
Jena Research Papers in
Business and Economics

# Einige Anmerkungen zur Verwendung des Erwartungswertes

*Peter Kischka*

01/2008

*Jenaer Schriften zur Wirtschaftswissenschaft*

**Working and Discussion Paper Series**
**School of Economics and Business Administration**
**Friedrich-Schiller-University Jena**

ISSN 1864-3108

**Publisher:**

Wirtschaftswissenschaftliche Fakultät
Friedrich-Schiller-Universität Jena
Carl-Zeiß-Str. 3, D-07743 Jena

www.jbe.uni-jena.de

**Editor:**

*Prof. Dr. Hans-Walter Lorenz*
h.w.lorenz@wiwi.uni-jena.de

*Prof. Dr. Armin Scholl*
armin.scholl@wiwi.uni-jena.de

www.jbe.uni-jena.de

# Einige Anmerkungen zur Verwendung des Erwartungswertes

Peter Kischka

Friedrich-Schiller-Universität Jena
Lehrstuhl für Wirtschafts- und Sozialstatistik
Carl-Zeiß-Str. 3, 07743 Jena
E-Mail: p.kischka@wiwi.uni-jena.de

## Abstract

Der Erwartungswert spielt in den Wirtschaftswissenschaften bei vielen Problemen, in denen stochastische Einflüsse berücksichtigt werden, eine zentrale Rolle. Dies kann unmittelbar der Fall sein, indem der Erwartungswert einer monetären Zielgröße optimiert wird, dies kann z. B. auch im Zusammenhang mit einem Risikomaß (mean-deviation-rules) oder auch in Form des Erwartungsnutzens, d. h. des Erwartungswerts des Nutzens, der Fall sein. In dieser Arbeit werden teilweise bekannte Einwendungen gegen die Verwendung des Erwartungswerts beschrieben und Möglichkeiten aufgezeigt, diesen Rechnung zu tragen. Im Rahmen eines in der Betriebswirtschaftslehre weit verbreiteten Entscheidungsszenarios (Newsvendor-Modell) werden weitere grundlegende Einwendungen gegen die Verwendung des Erwartungswerts aufgezeigt.

**Keywords:** Erwartungswert, Gesetz der großen Zahlen, Newsvendor-Modell

## Übersicht

In Abschnitt 1 werden der Erwartungswert kurz vorgestellt und anschließend vier Anwendungen des Erwartungswerts beschrieben. Das Newsvendor-Modell dient zur Illustration. Abschnitt 2 enthält einige Anmerkungen zur Anwendung des Erwartungswerts als Entscheidungskriterium, falls einmalige oder zahlreiche Konsequenzen mit dieser Entscheidung verknüpft sind. Im letzteren Fall kann ein Gesetz der großen Zahlen eine hinreichende Begründung für den Einsatz eines Erwartungswerts sein, im ersteren müssen zusätzliche Annahmen über die Verteilung vorliegen. Abschnitt 3 zeigt am Beispiel des Newsvendor-Modells eine nicht plausible Implikation des Erwartungswertkriteriums bzw. der dualen Nutzentheorie; begründet ist dies durch die Tatsache, dass die optimale Entscheidung nur von einem einzigen Wert der Verteilungsfunktion abhängig ist. Im nachfolgenden Abschnitt wird eine allgemeine Klasse von Entscheidungsproblemen definiert, die die gleiche Struktur wie das Newsvendor-Modell aufweisen und daher auch der gleichen Kritik ausgesetzt sind. Abschnitt 5 enthält Schlussfolgerungen und mögliche Alternativen.

1.
Sei X eine auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, E, P) definierte Zufallsvariable. Ist F die Verteilungsfunktion von X, so kann der Erwartungswert berechnet werden als

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,dF(x). \tag{1a}$$

Die bekannten Definitionen für diskrete und stetige Zufallsvariablen

$$E(X) = \sum_i x_i P(X = x_i), \quad E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx \tag{1b}$$

sind Spezialfälle von (1a).

Insbesondere die Darstellungen (1b) machen deutlich, dass der Erwartungswert ein gewichteter Mittelwert der möglichen Realisationen von X ist.

