{16} h$, u. s. w. sind; so ist, wenn man die Abstände der Schwerpunkte der auf einander folgenden Pyramiden durch x, x', x'', x''' u. s. w. bezeichnet, wie vorher:

$$x = \tfrac{7}{32} \cdot h + \frac{x'}{4},$$

$$x' = \tfrac{7}{32} \cdot \frac{h}{2} + \frac{x''}{4},$$

$$x'' = \tfrac{7}{32} \cdot \frac{h}{4} + \frac{x'''}{4},$$

$$x''' = \tfrac{7}{32} \cdot \frac{h}{8} + \frac{x''''}{4},$$

$$x'''' = \tfrac{7}{32} \cdot \frac{h}{16} + \frac{x'''''}{4},$$

u. s. w.

Die Abstände x, x', x'', x''' u. s. w. werden immer kleiner und kleiner, und können endlich als verschwindend betrachtet werden, so daß also durch successive Substitution der Abstand x des Schwerpunktes der gegebenen Pyramide von $A'A''A'''$ folgender unendlichen Reihe gleich ist:

$$x = \tfrac{7}{32}h + \frac{x'}{4}$$

$$= \tfrac{7}{32}h + \tfrac{7}{32} \cdot \frac{h}{8} + \frac{x''}{16}$$

$$= \tfrac{7}{32}h + \tfrac{7}{32} \cdot \frac{h}{8} + \tfrac{7}{32} \cdot \frac{h}{64} + \frac{x'''}{64}$$

$$= \tfrac{7}{32}h + \tfrac{7}{32} \cdot \frac{h}{8} + \tfrac{7}{32} \cdot \frac{h}{64} + \tfrac{7}{32} \cdot \frac{h}{512} + \frac{x''''}{256}$$

$$= \tfrac{7}{32}h + \tfrac{7}{32} \cdot \frac{h}{8} + \tfrac{7}{32} \cdot \frac{h}{64} + \tfrac{7}{32} \cdot \frac{h}{512} + \tfrac{7}{32} \cdot \frac{h}{4096} + \frac{x'''''}{1024}$$

u. s. w.

$$= \tfrac{7}{32}h \left\{ 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{64} + \frac{1}{512} + \frac{1}{4096} + \ldots \right\}$$

$$= \tfrac{7}{32}h \left\{ 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{8^3} + \frac{1}{8^4} + \frac{1}{8^5} + \ldots \right\}$$

$$= \tfrac{7}{32}h \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{8}} = \tfrac{7}{32}h \cdot \frac{1}{\frac{7}{8}} = \tfrac{7}{32}h \cdot \frac{8}{7}$$

$$= \tfrac{8}{32}h = \tfrac{1}{4}h,$$

so daß also der Schwerpunkt der Pyramide von jeder Seitenfläche um den vierten Theil der dieser Seitenfläche entsprechenden Höhe entfernt ist.

§. 98.

Lehrsatz. In dem Triangel ABC (Fig. 71.) sey $AD = \frac{1}{3}AB$, $AE = \frac{1}{3}AC$, und DE, parallel BC, gezogen. Zieht man nun die Linien CD, BE, welche sich in G schneiden, und dann die Linie AGE; so ist $AG = GE$, $BF = FC$.

Beweis. Es ist offenbar $\Delta\, DGE \sim \Delta\, BCG$, und folglich

$$GE : BG = DE : BC = AD : AB = 1 : 3.$$

Also $GE = \frac{1}{3}BG$, und eben so $DG = \frac{1}{3}CG$. Nun ist $\Delta\, BDE$

$= \Delta CDE$; also $\Delta BDE - \Delta DGE = \Delta CDE - \Delta DGE$, d. i. $\Delta BDG = \Delta CGE$. Aber $\Delta BDG = \frac{2}{3} \Delta ABG$, $\Delta CEG = \frac{2}{3} \Delta ACG$; also $\frac{2}{3} \Delta ABG = \frac{2}{3} \Delta ACG$, und folglich $\Delta ABG = \Delta ACG$. Da nun diese beiden Triangel einerley Grundlinie AG haben, so haben sie auch gleiche Höhen. Diese Höhen sind aber zugleich die Höhen der Triangel ABF und ACF in Beziehung auf deren gemeinschaftliche Grundlinie AF. Daher sind auch die beiden letztern Triangel gleich, und es ist folglich, weil sie eine gemeinschaftliche, von A auf BC gefällte, Höhe haben, die Grundlinie BF der Grundlinie FC gleich, w. z. b. w.

Da nun nach dem Obigen $DG = \frac{1}{3} CG$ war, so ist $\Delta BDG = \frac{1}{3} \Delta CBG$. Aber $BF = FC$. Also $\Delta FBG = \Delta CFG = \frac{1}{2} \Delta CBG$, oder $\Delta CBG = 2 \Delta FBG$. Also $\Delta BDG = \frac{2}{3} \Delta FBG$. Es war aber auch $\Delta BDG = \frac{2}{3} \Delta ABG$. Also $\frac{2}{3} \Delta FBG = \frac{2}{3} \Delta ABG$, und folglich $\Delta FBG = \Delta ABG$. Da nun diese beiden Triangel einerley Höhe haben, so müssen auch ihre Grundlinien AG und FG einander gleich seyn, w. z. b. w.

§. 99.

Man ziehe nun in Fig. 69. noch die Linie BSB', so ist nach dem vorhergehenden Satze, weil nach §. 88. $Bs : BA''' = Bs' : BA = 1 : 3$ ist, $AB' = A'''B'$, und $BS = SB'$. Da nun auch $A'B = BA''$ war, so ergibt sich hieraus folgender merkwürdige Satz:

Der Schwerpunkt einer dreyseitigen Pyramide liegt in der Mitte jeder geraden Linie, welche die Mittelpunkte zweyer gegenüber stehenden Kanten der Pyramide mit einander verbindet.

Aus diesem Satze folgt denn zugleich, daß die drey geraden Linien, welche die Mittelpunkte der drey Paare gegenüber liegender Kanten einer dreyseitigen Pyramide mit einander verbinden, sich immer in einem Punkte, dem Schwerpunkte der Pyramide, schneiden.

Der Entdecker dieses merkwürdigen Satzes mag Monge seyn. (M. s. Correspondance sur l'école polytechnique, Tome II. p. 1. Traité élémentaire de Statique, p. 103., wo der Satz ohne Beweis angeführt wird.)

Einen andern Beweis, als den oben von mir gegebenen, findet man in

Crelle's Sammlung mathematischer Aufsätze und Bemerkungen, Berlin 1821, 8., S. 128.,

welcher nach des Verfassers eigner Bemerkung mit dem von Monge in der Correspondance sur l'école polytechnique, a. a. O., gegebenen übereinstimmt.

§. 100.

Der Inhalt einer dreyseitigen Pyramide kann immer durch die drey geraden Linien, welche die Mitten der gegenüber stehenden Kanten verbinden, und die von ihnen am Schwerpunkte eingeschlossenen Winkel ausgedrückt werden. $AA'A''A'''$ (Fig. 72.) sey nämlich die gegebene Pyramide, B, B', B'', B''', B'''', B''''' seyen die Mittelpunkte der Kanten, S sey der Schwerpunkt. Die drey die Mittelpunkte der Kanten verbindenden Linien seyen a, b, c, und die von ihnen am Schwerpunkte eingeschlossenen Winkel α, β, γ; so sind nach dem vorhergehenden Paragraphen $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}b$, $\frac{1}{2}c$ die drey Kanten der Pyramide $SB'B''B'''$, und α, β, γ die von den Kanten an dem Punkte S eingeschlossenen Winkel.

Setzen wir nun die Höhe der gegebenen Pyramide $= 1$, so ist offenbar die Höhe der Pyramide $AB'B''B''' = \frac{1}{2}$, und die Höhe der Pyramide $SB'B''B''' = \frac{1}{4}$. Also

$$\begin{aligned} AB'B''B''' : SB'B''B''' &= \tfrac{1}{2} : \tfrac{1}{4} \\ &= 2 : 1. \end{aligned}$$

Setzt man ferner die Grundfläche $A'A''A'''$ der gegebenen Pyramide $= 1$, so ist nach einem sehr bekannten stereometrischen Satze die Fläche $B'B''B''' = \frac{1}{4}$, und folglich

$$\begin{aligned} AA'A''A''' : AB'B''B''' &= 1 \cdot 1 : \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{4} \\ &= 1 : \tfrac{1}{8} = 8 : 1, \end{aligned}$$

d. i. wie die Producte der Grundflächen in die Höhen. Also, in Verbindung mit der erstern Proportion:

$$AA'A''A''' : SB'B''B''' = 2 . 8 : 1 . 1 = 16 : 1,$$

$$AA'A''A''' = 16 . SB'B''B'''.$$

Aber nach §. 19.:

$SB'B''B'''$

$$= \tfrac{1}{3} . \frac{a}{2} . \frac{b}{2} . \frac{c}{2} \sqrt{\operatorname{Sin}\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} . \operatorname{Sin}\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2} . \operatorname{Sin}\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2} . \operatorname{Sin}\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}}$$

$$= \tfrac{1}{6} . \frac{a}{2} . \frac{b}{2} . \frac{c}{2} \sqrt{1 - \operatorname{Cos}\alpha^2 - \operatorname{Cos}\beta^2 - \operatorname{Cos}\gamma^2 + 2\operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Cos}\gamma}$$

$$= \tfrac{1}{24} abc \sqrt{\operatorname{Sin}\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} \operatorname{Sin}\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2} \operatorname{Sin}\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2} \operatorname{Sin}\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}}$$

$$= \tfrac{1}{48} abc \sqrt{1 - \operatorname{Cos}\alpha^2 - \operatorname{Cos}\beta^2 - \operatorname{Cos}\gamma^2 + 2\operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Cos}\gamma}.$$

Also

$AA'A''A'''$

$$= \tfrac{16}{24} abc \sqrt{\operatorname{Sin}\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} . \operatorname{Sin}\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2} . \operatorname{Sin}\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2} . \operatorname{Sin}\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}}$$

$$= \tfrac{16}{48} abc \sqrt{1 - \operatorname{Cos}\alpha^2 - \operatorname{Cos}\beta^2 - \operatorname{Cos}\gamma^2 + 2\operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Cos}\gamma}$$

$$= \tfrac{2}{3} abc \sqrt{\operatorname{Sin}\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} . \operatorname{Sin}\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2} . \operatorname{Sin}\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2} . \operatorname{Sin}\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}}$$

$$= \tfrac{1}{3} abc \sqrt{1 - \operatorname{Cos}\alpha^2 - \operatorname{Cos}\beta^2 - \operatorname{Cos}\gamma^2 + 2\operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Cos}\gamma}.$$

Der letztere Ausdruck mag von Monge herrühren.

§. 101.

Aufgabe. Die Coordinaten X, Y, Z des Schwerpunktes einer dreyseitigen Pyramide durch die Coordinaten $x, y, z;\ x', y', z';\ x'', y'', z'';\ x''', y''', z'''$ der vier Spitzen der Pyramide in Beziehung auf drey rechtwinklige Coordinatenebenen auszudrücken.

Auflösung. Man bezeichne die Coordinaten von B und B' (Fig. 69.) durch $X', Y', Z';\ X'', Y'', Z''$. Da B

die Mitte von $A'A''$ ist, so ist nach §. 17. meines Lehrbuches der Kegelschnitte $X' = \frac{1}{2}(x' + x'')$, und auf dieselbe Art, weil B' die Mitte von AA''' ist: $X'' = \frac{1}{2}(x + x''')$. Nun ist aber S die Mitte von BB', und folglich

$$\begin{aligned} X &= \tfrac{1}{2}(X' + X'') \\ &= \tfrac{1}{2}\left\{\tfrac{1}{2}(x' + x'') + \tfrac{1}{2}(x + x''')\right\} \\ &= \tfrac{1}{2}\left\{\tfrac{1}{2}(x + x' + x'' + x''')\right\} \\ &= \tfrac{1}{4}(x + x' + x'' + x'''). \end{aligned}$$

Ganz auf dieselbe Art kann man in Beziehung auf Y und Z verfahren, und es ist also:

$$\begin{aligned} X &= \tfrac{1}{4}(x + x' + x'' + x'''), \\ Y &= \tfrac{1}{4}(y + y' + y'' + y'''), \\ Z &= \tfrac{1}{4}(z + z' + z'' + z'''). \end{aligned}$$

Dächte man sich in den vier Spitzen der Pyramide vier gleiche Massen, deren jede $= P$, und bezeichnet die Coordinaten des gemeinschaftlichen Schwerpunktes dieser vier Massen durch X, Y, Z; so ist bekanntlich

$$\begin{aligned} X(P + P + P + P) &= Px + Px' + Px'' + Px''', \\ Y(P + P + P + P) &= Py + Py' + Py'' + Py''', \\ Z(P + P + P + P) &= Pz + Pz' + Pz'' + Pz'''; \end{aligned}$$

d. i.

$$\begin{aligned} 4PX &= P(x + x' + x'' + x'''), \\ 4PY &= P(y + y' + y'' + y'''), \\ 4PZ &= P(z + z' + z'' + z'''); \\ 4X &= x + x' + x'' + x''', \\ 4Y &= y + y' + y'' + y''', \\ 4Z &= z + z' + z'' + z'''; \\ X &= \tfrac{1}{4}(x + x' + x'' + x'''), \\ Y &= \tfrac{1}{4}(y + y' + y'' + y'''), \\ Z &= \tfrac{1}{4}(z + z' + z'' + z'''). \end{aligned}$$

Es erhellet also, daß eine durch den ganzen körperlichen Raum einer dreyseitigen Pyramide gleichförmig vertheilte Masse und vier gleich große Massen in den Spitzen der Pyramide, deren Schwerpunkte diese Spitzen sind, einerley Schwerpunkt haben.

§. 102.

Aufgabe. Den Schwerpunkt einer vielseitigen Pyramide zu finden.

Auflösung. Man verbinde die Spitze der Pyramide mit dem Schwerpunkte der Grundfläche durch eine gerade Linie, so geht diese Linie offenbar durch alle ähnlich liegende Punkte in den mit der Grundfläche parallelen Schnitten, d. i. durch die Schwerpunkte aller dieser Schnitte, und ist demnach ein Durchmesser der Schwere. Man theile nun die gegebene Pyramide in dreyseitige Pyramiden, so sind die Schwerpunkte aller dieser Pyramiden um den vierten Theil der Höhe der gegebenen Pyramide von ihrer Grundfläche entfernt, (§. 97.) und liegen demnach alle in einer der Grundfläche parallelen Ebene, welche daher eine Ebene der Schwere der gegebenen Pyramide ist. Der gesuchte Schwerpunkt ist also der Durchschnittspunkt dieser Ebene, welche um ein Viertel der Höhe von der Grundfläche der gegebenen Pyramide entfernt ist, mit dem obigen Durchmesser der Schwere. Die Höhe der gegebenen Pyramide und dieser Durchmesser der Schwere werden aber von der der Grundfläche parallelen Ebene der Schwere in proportionale Theile getheilt, und man findet daher den Schwerpunkt einer mehrseitigen Pyramide auf dieselbe Art wie den einer dreyseitigen, d. i. Man verbindet die Spitze mit dem Schwerpunkte der Grundfläche durch eine gerade Linie, und theilt diese Linie in vier gleiche Theile; so ist der der Grundfläche zunächst liegende Theilpunkt der gesuchte Schwerpunkt.

Da ein Kegel als eine Pyramide von unendlich vielen Seiten betrachtet werden kann, so wird der Schwerpunkt eines Kegels offenbar auf dieselbe Art gefunden. Der Schwerpunkt der Grundfläche ist in diesem Falle ihr Mittelpunkt.

§. 103.

Aufgabe. Den Schwerpunkt einer abgekürzten Pyramide und eines abgekürzten Kegels zu finden.

Auflösung. 1) Man ergänze die abgekürzte Pyramide zur ganzen Pyramide, (Fig. 73.), und verbinde die Spitze A mit dem Schwerpunkte G der untern Grundfläche; so ist g offenbar ein ähnlich liegender Punkt in der der untern Grundfläche ähnlichen obern Grundfläche, und daher der letztern Schwerpunkt. Auch ist AG offenbar sowohl ein Durchmesser der ganzen als auch der abgestumpften Pyramide, da sie durch die Schwerpunkte aller den beiden Grundflächen paralleler Schnitte geht. P sey der Inhalt der ergänzenden und Q der Inhalt der abgestumpften, also $P+Q$ der Inhalt der ganzen Pyramide. Die Entfernung des Schwerpunktes der ergänzenden Pyramide von A ist $=\frac{3}{4}Ag$, die Entfernung des Schwerpunktes der ganzen Pyramide von A in der Linie AG, $=\frac{3}{4}AG$; und wenn man die Entfernung des Schwerpunktes der abgekürzten Pyramide in der Linie gG von der untern Grundfläche durch x bezeichnet, so ist $AG-x$ die Entfernung dieses Schwerpunktes von A, und folglich nach bekannten Sätzen:

$$(P+Q)\cdot\tfrac{3}{4}AG=P\cdot\tfrac{3}{4}Ag+Q\cdot(AG-x).$$

Sind nun s und S zwey ähnlich liegende Seiten der obern und untern Grundfläche, so ist bekanntlich:

$$P:P+Q=s^3:S^3,$$
$$P:Q=s^3:S^3-s^3,$$
$$P+Q=\frac{PS^3}{s^3},\quad Q=\frac{P(S^3-s^3)}{s^3}.$$

Auch ist, wie leicht aus bekannten stereometrischen Sätzen erhellet:

$$Ag:AG=s:S,$$
$$Ag:AG-Ag=s:S-s,$$
$$AG:AG-Ag=S:S-s,$$

oder, wenn man $AG-Ag=gG$, die Entfernung der

Schwerpunkte der beiden Grundflächen von einander, durch a bezeichnet:

$$Ag : a = s : S - s,$$
$$AG : a = S : S - s,$$
$$Ag = \frac{as}{S-s}, \quad AG = \frac{aS}{S-s}.$$

Also, wenn man die gefundenen Ausdrücke in die obige Gleichung substituirt:

$$\frac{PS^3}{s^3} \cdot \frac{3aS}{4(S-s)} = P \cdot \frac{3as}{4(S-s)} + \frac{P(S^3-s^3)}{s^3} \cdot \left(\frac{aS}{S-s} - x\right),$$

$$\frac{3aS^4}{4s^3 \cdot (S-s)} = \frac{3as}{4(S-s)} + \left(\frac{S^3-s^3}{s^3}\right)\left\{\frac{aS-(S-s)x}{S-s}\right\},$$

$$\left(\frac{S^3-s^3}{s^3}\right)\left\{\frac{aS-(S-s)x}{S-s}\right\} = \frac{3aS^4}{4s^3 \cdot (S-s)} - \frac{3as}{4(S-s)}$$
$$= \frac{3a(S^4-s^4)}{4s^3 \cdot (S-s)},$$

$$\frac{aS-(S-s)x}{S-s} = \frac{3a(S^4-s^4)}{4(S-s)(S^3-s^3)},$$

$$aS-(S-s)x = \frac{3a(S^4-s^4)}{4(S^3-s^3)},$$

$$S^4 - s^4 = (S-s)(S^3+sS^2+s^2S+s^3),$$
$$S^3 - s^3 = (S-s)(S^2+sS+s^2),$$

$$aS-(S-s)x = \frac{3a(S^3+sS^2+s^2S+s^3)}{4(S^2+sS+s^2)},$$

$$(S-s)x = aS - \frac{3a(S^3+sS^2+s^2S+s^3)}{4(S^2+sS+s^2)}$$
$$= \frac{a(4S^3+4sS^2+4s^2S-3S^3-3sS^2-3s^2S-3s^3)}{4(S^2+sS+s^2)}$$
$$= \frac{a(S^3+sS^2+s^2S-3s^3)}{4(S^2+sS+s^2)}.$$

Dividirt man den Zähler durch $S-s$, so erhält man den Quotienten $S^2+2sS+3s^2$, so daß also

$$x = \frac{a(S^2+2sS+3s^2)}{4(S^2+sS+s^2)}.$$

2) Den Schwerpunkt des abgestumpften Kegels findet man auf ganz ähnliche Art. Der Schwerpunkt liegt offenbar in der die Mittelpunkte der Grundflächen verbindenden Linie gG, (Fig. 74.). Sein Abstand von der untern Grundfläche oder von dem Punkte G sey $= x$, so ist sein Abstand von $A = AG - x$, und es ist auf ganz ähnliche Art wie vorher bey der Pyramide:

$$(P + Q) \cdot \tfrac{3}{4} AG = P \cdot \tfrac{3}{4} Ag + Q \cdot (AG - x).$$

Sind nun r, R die Halbmesser der obern und untern Grundfläche, so ist bekanntlich:

$$P : P + Q = r^3 : R^3,$$
$$P : Q = r^3 : R^3 - r^3,$$
$$P + Q = \frac{PR^3}{r^3}, \quad Q = \frac{P(R^3 - r^3)}{r^3}.$$

Auch ist

$$Ag : AG = r : R,$$
$$Ag : AG - Ag = r : R - r,$$
$$AG : AG - Ag = R : R - r,$$

oder, wenn man $AG - Ag = Gg = a$ setzt:

$$Ag : a = r : R - r,$$
$$AG : a = R : R - r,$$
$$Ag = \frac{ar}{R - r}, \quad AG = \frac{aR}{R - r}.$$

Also

$$\frac{PR^3}{r^3} \cdot \frac{3aR}{4(R - r)} = P \cdot \frac{3ar}{4(R - r)} + \frac{P(R^3 - r^3)}{r^3} \cdot \left(\frac{aR}{R - r} - x\right),$$

und folglich ganz auf dieselbe Art, wie vorher bey der Pyramide:

$$X = \frac{a(R^2 + 2rR + 3r^2)}{4(R^2 + rR + r^2)}.$$

§. 104.

Aufgabe. Den Schwerpunkt der Seitenfläche einer Pyramide und eines Kegels zu finden.

Auflösung. Man verbinde die Spitze der Pyramide mit dem Schwerpunkte des Umfanges der Grundfläche durch eine gerade Linie; so geht diese offenbar durch die Schwerpunkte der Umringe aller der Grundfläche paralleler Schnitte der Pyramide, weil alle diese Schnitte ähnliche Figuren, und die Schwerpunkte ähnlicher Figuren ähnlich liegende Punkte sind. Der Schwerpunkt der Seitenfläche der Pyramide liegt also nach §. 87. in der gezogenen geraden Linie, welche demnach ein Durchmesser der Schwere für die Oberfläche der Pyramide ist. Legt man nun ferner durch den Schwerpunkt irgend einer dreyseitigen Seitenfläche der Pyramide eine mit der Grundfläche parallele Ebene; so geht diese Ebene, wie leicht ohne Weiteres erhellen wird, durch die Schwerpunkte aller Seitenflächen hindurch, so daß also der gesuchte Schwerpunkt der Durchschnittspunkt dieser Ebene mit der die Spitze der Pyramide und den Schwerpunkt des Umfanges ihrer Grundfläche verbindenden geraden Linie seyn muß. Erinnert man sich nun an den Satz von dem Schwerpunkte des Dreyecks, so wird leicht erhellen, daß *der Schwerpunkt der Seitenfläche der Pyramide in der geraden Linie liegt, welche die Spitze der Pyramide mit dem Schwerpunkte des Umfanges der Grundfläche verbindet, und von der Spitze der Pyramide um zwey Drittheile dieser Linie entfernt ist.*

Einen Kegel kann man als eine Pyramide mit unendlich vielen Seiten betrachten, und es wird daher leicht die Richtigkeit folgendes Satzes erhellen:

Der Schwerpunkt der Seitenfläche eines Kegels liegt in der geraden Linie, welche die Spitze des Kegels mit dem Mittelpunkte seiner Grundfläche verbindet, und ist von der Spitze um zwey Drittheile dieser Linie entfernt.

§. 105.

Aufgabe. Den Schwerpunkt der Seitenfläche eines geraden abgekürzten Kegels zu finden.

Auflösung. Der gegebene Kegel sey durch die Umdrehung des rechtwinkligen Trapeziums $ABCD$ (Fig. 75.) entstanden. Man denke sich den ganzen Kegel ergänzt, und setze $AE = H$, $AB = h$, die Entfernung des offenbar in AB liegenden Schwerpunktes von dem Punkte A aber $= x$. Die Seitenfläche des ganzen Kegels ist bekanntlich $= \frac{1}{2} ED \,.\, 2R\pi$, und die Seitenfläche des ergänzenden $= \frac{1}{2} EC \,.\, 2r\pi$, wenn wir die Halbmesser der beiden Grundflächen des abgekürzten Kegels durch R und r bezeichnen. Die Seitenfläche des abgestumpften Kegels ist also

$$= ED \,.\, R\pi - EC \,.\, r\pi.$$

Aber $EC : ED = AC : BD = r : R$, und folglich $EC \,.\, R = ED \,.\, r$; also die Seitenfläche des abgestumpften Kegels

$$= ED \,.\, R\pi - EC \,.\, r\pi - EC \,.\, R\pi + ED \,.\, r\pi$$
$$= (ED - EC) R\pi + (ED - EC) r\pi$$
$$= (ED - EC)(R + r)\pi = CD \,.\, (R + r)\pi.$$

Nach bekannten Sätzen über den Schwerpunkt ist also, wenn man die Entfernungen der Schwerpunkte des ganzen, ergänzenden und abgestumpften Kegels von E nimmt, nach dem im vorhergehenden Paragraphen bewiesenen Satze:

$$EC \,.\, r\pi \,.\, \tfrac{2}{3}H + CD \,.\, (R + r)\pi \,.\, (H + x) = ED \,.\, R\pi \,.\, \tfrac{2}{3}(H + h),$$

oder

$$\tfrac{2}{3}Hr\sqrt{H^2 + r^2} + (R + r)(H + x)\sqrt{h^2 + (R - r)^2}$$
$$= \tfrac{2}{3}(H + h)R\sqrt{(H + h)^2 + R^2}.$$

Nun ist aber

$$EA : AC = EB : BD, \quad H : r = H + h : R;$$

$$H : h = r : R - r, \quad H = \frac{rh}{R - r};$$

$$H^2 + r^2 = \frac{r^2h^2}{(R - r)^2} + r^2 = \frac{r^2[h^2 + (R - r)^2]}{(R - r)^2},$$

$$Hr\sqrt{H^2 + r^2} = \frac{r^3h}{(R - r)^2}\sqrt{h^2 + (R - r)^2},$$

$$H + h = \frac{rh}{R - r} + h = \frac{Rh}{R - r},$$

$$(H+h)^2+R^2=\frac{R^2h^2}{(R-r)^2}+R^2=\frac{R^2[h^2+(R-r)^2]}{(R-r)^2},$$

$$(H+h)R\sqrt{(H+h)^2+R^2}=\frac{R^3h}{(R-r)^2}\sqrt{h^2+(R-r)^2}.$$

Setzt man nun dieses in die obige Gleichung, und hebt sogleich auf, was sich aufheben läßt, so erhält man:

$$\frac{2r^3h}{3(R-r)^2}+(R+r)(H+x)=\frac{2R^3h}{3(R-r)^2}.$$

Also

$$H+x=\frac{2(R^3-r^3)h}{3(R-r)^2(R+r)},$$

$$x=\frac{2(R^3-r^3)h}{3(R-r)^2(R+r)}-H=\frac{2(R^3-r^3)h}{3(R-r)^2(R+r)}-\frac{rh}{R-r}$$

$$=\frac{2(R^3-r^3)h}{3(R-r)^2(R+r)}-\frac{3rh(R^2-r^2)}{3(R-r)^2(R+r)}$$

$$=\frac{h(2R^3-2r^3-3rR^2+3r^3)}{3(R-r)^2(R+r)}$$

$$=\frac{h(2R^3-3R^2r+r^3)}{3(R-r)^2(R+r)}$$

$$=\frac{h(2R^3-4R^2r+2Rr^2+R^2r-2Rr^2+r^3)}{3(R-r)^2(R+r)}$$

$$=\frac{h[2R(R^2-2Rr+r^2)+r(R^2-2Rr+r^2)]}{3(R-r)^2(R+r)}$$

$$=\frac{h(2R+r)(R^2-2Rr+r^2)}{3(R-r)^2(R+r)}$$

$$=\frac{h(2R+r)(R-r)^2}{3(R+r)(R-r)^2}=\frac{h(2R+r)}{3(R+r)}.$$

Für $r=0$, d. i. für den ganzen Kegel, erhält man $x=\frac{2Rh}{3R}=\frac{2}{3}h$, wie im vorhergehenden Paragraphen.

Für $R=r$, d. i. für den Cylinder, wird $x=\frac{h(2R+R)}{3(R+R)}=\frac{3hR}{6R}=\frac{1}{2}h$, wie es bekanntlich auch seyn muß.

§. 106.

Lehrsatz. Der Inhalt des Truncus irgend eines Prisma's wird gefunden, wenn man seine eine Grundfläche mit dem von dem Schwerpunkte der andern Grundfläche auf die erste gefällten Perpendikel multiplicirt.

Sey $ABCDEF$ (Fig. 76.) der Truncus eines dreyseitigen Prisma's. Die von F, E, D auf die Ebene ABC gefällten Perpendikel seyen x, x', x''.

Um nun den Inhalt des Truncus zu finden, lege man durch E eine Ebene GEH, welche mit ABC parallel ist, und ziehe FH; so besteht der gegebene Truncus, den wir durch T bezeichnen wollen, aus folgenden Theilen:

1) dem Prisma $ABCEGH$, mit der Höhe x' und der Grundfläche $ABC = G$;
2) der dreyseitigen Pyramide $FGEH$, mit der Höhe $x - x'$, wie leicht erhellet, und der Grundfläche $GEH = ABC = G$;
3) der dreyseitigen Pyramide $FEDH$, welche aber offenbar, wenn man GD zieht, der Pyramide $GEDH$ gleich ist, da diese beiden Pyramiden einerley Grundfläche EDH und, weil FG der Grundfläche EDH parallel ist, auch gleiche Höhen haben. Die Pyramide $GEDH$ hat aber die Grundfläche $GEH = ABC = G$, und offenbar die Höhe $x'' - x'$.

Es ist also

$$\begin{aligned} T &= G\,.\,x' + \tfrac{1}{3}G\,.\,(x - x') + \tfrac{1}{3}G\,.\,(x'' - x') \\ &= G\,.\,\frac{3x' + x - x' + x'' - x'}{3} \\ &= G\,.\,\frac{x + 3x' - 2x' + x''}{3} \\ &= G\,.\,\frac{x + x' + x''}{3}. \end{aligned}$$

Da aber bekanntlich der Schwerpunkt eines Dreyecks mit dem Schwerpunkte dreyer in seinen Spitzen befindlicher gleich schwerer Massen einerley ist; so ist nach bekannten Sätzen vom

Schwerpunkte $\frac{x+x'+x''}{3}$ die Entfernung des Schwerpunktes des Dreyecks FED von der Ebene ABC, und folglich, wenn man diese Entfernung durch P bezeichnet, der Inhalt des Truncus =

$$V=PG,$$

so daß also unser Satz für das dreyseitige Prisma gilt.

Hat man einen mehrseitigen prismatischen Truncus, so zerlege man ihn, wie leicht geschehen kann, in mehrere dreyseitige, deren Grundflächen wir nach der Reihe durch G', G'', G''', G'''' u. s. w., und die von den Schwerpunkten der andern Grundflächen auf jene gefällten Perpendikel durch P', P'', P''', P'''' u. s. w. bezeichnen wollen; so ist der Inhalt des gegebenen Truncus =

$$V=P'G'+P''G''+P'''G'''+P''''G''''+\ldots$$

nach dem Vorhergehenden, wo aber

$$G'+G''+G'''+G''''+\ldots=G,$$

d. i. der Grundfläche des gegebenen Truncus gleich ist.

Nach §. 86. ist aber, wenn P die Entfernung des Schwerpunktes der andern Grundfläche des gegebenen Truncus von der Grundfläche G bezeichnet, und g', g'', g''', g'''' u. s. w. die einzelnen Dreyecke der obern Grundfläche bedeuten:

$$P=\frac{P'g'+P''g''+P'''g'''+P''''g''''+\ldots}{g'+g''+g'''+g''''+\ldots}.$$

Man habe jetzt einen vierseitigen prismatischen Truncus $abcda'b'c'd'$, (Fig. 77.), in welchem $aa'cc'$ eine Diagonalebene ist. Die spitzen Neigungswinkel der Ebene $abcd$ und $a'b'c'd'$ gegen diese Diagonalebene seyen α und α', die Höhen der Dreyecke abc, acd, $a'b'c'$, $a'c'd'$ in Beziehung auf ac und $a'c'$ als Grundlinien aber H, h, H', h'; so ist klar, daß

$$\Delta\, abc : \Delta\, acd = H : h,$$

$$\Delta\, a'b'c' : \Delta\, a'c'd' = H' : h'.$$

Sind nun die gleichen Entfernungen der Punkte b, b' und d, d' von der Diagonalebene $aa'cc'$, e und f; so ist offenbar nach bekannten Sätzen der Stereometrie:

$$e = H \operatorname{Sin} \alpha = H' \operatorname{Sin} \alpha',$$
$$f = h \operatorname{Sin} \alpha = h' \operatorname{Sin} \alpha'.$$
$$\text{Also } H : H' = \operatorname{Sin} \alpha' : \operatorname{Sin} \alpha,$$
$$h : h' = \operatorname{Sin} \alpha' : \operatorname{Sin} \alpha,$$
$$H : H' = h : h',$$
$$H : h = H' : h',$$
$$\Delta\, abc : \Delta\, acd = \Delta\, a'b'c' : \Delta\, a'c'd'.$$

Also auch im obigen Falle

$$G' : g' = G'' : g'' = G''' : g''' = G'''' : g'''' = \ldots = 1 : m.$$

Also

$$g' = mG', \; g'' = mG'', \; g''' = mG''', \; g'''' = mG'''', \text{ u. s. w.},$$

und demnach

$$P = \frac{P'.\, mG' + P''.\, mG'' + P'''.\, mG''' + P''''.\, mG'''' + \ldots}{mG' + mG'' + mG''' + mG'''' + \ldots}$$
$$= \frac{m(P'G' + P''G'' + P'''G''' + P''''G'''' + \ldots)}{m(G' + G'' + G''' + G'''' + \ldots)}$$
$$= \frac{P'G' + P''G'' + P'''G''' + P''''G'''' + \ldots}{G' + G'' + G''' + G'''' + \ldots},$$

d. i.

$$P = \frac{V}{G}, \text{ und folglich}$$
$$V = PG,$$

w. z. b. w.

Man findet diesen merkwürdigen Satz in den Annales de Mathématiques, T. II. 1811, 1812, p. 94., wo er von Servois, L'Huilier, Rochat, Labrousse und Fauquier ungefähr eben so, wie vorher, bewiesen ist.

§. 107.

Noch theile ich hier aus den Annales de Mathématiques, Tom. III., ein Paar in gewisser Verbindung mit einander stehende Sätze über den Schwerpunkt des Vierecks und der Pyramiden mit.

Seite 76. a. a. O. beweiset Berard, (Professeur de Mathématiques à Briançon,) folgenden Satz:

Man findet den Schwerpunkt eines Vierecks, wenn man die Mitte jeder Diagonale mit einem solchen Punkte der andern verbindet, welcher so weit von dem einen Endpunkte dieser Diagonale entfernt ist, wie der Durchschnittspunkt beider Diagonalen von dem andern Endpunkte. Der Durchschnittspunkt der zwey so erhaltenen Linien ist der Schwerpunkt des Vierecks.

Es ist bloß zu beweisen, daß, wenn in Fig. 78. $AF = FC$ und $GD = BE$ ist, der Schwerpunkt des Vierecks $ABCD$ in der Linie FG liegt. Zu dem Ende nehme man $BH = \frac{2}{3}BF$, $LD = \frac{2}{3}FD$, und ziehe HL. H ist der Schwerpunkt von ABC, L von ACD, und folglich der Schwerpunkt des Vierecks in HL. Auch sind offenbar BD und HL einander parallel, und folglich

$$HK : KL = BG : GD = DE : BE.$$

Aber offenbar

$$DE : BE = \text{Höhe von } ACD : \text{Höhe von } ABC$$
$$= \Delta\, ACD : \Delta\, ABC.$$
$$\text{Also } HK : KL = \Delta\, ACD : \Delta\, ABC,$$
$$\text{oder } HK \,.\, \Delta\, ABC = KL \,.\, \Delta\, ACD,$$

und folglich nach bekannten Sätzen (§. 86.) K der gemeinschaftliche Schwerpunkt von ACD und ABC, d. i. von $ABCD$, so daß also der Schwerpunkt von $ABCD$ in FG liegt, w. z. b. w.

Es ist auch $FK : KG = FH : HB = 1 : 2$, wodurch also auch der Schwerpunkt K leicht gefunden werden kann.

Einen andern diesem analogen Satz aus der Stereometrie gibt L'Huilier, a. a. O. S. 196., bey Gelegenheit seines Beweises des Berard'schen Satzes.

Man habe nämlich in Fig. 79. über derselben Basis $BCDE$ zwey Pyramiden $ABCDE$ und $BCDEF$ von willführlicher Seitenzahl. Um den Schwerpunkt des Körpers $ABCDEF$ zu finden, verbinde man A und F durch AF, welche die Basis in G schneiden. Auf AF nehme man $FH = AG$, und verbinde H mit dem Schwerpunkte K der gemeinschaftlichen Grundfläche durch HK; so liegt der gesuchte Schwerpunkt in HK, und ist der Punkt L, wenn $KL = \frac{1}{4} KH$ ist.

Den Beweis gibt L'Huilier nicht. Er kann aber auf folgende Art geführt werden. Man nehme $KM = \frac{1}{4} AK$, $KN = \frac{1}{4} KF$; so ist M der Schwerpunkt der obern, N der untern Pyramide, (§. 102.). Zieht man nun MN, so ist MN parallel mit AF, und schneide KH in L'. Also

$ML' : L'N = AH : HF = FG : AG$ (Constr.)

$= $ Höhe von $BCDEF$: Höhe von $ABCDE$

$= BCDEF : ABCDE.$

Also nach bekannten Sätzen vom Schwerpunkte, da nun

$$ML' . ABCDE = L'N . BCDEF$$

ist, L' der gemeinschaftliche Schwerpunkt der beiden Pyramiden, d. i. des ganzen Körpers $ABCDEF$, (§. 86.). Aber

$$KL' : KH = KN : KF = 1 : 4,$$

d. i. $KL' = \frac{1}{4} KH$. Also

$$KL \text{ (s. oben)} = KL',$$

und folglich L der gesuchte Schwerpunkt.

Endlich rührt noch folgender Satz von Berard (a. a. O. S. 192.) her:

Wenn man in einer vierseitigen Pyramide den Schwerpunkt eines Triangels, welcher mit der Pyramide einerley Spitze und eine Diagonale der Grundfläche zur Grundlinie hat, durch eine gerade Linie mit einem solchen Punkte der andern Diagonale der Grundfläche verbindet, welcher von dem einen Endpunkte dieser Diagonale eben so weit entfernt ist, wie der andere Endpunkt von dem Durchschnittspunkte beider Diagonalen; so liegt der Schwerpunkt der Pyramide in der gezogenen Verbindungslinie.

Ist nämlich in Fig. 80. H der Schwerpunkt von ABD und $GE = CF$, so liegt der Schwerpunkt der Pyramide in HG. Denn man ziehe HC, HE, und nehme $HK = \frac{1}{4} HC$, $HL = \frac{1}{4} HE$; so ist K der Schwerpunkt der Pyramide $ABCD$, und

L der Schwerpunkt von $ABDE$, und offenbar KL parallel mit CE. Also

$$KM : ML = CG : GE = FE : CF,$$

offenbar $=$ Höhe von $ABDE$: Höhe von $ABCD$,

$=$ Pyramide $ABDE$: Pyramide $ABCD$.

Also, wie vorher nach §. 86., M der gemeinschaftliche Schwerpunkt dieser beiden Pyramiden, d. i. der Schwerpunkt der Pyramide $ABCDE$, so daß also dieser Schwerpunkt in HG liegt, w. z. b. w.

Auch ist $HM : HG = HL : HE = 1 : 4$. Also $HM = \frac{1}{4} HG$, wornach auch der Schwerpunkt einer vierseitigen Pyramide leicht gefunden werden kann.

Ueber verschiedene praktische Methoden, den Schwerpunkt unregelmäßiger Figuren und Körper durch Näherung elementarisch zu finden, s. m. Eytelwein's Statik, Band 1. S. 148., 160. und 185., auch Monge a. a. O. S. 107. über den Schwerpunkt der Schiffsräume.

Neuntes Kapitel.

Von der Bestimmung des Schwerpunktes krummliniger Figuren.

§. 108.

Zunächst und vorzüglich haben wir nachstehenden Satz zu beweisen, auf den wir bey den Untersuchungen über den Schwerpunkt häufig zurückkommen werden.

Sey X irgend eine Function von x, A aber eine gewisse von der Function X abhängige oder mit ihr in gewisser Beziehung stehende Größe. Wenn man nun der veränderlichen Größe x zwey bestimmte Werthe a, b beylegt, den größern b um ein beliebiges Increment i sich verändern läßt, die Größe A aber für die ganze Ausdehnung dieses Increments $= iX$ (für $x = b$) ist, letzteres aber der Wahrheit desto näher kommt, je kleiner i ist; so ist die Summe aller Größen A, in der ganzen Ausdehnung von $x = a$ bis $x = b$, $= \int X dx$, das Integral zwischen den Gränzen $x = a$ und $x = b$ genommen.

Um diesen für die Anwendung der Integralrechnung auf Geometrie und Mechanik wichtigen Satz zu beweisen, setze man die Differenz $b - a = n\alpha$, wo α und n beide veränderliche Größen sind, deren erstere fortwährend abnimmt, letztere aber als fortwährend wachsend betrachtet wird. Die den auf einander folgenden Theilen α in der Differenz $b - a$ von b bis a entsprechenden Größen A sind nach dem Taylor'schen Lehrsatze und der Voraussetzung nach der Reihe:

$$\alpha\left\{X - \frac{dX}{dx} \cdot \frac{\alpha}{1} + \frac{d^2X}{dx^2} \cdot \frac{\alpha^2}{1 \cdot 2} - \frac{d^3X}{dx^3} \cdot \frac{\alpha^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots\right\},$$

$$\alpha\left\{X - \frac{dX}{dx} \cdot \frac{2\alpha}{1} + \frac{d^2X}{dx^2} \cdot \frac{2^2 \cdot \alpha^2}{1 \cdot 2} - \frac{d^3X}{dx^3} \cdot \frac{2^3 \cdot \alpha^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots\right\},$$

$$\alpha\left\{X - \frac{dX}{dx} \cdot \frac{3\alpha}{1} + \frac{d^2X}{dx^2} \cdot \frac{3^2 \cdot \alpha^2}{1 \cdot 2} - \frac{d^3X}{dx^3} \cdot \frac{3^3 \cdot \alpha^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots\right\},$$

. . . .

$$\alpha\left\{X - \frac{dX}{dx} \cdot \frac{n\alpha}{1} + \frac{d^2X}{dx^2} \cdot \frac{n^2 \cdot \alpha^2}{1 \cdot 2} - \frac{d^3X}{dx^3} \cdot \frac{n^3 \cdot \alpha^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots\right\},$$

überall $x = b$ gesetzt, mit desto mehr Genauigkeit, je kleiner α ist, für die ganze Ausdehnung der Theile α. Daher ist die Summe aller Größen A in der ganzen Ausdehnung der Differenz $b - a$ von a bis b nach §. 183. meines Lehrbuches der Kegelschnitte

$$\begin{aligned} = \; & X . n\alpha \\ & - \frac{dX}{dx}\{1 + 2 + 3 + \ldots + n\} \cdot \frac{\alpha^2}{1} \\ & + \frac{d^2X}{dx^2}\{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2\} \cdot \frac{\alpha^2}{1 \cdot 2} \\ & - \frac{d^3X}{dx^3}\{1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3\} \cdot \frac{\alpha^4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = \; & X . n\alpha \\ & - \frac{dX}{dx}\{\tfrac{1}{2}n^2 + (.)\,n\} \cdot \frac{\alpha^2}{1} \\ & + \frac{d^2X}{dx^2}\{\tfrac{1}{3}n^3 + (.)\,n^2 + (.)\,n\} \cdot \frac{\alpha^3}{1 \cdot 2} \\ & - \frac{d^3X}{dx^3}\{\tfrac{1}{4}n^4 + (.)\,n^3 + (.)\,n^2 + (.)\,n\} \cdot \frac{\alpha^4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

wo die Zeichen (.), wie am angeführten Orte, gewisse bestimmte, in den Potenzensummen vorkommende Coefficienten bezeichnen.

Mit desto mehr Genauigkeit, je kleiner α, ist also die obige Summe

$$\begin{aligned} = \; & X . n\alpha \\ & - \frac{dX}{dx}\left\{\frac{1}{1 \cdot 2}(n\alpha)^2 + (.)\,(n\alpha)\,\alpha\right\} \end{aligned}$$

$$+\frac{d^2X}{dx^2}\left\{\frac{1}{1.2.3}(n\alpha)^3+(.)(n\alpha)^2.\alpha+(.)(n\alpha)\alpha^2\right\}$$

$$-\frac{d^3X}{dx^3}\left\{\frac{1}{1.2.3.4}(n\alpha)^4+(.)(n\alpha)^3.\alpha+(.)(n\alpha)^2.\alpha^2+(.)(n\alpha)\alpha^3\right\}$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$=\begin{cases} X(b-a)-\frac{dX}{dx}.\frac{(b-a)^2}{1.2}+\frac{d^2X}{dx^2}.\frac{(b-a)^3}{1.2.3}-\frac{d^3X}{dx^3}.\frac{(b-a)^4}{1.2.3.4} \\ \quad +\ldots\ldots+P\alpha, \end{cases}$$

wo $P\alpha$ eine Function bedeutet, welche in allen Gliedern α enthält, und demnach für $\alpha = 0$ verschwindet. x muß nach dem Obigen überall $= b$ gesetzt werden.

Will man nun die Summe der Größe A für die ganze stetige Ausdehnung von $x = a$ bis $x = b$ haben, so muß man in dem obigen Ausdrucke, welcher mit desto mehr Genauigkeit gilt, je kleiner α ist, offenbar $\alpha = 0$ setzen, wodurch man für die gesuchte Summe erhält:

$$X(b-a)-\frac{dX}{dx}.\frac{(b-a)^2}{1.2}+\frac{d^2X}{dx^2}.\frac{(b-a)^3}{1.2.3}-\frac{d^3X}{dx^3}.\frac{(b-a)^4}{1\ldots4}+\ldots$$

für $x = b$.

Sey nun $y = \int X dx$; so ist

$$X=\frac{dy}{dx},\quad \frac{dX}{dx}=\frac{d^2y}{dx^2},\quad \frac{d^2X}{dx^2}=\frac{d^3y}{dx^3},\ \text{u. s. w.}$$

Setzt man in y überall a oder $x-(x-a)$ für x, so erhält man nach dem Taylor'schen Lehrsatze:

$$\underset{(\text{für } x=a)}{y}=y-\frac{dy}{dx}.\frac{x-a}{1}+\frac{d^2y}{dx^2}.\frac{(x-a)^2}{1.2}-\frac{d^3y}{dx^3}.\frac{(x-a)^3}{1.2.3}+\ldots$$

$$=y-\left\{\frac{dy}{dx}.\frac{x-a}{1}-\frac{d^2y}{dx^2}.\frac{(x-a)^2}{1.2}+\frac{d^3y}{dx^3}.\frac{(x-a)^3}{1.2.3}-\ldots\right\}$$

$$=y-\left\{X(x-a)-\frac{dX}{dx}.\frac{(x-a)^2}{1.2}+\frac{d^2X}{dx^2}.\frac{(x-a)^3}{1.2.3}-\ldots\right\}$$

Also

$$X(x-a)-\frac{dX}{dx}.\frac{(x-a)^2}{1.2}+\frac{d^2X}{dx^2}.\frac{(x-a)^3}{1.2.3}-\ldots$$

$$=y-\underset{(\text{für } x=a)}{y},$$

und folglich die Größe vor dem Gleichheitszeichen, wenn man darin überall $x = b$ setzt, d. i. die gesuchte Summe der Größen A,

$$= \underset{(\text{für } x = b)}{y} - \underset{(\text{für } x = a)}{y}$$

$$= \underset{(\text{für } x = b)}{\int X dx} - \underset{(\text{für } x = a)}{\int X dx},$$

d. i. $= \int X dx$, dieses Integral zwischen den Gränzen $x = a$ und $x = b$ genommen, oder, wie wir in der Folge schreiben werden,

$$= \underset{(x = a,\ b)}{\int X dx},$$

w. z. b. w.

§. 109.

Aufgabe. BQ (Fig. 81.) sey eine auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogene Curve. Die Coordinaten der Punkte B, Q seyen α, a und β, b. Man soll den Flächeninhalt des Stücks $ABPQ$, den wir durch V bezeichnen wollen, finden.

Auflösung. Die größere Abscisse β ändere sich um i, und dieser Veränderung entspreche die Veränderung ΔV von V. Der neue Werth der Ordinate b, den wir durch b' bezeichnen wollen, ist nach dem Taylor'schen Satze

$$= y + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{i}{1} + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{i^2}{1 \cdot 2} + \frac{d^3y}{dx^3} \cdot \frac{i^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots$$

für $x = \beta$. Also das zwischen den Ordinaten b und b' enthaltene Trapezium nach bekannten geometrischen Sätzen $= \frac{i(b + b')}{2}$

$$= \frac{i}{2}\left\{2y + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{i}{1} + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{i^2}{1 \cdot 2} + \frac{d^3y}{dx^3} \cdot \frac{i^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots\right\}$$

$$= iy + \frac{dy}{2dx} \cdot \frac{i^2}{1} + \frac{d^2y}{2dx^2} \cdot \frac{i^3}{1 \cdot 2} + \frac{d^3y}{2dx^3} \cdot \frac{i^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots$$

für $x = \beta$.

Je kleiner man i nimmt, desto mehr nähert sich dieser Ausdruck dem ersten Gliede iy, und desto genauer ist das Trapezium der Größe ΔV gleich. Daher ist $\Delta V = iy$ für $x = b$, mit desto mehr Genauigkeit, je kleiner i ist. Die Summe der Größen ΔV in der ganzen Ausdehnung der Differenz ΔP, d. i. in der ganzen Ausdehnung von $x = \alpha$ bis $x = \beta$, ist offenbar dem gesuchten Curvenstücke $ABPQ$ ($= V$) gleich. Also nach §. 108.:

$$V = \frac{\int y dx}{(x = \alpha,\ \beta;\ y = a,\ b)}.$$

§. 110.

Aufgabe. Die Coordinaten des Schwerpunktes des Curvenstücks $ABPQ$ (Fig. 81.) zu finden.

Auflösung. Die gesuchten Coordinaten sollen durch X, Y bezeichnet werden. Man lasse wie in dem vorhergehenden Paragraphen die größere Abscisse sich um i verändern, so ist nach demselben Paragraphen $\Delta V = iy$, für $x = \beta$, und zwar desto genauer, je kleiner i ist. Daher ist nun auch offenbar das Moment von ΔV in Beziehung auf die Axe der y desto genauer $= ixy$, je kleiner i ist, und folglich die Summe aller Momente der Größen ΔV für die ganze Ausdehnung von $x = \alpha$ bis $x = \beta$ nach §. 108.

$$= \frac{\int xy dx}{(x = \alpha,\ \beta;\ y = a,\ b)}.$$

Diese Momentensumme ist aber nach §. 86. bekanntlich $= VX$. Daher nach §. 109.:

$$XV = X \cdot \frac{\int y dx}{(x = \alpha,\ \beta;\ y = a,\ b)} = \frac{\int xy dx}{(x = \alpha,\ \beta;\ y = a,\ b)},$$

woraus X bestimmt werden kann.

Das Moment von ΔV in Beziehung auf die Axe der x ist nach bekannten Sätzen vom Schwerpunkte und nach dem Vorhergehenden offenbar $= iy \cdot \frac{1}{2} y = \frac{1}{2} iy^2$, und folglich die Summe der Momente aller Größen ΔV für die ganze Ausdehnung von $x = \alpha$ bis $x = \beta$ nach §. 108.

$$= \underset{(x=\alpha,\ \beta;\ y=a,\ b)}{\tfrac{1}{2}\int y^2 dx}.$$

Diese Momentensumme ist aber nach §. 86. wieder $= VY$. Also nach §. 109.:

$$VY = Y \cdot \underset{(x=\alpha,\ \beta;\ y=a,\ b)}{\int y dx} = \underset{(x=\alpha,\ \beta;\ y=a,\ b)}{\tfrac{1}{2}\int y^2 dx},$$

und man hat demnach folgende zwey Gleichungen zur Bestimmung der Coordinaten des Schwerpunktes:

$$VX = X \cdot \underset{(x=\alpha,\ \beta;\ y=a,\ b)}{\int y dx} = \underset{(x=\alpha,\ \beta;\ y=a,\ b)}{\int xy dx},$$

$$2VY = 2Y \cdot \underset{(x=\alpha,\ \beta;\ y=a,\ b)}{\int y dx} = \underset{(x=\alpha,\ \beta;\ y=a,\ b)}{\int y^2 dx}.$$

Man kann diese Formeln noch auf manche andere Arten entwickeln. Die obige Methode schien mir aber mit der nöthigen Deutlichkeit und Schärfe auch die erforderliche Kürze zu verbinden, wenn man sonst auch wohl noch kürzer fertig zu werden sucht. Betrachtungen über den Fall, wenn die Coordinaten schiefwinklig sind, sollen nachher vorkommen. Wir gehen jetzt sogleich zu einigen Anwendungen über.

§. 111.

Aufgabe. Die Curve BQ (Fig. 81.) sey eine Kreislinie, die Abscissenaxe AP sey ein Durchmesser, und A, der Anfang der Abscissen, sey der Endpunkt dieses Durchmessers. Man soll den Schwerpunkt des halben Segments finden.

Auflösung. Die Gleichung des Kreises ist bekanntlich:

$$y^2 = 2rx - x^2,$$

(M. s. mein Lehrbuch der Kegelschnitte, §. 12.). Also

$$y^2 dx = 2rx dx - x^2 dx,$$

$$\int y^2 dx = rx^2 - \tfrac{1}{3}x^3.$$

Um $xy dx = x dx \sqrt{2rx - x^2}$ zu integriren, setze man

$$x = r - u;\ \text{so ist}$$

$$dx = -du,\ 2rx - x^2 = 2r(r-u) - (r-u)^2$$
$$= 2r^2 - 2ru - r^2 + 2ru - u^2$$
$$= r^2 - u^2 = y^2, \text{ und folglich}$$
$$-2udu = 2ydy,$$
$$-udu = ydy,$$
$$xdx\sqrt{2rx - x^2} = -(r-u)ydu$$
$$= -rydu + yudu$$
$$= rydx - y^2dy = xydx,$$
$$\int xydx = r\int ydx - \tfrac{1}{3}y^3.$$

Man hat also, wenn man $\int ydx = V$ setzt:

$$\int xydx = rV - \tfrac{1}{3}y^3,$$

wo V den Inhalt des halben Segments bezeichnet. Also

$$XV = rV - \tfrac{1}{3}y^3,$$
$$2YV = rx^2 - \tfrac{1}{3}x^3,$$

wo beide Integrale so bestimmt sind, daß sie, wie es im gegenwärtigen Falle seyn muß, für $x = 0$ verschwinden, da auch V für $x = 0$ verschwindet. Es ist also

$$X = r - \frac{y^3}{3V},$$

$$Y = \frac{3rx^2 - x^3}{6V}.$$

Der Abstand des Schwerpunktes des ganzen Segments vom Endpunkte des Durchmessers ist offenbar ebenfalls $= X$, und liegt im Durchmesser. Bezeichnet nun s die Sehne des ganzen Segments und A dessen Flächeninhalt, so ist $s = 2y$ und $A = 2V$. Also der Abstand des Schwerpunktes vom Endpunkte des Durchmessers

$$= r - \frac{\frac{1}{8}s^3}{\frac{3}{2}A} = r - \frac{2s^3}{24A} = r - \frac{s^3}{12A},$$

oder die Entfernung des Schwerpunktes vom Mittelpunkte des Kreises

$$= r - \left(r - \frac{s^3}{12A}\right) = \frac{s^3}{12A};$$

d. h. Man findet die Entfernung des Schwerpunktes eines Kreissegments vom Mittelpunkte des Kreises, welchem es angehört, wenn man den Cubus seiner Sehne durch das Zwölffache seines Inhalts dividirt.

Ist das Segment ein Halbkreis, also $s = 2r$, und $A = \frac{1}{2}r^2\pi$; so ist der Abstand des Schwerpunktes vom Mittelpunkte des Kreises $= \frac{8r^2}{3r^2\pi} = \frac{4r}{3\pi}$, wo π die bekannte Zahl 3,14 ....

Bekanntlich ist

$$\frac{1}{\pi} = 0,3183098861 \ldots,$$

(Euleri Introd. in A. I. §. 198. b.). Also

$$\frac{1}{3\pi} = 0,1061032954 \ldots,$$

$$\frac{4}{3\pi} = 0,4244131816 \ldots.$$

Also die Entfernung des Schwerpunktes des Halbkreises vom Centrum des Kreises

$$= r \cdot 0,4244131816 \ldots.$$

§. 112.

Aufgabe. Den Schwerpunkt eines Kreisausschnittes zu finden.

Auflösung. Man denke sich den Kreisausschnitt durch eine Sehne in einen Kreisabschnitt und in ein Dreyeck zerlegt, und bezeichne die Entfernung seines Schwerpunktes vom Mittelpunkte des Kreises durch x, wobey leicht erhellet, daß der Schwerpunkt auf dem Halbmesser liegt, welcher durch die Mitte des Bogens oder der Sehne des Ausschnittes geht. Bezeichnet man nun die Sehne durch s, den Inhalt des Dreyecks durch Δ, den Bogen des Ausschnittes durch b, und den Inhalt des Abschnittes wie vorher durch A; so ist nach §. 111. und bekannten Sätzen vom Schwerpunkte:

$$A \cdot \frac{s^3}{12A} + \Delta \cdot \tfrac{2}{3}\sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}s^2} = (A + \Delta)\,x,$$

Aber $\Delta = \frac{1}{2}s\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}s^2}$, und

$A + \Delta = \frac{1}{2}br$. Also

$$\tfrac{1}{12}s^3 + \tfrac{1}{2}s\sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}s^2} \cdot \tfrac{2}{3}\sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}s^2} = \tfrac{1}{2}brx,$$
$$\tfrac{1}{12}s^3 + \tfrac{1}{3}s\,(r^2 - \tfrac{1}{4}s^2) = \tfrac{1}{2}brx,$$
$$\tfrac{1}{12}s^3 + \tfrac{1}{3}r^2s - \tfrac{1}{12}s^3 = \tfrac{1}{2}brx,$$
$$\tfrac{1}{3}r^2s = \tfrac{1}{2}brx,\ \tfrac{2}{3}rs = bx,$$
$$b : s = \tfrac{2}{3}r : x,$$

so daß sich also der Bogen eines Ausschnittes zu seiner Sehne verhält, wie zwey Drittheile des Radius zu der Entfernung des Schwerpunktes des Ausschnittes vom Centrum des Kreises.

Bezeichnet 2α den zu dem Winkel des Ausschnittes gehörenden Bogen für den Halbmesser $= 1$, so ist

$$2\alpha : b = 1 : r,\ b = 2r\alpha, \text{ und}$$
$$\tfrac{1}{2}s = r\,\mathrm{Sin}\,\alpha,\ \text{also } s = 2r\,\mathrm{Sin}\,\alpha.$$

Folglich

$$2r\alpha : 2r\,\mathrm{Sin}\,\alpha = \tfrac{2}{3}r : x,$$
$$\alpha : \mathrm{Sin}\,\alpha = \tfrac{2}{3}r : x,$$
$$x = \frac{2r\,\mathrm{Sin}\,\alpha}{3\alpha}.$$

Für den Quadranten ist

$$\alpha = \tfrac{1}{4}\pi,\ \mathrm{Sin}\,\alpha = \mathrm{Sin}\,45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}. \text{ Also}$$

$$x = \frac{r\sqrt{2}}{\frac{3}{4}\pi} = \frac{4r\sqrt{2}}{3\pi}.$$

§. 113.

Ehe wir zu andern Beyspielen übergehen, wollen wir noch untersuchen, wie sich die beiden Hauptformeln in §. 110. ändern, wenn die Curve auf ein schiefwinkliges Coordinatensystem bezogen worden ist. Der Coordinatenwinkel sey $= \varphi$, und die schiefwinkligen Coordinaten sollen eben so wie in §. 110. bezeichnet, aber accentuirt werden. V' sey der Inhalt des schiefwinkligen Curvenstücks. Fällt man, wie in Fig. 82., auf die Abscissenaxe zwey Perpendikel; so erhellet, wenn man die beiden entstehenden Dreyecke durch Δ und Δ' bezeichnet, leicht die Richtigkeit folgender Gleichung:

$$V' = V + \Delta - \Delta',$$

wenn V das entstehende rechtwinklige Curvenstück bezeichnet.

Die äußersten Coordinaten des Curvenstücks V sind offenbar und auch nach §. 38. 2. meines Lehrbuches der Kegelschnitte:

$$\alpha = \alpha' + a'\mathrm{Cos}\,\varphi,\quad a = a'\,\mathrm{Sin}\,\varphi;\ \text{und}$$
$$\beta = \beta' + b'\mathrm{Cos}\,\varphi,\quad b = b'\,\mathrm{Sin}\,\varphi.$$

Auch ist nach §. 109.:

$$V = \int\limits_{(x=\alpha,\ \beta;\ y=a,\ b)} y\,dx.$$

Ferner ist, wie leicht erhellet:

$$\Delta = \tfrac{1}{2}a'\mathrm{Cos}\,\varphi\,.\,a'\,\mathrm{Sin}\,\varphi = \tfrac{1}{2}a'^2.\,\mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Cos}\,\varphi,$$
$$\Delta' = \tfrac{1}{2}b'\mathrm{Cos}\,\varphi\,.\,b'\,\mathrm{Sin}\,\varphi = \tfrac{1}{2}b'^2.\,\mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Cos}\,\varphi,$$

und folglich

$$V' = \int\limits_{(x=\alpha,\ \beta;\ y=a,\ b)} y\,dx + \tfrac{1}{2}(a'^2 - b'^2)\,\mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Cos}\,\varphi.$$

Nun ist aber überhaupt

$$x = x' + y'\,\mathrm{Cos}\,\varphi,\quad y = y'\,\mathrm{Sin}\,\varphi.$$

Also

$$dx = dx' + \mathrm{Cos}\,\varphi\,dy',\quad dy = \mathrm{Sin}\,\varphi\,dy',$$
$$y\,dx = y'\,\mathrm{Sin}\,\varphi\,(dx' + \mathrm{Cos}\,\varphi\,dy')$$
$$= \mathrm{Sin}\,\varphi\,y'dx' + \mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Cos}\,\varphi\,y'dy',$$
$$\int y\,dx = \mathrm{Sin}\,\varphi\int y'dx' + \tfrac{1}{2}\mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Cos}\,\varphi\,y'^2.$$

Nimmt man nun dieses Integral zwischen den erforderlichen Gränzen $y = a = a'\,\mathrm{Sin}\,\varphi$ und $y = b = b'\,\mathrm{Sin}\,\varphi$, d. i., weil überhaupt $y' = \dfrac{y}{\mathrm{Sin}\,\varphi}$, zwischen den Gränzen $y' = a'$ und $y' = b'$, oder, was dasselbe ist, $x' = \alpha'$ und $x' = \beta'$; so erhält man:

$$V = \mathrm{Sin}\,\varphi\,.\int\limits_{(x'=\alpha',\beta';\ y'=a',b')} y'dx' + \tfrac{1}{2}\mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Cos}\,\varphi\,b'^2 - \tfrac{1}{2}\mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Cos}\,\varphi\,a'^2$$
$$= \mathrm{Sin}\,\varphi\,.\int\limits_{(x'=\alpha',\beta';\ y'=a',b')} y'dx' - \tfrac{1}{2}\mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Cos}\,\varphi\,(a'^2 - b'^2).$$

Demnach also nach dem Obigen:

$$V' = \left\{\mathrm{Sin}\,\varphi\,.\int\limits_{(x'=\alpha',\beta';\ y'=a',b')} y'dx' \begin{array}{l} -\tfrac{1}{2}(a'^2 - b'^2)\,\mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Cos}\,\varphi \\ +\tfrac{1}{2}(a'^2 - b'^2)\,\mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Cos}\,\varphi, \end{array}\right.$$

d. i.

$$V' = \operatorname{Sin}\varphi \cdot \underset{(x'=\alpha',\,\beta';\ y'=a',\,b')}{\int y'dx'}.$$

Die Coordinaten der Schwerpunkte der Dreyecke Δ und Δ' sind nach bekannten Sätzen offenbar:

$$\alpha' + \tfrac{2}{3}a'\operatorname{Cos}\varphi,\quad \tfrac{1}{3}a'\operatorname{Sin}\varphi;$$
$$\beta' + \tfrac{2}{3}b'\operatorname{Cos}\varphi,\quad \tfrac{1}{3}b'\operatorname{Sin}\varphi.$$

Folglich nach §. 86.:

$$V'X_{,} = VX + (\alpha' + \tfrac{2}{3}a'\operatorname{Cos}\varphi)\,\Delta - (\beta' + \tfrac{2}{3}b'\operatorname{Cos}\varphi)\,\Delta',$$
$$V'Y_{,} = VY + \tfrac{1}{3}a'\operatorname{Sin}\varphi\,\Delta - \tfrac{1}{3}b'\operatorname{Sin}\varphi\,\Delta',$$

wo $X_{,}$ und $Y_{,}$ die rechtwinkligen Coordinaten des Curvenstücks V' bezeichnen.

Es ist aber nach §. 110.:

$$VX = \underset{(x=\alpha,\,\beta;\ y=a,\,b)}{\int xydx},\quad VY = \underset{(x=\alpha,\,\beta;\ y=a,\,b)}{\int y^2dx},$$

und nach dem Obigen:

$$xydx = (x' + y'\operatorname{Cos}\varphi)\,.\,y'\operatorname{Sin}\varphi\,(dx' + \operatorname{Cos}\varphi\,dy')$$
$$= (x'y'\operatorname{Sin}\varphi + y'^2\operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Cos}\varphi)\,(dx' + \operatorname{Cos}\varphi\,dy')$$
$$= \begin{cases} \operatorname{Sin}\varphi\,x'y'dx' + \operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Cos}\varphi\,y'^2dx' \\ + \operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Cos}\varphi\,x'y'dy' + \operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Cos}\varphi^2\,.\,y'^2dy', \end{cases}$$

$$\int xydx = \begin{cases} \operatorname{Sin}\varphi\int x'y'dx' + \operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Cos}\varphi\int y'^2dx' \\ + \operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Cos}\varphi\int x'y'dy' + \tfrac{1}{3}y'^3\,.\,\operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Cos}\varphi^2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \operatorname{Sin}\varphi\int x'y'dx' + \operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Cos}\varphi\int y'^2dx' \\ + x'\operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Cos}\varphi\int y'dy' - \operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Cos}\varphi\int dx'\int y'dy' \\ + \tfrac{1}{3}y'^3\,.\,\operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Cos}\varphi^2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \operatorname{Sin}\varphi\int x'y'dx' + \operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Cos}\varphi\int y'^2dx' \\ + \tfrac{1}{2}x'y'^2\operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Cos}\varphi - \tfrac{1}{2}\operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Cos}\varphi\int y'^2dx' \\ + \tfrac{1}{3}y'^3\,.\,\operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Cos}\varphi^2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \operatorname{Sin}\varphi\int x'y'dx' + \tfrac{1}{2}\operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Cos}\varphi\int y'^2dx' \\ + \tfrac{1}{2}x'y'^2\operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Cos}\varphi + \tfrac{1}{3}y'^3\,.\,\operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Cos}\varphi^2. \end{cases}$$

Nimmt man nun dieses Integral zwischen den gehörigen Gränzen $x=\alpha$, $x=\beta$, oder $y=a$, $y=b$, d. i., nach dem Obigen, zwischen den Gränzen $y'=a'$, $y'=b'$, oder $x'=\alpha'$, $x'=\beta'$; so erhält man $VX=$

$$\underset{(x=\alpha,\beta;\,y=a,b)}{\int xy\,dx} = \begin{cases} \mathrm{Sin}\,\varphi \cdot \underset{(x'=\alpha',\beta';\,y'=a',b')}{\int x'y'\,dx'} + \tfrac{1}{2}\mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Cos}\,\varphi \cdot \underset{(x'=\alpha',\beta';\,y'=a',b')}{\int y'^2\,dx'} \\ + \tfrac{1}{2}\beta' b'^2\,\mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Cos}\,\varphi + \tfrac{1}{3} b'^3 .\,\mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Cos}\,\varphi^2 \\ - \tfrac{1}{2}\alpha' a'^2\,\mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Cos}\,\varphi - \tfrac{1}{3} a'^3 .\,\mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Cos}\,\varphi^2 . \end{cases}$$

Nun ist aber

$$(\alpha' + \tfrac{2}{3} a'\,\mathrm{Cos}\,\varphi)\,\Delta - (\beta' + \tfrac{2}{3} b'\,\mathrm{Cos}\,\varphi)\,\Delta' =$$
$$= \tfrac{1}{2} a'^2\,\mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Cos}\,\varphi\,(\alpha' + \tfrac{2}{3} a'\,\mathrm{Cos}\,\varphi) - \tfrac{1}{2} b'^2\,\mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Cos}\,\varphi\,(\beta' + \tfrac{2}{3} b'\,\mathrm{Cos}\,\varphi)$$
$$= \begin{cases} \tfrac{1}{2}\alpha' a'^2\,\mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Cos}\,\varphi + \tfrac{1}{3} a'^3\,\mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Cos}\,\varphi^2 \\ - \tfrac{1}{2}\beta' b'^2\,\mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Cos}\,\varphi - \tfrac{1}{3} b'^3\,\mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Cos}\,\varphi^2 . \end{cases}$$

Also

$$V'X_{,} = \mathrm{Sin}\,\varphi \cdot \underset{(x'=\alpha',\,\beta';\;y'=a',\,b')}{\int x'y'\,dx'} + \tfrac{1}{2}\mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Cos}\,\varphi \cdot \underset{(x'=\alpha',\,\beta';\;y'=a',\,b')}{\int y'^2\,dx'} .$$

Auf ähnliche Art ist

$$\int y^2 dx = \int y'^2\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2\,(dx' + \mathrm{Cos}\,\varphi\,dy')$$
$$= \mathrm{Sin}\,\varphi^2 \int y'^2 dx' + \mathrm{Sin}\,\varphi^2\,\mathrm{Cos}\,\varphi \int y'^2 dy'$$
$$= \mathrm{Sin}\,\varphi^2 \int y'^2 dx' + \tfrac{1}{3}\mathrm{Sin}\,\varphi^2\,\mathrm{Cos}\,\varphi\,y'^3 .$$

Folglich das Integral zwischen den erforderlichen Gränzen genommen:

$$\underset{(x=\alpha,\,\beta;\;y=a,\,b)}{\int y^2 dx} = \mathrm{Sin}\,\varphi^2 \cdot \underset{(x'=\alpha',\,\beta';\;y'=a',\,b')}{\int y'^2 dx'} + \tfrac{1}{3}\mathrm{Sin}\,\varphi^2\,\mathrm{Cos}\,\varphi\,(b'^3 - a'^3).$$

Also nach §. 110.:

$$VY = \tfrac{1}{2}\mathrm{Sin}\,\varphi^2 \cdot \underset{(x'=\alpha',\beta';\,y'=a',b')}{\int y'^2 dx'} + \tfrac{1}{6}\mathrm{Sin}\,\varphi^2\,\mathrm{Cos}\,\varphi\,(b'^3 - a'^3).$$

Nun ist aber wieder

$$\tfrac{1}{3} a' \operatorname{Sin}\varphi\, \Delta - \tfrac{1}{3} b' \operatorname{Sin}\varphi\, \Delta' =$$
$$= \tfrac{1}{3} a' \operatorname{Sin}\varphi \,.\, \tfrac{1}{2} a'^2 \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos}\varphi - \tfrac{1}{3} b' \operatorname{Sin}\varphi \,.\, \tfrac{1}{2} b'^2 \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos}\varphi$$
$$= -\tfrac{1}{6} \operatorname{Sin}\varphi^2 \operatorname{Cos}\varphi\, (b'^3 - a'^3).$$

Also

$$V'Y_{\prime} = \tfrac{1}{2} \operatorname{Sin}\varphi^2 \cdot \underset{(x'=\alpha',\ \beta';\ y'=a',\ b')}{\int y'^2 dx'}.$$

Ferner ist aber

$$X_{\prime} = X' + Y' \operatorname{Cos}\varphi,\quad Y_{\prime} = Y' \operatorname{Sin}\varphi.$$

Also

$$V'X_{\prime} = X' \operatorname{Sin}\varphi \cdot \underset{(x'=\alpha',\ \beta';\ y'=a',\ b')}{\int y' dx'} + V'Y' \operatorname{Cos}\varphi$$
$$= X' \operatorname{Sin}\varphi \cdot \underset{(x'=\alpha',\ \beta';\ y'=a',\ b')}{\int y' dx'} + \frac{V'Y_{\prime} \operatorname{Cos}\varphi}{\operatorname{Sin}\varphi}$$
$$= X' \operatorname{Sin}\varphi \cdot \underset{(x'=\alpha',\beta';y'=a',b')}{\int y' dx'} + \tfrac{1}{2} \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos}\varphi \cdot \underset{(x'=\alpha',\beta';y'=a',b')}{\int y'^2 dx'}$$
$$= \operatorname{Sin}\varphi \cdot \underset{(x'=\alpha',\beta';y'=a',b')}{\int x'y' dx'} + \tfrac{1}{2} \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos}\varphi \cdot \underset{(x'=\alpha',\beta';y'=a',b')}{\int y'^2 dx'}.$$

Also

$$X' \cdot \underset{(x'=\alpha',\ \beta';\ y'=a',\ b')}{\int y' dx'} = \underset{(x'=\alpha',\ \beta';\ y'=a',\ b')}{\int x'y' dx'}.$$

Da endlich $Y' = \dfrac{Y_{\prime}}{\operatorname{Sin}\varphi}$ ist; so ist

$$V'Y' \operatorname{Sin}\varphi = \tfrac{1}{2} \operatorname{Sin}\varphi^2 \cdot \underset{(x'=\alpha',\ \beta';\ y'=a',\ b')}{\int y'^2 dx'},$$

$$Y' \operatorname{Sin}\varphi^2 \cdot \underset{(x'=\alpha',\ \beta';\ y'=a',\ b')}{\int y' dx'} = \tfrac{1}{2} \operatorname{Sin}\varphi^2 \cdot \underset{(x'=\alpha',\ \beta';\ y'=a',\ b')}{\int y'^2 dx'},$$

$$Y' \cdot \underset{(x'=\alpha',\ \beta';\ y'=a',\ b')}{\int y' dx'} = \tfrac{1}{2} \cdot \underset{(x'=\alpha',\ \beta';\ y'=a',\ b')}{\int y'^2 dx'},$$

und es erhellet also jetzt, daß die in §. 110. gefundenen Formeln auch für schiefwinklige Coordinaten gelten.

§. 114.

Aufgabe. Den Schwerpunkt eines halben parabolischen Segments zu finden.

Auflösung. Man nehme den Diameter des Segments als Abscissenaxe an, so ist nach §. 65. meines Lehrbuches der Kegelschnitte die allgemeinste Gleichung der Parabel: $y^2 = px$, wo x, y recht- oder schiefwinklige Coordinaten seyn können. Der Parameter des Diameters verhält sich immer zum Parameter der Axe wie $1 : \operatorname{Sin}\alpha^2$, wenn α den Coordinatenwinkel bezeichnet. Die Coordinaten des Schwerpunktes seyen X, Y.

Nun ist

$$y = p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}},\ \ ydx = p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx;$$

$$\int ydx = p^{\frac{1}{2}}\int x^{\frac{1}{2}}dx = \tfrac{2}{3}\, p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} = \tfrac{2}{3}\, xp^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} = \tfrac{2}{3}\, xy;$$

$$\int xydx = \int p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}dx = \tfrac{2}{5}\, p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}} = \tfrac{2}{5}\, x^2p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} = \tfrac{2}{5}\, x^2y;$$

$$\int y^2dx = \int pxdx = \tfrac{1}{2}\, px^2 = \tfrac{1}{2}\, x \, . \, px = \tfrac{1}{2}\, xy^2;$$

$$X = \frac{\frac{2}{5}\, x^2y}{\frac{2}{3}\, xy} = \tfrac{3}{5}\, x,$$

$$Y = \frac{\frac{1}{2}\, xy^2}{\frac{4}{3}\, xy} = \tfrac{3}{8}\, y;$$

wo die Integrale immer so bestimmt sind, daß sie für $x = 0$ verschwinden, und daher für ein von dem Anfange an genommenes Segment gelten. Es ist also

$$x : X = 5 : 3,$$

$$x - X : X = 5 - 3 : 3,$$

$$X : x - X = 3 : 2,$$

so daß also der Schwerpunkt eines ganzen Parabelsegments, welcher offenbar in dem Diameter liegt, (§. 87.), den Diameter des Segments in zwey Stücke theilt, welche sich wie 3 : 2 zu einander verhalten.

Diesen Satz hat schon Archimedes auf dem Wege der reinen Geometrie bewiesen. Das zweyte der Bücher: De aequiponderantibus, ist den Untersuchungen über den Schwerpunkt der Parabel gewidmet, und der obige Satz ist Prop. 8. erwiesen. Die Beweise des Archimedes verdienen von den Liebhabern der alten Geometrie fleißig studirt zu werden. Montucla sagt S. 228. des ersten Theils seiner Histoire des Mathématiques: „La manière, dont il détermine ce„lui„ (i. e. le centre de gravité) „de la parabole, est „digne de son génie, et montre que s'il n'alla pas plus „loin, ce ne fut pas la difficulté qui l'en empêcha, mais „qu'il préféra sans doute de tourner ses recherches de „quelqu'autre côté plus utile.„

Archimedes hat in seinen Büchern: De aequiponderantibus, prop. 10., auch den Schwerpunkt eines parabolischen Trapeziums, welches zwischen zwey doppelten Ordinaten irgend eines Durchmessers liegt, zu finden gelehrt. Es ist klar, daß der Schwerpunkt in der Axe des Trapeziums liegt, und derselbe wird nach Archimedes auf folgende Art gefunden:

Man theile den Diameter des Trapeziums in fünf gleiche Theile, und nehme in dem mittelsten Theile einen Punkt an, welcher diesen Theil so eintheilt, daß der nach der kleinern Basis des Trapeziums hin liegende Theil zu dem nach der größern Basis hin liegenden dasselbe Verhältniß hat, wie ein Körper, welcher das Quadrat der größern Basis zur Grundfläche und die größere Basis nebst der doppelten kleinern zur Höhe hat, zu einem Körper, der das Quadrat der kleinern Basis zur Grundfläche und die kleinere Basis nebst der doppelten größern zur Höhe hat.

Archimedes beweiset diese Proportion natürlich bloß durch die reine Geometrie, und man muß seine Darstellung am angeführten Orte selbst nachsehen. Ich will hier zeigen, wie der Satz analytisch bewiesen wird.

Die äußersten Coordinaten des halben Trapeziums seyen α, a; β, b; so ist nach dem Obigen und den allgemeinen Formeln in §. 86.:

$$X = \frac{\frac{2}{5}(\beta^2 b - \alpha^2 a)}{\frac{2}{3}(\beta b - \alpha a)} = \frac{3(\beta^2 b - \alpha^2 a)}{5(\beta b - \alpha a)},$$

wie leicht erhellet. Der Diameter des Trapeziums ist $= \beta - \alpha$, und das erste und zweyte Glied der Archimedischen Proportion sind offenbar:

$$X - \alpha - \frac{2(\beta - \alpha)}{5} = X - \frac{3\alpha + 2\beta}{5},$$

$$\text{und } \alpha + \frac{3(\beta - \alpha)}{5} - X = \frac{2\alpha + 3\beta}{5} - X.$$

Aber

$$X - \frac{3\alpha + 2\beta}{5} = \frac{3(\beta^2 b - \alpha^2 a)}{5(\beta b - \alpha a)} - \frac{3\alpha + 2\beta}{5}$$

$$= \frac{3(\beta^2 b - \alpha^2 a) - (3\alpha + 2\beta)(\beta b - \alpha a)}{5(\beta b - \alpha a)}$$

$$= \frac{3\beta^2 b - 3\alpha^2 a - 3\alpha\beta b - 2\beta^2 b + 3\alpha^2 a + 2\alpha\beta a}{5(\beta b - \alpha a)}$$

$$= \frac{\beta^2 b - 3\alpha\beta b + 2\alpha\beta a}{5(\beta b - \alpha a)},$$

$$\frac{2\alpha + 3\beta}{5} - X = \frac{2\alpha + 3\beta}{5} - \frac{3(\beta^2 b - \alpha^2 a)}{5(\beta b - \alpha a)}$$

$$= \frac{(2\alpha + 3\beta)(\beta b - \alpha a) - 3(\beta^2 b - \alpha^2 a)}{5(\beta b - \alpha a)}$$

$$= \frac{2\alpha\beta b + 3\beta^2 b - 2\alpha^2 a - 3\alpha\beta a - 3\beta^2 b + 3\alpha^2 a}{5(\beta b - \alpha a)}$$

$$= \frac{\alpha^2 a - 3\alpha\beta a + 2\alpha\beta b}{5(\beta b - \alpha a)}.$$

Also

$$X - \frac{3\alpha + 2\beta}{5} : \frac{2\alpha + 3\beta}{5} - X = \begin{cases} \beta^2 b - 3\alpha\beta b + 2\alpha\beta a \\ : \alpha^2 a - 3\alpha\beta a + 2\alpha\beta b. \end{cases}$$

Aber nach der Gleichung der Parabel:

$$b^2 = p\beta, \quad a^2 = p\alpha;$$

$$\beta^2 = \frac{b^4}{p^2}, \quad \alpha^2 = \frac{a^4}{p^2};$$

$$\beta^2 b = \frac{b^5}{p^2}, \quad \alpha^2 a = \frac{a^5}{p^2};$$

$$\alpha\beta b = \frac{a^2 b^3}{p^2}, \quad \alpha\beta a = \frac{a^3 b^2}{p^2}.$$

Also

$$X - \frac{3\alpha + 2\beta}{5} : \frac{2\alpha + 3\beta}{5} - X = \begin{cases} b^5 - 3a^2b^3 + 2a^3b^2 \\ : a^5 - 3a^3b^2 + 2a^2b^3. \end{cases}$$

Aber

$$\begin{aligned} b^5 - 3a^2b^3 + 2a^3b^2 &= b^5 - a^2b^3 - 2a^2b^3 + 2a^3b^2 \\ &= b^3(b^2 - a^2) - 2a^2b^2(b - a) \\ &= 2a^2b^2(a - b) - b^3(a^2 - b^2) \\ &= 2a^2b^2(a - b) - b^3(a + b)(a - b) \\ &= \left\{2a^2b^2 - b^3(a + b)\right\}(a - b) \\ &= \left\{a^2b^2 - ab^3 + a^2b^2 - b^4\right\}(a - b) \\ &= b^2\left\{a^2 - ab + a^2 - b^2\right\}(a - b) \\ &= b^2\left\{a(a - b) + (a + b)(a - b)\right\}(a - b) \\ &= b^2(2a + b)(a - b)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^5 - 3a^3b^2 + 2a^2b^3 &= a^5 - a^3b^2 - 2a^3b^2 + 2a^2b^3 \\ &= a^3(a^2 - b^2) - 2a^2b^2(a - b) \\ &= \left\{a^3(a + b) - 2a^2b^2\right\}(a - b) \\ &= \left\{a^4 - a^2b^2 + a^3b - a^2b^2\right\}(a - b) \\ &= a^2\left\{a^2 - b^2 + ab - b^2\right\}(a - b) \\ &= a^2\left\{(a - b)(a + b) + b(a - b)\right\}(a - b) \\ &= a^2(a + 2b)(a - b)^2. \end{aligned}$$

Also

$$X-\frac{3\alpha+2\beta}{5}:\frac{2\alpha+3\beta}{5}-X=b^2(2a+b)(a-b)^2:a^2(a+2b)(a-b)^2$$
$$=b^2(2a+b):a^2(a+2b)$$
$$=8b^2(2a+b):8a^2(a+2b)$$
$$=(2b)^2.(4a+2b):(2a)^2.(2a+4b),$$

welches offenbar der Archimedische Satz ist, wenn man diese Proportion in Worte übersetzt.

Will man den Schwerpunkt des halben parabolischen Trapeziums haben, so muß man noch die Ordinate Y bestimmen. Es ist aber, wie aus dem Obigen leicht folgt:

$$Y=\frac{\frac{1}{2}\beta b^2-\frac{1}{2}\alpha a^2}{2(\frac{2}{3}\beta b-\frac{2}{3}\alpha a)}=\frac{\beta b^2-\alpha a^2}{\frac{8}{3}(\beta b-\alpha a)}$$
$$=\frac{3(\beta b^2-\alpha a^2)}{8(\beta b-\alpha a)}.$$

§. 115.

Aufgabe. Den Schwerpunkt eines zwischen den Coordinaten x, y enthaltenen elliptischen Stücks, vom Anfange der Coordinaten an gerechnet, zu finden.

Auflösung. a und b seyen die halbe große und kleine Axe, oder auch zwey halbe conjugirte Durchmesser; so ist bekanntlich die Gleichung der Ellipse:

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(2ax-x^2),$$

wenn die Coordinaten vom Scheitel des Diameters $2a$ an genommen werden. (M. s. mein Lehrbuch der Kegelschnitte, S. 135. 176.)

Man muß nun wieder $\int ydx$, $\int xydx$, $\int y^2dx$ suchen, und die Integrale so bestimmen, daß sie für $x=0$ verschwinden, da man vom Anfange der Coordinaten ausgeht. Es ist

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{2ax-x^2},$$

$$ydx = \frac{b}{a} dx \sqrt{2ax - x^2},$$

$$\int ydx = \frac{b}{a} \int dx \sqrt{2ax - x^2},$$

$$\int dx \sqrt{2ax - x^2} = \int \frac{(2ax - x^2)\, dx}{\sqrt{2ax - x^2}}$$

$$= 2a \int \frac{xdx}{\sqrt{2ax - x^2}} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{2ax - x^2}}.$$

Ich habe die Entwickelung dieser beiden Integrale in dem Anhange zu diesem Kapitel gegeben, und nach dieser Entwickelung ist

$$\int dx \sqrt{2ax - x^2}$$

$$= \begin{cases} 2a \left[-\sqrt{2ax - x^2} - 2a \operatorname{Arc Tang} \dfrac{\sqrt{2ax - x^2}}{x} \right] \\ + \tfrac{1}{2}(x + 3a) \sqrt{2ax - x^2} + 3a^2 \operatorname{Arc Tang} \dfrac{\sqrt{2ax - x^2}}{x} \end{cases}$$

$$= \tfrac{1}{2}(x - a) \sqrt{2ax - x^2} - a^2 \operatorname{Arc Tang} \frac{\sqrt{2ax - x^2}}{x}.$$

Man setze nun

$$\operatorname{Arc Tang} \frac{\sqrt{2ax - x^2}}{x} = \varphi, \quad \operatorname{Tang} \varphi = \frac{\sqrt{2ax - x^2}}{x},$$

$$\operatorname{Cotg} \varphi = \frac{x}{\sqrt{2ax - x^2}},$$

und folglich

$$\operatorname{Cotg} \varphi^2 = \frac{x^2}{2ax - x^2}, \quad 1 + \operatorname{Cotg} \varphi^2 = \frac{2ax}{2ax - x^2}.$$

Aber

$$\operatorname{Cos} \varphi^2 = 1 - \operatorname{Sin} \varphi^2 = 1 - \frac{1}{\operatorname{Cosec} \varphi^2} = \frac{\operatorname{Cosec} \varphi^2 - 1}{\operatorname{Cosec} \varphi^2}$$

$$= \frac{1 + \operatorname{Cotg} \varphi^2 - 1}{1 + \operatorname{Cotg} \varphi^2} = \frac{\operatorname{Cotg} \varphi^2}{1 + \operatorname{Cotg} \varphi^2}.$$

Also

$$\operatorname{Cos} \varphi^2 = \frac{x^2}{2ax - x^2} \cdot \frac{2ax - x^2}{2ax} = \frac{x}{2a}.$$

Nun setze man

$\phi = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\,\mathrm{Arc\,Sin\,vers}\,z$, $2\phi = \pi - \mathrm{Arc\,Sin\,vers}\,z$,
$\mathrm{Arc\,Sin\,vers}\,z = \pi - 2\phi$, $z = \mathrm{Sin\,vers}(\pi - 2\phi) =$
$= 1 - \mathrm{Cos}(\pi - 2\phi) = 1 - \mathrm{Cos}\,\pi . \mathrm{Cos}\,2\phi - \mathrm{Sin}\,\pi . \mathrm{Sin}\,2\phi$
$= 1 + \mathrm{Cos}\,2\phi = 1 + \mathrm{Cos}\,\phi^2 - \mathrm{Sin}\,\phi^2 = 2\,\mathrm{Cos}\,\phi^2$.

Also $z = \frac{x}{a}$, $\phi = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\,\mathrm{Arc\,Sin\,vers}\frac{x}{a}$, und folglich

$$\int dx\sqrt{2ax - x^2} = \tfrac{1}{2}(x - a)\sqrt{2ax - x^2} + \tfrac{1}{2}a^2\,\mathrm{Arc\,Sin\,vers}\frac{x}{a}$$

$$= \tfrac{1}{2}a^2\,\mathrm{Arc\,Sin\,vers}\frac{x}{a} - \tfrac{1}{2}(a - x)\sqrt{2ax - x^2},$$

wo die Constante $\frac{1}{2}a^2\pi$ weggelassen ist, damit das Integral so bestimmt werde, daß es für $x = 0$ verschwindet. Also

$$\int y dx = \frac{b}{a}\int dx\sqrt{2ax - x^2} =$$

$$= \frac{b}{2a}(x - a)\sqrt{2ax - x^2} + \tfrac{1}{2}ab\,\mathrm{Arc\,Sin\,vers}\frac{x}{a}.$$

Wir gehen jetzt zur Bestimmung der Integrale $\int xydx$ und $\int y^2dx$ über. Es ist

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2),\quad 2ydy = \frac{b^2}{a^2}(2a - 2x)\,dx,$$

$$ydy = \frac{b^2}{a^2}(a - x)dx,\quad y^2dy = \frac{b^2}{a^2}(a - x)ydx,$$

$$\int y^2dy = \tfrac{1}{3}y^3 = \frac{b^2}{a^2}\int(a - x)ydx,$$

$$\frac{a^2y^3}{3b^2} = a\int ydx - \int xydx,$$

$$\int xydx = a\int ydx - \frac{a^2y^3}{3b^2},$$

$$y^3 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2).\frac{b}{a}\sqrt{2ax - x^2}$$

$$= \frac{b^3}{a^3}(2ax - x^2)\sqrt{2ax - x^2},$$

$$\frac{a^2y^3}{3b^2} = \frac{b}{3a}(2ax - x^2)\sqrt{2ax - x^2},$$

und folglich $\int xydx =$

$$= \tfrac{1}{2}a^2b\,\text{ArcSinvers}\frac{x}{a} - \tfrac{1}{2}b(a-x)\sqrt{2ax-x^2} - \frac{b}{3a}(2ax-x^2)\sqrt{2ax-x^2}$$

$$= \tfrac{1}{2}a^2b\,\text{ArcSin vers}\,\frac{x}{a} - \left(\tfrac{1}{2}ab - \tfrac{1}{2}bx + \tfrac{2}{3}bx - \frac{b}{3a}x^2\right)\sqrt{2ax-x^2}$$

$$= \tfrac{1}{2}a^2b\,\text{Arc Sin vers}\,\frac{x}{a} - \left(\tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{6}bx - \frac{b}{3a}x^2\right)\sqrt{2ax-x^2}$$

$$= \tfrac{1}{2}a^2b\,\text{Arc Sin vers}\frac{x}{a} - \frac{b}{6a}(3a^2 + ax - 2x^2)\sqrt{2ax-x^2}.$$

Das Integral ist so bestimmt, daß es für $x = 0$ verschwindet.

$$\int y^2dx = \frac{b^2}{a^2}\int(2axdx - x^2dx)$$

$$= \frac{b^2}{a^2}(ax^2 - \tfrac{1}{3}x^3).$$

Also

$$X = \frac{\tfrac{1}{2}a^2b\,\text{Arc Sin vers}\frac{x}{a} - \frac{b}{6a}(3a^2 + ax - 2x^2)\sqrt{2ax-x^2}}{\tfrac{1}{2}ab\,\text{Arc Sin vers}\;\frac{x}{a} - \frac{b}{2a}(a-x)\sqrt{2ax-x^2}}$$

$$= \frac{3a^3b\,\text{Arc Sin vers}\;\frac{x}{a} - b(3a^2 + ax - 2x^2)\sqrt{2ax-x^2}}{3a^2b\,\text{Arc Sin vers}\frac{x}{a} - 3b(a-x)\sqrt{2ax-x^2}}$$

$$= \frac{3a^3\,\text{Arc Sin vers}\frac{x}{a} - (3a^2 + ax - 2x^2)\sqrt{2ax-x^2}}{3\left[a^2\,\text{Arc Sin vers}\frac{x}{a} - (a-x)\sqrt{2ax-x^2}\right]},$$

$$Y = \frac{\frac{b^2}{a^2}(ax^2 - \tfrac{1}{3}x^3)}{2\left[\tfrac{1}{2}ab\,\text{Arc Sin vers}\frac{x}{a} - \frac{b}{2a}(a-x)\sqrt{2ax-x^2}\right]}$$

$$= \frac{bx^2(3a-x)}{3a\left[a^2\,\text{Arc Sin vers}\frac{x}{a} - (a-x)\sqrt{2ax-x^2}\right]}.$$

Für die halbe Ellipse ist $x = 2a$. Also

$$X = \frac{3a^3\pi}{3a^2\pi} = a, \text{ wie es seyn muß,}$$

$$Y = \frac{4a^2b(3a - 2a)}{3a^3\pi} = \frac{4b}{3\pi}.$$

Für den elliptischen Quadranten ist $x = a$, und folglich

$$X = \frac{3a^3 \cdot \frac{1}{2}\pi - (3a^2 + a^2 - 2a^2) \cdot a}{3a^2 \cdot \frac{1}{2}\pi}$$

$$= \frac{3a^3 \cdot \frac{1}{2}\pi - 2a^3}{3a^2 \cdot \frac{1}{2}\pi} = \frac{a(\frac{3}{2}\pi - 2)}{\frac{3}{2}\pi} = a\left(1 - \frac{4}{3\pi}\right),$$

$$Y = \frac{ba^2 \cdot 2a}{3a^3 \cdot \frac{1}{2}\pi} = \frac{4b}{3\pi}.$$

§. 116.

Aufgabe. Den Schwerpunkt eines zwischen den rechtwinkligen Coordinaten x, y enthaltenen, vom Scheitel der großen Axe an genommenen, hyperbolischen Stücks zu finden.

Auflösung. Bezeichnen a und b die halbe große und kleine Axe der Hyperbel, so ist bekanntlich

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2).$$

(M. s. mein Lehrbuch der Kegelschnitte, S. 283.)

Man muß wieder $\int ydx$, $\int xydx$ und $\int y^2dx$ so bestimmen, daß sie für $x = 0$ verschwinden. Nun erhält man leicht aus obiger Gleichung:

$$2ydy = \frac{b^2}{a^2}(2a + 2x)\,dx,$$

$$ydy = \frac{b^2}{a^2}(a + x)dx,$$

$$\frac{a^2}{b^2} \cdot y^2dy = (a + x)ydx = aydx + xydx,$$

$$\frac{a^2}{b^2}\int y^2 dy = \frac{a^2y^3}{3b^2} = a\int y dx + \int xy dx,$$

$$\int xy dx = \frac{a^2y^3}{3b^2} - a\int y dx,$$

$$\int y^2 dx = \frac{b^2}{a^2}\int(2ax + x^2)dx = \frac{b^2}{a^2}(ax^2 + \tfrac{1}{3}x^3).$$

Man sieht also, daß es bloß auf die Bestimmung von $\int y dx$ ankommt, wozu man gelangt, wenn man bedenkt, daß durch $\int y dx$ der Flächenraum des gegebenen hyperbolischen Stücks dargestellt wird, (§. 109.).

Seyen nun in Fig. 83. die Coordinaten $AP = x$, $PQ = y$, und man beziehe die Hyperbel auf ihre Asymptoten, und setze $CR = x'$, $RQ = y'$, $CB = k$; so ist bekanntlich nach §. 161. meines Lehrbuches der Kegelschnitte:

$$x'y' = k^2,$$

oder, wenn man die Abscissen nicht von C, sondern von B an rechnet, also $BR = x'$ setzt:

$$(x' + k)y' = k^2,\ y' = \frac{k^2}{x' + k},$$

$$y'dx' = \frac{k^2 dx'}{x' + k},\ \int y'dx' = k^2\int\frac{dx'}{x' + k}.$$

Setzt man nun $x' + k = z$, so ist

$$dx' = dz,\ \frac{dx'}{x' + k} = \frac{dz}{z},\ \int\frac{dx'}{x' + k} = \int\frac{dz}{z},$$

$$\text{d. i.}\int\frac{dx'}{x' + k} = \mathrm{Logn}\, z = \mathrm{Logn}\,(x' + k).$$

Also $\int y'dx' = k^2\,\mathrm{Logn}\,(x' + k)$.

Setzt man nun den Flächenraum $ABRQ = u$, und den Asymptotenwinkel $= \alpha$, so ist nach §. 113.:

$$u = \mathrm{Sin}\,\alpha\int y'dx' + C$$
$$= k^2\,\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Logn}\,(x' + k) + C,$$

wo C so zu bestimmen ist, daß u für $x' = 0$ verschwindet. Also

$$0 = k^2\,\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Logn}\,k + C,$$
$$C = -k^2\,\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Logn}\,k,$$

$$u = k^2 \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Logn}(x' + k) - k^2 \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Logn} k$$
$$= k^2 \operatorname{Sin}\alpha \left\{\operatorname{Logn}(x' + k) - \operatorname{Logn} k\right\},$$

d. i. $u = k^2 \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Logn}\frac{x' + k}{k}$, oder, wenn man die Absciſsen wieder vom Mittelpunkte C an rechnet:

$$u = k^2 \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Logn}\frac{x'}{k}.$$

Zieht man nun die Linie CQ, so ist der Raum $CAQ = ABRQ = u$. Denn nach einer sehr bekannten Eigenschaft der Hyperbel ist $CR \,.\, RQ = CB \,.\, BA$; also $\Delta\, CRQ = \Delta\, CBA$, und folglich, wenn man von diesen beiden Triangeln erst CBq abzieht, und dann qAQ auf beiden Seiten addirt, offenbar:

$$BRQA = CAQ = u = k^2 \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Logn}\frac{x'}{k}.$$

Nun ist das hyperbolische Stück $APQ = \Delta\, CPQ - CAQ$, und, wenn man PQ nach T verlängert und DA auf CP durch A senkrecht zieht:

$$CR \,.\, RQ = CB \,.\, BA,$$
$$CR : CB = BA : RQ,$$
$$AD : QT = BA : RQ,$$
$$CR : CB = AD : QT, \text{ d. i.}$$
$$CR : k = b : PT - PQ.$$

Aber

$$CA : AD = CP : PT,$$
$$a : b = a + x : PT,$$
$$PT = \frac{b(a + x)}{a},$$

$$CR : k = b : \frac{b(a + x)}{a} - y$$
$$= b : \frac{b(a + x) - ay}{a},$$

$$\frac{CR}{k} = \frac{x'}{k} = \frac{ab}{b(a + x) - ay}.$$

Also nach dem Obigen:

$$APQ = \tfrac{1}{2}(a+x)y - k^2 \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Logn}\frac{ab}{b(a+x)-ay}.$$

Nun ist nach §. 161. meines Lehrbuches der Kegelschnitte $k^2 = \frac{a^2+b^2}{4}$. Also

$$k^2 \operatorname{Sin}\alpha = \tfrac{1}{4}(a^2+b^2)\operatorname{Sin}\alpha = \tfrac{1}{2}(a^2+b^2)\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}\alpha \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}\alpha.$$

Auch ist immer bey der Hyperbel

$$a:b = 1:\operatorname{Tg}\tfrac{1}{2}\alpha = \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}\alpha : \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}\alpha,$$

$$a^2 : b^2 = \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}\alpha^2 : \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}\alpha^2,$$

$$a^2+b^2 : b^2 = \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}\alpha^2 + \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}\alpha^2 : \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}\alpha^2,$$

$$a^2+b^2 : b^2 = 1 : \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}\alpha^2,$$

$$(a^2+b^2)\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{b^2}{\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}\alpha},$$

$$\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{a\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}\alpha}{b},$$

$$(a^2+b^2)\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}\alpha\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{b^2}{\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}\alpha}\cdot\frac{a\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}\alpha}{b} = ab,$$

$$k^2\operatorname{Sin}\alpha = \tfrac{1}{2}ab,$$

und folglich APQ oder

$$\begin{aligned}\int y\,dx &= \tfrac{1}{2}(a+x)y - \tfrac{1}{2}ab\operatorname{Logn}\frac{ab}{b(a+x)-ay}\\ &= \frac{b(a+x)\sqrt{2ax+x^2}}{2a} - \tfrac{1}{2}ab\operatorname{Logn}\frac{ab}{b(a+x)-b\sqrt{2ax+x^2}}\\ &= \frac{b(a+x)\sqrt{2ax+x^2}}{2a} - \tfrac{1}{2}ab\operatorname{Logn}\frac{a}{a+x-\sqrt{2ax+x^2}}.\end{aligned}$$

Da nun

$$(a+x-\sqrt{2ax+x^2})(a+x+\sqrt{2ax+x^2}) =$$
$$=(a+x)^2-(2ax+x^2)=a^2+2ax+x^2-2ax-x^2=a^2$$

ist, so erhält man, wenn der Bruch hinter Logn im Zähler und Nenner mit $a+x+\sqrt{2ax+x^2}$ multiplicirt wird:

$$\int y dx = \frac{b(a+x)\sqrt{2ax+x^2}}{2a} - \tfrac{1}{2} ab \operatorname{Logn} \frac{a+x+\sqrt{2ax+x^2}}{a}$$
$$= \frac{b}{a} \int dx \sqrt{2ax+x^2}.$$

Diese Betrachtung lehrt zugleich, wie man zuweilen durch Hülfe einer geometrischen Betrachtung ein Integral finden kann, welches man auf rein analytischem Wege vielleicht nur durch mühsamere Substitutionen erhalten hätte. Es ist nämlich

$$\int dx \sqrt{2ax+x^2} = \tfrac{1}{2}(a+x)\sqrt{2ax+x^2} - \tfrac{1}{2}a^2 \operatorname{Logn} \frac{a+x+\sqrt{2ax+x^2}}{a}.$$

Hätte ich die elementare Quadratur der Hyperbel in §. 180. bis §. 185. meines Lehrbuches der Kegelschnitte, welche, wie ich glaube, auf völlig strengen und bündigen Schlüssen beruhet, voraussetzen wollen; so würde ich obiges Integral noch mit weit weniger Mühe erhalten haben. Ich wollte mich aber in diesem Falle nicht bloß auf jenes Buch beziehen.

Oben fanden wir

$$\int xy dx = \frac{a^2 y^3}{3b^2} - a\int y dx,$$

$$y^3 = y^2 \cdot y = \frac{b^3}{a^3}(2ax+x^2)\sqrt{2ax+x^2}.$$

Also

$$\int xy dx = \begin{cases} \dfrac{b(2ax+x^2)\sqrt{2ax+x^2}}{3a} - \dfrac{b(a+x)\sqrt{2ax+x^2}}{2} \\[2ex] + \tfrac{1}{2}a^2 b \operatorname{Logn} \dfrac{a+x+\sqrt{2ax+x^2}}{a} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{[2b(2ax+x^2) - 3ab(a+x)]\sqrt{2ax+x^2}}{6a} \\[2ex] + \tfrac{1}{2}a^2 b \operatorname{Logn} \dfrac{a+x+\sqrt{2ax+x^2}}{a}. \end{cases}$$

Man hat daher nun $\int y dx$, $\int xy dx$, $\int y^2 dx$, und kann jetzt die Coordinaten des Schwerpunktes

$$X = \frac{\int xy\,dx}{\int y\,dx},\quad Y = \frac{\int y^2 dx}{2\int y\,dx}$$

bestimmen.

§. 117.

Da wir in diesem Werke öfters die Cycloide als Beyspiel gebrauchen werden, so wollen wir in diesem Paragraphen die Hauptgleichungen dieser merkwürdigen Curve, welche seit dem siebzehnten Jahrhundert in der Mathematik eine gewisse Celebrität erlangt hat, mit möglichster Kürze entwickeln.

Ein Kreis, dessen Durchmesser AB' (Fig. 84.) auf der Linie AB senkrecht ist, bewege sich auf der Linie AB mit einer wälzenden Bewegung; so beschreibt der Punkt A eine krumme Linie, welche bekanntlich eine Cycloide, Radlinie oder Trochoide (Trochoides, Cycloïde, Roulette) genannt wird. Der Kreis, durch dessen Bewegung die Cycloide beschrieben wird, heißt der erzeugende Kreis; der Punkt A der beschreibende Punkt; AB die Basis oder Grundlinie; C, die Mitte der Grundlinie, der Mittelpunkt der Cycloide; und S, wenn SC auf AB durch C senkrecht ist, der Scheitel der Cycloide.

Man kann auch den beschreibenden Punkt außer- oder innerhalb des erzeugenden Kreises annehmen; im ersten Falle erhält man die verkürzte, im andern die gestreckte oder verlängerte Cycloide. Die Untersuchung dieser beiden letzten Arten ist leicht, wenn man die Untersuchung der gemeinen Cycloide wohl verstanden hat, welche wir daher hier auch bloß ins Auge fassen werden.

Um nun die Gleichungen der Cycloide zu finden, nehme man zuerst A, welches man den Anfang der Cycloide nennen könnte, als Anfang der Coordinaten, und die Basis AB als Axe an.

Die Basis ist offenbar dem Umfange des erzeugenden Kreises gleich, welches unmittelbar aus der Entstehung der Cycloide folgt. Also, wenn wir den Halbmesser des erzeugenden

Kreises durch r bezeichnen, so ist $AB = 2r\pi$, und folglich $AC = r\pi$.

Den Winkel, welchen der Radius AC' in jeder Lage des erzeugenden Kreises mit dem auf AB senkrechten Radius dieses Kreises einschließt, soll der Wälzungswinkel genannt und durch φ bezeichnet werden, wobey wir bemerken, daß φ, wenn es für sich, nicht als veränderliche Größe einer trigonometrischen Function, vorkommt, immer die Länge des dem Wälzungswinkel entsprechenden Kreisbogens für einen Halbmesser $= 1$ bezeichnen soll.

Befindet sich also der erzeugende Kreis in $A'QB''D$, so ist Q der beschreibende Punkt, $QC''A'$ der Wälzungswinkel, und AA' ist offenbar dem Kreisbogen $A'Q$ gleich. Hat nun φ die obige Bedeutung, so ist bekanntlich

$$\varphi : A'Q = 1 : r,$$

und also $A'Q = r\varphi = AA'$.

Man bezeichne nun die Abscisse AP wie gewöhnlich durch x, die Ordinate PQ durch y; so erhellet, wenn man sich von Q auf $A'B''$ ein Perpendikel gefällt denkt, leicht, daß

$$AP = AA' - r \cdot \text{Sin}(180^\circ - \varphi),$$
$$PQ = A'C'' + r \cdot \text{Cos}(180^\circ - \varphi),$$

d. i., weil nach dem Obigen $AA' = r\varphi$ ist:

$$x = r\varphi - r\,\text{Sin}\,\varphi = r(\varphi - \text{Sin}\,\varphi),$$
$$y = r - r\,\text{Cos}\,\varphi = r(1 - \text{Cos}\,\varphi),$$

oder, weil $1 - \text{Cos}\,\varphi = 2\,\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}\varphi^2$ ist:

I) $x = r(\varphi - \text{Sin}\,\varphi)$, $y = r(1 - \text{Cos}\,\varphi) = 2r\,\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}\varphi^2$;

die beiden ersten Gleichungen der Cycloide in Beziehung auf die Basis als Axe und den Anfang der Cycloide als Anfang der Abscissen.

Will man eine Gleichung bloß zwischen x und y haben, so muß man aus den beiden obigen Gleichungen φ eliminiren. Da nun $y = r(1 - \text{Cos}\,\varphi)$, und $1 - \text{Cos}\,\varphi = \text{Sin vers}\,\varphi$

ist, so ist $y = r \,\mathrm{Sin\,vers}\,\varphi$, $\frac{y}{r} = \mathrm{Sin\,vers}\,\varphi$, und folglich $\varphi = \mathrm{Arc\,Sin\,vers}\,\frac{y}{r}$. Also

$$x = r \,\mathrm{Arc\,Sin\,vers}\,\frac{y}{r} - r \,\mathrm{Sin}\,\varphi.$$

Aber $\mathrm{Cos}\,\varphi = \frac{r-y}{r}$, und folglich

$$\mathrm{Sin}\,\varphi^2 = 1 - \left(\frac{r-y}{r}\right)^2 = \frac{r^2-(r-y)^2}{r^2}$$

$$= \frac{r^2 - r^2 + 2ry - y^2}{r^2} = \frac{2ry-y^2}{r^2},$$

$$\mathrm{Sin}\,\varphi = \frac{1}{r}\sqrt{2ry-y^2}.$$

Also

$$\text{II)}\quad x = r\,\mathrm{Arc\,Sin\,vers}\,\frac{y}{r} - \sqrt{2ry-y^2};$$

die zweyte Gleichung der Cycloide in Beziehung auf die Basis als Axe und den Anfang als Anfang der Abscissen.

Nimmt man den Durchmesser AB' des erzeugenden Kreises als Axe und den Anfang A als Anfang der Abscissen an; so ist klar, daß man in den Gleichungen I. und II. bloß x und y gegen einander vertauschen muß. Dies gibt in Beziehung auf das obige Coordinatensystem:

$$\text{III)}\quad y = r(\varphi - \mathrm{Sin}\,\varphi),\quad x = r(1 - \mathrm{Cos}\,\varphi);$$

$$\text{IV)}\quad y = r\,\mathrm{Arc\,Sin\,vers}\,\frac{x}{r} - \sqrt{2rx-x^2}.$$

Nimmt man endlich den Scheitel S als Anfang und SC als Axe der Abscissen an; so muß man, weil $SC = 2r$ ist, in den Gleichungen I. und II. offenbar $2r - x$ für y und $AC - y = r\pi - y$ für x setzen. Hierdurch erhält man aus I.:

$$r\pi - y = r(\varphi - \mathrm{Sin}\,\varphi),\quad 2r - x = r(1 - \mathrm{Cos}\,\varphi).$$

Also

$$\text{V)}\ y = r(\pi - \varphi + \operatorname{Sin}\varphi),\quad x = r(1 + \operatorname{Cos}\varphi),$$

oder, wenn man $\pi - \varphi = \psi$ setzt, da

$$\operatorname{Sin}\varphi = \operatorname{Sin}(\pi - \varphi) = \operatorname{Sin}\psi,$$
$$\operatorname{Cos}\varphi = -\operatorname{Cos}(\pi - \varphi) = -\operatorname{Cos}\psi$$

ist:

$$y = r(\psi + \operatorname{Sin}\psi),\quad x = r(1 - \operatorname{Cos}\psi).$$

Aus der Gleichung II. erhält man:

$$r\pi - y = r\operatorname{Arc}\operatorname{Sin}\operatorname{vers}\frac{2r - x}{r} - \sqrt{2r(2r - x) - (2r - x)^2}.$$

Aber

$$2r(2r - x) - (2r - x)^2 = 4r^2 - 2rx - 4r^2 + 4rx - x^2$$
$$= 2rx - x^2,$$

$$\operatorname{Arc}\operatorname{Sin}\operatorname{vers}\frac{2r - x}{r} = \operatorname{Arc}\operatorname{Sin}\operatorname{vers}\left(2 - \frac{x}{r}\right)$$
$$= \pi - \operatorname{Arc}\operatorname{Sin}\operatorname{vers}\frac{x}{r},$$

und folglich

$$r\pi - y = r\pi - r\operatorname{Arc}\operatorname{Sin}\operatorname{vers}\frac{x}{r} - \sqrt{2rx - x^2},$$

$$-y = -\ r\operatorname{Arc}\operatorname{Sin}\operatorname{vers}\frac{x}{r} - \sqrt{2rx - x^2},$$

d. i.

$$\text{VI)}\ y = r\operatorname{Arc}\operatorname{Sin}\operatorname{vers}\frac{x}{r} + \sqrt{2rx - x^2}.$$

§. 118.

