

# Ein Quantenmodell der Signalerkennung im Hirn



seit 1558

## Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades

doctor philosophiae (Dr. phil.)

vorgelegt dem Rat der Fakultät für Sozial- und Verhaltenswissenschaften

der Friedrich-Schiller-Universität Jena

von

Dipl.-Psych. Lars Fichtner

geboren am 11. August 1980 in Karl-Marx-Stadt

**Gutachter**

**1. Prof. Dr. W. Miltner**

**2. Prof. Dr. W. Freudenberg**

---

**Tag des Kolloquiums: 30.04.2009**

## **Danksagung**

An dieser Stelle möchte ich mich bei all denen herzlich bedanken, die auf ganz unterschiedliche Art und Weise einen Beitrag zum Zustandekommen dieser Arbeit geleistet haben. Als allererstes möchte ich Professor Miltner meinen Dank aussprechen, der mir das Schreiben dieser Dissertation am Lehrstuhl ermöglichte, und durch Anregungen und kritisches Hinterfragen den Prozess der Entstehung dieser Arbeit vorantrieb.

Desweiteren möchte ich meinen Eltern, Christa und Karl-Heinz Fichtner, ganz herzlich für ihre Unterstützung, sowie dem Interesse an meiner Arbeit danken. Besonderer Dank gilt meinem Vater, der mir bei mathematischen Schwierigkeiten stets hilfreich zur Seite stand.

Weiterhin danke ich meinen Freunden und Kollegen für weitere Denkanstöße und Motivationsschübe.

---

## Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung.....</b>	<b>4</b>
<b>2. Erkenntnisse der Hirnforschung als Grundlage der Modellbildung.....</b>	<b>10</b>
<b>3. Mathematische Grundlagen.....</b>	<b>18</b>
<b>4. Signale und Bosonen.....</b>	<b>35</b>
<b>5. Das Gedächtnis.....</b>	<b>44</b>
<b>6. Der Prozess der Signalerkennung.....</b>	<b>49</b>
<b>7. Einfache Beispiele.....</b>	<b>66</b>
<b>8. Messung der Aktivität in den Arealen.....</b>	<b>78</b>
<b>9. Möglichkeiten der Weiterentwicklung des Modells.....</b>	<b>84</b>
<b>10. Zusammenfassung.....</b>	<b>86</b>
<b>11. Literatur.....</b>	<b>87</b>
<b>12. Anhang.....</b>	<b>90</b>

*Vorstellungen ohne Erfahrungen sind leer.  
Erfahrungen ohne Vorstellungen sind blind.*

A. Einstein

## 1. Einleitung

Die Wahrnehmung einer Person, oder die zielgerichtete Suche nach einem Objekt, sind komplexe Prozesse, bei denen verschiedene Teile des menschlichen Hirns in Verbindung mit dem gesamten Nervensystem und den Sinnesorganen zusammenwirken. Bestandteil eines solchen komplexen Prozesses ist die Erkennung einzelner von den Sinnesorganen kommender Signale. Obwohl zur Erkennung eines Signals nur die kurze Zeit von etwa 1/10 sec und z.T. noch weniger benötigt wird, handelt es sich hier bereits um einen Prozess, der sich aus einer Reihe in verschiedenen Arealen des Hirns parallel ablaufender Teilprozesse zusammensetzt, und aus sehr vielen Einzelschritten besteht. Diese Art von Prozess durch ein mathematisches Modell zu beschreiben, ist nun Gegenstand der vorliegenden Arbeit. Erkennung von Signalen ist deshalb nachfolgend immer in diesem Sinne zu verstehen.

Ausgangspunkt für die mathematische Modellierung eines realen Vorganges ist nun die Festlegung der Aspekte, z.B. experimentell oder auf andere Weise gewonnener Erkenntnisse, die durch das Modell beschrieben bzw. widergespiegelt werden sollen. Wenn es sich um wenige elementare Aspekte handelt, so wird das Modell i.d.R. auf eine Vielfalt verschiedener realer Prozesse anwendbar sein. Je mehr Details man erfassen möchte, umso komplizierter wird das Modell und die Vielfalt der Anwendungsmöglichkeiten verringert sich. Ein realer Prozess kann niemals in seiner vollen Komplexität durch ein mathematisches Modell umfassend beschrieben werden. In diesem Sinne kann es also bei einer allgemeinen Modellierung des Prozesses der Signalerkennung nicht um eine Widerspiegelung aller, z.B. physiologischen, biochemischen oder bioelektrischen Details gehen. Deshalb sollte es den jeweiligen Spezialisten nicht verwundern, wenn aus seiner Sicht für die Beschreibung von Prozessen im Hirn unverzichtbar erscheinende Fachbegriffe nicht im Modell auftauchen. Wir gehen nämlich den Thesen der biologischen Evolution folgend davon aus, dass die Erkennung von Signalen bei den heutigen Lebensformen trotz

unterschiedlichster „Hardware“ nach einem universellen Prinzip erfolgt. Deshalb sollte das Modell in seiner allgemeinen Fassung zunächst nicht direkt die Funktionsweise im menschlichen Hirn vorhandener, aber bei niederen Lebensformen nicht existierender Strukturen erfassen. Diese mit einzubeziehen wäre als eine Verfeinerung des Modells zu verstehen, die in Verbindung mit konkreten Untersuchungen, z.B. betreffend das menschliche Hirn oder im Gegensatz dazu eine primitive Lebensform, auf jeweils verschiedene Weise erfolgen muss.

Das betrachtete mathematische Modell sollte also prinzipiell auch zur Beschreibung der Erkennung von Signalen bei primitiven Lebensformen, die kein Hirn oder sogar nicht einmal Neurone besitzen, verwendbar sein. Wenn darauf nicht weiter eingegangen, und sowohl bei der Modellbildung als auch bei der Veranschaulichung gewisser durch das mathematische Modell beschriebener Effekte stets auf das Hirn und die Neuronen Bezug genommen wird, so liegt das einerseits an der Einordnung dieser Arbeit in den Bereich der biologischen Psychologie und andererseits daran, dass gerade in diesem Bereich sehr umfassende Erkenntnisse zum Prozess der Erkennung von Signalen als Grundlage der Modellbildung vorhanden sind.

Spezialisten der modernen Hirnforschung sind sich weitgehend einig in der Auffassung, dass Signale im Hirn durch Populationen von Neurone kodiert werden. Singer nennt das in /S1/ *Populationskodierung der Signale*. Hinsichtlich ihres Aktivierungsgrades, speziell des Wechsels vom angeregten Zustand zum nicht angeregten Fall verhalten sich nun einzelne Neurone zufällig. Modelle für Signale sollten also statistischer Natur sein.

Im Rahmen der klassischen Stochastik nach Kolmogoroff wird dazu die Theorie neuronaler Netze genutzt. Das macht insbesondere mit der heute verfügbaren Technik Simulationen möglich. Abgesehen davon, dass selbst mit 100 Milliarden Neuronen im Hirn es jedoch rein mathematisch nicht möglich wäre, auf diese Weise alle Varianten der visuellen Darstellung auch nur einer einzigen Person vollständig zu erfassen, gibt es nun eine Vielzahl experimentell belegter Erkenntnisse, die sich nicht durch solche klassischen Modelle beschreiben bzw. erklären lassen. Allen voran ist hier das sogenannte Bindungsproblem zu nennen. Singer formuliert dazu in /S1/ *als zentrale Frage, wie trotz der distributiven Organisation (des Erkennungsprozesses) kohärente Repräsentationen aufgebaut ... und eine einheitliche Interpretation der umgebenden*

*Welt ... möglich werden. Diese, als „Bindungsproblem“ angesprochene Frage nach der Koordination zentralnervöser Prozesse wurde in den letzten Jahren als eine der größten Herausforderungen an die Hirnforschung erkannt.*

Diese Fassung des Bindungsproblems hängt damit zusammen, *dass alles, was an einer Stelle im System geschieht, sofortige Rückwirkung auf Prozesse an anderen Stellen hat* (siehe /S1/).

Treisman gibt in /Tr/ je nach Art der betrachteten Prozesse im Hirn 7 Fassungen für das Bindungsproblem an. Die 1. Variante dieser 7 Fassungen entspricht dem vorangehend genannten Bindungsproblem.

Prinzipiell bietet nun die Quantentheorie eine Möglichkeit, dieses Bindungsproblem zu erklären, da sie in einem gewissen Sinne „nichtlokal“ ist. Diese Eigenschaft drückt sich z.B. darin aus, dass eine durch eine Messung hervorgerufene Veränderung des Zustandes an einem Quantensystem eine sofortige Zustandsänderung eines zweiten Systems bewirkt, sofern beide Systeme in gewisser Weise in Kontakt stehen, von Schrödinger „Verschränktheit“ genannt.

Im 2. Kapitel dieser Arbeit werden weitere Argumente angeführt, die für eine Modellierung der Signalerkennung auf Basis der Quantentheorie sprechen.

Dem voran gestellt ist eine Auflistung von Erkenntnissen der Hirnforschung in Form von 10 Postulaten. Diese Postulate sind der Ausgangspunkt für die Entwicklung eines mathematischen Modells der Signalerkennung in den Kapiteln 4, 5 und 6.. Dabei wird deutlich gemacht, dass bereits die Postulate 1. bis 9. das Modell in gewissem Sinn festlegen, d.h., bis auf Modifikationen formaler Natur, was in der Quantentheorie dann „unitäre Äquivalenz“ genannt wird.

Das 10. Postulat reflektiert den hinter dem genannten Bindungsproblem stehenden Sachverhalt.

Die Wirkungsweise des mathematischen Modells wird nun am Ende des 6. Kapitels und im 7. Kapitel durch einige einfache Beispiele demonstriert, wobei sich Effekte zeigen, aus denen auch auf eine Erklärung des Bindungsproblems durch das Modell geschlossen werden kann.

Die wesentlichen Bestandteile unseres auf dem statistischen Konzept der Quantenmechanik beruhenden Modells sind nun:

- ein Hilbertraum, der die allgemeine Struktur von Signalen beschreibt
- ein Hilbertraum, der die allgemeine Struktur des Gedächtnisses beschreibt
- eine Isometrie, die die Erzeugung von Signalen aus dem Gedächtnis beschreibt
- ein unitärer Operator, der die Wechselwirkung zwischen zwei Signalen beschreibt

Eine Erläuterung dieser Begriffe ist im 3. Kapitel zu finden. Dort wird auch auf Unterschiede und Gemeinsamkeiten zwischen klassischer Stochastik und dem statistischen Konzept der Quantentheorie eingegangen.

An dieser Stelle muss darauf hingewiesen werden, dass dieses Kapitel nicht als eine Einführung in die Stochastik bzw. Quantentheorie für den nicht vorgebildeten Leser verstanden werden kann. Auch ist es schwer, eine Literatur zu empfehlen, die das bei verträglichem Aufwand ermöglicht. So gibt es einerseits umfangreiche mathematisch ausgerichtete Monographien, die zwar die Darstellung der wesentlichen Ideen der Quantenstochastik enthalten, aber ein hohes Maß an abstrakter Mathematik voraussetzen. Andererseits sind einführende Lehrbücher aus dem Bereich der Physik in der Regel auf konkrete Modelle der Quantenmechanik ausgerichtet, wofür ein umfangreiches Handwerkszeug an konkreter Mathematik benötigt wird.

Die geringste mathematische Vorbildung erfordern noch Bücher aus dem neuen Bereich des Quantencomputing. Dieser Bücher enthalten jedoch kaum Informationen betreffend z.B. Bosonensysteme, welche für das in dieser Arbeit betrachteten Modell von grundlegender Bedeutung sind. Das 3. Kapitel stützt sich deshalb auf die Vorlesung /F2/, deren Skript im Internet verfügbar ist. Einige einführende Kapitel dieser Vorlesung sind im Anhang beigelegt, wobei auf mathematische Beweise verzichtet wurde. Enthalten sind mathematisch exakte Definitionen von Grundelementen der Quantenmechanik.

Der weniger an mathematischen Details interessierte Leser mag die Erläuterungen im 3. Kapitel zu Begriffen aus der Quantenmechanik in ihrer allgemeinen Form zunächst überspringen, da diese in ihrer speziell benötigten Form bei der Modellbildung in den nachfolgenden Kapiteln inhaltlich erläutert werden.



Im 4. Kapitel werden Signale mathematisch als Bosonensysteme, also einem bestimmten Typ quantenmechanischer Teilchensysteme, modelliert. Der entsprechende Hilbertraum ist damit der sogenannte symmetrische Fockraum.

Die Ortsverteilung eines Bosonensystems beschreibt dann eine zufällige Konfiguration von Punkten, die mit den Positionen angeregter Neurone identifiziert werden können. Die Quanten sind dabei nicht die Neurone selbst, sondern das geringe Quantum an elektrischer Ladung, das ein angeregtes Neuron von einem nicht angeregten unterscheidet.

In der Terminologie der klassischen Stochastik stellt nun die Ortsverteilung eines Bosonensystems einen Punktprozess als Verteilung eines klassischen zufälligen Punktesystems dar. Das betrachtete Quantenmodell beinhaltet also ein gewisses klassisches Modell und ist in diesem Sinne als Verfeinerung eines klassischen Modells aufzufassen.

Gegenstand des 5. Kapitels ist ein Modell für das Gedächtnis. Dabei wird insbesondere der Tatsache Rechnung getragen, dass nur aus gewissen Elementarsignalen aufgebaute Signale erkannt bzw. im Gedächtnis gespeichert werden können. Anschaulich lässt sich das Modell für das Gedächtnis als ein Reservoir interpretieren, das eine gewisse Menge komplexer Signale enthält, die jeweils ein Gesamtbild der Realität, basierend z.B. auf Erfahrungen und Wissen, des Individuums repräsentieren. In [FF1] wird eine Isometrie definiert, die eine Auswahl eines der Signale aus dem Gedächtnis beschreibt. Damit wird der durch Singer in [S1] beschriebene Vorgang der Generierung hochkomplexer Erregungsmuster modelliert.

Schließlich wird im 6. Kapitel die Erkennung eines von den Sinnesorganen kommenden Signals als ein über mehrere Schritte ablaufender, „sich selbst organisierender“ Prozess modelliert. Die Grundidee beruht auf der These von Singer, nach der Wahrnehmung Überprüfung von Hypothesen ist. Dabei repräsentieren, um mit Singer zu sprechen, das aus dem Gedächtnis generierte Signal die Hypothese bzw. die Erwartungen des Individuums, und das von den Sinnesorganen kommende Signal, das tatsächlich Vorhandene.

Im Ergebnis der Wechselwirkung zwischen beiden Signalen, beschrieben durch einen unitären Operator, kann es nun bei zumindest partieller Übereinstimmung zu einem

Kollaps des Quantensystems kommen, in dessen Ergebnis wiederum beide Signale so verändert werden, dass, um eine Formulierung von Singer zu gebrauchen, sich *der Grad der Übereinstimmung zwischen Erwartung und tatsächlich Vorhandenem ausdrückt*. Kennzeichen dieses Kollapses ist ein im Rahmen des Modells wohldefinierter Verlust an angeregten Neuronen („die Neurone feuern“).

Der Wert eines statistischen Modells hängt nun entscheidend davon ab, inwieweit es gelingt, Messprozeduren in die Modellbildung einzubeziehen. Das wird in 8. Kapitel untersucht, wobei genauer Messungen vom EEG-Typ betrachtet werden.

Bekanntlich sind die Messergebnisse sowohl beim EEG wie auch beim MEG „verrauscht“. Beim MEG werden gewöhnlich externe Ursachen dafür gesehen, die sich durch Abschirmung verringern und theoretisch ganz beseitigen lassen. Beim EEG nimmt man interne Störungen an, die durch Prozesse im Hirn selbst verursacht werden (siehe z.B. /P/). Das erscheint zumindest widersprüchlich, da der mit den postulierten Schwankungen des mittels EEG gemessenen Potentials einhergehende Stromfluss auch Auswirkungen auf das beim MEG gemessene Magnetfeld haben sollte. Das betrachtete Quantenmodell kann im Prinzip diesen Widerspruch aufklären.

Eine erste Variante des in der vorliegenden Arbeit betrachteten Modells wurde in /FF1/ entwickelt und später in /FF2/ und /FF3/ präzisiert. Diese Arbeiten sind mathematischer Natur. Kenntnisse betreffend die Aktivitäten des Hirns werden nur zur Motivation einzelner mathematischer Ansätze im Modell und der Festlegung mathematisch zu beweisender Sachverhalte benutzt.

Schwerpunkt ist neben der Definition gewisser mathematischer Instrumente der Beweis mathematischer Aussagen über die Funktionsweise dieser Instrumente. Diesem Zweck dienen auch die bereits erschienenen Publikationen /FFF1/ und /FFFO2/ sowie die in Vorbereitung befindliche Arbeit /F,G/.

In dieser Arbeit wird nur von den Ergebnissen Gebrauch gemacht. Die dahinter stehenden mathematischen Probleme oder sogar die Beweise hier in einer für Nichtspezialisten verständlichen Weise darzustellen, würde jeden Rahmen sprengen.

## 2. Erkenntnisse der Hirnforschung als Grundlage der Modellbildung

Das in dieser Arbeit betrachtete mathematische Modell soll die nachfolgend in Form von Postulaten etwas verkürzt dargestellten Erkenntnisse der modernen Hirnforschung widerspiegeln. Wie sich zeigen wird, ist das Modell im wesentlichen durch die Postulate (P1) –(P9) festgelegt.

Den Inhalt der Postulate ausführlich zu diskutieren, ist nicht Anliegen dieser Arbeit. Es werden lediglich einige Zitate aus der Literatur angefügt. Der interessierte Leser kann sich dort weitergehend informieren.

**(P1)** Erkennung von Signalen ist ein Prozess mit diskreter Zeit.

Tegmark gibt in /T/  $10^{-3} - 10^{-1}$  s als gesamte Zeit für Erkennung eines Signals an. Während dieser Zeit läuft ein Prozess ab, für dessen einzelne Arbeitstakte  $10^{-13} - 10^{-10}$  s benötigt werden (siehe /T/)

**(P2)** Signale werden repräsentiert durch Populationen angeregter Neuronen.

( ein geringes Quantum an elektrischer Energie macht dabei den Unterschied zwischen einem angeregten und einem nicht angeregten Neuron aus)

*Zitat /SI/ (S. 157): Populationskodierung der Signale – eine Strategie, einzelne Merkmale durch große Populationen gleichzeitig aktiver Neurone zu repräsentieren .....Mit einer überschaubaren Zahl relativ unselektiver Nervenzellen können nun fast beliebig viele Populationen erzeugt werden, die sich voneinander durch die jeweilige Konstellation und den Aktivierungsgrad der beteiligten Neuronen unterscheiden, aber immer aus dem gleichen Reservoir von Nervenzellen rekrutiert werden.*

**(P3)** Das Hirn enthält verschiedene Areale, die für unterschiedliche Aufgaben zuständig sind. Entsprechend ist jedes Signal zerlegbar.

*Zitat /SI/ (S. 148 Mitte): Das Schaltdiagramm der direkt mit der Verarbeitung visueller Information befassten Hirnrindenregionen weist mehr als 30 Areale auf. Jedes dieser Areale bearbeitet jeweils nur einen Teilaspekt der ... visuellen Signale. Einige Areale befassen sich vorwiegend mit der Analyse von Bewegungsinformationen, andere mit Farbe oder mit figürlichen Aspekten....Es darf*

*jedoch davon ausgegangen werden, dass die im Sehzentrum erarbeiteten Prinzipien allgemeiner Natur sind und auf andere Modalitäten generalisiert werden können.*

Es sei darauf hingewiesen, dass die Areale lokal nicht fixiert sind, d.h., z.B. wachsen oder schrumpfen können bzw. bei z.B. Schädigungen einzelner Bereiche deren Funktionen durch andere Bereiche übernommen werden können (Grundlagen des Taubschen Trainings – siehe z.B. /B/).

**(P4)** Im einzelnen Areal gespeicherte Signale sind Superpositionen einer endlichen Anzahl von „Elementarsignalen“

**Zitat /S1/ (S. 161):** *...die Bildung von Merkmalsrepräsentationen... Die Kriterien, nach denen Merkmale gruppiert werden, müssten demnach in der funktionellen Architektur ... verankert liegen.*

**Bemerkung:** Singer folgend sollte ein Objekt durch ein Ensemble von Merkmalen (=elementaren Signalen) repräsentiert werden. In den einzelnen Arealen wird dabei entschieden, ob bzw. welche der jeweiligen Merkmale in einem von den Sinnesorganen kommenden Signal enthalten sind.

Diese elementaren Signalen sollten ererbt und nicht erlernbar sein, aber vergessen werden können. (Beispiel: Unterscheidung von r,l bei gewissen Asiaten))

**(P5)** Beim Erkennungsprozess werden die den einzelnen Arealen entsprechenden Teile des Signals parallel nach einheitlichem Prinzip verarbeitet.

**Zitat /S1/ (S. 67, 65):** *Ab dann aber dominiert das Prinzip der Parallelverarbeitung. Die Verarbeitungswege verzweigen sich auf zahlreiche parallel angeordnete Areale. Das Bestechende an dieser funktionalen Umverteilung ist, dass die interne Struktur der verschiedenen Hirnareale praktisch identisch ist, obgleich sie doch offensichtlich ganz verschiedene Funktionen wahrnehmen. Nur der Spezialist ist in der Lage, ein histologisches Präparat, das von der Sehrinde entnommen wurde, von einem zu unterscheiden, das von der Sprachregion stammt. Es gibt feine Unterschiede, aber die generelle Organisation, die Verschaltung ist nahezu identisch. Dies legt die Schlussfolgerung nahe, dass in der Hirnrinde ein Verarbeitungsalgorithmus realisiert wird, der zur Behandlung unterschiedlichster Inhalte taugt...*

(P6) Das Gehirn bildet ständig Hypothesen darüber, wie die Welt sein sollte und vergleicht die Signale von den Sinnesorganen mit diesen Hypothesen.

*Zitat /S1/ (S. 108/109-Abschnitt: **Wahrnehmung ist Überprüfung von Hypothesen**):  
Das Gehirn ist nie ruhig, sondern generiert ständig hochkomplexe Erregungsmuster ... Diese Muster hätten dann de facto die Funktion intern generierter Hypothesen und formten eintreffende Sinnessignale gemäß ihren Erwartungen so um, dass diese ihrerseits Muster aufgeprägt bekommen, in denen sich der Grad der Übereinstimmung zwischen Erwartung und tatsächlich Vorhandenem ausdrückt.*

*(S. 72) Das „Vorwissen“ über die jeweils wahrscheinlichsten Zuordnungen müsste ... gespeichert sein.*

(P7) Im Prozess der Erkennung eines Signals ändert sich dessen Zustand gemäß den die Erwartung repräsentierenden, vom Hirn generierten Signals. Wahrgenommen wird das veränderte Signal.

(Siehe vorheriges Zitat von /S1/)

(P8) Erkennung eines von den Sinnesorganen kommenden Signals ist eine Kette (zufälliger) Ereignisse, die im Ergebnis der Wechselwirkung zwischen diesem Signal und dem durch das Hirn generierten Signal auftreten. (Siehe vorheriges Zitat von Singer und das Buch von Stapp /Sta/)

*Zitat /Sta/: Mental life is made of events in the brain. Thinking is a sequence of events.*

(P9) Erkennung eines Signals geht einher mit einem Verlust an angeregten Neuronen (Entladung – die Neurone „feuern“)

*Zitat /S1/ (S. 103, 105, 206) : Die Basispostulate sind: ... Fünftens, erfolgreiches Gruppieren von Zellen zu Ensembles drückt sich in der Synchronisation der Entladungstätigkeit der respektiven Neurone aus.*

*Eine der zur Zeit intensiv beforschten Hypothesen geht davon aus, dass diese dynamischen Bindungen über die zeitliche Synchronisation von Nervenzellentladungen realisiert werden. Zellen, die sich zu einem Ensemble zusammengeschlossen haben, entladen im gleichen Takt.*

(P10) Aktivität in einigen Arealen des Hirns hat sofort Wirkungen auf andere Areale.

/S/ (S.207)...,dass alles, was an einer Stelle im System geschieht, sofortige Rückwirkung auf Prozesse an anderen Stellen hat.

Warum benötigt man nun Methoden der Quantenstochastik für die mathematische Modellierung des Prozesses der Signalerkennung ? Welche Gründe sprechen gegen ein klassisches Modell? Dazu werden nachfolgend nur einige Argumente angeführt. Für weiterführende Betrachtungen sei speziell auf /Sta/ , /Kr1/ und /Kr2/ verwiesen.

Zunächst sprechen der Zufall im Verhalten einzelner Neurone und Messergebnisse, wie sie beim EEG auftreten, für ein statistisches Modell.

Das Hirn enthält nun ca. 100 Milliarden Neurone, so dass im Prinzip eine sehr große Zahl von Signalen auf klassische Weise durch Populationen angeregter Neurone kodiert werden könnten. Für die Vielfalt der möglichen Signale, die erkannt werden können wäre jedoch auch das zu wenig, da ein klassisches Modell eine feste Zuordnung von Teilpopulationen zu bestimmten Merkmalen erfordern würde. Außerdem würde das Problem der Koordination im Verhalten großer Populationen von Neuronen schon zu einem Widerspruch zu dem Postulat (P1) führen. Schließlich gibt es kein spezielles Areal im Hirn wo das Gedächtnis lokalisiert ist und die Neurone wechseln ständig ihre Bestimmung.

Die letzte Eigenschaft spiegelt der unitäre Operator wider, mit dem wir die Wechselwirkung zwischen einem von den Sinnesorganen kommenden Signal und dem vom Hirn generierten Signal im Prozess der Signalerkennung beschreiben. Basierend auf /F,G,/ wird im 4. Kap. begründet, dass wegen Postulat (P5) dieser Operator ein sogenannter (Quanten-) Beamsplitter sein muss.

Im Fall eines klassischen Modells werden nun Zustandsänderungen durch stochastische Kerne beschrieben. Man kann nun mathematisch exakt beweisen, dass es sich wiederum wegen Postulat (P5) diesmal um einen klassische Variante des Beamsplitters handeln muss. Dessen Wirkung lässt sich nun anschaulich folgendermaßen beschreiben:

Wir betrachten zwei Populationen angeregter Neurone, die jeweils ein Signal kodieren. Wir denken uns diese Neurone zur Unterscheidung der Systeme mit zwei verschiedenen Farben gekennzeichnet. Die Wechselwirkung gemäß des klassischen

Beamsplitters besteht dann darin, dass für jedes Neuron mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{2}$  entschieden wird, ob es seine Farbe wechselt oder nicht wechselt. Im Ergebnis entstehen zwei neue Populationen, wovon jede Teile aus den beiden ursprünglichen Populationen enthält. Bei diesem Vorgang geht Information verloren. Man kann sogar beweisen, dass bei den vielen Schritten im Verlaufe des Erkennungsprozesses zwei chaotische Populationen entstehen, die nur noch sehr geringe Beziehungen zu den ursprünglichen Populationen haben. Nach Postulat (P7) sollten aber die auf diese Weise entstandenen Populationen Grundlage der Wahrnehmung sein. Wahrnehmung wäre damit so weit von der Realität entfernt, dass kaum noch ein Beziehung zwischen der Realität und deren Wahrnehmung bestehen würde. An diesem Beispiel wird deutlich, dass das Hirn nicht mit dem Mitteln der klassischen Stochastik hinreichend beschrieben werden kann, da hochgradig chaotische Systeme offensichtlich unsere Wahrnehmung völlig abseits der Realität ablaufen lassen würden. Prozesse in der Quantenmechanik sind jedoch im Gegensatz zur klassischen Stochastik reversibel, das heißt, dass ein veränderter Zustand immer wieder in den Ursprungszustand überführt werden kann, und somit keine Information verloren geht.

Es sei in diesem Zusammenhang bemerkt, dass im Gegensatz zur Quantenmechanik Zustandsänderungen bei Modellen der klassischen Stochastik in der Regel irreversibel sind, also Information verloren geht. Schon aus diesem Grund erscheinen klassische Modelle für die Funktionsweise eines so komplexen Systems wie das Hirn ungeeignet zu sein.

Wichtigstes Argument gegen ein klassisches Modell scheint jedoch zu sein, dass für die verschiedenen Fassungen des Bindungsproblems im Rahmen eines klassischen Modells bisher keine Erklärung gegeben werden konnte und, nach Meinung verschiedener Experten, aus prinzipiellen Gründen auch nicht gegeben werden kann.

Nachdem 1928 das EEG entwickelt worden war und etwa zur gleichen Zeit Klarheit zur Quantenmechanik geschaffen wurde, haben sich bereits in den 30iger Jahren bedeutende Persönlichkeiten mit den Beziehungen zwischen Quantentheorie und Hirnaktivitäten beschäftigt. Zu nennen sind insbesondere W. Heisenberg und J.v. Neumann.

In den 80iger Jahren wurden die bis dahin mehr phänomenologischen Betrachtungen erstmalig so weit präzisiert, dass von mathematischen Modellen die Rede sein konnte. Mit der Entwicklung der Computertechnik und daraus resultierender Möglichkeiten der Simulation komplexer Systeme kam es in den 90iger Jahren zu einem regelrechten Boom, was Hirnmodelle angeht. Zu nennen sind z.B. Penrose /Pe/, der das Hirn als Quantencomputer modelliert hat, und das hierarchische Hirnmodell von Khrennikov /Kr1/. Jedes dieser Modelle erwiesen sich jedoch als mehr oder weniger falsch, d.h., sie gerieten in Widerspruch zu den besonders in den letzten 10 Jahren gewonnenen Erkenntnissen der modernen Hirnforschung.

Die oben beispielhaft genannten Unzulänglichkeiten eines klassischen Modells und verschiedene Experimente z.B. von A. Khrennikov, in denen der Quantencharakter bei Hirnaktivitäten belegt wurde, sind jedoch wesentliche Gründe dafür, dass die Entwicklung von Quantenmodellen für Prozesse im Hirn noch immer auf der Tagesordnung steht. Khrennikov fand in verschiedenen Meinungsumfragen heraus, dass bestimmte Fragen das System so verändern, dass die Antwort auf später gestellte Fragen von der Art der ursprünglichen Befragung abhängt. Bei der statistischen Auswertung dieser Befragung fiel auf, dass der Satz der totalen Wahrscheinlichkeit verletzt wurde, und die klassische Stochastik nach Kolmogoroff nicht zutraf. Die Befragungen bzw. Messungen selbst beeinflussen das sensible System des Bewusstseins, und verändern das System in Abhängigkeit von der Einflussquelle. Somit waren unerwarteterweise aus bedingten Wahrscheinlichkeiten keine korrekten Umrechnungen in unbedingte Wahrscheinlichkeiten mehr möglich. Messungen verschiedener kognitiver Funktionen stellen also keine reinen Beobachtungen im Sinne der klassischen Wahrscheinlichkeitsrechnung dar, sondern stellen immer Wechselwirkungen mit den zu messenden Systemen dar, welche durch den Vorgang des Messens beeinflusst werden.

Dabei gibt es ein Problem betreffend die sicher notwendige interdisziplinäre Zusammenarbeit. A. Khrennikov charakterisiert in /Kr2/ die Haltung von Neurophysiologen durch folgendes Zitat: *The only common thing between quantum and mental is that we have no idea how to understand any of this phenomena.* Das hängt zumindest zum Teil damit zusammen, dass Effekte der Quantentheorie schwer verständlich sind.



Singer schreibt dazu in /S1/: ... *soll ein erkenntnistheoretisches Problem in Erinnerung gerufen werden, das alle angeht, **aber jemandem, der Hirnforschung betreibt, besonders oft und eindringlich begegnet.** ... Unsere kognitiven Funktionen sind an eine makroskopische Umwelt angepasst. ... Prozesse im Bereich von Nanometern sind zwar berechenbar, aber verwehren sich der Anschaulichkeit und widersprechen nicht selten unserer Primärerfahrung. Wir betrachten diese Weltbeschreibungen als zutreffend, wenn sich die aus ihnen abgeleiteten Voraussagen durch Experimente, durch intersubjektiv vereinbarte Beobachtungsverfahren bestätigen lassen. **Doch sind auch diese Beobachtungsstrategien von uns erdacht. Sie beruhen auf Verabredungen, deren Akzeptanz sich just aus den gleichen rationalen Beschreibungssystemen herleitet, die zur Erzeugung der zu testenden Hypothesen führt.*** - Wie kann man das verstehen ? :

Die Wahrnehmung unserer Umwelt geschieht primär über unsere Sinnesorgane. Auch wenn wir, verglichen z.B. mit einem Regenwurm, recht gut ausgestattet erscheinen, können wir vieles nicht wahrnehmen – Beispiel: auch starke radioaktive Strahlung, die doch verheerende Wirkung auf unseren Körper hat.

Wir behelfen uns deshalb mit Messtechniken. Diese liefern uns Zahlenwerte (ggf. sehr viele!) Um diese verstehen bzw. interpretieren zu können, machen wir uns ein „Bild“ vom betrachteten Vorgang. „Passen“ die Messwerte zum Bild, so betrachten wir dieses als richtige Widerspiegelung des betrachteten Vorgangs.

Jeder hat nun schon mal einen Ball geworfen und dessen Flugbahn beobachtet. Auch die Ausbreitung einer Welle hat jeder schon mal gesehen. In beiden Fällen liegt eine Bewegung vor, die nach unserer makroskopischen Erfahrungswelt aber völlig verschiedene Dinge zum Gegenstand hat.

