

# Dynamik und Gravitationsstrahlung einspiralender Binärsysteme nicht-punktförmiger Objekte

## Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades  
doctor rerum naturalium (Dr. rer. nat.)

vorgelegt dem Rat der Physikalisch-Astronomischen Fakultät  
der Friedrich Schiller Universität Jena

von Dipl.-Phys. Dörte Hansen  
geboren am 01. November 1974 in Jena

Gutachter:

1. ....

2. ....

3. ....

Tag der letzten Rigorosumsprüfung: .....

Tag der öffentlichen Verteidigung: .....

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Von Newton zu Einstein. Auf der Suche nach der Theorie der Gravitation . . . . .	1
1.2	Post-Newtonsche Approximationsverfahren . . . . .	5
1.3	Die Vorhersagen der Allgemeinen Relativitätstheorie . . . . .	6
1.4	Gravitative Strahlungsdämpfung . . . . .	9
1.4.1	Doppelpulsare – der Schlüssel zum indirekten Nachweis von Gravitationswellen . . . . .	9
1.4.2	post-Newtonsche Bewegungsgleichungen und Gravitationsstrahlung kompakter Binärsysteme – gegenwärtiger Forschungsstand und Ziel dieser Arbeit . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Ein Binärsystem aus Schwarzem Loch und Staubscheibe</b>	<b>14</b>
2.1	Einleitende Bemerkungen . . . . .	14
2.2	Staubscheiben in der ART . . . . .	16
2.3	Die rotierende, oszillierende Staubscheibe in der Newtonschen Theorie	17
2.4	Die isolierte Scheibe im Hamiltonschen Formalismus . . . . .	19
2.4.1	Die Newtonsche Staubscheibe . . . . .	19
2.4.2	Strahlungsrückwirkung in führender Ordnung . . . . .	21
2.4.3	Die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen . . . . .	22
2.4.4	Die Gravitationsstrahlung der isolierten Staubscheibe in führender Ordnung . . . . .	23
2.5	Die Bahnbewegung im Hamiltonschen Formalismus . . . . .	24
2.6	Das Binärsystem . . . . .	27
2.6.1	Die Beschreibung der Gezeitenwechselwirkung . . . . .	28
2.6.2	Energiedissipation in führender Ordnung . . . . .	30
2.6.3	Die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen des Gesamtsystems	32
2.6.4	Diskussion . . . . .	34

<b>3</b>	<b>Riemann-S Binärsysteme</b>	<b>37</b>
3.1	Gezeitenresonanzen und stellare Oszillationen . . . . .	37
3.1.1	Warum Riemann-S Ellipsoide? . . . . .	38
3.2	Riemann-S Binärsysteme im Lagrange Formalismus . . . . .	39
3.3	Hamiltonscher Formalismus . . . . .	46
3.4	Gravitationsstrahlung und Strahlungsrückwirkung in führender Ordnung . . . . .	49
3.4.1	Der stellare Beitrag: Zeitableitungen des stellaren Massenquadrupoltensors . . . . .	50
3.4.2	Der Beitrag der Bahnbewegung zu $\mathcal{I}_{ab}^{(5)}$ . . . . .	53
3.4.3	Das Strahlungsfeld in führender Ordnung . . . . .	53
3.4.4	Numerische Untersuchungen . . . . .	59
3.4.5	Gravitationswellenformen in führender Ordnung . . . . .	62
3.5	Diskussion . . . . .	65
<b>4</b>	<b>Post-Newtonsche Dynamik und Gravitationsstrahlung kompakter Binärsysteme mit Spin</b>	<b>69</b>
4.1	Einleitung . . . . .	69
4.2	Astrophysikalische Relevanz der Quadrupolkopplung . . . . .	71
4.3	Eine 1pN-exakte quasi-Keplersche Lösung unter Berücksichtigung der Quadrupolkopplung . . . . .	72
4.4	2.5pN Strahlungsrückwirkung im Hamiltonschen Formalismus . . . . .	77
4.5	Jenseits der Quadrupolstrahlung . . . . .	80
4.6	Der Einfluss der Rotationsdeformation auf Gravitationswellenformen und Einspiralvorgang . . . . .	86
<b>5</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>89</b>
<b>A</b>	<b>Anhang</b>	<b>101</b>
A.1	Multipolentwicklung des Gravitationsfeldes . . . . .	101
A.2	Post-Newtonsche Entwicklung des Strahlungsfeldes im Hamiltonschen Formalismus . . . . .	104
A.2.1	Analytische Formulierung der Zeitableitungen von $I^{lm}$ und $S^{lm}$ . . . . .	106
A.3	Symmetrisch spurfreie Tensoren . . . . .	107
A.4	Lane-Emden Gleichung . . . . .	108
A.5	Die Chandrasekhar-Koeffizienten $A_i$ und $\mathcal{J}$ . . . . .	109
A.6	Jenseits der quasi-statischen Näherung: $\mathcal{I}_{ab}^{(5),s}$ . . . . .	110

A.7	Der Massenquadrupoltensor der Staubscheibe . . . . .	111
<b>B</b>	<b>Abbildungsteil</b>	<b>113</b>
B.1	Abbildungen zu Kapitel 2 . . . . .	113
B.2	Abbildungen zu Kapitel 3 . . . . .	116
B.3	Abbildungen zu Kapitel 4 . . . . .	120

## Verwendete Abkürzungen und Notationen

ART	Allgemeine Relativitätstheorie
STF	symmetrisch-spurfrei
NS	Neutronenstern
BH	Schwarzes Loch
WD	Weißer Zwerg
$i, j, k \dots$	räumliche Indizes
$\mu, \nu \dots$	Raum-Zeit Indizes
$T_{\langle i_1 i_2 \dots i_p \rangle}$	symmetrisch-spurfreier Anteil des Tensors $T_{i_1 i_2 \dots i_p}$

# Kapitel 1

## Einleitung

*Wir sind wie Zwerge, die auf den Schultern eines Riesen sitzen.*

*Wir sehen mehr und weiter als die Alten; aber es liegt nicht an der Schärfe unserer Augen und nicht an unserer großen Statur, sondern daran, dass sie uns tragen und wir ihre Größe nutzen dürfen.*

BERNHARD VON CHARTRES, Kanzler der Schule von Chartres

### 1.1 Von Newton zu Einstein. Auf der Suche nach der Theorie der Gravitation

Schon seit Jahrtausenden versuchen Menschen, die Gesetze zu ergründen, die dem Lauf der Sterne und Planeten zugrundeliegen. In Zeiten, in denen das menschliche Auge das wichtigste Instrument der Beobachtung war, bestimmten kulturelle und religiöse Rahmenbedingungen noch stärker als heute das Bild des Menschen vom Universum [36]. So ist es zu verstehen, dass sich in der Antike trotz verschiedentlich schon bestehender Überlegungen zu nicht-geozentrischen Weltmodellen – genannt sei hier das Weltbild des Aristarch<sup>1</sup> – schließlich das Ptolemäische Weltbild<sup>2</sup> durchsetzte. Dieses Weltbild, das die Erde ins Zentrum des Universums setzte, passte perfekt in das sich entwickelnde christliche Weltverständnis und sollte für mehr als anderthalb Jahrtausende unangefochten bleiben. Dabei gab es durchaus Beobachtungen, die sich mit auf Kreisbahnen um die Erde laufenden Planeten nicht vereinbaren lie-

---

<sup>1</sup>Aristarchos von Samos, ca. 310 - ca. 230 v.u.Z., wurde von den Menschen seiner Zeit als *der Mathematiker* bezeichnet. Sein größter Verdienst war die Berechnung der Größen und Entfernungen von Sonne und Mond. (Ein guter Überblick über die griechische Astronomie bis zur Zeit Aristarchs findet sich bei [41].)

<sup>2</sup>Claudius Ptolemaios, ca. 100 - ca. 170.

ßen – z.B. die z.T. retrograde Bewegung der Planeten. Um sie zu erklären, bediente man sich komplizierter, in ihren Grundzügen von Apollonios<sup>3</sup> entwickelter Epizyklentheorien. Erst N. Kopernikus<sup>4</sup> wagte es Anfang des 16. Jh., das geozentrische Weltbild in Frage zu stellen – ein Ansatz, der auf den heftigsten Widerstand der römisch-katholischen Kirche stieß. Religiöser Dogmatismus, verbunden mit der Weigerung, sich neuen wissenschaftlichen Erkenntnissen zu öffnen, zwangen G. Galileo<sup>5</sup> zum Widerruf und führten dazu, dass selbst nach der Entdeckung der Keplerschen Gesetze durch J. Kepler<sup>6</sup> noch lange am Ptolemäischen Weltbild festgehalten wurde. Dieser Blick in die Geschichte lehrt uns, dass unser Verständnis von der Welt stets auch davon abhängig ist, inwieweit wir bereit sind, alte Vorstellungen zugunsten neuer Erkenntnisse aufzugeben.

Alle bis ins 17. Jh. entwickelten Weltbilder vermochten die Bewegung der Himmelskörper mehr oder weniger gut zu beschreiben, konnten jedoch keine Antwort auf die Frage nach der Ursache der Bewegung geben. So war es Sir I. Newton<sup>7</sup> vorbehalten, eine Theorie der Wechselwirkung massenbehafteter Körper zu entwickeln. Die nach ihm benannte Newtonsche Gravitationstheorie<sup>8</sup> besagt, dass zwischen zwei Massen  $m_1$  und  $m_2$  eine anziehende Kraft

$$\mathbf{F}_{12} = -\frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \quad (1.1)$$

wirkt, deren Stärke indirekt proportional zum Quadrat des Abstands zwischen den Massen ist. Diese Theorie erlaubte es, die Bewegung der Himmelskörper des Sonnensystems mit hoher Genauigkeit zu beschreiben. Weder im 18. noch im 19. Jh. kamen jemals Zweifel an ihrer Allgemeingültigkeit auf – obwohl die Bewegung des Merkur eine Anomalie aufwies, die sich einer offensichtlichen Erklärung entzog. Wie die anderen Planeten zeigt auch der Merkur eine Periheldrehung. Beobachtet wird ein Wert von ca. 5600 Bogensekunden pro Jahrhundert. Davon sind ungefähr 5026

---

<sup>3</sup>Apollonios von Perge, ca. 262 - 190 v.u.Z.

<sup>4</sup>N. Kopernikus (1473-1543): In seinem Werk *Commentariolus* (ca. 1510-1514) setzt er die Sonne in den Mittelpunkt des Universums. Sein Hauptwerk *De revolutionibus orbium coelestium* wurde erst nach seinem Tod veröffentlicht.

<sup>5</sup>G. Galileo (1564 - 1642) unterstützte das Kopernikanische Weltbild.

<sup>6</sup>J. Kepler (1571 - 1630): In dem 1596 erschienen Buch *Mysterium Cosmographicum* verteidigt er die Kopernikanische Lehre. In den *Harmonices Mundi libri V* formuliert er 1619 das dritte der nach ihm benannten Keplerschen Gesetze, nachdem er die ersten beiden bereits 1609 in der *Astronomia Nova* veröffentlichte.

<sup>7</sup>I. Newton (1643 - 1727), veröffentlichte das nach ihm benannte Newtonsche Gravitationsgesetz und die Newtonschen Bewegungsgleichungen 1687 in der *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*.

<sup>8</sup>lat: *gravis* = schwer



Bogensekunden auf die Präzession der Äquinoktien zurückzuführen, und auch die Störung durch die anderen Planeten des Sonnensystems trägt zur Periheldrehung des Merkur bei [81]. Dennoch blieb, wie Le Verrier<sup>9</sup> 1859 darstellte, selbst nach Abzug aller im Rahmen der Newtonschen Theorie erfassbaren Korrekturen ein kleiner Restbetrag von 42.7 Bogensekunden pro Jahrhundert ohne theoretische Erklärung. Es wurden verschiedene Modelle entwickelt, um diese anomale Periheldrehung des Merkur zu verstehen: So postulierte man z.B. die Existenz eines weiteren sonnennahen Planeten *Vulkan*, der für die anomale Störung der Merkurbahn verantwortlich sein sollte [88], [85]. Letztendlich scheiterten jedoch alle diese Erklärungsmodelle. Erst die Allgemeine Relativitätstheorie lieferte die Lösung des Rätsels, doch bis zu ihrer Formulierung sollten noch viele Jahre vergehen. Ende des 19. Jahrhunderts ging man davon aus, dass die Newtonsche Theorie die gravitative Wechselwirkung massenbehafteter Objekte umfassend beschreibt. Es gab in der Tat trotz der oben genannten Schwierigkeiten bei der Interpretation der Merkurbewegung im Grunde genommen keinen Anlass, an der Newtonschen Theorie zu zweifeln, denn die in unserem Sonnensystem auftretenden Gravitationsfelder sind sehr schwach. Deutliche Abweichungen von der Newtonschen Theorie werden aber erst bei starken Gravitationsfeldern sichtbar<sup>10</sup>.

Zeit ist im Rahmen der Newtonschen Theorie eine absolute Größe. Ausserdem findet die Bewegung in einem flachen, dreidimensionalen Raum statt. Beide Annahmen müssen im Rahmen der Allgemeinen Relativitätstheorie (ART) fallengelassen werden; eine Vorstellung, die dem sogenannten „gesunden Menschenverstand“ zuwiderläuft und daher zunächst stark angefeindet wurde. Aus heutiger Sicht wäre es nur ein kleiner Schritt gewesen, von den Ergebnissen des Michelson-Morley Experiments auf die Relativität der Zeit zu schließen<sup>11</sup>. Doch es blieb Einstein vorbehalten, die Konsequenzen dieser Beobachtungen zu erkennen: Unter der Annahme einer konstanten Vakuumlichtgeschwindigkeit kann die Forderung nach einer absoluten Zeit nicht mehr aufrechterhalten werden. Zeit ist vielmehr abhängig vom jeweiligen Be-

---

<sup>9</sup>U. Le Verrier (1811-1877), franz. Mathematiker und Astronom. Seine Berechnungen führten 1846 zur Entdeckung des Neptun.

<sup>10</sup>Über die mögliche Existenz zusätzlicher Dimensionen und die damit verbundene Modifikation des Newtonschen Gravitationsgesetzes soll hier nichts gesagt werden, da dies Phänomene sind, die nur auf sehr kleinen Abständen wirksam werden würden.

<sup>11</sup>Um die Ausbreitung des Lichtes zu erklären, wurde in der zweiten Hälfte des 19. Jh. die Existenz eines „Äthers“ postuliert. Weder im Michelson-Morley Experiment noch bei späteren Experimenten gelang es jedoch, diesen Äther nachzuweisen. Vielmehr zeigte es sich, dass die Vakuumlichtgeschwindigkeit eine Konstante ist. Ein einfaches Gedankenexperiment beweist, dass daraus sofort die Beobachterabhängigkeit der Zeit folgt – doch das Festhalten am bekannten Erfahrungshorizont machte es Michelson, Morley und anderen Forschern unmöglich, diesen für die damalige Zeit revolutionären Schluss zu ziehen.

zugssystem. Dies war eine der wesentlichen Aussagen der von Einstein im Jahre 1905 veröffentlichten Speziellen Relativitätstheorie. Auch sie geht noch von einer flachen Raumzeit aus. Es sollte weitere zehn Jahre dauern, ehe Einstein im Jahre 1915 jene Theorie veröffentlichte, die wir heute als Allgemeine Relativitätstheorie kennen [31]. Ihre Grundaussage steht so im Widerspruch zu unserer Alltagserfahrung, dass sie im November 1919 die Titelseiten führender Tageszeitungen in aller Welt füllten. Was war geschehen? Am 6. November 1919 wurden die Beobachtungsergebnisse der Sonnenfinsternis vom 29. Mai 1919 veröffentlicht<sup>12</sup>. Die bei dieser Gelegenheit gemessene Lichtablenkung des Sternenlichts am Sonnenrand ( $\Delta\theta=1.75$  arcsec) [40] stimmte mit den Vorhersagen der ART überein und galt als erster wichtiger Beweis für die Richtigkeit der ART [94]. Raumzeit und Materie sind demnach nicht unabhängig voneinander, sondern Materie krümmt die sie umgebende Raumzeit,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (1.2)$$

Dabei ist  $g_{\mu\nu}$  der metrische Tensor,  $R_{\mu\nu}$  und  $R$  repräsentieren den Ricci-Krümmungstensor und den Ricciskalar, während  $T_{\mu\nu}$  der Energie-Impuls-Tensor der betrachteten Materiekonfiguration ist. Die linke Seite von Gl. (1.2) beschreibt die Krümmung der Raumzeit, als deren Quelle die durch den Energie-Impuls-Tensor  $T_{\mu\nu}$  beschriebene Materie auftritt. Aus den Einsteinschen Feldgleichungen (1.2) folgen als unmittelbare Konsequenz die Divergenzfreiheit des Energie-Impuls-Tensors,  $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ , und damit letztendlich die Bewegungsgleichungen der Materie. Mit anderen Worten: Materie krümmt die sie umgebende Raumzeit, und umgekehrt beeinflusst die Krümmung der Raumzeit die Bewegung der Materie.

Für schwache Gravitationsfelder gehen die Einsteinschen Feldgleichungen in die Newtonschen Gleichungen über. Mit anderen Worten, die Newtonsche Theorie stellt einen Grenzfall der Einsteinschen Theorie für schwache Gravitationsfelder, d.h. im flachen Raum, dar.

---

<sup>12</sup> Die Auswertung der Beobachtungsdaten wurden von dem berühmten Astronomen A. S. Eddington vorgenommen. In jüngerer Zeit kam immer wieder Kritik an seiner Vorgehensweise auf; so der Vorwurf, Daten, die nicht den Vorhersagen der ART entsprachen, einfach weggelassen zu haben. Dass die Geschichte dieses für den Durchbruch der ART so entscheidenden Experiments wesentlich vielschichtiger ist, zeigte D. Kennefick in einer kürzlich erschienenen Arbeit [49].

## 1.2 Post-Newtonsche Approximationsverfahren

Nur in sehr wenigen Spezialfällen war es bisher möglich, eine analytische Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen zu finden<sup>13</sup>. Selbst das Zweikörper-Problem der Himmelsmechanik kennt noch keine vollständige allgemein-relativistische Lösung. Bei den meisten astrophysikalischen Problemstellungen<sup>14</sup> ist die durch die Materieverteilung verursachte Krümmung der Raumzeit jedoch nur schwach; das gilt insbesondere auch in kompakten Binärsystemen bei hinreichend großen Relativabständen. Hier setzen die auf einer Entwicklung der Metrik um die Minkowski-Metrik aufbauenden post-Newtonschen Näherungsverfahren an. In einer flach gekrümmten Raumzeit ist es nämlich möglich, auf lokaler Ebene Koordinaten einzuführen, in denen sich die Metrik nur wenig von der einer flachen Raumzeit unterscheidet. Ein solcher Ansatz führt auf eine linearisierte Form der Einsteintheorie.

Neben der Bedingung einer lediglich schwach gekrümmten Raumzeit setzt die post-Newtonsche Approximation voraus, dass alle beteiligten Geschwindigkeiten klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit sind, und dass die innere Energie der gravitierenden Materie viel kleiner als die Ruheenergie ist. Unter diesen Annahmen ist es möglich, eine Entwicklung in Potenzen von  $(v/c)^{2n}$  so durchzuführen, dass die Beiträge der ART als Korrekturen der Ordnung  $(v/c)^{2n}$  zu den Newtonschen Bewegungsgleichungen erscheinen<sup>15</sup>.

Die Grundlagen der post-Newtonschen Approximation wurden bereits kurz nach der Veröffentlichung der ART gelegt. So betrachtete des Sitter bereits 1916 ein Vielteilchensystem im Rahmen der ersten post-Newtonschen Näherung [79]. Dennoch sollten viele Jahre vergehen, bis der Schritt zur Herleitung der zweiten post-Newtonschen Approximation gelang.

Das Auftreten post-Newtonscher Korrekturen in den Bewegungsgleichungen ist für eine Reihe von Effekten verantwortlich, die im Rahmen der Newtonschen Theorie unbekannt sind. So tritt z.B. in erster post-Newtonscher Ordnung eine relativistische Periastrondrehung in Binärsystemen auf<sup>16</sup>. Formal ebenfalls bereits in erster post-Newtonscher Ordnung, aufgrund der Kleinheit des Spins ( $S \propto v/c$ ) jedoch ef-

---

<sup>13</sup>Es handelt sich um die berühmte Schwarzschild-Lösung eines ungeladenen, nicht-rotierenden, sphärisch symmetrischen Schwarzen Loches, die Kerr-Lösung des rotierenden Schwarzen Loches, die Kerr-Newman-Lösung des geladenen, rotierenden Schwarzen Loches (vgl. u.a. [65]) und die von Neugebauer und Meinel gefundene Lösung für eine unendlich dünne Staubscheibe [67].

<sup>14</sup>Ausnahmen betreffen z.B. das Innere kompakter Sterne oder Schwarze Löcher.

<sup>15</sup>Es hat sich eingebürgert, bei einer Entwicklung bis  $(v/c)^{2n}$  von der  $n$ -ten post-Newtonschen Approximation zu sprechen.

<sup>16</sup>Dasselbe gilt auch für die Planeten in unserem Sonnensystem, wobei die anomale Periheldrehung für den sonnennahen Merkur am stärksten ist.

fektiv erst ab  $O(c^{-3})$ , tritt mit der relativistischen Spin-Bahn-Kopplung eine weitere Erscheinung auf, die in der Newtonschen Theorie unbekannt ist<sup>17</sup>.

Sind alle Korrekturen bis zur zweiten post-Newtonschen Ordnung konservativer Natur<sup>18</sup>, so tauchen in der 2.5pN-Ordnung erstmals auch dissipative Terme auf. Sie sind eine Folge der Rückwirkung des Gravitationsstrahlungsfeldes auf die Quelle, d.h. das betrachtete System verliert Energie. In Binärsystemen bedeutet das eine allmähliche Abnahme der Bahnperiode, also ein Zusammenspiralen der beiden Komponenten<sup>19</sup>.

### 1.3 Die Vorhersagen der Allgemeinen Relativitätstheorie

Wie bereits erwähnt, sagt die ART eine Reihe von Effekten voraus, die im Rahmen der Newtonschen Theorie unbekannt sind. Zugleich dient der experimentelle Nachweis dieser Effekte auch als Test für die Richtigkeit der Allgemeinen Relativitätstheorie<sup>20</sup>. Stellvertretend für die im Rahmen der ART auftretenden Phänomene sollen hier nur die relativistische Periastrondrehung (in Binärsystemen) bzw. die relativistische Periheldrehung (im Sonnensystem), die Lichtablenkung im Gravitationsfeld, der Shapiro Zeitverzögerungseffekt und der Lense-Thirring-Effekt kurz vorgestellt werden. Der Hauptteil dieser Arbeit beschäftigt sich mit einem weiteren Effekt, der bisher jedoch nur indirekt nachgewiesen konnte: dem Einspiralen von Binärsystemen aufgrund des Energieverlusts durch Emission von Gravitationsstrahlung.

Die Lichtablenkung im Gravitationsfeld gehört historisch gesehen zu den wichtigsten Vorhersagen der ART. Ihr Nachweis während einer Sonnenfinsternis am 29. Mai 1919 verhalf der ART zum Durchbruch. Doch die Frage, ob und wenn ja in welchem Maße Licht im Gravitationsfeld abgelenkt wird, stellten sich Vertreter der Korpuskulartheorie des Lichts schon im 18. Jahrhundert. In der Tat leitete Cavendish bereits um 1784 eine Formel für die Ablenkung eines Lichtstrahls im Gravitationsfeld der Sonne

---

<sup>17</sup>Unter anderem ist der weiter oben erwähnte Lense-Thirring-Effekt auf die Spin-Bahn-Kopplung zurückzuführen.

<sup>18</sup>Generell gilt, dass Korrekturen der Ordnung  $O(c^{-2n})$  konservativ sind, während in der 2.5pN, 3.5pN ... Ordnung dissipative Effekte auftreten.

<sup>19</sup>Erstmals wurde die Abnahme der Bahnperiode bei dem Doppelpulsar PSR 1913+16 beobachtet.

<sup>20</sup>Neben der ART gibt es noch andere metrische Gravitationstheorien, so z.B. die Brans-Dicke-Theorie. Nur das Experiment vermag letztendlich darüber zu entscheiden, welche dieser Theorien die richtige Theorie der Gravitation ist. Alle bisherigen Tests stimmen im Wesentlichen mit den Vorhersagen der ART überein.

ab; sein Ergebnis stimmte jedoch nicht mit dem beobachteten Wert überein<sup>21</sup>. Eine post-Newtonsche Näherung verschiedener metrischer Gravitationstheorien zeigt, dass ein von einem weit entfernten Stern emittierter Lichtstrahl am Sonnenrand um

$$\Delta\theta \approx \frac{1+\gamma}{2} \cdot 1.7505\text{arcsec}.$$

abgelenkt wird [88]. Speziell für die ART muss  $\gamma = 1$  gelten. Die Beobachtungsergebnisse der Sonnenfinsternis von 1919 waren im Rahmen der Messgenauigkeit mit diesem Wert verträglich<sup>22</sup>, was als experimentelle Bestätigung der ART galt. Die Bedeutung dieser Messungen für die allgemeine Anerkennung der ART als Theorie der Gravitation kann gar nicht hoch genug eingeschätzt werden, denn das Konzept einer gekrümmten Raumzeit widersprach allen bisherigen wissenschaftlichen Erkenntnissen. Diese Idee war sogar so revolutionär, dass die Veröffentlichungen der Beobachtungsergebnisse der Sonnenfinsternis im November 1919 die Tageszeitungen der Welt füllten<sup>23</sup> [94].

In den vergangenen Jahrzehnten hat sich die Genauigkeit, mit der die Lichtablenkung gemessen werden kann, enorm verbessert. So ermöglichen Radiointerferometrie und VLBI<sup>24</sup> Messgenauigkeiten von weniger als  $100 \mu\text{arcsec}$ . Alle bisher durchgeführten Messungen bestätigten den von der ART vorausgesagten Wert von  $\gamma$ . Beispielsweise ergab die Analyse von mehr als zwei Millionen VLBI Daten  $\gamma = 0.99992 \pm 0.000023$  – eine hervorragende Übereinstimmung mit der ART [76].

Ebenfalls bereits in schwachen Gravitationsfeldern tritt der Shapiro-Zeitverzögerungseffekt auf. Dieser von Shapiro 1964 im Rahmen der post-Newtonschen Parametrisierung der ART berechnete Effekt besagt, dass Radarwellen, die von der Erde zu einem Objekt im Sonnensystem geschickt werden und dort reflektiert werden, bei ihrer Rückkehr auf die Erde einem Zeitverzögerungseffekt unterliegen [75]. Bei bisherigen Experimenten zum Nachweis des Effekts wurden Radarwellen entweder zu Merkur und Venus oder zu Satelliten<sup>25</sup> geschickt. In all diesen Messungen stimmte der aus der Zeitverzögerung ermittelte Wert des post-Newtonschen Parameters  $\gamma$  im Rahmen der Messgenauigkeit mit den Vorhersagen der ART überein: So erhält man beispielsweise aus der Radarverfolgung der Cassini-Sonde einen Wert von  $\gamma - 1 = (2.1 \pm 2.3) \cdot 10^{-5}$  [11].

Die anomale Periheldrehung des Merkur wurde an anderer Stelle schon besprochen.

---

<sup>21</sup>Siehe dazu z.B. [87].

<sup>22</sup>Siehe auch Fußnote 12. Die Messgenauigkeit lag damals allerdings nur bei etwa 30 %.

<sup>23</sup>In der Folgezeit fand die ART auch außerhalb der Physik ein großes Echo.

<sup>24</sup>VLBI = very long baseline interferometry

<sup>25</sup>Zum Beispiel nutzte man die Viking Marssonden oder in letzter Zeit die Cassini-Sonde.

Heutige Messungen von  $\Delta\varphi_{\text{Merkur}}$  sind sehr gut mit den im Rahmen der ART vorhergesagten 42.98 Bogensekunden pro Jahrhundert verträglich. In Binärsystemen spricht man in diesem Zusammenhang von der relativistischen Periastrondrehung. Sie ist umso größer, je kleiner der Abstand der Sterne eines Binärsystems ist. Bei ausgedehnten Objekten (z.B. Hauptreihensternen) führen Rotationsdeformation und Gezeitenwechselwirkung jedoch zu weitaus größeren Apsidenbewegungen, so dass hier die Newtonschen Effekte in der Regel dominieren. Bei kompakten Binärsystemen mit kleinen Relativabständen hingegen ist die relativistische Periastrondrehung sehr groß: Für den 2003 entdeckten Doppelpulsar J0737-3039A,B z.B. beträgt  $\Delta\varphi$  16.88 Grad pro Jahr [18]!

Erst in der Ordnung  $O(c^{-3})$  der post-Newtonschen Approximation tritt der Lense-Thirring-Effekt auf. Sein Nachweis war eines der Hauptziele der Gravity Probe B Mission [88]. Es handelt sich um einen Mitführeffekt (*frame-dragging*) im Gravitationsfeld rotierender Massen. Unter Annahme schwacher Gravitationsfelder lässt sich der metrische Tensor in der Form  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} + O(h^2)$  darstellen, wobei  $h_{\mu\nu}$  die Abweichung von der Minkowski-Metrik  $\eta_{\mu\nu}$  beschreibt. Dann folgt für die Bewegungsgleichung eines Testteilchens im Gravitationsfeld einer rotierenden Masse [33]

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = -\frac{c^2}{2}\nabla h_{00} + \boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{x}}, \quad \boldsymbol{\Omega} := \frac{c}{2}\nabla \times \mathbf{h}, \quad (h)_i = h_{0i}. \quad (1.3)$$

Vergleicht man mit den aus der Elektrodynamik bekannten Beziehungen, so fällt eine starke Ähnlichkeit der rechten Seite von Gl. (1.3) mit der Lorentzkraft auf, wobei die Winkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\Omega}$  dem Magnetfeld und  $(c\mathbf{h}/2)$  dem Vektorpotential  $\mathbf{A}$  entsprechen. In Analogie zur Elektrodynamik nennt man daher  $\boldsymbol{\Omega}$  das *gravitomagnetische Feld*. Lense und Thirring zeigten, dass sich aus Gl. (1.3) für ebene Bahnen im Feld einer rotierenden Kugel zwei Effekte ergeben: Zum einen findet man, dass sich die Länge des aufsteigenden Knotens eines sich im Schwerfeld der Erde bewegenden Satelliten ändert. Zum anderen ändert sich auch die Länge des Perizentrums der Satellitenbahn. Beides wird als Lense-Thirring-Effekt zusammengefasst [62], [83]. Darüberhinaus zeigt sich, dass die Achse eines Kreisels im Gravitationsfeld eines rotierenden Körpers eine Präzessionsbewegung ausführt. Das ist der sogenannte Schiff-Effekt, der oft ebenfalls als Lense-Thirring-Effekt bezeichnet wird. Beide Effekte sollten mit Hilfe des Gravity Probe B Experimentes nachgewiesen werden. Bis zum Start der Sonde am 20. April 2004 waren mehr als

30 Jahre Vorbereitungszeit vergangen<sup>26</sup>. Leider traten jedoch in der heliumgekühlten Niob-Beschichtung der Kreisel unerwartete Störeffekte auf, die dazu führten, dass die erreichte Messgenauigkeit um den Faktor 100 niedriger lag als erwartet. Die Auswertung der gewonnenen Daten ist zum gegenwärtigen Zeitpunkt noch nicht abgeschlossen, doch schon jetzt lässt sich sagen, dass die gemessene geodätische Präzession sehr gut mit den Vorhersagen der ART übereinstimmt. Aufgrund der oben angerissenen Probleme ist aber die Messgenauigkeit möglicherweise zu gering, um den Lense-Thirring-Effekt nachzuweisen [34].

## 1.4 Gravitative Strahlungsdämpfung

### 1.4.1 Doppelpulsare – der Schlüssel zum indirekten Nachweis von Gravitationswellen

In der Newtonschen Mechanik werden isolierte Binärsysteme als konservative Systeme behandelt. Im Rahmen der ART kann diese Annahme nicht mehr aufrechterhalten werden, denn die Emission von Gravitationsstrahlen führt zu einem Energieverlust. Analog zur Elektrodynamik, wo bewegte elektrische Ladungen Quellen elektromagnetischer Strahlung sind, sind bewegte Massen Quellen von Gravitationsstrahlung. Um das Strahlungsfeld im asymptotisch flachen Raum<sup>27</sup> zu berechnen, kann wie in der Elektrodynamik eine Multipolentwicklung des Strahlungsfeldes durchgeführt werden. Dabei zeigt sich jedoch ein grundlegender Unterschied zu elektromagnetischer Strahlung: während diese in führender Ordnung den Charakter einer Dipolstrahlung aufweist, ist die Gravitationsstrahlung in führender Ordnung eine Quadrupolstrahlung<sup>28</sup>.

Der Nachweis von Gravitationswellen gilt als der letzte noch ausstehende entscheidende Test für die Richtigkeit der ART, gestaltet sich jedoch aufgrund der geringen Amplitude der Gravitationswellen<sup>29</sup> als sehr schwierig. Einen indirekten Nachweis stellt die erstmals bei dem Doppelpulsar PSR 1913+16 beobachtete Abnahme der Umlaufzeit dar. Dieses nach seinen Entdeckern Hulse-Taylor Pulsar genannte System besteht aus einem Pulsar und einem bisher nicht identifizierten Begleiter, beide mit

---

<sup>26</sup>Die Datenaufnahme wurde im April 2005 beendet.

<sup>27</sup>d.h. weit entfernt von der Quelle

<sup>28</sup>Vom Standpunkt der Feldtheorie betrachtet sind Photonen Spin-1, Gravitonen Spin-2 Teilchen.

<sup>29</sup>Siehe Gl. A.1 im Anhang. Das Strahlungsfeld ist in führender Ordnung proportional zu  $O(c^{-4})$  und nimmt mit wachsendem Abstand zur Quelle ab. Auch die Bewegung der Planeten in unserem Sonnensystem oder die Oszillationen der Sonne erzeugen Gravitationswellen, doch deren Amplitude liegt weit jenseits der Grenzen heutiger Messgenauigkeit.

einer Masse von ca.  $1.4 M_{\odot}$ , die mit einer Periode von 7.75 h den gemeinsamen Schwerpunkt umlaufen [43]. Hulse und Taylor beobachteten eine Abnahme dieser Periode, die mit den Vorhersagen der ART übereinstimmt<sup>30</sup>. Galt diese Entdeckung damals als Sensation, so ist PSR 1913+16 heute nicht mehr der einzige Doppelpulsar, für den die Abnahme der Bahnperiode bestimmt wurde. Die erfolgversprechendsten Kandidaten sind enge Doppelpulsare mit Bahnperioden unter einem Tag<sup>31</sup>. Die bisher genauesten Messungen gelangen im Fall des 2003 entdeckten Binärpulsars J0737-3039A,B [18]. Mit nur 2.4 h ist seine Bahnperiode kleiner als die aller bekannten Doppelpulsare<sup>32</sup>. Das bedeutet zugleich, dass er sich in einem späteren Stadium des Einspiralvorgangs befindet, und somit die Abnahme der Periodendauer bereits nach kurzer Beobachtungszeit sehr gut bestimmbar ist<sup>33</sup>.

Anders als der indirekte Nachweis der Gravitationswellen steht ihr direkter Nachweis noch aus. Erste Detektoren wurden bereits in den 1960er Jahren gebaut, beginnend mit dem von Weber konstruierten Weber-Zylinder aus dem Jahre 1962. Weber-Zylinder nutzen das Prinzip resonanter Massen. Ihre Sensitivität ist mit  $\Delta l/l > 10^{-19}$  jedoch zu gering, um Gravitationswellen wirklich nachweisen zu können<sup>34</sup>. Bessere Chancen bieten die heutigen, auf Laserinterferometrie basierenden Detektoren, deren Planung und Entwicklung in den späten 1980er Jahren ihren Anfang nahm<sup>35</sup>. Es handelt sich um den Geo600 in Hannover, den italienischen VIRGO-Detektor, TAMA in Japan und um die beiden LIGO-Interferometer in den USA<sup>36</sup>. LIGO könnte beispielsweise Gravitationswellen mit Frequenzen zwischen ca. 10 und ca. 500 Hz nachweisen<sup>37</sup>. Mit dem geplanten Weltraum-Laserinterferometer LISA könnte das beobachtbare Frequenzband auf  $10^{-1}$  bis ca.  $10^{-4}$  Hz ausgeweitet werden<sup>38</sup>, mit einer maximalen Sensitivität von  $10^{-23}$ .

Zu den vielversprechendsten Quellen für die heutige Generation von Gravitations-

---

<sup>30</sup>Für diese Entdeckung erhielten R. Hulse und J. H. Taylor im Jahre 1993 den Physik-Nobelpreis.

<sup>31</sup>Für eine aktuelle Übersicht siehe [63], [82].

<sup>32</sup>Als Doppelpulsare werden hier Binärsysteme bezeichnet, in denen nur eine Komponente ein Pulsar ist. Im Gegensatz dazu sind Binärpulsare Systeme aus zwei Pulsaren.

<sup>33</sup>Dennoch werden die Komponenten von J0737-3039A,B erst in ca. 85 Millionen Jahren zusammenstoßen.

<sup>34</sup>Es sei denn, die Quelle ist sehr nahe.

<sup>35</sup>Kleinere Vorläufer dieser Laserinterferometer wurden bereits seit Anfang der 1970er Jahre gebaut, besaßen aber wie die Weber-Zylinder eine viel zu geringe Sensitivität.

<sup>36</sup>Die Armlängen der Interferometer schwanken zwischen 300 m (TAMA) bis zu vier Kilometern (LIGO). Der bei Hannover gebaute Geo600 Detektor hat eine Armlänge von 600 m.

<sup>37</sup>Die Untergrenze von 10 Hz wird durch das seismische Rauschen, die Obergrenze von ca. 500 Hz durch das Photonenrauschen bedingt. Die maximale Empfindlichkeit von  $\Delta l/l \approx 10^{-22}$  liegt bei etwa 100 Hz.

<sup>38</sup>Derzeit ist der Start der LISA-Satelliten für das Jahr 2016 geplant. Ob dieser Zeitplan jedoch eingehalten wird, ist eher zweifelhaft.



wellendetektoren gehören kompakte Binärsysteme in einem sehr späten Stadium des Einspiralvorgangs<sup>39</sup>. Um die von diesen Systemen abgestrahlten Gravitationswellen nachweisen zu können, ist eine sehr genaue Kenntnis der zu erwartenden Wellenformen nötig. Insbesondere müssen auch post-Newtonsche Korrekturen höherer Ordnung mit berücksichtigt werden. Die Berechnung solcher Templates wird gegenwärtig unter anderem im Rahmen des SFB/TR 7 vorangetrieben.

## 1.4.2 post-Newtonsche Bewegungsgleichungen und Gravitationsstrahlung kompakter Binärsysteme – gegenwärtiger Forschungsstand und Ziel dieser Arbeit

Mit Ausnahme der sich erst in den letzten Jahren eröffnenden Möglichkeiten der Numerischen ART stellen post-Newtonsche Näherungsverfahren das einzige Mittel dar, um die Dynamik einspiralender kompakter Binärsysteme mit hoher Genauigkeit zu beschreiben. Dabei ist es weder möglich noch sinnvoll, die auftretenden post-Newtonschen Korrekturen der Bewegungsgleichungen bis in beliebig hohe Ordnungen explizit zu berechnen<sup>40</sup>. Die dissipativen Anteile des Hamiltonians bzw. der Bewegungsgleichungen sind heute bis zur 3.5pN-Ordnung bekannt, die konservativen Beiträge bis zur dritten post-Newtonschen Ordnung. Letztere wurden in den 1990er Jahren unabhängig voneinander von Damour, Jaranowski und Schäfer [25], [26] und Jaranowski, Schäfer [45], [46] im Rahmen des ADM-Formalismus und von Blanchet und Faye in der harmonischen Eichung [14]-[16] abgeleitet<sup>41</sup>; die Äquivalenz beider Formulierungen wurde u.a. in [6], [27] gezeigt.

Für den konservativen Teil der Bewegungsgleichung von (spinlosen) Punktteilchenbinärsystemen gelang es, eine analytische Lösung bis zur Ordnung 3pN abzuleiten [64]. Weitaus komplizierter sind Szenarien, in denen zusätzlich die in 1.5 pN-Ordnung auftretende Spin-Bahn-Kopplung oder gar die erstmals in zweiter pN-Ordnung auftretende Spin-Spin-Kopplung berücksichtigt werden soll. Sowohl Spin-Bahn-Kopplung als auch Spin-Spin-Kopplung führen zu einer Präzession des Spinvektors, bei der die Orbitalebene in der Regel nicht erhalten bleibt. Eine analytische

---

<sup>39</sup>Weder PSR 1913+16 noch J 3037-0339A,B kommen als Quellen in Frage. Selbst für J 3037-0339A,B wird der Einspiralvorgang noch etwa 85 Millionen Jahre dauern; mit heutigen Detektoren beobachtbar wären aber nur die letzten ca. zehn Minuten.

<sup>40</sup>Im sogenannten „skeleton-approach“ ist letzteres tatsächlich gelungen. Dieser Zugang basiert auf einer konform flachen Näherung der Raumzeit, wobei Gravitationsstrahlung und ein Teil der Energie des Gravitationsfeldes unberücksichtigt bleiben [32].

<sup>41</sup>Ab der 4. post-Newtonschen Ordnung treten sogenannte „Tail-Effekte“ auf. Um die entsprechenden Integrale zu berechnen, müsste die Lösung der 4pN Bewegungsgleichungen bereits bekannt sein.

Lösung der post-Newtonschen Bewegungsgleichungen unter Berücksichtigung der Spin-Bahn-Kopplung war bisher nur in wenigen Spezialfällen möglich [51].

Alle oben genannten Arbeiten gingen von Binärsystemen punktförmiger Objekte aus. Reale astrophysikalische Objekte aber haben eine endliche Ausdehnung. Dennoch lässt sich diese Annahme zumindest für Binärsysteme kompakter Objekte wie etwa Schwarzer Löcher oder Neutronensterne unter bestimmten Bedingungen rechtfertigen. In der Tat können nämlich Effekte, die auf der endlichen Ausdehnung der Komponenten des Binärsystems beruhen, unter der Annahme der Gültigkeit des starken Äquivalenzprinzips vernachlässigt werden, wenn der Relativabstand der Objekte ausreichend groß ist.

Im Rahmen dieser Arbeit soll die dynamische Entwicklung und Gravitationswellenemission kompakter Binärsysteme ausgedehnter Objekte im Vordergrund stehen. Die bei nicht-punktförmigen Komponenten auftretende Kopplung stellarer Freiheitsgrade der Rotation und Oszillation an die Bahnbewegung führt zu einer Modifikation der Dynamik und damit auch des Gravitationswellenmusters. Es kommt daher u.a. zu einer schon in Newtonscher Ordnung auftretenden Periastrondrehung, die in Konkurrenz zu der relativistischen Periastrondrehung tritt. Beobachtungen enger Hauptreihenstern-Binärsysteme zeigen, dass die durch Gezeitenwechselwirkung und Rotationsquadrupoldeformation induzierte Periastrondrehung häufig größer ist als die relativistische Periastrondrehung (siehe z.B. [22]). In Binärsystemen kompakter Objekte (insbesondere Weißer Zwerge oder Neutronensterne) sind die Kopp lungseffekte kleiner, können aber durchaus an die Größenordnung der ersten post-Newtonschen Ordnung heranreichen und sollten daher bei der Berechnung der Gravitationswellenformen berücksichtigt werden. Auch akkumulieren sich die durch Kopp lung an interne Freiheitsgrade verursachten säkularen Effekte über lange Beobach tungszeiträume hinweg. So ist neben einer Phasenverschiebung die Beeinflussung des Einspiralvorgangs zu beobachten. Insbesondere bei oszillierenden Objekten kann dabei ein weiteres Phänomen auftreten, das als Gezeitenresonanz bezeichnet wird (siehe Kap. 2 und 3).

Im Rahmen dieser Arbeit wird die interne Dynamik der Sterne jeweils nur in Newtonscher Ordnung betrachtet<sup>42</sup>, während die Punkteilchendynamik des Orbits maximal bis zur ersten post-Newtonschen Ordnung berücksichtigt wird<sup>43</sup>. Um den Einspiral-

---

<sup>42</sup>In erster post-Newtonscher Ordnung müssten Probleme wie z.B. die Frage nach dem Massenmittelpunkt im Unterschied zum geometrischen Mittelpunkt behandelt werden. Die entsprechenden Korrekturen in den Kopplungstermen wären allerdings deutlich kleiner als 1pN und werden daher vernachlässigt.

<sup>43</sup>2pN-Terme bringen qualitativ nichts Neues, verkomplizieren aber die Rechnungen enorm bzw. machen sie z.T. sogar unmöglich, da dann aus Konsistenzgründen auch post-Newtonsche Korrek-

vorgang zu untersuchen, wird zusätzlich der führende dissipative Anteil der Bewegungsgleichungen in den Berechnungen mitgenommen. In Kapitel 2 und 3 wird die Auswirkung der Gezeitenkopplung auf Bahnbewegung, Einspiralvorgang und Gravitationswellenabstrahlung für zwei Modelle untersucht: für ein Binärsystem aus rotierender, oszillierender Staubscheibe und punktförmigem stellarem Objekt (Kap. 2) und für Riemann-S Binärsysteme (Kap. 3). Aufgrund der besonders einfachen Struktur der Materie (bei der Staubscheibe) bzw. aufgrund spezieller Annahmen über die Dichteverteilung innerhalb der Sterne (Riemann-S Ellipsoide) ist es möglich, die Bewegungsgleichungen in analytischer Form anzugeben und mit geringem numerischem Aufwand zu lösen. Kapitel 4 ist der Untersuchung des Einflusses der Rotationsdeformation eines Sterns auf die Dynamik des Binärsystems und die Gravitationswellenformen gewidmet. Dabei wird die Bahnbewegung bis zur ersten post-Newtonschen Approximation berücksichtigt, und auch die Gravitationswellenformen werden bis zur ersten post-Newtonschen Ordnung angegeben.

---

turen zur internen Dynamik der Sterne berücksichtigt werden müssten.

# Kapitel 2

## Ein Binärsystem aus Schwarzem Loch und Staubscheibe

### 2.1 Einleitende Bemerkungen

Einspiralende Binärsysteme kompakter Objekte gehören zu den vielversprechendsten Quellen heutiger Gravitationswellendetektoren. Da eine vollständige Lösung des allgemein-relativistischen Zweikörper-Problems noch immer ein Desiderat der Forschung darstellt, war man bei der Untersuchung der Dynamik und Gravitationswellenabstrahlung dieser Systeme bis vor kurzem fast ausschließlich auf post-Newtonsche Näherungsverfahren angewiesen. Erst seit wenigen Jahren ermöglicht die Numerische Relativitätstheorie, Zusammenstoß und Verschmelzen zweier Schwarzer Löcher zu simulieren. Darüberhinaus gelang es in den vergangenen zwei Jahren, die numerische Berechnung auf die letzten Umläufe vor dem Verschmelzen auszuweiten (siehe z.B. [17]). Numerische Simulationen existieren auch für Modelle von NS-NS und NS-BH Systemen. Dabei zeigte sich, dass innere Freiheitsgrade nicht nur während des Verschmelzungsvorgangs, sondern schon weitaus früher eine große Rolle für das Verständnis der Dynamik und Gravitationswellenabstrahlung spielen. Die Notwendigkeit der Einbeziehung stellarer Freiheitsgrade in semi-analytische, post-Newtonsche Berechnungen wird damit umso deutlicher, zumal es ein gemeinsames Ziel analytisch und numerisch arbeitender Forscher sein muss, die auf den verschiedenen Wegen erzeugten Wellenformen einander anzupassen.

Außerhalb der letzten stabilen Kreisbahn stellen post-Newtonsche Näherungen noch immer die beste Möglichkeit zur Beschreibung des Einspiralens kompakter Binärsysteme dar. Dabei wird meist davon ausgegangen, dass die Komponenten des Binärsystems punktförmige Objekte sind. Störungen der Bahnbewegungen aufgrund von Ro-

tationsdeformation oder stellaren Oszillationen werden in der Regel vernachlässigt. Für BH-BH Binärsysteme zeigt sich in der Tat, dass die Komponenten des Systems bis zum Erreichen der letzten stabilen Kreisbahn und damit im gesamten Gültigkeitsbereich der post-Newtonschen Mechanik als Punktmassen betrachtet werden können. Im Falle von Neutronensternen oder Weißen Zwergen lässt sich diese Aussage jedoch nicht ohne Weiteres verallgemeinern. Die vorliegende Dissertation wird sich daher vor allem der Untersuchung des Einflusses von Spin und stellaren Oszillationen auf Dynamik und Gravitationswellenstrahlung widmen. Dazu werden verschiedene Modelle entwickelt, die eine weitgehend analytische Beschreibung der Bewegung zulassen.