Aufgabe. Den Schwerpunkt eines cycloidalischen Stücks zu finden, wenn man den Scheitel S (Fig. 84.) als Anfang und SC als Axe der Abscissen annimmt, und übrigens das Stück vom Anfange der Coordinaten an nimmt.

Auflösung. Nach V. im vorhergehenden Paragraphen ist

$$x = r(1 - \operatorname{Cos}\psi),\quad y = r(\psi + \operatorname{Sin}\psi),$$
$$dx = r\operatorname{Sin}\psi\, d\psi,\quad y\,dx = r^2(\psi + \operatorname{Sin}\psi)\operatorname{Sin}\psi\, d\psi,$$
$$\int y\,dx = r^2\left(\int\psi\operatorname{Sin}\psi\, d\psi + \int\operatorname{Sin}\psi^2\, d\psi\right),$$

und folglich, nach einer sehr bekannten Reductionsformel aus der Integralrechnung:

$$\begin{aligned}\int y dx &= r^2(\psi\int \mathrm{Sin}\,\psi\, d\psi - \int d\psi \int \mathrm{Sin}\,\psi\, d\psi + \int \mathrm{Sin}\,\psi^2\, d\psi)\\ &= r^2(-\psi\,\mathrm{Cos}\psi + \int \mathrm{Cos}\,\psi\, d\psi + \int \mathrm{Sin}\,\psi^2\, d\psi)\\ &= r^2\left\{-\psi\,\mathrm{Cos}\psi + \mathrm{Sin}\,\psi + \int \frac{(1-\mathrm{Cos}\,2\psi)\,d\psi}{2}\right\}\\ &= r^2(-\psi\,\mathrm{Cos}\psi + \mathrm{Sin}\,\psi + \tfrac{1}{2}\psi - \tfrac{1}{2}\int \mathrm{Cos}\,2\psi\, d\psi)\\ &= r^2(-\psi\,\mathrm{Cos}\psi + \mathrm{Sin}\,\psi + \tfrac{1}{2}\psi - \tfrac{1}{4}\int \mathrm{Cos}\,2\psi\, d2\psi)\\ &= r^2(-\psi\,\mathrm{Cos}\psi + \mathrm{Sin}\,\psi + \tfrac{1}{2}\psi - \tfrac{1}{4}\mathrm{Sin}\,2\psi)\\ &= r^2(-\psi\,\mathrm{Cos}\psi + \mathrm{Sin}\,\psi + \tfrac{1}{2}\psi - \tfrac{1}{2}\mathrm{Sin}\,\psi\,\mathrm{Cos}\,\psi),\end{aligned}$$

wo keine Constans beyzufügen ist, weil das Integral so zu bestimmen ist, daß es für $x=0$, d. i. für $\psi=0$, verschwindet.

Also

$$\int y dx = r^2\left\{\psi(\tfrac{1}{2}-\mathrm{Cos}\,\psi) + \mathrm{Sin}\,\psi(1-\tfrac{1}{2}\mathrm{Cos}\,\psi)\right\}.$$

Ferner ist

$$\int xy dx = x\int y dx - \int dx \int y dx,$$

$$\begin{aligned}dx\int y dx &= r^3(-\psi\,\mathrm{Cos}\psi + \mathrm{Sin}\,\psi + \tfrac{1}{2}\psi - \tfrac{1}{2}\mathrm{Sin}\,\psi\,\mathrm{Cos}\,\psi)\,\mathrm{Sin}\,\psi\, d\psi\\ &= r^3(-\psi\,\mathrm{Sin}\psi\,\mathrm{Cos}\psi + \mathrm{Sin}\psi^2 + \tfrac{1}{2}\psi\,\mathrm{Sin}\psi - \tfrac{1}{2}\mathrm{Sin}\psi^2\,\mathrm{Cos}\psi)\,d\psi\\ &= r^3(-\tfrac{1}{2}\psi\,\mathrm{Sin}2\psi + \mathrm{Sin}\psi^2 + \tfrac{1}{2}\psi\,\mathrm{Sin}\psi - \tfrac{1}{2}\mathrm{Cos}\psi + \tfrac{1}{2}\mathrm{Cos}\psi^3)\,d\psi.\end{aligned}$$

Nach dem Obigen ist

$$\int \psi\,\mathrm{Sin}\,\psi\, d\psi = -\psi\,\mathrm{Cos}\,\psi + \mathrm{Sin}\,\psi. \quad \text{Also}$$

$$\int \psi\,\mathrm{Sin}2\psi\, d\psi = \tfrac{1}{4}\int 2\psi\,\mathrm{Sin}\,2\psi\, d2\psi = -\tfrac{1}{2}\psi\,\mathrm{Cos}\,2\psi + \tfrac{1}{4}\mathrm{Sin}2\psi.$$

Auch ist nach dem Vorhergehenden

$$\int \mathrm{Sin}\,\psi^2\, d\psi = \tfrac{1}{2}\psi - \tfrac{1}{4}\mathrm{Sin}\,2\psi,$$

und nach bekannten Sätzen der Differenzialrechnung

$$\int \mathrm{Cos}\,\psi\, d\psi = \mathrm{Sin}\,\psi. \quad \text{Auch}$$

$$\begin{aligned}\int \mathrm{Cos}\,\psi^2 d\psi &= \int(1-\mathrm{Sin}\,\psi^2)\,d\psi\\ &= \psi - \tfrac{1}{2}\psi + \tfrac{1}{4}\mathrm{Sin}\,2\psi\\ &= \tfrac{1}{2}\psi + \tfrac{1}{4}\mathrm{Sin}\,2\psi = \tfrac{1}{2}(\psi + \mathrm{Sin}\,\psi\,\mathrm{Cos}\,\psi),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \mathrm{Cos}\psi^3 d\psi &= \mathrm{Cos}\,\psi^2\int \mathrm{Cos}\,\psi\, d\psi - \int d\,.\,\mathrm{Cos}\,\psi^2\int \mathrm{Cos}\,\psi\, d\psi\\ &= \mathrm{Cos}\,\psi^2\int \mathrm{Cos}\psi\, d\psi + 2\int \mathrm{Cos}\psi\,\mathrm{Sin}\psi\, d\psi\int \mathrm{Cos}\psi\, d\psi\\ &= \mathrm{Cos}\,\psi^2\,\mathrm{Sin}\,\psi + 2\int \mathrm{Cos}\,\psi\,\mathrm{Sin}\,\psi^2\, d\psi\end{aligned}$$

$$= \mathrm{Cos}\,\psi^2\,\mathrm{Sin}\,\psi + 2\int \mathrm{Cos}\,\psi\,(1 - \mathrm{Cos}\,\psi^2)\,d\psi$$
$$= \mathrm{Cos}\,\psi^2\,\mathrm{Sin}\,\psi + 2\int \mathrm{Cos}\,\psi\,d\psi - 2\int \mathrm{Cos}\,\psi^3\,d\psi$$
$$= \mathrm{Cos}\,\psi^2\,\mathrm{Sin}\,\psi + 2\mathrm{Sin}\,\psi - 2\int \mathrm{Cos}\,\psi^3\,d\psi,$$
$$3\int \mathrm{Cos}\,\psi^3\,d\psi = \mathrm{Cos}\,\psi^2\,\mathrm{Sin}\,\psi + 2\mathrm{Sin}\,\psi,$$
$$\int \mathrm{Cos}\,\psi^3\,d\psi = \tfrac{1}{3}\,\mathrm{Cos}\,\psi^2\,\mathrm{Sin}\,\psi + \tfrac{2}{3}\mathrm{Sin}\,\psi.$$

Macht man nun die nöthigen Substitutionen, so erhält man $\int dx \int y dx =$

$$= r^3.\left\{\begin{array}{llll} \tfrac{1}{4}\psi\mathrm{Cos}\,2\psi - \tfrac{1}{8}\mathrm{Sin}\,2\psi + \tfrac{1}{2}\psi & - \tfrac{1}{2}\psi\mathrm{Cos}\,\psi & + \tfrac{1}{2}\mathrm{Sin}\,\psi & + \tfrac{1}{6}\mathrm{Cos}\,\psi^2\,\mathrm{Sin}\,\psi \\ \qquad - \tfrac{1}{4}\mathrm{Sin}\,2\psi & & - \tfrac{1}{2}\mathrm{Sin}\,\psi & \\ & & + \tfrac{1}{3}\mathrm{Sin}\,\psi & \end{array}\right\}$$

$$= r^3(\tfrac{1}{4}\psi\mathrm{Cos}\,2\psi - \tfrac{3}{8}\mathrm{Sin}\,2\psi + \tfrac{1}{2}\psi - \tfrac{1}{2}\psi\,\mathrm{Cos}\,\psi + \tfrac{1}{3}\mathrm{Sin}\,\psi + \tfrac{1}{6}\mathrm{Cos}\,\psi^2\,\mathrm{Sin}\,\psi),$$

und folglich $\int xy dx =$

$$= r^3.\left\{\begin{array}{lll} -\psi\mathrm{Cos}\psi + \mathrm{Sin}\psi + \tfrac{1}{2}\psi - \tfrac{1}{2}\mathrm{Sin}\psi\mathrm{Cos}\psi + \psi\mathrm{Cos}\psi^2 & + \tfrac{1}{2}\mathrm{Sin}\psi\mathrm{Cos}\psi^2 & - \tfrac{1}{4}\psi\mathrm{Cos}2\psi \\ -\tfrac{1}{2}\psi\mathrm{Cos}\psi \qquad - \tfrac{1}{2}\psi - \mathrm{Sin}\,\psi\,\mathrm{Cos}\,\psi & - \tfrac{1}{6}\mathrm{Sin}\psi\mathrm{Cos}\psi^2 & \\ +\tfrac{1}{2}\psi\mathrm{Cos}\psi - \tfrac{1}{3}\mathrm{Sin}\psi \qquad + \tfrac{3}{8}\mathrm{Sin}\,2\psi & & \end{array}\right\}$$

$$= r^3(-\psi\mathrm{Cos}\psi + \tfrac{2}{3}\mathrm{Sin}\psi - \tfrac{3}{4}\mathrm{Sin}\psi\mathrm{Cos}\psi + \psi\mathrm{Cos}\psi^2 + \tfrac{1}{3}\mathrm{Sin}\psi\mathrm{Cos}\psi^2 - \tfrac{1}{4}\psi\mathrm{Cos}2\psi),$$

wo keine Constans beyzufügen ist, da das Integral für $\psi = 0$ verschwinden muß.

Da $y = r(\psi + \mathrm{Sin}\,\psi)$ ist, so ist $y^2 = r^2(\psi + \mathrm{Sin}\,\psi)^2$,

und folglich $y^2 dx = r^2(\psi + \mathrm{Sin}\,\psi)^2 \,.\, r\mathrm{Sin}\,\psi\,d\psi$

$$= r^3 \,.\, (\psi^2\,\mathrm{Sin}\,\psi + 2\psi\,\mathrm{Sin}\,\psi^2 + \mathrm{Sin}\,\psi^3)\,d\psi,$$

und folglich

$$\int y^2 dx = r^3(\int \psi^2\,\mathrm{Sin}\,\psi\,d\psi + 2\int \psi\,\mathrm{Sin}\,\psi^2\,d\psi + \int \mathrm{Sin}\,\psi^3\,d\psi).$$

Nach der schon öfter angewandten Reductionsformel ist:

$$\begin{aligned}\int\psi^2\mathrm{Sin}\,\psi\,d\psi &= \psi^2\int\mathrm{Sin}\,\psi\,d\psi - 2\int\psi\,d\psi\int\mathrm{Sin}\,\psi\,d\psi\\ &= -\psi^2\,\mathrm{Cos}\,\psi + 2\int\psi\,\mathrm{Cos}\,\psi\,d\psi\\ &= -\psi^2\,\mathrm{Cos}\,\psi + 2(\psi\int\mathrm{Cos}\,\psi\,d\psi - \int d\psi\int\mathrm{Cos}\,\psi\,d\psi)\\ &= -\psi^2\,\mathrm{Cos}\,\psi + 2(\psi\,\mathrm{Sin}\,\psi - \int\mathrm{Sin}\,\psi\,d\psi)\\ &= -\psi^2\,\mathrm{Cos}\,\psi + 2\psi\,\mathrm{Sin}\,\psi + 2\mathrm{Cos}\,\psi,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2\int\psi\,\mathrm{Sin}\,\psi^2\,d\psi &= \int\psi(1 - \mathrm{Cos}\,2\psi)\,d\psi\\ &= \int(\psi\,d\psi - \psi\,\mathrm{Cos}\,2\psi\,d\psi)\\ &= \tfrac{1}{2}\psi^2 - \int\psi\,\mathrm{Cos}\,2\psi\,d\psi\\ &= \tfrac{1}{2}\psi^2 - \tfrac{1}{4}\int 2\psi\,\mathrm{Cos}\,2\psi\,d2\psi\\ &= \tfrac{1}{2}\psi^2 - \tfrac{1}{4}(2\psi\,\mathrm{Sin}\,2\psi + \mathrm{Cos}\,2\psi) \text{ (s. vorher)}\\ &= \tfrac{1}{2}\psi^2 - \tfrac{1}{2}\psi\,\mathrm{Sin}\,2\psi - \tfrac{1}{4}\mathrm{Cos}\,2\psi,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int\mathrm{Sin}\,\psi^3\,d\psi &= \mathrm{Sin}\,\psi^2\int\mathrm{Sin}\,\psi\,d\psi - \int d.\,\mathrm{Sin}\,\psi^2\int\mathrm{Sin}\,\psi\,d\psi\\ &= -\mathrm{Sin}\,\psi^2\,\mathrm{Cos}\,\psi + 2\int\mathrm{Sin}\,\psi\,\mathrm{Cos}\,\psi^2\,d\psi\\ &= -\mathrm{Sin}\,\psi^2\,\mathrm{Cos}\,\psi + 2\int\mathrm{Sin}\,\psi(1 - \mathrm{Sin}\,\psi^2)\,d\psi\\ &= -\mathrm{Sin}\,\psi^2\,\mathrm{Cos}\,\psi + 2\int\mathrm{Sin}\,\psi\,d\psi - 2\int\mathrm{Sin}\,\psi^3\,d\psi\\ &= -\mathrm{Sin}\,\psi^2\,\mathrm{Cos}\,\psi - 2\mathrm{Cos}\,\psi - 2\int\mathrm{Sin}\,\psi^3\,d\psi,\end{aligned}$$

$$3\int\mathrm{Sin}\,\psi^3\,d\psi = -\mathrm{Sin}\,\psi^2\,\mathrm{Cos}\,\psi - 2\mathrm{Cos}\,\psi,$$

$$\int\mathrm{Sin}\,\psi^3\,d\psi = -\tfrac{1}{3}\mathrm{Sin}\,\psi^2\,\mathrm{Cos}\,\psi - \tfrac{2}{3}\mathrm{Cos}\,\psi.$$

Also nach gehöriger Substitution $\int y^2dx =$

$$= r^3.\left\{\begin{array}{l}-\psi^2\mathrm{Cos}\,\psi + 2\psi\,\mathrm{Sin}\,\psi + 2\mathrm{Cos}\,\psi\\ +\tfrac{1}{2}\psi^2 - \tfrac{1}{2}\psi\,\mathrm{Sin}\,2\psi - \tfrac{1}{4}\mathrm{Cos}\,2\psi\\ -\tfrac{1}{3}\mathrm{Sin}\,\psi^2\,\mathrm{Cos}\,\psi - \tfrac{2}{3}\mathrm{Cos}\,\psi\end{array}\right\}$$

$$= r^3.\left\{\begin{array}{l}\tfrac{1}{2}\psi^2(1 - 2\mathrm{Cos}\,\psi) + \tfrac{1}{2}\psi(4\mathrm{Sin}\,\psi - \mathrm{Sin}\,2\psi)\\ +\tfrac{4}{3}\mathrm{Cos}\,\psi - \tfrac{1}{4}\mathrm{Cos}\,2\psi - \tfrac{1}{3}\mathrm{Sin}\,\psi^2\,\mathrm{Cos}\,\psi\end{array}\right\}.$$

Das Integral muß wieder so bestimmt werden, daß es für $\psi = 0$ verschwindet. Dies gibt

$$0 = \tfrac{4}{3}r^3 - \tfrac{1}{4}r^3 + \mathrm{Const} = \tfrac{13}{12}r^3 + \mathrm{Const},$$

$$\mathrm{Const} = -\tfrac{13}{12}r^3, \text{ und folglich}$$

$$\int y^2dx = r^3.\left\{\begin{array}{l}\tfrac{1}{2}\psi^2(1 - 2\mathrm{Cos}\,\psi) + \tfrac{1}{2}\psi(4\mathrm{Sin}\,\psi - \mathrm{Sin}\,2\psi)\\ +\tfrac{4}{3}\mathrm{Cos}\,\psi - \tfrac{1}{4}\mathrm{Cos}\,2\psi - \tfrac{1}{3}\mathrm{Sin}\,\psi^2\mathrm{Cos}\,\psi - \tfrac{13}{12}\end{array}\right\}.$$

Ruft man nun die allgemeinen Formeln für den Schwerpunkt zu Hülfe, so erhält man:

$$X = \frac{r^3\left\{-\psi \operatorname{Cos}\psi + \tfrac{2}{3}\operatorname{Sin}\psi - \tfrac{3}{4}\operatorname{Sin}\psi \operatorname{Cos}\psi + \psi \operatorname{Cos}\psi^2 + \tfrac{1}{3}\operatorname{Sin}\psi \operatorname{Cos}\psi^2 - \tfrac{1}{4}\psi \operatorname{Cos}2\psi\right\}}{r^2\left\{\psi(\tfrac{1}{2} - \operatorname{Cos}\psi) + \operatorname{Sin}\psi(1 - \tfrac{1}{2}\operatorname{Cos}\psi)\right\}}$$

$$= \frac{r\left\{\psi(\operatorname{Cos}\psi^2 - \operatorname{Cos}\psi - \tfrac{1}{4}\operatorname{Cos}2\psi) + \operatorname{Sin}\psi(\tfrac{2}{3} - \tfrac{3}{4}\operatorname{Cos}\psi + \tfrac{1}{3}\operatorname{Cos}\psi^2)\right\}}{\psi(\tfrac{1}{2} - \operatorname{Cos}\psi) + \operatorname{Sin}\psi(1 - \tfrac{1}{2}\operatorname{Cos}\psi)}$$

$$= \frac{r\left\{\psi(\tfrac{3}{4}\operatorname{Cos}\psi^2 + \tfrac{1}{4}\operatorname{Sin}\psi^2 - \operatorname{Cos}\psi) + \operatorname{Sin}\psi(\tfrac{2}{3} - \tfrac{3}{4}\operatorname{Cos}\psi + \tfrac{1}{3}\operatorname{Cos}\psi^2)\right\}}{\psi(\tfrac{1}{2} - \operatorname{Cos}\psi) + \operatorname{Sin}\psi(1 - \tfrac{1}{2}\operatorname{Cos}\psi)},$$

$$Y = \frac{r\left\{\begin{array}{l}\tfrac{1}{2}\psi^2(1 - 2\operatorname{Cos}\psi) + \tfrac{1}{2}\psi(4\operatorname{Sin}\psi - \operatorname{Sin}2\psi) \\ + \tfrac{4}{3}\operatorname{Cos}\psi - \tfrac{1}{4}\operatorname{Cos}2\psi - \tfrac{1}{3}\operatorname{Sin}\psi^2\operatorname{Cos}\psi - \tfrac{13}{12}\end{array}\right\}}{2\left\{\psi(\tfrac{1}{2} - \operatorname{Cos}\psi) + \operatorname{Sin}\psi(1 - \tfrac{1}{2}\operatorname{Cos}\psi)\right\}}.$$

Dies sind die Coordinaten des Schwerpunktes, durch den Winkel $\psi = \pi - \phi$ ausgedrückt.

Man kann aber diese Coordinaten auch durch x und y ausdrücken. Es ist nämlich

$$x = r(1 - \operatorname{Cos}\psi), \quad \operatorname{Cos}\psi = \frac{r - x}{r},$$

$$\operatorname{Cos}\psi^2 = \frac{r^2 - 2rx + x^2}{r^2}, \quad \operatorname{Sin}\psi^2 = 1 - \frac{r^2 - 2rx + x^2}{r^2}$$

$$= \frac{r^2 - r^2 + 2rx - x^2}{r^2} = \frac{2rx - x^2}{r^2},$$

$$\operatorname{Sin}\psi = \frac{1}{r}\sqrt{2rx - x^2};$$

$$x = r\operatorname{Sin vers}\psi, \quad \psi = \operatorname{Arc Sin vers}\frac{x}{r};$$

$$\tfrac{1}{2} - \operatorname{Cos}\psi = \tfrac{1}{2} - \frac{r-x}{r} = \frac{r-2r+2x}{2r} = \frac{2x-r}{2r},$$

$$1 - \tfrac{1}{2}\operatorname{Cos}\psi = 1 - \frac{r-x}{2r} = \frac{2r-r+x}{2r} = \frac{r+x}{2r}.$$

Also der Nenner von X

$$= \frac{2x-r}{2r}\operatorname{Arc Sin vers}\frac{x}{r} + \frac{r+x}{2r^2}\sqrt{2rx-x^2}$$

$$= \frac{1}{2r^2}\left\{r(2x-r)\operatorname{Arc Sin vers}\frac{x}{r} + (r+x)\sqrt{2rx-x^2}\right\}.$$

Ferner ist

$$\tfrac{3}{4}\operatorname{Cos}\psi^2 + \tfrac{1}{4}\operatorname{Sin}\psi^2 - \operatorname{Cos}\psi = \frac{3(r-x)^2}{4r^2} + \frac{2rx-x^2}{4r^2} - \frac{r-x}{r}$$

$$= \frac{3r^2-6rx+3x^2+2rx-x^2-4r^2+4rx}{4r^2}$$

$$= \frac{2x^2-r^2}{4r^2};$$

$$\tfrac{2}{3} - \tfrac{3}{4}\operatorname{Cos}\psi + \tfrac{1}{3}\operatorname{Cos}\psi^2 = \tfrac{2}{3} - \frac{3(r-x)}{4r} + \frac{(r-x)^2}{3r^2}$$

$$= \frac{8r^2-9r(r-x)+4(r-x)^2}{12r^2}$$

$$= \frac{8r^2-9r^2+9rx+4r^2-8rx+4x^2}{12r^2}$$

$$= \frac{3r^2+rx+4x^2}{12r^2}.$$

Also

$$X = \frac{r\left\{\frac{2x^2-r^2}{4r^2}\operatorname{Arc Sin vers}\frac{x}{r} + \frac{3r^2+rx+4x^2}{12r^3}\sqrt{2rx-x^2}\right\}}{\frac{1}{2r^2}\left\{r(2x-r)\operatorname{Arc Sin vers}\frac{x}{r} + (r+x)\sqrt{2rx-x^2}\right\}}$$

$$= \frac{3r(2x^2-r^2)\operatorname{Arc Sin vers}\frac{x}{r} + (3r^2+rx+4x^2)\sqrt{2rx-x^2}}{6r(2x-r)\operatorname{Arc Sin vers}\frac{x}{r} + 6(r+x)\sqrt{2rx-x^2}}.$$

Dasselbe findet Eytelwein §. 124. seines Handbuches der Statik.

Um auch Y bloß durch x und y auszudrücken, bemerke man, daß

$$\operatorname{Sin} 2\psi = 2 \operatorname{Sin}\psi \operatorname{Cos}\psi = \frac{2(r-x)\sqrt{2rx-x^2}}{r^2},$$

$$\operatorname{Cos} 2\psi = \operatorname{Cos}\psi^2 - \operatorname{Sin}\psi^2 = \frac{(r-x)^2}{r^2} - \frac{2rx-x^2}{r^2}$$

$$= \frac{r^2-2rx+x^2-2rx+x^2}{r^2} = \frac{r^2-4rx+2x^2}{r^2},$$

$$\operatorname{Cos}\psi \operatorname{Sin}\psi^2 = \frac{(r-x)(2rx-x^2)}{r^3} = \frac{2r^2x-rx^2-2rx^2+x^3}{r^3}$$

$$= \frac{2r^2x-3rx^2+x^3}{r^3};$$

$$1 - 2\operatorname{Cos}\psi = 1 - \frac{2(r-x)}{r} = \frac{r-2r+2x}{r} = \frac{2x-r}{r};$$

$$4\operatorname{Sin}\psi - \operatorname{Sin} 2\psi = \frac{4}{r}\sqrt{2rx-x^2} - \frac{2(r-x)\sqrt{2rx-x^2}}{r^2}$$

$$= \frac{4r\sqrt{2rx-x^2} - 2(r-x)\sqrt{2rx-x^2}}{r^2} = \frac{2(r+x)\sqrt{2rx-x^2}}{r^2};$$

$$\tfrac{4}{3}\operatorname{Cos}\psi - \tfrac{1}{4}\operatorname{Cos} 2\psi - \tfrac{1}{3}\operatorname{Sin}\psi^2 \operatorname{Cos}\psi = \frac{4(r-x)}{3r} - \frac{r^2-4rx+2x^2}{4r^2} - \frac{2r^2x-3rx^2+x^3}{3r^3}$$

$$= \tfrac{4}{3} - \frac{4x}{3r} - \tfrac{1}{4} + \frac{x}{r} - \frac{x^2}{2r^2} - \frac{2x}{3r} + \frac{x^2}{r^2} - \frac{x^3}{3r^3}$$

$$= \tfrac{13}{12} - \frac{x}{r} + \frac{x^2}{2r^2} - \frac{x^3}{3r^3}.$$

Also der durch r dividirte Zähler von $Y =$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\text{Arc Sin vers}\frac{x}{r}\right)^2 . \frac{2x-r}{r} + \frac{1}{2}\,\text{Arc Sin vers}\frac{x}{r} . \frac{2(r+x)\sqrt{2rx-x^2}}{r^2} \\ + \frac{1}{12} - \frac{x}{r} + \frac{x^2}{2r^2} - \frac{x^3}{3r^3} - \frac{1}{12} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \left(\text{Arc Sin vers}\frac{x}{r}\right)^2 . \frac{2x-r}{2r} + \text{Arc Sin vers}\frac{x}{r} . \frac{(r+x)\sqrt{2rx-x^2}}{r^2} \\ - \frac{x}{r} + \frac{x^2}{2r^2} - \frac{x^3}{3r^3} \end{cases}$$

$$= \frac{1}{6r^3}\begin{Bmatrix} 3r^2(2x-r)\left(\text{Arc Sin vers}\frac{x}{r}\right)^2 + 6r(r+x)\sqrt{2rx-x^2} . \text{Arc Sin vers}\frac{x}{r} \\ -6r^2x + 3rx^2 - 2x^3 \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6r^3}\begin{Bmatrix} 3r^2(2x-r)\left(\text{Arc Sin vers}\frac{x}{r}\right)^2 + 6r(r+x)\sqrt{2rx-x^2} . \text{Arc Sin vers}\frac{x}{r} \\ + 3rx(x-2r) - 2x^3 \end{Bmatrix},$$

und folglich

$$Y = \frac{\frac{1}{6r^2}\begin{Bmatrix} 3r^2(2x-r)\left(\text{Arc Sin vers}\frac{x}{r}\right)^2 + 6r(r+x)\sqrt{2rx-x^2} . \text{Arc Sin vers}\frac{x}{r} \\ + 3rx(x-2r) - 2x^3 \end{Bmatrix}}{\frac{1}{r^2}\left\{r(2x-r)\,\text{Arc Sin vers}\frac{x}{r} + (r+x)\sqrt{2rx-x^2}\right\}}$$

$$= \frac{\begin{Bmatrix} 3r^2(2x-r)\left(\text{Arc Sin vers}\frac{x}{r}\right)^2 + 6r(r+x)\sqrt{2rx-x^2} . \text{Arc Sin vers}\frac{x}{r} \\ + 3rx(x-2r) - 2x^3 \end{Bmatrix}}{6\left\{r(2x-r)\,\text{Arc Sin vers}\frac{x}{r} + (r+x)\sqrt{2rx-x^2}\right\}}.$$

Um den Schwerpunkt der halben und ganzen Cycloide zu erhalten, muß man $x = 2r$ setzen. Dies gibt

$$X = \frac{3r(8r^2 - r^2)\,.\,\pi + (3r^2 + 2r^2 + 16r^2)\sqrt{4r^2 - 4r^2}}{6r(4r - r)\,.\,\pi + 6(r + 2r)\sqrt{4r^2 - 4r^2}}$$

$$= \frac{21r^3\,.\,\pi}{18r^2\,.\,\pi} = \frac{21r}{18} = \frac{7r}{6} = \tfrac{7}{6}r,$$

$$Y = \frac{3r^2(4r - r)\,.\,\pi^2 - 16r^3}{18r^2\pi}$$

$$= \frac{9r^3\pi^2 - 16r^3}{18r^2\pi} = \frac{r(9\pi^2 - 16)}{18\pi}.$$

Der Schwerpunkt der ganzen Cycloide liegt offenbar auf SC, und seine Entfernung vom Scheitel ist also $= \tfrac{7}{6}r$, oder seine Entfernung vom Mittelpunkte der Cycloide $= 2r - \tfrac{7}{6}r = \tfrac{5}{6}r$.

Nimmt man die Coordinaten vom Anfange an, so ist die Ordinate des Schwerpunktes der halben Cycloide $= \tfrac{5}{6}r$, und seine Abscisse ist $= r\pi - \dfrac{r(9\pi^2 - 16)}{18\pi} = \dfrac{18r\pi^2 - 9r\pi^2 + 16r}{18\pi}$ $= \dfrac{r(9\pi^2 + 16)}{18\pi}$.

Die Frage über den Schwerpunkt eines cycloidalischen Segments wurde zuerst von dem berühmten Pascal unter dem Namen Dettonville nebst andern Fragen über die Cycloide in dem bekannten Programm vom Junius 1658 vorgelegt, und späterhin in der bekannten Schrift: Lettres de A. Dettonville à Mr. de Carcavi, aufgelöst.

§. 119.

Wir wollen nun noch untersuchen, was für eine Gestalt die Hauptformel dieses Kapitels annimmt, wenn die Coordinaten der vorgelegten Curve aus einem Punkte ausgehen. Die polarischen Coordinaten sollen wie gewöhnlich durch φ, z bezeichnet werden, wo also φ immer einen Winkel bezeichnet. Sind nun in Beziehung auf irgend ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen Coordinaten wir durch x, y bezeichnen wollen, die Coordinaten des angenommenen Pols a, b; so ist, wenn man die Winkel ϕ von der rechten nach der linken Hand zu nimmt und von 0° bis 360° zählt:

$$x = a + z \operatorname{Cos}\phi, \quad y = b + z \operatorname{Sin}\phi,$$

nach §. 89. meines Lehrbuches der Kegelschnitte, worauf ich überhaupt Jeden verweise, der nicht genug mit der Natur der Polargleichungen bekannt ist, um die Untersuchung, die wir jetzt anstellen werden, völlig zu verstehen. Nimmt man aber die Winkel ϕ von der linken nach der rechten Hand hin, wie wir hier thun werden, so ist

$$x = a - z \operatorname{Cos}\phi, \quad y = b + z \operatorname{Sin}\phi$$

zu setzen, wie leicht erhellet. Wir wollen nun annehmen, daß der Pol in der Abscissenaxe des angenommenen Systems liegt, so daß also $b = 0$, und folglich

$$x = a - z \operatorname{Cos}\phi, \quad y = z \operatorname{Sin}\phi$$

zu setzen ist.

Man rechne nun das gegebene Curvenstück zwischen den polarischen Coordinaten ϕ, z vom Anfange an, so besteht es offenbar aus einem Curvenstücke zwischen den rechtwinkligen Coordinaten x, y, und einem Dreyecke von der Grundlinie $a - x = a - (a - z \operatorname{Cos}\phi) = a - a + z \operatorname{Cos}\phi = z \operatorname{Cos}\phi$, und Höhe $y = z \operatorname{Sin}\phi$, und das Differenzial des Curvenstücks zwischen den polarischen Coordinaten ist offenbar gleich der Summe der Differenziale seiner beiden Theile. Nun ist bekanntlich das Differenzial des Curvenstücks zwischen den rechtwinkligen Coordinaten $x, y, = y dx = z \operatorname{Sin}\phi\,(z \operatorname{Sin}\phi\, d\phi - \operatorname{Cos}\phi\, dz)$ $= z^2 \operatorname{Sin}\phi^2 d\phi - z \operatorname{Sin}\phi \operatorname{Cos}\phi\, dz$. Der Inhalt des Dreyecks ist $= \frac{1}{2}(a - x) y = \frac{1}{2} z^2 \operatorname{Sin}\phi \operatorname{Cos}\phi$, und folglich sein Differenzial dem Differenzial von $\frac{1}{4} z^2 \operatorname{Sin} 2\phi$ gleich, d. i. $=$

$$\tfrac{1}{2} z dz \operatorname{Sin} 2\phi + \tfrac{1}{2} z^2 \operatorname{Cos} 2\phi\, d\phi =$$

$$= z dz \operatorname{Sin}\phi \operatorname{Cos}\phi + \tfrac{1}{2} z^2 \operatorname{Cos}\phi^2 d\phi - \tfrac{1}{2} z^2 \operatorname{Sin}\phi^2 d\phi,$$

und folglich das Differenzial des Curvenstücks zwischen den polarischen Coordinaten

$$= z^2 \operatorname{Sin}\varphi^2\, d\varphi + \tfrac{1}{2} z^2 \operatorname{Cos}\varphi^2\, d\varphi - \tfrac{1}{2} z^2 \operatorname{Sin}\varphi^2\, d\varphi$$
$$= \tfrac{1}{2} z^2 \operatorname{Sin}\varphi^2\, d\varphi + \tfrac{1}{2} z^2 \operatorname{Cos}\varphi^2\, d\varphi$$
$$= \tfrac{1}{2} z^2 (\operatorname{Sin}\varphi^2 + \operatorname{Cos}\varphi^2)\, d\varphi = \tfrac{1}{2} z^2\, d\varphi.$$

Also das Curvenstück zwischen den polaren Coordinaten $= \frac{1}{2}\int z^2 d\varphi$, wo das Integral offenbar so bestimmt werden muß, daß es für $\varphi = 0$ verschwindet. Will man den Flächenraum eines Curvenstücks haben, das zwischen den Winkeln $\varphi = \alpha$ und $\varphi = \beta$ enthalten ist, so ist dieses Curvenstück offenbar

$$= \tfrac{1}{2} \cdot \overset{\int z^2 d\varphi}{(\varphi = \beta)} - \tfrac{1}{2} \cdot \overset{\int z^2 d\varphi}{(\varphi = \alpha)}$$

$$= \tfrac{1}{2} \left\{ \overset{\int z^2 d\varphi}{(\varphi = \beta)} - \overset{\int z^2 d\varphi}{(\varphi = \alpha)} \right\},$$

d. i. $= \tfrac{1}{2} \cdot \overset{\int z^2 d\varphi}{(\varphi = \alpha, \beta)}$.

Seyen nun in Beziehung auf das angenommene System die rechtwinkligen Coordinaten der Schwerpunkte des Curvenstücks zwischen den polaren Coordinaten φ, z, des Curvenstücks zwischen den rechtwinkligen Coordinaten x, y, und des Dreyecks nach der Reihe X, Y; X', Y'; X'', Y'', unter der Voraussetzung, daß man die Curvenstücke vom Anfange an nimmt; so ist nach bekannten Sätzen vom Schwerpunkte:

$$X' . \int y dx + X'' . \tfrac{1}{2}(a - x) y = \tfrac{1}{2} X . \int z^2 d\varphi,$$

oder $\int xy dx + \tfrac{1}{4} X'' . z^2 \operatorname{Sin} 2\varphi = \tfrac{1}{2} X . \int z^2 d\varphi$,

wo alle Integrale so zu bestimmen sind, daß sie für $\varphi = 0$ oder $x = 0$ verschwinden. Nun ist aber

$$xydx = (a - z \operatorname{Cos}\varphi) . z \operatorname{Sin}\varphi . (z \operatorname{Sin}\varphi\, d\varphi - \operatorname{Cos}\varphi\, dz)$$
$$= (az \operatorname{Sin}\varphi - z^2 \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos}\varphi)(z \operatorname{Sin}\varphi\, d\varphi - \operatorname{Cos}\varphi\, dz)$$
$$= \left\{ \begin{array}{l} az^2 \operatorname{Sin}\varphi^2 d\varphi - z^3 \operatorname{Sin}\varphi^2 \operatorname{Cos}\varphi\, d\varphi - az \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos}\varphi\, dz \\ \quad + z^2 \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos}\varphi^2\, dz, \end{array} \right.$$

welches das Differenzial von $\int xy dx$ ist.

Die Abscisse des Schwerpunktes des Dreyecks ist, wie auch ohne Zeichnung leicht erhellen wird, offenbar

$$= x + \tfrac{1}{3}(a - x) = a - z \operatorname{Cos}\varphi + \tfrac{1}{3}(a - a + z \operatorname{Cos}\varphi)$$

$= a - z \operatorname{Cos}\varphi + \frac{1}{3} z \operatorname{Cos}\varphi = a - \frac{2}{3} z \operatorname{Cos}\varphi$

$= X''$, und folglich

$\frac{1}{4} X''. z^2 \operatorname{Sin} 2\varphi = \frac{1}{4}(a - \frac{2}{3} z \operatorname{Cos}\varphi) . z^2 \operatorname{Sin} 2\varphi$

$= \frac{1}{4} a z^2 \operatorname{Sin} 2\varphi - \frac{1}{6} z^3 \operatorname{Sin} 2\varphi \operatorname{Cos}\varphi$

$= \frac{1}{2} a z^2 \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos}\varphi - \frac{1}{3} z^3 \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos}\varphi^2.$

Differenziirt man dieses, so erhält man:

$$\left\{\begin{array}{l} az \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos}\varphi\, dz + \frac{1}{2} a z^2 \operatorname{Cos}\varphi^2\, d\varphi - \frac{1}{2} a z^2 \operatorname{Sin}\varphi^2\, d\varphi \\ - z^2 \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos}\varphi^2\, dz - \frac{1}{3} z^3 \operatorname{Cos}\varphi^3\, d\varphi + \frac{2}{3} z^3 \operatorname{Sin}\varphi^2 \operatorname{Cos}\varphi\, d\varphi. \end{array}\right.$$

Addirt man dies zu dem obigen Differenzial von $\int xy dx$, so erhält man:

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2} a z^2 \operatorname{Sin}\varphi^2\, d\varphi - \frac{1}{3} z^3 \operatorname{Sin}\varphi^2 \operatorname{Cos}\varphi\, d\varphi + \frac{1}{2} a z^2 \operatorname{Cos}\varphi^2\, d\varphi \\ - \frac{1}{3} z^3 \operatorname{Cos}\varphi^3\, d\varphi \end{array}\right.$$

$= \frac{1}{2} a z^2 (\operatorname{Sin}\varphi^2 + \operatorname{Cos}\varphi^2) d\varphi - \frac{1}{3} z^3 (\operatorname{Sin}\varphi^2 + \operatorname{Cos}\varphi^2) \operatorname{Cos}\varphi\, d\varphi$

$= \frac{1}{2} a z^2 d\varphi - \frac{1}{3} z^3 \operatorname{Cos}\varphi\, d\varphi$

$= \frac{1}{6} z^2 (3a - 2z \operatorname{Cos}\varphi) d\varphi.$

Dies ist das Differenzial von $\frac{1}{2} X . \int z^2 d\varphi$, und folglich

$$\tfrac{1}{2} X . \int z^2 d\varphi = \tfrac{1}{6} \int z^2 (3a - 2z \operatorname{Cos}\varphi) d\varphi,$$

$$3 X \int z^2 d\varphi = \int z^2 (3a - 2z \operatorname{Cos}\varphi) d\varphi,$$

die Integrale so bestimmt, daß sie für $\varphi = 0$ verschwinden.

Wollte man den Schwerpunkt eines Stücks haben, das zwischen $\varphi = \alpha$ und $\varphi = \beta$ enthalten ist, so erhellet leicht, daß

$$X . \underset{(\varphi = \alpha,\, \beta)}{\int z^2 d\varphi} = \tfrac{1}{3} . \underset{(\varphi = \beta)}{\int z^2 (3a - 2z \operatorname{Cos}\varphi) d\varphi} - \tfrac{1}{3} . \underset{(\varphi = \alpha)}{\int z^2 (3a - 2z \operatorname{Cos}\varphi) d\varphi},$$

oder, was dasselbe ist,

$$3X . \underset{(\varphi = \alpha,\, \beta)}{\int z^2 d\varphi} = \underset{(\varphi = \alpha,\, \beta)}{\int z^2 (3a - 2z \operatorname{Cos}\varphi) d\varphi}$$

seyn wird.

Auf ähnliche Art wie vorher ist nun

$$Y' . \int y dx + Y'' . \tfrac{1}{2}(a - x) y = \tfrac{1}{2} Y . \int z^2 d\varphi,$$

$$\tfrac{1}{2} \int y^2 dx + \tfrac{1}{4} Y'' . z^2 \operatorname{Sin} 2\varphi = \tfrac{1}{2} Y . \int z^2 d\varphi,$$

die Integrale so bestimmt, daß sie für $\varphi = 0$ oder $x = 0$ verschwinden, da wir die Curvenstücke zuerst vom Anfange an rechnen. Es ist aber

$$y^2dx = z^2 . \operatorname{Sin}\varphi^2 . (z \operatorname{Sin}\varphi\, d\varphi - \operatorname{Cos}\varphi\, dz)$$
$$= z^3 \operatorname{Sin}\varphi^3 d\varphi - z^2 \operatorname{Sin}\varphi^2 \operatorname{Cos}\varphi\, dz,$$

welches das Differenzial von $\int y^2dx$ ist, so daß also das Differenzial von $\frac{1}{2}\int y^2dx$

$$\tfrac{1}{2}z^3 \operatorname{Sin}\varphi^3 d\varphi - \tfrac{1}{2}z^2 \operatorname{Sin}\varphi^2 \operatorname{Cos}\varphi\, dz$$

ist.

Es erhellet nun leicht, daß $Y'' = \frac{1}{3}y$ ist, denn es verhält sich offenbar $Y'' : \frac{1}{2}y = 2 : 3$, und folglich $Y'' : y = 2 : 6 = 1 : 3$. Also ist

$$Y'' . z^2 \operatorname{Sin}2\varphi = \tfrac{1}{3}y . z^2 \operatorname{Sin}2\varphi = \tfrac{1}{3}z^3 \operatorname{Sin}2\varphi \operatorname{Sin}\varphi$$
$$= \tfrac{2}{3}z^3 \operatorname{Sin}\varphi^2 \operatorname{Cos}\varphi, \text{ und folglich}$$
$$\tfrac{1}{4}Y''z^2 \operatorname{Sin}2\varphi = \tfrac{1}{6}z^3 \operatorname{Sin}\varphi^2 \operatorname{Cos}\varphi.$$

Differenzirt man dieses, so erhält man:

$$\tfrac{1}{2}z^2 \operatorname{Sin}\varphi^2 \operatorname{Cos}\varphi\, dz + \tfrac{1}{3}z^3 \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos}\varphi^2 d\varphi - \tfrac{1}{6}z^3 \operatorname{Sin}\varphi^3 d\varphi,$$

und, wenn man dieses zu dem obigen Differenzial von $\frac{1}{2}\int y^2dx$ addirt:

$$\tfrac{1}{3}z^3 \operatorname{Sin}\varphi^3 d\varphi + \tfrac{1}{3}z^3 \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos}\varphi^2 d\varphi =$$
$$= \tfrac{1}{3}z^3 \operatorname{Sin}\varphi (\operatorname{Sin}\varphi^2 + \operatorname{Cos}\varphi^2)\, d\varphi$$
$$= \tfrac{1}{3}z^3 \operatorname{Sin}\varphi\, d\varphi.$$

Dies ist das Differenzial von $\frac{1}{2}Y . \int z^2d\varphi$, so daß also

$$\tfrac{1}{2}Y . \int z^2d\varphi = \tfrac{1}{3}\int z^3 \operatorname{Sin}\varphi\, d\varphi$$

oder

$$3Y . \int z^2d\varphi = 2\int z^3 \operatorname{Sin}\varphi\, d\varphi$$

ist.

Für ein Curvenstück zwischen den Winkeln α und β ist offenbar:

$$Y . \underset{(\varphi=\alpha,\ \beta)}{\int z^2d\varphi} = \tfrac{2}{3} . \underset{(\varphi=\beta)}{\int z^3 \operatorname{Sin}\varphi\, d\varphi} - \tfrac{2}{3} . \underset{(\varphi=\alpha)}{\int z^3 \operatorname{Sin}\varphi\, d\varphi}$$
$$= \tfrac{2}{3} . \underset{(\varphi=\alpha,\ \beta)}{\int z^3 \operatorname{Sin}\varphi\, d\varphi},$$

so daß man also folgende zwey allgemeine Formeln erhält:

$$3X \cdot \underset{(\varphi=\alpha,\,\beta)}{\int z^2 d\varphi} = \underset{(\varphi=\alpha,\,\beta)}{\int z^2 (3a - 2z \operatorname{Cos}\varphi)\, d\varphi},$$

$$3Y \cdot \underset{(\varphi=\alpha,\,\beta)}{\int z^2 d\varphi} = 2 \cdot \underset{(\varphi=\alpha,\,\beta)}{\int z^3 \operatorname{Sin}\varphi\, d\varphi}.$$

Nimmt man die rechtwinkligen Coordinaten vom Pol an, so muß man $a = 0$ setzen, wodurch man erhält:

$$3X \cdot \underset{(\varphi=\alpha,\,\beta)}{\int z^2 d\varphi} = -2 \cdot \underset{(\varphi=\alpha,\,\beta)}{\int z^3 \operatorname{Cos}\varphi\, d\varphi},$$

$$3Y \cdot \underset{(\varphi=\alpha,\,\beta)}{\int z^2 d\varphi} = 2 \cdot \underset{(\varphi=\alpha,\,\beta)}{\int z^3 \operatorname{Sin}\varphi\, d\varphi}.$$

Sind Φ, Z die polaren Coordinaten des Schwerpunktes, so ist

$$X = -Z \operatorname{Cos}\Phi, \quad Y = Z \operatorname{Sin}\Phi.$$

Also

$$-3Z \operatorname{Cos}\Phi \cdot \underset{(\varphi=\alpha,\,\beta)}{\int z^2 d\varphi} = -2 \cdot \underset{(\varphi=\alpha,\,\beta)}{\int z^3 \operatorname{Cos}\varphi\, d\varphi},$$

$$3Z \operatorname{Sin}\Phi \cdot \underset{(\varphi=\alpha,\,\beta)}{\int z^2 d\varphi} = 2 \cdot \underset{(\varphi=\alpha,\,\beta)}{\int z^3 \operatorname{Sin}\varphi\, d\varphi},$$

oder

$$3Z \operatorname{Cos}\Phi \cdot \underset{(\varphi=\alpha,\,\beta)}{\int z^2 d\varphi} = 2 \cdot \underset{(\varphi=\alpha,\,\beta)}{\int z^3 \operatorname{Cos}\varphi\, d\varphi},$$

$$3Z \operatorname{Sin}\Phi \cdot \underset{(\varphi=\alpha,\,\beta)}{\int z^2 d\varphi} = 2 \cdot \underset{(\varphi=\alpha,\,\beta)}{\int z^3 \operatorname{Sin}\varphi\, d\varphi};$$

zwey Gleichungen für die beiden unbekannten Größen Φ, Z, von welchen sich also durch Elimination jede einzeln bestimmen läßt.

§. 120.

Als Beyspiel der Rechnung nach den beiden im vorhergehenden Paragraphen gefundenen Formeln wählen wir die Archimedische Spirale, welche bekanntlich von Archimedes Freunde, dem Syracusaner Conon, erdacht, von Archimedes aber in der merkwürdigen Schrift: De spiralibus seu helicibus, zuerst ausführlich untersucht worden ist. Diese Spirale entsteht nämlich auf folgende Art.

Es sey ein Kreis mit dem Halbmesser r beschrieben, um dessen Mittelpunkt sich der Halbmesser mit gleichförmiger Bewegung herumbewegt. Zu gleicher Zeit aber bewege sich ebenfalls mit gleichförmiger Bewegung von dem Mittelpunkte aus auf dem bewegten Halbmesser ein beweglicher Punkt, mit einer solchen Geschwindigkeit, daß er in demselben Moment das Ende des Halbmessers erreicht, wo der Halbmesser seinen Umlauf durch den ganzen Kreis vollendet hat; so wird der bewegte Punkt die Spirale beschreiben. Es ist aber klar, daß man den Halbmesser so viel Umläufe machen lassen kann, als man will, wenn sich nur der beschreibende Punkt immer mit derselben Geschwindigkeit auf der Verlängerung des Halbmessers hin bewegt, und daß daher die Spirale unendlich viele Windungen um den Mittelpunkt des Grundkreises herum machen muß. Die Polargleichung dieser Spirale ist leicht gefunden. Es folgt nämlich unmittelbar aus der Entstehung dieser Curve, daß

$$2r\pi : r = r\varphi : z$$

ist, wo φ den Bogen für den Halbmesser $= 1$, und also $r\varphi$ den demselben Winkel entsprechenden Bogen auf dem Grundkreise bedeutet. Also

$$2\pi : 1 = r\varphi : z,\quad r\varphi = 2\pi z,\quad z = \frac{r\varphi}{2\pi},$$

welches die Gleichung der Archimedischen Spirale ist.

Also $z^2 d\varphi = \frac{r^2\varphi^2 d\varphi}{4\pi^2}$, und folglich $\int z^2 d\varphi = \frac{r^2}{4\pi^2}\int \varphi^2 d\varphi$ $= \frac{r^2\varphi^3}{12\pi^2}$, mithin $\frac{1}{2}\int z^2\, d\varphi = \frac{r^2\varphi^3}{24\pi^2}$, der Inhalt des Sectors der Spirale vom Anfange an, welchem der Winkel φ zugehört. Der Inhalt ist auch

$$= \frac{r^2\varphi^3}{8\pi^2} \cdot \frac{r\pi}{3r\pi} = \frac{\pi}{3r} \cdot \frac{r^3\varphi^3}{8\pi^3} = \frac{\pi z^3}{3r}.$$

Nun ist $z^3 \operatorname{Cos}\varphi\, d\varphi = \frac{r^3\varphi^3 \operatorname{Cos}\varphi\, d\varphi}{8\pi^3}$,

$$\int z^3 \operatorname{Cos}\varphi\, d\varphi = \frac{r^3}{8\pi^3}\int \varphi^3 \operatorname{Cos}\varphi\, d\varphi,$$

$$\int \phi^3 \operatorname{Cos}\phi\, d\phi = \phi^3 \int \operatorname{Cos}\phi\, d\phi - \int d\,.\, \phi^3 \int \operatorname{Cos}\phi\, d\phi$$
$$= \phi^3 \operatorname{Sin}\phi - 3\int \phi^2 \operatorname{Sin}\phi\, d\phi$$
$$= \phi^3 \operatorname{Sin}\phi - 3\phi^2 \int \operatorname{Sin}\phi\, d\phi + 3\int d\,.\, \phi^2 \int \operatorname{Sin}\phi\, d\phi$$
$$= \phi^3 \operatorname{Sin}\phi + 3\phi^2 \operatorname{Cos}\phi - 6\int \phi \operatorname{Cos}\phi\, d\phi$$
$$= \phi^3 \operatorname{Sin}\phi + 3\phi^2 \operatorname{Cos}\phi - 6\phi \int \operatorname{Cos}\phi\, d\phi + 6\int d\phi \int \operatorname{Cos}\phi\, d\phi$$
$$= \phi^3 \operatorname{Sin}\phi + 3\phi^2 \operatorname{Cos}\phi - 6\phi \operatorname{Sin}\phi + 6\int \operatorname{Sin}\phi\, d\phi$$
$$= \phi^3 \operatorname{Sin}\phi + 3\phi^2 \operatorname{Cos}\phi - 6\phi \operatorname{Sin}\phi - 6 \operatorname{Cos}\phi.$$

Da das Integral für $\phi = 0$ verschwinden muß, so erhält man

$$0 = -6 + \text{Const}; \text{ also}$$
$$\text{Const} = 6, \text{ und folglich}$$

$$\int \phi^3 \operatorname{Cos}\phi\, d\phi = \phi^3 \operatorname{Sin}\phi + 3\phi^2 \operatorname{Cos}\phi - 6\phi \operatorname{Sin}\phi + 6(1 - \operatorname{Cos}\phi)$$
$$= \phi^3 \operatorname{Sin}\phi + 3\phi^2 \operatorname{Cos}\phi - 6\phi \operatorname{Sin}\phi + 6 \operatorname{Sin\,vers}\phi$$
$$= \phi(\phi^2 - 6) \operatorname{Sin}\phi + 3\phi^2 \operatorname{Cos}\phi + 6 \operatorname{Sin\,vers}\phi.$$

Auf ähnliche Art ist

$$\int z^3 \operatorname{Sin}\phi\, d\phi = \int \frac{r^3 \phi^3 \operatorname{Sin}\phi\, d\phi}{8\pi^3} = \frac{r^3}{8\pi^3} \int \phi^3 \operatorname{Sin}\phi\, d\phi,$$

$$\int \phi^3 \operatorname{Sin}\phi\, d\phi = \phi^3 \int \operatorname{Sin}\phi\, d\phi - \int d\,.\, \phi^3 \int \operatorname{Sin}\phi\, d\phi$$
$$= -\phi^3 \operatorname{Cos}\phi + 3\int \phi^2 \operatorname{Cos}\phi\, d\phi$$
$$= -\phi^3 \operatorname{Cos}\phi + 3\phi^2 \int \operatorname{Cos}\phi\, d\phi - 3\int d\,.\, \phi^2 \int \operatorname{Cos}\phi\, d\phi$$
$$= -\phi^3 \operatorname{Cos}\phi + 3\phi^2 \operatorname{Sin}\phi - 6\int \phi \operatorname{Sin}\phi\, d\phi$$
$$= -\phi^3 \operatorname{Cos}\phi + 3\phi^2 \operatorname{Sin}\phi - 6\phi \int \operatorname{Sin}\phi\, d\phi + 6\int d\phi \int \operatorname{Sin}\phi\, d\phi$$
$$= -\phi^3 \operatorname{Cos}\phi + 3\phi^2 \operatorname{Sin}\phi + 6\phi \operatorname{Cos}\phi - 6\int \operatorname{Cos}\phi\, d\phi$$
$$= -\phi^3 \operatorname{Cos}\phi + 3\phi^2 \operatorname{Sin}\phi + 6\phi \operatorname{Cos}\phi - 6 \operatorname{Sin}\phi,$$
$$= 3(\phi^2 - 2) \operatorname{Sin}\phi - \phi(\phi^2 - 6) \operatorname{Cos}\phi,$$

wo die beyzufügende Constante gleich Null gesetzt worden ist, weil auch dieses Integral für ϕ gleich Null verschwinden muß. Also

$$_3 Z\cos\Phi \cdot \frac{r^2\varphi^3}{12\pi^2} = 2 \cdot \frac{r^3}{8\pi^3} \cdot \{\varphi(\varphi^2-6)\sin\varphi + 3\varphi^2\cos\varphi + 6\sin\text{vers}\varphi\},$$

$$_3 Z\sin\Phi \cdot \frac{r^2\varphi^3}{12\pi^2} = 2 \cdot \frac{r^3}{8\pi^3} \cdot \{3(\varphi^2-2)\sin\varphi - \varphi(\varphi^2-6)\cos\varphi\},$$

d. i.

$$Z\cos\Phi = \frac{r}{\pi\varphi^3} \cdot \{\varphi(\varphi^2-6)\sin\varphi + 3\varphi^2\cos\varphi + 6\sin\text{vers}\varphi\},$$

$$Z\sin\Phi = \frac{r}{\pi\varphi^3} \cdot \{3(\varphi^2-2)\sin\varphi - \varphi(\varphi^2-6)\cos\varphi\}.$$

Also, wenn man das Letzte durch das Erste dividirt:

$$\text{Tg}\,\Phi = \frac{3(\varphi^2-2)\sin\varphi - \varphi(\varphi^2-6)\cos\varphi}{\varphi(\varphi^2-6)\sin\varphi + 3\varphi^2\cos\varphi + 6\sin\text{vers}\varphi}.$$

Addirt man die Quadrate, so erhält man:

$$Z^2 = \frac{r^2}{\pi^2\varphi^6}\left\{\begin{array}{l}\{\varphi(\varphi^2-6)\sin\varphi + 3\varphi^2\cos\varphi + 6\sin\text{vers}\varphi\}^2 \\ \quad + \{3(\varphi^2-2)\sin\varphi - \varphi(\varphi^2-6)\cos\varphi\}^2\end{array}\right\},$$

$$Z = \frac{r}{\pi\varphi^3}\sqrt{\left\{\begin{array}{l}\{\varphi(\varphi^2-6)\sin\varphi + 3\varphi^2\cos\varphi + 6\sin\text{vers}\varphi\}^2 \\ \quad + \{3(\varphi^2-2)\sin\varphi - \varphi(\varphi^2-6)\cos\varphi\}^2\end{array}\right\}}.$$

Sind X, Y die rechtwinkligen Coordinaten des Schwerpunktes, so ist bekanntlich

$$X = -Z\cos\Phi, \quad Y = Z\sin\Phi,$$

und folglich

$$X = -\frac{r}{\pi\varphi^3} \cdot \{\varphi(\varphi^2-6)\sin\varphi + 3\varphi^2\cos\varphi + 6\sin\text{vers}\varphi\},$$

$$Y = \frac{r}{\pi\varphi^3} \cdot \{3(\varphi^2-2)\sin\varphi - \varphi(\varphi^2-6)\cos\varphi\}.$$

Man dehne die Richtigkeit dieser Ausdrücke, um nicht in Irrungen zu gerathen, bloß auf den ersten Umlauf des Radius, oder von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$ aus. Weitere Erörterungen würden uns zu weit führen.

Wir verweilen nun nicht länger bey diesem Gegenstande, und bemerken nur noch, daß man, die Schwerpunkte krummliniger Figuren, deren begränzende Linien nach keinem bestimmten Gesetze gekrümmt sind, zu finden, sich leicht selbst Näherungsmethoden ausdenken wird. Doch verweisen wir in dieser Beziehung auf Eytelwein's öfter angeführtes Handbuch der Statik fester Körper, S. 148. und 160., wo zwey zu dem angeführten Zwecke dienliche Methoden aus Bouguer's Preisschrift: De la mâture des vaisseaux, Paris 1727, p. 123., und: Traité de la construction des vaisseaux; traduit du Suédois de M. Chapman, par Vial de Clairbois, Brest 1781, beygebracht werden. Ueberhaupt sind die Kapitel des Eytelwein'schen Werkes, welche von dem Schwerpunkte handeln, besonders denen, die praktische Anwendungen zu machen gedenken, in mehrerer Rücksicht zu empfehlen. Hier müssen wir den Raum für andere wichtigere theoretische Untersuchungen sparen.

Anhang zum neunten Kapitel.

§. 121.

1) Die Differenzialformel $\frac{dx}{\sqrt{2ax - x^2}}$ zu integriren.

Man setze $\sqrt{2ax - x^2} = \sqrt{x(2a - x)} = xz$; so ist

$$2ax - x^2 = x^2z^2,\ 2a - x = xz^2,$$

$$2a = x + xz^2 = x(1 + z^2),\ \text{und folglich}$$

$$x = \frac{2a}{1 + z^2},\ dx = -\frac{4azdz}{(1 + z^2)^2},$$

$$\frac{dx}{\sqrt{2ax - x^2}} = -\frac{4azdz}{(1 + z^2)^2} \cdot \frac{1 + z^2}{2az} = -\frac{2dz}{1 + z^2},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2ax - x^2}} = -2\int \frac{dz}{1 + z^2}.$$

Aus der Differenzialrechnung ist aber bekannt, daß $d\,.\,\mathrm{Arc\,Tg}\,z = \frac{dz}{1 + z^2}$, und folglich $\mathrm{Arc\,Tg}\,z = \int \frac{dz}{1 + z^2}$ ist. Also

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2ax - x^2}} = -2\,\mathrm{Arc\,Tg}\,z.$$

Aber

$$z = \frac{\sqrt{2ax - x^2}}{x} = \sqrt{\frac{2a}{x} - 1}.$$

Also

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2ax - x^2}} = -2\,\mathrm{Arc\,Tg}\sqrt{\frac{2a}{x} - 1}.$$

Noch auf eine andere Art läßt sich die gegebene Differenzialformel integriren, wenn man

$\sqrt{2ax - x^2} = a - (a - x)z$ setzt. Dann ist

$$2ax - x^2 = a^2 - 2a(a - x)z + (a - x)^2 \,.\, z^2$$
$$= a^2 - (a - x)^2.$$

Also

$$-2a(a-x)z+(a-x)^2.z^2=-(a-x)^2,$$
$$-2az+(a-x)z^2=-(a-x),$$
$$2az=(a-x)+(a-x)z^2=(a-x)(1+z^2).$$

Also $a-x=\frac{2az}{1+z^2}$, und folglich

$$a-(a-x)z=a-\frac{2az^2}{1+z^2}=\frac{a+az^2-2az^2}{1+z^2},$$

$$\text{d. i. } \sqrt{2ax-x^2}=\frac{a(1-z^2)}{1+z^2}.$$

Aus dem obigen Ausdrucke für $a-x$ folgt leicht:

$$-dx=\frac{2a(1+z^2)dz-4az^2dz}{(1+z^2)^2}$$
$$=\frac{(2a+2az^2-4az^2)dz}{(1+z^2)^2}=\frac{2a(1-z^2)dz}{(1+z^2)^2}.$$

Also

$$\frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}}=-\frac{2a(1-z^2)dz}{(1+z^2)^2}\cdot\frac{1+z^2}{a(1-z^2)}=-\frac{2dz}{1+z^2},$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}}=-2\int\frac{dz}{1+z^2}=-2\,\mathrm{Arc\,Tg}\,z,\ \text{d. i.}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}}=-2\,\mathrm{Arc\,Tg}\,\frac{a-\sqrt{2ax-x^2}}{a-x}.$$

Wollte man die beiden gefundenen Integrale mit einander vergleichen, so müßte man

$$-2\,\mathrm{Arc\,Tg}\,\frac{\sqrt{2ax-x^2}}{x}=C-2\,\mathrm{Arc\,Tg}\,\frac{a-\sqrt{2ax-x^2}}{a-x}$$

setzen, woraus man erhält:

$$C=2\,\mathrm{Arc\,Tg}\,\frac{a-\sqrt{2ax-x^2}}{a-x}-2\,\mathrm{Arc\,Tg}\,\frac{\sqrt{2ax-x^2}}{x}$$
$$=2\left\{\mathrm{Arc\,Tg}\,y-\mathrm{Arc\,Tg}\,y'\right\}$$
$$=2\,\mathrm{Arc\,Tg}\,\frac{y-y'}{1+yy'},$$

nach bekannten Sätzen der Trigonometrie;

$$y-y'=\frac{a-\sqrt{2ax-x^2}}{a-x}-\frac{\sqrt{2ax-x^2}}{x}$$

$$=\frac{ax-x\sqrt{2ax-x^2}-a\sqrt{2ax-x^2}+x\sqrt{2ax-x^2}}{x(a-x)}$$

$$=\frac{a(x-\sqrt{2ax-x^2})}{x(a-x)};$$

$$1+yy'=1+\frac{a-\sqrt{2ax-x^2}}{a-x}\cdot\frac{\sqrt{2ax-x^2}}{x}$$

$$=1+\frac{a\sqrt{2ax-x^2}-(2ax-x^2)}{x(a-x)}$$

$$=\frac{ax-x^2+a\sqrt{2ax-x^2}-2ax+x^2}{x(a-x)}$$

$$=\frac{a(\sqrt{2ax-x^2}-x)}{x(a-x)}.$$

Also

$$\frac{y-y'}{1+yy'}=-1,\quad C=2\,\mathrm{Arc\,Tg}(-1)=2\cdot(-\tfrac{1}{4}\pi)=-\tfrac{1}{2}\pi,$$

$$-2\,\mathrm{Arc\,Tg}\frac{\sqrt{2ax-x^2}}{x}=-\tfrac{1}{2}\pi-2\,\mathrm{Arc\,Tg}\frac{a-\sqrt{2ax-x^2}}{a-x},$$

$$2\,\mathrm{Arc\,Tg}\frac{\sqrt{2ax-x^2}}{x}=\tfrac{1}{2}\pi+2\,\mathrm{Arc\,Tg}\frac{a-\sqrt{2ax-x^2}}{a-x}.$$

2) Man kann nun auch leicht die Differenzialformeln

$$\frac{xdx}{\sqrt{2ax-x^2}}\text{ und }\frac{x^2dx}{\sqrt{2ax-x^2}}$$

integriren. Denn man setze $\sqrt{2ax-x^2}=z$; so ist

$$dz=\tfrac{1}{2}(2ax-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(2a-2x)dx$$

$$=\frac{(a-x)dx}{\sqrt{2ax-x^2}}=\frac{adx}{\sqrt{2ax-x^2}}-\frac{xdx}{\sqrt{2ax-x^2}},$$

$$z=a\int\frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}}-\int\frac{xdx}{\sqrt{2ax-x^2}}=\sqrt{2ax-x^2}.$$

Also

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{2ax-x^2}}=-\sqrt{2ax-x^2}+a\int\frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}}$$

$$=-\sqrt{2ax-x^2}-2a\,\mathrm{Arc\,Tg}\frac{\sqrt{2ax-x^2}}{x}$$

$$=-\sqrt{2ax-x^2}-2a\,\mathrm{Arc\,Tg}\frac{a-\sqrt{2ax-x^2}}{a-x}.$$

Um das Integral der zweyten der beiden obigen Differenzialformeln zu finden, setze man $x\sqrt{2ax-x^2}=z$; so ist

$$dz=xd.(2ax-x^2)^{\frac{1}{2}}+dx\sqrt{2ax-x^2}$$

$$=\frac{axdx}{\sqrt{2ax-x^2}}-\frac{x^2dx}{\sqrt{2ax-x^2}}+dx\sqrt{2ax-x^2}$$

$$=\frac{axdx}{\sqrt{2ax-x^2}}-\frac{x^2dx}{\sqrt{2ax-x^2}}+\frac{(2ax-x^2)dx}{\sqrt{2ax-x^2}}$$

$$=\frac{3axdx}{\sqrt{2ax-x^2}}-\frac{2x^2dx}{\sqrt{2ax-x^2}},$$

$$z=3a\int\frac{xdx}{\sqrt{2ax-x^2}}-2\int\frac{x^2dx}{\sqrt{2ax-x^2}}=x\sqrt{2ax-x^2},$$

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{2ax-x^2}}=-\tfrac{1}{2}x\sqrt{2ax-x^2}+\frac{3a}{2}\int\frac{xdx}{\sqrt{2ax-x^2}}$$

$$=-\tfrac{1}{2}x\sqrt{2ax-x^2}-\frac{3a}{2}\sqrt{2ax-x^2}-3a^2\,\mathrm{Arc\,Tg}\frac{\sqrt{2ax-x^2}}{x}$$

$$=-\tfrac{1}{2}x\sqrt{2ax-x^2}-\frac{3a}{2}\sqrt{2ax-x^2}-3a^2\,\mathrm{Arc\,Tg}\frac{a-\sqrt{2ax-x^2}}{a-x}$$

$$=-\tfrac{1}{2}(x+3a)\sqrt{2ax-x^2}-3a^2\,\mathrm{Arc\,Tg}\frac{\sqrt{2ax-x^2}}{x}$$

$$=-\tfrac{1}{2}(x+3a)\sqrt{2ax-x^2}-3a^2\,\mathrm{Arc\,Tg}\frac{a-\sqrt{2ax-x^2}}{a-x}.$$

Zehntes Kapitel.

Von der Bestimmung des Schwerpunktes durch Umdrehung um eine Axe erzeugter Körper.

§. 122.

Aufgabe. Den körperlichen Inhalt eines durch die Umdrehung des rechtwinkligen Curvenstücks $ABPQ$ (Fig. 81.) um die Axe AP entstandenen Körpers zu finden.

Auflösung. Die äußersten Coordinaten des gegebenen Curvenstücks seyen, wie im vorhergehenden Kapitel, α, a und β, b. Den gesuchten körperlichen Inhalt bezeichne man wieder durch V. Die größte Abscisse β lasse man sich um i ändern, und V ändere sich um ΔV. Die beiden äußersten Grundflächen von ΔV sind Kreise, von denen der eine $= y^2 . \pi =$ $b^2 . \pi$, und der andere nach dem Taylor'schen Lehrsatze

$$= \pi \left\{ y + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{i}{1} + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{i^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3} \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots \right\}^2$$

für $y = b$.

Der von diesen beiden Kreisen begränzte abgestumpfte Kegel ist nach bekannten Sätzen der Geometrie

$$= \tfrac{1}{3} R^2 . \pi h + \tfrac{1}{3} r^2 . \pi h + \tfrac{1}{3} R r \pi h,$$

wenn R und r die Halbmesser der untern und obern Grundfläche sind, h aber die Höhe des Kegels bedeutet. Also dieser Kegel

$$= \left\{ \begin{array}{l} \tfrac{1}{3} y^2 \pi i + \tfrac{1}{3} \pi i \left\{ y + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{i}{1} + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{i^2}{1.2} + \ldots \right\}^2 \\ + \tfrac{1}{3} \pi y i \left\{ y + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{i}{1} + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{i^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3} \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots \right\} \end{array} \right.$$

$$= \pi y^2 i + \ldots,$$

wo $y = b$ zu setzen ist, und alle folgende Glieder höhere Potenzen von i enthalten. Daher ist dieser Ausdruck hinter dem Gleichheitszeichen mit desto mehr Genauigkeit dem ersten Gliede $\pi y^2 i$ gleich, je kleiner i ist. Je kleiner aber i ist, mit desto mehr Genauigkeit ist der abgestumpfte Kegel auch dem Körper ΔV gleich. Daher ist $\Delta V = \pi y^2 i$ für $y = b$, mit desto mehr Genauigkeit, je kleiner i ist. Folglich ist die Summe aller Größen ΔV in der ganzen Ausdehnung von $x = \alpha$ bis $x = \beta$, d. i. der gesuchte körperliche Inhalt V,

$$= \pi \cdot \underset{(x=\alpha,\,\beta;\ y=a,\,b)}{\int y^2 dx},$$

nach §. 108.

§. 123.

Aufgabe. Den Schwerpunkt des durch die Umdrehung von $ABPQ$ (Fig. 81.) um die Abscissenaxe AP erzeugten Körpers zu finden.

Auflösung. Es ist klar, daß der gesuchte Schwerpunkt in der Abscissenaxe liegt, und man braucht daher bloß X zu bestimmen. Man lasse die größere Abscisse β sich wieder um i verändern, so verändert sich V um ΔV, und es ist, nach dem vorhergehenden Paragraphen, $\Delta V = \pi y^2 i$, mit desto mehr Genauigkeit, je kleiner i ist. Mit desto größerer Genauigkeit ist aber auch die Entfernung des Schwerpunktes des Körpers ΔV von dem Anfange der Abscissen $= x$, und demnach das Moment von ΔV mit desto größerer Genauigkeit $= \pi x y^2 i$, für $x = \beta$ und $y = b$, je kleiner i ist. Also die Summe aller Momente der Größen ΔV in der ganzen Ausdehnung von $x = \alpha$ bis $x = \beta$ nach §. 108.

$$= \pi \cdot \underset{(x=\alpha,\,\beta;\ y=a,\,b)}{\int x y^2 dx}.$$

Diese Summe ist aber nach den bekanntesten Sätzen über den Schwerpunkt auch

$$= VX = X \cdot \pi \cdot \underset{(x=\alpha,\,\beta;\ y=a,\,b)}{\int y^2 dx},$$

nach dem vorhergehenden Paragraphen. Also

$$X \cdot \pi \cdot \underset{(x=\alpha,\,\beta;\; y=a,\,b)}{\int y^2 dx} = \pi \cdot \underset{(x=\alpha,\,\beta;\; y=a,\,b)}{\int xy^2 dx}$$

oder

$$X \cdot \underset{(x=\alpha,\,\beta;\; y=a,\,b)}{\int y^2 dx} = \underset{(x=\alpha,\,\beta;\; y=a,\,b)}{\int xy^2 dx},$$

woraus sich das gesuchte X in jedem Falle bestimmen läßt.

§. 124.

Aufgabe. Den Schwerpunkt eines Kugelsegments zu bestimmen.

Auflösung. In diesem Falle ist die erzeugende Curve ein Kreis, und folglich $y = \sqrt{2rx - x^2}$, wenn r den Halbmesser des Kreises oder der Kugel bezeichnet. Also

$$y^2 = 2rx - x^2, \quad xy^2 = 2rx^2 - x^3,$$
$$\int y^2 dx = 2r\int x dx - \int x^2 dx = rx^2 - \tfrac{1}{3}x^3,$$
$$\int xy^2 dx = 2r\int x^2 dx - \int x^3 dx = \tfrac{2}{3}rx^3 - \tfrac{1}{4}x^4,$$

welche Integrale so bestimmt sind, daß sie für $x = 0$ verschwinden, wie es in diesem Falle seyn muß. Also

$$X = \frac{\tfrac{2}{3}rx^3 - \tfrac{1}{4}x^4}{rx^2 - \tfrac{1}{3}x^3} = \frac{8rx - 3x^2}{12r - 4x}.$$

Für die Halbkugel ist $x = r$, und folglich $X = \dfrac{8r^2 - 3r^2}{12r - 4r}$ $= \tfrac{5}{8}r$, so daß also der Abstand des Schwerpunktes einer Halbkugel vom Mittelpunkte der Kugel $= r - \tfrac{5}{8}r = \tfrac{3}{8}r$ ist.

§. 125.

Aufgabe. Den Schwerpunkt eines Kugelgewölbes zu finden.

Auflösung. Ein Kugelgewölbe ist die Differenz zweyer concentrischen Halbkugeln. Setzen wir nun den Halbmesser der äußern Halbkugel $= R$, und den Halbmesser der innern $= r$; so ist der Inhalt der äußern $= \tfrac{2}{3}R^3 . \pi$, und der Inhalt der innern $= \tfrac{2}{3}r^3 . \pi$, also der Inhalt des Gewölbes

$= \frac{2}{3}(R^3 - r^3)\pi$. Ist nun X der Abstand des gesuchten Schwerpunktes vom Mittelpunkte der beiden Halbkugeln, so ist nach dem vorhergehenden Paragraphen und bekannten Sätzen vom Schwerpunkte:

$$X \cdot \tfrac{2}{3}(R^3 - r^3) \cdot \pi + \tfrac{3}{8}r \cdot \tfrac{2}{3}r^3 \cdot \pi = \tfrac{3}{8}R \cdot \tfrac{2}{3}R^3 \cdot \pi,$$

$$X \cdot \tfrac{2}{3}(R^3 - r^3) \cdot \pi + \tfrac{1}{4}r^4 \cdot \pi = \tfrac{1}{4}R^4 \cdot \pi,$$

$$X \cdot \tfrac{2}{3}(R^3 - r^3) = \tfrac{1}{4}(R^4 - r^4),$$

$$X = \frac{3(R^4 - r^4)}{8(R^3 - r^3)}.$$

§. 126.

Aufgabe. Den Schwerpunkt eines Körpers zu finden, welcher durch die Umdrehung eines Kreissectors um einen seiner Halbmesser entsteht.

Auflösung. Ein solcher Körper besteht offenbar aus einem sphärischen Segmente und einem geraden Kegel. Setzen wir die Höhe des sphärischen Segments $= x$ und den Halbmesser seiner Grundfläche $= y$, so ist y zugleich der Halbmesser der Grundfläche des Kegels, und seine Höhe ist $= r - x$. Also der körperliche Inhalt des Kegels $= \frac{1}{3}y^2 \cdot \pi \cdot (r - x)$. Wegen der Natur des Kreises ist aber $y^2 = 2rx - x^2$. Also der Inhalt des Kegels

$$= \tfrac{1}{3}\pi(2rx - x^2)(r - x).$$

Der Inhalt des Kugelabschnittes ergibt sich leicht mittelst der Integralformel $\pi\int y^2 dx$. Es ist nämlich

$$\int y^2 dx = 2r\int x dx - \int x^2 dx = rx^2 - \tfrac{1}{3}x^3,$$

und folglich der Inhalt des Segments

$$= \pi(rx^2 - \tfrac{1}{3}x^3) = \pi x^2(r - \tfrac{1}{3}x).$$

Also der Inhalt des durch die Umdrehung des Kreissectors erzeugten Körpers

$$\begin{aligned}
&= \pi x^2(r - \tfrac{1}{3}x) + \tfrac{1}{3}\pi(2rx - x^2)(r - x) \\
&= \pi r x^2 - \tfrac{1}{3}\pi x^3 + \tfrac{2}{3}\pi r^2 x - \tfrac{1}{3}\pi r x^2 - \tfrac{2}{3}\pi r x^2 + \tfrac{1}{3}\pi x^3 \\
&= \pi r x^2 - \tfrac{1}{3}\pi x^3 + \tfrac{2}{3}\pi r^2 x - \pi r x^2 + \tfrac{1}{3}\pi x^3 \\
&= \tfrac{2}{3}\pi r^2 x.
\end{aligned}$$

Nimmt man nun den Gipfel des sphärischen Segments als Anfangspunkt an, und bezeichnet den Abstand des gesuchten Schwerpunktes von demselben durch X; so ist nach §. 124. der Abstand des Schwerpunktes des sphärischen Segments von dem angenommenen Anfangspunkte $= \frac{8rx - 3x^2}{12r - 4x}$, und der Abstand des Schwerpunktes des Kegels von demselben Punkte ist nach bekannten Sätzen

$$= x + \tfrac{1}{4}(r - x) = x + \tfrac{1}{4}r - \tfrac{1}{4}x = \tfrac{1}{4}r + \tfrac{3}{4}x.$$

Also

$$X \cdot \tfrac{2}{3}\pi r^2 x = \begin{cases} \left(\dfrac{8rx - 3x^2}{12r - 4x}\right) \cdot \pi x^2 (r - \tfrac{1}{3}x) \\ + \tfrac{1}{4}(r + 3x) \cdot \tfrac{1}{3}\pi (2rx - x^2)(r - x) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \left(\dfrac{8rx - 3x^2}{12r - 4x}\right) \cdot \tfrac{1}{12}\pi x^2 (12r - 4x) \\ + \tfrac{1}{12}(r + 3x) \cdot \pi (2rx - x^2)(r - x) \end{cases}$$

$$= \tfrac{1}{12}\pi x^2 (8rx - 3x^2) + \tfrac{1}{12}\pi (r + 3x)(2rx - x^2)(r - x),$$

$$X \cdot 8r^2 x = x^2(8rx - 3x^2) + (r + 3x)(2rx - x^2)(r - x)$$

$$= x^2(8rx - 3x^2) + (2r^2x - rx^2 + 6rx^2 - 3x^3)(r - x)$$

$$= x^2(8rx - 3x^2) + (2r^2x + 5rx^2 - 3x^3)(r - x)$$

$$= \begin{cases} 8rx^3 - 3x^4 + 2r^3x + 5r^2x^2 \\ - 3rx^3 + 3x^4 \qquad\qquad - 2r^2x^2 \\ - 5rx^3 \end{cases}$$

$$= 2r^3x + 3r^2x^2 = (2r + 3x)r^2x,$$

$$8X = 2r + 3x, \quad X = \tfrac{1}{4}r + \tfrac{3}{8}x,$$

und folglich der Abstand vom Centrum der Kugel

$$= r - (\tfrac{1}{4}r + \tfrac{3}{8}x) = \tfrac{3}{4}r - \tfrac{3}{8}x = \frac{6r - 3x}{8}.$$

§. 127.

Aufgabe. Die Gleichung der Parabel in Beziehung auf irgend einen Diameter ist bekanntlich $y'^2 = p'x'$, wo p' den Parameter des Diameters bezeichnet, und x',

y' schiefwinklige Coordinaten sind, deren Coordinatenwinkel wir durch φ bezeichnen wollen. Man soll den Abstand des Schwerpunktes des durch die Umdrehung des zwischen den Coordinaten x', y' enthaltenen parabolischen Stücks um die Axe der x' entstandenen Körpers von dem Scheitel des Diameters finden.

Auflösung. Sind x, y rechtwinklige Coordinaten, so ist bekanntlich

$$x = x' + y' \operatorname{Cos}\varphi, \quad y = y' \operatorname{Sin}\varphi.$$

Also $dx = dx' + \operatorname{Cos}\varphi\, dy'$, und folglich:

$$y^2 dx = \operatorname{Sin}\varphi^2 y'^2 dx' + \operatorname{Sin}\varphi^2 \operatorname{Cos}\varphi\, y'^2 dy',$$

$$\int y^2 dx = \operatorname{Sin}\varphi^2 \int y'^2 dx' + \tfrac{1}{3} \operatorname{Sin}\varphi^2 \operatorname{Cos}\varphi\, y'^3,$$

$$xy^2 dx = (x' + y' \operatorname{Cos}\varphi)(dx' + \operatorname{Cos}\varphi\, dy') \operatorname{Sin}\varphi^2 y'^2$$

$$= \begin{cases} \operatorname{Sin}\varphi^2 x'y'^2 dx' + \operatorname{Sin}\varphi^2 \operatorname{Cos}\varphi\, y'^3 dx' \\ + \operatorname{Sin}\varphi^2 \operatorname{Cos}\varphi\, x'y'^2 dy' + \operatorname{Sin}\varphi^2 \operatorname{Cos}\varphi^2 y'^3 dy', \end{cases}$$

$$\int xy^2 dx^2 = \begin{cases} \operatorname{Sin}\varphi^2 \int x'y'^2 dx' + \operatorname{Sin}\varphi^2 \operatorname{Cos}\varphi \int y'^3 dx' \\ + \operatorname{Sin}\varphi^2 \operatorname{Cos}\varphi \int x'y'^2 dy' + \tfrac{1}{4} \operatorname{Sin}\varphi^2 \operatorname{Cos}\varphi^2 y'^4 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \operatorname{Sin}\varphi^2 \int x'y'^2 dx' + \operatorname{Sin}\varphi^2 \operatorname{Cos}\varphi \int y'^3 dx' \\ + \operatorname{Sin}\varphi^2 \operatorname{Cos}\varphi\, x' \int y'^2 dy' - \operatorname{Sin}\varphi^2 \operatorname{Cos}\varphi \int dx' \int y'^2 dy' \\ + \tfrac{1}{4} \operatorname{Sin}\varphi^2 \operatorname{Cos}\varphi^2 y'^4 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \operatorname{Sin}\varphi^2 \int x'y'^2 dx' + \operatorname{Sin}\varphi^2 \operatorname{Cos}\varphi \int y'^3 dx' \\ + \tfrac{1}{3} \operatorname{Sin}\varphi^2 \operatorname{Cos}\varphi\, x'y'^3 - \tfrac{1}{3} \operatorname{Sin}\varphi^2 \operatorname{Cos}\varphi \int y'^3 dx' \\ + \tfrac{1}{4} \operatorname{Sin}\varphi^2 \operatorname{Cos}\varphi^2 y'^4 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \operatorname{Sin}\varphi^2 \int x'y'^2 dx' + \tfrac{2}{3} \operatorname{Sin}\varphi^2 \operatorname{Cos}\varphi \int y'^3 dx' \\ + \tfrac{1}{3} \operatorname{Sin}\varphi^2 \operatorname{Cos}\varphi\, x'y'^3 + \tfrac{1}{4} \operatorname{Sin}\varphi^2 \operatorname{Cos}\varphi^2 y'^4. \end{cases}$$

Der durch das zwischen den Coordinaten x, y enthaltene Curvenstück beschriebene Körper besteht aus dem gegebenen Körper, und einem Kegel, dessen Höhe $y' \operatorname{Cos}\varphi$ ist, und dessen Grundfläche den Halbmesser $y' \operatorname{Sin}\varphi$ hat. Der Inhalt dieses Kegels ist also

$$= \tfrac{1}{3}\pi y'^2 \operatorname{Sin}\varphi^2 . y' \operatorname{Cos}\varphi$$

$$= \tfrac{1}{3}\pi y'^3 \operatorname{Sin}\varphi^2 \operatorname{Cos}\varphi,$$

und die Entfernung seines Schwerpunktes vom Anfange der Abscissen $= x' + \tfrac{3}{4} y' \operatorname{Cos}\varphi$.

Der Inhalt des von dem Curvenstücke mit rechtwinkligen Coordinaten beschriebenen Körpers ist

$$= \pi \int y^2 dx = \pi \operatorname{Sin} \varphi^2 \int y'^2 dx' + \tfrac{1}{3} \pi \operatorname{Sin} \varphi^2 \operatorname{Cos} \varphi\, y'^3,$$

und der Inhalt des von dem Curvenstücke mit schiefwinkligen Coordinaten beschriebenen Körpers, als der Unterschied zwischen jenem Körper und dem Kegel, ist

$$= \pi \operatorname{Sin} \varphi^2 \int y'^2 dx'.$$

Also nach bekannten Sätzen vom Schwerpunkte, wenn X die Abscisse des gesuchten Schwerpunktes bezeichnet:

$$X \pi \operatorname{Sin} \varphi^2 \int y'^2 dx' + (x' + \tfrac{3}{4} y' \operatorname{Cos} \varphi) \cdot \tfrac{1}{3} \pi y'^3 \operatorname{Sin} \varphi^2 \operatorname{Cos} \varphi$$

$$= \pi \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Sin} \varphi^2 \int x' y'^2 dx' + \tfrac{2}{3} \operatorname{Sin} \varphi^2 \operatorname{Cos} \varphi \int y'^3 dx' \\ + \tfrac{1}{3} \operatorname{Sin} \varphi^2 \operatorname{Cos} \varphi\, x' y'^3 + \tfrac{1}{4} \operatorname{Sin} \varphi^2 \operatorname{Cos} \varphi^2 y'^4 \end{array} \right\},$$

$$X \int y'^2 dx' + \tfrac{1}{3} \operatorname{Cos} \varphi\, x' y'^3 + \tfrac{1}{4} \operatorname{Cos} \varphi^2 y'^4 =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \int x' y'^2 dx' + \tfrac{2}{3} \operatorname{Cos} \varphi \int y'^3 dx' + \tfrac{1}{3} \operatorname{Cos} \varphi\, x' y'^3 \\ \quad + \tfrac{1}{4} \operatorname{Cos} \varphi^2 y'^4, \end{array} \right.$$

$$X \int y'^2 dx' = \int x' y'^2 dx' + \tfrac{2}{3} \operatorname{Cos} \varphi \int y'^3 dx'.$$

Bey der Parabel ist nun

$$y'^2 = p' x', \quad y'^2 dx' = p' x' dx', \quad \int y'^2 dx' = \tfrac{1}{2} p' x'^2,$$

$$x' y'^2 dx' = p' x'^2 dx', \quad \int x' y'^2 dx' = \tfrac{1}{3} p' x'^3,$$

$$y'^3 dx' = p'^{\frac{3}{2}} x'^{\frac{3}{2}} dx', \quad \int y'^3 dx' = \tfrac{2}{5} p'^{\frac{3}{2}} x'^{\frac{5}{2}},$$

$$\tfrac{1}{2} X p' x'^2 = \tfrac{1}{3} p' x'^3 + \tfrac{2}{3} \operatorname{Cos} \varphi \cdot \tfrac{2}{5} p'^{\frac{3}{2}} x'^{\frac{5}{2}},$$

$$X p' x'^2 = \tfrac{2}{3} p' x'^3 + \tfrac{8}{15} \operatorname{Cos} \varphi\, p'^{\frac{3}{2}} x'^{\frac{5}{2}},$$

$$X = \tfrac{2}{3} x' + \tfrac{8}{15} \operatorname{Cos} \varphi \cdot p'^{\frac{1}{2}} x'^{\frac{1}{2}},$$

$$X = \tfrac{2}{3} x' + \tfrac{8}{15} y' \operatorname{Cos} \varphi.$$

Ist der Diameter die Axe der Parabel, so sind die Coordinaten rechtwinklig, und folglich $\varphi = 90^\circ$. Also $\operatorname{Cos} \varphi = 0$, und $X = \frac{2}{3} x'$, d. i. **Der Abstand des Schwerpunktes des durch die Umdrehung erzeugten Körpers von dem Scheitel der Axe ist gleich zwey Drittheilen der Abscisse des gedreheten parabolischen Stücks.**

Dieser Satz findet sich schon als Lemma III. in Archimedes De Insidentibus Humido, lib. II., aber ohne Beweis. Barrow verweis't wegen desselben auf Commandin und Lucas Valerius. Letzterer hat zuerst die Schwerpunkte der Körper ausführlicher untersucht.

Sind a, b die Coordinaten des Scheitels des Diameters der Parabel, so ist nach bekannten Eigenschaften dieser Curve

$$\frac{b}{2a} = \mathrm{Tg}\,\varphi = \frac{\mathrm{Sin}\,\varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi} = \frac{\sqrt{1 - \mathrm{Cos}\,\varphi^2}}{\mathrm{Cos}\,\varphi},$$

$$\frac{b^2}{4a^2} = \frac{1 - \mathrm{Cos}\,\varphi^2}{\mathrm{Cos}\,\varphi^2}, \quad b^2\,\mathrm{Cos}\,\varphi^2 = 4a^2(1 - \mathrm{Cos}\,\varphi^2),$$

$$4a^2 = (4a^2 + b^2)\,\mathrm{Cos}\,\varphi^2,$$

$$\mathrm{Cos}\,\varphi^2 = \frac{4a^2}{4a^2 + b^2}, \quad \mathrm{Cos}\,\varphi = \frac{2a}{\sqrt{4a^2 + b^2}},$$

und folglich

$$X = \tfrac{2}{3}x' + \frac{16ay'}{15\sqrt{4a^2 + b}}$$

$$= \frac{16ay' + 10x'\sqrt{4a^2 + b}}{15\sqrt{4a^2 + b}}.$$

§. 128.

Aufgabe. Ein elliptisches Stück zwischen rechtwinkligen Coordinaten in Beziehung auf die große und kleine Axe werde um die große Axe gedreht. Man sucht die Entfernung des Schwerpunktes des entstandenen Körpers vom Scheitel der großen Axe.

Auflösung. Die Gleichung der Ellipse ist:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2),$$

$$y^2 dx = \frac{b^2}{a^2}(2axdx - x^2dx),$$

$$\int y^2 dx = \frac{b^2}{a^2}(ax^2 - \tfrac{1}{3}x^3),$$

$$\int xy^2\,dx = \frac{b^2}{a^2}(2a\int x^2\,dx - \int x^3\,dx) = \frac{b^2}{a^2}(\tfrac{2}{3}ax^3 - \tfrac{1}{4}x^4).$$

Also die gesuchte Entfernung des Schwerpunktes vom Scheitel der großen Axe

$$= X = \frac{\frac{2}{3}ax^3 - \frac{1}{4}x^4}{ax^2 - \frac{1}{3}x^3} = \frac{8ax - 3x^2}{12a - 4x}.$$

Also, wenn das elliptische Stück ein elliptischer Quadrant ist:

$$X = \frac{8a^2 - 3a^2}{12a - 4a} = \frac{5a^2}{8a} = \tfrac{5}{8}a.$$

Für die kleine Axe gilt alles Obige gleichfalls, wenn man nur a und b mit einander vertauscht.

§. 129.

Aufgabe. Den Schwerpunkt des durch Umdrehung eines hyperbolischen Stücks zwischen rechtwinkligen Coordinaten um die große Axe erzeugten Körpers zu finden.

Auflösung. Die Gleichung der Hyperbel ist:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2),$$

$$y^2\,dx = \frac{b^2}{a^2}(2ax\,dx + x^2\,dx),$$

$$\int y^2\,dx = \frac{b^2}{a^2}(ax^2 + \tfrac{1}{3}x^3),$$

$$\int xy^2\,dx = \frac{b^2}{a^2}(\tfrac{2}{3}ax^3 + \tfrac{1}{4}x^4);$$

$$X = \frac{\frac{2}{3}ax^3 + \frac{1}{4}x^4}{ax^2 + \frac{1}{3}x^3} = \frac{8ax + 3x^2}{12a + 4x}.$$

Der Abstand des Schwerpunktes ist vom Scheitel der großen Axe genommen.

§. 130.

Aufgabe. Ein cycloidalisches Stück zwischen rechtwinkligen Coordinaten drehe sich um die Basis, auf welcher die Abscissen vom Anfange der Cycloide an genommen werden. Man soll den Schwerpunkt des entstandenen Körpers finden.

Auflösung. Bezeichnet φ wie in §. 117. den Wälzungswinkel, so ist bekanntlich

$$x = r(\varphi - \mathrm{Sin}\,\varphi),\ \ y = r(1 - \mathrm{Cos}\,\varphi);$$

$$dx = r(1 - \mathrm{Cos}\,\varphi)\,d\varphi,\ \ y^2 = r^2(1 - \mathrm{Cos}\,\varphi)^2;$$

$$y^2\,dx = r^3(1 - \mathrm{Cos}\,\varphi)^3\,d\varphi$$
$$= r^3(1 - 3\,\mathrm{Cos}\,\varphi + 3\,\mathrm{Cos}\,\varphi^2 - \mathrm{Cos}\,\varphi^3)\,d\varphi;$$

$$\int \mathrm{Cos}\,\varphi\,d\varphi = \mathrm{Sin}\,\varphi,$$

$$\left.\begin{aligned}\int \mathrm{Cos}\,\varphi^2\,d\varphi &= \tfrac{1}{2}(\varphi + \mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Cos}\,\varphi),\\ \int \mathrm{Cos}\,\varphi^3\,d\varphi &= \tfrac{1}{3}\mathrm{Cos}\,\varphi^2\,\mathrm{Sin}\,\varphi + \tfrac{2}{3}\mathrm{Sin}\,\varphi;\end{aligned}\right\}\ (\S.\ 118.)$$

$$\int y^2\,dx = r^3.\left\{\begin{aligned}&\varphi - 3\mathrm{Sin}\,\varphi + \tfrac{3}{2}\mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Cos}\,\varphi - \tfrac{1}{3}\mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Cos}\,\varphi^2\\ &+ \tfrac{3}{2}\varphi - \tfrac{2}{3}\mathrm{Sin}\,\varphi\end{aligned}\right\}$$

$$= r^3.\left\{\tfrac{5}{2}\varphi - \tfrac{11}{3}\mathrm{Sin}\,\varphi + \tfrac{3}{2}\mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Cos}\,\varphi - \tfrac{1}{3}\mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Cos}\,\varphi^2\right\};$$

$$xy^2\,dx = r^4(\varphi - \mathrm{Sin}\,\varphi)(1 - 3\mathrm{Cos}\,\varphi + 3\mathrm{Cos}\,\varphi^2 - \mathrm{Cos}\,\varphi^3)\,d\varphi$$

$$= r^4.\left\{\begin{aligned}&\varphi - 3\varphi\,\mathrm{Cos}\,\varphi + 3\varphi\,\mathrm{Cos}\,\varphi^2 - \varphi\,\mathrm{Cos}\,\varphi^3\\ &- \mathrm{Sin}\,\varphi + 3\mathrm{Cos}\,\varphi\,\mathrm{Sin}\,\varphi - 3\mathrm{Cos}\,\varphi^2\,\mathrm{Sin}\,\varphi\\ &+ \mathrm{Cos}\,\varphi^3\,\mathrm{Sin}\,\varphi\end{aligned}\right\}d\varphi;$$

$$\int \varphi\,d\varphi = \tfrac{1}{2}\varphi^2,$$

$$\begin{aligned}\int \varphi\,\mathrm{Cos}\,\varphi\,d\varphi &= \varphi\int \mathrm{Cos}\,\varphi\,d\varphi - \int d\varphi \int \mathrm{Cos}\,\varphi\,d\varphi\\ &= \varphi\,\mathrm{Sin}\,\varphi - \int \mathrm{Sin}\,\varphi\,d\varphi\\ &= \varphi\,\mathrm{Sin}\,\varphi + \mathrm{Cos}\,\varphi,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \varphi\,\mathrm{Cos}\,\varphi^2\,d\varphi &= \varphi\int \mathrm{Cos}\,\varphi^2\,d\varphi - \int d\varphi \int \mathrm{Cos}\,\varphi^2\,d\varphi\\ &= \tfrac{1}{2}\varphi(\varphi + \mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Cos}\,\varphi) - \int \tfrac{1}{2}(\varphi + \mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Cos}\,\varphi)\,d\varphi\\ &= \tfrac{1}{2}\varphi(\varphi + \mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Cos}\,\varphi) - \tfrac{1}{2}\int(\varphi\,d\varphi + \tfrac{1}{4}\mathrm{Sin}\,2\varphi\,d2\varphi)\\ &= \tfrac{1}{2}\varphi(\varphi + \mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Cos}\,\varphi) - \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\varphi^2 - \tfrac{1}{4}\mathrm{Cos}\,2\varphi)\\ &= \tfrac{1}{4}\varphi^2 + \tfrac{1}{2}\varphi\,\mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Cos}\,\varphi + \tfrac{1}{8}\mathrm{Cos}\,2\varphi,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \varphi\,\mathrm{Cos}\,\varphi^3\,d\varphi &= \varphi\int \mathrm{Cos}\,\varphi^3\,d\varphi - \int d\varphi \int \mathrm{Cos}\,\varphi^3\,d\varphi\\ &= \varphi(\tfrac{1}{3}\mathrm{Cos}\,\varphi^2\,\mathrm{Sin}\,\varphi + \tfrac{2}{3}\mathrm{Sin}\,\varphi) - \int(\tfrac{1}{3}\mathrm{Cos}\,\varphi^2\,\mathrm{Sin}\,\varphi + \tfrac{2}{3}\mathrm{Sin}\,\varphi)\,d\varphi\\ &= \tfrac{1}{3}\varphi\,\mathrm{Cos}\,\varphi^2\,\mathrm{Sin}\,\varphi + \tfrac{2}{3}\varphi\,\mathrm{Sin}\,\varphi - \tfrac{1}{3}\int \mathrm{Cos}\,\varphi^2\,\mathrm{Sin}\,\varphi\,d\varphi + \tfrac{2}{3}\mathrm{Cos}\,\varphi,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \mathrm{Cos}\,\varphi^2\,\mathrm{Sin}\,\varphi\,d\varphi &= \mathrm{Cos}\,\varphi^2\int \mathrm{Sin}\,\varphi\,d\varphi - \int d.\,\mathrm{Cos}\,\varphi^2\int \mathrm{Sin}\,\varphi\,d\varphi\\ &= -\,\mathrm{Cos}\,\varphi^3 - 2\int \mathrm{Cos}\,\varphi^2\,\mathrm{Sin}\,\varphi\,d\varphi,\end{aligned}$$

$$3\int \mathrm{Cos}\,\varphi^2\,\mathrm{Sin}\,\varphi\,d\varphi = -\,\mathrm{Cos}\,\varphi^3,\ \ \int \mathrm{Cos}\,\varphi^2\,\mathrm{Sin}\,\varphi\,d\varphi = -\tfrac{1}{3}\mathrm{Cos}\,\varphi^3,$$

$$\int \mathrm{Cos}\,\varphi^3\, d\varphi = \tfrac{1}{3}\varphi\,\mathrm{Cos}\,\varphi^2\,\mathrm{Sin}\,\varphi + \tfrac{2}{3}\varphi\,\mathrm{Sin}\,\varphi + \tfrac{1}{9}\mathrm{Cos}\,\varphi^3 + \tfrac{2}{3}\mathrm{Cos}\,\varphi,$$

$$\int \mathrm{Sin}\,\varphi\, d\varphi = -\,\mathrm{Cos}\,\varphi,$$

$$\begin{aligned} \int \mathrm{Cos}\,\varphi\,\mathrm{Sin}\,\varphi\, d\varphi &= \mathrm{Cos}\,\varphi \int \mathrm{Sin}\,\varphi\, d\varphi - \int d\,\mathrm{Cos}\,\varphi \int \mathrm{Sin}\,\varphi\, d\varphi \\ &= -\,\mathrm{Cos}\,\varphi^2 - \int \mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Cos}\,\varphi\, d\varphi, \end{aligned}$$

$$2\int \mathrm{Cos}\,\varphi\,\mathrm{Sin}\,\varphi\, d\varphi = -\,\mathrm{Cos}\,\varphi^2,\quad \int \mathrm{Cos}\,\varphi\,\mathrm{Sin}\,\varphi\, d\varphi = -\tfrac{1}{2}\mathrm{Cos}\,\varphi^2,$$

$$\begin{aligned} \int \mathrm{Cos}\,\varphi^3\,\mathrm{Sin}\,\varphi\, d\varphi &= \mathrm{Cos}\,\varphi^3 \int \mathrm{Sin}\,\varphi\, d\varphi - \int d\,.\,\mathrm{Cos}\,\varphi^3 \int \mathrm{Sin}\,\varphi\, d\varphi \\ &= -\,\mathrm{Cos}\,\varphi^4 - 3\int \mathrm{Cos}\,\varphi^3\,\mathrm{Sin}\,\varphi\, d\varphi, \end{aligned}$$

$$4\int \mathrm{Cos}\,\varphi^3\,\mathrm{Sin}\,\varphi\, d\varphi = -\,\mathrm{Cos}\,\varphi^4,\quad \int \mathrm{Cos}\,\varphi^3\,\mathrm{Sin}\,\varphi\, d\varphi = -\tfrac{1}{4}\mathrm{Cos}\,\varphi^4.$$

Hieraus erhält man $\int xy^2\,dx =$

$$= r^4.\left\{\begin{array}{l} \tfrac{1}{2}\varphi^2 - 3\varphi\,\mathrm{Sin}\,\varphi - 3\,\mathrm{Cos}\,\varphi + \tfrac{3}{2}\varphi\,\mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Cos}\,\varphi + \tfrac{3}{8}\mathrm{Cos}\,2\varphi \\ + \tfrac{3}{4}\varphi^2 - \tfrac{2}{3}\varphi\,\mathrm{Sin}\,\varphi - \tfrac{2}{3}\mathrm{Cos}\,\varphi \\ \qquad\qquad + \mathrm{Cos}\,\varphi \\ - \tfrac{1}{3}\varphi\,\mathrm{Cos}\,\varphi^2\,\mathrm{Sin}\,\varphi - \tfrac{1}{9}\mathrm{Cos}\,\varphi^3 - \tfrac{3}{2}\mathrm{Cos}\,\varphi^2 - \tfrac{1}{4}\mathrm{Cos}\,\varphi^4 \\ \qquad\qquad + \mathrm{Cos}\,\varphi^3 \end{array}\right\}$$

$$= r^4.\left\{\begin{array}{l} \tfrac{5}{4}\varphi^2 - \tfrac{11}{3}\varphi\,\mathrm{Sin}\,\varphi - \tfrac{8}{3}\mathrm{Cos}\,\varphi + \tfrac{3}{2}\varphi\,\mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Cos}\,\varphi + \tfrac{3}{8}\mathrm{Cos}\,2\varphi \\ - \tfrac{1}{3}\varphi\,\mathrm{Cos}\,\varphi^2\,\mathrm{Sin}\,\varphi + \tfrac{8}{9}\mathrm{Cos}\,\varphi^3 - \tfrac{3}{2}\mathrm{Cos}\,\varphi^2 - \tfrac{1}{4}\mathrm{Cos}\,\varphi^4 \end{array}\right\}$$

$$= r^4.\left\{\begin{array}{l} \tfrac{5}{4}\varphi^2 - \tfrac{11}{3}\varphi\,\mathrm{Sin}\,\varphi - \tfrac{8}{3}\mathrm{Cos}\,\varphi + \tfrac{3}{4}\varphi\,\mathrm{Sin}\,2\varphi + \tfrac{1}{8}\mathrm{Cos}\,\varphi^2 - \tfrac{3}{8}\mathrm{Sin}\,\varphi^2 \\ - \tfrac{1}{3}\varphi\,\mathrm{Sin}\,\varphi + \tfrac{1}{3}\varphi\,\mathrm{Sin}\,\varphi^3 + \tfrac{8}{9}\mathrm{Cos}\,\varphi^3 - \tfrac{3}{2}\mathrm{Cos}\,\varphi^2 - \tfrac{1}{4}\mathrm{Cos}\,\varphi^4 \end{array}\right\}$$

$$= r^4.\left\{\begin{array}{l} \tfrac{5}{4}\varphi^2 - 4\varphi\,\mathrm{Sin}\,\varphi - \tfrac{8}{3}\mathrm{Cos}\,\varphi + \tfrac{3}{4}\varphi\,\mathrm{Sin}\,2\varphi - \tfrac{9}{8}\mathrm{Cos}\,\varphi^2 - \tfrac{3}{8}\mathrm{Sin}\,\varphi^2 \\ + \tfrac{1}{3}\varphi\,\mathrm{Sin}\,\varphi^3 + \tfrac{8}{9}\mathrm{Cos}\,\varphi^3 - \tfrac{1}{4}\mathrm{Cos}\,\varphi^4 \end{array}\right\}$$

$$= r^4.\left\{\begin{array}{l} \varphi\,(\tfrac{5}{4}\varphi - 4\,\mathrm{Sin}\,\varphi + \tfrac{3}{4}\mathrm{Sin}\,2\varphi + \tfrac{1}{3}\mathrm{Sin}\,\varphi^3) \\ - \tfrac{3}{8} - \tfrac{8}{3}\mathrm{Cos}\,\varphi - \tfrac{3}{4}\mathrm{Cos}\,\varphi^2 + \tfrac{8}{9}\mathrm{Cos}\,\varphi^3 - \tfrac{1}{4}\mathrm{Cos}\,\varphi^4 \end{array}\right\}.$$

Bestimmt man nun, wie es seyn muß, dieses Integral so, daß es für $\varphi = 0$ verschwindet, so erhält man:

$$\begin{aligned} 0 &= r^4(-\tfrac{3}{8} - \tfrac{8}{3} - \tfrac{3}{4} + \tfrac{8}{9} - \tfrac{1}{4}) + \mathrm{Const} \\ &= r^4(-\tfrac{27}{72} - \tfrac{192}{72} + \tfrac{64}{72} - \tfrac{72}{72}) + \mathrm{Const} \\ &= r^4(-\tfrac{291}{72} + \tfrac{64}{72}) + \mathrm{Const} \\ &= -\,r^4\,.\,\tfrac{227}{72} + \mathrm{Const}, \\ \mathrm{Const} &= r^4\,.\,\tfrac{227}{72}. \end{aligned}$$

Da nun $X = \dfrac{\int xy^2\,dx}{\int y^2\,dx}$ ist, so erhält man:

$$X = \frac{r\,.\left\{\begin{array}{l} \varphi\,(\tfrac{5}{4}\varphi - 4\,\mathrm{Sin}\,\varphi + \tfrac{3}{4}\mathrm{Sin}\,2\varphi + \tfrac{1}{3}\mathrm{Sin}\,\varphi^3) \\ + \tfrac{25}{9} - \tfrac{8}{3}\mathrm{Cos}\,\varphi - \tfrac{3}{4}\mathrm{Cos}\,\varphi^2 + \tfrac{8}{9}\mathrm{Cos}\,\varphi^3 - \tfrac{1}{4}\mathrm{Cos}\,\varphi^4 \end{array}\right\}}{\tfrac{5}{2}\varphi - \tfrac{11}{3}\mathrm{Sin}\,\varphi + \tfrac{3}{2}\mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Cos}\,\varphi - \tfrac{1}{3}\mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Cos}\,\varphi^2}.$$

Ist der Körper durch die Umdrehung der halben Cycloide entstanden, so muß man $\varphi = \pi$ setzen. Also

$$X = \frac{r \cdot \left\{\frac{5}{4}\pi^2 + \frac{25}{9} + \frac{8}{3} - \frac{3}{4} - \frac{8}{9} - \frac{1}{4}\right\}}{\frac{5}{2}\pi}$$

$$= \frac{r \cdot \left\{\frac{5}{4}\pi^2 + \frac{49}{9} - \frac{17}{9}\right\}}{\frac{5}{2}\pi} = \frac{r \cdot \left\{\frac{5}{4}\pi^2 + \frac{32}{9}\right\}}{\frac{5}{2}\pi}$$

$$= \frac{r(45\pi^2 + 128)}{90\pi}.$$

Wenn aber der Körper durch die Umdrehung der ganzen Cycloide um die Basis entstanden ist, so ist $\varphi = 2\pi$ zu setzen, wodurch man erhält:

$$X = \frac{r \cdot \left\{5\pi^2 + \frac{25}{9} - \frac{8}{3} - \frac{3}{4} + \frac{8}{9} - \frac{1}{4}\right\}}{5\pi}$$

$$= \frac{r \cdot \left\{5\pi^2 + \frac{25}{9} - \frac{25}{9}\right\}}{5\pi} = \frac{5r\pi^2}{5\pi} = r\pi,$$

woraus also erhellet, daß, wie es auch seyn muß, der Schwerpunkt der Mittelpunkt der Cycloide ist, da die ganze Basis bekanntlich $= 2r\pi$, und die halbe $= r\pi$ ist.

§. 131.

