



Technische Universität Ilmenau
Fakultät für Maschinenbau

Masterarbeit

für Herrn Ronald Kampmann

geboren am 06.05.1981 in Nordhausen

Studiengang Optronik

THEMA

„Kombinierte Simulation von Fresnelbeugung und
Miestreuung zur Partikelcharakterisierung in fließenden
Suspensionen“

verantw. Hochschullehrer: Prof. Dr. rer.nat. habil. Stefan Sinzinger

Ausgabedatum: 31.05.2010

Abgabedatum: 30.11.2010

Ilmenau, den 08.06.2010

Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Gerhard Linß
Vorsitzender des Prüfungsausschusses

Aufgabenstellung für die Master-Arbeit

von Herrn Ronald Kampmann

Thema: Kombinierte Simulation von Fresnelbeugung und Miestreuung zur Partikelcharakterisierung in fließenden Suspensionen

Wird eine bekannte aberrationsfreie Wellenfront beim Durchgang durch eine fließende Suspension gestört, so können Rückschlüsse auf die Eigenschaften der Suspension wie etwa die Partikelmassenkonzentration oder Partikelgrößenverteilung gezogen werden. Ein Konzept der Auswertung ist die Talbotinterferometrie als eine Common-Path-Methode. Hierbei wird ausgenutzt, dass sich durch ein Beugungs-Interferenz-Phänomen im Bereich der Fresnelbeugung Selbstabbildungen eines periodischen Beugungsobjektes ausbilden. Wird die Wellenfront in Amplitude und/oder Phase gestört, z.B. durch streuende Partikel, so kommt es auch zu einer Störung der Selbstabbildung. Im Allgemeinen kann die Streuung an Partikeln mit der Miestheorie beschrieben werden, die auf den Maxwell'schen Gleichungen beruht. Am FG Technische Optik stehen mehrere Programme zur Optiks simulation zur Verfügung, die sich für verschiedene Aufgaben besonders eignen. Will man die Fresnelbeugung und die Miestreuung an Partikeln gleichzeitig simulieren, ergibt sich die Schwierigkeit, dass das erste vorzugsweise mit Strahlenoptik und das zweite mit Wellenoptik gerechnet wird. Das Ergebnis der Arbeit soll eine Strategie sein, wie man mit den vorhandenen Programmen und selbstgeschriebenen Programmmodulen Partikelmesstechnik mit einem Talbotinterferometer simulieren kann. Die Simulationsergebnisse sollen durch Messungen im Labor verifiziert werden.

Aufgabenpakete

- Einarbeitung in die physikalischen Zusammenhänge der Fresnelbeugung und der Miestreuung
- Einarbeitung in die Programmpakete VirtualLab® und ASAP®
- Herausarbeiten der Simulationsmöglichkeiten, Benennung der Probleme, Aufzeigen von Lösungsmöglichkeiten
- Festlegung von Lösungsstrategie, Programmierung eigener Programmmodule
- Vergleich mit Messungen im Labor

Ausgabedatum: 31.05.2010

Verantwortlicher Hochschullehrer: Prof. Dr. Stefan Sinzinger

Betreuer an der TU Ilmenau: Dipl.-Ing. Meike Hofmann

Dipl.-Ing. (FH) Roman Kleindienst

Ilmenau, 8.6.10

Ort, Datum


Unterschrift des verantwortlichen Hochschullehrers

Ilmenau, 08.06.2010

Ort, Datum


Unterschrift des Studierenden

Selbständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, dass die vorliegende Master-Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt wurde.

Ort, Datum, Unterschrift

.....

Zusammenfassung / Abstract:

Deutsch:

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Partikelcharakterisierung durch Vermessung der Streustrahlung. Dazu wird auf die Theorien der Miestreuung und des Talbot-Effektes zurückgegriffen. Die betrachteten Partikel haben dabei einen Durchmesser von 1 bis 100 μm . Es wird ein Modell entwickelt, mit welchem die Störung der Selbstabbildung einer periodischen Struktur durch ein sphärisches Streuzentrum simuliert werden kann. Umgesetzt wird die kombinierte Simulation mit den Softwareumgebungen MATLAB[®] und VirtualLab[™].

Im letzten Teil der Arbeit erfolgen ein Vergleich zwischen den Ergebnissen der Experimente und Simulationen sowie eine Untersuchung der aufgetretenen Diskrepanzen, bevor auf eine mögliche Optimierung des Modells bezüglich einer genaueren Übereinstimmung zwischen Theorie und Praxis eingegangen wird.

English:

The present work deals with the particle characterization using the theory of Mie scattering and the Talbot effect. The observed particles have a diameter of one to 100 microns.

We develop a model for the simulation of the disturbance of the self-imaging of a periodic structure by a spherical scattering center. It is implemented in the combined simulation with the software environments MATLAB[®] and VirtualLab[™].

In the last part of the work a comparison between experimental and simulation results and an analysis of the discrepancies are presented. After that a possible optimization of the model will be discussed with respect to a closer agreement between theory and practice.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung	1
2 Grundlagen	3
2.1 Die Wellengleichung und ihre stationäre, skalare Näherung	3
2.2 Talbot-Effekt	6
2.2.1 Ebene Welle Theorie	6
2.2.2 Gauß- und Kugelwellen	11
2.3 Inelastische Streuung an Sphären	15
3 Separate Simulation	25
3.1 Simulation des Talbot-Effektes	25
3.2 Simulation der Streuung an Sphären	28
4 Modellbildung	32
4.1 Talbot-Effekt	32
4.2 Streuung an Sphären	34
4.3 Kombination	37
5 Kombinierte Simulation	46
5.1 Vergleich Simulation und reale Messung	46
5.2 Größenvariation des Streuzentrums	50
5.3 Positionsänderung des Streuzentrums	52
6 Zusammenfassung und Ausblick	57
6.1 Zusammenfassung	57
6.2 Ausblick	57
7 Anhang	60
7.1 Notationen	60
7.2 Formelzeichen	62
7.3 MATLAB [®] -Programme	64
7.4 VirtualLab [™] -Ablaufplan	68
Literaturverzeichnis	70

1 Einleitung

Das Resultat einer quantitativen Analyse bezüglich der Anzahl, Verteilung und Größe von Partikeln innerhalb eines physikalischen Systems erlaubt eine signifikante Aussage über dessen Zustand. Die Partikel können dabei aus einem Makromolekül oder auch aus Gruppen von Molekülen bestehen. Ihre Größenordnung erstreckt sich über einen Bereich von mehreren Nanometern bis hin zu einigen Zentimetern.

In dieser Arbeit werden Partikel, welche Streuzentren darstellen, mit einem Durchmesser von ein bis 100 μm untersucht. Die Motivation besteht darin, dass die Kenntnis über Größe und Anzahl von Teilchen in Schmiermitteln einen direkten Bezug zur Lebenszeit von Maschinen darstellt und die Wartungsintervalle optimiert werden können.

Die Kombination von zwei physikalischen Prinzipien soll dabei gezielt ausgenutzt werden, um den aus einer optischen Messung resultierenden Informationsgehalt zu erhöhen. So wird die zu analysierende Suspension durch ein Talbot-Interferometer geleitet. Ein Talbot-Interferometer basiert auf der Selbstabbildung einer periodischen Struktur in definierten, sich wiederholenden Abständen im Nahfeld hinter der Struktur. Das bedeutet, dass eine Abbildung ohne zusätzliche optische Bauteile realisiert wird.

An den Teilchen in der Suspension wird das sich ausbreitende komplexe Wellenfeld gestreut und erzeugt eine lokale Störung der Selbstabbildung. Diese Störung beinhaltet eine definierte Struktur, welche Aufschluss über ihre Ursache gibt. Durch Anwendung der Streutheorie kann bei Kenntnis des Brechungsindex, der Form und Größe des Streuzentrums sowie der Wellenlänge der einfallenden elektromagnetischen Strahlung ein charakteristisches Winkelspektrum berechnet werden.

Im Rahmen dieser Arbeit wird ein Modell entwickelt, welches die komplexe Problematik der Streuung sowie der Nahfeldbeugung hinreichend beschreibt. Mit Hilfe dieses Modells und der Verwendung von einschlägiger Optik-Software sowie selbstprogrammierter Berechnungsroutinen wird eine Simulation der Gesamtproblematik durchgeführt.

Die Ergebnisse der Simulation werden anhand experimenteller Messungen an Partikeln unterschiedlicher Größe validiert.

Zu Beginn der Arbeit wird eine detaillierte Einführung in die Theorie der Streuung an Sphären und die des Talbot-Effektes gegeben. Auf Basis dieser Grundlagen werden im Anschluss der Talbot-Effekt und die Streuung an sphärischen Partikeln getrennt voneinander simuliert. Daraufhin erfolgt die Bildung eines Modells unter Berücksichtigung beider Theorien. Mit Hilfe dieses kombinierten Modells werden die Streuung an Sphären und die dadurch erzeugte

Störung der Selbstabbildung mit den Softwareumgebungen MATLAB[®] und VirtualLab[™] simuliert. Ein Vergleich zwischen den Ergebnissen der experimentellen Messungen und denen der Simulationen wird abschließend zur Validierung und Optimierung des erarbeiteten Modells genutzt.

2 Grundlagen

2.1 Die Wellengleichung und ihre stationäre, skalare Näherung

Die grundlegende Bedeutung der Wellengleichung für die in dieser Arbeit behandelten physikalischen Zusammenhänge ist Anlass für ihre Herleitung aus den Maxwell'schen Gleichungen in differentieller Form. Die Maxwell'schen Gleichungen beschreiben die Kopplung der elektrischen und magnetischen Feldgrößen einer elektromagnetischen Welle [VOG99, S.426]. In differentieller Form sowie mit Beschränkung auf isotrope und homogene Dielektrika (keine elektrische Leitfähigkeit $\sigma = 0$) und unter Vernachlässigung von Ladungsträgern im betrachteten Festkörper lauten die Feldgleichungen wie folgt:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \quad (\text{I}) \quad (2.1.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (\text{II})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \varepsilon\mu \dot{\vec{E}} \quad (\text{III})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \quad (\text{IV})$$

Die Größen \vec{E} und \vec{B} stellen die elektrische Feldstärke und die magnetische Flussdichte dar. Die Dielektrizitätskonstante ε und die magnetische Permeabilität μ sind Materialkonstanten und charakterisieren den Festkörper. Eine weitere Vereinfachung ist die Unabhängigkeit der Materialkonstanten vom elektrischen und magnetischen Feld als auch vom Ort, was die folgenden Schritte vereinfacht.

Die Ableitung der Gleichung (III) in (2.1.1) nach der Zeit ergibt

$$\vec{\nabla} \times \dot{\vec{B}} = \varepsilon\mu \ddot{\vec{E}} \quad (2.1.2)$$

und Einsetzen von Gleichung (I) in (2.1.1) führt zu:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\varepsilon\mu \ddot{\vec{E}}. \quad (2.1.3)$$

Die linke Seite von Gleichung (2.1.3) kann mit Hilfe einer Rechenvorschrift für Differentialoperatoren [BRO05, S.680] unter Berücksichtigung von Gleichung (II) in (2.1.1) zu:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = \text{grad div } \vec{E} - \Delta \vec{E} \rightarrow \Delta \vec{E} = \varepsilon\mu \ddot{\vec{E}} \quad (2.1.4)$$

umgeformt werden. Das Produkt der Materialkonstanten ist umgekehrt proportional zu dem Quadrat der Phasengeschwindigkeit v der elektromagnetischen Welle im betrachteten Medi-

um. Durch Umstellung von Gleichung (2.1.4) resultiert die Wellengleichung für das elektrische Feld zu der bekannten Form

$$\Delta \vec{E}(\vec{r}, t) - \frac{1}{v^2} \ddot{\vec{E}}(\vec{r}, t) = 0, \quad (2.1.5)$$

wobei \vec{r} den Ortsvektor darstellt.

Eine ähnliche Herleitung liefert die Wellengleichung für das magnetische Feld.

Die einfachste Lösung der Wellengleichung (2.1.5) ist eine ebene sinusförmige Welle der Form:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kz + \varphi_0)} \quad \text{mit } \omega = 2\pi f \quad \text{und } k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (2.1.6)$$

Die Größen im Exponenten beschreiben die Phase der Welle. Dabei sind ω die Kreisfrequenz, k die Wellenzahl und φ_0 die Anfangsphase. Die Wellenlänge λ und die Frequenz f der elektromagnetischen Welle sind über den Zusammenhang $v = \lambda f$ miteinander verknüpft, wobei v die Phasengeschwindigkeit darstellt.

Trifft eine ebene Welle auf ein Hindernis, so ist die Transversalität der propagierenden Welle nach dem Hindernis gestört [BER87, S.25]. Die exakte mathematische Lösung der Wellengleichung unter den vorliegenden Randbedingungen ist nur in speziellen Fällen möglich. Aus diesem Grund ist es zweckdienlich Vereinfachungen durchzuführen, damit genäherte jedoch aussagekräftige Lösungen berechnet werden können. In kartesischen Koordinaten repräsentiert Gleichung (2.1.5) drei formal identische und entkoppelte Differentialgleichungen für die einzelnen Komponenten x , y und z .

Ist das Verhältnis der Größenordnung der beugenden Struktur zur Wellenlänge größer eins so kann die Polarisation der Welle vernachlässigt werden [BER87, S.25], so dass sich die vektorielle Wellengleichung (2.2.5) zu einer skalaren Differentialgleichung der Form

$$\Delta U(\vec{r}, t) - \frac{1}{v^2} \ddot{U}(\vec{r}, t) = 0 \quad (2.1.7)$$

ergibt. Im experimentellen Teil dieser Arbeit wird mit einem Halbleiterlaser gearbeitet, welcher näherungsweise monochromatische Strahlung emittiert. Wird zudem von harmonischen Wellen ausgegangen kann mit Hilfe des Separationsansatzes das komplexe Wellenfeld in einen räumlichen und einen zeitlichen Anteil zerlegt werden. Bei Beschränkung auf den physikalisch interessanten Realteil des elektrischen Feldes ergibt sich die Form:

$$U(\vec{r}, t) = \text{Re}\{U(\vec{r})e^{-i\omega t}\} \quad \text{mit } U(\vec{r}) = U'(\vec{r})e^{i\varphi(\vec{r})}. \quad (2.1.8)$$

Die Größe $U(\vec{r})$ stellt einen Zeiger (Phasor) in der komplexen Ebene dar wobei sein Betrag die Amplitude und sein Argument die Phase der Welle wiedergibt. Somit folgt durch Einsetzen von Gleichung (2.1.8) in die Wellengleichung (2.1.5) die Helmholtz-Gleichung

$$(\Delta + k^2)U(\vec{r}) = 0 \quad \text{mit} \quad k^2 = \frac{\omega^2}{v^2}, \quad (2.1.9)$$

die eine zeitunabhängige Differentialgleichung ist. Sie kann auch als eine stationäre und skalare Näherung der Wellengleichung (2.1.5) bezeichnet werden.

2.2 Talbot-Effekt

Der Talbot-Effekt resultiert aus der Wechselwirkung eines elektromagnetischen Wellenfeldes mit einem periodischen Hindernis. Dieser Effekt ist Ergebnis der sogenannten Fresnel- oder Nahfeldbeugung. Fox Talbot beobachtete 1836 [TAL36], dass das Wellenfeld hinter einem Gitter entlang seiner Ausbreitungsrichtung eine Periodizität aufweist und sich selbst in bestimmten Distanzen „abbildet“ (Abb. 2-1). Diese Distanzen sind eine Funktion der Wellenlänge und der Form des einfallenden Wellenfeldes sowie der Periode der beugenden Struktur. Für die Erklärung dieses Beugungseffektes bestehen mehrere Ansätze. Neben der im Folgenden beschriebenen Ebene-Welle-Theorie (Rayleigh-Ansatz) gibt es unter anderem weitere Theorien von Huygens und Young [LOH06, S.142].

2.2.1 Ebene Welle Theorie

Trifft eine ebene Welle auf eine periodische Struktur in der Form eines Gitters, so wird diese gebeugt. Die Superposition der nach dem Huygensschen Prinzip entstanden Elementarwellen ergibt in ausreichender Entfernung L vom Gitter in einer Ebene senkrecht zur Ausbreitungsrichtung ein charakteristisches Beugungsmuster. In diesem Fall wird von Fraunhofer- oder Fernfeldbeugung gesprochen. Hierzu muss die Bedingung

$$\frac{a^2}{2L} \ll \lambda \quad (2.2.1)$$

erfüllt sein wobei die Größe a den Radius des Wellenfeldes direkt hinter der beugenden Struktur darstellt [VOG99, S. 532]. Das bedeutet, dass die Beobachtungsebene in einem vergleichsweise großem Abstand L hinter dem Gitter positioniert ist. Die Minimierung des Abstandes L in Größenordnungen von a führt zur Verletzung der Bedingung (2.2.1) und folglich zur Betrachtung der Problemstellung im Geltungsbereich der Nahfeldbeugung.

Die folgende Beschreibung des Talbot-Effektes lehnt sich eng an die Vorgehensweise von [LOH06, S. 185] an. Zu Beginn wird der Ursprung des verwendeten kartesischen Koordinatensystems in die Ebene der periodischen Struktur gelegt, wobei die z -Achse der Richtung der einfallenden Welle entspricht (Abb. 2-1).

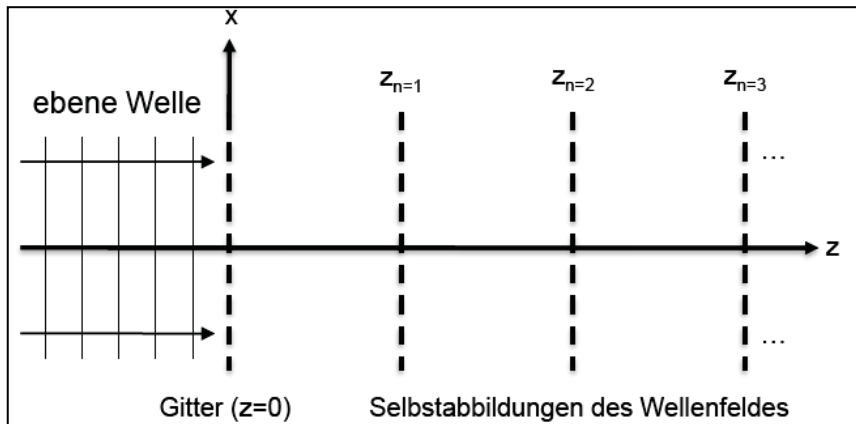


Abbildung 2-1: Selbstabbildung.

Das betrachtete Sinusamplitudengitter besitzt eine Periode P , welche durch eine Ortsfrequenz $\nu = 1/P$ ausgedrückt werden kann. Die Transmissionsfunktion $T(x)$, wie auch in Abb. 2-2 dargestellt, lautet wie folgt.

$$T(x) = a + b \cos(2\pi\nu x) \quad \text{mit } a + b \leq 1 \quad \text{und } b \leq a \quad (2.2.2)$$

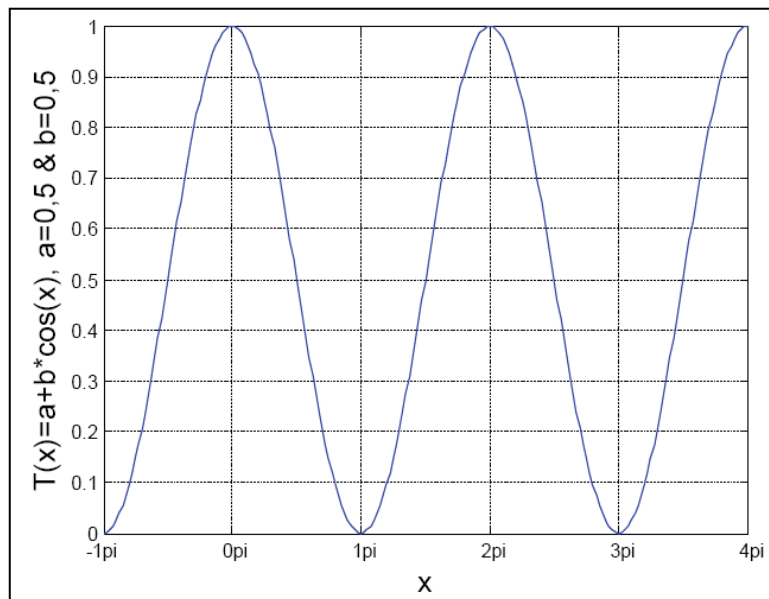


Abbildung 2-2: Transmissionsfunktion eines Sinusgitters.

Die Wellenfelder werden im Folgenden mit den unter Abschnitt 2.1 getroffenen Näherungen beschrieben. Das bedeutet, dass sich eine elektromagnetische Welle in einem isotropen, homogenen und nichtleitenden Medium ausbreitet. Die hier verwendete zweidimensionale Betrachtungsweise (Abb. 2-1) des Talbot-Effektes wird in das Formelwerk mit einbezogen.

Für die Amplitudenverteilung des komplexen Wellenfeldes wird hier nur der räumliche Anteil betrachtet und kann vor dem Gitter durch

$$U(\vec{r}) = U(x, z = 0) = U_0 \quad (2.2.3)$$

und direkt hinter dem Gitter mit

$$U(\vec{r}) = U(x, z = 0) = U_0 \cos^2(2\pi\nu x) = \frac{U_0}{2} [1 + \cos(2 \times 2\pi\nu x)] \quad (2.2.4)$$

beschrieben werden. Vor dem Gitter bei $z < 0$ entspricht die Amplitudenverteilung der Form einer ebenen Welle, vgl. Gleichung (2.1.6). Aus Gleichungen (2.2.3) und (2.2.4) kann die Form eines möglichen Lösungsansatzes (2.2.5) gewählt werden, welcher die Helmholtz-Gleichung (2.1.9) erfüllen muss.

$$U(x, z) = U_1(z) + U_2(z) \cos(2\pi\nu x) \quad (2.2.5)$$

Dieser Ansatz (2.2.5) eingesetzt in die Helmholtz-Gleichung ergibt:

$$(\Delta + k^2)U(x, z) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) [U_1(z) + U_2(z) \cos(2\pi\nu x)] = 0$$

$$0 = 0 - (2\pi\nu)^2 U_2(z) \cos(2\pi\nu x) + U_1''(z) + U_2''(z) \cos(2\pi\nu x) + k^2 [U_1(z) + U_2(z) \cos(2\pi\nu x)]$$

und umgeformt

$$0 = U_1''(z) + k^2 U_1(z) + U_2''(z) \cos(2\pi\nu x) + U_2(z) \cos(2\pi\nu x) [k^2 - (2\pi\nu)^2].$$

Die Erfüllung der obigen Gleichung ist gewährleistet, wenn für alle x gilt:

$$0 = U_1''(z) + k^2 U_1(z) \quad (\text{I}) \quad (2.2.6)$$

$$\text{und } 0 = U_2''(z) \cos(2\pi\nu x) + U_2(z) \cos(2\pi\nu x) [k^2 - (2\pi\nu)^2] \quad (\text{II})$$

Beide Gleichungen sind homogene lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Eine mögliche Lösung für (I) lautet:

$$U_1(z) = U_1 \tilde{e}^{\pm ikz}. \quad (2.2.7)$$

Nach Division durch den Kosinus-Term in (II) von Gleichung (2.2.6) folgt analog zu (I):

$$U_2(z) = U_2 \tilde{e}^{\pm i(\sqrt{k^2 - (2\pi\nu)^2})z}. \quad (2.2.8)$$

Die zu Beginn festgelegte Ausrichtung des Koordinatensystems und das demnach in positive z -Richtung propagierende Wellenfeld ist Grund zur Vernachlässigung des Minuszeichens vor

der imaginären Einheit im Exponentialterm in den Gleichungen (2.2.7) und (2.2.8). Einsetzen von (2.2.7) und (2.2.8) in den gewählten Ansatz (2.2.5) führt zu

$$U(x, z) = U_1 \tilde{e}^{ikz} + U_2 \tilde{e}^{i(\sqrt{k^2 - (2\pi\nu)^2})z} \cos(2\pi\nu x). \quad (2.2.9)$$

Die Bestimmung der Konstanten $U_1 \tilde{}$ und $U_2 \tilde{}$ mittels Grenzwertbildung von $z \rightarrow 0$ sowie der Vergleich von Gleichung (2.2.9) mit der Amplitudenverteilung nach dem Gitter (2.2.4) ist ohne viel Aufwand möglich. Mit

$$U_1^* = U_2^* = \frac{U_0}{2} \text{ sowie der Umformung } i(\sqrt{k^2 - (2\pi\nu)^2})z = ik(\sqrt{1 - (\lambda\nu)^2})z$$

ergibt sich die Amplitudenverteilung des Wellenfeldes nach dem Gitter zu

$$U(x, z) = \frac{U_0}{2} \left[e^{ikz} + e^{ik(\sqrt{1 - (\lambda\nu)^2})z} \cos(2\pi\nu x) \right]. \quad (2.2.10)$$

Diese Amplitudenverteilung des Wellenfeldes (2.2.10) setzt sich aus zwei Wellen zusammen. Der erste Exponentialterm stellt exakt eine ebene Welle, vgl. (2.1.6) dar. Der zweite Term in der eckigen Klammer ist ebenfalls eine Art ebene Welle, wobei die Amplitude mit einer Kosinusfunktion in x -Richtung moduliert wird. Zudem wird die Wellenzahl mit einer Zahl kleiner eins multipliziert, was eine Verringerung der Wellenzahl und folglich einer Erhöhung der Phasengeschwindigkeit bewirkt.

Die Ebenen konstanter Phase einer Welle, propagieren entlang ihrer Ausbreitungsrichtung mit der Phasengeschwindigkeit v_p , welche aus der Phase der Welle berechnet werden kann. So folgt aus Gleichung (2.2.10) unter Berücksichtigung der zeitlichen Abhängigkeit einer Welle

$$kz - \omega t + \varphi_0 = \text{const} \text{ und } k(\sqrt{1 - (\lambda\nu)^2})z - \omega t + \varphi_1 = \text{const}.$$

Umstellen nach der Ortskoordinate z und anschließende Differentiation nach der Zeit t

$$z = \frac{\omega t}{k} - \frac{\varphi_0}{k} + \frac{\text{const}}{k} \rightarrow v_{P1} = \dot{z} = \frac{dz(t)}{dt} = \frac{\omega}{k} \quad (\text{I}) \quad (2.2.11)$$

$$z = \frac{\omega t}{k(\sqrt{1 - (\lambda\nu)^2})} - \frac{\varphi_1}{k(\sqrt{1 - (\lambda\nu)^2})} + \frac{\text{const}}{k(\sqrt{1 - (\lambda\nu)^2})} \rightarrow v_{P2} = \frac{\omega}{k(\sqrt{1 - (\lambda\nu)^2})} \quad (\text{II})$$

ergeben rein formal zwei unterschiedliche Phasengeschwindigkeiten. Für den Fall, dass sich beide Wellen im Vakuum ausbreiten, wäre die Phasengeschwindigkeit v_{P1} gleich der Vakuum-Lichtgeschwindigkeit $c_0 \approx 2.998 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ und $v_{P2} > c_0$.

An dieser Stelle ist es sinnvoll kurz auf die Bedeutung der Phasengeschwindigkeit einzugehen. Die Phasengeschwindigkeit ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit eines unendlich langen Wellenzuges, der lediglich aus einer einzigen Frequenz besteht und somit keine Information übertragen kann [BER87, S.203]. Für diesen Spezialfall ist es möglich, die Grenze der Lichtgeschwindigkeit zu überwinden, da die Kausalität nicht verletzt wird.

Für den Erkenntnisgewinn aus einem Experiment ist es jedoch notwendig Signale zu übertragen. Das heißt, es werden ohne Ausnahme endliche Wellenzüge mit verschiedenen Frequenzkomponenten verwendet. Die Geschwindigkeit dieser Signalübertragung ist die Signalgeschwindigkeit oder auch Gruppengeschwindigkeit, welche immer kleiner gleich der Vakuum-Lichtgeschwindigkeit ist.