Allgemein führt die Kopplung der Bahnbewegung an interne Freiheitsgrade der Rotation und Oszillation zu einer komplizierten Dynamik. Dabei kann es unter anderem zu Gezeitenresonanzen kommen, in denen der Austausch von Bahnenergie und Oszillationsenergie besonders intensiv ist<sup>1</sup>. Die Auswirkung dieser Effekte auf den Einspiralvorgang und die Form der Gravitationswellenstrahlung in Doppelneutronensternsystemen wurde von Schäfer und Kokkotas [52] und später von Lai und Ho [42] untersucht. Die Autoren fassten die stellaren Oszillationen als kleine Störungen des thermodynamischen Gleichgewichts auf und behandelten sie im Rahmen einer linearen Störungstheorie. Die internen Freiheitsgrade des Sterns werden dabei mit Hilfe einer Hamiltonfunktion beschrieben, die sich als Superposition harmonischer Oszillatoren verschiedener Eigenfrequenzen ergibt. Die Untersuchung der Dynamik und Gravitationswellenabstrahlung solcher Binärsysteme erfordert allerdings einen erheblichen rechnerischen Aufwand, da zusätzlich zur Bahnbewegung die Eigenfrequenzen und Eigenwerte der stellaren Oszillation mit Hilfe der linearisierten hydrodynamischen Gleichungen bestimmt werden müssen. Ziel der vorliegenden Arbeit ist es hingegen, Modelle zu entwickeln, die eine weitgehend analytische Behandlung der Newtonschen Störungen erlauben. Diese Modelle sollen einerseits alle interessierenden Eigenschaften komplizierterer Systeme beinhalten, andererseits aber so einfach sein, dass die Bewegungsgleichungen vollständig analytisch darstellbar sind. Zu diesen Modellen gehören Binärsysteme, die aus einer rotierenden, oszillierenden Staubscheibe und einem Schwarzen Loch bestehen. Sie sollen im Mittelpunkt dieses Kapitels stehen.

---

<sup>1</sup>Von einer Gezeitenresonanz spricht man, wenn die Frequenz der Bahnbewegung der  $n$ -te Bruchteil einer Eigenfrequenz des oszillierenden Sterns ist.  $n$  ist dabei eine natürliche Zahl.

## 2.2 Staubscheiben in der ART

Staubscheiben gehören zu den einfachsten axialsymmetrischen Konfigurationen, die dennoch bereits wesentliche Eigenschaften der ART aufweisen. Insbesondere können sie im Laufe ihrer zeitlichen Entwicklung Gravitationswellen emittieren und unter Umständen sogar zu einem Schwarzen Loch kollabieren. Schon seit langem sind Staubscheiben daher Gegenstand von Untersuchungen im Rahmen der ART. Stationäre, rotierende, relativistische Staubscheiben wurden erstmals von Bardeen und Wagoner untersucht [7]. Ihre Lösung der starr rotierenden Scheibe in Form einer Reihenentwicklung ist jedoch jenseits der zweiten post-Newtonschen Approximation leider nur numerisch zugänglich. Unter Verwendung von Methoden der Inversen Streutheorie gelang es schließlich Neugebauer und Meinel, eine exakte Lösung der starr rotierenden Staubscheibe in Form ultraelliptischer Funktionen herzuleiten [67]. Diese Neugebauer-Meinel Lösung zählt zu den wenigen bekannten exakten Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen. Aber weder ihre Lösung noch die von Bardeen und Wagoner erlauben die Emission von Gravitationswellen, denn diese kann nur bei nicht-stationären Staubscheiben auftreten. Es war C. Hunter, der sich erstmals solchen starr rotierenden, nicht-stationären Staubscheiben zuwandte [44].

Auch die Staubscheiben in diesem Kapitel sind nicht-stationär. Es handelt sich um unendlich dünne, rotierende, oszillierende MacLaurin-Staubscheiben, die man als Grenzfall von MacLaurin-Sphäroiden erhält. Für die MacLaurin-Scheibe ist eine analytische Lösung bis zur ersten post-Newtonschen Approximation bekannt [50]. Auf Newtonscher Ebene ist dabei die strukturelle Ähnlichkeit der sich ergebenden Bewegungsgleichungen mit dem bekannten Kepler-Problem der Himmelsmechanik auffällig. Die führende Ordnung der Gravitationsstrahlung der isolierten MacLaurin-Scheibe wurde von Kley und Schäfer berechnet [72].

Bei ihrer Herleitung der 1pN-exakten Lösung gingen Kley und Schäfer von einer isolierten MacLaurin-Scheibe aus, deren Schwerpunkt sich in Ruhe befindet. Eine Übertragung der 1pN-exakten analytischen Lösung auf bewegte Staubscheiben, wie sie in Binärsystemen vorliegen, ist leider nicht möglich, da in erster post-Newtonscher Näherung geometrischer Mittelpunkt und Massenmittelpunkt der Scheibe nicht mehr übereinstimmen. Gerade diese Übereinstimmung wird aber benötigt, um das Gravitationspotential im Inneren der Staubscheibe zu berechnen. Um dennoch ein konsistentes Modell zu entwickeln, beschränken wir uns auf die Newtonsche Dynamik des Binärsystems. Der durch Emission von Gravitationswellen verursachte Energieverlust wird durch Hinzunahme der führenden dissipativen Anteile der Bewegungsgleichungen berücksichtigt.

Im folgenden soll zunächst die analytische Lösung der Newtonschen MacLaurin-Scheibe skizziert werden. Die Oszillation der Scheibe führt zu einem zeitlich veränderlichen Massenquadrupoltenor, d.h. die Scheibe emittiert Gravitationswellen. Der damit verbundene Energieverlust wird durch Einführung eines zeitabhängigen Hamiltonians direkt in den Hamiltonschen Bewegungsgleichungen berücksichtigt. Im zweiten Teil dieses Kapitels betrachten wir die rotierende, oszillierende Staubscheibe als Komponente eines kompakten Binärsystems. Insbesondere soll dabei der Einfluss der Staubscheibenoszillationen auf die Dynamik und damit die Gravitationswellenformen untersucht werden.

## 2.3 Die rotierende, oszillierende Staubscheibe in der Newtonschen Theorie

In der Physik wird Staub als Materiekonfiguration mit verschwindendem Druck definiert. Mehrere Autoren untersuchten speziell die rotierende, oszillierende Staubscheibe (vgl. z.B. [44], [50], [78]). Ausgangspunkt ihrer Überlegungen waren dabei die Gleichungen der Hydrodynamik in der Eulerschen Formulierung. Für eine axial-symmetrische Staubkonfiguration in der  $z = 0$  Ebene<sup>2</sup> sind diese durch

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + v_r \frac{\partial \Sigma}{\partial r} + \frac{\Sigma}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r v_r) &= 0, \\ \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{v_\psi^2}{r} &= 0, \\ \frac{\partial v_\psi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\psi}{\partial r} + \frac{v_r v_\psi}{r} &= 0\end{aligned}\tag{2.1}$$

gegeben. Dabei ist  $\Sigma(r, t)$  die Oberflächendichte, während  $v_r$  und  $v_\psi$  radiale und azimuthale Geschwindigkeitskomponenten innerhalb der Staubkonfiguration beschreiben. Das Gravitationspotential der Scheibe ergibt sich als Lösung der Poissongleichung

$$\Delta U = -4\pi G \Sigma(r, t) \delta(z).\tag{2.2}$$

---

<sup>2</sup>Es werden Zylinderkoordinaten verwendet. Der Ursprung des Koordinatensystems fällt mit dem Schwerpunkt der betrachteten Materieverteilung zusammen.

Im vorliegenden Fall wird der Ansatz für  $\Sigma$ ,  $v_r$  und  $v_\psi$  gerade so gewählt, dass die Oberflächendichte  $\Sigma$  der einer MacLaurin-Scheibe entspricht, d.h.

$$\Sigma(r, t) = \sigma(t) \sqrt{1 - \frac{r^2}{r_d(t)^2}}, \quad v_r(r, t) = -rf(t), \quad v_\psi(r, t) = r\Omega(t), \quad (2.3)$$

mit  $\sigma(t)$  als der zeitabhängigen Oberflächendichte im Zentrum der Scheibe und  $r_d(t)$  als zeitlich veränderlichem Scheibenradius.  $\Omega(t)$  ist die Winkelgeschwindigkeit der starr rotierenden Scheibe. Mit diesem Ansatz ist es möglich, die hydrodynamischen Gleichungen (2.1) analytisch zu lösen. Für Punkte innerhalb der Scheibe lässt sich auch das Gravitationspotential in einer geschlossenen Form darstellen. Mit der in Ansatz (2.3) angenommenen Oberflächendichte ergibt sich aus der Poissongleichung [72]

$$U(r, t) = G\sigma(t)r_d(t) \frac{\pi^2}{4} \left[ 2 - \left( \frac{r}{r_d(t)} \right)^2 \right], \quad r \leq r_d, \quad z = 0. \quad (2.4)$$

Durch Einsetzen von Gl. (2.3) und (2.4) in die hydrodynamischen Gleichungen (2.1) erhält man für die Funktionen  $\sigma$ ,  $f$ ,  $\Omega$  und den zeitabhängigen Scheibenradius  $r_d$  das folgende Differentialgleichungssystem erster Ordnung:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} - 2f\sigma &= 0, \\ \dot{r}_d + fr_d &= 0, \\ \dot{\Omega} - 2f\Omega &= 0, \\ -\dot{f} + f^2 + \frac{G\pi^2\sigma}{2r_d} - \Omega^2 &= 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Die Lösung des Systems (2.5) soll den Randbedingungen  $f(0) = 0$  und  $r_d(0) = \Upsilon_d$  genügen. Die ersten beiden Gleichungen in (2.5) führen auf

$$\sigma(t)r_d^2(t) = \frac{3}{2\pi}M_d, \quad (2.6)$$

wobei  $M_d$  die Masse der Staubscheibe bezeichnet. Die dritte Gleichung in (2.5) ergibt eine Beziehung zwischen momentaner Winkelgeschwindigkeit und momentanem Scheibenradius  $r_d(t)$ , nämlich gerade

$$\Omega(t)r_d^2(t) = \Omega_0\Upsilon_d^2 = \text{const.}, \quad \Omega_0 = \Omega(0). \quad (2.7)$$



Damit folgt für die letzte Gleichung in (2.5)

$$\ddot{r}_d + \frac{2C}{r_d^2} - \frac{h^2}{r_d^3} = 0, \quad (2.8)$$

mit den Definitionen

$$C := G\sigma(t)r_d(t)^2\frac{\pi^2}{4} = \frac{3\pi}{8}GM_d, \quad h^2 := 2C\xi^2\Upsilon_d = \Omega_0^2\Upsilon_d^4, \quad (2.9)$$

und dem über die Winkelgeschwindigkeit

$$\Omega_0^2 =: \frac{2C\xi^2}{\Upsilon_d^3} \quad (2.10)$$

eingeführten Parameter  $\xi$ . Bemerkenswert ist, dass Gl. (2.8) dieselbe Struktur wie die Differentialgleichung des berühmten Keplerproblems der Himmelsmechanik aufweist. Analog zum dortigen Vorgehen kann man daher die Lösung von Gl. (2.8) in parametrisierter Form angeben:

$$r_d(t) = a_d(1 - \epsilon \cos u_d), \quad \frac{2\pi}{P_d}t = u_d - \epsilon \sin u_d - \pi. \quad (2.11)$$

Dabei sind  $a_d$  und  $\epsilon$  als

$$a_d := \frac{\Upsilon_d}{1 + \epsilon} \quad \text{und} \quad \epsilon := 1 - \xi^2$$

definiert.

## 2.4 Die isolierte Scheibe im Hamiltonschen Formalismus

### 2.4.1 Die Newtonsche Staubscheibe

In Vorbereitung auf den zweiten Teil dieses Kapitels soll im folgenden der Hamiltonsche Formalismus für die isolierte Staubscheibe entwickelt werden. Bei der Bestimmung der Hamiltonfunktion der Staubscheibe lässt sich die Analogie von Gl. (2.8) zum Keplerproblem ausnutzen. Fasst man nämlich  $r_d$  als generalisierte Koordinate

auf, so lautet der Ansatz für die auf Gl. (2.8) führende Lagrangefunktion

$$L = \alpha \left[ \frac{\dot{r}_d^2}{2} + \frac{\beta}{r_d} + \frac{\gamma}{r_d^2} \right], \quad (2.12)$$

mit  $\alpha, \beta$  und  $\gamma$  als noch zu bestimmenden Konstanten. Letzteres geschieht, indem man die sich aus dem Ansatz (2.12) ergebende Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_d} - \frac{\partial L}{\partial r_d} = 0 \quad \leadsto \quad \ddot{r}_d + \frac{\beta}{r_d^2} + \frac{2\gamma}{r_d^3} = 0$$

mit Gl. (2.8) vergleicht. Daraus folgt sofort

$$\beta = 2C \quad \text{und} \quad \gamma = -\frac{h^2}{2} = -C\Upsilon_d \xi^2;$$

einzig die Konstante  $\alpha$  wird erst später bestimmt. Der zu  $r_d$  kanonisch konjugierte Impuls ist per definitionem durch

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_d} = \alpha \dot{r}_d.$$

gegeben. Mit diesem Wissen ist es möglich, die Legendretransformation von  $L$  in Gl. (2.12) explizit durchzuführen. Die Hamiltonfunktion der rotierenden, oszillierenden Staubscheibe lautet somit

$$H_d^{(N)} = \frac{1}{2\alpha} \left[ p_r^2 + \frac{p_\psi^2}{r_d^2} \right] - \frac{2C\alpha}{r_d}, \quad (2.13)$$

mit der Definition  $p_\psi^2 := 2\alpha^2 C \Upsilon_d \xi^2$ .

Was bleibt, ist die Bestimmung des Parameters  $\alpha$ , von dem intuitiv klar ist, dass er eng mit der Masse der Scheibe zusammenhängen muss. Da die Hamiltonfunktion (2.13) konservativ ist, sollte sie in der Tat identisch mit der Energie

$$E_d = \int d^3x \frac{\rho}{2} (v^2 - U) = \frac{2C}{5\Upsilon_d} M_d (\xi^2 - 2)$$

der Staubscheibe sein. Insbesondere muss diese Forderung auch für  $t = 0$  gelten. Andererseits verschwindet der generalisierte Impuls  $p_r(t)$  bei  $t = 0$  aufgrund der Anfangsbedingungen  $r_d(0) = \Upsilon_d, \dot{r}_d(0) = 0$ . Damit ist

$$H_d^{(N)}(0) = \frac{\alpha C}{\Upsilon_d} (\xi^2 - 2) \stackrel{!}{=} \frac{2C}{5\Upsilon_d} M_d (\xi^2 - 2) \quad \leadsto \quad \alpha = \frac{2}{5} M_d.$$

## 2.4.2 Strahlungsrückwirkung in führender Ordnung

Die Gravitationsstrahlung einer Materiekonfiguration wird in führender Ordnung durch die zeitliche Variabilität des STF-Massenquadrupoltensors  $\mathcal{I}_{ij}$  bestimmt<sup>3</sup>. Der damit verbundene Energieverlust kann durch einen zeitabhängigen Anteil des Gesamthamiltonians beschrieben werden, der im folgenden mit  $H_{\text{reac}}(t)$  bezeichnet werden soll (vgl. auch Kap. 4). Dabei gilt für beliebige Flüssigkeitskonfigurationen

$$H_{\text{reac}}(t) = \frac{2G}{5c^5} \ddot{\mathcal{I}}_{ij}(t) \int d^3x \left[ \frac{\pi_i \pi_j}{\rho_*} + \frac{1}{4\pi G} \partial_i U_* \partial_j U_* \right], \quad (2.14)$$

mit den bei Schäfer definierten Funktionen  $\rho_*$ ,  $\pi_i$  und  $U_*$  [74]. Jenseits der führenden Ordnung ist das in Gl. (2.14) auftretende Integral in der Regel außerordentlich kompliziert. Wir aber sind lediglich an der führenden Ordnung von  $H_{\text{reac}}(t)$  interessiert und können daher  $\rho_*$ ,  $\pi_i$  und  $U_*$  durch die Massendichte  $\rho$ , die Impulsdichte  $\rho v^i$  und das Gravitationspotential  $U$  der Scheibe ersetzen. Unter Verwendung der Kontinuitätsgleichung und der Bewegungsgleichungen lässt sich außerdem zeigen, dass für beliebige Materieverteilungen

$$\int d^3x \left[ \rho v^i v^j + \frac{1}{4\pi G} \partial_i U \partial_j U \right] = \frac{1}{2} \ddot{\mathcal{I}}_{ij}$$

gilt. Verwenden wir diese Beziehung zur Berechnung des Hamiltonians (2.14), so ergibt sich in führender Ordnung

$$H_{\text{reac}}(t) = \frac{G}{5c^5} \ddot{\mathcal{I}}_{ij}(t) \ddot{\mathcal{I}}_{ij}(p, q). \quad (2.15)$$

Wichtig ist, dass  $\ddot{\mathcal{I}}_{ij}(p, q)$  im Gegensatz zur dritten Zeitableitung des Massenquadrupoltensors als Funktion der generalisierten Koordinaten und Impulse aufgefasst wird. Speziell für unsere Staubscheibe ist also

$$H_{\text{reac}}^{(d)}(t) = \frac{G}{5c^5} \ddot{\mathcal{I}}_{ij}^{(d)}(t) \ddot{\mathcal{I}}_{ij}^{(d)}(p, q). \quad (2.16)$$

Es ist möglich, diese Gleichung noch weiter zu vereinfachen, indem man die Diagonalgestalt des Massenquadrupoltensors der Staubscheibe ausnutzt<sup>4</sup>. Insbesondere

<sup>3</sup>In führender Ordnung gilt  $\mathcal{I}_{ij}(t) = \int \rho [x^i x^j - \frac{1}{3} \delta^{ij} r^2] dV$ .

<sup>4</sup>Es gilt  $\mathcal{I}_{ij}^{(d)} = \mathcal{I}_{11}^{(d)} \cdot \text{diag}(1, 1, -2)$

gilt für die zweite Zeitableitung

$$\ddot{\mathcal{I}}_{11}^{(d)}(p, q) = \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{\alpha} \left( p_r^2 + \frac{p_\psi^2}{r_d^2} \right) - \frac{2C\alpha}{r_d} \right], \quad (2.17)$$

und damit für den dissipativen Anteil der Hamiltonfunktion

$$H_{\text{reac}}^{(d)}(t) = \frac{2G}{5c^5} \ddot{\mathcal{I}}_{11}^{(d)}(t) \left[ \frac{1}{\alpha} \left( p_r^2 + \frac{p_\psi^2}{r_d^2} \right) - \frac{2C\alpha}{r_d} \right]. \quad (2.18)$$

### 2.4.3 Die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen

Unter Berücksichtigung der dissipativen Effekte führender Ordnung lautet der Gesamthamiltonian der isolierten Staubscheibe

$$H_{\text{total}}^{(d)} = H_d^{(N)} + H_{\text{reac}}^{(d)}(t).$$

Die Kenntnis dieser nicht-autonomen Funktion genügt, um die Dynamik der Staubscheibe mit Hilfe der Hamiltonschen kanonischen Gleichungen

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H_{\text{total}}^{(d)}}{\partial q^i}, \quad \dot{q}^i = \frac{\partial H_{\text{total}}^{(d)}}{\partial p_i}$$

zu beschreiben. Vorsicht ist dabei allerdings bei der expliziten Durchführung der partiellen Ableitungen angebracht: Während der Differentiation darf  $\ddot{\mathcal{I}}_{ij}^{(d)}(t)$  *nicht* als Funktion von  $p_r$  und  $r_d$  aufgefasst werden; die im Anhang angegebene Abhängigkeit  $\ddot{\mathcal{I}}_{ij}^{(d)}(r_d, p_r)$  darf erst *nach* der partiellen Ableitung eingesetzt werden. Auf diese Weise findet man die Hamiltonschen kanonischen Gleichungen in der Form

$$\begin{aligned} \dot{r}_d &= \frac{p_r}{\alpha} \left[ 1 - \frac{8}{15} \frac{GC}{c^5} \frac{p_r}{r_d^2} \right], & \dot{p}_r &= \frac{p_\psi^2}{\alpha r_d^3} - \frac{2\alpha C}{r_d^2} - \frac{8}{15} \frac{GC}{c^5} \frac{p_r}{\alpha r_d^4} \left[ \frac{p_\psi^2}{r_d} - C\alpha^2 \right], \\ \dot{\psi} &= \frac{p_\psi}{\alpha r_d^2} \left[ 1 - \frac{8}{15} \frac{GC}{c^5} \frac{p_r}{r_d^2} \right], & \dot{p}_\psi &= 0. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Es sei an dieser Stelle noch einmal betont, dass die Gravitationsstrahlung und die damit verbundenen Energieverluste in dieser Betrachtungsweise explizit ihre Berücksichtigung in den Bewegungsgleichungen finden. Es fällt sofort auf, dass  $p_\psi$  auch in führender Ordnung der Strahlungsrückwirkung eine Erhaltungsgröße ist, nicht jedoch die Energie der Staubscheibe. Das war aufgrund der Axialsymmetrie der Staubscheibe auch zu erwarten. Wie sich später herausstellen wird, ist  $p_\psi$  die einzige Erhaltungsgröße in einem Binärsystem aus rotierender, oszillierender Staubscheibe

und punktförmigem Objekt, in dem sowohl Bahndrehimpuls als auch Gesamtenergie des Binärsystems mit der Zeit abnehmen.

## 2.4.4 Die Gravitationsstrahlung der isolierten Staubscheibe in führender Ordnung

Im asymptotisch flachen Raum, d.h. in hinreichend großer Entfernung von der Quelle, kann man geeignete Koordinaten so einführen, dass sich das Strahlungsfeld  $h_{ij}^{TT}$  in Form einer Multipolentwicklung darstellen lässt<sup>5</sup>. Es zeigt sich dabei, dass die Gravitationswellen in führender Ordnung den Charakter einer Quadrupolstrahlung besitzen. Nutzt man anstelle der  $\mathcal{I}_{ij}$  eine Darstellung  $I^{2m}$ , die irreduzibel zur Rotationsachse der Scheibe ist, so misst ein Beobachter im Abstand  $D \gg \lambda$  von der Quelle für das Strahlungsfeld

$$h_{ij}^{TT} = \frac{G}{c^4 D} \sum_{m=-2}^2 \ddot{I}^{2m} T_{ij}^{E2,2m}(\Theta, \Phi) \quad (2.20)$$

(siehe Anhang, Gl. (A.6)). Die hier eingeführten  $T_{ij}^{E2,2m}$  sind die Komponenten der irreduziblen Spin-2 sphärisch-Harmonischen elektrischer Parität, deren Definition im Anhang angegeben ist. Ebenfalls im Anhang zu finden ist die Beziehung zwischen den beiden Darstellungen  $\mathcal{I}_{ij}$  und  $I^{2m}$  des Massenquadrupoltensors. Speziell ist

$$I^{20} = 4\sqrt{\frac{3\pi}{5}} \mathcal{I}_{33}, \quad I^{21} = -4\sqrt{\frac{2\pi}{5}} (\mathcal{I}_{13} - i\mathcal{I}_{23}), \quad I^{22} = 2\sqrt{\frac{2\pi}{5}} (\mathcal{I}_{11} - \mathcal{I}_{22} - 2i\mathcal{I}_{12}).$$

Offenbar verschwinden  $I^{21}$  und  $I^{22}$  aufgrund der speziellen Symmetrie des Massenquadrupoltensors, so dass das Strahlungsfeld in führender Ordnung durch  $\ddot{I}^{20}$  vollständig beschrieben wird. Mit

$$\ddot{\mathcal{I}}_{33}^{(d)} = -\frac{2}{3} \left[ \frac{1}{\alpha} \left( p_r^2 + \frac{p_\psi^2}{r_d^2} \right) - \frac{2C\alpha}{r_d} \right]$$

folgt daher<sup>6</sup>

$$\ddot{I}_{disk}^{20} = -8\sqrt{\frac{\pi}{15}} \left[ \frac{1}{\alpha} \left( p_r^2 + \frac{p_\psi^2}{r_d^2} \right) - \frac{2C\alpha}{r_d} \right]. \quad (2.21)$$

<sup>5</sup>vgl. dazu Kapitel 4 und Anhang

<sup>6</sup>Die Polarisationszustände  $h_+$  und  $h_\times$  erhält man, indem man  $T_{ij}^{E2,2m}$  in der im Anhang angegebenen Form darstellt.  $h_+$  und  $h_\times$  sind dann gerade die  $(\hat{\Theta} \otimes \hat{\Theta} - \hat{\Phi} \otimes \hat{\Phi})$ - bzw.  $(\hat{\Theta} \otimes \hat{\Phi} + \hat{\Phi} \otimes \hat{\Theta})$ -Anteile von Gl. (2.20).

In Abb. 2.1 ist die zeitliche Entwicklung der von der Staubscheibe emittierten Gravitationswellen für ein Beispiel dargestellt.

Gl. (2.21) gibt die Quadrupolstrahlung der Staubscheibe in Abhängigkeit von generalisierten Koordinaten und Impulsen an. Mit Hilfe der parametrischen Lösung (2.11) lässt sich  $\ddot{I}_d^{20}$  auch in analytischer Form angeben. Mit

$$E_d = -\frac{\alpha C}{\Upsilon_d}(1 + \epsilon), \quad \text{und} \quad r_d = a_d(1 - \epsilon \cos u_d) = \frac{\Upsilon_d}{1 + \epsilon}(1 - \epsilon \cos u_d)$$

folgt nämlich aus Gl. (2.17)

$$\ddot{I}_{11}^{(d)} = \frac{2}{3} \left[ E_d^{(N)} + \frac{\alpha C}{r_d} \right] = \frac{2}{3} E_d \left[ 1 - \frac{1}{1 - \epsilon \cos u_d} \right]$$

und somit

$$\ddot{I}_d^{20} = -16 \sqrt{\frac{\pi}{15}} E_d \left[ 1 - \frac{1}{1 - \epsilon \cos u_d} \right]. \quad (2.22)$$

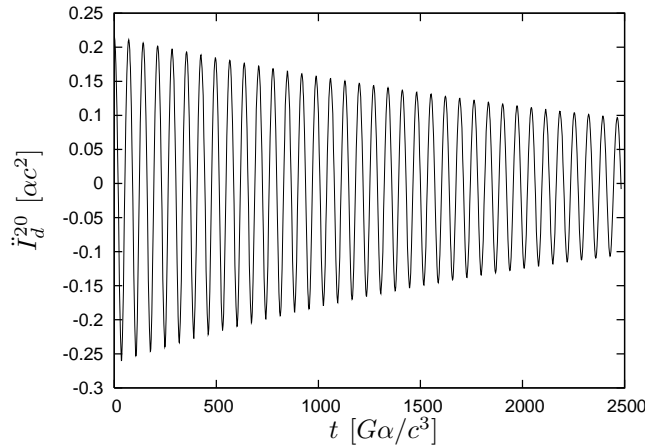


Abbildung 2.1: Das Strahlungsfeld einer isolierten Staubscheibe in führender Ordnung. Dargestellt ist  $\ddot{I}^{20}$  für eine durch die Anfangswerte  $\xi = 0.9$  und  $\Upsilon_d(0) = 10 G\alpha/c^2$  definierte Staubscheibe.

## 2.5 Die Bahnbewegung im Hamiltonschen Formalismus

Das Zwei-Körperproblem der Himmelsmechanik gehört zu den bekanntesten Modellen der klassischen Mechanik. Dabei vernachlässigt man die endliche Ausdehnung

der Systemkomponenten, d.h. die Sterne werden als Punktmassen modelliert. Die Hamiltonfunktion lautet in einem solchen Fall

$$H_{orb}^{(N)} = \frac{1}{2\mu} \left[ P_R^2 + \frac{P_\varphi^2}{R^2} \right] - \frac{GM\mu}{R}, \quad (2.23)$$

mit  $\mathcal{M}$  und  $\mu$  als Gesamtmasse bzw. reduzierter Masse und  $R$  als Relativabstand. Für den Strahlungshamiltonian (2.14) hingegen findet man [52]

$$H_{reac}^{(o)} = \frac{2G}{5c^5} \ddot{\mathcal{I}}_{ij}^{(o)}(t) \left[ \frac{P_i P_j}{\mu} - GM\mu \frac{R^i R^j}{R^3} \right]. \quad (2.24)$$

Bei der Bestimmung der Hamiltonschen kanonischen Gleichungen ist wieder zu beachten, dass die dritte Zeitableitung des Massenquadrupoltensors in Gl. (2.24) während der Differentiation nach den generalisierten Koordinaten bzw. Impulsen als Funktion der Zeit aufgefasst werden muss; die explizite Abhängigkeit  $\ddot{\mathcal{I}}_{ij}^{(o)}(P, Q)$  darf erst danach substituiert werden. Man erhält auf diese Weise

$$\begin{aligned} \dot{R} &= \frac{P_R}{\mu} - \frac{8}{15} \frac{G^2}{R^2 \nu c^5} \left[ 2P_R^2 + 6 \frac{P_\varphi^2}{R^2} \right], \\ \dot{\varphi} &= \frac{P_\varphi}{\mu R^2} - \frac{8}{3} \frac{G^2}{c^5 \nu R^4} P_R P_\varphi, \\ \dot{P}_\varphi &= -\frac{8}{5} \frac{G^2 P_\varphi}{c^5 \nu R^3} \left[ 2 \frac{GM^3 \nu^2}{R} + 2 \frac{P_\varphi^2}{R^2} - P_R^2 \right], \\ \dot{P}_R &= \frac{P_\varphi^2}{\mu R^3} - \frac{GM\mu}{R^2} + \frac{8}{3} \frac{G^2 P_R}{c^5 R^4} \left[ \frac{GM^3 \nu}{5} - \frac{P_\varphi^2}{\nu R} \right], \end{aligned} \quad (2.25)$$

mit  $\nu := \mu/\mathcal{M}$  (vgl. auch Kap. 4). Vor allem bei der numerischen Auswertung dieses Gleichungssystems ist es günstiger, skalierte Variablen

$$R =: \frac{GM}{c^2} \tilde{R}, \quad P_R =: \mu c \tilde{P}_R, \quad P_\varphi =: \frac{GM\mu}{c} \tilde{P}_\varphi, \quad t =: \frac{GM}{c^3} \tau \quad (2.26)$$

zu verwenden, in denen  $G = \mathcal{M} = 1$  gilt. Wir werden später noch darauf zurückkommen.

Binärsysteme zweier als Punktmassen gedachter Objekte sind Quellen einer Gravitationsstrahlung, die in führender Ordnung durch Gl. (2.20) gegeben<sup>7</sup> ist. Identifiziert man die Bahnebene mit der  $\theta = \pi/2$  Ebene, so lauten die nichttrivialen Beiträge

---

<sup>7</sup>Siehe dazu auch Kap.4.

$\ddot{I}_{orb}^{20}$  und  $\ddot{I}_{orb}^{22}$  zum Strahlungsfeld

$$\begin{aligned}\ddot{I}_{orb}^{22} &= 4\sqrt{\frac{2\pi}{5}}e^{-2i\varphi} \left[ \frac{P_R^2}{\mu} - \frac{P_\varphi^2}{\mu R^2} - \frac{GM\mu}{R} - 2i\frac{P_R P_\varphi}{\mu R} \right] \\ &= 4\sqrt{\frac{2\pi}{5}}e^{-2i\varphi} \mu c^2 \left[ \tilde{P}_R^2 - \frac{\tilde{P}_\varphi^2}{\tilde{R}^2} - \frac{1}{\tilde{R}} - 2i\frac{\tilde{P}_R \tilde{P}_\varphi}{\tilde{R}} \right],\end{aligned}$$

und

$$\ddot{I}_{orb}^{20} = -8\sqrt{\frac{\pi}{15}}\mu c^2 \left[ \tilde{P}_R^2 + \frac{\tilde{P}_\varphi^2}{\tilde{R}^2} - \frac{1}{\tilde{R}} \right].$$

Alternativ ist es möglich, die Beiträge zum Strahlungsfeld in Abhängigkeit von Bahndrehimpuls, Exzentrizität und Gesamtenergie  $E_{orb}$  anzugeben<sup>8</sup>. Ausgangspunkt ist dabei die Kepler-Parametrisierung

$$R = a(1 - e \cos u), \quad \frac{2\pi}{P}t \equiv n \cdot t = u - e \cos u, \quad n = \frac{2\pi}{P} = \sqrt{\frac{GM}{a^3}},$$

mit  $\varphi$  und  $u$  als wahrer bzw. exzentrischer Anomalie, die auf Newtonscher Ebene durch den Zusammenhang

$$\varphi = 2 \arctan \left[ \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{u}{2} \right]$$

miteinander verknüpft sind. Die zeitliche Änderung von  $\varphi$  ergibt sich damit zu

$$\dot{\varphi} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e \cos u} \dot{u} = \frac{n\sqrt{1-e^2}}{(1-e \cos u)^2}.$$

Die Newtonsche Energie des Orbits ist durch Gesamtmasse und große Halbachse des Systems bestimmt, d.h. es gilt  $E = \mu c^2 \tilde{E}$  mit  $\tilde{E} = -1/2\tilde{a}$ . Für die führenden Beiträge zum Strahlungsfeld findet man daher

$$\begin{aligned}\ddot{I}_{orb}^{22} &= 8\sqrt{\frac{2\pi}{5}}e^{-2i\varphi} \mu c^2 \tilde{E} \left[ 1 - \frac{1}{F(u)} + \frac{2(1-e^2)}{F(u)^2} + 2i\frac{e\sqrt{1-e^2} \sin u}{F(u)^2} \right], \\ \ddot{I}_{orb}^{20} &= -16\sqrt{\frac{\pi}{15}}\mu c^2 \tilde{E} \left[ 1 - \frac{1}{F(u)} \right],\end{aligned}$$

---

<sup>8</sup>Vgl. Kap. 4.



mit  $F(u) := 1 - e \cos u$ . Insbesondere verschwindet die  $\ddot{I}_{orb}^{20}$ -Komponente für Kreisbahnen.

Zum Abschluss dieses Abschnitts soll noch die Dissipationsrate bzw. „Leuchtkraft“ der Gravitationsstrahlung angegeben werden. In führender Ordnung ist

$$\mathcal{L} = \frac{G}{5c^5} \left( \frac{d^3 \mathcal{I}_{ij}}{dt^3} \right)^2.$$

Die Mittelung von  $\mathcal{L}$  über eine Bahnperiode ergibt für den Energieverlust pro Umlauf

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = -\frac{1}{P} \int_0^P \mathcal{L} dt = -\frac{32}{5c^5} \frac{G^4 \mathcal{M}^3 \mu^2}{a^5 (1-e^2)^{7/2}} \left[ 1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4 \right],$$

während man für die Abnahme der Exzentrizität

$$\left\langle \frac{de}{dt} \right\rangle = -\frac{1}{15} \frac{\nu}{G \mathcal{M} c^5} \left( \frac{G \mathcal{M}}{a} \right)^4 \frac{e}{(1-e^2)^{5/2}} (304 + 121e^2).$$

findet.

## 2.6 Das Binärsystem

Besitzt eine Komponente eines Binärsystems eine endliche Ausdehnung, so kommt es unter anderem aufgrund von Gezeitenwechselwirkung zu einer Kopplung stellarer Freiheitsgrade an die Bahnbewegung. Eines der mathematisch einfachsten Modelle, das andererseits bereits wesentliche Eigenschaften realistischerer und deutlich komplizierterer Binärsysteme aufweist, ist ein Binärsystem aus rotierender, oszillierender Staubscheibe und Schwarzen Loch. Bei der folgenden Untersuchung wird davon ausgegangen, dass der Relativabstand der Systemkomponenten deutlich größer ist als der Roche-Radius der Scheibe. Mit anderen Worten, die Form der Scheibe bleibt während der zeitlichen Entwicklung des Systems erhalten. Um die Rechnung möglichst einfach zu halten, wird darüberhinaus angenommen, dass Staubscheibe und Orbit in der  $z = 0$  Ebene liegen, also der Spinvektor der Scheibe parallel zum Vektor des Bahndrehimpulses ist. Eine solche Annahme ist in der Tat nicht unberechtigt, streben doch Binärsysteme danach, den Zustand minimaler Energie zu erreichen. Mit der Zeit wird sich daher die Rotationsachse der Scheibe parallel zum Bahndrehimpuls ausrichten, selbst wenn das ursprünglich nicht der Fall war.

## 2.6.1 Die Beschreibung der Gezeitenwechselwirkung

Das Newtonsche Wechselwirkungspotential einer beliebigen Materieverteilung ist durch

$$U = -\frac{G}{2} \int \int \frac{\rho(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3x d^3x' \quad (2.27)$$

gegeben; in unserem Fall gilt speziell

$$U = -\frac{G}{2} \int \int \frac{(\rho_p(\mathbf{r}) + \rho_d(\mathbf{r}))(\rho_p(\mathbf{r}') + \rho_d(\mathbf{r}'))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3x d^3x'.$$

Lässt man die Selbstwechselwirkungsterme unberücksichtigt, so ergibt sich für das eigentliche Wechselwirkungspotential

$$U_{int} = U_{int}^{(1,2)} + U_{int}^{(2,1)} = -G \int \int \frac{\rho_d(\mathbf{r})\rho_p(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3x d^3x'. \quad (2.28)$$

Im Rahmen des hier behandelten Modells wird eine der Komponenten des Binärsystems als punktförmiges Objekt mit der Dichte  $\rho_p(\mathbf{r}) = M_p \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R})$  beschrieben. Damit reduziert sich das zu lösende Integral auf

$$U_{int} = -GM_p \int \frac{\rho_d(\mathbf{r})}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} d^3x, \quad (2.29)$$

mit  $\rho_d(\mathbf{r}) = \delta(z)\Sigma(r, t)$  als Massendichte der Staubscheibe. Nach einer Koordinatentransformation, die den Ursprung des Koordinatensystems in den Mittelpunkt der Scheibe verschiebt, erhalten wir für das Wechselwirkungspotential die Integraldarstellung

$$\begin{aligned} U_{int} &= -GM_p \sigma(t) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r_d} dr \frac{r \sqrt{1 - r^2/r_d^2}}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos \varphi}} \\ &= -\frac{GM_p}{R} \sigma(t) J, \end{aligned} \quad (2.30)$$

mit der Definition

$$J := \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r_d} dr \frac{r \sqrt{1 - (r/r_d)^2}}{\sqrt{1 + (r/R)^2 - 2(r/R) \cos \varphi}}. \quad (2.31)$$

Leider war es nicht möglich, eine analytische Lösung dieses Integrals für  $R > r_d$  zu finden<sup>9</sup>. Eine Zerlegung des Integranden in Legendrepolynome führt jedoch auf

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r_d} dr r \sqrt{1 - \left(\frac{r}{r_d}\right)^2} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^l P_l(\cos \varphi) \\ &= r_d^2 \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r_d}{R}\right)^l \int_0^{2\pi} d\varphi P_l(\cos \varphi) \int_0^1 \sqrt{1-x^2} x^{l+1} dx. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Definieren wir nun noch

$$Q_l := \int_0^1 x^{l+1} \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(1 + \frac{l}{2})}{4 \Gamma(\frac{5+l}{2})},$$

so ist  $J$  durch

$$J = r_d^2 \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r_d}{R}\right)^l Q_l \int_0^{2\pi} P_l(\cos \varphi) d\varphi$$

gegeben. Das Integral  $\int_0^{2\pi} P_l(\cos \varphi) d\varphi$  verschwindet für ungerade  $l$ ; für  $l = 2n$  lässt es sich mit der Substitution  $y = \cos \varphi$ ,  $d\varphi = -\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$  auf

$$\int_0^{2\pi} P_{2n}(\cos \varphi) d\varphi = 2 \int_{-1}^1 \frac{P_{2n}(y)}{\sqrt{1-y^2}} dy$$

umformen. Das ist ein Spezialfall der allgemeineren Beziehung [35]

$$\int_{-1}^1 (1-y^2)^{\lambda-1} P_{\nu}^{\mu}(y) dy = \frac{2^{\mu} \pi \Gamma(\lambda + \frac{\mu}{2}) \Gamma(\lambda - \frac{\mu}{2})}{\Gamma(\lambda + \frac{\nu+1}{2}) \Gamma(\lambda - \frac{\nu}{2}) \Gamma(1 + \frac{\nu-\mu}{2}) \Gamma(\frac{1-\mu-\nu}{2})},$$

die für  $\Re \lambda > \frac{1}{2} |\Re \mu|$  erfüllt ist. Mit  $\lambda = \frac{1}{2}$ ,  $\mu = 0$  und  $\nu = 2n$  erhält man

$$\int_{-1}^1 \frac{P_{2n}}{\sqrt{1-y^2}} dy = \frac{\pi \Gamma(\frac{1}{2})^2}{\Gamma(1+n)^2 \Gamma(\frac{1}{2}-n)^2} = \left( \frac{\pi}{n! \Gamma(\frac{1}{2}-n)} \right)^2 = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} P_{2n}(\cos \varphi) d\varphi.$$

Damit nimmt das Wechselwirkungspotential die folgende Form an:

$$U_{int} = -\frac{GM_p}{2R} \sigma(t) r_d^2 \pi \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r_d}{R}\right)^{2l} W_l = -\frac{3}{4} \frac{GM_p M_d}{R} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r_d}{R}\right)^l W_l \quad (2.33)$$

$$= U_{orb} + U_{tidal}, \quad (2.34)$$

---

<sup>9</sup>Für  $R \leq r_d$  siehe z.B. [50].

mit

$$W_l := \frac{\pi^{3/2}}{\left[\left(\frac{l}{2}\right)! \Gamma\left(\frac{1-l}{2}\right)^2 \Gamma\left(\frac{5+l}{2}\right)\right]}, \quad l \text{ gerade} \quad (2.35)$$

und  $W_l = 0$  für ungerade  $l$ . Der  $l = 0$  Beitrag entspricht dabei gerade dem Wechselwirkungspotential zweier Punktmassen

$$U_0 = -\frac{3}{4} \frac{GM_p M_d}{R} \frac{\pi^{3/2}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} = -\frac{GM\mu}{R} \equiv U_{orb}. \quad (2.36)$$

Die Gezeitenwechselwirkung hingegen wird durch

$$U_{tid} = -\frac{3}{4} \frac{GM\mu}{R} \sum_{l=2}^{\infty} \left(\frac{r_d}{R}\right)^l W_l \quad (2.37)$$

beschrieben, ist also in niedrigster Ordnung eine Quadrupolkopplung [66]. Sie führt unter anderem zu einer Newtonschen Apsiden- oder Periastrondrehung<sup>10</sup> (siehe z.B. [60]).

## 2.6.2 Energiedissipation in führender Ordnung

Der dissipative Anteil  $H_{reac}(t)$  der Hamiltonfunktion eines fluiden Mediums wird in führender Ordnung durch Gl. (2.15) beschrieben. Anders als man zunächst annehmen könnte, lässt er sich also nicht einfach als Summe der entsprechenden Anteile der Hamiltonfunktionen von Scheibe und Orbit schreiben. Aufgrund der Additivität des Massenquadrupoltensors gilt vielmehr

$$H_{reac}(t) = \frac{G}{5c^5} \left[ \ddot{\mathcal{I}}_{ij}^{(o)}(t) + \ddot{\mathcal{I}}_{ij}^{(d)}(t) \right] \left[ \ddot{\mathcal{I}}_{ij}^{(o)}(R^a, P_a) + \ddot{\mathcal{I}}_{ij}^{(d)}(x^a, p_a) \right], \quad (2.38)$$

mit den Bezeichnungen  $\mathcal{I}_{ij}^{(o)}$  und  $\mathcal{I}_{ij}^{(d)}$  für die STF-Massenquadrupoltensoren der Staubscheibe bzw. des Orbits,  $R^i, P_i$  als den kanonisch konjugierten Variablen der Bahnbewegung und  $x^i, p_i$  den kanonisch konjugierten Variablen der Staubscheibe relativ zu deren Zentrum. Es tritt also zusätzlich zu den in Gl. (2.18) und (2.24) gegebenen dissipativen Hamiltonfunktionen  $H_{reac}^{(d)}(t)$  und  $H_{reac}^{(orb)}(t)$  noch ein Mischterm

---

<sup>10</sup>Vgl. dazu auch Kap. 4

auf, der a priori nicht weggelassen werden darf. Für das Binärsystem ist daher

$$H_{\text{reac}}(t) = H_{\text{reac}}^{(d)}(t) + H_{\text{reac}}^{(o)}(t) + \frac{G}{5c^5} \left[ \ddot{\mathcal{I}}_{ij}^{(d)}(t) \ddot{\mathcal{I}}_{ij}^{(o)}(R^a, P_a) + \ddot{\mathcal{I}}_{ij}^{(o)}(t) \ddot{\mathcal{I}}_{ij}^{(d)}(x^a, p_a) \right], \quad (2.39)$$

wobei die beiden letzten Terme die Kopplung zwischen den Massenquadrupolmomenten der Bahnbewegung und der Staubscheibe beschreiben. Berücksichtigt man schließlich noch die Diagonalgestalt von  $\mathcal{I}_{ij}^{(d)}$ , so ergibt sich

$$H_{\text{reac}}(t) = H_{\text{reac}}^{(d)}(t) + H_{\text{reac}}^{(o)}(t) - \frac{3G}{5c^5} \left[ \ddot{\mathcal{I}}_{33}^{(o)}(t) \ddot{\mathcal{I}}_{11}^{(d)}(x^a, p_a) + \ddot{\mathcal{I}}_{11}^{(d)}(t) \ddot{\mathcal{I}}_{33}^{(o)}(R^a, P_a) \right]. \quad (2.40)$$

Auf die schon skizzierte Art und Weise erhält man daraus den dissipativen Anteil der Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} (\dot{r}_d)_{\text{reac}} &= -\frac{8}{15} \frac{GC}{\alpha c^5} \frac{p_r^2}{r_d^2} - \frac{4}{15} \frac{G^2 \mathcal{M}}{\alpha c^5} \frac{p_r P_R}{R^2}, \\ (\dot{\psi})_{\text{reac}} &= -\frac{8}{15} \frac{GC}{\alpha c^5} \frac{p_r p_\psi}{r_d^4} - \frac{4}{15} \frac{G^2 \mathcal{M}}{\alpha c^5} \frac{p_\psi P_R}{R^2 r_d^2}, \\ (\dot{p}_r)_{\text{reac}} &= \frac{8}{15} \frac{GC}{c^5} \frac{p_r}{\alpha r_d^4} \left[ C\alpha^2 - \frac{p_\psi^2}{r_d} \right] + \frac{4}{15} \frac{G^2 \mathcal{M}}{\alpha c^5} \frac{P_R}{R^2 r_d^2} \left[ C\alpha^2 - \frac{p_\psi^2}{r_d} \right], \\ (\dot{p}_\psi)_{\text{reac}} &= 0, \\ (\dot{R})_{\text{reac}} &= -\frac{16}{5} \frac{G^2 \mathcal{M}}{\mu c^5 R^2} \left[ \frac{P_\varphi^2}{R^2} + \frac{1}{3} P_R^2 \right] - \frac{8}{15} \frac{GC}{\mu c^5} \frac{p_r P_R}{r_d^2}, \\ (\dot{\varphi})_{\text{reac}} &= -\frac{8}{3} \frac{G^2 \mathcal{M}}{\mu c^5} \frac{P_R P_\varphi}{R^4} - \frac{8}{15} \frac{GC}{\mu c^5} \frac{p_r P_\varphi}{R^2 r_d^2}, \\ (\dot{P}_R)_{\text{reac}} &= -\frac{8}{3} \frac{G^2 \mathcal{M}}{c^5} \frac{P_R}{R^4} \left[ \frac{P_\varphi^2}{\mu R} - \frac{1}{5} G\mathcal{M}\mu \right] + \frac{4}{15} \frac{GC}{c^5} \frac{p_r}{r_d^2 R^2} \left[ G\mathcal{M}\mu - 2 \frac{P_\varphi^2}{\mu R} \right], \\ (\dot{P}_\varphi)_{\text{reac}} &= \frac{8}{5} \frac{G^2 \mathcal{M}}{\mu c^5} \frac{P_\varphi}{R^3} \left[ P_R^2 - 2 \frac{G\mathcal{M}\mu^2}{R} - 2 \frac{P_\varphi^2}{R^2} \right]. \end{aligned}$$

Auch hier wird deutlich, dass die durch Gezeitenwechselwirkung verursachte Kopplung zwischen Bahnbewegung und Staubscheibe formal schon in der führenden Ordnung der Strahlungsrückwirkung auftritt. Numerische Rechnungen zeigen jedoch, dass dieser Beitrag effektiv kaum eine Rolle spielt und daher in der Regel vernachlässigt werden kann.

### 2.6.3 Die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen des Gesamtsystems

Unter Berücksichtigung der Gezeitenwechselwirkung und des Energieverlusts in führender Ordnung lautet die Hamiltonfunktion des Binärsystems

$$H_{ges} = H_d^{(N)} + H_{orb}^{(N)} + H_{tidal} + H_{reac}(t),$$

mit den konservativen Anteilen

$$\begin{aligned} H_{orb}^{(N)} &= \frac{1}{2\mu} \left[ P_R^2 + \frac{P_\varphi^2}{R^2} \right] - \frac{GM\mu}{R}, \\ H_d^{(N)} &= \frac{1}{2\alpha} \left[ p_r^2 + \frac{p_\psi^2}{r_d^2} \right] - \frac{2C\alpha}{r_d}, \\ H_{tidal} &= -\frac{3}{4} \frac{GM\mu}{R} \sum_{l=2}^{\infty} \left( \frac{r_d}{R} \right)^l W_l \end{aligned}$$

und dem die Strahlungsrückwirkung beschreibenden Anteil  $H_{reac}(t)$ . Die Hamiltonschen kanonischen Gleichungen gelten in der üblichen Weise. Nur bei der Bestimmung der Dämpfungsterme  $(\dot{q}^i)_{reac}$  bzw.  $(\dot{p}_i)_{reac}$  aus  $H_{reac}(t)$  muss darauf geachtet werden, dass  $\ddot{I}_{ij}(t)$  während der Ableitung nach den jeweiligen generalisierten Koordinaten und Impulsen konstant gehalten wird (vgl. Abschnitt 2.6.2).

