Thema

Nicht-proportionale Rückversicherungsmodelle mit Risikopräferenzen

Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades
doctor rerum politicarum
(Dr. rer. pol.)

vorgelegt dem
Rat der Wirtschaftswissenschaftlichen Fakultät
der Friedrich-Schiller-Universität Jena

am 21. April 2010

von: Dipl.- Math. oec. Maik Wagner

geboren am: 07.11.1979 in: Wolfen

Gutachter:

1. Prof. Dr. Peter Kischka,
   FSU Jena, Fakultät für Wirtschaftswissenschaften,
   Lehrstuhl für Wirtschafts- und Sozialstatistik

2. Prof. Dr. Wolfgang Kürsten,
   FSU Jena, Fakultät für Wirtschaftswissenschaften,
   Lehrstuhl für Allgemeine Betriebswirtschaftslehre
   insb. Finanzierung, Banken und Risikomanagement

Datum der Verteidigung: 28.06.2010

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Symbolverzeichnis

Allgemeine Symbole:

G(.)	Gewinnfunktion eines Erstversicherers bzw. des Newsvendors
g_α, g_β	α- bzw. β-Quantil der Gewinnfunktion
E(.)	Erwartungswert
Var(.)	Varianz
VaR(.)	Value at Risk
CVaR(.)	Conditional Value at Risk
$F_.$	Verteilungsfunktion von .
$f_.$	Verteilungsdichte von .
$F_.^*$	verallgemeinerte Inverse der Verteilungsfunktion von .
$F_.^{-1}$	Inverse der Verteilungsfunktion von .
Φ_B	Präferenzfunktional des Bayes-Prinzips
Φ_α	Präferenzfunktional des Conditional Value at Risk-Prinzips
$\Phi_{\alpha,\lambda}$	Präferenzfunktional des hybriden α-λ-Prinzips
$\Phi_{\beta,\delta}$	Präferenzfunktional des hybriden β-δ-Prinzips
PL	Verlustwahrscheinlichkeit (probability of loss)
EL	erwarteter Verlust (expected loss)
$D_.$	erste partielle Ableitung nach .
$D_{.,}$	zweite partielle Ableitung nach . und ,

Symbole im Versicherungskontext:

d	Priorität (deductible)
c	Plafond (cover)
Pr	Prämieneinnahmen aller Erstversicherungsverträge eines Erstversicherers
p	Prämie eines Erstversicherungsvertrages
N(p)	Nachfrage an Erstversicherungsverträgen in Abhängigkeit von der Prämie p
X,Z	Schaden des Erstversicherers
ε	stochastischer Einfluss auf den Schaden
X_p	Schaden des Erstversicherers in Abhängigkeit von der Prämie p
x_α, x_β	α- bzw. β-Quantil des Schadens
EVS(.)	Erstversicherungsschaden
RVS(.)	Rückversicherungsschaden
RVP(.)	Rückversicherungsprämie
γ	Gewinnaufschlag des Rückversicherers

B	Betriebskosten eines Erstversicherers

Symbole im Newsvendor-Kontext:

p	Verkaufspreis
c	Einkaufspreis
z	Rückgabepreis bei Nichtverkauf
X	Produktnachfrage
x_α, x_β	α- bzw. β-Quantil der Nachfrage
y	Bestellmenge
k	nicht-lineare Einkaufskostenfunktion des Newsvendors

Teil I

Einleitung

Risikomaße gewinnen zunehmend an Bedeutung. Sie finden zum einen in der Berechnung von Eigenkapitalhinterlegungen durch die Bestimmungen Basel II und Solvency II[1] und zum anderen bei Entscheidungsprinzipien[2], bei denen die Risikoeinstellung berücksichtigt werden soll, Anwendung. Die Risikoeinstellungen werden dabei durch eine bestimmte Wahl von Risikoparametern festgelegt.

Die Verwendung von Risikomaßen im Rahmen von Entscheidungsprinzipien wird Gegenstand dieser Arbeit sein. Ziel dabei ist es, Rück- bzw. Erstversicherungsverträge mit hybriden Entscheidungsprinzipien zu modellieren, um mit Hilfe der Risikoparameter die Risikoeinstellung von Erstversicherern zu bestimmen. Hauptanliegen dabei ist, eine Entscheidungsunterstützung für Erstversicherer zur Verfügung zu stellen, wobei mit der bestimmten Risikoeinstellung Empfehlungen für Deckungsgrenzen von Rückversicherungsverträgen getroffen werden können[3].

Im Folgenden soll ein Überblick über die Verwendung verschiedener Entscheidungsprinzipien im Versicherungsgeschäft gegeben werden. In diesem Zusammenhang wird auf das Erwartungswert-, Erwartungsnutzen-, μ-σ-, Value at Risk- und Conditional Value at Risk-Prinzip eingegangen. Zunächst wird auf die Verwendung des Erwartungswertes im Versicherungskontext Bezug genommen.