Wir wollen jetzt noch den Schwerpunkt eines Körpers aufsuchen, welcher entsteht, wenn ein cycloidalisches Stück sich um die Linie SC (Fig. 84.) bewegt, und S als Anfang der Abscissen angenommen wird. In diesem Falle ist bekanntlich nach §. 117. V.:

$$x = r(1 - \mathrm{Cos}\,\psi), \quad y = r(\psi + \mathrm{Sin}\,\psi),$$

wo $\psi = \pi - \varphi$. Also $dx = r\,\mathrm{Sin}\,\psi\,d\psi$, und nach §. 118.:

$$\int y^2\,dx = r^3 \cdot \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}\psi^2(1 - 2\mathrm{Cos}\psi) + \frac{1}{2}\psi(4\mathrm{Sin}\psi - \mathrm{Sin}2\psi) \\ + \frac{4}{3}\mathrm{Cos}\psi - \frac{1}{4}\mathrm{Cos}2\psi - \frac{1}{3}\mathrm{Sin}\psi^2\mathrm{Cos}\psi - \frac{13}{12} \end{array}\right\},$$

das Integral so bestimmt, daß es für $\psi = 0$ verschwindet. Nun ist

$$y^2 dx = r^2(\psi + \mathrm{Sin}\,\psi)^2 \,.\, r\,\mathrm{Sin}\,\psi\, d\psi$$
$$= r^3(\psi^2\,\mathrm{Sin}\,\psi + 2\psi\,\mathrm{Sin}\,\psi^2 + \mathrm{Sin}\,\psi^3)\,d\psi,$$

$$xy^2 dx = r^4(1 - \mathrm{Cos}\,\psi)(\psi^2\,\mathrm{Sin}\,\psi + 2\psi\,\mathrm{Sin}\,\psi^2 + \mathrm{Sin}\,\psi^3)\,d\psi$$
$$= r^4.\left\{\begin{matrix} \psi^2\,\mathrm{Sin}\,\psi + 2\psi\,\mathrm{Sin}\,\psi^2 + \mathrm{Sin}\,\psi^3 \\ - \psi^2\mathrm{Sin}\,\psi\,\mathrm{Cos}\,\psi - 2\psi\,\mathrm{Sin}\,\psi^2\mathrm{Cos}\,\psi - \mathrm{Sin}\,\psi^3\mathrm{Cos}\,\psi \end{matrix}\right\} d\psi,$$

$$\left.\begin{matrix} \int\psi^2\,\mathrm{Sin}\,\psi\, d\psi = -\psi^2\,\mathrm{Cos}\,\psi + 2\psi\,\mathrm{Sin}\,\psi + 2\,\mathrm{Cos}\,\psi, \\ 2\int\psi\,\mathrm{Sin}\,\psi^2\, d\psi = \tfrac{1}{2}\psi^2 - \tfrac{1}{2}\psi\,\mathrm{Sin}\,2\psi - \tfrac{1}{4}\mathrm{Cos}\,2\psi, \\ \int\mathrm{Sin}\,\psi^3\, d\psi = -\tfrac{1}{3}\mathrm{Sin}\,\psi^2\,\mathrm{Cos}\,\psi - \tfrac{2}{3}\mathrm{Cos}\,\psi, \end{matrix}\right\}\ (\S.\ 118.)$$

$$\int\psi^2\,\mathrm{Sin}\,\psi\,\mathrm{Cos}\,\psi\, d\psi = \tfrac{1}{16}\int(2\psi)^2\,\mathrm{Sin}\,2\psi\, d2\psi$$
$$= -\tfrac{1}{16}(2\psi)^2\mathrm{Cos}\,2\psi + \tfrac{2}{16}\,.\,2\psi\,\mathrm{Sin}\,2\psi + \tfrac{2}{16}\mathrm{Cos}\,2\psi$$
$$= -\tfrac{1}{4}\psi^2\,\mathrm{Cos}\,2\psi + \tfrac{1}{4}\psi\,\mathrm{Sin}\,2\psi + \tfrac{1}{8}\mathrm{Cos}\,2\psi,$$

$$\int\psi\,\mathrm{Sin}\,\psi^2\,\mathrm{Cos}\,\psi\, d\psi = \int\psi\,\mathrm{Cos}\,\psi\, d\psi - \int\psi\,\mathrm{Cos}\,\psi^3\, d\psi \qquad (\S.\ 130.)$$
$$= \left\{\begin{matrix} \psi\,\mathrm{Sin}\,\psi + \mathrm{Cos}\,\psi \\ -\tfrac{1}{3}\psi\,\mathrm{Cos}\,\psi^2\,\mathrm{Sin}\,\psi - \tfrac{2}{3}\psi\,\mathrm{Sin}\,\psi - \tfrac{1}{9}\mathrm{Cos}\,\psi^3 - \tfrac{2}{3}\mathrm{Cos}\,\psi \end{matrix}\right.$$
$$= \tfrac{1}{3}\psi\,\mathrm{Sin}\,\psi + \tfrac{1}{3}\mathrm{Cos}\,\psi - \tfrac{1}{3}\psi\,\mathrm{Cos}\,\psi^2\,\mathrm{Sin}\,\psi - \tfrac{1}{9}\mathrm{Cos}\,\psi^3,$$

$$\int\mathrm{Sin}\,\psi^3\,\mathrm{Cos}\,\psi\, d\psi = \mathrm{Sin}\,\psi^3\int\mathrm{Cos}\,\psi\, d\psi - \int d\,.\,\mathrm{Sin}\,\psi^3\int\mathrm{Cos}\,\psi\, d\psi$$
$$= \mathrm{Sin}\,\psi^4 - 3\int\mathrm{Sin}\,\psi^3\,\mathrm{Cos}\,\psi\, d\psi,$$

$$4\int\mathrm{Sin}\,\psi^3\,\mathrm{Cos}\,\psi\, d\psi = \mathrm{Sin}\,\psi^4,\quad \int\mathrm{Sin}\,\psi^3\,\mathrm{Cos}\,\psi\, d\psi = \tfrac{1}{4}\mathrm{Sin}\,\psi^4.$$

Also $\int xy^2\, dx =$

$$= r^4.\left\{\begin{matrix} -\psi^2\mathrm{Cos}\,\psi + 2\psi\,\mathrm{Sin}\,\psi + 2\,\mathrm{Cos}\,\psi + \tfrac{1}{2}\psi^2 - \tfrac{1}{2}\psi\,\mathrm{Sin}\,2\psi - \tfrac{1}{4}\mathrm{Cos}\,2\psi \\ -\tfrac{2}{3}\psi\,\mathrm{Sin}\,\psi - \tfrac{1}{3}\mathrm{Cos}\,\psi \qquad -\tfrac{1}{4}\psi\,\mathrm{Sin}\,2\psi - \tfrac{1}{8}\mathrm{Cos}\,2\psi \\ -\tfrac{2}{3}\mathrm{Cos}\,\psi \\ -\tfrac{2}{3}\mathrm{Cos}\,\psi \\ +\tfrac{1}{3}\mathrm{Cos}\,\psi^3 + \tfrac{1}{4}\psi^2\,\mathrm{Cos}\,2\psi + \tfrac{2}{3}\psi\,\mathrm{Sin}\,\psi - \tfrac{2}{3}\psi\,\mathrm{Sin}\,\psi^3 - \tfrac{1}{4}\mathrm{Sin}\,\psi^4 \\ +\tfrac{2}{9}\mathrm{Cos}\,\psi^3 \end{matrix}\right\}$$

$$= r^4.\left\{\begin{matrix} -\psi^2\mathrm{Cos}\,\psi + 2\psi\,\mathrm{Sin}\,\psi + \tfrac{1}{3}\mathrm{Cos}\,\psi + \tfrac{1}{2}\psi^2 - \tfrac{3}{4}\mathrm{Sin}\,2\psi - \tfrac{3}{8}\mathrm{Cos}\,2\psi \\ +\tfrac{5}{9}\mathrm{Cos}\,\psi^3 + \tfrac{1}{4}\psi^2\,\mathrm{Cos}\,2\psi - \tfrac{2}{3}\psi\,\mathrm{Sin}\,\psi^3 - \tfrac{1}{4}\mathrm{Sin}\,\psi^4 \end{matrix}\right\}$$

$$= r^4.\left\{\begin{matrix} \psi^2(\tfrac{1}{2} - \mathrm{Cos}\,\psi + \tfrac{1}{4}\mathrm{Cos}\,2\psi) + \psi(2\,\mathrm{Sin}\,\psi - \tfrac{2}{3}\mathrm{Sin}\,\psi^3) \\ +\tfrac{1}{3}\mathrm{Cos}\,\psi - \tfrac{3}{4}\mathrm{Sin}\,2\psi - \tfrac{3}{8}\mathrm{Cos}\,2\psi + \tfrac{5}{9}\mathrm{Cos}\,\psi^3 - \tfrac{1}{4}\mathrm{Sin}\,\psi^4 \end{matrix}\right\}.$$

Das Integral muß so bestimmt werden, daß es für $\psi = 0$ verschwindet. Also

$$0 = \tfrac{1}{3} - \tfrac{3}{8} + \tfrac{5}{9} + \mathrm{Const} = \tfrac{8}{9} - \tfrac{3}{8} + \mathrm{Const} = \tfrac{37}{72} + \mathrm{Const},$$
$$\mathrm{Const} = -\tfrac{37}{72},\ \text{eigentlich} = -r^4\,.\,\tfrac{37}{72}.$$

Ist nun X die Abscisse des gesuchten Schwerpunktes, so ist

$$X = \frac{\int xy^2\,dx}{\int y^2\,dx} =$$

$$= \frac{r.\left\{\begin{array}{c}\psi^2\left(\frac{1}{2} - \operatorname{Cos}\psi + \frac{1}{4}\operatorname{Cos}2\psi\right) + 2\psi\left(\operatorname{Sin}\psi - \frac{1}{3}\operatorname{Sin}\psi^3\right)\\ + \frac{1}{3}\operatorname{Cos}\psi - \frac{3}{4}\operatorname{Sin}2\psi - \frac{3}{8}\operatorname{Cos}2\psi + \frac{5}{9}\operatorname{Cos}\psi^3 - \frac{1}{4}\operatorname{Sin}\psi^4 - \frac{37}{72}\end{array}\right\}}{\left\{\begin{array}{c}\frac{1}{2}\psi^2\left(1 - 2\operatorname{Cos}\psi\right) + \frac{1}{2}\psi\left(4\operatorname{Sin}\psi - \operatorname{Sin}2\psi\right)\\ + \frac{4}{3}\operatorname{Cos}\psi - \frac{1}{4}\operatorname{Cos}2\psi - \frac{1}{3}\operatorname{Sin}\psi^2\operatorname{Cos}\psi - \frac{13}{12}\end{array}\right\}}$$

Will man die Abscisse des durch die Bewegung der ganzen halben Cycloide um SC beschriebenen Körpers haben, so muß man $\psi = \pi$ setzen, wodurch man erhält:

$$X = \frac{r.\left\{\pi^2\left(\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{3} - \frac{3}{8} - \frac{5}{9} - \frac{37}{72}\right\}}{\frac{1}{2}\pi^2(1 + 2) - \frac{4}{3} - \frac{1}{4} - \frac{13}{12}}$$

$$= \frac{r\left(\frac{7}{4}\pi^2 - \frac{128}{72}\right)}{\frac{3}{2}\pi^2 - \frac{32}{12}} = \frac{r\left(\frac{7}{4}\pi^2 - \frac{16}{9}\right)}{\frac{3}{2}\pi^2 - \frac{8}{3}}$$

$$= \frac{r(63\pi^2 - 64)}{54\pi^2 - 96}.$$

Elftes Kapitel.

Von der Bestimmung des Schwerpunktes krummer Linien.

§. 132.

Aufgabe. Die Länge des Bogens BQ (Fig. 81.) zu bestimmen.

Auflösung. Die Bezeichnungen bleiben hier wie in den beiden vorhergehenden Kapiteln. Aendert sich nun wieder die größere Abscisse β um i, so ändert sich der gesuchte Bogen V um ΔV. Das Quadrat der Sehne von ΔV ist, wie leicht erhellet, nach dem Taylor'schen Lehrsatze

$$= i^2 + \left\{ \frac{dy}{dx} \cdot \frac{i}{1} + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{i^2}{1 \cdot 2} + \frac{d^3y}{dx^3} \cdot \frac{i^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots \right\}^2$$

$$= \left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \right\} \cdot i^2 + \ldots\ldots$$

für $y = b$ und $x = \beta$. Die folgenden Glieder enthalten alle höhere Potenzen von i. Daher nähert sich die Größe hinter dem Gleichheitszeichen immer mehr dem ersten Gliede. Die Sehne nähert sich immer mehr dem Bogen ΔV, und es ist folglich

$$\Delta V^2 = \left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \right\} \cdot i^2$$

für $y = b$, desto genauer, je kleiner i ist. Die Summe aller Bögen wie ΔV in der ganzen Ausdehnung von $x = \alpha$ bis $x = \beta$ ist offenbar der Bogen V, und folglich nach §. 108.:

$$V = \frac{\int dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{(x = \alpha, \beta;\ y = a, b)}$$

$$= \frac{\int \sqrt{dx^2 + dy^2}}{(x = \alpha, \beta;\ y = a, b)}.$$

§. 133.

Aufgabe. Die Coordinaten des Schwerpunktes des Bogens V zu finden.

Auflösung. Man lasse die größere Abscisse sich wieder um i ändern, so ändert sich V um ΔV, und es ist nach dem vorhergehenden Paragraphen

$$\Delta V = i\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

für $x = \alpha$ und $y = b$, desto genauer, je kleiner i ist. Je kleiner i ist, desto genauer sind aber die Momente von ΔV in Beziehung auf die Axen der y und x, $= x\,.\,\Delta V$ und $y\,.\,\Delta V$, d. i.

$$= ix\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}, \text{ und}$$

$$= iy\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

für die gehörigen Werthe von x und y. Die Summe der Momente $x\,.\,\Delta V$ und $y\,.\,\Delta V$ in der ganzen Ausdehnung von $x = \alpha$ bis $x = \beta$ sind demnach nach §. 108.

$$= \begin{matrix} \int x\,dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \\ (x = \alpha,\ \beta;\ y = a,\ b) \end{matrix}, \text{ und}$$

$$= \begin{matrix} \int y\,dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \\ (x = \alpha,\ \beta;\ y = a,\ b). \end{matrix}$$

Diese Summen sind aber nach §. 86. auch $= VX$ und $= VY$, d. i. nach §. 132.

$$= X\,.\begin{matrix} \int dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \\ (x = \alpha,\ \beta;\ y = a,\ b) \end{matrix}, \text{ und}$$

$$= Y\,.\begin{matrix} \int dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \\ (x = \alpha,\ \beta;\ y = a,\ b). \end{matrix}$$

Also

$$X \cdot \frac{\int dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{(x = \alpha, \beta;\ y = a, b)} = \frac{\int x\, dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{(x = \alpha, \beta;\ y = a, b)},$$

$$Y \cdot \frac{\int dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{(x = \alpha, \beta;\ y = a, b)} = \frac{\int y\, dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{(x = \alpha, \beta;\ y = a, b)},$$

oder

$$X \cdot \frac{\int \sqrt{dx^2 + dy^2}}{(x = \alpha, \beta;\ y = a, b)} = \frac{\int x \sqrt{dx^2 + dy^2}}{(x = \alpha, \beta;\ y = a, b)},$$

$$Y \cdot \frac{\int \sqrt{dx^2 + dy^2}}{(x = \alpha, \beta;\ y = a, b)} = \frac{\int y \sqrt{dx^2 + dy^2}}{(x = \alpha, \beta;\ y = \alpha, b)}.$$

§. 134.

Aufgabe. Den Schwerpunkt eines Kreisbogens zu finden.

Auflösung. Es ist klar, daß der Schwerpunkt in dem Halbmesser liegen muß, welcher durch die Mitte des gegebenen Bogens geht. Nimmt man nun diesen Halbmesser als Axe und die Mitte des Bogens als Anfang der x an, so ist, wenn wir den der Abscisse x entsprechenden Theil des gegebenen Bogens, vom Anfange an gerechnet, durch s bezeichnen:

$$r - x = r \cdot \operatorname{Cos} \frac{s}{r},$$

$$\text{oder } x = r - r \cdot \operatorname{Cos} \frac{s}{r}.$$

Nun ist nach dem vorhergehenden Paragraphen bekanntlich

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

und folglich

$$x\sqrt{dx^2 + dy^2} = \left(r - r \operatorname{Cos} \frac{s}{r}\right) ds = r\,ds - r \operatorname{Cos} \frac{s}{r} \cdot ds$$

$$= r\,ds - r^2 \operatorname{Cos} \frac{s}{r} \cdot \frac{ds}{r},$$

$$\int x\sqrt{dx^2+dy^2} = rs - r^2 \int \operatorname{Cos}\frac{s}{r} \cdot \frac{ds}{r} = rs - r^2 \operatorname{Sin}\frac{s}{r}.$$

Ferner ist $X = \frac{\int x\sqrt{dx^2+dy^2}}{\int\sqrt{dx^2+dy^2}}$. Also

$$X = \frac{rs - r^2 \operatorname{Sin}\frac{s}{r}}{s} = r - \frac{r^2}{s}\operatorname{Sin}\frac{s}{r},$$

oder, wenn wir die Länge des gegebenen Bogens durch l bezeichnen, da wir dann $s = \frac{1}{2}l$ setzen müssen:

$$X = r - \frac{2r^2}{l}\operatorname{Sin}\frac{l}{2r}.$$

Nun ist aber offenbar $2r\operatorname{Sin}\frac{l}{2r}$ der Sehne des gegebenen Bogens gleich, welche wir $= c$ setzen wollen, woraus folgt, daß $X = r - \frac{rc}{l}$, oder daß die Entfernung des Schwerpunktes vom Mittelpunkte des Kreises $= r - \left(r - \frac{rc}{l}\right) = \frac{rc}{l}$ ist. Setzt man die Entfernung des Schwerpunktes vom Mittelpunkte $= X$, so ist also $X = \frac{rc}{l}$, oder $l : r = c : X$, d. i. Die Länge des Bogens verhält sich zum Radius, wie die Sehne des Bogens zur Entfernung seines Schwerpunktes vom Mittelpunkte des Kreises.

Für den Quadranten ist $l = \frac{2r\pi}{4} = \frac{1}{2}r\pi$, und $c = \sqrt{2r^2} = r\sqrt{2}$. Also $\frac{1}{2}r\pi : r = r\sqrt{2} : X$, $\frac{1}{2}\pi : 1 = r\sqrt{2} : X$, und folglich $X = \frac{2r\sqrt{2}}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cdot r = 0{,}9003166 \cdot r = \frac{9}{10}r$, nahe, nach Eytelwein a. a. O. S. 118., so daß also die Entfernung des Schwerpunktes eines Quadranten vom Mittelpunkte des Kreises noch $\frac{9}{10}$ des Halbmessers beträgt.

Für den Halbkreis ist $l = r\pi$. Also $r\pi : r = 2r : X$; $X = \frac{2r}{\pi} = 2 \cdot \frac{1}{\pi} \cdot r = 0{,}63661977 \cdot r$, oder nahe $= \frac{7}{11}r$, nach Eytelwein a. a. O. Der Schwerpunkt eines Halbkreises ist also nahe um $\frac{7}{11}$ des Halbmessers vom Mittelpunkte entfernt.

Elementarische Beweise dieser Sätze findet man bey Eytelwein a. a. O. §. 83., in Karsten's Lehrbegriff, §. 74., bey Garnier a. a. O. S. 91.

§. 135.

Aufgabe. Den Schwerpunkt eines vom Scheitel der großen Axe an genommenen Bogens der Parabel zu finden.

Auflösung. Die Gleichung der Parabel ist bekanntlich $y^2 = px$. Also $2y\,dy = p\,dx$,

$$dx^2 + dy^2 = \frac{4y^2\,dy^2}{p^2} + dy^2 = \frac{(p^2 + 4y^2)\,dy^2}{p^2},$$

oder für $p^2 + 4y^2 = z^2$:

$$dx^2 + dy^2 = \frac{z^2\,dy^2}{p^2}, \quad \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{z\,dy}{p};$$

$$\begin{aligned}\int\sqrt{dx^2 + dy^2} &= \frac{zy}{p} - \frac{1}{p}\int y\,dz \\ &= \frac{zy}{p} - \frac{1}{2p}\int 2y\,dz = \frac{zy}{p} - \frac{1}{2p}\int\frac{yd\,.\,z^2}{z} \\ &= \frac{zy}{p} - \frac{1}{2p}\left\{zy - \int z^2\,d\left(\frac{y}{z}\right)\right\} \\ &= \frac{zy}{p} - \frac{zy}{2p} + \frac{1}{2p}\int\frac{z^2(z\,dy - y\,dz)}{z^2} \\ &= \frac{zy}{2p} + \frac{1}{2p}\int(z\,dy - y\,dz).\end{aligned}$$

Nun ist

$$8y\,dy = 2z\,dz; \quad dz = \frac{4y\,dy}{z} = \frac{4y\,dy}{\sqrt{p^2 + 4y^2}};$$

$$\begin{aligned}z\,dy - y\,dz &= dy.\sqrt{p^2 + 4y^2} - \frac{4y^2\,dy}{\sqrt{p^2 + 4y^2}} \\ &= \frac{(p^2 + 4y^2)\,dy - 4y^2\,dy}{\sqrt{p^2 + 4y^2}} = \frac{p^2\,dy}{\sqrt{p^2 + 4y^2}};\end{aligned}$$

$$\int\sqrt{dx^2+dy^2}=\frac{zy}{2p}+\frac{1}{2p}\int\frac{p^2\,dy}{\sqrt{p^2+4y^2}}$$
$$=\frac{zy}{2p}+\frac{p}{2}\int\frac{dy}{\sqrt{p^2+4y^2}}.$$

Da nun $p^2+4y^2=z^2$ ist; so ist

$$4y^2=z^2-p^2,\quad 2y=\sqrt{z^2-p^2},$$
$$\frac{2dy}{\sqrt{p^2+4y^2}}=\frac{2dy}{z}=\frac{4y\,dy}{2zy}=\frac{zdz}{2zy}=\frac{dz}{2y}$$
$$=\frac{dz}{\sqrt{z^2-p^2}}=\frac{dz}{\sqrt{(z+p)(z-p)}}.$$

Man setze jetzt

$$(z+p)(z-p)=(z+p)^2u^2,\quad z-p=(z+p)u^2,$$
$$z-zu^2=z(1-u^2)=p(1+u^2),$$
$$z=\frac{p(1+u^2)}{1-u^2},$$
$$dz=\frac{p(1-u^2)\,.\,2u\,du+p(1+u^2)\,.\,2u\,du}{(1-u^2)^2}$$
$$=\frac{2p(1-u^2+1+u^2)\,.\,u\,du}{(1-u^2)^2}=\frac{4pu\,du}{(1-u^2)^2},$$
$$\frac{dz}{\sqrt{(z+p)(z-p)}}=\frac{4pu\,du}{(1-u^2)^2(z+p)u},$$
$$z+p=\frac{p(1+u^2)}{1-u^2}+p=\frac{p(1+u^2+1-u^2)}{1-u^2}=\frac{2p}{1-u^2},$$
$$\frac{dz}{\sqrt{(z+p)(z-p)}}=\frac{2du}{1-u^2}.$$

Nun ist $\dfrac{1}{1-u^2}=\dfrac{1}{2(1-u)}+\dfrac{1}{2(1+u)}$,

$$\frac{2}{1-u^2}=\frac{1}{1-u}+\frac{1}{1+u},$$
$$\int\frac{2du}{1-u^2}=\int\frac{du}{1-u}+\int\frac{du}{1+u}.$$

Setzt man aber $1-u=v,\ 1+u=v'$; so ist

$$dv=-du,\ dv'=du;$$

$$\frac{du}{1-u}=-\frac{dv}{v},\ \int\frac{du}{1-u}=-\int\frac{dv}{v}=-\operatorname{Logn}v=-\operatorname{Logn}(1-u);$$

$$\frac{du}{1+u}=\frac{dv'}{v'},\ \int\frac{du}{1+u}=\int\frac{dv'}{v'}=\operatorname{Logn}v=\operatorname{Logn}(1+u);$$

$$\int\frac{2du}{1-u^2}=\operatorname{Logn}(1+u)-\operatorname{Logn}(1-u)=\operatorname{Logn}\frac{1+u}{1-u}.$$

Nun ist $u^2=\frac{z-p}{z+p},\quad u=\frac{\sqrt{z-p}}{\sqrt{z+p}}$;

$$1\pm u=1\pm\frac{\sqrt{z-p}}{\sqrt{z+p}}=\frac{\sqrt{z+p}\pm\sqrt{z-p}}{\sqrt{z+p}};$$

$$\frac{1+u}{1-u}=\frac{\sqrt{z+p}+\sqrt{z-p}}{\sqrt{z+p}-\sqrt{z-p}}$$

$$=\frac{\left\{\sqrt{z+p}+\sqrt{z-p}\right\}^2}{z+p-(z-p)}$$

$$=\frac{z+p+2\sqrt{(z+p)(z-p)}+z-p}{z+p-z+p}$$

$$=\frac{2z+2\sqrt{z^2-p^2}}{2p}=\frac{z+\sqrt{z^2-p^2}}{p}$$

$$=\frac{z^2-(z^2-p^2)}{p(z-\sqrt{z^2-p^2})}=\frac{p}{z-\sqrt{z^2-p^2}};$$

$$\int\frac{dz}{\sqrt{(z+p)(z-p)}}=\operatorname{Logn}\frac{z+\sqrt{z^2-p^2}}{p};$$

$$\int\sqrt{dx^2+dy^2}=\frac{zy}{2p}+\frac{1}{2p}\cdot p^2\cdot\tfrac{1}{2}\operatorname{Logn}\frac{z+\sqrt{z^2-p^2}}{p}$$

$$=\frac{zy}{2p}+\tfrac{1}{4}p\operatorname{Logn}\frac{z+\sqrt{z^2-p^2}}{p};$$

$$z^2=p^2+4y^2,\quad z^2-p^2=4y^2;$$

$$\int\sqrt{dx^2+dy^2}=\frac{y}{2p}\sqrt{p^2+4y^2}+\tfrac{1}{4}p\operatorname{Logn}\frac{2y+\sqrt{p^2+4y^2}}{p};$$

und das Integral verschwindet für $y = 0$, wie es seyn muß.

Da $y^2 = px$ ist, so ist $p^2 + 4y^2 = p^2 + 4px$;

$$\frac{y}{2p}\sqrt{p^2+4y^2} = \sqrt{\frac{y^2(p^2+4y^2)}{4p^2}} = \sqrt{\frac{p^2x(p+4x)}{4p^2}}$$
$$= \sqrt{\tfrac{1}{4}px + x^2};$$
$$\frac{2y+\sqrt{p^2+4y^2}}{p} = \frac{2\sqrt{px}+\sqrt{p(p+4x)}}{p}$$
$$= 2\sqrt{\frac{px}{p^2}} + \sqrt{\frac{p(p+4x)}{p^2}}$$
$$= 2\sqrt{\frac{x}{p}} + \sqrt{1+\frac{4x}{p}}.$$

Also das obige Integral, d. i. die Länge des Bogens der Parabel, auch

$$= \sqrt{\tfrac{1}{4}px + x^2} + \tfrac{1}{4}p\,\mathrm{Logn}\left\{2\sqrt{\frac{x}{p}} + \sqrt{1+\frac{4x}{p}}\right\}.$$

Wir wollen diesen Werth im Folgenden durch l bezeichnen.

Eine andere leichtere Entwickelung dieser Formel mit Zuziehung einer geometrischen Betrachtung s. m. in

Bohnenberger's Anfangsgründen der höhern Analysis, Tübingen 1811, 8., S. 201. 202.

Nun ist

$$\int x\sqrt{dx^2+dy^2} = \int\frac{xz\,dy}{p} = \int\frac{y^2z\,dy}{p^2}.$$

Aber

$$zy^2\,dy = \tfrac{3}{4}zy^2\,dy + \tfrac{1}{16}p^2z\,dy + \tfrac{1}{4}zy^2\,dy - \tfrac{1}{16}p^2z\,dy$$
$$= \tfrac{3}{4}zy^2\,dy + \tfrac{1}{16}(p^2+4y^2)z\,dy - \tfrac{1}{16}p^2z\,dy$$
$$= \tfrac{3}{16}yz^2\,dz + \tfrac{1}{16}z^3\,dy - \tfrac{1}{16}p^2z\,dy$$
$$= \tfrac{1}{16}(y\cdot 3z^2\,dz + z^3\,dy) - \tfrac{1}{16}p^2z\,dy$$
$$= \tfrac{1}{16}(yd\,.\,z^3 + z^3\,dy) - \tfrac{1}{16}p^2z\,dy$$
$$= \tfrac{1}{16}\,.\,d\,.\,yz^3 - \tfrac{1}{16}p^2z\,dy.$$

Also
$$\int zy^2\,dy = \frac{yz^3}{16} - \frac{p^2}{16}\int z\,dy.$$

Aber nach dem Obigen
$$\int z\,dy = p\int\sqrt{dx^2+dy^2} = pl,$$
und folglich
$$\int zy^2\,dy = \frac{yz^3}{16} - \frac{p^3 l}{16},$$
$$\int x\sqrt{dx^2+dy^2} = \frac{yz^3 - p^3 l}{16p^2},$$
und dieses Integral verschwindet offenbar für $x = 0$, da dann auch $y = 0$ ist, und l nach dem Obigen auch für $x = 0$ verschwindet.

Ferner ist
$$\int y\sqrt{dx^2+dy^2} = \frac{1}{p}\int yz\,dy = \frac{1}{p}\int\frac{z^2\,dz}{4} = \frac{z^3}{12p},$$
welches Integral ebenfalls so bestimmt werden muß, daß es für $x = 0$ oder $y = 0$ verschwindet. Also, da $z^3 = \sqrt{(p^2+4y^2)^3}$ ist:
$$0 = \frac{p^3}{12p} + \text{Const}; \ \text{Const} = -\frac{p^2}{12};$$
$$\int y\sqrt{dx^2+dy^2} = \frac{z^3-p^3}{12p}.$$

Da nun, wenn X, Y die Coordinaten des gesuchten Schwerpunktes sind,
$$X\int\sqrt{dx^2+dy^2} = \int x\sqrt{dx^2+dy^2}, \text{ und}$$
$$Y\int\sqrt{dx^2+dy^2} = \int y\sqrt{dx^2+dy^2}, \text{ oder}$$
$$lX = \int x\sqrt{dx^2+dy^2}, \quad lY = \int y\sqrt{dx^2+dy^2}$$
ist, so ist
$$X = \frac{yz^3 - p^3 l}{16p^2 l} = \frac{y\sqrt{(p^2+4y^2)^3} - p^3 l}{16p^2 l},$$
$$Y = \frac{z^3 - p^3}{12pl} = \frac{\sqrt{(p^2+4y^2)^3} - p^3}{12pl},$$

in welchen Ausdrücken man den oben gefundenen Werth von l leicht substituiren kann, wobey wir, um nicht zu weitläufig zu werden, nicht länger verweilen.

§. 136.

Aufgabe. Den Schwerpunkt eines Bogens der Neilischen Parabel zu finden.

Auflösung. Diese Curve ist bekanntlich die erste krumme Linie, welche fast zu gleicher Zeit von Wilhelm Neil in England, Van-Heuraet in Holland, und Fermat in Frankreich rectificirt worden ist. Sie hat eine Spitze im Anfange der Abscissen. Sind die beiden Arme concav gegen die Axe derselben und liegen beide auf einer Seite derselben, so ist bekanntlich ihre Gleichung $y^3 = px^2$; sind aber die beiden Arme convex gegen die Axe der Abscissen, und liegen auf gleiche Art auf beiden Seiten derselben, so folgt aus der vorhergehenden leicht durch Vertauschung von x und y, daß dann die Gleichung ist: $y^2 = \frac{x^3}{p}$. (M. s. ausführlich hierüber Montucla Histoire des Mathématiques, nouv. édit. Tom. II. p. 151., u. andere Schriften.) Die letztere Gleichung wollen wir hier anwenden.

Es ist

$$y = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{p}},\quad dy = \tfrac{3}{2}\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}\,dx}{\sqrt{p}},\ \text{und folglich}$$

$$dx^2 + dy^2 = \left(1 + \frac{9x}{4p}\right) dx^2,$$

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1 + \frac{9x}{4p}}.$$

Man setze $1 + \frac{9x}{4p} = z$; so ist

$$\frac{9dx}{4p} = dz,\quad dx = \frac{4p\,dz}{9};$$

$$\sqrt{dx^2+dy^2}=\frac{4pz^{\frac{1}{2}}dz}{9};$$

$$\int\sqrt{dx^2+dy^2}=\frac{4p}{9}\int z^{\frac{1}{2}}\,dz=\frac{8pz^{\frac{3}{2}}}{27}$$

$$=\tfrac{8}{27}\,p\left(1+\frac{9x}{4p}\right)^{\frac{3}{2}};$$

$$0=\tfrac{8}{27}\,p+\text{Const},\ \text{Const}=-\tfrac{8}{27}\,p.$$

Also das so bestimmte Integral, daß es für $x=0$ verschwindet:

$$=\tfrac{8}{27}\,p\left(1+\frac{9x}{4p}\right)^{\frac{3}{2}}-\tfrac{8}{27}\,p=l.$$

Es ist nun ferner

$$x\sqrt{dx^2+dy^2}=x\,dx\sqrt{1+\frac{9x}{4p}},$$

$$\int x\sqrt{dx^2+dy^2}=x\int dx\sqrt{1+\frac{9x}{4p}}-\int dx\int dx\sqrt{1+\frac{9x}{4p}}$$

$$=lx-\int l\,dx,$$

$$l\,dx=\tfrac{8}{27}\,p\,dx\left(1+\frac{9x}{4p}\right)^{\frac{3}{2}}-\tfrac{8}{27}\,p\,dx,$$

$$\int l\,dx=\tfrac{8}{27}\,p\int dx\left(1+\frac{9x}{4p}\right)^{\frac{3}{2}}-\tfrac{8}{27}\,px,$$

$$\int dx\left(1+\frac{9x}{4p}\right)^{\frac{3}{2}}=\int\frac{4pz^{\frac{3}{2}}dz}{9}=\frac{4p}{9}\int z^{\frac{3}{2}}dz=\frac{8pz^{\frac{5}{2}}}{45},$$

$$\int l\,dx=\frac{64p^2\left(1+\frac{9x}{4p}\right)^{\frac{5}{2}}}{1215}-\tfrac{8}{27}\,px,$$

und demnach

$$\int x\sqrt{dx^2+dy^2}=\tfrac{8}{27}\,px\left(1+\frac{9x}{4p}\right)^{\frac{3}{2}}-\tfrac{64}{1215}\,p^2\left(1+\frac{9x}{4p}\right)^{\frac{5}{2}},$$

$$0=-\tfrac{64}{1215}\,p^2+\text{Const},\ \ \text{Const}=\tfrac{64}{1215}\,p^2,$$

und demnach das für $x = 0$ verschwindende Integral

$$= \tfrac{8}{27} px \left(1 + \frac{9x}{4p}\right)^{\frac{3}{2}} - \tfrac{64}{1215} p^2 \left(1 + \frac{9x}{4p}\right)^{\frac{5}{2}} + \tfrac{64}{1215} p^2,$$

mithin also die Abscisse des Schwerpunktes =

$$X = \frac{\tfrac{8}{27} px \left(1 + \frac{9x}{4p}\right)^{\frac{3}{2}} - \tfrac{64}{1215} p^2 \left(1 + \frac{9x}{4p}\right)^{\frac{5}{2}} + \tfrac{64}{1215} p^2}{\tfrac{8}{27} p \left(1 + \frac{9x}{4p}\right)^{\frac{3}{2}} - \tfrac{8}{27} p}$$

$$= \frac{360\, x \left(1 + \frac{9x}{4p}\right)^{\frac{3}{2}} - 64 p \left(1 + \frac{9x}{4p}\right)^{\frac{5}{2}} + 64 p}{360 \left(1 + \frac{9x}{4p}\right)^{\frac{3}{2}} - 360}$$

$$= \frac{45 x \left(1 + \frac{9x}{4p}\right)^{2} - 8p \left(1 + \frac{9x}{4p}\right)^{3} + 8p \left(1 + \frac{9x}{4p}\right)^{\frac{1}{2}}}{45 \left(1 + \frac{9x}{4p}\right)^{2} - 45 \left(1 + \frac{9x}{4p}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{\left(1 + \frac{9x}{4p}\right)^{2} (45x - 8p - 18x) + 8p \left(1 + \frac{9x}{4p}\right)^{\frac{1}{2}}}{45 \left\{\left(1 + \frac{9x}{4p}\right)^{2} - \left(1 + \frac{9x}{4p}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}}$$

$$= \frac{(27x - 8p) \left(1 + \frac{9x}{4p}\right)^{2} + 8p \left(1 + \frac{9x}{4p}\right)^{\frac{1}{2}}}{45 \left\{\left(1 + \frac{9x}{4p}\right)^{2} - \left(1 + \frac{9x}{4p}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}}$$

$$= \frac{(27x - 8p)(4p + 9x)^2 + 64p^2 \sqrt{p(4p + 9x)}}{45 \left\{(4p + 9x)^2 - 8p \sqrt{p(4p + 9x)}\right\}}.$$

Ferner ist

$$y\sqrt{dx^2+dy^2}=p^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}dx\sqrt{1+\frac{9x}{4p}},$$

$$\int x^{\frac{3}{2}}dx\sqrt{1+\frac{9x}{4p}}=\int x\,dx\sqrt{x+ax^2},$$

wenn wir der Kürze wegen $\frac{9}{4p}=a$ setzen. Nun ist

$$dx\sqrt{x+ax^2}=x\,dx\sqrt{x+ax^2}+\frac{1}{2a}dx\sqrt{x+ax^2}-\frac{1}{2a}dx\sqrt{x+ax^2}$$

$$=\frac{(1+2ax)\,dx\sqrt{x+ax^2}}{2a}-\frac{1}{2a}dx\sqrt{x+ax^2}$$

$$=\frac{d(x+ax^2)\cdot\sqrt{x+ax^2}}{2a}-\frac{1}{2a}dx\sqrt{x+ax^2},$$

$$\int x\,dx\sqrt{x+ax^2}=\frac{1}{2a}\int(x+ax^2)^{\frac{1}{2}}d(x+ax^2)-\frac{1}{2a}\int dx\sqrt{x+ax^2}$$

$$=\frac{1}{3a}(x+ax^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2a}\int dx\sqrt{x+ax^2}.$$

Nach §. 116. ist

$$\int dx\sqrt{2ax+x^2}=\tfrac{1}{2}(a+x)\sqrt{2ax+x^2}-\tfrac{1}{2}a^2\,\mathrm{Logn}\frac{a+x+\sqrt{2ax+x^2}}{a}.$$

Nun ist

$$dx\sqrt{x+ax^2}=dx\sqrt{a\cdot\frac{x}{a}+ax^2}=a^{\frac{1}{2}}dx\sqrt{\frac{x}{a}+x^2},$$

$$\int dx\sqrt{\frac{x}{a}+x^2}=\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{2a}+x\right)\sqrt{\frac{x}{a}+x^2}-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{4a^2}\,\mathrm{Logn}\frac{\frac{1}{2a}+x+\sqrt{\frac{x}{a}+x^2}}{\frac{1}{2a}}$$

$$=\frac{1}{4a}(1+2ax)\sqrt{\frac{x+ax^2}{a}}-\frac{1}{8a^2}\,\mathrm{Logn}\left(1+2ax+2a\sqrt{\frac{x}{a}+x^2}\right)$$

$$=\frac{1}{4a}(1+2ax)\sqrt{\frac{x+ax^2}{a}}-\frac{1}{8a^2}\,\mathrm{Logn}\left(1+2ax+2\sqrt{ax+a^2x^2}\right),$$

$$a^{\frac{1}{2}}\int dx\sqrt{\frac{x}{a}+x^2}=\frac{1}{4a}(1+2ax)\sqrt{x+ax^2}-\frac{1}{8\sqrt{a^3}}\operatorname{Logn}\left(1+2ax+2\sqrt{ax+a^2x^2}\right)$$
$$=\int dx\sqrt{x+ax^2},$$

$$\frac{1}{2a}\int dx\sqrt{x+ax^2}=\frac{1}{8a^2}(1+2ax)\sqrt{x+ax^2}-\frac{1}{16a\sqrt{a^3}}\operatorname{Logn}\left(1+2ax+2\sqrt{ax+a^2x^2}\right),$$

und folglich $\int x\,dx\sqrt{x+ax^2}=$

$$=\frac{1}{3a}(x+ax^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{8a^2}(1+2ax)\sqrt{x+ax^2}+\frac{1}{16a\sqrt{a^3}}\operatorname{Logn}\left(1+2ax+2\sqrt{ax+a^2x^2}\right),$$

und dieses Integral verschwindet für $x=0$, wie es seyn muß. Also

$$r=\frac{\int y\sqrt{dx^2+dy^2}}{\int\sqrt{dx^2+dy^2}}$$

$$=\frac{\frac{1}{3a}(x+ax^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{8a^2}(1+2ax)\sqrt{x+ax^2}+\frac{1}{16a\sqrt{a^3}}\operatorname{Logn}\left(1+2ax+2\sqrt{ax+a^2x^2}\right)}{\frac{8}{27}p^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{9x}{4p}\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{8}{27}p^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{\frac{1}{3a}(x+ax^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{8a^2}(1+2ax)\sqrt{x+ax^2}+\frac{1}{16a\sqrt{a^3}}\operatorname{Logn}\left(1+2ax+2\sqrt{ax+a^2x^2}\right)}{\left((1+ax)^{\frac{3}{2}}-1\right)\cdot\frac{8}{27}\sqrt{p}},$$

weil $\frac{9}{4p}=a$.

Wir halten uns nicht länger bey der weitern Reduction dieses Ausdrucks auf, sondern eilen zu andern Gegenständen.

§. 137.

Aufgabe. Den Schwerpunkt eines elliptischen Bogens zu finden.

Auflösung. Die Gleichung der Ellipse ist

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2),$$

und folglich

$$2y\,dy = \frac{b^2}{a^2}(2a\,dx - 2x\,dx)$$

$$= \frac{2b^2}{a^2}(a - x)\,dx,$$

$$y\,dy = \frac{b^2}{a^2}(a - x)\,dx.$$

Nun ist aber

$$\frac{a^2y^2}{b^2} = 2ax - x^2. \quad \text{Also}$$

$$a^2 - \frac{a^2y^2}{b^2} = a^2 - 2ax + x^2 = (a - x)^2,$$

$$\frac{a^2(b^2 - y^2)}{b^2} = (a - x)^2,$$

$$a - x = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2},$$

$$y\,dy = \frac{b}{a}\,dx\sqrt{b^2 - y^2},$$

$$dx = \frac{ay\,dy}{b\sqrt{b^2 - y^2}}, \quad dx^2 = \frac{a^2y^2\,dy^2}{b^2(b^2 - y^2)},$$

$$dx^2 + dy^2 = \frac{a^2y^2\,dy^2}{b^2(b^2 - y^2)} + dy^2$$

$$= \frac{[a^2y^2 + b^2(b^2 - y^2)]\,dy^2}{b^2(b^2 - y^2)}$$

$$= \frac{[b^4 + (a^2 - b^2)y^2]\,dy^2}{b^2(b^2 - y^2)},$$

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{dy}{b}\sqrt{\frac{b^4 + (a^2 - b^2)y^2}{b^2 - y^2}} = dl,$$

wenn wir den gegebenen elliptischen Bogen $= l$ setzen.

Die Ellipse läßt sich bekanntlich bloß durch unendliche Reihen rectificiren, worüber man verschiedene Schriften über die höhere Analysis nachsehen kann. (M. s. u. a. Bohnenberger's Anfangsgründe der höhern Analysis, S. 202. — Klügel's Mathematisches Wörterbuch, Th. 4., von Mollweide, Art. Rectification. — In Euleri Conjectura physica circa propagationem soni ac luminis, Berol. 1750, 4., die Abhandlung: De rectificatione ellipsis, pag. 121. seqq.) *) Wir nehmen hier, um nicht zu weitläufig zu werden, das l als gegeben an, und führen es als bekannt in die Formeln für den Schwerpunkt ein.

Nun ist

$$xdl = \left(a - \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}\right)dl = adl - \frac{adl}{b}\sqrt{b^2 - y^2}$$

$$= adl - \frac{ady}{b^2}\sqrt{b^4 + (a^2 - b^2)y^2}$$

$$= adl - \frac{ady}{b^2}\sqrt{b^4 + \alpha^2 y^2},$$

wenn wir $a^2 - b^2 = \alpha^2$ setzen. Also

$$\int xdl = al - \frac{a}{b^2}\int dy\sqrt{b^4 + \alpha^2 y^2}.$$

Nun ist in §. 135. gefunden, daß

$$\int dy\sqrt{p^2 + 4y^2} = \tfrac{1}{2}y\sqrt{p^2 + 4y^2} + \tfrac{1}{4}p^2 \,\mathrm{Log\,n}\,\frac{2y + \sqrt{p^2 + 4y^2}}{p}.$$

Aber $\sqrt{b^4 + \alpha^2 y^2} = \frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{4b^4}{\alpha^2} + 4y^2}$. Also

---

*) Man kann die Ellipse auch ohne Anwendung der höhern Analysis rectificiren, wie ich bey einer andern Gelegenheit in einer ausführlichen Abhandlung über die Oberfläche des schiefen Kegels und des schiefen Cylinders, in welcher willkührliche Theile dieser Oberflächen durch wegen ihres Gesetzes merkwürdige unendliche Reihen dargestellt werden, und die schon zum Druck fast fertig ausgearbeitet vor mir liegt, zeigen werde.

$$\int dy\sqrt{b^4+\alpha^2y^2} = \frac{\alpha}{2}\int dy\sqrt{\frac{4b^4}{\alpha^2}+4y^2} =$$

$$= \frac{\alpha}{2}\left\{\tfrac{1}{2}y\sqrt{\frac{4b^4}{\alpha^2}+4y^2} + \frac{b^4}{\alpha^2}\,\mathrm{Logn}\,\frac{\alpha\left(2y+\sqrt{\frac{4b^4}{\alpha^2}+4y^2}\right)}{2b^2}\right\}$$

$$= \tfrac{1}{4}\alpha y\sqrt{\frac{4b^4}{\alpha^2}+4y^2} + \frac{b^4}{2\alpha}\,\mathrm{Logn}\,\frac{\alpha\left(2y+\sqrt{\frac{4b^4}{\alpha^2}+4y^2}\right)}{2b^2}$$

$$= \tfrac{1}{2}y\sqrt{b^4+\alpha^2y^2} + \frac{b^4}{2\alpha}\,\mathrm{Logn}\,\frac{\alpha y+\sqrt{b^4+\alpha^2y^2}}{b^2}.$$

Also

$$\int x\,dl = al - \frac{ay}{2b^2}\sqrt{b^4+\alpha^2y^2} + \frac{ab^2}{2\alpha}\,\mathrm{Logn}\,\frac{\alpha y+\sqrt{b^4+\alpha^2y^2}}{b^2},$$

und das Integral verschwindet für $y=0$, da l für $y=0$ verschwindet.

Da nun $X=\frac{1}{l}\int x\,dl$ ist; so ist

$$X = a - \frac{a}{2l}\left\{\frac{y}{b^2}\sqrt{b^4+\alpha^2y^2} + \frac{b^2}{\alpha}\,\mathrm{Logn}\,\frac{\alpha y+\sqrt{b^4+\alpha^2y^2}}{b^2}\right\}.$$

Nach dem Obigen ist nun

$$dy = \frac{b^2(a-x)\,dx}{a^2y},$$

$$dx^2+dy^2 = \frac{[a^4y^2+b^4(a-x)^2]\,dx^2}{a^4y^2}$$

$$= \frac{[a^2b^2(2ax-x^2)+b^4(a^2-2ax+x^2)]\,dx^2}{a^4y^2}$$

$$= \frac{b^2(2a^3x-a^2x^2+a^2b^2-2ab^2x+b^2x^2)\,dx^2}{a^4y^2}$$

$$= \frac{b^2[a^2b^2+2a(a^2-b^2)x-(a^2-b^2)x^2]\,dx^2}{a^4y^2}$$

$$= \frac{b^2(a^2b^2+2a\alpha^2x-\alpha^2x^2)\,dx^2}{a^4y^2},$$

$$\sqrt{dx^2+dy^2} = \frac{b\,dx}{a^2y}\sqrt{a^2b^2+2a\alpha^2x-\alpha^2x^2} = dl,$$

$$ydl = \frac{bdx}{a^2}\sqrt{a^2b^2 + 2a\alpha^2x - \alpha^2x^2}$$

$$= \frac{bdx}{a^2}\sqrt{a^2b^2 + \alpha^2(2ax - x^2)} = \frac{bdx}{a^2}\sqrt{X},$$

wo dieses X nicht mit der vorigen Abscisse X einerley ist.

Man setze nun

$$2ax - x^2 = a^2 - z^2. \quad \text{Also}$$
$$z^2 = a^2 - 2ax + x^2 = (a - x)^2,$$
$$z = a - x, \quad dz = -dx;$$
$$X = a^2b^2 + \alpha^2(a^2 - z^2)$$
$$= a^2(\alpha^2 + b^2) - \alpha^2z^2$$
$$= a^2(a^2 - b^2 + b^2) - \alpha^2z^2$$
$$= a^4 - \alpha^2z^2;$$
$$dx\sqrt{X} = -dz\sqrt{a^4 - \alpha^2z^2}.$$

Wir wollen nun überhaupt

$$\int dx\sqrt{a^2 - x^2},$$

indem wir $a^2 - x^2 = Y$ setzen, zu bestimmen suchen. Nach der schon oft angewandten Reductionsformel ist nämlich

$$\int dx\sqrt{Y} = x\sqrt{Y} - \int d\,.\,Y^{\frac{1}{2}}\int dx = x\sqrt{Y} - \tfrac{1}{2}\int\frac{xdY}{\sqrt{Y}}$$

$$= x\sqrt{Y} - \tfrac{1}{2}\left\{\frac{xY}{\sqrt{Y}} - \int d\left(\frac{x}{\sqrt{Y}}\right)\int dY\right\}$$

$$= x\sqrt{Y} - \tfrac{1}{2}x\sqrt{Y} + \tfrac{1}{2}\int Yd\left(\frac{x}{\sqrt{Y}}\right),$$

$$d\left(\frac{x}{\sqrt{Y}}\right) = \frac{Y^{\frac{1}{2}}dx - \frac{1}{2}xY^{-\frac{1}{2}}dY}{Y} = \frac{2Ydx - xdY}{2Y^{\frac{3}{2}}},$$

$$Yd\left(\frac{x}{\sqrt{Y}}\right) = \frac{2Ydx - xdY}{2\sqrt{Y}} = \frac{2(a^2 - x^2)dx + 2x^2dx}{2\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$= \frac{a^2dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{a^2dx}{a\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} = \frac{a^2d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} = a^2d\,.\,\mathrm{ArcSin}\,\frac{x}{a}$$

nach einer sehr bekannten Formel der Differenzialrechnung. Also

$$\int dx\sqrt{Y} = \int dx\sqrt{a^2-x^2} = \tfrac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \tfrac{1}{2}a^2\,\text{Arc Sin}\,\frac{x}{a},$$

und demnach

$$\int dz\sqrt{a^4-\alpha^2z^2} = \frac{1}{\alpha}\int d.\alpha z\sqrt{a^4-\alpha^2z^2}$$

$$= \tfrac{1}{2}z\sqrt{a^4-\alpha^2z^2} + \frac{a^4}{2\alpha}\,\text{Arc Sin}\,\frac{\alpha z}{a^2},$$

$$\int dx\sqrt{X} = -\tfrac{1}{2}z\sqrt{a^4-\alpha^2z^2} - \frac{a^4}{2\alpha}\,\text{Arc Sin}\,\frac{\alpha z}{a^2},$$

$$\int y\,dl = -\frac{bz}{2a^2}\sqrt{a^4-\alpha^2z^2} - \frac{ba^2}{2\alpha}\,\text{Arc Sin}\,\frac{\alpha z}{a^2}$$

$$= -\frac{b(a-x)}{2a^2}\sqrt{a^4-\alpha^2(a-x)^2} - \frac{ba^2}{2\alpha}\,\text{ArcSin}\,\frac{\alpha(a-x)}{a^2}.$$

Damit nun das Integral verschwinde, wenn $x = 0$ ist, setze man

$$0 = -\frac{b}{2a}\sqrt{a^4-\alpha^2a^2} - \frac{ba^2}{2\alpha}\,\text{Arc Sin}\,\frac{\alpha}{a} + \text{Const}$$

$$= -\frac{b^2}{2} - \frac{ba^2}{2\alpha}\,\text{Arc Sin}\,\frac{\alpha}{a} + \text{Const},$$

$$\text{Const} = \frac{b^2}{2} + \frac{ba^2}{2\alpha}\,\text{Arc Sin}\,\frac{\alpha}{a}.$$

Also $\int y\,dl =$

$$= \frac{b^2}{2} - \frac{b(a-x)}{2a^2}\sqrt{a^4-\alpha^2(a-x)^2} + \frac{ba^2}{2\alpha}\left\{\text{ArcSin}\,\frac{\alpha}{a} - \text{ArcSin}\,\frac{\alpha(a-x)}{a^2}\right\},$$

und demnach Y, (d. i. die Ordinate des Schwerpunktes,) $=$

$$= \frac{b}{2l}\left\{b - \frac{(a-x)}{a^2}\sqrt{a^4-\alpha^2(a-x)^2} + \frac{a^2}{\alpha}\left[\text{ArcSin}\,\frac{\alpha}{a} - \text{ArcSin}\,\frac{\alpha(a-x)}{a^2}\right]\right\}.$$

Um den Schwerpunkt eines elliptischen Quadranten zu finden, muß man $x = a$, $y = b$ setzen. Dies gibt

$$X = a - \frac{a}{2l}\left\{\frac{1}{b}\,.\,ab + \frac{b^2}{\alpha}\,\text{Logn}\,\frac{\alpha b + ab}{b^2}\right\}$$

$$= a - \frac{a}{2l}\left\{a + \frac{b^2}{\alpha}\,\text{Logn}\,\frac{a+\alpha}{b}\right\}$$

$$= a - \frac{a}{2l}\left\{a + \frac{b^2}{\alpha}\,\text{Logn}\,\frac{a^2-\alpha^2}{b(a-\alpha)}\right\}$$

$$= a - \frac{a}{2l}\left\{\alpha + \frac{b^2}{\alpha}\,\mathrm{Logn}\,\frac{b^2}{b(a-\alpha)}\right\}$$

$$= a - \frac{a}{2l}\left\{\alpha + \frac{b^2}{\alpha}\,\mathrm{Logn}\,\frac{b}{a-\alpha}\right\},$$

$$Y = \frac{b}{2l}\left\{b + \frac{a^2}{\alpha}\,\mathrm{Arc\,Sin}\,\frac{\alpha}{a}\right\}.$$

Für die halbe Ellipse ist $x = 2a$ und $y = 0$. Also
$X = a$, wie es seyn muß,

$$Y = \frac{b}{2l}\left\{b + b + 2\frac{a^2}{\alpha}\,\mathrm{Arc\,Sin}\,\frac{\alpha}{a}\right\}$$

$$= \frac{b}{l}\left\{b + \frac{a^2}{\alpha}\,\mathrm{Arc\,Sin}\,\frac{\alpha}{a}\right\}.$$

Für den Kreis hat man

$$\frac{a^2}{\alpha}\,\mathrm{Arc\,Sin}\,\frac{\alpha}{a} = \frac{a^2}{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{a} = a$$

zu setzen, woraus sich, da $a = b = r$ und $l = r\pi$ ist, ergibt:

$$Y = \frac{r}{r\pi}\cdot 2r = \frac{2r}{\pi},$$

eben so wie in §. 134.

§. 138.

Aufgabe. Den Schwerpunkt eines Bogens der Hyperbel zu finden.

Auflösung. Die Gleichung der Hyperbel in Beziehung auf die Hauptaxe als Axe und den einen Scheitel als Anfang der Abscissen ist bekanntlich

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2),$$

$$x^2 + 2ax = \frac{a^2y^2}{b^2},$$

$$x^2 + 2ax + a^2 = a^2 + \frac{a^2y^2}{b^2} = \frac{a^2(b^2+y^2)}{b^2},$$

$$a + x = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 + y^2}, \text{*)}$$

$$x = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 + y^2} - a,$$

$$2y\,dy = \frac{b^2}{a^2}(2a + 2x)\,dx,$$

$$y\,dy = \frac{b^2}{a^2}(a + x)\,dx,$$

$$dx = \frac{a^2 y\,dy}{b^2(a + x)} = \frac{a^2 y\,dy}{ab\sqrt{b^2 + y^2}} = \frac{ay\,dy}{b\sqrt{b^2 + y^2}},$$

$$dx^2 = \frac{a^2 y^2\,dy^2}{b^2(b^2 + y^2)},$$

$$dx^2 + dy^2 = \frac{[a^2y^2 + b^2(b^2 + y^2)]\,dy^2}{b^2(b^2 + y^2)}$$

$$= \frac{[b^4 + (a^2 + b^2)y^2]\,dy^2}{b^2(b^2 + y^2)},$$

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{dy}{b}\sqrt{\frac{b^4 + (a^2 + b^2)y^2}{b^2 + y^2}}$$

$$= \frac{dy}{b}\sqrt{\frac{b^4 + \alpha^2 y^2}{b^2 + y^2}},$$

für $a^2 + b^2 = \alpha^2$.

Das Integral der gefundenen Function ist $= l$, wenn l wieder den gegebenen Bogen der Hyperbel bezeichnet. Ueber die Integration selbst muß man die bey ähnlicher Gelegenheit

---

*) Ich bemerke hier, nicht, um ein sonst vorzügliches Werk, von dessen Vortrefflichkeit, namentlich in der Lehre vom Schwerpunkte, Niemand mehr als ich überzeugt seyn kann, zu tadeln, sondern bloß, um Anfänger zu warnen, daß in Eytelwein's Handbuche der Statik, Th. 1. S. 124., durch einen Rechnungsfehler

$$a + x = \frac{a}{b}\sqrt{a^2 + y^2}$$

gesetzt worden ist; ein Fehler, welcher sich durch die ganze Rechnung fortgepflanzt hat, so daß sich unrichtige Resultate ergeben haben.

in §. 137. bey der Ellipse angeführten ersten beiden Werke nachsehen. Wir nehmen hier l als gegeben an, und führen es in die Formeln für den Schwerpunkt ein.

Nun ist

$$xdl = \frac{adl}{b}\sqrt{b^2+y^2} - adl,$$

$$\int xdl = \frac{a}{b^2}\int dy\sqrt{b^4+\alpha^2y^2} - al$$

$$= \frac{ay}{2b^2}\sqrt{b^4+\alpha^2y^2} + \frac{ab^2}{2\alpha}\operatorname{Logn}\frac{\alpha y+\sqrt{b^4+\alpha^2y^2}}{b^2} - al, \text{ (§. 137.)}$$

Das Integral ist so bestimmt, daß es für $x = 0$ verschwindet, da l für $x = 0$ verschwindet. Also

$$X = \frac{a}{2l}\left\{\frac{y}{b^2}\sqrt{b^4+\alpha^2y^2} + \frac{b^2}{\alpha}\operatorname{Logn}\frac{\alpha y+\sqrt{b^4+\alpha^2y^2}}{b^2}\right\} - a.$$

Nach dem Obigen ist

$$dy = \frac{b^2(a+x)dx}{a^2y}, \text{ und folglich}$$

$$dx^2+dy^2 = dx^2 + \frac{b^4(a+x)^2dx^2}{a^4y^2}$$

$$= \frac{[a^4y^2+b^4(a+x)^2]dx^2}{a^4y^2},$$

$$\sqrt{dx^2+dy^2} = \frac{dx}{a^2y}\sqrt{a^4y^2+b^4(a+x)^2} = dl,$$

$$ydl = \frac{dx}{a^2}\sqrt{a^4y^2+b^4(a+x)^2}$$

$$= \frac{dx}{a^2}\sqrt{a^4y^2+b^4(a^2+2ax+x^2)}$$

$$= \frac{dx}{a^2}\sqrt{a^2b^2(2ax+x^2)+b^4(a^2+2ax+x^2)}$$

$$= \frac{bdx}{a^2}\sqrt{a^2b^2+2a(a^2+b^2)x+(a^2+b^2)x^2}$$

$$= \frac{bdx}{a^2}\sqrt{a^2b^2+2a\alpha^2x+\alpha^2x^2} = \frac{bdx}{a^2}\sqrt{X},$$

wo dieses X wieder nicht einerley mit der vorigen Absciße ist.

Um diese Formel zu integriren, setze man $x^2 + 2ax = z^2 - a^2$; so ist

$$x^2 + 2ax + a^2 = z^2,$$
$$(x+a)^2 = z^2, \quad x + a = z, \quad x = z - a, \quad dx = dz,$$
$$X = a^2b^2 + \alpha^2(z^2 - a^2) = a^2(b^2 - \alpha^2) + \alpha^2 z^2,$$

und demnach, wenn man $a^2(b^2 - \alpha^2) = A^4$ setzt:

$$dx\sqrt{X} = dz\sqrt{A^4 + \alpha^2 z^2}.$$

Also nach §. 137.:

$$\int dx\sqrt{X} = \tfrac{1}{2}z\sqrt{A^4 + \alpha^2 z^2} + \frac{A^4}{2\alpha}\,\mathrm{Logn}\,\frac{\alpha z + \sqrt{A^4 + \alpha^2 z^2}}{A^2},$$

$$\int y\,dl = \frac{bz}{2a^2}\sqrt{A^4 + \alpha^2 z^2} + \frac{bA^4}{2\alpha a^2}\,\mathrm{Logn}\,\frac{\alpha z + \sqrt{A^4 + \alpha^2 z^2}}{A^2} + \mathrm{Const.}$$

Für $x = 0$ wird $z = a$. Also

$$A^4 + \alpha^2 z^2 = a^2b^2 - a^2\alpha^2 + \alpha^2 a^2 = a^2 b^2,$$

$$0 = \frac{b}{2a}\cdot ab + \frac{bA^4}{2\alpha a^2}\,\mathrm{Logn}\,\frac{\alpha a + ab}{A^2} + \mathrm{Const},$$

$$\mathrm{Const} = -\tfrac{1}{2}b^2 - \frac{bA^4}{2\alpha a^2}\,\mathrm{Logn}\,\frac{\alpha a + ab}{A^2},$$

$$\int y\,dl = \frac{bz}{2a^2}\sqrt{A^4 + \alpha^2 z^2} - \tfrac{1}{2}b^2 + \frac{bA^4}{2\alpha a^2}\,\mathrm{Logn}\,\frac{\alpha z + \sqrt{A^4 + \alpha^2 z^2}}{\alpha a + ab}$$

$$= \frac{b}{2}\left\{\frac{a+x}{a^2}\sqrt{X} - b + \frac{A^4}{\alpha a^2}\,\mathrm{Logn}\,\frac{\alpha(a+x) + \sqrt{X}}{a(\alpha + b)}\right\},$$

$$A^4 = a^2(b^2 - \alpha^2) = a^2[b^2 - (a^2 + b^2)] = -a^4,$$

$$\int y\,dl = \frac{b}{2}\left\{\frac{a+x}{a^2}\sqrt{X} - b - \frac{a^2}{\alpha}\,\mathrm{Logn}\,\frac{\alpha(a+x) + \sqrt{X}}{a(\alpha + b)}\right\},$$

$$Y = \frac{b}{2l}\left\{\frac{a+x}{a^2}\sqrt{X} - b - \frac{a^2}{\alpha}\,\mathrm{Logn}\,\frac{\alpha(a+x) + \sqrt{X}}{a(\alpha + b)}\right\}.$$

Diesen Ausdruck findet Eytelwein a. a. O. eben so. Die obige Bemerkung bezieht sich nur auf den Ausdruck für X.

§. 139.

Aufgabe. Den Schwerpunkt eines Bogens der Cycloide zu finden.

Auflösung. Man nehme die Basis der Cycloide als Axe und den Anfang als Anfang der x an; so ist bekanntlich nach §. 117.:

$$x = r(\varphi - \mathrm{Sin}\,\varphi),\quad y = r(1 - \mathrm{Cos}\,\varphi);$$
$$dx = r(1 - \mathrm{Cos}\,\varphi)\,d\varphi,\quad dy = r\,\mathrm{Sin}\,\varphi\,d\varphi;$$
$$dx^2 + dy^2 = r^2(1 - 2\,\mathrm{Cos}\,\varphi + \mathrm{Cos}\,\varphi^2 + \mathrm{Sin}\,\varphi^2)\,d\varphi^2$$
$$= 2r^2(1 - \mathrm{Cos}\,\varphi)\,d\varphi^2 = 4r^2\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\varphi^2\,d\varphi^2,$$
$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = 2r\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\varphi\,d\varphi = 4r\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\varphi\,d\tfrac{1}{2}\varphi,$$
$$\int\sqrt{dx^2 + dy^2} = -4r\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}\varphi + \mathrm{Const},$$
$$0 = -4r + \mathrm{Const},\quad \mathrm{Const} = 4r,$$
$$\int\sqrt{dx^2 + dy^2} = 4r(1 - \mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}\varphi),$$
$$x\sqrt{dx^2 + dy^2} = 2r^2(\varphi - \mathrm{Sin}\,\varphi)\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\varphi\,d\varphi$$
$$= 2r^2(\varphi\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\varphi - \mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\varphi)\,d\varphi$$
$$= 2r^2(\varphi\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\varphi - \tfrac{1}{2}\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{1}{2}\mathrm{Cos}\,\tfrac{3}{2}\varphi)\,d\varphi$$
$$= 2r^2(\varphi\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\varphi\,d\varphi - \mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}\varphi\,d\tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{1}{3}\mathrm{Cos}\,\tfrac{3}{2}\varphi\,d\tfrac{3}{2}\varphi),$$
$$\int x\sqrt{dx^2 + dy^2} = 2r^2\left(\int\varphi\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\varphi\,d\varphi - \mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{1}{3}\mathrm{Sin}\,\tfrac{3}{2}\varphi\right),$$
$$\int\varphi\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\varphi\,d\varphi = \varphi\int\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\varphi\,d\varphi - \int d\varphi\int\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\varphi\,d\varphi$$
$$= -2\varphi\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}\varphi + 2\int\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}\varphi\,d\varphi$$
$$= -2\varphi\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}\varphi + 4\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\varphi.$$

Also

$$\int x\sqrt{dx^2 + dy^2} = 2r^2(3\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{1}{3}\mathrm{Sin}\,\tfrac{3}{2}\varphi - 2\varphi\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}\varphi),$$

wo $\mathrm{Const} = 0$, da das Integral für $\varphi = 0$, d. i. für $x = 0$, verschwindet. Es ist also

$$X = \frac{2r^2(3\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{1}{3}\mathrm{Sin}\,\tfrac{3}{2}\varphi - 2\varphi\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}\varphi)}{4r(1 - \mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}\varphi)}$$
$$= \frac{r(9\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\varphi + \mathrm{Sin}\,\tfrac{3}{2}\varphi - 6\varphi\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}\varphi)}{6(1 - \mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}\varphi)}.$$

Ferner ist

$$y\sqrt{dx^2 + dy^2} = 2r^2(1 - \mathrm{Cos}\,\varphi)\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\varphi\,d\varphi$$
$$= 2r^2(\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\varphi - \mathrm{Cos}\,\varphi\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\varphi)\,d\varphi$$
$$= 2r^2(\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\varphi - \tfrac{1}{2}\mathrm{Sin}\,\tfrac{3}{2}\varphi + \tfrac{1}{2}\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\varphi)\,d\varphi$$
$$= 2r^2(2\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\varphi\,d\tfrac{1}{2}\varphi - \tfrac{1}{3}\mathrm{Sin}\,\tfrac{3}{2}\varphi\,d\tfrac{3}{2}\varphi + \mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\varphi\,d\tfrac{1}{2}\varphi)$$
$$= 2r^2(3\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\varphi\,d\tfrac{1}{2}\varphi - \tfrac{1}{3}\mathrm{Sin}\,\tfrac{3}{2}\varphi\,d\tfrac{3}{2}\varphi),$$
$$\int y\sqrt{dx^2 + dy^2} = 2r^2(-3\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{1}{3}\mathrm{Cos}\,\tfrac{3}{2}\varphi)$$
$$= 2r^2(\tfrac{1}{3}\mathrm{Cos}\,\tfrac{3}{2}\varphi - 3\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}\varphi) + \mathrm{Const},$$

$$o = 2r^2(\tfrac{1}{3} - 3) + \text{Const}, \quad \text{Const} = 2r^2 . \tfrac{8}{3},$$

$$\int y\sqrt{dx^2 + dy^2} = 2r^2(\tfrac{1}{3}\,\text{Cos}\,\tfrac{3}{2}\varphi - 3\,\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{8}{3}),$$

$$Y = \frac{2r^2(\tfrac{1}{3}\,\text{Cos}\,\tfrac{3}{2}\varphi - 3\,\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{8}{3})}{4r\,(1 - \text{Cos}\,\tfrac{1}{2}\varphi)}$$

$$= \frac{r\,(\text{Cos}\,\tfrac{3}{2}\varphi - 9\,\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}\varphi + 8)}{6\,(1 - \text{Cos}\,\tfrac{1}{2}\varphi)}.$$

Man hat also

$$X = \frac{r\,(9\,\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}\varphi + \text{Sin}\,\tfrac{3}{2}\varphi - 6\varphi\,\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}\varphi)}{6\,(1 - \text{Cos}\,\tfrac{1}{2}\varphi)},$$

$$Y = \frac{r\,(\text{Cos}\,\tfrac{3}{2}\varphi - 9\,\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}\varphi + 8)}{6\,(1 - \text{Cos}\,\tfrac{1}{2}\varphi)}.$$

Für die ganze Cycloide ist $\varphi = 2\pi$. Also

$$\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}\varphi = \text{Sin}\,\pi = o,$$
$$\text{Sin}\,\tfrac{3}{2}\varphi = \text{Sin}\,3\pi = o,$$
$$\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}\varphi = \text{Cos}\,\pi = -1,$$
$$\text{Cos}\,\tfrac{3}{2}\varphi = \text{Cos}\,3\pi = -1,$$

und folglich

$$X = \frac{r\,.\,6\,.\,2\pi}{6\,.\,2} = r\pi,$$

$$Y = \frac{r\,.\,(-1 + 9 + 8)}{6\,.\,2} = \frac{16r}{12} = \tfrac{4}{3}r,$$

so daß also die Entfernung des Schwerpunktes der ganzen Cycloide von dem Mittelpunkte der Basis $= \tfrac{4}{3}r$, und demnach die Entfernung vom Scheitel $= 2r - \tfrac{4}{3}r = \tfrac{2}{3}r$ ist.

Nimmt man den Scheitel als Anfangspunkt der Abscissen an, so ist bekanntlich

$$x = r\,(1 - \text{Cos}\,\psi), \quad y = r\,(\psi + \text{Sin}\,\psi);$$
$$dx = r\,\text{Sin}\,\psi\,d\psi, \quad dy = r\,(1 + \text{Cos}\,\psi)\,d\psi;$$
$$dx^2 + dy^2 = r^2(\text{Sin}\,\psi^2 + 1 + 2\,\text{Cos}\,\psi + \text{Cos}\,\psi^2)\,d\psi^2$$
$$= 2r^2(1 + \text{Cos}\,\psi)\,d\psi^2$$
$$= 4r^2\,\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}\psi^2\,d\psi^2,$$
$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = 2r\,\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}\psi\,d\psi,$$
$$\int\sqrt{dx^2 + dy^2} = 4r\int\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}\psi\,d\tfrac{1}{2}\psi = 4r\,\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}\psi,$$

wo die Constans $= 0$ ist, da das Integral für $x = 0$, d. i. für $\varphi = \pi$ oder $\psi = \pi - \Phi = 0$, verschwindet.

Ferner ist

$$x\sqrt{dx^2 + dy^2} = 2r^2(1 - \text{Cos}\,\psi)\,\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}\psi\,d\psi$$
$$= 2r^2(\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}\psi - \text{Cos}\,\psi\,\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}\psi)\,d\psi$$
$$= 2r^2(\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}\psi - \tfrac{1}{2}\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}\psi - \tfrac{1}{2}\text{Cos}\,\tfrac{3}{2}\psi)\,d\psi$$
$$= 2r^2(\tfrac{1}{2}\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}\psi\,d\psi - \tfrac{1}{2}\text{Cos}\,\tfrac{3}{2}\psi\,d\psi)$$
$$= 2r^2(\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}\psi\,d\tfrac{1}{2}\psi - \tfrac{1}{3}\text{Cos}\,\tfrac{3}{2}\psi\,d\tfrac{3}{2}\psi),$$
$$\int x\sqrt{dx^2 + dy^2} = 2r^2(\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}\psi - \tfrac{1}{3}\,\text{Sin}\,\tfrac{3}{2}\psi),$$

wo die Constans $= 0$. Also

$$X = \frac{2r^2(\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}\psi - \tfrac{1}{3}\text{Sin}\,\tfrac{3}{2}\psi)}{4r\,\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}\psi}$$
$$= \frac{r(3\,\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}\psi - \text{Sin}\,\tfrac{3}{2}\psi)}{6\,\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}\psi}.$$

Aber

$$3\,\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}\psi - \text{Sin}\,\tfrac{3}{2}\psi = 2\,\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}\psi - \text{Sin}\,\tfrac{3}{2}\psi + \text{Sin}\,\tfrac{1}{2}\psi$$
$$= 2\,\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}\psi - (\text{Sin}\,\tfrac{3}{2}\psi - \text{Sin}\,\tfrac{1}{2}\psi)$$
$$= 2\,\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}\psi - 2\,\text{Cos}\,\psi\,\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}\psi$$
$$= 2\,\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}\psi\,(1 - \text{Cos}\,\psi),$$

$$X = \frac{2r\,\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}\psi\,(1 - \text{Cos}\,\psi)}{6\,\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}\psi} = \tfrac{1}{3}r(1 - \text{Cos}\,\psi),$$

d. i. $X = \frac{1}{3}x$, so daß also die Abscisse des Schwerpunktes immer dem dritten Theile der Abscisse des äußersten Punktes des Bogens gleich ist. Für die ganze Cycloide ist $x = 2r$, und folglich $X = \frac{2}{3}r$, wie vorher.

Ferner ist

$$y\sqrt{dx^2 + dy^2} = 2r^2(\psi + \text{Sin}\,\psi)\,\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}\psi\,d\psi$$
$$= 2r^2(\psi\,\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}\psi + \text{Sin}\,\psi\,\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}\psi)\,d\psi$$
$$= 2r^2(\psi\,\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}\psi + \tfrac{1}{2}\text{Sin}\,\tfrac{3}{2}\psi + \tfrac{1}{2}\,\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}\psi)\,d\psi$$
$$= 2r^2(\psi\,\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}\psi\,d\psi + \tfrac{1}{3}\text{Sin}\,\tfrac{3}{2}\psi\,d\tfrac{3}{2}\psi + \text{Sin}\,\tfrac{1}{2}\psi\,d\tfrac{1}{2}\psi),$$
$$\int y\sqrt{dx^2 + dy^2} = 2r^2(\int\psi\,\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}\psi\,d\psi - \tfrac{1}{3}\,\text{Cos}\,\tfrac{3}{2}\psi - \text{Cos}\,\tfrac{1}{2}\psi),$$
$$\int\psi\,\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}\psi\,d\psi = \psi\int\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}\psi\,d\psi - \int d\psi\int\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}\psi\,d\psi$$
$$= 2\psi\,\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}\psi - 2\int\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}\psi\,d\psi$$
$$= 2\psi\,\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}\psi + 4\,\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}\psi,$$

$$\int y\sqrt{dx^2+dy^2} = 2r^2(2\psi \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}\psi + 3\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}\psi - \tfrac{1}{3}\operatorname{Cos}\tfrac{3}{2}\psi),$$

$$0 = 2r^2(3-\tfrac{1}{3}) + \text{Const},$$

$$\text{Const} = -2r^2 . \tfrac{8}{3},$$

$$\int y\sqrt{dx^2+dy^2} = 2r^2(2\psi \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}\psi + 3\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}\psi - \tfrac{1}{3}\operatorname{Cos}\tfrac{3}{2}\psi - \tfrac{8}{3}),$$

$$Y = \frac{2r^2(2\psi \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}\psi + 3\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}\psi - \tfrac{1}{3}\operatorname{Cos}\tfrac{3}{2}\psi - \tfrac{8}{3})}{4r\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}\psi}$$

$$= \frac{r(6\psi \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}\psi + 9\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}\psi - \operatorname{Cos}\tfrac{3}{2}\psi - 8)}{6\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}\psi}.$$

Für die halbe Cycloide ist $\psi = \pi$, und folglich

$$Y = \frac{r(6\pi - 8)}{6}$$

$$= r(\pi - \tfrac{4}{3})$$

$$= r . 1{,}808259,$$

nach Eytelwein a. a. O. S. 131.

Nach Montucla (Histoire des Mathématiques, Tom. II. p. 67.) hat der englische Ritter und Architect Christoph Wren, der berühmte Erbauer der St.-Paul's-Kirche zu London, die Aufgabe über den Schwerpunkt eines cycloidalischen Bogens zuerst gelös't. Bekanntlich ist von ihm die Cycloide auch zuerst rectificirt worden. Gute Notizen über sein Leben findet man auch in folgendem trefflichen Buche, wo sie nicht leicht Jemand, der ihrer bedarf, suchen wird:

Beobachtungen auf Reisen in und außer Deutschland, u. s. w., von D. A. H. Niemeyer, zweyte Ausgabe, erster Band, Halle 1822, 8., S. 188. ff.

Zwölftes Kapitel.

Von der Bestimmung des Schwerpunktes durch Umdrehung erzeugter Flächen.

§. 140.

Aufgabe. Den Inhalt einer durch die Umdrehung der Linie BQ (Fig. 81.) um die Abscissenaxe erzeugten Fläche zu finden.

Auflösung. Die Bezeichnungen bleiben wie in den vorhergehenden Kapiteln. Man lasse, wie gewöhnlich, die größere Abscisse um i sich verändern, so verändert sich der gesuchte Flächenraum V um ΔV, welches zwey Kreise zu Grundflächen hat, deren Halbmesser y, und nach dem Taylor'schen Lehrsatze

$$y+\frac{dy}{dx}\cdot\frac{i}{1}+\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{i^2}{1\cdot 2}+\frac{d^3y}{dx^3}\cdot\frac{i^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots,$$

überall $y=b$ gesetzt, sind. Die krumme Seitenfläche des abgestumpften Kegels mit denselben Grundflächen ist nach bekannten Sätzen der Geometrie oder auch nach §. 105., wenn R und r die Halbmesser der Grundflächen sind, h aber die Höhe bezeichnet,

$$=(R+r)\pi\sqrt{(R-r)^2+h^2},$$

d. i. in unserm Falle

$$=\left\{2y+\frac{dy}{dx}\cdot\frac{i}{1}+\ldots\right\}\pi\sqrt{\left\{\frac{dy}{dx}\cdot\frac{i}{1}+\ldots\right\}^2+i^2}$$

$$=2y\pi i\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}+\ldots,$$

wo alle Glieder höhere Potenzen von i enthalten. x und y müssen die gehörigen Werthe erhalten. Je kleiner i wird, desto mehr nähert sich die Größe hinter dem Gleichheitszeichen ihrem ersten Gliede, und desto näher kommt die Oberfläche des abgestumpften Kegels der krummen Fläche ΔV. Daher ist

$$\Delta V = 2y\pi i\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

wenn x und y die gehörigen Werthe erhalten, und zwar desto genauer, je kleiner i ist. Die Summe aller Größen ΔV in der ganzen Ausdehnung von $x = \alpha$ bis $x = \beta$ ist offenbar der gesuchten Größe V gleich, und demnach nach §. 108.

$$V = 2\pi \cdot \frac{\int y\,dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{(x=\alpha,\ \beta;\ y=a,\ b)}$$

$$= 2\pi \cdot \frac{\int y\sqrt{dx^2+dy^2}}{(x=\alpha,\ \beta;\ y=a,\ b)}.$$

§. 141.

Aufgabe. Den Schwerpunkt der Fläche V zu finden.

Auflösung. Es ist klar, daß der Schwerpunkt in der Abscissenaxe liegen muß, und demnach bloß X zu bestimmen. Man lasse die größere Abscisse um i sich verändern, so ändert sich V um ΔV, und es ist für die gehörigen Werthe von x und y nach dem vorhergehenden Paragraphen

$$\Delta V = 2y\pi i\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

desto genauer, je kleiner i ist. Desto genauer ist aber auch offenbar das Moment von ΔV in Beziehung auf die Axe der Ordinaten, oder vielmehr in Beziehung auf eine durch den Anfang der Coordinaten auf die Abscissenaxe senkrecht gelegte Ebene, $= x \cdot \Delta V = 2xy\pi i\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$. Die Summe der Momente aller Größen ΔV in der ganzen Ausdehnung von $x = \alpha$ bis $x = \beta$ ist folglich nach §. 108.

$$= 2\pi \cdot \frac{\int xy\,dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{(x=\alpha,\ \beta;\ y=a,\ b)}.$$

Diese Momentensumme ist aber nach §. 86. auch $= VX$

$$= 2\pi X \cdot \frac{\int y\,dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{(x = \alpha,\ \beta;\ y = a,\ b)},$$

nach dem vorhergehenden Paragraphen. Also

$$2\pi X \cdot \frac{\int y\,dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{(x = \alpha,\ \beta;\ y = a,\ b)} = 2\pi \cdot \frac{\int xy\,dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{(x = \alpha,\ \beta;\ y = a,\ b)},$$

$$X \cdot \frac{\int y\,dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{(x = \alpha,\ \beta;\ y = a,\ b)} = \frac{\int xy\,dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{(x = \alpha,\ \beta;\ y = a,\ b)},$$

$$X \cdot \frac{\int y \sqrt{dx^2 + dy^2}}{(x = \alpha,\ \beta;\ y = a,\ b)} = \frac{\int xy \sqrt{dx^2 + dy^2}}{(x = \alpha,\ \beta;\ y = a,\ b)},$$

woraus man X bestimmen kann.

§. 142.

Aufgabe. Den Schwerpunkt der Oberfläche eines Körpers zu finden, welcher durch die Umdrehung eines cycloidalischen Stücks um die Axe oder die Basis der Cycloide entsteht.

Auflösung. Wir wollen zuerst annehmen, die Drehung geschehe um die Axe der Cycloide. In diesem Falle ist bekanntlich

$$x = r(1 - \operatorname{Cos}\psi),\quad y = r(\psi + \operatorname{Sin}\psi);$$

$$dx = r \operatorname{Sin}\psi\, d\psi,\quad dy = r(1 + \operatorname{Cos}\psi)\,d\psi;$$

$$\begin{aligned} dx^2 + dy^2 &= r^2(\operatorname{Sin}\psi^2 + 1 + 2\operatorname{Cos}\psi + \operatorname{Cos}\psi^2)\,d\psi^2 \\ &= 2r^2(1 + \operatorname{Cos}\psi)\,d\psi^2 \\ &= 4r^2 \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}\psi^2\, d\psi^2, \end{aligned}$$

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = 2r \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}\psi\, d\psi,$$

$$\begin{aligned} y\sqrt{dx^2 + dy^2} &= 2r^2 \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}\psi\,(\psi + \operatorname{Sin}\psi)\,d\psi \\ &= 2r^2 \psi \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}\psi\, d\psi + 2r^2 \operatorname{Sin}\psi \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}\psi\, d\psi. \end{aligned}$$

Also nach §. 139.:

$$\int y\sqrt{dx^2 + dy^2} = 2r^2\left(2\psi \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}\psi + 3\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}\psi - \tfrac{1}{3}\operatorname{Cos}\tfrac{3}{2}\psi - \tfrac{8}{3}\right);$$

ein Integral, welches schon so bestimmt ist, daß es für $x=0$, d. i. für $\psi=0$, verschwindet.

$$xy\sqrt{dx^2+dy^2} = 2r^3(1-\operatorname{Cos}\psi)(\psi\operatorname{Cos}\tfrac12\psi + \operatorname{Sin}\psi\operatorname{Cos}\tfrac12\psi)d\psi$$

$$= 2r^3\left\{\begin{matrix}\psi\operatorname{Cos}\frac12\psi + \operatorname{Sin}\psi\operatorname{Cos}\frac12\psi - \psi\operatorname{Cos}\psi\operatorname{Cos}\frac12\psi\\ -\operatorname{Sin}\psi\operatorname{Cos}\psi\operatorname{Cos}\frac12\psi\end{matrix}\right\}d\psi$$

$$= 2r^3\left\{\begin{matrix}\psi\operatorname{Cos}\frac12\psi + \operatorname{Sin}\psi\operatorname{Cos}\frac12\psi - \psi\operatorname{Cos}\psi\operatorname{Cos}\frac12\psi\\ -\frac12\operatorname{Sin}2\psi\operatorname{Cos}\frac12\psi\end{matrix}\right\}d\psi$$

$$= 2r^3\left\{\begin{matrix}\psi\operatorname{Cos}\frac12\psi + \frac12\operatorname{Sin}\frac32\psi + \frac12\operatorname{Sin}\frac12\psi - \frac12\psi\operatorname{Cos}\frac32\psi\\ -\frac12\psi\operatorname{Cos}\frac12\psi - \frac14\operatorname{Sin}\frac52\psi - \frac14\operatorname{Sin}\frac32\psi\end{matrix}\right\}d\psi$$

$$= 2r^3\left\{\begin{matrix}\frac12\psi\operatorname{Cos}\frac12\psi + \frac14\operatorname{Sin}\frac32\psi + \frac12\operatorname{Sin}\frac12\psi - \frac12\psi\operatorname{Cos}\frac32\psi\\ -\frac14\operatorname{Sin}\frac52\psi\end{matrix}\right\}d\psi$$

$$= r^3\left\{\begin{matrix}\psi\operatorname{Cos}\frac12\psi + \frac12\operatorname{Sin}\frac32\psi + \operatorname{Sin}\frac12\psi - \psi\operatorname{Cos}\frac32\psi\\ -\frac12\operatorname{Sin}\frac52\psi\end{matrix}\right\}d\psi,$$

$$\int\psi\operatorname{Cos}\tfrac12\psi\, d\psi = 2\psi\operatorname{Sin}\tfrac12\psi + 4\operatorname{Cos}\tfrac12\psi, \text{ (§. 139.)}$$

$$\int\operatorname{Sin}\tfrac32\psi\, d\psi = \tfrac23\int\operatorname{Sin}\tfrac32\psi\, d\tfrac32\psi = -\tfrac23\operatorname{Cos}\tfrac32\psi,$$

$$\int\operatorname{Sin}\tfrac12\psi\, d\psi = 2\int\operatorname{Sin}\tfrac12\psi\, d\tfrac12\psi = -2\operatorname{Cos}\tfrac12\psi,$$

$$\begin{aligned}\int\psi\operatorname{Cos}\tfrac32\psi\, d\psi &= \psi\int\operatorname{Cos}\tfrac32\psi\, d\psi - \int d\psi\int\operatorname{Cos}\tfrac32\psi\, d\psi\\ &= \tfrac23\psi\int\operatorname{Cos}\tfrac32\psi\, d\tfrac32\psi - \tfrac23\int d\psi\int\operatorname{Cos}\tfrac32\psi\, d\tfrac32\psi\\ &= \tfrac23\psi\operatorname{Sin}\tfrac32\psi - \tfrac23\int\operatorname{Sin}\tfrac32\psi\, d\psi\\ &= \tfrac23\psi\operatorname{Sin}\tfrac32\psi - \tfrac49\int\operatorname{Sin}\tfrac32\psi\, d\tfrac32\psi\\ &= \tfrac23\psi\operatorname{Sin}\tfrac32\psi + \tfrac49\operatorname{Cos}\tfrac32\psi,\end{aligned}$$

$$\int\operatorname{Sin}\tfrac52\psi\, d\psi = \tfrac25\int\operatorname{Sin}\tfrac52\psi\, d\tfrac52\psi = -\tfrac25\operatorname{Cos}\tfrac52\psi,$$

und demnach

$$\int xy\sqrt{dx^2+dy^2} =$$

$$= r^3\left\{\begin{matrix}2\psi\operatorname{Sin}\frac12\psi + 4\operatorname{Cos}\frac12\psi - \frac13\operatorname{Cos}\frac32\psi - \frac23\psi\operatorname{Sin}\frac32\psi\\ -2\operatorname{Cos}\frac12\psi - \frac49\operatorname{Cos}\frac32\psi + \frac15\operatorname{Cos}\frac52\psi\end{matrix}\right\}$$

$$= r^3\left\{\begin{matrix}2\psi\operatorname{Sin}\frac12\psi + 2\operatorname{Cos}\frac12\psi - \frac79\operatorname{Cos}\frac32\psi - \frac23\psi\operatorname{Sin}\frac32\psi\\ +\frac15\operatorname{Cos}\frac52\psi\end{matrix}\right\}.$$

Dieses Integral muß wieder so bestimmt werden, daß es für $x=0$, d. i. für $\psi=0$, verschwindet. Also

$$0 = r^3(2-\tfrac79+\tfrac15) + \text{Const} = r^3(\tfrac{11}{9}+\tfrac15) + \text{Const}$$
$$= r^3 . \tfrac{64}{45} + \text{Const}.$$

Also das Integral

$$= r^3\left\{\begin{matrix}2\psi\operatorname{Sin}\frac12\psi + 2\operatorname{Cos}\frac12\psi - \frac79\operatorname{Cos}\frac32\psi - \frac23\psi\operatorname{Sin}\frac32\psi\\ +\frac15\operatorname{Cos}\frac52\psi - \frac{64}{45}\end{matrix}\right\},$$

und demnach

$$X = \frac{r\left\{\begin{array}{l} 2\psi\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}\psi + 2\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}\psi - \tfrac{7}{9}\mathrm{Cos}\tfrac{3}{2}\psi - \tfrac{2}{3}\psi\,\mathrm{Sin}\tfrac{3}{2}\psi \\ + \tfrac{1}{5}\mathrm{Cos}\,\tfrac{5}{2}\psi - \tfrac{64}{45} \end{array}\right\}}{2(2\psi\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\psi + 3\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}\psi - \tfrac{1}{3}\mathrm{Cos}\,\tfrac{3}{2}\psi - \tfrac{8}{3})}.$$

Für die Oberfläche des durch die Umdrehung der halben Cycloide um die ganze Axe entstandenen Körpers ist $\psi = \pi$, und demnach

$$X = \frac{r(2\pi + \frac{2}{3}\pi - \frac{64}{45})}{2(2\pi - \frac{8}{3})}$$

$$= \frac{r(\frac{8}{3}\pi - \frac{64}{45})}{2(2\pi - \frac{8}{3})} = \frac{r(\frac{120}{45}\pi - \frac{64}{45})}{2(2\pi - \frac{8}{3})}$$

$$= \frac{r(120\pi - 64)}{2(90\pi - 120)} = \frac{r(60\pi - 32)}{2(45\pi - 60)} = \frac{r(30\pi - 16)}{45\pi - 60}.$$

Geschieht aber die Umdrehung um die Basis der Cycloide, so ist bekanntlich

$$x = r(\varphi - \mathrm{Sin}\,\varphi),\quad y = r(1 - \mathrm{Cos}\,\varphi);$$

$$dx = r(1 - \mathrm{Cos}\,\varphi)\,d\varphi,\quad dy = r\,\mathrm{Sin}\,\varphi\,d\varphi;$$

$$dx^2 + dy^2 = r^2(1 - 2\,\mathrm{Cos}\,\varphi + \mathrm{Cos}\,\varphi^2 + \mathrm{Sin}\,\varphi^2)\,d\varphi$$

$$= 2r^2(1 - \mathrm{Cos}\,\varphi)\,d\varphi^2 = 4r^2\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\varphi^2\,d\varphi^2,$$

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = 2r\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\varphi\,d\varphi,$$

$$y\sqrt{dx^2 + dy^2} = 2r^2(1 - \mathrm{Cos}\,\varphi)\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\varphi\,d\varphi$$

$$= 2r^2(\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\varphi - \mathrm{Cos}\,\varphi\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\varphi)\,d\varphi$$

$$= 2r^2(\tfrac{3}{2}\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\varphi - \tfrac{1}{2}\mathrm{Sin}\,\tfrac{3}{2}\varphi)\,d\varphi,$$

$$\int y\sqrt{dx^2 + dy^2} = 2r^2(\tfrac{1}{3}\mathrm{Cos}\,\tfrac{3}{2}\varphi - 3\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{8}{3})\ (\S.\ 139.);$$

das Integral so bestimmt, daß es für $x = 0$, d. i. $\varphi = 0$, verschwindet.

$$xy\sqrt{dx^2 + dy^2} = 2r^3(\varphi - \mathrm{Sin}\,\varphi)(\tfrac{3}{2}\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\varphi - \tfrac{1}{2}\mathrm{Sin}\,\tfrac{3}{2}\varphi)\,d\varphi$$

$$= 2r^3\left\{\begin{array}{l} \tfrac{3}{2}\varphi\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\varphi - \tfrac{1}{2}\varphi\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{3}{2}\varphi \\ -\tfrac{3}{2}\mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{1}{2}\mathrm{Sin}\,\tfrac{3}{2}\varphi\,\mathrm{Sin}\,\varphi \end{array}\right\}d\varphi$$

$$= 2r^3\left\{\begin{array}{l} \tfrac{3}{2}\varphi\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\varphi - \tfrac{1}{2}\varphi\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{3}{2}\varphi \\ -\tfrac{3}{4}\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{3}{4}\mathrm{Cos}\,\tfrac{3}{2}\varphi + \tfrac{1}{4}\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}\varphi - \tfrac{1}{4}\mathrm{Cos}\,\tfrac{5}{2}\varphi \end{array}\right\}d\varphi$$

$$= 2r^3\left\{\begin{array}{l} \tfrac{3}{2}\varphi\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\varphi - \tfrac{1}{2}\varphi\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{3}{2}\varphi \\ -\tfrac{1}{2}\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{3}{4}\mathrm{Cos}\,\tfrac{3}{2}\varphi - \tfrac{1}{4}\mathrm{Cos}\,\tfrac{5}{2}\varphi \end{array}\right\}d\varphi,$$

$$\int \varphi \,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\varphi\, d\varphi = -2\varphi\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}\varphi + 4\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\varphi, \text{ (§. 139.)}$$

$$\begin{aligned}
\int \varphi\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{3}{2}\varphi\, d\varphi &= \varphi \int \mathrm{Sin}\,\tfrac{3}{2}\varphi\, d\varphi - \int d\varphi \int \mathrm{Sin}\,\tfrac{3}{2}\varphi\, d\varphi \\
&= \tfrac{2}{3}\varphi \int \mathrm{Sin}\,\tfrac{3}{2}\varphi\, d\tfrac{3}{2}\varphi - \tfrac{2}{3}\int d\varphi \int \mathrm{Sin}\,\tfrac{3}{2}\varphi\, d\tfrac{3}{2}\varphi \\
&= -\tfrac{2}{3}\varphi\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{3}{2}\varphi + \tfrac{2}{3}\int \mathrm{Cos}\,\tfrac{3}{2}\varphi\, d\varphi \\
&= -\tfrac{2}{3}\varphi\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{3}{2}\varphi + \tfrac{4}{9}\int \mathrm{Cos}\,\tfrac{3}{2}\varphi\, d\tfrac{3}{2}\varphi \\
&= -\tfrac{2}{3}\varphi\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{3}{2}\varphi + \tfrac{4}{9}\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{3}{2}\varphi,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}\varphi\, d\varphi &= 2\int \mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}\varphi\, d\tfrac{1}{2}\varphi = 2\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\varphi, \\
\int \mathrm{Cos}\,\tfrac{3}{2}\varphi\, d\varphi &= \tfrac{2}{3}\int \mathrm{Cos}\,\tfrac{3}{2}\varphi\, d\tfrac{3}{2}\varphi = \tfrac{2}{3}\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{3}{2}\varphi, \\
\int \mathrm{Cos}\,\tfrac{5}{2}\varphi\, d\varphi &= \tfrac{2}{5}\int \mathrm{Cos}\,\tfrac{5}{2}\varphi\, d\tfrac{5}{2}\varphi = \tfrac{2}{5}\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{5}{2}\varphi.
\end{aligned}$$

Also $\int xy\sqrt{dx^2 + dy^2} =$

$$= 2r^3 \left\{ \begin{array}{l} -3\varphi\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}\varphi + 6\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{1}{3}\varphi\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{3}{2}\varphi - \tfrac{2}{9}\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{3}{2}\varphi \\ \qquad\qquad - \mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\varphi \qquad\qquad\qquad + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{3}{2}\varphi \\ \qquad\qquad\qquad\qquad - \tfrac{1}{10}\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{5}{2}\varphi \end{array} \right\}$$

$$= 2r^3 \left\{ \begin{array}{l} -3\varphi\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}\varphi + 5\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{1}{3}\varphi\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{3}{2}\varphi - \tfrac{1}{10}\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{5}{2}\varphi \\ \quad + \tfrac{5}{18}\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{3}{2}\varphi \end{array} \right\}.$$

Die Constans ist offenbar $= 0$. Also

$$X = \frac{r \left\{ \begin{array}{l} -3\varphi\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}\varphi + 5\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{1}{3}\varphi\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{3}{2}\varphi - \tfrac{1}{10}\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{5}{2}\varphi \\ \quad + \tfrac{5}{18}\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{3}{2}\varphi \end{array} \right\}}{\tfrac{1}{3}\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{3}{2}\varphi - 3\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{8}{3}}.$$

Für den durch die Umdrehung der ganzen Cycloide um die Basis erzeugten Körper muß man $\varphi = 2\pi$ setzen. Dies gibt

$$X = \frac{r(6\pi - \tfrac{2}{3}\pi)}{-\tfrac{1}{3} + 3 + \tfrac{8}{3}} = \frac{r \cdot \tfrac{16}{3}\pi}{\tfrac{16}{3}} = r\pi,$$

so daß also der Schwerpunkt der Oberfläche im Mittelpunkte liegt, wie es seyn muß.

Für den durch die Umdrehung der halben Cycloide erzeugten Körper muß man $\varphi = \pi$ setzen, wodurch man erhält:

$$\begin{aligned}
X &= \frac{r(5 - \tfrac{1}{10} - \tfrac{5}{18})}{\tfrac{8}{3}} = \frac{r \cdot (\tfrac{49}{10} - \tfrac{5}{18})}{\tfrac{8}{3}} \\
&= \frac{r(\tfrac{147}{10} - \tfrac{5}{6})}{8} = \frac{r(\tfrac{441}{30} - \tfrac{25}{30})}{8} \\
&= \frac{r \cdot \tfrac{416}{30}}{8} = r \cdot \tfrac{52}{30} = r \cdot \tfrac{26}{15} = \tfrac{26}{15} r.
\end{aligned}$$

§. 143.

Eine der schwierigern Aufgaben über den Schwerpunkt ist die in dieses Kapitel gehörende Aufgabe von dem Schwerpunkte des sphärischen Dreyecks. Zwey berühmte Mathematiker, Kramp und L'Huilier, haben sich mit der Auflösung derselben beschäftigt. Ersterer in der Abhandlung:

Ueber den Mittelpunkt der Schwere im sphärischen Dreyecke, von Christian Kramp; in Hindenburg's Archive der reinen und angewandten Mathematik, B. 2., Leipzig 1798, S. 296 — 307.;

Letzterer in der Abhandlung:

Détermination du centre des moyennes distances d'un triangle sphérique, par M. L'Huilier; in den Annales de Mathématiques, par Gergonne, Tom. II. p. 72. — 84. *)

Obgleich die Untersuchung, wie es der Natur der Sache nach nicht anders seyn kann, mit einigen Weitläufigkeiten verknüpft ist; so theilen wir doch die von L'Huilier gegebene Auflösung dem Wesentlichen nach hier mit, theils der Merkwürdigkeit der Resultate wegen, theils auch und vorzüglich, um zu zeigen, wie man sich in ähnlichen Fällen zu verhalten hat. Um aber dem Anfänger die Beweise zugänglich zu machen, müssen wir, um nicht auf andere Werke verweisen zu dürfen, einige analytische und trigonometrische Sätze vorausschicken, auf welche sich das Folgende gründet. Wir bemerken nur noch, daß unsre Darstellung in einigen Stücken von L'Huilier's Darstellung abweicht, und daß auch in der oben genannten Abhandlung dieses Mathematikers manche Schreib- und Druckfehler vorkommen, welche hier berichtigt worden sind.

---

*) Ich bemerke bey dem Titel dieser Abhandlung, daß der Punkt, welchen man in der Mechanik den Schwerpunkt nennt, wenn man ihn bloß in geometrischer Beziehung betrachtet, von französischen Schriftstellern das Centrum der mittlern Entfernungen genannt wird. Weitere Auseinandersetzungen hierüber gehören nicht hierher.

§. 144.

Zunächst beweisen wir einige nicht ganz allgemein bekannte, und in den wenigsten Lehrbüchern vorkommende, Formeln der sphärischen Trigonometrie.

Sind nämlich A, B, C die Winkel und a, b, c die gegenüber stehenden Seiten eines sphärischen Dreyecks; so ist nach sehr bekannten Sätzen:

$$\begin{aligned}
\text{Sin}\, b\, \text{Sin}\, c\, \text{Cos}\, A &= \text{Cos}\, a - \text{Cos}\, b\, \text{Cos}\, c,\\
\text{Sin}\, a\, \text{Sin}\, c\, \text{Cos}\, B &= \text{Cos}\, b - \text{Cos}\, a\, \text{Cos}\, c,\\
\text{Sin}\, a\, \text{Sin}\, b\, \text{Cos}\, C &= \text{Cos}\, c - \text{Cos}\, a\, \text{Cos}\, b;\\
\text{Sin}\, B\, \text{Sin}\, C\, \text{Cos}\, a &= \text{Cos}\, A + \text{Cos}\, B\, \text{Cos}\, C,\\
\text{Sin}\, A\, \text{Sin}\, C\, \text{Cos}\, b &= \text{Cos}\, B + \text{Cos}\, A\, \text{Cos}\, C,\\
\text{Sin}\, A\, \text{Sin}\, B\, \text{Cos}\, c &= \text{Cos}\, C + \text{Cos}\, A\, \text{Cos}\, B.
\end{aligned}$$

Ein Beweis der ersten drey Gleichungen ist in §. 19. gegeben worden; die andern drey Gleichungen folgen aus den ersten leicht auf folgende Art. Substituirt man nämlich den Werth von $\text{Cos}\, a$ aus der ersten Gleichung für $\text{Cos}\, a$ in der zweyten und dritten Gleichung; so erhält man:

$$\begin{aligned}
\text{Sin}\, a\, \text{Sin}\, c\, \text{Cos}\, B &= \text{Cos}\, b - \text{Cos}\, b\, \text{Cos}\, c^2 - \text{Sin}\, b\, \text{Sin}\, c\, \text{Cos}\, c\, \text{Cos}\, A,\\
\text{Sin}\, a\, \text{Sin}\, b\, \text{Cos}\, C &= \text{Cos}\, c - \text{Cos}\, b^2\, \text{Cos}\, c - \text{Sin}\, b\, \text{Cos}\, b\, \text{Sin}\, c\, \text{Cos}\, A,
\end{aligned}$$

oder, wenn $\text{Sin}\, c^2$ und $\text{Sin}\, b^2$ für $1 - \text{Cos}\, c^2$ und $1 - \text{Cos}\, b^2$ gesetzt wird:

$$\begin{aligned}
\text{Sin}\, a\, \text{Sin}\, c\, \text{Cos}\, B &= \text{Cos}\, b\, \text{Sin}\, c^2 - \text{Sin}\, b\, \text{Sin}\, c\, \text{Cos}\, c\, \text{Cos}\, A,\\
\text{Sin}\, a\, \text{Sin}\, b\, \text{Cos}\, C &= \text{Sin}\, b^2\, \text{Cos}\, c - \text{Sin}\, b\, \text{Cos}\, b\, \text{Sin}\, c\, \text{Cos}\, A,
\end{aligned}$$

d. i.

$$\begin{aligned}
\text{Sin}\, a\, \text{Cos}\, B &= \text{Cos}\, b\, \text{Sin}\, c - \text{Sin}\, b\, \text{Cos}\, c\, \text{Cos}\, A,\\
\text{Sin}\, a\, \text{Cos}\, C &= \text{Sin}\, b\, \text{Cos}\, c - \text{Cos}\, b\, \text{Sin}\, c\, \text{Cos}\, A.
\end{aligned}$$

Multiplicirt man nun die zweyte Gleichung mit $\text{Cos}\, A$, addirt sie zur ersten, setzt $1 - \text{Sin}\, A^2$ für $\text{Cos}\, A^2$, und hebt auf, was sich aufheben läßt; so erhält man

$$\text{Sin}\, a\, (\text{Cos}\, B + \text{Cos}\, A\, \text{Cos}\, C) = \text{Cos}\, b\, \text{Sin}\, c\, \text{Sin}\, A^2.$$

Da sich aber in jedem sphärischen Triangel die Sinus der Seiten wie die Sinus der gegenüber stehenden Winkel verhalten; so ist

$$\operatorname{Sin} A : \operatorname{Sin} C = \operatorname{Sin} a : \operatorname{Sin} c,$$
$$\operatorname{Sin} c \operatorname{Sin} A = \operatorname{Sin} a \operatorname{Sin} C,$$

und folglich

$$\operatorname{Sin} a (\operatorname{Cos} B + \operatorname{Cos} A \operatorname{Cos} C) = \operatorname{Cos} b \operatorname{Sin} a \operatorname{Sin} A \operatorname{Sin} C,$$
$$\operatorname{Cos} B + \operatorname{Cos} A \operatorname{Cos} C = \operatorname{Cos} b \operatorname{Sin} A \operatorname{Sin} C,$$

woraus man durch gehörige Verwechselung der Buchstaben leicht die drey letzten Gleichungen erhält.

Daß man die drey letzten Gleichungen auch mittelst des sogenannten Complementar-Dreyecks aus den ersten ableiten kann, ist bekannt genug.

Man hat also nach der ersten und dritten Gleichung

$$\operatorname{Sin} b \operatorname{Sin} c \operatorname{Cos} A = \operatorname{Cos} a - \operatorname{Cos} a \operatorname{Cos} b^2 - \operatorname{Sin} a \operatorname{Sin} b \operatorname{Cos} b \operatorname{Cos} C$$
$$= \operatorname{Cos} a \operatorname{Sin} b^2 - \operatorname{Sin} a \operatorname{Sin} b \operatorname{Cos} b \operatorname{Cos} C,$$

woraus, so wie denn ferner durch bloße Verwechselung der Buchstaben, folgt:

$$\operatorname{Sin} c \operatorname{Cos} A = \operatorname{Cos} a \operatorname{Sin} b - \operatorname{Sin} a \operatorname{Cos} b \operatorname{Cos} C,$$
$$\operatorname{Sin} c \operatorname{Cos} B = \operatorname{Sin} a \operatorname{Cos} b - \operatorname{Cos} a \operatorname{Sin} b \operatorname{Cos} C,$$
$$\operatorname{Sin} C \operatorname{Cos} a = \operatorname{Cos} A \operatorname{Sin} B + \operatorname{Sin} A \operatorname{Cos} B \operatorname{Cos} c,$$
$$\operatorname{Sin} C \operatorname{Cos} b = \operatorname{Sin} A \operatorname{Cos} B + \operatorname{Cos} A \operatorname{Sin} B \operatorname{Cos} c.$$

Also durch Addition und Subtraction:

$$\operatorname{Sin} c (\operatorname{Cos} B + \operatorname{Cos} A) = \operatorname{Sin}(a+b) - \operatorname{Sin}(a+b) \operatorname{Cos} C,$$
$$\operatorname{Sin} c (\operatorname{Cos} B - \operatorname{Cos} A) = \operatorname{Sin}(a-b) + \operatorname{Sin}(a-b) \operatorname{Cos} C,$$
$$\operatorname{Sin} C (\operatorname{Cos} b + \operatorname{Cos} a) = \operatorname{Sin}(A+B) + \operatorname{Sin}(A+B) \operatorname{Cos} c,$$
$$\operatorname{Sin} C (\operatorname{Cos} b - \operatorname{Cos} a) = \operatorname{Sin}(A-B) - \operatorname{Sin}(A-B) \operatorname{Cos} c;$$

$$\operatorname{Sin} c (\operatorname{Cos} B + \operatorname{Cos} A) = (1 - \operatorname{Cos} C) \operatorname{Sin}(a+b),$$
$$\operatorname{Sin} c (\operatorname{Cos} B - \operatorname{Cos} A) = (1 + \operatorname{Cos} C) \operatorname{Sin}(a-b),$$
$$\operatorname{Sin} C (\operatorname{Cos} b + \operatorname{Cos} a) = (1 + \operatorname{Cos} c) \operatorname{Sin}(A+B),$$
$$\operatorname{Sin} C (\operatorname{Cos} b - \operatorname{Cos} a) = (1 - \operatorname{Cos} c) \operatorname{Sin}(A-B);$$

$$2 \operatorname{Sin} c \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2}(A+B) \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2}(A-B) = 4 \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2} C^2 . \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2}(a+b) \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2}(a+b),$$
$$2 \operatorname{Sin} c \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2}(A+B) \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2}(A-B) = 4 \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2} C^2 . \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2}(a-b) \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2}(a-b),$$
$$2 \operatorname{Sin} C \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2}(a+b) \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2}(a-b) = 4 \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2} c^2 . \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2}(A+B) \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2}(A+B),$$
$$2 \operatorname{Sin} C \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2}(a+b) \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2}(a-b) = 4 \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2} c^2 . \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2}(A-B) \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2}(A-B).$$

Also durch Division:

$$\frac{\operatorname{Sin} c}{\operatorname{Sin} C} = \left\{\frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}C \,.\, \operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}c \,.\, \operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A+B)}\right\}^2 \cdot \frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b)\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(A+B)\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A-B)},$$

$$\frac{\operatorname{Sin} c}{\operatorname{Sin} C} = \left\{\frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}C \,.\, \operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}c \,.\, \operatorname{Sin}\frac{1}{2}(A+B)}\right\}^2 \cdot \frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a-b)\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(A-B)\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A+B)},$$

$$\frac{\operatorname{Sin} c}{\operatorname{Sin} C} = \left\{\frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}C \,.\, \operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}c \,.\, \operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A-B)}\right\}^2 \cdot \frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a-b)\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(A-B)\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A+B)},$$

$$\frac{\operatorname{Sin} c}{\operatorname{Sin} C} = \left\{\frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}C \,.\, \operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}c \,.\, \operatorname{Sin}\frac{1}{2}(A-B)}\right\}^2 \cdot \frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b)\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(A+B)\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A-B)}.$$

Aber nach bekannten goniometrischen Sätzen:

$$\frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b)\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(A+B)\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A-B)} = \frac{\operatorname{Sin} a + \operatorname{Sin} b}{\operatorname{Sin} A + \operatorname{Sin} B},$$

$$\frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a-b)\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(A-B)\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A+B)} = \frac{\operatorname{Sin} a - \operatorname{Sin} b}{\operatorname{Sin} A - \operatorname{Sin} B},$$

und, wie aus der sphärischen Trigonometrie bekannt:

$$\operatorname{Sin} a : \operatorname{Sin} b = \operatorname{Sin} A : \operatorname{Sin} B,$$

oder

$$\operatorname{Sin} a \pm \operatorname{Sin} b : \operatorname{Sin} A \pm \operatorname{Sin} B = \operatorname{Sin} a : \operatorname{Sin} A = \operatorname{Sin} c : \operatorname{Sin} C.$$

Also

$$\frac{\operatorname{Sin} a \pm \operatorname{Sin} b}{\operatorname{Sin} A \pm \operatorname{Sin} B} = \frac{\operatorname{Sin} c}{\operatorname{Sin} C},$$

und folglich, nach gehöriger Substitution und Division, aus den obigen vier Gleichungen:

$$1 = \left\{\frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}C \,.\, \operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}c \,.\, \operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A+B)}\right\}^2,$$

$$1 = \left\{\frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}C \,.\, \operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}c \,.\, \operatorname{Sin}\frac{1}{2}(A+B)}\right\}^2,$$

$$1 = \left\{\frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}C \,.\, \operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}c \,.\, \operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A-B)}\right\}^2,$$

$$1 = \left\{\frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}C \,.\, \operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}c \,.\, \operatorname{Sin}\frac{1}{2}(A-B}\right\}^2;$$

oder

$$\frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}c} = \frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}C},$$

$$\frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}c}=\frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}C},$$

$$\frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}c}=\frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}C},$$

$$\frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}c}=\frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}C}.$$

Diese vier höchst merkwürdigen Formeln, welche bey weitem noch nicht so allgemein bekannt sind, wie sie es verdienen, sind von Gauß (Theoria motus corporum coelestium, Hamburgi 1809, 4., p. 51.) und Delambre (Connaissance des temps, 1809, p. 445.) ungefähr zu gleicher Zeit gefunden worden. Obiger Beweis ist von Servois (Professeur de Mathématiques à Lafère) in den Annales de Mathématiques, par Gergonne, Tom. II. p. 86., gegeben.

Uns sollen diese Formeln dienen, einen Ausdruck zu beweisen, welcher nachher in Anwendung kommen wird.