Es ist an dieser Stelle günstig, skalierte Variablen einzuführen, in denen  $G = \mathcal{M} = 1$  gilt. Gl. (2.26) gibt die Skalierungsvorschrift für die Variablen des Orbits. Analog findet man für die Scheibenvariablen

$$p_r = \mu c \tilde{p}_r, \quad p_\psi = \frac{GM\mu}{c} \tilde{p}_\psi, \quad r_d = \frac{GM}{c^2} \tilde{r}_d.$$

Definiert man noch

$$A := \frac{C}{GM} = \frac{3\pi}{8} \frac{M_d}{\mathcal{M}} \quad \text{und} \quad B := \frac{\alpha}{\mu} = \frac{2}{5} \frac{\mathcal{M}}{M_p},$$

so ergibt sich für die Bewegungsgleichungen schließlich

$$\dot{\tilde{R}} = \tilde{P}_R - \frac{16}{5} \frac{\nu}{\tilde{R}^2} \left[ \frac{\tilde{P}_\varphi^2}{\tilde{R}^2} + \frac{1}{3} \tilde{P}_R^2 \right] - \frac{8}{15} \frac{A\nu}{\tilde{r}_d^2} \tilde{p}_r \tilde{P}_R, \quad (2.41)$$

$$\dot{\tilde{\varphi}} = \frac{\tilde{P}_\varphi}{\tilde{R}^2} - \frac{8}{3} \frac{\nu \tilde{P}_\varphi}{\tilde{R}^2} \left[ \frac{\tilde{P}_R}{\tilde{R}^2} + \frac{A \tilde{p}_r}{5 \tilde{r}_d^2} \right], \quad (2.42)$$

$$\dot{\tilde{P}_\varphi} = \frac{8}{5} \frac{\nu \tilde{P}_\varphi}{\tilde{R}^3} \left[ \tilde{P}_R^2 - \frac{2}{\tilde{R}} - 2 \frac{\tilde{P}_\varphi^2}{\tilde{R}^2} \right], \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{P}_R} &= \frac{\tilde{P}_\varphi^2}{\tilde{R}^3} - \frac{1}{\tilde{R}^2} - \frac{3}{4} \frac{1}{\tilde{R}^2} \sum_{l=2}^{\infty} (l+1) \left( \frac{\tilde{r}_d}{\tilde{R}} \right)^l W_l - \frac{8}{3} \frac{\nu}{\tilde{R}^5} \tilde{P}_R \tilde{P}_\varphi^2 + \frac{8}{15} \frac{\nu}{\tilde{R}^4} \tilde{P}_R \\ &\quad + \frac{4}{15} \frac{A\nu}{\tilde{R}^2 \tilde{r}_d^2} \left[ 1 - 2 \frac{\tilde{P}_\varphi^2}{\tilde{R}} \right] \tilde{p}_r, \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{p}_r} &= \frac{1}{B} \frac{\tilde{p}_\psi^2}{\tilde{r}_d^3} - 2B \frac{A}{\tilde{r}_d^2} + \frac{3}{4} \frac{1}{\tilde{R}^2} \sum_{l=2}^{\infty} l \left( \frac{\tilde{r}_d}{\tilde{R}} \right)^{l-1} W_l + \frac{8}{15} \frac{A\nu}{\tilde{r}_d^4} \left[ AB - \frac{1}{B} \frac{\tilde{p}_\psi^2}{\tilde{r}_d} \right] \tilde{p}_r \\ &\quad + \frac{4}{15} \frac{\nu \tilde{P}_R}{\tilde{r}_d^2 \tilde{R}^2} \left[ AB - \frac{1}{B} \frac{\tilde{p}_\psi^2}{\tilde{r}_d} \right], \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$\dot{\tilde{\psi}} = \frac{1}{B} \left[ \frac{\tilde{p}_\psi}{\tilde{r}_d^2} - \frac{8}{15} \frac{A\nu}{\tilde{r}_d^4} \tilde{p}_r \tilde{p}_\psi - \frac{4}{15} \frac{\nu}{\tilde{R}^2 \tilde{r}_d^2} \tilde{p}_\psi \tilde{P}_R \right], \quad (2.46)$$

$$\dot{\tilde{r}_d} = \frac{1}{B} \left[ \tilde{p}_r - \frac{8}{15} A\nu \frac{\tilde{p}_r^2}{\tilde{r}_d^2} - \frac{4}{15} \frac{\nu}{\tilde{R}^2} \tilde{p}_r \tilde{P}_R \right], \quad (2.47)$$

$$\dot{\tilde{p}_\psi} = 0. \quad (2.48)$$

Bei gegebenen Anfangsbedingungen beschreiben diese Differentialgleichungen die Dynamik des Binärsystems in führender Ordnung. Die Wahl geeigneter Anfangsbedingungen stellt sich dabei als entscheidender Faktor heraus, denn hier tritt ein Aspekt auf, der in Punktteilchen-Binärsystemen unbekannt ist: Verschiedene Anfangsbedingungen entsprechen unterschiedlichen Phasendifferenzen der Winkelvariablen von Staubscheibe und Orbit am Beginn der Integration.

Wir wollen annehmen, dass der Periastrondurchgang bei  $t = 0$  erfolgt. Dann gilt

$$\tilde{R}(0) = a'(1 - e), \quad \varphi(0) = 0, \quad \tilde{P}_R(0) = 0, \quad \tilde{P}_\varphi(0) = \sqrt{\tilde{a}(1 - e^2)}.$$

Um die Anfangsbedingungen der Staubscheibe festzulegen, fordern wir, dass der Newtonsche Hamiltonian der Staubscheibe zur Zeit  $t = 0$  gerade der Anfangsenergie

der Staubscheibe entspricht, d.h.

$$\tilde{H}_d(0) = \frac{1}{2B} \left[ \tilde{p}_r(0)^2 + \frac{\tilde{p}_\psi(0)^2}{\tilde{r}_d(0)^2} \right] - \frac{2AB}{\tilde{r}_d(0)} \stackrel{!}{=} \tilde{E}_d(0) = -\frac{AB}{\tilde{\Upsilon}_d} (1 + \epsilon) \quad (2.49)$$

wobei  $\epsilon$  die Elliptizität der Staubscheibe zur Zeit  $t = 0$  ist und  $\tilde{\Upsilon}_d$  den maximalen Scheibenradius bezeichnet. Falls insbesondere  $\tilde{r}_d(0) = \tilde{\Upsilon}_d$  gewählt wird, verschwindet der kanonische Impuls  $\tilde{p}_r(0)$  zu Beginn der Integration; im Allgemeinen ist aber  $\tilde{p}_r(0) \neq 0$ . Der zu  $\psi$  kanonisch konjugierte Impuls ist eine Konstante der Bewegung und durch

$$p_\psi^2 = 2\alpha^2 C \Upsilon_d \xi^2 = \frac{G^2 \mathcal{M}^2 \mu^2}{c^2} \tilde{p}_\psi^2 \quad \implies \quad \tilde{p}_\psi(0) = B \sqrt{2A \tilde{\Upsilon}_d (1 - \epsilon)}$$

gegeben. Mit Hilfe von Gl. (2.20) ergibt sich dann

$$\tilde{p}_r^2(0) = 2B^2 A \left[ -\frac{1 + \epsilon}{\tilde{\Upsilon}_d} - \frac{1 - \epsilon}{\tilde{r}_{d,0}^2} \tilde{\Upsilon}_d + \frac{2}{\tilde{r}_{d,0}} \right].$$

## 2.6.4 Diskussion

Anders als im Fall realistischerer Sternmodelle reichen zwei Freiheitsgrade bereits aus, um Rotation und Oszillation der hier betrachteten Staubscheibe vollständig zu beschreiben. Die Zahl der zu berücksichtigenden Freiheitsgrade ist also sehr gering. Das macht ein Binärsystem aus Scheibe und Schwarzes Loch zu einem der einfachsten Modelle, mit deren Hilfe der Einfluss von Effekten endlicher Größe untersucht werden kann. Andere Arbeiten zu diesem Thema stammen u.a. von Kokkotas und Schäfer [52] sowie von Lai und Ho [42]. Sie untersuchten Dynamik und Einspiralverhalten kompakter Binärsysteme nicht-rotierender Neutronensterne. Die durch Gezeitenwechselwirkung angeregten Eigenschwingungen der Sterne wurden in diesen Arbeiten im Rahmen einer linearen Störungstheorie berücksichtigt. Man betrachtet dabei im Prinzip unendlich viele Oszillationsmoden, deren Gesamtenergie jedoch klein gegenüber der Bahnenergie ist. Auch Rathore *et al.* widmete sich der Untersuchung des Einflusses stellarer Oszillationen auf die Dynamik eines kompakten Binärsystems [70]. Sein Modell bestand aus einem nicht-rotierenden Weißen Zwerg und einem Schwarzen Loch. Energiedissipation aufgrund von Gravitationswellenabstrahlung wurde in dieser Arbeit als säkularer Effekt betrachtet, der Einfluss der Gezeitenwechselwirkung auf den Orbit nur qualitativ diskutiert.

Das hier vorgestellte Modell ist gegenüber den oben genannten Systemen eine deutli-



che Vereinfachung. Vor allem besitzt die oszillierende Staubscheibe nur eine Schwingungsmode<sup>11</sup>, deren Amplitude aber beliebig groß sein kann – zumindest so lange der Roche-Radius der Scheibe nicht überschritten wird. Die spezielle Symmetrie des Binärsystems aus Staubscheibe und kompaktem Objekt ermöglicht es nicht nur, die Hamiltonschen kanonischen Gleichungen in einer vollständig analytischen Form anzugeben, sondern auch den Einfluss der Gezeitenwechselwirkung auf die Bahnbewegung und damit auf die Form der emittierten Gravitationswellen sehr gut zu untersuchen (siehe Abb. B.2 und B.1). Ein wichtiger Unterschied zu den oben genannten Arbeiten ist außerdem, dass es sich sowohl bei den Neutronensternen in [52] und [42] als auch bei der WD-Komponente in Rathores Modell um nicht-rotierende Sterne handelte. In unserem Fall ist die Rotation sogar essentiell, um die Scheibe zu stabilisieren. Die einzige Eigenmode der Staubscheibe entspricht in gewisser Weise der  $f$ -Mode in einem störungstheoretischen Zugang.

Das Modell erlaubt es, den Einfluss der Gezeitenwechselwirkung auf die Dynamik und die Form der abgestrahlten Gravitationswellen sehr genau zu studieren. Bei geeigneter Wahl der Anfangsbedingungen kann die zeitliche Entwicklung des Systems über hunderte oder gar tausende von Umläufen verfolgt werden. Dabei tritt unter Umständen ein Phänomen auf, das als Gezeitenresonanz bezeichnet wird (siehe Abb. B.3). Im Rahmen der Newtonschen Theorie wird die Gezeitenkopplung zwischen interner Dynamik eines Sterns und der Bahnbewegung besonders stark, wenn die Frequenz einer stellaren Eigenmode gerade dem  $n$ -fachen der Bahnfrequenz entspricht<sup>12</sup>. Dabei kommt es zu einem besonders intensiven Austausch von Energie und Drehimpuls zwischen Stern und Bahnbewegung – meist wird Energie aus dem Orbit in die Oszillationsbewegung gepumpt und so der Einspiralvorgang beschleunigt<sup>13</sup>. Abb. B.3 zeigt die Gezeitenresonanz an einem Beispiel. Wie stark eine Gezeitenresonanz den Einspiralvorgang beeinflusst, hängt nicht nur von  $n$ , sondern auch vom Verhältnis von Oszillationsenergie und Bahnenergie ab. Bei den von Kokkotas und Schäfer bzw. Lai und Ho untersuchten NS-NS Systemen wurden die Oszillationen als kleine Störungen eines Gleichgewichtszustandes aufgefasst, d.h. die Oszillationsenergie war sehr viel kleiner als die Bahnenergie. Bei der rotierenden, oszillierenden Staubscheibe als Komponente eines Binärsystems ist das nicht immer der Fall. In der Tat kann die Oszillationsenergie der Staubscheibe von der gleichen Größenordnung wie die Energie der Bahnbewegung sein. Das führt dazu, dass die 2:1 Resonanz

---

<sup>11</sup>Ein weiteres Modell, in dem nur eine stellare Schwingungsmode beliebiger Amplitude vorkommt, wird im nächsten Kapitel vorgestellt.

<sup>12</sup> $n$  ist dabei eine natürliche Zahl.

<sup>13</sup>Am stärksten ist dieser Effekt für die 2:1 Resonanz.

bei einer realistischen Wahl des Massenverhältnisses von Scheibe und Punktmasse so stark wird, dass das Binärsystem sofort in sich zusammenstürzt und die numerische Analyse zusammenbricht. Höhere Resonanzen hingegen können bei geeigneter Parameterwahl ohne Probleme untersucht werden.

Das hier vorgestellte Binärsystem aus Staubscheibe und Schwarzem Loch sollte in erster Linie als eine Art Spielzeugmodell aufgefasst werden. Mit seiner Hilfe lassen sich in Binärsystemen ausgedehnter Objekte auftretende Erscheinungen weitestgehend analytisch bzw. mit nur geringem numerischen Aufwand untersuchen. Die Dynamik des Systems kann dabei über mehrere hundert Umläufe verfolgt werden. Die rotierende, oszillierende Staubscheibe könnte darüberhinaus als Modell für dünne, mehrere hundert Kilometer durchmessende Staubscheiben dienen, die sich möglicherweise nach dem Verschmelzen zweier Weißer Zwerge bilden.

Zum Abschluss seien noch einige Bemerkungen zur Gültigkeit des Modells erlaubt. Es beruht auf der Annahme, dass die Staubscheibe durch die Gezeitenwechselwirkung nicht zerstört wird und dass die Dichteänderungen innerhalb der Staubscheibe einzig aus den Oszillationen der Scheibe resultieren. Insbesondere soll keine Massenakkretion auf den kompakten Begleitstern stattfinden. Das bedeutet, dass die Staubscheibe selbst bei Durchlaufen einer Gezeitenresonanz noch deutlich innerhalb ihres Roche-Radius liegen muss. Mit anderen Worten, der maximale Scheibenradius muss zu allen Zeiten wesentlich kleiner sein als der Abstand zwischen dem Zentrum der Staubscheibe und dem punktförmigen Objekt im Periastron.

# Kapitel 3

## Riemann-S Binärsysteme

### 3.1 Gezeitenresonanzen und stellare Oszillationen

Sterne in Binärsystemen erfahren aufgrund der Gezeitenwechselwirkung eine Störung ihrer Gestalt. Dadurch kommt es zur Ausbildung dynamischer, d.h. zeitabhängiger, Gezeitenkräfte, die nicht-radiale Oszillationen der Sterne anregen<sup>1</sup>. Es entsteht ein Spektrum, das aus unendlich vielen Eigenmoden besteht, von denen die wichtigsten die  $p$ - und  $g$ -Moden sowie die Grundmode, die  $f$ -Mode, sind. Diese Eigenschwingungen werden als kleine, adiabatische Störungen des thermodynamischen Gleichgewichts behandelt, so dass die linearisierten Gleichungen der Hydrodynamik zur Anwendung kommen. Grundlegende Arbeiten auf diesem Gebiet stammen von Ledoux und Walraven [61], Dziembowski [30] und Cowling [24]. Press und Teukolsky entwickelten eine Technik, die es erlaubt, Normalmoden nicht-radialer stellarer Oszillationen in Anwesenheit von Gezeitenkräften zu berechnen [69]. Das Auftreten von Gezeitenresonanzen und die aufgrund der Gezeitenwechselwirkung induzierte Periastrondrehung in Binärsystemen wurde unter anderem von Smeyers und Willem's [80] untersucht.

Während die Existenz resonant angeregter Eigenmoden in der Theorie bereits seit längerem bekannt ist, gestaltet sich ihr astrophysikalischer Nachweis schwierig. Mittlerweile sind jedoch einige Sterne bekannt, deren beobachtete Frequenzen ganzzahlige Vielfache der Orbitalfrequenz sind. Zu diesen Sternen gehört auch HD 77581, dessen Begleiter der bekannte Vela X-1 Pulsar ist [90].

Auch in kompakten Binärsystemen von Neutronensternen oder Weißen Zwergen

---

<sup>1</sup>Liegt eine Synchronisierung von stellarer Rotation und Orbitalbewegung vor, entsteht ein Gleichgewichtszustand, der mit statischen Gezeiten verbunden ist. Davon soll hier nicht ausgegangen werden.

kommt es zur Anregung stellarer Oszillationen. Die durch sie induzierten Störungen der Bahnbewegung sind wesentlich kleiner als im Falle von Hauptreihensternen, akkumulieren sich jedoch über längere Zeiten und führen zu einer Phasenverschiebung der Gravitationswellen. Deutlich stärker werden die Abweichungen von der Punktteilchendynamik, wenn das System eine Gezeitenresonanz durchläuft. Diese Möglichkeit bleibt bei Argumentationen, die eine Vernachlässigung stellarer Freiheitsgrade bis zum Erreichen der letzten stabilen Kreisbahn favorisieren, unberücksichtigt. Zu den wenigen, die die Dynamik und Gravitationswellenemission von NS-NS-Systemen bei Anwesenheit stellarer Oszillationen untersuchten, gehörten Kokkotas und Schäfer [52]. Unter der Annahme polytroper Zustandsgleichungen studierten sie die dynamische Entwicklung eines NS-NS Systems in führender Ordnung. Auch Lai und Ho untersuchten das Einspiralverhalten polytroper NS-NS Binärsysteme und wiesen insbesondere auf die Möglichkeit der Gezeitenresonanz hin [42].

### 3.1.1 Warum Riemann-S Ellipsoide?

Im Gegensatz zu den oben genannten Sternen besitzen Riemann-S Ellipsoide nur eine einzige Eigenmode, deren Amplitude jedoch beliebig groß sein kann. Es sind in der Tat durchaus Situationen vorstellbar, in denen die lineare, adiabatische Störungstheorie versagt. Dazu gehört zum Beispiel das im vorigen Kapitel behandelte System aus rotierender, oszillierender Staubscheibe und punktförmigem Objekt (vgl. auch [37]). Während die Staubscheibe jedoch stark modellhafte Züge trägt, ist das von Carter und Luminet entwickelte „affine stellare Modell“ für polytrope, ellipsoide Flüssigkeitskonfigurationen realistischer [19]. Es basiert auf der Annahme, dass die Oberflächen gleicher Dichte innerhalb des Sterns homologe Ellipsoide darstellen. Das Modell ermöglicht es, durch Gezeitenwechselwirkung angeregte Oszillationen beliebiger Größe zu untersuchen, führt jedoch bei kleinen Oszillationen zu falschen Ergebnissen, da nur eine Mode angeregt wird, die in gewisser Weise der  $f$ -Mode entspricht (siehe dazu auch [53]). Lai und Shapiro erweiterten dieses Modell auf Riemann-S Binärsysteme [55]. In ihrer Arbeit gibt es jedoch einige Widersprüche hinsichtlich der Formulierung der Bewegungsgleichung und der Berechnung der Gravitationswellenformen, die von mir aufgezeigt werden konnten.

Im nächsten Abschnitt werden zunächst die Grundlagen der von Lai und Shapiro entwickelten Lagrangeschen Formulierung der Dynamik von Riemann-S Binärsystemen aufgezeigt [55], [58], [59]; anschließend erfolgt der Übergang zum Hamiltonschen Formalismus. Die kompakten Sterne werden dabei als rotierende und oszillierende, dreiaxige Ellipsoide mit polytroper Zustandsgleichung modelliert. Um die Berech-

nungen möglichst einfach zu halten, berücksichtigen wir die Gezeitenwechselwirkung nur in führender Ordnung.

Die Gravitationsstrahlung des Binärsystems steht in einem weiteren Abschnitt im Vordergrund. Wie in Kapitel 2 beschränken wir uns auch hier auf die führende Ordnung des Strahlungsfeldes. Für den Spezialfall axialsymmetrischer Riemann-S Ellipsoide werden die Hamiltonschen Gleichungen numerisch gelöst und an diesem Beispiel der Einfluss der Zustandsgleichungen auf Bahnbewegung, Einspiralvorgang und Gravitationswellenmuster untersucht<sup>2</sup>. Mehrere Autoren argumentierten in der Vergangenheit, dass die Zustandsgleichungen keinen Einfluss auf die Gravitationsstrahlung von NS-NS Binärsystemen haben (vgl. u.a. [56]). Jüngste numerische Simulationen zeigen jedoch ein anderes Bild. Gerade in der Spätphase des Einspiralvorgangs ist eine genaue Kenntnis der thermodynamischen Zustandsgleichungen für die Erstellung hochgenauer Templates essentiell. In früheren Stadien des Einspiralens ist der Einfluss der stellaren Freiheitsgrade geringer, aber dennoch präsent, wie wir im Verlaufe dieses Kapitels sehen werden.

## 3.2 Riemann-S Binärsysteme im Lagrange Formalismus

Die Thermodynamik von Neutronensternen wird gegenwärtig am besten durch tabellierte Zustandsgleichungen beschrieben. In vielen Fällen ist es jedoch möglich, stattdessen mit einer polytropen Zustandsgleichung zu arbeiten. In der Tat können sowohl Weiße Zwerge als auch Neutronensterne näherungsweise als polytrope Flüssigkeitskonfigurationen aufgefasst werden [77]. Diese Annahme liegt auch den hier zu behandelnden Riemann-S Ellipsoiden zugrunde. Lai und Shapiro gingen in ihren Arbeiten von dem von Carter und Luminet eingeführten „affinen, stellaren Modell“ [19], [59], [58], [55] aus. Ihre Binärsysteme bestanden aus ellipsoiden Sternen der Massen  $m$  und  $m'$ , die jeweils durch eine polytrope Zustandsgleichung

$$P = K \rho^{1+1/n}, \quad P' = K' \rho'^{1+1/n'} \quad (3.1)$$

beschrieben wurden. Dabei sind  $K$  und  $K'$  Konstanten, die durch die Gleichgewichtsradien nicht-rotierender, kugelsymmetrischer Polytrope der Massen  $m$  und  $m'$  bestimmt werden, und  $n$  bzw.  $n'$  bezeichnen die Polytropenindizes.

---

<sup>2</sup>Eine Erweiterung auf 1pN und dreiaxige Ellipsoide entstand im Rahmen einer Zusammenarbeit mit D. Voukantsis. Eine entsprechende Publikation ist in Vorbereitung.

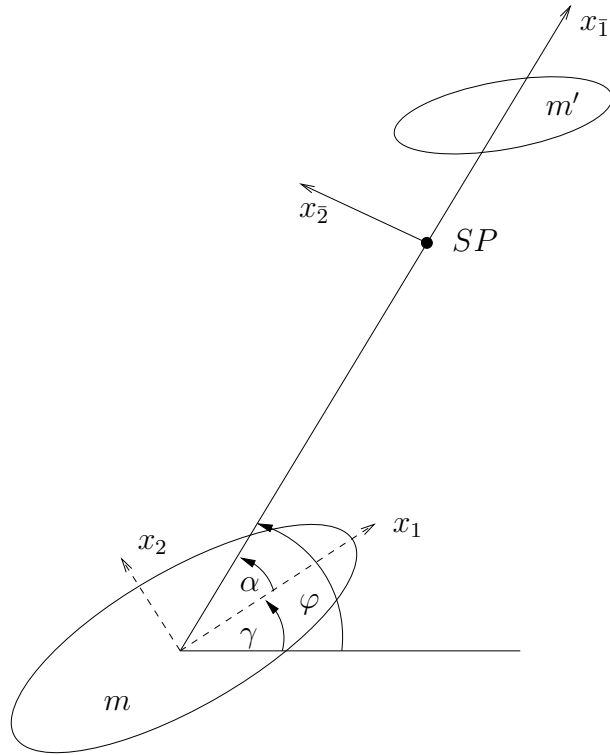


Abbildung 3.1: Riemann-S Binärsysteme. Die  $x_1$ -Achse des mitrotierenden Koordinatensystems fällt mit der Verbindungsachse der Mittelpunkte von  $m$  und  $m'$  zusammen und schließt mit der  $X$ -Achse des Inertialsystems den Winkel  $\varphi$  ein. Gestrichelt eingezeichnet sind die Achsen des körperfesten Systems.

Per definitionem ist ein Riemann-S Ellipsoid durch die Winkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{e}_3$  des Ellipsoids um die Hauptachse und die interne Vortizität  $\zeta = \zeta \mathbf{e}_3$  vollständig charakterisiert. Dazu wird gefordert, dass die Vortizität uniform ist, und dass die Oberflächen konstanter Dichte innerhalb der polytropen Konfiguration homologen Ellipsoiden entsprechen. Unter diesen Bedingungen treten an die Stelle der unendlich vielen Freiheitsgrade in den hydrodynamischen Gleichungen fünf Variablen, die ausreichen, ein Riemann-S Ellipsoid vollständig zu beschreiben: die drei großen Halbachsen  $a_1, a_2, a_3$  des Ellipsoids sowie zwei Winkel  $\psi$  und  $\gamma$ .

Betrachten wir zunächst einen Stern der Masse  $m$ , der die obigen Annahmen erfüllt. Gegeben seien ein Inertialsystem und ein körperfestes Koordinatensystem, deren Ursprung jeweils im Schwerpunkt des Ellipsoids verankert sein soll. Verglichen mit seiner im Inertialsystem gemessenen Geschwindigkeit muss die Geschwindigkeit eines Massenelements in dem mit  $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{e}_3$  rotierenden körperfesten System ( $\Omega = \dot{\gamma}$ ) dem Ansatz

$$\mathbf{u}_c = Q_1 x_2 \mathbf{e}_1 + Q_2 x_1 \mathbf{e}_2, \quad Q_1, Q_2 = \text{const.} \quad (3.2)$$

genügen. Die Koordinaten  $x_i$  beziehen sich dabei auf das körperfeste System. Der Grund für die Einführung eines körperfesten Systems ist, dass der Trägheitstensor  $\Theta_{ij} = \int \rho x_i x_j dV$  in ihm eine besonders einfache Gestalt hat, nämlich gerade

$$\Theta_{ij} = \int \rho x_i x_j dV = \frac{\kappa_n m}{5} a_i^2 \delta_{ij}, \quad \text{mit} \quad \kappa_n := \frac{5 \int_0^{\xi_1} \theta^n \xi^4 d\xi}{3 \xi_1^4 |\theta'_1|}. \quad (3.3)$$

$\theta$  und  $\xi$  sind hier die dimensionslosen Variablen der Lane-Emden-Gleichung (siehe Anhang). Die Geschwindigkeit in Gl. (3.2) erfüllt die erste der oben genannten Forderungen automatisch. Die zweite Forderung legt die Konstanten  $Q_1$  und  $Q_2$  fest. Man findet

$$Q_1 = -\frac{a_1^2}{a_1^2 + a_2^2} \zeta = \frac{a_1}{a_2} \Lambda \quad \text{und} \quad Q_2 = \frac{a_2^2}{a_1^2 + a_2^2} \zeta = -\frac{a_2}{a_1} \Lambda$$

mit  $\zeta$  als Vortizität im körperfesten System und  $\Lambda = \dot{\psi}$  als Winkelgeschwindigkeit der inneren Bewegung der Flüssigkeit.

Bei der Bestimmung der Rotationsenergie des Ellipsoids berücksichtigen wir, dass die Geschwindigkeit eines Massenelements im Inertialsystem durch

$$\mathbf{u}_{IS} = \mathbf{u}_c + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r} \quad (3.4)$$

gegeben ist. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} T_{rot} &= \frac{1}{2} \int \rho \mathbf{u}_{IS} \cdot \mathbf{u}_{IS} dV \\ &= \frac{\kappa_n m}{10} (a_1^2 + a_2^2) (\Lambda^2 + \Omega^2) - \frac{2}{5} \kappa_n m a_1 a_2 \Lambda \Omega. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Im Falle eines axialsymmetrischen Ellipsoids<sup>3</sup> reduziert sich die Rotationsenergie auf

$$T_{rot} = \frac{\kappa_n m}{5} (\Omega - \Lambda)^2 a_1^2. \quad (3.6)$$

Berücksichtigt man außerdem die Oszillationsfreiheitsgrade des Sterns, so lautet die kinetische Gesamtenergie eines triaxialen Riemann-S Ellipsoids

$$T_s = \frac{\kappa_n m}{10} (a_1^2 + a_2^2) (\Omega^2 + \Lambda^2) - \frac{2}{5} \kappa_n m a_1 a_2 \Lambda \Omega + \frac{\kappa_n m}{10} \sum_{i=1}^3 \dot{a}_i^2. \quad (3.7)$$

In die Lagrangefunktion gehen neben der kinetischen Energie auch die innere Energie  $U$  und die gravitative Selbstwechselwirkungsenergie  $W$  des Ellipsoids gemäß

$$L_s = T_s - U - W \quad (3.8)$$

ein. Für letztere findet man [55]

$$U = \int n \frac{P}{\rho} dm = k_1 K m \rho_c^{1/n} \quad \text{mit} \quad k_1 = \frac{n(n+1)}{5-n} \xi_1 |\theta'_1| \quad (3.9)$$

und

$$W = -\frac{3}{5-n} \frac{Gm^2}{2R^3} \mathcal{J}. \quad (3.10)$$

Die hier eingeführte Größe  $R = (a_1 a_2 a_3)^{1/3}$  ist der geometrisch gemittelte „Radius“ des Ellipsoids und  $\mathcal{J}$  hängt mit den großen Halbachsen über die Beziehung

$$\mathcal{J} := a_1^2 A_1 + a_2^2 A_2 + a_3^2 A_3$$

zusammen. Die Koeffizienten  $A_i$  wurden von Chandrasekhar eingeführt und sind im Anhang angegeben [21].

Nach diesen einführenden Überlegungen wenden wir uns nun Riemann-S Binärsy-

---

<sup>3</sup>d.h. für  $a_1 = a_2$



stemmen zu. Wie sich zeigen wird, entsprechen Systeme triaxialer und axialsymmetrischer Riemann-S Ellipsoide verschiedenen physikalischen Modellen<sup>4</sup>. Im folgenden werden erstere als Typ-I Systeme, letztere als Typ-II Systeme bezeichnet.

Die Lagrangefunktion des Gesamtsystems setzt sich aus den Lagrangefunktionen der beiden Sterne, dem Newtonschen Wechselwirkungspotential zweier Punktmassen und der Gezeitenwechselwirkung zusammen. Letztere wird nur in führender Ordnung berücksichtigt – eine Annahme, die in guter Näherung gerechtfertigt ist, da die nächstfolgende Ordnung der Gezeitenwechselwirkung bereits proportional zu  $1/r^5$  ist. Der Anteil der Bahnbewegung an der Lagrangefunktion des Systems lautet also

$$L_{orb} = \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + \frac{\mu r^2}{2}\dot{\varphi}^2 - W_{int}, \quad (3.11)$$

mit dem Wechselwirkungspotential

$$\begin{aligned} W_{int} = & -\frac{GM\mu}{r} - \frac{GM\mu\kappa_n}{10r^3} [a_1^2(3\cos^2\alpha - 1) + a_2^2(3\sin^2\alpha - 1) - a_3^2] \\ & - \frac{GM\mu\kappa'_n}{10r^3} [a_1'^2(3\cos^2\alpha' - 1) + a_2'^2(3\sin^2\alpha' - 1) - a_3'^2]. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Die Bedeutung des Winkels  $\alpha := \varphi - \gamma$  kann aus Abb. 3.1 erschlossen werden.

Ein Binärsystem triaxialer Riemann-S Ellipsoide wird durch die aus der Lagrangefunktion

$$\begin{aligned} L = & \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + \frac{\mu r^2}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{GM\mu}{r} + \frac{GM\mu\kappa_n}{10r^3} [a_1^2(3\cos^2\alpha - 1) + a_2^2(3\sin^2\alpha - 1) - a_3^2] \\ & + \frac{GM\mu\kappa'_n}{10r^3} [a_1'^2(3\cos^2\alpha' - 1) + a_2'^2(3\sin^2\alpha' - 1) - a_3'^2] + \frac{\kappa_n m}{10}(a_1^2 + a_2^2)(\Lambda^2 + \Omega^2) \\ & - \frac{2}{5}\kappa_n m a_1 a_2 \Lambda \Omega + \frac{\kappa_n m}{10} \sum_{i=1}^3 \dot{a}_i^2 - k_1 K m \rho_c^{1/n} + \frac{3}{5-n} \frac{Gm^2}{2R^3} \mathcal{J} \\ & + \frac{\kappa'_n m'}{10}(a_1'^2 + a_2'^2)(\Omega'^2 + \Lambda'^2) - \frac{2}{5}\kappa'_n m' a_1' a_2' \Lambda' \Omega' + \frac{\kappa'_n m'}{10} \sum_{i=1}^3 \dot{a}_i'^2 \\ & - k_1' K' m' \rho_c'^{1/n'} + \frac{3}{5-n'} \frac{Gm'^2}{2R'^3} \mathcal{J}'. \end{aligned} \quad (3.13)$$

abgeleiteten Lagrangeschen Bewegungsgleichungen beschrieben. Bei ihrer Berechnung muss berücksichtigt werden, dass die Dichte  $\rho_c$  im Zentrum des Sterns  $m$

---

<sup>4</sup>Das ergibt sich bereits aus der Zahl der Freiheitsgrade: zwölf für ein System triaxialer Riemann-S Ellipsoide, nur acht im Fall axialsymmetrischer Sterne.

proportional zu  $1/(a_1 a_2 a_3)$  ist. Ausserdem gilt (vgl. Anhang A.4)

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial a_i} = \frac{1}{a_i} (\mathcal{J} - a_i^2 A_i). \quad (3.14)$$

Die Euler-Lagrange-Gleichungen lauten dann

$$\ddot{a}_1 = \frac{Gm'}{r^3} a_1 (3 \cos^2 \alpha - 1) + a_1 (\Omega^2 + \Lambda^2) - 2a_2 \Lambda \Omega + \left( \frac{5k_1 P_c}{n\kappa_n \rho_c} \right) \frac{1}{a_1} - \frac{3Gm}{\kappa_n (1 - \frac{n}{5})} \frac{a_1 A_1}{2R^3}, \quad (3.15)$$

$$\ddot{a}_2 = \frac{Gm'}{r^3} a_2 (3 \sin^2 \alpha - 1) + a_2 (\Omega^2 + \Lambda^2) - 2a_1 \Lambda \Omega + \left( \frac{5k_1 P_c}{n\kappa_n \rho_c} \right) \frac{1}{a_2} - \frac{3Gm}{\kappa_n (1 - \frac{n}{5})} \frac{a_2 A_2}{2R^3}, \quad (3.16)$$

$$\ddot{a}_3 = -\frac{Gm'}{r^3} a_3 + \left( \frac{5k_1 P_c}{n\kappa_n \rho_c} \right) \frac{1}{a_3} - \frac{3Gm}{\kappa_n (1 - \frac{n}{5})} \frac{a_3 A_3}{2R^3}, \quad (3.17)$$

$$\ddot{\psi} = \dot{\Lambda} = \frac{1}{a_1^2 - a_2^2} \left[ \frac{3Gm'}{r^3} a_1 a_2 \sin 2\alpha - 2\Lambda (a_1 \dot{a}_1 - a_2 \dot{a}_2) - 2\Omega (\dot{a}_1 a_2 - a_1 \dot{a}_2) \right], \quad (3.18)$$

$$\ddot{\gamma} = \dot{\Omega} = \frac{1}{a_1^2 - a_2^2} \left[ \frac{3Gm'}{2r^3} (a_1^2 + a_2^2) \sin 2\alpha - 2\Omega (a_1 \dot{a}_1 - a_2 \dot{a}_2) - 2\Lambda (a_1 \dot{a}_2 - \dot{a}_1 a_2) \right], \quad (3.19)$$

$$\ddot{r} = r \dot{\varphi}^2 - \frac{GM}{r^2} - \frac{3}{10} \frac{GM}{r^4} \left[ \kappa_n \{ a_1^2 (3 \cos^2 \alpha - 1) + a_2^2 (3 \sin^2 \alpha - 1) - a_3^2 \} \right. \\ \left. + \kappa'_n \{ a_1'^2 (3 \cos^2 \alpha' - 1) + a_2'^2 (3 \sin^2 \alpha' - 1) - a_3'^2 \} \right], \quad (3.20)$$

$$\ddot{\varphi} = -2 \frac{\dot{r} \dot{\varphi}}{r} - \frac{3}{10} \frac{GM}{r^5} \left[ (a_1^2 - a_2^2) \kappa_n \sin 2\alpha + (a_1'^2 - a_2'^2) \kappa'_n \sin 2\alpha' \right], \quad (3.21)$$

und entsprechend für die internen Variablen des zweiten Sterns  $m'$ .

Es ist offensichtlich, dass diese Gleichungen nur gelten, so lange alle Hauptachsen voneinander verschieden sind. Für axialsymmetrische Riemann-S Ellipsoide ist das jedoch nicht erfüllt<sup>5</sup>. An die Stelle der Lagrangefunktion (3.13) tritt daher bei Typ-II

---

<sup>5</sup>Insbesondere sind die Gl. (3.18) und (3.19) offenbar gar nicht definiert. Das deutet darauf hin, dass die Winkel  $\psi$  und  $\gamma$  keine linear unabhängigen Variablen sind, d.h. es sind *keine* generalisierten Koordinaten mehr. Die Forderung nach Axialsymmetrie der Ellipsoide führt daher streng genommen auf ein völlig neues Modell.

$$\begin{aligned}
L = & \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + \frac{\mu r^2}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{GM\mu}{r} + \frac{GM\mu}{10r^3} \left[ \kappa_n(a_1^2 - a_3^2) + \kappa'_n(a_1'^2 - a_3'^2) \right] + \frac{\kappa_n m}{5} a_1^2 \dot{\beta}^2 \\
& + \frac{\kappa'_n m'}{5} a_1'^2 \dot{\beta}'^2 + \frac{\kappa_n m}{10} (2\dot{a}_1^2 + \dot{a}_3^2) + \frac{\kappa'_n m'}{10} (2\dot{a}_1'^2 + \dot{a}_3'^2) - k_1 K m \rho_c^{1/n} \\
& - k'_1 K' m' \rho_c'^{1/n'} + \frac{3}{5-n} \frac{Gm^2}{2R^3} \mathcal{J} + \frac{3}{5-n'} \frac{Gm'^2}{2R'^3} \mathcal{J}'. \tag{3.22}
\end{aligned}$$

Anstelle der generalisierten Variablen  $\psi$  und  $\gamma$  wurde hier eine neue Variable  $\beta := \gamma - \psi$  eingeführt. Die Zahl der Freiheitsgrade reduziert sich von 12 auf 8, was die damit zusammenhängenden numerischen Rechnungen deutlich vereinfacht. Dennoch weisen Typ-II Systeme alle wesentlichen Eigenschaften auf, die auch Binärsysteme dreiachsiger Riemann-S Ellipsoide besitzen. Die Euler-Lagrange-Gleichungen lauten in diesem Fall

$$\ddot{a}_1 = \frac{Gm'}{2r^3} a_1 + a_1 \dot{\beta}^2 + \left( \frac{5k_1 P_c}{n\kappa_n \rho_c} \right) \frac{1}{a_1} - \frac{3Gm}{\kappa_n (1 - \frac{n}{5})} \frac{a_1 A_1}{2R^3}, \tag{3.23}$$

$$\ddot{a}_3 = -\frac{Gm'}{r^3} a_3 + \left( \frac{5k_1 P_c}{n\kappa_n \rho_c} \right) \frac{1}{a_3} - \frac{3Gm}{\kappa_n (1 - \frac{n}{5})} \frac{a_3 A_3}{2R^3}, \tag{3.24}$$

$$\ddot{r} = r\dot{\varphi}^2 - \frac{GM}{r^2} - \frac{3}{10} \frac{GM}{r^4} \left[ \kappa_n(a_1^2 - a_3^2) + \kappa'_n(a_1'^2 - a_3'^2) \right], \tag{3.25}$$

$$\ddot{\varphi} = -2\frac{\dot{r}\dot{\varphi}}{r}, \tag{3.26}$$

$$\ddot{\beta} = -2\frac{\dot{a}_1}{a_1}\dot{\beta}. \tag{3.27}$$

In beiden Modellen ist die Lagrangefunktion explizit zeitunabhängig, d.h. die Energie des Binärsystems ist auf Newtonscher Ebene eine Erhaltungsgröße. Außerdem hängt die Lagrangefunktion des Modells I nicht explizit von dem internen Winkel  $\psi$  ab, wohl aber von  $\varphi$ . Das bedeutet, dass der zu  $\psi$  kanonisch konjugierte Impuls erhalten ist, der Bahndrehimpuls des Systems jedoch nicht<sup>6</sup>. Ganz anders bei Modell II. Sind beide Ellipsoide axialsymmetrisch, so hängt die Lagrangefunktion weder von  $\beta$  noch von  $\varphi$  explizit ab. Auf Newtonscher Ebene sind daher sowohl der Bahndrehimpuls als auch der zu  $\beta$  kanonisch konjugierte Impuls erhalten.

---

<sup>6</sup>Explizit zeigt sich das in den entsprechenden Hamiltonschen kanonischen Gleichungen.

### 3.3 Hamiltonscher Formalismus

Die Hamiltonsche Formulierung der Mechanik ist dem Lagrange-Formalismus äquivalent, erweist sich aber in manchen Fällen als geeigneter, so z.B. in der ADM-Eichung. Mit Hinblick auf eine mögliche Erweiterung der hier durchgeführten Untersuchungen auf post-Newtonsche Approximationen wollen wir daher den Hamiltonschen Formalismus für Riemann-S Binärsysteme auf der Newtonschen Ebene ableiten. Dabei ist es wieder wichtig, zwischen Typ-I und Typ-II Systemen zu unterscheiden.

Die Lagrangefunktion (3.13) enthält als Gibbsfunktion alle zur Beschreibung der Dynamik von Typ-I Systemen notwendigen Informationen. Die daraus abgeleiteten generalisierten Impulse  $p_i = \partial L / \partial \dot{q}^i$  lauten

$$\begin{aligned} p_r &= \mu \dot{r}, & p_\varphi &= \mu r^2 \dot{\varphi}, & p_{a_i} &= \frac{\kappa_n m}{5} \dot{a}_i, \\ p_\psi &= \frac{\kappa_n m}{5} \left[ (a_1^2 + a_2^2) \dot{\psi} - 2a_1 a_2 \dot{\gamma} \right], & p_\gamma &= \frac{\kappa_n m}{5} \left[ (a_1^2 + a_2^2) \dot{\gamma} - 2a_1 a_2 \dot{\psi} \right]. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Sind die Hauptachsen  $a_1$  und  $a_2$  verschieden, so kann man aus diesen Gleichungen die generalisierten Geschwindigkeiten  $\dot{q}_i$  in Abhängigkeit von den generalisierten Koordinaten und Impulsen bestimmen. Ausgehend von Gl. (3.28) findet man

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{p_r}{\mu}, & \dot{\varphi} &= \frac{p_\varphi}{\mu r^2}, & \dot{a}_i &= \frac{5}{\kappa_n m} p_{a_i}, \\ \dot{\gamma} &= \frac{5}{\kappa_n m} \left[ \frac{a_1^2 + a_2^2}{(a_1^2 - a_2^2)^2} p_\gamma + 2 \frac{a_1 a_2}{(a_1^2 - a_2^2)^2} p_\psi \right], \\ \dot{\psi} &= \frac{5}{\kappa_n m} \left[ \frac{a_1^2 + a_2^2}{(a_1^2 - a_2^2)^2} p_\psi + 2 \frac{a_1 a_2}{(a_1^2 - a_2^2)^2} p_\gamma \right], \end{aligned} \quad (3.29)$$

sowie die entsprechenden Gleichungen für  $a'_i$ ,  $\psi'$  und  $\gamma'$ . Es ist offensichtlich, dass  $p_\psi$  und  $p_\gamma$  im Falle axialsymmetrischer Riemann-S Ellipsoide keine linear unabhängigen Variablen sind<sup>7</sup>.

Setzt man die generalisierten Geschwindigkeiten (3.29) in die Legendretransforma-

---

<sup>7</sup>Das kann man bereits aus Gl. (3.28) leicht erkennen.

tion der Lagrangefunktion (3.13) ein, ergibt sich die Hamiltonfunktion als

$$\begin{aligned}
H = & \frac{p_r^2}{2\mu} + \frac{p_\varphi^2}{2\mu r^2} + \frac{5}{2\kappa_n m} \left[ \sum_{i=1}^3 p_{a_i}^2 + \frac{a_1^2 + a_2^2}{(a_1^2 - a_2^2)^2} (p_\gamma^2 + p_\psi^2) + 2 \frac{a_1 a_2}{(a_1^2 - a_2^2)^2} p_\gamma p_\psi \right] \\
& + \frac{5}{2\kappa'_n m'} \left[ \sum_{i=1}^3 p_{a'_i}^2 + \frac{a_1'^2 + a_2'^2}{(a_1'^2 - a_2'^2)^2} (p_\gamma'^2 + p_\psi'^2) + 2 \frac{a_1' a_2'}{(a_1'^2 - a_2'^2)^2} p_\gamma' p_\psi' \right] \\
& + k_1 K m \rho_c^{1/n} - \frac{3}{5-n} \frac{Gm^2}{2R^3} \mathcal{J} + k'_1 K' m' \rho_c'^{1/n'} - \frac{3}{5-n'} \frac{Gm'^2}{2R'^3} \mathcal{J}' - \frac{GM\mu}{r} \\
& - \frac{GM\mu\kappa_n}{10r^3} \left[ a_1^2 (3 \cos^2 \alpha - 1) + a_2^2 (3 \sin^2 \alpha - 1) - a_3^2 \right] \\
& - \frac{GM\mu\kappa'_n}{10r^3} \left[ a_1'^2 (3 \cos^2 \alpha' - 1) + a_2'^2 (3 \sin^2 \alpha' - 1) - a_3'^2 \right]. \tag{3.30}
\end{aligned}$$

Die daraus folgenden Hamiltonschen kanonischen Gleichungen

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}$$

liefern eine den Euler-Lagrange-Gleichungen äquivalente Beschreibung der Newtonschen Dynamik. Die generalisierten Geschwindigkeiten sind bereits in (3.29) angegeben; für die Zeitableitungen der generalisierten Impulse findet man mit Hilfe von

Gl. (3.14)

$$\begin{aligned} \dot{p}_{a_1} = & \frac{5}{\kappa_n m} \left[ \frac{a_1(3a_2^2 + a_1^2)}{(a_1^2 - a_2^2)^3} (p_\gamma^2 + p_\psi^2) + 2 \frac{a_2(3a_1^2 + a_2^2)}{(a_1^2 - a_2^2)^3} p_\gamma p_\psi \right] + \frac{k_1 m P_c}{n a_1 \rho_c} \\ & + \frac{G \mathcal{M} \mu \kappa_n}{5 r^3} (3 \cos^2 \alpha - 1) a_1 - \frac{3}{5 - n} \frac{G m^2}{2 R^3} a_1 A_1, \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_{a_2} = & -\frac{5}{\kappa_n m} \left[ \frac{a_2(3a_1^2 + a_2^2)}{(a_1^2 - a_2^2)^3} (p_\gamma^2 + p_\psi^2) + 2 \frac{a_1(3a_2^2 + a_1^2)}{(a_1^2 - a_2^2)^3} p_\gamma p_\psi \right] + \frac{k_1 m P_c}{n a_2 \rho_c} \\ & + \frac{G \mathcal{M} \mu \kappa_n}{5 r^3} (3 \sin^2 \alpha - 1) a_2 - \frac{3}{5 - n} \frac{G m^2}{2 R^3} a_2 A_2, \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\dot{p}_{a_3} = \frac{k_1 m P_c}{n a_3 \rho_c} - \frac{3}{5 - n} \frac{G m^2}{2 R^3} a_3 A_3 - \frac{G \mathcal{M} \mu \kappa_n}{5 r^3} a_3, \quad (3.33)$$

$$\dot{p}_\psi = 0, \quad (3.34)$$

$$\dot{p}_\gamma = \frac{3}{10} \frac{G \mathcal{M} \mu \kappa_n}{r^3} (a_1^2 - a_2^2) \sin 2\alpha, \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_r = & -\frac{G \mathcal{M} \mu}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{\mu r^3} - \frac{3}{10} \frac{G \mathcal{M} \mu}{r^4} \left[ \kappa_n \{ a_1^2 (3 \cos^2 \alpha - 1) + a_2^2 (3 \sin^2 \alpha - 1) - a_3^2 \} \right. \\ & \left. + \kappa'_n \{ a_1'^2 (3 \cos^2 \alpha' - 1) + a_2'^2 (3 \sin^2 \alpha' - 1) - a_3'^2 \} \right], \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\dot{p}_\varphi = -\frac{3}{10} \frac{G \mathcal{M} \mu}{r^3} \left[ \kappa_n (a_1^2 - a_2^2) \sin 2\alpha + \kappa'_n (a_1'^2 - a_2'^2) \sin 2\alpha' \right]. \quad (3.37)$$

Hinzu kommen natürlich noch die entsprechenden Gleichungen für die fünf Freiheitsgrade des Sterns  $m'$ .