Das Erwartungswertprinzip wird unter anderem im Bereich der Personenversicherung als auch im Bereich der Rückversicherung angewendet[4]. Dies geschieht jedoch nur in den Fällen, in denen der Erstversicherer eine risikoneutrale Einstellung bzgl. seiner Handlungsalternativen aufweist. Dabei ist festzustellen, dass der erwartete Schaden kleiner als die Versicherungsprämie ist[5] und somit ein risikoneutraler Entscheider die Versicherung ablehnt[6]. Ebenso präferiert ein risikofreudiger Entscheider die Versicherung nicht.

Im Fall eines risikoneutralen Entscheiders im Bezug auf eine Versicherungsprämie, die keinen Gewinnaufschlag des Versicherers berücksichtigt, ist der Versicherungsnehmer indifferent in der Entscheidung zwischen der Wahl und der Ablehnung der Versicherung. In diesem Fall spricht man von einer "fairen Versicherung bzw. fairen Prämie"[7]. Der Aspekt der fairen Prämie ist jedoch rein von entscheidungstheoretischer Bedeutung, da ein Versicherungsunternehmen immer Verwaltungsaufwand hat und somit eine faire Prämie nie anbieten wird.

Ein risikoaverser Entscheider zieht dagegen unter gewissen Umständen[8] die sichere Alternati-

[1] Vgl. zu Basel II BaFin (2008a) und zu Solvency II BaFin (2008b).
[2] Vgl. Bamberg, Coenenberg (2006), S.100 ff.
[3] Dazu muss eine Schadensverteilung angenommen werden, welche der Erstversicherer bzgl. seiner Schäden in Zukunft erwartet.
[4] Vgl. Liebwein (2000a), S. 232.
[5] Vgl. Stocker, Strobach (2003), S. 116 ff.
[6] Vgl. auch Adam (1996), S. 228 sowie Schulenburg (2005), S. 224.
[7] Vgl. Stocker, Strobach (2003), S. 116.
[8] Im Fall einer fairen Versicherungsprämie präferiert ein risikoaverser Entscheider die Vollversicherung. Bei einer Versicherung mit Gewinnaufschlag seitens des Versicherers können risikoaverse Entscheider die Versicherung sowohl präferieren (Teilversicherung) als auch ablehnen. Dies ist abhängig vom Gewinnaufschlag des Versicherers und der Stärke der Risikoaversion des Versicherungsnehmers.

ve (die Versicherung) der unsicheren Alternative (keine Versicherung) vor[9]. Dies kann jedoch nicht mit dem Erwartungswertprinzip modelliert werden. Damit stellt der Erwartungswert “keine generell verwendbare Beurteilungsgröße”[10] im Versicherungskontext dar.

Zur Lösung dieses Problems kann das Erwartungsnutzenkriterium[11] für risikoaverse Entscheider angewendet werden, welches “die Einstellung des Individuums zum Risiko berücksichtigt”[12]. Der Erwartungsnutzen wird dabei mit Hilfe einer Nutzenfunktion ermittelt. “Verläuft die Nutzenfunktion konkav,[...] beschreibt dies Risikoaversion. [...] Risikofreude wird hingegen durch eine strikt konvexe Nutzenfunktion angezeigt”[13]. Ein risikoneutraler Entscheider besitzt dagegen eine lineare Nutzenfunktion. Dabei wird der risikoneutrale Entscheider keine Versicherung wählen, da der erwartete Nutzen ohne Versicherung größer als der erwartete Nutzen mit Versicherung ist[14]. Ebenso ist bei Risikofreude (konvexe Nutzenfunktion) der erwartete Nutzen ohne Versicherung größer als der erwartete Nutzen mit Versicherung, so dass auch ein risikofreudiger Entscheider keine Versicherung nachfragt.

Bzgl. einer konkaven Nutzenfunktion (Risikoaversion) können zwei Situationen auftreten. Zum einen kann ein risikoaverser Entscheider die Versicherung präferieren und zum anderen ablehnen[15]. Die Entscheidung für die Versicherung ist abhängig von der Nutzenfunktion sowie der Versicherungsprämie. Des Weiteren bevorzugt ein risikoaverser Entscheider bei einer fairen Prämie die Vollversicherung[16]. Damit ist das Bernoulli-Prinzip, d. h. die Maximierung des Erwartungsnutzens, ein “aus normativer Sicht vernünftiges Entscheidungskriterium ”[17].