Wir betrachten im Folgenden ein allgemeines Entscheidungsproblem: Sei A die Menge der möglichen Entscheidungen und sei X eine Zufallsvariable, die die stochastischen Einflüsse auf die Konsequenzen einer Entscheidung $a \in A$ enthält; sei $g(a, X)$ die Zufallsvariable, die die Konsequenzen beschreibt.

**Beispiel:**

Wir betrachten das bekannte Newsvendor-Modell (vgl. z. B. Hopp/Spearman pp 46). Sei X die Nachfrage nach dem Produkt, p der Verkaufspreis, c der Einkaufspreis und z der Abverkaufspreis. Der Profit bei der Entscheidung (= Bestellmenge) a ist die Zufallsvariable

$$\begin{aligned} g(a, X) &= p \cdot \min(a, X) - ca + z \max(a - X, 0) \\ &= (p - c)a - (p - z)(a - X)^{+} \end{aligned} \tag{2}$$

Dabei ist $A = [0, b]$ mit einer maximal möglichen Nachfrage b.

Ziel ist die Wahl einer besten Entscheidung $a \in A$, d. h. einer Entscheidung, die „möglichst große Werte" von $g(a, X)$ als Konsequenz nach sich zieht. Diese Zielsetzung erfordert die Transformation der Zufallsvariablen $g(a, X)$ in eine Größe, die optimiert werden kann.

Eine Möglichkeit besteht darin, die unterschiedlichen Zufallsvariablen $g(a, X)$, $a \in A$, mittels ihres Erwartungswertes zu vergleichen. Ist $F_a$ die Verteilungsfunktion von $g(a, X)$, so gilt:

$$E(g(a,X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} z dF_a(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(a,x) dF(x) \tag{3}$$

und das Entscheidungsproblem lautet:

$$\max_{a \in A} E(g(a,X)). \tag{4}$$

Die Schreibweise unterstellt, dass eine optimale Entscheidung existiert:

$$a^* := \arg\max E(g(a,X)). \tag{5}$$

Analog können beste Entscheidungen im Rahmen anderer Kriterien definiert werden, z. B.:

Erwartungswert-Varianz-Kriterium

$$\max_{a \in A} [E(g(a,X)) - h \operatorname{Var}(g(a,X))] \tag{6}$$

mit einer Konstanten $h > 0$;

Erwartungsnutzenkriterium

$$\max_{a \in A} EU(g(a,X)) = \max_{a \in A} \int_{-\infty}^{+\infty} U(g(a,x)) dF(x) \tag{7}$$

mit einer Nutzenfunktion U;

Duale Nutzentheorie

$$\max_{a \in A} \int_{-\infty}^{+\infty} g(a,x)) d(q \circ F)(x) \tag{8}$$

mit einer transformierten Verteilungsfunktion $q \circ F$.

Die Ansätze (4), (8) beruhen auf den Erwartungswerten der Zufallsvariablen $g(a, X)$, (7) auf dem Erwartungswert der Zufallsvariablen $U(g(a, X))$, (6) auf Erwartungswert und Varianz von $g(a, X)$.

2.
Betrachten wir zunächst den Ansatz (4) und gehen wir von der Situation einer Entscheidung für ein einmaliges Ereignis aus. Im Rahmen des Newsvendor-Modells bedeutet dies, dass sich die Bestellmenge auf eine einzige Verkaufsperiode bezieht. Aus (3) ergibt sich, dass die Verwendung des Erwartungswertes als Entscheidungskriterium dann sinnvoll verwendet werden kann, wenn die Verteilung von $g(a, X)$ sich um ihren Erwartungswert konzentriert. Wenn man davon ausgehen kann, dass die Realisation der Zufallsvariablen $g(a, X)$ mit großer Wahrscheinlichkeit für alle a nahe bei $E(g(a, X))$ liegen wird, so ist die Maximierung des Erwartungswerts nahe liegend. Im Allgemeinen ist jedoch der Erwartungswert als gewichtetes Mittel der Realisationen von X möglicherweise weit von jeder möglichen Realisation entfernt.

Im Ansatz (6) wird versucht, die mögliche Diskrepanz zwischen Erwartungswert und den Realisationen der Zufallsvariablen mittels der Varianz in die Entscheidungsfindung mit einzubeziehen. Der weit verbreitete Ansatz (6) hat jedoch fundamentale Nachteile; so können leicht Beispiele konstruiert werden, in denen strikt dominierte Entscheidungen Lösungen von (6) sind (vgl. z. B. Müller/Stoyan, S. 274).