Als Schlagwort hat nun wohl jeder schon etwas vom „Dualismus von Welle und Teilchen“ in der Quantenmechanik gehört. Betrachten wir z.B. ein Elektron. Ein gewisser Typ von Messungen ausgeführt, liefert Werte, die zum Bild eines sehr kleinen sich im Raum bewegenden Teilchen passen – gewissermaßen ein Ball, dessen Ausmaße zu einem Punkt zusammengeschrumpft sind.

Ein anderer Typ von Messungen am gleichen Objekt liefert nun das Bild einer sich im Raum ausbreitenden Welle. Man kann noch andere Messungen ausführen, deren Ergebnisse weder zu einem Teilchenbild noch zu einem Wellenbild passen – weitere

Bilder wären erforderlich, um eine Deutung entsprechend unserer Erfahrungswelt zu ermöglichen.

Jedes dieser Bilder hat einen Sinn und kann nützlich für das Verständnis einzelner Aspekte sein. Keines der Bilder reicht jedoch aus, um das Verhalten des Elektrons umfassend zu beschreiben.

**Das und die scheinbare Widersprüchlichkeit der Bilder macht es praktisch unmöglich, Quantensysteme mit auf unserer Primärerfahrung basierenden Bildern umfassend zu veranschaulichen bzw. zu beschreiben.** Das kann man nur mit mathematischen Formeln, wie das auch in der Physik gehandhabt wird.

Auch die von den Fachleuten gewonnenen Erkenntnisse über die Funktionsweise des Hirns sind nun auch nur auf der Basis von Messungen erstellte „Bilder“, die sich, einzeln betrachtet, im passenden Postulat widerspiegeln.

Das Problem ist, dass diese sich, ähnlich dem Fall des Elektrons, nicht auf klassische Weise zu einer umfassenden Darstellung zusammenfügen lassen und damit Erklärungen z.B. für das Postulat (P10) unmöglich zu sein scheinen. Wären Hirnaktivitäten klassisch zu modellieren, würde dies implizieren, dass man bei präziser Kenntnis aller Parameter, Eingangsinformationen und Funktionsweise eines individuellen Hirns, und darüber hinaus Beseitigung aller Störquellen, den Ausgang eines Denkprozesses vorhersagen kann, und damit ein freier Wille nicht existieren würde. Bei der Modellierung von Hirnaktivitäten mittels Quantensystemen kann der Zufall unter keinen Umständen beseitigt werden. Daher ist es unmöglich, den Ausgang eines Denkprozesses bei genauer Kenntnis aller benötigten Informationen vorherzusagen.

### 3. Mathematische Grundlagen

Zu Beginn dieses Kapitels wird zunächst kurz auf einige Grundbegriffe der klassischen Stochastik nach Kolmogoroff eingegangen, wie sie in jeder Einführungsvorlesung zur Wahrscheinlichkeitsrechnung dargestellt werden. Wir gehen dabei davon aus, dass der Leser mit dem Inhalt des 1. Semesters des heute üblichen Grundkurses „Methodenlehre“ für Psychologen oder einer gleichwertigen Einführungsvorlesung für Naturwissenschaftler hinreichend vertraut ist, und damit weitergehende Erläuterungen zu den einzelnen Begriffen nicht erforderlich sind.

Anschließend wird kurz auf den wesentlichen Grund dafür eingegangen, dass die klassische Stochastik für die Modellierung des Verhaltens von gewissen realen Systemen nicht ausreichend ist und die Quantenmechanik diesbezüglich eine Alternative bietet.

Den Hauptteil des Kapitels bilden Erläuterungen zum statistischen Konzept der Quantenmechanik. Betreffend mathematische Details sei auf die Vorlesung /F2/ verwiesen. Teile des Skriptes dieser Vorlesung sind im Anhang zu dieser Arbeit zu finden. Das gesamte Skript ist im Netz verfügbar.

Es sei jedoch darauf hingewiesen, dass diese Vorlesung selbst neben einer Einführungsvorlesung zur klassischen Stochastik einen zweisemestrigen Grundkurs Analysis für Mathematiker oder Physiker voraussetzt. Insgesamt entspricht das einem Volumen von 16 Semesterwochenstunden an Mathematikvorlesungen. Mit Teilen dieses Stoffes habe ich mich bereits während meiner Gymnasialzeit beschäftigt, wo ich zum Beispiel eine Hausarbeit über Zahlensysteme, speziell komplexe Zahlen geschrieben habe. Während meines Studiums habe ich neben der obligatorischen Vorlesung zur Methodenlehre im Nebenfach Mathematik gewählt und speziell eine Prüfung zur Maß- und allgemeinen Integrationstheorie abgelegt. Schließlich habe ich mir den Inhalt der genannten Vorlesung /F2/ erarbeitet.

Damit hoffe ich die Problematik betreffend den Inhalt dieses Kapitels deutlich gemacht zu haben. Um den Rahmen dieser Arbeit nicht zu sprengen, musste auf die mathematisch strenge Einführung verschiedener Grundbegriffe verzichtet werden, was für den nicht hinreichend mit mathematischen Formalismen vertrauten Leser wahrscheinlich ohnehin nicht viel bringen würde. Es geht deshalb im Hauptteil dieses Kapitels im wesentlichen nur um eine Nennung und inhaltliche Erläuterung der

mathematischen Begriffe, die für die Modellbildung in den nachfolgenden Kapiteln benötigt werden.

Im Rahmen der klassischen Stochastik nach Kolmogoroff wird ein System mit zufälligem Verhalten durch einen **Wahrscheinlichkeitsraum**  $[\Omega, \Sigma, P]$  modelliert.

Die Elemente der Menge  $\Omega$  repräsentieren dabei die möglichen Realisierungen des Systems und werden gewöhnlich **Elementarereignisse** genannt. Die  $\sigma$ -Algebra  $\Sigma$  besteht aus den Teilmengen von  $\Omega$ , die Aussagen über die Realisierung des Systems entsprechen, gewöhnlich **Ereignisse** genannt. Das **Wahrscheinlichkeitsmaß**  $P$  ordnet schließlich jedem Ereignis eine Wahrscheinlichkeit zu.

Das Tupel  $[\Omega, \Sigma]$ , **messbarer Raum** genannt, dient dabei zur mathematischen Beschreibung der allgemeinen Struktur des Systems und der jeweilige Zustand des Systems wird durch das **Wahrscheinlichkeitsmaß**  $P$  charakterisiert.

Messungen am betrachteten System entsprechen **Zufallsgrößen**  $\xi$  über  $[\Omega, \Sigma, P]$ .

Deren Verteilung  $P_\xi$  ist dann ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf den reellen Zahlen  $R$ , das das zufällige Ergebnis der Messung beschreibt.

Führt man nun zwei Messungen am System aus, so erhält man ein Tupel  $[\xi_1, \xi_2]$ ,

wobei  $\xi_1$  das Ergebnis der ersten und  $\xi_2$  das Ergebnis der zweiten Messung repräsentiert. Die gemeinsame Verteilung  $P_{\xi_1, \xi_2}$  ist dann ein

Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $R^2$ . Führt man nun die beiden Messungen in umgekehrter Reihenfolge aus, so haben wir die Verteilung  $P_{\xi_2, \xi_1}$  zu betrachten.

Die **Kolmogoroffschen Verträglichkeitsbedingungen** besagen nun, dass für je zwei Aussagen über die Messergebnisse, d.h., messbare Teilmengen  $A, B$  von  $R$  gelten soll:

$$P_{\xi_1, \xi_2}(A \times B) = P_{\xi_2, \xi_1}(B \times A), \quad P_{\xi_2}(B) = P_{\xi_1, \xi_2}(R \times B)$$

Die erste Gleichung besagt, dass hinsichtlich der Ergebnisse die Reihenfolge der Messungen unerheblich sein soll.

Die zweite Gleichung besagt, dass das Ergebnis der zweiten Messung nicht davon beeinflusst werden soll, ob die erste Messung überhaupt durchgeführt oder nicht durchgeführt wurde.

Diese Forderungen sind erfüllt, wenn das folgende Postulat als gültig anzusehen ist: ***Messungen bewirken keine Veränderungen des Systems*** - sie stellen gewissermaßen „reine Beobachtungen“ des Systems dar. Die Wechselwirkung zwischen dem betrachteten System und der Messapparatur zeigt nur bei der Apparatur eine Wirkung in Gestalt des Messergebnisses. Das System selbst ist unempfindlich gegenüber dem Kontakt mit der Messapparatur.

Bei Systemen mit einer Mikrostruktur, die von Natur aus sensibel gegenüber jedem Kontakt ist, können Methoden der klassischen Stochastik nur beschränkt angewendet werden. Zur umfassenden statistischen Beschreibung solcher Systeme benötigt man andere mathematisch/statistische Theorien. Eine solche wurde in Gestalt der Quantenmechanik entwickelt.

Statt durch einen Wahrscheinlichkeitsraum wird hier das System durch ein Tupel  $[H, \rho]$  beschrieben, wobei  $H$  ein Hilbertraum und  $\rho$  ein gewisser Typ von Spuroperator ist. Bei dem später betrachteten Modell der Erkennung von Signalen treten zwei verschiedene Hilberträume auf, zur Modellierung von Signalen und zur Modellierung des Gedächtnisses. Der Prozess der Erkennung basiert auf einer Wechselwirkung zwischen Signal und Gedächtnis bzw. dem auf dessen Grundlage generierten Signals, die durch einen gewissen unitären Operator auf dem Tensorprodukt zweier Hilberträume beschrieben wird. Das Tensorprodukt beschreibt ein Quantensystem, welches durch den Kontakt zweier Quantensysteme entsteht,

/F2/ folgend soll nun die Bedeutung diese Begriffe für das statistische Konzept der Quantenmechanik erläutert werden, soweit für unsere Zwecke benötigt.

Statt durch einen messbaren Raum wird in der Quantenmechanik die allgemeine Struktur des betrachteten Systems durch einen geeigneten **Hilbertraum**  $H$  beschrieben.

Dabei handelt es sich zunächst um eine Menge, in der eine **Addition** von Elementen aus  $H$  und eine **Multiplikation** zwischen komplexen Zahlen und Elementen von  $H$  definiert ist. Weiterhin wird, analog zu den Operationen Addition und Multiplikation in der Menge der reellen Zahlen  $R$  bzw. in der Menge der **komplexen Zahlen**  $C$ , die Gültigkeit gewisser Rechenregeln gefordert, so dass  $H$  ein komplexer **linearer Raum**, auch Vektorraum genannt, wird.

Außerdem ist in  $H$  ein **Skalarprodukt** definiert, das jedem Paar  $x, y$  von Elementen aus  $H$  eine komplexe Zahl  $\langle x | y \rangle$  zuordnet. Mit diesem Skalarprodukt wird dann noch durch den Ansatz  $\|x\| := \sqrt{\langle x | x \rangle}$  eine **Norm** für Elemente  $x$  von  $H$  definiert.

Einfachstes Beispiel für einen Hilbertraum ist der Raum der komplexen Zahlen  $C$  selbst. Bezüglich der üblichen Addition und Multiplikation von zwei komplexen Zahlen ist nämlich  $C$  ein linearer Raum. Das Skalarprodukt  $\langle x | y \rangle$  ist durch das Produkt der zu  $x$  konjugiert komplexen Zahl  $\bar{x}$  und  $y$  definiert. Die Norm einer komplexen Zahl  $x$  ist dann mit ihrem Betrag identisch, d.h., es ist  $\|x\| = |x|$ . Identifiziert man die komplexe Zahl  $x$  mit einem Punkt in der sogenannten Gaußschen Zahlenebene, so repräsentiert deren Norm den Abstand von  $x$  zum Koordinatenursprung.. Auch im Fall eines allgemeinen Hilbertraumes kann man die Norm in analoger Weise deuten.

Unter statistischen Gesichtspunkten ist der Hilbertraum der komplexen Zahlen jedoch trivial, d.h., ein System, dessen allgemeine Struktur durch diesen Hilbertraum beschrieben wird, zeigt ein völlig determiniertes Verhalten.

Im 3. Kapitel werden nun Signale und im 4. Kapitel das Gedächtnis als Quantensysteme modelliert. Die verwendeten Hilberträume sind sogenannte  $L^2$ -

Räume, d.h., sie sind vom Typ  $H = L^2(\Omega, \Sigma, \mu)$ , wobei  $[\Omega, \Sigma, \mu]$  ein **Maßraum** ist.

Dabei stellt  $L^2(\Omega, \Sigma, \mu)$  zunächst die Menge aller messbaren komplexen Funktionen auf  $\Omega$  dar, die aus mathematischen Gründen bezüglich des Maßes  $\mu$  **quadratisch integrierbar** sein müssen. Versetzen wir diese Menge mit der üblichen Addition von Funktionen und Multiplikation mit einer komplexen Zahl wird diese Menge zum linearen Raum.

Das Skalarprodukt ist dann ein **Integral bezüglich des Maßes  $\mu$**  und hat die Form

$$\langle f | g \rangle := \int \overline{f(\omega)} g(\omega) \mu(d\omega)$$

für alle  $f, g \in L^2(\Omega, \Sigma, \mu)$

Der Spezialfall  $\Omega = \mathbb{R}$  und  $\mu = l =$  Lebesguesches Maß wird in der Physik zur Modellierung eines auf der reellen Achse befindlichen Quantenteilchens verwendet. Für stetige Funktionen stellen dann die betrachteten Integrale „gewöhnliche“ (Riemannsche) Integrale dar. Im physikalisch realistischeren Fall des Raumes  $\Omega = \mathbb{R}^3$  treten dann Funktionen von 3 Variablen  $f(x_1, x_2, x_3)$  und entsprechend „Mehrfachintegrale“ auf.

Es sei noch erwähnt, dass wir, wie in der Quantenmechanik üblich, nur **separable Hilberträume** betrachten. In diesem Fall existiert eine Folge  $x_1, x_2, \dots$  von Elementen aus  $H$ , so dass sich jedes  $x$  aus  $H$  als Linearkombination der Elemente der Folge darstellen lässt. Die Folge kann dabei so gewählt werden, dass sie ein **Orthonormalsystem** ist, d.h., die Normen der Elemente dieser Folge sind stets gleich 1 und die Skalarprodukte verschiedener Elemente der Folge sind gleich 0.

Um Zustände eines Quantensystems oder Messungen an einem Quantensystem mathematisch beschreiben zu können, benötigen wir nun bestimmte lineare Operatoren.

Ein **beschränkter linearer Operator**  $A$  auf dem Hilbertraum  $H$  ist eine **lineare Abbildung von  $H$  in  $H$** .

**Spuroperatoren** sind spezielle lineare Operatoren der Gestalt

$$A(x) = \sum_{n=1}^m a_n \langle x_n | x \rangle x_n,$$

wobei  $(x_n)_{n=1}^m$  ein möglicherweise unendliches **vollständiges Orthonormalsystem** in  $H$  und  $(a_n)_{n=1}^m$  eine Folge komplexer Zahlen mit endlicher Summe der Beträge aller Glieder ist. In diesem Fall ist die **Spur** (englisch: trace) von  $A$  definiert durch:

$$tr(A) := \sum_{n=1}^m a_n$$

Ist der Operator  $A$  **positiv**, d.h., es ist stets  $a_n \geq 0$ , und ist weiter  $tr(A) = 1$ , so wird  $A$  **Zustand** genannt. Die Folge  $(a_n)_{n=1}^m$  stellt also in diesem Fall eine Verteilung dar, d.h.,  $(a_n)_{n=1}^m$  ist eine Folge von Wahrscheinlichkeiten, deren Summe gleich 1 ist.

In der physikalischen Literatur werden Zustände häufig mit dem griechischen Buchstaben  $\rho$  bezeichnet, was wir zur besseren Unterscheidung zu anderen Typen von Operatoren ebenfalls tun wollen.

Zu Beginn dieses Kapitels wurde nun erwähnt, dass in der klassischen Stochastik ein zu betrachtendes System mit zufälligem Verhalten durch einen Wahrscheinlichkeitsraum modelliert wird. **In der Quantenmechanik verwendet man zur Modellierung ein Tupel  $[H, \rho]$ , wobei  $H$  ein separabler Hilbertraum und  $\rho$  ein Zustand auf  $H$  ist.**



**Folgend soll die Modellierung von Messungen an einem durch  $[H, \rho]$  beschriebenen Quantensystem und deren Wirkung auf das System erläutert werden.**

Reale Messapparaturen haben nur eine endliche „Skala“, d.h., nur eine endliche Anzahl verschiedener Messwerte, hier mit  $a_1, \dots, a_n$  bezeichnet, können als Ergebnis der Messung registriert werden.

In der klassischen Stochastik wird eine solche Messung durch eine Zufallsgröße  $\xi$  über dem Wahrscheinlichkeitsraum  $[\Omega, \Sigma, P]$  modelliert, die nur diese Werte annehmen kann. Als Abbildung von der Menge der Elementarereignisse  $\Omega$  in  $\mathbb{R}$  ist dann  $\xi$  eine sogenannte **einfache Funktion**, d.h.,  $\xi$  lässt sich darstellen in der Form

$$\xi = \sum_{k=1}^n a_k \chi_{B_k}, \text{ wobei } \chi_B \text{ die } \mathbf{Indikatorfunktion} \text{ (auch charakteristische}$$

Funktion genannt) zu Teilmengen  $B$  von  $\Omega$  bezeichnet und  $B_1, \dots, B_n$  eine **messbare Zerlegung von  $\Omega$**  ist. Das bedeutet, dass die Funktion  $\xi(\omega)$  auf  $\Omega$  den Messwert  $a_1$  annimmt, wenn  $\omega$  in  $B_1$  liegt, den Wert  $a_2$  annimmt, wenn  $\omega$  in  $B_2$  liegt, usw..

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein bestimmtes Messergebnis  $a_k$  eintritt, ist dann gegeben durch  $p_k := P(B_k)$  und für den Erwartungswert erhalten wir

$$E_P(\xi) := \sum_{k=1}^n a_k p_k .$$

Zum entsprechenden Ansatz in der Quantenmechanik kann man nun gelangen, indem man rein formal die Zerlegung  $B_1, \dots, B_n$  von  $\Omega$  ersetzt durch eine **orthogonale Zerlegung** von  $H$  in **Unterräume**  $H_1, \dots, H_n$  und die Indikatorfunktionen  $\chi_{B_k}$  ersetzt durch die entsprechenden **Projektoren**  $\text{Pr}_{H_k}$ . Damit geht die Darstellung der

Zufallsgröße  $\xi$  über in die Darstellung eines beschränkten linearen Operators =

$$\sum_{k=1}^n a_k \Pr_{H_k} .$$

Die einzelnen Werte  $a_k$  repräsentieren wieder die möglichen Messwerte. Weil für  $x$  aus  $H_k$  stets  $A(x) = a_k x$  wird  $a_k$  **Eigenwert** von  $A$  zum **Eigenraum**  $H_k$  genannt.. Triviales Beispiel ist der Einheitsoperator  $I_H$  auf  $H$ . Hier ist stets  $I_H(x) = x$ , d.h., die Zahl 1 ist der einzige Eigenwert von  $I_H$  und damit der einzig mögliche Messwert. Klassisch entspricht dem die Zufallsgröße  $\xi$ , welche nur den Wert 1 annimmt. Eine Messung dieser Art ignoriert also völlig die konkrete Beschaffenheit des Systems und liefert damit keinerlei Information.

Nach den Regeln der Quantenmechanik ist nun der Erwartungswert des Ergebnisses einer durch den Operator  $A$  beschriebenen Messung bei vorliegendem Zustand  $\rho$  definiert durch  $E_\rho(A) := \text{tr}(\rho A)$ , wobei  $\rho A$  das **Produkt der Operatoren**  $\rho$  und  $A$  bezeichnet. Dabei ist berücksichtigt, dass dieses Produkt, definiert durch die Hintereinanderausführung der beiden Abbildungen, wieder ein Spuoperator ist.

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein bestimmtes Messergebnis  $a_k$  eintritt, ist dann gegeben durch  $q_k := \text{tr}(\rho \Pr_{H_k})$ . Analog zum klassischen Fall gilt

$$E_\rho(A) = \sum_{k=1}^n a_k q_k .$$

Zumindest aus theoretischen Gründen ist es erforderlich, auch idealisierte Messungen, z.B. sogenannte „scharfe“ Messungen, zu betrachten, bei denen unendlich viele verschiedene Messwerte möglich sind.

Im Fall der klassischen Wahrscheinlichkeitsrechnung führt das auf die Betrachtung beliebiger Zufallsgrößen  $\xi$ . Diese lassen sich durch einfache Zufallsgrößen, die reale

Messungen repräsentieren, approximieren und spiegeln somit einen Satz beliebig feiner Messungen wider.

Speziell können wir für eine messbare Teilmenge  $K$  von  $R$  die Zufallsgröße  $\chi_K(\xi)$  betrachten. Diese nimmt den Wert 1 an, wenn  $\xi$  einen Wert in  $K$  annimmt. Ansonsten zeigt sie den Wert 0. Die Verteilung  $P_\xi$  von  $\xi$  lässt sich deshalb in der Form  $P_\xi(K) = E_P(\chi_K(\xi))$  darstellen.

Das analoge Konzept lässt sich im Fall der Quantenmechanik realisieren.

Die zur Modellierung realer Messungen betrachteten Operatoren sind **selbstadjungiert**, eine Eigenschaft, die mathematisch dadurch definiert ist, dass für alle  $x, y \in H$  gilt  $\langle A(x) | y \rangle = \langle x | A(y) \rangle$ , das bedeutet, dass der Operator gleich seinem adjungierten Operator ist. .

Entsprechend dem Übergang von einfachen Zufallsgrößen zu beliebigen Zufallsgrößen betrachtet man nun beliebige selbstadjungierte Operatoren  $A$  auf  $H$ , in der Physik gewöhnlich **Observable** genannt.

Für einfache Funktionen  $f$  auf  $R$  ist dann ein Operator  $f(A)$  definiert, der wieder eine reale Messung repräsentiert. Speziell repräsentiert der Operator  $\chi_K(A)$  eine Messung, die nur die Werte 0 oder 1 zum Ergebnis hat.

Weiter ist durch den Ansatz  $Q_{A,\rho}(K) := E_\rho(\chi_K(A))$  für alle messbaren Teilmengen  $K$  von  $R$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q_{A,\rho}$  auf  $R$  definiert, welches die Verteilung des zufälligen Messergebnisses repräsentiert. Für den Erwartungswert gilt dann die klassische Formel  $E_\rho(A) = \int x Q_{A,\rho}(dx)$ . Analoges gilt für die Varianz usw..

Man kann damit feststellen, dass im Fall nur einer Messung an dem Quantensystem die Methoden der klassischen Stochastik ausreichend sind, den auftretenden Zufall zu analysieren. Gleiches gilt für  $r$  Messungen, sofern sie selbstadjungierten Operatoren der Gestalt  $A_1 = f_1(A), \dots, A_r = f_r(A)$  entsprechen, d.h., auf eine einzige Messung

gemäß dem Operator  $A$  zurückgeführt werden können. In diesem Fall gelten nämlich die Kolmogoroffschen Verträglichkeitsbedingungen für die gemeinsamen Verteilung der Messergebnisse. Das wiederum ist gleichbedeutend damit, dass die Operatoren kommutieren, d.h., es gilt stets  $A_k A_j = A_j A_k$ .

Betrachtet man nun zwei reale Messungen, die selbstadjungierten Operatoren  $A_1$  und  $A_2$  entsprechen sollen, welche nicht kommutieren, dann kann man zwar diese Messungen hintereinander ausführen, aber die Ergebnisse hängen von der Reihenfolge der Ausführung ab. Damit sind die Ergebnisse nicht als ein Paar von Zufallsgrößen im Sinne der klassischen Stochastik zu beschreiben. Die Ursache dafür ist eine durch die Messung bewirkte Änderung des Zustandes des betrachteten Quantensystems. Diese Änderung wird durch das sogenannte **Messpostulat nach J. von Neumann** beschrieben, dessen Gültigkeit vielfach experimentell belegt ist. Zur Erläuterung betrachten wir wieder einen selbstadjungierten Operator der Gestalt  $A =$

$$\sum_{k=1}^n a_k \Pr_{H_k}.$$

*Registriert man im Ergebnis einer dem Operator  $A$  entsprechenden Messung einen bestimmten Messwert  $a_k$ , so soll dies eine Überführung des ursprünglichen*

*Zustandes  $\rho$  in den Zustand  $(\text{tr}(\rho \Pr_{H_k}))^{-1} \Pr_{H_k} \rho \Pr_{H_k}$  bewirken.*

Man redet vom einem durch die Messung induzierten „**Kollaps**“ welcher eine **Reduktion des Zustandes** bewirkt.

Insbesondere der durch das Messpostulat beschriebene Effekt hat erhebliche Konsequenzen betreffend Rolle und Bedeutung des Zufalls. Darauf soll folgend kurz eingegangen werden:

Wie zu Beginn des Kapitels erwähnt, wird die Realisierung eines klassischen Systems mit einem Elementarereignis  $\omega$  identifiziert. Kennt man  $\omega$ , so sind die Werte  $\xi(\omega)$  für jede Zufallsgröße  $\xi$  bekannt, es gibt damit keinen Zufall mehr.

Umgekehrt lässt sich die Realisierung des Systems durch einen genügend großen Satz von Messungen bestimmen. Aus der Kenntnis der entsprechenden Messwerte lässt sich also völlig determiniert auf das Ergebnis jeder weiteren Messung schließen. Der Zufall bei einem klassischen System lässt sich also durch genügend viele Messungen an dem realisierten System vollständig beseitigen – er ist gewissermaßen subjektiver Natur, d.h., er beruht nur auf der eigenen Unwissenheit, die sich zumindest theoretisch beseitigen lässt. Bei einem Würfelwurf beispielsweise kann die Augenzahl durch eine Beobachtung (Messung) festgestellt werden, und durch jede weitere Beobachtung ändert sich die Augenzahl nicht mehr. Das heißt also, dass die einmal gemessene Realisierung des Systems durch weitere Messungen nicht mehr beeinflusst wird, und trivialerweise immer wieder das gleiche Ergebnis liefert. Messungen an Quantensystemen hingegen induzieren eine Veränderung des Systems. Wiederholungen einer Messung können verschiedene Ergebnisse liefern, wenn zwischenzeitlich ein anderer Typ von Messung ausgeführt wurde.

Der Zustand eines Quantensystems lässt sich auf diese Weise niemals vollständig bestimmen. Egal wie viele bzw. welche Messungen man bereits ausgeführt hat, immer wird es Messprozeduren geben, deren Ergebnis nicht vorhersagbar ist. Der Zufall bei Quantensystemen ist in diesem Sinne objektiver Natur.

Hirnaktivitäten mittels Quantensystemen zu modellieren hat also die Konsequenz, dass man diese Aktivitäten niemals vollständig erfassen kann, und damit das Ergebnis dieser Aktivitäten nicht vollständig vorausgesagt werden kann. Bei der Quantenstochastik ist im Gegensatz zur klassischen Stochastik der Zufall durch Beseitigung aller Störeinflüsse nicht auslöschar. Ein klassisches Modell zu verwenden, würde dem gegenüber voraussetzen, dass man zumindest theoretisch den Ablauf von z.B. Denkprozessen vollständig erfassen und deren Ergebnis voraussagen können müsste, insofern alle Parameter, Inputs und Funktionsweisen von Denkprozessen eines Individuums bekannt sind.

Messungen vom EEG-Typ werden wir im 8. Kapitel durch **Multiplikationsoperatoren** auf einem gewissen Hilbertraum vom Typ

$H = L^2(\Omega, \Sigma, \mu)$  modellieren. Dabei ist eine beschränkte messbare Funktion  $g$  auf  $\Omega$  gegeben. Dieser wird ein beschränkter Operator  $O_g$  auf  $L^2(\Omega, \Sigma, \mu)$  zugeordnet, der die Multiplikation jedes Elementes  $f$  von  $L^2(\Omega, \Sigma, \mu)$  mit der Funktion  $g$  realisiert:  $O_g(f)(\omega) := g(\omega)f(\omega)$

Ist die Funktion  $g$  reellwertig, so ist  $O_g$  selbstadjungiert. Weiter kommutieren alle diese Multiplikationsoperatoren.

Bei einem gegebenen Zustand  $\rho$  sollte sich also die Gesamtheit aller den Multiplikationsoperatoren entsprechenden Messungen mittels klassischer Stochastik, d.h., als Zufallsgrößen über einem gewissen Wahrscheinlichkeitsraum beschreiben lassen. Dazu gelangen wir auf folgende Weise:

Wir definieren ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q_\rho$  auf  $\Omega$  durch  $Q_\rho(B) := \text{tr}(\rho O_{\chi_B})$  für alle messbaren Teilmengen  $B$  von  $\Omega$ . Für alle Multiplikationsoperatoren  $O_g$  gilt dann  $\text{tr}(\rho O_g) = \int g(\omega) Q_\rho(d\omega)$ , d.h., der quantentheoretische Erwartungswert der Observablen  $O_g$  ist stets gleich dem klassischen Erwartungswert der Zufallsgröße  $g$ .

Im Fall eines Quantenteilchens in  $R$ , oder allgemeiner  $R^d$ , werden die Multiplikationsoperatoren in der Physik gewöhnlich mit Messungen betreffend den Ort des Teilchens identifiziert. Wir nennen deshalb das Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q_\rho$  **Ortsverteilung** zum Zustand  $\rho$ .

Die vorangehenden Überlegungen zeigen dann, dass die zufälligen Ergebnisse von Ortsmessungen statistisch schon mittels der Ortsverteilung beschrieben werden können, das gegebene quantentheoretische Modell somit ein gewisses klassisches Modell beinhaltet.

Hat man nun umgekehrt einen Wahrscheinlichkeitsraum  $[\Omega, \Sigma, P]$  gegeben, so können wir den Hilbertraum  $L^2(\Omega, \Sigma, P)$  mit dem **reinen Zustand**  $\rho$  zur Funktion  $\psi \equiv 1$  auf  $\Omega$  betrachten. In diesem Fall ist  $Q_\rho = P$ . Damit wird der Wahrscheinlichkeitsraum  $[\Omega, \Sigma, P]$  das stochastische Modell für alle Ortsmessungen an dem speziellen durch den Hilbertraum  $L^2(\Omega, \Sigma, P)$  mit dem speziellen Zustand  $\rho$  beschriebenen Quantensystem. Das Grundkonzept der klassischen Stochastik in Gestalt des Wahrscheinlichkeitsraumes ist somit in die Quantentheorie als Instrument zur Beschreibung spezieller Aspekte eingebettet.

Betrachtet man nun im Spezialfall eines Quantenteilchens die Klasse aller Impulsmessungen, so erhält man auf analoge Weise zu jedem Zustand ein von der Ortsverteilung verschiedenes Wahrscheinlichkeitsmaß, Impulsverteilung genannt. Nun lassen sich aber bekanntlich Orts- und Impulsmessungen nicht gemeinsam durch ein klassisches Modell beschreiben, da die entsprechenden Operatoren nicht kommutieren.

Damit ergibt sich insgesamt ein erster Hinweis darauf, dass sich mit einem quantentheoretischen Modell wesentlich mehr Effekte beschreiben lassen als mit einem klassischen Modell.

Wir wollen nun zwei Quantensysteme betrachten, deren allgemeine Struktur durch einen Hilbertraum  $H_1$  bzw.  $H_2$  beschrieben sein soll. Befinden sich beide Systeme im Kontakt, so stellt das ein neues Quantensystem dar, dessen Struktur nach den Regeln der Quantenmechanik durch das sogenannte **Tensorprodukt**  $H_1 \otimes H_2$  beschrieben wird.

An dieser Stelle soll auf die etwas aufwendige Erläuterung dieser Konstruktion im allgemeinen Fall von zwei Hilberträumen verzichtet, und nur der für unsere Zwecke ausreichende Spezialfall  $H_1 = L^2(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$  und  $H_2 = L^2(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$  betrachtet werden. In diesem Fall kann nämlich  $H_1 \otimes H_2$  mit dem Raum

$L^2(\Omega_1 \times \Omega_2, \Sigma_1 \times \Sigma_2, \mu_1 \times \mu_2)$  identifiziert werden, d.h., die Elemente von  $H_1 \otimes H_2$  sind Funktionen  $f(\omega_1, \omega_2)$  von zwei Variablen  $\omega_1 \in \Omega_1, \omega_2 \in \Omega_2$ .

Weiter ist das Tensorprodukt von zwei Funktionen  $f_1 \in H_1$  und  $f_2 \in H_2$  als Element von  $H_1 \otimes H_2$  definiert durch  $f_1 \otimes f_2(\omega_1, \omega_2) := f_1(\omega_1)f_2(\omega_2)$ , und das Tensorprodukt von zwei Operatoren  $A_1$  auf  $H_1$  und  $A_2$  auf  $H_2$  als Operator auf  $H_1 \otimes H_2$  ist charakterisiert durch

$$A_1 \otimes A_2 (f_1 \otimes f_2) = A_1(f_1) \otimes A_2(f_2)$$

für alle  $f_1 \in H_1$  und  $f_2 \in H_2$ .

Nach den allgemeinen Regeln wird jede Messung an den miteinander in Kontakt stehenden beiden Systemen durch einen selbstadjungierten Operator  $A$  auf  $H_1 \otimes H_2$  beschrieben. Hat  $A$  die Gestalt  $A = A_1 \otimes A_2$ , so bedeutet das, dass gleichzeitig eine Messung am ersten System entsprechend dem selbstadjungierten Operator  $A_1$  auf  $H_1$  und eine Messung am zweiten System entsprechend dem selbstadjungierten Operator  $A_2$  auf  $H_2$  durchgeführt wird, und die beiden erhaltenen Messwerte miteinander multipliziert den Messwert zu der  $A$  entsprechenden Messung ergeben.