Ausführungen zur Verwendung des μ-σ-Prinzips im Versicherungskontext finden sich bei Liebwein[18]. Seine Ausführungen beziehen sich dabei auf den speziellen Sachverhalt der Rückversicherung, indem ein Erstversicherer durch Wahl des Risikoparameters des μ-σ-Prinzips den Einfluss der Standardabweichung regulieren und somit nicht nur Risikoneutralität, sondern auch Risikofreude und Risikoaversion in seine Entscheidung einfließen lassen kann. Einen expliziten Sachverhalt rechnet dabei der Autor jedoch nicht vor. Es bleibt allein bei theoretischen Überlegungen. Ansonsten ist das μ-σ-Prinzip im Versicherungskontext nur spärlich behandelt.

Die nächsten Ausführungen seien der Verwendung des Value at Risk (VaR) bzw. dem Conditional Value at Risk (CVaR) gewidmet. Verwendet werden diese Risikomaße zur Betrach-

[9]Vgl. Stocker, Strobach (2003), S. 116 f.
[10]Vgl. Schulenburg (2005), S. 224.
[11]Vgl. Schulenburg, Greiner (2007), S. 37 f. Das Erwartungsnutzenkriterium ist nach seinem Entdecker Daniel Bernoulli (1700 - 1782) auch als Bernoulli-Prinzip bekannt. Vgl. bzgl. Bernoulli-Prinzip im Versicherungskontext Wagner (2000), S. 48 sowie Ritter (2006), S. 23. Vgl. bzgl. der Anwendung des Erwartungsnutzenkriteriums mit Rückversicherung u. a. Guerra, Centeno (2008), Kaluszka, Okolewski (2008), Samson (1986) sowie Samson, Thompson (1983).
[12]Vgl. Schulenburg, Greiner (2007), S. 37.
[13]Vgl. Schulenburg, Greiner (2007), S. 38.
[14]Vgl. Rosenkranz, Missler-Behr (2005), S. 62 f.
[15]Vgl. Gries, Sieg, Strulik (1996), S. 71 f.
[16]Vgl. Wiese (2005), S. 39.
[17]Vgl. Wiese (2005), S. 33.
[18]Vgl. Liebwein (2000), S. 232.

tung von Einzelrisiken[19] bzw. zur "Bestimmung der Eigenmittelanforderungen einer Versicherung"[20]. Die Grundlage für die Berechnung des Eigenkapitals anhand dieser Risikomaße bilden die Regularien Solvency II[21]. Hauptkritikpunkt am Value at Risk[22] ist, dass dieser eine Einpunktbetrachtung der Verteilung der Zufallsvariable ist und die Ausprägungen außerhalb des Sicherheitsniveaus unbeachtet lässt. Außerdem ist der VaR kein kohärentes Risikomaß[23]. Der VaR ist bei der Risikomessung[24] damit als adäquates Maß abzulehnen. Der Conditional Value at Risk bietet dagegen den Vorteil der Kohärenz, führt aber zu einer höheren Komplexität der Berechnungen und zur Erhöhung des Eigenkapitalbedarfs[25]. Ausführungen bzgl. des Risikomanagements und der Eigenkapitalhinterlegung der Versicherungsunternehmen sind in der Literatur zahlreich vertreten[26], beschränken sich häufig jedoch auf theoretische Betrachtungen von Risikomaßen und lassen meist das Instrument der Rückversicherung außen vor.

Des Weiteren werden diese Risikomaße zum Beispiel für die Minimierung des Insolvenzrisikos eines Erstversicherers in Verbindung mit Rückversicherungsverträgen[27] sowie für die Bestimmung der optimalen Schadensfunktion eines Erstversicherers[28] angewendet. In anderen Fällen wird nur das Rückversicherungsgeschäft betrachtet und dessen Kosten mit diversen Risikomaßen und Prämienstrukturen minimiert[29].

Die Verwendung des Conditional Value at Risk zur Präferenzmessung bzgl. der Gewinnfunktion eines Erstversicherers ist in der Literatur nicht zu finden. Dies gilt ebenfalls für hybride Entscheidungsprinzipien basierend auf den CVaR[30]. Diese Entscheidungsprinzipien finden jedoch bereits unter anderem im Bereich des Supply Chain Managements[31] Anwendung.

Die vorliegende Arbeit hat zum Ziel, Deckungsgrenzen für Versicherungsverträge, welche die Risikoeinstellung des Versicherungsnehmers berücksichtigen, mit den Entscheidungsprinzipien aus dem Supply Chain Management zu berechnen. Zentrale Aufgabe ist daher die Modellierung von Versicherungs- bzw. Rückversicherungsverträgen unter Verwendung des CVaR-

[19] Vgl. Koryciorz (2004), S. 102 f. Zur Verwendung des Value at Risk im Bankensektor siehe Gritzmann (1998), S. 191 bzw. Albrecht (2001), S. 1 ff.

[20] Vgl. Vollmer (2007), S. 12.

[21] Vgl. BaFin (2008b).

[22] Vgl. unter anderem Hartung (2007), S. 110 ff.