Für die Ansätze (7) und (8) gelten grundsätzlich die gleichen Einwände wie für den Ansatz (4). Liegen die Realisationen von $U(g(a, X))$ nah bei $EU(g(a, X))$, so ist die Verwendung des erwarteten Nutzens nahe liegend. Im anderen Fall lassen sich Beispiele konstruieren, die einem intuitiven Verständnis widersprechen. Das gleiche gilt für den Ansatz (8).

Anders stellt sich die Situation dar, wenn die Entscheidung a nicht nur eine Realisation von X betrifft, sondern mit der Entscheidung wiederholte Realisationen von X und damit von $g(a, X)$ verbunden sind; im Rahmen des Newsvendor-Modells bedeutet dies, dass sich die Bestellmenge auf eine Anzahl von Verkaufsperioden bezieht oder – regional betrachtet – in verschiedenen Regionen mit identischer Nachfrage, die Bestellmenge a realisiert wird.

Sind $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige, identisch wie X verteilte Zufallsvariablen, so sind auch $g(a, X_1), \ldots, g(a, X_n)$ unabhängig und identisch verteilt. Um den Wert einer Entscheidung a zu messen, ist es nahe liegend, den Mittelwert der Zufallsvariablen $g(a, X_i)$ zu betrachten. Das Gesetz der großen Zahlen besagt, dass dieses intuitiv nahe liegende Vorgehen die Verwendung des Erwartungswertes rechtfertigt. Betrachten wir wieder zunächst den Ansatz (4). Für große n gilt (vgl. z. B. Rohatgi/Saleh, S. 274, 281):

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} g(a, X_i) \approx E(g(a, X)), \tag{9}$$

d. h. die Zufallsvariable auf der linken Seite konvergiert für wachsendes n gegen den Erwartungswert $E(g(a, X))$. Bewertet man also die Konsequenz einer Entscheidung a durch den Mittelwert der n sich ergebenden Realisationen $g(a, x_1), \ldots, g(a, x_n)$, so ist der Erwartungswert der Zufallsvariablen $g(a, X)$ die richtige Zielgröße (für große n).

Man beachte jedoch, dass die Gültigkeit von (9) die Unabhängigkeit von Zufallsvariablen $X_i$ voraussetzt (in der schwachen Form des Gesetzes der großen Zahl muss nur die Unkorreliertheit vorausgesetzt werden); beschreiben, wie in obigem Beispiel, die $X_i$ die Nachfragen in aufeinander folgenden Perioden oder in unterschiedlichen Regionen , so ist diese Unabhängigkeitsforderung häufig eine starke Annahme.

Auch für die Ansätze (7) und (8) ist unter analogen Annahmen der Erwartungswert die richtige Zielgröße. So gilt im Erwartungsnutzenansatz für große n

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U(g(a,X_i)) \approx EU(g(a,X)), \tag{10}$$

d. h. der Mittelwert der sich ergebenden Nutzen $U(g(a,x_i))$ $(1 \le i \le n)$ ist ungefähr gleich dem erwarteten Nutzen.

3.
Die nachfolgenden Überlegungen stellen den Erwartungswert als Lösungskonzept aus völlig anderen Gründen in Frage. Für viele ökonomische Fragestellungen ist die Lösung (4) von der Form

$$F(a^*) = \gamma. \tag{11}$$

Dabei ist $\gamma$ ein exogener, modellparameterabhängiger Wert. Existiert die Inverse von F an der Stelle $\gamma$, so ist die optimale Entscheidung gegeben durch $a^* = F^{-1}(\gamma)$. Der „stochastische Charakter" der Zufallsvariablen X bzw. ihrer Verteilungsfunktion F wird nur über einen speziellen Wert genutzt, alle Verteilungsfunktionen G mit $F^{-1}(\gamma) = G^{-1}(\gamma)$ führen zur selben Entscheidung a*.