Mit den zwei Gleichungen (2.2.11) kann der Talbot-Effekt anschaulich erklärt werden. Das propagierende Wellenfeld hinter dem Gitter besteht aus der Überlagerung zweier Felder, welche sich mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten ausbreiten und miteinander interferieren. Auf Grund der Relativgeschwindigkeit zwischen den Wellen und der 2π -Periodizität von Exponentialfunktionen ist das Interferenzmuster bei jeder Wegdifferenz von $n2\pi$ mit $n = 0, 1, 2 \dots$ zwischen beiden Wellen äquivalent. Dieser Effekt wird Selbstabbildung genannt.

Für die Bestimmung der Selbstabbildungs- oder Talbot-Länge kann Gleichung (2.2.10) weiter vereinfacht werden:

$$U(x, z) = \frac{U_0 e^{ikz}}{2} \left[1 + e^{ik(\sqrt{1-(\lambda v)^2}-1)z} \cos(2\pi vx) \right]. \quad (2.2.12)$$

Die oben beschriebene 2π - Periodizität und das somit wiederholte Interferenzmuster führt mit dem Exponentialterm in Gleichung (2.2.12) auf die Talbot-Länge (2.2.13)

$$e^{in2\pi} = e^{ikz_n(\sqrt{1-(\lambda v)^2}-1)} \rightarrow z_n = \frac{n2\pi}{k(\sqrt{1-(\lambda v)^2}-1)} \text{ mit } \lambda = \frac{2\pi}{k} \text{ folgt}$$

$$z_n = \frac{n\lambda}{(\sqrt{1-(\lambda v)^2}-1)}. \quad (2.2.13)$$

Aus der Gleichung für die Talbot-Länge (2.2.13) ist zu erkennen, dass diese eine Funktion der Wellenlänge und der Ortsfrequenz des Gitters ist. In dieser Arbeit wird in einem Wellenlängenbereich von der Größenordnung mehrerer hundert Nanometer und einer Gitterperiode im Mikrometerbereich gearbeitet. Für diesen Fall ist das Quadrat des Produktes von Wellenlänge und Ortsfrequenz kleiner eins womit gilt [GÖH99, S.49] $\sqrt{1-x} \approx 1 - x/2$ für $x \ll 1$ und angewendet auf Gleichung (2.2.13) mit $v = 1/P$ folgt:

$$|z_n| \approx \frac{2n^2 p^2}{\lambda}. \quad (2.2.14)$$

Obenstehende Gleichung (2.2.14) gibt den Abstand der n -ten Selbstabbildung an. Die zur Herleitung der Talbot-Länge genutzte Periodizität von 2π ist keine zwingende Notwendigkeit. Bei einer Periodizität von ungeraden Vielfachen von π entstehen ebenfalls Selbstabbildungen, nur sind diese das „Negativ“ des verwendeten Gitters.

2.2.2 Gauß- und Kugelwellen

Die in Abschnitt 2.2.1 beschriebene Herleitung der Talbot-Distanz bezieht sich auf den Spezialfall der ebenen Welle. Zur Vollständigkeit werden in dieser Arbeit noch gaußförmige und sphärische Wellenfelder mit angegeben, angelehnt an die Arbeit von Paturski [PAT89, S.10]. Wird ein Gitter mit einem Gaußstrahl, in Form eines TEM_{00} -Modes beleuchtet und das Gitter befindet sich in der Strahltaile ergibt sich eine Anordnung wie in Abb. 2-3 dargestellt.

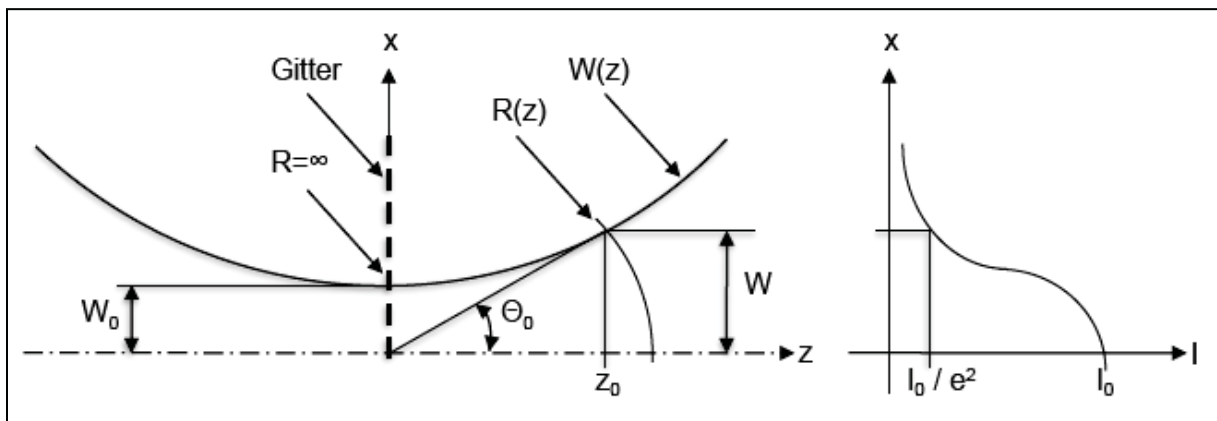


Abbildung 2-3: Gitteranordnung und Gaußstrahlparameter.

Links in Abb. 2-3 ist der Strahlenverlauf eines Gaußbündels mit seinen charakteristischen Größen dargestellt. Das Diagramm rechts zeigt die gaußförmige, radiale Intensitätsverteilung. Wie schon anhand obenstehender Skizze zu erwarten, besteht bei dieser Strahlgeometrie auf Grund des Divergenzwinkels θ_0 die Wahrscheinlichkeit einer in fortschreitend positiver z -Richtung vergrößerten Selbstabbildung des Wellenfeldes.

Gaußsche Strahlen sind eine Lösung der paraxialen Helmholtzgleichung [JAH01, S.82] und die charakteristischen Größen werden im Folgenden kurz erläutert. Die Gesamtstrahlbreite $2W(z)$ beschreibt die radiale Ausdehnung der Intensitätsverteilung wobei diese bei $W(z)$ auf das e^{-2} fache gegenüber der Maximalintensität abgefallen ist.

W_0 stellt die minimale radiale Ausdehnung des Gaußbündels in der Strahltaile dar. An dieser Stelle besitzen die Wellenfronten, wie in der Theorie des Gaußschen Strahls beschrieben [JAH01, S.83], einen unendlichen Krümmungsradius. Die Rayleighlänge z_0 ist per Definition die axiale Entfernung von der Strahltaile bei der sich der radial ausgeleuchtete Querschnitt verdoppelt hat. Die physikalischen Zusammenhänge der einzelnen Größen sind in folgenden Gleichungen beschrieben:

$$W(z) = W_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2}, \quad R(z) = z \left[1 + \left(\frac{z_0}{z}\right)^2\right], \quad W_0 = \sqrt{\frac{\lambda z_0}{\pi}}. \quad (2.2.15)$$

Oft ist es üblich weitere Strahlparameter mit anzugeben. Der Divergenzwinkel θ_0 und der Strahlgüteparameter M^2 .

$$\theta_0 = \frac{W_0}{z_0} = \frac{\lambda}{\pi W_0}, \quad \frac{\theta_0 W_0 \pi}{\lambda} = M^2 \quad (2.2.16)$$

Der Strahlgüteparameter gibt die Abweichung der realen Strahlgeometrie von der eines idealen Gaußstrahls an. Eine Welle mit der Geometrie eines idealen Gaußstrahls hat somit einen Strahlgüteparameter $M^2 = 1$.

Das in Abb. 2-2 dargestellte Amplituden-Gitter (vgl. 2.2.5) kann neben der in Abschnitt 2.2.1 Gleichung (2.2.2) verwendeten mathematischen Beschreibung auch als Fourier-Reihe entwickelt werden.

$$U(x) = \sum_m a_m e^{im2\pi vx} = \sum_m a_m e^{\frac{im2\pi x}{P}} \quad \text{mit} \quad a_m = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi T(x) \cos(mx) dx \quad (2.2.17)$$

Dabei ist P die Periode des Gitters und a_m die Amplitude der m -ten Harmonischen, beschrieben als Fourier-Koeffizient. Die Gitter-Gleichung (2.2.17) eingesetzt in das Fresnel-Kirchhoff'sche Beugungsintegral [BOR80, S.380] unter Verwendung der parabolischen Näherung und anschließender Integration ergibt letztlich:

$$U(x', y', z) \sim \sum_m a_m e^{\left(\frac{4\pi^2 m^2 z^2}{k^2 P^2 W(z)^2}\right)} e^{\left(\frac{-4\pi m z x'}{k P W(z)^2}\right)} e^{\left(\frac{i\pi \lambda m^2 M_u z W^2}{P^2 W(z)^2}\right)} e^{\left(\frac{i2\pi m x' M_u W^2}{P W(z)^2}\right)}. \quad (2.2.18)$$

$U(x', y', z)$ beschreibt die Amplitude hinter dem Gitter wobei gestrichelte Größen x' und y' die Koordinaten des Bildraumes kennzeichnen. Die Größe M_u stellt einen Vergrößerungsfaktor der Selbstabbildung dar. Die ersten beiden Exponentialterme beschreiben eine axiale und radiale Amplitudenmodulation. Sie tragen zur Selbstabbildung nicht bei und werden nicht weiter betrachtet. Interessanter sind der dritte und vierte Term in Gleichung (2.2.18). Der vier-

te Exponentialterm beschreibt, die schon zu Beginn des Abschnitts angesprochene, laterale Vergrößerung der Selbstabbildung. Die Grundlage hierfür ist die Divergenz des Gaußbündels und folglich die laterale Ausbreitung des Wellenfeldes.

Der dritte Term beschreibt die axiale Periodizität des in z -Richtung propagierenden Wellenfeldes. Aus einem Vergleich des Exponentialterms mit seiner 2π -Periodizität folgt:

$$e^{\left(\frac{i\pi\lambda n^2 M_u z W^2}{P^2 W(z)^2}\right)} = e^{i2\pi} \rightarrow \frac{2nP^2}{\lambda} = zM_u \frac{W^2}{W(z)^2} \text{ mit } M_u = \frac{R(z)+z}{R(z)}$$

$$z_n = \frac{2nP^2}{\lambda} \frac{W(z)^2}{M_u W^2}. \quad (2.2.19)$$

Die Selbstabbildungsdistanz z_n ähnelt der für ebene Wellen (2.2.14), ist jedoch zusätzlich bewertet mit den Eigenschaften eines Gaußbündels.

Eine Vereinfachung von Gleichung (2.2.19) für den in Abb. 2-3 angenommenen Fall einer Gitterpositionierung in der Strahltaille veranschaulicht diesen Effekt. Aus dem Radius $R(z)$, welcher an dieser Stelle gegen unendlich strebt, ergibt sich Gleichung (2.2.19) zu

$$z_n = \frac{2nP^2}{\lambda} \left(\frac{W(z)}{W_0}\right)^2. \quad (2.2.20)$$

So stellt der quadratische Quotient am Ende von (2.2.20) die Zunahme der Selbstabbildungsdistanz dar. Veranschaulicht sind die laterale Vergrößerung der Selbstabbildung sowie die axiale Zunahme der Selbstabbildungsdistanz in untenstehender Abb. 2-4.

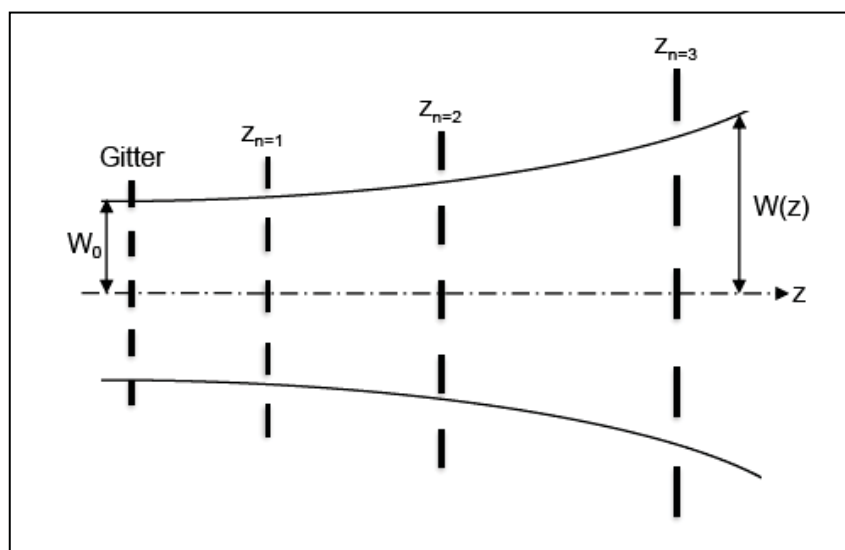


Abbildung 2-4: Selbstabbildung durch Gaußstrahlen.

Aus der Beleuchtung des Gitters mit einer sphärischen Welle (Abb. 2-5) folgt eine Gleichung für die Amplitudenverteilung hinter dem Gitter in der Form [PAT89, S.14]:

$$U(x', y', z) = \sum_m a_m e^{\left(\frac{i\pi\lambda m^2 R z}{P^2(R+z)}\right)} e^{\left(\frac{i2\pi m R x'}{P(R+z)}\right)}. \quad (2.2.21)$$

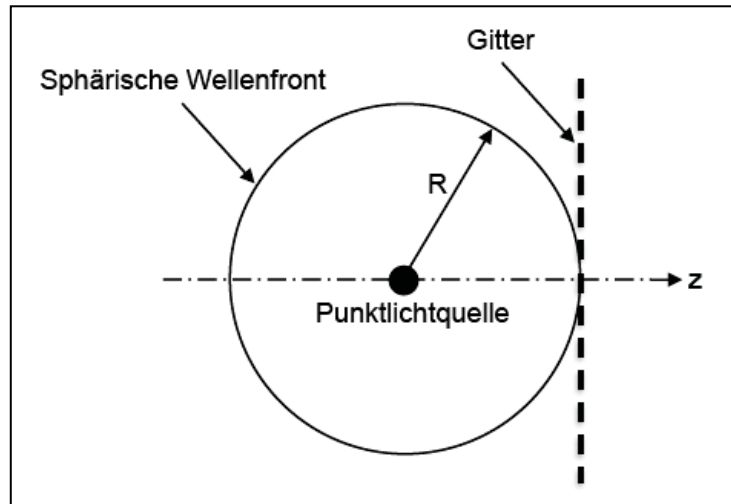


Abbildung 2-5: Sphärische Beleuchtung.

Der erste Exponentialterm in Gleichung (2.2.21) beschreibt die axiale Periodizität der Selbstabbildung und es folgt durch analoges Vorgehen zu Gleichung (2.2.19):

$$z_n = \frac{2nP^2R}{\lambda R - 2nP^2}. \quad (2.2.22)$$

Dieser Ausdruck beschreibt die Distanz der Selbstabbildungen des Gitters. Zu beachten ist, dass für genügend große n oben stehende Gleichung negative Werte annehmen kann. An dieser Stelle spricht man von virtueller Selbstabbildung, ähnlich der Abbildung eines Objektes in einem Spiegel. Da diese Form der Beleuchtung im Rahmen dieser Arbeit nicht relevant ist, wird an dieser Stelle auf die Arbeit von Krzysztof Patorski [PAT89, S.15] verwiesen.

2.3 Inelastische Streuung an Sphären

In diesem Abschnitt wird die Wechselwirkung einer elektromagnetischen Welle mit einem dielektrischen sphärischen Partikel behandelt.

Die Geometrie des Streuprozesses ist in Abb. 2-6 aufgezeigt. Eine ebene elektromagnetische Welle breitet sich in positive z -Richtung aus und trifft auf eine Kugel mit dem Radius a . Die Kugel hat ihr Zentrum im Koordinatenursprung. Eine Beschreibung der Ausbreitungsrichtung der Streuwelle erfolgt in Kugelkoordinaten.

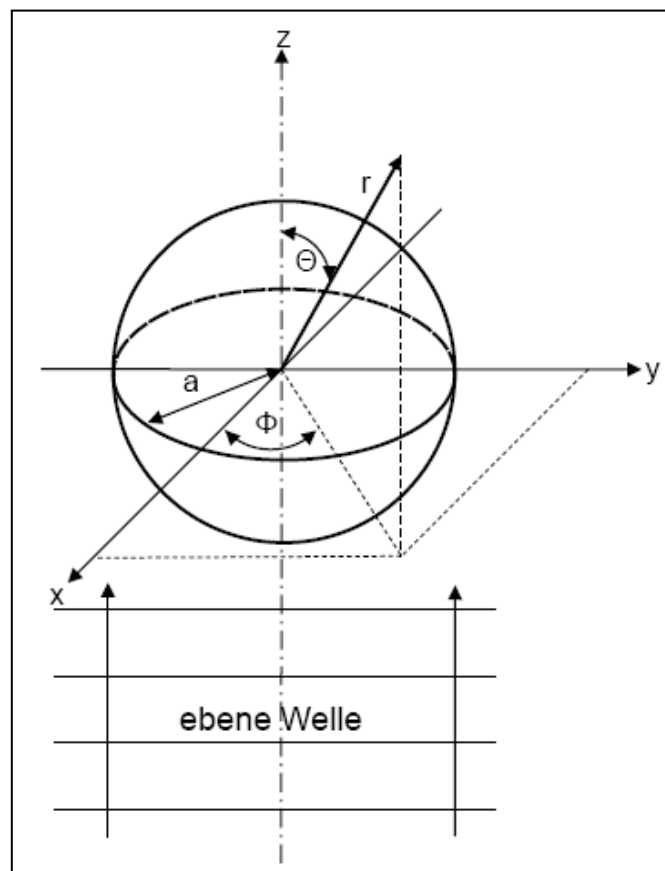


Abbildung 2-6: Streuanordnung.

Ausgangspunkt des Streuproblems sind erneut die Maxwell-Gleichungen (2.1.1) und ihre Lösung in Form der Wellengleichung (2.1.5) sowie die damit verbundenen Näherungen eines isotropen, homogenen und dielektrischen Mediums.

Dieser Abschnitt hält sich formal an die Vorgehensweise wie sie in [KER69, S.39] verwendet wird.

Eine elektrische und magnetische Welle kann in kartesischen Koordinaten wie folgt beschrieben werden (vgl. 2.1.6)

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}, \quad \vec{H}(\vec{r}, t) = H_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}. \quad (2.3.1)$$

Gleichungen (2.3.1) haben einen vektoriellen Charakter, was die weitere mathematische Behandlung unnötig verkompliziert. Das bedeutet es werden sechs Komponenten zur Beschreibung einer elektromagnetischen Welle benötigt. Jeweils eine Komponente für alle drei Raumrichtungen des elektrischen und magnetischen Feldes. Aus der elektromagnetischen Feldtheorie ist bekannt, dass elektrische und magnetische Wellen durch Potentiale beschrieben werden können [LEH05, S.450].

Grundlage ist die Rückführung der Felder \vec{E} und \vec{H} auf das Vektorpotential \vec{A} und das skalare Potential Ψ , welche aus den Maxwell-Gleichungen (2.1.1) folgen.

Gleichung (IV) in (2.1.1) sagt aus, dass das magnetische Feld \vec{H} oder $\vec{B} = \mu\vec{H}$ quellenfrei ist, das heißt, dass die Divergenz von \vec{B} überall im Raum gleich Null ist. Somit lässt sich \vec{B} als Wirbel eines Vektorfeldes beschreiben [BRO05, S.690].

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (2.3.2)$$

Für den zunächst statischen Fall wird $\dot{\vec{B}}$ gleich Null und es folgt für jeden Ort in Gleichung (I) in (2.1.1) $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$. Das elektrische Feld ist somit ein wirbelfreies Quellenfeld und besitzt ein skalares Potential Ψ . Die Poissonsche Differentialgleichung liefert

$$\vec{E} = -\nabla\Psi. \quad (2.3.3)$$

Für die Erweiterung der Gültigkeit von Gleichung (2.3.3) auf den dynamischen Fall muss die Zeitabhängigkeit von \vec{E} , also die Zeitabhängigkeit der Rotation durch einen zusätzlichen Term berücksichtigt werden [STR41, S.27]

$$\vec{E} = -\nabla\Psi - \dot{\vec{A}}. \quad (2.3.4)$$

Der Vorteil der Feldbeschreibung mit Potentialen liegt in der Verringerung der sechs Komponenten des \vec{E} - und \vec{B} -Feldes auf nun vier Potentialkomponenten.

Es besteht jedoch die Möglichkeit, dass mehrere Vektorpotentiale \vec{A} die Gleichung (2.3.2) erfüllen können. Beispielsweise kann die Rotation des Vektorpotentials $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\Psi$ ein identisches \vec{B} -Feld zur Folge haben wie \vec{A} . Um dies zu vermeiden wird eine zusätzliche Bedingung eingeführt. Das Vektorpotential wird über die Lorentz-Eichung [LEH05, S.260]

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \mu\varepsilon\dot{\Psi} = 0 \quad (2.3.5)$$

geeicht. Das \vec{B} -Feld muss jedoch gegenüber dieser Eichung unverändert, also eichinvariant bleiben. Wie an Gleichung (2.3.5) zu erkennen, beschreibt ein Ausdruck den Zusammenhang von \vec{A} und Ψ . Es ist nun überflüssig eine elektromagnetische Welle mit \vec{A} und Ψ zu beschreiben. Da jedoch auf das Vektorpotential in der Lorentz-Eichung (2.3.5) ein Operator wirkt, ist es sinnvoll ein Potential zu definieren, welches diesen Operator berücksichtigt. Das Potential, was dieser Definition genügt ist der elektrische Hertzsche Vektor $\vec{\Pi}_e$, der über

$$\mu\varepsilon \frac{\partial \vec{\Pi}_e}{\partial t} = \vec{A} \quad (2.3.6)$$

mit dem Vektorpotential verknüpft ist. Mit dem Hertzschen Vektor ist es möglich die Potentiale \vec{A} und Ψ und somit die Felder \vec{E} und \vec{B} auszudrücken

$$\vec{B} = \mu\varepsilon \vec{\nabla} \times \dot{\vec{\Pi}}_e, \quad (2.3.7)$$

$$\vec{E} = \nabla(\vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi}_e) - \mu\varepsilon \ddot{\vec{\Pi}}_e. \quad (2.3.8)$$

Der Vollständigkeit halber sei an dieser Stelle erwähnt, dass für die Beschreibung des \vec{D} - und \vec{H} -Feldes in einem nicht homogenen und anisotropen Medium mit Ladungen und Strömen zusätzlich ein magnetischer Hertzscher Vektor $\vec{\Pi}_m$, ähnlich $\vec{\Pi}_e$, definiert werden muss [LEH05, S.457].

Die elektromagnetische Welle, charakterisiert durch das \vec{E} - und \vec{B} -Feld, wird somit durch die jeweils drei Komponenten der Hertzschen Vektoren $\vec{\Pi}$ beschrieben.

Durch den zu Beginn festgelegten sphärischen Charakter des Streuzentrums ergeben sich als Lösung der Wellengleichung Kugelwellen, welche sich in radialer Richtung vom Streuzentrum ausbreiten. Daraus resultiert, dass die Hertzschen Vektoren durch skalare Debye Potentiale mit folgendem Zusammenhang (2.3.8) beschrieben werden können.

$$-\vec{\nabla} \vec{\Pi}_e = \Pi_e, \quad -\vec{\nabla} \vec{\Pi}_m = \Pi_m \quad (2.3.9)$$

Der große Vorteil der Debye Potentiale liegt darin, dass sich die drei Feldkomponenten des Hertzschen Vektors $\vec{\Pi}$ letztlich durch eine Komponente beschreiben lassen.

Des Weiteren bevorzugt die Kugelsymmetrie des Streuprozesses die Darstellung der skalaren Wellengleichung sowie der Feldkomponenten für \vec{E} und \vec{H} in Kugelkoordinaten.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r \Pi_e)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin(\Theta)} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\sin(\Theta) \frac{\partial \Pi_e}{\partial \Theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\Theta)} \frac{\partial^2 \Pi_e}{\partial \Phi^2} + k^2 \Pi_e = 0 \quad (2.3.10)$$

$$= \Delta \Pi_e + k^2 \Pi_e$$

Eine äquivalente Gleichung liefert die magnetische Welle, beschrieben durch Π_m . Die Feldkomponenten als Funktionen von Π_e und Π_m sind gegeben durch:

$$E_r = \frac{\partial^2(r\Pi_e)}{\partial r^2} + k^2 r \Pi_e \quad (2.3.11)$$

$$E_\Theta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2(r\Pi_e)}{\partial r \partial \Theta} + \kappa_2 \frac{1}{r \sin(\Theta)} \frac{\partial(r\Pi_m)}{\partial \Phi} \quad (2.3.12)$$

$$E_\Phi = \frac{1}{r \sin(\Theta)} \frac{\partial^2(r\Pi_e)}{\partial r \partial \Phi} - \kappa_2 \frac{1}{r} \frac{\partial(r\Pi_m)}{\partial \Theta} \quad (2.3.13)$$

$$H_r = \frac{\partial^2(r\Pi_m)}{\partial r^2} + k^2 r \Pi_m \quad (2.3.14)$$

$$H_\Theta = -\kappa_1 \frac{1}{r \sin(\Theta)} \frac{\partial(r\Pi_e)}{\partial \Phi} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2(r\Pi_m)}{\partial r \partial \Theta} \quad (2.3.15)$$

$$H_\Phi = \kappa_1 \frac{1}{r} \frac{\partial(r\Pi_e)}{\partial \Theta} + \frac{1}{r \sin(\Theta)} \frac{\partial^2(r\Pi_m)}{\partial r \partial \Phi} \quad (2.3.16)$$

mit $k^2 = -\kappa_1 \kappa_2$, $\kappa_1 = i\omega\varepsilon + \sigma$, $\kappa_2 = i\omega$.

Nötige Randbedingungen für die folgende Schritte stellen die Komponenten E_Θ , E_Φ , H_Θ und H_Φ dar, welche stetig über die Oberfläche des streuenden Partikels sind.

Der Separationsansatz [BRO05, S.543] für Differentialgleichungen zweiter Ordnung kann an dieser Stelle auf das Debye Potential angewendet werden.

$$\Pi = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi) \quad (2.3.17)$$

Das bedeutet, dass eine Funktion $F(x, y, z)$ als Produkt von drei Funktionen $X(x)$, $Y(y)$ und $Z(z)$ substituiert werden kann.

Diese Funktionen stellen jede für sich gewöhnliche Differentialgleichungen dar und können unabhängig voneinander gelöst werden.

$$\frac{d^2 r R(r)}{dr^2} + \left[k^2 - \frac{m(n+1)}{r^2} \right] r R(r) = 0 \quad (2.3.18)$$

$$\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left[\sin(\theta) \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} \right] + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2(\theta)} \right] \Theta(\theta) = 0 \quad (2.3.19)$$

$$\frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2} + m^2 \Phi(\varphi) = 0 \quad \text{mit } n \in \mathbb{N} \text{ und } -n \leq m \leq n \quad (2.3.20)$$

Die Lösungen der Differentialgleichungen (2.3.18) bis (2.3.20) sind aus der Mathematik bekannt.

Das Resultat der radialen Gleichung (2.3.18) besteht in einer Linearkombination von Ricatti-Bessel-Funktionen [BRO05, S.526]

$$R(r) = c_n \Psi_n(kr) + d_n X_n(kr) \quad (2.3.21)$$

mit den Koeffizienten c_n und d_n sowie

$$\Psi_n(kr) = \sqrt{\left(\frac{\pi kr}{2}\right)} J_{n+\frac{1}{2}}(kr) \quad (2.3.22)$$

$$X_n(kr) = -\sqrt{\left(\frac{\pi kr}{2}\right)} N_{n+\frac{1}{2}}(kr). \quad (2.3.23)$$

Die Funktion $J_{n+\frac{1}{2}}(kr)$ repräsentiert die Besselfunktion erster Art wobei $N_{n+\frac{1}{2}}(kr)$ als Neumannfunktion oder auch Besselfunktion zweiter Art bekannt ist. Aufgetragen sind beide Funktionen in Abb. 2-7 für die nullte Ordnung sowie jeweils für $n = 0,5; 1,5; 2,5; 3,5; 8,5$.