[23] Vgl. Hartung (2007), S. 112 f.

[24] Vgl. bzgl. Risikomessung mit dem Value at Risk im Versicherungskontext auch Albrecht, Koryciorz (1999), S. 5 ff. bzw. Albrecht, Bährle, König (1997), S. 1 ff.

[25] Vgl. Hartung (2007), S. 117.

[26] Vgl. unter anderem bzgl. Risikomessung in einem Versicherungsunternehmen und Solvabilitätsregulierung Molinari, Nguyen (2009), Nguyen und Molinari (2009), Vollmer (2007), Milliman (2007), bzgl. Personenversicherung Herrmann (2006), bzgl. des Kapitalanlagegeschäfts eines Versicherungsunternehmens Arneth, Sauka (2008) und bzgl. Rückversicherung Schubert, Stienen, Kraft (2007). Eine empirische Untersuchung zum Aspekt Risikomanagement und Solvency II findet sich bei Capgemin (2004). Zur Verwendung interner Risikomodelle in Versicherungsunternehmen vgl. Osetrova, Schmeiser (2005).

[27] Vgl. Bernard, Tian (2009) für den VaR S. 2 ff. und bzgl. CVaR S. 7ff.

[28] Vgl. Cai, Tan, Weng, Zhang (2008).

[29] Vgl. für die Anwendung der Varianz Gajek, Zagrodny (2000), für allgemeine Risikomaße Balbás, Balbás, Heras (2009) bzw. Gajek, Zagrodny (2004), für die Verwendung des Erwartungswerts in Kombination mit der Varianz Kaluszka (2004) und für den VaR und CVaR Cai, Tan (2007). Einen genereller Überblick findet sich bei Centeno, Simões (2009).

[30] Vgl. Jammernegg, Kischka (2005).

[31] Vgl. Chopra, Meindl (2004).

Prinzips bzw. von hybriden Entscheidungsprinzipien basierend auf den CVaR. Hauptaugenmerk liegt dabei auf der Modellierung nicht-proportionaler Rückversicherungsverträge. Die Entscheidungsprinzipien werden in diesem Zusammenhang auf die Gewinnfunktion des Erstversicherers angewendet, welche das Erst- und Rückversicherungsgeschäft beinhaltet.

Die Ergebnisse des Erstversicherers bzgl. seiner Rückversicherungswahl sind dabei auf den Sachverhalt eines Privatkunden bzgl. einer vom Erstversicherer angebotenen Versicherung übertragbar. Dies gelingt, da im letztgenannten Fall der Kunde der Versicherungsnehmer bzgl. einer Versicherung ist, der Erstversicherer dagegen der Versicherungsnehmer bzgl. der Rückversicherung.

Zunächst wird in Kapitel 1 eine Einführung in die Rückversicherung gegeben. Es wird die Klasse der proportionalen und nicht-proportionalen Rückversicherung vorgestellt und die Funktionsweise der jeweiligen Vertragsarten besprochen. Besondere Aufmerksamkeit liegt in diesem Rahmen bei der nicht-proportionalen Rückversicherung, auf die später die hybriden Entscheidungsprinzipien angewendet werden.

In Kapitel 2 werden die Grundlagen zur Modellierung von Entscheidungsprinzipien gelegt und die verwendeten Prinzipien vorgestellt. Dabei wird auf den Aspekt der Risikoeinstellung und Risikomessung eingegangen sowie auf den Begriff der Kohärenz. Fortführend wird die Erwartungsnutzen- und die duale Nutzentheorie beleuchtet und die Konsistenz der Entscheidungsprinzipien zu den jeweiligen Nutzentheorien gezeigt.

Kapitel 3 stellt das Newsvendor Modell, ein Modell des Supply Chain Managements, vor, für welches die hybriden Entscheidungsprinzipien bereits Anwendung gefunden haben, um später auf Analogien zwischen diesem Modell und dem Rückversicherungsmodell eingehen zu können.

Im darauf folgenden Kapitel 4 werden dann für das Rückversicherungsproblem die unterstellte Gewinnfunktion des Erstversicherers und die verwendeten Schadensverteilungen vorgestellt, mit denen im weiteren Verlauf die zwei Deckungsgrenzen der nicht-proportionalen Rückversicherung optimiert werden. Die grundlegenden Fragen sind dabei:

- Bei welcher Risikoeinstellung wird ein Erstversicherer die Rückversicherung präferieren?
- Wenn ein Erstversicherer die Rückversicherung präferiert, welche Deckungsgrenzen bevorzugt er?
- Welchen Einfluss hat der Gewinnaufschlag des Rückversicherers?
- Wie ändern sich die präferierten Deckungsgrenzen mit der Zunahme an Risikoaversion?
- Wann ist der Erstversicherer indifferent in seiner Entscheidung?