Sey nämlich in einem sphärischen Dreyecke

$$A+B+C-180^\circ=S;$$

so ist

$$\operatorname{Tang}\tfrac{1}{2}S=\operatorname{Tang}(\tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}B+\tfrac{1}{2}C-90^\circ)$$

$$=\frac{\operatorname{Sin}(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}C-90^\circ)}{\operatorname{Cos}(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}C-90^\circ)}$$

$$=-\frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A+B+C)}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(A+B+C)}$$

$$=\frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(A+B)\operatorname{Sin}\frac{1}{2}C-\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A+B)\operatorname{Cos}\frac{1}{2}C}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(A+B)\operatorname{Cos}\frac{1}{2}C+\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A+B)\operatorname{Sin}\frac{1}{2}C}$$

$$=\frac{\frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}c}\operatorname{Sin}\frac{1}{2}C\operatorname{Cos}\frac{1}{2}C-\frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}c}\operatorname{Sin}\frac{1}{2}C\operatorname{Cos}\frac{1}{2}C}{\frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}c}\operatorname{Cos}\frac{1}{2}C^2+\frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}c}\operatorname{Sin}\frac{1}{2}C^2}$$

$$=\frac{\left\{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a-b)-\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a+b)\right\}\operatorname{Sin}C}{2\left\{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a-b)\operatorname{Cos}\frac{1}{2}C^2+\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a+b)\operatorname{Sin}\frac{1}{2}C^2\right\}}.$$

Da nun nach §. 19.

$$\operatorname{Sin} C = \frac{2\sqrt{\operatorname{Sin}\frac{a+b+c}{2}.\operatorname{Sin}\frac{b+c-a}{2}.\operatorname{Sin}\frac{a+c-b}{2}.\operatorname{Sin}\frac{a+b-c}{2}}}{\operatorname{Sin} a \operatorname{Sin} b}$$

$$= \frac{2\sqrt{L}}{\operatorname{Sin} a \operatorname{Sin} b}$$

ist, wenn man das Product unter dem Wurzelzeichen durch L bezeichnet; so ist

$$\operatorname{Tg}\tfrac{1}{2}S = \frac{\{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a-b) - \operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a+b)\}\sqrt{L}}{\operatorname{Sin} a \operatorname{Sin} b\{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a-b)\operatorname{Cos}\frac{1}{2}C^2 + \operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a+b)\operatorname{Sin}\frac{1}{2}C^2\}}$$

$$= \frac{\{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a-b) - \operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a+b)\}\sqrt{L}}{\operatorname{Sin} a \operatorname{Sin} b\{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a-b) - [\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a-b) - \operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a+b)]\operatorname{Sin}\frac{1}{2}C^2\}}.$$

Aber

$$2\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}C^2 = 1 - \operatorname{Cos} C = 1 - \frac{\operatorname{Cos} c - \operatorname{Cos} a \operatorname{Cos} b}{\operatorname{Sin} a \operatorname{Sin} b}$$

$$= \frac{\operatorname{Sin} a \operatorname{Sin} b + \operatorname{Cos} a \operatorname{Cos} b - \operatorname{Cos} c}{\operatorname{Sin} a \operatorname{Sin} b}$$

$$= \frac{\operatorname{Cos}(a-b) - \operatorname{Cos} c}{\operatorname{Sin} a \operatorname{Sin} b}.$$

Also $\mathrm{Tg}\frac{1}{2}S =$

$$= \frac{\left\{\mathrm{Cos}\frac{1}{2}(a-b) - \mathrm{Cos}\frac{1}{2}(a+b)\right\}\sqrt{L}}{\mathrm{Sin}\,a\,\mathrm{Sin}\,b\,\mathrm{Cos}\frac{1}{2}(a-b) - \frac{1}{2}\left\{\mathrm{Cos}\frac{1}{2}(a-b) - \mathrm{Cos}\frac{1}{2}(a+b)\right\}\left\{\mathrm{Cos}(a-b) - \mathrm{Cos}\,c\right\}}$$

$$= \frac{2\,\mathrm{Sin}\frac{1}{2}a\,\mathrm{Sin}\frac{1}{2}b\sqrt{L}}{4\,\mathrm{Sin}\frac{1}{2}a\,\mathrm{Sin}\frac{1}{2}b\,\mathrm{Cos}\frac{1}{2}a\,\mathrm{Cos}\frac{1}{2}b\,\mathrm{Cos}\frac{1}{2}(a-b) - \mathrm{Sin}\frac{1}{2}a\,\mathrm{Sin}\frac{1}{2}b\left\{\mathrm{Cos}(a-b) - \mathrm{Cos}\,c\right\}}$$

$$= \frac{2\sqrt{L}}{4\,\mathrm{Cos}\frac{1}{2}a\,\mathrm{Cos}\frac{1}{2}b\,\mathrm{Cos}\frac{1}{2}(a-b) - \mathrm{Cos}(a-b) + \mathrm{Cos}\,c}.$$

Der Nenner ist aber

$$= \begin{cases} 4\,\mathrm{Cos}\frac{1}{2}a^2 . \mathrm{Cos}\frac{1}{2}b^2 + 4\,\mathrm{Cos}\frac{1}{2}a\,\mathrm{Cos}\frac{1}{2}b\,\mathrm{Sin}\frac{1}{2}a\,\mathrm{Sin}\frac{1}{2}b \\ \quad - \mathrm{Cos}\,a\,\mathrm{Cos}\,b - \mathrm{Sin}\,a\,\mathrm{Sin}\,b + \mathrm{Cos}\,c \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 4\,\mathrm{Cos}\frac{1}{2}a^2 . \mathrm{Cos}\frac{1}{2}b^2 + \mathrm{Sin}\,a\,\mathrm{Sin}\,b - \mathrm{Cos}\,a\,\mathrm{Cos}\,b \\ \qquad\qquad - \mathrm{Sin}\,a\,\mathrm{Sin}\,b + \mathrm{Cos}\,c \end{cases}$$

$$= (1 + \mathrm{Cos}\,a)(1 + \mathrm{Cos}\,b) - \mathrm{Cos}\,a\,\mathrm{Cos}\,b + \mathrm{Cos}\,c$$

$$= 1 + \mathrm{Cos}\,a + \mathrm{Cos}\,b + \mathrm{Cos}\,a\,\mathrm{Cos}\,b - \mathrm{Cos}\,a\,\mathrm{Cos}\,b + \mathrm{Cos}\,c$$

$$= 1 + \mathrm{Cos}\,a + \mathrm{Cos}\,b + \mathrm{Cos}\,c,$$

woraus sich nun folgende merkwürdige Formel ergibt:

$$\mathrm{Tg}\frac{1}{2}S = \frac{2\sqrt{L}}{1 + \mathrm{Cos}\,a + \mathrm{Cos}\,b + \mathrm{Cos}\,c}.$$

Hieraus folgt ferner

$$\frac{\mathrm{Sin}\frac{1}{2}S}{\mathrm{Cos}\frac{1}{2}S} = \frac{2\sqrt{L}}{1 + \mathrm{Cos}\,a + \mathrm{Cos}\,b + \mathrm{Cos}\,c},$$

$$2\sqrt{L} = \frac{\mathrm{Sin}\frac{1}{2}S(1 + \mathrm{Cos}\,a + \mathrm{Cos}\,b + \mathrm{Cos}\,c)}{\mathrm{Cos}\frac{1}{2}S}.$$

Aber nach dem Obigen

$$\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}S = \mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(A+B)\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}C + \mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(A+B)\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}C$$

$$= \frac{\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(a-b)\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}C^2 + \mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(a+b)\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}C^2}{\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}c}.$$

Der Zähler ist =

$$= \mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(a-b) - \left\{\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(a-b) - \mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(a+b)\right\}\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}C^2$$

$$= \mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(a-b) - 2\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}a\,.\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}b\,.\,\frac{\mathrm{Cos}\,(a-b) - \mathrm{Cos}\,c}{2\,\mathrm{Sin}\,a\,\mathrm{Sin}\,b}$$

$$= \mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(a-b) - \frac{\mathrm{Cos}\,(a-b) - \mathrm{Cos}\,c}{4\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}b}$$

$$= \frac{4\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}b\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(a-b) - \mathrm{Cos}\,(a-b) + \mathrm{Cos}\,c}{4\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}b}$$

$$= \frac{1 + \mathrm{Cos}\,a + \mathrm{Cos}\,b + \mathrm{Cos}\,c}{4\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}b},$$

nach dem vorher Bewiesenen.

Folglich

$$2\sqrt{L} = \frac{\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}S\,(1 + \mathrm{Cos}\,a + \mathrm{Cos}\,b + \mathrm{Cos}\,c)\,.\,4\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}b\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}c}{1 + \mathrm{Cos}\,a + \mathrm{Cos}\,b + \mathrm{Cos}\,c},$$

$$2\sqrt{L} = 4\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}S\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}b\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}c,$$

oder

$$\sqrt{L} = 2\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}S\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}b\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}c;$$

ein ebenfalls sehr merkwürdiger Ausdruck, der nachher auch seine Anwendung finden wird.

Der Merkwürdigkeit wegen füge ich noch eine elegante, von L'Huilier gefundene, Formel bey, deren Deduction leicht ist. Es ist nämlich

$$\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}S = \frac{\sqrt{L}}{2\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}b\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}c},$$

$$\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}S = \frac{\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}S\,(1 + \mathrm{Cos}\,a + \mathrm{Cos}\,b + \mathrm{Cos}\,c)}{2\sqrt{L}}$$

$$= \frac{1 + \mathrm{Cos}\,a + \mathrm{Cos}\,b + \mathrm{Cos}\,c}{4\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}b\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}c}.$$

$$=\frac{1+2\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}a^2-1+2\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}b^2-1+2\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}c^2-1}{4\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}b\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}c}$$

$$=\frac{2\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}a^2+2\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}b^2+2\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}c^2-2}{4\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}b\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}c}$$

$$=\frac{\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}a^2+\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}b^2+\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}c^2-1}{2\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}b\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}c},$$

$$1-\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}S=\frac{1-\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}a^2-\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}b^2-\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}c^2+2\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}a\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}b\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}c}{2\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}b\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}c}$$

$$=\frac{4\mathrm{Sin}\dfrac{a+b+c}{4}\mathrm{Sin}\dfrac{b+c-a}{4}\mathrm{Sin}\dfrac{a+c-b}{4}\mathrm{Sin}\dfrac{a+b-c}{4}}{2\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}b\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}c},\text{ (f. S. 60.)}$$

$$\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}S=\frac{\sqrt{\mathrm{Sin}\dfrac{a+b+c}{2}\mathrm{Sin}\dfrac{b+c-a}{2}\mathrm{Sin}\dfrac{a+c-b}{2}\mathrm{Sin}\dfrac{a+b-c}{2}}}{2\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}b\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}c}.$$

Nun ist

$$\mathrm{Tg}\,\tfrac{1}{4}S=\frac{\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{4}S}{\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{4}S}=\frac{\sqrt{1-\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}S}}{\sqrt{1+\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}S}}$$

$$=\frac{1-\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}S}{\sqrt{1-\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}S^2}}=\frac{1-\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}S}{\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}S},$$

d. i. also

$$\mathrm{Tg}\,\tfrac{1}{4}S=\frac{4\mathrm{Sin}\dfrac{a+b+c}{4}\mathrm{Sin}\dfrac{b+c-a}{4}\mathrm{Sin}\dfrac{a+c-b}{4}\mathrm{Sin}\dfrac{a+b-c}{4}}{\sqrt{\mathrm{Sin}\dfrac{a+b+c}{2}\mathrm{Sin}\dfrac{b+c-a}{2}\mathrm{Sin}\dfrac{a+c-b}{2}\mathrm{Sin}\dfrac{a+b-c}{2}}}.$$

Aber überhaupt

$$\frac{\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\alpha}{\sqrt{\mathrm{Sin}\,\alpha}}=\sqrt{\frac{\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\alpha^2}{2\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\alpha\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}\alpha}}=\sqrt{\tfrac{1}{2}\mathrm{Tg}\,\tfrac{1}{2}\alpha},$$

und folglich

$$\mathrm{Tg}\,\tfrac{1}{4}S=\sqrt{\mathrm{Tg}\frac{a+b+c}{4}\mathrm{Tg}\frac{b+c-a}{4}\mathrm{Tg}\frac{a+c-b}{4}\mathrm{Tg}\frac{a+b-c}{4}}.$$

Andere, als die von mir gegebenen, Beweise der hier vorgetragenen merkwürdigen Formeln s. m. in Legendre Élémens de Géométrie, édit. 11., Paris 1817, 8., p. 314. seqq.

§. 145.

Aufgabe. Sey (Fig. 85.) der Winkel $ABC = \alpha$, $BD = a$ und $BF = b$ gegeben; auf AB und BC seyen in D und F die Perpendikel DE, FE, welche sich in E schneiden, errichtet: man soll $DE = x$, $EF = y$, $BE = z$ finden.

Auflösung. Es ist

$$z = a \operatorname{Sec} \psi = b \operatorname{Sec} \varphi; \text{ d. i.}$$

$$a \operatorname{Sec}(\alpha - \varphi) = b \operatorname{Sec} \varphi,$$

$$\text{oder } \frac{a}{\operatorname{Cos}(\alpha - \varphi)} = \frac{b}{\operatorname{Cos} \varphi},$$

$$a \operatorname{Cos} \varphi = b \operatorname{Cos}(\alpha - \varphi),$$

$$a \operatorname{Cos} \varphi = b \operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Cos} \varphi + b \operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Sin} \varphi,$$

$$a = b \operatorname{Cos} \alpha + b \operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Tg} \varphi,$$

$$\operatorname{Tg} \varphi = \frac{a - b \operatorname{Cos} \alpha}{b \operatorname{Sin} \alpha}.$$

Also

$$y = b \operatorname{Tg} \varphi = \frac{a - b \operatorname{Cos} \alpha}{\operatorname{Sin} \alpha},$$

$$\text{und eben so } x = \frac{b - a \operatorname{Cos} \alpha}{\operatorname{Sin} \alpha}.$$

Folglich

$$z^2 = a^2 + x^2 = a^2 + \frac{b^2 - 2ab \operatorname{Cos} \alpha + a^2 \operatorname{Cos} \alpha^2}{\operatorname{Sin} \alpha^2}$$

$$= \frac{a^2 \operatorname{Sin} \alpha^2 + a^2 \operatorname{Cos} \alpha^2 + b^2 - 2ab \operatorname{Cos} \alpha}{\operatorname{Sin} \alpha^2}$$

$$= \frac{a^2 + b^2 - 2ab \operatorname{Cos} \alpha}{\operatorname{Sin} \alpha^2}.$$

Also

$$z = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \operatorname{Cos} \alpha}}{\operatorname{Sin} \alpha}.$$

§. 146.

Aufgabe. Den Halbmesser des um ein gegebenes Dreyeck beschriebenen Kreises zu finden.

Auflösung. Sey ABC in Fig. 86. das gegebene Dreyeck. Der Halbmesser r des gesuchten Kreises ist $= AG$, wo der Punkt G der Durchschnittspunkt der beiden auf AB und AC durch ihre Mitten errichteten Perpendikel FG und DG ist. Daher ist nach dem vorigen Paragraphen

$$r = \frac{\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \operatorname{Cos} A}}{\operatorname{Sin} A}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \operatorname{Cos} B}}{\operatorname{Sin} B}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \operatorname{Cos} C}}{\operatorname{Sin} C}.$$

Nach bekannten trigonometrischen Sätzen ist aber

$$\operatorname{Cos} A = \frac{4b^2 + 4c^2 - 4a^2}{8bc} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

$$\operatorname{Sin} A^2 = 1 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)^2$$

$$= \frac{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2}$$

$$= \frac{(2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2)}{4b^2c^2}$$

$$= \frac{\{(b+c)^2 - a^2\}\{a^2 - (b-c)^2\}}{4b^2c^2}$$

$$= \frac{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}{4b^2c^2},$$

$$\operatorname{Sin} A = \frac{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}}{2bc},$$

$$b^2 + c^2 - 2bc \operatorname{Cos} A = b^2 + c^2 - b^2 - c^2 + a^2 = a^2.$$

Also

$$r = \frac{2abc}{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}}.$$

§. 147.

Aufgabe. Den Halbmesser der um eine dreyseitige Pyramide beschriebenen Kugel zu finden.

Auflösung. Es ist klar, daß der Mittelpunkt der um die Pyramide beschriebenen Kugel in jedem der vier Perpendikel liegen muß, welche sich auf die vier Seitenflächen der Pyramide durch die Mittelpunkte der um dieselben beschriebenen Kreise errichten lassen. Ist nun ADB in Fig. 87. a. die eine Seitenfläche; so ist, wenn die drey von D auslaufenden Kanten durch $2x$, $2y$, $2z$ bezeichnet werden, F der Mittelpunkt des um ADB beschriebenen Kreises ist, und die drey an D anliegenden Winkel der Seitenflächen durch a, b, c bezeichnet werden, nach §. 145.:

$$DF^2 = \frac{x^2 + y^2 - 2xy \operatorname{Cos} c}{\operatorname{Sin} c^2},$$

$$FG = \frac{x - y \operatorname{Cos} c}{\operatorname{Sin} c}.$$

Sey jetzt ferner BDC in Fig. 87. b. die dem Winkel A gegenüber liegende Seitenfläche der Pyramide; so ist $GH = \frac{z - y \operatorname{Cos} a}{\operatorname{Sin} a}$.

Da nun der Mittelpunkt der gesuchten Kugel der Durchschnittspunkt der beiden auf ADB und BDC durch F und H errichteten Perpendikel ist; so bezeichne man den an BD anliegenden Flächenwinkel der Pyramide wie gewöhnlich durch B, und die Entfernung des gesuchten Mittelpunktes von F durch v; so ist nach §. 145.:

$$v = \frac{GH - FG \,.\, \operatorname{Cos} B}{\operatorname{Sin} B}.$$

Der Zähler dieses Bruchs ist

$$= \frac{z - y \operatorname{Cos} a}{\operatorname{Sin} a} - \frac{(x - y \operatorname{Cos} c) \operatorname{Cos} B}{\operatorname{Sin} c}$$

$$= \frac{(z - y \operatorname{Cos} a) \operatorname{Sin} c - (x - y \operatorname{Cos} c) \operatorname{Sin} a \operatorname{Cos} B}{\operatorname{Sin} a \operatorname{Sin} c},$$

und folglich

$$v = \frac{(z - y \operatorname{Cos} a) \operatorname{Sin} c - (x - y \operatorname{Cos} c) \operatorname{Sin} a \operatorname{Cos} B}{\operatorname{Sin} a \operatorname{Sin} c \operatorname{Sin} B}.$$

Ist aber r der gesuchte Halbmesser; so ist offenbar

$$r^2 = FD^2 + v^2, \text{ d. i.}$$

$$r^2 = \frac{x^2 + y^2 - 2xy \operatorname{Cos} c}{\operatorname{Sin} c^2} + \frac{\{(z - y \operatorname{Cos} a) \operatorname{Sin} c - (x - y \operatorname{Cos} c) \operatorname{Sin} a \operatorname{Cos} B\}^2}{\operatorname{Sin} a^2 \operatorname{Sin} c^2 \operatorname{Sin} B^2}$$

$$= \frac{(x^2 + y^2 - 2xy \operatorname{Csc}) \operatorname{Sin} a^2 \operatorname{Sin} B^2 + \{(z - y \operatorname{Cs} a) \operatorname{Sin} c - (x - y \operatorname{Csc}) \operatorname{Sin} a \operatorname{Cs} B\}^2}{\operatorname{Sin} a^2 \operatorname{Sin} c^2 \operatorname{Sin} B^2}.$$

Also

$$r = \frac{\sqrt{(x^2 + y^2 - 2xy \operatorname{Csc}) \operatorname{Sin} a^2 \operatorname{Sin} B^2 + \{(z - y \operatorname{Cs} a) \operatorname{Sin} c - (x - y \operatorname{Csc}) \operatorname{Sin} a \operatorname{Cs} B\}^2}}{\operatorname{Sin} a \operatorname{Sin} c \operatorname{Sin} B}$$

Der Zähler von r^2 ist

$$= \left\{\begin{array}{l} (x^2 + y^2 - 2xy \operatorname{Cos} c) \operatorname{Sin} a^2 - (x^2 + y^2 - 2xy \operatorname{Cos} c) \operatorname{Sin} a^2 \operatorname{Cos} B^2 \\ + (z - y \operatorname{Cos} a)^2 \operatorname{Sin} c^2 + (x - y \operatorname{Cos} c)^2 \operatorname{Sin} a^2 \operatorname{Cos} B^2 \\ - 2 (z - y \operatorname{Cos} a)(x - y \operatorname{Cos} c) \operatorname{Sin} a \operatorname{Sin} c \operatorname{Cos} B \end{array}\right.$$

$$= \left\{\begin{array}{l} (x^2 + y^2 - 2xy \operatorname{Cos} c) \operatorname{Sin} a^2 \\ - (x^2 + y^2 - 2xy \operatorname{Cos} c - x^2 + 2xy \operatorname{Cos} c - y^2 \operatorname{Cos} c^2) \operatorname{Sin} a^2 \operatorname{Cos} B^2 \\ + (z^2 - 2zy \operatorname{Cos} a + y^2 \operatorname{Cos} a^2) \operatorname{Sin} c^2 \\ - 2 (xz - xy \operatorname{Cos} a - zy \operatorname{Cos} c + y^2 \operatorname{Cos} a \operatorname{Cos} c) \operatorname{Sin} a \operatorname{Sin} c \operatorname{Cos} B \end{array}\right.$$

$$= \left\{\begin{array}{l} (x^2 + y^2 - 2xy \operatorname{Cos} c) \operatorname{Sin} a^2 - y^2 \operatorname{Sin} a^2 \operatorname{Sin} c^2 \operatorname{Cos} B^2 \\ + (z^2 - 2zy \operatorname{Cos} a + y^2 \operatorname{Cos} a^2) \operatorname{Sin} c^2 \\ - 2 (xz - xy \operatorname{Cos} a - zy \operatorname{Cos} c + y^2 \operatorname{Cos} a \operatorname{Cos} c) \operatorname{Sin} a \operatorname{Sin} c \operatorname{Cos} B \end{array}\right.$$

$$= \begin{cases} (x^2 + y^2 - 2xy \operatorname{Cos} c) \operatorname{Sin} a^2 - y^2 (\operatorname{Cos} b - \operatorname{Cos} a \operatorname{Cos} c)^2 \quad (\text{f. S. 393.}) \\ + (z^2 - 2zy \operatorname{Cos} a + y^2 \operatorname{Cos} a^2) \operatorname{Sin} c^2 \\ - 2 (xz - xy \operatorname{Cos} a - zy \operatorname{Cos} c + y^2 \operatorname{Cos} a \operatorname{Cos} c)(\operatorname{Cos} b - \operatorname{Cos} a \operatorname{Cos} c) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} = x^2 \operatorname{Sin} a^2 &+ y^2 \operatorname{Sin} a^2 + z^2 \operatorname{Sin} c^2 - 2yz \operatorname{Cos} a \operatorname{Sin} c^2 - 2xz \operatorname{Cos} b \quad - 2xy \operatorname{Sin} a^2 \operatorname{Cos} c \\ &- y^2 \operatorname{Cos} b^2 \quad + 2yz \operatorname{Cos} b \operatorname{Cos} c + 2xz \operatorname{Cos} a \operatorname{Cos} c + 2xy \operatorname{Cos} a \operatorname{Cos} b \\ &+ 2y^2 \operatorname{Cos} a \operatorname{Cos} b \operatorname{Cos} c - 2yz \operatorname{Cos} a \operatorname{Cos} c^2 \quad - 2xy \operatorname{Cos} a^2 \operatorname{Cos} c \\ &- y^2 \operatorname{Cos} a^2 \operatorname{Cos} c^2 \\ &+ y^2 \operatorname{Cos} a^2 \operatorname{Sin} c^2 \\ &- 2y^2 \operatorname{Cos} a \operatorname{Cos} b \operatorname{Cos} c \\ &+ 2y^2 \operatorname{Cos} a^2 \operatorname{Cos} c^2 \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} x^2 \operatorname{Sin} a^2 + y^2 (\operatorname{Sin} a^2 + \operatorname{Cos} a^2 \operatorname{Cos} c^2 + \operatorname{Cos} a^2 \operatorname{Sin} c^2 - \operatorname{Cos} b^2) + z^2 \operatorname{Sin} c^2 \\ - 2yz (\operatorname{Cos} a - \operatorname{Cos} b \operatorname{Cos} c) - 2xz (\operatorname{Cos} b - \operatorname{Cos} a \operatorname{Cos} c) - 2xy (\operatorname{Cos} c - \operatorname{Cos} a \operatorname{Cos} b) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x^2 \operatorname{Sin} a^2 + y^2 (\operatorname{Sin} a^2 + \operatorname{Cos} a^2 - \operatorname{Cos} b^2) + z^2 \operatorname{Sin} c^2 \\ - 2yz (\operatorname{Cos} a - \operatorname{Cos} b \operatorname{Cos} c) - 2xz (\operatorname{Cos} b - \operatorname{Cos} a \operatorname{Cos} c) - 2xy (\operatorname{Cos} c - \operatorname{Cos} a \operatorname{Cos} b) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x^2 \operatorname{Sin} a^2 + y^2 \operatorname{Sin} b^2 + z^2 \operatorname{Sin} c^2 \\ - 2yz (\operatorname{Cos} a - \operatorname{Cos} b \operatorname{Cos} c) - 2xz (\operatorname{Cos} b - \operatorname{Cos} a \operatorname{Cos} c) - 2xy (\operatorname{Cos} c - \operatorname{Cos} a \operatorname{Cos} b), \end{cases}$$

und folglich nach §. 19.

$$= \begin{cases} x^2 \operatorname{Sin} a^2 + y^2 \operatorname{Sin} b^2 + z^2 \operatorname{Sin} c^2 \\ - 2yz \operatorname{Sin} b \operatorname{Sin} c \operatorname{Cos} A - 2xz \operatorname{Sin} a \operatorname{Sin} c \operatorname{Cos} B - 2xy \operatorname{Sin} a \operatorname{Sin} b \operatorname{Cos} C. \end{cases}$$

Demnach ist also

$$r = \frac{\sqrt{\left\{\begin{array}{l} x^2 \operatorname{Sin} a^2 + y^2 \operatorname{Sin} b^2 + z^2 \operatorname{Sin} c^2 \\ - 2yz \operatorname{Sin} b \operatorname{Sin} c \operatorname{Cos} A - 2xz \operatorname{Sin} a \operatorname{Sin} c \operatorname{Cos} B - 2xy \operatorname{Sin} a \operatorname{Sin} b \operatorname{Cos} C \end{array}\right\}}}{\operatorname{Sin} a \operatorname{Sin} c \operatorname{Sin} B}.$$

Aber bekanntlich

$$\operatorname{Sin} B = \frac{2\sqrt{L}}{\operatorname{Sin} a \operatorname{Sin} c}. \quad \text{Also } r^2 =$$

$$\frac{1}{4L}\left\{\begin{array}{l} x^2 \operatorname{Sin} a^2 + y^2 \operatorname{Sin} b^2 + z^2 \operatorname{Sin} c^2 \\ - 2yz \operatorname{Sin} b \operatorname{Sin} c \operatorname{Cos} A - 2xz \operatorname{Sin} a \operatorname{Sin} c \operatorname{Cos} B - 2xy \operatorname{Sin} a \operatorname{Sin} b \operatorname{Cos} C \end{array}\right\}.$$

Hier ist r durch neun Stücke der Pyramide ausgedrückt; sehr leicht kann man es aber auch bloß durch die sechs Stücke x, y, z, a, b, c, und durch Substitutionen, die sich aus den Sätzen der ebenen und sphärischen Trigonometrie ergeben, überhaupt immer durch solche Stücke der Pyramide, welche sie bestimmen, ausdrücken.

§. 148.

Endlich haben wir der Untersuchung über den Schwer-punkt des sphärischen Dreyecks nun noch die Integration der Formel

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{a + b \operatorname{Sin} x + c \operatorname{Cos} x}$$

vorauszuschicken, weil diese Integration auch nicht allgemein bekannt ist.

L'Huilier setzt a. a. O. $\operatorname{Sin} x = \frac{2y}{1+y^2}$; so ist

$$\operatorname{Cos} x^2 = 1 - \frac{4y^2}{(1+y^2)^2} = \frac{1 + 2y^2 + y^4 - 4y^2}{(1+y^2)^2}$$

$$= \frac{1 - 2y^2 + y^4}{(1+y^2)^2} = \frac{(1-y^2)^2}{(1+y^2)^2}.$$

Also $\operatorname{Cos} x = \frac{1-y^2}{1+y^2}$, und folglich

$$\operatorname{Sin} \tfrac{1}{2}x^2 = \frac{1 - \operatorname{Cos} x}{2} = \tfrac{1}{2}\left\{1 - \frac{1-y^2}{1+y^2}\right\}$$

$$= \tfrac{1}{2}\left\{\frac{1 + y^2 - 1 + y^2}{1+y^2}\right\} = \frac{y^2}{1+y^2},$$

$$\operatorname{Cos} \tfrac{1}{2}x^2 = \frac{1 + \operatorname{Cos} x}{2} = \tfrac{1}{2}\left\{1 + \frac{1-y^2}{1+y^2}\right\}$$

$$= \tfrac{1}{2}\left\{\frac{1 + y^2 + 1 - y^2}{1+y^2}\right\} = \frac{1}{1+y^2}.$$

Also $\operatorname{Tg} \tfrac{1}{2}x^2 = y^2$, $\operatorname{Tg} \tfrac{1}{2}x = y$.

Der Nenner des gegebenen Bruchs ist

$$= a + b \cdot \frac{2y}{1+y^2} + c \cdot \frac{1-y^2}{1+y^2}$$

$$= \frac{a(1+y^2) + 2by + c(1-y^2)}{1+y^2}$$

$$= \frac{a + c + 2by + (a-c)y^2}{1+y^2}.$$

Folglich

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1+y^2}{a + c + 2by + (a-c)y^2}.$$

Aber $d \operatorname{Sin} x = \operatorname{Cos} x\, dx = \frac{(1-y^2)\, dx}{1+y^2}$

$$= 2d\left(\frac{y}{1+y^2}\right) = 2 \cdot \frac{(1+y^2)\, dy - 2y^2 dy}{(1+y^2)^2}$$

$$= \frac{2(1-y^2)\, dy}{(1+y^2)^2}. \text{ Folglich}$$

$$dx = \frac{2dy}{1+y^2}, \text{ und demnach}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{(1+y^2)\, dz}{2dy}, \text{ oder}$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{2}{1+y^2} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{2}{a+c+2by+(a-c)y^2}.$$

Man muß nun folgende Fälle unterscheiden:

1) $c = a$.

In diesem Falle ist

$$\frac{dz}{dy} = \frac{2}{2a+2by} = \frac{1}{a+by}.$$

Setzt man nun $a + by = u$; so ist $b\,dy = du$, d. i. $dy = \frac{du}{b}$, und folglich $dz = \frac{du}{bu}$. Also, wenn man unter Log immer Logn versteht:

$$z = \frac{1}{b}\int\frac{du}{u} = \frac{1}{b}\operatorname{Log} u + C$$

$$= C + \frac{1}{b}\operatorname{Log}(a+by)$$

$$= C + \frac{1}{b}\operatorname{Log}(a + b \operatorname{Tg}\tfrac{1}{2}x)$$

$$= C + \frac{1}{b}\operatorname{Log}\left\{b\left(\frac{a}{b} + \operatorname{Tg}\tfrac{1}{2}x\right)\right\}$$

$$= C + \frac{1}{b}\operatorname{Log} b + \frac{1}{b}\operatorname{Log}\left(\frac{a}{b} + \operatorname{Tg}\tfrac{1}{2}x\right)$$

$$= \operatorname{Const} + \frac{1}{b}\operatorname{Log}\left(\frac{a}{b} + \operatorname{Tg}\tfrac{1}{2}x\right),$$

oder, wie L'Huilier a. a. O. das Integral darstellt,

$$= \text{Const} + \frac{1}{b}\text{Log}\left(\frac{a+c}{2b} + \text{Tg}\tfrac{1}{2}x\right),$$

welches dasselbe ist, weil nach der Annahme $a = c$, $a + c = 2a$, $\frac{a+c}{2b} = \frac{2a}{2b} = \frac{a}{b}$ ist.

Soll z für $x = 0$ verschwinden, so ist

$$0 = \text{Const} + \frac{1}{b}\text{Log}\frac{a}{b}, \text{ und folglich}$$

$$\text{Const} = -\frac{1}{b}\text{Log}\frac{a}{b}. \quad \text{Also}$$

$$z = \frac{1}{b}\text{Log}\left(\frac{a}{b} + \text{Tg}\tfrac{1}{2}x\right) - \frac{1}{b}\text{Log}\frac{a}{b}$$

$$= \frac{1}{b}\left\{\text{Log}\left(\frac{a}{b} + \text{Tg}\tfrac{1}{2}x\right) - \text{Log}\frac{a}{b}\right\}$$

$$= \frac{1}{b}\text{Log}\left\{\frac{\frac{a}{b} + \text{Tg}\tfrac{1}{2}x}{\frac{a}{b}}\right\}$$

$$= \frac{1}{b}\text{Log}\left(1 + \frac{b}{a}\text{Tg}\tfrac{1}{2}x\right),$$

oder, wie bey L'Huilier a. a. O.,

$$= \frac{1}{b}\text{Log}\left(1 + \frac{2b}{a+c}\text{Tg}\tfrac{1}{2}x\right),$$

welches dasselbe ist, wie leicht wie vorher erhellet.

2) $c > a$.

In diesem Falle ist

$$\frac{dz}{dy} = 2 \cdot \frac{1}{c + a + 2by - (c-a)y^2}$$

$$= \frac{2}{c-a} \cdot \frac{1}{\frac{c+a}{c-a} + \frac{2by}{c-a} - y^2}$$

$$=\frac{2}{c-a}\cdot\frac{1}{\frac{c+a}{c-a}+\frac{b^2}{(c-a)^2}-\frac{b^2}{(c-a)^2}+\frac{2by}{c-a}-y^2}$$

$$=\frac{2}{c-a}\cdot\frac{1}{\frac{c+a}{c-a}+\frac{b^2}{(c-a)^2}-\left\{\frac{b^2}{(c-a)^2}-\frac{2by}{c-a}+y^2\right\}}$$

$$=\frac{2}{c-a}\cdot\frac{1}{\left\{\frac{c+a}{c-a}+\frac{b^2}{(c-a)^2}\right\}-\left\{\frac{b}{c-a}-y\right\}^2}$$

$$=\frac{2}{c-a}\cdot\frac{1}{\frac{c^2-a^2+b^2}{(c-a)^2}-\left\{\frac{b}{c-a}-y\right\}^2}$$

$$=\frac{2}{c-a}\cdot\frac{1}{\left\{\frac{\sqrt{c^2-a^2+b^2}}{c-a}-\frac{b}{c-a}+y\right\}\left\{\frac{\sqrt{c^2-a^2+b^2}}{c-a}+\frac{b}{c-a}-y\right\}}$$

$$=\frac{2}{c-a}\cdot\frac{1}{\left\{\frac{\sqrt{c^2-a^2+b^2}-b}{c-a}+y\right\}\left\{\frac{\sqrt{c^2-a^2+b^2}+b}{c-a}-y\right\}}$$

$$=\frac{2}{c-a}\cdot\frac{1}{(A+y)(B-y)}.$$

Sey nun

$$\frac{1}{(A+y)(B-y)}=\frac{\mathfrak{A}}{A+y}+\frac{\mathfrak{B}}{B-y}$$

$$=\frac{\mathfrak{A}B-\mathfrak{A}y+\mathfrak{B}A+\mathfrak{B}y}{(A+y)(B-y)}$$

$$=\frac{\mathfrak{A}B+\mathfrak{B}A-(\mathfrak{A}-\mathfrak{B})y}{(A+y)(B-y)};$$

$$\mathfrak{A}B+\mathfrak{B}A=1,\quad \mathfrak{A}-\mathfrak{B}=0,\quad \mathfrak{A}=\mathfrak{B};$$

$$\mathfrak{A}B+\mathfrak{A}A=1=\mathfrak{A}(A+B);$$

$$\mathfrak{A}=\mathfrak{B}=\frac{1}{A+B};\ \text{und folglich}$$

$$\frac{1}{(A+y)(B-y)}=\frac{1}{(A+B)(A+y)}+\frac{1}{(A+B)(B-y)}.$$

Aber

$$A + B = \frac{\sqrt{c^2 - a^2 + b^2} - b}{c - a} + \frac{\sqrt{c^2 - a^2 + b^2} + b}{c - a}$$

$$= \frac{2\sqrt{c^2 - a^2 + b^2}}{c - a}.$$

Also

$$\frac{dz}{dy} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{c-a} \cdot \frac{c-a}{2\sqrt{c^2-a^2+b^2}} \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{c^2-a^2+b^2}-b}{c-a}+y} \\ + \frac{2}{c-a} \cdot \frac{c-a}{2\sqrt{c^2-a^2+b^2}} \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{c^2-a^2+b^2}+b}{c-a}-y} \end{array} \right.$$

$$= \frac{1}{\sqrt{c^2-a^2+b^2}} \left\{ \frac{1}{\frac{\sqrt{c^2-a^2+b^2}-b}{c-a}+y} + \frac{1}{\frac{\sqrt{c^2-a^2+b^2}+b}{c-a}-y} \right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{c^2-a^2+b^2}} \left\{ \frac{1}{A+y} + \frac{1}{B-y} \right\},$$

$$dz = \frac{1}{\sqrt{c^2-a^2+b^2}} \left\{ \frac{dy}{A+y} + \frac{dy}{B-y} \right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{c^2-a^2+b^2}} \left\{ \frac{du}{u} - \frac{dv}{v} \right\},$$

für $A + y = u$ und $B - y = v$;

$$z = \frac{1}{\sqrt{c^2 - a^2 + b^2}} (\operatorname{Log} u - \operatorname{Log} v) + C$$

$$= C + \frac{1}{\sqrt{c^2 - a^2 + b^2}} \left\{ \operatorname{Log}\left(\frac{\sqrt{c^2 - a^2 + b^2} - b}{c - a} + y \right) - \operatorname{Log}\left(\frac{\sqrt{c^2 - a^2 + b^2} + b}{c - a} - y \right) \right\}$$

$$= C + \frac{1}{\sqrt{c^2 - a^2 + b^2}} \operatorname{Log} \frac{\sqrt{c^2 - a^2 + b^2} - b + (c - a) y}{\sqrt{c^2 - a^2 + b^2} + b - (c - a) y}$$

$$= C + \frac{1}{\sqrt{c^2 - a^2 + b^2}} \operatorname{Log} \frac{\sqrt{c^2 - a^2 + b^2} - b + (c - a) \operatorname{Tg} \tfrac{1}{2} x}{\sqrt{c^2 - a^2 + b^2} + b - (c - a) \operatorname{Tg} \tfrac{1}{2} x}.$$

Soll $z = o$ werden, für $x = o$; so ist

$$o = C + \frac{1}{\sqrt{c^2 - a^2 + b^2}} \operatorname{Log} \frac{\sqrt{c^2 - a^2 + b^2} - b}{\sqrt{c^2 - a^2 + b^2} + b}, \text{ d. i.}$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{c^2 - a^2 + b^2}} \left\{ \operatorname{Log} \frac{\sqrt{c^2 - a^2 + b^2} - b + (c - a) \operatorname{Tg} \tfrac{1}{2} x}{\sqrt{c^2 - a^2 + b^2} + b - (c - a) \operatorname{Tg} \tfrac{1}{2} x} - \operatorname{Log} \frac{\sqrt{c^2 - a^2 + b^2} - b}{\sqrt{c^2 - a^2 + b^2} + b} \right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{c^2 - a^2 + b^2}} \operatorname{Log} \frac{(\sqrt{c^2 - a^2 + b^2} + b)(\sqrt{c^2 - a^2 + b^2} - b + (c - a) \operatorname{Tg} \tfrac{1}{2} x)}{(\sqrt{c^2 - a^2 + b^2} - b)(\sqrt{c^2 - a^2 + b^2} + b - (c - a) \operatorname{Tg} \tfrac{1}{2} x)}.$$

L'Huilier findet a. a. O. S. 74. einen andern Werth dieses Integrals, welches aber von einem Rechnungsfehler, welcher sich fortgepflanzt hat, herrührt. Unsre obige Rechnung wird wohl fehlerfrey seyn.

3) $c < a$.

$$\frac{dz}{dy} = \frac{2}{a + c + 2by + (a - c)y^2}$$

$$= \frac{2}{a - c} \cdot \frac{1}{\frac{a + c}{a - c} + \frac{2by}{a - c} + y^2}$$

$$= \frac{2}{a - c} \cdot \frac{1}{\frac{a + c}{a - c} - \frac{b^2}{(a - c)^2} + \frac{b^2}{(a - c)^2} + \frac{2by}{a - c} + y^2}$$

$$= \frac{2}{a - c} \cdot \frac{1}{\left\{\frac{a + c}{a - c} - \frac{b^2}{(a - c)^2}\right\} + \left\{\frac{b}{a - c} + y\right\}^2}$$

$$= \frac{2}{a - c} \cdot \frac{1}{\frac{a^2 - b^2 - c^2}{(a - c)^2} + \left\{\frac{b}{a - c} + y\right\}^2}$$

$$= \frac{2(a - c)}{a^2 - b^2 - c^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{(a - c)^2}{a^2 - b^2 - c^2}\left\{\frac{b}{a - c} + y\right\}^2}$$

$$= \frac{2(a - c)}{a^2 - b^2 - c^2} \cdot \frac{1}{1 + \left\{\frac{a - c}{\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}}\left(\frac{b}{a - c} + y\right)\right\}^2}$$

$$= \frac{2(a - c)}{a^2 - b^2 - c^2} \cdot \frac{1}{1 + \left\{\frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}} + \frac{(a - c)y}{\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}}\right\}^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}} \cdot \frac{\frac{a - c}{\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}}}{1 + \left\{\frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}} + \frac{(a - c)y}{\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}}\right\}^2};$$

$$z = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}} \int \frac{\frac{(a-c)\,dy}{\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}}}{1 + \left\{\frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}} + \frac{(a-c)y}{\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}}\right\}^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}} \int \frac{B\,dy}{1 + (A + By)^2}.$$

Sey nun $A + By = u$; so ist $Bdy = du$, und folglich

$$\frac{Bdy}{1 + (A + By)^2} = \frac{du}{1 + u^2},$$

$$\int \frac{Bdy}{1 + (A + By)^2} = \int \frac{du}{1 + u^2} = \operatorname{Arc Tg} u$$
$$= \operatorname{Arc Tg} (A + By).$$

Also

$$z = C + \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}} \operatorname{Arc Tg} \left\{\frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}} + \frac{(a-c)y}{\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}}\right\}$$

$$= C + \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}} \operatorname{Arc Tg} \frac{b + (a-c)y}{\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}}$$

$$= C + \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}} \operatorname{Arc Tg} \frac{b + (a-c)\operatorname{Tg}\frac{1}{2}x}{\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}}.$$

Soll $z = 0$ werden, für $x = 0$; so ist

$$0 = C + \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}} \operatorname{Arc Tg} \frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}},$$

und folglich

$$z = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}} \left\{\operatorname{Arc Tg} \frac{b + (a-c)\operatorname{Tg}\frac{1}{2}x}{\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}} - \operatorname{Arc Tg} \frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}}\right\}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}} \operatorname{Arc Tg} X.$$

Aber nach bekannten trigonometrischen Formeln

$$X = \frac{\frac{b + (a-c)\operatorname{Tg}\frac{1}{2}x}{\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}} - \frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}}}{1 + \frac{b + (a-c)\operatorname{Tg}\frac{1}{2}x}{\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}} \cdot \frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}}}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2-b^2-c^2}\,.\,(a-c)\operatorname{Tg}\frac{1}{2}x}{a^2-b^2-c^2+b\left\{b+(a-c)\operatorname{Tg}\frac{1}{2}x\right\}}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2-b^2-c^2}\,.\,(a-c)\operatorname{Tg}\frac{1}{2}x}{a^2-c^2+b(a-c)\operatorname{Tg}\frac{1}{2}x}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2-b^2-c^2}\,.\,(a-c)\operatorname{Tg}\frac{1}{2}x}{(a-c)(a+c)+b(a-c)\operatorname{Tg}\frac{1}{2}x}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2-b^2-c^2}\,.\operatorname{Tg}\frac{1}{2}x}{a+c+b\operatorname{Tg}\frac{1}{2}x},$$

und folglich endlich

$$z = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}}\operatorname{ArcTg}\frac{\sqrt{a^2-b^2-c^2}\,.\operatorname{Tg}\frac{1}{2}x}{a+c+b\operatorname{Tg}\frac{1}{2}x},$$

ganz wie bey L'Huilier a. a. O. S. 73. u. 76.

§. 149.

Sey nun ABC (Fig. 88.) ein Stück der Oberfläche einer Kugel, welches von zwey gleichen Bögen AB, AC größter Kugelkreise, und dem Bogen BC eines kleinen Kugelkreises, dessen Pol also der Punkt A ist, eingeschlossen wird. Um die Entfernung des Schwerpunktes von BAC von der die Kugel in A tangirenden Ebene zu finden, nehme man an, diese Entfernung sey $= X$, und das Verhältniß von BAC zu dem ganzen entsprechenden Kugelsegment sey $= m : n$. Das Stück ABC sey $= s$ und das ganze Segment $= S$, so daß also $s : S = m : n$. Ferner sey σ ein Segment, durch welches s und S gemessen werden, so daß also $s = m\sigma$ und $S = n\sigma$ ist. Die Entfernung der Ebene des Bogens BC von A sey $= x$, und die Entfernungen der Schwerpunkte des ganzen Segments S und jedes der Segmente σ von der die Kugel in A tangirenden Ebene seyen X' und k; so ist bekanntlich

$$\overset{(1)}{k}\sigma + \overset{(2)}{k}\sigma + \overset{(3)}{k}\sigma + \ldots + \overset{(n)}{k}\sigma = SX',$$

$$\overset{(1)}{k}\sigma + \overset{(2)}{k}\sigma + \overset{(3)}{k}\sigma + \ldots + \overset{(m)}{k}\sigma = sX.$$

Also

$$n \cdot k\sigma = k \cdot n\sigma = kS = SX',$$

$$m \cdot k\sigma = k \cdot m\sigma = ks = sX.$$

Folglich $k = X'$ und auch $k = X$. Also $X = X'$.

Nun ist aber die Gleichung der erzeugenden Curve des Segments S:

$$y^2 = 2rx - x^2,$$

wenn r den Halbmesser der Kugel bezeichnet. Also

$$y\,dy = r\,dx - x\,dx = (r - x)\,dx,$$

$$dy = \frac{(r-x)\,dx}{y},$$

$$dx^2 + dy^2 = dx^2 + \frac{(r-x)^2\,dx^2}{y^2}$$

$$= \frac{[y^2 + (r-x)^2]\,dx^2}{y^2}$$

$$= \frac{(2rx - x^2 + r^2 - 2rx + x^2)\,dx^2}{y^2}$$

$$= \frac{r^2\,dx^2}{y^2},$$

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{r\,dx}{y},$$

$$y\sqrt{dx^2 + dy^2} = r\,dx,$$

$$\int y\sqrt{dx^2 + dy^2} = rx,$$

$$xy\sqrt{dx^2 + dy^2} = rx\,dx,$$

$$\int xy\sqrt{dx^2 + dy^2} = r\int x\,dx = \tfrac{1}{2}rx^2;$$

die Integrale so bestimmt, daß sie für $x = 0$ verschwinden. Folglich nach §. 141.:

$$X' = X = \frac{rx^2}{2rx} = \tfrac{1}{2}x.$$

Ist nun $AB = AC = \alpha$; so ist offenbar $x = r - r\,\mathrm{Cos}\,\alpha$, d. i.

$$X = \tfrac{1}{2}(r - r\,\mathrm{Cos}\,\alpha) = \tfrac{1}{2}r(1 - \mathrm{Cos}\,\alpha)$$

$$= \tfrac{1}{2}r \cdot 2\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\alpha^2 = r\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\alpha^2.$$

Da nun aber bekanntlich

$$S = 2\pi \int y \sqrt{dx^2 + dy^2} = 2r\pi x$$

ist; so ist, wenn β den dem Winkel bey A entsprechenden Bogen eines größten Kreises bezeichnet, offenbar

$$s : S = \beta : 2r\pi = s : 2r\pi x. \quad \text{Also}$$

$$s = \frac{2\beta r\pi x}{2r\pi} = \beta x,$$

und folglich das Moment von ABC in Beziehung auf die die Kugel in A tangirende Ebene

$$= \tfrac{1}{2}x \,.\, \beta x = \tfrac{1}{2}\beta x^2$$
$$= \tfrac{1}{2}\beta \,.\, 4r^2 \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}\alpha^4$$
$$= 2\beta r^2 \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}\alpha^4.$$

§. 150.

ABC in Fig. 89. sey irgend ein sphärischer Triangel. Um sein Moment in Beziehung auf die die Kugel in A tangirende Ebene zu finden, lasse man die Seite $BC = a$ um den Bogen CC' wachsen, und denke sich durch C einen kleinen Kugelkreis gelegt, dessen Pol A ist, und welcher den verlängerten Bogen AC' in D schneide. Das Moment von ACD ist nach §. 149.

$$= 2\beta r^2 \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}b^4,$$

wenn β den dem Winkel CAD entsprechenden und zu dem Halbmesser r gehörenden Bogen bezeichnet.

Leicht erhellet nun, daß der Halbmesser des Bogens $CD = r \operatorname{Sin} b$, und folglich

$$CD : \beta = r \operatorname{Sin} b : r = \operatorname{Sin} b : 1, \text{ d. i. } \beta = \frac{CD}{\operatorname{Sin} b},$$

und folglich obiges Moment $= 2r^2 \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}b^4 \,.\, \dfrac{CD}{\operatorname{Sin} b}$ ist. Je kleiner aber CC' ist, mit desto mehr Genauigkeit kann man $CC'D$ als ein ebenes Dreyeck betrachten, und desto genauer ist

$$CD = CC' \,.\, \operatorname{Sin} CC'D = CC' \,.\, \operatorname{Sin} C',$$

für $C' = AC'C$. Also das Moment

$$= 2r^2 \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}b^4 . \frac{CC' . \operatorname{Sin} C'}{\operatorname{Sin} b}$$

$$= 2r^2 \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}b^4 . \frac{\operatorname{Sin} b \operatorname{Sin} C'}{\operatorname{Sin} b^2} . CC',$$

desto genauer, je kleiner CC'.

Es ist aber klar, daß die Winkel $ACB = C$ und $AC'B = C'$ nur sehr wenig von einander unterschieden seyn können, und zwar desto weniger, je kleiner CC' ist. Daher ist desto genauer, je kleiner CC' ist, obiges Moment

$$= 2r^2 \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}b^4 . \frac{\operatorname{Sin} b \operatorname{Sin} C}{\operatorname{Sin} b^2} . CC'.$$

Aber bekanntlich

$$\operatorname{Sin} b : \operatorname{Sin} c = \operatorname{Sin} B : \operatorname{Sin} C, \text{ d. i.}$$
$$\operatorname{Sin} b \operatorname{Sin} C = \operatorname{Sin} c \operatorname{Sin} B,$$

und folglich das Moment

$$= 2r^2 \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}b^4 . \frac{\operatorname{Sin} c \operatorname{Sin} B}{\operatorname{Sin} b^2} . CC',$$

desto genauer, je kleiner CC' ist. Also, immer mit diesem Zusatze, das Moment

$$= 2r^2 . \frac{\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}b^4}{\operatorname{Sin} b^2} . \operatorname{Sin} B \operatorname{Sin} c . CC'$$

$$= 2r^2 . \frac{\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}b^4}{4 \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}b^2 \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}b^2} . \operatorname{Sin} B \operatorname{Sin} c . CC'$$

$$= \tfrac{1}{2}r^2 . \frac{\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}b^2}{\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}b^2} . \operatorname{Sin} B \operatorname{Sin} c . CC'$$

$$= \tfrac{1}{2}r^2 \operatorname{Tg}\tfrac{1}{2}b^2 . \operatorname{Sin} B \operatorname{Sin} c . CC'$$

$$= \tfrac{1}{2}r^2 . \frac{1 - \operatorname{Cos} b}{1 + \operatorname{Cos} b} . \operatorname{Sin} B \operatorname{Sin} c . CC'$$

$$= \tfrac{1}{2}r^2 \operatorname{Sin} B \operatorname{Sin} c \left(\frac{2}{1 + \operatorname{Cos} b} - 1\right) . CC'$$

$$= \left(\frac{r^2 \operatorname{Sin} B \operatorname{Sin} c}{1 + \operatorname{Cos} b} - \tfrac{1}{2}r^2 \operatorname{Sin} B \operatorname{Sin} c\right) . CC'.$$

Bekanntlich aber

$$\mathrm{Cos}\,b = \mathrm{Sin}\,a\,\mathrm{Sin}\,c\,\mathrm{Cos}\,B + \mathrm{Cos}\,a\,\mathrm{Cos}\,c.$$

Folglich das Moment

$$= \left(\frac{r^2\,\mathrm{Sin}\,B\,\mathrm{Sin}\,c}{1 + \mathrm{Sin}\,a\,\mathrm{Sin}\,c\,\mathrm{Cos}\,B + \mathrm{Cos}\,a\,\mathrm{Cos}\,c} - \tfrac{1}{2}r^2\,\mathrm{Sin}\,B\,\mathrm{Sin}\,c\right).\,CC'$$

$$= \left(\frac{r^2\,\mathrm{Sin}\,B\,\mathrm{Sin}\,c}{1 + \mathrm{Sin}\,c\,\mathrm{Cos}\,B\,\mathrm{Sin}\,x + \mathrm{Cos}\,c\,\mathrm{Cos}\,x} - \tfrac{1}{2}r^2\,\mathrm{Sin}\,B\,\mathrm{Sin}\,c\right)dx,$$

für a, welches um CC' wuchs, $= x$, und zwar immer desto genauer, je kleiner dx ist. Der Bogen dx bezieht sich hier auf einen Kreis, dessen Halbmesser $= r$ ist; soll sich aber dx in dem ersten Theile, wie es, wegen des Folgenden, nöthig ist, auf einen Kreis beziehen, dessen Halbmesser $= 1$ ist, so muß man $r\,dx$ für dx setzen, und erhält für das Moment daher

$$= \frac{r^3\,\mathrm{Sin}\,B\,\mathrm{Sin}\,c\,dx}{1 + \mathrm{Sin}\,c\,\mathrm{Cos}\,B\,\mathrm{Sin}\,x + \mathrm{Cos}\,c\,\mathrm{Cos}\,x} - \tfrac{1}{2}r^2\,\mathrm{Sin}\,B\,\mathrm{Sin}\,c\,dx,$$

welches zugleich mit desto mehr Genauigkeit, je kleiner dx ist, das Moment von ACC' ist. Da nun der Triangel ABC in lauter Triangel wie ACC' mit lauter gleichen Grundlinien leicht getheilt werden kann; so ist sein Moment die Summe der Momente aller dieser Triangel, d. i. nach §. 108.

$$= \begin{cases} r^3\,\mathrm{Sin}\,B\,\mathrm{Sin}\,c \displaystyle\int \frac{dx}{1 + \mathrm{Sin}\,c\,\mathrm{Cos}\,B\,\mathrm{Sin}\,x + \mathrm{Cos}\,c\,\mathrm{Cos}\,x} \\ -\tfrac{1}{2}r^2 x\,\mathrm{Sin}\,B\,\mathrm{Sin}\,c; \end{cases}$$

das ganze Integral zwischen den Gränzen $x = 0$ und $x = a$ genommen.

Das noch nicht entwickelte Integral in obiger Formel zwischen diesen Gränzen ist nach §. 148.

$$= \frac{2}{\sqrt{1 - \mathrm{Sin}\,c^2\,\mathrm{Cos}\,B^2 - \mathrm{Cos}\,c^2}}\,\mathrm{ArcTg}\,\frac{\sqrt{1 - \mathrm{Sin}\,c^2\,\mathrm{Cos}\,B^2 - \mathrm{Cos}\,c^2}\,.\,\mathrm{Tg}\,\tfrac{1}{2}a}{1 + \mathrm{Cos}\,c + \mathrm{Sin}\,c\,\mathrm{Cos}\,B\,\mathrm{Tg}\,\tfrac{1}{2}a}$$

$$= \frac{2}{\mathrm{Sin}\,B\,\mathrm{Sin}\,c}\,\mathrm{Arc\,Tg}\,\frac{\mathrm{Sin}\,B\,\mathrm{Sin}\,c\,\mathrm{Tg}\,\tfrac{1}{2}a}{1 + \mathrm{Cos}\,c + \mathrm{Sin}\,c\,\mathrm{Cos}\,B\,\mathrm{Tg}\,\tfrac{1}{2}a},$$

weil $1 - \mathrm{Sin}\,c^2\,\mathrm{Cos}\,B^2 - \mathrm{Cos}\,c^2 = 1 - \mathrm{Sin}\,c^2 + \mathrm{Sin}\,c^2\,\mathrm{Sin}\,B^2 - 1 + \mathrm{Sin}\,c^2 = \mathrm{Sin}\,c^2\,\mathrm{Sin}\,B^2$ ist. Folglich das ganze Integral zwischen den obigen Gränzen, d. i. das gesuchte Moment,

$$= 2r^3 \operatorname{ArcTg} \frac{\operatorname{Sin} B \operatorname{Sin} c \operatorname{Tg} \frac{1}{2} a}{1 + \operatorname{Cos} c + \operatorname{Cos} B \operatorname{Sin} c \operatorname{Tg} \frac{1}{2} a} - \tfrac{1}{2} r^2 a \operatorname{Sin} B \operatorname{Sin} c,$$

wo ArcTg für den Halbmesser $= 1$ gilt, wie dies immer gewöhnlich ist.

Diese Formel läßt sich auf folgende Art vereinfachen. Es ist

$$\operatorname{Cos} B = \frac{\operatorname{Cos} b - \operatorname{Cos} a \operatorname{Cos} c}{\operatorname{Sin} a \operatorname{Sin} c},$$

$$\operatorname{Cos} B \operatorname{Sin} c \operatorname{Tg} \tfrac{1}{2} a = \frac{(\operatorname{Cos} b - \operatorname{Cos} a \operatorname{Cos} c) \operatorname{Sin} \frac{1}{2} a}{2 \operatorname{Sin} \frac{1}{2} a \operatorname{Cos} \frac{1}{2} a \operatorname{Cos} \frac{1}{2} a}$$

$$= \frac{\operatorname{Cos} b - \operatorname{Cos} a \operatorname{Cos} c}{1 + \operatorname{Cos} a}.$$

Folglich der Nenner in dem obigen Ausdrucke für das Moment

$$= 1 + \operatorname{Cos} c + \frac{\operatorname{Cos} b - \operatorname{Cos} a \operatorname{Cos} c}{1 + \operatorname{Cos} a}$$

$$= \frac{1 + \operatorname{Cos} a + \operatorname{Cos} c + \operatorname{Cos} a \operatorname{Cos} c + \operatorname{Cos} b - \operatorname{Cos} a \operatorname{Cos} c}{1 + \operatorname{Cos} a}$$

$$= \frac{1 + \operatorname{Cos} a + \operatorname{Cos} b + \operatorname{Cos} c}{1 + \operatorname{Cos} a}.$$

Der Zähler aber ist

$$= \operatorname{Sin} B \operatorname{Sin} c \operatorname{Tg} \tfrac{1}{2} a = \frac{\operatorname{Sin} B \operatorname{Sin} c \operatorname{Sin} \frac{1}{2} a}{\operatorname{Cos} \frac{1}{2} a}$$

$$= \frac{\operatorname{Sin} B \operatorname{Sin} c \,.\, 2 \operatorname{Sin} \frac{1}{2} a \operatorname{Cos} \frac{1}{2} a}{2 \operatorname{Cos} \frac{1}{2} a^2}$$

$$= \frac{\operatorname{Sin} a \operatorname{Sin} c \operatorname{Sin} B}{1 + \operatorname{Cos} a},$$

und folglich das Moment

$$= 2r^3 \operatorname{ArcTg} \frac{\operatorname{Sin} a \operatorname{Sin} c \operatorname{Sin} B}{1 + \operatorname{Cos} a + \operatorname{Cos} b + \operatorname{Cos} c} - \tfrac{1}{2} r^2 a \operatorname{Sin} B \operatorname{Sin} c.$$

Aber bekanntlich

$$\operatorname{Sin} B = \frac{2\sqrt{L}}{\operatorname{Sin} a \operatorname{Sin} c}.$$

Also das Moment

$$= 2r^3 \operatorname{Arc} \operatorname{Tg} \frac{2\sqrt{L}}{1 + \operatorname{Cos} a + \operatorname{Cos} b + \operatorname{Cos} c} - \tfrac{1}{2} r^2 a \operatorname{Sin} B \operatorname{Sin} c$$

$$= 2r^3 \operatorname{Arc} \operatorname{Tg} \frac{2\sqrt{L}}{1 + \operatorname{Cos} a + \operatorname{Cos} b + \operatorname{Cos} c} - r^3 \sqrt{L} \cdot \frac{a}{\operatorname{Sin} a},$$

wenn man zugleich den Bogen a auch auf den Halbmesser $= 1$ bezieht, und ra für a setzt.

Ist nun S, wie schon oben, die Summe der drey Winkel des Dreyecks in rechten Winkeln ausgedrückt weniger zwey rechten Winkeln; so ist nach §. 144.:

$$\operatorname{Tg} \tfrac{1}{2} S = \frac{2\sqrt{L}}{1 + \operatorname{Cos} a + \operatorname{Cos} b + \operatorname{Cos} c}.$$

Also das Moment

$$= 2r^3 \operatorname{Arc} \operatorname{Tg} \operatorname{Tg} \tfrac{1}{2} S - r^3 \sqrt{L} \cdot \frac{a}{\operatorname{Sin} a}.$$

Aber offenbar

$$\tfrac{1}{2} S \text{ rechte} : 4 \text{ rechten} = \operatorname{Arc} \operatorname{Tg} \operatorname{Tg} \tfrac{1}{2} S : 2\pi = \tfrac{1}{2} S : 4,$$

$$\operatorname{Arc} \operatorname{Tg} \operatorname{Tg} \tfrac{1}{2} S = \tfrac{1}{4} \pi S,$$

und folglich das Moment

$$= \tfrac{1}{2} r^3 \pi S - r^3 \sqrt{L} \cdot \frac{a}{\operatorname{Sin} a}$$

$$= r \cdot \frac{r^2 \pi S}{2} - r^3 \sqrt{L} \cdot \frac{a}{\operatorname{Sin} a}.$$

Nun ist aber bekanntlich, wenn Δ den Inhalt des sphärischen Dreyecks bezeichnet, $\Delta = \frac{r^2 \pi S}{2}$, und folglich das Moment

$$= r\Delta - r^3 \sqrt{L} \cdot \frac{a}{\operatorname{Sin} a}.$$

Folglich ist die Entfernung des Schwerpunktes von der Berührungsebene durch A

$$= \left(r\Delta - r^3 \sqrt{L} \cdot \frac{a}{\operatorname{Sin} a} \right) : \Delta$$

$$= r - r^3 \cdot \frac{2\sqrt{L}}{r^2 \pi S} \cdot \frac{a}{\operatorname{Sin} a}$$

$$= r - r \cdot \frac{2\sqrt{L}}{\pi S} \cdot \frac{a}{\mathrm{Sin}\, a},$$

oder die Entfernung des Schwerpunktes von der durch den Mittelpunkt der Kugel senkrecht auf den durch A gehenden Halbmesser gelegten Ebene

$$= r - \left(r - r \cdot \frac{2\sqrt{L}}{\pi S} \cdot \frac{a}{\mathrm{Sin}\, a}\right)$$

$$= r \cdot \frac{2\sqrt{L}}{\pi S} \cdot \frac{a}{\mathrm{Sin}\, a}.$$

Bezeichnet man nun die Stücke, welche von dem durch die Spitzen A, B, C eines sphärischen Dreyecks gehenden Halbmesser vom Mittelpunkte der Kugel an abgeschnitten werden, wenn man auf diese Halbmesser vom Schwerpunkte Perpendikel fällt, respective durch X, Y, Z; so ist

$$X = \frac{a}{\mathrm{Sin}\, a} \cdot \frac{2r\sqrt{L}}{\pi S},$$

$$Y = \frac{b}{\mathrm{Sin}\, b} \cdot \frac{2r\sqrt{L}}{\pi S},$$

$$Z = \frac{c}{\mathrm{Sin}\, c} \cdot \frac{2r\sqrt{L}}{\pi S}.$$

Also

$$X : Y : Z = \frac{a}{\mathrm{Sin}\, a} : \frac{b}{\mathrm{Sin}\, b} : \frac{c}{\mathrm{Sin}\, c}.$$

Da aber nach §. 144.

$$\sqrt{L} = 2 \mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}S \,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}a \,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}b \,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}c$$

ist; so erhält man auch die bequemen Ausdrücke:

$$X = \frac{a}{\mathrm{Sin}\, a} \cdot \frac{4r \,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}S \,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}a \,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}b \,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}c}{\pi S},$$

$$Y = \frac{b}{\mathrm{Sin}\, b} \cdot \frac{4r \,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}S \,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}a \,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}b \,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}c}{\pi S},$$

$$Z = \frac{c}{\mathrm{Sin}\, c} \cdot \frac{4r \,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}S \,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}a \,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}b \,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}c}{\pi S}.$$

Durch X, Y, Z ist die Entfernung des Schwerpunktes von drey der Lage nach gegebenen Ebenen, d. i. die Lage des Schwerpunktes selbst, bestimmt.

§. 151.

Ist in Fig. 90. H der Schwerpunkt des Dreyecks ABC, und sind HE, HF, HG die auf die Halbmesser DB, DA, DC gefällten Perpendikel; so erhellet leicht, daß die Entfernung des Schwerpunktes vom Mittelpunkte der Kugel, die wir durch e bezeichnen wollen, dem Durchmesser der um die Pyramide $DEFG$ beschriebenen Kugel gleich ist, weil bey E, F und G rechte Winkel sind. Nach §. 147. ist daher $\frac{1}{4}e^2 =$

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{4}X^2 \operatorname{Sin} a^2 + \frac{1}{4}Y^2 \operatorname{Sin} b^2 + \frac{1}{4}Z^2 \operatorname{Sin} c^2 \\ -\frac{1}{2}YZ \operatorname{Sin} b \operatorname{Sin} c \operatorname{Cos} A - \frac{1}{2}XZ \operatorname{Sin} a \operatorname{Sin} c \operatorname{Cos} B - \frac{1}{2}XY \operatorname{Sin} a \operatorname{Sin} b \operatorname{Cos} C \end{array}\right\},$$

$$e^2 = \frac{1}{L}\left\{\begin{array}{l} \frac{a^2r^2L}{\pi^2S^2} - 2bc \cdot \frac{r^2L}{\pi^2S^2} \operatorname{Cos} A \\ + \frac{b^2r^2L}{\pi^2S^2} - 2ac \cdot \frac{r^2L}{\pi^2S^2} \operatorname{Cos} B \\ + \frac{c^2r^2L}{\pi^2S^2} - 2ab \cdot \frac{r^2L}{\pi^2S^2} \operatorname{Cos} C \end{array}\right\}$$

$$= \frac{r^2}{\pi^2S^2}\left\{a^2+b^2+c^2-2bc\operatorname{Cos}A-2ac\operatorname{Cos}B-2ab\operatorname{Cos}C\right\}$$

$$= \frac{r^6}{r^4\pi^2S^2}\left\{a^2+b^2+c^2-2bc\operatorname{Cos}A-2ac\operatorname{Cos}B-2ab\operatorname{Cos}C\right\}.$$

Aber $\Delta = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot S}{2}$, $(2\Delta)^2 = r^4 \cdot \pi^2 S^2$. Also

$$e^2 = \frac{r^6}{(2\Delta)^2}\left\{a^2+b^2+c^2-2bc\operatorname{Cos}A-2ac\operatorname{Cos}B-2ab\operatorname{Cos}C\right\},$$

oder, der Abkürzung wegen,

$$e^2 = \frac{r^2}{\pi^2S^2}N^2, \quad e = \frac{rN}{\pi S}, \text{ wo}$$

$$N^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2bc\operatorname{Cos}A - 2ac\operatorname{Cos}B - 2ab\operatorname{Cos}C.$$

Sind φ, ψ, χ die drey von e mit den Halbmessern des sphärischen Dreyecks eingeschlossenen Winkel; so ist offenbar

$$X = e\operatorname{Cos}\varphi, \quad Y = e\operatorname{Cos}\psi, \quad Z = e\operatorname{Cos}\chi;$$

$$\operatorname{Cos}\varphi = \frac{X}{e} = \frac{a}{\operatorname{Sin}a} \cdot \frac{2\sqrt{L}}{N},$$

$$\operatorname{Cos}\psi = \frac{Y}{e} = \frac{b}{\operatorname{Sin} b} \cdot \frac{2\sqrt{L}}{N},$$

$$\operatorname{Cos}\chi = \frac{Z}{e} = \frac{c}{\operatorname{Sin} c} \cdot \frac{2\sqrt{L}}{N}.$$

Durch e, φ, ψ, χ ist die Lage des Schwerpunktes auch vollkommen bestimmt.

Ist der Triangel ein Octant; so ist $a = b = c = \frac{1}{2}\pi$, $A = B = C = 90^\circ$, $\operatorname{Cos} A = \operatorname{Cos} B = \operatorname{Cos} C = 0$. Also

$$e^2 = \frac{r^2}{\pi^2 S^2}\left(\tfrac{1}{4}\pi^2 + \tfrac{1}{4}\pi^2 + \tfrac{1}{4}\pi^2\right)$$

$$= \frac{3r^2}{4S^2}.$$

Da aber S im Verhältniß zum rechten Winkel ausgedrückt ist; so ist $S = 1 + 1 + 1 - 2 = 1$, und folglich $e^2 = \frac{3}{4}r^2$, oder $e = \frac{r}{2}\sqrt{3}$.

Auch ist $a + b + c = \frac{3}{2}\pi$, $\frac{1}{2}(a + b + c) = \frac{3}{4}\pi$, $\operatorname{Sin}\frac{a+b+c}{2} = \operatorname{Sin} 135^\circ = \operatorname{Sin}(180^\circ - 135^\circ) = \operatorname{Sin} 45^\circ$ $= \frac{1}{\sqrt{2}}$. Auch

$$\operatorname{Sin}\frac{b+c-a}{2} = \operatorname{Sin}\left(\frac{a+b+c}{2} - a\right) = \operatorname{Sin}\left(\tfrac{3}{4}\pi - \tfrac{2}{4}\pi\right)$$

$$= \operatorname{Sin}\tfrac{1}{4}\pi = \operatorname{Sin} 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}. \text{ Also}$$

$$L = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 = \frac{1}{2^2}, \ \sqrt{L} = \tfrac{1}{2},$$

und folglich

$$X = \frac{\frac{1}{2}\pi}{1} \cdot \frac{2r \cdot \frac{1}{2}}{\pi \cdot 1} = \tfrac{1}{2}r = Y = Z.$$

§. 152.

Man kann nun auch leicht den Schwerpunkt einer dreyseitigen Pyramide, deren Grundfläche ein sphärisches Dreyeck ist, finden. Die Axe der Schwere geht offenbar durch den Schwerpunkt der Grundfläche, und ihre Lage wird demnach durch die oben gefundenen Winkel φ, ψ, χ bestimmt. Um die Entfernung des Schwerpunktes vom Mittelpunkte der Kugel zu finden, verfahre man so. Der Inhalt der Pyramide ist $= \frac{\Delta . r}{3} = \frac{r^3 . \pi . S}{6} = p$. Aendert sich nun der Halbmesser um dr, so ändert sich die Pyramide um $dp = \frac{1}{2}r^2\pi S dr$, und das Moment von dp ist $= \frac{1}{2}r^2\pi S dr . \frac{rN}{\pi S} = \frac{1}{2}r^3 N dr$, desto genauer, je kleiner dr ist. Daher ist die Summe aller dieser Momente, d.i. das Moment der ganzen Pyramide, nach §. 108. $= \frac{1}{2}\int r^3 N dr = \frac{1}{8}r^4 N$; das Integral so bestimmt, daß es für $r = 0$ verschwindet, wie es seyn muß.

Die Entfernung des Schwerpunktes vom Mittelpunkte der Kugel ist folglich

$$= \tfrac{1}{8}r^4 N : p = \tfrac{1}{8}r^4 N : \frac{r^3\pi S}{6}$$

$$= \frac{6r^4 N}{8r^3\pi S} = \tfrac{3}{4} . \frac{rN}{\pi S}.$$

Ist nun die Pyramide ein Octant; so ist, wie vorher, $S = 1$, $N^2 = \frac{1}{4}\pi^2 + \frac{1}{4}\pi^2 + \frac{1}{4}\pi^2 = \frac{3}{4}\pi^2$, und folglich die Entfernung vom Mittelpunkte

$$= \tfrac{3}{4} . \frac{r\pi\sqrt{3}}{2\pi} = r . \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

$$= r . 0,6497 = r . \frac{65}{100} = r . \tfrac{13}{20}, \text{ nahe.}$$

Anhang.

Ueber Guldin's Regel.

§. 153.

Guldin's Regel (centrobaryca methodus s. regula, von κέντρον und βαρύς,) ist eine Methode, den Inhalt einer Fläche oder eines Körpers, welche durch Umdrehung entstanden sind, mittelst des Schwerpunktes zu finden. Die Regel selbst ist folgende:

Der Inhalt der erzeugten Fläche oder des erzeugten Körpers wird durch das Product aus der erzeugenden Größe in den Weg ihres Schwerpunktes dargestellt.

Der Beweis dieses Satzes wird leicht auf folgende Art aus den in den vorhergehenden Kapiteln bewiesenen Integralformeln hergeleitet.

1) Für Flächen.

Die Coordinaten des Schwerpunktes der erzeugenden Linie werden nach §. 133. durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$X\int\sqrt{dx^2+dy^2}=\int x\sqrt{dx^2+dy^2},$$
$$Y\int\sqrt{dx^2+dy^2}=\int y\sqrt{dx^2+dy^2};$$

diese, so wie die folgenden Integrale, zwischen den gehörigen Gränzen genommen. Der Inhalt der erzeugten Oberfläche ist nach §. 140.:

$$V=2\pi\int y\sqrt{dx^2+dy^2},$$

und die Länge der erzeugenden Linie nach §. 132.:

$$s=\int\sqrt{dx^2+dy^2}.$$

Der Weg des Schwerpunktes ist nach bekannten Sätzen vom Kreise $=2Y\pi$, und folglich

$$V=2\pi.\frac{\int y\sqrt{dx^2+dy^2}}{\int\sqrt{dx^2+dy^2}}.\int\sqrt{dx^2+dy^2}$$
$$=2\pi.Y.s=s.2Y\pi,$$

wodurch Guldin's Regel für Flächen bewiesen.

2) Für Körper.

Für die Coordinaten des Schwerpunktes der erzeugenden Figur hat man nach §. 110. folgende Gleichungen:

$$X \int y\, dx = \int xy\, dx, \quad 2Y \int y\, dx = \int y^2\, dx.$$

Der Weg des Schwerpunktes ist wieder $= 2Y\pi$. Der Inhalt des erzeugten Körpers ist nach §. 122. =

$$V = \pi \int y^2\, dx,$$

und der Inhalt der erzeugenden Figur nach §. 109. =

$$s = \int y dx.$$

Also

$$V = \frac{\pi \int y^2\, dx}{\int y\, dx} \cdot \int y\, dx$$

$$= \pi \cdot 2Y \cdot s = s \cdot 2Y\pi,$$

wodurch Guldin's Regel auch für Körper erwiesen.

Die Regel wird gewöhnlich nach dem Jesuiten Paulus Guldinus aus St. Gallen benannt, weil er sie in seinem Werke:

De centro gravitatis, Viennae 1640, lib. II. cap. VIII. prop. II.,

vorgetragen und auf verschiedene Beyspiele angewandt hat. Er drückt sie auf folgende Art aus:

„Quantitas rotunda in viam rotationis (lineam cir-„cularem, quam in rotatione describit centrum gravita-„tis magnitudinis rotatae) ducta producit potestatem ro-„tundam uno gradu altiorem potestate sive quantitate ro-„tata.„

Die Regel findet sich aber, welches Guldin a. a. O. nicht erwähnt, schon in des Pappus mathematischen Sammlungen am Ende der Vorrede zum siebenten Buche, wo sie nach Halley's Uebersetzung in dem Werke:

Apollonii de sectione rationis et spatii libri, Oxon. 1706,

folgendermaßen lautet:

„Figurae perfecto gyro genitae rationem habent com-„positam ex ratione gyrantium et ex illa rectarum simi-„liter ad axes ductarum ab ipsarum gyrantium gravitatis

„centris. Ratio vero in completo gyro genitarum fit ex „ratione gyrantium et arcuum, quos descripsere earundem centra gravitatis.„

Die Regel ist jetzt von keinem Gebrauche mehr. Vor Erfindung der Integralrechnung mußte man aber einzelne Hülfsmittel zu geometrischen Vergleichungen suchen, und die Regel hatte also in jener Zeit allerdings ihren Nutzen; nur wäre es nöthig gewesen, sie vermittelst eines allgemeinen Beweises zu befestigen, welches aber Keiner von denen, die sie in jener Zeit gebrauchten, gethan hat. Als eine merkwürdige Verbindung der Statik mit der Geometrie behält sie aber immer wissenschaftliches Interesse. Die erste Anwendung der Statik auf die Geometrie ist bekanntlich von Archimedes bey der Quadratur der Parabel gemacht worden. Jeder wird seine Schrift über diese Quadratur mit Vergnügen und Nutzen studiren. Hierher gehört nur Prop. I. bis Prop. XVII.

Ueber Guldin's Regel s. m. noch:

Klügel's Wörterbuch, Th. 1. S. 428.

Montucla Histoire des Mathématiques, Tom. I. p. 329. T. II. p. 33., wo die Regel auch durch Beyspiele erläutert wird.

L'Huilier Principiorum calculi differentialis et integralis expositio elementaris, Tubingae 1795, 4., p. 185. seqq.

Wie sehr die Regel in älterer Zeit geschätzt wurde, sieht man aus Wolff's Worten in den Elementis Matheseos universae, Tom. I., Halae 1717, p. 571., wo er sie ein „elegans theorema, quod inter praecipua seculi superio„ris in Geometria inventa referri solet„, nennt.

Dreyzehntes Kapitel.

Formeln für den Schwerpunkt der Curven von doppelter Krümmung; für Flächen, die auf drey coordinirte Ebenen bezogen werden; und für durch solche Flächen begränzte Körper.

§. 154.

Aufgabe. Eine durch rechtwinklige Coordinaten auf drey Coordinaten-Axen oder Ebenen bezogene Curve zu rectificiren.

Auflösung. Das Curvenstück S, dessen Länge gefunden werden soll, entspreche den beiden Werthen a und b von x, so daß a, b die x der beiden Endpunkte dieses Curvenstücks sind. Man lasse nun b sich um ein willkührliches Increment $\Delta x = i$ verändern, und die daraus entspringenden Veränderungen von y und z seyen Δy und Δz; so ist nach dem Taylor'schen Lehrsatze

$$\Delta x = i,$$

$$\Delta y = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{i}{1} + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{i^2}{1 \cdot 2} + \frac{d^3y}{dx^3} \cdot \frac{i^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots,$$

$$\Delta z = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{i}{1} + \frac{d^2z}{dx^2} \cdot \frac{i^2}{1 \cdot 2} + \frac{d^3z}{dx^3} \cdot \frac{i^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots.$$

Auch entspreche dem Increment i die Veränderung ΔS des zu bestimmenden Bogens, und c sey die Sehne von ΔS; so erhellet aus leichten stereometrischen Sätzen oder auch aus §. 72., daß

$$c^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2.$$

Aber

$$\Delta x^2 = i^2,$$

$$\Delta y^2 = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 . i^2 + Pi^3,$$

$$\Delta z^2 = \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 . i^2 + P_{/}i^3,$$

wo Pi^3 und $P_{/}i^3$ Functionen sind, welche für $i = 0$ verschwinden. Also

$$\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 = i^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 . i^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 . i^2 + Qi^3,$$

wo Qi^3 auch eine gewisse für $i = 0$ verschwindende Function ist. Also

$$\frac{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}{i^2} = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + Qi,$$

und folglich

$$\frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}}{i} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + Q_{/}i},$$

$$\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} = i\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + Q_{/}i^2},$$

$$\text{d. i. } c = i\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + Q_{/}i^2}$$

$$= i\left\{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + Q_{/}i}\right\}.$$

Je kleiner nun i ist, desto mehr nähert sich die Größe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens der Größe

$$i\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2},$$

und c nähert sich desto mehr dem Increment ΔS. Daher ist

$$\Delta S = i\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2},$$

desto genauer, je kleiner i ist, und folglich nach §. 108. die Summe der Elemente wie ΔS von a bis b, d. i. der Bogen s,

$$= \frac{\int dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx^2}\right)}}{(x = a, b)},$$

oder

$$s = \underset{(x = a,\, b).}{\int\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}$$

§. 155.

Aufgabe. Den Schwerpunkt des Bogens s in dem vorhergehenden Paragraphen zu finden.

Auflösung. X, Y, Z seyen die drey Coordinaten des gesuchten Schwerpunktes. Man lasse sich wieder x um i verändern, so ist das Bogenelement nach dem vorigen Paragraphen

$$= i\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2},$$

desto genauer, je kleiner i ist, und folglich das Moment dieses Elements in Beziehung auf die Ebene der yz

$$= ix\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2},$$

ebenfalls desto genauer, je kleiner i ist. Folglich nach §. 108. die Summe der Momente der Elemente des ganzen Bogens s

$$= \int x\,dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

$$= \underset{(x = a,\, b).}{\int x\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}$$

Da aber nach §. 154.

$$s = \underset{(x = a,\, b)}{\int\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}$$

ist, so ist das Moment dieses Bogens in Beziehung auf die Ebene der yz

$$= \underset{(x = a,\, b),}{X\int\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}$$

und folglich nach §. 86.:

$$\underset{(x = a,\, b)}{X\int\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}} = \underset{(x = a,\, b),}{\int x\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}$$

und ganz auf dieselbe Art

$$Y\int\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2} = \int y\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$$
$$(x=a,\ b) \qquad\qquad (x=a,\ b),$$

$$Z\int\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2} = \int z\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$$
$$(x=a,\ b) \qquad\qquad (x=a,\ b),$$

oder

$$X=\frac{\int x\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}{\int\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}},$$

$$Y=\frac{\int y\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}{\int\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}},$$

$$Z=\frac{\int z\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}{\int\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}};$$

alle Integrale von $x=a$ bis $x=b$ genommen.

Für Curven von einfacher Krümmung hat man bloß $z=0$ zu setzen, wodurch man erhält:

$$X\int\sqrt{dx^2+dy^2}=\int x\sqrt{dx^2+dy^2},$$
$$Y\int\sqrt{dx^2+dy^2}=\int y\sqrt{dx^2+dy^2}$$
$$(x=a,\ b),$$

ganz wie in §. 133.

§. 156.

Die Lage einer geraden Linie im Raume wird durch den Durchschnitt zweyer auf den Coordinatenebenen senkrechten Ebenen bestimmt, und die Lage dieser beiden Ebenen wieder durch zwey in den Coordinatenebenen gegebene gerade Linien, welche die Projectionen der im Raume gegebenen geraden Linie sind. Die Gleichungen der Projectionen auf den Ebenen der xy und xz seyen nun

$$y'=\alpha x'+\alpha',\quad z'=\beta x'+\beta',$$

und x, y, z seyen die Coordinaten irgend eines Punktes der im Raume gegebenen geraden Linie; so erhellet leicht aus geometrischen Gründen, daß

$$x=x',\ y=y',\ z=z',$$

und folglich auch für jeden Punkt in der im Raume gegebenen geraden Linie

$$y = \alpha x + \alpha', \quad z = \beta x + \beta'.$$

Also $dy = \alpha dx$, $dz = \beta dx$;

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = (1 + \alpha^2 + \beta^2) dx^2;$$

$$\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = dx\sqrt{1 + \alpha^2 + \beta^2},$$

$$x\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = x\,dx\sqrt{1 + \alpha^2 + \beta^2},$$

$$y\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = (\alpha x + \alpha')\,dx\sqrt{1 + \alpha^2 + \beta^2},$$

$$z\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = (\beta x + \beta')\,dx\sqrt{1 + \alpha^2 + \beta^2};$$

$$\int\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = x\sqrt{1 + \alpha^2 + \beta^2},$$

$$\int x\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \tfrac{1}{2}x^2\sqrt{1 + \alpha^2 + \beta^2},$$

$$\int y\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = (\tfrac{1}{2}\alpha x^2 + \alpha' x)\sqrt{1 + \alpha^2 + \beta^2},$$

$$\int z\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = (\tfrac{1}{2}\beta x^2 + \beta' x)\sqrt{1 + \alpha^2 + \beta^2}.$$

Sind nun wie gewöhnlich a, b die Coordinaten der beiden Endpunkte des gegebenen Stücks der geraden Linie; so sind nach dem Obigen die Integrale zwischen den Gränzen $x = a$ und $x = b$ zu nehmen, wodurch man erhält:

$$\int\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = (b - a)\sqrt{1 + \alpha^2 + \beta^2},$$

$$\int x\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \tfrac{1}{2}(b^2 - a^2)\sqrt{1 + \alpha^2 + \beta^2},$$

$$\int y\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \left\{\tfrac{1}{2}\alpha(b^2 - a^2) + \alpha'(b - a)\right\}\sqrt{1 + \alpha^2 + \beta^2},$$

$$\int z\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \left\{\tfrac{1}{2}\beta(b^2 - a^2) + \beta'(b - a)\right\}\sqrt{1 + \alpha^2 + \beta^2},$$

und demnach

$$X = \frac{\tfrac{1}{2}(b^2 - a^2)\sqrt{1 + \alpha^2 + \beta^2}}{(b - a)\sqrt{1 + \alpha^2 + \beta^2}} = \frac{b^2 - a^2}{2(b - a)}$$

$$= \frac{(b + a)(b - a)}{2(b - a)} = \tfrac{1}{2}(b + a),$$

woraus schon erhellet, daß der Schwerpunkt der Mittelpunkt der gegebenen geraden Linie ist. Für die beiden andern Coordinaten erhält man aber:

$$Y = \frac{\left\{\frac{1}{2}\alpha(b^2 - a^2) + \alpha'(b - a)\right\}\sqrt{1 + \alpha^2 + \beta^2}}{(b - a)\sqrt{1 + \alpha^2 + \beta^2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\alpha(b^2 - a^2) + \alpha'(b - a)}{b - a}$$

$$= \tfrac{1}{2}\alpha \cdot \frac{b^2 - a^2}{b - a} + \alpha'$$

$$= \tfrac{1}{2}\alpha(b + a) + \alpha',$$

$$Z = \frac{\left\{\frac{1}{2}\beta(b^2 - a^2) + \beta'(b - a)\right\}\sqrt{1 + \alpha^2 + \beta^2}}{(b - a)\sqrt{1 + \alpha^2 + \beta^2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\beta(b^2 - a^2) + \beta'(b - a)}{b - a}$$

$$= \tfrac{1}{2}\beta \cdot \frac{b^2 - a^2}{b - a} + \beta'$$

$$= \tfrac{1}{2}\beta(b + a) + \beta'.$$

§. 157.

Aufgabe. Den Inhalt eines Stücks einer Fläch[e] zu finden, deren Gleichung in Beziehung auf drey recht[-]winklige Coordinatenebenen gegeben ist.

Auflösung. Die Gleichung der gegebenen Fläche se[y]

$$f(x, y, z) = 0,$$

wo also z. B. z als eine Function der beiden von einander un[-]abhängigen veränderlichen Größen zu betrachten ist. Wir wol[-]len aber setzen, daß für das zu findende Flächenstück $x = a$ und $= b$, und $y = a'$ und $= b'$ ist, so daß in Fig. 91. $fb = b'$ und $bh = b$ ist. Das zu findende Flächenstück ist in der Figur bloß durch $LBMN$ angedeutet, so daß für den Punkt M, $x = a$ und $y = a'$ ist. Durch M und B sind nämlich parallele Ebenen mit den Coordinatenebenen xz und yz gelegt, und durch diese wird das zu findende Flächenstück bestimmt. Man lasse nun $x = b$ und $y = b'$ um beliebige Stücke $bc = i$ und $be = i'$ sich verändern; so ist nach dem Taylor'schen Lehr[-]satze

$Bb = z;$

$$Cc = z + \frac{dz}{dx} \cdot \frac{i}{1} + \frac{d^2z}{dx^2} \cdot \frac{i^2}{1.2} + \frac{d^3z}{dx^3} \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots,$$

wo bloß x als veränderlich zu betrachten;

$$Ee = z + \frac{dz}{dy} \cdot \frac{i'}{1} + \frac{d^2z}{dy^2} \cdot \frac{i'^2}{1.2} + \frac{d^3z}{dx^3} \cdot \frac{i'^3}{1.2.3} + \ldots,$$

wo bloß y als veränderlich zu betrachten;

$$\begin{aligned} Dd = z &+ \frac{dz}{dx} \cdot \frac{i}{1} + \frac{d^2z}{dx^2} \cdot \frac{i^2}{1.2} + \ldots \\ &+ \frac{dz}{dy} \cdot \frac{i'}{1} + \frac{d^2z}{dy\,dx} \cdot \frac{i}{1} \cdot \frac{i'}{1} + \ldots \\ &+ \frac{d^2z}{dy^2} \cdot \frac{i'^2}{1.2} + \ldots, \end{aligned}$$

wo x und y beide als veränderlich betrachtet werden. Auch ist zu bemerken, daß hier eigentlich überall für x und y die bestimmten Werthe b und b' zu setzen sind, worauf wir indeß jetzt noch nicht besonders Rücksicht nehmen und überhaupt uns unter x und y immer b und b' vorstellen wollen.

Nun denke man sich die geraden Linien BC, CD, BD, BE, DE gezogen, so erhält man zwey ebene geradlinige Dreyecke BCD, BDE, deren Summe dem Flächenstücke $BCDE$ offenbar desto näher kommen wird, je kleiner die Veränderungen i und i' sind. Wir werden daher diese beiden Dreyecke zu bestimmen haben. Zu dem Ende erinnere man sich an den in §. 71. bewiesenen Satz, nach welchem, wenn P, P', P'' die Projectionen einer ebenen Figur F auf drey unter einander senkrechte Ebenen sind, immer

$$\left.\begin{aligned} P &= F \operatorname{Cos} \alpha, \\ P' &= F \operatorname{Cos} \alpha', \\ P'' &= F \operatorname{Cos} \alpha'', \end{aligned}\right\} \text{(vergleiche auch §. 74.)}$$

ist. Also

$$P^2 + P'^2 + P''^2 = F^2 (\operatorname{Cos} \alpha^2 + \operatorname{Cos} \alpha'^2 + \operatorname{Cos} \alpha''^2).$$

Aber nach §. 25. 2.

$$\operatorname{Cos} \alpha^2 + \operatorname{Cos} \alpha'^2 + \operatorname{Cos} \alpha''^2 = 1.$$

Also

$$P^2 + P'^2 + P''^2 = F^2,$$

d. i. **Das Quadrat jeder ebenen Figur ist der Summe der Quadrate ihrer Projectionen auf drey unter einander senkrechten Ebenen gleich.**

Es ist aber

1) **für das Dreyeck** BCD

die Projection auf der Ebene der xy offenbar

$$= \tfrac{1}{2}bc \,.\, cd = \tfrac{1}{2}ii';$$

die Projection auf der Ebene der xz offenbar

$$= \tfrac{1}{2}(Dd - Cc) \,.\, bc;$$

und die Projection auf der Ebene der yz

$$= \tfrac{1}{2}(Cc - Bb) \,.\, be;$$

und eben so

2) **für das Dreyeck** BDE

die Projection auf xy

$$= \tfrac{1}{2}bc \,.\, cd = \tfrac{1}{2}ii';$$

die Projection auf xz

$$= \tfrac{1}{2}(Ee - Bb) \,.\, bc;$$

die Projection auf yz

$$= \tfrac{1}{2}(Dd - Ee) \,.\, be.$$

Demnach

$$\overline{BCD}^2 = \tfrac{1}{4}i^2i'^2 + \tfrac{1}{4}(Dd - Cc)^2 \,.\, bc^2 + \tfrac{1}{4}(Cc - Bb)^2 \,.\, be^2,$$
$$\overline{BDE}^2 = \tfrac{1}{4}i^2i'^2 + \tfrac{1}{4}(Ee - Bb)^2 \,.\, bc^2 + \tfrac{1}{4}(Dd - Ee)^2 \,.\, be^2.$$

Es ist aber nach dem vorher Bewiesenen:

$$\begin{aligned} Dd - Cc = {} & \frac{dz}{dy}\cdot\frac{i'}{1} + \frac{d^2z}{dy\,dx}\cdot\frac{i}{1}\cdot\frac{i'}{1} + \frac{d^3z}{dy\,dx^2}\cdot\frac{i^2}{1\,.\,2}\cdot\frac{i'}{1} + \ldots \\ & + \frac{d^2z}{dy^2}\cdot\frac{i'^2}{1\,.\,2} + \frac{d^3z}{dy^2\,dx}\cdot\frac{i}{1}\cdot\frac{i'^2}{1\,.\,2} + \ldots \\ & + \frac{d^3z}{dy^3}\cdot\frac{i'^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots \\ = {} & i'\left(\frac{dz}{dy} + Pi + Qi' + \ldots\right), \end{aligned}$$

$$(Dd - Cc)^2 = i'^2 \,.\, \left\{\left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + P_1 i + Q_1 i' + \ldots\right\},$$

$$Cc - Bb = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{i}{1} + \frac{d^2z}{dx^2} \cdot \frac{i^2}{1 \cdot 2} + \ldots$$

$$= i\left(\frac{dz}{dx} + P_2 i + Q_2 i^2 + \ldots\right),$$

$$(Cc - Bb)^2 = i^2 . \left\{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + P_3 i + Q_3 i^2 + \ldots\right\},$$

und folglich, weil $bc = i$ und $be = i'$ ist:

$$\overline{BCD}^2 = \tfrac{1}{4} i^2 i'^2 + \tfrac{1}{4} i^2 i'^2 . \left\{\left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + P_1 i + Q_1 i' + \ldots\right\}$$

$$+ \tfrac{1}{4} i^2 i'^2 . \left\{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + P_3 i + Q_3 i^2 + \ldots\right\}$$

$$= \tfrac{1}{4} i^2 i'^2 . \left\{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + P_4 i + Q_4 i' + \ldots\right\},$$

und folglich

$$BCD = \tfrac{1}{2} i i' . \left\{\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} + P_5 i + Q_5 i' + \ldots\right\}.$$

Ganz auf ähnliche Art ist

$$Ee - Bb = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{i'}{1} + \frac{d^2z}{dy^2} \cdot \frac{i'^2}{1 \cdot 2} + \ldots$$

$$= i'\left\{\frac{dz}{dy} + R i' + S i'^2 + \ldots\right\},$$

$$(Ee - Bb)^2 = i'^2 . \left\{\left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + R_1 i' + S_1 i'^2 + \ldots\right\},$$

$$Dd - Ee = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{i}{1} + \frac{d^2z}{dx^2} \cdot \frac{i^2}{1 \cdot 2} + \ldots$$

$$+ \frac{d^2z}{dy\,dx} \cdot \frac{i}{1} \cdot \frac{i'}{1} + \ldots$$

$$= i . \left\{\frac{dz}{dx} + R_2 i + S_2 i' + \ldots\right\},$$

$$(Dd - Ee)^2 = i^2 . \left\{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + R_3 i + S_3 i' + \ldots\right\}.$$

Also

$$\overline{BDE}^2 = \tfrac{1}{4}i^2i'^2 + \tfrac{1}{4}i^2i'^2\left\{\left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + R_1 i' + S_1 i'^2 + \ldots\right\}$$

$$+ \tfrac{1}{4}i^2i'^2\left\{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + R_3 i + S_3 i' + \ldots\right\}$$

$$= \tfrac{1}{4}i^2i'^2 . \left\{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + R_4 i + S_4 i' + \ldots\right\},$$

$$BDE = \tfrac{1}{2}ii' . \left\{\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} + R_5 i + S_5 i' + \ldots\right\},$$

und folglich die gesuchte Summe der beiden Dreyecke offenbar

$$= ii' . \left\{\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} + P_6 i + Q_6 i' + \ldots\right\}.$$

Je kleiner i und i' sind, desto näher kommt die Summe der beiden Dreyecke dem Flächenstücke $BCDE$, und desto näher kommt die Größe rechts vom Gleichheitszeichen der Größe

$$ii'\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}.$$

Daher ist das Flächenstück $BCDE$ desto genauer

$$= ii'\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2},$$

je kleiner i und i' sind.

Man denke sich nun, daß sich erst y um i' verändert, und daß dadurch sich die zu findende Fläche $LMBN$ um den Streifen $BNIE$ verändert hat. Hierauf lasse man sich auch x um i ändern, so daß sich $BNIE$ wieder um $BCDE$ verändert; so ist, weil nach dem Vorhergehenden $BCDE$

$$= ii'\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}$$

ist, und zwar desto genauer, je kleiner i und i' sind, indem man i' als constant betrachtet, nach unserm Satze aus der Integralrechnung in §. 108. der Streifen

$$BNIE = i'\int dx\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2},$$

(von $x = a$ bis $x = b$),

(y als constant betrachtet),

und zwar desto genauer, je kleiner i' ist. Daher ist nun aber wieder nach unserm Satze aus der Integralrechnung die zu findende Fläche $BLMN$, indem man sie als aus lauter Elementarstreifen wie $BCNI$ bestehend betrachtet,

$$=\int dy \int dx \sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2};$$

nun y als veränderlich betrachtet, und das Integral zwischen den Gränzen $y=a'$ und $y=b'$ genommen. Es ist klar, daß man die Ordnung der Integration auch umkehren kann, und daß die gesuchte Fläche auch

$$=\int dx \int dy \sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2};$$

immer das eine Integral in Beziehung auf x, das andere in Beziehung auf y als veränderlich, und zwischen den Gränzen $x=a$, $x=b$ und $y=a'$, $y=b'$ genommen. Ist die gesuchte Fläche $=S$, so schreibt man dies gewöhnlich so:

$$S=\iint dx\,dy \sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2},$$

und nennt das Integral ein **doppeltes Integral**, nimmt aber jedes der beiden Integrale immer zwischen den gehörigen Gränzen. Auch bey den Differenzialquotienten $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ ist der erste bloß in Beziehung auf x, der andere bloß in Beziehung auf y als veränderlich zu nehmen.

§. 158.

Aufgabe. Den Schwerpunkt des Flächenstücks S im vorhergehenden Paragraphen zu finden.

Auflösung. Die Coordinaten des gesuchten Schwerpunktes seyen wie gewöhnlich X, Y, Z; so ist das Flächenelement nach dem vorhergehenden Paragraphen

$$=ii'\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2},$$

desto genauer, je kleiner i und i'. Also das Moment dieses Elements in Beziehung auf die Ebene der xy

$$= ii'z\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2},$$

ebenfalls desto genauer, je kleiner i und i' sind. Man betrachte nun wieder i' als constant; so ist die Summe der Momente für den Elementarstreifen $BNIE$

$$= i'\int z\,dx\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2};$$

das Integral bloß in Beziehung auf x als veränderlich und zwischen den Gränzen $x=a$ und $x=b$ genommen; desto genauer, je kleiner i'. Also die Summe der Momente von S, welches man aus lauter Elementarstreifen wie $BNIE$ bestehend sich zu denken hat,

$$= \int dy\int z\,dx\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2};$$

das zweyte Integral bloß in Beziehung auf y als veränderlich und zwischen den Gränzen $y=a'$ und $y=b'$ genommen. Nach der obigen Bezeichnung ist also die Summe der Momente von S in Beziehung auf die Ebene der xy

$$= \iint z\,dx\,dy\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}.$$

Da aber nach §. 157.

$$S = \iint dx\,dy\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2};$$

so ist das Moment von S in Beziehung auf die Ebene der xy

$$= Z.\iint dx\,dy\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2},$$

und folglich nach bekannten Sätzen vom Schwerpunkte:

$$Z.\iint dx\,dy\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2} = \iint z\,dx\,dy\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}$$

das eine Integral in Beziehung auf x, das andere in Beziehung auf y als veränderlich, und zwischen den Gränzen $x=a$, $x=b$ und $y=a'$, $y=b'$ genommen.

Ganz auf ähnliche Art verfährt man auch in Beziehung auf X und Y, und erhält zur Bestimmung des Schwerpunktes folgende Formeln:

$$X=\frac{\iint x\,dx\,dy\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}{\iint dx\,dy\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}},$$

$$Y=\frac{\iint y\,dx\,dy\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}{\iint dx\,dy\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}},$$

$$Z=\frac{\iint z\,dx\,dy\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}{\iint dx\,dy\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}};$$

die Integrale immer den bestehenden Bestimmungen gemäß genommen.

§. 159.

Aufgabe. Den Inhalt des dem Flächenstücke $LMNB$ (Fig. 91.) entsprechenden Körpers, welcher von der Fläche $LMNB$, von der Ebene der xy, und von vier durch B und M gehenden mit der Ebene der xz und yz parallelen Ebenen begränzt wird, zu finden.

Auflösung. Man lasse sich, wie vorher, wieder x und y um $i=bc$ und $k=be$ ändern; so ändert sich der zu findende Körper, den wir durch V bezeichnen wollen, um $BCDEbcde$. Man denke sich jetzt durch die Mittelpunkte von bc und be Parallelen mit den Axen der y und x gezogen, durch den Durchschnittspunkt dieser beiden Parallelen ein Perpendikel auf die Ebene der xy errichtet, und durch den Durchschnittspunkt dieses Perpendikels mit der gegebenen Fläche eine Ebene mit der Ebene der xy parallel gelegt; so entsteht ein rechtwinkliges Parallelepipedon mit der Grundfläche $bcde$, dessen Inhalt nach bekannten geometrischen Sätzen und nach dem Taylor'schen Lehrsatze für zwey veränderliche Größen

$$= ii' . \left\{ \begin{array}{l} z + \frac{dz}{dx} \cdot \frac{i}{2} + \ldots \\ \quad + \frac{dz}{dy} \cdot \frac{i'}{2} + \ldots \end{array} \right\}$$

$$= ii' \{ z + Pi + Qi' + \ldots \}$$

ist. Der Inhalt des Parallelepipedons kommt dem Inhalte des Körpers $BCDEbcde$ desto näher, je kleiner i und i' sind; und da die Größe

$$ii'(z + Pi + Qi' + \ldots)$$

der Größe $ii'z$ desto näher kommt, je kleiner i und i' sind, so ist

$$V = ii'z,$$

desto genauer, je kleiner i und i' sind. Nimmt man nun zuerst wieder i' als constant an; so ist nach dem in §. 108. bewiesenen allgemeinen Satze aus der Integralrechnung das Volumen, welches zu der Fläche $BENI$ gehört,

$$= i' \int z\, dx,$$

desto genauer, je kleiner i' ist. In dem Integral wird bloß x als veränderlich betrachtet, und das Integral von $x = a$ bis $x = b$ genommen. Denkt man sich nun den gesuchten Körper aus lauter Elementarkörpern, wie der zu $BENI$ gehörige Körper ist, bestehend; so ist wieder nach dem oft gebrauchten Satze aus der Integralrechnung

$$V = \int dy \int z\, dx;$$

das zweyte Integral bloß in Beziehung auf y als veränderlich und zwischen den Gränzen $y = a'$, $y = b'$ genommen. Man schreibt dies gewöhnlich so:

$$V = \iint z\, dx\, dy,$$

oder, da $\int z\,dx$ auch $= \int dx \int dz$ ist, auch so:

$$V = \int dy \int dx \int dz$$
$$= \int dx \int dy \int dz,$$

oder auch so:

$$V = \iiint dx\,dy\,dz,$$

und nennt dies ein **dreyfaches Integral**. Jede der drey Größen x, y, z wird immer als Function der beiden andern betrachtet, deren Coordinatenaxe mit den Kanten des gesuchten Körpers parallel ist, so wie in unsrer Figur z. Wäre der gesuchte Körper aber z. B. auf der Ebene der xz senkrecht, so würde y als Function von x und z zu betrachten seyn.

§. 160.

Aufgabe. Die Coordinaten des Schwerpunktes des im vorhergehenden Paragraphen betrachteten Körpers zu bestimmen.

Auflösung. Die gesuchten Coordinaten seyen wieder X, Y, Z. Das Körperelement ist nach dem vorhergehenden Paragraphen

$$= ii'z,$$

und zwar desto genauer, je kleiner i und i' sind. Die Entfernungen des Schwerpunktes dieses Elements von den Ebenen der zy, zx und xy sind offenbar x, y und $\frac{1}{2}z$, und zwar desto genauer, je kleiner i und i' sind. Daher sind die Momente des Elements von den drey Coordinatenebenen

$$ii'xz,\quad ii'yz,\quad ii'.\tfrac{1}{2}z^2,$$

folglich wie gewöhnlich die Summen der Momente des zu $BNIE$ gehörigen Körpers, wo man y und i' als constant betrachtet,

$$i'\int xz\,dx,\quad i'y\int z\,dx,\quad i'\int \tfrac{1}{2}z^2\,dx;$$

die Integrale bloß in Beziehung auf x als veränderlich und zwischen den Gränzen $x = a$ und $x = b$ genommen; und zwar desto genauer, je kleiner i' ist. Betrachtet man nun den gegebenen Körper wieder als aus Elementarkörpern, wie der zu $BNIE$ gehörige Körper ist, bestehend; so ist die Summe der

Momente des gegebenen Körpers in Beziehung auf jede der drey Coordinatenebenen:

$$\int dy \int xz\, dx, \quad \int y\, dy \int z\, dx, \quad \int dy \int \tfrac{1}{2} z^2\, dx;$$

die zweyten Integrale bloß in Beziehung auf y als veränderlich und zwischen den Gränzen $y = a'$ und $y = b'$ genommen. Man kann die obigen Integrale aber auch so ausdrücken:

$$\int dy \int x\, dx \int dz, \quad \int y\, dy \int dx \int dz, \quad \int dy \int dx \int z\, dz,$$

oder auch durch ein dreyfaches Integralzeichen:

$$\iiint x\, dx\, dy\, dz, \quad \iiint y\, dx\, dy\, dz, \quad \iiint z\, dx\, dy\, dz,$$

wo im Falle unsrer Figur z als Function von x und y zu betrachten ist.

Daß es verstattet ist, die Integrationen in willkührlicher Ordnung zu verrichten, folgt leicht aus der bekannten Theorie der Differenziation der Functionen mehrerer veränderlichen Größen, wo bewiesen wird, daß es gleichgültig ist, in welcher Ordnung die successiven Differenziationen verrichtet werden.

Da nun aber der Inhalt des gegebenen Körpers nach §. 159.

$$= \iiint dx\, dy\, dz$$

ist; so sind seine Momente in Beziehung auf die drey Coordinatenebenen:

$$X \iiint dx\, dy\, dz, \quad Y \iiint dx\, dy\, dz, \quad Z \iiint dx\, dy\, dz,$$

und folglich nach bekannten Sätzen vom Schwerpunkte:

$$X \iiint dx\, dy\, dz = \iiint x\, dx\, dy\, dz,$$
$$Y \iiint dx\, dy\, dz = \iiint y\, dx\, dy\, dz,$$
$$Z \iiint dx\, dy\, dz = \iiint z\, dx\, dy\, dz;$$

$$X = \frac{\iiint x\, dx\, dy\, dz}{\iiint dx\, dy\, dz},$$

$$Y = \frac{\iiint y\, dx\, dy\, dz}{\iiint dx\, dy\, dz},$$

$$Z = \frac{\iiint z\, dx\, dy\, dz}{\iiint dx\, dy\, dz},$$

wo die Integrale immer auf die öfters aus einander gesetzte Art zu nehmen sind.

Man könnte zu diesen Betrachtungen noch Manches hinzusetzen; indeß mag das Obige hinreichen, den Anfänger in dergleichen sehr allgemeine Betrachtungen einzuführen. Specielle Anwendungen der allgemeinen Formeln würden ziemlich weitläufige Rechnungen erfordern.

Gleichgewicht der Kräfte
an biegsamen Seilen und elastischen Ruthen;
Curven des Gleichgewichts;
Vertheilung des Drucks;
und
Stabilität.

Vierzehntes Kapitel.

Von dem Gleichgewichte an einer völlig biegsamen und unausdehnbaren geraden Linie wirkender Kräfte.

§. 161.

Eine völlig biegsame und unausdehnbare gerade Linie wird in der reinen Mechanik gewöhnlich ein Seil genannt. Ein Punkt, in welchem mehrere Seile zusammenstoßen, heißt ein Knoten. Ein Knoten heißt fest, wenn keins der in ihm vereinigten Seile sich an den übrigen verschieben läßt. Ist aber die Einrichtung so gemacht, daß ein oder einige Seile nur vermittelst eines verschiebbaren Ringes mit einem andern Seile verbunden sind, so heißt der Knoten beweglich. Jede Verbindung mehrerer Seile unter einander, an welchen Kräfte wirken, heißt eine Seilmaschine. Hier wird ohne alle Rücksicht auf praktische Anwendung bloß das Gleichgewicht der Kräfte an einer völlig biegsamen und unausdehnbaren geraden Linie ohne Schwere, d. i. an einem Seile, betrachtet.

§. 162.

Aufgabe. An einem Seile wirken nach willkührlichen Richtungen im Raume mehrere Kräfte: man soll die Bedingungen des Gleichgewichts finden.

Auflösung. Die gegebenen Kräfte seyen in Fig. 92. P, P', P'', P''', P'''', P''''', welche in den Knoten A, A', A'', A''' des Seils $PAA'A''A'''P'''''$ nach willkührlichen Richtungen im Raume wirken.

Die Lage dieser Richtungen zu bestimmen, nimmt man, wie gewöhnlich, drey auf einander senkrechte gerade Linien als Axen an, und bestimmt die Winkel, welche die Richtungen mit diesen Axen einschließen, auf die gewöhnliche Art. Diese Winkel sollen respective durch α, β, γ; α', β', γ'; α'', β'', γ''; α''', β''', γ'''; u. s. w. bezeichnet werden.

Zuvörderst wollen wir nun annehmen, daß die gegebenen Kräfte an der Seilmaschine im Gleichgewichte sind, und wollen die Relationen aufzufinden suchen, welche unter dieser Voraussetzung zwischen den Kräften und den von ihren Richtungen mit den angenommenen Axen eingeschlossenen Winkeln statt finden müssen.

Die ganze Untersuchung beruhet hauptsächlich auf denselben Gründen, auf welche der Beweis des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten im sechsten Kapitel sich stützt. Es ist nämlich klar, daß jedes Seil, z. B. $A'A''$, mit einer gewissen Kraft gespannt wird; und da das ganze System im Gleichgewichte ist, so muß die Spannung nach $A'A''$ offenbar eben so groß seyn, wie die Spannung nach $A''A'$. Die Spannungen der Seile AA', $A'A''$, $A''A'''$ sollen respective durch S, S', S'' bezeichnet werden.