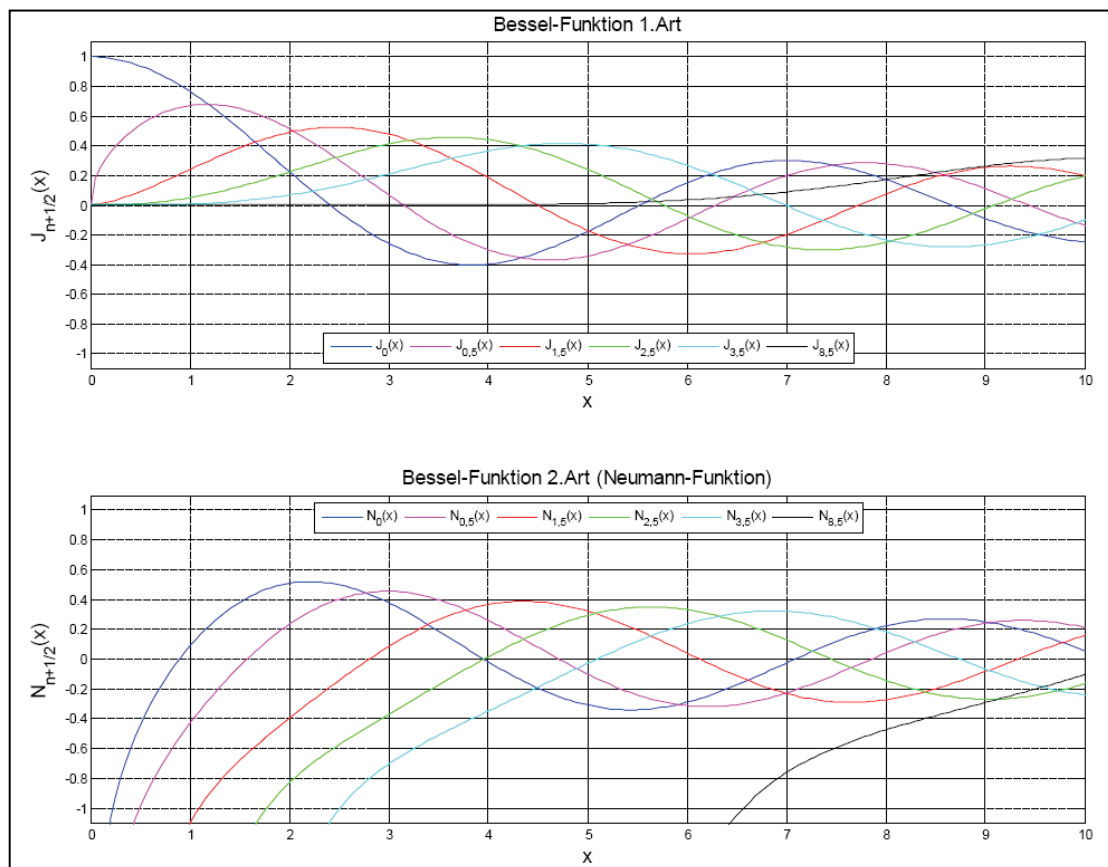


Abbildung 2-7: Bessel-Funktionen erster und zweiter Art.

Als Lösung für Gleichung (2.3.19) folgt:

$$\Theta(\theta) = P_n^{(m)}(\cos(\theta)) \quad (2.3.24)$$

mit $P_n^{(m)}$ als Legendre-Polynome [KER69, S.71] in der Form:

$$P_n^{(m)}(x) = \frac{1}{2^n n!} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} (x^2-1)^n \quad (2.3.25)$$

Dabei variiert das Argument des Legendre-Polynoms zwischen ± 1 . In Abb. 2-8 sind die im Folgenden weiter verwendeten Legendre-Polynome für $m = 1$ und $n = 0, 1, 2, 3, 5$ grafisch dargestellt. Zu erkennen ist, dass es sich um gerade sowie ungerade Funktionen handelt.

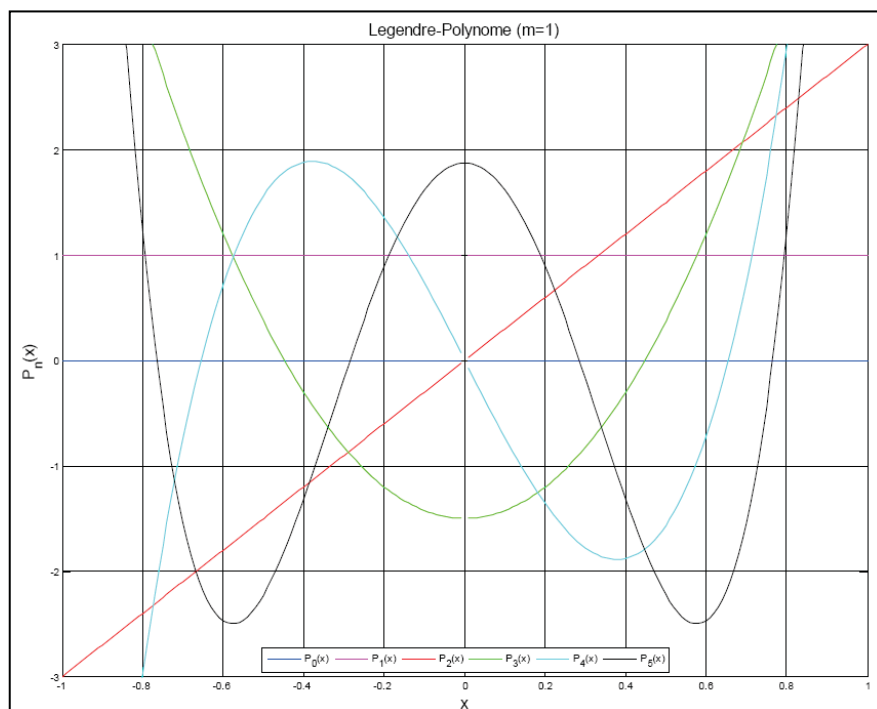


Abbildung 2-8: Legendre-Polynome mit $m = 1$ und $n = 0, 1, 2, 3, 5$.

Gleichung (2.3.20) liefert als Resultat:

$$\Phi(\varphi) = a_m \cos(m\varphi) + b_m \sin(m\varphi) \quad (2.3.26)$$

mit den Koeffizienten a_m und b_m .

Lineare Superposition der partikulären Lösungen (2.3.21), (2.3.24) und (2.3.26) ergibt

$$r\Pi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n [c_n \Psi_n(kr) + d_n X_n(kr)] [P_n^{(m)}(\cos(\theta))] \quad (2.3.27)$$

$$[a_m \cos(m\varphi) + b_m \sin(m\varphi)] .$$

Diese allgemeine Lösung (2.3.27) teilt sich in drei Gleichungen auf, für die einfallende Welle Π^i , die Welle in dem Partikel Π^r und die gestreute Welle Π^s auf (Abb. 2-9).

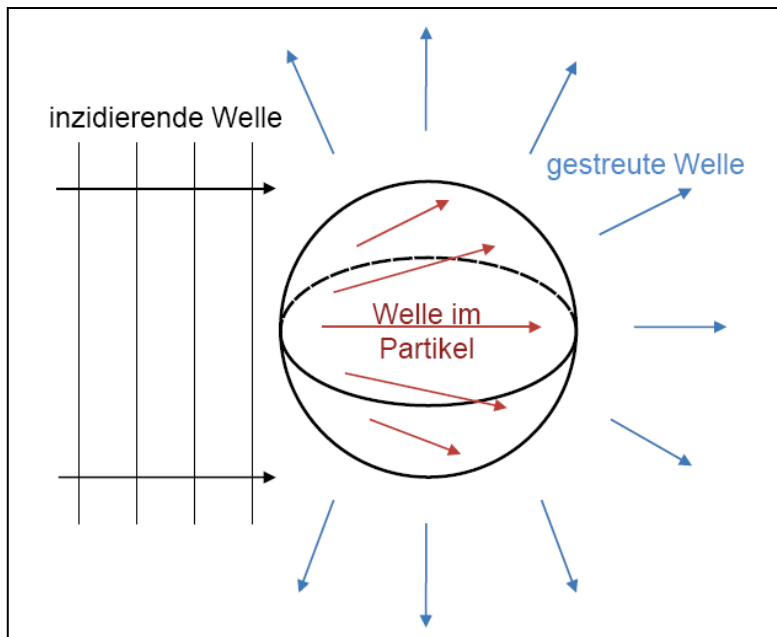


Abbildung 2-9: Teilwellen.

So ergibt sich für die inzierende Welle aus Gleichung (2.3.27):

$$r\Pi_e^i = \frac{1}{k_2^2} \sum_{n=1}^{\infty} i^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)} \Psi_n(k_2 r) P_n^{(1)}(\cos(\theta)) \cos(\varphi) \quad (2.3.28)$$

$$r\Pi_m^i = \frac{1}{k_2 \kappa_2^{(2)}} \sum_{n=1}^{\infty} i^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)} \Psi_n(k_2 r) P_n^{(1)}(\cos(\theta)) \sin(\varphi). \quad (2.3.29)$$

Für die Welle im Partikel folgt:

$$r\Pi_e^r = \frac{1}{k_1^2} \sum_{n=1}^{\infty} i^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)} c_n \Psi_n(k_1 r) P_n^{(1)}(\cos(\theta)) \cos(\varphi) \quad (2.3.30)$$

$$r\Pi_m^r = \frac{1}{k_1 \kappa_2^{(1)}} \sum_{n=1}^{\infty} i^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)} d_n \Psi_n(k_1 r) P_n^{(1)}(\cos(\theta)) \sin(\varphi). \quad (2.3.31)$$

Die am Partikel gestreute Welle führt zu:

$$r\Pi_e^s = \frac{1}{k_2^2} \sum_{n=1}^{\infty} i^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)} a_n \Xi_n(k_2 r) P_n^{(1)}(\cos(\theta)) \cos(\varphi) \quad (2.3.32)$$

$$r\Pi_m^s = \frac{1}{k_2 \kappa_2^{(2)}} \sum_{n=1}^{\infty} i^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)} b_n \Xi_n(k_2 r) P_n^{(1)}(\cos(\theta)) \sin(\varphi). \quad (2.3.33)$$

Der Index der Ausbreitungskonstante für das die Sphäre umgebende Medium ist zwei und der Index für das Partikel selbst ist eins. Die Funktion $\Xi_n(kr)$ in den Gleichungen der gestreuten Welle (2.3.32) und (2.3.33) besitzt die Form:

$$\Xi_n(kr) = \Psi_n(kr) + i X_n(kr) \quad (2.3.34)$$

Für die Bestimmung der Koeffizienten a_n , b_n , c_n und d_n können die Stetigkeitsbedingungen der tangentialen Komponenten des \vec{E} - und \vec{H} -Feldes entlang der Partikeloberfläche bei $r = a$ [KER69, S.45] genutzt werden. So muss gelten:

$$\frac{\partial}{\partial r} [r(\Pi_e^i + \Pi_e^s)]_{r=a} = \frac{\partial}{\partial r} [r\Pi_e^r]_{r=a} \quad (\text{I}) \quad (2.3.35)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} [r(\Pi_m^i + \Pi_m^s)]_{r=a} = \frac{\partial}{\partial r} [r\Pi_m^r]_{r=a} \quad (\text{II})$$

$$\kappa_1^{(2)} [r(\Pi_e^i + \Pi_e^s)]_{r=a} = \kappa_1^{(1)} [r\Pi_e^r]_{r=a} \quad (\text{III})$$

$$\kappa_2^{(2)} [r(\Pi_m^i + \Pi_m^s)]_{r=a} = \kappa_2^{(1)} [r\Pi_m^r]_{r=a} . \quad (\text{IV})$$

Einsetzen der Gleichungen (2.3.28) bis (2.3.33) in die Stetigkeitsbedingungen (2.3.35) liefert:

$$m[\Psi'_n(k_2 a) - a_n \Xi'_n(k_2 a)] = c_n \Psi'_n(k_1 a) \quad (\text{I}) \quad (2.3.36)$$

$$[\Psi'_n(k_2 a) - b_n \Xi'_n(k_2 a)] = d_n \Psi'_n(k_1 a) \quad (\text{II})$$

$$[\Psi_n(k_2 a) - a_n \Xi_n(k_2 a)] = c_n \Psi_n(k_1 a) \quad (\text{III})$$

$$m[\Psi_n(k_2 a) - b_n \Xi_n(k_2 a)] = d_n \Psi_n(k_1 a) \quad (\text{IV})$$

mit den Ausbreitungskonstanten

$$k_1 = m_1 k_0, \quad \kappa_1^{(1)} = i m_1^2 k_0, \quad \kappa_2^{(1)} = i k_0, \quad (2.3.37)$$

$$k_2 = m_2 k_0, \quad \kappa_1^{(2)} = i m_2^2 k_0, \quad \kappa_2^{(2)} = i k_0, \quad m = \frac{m_1}{m_2} .$$

Der Brechungsindex des umgebenden Mediums ist m_2 und der des Partikels m_1 . Die Wellenzahl k_0 bezieht sich auf das Vakuum.

Die Gleichungen (2.3.36) stellen ein lineares Gleichungssystem dar. Da in dieser Arbeit der gestreute Anteil der Welle von Interesse ist (Gleichungen (2.3.32) und (2.3.33)), kann sich auf die Koeffizienten a_n und b_n beschränkt werden. So ergibt die Kombination von (I) und (III)

der Gleichungen (2.3.36) einen Ausdruck für den Koeffizient a_n und Gleichungen (II) und (IV) führen zu b_n

$$a_n = \frac{\Psi_n(k_2 a) \Psi'_n(k_1 a) - m \Psi_n(k_1 a) \Psi'_n(k_2 a)}{\Xi_n(k_2 a) \Psi'_n(k_1 a) - m \Psi_n(k_1 a) \Xi'_n(k_2 a)} \quad (2.3.38)$$

$$b_n = \frac{m \Psi_n(k_2 a) \Psi'_n(k_1 a) - \Psi_n(k_1 a) \Psi'_n(k_2 a)}{m \Xi_n(k_2 a) \Psi'_n(k_1 a) - \Psi_n(k_1 a) \Xi'_n(k_2 a)} . \quad (2.3.39)$$

Mit diesen Koeffizienten und der Reihenentwicklung für die gestreute Welle (2.3.32) und (2.3.33) kann die Streuproblematik rein formal beschrieben werden.

Es ist jedoch abzusehen, dass die Behandlung des Streuvorganges mit dem obigen Formelwerk einen umfangreichen Rechenaufwand darstellt. Für den Fall, dass der Abstand der betrachteten Intensitätsverteilung vom Partikel vergleichsweise groß gegenüber der Wellenlänge ist, können folgende Näherungen getroffen werden [BOR80, S.647] um den Rechenaufwand zu minimieren.

Die transversalen Komponenten des \vec{E} - und \vec{H} -Feldes E_Θ , E_Φ , H_Θ und H_Φ sind reziprok proportional zum Abstand r . Hingegen sind die radialen Komponenten E_r und H_r reziprok proportional zum Quadrat des Abstandes und können somit vernachlässigt werden. Desweiteren ergibt sich für Gleichung (2.3.34) folgender Ausdruck [MIE08, S.377]:

$$\Xi_n(k_2 r) = \Psi_n(k_2 r) + i X_n(k_2 r) \approx i^{(n+1)} e^{-ik_2 r} \quad (2.3.40)$$

und

$$\Xi'_n(k_2 r) = i^n e^{-ik_2 r} . \quad (2.3.41)$$

Die gestreute Feldverteilung (2.3.11) bis (2.3.16) unter Berücksichtigung der oben getroffenen Näherungen lautet demnach:

$$E_\Phi = \frac{i e^{-ik_2 r}}{k_2 r} \sin(\Phi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} \left[a_n \frac{P_n^{(1)}(\cos(\Theta))}{\sin(\Theta)} + b_n \frac{dP_n^{(1)}(\cos(\Theta))}{d\Theta} \right] (-1)^{n+1} \quad (2.3.42)$$

$$E_\Theta = \frac{i e^{-ik_2 r}}{k_2 r} \cos(\Phi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} \left[a_n \frac{dP_n^{(1)}(\cos(\Theta))}{d\Theta} + b_n \frac{P_n^{(1)}(\cos(\Theta))}{\sin(\Theta)} \right] (-1)^{n+1} \quad (2.3.43)$$

$$H_\Theta = m_2 E_\Phi , \quad H_\Phi = -m_2 E_\Theta . \quad (2.3.44)$$

Der Reihenanteil in den Gleichungen (2.3.42) und (2.3.43) stellt einen Formfaktor dar, welcher auch als Streukoeffizient S_i bezeichnet werden kann. So ist

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} \left[a_n \frac{P_n^{(1)}(\cos(\Theta))}{\sin(\Theta)} + b_n \frac{dP_n^{(1)}(\cos(\Theta))}{d\Theta} \right] (-1)^{n+1} \quad (2.3.45)$$

$$S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} \left[a_n \frac{dP_n^{(1)}(\cos(\Theta))}{d\Theta} + b_n \frac{P_n^{(1)}(\cos(\Theta))}{\sin(\Theta)} \right] (-1)^{n+1} \quad (2.3.46)$$

und mit $\pi_n(\cos(\Theta)) = \frac{P_n^{(1)}(\cos(\Theta))}{\sin(\Theta)}$ sowie $\tau_n(\cos(\Theta)) = \frac{dP_n^{(1)}(\cos(\Theta))}{d\Theta}$ folgt:

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} [a_n \pi_n(\cos(\Theta)) + b_n \tau_n(\cos(\Theta))] (-1)^{n+1} \quad (2.3.47)$$

$$S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} [a_n \tau_n(\cos(\Theta)) + b_n \pi_n(\cos(\Theta))] (-1)^{n+1} . \quad (2.3.48)$$

Die Feldverteilung wird mit einem Detektor aufgezeichnet. Es ist jedoch nur möglich die Intensität zu messen. Diese ergibt für die beiden Polarisationsrichtungen in den Azimuten von Φ und Θ unter Berücksichtigung des Poynting Vektors [LEH05, S.430]

$$I_{\Phi} = \frac{\lambda^2}{4\pi^2 r^2} |S_1|^2 \sin^2(\Phi) \quad (2.3.49)$$

$$I_{\Theta} = \frac{\lambda^2}{4\pi^2 r^2} |S_2|^2 \cos^2(\Phi). \quad (2.3.50)$$

Für keine Vorzugsrichtung der Polarisation folgt letztendlich für die gestreute Intensität:

$$I = \frac{\lambda^2}{8\pi^2 r^2} (|S_1|^2 + |S_2|^2) I_0. \quad (2.3.51)$$

Mit Gleichungen (2.3.49) bis (2.3.51) ist es formal möglich die, durch Streuung an einem sphärischen Partikel hervorgerufene, Intensitätsverteilung zu berechnen. Aufgrund der zunehmend höheren Ordnungen der Besselfunktionen und der Legendre-Polynome bei steigendem Sphärenradius wird die Berechnung mit oben stehendem Formelwerk sehr komplex. Aus diesem Grund wird der Formalismus von Bohren und Huffman [BOH98, S.477] verwendet, welcher durch Rekursionen das Formelwerk in eine effiziente Programmierumgebung transformiert.

3 Separate Simulation

Auf Grundlage der Formelwerke aus Kapitel zwei werden in den nachfolgenden Kapiteln der Talbot-Effekt, die Streuung an einzelnen Partikeln simuliert. In den anschließenden Kapiteln erfolgen eine Modellbildung beider physikalischer Phänomene und die kombinierte Simulation anhand von realen Randbedingungen.

3.1 Simulation des Talbot-Effektes

Die Simulation des Talbot-Effektes erfolgt zu Beginn dieses Abschnittes mit der Software-Umgebung MATLAB[®]. Als Grundlage zur Berechnung dient das Formelwerk aus Abschnitt 2.2.1, speziell die Beschreibung der Amplitudenverteilung des Wellenfeldes Gleichung (2.2.12) liefert:

$$U(x, z) = \frac{U_0}{2} \left[e^{ikz} + e^{ik(\sqrt{1-(\lambda v)^2})z} \cos(2\pi vx) \right]. \quad (3.1.1)$$

Für die Beobachtung und Simulation der Selbstabbildung ist es notwendig die Intensitätsverteilung des Wellenfeldes zu beschreiben. Mit dem Zusammenhang

$$I(x, z) \approx |U(x, z) U(x, z)^*|$$

$$I(x, z) \approx \left| \frac{U_0^2}{2} \left[e^{ikz} + e^{ik(\sqrt{1-(\lambda v)^2})z} \cos(2\pi vx) \right] \left[e^{-ikz} + e^{-ik(\sqrt{1-(\lambda v)^2})z} \cos(2\pi vx) \right] \right|$$

und der Beziehung $e^{\pm ix} = \cos(x) \pm i \sin(x)$ folgt letztendlich

$$I(x, z) = \frac{U_0^2}{4} \left[1 + 2 \cos \left[kz \left(1 - \sqrt{1 - (\lambda v)^2} \right) \right] \cos(2\pi vx) + \cos^2(2\pi vx) \right]. \quad (3.1.2)$$

Obenstehende Gleichung beschreibt die Intensitätsverteilung des Wellenfeldes hinter dem Gitter in Abhängigkeit von den Ortskoordinaten x und z .

Eine Voraussetzung für das Auftreten von sich in z -Richtung periodisch wiederholenden Interferenzmustern, ist eine ausreichende Anzahl an Gitterperioden (Abb. 3-1). Die Menge der „Wellen“ aus benachbarten Gitterspalten ist ausschlaggebend für die Zahl der axial entstehenden Interferenzmuster. Besitzt eine periodische Struktur lediglich zwei Winkelanteile der Beugung, zum Beispiel die plus und minus erste Ordnung, ergibt sich eine Anordnung der periodisch auftretenden Interferenzmuster nach folgender Abbildung. In dieser ist auch er-

kennbar, dass die Interferenzmöglichkeiten zahlenmäßig immer kleiner als die Zahl der betrachteten Einzelspalte sind.

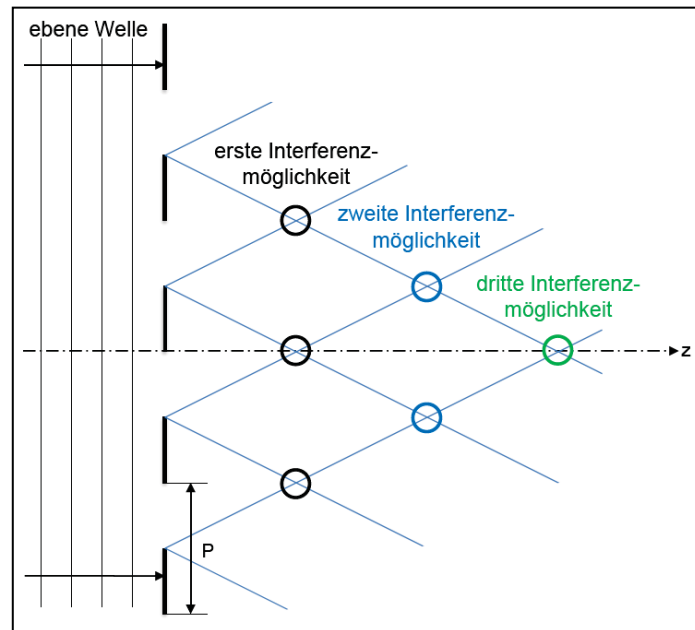


Abbildung 3-1: Interferenzmöglichkeiten.

Diese Betrachtung soll verdeutlichen, dass für die Qualität der Talbot-Abbildung eine genügend große Zahl an Gitter-Perioden nötig ist.

Grundlage der Simulation der Selbstabbildung ist Gleichung (3.1.2). Die Intensitätsverteilung wird für einen Abstand von zwei Talbot-Längen z_T und eine laterale Ausdehnung in x -Richtung von zwei Gitterperioden berechnet.

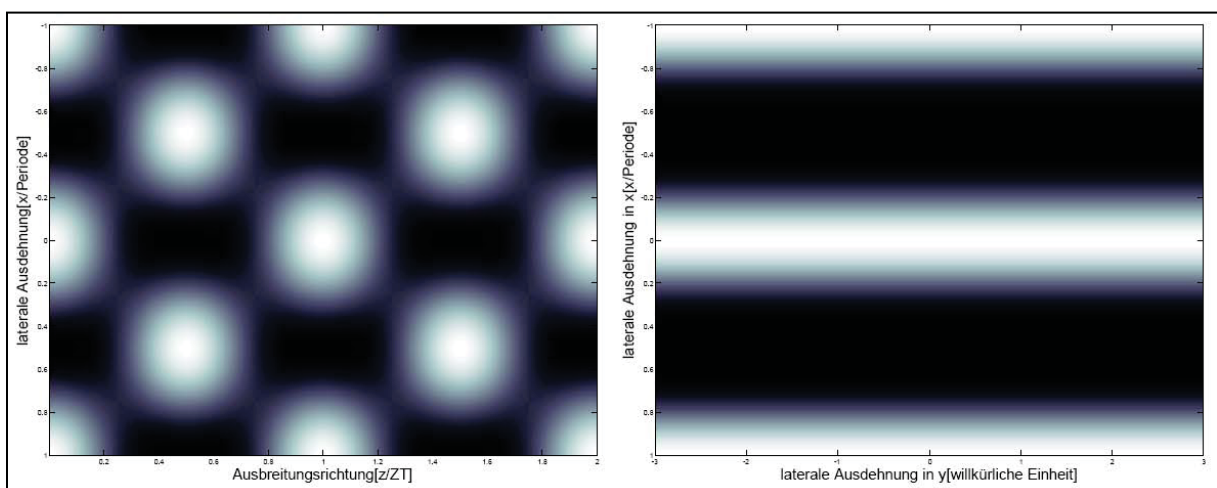


Abbildung 3-2: Selbstabbildung von zwei Perioden.

Die in Abb. 3-2 links dargestellte Verteilung liegt in der x - z -Ebene. Hingegen befindet sich die im Experiment beobachtbare Intensitätsverteilung senkrecht dazu in der x - y -Ebene (Abb. 3-2 rechts).

In der Berechnung der Intensitätsverteilung wurde eine Wellenlänge $\lambda = 850 \text{ nm}$ sowie eine Gitterperiode $P = 100 \text{ }\mu\text{m}$ für ein Sinusamplitudengitter angenommen. Aus Gleichung (2.2.13) ergibt sich für diese Größen eine Distanz für die erste Talbot-Abbildung $z_{T(n=1)} = z_1 = 23,5 \text{ mm}$ und für die zweite $z_{T(n=2)} = z_2 = 2 \times 23,5 \text{ mm} = 47 \text{ mm}$. Die negativen Talbot-Abbildungen befinden sich bei ungeraden Vielfachen von $\frac{z_T}{2}$.

In Abb. 3-2 rechts ist zur Veranschaulichung nur ein kleiner Ausschnitt des Selbstbildes aufgetragen. Bei der kombinierten Simulation wird die Analyse von mehreren Perioden nötig sein, speziell um die Bewegung eines Partikels nachzuvollziehen. Ein Beispiel hierfür ist in Abb. 3-3 für eine Selbstabbildung von sechs Perioden zu erkennen. Die Gitterperiode wurde dabei auf $50 \text{ }\mu\text{m}$ verkleinert, was auch eine Verringerung der Selbstabbildungsdistanz auf $z_{T(n)} = n \times 5,88 \text{ mm}$ zur Folge hat.