Inhalt des Kapitel 5 bzw. des Kapitel 6 ist dabei die Optimierung der Gewinnfunktion eines Zedenten mit hybriden Entscheidungsprinzipien bzgl. der unteren bzw. der oberen Deckungsgrenze eines nicht-proportionalen Rückversicherungsvertrages. Des Weiteren werden die Analogien zwischen den beiden Rückversicherungsmodellen und dem Newsvendor Modell beleuchtet und auch die Möglichkeit der Bestimmung der Risikoeinstellung des Erstversicherers bzgl. eines gewählten Rückversicherungsvertrages vorgeführt.

Aus der Wahl eines konkreten Rückversicherungsvertrages wird dabei für das jeweilige Entscheidungsprinzip die Risikoeinstellung abgeleitet. Mit der festgestellten Risikoeinstellung des Erstversicherers ist es wiederum möglich, Handlungsempfehlungen bzgl. zukünftiger nicht-proportionaler Rückversicherungsverträge, unter Annahme einer Schadensverteilung und eines Gewinnaufschlages des Rückversicherers, zu geben.

Anschließend wird in Kapitel 7 das Modell für beide Deckungsgrenzen optimiert. Zusätzlich wird das Modell in der Situation der Entscheidung unter Ungewissheit betrachtet. Des Weiteren werden verschiedene Kenngrößen des Erstversicherers mit Hilfe der stochastischen Dominanz untersucht.

Im Kapitel 8 wird das Erst- und das Rückversicherungsgeschäft simultan optimiert. Zentrale Fragen dabei sind:

- Welchen Deckungsschutz bzgl. der Rückversicherung präferiert der Erstversicherer?
- Welche Erstversicherungsprämie sollte der Versicherer von seinen Privatkunden verlangen?
- Beeinflussen sich das Erst- und Rückversicherungsgeschäft gegenseitig?

Für dieses Modell werden insbesondere Abschätzungen bzgl. der Prämie gegeben. Den Abschluss der Arbeit bildet ein Fazit sowie ein Forschungsausblick.

Teil II

Grundlagen

Kapitel 1

Rückversicherungstheorie

1.1 Einführung

Jeder möchte sich vor Risiko schützen, so auch eine Versicherung. Denn während eine Versicherung die Schäden ihrer Kunden versichert, wird sie gleichzeitig immer auch von dem Risiko bedroht, sich bei einem extrem hohen Schaden finanziell zu überfordern. Um dies zu verhindern, schließen Versicherer im Privatkundenbereich, auch Erstversicherer oder Direktversicherer genannt, Versicherungen bei Rückversicherern ab. Eine Rückversicherung ist somit in ihrer einfachsten Definition die Versicherung eines Versicherungsunternehmens.

Eine Rückversicherung dient somit zur Abgabe eines Teils der Schäden des Erstversicherers aus seinem Privatkundengeschäft. Der Rückversicherer erhält für die übernommenen Schäden eine Rückversicherungsprämie. Die Überwälzung dieser Schäden erfolgt mittels Versicherungsverträgen aufgrund gesetzlicher Bestimmungen. Ziel der Rückversicherung ist damit die Risikobegrenzung und Risikoverteilung des Erstversicherers[1].

Das Ausmaß der benötigten Rückversicherung liegt dabei im unternehmerischen Ermessen des Erstversicherers. Entscheidende Faktoren hierfür sind unter anderem Risikobereitschaft, Größe des Zedenten, finanzielle Kapazität und Reservekraft des Erstversicherers. Eine absolute Sicherheit vor finanzieller Überforderung gibt es nicht. Unternehmen können mittels Rückversicherungsverträgen lediglich die Wahrscheinlichkeit eines Existenzverlustes verringern.

Eine Rückversicherung hat demnach zwei grundsätzliche Aufgaben: erstens, die jährlichen Schwankungen der Schadenslast des Erstversicherers einzuschränken und zweitens, für den Katastrophen-, das heißt den Extremfall gewappnet zu sein[2]. Letzteres soll die Solvabilität des Versicherungsunternehmens auch im Extremfall sicherstellen.

Unter Solvabilität eines Versicherungsunternehmens versteht man in diesem Zusammenhang die "Fähigkeit von Versicherungsunternehmen, die durch den Abschluss von Versicherungs-

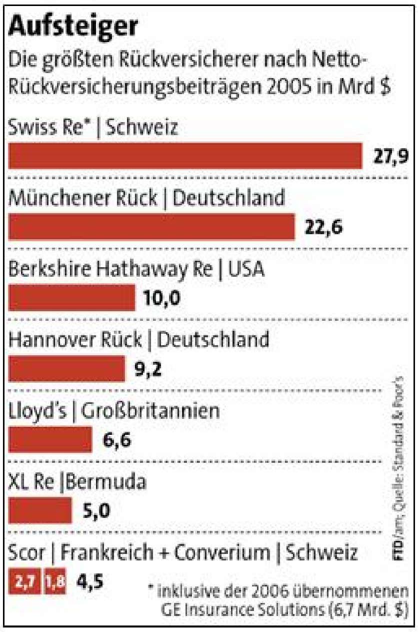
[1] Vgl. Schwepcke (2001), S. 14, Grossmann (1990), S. 7 bzw. Mack (1997), S. 323. Vgl. auch Straub (1988), S. 68 bzgl. der Vorgehensweise im Rückversicherungsgeschäft. In diesem Zusammenhang geht er auch auf Retrozession (Versicherung eines Rückversicherers) ein.