Es sei nun  $\rho$  ein Zustand auf  $H_1 \otimes H_2$ , d.h.,  $\rho$  beschreibt das Verhalten der beiden miteinander in Kontakt stehenden Systeme. Hat  $\rho$  die Gestalt  $\rho = \rho_1 \otimes \rho_2$ , so bedeutet das, dass  $\rho_1$  der Zustand des ersten Systems und  $\rho_2$  der Zustand des zweiten Systems ist, und die beiden Systeme **stochastisch unabhängig** sind.

Man erhält nämlich in diesem Fall bei einer vorher betrachteten Messung des Typs  $A = A_1 \otimes A_2$ , dass  $E_\rho(A) = E_{\rho_1}(A_1) E_{\rho_2}(A_2)$  gilt, d.h., der Erwartungswert



des Produktes aus dem Messwert am ersten System und dem Messwert am zweiten System ist immer gleich dem Produkt der Erwartungswerte der beiden Einzelmessungen.

Hat  $\rho$  nicht die Gestalt  $\rho = \rho_1 \otimes \rho_2$ , so wird der Zustand nach Schrödinger **verschränkt** genannt.

Führt man nur eine Messung am ersten System durch, so entspricht das einem Operator der Gestalt  $A = A_1 \otimes I_{H_2}$ , wobei  $I_{H_2}$  der **Einheitsoperator** auf  $H_2$  ist, d.h., wir haben  $I_{H_2}(f) = f$  für alle  $f \in H_2$ .

Besteht das gekoppelte System aus unabhängigen Teilsystemen im vorangehend betrachteten Sinn, bewirkt diese Messung im Sinne des von Neumannschen Messpostulates nur einen Kollaps des ersten Systems, das Verhalten des zweiten Systems ändert sich nicht.

Handelt es sich jedoch um einen verschränkten Zustand, so bewirkt die nur am ersten System ausgeführte Messung einen Kollaps des Gesamtsystems und damit auch eine sofortige Zustandsänderung des zweiten Systems, obwohl dieses in keiner Weise in den Messvorgang involviert ist, und das auch, wenn die Systeme räumlich voneinander getrennt sind.

Dieser von Einstein als „spukhafte Fernwirkung“ bezeichnete Effekt wird bei der Teleportation von Quantensystemen ausgenutzt (siehe z.B. /F,O/) und **ist klassisch nicht erklärbar!** Bei der Teleportation wird, einfach gesagt, Information innerhalb von verschränkten Quantensystemen ohne Zeitverlust übertragen, da sich bei einem induzierten Kollaps die Veränderungen am ganzen System ohne zeitliche Verzögerung registrieren lassen.

Bei dem im 5. Kapitel betrachteten Modell der Erkennung von Signalen im Hirn wird ferner deutlich, dass durch diesen Effekt eine Erklärung für eine Form des **Bindungsproblems** gegeben werden könnte. Der mit der Erkennung eines spezifischen z.B. rein visuellen Signals verbundene Kollaps des gesamten Zustands lässt sich nämlich als eine sofortige Informationsübertragung vom Sehzentrum in andere Areale deuten..

Zum Abschluss dieses Kapitels soll noch kurz darauf eingegangen werden, wie man Veränderungen von Quantensystemen mathematisch beschreibt.

In der Quantenmechanik wird die zeitliche Entwicklung eines Systems, z.B. die „Bewegung“ eines Teilchens, gewöhnlich durch eine Halbgruppe unitärer Operatoren beschrieben, die man über die Lösung einer Schrödingergleichung gewinnt.

Betrachtet man einen Prozess mit diskreter Zeit, so wird die Veränderung des Systems in einem Zeittakt durch einen einzelnen unitären Operator beschrieben.

Ein linearer Operator  $U$  auf einem Hilbertraum  $H$  ist nun **unitär**, wenn er die Norm erhält, d.h., für alle  $x \in H$  gilt  $\|U(x)\| = \|x\|$ . Das sichert die Existenz des **inversen** Operators  $U^{-1}$ .

Befindet sich nun das betrachtete System zu einem gewissen Zeitpunkt in einem Zustand  $\rho$  auf  $H$ , so geht es in einem Zeittakt in den Zustand  $U \rho U^{-1}$  auf  $H$  über.

Bei dieser Form von Veränderung des Systems bleibt also dessen Grundstruktur, beschrieben durch den Hilbertraum  $H$ , erhalten. Es ändert sich lediglich der Zustand. Lässt man nun gewissermaßen die Zeit „rückwärts laufen“, was einer Anwendung des **inversen** Operators  $U^{-1}$  entspricht, so erhält man den ursprünglichen Zustand zurück. Im Gegensatz zu klassischen Modellen ist also die Zustandsänderung eines Quantensystems ein **reversibler** Vorgang und geschieht damit ohne Verlust an Information.

Auf diese Weise beschreiben wir in 5. Kapitel die Wechselwirkung zwischen zwei Signalen als Bestandteil des Prozesses der Erkennung von Signalen.

Ein weiterer Bestandteil dieses Prozesses ist die „Entnahme“ eines Signals aus dem Gedächtnis. Ist die allgemeine Struktur des Gedächtnisses durch einen Hilbertraum  $H_{mem}$  (mem, wie memory) und die Struktur der Signale durch einen Hilbertraum  $H_{sig}$  beschrieben, so überführt der Vorgang der Entnahme eines Signals aus dem Gedächtnis einen ursprünglichen Zustand auf  $H_{mem}$ , der das Gedächtnis vor Entnahme des Signals beschreibt, in einen Zustand auf  $H_{mem} \otimes H_{sig}$ , der

gemeinsam den „Rest“ der Signale im Gedächtnis und das entnommene Signal beschreibt. Diesen Vorgang beschreiben wir in /FF1/ mathematisch durch eine gewisse Isometrie.

Allgemein hat man folgende Definition: Eine lineare Abbildung  $J$  von einem Hilbertraum  $H_1$  in einen Hilbertraum  $H_2$  heißt **Isometrie**, wenn  $J$  die Norm erhält, d.h., jedes Element  $x$  aus  $H_1$  hat die gleiche Norm in  $H_1$  wie sein Bild  $J(x)$  in  $H_2$ .

Durch diese mathematische Voraussetzung wird gesichert, dass ein Zustand  $\rho$  auf  $H_1$  durch  $J \rho J^*$  in einen Zustand auf  $H_2$  überführt wird. Dabei bezeichnet  $J^*$  den zu  $J$  **adjungierten** Operator.

Im Fall der Entnahme von Signalen aus dem Gedächtnis ist zu wählen:  $H_1 = H_{mem}$  und  $H_2 = H_{mem} \otimes H_{sig}$ . Ist dabei  $\rho$  der Zustand des Gedächtnisses vor Entnahme des Signals, so stellt  $J \rho J^*$  den gemeinsamen Zustand des Gedächtnisses nach Entnahme des Signals und des entnommenen Signals dar.

Den vorher betrachteten unitären Operator erkennt man als Spezialfall einer Isometrie, wenn man  $H = H_1 = H_2$  wählt. In diesem Fall ist der adjungierte Operator gleich dem inversen Operator.

#### 4. Signale und Bosonen

Spezialisten der modernen Hirnforschung sind sich weitgehend einig in der Auffassung, dass Signale im Hirn durch Populationen von Neuronen kodiert werden. Dazu sei an das Postulat (P2) und das Zitat von Singer erinnert:

**(P2)** Signale werden repräsentiert durch Populationen angeregter Neurone.

(ein geringes Quantum an elektrischer Energie macht dabei den Unterschied zwischen einem angeregten und einem nicht angeregten Neuron aus)

*Zitat /S1/ (S. 157): Populationskodierung der Signale – eine Strategie, einzelne Merkmale durch große Populationen gleichzeitig aktiver Neurone zu repräsentieren .....Mit einer überschaubaren Zahl relativ unselektiver Nervenzellen können nun fast beliebig viele Populationen erzeugt werden, die sich voneinander durch die jeweilige Konstellation und den Aktivierungsgrad der beteiligten Neurone unterscheiden, aber immer aus dem gleichen Reservoir von Nervenzellen rekrutiert werden.*

Hinsichtlich ihres Aktivierungsgrades, speziell des Wechsels vom angeregten Zustand zum nicht angeregten Fall verhalten sich einzelne Neurone zufällig. Modelle für Signale sollten also statistischer Natur sein.

Im Rahmen der klassischen Stochastik wird dazu die Theorie neuronaler Netze genutzt. Das macht insbesondere mit der heute verfügbaren Technik Simulationen möglich. Etwas allgemeiner könnte man zufällige Punktsysteme in einem Raum  $G$  betrachten, der physikalisch das Volumen des Hirns repräsentiert. Das Vorhandensein eines dieser Punkte am Ort eines Neurons würde dabei charakterisieren, dass dieses Neuron sich im angeregten Zustand befindet.

Wie bereits im 2. Kapitel angesprochen, gibt es nun eine Vielzahl experimentell belegter Erkenntnisse, die sich nicht durch solche klassischen Modelle beschreiben bzw. erklären lassen. Allen voran ist hier das sogenannte Bindungsproblem zu nennen, bei dem es nach Singer /S1/ um die *Koordination der Vielzahl gleichzeitig ablaufender Verarbeitungsprozesse als Teile eines hochkomplexen Selbstorganisationsprozesses* geht, Dieses Bindungsproblem ist eng verknüpft mit dem durch das Postulat (P10) ausgedrückten Sachverhalt.

**(P10)** Aktivität in einigen Arealen des Hirns hat sofort Wirkungen auf andere Areale.

*/S/ (S.207)....,dass alles, was an einer Stelle im System geschieht, sofortige Rückwirkung auf Prozesse an anderen Stellen hat.*

Versuche, dieses Phänomen mit Methoden der klassischen Stochastik zu beschreiben, setzen eine hierarchische Struktur des Hirns voraus (s. /Kr/), an deren Spitze ein gewissermaßen über alle Informationen verfügender „Koordinator“ steht. Man weiß aber nun seit ca. 10 Jahren, dass es dieses Koordinationszentrum im Hirn nicht gibt.

Singer schreibt dazu in /S1/ (S.66): ... *ergibt sich eine Netzwerkarchitektur, die jeden Hinweis auf eine pyramidale Organisation mit einem Konvergenzzentrum an der Spitze vermissen lässt. Man sieht sich vielmehr einem hoch distributiv und parallel organisierten System gegenüber, dass auf außerordentlich komplexe Weise reziprok vernetzt ist. Und dies wirft die kritische Frage auf, wie diese vielen gleichzeitig ablaufenden Verarbeitungsprozesse koordiniert werden können. Es gibt hier keinen Agenten, der interpretiert, kontrolliert und befiehlt.*

Prinzipiell bietet nun die Quantentheorie eine Möglichkeit, das Postulat (P10) zu erklären. Wie bereits in der Einleitung erwähnt und im 3. Kapitel genauer erläutert wurde, führt z.B. eine lokale abgegrenzte Messung am System zu einem Kollaps des Gesamtsystems und damit zu einer mathematisch präzise beschreibbaren globalen Änderung des Zustandes des Systems. Im Gegensatz zur klassischen Systemen, bei denen sich Information lokal über gewisse Träger fortpflanzt, ist die Quantentheorie in diesem Sinne nichtlokal, was sich im Rahmen eines klassischen Modells nicht erklären lässt.

Es erscheint nun durchaus naheliegend, eine Quantenvariante der neuronalen Netze zu betrachten. In diesem Fall enthält das Modell theoretisch die Information über den Zustand jedes einzelnen Neurons, sie wären gewissermaßen unterscheidbar. Man kann sich vorstellen, dass die Neurone nummeriert sein würden. Abgesehen davon, dass die Neurone im Hirn nicht nummeriert sind, würde das Modell betreffend die Beschreibung von Signalen, welche ja durch Populationen von Neuronen kodiert sein sollen, überflüssige Informationen beinhalten.

Bei der Betrachtung klassischer Modelle resultiert daraus kein Problem. Sind für das einzelne Neuron nämlich nur zwei Zustände, angeregt oder nicht angeregt möglich, so würde das Signal durch die Positionen aller angeregten Neuronen bestimmt sein.

Wären diese nummeriert, so hätten wir eine (zufällige) Folge  $[x_1, \dots, x_m]$  von einer gewissen Anzahl  $m$  Punkten in dem durch die Menge  $G$  symbolisierten Volumen des Hirns vorliegen. Die Abbildung  $[x_1, \dots, x_m] \rightarrow \{x_1, \dots, x_m\}$  überführt nun die Folge von Punkten in eine Menge von Punkten aus  $G$ , was gewissermaßen ein Vergessen der Nummerierung bedeutet.

Das Signal sollte nun durch die Menge  $\{x_1, \dots, x_m\}$  kodiert sein. Was die Folge  $[x_1, \dots, x_m]$  an zusätzlicher Information enthält, ist eigentlich überflüssig.

Zufällige Mengen dieser Gestalt identifiziert man nun mit Systemen ununterscheidbarer Punkte bzw. Teilchen und sie sind Gegenstand der Punktprozessorie. Ihre Verteilungen, Punktprozesse genannt, lassen sich stets aus zufälligen (nummerierten) Punktfolgen, also Systemen von durch Nummerierung unterscheidbarer Teilchen auf die beschriebene Weise gewinnen. Die statistische Beschreibung unterscheidbarer Teilchensysteme enthält also im Fall der klassischen Stochastik die statistische Beschreibung von Systemen ununterscheidbarer Teilchen.

In der Quantenmechanik betrachtet man ebenfalls sowohl Systeme unterscheidbarer wie auch ununterscheidbarer Teilchen. Bei den Letzteren gibt es noch zwei Sorten, die Bosonen und die Fermionen.

Der entscheidende Unterschied zum klassischen Fall besteht nun darin, dass hinsichtlich der Statistik das Verhalten der damit drei Typen von Teilchensystemen völlig unterschiedlich ist und sich damit die Beschreibung der Bosonen wie auch der Fermionen nicht analog zum klassischen Fall auf die Betrachtung von Systemen unterscheidbarer Teilchen zurückführen lässt, selbst wenn man den ebenfalls nicht klassisch erklärbaren Spin (charakteristisches Drehmoment diverser Klassen von Quanten) nicht betrachtet.

Im Fall der Systeme unterscheidbarer Teilchen ist ähnlich dem klassischen Fall die Boltzmann-Statistik, im Bosonen-Fall die Bose-Einstein-Statistik und im Fermionen-Fall die Fermi-Dirac-Statistik zu verwenden.

Wir gehen nun davon aus, dass Signale durch Systeme ununterscheidbarer Teilchen modelliert werden sollten, da entsprechend Postulat (P2) die Population zur Kodierung dienen soll. Da bei der Modellierung durch Fermionen nach Kenntnissen

aus der Physik nicht zwei verschiedene Neurone im gleichen Zustand sein dürften, was unrealistisch erscheint, bleiben nur die Bosonen übrig.

Im Gegensatz zu Systemen unterscheidbarer Teilchen und damit allen klassischen Teilchensystemen repräsentieren die Bosonensysteme eine völlig neue Qualität von „Zusammengehörigkeit“. Deren Bedeutung für die Modellierung von Hirnprozessen wurde von Stapp in [Sta] analysiert. Von dort stammt auch das folgende Zitat: *Classical Physics cannot explain consciousness because it cannot explain how the whole can be more than the parts*

Bosonen sind nun ein Typ von Quantensystemen, dessen allgemeine Struktur entsprechend den Ausführungen im 3. Kapitel sich durch einen geeigneten separablen Hilbertraum beschreiben lässt. Dabei handelt es sich um den sogenannten **symmetrischen Fockraum** zu einem Hilbertraum, der seinerseits das Modell für ein Teilchen, das in einem gewissen Raum  $G$  lokalisiert ist, darstellt. Die Bosonen als Systeme von Teilchen sind dann ebenfalls in diesem Raum lokalisiert. Der vorangehenden Argumentation folgend werden wir die in den Sinnesorganen durch Umsetzung äußerer Reize im Körper sich ausbreitender Signale als Bosonensysteme auffassen.

Dabei sollte zunächst  $G \subseteq \mathbb{R}^3$  den gesamten Raum darstellen, in dem Effekte des Signals messbar sind, also der Körper des Lebewesens und ggf. darüber hinaus. Die Ausbreitung des Signals in diesem Raum sollte dann nach den Regeln der Quantentheorie durch eine Halbgruppe unitärer Operatoren beschrieben werden, wobei im Fall der Einbeziehung äußerer Störungen allgemeinere Instrumente der Quantenstochastik benötigt werden.

Wir wollen uns jedoch auf die Modellierung kognitiver Prozesse (Wahrnehmen, Erkennen von Signalen,..) beschränken. Es reicht dazu, als Raum  $G$  den Bereich zu wählen, in dem diese Prozesse stattfinden. Nach Singer ist das bei Säugetieren im wesentlichen die Großhirnrinde, wohl wegen ihrer geringen Stärke von ca. 2 mm nach seiner Auffassung als (gefaltete) Fläche modellierbar, d.h., es wäre  $G \subseteq \mathbb{R}^2$  zu wählen.

Für unser Modell ist die konkrete Form von  $G$  zunächst unerheblich. Wir werden deshalb im folgenden den Fall betrachten, dass  $G$   $d$ -dimensional ist - mathematisch

präziser soll also  $G$  eine messbare Teilmenge des  $d$ -dimensionalen Raumes  $\mathbb{R}^d$  sein, versehen mit dem  $d$ -dimensionalen Lebesgueschen Maß  $l$ , wobei  $0 < l(G) < +\infty$  gelten soll. Der entsprechende Raum der quadratisch integrierbaren Funktionen auf  $G$  stellt dann den oben genannten Hilbertraum zur Beschreibung eines Teilchens dar.

Zur Darstellung des symmetrischen Fockraumes, auch **Bosonenraum** genannt, gelangt man nun auf folgende Weise. Wir bezeichnen mit  $M(G)$  die Menge aller Punktfigurationen in  $G$ , d.h., aller endlichen Teilmengen von  $G$ . Diese Menge wird mit einer geeigneten  $\sigma$ -Algebra und einem gewissen Maß versehen. Der Bosonenraum ist dann mit dem entsprechenden Raum der quadratisch integrierbaren Funktionen auf  $G$  identifizierbar, den wir kurz mit  $L^2(M(G))$  bezeichnen wollen. Für Details sei auf /FF1/ und /FF 2/ verwiesen.

Ein  $\psi \in L^2(M(G))$  ist also eine komplexwertige Funktion  $\psi(\varphi)$ , wobei die Variable  $\varphi$  eine Punktfiguration im Raum  $G$  ist, d.h., es ist  $\varphi \in M(G)$ .

Die Ortsverteilung eines Bosonensystems beschreibt dann eine **zufällige Konfiguration von Punkten**, also ein zufälliges Punktesystem in  $G$ . In der Stochastik nennt man so etwas einen **Punktprozess**. Bezogen auf unser Modell wird diese zufällige Konfiguration von Punkten die mit den Positionen der angeregten Neurone identifiziert. Es sei bemerkt, dass nicht die Neurone selbst das Quantensystem repräsentieren, sondern die geringen elektrischen Ladungseinheiten, die den Unterschied zwischen einem angeregten und einem nicht angeregten Neuron ausmachen. Die Neurone selbst stellen nur die Orte dar, wo diese Ladungen lokalisiert sind.

Ein besonders einfacher Typ von Funktionen auf  $M(G)$  sind die **kohärenten Funktionen**  $\exp(g)$  zu einer gegebenen Funktion  $g \in L^2(G)$ , welche mathematisch folgendermaßen definiert sind:

$$\exp(g)(\varphi) := \prod_{x \in \varphi} g(x) \quad (\theta \neq \varphi \in M(G))$$

$$\exp(g)(\theta) := 1$$



Dabei bezeichnet  $\emptyset$  die leere Menge (hier Konfiguration in  $G$  ohne Punkte).

Die **Normierung**  $|\exp(g)\rangle$  der kohärenten Funktionen  $\exp(g)$  ergibt dann einen reinen Zustand eines Bosonensystems, der **kohärenter Zustand** zu  $g$  genannt wird.

Jedes  $g \in L^2(G)$  mit  $g$  nicht identisch 0 lässt sich in der Form  $g = \lambda f$  schreiben, wobei  $f$  die Normierung von  $g$  und  $\lambda$  die Norm von  $g$  ist. Der kohärente Zustand  $|\exp(g)\rangle = |\exp(\lambda f)\rangle$  beschreibt dann ein System von Quantenteilchen, die „unabhängig“ sind und sich alle im gleichen „Einteilchenzustand“  $f$  befinden.

Die Ortsverteilung zu  $|\exp(\lambda f)\rangle$  ist dann ein sogenannter **Poissonscher Punktprozess**, der ein hochgradig chaotisches zufälliges Punktesystem im Raum  $G$  repräsentiert. Der Erwartungswert der Gesamtzahl der Punkte dieses Systems ist dabei gleich  $\lambda^2$ .

Im Fall  $g \equiv 0$  liegt ein Punktesystem vor, das mit Wahrscheinlichkeit 1 leer ist. Der reine Zustand zu  $|\exp(0)\rangle = \exp(0)$  wird deshalb **Vakuuzustand** genannt.

Trotz ihrer einfachen Form sind die kohärenten Funktionen mathematisch von großer Bedeutung (auch bei physikalischen Anwendungen in z.B. der Quantenoptik, Lasertechnik o.ä.). Die Linearkombinationen kohärenter Funktionen und damit auch kohärenter Zustände liegen nämlich dicht in  $L^2(M(G))$ , d.h., jedes Element von

$L^2(M(G))$  lässt sich approximieren durch Funktionen der Form  $\sum_{j=1}^n c_j \exp(g_j)$ .

Der Raum  $G$ , in dem die Erkennung und Verarbeitung von Signalen stattfindet, zerfällt nun in eine Anzahl von Teilbereichen  $G_1, \dots, G_n$  - mathematisch präziser haben wir:

$$\bigcup_{r=1}^n G_r = G, \quad G_j \cap G_r = \emptyset \text{ für } j \neq r \text{ und } l(G_r) > 0 \text{ für } r = 1, \dots, n$$

In jedem dieser Teilbereiche, Areale genannt, wird nur ein Teilaspekt der Signale verarbeitet. Es sei in diesem Zusammenhang an das Postulat (P3) erinnert:

(P3) Das Hirn enthält verschiedene Areale, die für unterschiedliche Aufgaben zuständig sind. Entsprechend ist jedes Signal zerlegbar.

*Zitat /S1/ (S. 148): Das Schaltdiagramm der direkt mit der Verarbeitung visueller Information befassten Hirnrindenregionen weist mehr als 30 Areale auf. Jedes dieser Areale bearbeitet jeweils nur einen Teilaspekt der ... visuellen Signale. Einige Areale befassen sich vorwiegend mit der Analyse von Bewegungsinformationen, andere mit Farbe oder mit figürlichen Aspekten...Es darf jedoch davon ausgegangen werden, dass die im Sehzentrum erarbeiteten Prinzipien allgemeiner Natur sind und auf andere Modalitäten generalisiert werden können.*

Jeder der Räume  $L^2(M(G_r))$  lässt sich nun als Teilraum derjenigen Funktionen  $\Psi(\varphi)$  aus  $L^2(M(G))$  auffassen, die auf  $M(G_r)$  konzentriert sind, d.h., es ist  $\Psi(\varphi) = 0$ , wenn die Konfiguration  $\varphi$  Punkte enthält, die nicht in der Teilmenge  $G_r$  liegen. Weiter lässt sich jede Funktion  $\Psi(\varphi)$  aus  $L^2(M(G))$  mit

genau einer Funktion  $\tilde{\Psi}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  aus  $L^2(\times_{r=1}^n M(G_r))$  identifizieren durch

$$\Psi(\varphi) = \tilde{\Psi}(\varphi \cap G_1, \dots, \varphi \cap G_n) \quad (\varphi \in M(G))$$

Hat  $\tilde{\Psi}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  die Form  $\tilde{\Psi}(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = \prod_{r=1}^n \Psi_r(\varphi_r)$  mit

$$\Psi_r \in L^2(M(G_r))$$

so ist  $\Psi$  mit dem Tensorprodukt (siehe 2. Kapitel) von  $\bigotimes_{r=1}^n \Psi_r$  identifizierbar, d.h.,

es ist

$$\Psi = \bigotimes_{r=1}^n \Psi_r.$$

In diesem Sinne erhalten wir die Darstellung von  $L^2(M(G))$  als Tensorprodukt der Räume  $L^2(M(G_r))$ . Wir schreiben  $L^2(M(G)) = \bigotimes_{r=1}^n L^2(M(G_r))$ .

Diese Zerlegungseigenschaft ist nun im Fall kontinuierlicher realer Räume, in denen die Teilchen angesiedelt sind, charakteristisch für den Bosonenraum. Die Modellierung von Signalen als Bosonensysteme realisiert also nicht die Postulate (P2) und (P3), sondern die Postulate (P2) und (P3) erzwingen es sogar, Signale mathematisch mit Bosonensystemen zu identifizieren.

Repräsentiert nun  $\Psi$  ein Signal und ist  $\Psi$  in der Form  $\Psi = \bigotimes_{j=1}^n \Psi_j$  darstellbar mit  $\Psi_j = \exp(0)$  für  $j \neq r$ , so verhält sich das Signal in den Bereichen  $G_j$  mit  $j \neq r$  wie das „leere Signal“. Wir können deshalb in diesem Fall  $\Psi$  und  $\Psi_r$  identifizieren, und bezeichnen das entsprechende Signal als ein **Signal vom Typ r**.

Ein in einem kohärenten Zustand befindliches Signal zerfällt nun in „unabhängige“ Teilsignale der verschiedenen Typen und diese sind selbst wieder kohärent.

Bei Superposition solcher Signale  $\Psi = \sum_k c_k |\exp(f_k)\rangle$ , geht diese Eigenschaft

i.d.R. verloren und es entsteht ein reiner Zustand  $\Psi$  eines allgemeinen Signals, das wir als ein Ensemble voneinander abhängiger Teilsignale der verschiedenen Typen auffassen können.

Abschließend sei noch erwähnt, dass bei der Zerlegung des gesamten Volumens  $G$  in für unterschiedliche Aufgaben zuständige Areale nicht nur die Teile des Hirns erfasst werden, die direkt für die Verarbeitung von den Sinnesorganen erzeugter Signale zuständig sind, sondern alle Areale – also z.B. auch motorische Zentren bzw. deren Teile. Ein von den Sinnesorganen erzeugtes Signal ist dann dadurch gekennzeichnet, dass es betreffend diese Teile nur das leere Signal enthält.

Singer /S1/ folgend sind diese nicht direkt mit den Sinnesorganen in Verbindung stehenden Areale ebenfalls Bestandteile des komplexen Prozesses der

Selbstorganisation mit Rückkopplung zu den sensorischen Zentren. Schließlich enthalten auch diese Teile des Hirns Informationen (und verarbeiten diese), die ebenfalls durch Populationen angeregter Neurone kodiert sind und deshalb im Sinne des Modells als Signale beschrieben werden können.

## 5. Das Gedächtnis

Ein Signal stellt ein den beschränkten Möglichkeiten unserer Sinnesorgane entsprechendes Abbild der äußeren Realität bzw. eines Ausschnittes davon dar. Zum Thema Wahrnehmung eines Signals sei an das Postulat (P6) und das entsprechende Zitat von Singer erinnert:

**(P6)** Das Gehirn bildet ständig Hypothesen darüber, wie die Welt sein sollte und vergleicht die Signale von den Sinnesorganen mit diesen Hypothesen.

**Zitat /S1/ (S. 108/109-Abschnitt: *Wahrnehmung ist Überprüfung von Hypothesen*):**  
*Das Gehirn ist nie ruhig, sondern generiert ständig hochkomplexe Erregungsmuster ... Diese Muster hätten dann de facto die Funktion intern generierter Hypothesen und formten eintreffende Sinnessignale gemäß ihren Erwartungen so um, dass diese ihrerseits Muster aufgeprägt bekommen, in denen sich der Grad der Übereinstimmung zwischen Erwartung und tatsächlich Vorhandenem ausdrückt.*

*(S. 72) Das „Vorwissen“ über die jeweils wahrscheinlichsten Zuordnungen müsste ... gespeichert sein.*

Diese Vorstellung entspricht einer Grundidee des im nächsten Abschnitt betrachteten Modells betreffend die Erkennung von Signalen. Dabei gehen wir der Einfachheit halber davon aus, dass die Hypothese selbst ein Signal darstellt, das aus dem Gedächtnis „abgerufen“ wird, wobei es für unsere Zwecke zunächst unwichtig ist, zwischen Kurzzeit- und Langzeit- bzw. episodischem Gedächtnis zu unterscheiden. Der augenblickliche Zustand des Gedächtnisses sollte also durch ein System von Signalen repräsentiert werden.

Bei der Beschreibung des Gedächtnisses im Rahmen eines klassischen Modells und im Prinzip auch bei der Modellierung des Hirns als ein Quantencomputer würde man nun davon ausgehen, dass im Hirn ein spezielles Areal existiert, wo das Gedächtnis seinen Sitz hat. Nach Singer existiert jedoch ein solches Areal nicht, es gibt sogar nicht einmal Neurone, die entsprechend spezialisiert sind .

Bei unserer Vorgehensweise betreffend die Modellierung des Gedächtnisses folgen wir nun zunächst der im 3. Kapitel erläuterten Idee des Übergangs von einzelnen

Teilchen, beschrieben mittels des Hilbertraumes  $L^2(G)$  zu Teilchensystemen,

beschrieben mittels des Fockraumes  $L^2(M(G))$  zum „Ein-Teilchenraum“  $L^2(G)$ . Wir betrachten also zunächst den **Raum aller endlichen Mengen von Signalen, d.h.**, den symmetrischen Fockraum zum Raum der Signale  $L^2(M(G))$ , den wir mit  $L^2(M(M(G)))$  bezeichnen. Ein Element  $W(\Phi)$  von  $L^2(M(M(G)))$  ist dann eine Funktion einer endlichen Teilmenge  $\Phi$  von  $M(G)$ , deren Elemente  $\varphi \in \Phi$  ihrerseits endliche Teilmengen von  $G$  sind, d.h.,  $\varphi$  ist ein Element von  $M(G)$ .

Ist die Funktion  $W$  normiert, so repräsentiert  $W$  einen reinen Zustand eines Systems von Signalen. Die Ortsverteilung dazu ist diesmal ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $M(M(G))$ . Diese Verteilung beschreibt also ein zufälliges System von Punktesystemen in  $G$ .

Vergisst man die Zuordnung der einzelnen Punkte zu den unterschiedlichen Systemen von Punkten, d.h., man betrachtet die Gesamtheit aller in den unterschiedlichen Systemen vorkommenden Punkte, so erhält man wieder ein zufälliges Punktesystem in  $G$ , das wir als die Gesamtheit aller angeregten Neuronen auffassen wollen, welche die im Gedächtnis gespeicherten Signale „tragen“.

Dabei ist zu bemerken, das diese Neurone nicht von einzelne Signale tragenden Neurone abgegrenzt sind. Jedes Neuron kann mal als Träger des Gedächtnisses und schon kurze Zeit danach als Träger eines von den Sinnesorganen kommenden Signals mitwirken. Wie auch Singer feststellt, wechseln die Neurone häufig ihre Bestimmung in diesem Sinn. Gerade dieser Wechsel, d.h., ein Austausch ihrer Träger zwischen zwei Signalen wird im 6. Kapitel ein wichtiger Teil der Modellierung der Erkennung von Signalen sein.

Die allgemeine Struktur des Gedächtnisses durch den Hilbertraum  $L^2(M(M(G)))$  zu beschreiben, bedeutet nun nicht, dass das Gedächtnis einfach ein Reservoir von Signalen ist, die einmal dort abgelagert, ihre Individualität behalten. Das im 3. Kapitel erläuterte Prinzip des symmetrischen Fockraumes hat nämlich zur Folge, dass die betrachteten Systeme von Signalen eine neue Qualität darstellen. Sie

sind gewissermaßen etwas anderes, als „die Summe ihrer Teile“ (dass sie „mehr“ als das sind, wie Stapp es formuliert, ist nicht klar). Dieser Sachverhalt drückt sich insbesondere mathematisch darin aus, dass das „Hinzufügen“ eines Signals gemäß einer in späteren Untersuchungen betrachteten Prozedur eine Veränderung des gesamten Inhalts des Gedächtnisses bewirkt, was einer Vorstellung vom „Lernen“ entspricht.

Es ist nun bekannt, dass Signale oder Teile davon nur dann erkannt bzw. wahrgenommen werden können, wenn sie gewisse **Elementarsignale** enthalten, die bestimmte Merkmale repräsentieren (siehe Postulat (P4)). Singer redet in diesem Zusammenhang von *Merkmalsrepräsentationen durch Ensembles*. Nur Signale, die sich aus solchen Elementarsignalen in gewisser Weise zusammensetzen, sollten also im Gedächtnis gespeichert sein.

Bezieht man noch ein, dass es keinen Sinn macht „leere Signale“ im Gedächtnis zu speichern, so wird deutlich, dass der Hilbertraum  $L^2(M(M(G)))$ , der ja Konfigurationen aller möglichen Signale repräsentiert, zu groß ist, um als Modell für die Struktur des Gedächtnisses bzw. dessen Inhalt zu dienen. Es soll deshalb ein kleinerer Raum, d.h. mathematisch, ein Unterraum von  $L^2(M(M(G)))$  konstruiert werden, wie folgt:

Zu jedem  $r = 1, \dots, n$  wählen wir ein Orthogonalsystem  $f_1^r, \dots, f_{N_r}^r$  in  $L^2(G_r)$  und eine reelle Zahl  $\lambda_r > 0$ .