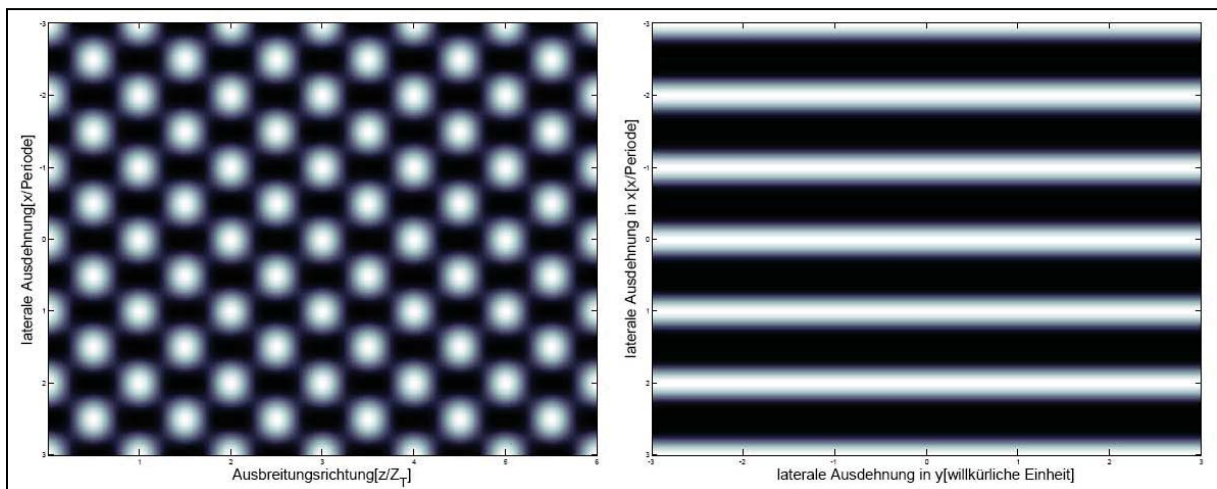


Abbildung 3-3: Selbstabbildung von sechs Perioden.

Grundsätzlich ist die Struktur die gleiche wobei die verkleinerten Dimensionen Störungen besser erkennen lassen. In wie weit die Periode des Gitters verkleinert werden muss, damit eine ausreichende Störungscharakterisierung durchgeführt werden kann, zeigt sich an der Kombination beider Simulationen in Abschnitt 3.4.

3.2 Simulation der Streuung an Sphären

Für die Simulation der Streuproblematik an sphärischen Partikeln wurde erneut die Software-Umgebung MATLAB[®] genutzt. Basierend auf der Arbeit von Bohren und Huffman [BOH98] entstanden bereits mehrere Programmroutinen zur Berechnung von Streuvorgängen [SCA]. Die Arbeit von Mätzler [MAE02] erwies sich als sehr nützlich und wurde auf den bestehenden Formalismus sowie die Umgebungsbedingungen angepasst. Eine auf dieser Grundlage entstandene Programmroutine dient für die weiteren Untersuchungen (vgl. Anhang 7.3).

Als Streuzentren im experimentellen Aufbau wird „Arizona test dust“ entsprechend der Norm ISO 12013-1 A3 verwendet. Die Partikel besitzen einen Durchmesser zwischen ein bis 100 μm und bestehen zu etwa 70% aus SiO_2 , 10% Al_2O_3 und sechs anderen Verbindungen mit 0,5 bis fünf Masseprozenten. Durch den zum Teil stark variierenden Masseanteil der einzelnen Komponenten des Teststaubes können folglich keine exakten dielektrischen Konstanten angegeben werden. Aus diesem Grund wird mit einem Brechungsindex von $m_1 = 1,5$ ohne Imaginärteil bei 850 nm gerechnet. Für das Umgebungsmedium wird Wasser bei 293,15 K und Normaldruck mit einem Brechungsindex von $m_2 = 1,3277$ angenommen.

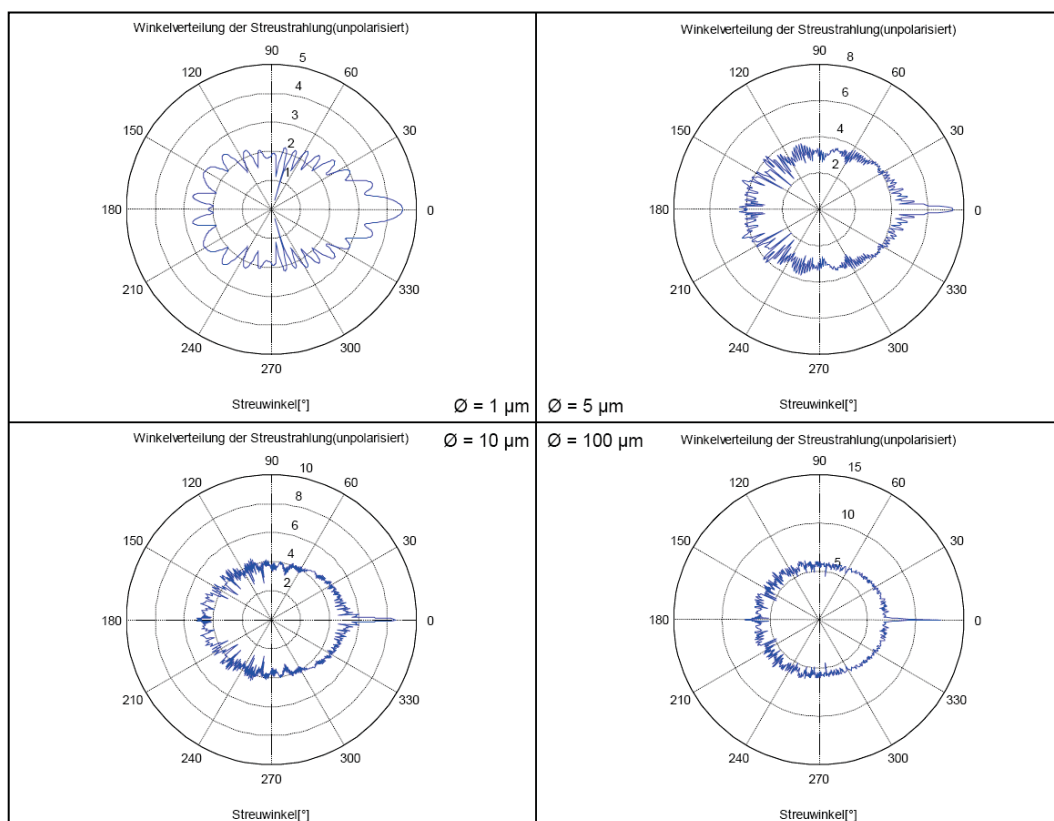


Abbildung 3-4: Winkelverteilungsänderung bei Größenvariation der Sphäre.

In Abb. 3-4 sind für vier sphärische Streuzentren mit den Durchmessern 1, 5, 10 und 100 μm die Streukoeffizienten halblogarithmisch aufgetragen. Das einfallende Wellenfeld verläuft parallel zur Abszisse in Richtung null Grad. Vergrößert sich der Durchmesser des Streuzentrums so bildet sich eine zunehmende Vorwärtsstreuung aus. Diese ist schon bei Partikelgrößen von zwei μm um zwei Potenzen höher als die restliche Intensitätsverteilung und vergrößert sich bei 100 μm -Partikeldurchmesser auf mehr als sechs Potenzen. Aus diesem Trend ist zu schließen, dass größere Partikel einen geringeren Einfluss auf die Winkelumverteilung der einfallenden Strahlung haben. Dieses Verhalten wird zudem von der zunehmend schmalere „Vorwärtsstreuokeule“ bei größeren Partikeln unterstützt.

Da der Brechungsindex der verwendeten Partikel nicht exakt bekannt ist, wird im Folgenden eine Abschätzung des Verhaltens der Winkelverteilung in Bezug auf Brechungsindexvariation durchgeführt. Hierfür wird ein Brechungsindex für ein Streuzentrum mit einem Durchmesser von zwei μm mit $m_1 = 1,4$; 1,5 und 1,6 angenommen.

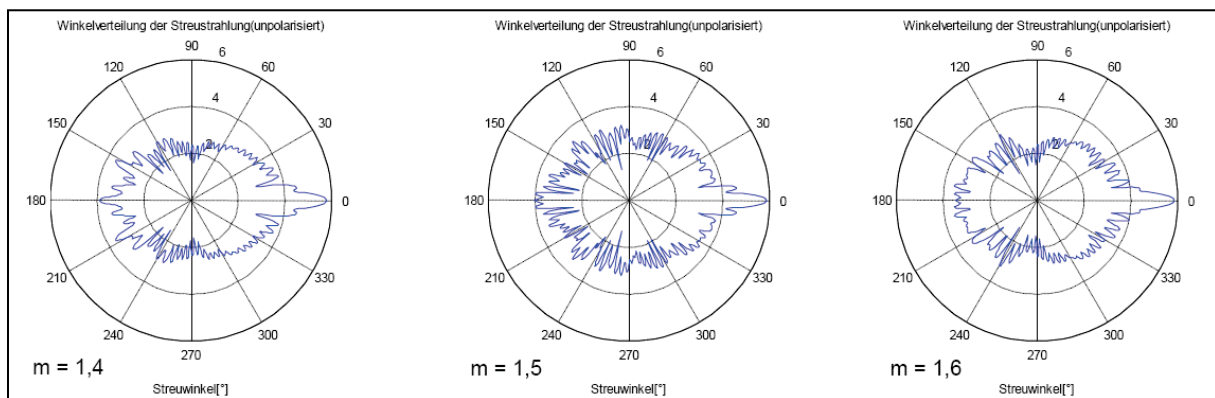


Abbildung 3-5: Winkelverteilungsänderung bei Brechungsindexvariation.

Bei Betrachtung der Größenordnungen der Vorwärtsstreuung gegenüber dem restlichen Winkelbereich bei Partikelvergrößerung, wirkt sich diese brechzahlbedingte Veränderung jedoch verhältnismäßig gering aus.

Im Rahmen dieser Arbeit wird die Streustrahlung von Partikeln im Umgebungsmedium Wasser simuliert. Zur Vollständigkeit sei noch die Winkelverteilung der gestreuten Strahlung in Luft und Öl betrachtet. Luft hat bei 293,15 K in Bodennähe und ohne Wasseranteile einen Brechungsindex von $m = 1,00027$. Das folgende Streuzentrum hat einen Brechungsindex von $m = 1,5$ und einen Durchmesser $\varnothing = 2 \mu\text{m}$.

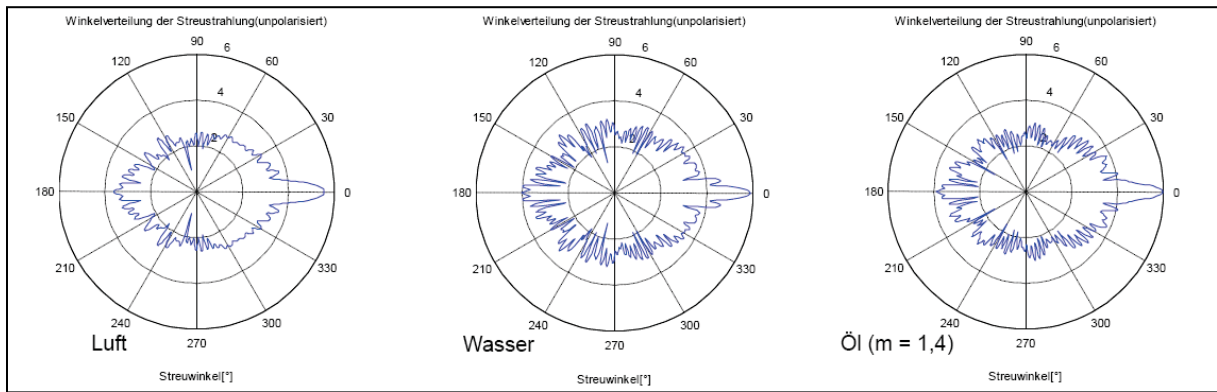


Abbildung 3-6: Winkelverteilung in Abhängigkeit vom Umgebungsmedium.

Der Einfluss des Umgebungsmediums auf die Winkelverteilung ist in Abb. 3-6 deutlich erkennbar. Eine Tendenz ist jedoch nur schwer abzuleiten. Desweiteren ändert sich der Brechungsindex von Wasser bei realistischen Temperaturänderungen lediglich in der vierten Nachkommastelle, was keine signifikanten Auswirkungen auf die Winkelverteilung hat. Diese Betrachtung soll aber verdeutlichen, dass bei Übergang in ein anderes Umgebungsmedium, wie beispielsweise Öl, die Brechungsindexveränderung nicht vernachlässigt werden kann.

Die Simulationen dieser Arbeit stützen sich auf ein Experiment, bei welchem unpolarisierte Strahlung verwendet wird. Da es sich aber als nützlich herausstellen kann, durch ein polarisationsfilterndes Element mit polarisierter Strahlung zu arbeiten, wird an dieser Stelle kurz auf das Polarisationsverhalten des Streulichtes eingegangen.

Bei einem Streupartikel in Form einer homogenen Sphäre und bei Betrachtung der gestreuten Anteile in einer hinreichend großen Entfernung, bei welcher die radialen Komponenten der Streustrahlung vernachlässigt werden können, ist eine Beschreibung des Polarisationsverhaltens wie folgt möglich [BOH98, S.112]. Betrachtet werden die senkrechten \perp und parallelen \parallel Komponenten des einfallenden i und gestreuten s elektrischen Feldes. Dann ergibt sich aus Gleichungen (2.3.42) und (2.3.43)

$$\begin{pmatrix} E_{\parallel s} \\ E_{\perp s} \end{pmatrix} = \frac{e^{ik(r-z)}}{-ikr} \begin{pmatrix} S_2 & 0 \\ 0 & S_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{\parallel i} \\ E_{\perp i} \end{pmatrix}. \quad (3.2.1)$$

Für den Fall einer idealen Sphäre folgt aus Gleichung (3.2.1), dass eine senkrecht polarisierte einfallende Welle ($E_{\perp i} \neq 0$; $E_{\parallel i} = 0$) eine senkrecht polarisierte gestreute Welle ($E_{\perp s} \neq 0$; $E_{\parallel s} = 0$) ergibt.

$$E_{\perp s} = \frac{e^{ik(r-z)}}{-ikr} S_1 E_{\perp i} \quad (3.2.2)$$

Äquivalent folgt für eine parallel polarisierte einfallende Welle:

$$E_{\parallel s} = \frac{e^{ik(r-z)}}{-ikr} S_2 E_{\parallel i} . \quad (3.2.3)$$

Der Vergleich von Gleichungen (3.2.2) und (3.2.3) mit den Gleichungen für die Streukoeffizienten S_1, S_2 (2.3.47), (2.3.48) zeigt, dass die Winkelverteilungen für senkrechten und parallelen Einfall unterschiedlich sind. Dieser Unterschied könnte sich als nützliche Zusatzinformation bei Streulichtmessungen bezüglich der Partikelcharakterisierung herausstellen. Veranschaulicht ist dieser polarisationsabhängige Unterschied in der Winkelverteilung der Streukoeffizienten in folgender Abbildung für einen Partikeldurchmesser von einem Mikrometer.

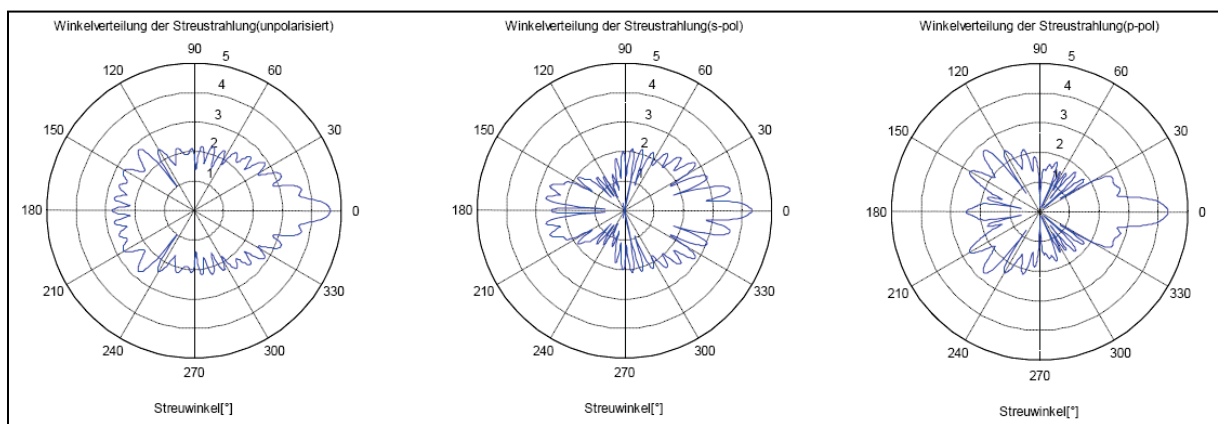


Abbildung 3-7: Winkelverteilung in Abhängigkeit von der Polarisation.

Die unpolarisierte Streustrahlung setzt sich aus der Addition beider Polarisationsrichtungen zusammen. Somit kann bei Verwendung einer unpolarisierten Strahlungsquelle und eines polarisationsabhängigen Strahlteilers hinter dem Streuzentrum eine zusätzliche, linear unabhängige, Information aus der Messung gewonnen werden.

4 Modellbildung

In diesem Abschnitt wird ein umfassendes Modell erstellt, welches die Selbstabbildung eines Sinusamplitudengitters mit der Streuung an Sphären kombiniert. Die kombinierte Simulation wird mit der Software-Umgebung MATLAB[®] und VirtualLab[™] durchgeführt.

4.1 Talbot-Effekt

Der Talbot-Effekt kann bei einem Sinusamplitudengitter rein formal durch die Interferenz zweier Wellen beschrieben werden, welche sich in gleicher Richtung jedoch mit unterschiedlichen Phasengeschwindigkeiten ausbreiten. So muss die Selbstabbildungsdistanz auch aus dieser Betrachtungsweise resultieren. Pflanzte sich Welle A mit der Geschwindigkeit c_0 über eine Länge z fort und wird von Welle B mit $c_0 a$ ($a > 0$) überholt, so ergibt sich bei einem „Überholvorgang“ von der Länge $n2\pi = n\lambda_B$ nach Überlagerung beider Wellen in lateraler Richtung immer dasselbe Interferenzmuster. Das bedeutet, dass sich Welle A in der Zeit t um eine Strecke z ausbreitet. Welle B hingegen muss in der gleichen Zeit t die Strecke $z + \lambda_B$ zurücklegen. Mit den Gleichungen (2.2.11) für die Phasengeschwindigkeiten aus Abschnitt 2.2.1 folgt für Welle

$$A: \quad t = \frac{z}{v_{P1}} = \frac{z}{\frac{\omega}{k}} \quad (4.1.1)$$

$$B: \quad t = \frac{z + \lambda_B}{\frac{\omega}{k(\sqrt{1 - (\lambda_A v)^2})}} \quad \text{mit} \quad \lambda_B = \frac{\lambda_A}{\sqrt{1 - (\lambda_A v)^2}}. \quad (4.1.2)$$

Gleichsetzen obiger Gleichungen führt zu:

$$\frac{z}{\frac{\omega}{k}} = \frac{z + \lambda_B}{\frac{\omega}{k(\sqrt{1 - (\lambda_A v)^2})}} \rightarrow z = \frac{\lambda_B \sqrt{1 - (\lambda_A v)^2}}{1 - \sqrt{1 - (\lambda_A v)^2}} = \frac{\lambda_A}{1 - \sqrt{1 - (\lambda_A v)^2}} \quad (4.1.3)$$

was dem Betrag der Talbot-Distanz, siehe Gleichung (2.2.13) entspricht. Die Selbstabbildung des verwendeten Gitters wird nun jedoch durch ein Streuzentrum und seine Winkelumverteilung des Wellenfeldes innerhalb des Propagationsraumes gestört. Für die Simulation dieser Störung wird Welle B , welche aus der Kombination der zwei Wellen besteht, in ihre Komponenten zerlegt.

Aus der Beschreibung der Amplitudenverteilung des Wellenfeldes nach dem Gitter mit Gleichung (2.2.10) folgt mit Verwendung des Zusammenhangs $\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$:

$$U(x, z) = \frac{U_0}{4} \left[2e^{ikz} + e^{ik(\sqrt{1-(\lambda v)^2}z) + i2\pi vx} + e^{ik(\sqrt{1-(\lambda v)^2}z) - i2\pi vx} \right]. \quad (4.1.4)$$

Umformen ergibt

$$U(x, z) = \frac{U_0}{4} \left[2e^{ikz} + e^{ik(\sqrt{1-(\lambda v)^2}z + \lambda vx)} + e^{ik(\sqrt{1-(\lambda v)^2}z - \lambda vx)} \right]. \quad (4.1.5)$$

Die Argumente der letzten beiden Exponentialfunktionen $\sqrt{1-(\lambda v)^2}z \pm \lambda vx$ stellen mathematisch die Komponentenschreibweise eines Vektors \vec{k} dar.

$$U(x, z) = \frac{U_0}{4} \left[2e^{ikz} + e^{ik\left(\left(\frac{\lambda v}{\sqrt{1-(\lambda v)^2}}\right)\right)} + e^{ik\left(\left(\frac{-\lambda v}{\sqrt{1-(\lambda v)^2}}\right)\right)} \right] \quad (4.1.6)$$

Gleichung (4.1.6) beschreibt somit die Amplitudenverteilung hinter einem sinusförmigen Amplitudengitter. In obenstehender Gleichung kennzeichnen die drei Exponentialterme in der eckigen Klammer drei ebene Wellen mit unterschiedlichen Ausbreitungsrichtungen. Veranschaulicht wird dies in folgender Abbildung.

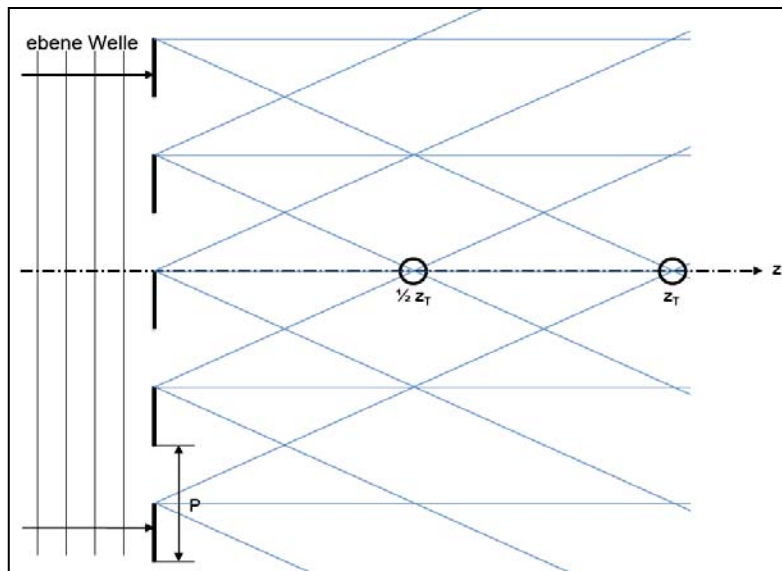


Abbildung 4-1: Dreistrahlinterferenz der ersten Talbot-Abbildung.

Die Selbstabbildung ist ein Resultat der Überlagerung dreier Wellen innerhalb dieses Beschreibungsmodells. Rein rechnerisch haben die Welle ohne x -Komponente und die Wellen mit x -Komponente bei der halben Talbot-Distanz auf der z -Achse einen Phasenunterschied

von π , was einer destruktiven Interferenz entspricht. Die konstruktive Interferenz bei der ganzzahligen Talbot-Distanz resultiert aus dem Phasenunterschied von 2π . Aus diesem Grund befindet sich die erste Talbot-Abbildung bei z_T und nicht, wie aus obenstehender Abbildung zu erwarten bei $\frac{z_T}{2}$. Das Interferenzmuster bei ungeraden Vielfachen von $\frac{z_T}{2}$ stellt das negative Selbstabbild des Gitters dar.

Aus der Beugung an einem Gitter resultieren nach dem Huygensschen Prinzip eine Vielzahl von Kugelwellen, welche hinter dem Gitter in positive z -Richtung propagieren. Durch die periodische Struktur des Gitters ergibt die Superposition der einzelnen Kugelwellen eine mögliche Beschreibung der sich ausbreitenden Amplitudenverteilung durch diskrete Ordnungen. Diese Art der Betrachtung ist durch die Umkehrbarkeit der Überführung der Huygens-Theorie der sphärischen Wellen in die Theorie der ebenen Wellen nach Rayleigh möglich [LOH06, S.142]. Verbildlicht ist die Ausbreitung der Beugungsordnungen als Flächen konstanter Phase in nachstehender Abbildung.

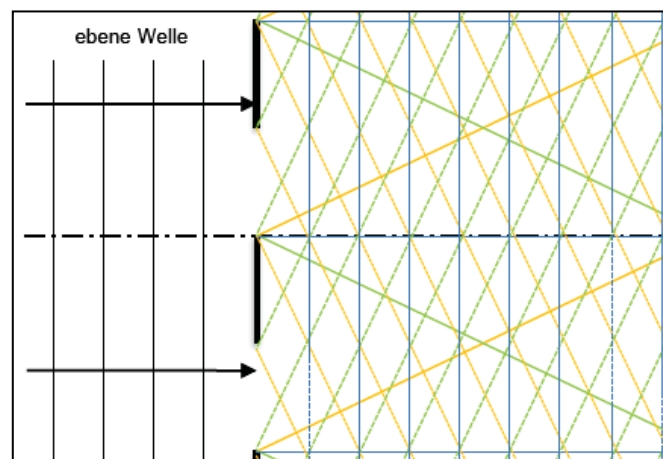


Abbildung 4-2: Beschreibungsweise durch ebene Wellen (Flächen konstanter Phase).

Aus Abb. 4-1 und 4-2 ist ersichtlich, dass die drei Beugungsordnungen des Sinusamplitudengitters als drei ebene Wellen interpretiert werden können, die im Folgenden mit einem Streuzentrum wechselwirken.

4.2 Streuung an Sphären

Die im letzten Abschnitt diskutierten ebenen Wellen treffen aus drei unterschiedlichen Richtungen auf ein sphärisches Partikel. Somit erfolgt die durch die Streuung hervorgerufene Winkelumverteilung der inzidierenden Wellen in allen drei ursprünglichen Ausbreitungsrich-

tungen. Die Wechselwirkung der ebenen Wellen mit dem Partikel hat jedoch nicht nur eine Manipulation der Ausbreitungsrichtung zur Folge, sondern auch eine Veränderung der Phase. Für eine quantitative Aussage über die Phase der gestreuten Welle muss ein Streukörper mikroskopisch betrachtet werden. Ein Photon, welches auf das Streuzentrum einfällt, wird an mehreren mikroskopischen Streuzentren, aus denen der makroskopische Streuer besteht, gestreut. Wird das Photon nicht absorbiert, so legt es einen „Zickzackkurs“ innerhalb des Streuers zurück bevor es ihn wieder verlässt. Dabei ist es unwahrscheinlich, dass jedes Photon denselben Weg innerhalb des Streukörpers zurücklegt und folglich immer dieselbe Phase beim Wiederaustritt besitzt. Als Analogon zu Monte Carlo Simulationen der Elektronenbewegungen in Halbleitern, die als Resultat einen Kanal ergeben, in welchem sich die Elektronen mit hoher Wahrscheinlichkeit fortbewegen, kann hier auf einen mittleren Photonenweg geschlossen werden. Aus dieser Vorüberlegung kann zunächst angenommen werden, dass die Photonen, welche den Streuer wieder verlassen eine um einen definierten Punkt innerhalb des Streuers statistisch verteilte Phasenbeziehung besitzen.

Durch den Streuvorgang eines Teilchens, wie einem Elektron, Neutron, Photon usw. an einem Streupartner erfolgt grundsätzlich eine Richtungsänderung. Für viele Teilchen kann eine statistische Richtungsverteilung berechnet werden. Die in Abschnitt 3.2 durchgeführten Simulationen der Winkelverteilung der Streustrahlung an Partikeln unterschiedlicher Größe (Abb. 3-4) zeigt wie sich die Vorwärtsstreuung bei Partikelvergrößerung immer weiter ausbildet. Zur Verdeutlichung dieses Trends dient Abb. 4-3.