[2] Vgl. Schweizerische Rückversicherungs-Gesellschaft Zürich (2002), S. 9.

verträgen eingegangenen Verpflichtungen erfüllen zu können."[3].

Die Funktionen, die eine Rückversicherung dabei für die Erstversicherer erfüllt, sind vielfältig und meist von Fall zu Fall verschieden. In der Regel richten sie sich nach den Bedürfnissen der Zedenten[4], wie zum Beispiel deren Spezialisierung, regionale Ausrichtung, Vertriebsweg, Fokus auf Kundengruppen und der jeweilig in Anspruch genommenen Leistungen. Die Hauptfunktionen der Rückversicherung sind erstens in der Übertragung und damit Teilung von Risiko, zweitens in der Finanzierung von Risiko und damit verbunden der Unterstützung von Zedenten bei der Übernahme von Leistungen, die oberhalb eigener finanzieller Möglichkeiten liegen und drittens in Beratung und Support des Zedenten zu sehen[5]. Die Serviceleistungen sind insgesamt vielfältig und von Kundenbedürfnissen als auch Marktgegebenheiten abhängig[6].

Bedeutende Erstversicherer nach Marktkapitalisierung stellen dabei unter anderem Axa, Allianz und Generali[7], die größten Rückversicherer weltweit nach Netto-Rückversicherungsbeiträgen im Jahr 2005 die Swiss Re, Münchener Rück, Berkshire Hathaway Re, Hannover Rück, Lloyd's und XL Re[8] dar.



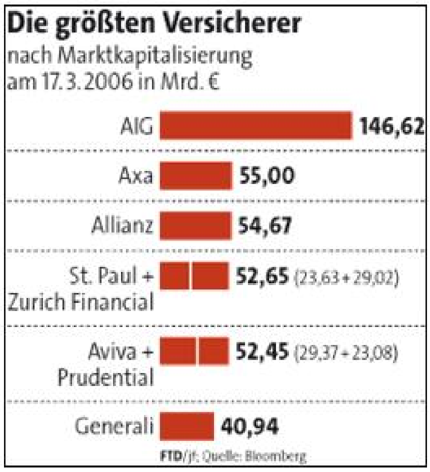


Abbildung 1.1: Die größten Erst- und Rückversicherer im Jahr 2005, Financial Times Deutschland (2007).

[3]Vgl. Dillmann (2007), S. 5.
[4]Ein Erstversicherer wird auch Zedent genannt.
[5]Vgl. Schwepcke (2001), S. 23.
[6]Sie reichen von Produktentwicklungen, Aufbauhilfe, Bestands- und Schadensanalyse bis zu Mitarbeiterausbildung und Schadensmanagement. Neben umfassendem Branchenwissen bieten Rückversicherungen auch langjährige Erfahrungen an.
[7]Vergleich der größten Versicherer siehe Abbildung 1.1.
[8]Vergleich der größten Rückversicherer siehe Abbildung 1.1.

Die größten vier Rückversicherer decken in diesem Rahmen über 35 Prozent des Marktes ab[9]. Neben den weltweit agierenden Rückversicherern gibt es zusätzlich auch zahlreiche regional agierende beziehungsweise auf verschiedenste Sparten spezialisierte Anbieter.

Typische Versicherungssparten stellen dabei für Erst- und Rückversicherer die Lebensversicherung, Krankenversicherung, Unfallversicherung, Allgemeine Haftpflicht, Kraftfahrtversicherung, Feuerversicherung, Sachversicherung, Transport- und Luftfahrtversicherung und die Kreditversicherung dar.

Die ersten Anfänge der Rückversicherung sind im 14. Jahrhundert mit dem Abschluss des ersten Rückversicherungsvertrages zu suchen. Die professionelle Rückversicherung wurde dabei im Rahmen der industriellen Revolution begründet und hat sich seither stetig fortentwickelt. Es lässt sich nunmehr die traditionelle als auch nicht-traditionelle Rückversicherung unterscheiden. Erstere soll hier betrachtet werden. Diese lässt sich anhand von Formen und Arten weiter unterteilen.