Die Spannung des Seils AA' nach AA' resultirt offenbar aus der Zusammenwirkung aller Kräfte P'', P''', P'''', P''''' auf den Punkt A, und man kann sich daher vorstellen, daß auf den Punkt A nur drey Kräfte, P nach AP, P' nach AP', und S nach AA', wirken, und, weil ein Gleichgewicht aller Kräfte vorausgesetzt wird, an dem Punkte A im Gleichgewichte sind. Bezeichnet man daher die Winkel, welche die Linie AA' mit den drey angenommenen Axen einschließt, durch φ, ψ, χ; so ist nach §. 24.:

$$P\mathrm{Cos}\,\alpha + P'\mathrm{Cos}\,\alpha' + S\mathrm{Cos}\,\varphi = 0,$$
$$P\mathrm{Cos}\,\beta + P'\mathrm{Cos}\,\beta' + S\mathrm{Cos}\,\psi = 0,$$
$$P\mathrm{Cos}\,\gamma + P'\mathrm{Cos}\,\gamma' + S\mathrm{Cos}\,\chi = 0.$$

Auf ähnliche Art wie vorher sind nun die Spannung S nach $A'A$, die Kraft P'' nach $A'P''$, und die Spannung S' nach $A'A''$ im Gleichgewichte. Da nun offenbar die Winkel, welche die Richtung $A'A$ mit den angenommenen Axen einschließt, $180° - \varphi$, $180° - \psi$, $180° - \chi$ sind; so ist, wenn man die von $A'A''$ mit den Axen eingeschlossenen Winkel durch φ', ψ', χ' bezeichnet:

$$-S\operatorname{Cos}\varphi + P''\operatorname{Cos}\alpha'' + S'\operatorname{Cos}\varphi' = 0,$$
$$-S\operatorname{Cos}\psi + P''\operatorname{Cos}\beta'' + S'\operatorname{Cos}\psi' = 0,$$
$$-S\operatorname{Cos}\chi + P''\operatorname{Cos}\gamma'' + S'\operatorname{Cos}\chi' = 0;$$

oder:

$$S\operatorname{Cos}\varphi = P''\operatorname{Cos}\alpha'' + S'\operatorname{Cos}\varphi',$$
$$S\operatorname{Cos}\psi = P''\operatorname{Cos}\beta'' + S'\operatorname{Cos}\psi',$$
$$S\operatorname{Cos}\chi = P''\operatorname{Cos}\gamma'' + S'\operatorname{Cos}\chi';$$

und folglich durch Substitution in die erstern Gleichungen für den Punkt A:

$$P\operatorname{Cos}\alpha + P'\operatorname{Cos}\alpha' + P''\operatorname{Cos}\alpha'' + S'\operatorname{Cos}\varphi' = 0,$$
$$P\operatorname{Cos}\beta + P'\operatorname{Cos}\beta' + P''\operatorname{Cos}\beta'' + S'\operatorname{Cos}\psi' = 0,$$
$$P\operatorname{Cos}\gamma + P'\operatorname{Cos}\gamma' + P''\operatorname{Cos}\gamma'' + S'\operatorname{Cos}\chi' = 0.$$

Da nun ferner wieder die Spannung S' nach $A''A'$, die Kraft P''' nach $A''P'''$, und die Spannung S'' nach $A''A'''$ an dem Punkte A'' im Gleichgewichte seyn müssen; so ist ganz auf ähnliche Art wie vorher:

$$-S'\operatorname{Cos}\varphi' + P'''\operatorname{Cos}\alpha''' + S''\operatorname{Cos}\varphi'' = 0,$$
$$-S'\operatorname{Cos}\psi' + P'''\operatorname{Cos}\beta''' + S''\operatorname{Cos}\psi'' = 0,$$
$$-S'\operatorname{Cos}\chi' + P'''\operatorname{Cos}\gamma''' + S''\operatorname{Cos}\chi'' = 0;$$

oder:

$$S'\operatorname{Cos}\varphi' = P'''\operatorname{Cos}\alpha''' + S''\operatorname{Cos}\varphi'',$$
$$S'\operatorname{Cos}\psi' = P'''\operatorname{Cos}\beta''' + S''\operatorname{Cos}\psi'',$$
$$S'\operatorname{Cos}\chi' = P'''\operatorname{Cos}\gamma''' + S''\operatorname{Cos}\chi'';$$

und demnach durch Substitution:

$$P\operatorname{Cos}\alpha + P'\operatorname{Cos}\alpha' + P''\operatorname{Cos}\alpha'' + P'''\operatorname{Cos}\alpha''' + S''\operatorname{Cos}\varphi'' = 0,$$
$$P\operatorname{Cos}\beta + P'\operatorname{Cos}\beta' + P''\operatorname{Cos}\beta'' + P'''\operatorname{Cos}\beta''' + S''\operatorname{Cos}\psi'' = 0,$$
$$P\operatorname{Cos}\gamma + P'\operatorname{Cos}\gamma' + P''\operatorname{Cos}\gamma'' + P'''\operatorname{Cos}\gamma''' + S''\operatorname{Cos}\chi'' = 0.$$

Endlich sind auch die Spannung S'' nach $A'''A''$ und die Kräfte P'''' und P''''' in A''' im Gleichgewichte, so daß

$$-S''\operatorname{Cos}\varphi'' + P''''\operatorname{Cos}\alpha'''' + P'''''\operatorname{Cos}\alpha''''' = 0,$$
$$-S''\operatorname{Cos}\psi'' + P''''\operatorname{Cos}\beta'''' + P'''''\operatorname{Cos}\beta''''' = 0,$$
$$-S''\operatorname{Cos}\chi'' + P''''\operatorname{Cos}\gamma'''' + P'''''\operatorname{Cos}\gamma''''' = 0;$$

oder:

$$S'' \operatorname{Cos} \varphi'' = P'''' \operatorname{Cos} \alpha'''' + P''''' \operatorname{Cos} \alpha''''',$$
$$S'' \operatorname{Cos} \psi'' = P'''' \operatorname{Cos} \beta'''' + P''''' \operatorname{Cos} \beta''''',$$
$$S'' \operatorname{Cos} \chi'' = P'''' \operatorname{Cos} \gamma'''' + P''''' \operatorname{Cos} \gamma''''';$$

und also endlich:

$$P\mathrm{Cs}\alpha + P'\mathrm{Cs}\alpha' + P''\mathrm{Cs}\alpha'' + P'''\mathrm{Cs}\alpha''' + P''''\mathrm{Cs}\alpha'''' + P'''''\mathrm{Cs}\alpha''''' = 0,$$
$$P\mathrm{Cs}\beta + P'\mathrm{Cs}\beta' + P''\mathrm{Cs}\beta'' + P'''\mathrm{Cs}\beta''' + P''''\mathrm{Cs}\beta'''' + P'''''\mathrm{Cs}\beta''''' = 0,$$
$$P\mathrm{Cs}\gamma + P'\mathrm{Cs}\gamma' + P''\mathrm{Cs}\gamma'' + P'''\mathrm{Cs}\gamma''' + P''''\mathrm{Cs}\gamma'''' + P'''''\mathrm{Cs}\gamma''''' = 0.$$

Man sieht leicht, daß diese Betrachtungen nicht auf eine bestimmte Anzahl von Kräften eingeschränkt sind, und daß daher, wenn irgend eine Anzahl von Kräften P, P', P'', P''' u. s. w. an einem Seile im Gleichgewichte ist, in Beziehung auf jede drey auf einander senkrechte Axen

$$P \operatorname{Cos} \alpha + P' \operatorname{Cos} \alpha' + P'' \operatorname{Cos} \alpha'' + P''' \operatorname{Cos} \alpha''' + \ldots = 0,$$
$$P \operatorname{Cos} \beta + P' \operatorname{Cos} \beta' + P'' \operatorname{Cos} \beta'' + P''' \operatorname{Cos} \beta''' + \ldots = 0,$$
$$P \operatorname{Cos} \gamma + P' \operatorname{Cos} \gamma' + P'' \operatorname{Cos} \gamma'' + P''' \operatorname{Cos} \gamma''' + \ldots = 0$$

ist.

Es erhellet hieraus in Verbindung mit §. 24. zugleich der merkwürdige Satz: daß Kräfte, die an einem Seile im Gleichgewichte sind, auch im Gleichgewichte seyn würden, wenn sie an einem Punkte nach Richtungen wirkten, die ihren ursprünglichen Richtungen parallel sind.

Man kann dies aber auch umkehren; d. h. Wenn zwischen den Kräften P, P', P'', P''' u. s. w., und den Winkeln, die ihre Richtungen mit irgend drey rechtwinkligen Axen einschließen, folgende Gleichungen statt finden:

$$P \operatorname{Cos} \alpha + P' \operatorname{Cos} \alpha' + P'' \operatorname{Cos} \alpha'' + P''' \operatorname{Cos} \alpha''' + \ldots = 0,$$
$$P \operatorname{Cos} \beta + P' \operatorname{Cos} \beta' + P'' \operatorname{Cos} \beta'' + P''' \operatorname{Cos} \beta''' + \ldots = 0,$$
$$P \operatorname{Cos} \gamma + P' \operatorname{Cos} \gamma' + P'' \operatorname{Cos} \gamma'' + P''' \operatorname{Cos} \gamma''' + \ldots = 0;$$

oder, was dasselbe ist: Wenn die obigen Kräfte, an einem Punkte angebracht, im Gleichgewichte sind; so sind sie, nach Richtungen, welche ihren

ursprünglichen Richtungen parallel sind, wirkend, an jedem Seile im Gleichgewichte.

Wir wollen den Beweis für fünf Kräfte P, P', P'', P''', P'''' führen. Es wird leicht erhellen, daß er für jede Anzahl von Kräften gilt.

Man bringe in Fig. 93. an dem gegebenen Seile in A zuerst bloß zwey Kräfte P, P' nach Richtungen AP, AP' an, welche ihren ursprünglichen Richtungen parallel sind. Der übrige Theil des Seils wird durch diese beiden Kräfte offenbar nach einer gewissen Richtung $A'A$ mit einer gewissen Kraft gespannt, und es ist eben so, als wenn die Kräfte P nach AP, P' nach AP', und die Spannung des übrigen Theils des Seils nach AA' in A im Gleichgewichte wären. Bezeichnen wir also die Spannung des übrigen Theils des Seils durch S, und die Winkel, welche die Richtung $A'A$ mit den angenommenen Axen einschließt, durch φ, ψ, χ; so ist nach §. 24.:

$$P \operatorname{Cos} \alpha + P' \operatorname{Cos} \alpha' + S \operatorname{Cos}(180^\circ - \varphi) = 0,$$
$$P \operatorname{Cos} \beta + P' \operatorname{Cos} \beta' + S \operatorname{Cos}(180^\circ - \psi) = 0,$$
$$P \operatorname{Cos} \gamma + P' \operatorname{Cos} \gamma' + S \operatorname{Cos}(180^\circ - \chi) = 0.$$

Ferner bringe man jetzt an dem Seile in A' die dritte Kraft P'' nach einer ihrer ursprünglichen Richtung parallelen Richtung $A'P''$ an; so wird durch die nach $A'A$ gerichtete Kraft S und die Kraft P'' der übrige Theil des Seils wieder nach einer gewissen Richtung $A''A'$ gespannt, und es ist, wenn wir diese Spannung durch S' bezeichnen, eben so, als wenn die Kräfte S nach $A'A$, P'' nach $A'P''$, und S' nach $A'A''$ in A' im Gleichgewichte wären. Die von $A''A'$ mit den angenommenen Coordinatenaxen eingeschlossenen Winkel seyen φ', ψ', χ'; so ist auf ähnliche Art wie vorher:

$$S \operatorname{Cos} \varphi + P'' \operatorname{Cos} \alpha'' + S' \operatorname{Cos}(180^\circ - \varphi') = 0,$$
$$S \operatorname{Cos} \psi + P'' \operatorname{Cos} \beta'' + S' \operatorname{Cos}(180^\circ - \psi') = 0,$$
$$S \operatorname{Cos} \chi + P'' \operatorname{Cos} \gamma'' + S' \operatorname{Cos}(180^\circ - \chi') = 0.$$

Bringt man nun noch die dritte Kraft P''' in A'' nach $A''P'''$, ebenfalls ihrer ursprünglichen Richtung parallel, an;

so wird dadurch wieder der übrige Theil des Seils nach einer gewissen Richtung $P''''A''$, deren Winkel mit den angenommenen Axen wir durch φ'', ψ'', χ'' bezeichnen wollen, mit einer gewissen Kraft S'' gespannt, und es ist wie vorher:

$$S' \operatorname{Cos}\varphi' + P''' \operatorname{Cos}\alpha''' + S'' \operatorname{Cos}(180^\circ - \varphi'') = 0,$$
$$S' \operatorname{Cos}\psi' + P''' \operatorname{Cos}\beta''' + S'' \operatorname{Cos}(180^\circ - \psi'') = 0,$$
$$S' \operatorname{Cos}\chi' + P''' \operatorname{Cos}\gamma''' + S'' \operatorname{Cos}(180^\circ - \chi'') = 0.$$

Man hat demnach folgende Gleichungen:

$$P \operatorname{Cos}\alpha + P' \operatorname{Cos}\alpha' + S \operatorname{Cos}(180^\circ - \varphi) = 0,$$
$$P \operatorname{Cos}\beta + P' \operatorname{Cos}\beta' + S \operatorname{Cos}(180^\circ - \psi) = 0,$$
$$P \operatorname{Cos}\gamma + P' \operatorname{Cos}\gamma' + S \operatorname{Cos}(180^\circ - \chi) = 0;$$

$$S \operatorname{Cos}\varphi + P'' \operatorname{Cos}\alpha'' + S' \operatorname{Cos}(180^\circ - \varphi') = 0,$$
$$S \operatorname{Cos}\psi + P'' \operatorname{Cos}\beta'' + S' \operatorname{Cos}(180^\circ - \psi') = 0,$$
$$S \operatorname{Cos}\chi + P'' \operatorname{Cos}\gamma'' + S' \operatorname{Cos}(180^\circ - \chi') = 0;$$

$$S' \operatorname{Cos}\varphi' + P''' \operatorname{Cos}\alpha''' + S'' \operatorname{Cos}(180^\circ - \varphi'') = 0,$$
$$S' \operatorname{Cos}\psi' + P''' \operatorname{Cos}\beta''' + S'' \operatorname{Cos}(180^\circ - \psi'') = 0,$$
$$S' \operatorname{Cos}\chi' + P''' \operatorname{Cos}\gamma''' + S'' \operatorname{Cos}(180^\circ - \chi'') = 0;$$

oder:

$$P \operatorname{Cos}\alpha + P' \operatorname{Cos}\alpha' - S \operatorname{Cos}\varphi = 0,$$
$$P \operatorname{Cos}\beta + P' \operatorname{Cos}\beta' - S \operatorname{Cos}\psi = 0,$$
$$P \operatorname{Cos}\gamma + P' \operatorname{Cos}\gamma' - S \operatorname{Cos}\chi = 0;$$

$$S \operatorname{Cos}\varphi + P'' \operatorname{Cos}\alpha'' - S' \operatorname{Cos}\varphi' = 0,$$
$$S \operatorname{Cos}\psi + P'' \operatorname{Cos}\beta'' - S' \operatorname{Cos}\psi' = 0,$$
$$S \operatorname{Cos}\chi + P'' \operatorname{Cos}\gamma'' - S' \operatorname{Cos}\chi' = 0;$$

$$S' \operatorname{Cos}\varphi' + P''' \operatorname{Cos}\alpha''' - S'' \operatorname{Cos}\varphi'' = 0,$$
$$S' \operatorname{Cos}\psi' + P''' \operatorname{Cos}\beta''' - S'' \operatorname{Cos}\psi'' = 0,$$
$$S' \operatorname{Cos}\chi' + P''' \operatorname{Cos}\gamma''' - S'' \operatorname{Cos}\chi'' = 0;$$

und folglich durch successive Substitution:

$$P \operatorname{Cos}\alpha + P' \operatorname{Cos}\alpha' + P'' \operatorname{Cos}\alpha'' + P''' \operatorname{Cos}\alpha''' - S'' \operatorname{Cos}\varphi'' = 0,$$
$$P \operatorname{Cos}\beta + P' \operatorname{Cos}\beta' + P'' \operatorname{Cos}\beta'' + P''' \operatorname{Cos}\beta''' - S'' \operatorname{Cos}\psi'' = 0,$$
$$P \operatorname{Cos}\gamma + P' \operatorname{Cos}\gamma' + P'' \operatorname{Cos}\gamma'' + P''' \operatorname{Cos}\gamma''' - S'' \operatorname{Cos}\chi'' = 0.$$

Da nun nach der Voraussetzung

$$P \operatorname{Cos}\alpha + P' \operatorname{Cos}\alpha' + P'' \operatorname{Cos}\alpha'' + P''' \operatorname{Cos}\alpha''' + P'''' \operatorname{Cos}\alpha'''' = 0,$$
$$P \operatorname{Cos}\beta + P' \operatorname{Cos}\beta' + P'' \operatorname{Cos}\beta'' + P''' \operatorname{Cos}\beta''' + P'''' \operatorname{Cos}\beta'''' = 0,$$
$$P \operatorname{Cos}\gamma + P' \operatorname{Cos}\gamma' + P'' \operatorname{Cos}\gamma'' + P''' \operatorname{Cos}\gamma''' + P'''' \operatorname{Cos}\gamma'''' = 0$$

ist; so ist

$$-S''\mathrm{Cos}\,\varphi''=P''''\mathrm{Cos}\,\alpha'''',\quad -S''\mathrm{Cos}\,\psi''=P''''\mathrm{Cos}\,\beta'''',$$
$$-S''\mathrm{Cos}\,\chi''=P''''\mathrm{Cos}\,\gamma'''';$$

$$S''^2\,\mathrm{Cos}\,\varphi''^2=P''''^2\,\mathrm{Cos}\,\alpha''''^2,\quad S''^2\,\mathrm{Cos}\,\psi''^2=P''''^2\,\mathrm{Cos}\,\beta''''^2,$$
$$S''^2\,\mathrm{Cos}\,\chi''^2=P''''^2\,\mathrm{Cos}\,\gamma''''^2;$$

$$S''^2(\mathrm{Cs}\,\varphi''^2+\mathrm{Cs}\,\psi''^2+\mathrm{Cs}\,\chi''^2)=P''''^2(\mathrm{Cs}\,\alpha''''^2+\mathrm{Cs}\,\beta''''^2+\mathrm{Cs}\,\gamma''''^2);$$

d. i. nach §. 25. 2.: $S''^2=P''''^2$, und demnach $S''=P''''$. Also

$$-\mathrm{Cos}\,\varphi''=\mathrm{Cos}\,\alpha'''',\quad -\mathrm{Cos}\,\psi''=\mathrm{Cos}\,\beta'''',\quad -\mathrm{Cos}\,\chi''=\mathrm{Cos}\,\gamma'''';$$
$$\alpha''''=180^\circ-\varphi'',\quad \beta''''=180^\circ-\psi'',\quad \gamma''''=180^\circ-\chi''.$$

Da ferner φ'', ψ'', χ'' die Winkel der Richtung $P''''A''$ sind, so sind $180^\circ-\varphi''$, $180^\circ-\psi''$, $180^\circ-\chi''$ die Winkel der Linie $A''P''''$ mit den angenommenen Axen. Bringt man daher in A'' nach der Richtung $A''P''''$, welche der ursprünglichen Richtung der Kraft P'''' parallel ist, diese Kraft an; so ist sie der nach $P''''A''$ gerichteten Spannung des Seils gleich und gerade entgegengesetzt, woraus erhellet, daß die Kräfte P, P', P'', P''', P'''' nach Richtungen, welche ihren ursprünglichen Richtungen parallel sind, am Seile angebracht, im Gleichgewichte sind, w. z. b. w.

Die drey obigen allgemeinen Gleichungen sind also die Bedingungen des Gleichgewichts unter den an einem völlig biegsamen Seile wirkenden Kräften.

§. 163.

Aus den Gleichungen in dem vorhergehenden Paragraphen wird man nun auch leicht die Spannungen der einzelnen Theile des Seils im Falle des Gleichgewichts bestimmen können.

Die Spannung des ersten Theils AP ist offenbar $=P$.

Die Spannung von AA' wird aus den Gleichungen:

$$P\,\mathrm{Cos}\,\alpha+P'\mathrm{Cos}\,\alpha'-S\,\mathrm{Cos}\,\varphi=0,$$
$$P\,\mathrm{Cos}\,\beta+P'\mathrm{Cos}\,\beta'-S\,\mathrm{Cos}\,\psi=0,$$
$$P\,\mathrm{Cos}\,\gamma+P'\mathrm{Cos}\,\gamma'-S\,\mathrm{Cos}\,\chi=0,$$

bestimmt. Denn aus diesen Gleichungen erhält man:

$$S^2 \operatorname{Cos}\varphi^2 = (P \operatorname{Cos}\alpha + P' \operatorname{Cos}\alpha')^2,$$
$$S^2 \operatorname{Cos}\psi^2 = (P \operatorname{Cos}\beta + P' \operatorname{Cos}\beta')^2,$$
$$S^2 \operatorname{Cos}\chi^2 = (P \operatorname{Cos}\gamma + P' \operatorname{Cos}\gamma')^2.$$

Also, weil $\operatorname{Cos}\varphi^2 + \operatorname{Cos}\psi^2 + \operatorname{Cos}\chi^2 = 1$ ist:

$$S^2 = (P\operatorname{Cos}\alpha + P'\operatorname{Cos}\alpha')^2 + (P\operatorname{Cos}\beta + P'\operatorname{Cos}\beta')^2 + (P\operatorname{Cos}\gamma + P'\operatorname{Cos}\gamma')^2;$$

$$S = \sqrt{(P\operatorname{Cos}\alpha + P'\operatorname{Cos}\alpha')^2 + (P\operatorname{Cos}\beta + P'\operatorname{Cos}\beta')^2 + (P\operatorname{Cos}\gamma + P'\operatorname{Cos}\gamma')^2},$$

oder, wenn man die Quadrate entwickelt, wie leicht erhellet:

$$S = \sqrt{P^2 + P'^2 + 2PP'(\operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Cos}\alpha' + \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Cos}\beta' + \operatorname{Cos}\gamma \operatorname{Cos}\gamma')}.$$

Auf ähnliche Art erhält man auch die Spannung S' des zweyten Seils aus den im vorhergehenden Paragraphen gefundenen Gleichungen:

$$S \operatorname{Cos}\varphi + P'' \operatorname{Cos}\alpha'' - S' \operatorname{Cos}\varphi' = 0,$$
$$S \operatorname{Cos}\psi + P'' \operatorname{Cos}\beta'' - S' \operatorname{Cos}\psi' = 0,$$
$$S \operatorname{Cos}\chi + P'' \operatorname{Cos}\gamma'' - S' \operatorname{Cos}\chi' = 0;$$

oder:

$$P \operatorname{Cos}\alpha + P' \operatorname{Cos}\alpha' + P'' \operatorname{Cos}\alpha'' - S' \operatorname{Cos}\varphi' = 0,$$
$$P \operatorname{Cos}\beta + P' \operatorname{Cos}\beta' + P'' \operatorname{Cos}\beta'' - S' \operatorname{Cos}\psi' = 0,$$
$$P \operatorname{Cos}\gamma + P' \operatorname{Cos}\gamma' + P'' \operatorname{Cos}\gamma'' - S' \operatorname{Cos}\chi' = 0;$$

und folglich:

$$S'^2 \operatorname{Cos}\varphi'^2 = (P \operatorname{Cos}\alpha + P' \operatorname{Cos}\alpha' + P'' \operatorname{Cos}\alpha'')^2,$$
$$S'^2 \operatorname{Cos}\psi'^2 = (P \operatorname{Cos}\beta + P' \operatorname{Cos}\beta' + P'' \operatorname{Cos}\beta'')^2,$$
$$S'^2 \operatorname{Cos}\chi'^2 = (P \operatorname{Cos}\gamma + P' \operatorname{Cos}\gamma' + P'' \operatorname{Cos}\gamma'')^2.$$

Also, wie vorher:

$$S' = \sqrt{\begin{Bmatrix} (P\operatorname{Cs}\alpha + P'\operatorname{Cs}\alpha' + P''\operatorname{Cs}\alpha'')^2 + (P\operatorname{Cs}\beta + P'\operatorname{Cs}\beta' + P''\operatorname{Cs}\beta'')^2 \\ + (P\operatorname{Cs}\gamma + P'\operatorname{Cs}\gamma' + P''\operatorname{Cs}\gamma'')^2, \end{Bmatrix}}$$

oder, wenn man die Quadrate entwickelt:

$$S' = \sqrt{\begin{Bmatrix} P^2 + P'^2 + P''^2 + 2PP'(\operatorname{Cs}\alpha \operatorname{Cs}\alpha' + \operatorname{Cs}\beta \operatorname{Cs}\beta' + \operatorname{Cs}\gamma \operatorname{Cs}\gamma') \\ + 2PP''(\operatorname{Cs}\alpha \operatorname{Cs}\alpha'' + \operatorname{Cs}\beta \operatorname{Cs}\beta'' + \operatorname{Cs}\gamma \operatorname{Cs}\gamma'') \\ + 2P'P''(\operatorname{Cs}\alpha' \operatorname{Cs}\alpha'' + \operatorname{Cs}\beta' \operatorname{Cs}\beta'' + \operatorname{Cs}\gamma' \operatorname{Cs}\gamma'') \end{Bmatrix}}.$$

Man sieht leicht ein, daß man auf diese Art immer weiter gehen könnte.

Setzt man überhaupt

$$P\mathrm{Cos}\,\alpha + P'\mathrm{Cos}\,\alpha' + P''\mathrm{Cos}\,\alpha'' + P'''\mathrm{Cos}\,\alpha''' + \ldots = A,$$
$$P\mathrm{Cos}\,\beta + P'\mathrm{Cos}\,\beta' + P''\mathrm{Cos}\,\beta'' + P'''\mathrm{Cos}\,\beta''' + \ldots = B,$$
$$P\mathrm{Cos}\,\gamma + P'\mathrm{Cos}\,\gamma' + P''\mathrm{Cos}\,\gamma'' + P'''\mathrm{Cos}\,\gamma''' + \ldots = C,$$

und bezeichnet die Kraft, mit welcher der übrige Theil des Seils von den Kräften P, P', P'', P''' u. s. w. gespannt wird, durch Σ; so ist

$$\Sigma = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2},$$

wie sehr leicht aus dem Vorhergehenden erhellet.

Sind P, P', P'' u. s. w. alle an dem Seile wirkende Kräfte, außer der letzten, welche wir durch Q bezeichnen wollen; so ist natürlich $Q = \Sigma$, d. i.

$$Q = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Auch ist es immer leicht, die Richtungen der einzelnen Theile des Seils durch die Winkel, welche sie mit den angenommenen Axen einschließen, zu bestimmen. Denn sind überhaupt Φ, Ψ, Ω die Winkel, welche die Richtung, nach welcher der übrige Theil des Seils von den Kräften P, P', P'', P''' u. s. w. gespannt wird, mit den angenommenen Axen einschließt; so erhellet aus dem vorhergehenden Paragraphen leicht die Richtigkeit folgender Gleichungen:

$$P\mathrm{Cos}\,\alpha + P'\mathrm{Cos}\,\alpha' + P''\mathrm{Cos}\,\alpha'' + P'''\mathrm{Cos}\,\alpha''' + \ldots - \Sigma\mathrm{Cos}\,\Phi = 0,$$
$$P\mathrm{Cos}\,\beta + P'\mathrm{Cos}\,\beta' + P''\mathrm{Cos}\,\beta'' + P'''\mathrm{Cos}\,\beta''' + \ldots - \Sigma\mathrm{Cos}\,\Psi = 0,$$
$$P\mathrm{Cos}\,\gamma + P'\mathrm{Cos}\,\gamma' + P''\mathrm{Cos}\,\gamma'' + P'''\mathrm{Cos}\,\gamma''' + \ldots - \Sigma\mathrm{Cos}\,\Omega = 0;$$

oder:

$$A - \Sigma\,\mathrm{Cos}\,\Phi = 0,\quad B - \Sigma\,\mathrm{Cos}\,\Psi = 0,\quad C - \Sigma\,\mathrm{Cos}\,\Omega = 0;$$

$$\mathrm{Cos}\,\Phi = \frac{A}{\Sigma} = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$
$$\mathrm{Cos}\,\Psi = \frac{B}{\Sigma} = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$
$$\mathrm{Cos}\,\Omega = \frac{C}{\Sigma} = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Man könnte diesen allgemeinen Betrachtungen noch verschiedene andere beyfügen, sie würden aber alle auf sehr verwickelte Rechnungen führen. Wir begnügen uns daher mit der Betrachtung eines allgemeinen Falles, der für uns wegen des Folgenden vorzügliches Interesse hat.

§. 164.

Sey nämlich an den Punkten M, M' in Fig. 94., deren Coordinaten in Beziehung auf irgend ein Coordinatensystem in der durch M und M' gehenden Verticalebene x, y und x', y' seyen, ein völlig biegsames und unausdehnbares Seil befestigt. Dieses Seil sey in eine gewisse Anzahl von Theilen a, a', a'', a''' u. s. w. getheilt, so daß das ganze Seil

$$= a + a' + a'' + a''' + \ldots\ldots$$

ist, und in den Punkten, in welchen je zwey auf einander folgende Theile zusammenstoßen, sollen Gewichte P, P', P'' u. s. w. nach parallelen Richtungen vertical abwärts wirken; so ist klar, daß in dem vorliegenden Falle Alles in der durch M und M' gelegten Verticalebene liegt. Die angenommene Axe der x sey horizontal, also auf den Richtungen der Gewichte senkrecht, und folglich die Axe der y vertical oder mit den Richtungen der Gewichte parallel.

Die Spannungen der Theile a, a', a'', a''' u. s. w. sollen respective durch S, S', S'', S''' u. s. w., und die Winkel, welche diese Theile mit den angenommenen Axen einschließen, durch φ, φ', φ'', φ''' u. s. w., und ψ, ψ', ψ'', ψ''' u. s. w. bezeichnet werden, wobey zu bemerken ist, daß, in Beziehung auf die Bestimmung dieser Winkel, die einzelnen Theile des Seils immer als von ihren Endpunkten nach der Gegend von M hin gerichtet betrachtet werden sollen. Spannung und Winkel des letzten Theils des Seils sollen durch Σ, Φ, Ψ bezeichnet werden.

Man betrachte jetzt die Spannungen in irgend zwey Theilen des Seils, z. B. S' und S''''; so ist es augenscheinlich eben so, als wenn an dem Seile zwischen den beiden angenommenen Theilen die Kräfte S', P', P'', P''', P'''', S'''' im

Gleichgewichte wären, so daß also offenbar nach §. 23., da hier Alles in einer Ebene liegt:

$$S'\mathrm{Cos}\,\varphi' + P'\mathrm{Cos}\,\alpha' + P''\mathrm{Cos}\,\alpha'' + P'''\mathrm{Cos}\,\alpha''' + P''''\mathrm{Cos}\,\alpha'''' + S'''''\mathrm{Cos}\,(180^\circ - \varphi''''') = 0,$$

$$S'\mathrm{Cos}\,\psi' + P'\mathrm{Cos}\,\beta' + P''\mathrm{Cos}\,\beta'' + P'''\mathrm{Cos}\,\beta''' + P''''\mathrm{Cos}\,\beta'''' + S'''''\mathrm{Cos}\,(180^\circ - \psi''''') = 0$$

ist. Weßhalb zuletzt nicht $\mathrm{Cos}\,\varphi'''''$ und $\mathrm{Cos}\,\psi'''''$, sondern die Cosinusse der Supplemente gesetzt sind, wird leicht erhellen, und liegt in der obigen Bestimmung über die Richtung, nach welcher alle Theile des Seils genommen werden sollen. Wegen des angenommenen Coordinatensystems ist nun

$$\alpha = \alpha' = \alpha'' = \alpha''' = \ldots = 90^\circ, \quad \beta = \beta' = \beta'' = \beta''' = \ldots = 180^\circ,$$

wo die β nicht $= 0$ zu setzen sind, da die Gewichte abwärts wirken. Also

$$\mathrm{Cos}\alpha = \mathrm{Cos}\alpha' = \mathrm{Cos}\alpha'' = \ldots = 0, \quad \mathrm{Cos}\beta = \mathrm{Cos}\beta' = \mathrm{Cos}\beta'' = \ldots = -1,$$

und folglich

$$S'\mathrm{Cos}\,\varphi' - S'''''\mathrm{Cos}\,\varphi''''' = 0,$$
$$S'\mathrm{Cos}\,\psi' - P' - P'' - P''' - P'''' - S'''''\mathrm{Cos}\,\psi''''' = 0;$$

oder, wenn man die Summe

$$P' + P'' + P''' + P'''' = V$$

setzt:

$$S'\mathrm{Cos}\,\varphi' - S'''''\mathrm{Cos}\,\varphi''''' = 0,$$
$$S'\mathrm{Cos}\,\psi' - S'''''\mathrm{Cos}\,\psi''''' = V;$$

oder

$$S'\mathrm{Cos}\,\varphi' = S'''''\mathrm{Cos}\,\varphi''''',$$
$$S'\mathrm{Cos}\,\psi' = S'''''\mathrm{Cos}\,\psi''''' + V.$$

Also

$$S'\mathrm{Cos}\,\varphi'\mathrm{Cos}\,\psi''''' = S'''''\mathrm{Cos}\,\varphi'''''\mathrm{Cos}\,\psi''''',$$
$$S'\mathrm{Cos}\,\psi'\mathrm{Cos}\,\varphi''''' = S'''''\mathrm{Cos}\,\psi'''''\mathrm{Cos}\,\varphi''''' + V\mathrm{Cos}\,\varphi''''',$$
$$S'(\mathrm{Cos}\,\varphi'''''\mathrm{Cos}\,\psi' - \mathrm{Cos}\,\psi'''''\mathrm{Cos}\,\varphi') = V\mathrm{Cos}\,\varphi''''',$$
$$S' = \frac{V\mathrm{Cos}\,\varphi'''''}{\mathrm{Cos}\,\varphi'''''\mathrm{Cos}\,\psi' - \mathrm{Cos}\,\psi'''''\mathrm{Cos}\,\varphi'};$$

und auf ähnliche Art:

$$S'\mathrm{Cos}\,\varphi'\mathrm{Cos}\,\psi' = S'''''\mathrm{Cos}\,\varphi'''''\mathrm{Cos}\,\psi',$$
$$S'\mathrm{Cos}\,\psi'\mathrm{Cos}\,\varphi' = S'''''\mathrm{Cos}\,\psi'''''\mathrm{Cos}\,\varphi' + V\mathrm{Cos}\,\varphi',$$

$$o = S'''''(\mathrm{Cos}\,\varphi'''''\mathrm{Cos}\,\psi' - \mathrm{Cos}\,\psi'''''\mathrm{Cos}\,\varphi') - V\mathrm{Cos}\,\varphi',$$

$$S''''' = \frac{V\mathrm{Cos}\,\varphi'}{\mathrm{Cos}\,\varphi'''''\mathrm{Cos}\,\psi' - \mathrm{Cos}\,\psi'''''\mathrm{Cos}\,\varphi'}.$$

Also

$$S' : S''''' = V\mathrm{Cos}\,\varphi''''' : V\mathrm{Cos}\,\varphi', \text{ d. i.}$$

$$S' : S''''' = \mathrm{Cos}\,\varphi''''' : \mathrm{Cos}\,\varphi';$$

d. i. **Die Spannungen zweyer Theile des Seils verhalten sich umgekehrt wie die Cosinusse der von diesen Theilen mit der Horizontale eingeschlossenen Winkel,** so daß also auch für die äußersten Theile

$$S : \Sigma = \mathrm{Cos}\,\Phi : \mathrm{Cos}\,\varphi.$$

Setzt man die Summe aller an dem Seile hängenden Gewichte $= L$; so ist

$$S = \frac{L\,\mathrm{Cos}\,\Phi}{\mathrm{Cos}\,\Phi\,\mathrm{Cos}\,\psi - \mathrm{Cos}\,\Psi\,\mathrm{Cos}\,\varphi},$$

$$\Sigma = \frac{L\,\mathrm{Cos}\,\varphi}{\mathrm{Cos}\,\Phi\,\mathrm{Cos}\,\psi - \mathrm{Cos}\,\Psi\,\mathrm{Cos}\,\varphi}.$$

Man wird sich leicht überzeugen, daß immer $\varphi - \psi = 90°$, und $\Phi + \Psi = 270°$ ist, woraus sich ergibt:

$$\mathrm{Cos}\,\psi = \mathrm{Cos}\,(\varphi - 90°) = \mathrm{Sin}\,\varphi,$$

$$\mathrm{Cos}\,\Psi = \mathrm{Cos}\,(270° - \Phi) = -\mathrm{Sin}\,\Phi.$$

Also der Nenner der obigen Brüche

$$= \mathrm{Cos}\,\Phi\,\mathrm{Sin}\,\varphi + \mathrm{Sin}\,\Phi\,\mathrm{Cos}\,\varphi = \mathrm{Sin}\,(\Phi + \varphi),$$

und demnach

$$S = \frac{L\,\mathrm{Cos}\,\Phi}{\mathrm{Sin}\,(\Phi + \varphi)}, \quad \Sigma = \frac{L\,\mathrm{Cos}\,\varphi}{\mathrm{Sin}\,(\Phi + \varphi)}.$$

Man kann auch, wovon wir nachher Gebrauch machen werden, behaupten, daß umgekehrt, **wenn für die Spannungen S, Σ der äußersten Theile des Seils die beiden vorhergehenden Gleichungen statt finden, die Gewichte an dem Seile im Gleichgewichte sind.** Weil nämlich

$$S = \frac{L\,\mathrm{Cos}\,\Phi}{\mathrm{Sin}\,(\Phi + \varphi)}, \quad \Sigma = \frac{L\,\mathrm{Cos}\,\varphi}{\mathrm{Sin}\,(\Phi + \varphi)}$$

ist; so ist

$$L = \frac{S \operatorname{Sin}(\Phi + \varphi)}{\operatorname{Cos}\Phi} = \frac{\Sigma \operatorname{Sin}(\Phi + \varphi)}{\operatorname{Cos}\varphi},$$

$$\frac{S}{\operatorname{Cos}\Phi} = \frac{\Sigma}{\operatorname{Cos}\varphi},$$

$$S \operatorname{Cos}\varphi - \Sigma \operatorname{Cos}\Phi = 0.$$

Da nun

$$L \operatorname{Cos}\Phi = S \operatorname{Sin}(\Phi + \varphi), \text{ und}$$
$$L \operatorname{Cos}\varphi = \Sigma \operatorname{Sin}(\Phi + \varphi)$$

ist; so ist

$$L(\operatorname{Cos}\Phi - \operatorname{Cos}\varphi) = (S - \Sigma)\operatorname{Sin}(\Phi + \varphi),$$
$$(S - \Sigma)\operatorname{Sin}(\Phi + \varphi) = (S - \Sigma)(\operatorname{Sin}\Phi \operatorname{Cos}\varphi + \operatorname{Cos}\Phi \operatorname{Sin}\varphi)$$
$$= S\operatorname{Sin}\Phi\operatorname{Cos}\varphi + S\operatorname{Cos}\Phi\operatorname{Sin}\varphi - \Sigma\operatorname{Sin}\Phi\operatorname{Cos}\varphi - \Sigma\operatorname{Cos}\Phi\operatorname{Sin}\varphi.$$

Ferner ist

$$(\operatorname{Cos}\Phi - \operatorname{Cos}\varphi)(S\operatorname{Sin}\varphi + \Sigma\operatorname{Sin}\Phi) =$$
$$= S\operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Cos}\Phi + \Sigma\operatorname{Sin}\Phi\operatorname{Cos}\Phi - S\operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Cos}\varphi - \Sigma\operatorname{Sin}\Phi\operatorname{Cos}\varphi.$$

Aber $S\operatorname{Cos}\varphi - \Sigma\operatorname{Cos}\Phi = 0$. Also

$$(S\operatorname{Cos}\varphi - \Sigma\operatorname{Cos}\Phi)\operatorname{Sin}\Phi + (S\operatorname{Cos}\varphi - \Sigma\operatorname{Cos}\Phi)\operatorname{Sin}\varphi = 0,$$
$$S\operatorname{Sin}\Phi\operatorname{Cos}\varphi - \Sigma\operatorname{Sin}\Phi\operatorname{Cos}\Phi + S\operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Cos}\varphi - \Sigma\operatorname{Cos}\Phi\operatorname{Sin}\varphi = 0,$$
$$S\operatorname{Sin}\Phi\operatorname{Cos}\varphi - \Sigma\operatorname{Cos}\Phi\operatorname{Sin}\varphi = \Sigma\operatorname{Sin}\Phi\operatorname{Cos}\Phi - S\operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Cos}\varphi;$$

und folglich

$$L(\operatorname{Cos}\Phi - \operatorname{Cos}\varphi) = (\operatorname{Cos}\Phi - \operatorname{Cos}\varphi)(S\operatorname{Sin}\varphi + \Sigma\operatorname{Sin}\Phi),$$
$$L = S\operatorname{Sin}\varphi + \Sigma\operatorname{Sin}\Phi, \text{ oder}$$
$$L = S\operatorname{Cos}\psi - \Sigma\operatorname{Cos}\Psi.$$

Man hat also

$$S\operatorname{Cos}\varphi - \Sigma\operatorname{Cos}\Phi = 0,$$
$$S\operatorname{Cos}\psi - \Sigma\operatorname{Cos}\Psi = L;$$

und folglich, weil

$$\alpha = \alpha' = \alpha'' = \ldots = 90^\circ, \quad \beta = \beta' = \beta'' = \ldots = 180^\circ:$$
$$0 = P\operatorname{Cos}\alpha + P'\operatorname{Cos}\alpha' + P''\operatorname{Cos}\alpha'' + P'''\operatorname{Cos}\alpha''' + \ldots,$$
$$L = -P\operatorname{Cos}\beta - P'\operatorname{Cos}\beta' - P''\operatorname{Cos}\beta'' - P'''\operatorname{Cos}\beta''' - \ldots;$$

und also

$$S\operatorname{Cos}\varphi + P\operatorname{Cos}\alpha + P'\operatorname{Cos}\alpha' + P''\operatorname{Cos}\alpha'' + \ldots - \Sigma\operatorname{Cos}\Phi = 0,$$
$$S\operatorname{Cos}\psi + P\operatorname{Cos}\beta + P'\operatorname{Cos}\beta' + P''\operatorname{Cos}\beta'' + \ldots - \Sigma\operatorname{Cos}\Psi = 0;$$

oder

$$S \operatorname{Cos}\varphi + P\operatorname{Cos}\alpha + P'\operatorname{Cos}\alpha' + P''\operatorname{Cos}\alpha'' + \ldots + \Sigma\operatorname{Cos}(180^\circ - \Phi) = 0,$$
$$S \operatorname{Cos}\psi + P\operatorname{Cos}\beta + P'\operatorname{Cos}\beta' + P''\operatorname{Cos}\beta'' + \ldots + \Sigma\operatorname{Cos}(180^\circ - \Psi) = 0,$$

woraus nach §. 162. folgt, daß das Gleichgewicht wirklich statt findet, w. z. b. w.

§. 165.

Aufgabe. Ein Seil, dessen Länge bekannt ist, ist in den Punkten M und M' (Fig. 95.) befestigt, und an ihm ist vermittelst eines Ringes ein Gewicht P beweglich: man sucht den Ort, wo der Ring in Ruhe ist.

Auflösung. Wenn der Ring in Ruhe ist, so muß in dem ganzen Seile gleiche Spannung herrschen, weil sonst offenbar kein Gleichgewicht statt finden könnte. (M. s. §. 68.) Sind nun wie gewöhnlich S und Σ die Spannungen der Theile AM und AM', und ist BC horizontal; so ist nach §. 164.:

$$S : \Sigma = \operatorname{Cos}\Phi : \operatorname{Cos}\varphi.$$

Aber nach obiger Bemerkung $S = \Sigma$. Folglich auch $\operatorname{Cos}\Phi = \operatorname{Cos}\varphi$, und demnach $\Phi = \varphi$. Da aber $\Phi = 90^\circ + \alpha$, $\varphi = 90^\circ + \beta$ ist; so ist auch $\alpha = \beta$ oder $\alpha' = \beta'$, und der Punkt A, wo der Ring ruhet, muß also eine solche Lage haben, daß der von den beiden Theilen AM, AM' des Seils eingeschlossene Winkel MAM' von der durch A gehenden Verticale AP halbirt wird.

Einen solchen Punkt findet man leicht durch Construction, wenn man in Fig. 96. durch M die Horizontale MD, und durch M' die Verticale $DM'E$ zieht, sodann, von M aus, ME der Länge des Seils gleich nimmt, $M'E$ in G halbirt, und durch G die Horizontale AG zieht, wo denn A der gesuchte Punkt ist. Der Beweis wird leicht auf folgende Art geführt:

$$AG = AG, \quad EG = M'G, \quad \angle AGE = \angle AGM' = R.$$

Also $\triangle AGE \cong \triangle AGM'$, und folglich $AE = AM'$. Also $MAM' = MAE$, d. i. $=$ der Länge des Seils. Auch $\angle AEG = \angle AM'G$. Aber $\alpha' = \angle AM'G$, $\beta' = \angle AEG$, und demnach $\alpha' = \beta'$, wie erfordert wurde.

Der Punkt A ist der tiefste Punkt, welchen der Ring einnehmen kann. Denn alle Punkte, in welchen er sich befinden kann, liegen offenbar in einer Ellipse, deren Brennpunkte M und M' sind, und deren große Axe der Länge des Seils gleich ist. Da nun die Winkel α' und β' einander gleich sind; so sind auch die Winkel, welche die Horizontale durch A mit den Vectoren AM und AM' einschließt, einander gleich, und die genannte Horizontale ist also nach einer sehr bekannten Eigenschaft der Ellipse, (M. s. mein Lehrbuch der Kegelschnitte, §. 106.), eine Tangente der Ellipse, woraus nun unmittelbar folgt, daß der Punkt A der tiefste Punkt dieser Ellipse, d. i. der tiefste Punkt ist, welchen der auf dem Seile bewegliche Ring einnehmen kann, w. z. b. w.

Setzt man $MD = a$, $DM' = b$, $MF = x$, $FA = y$, und die Länge des Seils $= l = MAE = MAM'$; so ist

$$y = FA = DG = DM' + M'G = DM' + \tfrac{1}{2}M'E$$
$$= b + \tfrac{1}{2}(\sqrt{l^2 - a^2} - b) = \tfrac{1}{2}b + \tfrac{1}{2}\sqrt{l^2 - a^2},$$
$$MD : DE = MF : FA,$$
$$a : \sqrt{l^2 - a^2} = x : y,$$
$$x = \frac{ay}{\sqrt{l^2 - a^2}} = \frac{ab + a\sqrt{l^2 - a^2}}{2\sqrt{l^2 - a^2}} = \tfrac{1}{2}a + \frac{ab}{2\sqrt{l^2 - a^2}}.$$

Die Spannung des Seils, welche wir durch S bezeichnen wollen, ist nach §. 164.

$$= \frac{P \operatorname{Cos} \Phi}{\operatorname{Cos} \Phi \operatorname{Cos} \psi - \operatorname{Cos} \Psi \operatorname{Cos} \varphi}.$$

Aber offenbar, da $\alpha = \beta$ ist:

$$\Phi = \alpha + 90^\circ,\ \varphi = \alpha + 90^\circ,\ \Psi = 180^\circ - \alpha,\ \psi = \alpha;$$
$$\operatorname{Cos}\Phi = -\operatorname{Sin}\alpha,\ \operatorname{Cos}\varphi = -\operatorname{Sin}\alpha,\ \operatorname{Cos}\Psi = -\operatorname{Cos}\alpha,\ \operatorname{Cos}\psi = \operatorname{Cos}\alpha;$$
$$S = \frac{-P \operatorname{Sin}\alpha}{-\operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Cos}\alpha - \operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Sin}\alpha}$$
$$= \frac{P \operatorname{Sin}\alpha}{2 \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Cos}\alpha} = \frac{P}{2 \operatorname{Cos}\alpha}.$$

Aber $\mathrm{Cos}\,\alpha = \frac{DE}{ME} = \frac{\sqrt{l^2 - a^2}}{l}$,

$$S = \frac{Pl}{2\sqrt{l^2 - a^2}}.$$

Es erhellet hieraus, daß bey derselben Kraft P und derselben Länge des Seils die Spannung desto größer wird, je weniger l von a unterschieden ist. Lägen M und M' in einer Horizontallinie, und wäre $l = a$; so würde $S = \infty$, so daß also eine unendlich große Kraft erfordert wird, das Seil zwischen zwey Punkten horizontal zu spannen, welches demnach nicht möglich ist.

§. 166.

Aufgabe. An einem Knoten A (Fig. 97.) wirken drey gegebene Kräfte P, Q, R: man soll die Lage des Seils bestimmen, wo die drey Kräfte im Gleichgewichte sind, und ihre Richtungen durch drey gegebene Punkte B, C, D gehen.

Auflösung. Man ziehe die Linie BC und beschreibe ein Dreyeck BCE, in welchem

$$BC : BE : CE = R : Q : P,$$

welches immer leicht möglich ist. Hierauf beschreibe man um das Dreyeck BCE einen Kreis und ziehe ED; so ist der Punkt A, wo ED den Kreis schneidet, die Lage des Knotens, und AD, AB, AC sind die Richtungen der Kräfte.

Beweis. Da

$$R : Q : P = BC : BE : CE,$$

und

$$BC : BE : CE = \mathrm{Sin}\,BEC : \mathrm{Sin}\,\beta : \mathrm{Sin}\,\alpha,$$

aber $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $BEC + \alpha' + \beta' = 180°$, also

$\mathrm{Sin}\,\alpha = \mathrm{Sin}\,\alpha'$, $\mathrm{Sin}\,\beta = \mathrm{Sin}\,\beta'$, $\mathrm{Sin}\,BEC = \mathrm{Sin}\,(\alpha' + \beta')$ ist; so ist

$$R : Q : P = \mathrm{Sin}\,(\alpha' + \beta') : \mathrm{Sin}\,\beta' : \mathrm{Sin}\,\alpha',$$

und es erhellet daher, daß sich aus den geometrischen Darstellungen der Kräfte R, Q, P ein Parallelogramm bilden läßt, dessen Seiten in AB und AC liegen, und dessen Diagonale in AE fällt, woraus nach dem Parallelogramm der Kräfte das Gleichgewicht folgt.

§. 167.

Lehrsatz. Wenn in dem Parallelogramm $ABCD$ (Fig. 98.) die Seite AD in E halbirt ist, und AC und BE gezogen werden; so ist immer $EF = \frac{1}{2} FB = \frac{1}{3} BE$, und $AF = \frac{1}{2} FC = \frac{1}{3} AC$.

Beweis. Denn es ist offenbar $\Delta BFC \sim \Delta AFE$, und folglich

$$BF : FE = CF : AF = BC : AE.$$

Aber $BC = AD$, und demnach

$$BF : FE = CF : AF = AD : AE = 2 : 1.$$

Also $FE = \frac{1}{2} BF$, $AF = \frac{1}{2} CF$,

w. z. b. w.

§. 168.

Lehrsatz. Wenn vier Kräfte an vier in einem Knoten vereinigten Seilen im Gleichgewichte sind, von dem Knoten aus auf den Seilen vier den Kräften proportionale Linien genommen, und dann die Endpunkte dieser Linien durch gerade Linien verbunden werden; so wird jedes Mahl eine Pyramide entstehen, deren Schwerpunkt der Knoten ist, an welchem die vier Kräfte wirken.

Beweis. Auf den Seilen AB, AC, AD, AE (Fig. 99.) seyen diese Linien den vier Kräften, die an diesen in dem Knoten A vereinigten Seilen im Gleichgewichte sind, proportional genommen, und die Pyramide $EBCD$ sey beschrieben. Aus den drey Linien AB, AC, AD beschreibe man das Parallelepipedon $ABCFGHD$; so ist dessen Diagonale AG die Resultirende der Kräfte AB, AC, AD, und folglich der Linie AE, welche die mit diesen Kräften im Gleichgewichte sich befindende Kraft darstellt, gleich und gerade entgegengesetzt, so daß also EAG eine gerade Linie und $EA = AG$ ist. Zieht man nun die Diagonalen AH, CD, und die Linien BG, BK; so ist bekanntlich $CK = KD$, und $AK = KH$: also, weil $ABGH$ ein Parallelogramm ist, nach dem vorhergehenden Paragraphen: $LK = \frac{1}{3} BK$, $AL = \frac{1}{3} AG$. Demnach ist L der Schwerpunkt des Dreyecks CBD, und EL ein Durchmesser der Schwere der Pyramide. Da nun nach dem Obigen $AG = EA$ ist, so ist $AL = \frac{1}{3} AG = \frac{1}{3} EA = \frac{1}{4} EL$, und folglich A der Schwerpunkt der Pyramide $EBCD$ nach §. 97., w. z. b. w.

Bemerkung. Etwas Aehnliches läßt sich sehr leicht von drey Kräften beweisen, die in einer Ebene an einem Knoten im Gleichgewichte sind. Nimmt man nämlich von dem Knoten aus auf den Seilen Linien, welche den im Gleichgewichte sich befindenden Kräften proportional sind, und verbindet die Endpunkte dieser Linien durch gerade Linien; so entsteht ein Dreyeck, dessen Schwerpunkt der Knoten ist.

Denn sind in Fig. 100. die drey durch AB, AC, AD dargestellten Kräfte an dem Knoten A im Gleichgewichte, so vollende man das Parallelogramm $ABCE$, und ziehe CB, AE; so ist AE die aus AB, AC Resultirende, und demnach der AD gleich und gerade entgegengesetzt, so daß DAE eine gerade Linie und $AD = AE$ ist. Es ist aber bekanntlich $BF = FC$ und $AF = FE = \frac{1}{2} AE = \frac{1}{2} AD = \frac{1}{3} DF$, so daß also nach §. 88. A der Schwerpunkt des Dreyecks BCD ist, w. z. b. w.

§. 169.

Aufgabe. Es ist ein in M und M' (Fig. 101.) aufgehängtes Seil mit den beiden Knoten A und A' gegeben: man soll die Gewichte finden, welche in A und

A' bey der gegebenen Lage $MAA'M'$ des Seils im Gleichgewichte sind.

Auflösung. Durch A und A' ziehe man die Verticalen AC und $A'C'$, und verlängere AM und $A'M'$, bis sie diese Verticalen in C und C' schneiden; so leisten jede zwey Kräfte P und P', für welche

$$P : P' = A'C' : AC$$

ist, und welche sich demnach umgekehrt wie AC und $A'C'$ verhalten, der Aufgabe Genüge.

Beweis. Behalten wir die in §. 164. gebrauchten Bezeichnungen bey, und bezeichnen die Spannung von AA' durch S', und die von $A'A$ mit den angenommenen Axen eingeschlossenen Winkel durch φ', ψ'; so sind die Kräfte S, P, S' in A, und S', P', Σ in A' im Gleichgewichte, wenn sich die Kräfte P und P' ins Gleichgewicht gesetzt haben, und man hat also nach §. 23.:

$$S \operatorname{Cos} \varphi + P \operatorname{Cos} 90^\circ + S' \operatorname{Cos}(180^\circ - \varphi') = 0,$$
$$S \operatorname{Cos} \psi + P \operatorname{Cos} 180^\circ + S' \operatorname{Cos}(180^\circ - \psi') = 0,$$

und

$$S' \operatorname{Cos} \varphi' + P' \operatorname{Cos} 90^\circ + \Sigma \operatorname{Cos}(180^\circ - \Phi) = 0,$$
$$S' \operatorname{Cos} \psi' + P' \operatorname{Cos} 180^\circ + \Sigma \operatorname{Cos}(180^\circ - \Psi) = 0;$$

oder

$$S \operatorname{Cos} \varphi - S' \operatorname{Cos} \varphi' = 0,$$
$$S \operatorname{Cos} \psi - P - S' \operatorname{Cos} \psi' = 0,$$

und

$$S' \operatorname{Cos} \varphi' - \Sigma \operatorname{Cos} \Phi = 0,$$
$$S' \operatorname{Cos} \psi' - P' - \Sigma \operatorname{Cos} \Psi = 0.$$

Es ist aber in dem vorliegenden Falle offenbar $\psi = \varphi - 90^\circ$, $\Psi = 270^\circ - \Phi$, $\psi' = \varphi' - 90^\circ$ oder $\psi' = 270^\circ - \varphi'$, für die beiden in der Figur dargestellten Fälle. Also $\operatorname{Cos} \psi = \operatorname{Sin} \varphi$, $\operatorname{Cos} \Psi = - \operatorname{Sin} \Phi$, $\operatorname{Cos} \psi' = \operatorname{Sin} \varphi'$ oder $\operatorname{Cos} \psi' = - \operatorname{Sin} \varphi'$. Also

$$S \operatorname{Cos} \varphi - S' \operatorname{Cos} \varphi' = 0,$$
$$S \operatorname{Sin} \varphi - P \mp S' \operatorname{Sin} \varphi' = 0,$$

$$S \operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Sin} \varphi' - S' \operatorname{Cos} \varphi' \operatorname{Sin} \varphi' = 0,$$
$$S \operatorname{Sin} \varphi \operatorname{Cos} \varphi' - P \operatorname{Cos} \varphi' \mp S' \operatorname{Sin} \varphi' \operatorname{Cos} \varphi' = 0,$$
$$S \operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Sin} \varphi' \mp S \operatorname{Sin} \varphi \operatorname{Cos} \varphi' \pm P \operatorname{Cos} \varphi' = 0,$$
$$S \operatorname{Sin} \varphi \operatorname{Cos} \varphi' \mp S \operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Sin} \varphi' - P \operatorname{Cos} \varphi' = 0,$$
$$S \operatorname{Sin} (\varphi \mp \varphi') - P \operatorname{Cos} \varphi' = 0;$$

und ganz auf dieselbe Art

$$S' \operatorname{Cos} \varphi' - \Sigma \operatorname{Cos} \Phi = 0,$$
$$\pm S' \operatorname{Sin} \varphi' - P' + \Sigma \operatorname{Sin} \Phi = 0;$$

oder

$$\Sigma \operatorname{Cos} \Phi - S' \operatorname{Cos} \varphi' = 0,$$
$$\Sigma \operatorname{Sin} \Phi - P' \pm S' \operatorname{Sin} \varphi' = 0.$$

Also ganz wie vorher:

$$\Sigma \operatorname{Sin} (\Phi \pm \varphi') - P' \operatorname{Cos} \varphi' = 0,$$

so daß also

$$S \operatorname{Sin} (\varphi \mp \varphi') - P \operatorname{Cos} \varphi' = 0,$$
$$\Sigma \operatorname{Sin} (\Phi \pm \varphi') - P' \operatorname{Cos} \varphi' = 0.$$

Es ist aber bey der gegebenen Lage des Seils

$$AA' : A'C' = \operatorname{Sin} AC'A' : \operatorname{Sin} A'AC',$$
$$AC : AA' = \operatorname{Sin} AA'C : \operatorname{Sin} ACA'.$$

Also

$$AC : A'C' = \operatorname{Sin} AC'A' \,.\, \operatorname{Sin} AA'C : \operatorname{Sin} A'AC' \,.\, \operatorname{Sin} ACA'.$$

Aber

$$AC'A' = \psi = \varphi - 90^\circ, \quad \operatorname{Sin} AC'A' = -\operatorname{Cos} \varphi;$$
$$AA'C = \Psi - \psi' = 270^\circ - \Phi - \begin{Bmatrix} \varphi' - 90^\circ \\ 270^\circ - \varphi' \end{Bmatrix}$$
$$= \begin{Bmatrix} 360^\circ - (\Phi + \varphi') \\ -(\Phi - \varphi') \end{Bmatrix},$$
$$\operatorname{Sin} AA'C = -\operatorname{Sin} (\Phi \pm \varphi');$$
$$A'AC' = \psi' - \psi = \begin{Bmatrix} \varphi' - 90^\circ \\ 270^\circ - \varphi' \end{Bmatrix} - (\varphi - 90^\circ)$$
$$= \begin{Bmatrix} \varphi' - \varphi \\ 360^\circ - (\varphi + \varphi') \end{Bmatrix},$$
$$\operatorname{Sin} A'AC' = -\operatorname{Sin} (\varphi \mp \varphi');$$
$$ACA' = 180^\circ - \Psi = 180^\circ - (270^\circ - \Phi)$$
$$= \Phi - 90^\circ,$$

$$\operatorname{Sin} ACA' = -\operatorname{Cos}\Phi.$$

Also

$$AC : A'C' = \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin}(\Phi \pm \varphi') : \operatorname{Cos}\Phi \operatorname{Sin}(\varphi \mp \varphi')$$
$$= P' : P;$$
$$P \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin}(\Phi \pm \varphi') = P' \operatorname{Cos}\Phi \operatorname{Sin}(\varphi \mp \varphi'),$$
$$P \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin}(\Phi \pm \varphi') - P' \operatorname{Cos}\Phi \operatorname{Sin}(\varphi \mp \varphi') = 0,$$
$$\left.\begin{aligned} P\{\operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin}(\Phi \pm \varphi') + \operatorname{Cos}\Phi \operatorname{Sin}(\varphi \mp \varphi')\} \\ -(P + P')\operatorname{Cos}\Phi \operatorname{Sin}(\varphi \mp \varphi') \end{aligned}\right\} = 0.$$

Der Factor von P ist

$$= \begin{cases} \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin}\Phi \operatorname{Cos}\varphi' \pm \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Cos}\Phi \operatorname{Sin}\varphi' + \operatorname{Cos}\Phi \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos}\varphi' \\ \mp \operatorname{Cos}\Phi \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin}\varphi' \end{cases}$$
$$= \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin}\Phi \operatorname{Cos}\varphi' + \operatorname{Cos}\Phi \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos}\varphi' = \operatorname{Cos}\varphi' \operatorname{Sin}(\Phi + \varphi);$$
$$(P + P')\operatorname{Cos}\Phi \operatorname{Sin}(\varphi \mp \varphi') = P \operatorname{Cos}\varphi' \operatorname{Sin}(\Phi + \varphi).$$

Aber nach dem Obigen

$$P \operatorname{Cos}\varphi' = S \operatorname{Sin}(\varphi \mp \varphi').$$

Also

$$(P + P')\operatorname{Cos}\Phi \operatorname{Sin}(\varphi \mp \varphi') = S \operatorname{Sin}(\varphi \mp \varphi') \operatorname{Sin}(\Phi + \varphi),$$

und folglich

$$S = \frac{(P + P')\operatorname{Cos}\Phi}{\operatorname{Sin}(\Phi + \varphi)}.$$

Auf ähnliche Art ist

$$\left.\begin{aligned} (P + P')\operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin}(\Phi \pm \varphi') \\ -P'\{\operatorname{Cos}\Phi \operatorname{Sin}(\varphi \mp \varphi') + \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin}(\Phi \pm \varphi')\} \end{aligned}\right\} = 0.$$

Der Factor von P' ist

$$= \begin{cases} \operatorname{Cos}\Phi \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos}\varphi' \mp \operatorname{Cos}\Phi \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin}\varphi' + \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin}\Phi \operatorname{Cos}\varphi' \\ \pm \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Cos}\Phi \operatorname{Sin}\varphi' \end{cases}$$
$$= \operatorname{Cos}\Phi \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos}\varphi' + \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin}\Phi \operatorname{Cos}\varphi'$$
$$= \operatorname{Cos}\varphi' \operatorname{Sin}(\Phi + \varphi);$$
$$(P + P')\operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin}(\Phi \pm \varphi') = P' \operatorname{Cos}\varphi' \operatorname{Sin}(\Phi + \varphi),$$
$$P' \operatorname{Cos}\varphi' = \Sigma \operatorname{Sin}(\Phi \pm \varphi'),$$
$$(P + P')\operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin}(\Phi \pm \varphi') = \Sigma \operatorname{Sin}(\Phi \pm \varphi') \operatorname{Sin}(\Phi + \varphi),$$

und folglich

$$\Sigma = \frac{(P + P')\operatorname{Cos}\varphi}{\operatorname{Sin}(\Phi + \varphi)}.$$

Da nun hiernach

$$S = \frac{(P + P')\operatorname{Cos}\Phi}{\operatorname{Sin}(\Phi + \varphi)} = \frac{L \operatorname{Cos}\Phi}{\operatorname{Sin}(\Phi + \varphi)},$$

$$\Sigma = \frac{(P + P')\operatorname{Cos}\varphi}{\operatorname{Sin}(\Phi + \varphi)} = \frac{L \operatorname{Cos}\varphi}{\operatorname{Sin}(\Phi + \varphi)}$$

ist; so findet nach §. 164. das Gleichgewicht statt, w. z. b. w.

Ich habe zur Uebung der Anfänger diesen Beweis absichtlich so umständlich analytisch geführt.

Eines Seils, wie das hier betrachtete, kann man sich als einer Wage bedienen. Hängt nämlich an A' irgend eine Last P', so hänge man in P so viele Gewichte an, bis das Seil in der Lage $MAA'M'$ in Ruhe ist. Dann ist

$$P : P' = A'C' : AC,$$

$$P' = P \cdot \frac{AC}{A'C'}.$$

Hat man nun den Quotienten $\frac{AC}{A'C'}$ ein für alle Mahl berechnet, so kann man aus dem Gewichte P leicht die Last P' finden. Die Fäden müssen so dünn und leicht als möglich genommen werden.

Funfzehntes Kapitel.
Von der Kettenlinie.

§. 170.

Schon Galilei hatte in seinem Werke:

Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno à due nuove scienze, attenenti alla meccanica ed i movimenti locali, del Sign. Galileo Galilei, in Leida 1638, p. 146.,

die Frage aufgeworfen, welches die Natur der Curve seyn möge, nach welcher ein an seinen beiden Enden aufgehängtes völlig biegsames Seil, oder eine dergleichen Kette, gekrümmt ist. Er glaubte, oder, wie Montucla in der Histoire des Mathématiques, T. II. p. 468., sagt: „il avoit jugé fort gra„tuitement et sans aucune raison solide„, daß diese Curve eine Parabel sey. Ein deutscher Gelehrter, Joachim Jungius, welchen Leibnitz in den Actis Eruditorum, mens. Jun. a. 1691. p. 277., „eximium nostri seculi Philosophum „ac Mathematicum, qui multa ante Cartesium praeclara „cogitata habuerat circa scientiarum emendationem,„ nennt, zeigte zwar in seiner im Jahre 1669 erschienenen Geometria empirica durch Rechnung und Versuche, daß die in Rede stehende Curve keine Parabel sey, gab aber die wahre Curve nicht an, eben so, wie Andere nach ihm, welche die Auflösung der Aufgabe versuchten.

Im Jahre 1690 kam der berühmte Jacob Bernoulli nebst seinem Bruder Johann Bernoulli, der damahls noch Medicinae Candidatus zu Basel, wo der ältere Bruder schon als Professor der Mathematik glänzte, war, wieder auf das Problem, jedoch ohne etwas von den frühern Arbeiten des Galilei und Jungius zu wissen. Denn Johann Bernoulli schreibt in den Actis Eruditorum, mens. Jun. a. 1691. p. 274.: „Annus fere est, cum inter sermocinandum cum „cl. Fratre mentio forte incidisset de Natura Curvae,

„quam funis inter duo puncta fixa libere suspensus for-„mat. Mirabamur, rem omnium oculis et ma-„nibus quotidie expositam nullius hucusque „attentionem in se concitasse.„ — Jacob Ber-noulli hielt das Problem für wichtig und interessant genug, um es nach der damahligen sehr nachahmungswerthen Sitte den Geometern seiner Zeit zur Auflösung vorzulegen, und that es auch wirklich in den Actis Eruditorum, menſ. Maj. a. 1690. p. 219., mit folgenden Worten:

„Problema viciſſim proponendum hoc esto:

„Invenire, quam curvam referat funis la-„xus et inter duo puncta fixa libere suspen-„sus. Sumo autem, funem esse lineam in omnibus suis „partibus facillime flexilem.„

Leibnitz zeigte schon im Julius desselben Jahres in den Actis Eruditorum, p. 560., an, daß er die Auflösung des Problems gefunden habe, setzte aber zugleich hinzu: „quod si „ante anni exitum nemo solutionem a se repertam esse „significabit, ego meam Deo volente dabo.„

Noch vor Ausgang des Jahres, im December, m. s. Acta Eruditorum, a. 1691, p. 273., fand Johann Bernoulli ebenfalls die Auflösung, von welcher man jedoch annimmt, daß sie eine Arbeit beider Brüder, welche damahls noch gemeinschaftlich arbeiteten, ist. (M. s. Bossut's Versuch einer Geschichte der Mathematik, aus dem Französischen, von Reimer, Th. 2., Hamburg 1804, 8., S. 151.)

Diese beiden Auflösungen erschienen nebst einer Abhandlung des berühmten Christian Huygens, welcher die Auflösung ebenfalls gefunden hatte, im Junius des folgenden Jahres 1691 in den Actis Eruditorum, p. 273. — 282., nach der Ordnung, in welcher sie eingeschickt worden waren, unter folgenden Titeln:

Solutio problematis funicularii, exhibita a Joanne Bernoulli, Basil., Med. Cand. — (p. 274. — 277.)

De linea, in quam flexile se pondere proprio curvat, ejusque usu insigni ad inveniendas quotcunque medias proportionales. Auctore G. G. L. [Godofredo Guilielmo Leibnitio.] — (p. 277. — 281.)

Christiani Hugenii, Dynastae in Zülechem, Solutio ejusdem Problematis. — (p. 281. — 282.)

Jede dieser drey Abhandlungen gibt bloß die Auflösung des Problems nebst den Haupteigenschaften der schon von Leibnitz und Johann Bernoulli (a. a. O. S. 278. 274.) sogenannten Linea catenaria vel funicularia, — jetzt gewöhnlich Kettenlinie, Chaînette, — ohne die Analysis, welche die Verfasser der Abhandlungen unterdrückten, wie Montucla in der Histoire des Mathématiques, Tom. II. p. 468., sich ausdrückt: „apparemment afin de laisser en„core quelques lauriers à cueillir à ceux qui viendraient à „bout de la deviner.„ — Diese Lorbeeren wollte der bekannte brittische Geometer David Gregori erringen, indem er im Jahre 1697 in den Philosophical Transactions, p. 633. seqq., eine Abhandlung lieferte, in welcher er die von Leibnitz, Johann Bernoulli und Huygens aufgefundenen Eigenschaften der Kettenlinie bewies. Man findet diese Abhandlung auch in den Actis Eruditorum, a. a. 1698. p. 305. seqq., unter folgendem Titel in das Lateinische übersetzt:

Davidis Gregorii, M. D., Astronomiae Professoris Saviliani et S. R. S., Catenaria, ad Rev. Virum D. Henricum Aldrich, S. T. P., Decanum Aedis Christi Oxoniae.

Gregori sagt an diesem Orte, S. 306.: „Libuit ha„rum omnium demonstrationes pertexere, ope Methodi „Newtonianae Geometris hodie familiaris, fluxio„nes e fluentium relatione elata determinandi et vicissim; „et alias insignes Curvae hujus proprietates nunc primum „detectas adjicere.„

Er bedient sich in der That fortwährend der Newtonischen Fluxionen und Fluenten und deren Bezeichnung, welches das Lesen dieser Abhandlung für die Geometer des Festlandes bedeutend erschwert, und wohl auch ein Hauptgrund gewesen seyn mag, daß Johann Bernoulli dieser Abhandlung seinen Beyfall nicht schenken konnte. (M. s. Montucla Histoire des Mathématiques, Tom. II. p. 468.) Doch mag, wie auch Montucla meint, sein Urtheil etwas zu hart seyn; denn die eben genannte Ursache einiger Dunkelheit abgerechnet, finde ich nichts von Bedeutung gegen die Beweise und Auflösungen einzuwenden, und habe selbst diese Abhandlung bey der Bearbeitung dieses Kapitels zu Rathe gezogen.

Das Problem von der Kettenlinie ist auch für die Geschichte der Differenzial- und Integralrechnung sehr wichtig, weil seit dieser Zeit die Analysis der Differenzialgleichungen einen festen und gewissen Charakter anzunehmen begann. (M. s. Bossut a. a. O. S. 151.)

In allen bisher angeführten Schriften ist angenommen worden, daß gleiche Theile des Seils oder der Kette gleiches Gewicht haben, welches der einfachste Fall ist. Die Linie, nach welcher eine solche Kette gekrümmt ist, nennt man jetzt gewöhnlich die gemeine Kettenlinie, und sie ist es, welche wir jetzt zunächst ausführlich betrachten werden. Jacob Bernoulli erweiterte aber später das Problem auch auf ungleich schwere Ketten und Seile, worüber weiter unten das Weitere vorkommen wird.

Unter den neuern Schriften, worin die Eigenschaften der Kettenlinie ausführlicher untersucht sind, nenne ich nur:

Eytelwein's Handbuch der Statik fester Körper, Th. 3., — welcher, als Anhang zur Statik, die Theorie einiger transscendenten krummen Linien enthält, — Berlin 1808, 8., S. 95. — 128.

I.

Von der gemeinen Kettenlinie.

§. 171.

Aufgabe. Die Gleichung der Kettenlinie zu finden.

Auflösung. Die gleichförmig schwere Kette sey in Fig. 102. in den beiden Punkten M und M' aufgehängt. Man nehme, um die Gleichung der Kettenlinie zu finden, eine durch einen der beiden Aufhängepunkte, z. B. M, gezogene Horizontallinie MN als Axe und den Punkt M als Anfang der Abscissen an, für rechtwinklige Coordinaten.

Eine an zwey Punkten aufgehängte gleichförmig schwere Kette kann betrachtet werden als ein Seil, an welchem eine unendliche Menge gleicher Gewichte nach verticalen Richtungen wirken, und daher sind unter dieser Voraussetzung auf eine aufgehängte Kette die in §. 164. von der Seilmaschine bewiesenen Sätze anwendbar. Sey nun $MP = x$, $PQ = y$; durch M und Q denke man sich zwey Tangenten gezogen, wie die Figur zeigt, und bezeichne die Spannungen der Kette in den Punkten M und Q durch S und S', die Winkel, welche die Tangenten MA und QC mit der Horizontale und Verticale einschließen, durch φ, ψ; φ', ψ', auf dieselbe Art wie im vorhergehenden Kapitel bey den gespannten Seilen, und das Gewicht des Stücks MQ der Kette durch p: so ist nach §. 164., da die Spannungen der Kette offenbar nach den Tangenten gerichtet sind:

$$S \operatorname{Cos} \varphi - S' \operatorname{Cos} \varphi' = 0,$$
$$S \operatorname{Cos} \psi - S' \operatorname{Cos} \psi' = p.$$

In dem vorliegenden Falle ist aber offenbar $\psi' = \varphi' - 90^\circ$. Also

$$\operatorname{Cos} \psi' = \operatorname{Cos} \varphi' . \operatorname{Cos} 90^\circ + \operatorname{Sin} \varphi' . \operatorname{Sin} 90^\circ = \operatorname{Sin} \varphi',$$

und folglich

$$S \operatorname{Cos} \varphi - S' \operatorname{Cos} \varphi' = 0,$$
$$S \operatorname{Cos} \psi - S' \operatorname{Sin} \varphi' = p,$$
$$S \operatorname{Cos} \varphi = S' \operatorname{Cos} \varphi',$$
$$S \operatorname{Cos} \psi - p = S' \operatorname{Sin} \varphi',$$
$$\frac{S' \operatorname{Sin} \varphi'}{S' \operatorname{Cos} \varphi'} = \frac{S \operatorname{Cos} \psi - p}{S \operatorname{Cos} \varphi}, \text{ d. i.}$$
$$\operatorname{Tg} \varphi' = \frac{S \operatorname{Cos} \psi - p}{S \operatorname{Cos} \varphi}.$$

Bezeichnet man nun den Winkel, welchen die Tangente durch Q nach der Seite der positiven Coordinaten hin mit der

Abscissenaxe einschließt, durch α, indem die Abscisse MP und die Ordinate PQ als positiv betrachtet werden; so erhellet leicht, daß $\varphi' = 180^\circ - \alpha$, und folglich $\mathrm{Tg}\,\varphi' = -\mathrm{Tg}\,\alpha$ ist. Die Differenzialrechnung lehrt aber, daß $\mathrm{Tg}\,\alpha = \frac{dy}{dx}$ ist. Daher ist $\mathrm{Tg}\,\varphi' = -\frac{dy}{dx}$, und folglich

$$-\frac{dy}{dx} = \frac{S\,\mathrm{Cos}\,\psi - p}{S\,\mathrm{Cos}\,\varphi},$$
$$-S\,\mathrm{Cos}\,\varphi\,dy = S\,\mathrm{Cos}\,\psi\,dx - p\,dx,$$
$$p\,dx = S\,\mathrm{Cos}\,\psi\,dx + S\,\mathrm{Cos}\,\varphi\,dy.$$

Bezeichnet nun s die Länge des Bogens MQ, und γ das Gewicht eines Theils der Kettenlinie, welches $= 1$ ist; so ist, da gleiche Theile der Kette nach der Voraussetzung gleiches Gewicht haben, das Gewicht p des Bogens s, $= \gamma s$, und folglich

$$\gamma s\,dx = S\,\mathrm{Cos}\,\psi\,dx + S\,\mathrm{Cos}\,\varphi\,dy.$$

Endlich bezeichne man jetzt durch λ den spitzen Winkel NMB, welchen die Tangente in M mit der Horizontale nach der Seite der positiven Coordinaten hin einschließt; so ist augenscheinlich

$$\psi = 90^\circ - \lambda, \quad \varphi = 180^\circ - \lambda,$$
$$\mathrm{Cos}\,\psi = \mathrm{Sin}\,\lambda, \quad \mathrm{Cos}\,\varphi = -\mathrm{Cos}\,\lambda,$$

und folglich

$$\gamma s\,dx = S\,\mathrm{Sin}\,\lambda\,dx - S\,\mathrm{Cos}\,\lambda\,dy.$$

Wir wollen noch den Fall betrachten, wenn der Punkt Q auf der andern Seite des tiefsten Punktes der Kette, etwa in Q', läge. In diesem Falle ist offenbar $\psi' = 270^\circ - \varphi'$. Also $\mathrm{Cos}\,\psi' = \mathrm{Cos}\,\varphi' . \mathrm{Cos}\,270^\circ + \mathrm{Sin}\,\varphi' . \mathrm{Sin}\,270^\circ = -\mathrm{Sin}\,\varphi'$, und folglich aus den beiden obigen Hauptgleichungen:

$$S\,\mathrm{Cos}\,\varphi - S'\,\mathrm{Cos}\,\varphi' = 0,$$
$$S\,\mathrm{Cos}\,\psi + S'\,\mathrm{Sin}\,\varphi' = p,$$
$$S\,\mathrm{Cos}\,\varphi = S'\,\mathrm{Cos}\,\varphi',$$
$$S\,\mathrm{Cos}\,\psi - p = -S'\,\mathrm{Sin}\,\varphi',$$

$$-\frac{S'\operatorname{Sin}\varphi'}{S'\operatorname{Cos}\varphi'}=\frac{S\operatorname{Cos}\psi-p}{S\operatorname{Cos}\varphi}, \text{ d. i.}$$

$$-\operatorname{Tg}\varphi'=\frac{S\operatorname{Cos}\psi-p}{S\operatorname{Cos}\varphi}.$$

In diesem Falle ist nun augenscheinlich $\varphi'=\alpha$, d. i. $\operatorname{Tg}\varphi'=\operatorname{Tg}\alpha=\frac{dy}{dx}$ zu setzen, so daß also wieder

$$-\frac{dy}{dx}=\frac{S\operatorname{Cos}\psi-p}{S\operatorname{Cos}\varphi},$$

und demnach wie vorher

$$\gamma s\,dx=S\operatorname{Sin}\lambda\,dx-S\operatorname{Cos}\lambda\,dy,$$

welche Gleichung also für jeden Punkt der Kettenlinie gilt.

Jeder, der in analytischen Untersuchungen nur einigermaßen geübt ist, wird alles Obige leicht verstehen, wenn er nur immer auf die Art, wie die Winkel nach den früher gegebenen Bestimmungen zu nehmen sind, gehörig Rücksicht nimmt, und sich eine Figur entwirft, welche hier, um die Zahl der Figuren nicht zu sehr zu häufen, nicht immer beygefügt werden konnte.

Die gefundene Differenzialgleichung der Kettenlinie enthält einige Größen, die nun näher untersucht werden müssen: das Gewicht einer Längeneinheit der gegebenen Kette, (γ); die Länge des den Coordinaten x, y entsprechenden Bogens der Kettenlinie, (s); die Spannung am linken Aufhängepunkte, (S); und den von der Tangente durch diesen Aufhängepunkt mit der Horizontale eingeschlossenen spitzen Winkel, (λ).

Zuerst und vor allem Andern ist es nöthig, die von x und y abhängige Größe s aus der Gleichung zu eliminiren, wobey wir zur Integralrechnung unsre Zuflucht nehmen müssen. Es ist nämlich

$$s=\frac{S\operatorname{Sin}\lambda\,dx-S\operatorname{Cos}\lambda\,dy}{\gamma dx}$$

$$=\frac{S\operatorname{Sin}\lambda}{\gamma}-\frac{S\operatorname{Cos}\lambda}{\gamma}\cdot\frac{dy}{dx},$$

und folglich

$$\frac{ds}{dx} = -\frac{S\,\mathrm{Cos}\,\lambda}{\gamma} \cdot \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Aber nach bekannten Sätzen der Differenzialrechnung

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}. \quad \text{Also}$$

$$\frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx} = -\frac{S\,\mathrm{Cos}\,\lambda}{\gamma} \cdot \frac{d^2y}{dx^2},$$

$$\gamma\,dx\sqrt{dx^2 + dy^2} = -S\,\mathrm{Cos}\,\lambda\,d^2y.$$

Also, wenn man auf beiden Seiten mit $\frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$ multiplicirt:

$$\gamma\,dx \,.\, dy = -S\,\mathrm{Cos}\,\lambda \,.\, \frac{dy \,.\, d^2y}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}.$$

Wenn man aber dx als constant betrachtet, so ist nach bekannten Regeln der Differenzialrechnung:

$$\frac{dy \,.\, d^2y}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = d \,.\, \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

und folglich

$$\gamma\,dx \,.\, dy = -S\,\mathrm{Cos}\,\lambda \,.\, d \,.\, \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Also durch Integration

$$-S\,\mathrm{Cos}\,\lambda\sqrt{dx^2 + dy^2} = \gamma y\,dx + C.$$

Um die Constans C zu bestimmen, bemerke man, daß in dem Punkte M die Ordinate $y = 0$ ist, woraus man für diesen Punkt

$$-S\,\mathrm{Cos}\,\lambda\sqrt{dx^2 + dy^2} = C$$

erhält. Es ist aber bekanntlich in diesem Punkte $\frac{dy}{dx} = \mathrm{Tg}\,\lambda$, und demnach

$$1 + \mathrm{Tg}\,\lambda^2 = 1 + \frac{dy^2}{dx^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{dx^2};$$

d. i. $\mathrm{Sec}\,\lambda^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{dx^2}$,

$$\mathrm{Sec}\,\lambda = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx} = \frac{1}{\mathrm{Cos}\,\lambda},$$

$$\frac{\mathrm{Cos}\,\lambda\sqrt{dx^2+dy^2}}{dx}=1,$$

$$\mathrm{Cos}\,\lambda\sqrt{dx^2+dy^2}=dx,$$

$$-S\,\mathrm{Cos}\,\lambda\sqrt{dx^2+dy^2}=-S\,dx=C.$$

Also überhaupt

$$-S\,\mathrm{Cos}\,\lambda\sqrt{dx^2+dy^2}=\gamma y\,dx-S\,dx,$$

$$S\,\mathrm{Cos}\,\lambda\sqrt{dx^2+dy^2}=S\,dx-\gamma y\,dx,$$

$$S\,\mathrm{Cos}\,\lambda\sqrt{dx^2+dy^2}=(S-\gamma y)\,dx;$$

eine Differenzialgleichung der Kettenlinie, welche den Bogen s nicht mehr enthält.

Da diese Gleichung y und dy, aber nicht x und dx, sondern bloß dx enthält; so fällt sogleich in die Augen, daß es am leichtesten seyn wird, dx daraus zu bestimmen. Erhebt man beide Theile in's Quadrat, so erhält man:

$$S^2.\,\mathrm{Cos}\,\lambda^2.\,(dx^2+dy^2)=(S-\gamma y)^2.\,dx^2,$$

$$S^2\,\mathrm{Cos}\,\lambda^2.\,dx^2+S^2\,\mathrm{Cos}\,\lambda^2.\,dy^2=(S-\gamma y)^2.\,dx^2,$$

$$S^2\,\mathrm{Cos}\,\lambda^2\,dy^2=\left\{(S-\gamma y)^2-S^2\,\mathrm{Cos}\,\lambda^2\right\}dx^2,$$

wo der Factor von dx^2 offenbar immer positiv seyn muß, da das Product auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens dem Quadrate $S^2\,\mathrm{Cos}\,\lambda^2\,dy^2$, welches immer positiv ist, gleich ist. Also

$$S\,\mathrm{Cos}\,\lambda\,dy=\pm\,dx\sqrt{(S-\gamma y)^2-S^2\,\mathrm{Cos}\,\lambda^2}.$$

Aus der Gestalt der Kettenlinie folgt augenscheinlich, daß dx immer positiv ist. Die Ordinaten wachsen aber, oder dy ist positiv, von dem Punkte M bis zu dem tiefsten Punkte der Kette; auf der andern Seite aber nehmen die Ordinaten ab, oder dy ist negativ. Für die linke Seite des tiefsten Punktes der Kette ist also das obere, für die rechte aber das untere Zeichen in der vorhergehenden und in den folgenden Gleichungen zu nehmen. Also

$$dx=\frac{\pm\,S\,\mathrm{Cos}\,\lambda\,dy}{\sqrt{(S-\gamma y)^2-S^2\,\mathrm{Cos}\,\lambda^2}},$$

$$x=\int\frac{\pm\,S\,\mathrm{Cos}\,\lambda\,dy}{\sqrt{(S-\gamma y)^2-S^2\,\mathrm{Cos}\,\lambda^2}}+C.$$

Man setze nun $S \cos\lambda = a$, $S - \gamma y = z$; so ist

$$-\gamma\, dy = dz,\ dy = -\frac{dz}{\gamma};$$

$$\frac{dy}{\sqrt{(S-\gamma y)^2 - S^2 \cos\lambda^2}} = -\frac{dz}{\gamma\sqrt{z^2 - a^2}}.$$

Nach §. 135. ist aber

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^2 - a^2}} = \text{Logn}\,\frac{z + \sqrt{z^2 - a^2}}{a},$$

oder auch

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^2 - a^2}} = \text{Logn}\,(z + \sqrt{z^2 - a^2}),$$

wenn man das $-\text{Logn}\,a$ mit zur Constans zieht. Also

$$\int \frac{dy}{\sqrt{(S-\gamma y)^2 - S^2 \cos\lambda^2}} = -\frac{1}{\gamma}\,\text{Logn}\,(z + \sqrt{z^2 - a^2}),$$

$$\int \frac{\pm S \cos\lambda\, dy}{\sqrt{(S-\gamma y)^2 - S^2 \cos\lambda^2}} = \mp \frac{S \cos\lambda}{\gamma}\,\text{Logn}\,(z + \sqrt{z^2 - a^2}).$$

Da aber

$$-\text{Logn}\,(z + \sqrt{z^2 - a^2}) = \text{Logn}\,\frac{1}{z + \sqrt{z^2 - a^2}}$$

$$= \text{Logn}\,\frac{z - \sqrt{z^2 - a^2}}{(z + \sqrt{z^2 - a^2})(z - \sqrt{z^2 - a^2})}$$

$$= \text{Logn}\,\frac{z - \sqrt{z^2 - a^2}}{a^2}$$

$$= \text{Logn}\,(z - \sqrt{z^2 - a^2}) - \text{Logn}\,a^2;$$

so ist, wenn man $-\text{Logn}\,a^2$ mit zur Constans zieht:

$$\int \pm \frac{S \cos\lambda\, dy}{\sqrt{(S-\gamma y)^2 - S^2 \cos\lambda^2}} = \frac{S \cos\lambda}{\gamma}\,\text{Logn}\,(z \mp \sqrt{z^2 - a^2}),$$

und folglich

$$x = \frac{S \cos\lambda}{\gamma}\,\text{Logn}\,(S - \gamma y \mp \sqrt{(S-\gamma y)^2 - S^2 \cos\lambda^2}) + C.$$

Für den Punkt M ist $x = y = 0$, und folglich, da man für die linke Seite das obere Zeichen nehmen muß:

$$o = \frac{S\,\mathrm{Cos}\,\lambda}{\gamma}\,\mathrm{Logn}(S - \sqrt{S^2 - S^2\,\mathrm{Cos}\,\lambda^2}) + C$$

$$= \frac{S\,\mathrm{Cos}\,\lambda}{\gamma}\,\mathrm{Logn}(S - \sqrt{S^2(1 - \mathrm{Cos}\,\lambda^2)}) + C$$

$$= \frac{S\,\mathrm{Cos}\,\lambda}{\gamma}\,\mathrm{Logn}(S - S\,\mathrm{Sin}\,\lambda) + C,$$

$$C = -\frac{S\,\mathrm{Cos}\,\lambda}{\gamma}\,\mathrm{Logn}(S - S\,\mathrm{Sin}\,\lambda),$$

$$x = \begin{cases} \dfrac{S\,\mathrm{Cos}\,\lambda}{\gamma}\,\mathrm{Logn}(S - \gamma y \mp \sqrt{(S - \gamma y)^2 - S^2\,\mathrm{Cos}\,\lambda^2}) \\ -\dfrac{S\,\mathrm{Cos}\,\lambda}{\gamma}\,\mathrm{Logn}(S - S\,\mathrm{Sin}\,\lambda), \end{cases}$$

$$x = \frac{S\,\mathrm{Cos}\,\lambda}{\gamma}\,\mathrm{Logn}\,\frac{S - \gamma y \mp \sqrt{(S - \gamma y)^2 - S^2\,\mathrm{Cos}\,\lambda^2}}{S(1 - \mathrm{Sin}\,\lambda)},$$

wodurch x durch y ausgedrückt wird.

Will man aber endlich y durch x ausdrücken, so setze man der Abkürzung wegen $\frac{\gamma}{S\,\mathrm{Cos}\,\lambda} = \vartheta$, und bezeichne wie gewöhnlich durch e die Basis der natürlichen Logarithmen; so folgt aus der obigen Gleichung, da

$$\vartheta x = \mathrm{Logn}\,\frac{S - \gamma y \mp \sqrt{(S - \gamma y)^2 - S^2\,\mathrm{Cos}\,\lambda^2}}{S(1 - \mathrm{Sin}\,\lambda)},$$

daß

$$e^{\vartheta x} = \frac{S - \gamma y \mp \sqrt{(S - \gamma y)^2 - S^2\,\mathrm{Cos}\,\lambda^2}}{S(1 - \mathrm{Sin}\,\lambda)},$$

$$e^{\vartheta x} - \frac{S - \gamma y}{S(1 - \mathrm{Sin}\,\lambda)} = \mp\,\frac{\sqrt{(S - \gamma y)^2 - S^2\,\mathrm{Cos}\,\lambda^2}}{S(1 - \mathrm{Sin}\,\lambda)},$$

und folglich, wenn man auf beiden Seiten quadrirt:

$$e^{2\vartheta x} - \frac{2(S - \gamma y)}{S(1 - \mathrm{Sin}\,\lambda)}\,.\,e^{\vartheta x} + \frac{(S - \gamma y)^2}{S^2(1 - \mathrm{Sin}\,\lambda)^2} =$$

$$= \frac{(S - \gamma y)^2 - S^2\,\mathrm{Cos}\,\lambda^2}{S^2(1 - \mathrm{Sin}\,\lambda)^2}$$

$$= \frac{(S - \gamma y)^2}{S^2(1 - \mathrm{Sin}\,\lambda)^2} - \frac{\mathrm{Cos}\,\lambda^2}{(1 - \mathrm{Sin}\,\lambda)^2}.$$

Also

$$e^{2\vartheta x} - \frac{2(S-\gamma y)}{S(1-\operatorname{Sin}\lambda)} \cdot e^{\vartheta x} + \frac{\operatorname{Cos}\lambda^2}{(1-\operatorname{Sin}\lambda)^2} = 0,$$

oder

$$\frac{2(S-\gamma y)}{S(1-\operatorname{Sin}\lambda)} \cdot e^{\vartheta x} = e^{2\vartheta x} + \frac{\operatorname{Cos}\lambda^2}{(1-\operatorname{Sin}\lambda)^2},$$

$$\frac{2(S-\gamma y)}{S(1-\operatorname{Sin}\lambda)} = e^{\vartheta x} + \frac{\operatorname{Cos}\lambda^2}{(1-\operatorname{Sin}\lambda)^2} \cdot e^{-\vartheta x},$$

$$\frac{2}{1-\operatorname{Sin}\lambda} - \frac{2\gamma y}{S(1-\operatorname{Sin}\lambda)} = e^{\vartheta x} + \frac{\operatorname{Cos}\lambda^2}{(1-\operatorname{Sin}\lambda)^2} \cdot e^{-\vartheta x},$$

$$\frac{2\gamma y}{S(1-\operatorname{Sin}\lambda)} = \frac{2}{1-\operatorname{Sin}\lambda} - e^{\vartheta x} - \frac{\operatorname{Cos}\lambda^2}{(1-\operatorname{Sin}\lambda)^2} \cdot e^{-\vartheta x},$$

$$2\gamma y = 2S - Se^{\vartheta x} \cdot (1-\operatorname{Sin}\lambda) - \frac{S\operatorname{Cos}\lambda^2}{1-\operatorname{Sin}\lambda} \cdot e^{-\vartheta x},$$

$$\frac{\operatorname{Cos}\lambda^2}{1-\operatorname{Sin}\lambda} = \frac{1-\operatorname{Sin}\lambda^2}{1-\operatorname{Sin}\lambda} = \frac{(1+\operatorname{Sin}\lambda)(1-\operatorname{Sin}\lambda)}{1-\operatorname{Sin}\lambda} = 1+\operatorname{Sin}\lambda.$$

Also

$$\begin{aligned} 2\gamma y &= 2S - Se^{\vartheta x} \cdot (1-\operatorname{Sin}\lambda) - S(1+\operatorname{Sin}\lambda)\, e^{-\vartheta x} \\ &= S\left\{2 - (1-\operatorname{Sin}\lambda)e^{\vartheta x} - (1+\operatorname{Sin}\lambda)e^{-\vartheta x}\right\}, \\ y &= \frac{S}{\gamma}\left\{1 - \tfrac{1}{2}(1-\operatorname{Sin}\lambda)\, e^{\vartheta x} - \tfrac{1}{2}(1+\operatorname{Sin}\lambda)\, e^{-\vartheta x}\right\}, \end{aligned}$$

durch welchen Ausdruck y durch x gegeben wird.

So stellt **Poisson** die Gleichung dar, im Traité de Mécanique, T. I. p. 203. Unsre Entwickelung beruhet mit der seinigen auf einerley Gründen, weicht aber doch von derselben hin und wieder ab, und scheint uns für den Anfänger faßlicher zu seyn.

Wir wollen nun, vorzüglich in der Absicht, die beiden Größen S und λ aus gewissen gegebenen Stücken zu bestimmen, zuerst den Bogen s durch y zu bestimmen suchen. Wir fanden aber oben (S. 477. 479.) folgende zwey Gleichungen:

$$\gamma s\, dx = S\operatorname{Sin}\lambda\, dx - S\operatorname{Cos}\lambda\, dy,$$

$$S\operatorname{Cos}\lambda\sqrt{dx^2+dy^2} = (S-\gamma y)\, dx.$$

Also

$$dy = \frac{S \operatorname{Sin} \lambda \, dx - \gamma s \, dx}{S \operatorname{Cos} \lambda},$$

$$S^2 \operatorname{Cos} \lambda^2 (dx^2 + dy^2) = (S - \gamma y)^2 . dx^2,$$

$$dy^2 = \frac{[(S - \gamma y)^2 - S^2 \operatorname{Cos} \lambda^2] \, dx^2}{S^2 \operatorname{Cos} \lambda^2},$$

$$dy = \frac{\pm dx \sqrt{(S - \gamma y)^2 - S^2 \operatorname{Cos} \lambda^2}}{S \operatorname{Cos} \lambda},$$

wo, wie oben, das obere Zeichen für die linke, das untere für die rechte Seite des tiefsten Punktes gilt. Also

$$\frac{S \operatorname{Sin} \lambda \, dx - \gamma s \, dx}{S \operatorname{Cos} \lambda} = \frac{\pm dx \sqrt{(S - \gamma y)^2 - S^2 \operatorname{Cos} \lambda^2}}{S \operatorname{Cos} \lambda},$$

$$S \operatorname{Sin} \lambda - \gamma s = \pm \sqrt{(S - \gamma y)^2 - S^2 \operatorname{Cos} \lambda^2},$$

$$\gamma s = S \operatorname{Sin} \lambda \mp \sqrt{(S - \gamma y)^2 - S^2 \operatorname{Cos} \lambda^2},$$

$$s = \frac{S \operatorname{Sin} \lambda}{\gamma} \mp \frac{\sqrt{(S - \gamma y)^2 - S^2 \operatorname{Cos} \lambda^2}}{\gamma}.$$

Für den tiefsten Punkt der Kette ist $dy = 0$ zu setzen, denn die Tangente durch diesen Punkt ist offenbar horizontal, und folglich $\operatorname{Tg} \alpha = 0$, d. i. $\frac{dy}{dx} = 0$, oder $dy = 0$. Also

$$0 = \frac{S \operatorname{Sin} \lambda \, dx - \gamma s \, dx}{S \operatorname{Cos} \lambda}$$

$$= S \operatorname{Sin} \lambda - \gamma s,$$

$$s = \frac{S \operatorname{Sin} \lambda}{\gamma}.$$

Das Gewicht γ einer Längeneinheit der Kette wird als gegeben angenommen. Sind nun außerdem noch die Länge l der ganzen Kette und die Coordinaten α, β des zweyten Aufhängepunktes in Beziehung auf das angenommene Coordinatensystem gegeben; so hat man folgende zwey Gleichungen:

$$l = \frac{S \operatorname{Sin} \lambda}{\gamma} + \frac{\sqrt{(S - \gamma \beta)^2 - S^2 \operatorname{Cos} \lambda^2}}{\gamma}, \text{ und}$$

$$\alpha = \frac{S\,\mathrm{Cos}\,\lambda}{\gamma}\,\mathrm{Logn}\,\frac{S-\gamma\beta \mp \sqrt{(S-\gamma\beta)^2 - S^2\,\mathrm{Cos}\,\lambda^2}}{S(1-\mathrm{Sin}\,\lambda)},$$

oder:

$$l = \frac{S\,\mathrm{Sin}\,\lambda}{\gamma} + \frac{\sqrt{(S-\gamma\beta)^2 - S^2\,\mathrm{Cos}\,\lambda^2}}{\gamma}, \text{ und}$$

$$\beta = \frac{S}{\gamma}[1 - \tfrac{1}{2}(1-\mathrm{Sin}\gamma)\,e^{\vartheta x} - \tfrac{1}{2}(1+\mathrm{Sin}\gamma)\,e^{-\vartheta x}],$$

mit den beiden unbekannten Größen S und λ, welche beide sich also aus den vorstehenden Gleichungen müssen bestimmen lassen, aber freylich nur durch Näherung in jedem einzelnen Falle, da die Gleichungen beide transscendent sind.

Nimmt man einen einfachen Versuch zu Hülfe, so wird man leichter zum Zwecke gelangen. Man hänge nämlich die Kette an den beiden gegebenen Aufhängepunkten auf, bestimme ihren tiefsten Punkt, welches ohne große Schwierigkeit geschehen kann, und messe nun die Ordinate des tiefsten Punktes und die Länge der Kette von M bis zum tiefsten Punkte. Jene Ordinate und diese Länge wollen wir durch β' und l' bezeichnen. Aus der Gleichung

$$S\,\mathrm{Cos}\,\lambda\sqrt{dx^2+dy^2} = (S-\gamma y)\,dx$$

erhält man, indem man $dy = 0$ setzt, für die Ordinate des tiefsten Punktes:

$$S\,\mathrm{Cos}\,\lambda\,dx = (S-\gamma y)\,dx,$$

$$S\,\mathrm{Cos}\,\lambda = S - \gamma y,$$

$$\gamma y = S - S\,\mathrm{Cos}\,\lambda = S(1-\mathrm{Cos}\,\lambda),$$

$$y = \frac{S(1-\mathrm{Cos}\,\lambda)}{\gamma},$$

und man hat also

$$\beta' = \frac{S(1-\mathrm{Cos}\,\lambda)}{\gamma} \text{ und nach dem Obigen } l' = \frac{S\,\mathrm{Sin}\,\lambda}{\gamma}.$$

Also

$$\frac{l'}{\beta'} = \frac{S\,\mathrm{Sin}\,\lambda}{S(1-\mathrm{Cos}\,\lambda)} = \frac{\mathrm{Sin}\,\lambda}{1-\mathrm{Cos}\,\lambda},$$

d. i. $$\frac{l'}{\beta'} = \frac{\mathrm{Sin}\,\lambda}{2\,\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}\lambda^2} = \frac{2\,\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}\lambda\,\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}\lambda}{2\,\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}\lambda^2}$$

$$=\frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}\lambda}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}\lambda}=\operatorname{Cotg}\tfrac{1}{2}\lambda.$$

Also

$$\operatorname{Cotg}\tfrac{1}{2}\lambda=\frac{l'}{\beta'} \text{ oder } \operatorname{Tg}\tfrac{1}{2}\lambda=\frac{\beta'}{l'},$$

woraus λ bestimmt werden kann. Setzt man nun diesen Werth von λ in die Gleichung $l'=\frac{S\operatorname{Sin}\lambda}{\gamma}$, so erhält man

$$S=\frac{\gamma l'}{\operatorname{Sin}\lambda},$$

so daß also hierdurch auch S bestimmt wird.

In dem Falle, wenn die beiden Aufhängepunkte in einer Horizontallinie liegen, können λ und S auch auf folgende Art bestimmt werden. Die Länge der ganzen Kette sey wieder $=l$ und die Entfernung der beiden Aufhängepunkte von einander $=2\alpha'$. Es ist klar, daß die ganze Kette durch den tiefsten Punkt halbirt wird, und daß die Abscisse dieses Punktes $=\alpha'$ ist. Um nun im allgemeinen die Abscisse des tiefsten Punktes zu bestimmen, setze man in dem oben gefundenen Ausdrucke

$$x=\frac{S\operatorname{Cos}\lambda}{\gamma}\operatorname{Logn}\frac{S-\gamma y\mp\sqrt{(S-\gamma y)^2-S^2\operatorname{Cos}\lambda^2}}{S(1-\operatorname{Sin}\lambda)},$$

$$y=\frac{S(1-\operatorname{Cos}\lambda)}{\gamma}; \text{ so ist}$$

$$S-\gamma y=S-S(1-\operatorname{Cos}\lambda)=S\operatorname{Cos}\lambda,$$
$$(S-\gamma y)^2-S^2\operatorname{Cos}\lambda^2=0,$$

und folglich die Abscisse des tiefsten Punktes

$$=\frac{S\operatorname{Cos}\lambda}{\gamma}\operatorname{Logn}\frac{S\operatorname{Cos}\lambda}{S(1-\operatorname{Sin}\lambda)}$$

$$=\frac{S\operatorname{Cos}\lambda}{\gamma}\operatorname{Logn}\frac{\operatorname{Cos}\lambda}{1-\operatorname{Sin}\lambda},$$

und man hat also

$$\tfrac{1}{2}l=\frac{S\operatorname{Sin}\lambda}{\gamma},\quad \alpha'=\frac{S\operatorname{Cos}\lambda}{\gamma}\operatorname{Logn}\frac{\operatorname{Cos}\lambda}{1-\operatorname{Sin}\lambda},$$

$$\frac{2\alpha'}{l}=\frac{\operatorname{Cos}\lambda}{\operatorname{Sin}\lambda}\operatorname{Logn}\frac{\operatorname{Cos}\lambda}{1-\operatorname{Sin}\lambda};$$

eine transscendente Gleichung, aus welcher λ durch Näherung bestimmt werden muß. Hat man λ, so hat man auch

$$S = \frac{l\gamma}{2\,\mathrm{Sin}\,\lambda}.$$

Den vorher beschriebenen Versuch zu Hülfe zu nehmen, scheint immer das Einfachste zu seyn.

§. 172.

Man nehme jetzt den tiefsten Punkt der Kettenlinie als Anfang und die durch diesen Punkt gezogene Verticale als Axe der Abscissen an, und bezeichne die Coordinaten in Beziehung auf dieses System durch x', y'. Die Abscisse und die Ordinate des tiefsten Punktes in Beziehung auf das im vorhergehenden Paragraphen gebrauchte System sind nach diesem Paragraphen:

$$\frac{S\,\mathrm{Cos}\,\lambda}{\gamma}\,\mathrm{Logn}\,\frac{\mathrm{Cos}\,\lambda}{1-\mathrm{Sin}\,\lambda}, \text{ und}$$

$$\frac{S(1-\mathrm{Cos}\,\lambda)}{\gamma}.$$

Aus Fig. 102. erhellet leicht, daß

$$x = \frac{S\,\mathrm{Cos}\,\lambda}{\gamma}\,\mathrm{Logn}\,\frac{\mathrm{Cos}\,\lambda}{1-\mathrm{Sin}\,\lambda} - y', \text{ und}$$

$$y = \frac{S(1-\mathrm{Cos}\,\lambda)}{\gamma} - x'$$

ist. Nun war

$$x = \frac{S\,\mathrm{Cos}\,\lambda}{\gamma}\,\mathrm{Logn}\,\frac{S-\gamma y \mp \sqrt{(S-\gamma y)^2 - S^2\,\mathrm{Cos}\,\lambda^2}}{S(1-\mathrm{Sin}\,\lambda)},$$

$$S-\gamma y = S - S(1-\mathrm{Cos}\,\lambda) + \gamma x'$$
$$= S - S + S\,\mathrm{Cos}\,\lambda + \gamma x' = S\,\mathrm{Cos}\,\lambda + \gamma x',$$
$$(S-\gamma y)^2 = S^2\,\mathrm{Cos}\,\lambda^2 + 2\gamma S x'\,\mathrm{Cos}\,\lambda + \gamma^2 x'^2,$$
$$(S-\gamma y)^2 - S^2\,\mathrm{Cos}\,\lambda^2 = 2\gamma S x'\,\mathrm{Cos}\,\lambda + \gamma^2 x'^2.$$

Also durch Substitution:

$$\frac{S\,\mathrm{Cos}\,\lambda}{\gamma}\,\mathrm{Logn}\,\frac{\mathrm{Cos}\,\lambda}{1-\mathrm{Sin}\,\lambda} - y' =$$

$$= \frac{S \operatorname{Cos}\lambda}{\gamma} \operatorname{Logn} \frac{S\operatorname{Cos}\lambda + \gamma x' \mp \sqrt{2\gamma S x' \operatorname{Cos}\lambda + \gamma^2 x'^2}}{S(1-\operatorname{Sin}\lambda)},$$

$$y' = \begin{cases} \dfrac{S\operatorname{Cos}\lambda}{\gamma} \operatorname{Logn} \dfrac{S\operatorname{Cos}\lambda}{S(1-\operatorname{Sin}\lambda)} \\ -\dfrac{S\operatorname{Cos}\lambda}{\gamma} \operatorname{Logn} \dfrac{S\operatorname{Cos}\lambda + \gamma x' \mp \sqrt{2\gamma S x' \operatorname{Cos}\lambda + \gamma^2 x'^2}}{S(1-\operatorname{Sin}\lambda)} \end{cases}$$

$$= \frac{S\operatorname{Cos}\lambda}{\gamma} \operatorname{Logn} \frac{S\operatorname{Cos}\lambda}{S\operatorname{Cos}\lambda + \gamma x' \mp \sqrt{2\gamma S x' \operatorname{Cos}\lambda + \gamma^2 x'^2}}$$

$$= \frac{S\operatorname{Cos}\lambda}{\gamma} \operatorname{Logn} \frac{S\operatorname{Cos}\lambda : \gamma}{\dfrac{S\operatorname{Cos}\lambda}{\gamma} + x' \mp \sqrt{\dfrac{2S\operatorname{Cos}\lambda}{\gamma} x' + x'^2}},$$

oder, wenn man $\frac{S\operatorname{Cos}\lambda}{\gamma} = a$ setzt:

$$y' = a \operatorname{Logn} \frac{a}{a + x' \mp \sqrt{2ax' + x'^2}}.$$

Für die linke Seite des tiefsten Punktes ist

$$y' = a \operatorname{Logn} \frac{a}{a + x' - \sqrt{2ax' + x'^2}}$$

$$= a \operatorname{Logn} \frac{a(a + x' + \sqrt{2ax' + x'^2})}{(a + x' - \sqrt{2ax' + x'^2})(a + x' + \sqrt{2ax' + x'^2})}$$

$$= a \operatorname{Logn} \frac{a(a + x' + \sqrt{2ax' + x'^2})}{a^2 + 2ax' + x'^2 - 2ax' - x'^2}$$

$$= a \operatorname{Logn} \frac{a(a + x' + \sqrt{2ax' + x'^2})}{a^2}$$

$$= a \operatorname{Logn} \frac{a + x' + \sqrt{2ax' + x'^2}}{a}.$$

Für die rechte Seite des tiefsten Punktes ist aber

$$y' = a \operatorname{Logn} \frac{a}{a + x' + \sqrt{2ax' + x'^2}}$$

$$= -a \operatorname{Logn} \frac{a + x' + \sqrt{2ax' + x'^2}}{a}.$$

Also überhaupt:

$$y' = \pm a \,\mathrm{Logn}\, \frac{a + x' + \sqrt{2ax' + x'^2}}{a},$$

wo a eine constante Größe bezeichnet, und $= \frac{S \mathrm{Cos}\,\lambda}{\gamma}$ ist. Das obere Zeichen gilt für die rechte, das untere für die linke Seite des tiefsten Punktes.

§. 173.

Diese Gleichung kann man auch auf einem völlig directen Wege auf folgende Art erhalten. Die Spannung der Kette in ihrem tiefsten Punkte sey $= \sigma$, und die Länge des Bogens KQ (Fig. 102.) sey $= s$; so ist $s\gamma$ das Gewicht dieses Bogens. Der spitze Winkel pQE sey $= \varphi$, so ist $\angle CQp = 180° - \varphi$, und $\angle CQP = 90° - \varphi$. Da nun die Spannungen nach den Tangenten gerichtet sind, und die Winkel, welche die Tangente durch den tiefsten Punkt mit der Horizontale und der Verticale einschließt, $= 180°$. und $= 90°$ zu setzen sind; so ist nach §. 164.:

$$\sigma = \frac{s\gamma \,\mathrm{Cos}\,(180° - \varphi)}{\mathrm{Cos}\,180° \,.\, \mathrm{Cos}\,(90° - \varphi) - \mathrm{Cos}\,90° \,.\, \mathrm{Cos}\,(180° - \varphi)}$$

$$= \frac{-s\gamma \,\mathrm{Cos}\,\varphi}{-\mathrm{Sin}\,\varphi} = \frac{s\gamma \,\mathrm{Cos}\,\varphi}{\mathrm{Sin}\,\varphi},$$

und demnach

$$s = \frac{\sigma \,\mathrm{Sin}\,\varphi}{\gamma \,\mathrm{Cos}\,\varphi} = \frac{\sigma}{\gamma} \cdot \frac{\mathrm{Sin}\,\varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi} = \frac{\sigma}{\gamma} \,.\, \mathrm{Tg}\,\varphi.$$

Also, wenn man die constante Größe $\frac{\sigma}{\gamma} = a$ setzt:

$$s = a \,\mathrm{Tg}\,\varphi.$$

Für einen andern Bogen s' und den zugehörigen Winkel der Tangente φ' hat man

$$s' = a \,\mathrm{Tg}\,\varphi'.$$

Also

$$s : s' = \mathrm{Tg}\,\varphi : \mathrm{Tg}\,\varphi',$$

so daß sich also bey der Kettenlinie die Bögen vom tiefsten Punkte an wie die trigonometrischen Tangenten der spitzen Winkel verhalten, welche die durch ihre Endpunkte gezogenen Tangenten mit der Horizontale einschließen.