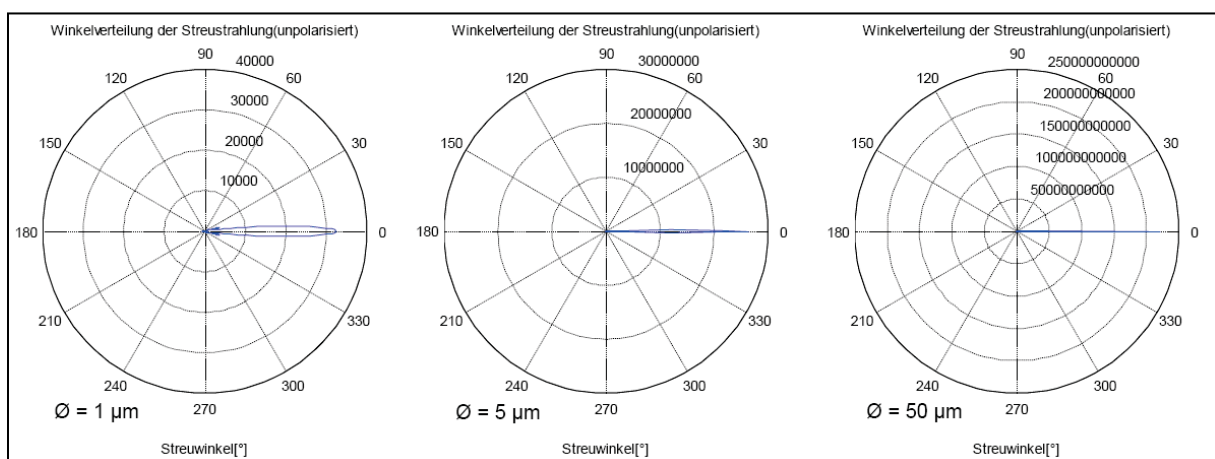


Abbildung 4-3: Ausbildung der Vorwärtsstreuung.

Bei einem Partikel mit einem Mikrometer Durchmesser liegen 90% der gestreuten Strahlung innerhalb eines Winkels von über 100°. Bei einem Partikeldurchmesser von fünf μm beträgt der Winkel noch vier Grad. Dieser Abwärtstrend setzt sich nichtlinear fort bis bei einem Par-

Streuungsdurchmesser von $100\ \mu\text{m}$ der Winkel, in dem 90% der Streustrahlung liegen, kleiner als ein Grad ist.

Die Divergenz von ein bis über 100° , welche eine mit dem Streuer wechselwirkende ebene Welle erfährt, wird im Folgenden durch mehrere ebene Wellen approximiert.

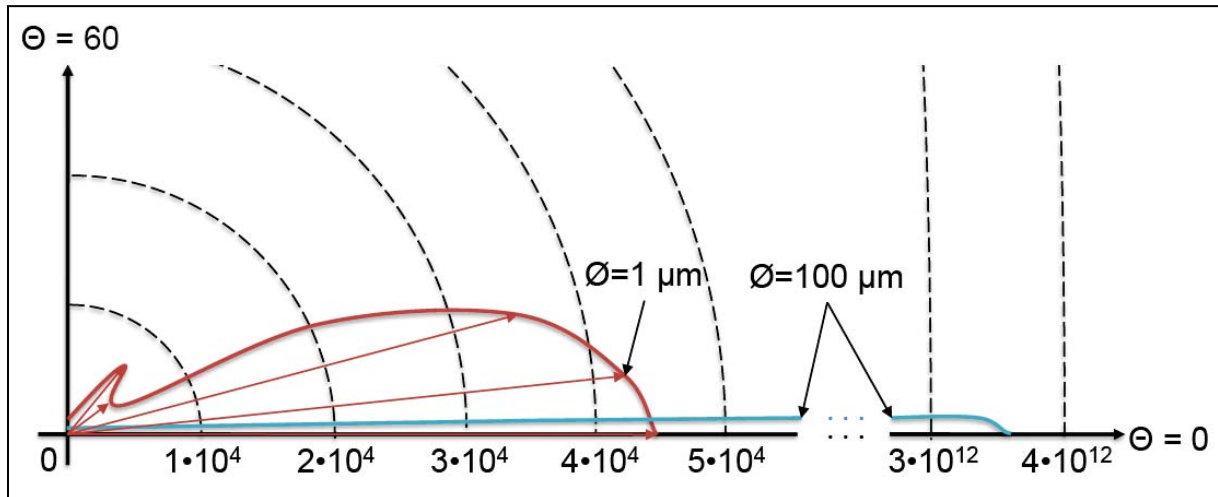


Abbildung 4-4: Approximation der gestreuten Winkelverteilung einer Kugel.

In Abb. 4-4 sind schematisch die Winkelverteilungen der Streustrahlung an Kugeln mit unterschiedlichen Durchmessern in einem Polardiagramm aufgetragen. Der dargestellte Winkelbereich beschränkt sich auf den oberen Halbraum der Vorwärtsstreuung von null bis 60° . Die Einteilungen auf der Abszisse sind die Streukoeffizienten.

Die Approximation dieser Winkelverteilungen erfolgt durch mehrere ebene Wellen, welche den Winkel der Vorwärtsstreuung an definierten Stützstellen mit der entsprechenden Gewichtung beschreiben. Das bedeutet, dass jeder rote Pfeil einem bestimmten Winkel der Vorwärtsstreuung entspricht.

Eine Berechnung der Winkelverteilung des Streulichts ist jedoch nur in diskreten Stützstellenabständen möglich. Bei steigender Stützstellenanzahl nimmt die Dauer der Simulation verhältnismäßig stark zu, weswegen zunächst eine Winkelauflösung von $0,5^\circ$ gewählt wird. Diese kann jedoch bei Bedarf auch ohne viel Aufwand im Programm verändert werden. Die Winkelverteilung der gestreuten Welle wird somit durch eine endliche Zahl ebener Wellen unterschiedlichen Winkels und Amplitude beschrieben.

4.3 Kombination

Neben der Divergenz, welche das Streuzentrum einer einfallenden Welle aufprägt und der Veränderung der Phase ist die axiale und laterale Lage des Streuzentrums innerhalb des Wechselwirkungsraumes (Abb. 4-5) zwischen Gitter und Selbstabbildung von Bedeutung.

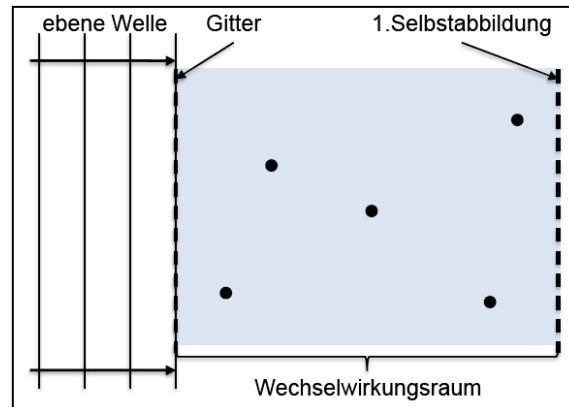


Abbildung 4-5: Wechselwirkungsraum.

Abhängig von der Position des Streuzentrums wirkt sich die Störung der Selbstabbildung unterschiedlich stark aus. Die axiale und laterale Position des Streuzentrums bestimmt das Einflussgebiet der Streustrahlung, welche mit dem ungestörten Wellenfeld in der Betrachtungsebene interferiert. Befindet sich das Streuzentrum direkt hinter der beugenden periodischen Struktur, so erfährt es eine Wechselwirkung mit vergleichsweise wenigen Elementarwellen. Jedoch ist das Einflussgebiet dieser gestörten Elementarwellen in der Selbstabbildungsebene verhältnismäßig groß. In einem anderen Extremfall ist das Streuzentrum direkt vor der Selbstabbildungsebene positioniert. Für diesen Fall werden relativ viele Elementarwellen beeinflusst wobei die Störung nur einen geringen Bereich der Selbstabbildung stört.

Für die Quantifizierung des positionsabhängigen Streueinflusses muss zuvor der Wechselwirkungsraum zwischen Streuung und Beugung definiert werden. Das Gitter wird in einem begrenzten Bereich beleuchtet wobei der Detektor ebenfalls endliche Abmessungen besitzt. Es wird zunächst angenommen, dass die Fläche des ausgeleuchteten Gitters lateral größer als der Detektor ist. Die Länge des Wechselwirkungsraumes ergibt sich aus der Talbot-Distanz. Somit resultiert ein rechteckiger Wechselwirkungsraum mit der Länge der Talbot-Distanz und der Höhe der Detektorbreite. Die horizontale Begrenzung in x -Richtung existiert im realen Messaufbau nicht und kann als 100% absorbierend angenommen werden.

Breitet sich eine ebene Welle im Raum in z -Richtung aus, so wird in erster Näherung nur der Teil ihrer Wellenfront gestört, welcher mit dem Streuzentrum wechselwirkt. Im Falle der Stö-

rung einer Selbstabbildung müssen zusätzlich die Wellen berücksichtigt werden, die auch Komponenten in anderen Raumrichtungen aufweisen. Aus der Komponentenschreibweise der Amplitudenverteilung eines Wellenfeldes hinter einem Sinusamplitudengitter (Gleichung 4.1.6) folgt, dass die Welle mit ausschließlich einer Komponente in z -Richtung die Amplitude $\frac{U_0}{2}$ und die Wellen mit x -Komponente jeweils die Amplitude $\frac{U_0}{4}$ besitzen. Es ergibt sich folgende Geometrie.

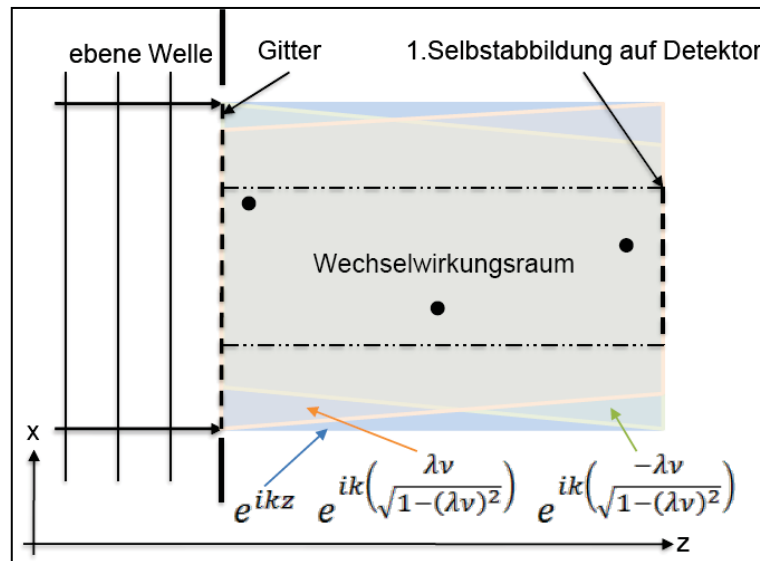


Abbildung 4-6: Wechselwirkungsgeometrie.

In Abb. 4-6 sind die drei ebenen Wellen der Selbstabbildung schematisch dargestellt. Die beiden Wellen, welche eine Komponente in x -Richtung besitzen, laufen mit steigendem z auseinander. Somit verringert sich auch der interferenzfähige Anteil der Wellen bis ab einer bestimmten Entfernung keine Überlagerung mehr möglich ist. Dieser Effekt wird auch „walk-off Effekt“ [LOH06, S.194] genannt. Die maximale Entfernung kann nach folgender Gleichung berechnet werden.

$$z_{max} = \frac{d}{\tan\left[\sin^{-1}\left(\frac{\lambda}{P}\right)\right]} \quad (4.3.1)$$

Die Randbedingungen der kombinierten Simulation von Fresnelbeugung und Streuung werden anhand eines Modellaufbaus gesetzt. Der beleuchtete Durchmesser des Gitters beträgt $d = 5 \text{ mm}$. Das Gitter selbst hat eine Periode $P = 50 \text{ }\mu\text{m}$ wobei die verwendete Strahlung eine Wellenlänge $\lambda = 850 \text{ nm}$ besitzt. Für diesen Fall sind die drei Wellen bei einem Abstand $z_{max} = 294 \text{ mm}$ hinter dem Gitter (Gleichung 4.3.1) auseinandergelaufen und nicht mehr interferenzfähig.

Dieser Grenzfall wird jedoch in dieser Arbeit nicht erreicht, da die erste Talbot-Abbildung für die oben genannten Parameter bei einem Abstand $z_T = 5,8819 \text{ mm} \ll z_{max}$ liegt.

Aus Abb. 4-5 ist auch zu entnehmen, dass ein Streuzentrum innerhalb des Wechselwirkungsraumes größtenteils von allen drei Wellen erfasst wird. Lediglich in den Randbereichen bei geringer Entfernung vom Gitter erfolgt eine Störung der Wellen mit x - und z -Komponente, welche am Detektor vorbeiläuft.

Somit kann der Talbot-Effekt und folglich die Streuung durch eine Approximation mit ebenen Wellen berechnet werden. Für eine Überprüfung der möglichen Beschreibung des Talbot-Effektes innerhalb der Softwareumgebung VirtualLabTM durch Beugungsordnungen, wird zunächst die Simulation des Talbot-Effektes mit einem Sinusamplitudengitter durchgeführt. Daraufhin wird die Selbstabbildung mit drei ebenen Wellen nach Gleichung (4.1.6) simuliert und beide Ergebnisse verglichen. Das Gitter besitzt eine Periode $P = 50 \text{ }\mu\text{m}$ und wird mit monochromatischer Strahlung der Wellenlänge $\lambda = 850 \text{ nm}$ beleuchtet. Die so erzeugte Feldverteilung hinter dem Gitter wird nun mit der Methode „Spektrum Ebener Wellen“ (SPW) in die Talbot-Ebene propagiert. Dieser SPW-Algorithmus beinhaltet das Debye Integral Gleichung (4.3.2), welches direkt aus der skalaren Helmholtz-Gleichung (2.1.9) folgt.

$$U(x, y, z) = \iiint U(x_0, y_0, z_0) \cdot e^{2\pi i \left\{ v_x(x-x_0) + v_y(y-y_0) + \left(\frac{z-z_0}{\lambda}\right) \left[\sqrt{1-\lambda^2(v_x^2+v_y^2)} \right] \right\}} dv_x dv_y dx_0 dy_0 \quad (4.3.2)$$

Die mit Null indizierten Koordinaten stehen für das komplexe Wellenfeld, welches an der Stelle x, y, z berechnet wird. Diese Formel beinhaltet noch keine physikalische Näherung und stellt somit eine exakte Berechnungsvorschrift dar.

Äquivalent dazu werden auch die drei ebenen Wellen in die Talbot-Ebene propagiert und dort superpositioniert. In Abb. 4-7 sind die Amplitudenverteilungen der elektrischen Feldstärke in der Talbot-Ebene und ein radialer Schnitt, welcher jeweils in einem Diagramm darunter verbildlicht ist, für beide Simulationen dargestellt. Beide Simulationen führen zu einem nahezu gleichen Ergebnis bei dem eine sinusförmige Amplitudenverteilung in der Talbot-Ebene entsteht. Bei der Simulation wurden das Gitter sowie auch die ebenen Wellen lateral durch eine sphärische Öffnung begrenzt, was zu Beugungseffekten führt. Desweiteren ist an den Rändern der Selbstabbildung das Auseinanderlaufen der Wellenfront (walk-off Effekt) zu erkennen. Unabhängig davon ist das Sampling, mit welchem die Simulation durchgeführt wird, wichtig bei der Auflösung der Feld- und Phasenverteilung. Ist der Sampling-Abstand zu groß, gehen Informationen verloren und es entstehen numerische Artefakte.

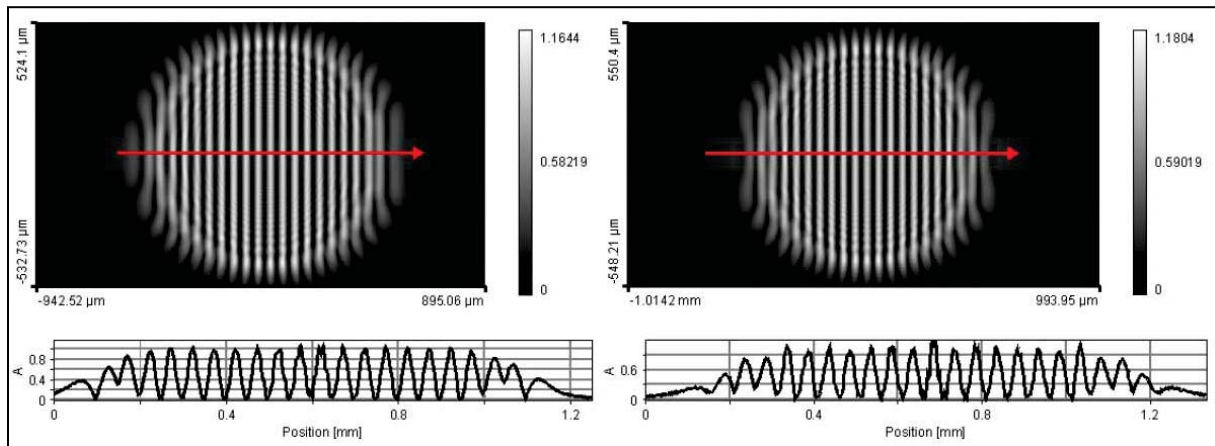


Abbildung 4-7: Talbot-Effekt (links: Gitter; rechts: ebene Wellen) simuliert in VirtualLabTM.

Aus den übereinstimmenden Resultaten beider Feldberechnungen erfolgt die weitere Behandlung der Selbstabbildung und ihrer Störung auf Basis von ebenen Wellen.

In VirtualLabTM gibt es keine direkte Möglichkeit die Streuung an sphärischen Partikeln zu simulieren. Demnach muss ein Modell gefunden werden, welches die Winkelumverteilung einer einfallenden Welle auf ein Partikel approximiert.

Es ist jedoch möglich das Medium, in welchem sich eine elektromagnetische Welle ausbreitet insofern zu modifizieren, dass eine definierte Region einen vom Medium abweichenden Brechungsindex erhält. Diese Region kann als Kugel festgelegt werden. Bei der Simulation wird die Kugel als dünnes Element approximiert, an welchem eine einfallende Welle gebeugt wird. Somit würde die Problemstellung jedoch nur beugungsoptisch betrachtet werden, was eine zu extreme Näherung ist.

Aus diesem Grund wird im Folgenden die Streuproblematik anhand ihrer Wirkung charakterisiert. Eine ebene Welle wird beschrieben durch eine Amplitude und Phase (Gleichung 2.1.6). Wird eine ebene Welle an einem Partikel gestreut, erhält sie eine zusätzliche Phase. Durch die Rotationssymmetrie des gestreuten Winkelspektrums bei unpolarisierter Strahlung ist eine Beschreibung mit einer sphärischen Phase möglich. Da das Winkelspektrum jedoch eine Gewichtung der gestreuten Feldanteile beinhaltet, muss zusätzlich eine winkelabhängige Amplitude erzeugt werden.

Eine sphärische Phase in Propagationsrichtung kann von einem transparenten homogenen Element mit einem radialen sphärischen Krümmungsradius erzeugt werden. Beispielsweise in Form einer idealen Linse. Trifft eine ebene Welle auf ein solches Element wird eine sphärische Wellenfront erzeugt. Da das Streuzentrum eine Divergenz der einfallenden ebenen Welle verursacht, ist es sinnvoll eine Linsenfunktion mit negativer Brennweite zu verwenden. Das

bedeutet, dass die Phasenmanipulation eines Streuzentrums in VirtualLabTM mit einer Linsenfunktion negativer Brechkraft beschrieben werden kann.

Für die nullte Beugungsordnung des Gitters liegt das Partikel somit im Brennpunkt F' einer Linse mit negativer Brechkraft und die Hauptebenen HH' befinden sich in der Talbot-Ebene. Die Apertur der Linse ist bestimmt durch den maximalen Winkel Θ_{max} der Vorwärtskeule des streuenden Partikels. Innerhalb dieser Vorwärtskeule liegen 90% der gestreuten Strahlung, vergleiche Abb. 4-3. Neben der Phase, die durch die Streuung erzeugt wird, findet auch eine Gewichtung der einzelnen gestreuten Winkelanteile statt. Eine Beschreibung dieser Gewichtung kann mit einem Graufilter im Ort der Hauptebenen der Negativlinse realisiert werden. Veranschaulicht ist dieses Modell in Abb. 4-8.

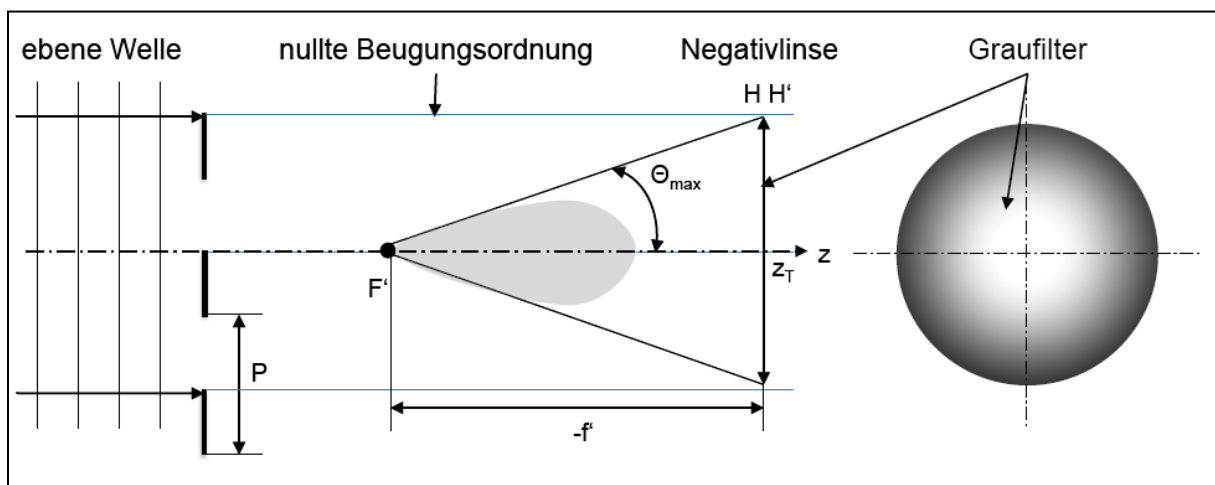


Abbildung 4-8: Modell zur Approximation der Streuung mit Negativlinse und Graufilter.

Es ist zu erkennen, dass der Transmissionsverlauf des Graufilters mit den Streukoeffizienten des Partikels gewichtet ist. Über den jeweiligen Streuwinkel und den zugehörigen Streukoeffizienten sowie die Brennweite der Linse kann somit ein axial rotationssymmetrischer Grauwert bei einem bestimmten Abstand zur optischen Achse berechnet werden. Die Approximation der Streuproblematik mit einer Negativlinse und einem Graufilter beinhaltet jedoch Näherungen. So werden nur die oben erwähnten 90% der gestreuten Strahlung betrachtet und nicht der gesamte Raumwinkel hinter dem Streuzentrum. Diese Näherung ist aber aufgrund der dominierenden Vorwärtsstreuung bei Partikeln ab einem Mikrometer Durchmesser (Abb. 4-3) angemessen. Ein weiterer Kompromiss wird in der endlichen Abtastung des Streuwinkelspektrums und der daraus resultierenden Auflösung des Graufilters eingegangen. Diese Abtastung kann jedoch durch eine engere Stützstellenwahl innerhalb der MATLAB[®]-Routinen (vgl. Anhang 7.3 „nsteps“) verfeinert werden.

Folglich muss aus dem Ergebnis der Streusimulationen in MATLAB[®], welches aus einer Matrix mit zwei Spalten und n Zeilen besteht, eine rotationssymmetrische Transmissionsfunktion berechnet werden (Abb. 4-9).

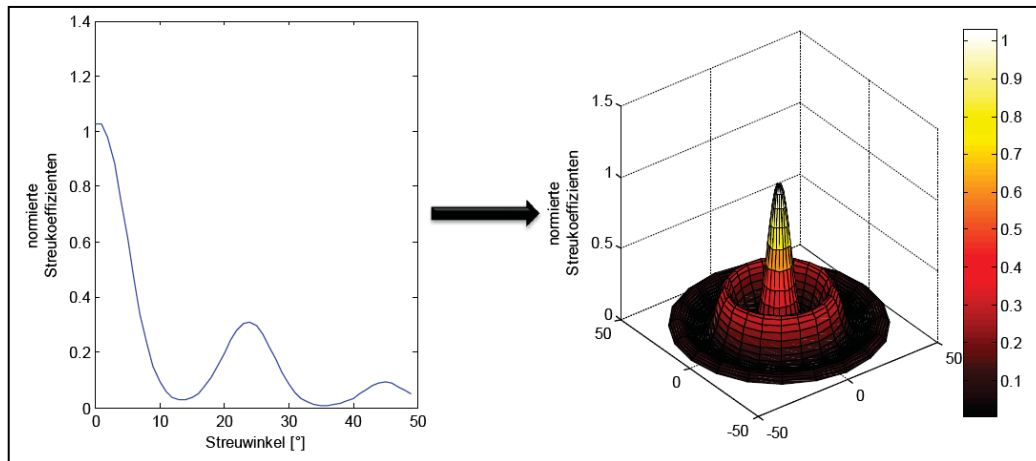


Abbildung 4-9: Umwandlung einer Kurve in einen Rotationskörper.

Die erste Spalte der Streu-Matrix beinhaltet die Streuwinkel wobei in der zweiten Spalte die zugehörigen Streukoeffizienten stehen. Zunächst werden über die Tangensfunktion die Winkel θ in Höhen h (Gegenkathete) umgerechnet.

$$h = |-f'| \tan(\theta) \quad (4.3.3)$$

Dieser Schritt ist zulässig, da die Gegenkathete linear mit der Ankathete zusammenhängt und lediglich mit einem Faktor, dem Tangens, multipliziert wird. Somit ist es möglich unabhängig von der Kenntnis der Ankathete eine Höhe h bei gegebenem Winkel zu berechnen. Nachdem die Ankathete, also die Brennweite der Negativlinse und folglich die Lage des Streuzentrums bekannt ist, kann die errechnete Höhe entsprechend skaliert werden. Letztlich bekommt jede errechnete Höhe einen Amplitudenwert zugeteilt, welcher mit dem jeweiligen Streukoeffizienten gewichtet ist. Dies wird in MATLAB[®] durch eine quadratische Matrix, verbildlicht in Abb. 4-9 rechts, realisiert, welche doppelt so viele Zeilen wie die Streumatrix (Abb. 4-9 links) enthält. Die quadratische Matrix der Dimension $2n \times 2n$ wird nun mit den n Amplitudenwerten gefüllt. Durch die Rotationssymmetrie des Streuspektrums kann mit Hilfe des Satzes des Pythagoras jedem Feld in der quadratischen Matrix der entsprechende Amplitudenwert zugeordnet werden (vgl. Anhang 7.3 MATLAB[®]-Programm „Keule“).

Das Ergebnis stellt einen Graufilter mit einer rotationssymmetrischen Amplitudenverteilung dar wobei sich für jeden Partikeldurchmesser eine andere Verteilung ergibt.

Die in Abb. 4-9 dargestellte Winkelverteilung ist für ein Partikel mit einem Mikrometer Durchmesser berechnet. Der Graufilter begrenzt die erzeugte Divergenz des Streupartikels zu größeren Winkel hin mit einer Transmission von null Prozent. Innerhalb des Divergenzwinkels werden die einzelnen Winkelbereiche mit der entsprechenden Amplitude multipliziert.

In folgender Abbildung sind für unterschiedliche Partikeldurchmesser die zugehörigen Graufilter dargestellt. Die laterale Ausdehnung der Filter ist normiert auf den maximalen Streuwinkel der Vorwärtsstreuung, in den 90% der gestreuten Strahlung liegen.