Fortfolgend sollen wesentliche Formen von Rückversicherungsverträgen im Allgemeinen erörtert werden. Dies geschieht unabhängig von speziellen Rückversicherungsunternehmen.

1.2 Formen der Rückversicherung

Traditionelle Rückversicherungsverträge lassen sich in zwei grundlegende Ansätze unterteilen. Einerseits wird unterschieden nach Versicherungsformen und andererseits nach Versicherungsarten. Erstere geben Informationen über die Gestaltung von Versicherungsverträgen, letztere über die Methode der Risikoabdeckung. Die Ansätze sind kombinierbar.

Im Folgenden sollen die Formen der Rückversicherung näher betrachtet werden. Die Rückversicherungsform charakterisiert die Ausgestaltung des Rückversicherungsvertrages. Dabei ist entscheidend, ob die Risikoübernahme bindend oder freiwillig geschieht. Sind beide, der Erst- und der Rückversicherer, an die Risikoübernahme gebunden, spricht man von obligatorischer Rückversicherung, sind beide frei in ihrer Entscheidung von fakultativer Rückversicherung. Ist nur eine Vertragspartei gebunden und die andere frei, spricht man von semiobligatorischer Rückversicherung[10].

Es lassen sich als Versicherungsformen, die obligatorische, fakultative als auch semiobligatorische Rückversicherung festhalten. Diese sollen im Weiteren kurz erläutert werden.

1.2.1 Obligatorische Rückversicherung

Das Wesen der obligatorischen Rückversicherung ist die vertragliche Einigung des Erstversicherers mit dem Rückversicherer auf alle Risiken eines bestimmten Bestandes. Die Übergabe bzw. die Übernahme der Risiken ist dabei verpflichtend[11]. Diese Vertragsart wird auch Ver-

[9] Vgl. Schweizerische Rückversicherungs-Gesellschaft Zürich (2002), S. 15.
[10] Vgl. Schwepcke (2001), S. 107.
[11] Vgl. Grossmann (1990), S. 74.

tragsrückversicherung genannt.

Die Einzelrisiken werden in der Regel dem Rückversicherer nicht bekannt gegeben. Alle im Rahmen der vereinbarten Annahmerichtlinien versicherten Risiken fallen automatisch unter den Geltungsbereich des Rückversicherungsvertrages. Dies bringt für den Zedenten vor allem eine Vereinfachung der Administration, für den Zessionär[12] jedoch Nachteile durch die verminderten Kontrollmöglichkeiten und die eingeschränkte Chance, sich vor extremen Risiken zu schützen.

Die obligatorische Rückversicherung setzt zudem ein hohes Vertrauen der Vertragspartner voraus, da diese Vertragsform eine automatische Kaptitalbereitstellung für den Erstversicherer vorsieht, indem der Rückversicherer laut Vertragsbedingungen zur Übernahme der Risiken verpflichtet ist[13].

Ein typisches Beispiel hierfür ist der Kraftfahrzeugsversicherungsbestand eines Erstversicherers, wobei jedes im vereinbarten Vertragszeitraum im Bestand befindliche Kraftfahrzeug automatisch rückversichert ist.

1.2.2 Fakultative Rückversicherung

Das Wesen der fakultativen Rückversicherung im Vergleich zur obligatorischen Rückversicherung besteht in der fallweisen Übertragung einer oder mehrerer Schäden auf den Zessionär. Da beide Vertragsparteien nicht an die vertraglichen Abmachungen gebunden sind, wird sie auch als freiwillige Rückversicherung bezeichnet[14].

Ein Erstversicherer hat hierbei die freie Wahl des Rückversicherers sowie die Möglichkeit zu entscheiden, ob und in welcher Höhe er sein Risiko decken lassen will. Der Rückversicherer dagegen hat nach Prüfung aller relevanten Informationen die Wahl, ob er sich tatsächlich und in welcher Höhe an dem Risiko beteiligen möchte. Der daraus entwickelte Vertrag bezieht sich auf die Deckung von Einzelrisiken und endet mit dem Enddatum der Police. Eine Verlängerung liegt im Ermessen beider Parteien.

Während man die obligatorische Rückversicherung oft auch als Generalrückversicherung bezeichnet, da ein Portfolio von Risiken verpflichtend versichert wird, werden für fakultative Formen auch oft die Ausdrücke Einzel- oder Spezialrückversicherung verwendet[15], da diese individuelle Einzelrisiken tangieren. Im Vergleich hieße dies also, dass sich bei der fakultativen Rückversicherung die Vertragspartner auf die Versicherung eines bestimmten Risikos, bei der obligatorischen Rückversicherung auf die Versicherung aller Risiken, einigen.