Durch  $|j, r\rangle := \left| \exp(\lambda_r f_j^r) - \exp(0) \right\rangle$  für  $j = 1, \dots, N_r$  erhält man dann ein Orthonormalsystem  $(|j, r\rangle)_{j=1}^{N_r}$  im Hilbertraum  $L^2(M(G_r))$ , der die Signale vom Typ  $r$  beschreibt. Den davon aufgespannten Unterraum von  $L^2(M(G_r))$ ,

bestehend aus allen Linearkombinationen der Gestalt  $\sum_{j=1}^{N_r} c_j |j, r\rangle$  bezeichnen wir

mit  $H_r$ .

Die  $|j, r\rangle$  für  $j = 1, \dots, N_r$  mögen nun die **Elementarsignale vom Typ  $r$**  repräsentieren. Der Raum  $H_r$  beschreibt dann Superpositionen der Elementarsignale vom diesem Typ.

Zur Beschreibung in unserem Sinne **regulärerer Signale** verwenden wir dann den

durch den Raum  $H_{sig} := \bigotimes_{r=1}^n H_r$  definierten Unterraum von  $L^2(M(G))$ .

Reguläre Signale lassen sich damit zerlegen in Signale der verschiedenen Typen, die ihrerseits Überlagerungen von Elementarsignalen sind.

Zur Beschreibung des Gedächtnisses verwenden wir schließlich den symmetrischen Fockraum zu dem Hilbertraum  $H_{sig}$ , den wir mit  $H_{mem}$  (*mem wie memory*) bezeichnen wollen und der ein Unterraum von  $L^2(M(M(G)))$  ist. Das Gedächtnis besteht damit aus Populationen von regulären Signalen in dem beschriebenen Sinn.

Die Beschreibung der Elementarsignale als kohärente Zustände ohne Vakuumanteil ist nicht willkürlich. Neben mathematischen Vorzügen sind es vor allem inhaltliche Gründe, die diese Wahl motivieren. Dazu einige Erläuterungen, ohne zu sehr ins Detail zu gehen:

- Die in den Zellen des Auges oder anderer Sinnesorgane erzeugten Quanten breiten sich im Körper aus und erreichen dabei insbesondere auch die für die Verarbeitung der Signale zuständigen Areale. Es ist anzunehmen, dass die entsprechende Dynamik wechselwirkungsfrei ist und damit durch zweite Quantisierungen unitärer Operatoren beschrieben wird. Die Klasse der kohärenten Zustände bleibt gegenüber solchen Zeitentwicklungen invariant.
- Bei dieser Ausbreitung der Quantensysteme im Körper kommt es aus verschiedenen Gründen zu „Verlusten“, d.h., einzelne Quanten „gehen verloren“ bzw. erreichen nicht das zuständige Areal. Ein kohärenter Zustand  $|\exp(\lambda f)\rangle$  ist



gegenüber solchen Verlusten unempfindlich, d.h., der Typ bleibt erhalten, nur die Intensität  $\lambda^2$ , d.h., der Erwartungswert der Anzahl der Quanten im System, verringert sich. Den Vorgang mathematisch präziser beschreibend kann man beweisen, dass die kohärenten Zustände praktisch die einzige Klasse bilden, die diese „Unempfindlichkeitseigenschaft“ besitzt, d.h., andere Zustände könnten sich „auf dem Weg“ vom Auge zum entsprechenden Hirnareal so stark verändern, dass die Beziehung zum beobachteten Objekt völlig verloren geht.

- Weiter lässt die Vielzahl nicht direkt in Verbindung stehender Zellen im Auge eine Analogie zur Emission von Quanten beim Zerfall radioaktiver Materie erwarten. In /F,F1/ wird gezeigt, dass in diesem Fall die zunächst zu verschiedenen Zeitpunkten erzeugten Quanten bei „Zusammenfassung“ zu einem kohärenten Zustand werden. Es baut sich also über einen sicher sehr kurzen Zeitraum sukzessive eine Population angeregter Neurone auf, die das Signal tragen.

- Die einzelnen Merkmale werden schließlich durch große Populationen gleichzeitig aktiver Neuronen repräsentiert, d.h., die Intensität  $\lambda^2$  des Zustandes  $|\exp(\lambda f)\rangle$  ist sehr hoch. In diesem Fall ist der „Vakuanteil“ aber sehr gering, d.h., es besteht mathematisch kein wesentlicher Unterschied mehr zwischen diesem Zustand und dem gleichen Typ von Zustand aber ohne Vakuanteil  $|\exp(\lambda f) - \exp(0)\rangle$ , was auf die von uns gewählte Beschreibung der elementaren Merkmale, d.h., der Elementarsignale führt.

## 6. Der Prozess der Signalerkennung

Entsprechend dem Postulat (P1) wird in diesem Kapitel die Erkennung eines Signals als ein schrittweise ablaufender Prozess modelliert. Dabei ist zunächst das Postulat (P6) zu berücksichtigen:

**(P6)** Das Gehirn bildet ständig Hypothesen darüber, wie die Welt sein sollte und vergleicht die Signale von den Sinnesorganen mit diesen Hypothesen.

*Zitat /S1/ (S. 108/109-Abschnitt: **Wahrnehmung ist Überprüfung von Hypothesen**):  
Das Gehirn ist nie ruhig, sondern generiert ständig hochkomplexe Erregungsmuster ... Diese Muster hätten dann de facto die Funktion intern generierter Hypothesen und formten eintreffende Sinnessignale gemäß ihren Erwartungen so um, dass diese ihrerseits Muster aufgeprägt bekommen, in denen sich der Grad der Übereinstimmung zwischen Erwartung und tatsächlich Vorhandenem ausdrückt.*

*(S. 72) Das „Vorwissen“ über die jeweils wahrscheinlichsten Zuordnungen müsste ... gespeichert sein*

Daraus kann man zunächst schließen, dass objektive Erkennung nicht möglich ist. Wahrnehmung ist insbesondere abhängig von im Gedächtnis in Gestalt hochkomplexer Signale gespeicherten Erfahrungen und Wissen etc..

Weiter wird deutlich, dass der Vorgang der Wahrnehmung sich auf zwei Aktivitäten des Hirns gründet:

1. Das Bilden von *Hypothesen darüber, wie die Welt sein sollte*.
2. Das Umformen der eintreffenden Signale entsprechend diesen Hypothesen.

Im folgenden sollen diese Aktivitäten mathematisch modelliert werden. Dabei gehen wir davon aus, dass die *Hypothesen* in Gestalt der *hochkomplexen Erregungsmuster* selbst die Struktur von Signalen haben. Quelle dieser generierten Signale ist nun das Gedächtnis, beschrieben mittels des Hilbertraumes  $H_{mem}$ , der Konfigurationen von regulären Signalen repräsentiert, welche ihrerseits durch den Hilbertraum  $H_{sig}$  beschrieben werden. Es sollten also nur reguläre Signale generiert werden können.

Entsprechend den Ausführungen im 3. Kapitel muss deshalb der Vorgang des Generierens dieser Signale durch eine **Isometrie** von  $H_{mem}$  in  $H_{mem} \otimes H_{sig}$

beschrieben werden. Ein Zustand  $\rho$  auf  $H_{mem}$ , der das Gedächtnis beschreibt, wird dabei durch den Vorgang des Generierens eines Signals in einen Zustand auf  $D \rho D^*$  auf  $H_{mem} \otimes H_{sig}$  überführt, der die Beschaffenheit von Gedächtnis und generiertem Signal gemeinsam beschreibt.

In /FF1/ und /FF2/ wurde eine geeignete Isometrie, dort mit  $D$  bezeichnet, betrachtet. Da die explizite Darstellung der Isometrie an dieser Stelle zusätzlichen mathematisch-formalen Aufwand in nicht unerheblichen Umfang erfordern würde, soll darauf verzichtet und stattdessen auf die genannten Arbeiten verwiesen werden.

Erwähnt werden soll jedoch, dass der durch diese Isometrie beschriebene Vorgang sich in gewissem Sinne als Entnahme eines Signals aus dem Gedächtnis und demzufolge die Anwendung des zu  $D$  adjungierten Operators  $D^*$ , als Abbildung von  $H_{mem} \otimes H_{sig}$  in  $H_{mem}$ , sich als Hinzufügung eines Signals zum Gedächtnis deuten lässt.

Als Resultate der vorangehend nur inhaltlich beschriebenen Erzeugung eines Signals aus dem Gedächtnis und der *Vorverarbeitung eines von den Sinnesorganen erzeugten Signals* (siehe /S1/) haben wir nun zwei Signale in dem für die Erkennung des Eingangssignals zuständigen Gebiet des Hirns  $G$  vorliegen. Die allgemeine Struktur jedes dieser beiden Signale wird dann durch den Hilbertraum  $L^2(M(G))$  und das aus diesen beiden Signalen bestehende Gesamtsystem entsprechend durch  $L^2(M(G)) \otimes L^2(M(G))$  charakterisiert. Nach den Regeln der Quantenmechanik (siehe 3. Kapitel) wird dann die unter 2. oben erwähnte Umformung des eintreffenden Signals, als eine Wechselwirkung zwischen beiden Signalen, durch einen unitären Operator  $V$  auf diesem Tensorprodukt beschrieben.

Vorverarbeitung inklusive Transport des Eingangssignals und Erzeugung des Signals aus dem Gedächtnis sind nun gewissermaßen globale Aktivitäten des Hirns. *Ab dann aber dominiert das Prinzip der Parallelverarbeitung. Die Verarbeitungswege verzweigen sich auf zahlreiche parallel angeordnete Areale*, schreibt Singer in /S1/. Das drückt sich im Postulat (P5) aus:

(P5) Beim Erkennungsprozess werden die den einzelnen Arealen entsprechenden Teile des Signals parallel nach einheitlichem Prinzip verarbeitet.

Mathematisch bedeutet das für den unitären Operator  $V$ , dass er sich in der Form

$$V = \bigotimes_{r=1}^n V_{G_r}$$

darstellen lassen muss, wann immer  $G_1, \dots, G_r$  eine Zerlegung von  $G$

in für verschiedene Aufgaben zuständige Areale darstellt. Die Beschaffenheit solcher Areale hängt aber vom Individuum ab und ist darüber hinaus nicht für alle Zeit fixiert, d.h., das einzelne Areal kann wachsen oder schrumpfen (siehe z.B. /N/, /Ste/), bei Schädigung eines Areals können benachbarte Bereiche dessen Aufgaben übernehmen (siehe z.B. /B/). Die durch den Operator  $V$  zu beschreibende Aktivität des Hirns hängt nun aber nicht von der Spezifik des jeweiligen Areals ab. Singer schreibt dazu in /S1/:

*Das bestechende an dieser funktionalen Umverteilung ist, dass die interne Struktur der verschiedenen Hirnareale praktisch identisch ist, obgleich sie doch offensichtlich ganz verschiedene Funktionen wahrnehmen. Nur der Spezialist ist in der Lage, ein histologisches Präparat, das von der Sehrinde entnommen wurde, von einem zu unterscheiden, das von der Sprachregion stammt. Es gibt feine Unterschiede, aber die generelle Organisation, die Verschaltung ist nahezu identisch. Dies legt die Schlussfolgerung nahe, dass in der Hirnrinde ein Verarbeitungsalgorithmus realisiert wird, der zur Behandlung unterschiedlichster Inhalte taugt.*

Das bedeutet mathematisch, dass die obige Darstellung von  $V$  als Tensorprodukt für jede (messbare) Zerlegung  $G_1, \dots, G_r$  von  $G$  möglich sein muss. Das wiederum ist

eine starke Einschränkung betreffend den möglichen Typ von  $V$ . Man kann nämlich beweisen (siehe /F,G/), dass nur die aus der Quantenoptik bekannten sogenannten **beam splitter** diese Eigenschaft besitzen, d.h.,  $V$  ist charakterisiert durch 4 komplexe Funktionen

$$b_1, b_2, b_3, b_4 : G \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit den Eigenschaften}$$

$$|b_1|^2 + |b_2|^2 \equiv 1 \equiv |b_3|^2 + |b_4|^2 \quad \text{und} \quad b_1 \bar{b}_3 + b_2 \bar{b}_4 \equiv 0, \quad \text{so dass für alle}$$

kohärenten Funktionen gilt:

$$V \exp(f) \otimes \exp(g) = \exp(b_1 f + b_2 g) \otimes \exp(b_3 f + b_4 g)$$

Aus dem letzten Zitat von Singer ergibt sich ferner, dass die durch  $V$  beschriebene Aktivität räumlich homogen sein muss, d.h. mathematisch, dass die Funktionen

$b_1, b_2, b_3, b_4$  konstant sein sollten. Schließlich ergibt sich aus Symmetriegründen, dass im wesentlichen nur der sogenannte **symmetrische beam splitter** als einziger Kandidat für die Wahl des unitären Operators  $V$  übrig bleibt. In diesem Fall hat man zu wählen  $b_4 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$  und  $b_1 = b_2 = b_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Es ist wichtig zu erwähnen, dass dieser Operator  $V$  nicht nur unitär, sondern auch selbstadjungiert ist. Er kann also sowohl zur Beschreibung einer Veränderung des aus den beiden Signalen bestehenden Systems benutzt werden, wie auch eine Messung an diesem System repräsentieren. Weiter folgt aus diesen beiden Eigenschaften, dass die zweimalige Anwendung von  $V$  den Einheitsoperator ergibt,  $V V = I$ . Das bedeutet, dass die durch Anwendung von  $V$  bewirkte Änderung des Systems durch nochmalige Anwendung von  $V$  wieder kompensiert wird. Die wiederholten Anwendungen in jedem der einzelnen Arbeitstakte des Erkennungsprozesses bewirken damit eine Oszillation, die in /S1/ als Bestandteil der Arbeitsweise des Hirns erwähnt wird.

Schließlich folgt aus den Betrachtungen in /FFL1/ und /FFL2/, dass der Operator  $V$  in gewissem Sinne einen Austausch zwischen den angeregten Neuronen beschreibt, die das Eingangssignal bzw. das erzeugte Signal „tragen“. Auch Singer weist in /S1/ darauf hin, dass ein Austausch dieser Art stattfindet (*die Neurone wechseln ihre Bestimmung*).

Die Erkennung eines Signals oder Teilen davon soll nun, entsprechend Postulat (P8), mit einem Ereignis identifiziert werden, das im Ergebnis der durch den Operator  $V$  beschriebenen Wechselwirkung zwischen dem von den Sinnesorganen kommenden Signal und dem vom Hirn selbst erzeugten Signal mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit eintreten bzw. nicht eintreten kann. Dieser Vorgang wird dann wiederholt realisiert, was zu einer steten Verbesserung des Ergebnisses führen soll (nach Singer ist Signalerkennung ein *selbstorganisierender Prozess*).

Entsprechend Postulat (P9) soll das Eintreten dieses Ereignisses durch einen Verlust an angeregten Neuronen gekennzeichnet sein, d.h., es kommt zu einer Entladung eines Teiles der die beiden Signale tragenden Neurone. Es sei in diesem Zusammenhang daran erinnert, dass unser Postulat (P9) einem der „Basispostulate“ von Singer /S1/ entspricht: *Die Basispostulate sind: ... Fünftens, erfolgreiches Gruppieren von*

*Zellen zu Ensembles drückt sich in der Synchronisation der Entladungstätigkeit der respektiven Neurone aus. ... Eine der zur Zeit intensiv beforschten Hypothesen geht davon aus, dass diese dynamischen Bindungen über die zeitliche Synchronisation von Nervenzellentladungen realisiert werden. Zellen, die sich zu einem Ensemble zusammengeschlossen haben, entladen im gleichen Takt.*

Im folgenden soll zunächst die Grundidee der Modellierung des Prozesses der Signalerkennung an einem Beispiel erläutert werden. Dazu betrachten wir den Fall, dass sich das Eingangssignal und das aus dem Gedächtnis entnommene Signal beide in einem kohärenten Zustand befinden.

$|\exp(g)\rangle$  - Eingangssignal,  $|\exp(f)\rangle$  - erzeugtes Signal

Beide Signale sollen zu Beginn unabhängig sein, d.h., der gemeinsame Zustand ist durch das Tensorprodukt  $|\exp(f)\rangle \otimes |\exp(g)\rangle$  gegeben. Die Wechselwirkung zwischen den beiden Signalen gemäß des unitären Operators  $V$  führt auf

$$V(|\exp(f)\rangle \otimes |\exp(g)\rangle) = \left| \exp\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(f+g)\right) \right\rangle \otimes \left| \exp\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(f-g)\right) \right\rangle,$$

d.h., es liegen wieder zwei unabhängige Signale vor, die sich in kohärenten Zuständen befinden. Im Fall  $f = g$ , d.h., Eingangssignal und erzeugtes Signal waren identisch,

und nur in diesem Fall ist  $\left| \exp\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(f-g)\right) \right\rangle = |\exp(0)\rangle$ , d.h., das zweite Signal befindet sich mit Wahrscheinlichkeit 1 im Vakuumzustand, es gibt überhaupt keine angeregten Neurone mehr, die dieses Signal tragen.

Auch im Fall  $f \neq g$  kann nun mit Wahrscheinlichkeit  $e^{-\frac{1}{2}\|f-g\|^2}$  der Vakuumzustand entstehen, wie man durch Messung zumindest theoretisch prüfen kann. Wir wollen dieses Ereignis als **vollständige Signalerkennung** interpretieren.

Es liegt dann der Zustand  $\left| \exp\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(f+g)\right) \right\rangle \otimes |\exp(0)\rangle$  vor. Wiederholt man die Anwendung des Operators  $V$  erhält man den Zustand

$$\begin{aligned}
 & V \left( \left| \exp\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(f + g)\right) \right\rangle \otimes \left| \exp(0) \right\rangle \right) \\
 &= \left| \exp\left(\frac{1}{2}(f + g)\right) \right\rangle \otimes \left| \exp\left(\frac{1}{2}(f + g)\right) \right\rangle
 \end{aligned}$$

Man erhält also zwei Signale, die sich beide im gleichen Zustand befinden. Das zweite Signal repräsentiert dann das *gemäß den Erwartungen umgeformte* Signal von den Sinnesorganen. Das erste Signal, ehemals aus dem Gedächtnis stammend, enthält die Information über das Ergebnis des Vorgangs. Seine Rückführung in das Gedächtnis kann mittels des Operators  $D^*$  erfolgen, was eine entsprechende Veränderung des Gedächtnisses bewirkt und als Wahrnehmung interpretiert werden könnte.

Ermittelt man mit einem geeigneten Messverfahren die Anzahl der beide Signale tragenden angeregten Neurone zunächst vor der beschriebenen Prozedur, und dann nach der Prozedur, so ergibt sich eine zufällige Differenz mit dem Erwartungswert  $\frac{1}{2} \|f - g\|^2$ . Man hat also einen Verlust von angeregten Neuronen, was dem Postulat (P9) entspricht.

Mit Wahrscheinlichkeit  $1 - e^{-\frac{1}{2} \|f - g\|^2}$  tritt nun das oben „vollständige Erkennung“ genannte Ereignis nicht ein. In diesem Fall reproduziert die nachfolgende Anwendung von  $V$  den ursprünglichen Zustand, weil wegen  $V V = I$  gilt

$$V(V(|\exp(f)\rangle \otimes |\exp(g)\rangle)) = |\exp(f)\rangle \otimes |\exp(g)\rangle$$

Der nächste Versuch zur Erkennung kann also mit der gleichen Ausgangslage starten.

Die am Beispiel beschriebene Prozedur der vollständigen Erkennung kann im allgemeinen Fall mathematisch folgendermaßen beschrieben werden.

Ausgangspunkt ist ein Zustand  $\rho$  auf dem Hilbertraum

$L^2(M(G)) \otimes L^2(M(G))$ , der ein aus dem Gedächtnis generiertes Signal und ein von Sinnesorganen erzeugtes Signal gemeinsam beschreibt. Wir bezeichnen mit

$H$  den Unterraum von  $L^2(M(G)) \otimes L^2(M(G))$ , der durch alle Linearkombinationen von Tensorprodukten zweier gleicher kohärenter Funktionen,

d.h.,  $\exp(f) \otimes \exp(f)$ , erzeugt wird.  $\text{Pr}_H$  bezeichnet den Projektor auf  $H$ .

Wegen

$$V^{-1}(\exp(f) \otimes \exp(f)) = V(\exp(f) \otimes \exp(f)) = \exp(\sqrt{2}f) \otimes \exp(0)$$

ist  $H$  gleichzeitig Bild und Urbild von  $L^2(M(G)) \otimes \{\exp(0)\}$  woraus sich die in /FF2/ verwendete Darstellung von  $\text{Pr}_H$  ergibt.

Es ist dann  $p_1(\rho) := \text{tr}(\rho \text{Pr}_H)$  die Wahrscheinlichkeit, dass vollständige Erkennung (in einem Schritt) stattfindet.

Ist diese Wahrscheinlichkeit positiv, d.h.,  $p_1(\rho) > 0$ , so wird der ursprüngliche

Zustand  $\rho$  in den Zustand  $K^1(\rho) := \frac{1}{p_1(\rho)} \text{Pr}_H \rho \text{Pr}_H$  überführt.

Schließlich sei  $\bar{N}$  der selbstadjungierte Operator auf  $L^2(M(G)) \otimes L^2(M(G))$ , der die Messung der Gesamtzahl beide Signale tragender Neurone repräsentiert. Dann ist der Erwartungswert des mit der Erkennung verbundenen Verlustes an angeregten Neuronen gegeben durch :

$$E_1^{\text{Verlust}}(\rho) := \text{tr}(\rho(\bar{N} - \text{Pr}_H \bar{N} \text{Pr}_H)).$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass keine vollständige Erkennung stattfindet ist dann gleich

$p_0(\rho) := 1 - p_1(\rho)$ . Wir setzen in diesem Fall  $K^0(\rho) := \rho$ , d.h., der Zustand  $\rho$  soll unverändert bleiben, und entsprechend kein Verlust an angeregten Neuronen auftreten.

Das betrachtete mathematische Modell der „vollständigen Erkennung“ ist jedoch zu grob, um die wahren Gegebenheiten beschreiben zu können. Das betrifft speziell die Unterscheidung von nur zwei Ereignissen, vollständige Erkennung oder nichts passiert, was bedeutet, dass entweder alle das 2. Signal nach Anwendung von  $V$  tragende Neurone „feuern“, oder kein Neuron tut das. In der Realität ist der Regelfall, dass nur in einem Teil der Areale Entladungen der Neurone zu messen sind, gewissermaßen **partiell Erkennung** stattfindet. Auf Grund der oben erwähnten Darstellung des Operators  $V$  als Tensorprodukt ist jedoch durch relativ einfache Modifizierung des betrachteten Modells diese partielle Erkennung zu modellieren.



Die Grundidee besteht darin, die oben beschriebene Prozedur in den verschiedenen Bereichen parallel ablaufen zu lassen, was ja der von Singer erwähnten parallelen Verarbeitung von Signalen entspricht.

Dazu fixieren wir wieder eine Zerlegung  $G_1, \dots, G_n$  in jeweils für verschiedene Aspekte zuständige Areale. Der theoretische Idealfall wäre die gewissermaßen maximale Zerlegung, d.h., eine weitere Aufteilung eines der Areale würde zu nicht funktionsfähigen Teilen führen.

Nun betrachten wir statt des Unterraumes  $H$  von  $L^2(M(G)) \otimes L^2(M(G))$  für jeden Index  $r$  den Unterraum  $H_r$  von  $L^2(M(G_r)) \otimes L^2(M(G_r))$ , der durch alle Linearkombinationen von Tensorprodukten zweier gleicher kohärenter Funktionen aus  $L^2(M(G_r))$  erzeugt wird. Mit  $\text{Pr}_{H_r}$  bezeichnen wir wieder den entsprechenden Projektor und definieren nun lineare Abbildungen vom Raum aller Spurooperatoren  $\rho$  auf  $L^2(M(G_r)) \otimes L^2(M(G_r))$  in diesen Raum durch:

$$\hat{K}_1^r(\rho) := \tilde{K}_1^r(\rho) := \text{Pr}_{H_r} \rho \text{Pr}_{H_r} ; \quad \hat{K}_0^r(\rho) := \rho ;$$

$$\tilde{K}_0^r(\rho) := (I_{L^2(M(G_r))} - \text{Pr}_{H_r}) \rho (I_{L^2(M(G_r))} - \text{Pr}_{H_r})$$

Wobei  $I_{L^2(M(G_r))}$  den Einheitsoperator auf  $L^2(M(G_r))$  bezeichnet.

Für jede Folge  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ , die nur die Werte 0 oder 1 annehmen kann, sind nun

durch  $\hat{K}_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n} := \bigotimes_{r=1}^n \hat{K}_{\varepsilon_r}^r$  und  $\tilde{K}_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n} := \bigotimes_{r=1}^n \tilde{K}_{\varepsilon_r}^r$  lineare Abbildungen vom

Raum aller Spurooperatoren auf  $L^2(M(G)) \otimes L^2(M(G))$  in diesen Raum definiert.

Die Folge  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  soll kennzeichnen, in welchem der Areale Erkennung stattgefunden hat,  $\varepsilon_r = 1$  bedeutet „Erkennung im r-ten Areal“,  $\varepsilon_r = 0$  bedeutet „keine Erkennung im r-ten Areal“.

Sei nun wieder  $\rho$  ein Zustand auf dem Hilbertraum  $L^2(M(G)) \otimes L^2(M(G))$ , der ein aus dem Gedächtnis generiertes Signal und ein von den Sinnesorganen erzeugtes Signal gemeinsam beschreibt.

Durch  $p_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}(\rho) := \text{tr}(\tilde{K}_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}(\rho))$  ist dann die Wahrscheinlichkeit definiert, dass partiell Erkennung in den durch die Folge  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  gekennzeichneten Arealen wie oben beschrieben stattgefunden hat.

Ist diese Wahrscheinlichkeit größer als Null, so wird dabei der ursprüngliche Zustand  $\rho$  in den Zustand  $K_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}(\rho) := (\text{tr}(\hat{K}_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}(\rho)))^{-1} \hat{K}_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}(\rho)$  überführt.

Zu dem eingangs betrachteten groben Modell bestehen dann die Beziehungen

$p_{1, \dots, 1}(\rho) = p_1(\rho)$  und  $K_{1, \dots, 1}(\rho) = K_1(\rho)$ , d.h., das bei dem groben Modell „vollständige Erkennung“ genannte Ereignis entspricht im feineren Modell dem Ereignis, dass in jedem Areal Erkennung stattgefunden hat.

Ebenso gilt  $K_{0, \dots, 0}(\rho) = K_0(\rho)$ , d.h., keine Erkennung im Sinne des groben Modells entspricht im feinen Modell dem Ereignis, dass in keinem Areal Erkennung stattgefunden hat. Allerdings gilt nicht  $p_{0, \dots, 0}(\rho) = p_0(\rho)$ , da sich der Fall, dass nicht vollständige Erkennung stattfindet im feineren Modell auf die Alternativen, dass mindestens in einem Areal keine Erkennung stattfindet, verteilt.

Betrachtet man diesmal im feineren Modell den eingangs diskutierten Spezialfall, dass  $\rho$  ein reiner Zustand der Gestalt  $|\exp(f)\rangle \otimes |\exp(g)\rangle$  ist, so kann man das Ergebnis der Erkennungsprozedur und die entsprechende Wahrscheinlichkeit wieder explizit angeben. Wir erhalten folgende Darstellungen:

$$p_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}(\rho) = \prod_{r=1}^n (e^{-\frac{\varepsilon_r}{2} \|(f-g)\chi_{G_r}\|^2} (1 - (1 - \varepsilon_r) e^{-\frac{\varepsilon_r}{2} \|(f-g)\chi_{G_r}\|^2}))$$

und

$$K_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}(\rho) = \bigotimes_{r=1}^n \rho_r, \text{ wobei die } \rho_r \text{ reine Zustände folgender Gestalt sind:}$$

$$\left| \exp(f\chi_{G_r}) \right\rangle \otimes \left| \exp(g\chi_{G_r}) \right\rangle, \text{ falls } \varepsilon_r = 0$$

$$\left| \exp\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(f+g)\chi_{G_r}\right) \right\rangle \otimes \left| \exp\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(f+g)\chi_{G_r}\right) \right\rangle, \text{ falls } \varepsilon_r = 1$$

Die Messung der Anzahl der beide Signale tragenden Neurone in jedem einzelnen Areal ergibt diesmal eine Folge von Zufallsgrößen, d.h., für jedes Areal mit der Nummer  $r$  erhalten wir einen zufälligen Wert  $\eta_r$ , der die Differenz der Messwerte, also den Verlust an angeregten Neuronen beschreibt. Der Erwartungswert von  $\eta_r$  ist dann im Fall  $\varepsilon_r = 1$ , d.h., „Erkennung im r-ten Areal“, gegeben durch  $\frac{1}{2} \left\| (f-g)\chi_{G_r} \right\|^2$ . Weiter ist  $\eta_r = 0$  im Fall  $\varepsilon_r = 0$ , d.h., „keine Erkennung im r-ten Areal“.

Sei  $\bar{N}_r$  der selbstadjungierte Operator auf  $L^2(M(G)) \otimes L^2(M(G))$ , der die Messung der Gesamtzahl beide Signale tragender Neurone, die sich innerhalb von  $G_r$  befinden, repräsentiert. Dann ist im Fall eines allgemeinen Zustandes  $\rho$  der Erwartungswert des mit Erkennung verbundenen Verlustes an angeregten Neuronen im Areal  $G_r$  gegeben durch

$$E_r^{\text{Verlust}}(\rho) := \text{tr}((\rho - \hat{K}_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}) \bar{N}_r)$$

Der beschriebene Vorgang der Erkennung wird nun wiederholt durchgeführt. Dabei erhalten wir, startend mit einem Zustand  $\rho$ , der Eingangssignal und vom Gedächtnis erzeugtes Signal gemeinsam beschreibt, Schritt für Schritt eine Folge  $\rho^1$ ,  $\rho^2$ , ...,  $\rho^m$ , ... von Zuständen, die durch sukzessive Umformung des Anfangszustandes nach der beschriebenen Prozedur entsteht. Wird zumindest theoretisch bei jedem Schritt mit einer geeigneten Messung überprüft, in welchem der Areale Erkennung stattgefunden hat, so lassen sich die Ergebnisse beschreiben durch eine Folge zufälliger n-Tupel

$$\zeta^1 = [\zeta_1^1, \dots, \zeta_n^1], \zeta^2 = [\zeta_1^2, \dots, \zeta_n^2], \dots, \zeta^m = [\zeta_1^m, \dots, \zeta_n^m], \dots$$

Dabei bedeutet das Ereignis „ $\zeta_k^m = 1$ “, dass im m-ten Schritt Erkennung im k-ten Areal registriert wurde.

Setzen wir formal  $\zeta^0 := [0, \dots, 0]$  und  $\rho^0 := \rho$ , so können wir die Erzeugung der Folge von Zuständen rekursiv beschreiben durch  $\rho^{m+1} = K_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}(\rho^m)$  unter der Bedingung „ $\zeta^m = [\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n]$ “. Unter dieser Bedingung ist dann die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „ $\zeta^{m+1} = [e_1, \dots, e_n]$ “ gegeben durch  $p_{e_1, \dots, e_n}(K_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}(\rho^m))$ .

Damit lässt sich die Verteilung des zufälligen Prozesses  $\zeta^1$ ,  $\zeta^2$ , ...,  $\zeta^m$ , ... bestimmen.

Der Prozess  $\zeta^1$ ,  $\zeta^2$ , ...,  $\zeta^m$ , ... ist wachsend, d.h., wenn einmal  $\zeta_k^m = 1$  gewesen ist, also im m-ten Schritt im k-ten Areal Erkennung stattgefunden hat, so ist auch  $\zeta_k^s = 1$  für jedes  $s > m$ . Schritt für Schritt kommen Areale hinzu, in denen die Erkennung erfolgt ist. Die Umformung des Zustandes wird dabei weiterentwickelt bis sie zum Abschluss kommt. Danach ändern sich sowohl die Werte des Prozesses wie auch die Folge der Zustände nicht mehr, Wahrnehmung bzw. Überführung des Endzustandes als Ergebnis des Prozesses der Erkennung in das Gedächtnis kann erfolgen.

**Der damit konstruierte Prozess ist also in einem hohen Maße selbstorganisierend und spiegelt die Postulate (P5), (P7), (P8) und (P9) wider.**

**Erinnert wird weiter an die Feststellung, dass der Operator  $V$ , der die im Verlaufe des Prozesses auftretende Interaktion zwischen den Signalen beschreibt, bereits durch (P5) eindeutig bestimmt ist. Insgesamt ist das Modell im wesentlichen durch die Postulate (P1) bis (P9) festgelegt und spiegelt diese natürlich auch wider.**

Was das bereits in der Einleitung dieser Arbeit erwähnte Bindungsproblem, d.h., die Frage nach der Koordination der in den verschiedenen Arealen parallel ablaufenden Prozesse, angeht, so liefert der betrachtete Prozess ebenfalls eine Lösung. Alle Teilprozesse tragen gemeinsam zur Erreichung eines maximalen Ergebnisses des gesamten Prozesses der Signalerkennung bei. Zu erwähnen ist in diesem Zusammenhang, dass diese „Koordination“ sich über die Vielzahl der Arbeitstakte im gesamten Verlauf des Erkennungsprozesses hinzieht und nicht bedeutet, dass gleichzeitig, d.h., in einem Arbeitstakt in allen Arealen eine Aktivität, messbar durch „feuern“ angeregter Neurone, stattfindet. Auch ist festzustellen, dass der modellierte Prozess nicht in jedem Fall auf nur ein bestimmtes Ergebnis führt. Das kann mit zur Erklärung der bekannten Erscheinung beitragen, dass z.B. gleiche Bilder als unterschiedliche Objekte wahrgenommen werden.