Für Systeme axialsymmetrischer Riemann-S Ellipsoide sind die Hamiltonschen Gleichungen (3.29) und (3.31)-(3.37) nicht anwendbar. Aufgrund der durch die Annahme der Axialsymmetrie bedingten Reduktion der Freiheitsgrade beschreibt die Lagrangefunktion (3.22) ein völlig anderes physikalisches System. Für die verallgemeinerten Impulse und die daraus folgenden generalisierten Geschwindigkeiten der stellaren Variablen findet man in diesem Fall

$$p_{a_1} = \frac{2}{5} \kappa_n m \dot{a}_1, \quad p_{a_3} = \frac{\kappa_n m}{5} \dot{a}_3, \quad p_\beta = \frac{2}{5} \kappa_n m a_1^2 \dot{\beta}, \quad (3.38)$$

und damit

$$\dot{a}_1 = \frac{5}{2 \kappa_n m} p_{a_1}, \quad \dot{a}_3 = \frac{5}{\kappa_n m} p_{a_3}, \quad \dot{\beta} = \frac{5}{2 \kappa_n m} \frac{p_\beta}{a_1^2}, \quad \dot{r} = \frac{p_r}{\mu}, \quad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{\mu r^2}. \quad (3.39)$$

Die zugehörige Hamiltonfunktion lautet

$$\begin{aligned}
H = & \frac{5}{2\kappa_n m} \left[ \frac{p_{a_1}^2}{2} + p_{a_3}^2 + \frac{p_\beta^2}{2a_1^2} \right] + \frac{5}{2\kappa'_n m'} \left[ \frac{p_{a_1}'^2}{2} + p_{a_3}'^2 + \frac{p_\beta'^2}{2a_1'^2} \right] + \frac{p_r^2}{2\mu} + \frac{p_\varphi^2}{2\mu r^2} \\
& + k_1 K m \rho_c^{1/n} - \frac{3}{5-n} \frac{Gm^2}{2R^3} \mathcal{J} + k'_1 K' m' \rho_c^{1/n'} - \frac{3}{5-n'} \frac{Gm'^2}{2R'^3} \mathcal{J}' - \frac{GM\mu}{r} \\
& - \frac{GM\mu}{10r^3} \left[ \kappa_n (a_1^2 - a_3^2) + \kappa'_n (a_1'^2 - a_3'^2) \right]. \tag{3.40}
\end{aligned}$$

Wie bereits erwähnt, sind  $\beta, \beta'$  und die Bahnvariable  $\varphi$  zyklische Koordinaten, d.h. die ihnen zugeordneten verallgemeinerten Impulse sind Konstanten der Bewegung. Die Dynamik des Modells II wird daher durch die Gln. (3.39) sowie durch

$$\dot{p}_{a_1} = \frac{5}{2\kappa_n m} \frac{p_\beta^2}{a_1^3} + \frac{GM\mu\kappa_n}{5r^3} a_1 + 2 \frac{k_1 m P_c}{n a_1 \rho_c} - \frac{3}{5-n} \frac{Gm^2}{R^3} a_1 A_1, \tag{3.41}$$

$$\dot{p}_{a_3} = -\frac{GM\mu\kappa_n}{5r^3} a_3 + \frac{k_1 m P_c}{n a_3 \rho_c} - \frac{3}{5-n} \frac{Gm^2}{2R^3} a_3 A_3, \tag{3.42}$$

$$\dot{p}_r = -\frac{GM\mu}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{\mu r^3} - \frac{3}{10} \frac{GM\mu}{r^4} \left[ \kappa_n (a_1^2 - a_3^2) + \kappa'_n (a_1'^2 - a_3'^2) \right], \tag{3.43}$$

$$\dot{p}_\varphi = \dot{p}_\beta = 0 \tag{3.44}$$

und die entsprechenden Gleichungen für  $p'_{a_i}$  und  $p'_\beta$  beschrieben.

### 3.4 Gravitationsstrahlung und Strahlungsrückwirkung in führender Ordnung

Auch in Binärsystemen nicht-punktförmiger Objekte sind Gesamtenergie und Gesamtdrehimpuls in Newtonscher Ordnung Erhaltungsgrößen<sup>8</sup>. Erst im Rahmen einer allgemein-relativistischen Beschreibung tritt ab der Ordnung  $1/c^5$  ein Energieverlust aufgrund der Emission von Gravitationswellen auf. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, diese Energiedissipation zu beschreiben. In den Kapiteln 2 und 4 geschieht das durch die Einführung einer zeitabhängigen Hamiltonfunktion  $H_{\text{reac}}(t)$ . Ist sie bekannt, können die Hamiltonschen kanonischen Gleichungen in der gewohnten Form verwendet werden, d.h. es gilt nach wie vor  $\dot{p}_i = -\partial H/\partial q^i$  und  $\dot{q}^i = \partial H/\partial p_i$ . In diesem Kapitel wollen wir in Anlehnung an die Arbeiten von Lai und Shapiro einen anderen Weg einschlagen und verallgemeinerte Kräfte einführen [55]. Dies geschieht

---

<sup>8</sup>Das bedeutet nicht, dass Bahnenergie- und Drehimpuls ebenfalls erhalten sind. Aufgrund der Kopplung an die stellaren Freiheitsgrade kann ein Energie- und Drehimpulsaustausch zwischen orbitalen und stellaren Freiheitsgraden stattfinden.

mit Hilfe des Burke-Thorne Strahlungsrückwirkungspotentials

$$\Psi_{\text{reac}} = \frac{G}{5c^5} \mathcal{I}_{\bar{a}\bar{b}}^{(5)} x_{\bar{a}} x_{\bar{b}}, \quad (3.45)$$

wobei  $x_{\bar{a}}$  Koordinaten in einem mit dem Binärsystem mitrotierenden Koordinatensystem bezeichnen (vgl. z.B. [65]).

Im Wesentlichen reduziert sich die Berechnung des Strahlungsrückwirkungspotentials (3.45) auf die Berechnung der fünften Zeitableitung des STF-Massenquadrupoltensors im mitrotierenden System. Aufgrund der in Newtonscher Ordnung geltenden Additivität des Massenquadrupoltensors ist es möglich, die Beiträge der Sterne und des Orbits separat zu berechnen. Dennoch wird sich zeigen, dass die allgemeine Form von  $\mathcal{I}_{\bar{a}\bar{b}}^{(5)}$  recht kompliziert ist. Für explizite Berechnungen werden wir uns daher auf eine quasi-statische Näherung beschränken.

### 3.4.1 Der stellare Beitrag: Zeitableitungen des stellaren Massenquadrupoltensors

Um die fünfte Zeitableitung des stellaren Massenquadrupoltensors im mitrotierenden System zu berechnen, betrachten wir eine Koordinatentransformation, die den Ursprung des mitrotierenden Systems für den Augenblick in den Mittelpunkt des Sterns  $m$  rückt. Außerdem führen wir ein Inertialsystem  $\{X_a\}$  ein, dessen Ursprung mit dem Zentrum des Sterns zusammenfällt. Die Beziehungen zwischen den Koordinaten  $X_a$  des Inertialsystems, den Koordinaten  $x_a$  des körperfesten Systems und den Koordinaten  $x_{\bar{a}}$  können aus Abb. 3.1 abgelesen werden. Zwischen den Koordinaten  $X_a$ ,  $x_{\bar{a}}$  und  $x_a$  vermittelt jeweils eine Rotation, also

$$x_a = T_{ab}(\gamma) X_b \quad \text{und} \quad x_{\bar{a}} = T_{\bar{a}b}(\varphi) X_b, \quad (3.46)$$

wobei  $T_{ij}$  eine Drehung um die 3-Achse beschreibt, also

$$T_{ab}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.47)$$



Wie bereits erwähnt, nimmt der STF-Massenquadrupoltensor des Sterns im körperfesten System Diagonalgestalt an, d.h es ist

$$\mathcal{I}_{ij}^{(s)} = \frac{\kappa_n m}{5} \left[ a_i^2 - \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 a_k^2 \right] \delta_{ij}. \quad (3.48)$$

Die Transformation, die den Massenquadrupoltensor aus dem körperfesten System ins Inertialsystem überführt, lautet

$$\mathcal{I}_{\alpha\beta}^{(IS,s)} = T^\dagger(\gamma)_{\alpha i} T^\dagger(\gamma)_{\beta j} \mathcal{I}_{ij}^{(s)}.$$

Doch nicht  $\mathcal{I}_{ij}^{(IS,s)}$ , sondern die Zeitableitungen des Massenquadrupoltensors im mitrotierenden System sind gesucht. Um sie zu berechnen, könnte man zunächst die Zeitableitungen im Inertialsystem bestimmen und dann in einem zweiten Schritt gemäß<sup>9</sup>

$$\mathcal{I}_{\bar{a}\bar{b}}^{(5)} = T_{\bar{a}\alpha}(\varphi) T_{\bar{b}\beta}(\varphi) \mathcal{I}_{\alpha\beta}^{(5,IS)} \quad (3.49)$$

die Transformation ins mitrotierende System durchführen. Allerdings sind die sich durch das sukzessive Einsetzen der Newtonschen Bewegungsgleichungen ergebenden Beziehungen recht unhandlich. Wir wählen daher eine von Chandrasekhar vorgeschlagene Strategie und kombinieren die oben genannten Schritte in geeigneter Weise [21]. Dann finden wir zunächst

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\bar{a}\bar{b}}^{(5)} &= T_{\bar{a}\alpha}(\varphi) T_{\bar{b}\beta}(\varphi) \frac{d^5}{dt^5} \left[ T_{\alpha i}^\dagger(\gamma) T_{\beta j}^\dagger(\gamma) \mathcal{I}_{ij} \right] \\ &= \sum_{m=0}^5 \binom{5}{m} \left[ \frac{d^{5-m}}{dt^{5-m}} \mathcal{I}_{ij} \right] \sum_{p=0}^m \binom{m}{p} \left[ T_{\bar{a}\alpha}(\varphi) \frac{d^{m-p}}{dt^{m-p}} T_{\alpha i}^\dagger(\gamma) \right] \left[ T_{\bar{b}\beta}(\varphi) \frac{d^p}{dt^p} T_{\beta j}^\dagger(\gamma) \right] \\ &= \sum_{m=0}^5 \sum_{p=0}^m \binom{5}{m} \binom{m}{p} \left[ \frac{d^{5-m}}{dt^{5-m}} \mathcal{I}_{ij} \right] R_{\bar{a}i}^{m-p} R_{\bar{b}j}^p, \end{aligned} \quad (3.50)$$

mit der Definition

$$R_{\bar{a}i}^p := T_{\bar{a}\alpha}(\varphi) \frac{d^p}{dt^p} T_{\alpha i}^\dagger(\gamma).$$

Während die Berechnung der Matrizen  $R_{\bar{a}i}^p$  keine Probleme bereitet, stellt sich die Lage bei der Berechnung der  $\mathcal{I}_{\bar{a}\bar{b}}^{(5)}$  anders dar. Ohne zusätzliche Annahmen ergeben

---

<sup>9</sup>Im folgenden wird der Index  $(s)$  weggelassen, wenn eindeutig ist, dass es sich um eine auf den Stern bezogene Größe handelt.

sich relativ komplizierte Ausdrücke (siehe Anhang A.6). Es ist jedoch gar nicht nötig, alle Terme in Gl. (3.50) mitzunehmen. Die innerhalb des Sterns auftretenden Geschwindigkeiten und Beschleunigungen sind vergleichsweise klein, so dass es möglich ist, eine quasi-statische Näherung auf die stellaren Freiheitsgrade anzuwenden. Auch Lai und Shapiro [55] bedienen sich dieser Annahme, verwendeten die quasi-statische Approximation jedoch ohne Begründung auch auf die Bahnbewegung. Letzteres ist allerdings nur dann gerechtfertigt, wenn man die Dynamik des Systems lediglich über wenige Bahnperioden hinweg verfolgen will oder wenn es sich um Kreisbahnen handelt. Für exzentrische Bahnen hingegen führt die Anwendung der quasi-statischen Näherung auf  $r$  und  $\varphi$  zu einer rasch anwachsenden Phasenverschiebung gegenüber dem ungenäherten Ergebnis. Daher wird die quasi-statische Näherung hier nur auf die stellaren Freiheitsgrade angewendet. In dieser Näherung werden bei der Berechnung von  $\mathcal{I}_{\bar{a}\bar{b}}^{(5)}$  alle Terme der Ordnung  $O(\ddot{a}_i)$  und  $O(\ddot{\Omega})$  vernachlässigt und Terme proportional zu  $O(\dot{a}_i)$  und  $O(\dot{\Omega})$  nur in linearer Ordnung berücksichtigt. Außerdem verwenden wir  $|\dot{a}_i| \ll |\dot{\Omega}a_i|$ . Mit diesen Annahmen vereinfacht sich Gl. (3.50) zu

$$\mathcal{I}_{\bar{a}\bar{b}}^{(5)} \approx \mathcal{I}_{ij} \sum_{p=0}^5 \binom{5}{p} R_{\bar{a}\bar{i}}^p R_{\bar{b}\bar{j}}^{5-p} + \dot{\mathcal{I}}_{ij} \sum_{p=0}^4 \binom{4}{p} R_{\bar{a}\bar{i}}^p R_{\bar{b}\bar{j}}^{4-p}. \quad (3.51)$$

Insbesondere gilt in dieser Näherung  $\ddot{\mathcal{I}}_{ab} \approx 0$ . Nach einigen algebraischen Umformungen zeigt sich, dass die nichtverschwindenden Komponenten von  $\mathcal{I}_{\bar{a}\bar{b}}^{(5)}$  in der quasi-statischen Näherung durch

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\bar{1}\bar{1}}^{(5)} &= -\mathcal{I}_{\bar{2}\bar{2}}^{(5)} = (\mathcal{I}_{11} - \mathcal{I}_{22}) \left[ 16\Omega^5 \sin 2\alpha + 80\Omega^3 \dot{\Omega} \cos 2\alpha \right] + 40\Omega^4 (\dot{\mathcal{I}}_{11} - \dot{\mathcal{I}}_{22}) \cos 2\alpha, \\ \mathcal{I}_{\bar{1}\bar{2}}^{(5)} &= (\mathcal{I}_{11} - \mathcal{I}_{22}) \left[ 16\Omega^5 \cos 2\alpha - 80\Omega^3 \dot{\Omega} \sin 2\alpha \right] - 40\Omega^4 (\dot{\mathcal{I}}_{11} - \dot{\mathcal{I}}_{22}) \sin 2\alpha, \end{aligned} \quad (3.52)$$

gegeben sind. Insbesondere verschwindet die  $\bar{3}\bar{3}$ -Komponente in der quasi-statischen Approximation. Für axialsymmetrische Riemann-S Ellipsoide ist daher  $\mathcal{I}_{\bar{a}\bar{b}}^{(5)}$  in dieser Näherung trivial. Das bedeutet, obwohl der Massenquadrupoltensor zeitlich nicht konstant ist, emittiert ein axialsymmetrisches Riemann-S Ellipsoid in quasi-statischer Näherung keine Gravitationsstrahlung<sup>10</sup>.

---

<sup>10</sup>Ohne die stark einschränkenden Annahmen der quasi-statischen Approximation gilt das natürlich nicht – siehe Anhang A.6.

### 3.4.2 Der Beitrag der Bahnbewegung zu $\mathcal{I}_{\bar{a}\bar{b}}^{(5)}$

Um  $\mathcal{I}_{\bar{a}\bar{b}}^{(5),orb}$  im mitrotierenden System zu bestimmen, berechnen wir zunächst die fünfte Zeitableitung des Massenquadrupoltensors der Bahnbewegung im Inertialsystem und transformieren anschließend gemäß

$$\mathcal{I}_{\bar{a}\bar{b}}^{(5)} = T_{\bar{a}\alpha}(\varphi)T_{\bar{b}\beta}(\varphi)\mathcal{I}_{\alpha\beta}^{(5),(IS)} \quad (3.53)$$

in das im gemeinsamen Schwerpunkt verankerte mitrotierende System. Die dabei verwendeten Bewegungsgleichungen sind die eines Systems zweier Punktteilchen<sup>11</sup>,

$$\ddot{r} = -\frac{GM}{r^2} + r\dot{\varphi}^2, \quad \ddot{\varphi} = -2\frac{\dot{r}\dot{\varphi}}{r}. \quad (3.54)$$

Auf diese Weise ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\bar{1}\bar{1}}^{(5),orb} &= -\frac{8GM\mu}{3} \frac{\dot{r}}{r^4} \left[ 4\frac{GM}{r} + 3\dot{r}^2 + 18r^2\dot{\varphi}^2 \right], \\ \mathcal{I}_{\bar{2}\bar{2}}^{(5),orb} &= \frac{2GM\mu}{3} \frac{\dot{r}}{r^4} \left[ 8\frac{GM}{r} + 6\dot{r}^2 + 81r^2\dot{\varphi}^2 \right], \\ \mathcal{I}_{\bar{3}\bar{3}}^{(5),orb} &= \frac{2GM\mu}{3} \frac{\dot{r}}{r^4} \left[ 8\frac{GM}{r} + 6\dot{r}^2 - 9r^2\dot{\varphi}^2 \right], \\ \mathcal{I}_{\bar{1}\bar{2}}^{(5),orb} &= -4\frac{GM\mu}{r^3} \dot{\varphi} \left[ 2\frac{GM}{r} + 9\dot{r}^2 - 6r^2\dot{\varphi}^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.55)$$

### 3.4.3 Das Strahlungsfeld in führender Ordnung

Aus der klassischen Mechanik ist bekannt, dass die Euler-Lagrange-Gleichungen bzw. die Hamiltonschen Gleichungen bei Anwesenheit dissipativer Kräfte in ihrer herkömmlichen Form keine Gültigkeit mehr besitzen<sup>12</sup>, sondern gemäß

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = \frac{\partial L}{\partial q^i} + \mathcal{F}_{q^i} \quad (3.56)$$

<sup>11</sup>Genaugenommen müsste man dabei in den Bewegungsgleichungen gemäß (3.20) und (3.21) die Gezeitenwechselwirkung mit berücksichtigen. Dies würde jedoch die Analyse stark verkomplizieren. Außerdem sind die dadurch entstehenden Zusatzterme mindestens um den Faktor  $1/r^2$  schwächer als die Beiträge der Punktteilchenbewegung und können daher vernachlässigt werden.

<sup>12</sup>In den Kapiteln 2 und 4 wird dieses Problem durch die Einführung eines die Strahlungsrückwirkung beschreibenden Anteils des Hamiltonians gelöst.

bzw.

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} + \mathcal{F}_{q^i} \quad (3.57)$$

abgeändert werden müssen (vgl. z.B. [54]). Die hier auftretenden verallgemeinerten dissipativen Kräfte  $\mathcal{F}_{q^i}$  ergeben sich auf einfache Weise aus der Energiedissipationsrate

$$\mathcal{W} = - \int \mathbf{v} \cdot \nabla \Psi_{\text{reac}} \rho dV \quad (3.58)$$

als  $\mathcal{F}_{q^i} = \partial \mathcal{W} / \partial \dot{q}^i$ .

### Modell I

Um den Beitrag eines triaxialen Riemann-S Ellipsoids der Masse  $m$  zur Gesamtenergiedissipationsrate des Binärsystems zu bestimmen, zerlegen wir die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  eines Flüssigkeitselements in einen Anteil  $\mathbf{u}$

$$\mathbf{u} = \left( \frac{a_1}{a_2} \Lambda - \Omega \right) x_2 \mathbf{e}_1 + \left( -\frac{a_2}{a_1} \Lambda + \Omega \right) x_1 \mathbf{e}_2 + \frac{\dot{a}_1}{a_1} x_1 \mathbf{e}_1 + \frac{\dot{a}_2}{a_2} x_2 \mathbf{e}_2 + \frac{\dot{a}_3}{a_3} x_3 \mathbf{e}_3$$

relativ zum Mittelpunkt des Sterns und einen Anteil

$$\mathbf{u}_{\text{orb}} = -\dot{r}_m \mathbf{e}_1 - r_m \dot{\varphi} \mathbf{e}_2,$$

der gerade der Bahngeschwindigkeit des Sternenschwerpunkts entspricht. Die Vektoren  $\mathbf{e}_i$  und  $\mathbf{e}_{\bar{i}}$  sind die Einheitsvektoren im körperfesten bzw. mitrotierenden System. Die Komponenten des Ortsvektors in beiden Systemen sind durch die Rotation

$$x_{\bar{1}} = x_1 \cos \alpha + x_2 \sin \alpha - r_m, \quad x_{\bar{2}} = -x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha, \quad x_{\bar{3}} = x_3 \quad (3.59)$$

miteinander verknüpft (vgl. Abb. 3.1). Setzt man diese Beziehung in Gl. (3.58) ein und verwendet  $\int \rho x_i x_j dV = \frac{\kappa_m m}{5} a_i^2 \delta_{ij}$ , so ergibt sich der Beitrag des Sterns  $m$  zur

Energiedissipationsrate des Systems als

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_m = & -\frac{2G}{5c^5} \frac{\kappa_n m}{5} \left[ a_1 \dot{a}_1 (\mathcal{I}_{11}^{(5)} \cos^2 \alpha + \mathcal{I}_{22}^{(5)} \sin^2 \alpha - \mathcal{I}_{12}^{(5)} \sin 2\alpha) + a_2 \dot{a}_2 (\mathcal{I}_{11}^{(5)} \sin^2 \alpha \right. \\
& + \mathcal{I}_{22}^{(5)} \cos^2 \alpha + \mathcal{I}_{12}^{(5)} \sin 2\alpha) + \Omega (a_1^2 - a_2^2) (\mathcal{I}_{12}^{(5)} \cos 2\alpha + \frac{1}{2} (\mathcal{I}_{11}^{(5)} - \mathcal{I}_{22}^{(5)}) \sin 2\alpha) \\
& \left. + \mathcal{I}_{33}^{(5)} a_3 \dot{a}_3 \right] - \frac{2Gm}{5c^5} \left[ r_m \dot{r}_m \mathcal{I}_{11}^{(5)} + r_m^2 \dot{\varphi} \mathcal{I}_{12}^{(5)} \right]. \tag{3.60}
\end{aligned}$$

Bei der analogen Berechnung von  $\mathcal{W}_{m'}$  ersetzt man ungestrichene durch gestrichene Größen und berücksichtigt, dass die Bahngeschwindigkeit des zweiten Sterns durch  $\mathbf{u}'_{orb} = \dot{r}'_m \mathbf{e}_1 + r'_m \dot{\varphi} \mathbf{e}_2$  gegeben ist. Beide Beiträge addieren sich zur Energiedissipationsrate des Binärsystems. Mit  $mr_m \dot{r}_m + m' r'_m \dot{r}'_m = \mu r \dot{r}$  finden wir schließlich, dass der Energieverlust des Systems in führender Ordnung durch

$$\begin{aligned}
\mathcal{W} = & -\frac{2G}{5c^5} \frac{\kappa_n m}{5} \left[ a_1 \dot{a}_1 (\mathcal{I}_{11}^{(5)} \cos^2 \alpha + \mathcal{I}_{22}^{(5)} \sin^2 \alpha - \mathcal{I}_{12}^{(5)} \sin 2\alpha) + a_2 \dot{a}_2 (\mathcal{I}_{11}^{(5)} \sin^2 \alpha \right. \\
& + \mathcal{I}_{22}^{(5)} \cos^2 \alpha + \mathcal{I}_{12}^{(5)} \sin 2\alpha) + \Omega (a_1^2 - a_2^2) (\mathcal{I}_{12}^{(5)} \cos 2\alpha + \frac{1}{2} (\mathcal{I}_{11}^{(5)} - \mathcal{I}_{22}^{(5)}) \sin 2\alpha) \\
& \left. + \mathcal{I}_{33}^{(5)} a_3 \dot{a}_3 \right] - \frac{2G}{5c^5} \frac{\kappa'_n m'}{5} \left[ a'_1 \dot{a}'_1 (\mathcal{I}_{11}^{(5)} \cos^2 \alpha' + \mathcal{I}_{22}^{(5)} \sin^2 \alpha' - \mathcal{I}_{12}^{(5)} \sin 2\alpha') \right. \\
& + a'_2 \dot{a}'_2 (\mathcal{I}_{11}^{(5)} \sin^2 \alpha' + \mathcal{I}_{22}^{(5)} \cos^2 \alpha' + \mathcal{I}_{12}^{(5)} \sin 2\alpha') \\
& \left. + \Omega' (a_1'^2 - a_2'^2) (\mathcal{I}_{12}^{(5)} \cos 2\alpha' + \frac{1}{2} (\mathcal{I}_{11}^{(5)} - \mathcal{I}_{22}^{(5)}) \sin 2\alpha') + \mathcal{I}_{33}^{(5)} a'_3 \dot{a}'_3 \right] \\
& - \frac{2G\mu}{5c^5} (r \dot{r} \mathcal{I}_{11}^{(5)} + r^2 \dot{\varphi} \mathcal{I}_{12}^{(5)}) \tag{3.61}
\end{aligned}$$

beschrieben wird. Per definitionem sind die verallgemeinerten generalisierten Kräfte die partiellen Ableitungen der Energiedissipationsrate  $\mathcal{W}$  nach den verallgemeinerten Geschwindigkeiten. Für triaxiale Riemann-S Ellipsoide ergibt sich also

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{a_1} &= -\frac{2G}{5c^5} \frac{\kappa_n m}{5} \left[ \mathcal{I}_{11}^{(5)} \cos^2 \alpha + \mathcal{I}_{22}^{(5)} \sin^2 \alpha - \mathcal{I}_{12}^{(5)} \sin 2\alpha \right] a_1, \\
\mathcal{F}_{a_2} &= -\frac{2G}{5c^5} \frac{\kappa_n m}{5} \left[ \mathcal{I}_{11}^{(5)} \sin^2 \alpha + \mathcal{I}_{22}^{(5)} \cos^2 \alpha + \mathcal{I}_{12}^{(5)} \sin 2\alpha \right] a_2, \\
\mathcal{F}_{a_3} &= -\frac{2G}{5c^5} \frac{\kappa_n m}{5} \mathcal{I}_{33}^{(5)} a_3, \\
\mathcal{F}_\gamma &= -\frac{2G}{5c^5} \frac{\kappa_n m}{5} (a_1^2 - a_2^2) \left[ \mathcal{I}_{12}^{(5)} \cos 2\alpha + \frac{1}{2} (\mathcal{I}_{11}^{(5)} - \mathcal{I}_{22}^{(5)}) \sin 2\alpha \right], \\
\mathcal{F}_\psi &= 0, \\
\mathcal{F}_r &= -\frac{2G\mu}{5c^5} \mathcal{I}_{11}^{(5)} r, \\
\mathcal{F}_\varphi &= -\frac{2G\mu}{5c^5} \mathcal{I}_{12}^{(5)} r^2, \tag{3.62}
\end{aligned}$$

und entsprechend für die generalisierten dissipativen Kräfte des zweiten Sterns. Damit lauten die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen eines Binärsystems triaxialer Riemann-S Ellipsoide

$$\begin{aligned}
\ddot{a}_1 &= [\text{Gl. (3.15)}] - \frac{2G}{5c^5} (\mathcal{I}_{11}^{(5)} \cos^2 \alpha + \mathcal{I}_{22}^{(5)} \sin^2 \alpha - \mathcal{I}_{12}^{(5)} \sin 2\alpha) a_1, \\
\ddot{a}_2 &= [\text{Gl. (3.16)}] - \frac{2G}{5c^5} (\mathcal{I}_{11}^{(5)} \sin^2 \alpha + \mathcal{I}_{22}^{(5)} \cos^2 \alpha + \mathcal{I}_{12}^{(5)} \sin 2\alpha) a_2, \\
\ddot{a}_3 &= [\text{Gl. (3.17)}] - \frac{2G}{5c^5} \mathcal{I}_{33}^{(5)} a_3, \\
\dot{\Lambda} &= \left( \frac{a_1}{a_2} - \frac{a_2}{a_1} \right)^{-1} \left[ -2 \left( \frac{\dot{a}_1}{a_2} - \frac{\dot{a}_2}{a_1} \right) \Lambda - 2 \left( \frac{\dot{a}_1}{a_1} - \frac{\dot{a}_2}{a_2} \right) \Omega + 3 \frac{Gm'}{r^3} \sin 2\alpha \right. \\
&\quad \left. - \frac{2G}{5c^5} (2\mathcal{I}_{12}^{(5)} \cos 2\alpha + (\mathcal{I}_{11}^{(5)} - \mathcal{I}_{22}^{(5)}) \sin 2\alpha) \right], \\
\dot{\Omega} &= \left( \frac{a_1}{a_2} - \frac{a_2}{a_1} \right)^{-1} \left[ -2 \left( \frac{\dot{a}_1}{a_1} - \frac{\dot{a}_2}{a_2} \right) \Lambda - 2 \left( \frac{\dot{a}_1}{a_2} - \frac{\dot{a}_2}{a_1} \right) \Omega \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_1} \right) \left\{ \frac{3}{2} \frac{Gm'}{r^3} \sin 2\alpha - \frac{2G}{5c^5} (\mathcal{I}_{12}^{(5)} \cos 2\alpha + \frac{1}{2} (\mathcal{I}_{11}^{(5)} - \mathcal{I}_{22}^{(5)}) \sin 2\alpha) \right\} \right], \\
\ddot{r} &= r\dot{\varphi}^2 - \frac{GM}{r^2} - \frac{3}{10} \frac{GM}{r^4} \left[ \kappa_n (a_1^2 (3 \cos^2 \alpha - 1) + a_2^2 (3 \sin^2 \alpha - 1) - a_3^2) \right. \\
&\quad \left. + \kappa'_n (a_1'^2 (3 \cos^2 \alpha' - 1) + a_2'^2 (3 \sin^2 \alpha' - 1) - a_3'^2) \right] - \frac{2G}{5c^5} \mathcal{I}_{11}^{(5)} r, \\
\ddot{\varphi} &= -2 \frac{\dot{r}\dot{\varphi}}{r} - \frac{3GM}{10r^5} \left[ \kappa_n (a_1^2 - a_2^2) \sin 2\alpha + \kappa'_n (a_1'^2 - a_2'^2) \sin 2\alpha' \right] - \frac{2G}{5c^5} \mathcal{I}_{12}^{(5)}; \tag{3.63}
\end{aligned}$$

dazu kommen die entsprechenden Gleichungen für  $a'_i, \gamma'$  und  $\psi'$ . In dieser Form setzt das Differentialgleichungssystem (3.62) die quasi-statische Näherung noch nicht

voraus. Sie findet erst bei der expliziten Berechnung der Zeitableitungen des STF-Massenquadrupoltensors ihre Anwendung.

## Modell II

Die Berechnungen für Typ-II Systeme erfolgen in gleicher Weise wie oben dargestellt. Dank der geringeren Zahl an Freiheitsgraden reduziert sich der Arbeitsaufwand dabei im Vergleich zu Typ-I Systemen erheblich. In einem axialsymmetrischen Stern  $m$  ist die Geschwindigkeit eines Flüssigkeitselements relativ zum Zentrum des Sterns durch

$$\mathbf{u} = -\dot{\beta}x_2\mathbf{e}_1 + \dot{\beta}x_1\mathbf{e}_2 + \frac{\dot{a}_1}{a_1}(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2) + \frac{\dot{a}_3}{a_3}x_3\mathbf{e}_3$$

gegeben, während die Bewegung des Schwerpunkts wieder durch  $\mathbf{u}_{orb} = \dot{r}_m\mathbf{e}_1 - r_m\dot{\varphi}\mathbf{e}_2$  beschrieben wird. Die Bestimmung der Dissipationsraten  $\mathcal{W}_m$  und  $\mathcal{W}'_m$  aus Gl. (3.58) ergibt für die Energiedissipationsrate des Binärsystems

$$\begin{aligned} \mathcal{W} = & -\frac{2G}{5c^5} \frac{\kappa_n m}{5} \left[ a_1 \dot{a}_1 (\mathcal{I}_{11}^{(5)} + \mathcal{I}_{22}^{(5)}) + a_3 \dot{a}_3 \mathcal{I}_{33}^{(5)} \right] - \frac{2G}{5c^5} \frac{\kappa'_n m'}{5} \left[ a'_1 \dot{a}'_1 (\mathcal{I}_{11}^{(5)} + \mathcal{I}_{22}^{(5)}) + a'_3 \dot{a}'_3 \mathcal{I}_{33}^{(5)} \right] \\ & - \frac{2G\mu}{5c^5} (r\dot{r}\mathcal{I}_{11}^{(5)} + r^2\dot{\varphi}\mathcal{I}_{12}^{(5)}). \end{aligned} \quad (3.64)$$

Deutlich einfacher stellen sich auch die verallgemeinerten dissipativen Kräften dar. Aus Gl. (3.64) findet man

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{a_1} &= -\frac{2G}{5c^5} \frac{\kappa_n m}{5} (\mathcal{I}_{11}^{(5)} + \mathcal{I}_{22}^{(5)}) a_1 = \frac{2G}{5c^5} \frac{\kappa_n m}{5} \mathcal{I}_{33}^{(5)} a_1, \\ \mathcal{F}_{a_3} &= -\frac{2G}{5c^5} \frac{\kappa_n m}{5} \mathcal{I}_{33}^{(5)} a_3, \\ \mathcal{F}_\beta &= 0, \quad \mathcal{F}_r = -\frac{2G\mu}{5c^5} \mathcal{I}_{11}^{(5)} r, \quad \mathcal{F}_\varphi = -\frac{2G\mu}{5c^5} \mathcal{I}_{12}^{(5)} r^2. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Die modifizierten Euler-Lagrange-Gleichungen für Systeme vom Typ II lauten somit

$$\begin{aligned}\ddot{a}_1 &= \frac{Gm'}{2r^3}a_1 + a_1\dot{\beta}^2 + \left(\frac{5k_1 P_c}{n\kappa_n \rho_c}\right) \frac{1}{a_1} - \frac{3Gm}{\kappa_n(1-\frac{n}{5})} \frac{a_1 A_1}{2R^3} + \frac{G}{5c^5} \mathcal{I}_{33}^{(5)} a_1, \\ \ddot{a}_3 &= -\frac{Gm'}{r^3}a_3 + \left(\frac{5k_1 P_c}{n\kappa_n \rho_c}\right) \frac{1}{a_3} - \frac{3Gm}{\kappa_n(1-\frac{n}{5})} \frac{a_3 A_3}{2R^3} - \frac{2G}{5c^5} \mathcal{I}_{33}^{(5)} a_3, \\ \ddot{\beta} &= -2\frac{\dot{a}_1}{a_1}\dot{\beta},\end{aligned}\tag{3.66}$$

$$\begin{aligned}\ddot{r} &= r\dot{\varphi}^2 - \frac{GM}{r^2} - \frac{3}{10} \frac{GM}{r^4} \left[ \kappa_n(a_1^2 - a_3^2) + \kappa'_n(a_1'^2 - a_3'^2) \right] - \frac{2G}{5c^5} \mathcal{I}_{11}^{(5)} r, \\ \ddot{\varphi} &= -2\frac{\dot{r}\dot{\varphi}}{r} - \frac{2G}{5c^5} \mathcal{I}_{12}^{(5)}.\end{aligned}\tag{3.67}$$

Es muss nochmals betont werden, dass der stellare Beitrag zu  $\mathcal{I}_{ab}^{(5)}$  in der quasi-statischen Näherung verschwindet<sup>13</sup>. Die innere Dynamik der Sterne beeinflusst das Strahlungsfeld nur indirekt – über die Kopplung an die Bahnbewegung.

Im Hamiltonschen Formalismus erfordert die Einführung verallgemeinerter dissipativer Kräfte eine Modifikation der Hamiltonschen kanonischen Gleichungen gemäß<sup>14</sup> Gl. (3.57). Die Gleichungen für die  $\dot{q}^i$  sind unverändert durch die Gl. (3.41)-(3.44) gegeben. Modifiziert werden hingegen die Gleichungen, die die zeitliche Entwicklung der kanonischen Impulse beschreiben. Man findet

$$\begin{aligned}\dot{p}_{a_1} &= \frac{5}{2m\kappa_n} \frac{p_\beta^2}{a_1^3} + \frac{GM\mu\kappa_n}{5r^3} a_1 + 2\frac{k_1 m P_c}{na_1 \rho_c} - \frac{3}{5-n} \frac{Gm^2}{R^3} a_1 A_1 + \frac{2G}{5c^5} \frac{m\kappa_n}{5} \mathcal{I}_{33}^{(5)} a_1, \\ \dot{p}_{a_3} &= -\frac{GM\mu\kappa_n}{5r^3} a_3 + \frac{k_1 m P_c}{na_3 \rho_c} - \frac{3}{5-n} \frac{Gm^2}{2R^3} a_3 A_3 - \frac{2G}{5c^5} \frac{m\kappa_n}{5} \mathcal{I}_{33}^{(5)} a_3, \\ \dot{p}_\beta &= 0, \\ \dot{p}_\varphi &= -\frac{2G\mu}{5c^5} \mathcal{I}_{12}^{(5)} r^2, \\ \dot{p}_r &= -\frac{GM\mu}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{\mu r^3} - \frac{3}{10} \frac{GM\mu}{r^4} \left[ \kappa_n(a_1^2 - a_3^2) + \kappa'_n(a_1'^2 - a_3'^2) \right] - \frac{2G\mu}{5c^5} \mathcal{I}_{11}^{(5)} r.\end{aligned}\tag{3.68}$$

<sup>13</sup>Vgl. Gl. (3.52))

<sup>14</sup>In den anderen Kapiteln wurde die Strahlungsrückwirkung durch einen zeitabhängigen, dissipativen Anteil der Hamiltonfunktion berücksichtigt, während die Form der Hamiltonschen kanonischen Gleichungen invariant blieb.



Die Komponenten von  $\mathcal{I}_{\bar{a}\bar{b}}^{(5)}$  lauten in quasi-statischer Näherung<sup>15</sup>

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{\bar{1}\bar{1}}^{(5)} &= -\frac{8GM}{3} \frac{p_r}{r^4} \left[ 4\frac{GM}{r} + 3\frac{p_r^2}{\mu^2} + 18\frac{p_\varphi^2}{\mu^2 r^2} \right], \\
\mathcal{I}_{\bar{2}\bar{2}}^{(5)} &= \frac{2GM}{3} \frac{p_r}{r^4} \left[ 8\frac{GM}{r} + 6\frac{p_r^2}{\mu^2} + 81\frac{p_\varphi^2}{\mu^2 r^2} \right], \\
\mathcal{I}_{\bar{3}\bar{3}}^{(5)} &= \frac{2GM}{3} \frac{p_r}{r^4} \left[ 8\frac{GM}{r} + 6\frac{p_r^2}{\mu^2} - 9\frac{p_\varphi^2}{\mu^2 r^2} \right], \\
\mathcal{I}_{\bar{1}\bar{2}}^{(5)} &= -\frac{4GM}{r^5} p_\varphi \left[ 2\frac{GM}{r} + 9\frac{p_r^2}{\mu^2} - 6\frac{p_\varphi^2}{\mu^2 r^2} \right].
\end{aligned} \tag{3.70}$$

### 3.4.4 Numerische Untersuchungen

Um die numerischen Rechnungen möglichst einfach zu halten, beschränken wir uns im folgenden auf Typ-II Systeme. Wie in Kapitel 2 ist es auch hier zweckmäßig, in geeigneter Art und Weise eine Skalierung durchzuführen, so dass in den so definierten Variablen  $G = \mathcal{M} = 1$  gilt. Die Transformation

$$\begin{aligned}
t &= \frac{GM}{c^3} \tau, & p_r &= \mu c \tilde{p}_r, & p_{a_i} &= \mu c \tilde{p}_{a_i}, & p_\varphi &= \frac{GM\mu}{c} \tilde{p}_\varphi, & p_\beta &= \frac{GM\mu}{c} \tilde{p}_\beta, \\
a_i &= \frac{GM}{c^2} \tilde{a}_i, & r &= \frac{GM}{c^2} \tilde{r}
\end{aligned}$$

erfüllt diese Forderung. Nun muss noch der in den Bewegungsgleichungen auftretende Ausdruck  $P_c/\rho_c$  durch andere, leichter zugänglichere Variablen ersetzt werden. Um das zu erreichen, vergleicht man ein Riemann-S Ellipsoid der Masse  $m$  mit einer entsprechenden nicht-rotierenden, kugelsymmetrischen Flüssigkeitskonfiguration gleicher Masse. Bezeichnet  $R_0$  den Gleichgewichtsradius der kugelsymmetrischen Konfiguration, so ergibt sich

$$\frac{k_1 m}{n} \frac{P_c}{\rho_c} \equiv \frac{Gm^2}{(5-n)R_0} \left( \frac{R_0}{R} \right)^{3/n}. \tag{3.71}$$

---

<sup>15</sup>Diese bezieht sich nur auf die stellaren Freiheitsgrade.

Definiert man nun noch  $C_1 := \frac{M}{m'} = \frac{m}{\mu}$  und  $C_2 := \frac{M}{m} = \frac{m'}{\mu}$ , so nehmen die modifizierten Hamiltonschen Gleichungen die folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{p}}_{a_1} &= \frac{5}{2\kappa_n C_1} \frac{\tilde{p}_\beta^2}{\tilde{a}_1^3} + \frac{\kappa_n \tilde{a}_1}{5 \tilde{r}^3} + \frac{C_1/C_2}{5-n} \left[ \frac{2}{\tilde{a}_1 \tilde{R}_0} \left( \frac{\tilde{R}_0}{\tilde{R}} \right)^{3/n} - 3 \frac{\tilde{a}_1 A_1}{\tilde{R}^3} \right] \\
&\quad + \frac{4\kappa_n \tilde{a}_1 \tilde{p}_r}{75 C_2 \tilde{r}^4} \left[ \frac{8}{\tilde{r}} + 6\tilde{p}_r^2 - 9 \frac{\tilde{p}_\varphi^2}{\tilde{r}^2} \right], \\
\dot{\tilde{p}}'_{a_1} &= \frac{5}{2\kappa'_n C_2} \frac{\tilde{p}'_\beta{}^2}{\tilde{a}'_1{}^3} + \frac{\kappa'_n \tilde{a}'_1}{5 \tilde{r}'^3} + \frac{C_2/C_1}{5-n'} \left[ \frac{2}{\tilde{a}'_1 \tilde{R}'_0} \left( \frac{\tilde{R}'_0}{\tilde{R}'} \right)^{3/n'} - 3 \frac{\tilde{a}'_1 A'_1}{\tilde{R}'^3} \right] \\
&\quad + \frac{4\kappa'_n \tilde{a}'_1 \tilde{p}'_r}{75 C_1 \tilde{r}'^4} \left[ \frac{8}{\tilde{r}'} + 6\tilde{p}'_r{}^2 - 9 \frac{\tilde{p}'_\varphi{}^2}{\tilde{r}'^2} \right], \\
\dot{\tilde{p}}_{a_3} &= -\frac{\kappa_n \tilde{a}_3}{5 \tilde{r}^3} + \frac{C_1/C_2}{5-n} \left[ \frac{1}{\tilde{a}_3 \tilde{R}_0} \left( \frac{\tilde{R}_0}{\tilde{R}} \right)^{3/n} - \frac{3 \tilde{a}_3 A_3}{2 \tilde{R}^3} \right] \\
&\quad - \frac{4\kappa_n \tilde{a}_3 \tilde{p}_r}{75 C_2 \tilde{r}^4} \left[ \frac{8}{\tilde{r}} + 6\tilde{p}_r^2 - 9 \frac{\tilde{p}_\varphi^2}{\tilde{r}^2} \right], \\
\dot{\tilde{p}}'_{a_3} &= -\frac{\kappa'_n \tilde{a}'_3}{5 \tilde{r}'^3} + \frac{C_2/C_1}{5-n'} \left[ \frac{1}{\tilde{a}'_3 \tilde{R}'_0} \left( \frac{\tilde{R}'_0}{\tilde{R}'} \right)^{3/n'} - \frac{3 \tilde{a}'_3 A'_3}{2 \tilde{R}'^3} \right] \\
&\quad - \frac{4\kappa'_n \tilde{a}'_3 \tilde{p}'_r}{75 C_1 \tilde{r}'^4} \left[ \frac{8}{\tilde{r}'} + 6\tilde{p}'_r{}^2 - 9 \frac{\tilde{p}'_\varphi{}^2}{\tilde{r}'^2} \right], \\
\dot{\tilde{p}}_\beta &= \dot{\tilde{p}}'_\beta = 0, \\
\dot{\tilde{p}}_\varphi &= \frac{8\nu \tilde{p}_\varphi}{5 \tilde{r}^3} \left[ \frac{2}{\tilde{r}} + 9\tilde{p}_r^2 - 6 \frac{\tilde{p}_\varphi^2}{\tilde{r}^2} \right], \\
\dot{\tilde{p}}_r &= -\frac{1}{\tilde{r}^2} + \frac{\tilde{p}_\varphi^2}{\tilde{r}^3} - \frac{3}{10\tilde{r}^4} \left[ \kappa_n (\tilde{a}_1^2 - \tilde{a}_3^2) + \kappa'_n (\tilde{a}'_1{}^2 - \tilde{a}'_3{}^2) \right] + \frac{16\nu \tilde{p}_r}{15 \tilde{r}^3} \left[ \frac{4}{\tilde{r}} + 3\tilde{p}_r^2 + 18 \frac{\tilde{p}_\varphi^2}{\tilde{r}^2} \right],
\end{aligned} \tag{3.72}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{a}}_1 &= \frac{5}{2\kappa_n C_1} \tilde{p}_{a_1}, & \dot{\tilde{a}}'_1 &= \frac{5}{2\kappa'_n C_2} \tilde{p}'_{a_1}, \\
\dot{\tilde{a}}_3 &= \frac{5}{\kappa_n C_1} \tilde{p}_{a_3}, & \dot{\tilde{a}}'_3 &= \frac{5}{\kappa_n C_2} \tilde{p}'_{a_3}, \\
\dot{\tilde{\beta}} &= \frac{5}{2\kappa_n C_1} \frac{\tilde{p}_\beta}{\tilde{a}_1^2}, & \dot{\tilde{\beta}}' &= \frac{5}{2\kappa_n C_2} \frac{\tilde{p}'_\beta}{\tilde{a}'_1{}^2}, \\
\dot{\tilde{r}} &= \tilde{p}_r, & \dot{\tilde{\varphi}} &= \frac{\tilde{p}_\varphi}{\tilde{r}^2}.
\end{aligned} \tag{3.73}$$

Bei Annahme geeigneter Anfangsbedingungen lässt sich dieses Differentialgleichungssystem numerisch lösen. Wir wollen voraussetzen, dass zur Zeit  $t = 0$  gerade das Periastron durchlaufen wird. In diesem Fall lauten die Anfangsbedingungen der orbitalen Variablen

$$\tilde{r}(0) = \tilde{d}_0(1 - \varepsilon_0), \quad \varphi(0) = 0, \quad \tilde{p}_r(0) = 0, \quad \tilde{p}_\varphi(0) = \sqrt{\tilde{d}_0(1 - \varepsilon_0^2)},$$

wobei  $\tilde{d}_0$  und  $e_0$  große Halbachse und Exzentrizität des Orbits zur Zeit  $t = 0$  sind. Die Bewegung innerhalb der Sterne wird im Rahmen einer quasi-statischen Näherung beschrieben, d.h. alle beteiligten Relativgeschwindigkeiten und Beschleunigungen werden als kleine Größen angenommen. Insbesondere darf der geometrisch gemittelte Radius  $\tilde{R}$  nur langsam mit der Zeit variieren. Diese Forderung ist sicher dann erfüllt, wenn  $\dot{\tilde{R}}(0) \stackrel{!}{=} 0$  ist, was gleichbedeutend mit  $2\dot{\tilde{a}}_1(0)\tilde{a}_1(0)\tilde{a}_3(0) + \tilde{a}_1(0)^2\dot{\tilde{a}}_3(0) = 0$  ist. Damit ist es möglich, eine Beziehung zwischen den zu  $\tilde{a}_1$  bzw.  $\tilde{a}_3$  gehörigen verallgemeinerten Impulsen herzustellen:

$$\dot{\tilde{p}}_{a_3}(0) = -\frac{\dot{\tilde{a}}_3(0)}{\tilde{a}_1(0)}\tilde{p}_{a_1}(0) \quad \text{bzw.} \quad \dot{\tilde{p}}'_{a_3}(0) = -\frac{\dot{\tilde{a}}'_3(0)}{\tilde{a}'_1(0)}\tilde{p}'_{a_1}(0).$$

Bei Vorgabe geeigneter Werte für  $\dot{\tilde{a}}_i(0)$ ,  $\dot{\tilde{a}}'_i(0)$  und  $\dot{\tilde{\beta}}(0)$  bzw.  $\dot{\tilde{\beta}}'(0)$  bleibt nun noch die Festlegung der Gleichgewichtsradien  $\tilde{R}_0$  und  $\tilde{R}'_0$  der nicht-rotierenden Vergleichspolytrope mit Polytropenindex  $n$  bzw.  $n'$ . Unter der Annahme, dass sich der rotierende Stern bei  $t = 0$  im thermodynamischen Gleichgewicht befindet, gilt die von Dong *et al.* hergeleitete Gleichgewichtsrelation zwischen dem geometrisch gemittelten Radius  $R$  eines rotierenden Polytops und dem Radius  $R_0$  des nicht-rotierenden Polytops<sup>16</sup> [29],

$$R_0 = R(0) \left[ \frac{3 \arcsin \varepsilon_0}{\varepsilon_0} (1 - \varepsilon_0^2)^{1/6} \left( 1 - \frac{1}{\varepsilon_0^2} + \frac{\sqrt{1 - \varepsilon_0^2}}{\varepsilon_0 \arcsin \varepsilon_0} \right) \right]^{n/(3-n)}, \quad (3.74)$$

wobei  $\varepsilon_0 := \sqrt{1 - (a_3(0)/a_1(0))^2}$  die Exzentrizität des rotierenden Ellipsoids bezeichnet. Diese Beziehung ist fast immer gültig; Ausnahmen betreffen den Limes inkompressibler Flüssigkeiten ( $n = 0$ ) und den relativistischen Limes ( $n = 3$ ).

---

<sup>16</sup>Das heisst natürlich nicht, dass der Stern nach Beginn der Integration weiterhin im thermodynamischen Gleichgewicht bleibt. Letzteres wäre nur bei statischen Gezeiten der Fall.