Betrachten wir zunächst die im Beispiel beschriebene Situation im Newsvendor-Modell. Die optimale Lösung in den Lehrbüchern beruht auf der Anwendung des Erwartungswertkriteriums (4) auf die Zufallsvariablen (2). Es gilt:

$$\begin{aligned} E(g(a,X)) &= (p-c)a-(p-z)E((a-X)^+) \\ &= (p-c)a-(p-z)\int_0^a F(x)dx \end{aligned} \tag{12}$$

Der erwartete Gewinn (12) ist eine konkave Funktion von a und die Optimalitätsbedingung 1. Ordnung liefert unter der Annahme, dass die Inverse existiert, die Lösung

$$a^* = F^{-1}\left(\frac{p-c}{p-z}\right) \tag{13}$$

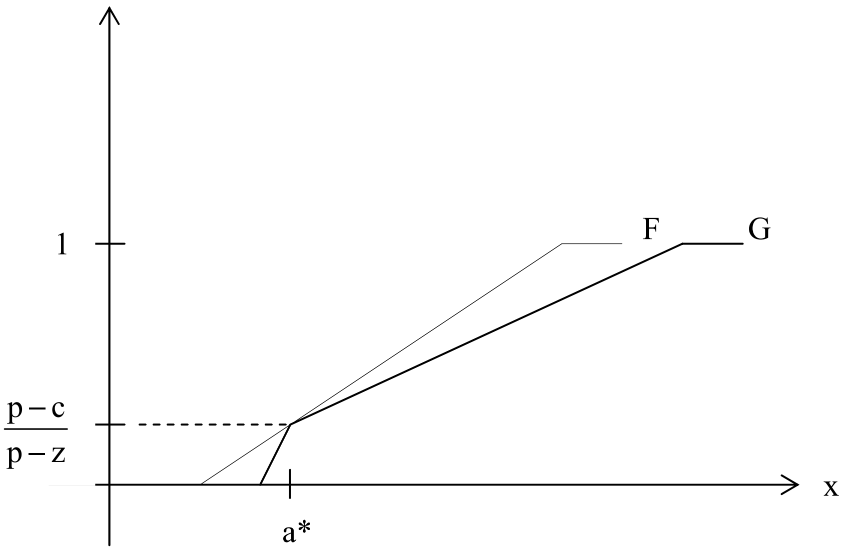
(vgl. z. B. Hopp/Spearman, S. 67).

Diese Lehrbuchlösung beinhaltet also, dass für alle Nachfragefunktionen mit einer Verteilungsfunktion G mit

$$F^{-1}\left(\frac{p-c}{p-z}\right) = G^{-1}\left(\frac{p-c}{p-z}\right)$$

dieselbe Bestellmenge a* optimal ist.

Betrachten wir etwa die folgende Situation




Es gilt:

$1-G(x) > 1-F(x)$ für alle $x \neq a^*$, d. h. für alle $x \neq a^*$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Nachfrage größer als x ist, unter G größer als unter F.

Geht ein Manager zunächst von F aus und bestellt gemäß Lehrbuch die Menge a* und wird ihm anschließend mitgeteilt, die Nachfrage sei statt durch F nun durch G beschrieben, so gilt:

$$a^* = G^{-1}\left(\frac{p-c}{p-z}\right)$$

Intuitiv nahe liegend, aber im Widerspruch zur Lehrbuchlösung, ist eine Erhöhung der Bestellmenge beim Übergang von F zu G; anders ausgedrückt: Findet eine solche Erhöhung bei der Beurteilung der durch F und G beschriebenen Situationen statt, so wird nicht nach dem Erwartungswertkriterium (4) vorgegangen. Da das Kriterium (8) sich von (4) nur durch die Transformation q unterscheidet, gelten obige Einwendungen auch hierfür. Natürlich gilt für die erwarteten Gewinne:

$$E_F(g(a^*, X)) < E_G(g(a^*, X))$$

Im Falle der Entscheidungskriterien (6) und (7) ergeben sich i. a. unterschiedliche Lösungen, je nachdem, ob die Verteilungsfunktion F oder G zugrunde gelegt werden.

4.
Die im vorigen Abschnitt beschriebene, der Intuition widersprechende Situation im Newsvendor-Modell ergibt sich in allen Entscheidungsproblemen, die die nachfolgend beschriebene Struktur aufweisen.