Was das Postulat (P10) angeht, werden wir zur Illustration der Arbeitsweise des Modells ein einfaches Beispiel betrachten. Zunächst soll jedoch noch auf eine bereits in /F,F1/ betrachtete Modifikation des Modells eingegangen werden:

Wie im 5. Kapitel erläutert, können nur reguläre Signale, beschrieben durch den Hilbertraum  $H_{sig}$  wahrgenommen werden. Zustände  $\rho$  auf

$H_{sig} \otimes L^2(M(G))$ , die ein aus dem Gedächtnis erzeugtes reguläres Signal und ein von den Sinnesorganen kommendes allgemeines Signal beschreiben, sollten deshalb durch den Vorgang der Erkennung wieder in ein solches Signal überführt werden, d.h., es sollte  $K_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}(\rho)$  stets wieder ein Zustand auf  $H_{sig} \otimes L^2(M(G))$  sein. Das ist jedoch mathematisch ganz allgemein nicht gesichert.

Modifiziert man nun das oben betrachtete Modell dadurch, dass bei der Definition der Hilberträume  $H_r$  die kohärenten Funktionen durch die Elementarsignale ersetzt werden und nachfolgend formal der gleiche Ansatz für eine Abbildung  $K_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}(\rho)$  gemacht wird, so ist diese Forderung erfüllt.

Es wird nun in /F,F1/ (siehe auch /F,F,F,O/) in Form eines Konvergenzsatzes bewiesen, dass beide Modelle identisch sind, wenn die Intensität der im Gedächtnis

gespeicherten Signale „genügend hoch“ ist, d.h., sehr viele angeregte Neurone ein Signal tragen., was der Realität entspricht.

Der Grund, warum überhaupt zwei Modelle betrachtet werden, die doch unter den für die Anwendung relevanten Bedingungen identisch sind, besteht darin, dass das hier betrachtete Modell die „Postulate“ von Singer betreffend die parallele Verarbeitung der Signale in den Arealen und den Verlust von angeregten Neuronen als Begleiterscheinung der Erkennung widerspiegelt, während das modifizierte Modell den erwähnten mathematischen Mangel des ersten Modells nicht hat, und zudem mathematisch leichter handhabbar ist. Auf eine explizite Darstellung des modifizierten Modells soll hier verzichtet werden. Es sei diesbezüglich auf [F,F1] verwiesen.

Zur Erläuterung der prinzipiellen Möglichkeiten des Modells, reale Effekte beschreiben zu können, betrachten wir nun folgendes einfache **Beispiel**:

Die Buchstaben  $a$  und  $b$  können akustisch als Laute oder visuell im Schriftbild wahrgenommen werden. Für die akustische Wahrnehmung seien ein Areal  $G_1$  und für die visuelle Wahrnehmung ein Areal  $G_2$  zuständig. Jedes der Areale enthält dann zwei Elementarsignale. Mit den entsprechenden Bezeichnungen aus dem 4. Kapitel haben wir also zwei Hilberträume  $H_1 \subseteq L^2(M(G_1))$  und  $H_2 \subseteq L^2(M(G_2))$ , wobei  $H_1$  durch die Elementarsignale  $|1,1\rangle$  und  $|2,1\rangle$  und  $H_2$  durch die Elementarsignale  $|1,2\rangle$  und  $|2,2\rangle$  erzeugt werden.

Den Buchstaben  $a$  als Laut möge  $|1,1\rangle$  repräsentieren und dessen Schriftbild sei durch  $|1,2\rangle$  repräsentiert. Analog wird mit  $b$  verfahren.

$$\begin{array}{ccccc}
 & \textit{akustisch} & & \textit{visuell} & \\
 H_1 \ni |1,1\rangle & \Leftrightarrow & a & \Leftrightarrow & |1,2\rangle \in H_2 \\
 H_1 \ni |2,1\rangle & \Leftrightarrow & b & \Leftrightarrow & |2,2\rangle \in H_2
 \end{array}$$

Das aus dem Gedächtnis erzeugte Signal möge nun durch einen reinen Zustand der Gestalt  $\psi^{mem} = \frac{1}{\sqrt{2}} |1,1\rangle \otimes |1,2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |2,1\rangle \otimes |2,2\rangle \in H_1 \otimes H_2 = H_{sig}$

beschrieben sein. Dieser Zustand repräsentiert das vollständige Wissen über den Zusammenhang von Lauten und Schriftbild beider Buchstaben.

Statt der gleichmäßigen Bewichtung durch den Faktor  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  hätte man zu diesem Zweck auch einen Zustand der Gestalt

$$c_1 |1,1\rangle \otimes |1,2\rangle + c_2 |2,1\rangle \otimes |2,2\rangle \in H_1 \otimes H_2 \quad \text{mit} \quad |c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$$

verwenden können. Den Fall  $|c_1|^2 > |c_2|^2$  könnte man dann im gewissen Sinne als Bevorzugung des Buchstabens  $a$  interpretieren, etwa weil er häufiger vorkommt oder im Alphabet am Anfang steht. Der Extremfall  $|c_1|^2 = 1$  und damit  $c_2 = 0$  würde dann bedeuten, dass nur betreffend den Buchstaben  $a$  der Zusammenhang zwischen Laut und Schriftbild bekannt ist.

Wir wollen bei der obigen Darstellung  $\psi^{mem}$  bleiben. Weiter betrachten wir ein von den Sinnesorganen (hier nur Ohr und Auge) kommendes Signal, das durch einen reinen Zustand der Gestalt  $\psi^{sig} = |1,1\rangle \otimes \exp(0) \in H_1 \otimes H_2 = H_{sig}$  beschrieben wird. Dieses Signal enthält nur die akustische Darstellung des Buchstabens  $a$  und keinerlei visuelle Information, was durch den Vakuumzustand  $\exp(0)$ , d.h., das leere Signal repräsentiert wird.

Wir wollen nun annehmen, dass zu Beginn des Erkennungsprozesses Eingangssignal und aus dem Gedächtnis erzeugtes Signal unabhängig sind, was vernünftig erscheint.

Der Anfangszustand  $\rho$  auf  $H_{sig} \otimes H_{sig}$  ist dann wieder ein reiner Zustand zu  $\psi^{mem} \otimes \psi^{sig}$ .

Das mathematische Modell liefert nun :

$$(1) \quad p_{0,0}(\rho) = p_{1,0}(\rho) = \frac{1}{2} \quad \text{und damit} \quad p_{0,1}(\rho) = p_{1,1}(\rho) = 0$$

d.h. speziell, Erkennung kann nur im 1. Areal stattfinden, was vernünftig erscheint, da im 2. Areal nichts ankommt. Weiter ist die zufällige Anzahl der Schritte bis zur erstmaligen Erkennung geometrisch mit dem Parameter  $\frac{1}{2}$  verteilt. Im Mittel sind also nur zwei Schritte bis zur vollständigen Erkennung notwendig, was natürlich an der starken Vereinfachung des Modells mit nur zwei primitiven Arealen liegt.

(2)  $K_{1,0}(\rho)$  ist ein reiner Zustand auf  $H_{sig} \otimes H_{sig}$  zu  $(|1,1\rangle \otimes |1,2\rangle) \otimes \psi^{sig}$

Die Person wird sich also dem Eingangssignal entsprechend des Lautes  $a$  bewusst. Gleichzeitig erscheint aber gewissermaßen „vor ihrem inneren Auge“ das Schriftbild des Buchstabens  $a$ .

(3) Obwohl nur im 1. Areal ein Signal ankommt, „feuern die Neurone“ in beiden Arealen. Ist z.B. für jedes der 4 betrachteten Elementarsignale der Erwartungswert der Anzahl der sie tragenden Neurone gleich einem Wert  $\lambda^2$  (der recht groß ist !), so berechnet sich auf Grundlage des Modells der Verlust an angeregten Neuronen zu insgesamt  $\frac{3}{2} \lambda^2$ . Der Gesamtverlust ist also höher als der Zuwachs an angeregten Neuronen durch das Eingangssignal, welcher beim Beispiel  $\lambda^2$  beträgt.

Mathematisch besteht die Ursache für die Effekte unter (2) und (3) in der starken Verschränkung des aus dem Gedächtnis stammenden Signals, das ja das perfekte Wissen über den Zusammenhang zwischen Laut und Schriftbild repräsentiert.

Würde sich statt dessen dieser Zustand in zwei unabhängige Teile zerlegen lassen, so wäre die Person zwar in der Lage sowohl Laut als auch Schriftbild wahrzunehmen, jedoch ohne sich eines Zusammenhangs bewusst zu werden. Speziell würden die unter (2) und (3) geschilderten Effekte nicht eintreten.

Würde man deshalb bei einem durchschnittlich gebildeten Erwachsenen, von dem man die Kenntnis des obigen Zusammenhanges zwischen Laut und Schrift annehmen kann, per Messung der Anzahl der angeregten Neuronen in beiden Arealen feststellen, dass als Reaktionen auf den Laut  $a$  zwar im 1. Areal ein Verlust an angeregten



Neuronen, nicht jedoch im 2. Areal eintritt, könnte daraus auf eine Schädigung der Hirnfunktionen geschlossen werden.

Die anhand des einfachen (mathematischen) Beispiels geschilderten Möglichkeiten, das Modell zur Beschreibung realer Prozesse im Hirn zu verwenden, lässt sich durch viele andere Situationen illustrieren. Eine davon soll nachfolgend anschaulich geschildert werden.

Das Areal  $G_1$  möge diesmal für die Temperaturempfindung der rechten Hand zuständig sein. Das Areal  $G_2$ , eventuell ersetzt durch eine ganze Gruppe von Arealen, möge ein motorisches Zentrum repräsentieren, das speziell die Bewegung der rechten Hand bzw. des ganzen Armes koordiniert.

Im Areal  $G_2$  werden zwar ebenfalls Signale verarbeitet, allerdings besteht hier die Besonderheit, dass dieses Areal nicht direkt mit Sinnesorganen in Verbindung steht. Das wird im Modell dadurch ausgedrückt, dass die eintreffenden Signale stets betreffend das Areal  $G_2$  das „leere Signal“, mathematisch durch den Vakuumzustand  $\exp(0)$  repräsentiert, enthalten.

Wie im betrachteten einfachen Beispiel kann deshalb in  $G_2$  niemals Erkennung im Sinne des Modells stattfinden. Allerdings sichert die Verschränkung des Zustandes, der das Signal im Areal  $G_2$  beschreibt, mit Zuständen direkt mit den Sinnesorganen in Verbindung stehender Areale, bei unserem Beispiel also speziell Areal  $G_1$ , dass Erkennung in den letzteren Arealen auch messbare Aktivität (Verlust angeregter Neuronen) in  $G_2$  zu Folge hat (siehe Punkt (3)), was seinerseits motorische Aktivitäten nach sich zieht.

So wird die Versuchsperson schnell ihre Hand zurück ziehen, wenn sie über ein im Areal  $G_1$  erkanntes Signal feststellt, dass beispielsweise die Ofenplatte heiß ist.

Das betrachtete Modell spiegelt einerseits den von Singer genannten Effekt wider, dass von den Sinnesorganen eintreffende Signale gemäß den „Erwartungen“, also

dem aus dem Gedächtnis erzeugten Signal umgeformt werden. Nach den betrachteten Beispielen erscheint es jedoch wichtiger zu sein, dass auch das aus dem Gedächtnis erzeugte Signal durch das eintreffende Signal umgeformt wird, wie das Modell ebenfalls zeigt. Das aus dem Gedächtnis erzeugte Signal ist nämlich komplexer Natur und repräsentiert das Wissen über alle Zusammenhänge, insbesondere also auch über Zusammenhänge zwischen sensorischen und motorischen Zentren. Das von den Sinnesorganen kommende Signal enthält jedoch nur sensorische Informationen. Die durch seine Erkennung bewirkte Veränderung des aus dem Gedächtnis erzeugten Signals, z.B., auch seiner motorische Zentren betreffende Teile, machen erst Reaktionen auf das eintreffende Signal möglich.

Damit, speziell auch durch die unter (2) und (3) beschriebenen Effekte beim Beispiel, wird illustriert, wie sich das Postulat (P10) in der Arbeitsweise des Modells widerspiegelt.

## 7. Einfache Beispiele

Die Tatsache, dass, um mit Singer zu sprechen, *die Quantentheorie der Primärerfahrung widerspricht* und damit schwer zu veranschaulichen ist, mag auch die praktische bzw. rechnerische Handhabung von Quantenmodellen äußerst schwer, wenn nicht gar unmöglich, erscheinen lassen. Die großen Erfolge bei der Anwendung in der Physik und darüber hinaus in vielen Bereichen moderner Technik zeigen jedoch, dass dies nicht der Fall ist. Quantenmodelle sind oft rechnerisch einfacher handhabbar als entsprechende Modelle der klassischen Stochastik. Darüber hinaus können selbst schwierige theoretische Probleme der klassischen Stochastik nicht selten durch Einsatz von Methoden der Quantentheorie überraschend einfach gelöst werden, wie in der Vorlesung /F2/ beispielhaft erläutert wird.

In diesem Kapitel soll an Beispielen demonstriert werden, dass das im 6. Kapitel entwickelte Modell der Signalerkennung konkrete Rechnungen mit vergleichsweise elementaren mathematischen Mitteln erlaubt und damit auch eine realistische Grundlage für verschiedene Simulationen des Erkennungsprozesses mit allgemein verfügbarer PC-Technik besteht.

Weiter verdeutlichen die betrachteten Beispiele, dass das Ergebnis des Prozesses der Signalerkennung wesentlich durch das vom Hirn generierte Signal, welches ja die „Erwartung“ nach Postulat (P6) repräsentiert, bestimmt wird.

Der Einfachheit halber betrachten wir dazu den Fall von nur 2 Arealen. Es sei jedoch bemerkt, dass die Betrachtung einer beliebigen Anzahl von Arealen kein prinzipielles Problem darstellen würde und sich dabei die meisten Formeln kaum verändern würden.

Für geometrische Merkmale seien ein Areal  $G_1$  und für Bewegungen ein Areal  $G_2$  zuständig. Jedes der Areale möge nur zwei Elementarsignale enthalten.

Mit den entsprechenden Bezeichnungen aus dem 5. Kapitel haben wir also zwei Hilberträume  $H_1 \subseteq L^2(M(G_1))$  und  $H_2 \subseteq L^2(M(G_2))$ , wobei  $H_1$  durch

die Elementarsignale  $|1,1\rangle$  und  $|2,1\rangle$  und  $H_2$  durch die Elementarsignale  $|1,2\rangle$  und  $|2,2\rangle$  erzeugt werden sollen.

Wir betrachten folgende Deutungen:

$|1,1\rangle$  - Objekt ist rund = Kugel

$|2,1\rangle$  - Objekt ist eckig = Würfel (z.B. Bauklötzchen für Kinder)

$|1,2\rangle$  - Objekt ist in Bewegung

$|2,2\rangle$  - Objekt liegt ruhig

Der Erwartungswert der das jeweilige Elementarsignal tragenden Neurone möge einheitlich  $\lambda^2$  sein (z.B.  $\lambda = 100$ , d.h.,  $\lambda^2 = 10.000$ , jedenfalls „groß“).

Ein reiner Zustand aus dem Gedächtnis (lt. Singer vom Hirn generiert und die Erwartungen repräsentierend) hat dann die Form

$$(1) \quad \psi^{mem} := \sum_{k,r=1}^2 a_{k,r} |k,1\rangle \otimes |r,2\rangle \quad \text{mit}$$

$$(2) \quad \sum_{k,r=1}^2 |a_{k,r}|^2 = 1$$

Er ist also Überlagerung „scharfer“ Signale der Form  $|k,1\rangle \otimes |r,2\rangle$ , welche mit

Wahrscheinlichkeit  $|a_{k,r}|^2$  vorkommen.

Wir interpretieren:

(3)  $|1,1\rangle \otimes |1,2\rangle$  - rollende bzw. in Bewegung befindliche Kugel

$|1,1\rangle \otimes |2,2\rangle$  - ruhig liegende Kugel

$|1,2\rangle \otimes |1,2\rangle$  - in Bewegung befindlicher Würfel / Bauklötzchen

$|1,2\rangle \otimes |2,2\rangle$  - ruhig liegender Würfel

Wir betrachten zunächst ein von den Sinnesorganen (hier Augen) kommendes Signal gleichen Typs

$$(4) \quad \psi^{in} := \sum_{k,r=1}^2 b_{k,r} |k,1\rangle \otimes |r,2\rangle$$

Ausgangspunkt für den schrittweise ablaufenden Erkennungsprozess ist dann der gemeinsame Zustand  $\rho$  von generiertem und von den Augen kommenden Signal, als reiner Zustand gegeben durch

$$(5) \quad \psi^{mem} \otimes \psi^{in} \cong \sum_{i,j=1}^2 \sum_{k,r=1}^2 a_{i,j} b_{k,r} |i,1\rangle \otimes |k,1\rangle \otimes |j,2\rangle \otimes |r,2\rangle$$

Der Erwartungswert der Anzahl der beide Signale tragenden Neurone ist  $4\lambda^2$ .

Im ersten Arbeitstakt des Erkennungsprozesses können folgende Fälle auftreten:

**1. Fall: In keinem der beiden Areale findet Erkennung statt.**

**Die Wahrscheinlichkeit dafür ist gegeben durch**

$$(6) \quad p_{0,0}(\rho) := \sum_{i \neq k} \sum_{j \neq r} |a_{i,j}|^2 |b_{k,r}|^2$$

Der reine Zustand  $\rho$ , gegeben durch (5) ändert sich in diesem Fall nicht und es kommt auch nicht zu einem Verlust an angeregten Neurone.

**2. Fall : Im 1. Areal findet Erkennung statt, aber nicht im 2. Areal.**

**Die Wahrscheinlichkeit dafür ist gegeben durch**

$$(7) \quad p_{1,0}(\rho) := \sum_i \sum_{j \neq r} |a_{i,j}|^2 |b_{i,r}|^2$$

Dabei entsteht der reine Zustand  $K_{1,0}(\rho)$  gegeben durch

$$(8) \quad K_{1,0}(\rho) \approx \left( \sum_i \sum_{j,r} |a_{i,j}|^2 |b_{i,r}|^2 \right)^{-1}$$

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j,r} a_{i,j} b_{i,r} |i,1\rangle \otimes |i,1\rangle \otimes |j,2\rangle \otimes |r,2\rangle$$

Der Erwartungswert des Verlustes an angeregten Neuronen ist

$$(9) \quad E_{1,0}^{Verlust}(\rho) := 4\lambda^2 \sum_{i \neq k} \sum_{j,r} |a_{i,j}|^2 |b_{k,r}|^2$$

**3. Fall: Im 2. Areal findet Erkennung statt, aber nicht im 1. Areal.**

Die Wahrscheinlichkeit dafür ist gegeben durch

$$(10) \quad p_{0,1}(\rho) := \sum_j \sum_{i \neq k} |a_{i,j}|^2 |b_{k,j}|^2$$

Dabei entsteht der reine Zustand  $K_{0,1}(\rho)$  gegeben durch

$$(11) \quad K_{0,1}(\rho) \approx \left( \sum_j \sum_{i,k} |a_{i,j}|^2 |b_{k,j}|^2 \right)^{-1} \\ \times \sum_j \sum_{i,k} a_{i,j} b_{k,j} |i,1\rangle \otimes |k,1\rangle \otimes |j,2\rangle \otimes |j,2\rangle$$

Der Erwartungswertes des Verlustes an angeregten Neuronen ist

$$(12) \quad E_{0,1}^{Verlust}(\rho) := 4\lambda^2 \sum_{i,k} \sum_{j \neq r} |a_{i,j}|^2 |b_{k,r}|^2$$

**4. Fall: In beiden Arealen findet Erkennung statt.**

Die Wahrscheinlichkeit dafür ist gegeben durch

$$(13) \quad p_{1,1}(\rho) := \sum_i \sum_j |a_{i,j}|^2 |b_{i,j}|^2$$

Dabei entsteht der reine Zustand  $K_{1,1}(\rho)$  gegeben durch

$$(14) \quad K_{1,1}(\rho) \approx \left( \sum_i \sum_j |a_{i,j}|^2 |b_{i,j}|^2 \right)^{-1} \\ \times \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 a_{i,j} b_{i,j} |i,1\rangle \otimes |i,1\rangle \otimes |j,2\rangle \otimes |j,2\rangle$$

Der Erwartungswert des Verlustes an angeregten Neuronen ist

$$(15) \quad E_{1,1}^{Verlust}(\rho) := 4\lambda^2 \sum_{i \neq k} \sum_{j \neq r} |a_{i,j}|^2 |b_{k,r}|^2$$

Abhängig vom Ergebnis des 1. Arbeitstaktes, gegeben in Gestalt einer der betrachteten 4 Fälle läuft nun der 2. Arbeitstakt ab. Dieser wird nach der gleichen Weise wie der 1. Arbeitstakt beschrieben, wobei lediglich der Anfangszustand  $\rho$  durch einen der Zustände  $K_{l,m}(\rho)$  mit  $l, m = 0$  oder  $1$  entsprechend dem Ergebnis des ersten Arbeitstaktes zu ersetzen ist.

Speziell prüft man nun leicht die Gültigkeit von

$$(16) \quad p_{0,1}(K_{0,1}(\rho)) + p_{1,1}(K_{0,1}(\rho)) \\ = p_{1,0}(K_{1,0}(\rho)) + p_{1,1}(K_{1,0}(\rho)) = p_{1,1}(K_{1,1}(\rho)) = 1$$

$$(17) \quad E_{1,0}^{Verlust}(K_{1,0}(\rho)) = E_{0,1}^{Verlust}(K_{0,1}(\rho)) = E_{1,1}^{Verlust}(K_{1,1}(\rho)) = 0$$

Wenn also in einem Areal einmal Erkennung eingetreten ist, wird mit Sicherheit, d.h., mit Wahrscheinlichkeit gleich 1, auch im nachfolgenden Schritt in diesem Areal Erkennung eintreten und dabei kein weiterer Verlust an angeregten Neuronen zu verzeichnen sein, falls nicht zusätzlich im anderen Areal erstmalig Erkennung eintritt.

Insbesondere repräsentiert der Zustand  $K_{1,1}(\rho)$  das Endergebnis des Erkennungsprozesses (Erreichbarkeit, d.h.,  $p_{1,1}(\rho) > 0$  vorausgesetzt). Nach dessen Erreichung erfolgt in den nachfolgenden Arbeitstakten keine Veränderung des Zustandes mehr und auch kein weiterer Verlust an angeregten Neuronen – der Erkennungsprozess ist gewissermaßen beendet.

Aus (7), (9), (10), (12), (13), (15) sowie  $\sum_{k,r=1}^2 |a_{k,r}|^2 = 1 = \sum_{k,r=1}^2 |b_{k,r}|^2$  folgt nun

$$(18) \quad E_{1,0}^{Verlust}(\rho) = 4\lambda^2 (1 - p_{1,0}(\rho) - p_{1,1}(\rho))$$

$$(19) \quad E_{0,1}^{Verlust}(\rho) = 4\lambda^2 (1 - p_{0,1}(\rho) - p_{1,1}(\rho))$$

$$(20) \quad E_{1,1}^{Verlust}(\rho) = 4\lambda^2 (1 - p_{1,0}(\rho) - p_{0,1}(\rho))$$

### Interpretation:

Erkennung „unerwarteter“ Signale ist durch einen höheren Verlust an angeregten Neuronen gekennzeichnet als bei Signalen  $\psi^{in}$ , die der durch  $\psi^{mem}$  repräsentierten Erwartung weitgehend entsprechen.

Nachfolgend wollen wir verschiedene Spezialfälle des aus dem Gedächtnis generierten Signals und des vom Auge kommenden Signals betrachten, um davon abhängig verschieden Effekte zu demonstrieren.

#### 1. Beispiel:

$$(21) \quad \psi^{mem} = \frac{1}{2} \sum_{k,r=1}^2 |k,1\rangle \otimes |r,2\rangle, \text{ d.h., } a_{k,r} = \frac{1}{2} \text{ für alle } k,r=1,2$$

$$(22) \quad \psi^{in} = |1,1\rangle \otimes |1,2\rangle, \text{ d.h., } b_{1,1} = 1 \text{ und } b_{k,r} = 0 \text{ für alle anderen Paare } k,r$$

Das „scharfe“ Signal  $\psi^{in}$  entspricht einer rollenden Kugel, während (21) ausdrückt, dass keine besonderen Erwartungen bestehen (ein Säugling ohne jegliche Erfahrungen?).

Wir erhalten durch Spezialisierung von (6), (7), (10) und (13) folgende Wahrscheinlichkeiten:

$$(23) \quad p_{0,0}(\rho) = p_{1,0}(\rho) = p_{0,1}(\rho) = p_{1,1}(\rho) = \frac{1}{4}$$

Aus (18), (19) und (20) folgt deshalb

$$(24) \quad E_{1,0}^{Verlust}(\rho) = E_{0,1}^{Verlust}(\rho) = E_{1,1}^{Verlust}(\rho) = 2\lambda^2$$

Schließlich erhalten wir durch Spezialisierung von (14) das Endergebnis der Erkennung in Gestalt von



$$(25) \quad K_{1,1}(\rho) \approx |1,1\rangle \otimes |1,1\rangle \otimes |1,2\rangle \otimes |1,2\rangle \cong (|1,1\rangle \otimes |1,2\rangle) \otimes (|1,1\rangle \otimes |1,2\rangle)$$

Das scharfe Eingangssignal  $|1,1\rangle \otimes |1,2\rangle$  wird also perfekt erkannt.

## 2. Beispiel:

Man vertausche im 1. Beispiel die Rollen der beiden Signale, d.h., wir betrachten

$$\psi^{mem} = |1,1\rangle \otimes |1,2\rangle, \quad \psi^{in} = \frac{1}{2} \sum_{k,r=1}^2 |k,1\rangle \otimes |r,2\rangle$$

Die Erfahrung ist hier völlig einseitig nur auf das Sehen rollender Kugeln gerichtet, während das vom Auge kommende Signal völlig unscharf ist.

Wir erhalten die gleichen Formeln wie beim 1. Beispiel. Speziell Formel (25) ist dann so zu interpretieren, dass wahrgenommen wird, was man sehen will (bzw. nur noch wahrnehmen kann).

## 3. Beispiel:

$$\psi^{mem} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1,1\rangle \otimes |1,2\rangle + |2,1\rangle \otimes |2,2\rangle)$$

$$\psi^{in} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1,1\rangle \otimes |1,2\rangle + |2,1\rangle \otimes |1,2\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1,1\rangle + |2,1\rangle) \otimes |1,2\rangle$$

### Motivation des Ansatzes für $\psi^{mem}$ :

Für ein Kleinkind sollte ein rollendes Bauklötzchen oder eine ruhig liegende Kugel relativ selten zu beobachten sein. In den die Erwartungen (basierend auf Erfahrungen) repräsentierenden  $\psi^{mem}$  sollten also die entsprechenden Signale nur mit geringer Wahrscheinlichkeit enthalten sein.

Der Einfachheit halber betrachten wir den Grenzfall, dass diese Wahrscheinlichkeiten gleich Null sind. Die Erfahrung ist also recht einseitig auf das Sehen rollender Kugeln oder ruhig liegender Bauklötzchen ausgerichtet.

### Interpretation von $\psi^{in}$ :

Gewissermaßen aus den „Augenwinkeln heraus“ wurde ein sich bewegendes Objekt vom Auge aufgenommen. Wegen mangelnder Schärfe dieser Art des Sehens fehlt hinsichtlich der geometrischen Merkmale jegliche Unterscheidungsmöglichkeit, d.h., Kugel und Würfel können jeweils mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{2}$  vorkommen.

Es liegen nun folgende Spezialisierungen vor:

$$a_{1,1} = a_{2,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad a_{1,2} = a_{2,1} = 0$$

$$b_{1,1} = b_{2,1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad b_{1,2} = b_{2,2} = 0$$

Wir erhalten damit durch Spezialisierung von (6), (7), (10) und (13) die gleichen Wahrscheinlichkeiten wie beim 1. und 2. Beispiel :

$$p_{0,0}(\rho) = p_{1,0}(\rho) = p_{0,1}(\rho) = p_{1,1}(\rho) = \frac{1}{4}$$

Aus (18), (19) und (20) folgt deshalb wie beim 1. und 2. Beispiel

$$E_{1,0}^{Verlust}(\rho) = E_{0,1}^{Verlust}(\rho) = E_{1,1}^{Verlust}(\rho) = 2\lambda^2$$

Schließlich erhalten wir durch Spezialisierung von (14) auch das Endergebnis der Erkennung wie beim 1. und 2. Beispiel

$$K_{1,1}(\rho) \approx |1,1\rangle \otimes |1,1\rangle \otimes |1,2\rangle \otimes |1,2\rangle \cong (|1,1\rangle \otimes |1,2\rangle) \otimes (|1,1\rangle \otimes |1,2\rangle)$$

Obwohl im Gegensatz zum 2. Beispiel prinzipiell auch ein Würfel/Bauklötzchen wahrgenommen werden kann, determiniert allein schon die in  $\psi^{mem}$  verankerte feste Beziehung zwischen der Geometrie und der Bewegung, dass wiederum nur eine sich bewegende Kugel wahrgenommen wird, obwohl das Signal  $\psi^{in}$  auch die Erkennung eines sich bewegenden Würfels ermöglichen würde.

Verwendung von  $\psi^{mem}$  aus dem 1. Beispiel würde dafür die Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{2}$  ergeben.

Die vom Hirn erzeugten Signale  $\psi^{mem}$  sollten komplexer Natur sein, d.h. insbesondere, dass in allen Arealen angeregte Neurone existieren, die dieses Signal mit tragen. Andererseits kann  $\psi^{mem}$  nicht ein beliebiges Element des Fockraumes sein, sondern muss ein „reguläres Signal“ sein, d.h., aus der endlichen Anzahl der möglichen Elementarsignale zusammengesetzt sein. Wahrgenommen werden können dann auch nur solche Arten von Signalen.

Die eingehenden Signale  $\psi^{in}$  können jedoch prinzipiell beliebiger Natur sein. Enthalten sie keinen Anteil von Elementarsignalen (d.h. mathematisch, sie sind orthogonal zum endlich-dimensionalen Raum der regulären Signale) erfolgt keinerlei Erkennung, es wäre so, als wäre das Signal „leer“.

Der Regelfall sollte nun sein, dass die zur Verarbeitung kommenden Eingangssignale zumindest partiell leer sind, z.B., rein visueller Natur sind oder nur einen Laut repräsentieren. (Ursachen wie Vorverarbeitung eingehender Signale, Konzentration auf bestimmte Aspekte der Information aus der Umwelt etc. sollen hier nicht diskutiert werden und sind auch nicht im betrachteten Modell der Signalerkennung erfasst.)

Um einige Effekte der Erkennung solcherart unvollständiger Signale zu illustrieren betrachten wir folgend neben dem Signal  $\psi^{mem}$  in der allgemeinen Form (1) ein Eingangssignal der Gestalt

$$(26) \quad \psi^{in} := \left( \sum_{k=1}^2 b_k |k,1\rangle \right) \otimes \exp(0) = b_1 |1,1\rangle \otimes \exp(0) + b_2 |2,1\rangle \otimes \exp(0)$$

$$(27) \quad |b_1|^2 + |b_2|^2 = 1$$

Dieses Signal repräsentiert zur Erfahrung passende Informationen betreffend die geometrische Form aber keine verwertbare Information betreffs Bewegungsart.

Der Anfangszustand  $\rho$  als reiner Zustand ist dann gegeben durch

$$(28) \quad \psi^{mem} \otimes \psi^{in} \cong \sum_{i,j=1}^2 \sum_{k=1}^2 a_{i,j} b_k |i,1\rangle \otimes |k,1\rangle \otimes |j,2\rangle \otimes \exp(0)$$

Der Erwartungswert der Anzahl der diesen Zustand tragenden Neurone aus dem 1.

Areal ist  $2\lambda^2$  und im 2. Areal  $\lambda^2$ , also insgesamt  $3\lambda^2$ .

**Im 2. Areal kann dann niemals Erkennung stattfinden**, d.h., wir haben stets

$$(29) \quad p_{0,1}(\rho) = p_{1,1} = 0$$

Damit verbleiben nur zwei Fälle für den ersten Schritt des Erkennungsprozesses:

### 1. Fall: In keinem Areal findet Erkennung statt

Die Wahrscheinlichkeit dafür ist gegeben durch

$$(30) \quad p_{0,0}(\rho) = |a_{2,1}|^2 |b_1|^2 + |a_{1,1}|^2 |b_2|^2 + |a_{1,2}|^2 |b_2|^2 + |a_{2,2}|^2 |b_1|^2$$

Der reine Zustand  $\rho$ , gegeben durch (28) ändert sich in diesem Fall nicht und es kommt auch nicht zu einem Verlust an angeregten Neuronen.

Der nächste Schritt des Erkennungsprozesses kann mit gleicher Ausgangslage stattfinden.