### 3.4.5 Gravitationswellenformen in führender Ordnung

Das Gravitationsstrahlungsfeld einer Quelle ist in führender Ordnung durch den symmetrisch spurfreien Massenquadrupoltensor bzw. dessen zeitliche Variation gegeben und lässt sich, wie bereits in Kapitel 2 erwähnt, in der Form

$$h_{ij}^{TT} = \frac{G}{Dc^4} \sum_{m=-2}^2 \ddot{I}^{2m}(t - \frac{D}{c}) T_{ij}^{E2,2m}(\Theta, \Phi)$$

darstellen<sup>17</sup>. Hier sind die  $I^{2m}$  wieder die Komponenten des im Schwerpunktsystem definierten STF-Massenquadrupoltensors in einer Darstellung, die irreduzibel in Bezug auf den Bahndrehimpuls ist. Die Beziehungen zwischen den beiden Darstellungen des Massenquadrupoltensors sind im Anhang zu finden.

Da wir nur die führende Ordnung des Strahlungsfeldes berechnen wollen, genügt es, die zweite Zeitableitung des Massenquadrupoltensors in Newtonscher Ordnung zu bestimmen. Das erlaubt es uns, die Beiträge von Bahnbewegung und Sternen separat zu berechnen. Um  $\ddot{\mathcal{I}}_{ij}^{orb}$  zu ermitteln, leiten wir die Komponenten von  $\mathcal{I}_{ij}^{orb}$  zweimal nach der Zeit ab und setzen die Newtonschen Bewegungsgleichungen (3.25)

---

<sup>17</sup>Siehe dazu auch Kapitel 4 und Anhang.

und (3.26) ein. Das führt auf

$$\begin{aligned}
\ddot{\mathcal{I}}_{11}^{IS,orb} &= -2\mu r \dot{r} \dot{\varphi} \sin 2\varphi + \frac{\mu}{3}(1 + 3 \cos 2\varphi) \left[ \dot{r}^2 - \frac{GM}{r} \right] + \frac{\mu r^2}{3}(1 - 3 \cos 2\varphi) \dot{\varphi}^2 \\
&\quad - \frac{GM\mu}{10r^3}(1 + 3 \cos 2\varphi) \left[ \kappa_n(a_1^2 - a_3^2) + \kappa'_n(a_1'^2 - a_3'^2) \right] \\
&= -2\frac{p_r p_\varphi}{\mu r} \sin 2\varphi + \frac{1}{3\mu}(1 + 3 \cos 2\varphi) \left[ p_r^2 - \frac{GM\mu^2}{r} \right] + \frac{p_\varphi^2}{3\mu r^2}(1 - 3 \cos 2\varphi) \\
&\quad - \frac{GM\mu}{10r^3}(1 + 3 \cos 2\varphi) \left[ \kappa_n(a_1^2 - a_3^2) + \kappa'_n(a_1'^2 - a_3'^2) \right], \tag{3.75}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{\mathcal{I}}_{22}^{IS,orb} &= 2\mu r \dot{r} \dot{\varphi} \sin 2\varphi + \frac{\mu}{3}(1 - 3 \cos 2\varphi) \left[ \dot{r}^2 - \frac{GM}{r} \right] + \frac{\mu r^2}{3}(1 + 3 \cos 2\varphi) \dot{\varphi}^2 \\
&\quad - \frac{GM\mu}{10r^3}(1 - 3 \cos 2\varphi) \left[ \kappa_n(a_1^2 - a_3^2) + \kappa'_n(a_1'^2 - a_3'^2) \right] \\
&= 2\frac{p_r p_\varphi}{\mu r} \sin 2\varphi + \frac{1}{3\mu}(1 - 3 \cos 2\varphi) \left[ p_r^2 - \frac{GM\mu^2}{r} \right] + \frac{p_\varphi^2}{3\mu r^2}(1 + 3 \cos 2\varphi) \\
&\quad - \frac{GM\mu}{10r^3}(1 - 3 \cos 2\varphi) \left[ \kappa_n(a_1^2 - a_3^2) + \kappa'_n(a_1'^2 - a_3'^2) \right], \tag{3.76}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{\mathcal{I}}_{33}^{IS,orb} &= \frac{2\mu}{3} \left[ \frac{GM}{r} - r^2 \dot{\varphi}^2 - \dot{r}^2 \right] + \frac{GM\mu}{5r^3} \left[ \kappa_n(a_1^2 - a_3^2) + \kappa'_n(a_1'^2 - a_3'^2) \right] \\
&= \frac{2}{3\mu} \left[ \frac{GM\mu^2}{r} - \frac{p_\varphi^2}{r^2} - p_r^2 \right] + \frac{GM\mu}{5r^3} \left[ \kappa_n(a_1^2 - a_3^2) + \kappa'_n(a_1'^2 - a_3'^2) \right], \tag{3.77}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{\mathcal{I}}_{12}^{IS,orb} &= 2\mu \dot{r} \dot{\varphi} \cos 2\varphi + \left[ \dot{r}^2 - \frac{GM}{r} - r^2 \dot{\varphi}^2 \right. \\
&\quad \left. - \frac{3GM}{10r^3} \left\{ \kappa_n(a_1^2 - a_3^2) + \kappa'_n(a_1'^2 - a_3'^2) \right\} \right] \mu \sin 2\varphi \\
&= 2\frac{p_r p_\varphi}{\mu r} \cos 2\varphi + \left[ \frac{p_r^2}{\mu} - \frac{p_\varphi^2}{\mu r^2} - \frac{GM\mu}{r} \right. \\
&\quad \left. - \frac{3GM\mu}{10r^3} \left\{ \kappa_n(a_1^2 - a_3^2) + \kappa'_n(a_1'^2 - a_3'^2) \right\} \right] \sin 2\varphi. \tag{3.78}
\end{aligned}$$

Bei der Herleitung dieser Gleichungen wurde die quasi-statische Näherung für die stellaren Freiheitsgrade noch nicht vorausgesetzt. Daher treten in (3.75-3.78) zusätzlich Terme auf, die die Gezeitenwechselwirkung beschreiben. Wendet man die quasi-statische Näherung an, so verschwinden diese Terme; übrig bleiben die aus der Punktteilchentheorie bekannten Ausdrücke. In der Tat zeigt sich, dass die durch die Zusatzterme verursachten Beiträge zum Strahlungsfeld sehr klein sind und zumindest für elliptische Bahnen und für die  $\ddot{\mathcal{I}}_{22}$ -Komponente vernachlässigt werden können. Nur die  $\ddot{\mathcal{I}}_{33}$ -Komponente bedarf einer gesonderten Betrachtung: In einem

Punktteilchen-Binärsystem verschwindet sie für Kreisbahnen<sup>18</sup>. Erst durch die Gezeitenkopplung besitzt  $\ddot{\mathcal{I}}_{33}^{IS,orb}$  selbst für Kreisbahnen eine kleine, aber endliche Amplitude.

Zur Berechnung der stellaren Beiträge betrachten wir einen durch ein Riemann-S Ellipsoid modellierten Stern der Masse  $m$  und ein Inertialsystem  $\{X_i\}$ , dessen Ursprung im Zentrum des Sterns verankert ist. Gl. (3.46) gibt den Zusammenhang zwischen den Koordinaten  $X_i$  im Inertialsystem und den Koordinaten  $x_a$  im körperfesten System an. Die Transformationsvorschrift des stellaren Massenquadrupolentensors hingegen lautet

$$\mathcal{I}_{ij}^{(IS,s)} = T_{i\alpha}^\dagger(\gamma) T_{j\beta}^\dagger(\gamma) \mathcal{I}_{\alpha\beta}^{(s)},$$

wobei  $\mathcal{I}_{\alpha\beta}^{(s)}$  die Komponenten des Massenquadrupolentensors im körperfesten System sind. Die für ein triaxiales Riemann-S Ellipsoid geltenden Beziehungen

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{11}^{(IS,s)} &= \frac{1}{2}(\mathcal{I}_{11}^{(s)} - \mathcal{I}_{22}^{(s)}) \cos 2\gamma + \frac{1}{6}(\mathcal{I}_{11}^{(s)} + \mathcal{I}_{22}^{(s)} - 2\mathcal{I}_{33}^{(s)}), \\ \mathcal{I}_{22}^{(IS,s)} &= -\frac{1}{2}(\mathcal{I}_{11}^{(s)} - \mathcal{I}_{22}^{(s)}) \cos 2\gamma + \frac{1}{6}(\mathcal{I}_{11}^{(s)} + \mathcal{I}_{22}^{(s)} - 2\mathcal{I}_{33}^{(s)}), \\ \mathcal{I}_{33}^{(IS,s)} &= -\frac{1}{3}(\mathcal{I}_{11}^{(s)} + \mathcal{I}_{22}^{(s)} - 2\mathcal{I}_{33}^{(s)}), \\ \mathcal{I}_{12}^{(IS,s)} &= \frac{1}{2}(\mathcal{I}_{11}^{(s)} - \mathcal{I}_{22}^{(s)}) \sin 2\gamma \end{aligned} \quad (3.79)$$

reduzieren sich für axialsymmetrische Konfigurationen auf

$$\mathcal{I}_{11}^{(IS,s)} = \mathcal{I}_{22}^{(IS,s)} = -\frac{1}{2}\mathcal{I}_{33}^{(IS,s)}.$$

Ohne Annahme der quasi-statischen Näherung lauten die zweiten Zeitableitungen

$$\begin{aligned} \ddot{\mathcal{I}}_{11}^{(IS,s)} &= \left[ \frac{1}{2}(\ddot{\mathcal{I}}_{11}^{(s)} - \ddot{\mathcal{I}}_{22}^{(s)}) - 2(\mathcal{I}_{11}^{(s)} - \mathcal{I}_{22}^{(s)})\dot{\gamma}^2 \right] \cos 2\gamma - \left[ 2(\dot{\mathcal{I}}_{11}^{(s)} - \dot{\mathcal{I}}_{22}^{(s)})\dot{\gamma} \right. \\ &\quad \left. + (\mathcal{I}_{11}^{(s)} - \mathcal{I}_{22}^{(s)})\ddot{\gamma} \right] \sin 2\gamma + \frac{1}{6}(\ddot{\mathcal{I}}_{11}^{(s)} + \ddot{\mathcal{I}}_{22}^{(s)} - 2\ddot{\mathcal{I}}_{33}^{(s)}), \\ \ddot{\mathcal{I}}_{22}^{(IS,s)} &= -\left[ \frac{1}{2}(\ddot{\mathcal{I}}_{11}^{(s)} - \ddot{\mathcal{I}}_{22}^{(s)}) - 2(\mathcal{I}_{11}^{(s)} - \mathcal{I}_{22}^{(s)})\dot{\gamma}^2 \right] \cos 2\gamma + \left[ 2(\dot{\mathcal{I}}_{11}^{(s)} - \dot{\mathcal{I}}_{22}^{(s)})\dot{\gamma} \right. \\ &\quad \left. + (\mathcal{I}_{11}^{(s)} - \mathcal{I}_{22}^{(s)})\ddot{\gamma} \right] \sin 2\gamma + \frac{1}{6}(\ddot{\mathcal{I}}_{11}^{(s)} + \ddot{\mathcal{I}}_{22}^{(s)} - 2\ddot{\mathcal{I}}_{33}^{(s)}), \end{aligned}$$

---

<sup>18</sup>Das sieht man am besten in der analytischen Darstellung der  $\ddot{\mathcal{I}}_{ij}$ ; vgl. dazu Kapitel 4.

$$\begin{aligned}\ddot{\mathcal{I}}_{33}^{(IS,s)} &= -\frac{1}{3}(\ddot{\mathcal{I}}_{11}^{(s)} + \ddot{\mathcal{I}}_{22}^{(s)} - 2\ddot{\mathcal{I}}_{33}^{(s)}), \\ \ddot{\mathcal{I}}_{12}^{(IS,s)} &= \left[ \frac{1}{2}(\ddot{\mathcal{I}}_{11}^{(s)} - \ddot{\mathcal{I}}_{22}^{(s)}) - 2(\mathcal{I}_{11}^{(s)} - \mathcal{I}_{22}^{(s)})\dot{\gamma}^2 \right] \sin 2\gamma \\ &\quad + \left[ 2(\dot{\mathcal{I}}_{11}^{(s)} - \dot{\mathcal{I}}_{22}^{(s)})\dot{\gamma} + (\mathcal{I}_{11}^{(s)} - \mathcal{I}_{22}^{(s)})\ddot{\gamma} \right] \cos 2\gamma.\end{aligned}$$

In der quasi-statischen Näherung verschwinden jedoch die zweiten Zeitableitungen des Massenquadrupoltensors im körperfesten System, d.h.  $\ddot{\mathcal{I}}_{ij}^{(s)} \approx 0$ , so dass

$$\begin{aligned}\ddot{\mathcal{I}}_{11}^{(IS,s)} &= -\ddot{\mathcal{I}}_{22}^{(IS,s)} & (3.80) \\ &= -2(\mathcal{I}_{11}^{(s)} - \mathcal{I}_{22}^{(s)})\Omega^2 \cos 2\gamma - \left[ 2(\dot{\mathcal{I}}_{11}^{(s)} - \dot{\mathcal{I}}_{22}^{(s)})\Omega + (\mathcal{I}_{11}^{(s)} - \mathcal{I}_{22}^{(s)})\dot{\Omega} \right] \sin 2\gamma, \\ \ddot{\mathcal{I}}_{12}^{(IS,s)} &= -2(\mathcal{I}_{11}^{(s)} - \mathcal{I}_{22}^{(s)})\Omega^2 \sin 2\gamma + \left[ 2(\dot{\mathcal{I}}_{11}^{(s)} - \dot{\mathcal{I}}_{22}^{(s)})\Omega + (\mathcal{I}_{11}^{(s)} - \mathcal{I}_{22}^{(s)})\dot{\Omega} \right] \cos 2\gamma.\end{aligned}$$

Nun ist aber für axialsymmetrische Riemann-S Ellipsoide  $\mathcal{I}_{11}^{(s)} = \mathcal{I}_{22}^{(s)}$ . Aus Gl. (3.80) folgt daher sofort, dass  $\ddot{\mathcal{I}}_{ij}^{(IS,s)}$  für solche Konfigurationen in der quasi-statischen Näherung verschwindet. Das bedeutet jedoch nicht, dass die Gravitationsstrahlung völlig unabhängig von den inneren Freiheitsgraden der Sterne ist. Letztere koppeln ja an die Bahnbewegung und modifizieren so auch das Gravitationswellenmuster. Für Binärsysteme vom Typ II ist das Strahlungsfeld in führender Ordnung daher im Wesentlichen durch

$$\begin{aligned}\ddot{I}^{20} &= 4\sqrt{\frac{3\pi}{5}}\mu c^2 \left[ \frac{2}{3} \left( \frac{1}{\tilde{r}} - \tilde{p}_r^2 - \frac{\tilde{p}_\varphi^2}{\tilde{r}^2} \right) + \frac{1}{5\tilde{r}^3} \left\{ \kappa_n(\tilde{a}_1^2 - \tilde{a}_3^2) + \kappa'_n(\tilde{a}_1'^2 - \tilde{a}_3'^2) \right\} \right], \\ \Re(\ddot{I}^{22}) &= \sqrt{\frac{8\pi}{5}}\mu c^2 \left[ \left\{ 2 \left( \tilde{p}_r^2 - \frac{\tilde{p}_\varphi^2}{\tilde{r}^2} - \frac{1}{\tilde{r}} \right) - \frac{3}{5\tilde{r}^3} (\kappa_n(\tilde{a}_1^2 - \tilde{a}_3^2) + \kappa'_n(\tilde{a}_1'^2 - \tilde{a}_3'^2)) \right\} \cos 2\varphi \right. \\ &\quad \left. - 4\frac{\tilde{p}_r\tilde{p}_\varphi}{\tilde{r}} \sin 2\varphi \right], \\ \Im(\ddot{I}^{22}) &= -\sqrt{\frac{8\pi}{5}}\mu c^2 \left[ \left\{ 2 \left( \tilde{p}_r^2 - \frac{\tilde{p}_\varphi^2}{\tilde{r}^2} - \frac{1}{\tilde{r}} \right) - \frac{3}{5\tilde{r}^3} (\kappa_n(\tilde{a}_1^2 - \tilde{a}_3^2) + \kappa'_n(\tilde{a}_1'^2 - \tilde{a}_3'^2)) \right\} \sin 2\varphi \right. \\ &\quad \left. + 4\frac{\tilde{p}_r\tilde{p}_\varphi}{\tilde{r}} \cos 2\varphi \right]. & (3.81)\end{aligned}$$

bzw. Linearkombinationen dieser Ausdrücke gegeben.

### 3.5 Diskussion

Neutronensterne und Weiße Zwerge können zumindest näherungsweise mit Hilfe polytroper Zustandsgleichungen mit  $n = 0.5 \dots 1$  (NS) bzw.  $n \approx 1.5$  (WD) be-

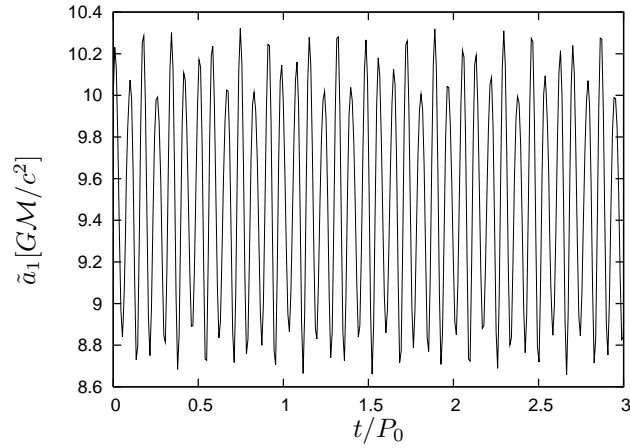


Abbildung 3.2: Oszillationen eines Riemann-S Ellipsoids mit Polytropenindex  $n = 1$ . Dargestellt ist die Oszillation der Halbachse  $a_1$  des Sterns  $m$  in einem Typ II-System. Anfangsparameter  $\tilde{a}_1(0) = 10$ ,  $\tilde{a}_3(0) = 8$ ,  $\tilde{\beta}(0) = 0.01$  und  $\dot{\tilde{a}}_1(0) = 0.02$ .

schrieben werden. In den Arbeiten von Kokkotas und Schäfer [52] und Lai und Ho [42] wurde die Dynamik und Gravitationsstrahlung von Binärsystemen nicht-rotierender Neutronensterne in führender Ordnung untersucht. In ihrem Zugang waren die durch Gezeitenwechselwirkung angeregten stellaren Oszillationen kleine Störungen des Gleichgewichtszustands. Die daraus folgende Linearisierung der hydrodynamischen Gleichungen führt auf ein diskretes Spektrum von Eigenmoden. In beiden Arbeiten wurde jedoch davon ausgegangen, dass die Sterne keine Eigenrotation aufweisen und damit exakt kugelförmig sind.

Nicht-rotierende Sterne sind aber eher die Ausnahme. Die Rotationsdeformation führt zu einer Abweichung von der Kugelsymmetrie – ein Umstand, dem das Modell „Riemann-S Ellipsoid“ Rechnung trägt. Dieses erstmals von Carter und Luminet verwendete Modell besitzt nur eine einzige Schwingungsmode, fordert aber nicht, dass deren Amplitude klein sein muss und geht damit in dieser Hinsicht über die Beschränkungen der adiabatischen Störungstheorie hinaus<sup>19</sup>. Die Oszillation der  $a_1$ -Achse eines Riemann-S Ellipsoids wird in Abb. 3.4.5 dargestellt.

Riemann-S Binärsysteme können unter bestimmten Bedingungen als Modell für Binärsysteme von Neutronensternen oder Weißen Zwergen dienen. Wie bereits erwähnt, besitzen Riemann-S Ellipsoide nur eine einzige Schwingungsmode, die ungefähr der  $f$ -Mode im Rahmen einer adiabatischen Störungstheorie entspricht. In gewisser Weise modellieren also Riemann-S Binärsysteme Systeme, in denen alle höheren

<sup>19</sup>Die Schwingungsmode des Riemann-S Ellipsoids entspricht in etwa der  $f$ -Mode der linearen, adiabatischen Störungstheorie



Eigenmoden unterdrückt sind. Damit wird zugleich auch eine entscheidende Einschränkung des hier vorgestellten Modells deutlich: es versagt, wenn ein Großteil der Oszillationsenergie in höheren Eigenmoden gespeichert ist. Andererseits zeigen Untersuchungen im Rahmen der adiabatischen Störungstheorie, dass die  $f$ -Mode der Hauptträger der Oszillationsenergie ist, wenn der Relativabstand nicht zu groß, aber auch nicht zu klein ist. In diesem Bereich liefert das Modell „Riemann-S Binärsystem“ eine gute Beschreibung der Dynamik und des Strahlungsfeldes von NS-NS Binärsystemen. Sein Vorteil liegt in der mathematischen Einfachheit der zu lösenden Differentialgleichungen – insbesondere dann, wenn die Langzeitentwicklung von NS-NS Binärsystemen untersucht werden soll. Dabei geht es vor allem um die Frage, ob und in welchem Umfang die Zustandsgleichungen die Gravitationsstrahlung des Systems beeinflussen.

In der Literatur wird die Annahme punktförmiger Objekte als Bestandteile kompakter Binärsysteme oft damit begründet, dass die Zustandsgleichung der stellaren Materie im Gültigkeitsbereich der post-Newtonschen Approximation keinen Einfluss auf die Form der Gravitationswellen besitzt (siehe z.B. [56]). Während das für BH-BH Systeme durchaus zutrifft, ist die Argumentation für Binärsysteme von Neutronensternen oder Weißen Zwergen schwieriger. Da die Kopplung der Bahnbewegung an innere Freiheitsgrade der Rotation und Oszillation bereits auf Newtonscher Ebene kleine, aber dennoch existente Störungen der Bahnbewegung verursacht, können innere Freiheitsgrade nach Meinung der Autorin nur vernachlässigt werden, wenn lediglich wenige Orbitalperioden betrachtet werden. Im Laufe vieler Umläufe zeigt sich in den Templates im Vergleich zum Punktteilchen-Modell eine zunehmende Phasenverschiebung. Diese ist abhängig von der Rotationsgeschwindigkeit der Sterne und von den stellaren Zustandsgleichungen.

In den numerischen Rechnungen dieser Arbeit wurden axialsymmetrische Riemann-S Ellipsoide angenommen, da sie bereits wesentliche Eigenschaften von Systemen triaxialer Riemann-S Ellipsoide aufweisen, mathematisch jedoch bedeutend einfacher zu handhaben sind. Die Bewegungsgleichungen (3.72) sind mit zwei Ausnahmen für beliebige Polytropenindizes gültig. Im Grenzfall inkompressibler Flüssigkeiten ( $n=0$ ) muss Gl. (3.71) durch

$$\frac{5k_1}{n\kappa_n} \frac{P_c}{\rho_c} = 2 \frac{P_c}{\rho_c} \quad (3.82)$$

ersetzt werden<sup>20</sup>. Im relativistischen Limes ( $n \rightarrow 3$  bzw.  $\Gamma \rightarrow 4/3$ ) hingegen wird die numerische Integration instabil. Zudem ist die in Gl. (3.74) angegebene Beziehung zwischen dem Gleichgewichtsradius einer nicht-rotierenden, polytropen Flüssigkeit und dem gemittelten „Radius“  $R$  einer entsprechenden rotierenden Konfiguration für  $n = 3$  singular.

In Abb. B.2 wird die Entwicklung des Orbits für ein leicht elliptisches ( $e_0 = 0.4$ ) Binärsystem gleicher Massen in Abhängigkeit vom Polytropenindex  $n'$  dargestellt. Wie erwartet kommt es aufgrund der Gezeitenkopplung bereits auf Newtonscher Ebene zu einer Periastrondrehung, die umso stärker wird, je kleiner  $n'$  ist, d.h. je weniger „zentriert“ der Stern ist. Auch der Einspiralprozess wird von den Zustandsgleichungen, speziell vom Polytropenindex, beeinflusst. Bei festem  $n$  führen kleinere Werte von  $n'$  (d.h. größere  $\Gamma'$ -Werte) zu einem schnelleren Einspiralen. In Abb. B.2 ist deutlich zu sehen, dass der Einfluss der Zustandsgleichung selbst für moderate Relativabstände nicht vernachlässigt werden darf, wenn man an einer korrekten Langzeitentwicklung des Systems interessiert ist. Für Kreisbahnen macht sich die durch Gezeitenwechselwirkung induzierte Modifikation des Gravitationswellenfeldes am stärksten in der  $\ddot{I}^{20}$ -Komponente bemerkbar, aber auch in der 22-Komponente ist eine signifikante Phasenverschiebung bei unterschiedlichen  $n'$  erkennbar (siehe Abb. B.7). In der 20-Komponente sieht man den Einfluss der Gezeitenkopplung am deutlichsten, denn diese Komponente würde bei einem Punktteilchen-Binärsystem für Kreisbahnen verschwinden, während in einem Binärsystem mit Gezeitenkopplung selbst für  $e_0 = 0$  eine nicht-triviale Amplitude von  $\ddot{I}^{20}$  auftritt.

Abb. B.6 zeigt, dass unterschiedliche Zustandsgleichungen sich auch bei größeren Relativabständen nach einigen Dutzend Umläufen in Form von Phasenverschiebungen deutlich bemerkbar machen. Man kann also festhalten, dass die durch Gezeitenkopplung induzierte Phasenverschiebung der Gravitationswellen umso größer ist, je kleiner der Polytropenindex ist, d.h. je weniger kondensiert die Sterne sind. Den größten Einfluss würde man daher im Limes inkompressibler Flüssigkeiten ( $n=0$ ) erwarten. Ob und wenn ja inwieweit sich diese Ergebnisse auch dann bestätigen, wenn post-Newtonsche Korrekturen der Bahnbewegung berücksichtigt werden, müssen weitere, zur Zeit noch nicht abgeschlossene Untersuchungen zeigen.

---

<sup>20</sup>Eine explizite Beziehung zwischen  $P_c/\rho_c$  und den stellaren Freiheitsgraden ist in [55] angegeben.

# Kapitel 4

## Post-Newtonsche Dynamik und Gravitationsstrahlung kompakter Binärsysteme mit Spin

### 4.1 Einleitung

In den vorangegangenen Kapiteln wurden Dynamik und Strahlungsfeld der vorgestellten Binärsysteme nur in führender Ordnung berechnet und als einzige post-Newtonsche Korrektur die Strahlungsdämpfung in der 2.5 pN-Ordnung berücksichtigt. Bei diesen Untersuchungen können grundlegende Erscheinungen kompakter Binärsysteme ausgedehnter Objekte analysiert werden, doch für die Erstellung hochgenauer Templates reicht es bei weitem nicht aus, lediglich die führende Ordnung zu betrachten. Zudem ist bekannt, dass die Newtonsche Theorie in jener Phase des Einspiralvorgangs, die mit heutigen, erdgebundenen Detektoren erfasst werden kann, keine Gültigkeit mehr besitzt. In diesem Bereich ist die Mitnahme post-Newtonscher Korrekturen zweiter oder dritter Ordnung essentiell, um die Dynamik mit hinreichender Genauigkeit zu verfolgen.

Die Untersuchung der post-Newtonschen Dynamik kompakter Binärsysteme beschränkte sich bisher meist Binärsysteme Schwarzer Löcher. Die endliche Ausdehnung kompakter Sterne wurde vernachlässigt, Störungen der Bahnbewegung aufgrund von Rotationsabplattung und Gezeitenwechselwirkung wurden als irrelevant angesehen. Betrachtet man nur den Einfluss der Rotationsdeformation, so zeigt eine unter Berücksichtigung der 2.5pN-Strahlungsdämpfung auf der Grundlage der Newtonschen Theorie durchgeführte Abschätzung, dass die durch die Abplattung eines rotierenden Neutronensterns in einem NS-NS oder NS-BH System hervorgerufenen

Störungen selbst für den Fall maximaler Rotation sehr klein sind (vgl. z.B. [12]). Dabei wird jedoch übersehen, dass diese Störungen durchaus die Größenordnung der ersten post-Newtonschen Korrekturterme erreichen können. So wächst erst in letzter Zeit, bedingt vor allem durch Fortschritte auf dem Gebiet der Numerischen Relativitätstheorie, das Interesse an der Berücksichtigung stellarer Freiheitsgrade bei der Untersuchung kompakter Binärsysteme.

Außerhalb der Numerischen Relativitätstheorie wurde die Dynamik in den meisten bisherigen Arbeiten, die stellare Freiheitsgrade innerhalb kompakter Binärsysteme zuließen, nur in führender Ordnung betrachtet. Als einzige post-Newtonsche Korrektur wurde die 2.5pN Strahlungsdämpfung berücksichtigt (vgl. z.B. [52], [42], [56]). In diesem Kapitel steht der Einfluss der Rotationsdeformation auf die Bahnbewegung und damit auf das Gravitationsstrahlungsfeld jenseits der führenden Ordnung im Zentrum des Interesses. Ausgangspunkt der Überlegungen ist die Arbeit von N. Wex, dem es gelang, eine quasi-Keplersche Lösung für ein Binärsystem aus rotierendem Hauptreihenstern und kompaktem Objekt herzuleiten [86]. Während Wex sich jedoch auf die Newtonsche Ebene beschränkte, werden in diesem Kapitel post-Newtonsche Korrekturen erster Ordnung zur Bahnbewegung berücksichtigt. Konsequenterweise werden dann auch bei der Berechnung des Strahlungsfeldes höhere Multipolbeiträge mitgenommen. Vorausgesetzt wird dabei, dass der Hauptbeitrag der Newtonschen Störungen durch die Rotation einer Komponente des Binärsystems verursacht wird. Unter der Annahme, dass diese Störungen von derselben Größenordnung wie die 1pN-Korrekturen zur Bahnbewegung sind, wird eine 1pN-exakte, quasi-Keplersche Lösung hergeleitet, die bis zur linearen Ordnung im Deformationsparameter  $q$  gültig ist. Im nächsten Schritt wird der Übergang zum Hamiltonschen Formalismus vollzogen. Ein zeitabhängiger Anteil der Hamiltonfunktion berücksichtigt dabei die Strahlungsdämpfung. Schließlich werden die zur Berechnung des Strahlungsfeldes jenseits der führenden Ordnung benötigten zeitlichen Ableitungen der Strom- und Massenmultipolmomente angegeben. Die Polarisationszustände  $h_+$  und  $h_\times$  werden sowohl in Abhängigkeit von den generalisierten Koordinaten und Geschwindigkeiten als auch in Abhängigkeit von den generalisierten Koordinaten und Impulsen berechnet.

## 4.2 Astrophysikalische Relevanz der Quadrupol- kopplung

Bei der Behandlung kompakter Binärsysteme im Rahmen post-Newtonscher Näherungen wird oftmals von der Punktförmigkeit der kompakten Objekte ausgegangen, selbst wenn diese einen Spin besitzen. Streng genommen gibt es jedoch gar keine rotierenden Punktteilchen, da der Eigendrehimpuls eines massenbehafteten Objekts immer eine Mindestausdehnung senkrecht zur Spinachse induziert (vgl. u.a. [73]). Allgemein hat man es daher im Fall rotierender Sterne immer mit einer Rotationsabplattung zu tun. Das nicht-verschwindende Quadrupolmoment des deformierten Sterns koppelt an die Bahnbewegung und führt zu einer nicht-relativistischen Apsidenbewegung.

H. Russell erkannte als erster, dass die Größe der Apsidendrehung Rückschlüsse auf die Dichteverteilung innerhalb des rotierenden Sterns zulässt [71]. Seine Arbeiten wurden u.a. von Cowling aufgegriffen und entscheidend erweitert [23]. Die auf dieser Grundlage gewonnenen theoretischen Vorhersagen konnten in den letzten Jahrzehnten an einer Reihe enger Binärsysteme von Hauptreihensternen durch Beobachtungen bestätigt werden<sup>1</sup>. Dabei zeigte sich, dass der Beitrag von Rotationsdeformation und Gezeitenkopplung an der gesamten Apsidenbewegung  $\Delta\varphi_{tot}$  in diesen Fällen mindestens genauso groß, meist aber bedeutend größer ist als die relativistische Periastrondrehung.

Die Binärsysteme in den oben genannten Beispielen bestanden aus zwei Hauptreihensternen. Für uns interessanter sind jedoch Binärpulsare, d.h. Systeme, die aus einem Pulsar und einem begleitenden Hauptreihenstern bestehen – zum Beispiel PSR 1259-63 mit einem Be-Stern als Begleiter [47], oder PSR J0045-7319. Wie Lai *et al.* zeigten, sind die durch Rotationsdeformation des Hauptreihensterns induzierten Störungen der Bahnbewegung in beiden Systemen deutlich größer als die relativistische Periastrondrehung<sup>2</sup> [57].

Die für heutige Gravitationswellendetektoren als Quellen in Frage kommenden Binärsysteme bestehen aus zwei kompakten Objekten, d.h. aus Schwarzen Löchern, Neutronensternen oder Weißen Zwergen. Die Rotationsabplattung ist in diesen Fällen wesentlich weniger ausgeprägt als bei Sternen mit „weicher“ Zustandsgleichung. In der Tat konnten Cutler und Bildsten zeigen, dass die aufgrund der Rotationsabplattung eines mit maximaler Winkelgeschwindigkeit rotierenden Neutronensterns

---

<sup>1</sup>Siehe dazu zum Beispiel [3], [4], [2], [93]. Für eine aktuelle Übersicht siehe Claret und Willems [22].

<sup>2</sup>Vgl. dazu auch [86].

in einem NS-NS-System während des beobachtungsrelevanten Abschnitts des Einspiralprozesses<sup>3</sup> auftretende Phasenverschiebung nur etwa  $2\pi$  beträgt [12]. Dennoch, und dies sei hier nochmals betont, darf dieser Beitrag bei der Erstellung hochgenauer Templates nicht vernachlässigt werden.

Mit der Inbetriebnahme des LISA-Detektors wird sich der der Beobachtung zugängliche Frequenzbereich in den niederfrequenten Bereich bis hinab zu etwa  $10^{-4}$ Hz erweitern. Damit rückt eine neue Klasse von Quellen ins Blickfeld des Interesses: galaktische Binärsysteme Weißer Zwerge. Wie Wiseman *et al.* in zwei kürzlich erschienenen Artikeln argumentieren, ist es durchaus möglich, dass neben WD-Binärsystemen mit kreisförmigem Orbit auch exzentrische WD-WD Binärsysteme existieren [91], [92]. Letztere könnten sich durch gravitative Wechselwirkung in globularen Clustern bilden. In derartigen Systemen wären die durch Rotationsdeformation und Gezeitenwechselwirkung induzierten Beiträge zur Periastrondrehung in dem für LISA relevanten Frequenzbereich z.T. sogar viel größer als die relativistische Periastrondrehung. Bei der Auswertung der LISA-Daten würde ihre Vernachlässigung zu einer Überschätzung der beteiligten stellaren Massen führen. Mehr noch, WD-WD Systeme könnten sogar fälschlicherweise als NS-NS Systeme interpretiert werden [92].

### 4.3 Eine 1pN-exakte quasi-Keplersche Lösung unter Berücksichtigung der Quadrupolkopplung

Im Jahre 1985 gelang es Damour und Deruelle, eine 1pN-exakte Lösung für ein Binärsystem zweier Punktmassen anzugeben [28]. Wichtig bei der Herleitung dieser aufgrund ihrer bemerkenswerten Ähnlichkeit mit der bekannten Kepler-Parametrisierung als quasi-Keplersche Lösung bezeichneten Form ist, dass die post-Newtonschen Terme lediglich kleine Korrekturen zu den Newtonschen Gleichungen darstellen.

Auch die Kopplung des nicht-verschwindenden stellaren Quadrupolmoments an die Bahnbewegung liefert nur kleine Korrekturen zu den Newtonschen Bewegungsgleichungen des Punktteilchensystems. In der Tat lässt sich die von Damour und Deruelle entwickelte Strategie auf die Konstruktion einer quasi-Keplerschen Lösung für ein Newtonsches Binärsystem aus Pulsar und rotierendem Hauptreihenstern anwenden [86]. Die auf diese Weise von Wex gefundene Lösung ist bis zur linearen Ordnung

---

<sup>3</sup>Gemeint ist hier jenes Stadium, in dem die Orbitalfrequenz des Systems von ca. 10 auf ca. 1000 Hz ansteigt.

des Deformationsparameters  $q$  exakt. Der als [9]

$$mq := \frac{1}{2} \int dV' \rho(\mathbf{r}') [r'^2 - 3(\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{r}')^2] = \Delta I \quad (4.1)$$

definierte Parameter  $q$  ist ein Maß für die Rotationsabplattung des Sterns und direkt proportional zur Differenz  $\Delta I$  der Trägheitsmomente parallel und senkrecht zur Spin-Achse. Für starr rotierende Flüssigkeiten gilt (vgl. z.B. [57])

$$q = \frac{2}{3} k R^2 \hat{\Omega}^2, \quad \hat{\Omega} = \frac{\Omega}{\sqrt{Gm/R^3}}, \quad (4.2)$$

wobei  $k$  die Konstante der Apsidenbewegung ist. Mit  $R, \Omega$  und  $m$  werden der polare Radius, die Masse des Sterns und seine Winkelgeschwindigkeit bezeichnet. Die Konstante der Apsidenbewegung hängt stark von der Dichteverteilung innerhalb des rotierenden Sterns ab: Insbesondere verschwindet sie für punktförmige Massen, während sie bei einer starr rotierenden, homogenen Kugel ihren maximalen Wert  $k_{max} = 0.75$  annimmt.

Für unsere Zwecke sind vor allem polytrope Zustandsgleichungen interessant, da Neutronensterne und Weiße Zwerge zumindest näherungsweise durch polytrope Zustandsgleichungen mit Index  $n = 0.5 \dots 1$  (NS) bzw.  $n \approx 1.5$  (WD) beschrieben werden können. Die Konstante der Apsidenbewegung lässt sich in diesem Fall durch

$$k = \frac{1}{2} (\Delta_2(n) - 1)$$

ausdrücken, mit der von Chandrasekhar definierten, vom Polytropenindex abhängigen Funktion  $\Delta_2(n)$  [20].

Die Kopplung des nicht-verschwindenden Quadrupolmoments an die Bahnbewegung wird im Hamiltonschen Formalismus durch [8], [9]

$$H_{q_i} = \frac{G\mathcal{M}\mu q_i}{2r^3} \left[ \frac{3(\hat{\mathbf{s}}_i \cdot \mathbf{r})^2}{r^2} - 1 \right], \quad i = 1, 2 \quad (4.3)$$

beschrieben<sup>4</sup>. Hierbei ist  $\hat{\mathbf{s}}_i$  der Spin-Einheitsvektor des  $i$ -ten Sterns und  $q_i$  dessen Quadrupolmoment<sup>5</sup>.

Im Allgemeinen ist die Spinrichtung keine Erhaltungsgröße, so dass die Bahnebene

---

<sup>4</sup>Das verwendete Koordinatensystem ist hier wieder das Schwerpunktsystem, d.h.  $r$  bezeichnet den Relativabstand,  $\mathcal{M}$  die Gesamtmasse und  $\mu$  die reduzierte Masse.

<sup>5</sup>Im folgenden soll angenommen werden, dass nur eine Komponente des Binärsystems rotiert, so dass der Index  $i$  weggelassen werden kann.

eine Präzessionsbewegung ausführt<sup>6</sup>. Nur wenn der Spin parallel zum Bahndrehimpuls und damit senkrecht zur Bahnebene orientiert ist, bleibt seine Richtung erhalten. Dieser Fall entspricht gerade dem Zustand niedrigster Energie, den Binärsysteme bekanntlich anstreben. Daher soll im folgenden stets davon ausgegangen werden, dass  $\hat{s}$  senkrecht zur Bahnebene steht. Die Hamiltonfunktion (4.3) vereinfacht sich dann zu

$$H_q = -\frac{GM\mu q}{2r^3}. \quad (4.4)$$

Weiterhin wird angenommen, dass der von  $H_q$  gelieferte Beitrag zu den Bewegungsgleichungen in der Größenordnung der 1pN-Bahnkorrekturen liegt. Um diese Annahme zu motivieren, betrachten wir ein kompaktes Binärsystem mit kreisförmigem Orbit mit Radius  $r_0$ . Vernachlässigt man die  $q$ -Kopplung, so ist die reduzierte Bahnenergie<sup>7</sup> des Systems in erster post-Newtonscher Näherung

$$E_{orb} = -\frac{GM}{2r_0} + \frac{7-\nu}{8} \frac{G^2 M^2}{r_0^2 c^2} \equiv E_N + E_{pN}.$$

Ein Vergleich der post-Newtonschen Korrektur zur Bahnenergie  $E'_{pN}$  mit dem Beitrag der  $q$ -Kopplung  $E'_q$  zeigt, dass beide für

$$\frac{q}{r_0} \approx \frac{GM}{c^2} \equiv r_S.$$

von derselben Größenordnung sind. Ist das Verhältnis  $q/r_0$  wesentlich größer als  $r_S$ , so dominiert die Quadrupolkopplung, ist umgekehrt  $q/r_0 \ll r_S$ , werden die Störungen der Keplerschen Bahnbewegung hauptsächlich von relativistischen Korrekturen verursacht.

Welche Werte kann der Parameter  $q$  überhaupt annehmen? Wie wir gesehen haben, hängt  $q$  von der Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$  des rotierenden Sterns und (über die Konstante  $k$ ) von dessen Dichteverteilung ab. Die Winkelgeschwindigkeit aber kann nicht beliebig groß werden ohne dass der Stern zerreißt. Im Rahmen der Newtonschen Theorie ist der maximale Wert  $\Omega_{max}$  gerade die Winkelgeschwindigkeit, bei der ein am Äquator befindliches Massenelement Fluchtgeschwindigkeit erreicht. Für einen polytropen Stern der Masse  $m$  kann man zeigen, dass dieser Maximalwert

---

<sup>6</sup>Das folgt aus der ab der 1.5pN-Ordnung auftretenden Spin-Bahn-Kopplung.

<sup>7</sup>In diesem Abschnitt werden durchgängig reduzierte Größen verwendet, sowohl für die Energie als auch für den Bahndrehimpuls. Explizit ist  $E := E'/\mu$  und  $J := J'/\mu$ . Man beachte, dass  $E' = H$ .



durch

$$\Omega_{max} = \left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} \sqrt{\frac{Gm}{R^3}}, \quad R \dots \text{polarer Radius}$$

gegeben ist [77]. Damit wird der Parameter  $q$  für polytrophe Sterne durch

$$q_{max} = \frac{2}{3} k R^2 \hat{\Omega}_{max}^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^4 k R^2$$

begrenzt. Betrachten wir als Beispiel das Modell eines rotierenden Neutronensterns mit Polytropenindex  $n = 1$  und einem polaren Radius von  $R = 10$  km. Maximal zulässige Winkelgeschwindigkeit führt in einem solchen Fall auf  $q_{max} = 5.1 \text{ km}^2$ . Für einen Weißen Zwerg mit  $n = 1.5$  und einem Radius von 1000 km hingegen ist  $q_{max}$  wesentlich größer, nämlich  $q_{max} = 28563 \text{ km}^2$  (vgl. [39]). Die Begrenzung des Parameters  $q$  bleibt nicht ohne Folgen für die Größe der durch Rotationsdeformation induzierten Periastrondrehung. Wie gezeigt wurde, ist  $\Delta\varphi_{rot}$  von der Größenordnung der relativistischen Periastrondrehung, wenn  $q/r_0 \approx GM/c^2$  ist. Der Relativabstand kann aber nicht beliebig klein werden, da die post-Newtonsche Näherung nur außerhalb der letzten stabilen Kreisbahn anwendbar ist. Außerdem soll kein Massenübertrag stattfinden, und auch diese Bedingung gibt eine untere Grenze für den Relativabstand der Komponenten des Binärsystems vor<sup>8</sup>. Zusammengefasst zeigt sich daher, dass für enge NS-BH und NS-NS Binärsysteme der Beitrag der  $q$ -Kopplung selbst bei maximaler Rotation mindestens um den Faktor 100 kleiner ist als die erste relativistische Korrektur zur Bahnbewegung. Andererseits kann dieser Beitrag aber wesentlich größer als die nächstfolgenden post-Newtonschen Korrekturen sein. Im Falle von WD-WD Binärsystemen liefert der Beitrag der  $q$ -Kopplung unter Umständen sogar die dominierende Korrektur zur Bahnbewegung (vgl. auch [92]).

Diese Vorüberlegungen zeigen, dass es enge Binärsysteme geben kann, in denen die durch die Rotationsdeformation induzierte Periastrondrehung  $\Delta\varphi_{rot}$  von derselben Größenordnung wie die relativistische Periastrondrehung ist. Damit wird die Annahme gerechtfertigt, dass der  $q$ -Term in den Bewegungsgleichungen formal von der Größenordnung  $O(c^{-2})$  ist. Das wird bei der Herleitung der quasi-Keplerschen Lösung von entscheidender Bedeutung sein.

Um die quasi-Keplersche Lösung für ein Binärsystem mit  $q$ -Kopplung zu bestimmen,

---

<sup>8</sup>Ist sie nicht erfüllt, müssen die vollständigen Gleichungen der Hydrodynamik gelöst werden, um die Dynamik des Binärsystems zu beschreiben.

gehen wir von der erhaltenen Gesamtenergie des Systems aus. Nach Einführung der reduzierten Energie  $E := E'/\mu$  und des reduzierten Bahndrehimpulses  $J = J'/\mu$  lautet die Gesamtenergie des Binärsystems in erster post-Newtonscher Approximation

$$E = \frac{v^2}{2} - \frac{GM}{r} \left[ 1 + \frac{q}{2r^2} \right] + \frac{1}{c^2} \left[ \frac{3}{8}(1 - 3\nu)v^4 + \frac{GM}{2r} \left\{ (3 + \nu)v^2 + \nu\dot{r}^2 + \frac{GM}{r} \right\} \right]. \quad (4.5)$$

Laut Voraussetzung ist der Spin parallel zum Bahndrehimpuls ausgerichtet, so dass die Orbitalebene erhalten bleibt. Es liegt daher nahe, in der üblichen Weise Polarkoordinaten  $r$  und  $\varphi$  einzuführen. Durch Einsetzen von  $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$  in Gl. (4.5) findet man die 1pN-exakten Bewegungsgleichungen für  $r$  und  $\varphi$  in der Form

$$\dot{r}^2 := A + \frac{2B}{r} + \frac{C}{r^2} + \frac{D}{r^3}, \quad (4.6)$$

$$\dot{\varphi} := \frac{J}{r^2} \left[ 1 - (1 - 3\nu)\frac{E}{c^2} - \frac{GM}{rc^2}(4 - 2\nu) \right]. \quad (4.7)$$

Die Konstanten  $A, B, C$  und  $D$  sind dabei durch

$$\begin{aligned} A &= 2E \left[ 1 + \frac{3}{2}(3\nu - 1)\frac{E}{c^2} \right], \\ B &= GM \left[ 1 + (7\nu - 6)\frac{E}{c^2} \right], \\ C &= -J^2 + \frac{1}{c^2} [2(1 - 3\nu)J^2E + 5(\nu - 2)G^2M^2], \\ D &= GMJ^2 \left[ \frac{q}{J^2} + \frac{8 - 3\nu}{c^2} \right]. \end{aligned} \quad (4.8)$$

gegeben. Damour und Deruelle lösten dieses Gleichungssystem für Binärsysteme ohne Spin, d.h. für  $q = 0$ . Dann ist  $D$  von der Ordnung  $O(c^{-2})$ , d.h. der entsprechende Term in Gl. (4.6) stellt nur eine kleine Korrektur zur bekannten Keplergleichung dar. In unserem Fall hängt  $D$  zusätzlich noch von  $q$  ab. Gemäß der obigen Annahme ist aber  $\delta := q/J^2 \sim c^{-2}$ , so dass wir den Lösungsweg von Damour und Deruelle anwenden können. Die so gefundene quasi-Keplersche Lösung

$$r = a_r(1 - e_r \cos u), \quad u - e_t \sin u = n(t - t_0), \quad (4.9)$$

$$\varphi = 2(\kappa + 1)\arctan \left[ \sqrt{\frac{1 + e_\varphi}{1 - e_\varphi}} \tan \frac{u}{2} \right] \quad (4.10)$$

ist bis zur ersten Ordnung in  $q$  exakt. Die in Anlehnung an die bekannte Keplerlösung eingeführten Konstanten  $n, a_r, e_r, e_t$  und  $e_\varphi$  sind dabei definiert als

$$a_r = -\frac{B}{A} - \frac{C}{2J^2}, \quad e_\varphi = e_t \left[ 1 - \frac{2A}{B} \left( (\nu - 2) \frac{GM}{c^2} + \frac{D}{2J^2} \right) \right], \quad (4.11)$$

$$e_r = e_t \left[ 1 - \frac{DA}{2BJ^2} \right], \quad e_t = \sqrt{1 - \frac{A}{B^2} \left[ C + \frac{BD}{J^2} \right]} \quad (4.12)$$

und  $n = \sqrt{-A^3/B^2}$ , während die post-Newtonsche Größe  $\kappa$  durch

$$\kappa = \frac{3G^2\mathcal{M}^2}{J^2} \left[ \frac{1}{c^2} + \frac{q}{2J^2} \right] \quad (4.13)$$

gegeben ist. Häufig ist es jedoch zweckmäßiger, die große Halbachse  $a_r$  und die Exzentrizitäten  $e_r, e_\varphi, e_t$  in Abhängigkeit von  $\delta = q/J^2$  und der 1pN-Energie anzugeben. In diesem Fall ist

$$\begin{aligned} a_r &= -\frac{GM}{2E} - \frac{GM}{2}\delta + \frac{GM}{4c^2}(\nu - 7), \\ e_t &= e_r \left[ 1 + E \left\{ \delta + \frac{8 - 3\nu}{c^2} \right\} \right], \\ e_\varphi &= e_r \left[ 1 - E \left\{ \delta + \frac{\nu}{c^2} \right\} \right], \\ n^2 &= -\frac{8E^3}{G^2\mathcal{M}^2} \left[ 1 - (\nu - 15) \frac{E}{2c^2} \right]. \end{aligned} \quad (4.14)$$

## 4.4 2.5pN Strahlungsrückwirkung im Hamiltonschen Formalismus

Prinzipiell kann der Energieverlust aufgrund der Abstrahlung von Gravitationswellen auf verschiedenen Wegen berücksichtigt werden. Eine Möglichkeit ist es, die Emission von Gravitationsstrahlung als säkularen Effekt aufzufassen und die Bewegungsgleichungen unverändert zu lassen. Bei dem hier verwendeten Zugang hingegen finden die erstmals in 2.5pN-Ordnung auftretenden Strahlungsrückwirkungsterme direkt Eingang in die dynamischen Gleichungen. Wir betrachten dazu das System zunächst auf der Ebene der ersten post-Newtonschen Approximation und fügen in einem zweiten Schritt einen zeitabhängigen Hamiltonian hinzu, der die Abstrahlung

in führender Ordnung beschreibt<sup>9</sup>.