O. B. d. A. sei F stetig mit einer Dichte f; es gelte $F(0)=0$ und $F(M)=1$ für ein $M>0$, sowie $f(a)>0$ für $0<a<M$. Weiter sei die Funktion $g(a,x)$ als Funktion von x (d. h. bei festem a) für $x \neq a$ differenzierbar.

Unter diesen technischen Annahmen sind die folgenden Bedingungen hinreichend dafür, dass die Lösung von (3) die Form (11) besitzt; es gelte:

a) $\frac{\partial}{\partial x} g(a,x) = 0 \quad \text{für} \quad x > a$ (14a)

b) $\frac{\partial}{\partial x} g(a,x) = \beta > 0 \quad \text{für} \quad x < a$ (14b)

c) $g(a,a) = \alpha \cdot a \quad \text{mit} \quad \alpha > 0$ (14c)

d) $\beta > \alpha$ (14d)

Mit Hilfe partieller Integration ergibt sich für jedes a

$$
\begin{aligned}
E(g(a,X)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(a,x)\, dF(x) = \\
&= \int_0^M g(a,x)\, f(x)\, dx \\
&= g(a,M)F(M) - g(a,0)F(0) - \int_0^M \frac{\partial}{\partial x} g(a,x)\, F(x) dx \\
&= g(a,a) - \int_0^a \beta \cdot F(x) dx \qquad (\text{vgl. } 14a, b) \\
&= \alpha \cdot a - \beta \cdot \int_0^a F(x)\, dx \qquad (\text{vgl. } 14c)
\end{aligned}
$$

Daraus ergibt sich

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{da} E(g(a,X)) = \alpha - \beta F(a) \\
&\frac{d^2}{da^2} E(g(a,X)) = -\beta\, f(a) \quad < 0 \qquad (\text{vgl. } 14b)
\end{aligned}
$$

Wegen 14d ist a* mit

$$F(a^*) = \frac{\alpha}{\beta}$$

die Lösung von (3).

Im Newsvendor-Modell gilt: $\beta = p - z$, $\alpha = p - c$.

5.
Kritik an der Verwendung von Erwartungswerten ist natürlich nicht neu; schon 1972 wurde von manchen der Erwartungswert als Beurteilungskriterium „endgültig zu den Akten gelegt“ (Mellwig (1972)), da Kompensationseffekte in den Erwartungswert eingehen, die bei einmaligen Konsequenzen keine Rolle spielen können. Wie in Abschnitt 2 beschrieben, ist dieser Einwand grundsätzlich relevant, kann jedoch unter den dort beschriebenen Annahmen (Konzentration der Verteilung um den Erwartungswert, zahlreiche Konsequenzen einer Entscheidung) partiell entkräftet werden.

Schwieriger erscheint die in Abschnitt 3 im Rahmen des Newsvendor-Modells geschilderte Problematik, die aus der Maximierung des erwarteten Gewinns folgt. Das „Versagen“ des Erwartungswertkriteriums beim Vergleich der durch F bzw. G gegebenen optimalen Bestellungen widerspricht der Intuition und wohl auch dem Verhalten der Entscheidungsträger.

Im Rahmen der Erwartungsnutzentheorie (und auch anderer entscheidungstheoretischer Ansätze) besteht die in Abschnitt 3 beschriebene Problematik i. a. nicht, da die gesamte Verteilung bei der Entscheidungsfindung berücksichtigt wird. Für den Anwender besteht dann natürlich die Schwierigkeit, seine zugrunde liegende Nutzenfunktion zu spezifizieren. Andere, pragmatisch begründete Vorgehensweisen, die nicht zu Lösungen der Form (11) bzw. (13) führen, sind möglich, z. B. die Verwendung eines relativen Regret-Kriteriums (Vgl. Scholl, S. 102 ff.)

**Literatur**

Hopp, W. J., Spearman, M. L.: Factory Physics, McGraw Hill, 2001
Mellwig, W.: Flexibilität als Aspekt unternehmerischen Handelns, ZfbF, 1972
Müller, A., Stoyan, D.: Comparison Methods for Stochastic Models and Risk, Wiley, 2002
Rohatgi, V. K., Ehsanes Saleh, A. K.: An Introduction to Probability and Statistics, Wiley,2001
Scholl, A.: Robuste Planung und Optimierung, Physica, 2001