### 2. Fall : Im 1. Areal findet Erkennung statt

Die Wahrscheinlichkeit dafür ist gegeben durch

$$p_{1,0}(\rho) = 1 - p_{0,0}(\rho)$$

In diesem Fall geht der Zustand  $\rho$  über in den reinen Zustand  $K_{1,0}(\rho)$

$$(31) \quad K_{1,0}(\rho) \approx \frac{1}{p_{1,0}(\rho)} \sum_j \sum_k a_{k,j} b_k |k,1\rangle \otimes |k,1\rangle \otimes |j,2\rangle \otimes \exp(0)$$

Das ist zugleich der Endzustand des Erkennungsprozesses.

### 4.Beispiel :

Wir betrachten  $\psi^{mem}$  wie im 1. Beispiel

$$(32) \quad \psi^{mem} = \frac{1}{2} \sum_{k,r=1}^2 |k,1\rangle \otimes |r,2\rangle, \text{ d.h., } a_{k,r} = \frac{1}{2} \text{ f\u00fcr alle } k,r=1,2$$

Weiter w\u00e4hlen wir

$$(33) \quad \psi^{in} = |1,1\rangle \otimes \exp(0), \text{ d.h., } b_1 = 1, b_2 = 0$$

d.h., es kommt nur das Kugelmerkmal vor.

Dann erhalten wir aus (30) und (31)

$$p_{1,0}(\rho) = p_{0,0}(\rho) = \frac{1}{2}$$

Weiter ergibt (32)

$$K_{1,0}(\rho) \approx (|1,1\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} (|1,2\rangle + |2,2\rangle)) \otimes (|1,1\rangle \otimes \exp(0))$$

Die Kugel wird also erkannt und betreffs Bewegung wird nur „Unwissenheit“ registriert., repr\u00e4sentiert durch das Signal  $\frac{1}{\sqrt{2}} (|1,2\rangle + |2,2\rangle)$

Weiter ist der Erwartungswert des Verlustes an angeregten Neuronen im 1. Areal  $\lambda^2$ . Im 2. Areal tritt kein Verlust auf.

## 5. Beispiel

Wir betrachten nun  $\psi^{in}$  unter (33) und das Signal  $\psi^{mem}$  aus dem 3. Beispiel

$$\psi^{mem} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1,1\rangle \otimes |1,2\rangle + |2,1\rangle \otimes |2,2\rangle)$$

Die Erfahrung ist also wieder einseitig auf das Sehen rollender Kugeln oder ruhig liegender Baukl\u00f6tzchen ausgerichtet.

Wir erhalten dann ebenfalls

$$p_{1,0}(\rho) = p_{0,0}(\rho) = \frac{1}{2}$$

aber

$$K_{1,0}(\rho) \approx (|1,1\rangle \otimes |1,2\rangle) \otimes (|1,1\rangle \otimes \exp(0))$$

Scheinbar wird also auch Bewegung registriert.

Auch treten diesmal zusätzlich zum Verlust an angeregten Neuronen im 1. Areal mit Erwartungswert  $\lambda^2$  ein Verlust an angeregten Neuronen im 2. Areal mit dem Erwartungswert  $\frac{1}{2}\lambda^2$  auf. Obwohl definitiv im 2. Areal keine Erkennung stattfindet, zeigt das Modell trotzdem Aktivität in diesem Bereich !

**Bemerkung:** dieses Beispiel entspricht dem Beispiel am Ende des 5. Kapitels

## 8. Messung der Aktivität in den Arealen

Der Wert eines statistischen Modells hängt entscheidend davon ab, inwieweit es gelingt, Messprozeduren in die Modellbildung einzubeziehen. Das betrifft zunächst existierende Typen von Messungen. Damit können eventuell noch freie Parameter in dem zunächst mehr qualitativ beschriebenen Modell mit statistischen Methoden ermittelt werden.

Das Modell könnte aber auch Ideen liefern, die Grundlage der Entwicklung völlig neuartiger Messprozeduren sein können.

EEG und MEG stellen nun gewissermaßen Standardmessprozeduren betreffend Aktivitäten des Hirns in den einzelnen Arealen dar.

Das Prinzip beim EEG beruht auf Messungen des elektrischen Potentials der angeregten Neurone. Veränderungen der in schneller Abfolge durchgeführten Messungen lassen wegen einerseits eingehender Signale und andererseits Verlust von angeregten Neuronen im Erkennungsprozess auf die aktiven Areale schließen.

Beim MEG wird das durch die Entladung angeregter Neurone entstehende Magnetfeld gemessen.

In beiden Fällen sind die Messergebnisse „verrauscht“, was den Einsatz statistischer Methoden zur Datenanalyse erforderlich macht. Die Gründe für die Störung der Messungen sind jedoch unterschiedlich (siehe dazu z.B. /P/).

Beim MEG werden sie als extern angesehen. Speziell ist das Magnetfeld der Erde wesentlich stärker als das durch die Entladung der Neurone erzeugte Magnetfeld. Immer bessere Abschirmungen des Messvorganges senken die Wirkung der Störungen.

Bei klassischen Modellvorstellungen wird nun angenommen, dass die beim EEG vorliegenden Störungen interner Natur sind und ihre Ursache in Aktivitäten des Hirns haben, die neben dem Erkennungsprozess bestehen (siehe /P/). Diese müssten sich dann aber auch auf das Magnetfeld auswirken und deshalb auch beim MEG störend wirken. Das ist aber nach /P/ nicht der Fall, was eigentlich einen Widerspruch ergibt.

Das betrachtete Quantenmodell ermöglicht es im Prinzip, diesen Widerspruch aufzuklären:

Beim EEG misst man die Summe aller Potentiale (bzw. deren Differenz zu einer Bezugsgröße) aller angeregten Neurone in einem bestimmten Gebiet, inklusive der Neurone in dem Gebiet, die das Gedächtnis mit tragen. Zum Ergebnis der Messungen, aus denen ja beim EEG die Information gewonnen wird, tragen zwei Quantensysteme bei, das Quantensystem, das laut Modell das Gedächtnis repräsentiert und das eigentlich interessierende System, welches den beiden am Erkenntnisprozess beteiligten Signalen entspricht. Selbst wenn das Gedächtnis seinen Zustand zumindest bis zum Abschluss des Erkennungsprozesses nicht ändert, also keine Aktivitäten aufweist, liefern wegen seines Quantencharakters Messungen am Gedächtnis zu zwei verschiedenen Zeitpunkten verschiedene Werte. Damit würden zur Erklärung des Rauschens beim EEG nicht die im Widerspruch zu den Beobachtungen beim MEG stehenden unbekannteren Aktivitäten des Hirns die Störung der Messwerte verursachen, sondern die Messungen selbst würden die Störung erzeugen, was in der Quantentheorie ein bekannter Effekt ist.

Die Entladung der Neurone ist nach dem betrachteten Modell gekoppelt an einen Kollaps des aus den beiden Signalen bestehenden Quantensystems, der dem Eintreten des Ereignisses „Erkennung“ entspricht. Stapp vertritt in /Sta/ die Auffassung, dass als Folge des Kollapses eines Quantensystems bzw. der damit verbundenen Reduktion des Zustandes ein klassisches System gewissermaßen als Abprodukt entsteht. Das wäre im unseren Fall der bei der Entladung der Neurone entstehende Stromfluss, der seinerseits das mittels MEG gemessene Magnetfeld induziert. Das Magnetfeld hätte also nicht Quantencharakter. Seine Messung kann deshalb, wie ja auch festgestellt, nur durch externe Störung verunsichert werden.

Im folgenden soll kurz in mathematischer Form beschrieben werden, wie Messungen vom EEG-Typ im Rahmen des Quantenkonzeptes modelliert werden können.

Die potentielle Energie eines klassischen Teilchens wird in der Physik durch eine Funktion  $u(x)$  beschrieben, die von dem Ort  $x$  im Raum abhängt, in dem sich das Teilchen befindet. In unserem Anwendungsfall stellt  $x$  die Position eines angeregten Neurons in dem durch die Menge  $G$  beschriebenen Volumen dar. Die Form der Funktion  $u(x)$  wird dabei insbesondere durch relative Lage des Neurons zur Position der einzelnen Messelektrode bestimmt. Hat man mehrere solcher Elektroden, so



entspricht das mehreren Messungen, die entsprechend durch mehrere Funktionen  $u_1(x)$ ,  $u_2(x)$ , ... bestimmt sind. Es soll zunächst nur der Fall einer Elektrode betrachtet werden.

Hat man nun ein Teilchensystem, d.h. in unserem Fall, ein System von angeregten Neuronen, wobei deren Positionen durch eine endliche Teilmenge  $\varphi$  unseres Raumes  $G$  beschrieben werden, so ergibt sich das elektrische Potential der gesamten Konfiguration durch Summation der Einzelpotentiale  $\sum_{x \in \varphi} u(x)$ .

In unserem Fall setzt sich nun die Konfiguration aller angeregten Neurone aus drei Teilkonfigurationen zusammen:

$\varphi^{mem}$  - Konfiguration der alle im Gedächtnis befindlichen Signale tragenden Neurone

$\varphi_1$  - Konfiguration der das aus dem Gedächtnis erzeugte Signal tragenden Neurone

$\varphi_2$  - Konfiguration der das Eingangssignal tragenden Neurone

Entsprechend wäre das gesamte Potential gegeben durch

$$\sum_{x \in \varphi^{mem}} u(x) + \sum_{x \in \varphi_1} u(x) + \sum_{x \in \varphi_2} u(x)$$

Bezeichnet man nun mit  $\Phi$  die Menge aller Konfigurationen angeregter Neurone, die jeweils eines der Signale aus dem Gedächtnis tragen, so stellt  $\varphi_1$  die Vereinigung dieser Konfigurationen  $\varphi$  aus  $\Phi$  dar, d.h., es ist  $\sum_{x \in \varphi^{mem}} u(x) = \sum_{\varphi \in \Phi} \sum_{x \in \varphi} u(x)$ .

Das Gesamtpotential aller angeregten Neuronen wäre dann also durch eine Funktion von drei Variablen  $U(\Phi, \varphi_1, \varphi_2)$  beschrieben, wobei diese Funktion definiert ist durch

$$U(\Phi, \varphi_1, \varphi_2) := \sum_{\varphi \in \Phi} \sum_{x \in \varphi} u(x) + \sum_{x \in \varphi_1} u(x) + \sum_{x \in \varphi_2} u(x)$$

In der Quantenmechanik entsprechen Potentialmessungen Multiplikationsoperatoren. In unserem Fall haben wir den Hilbertraum  $H_{mem} \otimes H_{sig} \otimes H_{sig}$  als Teilraum von  $L^2(M(M(G)) \times M(G) \times M(G))$  vorliegen. Dieser besteht aus Funktionen von drei Variablen  $\Psi(\Phi, \varphi_1, \varphi_2)$ . Der Multiplikationsoperator  $O_U$  zur obigen Funktion

$U(\Phi, \varphi_1, \varphi_2)$  ist dann definiert durch (siehe 2. Kapitel)

$$O_U(\Psi)(\Phi, \varphi_1, \varphi_2) := U(\Phi, \varphi_1, \varphi_2) \Psi(\Phi, \varphi_1, \varphi_2)$$

Ist nun  $\rho$  ein Zustand auf  $H_{mem} \otimes H_{sig} \otimes H_{sig}$ , der die Systeme Gedächtnis, aus dem Gedächtnis erzeugtes Signal und Eingangssignal gemeinsam charakterisiert, so ist nach den Regeln der Quantenmechanik (siehe 2. Kapitel) der Erwartungswert  $E_\rho(O_U)$  der durch den Multiplikationsoperator  $O_U$  beschriebenen Potentialmessung gegeben durch  $E_\rho(O_U) = \text{tr}(\rho O_U)$ .

Die Ortsverteilung zu  $\rho$  (siehe 2. Kapitel) ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf dem Raum  $M(M(G)) \times M(G) \times M(G)$ , das die zufällige Menge aller Konfigurationen der die Signale im Gedächtnis tragenden Neurone, die Konfiguration aller das aus dem Gedächtnis erzeugte Signal tragenden Neurone und die das Eingangssignal tragenden Neurone gemeinsam beschreibt. „Vergisst“ man die Zuordnung der einzelnen Neuronen zu den verschiedenen Signalen, was sich durch eine Abbildung von  $M(M(G)) \times M(G) \times M(G)$  in  $M(G)$  beschreiben lässt, so erhält man eine zufällige Punktconfiguration in  $G$ , deren Verteilung (also ein Punktprozess auf  $G$ ) mit  $P_\rho$  bezeichnet werden soll. Man erhält dann die Gleichung

$$E_\rho(O_U) = \int \left( \sum_{x \in \varphi} u(x) \right) P_\rho(d\varphi),$$

wobei  $\sum_{x \in \varphi} u(x)$  das Potential einer Konfiguration  $\varphi$  von angeregten Neuronen darstellt. Die Messung am Quantensystem gemäß dem Multiplikationsoperator  $O_U$  bei gegebenem Zustand  $\rho$  lässt sich also mit der klassischen Messung des Potentials der zufälligen Konfiguration aller angeregten Neurone identifizieren.

Die Entwicklung des betrachteten Quantensystems im Verlauf der einzelnen Schritte des Erkennungsprozesses wird nun durch den unitären Operator  $I_{H_{mem}} \otimes V$  beschrieben. Wie in /FF2/ gezeigt wird, kommutieren die Operatoren  $I_{H_{mem}} \otimes V$  und  $O_U$ .

Auch die dem Fall mehrerer Elektroden entsprechenden verschiedenen Operatoren  $O_{U_1}, O_{U_2}, \dots$  kommutieren. Alle zu verschiedenen Zeitpunkten mit verschiedenen Elektroden erhaltenen Messwerte lassen sich deshalb gemeinsam als Zufallsgrößen über einem Wahrscheinlichkeitsraum beschreiben. Man könnte also zu dem Schluss kommen, dass zumindest betreffend das EEG die Betrachtung eines Quantenmodells für die Beschreibung der Aktivitäten des Hirns völlig überflüssig ist. Das ist so nicht richtig. Bekanntlich müssen nämlich die mittels EEG-Messungen gewonnenen Daten mit statistischen Methoden ausgewertet werden. Die Verwendung bestimmter statistischer Methoden setzt nun aber Kenntnisse über die Verteilungen, Abhängigkeiten usw. voraus. Diese Eigenschaften werden aber durch den Quantenzustand bestimmt und werden zudem von dem Messvorgang selbst, etwa dem zeitlichen Abständen der Messungen, beeinflusst, was nicht klassisch erklärbar ist. In der Praxis werden deshalb gewöhnlich sachlich nicht exakt begründete Annahmen zur Struktur der Messergebnisse gemacht, die sich in der klassischen Stochastik bewährt haben bzw. für die verwendeten statistischen Methoden günstig sind. Am Quantenmodell kann man sich aber klar machen, dass in der klassischen Stochastik übliche Annahmen, wie Markoff-Eigenschaften oder gar Unabhängigkeit in der zeitlichen Abfolge der Messungen nicht zutreffen.

Dem oben umrissenen Grundkonzept der EEG-Messungen entsprechend geht es also darum, Informationen über die Anzahl der angeregten Neurone in jedem der Areale zu gewinnen. Bezeichnet wieder  $G_1, \dots, G_n$  eine Zerlegung von  $G$  in diese Areale, so würde ein Satz von Potentialmessungen zu den Potentialtypen  $u_k = \chi_{G_k}$  für  $k=1, \dots, n$  ideal sein, da in diesem Fall als Messergebnisse gerade die Anzahlen der angeregten Neurone in den verschiedenen Arealen auftreten.

Das ist aber nicht realisierbar. Die real erzeugten Messergebnisse sind jedoch mit diesen Anzahlen korreliert. Deshalb kann man, wie schon erwähnt, mit statistischen Methoden zu Schätzungen dieser Anzahlen bzw. deren Änderungen in der zeitlichen Abfolge der Messungen unter realistischeren, auf dem Quantenmodell basierenden Annahmen gelangen. Genauere Untersuchungen dazu auf der Grundlage des betrachteten Modells stehen noch aus.

## 9. Möglichkeiten der Weiterentwicklung des Modells

Der mit dem entwickelten Modell beschriebene Erkennungsprozess ist universeller Natur. Jede Art von Organismus sollte unabhängig von ihrer physiologischen Ausstattung in der Lage sein, ihre Umwelt wahrzunehmen, und Signale nach diesem Modell zugrunde liegenden Prinzipien zu erkennen. Deshalb ist dieses Modell nicht speziell auf z.B. Säugetiere oder gar den Menschen ausgerichtet, und enthält daher direkt auch keinerlei Informationen über dessen Physiologie. Im konkreten Fall besteht also noch Potenzial um das Modell ausführlicher unter Berücksichtigung der angestrebten Anwendung zu gestalten. Diese Spezialisierungen können dann ausgehend von diesem abstrakten Modell vorgenommen werden, was allerdings auch mit relativ hohem Aufwand in Abhängigkeit des gewünschten Detailreichtums verbunden ist. So wird hier z.B. nicht nach Lang-, Kurz- und Ultrakurzzeitgedächtnis unterschieden. Auch die Frage nach der Vorverarbeitung der Signale vor Erreichen der jeweils zuständigen Kortexareale wird nicht verfolgt. Auch die Frage nach der Weiterverarbeitung der erkannten Signale wird nicht beleuchtet. Damit im Zusammenhang stehende Fragen wären: Was ist Lernen? Was ist Denken? Was geschieht beim Träumen? Solche Prozesse können mit den entwickelten Methoden sehr wahrscheinlich ebenfalls modelliert, veranschaulicht, und somit besser verstanden werden. Dies sollte dann auch die Grundlage für darauf aufbauende Interventionsmöglichkeiten bei Störungen dieser Prozesse bieten.

Kern des betrachteten Modells ist der Erkennungsprozess von Signalen, welcher etablierten mathematischen und physikalischen Regeln der Handhabung der Quantenmechanik folgend nur auf die beschriebene Weise ablaufen kann, insofern die allgemein akzeptierten, in Form von Postulaten zusammengefassten Prinzipien der Arbeitsweise des Hirns korrekt sind. Davon gehen wir aus, und können in diesem Sinne die einzig mögliche Modellierung des Erkennungsprozesses präsentieren. Es mag vielleicht noch immer nicht jedem einleuchten, warum die Einbeziehung der Quantentheorie zur Modellierung von kognitiven Prozessen unverzichtbar ist. Die Möglichkeiten, die uns die klassische Stochastik bietet, reichen aber offensichtlich, wie bereits beschrieben, bei weitem nicht aus, was mit folgendem Zitat von Henry Stapp abschließend noch einmal untermauert werden soll:

“Classical physics cannot explain consciousness because it cannot explain how the whole can be more than the parts.“

In dem Zusammenhang sei noch erwähnt, dass man auch in der Genetik beginnt, Methoden der Quantentheorie zur Modellierung zu verwenden. Davon konnte ich mich beim Besuch der ICQBIC08 (Internationale Konferenz zur Quanten-Bio-Informatik, Tokio, März 2008) überzeugen. Genetiker, Physiker und Mathematiker haben gemeinsam entsprechende Möglichkeiten diskutiert, was ein Schwerpunkt dieser Konferenz war. Wie bei der Hirnforschung gibt es nämlich auch in der Genetik Effekte, die klassisch nur unbefriedigend erklärt werden können bzw. zu Widersprüchen führen. Da die Funktionsweise des Hirns zu wesentlichen Teilen durch Vererbung bestimmt wird, kann diese Entwicklung in der Genetik auch für künftige Modellierungen von Hirnprozessen von Bedeutung sein.

## 10. Zusammenfassung

In dieser Dissertation wurde ein mathematisches Modell der Signalerkennung entwickelt. Ausgehend von den Erkenntnissen der aktuellen Hirnforschung über die Funktionsweisen und Beschaffenheit des Hirns wurde der Rahmen des besagten Modells festgelegt. Da einige nachgewiesene Funktionen, wie etwa das Bindungsproblem in seinen verschiedenen Facetten keinesfalls basierend auf klassischer Physik erklärt werden können, wurde in diesem Modell Bezug auf die Quantentheorie genommen. Diese Art der Physik kann subjektiv sehr kompliziert und kaum nachvollziehbar erscheinen. Deshalb wird davon in der Regel ausserhalb der Physik kaum Gebrauch gemacht. Da andererseits die Quantentheorie die Modellierung aller von uns betrachteten Effekte ermöglicht, und die Notwendigkeit des Gebrauchs der Quantentheorie meines Erachtens nach nicht aus Gründen der Komplexität in Frage gestellt werden sollte, wurde in dieser Arbeit auf etablierte, und nicht anzweifelbare Methoden der Quantentheorie zurückgegriffen.

Die in dieser Arbeit verwendete Mathematik ist widerspruchsfrei und schlüssig, das heisst in sich beweisbar bzw. bewiesen. Damit kann die Richtigkeit des Modells hingenommen werden, insofern die verwendeten Erkenntnisse der modernen Hirnforschung korrekt festgestellt bzw. erfasst wurden, und somit die Rahmenbedingungen des Modells korrekt sind. Ist dies nicht der Fall, kann nicht mit Sicherheit behauptet werden, dass das Hirn nach diesen Prinzipien arbeitet. Das Modell in sich ist in jedem Fall widerspruchsfrei.

In dieser Arbeit werden als Allererstes die besagten Erkenntnisse der Hirnforschung festgehalten, um dann in den folgenden Kapiteln, beginnend mit der Einführung der mathematischen Handwerksmittel das Modell auf mathematisch präzise Art und Weise einzuführen. Die Arbeitsweise des Modells wird später noch durch Betrachtung von Beispielen illustriert.

Generell ist das hier erklärte Modell nicht konkret auf bestimmte Lebensformen, wie zum Beispiel den Menschen, zugeschnitten. Es handelt sich hierbei eher um ein universelles Modell der Signalerkennung, was nach Belieben, dafür aber mit immensem Aufwand konkretisiert werden kann. Die aktuelle Fassung bietet sozusagen das Fundament für weitere Spezialisierungen, um auch konkrete Prozesse des Hirns modellieren bzw. simulieren zu können..

## 11. Literatur

- /A,O/: Accardi, L., Ohya, M. : Compound channels, transition expectations and liftings; *Appl. Mathematics & Optimization* 39, 33-59 (1999)
- /B/: Bauder, H., Taub, E., Miltner, W.H.R. : Behandlung motorischer Störungen nach Schlaganfall; *Hogrefe, Verlag für Psychologie* 2001
- /E,S/: Engel, A.K., Singer, W. : Temporal binding and the neural correlates of sensory awareness; *Trends in Cogn. Sci.* 5(1), 16-25, (2001)
- /F1/: Fichtner, K.-H.: On the position distribution of the ideal Bose gas, *Math.Nachr.* 151, (1991))
- /F2/: Fichtner, K.-H.: Vorlesung „Punktprozesse und Quantenstochastik“, *FSU Jena WS 2006/07* :  
[www.minet.uni-jena.de/www/fakultat/iam/personen/fichtner.html](http://www.minet.uni-jena.de/www/fakultat/iam/personen/fichtner.html)
- /F,F1/: Fichtner, K.-H., Fichtner, L. : Bosons and a quantum model of the brain; *Jenaer Schriften zur Mathematik und Informatik, Math./Inf/08/05* (2005), Friedrich Schiller Universität Jena, 2005,
- /F,F2/: Fichtner, K.-H., Fichtner, L. : Quantum Markov Chains and the Process of Recognition; *Jenaer Schriften zur Mathematik und Informatik, Math./Inf/02/07* (2007), Friedrich Schiller Universität Jena, 2007,
- /F,F3/: Fichtner, K.-H., Fichtner, L.: Quantum Models of Brain Activities, to appear in *proceedings of Conference on Quantum Probability, Guanajuato 2007*
- /F,G/: Fichtner, L., Gäbler, M. : Characterizations of Beam Splitters, in *Vorbereitung*
- /F,F,F,O1/: Fichtner,K.-H., Fichtner, L., Freudenberg, W. and Ohya, M : On a mathematical model of brain activities. *AIP Conf. Proc.* 962, 85-90 (2007)
- /F,F,F,O2/: Fichtner,K.-H., Fichtner, L., Freudenberg, W. and Ohya, M : On a Quantum models of the recognition process; QP-PQ, *Quantum probability and white noise analysis* 21,64-84 (2008)
- /F,Fr 1/: Fichtner, K.-H. and Freudenberg, W.: Point processes and the position distribution of Boson systems, *J. Stat. Phys.* 47, 959-978 (1987),
- /F,Fr2/: Fichtner, K.-H. and Freudenberg, W.: Characterization of states of infinite Boson systems I, *Commun. Math. Phys.* 137, 315-357 (1991)



- /F,F,L1/: Fichtner,K.-H., Freudenberg,W., Liebscher,V.: Characterizations of classical and quantum poisson systems by Thinnings and splittings. *Math.Nachr.* **218**, 25-47, (2000)
- /F,F,L2/: Fichtner,K.-H., Freudenberg,W., Liebscher,V.:On exchange mechanism for Bosons, *Random Oper.and Stoch. Equ.* (**12**), 331-348, (2004)
- /F,O/: Fichtner,K.-H., Ohya, M.: Quantum teleportation and beam splittings. *Commun. Math.Phys.***225**, 67-89 (2002)
- /F,F,O/: Fichtner,K.-H., Freudenberg, W. and Ohya, M.:Recognition and teleportation; *Quantum probability and white noise analysis* **15**, 85-107, (2003)
- /H,L/: Hari, R. and Lounasmaa, O. V.: Neuromagnetism: tracking the dynamics of the brain; 33 – 38, *Physical World, May* **2000**
- /K/: Krause, W. : Denken und Gedächtnis, *Lehr- und Forschungstexte Psychologie* **10**, Hogrefe, Verlag für Psychologie; Göttingen, Bern, Toronto, Seattle **2000**
- /Kr1/: Khrennikokov, A. : Information Dynamics in Cognitiv, Psychological, Social and Anomalous Phenomena; *Kluwer Academic Publishers, Fundamental Theories of Physics* 138, **2004**
- /Kr2/: Khrennikokov, A. : Quantum like formalism for cognitiv measurements; *BioSystems* 70, 211-233, (2003)
- /N/: Nakamura,T.,et.al. : Somatosensory homunculus as drawn by MEG, *Neuroimage* **7**, 377-386 (1998),
- /P/: Phililips,J.W., et al: Imaging Neural Activity using MEG and EEG, *IEEE Engineering in Medicin and Biology*; 34-42, May/June 1997
- /Pe/: Penrose, R. : in the Large, the Small and the Human Mind; ed. M. Longair, *Cambridge Univ. Press* **1997**
- /S1/: Singer, W. : Der Beobachter im Gehirn; *Suhrkamp-Taschenbuch Wissenschaft* 1571, **2002**
- /S2/: Singer, W. : Ein neues Menschenbild ; *Suhrkamp-Taschenbuch Wissenschaft* 1596, **2003**
- /Sta/: Stapp, H.: Mind, Matter and Quantum Mechanics; *Springer-Verlag*, **1993**

- 
- /Ste/: Sterr, A., et al.: Perceptual correlates of changes in cortical representation of fingers in blind multifinger braille readers, *Journal of Neurosci.* **18**, 4417-4423, (1998)
- /T/: Tegmark, M. : The Importance of Quantum Decoherence in Brain Processes; *quant-ph / 9907009v2* (1999)
- /Tr/: Treisman, A.: The binding problem; *Current Opinion in Neurobiology* **6**, 171-178, (1996)

# Vorlesung „Punktprozesse und Quantenstochastik“

## SS 2007

### 0. Einführung

#### 0.1. Übungen/Seminar - Leistungsnachweis

#### 0.2. Termine

#### 0.3. Literatur (allgemein)

- Triebel, H. : Höhere Analysis ; Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin 1972 (auch spätere Auflagen)
- Bratelli, O., Robinson, D.W. : Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics I ; Springer Berlin Heidelberg New York 1987 (2. Auflage)
- Bratelli, O., Robinson, D.W. : Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics II ; Springer Berlin Heidelberg New York 1981 (auch spätere Auflagen)
- Kerstan, J., Matthes, K., Mecke, J. : Unbegrenzt teilbare Punktprozesse; Berlin 1974
- Matthes, K., Kerstan, J., Mecke, J. : Infinite Divisible Point Processes; Wiley 1978
- Fick, E. : Einführung in die Grundlagen der Quantentheorie, Leipzig 1968
- Gruska, J.: Quantum Computing, mcgraw-Hill, New York 1999
- Fichtner, K.-H., Freudenberg, W., Liebscher, V.: Beam Splittings and Time Evolutions of Boson Systems; Fo-Ergebnisse Mathematik, Math/Inf/96/39

*Originalarbeiten und spezielle Publikationen werden zu den einzelnen Kapiteln angegeben*

## 0.4. Kapitelübersicht

- Kap.1 : Hilberträume
- Kap.2 : Selbstadjungierte Operatoren
- Kap.3 : Positive Spurooperatoren
- Kap.4 : Das Grundmodell der Quantenstochastik
- Kap.5 : Das v. Neumannsche Meßpostulat
- Kap.6 : Isometrie und unitäre Äquivalenz
  
- Kap. 7 : Ein abstraktes Modell der Teleportation
- Kap. 8 : Bosonensysteme
- Kap. 9 : Punktprozesse und Bosonen
- Kap.10: Kohärente Zustände und Beam Splitting
- Kap.11: Teleportation und Beam Splitting

In der verbleibenden Vorlesungszeit werden je nach Interessen der Teilnehmer folgende Problemkreise behandelt:

- Modellierung von Signalen auf der Basis von Quantensystemen
- Erkennung und Wahrnehmung von Signalen mit Bezug zur Modellierung von Hirnaktivitäten und entsprechenden Meßprozeduren (EEG und MEG)
- Beziehungen zwischen Poissonschen Punktprozessen und Wiener Prozessen bzw. verallgemeinerter Brownscher Bewegungen mit Anwendungen auf stochastische Differentialgleichungen
- Dynamik von Teilchensystemen
- Charakterisierung spezieller Punktprozesse und Bosonensysteme

## 0.5. mögliche Themen für Seminarvorträge

- Spektraltheorie selbstadjungierter Operatoren (Übersichtsvortrag)
- Poissonprozesse und deren Mischungen
- „Weißes Rauschen“ und Poissonprozesse
- Malliavinkalkül und Fockraum

Weitere Themen nach Interessenlage

## 0.6. Was ist Quantenstochastik bzw. wozu benötigt man sie ?

### Zunächst einige philosophisch/erkenntnistheoretische Grundsätze:

- **das Experiment** = Realisierung eines Systems  $S$ , wobei als elementarer Grundsatz die **Wiederholbarkeit** gesichert sein muß, d.h., es muß möglich sein, eine beliebige Folge gleichartiger Systeme insbesondere ohne Wechselwirkung zu realisieren

- **Wechselwirkung zwischen Systemen** tritt immer dann auf, wenn diese in Kontakt zueinander kommen. Im Ergebnis dieses Kontaktes verändern sich i.d.R. die Systeme.

- **Messung** an einem System  $S$  mittels einer Meßapparatur  $A$  setzt den Kontakt der Systeme  $S$  und  $A$  voraus. Die daraus resultierende Änderung des Zustandes von  $A$  spiegelt sich in dem auf der **Skala des Meßgerätes** abzulesenden **Meßwert** wieder. Dieser Vorgang erfüllt nur dann die Kriterien des Begriffs „Messung“, wenn die **Wiederholung des Vorganges den gleichen Meßwert liefert**, unabhängig davon ob die Prozedur den Zustand des Systems  $S$  ebenfalls verändert, oder nicht.

Im letzteren Fall redet man von *klassischen* Messungen.

- **Reale Meßapparaturen** besitzen nur eine endliche Skala, d.h., nur endlich viele verschiedene Meßwerte sind ablesbar.

- **Die quantitative Beschreibung** eines Systems erfolgt über Messung für *wesentlich erachteter Parameter*. Die Genauigkeit der Beschreibung hängt dabei von der Verfügbarkeit entsprechender Meßgeräte ab.

*Das entsprechende mathematische Modell stellt niemals eine vollständige Beschreibung eines realen Systems dar.*

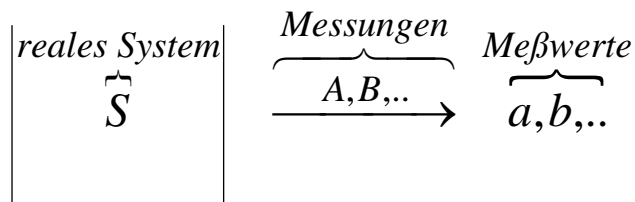
Nicht meßbare Parameter bzw. Eigenschaften des Systems bei der Modellierung zu verwenden, ist praktisch sinnlos.

- **Das Gesetz der Serie:** Realisiert man ein Experiment „sehr oft“ ohne Wechselwirkung und führt dabei jeweils die gleiche Messung durch, so „konvergiert“ das arithmetische Mittel der erhaltenen Meßwerte gegen ein durch das System  $S$  und Meßapparatur  $A$  bestimmten Wert.

Erhält man sogar bei jedem der Experimente den gleichen Meßwert, so reden wir von einem **deterministischen** Verhalten. Andernfalls ist das Verhalten stochastisch und wir benötigen zur Beschreibung des Systems ein **stochastisches Modell**.

**Bemerkung:** Deterministische Modelle sind ein Grenz- bzw. Spezialfall stochastischer Modelle.

## Folgend einige **Statistische Betrachtungen**



### **Modellannahmen:**

- Das System  $S$  ist hinreichend durch den Satz von Messungen bzw. Meßgeräten bestimmt.
- Die Skala jedes Meßgerätes ist endlich  $\Rightarrow$  die Mengen  $M_A, M_B, \dots$  der jeweils möglichen Meßwerte  $a, b, \dots$  sind endlich
- die Meßergebnisse seien „zufällig“

Wir betrachten folgend den Fall von nur 2 Messungen  $A, B$ .