Im Schwerpunktsystem ist der 1pN-exakte Hamiltonian durch<sup>10</sup>

$$H = \frac{1}{2\mu} \left[ p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} \right] - \frac{G\mathcal{M}\mu}{r} \left[ 1 + \frac{q}{2r^2} \right] \quad (4.15)$$

$$+ \frac{1}{c^2} \left[ \frac{3\nu - 1}{8\mu^3} \left( p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} \right)^2 - \frac{G\mathcal{M}}{2r} \left( (3 + 2\nu) \frac{p_r^2}{\mu} + (3 + \nu) \frac{p_\varphi^2}{\mu r^2} \right) + \frac{G^2 \mathcal{M}^2 \mu}{2r^2} \right]. \quad (4.16)$$

gegeben. Die zweite post-Newtonsche Ordnung bringt keine wesentlichen, neuen Effekte ins Spiel und wird daher hier nicht berücksichtigt. Neu hingegen ist der ab der 2.5pN-Ordnung erstmals auftretende, durch die Strahlungsrückwirkung verursachte Energieverlust. Dieser kann, wie bereits erwähnt, durch eine zeitabhängige Hamiltonfunktion  $H_{\text{reac}}(t)$  beschrieben werden, die für eine beliebige Materieverteilung in führender Ordnung die folgende Form annimmt: [74]:

$$H_{\text{reac}}(t) = \frac{2G}{5c^5} \mathcal{I}_{ij}^{(3)}(t) \int dV \left[ \frac{\pi_i \pi_j}{\rho} + \frac{1}{4\pi G} \partial_i U \partial_j U \right]. \quad (4.17)$$

Dabei ist  $\mathcal{I}_{ij}$  der symmetrisch-spurfreie Massenquadrupoltenor der Materiedistribution, mit  $\pi_i$  und  $\rho$  werden Impulsdichte und Dichte bezeichnet, und das Gravitationspotential  $U$  genügt der Poissongleichung mit Quellterm  $\rho$ . Da wir die Strahlungsdämpfung nur in führender Ordnung in den Bewegungsgleichungen berücksichtigen wollen, können wir bei der Berechnung von  $H_{\text{reac}}(t)$  von einem System zweier Massenpunkte ausgehen. Im Schwerpunktsystem finden wir

$$H_{\text{reac}}(t) = \frac{2G}{5c^5} \mathcal{I}_{ij}^{(3)}(t) \left[ \frac{p_i p_j}{\mu} - G\mathcal{M}\mu \frac{x^i x^j}{r^3} \right]. \quad (4.18)$$

Entscheidend bei der Bestimmung der dissipativen Anteile der Bewegungsgleichungen im Sinne der Hamiltonschen Bewegungsgleichungen

$$(\dot{p}_i)_{\text{reac}} = -\frac{\partial H_{\text{reac}}}{\partial q^i}, \quad (\dot{q}_i)_{\text{reac}} = \frac{\partial H_{\text{reac}}}{\partial p_i}$$

ist es,  $\mathcal{I}_{ij}^{(3)}(t)$  erst *nach* der partiellen Ableitung als Funktion der generalisierten Koordinaten und Impulse  $q^i$  und  $p_i$  aufzufassen. Man findet auf diese Weise [52],

<sup>9</sup>Dabei vernachlässigen wir Terme der Ordnung  $O(c^{-3})$  und  $O(c^{-4})$ , da es sich bei ihnen ebenfalls um konservative Beiträge handelt.

<sup>10</sup>Dabei ist  $H_{1pN} = E' = \mu E$ .

[39]

$$\begin{aligned} (\dot{p}_r)_{\text{reac}} &= \frac{8}{3} \frac{G^2 p_r}{r^4 c^5} \left[ \frac{GM^3 \nu}{5} - \frac{p_\varphi^2}{\nu r} \right], & (\dot{p}_\varphi)_{\text{reac}} &= -\frac{8}{5} \frac{G^2 p_\varphi}{\nu r^3 c^5} \left[ \frac{2GM^3 \nu^2}{r} + 2 \frac{p_\varphi^2}{r^2} - p_r^2 \right], \\ (\dot{r})_{\text{reac}} &= -\frac{8}{15} \frac{G^2}{\nu r^2 c^5} \left[ 2p_r^2 + 6 \frac{p_\varphi^2}{r^2} \right], & (\dot{\varphi})_{\text{reac}} &= -\frac{8}{3} \frac{G^2 p_r p_\varphi}{\nu r^4 c^5}. \end{aligned}$$

Wie in den vorangegangenen Kapiteln führen wir für numerische Rechnungen skalierte Variablen

$$p_r =: \mu c \tilde{p}_r, \quad p_\varphi =: \frac{GM\mu}{c} \tilde{p}_\varphi, \quad r =: \frac{GM}{c^2} \tilde{r}, \quad H =: \mu c^2 \tilde{H}, \quad q =: \frac{G^2 M^2}{c^4} \tilde{q}$$

ein, in denen  $G = c = 1$  gilt. Damit erhalten wir

$$\dot{\tilde{r}} = \tilde{p}_r \left[ 1 + \frac{3\nu - 1}{2} \left\{ \tilde{p}_r^2 + \frac{\tilde{p}_\varphi^2}{\tilde{r}^2} \right\} - \frac{3 + 2\nu}{\tilde{r}} \right] - \frac{16}{15} \frac{\nu}{\tilde{r}^2} \left[ \tilde{p}_r^2 + 3 \frac{\tilde{p}_\varphi^2}{\tilde{r}^2} \right], \quad (4.19)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\tilde{p}_\varphi}{\tilde{r}^2} \left[ 1 + \frac{3\nu - 1}{2} \left\{ \tilde{p}_r^2 + \frac{\tilde{p}_\varphi^2}{\tilde{r}^2} \right\} - \frac{3 + \nu}{\tilde{r}} \right] - \frac{8\nu}{3} \frac{\tilde{p}_r \tilde{p}_\varphi}{\tilde{r}^4}, \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{p}}_r &= \frac{\tilde{p}_\varphi^2}{\tilde{r}^3} - \frac{1}{\tilde{r}^2} \left[ 1 + \frac{3\tilde{q}}{2\tilde{r}^2} \right] + \frac{3\nu - 1}{2} \frac{\tilde{p}_\varphi^2}{\tilde{r}^3} \left[ \tilde{p}_r^2 + \frac{\tilde{p}_\varphi^2}{\tilde{r}^2} \right] - \frac{3 + 2\nu}{2\tilde{r}^2} \tilde{p}_r^2 \\ &\quad - \frac{3}{2} (3 + \nu) \frac{\tilde{p}_\varphi^2}{\tilde{r}^4} + \frac{1}{\tilde{r}^3} + \frac{8\nu}{3} \frac{\tilde{p}_r}{\tilde{r}^4} \left[ \frac{1}{5} - \frac{\tilde{p}_\varphi^2}{\tilde{r}} \right], \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\dot{\tilde{p}}_\varphi = -\frac{8\nu}{5} \frac{\tilde{p}_\varphi}{\tilde{r}^3} \left[ \frac{2}{\tilde{r}} + 2 \frac{\tilde{p}_\varphi^2}{\tilde{r}^2} - \tilde{p}_r^2 \right]. \quad (4.22)$$

Diese Gleichungen beschreiben die Dynamik eines kompakten Binärsystems in nächstführender Ordnung unter Berücksichtigung der Quadrupolkopplung und der Strahlungsrückwirkung. Wie man aus Gl. (4.22) leicht sieht, nimmt nicht nur die Gesamtenergie ab – auch der Bahndrehimpuls ist nicht mehr erhalten.

Die zeitliche Entwicklung des durch die Gln. (4.19-4.22) beschriebenen Binärsystems ist vollständig festgelegt, wenn große Halbachse  $a_r$ , Exzentrizität  $e_r$  und  $q$  zur Zeit  $t = 0$  bekannt sind. Definieren wir  $t = 0$  als Zeitpunkt des Periastrondurchgangs  $\varphi(0) = 0$ , so sind die Anfangswerte für  $r$  und  $p_r$  einfach

$$r(0) = r_0 = a_r(0)(1 - e_r(0)), \quad p_r(0) = 0.$$

Um den Anfangswert von  $p_\varphi$  zu bestimmen, nutzen wir die Tatsache, dass die Energie des Systems zu Beginn der Integration durch den konservativen Teil der Hamilton-

funktion gegeben ist. Man erhält dann aus Gl. (4.15)

$$p_\varphi(0)^2 = 2r_0^2 E_{1pN} + 2GMr_0 \left[ 1 + \frac{q}{2r_0^2} \right] + \frac{1}{c^2} [(1 - 3\nu)r_0^2 (E_N^{orb})^2 + 4(1 - \nu)GMr_0 E_N^{orb} + (6 - \nu)G^2 \mathcal{M}^2],$$

wobei  $E_{1pN}$  und  $E_N^{orb}$  die reduzierte 1pN-Energie des Systems bzw. die Newtonsche Energie des Punktteilchensystems (ohne Spin) sind.

## 4.5 Jenseits der Quadrupolstrahlung

Im asymptotisch flachen Raum lässt sich die Gravitationsstrahlung einer isolierten Quelle in Form einer Multipolentwicklung angeben (siehe Anhang A, Gln. (A.1) und (A.6)). In führender Ordnung dominiert der Anteil des Massenquadrupoltensors, d.h. anders als die elektromagnetische Strahlung ist die Gravitationsstrahlung einer beliebigen Materieverteilung in führender Ordnung eine Quadrupolstrahlung.

Im folgenden wollen wir uns wieder auf kompakte Binärsysteme beschränken. Die Einbeziehung post-Newtonscher Korrekturen in die Dynamik bedeutet, dass auch in der Multipolentwicklung (A.1) bzw. (A.6) höhere Glieder berücksichtigt werden müssen<sup>11</sup>. In unserem Fall betrifft das die Massenmultipolmomente bis  $l = 4$  und die Strommultipolmomente bis  $l = 3$ . Unter Vernachlässigung aller Terme höherer Ordnung reduziert sich die Multipolentwicklung des Strahlungsfeldes dann auf

$$h_{ij}^{TT} = \frac{G}{Dc^4} \left[ \sum_{m=-2}^2 I^{(2)2m} T_{ij}^{E2,2m} + \frac{1}{c} \left\{ \sum_{m=-3}^3 I^{(3)3m} T_{ij}^{E2,3m} + \sum_{m=-2}^2 S^{(2)2m} T_{ij}^{B2,2m} \right\} + \frac{1}{c^2} \left\{ \sum_{m=-4}^4 I^{(4)4m} T_{ij}^{E2,4m} + \sum_{m=-3}^3 S^{(3)3m} T_{ij}^{B2,3m} \right\} \right], \quad (4.23)$$

wobei  $I^{lm}$  bzw.  $S^{lm}$  die sphärisch-Harmonischen Massen- und Strommultipolmomente und  $T^{E2/B2,lm}$  die von  $\Theta$  und  $\Phi$  abhängigen irreduziblen Spin-2 Tensor-Harmonischen elektrischen (Parität  $(-1)^l$ ) und magnetischen Typs (Parität  $(-1)^{l+1}$ ) sind. Diese Harmonischen sind orthonormal auf der Einheitskugel; durch Einführen von Einheitsvektoren  $\hat{\Theta}$  und  $\hat{\Phi}$  ist es möglich, sie in Komponenten proportional zu  $(\hat{\Theta} \otimes \hat{\Theta} - \hat{\Phi} \otimes \hat{\Phi})$  und  $(\hat{\Theta} \otimes \hat{\Phi} + \hat{\Phi} \otimes \hat{\Theta})$  zu zerlegen. Damit gibt die Darstellung des Strahlungsfeldes (4.23) sozusagen automatisch die Polarisationszustände  $h_+$  und  $h_\times$

---

<sup>11</sup>In der Literatur ist das nicht immer der Fall, was streng genommen eine Inkonsistenz in der Näherung bedeutet.

wieder, wobei  $h_+$  der  $(\hat{\Theta} \otimes \hat{\Theta} - \hat{\Phi} \otimes \hat{\Phi})$ -Komponente und  $h_\times$  der  $(\hat{\Theta} \otimes \hat{\Phi} + \hat{\Phi} \otimes \hat{\Theta})$ -Komponente entspricht.

Offensichtlich lässt sich das Strahlungsfeld ebenfalls in einer Art post-Newtonschen Entwicklung der Form<sup>12</sup>

$$h_{+,\times} = h_{+,\times}^{(0)} + \frac{1}{c} h_{+,\times}^{(1)} + \frac{1}{c^2} h_{+,\times}^{(2)} \quad (4.24)$$

angeben.  $h_{+,\times}^{(0)}$  entspricht dabei gerade der führenden Ordnung, d.h. einer Quadrupolstrahlung, während  $h_{+,\times}^{(1)}$  und  $h_{+,\times}^{(2)}$  Korrekturen zu dieser Ordnung sind.

Glücklicherweise ist es nicht nötig, alle Multipolkomponenten der Entwicklung (4.23) bis zur ersten post-Newtonschen Ordnung zu bestimmen. Letzteres ist nur für die Zeitableitung des Massenquadrupols erforderlich; in allen anderen Fällen kann man sich auf die Newtonsche Ebene beschränken.

Im Schwerpunktsystem sind die hier benötigten STF Massen- und Strommultipolmomente eines Zwei-Körper-Systems durch

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{ij} = \mu x_{\langle i} x_{j \rangle} \left[ 1 + \frac{29}{42} (1 - 3\nu) \frac{v^2}{c^2} - \frac{5 - 8\nu}{7} \frac{GM}{rc^2} \right] \\ + \frac{\mu(1 - 3\nu)}{21c^2} [11r^2 v_{\langle i} v_{j \rangle} - 12(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) x_{\langle i} v_{j \rangle}] + \mathcal{I}_{ij}^s, \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\mathcal{I}_{ijk} = -\mu \sqrt{1 - 4\nu} x_{\langle i} x_j x_k \rangle, \quad (4.26)$$

$$\mathcal{I}_{ijkl} = \mu(1 - 3\nu) x_{\langle i} x_j x_k x_l \rangle, \quad (4.27)$$

$$\mathcal{J}_{ij} = -\mu \sqrt{1 - 4\nu} \varepsilon_{ab\langle i} x_j \rangle x_a v_b, \quad (4.28)$$

$$\mathcal{J}_{ijk} = \mu(1 - 3\nu) \varepsilon_{ab\langle k} x_i x_j \rangle x_a v_b \quad (4.29)$$

gegeben [48], [13]. Die Klammern bezeichnen jeweils den STF- Anteil der entsprechenden Tensoren<sup>13</sup>. An dieser Stelle ist es nötig, den Beitrag des Massenquadrupol-tensors des rotierenden Sterns  $\mathcal{I}_{ij}^s$  etwas genauer zu betrachten<sup>14</sup>. Die Berechnung der zeitlichen Ableitungen seiner Komponenten erfordert die Kenntnis der Materieverteilung innerhalb des Sterns. Andererseits ist der Beitrag von  $\ddot{\mathcal{I}}_{ij}^s$  zur Gravitationsstrahlung des Systems sehr klein, falls die Oszillationsenergie des Sterns nicht in der Größenordnung der Bahnenergie liegt und falls sich das System nicht in einer Gezeitenresonanz befindet. Beides wollen wir im folgenden ausschließen und vernachlässigen daher  $\ddot{\mathcal{I}}_{ij}^s$ .

<sup>12</sup>Von nun an lassen wir den Index  $TT$  weg.

<sup>13</sup>Anhang B gibt die allgemeine Formulierung eines symmetrisch-spurfreien Tensors an und spezialisiert auf die hier benötigten STF-Tensoren dritter und vierter Stufe.

<sup>14</sup> $\mathcal{I}_{ij}^s$  muss nur in Newtonscher Ordnung berechnet werden.

Zur Berechnung der Zeitableitungen der  $l = 3$  und  $l = 4$ -Multipolmomente sowie des Stromquadrupols verwenden wir die Newtonsche Bewegungsgleichung in der Form

$$\mathbf{v} = -\frac{GM}{r^3}\mathbf{r}. \quad (4.30)$$

Nur für  $\ddot{\mathcal{I}}_{ij}$  kommt die die post-Newtonsche Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}} = & -\frac{GM}{r^3}\mathbf{r} \left[ 1 + \frac{3q}{2r^2} \right] + \frac{GM}{r^3c^2} \left[ \left\{ \frac{GM}{r}(4 + 2\nu) + \frac{3\nu}{2} \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^2}{r^2} - v^2(1 + 3\nu) \right\} \mathbf{r} \right. \\ & \left. + (4 - 2\nu)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v} \right] \end{aligned} \quad (4.31)$$

zur Anwendung. Einsetzen in Gl. (4.25-4.29) ergibt nach längerer Rechnung<sup>15</sup>

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{ij}^{(2)} = & 2\mu v_{\langle i} v_{j \rangle} \left[ 1 + \frac{9}{14}(1 - 3\nu) \frac{v^2}{c^2} + \frac{54\nu - 25}{21} \frac{GM}{rc^2} \right] + 2\mu x_{\langle i} v_{j \rangle} \frac{GM}{r^3c^2} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) \frac{25 + 9\nu}{7} \\ & - \mu x_{\langle i} x_{j \rangle} \frac{GM}{r^3} \left[ 2 \left\{ 1 + \frac{3q}{2r^2} \right\} + \frac{61 + 48\nu}{21} \frac{v^2}{c^2} - \frac{2}{7}(1 - 3\nu) \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^2}{r^2c^2} - \frac{GM}{rc^2}(10 - \nu) \right], \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\mathcal{I}_{ijk}^{(3)} = -\mu\sqrt{1 - 4\nu} \left[ 9 \frac{GM}{r^5} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) x_{\langle i} x_j x_k \rangle - 21 \frac{GM}{r^3} v_{\langle i} x_j x_k \rangle + 6v_{\langle i} v_j v_k \rangle \right], \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{ijkl}^{(4)} = & 4\mu(1 - 3\nu) \left[ 6v_{\langle i} v_j v_k v_l \rangle - 48 \frac{GM}{r^3} v_{\langle i} v_j x_k x_l \rangle + 42 \frac{GM}{r^5} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) v_{\langle i} x_j x_k x_l \rangle \right. \\ & \left. + \frac{GM}{r^3} x_{\langle i} x_j x_k x_l \rangle \left\{ 7 \frac{GM}{r^3} + 3 \frac{v^2}{r^2} - 15 \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^2}{r^4} \right\} \right], \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$\mathcal{J}_{ij}^{(2)} = \mu\sqrt{1 - 4\nu} \frac{GM}{r^3} \varepsilon_{ab\langle i} x_j \rangle x_a v_b, \quad (4.35)$$

$$\mathcal{J}_{ijk}^{(3)} = 2\mu(1 - 3\nu) \frac{GM}{r^3} x_a v_b \left[ 3 \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{r^2} \varepsilon_{ab\langle k} x_i x_j \rangle - 4\varepsilon_{ab\langle k} x_i v_j \rangle \right]. \quad (4.36)$$

Aufgrund der von uns getroffenen Annahmen tritt die  $q$ -Kopplung nur in der Zeitableitung des Massenquadrupols auf.

Günstiger ist es, anstelle der  $\mathcal{I}_{ij}$  und  $\mathcal{J}_{ij}$  jene Darstellung zu verwenden, in der die Multipolmomente irreduzibel zur Drehachse definiert sind. Unter Verwendung der im Anhang angegebenen Beziehung zwischen den beiden Klassen von Multipolmo-

---

<sup>15</sup>Für die höheren Multipolmomente vgl. auch [48].



menten findet man

$$I^{(2)20} = \frac{4\mu}{3} \sqrt{\frac{3\pi}{5}} \left[ -2 \left\{ v^2 - \frac{GM}{r} \left( 1 + \frac{3q}{2r^2} \right) \right\} + \frac{1}{c^2} \left\{ \frac{G^2 \mathcal{M}^2}{r^2} (\nu - 10) + \frac{9}{7} (3\nu - 1) v^4 \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{GM}{r} \left( \frac{37 - 20\nu}{7} r^2 \dot{\varphi}^2 - \frac{15 + 32\nu}{7} \dot{r}^2 \right) \right\} \right], \quad (4.37)$$

$$I^{(2)21} = 0, \quad (4.38)$$

$$I^{(2)22} = \sqrt{\frac{8\pi}{5}} \mu e^{-2i\varphi} \left[ 2 \left\{ \dot{r}^2 - r^2 \dot{\varphi}^2 - \frac{GM}{r} \left( 1 + \frac{3q}{2r^2} \right) - 2ir \dot{r} \dot{\varphi} \right\} \right. \\ \left. + \frac{1}{c^2} \left\{ (10 - \nu) \frac{G^2 \mathcal{M}^2}{r^2} + \frac{GM}{r} \left( \frac{15 + 32\nu}{7} \dot{r}^2 - \frac{11 + 156\nu}{21} r^2 \dot{\varphi}^2 \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{9}{7} (1 - 3\nu) (\dot{r}^4 - r^4 \dot{\varphi}^4) - ir \dot{r} \dot{\varphi} \left( \frac{10}{21} (5 + 27\nu) \frac{GM}{r} + \frac{18}{7} (1 - 3\nu) v^2 \right) \right\} \right], \quad (4.39)$$

$$I^{(3)30} = I^{(3)32} = 0, \quad (4.40)$$

$$I^{(3)31} = 4\nu(m_1 - m_2) \sqrt{\frac{\pi}{35}} e^{-i\varphi} \left[ \dot{r} \left\{ 2 \frac{GM}{r} - v^2 \right\} + ir \dot{\varphi} \left\{ v^2 - \frac{7GM}{6r} \right\} \right], \quad (4.41)$$

$$I^{(3)33} = 2\nu(m_1 - m_2) \sqrt{\frac{\pi}{21}} e^{-3i\varphi} \left[ 2 \left\{ \dot{r}^2 - 2 \frac{GM}{r} - 3r^2 \dot{\varphi}^2 \right\} \dot{r} \right. \\ \left. + ir \dot{\varphi} \left\{ 7 \frac{GM}{r} - 6\dot{r}^2 + 2r^2 \dot{\varphi}^2 \right\} \right], \quad (4.42)$$

$$I^{(4)40} = \frac{2\mu}{21} (1 - 3\nu) \sqrt{\frac{\pi}{5}} \left[ 7 \frac{G^2 \mathcal{M}^2}{r^2} - \frac{GM}{r} \{ 18\dot{r}^2 + 13r^2 \dot{\varphi}^2 \} + 6v^4 \right], \quad (4.43)$$

$$I^{(4)41} = I^{(4)43} = 0, \quad (4.44)$$

$$I^{(4)42} = \frac{\sqrt{8\pi}}{63} \mu (1 - 3\nu) e^{-2i\varphi} \left[ -7 \frac{G^2 \mathcal{M}^2}{r^2} + \frac{GM}{r} \{ 18\dot{r}^2 - 3r^2 \dot{\varphi}^2 \} + 6r^4 \dot{\varphi}^4 - 6\dot{r}^4 \right. \\ \left. + 3ir \dot{r} \dot{\varphi} \left\{ 4v^2 - 9 \frac{GM}{r} \right\} \right], \quad (4.45)$$

$$I^{(4)44} = \frac{2\mu}{9} (1 - 3\nu) \sqrt{\frac{\pi}{14}} e^{-4i\varphi} \left[ 7 \frac{G^2 \mathcal{M}^2}{r^2} + \frac{GM}{r} \{ 51r^2 \dot{\varphi}^2 - 18\dot{r}^2 \} + 6\dot{r}^4 \right. \\ \left. - 36r^2 \dot{r}^2 \dot{\varphi}^2 + 6r^4 \dot{\varphi}^4 + ir \dot{r} \dot{\varphi} \left\{ 54 \frac{GM}{r} - 24\dot{r}^2 + 24r^2 \dot{\varphi}^2 \right\} \right], \quad (4.46)$$

und

$$S^{(2)20} = S^{(2)22} = 0, \quad (4.47)$$

$$S^{(2)21} = \frac{8}{3} \sqrt{\frac{2\pi}{5}} (m_1 - m_2) G M \nu \dot{\varphi} e^{-i\varphi}, \quad (4.48)$$

$$S^{(3)30} = -4 \sqrt{\frac{\pi}{105}} (1 - 3\nu) G M \mu \dot{r} \dot{\varphi}, \quad (4.49)$$

$$S^{(3)31} = S^{(3)33} = 0, \quad (4.50)$$

$$S^{(3)32} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2\pi}{7}} (1 - 3\nu) G M \mu \dot{\varphi} (\dot{r} - 4i r \dot{\varphi}) e^{-2i\varphi}. \quad (4.51)$$

Dabei wurde  $\sqrt{1 - 4\nu} \equiv (m_1 - m_2)/\mathcal{M}$  verwendet. Zur  $h^{(1)}$ -Korrektur tragen offenbar nur  $S^{(2)21}$ ,  $I^{(3)31}$  und  $I^{(3)33}$  bei. Diese Zeitableitungen verschwinden aber für Binärsysteme gleicher Massen, d.h. in solchen Systemen tritt die erste Korrektur zu  $h_{+, \times}^{(0)}$  erst in der Ordnung  $1/c^2$  auf.

Ausgehend von obigen Gleichungen ist es möglich, auch eine analytische Darstellung für die Zeitableitungen der Massen- und Strommultipolmomente  $I^{lm}$  bzw.  $S^{lm}$  in Abhängigkeit von der Exzentrizität  $e_r$ , der Energie  $E$  und dem Parameter  $\delta$  anzugeben. Die entsprechenden Ausdrücke finden sich im Anhang.

Die Polarisationszustände des Strahlungsfeldes  $h_+$  und  $h_\times$  erhält man durch Einsetzen der Beziehungen (4.37)-(4.51) in die Multipolentwicklung (4.23). In führender Ordnung ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{Dc^4}{G} h_+^{(0)} = & (1 + \cos^2 \Theta) \mu \left[ \cos 2(\Phi - \varphi) \left\{ \dot{r}^2 - r^2 \dot{\varphi}^2 - \frac{GM}{r} \left( 1 + \frac{3q}{2r^2} \right) \right\} + 2r \dot{r} \dot{\varphi} \sin(2(\Phi - \varphi)) \right] \\ & - \mu \sin^2 \Theta \left[ \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 - \frac{GM}{r} \left( 1 + \frac{3q}{2r^2} \right) \right], \end{aligned} \quad (4.52)$$

$$\frac{Dc^4}{G} h_\times^{(0)} = \mu \cos \Theta \left[ 4r \dot{r} \dot{\varphi} \cos 2(\Phi - \varphi) - 2 \sin 2(\Phi - \varphi) \left\{ \dot{r}^2 - r^2 \dot{\varphi}^2 - \frac{GM}{r} \left( 1 + \frac{3q}{2r^2} \right) \right\} \right]. \quad (4.53)$$

Hierbei wurde der Kopplungsbeitrag in der führenden Ordnung mit aufgeführt, um den ursprünglich Newtonschen Charakter dieses Terms zu unterstreichen. Die Kor-

rekturen zur führenden Ordnung lauten im Fall der  $h_+$ -Komponente

$$\begin{aligned}
\frac{Dc^5}{G}h_+^{(1)} &= (m_1 - m_2)\nu \sin \Theta \left[ \frac{4}{3}G\mathcal{M}\dot{\varphi} \sin(\Phi - \varphi) \right. \\
&+ \frac{3 \cos^2 \Theta - 1}{2} \left\{ \left( 2\frac{G\mathcal{M}}{r} - v^2 \right) \dot{r} \cos(\Phi - \varphi) - \left( v^2 - \frac{7G\mathcal{M}}{6r} \right) r\dot{\varphi} \sin(\Phi - \varphi) \right\} \\
&- \frac{1 + \cos^2 \Theta}{4} \left\{ 2\dot{r} \cos 3(\Phi - \varphi) \left( \dot{r}^2 - 3r^2\dot{\varphi}^2 - 2\frac{G\mathcal{M}}{r} \right) \right. \\
&\left. \left. - r\dot{\varphi} \sin 3(\Phi - \varphi) \left( 7\frac{G\mathcal{M}}{r} - 6\dot{r}^2 + 2r^2\dot{\varphi}^2 \right) \right\} \right], \tag{4.54}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{Dc^6}{G}h_+^{(2)} &= \frac{1 + \cos^2 \Theta}{2} \mu \left[ \cos 2(\Phi - \varphi) \left\{ (10 - \nu) \frac{G^2\mathcal{M}^2}{r^2} + \frac{9}{7}(1 - 3\nu)(\dot{r}^4 - r^4\dot{\varphi}^4) \right. \right. \\
&+ \left. \left. \frac{GM}{r} \left( \frac{15 + 32\nu}{7}\dot{r}^2 - \frac{11 + 156\nu}{21}r^2\dot{\varphi}^2 \right) \right\} \right. \\
&+ \left. \frac{r\dot{r}\dot{\varphi}}{7} \sin 2(\Phi - \varphi) \left\{ \frac{10}{3}(5 + 27\nu) \frac{GM}{r} + 18v^2(1 - 3\nu) \right\} \right] \\
&+ \frac{\sin^2 \Theta}{2} \mu \left[ (\nu - 10) \frac{G^2\mathcal{M}^2}{r^2} - \frac{9}{7}(1 - 3\nu)v^4 + \frac{GM}{r} \left\{ \frac{37 - 20\nu}{7}r^2\dot{\varphi}^2 - \frac{15 + 32\nu}{7}\dot{r}^2 \right\} \right. \\
&- \left. \frac{1 - 3\nu}{56} \mu (7 \cos^4 \Theta - 8 \cos^2 \Theta + 1) \left[ 7\frac{G^2\mathcal{M}^2}{r^2} - \frac{GM}{r} (18\dot{r}^2 + 13r^2\dot{\varphi}^2) + 6v^4 \right] \right. \\
&+ \left. \frac{1 - 3\nu}{42} \mu (7 \cos^4 \Theta - 6 \cos^2 \Theta + 1) \left[ \cos 2(\Phi - \varphi) \left\{ 6(r^4\dot{\varphi}^4 - \dot{r}^4) \right. \right. \right. \\
&+ \left. \left. \frac{GM}{r} (18\dot{r}^2 - 3r^2\dot{\varphi}^2) - 7\frac{G^2\mathcal{M}^2}{r^2} \right\} - r\dot{r}\dot{\varphi} \sin 2(\Phi - \varphi) \left\{ 12v^2 - 27\frac{GM}{r} \right\} \right] \\
&+ \left. \frac{1 - 3\nu}{24} \mu \sin^2 \Theta (1 + \cos^2 \Theta) \left[ \cos 4(\Phi - \varphi) \left\{ 7\frac{G^2\mathcal{M}^2}{r^2} + 6\dot{r}^4 - 36r^2\dot{r}^2\dot{\varphi}^2 + 6r^4\dot{\varphi}^4 \right. \right. \right. \\
&+ \left. \left. \frac{GM}{r} (51r^2\dot{\varphi}^2 - 18\dot{r}^2) \right\} - r\dot{r}\dot{\varphi} \sin 4(\Phi - \varphi) \left\{ 54\frac{GM}{r} - 24\dot{r}^2 + 24r^2\dot{\varphi}^2 \right\} \right] \\
&- \left. \frac{1 - 3\nu}{3} (2 \cos^2 \Theta - 1) G\mathcal{M}\mu\dot{\varphi} [4r\dot{\varphi} \cos 2(\Phi - \varphi) - \dot{r} \sin 2(\Phi - \varphi)] \right], \tag{4.55}
\end{aligned}$$

während die Korrekturen zu  $h_\times$  durch

$$\begin{aligned}
\frac{Dc^5}{G}h_\times^{(1)} &= \frac{\sin 2\Theta}{2} (m_1 - m_2)\nu \left[ r\dot{\varphi} \cos(\Phi - \varphi) \left\{ \frac{5GM}{2r} - v^2 \right\} \right. \\
&+ \dot{r} \sin(\Phi - \varphi) \left\{ v^2 - 2\frac{GM}{r} \right\} + \dot{r} \sin 3(\Phi - \varphi) \left\{ \dot{r}^2 - 3r^2\dot{\varphi}^2 - 2\frac{GM}{r} \right\} \\
&+ \left. \frac{r\dot{\varphi}}{2} \cos 3(\Phi - \varphi) \left\{ 7\frac{GM}{r} - 6\dot{r}^2 + 2r^2\dot{\varphi}^2 \right\} \right] \tag{4.56}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\frac{Dc^6}{G}h_{\times}^{(2)} = & \mu \cos \Theta \left[ \frac{r\dot{r}\dot{\varphi}}{7} \cos 2(\Phi - \varphi) \left\{ \frac{10}{3}(5 + 27\nu)\frac{GM}{r} + 18v^2(1 - 3\nu) \right\} \right. \\
& - \sin 2(\Phi - \varphi) \left\{ (10 - \nu)\frac{G^2\mathcal{M}^2}{r^2} + \frac{GM}{r} \left( \frac{15 + 32\nu}{7}\dot{r}^2 - \frac{11 + 156\nu}{21}r^2\dot{\varphi}^2 \right) \right. \\
& \left. \left. + \frac{9}{7}(1 - 3\nu)(\dot{r}^4 - r^4\dot{\varphi}^4) \right\} \right] + (1 - 3\nu)\mu \cos \Theta \left[ -\frac{1}{2}GM\dot{r}\dot{\varphi} \sin^2 \Theta \right. \\
& + \frac{3 \cos^2 \Theta - 1}{6}GM\dot{\varphi} \left\{ \dot{r} \cos 2(\Phi - \varphi) + 4r\dot{\varphi} \sin 2(\Phi - \varphi) \right\} \\
& - \frac{\sin^2 \Theta}{12} \left\{ r\dot{r}\dot{\varphi} \cos 4(\Phi - \varphi) \left( 54\frac{GM}{r} - 24\dot{r}^2 + 24r^2\dot{\varphi}^2 \right) \right. \\
& \left. + \sin 4(\Phi - \varphi) \left( 6\dot{r}^4 + 6r^4\dot{\varphi}^4 - 36r^2\dot{r}^2\dot{\varphi}^2 + \frac{GM}{r}(51r^2\dot{\varphi}^2 - 18\dot{r}^2) + 7\frac{G^2\mathcal{M}^2}{r^2} \right) \right\} \\
& \left. - \frac{7 \cos^2 \Theta - 5}{42} \left\{ 3r\dot{r}\dot{\varphi} \cos 2(\Phi - \varphi) \left( 4v^2 - 9\frac{GM}{r} \right) \right. \right. \quad (4.57) \\
& \left. \left. + \sin 2(\Phi - \varphi) \left( -7\frac{G^2\mathcal{M}^2}{r^2} + \frac{GM}{r}(18\dot{r}^2 - 3r^2\dot{\varphi}^2) + 6r^4\dot{\varphi}^4 - 6\dot{r}^4 \right) \right\} \right] \quad (4.58)
\end{aligned}$$

gegeben sind. Die entsprechenden Gleichungen für die Polarisationszustände des Strahlungsfeldes in der Hamiltonschen Formulierung finden sich im Anhang.

Die hier hergeleiteten Beziehungen sind gültig für kompakte Binärsysteme mit einer rotierenden Komponente, beispielsweise für BH-NS oder NS-NS Binärsysteme. Es ist jedoch auch möglich, die Anwendung auf Binärsysteme Weißer Zwerge auszudehnen oder auf Binärpulsare wie PSR 1259-63, in denen die rotierende Komponente ein Be-Stern ist. Dann allerdings geben die Gleichungen die Gravitationswellenformen nur in führender Ordnung richtig wieder, da die Annahme, dass die Newtonsche Kopplung in der Größenordnung der ersten post-Newtonschen Korrektur zur Bahnbewegung liegt, nicht mehr zwingend erfüllt ist.

## 4.6 Der Einfluss der Rotationsdeformation auf Gravitationswellenformen und Einspiralvorgang

Die Modellierung der Sterne als punktförmige Objekte vereinfacht die Rechnungen – sowohl auf Newtonscher Ebene als auch im post-Newtonschen Regime – deutlich. Es werden dabei jedoch alle Effekte vernachlässigt, die auf die endliche Größe der Sterne zurückzuführen sind. Insbesondere induzieren Rotationsabplattung und stellare Oszillationen eine Drehung der Apsidenlinie, die unter Umständen bedeutend größer

sein kann als die relativistische Periastrondrehung. Aus astrophysikalischen Beobachtungen ist die totale Apsidendrehung  $\Delta\varphi_{tot}$  mittlerweile für eine ganze Reihe von Hauptreihenstern-Binärsystemen bekannt. Ein Vergleich dieses Wertes mit der von der ART vorhergesagten relativistischen Periastrondrehung  $\Delta\varphi_{rel}$  zeigt, dass in allen untersuchten Systemen die Newtonschen Störungen den dominierenden Beitrag zur Periastrondrehung liefern (siehe z.B. [22]). Die Ursache dafür ist in den „weichen“ Zustandsgleichungen zu suchen, die die Materie in Hauptreihensternen genügt.

Ganz anders die Situation in kompakten Binärsystemen: Hier werden die Newtonschen Störungen oftmals vernachlässigt bzw. allenfalls in numerischen Simulationen berücksichtigt, die erst wenige Umläufe vor dem Verschmelzen der Sterne beginnen. In diesem Kapitel wurde jedoch gezeigt, dass der Beitrag der Rotationsdeformation eines Neutronensterns zwar kleiner als die 1pN-Korrekturen zur Bahnbewegung ist, aber dennoch bedeutend größer sein kann als die Korrekturen der nächstfolgenden post-Newtonschen Ordnung. Diese Newtonschen Störungen sollten daher im Rahmen post-Newtonscher Rechnungen mit berücksichtigt werden, zumal es während des Einspiralprozesses zur Akkumulation der nicht-relativistischen Phasenverschiebungen kommt. Die Abbildungen B.10 und B.11 zeigen dafür Beispiele. Die Wichtigkeit der Mitnahme post-Newtonscher Korrekturen in der Strahlungsformel wird in Abbildung B.9 demonstriert. Dort werden die auf der Grundlage von Gl. (4.52) und (4.53) berechneten Wellenformen mit jenen verglichen, die sich bei Berücksichtigung der höheren Multipolmomente ergeben.

Die Störung der Bahn durch die Deformation des rotierenden Sterns führt nicht nur zu einer größeren Periastrondrehung im Falle elliptischer Bahnen, sondern beschleunigt auch den Einspiralvorgang. Für NS-NS und NS-BH-Systeme macht sich das allerdings erst über lange Zeiträume oder im letzten Abschnitt des Einspiralens deutlich bemerkbar. Daher wurde in Abb. B.3 der Parameter  $q$  künstlich überhöht, um den Effekt besser sichtbar zu machen.

In der bisherigen Diskussion wurde stets betont, dass die Berücksichtigung der Rotationsdeformation wichtig für die Erstellung hochgenauer Templates ist, die wiederum bei der Suche nach Gravitationswellen unentbehrlich sind. Ein weiterer Aspekt wird vor allem mit der Inbetriebnahme des LISA-Interferometers an Bedeutung gewinnen. Wie bereits erwähnt, wird dieser Detektor im Niederfrequenzbereich arbeiten und somit auch Binärsysteme Weißer Zwerge detektieren können. Willems *et al.* wiesen in einer kürzlich erschienen Arbeit darauf hin, dass die Vernachlässigung von Störungen, die durch stellare Oszillationen (inkl. Gezeitenwechselwirkung) und Rotationsdeformation hervorgerufen werden, zur Überschätzung der aus der totalen

Phasenverschiebung  $\Delta\varphi_{tot}$  bestimmten Gesamtmasse des Systems führt. Binärsysteme Weißer Zwerge mit elliptischem Orbit könnten dadurch fälschlicherweise als Doppelneutronensterne identifiziert werden [92]. Die totale Phasenverschiebung  $\Delta\varphi_{tot}$  hängt über den durch die  $q$ -Kopplung induzierten Anteil  $\Delta\varphi_{rot}$  sowohl von der Materieverteilung innerhalb des rotierenden Sterns als auch von dessen Radius und Winkelgeschwindigkeit ab. Damit eröffnet die Messung von  $\Delta\varphi_{tot}$  theoretisch die Möglichkeit, mehr über den inneren Aufbau des Sterns zu erfahren. Allerdings wird es schwieriger, aus den gemessenen Werten der Periastrondrehung astrophysikalische Informationen abzuleiten, da zu viele unbekannte Parameter in den Beobachtungswert eingehen. Weitergehende Arbeiten mit dem Ziel, den Einfluss der stellaren Oszillationen und der Rotationsdeformation auf das Gravitationsstrahlungsfeld des Gesamtsystems besser zu modellieren, sind daher dringend erforderlich. Die in diesem Kapitel vorgestellten Rechnungen können nur ein Schritt in diese Richtung sein.

# Kapitel 5

## Zusammenfassung und Ausblick

Die Suche nach Gravitationswellen ist eine der aufregendsten Herausforderungen der Physik des beginnenden 21. Jahrhunderts. Während mit der bei Binärpulsaren wie z.B. PSR 1913+16 beobachteten Abnahme der Bahnperiode bereits seit mehreren Jahrzehnten ein indirekter Beweis ihrer Existenz vorliegt, gestaltet sich der direkte Nachweis von Gravitationswellen schwierig. Das liegt in der extrem kleinen Amplitude der Gravitationsstrahlung begründet:  $h_{ij}^{TT}$  nimmt nicht nur proportional zur Entfernung von der Quelle ab, sondern ist selbst in führender Ordnung proportional zu  $G/c^4$ . Neben einer erst mit heutigen Gravitationswellendetektoren erreichbaren Messgenauigkeit braucht es daher sehr starke Quellen – oder Quellen in unserer kosmischen Nachbarschaft. Vielversprechende Kandidaten sind Supernovae, vor allem aber kompakte Binärsysteme in der letzten Phase des Einspiralvorgangs. In der Literatur werden sehr unterschiedliche Abschätzungen für die mögliche Zahl der pro Jahr detektierbaren Ereignisse diskutiert. Insbesondere verschmelzende BH-BH Systeme scheinen laut Belczynski *et al.* weitaus seltener zu sein als bisher angenommen [10]. Die Autoren berechnen für Advanced LIGO Detektionsraten von ca. zwei verschmelzenden BH-BH Systemen pro Jahr, aber immerhin ca. 20 verschmelzenden NS-NS Systemen pro Jahr.

Heutige, erdgebundene Detektoren arbeiten bei Frequenzen von ca. 10 Hz bis ca. 500 Hz<sup>1</sup>. Keiner der heute bekannten Doppelpulsare erreicht diese Frequenzen auch nur annähernd, denn das beobachtbare Frequenzband entspricht nur den letzten Minuten des Einspiralprozesses. Mit Hilfe des noch in Planung befindlichen, welt-raumgebundenen LISA-Detektor wird sich das ändern. Sein Messbereich soll bei 10<sup>-1</sup> bis 10<sup>-4</sup> Hz liegen und somit ganz neue Quellengattungen erschließen. Mit LISAs Hilfe werden nicht nur wesentlich frühere Stadien des Einspiralprozesses von

---

<sup>1</sup>Die obere Grenze ist durch das Photonenrauschen bedingt.

Binärsystemen Schwarzer Löcher oder Neutronensterne fassbar, sondern die Sensitivität sollte auch hoch genug sein, um galaktische Binärsysteme Weißer Zwerge zu beobachten.

Für die Suche nach Gravitationswellen in den von den Detektoren aufgenommenen Daten ist die präzise Kenntnis der zu erwartenden Wellenformen entscheidend. Die Berechnung hochgenauer Templates stellt eine wichtige Aufgabe für Relativitätstheoretiker sowohl auf analytischem wie auch auf numerischem Gebiet dar. Die späten Stadien des Einspiralprozesses liegen außerhalb des Gültigkeitsbereichs der Newtonschen Mechanik. Ohne die Berücksichtigung post-Newtonscher Korrekturen erhält man ein völlig falsches Bild von der Dynamik des Systems vor dem Zusammenstoß. Aber auch die post-Newtonsche Näherung ist nicht in allen Stadien des Einspiralens anwendbar. Nur die Numerische Relativitätstheorie kann die komplexen Vorgänge während des Zusammenstoßens und Verschmelzens der kompakten Objekte beschreiben.

Lange Zeit wurden bei der post-Newtonschen Analyse lediglich punktförmige Objekte berücksichtigt. Erst in den letzten Jahren setzte sich – forciert vor allem durch die Ergebnisse der Numerischen Relativitätstheorie – die Erkenntnis durch, dass stellare Freiheitsgrade einen nicht vernachlässigbaren Einfluss auf den Einspiralprozess und damit auf die Gravitationsstrahlung besitzen (siehe z.B. [5]). Damit ergeben sich neue Schwierigkeiten bei der Erstellung von Templates und der Dateninterpretation, doch gleichzeitig öffnet sich auch ein völlig neues Fenster ins Universum<sup>2</sup>. Anders als elektromagnetische Strahlung enthalten Gravitationswellen nämlich Informationen über die Massen der Sterne und deren interne Struktur. Um dieses Wissen aus der gemessenen Gravitationsstrahlung zu extrahieren, muss bekannt sein, *wie* die Zustandsgleichungen das Muster der Gravitationswellen verändern.

Diese Überlegungen bildeten die Grundlage der vorliegenden Arbeit. Strenggenommen müssten zur Beschreibung der Sterne kompakter Binärsysteme die relativistischen Gleichungen der Hydrodynamik gelöst werden. Neben den zu überwindenden numerischen Schwierigkeiten steht diesem Ziel auch der extrem hohe Rechenzeit- und Speicherbedarf entgegen. Die Motivation dieser Dissertation war es deshalb, Modelle einspiralender kompakter Binärsysteme ausgedehnter Objekte zu entwickeln, die mathematisch einfach sind und dennoch wesentliche Eigenschaften komplizierterer

---

<sup>2</sup>Die Bedeutung der Gravitationswellenastronomie für die Kosmologie ist gar nicht hoch genug einzuschätzen. Da die Gravitationsstrahlung bereits wesentlich früher als die elektromagnetische Strahlung entkoppelte, könnten wir mit ihrer Hilfe viel weiter in die Frühzeit des Universums blicken als es mit einer auf Photonen basierenden Astronomie möglich ist. Bis zur Entwicklung von Detektoren mit einer entsprechenden Messgenauigkeit werden aber noch Jahrzehnte vergehen.



Systeme enthalten. Im Mittelpunkt stand dabei stets die Frage, wie sich der Einfluss der stellaren Freiheitsgrade auf die Dynamik und die Gravitationswellenemission des Systems auswirken. In Kapitel 2 und 3 lag das Hauptaugenmerk auf den Freiheitsgraden der Oszillation und deren Kopplung an die Bahnbewegung. Das System aus rotierender, oszillierender Staubscheibe und Schwarzes Loch aus Kapitel 2 besitzt nach Meinung der Autorin vor allem den Charakter eines Spielzeugmodells, erlaubt aber die Verfolgung der Langzeitentwicklung des Systems ohne hohen rechnerischen Aufwand. Das u.a. aus [52] bekannte Phänomen der Gezeitenresonanz konnte auch für dieses sehr vereinfachte Modell nachgewiesen werden. Dabei zeigte sich, dass in einer Gezeitenresonanz unter Umständen so viel Energie aus dem Orbit in die Scheibe transferiert werden kann, dass das Binärsystem zusammenbricht<sup>3</sup>.

In Kapitel 3 wurden die Sterne durch Riemann-S Ellipsoide modelliert, d.h. durch polytrope Flüssigkeitskonfigurationen, die bestimmten Bedingungen genügen. Auch in diesen Systemen konnte das mit einem sehr starken Energieaustausch zwischen Orbit und Sternen verbundene Phänomen der Gezeitenresonanz beobachtet werden. Wie erwartet führte die Berücksichtigung der inneren Freiheitsgrade zu einer vom Polytropenindex abhängigen Periastrondrehung und damit zu einer Phasenverschiebung der Gravitationswellen. Diese war umso größer, je weniger kompressibel der Sternmaterie war.