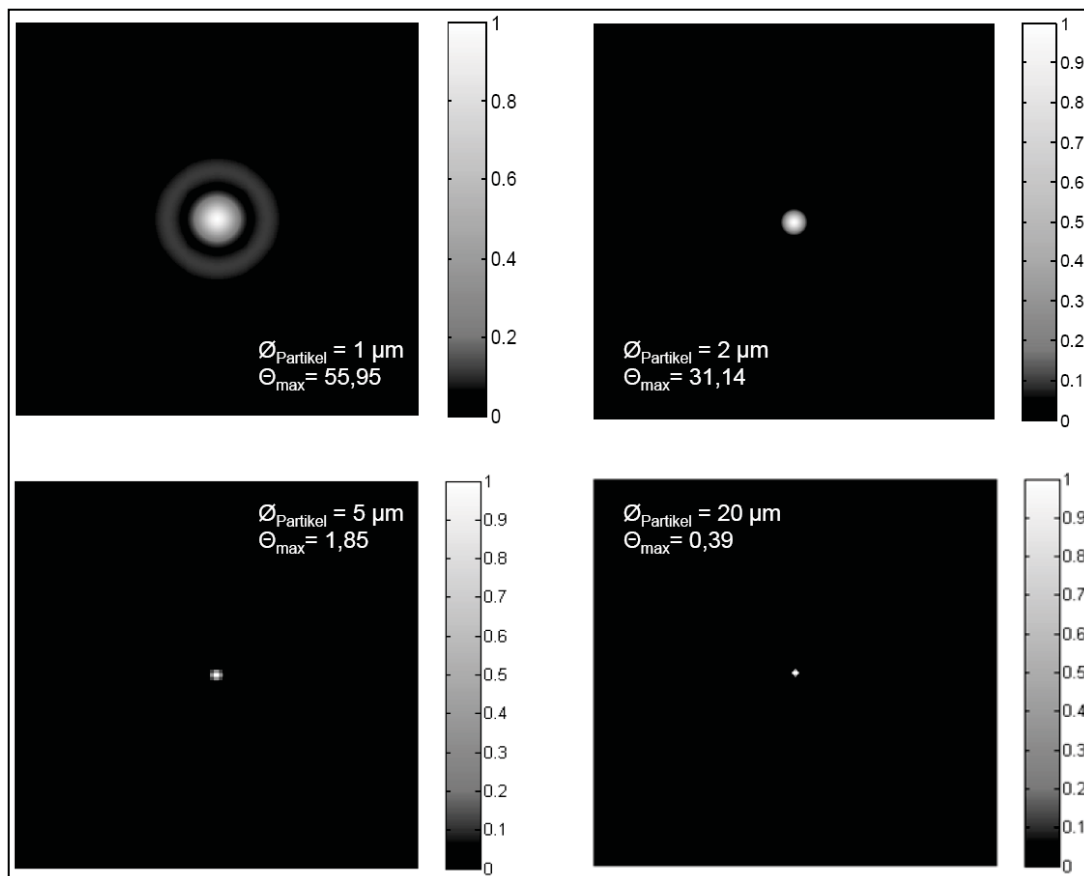


Abbildung 4-10: Graufilter bei verschiedenen Partikeldurchmessern.

In Abb. 4-10 ist eine Verkleinerung des Winkelbereiches der Vorwärtsstreuung bei zunehmendem Partikeldurchmesser zu erkennen. Jeder Filter besitzt somit einen immer kleineren Bereich, in welchem er Strahlung transmittieren lässt. Bei Partikeln mit einem größeren Durchmesser als zehn μm besitzt die Vorwärtsstreuokeule einen Winkel kleiner ein Grad womit eine einfallende Welle näherungsweise keine Ausbreitungsrichtungsänderung mehr erfährt. Der Graufilter entspricht für diesen Fall einer Lochblende mit einem Durchmesser von wenigen Mikrometern.

Dies ist ein Widerspruch zum Experiment, bei welchem ein Partikel in der Größenordnung von mehreren zehn Mikrometern sehr gut zu erkennen ist (Abb. 4-11).

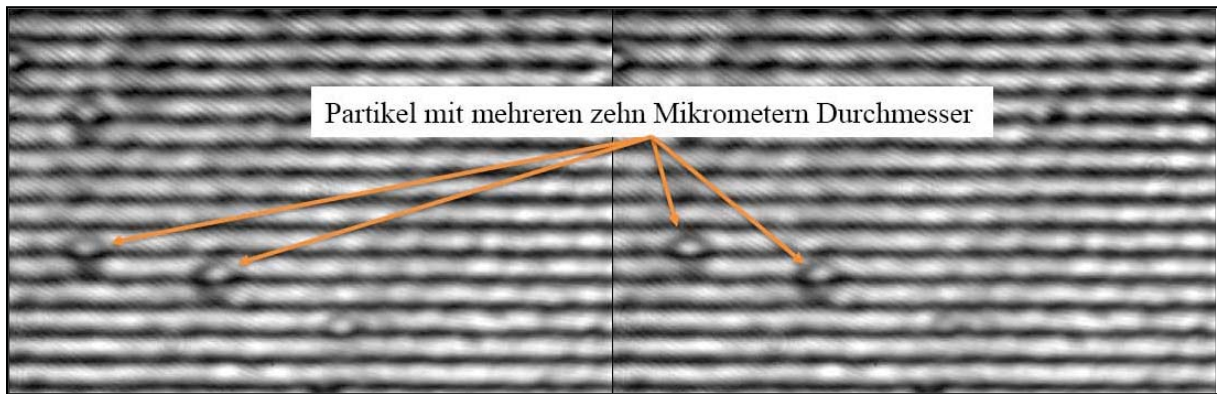


Abbildung 4-11: Partikel bis $80\mu\text{m}$ Durchmesser im Experiment (Meike Hofmann).

In Abb. 4-11 sind zwei Aufnahmen der Selbstabbildung dargestellt. Die Selbstabbildung wird durch mehrere Partikel mit einem maximalen Durchmesser von $80\mu\text{m}$ gestört. Ein Gitter mit einer Periode von $50\mu\text{m}$ wurde für das Experiment genutzt womit die lokale Störung der Selbstabbildung einen Bereich von kleiner $100\mu\text{m}$ beträgt. Für Partikel dieser Ausmaße ergibt sich in der Simulation des Graufilters lediglich eine Lochblende in der Größenordnung mehrerer Nanometer. Das Streuzentrum besitzt jedoch eine laterale Ausdehnung und kann nicht als Punktlichtquelle angenähert werden. Somit wird für Partikel ab einem Durchmesser von zehn μm eine Lochblende mit einem Transmissionsgradienten entlang der Kanten angenommen, vgl. Abb. 4-12.

Größere Partikel besitzen einen maximalen Streuwinkel von $\theta_{max} \leq 1^\circ$ für 90% der gestreuten Strahlung. Simulationen der Software „MiePlot“ von Philip Laven¹ für Streuzentren ab zehn μm Durchmesser bestätigen diesen Maximalwinkel. Damit die Streuproblematik weiterhin berücksichtigt werden kann, müssen die Kanten einer Lochblende für die Simulation eine endliche Ausdehnung besitzen, in denen sich die Transmission ändert (Abb. 4-12).

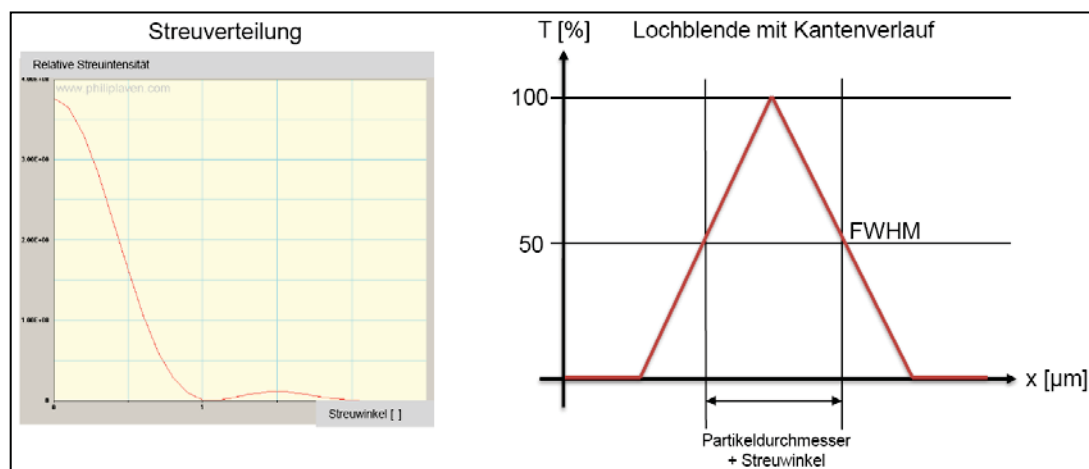


Abbildung 4-12: Streuverteilung (links) und Kantenverlauf der Lochblende (rechts).

¹ philip@philiplaven.com

Die Apertur der Lochblende besitzt Ausdehnung des zweifachen Partikeldurchmessers plus einer Strecke resultierend aus dem Streuwinkel. Für Partikel mit einem größeren Durchmesser als fünf Mikrometer wird nach Abb. 4-12 innerhalb der MATLAB[®]-Simulation eine dreieckförmige Transmissionsfunktion als Graufilter berechnet (vgl. Anhang 7.3 MATLAB[®]-Programm „Keule“).

Das Gesamtmodell, welches die kombinierte Simulation von Fresnel-Beugung und Streuung an Sphären realisiert, ist in nachstehender Abbildung schematisch dargestellt.

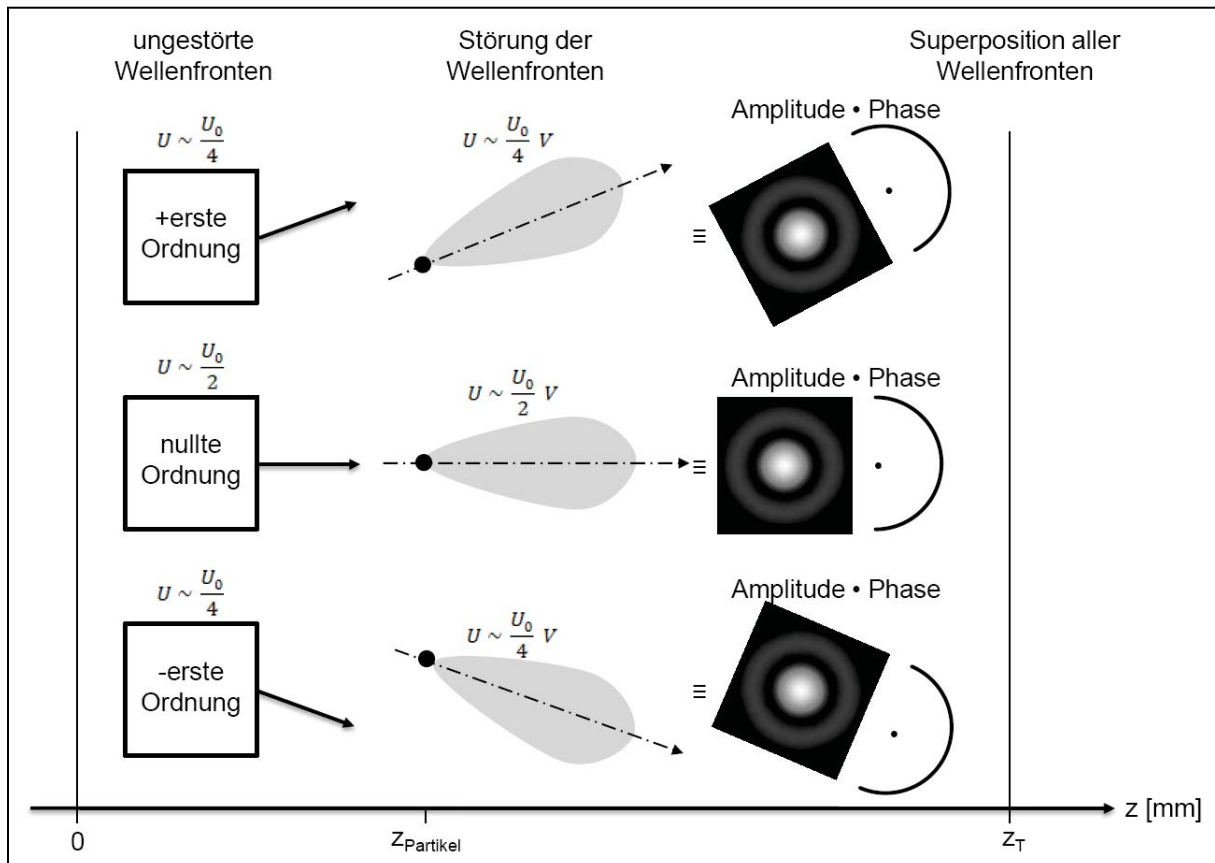


Abbildung 4-13: Gesamtmodell zur kombinierten Simulation.

Die kombinierte Simulation wird mit VirtualLab[™] durchgeführt wobei die Graufilter mit MATLAB[®] berechnet werden. Eine Umrechnung in eine Amplitudenverteilung für die Streu-Approximation ist anschließend in der Simulationsumgebung möglich.

5 Kombinierte Simulation

In diesem Kapitel werden mit der Software VirtualLab™ verschiedene Szenarien der Störung einer Selbstabbildung durch Partikel unterschiedlicher Größe und Position simuliert. Dabei werden Partikel mit einem Durchmesser von ein bis 100 μm betrachtet. Des Weiteren erfolgt eine Positionsänderung entlang einer definierten Bahnkurve in allen drei Raumrichtungen, sodass eine Bewegung nachgeahmt werden kann. Ein Ablaufplan für die Simulation ist im Anhang unter 7.4 dargestellt und erläutert.

5.1 Vergleich Simulation und reale Messung

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse der kombinierten Simulation in VirtualLab™ mit realen Messergebnissen verglichen.

Im Experiment bewegen sich die Partikel durch den Wechselwirkungsraum wobei sie folglich unterschiedliche Bereiche der Selbstabbildung stören. Die Partikel besitzen dabei unterschiedliche Größen, sodass aus dem Experiment nicht der Durchmesser oder die axiale Lage des Streuzentrums hervorgeht. Dargestellt ist ein ausgewähltes Partikel in Abb. 5-1.

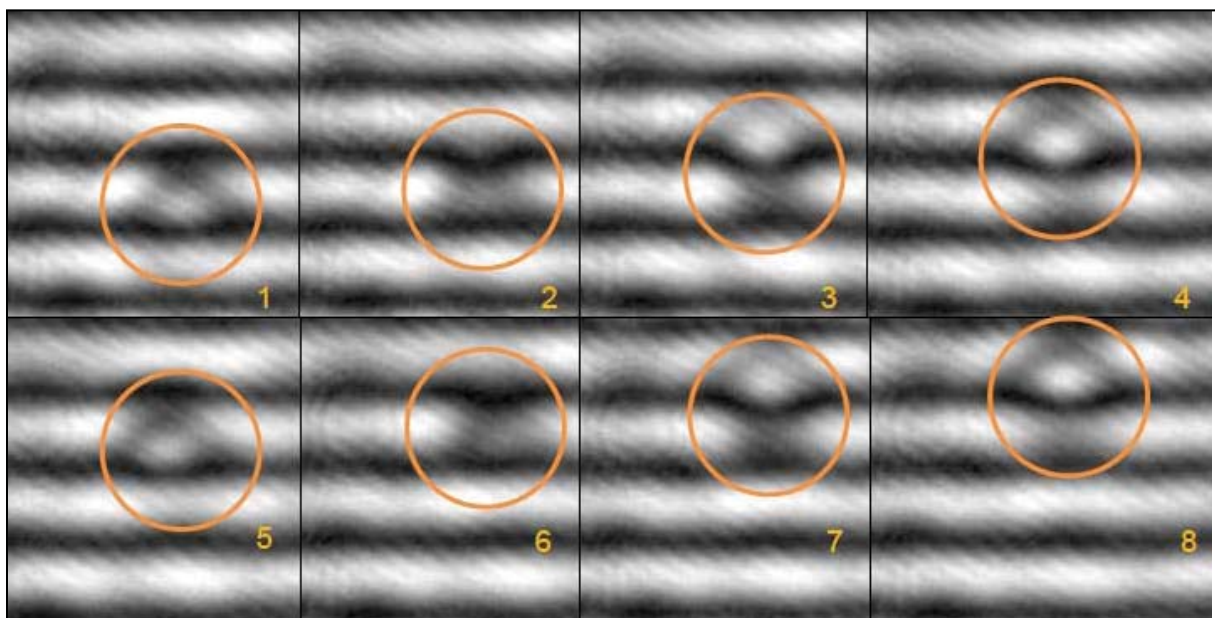


Abbildung 5-1: Bewegung eines Streuzentrums innerhalb des Wechselwirkungsraumes.

Hierbei ist zu erkennen, dass sich das Partikel auf einer geradlinigen und senkrecht zu den Spalten des Gitters verlaufenden Bahn bewegt. Somit passiert es „helle“ und „dunkle“ Bereiche der Selbstabbildung, welche durch das Partikel gestört werden. Die Störung selbst ist

durch eine Art partielle Kontrastumkehr des Streifenmusters zu lokalisieren. Ebenfalls ist eine Spiegelsymmetrie senkrecht zu den Interferenzstreifen innerhalb der Kontrastumkehr zu erahnen. Eine detaillierte Aussage über die Störung ist jedoch auf Grund der vergleichsweise geringen Abbildungsqualität der Messergebnisse nur in Grenzen möglich.

Für einen Vergleich der Messung mit der Simulation ist in Abb. 5-2 die Bewegung eines Partikels senkrecht zu dem Streifenmuster berechnet worden.

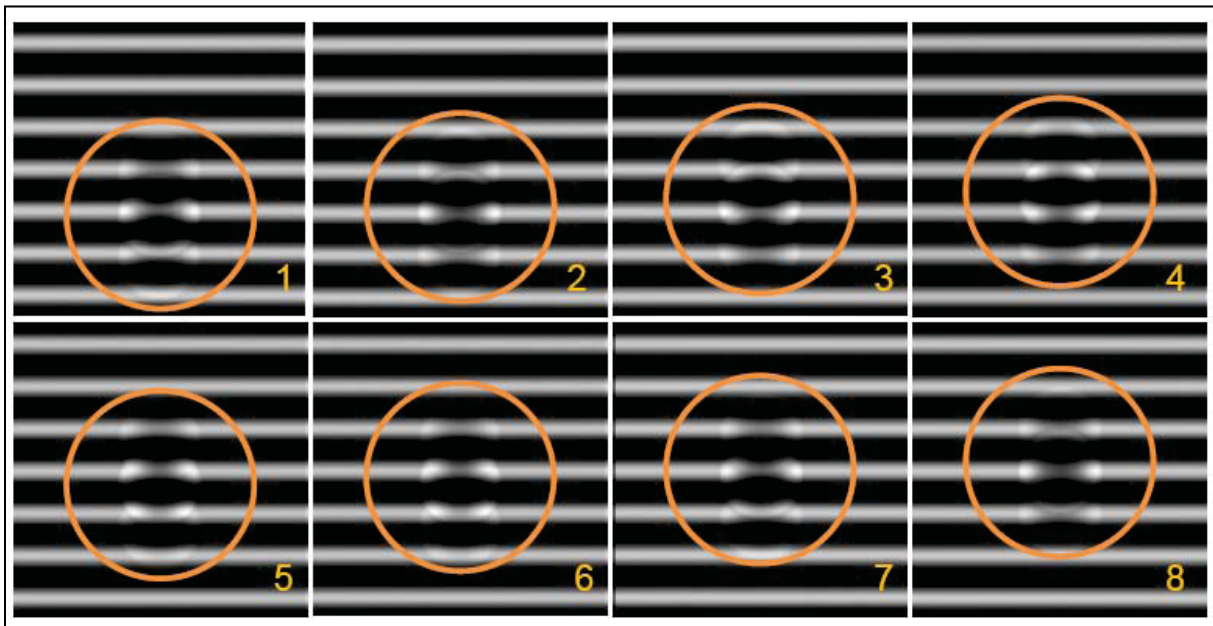


Abbildung 5-2: Simulation der Bewegung eines Streuzentrums.

Die Verschiebung des Partikels beträgt für jedes Teilbild in Abb. 5-2 acht μm womit sich eine gesamte Positionsänderung von 56 μm ergibt. Die Störung wurde für ein sphärisches Partikel mit 40 μm Durchmesser berechnet. Das Gitter besitzt eine Periode von 50 μm wobei eine Wellenlänge im nahen Infrarot mit 850 nm der elektromagnetischen Strahlung angenommen wird.

In der Simulation ist ebenfalls eine Kontrastumkehr, speziell in den hellen Bereichen der Selbstabbildung, zu erkennen. Die vergleichsweise geringe Intensität der Störung in den dunklen Abschnitten ist auf das Modell zurückzuführen. In der Realität existieren auf Grund von Fertigungsfehlern keine idealen Gitter. Somit ist die Selbstabbildung ebenfalls die Reproduktion eines nicht idealen Gitters. Zusätzlich wird der Kontrast der Selbstabbildung durch die Abbildungsfehler der, zur Bildaufnahme benötigten, optischen Bauteile verringert. Folglich ist der Intensitätsunterschied zwischen dunklen und hellen Streifen bei einer realen Messung geringer als bei der Simulation und eine Störung in den dunklen Bereichen fällt vergleichsweise intensitätsstärker aus.

Eine weitere Abweichung zwischen realer Messung und Simulation stellt der Abstand des Partikels von der Talbot-Ebene dar. In der Simulation wurde die Störung für eine Entfernung des Partikels von der Talbot-Ebene von drei mm angenommen. Im Experiment wird dieser Abstand nicht exakt eingehalten. Auch ist das im Experiment verwendete Gitter ein Ronchi-Gitter und kein Sinusamplitudengitter. Selbst mit einer spatialen Filterung einzelner Beugungsordnungen ist die Effizienz der Ordnungen eines Sinusamplitudengitters nicht zu erreichen. Desweiteren wird das Streuzentrum im Experiment durch ein mit Luft gefülltes Glaskügelchen und nicht durch eine homogene Sphäre realisiert. Die Größe des Streuzentrums variiert zwischen fünf bis mehreren zehn μm da ein Gemisch vorliegt. Diese Glaskügelchen entsprechen jedoch mehr einem sphärischen Streuzentrum als der zu Beginn dieser Arbeit erwähnte „Arizona test dust“, Siehe Abb. 5-3.

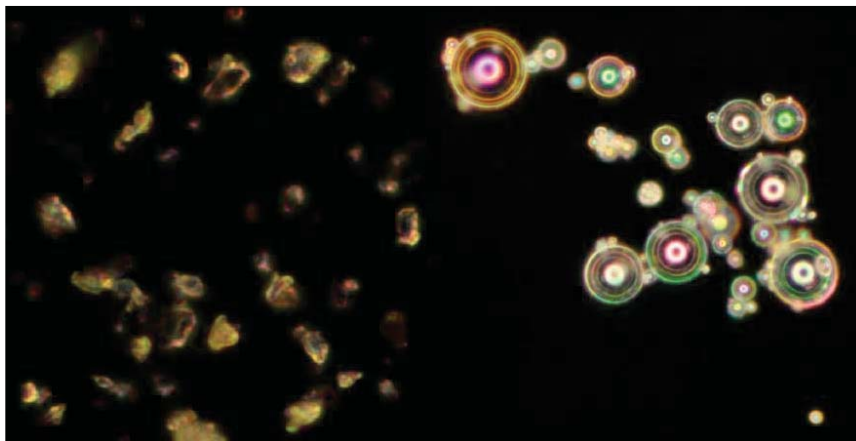


Abbildung 5-3: Streuzentren, links: „Arizona test dust“, rechts: Glaskügelchen.

In Abb. 5-3 sind Dunkelfeldaufnahmen mit einer zwanzigfachen Vergrößerung der Streuzentren zu erkennen. Es ist leicht ersichtlich, dass die Glaskügelchen (rechts) eine geeignetere Sphärenapproximation darstellen. Der Teststaub hingegen besitzt eine bessere Übereinstimmung bezüglich des Brechungsindex. Da die Streuproblematik jedoch nur für einfache geometrische Körper, wie Kugeln oder Zylinder, mit dem vorliegenden Algorithmus berechenbar ist, wird die geometrische Übereinstimmung der Glaskügelchen bevorzugt.

Neben den Abweichungen der experimentellen Rahmenbedingungen von dem der Simulation zugrunde liegenden Modell ist jedoch eine physikalisch näherungsweise gute Übereinstimmung der Gesamtproblematik vorhanden. Dies bestätigen auch die Übereinstimmungen von Simulation und Experiment. Da keine Aussage aus den vorliegenden Messergebnissen bezüglich Größe und lateraler Position des Streuzentrums getroffen werden kann, erfolgt zunächst

ein qualitativer Vergleich. In Abb. 5-4 sind zwei markante Teilbilder aus der realen Messung in Abb. 5-1 und der Simulation in Abb. 5-2 gegenübergestellt.

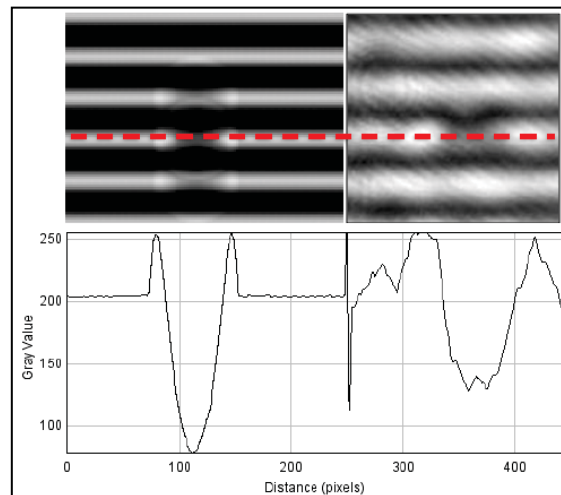


Abbildung 5-4: Grauwertverlauf entlang eines gestörten Interferenzstreifens.

Abb. 5-4 veranschaulicht die Kontrastumkehr innerhalb des gestörten Bereiches. Ebenfalls ist gut zu erkennen, dass eine Intensitätserhöhung erfolgt, bevor eine Kontrastumkehr stattfindet. Dieses Verhalten zeigt sich in beiden Teilbildern deutlich. Auch ist eine Beeinflussung der angrenzenden Streifen in den Simulationsergebnissen festzustellen. Diese besitzt eine kreisförmige Geometrie und bewirkt eine leichte Intensitätserhöhung. In den experimentellen Messergebnissen ist dieser Effekt in den Videoaufnahmen zu erkennen, was die Integrität der Simulation weiter bestätigt. In Abb. 5-5 ist die Beeinflussung benachbarter Streifen verdeutlicht.

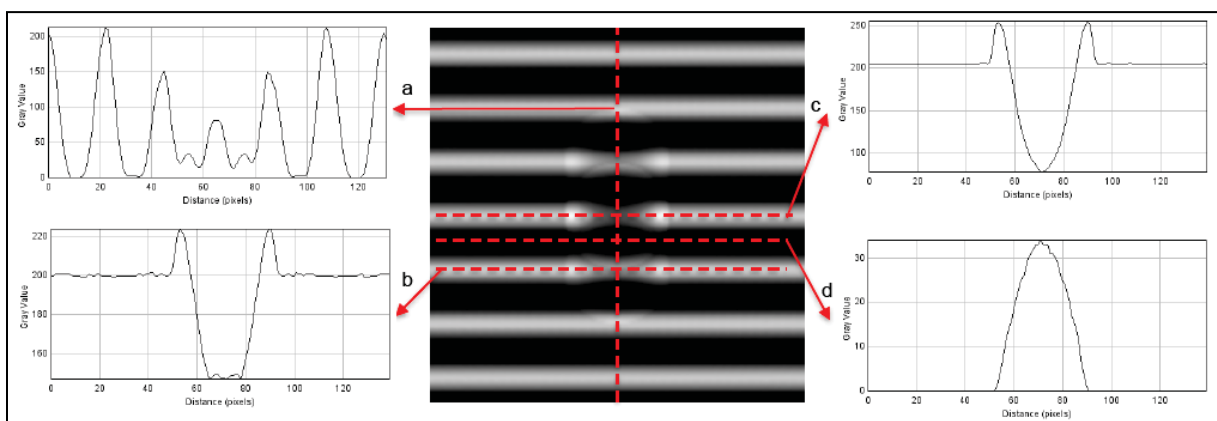


Abbildung 5-5: Intensitätsprofile markanter Regionen.

In den Schnitten b, c und d ist die Spiegelsymmetrie der Kontrastumkehr in den dunklen und hellen Bereichen veranschaulicht. Senkrecht dazu zeigt Schnitt a den Intensitätsverlauf über sieben Gitterperioden wobei hier ebenfalls eine Symmetrie vorhanden ist.

Auf Grund der qualitativ ähnlichen Ergebnisse aus Simulation und Experiment werden in den folgenden Abschnitten mögliche Szenarien der Störung einer Selbstabbildung simuliert.

5.2 Größenvariation des Streuzentrums

Im Rahmen dieser Arbeit gilt es die Störung von sphärischen Partikeln mit einem Durchmesser von ein bis 100 μm auf die Selbstabbildung eines Gitters zu simulieren. Die folgende Abbildung stellt die Störung der Selbstabbildung eines Sinusamplitudengitters durch Partikel unterschiedlicher Größe dar. Das Streuzentrum ist dabei drei mm vor der Talbot-Ebene positioniert.