Führt man nur eine der Messungen  $A$  bzw.  $B$  aus, so erhalten wir einen Meßwert  $a \in M_A$  bzw.  $b \in M_B$ .

Führt man beide Messungen unmittelbar hintereinander aus, ist die Reihenfolge festzulegen :

Führen wir zunächst die Messung  $A$  und dann die Messung  $B$  aus, so erhalten wir im Ergebnis  $[a, b] \in M_A \times M_B$ . Bei umgekehrter Reihenfolge erhalten wir ein Ergebnis  $[b, a] \in M_B \times M_A$

### **elementarer Ansatz der Statistik:**

- man stelle  $n$  „unabhängige Kopien“  $S_1, \dots, S_n$  des Systems  $S$  her und führe jeweils die Messung  $A$  durch  $\Rightarrow a_1, \dots, a_n \in M_A$ ,

man wende das Gesetz der großen Zahlen (Konvergenz der relativen Häufigkeiten bei  $n \rightarrow +\infty$ ) an:

$a_1, \dots, a_n \Rightarrow$  Verteilung  $P_A$  auf  $M_A$

- Man verfähre in gleicher Weise betreffend die Messung  $B$

$\Rightarrow$  Verteilung  $P_B$  auf  $M_B$

- Schließlich führt man noch  $A$  und  $B$  hintereinander aus

$\Rightarrow$  Verteilung  $P_{A,B}$  auf  $M_A \times M_B$

- und bei umgekehrter Reihenfolge

$\Rightarrow$  Verteilung  $P_{B,A}$  auf  $M_B \times M_A$

**Modellannahme:** Das System  $S$  sei durch die mittels der Apparaturen  $A$  und  $B$  ausführbaren Messungen „hinreichend bestimmt“.

(*Beispiel: Würfeln mit 2 verschiedenfarbigen Würfeln, Messung = „Hinsehen“*)

$\Rightarrow$  „Zustand“ des Systems  $\cong \{P_A, P_B, P_{A,B}, P_{B,A}\}$

**Regeln der Stochastik** (Kolmogoroff)  $\Rightarrow$

$$(1) \quad P_{B,A}(M_2 \times M_1) = P_{A,B}(M_1 \times M_2) \quad (M_1 \subseteq M_A, M_2 \subseteq M_B)$$

$$(2) \quad P_B(M_2) = P_{A,B}(M_A \times M_2)$$

$$P_A(M_1) = P_{A,B}(M_1 \times M_B)$$

$\Rightarrow$  Zustand  $\cong P_{A,B}$ , d.h., statt 4 W.-Maße benötigt man nur 1 W.-Maß

**Bemerkungen:**

- Die Bedingungen (1) und (2) stellen gerade die Kolmogoroffschen Verträglichkeitsbedingungen im Fall von nur 2 Messungen dar.

Ihre enorme Bedeutung hinsichtlich Modellvereinfachung wird insbesondere bei der Betrachtung von Prozessen oder sonstigen komplexen Strukturen deutlich (*Vielzahl verschiedener Messungen!*).

- (1) und (2)  $\Leftrightarrow$  **Postulat:** Messungen haben keinen Einfluß auf das System

**Heisenberg:** Eine Messung beinhaltet immer eine Wechselwirkung des Systems mit der Meßapparatur und stellt damit einen Eingriff in das System dar

$\Rightarrow$  **die Stochastik** (Kolmogoroff) **ist nur dann zur Modellierung verwendbar, wenn der Eingriff als in seiner Wirkung unwesentlich vernachlässigt werden kann** (*siehe Beispiel Würfel*)

**Beispiele** für Gebiete, in denen nicht (allgemein) die Wirkung der Messungen vernachlässigt werden kann:

- Quantenmechanik
- Physik der Elementarteilchen
- Genetik
- Quantencomputer bzw. -Computing

**Quantenstochastik** (*allgemein*) = mathematisch/statistische Theorie ohne Festlegungen hinsichtlich der Wirkung von Messungen auf das System

**Quantenstochastik im engeren Sinn:** die Wirkung von Messungen auf das System wird durch das „von Neumannsche Meßpostulat“ beschrieben

*Hinweis auf Konsequenzen, die „Arten“ von Zufall*

## 1. Hilberträume

*Literatur:*

- H. Triebel : *Höhere Analysis*
- O. Bratteli, D. W. Robinson: *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics I*

### 1.1. Definition (linearer Raum)

Eine nichtleere Menge  $H$  heißt linearer Raum, wenn folgende Axiome erfüllt sind:

**1.1.1.** In  $H$  ist eine Operation  $+$  erklärt, sodaß  $H$  bezüglich dieser Operation eine abelsche Gruppe ist, d.h., wir haben:

- Kommutativität:  $x + y = y + x \quad (x, y \in H)$
- Assoziativität:  $(x + y) + z = x + (y + z) \quad (x, y, z \in H)$
- neutrales Element  $O \in H$  (Nullelement):  $O + x = x \quad (x \in H)$
- inverse Elemente  $(-x) \in H$ :  $x + (-x) = O \quad (x \in H)$

(Schreibweise:  $x - y := x + (-y) \quad (x, y \in H)$ )

**1.1.2.** Zwischen komplexen Zahlen  $\alpha \in \mathbb{C}$  und  $x \in H$  ist eine Multiplikation  $\alpha x \in H$  erklärt, sodaß für  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}, x, y \in H$ :

- $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$
- $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
- $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
- $1x = x$

**Bemerkung:** Ersetzt man in obiger Definition den Körper der komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  durch den Körper der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$ , so redet man von einem reellen linearen Raum.

Wir betrachten nur komplexe lineare Räume im Sinne obiger Definition.

### 1.2. Definition (Skalarprodukt) Sei $H$ ein linearer Raum.

Eine Abbildung  $[x, y] \Rightarrow \langle x | y \rangle$  vom direkten Produkt

$H \times H = \{[x, y] | x, y \in H\}$  in  $\mathbb{C}$  heißt Skalarprodukt in  $H$ , wenn für

$\alpha, \beta \in \mathbb{C}; x, y, z \in H$  gelten:

- $\langle x | \alpha y + \beta z \rangle = \alpha \langle x | y \rangle + \beta \langle x | z \rangle$
- $\langle x | y \rangle = \overline{\langle y | x \rangle}$
- $\langle x | x \rangle > 0 \quad (x \neq 0)$



**Bemerkung:** Unser Skalarprodukt  $\langle x | y \rangle$  ist linear in  $y$  (2. Variable) und antilinear in  $x$  (1. Variable). Das entspricht dem in der Physik-Literatur meistens verwendeten Ansatz. In der mathematischen Literatur wird häufig Linearität in der 1. Variablen und Antilinearität in der 2. Variablen gefordert (siehe z.B. Triebel)

### 1.3. Definition (Norm)

Sei  $H$  ein linearer Raum. Eine Abbildung  $x \mapsto \|x\|$  von  $H$  in  $\mathbb{R}$  heißt Norm auf  $H$ , wenn gelten:

- $\|x\| > 0 \quad (x \neq 0)$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (x, y \in H)$
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad (\alpha \in \mathbb{C}; x \in H)$

In diesem Fall heißt  $H$  normierter (linearer) Raum.

**1.4. Bemerkung:** Es gilt  $\|0\| = 0$ .

**1.5. Satz :** Ist  $H$  ein linearer Raum mit Skalarprodukt  $\langle x | y \rangle$ , so ist durch

$$\|x\| := \sqrt{\langle x | x \rangle} \quad (x \in H)$$

eine Norm auf  $H$  definiert.

Den Beweis von 1.5. führt man mit Hilfe der folgenden

**1.6. Schwarzsche Ungleichung** (siehe z.B. Triebel):

Sei  $H$  ein linearer Raum mit Skalarprodukt und sei  $\|x\|$  entsprechend 1.5. definiert. Dann gilt:

$$|\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \|y\| \quad (x, y \in H)$$

Dabei gilt genau dann  $|\langle x | y \rangle| = \|x\| \|y\|$ , wenn ein  $\alpha \in \mathbb{C}$  existiert mit  $y = \alpha x$

**Beweis von 1.6.:**

nachfolgend **Beweis von 1.5.:**

**1.7. Definition:** Sei  $H$  ein linearer Raum mit Skalarprodukt.  $H$  heißt Hilbertraum, wenn  $H$  bezüglich der durch 1.5. definierten Norm vollständig ist,

d.h., für jede Folge  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  aus  $H$  mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_m \|x_n - x_{m+n}\| = 0 \text{ existiert ein } x \in H \text{ mit}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - x_n\| = 0.$$

**Beispiele:**

**1. Der Raum  $C^n$**  :=  $\left\{ [x_1, \dots, x_n] \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C} \right\}$

- ist linearer Raum bezüglich der Operationen:

$$[x_1, \dots, x_n] + [y_1, \dots, y_n] := [x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n]$$

$$\alpha [x_1, \dots, x_n] = [\alpha x_1, \dots, \alpha x_n]$$

- Skalarprodukt:  $\langle [x_1, \dots, x_n] \mid [y_1, \dots, y_n] \rangle := \sum_{k=1}^n \overline{x_k} y_k$

- Bezüglich entsprechender Norm (1.5.) vollständig, d.h., Hilbertraum.

**2. Der Raum  $l_2$**  :=  $\left\{ (x_k)_{k=1}^{\infty} \mid x_k \in \mathbb{C} (k = 1, 2, \dots); \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty \right\}$

(Raum der quadratisch summierbaren Folgen komplexer Zahlen)

- Operationen formal wie bei Beispiel 1.

- Skalarprodukt:  $\langle (x_k)_1^{\infty} \mid (y_k)_1^{\infty} \rangle := \sum_{k=1}^{\infty} \overline{x_k} y_k$

- Bezüglich entsprechender Norm (1.5.) vollständig, d.h., Hilbertraum.

**3. Der Funktionenraum im Fall  $\Omega$  abzählbar** (inklusive endlich)

$$L_2(\Omega) := \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \mid \sum_{\omega \in \Omega} |f(\omega)|^2 < \infty \right\}$$

- Operationen wie bei Funktionen üblich, d.h.,

$$(f + g)(\omega) = f(\omega) + g(\omega)$$

$$(\alpha f)(\omega) = \alpha f(\omega)$$

- Skalarprodukt:  $\langle f \mid g \rangle := \sum_{\omega \in \Omega} \overline{f(\omega)} g(\omega)$

- Bezüglich entsprechender Norm (1.5.) vollständig, d.h., Hilbertraum.

**4. Der  $L_2(\mathbb{R})$**

Wir betrachten zunächst

$$C_2(\mathbb{R}) := \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ - stetig, } \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

- Operationen wie bei Funktionen üblich, d.h.,

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad (\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

- Skalarprodukt:  $\langle f | g \rangle := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)dx$
- Bezüglich entsprechender Norm (1.5.) nicht vollständig, d.h., kein Hilbertraum.
- Wir erhalten den Hilbertraum  $L_2(R)$  **durch Vervollständigung** des Raumes  $C_2(R)$ .

**Bemerkung:** Analog erhält man den Fall der physikalisch wichtigen Räume  $L_2(R^3)$  und  $L_2(R^4)$  oder des allgemeineren Falles  $L_2(R^d)$

**Hinweis auf weitere Verallgemeinerung:**  $L_2(\Omega, F, \mu)$ , wobei

- $\Omega$  eine nichtleere Menge,  $F$  eine  $\sigma$ -Algebra und  $\mu$  ein Maß ist.
- $L_2(\Omega, F, \mu)$  ist dann der Raum der bezgl.  $\mu$  quadratisch integrierbaren Funktionen  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ .

**1.8. Bemerkung:** Formal sind als Elemente von  $L_2(\Omega, F, \mu)$  Äquivalenzklassen  $\mu$ -fastüberall gleicher Funktionen zu betrachten

im Fall  $\Omega = R^d$ ,  $F = \sigma$ -Algebra der Borelmengen und des Lebesgueschen Maßes  $\mu$  erhält man als Spezialfall den  $L_2(R^d)$ .

Im Fall einer abzählbaren Menge  $\Omega$ , der Potenzmenge  $F$  von  $\Omega$  und des Zählmaßes erhält man als Spezialfall den Raum  $L_2(\Omega)$  aus Beispiel 3..

**Postulat 1:**

*Die allgemeine Struktur jedes (elementaren) Quantensystems ist durch einen separablen Hilbertraum beschreibbar.*

**1.9. Bemerkung:** Separabel bedeutet, daß eine abzählbare Menge dicht liegt. Die unter 1. – 4. betrachteten Beispiele von Hilberträumen sind alle separabel.

Erste **Beispiele** (Weitere Beispiele im Verlauf der Vorlesung)

1. Ein d-dimensionales Teilchen :  $L_2(R^d)$
2. Ein 2-Niveau-Atom:  $L_2(\{1,2\})$  oder  $C^2$
3. Ein q-bit :  $L_2(\{0,1\})$  oder  $C^2$
4. Eine Folge von n q-bits :  $L_2(\{0,1\}^n)$  oder  $C^{2^n}$

## 2. Selbstadjungierte Operatoren

Literatur:

- H. Triebel : Höhere Analysis
- O. Bratteli, D. W. Robinson: Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics I

### Wir betrachten folgend nur noch separable Hilberträume $H$ !

Dann existiert in  $H$  ein CONS (vollständig orthonormiertes System) im Sinne der folgenden Definition:

#### 2.1. Definition:

- ein  $x \in H$  heißt normiert, wenn  $\|x\| = 1$
  - $x, y \in H$  sind orthogonal, wenn  $\langle x | y \rangle = 0$
  - eine Folge  $(u_k)_{k=1}^N$  (möglich  $N = +\infty, 1, 2, \dots$ ) heißt orthonormales System (kurz: orthonormal), wenn deren Elemente normiert und paarweise orthogonal sind
  - ein orthonormales System  $(u_k)_{k=1}^N$  heißt vollständig (kurz: CONS), wenn jedes  $x \in H$  sich in der Form  $x = \sum_{k=1}^N \langle u_k | x \rangle u_k$  darstellen läßt.
  - Dabei heißt  $(\langle u_k | x \rangle)_{k=1}^N$  Folge der Fourierkoeffizienten von  $x$  bezüglich des CONS  $(u_k)_{k=1}^N$  und  $N$  ist die (eindeutig bestimmte) Dimension von  $H$  – Schreibweise:  $\dim H = N$
- 2.2. Bemerkung:** In der Sprache der linearen Räume ist  $(u_k)_{k=1}^N$  eine Basis

#### Beispiele

##### 1. $H = \mathbb{C}^N$ :

- $u_k = e_k := [\delta_{k,1}, \dots, \delta_{k,N}] \quad (k=1, \dots, N)$   
dabei bezeichnet  $\delta_{k,j}$  das Kroneckersymbol.
- $\dim H = N$

2.  $H = l_2$  :

- $u_k = \left( \delta_{k,j} \right)_{j=1}^{+\infty} \quad (k=1,2,\dots)$
- $\dim H = +\infty$

3.  $H = L_2(\Omega)$  ,  $\Omega$  abzählbar :

- $u_k = \delta_{k,(.)} \quad (k=1,2,\dots, \text{Anz}(\Omega))$
- $\dim H = \text{Anz}(\Omega)$

4.  $H = L_2(R)$

- $(u_k)_{k=1}^{+\infty}$  - Folge der (normierten) Hermiteschen Polynome  
(siehe z.B. Triebel)
- $\dim H = +\infty$

Bei Modellen des Quantencomputing (z.B. Teleportation) und anderen später betrachteten Anwendungen benötigt man die Voraussetzung, daß die betrachteten Hilberträume endlich-dimensional sind.

**Bei der nachfolgenden Betrachtungen beschränken wir uns deshalb zunächst auf den Fall, daß für den zugrunde liegende Hilbertraum  $\dim H = N < +\infty$  ist.**

Auf im unendlich-dimensionalen Fall sich ergebende Probleme und deren Lösungen wird dabei zunächst in Form von Bemerkungen eingegangen. Ausführlichere Betrachtungen erfolgen am Ende des Kapitels

**2.3. Definition:** Eine Abbildung  $A : H \rightarrow H$  heißt (linearer) Operator auf  $H$ , wenn  $A$  linear ist, d.h.,

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y) \quad (x, y \in H; \alpha, \beta \in C)$$

$A^*$  heißt der zu  $A$  adjungierte Operator, wenn gilt

$$\langle A^*(x) | y \rangle = \langle x | A(y) \rangle \quad (x, y \in H)$$

Ein Operator  $A$  heißt selbstadjungiert, wenn  $A = A^*$  ist.

**2.4.** Der adjungierte Operator ist eindeutig bestimmt und es gelten:

$$2.4.1. (\alpha A + \beta B)^* = \bar{\alpha} A^* + \bar{\beta} B^* \quad (\alpha, \beta \in C; A, B \text{ Operatoren})$$

$$2.4.2. (AB)^* = B^* A^* \quad (A, B \text{ Operatoren})$$

Zum Beweis von 2.4. verwenden wir folgenden Hilfssatz

**2.5.** Jedes  $x \in H$  ist durch  $(\langle x | y \rangle)_{y \in H}$  eindeutig bestimmt.

Beweis von 2.5. – anschließend 2.4.

**Bemerkungen:**

- Im Fall  $H = \mathbb{C}^N$  lassen sich die Operatoren mit Matrizen  $A = (a_{k,j})_{k,j=1,\dots,N}$  identifizieren.

Dabei ist  $A^* = \overline{(a_{j,k})_{k,j=1,\dots,N}}$ .

- Ist  $A = (a_{k,j})_{k,j=1,\dots,N}$  selbstadjungiert, so sind alle Einträge in der Diagonale reell.

- Im Fall  $H = l_2$  kann man in formaler Analogie unendliche

Matrizen  $A = (a_{k,j})_{k,j=1,2,\dots}$  verwenden. Führt man jedoch die

Multiplikation Matrix mal (unendlichen) Vektor aus, muß nicht wieder ein Element aus  $l_2$  entstehen. Unter gewissen Einschränkungen betreffend die

Matrix ist das jedoch gesichert, wenn man zunächst nur Folgen  $(x_k)_{k=1}^{+\infty}$  mit nur endlich vielen von Null verschiedenen Gliedern betrachtet. Die Menge dieser Folgen ist aber dicht in  $l_2$ .

⇒ **Konzept der Einführung linearer Operatoren und deren Adjungierte im unendlich-dimensionalen Fall** (siehe Schluß des Kap.)

**2.6. Definition:** Sei  $x \in H, \|x\| = 1$ .

-  $[x] := \{\alpha x / \alpha \in \mathbb{C}\}$  heißt der durch  $x$  erzeugte (eindimensionale) Unterraum.

- Der Operator  $|x\rangle\langle x|$ , definiert durch

$$|x\rangle\langle x|(y) := x\langle x|y\rangle \quad (y \in H)$$

heißt Projektor zum Unterraum  $[x]$ .

**2.7.** Seien  $x \in H, \|x\| = 1$  und  $y \in [x]$ .

2.7.1 Es gelten stets  $|x\rangle\langle x|(z) \in [x]$  und  $|x\rangle\langle x|(y) := y$

2.7.2 Ist auch  $\|y\| = 1$ , so gilt  $|x\rangle\langle x| = |y\rangle\langle y|$

2.7.3 Der Projektor ist selbstadjungiert.

Beweis:

**2.8. Definition:** Seien  $D$  ein abgeschlossener Unterraum von  $H$  und  $(d_j)_{j=1}^n$  ein CONS in  $D$ . Der Projektor  $\text{Pr}_D$  ist definiert durch

$$\text{Pr}_D := \sum_{j=1}^n |d_j\rangle\langle d_j|$$

**2.9.** Sei  $D$  ein abgeschlossener Unterraum von  $H$ . Dann gelten:

2.9.1 Die Definition von  $\text{Pr}_D$  hängt nicht von der Wahl des CONS ab

2.9.2  $\text{Pr}_D(x) \in D$  ( $x \in H$ ) und  $\text{Pr}_D(x) = x$  ( $x \in D$ )

2.9.3 Der Projektor ist selbstadjungiert.

*Beweis*

**2.10.** Sei  $A$  ein selbstadjungierter Operator auf  $H$  (endlichdim!). Dann existieren eindeutig bestimmte Folgen  $(a_j)_{j=1}^n$  paarweise verschiedener reeller Zahlen und  $(D_j)_{j=1}^n$  paarweise orthogonaler (endlichdim.)

Unterräume, so daß gilt:  $A = \sum_{j=1}^n a_j \text{Pr}_{D_j}$

Dabei sind  $a_j$  die Eigenwerte und  $D_j$  die dazu gehörigen Eigenräume.

*(Erläuterungen – Beweisskizze)*

**2.11. Bemerkung:** Mit Definition 2.8. und 2.10. erhält man eine Darstellung

$A = \sum_{k=1}^N b_k |x_k\rangle\langle x_k|$ , wobei  $(x_k)_{k=1}^N$  ein CONS und  $(b_k)_{k=1}^N$  eine

Folge (nicht notwendig verschiedener) Eigenwerte ist.

Diese Darstellung wird in der Literatur „Schatten decomposition“ genannt. Sie ist nicht eindeutig bestimmt. *(Erläuterungen)*

**2.12. Definition:** Seien  $A$  ein selbstadjungierter Operator, gegeben in der Darstellung unter 2.10., und  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Der Operator  $f(A)$  ist definiert

durch:  $f(A) := \sum_{j=1}^n f(a_j) \text{Pr}_{D_j}$

*(Erläuterung betreffend selbstadjungiert)*

**2.13.** Seien  $A, B$  selbstadjungierte Operatoren. Dann sind folgende Aussagen gleichwertig:

2.13.1 Das Produkt  $AB$  ist selbstadjungiert

2.13.2  $A$  und  $B$  kommutieren ( $AB = BA$ )

2.13.3 Es existieren Funktionen  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und ein selbstadjungierter Operator  $K$ , so daß gelten:

$$A = f(K) \text{ und } B = g(K)$$

(Erläuterungen-Beweisskizze)

**2.14.** Seien  $A, B$  selbstadjungierte Operatoren und  $a, b$  reelle Zahlen. Dann ist auch  $aA + bB$  ein selbstadjungierter Operator.

*Beweis:*

### 2.15 Definition (Norm eines Operators)

Sei  $A$  ein linearer Operator. Wir setzen

$$w(A) := \{a \in \mathbb{R} \mid A(x) \leq a\|x\| \forall x \in H\}$$

$$\|A\| := \inf w(A)$$

**2.16.** Ist  $A = \sum_{j=1}^n a_j \Pr_{D_j}$  ein selbstadjungierter Operator (Darstellung

nach 2.10.) so gilt  $\|A\| = \sup \{a_j \mid j = 1, \dots, n\}$

### Postulat II:

*Jede Messung an einem Quantensystem (bzw. das entsprechende Meßgerät) kann mit einem selbstadjungierten Operator auf einem (geeigneten)*

*Hilbertraum identifiziert werden und umgekehrt.*

*Dabei entsprechen die Eigenwerte des Operators den möglichen*

*Meßwerten. (Erläuterungen speziell zur Bedeutung von 2.13.)*

### Zum Fall unendlich-dimensionaler Hilberträume

**Bemerkung:** Im unendlich-dim. Fall gibt es beschränkte und unbeschränkte Operatoren. Weiter hat man zwischen selbstadjungierten Operatoren mit kontinuierlichem und solchen mit diskretem Spektrum zu unterscheiden. Nur für Letztere ist eine Darstellung entsprechend 2.10. möglich, wobei  $n = +\infty$  sein kann. Gültig bleibt 2.13..



### Die Problematik am Beispiel

$H = L_2(\mathbb{R}^+) \approx$  ein Teilchen im Raum  $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$

$\hat{H}$  = linearer Raum aller meßbaren komplexen Funktionen auf  $\mathbb{R}^+$

$\Rightarrow H$  ist linearer Unterraum von  $\hat{H}$

Für jedes  $f \in \hat{H}$  ist eine lineare Abbildung  $O_f$  von  $\hat{H}$  in  $\hat{H}$  definiert durch

$$O_f g = fg \quad (g \in \hat{H})$$

#### 2.17. Bemerkung:

Ist  $f$  beschränkt, so ist die Einschränkung von  $O_f$  auf  $H$  ein linearer Operator auf  $H$ .

Ist  $f$  nicht beschränkt, so ist i.a. **nicht**  $O_f g \in H$  für alle  $g \in H$ .

*Spezialfälle:  $f=I$  – identische Abbildung,  $f=\chi_Y \Leftrightarrow O_f$  Projektor*

Wir betrachten nun für  $n, m \geq 1$  Zerlegungen  $Z^{n,m} = (Z_k^{n,m})_{k=1}^{n2^m}$  von  $\mathbb{R}^+$  definiert durch

$$Z_k^{n,m} := \left[ \frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m} \right) \quad (k=0, 1, \dots, n2^m - 1)$$

$$Z_{n2^m}^{n,m} := [n, +\infty)$$

Weiter betrachten wir (beschränkte) Funktionen auf  $\mathbb{R}^+$  definiert durch

$$f^{n,m} := \sum_{k=0}^{n2^m} \frac{k}{2^m} \chi_{Z_k^{n,m}} \quad (n, m \geq 1)$$

#### 2.18 Bemerkung

Sei  $n, m \geq 1$ . Dann ist  $O_{f^{n,m}}$  ein beschränkter Operator auf  $H$  und es gilt

$$O_{f^{n,m}} = \sum_{k=0}^{n2^m} \frac{k}{2^m} \text{Pr}_{H_k^{n,m}}$$

Dabei sind für  $k=0, 1, \dots, n2^m$  durch  $\frac{k}{2^m}$  die Eigenwerte gegeben mit den dazu gehörigen Eigenräumen

$$H_k^{n,m} = \left\{ g \in H \mid g \chi_{Z_k^{n,m}} = g \right\}$$

Ferner ist  $\|O_{f^{n,m}}\| = n$  und im Sinne von Def. 2.12. gilt für  $n_2 \geq n_1, m_2 \geq m_1$

stets

$$f^{n_1, m_1} (O_{f^{n_2, m_2}}) = O_{f^{n_1, m_1}}$$

*Deutung/Interpretation*

### Grenzbetrachtungen

- $O_{f^{n,m}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \text{unbeschränkter Operator mit in } H \text{ dichtem}$

*Definitionsbereich* – es ergibt sich eine Darstellung als unendliche Linearkombination von Projektoren

- $O_{f^{n,m}} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \text{beschränkter Operator}$  – die Darstellung als

Linearkombination von Projektoren geht verloren

- $O_{f^{n,m}} \xrightarrow{n,m \rightarrow +\infty} O_I$  - *unbeschränkter Operator mit in } H \text{ dichtem}*

*Definitionsbereich* – es gibt keine Darstellung als Linearkombination von Projektoren

- Im Sinne einer allgemeineren Begriffsbildung sind alle betrachteten Operatoren selbstadjungiert und unter Verwendung der „Spektraltheorie“ kann man zeigen, daß stets gilt

$$O_{f^{n,m}} = f^{n,m}(O_I)$$

- Diskussion aus Sicht von Messungen (Beispiel und allgemeiner Fall von selbstadjungierten Operatoren)

- die Rolle der endlich-dimensionalen Räume und reale Messungen

**Bemerkung:** Im allgemeinen Fall separabler Hilberträume unterscheidet man symmetrische und selbstadjungierte Operatoren. Dabei ist ein Operator  $A$  nach Def. symmetrisch  $\Leftrightarrow \langle Ax | y \rangle = \langle x | Ay \rangle \quad (x, y \in D(A))$  Ist  $A$  ein beschränkter Operator, so ist (analog zum endlich-dim. Fall)  $A$  selbstadjungiert  $\Leftrightarrow \langle Ax | y \rangle = \langle x | Ay \rangle \quad (x, y \in H) \Leftrightarrow A$  symmetrisch

Allgemein haben wir nur:  $A$  selbstadjungiert  $\Rightarrow A$  symmetrisch

(Für Details siehe Seminarvortrag zu selbstadjungierten Operatoren)

### Beispiele für selbstadjungierte Operatoren im Fall $H = L_2(\mathbb{R}^d)$

(ein Teilchen im Raum  $\mathbb{R}^d$ )

- $O_{f_k}$  mit  $f_k(x_1, \dots, x_d) = x_k$  -  $k$ -te Komponente des Ortes  
unbeschränkter Operator

- $a \frac{\partial}{\partial x_k}$  -  $k$ -te Komponente der Geschwindigkeit / Impuls  
unbeschränkter Operator

- $b \Delta := b \sum_{k=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$  - kinetische Energie

unbeschränkter Operator

- $b\Delta + O_u$  - Hamiltonoperatoren  
unbeschränkter Operator
- Integraloperatoren  $K$  mit gegebenem Kern  $k : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$  mit  
 $k(x, y) = \bar{k}(y, x)$  und  $\int |k(x, y)|^2 l(dx)l(dy) < +\infty$   
 $Kg(x) := \int k(x, y)g(y)l(dy)$  ( $x \in \mathbb{R}^d, g \in H$ ) - beschränkter Operator

Spezialfälle: eindim. Projektor, Fall unter 2.11

**Bemerkung:** Im Fall unbeschränkter Operatoren wird dem jeweiligen formalen Ansatz der maximale Definitionsbereich zugeordnet. Bei beschränkten Operatoren ist das der gesamte Hilbertraum

**Beispiel:** Die Operatoren  $O_f$  und  $\frac{d}{dx}$  kommutieren nicht und deren Produkt ist nicht selbstadjungiert. (*Deutung-Bedeutung*)

### 3. Positive Spurooperatoren

*Literatur:*

- H. Triebel : *Höhere Analysis*
- O. Bratteli, D. W. Robinson: *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics I*
- E. Fick : *Einführung in die Grundlagen der Quantentheorie*

Um hinsichtlich des Begriffs der Spur eines Operators an elementare Vorlesungen zur linearen Algebra anzuschließen, betrachten wir zunächst den Fall  $H = \mathbb{C}^N$ .

Wir verwenden dabei das CONS  $e_k := [\delta_{k,1}, \dots, \delta_{k,N}]$  ( $k=1, \dots, N$ )

Ein Operator  $A$  wird dann mit einer Matrix  $(a_{k,j})_{j,k=1, \dots, N}$  identifiziert durch

$$A(g) = \sum_{k=1}^N e_k \sum_{j=1}^N a_{k,j} c_j \quad \text{für} \quad g = \sum_{j=1}^N c_j e_j$$

Die Spur (engl. trace) wird dann üblicherweise wie folgt definiert:

$$tr(A) := \sum_{k=1}^N a_{k,k}$$

Ist  $B$  ein weiterer Operator, gegeben durch die Matrix  $(b_{k,j})_{j,k=1, \dots, N}$ , so erhalten wir

$$tr(AB) = \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N a_{k,j} b_{j,k} = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N a_{k,j} b_{j,k} = tr(BA)$$

Weiter gilt  $tr(A) := \sum_{k=1}^N \langle e_k | A e_k \rangle$

Ist  $(x_k)_{k=1}^N$  ein weiteres CONS, so existiert ein unitärer Operator  $U$  gegeben durch die unitäre Matrix  $(u_{k,j})_{j,k=1,\dots,N}$  mit

$$x_s = \sum_{r=1}^N \bar{u}_{s,r} e_r = \sum_{r=1}^N u_{r,s}^* e_r \quad (s=1,\dots,N)$$

Dabei bezeichnet  $(u_{k,j}^*)_{j,k=1,\dots,N}$  die zum adjungierten Operator  $U^*$  gehörige Matrix. Es ist also stets  $U(x_s) = e_s$ .

Wir erhalten dann

$$A(x_s) = \sum_{k=1}^N e_k \sum_{j=1}^N a_{k,j} u_{j,s}^* \quad (s=1,\dots,N)$$

Und damit

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^N \langle x_s | A(x_s) \rangle &= \sum_{s,r,k,j} u_{s,r} a_{k,j} u_{j,s}^* \langle e_r | e_k \rangle \\ &= \sum_{s,k,j} u_{s,k} a_{k,j} u_{j,s}^* \\ &= tr(UAU^*) = tr(U^*UA) = tr(A) \end{aligned}$$

**Nachfolgend beschränken wir uns wieder zunächst auf den Fall, daß für den zugrunde liegende Hilbertraum  $\dim H = N < +\infty$  ist.**

Auf im unendlich-dimensionalen Fall sich ergebende Probleme und deren Lösungen wird in Form von Bemerkungen und am Ende des Kapitels eingegangen.

**3.1. Definition:** Seien  $A$  ein Operator auf  $H$  und  $(x_k)_{k=1}^N$  ein CONS. Die Spur des Operators  $A$  ist definiert durch

$$trA := \sum_{k=1}^N \langle x_k | A(x_k) \rangle$$

**3.2. Bemerkung:** Die Berechnung der Spur hängt nicht von dem gewählten CONS ab (Erläuterung mittels vorangehender Betrachtungen)

**3.3.** Die Spurbildung ist linear, d.h., es gilt:

$$\operatorname{tr}(\alpha A + \beta B) = \alpha \operatorname{tr} A + \beta \operatorname{tr} B \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{C}; A, B \text{ Operat.})$$

### Beispiele

#### 1. Eindimensionale Projektoren

$$\operatorname{tr}(|x\rangle\langle x|) = 1 \quad (x \in H, \|x\| = 1)$$

(Bew.: Wähle CONS mit  $x_1 = x$ )

#### 2. Projektoren zum (endlichdim.) Unterraum $D$

$$\operatorname{tr} \operatorname{Pr}_D = \dim D$$

(Bew.: Wende die Definition des Projektors, 3.3. und Beispiel 1. an)

#### 3. Der identische Operator oder Einheitsoperator

$$I_H(x) := x \quad (x \in H), \text{ d.h., } I_H = \operatorname{Pr}_H$$

$$\operatorname{tr} I_H = N = \dim H$$

(Im unendlich-dimensionalen Fall ist der Einheitsoperator kein Spuroperator!)