Im vierten Kapitel wurden zusätzlich post-Newtonsche Korrekturen erster Ordnung in der Bahnbewegung berücksichtigt. Die Oszillationsfreiheitsgrade sollten in diesem Fall vernachlässigt werden, d.h. es wurde angenommen, dass der dominierende Beitrag der Newtonschen Störungen von der Rotationsabplattung des rotierenden Sterns ausgeht. Die Untersuchungen dieses Kapitels können auf eine weite Gruppe enger Binärsysteme<sup>4</sup> angewendet werden, so z.B. auf Binärsysteme mit einem schnell rotierenden Neutronenstern, oder, im Newtonschen Limes, auf Binärpulsare, deren zweite Komponente ein rotierender Hauptreihenstern ist. Die größte Relevanz besitzen sie nach Meinung der Autorin aber für exzentrische Binärsysteme Weißer Zwerge.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die Berücksichtigung der endlichen Größe kompakter Sterne in engen Binärsystemen einen wichtigen Faktor bei der Berechnung hochgenauer Templates darstellt. Aus der Astrophysik ist bekannt, dass auch Neutronensterne und Weiße Zwerge über ein Spektrum von Eigenmoden verfügen. Eine Untersuchung der Kopplung dieser Eigenmoden an den Bahnbewegung jen-

---

<sup>3</sup>Das geschieht dann, wenn die Oszillationsenergie der Scheibe von derselben Größenordnung wie die Bahnenergie ist.

<sup>4</sup>Zur Argumentation siehe Kapitel 4

seits der Newtonschen Ebene würde sich als Fortsetzung der Analyse aus Kapitel 4 anbieten. Insbesondere wäre es von Interesse, der Frage nachzugehen, wie sich das in führender Ordnung auftretende Phänomen der Gezeitenresonanz darstellt, wenn in der Bahnbewegung Terme bis zur ersten post-Newtonschen Ordnung mit berücksichtigt werden.

# Literaturverzeichnis

- [1] M. E. Alexander, *Tidal resonances in binary star systems*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **227**, 843-861 (1987)
- [2] J. Andersen, J. V. Clausen und B. Nordström, *Absolute dimensions of eclipsing binaries. V. VV Pyxidis, a detached early A-type system with equal components*, Astron. Astrophys. **134**, 147-157 (1984)
- [3] J. Andersen *et al.*, *Absolute dimensions of eclipsing binaries. X. V1143 Cygni*, Astron. Astrophys. **174**, 107-115 (1987)
- [4] J. Andersen, *Accurate masses and radii of normal stars*, Astron. Astrophys. Rev. **3**, 91-126 (1991)
- [5] M. Anderson *et al.*, *Simulating binary neutron stars: dynamics and gravitational waves*, arXiv:0708.2720
- [6] V. C. de Andrade, L. Blanchet und G. Faye, *Third post-Newtonian dynamics of compact binaries: Noetherian conserved quantities and equivalence between the harmonic coordinate and ADM Hamiltonian formalisms*, Class. Quant. Grav. **18**, 753-778 (2001), gr-qc/0011063
- [7] J. M. Bardeen und R. V. Wagoner, *Relativistic Disks. I. Uniform Rotation*, Astrophys. J. **167**, 359-408 (1971)
- [8] B. M. Barker und R. F. O'Connell, *Derivation of the Equations of Motion of a Gyroscope from the Quantum Theory of Gravitation*, Phys. Rev. D **2**, 1428-1435 (1970)
- [9] B. M. Barker und R. F. O'Connell, *Gravitational two-body problem with arbitrary masses, spins, and quadrupole moments*, Phys. Rev. D **12**, 329-335 (1975)
- [10] K. Belczynski *et al.*, *On the Rarity of Double Black Hole Binaries: Consequences for Gravitational Wave Detection*, Astrophys. J. **662**, 504-511 (2007)

- [11] B. Bertotti, L. Iess *et al.*, *A test of general relativity using radio links with the Cassini spacecraft*, Nature **425**, 374-376 (2003)
- [12] L. Bildsten und C. Cutler, *Tidal interactions of inspiraling compact binaries*, Astrophys. J. **400**, 175-180 (1992)
- [13] L. Blanchet und G. Schäfer, *Higher order gravitational radiation losses in binary systems*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **239**, 845-867 (1989)
- [14] L. Blanchet und G. Faye, *On the equations of motion of point-particle binaries at the third post-Newtonian order*, Phys. Lett. A **271**, 58-64 (2000)
- [15] L. Blanchet und G. Faye, *Lorentzian regularization and the problem of point-like particles in general relativity*, J. Math. Phys. **42**, 4291-4418 (2001)
- [16] L. Blanchet und G. Faye, *General relativistic dynamics of compact binaries at the third post-Newtonian order*, Phys. Rev. D **63**, 062005 (2001), gr-qc/0007051
- [17] A. Buonanno, G. B. Cook und F. Pretorius, *Inspiral, merger and ring-down of equal-mass black-hole binaries*, Phys. Rev. D **75**, 124018 (2007), gr-qc/0610122
- [18] M. Burgay *et al.*, *An increased estimate of the merger rate of double neutron stars from observations of a highly relativistic system*, Nature **426**, 531-533 (2003)
- [19] B. Carter und J.-P. Luminet, *Tidal compression of a star by a large black hole*, Astron. Astrophys. **121**, 97-113 (1983)
- [20] S. Chandrasekhar, *The equilibrium of distorted bodies. II) The tidal problem*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **93**, 449-461 (1933)
- [21] S. Chandrasekhar, *Ellipsoidal Figures of Equilibrium*, 2. Auflage, Dover/New York 1987
- [22] A. Claret und B. Willems, *New results on the apsidal-motion test to stellar structure and evolution including the effects of dynamic tides*, Astron. Astrophys. **388**, 518-530 (2002)
- [23] T. G. Cowling, *On the motion of the apsidal line in close binary systems*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **98**, 734-743 (1938)
- [24] T. G. Cowling, *The non-radial oscillations of polytropic stars*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **101**, 367-375 (1941)

- [25] T. Damour, P. Jaranowski und G. Schäfer, *Dynamical invariants for general relativistic two-body systems at the third post-Newtonian approximation*, Phys. Rev. D **62**, 044024 (2000)
- [26] T. Damour, P. Jaranowski und G. Schäfer, *Poincaré invariance in the ADM Hamiltonian approach to the general relativistic two-body problem*, Phys. Rev. D **62**, 021501 (2000); Erratum ibid. D **63**, 029903 (2001)
- [27] T. Damour, P. Jaranowski und G. Schäfer, *Equivalence between the ADM-Hamiltonian and the harmonic coordinates approaches to the third post-Newtonian dynamics of compact binaries*, Phys. Rev. D **63**, 044021 (2001); Erratum ibid. D **66**, 029901 (2002), gr-qc/0010040
- [28] T. Damour und N. Deruelle, *General relativistic celestial mechanics of binary systems I. The post-Newtonian motion*, Annales des Instituts Henri Poincaré **43**, 107-132 (1985)
- [29] L. Dong, F. A. Rasio und S. L. Shapiro, *Ellipsoidal figures of equilibrium – Compressible models*, Astrophys. J. Suppl. Ser. **88**, 205-252 (1993)
- [30] W. Dziembowski, *Nonradial Oscillations of Evolved Stars. I. Quasiadiabatic Approximation*, Acta Astronomica **21**, 289-306 (1971)
- [31] A. Einstein, *Zur allgemeinen Relativitätstheorie*, Sitzungsberichte der Preuss. Akad. d. Wissensch. 1915
- [32] G. Faye, P. Jaranowski und G. Schäfer, *Skeleton approximate solution of the Einstein field equations for multiple black-hole systems*, Phys. Rev. D **69**, 124029 (2004)
- [33] H. Goenner, *Einführung in die spezielle und allgemeine Relativitätstheorie*, Spektrum Verlag, Heidelberg/Berlin/Oxford 1996
- [34] Gravity Probe B: <http://einstein.stanford.edu>
- [35] I. Gradsteyn und M. Ryzhik, *Table of integrals, series and products*, 2nd. ed., San Diego Academic Press 1994
- [36] J. Hamel, *Astronomiegeschichte in Quellentexten. Von Hesiod bis Hubble*, Spektrum Verlag, Heidelberg/Berlin/Oxford 1996

- [37] D. Hansen, *Motion and gravitational radiation of a binary system consisting of an oscillating and rotating coplanar dusty disk and a point-like object*, Gen. Rel. Grav. **37**, 1781-1807 (2005), gr-qc/0501071
- [38] D. Hansen, *Dynamical evolution and leading order gravitational wave emission of Riemann-S binaries*, Gen. Rel. Grav. **38**, 1173-1208 (2006), gr-qc/0511033
- [39] D. Hansen, *Next to leading order gravitational wave emission and dynamical evolution of compact binary systems with spin*, submitted to Gen. Rel. Grav., arXiv:0710.0258
- [40] J. B. Hartle, *Gravity. An introduction to Einstein's General Relativity*, Addison-Wesley, San Francisco 2003, S. 223 ff
- [41] Th. Heath, *Aristarchus of Samos. The ancient Copernicus*, Oxford University Press, special ed. 1998
- [42] W. C. G. Ho und D. Lai, *Resonant tidal excitations of rotating neutron stars in coalescing binaries*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **308**, 153-166 (1999), gr-qc/9812116
- [43] R. A. Hulse und J. H. Taylor, *Discovery of a pulsar in a binary system*, Astrophys. J. **195**, L 51-L 53 (1975)
- [44] C. Hunter, *Oscillations of self-gravitating disks*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **129**, 321-343 (1965)
- [45] P. Jaranowski und G. Schafer, *Third post-Newtonian higher order ADM Hamilton dynamics for two-body point mass systems*, Phys. Rev. D **57**, 7274-7291 (1998), Erratum: Phys. Rev. D **63**, 029902 (2001)
- [46] P. Jaranowski und G. Schäfer, *The Binary black hole problem at the third post-Newtonian approximation in the orbital motion: Static part*, Phys. Rev. D **60**, 124003 (1999)
- [47] S. Johnston *et al.*, *PSR 1259-63 – A binary radio pulsar with a Be star companion*, Astrophys. J. **387**, L 37-L 41 (1992)
- [48] W. Junker und G. Schäfer, *Binary systems: higher order gravitational radiation damping and wave emission*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **254**, 146-164 (1992)
- [49] D. Kennefick, *Not only because of theory: Dyson, Eddington and the competing myths of the 1919 eclipse expedition*, to appear in the proceedings of the 7th Conference on the History of General Relativity, Tenerife 2005, arXiv:0709.0685

- [50] W. Kley und G. Schäfer, *Post-Newtonian oscillations of a rotating disk of dust*, Phys. Rev. D **50**, 6217-6226 (1994)
- [51] C. Königsdörffer und A. Gopakumar, *Post-Newtonian accurate parametric solution to the dynamics of spinning compact binaries in eccentric orbits: The Leading order spin-orbit interaction*, Phys. Rev. D **71**, 024039 (2005)
- [52] K. D. Kokkotas und G. Schäfer, *Tidal and tidal-resonant effects in coalescing binaries*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **275**, 301-308 (1995), gr-qc/9502034
- [53] A. Kosovichev und I. Novikov, *Non-linear effects at tidal capture of stars by a massive black hole – I. Incompressible affine model*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **258**, 715-724 (1992)
- [54] F. Kuypers, *Klassische Mechanik*, 5. überarb. Aufl., Wiley-VCH, Weinheim/New York 1997
- [55] D. Lai und S. L. Shapiro, *Hydrodynamics of coalescing binary neutron stars: ellipsoidal treatment*, Astrophys. J. **443**, 705-716 (1995)
- [56] D. Lai und A. G. Wiseman, *Innermost stable circular orbit of inspiraling neutron-star binaries: Tidal effects, post-Newtonian effects, and the neutron-star equation of state*, Phys. Rev. D **54**, 3958-3964 (1996), gr-qc/0501011
- [57] D. Lai, L. Bildsten und V. A. Kaspi, *Spin-orbit interaction in neutron star/main-sequence binaries and implications for pulsar timing*, Astrophys. J. **452**, 819-824 (1995)
- [58] D. Lai, F. A. Rasio und S. L. Shapiro, *Hydrodynamics of Rotating Stars and Close Binary Interactions: Compressible Ellipsoid Models*, astro-ph/9404031
- [59] D. Lai, F. A. Rasio und S. L. Shapiro, *Hydrodynamic instability and coalescence of binary neutron stars*, Astrophys. J. **420**, 811-829 (1994), arXiv:astro-ph/9304027
- [60] L. Landau und E. Lifshitz, *Mechanik*, Akademie Verlag, Berlin 1990
- [61] P. Ledoux und T. Walraven, *Handbuch der Physik*, Bd. 51, Springer Verlag, Berlin 1955, S. 353-604
- [62] J. Lense und H. Thirring, *Über den Einfluß der Eigenrotation der Zentralkörper auf die Bewegung der Planeten und Monde nach der Einsteinschen Gravitationstheorie*, Phys. Zeitschr. **19**, 156-163 (1918)

- [63] D. R. Lorimer, *Binary and Millisecond Pulsars*, Living Rev. Relativity **8**, lrr-2005-7, <http://www.livingreviews.org/lrr-2005-7>
- [64] R.-M. Memmesheimer, A. Gopakumar und G. Schäfer, *Third post-Newtonian accurate generalized quasi-Keplerian parametrization for compact binaries in eccentric orbits*, Phys. Rev. D **70**, 104011 (2004)
- [65] Ch. W. Misner, K. S. Thorne und J. A. Wheeler, *Gravitation*, W. H. Freeman and Company, USA 1973, 20th ed. 1997
- [66] T. Mora und C. M. Will, *Post-Newtonian diagnostic of quasiequilibrium binary configurations of compact objects*, Phys. Rev. D **69**, 104021 (2004), gr-qc/0312082
- [67] G. Neugebauer und R. Meinel, *General Relativistic Gravitational Field of a Rigidly Rotating Disk of Dust: Solution in Terms of Ultraelliptic Functions*, Phys. Rev. Lett. **75**, 3046-3047 (1995)
- [68] F. A. E. Pirani, *Introduction to gravitational radiation theory*. In: A. Trautman, F.A.E. Pirani & H. Bondi (Hrsg.), *Lectures on General Relativity*, Brendels Summer Institute in Theoretical Physics 1964, Vol.1, Prentice-Hall, New Jersey 1965, S. 287
- [69] W. H. Press und S. A. Teukolsky, *On formation of close binaries by two-body tidal capture*, Astrophys. J. **213**, 183-192 (1977)
- [70] Y. Rathore, R. D. Blandford und A. E. Broderich, *Resonant excitation of white dwarf oscillations in compact object binaries – I. The no back reaction approximation*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **357**, 834-846 (2005), astro-ph/0406102
- [71] H. S. Russell, *On the advance of periastron in eclipsing binaries*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **88**, 641-643 (1928)
- [72] G. Schäfer und W. Kley, *Gravitational radiation from the oscillations of a rotating disk of dust*, Phys. Rev. D **50**, 6227-6234 (1994)
- [73] G. Schäfer, *Gravitomagnetic effects*, Gen. Rel. Grav. **36**, 2223-2235 (2004), gr-qc/0407116
- [74] G. Schäfer, *Reduced Hamiltonian formalism for general-relativistic adiabatic fluids and applications*, Astron. Nachr. **311**, 213-217 (1990)



- [75] I. I. Shapiro, *Fourth test of general relativity*, Phys. Rev. Lett. **13**, 789-791 (1964)
- [76] S. S. Shapiro *et al.*, *Measurement of solar gravitational deflection of radio waves using geodetic very-long-baseline interferometry data 1979-1999*, Phys. Rev. Lett. **92**, 121101 (2004)
- [77] S. L. Shapiro und S. A. Teukolsky, *Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars. The Physics of Compact Objects*, John Wiley & Sons, New York 1983
- [78] S. L. Shapiro und S. A. Teukolsky, *Scalar gravitation: A laboratory for numerical relativity. II. Disks*, Phys. Rev. D **49**, 1886-1893 (1994)
- [79] W. de Sitter, *On Einstein's Theory of Gravitation and its Astronomical Consequences*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **77**, 155-184 (1916)
- [80] P. Smeyers, B. Wilems und T. van Hoolst, *Resonant dynamic tides and apsidal motion in close binaries*, Astron. Astrophys. **335**, 622-636 (1998)
- [81] M. H. Soffel, *Relativity in Astrometry, Celestial Mechanics and Geodesy*, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg 1989
- [82] I. H. Stairs, *Testing General Relativity with Pulsar Timing*, Living Rev. Relativity **6**, lrr-2-3-5, <http://www.livingreviews.org/lrr-2003-5>
- [83] H. Thirring, *Über die Wirkung rotierender ferner Massen in Einsteins Gravitationstheorie*, Phys. Zeitschr. **19**, 33-39 (1918)
- [84] K. S. Thorne, *Multipole expansion of gravitational radiation*, Rev. Mod. Phys. **52**, 299-339 (1980)
- [85] U. Le Verrier, Vortrag an der Akademie der Wissenschaften am 2. Januar 1860
- [86] N. Wex, *A timing formula for main-sequence star binary pulsars*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **298**, 67-77 (1998)
- [87] C. M. Will, *Henry Cavendish, Johann von Soldner, and the deflection of light*, American J. Phys. **56**, 413-415 (1988)
- [88] C. M. Will, *The confrontation between General Relativity and experiment*, Living Review **9** (2006), <http://www.livingreviews.org/lrr-2006-3>

- [89] C. M. Will, *Theory and experiment in gravitational physics*, Cambridge University Press, Cambridge, Rev. ed. 1993
- [90] B. Willems und A. Claret, *Dynamic Tides and the Evolution of Stars in Close Binaries*, In: Tidal Evolution and Oscillations in Binary Stars, Proceedings of the 3rd Granada Workshop on Stellar Structure, ASP Conference Series **333**, astro-ph/0409203
- [91] B. Willems *et al.*, *Eccentric double white dwarfs as LISA sources in globular clusters*, *Astrophys. J.* accepted, arXiv:0705.4287 [astro-ph]
- [92] B. Willems, A. Vecchio und V. Kalogera, *Probing white dwarf interiors with LISA: periastron precession in eccentric double white dwarfs*, arXiv:0706.3700 [astro-ph]
- [93] M. Wolf, R. Diethelm und K. Hornoch, *Apsidal motion in eccentric eclipsing binaries: TV Ceti and V451 Ophiuchi*, *Astron. Astrophys.* **374**, 243-249 (2001)
- [94] *Times*, 7. 11. 1919: „Wissenschaftliche Revolution. Neue Theorie des Universums. Newtons Vorstellungen gestürzt“; *New York Times*, 9. 11. 1919: „Lichter am Himmel alle schief. Wissenschaftler auf Sonnenfinsternis-Beobachtungen gespannt. Einsteins Theorie triumphiert. Sterne nicht dort, wo sie zu stehen scheinen oder rechnerisch stehen sollten, aber kein Grund zur Sorge.“

# Anhang A

## Anhang

### A.1 Multipolentwicklung des Gravitationsfeldes

Analog zur Elektrodynamik, in der zeitlich veränderliche elektrische Ladungsverteilungen Quellen elektromagnetischer Strahlung sind, treten in der ART zeitlich veränderliche Massenverteilungen als Quellen einer Gravitationsstrahlung auf. Im asymptotisch flachen Raum, d.h. weit entfernt von der Quelle, lässt sich deren Gravitationsstrahlung in Form einer Multipolentwicklung darstellen (vgl. z.B. [84])

$$h_{ij}^{TT} = \frac{G}{Dc^4} \mathcal{P}_{ijkl}(\mathbf{N}) \sum_{l=2}^{\infty} \left[ \frac{4}{l!} \left( \frac{1}{l} \right)^{l-2} \mathcal{I}_{kmA_{l-2}}^{(l)} N_{A_{l-2}} + \frac{8l}{(l+1)!} \left( \frac{1}{c} \right)^{l-1} \varepsilon_{pq(k} \mathcal{J}_{m)pA_{l-2}}^{(l)} N_q N_{A_{l-2}} \right]. \quad (\text{A.1})$$

Die symmetrisch-spurfreen Massen- und Strommultipolmomente  $\mathcal{I}_{A_l}$  und  $\mathcal{J}_{A_l}$  liegen in einer kartesischen Basis vor und hängen von der retardierten Zeit  $t - D/c$  ab, wobei  $D$  der Abstand des Beobachters von der Quelle ist. Mit  $A_l = a_1 \cdots a_l$  ( $a_i = 1, 2, 3$ ) werden Multiindizes bezeichnet,  $\mathbf{N}$  ist der von der Quelle in Richtung Beobachter weisende Einheitsvektor ( $\mathbf{N} = \mathbf{D}/D$ ) und  $\mathcal{I}_{A_l}^{(l)}$  bezeichnet die  $l$ -te Zeitableitung von  $\mathcal{I}_{A_l}$ . Schließlich bewirkt der Projektionsoperator

$$P_{ijkl}(\mathbf{N}) := (\delta_{ik} - N_i N_k)(\delta_{jm} - N_j N_m) - \frac{1}{2}(\delta_{ij} - N_i N_j)(\delta_{km} - N_k N_m) \quad (\text{A.2})$$

die TT-Projektion orthogonal zur Ausbreitungsrichtung  $\mathbf{N}$  der Gravitationswellen. In allen im Rahmen dieser Arbeit behandelten Modellen ist die Achse des Gesamtdrehimpulses erhalten. Es bietet sich daher an, anstelle kartesischer Koordinaten sphärische Koordinaten zu verwenden und in eine Darstellung  $I^{lm}$  bzw.  $S^{lm}$  ( $m = -l, \dots, l$ ) zu gehen, in der die Multipolmomente irreduzibel bezüglich der

Gesamtdrehimpulsachse des Systems sind. Zwischen den Darstellungen der Multipolmomente bestehen die Beziehungen [48]

$$\begin{aligned} I^{lm}(t) &= \frac{16\pi}{(2l+1)!!} \sqrt{\frac{(l+1)(l+2)}{2(l-1)l}} \mathcal{I}_{A_l}(t) Y_{A_l}^{lm*}, \\ S^{lm}(t) &= -\frac{32\pi l}{(l+1)(2l+1)!!} \sqrt{\frac{(l+1)(l+2)}{2(l-1)l}} \mathcal{J}_{A_l}(t) Y_{A_l}^{lm*}, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

wobei  $Y_{A_l}^{lm}$  für  $m \geq 0$  wie folgt definiert ist:

$$Y_{A_l}^{lm} := (-1)^m (2l-1)!! \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi(l-m)!(l+m)!}} (\delta_{i_1}^1 + i\delta_{i_1}^2) \cdots (\delta_{i_m}^1 + i\delta_{i_m}^2) \delta_{i_{m+1}}^3 \cdots \delta_{i_l}^3. \quad (\text{A.4})$$

Die eckigen Klammern bezeichnen dabei den symmetrisch-spurfreien Anteil des Tensors. Man kann sich leicht davon überzeugen, dass

$$Y_{A_l}^{l-m} = (-1)^m Y_{A_l}^{lm*}, \quad I^{lm*} = (-1)^m I^{l-m}, \quad S^{lm*} = (-1)^m S^{l-m}. \quad (\text{A.5})$$

In dieser Darstellung ist das Strahlungsfeld durch

$$h_{ij}^{TT} = \frac{G}{Dc^4} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left[ \left(\frac{1}{c}\right)^{l-2} I^{(l)lm} T_{ij}^{E2,lm}(\Theta, \Phi) + \left(\frac{1}{c}\right)^{l-1} S^{(l)lm} T_{ij}^{B2,lm}(\Theta, \Phi) \right] \quad (\text{A.6})$$

gegeben (vgl. z.B. [84], [48]).  $T^{E/B2,lm}$  sind hier die sogenannten irreduziblen Spin-2 Tensor-Harmonischen elektrischen bzw. magnetischen Typs (Parität  $(-1)^l$  bzw. Parität  $(-1)^{l+1}$ ) und die Winkel  $\Theta$  und  $\Phi$  beschreiben ein beobachterabhängiges Koordinatensystem auf der Kugeloberfläche. Die Tensor-Harmonischen erfüllen die Beziehung

$$T^{E2/B2,lm*} = (-1)^m T^{E2/B2,l-m}.$$

Führt man beobachterabhängige Einheitsvektoren  $\Phi$  und  $\Theta$  ein, so lassen sich die  $T^{E2/B2,lm}$  in eine Darstellung bringen, die genau den beiden Polarisationszuständen des Strahlungsfeldes entspricht. Genauer gesagt, ist  $h_+ \propto (\Theta \otimes \Theta - \Phi \otimes \Phi)$  und

$h_\times \propto (\Theta \otimes \Phi + \Phi \otimes \Theta)$ . Mit den Definitionen

$$\Upsilon_+ := (\Theta \otimes \Theta - \Phi \otimes \Phi), \quad \Upsilon_\times := (\Theta \otimes \Phi + \Phi \otimes \Theta)$$

lauten die in dieser Arbeit benötigten irreduziblen Spin-2 Tensor-Harmonischen [84]

$l = 2$ :

$$\begin{aligned} T^{E2,22} &= \sqrt{\frac{5}{128\pi}} e^{2i\Phi} [(1 + \cos^2 \Theta) \Upsilon_+ + 2i \cos \Theta \Upsilon_\times], \\ T^{E2,20} &= \sqrt{\frac{15}{64\pi}} \sin^2 \Theta \Upsilon_+, \end{aligned} \tag{A.7}$$

$$T^{B2,21} = -\sqrt{\frac{5}{32\pi}} e^{i\Phi} \sin \Theta [i \Upsilon_+ - \cos \Theta \Upsilon_\times], \tag{A.8}$$

$l = 3$ :

$$\begin{aligned} T^{E2,33} &= -\sqrt{\frac{21}{256\pi}} e^{3i\Phi} \sin \Theta [(1 + \cos^2 \Theta) \Upsilon_+ + 2i \cos \Theta \Upsilon_\times], \\ T^{E2,31} &= \sqrt{\frac{35}{256\pi}} e^{i\Phi} \sin \Theta [(3 \cos^2 \Theta - 1) \Upsilon_+ + 2i \cos \Theta \Upsilon_\times], \\ T^{B2,32} &= -\sqrt{\frac{7}{128\pi}} e^{2i\Phi} [2i(2 \cos^2 \Theta - 1) \Upsilon_+ - \cos \Theta (3 \cos^2 \Theta - 1) \Upsilon_\times], \\ T^{B2,30} &= \sqrt{\frac{105}{64\pi}} \cos \Theta \sin^2 \Theta \Upsilon_\times, \end{aligned} \tag{A.9}$$

$l = 4$ :

$$\begin{aligned} T^{E2,44} &= \sqrt{\frac{63}{512\pi}} e^{4i\Phi} \sin^2 \Theta [(1 + \cos^2 \Theta) \Upsilon_+ + 2i \cos \Theta \Upsilon_\times], \\ T^{E2,42} &= \sqrt{\frac{9}{128\pi}} e^{2i\Phi} [(7 \cos^4 \Theta - 6 \cos^2 \Theta + 1) \Upsilon_+ + i \cos \Theta (7 \cos^2 \Theta - 5) \Upsilon_\times], \\ T^{E2,40} &= -\sqrt{\frac{45}{256\pi}} (7 \cos^4 \Theta - 8 \cos^2 \Theta + 1) \Upsilon_+. \end{aligned} \tag{A.10}$$

## A.2 Post-Newtonsche Entwicklung des Strahlungsfeldes im Hamiltonschen Formalismus

Im folgenden werden die Beiträge zu den Polarisationszuständen  $h_+$  und  $h_\times$  des Strahlungsfeldes bis zur ersten post-Newtonschen Ordnung angegeben. Diese Beziehungen sind gültig für die in Kapitel 4 vorgestellten kompakten Binärsysteme mit  $q$ -Kopplung. In Abhängigkeit von den generalisierten Koordinaten und Impulsen erhält man für die  $h_+$ -Komponente des Gravitationsstrahlungsfeldes:

$$\begin{aligned} \frac{Dc^4}{G} h_+^{(0)} = & \mu(1 + \cos^2 \Theta) \left[ \cos 2(\Phi - \varphi) \left\{ \frac{p_r^2}{\mu^2} - \frac{p_\varphi^2}{\mu^2 r^2} - \frac{GM}{r} \left( 1 + \frac{3q}{2r^2} \right) \right\} \right. \\ & \left. + 2 \frac{p_r p_\varphi}{\mu^2 r} \sin 2(\Phi - \varphi) \right] - \mu \sin^2 \Theta \left[ \frac{p_r^2}{\mu^2} + \frac{p_\varphi^2}{\mu^2 r^2} - \frac{GM}{r} \left( 1 + \frac{3q}{2r^2} \right) \right], \quad (\text{A.11}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{Dc^6}{G} h_+^{(2)} = & \frac{\mu}{14} \sin^2 \Theta \left[ 7 \frac{G^2 \mathcal{M}^2}{r^2} (\nu - 10) - \frac{5(3\nu - 1)}{\mu^4} \left( p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} \right)^2 \right. \\ & \left. + \frac{GM}{\mu^2 r} \left\{ 3(23 + 8\nu) p_r^2 + (121 + 8\nu) \frac{p_\varphi^2}{r^2} \right\} \right] \\ & + \frac{\mu}{14} (1 + \cos^2 \Theta) \cos 2(\Phi - \varphi) \left[ 7 \frac{G^2 \mathcal{M}^2}{r^2} (10 - \nu) + \frac{5(3\nu - 1)}{\mu^4} \left( p_r^4 - \frac{p_\varphi^4}{r^4} \right) \right. \\ & \left. + \frac{GM}{\mu^2 r} \left\{ -3(23 + 8\nu) p_r^2 + \frac{241 - 72\nu}{3} \frac{p_\varphi^2}{r^2} \right\} \right] \\ & + \frac{1 + \cos^2 \Theta}{7} \sin 2(\Phi - \varphi) \frac{p_r p_\varphi}{\mu r} \left[ \frac{5(3\nu - 1)}{\mu^2} \left( p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} \right) - \frac{227 - 9\nu}{3} \frac{GM}{r} \right] \\ & + \frac{1 - 3\nu}{24} \mu \sin^2 \Theta (1 + \cos^2 \Theta) \left[ \cos 4(\Phi - \varphi) \left\{ 7 \frac{G^2 \mathcal{M}^2}{r^2} - \frac{GM}{\mu^2 r} \left( 18 p_r^2 - 51 \frac{p_\varphi^2}{r^2} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{6}{\mu^4} \left( p_r^4 - 6 p_r^2 \frac{p_\varphi^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^4}{r^4} \right) \right\} - \frac{p_r p_\varphi}{\mu^2 r} \sin 4(\Phi - \varphi) \left\{ 54 \frac{GM}{r} + \frac{24}{\mu^2} \left( \frac{p_\varphi^2}{r^2} - p_r^2 \right) \right\} \right] \\ & + \frac{1 - 3\nu}{42} \mu (7 \cos^4 \Theta - 6 \cos^2 \Theta + 1) \left[ \cos 2(\Phi - \varphi) \left\{ -7 \frac{G^2 \mathcal{M}^2}{r^2} + \frac{GM}{\mu^2 r} \left( 18 p_r^2 - 3 \frac{p_\varphi^2}{r^2} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{6}{\mu^4} \left( \frac{p_\varphi^4}{r^4} - p_r^4 \right) \right\} - \frac{p_r p_\varphi}{\mu^2 r} \sin 2(\Phi - \varphi) \left\{ \frac{12}{\mu^2} \left( p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} \right) - 27 \frac{GM}{r} \right\} \right] \\ & - \frac{1 - 3\nu}{56} \mu (7 \cos^4 \Theta - 8 \cos^2 \Theta + 1) \left[ 7 \frac{G^2 \mathcal{M}^2}{r^2} + \frac{6}{\mu^4} \left\{ p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} \right\}^2 - \frac{GM}{\mu^2 r} \left\{ 18 p_r^2 + 13 \frac{p_\varphi^2}{r^2} \right\} \right] \\ & - \frac{1 - 3\nu}{3} (2 \cos^2 \Theta - 1) \frac{GM}{\mu^2 r^2} \left[ 4 \frac{p_\varphi^2}{r} \cos 2(\Phi - \varphi) - p_r p_\varphi \sin 2(\Phi - \varphi) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

und für  $h_{\times}$

$$\frac{Dc^4}{G}h_{\times}^{(0)} = 2\mu \cos \Theta \left[ \sin 2(\Phi - \varphi) \left\{ \frac{p_{\varphi}^2}{\mu^2 r^2} - \frac{p_r^2}{\mu^2} + \frac{GM}{r} \left( 1 + \frac{3q}{2r^2} \right) \right\} + 2 \frac{p_r p_{\varphi}}{\mu^2 r} \cos 2(\Phi - \varphi) \right], \quad (\text{A.13})$$

$$\begin{aligned} \frac{Dc^6}{G}h_{\times}^{(2)} = & \mu \cos \Theta \left[ \sin 2(\Phi - \varphi) \left\{ \frac{5(1-3\nu)}{7\mu^4} \left( p_r^4 - \frac{p_{\varphi}^4}{r^4} \right) + \frac{GM}{\mu^2 r} \left( \frac{3}{7}(23+8\nu)p_r^2 \right. \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{241-72\nu}{21} \frac{p_{\varphi}^2}{r^2} \right) - \frac{G^2 M^2}{r^2} (10-\nu) \right\} + \frac{p_r p_{\varphi}}{\mu^2 r} \cos 2(\Phi - \varphi) \left\{ \frac{10(3\nu-1)}{7\mu^2} \left( p_r^2 + \frac{p_{\varphi}^2}{r^2} \right) \right. \\ & \left. - \frac{2}{21} (227-9\nu) \frac{GM}{r} \right\} - \frac{1-3\nu}{12} \frac{p_r p_{\varphi}}{\mu^2 r} \sin^2 \Theta \cos 4(\Phi - \varphi) \left\{ 54 \frac{GM}{r} + 24 \left( \frac{p_{\varphi}^2}{\mu^2 r^2} - \frac{p_r^2}{\mu^2} \right) \right\} \\ & - \frac{1-3\nu}{12} \sin^2 \Theta \sin 4(\Phi - \varphi) \left\{ \frac{GM}{\mu^2 r} \left( 51 \frac{p_{\varphi}^2}{r^2} - 18p_r^2 \right) + \frac{6}{\mu^4} \left( p_r^4 - 6 \frac{p_r^2 p_{\varphi}^2}{r^2} + \frac{p_{\varphi}^4}{r^4} \right) \right. \\ & \left. + 7 \frac{G^2 M^2}{r^2} \right\} - \frac{1-3\nu}{42} (7 \cos^2 \Theta - 5) \left\{ \frac{p_r p_{\varphi}}{\mu^2 r} \cos 2(\Phi - \varphi) \left( \frac{12}{\mu^2} (p_r^2 + \frac{p_{\varphi}^2}{r^2}) - 27 \frac{GM}{r} \right) \right. \\ & \left. + \sin 2(\Phi - \varphi) \left[ -7 \frac{G^2 M^2}{r^2} + \frac{GM}{\mu^2 r} \left( 18p_r^2 - 3 \frac{p_{\varphi}^2}{r^2} \right) + \frac{6}{\mu^4} \left( \frac{p_{\varphi}^4}{r^4} - p_r^4 \right) \right] \right\} \\ & - \frac{1-3\nu}{2} \sin^2 \Theta \frac{GM}{r} \frac{p_r p_{\varphi}}{\mu^2 r} + \frac{1-3\nu}{6} (3 \cos^2 \Theta - 1) \frac{GM}{r} \left\{ \frac{p_r p_{\varphi}}{\mu^2 r} \cos 2(\Phi - \varphi) \right. \\ & \left. + 4 \frac{p_{\varphi}^2}{\mu^2 r^2} \sin 2(\Phi - \varphi) \right\} \right]. \quad (\text{A.14}) \end{aligned}$$

$h_{+, \times}^{(1)}$  verschwindet für gleiche Massen (vgl. Kap. 4) und ist mit  $\Delta m := m_1 - m_2$  allgemein durch

$$\begin{aligned} \frac{Dc^5}{G}h_{+}^{(1)} = & \sin \Theta \frac{\Delta m}{\mathcal{M} \mu^2} \left[ \frac{p_{\varphi}}{r} \sin(\Phi - \varphi) \left\{ \frac{4GM\mu^2}{3r} + \frac{3 \cos^2 \Theta - 1}{2} \left( \frac{7GM\mu^2}{6r} - p_r^2 - \frac{p_{\varphi}^2}{r^2} \right) \right\} \right. \\ & + \frac{3 \cos^2 \Theta - 1}{2} p_r \cos(\Phi - \varphi) \left\{ 2 \frac{GM\mu^2}{r} - p_r^2 - \frac{p_{\varphi}^2}{r^2} \right\} \\ & - \frac{1 + \cos^2 \Theta}{4} \left\{ 2p_r \cos 3(\Phi - \varphi) \left( p_r^2 - 3 \frac{p_{\varphi}^2}{r^2} - 2 \frac{GM\mu^2}{r} \right) \right. \\ & \left. - \frac{p_{\varphi}}{r} \sin 3(\Phi - \varphi) \left( 7 \frac{GM\mu^2}{r} - 6p_r^2 + 2 \frac{p_{\varphi}^2}{r^2} \right) \right\} \right] \quad (\text{A.15}) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\frac{Dc^5}{G} h_{\times}^{(1)} &= \frac{1}{2} \sin 2\Theta \frac{\Delta m}{\mathcal{M}\mu^2} \left[ \frac{p_{\varphi}}{r} \cos(\Phi - \varphi) \left\{ \frac{5}{2} \frac{G\mathcal{M}\mu^2}{r} - p_r^2 - \frac{p_{\varphi}^2}{r^2} \right\} \right. \\
&+ p_r \sin(\Phi - \varphi) \left\{ p_r^2 + \frac{p_{\varphi}^2}{r^2} - 2 \frac{G\mathcal{M}\mu^2}{r} \right\} + \frac{p_{\varphi}}{r} \cos 3(\Phi - \varphi) \left\{ 7 \frac{G\mathcal{M}\mu^2}{r} - 6p_r^2 + 2 \frac{p_{\varphi}^2}{r^2} \right\} \\
&\left. + p_r \sin 3(\Phi - \varphi) \left\{ p_r^2 - 3 \frac{p_{\varphi}^2}{r^2} - 2 \frac{G\mathcal{M}\mu^2}{r} \right\} \right] \quad (\text{A.16})
\end{aligned}$$

gegeben.

### A.2.1 Analytische Formulierung der Zeitableitungen von $I^{lm}$ und $S^{lm}$

Unter Verwendung der quasi-Keplerschen Parametrisierung und mit der Abkürzung  $F(u) := 1 - e_r \cos u$  erhält man

l=2:

$$S^{(2)21} = \frac{32}{5} \sqrt{\frac{\pi}{5}} (m_1 - m_2) \nu (-E)^{3/2} \frac{\sqrt{1 - e_r^2}}{F(u)^2}, \quad (\text{A.17})$$

$$\begin{aligned}
I^{(2)20} &= -16\mu E \sqrt{\frac{\pi}{15}} \left[ 1 - \frac{1}{F(u)} \left\{ 1 - \frac{q}{2a_r^2 F(u)^2} \right\} + E \frac{\delta}{F(u)} \right. \\
&\left. + \frac{E}{14c^2} \left\{ 3(3\nu - 1) - \frac{51\nu - 115}{F(u)} + \frac{2(19\nu - 4)}{F(u)^2} + 4(\nu - 26) \frac{1 - e_r^2}{F(u)^3} \right\} \right], \quad (\text{A.18})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I^{(2)22} &= 4 \sqrt{\frac{8\pi}{5}} e^{-2i\varphi} \mu E \left[ -1 + \frac{3}{F(u)} - 2 \frac{e_r^2 \sin^2 u}{F(u)^2} + 2i \frac{e_r \sqrt{1 - e_r^2} \sin u}{F(u)^2} \right. \\
&+ \frac{5q}{2a_r^2 F(u)^3} - E\delta \left\{ \frac{3}{F(u)} + 4 \frac{e_r^2 \sin^2 u}{F(u)^3} - 2i \frac{e_r \sqrt{1 - e_r^2} \sin u}{F(u)^2} \left( \frac{e_r \cos u}{F(u)} - \frac{1 + e_r^2}{1 - e_r^2} \right) \right\} \\
&+ \frac{E}{42c^2} \left\{ 9(3\nu - 1) - \frac{3(51\nu - 115)}{F(u)} + \frac{42(8\nu - 25) - 18e_r^2(3\nu - 1)}{F(u)^2} \right. \\
&- 4(111\nu - 254) \frac{1 - e_r^2}{F(u)^3} + 2i \frac{e_r \sin u}{\sqrt{1 - e_r^2} F(u)^3} (-171\nu + 253 - 3(23\nu - 87)e_r \cos u \\
&\left. + (213\nu - 505)e_r^2 + 9(3\nu - 1)e_r^3 \cos u) \right\} \quad (\text{A.19})
\end{aligned}$$



l=3:

$$S^{(3)30} = -16\sqrt{\frac{\pi}{105}}\mu E^2(1-3\nu)\frac{\sqrt{1-e_r^2}}{F(u)^3}, \quad (\text{A.20})$$

$$S^{(3)32} = \frac{8}{3}\sqrt{\frac{2\pi}{7}}(1-3\nu)\mu E^2 e^{-2i\varphi}\frac{\sqrt{1-e_r^2}}{F(u)^3}\left[e_r \sin u - 4i\sqrt{1-e_r^2}\right], \quad (\text{A.21})$$

$$I^{(3)31} = 8\sqrt{\frac{2\pi}{35}}\nu(m_1-m_2)(-E)^{3/2}e^{-i\varphi}\left[\frac{e_r \sin u}{F(u)} - i\frac{\sqrt{1-e_r^2}}{F(u)}\left\{1 - \frac{5}{6F(u)}\right\}\right], \quad (\text{A.22})$$

$$I^{(3)33} = 8\sqrt{\frac{2\pi}{21}}\nu(m_1-m_2)(-E)^{3/2}e^{-3i\varphi}\left[-\frac{e_r \sin u}{1-e_r \cos u}\left\{1 + \frac{4(1-e_r^2)}{F(u)^2}\right\} + i\frac{\sqrt{1-e_r^2}}{F(u)}\left\{3 - \frac{5}{2F(u)} + \frac{4(1-e_r^2)}{F(u)^2}\right\}\right], \quad (\text{A.23})$$

l=4:

$$I^{(4)40} = \frac{8}{21}\sqrt{\frac{\pi}{5}}(1-3\nu)\mu E^2\left[-6\frac{e_r \cos u}{F(u)} - \frac{5}{F(u)^2} + \frac{5(1-e_r^2)}{F(u)^3}\right], \quad (\text{A.24})$$

$$I^{(4)42} = \frac{8}{63}\sqrt{2\pi}(1-3\nu)\mu E^2 e^{-2i\varphi}\left[6\frac{e_r \cos u}{F(u)} - \frac{7-12e_r^2}{F(u)^2} + \frac{3(1-e_r^2)}{F(u)^3} - 3i\frac{e_r\sqrt{1-e_r^2}\sin u}{F(u)^2}\left\{4 + \frac{1}{F(u)}\right\}\right], \quad (\text{A.25})$$

$$I^{(4)44} = \frac{4}{9}\sqrt{\frac{2\pi}{7}}(1-3\nu)\mu E^2 e^{-4i\varphi}\left[-6\frac{e_r \cos u}{F(u)} + \frac{43-48e_r^2}{F(u)^2} - \frac{27(1-e_r^2)}{F(u)^3} + \frac{48(1-e_r^2)^2}{F(u)^4} + 6i\frac{e_r\sqrt{1-e_r^2}\sin u}{F(u)}\left\{4 + \frac{1}{F(u)} + \frac{8(1-e_r^2)}{F(u)^2}\right\}\right]. \quad (\text{A.26})$$

### A.3 Symmetrisch spurfreie Tensoren

Ein beliebiger Tensor  $p$ -ter Stufe wird durch die Summation aller möglichen Indexpermutationen symmetrisiert, d.h.

$$T_{(i_1\dots i_p)} := T_{i_1\dots i_p}^{symm} = \frac{1}{p!} \sum_{\text{Permut.}} T_{i_1\dots i_p}. \quad (\text{A.27})$$

Schwieriger ist es, den entsprechenden symmetrisch-spurfreien Tensor zu bestimmen. Für einen allgemeinen Tensor  $p$ -ter Stufe gibt Pirani die folgende Vorschrift an [68]

$$T_{\langle i_1 \dots i_p \rangle} = \sum_{k=0}^{[p/2]} a_k^p \delta_{(i_1 i_2} \dots \delta_{i_{2k-1} i_{2k}} T_{i_{2k+1} \dots i_p) \alpha_1 \alpha_1 \dots \alpha_k \alpha_k}^{symm}, \quad (\text{A.28})$$

mit

$$a_k^p = \frac{p!}{(2p-1)!!} \frac{(-1)^k (2p-2k-1)!!}{(p-2k)!(2k)!!} \quad (\text{A.29})$$

Insbesondere gilt für STF-Tensoren zweiter, dritter und vierter Stufe

$$T_{\langle ab \rangle} = \frac{1}{2}(T_{ab} + T_{ba}) - \frac{1}{3}T_{kk}, \quad (\text{A.30})$$

$$T_{\langle abc \rangle} = T_{(abc)} - \frac{1}{5}[\delta_{ab}T_{(cii)} + \delta_{bc}T_{(aai)} + \delta_{ac}T_{(bii)}], \quad (\text{A.31})$$

$$\begin{aligned} T_{\langle abcd \rangle} = T_{(abcd)} - \frac{1}{7}[\delta_{ab}T_{(cdii)} + \delta_{ac}T_{(bdii)} + \delta_{ad}T_{(bcii)} + \delta_{bc}T_{(adii)} + \delta_{bd}T_{(acii)} \\ + \delta_{cd}T_{(abii)}] + \frac{1}{35}[\delta_{ab}\delta_{cd} + \delta_{ac}\delta_{bd} + \delta_{ad}\delta_{bc}]T_{(ijij)}. \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

## A.4 Lane-Emden Gleichung

Die hydrodynamischen Gleichungen eines kugelsymmetrischen Polytrop sind durch

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm(r)\rho(r)}{r^2}, \quad \frac{dm}{dr} = 4\pi\rho(r)r^2 \quad (\text{A.33})$$

gegeben und können zu einer einzigen Gleichung kombiniert werden:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( \frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} \right) = -4\pi G\rho. \quad (\text{A.34})$$

Durch Einführen der durch

$$\rho := \rho_c \theta^n, \quad r := a_0 \xi, \quad a_0 = \left[ \frac{(n+1)K\rho_c^{\frac{1}{n}-1}}{4\pi G} \right]^{1/2} \quad (\text{A.35})$$

definierten dimensionslosen Variablen  $\xi$  und  $\theta$  erhält man die berühmte Lane-Emden-Gleichung

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left( \xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -\theta^n, \quad \theta(0) = 1, \quad \theta'(0) = 0. \quad (\text{A.36})$$

Für  $n < 5$  fällt die Lösung der Lane-Emden-Gleichung monoton und hat im Endlichen eine Nullstelle  $\xi_1$ . Diese ist durch verschwindenden Druck und verschwindende Dichte charakterisiert und repräsentiert daher die Oberfläche des Sterns.

## A.5 Die Chandrasekhar-Koeffizienten $A_i$ und $\mathcal{J}$

Für ellipsoide Gleichgewichtskonfigurationen definiert Chandrasekhar [21] die Größen  $\mathcal{J}$  und  $A_i$  als

$$\mathcal{J} := a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{(a_1^2 + u)(a_2^2 + u)(a_3^2 + u)}} \quad (\text{A.37})$$

und

$$A_i := a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty \frac{du}{(a_i^2 + u) \sqrt{(a_1^2 + u)(a_2^2 + u)(a_3^2 + u)}}. \quad (\text{A.38})$$

Man kann sich leicht von der Gültigkeit der folgenden Beziehung zwischen  $\mathcal{J}$  und den Chandrasekhar-Koeffizienten  $A_i$  überzeugen:

$$\mathcal{J} = a_1^2 A_1 + a_2^2 A_2 + a_3^2 A_3. \quad (\text{A.39})$$

Aus der Definition (A.37) erhält man außerdem

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial a_i} = \frac{1}{a_i} (\mathcal{J} - a_i^2 A_i), \quad (\text{keine Summation}) \quad (\text{A.40})$$

bzw. für axialsymmetrische Ellipsoide mit  $a_1 = a_2$

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial a_1} = \frac{2}{a_1} (\mathcal{J} - a_1^2 A_1), \quad \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial a_3} = \frac{1}{a_3} (\mathcal{J} - a_3^2 A_3). \quad (\text{A.41})$$

In dem hier betrachteten Modell war  $a_1 = a_2 > a_3$ . In diesem Fall ist es möglich, die Integrale in Gl. (A.38) explizit zu lösen und eine analytische Lösung anzugeben.