Nun ist aber bekanntlich

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = dy\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2},$$

und, wie leicht aus der Figur erhellet:

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{Tg}\,(90^\circ - \varphi) = \mathrm{Ctg}\,\varphi.$$

Also $\mathrm{Tg}\,\varphi = \frac{dx}{dy}$. Folglich

$$ds = dx\sqrt{1 + \mathrm{Ctg}\,\varphi^2} = dx\,\mathrm{Cosec}\,\varphi = \frac{dx}{\mathrm{Sin}\,\varphi},$$

$$ds = dy\sqrt{1 + \mathrm{Tg}\,\varphi^2} = dy\,\mathrm{Sec}\,\varphi = \frac{dy}{\mathrm{Cos}\,\varphi},$$

$$dx = ds\,.\,\mathrm{Sin}\,\varphi,\quad dy = ds\,.\,\mathrm{Cos}\,\varphi.$$

Da nun $s = a\,\mathrm{Tg}\,\varphi$; so ist

$$ds = a\,d\,\mathrm{Tg}\,\varphi = \frac{a\,d\varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi^2}$$

nach bekannten Regeln der Differenzialrechnung. Also

$$dx = \frac{a\,\mathrm{Sin}\,\varphi\,d\varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi^2},\quad dy = \frac{a\,d\varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi}.$$

Aber $d\varphi = -\frac{d\,\mathrm{Cos}\,\varphi}{\mathrm{Sin}\,\varphi} = \frac{d\,\mathrm{Sin}\,\varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi}$,

$$dx = -\frac{a\,d\,\mathrm{Cos}\,\varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi^2},\quad dy = \frac{a\,d\,\mathrm{Sin}\,\varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi^2};$$

$$\int\frac{d\,\mathrm{Cos}\,\varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi^2} = \int\mathrm{Cos}\,\varphi^{-2}\,d\,\mathrm{Cos}\,\varphi = -\,\mathrm{Cos}\,\varphi^{-1} = -\frac{1}{\mathrm{Cos}\,\varphi},$$

$$\int\frac{d\,\mathrm{Sin}\,\varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi^2} = \int\frac{d\,\mathrm{Sin}\,\varphi}{1 - \mathrm{Sin}\,\varphi^2}.$$

Nun wissen wir, daß überhaupt

$$\frac{1}{1 - x^2} = \frac{1}{2(1 - x)} + \frac{1}{2(1 + x)},$$

$$\frac{dx}{1-x^2}=\frac{dx}{2(1-x)}+\frac{dx}{2(1+x)},$$

$$\int\frac{dx}{1-x^2}=\tfrac{1}{2}\int\frac{dx}{1-x}+\tfrac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x},$$

$$1-x=z,\quad -dx=dz,$$

$$\frac{dx}{1-x}=-\frac{dz}{z},\ \int\frac{dx}{1-x}=-\operatorname{Logn} z,$$

$$1+x=u,\quad dx=du,$$

$$\frac{dx}{1+x}=\frac{du}{u},\ \int\frac{dx}{1+x}=\operatorname{Logn} u,$$

$$\int\frac{dx}{1-x^2}=\tfrac{1}{2}\operatorname{Logn}(1+x)-\tfrac{1}{2}\operatorname{Logn}(1-x)$$

$$=\tfrac{1}{2}\operatorname{Logn}\frac{1+x}{1-x},$$

$$\int\frac{d\operatorname{Sin}\varphi}{1-\operatorname{Sin}\varphi^2}=\tfrac{1}{2}\operatorname{Logn}\frac{1+\operatorname{Sin}\varphi}{1-\operatorname{Sin}\varphi}.$$

Also

$$x=\frac{a}{\operatorname{Cos}\varphi}+\text{Const},$$

$$y=\tfrac{1}{2}a\operatorname{Logn}\frac{1+\operatorname{Sin}\varphi}{1-\operatorname{Sin}\varphi}+\text{Const}.$$

Für $\varphi=0$ wird sowohl x als auch $y=0$, woraus die Constanten bestimmt werden. Man erhält nämlich leicht:

$$x=\frac{a}{\operatorname{Cos}\varphi}-a=\frac{a(1-\operatorname{Cos}\varphi)}{\operatorname{Cos}\varphi},$$

$$y=\tfrac{1}{2}a\operatorname{Logn}\frac{1+\operatorname{Sin}\varphi}{1-\operatorname{Sin}\varphi},$$

da für y die Constans $=0$ wird.

Aus diesen beiden Gleichungen muß man nun, um eine Gleichung zwischen x und y zu erhalten, φ eliminiren, welches man auf folgende Weise bewerkstelligt. Es ist

$$\frac{a}{\operatorname{Cos}\varphi}=a+x,\quad \operatorname{Cos}\varphi=\frac{a}{a+x},$$

$$\operatorname{Sin}\varphi^2 = 1 - \frac{a^2}{(a+x)^2} = \frac{2ax+x^2}{(a+x)^2},$$

$$\operatorname{Sin}\varphi = \frac{\sqrt{2ax+x^2}}{a+x},$$

$$1 + \operatorname{Sin}\varphi = 1 + \frac{\sqrt{2ax+x^2}}{a+x}$$

$$= \frac{a+x+\sqrt{2ax+x^2}}{a+x},$$

$$\frac{1+\operatorname{Sin}\varphi}{1-\operatorname{Sin}\varphi} = \frac{(1+\operatorname{Sin}\varphi)^2}{1-\operatorname{Sin}\varphi^2} = \frac{(1+\operatorname{Sin}\varphi)^2}{\operatorname{Cos}\varphi^2},$$

$$\operatorname{Logn}\frac{1+\operatorname{Sin}\varphi}{1-\operatorname{Sin}\varphi} = 2\operatorname{Logn}\frac{1+\operatorname{Sin}\varphi}{\operatorname{Cos}\varphi}$$

$$= 2\operatorname{Logn}\frac{a+x+\sqrt{2ax+x^2}}{a},$$

$$y = a\operatorname{Logn}\frac{a+x+\sqrt{2ax+x^2}}{a},$$

wie vorher.

Es ist folglich auch

$$\frac{y}{a} = \operatorname{Logn}\frac{a+x+\sqrt{2ax+x^2}}{a},$$

$$e^{\frac{y}{a}} = \frac{a+x+\sqrt{2ax+x^2}}{a},$$

$$e^{-\frac{y}{a}} = \frac{a}{a+x+\sqrt{2ax+x^2}}$$

$$= \frac{a(a+x-\sqrt{2ax+x^2})}{(a+x+\sqrt{2ax+x^2})(a+x-\sqrt{2ax+x^2})}$$

$$= \frac{a(a+x-\sqrt{2ax+x^2})}{a^2}$$

$$= \frac{a+x-\sqrt{2ax+x^2}}{a},$$

$$e^{\frac{y}{a}} + e^{-\frac{y}{a}} = \frac{2(a+x)}{a},$$

$$x = \tfrac{1}{2}a\left(e^{\frac{y}{a}} + e^{-\frac{y}{a}} - 2\right).$$

Wir fanden oben

$$dx = \frac{a \operatorname{Sin}\varphi\, d\varphi}{\operatorname{Cos}\varphi^2}, \quad dy = \frac{a\, d\varphi}{\operatorname{Cos}\varphi};$$

$$\operatorname{Sin}\varphi = \frac{\sqrt{2ax+x^2}}{a+x}, \quad \operatorname{Cos}\varphi = \frac{a}{a+x}.$$

$$\text{Also } \frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{Cos}\varphi}{\operatorname{Sin}\varphi} = \frac{a}{\sqrt{2ax+x^2}},$$

$$dy = \frac{a\, dx}{\sqrt{2ax+x^2}},$$

welches die Differenzialgleichung der Kettenlinie in Beziehung auf das zweyte Coordinatensystem ist.

§. 174.

Aufgabe. Die Gleichung der Tangente der Kettenlinie zu finden.

Auflösung. Wir gebrauchen hier, so wie im Folgenden, wenn nicht etwa ausdrücklich das Gegentheil erinnert wird, immer das zweyte Coordinatensystem und die sich darauf beziehenden Gleichungen.

Sind nun x und y die Coordinaten des gegebenen Berührungspunktes; so ist nach bekannten Sätzen der Differenzialrechnung die Gleichung der Tangente:

$$z - y = \frac{dy}{dx}(u - x).$$

Aber nach §. 173.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{\sqrt{2ax+x^2}},$$

und folglich

$$z - y = \frac{a(u-x)}{\sqrt{2ax+x^2}},$$

$$z = \frac{au}{\sqrt{2ax+x^2}} + y - \frac{ax}{\sqrt{2ax+x^2}}$$

$$= \frac{au}{\sqrt{2ax+x^2}} + \frac{y\sqrt{2ax+x^2} - ax}{\sqrt{2ax+x^2}}.$$

Ist α der Winkel, welchen die Tangente nach der Seite der positiven Coordinaten hin mit der Abscissenaxe einschließt: so ist bekanntlich

$$\mathrm{Tg}\,\alpha = \frac{a}{\sqrt{2ax+x^2}};$$

die Subtangente ist bekanntlich

$$= \frac{y\,dx}{dy} = \frac{y}{a}\sqrt{2ax+x^2};$$

die Subnormale

$$= \frac{y\,dy}{dx} = \frac{ay}{\sqrt{2ax+x^2}};$$

die Normale

$$= y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = y\sqrt{1+\frac{a^2}{2ax+x^2}}$$

$$= y\sqrt{\frac{x^2+2ax+a^2}{2ax+x^2}} = \frac{y(a+x)}{\sqrt{2ax+x^2}};$$

die Länge der Tangente

$$= y\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = y\sqrt{1+\frac{2ax+x^2}{a^2}}$$

$$= y\sqrt{\frac{a^2+2ax+x^2}{a^2}} = \frac{y(a+x)}{a}.$$

Für eine Abscisse also, die $= a$ ist, ist die Tangente $= \frac{2ya}{a} = 2y$, d. i. der doppelten Ordinate gleich.

So wie bey den Kegelschnitten, so kann man auch hier die in der Gleichung der Kettenlinie vorkommende Constante a der

Abkürzung wegen den **Parameter** nennen, und **für einen Punkt, dessen Abscisse dem Parameter gleich ist, ist die Tangente der doppelten Ordinate, also einem durch den Endpunkt der Abscisse auf die Abscissenaxe errichteten und auf beiden Seiten von der Curve begränzten Perpendikel gleich, da** (s. am Ende von §. 172.) **aus der Gleichung der Kettenlinie unmittelbar folgt, daß zu jeder Abscisse zwey gleiche, aber entgegengesetzte Ordinaten gehören.**

Die Tangente kann auch auf eine leichte Art durch Construction gefunden werden. Man nehme nämlich in Fig. 103., wenn P der gegebene Punkt ist, auf der Axe der Abscissen von K an KC dem Parameter gleich, d. i. $= a$, und beschreibe aus C mit CQ als Halbmesser einen Kreis, welcher das auf CK durch K errichtete Perpendikel KD in D schneidet. Hierauf ziehe man CD, und trage an die Ordinate PQ in P einen Winkel BPQ, welcher dem Winkel KCD gleich ist; so ist PB die verlangte Tangente. Denn es erhellet leicht, daß nach der Construction die rechtwinkligen Triangel BPQ und KCD einander ähnlich sind, und daß folglich

$$CD : CK = PB : PQ.$$

Aber $CD = CQ = CK + KQ = a + x$,

$$CK = a,\ PQ = y.\ \text{Also}$$

$$a + x : a = PB : y,$$

und demnach $PB = \dfrac{y(a+x)}{a}$, wie es nach dem Obigen seyn muß, woraus also folgt, daß PB wirklich die gesuchte Tangente ist.

Diese Construction lehrt schon **Leibnitz** in der angeführten Abhandlung in den Actis Eruditorum, a. a. 1691. p. 279. Die Linien PB und CD nennt er an diesem Orte wohl zuerst Lineas antiparallelas. — **Antiparallele Linien** sind nach **Klügel** im Mathematischen Wörterbuche, Th. 1. S. 105., überhaupt ein System von vier convergirenden Linien A, *B*, *C*, *D* in einer Ebene, von welchen *A* und *C* sich unter denselben Winkeln schneiden, wie *B* und *D*, und solche Linien sind in der That *PB*, *CD*, *PQ*, *KC*. Jedoch scheint Klügel's Erklärung dem zuerst von Leibnitz aufgestellten Begriffe nicht völlig gemäß zu seyn; denn Leibnitz sagt am angeführten Orte: „Antiparallelas compendii causa hic voco „ipsas *CD* et *PB*,„ [nach unsrer Figur,] „si ad parallelas „*KD* et *PQ* faciant non quidem eosdem angulos, sed tamen „complemento sibi existentes ad rectum, *KDC* et „*QPB*.„

§. 175.

Aufgabe. Den Mittelpunkt und den Halbmesser des Krümmungskreises für irgend einen Punkt der Kettenlinie zu finden.

Auflösung. Die Coordinaten des gegebenen Punktes seyen wieder x, y; r sey der Halbmesser; und p, q seyen die Coordinaten des Mittelpunktes des Krümmungskreises für den gegebenen Punkt.

Nach bekannten Sätzen der Differenzialrechnung ist

$$p = x - \frac{dy}{dx}\left(\frac{dx^2 + dy^2}{d^2y}\right),$$

$$q = y + \frac{dx^2 + dy^2}{d^2y},$$

$$r = -\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\, d^2y}.$$

Nun ist

$$dy = \frac{a\,dx}{\sqrt{2ax + x^2}}, \quad dy^2 = \frac{a^2 dx^2}{2ax + x^2},$$

$$dx^2 + dy^2 = \left(1 + \frac{a^2}{2ax + x^2}\right) dx^2$$

$$= \frac{(x^2 + 2ax + a^2)\,dx^2}{2ax + x^2}$$

$$=\frac{(a+x)^2\,dx^2}{2ax+x^2},$$

$$(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}=\frac{(a+x)^3\,dx^3}{(2ax+x^2)\sqrt{2ax+x^2}},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-a\,.\,\frac{1}{2}(2ax+x^2)^{-\frac{1}{2}}(2a+2x)}{2ax+x^2}$$

$$=-\frac{a(a+x)}{(2ax+x^2)\sqrt{2ax+x^2}},$$

$$d^2y=-\frac{a(a+x)\,dx^2}{(2ax+x^2)\sqrt{2ax+x^2}},$$

$$\frac{dx^2+dy^2}{d^2y}=-\frac{(a+x)\sqrt{2ax+x^2}}{a},$$

$$\frac{dy}{dx}\left(\frac{dx^2+dy^2}{d^2y}\right)=-(a+x),$$

$$\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y}=-\frac{(a+x)^2}{a}.$$

Also

$$r=\frac{(a+x)^2}{a},$$

$$p=x+(a+x)=a+2x,$$

$$q=y-\frac{(a+x)\sqrt{2ax+x^2}}{a}=\frac{ay-(a+x)\sqrt{2ax+x^2}}{a}.$$

Für den Scheitel K ist $x=y=0$, und demnach

$$r=a,\ p=a,\ q=0,$$

so daß also für den Scheitel der Krümmungshalbmesser dem Parameter gleich ist, der Mittelpunkt des Krümmungskreises in der Abscissenaxe liegt, und seine Entfernung vom Scheitel dem Parameter gleich ist.

Aus dem gefundenen Ausdrucke für den Krümmungshalbmesser erhellet, daß derselbe für den Scheitel am kleinsten ist, und mit der Entfernung vom Scheitel wächst.

§. 176.

Aufgabe. Die Spannung der Kette für irgend einen Punkt derselben zu finden.

Auflösung. Bezeichnet S wie gewöhnlich die Spannung in dem Aufhängepunkte M, und behalten auch γ und λ die ihnen früher beygelegten Bedeutungen; so ist, wenn s die Länge des Bogens von M bis zu dem Punkte, in welchem die Spannung Σ bestimmt werden soll, bedeutet, nach §. 164. und nach der in §. 171. festgestellten Bedeutung des Winkels λ:

$$-S\operatorname{Cos}\lambda-\Sigma\operatorname{Cos}\varphi=0,$$
$$S\operatorname{Sin}\lambda-\Sigma\operatorname{Cos}\psi=\gamma s,$$

wenn φ, ψ die von der Tangente in dem Punkte, wo die Spannung Σ bestimmt werden soll, mit der Horizontale und der Verticale eingeschlossenen Winkel bezeichnen. Also

$$\Sigma\operatorname{Cos}\varphi=-S\operatorname{Cos}\lambda,$$
$$\Sigma\operatorname{Cos}\psi=S\operatorname{Sin}\lambda-\gamma s,$$
$$\Sigma^2\operatorname{Cos}\varphi^2=S^2\operatorname{Cos}\lambda^2,$$
$$\Sigma^2\operatorname{Cos}\psi^2=S^2\operatorname{Sin}\lambda^2-2S\gamma s\operatorname{Sin}\lambda+\gamma^2 s^2,$$
$$\Sigma^2(\operatorname{Cos}\varphi^2+\operatorname{Cos}\psi^2)=S^2(\operatorname{Sin}\lambda^2+\operatorname{Cos}\lambda^2)-2S\gamma s\operatorname{Sin}\lambda+\gamma^2 s^2.$$

Aber $\operatorname{Cos}\varphi^2+\operatorname{Cos}\psi^2=1$ und $\operatorname{Sin}\lambda^2+\operatorname{Cos}\lambda^2=1$ (§. 25.). Also

$$\Sigma^2=S^2-2S\gamma s\operatorname{Sin}\lambda+\gamma^2 s^2,$$
$$\Sigma=\sqrt{S^2-2S\gamma s\operatorname{Sin}\lambda+\gamma^2 s^2},$$

welcher Ausdruck also, außer von den aus dem Obigen bekannten S, γ, λ, nur noch von dem Bogen s abhängt, den wir aber bald bestimmen werden.

Das Verhältniß der Spannungen Σ, Σ' in den Punkten, deren Coordinaten nach dem zweyten Coordinatensysteme x, y; x', y' sind, läßt sich auf folgende Art bestimmen. Sind nämlich die Winkel der Tangenten durch diese Punkte mit der Horizontale φ, φ'; so ist nach §. 164.:

$$\Sigma:\Sigma'=\operatorname{Cos}\varphi':\operatorname{Cos}\varphi,$$

wo man für φ und φ' immer die spitzen Winkel, welche die

Tangenten mit der Horizontale einschließen, nehmen kann, da es hier auf die Zeichen nicht ankommt. Aber nach §. 173.:

$$x = \frac{a}{\operatorname{Cos}\varphi} - a, \text{ und folglich}$$

$$a + x = \frac{a}{\operatorname{Cos}\varphi}, \quad \operatorname{Cos}\varphi = \frac{a}{a+x},$$

und eben so $\operatorname{Cos}\varphi' = \frac{a}{a+x'}$.

Also

$$\begin{aligned}\Sigma : \Sigma' &= \frac{a}{a+x'} : \frac{a}{a+x} \\ &= a(a+x) : a(a+x') \\ &= a+x : a+x' \\ &= \frac{a+x}{\sqrt{a}} : \frac{a+x'}{\sqrt{a}} \\ &= \sqrt{\frac{(a+x)^2}{a}} : \sqrt{\frac{(a+x')^2}{a}},\end{aligned}$$

d. i. nach §. 175.:

$$\Sigma : \Sigma' = \sqrt{r} : \sqrt{r'},$$

wenn r und r' die Krümmungshalbmesser in den gegebenen Punkten bezeichnen.

Die Spannungen in den einzelnen Punkten der Kette verhalten sich also wie die Quadratwurzeln aus den Krümmungshalbmessern in diesen Punkten.

Da nun der Krümmungshalbmesser im Scheitel K am kleinsten ist, und desto größer wird, je weiter man sich auf beiden Seiten vom Scheitel entfernt; so ist auch die Spannung im Scheitel, d. i. im tiefsten Punkte, am kleinsten, und wird desto größer, je höher der Punkt liegt.

§. 177.

Aufgabe. Die Länge eines Bogens der Kettenlinie, vom Anfange der Abscissen an genommen, zu finden.

Auflösung. Die Coordinaten des Endpunktes des Bogens seyen x, y; so ist nach §. 175.:

$$dx^2 + dy^2 = \frac{(a+x)^2 dx^2}{2ax + x^2},$$

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{(a+x)\,dx}{\sqrt{2ax + x^2}}.$$

Bezeichnen wir nun die Länge des gesuchten Bogens durch s; so ist bekanntlich

$$s = \int\sqrt{dx^2 + dy^2} = \int\frac{(a+x)\,dx}{\sqrt{2ax + x^2}};$$

das Integral so bestimmt, daß es für $x = 0$ verschwindet.

Um nun dieses Integral zu finden, setze man

$$2ax + x^2 = z^2,\quad 2(a+x)\,dx = 2z\,dz,$$

$$\frac{(a+x)\,dx}{\sqrt{2ax + x^2}} = \frac{z\,dz}{z} = dz.$$

Also

$$\int\frac{(a+x)\,dx}{\sqrt{2ax + x^2}} = \int dz = z = \sqrt{2ax + x^2},$$

und folglich, da dieses Integral für $x = 0$ verschwindet:

$$s = \sqrt{2ax + x^2},$$

woraus erhellet, daß die Kettenlinie algebraisch rectificabel ist.

Sind α, β die Coordinaten des Punktes M, so ist der Bogen vom Scheitel bis zu diesem Punkte $= \sqrt{2a\alpha + \alpha^2}$, und demnach der Bogen vom gegebenen Punkte bis zu dem Punkte M

$$= \sqrt{2a\alpha + \alpha^2} - \sqrt{2ax + x^2},$$

wo für Punkte links vom Scheitel die zweyte Quadratwurzel positiv, für Punkte rechts vom Scheitel aber negativ zu nehmen ist.

α ist nach §. 172. bekanntlich

$$= \frac{S(1 - \mathrm{Cos}\,\lambda)}{\gamma},$$

wo S wie gewöhnlich die Spannung in M bezeichnet, und

$\frac{S \operatorname{Cos} \lambda}{\gamma}$ ist $= a$. Also ist

$$\alpha = \frac{S}{\gamma} - \frac{S \operatorname{Cos} \lambda}{\gamma} = \frac{S}{\gamma} - a,$$

$$2a\alpha = \frac{2aS}{\gamma} - 2a^2,$$

und demnach

$$2a\alpha + \alpha^2 = \frac{2aS}{\gamma} - 2a^2 + \frac{S^2}{\gamma^2} - \frac{2aS}{\gamma} + a^2$$

$$= \frac{S^2}{\gamma^2} - a^2 = \frac{S^2 - a^2\gamma^2}{\gamma^2}$$

$$= \frac{S^2 - S^2 \operatorname{Cos} \lambda^2}{\gamma^2} = \frac{S^2(1 - \operatorname{Cos} \lambda^2)}{\gamma^2}$$

$$= \frac{S^2 \operatorname{Sin} \lambda^2}{\gamma^2},$$

und demnach der Bogen vom Scheitel bis zum Punkte M

$$= \sqrt{2a\alpha + \alpha^2} = \frac{S \operatorname{Sin} \lambda}{\gamma}.$$

Also der Bogen von M bis zu irgend einem Punkte, dessen Coordinaten in Beziehung auf das zweyte Coordinatensystem x, y sind,

$$= \frac{S \operatorname{Sin} \lambda}{\gamma} - \sqrt{2ax + x^2}.$$

Gebraucht man das erste Coordinatensystem, so muß man nach §. 172.

$$\frac{S(1 - \operatorname{Cos} \lambda)}{\gamma} - y$$

für x setzen, d. i.

$$\frac{S}{\gamma} - \frac{S \operatorname{Cos} \lambda}{\gamma} - y, \text{ oder}$$

$$\frac{S}{\gamma} - a - y.$$

Also

$$2ax = \frac{2aS}{\gamma} - 2a^2 - 2ay,$$

$$x^2 = \frac{S^2}{\gamma^2} - \frac{2aS}{\gamma} + a^2 - \frac{2Sy}{\gamma} + 2ay + y^2,$$

und demnach

$$2ax + x^2 = \frac{S^2}{\gamma^2} - a^2 - \frac{2Sy}{\gamma} + y^2$$

$$= \frac{S^2 - a^2\gamma^2}{\gamma^2} - \frac{2Sy}{\gamma} + y^2$$

$$= \frac{S^2 \operatorname{Sin} \lambda^2}{\gamma^2} - \frac{2Sy}{\gamma} + y^2$$

$$= \frac{S^2 \operatorname{Sin} \lambda^2 - 2S\gamma y + \gamma^2 y^2}{\gamma^2},$$

$$\sqrt{2ax + x^2} = \frac{1}{\gamma} \sqrt{S^2 \operatorname{Sin} \lambda^2 - 2S\gamma y + \gamma^2 y^2},$$

und demnach der Bogen von M bis zu dem Punkte, dessen Ordinate in Beziehung auf das erste Coordinatensystem y ist,

$$= \frac{1}{\gamma} (S \operatorname{Sin} \lambda - \sqrt{S^2 \operatorname{Sin} \lambda^2 - 2S\gamma y + \gamma^2 y^2}).$$

Für Punkte links vom Scheitel ist die Wurzelgröße positiv, für Punkte rechts vom Scheitel aber negativ zu nehmen.

Leibnitz lehrt a. a. O. S. 279. die Länge des Bogens KP (Fig. 103.) durch Construction auf folgende Art finden. Man nehme auf der Absciſſenaxe $CK = a$, errichte auf CQ durch K das Perpendikel KD, und mache, indem man aus C als Mittelpunkt mit CQ als Halbmesser einen Kreis beschreibt, $CD = CQ$; so ist die Linie KD dem Bogen KP gleich. Denn

$$CK = a, \quad CD = CQ = CK + KQ = a + x;$$

$$KD^2 = CD^2 - CK^2 = (a + x)^2 - a^2$$

$$= a^2 + 2ax + x^2 - a^2 = 2ax + x^2;$$

$$KD = \sqrt{2ax + x^2} = KP;$$

nach dem Vorhergehenden.

Die Kettenlinie läßt sich also geometrisch rectificiren.

Da

$$KP = s = \sqrt{2ax + x^2}$$

ist; so ist

$$s^2 = 2ax + x^2 = 2ax + \frac{2ax^2}{2a},$$

und die Bögen der Kettenlinie sind also nach §. 145. meines Lehrbuches der Kegelschnitte die Ordinaten einer Hyperbel, deren große Axe $2a$ und deren Parameter $2a$ ist. Setzt man die kleine Axe dieser Hyperbel $= 2b$, so ist $\frac{2b^2}{a} = 2a$, (a. a. O.). Also $2b^2 = 2a^2$, und folglich $b = a$.

Daher sind die Bögen der Kettenlinie die Ordinaten einer gleichseitigen Hyperbel, deren große und kleine Halbaxe dem Parameter der Kettenlinie gleich sind.

Diese Eigenschaft hat schon Johann Bernoulli bemerkt. (Acta Eruditorum, a. a. 1691. p. 275.) Er sagt: „insignis est hujus curvae proprietas„.

Ist der Bogen der Kettenlinie von K an dem Parameter gleich; so ist

$$\sqrt{2ax + x^2} = a,$$
$$2ax + x^2 = a^2.$$

Ist nun α der Winkel, welchen die Tangente nach der Seite der positiven Coordinaten hin mit der Axe der Abscissen einschließt; so ist nach §. 174.:

$$\mathrm{Tg}\,\alpha = \frac{a}{\sqrt{2ax + x^2}},$$

d. i. für unsern Fall:

$$\mathrm{Tg}\,\alpha = \frac{a}{a} = 1,$$

und folglich $\alpha = 45°$, so daß also die durch den Endpunkt eines Bogens, welcher dem Parameter gleich ist, gezogene Tangente mit der Abscissenaxe sowohl, als auch mit der Ordinate durch den Endpunkt des Bogens einen Winkel von 45 Grad einschließt.

§. 178.

Aufgabe. Die Evolute der Kettenlinie zu finden.

Auflösung. Sind x', y' die Coordinaten der Evolute; so ist bekanntlich:

$$x' - x + \frac{dy}{dx}\left(\frac{dx^2 + dy^2}{d^2y}\right) = 0,$$

$$y' - y - \frac{dx^2 + dy^2}{d^2y} = 0.$$

Nach §. 175. ist

$$x - \frac{dy}{dx}\left(\frac{dx^2 + dy^2}{d^2y}\right) = a + 2x,$$

$$y + \frac{dx^2 + dy^2}{d^2y} = y - \frac{(a + x)\sqrt{2ax + x^2}}{a}.$$

Also

$$x' - a - 2x = 0,$$

$$y' - y + \frac{(a + x)\sqrt{2ax + x^2}}{a} = 0,$$

$$x' = a + 2x, \quad x = \tfrac{1}{2}(x' - a);$$

$$a + x = a + \tfrac{1}{2}(x' - a) = \tfrac{1}{2}(a + x'),$$

$$\begin{aligned} 2ax + x^2 &= a(x' - a) + \tfrac{1}{4}(x' - a)^2 \\ &= ax' - a^2 + \tfrac{1}{4}x'^2 - \tfrac{1}{2}ax' + \tfrac{1}{4}a^2 \\ &= \tfrac{1}{4}x'^2 + \tfrac{1}{2}ax' - \tfrac{3}{4}a^2 \\ &= \frac{x'^2 + 2ax' - 3a^2}{4}, \end{aligned}$$

$$\frac{(a + x)\sqrt{2ax + x^2}}{a} = \frac{(a + x')\sqrt{x'^2 + 2ax' - 3a^2}}{4a};$$

$$y' = y - \frac{(a + x)\sqrt{2ax + x^2}}{a},$$

$$\begin{aligned} y' &= a \,\mathrm{Logn} \frac{a + x + \sqrt{2ax + x^2}}{a} - \frac{(a + x')\sqrt{x'^2 + 2ax' - 3a^2}}{4a} \\ &= a \,\mathrm{Logn} \frac{a + x' + \sqrt{x'^2 + 2ax' - 3a^2}}{2a} - \frac{(a + x')\sqrt{x'^2 + 2ax' - 3a^2}}{4a}, \end{aligned}$$

welches die gesuchte Gleichung der Evolute ist.

Ist also in Fig. 104. LR die Evolute; so ist

$$x' - x = KS - KQ = SQ = RT = a + x,$$
$$y' - y = (-SR) - PQ = -QT - PQ$$
$$= -(QT + PQ) = -PT$$
$$= -\frac{(a+x)\sqrt{2ax + x^2}}{a};$$
$$PT = \frac{(a+x)\sqrt{2ax + x^2}}{a}.$$

Die Linie PR ist nach der Natur der Evolution dem Krümmungshalbmesser der Kettenlinie für den Punkt P gleich, d. i. nach §. 175.:

$$PR = \frac{(a+x)^2}{a}.$$

Im Scheitel ist der Krümmungshalbmesser $= KL = a$, (§. 175.), d. i. $KL = KC$, so daß also die Entfernung des Punktes, wo die Evolute die Abscissenaxe schneidet, vom Scheitel der Kettenlinie, dem Parameter derselben gleich ist.

Der Bogen LR der Evolute ist nach der Natur der Evolution

$$= PR - KL = \frac{(a+x)^2}{a} - a$$
$$= \frac{a^2 + 2ax + x^2 - a^2}{a} = \frac{2ax + x^2}{a}.$$

Da nun nach §. 177. $PK = \sqrt{2ax + x^2}$, und offenbar

$$a : \sqrt{2ax + x^2} = \sqrt{2ax + x^2} : \frac{2ax + x^2}{a}$$

ist; so ist auch

$$a : KP = KP : LR,$$

und der Bogen KP der Kettenlinie ist demnach immer die mittlere Proportionale zwischen dem Parameter $KC = a$ und dem Bogen LR der Evolute.

Da $LK = a$, und $SQ = a + x$ ist; so ist

$$LQ = KQ - LK = x - a,$$

und

$$LS = LQ + SQ = x - a + a + x$$
$$= 2x = 2 \,.\, KQ,$$

so daß also, wenn man den Punkt, in welchem die Evolute die Abscissenaxe trifft, als Anfang der Coordinaten für die Evolute annimmt, die Abscissen der Evolute immer den doppelten entsprechenden Abscissen der Kettenlinie gleich sind.

Da man nun den Punkt L, weil $LK = a$ ist, so wie auch die Abscissen der Evolute von diesem Punkte an gerechnet, und aus der Proportion

$$a : a + x = a + x : r$$

auch immer den Krümmungshalbmesser der Kettenlinie leicht finden kann; so läßt sich die Evolute leicht zeichnen. Man nehme nämlich $LK = KC = a$, und $LS = 2 \,.\, KQ$, errichte durch S das Perpendikel SR, und schneide dieses aus P mit dem Krümmungshalbmesser für diesen Punkt $PR = r$ in R; so ist SR die Ordinate der Evolute.

Die Evolute der Kettenlinie ist schon von Johann Bernoulli und Huygens am angeführten Orte bestimmt worden.

§. 179.

Aufgabe. Den Flächeninhalt des zwischen den Coordinaten KQ, PQ (Fig. 103.) enthaltenen Curvenstücks zu finden.

Auflösung. Man setze den gesuchten Inhalt $= S$; so ist bekanntlich

$$S = \int y\,dx,$$

wo das Integral so bestimmt werden muß, daß es für $x = 0$ verschwindet.

Nun ist

$$\int y\,dx = \int x\,dy + \int y\,dx - \int x\,dy$$

$$= \int (x\,dy + y\,dx) - \int x\,dy$$
$$= \int d.\,xy - \int x\,dy = xy - \int x\,dy,$$

$$\int x\,dy = \int \frac{ax\,dx}{\sqrt{2ax + x^2}} \text{ (§. 173.).}$$

Nach §. 177. ist

$$\sqrt{2ax + x^2} = \int \frac{(a + x)\,dx}{\sqrt{2ax + x^2}}$$
$$= \int \frac{a\,dx}{\sqrt{2ax + x^2}} + \int \frac{x\,dx}{\sqrt{2ax + x^2}}.$$

Aber $dy = \frac{a\,dx}{\sqrt{2ax + x^2}}$; also

$$y = \int \frac{a\,dx}{\sqrt{2ax + x^2}},$$

und folglich

$$\sqrt{2ax + x^2} = y + \int \frac{x\,dx}{\sqrt{2ax + x^2}},$$
$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2ax + x^2}} = \sqrt{2ax + x^2} - y,$$
$$\int \frac{ax\,dx}{\sqrt{2ax + x^2}} = a\sqrt{2ax + x^2} - ay,$$
$$\int y\,dx = xy - a\sqrt{2ax + x^2} + ay$$
$$= (a + x)y - a\sqrt{2ax + x^2};$$

ein Integral, welches offenbar für $x = 0$ verschwindet, da y für diesen Werth von $x = 0$ wird.

Also

$$S = (a + x)y - a\sqrt{2ax + x^2}$$
$$= (a + x)\,a\,\mathrm{Logn}\,\frac{a + x + \sqrt{2ax + x^2}}{a} - a\sqrt{2ax + x^2}.$$

Man kann das Curvenstück S auch rein geometrisch quadriren, welches eine ebenfalls von Leibnitz am angeführten Orte bewiesene sehr merkwürdige Eigenschaft der Kettenlinie ist. Man fälle nämlich (Fig. 103.) von P auf die verlängerte KD das Perpendikel PR, und verlängere dieses, bis es die durch C, den Endpunkt des Parameters KC, auf der Axe Senkrechte CU in T schneidet; nehme nun den Punkt V so, daß $CV = CQ$ ist, und beschreibe mit RV und RT das Rechteck $VRTU$: so ist dieses Rechteck dem Curvenstücke PRK gleich. Denn es ist $CK = a$ und

$$VK^2 = CV^2 - CK^2 = CQ^2 - CK^2$$
$$= (a + x)^2 - a^2 = 2ax + x^2,$$
$$VK = \sqrt{2ax + x^2},$$
$$CKVU = CK \,.\, KV = a\sqrt{2ax + x^2},$$
$$CKRT = CK \,.\, KR = ay,$$
$$VRTU = a\sqrt{2ax + x^2} - ay,$$
$$PRK = PQKR - PQK$$
$$= xy - [(a + x)y - a\sqrt{2ax + x^2}]$$
$$= xy - (a + x)y + a\sqrt{2ax + x^2}$$
$$= xy - ay - xy + a\sqrt{2ax + x^2}$$
$$= a\sqrt{2ax + x^2} - ay.$$

Also $VRTU = PRK$, w. z. b. w.

Sucht man nun die Differenz der beiden Rechtecke $PQKR$ und $VRTU$ in Form eines Rechtecks, welches sich durch die bloße Elementargeometrie immer leicht bewerkstelligen läßt; so erhält man ein dem Curvenstücke PKQ gleiches Rechteck.

Der Flächenraum $PKCT$ ist

$$= PQCT - PKQ$$
$$= (a + x)y - [(a + x)y - a\sqrt{2ax + x^2}]$$
$$= (a + x)y - (a + x)y + a\sqrt{2ax + x^2}$$
$$= a\sqrt{2ax + x^2}.$$

Da nun nach §. 177. der Bogen $KP = \sqrt{2ax + x^2}$ ist, so ist $PKCT = a \,.\, KP$, und es erhellet also, daß die Flächenräume $PKCT$ den Bögen KP proportional sind; eine merkwürdige Eigenschaft der Kettenlinie, die ebenfalls schon von Leibnitz bemerkt worden ist.

Da $PKCT = a \,.\, KP$, und $CKRT = a \,.\, KR$ ist; so ist

$$PKCT : CKRT = KP : KR.$$

§. 180.

Aufgabe. Den Inhalt der Oberfläche des durch die Umdrehung von KPQ (Fig. 103.) um KQ erzeugten Körpers zu finden.

Auflösung. Man setze den gesuchten Flächeninhalt $= V$; so ist bekanntlich

$$V = 2\pi \int y \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

oder

$$V = 2\pi \int y\, ds,$$

wenn s den Bogen bezeichnet.

Nun ist

$$\int y\, ds = y\int ds - \int dy \int ds$$
$$= ys - \int s\, dy.$$

Aber $s = \sqrt{2ax + x^2}$,

$$ys = y\sqrt{2ax + x^2},$$

$$sdy = \frac{adx\sqrt{2ax + x^2}}{\sqrt{2ax + x^2}} = adx,$$

$$\int s\, dy = \int a\, dx = ax,$$

$$\int y\, ds = ys - ax,$$

$$V = 2\pi(ys - ax) = 2\pi\left[y\sqrt{2ax + x^2} - ax\right],$$

da das Integral verschwindet für $x = 0$, indem $y = 0$ wird, für $x = 0$.

Man ziehe jetzt in Fig. 103. durch den Punkt P die Tangente PB, so ist die Gleichung dieser Tangente nach §. 174.:

$$z = \frac{au}{\sqrt{2ax + x^2}} + \frac{y\sqrt{2ax + x^2} - ax}{\sqrt{2ax + x^2}}.$$

Um die Länge der Linie KW zu finden, muß man in dieser Gleichung $u = 0$ setzen, wodurch man erhält:

$$KW = \frac{y\sqrt{2ax + x^2} - ax}{\sqrt{2ax + x^2}}.$$

Der Punkt D ist so bestimmt, daß $CD = CQ$ ist. Es ist also, wie schon in §. 177. gezeigt wurde:

$$KD = \sqrt{2ax + x^2},$$

und folglich

$$KW \,.\, KD = y\sqrt{2ax + x^2} - ax,$$

$$2\pi \,.\, KW \,.\, KD = 2\pi\left[y\sqrt{2ax + x^2} - ax\right];$$

und wenn man das doppelte Rechteck $2KW \,.\, KD = r^2$ setzt, so ist

$$2\pi\left[y\sqrt{2ax + x^2} - ax\right] = V = r^2 \,.\, \pi,$$

so daß also die Oberfläche des durch die Umdrehung von KPQ um KQ erzeugten Körpers einem Kreise gleich ist, dessen Radius die mittlere Proportionale zwischen $2KW$ und KD ist. Denn weil $2KW \,.\, KD = r^2$ gesetzt wurde; so ist

$$2KW : r = r : KD.$$

Die Kettenlinie bietet also ein Beyspiel dar, wo eine krumme Oberfläche wirklich in eine ebene Fläche ausgebreitet werden kann. Leibnitz hat den vorhergehenden Satz gefunden, und drückt ihn a. a. O. S. 280. auf folgende Art aus: „Sic si Catena PKP' rotetur circa axem KQ, generata superficies aequabitur circulo, cujus radius possit duplum „rectangulum WKD.„

§. 181.

Aufgabe. Den körperlichen Inhalt des durch die Umdrehung von KPQ (Fig. 103.) um KQ erzeugten Körpers zu finden.

Auflösung. Setzen wir den gesuchten Inhalt $= v$; so ist bekanntlich

$$v = \pi \int y^2\, dx.$$

Nun ist

$$\int y^2\, dx = y^2 \int dx - \int d \,.\, y^2 \int dx$$
$$= xy^2 - 2\int xy\, dy$$
$$= xy^2 - 2\left[y\int x\, dy - \int dy \int x\, dy\right].$$

Aber nach §. 179.:

$$\int x\, dy = a\sqrt{2ax + x^2} - ay,$$

$$\begin{aligned}\int dy \int x dy &= a\int dy\sqrt{2ax+x^2} - a\int y\, dy\\ &= a\int a\, dx - a\int y\, dy\\ &= a^2x - \tfrac{1}{2}ay^2,\end{aligned}$$

$$\int y^2 dx = xy^2 - 2ay\sqrt{2ax+x^2} + 2ay^2 + 2a^2x - ay^2;$$

$$v = \pi\left[2a^2x + (a+x)y^2 - 2ay\sqrt{2ax+x^2}\right].$$

Denkt man sich die Figur $CKPT$ um CK bewegt; so ist der dadurch erzeugte Körper gleich dem durch die Umdrehung von $CQPT$ um CQ entstandenen Cylinder, weniger dem Körper v, d. i.

$$\begin{aligned}&= \pi(a+x)y^2 - \pi\left[2a^2x + (a+x)y^2 - 2ay\sqrt{2ax+x^2}\right]\\ &= \pi\left(2ay\sqrt{2ax+x^2} - 2a^2x\right)\\ &= 2a\pi\left(y\sqrt{2ax+x^2} - ax\right).\end{aligned}$$

Nun ist nach dem vorhergehenden Paragraphen

$$y\sqrt{2ax+x^2} - ax = KW.\,KD.$$

Also der durch die Umdrehung von $PKCT$ erzeugte Körper

$$= 2a\pi.\,KW.\,KD = a\pi r^2,$$

wenn wir $2KW.\,KD$ wieder $= r^2$ setzen.

Der durch die Umdrehung von $CKPT$ um CK erzeugte Körper ist also einem Cylinder gleich, welcher $a = CK$ zur Höhe, und einen Kreis, dessen Halbmesser die mittlere Proportionale zwischen $2KW$ und KD ist, zur Grundfläche hat.

Zieht man diesen Cylinder von dem durch die Umdrehung von $CQPT$ um CQ entstandenen Cylinder ab, so erhält man den durch die Umdrehung von KPQ um KQ entstandenen Körper.

§. 182.

Johann Bernoulli hat eine merkwürdige Vergleichung zwischen der Kettenlinie, der Parabel und der Hyperbel angestellt, worüber wir jetzt das Wichtigste beybringen wollen.

Aus demselben Scheitel und über derselben Axe beschreibe man in Fig. 105. eine gleichseitige Hyperbel KP'', deren Halbaxe $= a$, und eine Parabel KP''', deren Parameter $=$

ga ist; so ist, wenn KP' wie gewöhnlich die Kettenlinie ist, der Bogen KP' gleich der Ordinate QP'' der Hyperbel, wie wir schon in §. 177. bey der Rectification der Kettenlinie gesehen haben.

Man kann aber auch beweisen, daß immer die Linie PP'', von der Kettenlinie bis zur Hyperbel, dem Bogen KP''' der Parabel gleich ist.

Um dies zu beweisen, verfahre man auf folgende Art.

Man setze $PP'' = z$, $QP'' = y'$, $QP''' = y''$, $KP''' = s$, $PQ = QP' = y$, $KQ = x$.

Die Gleichung der Hyperbel ist bekanntlich

$$y'^2 = px + \frac{px^2}{2a}.$$

Da aber die Hyperbel gleichseitig ist, so ist $p = \frac{2a^2}{a} = 2a$, und demnach

$$y'^2 = 2ax + x^2,\ y' = \sqrt{2ax + x^2}.$$

Also

$$dy' = \tfrac{1}{2}(2ax + x^2)^{-\frac{1}{2}}.\,2(a + x)\,dx$$
$$= \frac{(a + x)\,dx}{\sqrt{2ax + x^2}}.$$

Nun ist offenbar $z = y + y'$. Also

$$dz = dy + dy',$$

d. i. $$dz = \frac{a\,dx}{\sqrt{2ax + x^2}} + \frac{(a + x)\,dx}{\sqrt{2ax + x^2}}$$
$$= \frac{(2a + x)dx}{\sqrt{2ax + x^2}} = \frac{(2ax + x^2)\,dx}{x\sqrt{2ax + x^2}}$$
$$= \frac{dx\sqrt{2ax + x^2}}{x} = dx\sqrt{\frac{2ax + x^2}{x^2}},$$
$$dz = dx\sqrt{1 + \frac{2a}{x}}.$$

Die Gleichung der Parabel ist $y'' = \sqrt{8ax}$. Also $dy'' = \frac{4a\,dx}{\sqrt{8ax}}$. Aber bekanntlich

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy''^2} = \sqrt{dx^2 + \frac{16a^2 dx^2}{8ax}}$$
$$= dx\sqrt{1 + \frac{2a}{x}},$$

und demnach $dz = ds$. Da nun offenbar sowohl z als s für $x = 0$ verschwindet, so ist $z = s$, d. i. $PP'' = KP'''$, w. z. b. w.

Die Ordinate PQ der Catenaria ist also offenbar gleich dem parabolischen Bogen KP''' weniger der Ordinate QP'' der Hyperbel.

Man kann sich dieses Satzes, wie Bernoulli thut, zur Construction der Kettenlinie bedienen; aber auch zur geometrischen Rectification der Parabel. Um nämlich eine Parabel KP''', deren Parameter p ist, geometrisch zu rectificiren, beschreibe man aus demselben Scheitel und über derselben Axe eine gleichseitige Hyperbel KP'', deren halbe Axen $= \frac{1}{8}p$ oder deren ganze Axen $= \frac{1}{4}p$ sind, und eine Kettenlinie PKP', deren Parameter $= \frac{1}{8}p$ ist, (über die Construction der Kettenlinie aus dem gegebenen Parameter wird weiter unten in §. 184. ein Mehreres vorkommen); so ist immer die Linie PP'' dem parabolischen Bogen KP''' gleich, und dieser also wirklich rectificirt.

Die Fläche KPR ist nach §. 179.

$$= a\sqrt{2ax + x^2} - ay = a(\sqrt{2ax + x^2} - y),$$

und nach dem Obigen

$$QP'' = y' = \sqrt{2ax + x^2}.$$

Also die Fläche KPR

$$= a(y' - y) = a \,.\, P'P'',$$

so daß also die Fläche KPR dem unter dem Parameter der Kettenlinie und dem Unterschiede $P'P''$ zwischen den Ordinaten der Hyperbel und der Kettenlinie enthaltenen Rechtecke gleich ist.

Der hyperbolische Raum KQP'' ist nach §. 116., da die Hyperbel gleichseitig ist, und ihre beiden Halbaxen $= a$ sind,

$= \frac{1}{2}(a+x)\sqrt{2ax+x^2} - \frac{1}{2}a^2 \operatorname{Logn} \frac{a+x+\sqrt{2ax+x^2}}{a}.$

Nach §. 178. ist aber in Fig. 104. die Ordinate SR oder QT der Evolute

$$= PT - PQ$$
$$= \frac{(a+x)\sqrt{2ax+x^2}}{a} - PQ.$$

Also das Rechteck $QT.KC$ oder $a.QT$

$= (a+x)\sqrt{2ax+x^2} - PQ.a$

$= (a+x)\sqrt{2ax+x^2} - ay$

$= (a+x)\sqrt{2ax+x^2} - a^2 \operatorname{Logn} \frac{a+x+\sqrt{2ax+x^2}}{a}.$

Hieraus, in Vergleichung mit dem Vorhergehenden, folgt, daß das unter QT und KC (Fig. 104.) oder a enthaltene Rechteck dem doppelten hyperbolischen Raume KQP'' in Fig. 105. gleich, und demnach die Hyperbel mittelst der Evolute der Kettenlinie geometrisch quadrirbar ist.

§. 183.

Aufgabe. Die Länge eines Bogens der Kettenlinie von dem bekannten Scheitel K (Fig. 103.) an sey gegeben: man soll ihren Parameter durch Construction finden.

Auflösung. Die Länge des der Abscisse KQ entsprechenden Bogens KP' sey gegeben. Man ziehe durch den gegebenen Scheitel K auf der verticalen Axe QKC das Perpendikel KD und nehme $KD = KP'$, ziehe QD, und trage den Winkel CQD an QD und die Spitze D; so wird der andere Scheitel dieses Winkels die durch den Scheitel gehende Verticale in C schneiden. KC ist dann der gesuchte Parameter. Die Richtigkeit des Verfahrens folgt unmittelbar aus §. 177.

§. 184.

Aufgabe. Wenn der Parameter gegeben ist, die Kettenlinie geometrisch zu beschreiben.

Auflösung. Der gegebene Parameter sey $= a$, und werde (Fig. 106.) $= KC$ gemacht. Durch C errichte man auf KC ein Perpendikel AB, und nehme dieses als Axe, C aber als Anfang der Abscissen an. Die Gleichung der Kettenlinie in Beziehung auf dieses System ist, wie aus §. 173. leicht geschlossen wird:

$$y - a = \tfrac{1}{2}a(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} - 2)$$

$$= \tfrac{1}{2}a(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}) - a,$$

$$y = \tfrac{1}{2}a(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}).$$

Man beschreibe nun eine Curve MN von solcher Beschaffenheit, daß, wenn die Abscissen in arithmetischer Progression sind, die zugehörigen Ordinaten eine geometrische Progression bilden, und zwar auf folgende Art. Man theile die Linie AB von C aus nach beiden Seiten hin in gleiche Theile, deren jeder $= a$ ist, und errichte durch die Theilpunkte Perpendikel auf AB. Das dem Anfangspunkte C oder der Abscisse Null entsprechende Perpendikel mache man $= a = CK$, und die den Abscissen

$$a,\ 2a,\ 3a,\ 4a,\ 5a,\ \text{u. s. w.}$$

entsprechenden Ordinaten

$$= ae,\ ae^2,\ ae^3,\ ae^4,\ ae^5,\ \text{u. s. w.},$$

wo e die Basis der natürlichen Logarithmen ist, $= 2{,}7182818\ldots$. Eben so mache man die den Abscissen

$$-a,\ -2a,\ -3a,\ -4a,\ -5a,\ \text{u. s. w.}$$

entsprechenden Ordinaten

$$= \frac{a}{e},\ \frac{a}{e^2},\ \frac{a}{e^3},\ \frac{a}{e^4},\ \frac{a}{e^5},\ \text{u. s. w.},$$

d. i. $= ae^{-1},\ ae^{-2},\ ae^{-3},\ ae^{-4},\ ae^{-5}$, u. s. w.

Hat man einmahl die Ordinate ae bestimmt, so findet man die übrigen leicht nach der bekannten geometrischen Aufgabe: Zu zwey gegebenen Linien die dritte Proportionale zu finden. Denn es ist

$$a : ae = ae : ae^2,$$
$$ae : ae^2 = ae^2 : ae^3,$$
$$ae^2 : ae^3 = ae^3 : ae^4,$$
$$ae^3 : ae^4 = ae^4 : ae^5,$$
u. s. w.;

und eben so:

$$ae : a = a : \frac{a}{e},$$

$$a : \frac{a}{e} = \frac{a}{e} : \frac{a}{e^2},$$

$$\frac{a}{e} : \frac{a}{e^2} = \frac{a}{e^2} : \frac{a}{e^3},$$

$$\frac{a}{e^2} : \frac{a}{e^3} = \frac{a}{e^3} : \frac{a}{e^4},$$
u. s. w.

Die gefundenen Ordinaten geben nun schon eine beträchtliche Anzahl von Punkten der gesuchten Curve. Da aber a bedeutend groß seyn kann, so können diese Ordinaten noch zu weit von einander liegen, als daß sich die gesuchte Curve durch die Endpunkte schon mit hinlänglicher Genauigkeit ziehen ließe. Um nun noch mehrere Punkte zu erhalten, halbire man jeden der Theile der Linie AB, und errichte durch die Theilpunkte eine neue Reihe von Perpendikeln. Das dem Punkte, welcher zwischen den Endpunkten der Abscissen ma und $(m+1)a$ liegt, entsprechende Perpendikel wird auf folgende Art bestimmt. Die Gleichung der zu beschreibenden Curve ist offenbar

$$y = ae^{\frac{x}{a}};$$

denn die schon gefundenen Ordinaten sind nach der Reihe:

$$a = ae^{\frac{0}{a}}; \quad \frac{a}{e} = ae^{\frac{-a}{a}};$$

$$ae = ae^{\frac{\alpha}{\alpha}}; \quad \frac{a}{e^2} = ae^{\frac{-2\alpha}{\alpha}};$$

$$ae^2 = ae^{\frac{2\alpha}{\alpha}}; \quad \frac{a}{e^3} = ae^{\frac{-3\alpha}{\alpha}};$$

$$ae^3 = ae^{\frac{3\alpha}{\alpha}}; \quad \frac{a}{e^4} = ae^{\frac{-4\alpha}{\alpha}};$$

$$ae^4 = ae^{\frac{4\alpha}{\alpha}}; \quad \frac{a}{e^5} = ae^{\frac{-5\alpha}{\alpha}};$$

u. s. w. u. s. w.

Die den Endpunkten der Abscissen $m\alpha$ und $(m+1)\alpha$ entsprechenden Ordinaten sind also:

$$ae^{\frac{m\alpha}{\alpha}}; \quad ae^{\frac{(m+1)\alpha}{\alpha}};$$

und die der Abscisse $m\alpha + \frac{1}{2}\alpha = (m + \frac{1}{2})\alpha$ entsprechende ist

$$= ae^{\frac{(m+\frac{1}{2})\alpha}{\alpha}}$$

$$= ae^{\frac{(2m+1)\alpha}{2\alpha}} = ae^{\frac{m\alpha+(m+1)\alpha}{2\alpha}}.$$

Nun ist aber offenbar

$$ae^{\frac{m\alpha}{\alpha}} : ae^{\frac{m\alpha+(m+1)\alpha}{2\alpha}} = ae^{\frac{m\alpha+(m+1)\alpha}{2\alpha}} : ae^{\frac{(m+1)\alpha}{\alpha}},$$

und die gesuchte Ordinate wird also gefunden, wenn man zwischen den Ordinaten der Abscissen $m\alpha$ und $(m+1)\alpha$ die mittlere Proportionale sucht.

Auf diese Art kann man also eine Reihe neuer Ordinaten einschalten, und durch fortgesetztes Halbiren der auf AB genommenen Theile nach dem gezeigten Verfahren so viele neue Reihen, als zur genauen Zeichnung der gesuchten Curve nöthig sind.

Jeder, der mit der Theorie der Curven vertraut ist, wird leicht bemerken, daß die Curve MN keine andere ist, als die bekannte logarithmische Linie. Ist aber diese Curve einmahl beschrieben, so ergibt sich die Construction der Kettenlinie leicht. Man nehme nämlich willkührlich $Cp = Cp'$, und errichte durch p und p' auf AB Perpendikel. Auf diesen Perpendikeln nehme man $pP = p'P' = \frac{1}{2}(pq + p'q')$; so sind P und P' Punkte der Kettenlinie. Denn sey $Cp = x$, so ist $Cp' = -x$; also

$$pq = ae^{\frac{x}{a}},\ p'q' = ae^{-\frac{x}{a}},$$

$$\tfrac{1}{2}(pq + p'q') = \tfrac{1}{2}(ae^{\frac{x}{a}} + ae^{-\frac{x}{a}}),$$

und demnach

$$pP = p'P' = \tfrac{1}{2}(ae^{\frac{x}{a}} + ae^{-\frac{x}{a}})$$
$$= \tfrac{1}{2}a(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}),$$

wie es nach dem Obigen bey der Kettenlinie seyn muß.

§. 185.

Aufgabe. Den Schwerpunkt eines Bogens KP (Fig. 103.) der Kettenlinie zu finden.

Auflösung. Die Coordinaten des Schwerpunktes seyen, wie gewöhnlich, X, Y; so ist bekanntlich nach §. 133.:

$$X = \frac{\int x\sqrt{dx^2 + dy^2}}{s},$$

$$Y = \frac{\int y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{s},$$

wo s die Länge des Bogens KP bezeichnet, oder, da bekanntlich $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ ist:

$$X = \frac{\int x\,ds}{s},\ Y = \frac{\int y\,ds}{s}.$$

Aber nach der bekannten Reductionsformel der Integrale:

$$\int x\,ds = x\int ds - \int dx \int ds$$
$$= xs - \int s\,dx.$$

Nach §. 177. ist

$$s = \sqrt{2ax + x^2}.$$

Also

$$sdx = dx\sqrt{2ax + x^2},$$

und folglich nach §. 116.:

$$\int s\,dx = \tfrac{1}{2}(a+x)\sqrt{2ax+x^2} - \tfrac{1}{2}a^2 \operatorname{Logn} \frac{a+x+\sqrt{2ax+x^2}}{a}$$

$$= \tfrac{1}{2}(a+x)s - \tfrac{1}{2}ay,$$

$$\int x\,ds = xs - \tfrac{1}{2}as - \tfrac{1}{2}xs + \tfrac{1}{2}ay$$

$$= \tfrac{1}{2}xs - \tfrac{1}{2}as + \tfrac{1}{2}ay$$

$$= \frac{(x-a)s+ay}{2},$$

$$X = \frac{(x-a)s+ay}{2s};$$

$$\int y\,ds = y\int ds - \int dy \int ds$$

$$= ys - \int s\,dy,$$

$$dy = \frac{a\,dx}{\sqrt{2ax+x^2}},\quad s = \sqrt{2ax+x^2},$$

$$s\,dy = a\,dx,\quad \int s\,dy = ax,$$

$$\int y\,ds = ys - ax,$$

und folglich

$$Y = \frac{ys-ax}{s};$$

so daß man also folgende Ausdrücke für die Coordinaten des Schwerpunktes hat:

$$X = \frac{(x-a)s+ay}{2s},\quad Y = \frac{ys-ax}{s},$$

wo s der Bogen KP und $= \sqrt{2ax+x^2}$ ist.

Leibnitz lehrt a. a. O. S. 279. den Schwerpunkt des Bogens KP auf folgende Art durch Construction finden. Man suche in Fig. 103. zu KD, PQ, CK die vierte Proportionale, addire zu dieser die Linie CQ, und nehme die Hälfte der Summe, welche $= CG$ sey. Sodann errichte man durch G auf die Axe der Abscissen ein Perpendikel, und ziehe durch W, wo die Tangente durch P das Perpendikel VD schneidet, eine Parallele mit der Axe; so ist der Punkt g, wo das durch G errichtete Perpendikel von der Parallele geschnitten wird, der Schwerpunkt des Bogens KP.

Der Beweis folgt ohne Schwierigkeit aus den obigen Formeln. Es ist aus dem Vorhergehenden bekannt, daß

$$KD = s,\ PQ = y,\ CK = a.$$

Die vierte Proportionale zu KD, PQ, CK ist

$$= \frac{PQ \cdot CK}{KD} = \frac{ay}{s}, \text{ und}$$

$$\frac{ay}{s} + CQ = \frac{ay}{s} + a + x = \frac{ay + as + sx}{s}.$$

Also $CG = \dfrac{ay + as + sx}{2s}$,

und

$$CG - CK = \frac{ay + as + sx}{2s} - a$$

$$= \frac{ay + as + sx - 2as}{2s}$$

$$= \frac{(x - a)s + ay}{2s} = KG.$$

Also $KG = X$, wie es seyn muß.

Ferner ist nach §. 180.:

$$KW = \frac{y\sqrt{2ax + x^2} - ax}{\sqrt{2ax + x^2}},$$

$$\text{d. i. } KW = \frac{ys - ax}{s} = Y,$$

und demnach auch $Gg = Y$. Also offenbar g der Schwerpunkt des Bogens KP.

§. 186.

Lehrsatz. Der Schwerpunkt mehrerer auf irgend eine Art unter einander verbundener schwerer Körper liegt am höchsten oder am niedrigsten, wenn diese Körper unter einander im Gleichgewichte sind.

Beweis. Man denke sich die Gewichte dieser Körper in ihren Schwerpunkten vereinigt, so daß man sie nun als bloße schwere Punkte betrachten kann, und bezeichne ihre Gewichte durch P, P', P'', P''' u. s. w. Von allen Schwerpunkten fälle man Perpendikel x, x', x'', x''' u. s. w. auf irgend eine horizontale Ebene, und bezeichne durch Σ die Summe der Kräfte P, P', P'', P''' u. s. w. Die Entfernung des Schwerpunktes aller Kräfte von der angenommenen Horizontalebene sey X, so ist bekanntlich nach §. 86.:

$$Px + P'x' + P''x'' + P'''x''' + \ldots = \Sigma X,$$

für jede Verbindung der gegebenen Körper.

Soll nun die Größe

$$Px + P'x' + P''x'' + P'''x''' + \ldots$$

ein $\left\{\begin{matrix}\text{Maximum}\\ \text{Minimum}\end{matrix}\right\}$ seyn, für eine gewisse Lage der Körper unter einander, oder für gewisse Werthe der x, x', x'', x''', u. s. w.; so muß sie für alle noch so kleine Veränderungen dieser Werthe einen $\left\{\begin{matrix}\text{kleinern}\\ \text{größern}\end{matrix}\right\}$ Werth erhalten. Man theile nun dem Systeme eine unendlich kleine Bewegung mit, und bezeichne die Veränderungen der x, x', x'' u. s. w. durch p, p', p'' u. s. w.; so erhält die obige Summe folgenden Werth:

$$P(x + p) + P'(x' + p') + P''(x'' + p'') + \ldots,$$

oder

$$Px + P'x' + P''x'' + P'''x''' + \ldots$$
$$+ Pp + P'p' + P''p'' + P'''p''' + \ldots.$$

Wir wollen nun annehmen, es entspreche die ganze Veränderung

$$Pp + P'p' + P''p'' + P'''p''' + \ldots$$

einem Wachsthume, und sey also positiv. Gibt man nun dem Systeme ganz die entgegengesetzte unendlich kleine Bewegung, so werden die unter den Veränderungen p, p', p'', p''' u. s. w., welche vorher positiv waren, nun offenbar negativ, und umgekehrt; folglich auch die unter den Gliedern Pp, $P'p'$, $P''p''$, $P'''p'''$ u. s. w., welche vorher positiv waren, nun negativ, und umgekehrt; so daß also die ganze Veränderung

$$Pp + P'p' + P''p'' + P'''p''' + \ldots$$

nun negativ ist und einer Abnahme entspricht. Das Umgekehrte würde statt finden, wenn man annähme, die Veränderung

$$Pp + P'p' + P''p'' + P'''p''' + \ldots$$

entspreche einer Abnahme oder sey negativ. Hieraus erhellet, daß, so lange diese Veränderung noch einen wirklichen reellen Werth behält, weder ein Maximum noch ein Minimum der Größe

$$Px + P'x' + P''x'' + P'''x''' + \ldots$$

statt finden kann, und daß demnach das Maximum oder das Minimum nur eintreten kann, wenn die Größe

$$Pp + P'p' + P''p'' + P'''p''' + \ldots = 0$$

ist. Nun erhellet aber leicht, daß p, p', p'', p''' u. s. w. nichts anderes als die auf den Richtungen der Kräfte genommenen virtuellen Geschwindigkeiten der Schwerpunkte der gegebenen Körper sind, und diese Körper sind daher nach dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten (m. s. das sechste Kapitel) im Gleichgewichte, wenn

$$Pp + P'p' + P''p'' + P'''p''' + \ldots = 0$$

ist, so daß also das Maximum oder das Minimum der Größe

$$Px + P'x' + P''x'' + P'''x''' + \ldots$$

eintritt, wenn die gegebenen Körper im Gleichgewichte sind.

Für die letztere Größe kann man aber nach dem Obigen auch ΣX setzen, welche Größe daher im Falle des Gleichgewichts ein Maximum oder ein Minimum wird. Ist aber ΣX ein Maximum oder ein Minimum, so ist es nothwendig auch X, die Entfernung des Schwerpunktes von der angenommenen Horizontalebene; d. i. **Der Schwerpunkt der gegebenen Körper liegt am höchsten oder am tiefsten, wenn sie im Gleichgewichte sind.**

Zusatz. Man denke sich jetzt eine an zwey Punkten befestigte völlig biegsame schwere Linie. Dieser Linie kann man sehr verschiedene Lagen geben; die in ihr wirkenden Kräfte werden aber offenbar nur dann im Gleichgewichte seyn, wenn man sie ihrer freyen Wirkung überläßt, bis die ganze Linie zur Ruhe gekommen ist. Dann aber hat sie die Gestalt einer Kettenlinie angenommen, **so daß also offenbar die Ketten-**

linie unter allen Linien, die zwischen denselben Endpunkten einerley Länge haben, diejenige ist, deren Schwerpunkt am tiefsten liegt.

§. 187.

Aus dem vorhergehenden Paragraphen läßt sich noch eine merkwürdige Eigenschaft der Kettenlinie ableiten. Zwischen zwey Punkten A und B seyen Curven verschiedener Art, aber alle von gleicher Länge, $= L$, beschrieben. Man nehme die Linie AB horizontal an, und bezeichne die Abstände der Schwerpunkte dieser Curven von der Linie AB überhaupt durch X. Dreht man nun die Curven um die Linie AB, so ist der Weg des Schwerpunktes einer jeden dieser Linien $= 2X\pi$, und nach Guldin's Regel (m. s. das zwölfte Kapitel am Ende) folglich der Inhalt der durch die Umdrehung erzeugten Fläche $= 2LX\pi$. Da nun nach dem vorhergehenden Paragraphen der Schwerpunkt der Catenaria unter den Schwerpunkten aller gleich langen Curven am tiefsten liegt; so ist für sie X, und folglich, da $2L\pi$ constant ist, auch $2LX\pi$ am größten, so daß **also bey der Drehung um AB unter allen gleich langen Curven zwischen A und B die Catenaria die größte Fläche beschreibt.**

Noch fügen wir hier folgende Bemerkung bey. Man denke sich ein Gewölbe, das aus sehr kleinen sich berührenden Kugeln oder Körpern überhaupt, eigentlich bloß schweren Punkten, besteht, im Gleichgewichte, und die Mittelpunkte dieser Kugeln durch gerade Linien verbunden, welche zusammen, da die Kugeln sehr klein angenommen werden, eine gewisse Curve bilden. Nun stelle man sich vor, daß mit einem Mahle die Richtung der Schwere aller dieser Kugeln in's Entgegengesetzte übergehe; so werden diese Kugeln, wenn man sie sich nur, damit sie der Wirkung der Schwere nicht folgen können, durch Fäden oder auf irgend eine andere Art in ihren Mittelpunkten mit einander verbunden denkt, wodurch jetzt die Wirkung ihres gegenseitigen Drucks im Gewölbe vertreten wird, augenscheinlich auch jetzt noch im Gleichgewichte seyn, weil ofsenbar im Gleichgewichte sich befindende Kräfte im Gleichgewichte bleiben müssen, wenn jede Kraft zwar an ihrem ursprünglichen Angriffspunkte, aber nach direct entgegengesetzter Richtung angebracht wird. Daher ist die Curve, welche durch die Mittelpunkte der Kugeln geht, offenbar eine Kettenlinie, und folglich auch die Linie, in welcher die Kugeln im Gewölbe im Gleichgewichte waren. Ein aus sehr kleinen Kugeln oder Körpern überhaupt bestehendes, im Gleichgewichte sich befindendes Gewölbe muß also die Form einer Kettenlinie haben, und die Aufhängepunkte derselben sind die Widerlagen oder Stützpfeiler des Gewölbes.

Mehr hierüber und über ähnliche Gegenstände gehört in eine ausführliche Theorie der Gewölbe, die unter den Anwendungen der reinen Statik vorgetragen wird.

§. 188.

Aufgabe. Die Coordinaten X, Y des Schwerpunktes irgend eines Bogens wie PP'' (Fig. 103.) zu finden.

Auflösung. Die Coordinaten der Punkte P, P'' seyen x, y; x', y', die Länge der Bögen KP und KP'' aber s und s'; so ist nach bekannten Sätzen vom Schwerpunkte und nach §. 185.:

$$s \cdot \frac{xs - as + ay}{2s} + X(s'-s) = s' \cdot \frac{x's' - as' + ay'}{2s'},$$

$$s \cdot \frac{ys - ax}{s} + Y(s'-s) = s' \cdot \frac{y's' - ax'}{s'},$$

$$X(s'-s) = \frac{x's' - as' + ay' - xs + as - ay}{2},$$

$$Y(s'-s) = y's' - ax' - ys + ax,$$

$$X = \frac{x's' - xs + a(y'-y) - a(s'-s)}{2(s'-s)},$$

$$Y = \frac{y's' - ys - a(x'-x)}{s'-s}.$$

§. 189.

Aufgabe. Die Coordinaten des Durchschnittspunktes zweyer Tangenten der Kettenlinie zu finden, wenn die Coordinaten der Berührungspunkte $x, y;\ x', y'$ sind.

Auflösung. Die Gleichungen der beiden Tangenten sind nach §. 174.:

$$z = \frac{au}{\sqrt{2ax + x^2}} + \frac{y\sqrt{2ax + x^2} - ax}{\sqrt{2ax + x^2}},$$

$$z = \frac{au}{\sqrt{2ax' + x'^2}} + \frac{y'\sqrt{2ax' + x'^2} - ax'}{\sqrt{2ax' + x'^2}};$$

oder

$$z = \frac{a}{s}u + \frac{ys - ax}{s},$$

$$z = \frac{a}{s'}u + \frac{y's' - ax'}{s'}.$$

Für die Abscisse des Durchschnittspunktes erhält man, wenn man diese beiden Gleichungen von einander abzieht:

$$\begin{aligned}
0 &= \left(\frac{a}{s} - \frac{a}{s'}\right)u + \frac{ys - ax}{s} - \frac{y's' - ax'}{s'} \\
&= a(s' - s)u + s'(ys - ax) - s(y's' - ax'), \\
a(s' - s)u &= s(y's' - ax') - s'(ys - ax) \\
&= ss'y' - asx' - ss'y + as'x \\
&= ss'(y' - y) - a(sx' - s'x), \\
u &= \frac{ss'(y' - y) - a(sx' - s'x)}{a(s' - s)}.
\end{aligned}$$

Durch Multiplication mit s und s' erhält man aus den beiden obigen Gleichungen:

$$sz = au + ys - ax,$$
$$s'z = au + y's' - ax',$$

und also durch Subtraction:

$$(s' - s)z = y's' - ys - ax' + ax,$$

$$z = \frac{y's' - ys - a(x' - x)}{s' - s}.$$

Hieraus, in Verbindung mit dem vorhergehenden Paragraphen, erhellet, daß die Ordinate des Schwerpunktes eines jeden Bogens der Kettenlinie immer der Ordinate des Durchschnittspunktes der durch die beiden Endpunkte des Bogens gezogenen Tangenten gleich ist, und daß also der Schwerpunkt eines jeden Bogens in der durch den Durchschnittspunkt dieser beiden Tangenten mit der verticalen Axe gezogenen Parallele liegt.

§. 190.

Aufgabe. Den Schwerpunkt des Stücks KPQ (Fig. 103.) zu finden.

Auflösung. Die Coordinaten des gesuchten Schwerpunktes seyen X, Y; so ist, wenn x, y die Coordinaten des Punktes P sind, nach §. 110.:

$$X = \frac{\int xy\,dx}{\int y\,dx}, \quad Y = \frac{\int y^2\,dx}{2\int y\,dx}.$$

Nun ist nach §. 179. und §. 181.:

$$\int y\,dx = (a + x)y - as,$$

$$\int y^2\,dx = 2a^2x + (a + x)y^2 - 2ays,$$

und

$$\begin{aligned}\int xy\,dx &= x\int y\,dx - \int dx \int y\,dx\\ &= x\int y\,dx - \int(ay\,dx + xy\,dx - as\,dx)\\ &= x\int y\,dx - a\int y\,dx - \int xy\,dx + a\int s\,dx,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2\int xy\,dx &= x\int y\,dx - a\int y\,dx + a\int s\,dx\\ &= \begin{cases} \quad axy + x^2y - axs\\ -a^2y - axy + a^2s\\ +\tfrac{1}{2}a^2s + \tfrac{1}{2}axs - \tfrac{1}{2}a^2y \ (\text{§. } 185.)\end{cases}\\ &= x^2y - \tfrac{1}{2}axs - \tfrac{3}{2}a^2y + \tfrac{3}{2}a^2s,\end{aligned}$$

$$\int xy\,dx = \tfrac{1}{2}x^2y - \tfrac{1}{4}axs - \tfrac{3}{4}a^2y + \tfrac{3}{4}a^2s;$$

und folglich

$$X = \frac{2x^2y - axs - 3a^2y + 3a^2s}{4(ay + xy - as)},$$

$$Y = \frac{2a^2x + (a + x)y^2 - 2ays}{2(ay + xy - as)}.$$

§. 191.

Aufgabe. Die Coordinaten des Schwerpunktes der Fläche $CKPT$ (Fig. 103.) zu finden.

Auflösung. Die gesuchten Coordinaten von C an genommen seyen X, Y; so ist nach bekannten Sätzen aus dem Vorhergehenden, (§. 179.), (§. 190.):

$$X.as + \left\{a + \frac{2x^2y - axs - 3a^2y + 3a^2s}{4(ay + xy - as)}\right\}(ay + xy - as)$$
$$= \tfrac{1}{2}(a + x)(a + x)y = \tfrac{1}{2}(a + x)^2y,$$
$$X.as + a^2y + axy - a^2s + \tfrac{1}{2}x^2y - \tfrac{1}{4}axs - \tfrac{3}{4}a^2y + \tfrac{3}{4}a^2s$$
$$= \tfrac{1}{2}a^2y + axy + \tfrac{1}{2}x^2y,$$
$$X.as = \tfrac{1}{4}a^2y + \tfrac{1}{4}a^2s + \tfrac{1}{4}axs.$$

Also

$$X = \frac{ay + as + xs}{4s},$$

so daß also nach §. 185. $X = \frac{1}{2}CG$ (Fig. 103.) ist.

Ferner ist

$$Y.as + \left(\frac{2a^2x + (a + x)y^2 - 2ays}{2(ay + xy - as)}\right)(ay + xy - as)$$
$$= \tfrac{1}{2}y.(a + x)y = \tfrac{1}{2}(a + x)y^2,$$
$$Y.as + a^2x + \tfrac{1}{2}(a + x)y^2 - ays = \tfrac{1}{2}(a + x)y^2,$$
$$Y.as + a^2x - ays = 0,$$
$$Y = \frac{ys - ax}{s},$$

so daß also nach §. 185. $Y = gG$ (Fig. 103.) ist, gleich der Ordinate des Schwerpunktes des Bogens KP.

Man findet also den Schwerpunkt von $CKPT$, wenn man CG halbirt, durch den Halbirungspunkt ein Perpendikel auf

CG errichtet, und dieses Perpendikel $= gG$ oder $= WK$ (Fig. 103.) macht.

§. 192.

Aufgabe. Den Schwerpunkt des durch die Umdrehung von KPQ um KQ erzeugten Körpers zu finden.

Auflösung. Der Abstand des in KQ liegenden Schwerpunktes von dem Punkte K sey $= X$; so ist bekanntlich nach §. 123.:

$$X = \frac{\int xy^2\,dx}{\int y^2\,dx}.$$

Nach §. 181. ist

$$\int y^2\,dx = 2a^2x + (a+x)y^2 - 2ays,$$

$$\int xy^2\,dx = x\int y^2\,dx - \int dx \int y^2\,dx$$

$$= \begin{cases} 2a^2x^2 + (a+x)xy^2 - 2axys \\ -\int(2a^2x\,dx + ay^2\,dx + xy^2\,dx - 2ays\,dx) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2a^2x^2 + axy^2 + x^2y^2 - 2axys \\ -a^2x^2 - a\int y^2\,dx - \int xy^2\,dx + 2a\int ys\,dx, \end{cases}$$

$$2\int xy^2 dx = \begin{cases} a^2x^2 + axy^2 + x^2y^2 - 2axys \\ -a\int y^2\,dx + 2a\int ys\,dx, \end{cases}$$

$$\int ys\,dx = y\int s\,dx - \int dy \int s\,dx,$$

$$y\int s\,dx = \tfrac{1}{2}ays + \tfrac{1}{2}xys - \tfrac{1}{2}ay^2, \text{ (§. 185.)}$$

$$\int dy \int s\,dx = \int(\tfrac{1}{2}as\,dy + \tfrac{1}{2}xs\,dy - \tfrac{1}{2}ay\,dy),$$

$$dy = \frac{a\,dx}{\sqrt{2ax+x^2}} = \frac{a\,dx}{s},$$

$$s\,dy = a\,dx,$$

$$\int dy \int s\,dx = \int(\tfrac{1}{2}a^2\,dx + \tfrac{1}{2}ax\,dx - \tfrac{1}{2}ay\,dy)$$

$$= \tfrac{1}{2}a^2x + \tfrac{1}{4}ax^2 - \tfrac{1}{4}ay^2,$$

$$\int ys\,dx = \begin{cases} \tfrac{1}{2}ays + \tfrac{1}{2}xys - \tfrac{1}{2}ay^2 \\ -\tfrac{1}{2}a^2x - \tfrac{1}{4}ax^2 + \tfrac{1}{4}ay^2 \end{cases}$$

$$= \tfrac{1}{2}ays + \tfrac{1}{2}xys - \tfrac{1}{4}ay^2 - \tfrac{1}{2}a^2x - \tfrac{1}{4}dx^2,$$

und demnach

$$2\int xy^2dx = \begin{cases} a^2x^2 + axy^2 + x^2y^2 - 2axys - 2a^3x - a^2y^2 + 2a^2ys \\ -\tfrac{1}{2}a^2x^2 - axy^2 \qquad\qquad + axys - a^3x - \tfrac{1}{2}a^2y^2 + a^2ys \end{cases}$$

$$= \tfrac{1}{2}a^2x^2 + x^2y^2 - axys - 3a^3x - \tfrac{3}{2}a^2y^2 + 3a^2ys,$$

$$\int xy^2dx = \frac{a^2x^2 + 2x^2y^2 - 2axys - 6a^3x - 3a^2y^2 + 6a^2y^2s}{4}.$$

Also

$$X = \frac{a^2x^2 + 2x^2y^2 - 2axys - 6a^3x - 3a^2y^2 + 6a^2y^2s}{4\left\{2a^2x + (a+x)y^2 - 2ays\right\}}.$$

§. 193.

Aufgabe. Den Schwerpunkt der durch die Umdrehung von KP um KQ (Fig. 103.) erzeugten Oberfläche zu finden.

Auflösung. Ist wieder X die Entfernung des in KQ liegenden gesuchten Schwerpunktes von dem Punkte K; so ist, wenn x, y die Coordinaten des Punktes P sind, nach §. 141.:

$$X = \frac{\int xy\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\int y\sqrt{dx^2 + dy^2}},$$

$$\begin{aligned} \int xy\sqrt{dx^2 + dy^2} &= \int xy\,ds \\ &= xy\int ds - \int d\,.\,xy\int ds \\ &= xys - \int(ys\,dx + xs\,dy) \\ &= xys - \int ys\,dx - \int xs\,dy, \end{aligned}$$

$$dy = \frac{a\,dx}{\sqrt{2ax + x^2}} = \frac{a\,dx}{s},$$

$$s\,dy = a\,dx, \quad xs\,dy = ax\,dx,$$

$$\int xs\,dy = a\int x\,dx = \tfrac{1}{2}ax^2.$$

Nach §. 192. ist

$$\int ys\,dx = \tfrac{1}{2}ays + \tfrac{1}{2}xys - \tfrac{1}{4}ay^2 - \tfrac{1}{2}a^2x - \tfrac{1}{4}ax^2.$$

Also

$$\begin{aligned} \int xy\,ds &= xys - \tfrac{1}{2}ays - \tfrac{1}{2}xys + \tfrac{1}{4}ay^2 + \tfrac{1}{2}a^2x + \tfrac{1}{4}ax^2 - \tfrac{1}{2}ax^2 \\ &= \tfrac{1}{2}xys - \tfrac{1}{2}ays + \tfrac{1}{4}ay^2 + \tfrac{1}{2}a^2x - \tfrac{1}{4}ax^2, \end{aligned}$$

$$\int y\sqrt{dx^2 + dy^2} = \int y\,ds = ys - ax. \quad (\S.\ 185.)$$

Also

$$X = \frac{2xys - 2ays + ay^2 + 2a^2x - ax^2}{4(ys - ax)}.$$

§. 194.

Wir fügen hier noch folgende Bemerkung über die gemeine Kettenlinie bey. Es sey in Fig. 105. G der Schwerpunkt des Bogens PKP' der Kettenlinie, so ist bekanntlich nach §. 185.:

$$KG = \frac{(x-a)s + ay}{2s}$$

$$= \frac{(x-a)\sqrt{2ax + x^2} + ay}{2\sqrt{2ax + x^2}}.$$

KP'' ist bekanntlich ein Bogen einer Hyperbel, und nach §. 177.:

$$QP'' = \sqrt{2ax + x^2}.$$

Also

$$KG \times GL = \frac{(x-a)\sqrt{2ax + x^2} + ay}{2}$$

$$= \tfrac{1}{2}(x-a)\sqrt{2ax + x^2} + \tfrac{1}{2}a^2 \operatorname{Logn} \frac{a + x + \sqrt{2ax + x^2}}{a}.$$

Nach §. 116. ist aber der Inhalt der hyperbolischen Fläche KQP''

$$= \tfrac{1}{2}(x+a)\sqrt{2ax + x^2} - \tfrac{1}{2}a^2 \operatorname{Logn} \frac{a + x + \sqrt{2ax + x^2}}{a},$$

und demnach das hyperbolische Stück $KP''M$

$$= x\sqrt{2ax + x^2} - \tfrac{1}{2}(x+a)\sqrt{2ax + x^2} + \tfrac{1}{2}a^2 \operatorname{Logn} \frac{a + x + \sqrt{2ax + x^2}}{a}$$

$$= \tfrac{1}{2}(x-a)\sqrt{2ax + x^2} + \tfrac{1}{2}a^2 \operatorname{Logn} \frac{a + x + \sqrt{2ax + x^2}}{a},$$

so daß also das hyperbolische Stück $KP''M$ dem Rechtecke $KGLM$ gleich ist, und sich ersteres also geometrisch quadriren läßt, da man das Rechteck $KGLM$ nach §. 185. immer leicht verzeichnen kann.

II.

Von der Curve, nach welcher ein völlig biegsames Seil gekrümmt ist, an welchem in allen Punkten willkührliche Kräfte wirken.

§. 195.

Bis jetzt haben wir nur die sogenannte gemeine Kettenlinie betrachtet, bey welcher gleiche Theile auch gleiches Gewicht haben; es ist aber schon oben erinnert worden, daß Jacob Bernoulli die Untersuchungen auch auf ungleichförmig schwere Ketten ausgedehnt hat, weil, wie Montucla (Histoire des Mathématiques, T. II. p. 470.) zum Lobe der Mathematiker sagt: „c'est la coutume des Géo„mètres de l'éléver de difficultés en difficultés, et même „de l'en former sans cesse de nouvelles, pour avoir le plai„sir de les surmonter.„ So wollen denn auch wir, uns zu noch größerer Allgemeinheit als Jacob Bernoulli erhebend, jetzt untersuchen, welches überhaupt die Gestalt eines vollkommen biegsamen Fadens ist, die er, wenn er in allen seinen Punkten von gewissen, nach willkührlichen Richtungen wirkenden, Kräften gezogen wird, im Falle des Gleichgewichts annimmt. Es ist klar, daß diese Curve im allgemeinen von doppelter Krümmung seyn wird, so daß wir also keinen ganz leichten Rechnungen entgegensehen.

§. 196.

M und M' in Fig. 102. seyen die beiden äußersten Punkte des Seils. M nehme man als Anfang der Coordinaten an, und lege also durch M drey auf einander senkrechte Axen, auf welche die zu bestimmende Curve bezogen wird. Die Kräfte, welche an dem Seile wirken, und die Winkel ihrer Richtungen müssen als Functionen von x, y, z gegeben seyn. Die Spannungen der beiden äußersten Enden des Seils werden als gegeben, und wie zwey Kräfte betrachtet, die nach entgegengesetzten Richtungen an den beiden Endpunkten nach bestimmten Richtungen wirken. Sie sollen durch S und Σ, und die von ihren Richtungen mit den angenommenen Axen eingeschlossenen Winkel durch φ, ψ, χ und φ', ψ', χ' bezeichnet werden.

Sey jetzt Q irgend ein Punkt der zu bestimmenden Curve, dessen Coordinaten wir durch x, y, z bezeichnen wollen. Der Bogen MQ sey $= s$. Man lasse nun die Coordinaten x, y, z sich um die unendlich kleinen dx, dy, dz verändern; so wird sich der Bogen s um ds verändern, wo ds so klein seyn wird, daß man es als eine gerade Linie betrachten kann. Denkt man sich jetzt durch den Punkt Q drey gerade Linien mit den drey angenommenen Axen parallel; so wird leicht erhellen, daß die Cosinusse der drey Winkel, welche das Element ds, oder die mit demselben übereinstimmende Tangente QE mit diesen drey Linien oder den drey Axen einschließt, indem man diese Winkel unsern frühern Bestimmungen gemäß nimmt, durch

$$\frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds}, \quad \frac{dz}{ds}$$

ausgedrückt werden. Bezeichnen wir nun ferner die Spannung des Elements ds durch T; so ist klar, daß, indem man T von Q nach M hin gerichtet sich vorstellt, $-T$ die Aequipollente aller von M bis Q auf das Seil wirkenden Kräfte ist. Zerlegt man aber alle von M bis Q auf das Seil wirkende Kräfte so wie auch die Kraft $-T$ in drey mit den Coordinatenaxen parallele Kräfte; so ist klar, daß jede der drey aus $-T$ entsprungenen Kräfte der Aequipollenten der aus den Kräften von M bis Q entsprungenen ihr parallelen Kräfte gleich ist. Man denke sich nämlich, um sich hiervon zu überzeugen, die Resultirende jeder Reihe paralleler Kräfte von M bis Q, und setze die drey erhaltenen Kräfte in Eine zusammen, welche die Resultirende der ursprünglichen Kräfte von M bis Q, und folglich der Kraft $-T$ gleich und gerade entgegengesetzt ist. Daher müssen nun auch, indem sich eine Kraft offenbar nur auf eine Art in Kräfte nach drey gegebenen auf einander senkrechten Richtungen zerlegen läßt, die den drey gegebenen Axen parallelen Zusammensetzenden der ersten Kraft den drey denselden Axen parallelen Zusammensetzenden der zweyten Kraft, (nämlich $-T$,) respective gleich seyn.

Seyen nun die Zusammensetzenden der in dem Punkte Q wirkenden ursprünglichen Kraft X, Y, Z, als Functionen von s betrachtet. X, Y, Z sind gegeben, da die in Q wirkende ursprüngliche Kraft nach Größe und Richtung als Function von x, y, z, oder auch als Function von s gegeben ist. In dem letztern Falle, den wir für jetzt annehmen wollen, sind also auch X, Y, Z als Functionen von s leicht nach dem Satze vom Parallelepipedon der Kräfte zu finden. Da man nun in der Ausdehnung des Elements ds die in Q wirkende ursprüngliche Kraft als constant betrachten kann, weil ds unendlich klein ist; so sind auch X, Y, Z in der Ausdehnung dieses Elements constant, und folglich ist die Summe dieser Kräfte in der ganzen Ausdehnung von ds:

$$Xds,\ Yds,\ Zds.$$

Demnach also, nach dem in §. 108. bewiesenen Satze aus der Integralrechnung, die Summen aller die ursprünglichen Kräfte zusammensetzenden Kräfte in dem ganzen Bogen MQ:

$$\int Xds,\ \int Yds,\ \int Zds,$$

wo jedes Integral von $s = 0$ bis $s = MQ$ zu nehmen ist.

Nun sind die zusammensetzenden Kräfte der Kräfte S in M und $-T$ in Q nach §. 22. respective:

$$S\text{Cos}\,\varphi,\ S\text{Cos}\,\psi,\ S\text{Cos}\,\chi,$$

$$\text{und } T.\frac{dx}{ds},\ T.\frac{dy}{ds},\ T.\frac{dz}{ds},$$

und folglich, da nach §. 35. die Resultirende paralleler Kräfte immer der Summe dieser Kräfte gleich ist:

$$-T.\frac{dx}{ds} = S\text{Cos}\,\varphi + \int Xds,$$

$$-T.\frac{dy}{ds} = S\text{Cos}\,\psi + \int Yds,$$

$$-T.\frac{dz}{ds} = S\text{Cos}\,\chi + \int Zds.$$

Folglich

$$\frac{-T.\frac{dz}{ds}}{-T.\frac{dx}{ds}} = \frac{S\,\mathrm{Cos}\,\chi + \int Z\,ds}{S\,\mathrm{Cos}\,\varphi + \int X\,ds},$$

$$\frac{-T.\frac{dz}{ds}}{-T.\frac{dy}{ds}} = \frac{S\,\mathrm{Cos}\,\chi + \int Z\,ds}{S\,\mathrm{Cos}\,\psi + \int Y\,ds},$$

d. i.

$$\frac{dz}{dx} = \frac{S\,\mathrm{Cos}\,\chi + \int Z\,ds}{S\,\mathrm{Cos}\,\varphi + \int X\,ds}, \quad \frac{dz}{dy} = \frac{S\,\mathrm{Cos}\,\chi + \int Z\,ds}{S\,\mathrm{Cos}\,\psi + \int Y\,ds},$$

welches die beiden Gleichungen unsrer Curve sind.

Da nach §. 25. immer

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1$$

ist; so erhält man durch Quadrirung unsrer drey obigen Gleichungen für die Spannung T in dem Punkte Q leicht folgenden Ausdruck:

$$T = \sqrt{(S\,\mathrm{Cos}\,\varphi + \int X\,ds)^2 + (S\,\mathrm{Cos}\,\psi + \int Y\,ds)^2 + (S\,\mathrm{Cos}\,\chi + \int Z\,ds)^2}.$$

Wir haben bisher vorausgesetzt, daß X, Y, Z als Functionen von s gegeben seyen, welches z. B. der Fall ist, wenn die Dicke der Kette nach einem gegebenen von der Länge abhängigen Gesetze sich verändert, wohin auch der in I. ausführlich betrachtete Fall gleichförmiger Dicke gehört. Um aber auch Gleichungen zu erhalten, in welchen s nicht vorkommt, nehme man die Gleichungen:

$$-T.\frac{dx}{ds} = S\,\mathrm{Cos}\,\varphi + \int X\,ds,$$

$$-T.\frac{dy}{ds} = S\,\mathrm{Cos}\,\psi + \int Y\,ds,$$

$$-T.\frac{dz}{ds} = S\,\mathrm{Cos}\,\chi + \int Z\,ds,$$

wieder vor, und differenziire sie, um die Integrale wegzuschaffen, in Beziehung auf s; so erhält man:

$$-\frac{dT}{ds}\cdot\frac{dx}{ds}-T\cdot\frac{d^2x}{ds^2}=X,$$

$$-\frac{dT}{ds}\cdot\frac{dy}{ds}-T\cdot\frac{d^2y}{ds^2}=Y,$$

$$-\frac{dT}{ds}\cdot\frac{dz}{ds}-T\cdot\frac{d^2z}{ds^2}=Z.$$

Folglich auch, wenn diese Gleichungen respective mit $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ multiplicirt werden:

$$-\frac{dT}{ds}\cdot\left(\frac{dx}{ds}\right)^2-T\cdot\frac{d^2x}{ds^2}\cdot\frac{dx}{ds}=X\frac{dx}{ds},$$

$$-\frac{dT}{ds}\cdot\left(\frac{dy}{ds}\right)^2-T\cdot\frac{d^2y}{ds^2}\cdot\frac{dy}{ds}=Y\frac{dy}{ds},$$

$$-\frac{dT}{ds}\cdot\left(\frac{dz}{ds}\right)^2-T\cdot\frac{d^2z}{ds^2}\cdot\frac{dz}{ds}=Z\frac{dz}{ds}.$$

Also durch Addition:

$$\left.\begin{array}{l}-\frac{dT}{ds}\left\{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2\right\}\\ -T\left\{\frac{d^2x}{ds^2}\cdot\frac{dx}{ds}+\frac{d^2y}{ds^2}\cdot\frac{dy}{ds}+\frac{d^2z}{ds^2}\cdot\frac{dz}{ds}\right\}\end{array}\right\}=X\frac{dx}{ds}+Y\frac{dy}{ds}+Z\frac{dz}{ds}$$

Aber nach §. 25.:

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2=1,$$

und, wenn man differenziirt:

$$2\cdot\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d^2x}{ds^2}+2\cdot\frac{dy}{ds}\cdot\frac{d^2y}{ds^2}+2\cdot\frac{dz}{ds}\cdot\frac{d^2z}{ds^2}=0,$$

$$\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{dy}{ds}\cdot\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{dz}{ds}\cdot\frac{d^2z}{ds^2}=0.$$

Also

$$-\frac{dT}{ds}=X\frac{dx}{ds}+Y\frac{dy}{ds}+Z\frac{dz}{ds}.$$

Aus den drey durch die Differenziation in Beziehung auf s aus den ursprünglichen Gleichungen erhaltenen Gleichungen ergibt sich nun leicht:

$$-\frac{dT}{ds}\cdot\frac{dx}{ds}\cdot\frac{dz}{ds}-T\cdot\frac{d^2x}{ds^2}\cdot\frac{dz}{ds}=X\frac{dz}{ds},$$

$$-\frac{dT}{ds}\cdot\frac{dz}{ds}\cdot\frac{dx}{ds}-T\cdot\frac{d^2z}{ds^2}\cdot\frac{dx}{ds}=Z\frac{dx}{ds};$$

und:

$$-\frac{dT}{ds}\cdot\frac{dy}{ds}\cdot\frac{dz}{ds}-T\cdot\frac{d^2y}{ds^2}\cdot\frac{dz}{ds}=Y\frac{dz}{ds},$$

$$-\frac{dT}{ds}\cdot\frac{dz}{ds}\cdot\frac{dy}{ds}-T\cdot\frac{d^2z}{ds^2}\cdot\frac{dy}{ds}=Z\frac{dy}{ds};$$

und folglich durch Subtraction:

$$T\left\{\frac{d^2z}{ds^2}\cdot\frac{dx}{ds}-\frac{d^2x}{ds^2}\cdot\frac{dz}{ds}\right\}=X\frac{dz}{ds}-Z\frac{dx}{ds},$$

$$T\left\{\frac{d^2z}{ds^2}\cdot\frac{dy}{ds}-\frac{d^2y}{ds^2}\cdot\frac{dz}{ds}\right\}=Y\frac{dz}{ds}-Z\frac{dy}{ds},$$

$$T=\frac{X\frac{dz}{ds}-Z\frac{dx}{ds}}{\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d^2z}{ds^2}-\frac{dz}{ds}\cdot\frac{d^2x}{ds^2}},$$

$$T=\frac{Y\frac{dz}{ds}-Z\frac{dy}{ds}}{\frac{dy}{ds}\cdot\frac{d^2z}{ds^2}-\frac{dz}{ds}\cdot\frac{d^2y}{ds^2}}.$$

Differenziirt man nun, so erhält man:

$$\frac{dT}{ds}=$$

$$\frac{\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d^2z}{ds^2}-\frac{dz}{ds}\cdot\frac{d^2x}{ds^2}\right)\left(X\frac{d^2z}{ds^2}+\frac{dX}{ds}\cdot\frac{dz}{ds}-Z\frac{d^2x}{ds^2}-\frac{dZ}{ds}\cdot\frac{dx}{ds}\right)\\-\left(X\frac{dz}{ds}-Z\frac{dx}{ds}\right)\left(\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d^3z}{ds^3}+\frac{d^2x}{ds^2}\cdot\frac{d^2z}{ds^2}-\frac{dz}{ds}\cdot\frac{d^3x}{ds^3}-\frac{d^2z}{ds^2}\cdot\frac{d^2x}{ds^2}\right)\end{array}\right\}}{\left(\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d^2z}{ds^2}-\frac{dz}{ds}\cdot\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2}$$

$$=-X\frac{dx}{ds}-Y\frac{dy}{ds}-Z\frac{dz}{ds},$$

nach dem Obigen.

Also, da sich offenbar ds auf beiden Seiten der Gleichung aufhebt:

$$\frac{\left\{\begin{array}{l}(dx\,d^2z - dz\,d^2x)(X\,d^2z + dX\,dz - Z\,d^2x - dZ\,dx)\\ -(Xdz - Zdx)(dx\,d^3z + d^2x\,d^2z - dz\,d^3x - d^2z\,d^2x)\end{array}\right\}}{(dx\,d^2z - dz\,d^2x)^2}$$

$$= -X\,dx - Y\,dy - Z\,dz,$$

oder:

$$\left.\begin{array}{l}(Xdz - Zdx)(dx\,d^3z + d^2x\,d^2z - dz\,d^3x - d^2z\,d^2x)\\ -(dx\,d^2z - dz\,d^2x)(X\,d^2z + dX\,dz - Z\,d^2x - dZ\,dx)\end{array}\right\} =$$

$$= (dx\,d^2z - dz\,d^2x)^2 . (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz),$$

und eben so:

$$\left.\begin{array}{l}(Ydz - Zdy)(dy\,d^3z + d^2y\,d^2z - dz\,d^3y - d^2z\,d^2y)\\ -(dy\,d^2z - dz\,d^2y)(Y\,d^2z + dY\,dz - Z\,d^2y - dZ\,dy)\end{array}\right\} =$$

$$= (dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2 (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz);$$

zwey Gleichungen zwischen x, y, z, in welchen s nicht mehr vorkommt, wenn X, Y, Z als Functionen von x, y, z gegeben sind, so daß man also zwey Gleichungen der Curve hat, die s nicht enthalten, sondern bloß x, y, z, wodurch die Curve also völlig bestimmt ist.

§. 197.

Wir wollen nun ein Mahl, um nur ein ganz leichtes Beyspiel zu betrachten, annehmen, daß eine schwere Kette an zwey Punkten aufgehängt sey; so ist die Curve, nach welcher sie gekrümmt ist, offenbar eine Curve von einfacher Krümmung. Man nehme nun die durch den einen Aufhängepunkt gezogene Horizontale als Axe der x an, und setze, daß das Gewicht der Bögen der Kette vom Anfange an im Verhältniß der entsprechenden Abscisse stehe, so daß also überhaupt das Gewicht eines zur Abscisse x gehörigen Bogens $= \alpha x$ ist, wo α eine gewisse constante Größe bedeutet. Es ist offenbar $X = 0$, und $\int Z ds = \alpha x$. Also

$$\frac{dz}{dx} = \frac{S \operatorname{Cos} \chi + \alpha x}{S \operatorname{Cos} \varphi}.$$

Eigentlich ist $\int Z ds = \alpha x + \text{Const}$; da aber $\int Z ds$ offenbar $= 0$ für $x = 0$, so ist auch $\text{Const} = 0$.

Man setze nun

$$\frac{S \operatorname{Cos} \chi}{S \operatorname{Cos} \varphi} = a, \quad \frac{\alpha}{S \operatorname{Cos} \varphi} = -b;$$

so ist

$$\frac{dz}{dx} = a - bx,$$

$$dz = a\,dx - bx\,dx,$$

$$z = ax - \tfrac{1}{2}bx^2 + \text{Const.}$$

Aber $z = 0$ für $x = 0$. Also $\text{Const} = 0$, und folglich

$$z = ax - \tfrac{1}{2}bx^2, \text{ oder}$$

$$z = ax - b'x^2.$$

Um zu bestimmen, für welche Werthe von x, $z = 0$ wird, setze man

$$0 = ax - b'x^2,$$

$$0 = \frac{a}{b'}x - x^2 = a'x - x^2,$$

oder $x^2 - a'x = 0$, und folglich

$$x^2 - a'x + \tfrac{1}{4}a'^2 = \tfrac{1}{4}a'^2,$$

$$x - \tfrac{1}{2}a' = \pm \tfrac{1}{2}a',$$

$$x = \tfrac{1}{2}a' \pm \tfrac{1}{2}a' = \begin{cases} 0 \\ a'. \end{cases}$$

Für $x = \tfrac{1}{2}a'$ wird

$$z = \tfrac{1}{2}aa' - \tfrac{1}{4}b'a'^2$$
$$= \tfrac{1}{4}a'(2a - b'a').$$

Nimmt man nun den Endpunkt dieser Ordinate als Anfang, und sie selbst als Axe der Abscissen an, so muß man in der obigen Gleichung für x und z offenbar

$$\tfrac{1}{2}a' - z \text{ und } \tfrac{1}{4}a'(2a - b'a') - x$$

setzen, wodurch man erhält:

$$\tfrac{1}{4}a'(2a - b'a') - x = a(\tfrac{1}{2}a' - z) - b'(\tfrac{1}{2}a' - z)^2,$$

$$\tfrac{1}{2}a'a - \tfrac{1}{4}b'a'^2 - x = \begin{cases} \tfrac{1}{2}aa' - az - \tfrac{1}{4}b'a'^2 + b'a'z \\ \qquad\qquad\qquad\qquad - b'z^2, \end{cases}$$

$$-x = -az + b'a'z - b'z^2.$$

Aber $\frac{a}{b'} = a'$, und folglich $a = b'a'$. Also

$$-x = -b'z^2,\ b'z^2 = x,\ z^2 = \frac{1}{b'}x,$$

woraus also erhellet, daß die Curve unter der obigen Voraussetzung eine Apollonische Parabel mit dem Parameter $\frac{1}{b'}$ ist, welches schon Jacob Bernoulli gefunden hat. (M. s. Acta Eruditorum, a. a. 1691. p. 288.)

Sechzehntes Kapitel.

Von den elastischen Linien.

§. 198.

Ein Körper heißt vollkommen elastisch, wenn er, bey vollkommener Biegsamkeit, seine Gestalt, nachdem sie durch eine äußere Kraft auf irgend eine Art verändert worden, wenn die Wirkung der Kraft aufhört, vollkommen wieder herstellt. Elasticität oder Federkraft ist daher ein inneres Bestreben, die Gestalt zu erhalten, und sie wieder herzustellen, wenn sie durch Ausdehnung, durch Zusammenpressung oder Beugung verändert worden ist.

Wenn ein elastischer Körper auf irgend eine Art gebogen worden ist, so wird leicht erhellen, daß die auf der convexen Seite liegenden Fasern eine Ausdehnung erlitten haben, die auf der concaven Seite liegenden aber zusammengedrückt worden sind. Zwischen beiden müssen offenbar Fasern liegen, welche bey der Beugung keine Veränderung rücksichtlich ihrer Länge erlitten haben, und nach der durch diese Fasern gehenden Curve kann die Krümmung des ganzen gebogenen Körpers bestimmt werden. Man nennt diese Curven, wenn auch nicht ganz sprachrichtig, gewöhnlich elastische Linien, und mit ihrer Untersuchung soll sich dieses Kapitel beschäftigen.

Die erste Veranlassung zu diesen Untersuchungen ist ebenfalls von Galilei in der oben angeführten Schrift: Discorsi e dimostrazioni matematiche, etc., gegeben worden, welcher aber die elastische Linie in dem einfachsten und wichtigsten Falle, den wir nachher betrachten werden, für eine Parabel hielt, so wie die Kettenlinie. Derselben Meinung waren auch später der Pater Gasto Pardies in einem kleinen Werke über die Statik, und der Pater Franciscus Tertius de Lanis in dem Werke: Magisterium naturae et artis, Tom. II. lib. 7., worin er nach Jacob Bernoulli's Urtheile multa huc facientia et lectu digna habet. (M. s. Acta Eruditorum, a. a. 1692. p. 263.) → Bey Gelegenheit des Problems von der Kettenlinie kam Jacob Bernoulli auch auf das Problem von den elastischen Linien, und legte es in den Actis Eruditorum, a. a. 1691. p. 289., den Mathematikern vor, indem er zugleich ankündigte, daß er die Auflösung für den einfachsten Fall zwar gefunden, sie aber für's erste bloß in einen Logogriph verhüllt geben wolle, um andern Mathematikern freyen Spielraum zu lassen. Es erschien keine Auflösung eines andern Mathematikers, und Jacob Bernoulli machte daher, nach dreyjährigem Stillschweigen, seine Untersuchungen in den Actis Eruditorum, a. a. 1694. p. 262. seqq., bekannt, in der Abhandlung:

Curvatura laminae elasticae. Ejus identitas cum curvatura lintei a pondere inclusi fluidi expansi. Radii circulorum osculantium in terminis simplicissimis exhibiti, etc. (Jacobi Bernoulli Opera, Tom. I. Genevae 1744. 4. p. 576.)

Späterhin erschienen zur Verbesserung der frühern Untersuchungen von ihm noch folgende Abhandlungen:

Explicationes, annotationes et additiones ad ea, quae in Actis superioris anni de curva elastica, etc., leguntur, etc. (Acta Eruditorum, a. a. 1695. p. 537.) (Opera, T. I. p. 639.)

Véritable hypothèse de la résistance des solides, avec la démonstration de la courbure des corps, qui font ressort. (Mémoires de l'Académie des sciences de Paris, 1705.) (Opera, T. II. p. 976.)

Sehr ausführliche Untersuchungen hat Euler über die elastischen Curven angestellt, in mehrern Abhandlungen in den Schriften der Petersburger Akademie, (Commentationes Academiae Petropolitanae, T. III. 1728. — Novae Commentationes, T. XV. 1770. T. XX. 1775.), und in dem berühmten Werke:

Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti. Lausannae et Genevae 1744. 4. Additamentum I.: De Curvis elasticis, p. 245. — 310.

Unter den neuern Schriften gehören besonders hierher:
Eytelwein's Statik, Th. 3. S. 129. — 186.,
und:
Traité de Mécanique, par Poisson, T. I. p. 212. — 230.

§. 199.

Man denke sich eine völlig biegsame und vollkommen elastische gerade Linie ohne Schwere, deren einer Endpunkt auf irgend eine Art befestigt sey, so daß er durch keine Kraft verrückt werden kann. Ueber den andern Endpunkt hinaus sey diese gerade Linie um ein willkührlich langes unbiegsames und unelastisches Stück verlängert. An dem Endpunkte dieses Stücks wirke nach willkührlicher Richtung eine gewisse Kraft, welche die elastische gerade Linie auf eine gewisse Art krümmen wird. Wenn nun die wirkende Kraft sich mit der Elasticität der gegebenen Linie im Gleichgewichte befindet, und also der Zustand der Ruhe eingetreten ist, welcher sich nun wegen der vollkommenen Elasticität der gegebenen Linie nicht mehr verändern wird; so heißt die Krümmung der gegebenen elastischen geraden Linie eine elastische Linie schlechthin oder auch eine gemeine elastische Linie, deren Gleichung wir in diesem Kapitel aufsuchen wollen. Die Untersuchungen über die Krümmung elastischer Körper lassen sich in jedem besondern Falle immer auf den hier betrachteten einfachsten Fall zurückführen, worüber wir uns aber hier, um nicht zu weitläufig zu werden, nicht verbreiten können. Doch wird im achtzehnten Kapitel noch eine Anwendung der Untersuchungen dieses Kapitels vorkommen.

Ehe wir aber weiter gehen können, sind folgende Bemerkungen vorauszuschicken.

1) Da die gegebene elastische gerade Linie, welche wir im Folgenden immer die elastische Ruthe (M. s. Eytelwein's Statik, a. a. O.) nennen wollen, als vollkommen bieg-

sam vorausgesetzt wird; so ist klar, daß sie durch die an ihrem Endpunkte wirkende Kraft offenbar in allen ihren Punkten eine Krümmung erleiden muß, und daß also kein Theil von ihr in der geraden Lage bleiben kann.

2) Denkt man sich nun die Wirkung der biegenden Kraft mit einem Mahle aufhörend; so wird, wegen der vollkommenen Elasticität, die elastische Ruthe wieder in ihre erste geradlinige Richtung zurückschnellen, und in dieser Lage verharren, da auf ihre Oscillationen jetzt keine Rücksicht genommen wird. Man könnte sich, um diese Oscillationen zu verhindern, nach der ersten geradlinigen Richtung der elastischen Ruthe eine Ebene gelegt denken, an welche sie sich anlegen kann. Es ist aber klar, daß sich alle Punkte der elastischen Ruthe an diese Ebene völlig gleichzeitig anlegen werden, weil, wenn man z. B. annehmen wollte, daß sie sich nur nach und nach anlegten, und man sich nun in einer dieser Lagen augenblicklich eine Kraft wirkend dächte, welche mit der elastischen Ruthe im Gleichgewichte wäre, Theile derselben gerade, und zu gleicher Zeit andere Theile gekrümmt seyn könnten, welches gegen Nummer 1. streitet.

3) Sey jetzt in Fig. 107. AB die ursprüngliche Richtung der elastischen Ruthe, und die elastische Curve denke man sich als ein Polygon $Aabcd$ .... mit unendlich vielen unendlich kleinen Seiten. Die von der Elasticität herrührenden Kräfte in den Punkten A, a, b, c, d, u. s. w. muß man sich als Kräfte vorstellen, welche die Linien Aa, ab, bc, cd, de, u. s. w. um diese Punkte zu drehen streben. Da nun bey der Zurückbewegung der elastischen Ruthe in ihre ursprüngliche geradlinige Richtung alle ihre Punkte nach dem Vorhergehenden zu gleicher Zeit sich an AB anlegen; so ist klar, daß die Winkel BAa', $a'ab'$, $b'bc'$, $c'cd'$, $d'de$, u. s. w. von den Linien Aa, ab, bc, cd, de, u. s. w. alle in gleichen Zeiten durchlaufen werden, und daß sich daher die Kräfte, von welchen diese Linien durch jene Winkel gleichzeitig gedreht werden, offenbar wie diese Winkel selbst verhalten müssen. Es sind aber bey der elastischen Curve die Winkel BAa', $a'ab'$, u. s. w. nichts anderes als die von den Tangenten durch A, a, b, c,

u. s. w. mit der Curve eingeschlossenen Winkel, oder die sogenannten Berührungswinkel (Anguli contactus), woraus also folgt, daß sich die in den einzelnen Punkten der elastischen Curve wirkenden, von der Elasticität herrührenden, drehenden Kräfte wie die Berührungswinkel an diesen Punkten verhalten.

Das Vorhergehende ist bloß ein Versuch, diesen Satz zu beweisen. Wenigstens wird es dazu dienen, dessen Sinn etwas mehr in's Licht zu setzen. Wem die vorhergehenden Betrachtungen nicht genügen, mag diesen Satz als eine bloße Hypothese oder als ein Resultat der Erfahrung annehmen, wie es z. B. auch Poisson thut, in dem Traité de Mécanique, Tom. I. p. 215.