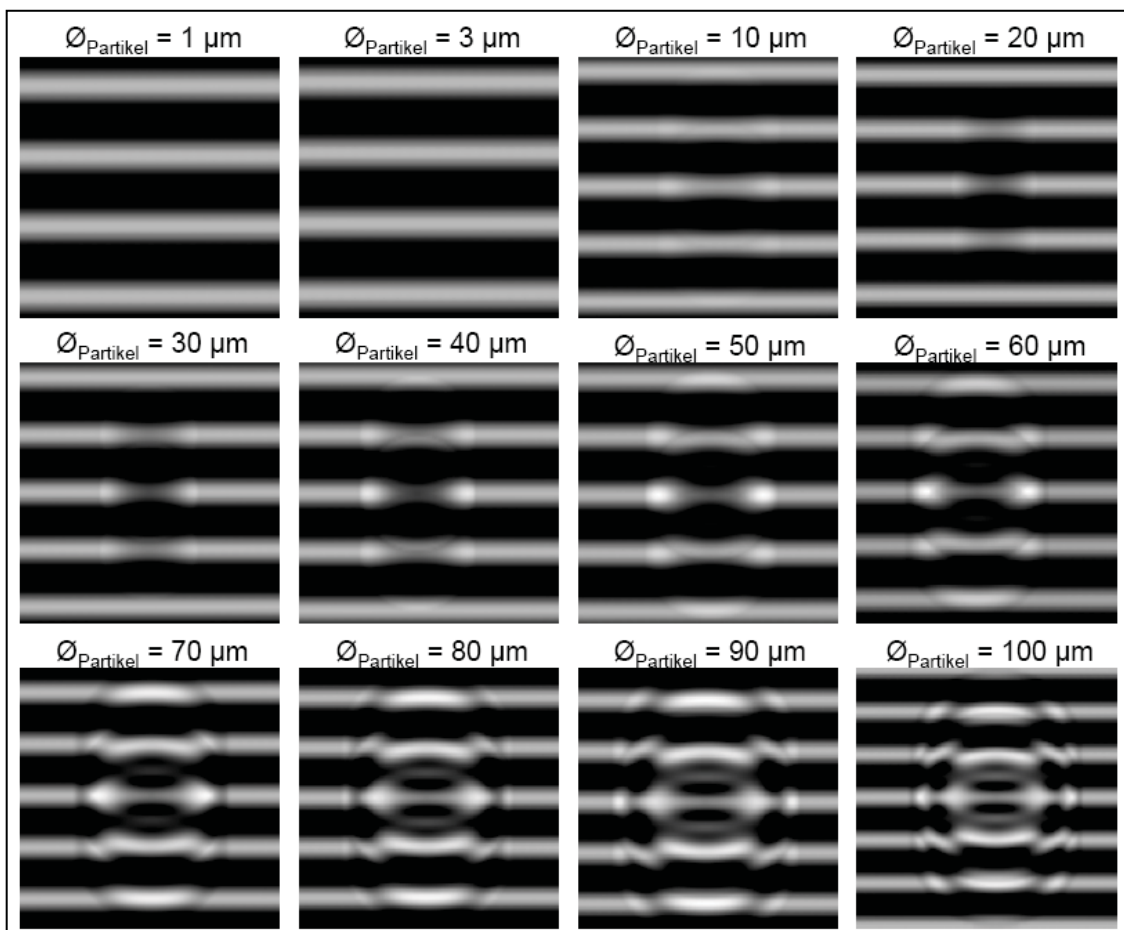


Abbildung 5-6: Größenvariation des Streuzentrendurchmessers von ein bis 100 μm .

Eine Störung der Selbstabbildung durch Partikel mit einem kleineren Durchmesser als fünf μm ist in der Simulation sowie im Experiment nicht zu erkennen. Die Ursache hierfür ist auf den vergleichsweise großen Divergenzwinkel der Vorwärtsstreuung zurückzuführen. Erst ab einem Partikeldurchmesser von zehn μm ist dieser kleiner als zwei Grad. Folglich werden bei kleineren Partikeln die einfallenden Wellen innerhalb eines breiten Winkelbereichs gestreut,

sodass bei der Überlagerung in der Talbot-Ebene keine Störung in der Simulation mehr zu erkennen ist.

In Tab. 5-1 ist das Verhalten des Streuwinkels, in welchen 90% der einfallenden Welle gestreut werden in Abhängigkeit von der Partikelgröße aufgetragen.

Partikeldurchmesser in μm	1	2	3	4	5	10	20	30	40	50	100
Divergenzwinkel Θ in $^\circ$	111,9	62,28	10,19	5,76	3,71	1,76	0,79	0,54	0,4	0,32	0,18

Tabelle 5-1: Partikeldurchmesser und Divergenzwinkel.

Der Divergenzwinkel verhält sich reziprok nichtlinear zum Partikeldurchmesser und verkleinert sich mit steigendem Durchmesser.

Das verwendete Modell für die kombinierte Simulation beinhaltet die Berechnung einer Apertur für die ideale Linsenfunktion anhand dieser Divergenzwinkel. Das bedeutet jedoch, dass ein Partikel mit 100 μm Durchmesser bei drei Millimeter Abstand zur Talbot-Ebene eine laterale Störungsausdehnung von neun Mikrometern ($h_{\text{Streuwinkel}} = \tan(\Theta) \cdot 3 \text{ mm}$) Durchmesser pro Beugungsordnung besitzt. Dies ist ein Widerspruch zu den experimentellen Ergebnissen. Dort zeigt sich deutlich, dass mit steigender Partikelgröße auch die Ausdehnung der Störung zunimmt.

Des Weiteren zeigen die experimentellen Ergebnisse, dass ein zehn Mikrometer durchmessendes Partikel eine vergleichsweise intensitätsschwache Störung von etwa 150 μm Durchmesser in der Talbot-Ebene erzeugt.

Aus diesem Grund wird der Partikeldurchmesser in die Störungsausdehnung und folglich die Apertur-Berechnung mit einbezogen. Zusätzlich wird aus der Vorwärtsstreuokeule (Vergleich Abb. 4-8) ein Graufilter generiert, welcher im Zentrum eine Transmission von 100% besitzt die zum Rand hin rapide abnimmt (Vergleich Abb. 4-12). Dieser Graufilter muss jedoch bewertet werden, damit ein Partikel mit kleinem Radius r_{Partikel} und vergleichsweise ausgehnter Vorwärtsstreuung $h_{\text{Streuwinkel}}$ nicht dieselbe Störintensität wie ein Partikel größeren Durchmessers mit schmaler Vorwärtsstreuung aufweist. Diese Bewertungsfunktion V

$$V = \frac{r_{\text{Partikel}}}{r_{\text{Partikel}} + h_{\text{Streuwinkel}}} \quad (5.1)$$

ist aus experimentellen Messergebnissen entstanden und hat somit einen empirischen Charakter. In der Bewertungsfunktion wird die maximale Ausdehnung des Graufilters mit der Partikelgröße ins Verhältnis gesetzt. Somit wird sichergestellt, dass die Störung auf einen Maximalwert normiert ist und kleine Partikel eine schwächere Störung verursachen als größere. Veranschaulicht ist die Grundidee der Bewertung in Abb. 5-7.

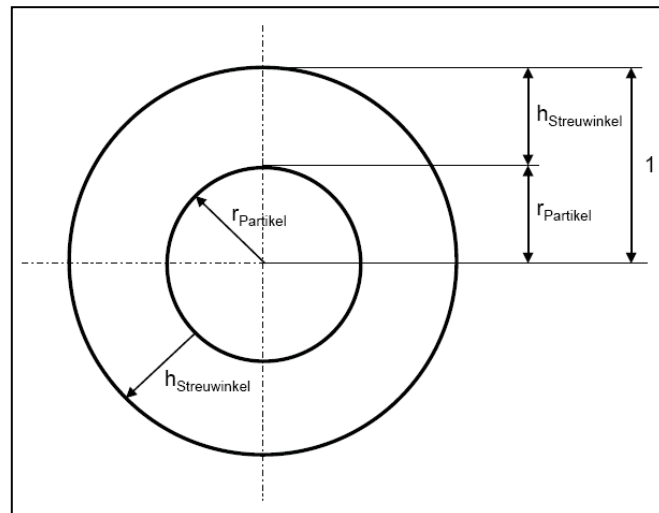


Abbildung 5-7: Grundlage der Bewertungsfunktion.

Aus obiger Darstellung wird deutlich, dass bei einem Partikel mit einem Mikrometer Durchmesser und einem Streuwinkel von $\theta = 111,9^\circ$ der Nenner in Gleichung 5.1 größer wird als der Zähler und eine Bewertung kleiner eins erfolgt. Ein Partikel von $100 \mu\text{m}$ und einem vergleichsweise geringen Streuwinkel hingegen erwirbt somit eine Bewertung von annähernd eins.

In Abb. 5-6 ist ebenfalls die Approximation des Sinusamplitudengitters durch drei sich ausbreitende Beugungsordnungen zu erkennen. Jede dieser Beugungsordnungen wird durch das Partikel gestört, was bei einer kohärenten Überlagerung in der Talbot-Ebene sichtbar wird. Die Selbstabbildung eines binären Amplitudengitters mit n Ordnungen würde in dieser Simulation n Störungen mit der entsprechenden Ordnungseffizienz erfahren. Ein Auseinanderlaufen der gesamten Störung in Richtung benachbarter Interferenzstreifen wäre die Folge.

5.3 Positionsänderung des Streuzentrums

Die Bewegung eines Partikels entlang der drei Raumrichtungen x, y, z wird in diesem Abschnitt simuliert. Zu Beginn erfolgt die Berechnung einer Bahnbewegung senkrecht zu den Interferenzstreifen der Selbstabbildung.

Die Bewegung parallel zu den Streifen würde keine Änderung der Störung bewirken und lediglich in der Positionsänderung der Störung zu erkennen sein. Aus diesem Grund wird in einem zweiten Schritt eine Bahnkurve mit Komponenten in x und y simuliert. Anschließend erfolgt die Untersuchung der Störung bei Variation der z -Komponente, also die Änderung des Abstandes des Partikels von der Talbot-Ebene.

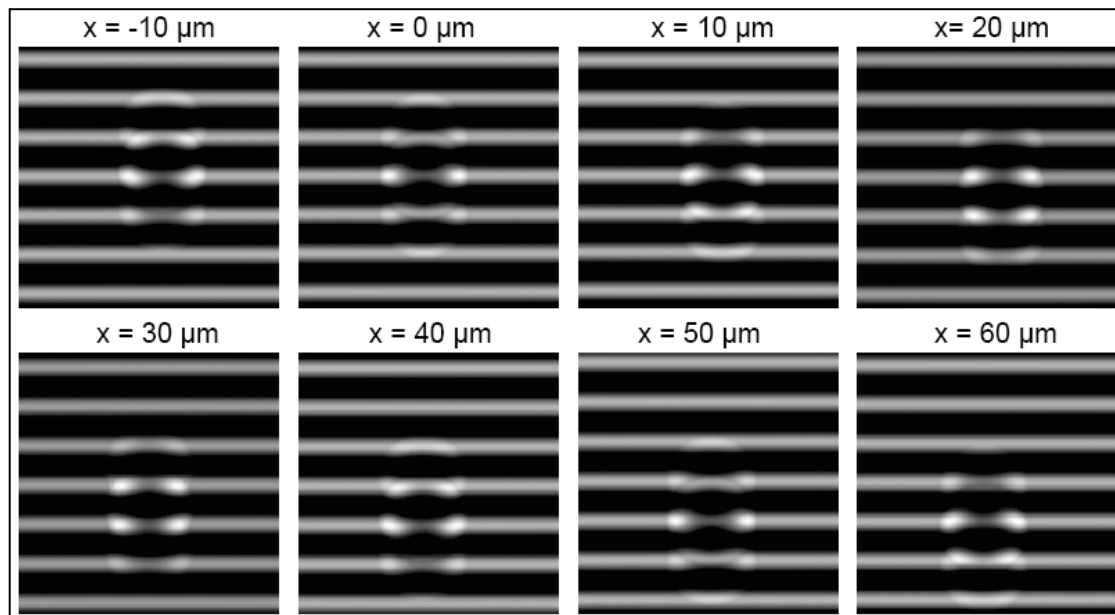


Abbildung 5-8: Bewegung eines Partikels senkrecht zu den Interferenzstreifen.

In Abb. 5-8 ist die Bewegung eines Streuzentrums von 50 μm Durchmesser senkrecht zu den Interferenzstreifen simuliert. Die Gesamtstrecke der Bewegung beträgt 70 μm wobei das Gitter eine Periode von 50 μm besitzt. Bei dem Teilbild mit der Verschiebung $x = 0 \mu\text{m}$ befindet sich das Streuzentrum lateral an der Position des hellen Interferenzstreifens.

Wie zu erwarten sind die Teilbilder mit $x = 0 \mu\text{m}$ und $x = 50 \mu\text{m}$ sowie $x = -10 \mu\text{m}$ und $x = 40 \mu\text{m}$ äquivalent. Das Partikel hat sich dort um exakt eine Periode fortbewegt. Dieses wiederholte Erscheinen derselben Störung ist auch in den experimentellen Ergebnissen vorzufinden. Allerdings wird die Äquivalenz dort durch die Fertigungsfehler des Gitters sowie die Abbildungsfehler des Messaufbaus beeinträchtigt.

Die Bewegung des Partikels entlang einer Bahnkurve mit Änderungen der x - und y -Komponente wird im Folgenden simuliert. Dabei sind die schrittweise durchgeführten Positionsänderungen des Partikels zwischen den einzelnen Teilbildern durch keine gemeinsamen Teiler der Gitterperiode realisiert. Somit kann das wiederholte Auftreten von symmetrischen Störungen vermieden werden. Jede der Einzelverschiebungen beinhaltet eine Änderung der Position in x und y . Die Änderung, welche parallel zu den Interferenzstreifen verläuft, bewirkt wie oben bereits erwähnt keine Störungsänderung und ist nur durch eine relative Positionsänderung zu erkennen. In Abb. 5-9 sind zwölf Teilbilder dargestellt in denen sich das Streuzentrum entlang einer Bahnkurve von 132,46 μm Länge fortbewegt hat.

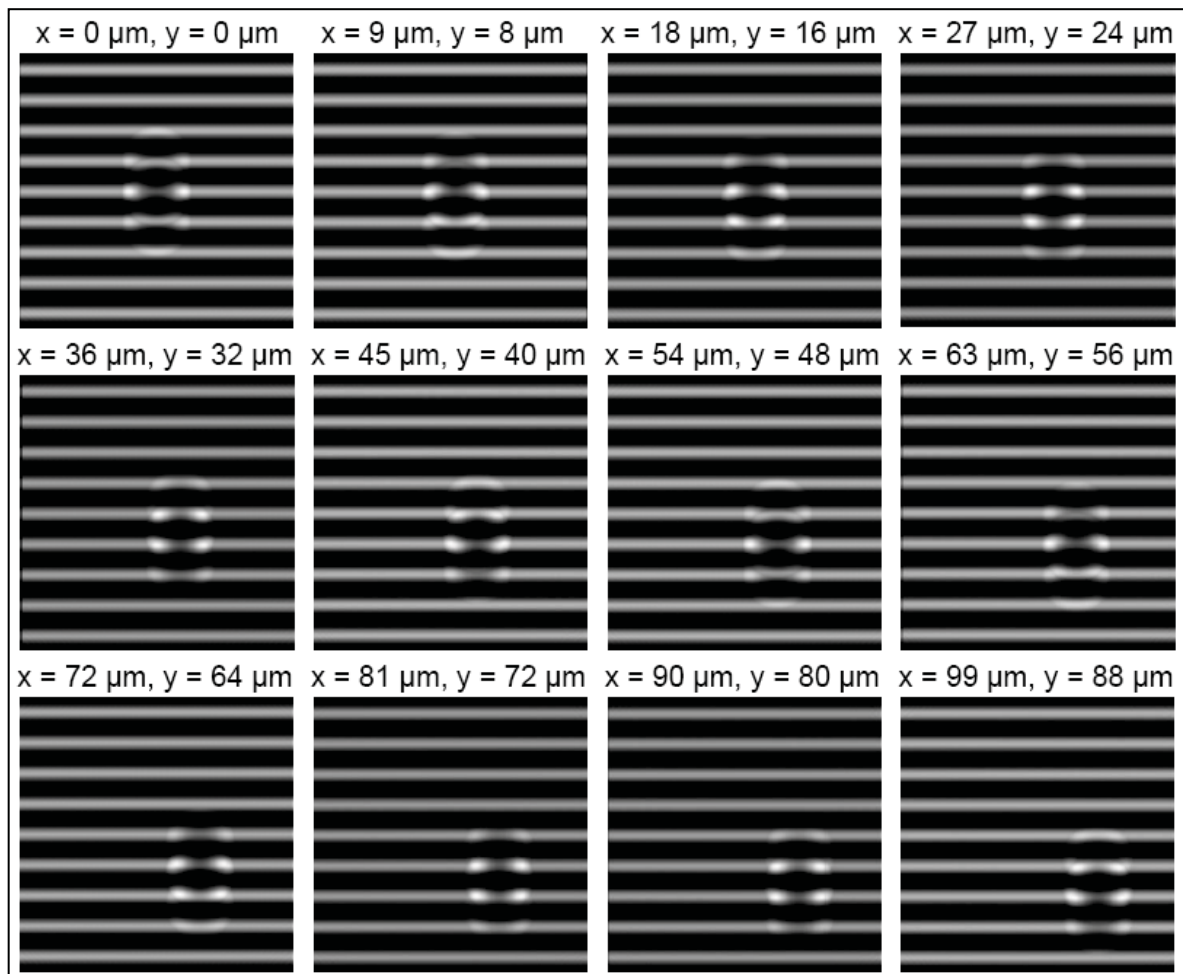


Abbildung 5-9: Bewegung eines Partikels entlang einer Zweikomponentenbahnkurve.

Die Verschiebung der Partikelposition parallel zu den Interferenzstreifen bewirkt bei einem idealen Gitter keine Störungsänderung. Im Experiment hingegen ist eine Störungsänderung auf Grund des nicht idealen Gitters und den Abbildungsfehlern im optischen Messaufbau festzustellen (Siehe Abb. 5-10).

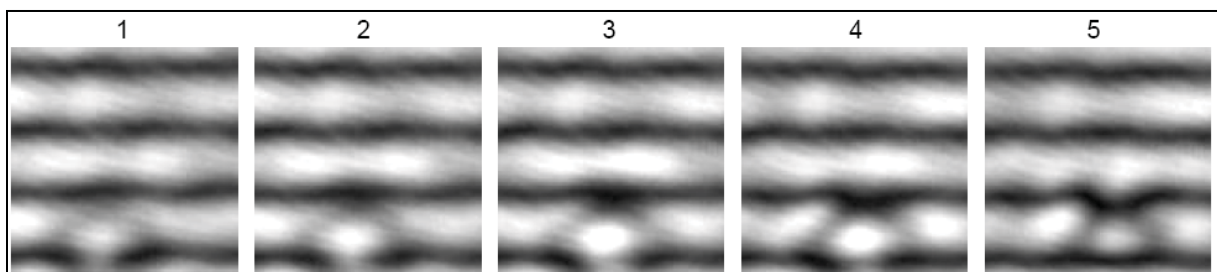


Abbildung 5-10: Bewegung eines Partikels im Experiment.

In den Teilbildern drei und vier ist deutlich eine Intensitätserhöhung im Zentrum der Störung zu sehen. Deshalb wird als Vergleich in einer nächsten Simulation die Abstandsänderung des Partikels zur Talbot-Ebene nachgebildet. Abb. 5-11 zeigt 12 Teilbilder wobei das Streuzent-

rum zwischen zwei Teilbildern jeweils um $100\ \mu\text{m}$ näher an die Talbot-Ebene herangerückt wurde.

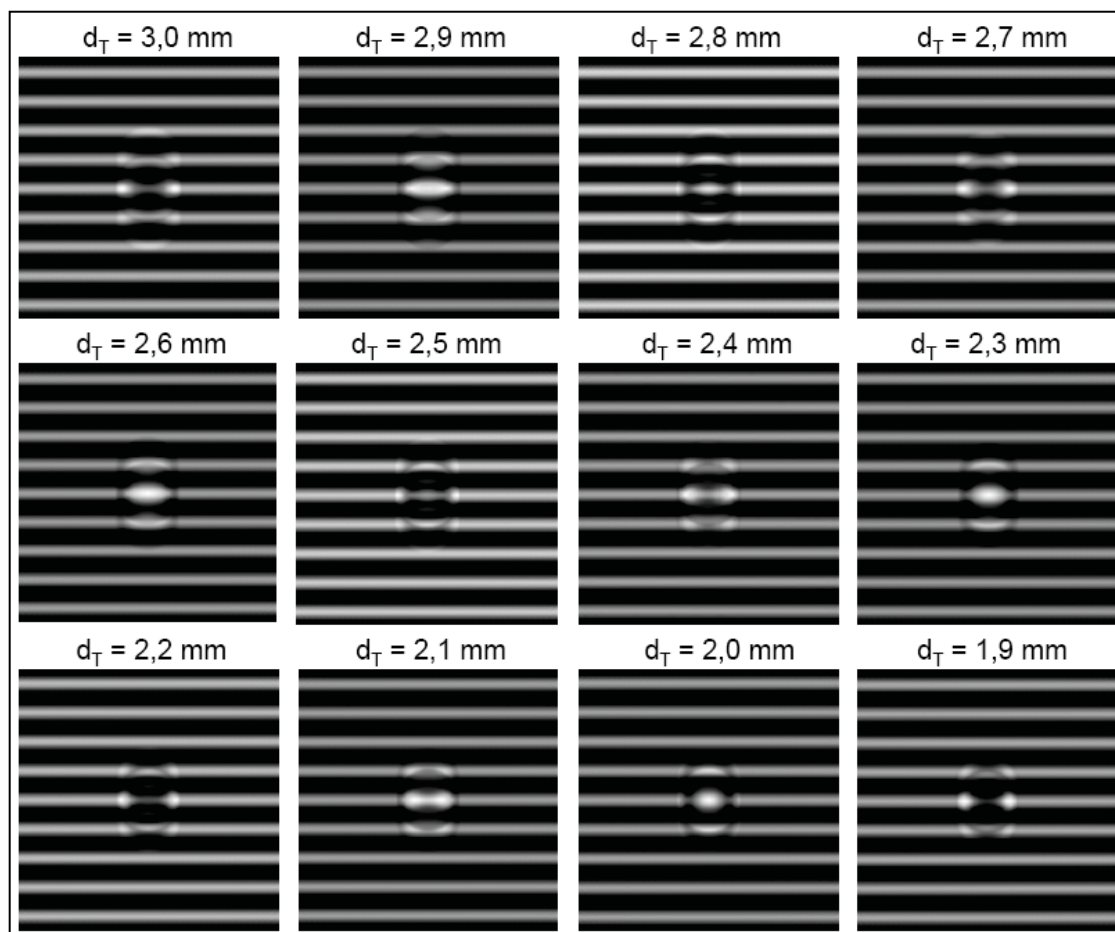


Abbildung 5-11: Bewegung eines Partikels näher zur Talbot-Ebene.

In dieser Simulation zeigt sich, in Übereinstimmung zu Abb. 5-10, die Ausprägung einer Intensitätserhöhung im Zentrum der Störung bei bestimmten Abständen zur Talbot-Ebene. Befindet sich das Partikel zwischen zwei hellen Interferenzstreifen ergibt sich folgende Störung.

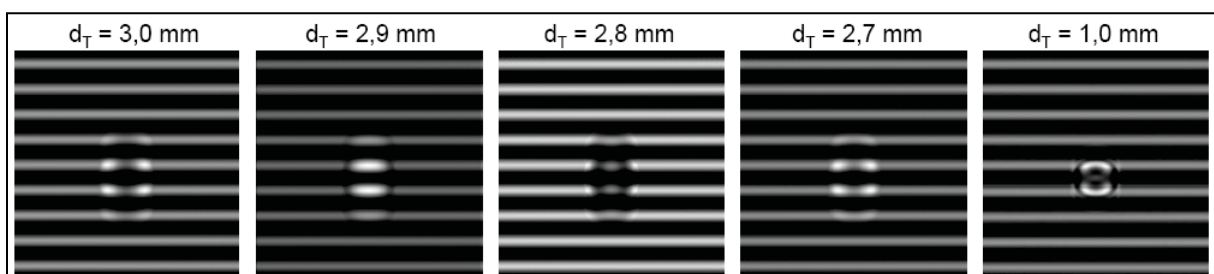


Abbildung 5-12: Bewegung eines zwischen zwei Interferenzstreifen positionierten Partikels.

Bei dieser lateralen Positionierung des Streuzentrums ergibt sich eine vergleichsweise stärkere Intensitätserhöhung innerhalb der „dunklen“ Bereiche der Selbstabbildung. Veranschaulicht ist dies in nachstehender Abbildung 5-13.

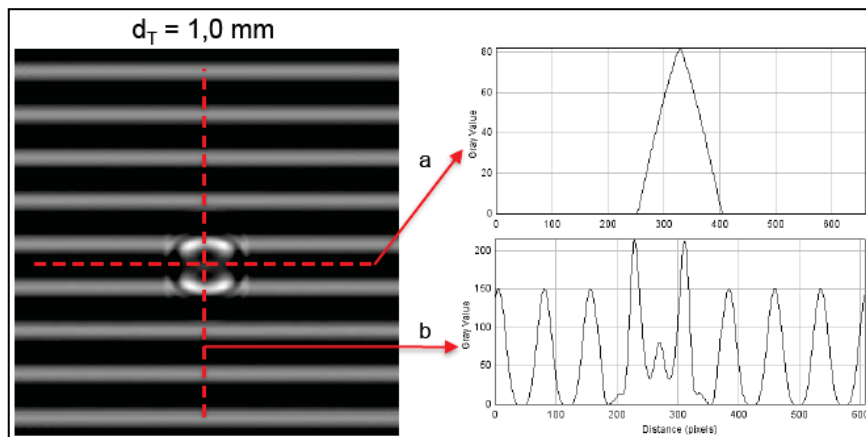


Abbildung 5-13: Intensitätsprofile markanter Regionen.

Schnitt *a* stellt die Intensitätserhöhung zwischen zwei hellen Interferenzstreifen dar. Wie im Experiment bestätigt (Abb. 5-1), kann die Intensität dort maximal den gleichen Wert wie der Interferenzstreifen selbst annehmen (Vergleich Schnitt *b*).

In diesem Kapitel wurden verschiedene Szenarien einer ortsabhängigen Störung simuliert und wenn möglich mit experimentellen Resultaten verglichen. Die qualitativen Übereinstimmungen beider Ergebnisse bestätigen das im Rahmen dieser Arbeit entstandene Modell der kombinierten Simulation von Fresnelbeugung und Miestreuung.

6 Zusammenfassung und Ausblick

6.1 Zusammenfassung

Im Rahmen dieser Arbeit ist aus den Theorien der Miestreueung und des Talbot-Effektes ein Modell entstanden, welches die Simulation der Störung einer Selbstabbildung durch ein sphärisches Streuzentrum ermöglicht.

Die kombinierte Simulation erfolgt in den Softwareumgebungen MATLAB[®] und VirtualLab[™]. Das aus der Streuung resultierende Winkelspektrum wird durch eine sphärische Phase, realisiert durch eine ideale Negativlinse, und einen Graufilter mit einem definierten Transmissionsverlauf beschrieben. In MATLAB[®] werden nach Eingabe der Größe und des Brechungsindex des Streuzentrums sowie der gewünschten Winkelauflösung ein Graufilter und eine notwendige Größe für die spätere Berechnung der Apertur der Negativlinse ausgegeben. Mit Kenntnis der axialen Position des Streuzentrums im Selbstabbildungsraum kann daraufhin in VirtualLab[™] eine ideale Negativlinse mit entsprechender Apertur generiert und der Graufilter implementiert werden. Nach Durchlaufen des in Abschnitt 7.4 erläuterten Ablaufplans resultiert die grafische Ausgabe der gestörten Selbstabbildung.