Man findet

$$A_1 = A_2 = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon^3} \arcsin \varepsilon - \frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon^2}, \quad (\text{A.42})$$

$$A_3 = \frac{2}{\varepsilon^2} - \frac{2\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon^3} \arcsin \varepsilon, \quad (\text{A.43})$$

mit

$$\varepsilon := \sqrt{1 - \frac{a_3^2}{a_1^2}}. \quad (\text{A.44})$$

## A.6 Jenseits der quasi-statischen Näherung: $\mathcal{I}_{\bar{a}\bar{b}}^{(5),s}$

In Kapitel 3 wurde zur Berechnung der fünften Zeitableitung des stellaren Massenquadrupoltensors im mitrotierenden System die quasi-statische Näherung angewendet. Dabei werden alle im Inneren der Sterne auftretenden Geschwindigkeiten und Beschleunigungen als kleine Größen angesehen. Lässt man diese Annahme fallen, erhält man einen deutlich komplizierteren Ausdruck für  $\mathcal{I}_{\bar{a}\bar{b}}^{(5),s}$ . Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{11}^{(5),s} &= (\mathcal{I}_{11}^s - \mathcal{I}_{22}^s) \left[ (16\Omega^5 - 40\Omega^2\ddot{\Omega} - 60\Omega\dot{\Omega}^2 + \Omega^{(4)}) \sin 2\alpha \right. \\ &\quad \left. + (80\Omega^3\dot{\Omega} - 20\dot{\Omega}\ddot{\Omega} - 10\Omega^{(3)}\Omega) \cos 2\alpha \right] \\ &+ (\dot{\mathcal{I}}_{11}^s - \dot{\mathcal{I}}_{22}^s) \left[ (40\Omega^4 - 30\dot{\Omega}^2 - 40\Omega\ddot{\Omega}) \cos 2\alpha - (120\Omega^2\dot{\Omega} - 5\Omega^{(3)}) \sin 2\alpha \right] \\ &+ (\ddot{\mathcal{I}}_{11}^s - \ddot{\mathcal{I}}_{22}^s) \left[ (10\ddot{\Omega} - 40\Omega^3) \sin 2\alpha - 60\Omega\dot{\Omega} \cos 2\alpha \right] \\ &+ 10(\mathcal{I}_{11}^{(3),s} - \mathcal{I}_{22}^{(3),s}) \left[ -2\Omega^2 \cos 2\alpha + \dot{\Omega} \sin 2\alpha \right] \\ &+ 5\Omega(\mathcal{I}_{11}^{(4),s} - \mathcal{I}_{22}^{(4),s}) \sin 2\alpha + \frac{1}{2}(\mathcal{I}_{11}^{(5),s} - \mathcal{I}_{22}^{(5),s}) \cos 2\alpha + \frac{1}{2}\mathcal{I}_{11}^{(5),s}, \\ \mathcal{I}_{22}^{(5),s} &= -(\mathcal{I}_{11}^s - \mathcal{I}_{22}^s) \left[ (16\Omega^5 - 40\Omega^2\ddot{\Omega} - 60\Omega\dot{\Omega}^2 + \Omega^{(4)}) \sin 2\alpha \right. \\ &\quad \left. + (80\Omega^3\dot{\Omega} - 20\dot{\Omega}\ddot{\Omega} - 10\Omega^{(3)}\Omega) \cos 2\alpha \right] \\ &- (\dot{\mathcal{I}}_{11}^s - \dot{\mathcal{I}}_{22}^s) \left[ (40\Omega^4 - 30\dot{\Omega}^2 - 40\Omega\ddot{\Omega}) \cos 2\alpha - (120\Omega^2\dot{\Omega} - 5\Omega^{(3)}) \sin 2\alpha \right] \\ &- (\ddot{\mathcal{I}}_{11}^s - \ddot{\mathcal{I}}_{22}^s) \left[ (10\ddot{\Omega} - 40\Omega^3) \sin 2\alpha - 60\Omega\dot{\Omega} \cos 2\alpha \right] \\ &- 10(\mathcal{I}_{11}^{(3),s} - \mathcal{I}_{22}^{(3),s}) \left[ -2\Omega^2 \cos 2\alpha + \dot{\Omega} \sin 2\alpha \right] \\ &- 5\Omega(\mathcal{I}_{11}^{(4),s} - \mathcal{I}_{22}^{(4),s}) \sin 2\alpha + \frac{1}{2}(\mathcal{I}_{11}^{(5),s} - \mathcal{I}_{22}^{(5),s}) \cos 2\alpha + \frac{1}{2}\mathcal{I}_{11}^{(5),s}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{33}^{(5),s} &= \mathcal{I}_{33}^{(5),s}, \\
\mathcal{I}_{12}^{(5),s} &= \mathcal{I}_{21}^{(5),s} = (\mathcal{I}_{11}^s - \mathcal{I}_{22}^s) \left[ (16\Omega^5 - 40\Omega^2\ddot{\Omega} - 60\Omega\dot{\Omega}^2 + \Omega^{(4)}) \cos 2\alpha \right. \\
&\quad \left. - (80\Omega^3\dot{\Omega} - 20\dot{\Omega}\ddot{\Omega} - 10\Omega^{(3)}\Omega) \sin 2\alpha \right] \\
&+ (\dot{\mathcal{I}}_{11}^s - \dot{\mathcal{I}}_{22}^s) \left[ (40\Omega^4 - 30\dot{\Omega}^2 - 40\Omega\ddot{\Omega}) \sin 2\alpha + (120\Omega^2\dot{\Omega} - 5\Omega^{(3)}) \cos 2\alpha \right] \\
&+ (\ddot{\mathcal{I}}_{11}^s - \ddot{\mathcal{I}}_{22}^s) \left[ (10\ddot{\Omega} - 40\Omega^3) \cos 2\alpha + 60\Omega\dot{\Omega} \sin 2\alpha \right] \\
&+ 10(\mathcal{I}_{11}^{(3),s} - \mathcal{I}_{22}^{(3),s}) \left[ 2\Omega^2 \sin 2\alpha + \dot{\Omega} \cos 2\alpha \right] \\
&+ 5\Omega(\mathcal{I}_{11}^{(4),s} - \mathcal{I}_{22}^{(4),s}) \cos 2\alpha - \frac{1}{2}(\mathcal{I}_{11}^{(5),s} - \mathcal{I}_{22}^{(5),s}) \sin 2\alpha.
\end{aligned}$$

## A.7 Der Massenquadrupoltensor der Staubscheibe

Da wir uns in Kapitel 2 auf die Gravitationsstrahlung in führender Ordnung beschränken, müssen der symmetrisch-spurfreie Massenquadrupoltensor der MacLaurin-Staubscheibe und seine Zeitableitungen nur in Newtonscher Ordnung berechnet werden. In dieser Näherung ist

$$\mathcal{I}_{ij} = \int \rho(x^i x^j - \frac{1}{3} r^2 \delta^{ij}).$$

Nun ist die Massendichte der Scheibe  $\rho_d$  auf die  $z = 0$  Ebene beschränkt und nur von der Radialkoordinate  $r$  abhängig. Aus Symmetriegründen müssen daher die Nichtdiagonalelemente von  $\mathcal{I}_{ij}^{(d)}$  verschwinden und man erhält

$$\mathcal{I}_{11}^{(d)} = \frac{M_d r_d^2}{15} = \frac{\alpha}{6} r_d^2.$$

Außerdem gilt aus Symmetriegründen  $\mathcal{I}_{11}^{(d)} = \mathcal{I}_{22}^{(d)}$ , und damit  $\mathcal{I}_{33}^{(d)} = -2\mathcal{I}_{11}^{(d)}$ . Zur Berechnung der zweiten und dritten Zeitableitung wird die Bewegungsgleichung für  $r_d$  in der Form

$$\dot{r}_d^2 = \frac{2E_d}{\alpha} + \frac{4C}{r_d} - \frac{p_\psi^2}{\alpha^2 r_d^2} \quad \text{und} \quad \ddot{r}_d = \frac{p_\psi^2}{\alpha^2 r_d^3} - \frac{2C}{r_d^2}$$

verwendet. Man findet damit

$$\ddot{\mathcal{I}}_{11}^{(d)} = \frac{\alpha}{3}(\dot{r}_d^2 + r_d \ddot{r}_d) = \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{\alpha} \left( p_r^2 + \frac{p_\psi^2}{r_d^2} \right) - \frac{2C\alpha}{r_d} \right]$$

und

$$\ddot{\mathcal{I}}_{11}^{(d)} = -\frac{2Cp_r}{3r_d^2}.$$

# Anhang B

## Abbildungsteil

### B.1 Abbildungen zu Kapitel 2

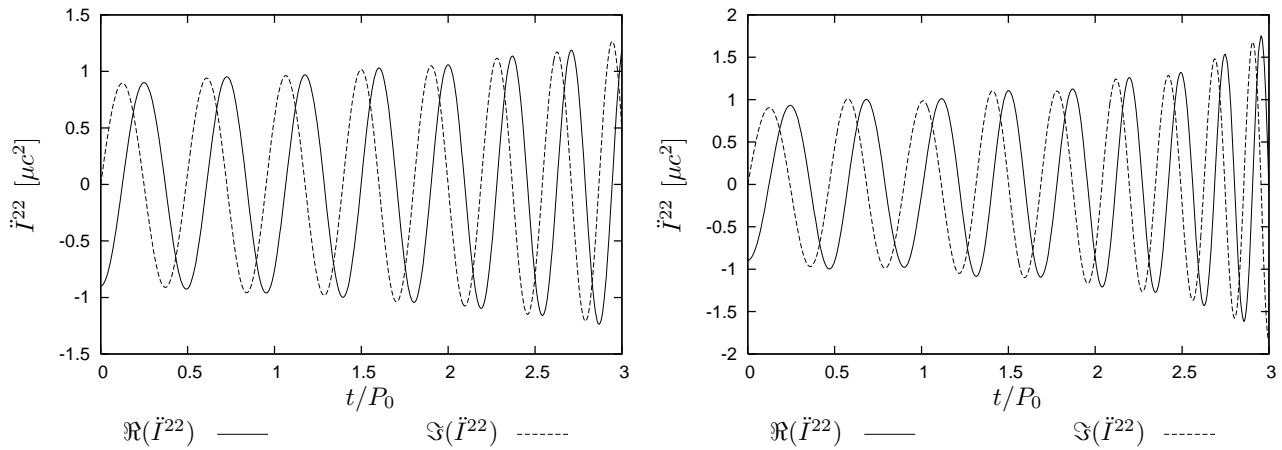


Abbildung B.1: Real- und Imaginärteil der  $\ddot{I}^{22}$ -Komponente eines Binärsystems gleicher Massen, bestehend aus Scheibe und punktförmigem Objekt – rechts mit, links ohne Gezeitenwechselwirkung. Anfangsparameter:  $e(0) = 0, \tilde{a}(0) = 10, \tilde{r}_d(0) = \tilde{\Upsilon}_d = 3, \epsilon = 1/10$ .

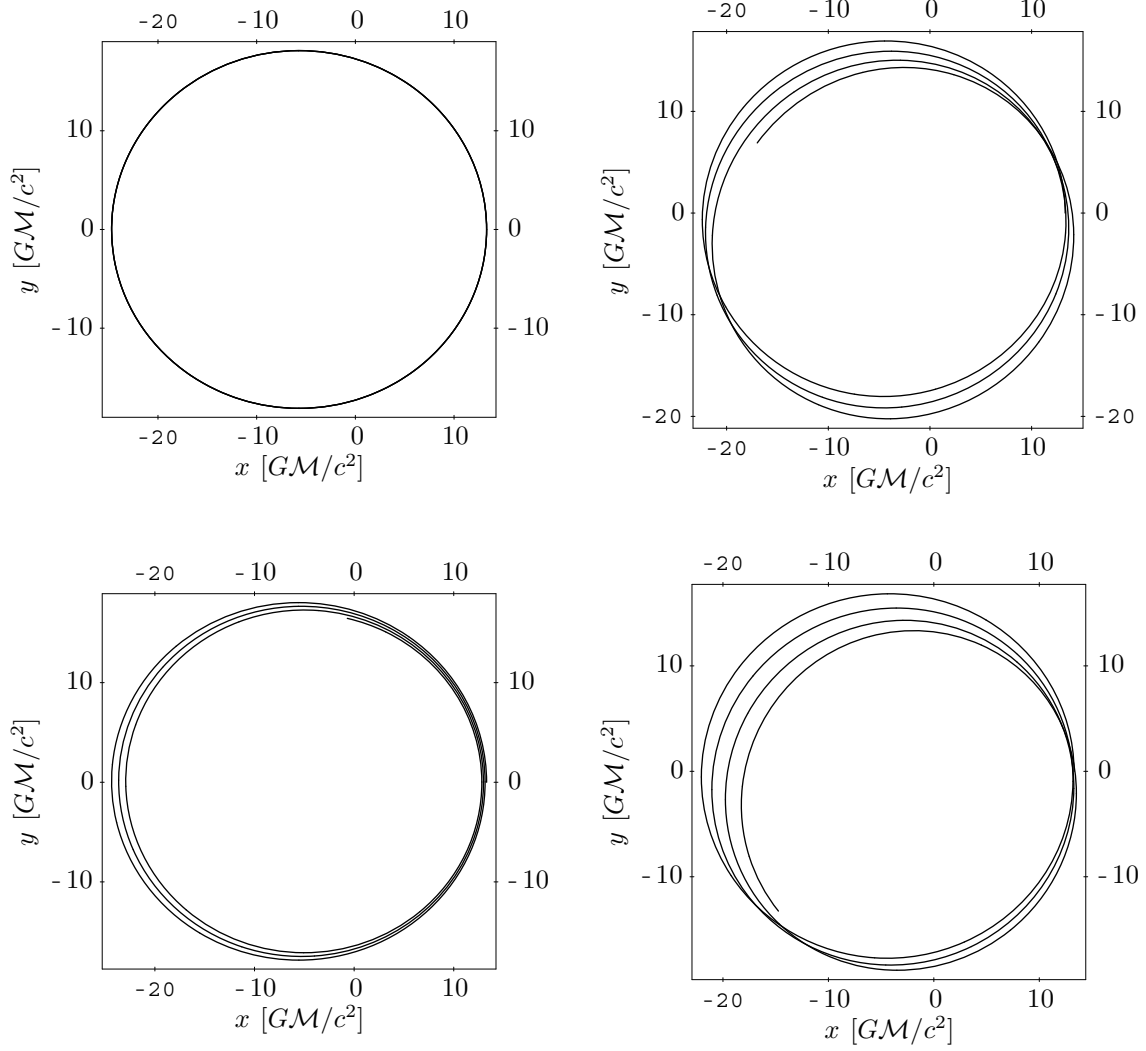


Abbildung B.2: Einfluss der Gezeitenwechselwirkung auf Bahnbewegung und Einspiralvorgang eines leicht elliptischen ( $e(0) = 0.3$ ) Binärsystems mit  $\tilde{a}(0) = 19$ ,  $\tilde{r}_d(0) = \tilde{\Upsilon}_d = 6$ ,  $M_d = M_p = 1/2$ ,  $\epsilon = 0.1$  Bei  $t = 0$  ist das Frequenzverhältnis  $\omega_d/\omega_o = 7.05$ . Dargestellt sind Newtonsche Bahnbewegung ohne Kopplung (oben links), Newtonsche Bahnbewegung mit Kopplung (oben rechts), sowie der Einfluss der Gezeitenwechselwirkung auf den Einspiralvorgang. Unten: Strahlungsdämpfung in führender Ordnung ohne Kopplung (links) und mit Kopplung (rechts).



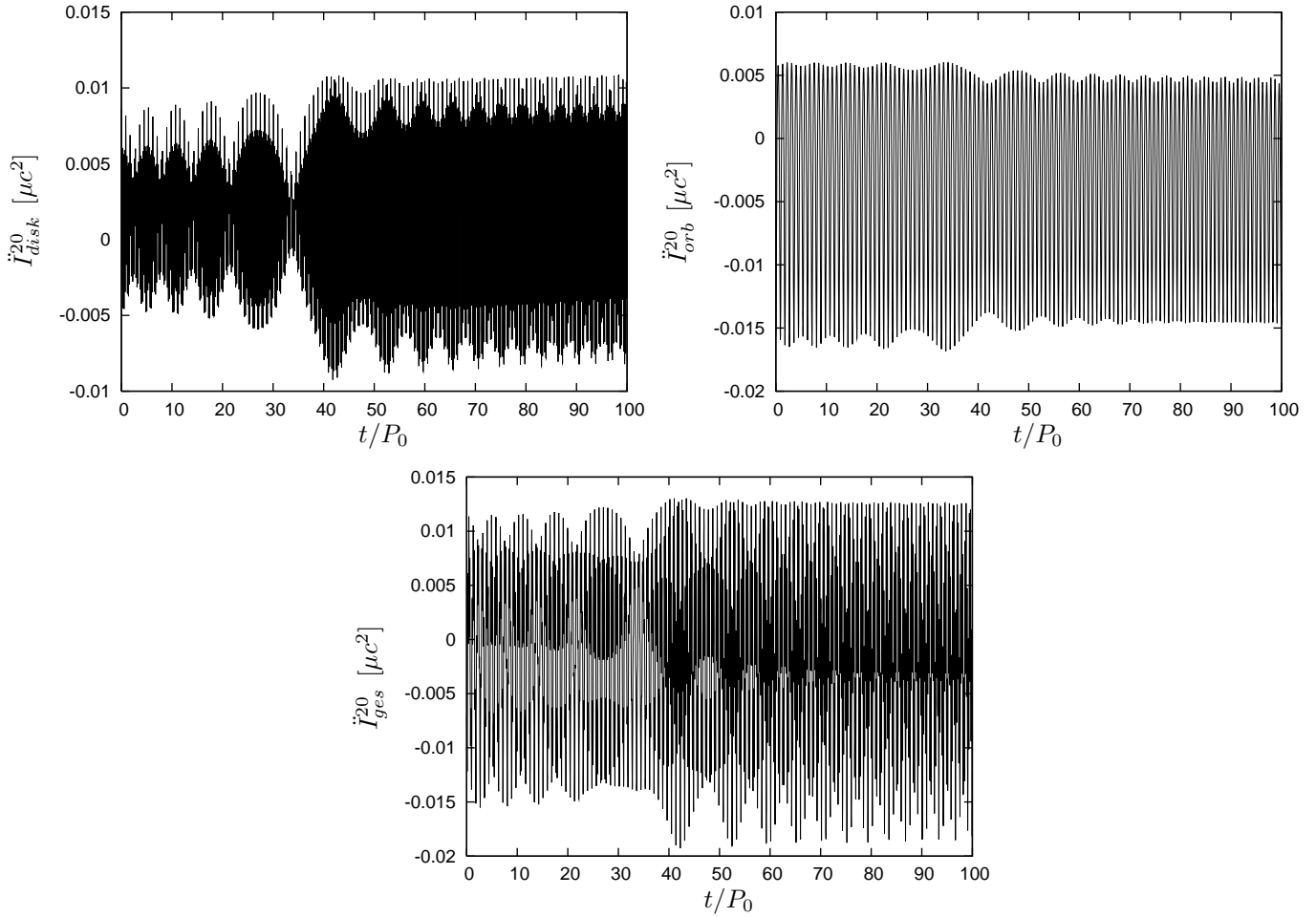


Abbildung B.3:  $\ddot{I}^{20}$ -Komponente der Gravitationswellenstrahlung. Dargestellt sind der Beitrag der Staubscheibe (links oben), der Beitrag der Bahnbewegung (rechts oben) und  $\ddot{I}^{20}$  des Gesamtsystems aus Scheibe und punktförmigem Objekt ( $m_p = m_d$ ). Die Integration beginnt bei  $\omega_d/\omega_0 = 4.95$ . Anfangsparameter:  $\tilde{a}(0) = 100$ ,  $e(0) = 0.3$ ,  $\epsilon(0) = 0.1$ ,  $\tilde{r}_d(0) = \tilde{Y}_d = 40$ .

## B.2 Abbildungen zu Kapitel 3

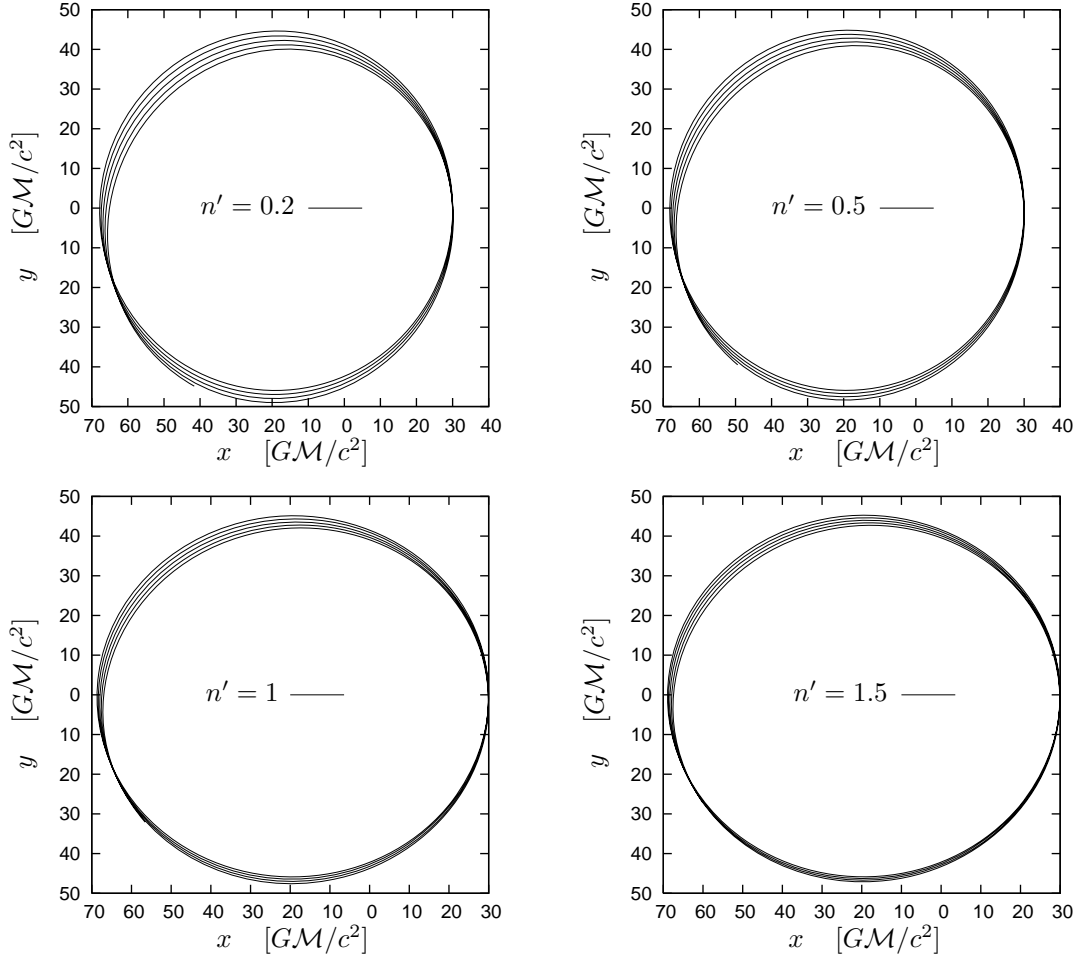


Abbildung B.4: Bahnbewegung und Periastrondrehung in Abhängigkeit vom Polytropenindex  $n'$ . Dargestellt ist ein elliptisches Binärsystem ( $e(0) = 0.4, \tilde{d}(0) = 50$ ) axialsymmetrischer Riemann-S Ellipsoide. Anfangswerte:  $\tilde{a}_1(0) = \tilde{a}'_1(0) = 10$ ,  $\tilde{a}_3(0) = \tilde{a}'_3(0) = 8$ ,  $\dot{\beta}(0) = \dot{\beta}'(0) = 0.01$ ,  $\dot{\tilde{a}}_1(0) = 0.02$ ,  $\dot{\tilde{a}}'_1(0) = 0.01$ . Stern  $m$  hat Polytropenindex  $n = 1$ , der Polytropenindex von  $m'$  ist  $n' = 0.2$  (oben links),  $n' = 0.5$  (oben rechts),  $n' = 1$  (unten links) und  $n' = 1.5$  (unten rechts).

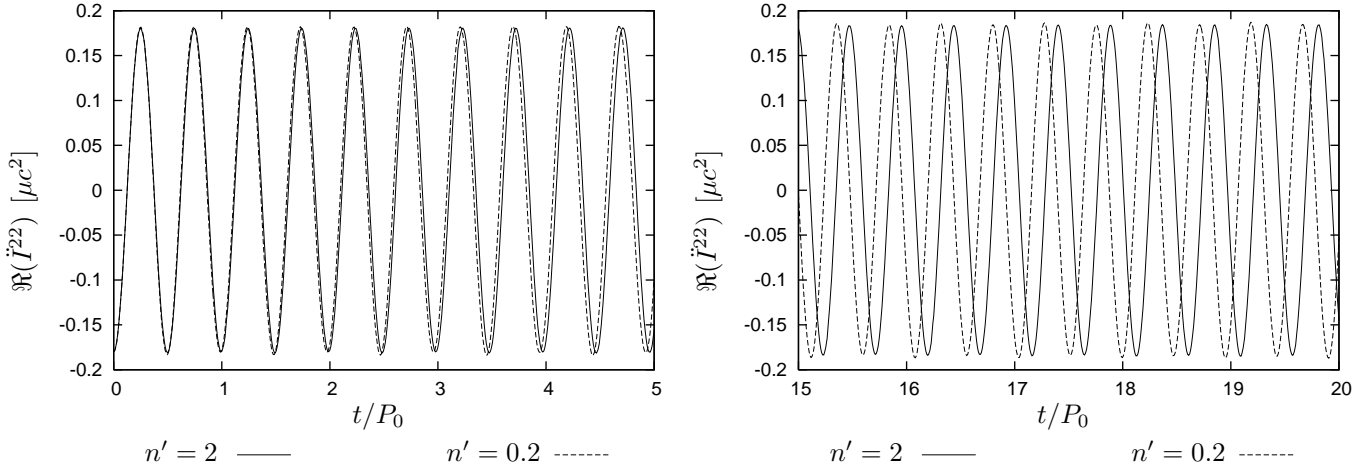


Abbildung B.5:  $\Re(\ddot{I}^{22})$ -Komponente eines Riemann-S Binärsystems mit kreisförmigem Orbit ( $e(0) = 0$ ) in Abhängigkeit vom Polytropenindex  $n'$  bei festem  $n = 1$ . Die Anfangswerte (mit Ausnahme von  $e(0)$ ) sind die gleichen wie in Abb. B.4.

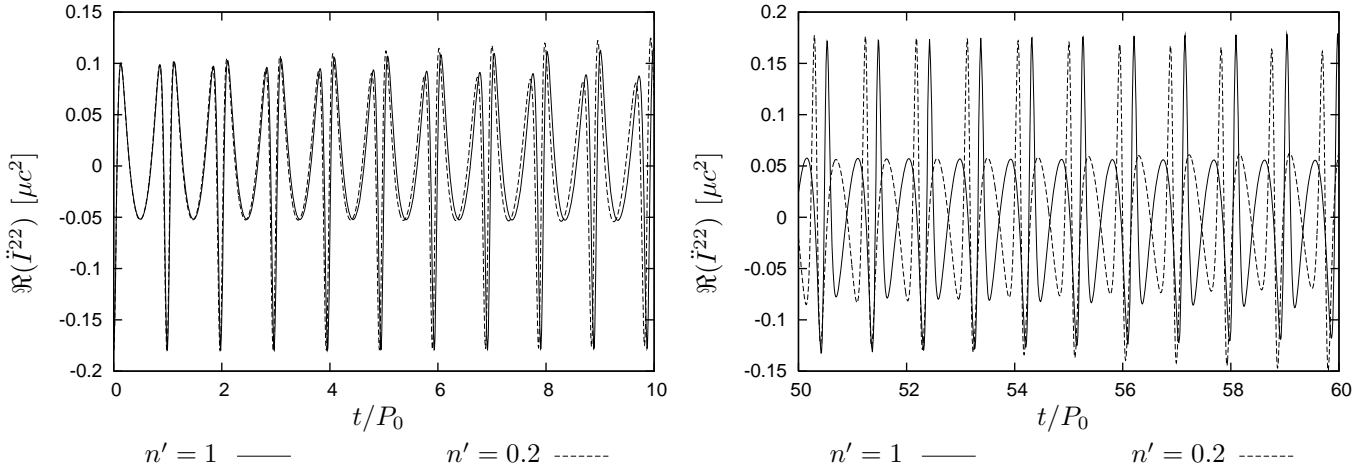


Abbildung B.6:  $\Re(\ddot{I}^{22})$  für ein elliptisches ( $e(0) = 0.4$ ) Binärsystem vom Typ II. Dargestellt ist  $\Re(\ddot{I}^{22})$  für  $n' = 1$  (feste Linie) und  $n' = 0.2$  (gestrichelte Linie). Anfangswerte:  $\tilde{d}(0) = 100$ ,  $\tilde{a}_1(0) = \tilde{a}'_1(0) = 20$ ,  $\tilde{a}_3(0) = \tilde{a}'_3(0) = 19$ ,  $\tilde{\alpha}_1(0) = \tilde{\alpha}'_1(0)$  sowie  $\tilde{\beta}(0) = -\tilde{\beta}'(0) = 0.002$ .

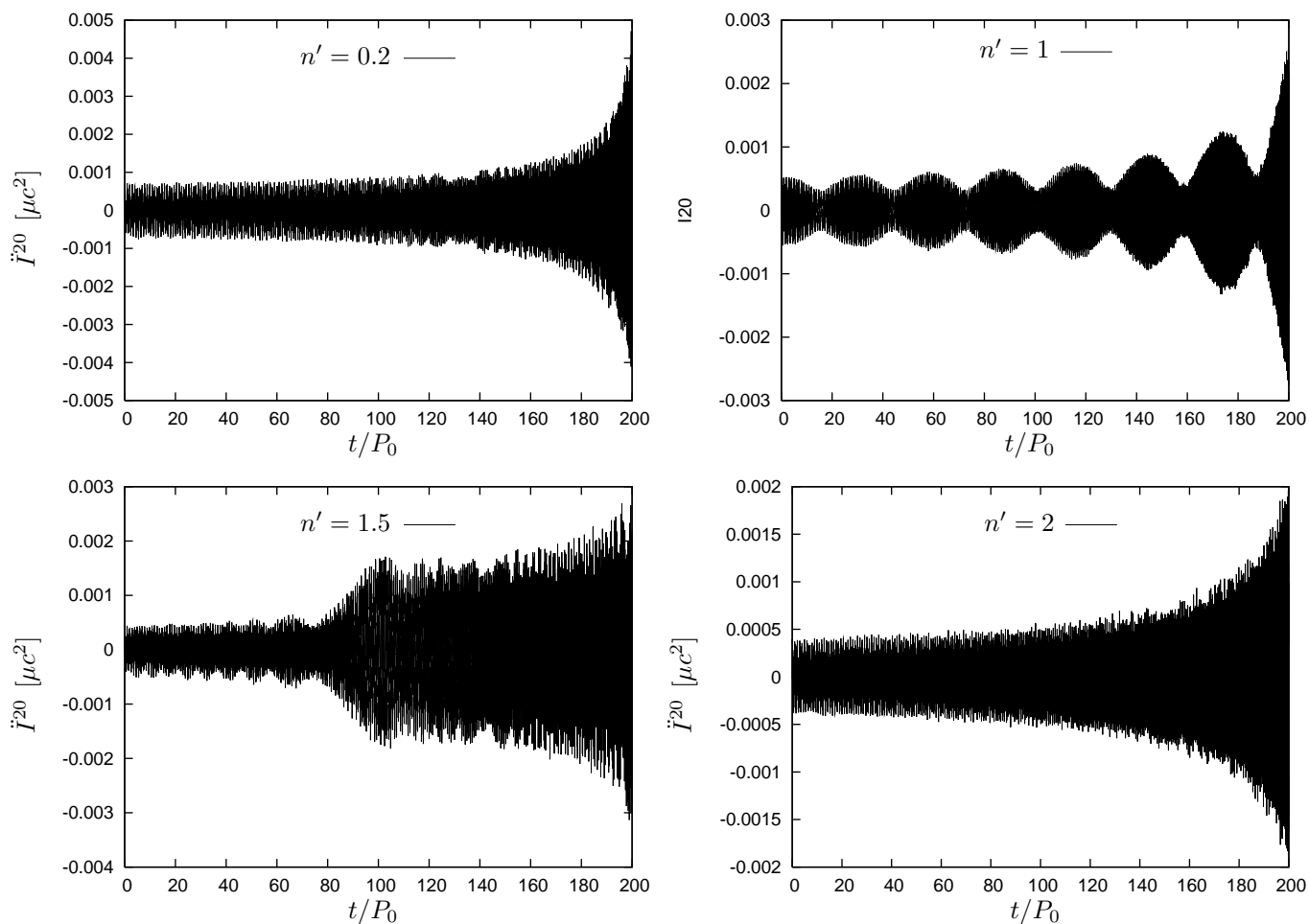


Abbildung B.7:  $\ddot{I}^{20}$ -Komponente der Gravitationsstrahlung führender Ordnung für ein System vom Typ II mit kreisförmigem Orbit bei  $t = 0$  in Abhängigkeit vom Polytropenindex  $n'$  des zweiten Sterns. Die Anfangswerte sind die gleichen wie in Abb. B.2.

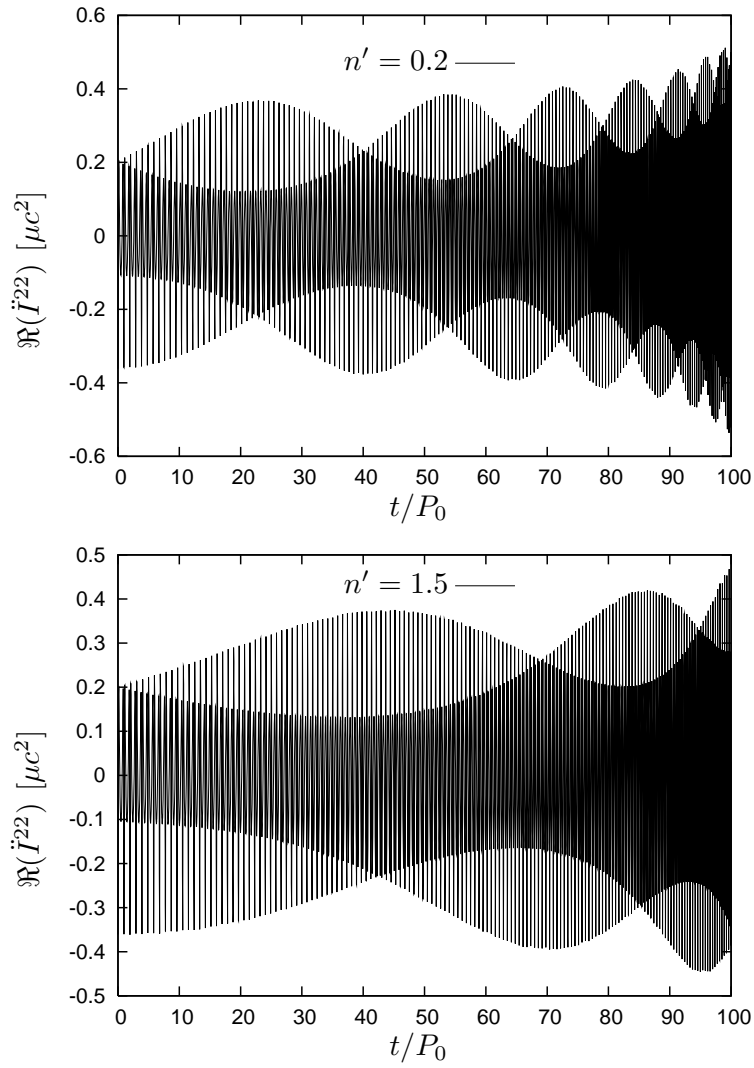


Abbildung B.8: Einfluss des Polytropenindex  $n'$  auf  $\Re(\ddot{I}^{22})$  für ein elliptisches System vom Typ II. Bahnexzentrizität zur Zeit  $t = 0$  ist  $e(0) = 0.4$ , alle anderen Anfangswerte sind dieselben wie in Abb. B.7.

## B.3 Abbildungen zu Kapitel 4

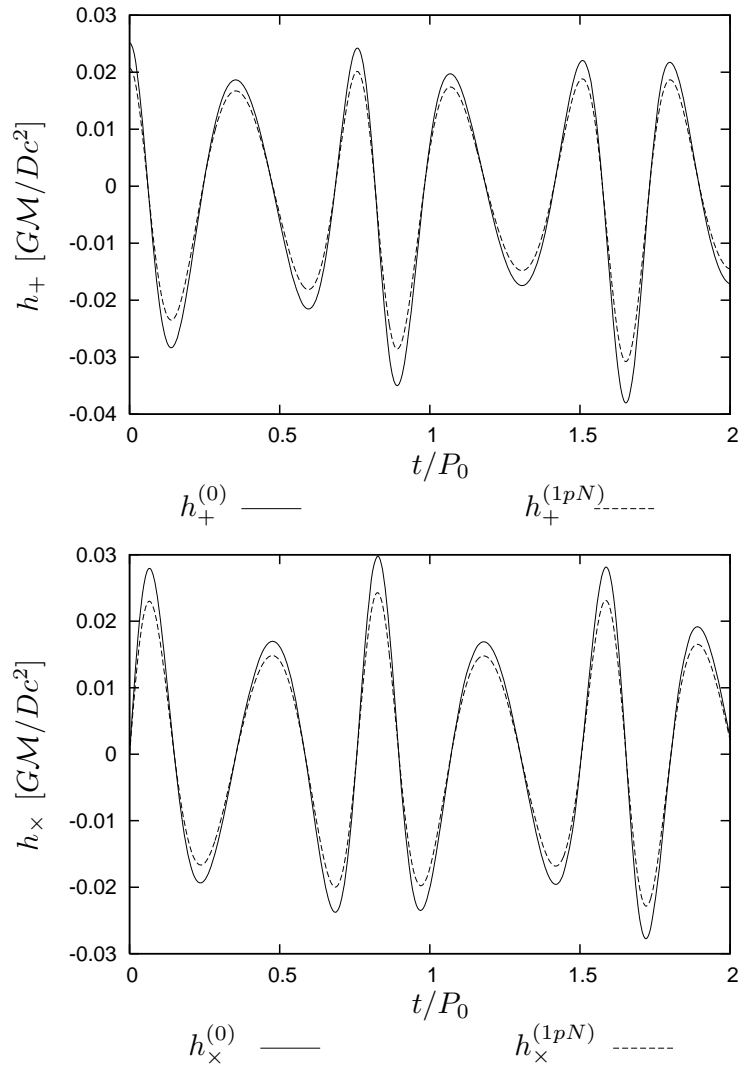


Abbildung B.9:  $h_+$ - und  $h_\times$ -Komponente der Gravitationsstrahlung eines elliptischen Binärsystems ( $\tilde{a}_r = 40$ ,  $e_r = 0.3$ ) nicht-rotierender kompakter Objekte gleicher Massen. Verglichen wird jeweils die sich aus der Quadrupolformel ergebende Wellenform mit der 1pN-korrekten Wellenform. Als beobachterabhängige Winkel wurden in dieser und allen folgenden Abbildungen gewählt:  $\Phi = \pi/2$ ,  $\Theta = \pi/4$ .

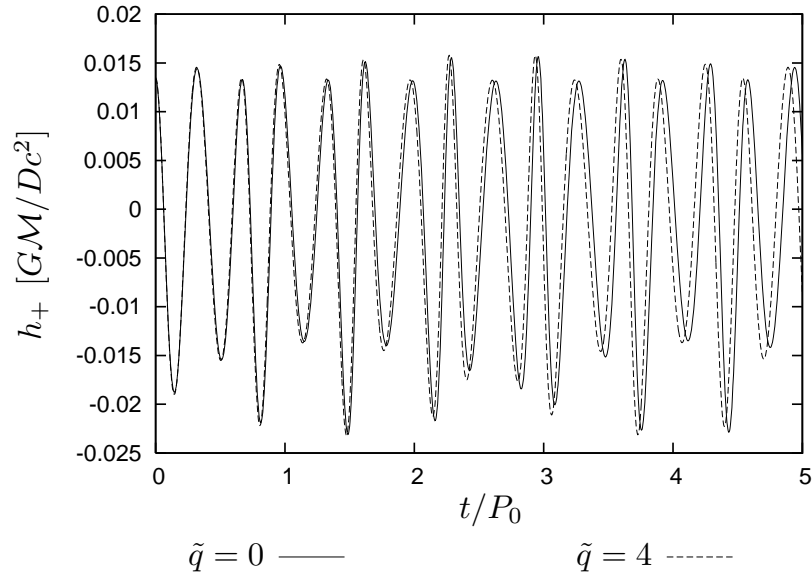


Abbildung B.10: Einfluss der  $q$ -Kopplung auf die Gravitationsstrahlung eines kompakten Binärsystems. Verglichen wird die 1pN-exakte  $h_+$ -Komponente eines exzentrischen Binärsystems nicht-rotierender kompakter Objekte mit der  $h_+$ -Komponente eines NS-NS-Binärsystems mit  $\tilde{q} = 4$ . Die Bahnparameter sind in beiden Fällen  $\tilde{a}_r = 40$  und  $e_r = 0.3$ , das Massenverhältnis ist  $m_1 : m_2 = 3 : 1$ .

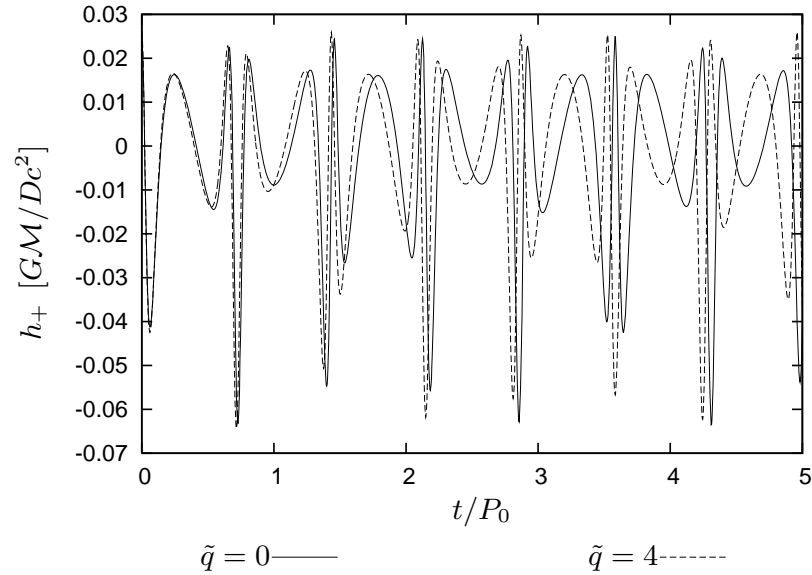


Abbildung B.11: Einfluss der  $q$ -Kopplung auf die Gravitationsstrahlung eines Binärsystems gleicher Massen. Verglichen wird ein System nicht-rotierender kompakter Objekte mit einem System, dessen eine Komponente einen Wert von  $\tilde{q} = 4$  aufweist. Große Halbachse und Exzentrizität sind in beiden Fällen  $\tilde{a}_r = 40$  und  $e_r = 0.6$ .

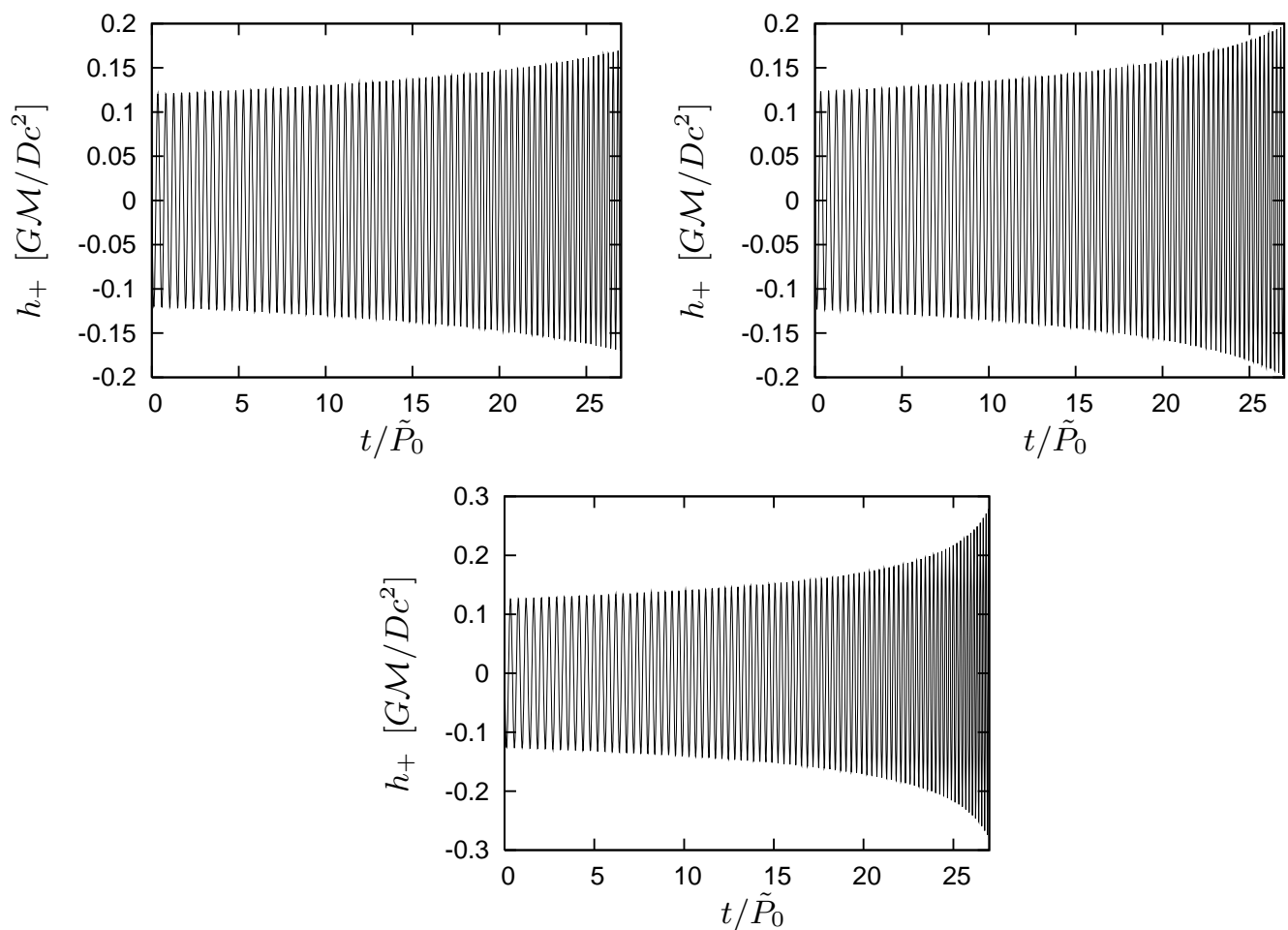


Abbildung B.12: Einfluss der  $q$ -Kopplung auf den Einspiralvorgang. Dargestellt ist ein Binärsystem mit  $\tilde{a}_r = 25, e_r = 0$ . Die Orbitalbewegung ist jeweils nur in Newtonscher Ordnung berücksichtigt. Oben links:  $\tilde{q} = 0$ . Oben rechts:  $\tilde{q} = 10$ . Unten:  $\tilde{q} = 20$ .



## **Ehrenwörtliche Erklärung**

Hiermit erkläre ich ehrenwörtlich, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig, ohne unzulässige Hilfe Dritter und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel und Literatur angefertigt habe. Sämtliche Quellen und Zitate sind als solche gekennzeichnet.

Niemand hat von mir unmittelbar oder mittelbar geldwerte Leistungen für Arbeiten erhalten, die im Zusammenhang mit dem Inhalt der vorgelegten Dissertation stehen. Insbesondere habe ich hierfür nicht die entgeltliche Hilfe von Vermittlungs- bzw. Beratungsdiensten, d.h. von Promotionsberatern oder anderen Personen, in Anspruch genommen.

Die Arbeit wurde bisher weder im In- noch im Ausland in gleicher oder ähnlicher Form einer anderen Prüfungsbehörde vorgelegt.

Die geltende Prüfungsordnung der Physikalisch-Astronomischen Fakultät ist mir bekannt.

Ich versichere ehrenwörtlich, dass ich nach bestem Wissen und Gewissen die reine Wahrheit gesagt und nichts verschwiegen habe.

## Danksagung

Ich möchte mich an dieser Stelle bei all den Menschen bedanken, ohne die das Zustandekommen dieser Arbeit nicht möglich gewesen wäre. Vor allem danke ich meiner Mutter, die mich in all den Jahren stets unterstützt und ermutigt hat und die mir selbst jetzt, trotz ihrer schweren Krankheit, zur Seite steht.

Mein besonderer Dank gilt Herr Prof. Dr. G. Schäfer für die Betreuung meiner Arbeit. Ihm verdanke ich zahlreiche Anregungen und hilfreiche Diskussionen. Bedanken möchte ich mich ebenfalls bei Dr. A. Gopakumar, dessen kritische Fragen mich auf Fallstricke in meinen Überlegungen aufmerksam machten.

Herrn R. Wachs, dessen Diplomarbeit ich mit betreute, danke ich für ungezählte Diskussionen und Fragen, die mir halfen, kritische Punkte meiner Arbeit zu klären.

Von ganzem Herzen möchte ich mich bei den Mitarbeitern des Theoretisch-Physikalischen Instituts der Friedrich-Schiller Universität für die angenehme Arbeitsatmosphäre bedanken. Mein besonderer Dank gilt Herrn Dr. M. Weiß, der stets zur Stelle war, wenn technische Probleme auftraten. Ebenso möchte ich mich bei den Sekretärinnen unseres Instituts, Frau G. Ritter und Frau R. Wagner, für ihre Hilfe, nicht nur im beruflichen Bereich, bedanken.

Ich bedanke mich bei all meinen Freunden, die gerade in den letzten, für mich persönlich sehr schwierigen Monaten, immer an meiner Seite standen.

Mein Dank gilt außerdem all jenen Studenten, die ich im Rahmen meiner Lehrverpflichtung betreute. Ihre Fragen gaben mir, ebenso wie zahlreiche Diskussionen außerhalb der Seminare, zahlreiche Anregungen und verhalfen mir in vielen Bereichen der Physik zu einem tieferen Verständnis.

Schließlich danke ich der Deutschen Forschungsgesellschaft (SFB/TR7 Gravitationswellenastronomie) und der Friedrich-Schiller Universität Jena, ohne deren finanzielle Unterstützung meine Arbeit nicht möglich gewesen wäre.