4) Man kann aber beweisen, daß die Berührungswinkel im umgekehrten Verhältnisse der entsprechenden Krümmungshalbmesser stehen. Denn man denke sich die Curve in lauter gleiche Elemente getheilt, wie z. B. bc und cd. Man halbire diese beiden auf einander folgenden Elemente in g und h, errichte auf bc und cd durch g und h die Perpendikel fg und fh, und ziehe fc, so kann man gch als einen kleinen Bogen eines Kreises ansehen; fg, fc, fh sind Halbmesser dieses Kreises, d. i. die Krümmungshalbmesser, und f ist der Mittelpunkt des Krümmungskreises. Der Berührungswinkel $c'cd'$ ist offenbar dem Winkel $gfh = 2 . cfg$ gleich, welches leicht erhellet, wenn man fh bis zur Linie gc' verlängert, weil dann zwey Dreyecke mit zwey gleichen Winkeln entstehen, deren dritte Winkel $c'cd'$ und gfh also auch gleich seyn müssen. Nun ist aber

$$\text{Sin}\, cfg = \frac{cg}{cf}$$

und $\angle c'cd' = 2 . \angle cfg$. Also auch

$$\text{Arc} \angle c'cd' = 2 . \text{Arc} \angle cfg.$$

Aber, weil die Winkel unendlich klein sind:

$$\text{Arc} \angle cfg = \text{Sin}\, cfg, \quad 2 . \text{Arc} \angle cfg = 2\, \text{Sin}\, cfg,$$

$$\text{d. i. } \text{Arc} \angle c'cd' = 2\, \text{Sin}\, cfg.$$

Also

$$\tfrac{1}{2}\text{Arc}\angle c'cd' = \frac{cg}{cf}, \text{ oder}$$

$$\text{Arc}\angle c'cd' = \frac{2 \cdot cg}{cf} = \frac{bc}{cf},$$

oder für $\angle c'cd' = \varphi$, $cf = r$, und das Element $bc = e$:

$$\text{Arc}\angle \varphi = \frac{e}{r},$$

und für irgend einen andern Berührungswinkel φ' und entsprechenden Krümmungshalbmesser r' ist

$$\text{Arc}\angle \varphi' = \frac{e}{r'},$$

da alle Elemente als gleich angenommen worden sind. Also

$$\text{Arc}\angle \varphi : \text{Arc}\angle \varphi' = \frac{e}{r} : \frac{e}{r'},$$

$$\text{Arc}\angle \varphi : \text{Arc}\angle \varphi' = r' : r.$$

Aber

$$\text{Arc}\angle \varphi : \text{Arc}\angle \varphi' = \varphi : \varphi'.$$

Also

$$\varphi : \varphi' = r' : r;$$

d. i. Die Berührungswinkel verhalten sich umgekehrt wie die Krümmungshalbmesser, w. z. b. w.

Daher verhalten sich also nach Nummer 3. die in den einzelnen Punkten der elastischen Curve wirkenden, von der Elasticität herrührenden, drehenden Kräfte umgekehrt wie die Krümmungshalbmesser in diesen Punkten. (M. s. Poisson a. a. O. S. 216. Euler De curvis elasticis, in Additamento I. ad librum: Methodus inveniendi lineas curvas maximi etc., p. 250.)

5) Die Kraft, welche die Linie cd (Fig. 107.) um den Punkt c zu drehen strebt, muß man sich als eine Kraft denken, die an einem Punkte m der Verlängerung von cd nach einer gewissen Richtung mn wirkt. In welcher Entfernung von c und nach welcher Richtung wirkend man sich diese Kraft denken will, ist ganz gleichgültig, wenn nur ihre Größe so bestimmt wird, daß die Linie cd so um c gedreht wird, wie es wirklich

geschieht. Um aber die in allen Punkten der elastischen Curve wirkenden Kräfte mit einander vergleichen und den vorher bewiesenen wichtigen Satz anwenden zu können, muß man sie alle in gleicher Entfernung von den Punkten der Curve und unter einerley Winkel gegen die Linien wie cd wirken lassen. Am einfachsten ist es, wie auch geschehen soll, die Entfernung cm der Einheit, und den Winkel cmn einem rechten Winkel gleich zu setzen. Sprechen wir nun in der Folge von den in den einzelnen Punkten der Curve wirkenden Kräften, z. B. von der in c wirkenden, so soll darunter die unter den obigen Bedingungen in m wirkende Kraft verstanden werden.

§. 200.

Sey nun in Fig. 108. AB die elastische Ruthe, BC deren unelastischer unbiegsamer Theil, AB' die elastische Curve, $B'C'$ der unelastische unbiegsame Theil, und $C'P$ die Richtung der auf die elastische Ruthe wirkenden Kraft P, unter der Voraussetzung, daß das ganze System im Gleichgewichte ist.

Sey nun c irgend ein Punkt der elastischen Curve, und $ck = p$ senkrecht auf $C'P$. cm sey die Tangente durch c, und die in m nach mn wirkende, der Drehkraft in c gleiche, Kraft sey $= K$, wo denn nach dem Vorhergehenden $cm = 1$ und $\angle cmn = 90°$ ist. Es wird nun leicht erhellen, daß es jetzt eben so ist, als wenn an dem Hebel $mcB'C'$, dessen Ruhepunkt c ist, in den Punkten m und C' zwey Kräfte K und P nach den Richtungen mn und $C'P$ wirken. Da nun diese beiden Kräfte im Gleichgewichte sind, so sind ihre Momente in Beziehung auf den Punkt c einander gleich, nach bekannten Sätzen. Also

$$K \cdot cm = P \cdot ck, \text{ d. i. } K = Pp,$$

weil nach dem Obigen $cm = 1$ und $ck = p$ ist.

Bezeichnet man nun durch A die Drehkraft in einem bestimmten Punkte der Curve, für welchen der Krümmungshalbmesser $= a$ sey; so ist, wenn r den Krümmungshalbmesser für den willkührlichen Punkt c bezeichnet, nach §. 199. 4.:

$$A : K = r : a, \quad K = \frac{Aa}{r}.$$

Also

$$Pp = \frac{Aa}{r} = \frac{E^2}{r}, \text{ für } Aa = E^2,$$

wo $Aa = E^2$ gesetzt werden kann, weil Aa immer positiv ist, wie leicht erhellet.

Man nehme nun B' als Anfang und $B'C'$ als Axe der Abscissen an, für rechtwinklige Coordinaten; so ist bekanntlich

$$r = \pm \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y},$$

wo aber, da r bey der obigen Betrachtung immer als positiv angenommen worden ist, und die Curve gegen die Abscissenaxe offenbar convex ist, nach bekannten Sätzen der analytischen Geometrie, das obere Zeichen zu nehmen, und folglich

$$r = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y}$$

zu setzen ist. Also

$$Pp = \frac{E^2 . dx\,d^2y}{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Denkt man sich nun von d auf $C'k$ das Perpendikel de, und auf de von c das Perpendikel cf gefällt; so ist, wenn der Winkel $PC'B'$, welchen die Richtung der Kraft P mit $B'C'$ einschließt, $= \gamma$ gesetzt wird:

$$p = ck = fe = de - df.$$

Aber,

$$de = dC' . \operatorname{Sin}\gamma = (c + x)\operatorname{Sin}\gamma,$$

für $B'C' = c$, und

$$df = cd . \operatorname{Cos} cdf = y \operatorname{Cos}\gamma,$$

weil $\angle cdf + edC' = 90^\circ = edC' + eC'd$, und folglich $\angle cdf = \angle eC'd = \gamma$ ist. Also

$$p = (c + x)\operatorname{Sin}\gamma - y\operatorname{Cos}\gamma,$$

und folglich

$$P\left\{(c + x)\operatorname{Sin}\gamma - y\operatorname{Cos}\gamma\right\} = \frac{E^2 . dx\,d^2y}{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}};$$

die Differenzialgleichung der elastischen Curve, in welcher aber Differenziale des zweyten Grades vorkommen.

Diese zu eliminiren, setze man:

$$(c + x)\operatorname{Sin}\gamma - y\operatorname{Cos}\gamma = z,$$

$$\operatorname{Sin}\gamma - \operatorname{Cos}\gamma \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx};$$

oder für $\frac{dz}{dx} = u$:

$$\operatorname{Sin}\gamma - \operatorname{Cos}\gamma \cdot \frac{dy}{dx} = u,$$

$$\operatorname{Sin}\gamma \cdot dx - \operatorname{Cos}\gamma \cdot dy = u\,dx,$$

$$\operatorname{Cos}\gamma\, dy = \operatorname{Sin}\gamma \cdot dx - u\,dx,$$

$$\operatorname{Cos}\gamma\, d^2y = - du \cdot dx,$$

$$(dx^2 + dy^2)\operatorname{Cos}\gamma^2 = \operatorname{Cos}\gamma^2 \cdot dx^2 + \operatorname{Sin}\gamma^2 \cdot dx^2 - 2u\operatorname{Sin}\gamma dx^2 + u^2dx^2$$
$$= (1 - 2u\operatorname{Sin}\gamma + u^2)\,dx^2,$$

$$dx^2 + dy^2 = \frac{(1 - 2u\operatorname{Sin}\gamma + u^2)\,dx^2}{\operatorname{Cos}\gamma^2},$$

$$(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{(1 - 2u\operatorname{Sin}\gamma + u^2)^{\frac{3}{2}} \cdot dx^3}{\operatorname{Cos}\gamma^3},$$

$$E^2 \cdot dx\,d^2y = - \frac{E^2 \cdot du \cdot dx^2}{\operatorname{Cos}\gamma}.$$

Also

$$Pz = - \frac{E^2 \cdot du \cdot dx^2 \cdot \operatorname{Cos}\gamma^3}{(1 - 2u\operatorname{Sin}\gamma + u^2)^{\frac{3}{2}} \cdot dx^3 \cdot \operatorname{Cos}\gamma},$$

$$Pz\,dx = - \frac{E^2 \cdot \operatorname{Cos}\gamma^2 \cdot du}{(1 - 2u\operatorname{Sin}\gamma + u^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$Pzu\,dx = Pz\,dz = - \frac{E^2 \cdot \operatorname{Cos}\gamma^2 \cdot u\,du}{(1 - 2u\operatorname{Sin}\gamma + u^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Man integrire nun auf beiden Seiten; so erhält man:

$$\int Pz\,dz = P\int z\,dz = \tfrac{1}{2}Pz^2,$$

und:

$$\int \frac{u\,du}{(1 - 2u\operatorname{Sin}\gamma + u^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{u\operatorname{Sin}\gamma - 1}{\operatorname{Cos}\gamma^2 \cdot \sqrt{1 - 2u\operatorname{Sin}\gamma + u^2}},$$

wovon man sich durch Differenziation überzeugen kann. Also

$$\tfrac{1}{2}Pz^2 = \frac{E^2.(1 - u\,\mathrm{Sin}\,\gamma)}{\sqrt{1 - 2u\,\mathrm{Sin}\,\gamma + u^2}} + \mathrm{Const}$$

oder

$$Pz^2 = \frac{2E^2.(1 - u\,\mathrm{Sin}\,\gamma)}{\sqrt{1 - 2u\,\mathrm{Sin}\,\gamma + u^2}} + \mathrm{Const.}$$

Aber

$$z = (c + x)\,\mathrm{Sin}\,\gamma - y\,\mathrm{Cos}\,\gamma,$$

$$u = \frac{dz}{dx} = \mathrm{Sin}\,\gamma - \mathrm{Cos}\,\gamma.\frac{dy}{dx}$$

$$= \frac{\mathrm{Sin}\,\gamma.\,dx - \mathrm{Cos}\,\gamma.\,dy}{dx},$$

$$1 - u\,\mathrm{Sin}\,\gamma = \frac{dx - \mathrm{Sin}\,\gamma^2.\,dx + \mathrm{Sin}\,\gamma\,\mathrm{Cos}\,\gamma.\,dy}{dx}$$

$$= \frac{\mathrm{Cos}\,\gamma^2.\,dx + \mathrm{Sin}\,\gamma\,\mathrm{Cos}\,\gamma\,dy}{dx},$$

$$1 - 2u\,\mathrm{Sin}\,\gamma + u^2 = \begin{cases} 1 - \dfrac{2\,\mathrm{Sin}\,\gamma^2.\,dx - 2\,\mathrm{Sin}\,\gamma\,\mathrm{Cos}\,\gamma\,dy}{dx} \\ + \dfrac{\mathrm{Sin}\,\gamma^2.\,dx^2 - 2\,\mathrm{Sin}\,\gamma\,\mathrm{Cos}\,\gamma\,dx\,dy + \mathrm{Cos}\,\gamma^2.\,dy^2}{dx^2} \end{cases}$$

$$= \frac{dx^2 - 2\mathrm{Sin}\gamma^2.dx^2 + 2\mathrm{Sin}\gamma\mathrm{Cos}\gamma\,dxdy + \mathrm{Sin}\gamma^2.dx^2 - 2\mathrm{Sin}\gamma\mathrm{Cos}\gamma\,dxdy + \mathrm{Cos}\gamma^2.dy^2}{dx^2}$$

$$= \frac{dx^2 - \mathrm{Sin}\,\gamma^2.\,dx^2 + \mathrm{Cos}\,\gamma^2.\,dy^2}{dx^2} = \frac{\mathrm{Cos}\,\gamma^2.\,(dx^2 + dy^2)}{dx^2},$$

$$\sqrt{1 - 2u\,\mathrm{Sin}\,\gamma + u^2} = \frac{\mathrm{Cos}\,\gamma}{dx}\sqrt{dx^2 + dy^2};$$

und folglich

$$P\{(c+x)\,\mathrm{Sin}\,\gamma - y\,\mathrm{Cos}\gamma\}^2 = \frac{2E^2.(\mathrm{Cos}\,\gamma\, dx + \mathrm{Sin}\,\gamma\, dy)}{\sqrt{dx^2+dy^2}} + \mathrm{Const},$$

die Differenzialgleichung der Elastica, welche man nun noch nach $\frac{dy}{dx}$ auflösen könnte, welches wir aber dem Fleiße des Lesers überlassen.

Aus dieser Gleichung eine endliche Gleichung zwischen x und y herzuleiten, ist wegen der Unvollkommenheit der Integralrechnung nicht möglich. Das Integral läßt sich nur mittelst unendlicher Reihen angeben.

Nimmt man den Winkel, welchen die ursprüngliche Richtung der elastischen Ruthe mit der Absciſſenaxe einschließt, und auch die Coordinaten des Punktes A als bekannt an, und bezeichnet diese drey Größen durch α, a, b; so ist $\frac{dy}{dx} = \mathrm{Tg}\,\alpha$ für $x = a$, weil AB die elastische Curve offenbar in A berührt, woraus die Constans bey der ersten Integration bestimmt werden kann. Die Constans bey der zweyten Integration wird durch die Betrachtung bestimmt, daß $y = b$ für $x = a$, oder $y = 0$ für $x = 0$.

§. 201.

Wir wollen nun einige besondere Fälle betrachten.

1) Sey in Fig. 109. die Linie $B'C'$ in Fig. 108. $= c = 0$, und die Kraft P wirke an B' als ein Gewicht nach verticaler Richtung. In diesem Falle ist offenbar $\gamma = 180°$, und folglich

$$Py^2 = -\frac{2E^2.\,dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}} + \mathrm{Const},$$

oder, wenn man eine durch B' gezogene Horizontale als Axe und B' als Anfang der x annimmt:

$$Px^2 = -\frac{2E^2.\,dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}} + \mathrm{Const}.$$

Die Abscisse des festen Punktes A sey $= a$, und der Winkel ATB', welchen die ursprüngliche Richtung AB der elastischen Ruthe, d. i. die Tangente durch A, mit der Abscissenaxe einschließt, sey $= \alpha$. Bezeichnet nun überhaupt ϕ den Winkel, welchen die Tangente durch irgend einen Punkt der Curve nach der Seite der positiven Coordinaten hin mit der Abscissenaxe einschließt; so ist bekanntlich

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{Tg}\phi,$$

und folglich

$$1 + \frac{dy^2}{dx^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{dx^2} = 1 + \operatorname{Tg}\phi^2 = \operatorname{Sec}\phi^2,$$

$$\frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{1}{\operatorname{Sec}\phi} = \operatorname{Cos}\phi,$$

$$1 - \operatorname{Cos}\phi^2 = 1 - \frac{dx^2}{dx^2 + dy^2} = \frac{dy^2}{dx^2 + dy^2},$$

$$\operatorname{Sin}\phi^2 = \frac{dy^2}{dx^2 + dy^2},\quad \operatorname{Sin}\phi = \frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}},$$

$$Px^2 = -2E^2 . \operatorname{Sin}\phi + \text{Const},$$

und folglich, da $\phi = 180^\circ - \alpha$ ist, für $x = a$:

$$Pa^2 = -2E^2 . \operatorname{Sin}(180^\circ - \alpha) + \text{Const}$$
$$= -2E^2 . \operatorname{Sin}\alpha + \text{Const},$$
$$\text{Const} = Pa^2 + 2E^2 . \operatorname{Sin}\alpha.$$

Also

$$Px^2 = -\frac{2E^2 . dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} + Pa^2 + 2E^2 . \operatorname{Sin}\alpha,$$

$$Px^2 - Pa^2 - 2E^2 . \operatorname{Sin}\alpha = -\frac{2E^2 . dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}},$$

$$Pa^2 + 2E^2 . \operatorname{Sin}\alpha - Px^2 = \frac{2E^2 . dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}},$$

$$(Pa^2 + 2E^2 . \operatorname{Sin}\alpha - Px^2)\sqrt{dx^2 + dy^2} = 2E^2 . dy,$$

$$(Pa^2 + 2E^2 . \operatorname{Sin}\alpha - Px^2)^2 (dx^2 + dy^2) = 4E^4 . dy^2,$$

$$(Pa^2 + 2E^2 . \operatorname{Sin}\alpha - Px^2)^2 . dx^2 = \{4E^4 - (Pa^2 + 2E^2 . \operatorname{Sin}\alpha - Px^2)^2\} dy^2$$

$$dy^2 = \frac{(Pa^2 + 2E^2 . \operatorname{Sin}\alpha - Px^2)^2 . dx^2}{4E^4 - (Pa^2 + 2E^2 . \operatorname{Sin}\alpha - Px^2)^2},$$

$$dy = \frac{(Pa^2 + 2E^2 . \operatorname{Sin}\alpha - Px^2)\, dx}{\sqrt{4E^4 - (Pa^2 + 2E^2 . \operatorname{Sin}\alpha - Px^2)^2}}.$$

Dividirt man nun oben und unten mit P, und setzt

$$\frac{Pa^2 + 2E^2 . \operatorname{Sin}\alpha}{P} = B^2, \quad \frac{4E^4}{P^2} = C^4;$$

so erhält man:

$$dy = \frac{(B^2 - x^2)\, dx}{\sqrt{C^4 - (B^2 - x^2)^2}},$$

die allgemeine Gleichung für den obigen Fall.

Diese Form gibt Eytelwein der Gleichung im Handbuche der Statik fester Körper, Th. 3. S. 167.

2) Nimmt man an, daß in Fig. 108. die Richtung der Kraft P auf der Linie $B'C'$ senkrecht ist; so ist $\gamma = 90^\circ$, und folglich $\operatorname{Sin}\gamma = 1$, $\operatorname{Cos}\gamma = 0$. Also

$$P(c+x)^2 = \frac{2E^2 . dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} - f,$$

wenn wir die Constante durch $-f$ bezeichnen. Also

$$P(c+x)^2 . \sqrt{dx^2 + dy^2} = 2E^2 . dy - f\sqrt{dx^2 + dy^2},$$

$$\left\{P(c+x)^2 + f\right\}\sqrt{dx^2 + dy^2} = 2E^2 . dy,$$

$$\left\{P(c+x)^2 + f\right\}^2 . (dx^2 + dy^2) = 4E^4 . dy^2,$$

$$\left\{P(c+x)^2 + f\right\}^2 . dx^2 = \left[4E^4 - \left\{P(c+x)^2 + f\right\}^2\right] dy^2$$

$$= \left\{4E^4 - P^2(c+x)^4 - 2fP(c+x)^2 - f^2\right\} dy^2,$$

$$dy^2 = \frac{\left\{P(c+x)^2 + f\right\}^2 . dx^2}{4E^4 - f^2 - 2fP(c+x)^2 - P^2(c+x)^4},$$

$$dy = \frac{\left\{P(c+x)^2 + f\right\} dx}{\sqrt{4E^4 - f^2 - 2fP(c+x)^2 - P^2(c+x)^4}}.$$

Nimmt man eine durch B' auf $B'C'$ senkrechte Linie als Axe der x an; so ist

$$dx = \frac{\{P(c+y)^2+f\}\,dy}{\sqrt{4E^4-f^2-2fP(c+y)^2-P^2(c+y)^4}}.$$

Diese Gleichung findet man bey Poisson a. a. O. S. 219. b bey Poisson ist dasselbe, was bey uns E^2 ist.

3) Da wir so eben gesehen haben, daß

$$\{P(c+x)^2+f\}^2 \cdot dx^2 = [4E^4-\{P(c+x)^2+f\}^2]\,dy^2$$

ist; so ist

$$dy^2 = \frac{\{P(c+x)^2+f\}^2 \cdot dx^2}{4E^4-\{P(c+x)^2+f\}^2},$$

$$dy = \frac{\{P(c+x)^2+f\}\,dx}{\sqrt{4E^4-\{P(c+x)^2+f\}^2}}$$

$$= \frac{(Pc^2+f+2Pcx+Px^2)\,dx}{\sqrt{4E^4-(Pc^2+f+2Pcx+Px^2)^2}},$$

d. i.

$$dy = \frac{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)\,dx}{\sqrt{a^4-(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^2}},$$

welches die allgemeine Form der Gleichung der Elastica ist, wenn die Kraft P senkrecht auf $B'C'$ wirkt. (M. s. Euler a. a. O. S. 250.)

4) Ist α der Winkel, welchen die ursprüngliche Richtung der elastischen Ruthe nach der Seite der positiven Coordinaten mit der Abscissenaxe einschließt, und a' die Absciße des festen Punktes A; so ist

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{Tg}\,\alpha, \text{ für } x = a'.$$

Aber

$$1+\frac{dx^2}{dy^2} = \frac{4E^4}{[P(c+x)^2+f]^2},$$

d. i., wenn man zugleich $c = 0$ setzt:

$$\frac{1}{\mathrm{Sin}\,\alpha^2} = \frac{4E^4}{(Pa'^2+f)^2},$$

oder

$$\frac{1}{\operatorname{Sin}\alpha} = \frac{2E^2}{Pa'^2 + f}, \quad Pa'^2 + f = 2E^2 . \operatorname{Sin}\alpha,$$

$$f = 2E^2 \operatorname{Sin}\alpha - Pa'^2.$$

Ist nun $f = 0$, d. i.

$$Pa'^2 = 2E^2 . \operatorname{Sin}\alpha, \text{ oder z. B. } \operatorname{Sin}\alpha = \frac{Pa'^2}{2E^2};$$

so erhält die obige Gleichung folgende Form:

$$dy = \frac{Px^2 dx}{\sqrt{4E^4 - P^2 x^4}},$$

oder

$$= \frac{x^2\, dx}{\sqrt{(4E^4 : P^2) - x^4}},$$

d. i.

$$dy = \frac{x^2\, dx}{\sqrt{a^4 - x^4}},$$

für $a^2 = \dfrac{2E^2}{P}$.

Eine elastische Linie, deren Differenzialgleichung diese Form hat, heißt gewöhnlich eine rechtwinklige oder rectanguläre Elastica. (M. s. Euler a. a. O. S. 261.)

Siebzehntes Kapitel.

Curven des Gleichgewichts.

§. 202.

In C (Fig. 110.) sey eine Rolle angebracht, und CD sey eine Verticallinie. Um die Rolle ist ein Seil PCP' (eine völlig biegsame gerade Linie) geschlagen, an welchem zwey Gewichte P und P' wirken. Sind nun die Curven MN und $M'N'$ von solcher Beschaffenheit, daß die Gewichte P und P', wohin man sie auch, bey gespanntem Seile, auf jene legen mag, im Gleichgewichte sind; so heißen sie **Curven des Gleichgewichts** (Curvae aequilibrationis), jede die Curve des Gleichgewichts der andern. Die Aufgabe, welche hier aufgelöst werden soll, ist folgende:

Wenn irgend eine Curve MN, wenn die Länge des Seils $PCP' = a$, und wenn die Gewichte P und P' gegeben sind, die Curve des Gleichgewichts von MN zu finden.

Man bezeichne, um zur Auflösung zu gelangen, die Coordinaten der gegebenen Curve durch x, y, und die der gesuchten durch x', y', indem man C als Anfang und CD als Axe der Abscissen annimmt. Man ziehe nun durch P und P' die Tangenten PB und $P'B'$ an die Curven MN und $M'N'$, verlängere CP und CP' über P und P' hinaus, errichte auf den Tangenten durch P und P' die Normalen PF, $P'F'$, stelle die Kräfte P und P' durch PG und $P'G'$ geometrisch dar, so daß $PG = P$ und $P'G' = P'$, und zerfälle sie in zwey Kräfte PE, PF und $P'E'$, $P'F'$ nach den Normalen und den Richtungen CE, $C'E'$; so ist klar, daß die Kräfte PF und $P'F'$, welche senkrecht auf die Curven wirken, von diesen ganz aufgehoben werden, und daß also nur die Kräfte PE und $P'E'$, welche wir durch Q und Q' bezeichnen wollen, als auf das Seil wirfend zu betrachten sind, und daß daher, wenn P und P' überall auf den beiden Curven im Gleichgewichte seyn sollen, die Kräfte Q und Q' überall einander gleich seyn müssen. Wir wollen nun einen analytischen Ausdruck für die Kraft Q suchen.

Aus der Lehre von den Tangenten ist bekannt, daß

$$\mathrm{Tg}\,\gamma = \frac{dy}{dx}$$

ist.

Auch ist $\angle GPF + \angle FPA = \angle BPA + \angle FPA = R$, da die Richtungen PG, $P'G'$ der Gewichte P und P' vertical und demnach parallel mit CD sind. Also ist

$$\angle FPG = \angle APB = \beta,$$

und auch, wie leicht erhellet,

$$\angle EPG = \angle PCA = \alpha.$$

Aber $\beta = 90° - \gamma$. Also

$$\mathrm{Tg}\,\beta = \mathrm{Cotg}\,\gamma = \frac{1}{\mathrm{Tg}\,\gamma} = \frac{dx}{dy}.$$

Auch

$$AP = CA \,.\, \mathrm{Tg}\,\alpha, \text{ d. i. } y = x\,\mathrm{Tg}\,\alpha, \text{ oder } \mathrm{Tg}\,\alpha = \frac{y}{x},$$

und folglich

$$\mathrm{Tg}(\alpha+\beta) = \frac{\mathrm{Tg}\,\alpha + \mathrm{Tg}\,\beta}{1 - \mathrm{Tg}\,\alpha \,.\, \mathrm{Tg}\,\beta}$$

$$= \frac{\frac{y}{x} + \frac{dx}{dy}}{1 - \frac{y}{x} \cdot \frac{dx}{dy}}$$

$$= \frac{y\,dy + x\,dx}{x\,dy - y\,dx},$$

$$\mathrm{Tg}\,\delta = \mathrm{Tg}[180° - (\alpha+\beta)] = -\mathrm{Tg}(\alpha+\beta)$$

$$= -\frac{y\,dy + x\,dx}{x\,dy - y\,dx} = \frac{y\,dy + x\,dx}{y\,dx - x\,dy}.$$

Nun ist bekanntlich für jeden Winkel φ:

$$\mathrm{Tg}\,\varphi = \frac{\mathrm{Sin}\,\varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi} = \frac{\mathrm{Sin}\,\varphi}{\sqrt{1 - \mathrm{Sin}\,\varphi^2}},$$

$$\mathrm{Tg}\,\varphi^2 = \frac{\mathrm{Sin}\,\varphi^2}{1 - \mathrm{Sin}\,\varphi^2},$$

$$\mathrm{Tg}\,\varphi^2 - \mathrm{Tg}\,\varphi^2 . \mathrm{Sin}\,\varphi^2 = \mathrm{Sin}\,\varphi^2,$$

$$\mathrm{Tg}\,\varphi^2 = \mathrm{Sin}\,\varphi^2 + \mathrm{Tg}\,\varphi^2 . \mathrm{Sin}\,\varphi^2 = (1 + \mathrm{Tg}\,\varphi^2)\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2,$$

$$\mathrm{Sin}\,\varphi^2 = \frac{\mathrm{Tg}\,\varphi^2}{1 + \mathrm{Tg}\,\varphi^2}, \quad \mathrm{Sin}\,\varphi = \frac{\mathrm{Tg}\,\varphi}{\sqrt{1 + \mathrm{Tg}\,\varphi^2}};$$

und folglich

$$\mathrm{Sin}\,\beta = \frac{\frac{dx}{dy}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}} = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}},$$

$$\mathrm{Sin}\,\delta = \frac{\frac{y\,dy + x\,dx}{y\,dx - x\,dy}}{\sqrt{1 + \left(\frac{y\,dy + x\,dx}{y\,dx - x\,dy}\right)^2}}$$

$$= \frac{y\,dy + x\,dx}{\sqrt{(y\,dx - x\,dy)^2 + (y\,dy + x\,dx)^2}}$$

$$= \frac{y\,dy + x\,dx}{\sqrt{\begin{array}{l} y^2\,dx^2 - 2xy\,dx\,dy + x^2\,dy^2 \\ + y^2\,dy^2 + 2xy\,dx\,dy + x^2\,dx^2 \end{array}}}$$

$$= \frac{y\,dy + x\,dx}{\sqrt{y^2(dx^2 + dy^2) + x^2(dx^2 + dy^2)}}$$

$$= \frac{y\,dy + x\,dx}{\sqrt{(x^2 + y^2)(dx^2 + dy^2)}}$$

$$= \frac{y\,dy + x\,dx}{\sqrt{x^2 + y^2} . \sqrt{dx^2 + dy^2}}.$$

Nun ist aber

$$PG : PE = \mathrm{Sin}\,\delta : \mathrm{Sin}\,\beta, \text{ d. i.}$$

$$P : Q = \mathrm{Sin}\,\delta : \mathrm{Sin}\,\beta,$$

$$P : Q = \frac{y\,dy + x\,dx}{\sqrt{x^2 + y^2} . \sqrt{dx^2 + dy^2}} : \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$$

$$= \frac{y\,dy + x\,dx}{\sqrt{x^2 + y^2}} : dx,$$

$$Q = \frac{P\,dx\sqrt{x^2 + y^2}}{y\,dy + x\,dx}.$$

Es ist aber klar, daß man diese Betrachtung ganz auf dieselbe Art auch auf der andern Seite von CD in Beziehung auf die Curve $M'N'$ anstellen kann, und daß man daher, wenn man die auf jener Seite liegenden Ordinaten auch als positiv betrachtet, ganz auf dieselbe Art erhält:

$$Q' = \frac{P'dx'\sqrt{x'^2 + y'^2}}{y'dy' + x'dx'}.$$

Da nun nach der Bedingung der Aufgabe $Q = Q'$ seyn muß, so ist also für jede zwey Punkte in beiden Curven, wo P und P' bey gespanntem Seile liegen können:

$$\frac{P\,dx\sqrt{x^2 + y^2}}{y\,dy + x\,dx} = \frac{P'dx'\sqrt{x'^2 + y'^2}}{y'dy' + x'dx'},$$

welches seyn muß, wenn die beiden Gewichte P und P' überall im Gleichgewichte seyn sollen.

Es ist aber

$$CP^2 = CA^2 + AP^2 = x^2 + y^2,$$

$$CP'^2 = CA'^2 + A'P'^2 = x'^2 + y'^2,$$

$$CP = \sqrt{x^2 + y^2},\quad CP' = \sqrt{x'^2 + y'^2},$$

und immer

$$CP + CP' = PCP' = a, \text{ d. i. also}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x'^2 + y'^2} = a,$$

d. i. gleich einer constanten Größe.

Also durch Differenziation:

$$\tfrac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}.(2x\,dx + 2y\,dy) + \tfrac{1}{2}(x'^2 + y'^2)^{-\frac{1}{2}}.(2x'dx' + 2y'dy') = 0,$$

$$(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}.(x\,dx + y\,dy) + (x'^2 + y'^2)^{-\frac{1}{2}}.(x'dx' + y'dy') = 0,$$

$$\frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{x'dx' + y'dy'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = 0,$$

$$\frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = -\frac{x'dx' + y'dy'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}},$$

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x\,dx + y\,dy} = -\frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}}{x'dx' + y'dy'},$$

und daher, wenn man in der obigen Gleichung hiermit auf beiden Seiten dividirt, $Q = Q'$, wenn

$$P\,dx = -P'dx'$$

ist. Dies ist aber der Fall, wenn

$$Px + C = -P'x'$$

ist, wo C eine willkührliche Constans bezeichnet, oder, wenn man $C = Pc$ setzt:

$$Px + Pc = -P'x',$$
$$P(x + c) = -P'x',$$

wo c eine willkührliche Constans bedeutet.

Sey nun nach der in der analytischen Geometrie gewöhnlichen Bezeichnungsart

$$\varphi(x, y) = 0$$

die Gleichung der gegebenen Curve MN; so hat man in den Gleichungen:

$$\varphi(x, y) = 0,$$
$$P(x + c) = -P'x',$$
$$\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x'^2 + y'^2} = a,$$

drey Gleichungen mit x und y, aus welchen man also x und y eliminiren, und dadurch eine Gleichung zwischen x' und y' und bekannten Größen erhalten kann, welche demnach die gesuchte Gleichung der Gleichgewichtscurve $M'N'$ seyn wird.

§. 203.

Wir wollen hiervon nun die Anwendung auf den Fall machen, wenn die gegebene Curve MN ein Kreis ist, dessen Mittelpunkt in der Verticale CD liegt, so daß also, wenn r der Halbmesser dieses Kreises und α die Entfernung seines Mittelpunktes von dem Punkte C ist,

$$r^2 = (x - \alpha)^2 + y^2$$

die Gleichung dieses Kreises ist, und man nur folgende drey Gleichungen zur Bestimmung der Gleichung von $M'N'$ hat:

$$r^2 = (x - \alpha)^2 + y^2,$$
$$P(x + c) = -P'x',$$
$$\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x'^2 + y'^2} = a.$$

Also

$$r^2 = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + y^2$$
$$= x^2 + y^2 - 2\alpha x + \alpha^2,$$
$$\sqrt{x^2 + y^2} = a - \sqrt{x'^2 + y'^2},$$
$$x^2 + y^2 = (a - \sqrt{x'^2 + y'^2})^2,$$
$$Px + Pc = -P'x', \quad Px = -P'x' - Pc,$$
$$x = -\frac{P'x' + Pc}{P},$$

$$r^2 = (a - \sqrt{x'^2 + y'^2})^2 + \frac{2\alpha(P'x' + Pc)}{P} + \alpha^2$$
$$= a^2 - 2a\sqrt{x'^2 + y'^2} + x'^2 + y'^2 + \frac{2\alpha P'x'}{P} + 2\alpha c + \alpha^2$$
$$= a^2 - 2a\sqrt{x'^2 + y'^2} + x'^2 + y'^2 + 2bx' + 2\alpha c + \alpha^2,$$

wenn $\frac{\alpha P'}{P}$ der Kürze wegen $= b$ gesetzt wird,

$$2a\sqrt{x'^2 + y'^2} = x'^2 + y'^2 + 2bx' + a^2 + \alpha^2 - r^2 + 2\alpha c$$
$$= x'^2 + y'^2 + 2bx' + C,$$

für $C = a^2 + \alpha^2 - r^2 + 2\alpha c$.

Die willkührliche Constans c wird in allen den Fällen bestimmt, wo die Curve $M'N'$ durch einen gegebenen Punkt gehen soll, indem man dann die Coordinaten dieses Punktes in die Gleichung von $M'N'$, hier in die Gleichung

$$2a\sqrt{x'^2 + y'^2} = x'^2 + y'^2 + 2bx' + C,$$

für x' und y' setzt, und hierdurch eine Gleichung erhält, aus welcher sich c bestimmen läßt. Sollte z. B. in unserm Falle die Curve $M'N'$ durch den Punkt C gehen; so erhält man, indem man $x' = y' = 0$ setzt:

$$0 = C = a^2 + \alpha^2 - r^2 + 2\alpha c,$$

$$2\alpha c = r^2 - a^2 - \alpha^2,$$

$$c = \frac{r^2 - a^2 - \alpha^2}{2\alpha}.$$

Die Gleichung der durch C gehenden Gleichgewichtscurve für den gegebenen Kreis ist also

$$2a\sqrt{x'^2 + y'^2} = x'^2 + y'^2 + 2bx'.$$

Die hier zuletzt aufgelöste Aufgabe ist, wie man leicht sehen wird, keine andere, als die, welche der berühmte Marquis de l'Hospital in den Actis Eruditorum, menſ. Febr. 1695. p. 56. ſeqq., unter folgender Form aufgelöſt hat:

Um einen Punkt sey eine Brücke beweglich, in deren Schwerpunkte ein Seil befestigt ist, welches über eine vertical über dem Drehpunkte der Brücke befindliche Rolle geschlagen ist; an dem andern Ende dieses Seils wirkt ein Gewicht: man soll die krumme Linie finden, auf welcher dieses Gewicht mit der Brücke überall im Gleichgewichte ist.

Diese Aufgabe, welche auch praktisch bey Anlegung der Zugbrücken wichtig seyn kann, wurde dem Marquis de l'Hospital von einem geschickten Geometer, (Sauveur; m. s. Klügel's Mathematisches Wörterbuch, Th. 4., von Mollweide, S. 372.), den er am angeführten Orte in Analyſi Carteſiana exercitatiſſimum nennt, der sie aber ungeachtet aller Anstrengung nicht hatte auflösen können, vorgelegt; de l'Hospital löſ'te sie auf und fand die obige Gleichung. Auch Johann und Jacob Bernoulli und Leibnitz (Acta Eruditorum, a. a. 1695. p. 59. 65. 184.) beschäftigten sich mit dieser Aufgabe. Johann Bernoulli legte sie zuerst in der allgemeinen Form, wie sie von uns aufgelöſt worden, vor, und gab auch eine Auflösung, die aber nicht bloß auf statischen Principien, sondern auf einem Satze von der Bewegung des Schwerpunktes beruhet. Sie wird von ihm a. a. O. S. 61. so ausgedrückt:

„Data in plano verticali curva quavis, quaeritur in „eodem plano altera curva, ita ut duo pondera communi „funiculo trochleam positione datam ambienti, alligata „et curvis ubicunque imposita, semper sibi mutuo aequi-„librentur; vel, quod tantumdem est, minima vi move-„ri possint.„

In den Supplementis Actorum Eruditorum, Tom. II. 1696. p. 290., gab auch de l'Hospital eine Auflösung der allgemeinen Aufgabe.

Belidor, der in der Science des Ingénieurs, liv. 4. ch. 6., die Anwendung des oben aufgelös'ten besondern Falles für den Kreis auf die Erhebung der Zugbrücken zeigt, nennt die Gleichgewichtslinie die Sinusoide, weil er zur Construction die Sinus der Erhebungswinkel der beweglichen Brücke gebraucht. Indeß bedurfte es keines neuen Namens, weil schon Johann Bernoulli in den Actis Eruditorum, a. a. 1695. p. 60., die interessante Bemerkung gemacht hat, daß diese Linie, deren Gleichung nach dem Obigen

$$2a\sqrt{x'^2 + y'^2} = x'^2 + y'^2 + 2bx'$$

ist, zu dem Geschlechte der Cycloiden gehört, und eine solche Linie ist, die man gewöhnlich eine Epicycloide nennt.

Um dies zu beweisen, ist es nöthig, die Polargleichung der in Rede stehenden Curve zu suchen, wozu man auf folgende Art leicht gelangt.

Man nehme C (Fig. 110.) als Pol an, bezeichne die Polarwinkel durch φ und die Radii vectores durch z; so ist offenbar:

$$x'^2 + y'^2 = z^2,\quad \sqrt{x'^2 + y'^2} = z,\quad \text{und } x' = z \operatorname{Cos} \varphi.$$

Also nach gehöriger Substitution:

$$2az = z^2 + 2bz \operatorname{Cos} \varphi,$$

$$2a = z + 2b \operatorname{Cos} \varphi,$$

$$z = 2(a - b \operatorname{Cos} \varphi).$$

Nun unterscheide man folgende Fälle:

1) $a = b$,

wo also $z = 2(a - a \operatorname{Cos} \varphi)$.

Um C (Fig. 111.) als Mittelpunkt sey mit dem Halbmesser $CD = CL = a$, und um L ein eben solcher Kreis beschrieben. Ueber den Kreis um L lasse man nun von C an einen dritten eben so großen Kreis sich wälzen. P' sey der beschreibende Punkt. Zieht man nun LS, ST; so ist LST eine gerade Linie, da sich die beiden Kreise in S berühren, und es ist offenbar $CS = SP'$, oder $\angle SLC = \angle STP'$, und daher $UL = UT$. Aber $CL = P'T$, daher auch $CU = UP'$, und folglich, wenn man CP' zieht, da $\angle UCP' = \varphi$ ist:

$$CP' = z = 2UC \,.\, \operatorname{Cos} \varphi,$$

$$\text{oder } UC = \frac{z}{2 \operatorname{Cos} \varphi}.$$

Leicht erhellet nun auch, daß CP' parallel LT, und folglich

$$UC : UL = CP' : LT, \text{ d. i.}$$

$$UC : UC + CL = CP' : LT,$$

$$\frac{z}{2 \operatorname{Cos} \varphi} : \frac{z}{2 \operatorname{Cos} \varphi} + a = z : 2a,$$

$$\frac{1}{2 \operatorname{Cos} \varphi} : \frac{z}{2 \operatorname{Cos} \varphi} + a = 1 : 2a,$$

$$\frac{z}{2 \operatorname{Cos} \varphi} + a = \frac{2a}{2 \operatorname{Cos} \varphi},$$

$$z + 2a \operatorname{Cos} \varphi = 2a,$$

$$z = 2a - 2a \operatorname{Cos} \varphi,$$

$$z = 2(a - a \operatorname{Cos} \varphi).$$

Unsre Curve entsteht also in dem Falle, wo $b = a$ ist, wenn sich ein Kreis über einen andern eben so großen hinwälzt, indem der beschreibende Punkt in der Peripherie des sich wälzenden Kreises liegt, und ist also in diesem Falle eine gemeine Epicycloide. (M. s. z. B. Eytelwein's Statik, Th. 3. S. 16.)

2) $a < b$.

Also $z = 2(a - b \operatorname{Cos} \varphi)$.

Man beschreibe wieder aus C (Fig. 112.) als Mittelpunkt mit $CD = CL = a$ als Radius einen Kreis, nehme $CL' = b$, und beschreibe aus L' ebenfalls mit a als Radius einen Kreis, auf welchem sich von L'' an ein gleicher Kreis hinwälze. P' sey wieder der beschreibende Punkt, welcher hier eine solche Lage hat, daß $TP' = CL' = b$ ist. Mit P'' ruht der wälzende Kreis am Anfange auf L''. Man mache nun die Construction wie vorher, so ist offenbar:

$$SL'' = SP'', \text{ d. i. } SL'L'' = STP'',$$

$$L'U = TU, \quad L'L'' = TP'' = a,$$

$$L'C = TP' = b, \quad UC = UP', \quad CP' \text{ parallel } L'T.$$

$$CU : CP' = UL' : L'T,$$

$$CP' = 2CU \,.\, \operatorname{Cos} \varphi = z, \quad CU = \frac{z}{2 \operatorname{Cos} \varphi},$$

$$\frac{z}{2 \operatorname{Cos} \varphi} : z = b + \frac{z}{2 \operatorname{Cos} \varphi} : 2a,$$

$$\frac{1}{2 \operatorname{Cos} \varphi} : 1 = b + \frac{z}{2 \operatorname{Cos} \varphi} : 2a,$$

$$\frac{2a}{2 \operatorname{Cos} \varphi} = b + \frac{z}{2 \operatorname{Cos} \varphi},$$

$$2a = 2b \operatorname{Cos} \varphi + z,$$

$$z = 2(a - b \operatorname{Cos} \varphi).$$

Die von P' beschriebene Curve ist also mit der unsrigen einerley, und leztere also eine **verkürzte Epicycloide.** (**Eytelwein** a. a. O. S. 27.)

3) $a > b$.

Construction und Beweis mit den für diesen Fall nöthigen Modificationen nach Fig. 113. ganz wie vorher. P' ist wieder der beschreibende Punkt, und die Curve also eine **gestreckte Epicycloide.** (**Eytelwein** a. a. O. S. 28.)

Achtzehntes Kapitel.

Von der Vertheilung des Drucks auf die Unterstützungspunkte.

§. 204.

Es ist eine wichtige Aufgabe, den Druck zu finden, welchen jeder der Punkte, auf welchen ein schwerer Körper ruhet, erleidet. Die Auflösung dieser Aufgabe bietet aber eigenthümliche Schwierigkeiten dar, und erfordert noch andere Sätze zur Grundlage, als die gewöhnlichen Gesetze der Statik. Obgleich mehrere Mathematiker, z. B. Lambert, (Beyträge zum Gebrauche der Mathematik, zweyter Theil), Delanges, (Memorie di Matematica e Fisica della Società italiana, Tom. V. p. 107.), und d'Alembert, (Opuscules de Mathématiques, Tom. VIII. p. 36.), sich mit Fragen dieser Art beschäftigt haben; so hat doch nur Euler etwas Entscheidendes und Befriedigendes über diese Materie geliefert, und nur seine Behandlung verbreitet über die Sache Licht. Man sehe seine Abhandlung:

De pressione ponderis in planum, cui incumbit; in: Novae Commentationes Academiae scientiarum Petropolitanae, T. XVIII. 1773. p. 289. seqq.;

und:

Von dem Drucke eines mit einem Gewichte beschwerten Tisches auf eine Fläche. Aus den Papieren des sel. Euler gezogen, von Jacob Bernoulli; *) in Hindenburg's Archiv der reinen und angewandten Mathematik, I., Leipzig 1795, S. 74.

---

*) Nicht der berühmte älteste Bernoulli, sondern ein Sohn des im Jahre 1790 als Professor der Mathematik zu Basel verstorbenen Johann Bernoulli. Er starb, als Akademiker zu Petersburg, zu früh für die Wissenschaft, am 3ten Julius 1789, beym Baden in der Newa.

Außerdem s. m. noch mehrere der in der Einleitung angeführten Schriften über die Statik, hauptsächlich Eytelwein, (Th. 2. S. 63.), und Ide, (Th. 1. S. 116.).

§. 205.

Aufgabe. Eine feste wagerechte Ebene ABC (Fig. 114.) sey in den drey Punkten A, B, C unterstützt; in D befinde sich ein Gewicht P: man sucht den Druck Π, Π', Π'' auf jeden der drey Unterstützungspunkte A, B, C.

Auflösung. Man kann sich vorstellen, daß Π, Π', Π'', als nach verticaler Richtung aufwärts wirkende Kräfte betrachtet, mit der ihnen parallelen Kraft P im Gleichgewichte sind, so daß also nach §. 35.:

$$P = \Pi + \Pi' + \Pi''.$$

Denkt man sich jetzt AB als eine Drehaxe, d. i. nach §. 63. als Axe der z; so sind die in der Ebene der xy wirkenden Kräfte nach demselben Paragraphen in dem vorliegenden Falle offenbar $= P$ und $=$ Null für die Kraft P, und $= \Pi''$ und $=$ Null für die Kraft Π'', da in diesem Falle offenbar $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 0$ oder $= 180^\circ$, $\alpha' = 90^\circ$, $\beta' = 0$ oder $= 180^\circ$ ist. Also, wenn ε die Entfernung des Punktes D von AB und e'' die Entfernung des Punktes C von AB bezeichnet, nach §. 63. am Ende:

$$\varepsilon P - e''\Pi'' = 0, \quad \varepsilon P = e''\Pi'',$$

und folglich

$$\Pi'' = \frac{\varepsilon}{e''} P.$$

Eben so ist, wenn ε' die Entfernung des Punktes D von AC und e' die Entfernung des Punktes B von AC bezeichnet,

$$\Pi' = \frac{\varepsilon'}{e'} P,$$

und folglich

$$\Pi = P - \Pi' - \Pi'' = P - \frac{\varepsilon}{e''}P - \frac{\varepsilon'}{e'}P, \text{ d. i.}$$

$$\Pi = \left(1 - \frac{\varepsilon}{e''} - \frac{\varepsilon'}{e'}\right)P.$$

Zieht man die Linien AD, BD, CD; so ist

$$\triangle ABD = \frac{AB}{2}.\varepsilon, \quad \triangle ABC = \frac{AB}{2}.e'';$$

$$\triangle ACD = \frac{AC}{2}.\varepsilon', \quad \triangle ABC = \frac{AC}{2}.e'.$$

Also

$$\frac{\varepsilon}{e''} = \frac{\triangle ABD}{\triangle ABC}, \quad \frac{\varepsilon'}{e'} = \frac{\triangle ACD}{\triangle ABC},$$

und folglich

$$1 - \frac{\varepsilon}{e''} - \frac{\varepsilon'}{e'} = 1 - \frac{\triangle ABD}{\triangle ABC} - \frac{\triangle ACD}{\triangle ABC}$$

$$= \frac{\triangle ABC - \triangle ABD - \triangle ACD}{\triangle ABC}$$

$$= \frac{\triangle BCD}{\triangle ABC}.$$

Demnach ist

$$\Pi = \frac{\triangle BCD}{\triangle ABC}P,$$

$$\Pi' = \frac{\triangle ACD}{\triangle ABC}P,$$

$$\Pi'' = \frac{\triangle ABD}{\triangle ABC}P,$$

und die Pressungen auf die Punkte A, B, C verhalten sich also wie die Dreyecke BCD, ACD, ABD.

Bezeichnet man die Linien AD, BD, CD durch a, b, c, und die Winkel BDC, ADC, ADB durch α, β, γ; so ist bekanntlich

$$\triangle BCD = \tfrac{1}{2}bc\,\mathrm{Sin}\,\alpha, \quad \triangle ADC = \tfrac{1}{2}ac\,\mathrm{Sin}\,\beta, \quad \triangle ABD = \tfrac{1}{2}ab\,\mathrm{Sin}\,\gamma,$$

$$\triangle ABC = \tfrac{1}{2}(bc\,\mathrm{Sin}\,\alpha + ac\,\mathrm{Sin}\,\beta + ab\,\mathrm{Sin}\,\gamma).$$

Also

$$\Pi = \frac{P \,.\, bc \operatorname{Sin} \alpha}{bc \operatorname{Sin} \alpha + ac \operatorname{Sin} \beta + ab \operatorname{Sin} \gamma},$$

$$\Pi' = \frac{P \,.\, ac \operatorname{Sin} \beta}{bc \operatorname{Sin} \alpha + ac \operatorname{Sin} \beta + ab \operatorname{Sin} \gamma},$$

$$\Pi'' = \frac{P \,.\, ab \operatorname{Sin} \gamma}{bc \operatorname{Sin} \alpha + ac \operatorname{Sin} \beta + ab \operatorname{Sin} \gamma}.$$

Ist der Punkt D der Schwerpunkt des Dreyecks ABC; so sind bekanntlich die Dreyecke BCD, ACD, ABD einander gleich, und die drey Punkte A, B, C leiden demnach einen gleich starken Druck, oder der Druck des Gewichts P vertheilt sich gleich stark unter die Unterstützungspunkte.

Bey einem genau gearbeiteten Tische mit drey Füßen kann man sich das Gewicht des Tischblattes in dem Schwerpunkte der dreyseitigen Oberfläche desselben vereinigt denken, und die Füße eines solchen Tisches leiden also gleichen Druck.

Lägen die drey Punkte A, B, C in gerader Linie, so verschwinden die Dreyecke ABC, BCD, ADC, ABD, und man erhält:

$$\Pi = \frac{0}{0},\ \Pi' = \frac{0}{0},\ \Pi'' = \frac{0}{0};$$

unbestimmte Werthe.

Diese Werthe zeigen, daß der allgemeine Fall auf diesen besondern nicht ausgedehnt werden kann; denn die Unbestimmtheit liegt, wie Ide a. a. O. S. 119. ganz richtig bemerkt, gewiß nicht in der Sache selbst, sondern zeigt bloß, daß man mit den bisherigen Gesetzen des Gleichgewichts in diesem Falle nicht ausreicht. Liegt ein Balken auf drey Stützen, deren Köpfe genau in einer Horizontalebene liegen, so trägt nothwendig jede Stütze einen bestimmten Theil seines Gewichts, und leidet daher einen bestimmten Druck. Die Vertheilung des Drucks geschieht daher gewiß nach einem bestimmten Gesetze, und richtet sich nach der verschiedenen Stellung der Stützen. Es wird also hier eine sich mehr der Natur des Gegenstandes anschließende Behandlung unsrer Aufgabe fühlbar, und zwar noch um so mehr, weil man mit der obigen Methode schon bey vier Unterstützungspunkten gar nicht mehr ausreichen würde.

§. 206.

Euler macht, um zu einer allgemeinen Auflösung zu gelangen, die Voraussetzung, daß, wenn man sich vorstellte, die Unterstützungspunkte gäben etwas nach, die Tiefen, zu welchen sie einsinken würden, dem Drucke proportional sind; eine Voraussetzung, welche, so allgemein, wie hier, ausgedrückt, allerdings etwas hypothetisch klingt. In dem besondern Falle aber, in welchem sie hier bloß gebraucht wird, ist sie vollkommener Evidenz fähig, und läßt sich nach Ide a. a. O. S. 122. in folgendem Lehrsatze darstellen und beweisen.

Lehrsatz. Wenn ein Faden durch ein angehängtes Gewicht um einen unendlich kleinen Theil ausgedehnt wird, so ist die Aenderung seiner Länge dem Gewichte proportional.

Beweis. Man setze, die Länge l des Fadens bekomme durch das angehängte Gewicht P die Ausdehnung ω. Machte diese einen bedeutenden Theil der Länge aus, so befände sich der Faden in einem gewaltsamen Zustande, und ein eben so großes Gewicht, dem vorigen hinzugefügt, könnte nicht von neuem die Aenderung ω bewirken, sondern die bewirkte Aenderung ω' wird offenbar immer $< \omega$ seyn, und so würden die durch Anhängung neuer Gewichte, die alle $= P$, bewirkten Aenderungen ω'', ω''', ω'''' u. s. w. offenbar alle immer kleiner und kleiner werden. Die durch das Gewicht nP bewirkte Aenderung der Länge würde also durch die convergirende Reihe

$$\omega + \omega' + \omega'' + \omega''' + \omega'''' + \ldots$$

mit n Gliedern dargestellt. Je kleiner aber die Aenderung ω ist, mit desto mehr Genauigkeit kann man annehmen, daß der Faden sich im natürlichen Zustande befinde, und desto mehr werden sich alle folgende Aenderungen der ersten ω nähern, und für eine unendlich kleine Aenderung ω kann man daher alle folgende Aenderungen dieser ersten gleich setzen, so daß also die durch das Gewicht nP hervorgebrachte Aenderung unter dieser Voraussetzung durch $n\omega$ dargestellt wird.

Sey nun die durch die Kraft $\frac{P}{m}$ hervorgebrachte Aenderung des Fadens $= x$; so ist, wenn wir diese Aenderung, wie immer, als unendlich klein voraussetzen, nach dem Obigen die durch die Kraft $m \cdot \frac{P}{m} = P$ hervorgebrachte Aenderung $= mx$. Diese Aenderung ist aber nach der Annahme $= \omega$. Also $mx = \omega$, und folglich $x = \frac{\omega}{m}$, so daß also durch die Kraft $\frac{P}{m}$ die Aenderung $\frac{\omega}{m}$ bewirkt wird.

Wird also durch die Kraft P die unendlich kleine Aenderung ω bewirkt; so bewirkt die Kraft $\frac{P}{m}$ die Aenderung $\frac{\omega}{m}$, und folglich, nach dem zu Anfange Bewiesenen, die Kraft $n \cdot \frac{P}{m} = \frac{n}{m} P$ die Aenderung $n \cdot \frac{\omega}{m} = \frac{n}{m} \omega$.

Man habe nun zwey Kräfte P und P', für welche

$$P : P' = n : m$$

sey, wo n und m positive ganze Zahlen sind, da bekanntlich jedes Verhältniß sowohl in dem Falle der Commensurabilität als der Incommensurabilität völlig genau oder doch ohne allen merklichen Fehler durch ganze Zahlen dargestellt werden kann. Die durch P' bewirkte Aenderung des Fadens sey $= \omega$; so ist die durch $P = \frac{n}{m} P'$ bewirkte Aenderung nach dem Obigen $= \frac{n}{m} \omega = \omega'$. Also

$$\omega' : \omega = \frac{n}{m} \omega : \omega = \frac{n}{m} : 1 = n : m.$$

Folglich

$$P : P' = \omega' : \omega,$$

w. z. b. w.

§. 207.

Sey nun eine horizontale gerade Linie, an welcher in D (Fig. 115.) ein Gewicht $= P$ hängt, in mehrern Punkten, deren Abscissen, D als Anfang angenommen, wir durch x, x', x'', x''' u. s. w. bezeichnen wollen, unterstützt; so lassen sich die entsprechenden Pressungen Π, Π', Π'', Π''' u. s. w. auf folgende Weise bestimmen.

Wie in §. 205. kann man auch hier die Kraft $-P$ so betrachten, als sey sie mit den Kräften Π, Π', Π'', Π''' u. s. w. im Gleichgewichte, so daß nach §. 35., da hier D der Anfang der Abscissen ist,

$$P = \Pi + \Pi' + \Pi'' + \Pi''' + \ldots, \text{ und}$$
$$0 = \Pi x + \Pi' x' + \Pi'' x'' + \Pi''' x''' + \ldots$$

ist.

Denkt man sich aber, daß anstatt der Stützen die gerade Linie in den Stützpunkten an Fäden aufgehängt sey, und nimmt an, daß diese als hinlänglich stark angenommenen Fäden durch die Kräfte Π, Π', Π'', Π''' u. s. w. eine unendlich kleine Ausdehnung erleiden, und um die Größen y, y', y'', y''' u. s. w. verlängert werden; so ist nach §. 206.:

$$y : y' : y'' : y''' : \text{u. s. w.} = \Pi : \Pi' : \Pi'' : \Pi''' : \text{u. s. w.}$$

Da aber die Endpunkte von y, y', y'', y''' u. s. w. alle immer in der gegebenen geraden Linie liegen; so ist nach bekannten Sätzen der analytischen Geometrie:

$$y = ax + b,$$
$$y' = ax' + b,$$
$$y'' = ax'' + b,$$
$$y''' = ax''' + b,$$
u. s. w.,

wo a und b zwey constante Größen sind.

Da nun $\frac{y}{\Pi}$ vermöge der obigen Proportion eine beständige Größe ist, welche wir durch c bezeichnen wollen; so ist

$$\frac{y}{c}=\Pi,\ \frac{y'}{c}=\Pi',\ \frac{y''}{c}=\Pi'',\ \frac{y'''}{c}=\Pi''',\ \text{u. s. w.}$$

Also

$$o=\frac{xy}{c}+\frac{x'y'}{c}+\frac{x''y''}{c}+\frac{x'''y'''}{c}+\cdots,$$

oder

$$o=xy+x'y'+x''y''+x'''y'''+\cdots,$$

und folglich, wenn man für die y die obigen Werthe substituirt:

$$o=\begin{cases} a(x^2+x'^2+x''^2+x'''^2+\ldots) \\ +b(x+x'+x''+x'''+\ldots),\end{cases}$$

welche Gleichung wir der Kürze wegen so darstellen wollen:

$$o=a\Sigma x^2+b\Sigma x.$$

Vermöge der Gleichung

$$P=\Pi+\Pi'+\Pi''+\Pi'''+\cdots$$

ist

$$P=\frac{y}{c}+\frac{y'}{c}+\frac{y''}{c}+\frac{y'''}{c}+\cdots,$$

$$cP=y+y'+y''+y'''+\cdots$$

$$=\begin{cases} a(x+x'+x''+x'''+\ldots) \\ +b+b+b+b+\ldots\end{cases}$$

$$=a\Sigma x+nb,$$

wenn die Anzahl der Stützpunkte $=n$ ist. Aus den beiden Gleichungen:

$$o=a\Sigma x^2+b\Sigma x,\quad cP=a\Sigma x+nb,$$

erhält man:

$$o=na\Sigma x^2+nb\Sigma x,$$

$$cP\Sigma x=a(\Sigma x)^2+nb\Sigma x,$$

und:

$$o=a\Sigma x^2.\Sigma x+b(\Sigma x)^2,$$

$$cP\Sigma x^2=a\Sigma x^2.\Sigma x+nb\Sigma x^2.$$

Also

$$-cP\Sigma x=a\{n\Sigma x^2-(\Sigma x)^2\},$$

$$cP\Sigma x^2=b\{n\Sigma x^2-(\Sigma x)^2\},$$

und folglich

$$a = -\frac{cP\Sigma x}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}, \quad b = \frac{cP\Sigma x^2}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2};$$

$$\frac{a}{c} = -\frac{P\Sigma x}{n\Sigma x^2 - (\Sigma)x^2}, \quad \frac{b}{c} = \frac{P\Sigma x^2}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}.$$

Nun ist überhaupt $\Pi^{(n)} = \frac{y^{(n)}}{c} = \frac{ax^{(n)} + b}{c}$

$$= \frac{a}{c} x^{(n)} + \frac{b}{c}.$$

Also

$$\Pi^{(n)} = -\frac{P\Sigma x}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} x^{(n)} + \frac{P\Sigma x^2}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2},$$

$$\Pi^{(n)} = \frac{\Sigma x^2 - x^{(n)}.\,\Sigma x}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}.\,P.$$

Ist die gerade Linie in drey Punkten unterstützt, und z. B. $x = a$, $x' = -b$, $x'' = c$; so ist

$$\Pi = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - a(a - b + c)}{3(a^2 + b^2 + c^2) - (a - b + c)^2}.\,P$$

$$= \frac{(b^2 + c^2 + ab - ac)P}{2(a^2 + b^2 + c^2 + ab - ac + bc)},$$

$$\Pi' = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + b(a - b + c)}{3(a^2 + b^2 + c^2) - (a - b + c)^2}.\,P$$

$$= \frac{(a^2 + c^2 + ab + bc)P}{2(a^2 + b^2 + c^2 + ab - ac + bc)},$$

$$\Pi'' = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - c(a - b + c)}{3(a^2 + b^2 + c^2) - (a - b + c)^2}.\,P$$

$$= \frac{(a^2 + b^2 - ac + bc)P}{2(a^2 + b^2 + c^2 + ab - ac + bc)}.$$

So vertheilt sich der Druck auf die drey Unterstützungspunkte, und die Vertheilung geschieht also nach einem bestimmten Gesetze, wie schon oben behauptet wurde.

Liegen auf jeder Seite des Aufhängepunktes n Stützpunkte, und immer je zwey in gleichen Entfernungen von jenem; so ist $\Sigma x = 0$, und folglich

$$\Pi^{(n)} = \frac{\Sigma x^2}{2n\Sigma x^2} \cdot P = \frac{P}{2n},$$

so daß also der Druck auf alle Stützpunkte derselbe ist.

§. 208.

Hätte die gerade Linie des vorhergehenden Paragraphen eine schiefe Lage, und wäre sie gegen den Horizont um den Winkel α geneigt; so sey wieder $\Pi^{(n)}$ der Verticaldruck auf irgend einen der gegebenen Punkte. Dieser Verticaldruck läßt sich in $\Pi^{(n)} . \mathrm{Cos}\,\alpha$, senkrecht auf die gegebene gerade Linie, und $\Pi^{(n)} . \mathrm{Sin}\,\alpha$, längs der geraden Linie, zerlegen. Aber auch die Kraft P zerlegt sich in $P\mathrm{Cos}\,\alpha$ und $P\mathrm{Sin}\,\alpha$ nach denselben Richtungen. Der Druck $\Pi^{(n)} . \mathrm{Cos}\,\alpha$ rührt bloß von der Kraft $P\mathrm{Cos}\,\alpha$ her, und es ist folglich nach dem vorhergehenden Paragraphen:

$$\Pi^{(n)} . \mathrm{Cos}\,\alpha = \frac{\Sigma x^2 - x^{(n)} . \Sigma x}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} . P\mathrm{Cos}\,\alpha, \text{ d. i.}$$

$$\Pi^{(n)} = \frac{\Sigma x^2 - x^{(n)} . \Sigma x}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} P,$$

so daß also der verticale Druck bey einer schiefen Linie eben so wie bey einer horizontalen gefunden wird.

Der Druck längs der geraden Linie auf den obigen Punkt ist

$$= \Pi^{(n)} . \mathrm{Sin}\,\alpha = \frac{\Sigma x^2 - x^{(n)} . \Sigma x}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} P\,\mathrm{Sin}\,\alpha.$$

Ist z. B. eine schief liegende Linie in drey Punkten unterstützt, deren Abscissen a, $-a$ und Null sind; so ist $\Sigma x^2 = 2a^2$, $\Sigma x = 0$. Also

$$\Pi = \Pi' = \Pi'' = \frac{2a^2}{3 \cdot 2a^2} P = \tfrac{1}{3} P.$$

Ist die Kraft wieder in der Mitte der Linie aufgehängt, und sind die Abscissen der drey Stützpunkte a, $-a$ und $\frac{1}{2}a$; so ist

$$\Sigma x^2 = a^2 + a^2 + \tfrac{1}{4}a^2 = \tfrac{9}{4}a^2,$$
$$\Sigma x = a - a + \tfrac{1}{2}a = \tfrac{1}{2}a.$$

Also

$$\Pi = \frac{\frac{9}{4}a^2 - a\,.\,\frac{1}{2}a}{3\cdot\frac{9}{4}a^2 - \frac{1}{4}a^2}P = \frac{9a^2 - 2a^2}{27a^2 - a^2}P = \tfrac{7}{26}P,$$

$$\Pi' = \frac{\frac{9}{4}a^2 + a\,.\,\frac{1}{2}a}{3\cdot\frac{9}{4}a^2 - \frac{1}{4}a^2}P = \frac{9a^2 + 2a^2}{27a^2 - a^2}P = \tfrac{11}{26}P,$$

$$\Pi'' = \frac{\frac{9}{4}a^2 - \frac{1}{4}a^2}{3\cdot\frac{9}{4}a^2 - \frac{1}{4}a^2}P = \frac{9a^2 - a^2}{27a^2 - a^2}P = \tfrac{8}{26}P = \tfrac{4}{13}P.$$

§. 209.

Aufgabe. Sey jetzt eine horizontale Ebene, an welcher in einem bestimmten Punkte ein Gewicht hängt, in mehrern Punkten unterstützt: man sucht den Druck auf jeden dieser Punkte.

Auflösung. Das an der Ebene hängende Gewicht sey wie gewöhnlich $= P$, und a, b seyen die Coordinaten des Aufhängepunktes in Beziehung auf ein willkührliches rechtwinkliges Coordinatensystem in der gegebenen Ebene. Die Coordinaten der Stützpunkte seyen x, y; x', y'; x'', y''; x''', y'''; u. s. w., und die gesuchten Pressungen auf diese Punkte Π, Π', Π'', Π''' u. s. w. Da man Π, Π', Π'', Π''' u. s. w. als parallele Kräfte betrachten kann, welche mit der Kraft P im Gleichgewichte sind; so ist nach §. 38.:

$$\Pi + \Pi' + \Pi'' + \Pi''' + \ldots = P,$$
$$\Pi x + \Pi' x' + \Pi'' x'' + \Pi''' x''' + \ldots = Pa,$$
$$\Pi y + \Pi' y' + \Pi'' y'' + \Pi''' y''' + \ldots = Pb,$$

wo zwey verticale, durch die beiden Coordinatenaxen gehende, Ebenen die Ebenen sind, auf welche die Angriffspunkte der Kräfte bezogen werden.

Denkt man sich nun wieder die gegebene Ebene in den Unterstützungspunkten anstatt der Stützen an Fäden aufgehängt, welche als von einerley Natur betrachtet werden, und die stark genug sind, um nur eine unendlich kleine Ausdehnung zu erleiden; so verhalten sich die Ausdehnungen, welche wir durch α, α', α'', α''' u. s. w. bezeichnen wollen, nach §. 206. wie die Kräfte Π, Π', Π'', Π''' u. s. w., so daß also

$$\alpha : \alpha' : \alpha'' : \alpha''' : \text{u. s. w.} = \Pi : \Pi' : \Pi'' : \Pi''' : \text{u. s. w.},$$

$$\alpha : \Pi = \alpha' : \Pi' = \alpha'' : \Pi'' = \alpha''' : \Pi''' = \text{u. s. w.},$$

und folglich jedes dieser Verhältnisse dem constanten Verhältnisse $1 : \gamma$, wo γ eine gewisse constante Größe bezeichnet, gleich ist. Es ist demnach

$$\Pi = \gamma\alpha,\ \Pi' = \gamma\alpha',\ \Pi'' = \gamma\alpha'',\ \Pi''' = \gamma\alpha''',\ \text{u. s. w.},$$

oder überhaupt

$$\Pi^{(n)} = \gamma\alpha^{(n)},$$

wo $^{(n)}$ wie früher ein bloßer Index, kein Exponent, ist.

Nimmt man nun die gegebene horizontale Ebene als Ebene der xy an; so ist ihre Gleichung in der Lage, welche sie durch die Ausdehnung der Fäden erhält, nach bekannten Sätzen der analytischen Geometrie:

$$A + Bx + Cy + Dz = 0,$$

welche man aber auch, wie leicht erhellet, so darstellen kann:

$$z = A + Bx + Cy,$$

wo aber die hiesigen A, B, C natürlich andere Bedeutungen haben, als die vorhergehenden. Die Ausdehnungen α, α', α'' u. s. w. sind mit den Coordinaten z einerley, und man hat demnach überhaupt:

$$\alpha^{(n)} = A + Bx^{(n)} + Cy^{(n)}.$$

Also

$$\Pi^{(n)} = \gamma A + \gamma Bx^{(n)} + \gamma Cy^{(n)}.$$

Folglich

$$\Pi = \gamma A + \gamma Bx + \gamma Cy,$$
$$\Pi' = \gamma A + \gamma Bx' + \gamma Cy',$$
$$\Pi'' = \gamma A + \gamma Bx'' + \gamma Cy'',$$
$$\Pi''' = \gamma A + \gamma Bx''' + \gamma Cy''',$$
$$\text{u. s. w.} \qquad \text{u. s. w.};$$

und folglich, wenn die Anzahl der Stützpunkte $= n$ ist, wenn man auf beiden Seiten addirt, nach dem Vorhergehenden:

$$P = n\gamma A + \gamma B\Sigma x + \gamma C\Sigma y,$$
$$P = nA' + B'\Sigma x + C'\Sigma y,$$

für $\gamma A = A'$, $\gamma B = B'$, $\gamma C = C'$.

Ferner wegen der zwey letzten der obigen drey Hauptgleichungen:

$$\Pi x = \gamma Ax + \gamma Bx^2 + \gamma Cxy,$$
$$\Pi' x' = \gamma Ax' + \gamma Bx'^2 + \gamma Cx'y',$$
$$\Pi'' x'' = \gamma Ax'' + \gamma Bx''^2 + \gamma Cx''y'',$$
$$\Pi''' x''' = \gamma Ax''' + \gamma Bx'''^2 + \gamma Cx'''y''',$$
u. s. w. u. s. w.;

und eben so:

$$\Pi y = \gamma Ay + \gamma Bxy + \gamma Cy^2,$$
$$\Pi' y' = \gamma Ay' + \gamma Bx'y' + \gamma Cy'^2,$$
$$\Pi'' y'' = \gamma Ay'' + \gamma Bx''y'' + \gamma Cy''^2,$$
$$\Pi''' y''' = \gamma Ay''' + \gamma Bx'''y''' + \gamma Cy'''^2,$$
u. s. w. u. s. w.

Also wieder durch beiderseitige Addition:

$$Pa = \gamma A\Sigma x + \gamma B\Sigma x^2 + \gamma C\Sigma xy,$$
$$Pb = \gamma A\Sigma y + \gamma B\Sigma xy + \gamma C\Sigma y^2,$$

oder nach dem Obigen:

$$Pa = A'\Sigma x + B'\Sigma x^2 + C'\Sigma xy,$$
$$Pb = A'\Sigma y + B'\Sigma xy + C'\Sigma y^2.$$

Aus den drey Gleichungen:

$$P = nA' + B'\Sigma x + C'\Sigma y,$$
$$Pa = A'\Sigma x + B'\Sigma x^2 + C'\Sigma xy,$$
$$Pb = A'\Sigma y + B'\Sigma xy + C'\Sigma y^2,$$

kann man durch Elimination A', B', C' bestimmen, woraus der Druck $\Pi^{(n)}$ dann leicht bestimmt werden kann, weil nach dem Obigen

$$\Pi^{(n)} = \gamma A + \gamma Bx^{(n)} + \gamma Cy^{(n)} = A' + B'x^{(n)} + C'y^{(n)}$$

ist.

Sey z. B. eine Ebene in vier Punkten unterstützt, deren Verbindungslinien ein Rechteck bilden, dessen zwey Seiten a', b' seyen. Der eine Endpunkt der Seite a' sey der Anfang und a' selbst die Axe der Abscissen; so sind die Coordinaten der vier Stützpunkte:

$$0,\ 0;\quad a',\ 0;\quad a',\ b';\quad 0,\ b'.$$

Also

$$\Sigma x = a' + a' = 2a';$$
$$\Sigma y = b' + b' = 2b';$$
$$\Sigma x^2 = a'^2 + a'^2 = 2a'^2;$$
$$\Sigma y^2 = b'^2 + b'^2 = 2b'^2;$$
$$\Sigma xy = a'b'.$$

Man hat demnach folgende Gleichungen:

$$P = 4A' + 2B'a' + 2C'b',$$
$$Pa = 2A'a' + 2B'a'^2 + C'a'b',$$
$$Pb = 2A'b' + B'a'b' + 2C'b'^2.$$

Also

$$Pa' = 4A'a' + 2B'a'^2 + 2C'a'b',$$
$$2Pa = 4A'a' + 4B'a'^2 + 2C'a'b',$$
$$(2a - a')P = 2B'a'^2,\quad B' = \frac{(2a - a')P}{2a'^2},$$
$$Pb' = 4A'b' + 2B'a'b' + 2C'b'^2,$$
$$2Pb = 4A'b' + 2B'a'b' + 4C'b'^2,$$
$$(2b - b')P = 2C'b'^2,\quad C' = \frac{(2b - b')P}{2b'^2},$$
$$P = 4A' + \frac{(2a - a')P}{a'} + \frac{(2b - b')P}{b'}$$
$$= 4A' + 2\left(\frac{a}{a'} + \frac{b}{b'}\right)P - 2P,$$
$$4A' = \left(3 - \frac{2a}{a'} - \frac{2b}{b'}\right)P,\quad A' = \left(\tfrac{3}{4} - \frac{a}{2a'} - \frac{b}{2b'}\right)P.$$

Also

$$\Pi = A' + B'.0 + C'.0 = \left(\tfrac{3}{4} - \frac{a}{2a'} - \frac{b}{2b'}\right)P,$$

$$\Pi' = A' + B'.a' + C'.o = \left(\tfrac{1}{4} + \frac{a}{2a'} - \frac{b}{2b'}\right)P,$$

$$\Pi'' = A' + B'.a' + C'.b' = \left(\frac{a}{2a'} + \frac{b}{2b'} - \tfrac{1}{4}\right)P,$$

$$\Pi''' = A' + B'.o + C'.b' = \left(\tfrac{1}{4} - \frac{a}{2a'} + \frac{b}{2b'}\right)P.$$

Ist der Aufhängepunkt des Gewichts der Mittelpunkt des Rechtecks, wie es bey einem Tische mit vier Füßen, wo der Schwerpunkt des Tischblattes in die Mitte desselben fällt, der Fall ist; so ist $a = \tfrac{1}{2}a'$, $b = \tfrac{1}{2}b'$, und folglich $\frac{a}{a'} = \tfrac{1}{2}$, $\frac{b}{b'} = \tfrac{1}{2}$, $\frac{a}{2a'} = \tfrac{1}{4}$, $\frac{b}{2b'} = \tfrac{1}{4}$. Also

$$\Pi = (\tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4})P = \tfrac{1}{4}P,$$
$$\Pi' = (\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4})P = \tfrac{1}{4}P,$$
$$\Pi'' = (\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4})P = \tfrac{1}{4}P,$$
$$\Pi''' = (\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4})P = \tfrac{1}{4}P,$$

so daß also der Druck auf die vier Füße gleich vertheilt wird.

Liegt der Aufhängepunkt des Gewichts in einem der Endpunkte des Rechtecks, z. B. in dem Punkte, dessen Coordinaten a' und o sind; so ist $a = a'$ und $b = o$. Also

$$\Pi = (\tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{2})P = \tfrac{1}{4}P,$$
$$\Pi' = (\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2})P = \tfrac{3}{4}P,$$
$$\Pi'' = (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4})P = \tfrac{1}{4}P,$$
$$\Pi''' = (\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2})P = -\tfrac{1}{4}P,$$

wo der negative Druck Π''' anzeigt, daß der Punkt, welchem dieser Druck entspricht, sich mit einer Kraft $\tfrac{1}{4}P$ von seiner Stütze aufwärts zu bewegen strebt.

Ist $a' = b'$, und folglich das Rechteck ein Quadrat; so ist

$$\Pi = \left(\tfrac{3}{4} - \frac{a+b}{2a'}\right)P,$$

$$\Pi' = \left(\tfrac{1}{4} + \frac{a-b}{2a'}\right)P,$$

$$\Pi'' = \left(\frac{a+b}{2a'} - \tfrac{1}{4}\right) P,$$

$$\Pi''' = \left(\tfrac{1}{4} - \frac{a-b}{2a'}\right) P.$$

Bey einem halbrunden Tische mit drey Füßen, dessen Halbmesser $= r$ ist, sind, wenn man den Mittelpunkt als Anfang und die gerade Kante desselben als Axe der Abscissen annimmt, die Coordinaten der Stützpunkte:

$$r,\ 0;\ 0,\ r;\ -r,\ 0.$$

Also

$$\Sigma x = r + 0 - r = 0;$$
$$\Sigma y = 0 + r + 0 = r;$$
$$\Sigma x^2 = r^2 + 0 + r^2 = 2r^2;$$
$$\Sigma y^2 = 0 + r^2 + 0 = r^2;$$
$$\Sigma xy = 0 . r + r . 0 - r . 0 = 0.$$

Die Coordinaten des Schwerpunktes, d. i. des Punktes, in welchem man sich das Gewicht des Tischblattes hängend denken muß, sind nach §. 111.: $0,\ \frac{4r}{3\pi}$.

Also

$$P = 3A' + rC',$$
$$0 = 2B'r^2,$$
$$\frac{4Pr}{3\pi} = rA' + C'r^2.$$

Demnach $B' = 0$, und

$$rP = 3rA' + C'r^2,$$
$$\frac{4Pr}{3\pi} = rA' + C'r^2,$$
$$\left(1 - \frac{4}{3\pi}\right) Pr = 2rA',$$
$$A' = \frac{(3\pi - 4) P}{6\pi},$$

$$rC' = P - 3A' = P - \frac{(3\pi - 4)P}{2\pi}$$

$$= \frac{(2\pi - 3\pi + 4)P}{2\pi}$$

$$= \frac{(4 - \pi)P}{2\pi},$$

$$C' = \frac{(4 - \pi)P}{2r\pi}.$$

Also

$$\Pi = A' + B'r = A' = \frac{(3\pi - 4)P}{6\pi},$$

$$\Pi' = A' + B'.0 + C'.r = \frac{(3\pi - 4)P}{6\pi} + \frac{(4 - \pi)P}{2\pi}$$

$$= \frac{(3\pi - 4 + 12 - 3\pi)P}{6\pi} = \frac{8P}{6\pi} = \frac{4P}{3\pi},$$

$$\Pi'' = A' + B'.(-r) + C'.0 = A' = \frac{(3\pi - 4)P}{6\pi}.$$

Der Druck auf die Füße ist also unabhängig vom Halbmesser des Tisches. Auf die beiden Eckfüße ist der Druck gleich, und auf den mittlern Fuß $= \frac{4P}{3\pi}$, am größten. Denn es ist

$$4P > \pi P, \text{ da } \pi = 3,14 \ldots.$$

Also

$$12P > 3\pi P, \quad 8P > (3\pi - 4)P,$$

$$4P > \frac{(3\pi - 4)P}{2}, \quad \frac{4P}{3\pi} > \frac{(3\pi - 4)P}{6\pi}.$$

Ist der runde Tisch ein Ecktisch und seine Oberfläche ein Quadrant; so nehme man den Mittelpunkt als Anfang und einen äußersten Halbmesser als Axe der Coordinaten an, und die Coordinaten der drey Stützpunkte sind:

$$0, 0; \quad r, 0; \quad 0, r.$$

Also

$$\Sigma x = 0 + r + 0 = r;$$

$$\Sigma y = 0 + 0 + r = r;$$

$$\Sigma x^2 = 0 + r^2 + 0 = r^2;$$
$$\Sigma y^2 = 0 + 0 + r^2 = r^2;$$
$$\Sigma xy = 0 + 0 + 0 = 0.$$

Die Coordinaten des Schwerpunktes des Tischblattes sind beide $= \frac{4r}{3\pi}$. Demnach

$$P = 3A' + B'r + C'r,$$
$$\frac{4r}{3\pi} P = A'r + B'r^2,$$
$$\frac{4r}{3\pi} P = A'r + C'r^2.$$

Also $B' = C'$, und folglich

$$Pr = 3A'r + 2B'r^2,$$
$$\frac{8r}{3\pi} P = 2A'r + 2B'r^2,$$
$$\frac{(3\pi - 8)rP}{3\pi} = A'r,$$
$$A' = \frac{(3\pi - 8)P}{3\pi},$$
$$2B'r = P - 3A' = P - \frac{(3\pi - 8)P}{\pi}$$
$$= \frac{(\pi - 3\pi + 8)P}{\pi} = \frac{(8 - 2\pi)P}{\pi},$$
$$B' = C' = \frac{(8 - 2\pi)P}{2r\pi};$$
$$\Pi = A' + B' . 0 + C' . 0 = A' = \frac{(3\pi - 8)P}{3\pi},$$
$$\Pi' = A' + B' . r + C' . 0 = A' + B'r$$
$$= \frac{(3\pi - 8)P}{3\pi} + \frac{(8 - 2\pi)P}{2\pi}$$
$$= \frac{(6\pi - 16 + 24 - 6\pi)P}{6\pi}$$

$$=\frac{8P}{6\pi}=\frac{4P}{3\pi},$$

$$\Pi''=A'+B'.0+C'r=A'+B'r=\frac{4P}{3\pi}.$$

Die beiden Füße an den Enden des Bogens des Quadranten werden also gleich stark gedrückt. Der Druck auf den Fuß im Mittelpunkte des Quadranten ist $=\frac{(3\pi-8)P}{3\pi}$, und am kleinsten; denn $\pi<4$, $3\pi<12$, $3\pi-8<4$, $(3\pi-8)P<4P$, $\frac{(3\pi-8)P}{3\pi}<\frac{4P}{3\pi}$.

§. 210.

Wir wollen nun annehmen, daß eine Ebene nicht in bloßen Punkten unterstützt sey, sondern von einer oder einigen Stützen getragen werde, deren Köpfe Figuren von gegebener Beschaffenheit sind.

Sey daher in Fig. 116. $ABA'B'$ eine solche unterstützende Ebene, welche von zwey Curven AB, $A'B'$ und den äußersten Ordinaten AC und BD begränzt wird. Die Ordinaten der Curve AB sollen durch z, die der Curve $A'B'$ durch v, die Abscissen aber für beide Curven durch x bezeichnet werden. Sind nun x, y die Coordinaten irgend eines Punktes in der Figur $ABA'B'$; so ist der Druck auf diesen Punkt nach §. 209.

$$=A'+B'x+C'y.$$

Läßt man nun y, indem x ungeändert bleibt, sich um i' verändern; so ist der Druck auf die Linie i' offenbar

$$=i'(A'+B'x+C'y),$$

und zwar desto genauer, je kleiner i' ist. Demnach ist der Druck auf die ganze durch den gegebenen Punkt gehende Ordinate der Figur $ABA'B'$ nach §. 108.

$$=\int dy(A'+B'x+C'y),$$

wo bey der Integration x als constant betrachtet werden muß, und das Integral von $y=v$ bis $y=z$ zu nehmen ist.

Läßt man aber nun x sich um i ändern; so ist der Druck auf den ganzen zwischen den zu den Abscissen x und $x+i$ gehörigen Ordinaten enthaltenen Streifen der Figur $ABA'B'$

$$= i\int dy\,(A' + B'x + C'y),$$

desto genauer, je kleiner i ist. Folglich der Druck auf die ganze Figur $ABA'B'$

$$= \int dx \int dy\,(A' + B'x + C'y);$$

das zweyte Integral zwischen den Gränzen $x = \alpha$ und $x = \beta$ genommen, wenn α und β die zu den äußersten Ordinaten der gegebenen Figur gehörigen Abscissen bezeichnen.

Auf dieselbe Art wird der Druck auf jede einzelne unterstützende Figur gefunden, und die Summe des Drucks auf alle einzelne Stützpunkte ist demnach

$$= \Sigma \int dx \int dy\,(A' + B'x + C'y);$$

die Integrale immer zwischen den gehörigen Gränzen genommen, und bey der ersten Integration x als constant betrachtet. Es ist also nach §. 35.:

$$\Sigma \int dx \int dy\,(A' + B'x + C'y) = P,$$

wenn P, wie gewöhnlich, das an der gegebenen Ebene aufgehängte Gewicht bedeutet.

Da nun der Druck auf den Punkt, dessen Coordinaten x, y sind,

$$= A' + B'x + C'y$$

war; so ist das Moment desselben in Beziehung auf die Axe der x

$$= y\,(A' + B'x + C'y),$$

und folglich, wenn man y sich um i' verändern läßt, das Moment des Drucks auf i'

$$= i'y\,(A' + B'x + C'y),$$

desto genauer, je kleiner i' ist. Also das Moment des Drucks auf die ganze der Abscisse x entsprechende Ordinate der Figur $ABA'B'$

$$= \int y\,dy\,(A' + B'x + C'y);$$

x als constant betrachtet, und das Integral von $y = v$ bis $y = z$ genommen.

Eben so ist, wenn man x sich um i verändern läßt, das Moment des Drucks auf den ganzen zwischen den zu x und $x + i$ gehörigen Ordinaten enthaltenen Streifen der Figur $ABA'B'$

$$= i\int y\,dy\,(A' + B'x + C'y),$$

desto genauer, je kleiner i ist. Daher das Moment des Drucks auf die ganze Figur $ABA'B'$

$$= \int dx \int y\,dy\,(A' + B'x + C'y);$$

das zweyte Integral von $x = \alpha$ bis $x = \beta$ genommen. Also wie vorher:

$$\Sigma \int dx \int y\,dy\,(A' + B'x + C'y) = Pb.$$

Ganz auf dieselbe Art ist das Moment des Drucks $A' + B'x + C'y$ in Beziehung auf die Axe der y

$$= x(A' + B'x + C'y).$$

Läßt man also y, ohne daß x sich ändert, sich um i' verändern; so ist das Moment des Drucks auf i'

$$= i'x(A' + B'x + C'y),$$

desto genauer, je kleiner i' ist. Also das Moment des Drucks auf die ganze zu x gehörige Ordinate der Fläche $ABA'B'$

$$= \int x\,dy\,(A' + B'x + C'y),$$

von $y = v$ bis $y = z$, x als constant betrachtet.

Läßt man nun x sich um i ändern; so ist das Moment des Drucks auf den ganzen Streifen zwischen den zu x und $x + i$ gehörigen Ordinaten

$$= i\int x\,dy\,(A' + B'x + C'y),$$

desto genauer, je kleiner i ist. Also das Moment des Drucks auf die ganze Fläche $ABA'B'$

$$= \int dx \int x\,dy\,(A' + B'x + C'y);$$

das zweyte Integral von $x = \alpha$ bis $x = \beta$. Folglich wie vorher:

$$\Sigma \int dx \int x\,dy\,(A' + B'x + C'y) = Pa.$$

Man hat also folgende drey Gleichungen:

$$\Sigma \int dx \int dy (A' + B'x + C'y) = P,$$
$$\Sigma \int dx \int x\, dy (A' + B'x + C'y) = Pa,$$
$$\Sigma \int dx \int y\, dy (A' + B'x + C'y) = Pa;$$

das erste Integral bloß in Beziehung auf y und zwischen $y = v$ und $y = z$, das zweyte zwischen $x = \alpha$ und $x = \beta$ genommen.

Aus diesen drey Gleichungen kann man durch Elimination A', B', C', und folglich auch den Druck

$$A' + B'x + C'y$$

auf jeden Punkt, dessen Coordinaten x, y sind, bestimmen.

Man habe z. B. bloß eine unterstützende Fläche, welche ein Rectangel sey, mit der Grundlinie f und mit der Höhe g. Man nehme den Mittelpunkt des Rechtecks als Anfang der Coordinaten und eine mit der Grundlinie parallele Linie als Axe der Abscissen an. Hier ist immer

$$z = \tfrac{1}{2}g \text{ und } v = -\tfrac{1}{2}g,$$

wie leicht erhellet.

Die äußersten Abscissen sind $= -\frac{1}{2}f$ und $\frac{1}{2}f$.

Nun ist

$$\int dy (A' + B'x + C'y) = \int (A'dy + B'x\, dy + C'y\, dy)$$
$$= A'y + B'xy + \tfrac{1}{2}C'y^2.$$

Nimmt man dieses Integral zwischen den Gränzen $-\frac{1}{2}g$ und $\frac{1}{2}g$; so erhält man:

$$\tfrac{1}{2}A'g + \tfrac{1}{2}B'gx + \tfrac{1}{8}C'g^2 - (-\tfrac{1}{2}A'g - \tfrac{1}{2}B'gx + \tfrac{1}{8}C'g^2)$$
$$= A'g + B'gx,$$
$$\int (A'g\, dx + B'gx\, dx) = A'gx + \tfrac{1}{2}B'gx^2,$$
$$\tfrac{1}{2}A'fg + \tfrac{1}{8}B'gf^2 - (-\tfrac{1}{2}A'fg + \tfrac{1}{8}B'gf^2) = A'fg.$$

Also

$$A'fg = P, \quad A' = \frac{P}{fg},$$

Ferner ist

$$\int x\, dy (A' + B'x + C'y) = \int (A'x\, dy + B'x^2 dy + C'xy\, dy)$$
$$= A'xy + B'x^2y + \tfrac{1}{2}C'xy^2,$$

$$\tfrac{1}{2}A'gx + \tfrac{1}{2}B'gx^2 + \tfrac{1}{8}C'g^2x$$
$$-(-\tfrac{1}{2}A'gx - \tfrac{1}{2}B'gx^2 + \tfrac{1}{8}C'g^2x)$$
$$= A'gx + B'gx^2,$$
$$dx\int x\,dy\,(A' + B'x + C'y) = A'gx\,dx + B'gx^2\,dx,$$
$$\int dx\int x\,dy\,(A' + B'x + C'y) = \tfrac{1}{2}A'gx^2 + \tfrac{1}{3}B'gx^3,$$
$$\tfrac{1}{8}A'gf^2 + \tfrac{1}{24}B'gf^3 - (\tfrac{1}{8}A'gf^2 - \tfrac{1}{24}B'gf^3)$$
$$= \tfrac{1}{12}B'gf^3.$$

Also $\tfrac{1}{12}B'gf^3 = Pa$, $B' = \dfrac{12Pa}{gf^3}$.

Endlich ist

$$\int y\,dy\,(A' + B'x + C'y) = \int(A'y\,dy + B'xy\,dy + C'y^2\,dy)$$
$$= \tfrac{1}{2}A'y^2 + \tfrac{1}{2}B'xy^2 + \tfrac{1}{3}C'y^3,$$
$$\tfrac{1}{8}A'g^2 + \tfrac{1}{8}B'g^2x + \tfrac{1}{24}C'g^3$$
$$-(\tfrac{1}{2}A'g^2 + \tfrac{1}{8}B'g^2x - \tfrac{1}{24}C'g^3)$$
$$= \tfrac{1}{12}C'g^3,$$
$$dx\int y\,dy\,(A' + B'x + C'y) = \tfrac{1}{12}C'g^3\,dx,$$
$$\int dx\int y\,dy\,(A' + B'x + C'y) = \tfrac{1}{12}C'g^3x,$$
$$\tfrac{1}{24}C'g^3f - (-\tfrac{1}{24}C'g^3f) =$$
$$= \tfrac{1}{12}C'g^3f = Pb.$$

Also

$$C' = \frac{12Pb}{g^3f}.$$

Folglich der Druck auf jeden Punkt, dessen Coordinaten x, y sind:

$$\frac{P}{fg} + \frac{12Pax}{gf^3} + \frac{12Pby}{g^3f}$$
$$= \frac{P}{fg}\left\{1 + \frac{12ax}{f^2} + \frac{12by}{g^2}\right\}.$$

Dasselbe findet Ide a. a. O. S. 135. auf etwas anderm Wege.

Sind mehrere Stützflächen gegeben; so muß man die Integration für jede einzelne Fläche, in Beziehung auf einerley Coordinatensystem, anstellen, und die Summen der einzelnen

Integrale nehmen, wie in den obigen allgemeinen Gleichungen durch das Zeichen Σ nach gewöhnlicher Methode angedeutet worden. Freylich können die Integrationen oft schwierig und verwickelt werden; der Druck wird sich aber in jedem Falle immer bestimmen lassen, für jeden Punkt in den Stützflächen, dessen Coordinaten gegeben sind.

§. 211.

Eine mit dem Gegenstande dieses Kapitels verwandte Aufgabe ist die folgende, welche ich aus den Annales de Mathématiques, Tom. II. 1811. 1812. p. 191. seqq., entlehne.

Eine horizontale Tafel ohne Schwere von willkührlicher Form ist in drey Punkten, deren Widerstände gegeben sind und durch F, F', F'' bezeichnet werden sollen, unterstützt: man fragt:

1) welches das größte Gewicht ist, das ein gegebener Punkt der Tafel zu tragen im Stande ist;
2) welche Punkte der Tafel es sind, die irgend ein gegebenes Gewicht P tragen können;
3) welches das größte Gewicht ist, das die Tafel tragen kann;

und

4) welcher Punkt der Tafel es ist, der dieses größte Gewicht tragen kann.

Diese Aufgabe wird a. a. O. von Encontre (Professeur à Montpellier) und Rochat (Professeur à St. Brieux) im Wesentlichen auf folgende Art aufgelös't.

f, f', f'' (Fig. 117.) seyen die drey Stützpunkte, auf welche sich die drey Widerstände F, F', F'' beziehen. In dem willkührlichen, aber gegebenen Punkte p liege ein willkührliches Gewicht P. Man sucht, welchen Druck dieses Gewicht auf jeden der drey Punkte f, f', f'' ausübt. Zu dem Ende ziehe man ff', $f'f''$, ff''; und durch p die Linien fq, $f'q'$, $f''q''$. Die Pressungen auf f, f', f'' bezeichne man respective wie gewöhnlich durch Π, Π', Π''. Nun zerlege man P in zwey Kräfte in f und q, und letztere wieder in zwey andere in f' und f''; so erhält man auf diese Art offenbar Π, Π', Π''. Die in q, q', q'' wirkenden Kräfte seyen Φ, Φ', Φ''. Also nach den Gesetzen des Hebels:

$$P : \Pi = fq : pq,$$

$$P : \Phi = fq : fp;$$

$$\Phi : \Pi' = f'f'' : f''q,$$

$$\Phi : \Pi'' = f'f'' : f'q;$$

$$\Phi = P.\frac{fp}{fq};$$

und folglich

$$\Pi = P.\frac{pq}{fq}, \quad \Pi' = P.\frac{fp.f''q}{fq.f'f''}, \quad \Pi'' = P.\frac{fp.f'q}{fq.f'f''};$$

und ganz eben so erhält man auch:

$$\Pi' = P.\frac{pq'}{f'q'}, \quad \Pi = P.\frac{f'p.f''q'}{f'q'.ff''}, \quad \Pi'' = \frac{f'p.fq'}{f'q'.ff''};$$

$$\Pi'' = P.\frac{pq''}{f''q''}, \quad \Pi = P.\frac{f''p.f'q''}{f''q''.ff'}, \quad \Pi' = \frac{f''p.fq''}{f''q''.ff'}.$$

Aus der Verbindung dieser Ausdrücke ergeben sich mehrere merkwürdige geometrische Sätze. So ist z. B. nach bekannten statischen Sätzen

$$\Pi + \Pi' + \Pi'' = P.$$

Also

$$P.\frac{pq}{fq} + P.\frac{pq'}{f'q'} + P.\frac{pq''}{f''q''} = P.$$

Folglich in jedem Dreyecke und wie auch der Punkt p liegen mag:

$$\frac{pq}{fq} + \frac{pq'}{f'q'} + \frac{pq''}{f''q''} = 1.$$

Auch ist

$$\Pi = P \cdot \frac{pq \cdot f'q' \cdot f''q''}{fq \cdot f'q' \cdot f''q''},$$

$$\Pi' = P \cdot \frac{pq' \cdot fq \cdot f''q''}{fq \cdot f'q' \cdot f''q''},$$

$$\Pi'' = P \cdot \frac{pq'' \cdot fq \cdot f'q'}{fq \cdot f'q' \cdot f''q''}.$$

Also, wenn man addirt, und durch P dividirt:

$$1 = \frac{pq \cdot f'q' \cdot f''q''}{fq \cdot f'q' \cdot f''q''} + \frac{pq' \cdot fq \cdot f''q''}{fq \cdot f'q' \cdot f''q''} + \frac{pq'' \cdot fq \cdot f'q'}{fq \cdot f'q' \cdot f''q''},$$

$$pq \cdot f'q' \cdot f''q'' + pq' \cdot fq \cdot f''q'' + pq'' \cdot fq \cdot f'q' = fq \cdot f'q' \cdot f''q''.$$

Auch ist

$$P \cdot \frac{pq}{fq} = P \cdot \frac{f'p \cdot f''q'}{f'q' \cdot ff''} = P \cdot \frac{f''p \cdot f'q''}{f''q'' \cdot ff'},$$

$$\frac{pq}{fq} = \frac{f'p \cdot f''q'}{f'q' \cdot ff''} = \frac{f''p \cdot f'q''}{f''q'' \cdot ff'},$$

$$\frac{pq \cdot f'q' \cdot f''q'' \cdot ff' \cdot ff''}{fq \cdot f'q' \cdot f''q'' \cdot ff' \cdot ff''} = \frac{f'p \cdot f''q' \cdot fq \cdot f''q'' \cdot ff'}{fq \cdot f'q' \cdot f''q'' \cdot ff' \cdot ff''} = \frac{f''p \cdot f'q'' \cdot fq \cdot f'q' \cdot ff''}{fq \cdot f'q' \cdot f''q'' \cdot ff' \cdot ff''},$$

$$pq \cdot f'q' \cdot f''q'' \cdot ff' \cdot ff'' = f'p \cdot f''q' \cdot fq \cdot f''q'' \cdot ff' = f''p \cdot f'q'' \cdot fq \cdot f'q' \cdot ff'';$$

und so ließen sich leicht noch andere Formeln auffinden, deren jede eigentlich ein geometrisches Theorem enthält.

Nun war nach dem Obigen

$$\Pi = P \cdot \frac{pq}{fq}, \quad \Pi' = P \cdot \frac{pq'}{f'q'}, \quad \Pi'' = P \cdot \frac{pq''}{f''q''}.$$

Werden aber die Flächenräume der Dreyecke $ff'f''$, $f'pf''$, fpf'', fpf' durch T, t, t', t'' bezeichnet; so ist offenbar

$$pq : fq = \text{wie die Höhe von } f'pf'' : \text{Höhe von } ff'f'',$$
$$\text{d. i.} = \Delta f'pf'' : \Delta ff'f'' = t : T,$$

da die beiden Dreyecke t und T einerley Grundlinie $f'f''$ haben. Also $\frac{pq}{fq} = \frac{t}{T}$, und ganz eben so $\frac{pq'}{f'q'} = \frac{t'}{T}$, $\frac{pq''}{f''q''} =$

$\frac{t''}{T}$. Also

$$\Pi = P.\frac{t}{T},\ \Pi' = P.\frac{t'}{T},\ \Pi'' = P.\frac{t''}{T};$$

$$\Pi : \Pi' : \Pi'' = t : t' : t'';$$

ganz eben so, wie in §. 205.

Wir haben die vorhergehende Darstellung auch mitgetheilt wegen der besondern Bemerkungen, die sich bey ihr machen ließen.

Erste Frage. Um das größte Gewicht zu finden, welches der Punkt p tragen kann, überlege man, daß immer

$$\Pi \overline{\overline{<}} F,\ \Pi' \overline{\overline{<}} F',\ \Pi'' \overline{\overline{<}} F'';$$

d. i. $P.\frac{t}{T} \overline{\overline{<}} F,\ P.\frac{t'}{T} \overline{\overline{<}} F',\ P.\frac{t''}{T} \overline{\overline{<}} F'';$

oder

$$P \overline{\overline{<}} F.\frac{T}{t},\ P \overline{\overline{<}} F'.\frac{T}{t'},\ P \overline{\overline{<}} F''.\frac{T}{t''}$$

seyn muß, wenn die Tafel das Gewicht P soll ertragen können, weil keiner der Unterstützungspunkte, welche die Widerstände F, F', F'' leisten, sinken oder nachgeben darf. Da nun die obigen Bedingungen alle drey zugleich erfüllt werden müssen; so wird offenbar das größte Gewicht, welches der Punkt p tragen kann, durch die kleinste unter den Größen

$$F.\frac{T}{t},\ F'.\frac{T}{t'},\ F''.\frac{T}{t''}$$

ausgedrückt.

Zweyte Frage. d, d', d'' seyen die Entfernungen des Punktes p von den Linien $f'f''$, ff'', ff', und D, D', D'' die Entfernungen der Punkte f, f', f'' von denselben Linien; so ist offenbar

$$t : T = d : D,$$
$$t' : T = d' : D',$$
$$t'' : T = d'' : D''.$$

Also

$$\frac{t}{T} = \frac{d}{D}, \quad \frac{t'}{T} = \frac{d'}{D'}, \quad \frac{t''}{T} = \frac{d''}{D''},$$

und demnach

$$\Pi = P \cdot \frac{d}{D}, \quad \Pi' = P \cdot \frac{d'}{D'}, \quad \Pi'' = P \cdot \frac{d''}{D''}.$$

Also immer

$$P \cdot \frac{d}{D} \overline{\overline{<}} F, \quad P \cdot \frac{d'}{D'} \overline{\overline{<}} F', \quad P \cdot \frac{d''}{D''} \overline{\overline{<}} F'';$$

$$d \overline{\overline{<}} D \cdot \frac{F}{P}, \quad d' \overline{\overline{<}} D' \cdot \frac{F'}{P}, \quad d'' \overline{\overline{<}} D'' \cdot \frac{F''}{P}.$$

Zieht man nun in den Entfernungen

$$D \cdot \frac{F}{P}, \quad D' \cdot \frac{F'}{P}, \quad D'' \cdot \frac{F''}{P}$$

Parallelen $m'm''$, mm'', mm' (Fig. 118.) mit den Seiten $f'f''$, ff'', ff'; so ist für alle Punkte des Dreyecks $mm'm''$

$$d \overline{\overline{<}} D \cdot \frac{F}{P}, \quad d' \overline{\overline{<}} D' \cdot \frac{F'}{P}, \quad d'' \overline{\overline{<}} D'' \cdot \frac{F''}{P},$$

und alle Punkte dieses Dreyecks können also das Gewicht P tragen. Nur ist hierbey zu bemerken, daß, wenn das Dreyeck $mm'm''$ wie $\mu\mu'\mu''$ (Fig. 119.) liegt, die Aufgabe unmöglich wird, weil es dann offenbar keinen Punkt gibt, welcher mit den obigen Entfernungen von den Seiten des Dreyecks $ff'f''$ innerhalb des Dreyecks $\mu\mu'\mu''$ liegt.

Dritte Frage. Das größte Gewicht, welches die Tafel tragen kann, ist offenbar $= F + F' + F''$; und

Vierte Frage. Der Punkt, welcher dieses Gewicht tragen kann, ist der gemeinschaftliche Schwerpunkt von F, F', F''.

Ist die Tafel nicht gewichtlos, so braucht man nur ihren Schwerpunkt und ihr Gewicht zu kennen. Letzteres zerlegt man in drey Kräfte Φ, Φ', Φ'' in f, f', f'', und setzt in der obigen Auflösung statt der Kräfte F, F', F'' die Kräfte $F - \Phi$, $F' - \Phi'$, $F'' - \Phi''$; dann ist alles ganz wie vorher.

§. 212.

Wir haben in §. 207., auf die Euler'sche Voraussetzung uns stützend, den Druck bestimmt, welchen jeder Unterstützungspunkt einer geraden Linie von einem an derselben aufgehängten Gewichte erleidet. Bey dieser Untersuchung ist aber die gegebene gerade Linie als völlig unbiegsam angenommen worden, welches in der Wirklichkeit nicht statt findet, da jeder unterstützte Balken schon durch sein eignes Gewicht einige Biegung erleidet, noch mehr aber, wenn er außerdem noch mit einem Gewichte belastet ist. Ist diese Biegung auch nur geringe, so muß auf sie bey Untersuchungen, welche von praktischem Nutzen seyn sollen, Rücksicht genommen werden. Besonders muß die Kenntniß des Drucks, wie leicht in die Augen fällt, für den Architecten von Wichtigkeit seyn, und wir nehmen sie daher in dieses Lehrbuch, so weit es ohne zu große Weitläufigkeit geschehen kann, auf, welches dem Zwecke desselben durchaus nicht zuwider ist, weil die Untersuchung nicht auf angestellten Versuchen beruhet, und demnach ganz theoretisch ist, zugleich aber auch eine interessante Anwendung der Untersuchung über die elastischen Curven darbietet.

§. 213.

Sey demnach ein in allen Theilen gleich schwerer gerader Balken in den in einer Horizontale liegenden Punkten

$$A,\ A',\ A'',\ A''',\ \ldots\ldots A^{(n)},\ A^{(n+1)}$$

unterstützt. Man nehme A als Anfang der Abscissen und die Richtung des Balkens selbst als Anfang der Abscissen an, und bezeichne die Abscissen der Stützpunkte nach der Reihe durch

$$0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots x_n,\ x_{n+1}.$$

Zwischen jeden zwey Unterstützungspunkten hängt an dem Balken ein Gewicht. Diese Gewichte sollen nach der Reihe durch

$$P, \; P_1, \; P_2, \; P_3, \ldots\ldots P_n,$$

und die Abscissen der Aufhängepunkte respective durch

$$x, \; \overset{1}{x}, \; \overset{2}{x}, \; \overset{3}{x}, \ldots\ldots \overset{n}{x}$$

bezeichnet werden. Das Gewicht jeder Längeneinheit des Balkens sey $= \gamma$. Man soll nun den Druck auf jeden der Unterstützungspunkte finden, wenn diese Pressungen nach der Reihe durch

$$\Pi, \; \Pi_1, \; \Pi_2, \; \Pi_3, \ldots\ldots \Pi_n, \; \Pi_{n+1}$$

bezeichnet werden.

Man denke sich, daß der gegebene Balken die in Fig. 120. dargestellte Biegung durch die durch P bezeichneten Kräfte erhalte. Ließe man nun in den durch A bezeichneten Punkten statt der Stützen Kräfte:

$$\Pi, \; \Pi_1, \; \Pi_2, \; \Pi_3, \ldots\ldots \Pi_n, \; \Pi_{n+1},$$

vertical aufwärts wirken; so würde offenbar zwischen den durch Π und P bezeichneten Kräften ein Gleichgewicht statt finden, und der Balken würde seine ursprüngliche Krümmung behalten. Es wäre folglich nach bekannten Sätzen von dem Gleichgewichte paralleler Kräfte:

$$\Pi + \Pi_1 + \Pi_2 + \ldots + \Pi_{n+1} = P + P_1 + P_2 + \ldots + P_n + x_{n+1} \, . \, \gamma,$$

$$x_1 . \Pi_1 + x_2 . \Pi_2 + x_3 . \Pi_3 + \ldots + x_{n+1} . \Pi_{n+1} = x . P + \overset{1}{x} . P_1 + \overset{2}{x} . P_2 + \ldots + \overset{n}{x} . P_n$$
$$+ \tfrac{1}{2} \left(x_{n+1}\right)^2 . \gamma,$$

weil die Länge des ganzen Balkens $= x_{n+1}$, sein ganzes Gewicht also offenbar $= x_{n+1} \, . \, \gamma$, und die Entfernung seines Schwerpunktes, in welchem man sich sein Gewicht vertical abwärts wirkend denken muß, $= \frac{1}{2} \, . \, x_{n+1}$ ist, indem der Balken als gleichförmig schwer vorausgesetzt wird.

Seyen in der Figur $\overset{m}{A}$ und $\overset{m+1}{A}$ irgend zwey auf einander folgende Stützpunkte, in denen also die Kräfte $\underset{m}{\Pi}$ und $\underset{m+1}{\Pi}$ aufwärts wirken, und zwischen denen das Gewicht $\underset{m}{P}$ herabhängt. Nimmt man nun in dem Theile des gebogenen Balkens zwischen $\overset{m}{A}$ und $\overset{m+1}{A}$, und zwar zunächst zwischen $\overset{m}{A}$ und dem Aufhängepunkte des Gewichts $\underset{m}{P}$, irgend einen Punkt B als Mittelpunkt der Momente an, und bezeichnet die Coordinaten $\overset{m}{A}C$ und CB dieses Punktes durch z und u; so ist die Summe der Momente der Kräfte auf der rechten Seite von B, indem man die abwärts wirkenden Kräfte hier als negativ betrachtet, weil man die Pressungen auf die Stützen positiv heben will,

$$=\begin{cases}\left(\underset{m+1}{x}-\underset{m}{x}-z\right).\underset{m+1}{\Pi}+\left(\underset{m+2}{x}-\underset{m}{x}-z\right).\underset{m+2}{\Pi}+\left(\underset{m+3}{x}-\underset{m}{x}-z\right).\underset{m+3}{\Pi}\\ +\ldots+\left(\underset{n}{x}-\underset{m}{x}-z\right).\underset{n}{\Pi}+\left(\underset{n+1}{x}-\underset{m}{x}-z\right).\underset{n+1}{\Pi}\\ -\left(\overset{m}{x}-\underset{m}{x}-z\right).\underset{m}{P}-\left(\overset{m+1}{x}-\underset{m}{x}-z\right).\underset{m+1}{P}-\left(\overset{m+2}{x}-\underset{m}{x}-z\right).\underset{m+2}{P}\\ -\ldots-\left(\overset{n-1}{x}-\underset{m}{x}-z\right).\underset{n-1}{P}-\left(\overset{n}{x}-\underset{m}{x}-z\right).\underset{n}{P}-\tfrac{1}{2}\left(\underset{n+1}{x}-\underset{m}{x}-z\right)^2.\gamma,\end{cases}$$

weil das Gewicht des Stücks des Balkens von B bis $\overset{n+1}{A}$, $=\left(\underset{n+1}{x}-\underset{m}{x}-z\right)\gamma$, und die Entfernung seines Schwerpunktes von dem Mittelpunkte der Momente $=\frac{1}{2}\left(\underset{n+1}{x}-\underset{m}{x}-z\right)$ ist, wobey man immer vor Augen behalten muß, daß die Krümmung des Balkens nur als äußerst geringe angenommen wird.