**4. selbstadjungierten Operators  $A$**  gegeben in der Darstellung gemäß 2.10. oder 2.11.:

$$\operatorname{tr} A := \sum_{j=1}^n a_j \dim D_j = \sum_{k=1}^N b_k$$

(Beweis: Wende Beispiel 2 bzw. 1 und 3.3. an)

**3.4. Bemerkung:** Um die Spur eines Operators im allgemeinen Fall (inklusive  $\dim H = +\infty$ ) definieren zu können, bedarf es einer einschränkenden Forderung (Begriff des Spuroperators – siehe Ende des Kap.), die im Fall eines selbstadjungierten Operators aber gerade identisch damit ist, daß der Operator eine Darstellung gemäß 2.10. bzw. 2.11. besitzt ( $n, N = +\infty$  möglich), wobei zusätzlich gefordert werden muß, daß bei  $n, N = +\infty$  die Reihe

$$\sum_{j=1}^{+\infty} a_j \dim D_j \text{ bzw. } \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \text{ absolut konvergiert.}$$

**3.5. Definition:** Ein Operator  $A$  heißt positiv, wenn eine Darstellung der Form  $A = BB^*$  möglich ist.

**3.6.** Ein positiver Operator ist selbstadjungiert (gilt im allgem. Fall).

Im Fall  $\dim H < +\infty$  gilt darüber hinaus, daß ein selbstadjungierter Operator  $A$  positiv ist, wenn alle Eigenwerte positiv sind, d.h., wir haben nach

$$2.10. \text{ eine Darstellung der Form } A = \sum_{j=1}^n a_j \Pr_{D_j}$$

wobei die eindeutig bestimmten  $(a_j)_{j=1}^n$  paarweise verschiedener reeller

Zahlen positiv und  $(D_j)_{j=1}^n$  paarweise orthogonaler (endlichdim.)

Unterräume sind, bzw. nach 2.11. erhält man eine Darstellung

$$A = \sum_{k=1}^N b_k |x_k\rangle\langle x_k|, \text{ wobei } (x_k)_{k=1}^N \text{ ein CONS und } (b_k)_{k=1}^N \text{ eine}$$

Folge nichtnegativer Zahlen ist.

**3.7. (Folgerung aus 3.6.):** Ist  $A$  ein positiver Operator, so gilt:

$$\operatorname{tr} A \geq 0$$

**Hinweis :** Messungen an Quantensystemen haben i. a. ein zufälliges Ergebnis (siehe Einführung)

*Postulat III: Der Zustand eines Quantensystems wird durch einen positiven (Spur-)Operator  $\rho$  auf einem geeigneten Hilbertraum mit  $\operatorname{tr} \rho = 1$  beschrieben.*

*Der Erwartungswert einer Messung an dem Quantensystem, nach Postulat II charakterisiert durch einen selbstadjungierten Operator  $A$ , ist dann gegeben durch  $E_\rho(A) := \operatorname{tr}(\rho A)$*

$\rho = |x\rangle\langle x|$  heißt „reiner Zustand“ zu  $x \in H$  mit  $\|x\|=1$ .

**Bemerkung:** Auch im unendlich-dim. Fall ist für jeden beschränkten Operator  $A$  stets  $\rho A$  ein Spuroperator, d.h.,  $E_\rho(A)$  ist zumindest für jeden beschränkten Operator definiert.

**3.8.**  $E_\rho$  ist ein lineares Funktional auf der Menge der beschränkten

Operatoren auf  $H$ , d.h., wir haben

$$E_\rho(aA + bB) := a E_\rho(A) + b E_\rho(B) \quad (a, b \in \mathbb{C}; A, B$$

beschränkte Operatoren)

**3.9.** (Folgerung aus 3.8.) Seien  $\rho$  ein positiver (Spur-)Operator und  $A$  ein selbstadjungierter Operator, der nach 2.10. eine Darstellung der Form

$$A = \sum_{j=1}^n a_j \Pr_{D_j} \text{ hat, wobei } (a_j)_{j=1}^n \text{ paarweise verschiedener reeller}$$

Zahlen und  $(D_j)_{j=1}^n$  paarweise orthogonaler (endlichdim.) Unterräume sind.

$$\text{Dann ist } E_{\rho}(A) = \sum_{j=1}^n a_j \text{tr}(\rho \Pr_{D_j})$$

**3.10.** Seien  $x \in H$ ,  $\|x\| = 1$ ;  $A$  ein selbstadjungierter Operator mit

$$A = \sum_{j=1}^N b_j |x_j\rangle\langle x_j|, \text{ wobei } (x_k)_{k=1}^N \text{ ein CONS ist (siehe 2.11.) Dann}$$

$$\text{gilt: } E_{|x\rangle\langle x|}(A) = \langle x | Ax \rangle = \sum_{k=1}^N b_j |\langle x_j | x \rangle|^2$$

Beweis: Wir haben

$$\begin{aligned} E_{|x\rangle\langle x|}(A) &= \sum_{k=1}^N \langle x_k || x \rangle \langle x | A(x_k) \rangle \\ &= \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N b_j \langle x_k || x \rangle \langle x || x_j \rangle \langle x_j | x_k \rangle = \sum_{j=1}^N b_j \langle x_j | x \langle x | x_j \rangle \rangle \\ &= \sum_{j=1}^N b_j |\langle x_j | x \rangle|^2 \end{aligned}$$

Andererseits erhält man

$$\begin{aligned} \langle x | A(x) \rangle &= \sum_{j=1}^N b_j \langle x || x_j \rangle \langle x_j | x \rangle \\ &= \sum_{j=1}^N b_j \langle x | x_j \langle x_j | x \rangle \rangle = \sum_{k=1}^N b_j |\langle x_j | x \rangle|^2 \end{aligned}$$

### Zum Abschluß des Kapitels betrachten wir den allgemeinen Fall eines separablen Hilbertraumes $H$

Spurklasse Operatoren (trace class operators) sind Operatoren, die sich in der Form  $A = \sum_k a_k e_k$  darstellen lassen, wobei  $(e_k)_k$  ein CONS in  $H$  und  $(a_k)_k$  eine Folge komplexer Zahlen ist mit  $\sum_k |a_k| < +\infty$ .

Es ist dann  $tr(A) = \sum_k a_k$

#### Bemerkungen:

- Ist  $B$  ein beschränkter Operator, so sind auch  $AB, BA$  Spurklasse Operatoren und es gilt  $tr(AB) = tr(BA)$ .

- Für jedes CONS  $(x_k)_k$  gilt  $tr(A) = \sum_k \langle x_k | A(x_k) \rangle$

- Alle Eigenräume sind endlichdimensional

-  $A$  ist selbstadjungiert wenn alle Werte  $a_k$  reell sind.

-  $A$  ist positiv, wenn alle Werte  $a_k$  nichtnegativ sind.

-  $A$  ist ein (normaler) Zustand auf  $H$ , wenn  $A$  positiv und  $\sum_k a_k = 1$

#### Spezialfall $H = L_2(\mathbb{R}^d)$

$A$  läßt sich darstellen als Integraloperator mit dem Kern

$$a(x,y) = \sum_k a_k e_k(x) \bar{e}_k(y).$$

Es gilt dann die „Spurformel“:

$$tr(A) = \int a(x,x) l(dx)$$

#### Bemerkungen:

- formale Analogie zur Spur im Matrixfall

- Da der Kern eines Operators nicht eindeutig bestimmt ist (z.B. willkürliche Abänderung auf der „Diagonale“), gilt die Spurformel nicht allgemein.

Hinreichende Bedingung ist z.B. Stetigkeit des Kerns.



## 4. Das Grundmodell der Quantenstochastik

Es soll ein allgemeiner mathematischer Ansatz zur Beschreibung des Zufalls erläutert werden, der sowohl die aus der Physik bekannten Modelle für Quantensysteme, wie auch die Axiomatik der klassischen (Kolmogoroffschen) Stochastik als Spezialfall enthält.

*Literatur: O. Bratteli, D. W. Robinson: Teil 1*

*Fichtner, Freudenberg: Point processes and the position distribution...., J.Stat.Phys. 47, 959-978, 1987*

*Fichtner, Freudenberg: Characterization of states..., Commun.Math.Phys. 137, 315-357, 1991*

### 4.1. Definition:

- Ein linearer Raum  $L$  heißt Algebra, wenn in  $L$  eine Multiplikation  $AB$  erklärt ist, so daß gelten:

$$A(BD) = (AB)D \quad (A, B, D \in L)$$

$$A(B + D) = AB + AD \quad (A, B, D \in L)$$

$$\alpha\beta (AB) = (\alpha A)(\beta B) \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{C}; A, B, D \in L)$$

-  $I \in L$  heißt Einselement in der Algebra  $L$ , wenn gilt

$$IA = AI \quad (A \in L)$$

- Eine Abbildung  $A \rightarrow A^*$  ( $A \in L$ ) heißt Involution auf der Algebra  $L$ , wenn gelten :

$$(A^*)^* = A \quad (A \in L)$$

$$(AB)^* = B^* A^* \quad (A, B \in L)$$

$$(\alpha A + \beta B)^* = \overline{\alpha} A^* + \overline{\beta} B^* \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{C}; A, B \in L)$$

- Sind vorstehende Forderungen erfüllt, so heißt  $L$  \*-Algebra mit Einselement.

-  $L$  heißt kommutativ, wenn  $AB = BA$  ( $A, B \in L$ )

**4.2. Definition:** Seien  $L$  eine \*-Algebra mit Einselement und  $W$  eine Abbildung von  $L$  in  $\mathbb{C}$ .  $W$  heißt positives normiertes lineares Funktional auf  $L$ , wenn gelten  $W(\alpha A + \beta B) = \alpha W(A) + \beta W(B)$  ( $\alpha, \beta \in \mathbb{C}; A, B \in L$ )

$$W(AA^*) \geq 0 \quad (A \in L)$$

$$W(I) = 1$$

**Das Grundmodell der Quantenstochastik ist ein Tupel  $[L, W]$ , wobei  $L$  eine  $*$ -Algebra mit Einselement und  $W$  ein positives, normiertes lineares Funktional auf  $L$  ist. Dabei repräsentieren**

- $L$  die Grundstruktur des betrachteten stochastischen Systems
- die selbstadjungierten Elemente  $A$  von  $L$  ( $A = A^*$ ) die möglichen Messungen am System (Observable genannt)
- $W(A)$  den Erwartungswert einer der Observablen  $A$  entsprechenden Messung ( $W$  wird Zustand genannt)

## Spezialfälle

### 1. Elementare Quantenmechanik

übliches Grundmodell:  $[H, \rho]$ ,  $H$  separablen Hilbertraum und  $\rho$  ein positiver (Spur-)Operator auf  $H$  mit  $\text{tr}\rho = 1$ . Wir setzen:

- $L = *$ -Algebra der (beschränkten) Operatoren auf  $H$
- Observable = selbstadjungierter Operator
- $W = E_\rho$

### 2. Klassische (Kolmogoroffsche) Stochastik

übliches Grundmodell: Wahrscheinlichkeitraum  $[\Omega, F, P]$ , d.h.,  $\Omega$  nichtleer,  $F$   $\sigma$ -Algebra,  $P$  Wahrsch.-Maß. Wir setzen:

- $L := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} / f \text{ meßbar, beschränkt}\}$
- $*$ -Algebra mit  $f^* = \bar{f} \iff f \in F$
- Observable = Zufallsgröße (d.h.,  $f$  reellwertig  $\iff f = f^*$ )
- $W(f) = E_P(f) := \int f(\omega)P(d\omega)$  (= klass. Erwartungswert)
- $\iff P$

## Grundsätzlicher Unterschied

**Bei 2. Spezialfall ist die  $*$ -Algebra kommutativ, im 1. Spezialfall nicht kommutativ!** Die „gewöhnliche“ Wahrscheinlichkeitstheorie wird deshalb in Abgrenzung zum allgemeinen Fall auch kommutative Wahrscheinlichkeitstheorie genannt. – Hinweis auf Charakterisierung des kommutativen Falles durch J. von Neumann!

**Bemerkung:**

Beispiel 2. läßt sich bereits in gewissem Sinne als spezieller Aspekt unter Beispiel 1. einordnen.

**Erläuterung**

Wir betrachten den Hilbertraum  $H := L_2(\Omega, F, P)$ .

Dann ist  $1 \equiv \chi_\Omega \in H, \|\chi_\Omega\| = 1$ .

- $\rho = |\chi_\Omega\rangle\langle\chi_\Omega|$  - der entsprechende reine Zustand
- $W = E_\rho$  - das entsprechende lineare Funktional auf
- $L_H$  - die *\*-Algebra* aller beschränkten Operatoren auf  $H$

Wir betrachten weiter

- $\Theta_H \subset L_H$  die *\*-Algebra* der Multiplikationsoperatoren  $O_f$  auf  $H$  zu beschränkten meßbaren Funktionen  $f$  auf  $\Omega$ .

$$O_f g(\omega) := f(\omega)g(\omega) \quad (\omega \in \Omega)$$

(Beweis, daß  $\Theta_H$  kommutative *\*-Algebra* mit  $O_f^* = O_{\bar{f}}$  )

Dann gilt stets

$$W(O_f) = \int f(\omega)P(d\omega)$$

d.h., der klassische Erwartungswert ist durch Einschränkung des linearen Funktionals  $W$  auf die kommutative Unteralgebra  $\Theta_H$  von  $L_H$  darstellbar.

(Beweis als Spezialfall des Nachfolgenden)

**Verallgemeinerung – die Ortsverteilung zu normalem Zustand**

Sei  $H := L_2(\Omega, F, \mu)$ , sodaß der Hilbertraum  $H$  separabel ist.

Weiter sei  $\rho$  ein normaler Zustand auf  $H$ .

Dann existiert genau ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q_\rho$  auf  $[\Omega, F]$  mit

$$\int f(\omega)Q_\rho(d\omega) = \text{tr}(\rho O_f) \quad (f \text{ meßbar und beschränkt})$$

- $Q_\rho$  wird **Ortsverteilung** des Zustandes  $\rho$  genannt (Erläuterung)

- Ist  $\rho = |g\rangle\langle g|$ , so ist  $Q_\rho$  absolut stetig zu  $\mu$  mit Dichte  $|g|^2$ .

## 5. Das von Neumannsche Meßpostulat

**Postulat (J. von Neumann):**

Sei  $\rho$  ein Zustand auf einem separablen Hilbertraum  $H$ , d.h.,  $\rho$  ist ein positiver (Spur-)Operator mit  $\text{tr}\rho = 1$ .

Weiter sei  $A$  eine Observable, d.h., selbstadjungierter Operator, mit einer Darstellung entsprechend 2.10., d.h., es existieren eine (eindeutig bestimmte)

Folgen  $(a_j)_{j=1}^n$  paarweise verschiedener und von Null verschiedener reeller

Zahlen und  $(D_j)_{j=1}^n$  paarweise orthogonaler (endlichdim.) Unterräume, so

daß gilt:  $A = \sum_{j=1}^n a_j \text{Pr}_{D_j}$  ( $n = +\infty$  im unendlichdim. Fall möglich!)

Es werde eine Messung gemäß  $A$  am Zustand  $\rho$  durchgeführt, d.h., an einem durch  $\rho$  beschriebenen Quantensystem wird eine  $A$  entsprechende Messung durchgeführt.

Mit  $p_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) sei die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, daß dabei die Messung den Wert  $a_j$  ergibt.

Schließlich sei:  $p_0 := 1 - \sum_{j=1}^n p_j$ ;  $D_0 := H - \sum_{j=1}^n D_j$ ;  $a_0 = 0$

(im unendlichdim. Fall muß  $\dim D_0 < +\infty$  gefordert werden!)

Dann gelten :

$$1) \quad p_j = \text{tr}(\text{Pr}_{D_j} \rho \text{Pr}_{D_j}) \quad (j = 0, \dots, n)$$

2) Wird der Messwert  $a_j$  registriert (es muß  $p_j > 0$  sein !), so befindet sich das betrachtete Quantensystem nach der Messung im Zustand

$$\rho_{a_j} := \frac{1}{p_j} \text{Pr}_{D_j} \rho \text{Pr}_{D_j} \quad (j = 0, \dots, n)$$

3) Ohne Kenntnisnahme des Meßwertes liegt vor der

$$\text{Zustand } \rho_A := \sum_{j=0}^n p_j \rho_{a_j} = \sum_{j=0}^n \text{Pr}_{D_j} \rho \text{Pr}_{D_j}$$

## Folgend Bemerkungen/Erläuterungen zum Postulat

**5.1.**  $\text{Pr}_{D_j} \rho \text{Pr}_{D_j}$  ist stets ein positiver Operator

Beweis:

Aus einer Darstellung  $\rho = BB^*$  folgt, wegen  $\text{Pr}_{D_j}$  selbstadjungiert, die

$$\text{Darstellung} \quad \text{Pr}_{D_j} \rho \text{Pr}_{D_j} = (\text{Pr}_{D_j} B)(\text{Pr}_{D_j} B)^*$$

**5.2.** (Folgerung aus 5.1.) Es ist stets  $p_j \geq 0$

Falls  $p_j > 0$ , so ist  $\rho_{a_j}$  ein Zustand

(d.h.  $\rho_{a_j}$  ist positiver (Spur-)Operator mit  $\text{tr} \rho_{a_j} = 1$ )

**5.4.** Es ist stets  $p_j = \text{tr}(\rho \text{Pr}_{D_j})$

Beweis: Sei  $(x_k)_{k=1}^N$  ein CONS, so daß  $(x_k)_{k=1}^m$  ein CONS in  $D_j$  ist.

Dann erhalten wir wegen  $\text{Pr}_{D_j}(x_k) = 0 \quad (k > m)$

$$\text{tr}(\rho \text{Pr}_{D_j}) = \sum_{k=1}^N \langle x_k | \rho \text{Pr}_{D_j}(x_k) \rangle = \sum_{k=1}^m \langle x_k | \rho \text{Pr}(x_k) \rangle$$

Wegen  $\text{Pr}_{D_j}(x_k) = x_k \quad (k \leq m)$  folgt daraus

$$\begin{aligned} \text{tr}(\rho \text{Pr}_{D_j}) &= \sum_{k=1}^m \langle \text{Pr}_{D_j}(x_k) | \rho \text{Pr}_{D_j}(x_k) \rangle \\ &= \sum_{k=1}^m \langle \text{Pr}_{D_j}(x_k) | \rho \text{Pr}_{D_j}(x_k) \rangle = \text{tr}(\text{Pr}_{D_j} \rho \text{Pr}_{D_j}) = p_j \end{aligned}$$

**5.5.** (Folgerung aus 5.4.) Es gilt

$$E_\rho(A) = \sum_{j=1}^n a_j p_j$$

Beziehung zu klassischem Begriff des Erwartungswertes:

Nachtrag zum bereits benutzten Begriff des Zustandes:

**5.6. Definition :**

- Ein positiver (Spur-)Operator  $\rho$  auf  $H$  heißt Zustand, wenn  $\text{tr}\rho = 1$  ist.
- $\rho$  heißt reiner Zustand, wenn ein  $x \in H, \|x\| = 1$  existiert, so daß  $\rho = |x\rangle\langle x|$  ist, d.h.,  $\rho$  ist ein eindimensionaler Projektor.
- Andernfalls heißt  $\rho$  gemischter Zustand.

**5.7.** Ein Zustand  $\rho$  ist genau dann gemischt, wenn ein CONS  $(x_k)$  und eine Folge nichtnegativer Zahlen  $(q_k)$  mit mindestens zwei positiven Elementen und  $\sum_k q_k = 1$  existieren, sodaß gilt

$$\rho = \sum_k q_k |x_k\rangle\langle x_k|$$

**Erläuterungen:**

- 5.7. besagt, daß  $\rho$  als Mischung von reinen Zuständen darstellbar ist.
- Die „Mischungsgewichte“  $q_k$  lassen sich dabei identifizieren mit einer Wahrscheinlichkeitsverteilung auf den natürlichen Zahlen.
- Diese Verteilung muß nichttrivial sein, d.h., im Gegensatz zum reinen Zustand darf es nicht sein, daß ein  $j$  existiert mit  $q_j = 1$  (und deshalb  $q_k = 0$  ( $k \neq j$ ))

**5.8.** (Folgend Bezeichnungen wieder entsprechend Postulat)

Es seien  $\rho$  ein reiner Zustand und  $A$  ein Projektor,

$$\rho = |x\rangle\langle x|, \quad A = \text{Pr}_{D_1}, \quad D_0 := H - D_1$$

Dann gelten:

$$- p_j = \left\| \text{Pr}_{D_j}(x) \right\|^2 \quad (j = 0,1)$$

- Wird der Wert  $j(=0,1)$  gemessen, so hat man danach den Zustand

$$\rho_j := \left\| \left\| \text{Pr}_{D_j}(x) \right\|^{-1} \text{Pr}_{D_j}(x) \right\rangle\left\langle \left\| \text{Pr}_{D_j}(x) \right\|^{-1} \text{Pr}_{D_j}(x) \right\|$$

- Wird kein Meßwert zur Kenntnis genommen, so befindet sich das System nach der Messung im Zustand

$$\rho_A := p_0\rho_0 + p_1\rho_1 \neq \rho$$

**Der klassische Fall:**

- Der Observablen  $A$  entspricht eine Zufallsgröße  $\xi = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{D_j}$ ,

wobei  $(D_j)_{j=1}^n$  eine Folge paarweise disjunkter (meßbarer) Teilmengen von  $\Omega$  ist und  $\chi_D$  die Indikatorfunktion einer Menge bezeichnet.

- Wir setzen diesmal  $D_0 := (\bigcup D_j)^c$  und wieder  $a_0 = 0$ .
- Die Zufallsgröße kann dann die Werte  $a_0, \dots, a_n$  annehmen. Es bezeichne wieder  $p_j$  die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten.
- Messung gemäß  $\xi$  entspricht, Feststellung des Wertes von  $\xi$ .
- Realisiert  $\xi$  den Wert  $a_j$ , geht die ursprüngliche Verteilung  $P$  (Zustand vor Messung) in die bedingte Verteilung (Zustand nach Messung)  $P(\cdot / \xi = a_j)$  über.
- Man hat  $P = \sum_j p_j P(\cdot / \xi = a_j)$ , d.h., der Messvorgang an sich hat keine Auswirkung auf den Zustand.
- Reine Zustände entsprechen den Dirac-Maßen.

**6. Isometrie und unitäre Äquivalenz***Literatur:*

- *H. Triebel : Höhere Analysis*
- *O. Bratteli, D. W. Robinson: Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics I*
- *E. Fick : Einführung in die Grundlagen der Quantentheorie*

**Definition:** Seien  $H_k$  ( $k = 1, 2$ ) (separable) Hilberträume.  $\langle \cdot | \cdot \rangle_k$ ,  $\|\cdot\|_k$  bezeichnet die entsprechenden Skalarprodukte bzw. Normen.

- Eine lineare Abbildung  $J$  von  $H_1$  in  $H_2$  heißt Isometrie, wenn gilt:

$$\|x\|_1 = \|J(x)\|_2 \quad (x \in H_1)$$

- Die lineare Abbildung  $J^*$  von  $H_2$  in  $H_1$  mit

$$\langle J^*(y) | x \rangle_1 = \langle y | J(x) \rangle_2 \quad (x \in H_1, y \in H_2)$$

heißt die zu  $J$  adjungierte Abbildung.

- Bildet die Isometrie auf  $H_2$  ab, so heißt sie Isomorphismus.

- Im Fall  $H_1 = H_2$  heißt ein Isomorphismus „unitärer Operator“.

**6.1.** Ist  $J$  eine Isometrie von  $H_1$  in  $H_2$ , so gilt für alle  $x, y \in H_1$

$$\langle x | y \rangle_1 = \langle J(x) | J(y) \rangle_2$$

Beweis: Durch Einsetzen erhält man

$$\langle x | y \rangle_1 = \left\| \frac{x+y}{2} \right\|_1^2 - \left\| \frac{x-y}{2} \right\|_1^2 + i \left\| \frac{x+iy}{2} \right\|_1^2 - i \left\| \frac{x-iy}{2} \right\|_1^2$$

$$\langle J(x) | J(y) \rangle_2 = \left\| \frac{J(x)+J(y)}{2} \right\|_2^2 - \left\| \frac{J(x)-J(y)}{2} \right\|_2^2 + i \left\| \frac{J(x)+iJ(y)}{2} \right\|_2^2 - i \left\| \frac{J(x)-iJ(y)}{2} \right\|_2^2$$

Unter Verwendung der Linearität und Normerhaltung von  $J$  erhält man die Behauptung.

**6.2.** Für einen unitären Operator  $U$  auf einem Hilbertraum  $H$  gilt

$$U^* = U^{-1}$$

Beweis unter Verwendung von 6.1.:

**6.3.** Seien  $J$  eine Isometrie von  $H_1$  in  $H_2$  und  $A$  ein Operator auf  $H_1$ .

Dann gelten:

- Ist  $A$  selbstadjungiert, so ist auch  $JAJ^*$  selbstadjungiert
- Ist  $A$  positiv, so ist auch  $JAJ^*$  positiv.
- Ist  $A$  ein Zustand auf  $H_1$ , so ist  $JAJ^*$  ein Zustand auf  $H_2$ .

*Erläuterungen-Beweisskizze:*

**6.4.** Seien  $J$  eine Isometrie von  $H_1$  in  $H_2$  und  $A$  ein selbstadjungierter Operator auf  $H_1$  der Gestalt (siehe 2.11.)

$$A = \sum_k a_k |x_k\rangle\langle x_k|$$

$$\text{Dann ist } JAJ^* = \sum_k a_k |J(x_k)\rangle\langle J(x_k)|$$



Beweis: Wegen der Linearität von  $J, J^*$  genügt es, den Fall  $A = |x\rangle\langle x|$  zu betrachten. Für jedes  $y \in H_2$  erhalten wir dann

$$\begin{aligned} JAJ^*(y) &= J(x)\langle x|J^*(y)\rangle_1 = J(x)\langle J(x)|y\rangle_2 \\ &= |J(x)\rangle\langle J(x)|(y) \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

**Bemerkung:**

Unitäre Operatoren werden verwendet, um die Dynamik eines isolierten Quantensystems zu beschreiben.

**Beispieltyp** (speziell auch in Quantenmechanik):

Gegeben sei ein selbstadjungierter Operator  $h$  auf einem geeigneten Hilbertraum  $H$  („Hamiltonoperator“)

$$U_t := e^{itah} \quad (t \geq 0)$$

- Beziehung zur Schrödingergleichung
- Unitarität und Gruppeneigenschaft
- Die zeitliche Entwicklung eines Zustandes
- die Zeitentwicklung von Observablen – Heisenberg

**Bemerkung:**

Mittels spezieller Isometrien können allgemeinere Veränderungen eines Quantensystems bzw. Manipulationen an einem solchen System beschrieben werden.

Ein Spezialfall ist der „beam splitter“ (Details später)

Gegeben Isometrie  $J$  von  $H$  in  $H \otimes H$ .

**Unitäre Äquivalenz**

Im Fall eines Isomorphismus  $J$  von  $H_1$  in  $H_2$  ist durch  $A \rightarrow JAJ^*$  eine eindeutige lineare Abbildung von der Menge aller (beschränkten)

Operatoren auf  $H_1$  auf die Menge aller (beschränkten) Operatoren auf  $H_2$ .

Dabei werden selbstadjungierte Operatoren in selbstadjungierte Operatoren und Zustände in Zustände überführt.

Darüber hinaus gilt für jeden Zustand  $\rho$  auf  $H_1$  und (beschränkten) selbstadjungierten Operator  $A$  auf  $H_2$ :  $E_{J\rho J^*}(JAJ^*) = E_\rho(A)$

Damit ist jedes mittels des Hilbertraumes  $H_1$  beschreibbare Quantensystem auch mittels  $H_2$  beschreibbar und umgekehrt.

Die Wahl eines konkreten Hilbertraumes aus einer Menge in diesem Sinne äquivalenter Hilberträume hat physikalisch keine Bedeutung und ist damit eine rein technische Frage. (*Bedeutung*)

### Beispiel

Seien  $H_1$  ein beliebiger Hilbertraum mit  $\dim H_1 = N < +\infty$  und  $H_2 = L_2(\Omega)$  mit  $\Omega = \{1, \dots, N\}$ , d.h., wir haben

$$H_2 = \{f : \{1, \dots, N\} \rightarrow \mathbb{C}\} \text{ mit } \langle f | g \rangle_2 = \sum_{n=1}^N \overline{f(n)}g(n)$$

Wir fixieren ein CONS  $(x_k)_{k=1}^N$  in  $H_2$  und setzen

$$J\left(\sum_{k=1}^N c_k x_k\right)(n) := c_n \quad (c_1, \dots, c_N \in \mathbb{C}; n = 1, \dots, N)$$

Dann ist  $J$  ein Isomorphismus mit

$$J^*(f) = J^{-1}(f) = \sum_{k=1}^N f(k)x_k \quad (f \in H_2)$$

Jeder endlichdimensionale Hilbertraum  $H$  ist also zu einem Raum  $L_2(\Omega)$  mit  $\Omega = \{1, \dots, \dim H\}$  äquivalent.

**Bemerkung:** Im Fall eines separablen Hilbertraumes  $H$  mit  $\dim H = +\infty$  kommt man zum gleichen Resultat, wenn wir statt einer endlichen Menge wählen  $\Omega = \{1, 2, \dots\}$ .

### Tensorprodukte

Will man die Wechselwirkung zwischen zwei Quantensystemen betrachten, die jedes für sich durch einen Hilbertraum  $H_1$  bzw.  $H_2$  beschreibbar sind, so betrachtet man das sogenannte Tensorprodukt  $H_1 \otimes H_2$ . Diese Konstruktion

ist so beschaffen, daß aus der Äquivalenz der Hilberträume  $H_1$  und  $\hat{H}_1$  bzw.

$H_2$  und  $\hat{H}_2$  die Äquivalenz von  $H_1 \otimes H_2$  und  $\hat{H}_1 \otimes \hat{H}_2$  folgt.

Da andererseits jeder separable Hilbertraum zu einem Raum der Gestalt  $L_2(\Omega)$  äquivalent ist, reicht es für unsere Zwecke nur Räume dieses Typs zu betrachten.

Man kann aber nun zeigen, daß das Tensorprodukt von  $L_2(\Omega_1)$  und  $L_2(\Omega_2)$  äquivalent zu  $L_2(\Omega_1 \times \Omega_2)$  ist. Um die Definition des abstrakten Tensorproduktes „einzusparen“ können wir deshalb setzen

$$L_2(\Omega_1) \otimes L_2(\Omega_2) := L_2(\Omega_1 \times \Omega_2)$$

Wir benutzen folgende Bezeichnungen/Eigenschaften/Regeln:

- Sind  $(f_k)_{k=1}^{|\Omega_1|}$  ein CONS in  $L_2(\Omega_1)$  und  $(g_j)_{j=1}^{|\Omega_2|}$  ein CONS in  $L_2(\Omega_2)$ ,

so ist durch

$$f_k \otimes g_j(\omega_1, \omega_2) := f_k(\omega_1)g_j(\omega_2) \quad (\omega_1 \in \Omega_1, \omega_2 \in \Omega_2)$$

ein CONS  $(f_k \otimes g_j)_{k=1, \dots, |\Omega_1|; j=1, \dots, |\Omega_2|}$  in  $L_2(\Omega_1 \times \Omega_2)$  definiert.

- Sind  $A$  ein Operator auf  $L_2(\Omega_1)$  und  $B$  ein Operator auf

$L_2(\Omega_2)$ , so ist durch

$$A \otimes B(f \otimes g) := A(f) \otimes B(g) \quad (f \in L_2(\Omega_1); g \in L_2(\Omega_2))$$

genau ein Operator auf  $L_2(\Omega_1 \times \Omega_2)$  charakterisiert.

### Hinweise auf :

- Die Erhaltung der Eigenschaften Selbstadjungiertheit und Positivität bei Tensorproduktbildung von Operatoren

- den Zusammenhang Tensorprodukt zweier Zustände und statistische Unabhängigkeit bzw. Spurbildung bei Tensorprodukten

### **Ehrenwörtliche Erklärung**

Ich erkläre hiermit, dass mir die geltende Promotionsordnung der Fakultät für Sozial- und Verhaltenswissenschaften der Friedrich-Schiller-Universität Jena bekannt ist. Die vorliegende Arbeit wurde von mir ohne die unzulässige Hilfe Dritter angefertigt. Alle von mir benutzten Hilfsmittel und Quellen sind in dieser Arbeit angegeben. Ich habe weder die Hilfe eines Promotionsberaters in Anspruch genommen noch haben Dritte unmittelbar oder mittelbar geldwerte Leistungen von mir erhalten, die im Zusammenhang mit dem Inhalt der vorgelegten Dissertation stehen. Die Arbeit wurde weder im In- noch im Ausland einer anderen Prüfungsbehörde vorgelegt. Weder früher noch gegenwärtig habe ich an einer anderen Hochschule eine Dissertation eingereicht. Ich versichere, dass ich nach bestem Wissen die reine Wahrheit gesagt und nichts verschwiegen habe.

Jena, den 03.10. 2008

Lars Fichtner