Durch diesen Algorithmus können die durch die Partikel unterschiedlichen Durchmessers verursachten Störungen und ihre Position in der Selbstabbildung eines Sinusamplitudengitters simuliert werden.

Der Vergleich der experimentellen und simulierten Ergebnisse weist eine qualitative Ähnlichkeit auf, womit die Gültigkeit der kombinierten Simulation und des dazu verwendeten Modells untermauert werden. Mit dem im Rahmen dieser Arbeit entstandenen Modell kann die experimentelle Partikelcharakterisierung in erfolgreich simuliert werden.

6.2 Ausblick

Die Abweichungen zwischen den Ergebnissen von Experiment und Simulation sind neben den Näherungen innerhalb des verwendeten Modells auch auf die Messungenauigkeiten und Rahmenbedingungen des realen Messaufbaus zurückzuführen.

Ein Modell ist grundsätzlich ein die Realität beschreibender Algorithmus, der nicht vollkommen ist. So werden auch in dieser Arbeit zahlreiche Näherungen durchgeführt, damit die Komplexität der Gesamtproblematik beschreibbar wird.

Die zu Beginn verwendete Berechnungsvorschrift für die Beschreibung des Streuvorganges an sphärischen Partikeln enthält die ersten Näherungen. Dort wird die Winkelverteilung im Fernfeld berechnet wobei die Talbot-Distanz, in welcher die Streuung stattfindet, diesbezüglich einen Grenzbereich darstellt. Die Streusimulation selbst wird für ideale Kugeln mit einem homogenen Brechungsindex durchgeführt. Desweiteren kann das resultierende Winkelspektrum nur mit diskreten Stützstellen und nicht kontinuierlich mit einer analytischen Funktion approximiert werden.

Der Talbot-Effekt wird mit ebenen Wellen unterschiedlicher Amplitude und Phase in der Simulationssoftware VirtualLabTM realisiert. So ist es möglich, die gesamte Störung des komplexen Wellenfeldes aus der Superposition von Einzelstörungen zu rekonstruieren.

Im realen Messaufbau hingegen wurden statt eines Sinusamplitudengitters ein Ronchi-Gitter und hohle Glaskügelchen als Streuzentren verwendet, was ebenfalls zu abweichenden Ergebnissen zwischen Experiment und Simulation führt. Experimente mit massiven Partikeln unterschiedlichen Durchmessers würden dabei die Rahmenbedingungen des Messaufbaus an die der Simulation annähern.

Es wird sich im Rahmen des Projektes, in welchem sich diese Arbeit eingliedert, noch herausstellen, wie exakt die Simulationsergebnisse sein müssen, um die experimentellen Messungen so genau wie nötig nachzubilden.

Eine Optimierung des Modells und dessen programmtechnische Umsetzung sind für exaktere Simulationsergebnisse möglich. Gerade im Bereich der Streusimulationen ist es mittlerweile realisierbar auch komplexere Geometrien von Streuzentren zu berechnen [SCA].

Zudem kann die Genauigkeit der Berechnung der Transmissionsfunktion des Graufilters durch eine umfassendere Approximation der Winkelverteilung des Streuzentrums verfeinert werden. In dieser Arbeit wurde der Transmissionsverlauf des Graufilters ab fünf μm Partikeldurchmesser durch eine Gerade angenähert (vgl. Abb. 4-9 und 4-12). Ein Polynom höherer Ordnung oder eine sinc-Funktion würden eine genauere Beschreibung ergeben. Ein kleinerer Stützstellenabstand bei der Abtastung des Winkelspektrums ist zwar mit einem erhöhten Rechenaufwand verbunden, würde die Genauigkeit des Graufilters aber weiter erhöhen.

In der Simulationsumgebung VirtualLabTM könnte darüber hinaus das Sampling verfeinert werden. Auch die Berücksichtigung von Beugungserscheinungen am Gitterrand sowie am Streuzentrum selbst stellt eine weitere Annäherung des Modells an den realen Messaufbau dar.

Desweiteren ist es möglich die Auswirkung mehrerer Streuzentren sowie eine Verteilung zu simulieren. Hierzu müssen lediglich mehrere sphärische Phasen und Graufilter in den Simulationsalgorithmus integriert werden.

7 Anhang

7.1 Notationen

In diesem Abschnitt werden die verwendeten Abkürzungen für Differentialoperatoren und andere mathematische Operationen kurz erläutert.

Ein skalares oder vektorielles Feld ist eine Zuordnung einer physikalischen Größe zu einem Punkt in einem definierten Raum. Wirkt diese Größe ungerichtet, so ist das Feld ein Skalarfeld. Handelt es sich jedoch um eine gerichtete Größe so ist der Ursprung ein Vektorfeld der Form

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{pmatrix}. \quad (7.1.1)$$

Der verwendete Nabla-Operator ist ein Vektor wobei seine Komponenten aus partiellen Differential-Operatoren bestehen:

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (7.1.2)$$

Angewendet in der Form $\nabla\Phi$, wobei Φ ein Skalarfeld ist, folgt der Gradienten-Operator

$$\nabla\Phi = \text{grad}\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial y} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_x \\ \Phi_y \\ \Phi_z \end{pmatrix}. \quad (7.1.3)$$

Als Ergebnis dieser Operation wird ein Vektor erzeugt, welcher in die Richtung des größten Anstieges des Skalarfeldes Φ zeigt.

Der Nabla-Operator bezogen auf ein Vektorfeld $\vec{\nabla}\vec{U}$, wird Divergenz von \vec{U} genannt. Das Ergebnis ist ein Skalar, welches positiv oder negativ sein kann.

$$\vec{\nabla}\vec{U} = \text{div}\vec{U} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (7.1.4)$$

Eine positive Divergenz steht für eine Quelle, eine negative Divergenz bedeutet eine Senke im betrachteten Volumen. Beispielsweise würde sich für einen Wasserschlauch mit einem Leck eine negative Divergenz, also eine Senke, ergeben, da mehr Wasser in den Schlauch hinein fließt als am anderen Ende wieder heraus.

Das Kreuzprodukt des Nabla-Operators mit einem Feld, auch Rotation des Feldes genannt, ergibt erneut einen Vektor.

$$\vec{\nabla} \times \vec{U} = \text{rot } \vec{U} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (7.1.5)$$

Aus der Rotation eines Feldes erfolgt als Resultat die Stärke und Drehachse um welche sich ein Feld dreht.

Eine zweifache Anwendung des Nabla-Operators auf ein skalares oder vektorielles Feld ergibt den Laplace-Operator in der Form:

$$\vec{\nabla} \vec{\nabla} = \nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (7.1.6)$$

Weitere Rechenregeln für Differentialoperatoren sind ausführlich in [BRO05, S.670] erläutert.

Eine oft genutzte Abkürzung bezieht sich auf die Ableitung einer physikalischen Größe nach dem Ort oder nach der Zeit. Für die Differentiation nach der Zeit folgt:

$$\frac{dY(t)}{dt} = \dot{Y}(t) \quad \text{und} \quad \frac{d^2Y(t)}{dt^2} = \ddot{Y}(t), \quad (7.1.7)$$

wobei Y eine beliebige Funktion ist, die von der Zeit t abhängt.

Die einmalige Ableitung einer Funktion nach dem Ort ist gekennzeichnet durch

$$\frac{dX(r)}{dr} = X'(r). \quad (7.1.8)$$

7.2 Formelzeichen

a	Radius, Variable	A	Vektorpotential
$a_{m,n}$	Fourier-Koeffizient, Koeffizient	B	magnetische Flussdichte
b	Variable	D	elektrische Flussdichte
$b_{m,n}$	Koeffizient	E	Elektrische Feldstärke
c_n	Koeffizient	F'	Brennpunkt
c_0	Lichtgeschwindigkeit	H	Magnetische Feldstärke, Hauptebene
d	Differentialoperator, Durchmesser, Abstand	I	Intensität
d_n	Koeffizient	J	Bessel-Funktion
e	Eulersche Zahl	L	Abstand
f	Frequenz	M_U	Vergrößerungsfaktor
f'	Brennweite	M^2	Strahlgüteparameter
h	Höhe	N	Neumann-Funktion
i	imaginäre Einheit	P	Periode, Legendre-Polynom
k	Wellenzahl	R	Radius, Radiale Funktion
m	Zählindex, Brechungsindex	$S_{1,2}$	Streukoeffizient
n	Zählindex, Beugungsordnung	T	Transmission
r	Ortsvektor, Radius, Abstand	U	Amplitude, Vektorfeld
t	Zeit	V	Bewertungsfunktion
u	Streuwinkel	W	Strahlbreite (Gaußbündel)
v	Phasengeschwindigkeit		
x	Ortskoordinate		
y	Ortskoordinate		
z	Ortskoordinate, Abstand		

α	Beugungswinkel	Δ	Laplace-Operator
ε	Dielektrizitätskonstante	θ	Winkel, Winkelfunktion
θ	Winkel	\mathcal{E}	Hankel-Funktion
κ	Propagationskonstante	Π	Hertzscher Vektor, Debye Potential
λ	Wellenlänge	Σ	Summe
μ	magnetische Permeabilität	Φ	Winkel, Winkelfunktion
ν	Ortsfrequenz	X	Ricatti-Bessel-Funktion
π	Kreiszahl	Ψ	skalares Potential, Ricatti-Bessel-Funktion
π_n	Funktion		
σ	elektrische Leitfähigkeit		
τ_n	Funktion		
φ	Phase, Winkel		
ψ	Winkel		
ω	Kreisfrequenz		

7.3 MATLAB®-Programme

In diesem Abschnitt werden die für die Simulation der Streuung an sphärischen Partikeln genutzten Unterprogramme erläutert.

- Berechnung der Koeffizienten a_n und b_n (Gleichungen 2.3.38 und 2.3.39).

```
function result = ABCD(m1, a)
lambda0=850E-9;%Vakuumpwellenlänge
m1=1.5+0i;%Brechungsindex Sphaere
m2=1.3277;%Brechungsindex Umgebung
m=m1/m2;
k1=2*pi.*m1/lambda0;%Wellenzahl Sphaere
k2=2*pi.*m2/lambda0;%Wellenzahl Umgebung
alpha=k2.*a;%Groessenparameter
beta=alpha*m1;
nmax=round(2+alpha+4*alpha^(1/3));
n=(1:nmax);

Psi_n_alpha=sqrt(0.5*pi./alpha).*besselj(n+1/2,alpha);%Besselfunktion
1.Art
Psi_n_beta=sqrt(0.5*pi./beta).*besselj(n+1/2,beta);%Besselfunktion 1.Art
Chi_n=sqrt(0.5*pi./alpha).*bessely(n+1/2,alpha);%Besselfunktion 2.Art
Xi_n=Psi_n_alpha+1i*Chi_n;%Besselfunktion 3.Art

Psi1_alpha=[sin(alpha)/alpha, Psi_n_alpha(1:nmax-1)];
Psi1_beta=[sin(beta)/beta, Psi_n_beta(1:nmax-1)];
Chi1=[-cos(alpha)/alpha, Chi_n(1:nmax-1)];
Xi1=Psi1_alpha+1i*Chi1;

Psi_alpha=alpha.*Psi1_alpha-n.*Psi_n_alpha;
Psi_beta=beta.*Psi1_beta-n.*Psi_n_beta;
Xi_alpha=alpha.*Xi1-n.*Xi_n;

an=(m.*m.*Psi_n_beta.*Psi_alpha-
Psi_n_beta.*Psi_beta)./(m.*m.*Psi_n_beta.*Xi_alpha-Xi_n.*Psi_beta);%BH
S.100&477 Amplitudenkoeffizienten
bn=(Psi_n_beta.*Psi_alpha-Psi_n_alpha.*Psi_beta)./(Psi_n_beta.*Xi_alpha-
Xi_n.*Psi_beta);%BH S.100&477
cn=(Psi_n_alpha.*Xi_alpha-Xi_n.*Psi_alpha)./(Psi_n_beta.*Xi_alpha-
Xi_n.*Psi_beta);%BH S.100&477
dn=(m.*Psi_n_alpha.*Xi_alpha-Xi_n.*Psi_alpha)./(m.*m.*Psi_n_beta.*Xi_alpha-
Xi_n.*Psi_beta);%BH S.100&477

result=[an; bn; cn; dn];
```

Innerhalb dieser Funktion erfolgt die Berechnung der Besselfunktionen als Lösungen der Differentialgleichung (2.3.18) nach dem Algorithmus von Bohren und Huffman [BOH98]. Der Brechungsindex m_1 sowie der Radius a der Sphäre stellen dabei die Eingangsvariablen dar. Die Größe $nmax$ ist eine Abbruchbedingung. Nach Abarbeitung dieser Funktion werden die Koeffizienten a_n , b_n , c_n und d_n als Vektoren ausgegeben.

- Berechnung der Legendre-Polynome als Lösung von Gleichung (2.3.19.)

```
function result=PieTau(u,a)
lambda0=850E-9;%Vakuumwellenlänge
m2=1.3277;%Brechungsindex Umgebung
k2=2*pi.*m2/lambda0;%Wellenzahl Umgebung
alpha=k2.*a;%Groessenparameter
nmax=round(2+alpha+4*alpha^(1/3));

p(1)=1;
t(1)=u;
p(2)=3*u;
t(2)=3*cos(2*acos(u));
for n1=3:nmax,
p1=(2*n1-1)./(n1-1).*p(n1-1).*u;
p2=n1./(n1-1).*p(n1-2);
p(n1)=p1-p2;
t1=n1*u.*p(n1);
t2=(n1+1).*p(n1-1);
t(n1)=t1-t2;
end;
result=[p;t];
```

Dieses Unterprogramm berechnet die Legendre-Polynome mittels Aufwärtsrekursion. Als Eingangsgrößen werden der Partikelradius a sowie der Streuwinkel u in Radiantenform benötigt.

- Berechnung der Streukoeffizienten S_1 und S_2 .

```
function result = S1S2(m1, a, u)
lambda0=850E-9;%Vakuumwellenlänge
m1=1.5;
m2=1.3277;%Brechungsindex Umgebung
k2=2*pi.*m2/lambda0;%Wellenzahl Umgebung
alpha=k2.*a;%Groessenparameter
nmax=round(2+alpha+4*alpha^(1/3));

abcd=ABCD(m1,a);
an=abcd(1,:);
bn=abcd(2,:);
pt=PieTau(u,a);
pin =pt(1,:);
tin=pt(2,:);
n=(1:nmax);
n2=(2*n+1)./(n.*(n+1));
pin=n2.*pin;
tin=n2.*tin;
S1=(an*pin'+bn*tin');
S2=(an*tin'+bn*pin');
result=[S1;S2];
```

Die Funktion „S1S2“ berechnet unter Einbeziehung der Funktionen „ABCD“ und „PieTau“ die Streukoeffizienten, welche als Vektor ausgegeben werden. Die Eingangsgrößen sind dabei der Brechungsindex m_1 sowie der Radius a der Sphäre und der Streuwinkel u .

- Ausgabe eines Polardiagrammes mit der Darstellung des Streukoeffizienten gegen den Streuwinkel bei unpolarisierter Einstrahlung.

```
function result = Unpol(m1, a, nsteps)
% m1=1.5; m2=0;
lambda0=850E-9;%Vakuummwellenlänge
m2=1.3277;%Brechungsindex Umgebung
k2=2*pi.*m2/lambda0;%Wellenzahl Umgebung
alpha=k2.*a;%Groessenparameter
nmax=round(2+alpha+4*alpha^(1/3));
nx=(1:nsteps); dteta=pi/(nsteps-1);
teta=(nx-1).*dteta;
for j = 1:nsteps,
u=cos(teta(j));
b(:,j)=S1S2(m1, a, u);
S(j)= (real(b(1,j)'*b(1,j))+real(b(2,j)'*b(2,j)));

%SL(j)= log10(real(b(1,j)'*b(1,j))); %logarithmische Darstellung
%SR(j)= log10(real(b(2,j)'*b(2,j))); %logarithmische Darstellung

end;
y=[teta teta+pi;S S(nsteps:-1:1)];%teta S und S(...) haben jeweils nstep
Länge
polar(y(:,1),y(:,2))
%y=[teta teta+pi;SL SR(nsteps:-1:1)];
%polar(y(:,1),y(:,2))

title(sprintf('Winkelverteilung der Streustrahlung(unpolarisiert)'));
xlabel('Streuwinkel[°]')
result=S';
```

Innerhalb der Funktion „Unpol“ wird mit Verwendung des Unterprogrammes „S1S2“ eine Matrix erstellt, welche die Streukoeffizienten in Abhängigkeit vom Winkel beinhaltet. Desweiteren erfolgt eine grafische Ausgabe des Inhaltes dieser Streumatrix in Form eines Polardiagrammes.

- Das Unterprogramm „Keule“ erzeugt einen Graufilter, welcher die Struktur der Streuung approximiert.

```
function result=Keule(m1, a, nsteps)
streu=Unpol(m1, a, nsteps);
summe=sum(streu(:,1));
summeH=zeros(1,2);
i=1;
while summeH(:,2)<=(9/10)*summe;%Schleife die 90% der gestreuten Intensität
berechnet
summeH(:,2)=summeH(:,2)+streu(i,1);
i=i+1;
end;
dteta=pi/(nsteps-1);%Winkelinkrement
tetarad=(i-1)*dteta;%Berechnung des Winkels in rad in dem 90% Intensität
liegen, nur bei Vorwärtsstreuung da von 0° aufwärts
grad=180/pi;
tetagrad=tetarad*grad;%Winkel in Grad
nx=(1:i);
teta=(nx-1).*dteta;
```



```

for j = 1:i, %es wird ein Vektor erstellt, der die Streuintensitäten mit
insgesamt 90% gestreuter Intensität beinhaltet
    scat(:,j)=streu(j);
end;
r=tan(teta);%Umwandlung des Winkels in eine Höhe bei Lage des Partikels 3mm
vor der Talbot-Ebene
y=[teta;scat]';%Vektor 1.Spalte sind Winkel, 2.Spalte zugehörigen Wichtun-
gen(nicht normiert)
%result=[streu;i;tetagrada];
max=scat(1);%Normierung der Streukoeffizienten auf 1
for j =1:i
    scat(:,j)=scat(:,j)./max;
end;

if tetagrada >= 4 %Abbruchbedingung wenn Winkel mit 90% Streuintensität
kleiner als 4°
    a=r;%Erzeugung eines Vektors mit Höheninformationen
    b=scat;%Erzeugung eines Vektors mit den zugehörigen Streukoeffizienten
    x = linspace(-1,1,i-1);
    y = linspace(-1,1,i-1);
    [xx,yy] = meshgrid(x,y);
    zz = sqrt(xx.^2+yy.^2);
    res = zeros(i-1,i-1);

    for i = 1:(i-1)
        res(:,i) = interp1(a,b,zz(i,:), 'linear');
    end

else
    a=linspace(0,1,i+1);%Erzeugung eines Vektors mit Höheninformationen
    b=1-a;%Erzeugung eines Vektors mit den zugehörigen Streukoeffizienten
    x = linspace(-1,1,i-1);
    y = linspace(-1,1,i-1);
    [xx,yy] = meshgrid(x,y);
    zz = sqrt(xx.^2+yy.^2);
    res = zeros(i-1,i-1);

    for i = 1:(i-1)
        res(:,i) = interp1(a,b,zz(i,:), 'linear');
    end

end

figure(2)
imshow(res)
result=[i,tetagrada];

```

Diese Funktion gibt einen Graufilter aus, welcher die Wichtung der einzelnen Streuwinkel als Transmissionswert beinhaltet. Der Graufilter wird in VirtualLabTM zur Berechnung der Störung der Selbstabbildung benötigt. Damit nicht die Erzeugung einer Lochblende bei vergleichsweise starker Vorwärtsstreuung verursacht durch Partikel größeren Durchmessers resultiert, ist eine „wenn dann“-Anweisung implementiert. Diese Anweisung erzeugt eine rotationssymmetrische Transmissionsverteilung nach Abbildung 4-10.

- Das folgende Unterprogramm „Alle“ realisiert die Ausführung der gesamten Streusimulation.

```
%Berechnung des Streuspektrums an einem
%phaerischen Partikel
%(S1)^2 & (S2)^2
%
%Eingabe von:
%Keule(m1, a, nsteps)
%m1=Brechungsindex der Sphaere
%a=Radius der Sphaere
%nsteps=Winkelauflösung
clear
Keule(1.5, 20E-6, 10000);
```

In diesem Unterprogramm werden der Brechungsindex der Sphäre, ihr Radius sowie die Winkelauflösung des Streuspektrums angegeben. Für die Funktionsfähigkeit dieses Programmes muss gewährleistet sein, dass sich alle zuvor beschriebenen Funktionen innerhalb desselben Verzeichnisses befinden. Der Aufruf der Unterprogramme kann jedoch auch direkt innerhalb des „Command Window“ von MATLAB[®] erfolgen.

7.4 VirtualLabTM-Ablaufplan

Dieser Abschnitt gibt einen Überblick über die durchgeführten Operationen in VirtualLabTM.

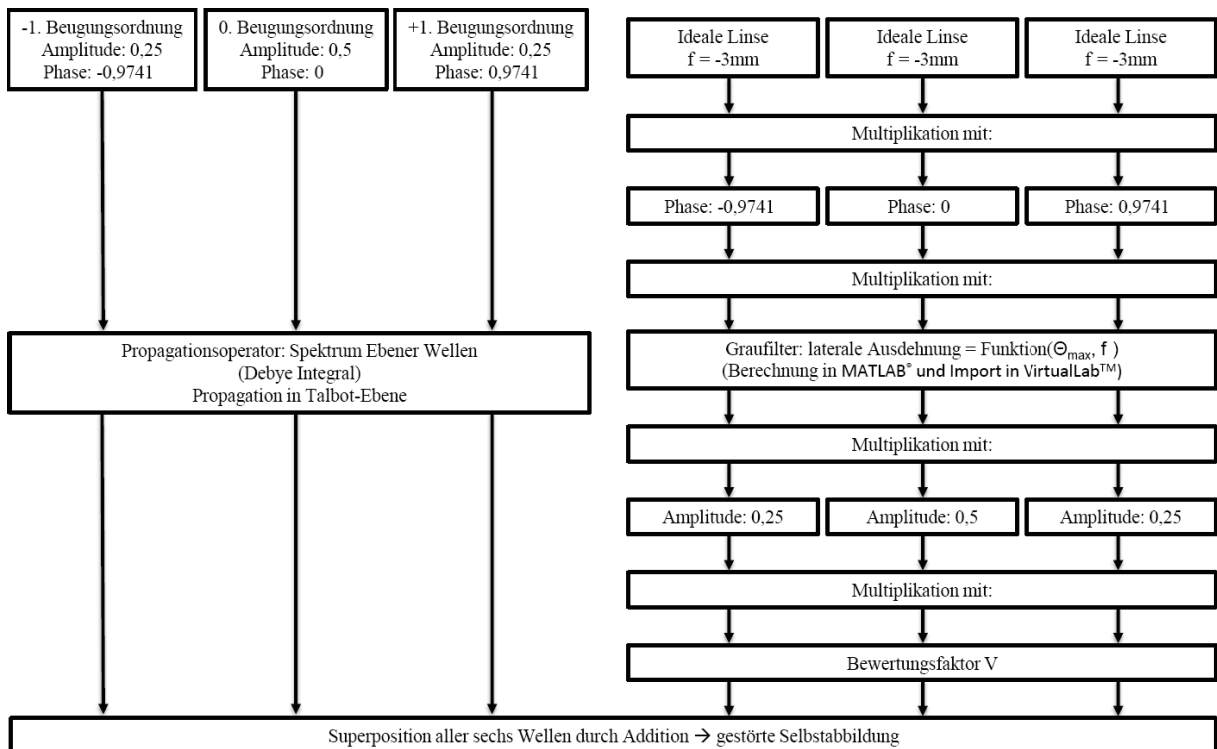


Abbildung 7-1: VirtualLabTM-Ablaufplan.

In der Softwareumgebung VirtualLabTM werden zu Beginn drei ebene Wellen entsprechender Amplitude und Phase generiert. Diese stellen am Beispiel eines Sinusamplitudengitters die drei Beugungsordnungen dar. Die Phase ergibt sich dabei aus folgendem Zusammenhang:

$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{\lambda}{P}\right) \quad (7.4.1)$$

wobei die Amplitude aus Gleichung (4.1.6) resultiert. Jede dieser drei Wellen wird anschließend mit dem SPW-Operator in die Talbot-Ebene propagiert.

Die Approximation der Streuung erfolgt durch eine sphärische Phase und einen zuvor in MATLAB[®] berechneten Graufilter. Für die Erzeugung der sphärischen Phase wird eine ideale Linse mit negativer Brennweite genutzt. Der Abstand des Streuzentrums von der Talbot-Ebene entspricht der Brennweite. Daraufhin wird die Linse mit der Amplitude des Graufilters multipliziert wobei eine Kugelwelle mit winkelabhängiger Amplitude entsteht. Durch die Störung aller drei Beugungsordnungen, müssen drei Kugelwellen unterschiedlicher Phase und Gewichtung (Gleichung (5.1)) generiert werden.

In einem letzten Schritt erfolgt die Addition aller sechs Wellen. Das Sampling jeder Welle muss dabei ausreichend hoch für die Darstellung der Störung und Selbstabbildung gewählt werden.

Literaturverzeichnis

Bergmann, L., & Schaefer, C. (1987). *Lehrbuch der Experimentalphysik, Band 3 - Optik*. New York: Walter de Gruyter.

Bohren, C., & Huffman, D. (1998). *Absorption and Scattering of Light by Small Particles*. New York: Wiley.

Born, M., & Wolf, E. (1980). *Principles of Optics*. New York: Pergamon.

Bremen, U. (n.d.). *ScattPort*. Retrieved Juli 22, 2010, from <http://www.t-matrix.de/>

Bronstein, I., & Semendjajew, K. (2005). *Taschenbuch der Mathematik*. Frankfurt am Main: Wissenschaftlicher Verlag Harri Deutsch GmbH.

Göhler, W. (1999). *Formelsammlung Höhere Mathematik*. Frankfurt am Main: Harri Deutsch.

Jahns, J. (2001). *Photonik - Grundlagen, Komponenten und Systeme*. München, Wien: Oldenbourg.

Kerker, M. (1969). *The scattering of Light*. Potsdam, New York: Academic Press, Inc.

Lehner, G. (2005). *Elektromagnetische Feldtheorie*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer.

Lohmann, A. W. (2006). *Optical Information Processing*. Universitätsverlag Ilmenau.

Mätzler, C. (2002, Juni). MATLAB Functions for Mie Scattering and Absorption. Universität Bernensis Institut für Angewandte Physik.

Mie, G. (1908). Beiträge zur Optik trüber Medien, speziell kolloidaler Metallösungen. *Annalen der Physik, Vierte Folge, Band 25*, p. 377.

Patorski, K. (1989). *The self-imaging phenomenon and its applications, in Progress in Optics* 27. North-Holland, Amsterdam: Elsevier Science Publishers B.V.

Stratton, J. (1941). *Electromagnetic Theory*. New York, London: McGraw-Hill, Book Company, Inc.

Talbot, F. (1836, Dezember). Facts relating to optical science. *Philosophical Magazine and Journal of Science*, pp. 401-409.

Vogel, H. (1999). *Gerthsen Physik*. Springer-Verlag.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich zuerst besonders herzlich bei meinen Eltern für Ihre große Unterstützung bedanken. Ohne Euch wären das Studium sowie diese Master-Arbeit nicht möglich gewesen.

Vielen Dank an Prof. Sinzinger, welcher mir die Möglichkeit gegeben hat, diese Master-Arbeit im Fachgebiet Technische Optik an der TU-Ilmenau anzufertigen.

Ebenfalls vielen Dank an die Betreuer meiner Master-Arbeit, Prof. Sinzinger, Meike Hofmann und Roman Kleindienst, welche mir stets mit Rat und Tat zur Seite standen.

Ein großes Dankeschön auch an das gesamte Fachgebiet Technische Optik, welches sich oft in der Kaffeepause mit meinen Theorien auseinandersetzen musste.

Ganz besonders möchte ich mich bei Franziska Rose bedanken, welche mich regelmäßig ermutigt und aufgebaut hat.