Man denke sich jetzt den Punkt B als fest, und in $\overset{m}{A}$ eine Kraft Q aufwärts wirkend, deren Moment Qz in Beziehung auf den Punkt B der Summe der Momente aller links von B

wirkenden Kräfte gleich ist, wobey man den Balken als eine bloße gerade Linie von derselben Elasticität wie die des Balkens betrachtet, in welcher das Gewicht des Stücks von A bis B in seinem Mittelpunkte, als dem Schwerpunkte, wirkt; so wird die Kraft Q in $\overset{m}{A}$ offenbar eine eben solche Biegung des Stücks von B bis $\overset{m}{A}$ hervorbringen, wie alle Kräfte auf der linken Seite von B, und man kann also $B\overset{m}{A}$ als eine in B befestigte, durch die in $\overset{m}{A}$ aufwärts wirkende Kraft Q gebogene, elastische Ruthe ohne Schwere betrachten. Daher ist nach §. 209., wenn wir den Krümmungshalbmesser in dem Punkte B durch r bezeichnen,

$$Qz = \frac{E^2}{r},$$

wo r immer als positiv betrachtet wird. Da aber in dem vorliegenden Falle die Curve offenbar gegen die Abscissenaxe concav ist, so ist nach bekannten Sätzen der analytischen Geometrie

$$r = -\frac{(dz^2 + du^2)^{\frac{3}{2}}}{dz\,d^2u},$$

und folglich

$$Qz = -\frac{dz\,d^2u\,.\,E^2}{(dz^2 + du^2)^{\frac{3}{2}}}$$

zu setzen. Weil nun aber nach der Voraussetzung die Krümmung des Balkens äußerst geringe ist, so ist ohne allen merklichen Fehler das Bogenelement $ds = dz$, d. i., weil bekanntlich $ds^2 = dz^2 + du^2$ ist, $dz^2 + du^2 = dz^2$, ohne merklichen Fehler. Also

$$Qz = -\frac{dz\,d^2u\,.\,E^2}{dz^3},$$

$$Qz = -\frac{E^2\,d^2u}{dz^2}.$$

Nun ist aber Qz der Summe der Momente aller Kräfte auf der linken Seite von B, und, wegen des Gleichgewichts, diese Summe der Summe der Momente aller Kräfte auf der rechten Seite von B gleich; also letztere Summe $= -\frac{E^2 d^2 u}{dz^2}$, und folglich nach dem Obigen:

$$\frac{E^2 d^2 u}{dz^2} =$$

$$= \begin{cases} (\overset{m}{x} - \underset{m}{x} - z)\cdot \underset{m}{P} + (\overset{m+1}{x} - \underset{m}{x} - z)\cdot\underset{m+1}{P} + (\overset{m+2}{x} - \underset{m}{x} - z)\cdot\underset{m+2}{P} \\ + \dots + (\overset{n-1}{x} - \underset{m}{x} - z)\cdot\underset{n-1}{P} + (\overset{n}{x}-\underset{m}{x}-z)\cdot\underset{n}{P} + \tfrac{1}{2}(\underset{n+1}{x} - \underset{m}{x} - z)^2\cdot\gamma \\ - (\underset{m+1}{x} - \underset{m}{x} - z)\cdot\underset{m+1}{\Pi} - (\underset{m+2}{x}-\underset{m}{x}-z)\cdot\underset{m+2}{\Pi} - (\underset{m+3}{x}-\underset{m}{x}-z)\cdot\underset{m+3}{\Pi} \\ - \dots - (\underset{n}{x}-\underset{m}{x}-z)\cdot\underset{n}{\Pi} - (\underset{n+1}{x}-\underset{m}{x}-z)\cdot\underset{n+1}{\Pi} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \overset{m}{x}\cdot\underset{m}{P} + \overset{m+1}{x}\cdot\underset{m+1}{P} + \overset{m+2}{x}\cdot\underset{m+2}{P} + \dots + \overset{n-1}{x}\cdot\underset{n-1}{P} + \overset{n}{x}\cdot\underset{n}{P} + \tfrac{1}{2}(\underset{n+1}{x})^2\cdot\gamma \\ -(\underset{m}{x}+z)\{\underset{m}{P}+\underset{m+1}{P}+\underset{m+2}{P}+\dots+\underset{n-1}{P}+\underset{n}{P}+\underset{n+1}{x}\cdot\gamma\} + \tfrac{1}{2}(\underset{m}{x}+z)^2\cdot\gamma \\ -\underset{m+1}{x}\cdot\underset{m+1}{\Pi} - \underset{m+2}{x}\cdot\underset{m+2}{\Pi} - \underset{m+3}{x}\cdot\underset{m+3}{\Pi} - \dots - \underset{n}{x}\cdot\underset{n}{\Pi} - \underset{n+1}{x}\cdot\underset{n+1}{\Pi} \\ +(\underset{m}{x}+z)\{\underset{m+1}{\Pi}+\underset{m+2}{\Pi}+\underset{m+3}{\Pi}+\dots+\underset{n}{\Pi}+\underset{n+1}{\Pi}\} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \overset{m}{x}\cdot\underset{m}{P} + \overset{m+1}{x}\cdot\underset{m+1}{P} + \overset{m+2}{x}\cdot\underset{m+2}{P} + \dots + \overset{n-1}{x}\cdot\underset{n-1}{P} + \overset{n}{x}\cdot\underset{n}{P} + \tfrac{1}{2}(\underset{n+1}{x})^2\cdot\gamma \\ -\underset{m+1}{x}\cdot\underset{m+1}{\Pi} - \underset{m+2}{x}\cdot\underset{m+2}{\Pi} - \underset{m+3}{x}\cdot\underset{m+3}{\Pi} - \dots - \underset{n}{x}\cdot\underset{n}{\Pi} - \underset{n+1}{x}\cdot\underset{n+1}{\Pi} \\ -(\underset{m}{x}+z)\left\{\begin{array}{l} \underset{m}{P}+\underset{m+1}{P}+\underset{m+2}{P}+\dots+\underset{n-1}{P}+\underset{n}{P}+\underset{n+1}{x}\cdot\gamma \\ -\underset{m+1}{\Pi}-\underset{m+2}{\Pi}-\underset{m+3}{\Pi}-\dots-\underset{n}{\Pi}-\underset{n+1}{\Pi} \end{array}\right\} + \tfrac{1}{2}(\underset{m}{x}+z)^2\cdot\gamma. \end{cases}$$

Nach dem Obigen ist aber

$$\Pi + \Pi_1 + \Pi_2 + \ldots + \Pi_m + \Pi_{m+1} + \Pi_{m+2} + \ldots + \Pi_n + \Pi_{n+1}$$

$$= P + P_1 + P_2 + \ldots + P_{m-1} + P_m + P_{m+1} + P_{m+2} + \ldots + P_n + x_{n+1} \cdot \gamma,$$

$$x_1 . \Pi_1 + x_2 . \Pi_2 + x_3 . \Pi_3 + \ldots + x_m . \Pi_m + x_{m+1} . \Pi_{m+1} + x_{m+2} . \Pi_{m+2} + \ldots + x_{n+1} . \Pi_{n+1}$$

$$= x . P + \overset{1}{x} . P_1 + \overset{2}{x} . P_2 + \ldots + \overset{m-1}{x} . P_{m-1} + \overset{m}{x} . P_m + \overset{m+1}{x} . P_{m+1} + \ldots + \overset{n}{x} . P_n + \tfrac{1}{2}\left(x_{n+1}\right)^2 . \gamma.$$

Also

$$\left.\begin{array}{l} P_m + P_{m+1} + P_{m+2} + \ldots + P_{n-1} + P_n + x_{n+1} . \gamma \\ - \Pi_{m+1} - \Pi_{m+2} - \Pi_{m+3} - \ldots - \Pi_n - \Pi_{n+1} \end{array}\right\} =$$

$$= \left\{\begin{array}{l} \Pi + \Pi_1 + \Pi_2 + \ldots + \Pi_{m-1} + \Pi_m \\ - P - P_1 - P_2 - \ldots - P_{m-2} - P_{m-1} \end{array}\right.$$

$$= \Sigma \Pi_{0,\,m} - \Sigma P_{0,\,m-1},$$

und ganz auf ähnliche Art

$$\left.\begin{array}{l} \overset{m}{x} . P_m + \overset{m+1}{x} . P_{m+1} + \overset{m+2}{x} . P_{m+2} + \ldots + \overset{n-1}{x} . P_{n-1} + \overset{n}{x} . P_n + \tfrac{1}{2}\left(x_{n+1}\right)^2 . \gamma \\ - x_{m+1} . \Pi_{m+1} - x_{m+2} . \Pi_{m+2} - x_{m+3} . \Pi_{m+3} - \ldots - x_n . \Pi_n - x_{n+1} . \Pi_{n+1} \end{array}\right\} =$$

$$= \left\{\begin{array}{l} x_1 . \Pi_1 + x_2 . \Pi_2 + x_3 . \Pi_3 + \ldots + x_m . \Pi_m \\ - x . P - \overset{1}{x} . P_1 - \overset{2}{x} . P_2 - \ldots - \overset{m-1}{x} . P_{m-1} \end{array}\right.$$

$$= \Sigma x \Pi_{1,\,m} - \Sigma x P_{0,\,m-1},$$

wo zu bemerken ist, daß in $\Sigma x P$ die Indices von x über die x, in $\Sigma x \Pi$ aber unter die x zu schreiben sind; die Indices von

Π und von P werden immer unter Π und P geschrieben. Es ist also

$$\frac{E^2 d^2 u}{dz^2} = \sum_{1,m} x\,\Pi - \sum_{0,m-1} x\,P - \left(\underset{m}{x} + z\right)\left\{\sum_{0,m}\Pi - \sum_{0,m-1} P\right\} + \tfrac{1}{2}\left(\underset{m}{x} + z\right)^2 . \gamma$$

Integrirt man nun, so erhält man:

$$\frac{E^2 du}{dz} = z\left\{\sum_{1,m} x\,\Pi - \sum_{0,m-1} x\,P\right\} - z\left(\underset{m}{x} + \tfrac{1}{2}z\right)\left\{\sum_{0,m}\Pi - \sum_{0,m-1} P\right\}$$
$$+ \tfrac{1}{2}z\left\{\left(\underset{m}{x}\right)^2 + \underset{m}{x} . z + \tfrac{1}{3}z^2\right\} . \gamma + \text{Const.}$$

Bezeichnet man den Winkel, welchen die Tangente der Curve in dem Aufhängepunkte der Kraft $\underset{m}{P}$ mit der Abscissenaxe einschließt, durch $\underset{m}{\varphi}$; so ist bekanntlich $\frac{du}{dz} = \mathrm{Tg}\,\underset{m}{\varphi}$, für $z = \overset{m}{x} - \underset{m}{x}$. Der Winkel, welchen die Tangente durch den Punkt $\overset{m}{A}$ mit der Abscissenaxe einschließt, sey $= \underset{m}{\pi}$, und die Ordinate des Aufhängepunktes der Kraft $\underset{m}{P}$ werde durch $\overset{m}{y}$ bezeichnet; so ist für $z = 0$ der Differenzialquotient $\frac{du}{dz} = \mathrm{Tg}\,\underset{m}{\pi}$, und folglich aus der obigen Gleichung $E^2 . \mathrm{Tg}\,\underset{m}{\pi} = \text{Const}$, so daß also

$$\frac{E^2 du}{dz} = z\left\{\sum_{1,m} x\,\Pi - \sum_{0,m-1} x\,P\right\} - z\left(\underset{m}{x} + \tfrac{1}{2}z\right)\left\{\sum_{0,m}\Pi - \sum_{0,m-1} P\right\}$$
$$+ \tfrac{1}{2}z\left\{\left(\underset{m}{x}\right)^2 + \underset{m}{x} . z + \tfrac{1}{3}z^2\right\} . \gamma + E^2 . \mathrm{Tg}\,\underset{m}{\pi}.$$

Für $z = \overset{m}{x} - \underset{m}{x}$ ist aber

$$\underset{m}{x} + \tfrac{1}{2}z = \underset{m}{x} + \tfrac{1}{2}\overset{m}{x} - \tfrac{1}{2}\underset{m}{x} = \tfrac{1}{2}\left(\underset{m}{x} + \overset{m}{x}\right),$$

$$\left(\underset{m}{x}\right)^2 + \underset{m}{x}.z + \tfrac{1}{3}z^2 = \left(\underset{m}{x}\right)^2 + \underset{m}{x}.\overset{m}{x} - \left(\underset{m}{x}\right)^2 + \tfrac{1}{3}\left(\overset{m}{x}\right)^2 - \tfrac{2}{3}.\overset{m}{x}.\underset{m}{x} + \tfrac{1}{3}\left(\underset{m}{x}\right)^2$$

$$= \tfrac{1}{3}.\underset{m}{x}.\overset{m}{x} + \tfrac{1}{3}\left(\overset{m}{x}\right)^2 + \tfrac{1}{3}\left(\underset{m}{x}\right)^2.$$

Also

$$E^2 \mathrm{Tg}\underset{m}{\varphi} = \left(\overset{m}{x} - \underset{m}{x}\right)\left\{\underset{1,\,m}{\Sigma x\Pi} - \underset{0,\,m-1}{\Sigma xP}\right\} - \tfrac{1}{2}\left(\overset{m}{x} - \underset{m}{x}\right)\left(\overset{m}{x} + \underset{m}{x}\right)\left\{\underset{0,\,m}{\Sigma\Pi} - \underset{0,\,m-1}{\Sigma P}\right\}$$

$$+ \tfrac{1}{6}\left(\overset{m}{x} - \underset{m}{x}\right)\left\{\left(\overset{m}{x}\right)^2 + \overset{m}{x}.\underset{m}{x} + \left(\underset{m}{x}\right)^2\right\}.\gamma + E^2.\mathrm{Tg}\underset{m}{\pi}.$$

Integrirt man die obige Gleichung für $\frac{E^2 du}{dz}$ nochmahls; so erhält man:

$$E^2 u = \tfrac{1}{2}z^2\left\{\underset{1,\,m}{\Sigma x\Pi} - \underset{0,\,m-1}{\Sigma xP}\right\} - \tfrac{1}{2}z^2\left(\underset{m}{x} + \tfrac{1}{3}z\right)\left\{\underset{0,\,m}{\Sigma\Pi} - \underset{0,\,m-1}{\Sigma P}\right\}$$

$$+ \tfrac{1}{2}z^2\left\{\tfrac{1}{2}\left(\underset{m}{x}\right)^2 + \tfrac{1}{3}.\underset{m}{x}.z + \tfrac{1}{12}z^2\right\}.\gamma + E^2 z\,\mathrm{Tg}\underset{m}{\pi},$$

wo keine Constans beyzufügen, da $u = 0$ für $z = 0$.

Für $z = \overset{m}{x} - \underset{m}{x}$ wird $u = \overset{m}{y}$, und

$$\underset{m}{x} + \tfrac{1}{3}z = \underset{m}{x} + \tfrac{1}{3}\overset{m}{x} - \tfrac{1}{3}\underset{m}{x} = \tfrac{1}{3}\left(\overset{m}{x} + 2\underset{m}{x}\right),$$

$$\tfrac{1}{2}\left(\underset{m}{x}\right)^2 + \tfrac{1}{3}.\underset{m}{x}.z + \tfrac{1}{12}z^2 = \tfrac{1}{2}\left(\underset{m}{x}\right)^2 + \tfrac{1}{3}.\underset{m}{x}.\overset{m}{x} - \tfrac{1}{3}\left(\underset{m}{x}\right)^2 + \tfrac{1}{12}\left(\overset{m}{x}\right)^2 - \tfrac{1}{6}\overset{m}{x}.\underset{m}{x}$$

$$+ \tfrac{1}{12}\left(\underset{m}{x}\right)^2$$

$$= \tfrac{1}{4}\left(\underset{m}{x}\right)^2 + \tfrac{1}{6}\overset{m}{x}.\underset{m}{x} + \tfrac{1}{12}\left(\overset{m}{x}\right)^2.$$

Also

$$E^2\overset{m}{y} = \tfrac{1}{2}\left(\overset{m}{x} - \underset{m}{x}\right)^2 \left\{ \underset{1,\,m}{\Sigma} x\Pi - \underset{0,\,m-1}{\Sigma} xP \right\} - \tfrac{1}{6}\left(\overset{m}{x}-\underset{m}{x}\right)^2\left(\overset{m}{x}+2\underset{m}{x}\right)\left\{\underset{0,\,m}{\Sigma}\Pi - \underset{0,\,m-1}{\Sigma} P\right\}$$

$$+\tfrac{1}{4}\left(\overset{m}{x}-\underset{m}{x}\right)^2\left\{\tfrac{1}{2}\left(\underset{m}{x}\right)^2+\tfrac{1}{3}\overset{m}{x}\,.\,\underset{m}{x}+\tfrac{1}{6}\left(\overset{m}{x}\right)^2\right\}.\gamma+E^2\left(\overset{m}{x}-\underset{m}{x}\right)\mathrm{Tg}\,\underset{m}{\pi}.$$

Auf ähnliche Art wie vorher nehme man jetzt den Punkt B' als Mittelpunkt der Momente an; so ist, wenn D als Anfang der Abscissen angenommen und $C'D = z$, $C'B' = u$ gesetzt wird, die Summe der Momente der Kräfte auf der rechten Seite von B'

$$=\left\{\begin{array}{l}
\left(\underset{m+1}{x}-\overset{m}{x}-z\right).\underset{m+1}{\Pi}+\left(\underset{m+2}{x}-\overset{m}{x}-z\right).\underset{m+2}{\Pi}+\left(\underset{m+3}{x}-\overset{m}{x}-z\right).\underset{m+3}{\Pi}\\
+\ldots+\left(\underset{n}{x}-\overset{m}{x}-z\right).\underset{n}{\Pi}+\left(\underset{n+1}{x}-\overset{m}{x}-z\right).\underset{n+1}{\Pi}\\
-\left(\overset{m+1}{x}-\overset{m}{x}-z\right).\underset{m+1}{P}-\left(\overset{m+2}{x}-\overset{m}{x}-z\right).\underset{m+2}{P}-\left(\overset{m+3}{x}-\overset{m}{x}-z\right).\underset{m+3}{P}\\
-\ldots-\left(\overset{n-1}{x}-\overset{m}{x}-z\right).\underset{n-1}{P}-\left(\overset{n}{x}-\overset{m}{x}-z\right).\underset{n}{P}-\tfrac{1}{2}\left(\underset{n+1}{x}-\overset{m}{x}-z\right)^2.\gamma.
\end{array}\right.$$

Denkt man sich nun wieder B' als fest und in E eine Kraft Q wirkend, deren Moment Qz der Summe der Momente aller Kräfte auf der linken Seite von B' gleich ist; so bringt diese Kraft offenbar eine eben solche Biegung des als eine gewichtlose elastische Ruthe betrachteten Balkens von B' bis E hervor, wie alle auf der linken Seite von B an dem Balken wirkende Kräfte, wo das Gewicht des Stücks auf der linken Seite von B' als in seinem Mittelpunkte, d. i. seinem Schwerpunkte, wirkend betrachtet wird. Nun ist $Qz = -\frac{E^2\,d^2u}{dz^2}$, wie oben, d. i. gleich der Summe der Momente der Kräfte auf der linken Seite von B', welche der Summe der Momente der Kräfte auf der rechten Seite von B' gleich seyn muß. Also

$$-\frac{E^2\, d^2 u}{dz^2} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \left(\underset{m+1}{x} - \overset{m}{x} - z\right) . \underset{m+1}{\Pi} + \left(\underset{m+2}{x} - \overset{m}{x} - z\right) . \underset{m+2}{\Pi} + \left(\underset{m+3}{x} - \overset{m}{x} - z\right) . \underset{m+3}{\Pi} \\ + \ldots + \left(\underset{n}{x} - \overset{m}{x} - z\right) . \underset{n}{\Pi} + \left(\underset{n+1}{x} - \overset{m}{x} - z\right) . \underset{n+1}{\Pi} \\ - \left(\overset{m+1}{x} - \overset{m}{x} - z\right) . \underset{m+1}{P} - \left(\overset{m+2}{x} - \overset{m}{x} - z\right) . \underset{m+2}{P} - \left(\overset{m+3}{x} - \overset{m}{x} - z\right) . \underset{m+3}{P} \\ - \ldots - \left(\overset{n-1}{x} - \overset{m}{x} - z\right) . \underset{n-1}{P} - \left(\overset{n}{x} - \overset{m}{x} - z\right) . \underset{n}{P} - \tfrac{1}{2}\left(\underset{n+1}{x} - \overset{m}{x} - z\right)^2 . \gamma, \end{array} \right.$$

$$\frac{E^2\, d^2 u}{dz^2} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \left(\overset{m+1}{x} - \overset{m}{x} - z\right) . \underset{m+1}{P} + \left(\overset{m+2}{x} - \overset{m}{x} - z\right) . \underset{m+2}{P} + \left(\overset{m+3}{x} - \overset{m}{x} - z\right) . \underset{m+3}{P} \\ + \ldots + \left(\overset{n-1}{x} - \overset{m}{x} - z\right) . \underset{n-1}{P} + \left(\overset{n}{x} - \overset{m}{x} - z\right) . \underset{n}{P} + \tfrac{1}{2}\left(\underset{n+1}{x} - \overset{m}{x} - z\right)^2 . \gamma \\ - \left(\underset{m+1}{x} - \overset{m}{x} - z\right) . \underset{m+1}{\Pi} - \left(\underset{m+2}{x} - \overset{m}{x} - z\right) . \underset{m+2}{\Pi} - \left(\underset{m+3}{x} - \overset{m}{x} - z\right) . \underset{m+3}{\Pi} \\ - \ldots - \left(\underset{n}{x} - \overset{m}{x} - z\right) . \underset{n}{\Pi} - \left(\underset{n+1}{x} - \overset{m}{x} - z\right) . \underset{n+1}{\Pi} \end{array} \right.$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \overset{m+1}{x} . \underset{m+1}{P} + \overset{m+2}{x} . \underset{m+2}{P} + \overset{m+3}{x} . \underset{m+3}{P} + \ldots + \overset{n-1}{x} . \underset{n-1}{P} + \overset{n}{x} . \underset{n}{P} + \tfrac{1}{2}\left(\underset{n+1}{x}\right)^2 . \gamma \\ - \underset{m+1}{x} . \underset{m+1}{\Pi} - \underset{m+2}{x} . \underset{m+2}{\Pi} - \underset{m+3}{x} . \underset{m+3}{\Pi} - \ldots - \underset{n}{x} . \underset{n}{\Pi} - \underset{n+1}{x} . \underset{n+1}{\Pi} \\ - \left(\overset{m}{x} + z\right) \left\{ \begin{array}{l} \underset{m+1}{P} + \underset{m+2}{P} + \underset{m+3}{P} + \ldots + \underset{n-1}{P} + \underset{n}{P} + \underset{n+1}{x} . \gamma \\ - \underset{m+1}{\Pi} - \underset{m+2}{\Pi} - \underset{m+3}{\Pi} - \ldots - \underset{n}{\Pi} - \underset{n+1}{\Pi} \end{array} \right\} \\ + \tfrac{1}{2}\left(\overset{m}{x} + z\right)^2 . \gamma. \end{array} \right.$$

Aber nach dem Obigen:

$$\left.\begin{array}{l}\overset{m+1}{x}\,.\,\underset{m+1}{P}+\overset{m+2}{x}\,.\,\underset{m+2}{P}+\overset{m+3}{x}\,.\,\underset{m+3}{P}+\ldots+\overset{n}{x}\,.\,\underset{n}{P}+\tfrac{1}{2}\left(\underset{n+1}{x}\right)^2.\gamma\\ -\underset{m+1}{x}\,.\,\underset{m+1}{\Pi}-\underset{m+2}{x}\,.\,\underset{m+2}{\Pi}-\underset{m+3}{x}\,.\,\underset{m+3}{\Pi}-\ldots-\underset{n+1}{x}\,.\,\underset{n+1}{\Pi}\end{array}\right\}=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\underset{1}{x}\,.\,\underset{1}{\Pi}+\underset{2}{x}\,.\,\underset{2}{\Pi}+\underset{3}{x}\,.\,\underset{3}{\Pi}+\ldots+\underset{m}{x}\,.\,\underset{m}{\Pi}\\ -x\,.\,P-\overset{1}{x}\,.\,\underset{1}{P}-\overset{2}{x}\,.\,\underset{2}{P}-\ldots-\overset{m}{x}\,.\,\underset{m}{P}\end{array}\right.$$

$$=\underset{1,\,m}{\Sigma x\Pi}-\underset{0,\,m}{\Sigma xP},$$

$$\left.\begin{array}{l}\underset{m+1}{P}+\underset{m+2}{P}+\underset{m+3}{P}+\ldots+\underset{n}{P}+\underset{n+1}{x}\,.\,\gamma\\ -\underset{m+1}{\Pi}-\underset{m+2}{\Pi}-\underset{m+3}{\Pi}-\ldots-\underset{n}{\Pi}-\underset{n+1}{\Pi}\end{array}\right\}=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\Pi+\underset{1}{\Pi}+\underset{2}{\Pi}+\underset{3}{\Pi}+\ldots+\underset{m}{\Pi}\\ -P-\underset{1}{P}-\underset{2}{P}-\underset{3}{P}-\ldots-\underset{m}{P}\end{array}\right.$$

$$=\underset{0,\,m}{\Sigma\Pi}-\underset{0,\,m}{\Sigma P}.$$

Also

$$\frac{E^2d^2u}{dz^2}=\underset{1,\,m}{\Sigma x\Pi}-\underset{0,\,m}{\Sigma xP}-\left(\overset{m}{x}+z\right)\left\{\underset{0,\,m}{\Sigma\Pi}-\underset{0,\,m}{\Sigma P}\right\}+\tfrac{1}{2}\left(\overset{m}{x}+z\right)^2.\gamma,$$

$$\frac{E^2\,du}{dz}=z\left\{\underset{1,\,m}{\Sigma x\Pi}-\underset{0,\,m}{\Sigma xP}\right\}-z\left(\overset{m}{x}+\tfrac{1}{2}z\right)\left\{\underset{0,\,m}{\Sigma\Pi}-\underset{0,\,m}{\Sigma P}\right\}$$

$$+\tfrac{1}{2}z\left\{\left(\overset{m}{x}\right)^2+\overset{m}{x}\,.\,z+\tfrac{1}{3}z^2\right\}.\gamma+\text{Const.}$$

Für $z=0$ wird $\dfrac{du}{dz}=\mathrm{Tg}\,\underset{m}{\varphi}$. Also $\text{Const}=E^2\,.\,\mathrm{Tg}\,\underset{m}{\varphi}$, und folglich

$$\frac{E^2\,du}{dz} = z\left\{\underset{1,\,m}{\Sigma x\Pi} - \underset{0,\,m}{\Sigma x P}\right\} - z\left(\overset{m}{x} + \tfrac{1}{2}z\right)\left\{\underset{0,\,m}{\Sigma\Pi} - \underset{0,\,m}{\Sigma P}\right\}$$

$$+ \tfrac{1}{2}z\left\{\left(\overset{m}{x}\right)^2 + \overset{m}{x}\,.\,z + \tfrac{1}{3}z^2\right\}.\,\gamma + E^2\,.\,\mathrm{Tg}\,\underset{m}{\varphi}.$$

Durch nochmahlige Integration:

$$E^2 u = \tfrac{1}{2}z^2\left\{\underset{1,\,m}{\Sigma x\Pi} - \underset{0,\,m}{\Sigma x P}\right\} - \tfrac{1}{2}z^2\left(\overset{m}{x} + \tfrac{1}{3}z\right)\left\{\underset{0,\,m}{\Sigma\Pi} - \underset{0,\,m}{\Sigma P}\right\}$$

$$+ \tfrac{1}{2}z^2\left\{\tfrac{1}{2}\left(\overset{m}{x}\right)^2 + \tfrac{1}{3}\overset{m}{x}\,.\,z + \tfrac{1}{12}z^2\right\}.\,\gamma + E^2 z\,\mathrm{Tg}\,\underset{m}{\varphi} + \mathrm{Const.}$$

Für $z = 0$ wird $u = \overset{m}{y}$. Also $\mathrm{Const} = E^2\,.\,\overset{m}{y}$, und folglich

$$E^2 u = \tfrac{1}{2}z^2\left\{\underset{1,\,m}{\Sigma x\Pi} - \underset{0,\,m}{\Sigma x P}\right\} - \tfrac{1}{2}z^2\left(\overset{m}{x} + \tfrac{1}{3}z\right)\left\{\underset{0,\,m}{\Sigma\Pi} - \underset{0,\,m}{\Sigma P}\right\}$$

$$+ \tfrac{1}{2}z^2\left\{\tfrac{1}{2}\left(\overset{m}{x}\right)^2 + \tfrac{1}{3}\overset{m}{x}\,.\,z + \tfrac{1}{12}z^2\right\}.\,\gamma + E^2 z\,\mathrm{Tg}\,\underset{m}{\varphi} + E^2\overset{m}{y}.$$

Für $z = \underset{m+1}{x} - \overset{m}{x}$ wird nun $\frac{du}{dz} = \mathrm{Tg}\,\underset{m+1}{\pi}$, und u wird $= 0$.

$$\overset{m}{x} + \tfrac{1}{3}z = \overset{m}{x} + \tfrac{1}{3}\,.\,\underset{m+1}{x} - \tfrac{1}{3}\overset{m}{x} = \tfrac{1}{3}\left(\underset{m+1}{x} + 2\overset{m}{x}\right),$$

$$\overset{m}{x} + \tfrac{1}{2}z = \overset{m}{x} + \tfrac{1}{2}\,.\,\underset{m+1}{x} - \tfrac{1}{2}\overset{m}{x} = \tfrac{1}{2}\left(\underset{m+1}{x} + \overset{m}{x}\right),$$

$$\left(\overset{m}{x}\right)^2 + \overset{m}{x}\,.\,z + \tfrac{1}{3}z^2 = \tfrac{1}{3}\left(\underset{m+1}{x}\right)^2 - \tfrac{1}{3}\,.\,\underset{m+1}{x}\,.\,\overset{m}{x} + \tfrac{1}{3}\left(\overset{m}{x}\right)^2,$$

$$\tfrac{1}{2}\left(\overset{m}{x}\right)^2 + \tfrac{1}{3}\overset{m}{x}\,.\,z + \tfrac{1}{12}z^2 = \left\{\begin{array}{l} \tfrac{1}{2}\left(\overset{m}{x}\right)^2 + \tfrac{1}{3}\overset{m}{x}\,.\,\underset{m+1}{x} - \tfrac{1}{3}\left(\overset{m}{x}\right)^2 \\ + \tfrac{1}{12}\left(\underset{m+1}{x}\right)^2 - \tfrac{1}{6}\underset{m+1}{x}\,.\,\overset{m}{x} + \tfrac{1}{12}\left(\overset{m}{x}\right)^2 \end{array}\right.$$

$$= \tfrac{1}{4}\left(\overset{m}{x}\right)^2 + \tfrac{1}{6}\overset{m}{x}\,.\,\underset{m+1}{x} + \tfrac{1}{12}\left(\underset{m+1}{x}\right)^2.$$

Also aus den beiden gefundenen Gleichungen:

$$E^2\,\mathrm{Tg}\,\underset{m+1}{\pi} = \left(\underset{m+1}{x} - \overset{m}{x}\right)\left\{\underset{1,\,m}{\Sigma} x\Pi - \underset{0,\,m}{\Sigma} xP\right\} - \tfrac{1}{2}\left(\underset{m+1}{x} - \overset{m}{x}\right)\left(\underset{m+1}{x} + \overset{m}{x}\right)\left\{\underset{0,\,m}{\Sigma}\Pi - \underset{0,\,m}{\Sigma}P\right\}$$

$$+ \tfrac{1}{6}\left(\underset{m+1}{x} - \overset{m}{x}\right)\left\{\left(\underset{m+1}{x}\right)^2 - \underset{m+1}{x}\cdot\overset{m}{x} + \left(\overset{m}{x}\right)^2\right\}\cdot\gamma + E^2\cdot\mathrm{Tg}\,\underset{m}{\phi},$$

$$0 = \tfrac{1}{2}\left(\underset{m+1}{x} - \overset{m}{x}\right)^2\left\{\underset{1,\,m}{\Sigma} x\Pi - \underset{0,\,m}{\Sigma} xP\right\} - \tfrac{1}{6}\left(\underset{m+1}{x} - \overset{m}{x}\right)^2\left(\underset{m+1}{x} + 2\overset{m}{x}\right)\left\{\underset{0,\,m}{\Sigma}\Pi - \underset{0,\,m}{\Sigma}P\right\}$$

$$+ \tfrac{1}{4}\left(\underset{m+1}{x} - \overset{m}{x}\right)^2\left\{\tfrac{1}{2}\left(\overset{m}{x}\right)^2 + \tfrac{1}{3}\overset{m}{x}\cdot\underset{m+1}{x} + \tfrac{1}{6}\left(\underset{m+1}{x}\right)^2\right\}\cdot\gamma + E^2\left(\underset{m+1}{x} - \overset{m}{x}\right)\mathrm{Tg}\,\underset{m}{\phi}$$

$$+ E^2\cdot\overset{m}{y}.$$

Wir haben also jetzt die folgenden vier allgemeinen Gleichungen:

$$E^2\,\mathrm{Tg}\,\underset{m}{\phi} = \left(\overset{m}{x} - \underset{m}{x}\right)\left\{\underset{1,\,m}{\Sigma} x\Pi - \underset{0,\,m-1}{\Sigma} xP\right\} - \tfrac{1}{2}\left(\overset{m}{x} - \underset{m}{x}\right)\left(\overset{m}{x} + \underset{m}{x}\right)\left\{\underset{0,\,m}{\Sigma}\Pi - \underset{0,\,m-1}{\Sigma}P\right\}$$

$$+ \tfrac{1}{6}\left(\overset{m}{x} - \underset{m}{x}\right)\left\{\left(\overset{m}{x}\right)^2 + \overset{m}{x}\cdot\underset{m}{x} + \left(\underset{m}{x}\right)^2\right\}\cdot\gamma + E^2\cdot\mathrm{Tg}\,\underset{m}{\pi},$$

$$E^2\overset{m}{y} = \tfrac{1}{2}\left(\overset{m}{x} - \underset{m}{x}\right)^2\left\{\underset{1,\,m}{\Sigma} x\Pi - \underset{0,\,m-1}{\Sigma} xP\right\} - \tfrac{1}{6}\left(\overset{m}{x} - \underset{m}{x}\right)^2\left(\overset{m}{x} + 2\underset{m}{x}\right)\left\{\underset{0,\,m}{\Sigma}\Pi - \underset{0,\,m-1}{\Sigma}P\right\}$$

$$+ \tfrac{1}{4}\left(\overset{m}{x} - \underset{m}{x}\right)^2\left\{\tfrac{1}{2}\left(\underset{m}{x}\right)^2 + \tfrac{1}{3}\overset{m}{x}\cdot\underset{m}{x} + \tfrac{1}{6}\left(\overset{m}{x}\right)^2\right\}\cdot\gamma + E^2\left(\overset{m}{x} + \underset{m}{x}\right)\mathrm{Tg}\,\underset{m}{\pi},$$

$$E^2\,\mathrm{Tg}\,\underset{m+1}{\pi} = \left(\underset{m+1}{x} - \overset{m}{x}\right)\left\{\underset{1,\,m}{\Sigma} x\Pi - \underset{0,\,m}{\Sigma} xP\right\} - \tfrac{1}{2}\left(\underset{m+1}{x} - \overset{m}{x}\right)\left(\underset{m+1}{x} + \overset{m}{x}\right)\left\{\underset{0,\,m}{\Sigma}\Pi - \underset{0,\,m}{\Sigma}P\right\}$$

$$+ \tfrac{1}{6}\left(\underset{m+1}{x} - \overset{m}{x}\right)\left\{\left(\underset{m+1}{x}\right)^2 - \underset{m+1}{x}\cdot\overset{m}{x} + \left(\overset{m}{x}\right)^2\right\}\cdot\gamma + E^2\cdot\mathrm{Tg}\,\underset{m}{\phi},$$

$$0 = \tfrac{1}{2}\left(\underset{m+1}{x} - \overset{m}{x}\right)^2\left\{\underset{1,\,m}{\Sigma} x\Pi - \underset{0,\,m}{\Sigma} xP\right\} - \tfrac{1}{6}\left(\underset{m+1}{x} - \overset{m}{x}\right)^2\left(\underset{m+1}{x} + 2\overset{m}{x}\right)\left\{\underset{0,\,m}{\Sigma}\Pi - \underset{0,\,m}{\Sigma}P\right\}$$

$$+ \tfrac{1}{4}\left(\underset{m+1}{x} - \overset{m}{x}\right)^2\left\{\tfrac{1}{2}\left(\overset{m}{x}\right)^2 + \tfrac{1}{3}\overset{m}{x}\cdot\underset{m+1}{x} + \tfrac{1}{6}\left(\underset{m+1}{x}\right)^2\right\}\cdot\gamma + E^2\left(\underset{m+1}{x} - \overset{m}{x}\right)\mathrm{Tg}\,\underset{m}{\phi}$$

$$+ E^2\cdot\overset{m}{y}.$$

Setzt man nun in diesen Gleichungen für m die natürlichen Zahlen nach der Ordnung von o bis n, wobey zu bemerken, daß für $m = 0$, $\underset{m}{x} = 0$, $\overset{m}{x} = x$, $\overset{m}{y} = y$, $\underset{m}{\pi} = \pi$, $\underset{m}{\varphi} = \varphi$, $\underset{m}{\Pi} = \Pi$, $\underset{m}{P} = P$ wird; so erhält man immer vier Gleichungen für folgende unbekannte Größen:

$$\pi,\ \varphi,\ \underset{1}{\pi},\ y;$$

$$\underset{1}{\pi},\ \underset{1}{\varphi},\ \underset{2}{\pi},\ \overset{1}{y};$$

$$\underset{2}{\pi},\ \underset{2}{\varphi},\ \underset{3}{\pi},\ \overset{2}{y};$$

$$\underset{3}{\pi},\ \underset{3}{\varphi},\ \underset{4}{\pi},\ \overset{3}{y};$$

$$\cdots\cdots$$

$$\underset{n-1}{\pi},\ \underset{n-1}{\varphi},\ \underset{n}{\pi},\ \overset{n-1}{y};$$

$$\underset{n}{\pi},\ \underset{n}{\varphi},\ \underset{n+1}{\pi},\ \overset{n}{y}.$$

Dadurch erhält man $4(n+1) = 4n + 4$ Gleichungen; und wenn zu diesen Gleichungen noch die Gleichungen:

$$\Pi + \underset{1}{\Pi} + \underset{2}{\Pi} + \ldots + \underset{n+1}{\Pi} = P + \underset{1}{P} + \underset{2}{P} + \ldots + \underset{n}{P} + \underset{n+1}{x} \cdot \gamma,$$

$$\underset{1}{x}.\underset{1}{\Pi} + \underset{2}{x}.\underset{2}{\Pi} + \underset{3}{x}.\underset{3}{\Pi} + \ldots + \underset{n+1}{x} . \underset{n+1}{\Pi} = x.P + \overset{1}{x}.\underset{1}{P} + \ldots + \overset{n}{x}.\underset{n}{P} + \tfrac{1}{2}\left(\underset{n+1}{x}\right)^2 . \gamma,$$

genommen werden, so hat man $4n + 6$ Gleichungen.

Diese Gleichungen enthalten folgende unbekannte Größen:

1) π mit seinen Zeigern kommt $(n+2)$ Mahl vor;
2) φ mit seinen Zeigern kommt $(n+1)$ Mahl vor;
3) y mit seinen Zeigern kommt ebenfalls $(n+1)$ Mahl vor;

und

4) Π mit seinen Zeigern kommt $(n+2)$ Mahl vor;

so daß also die Anzahl der unbekannten Größen =

$$n + 2 + n + 1 + n + 1 + n + 2 = 4n + 6$$

ist. Man hat folglich $4n + 6$ Gleichungen mit $4n + 6$ unbekannten Größen, die sich also alle aus den gefundenen Gleichungen durch Elimination bestimmen lassen. Man kann also auch die gesuchten Größen

$$\Pi, \Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \ldots \Pi_{n+1}$$

bestimmen, welches verlangt wurde.

Eliminationen führen gewöhnlich auf sehr weitläufige und beschwerliche Rechnungen, welches namentlich bey der vorliegenden Aufgabe der Fall ist. Daher ist es, weil wir den Raum sparen müssen, nicht möglich, hier ein Exempel zu berechnen, welches aber auch für den, der die obigen allgemeinen Formeln versteht, überflüssig ist. Die Schwierigkeit liegt bloß in der Elimination der unbekannten Größen, welche in die Algebra gehört. In Eytelwein's Handbuche der Statik, Th. 3. S. 148. — 159., ist die Berechnung zweyer besondern Fälle für drey und vier Unterstützungspunkte nebst andern nützlichen praktischen Betrachtungen zu finden. Die an diesem Orte aufgelös'ten Aufgaben können als Exempel unsrer allgemeinen Formeln dienen. Auch gehört hierher Th. 2. S. 69. — 80. a. a. O.

Von Wichtigkeit scheint uns noch folgende Bemerkung zu seyn. Betrachtet man nämlich die oben gefundenen vier allgemeinen Gleichungen näher, und setzt der Kürze wegen

$$E^2 = a, \quad \mathrm{Tg}\,\varphi_m = x, \quad \mathrm{Tg}\,\pi_m = y, \quad \overset{m}{y} = z, \quad \mathrm{Tg}\,\pi_{n+1} = v;$$

so wird leicht erhellen, daß sich jene Gleichungen unter folgender Form abgekürzt darstellen lassen, wo natürlich P, P', P'', P''' andere Bedeutungen haben, als oben:

$$\begin{aligned} ax &= bP + ay, \\ az &= bP' + aby, \\ av &= cP'' + ax, \\ 0 &= cP''' + acx + az. \end{aligned}$$

Man erhält also aus diesen Gleichungen:

$$a = \frac{bP}{x - y},$$

$$b = \frac{ax - ay}{P},$$

$$a = \frac{bP'}{z - by},$$

$$b = \frac{az - aby}{P'},$$

$$a = \frac{cP''}{v - x},$$

$$c = \frac{av - ax}{P''},$$

$$a = -\frac{cP'''}{cx + z},$$

$$c = -\frac{acx + az}{P'''}.$$

Also

$$\frac{bP}{x - y} = \frac{cP''}{v - x},$$

$$\frac{bP'}{z - by} = -\frac{cP'''}{cx + z},$$

$$\frac{ax - ay}{P} = \frac{az - aby}{P'},$$

$$\frac{av - ax}{P''} = -\frac{acx + az}{P'''};$$

oder

$$\frac{bP}{x - y} = \frac{cP''}{v - x},$$

$$\frac{bP'}{z - by} = -\frac{cP'''}{cx + z},$$

$$\frac{x - y}{P} = \frac{z - by}{P'},$$

$$\frac{v - x}{P''} = -\frac{cx + z}{P'''};$$

d. i. vier neue Gleichungen, welche a oder E^2 nicht enthalten.

So kann man also aus jeden vier Gleichungen, wie die obigen vier allgemeinen, vier neue Gleichungen ableiten, welche E^2 nicht enthalten, welches $4n+4$ Gleichungen ohne E^2 gibt. Die zwey noch hinzukommenden Gleichungen auf S. 605. enthalten aber E^2 an sich nicht, und man hat also $4n+6$ Gleichungen ohne E^2, und eben so viel unbekannte Größen. Hieraus folgt, daß die Ausdrücke, welche man für Π, Π_1, Π_2, u. s. w. erhält, E^2 nicht enthalten, sondern bloß durch die gegebenen Absciſſen und die Kräfte γ, P, P_1, P_2, u. s. w. ausgedrückt werden.

Der Druck auf die Unterstützungspunkte ist demnach von der Elasticität des Balkens unabhängig; eine wichtige Bemerkung, welche auch Eytelwein, a. a. O. Th. 3. S. 153., in den von ihm betrachteten besondern Fällen gemacht hat. Laut der Vorrede zu seinem Werke hat Eytelwein auch Versuche über den Gegenstand dieses Paragraphen angestellt, deren Resultate mit den Resultaten der Theorie übereinstimmen.

§. 214.

Hätte der Balken eine schiefe Lage, und wäre er gegen den Horizont unter einem Winkel $=\alpha$ geneigt; so kann man jeden der verticalen Drucke Π in einen Druck $\Pi \operatorname{Cos}\alpha$ senkrecht auf den Balken, und in einen Druck $\Pi \operatorname{Sin}\alpha$ nach der Richtung des Balkens zerlegen. Aber auch jede der durch P bezeichneten Kräfte zerlegt sich nach denselben Richtungen in $P\operatorname{Cos}\alpha$ und in $P\operatorname{Sin}\alpha$, so wie auch die Kraft γ in $\gamma\operatorname{Cos}\alpha$ und in $\gamma\operatorname{Sin}\alpha$. Die auf dem Balken senkrechten Pressungen rühren offenbar bloß von den Kräften $P\operatorname{Cos}\alpha$ und der Kraft $\gamma\operatorname{Cos}\alpha$ her. Daher ist, wenn man den schiefen Balken als Axe der Absciſſen annimmt, weil offenbar allgemein

$$\sum_{1,m} x\Pi \operatorname{Cos}\alpha - \sum_{0,n} xP\operatorname{Cos}\alpha = \left\{\sum_{1,m} x\Pi - \sum_{0,n} xP\right\}\operatorname{Cos}\alpha,$$

$$\sum_{0,m} \Pi \operatorname{Cos}\alpha - \sum_{0,n} P\operatorname{Cos}\alpha = \left\{\sum_{0,m} \Pi - \sum_{0,n} P\right\}\operatorname{Cos}\alpha$$

ist, wenn wir die abkürzenden Bezeichnungen auf S. 606. gebrauchen:

$$ax = bP\cos\alpha + a\gamma,$$
$$az = bP'\cos\alpha + ab\gamma,$$
$$av = cP''\cos\alpha + ax,$$
$$0 = cP'''\cos\alpha + acx + az;$$

denn auch für γ muß man sich natürlich $\gamma\cos\alpha$ gesetzt denken. Also

$$a = \frac{bP\cos\alpha}{x-\gamma},$$

$$b = \frac{ax - a\gamma}{P\cos\alpha},$$

$$a = \frac{bP'\cos\alpha}{z - b\gamma},$$

$$b = \frac{az - ab\gamma}{P'\cos\alpha},$$

$$a = \frac{cP''\cos\alpha}{v - x},$$

$$c = \frac{av - ax}{P''\cos\alpha},$$

$$a = -\frac{cP'''\cos\alpha}{cx + z},$$

$$c = -\frac{acx + az}{P'''\cos\alpha}.$$

Also

$$\frac{bP\cos\alpha}{x-\gamma} = \frac{cP''\cos\alpha}{v-x},$$

$$\frac{bP'\cos\alpha}{z-b\gamma} = -\frac{cP'''\cos\alpha}{cx+z},$$

$$\frac{ax-a\gamma}{P\cos\alpha} = \frac{az-ab\gamma}{P'\cos\alpha},$$

$$\frac{av-ax}{P''\cos\alpha} = -\frac{acx+az}{P'''\cos\alpha};$$

oder

$$\frac{bP}{x-y}=\frac{cP''}{v-x},$$

$$\frac{bP'}{z-b\gamma}=-\frac{cP'''}{cx+z},$$

$$\frac{x-y}{P}=\frac{z-b\gamma}{P'},$$

$$\frac{v-x}{P''}=-\frac{cx+z}{P'''}.$$

Aus diesen Gleichungen, verglichen mit den Gleichungen auf S. 607., erhellet, daß die verticalen Pressungen auf die Unterstützungspunkte eines schief liegenden Balkens ganz auf dieselbe Art bestimmt werden, wie bey einem horizontalen Balken, und von diesen also nicht unterschieden sind, wenn nur die Abscissen der Unterstützungs- und Aufhängepunkte auf dem schiefen Balken als Abscissenaxe genommen werden. γ bedeutet immer das Gewicht des Balkens.

Neunzehntes Kapitel.

Von der Stabilität.

§. 215.

Wenn ein Körper auf einem horizontalen oder schiefen Boden steht, möge er nun den Boden mit seiner ganzen Grundfläche oder nur in einigen Punkten berühren; so heißt immer die Figur, welche man erhält, wenn man die äußersten Berührungspunkte durch gerade Linien verbindet, seine Grundfläche.

Denkt man sich jetzt, daß der Körper, durch irgend einen Widerstand gehindert, auf dem Boden nicht fortgeschoben werden könne, und daß, parallel mit der Grundfläche, an seinem Schwerpunkte eine Kraft wirke; so wird diese Kraft offenbar den Körper um eine der Seiten seiner Grundfläche zu drehen streben. Diese Kraft, wenn sie gerade groß genug ist, den Widerstand des Körpers zu überwinden, so daß zwar noch keine Umdrehung des Körpers um eine der Seiten seiner Grundfläche erfolgt, aber augenblicklich erfolgen würde, wenn die Kraft nur um das mindeste vergrößert würde, bestimmt offenbar die Festigkeit des Standes des Körpers in Ansehung der Seite, nach welcher die Umdrehung geschehen soll, und wird daher gewöhnlich die Stabilität des Körpers genannt.

§. 216.

Aufgabe. Die Stabilität eines Körpers auf horizontalem Boden in Ansehung einer der Seiten seiner Grundfläche zu finden.

Auflösung. Das Gewicht des Körpers, welches bekanntlich als eine in seinem Schwerpunkte vertical abwärts wirkende Kraft angesehen werden kann, sey $= P$; die Stabilität sey $= S$; die Seite der Grundfläche des Körpers, in Beziehung auf welche die Stabilität gesucht wird, nehme man als Drehungsaxe an, lege durch den Schwerpunkt eine Ebene, welche auf der Drehungsaxe senkrecht ist: so liegen die Richtungen der Kräfte P und S in dieser Ebene, und es ist, wenn wir die Erhöhung des Schwerpunktes über der Grundfläche durch y, die Entfernung des Punktes, in welchem das Perpendikel y die Grundfläche schneidet, von der Drehaxe aber durch x bezeichnen, wo x positiv oder negativ genommen werden soll, je nachdem es innerhalb oder außerhalb der Grundfläche des Körpers fällt, nach §. 63. offenbar

$$Sy - Px = 0, \quad Sy = Px,$$

$$\text{und folglich } S = \frac{Px}{y} = \frac{x}{y} \cdot P.$$

Aus diesem einfachen Ausdrucke lassen sich verschiedene merkwürdige Folgerungen ziehen.

1) Wenn x positiv ist, d. i. wenn der Endpunkt von y, welches, so wie P, immer als positiv angesehen wird, entweder in die Grundfläche oder, von der Drehaxe an, nach der Seite der Grundfläche hin, über sie hinausfällt; so ist S positiv; d. i. Es ist immer eine gewisse merkliche Kraft erforderlich, um den Körper um die gegebene Seite zu drehen, und er kann nach dieser Seite hin nicht umschlagen.

Die Verticale durch den Schwerpunkt eines Körpers nennt man die Directionslinie der Schwere. Ein Körper kann daher schief stehen, ohne jedoch umzustürzen, wenn nur der Durchschnittspunkt der Directionslinie der Schwere mit der Grundfläche entweder innerhalb der Grundfläche fällt, oder nach ihrer Seite hin, außerhalb derselben. Die schiefen Thürme zu Pisa und Bologna, von denen in jedem physikalischen Lehrbuche geredet wird, sind Meisterstücke der Baukunst in dieser Beziehung. (M. s. auch de la Lande Voyage d'un François en Italie, Paris 1769, T. II. p. 18. p. 482.)

2) Ist $x = 0$, so wird $S = 0$, und der Körper schlägt zwar nicht um, kann aber doch mit der kleinsten Kraft umgeworfen werden.

3) Ist endlich x negativ, d. i. fällt der Durchschnittspunkt der Directionslinie der Schwere außerhalb der Grundfläche, nach der Seite der Drehaxe hin; so wird S negativ, und der **Körper muß also durch eine nach der Seite der Grundfläche hin gerichtete Kraft gehalten werden, wenn er nicht umschlagen soll. Wenn dies nicht geschieht, wird er also umstürzen.**

4) Unter der Voraussetzung, daß x positiv ist, wird S desto größer, je größer P, je größer x und je kleiner zu gleicher Zeit y ist. **Ein Körper steht also in Beziehung auf eine Seite seiner Grundfläche desto fester, je größer sein Gewicht ist, je näher sein Schwerpunkt am Boden liegt, und je weiter der Durchschnittspunkt der Directionslinie der Schwere von der Drehaxe nach der Seite der Grundfläche hin liegt.**

§. 217.

Einige hierher gehörige Beyspiele sind folgende.

1) Bey einer Kugel, welche eine Ebene nur in **einem** Punkte berührt, ist offenbar $x = 0$; also auch $S = 0$. Eine Kugel liegt also zwar ruhig, so lange sie unberührt bleibt, der kleinste Anstoß ist aber im Stande, die Kugel fortzubewegen.

2) Bey einer cylindrischen Säule, deren Basis den Halbmesser r hat, ist $x = r$, und $y = \frac{1}{2}h$, wenn h die Höhe bezeichnet. Also

$$S = \frac{2rP}{h}.$$

Ist nun γ das Gewicht einer Cubikeinheit der Materie, woraus die Säule besteht; so ist offenbar $P = r^2\pi h\gamma$, und demnach

$$S = 2r^3\pi\gamma.$$

Die Stabilität hängt also nicht von der Höhe ab.

3) Für eine senkrecht stehende gerade Mauer sey l die Länge, d die Dicke, h die Höhe, und γ das Gewicht einer Cubikeinheit ihrer Materie; so ist $P = hld\gamma$. x ist $= \frac{1}{2}d$

und $y = \frac{1}{2}h$, wenn man die Länge der Mauer als Drehaxe betrachtet. Also

$$S = \frac{\frac{1}{2}d}{\frac{1}{2}h} \cdot hld\gamma = ld^2\gamma.$$

Die Stabilität hängt also nicht von der Höhe der Mauer ab, sondern bloß von Länge und Dicke, und wird offenbar desto größer, je größer die Länge, die Höhe und das Gewicht der Materie sind, aus welcher sie besteht.

Hat man zwey Mauern von gleicher Länge und Materie, aber ungleicher Dicke; so ist

$$S : S' = d^2 : d'^2,$$

wenn S' und d' dasselbe in Beziehung auf die zweyte Mauer bedeuten, was S und d in Beziehung auf die erste bezeichnen. Soll sich $S : S' = 1 : 2$ verhalten; so ist

$$d^2 : d'^2 = 1 : 2, \quad d : d' = 1 : \sqrt{2}.$$

4) Hieraus erklärt sich leicht die Wirkung der Strebepfeiler bey den Mauern. Die Dicke der Mauer sey, um dieselben Bezeichnungen wie Eytelwein, a. a. O. Th. 1. S. 197., zu gebrauchen, $= d$, die Entfernung zweyer Pfeiler von einander $= b$, die Dicke der Mauer und der Pfeiler $= \delta$, und β die Breite des Pfeilers, nach der Länge der Mauer gemessen. Wir wollen bloß die Stabilität eines Pfeilers und der Zwischenmauer suchen. Die Stabilität der Mauer ohne Pfeiler wäre offenbar

$$= \frac{\frac{1}{2}d}{\frac{1}{2}h} \cdot (b + \beta)\, hd\gamma$$

$$= (b + \beta)\, d^2\gamma;$$

die Stabilität der Zwischenmauer aber

$$= \frac{\frac{1}{2}d}{\frac{1}{2}h}\, hbd\gamma = bd^2\gamma,$$

eine Seite ihrer Basis als Drehaxe angenommen; die Stabilität des Pfeilers, eine Seite seiner Basis als Drehaxe angenommen,

$$= \frac{\frac{1}{2}\delta}{\frac{1}{2}h}\, \beta\delta h\gamma = \beta\delta^2\gamma.$$

Also die Stabilität der Mauer und des Pfeilers nach der Seite hin, wo die Pfeiler nicht liegen,

$$= bd^2\gamma + \beta\delta^2\gamma = (bd^2 + \beta\delta^2)\gamma,$$

offenbar größer als die vorige Stabilität der Mauer ohne Pfeiler, da $\delta > d$ ist.

Die Stabilität der Zwischenmauer nach der einen hervorstehenden Seite der Grundfläche des Pfeilers ist

$$= \frac{\delta - \frac{1}{2}d}{\frac{1}{2}h} \cdot hbd\gamma$$

$$= (2\delta - d)\,bd\gamma = (2bd\delta - bd^2)\gamma,$$

und folglich die Stabilität der Mauer und des Pfeilers

$$= (2bd\delta - bd^2)\gamma + \beta\delta^2\gamma$$

$$= (\beta\delta^2 + 2bd\delta - bd^2)\gamma,$$

offenbar noch größer als die vorige Stabilität.

In der Baukunst sind diese Untersuchungen über die Stabilität von vielfacher Anwendung. Wir betrachten nun nur noch kurz die Stabilität auf der schiefen Fläche.

§. 218.

Der Neigungswinkel der gegebenen Fläche gegen den Horizont sey $= \alpha$, und man nimmt an, daß der Körper auf ihr nicht fortgleiten kann.

Man ziehe von dem Punkte, wo die Directionslinie der Schwere die schiefe Ebene schneidet, ein Perpendikel auf die Drehaxe, lege durch dieses Perpendikel und die Directionslinie der Schwere eine Ebene, und bezeichne den von den Durchschnittslinien dieser Ebene mit der schiefen und horizontalen Ebene eingeschlossenen Winkel durch β. Das Gewicht P des Körpers, als eine im Schwerpunkte vertical abwärts wirkende Kraft betrachtet, kann in die beiden Kräfte $P \operatorname{Sin} \beta$, parallel mit der schiefen Ebene, und $P \operatorname{Cos} \beta$ zerlegt werden. Nennt man nun S die Stabilität, wie gewöhnlich, welche als eine parallel mit der schiefen Ebene wirkende Kraft angesehen wird; so ist die parallel mit der schiefen Ebene wirkende Kraft =

$S + P\operatorname{Sin}\beta$, wenn die Stabilität die schiefe Ebene abwärts, und $= S - P\operatorname{Sin}\beta$, wenn sie die schiefe Ebene aufwärts gesucht wird. Haben nun x und y wieder dieselbe Bedeutung wie vorher in Beziehung auf die horizontale Ebene; so muß wie oben

$$(S + P\operatorname{Sin}\beta)y = Px\operatorname{Cos}\beta,$$

oder

$$(S - P\operatorname{Sin}\beta)y = Px\operatorname{Cos}\beta$$

seyn. Also

$$Sy = Px\operatorname{Cos}\beta \mp Py\operatorname{Sin}\beta,$$

$$S = \frac{P(x\operatorname{Cos}\beta \mp y\operatorname{Sin}\beta)}{y}.$$

Der Winkel β wird in jedem Falle durch die besondere Lage der Drehaxe und den Winkel α bestimmt, und würde sich berechnen lassen, wobey wir aber nicht verweilen. Ist die Drehaxe der Durchschnittslinie der schiefen Ebene mit der horizontalen parallel; so ist offenbar $\beta = \alpha$, und die Stabilität S

$$= \frac{P(x\operatorname{Cos}\alpha \mp y\operatorname{Sin}\alpha)}{y}.$$

Es erhellet, daß, wenn $x - P\operatorname{Sin}\alpha$ negativ ist, der Durchschnittspunkt der Directionslinie mit der schiefen Ebene außerhalb der Grundfläche fällt, indem wir eine durch den äußersten Punkt der Grundfläche des Körpers, (nach der Richtung die schiefe Ebene abwärts,) mit der Durchschnittslinie der schiefen und horizontalen Ebene parallel gezogene Linie als Drehaxe annehmen. Unter dieser Voraussetzung ist aber, da $y = P\operatorname{Cos}\alpha$ ist, auch

$$x - \frac{y\operatorname{Sin}\alpha}{\operatorname{Cos}\alpha} < 0, \text{ d. i.}$$

$$\frac{x\operatorname{Cos}\alpha - y\operatorname{Sin}\alpha}{\operatorname{Cos}\alpha} < 0, \text{ oder}$$

$$x\operatorname{Cos}\alpha - y\operatorname{Sin}\alpha < 0,$$

$$\frac{P(x\operatorname{Cos}\alpha - y\operatorname{Sin}\alpha)}{y} < 0.$$

Also auch die Stabilität S negativ, so daß also unter dieser Bedingung der Körper auf der schiefen Ebene umschlägt.

Fällt der Durchschnittspunkt der Directionslinie der Schwere mit der schiefen Ebene innerhalb der Grundfläche; so ist immer

$$x - P \operatorname{Sin} \alpha \overline{\overline{>}} 0,$$

$$x - \frac{y \operatorname{Sin} \alpha}{\operatorname{Cos} \alpha} \overline{\overline{>}} 0,$$

$$\frac{x \operatorname{Cos} \alpha - y \operatorname{Sin} \alpha}{\operatorname{Cos} \alpha} \overline{\overline{>}} 0,$$

$$x \operatorname{Cos} \alpha - y \operatorname{Sin} \alpha \overline{\overline{>}} 0,$$

$$\frac{P(x \operatorname{Cos} \alpha - y \operatorname{Sin} \alpha)}{y} \overline{\overline{>}} 0,$$

also $S \overline{\overline{>}} 0$, und der Körper schlägt also nicht um.

Die Bedingungen, ob ein Körper auf einer schiefen Ebene umschlägt oder nicht, sind also dieselben, wie auf der horizontalen Ebene.

Hat ein Körper, dessen Gewicht $= P$ ist, auf einer horizontalen Ebene die Stabilität S; so fragt sich, wie stark die Ebene geneigt werden darf, ehe der Körper umschlägt.

Der Körper wird offenbar so lange ruhen, bis seine Stabilität auf der schiefen Ebene $= 0$ wird, d. h. so lange, bis

$$x \operatorname{Cos} \alpha - y \operatorname{Sin} \alpha = 0, \text{ d. i.}$$

$$x \operatorname{Cos} \alpha = y \operatorname{Sin} \alpha, \quad \frac{x}{y} = \frac{\operatorname{Sin} \alpha}{\operatorname{Cos} \alpha} = \operatorname{Tg} \alpha.$$

Aber es ist nach §. 216.:

$$S = \frac{x}{y} P.$$

Also

$$\frac{x}{y} = \frac{S}{P},$$

und folglich

$$\mathrm{Tg}\,\alpha = \frac{S}{P},$$

woraus sich der Neigungswinkel der schiefen Ebene ergibt.

Für eine Halbkugel ist die Stabilität auf der horizontalen Ebene

$$= \frac{r}{\frac{5}{8}r} P = \tfrac{8}{5} P.$$

Also

$$\mathrm{Tg}\,\alpha = \tfrac{8}{5} P : P = \tfrac{8}{5} = 1,6.$$

Also

$$\alpha = 57^\circ\ 19'\ 40\tfrac{2}{3}''.$$

Für den Cubus ist $\frac{x}{y}$ offenbar $= 1$. Also

$$S = P,$$

und

$$\mathrm{Tg}\,\alpha = \frac{S}{P} = 1,\ \alpha = 45^\circ.$$

(M. s. Ide a. a. O. Th. 1. S. 100.)

Anhang.

Noch einige Sätze vom Schwerpunkte.

gur
der
eines
Proj

sey A
seine
Proj
P, p
$A'A'$
einan
PpA

ist.
so ist

Also

$A'a'$,
dem

ist.

Also
s der

gilt
(n –
welc

I.

Lehrsatz. Wenn man irgend eine geradlinige Figur auf irgend eine Ebene orthographisch projicirt; so ist der Schwerpunkt der Projection der Durchschnittspunkt eines vom Schwerpunkte der gegebenen Figur auf die Projectionsebene gefällten Perpendikels mit dieser Ebene.

Beweis. 1) Der Satz gilt vom Dreyecke. Denn sey $AA'A''$ irgend ein Dreyeck, S sein Schwerpunkt, $aa'a''$ seine Projection, s der Durchschnittspunkt des von S auf die Projectionsebene gefällten Perpendikels mit dieser Ebene, und P, p die Durchschnittspunkte der Linien SA, sa mit den Linien $A'A''$, $a'a''$; so erhellet sehr leicht, daß die Linien Pp, Ss, Aa einander parallel sind, und daß demnach in dem Trapezio $PpAa$

$$AS : SP = as : sp$$

ist. Aber da S der Schwerpunkt des Dreyecks $AA'A''$ ist; so ist

$$AS : SP = 2 : 1.$$

Also auch

$$as : sp = 2 : 1.$$

Ferner erhellet ebenfalls sehr leicht, daß die drey Linien $A'a'$, Pp, $A''a''$ einander parallel sind, und daß folglich in dem Trapezio $A'a'A''a''$

$$A'P : A''P = a'p : a''p$$

ist. Da aber S der Schwerpunkt von $AA'A''$ ist; so ist

$$A'P = A''P.$$

Also auch $a'p = a''p$, und folglich, weil $as : sp = 2 : 1$ ist, s der Schwerpunkt des Dreyecks $aa'a''$, w. z. b. w.

2) Wenn unser Lehrsatz für ein $n$eck gilt, so gilt er auch für ein $(n+1)$eck. Denn man theile das $(n+1)$eck durch eine Diagonale in ein $n$eck und ein Dreyeck, welche Figuren wir durch F, Δ, und ihre Projectionen durch

f, δ bezeichnen wollen. Die Schwerpunkte von F und Δ seyen S, S', und der Schwerpunkt des ganzen $(n+1)$ ecks sey Σ. Fällt man nun von S, S', Σ Perpendikel auf die Projectionsebene; so seyen die Durchschnittspunkte s, s' σ, und aus der Annahme und aus Nummer 1. folgt, daß s, s' die Schwerpunkte von f und δ sind. Da nun Σ der Schwerpunkt von $F+\Delta$ ist; so ist nach bekannten Sätzen vom Schwerpunkte:

$$F\,.\,S\Sigma = \Delta\,.\,S'\Sigma,$$

oder

$$F:\Delta = S'\Sigma : S\Sigma.$$

In dem Trapezio $SsS's'$, in welchem $\Sigma\sigma$ den parallelen Seiten parallel ist, ist aber offenbar

$$S'\Sigma : S\Sigma = s'\sigma : s\sigma.$$

Also

$$F:\Delta = s'\sigma : s\sigma.$$

Ist aber α der Neigungswinkel des gegebenen $(n+1)$ ecks gegen die Projectionsebene; so ist nach §. 71.:

$$f = F \operatorname{Cos}\alpha, \quad \delta = \Delta \operatorname{Cos}\alpha;$$

$$F = \frac{f}{\operatorname{Cos}\alpha}, \quad \Delta = \frac{\delta}{\operatorname{Cos}\alpha}.$$

Also

$$\frac{f}{\operatorname{Cos}\alpha} : \frac{\delta}{\operatorname{Cos}\alpha} = s'\sigma : s\sigma,$$

$$f:\delta = s'\sigma : s\sigma,$$

$$f\,.\,s\sigma = \delta\,.\,s'\sigma,$$

und folglich nach bekannten Sätzen σ der Schwerpunkt von $f+\delta$, d. i. der Schwerpunkt des gegebenen $(n+1)$ ecks, w. z. b. w.

3) Da nun der Satz nach Nummer 1. (des Beweises) für das Dreyeck gilt; so gilt er nach Nummer 2. (des Beweises) auch für das Viereck: also für das Fünfeck; also für das Sechseck; u. s. w. Er gilt also überhaupt für jedes $n$eck, und ist demnach allgemein.

Zusatz. Krummlinige Figuren kann man als Polygone mit unendlich vielen Seiten ansehen, so daß der Satz also auch für krummlinige Figuren gilt.

Der hier bewiesene Lehrsatz kann in manchen Fällen von Nutzen seyn.

2.

Seyen α, β, γ und x, y, z die Coordinaten zweyer Punkte im Raume, in Beziehung auf drey auf einander senkrechte Ebenen oder drey auf einander senkrechte Axen, und u die Entfernung dieser beiden Punkte von einander. Ist nun v die Entfernung der Fußpunkte der Coordinaten γ, z von einander; so ist nach §. 18. meines Lehrbuches der Kegelschnitte:

$$u^2 = (z-\gamma)^2 + v^2.$$

Aber nach demselben Paragraphen des angeführten Werkes offenbar

$$v^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2,$$

und demnach

$$u^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2,$$
$$u = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2}.$$

Die Kugel ist bekanntlich ein Körper, welcher von einer krummen Fläche eingeschlossen wird, deren Punkte alle von einem Punkte, dem Mittelpunkte der Kugel, gleich weit entfernt sind. Sind also die Coordinaten des Mittelpunktes einer Kugel α, β, γ, und sind x, y, z die Coordinaten irgend eines Punktes der Kugelfläche; so ist die Entfernung dieses Punktes vom Mittelpunkte nach dem Vorhergehenden

$$= \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2}.$$

Diese Entfernung ist aber auch $= r$, wenn r den Halbmesser der Kugel bezeichnet. Also

$$r = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2},$$

oder

$$r^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2,$$

für jeden Punkt der Kugelfläche, welches also die Gleichung der Kugelfläche ist.

Entwickelt man diese Gleichung, so erhält man:

$$r^2 = \begin{cases} x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 \\ + y^2 - 2\beta y + \beta^2 \\ + z^2 - 2\gamma z + \gamma^2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z \\ + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2, \end{cases}$$

$$o = \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z \\ + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - r^2, \end{cases}$$

so daß also überhaupt

$$o = x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D$$

die Gleichung einer Kugelfläche darstellt.

Die Gleichung geht in die Gleichung des Kreises über, wenn man $\gamma = z = o$ setzt, wodurch man erhält:

$$r^2 = x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2,$$
$$o = x^2 + y^2 + Ax + By + D.$$

Wir werden diese Gleichungen zur Entwickelung einiger merkwürdigen Eigenschaften des Schwerpunktes anwenden.

3.

Aufgabe. Es sind n Punkte im Raume gegeben: man soll den geometrischen Ort eines Punktes finden, welcher die Eigenschaft besitzt, daß die Summe der Quadrate aller von diesem Punkte nach den gegebenen Punkten gezogenen Linien einem gegebenen Quadrate gleich sey.

Auflösung. Die Coordinaten der gegebenen Punkte seyen x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z''; u. s. w., und X, Y, Z die Coordinaten des gesuchten Punktes. Sind nun l, l', l'' u. s. w. die von diesem Punkte nach den gegebenen Punkten gezogenen Linien; so ist nach Nummer 2.:

$$l^2 = (X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z-z)^2,$$
$$l'^2 = (X-x')^2 + (Y-y')^2 + (Z-z')^2,$$
$$l''^2 = (X-x'')^2 + (Y-y'')^2 + (Z-z'')^2,$$
u. s. w. u. s. w.;

oder, nach gehöriger Entwickelung der Größen auf der rechten Seite der Gleichheitszeichen:

$$l^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 - 2xX - 2yY - 2zZ + x^2 + y^2 + z^2,$$
$$l'^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 - 2x'X - 2y'Y - 2z'Z + x'^2 + y'^2 + z'^2,$$
$$l''^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 - 2x''X - 2y''Y - 2z''Z + x''^2 + y''^2 + z''^2,$$
u. s. w. u. s. w.;

und folglich

$$l^2 + l'^2 + l''^2 + \ldots =$$
$$= \begin{cases} nX^2 + nY^2 + nZ^2 \\ -2X(x+x'+x''+\ldots) - 2Y(y+y'+y''+\ldots) - 2Z(z+z'+z''+\ldots) \\ + x^2 + x'^2 + x''^2 + \ldots + y^2 + y'^2 + y''^2 + \ldots + z^2 + z'^2 + z''^2 + \ldots \end{cases}$$
$$= \begin{cases} nX^2 + nY^2 + nZ^2 - 2X\Sigma x - 2Y\Sigma y - 2Z\Sigma z \\ \qquad + \Sigma x^2 + \Sigma y^2 + \Sigma z^2. \end{cases}$$

Da nun nach der Bedingung der Aufgabe $l^2 + l'^2 + l''^2 + \ldots$ für alle Punkte eine constante Größe, $= p^2$, seyn soll; so ist

$$p^2 = \begin{cases} nX^2 + nY^2 + nZ^2 - 2X\Sigma x - 2Y\Sigma y - 2Z\Sigma z \\ \qquad + \Sigma x^2 + \Sigma y^2 + \Sigma z^2, \end{cases}$$
$$0 = \begin{cases} nX^2 + nY^2 + nZ^2 - 2X\Sigma x - 2Y\Sigma y - 2Z\Sigma z \\ \qquad - \{p^2 - (\Sigma x^2 + \Sigma y^2 + \Sigma z^2)\}, \end{cases}$$
$$0 = \begin{cases} X^2 + Y^2 + Z^2 - \frac{2}{n}X\Sigma x - \frac{2}{n}Y\Sigma y - \frac{2}{n}Z\Sigma z \\ \qquad - \frac{1}{n}\{p^2 - (\Sigma x^2 + \Sigma y^2 + \Sigma z^2)\}. \end{cases}$$

Nach dem Vorhergehenden ist aber die Gleichung der Oberfläche einer Kugel, deren Mittelpunkt durch die Coordinaten α, β, γ gegeben ist:

$$0=\left\{\begin{aligned}&x^2+y^2+z^2-2\alpha x-2\beta y-2\gamma z\\&\qquad\qquad-\{r^2-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\}.\end{aligned}\right.$$

Da man nun die vier unbekannten Größen α, β, γ, r immer so bestimmen kann, daß die vier Gleichungen:

$$\alpha=\frac{1}{n}\Sigma x,\quad \beta=\frac{1}{n}\Sigma y,\quad \gamma=\frac{1}{n}\Sigma z,$$

$$\frac{1}{n}\{p^2-(\Sigma x^2+\Sigma y^2+\Sigma z^2)\}=r^2-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2),$$

erfüllt werden; so erhellet, daß die Gleichung

$$0=\left\{\begin{aligned}&X^2+Y^2+Z^2-\frac{2}{n}X\Sigma x-\frac{2}{n}Y\Sigma y-\frac{2}{n}Z\Sigma z\\&\qquad\qquad-\frac{1}{n}\{p^2-(\Sigma x^2+\Sigma y^2+\Sigma z^2)\}\end{aligned}\right.$$

die Gleichung einer Kugelfläche ist, deren Mittelpunkt durch folgende Coordinaten bestimmt wird:

$$\alpha=\frac{1}{n}\Sigma x=\frac{1}{n}(x+x'+x''+\ldots),$$

$$\beta=\frac{1}{n}\Sigma y=\frac{1}{n}(y+y'+y''+\ldots),$$

$$\gamma=\frac{1}{n}\Sigma z=\frac{1}{n}(z+z'+z''+\ldots),$$

und für deren Halbmesser

$$\frac{1}{n}\{p^2-(\Sigma x^2+\Sigma y^2+\Sigma z^2)\}=r^2-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2),$$

$$\frac{1}{n}\{p^2-(\Sigma x^2+\Sigma y^2+\Sigma z^2)\}=r^2-\left\{\frac{1}{n^2}(\Sigma x)^2+\frac{1}{n^2}(\Sigma y)^2+\frac{1}{n^2}(\Sigma z)^2\right\},$$

$$r^2=\frac{1}{n}\{p^2-(\Sigma x^2+\Sigma y^2+\Sigma z^2)\}+\frac{1}{n^2}\{(\Sigma x)^2+(\Sigma y)^2+(\Sigma z)^2\},$$

$$r=\sqrt{\frac{1}{n}\{p^2-(\Sigma x^2+\Sigma y^2+\Sigma z^2)\}+\frac{1}{n^2}\{(\Sigma x)^2+(\Sigma y)^2+(\Sigma z)^2\}}$$

ist.

Der gesuchte geometrische Ort ist also eine Kugelfläche, die durch diese Elemente völlig bestimmt ist.

4.

Die so eben aufgelös'te Aufgabe gibt zwey merkwürdigen Sätzen über den Schwerpunkt das Daseyn.

Denkt man sich nämlich die im Raume gegebenen Punkte als eben so viele gleich schwere Punkte; so erhellet aus den für die Coordinaten des Mittelpunktes der Kugelfläche gefundenen Ausdrücken, verglichen mit den allgemeinen Ausdrücken für die Coordinaten des Schwerpunktes in §. 86. oder §. 36. für $p = p' = p'' = p''' = \ldots$, $P = np$ in §. 86., oder $P = P' = P'' = P''' = \ldots$, und $P + P' + P'' + P''' + \ldots = nP$ in §. 36., **daß der Mittelpunkt der Kugelfläche der Schwerpunkt der gegebenen, als gleich schwer gedachten, Punkte ist.**

Sind nun beliebig viele gleich schwere Punkte im Raume gegeben, und sind

$$\alpha = \frac{1}{n}\Sigma x, \ \beta = \frac{1}{n}\Sigma y, \ \gamma = \frac{1}{n}\Sigma z$$

die Coordinaten ihres Schwerpunktes; so beschreibe man aus diesem Punkte mit einem beliebigen Halbmesser r eine Kugel, und bezeichne durch p^2 die Summe der Quadrate der von irgend einem Punkte in der Oberfläche dieser Kugel nach den gegebenen Punkten gezogenen Linien. Dann ist nach dem Vorhergehenden:

$$r^2 = \frac{1}{n}\left\{p^2 - (\Sigma x^2 + \Sigma y^2 + \Sigma z^2)\right\} + \frac{1}{n^2}\left\{(\Sigma x)^2 + (\Sigma y)^2 + (\Sigma z)^2\right\}.$$

Also

$$nr^2 = p^2 - (\Sigma x^2 + \Sigma y^2 + \Sigma z^2) + \frac{1}{n}\left\{(\Sigma x)^2 + (\Sigma y)^2 + (\Sigma z)^2\right\},$$

$$p^2 = nr^2 + (\Sigma x^2 + \Sigma y^2 + \Sigma z^2) - \frac{1}{n}\left\{(\Sigma x)^2 + (\Sigma y)^2 + (\Sigma z)^2\right\},$$

woraus erhellet, daß die Quadratensumme p^2 für alle Punkte in der Oberfläche der Kugel constant ist. Dies gibt folgenden merkwürdigen Satz:

Wenn Punkte in willkührlicher Anzahl im Raume gegeben sind und aus ihrem gemein-

schaftlichen Schwerpunkte mit willkührlichem Halbmesser eine Kugel beschrieben wird; so ist die Summe der Quadrate aller von irgend einem Punkte in der Oberfläche der Kugel an die gegebenen Punkte gezogenen geraden Linien immer von einerley Größe, und zwar

$$= nr^2 + (\Sigma x^2 + \Sigma y^2 + \Sigma z^2) - \tfrac{1}{2}\left\{(\Sigma x)^2 + (\Sigma y)^2 + (\Sigma z)^2\right\},$$

wenn n Punkte gegeben sind.

Ein ganz ähnlicher Satz gilt, wenn die gegebenen Punkte alle in einer Ebene liegen, in Beziehung auf den aus ihrem Schwerpunkte mit willkührlichem Halbmesser beschriebenen Kreis, welches Jeder leicht aus dem obigen Satze wird ableiten können.

Die Entdeckung des allgemeinen Satzes von der Kugel eignet Meyer Hirsch sich zu, in der zweyten Sammlung geometrischer Aufgaben, Berlin 1807, 8., S. 339. Den Satz für den Kreis hat schon der berühmte Huygens gefunden, in dem besonders für die eigentliche Mechanik so wichtigen Werke: Horologium oscillatorium, Parisiis 1673, Fol., prop. XII. Den geometrischen Ort in Nummer 3., aber bloß für den Kreis, hat schon Apollonius gefunden, (M. s. Apollonius Ebene Oerter, wiederhergestellt von Robert Simson, übersetzt von Camerer, Leipzig 1796, S. 263.—310.); und die Bemerkung, daß der Mittelpunkt des Ortes zugleich der Schwerpunkt der gegebenen Punkte sey, hat zuerst Fermat in einem Briefe an Roberval in seinen Variis Operibus mathematicis, p. 151., gemacht.

— 5. —

Aufgabe. Es sind n Punkte im Raume gegeben: man soll den Ort eines andern Punktes finden, der die Eigenschaft besitzt, daß, wenn man jedes der Quadrate der von diesem Punkte nach den gegebenen Punkten gezogenen geraden Linien mit einer gewissen gegebenen Zahl multiplicirt, die Summe aller hierdurch erhaltenen Producte einer gegebenen Größe gleich sey.

Auflösung. Es bleibe Alles wie in der vorhergehenden Aufgabe in Nummer 3.; nur seyen m, m', m'' u. s. w. die gegebenen Zahlen, mit welchen die Quadrate der auf die angegebene Art gezogenen Linien multiplicirt werden sollen; so ist nach der Bedingung der Aufgabe:

$$ml^2 + m'l'^2 + m''l''^2 + m'''l'''^2 + \ldots = p^2,$$

d. i. wie vorher:

$$\left.\begin{array}{l} m\left\{(X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2\right\} \\ +m'\left\{(X-x')^2+(Y-y')^2+(Z-z')^2\right\} \\ +m''\left\{(X-x'')^2+(Y-y'')^2+(Z-z'')^2\right\} \\ +\ldots\ldots \end{array}\right\} = p^2,$$

$$\left.\begin{array}{l} m\left\{X^2+Y^2+Z^2-2xX-2yY-2zZ+x^2+y^2+z^2\right\} \\ +m'\left\{X^2+Y^2+Z^2-2x'X-2y'Y-2z'Z+x'^2+y'^2+z'^2\right\} \\ +m''\left\{X^2+Y^2+Z^2-2x''X-2y''Y-2z''Z+x''^2+y''^2+z''^2\right\} \\ +\ldots\ldots \end{array}\right\} = p^2;$$

oder:

$$\left.\begin{array}{l} (m+m'+m''+\ldots)\left\{X^2+Y^2+Z^2\right\} \\ -2(mx+m'x'+m''x''+\ldots)X \\ -2(my+m'y'+m''y''+\ldots)Y \\ -2(mz+m'z'+m''z''+\ldots)Z \\ +mx^2+m'x'^2+m''x''^2+\ldots+my^2+m'y'^2+m''y''^2+\ldots \\ \quad +mz^2+m'z'^2+m''z''^2+\ldots \end{array}\right\} = p^2;$$

oder:

$$\left.\begin{array}{l} (X^2+Y^2+Z^2)\Sigma m-2X\Sigma mx-2Y\Sigma my-2Z\Sigma mz \\ \quad +\Sigma mx^2+\Sigma my^2+\Sigma mz^2 \end{array}\right\} = p^2;$$

oder, wenn man mit Σm dividirt:

$$\left.\begin{array}{l} X^2+Y^2+Z^2-\frac{2}{\Sigma m}X\Sigma mx-\frac{2}{\Sigma m}Y\Sigma my-\frac{2}{\Sigma m}Z\Sigma mz \\ \quad -\frac{1}{\Sigma m}\left\{p^2-(\Sigma mx^2+\Sigma my^2+\Sigma mz^2)\right\} \end{array}\right\}=p^2.$$

Diese Gleichung gehört offenbar einer Kugelfläche an, für deren Halbmesser und Coordinaten des Mittelpunktes man folgende Gleichungen hat:

$$\alpha=\frac{\Sigma mx}{\Sigma m}=\frac{mx+m'x'+m''x''+\ldots}{m+m'+m''+\ldots},$$

$$\beta=\frac{\Sigma my}{\Sigma m}=\frac{my+m'y'+m''y''+\ldots}{m+m'+m''+\ldots},$$

$$\gamma=\frac{\Sigma mz}{\Sigma m}=\frac{mz+m'z'+m''z''+\ldots}{m+m'+m''+\ldots},$$

$$r^2-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)=\frac{1}{\Sigma m}\left\{p^2-(\Sigma mx^2+\Sigma my^2+\Sigma mz^2)\right\},$$

$$r^2=\frac{(\Sigma mx)^2}{(\Sigma m)^2}+\frac{(\Sigma my)^2}{(\Sigma m)^2}+\frac{(\Sigma mz)^2}{(\Sigma m)^2}+\frac{1}{\Sigma m}\left\{p^2-(\Sigma mx^2+\Sigma my^2+\Sigma mz^2)\right\}$$

$$=\frac{(\Sigma mx)^2+(\Sigma my)^2+(\Sigma mz)^2+\left\{p^2-(\Sigma mx^2+\Sigma my^2+\Sigma mz^2)\right\}\Sigma m}{(\Sigma m)^2},$$

$$r=\frac{\sqrt{(\Sigma mx)^2+(\Sigma my)^2+(\Sigma mz)^2+\left\{p^2-(\Sigma mx^2+\Sigma my^2+\Sigma mz^2)\right\}\Sigma m}}{\Sigma m}.$$

Der gesuchte Ort ist also völlig bestimmt.

6.

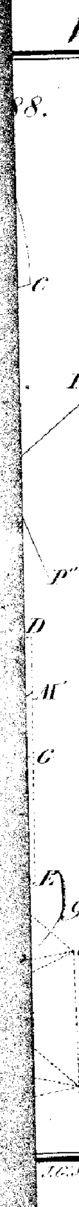
Denkt man sich nun m, m', m'' u. s. w. nicht als Zahlen, sondern als schwere Massen in den gegebenen Punkten; so erhellet leicht auf ähnliche Art wie in Nummer 5., daß der Mittelpunkt des Ortes der Schwerpunkt dieser Massen in den gegebenen Punkten ist. Drückt man umgekehrt wieder p^2 durch r^2 u. s. w. aus; so erhellet, daß p^2 für alle Punkte der Kugelfläche ungeändert bleibt, da es von X, Y, Z ganz unabhängig ist, woraus sich der folgende merkwürdige Satz ergibt:

Wenn so viele Punkte, als man will, gegeben sind, von gleichem oder ungleichem Gewichte, und aus dem Schwerpunkte derselben mit willkührlichem Radius eine Kugel beschrieben wird; so ist die Summe der Producte, welche man erhält, wenn man von irgend einem Punkte in der Oberfläche der beschriebenen Kugel nach allen gegebenen Punkten gerade Linien zieht, und deren Quadrate mit den numerischen Ausdrücken der Gewichte der entsprechenden Punkte multiplicirt, für alle Punkte der Kugelfläche von einerley Größe. (M. s. über diesen Satz ebenfalls Meyer Hirsch a. a. O. S. 340.)

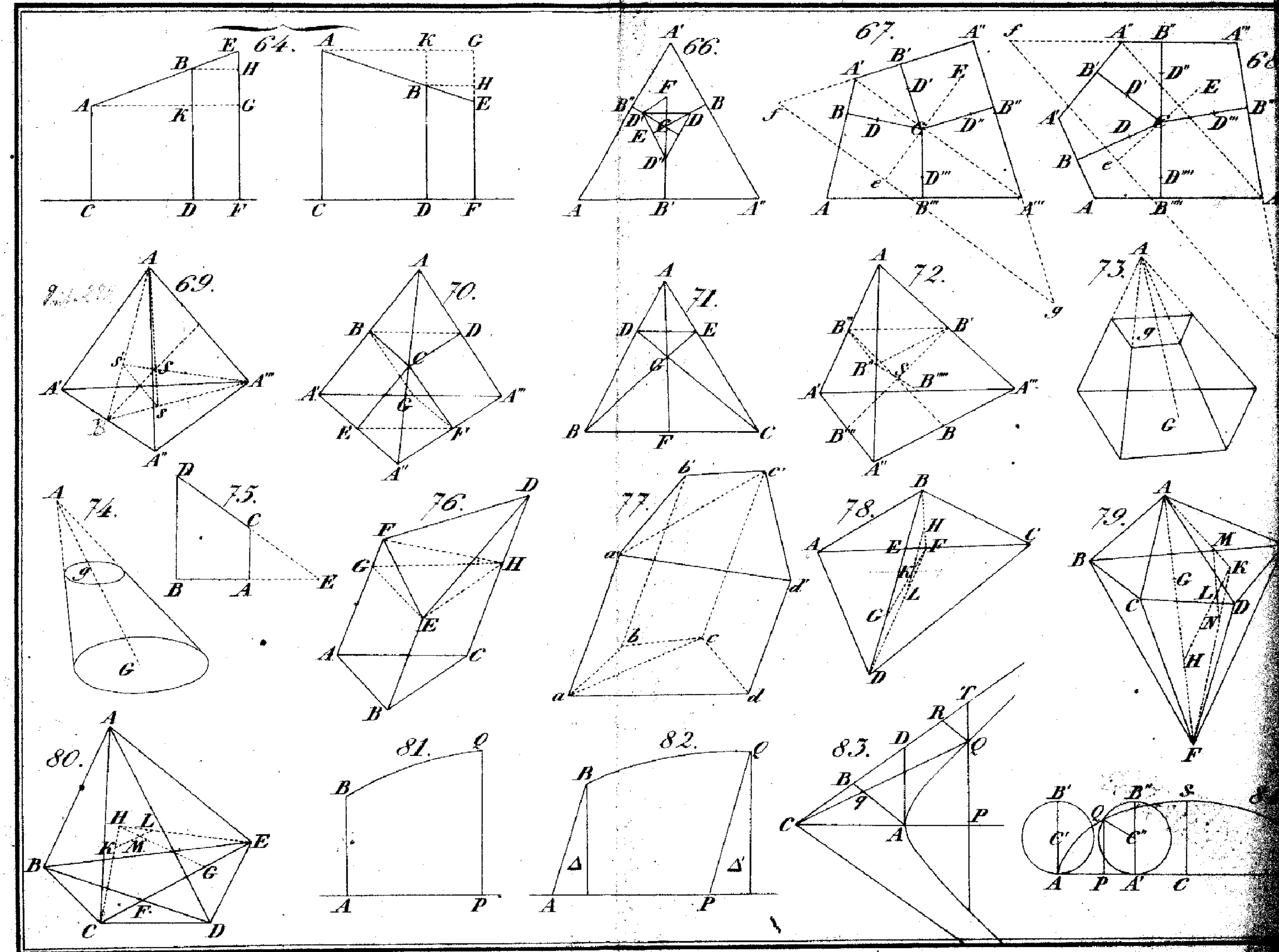
Einige Berichtigungen.

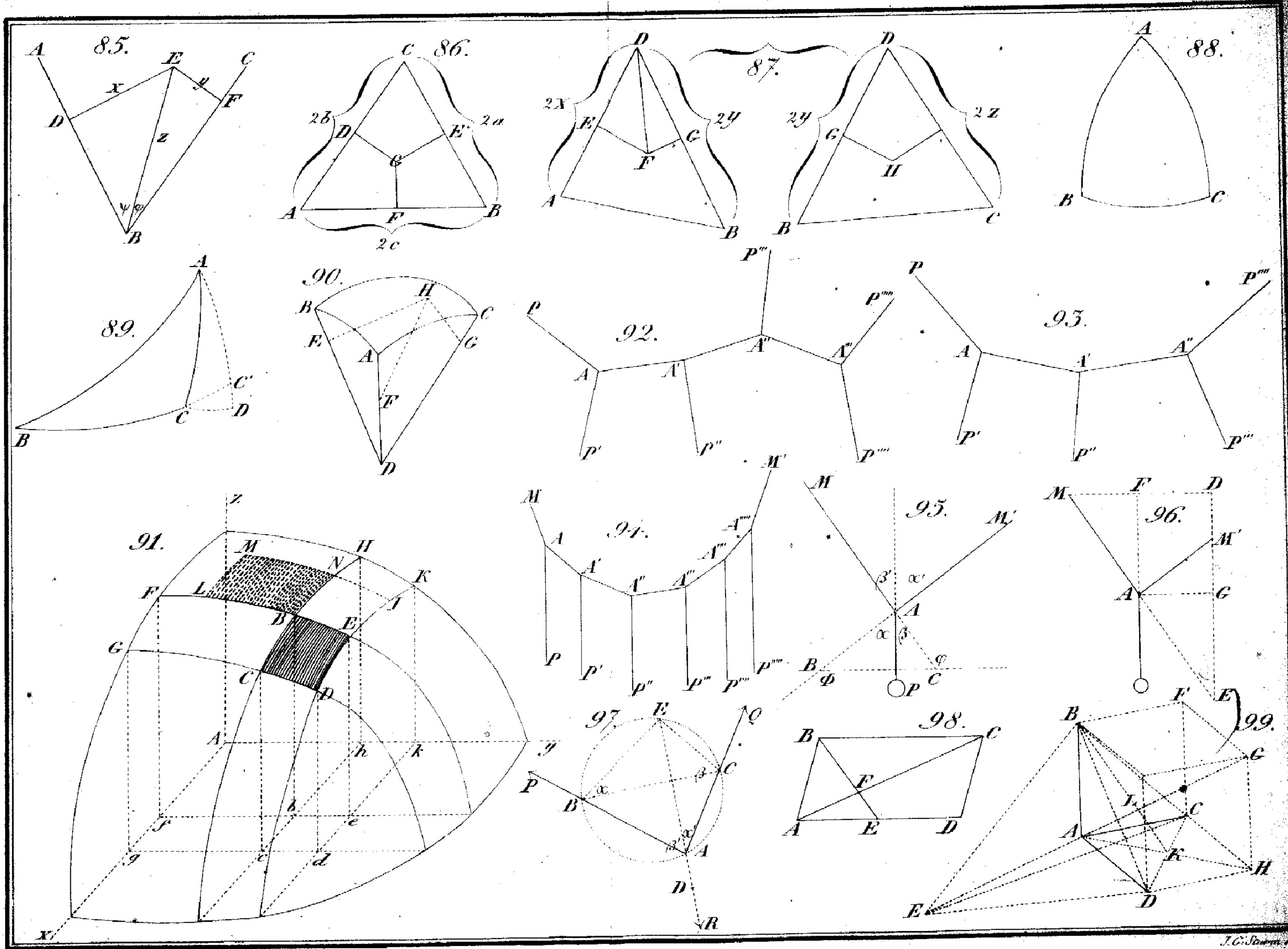
S. 28. Z. 12. st. $2 \mathrm{Cos}\, x$ l. m. $2 \mathrm{Cos}\, ax$
S. 49. Z. 11. st. Preisfragen l. m. Preisfrage
S. 592. Z. 12. st. Rücksicht genommen l. m. doch Rücksicht genommen

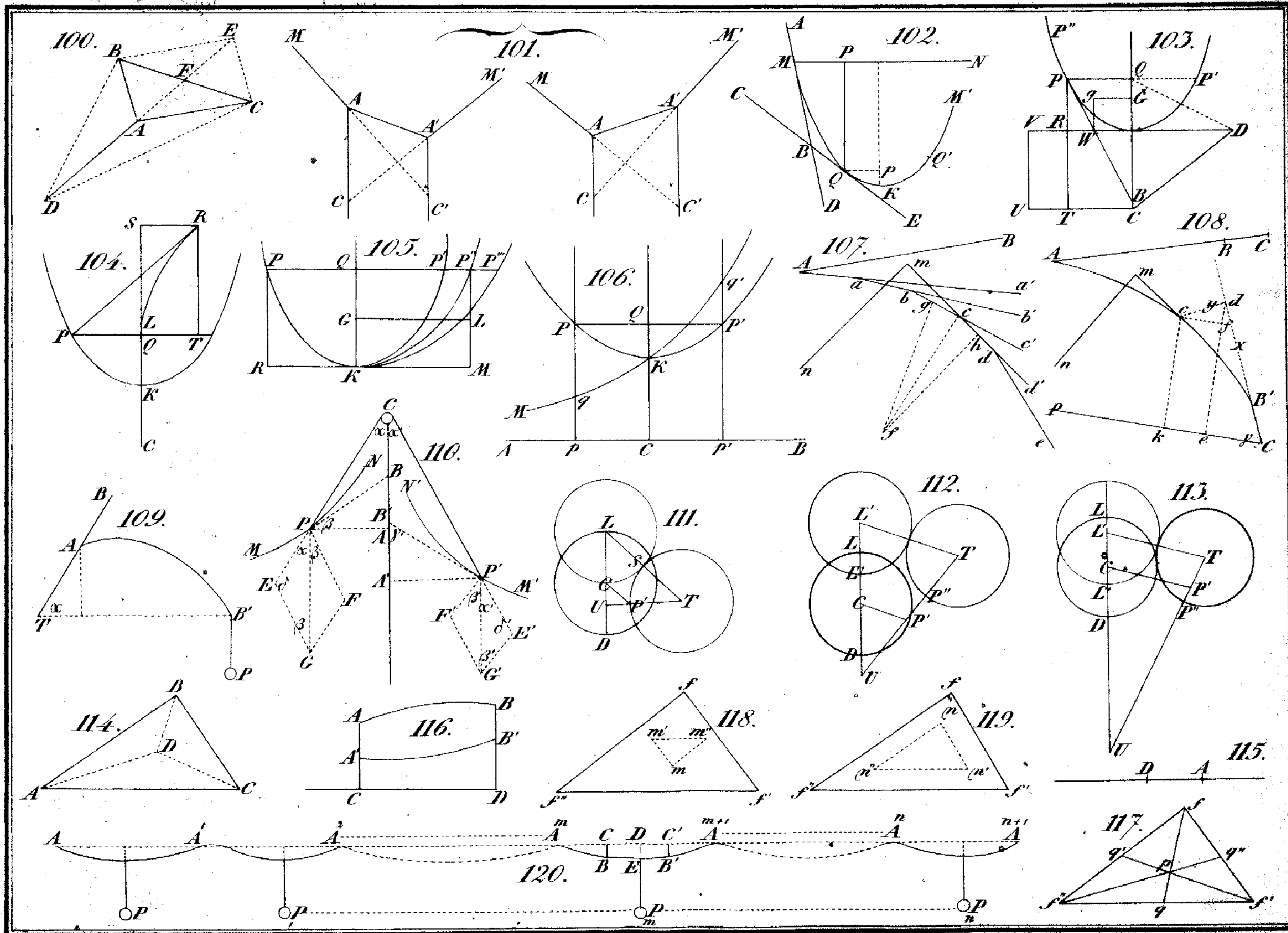
Gedruckt in Halle bey Friedrich Grunert, dem Vater des Verfassers.



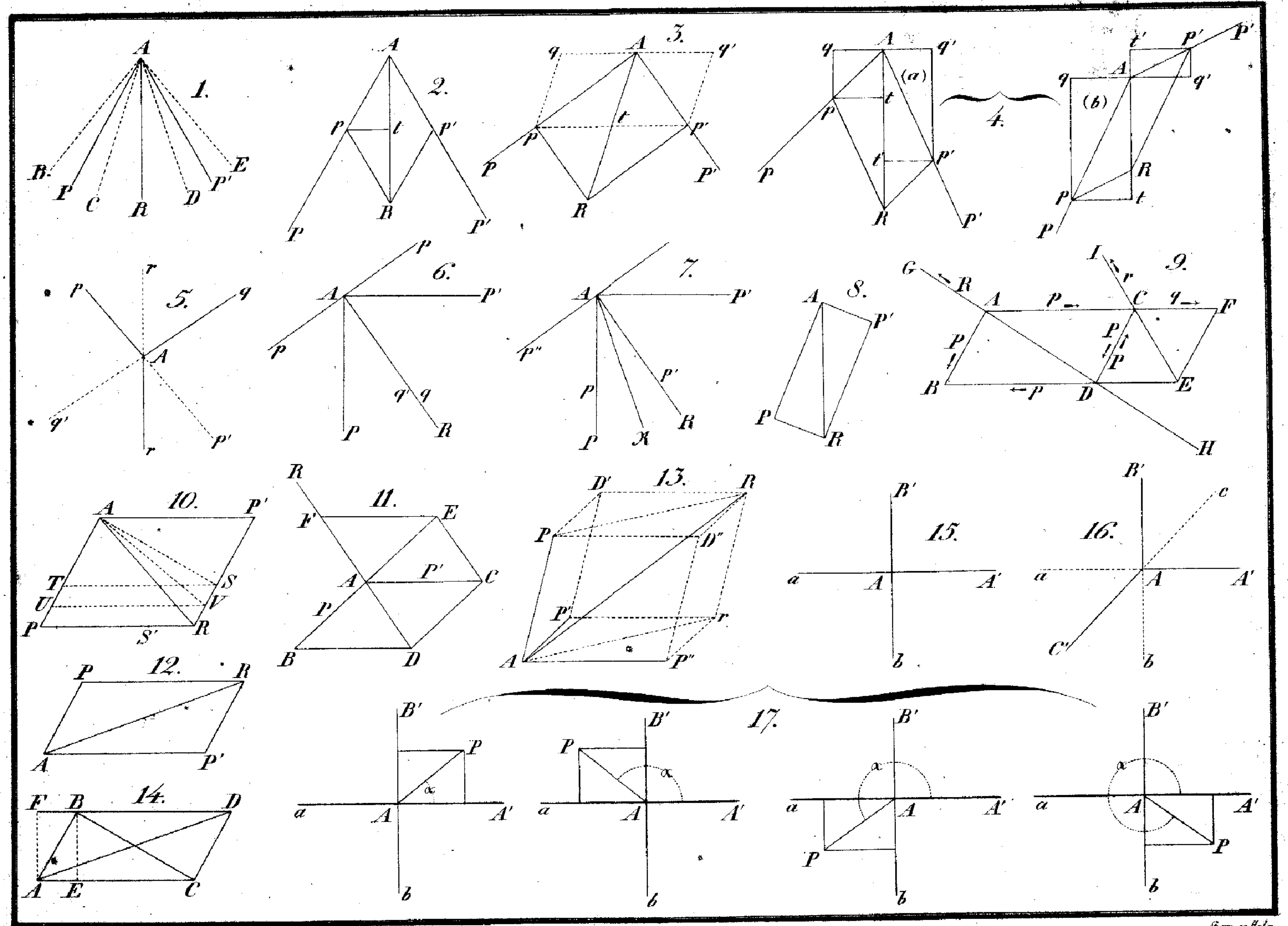
C
p''
D
M'
G
E


64.
66.
67.
68
69.
70.
71.
72.
73.
74.
75.
76.
77.
78.
79.
80.
81.
82.
83.

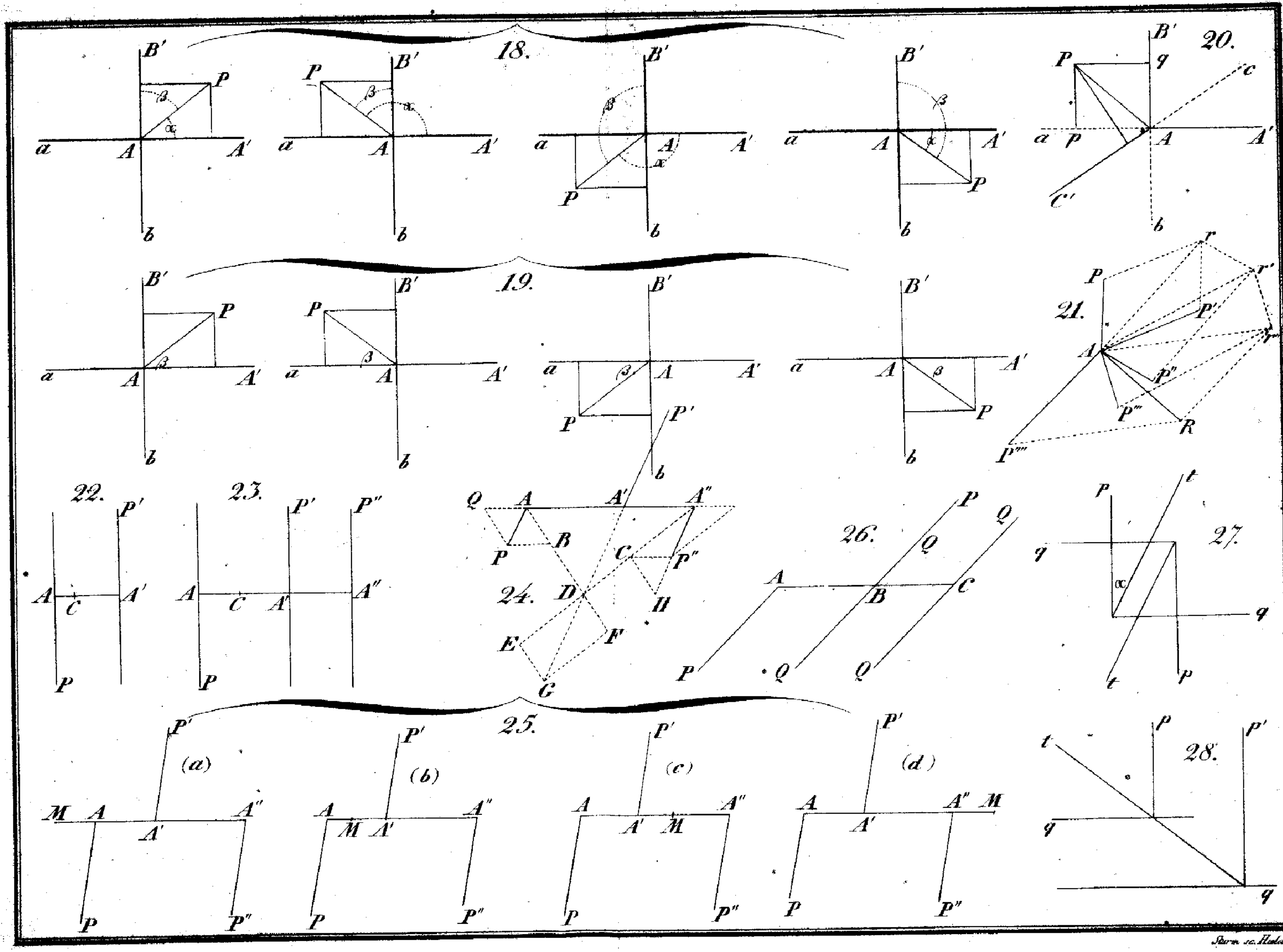

85.
86.
87.
88.
89.
90.
91.
92.
93.
94.
95.
96.
97.
98.
99.

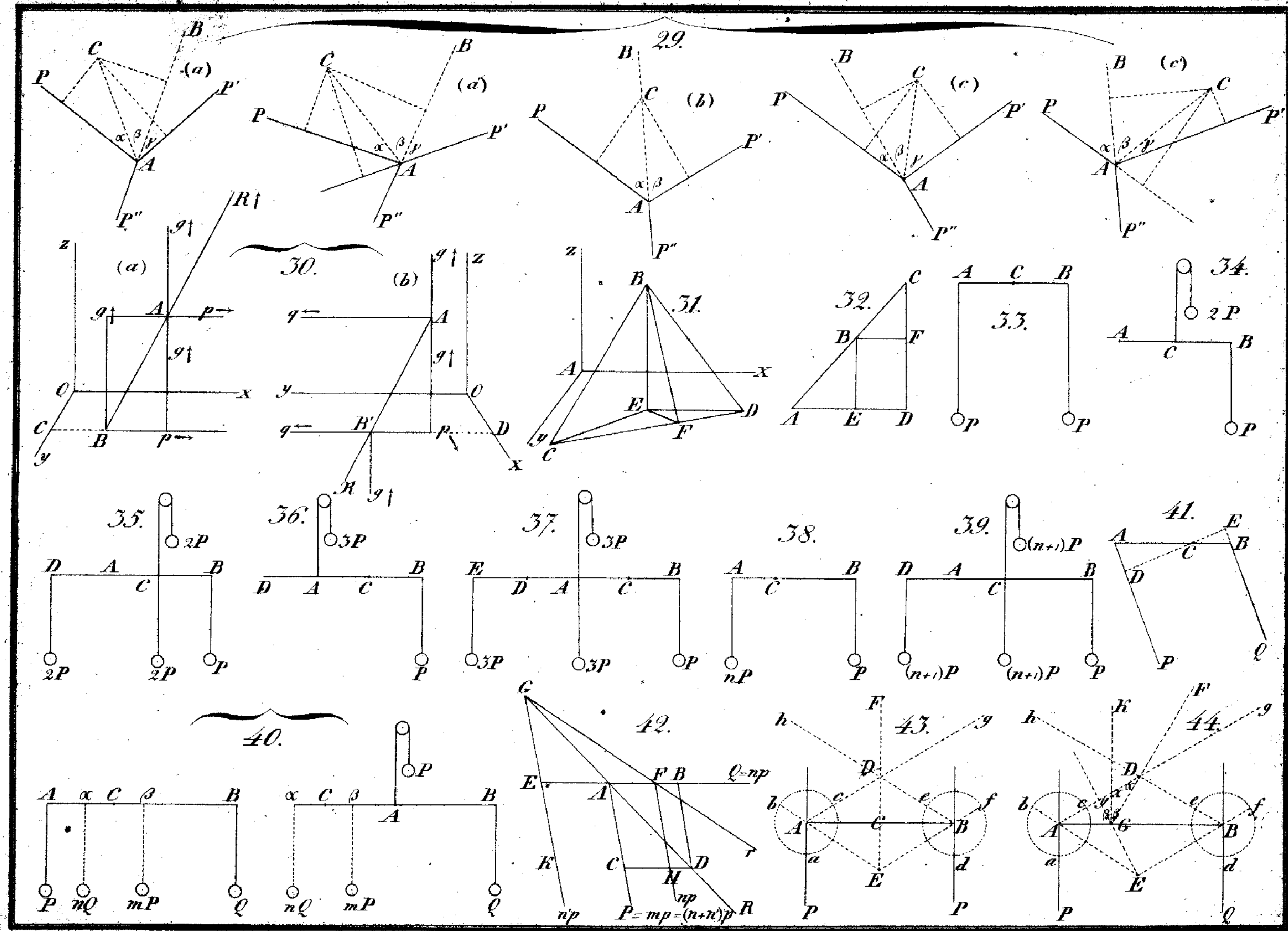


J. G. Sturm sc. Halle.



Sturm sc. Halæ


18.
19.
20.
21.
22.
23.
24.
25.
(a)
(b)
(c)
(d)
26.
27.
28.
Stern sc. Halae.



29.
30.
31.
32.
33.
34.
35.
36.
37.
38.
39.
40.
41.
42.
43.
44.

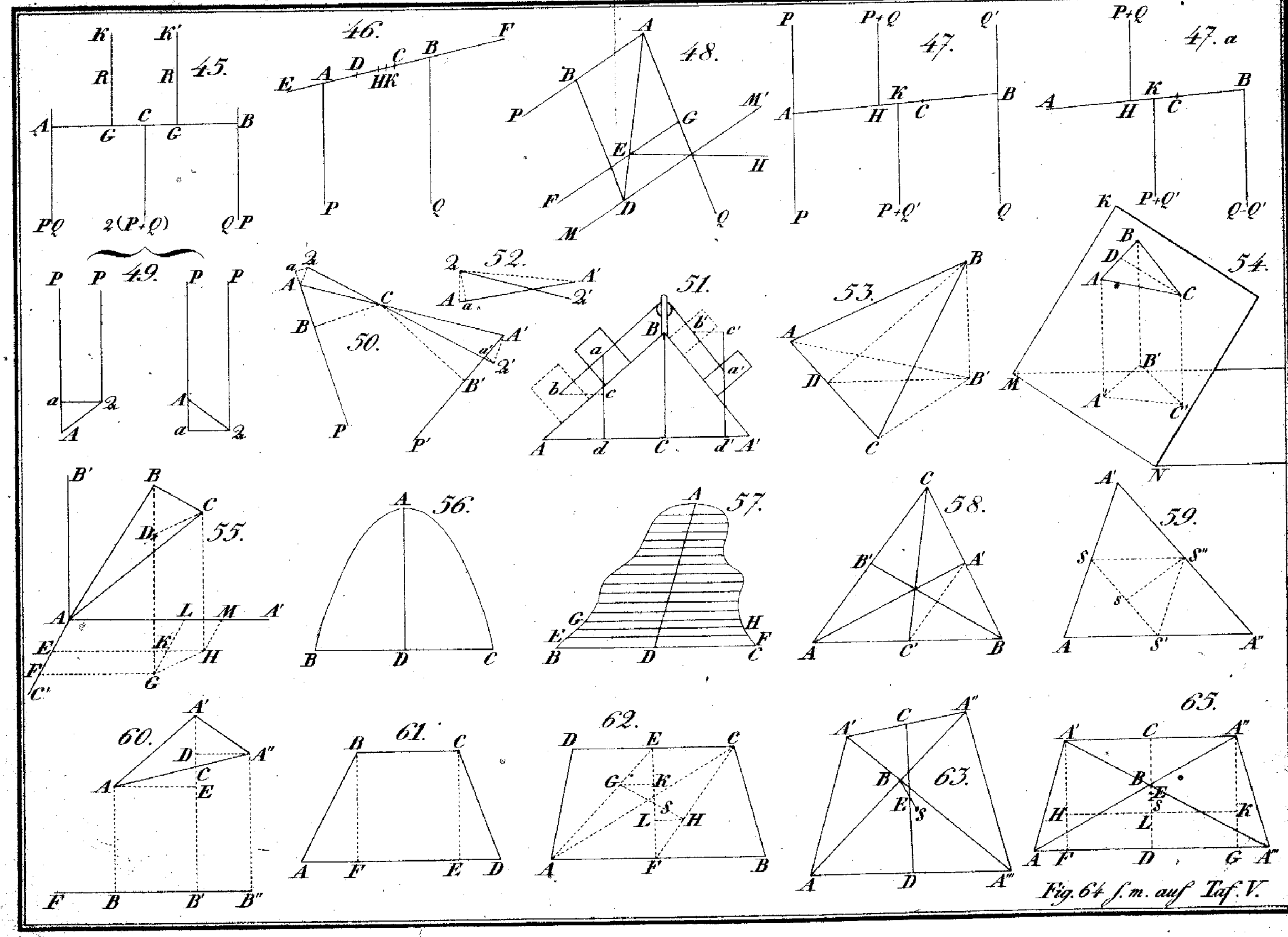


Fig. 64 s. m. auf Taf. V.