Die fakultative Rückversicherung wird hiernach entweder für Sonderrisiken verwendet, die in keinem obligatorischen Rückversicherungsvertrag erfasst sind oder für Spitzenrisiken, die über den Umfang bestehender obligatorischer Rückversicherungsverträge hinaus für den Erst-

[12]Ein Rückversicherer wird auch Zessionär oder Zessionar genannt.
[13]Vgl. Schwepcke (2001), S. 109.
[14]Vgl. Grossmann (1990), S. 73.
[15]Vgl. Grossmann (1990), S. 73.

versicherer entstehen.

Ein typisches Beispiel für eine fakultative Rückversicherung stellt die Versicherung eines größeren Gebäudes, zum Beispiel einer Fabrik, dar.

1.2.3 Semiobligatorische Rückversicherung

Über die fakultative und die obligatorische Rückversicherung hinaus gibt es Mischverträge aus beiden Formen. Sie umfassen den fakultativ-obligatorischen[16] als auch den obligatorisch-fakultativen[17] Rückversicherungsvertrag[18].

Die fakultativ-obligatorische Rückversicherung ist auch unter dem Begriff "Open Cover" bekannt. Die Zession eines Risikos bleibt bei dieser Form im Ermessen des Erstversicherers. Der Erstversicherer stellt damit das fakultative Element des Vertrages dar. Der Rückversicherer hingegen muss jede Zession akzeptieren und ist somit das obligatorische Element des Vertrages.

Bei der obligatorisch-fakultativen Rückversicherungsform dagegen ist der Erstversicherer zur Zession bestimmter Risiken verpflichtet, während die Annahme der Zession im Ermessen des Rückversicherers liegt. Der Erstversicherer stellt in diesem Fall das obligatorische, der Rückversicherer dagegen das fakultative Element des Vertrages dar.

Da die semiobligatorischen Vertragsformen sehr verwaltungsaufwendig sind, treten diese in der Praxis sehr selten auf. Darüber hinaus setzen sie Vertrauen, als auch Kenntnis der jeweiligen Geschäftsprozesse voraus, damit eine stark einseitige Benachteiligung vermieden wird.

1.3 Arten der Rückversicherung

Neben der Unterscheidung nach der Form von Versicherungen und damit der Differenzierung nach Pflicht oder Freiwilligkeit der Abgabe beziehungsweise Annahme von Risiken, werden Rückversicherungsverträge auch in ihre Arten unterteilt. Diese geben Aufschluss darüber, mit welcher Methode die Risiken rückversichert werden. Innerhalb der Arten werden proportionale und nicht-proportionale Verträge unterschieden. Die proportionalen Versicherungen werden dabei auch oft unter dem Begriff der Summenrückversicherung, die nicht-proportionalen unter dem Begriff Schadensrückversicherung aufgeführt. Beide Arten sind in fakultativer als auch obligatorischer Form der Rückversicherung verwendbar.

Die Arten, inklusive deren Hauptformen, sollen im Folgenden näher erläutert werden.

[16] Auch akzeptionspflichtige Rückversicherung genannt. In dieser ist der Zessionär zur Übernahme bestimmter Risiken verpflichtet.

[17] Auch zessionspflichtige Rückversicherung genannt. In dieser ist der Zedent zur Abgabe bestimmter Risiken verpflichtet.

[18] Vgl. Schwepcke (2001), S. 109 f.

1.3.1 Proportionale Rückversicherung

Bei der proportionalen Rückversicherung wird "das rückzuversichernde Risiko zwischen Zedent und Rückversicherer nach einem festen Prozentsatz aufgeteilt, der zugleich den Anteil des Rückversicherers an den auf die Versicherungen entfallenden Teil- oder Totalschäden bestimmt sowie den Anteil des Rückversicherers an der Originalprämie."[19].

Es handelt sich also per Definition um Vertragsarten, bei denen sich der Rückversicherer in einem bestimmten definierten Verhältnis am Risiko und an den Schäden des Erstversicherers beteiligt. Die Versicherungssummen, die Schäden und die Prämien werden zwischen beiden Parteien proportional aufgeteilt. Durch die Schadensbeteiligung teilt der Rückversicherer bei dessen Zeichnungspolitik direkt das Schicksal des Erstversicherers und somit die Schadenserfahrung.

Grundlage des Aufteilungsverhältnisses zwischen Zedent und Zessionär ist das Volumen des versicherungstechnischen Gesamtrisikos des Zedenten. Das versicherungstechnische Gesamtrisiko ist die Summe aller Versicherungssummen aus dem Privatkundengeschäft[20]. Daher werden proportionale Rückversicherungen auch Summenrückversicherungen genannt.

Die Hauptformen dieser Versicherungsart sind die Quoten-Rückversicherung sowie die Summenexzedenten-Rückversicherung. Zusätzlich existieren Mischformen der proportionalen Arten, eine Quotenexzedenten-Rückversicherung, ein Summenexzedent mit Vorwegquote und eine Quote mit Vorwegexzedent.

Seine hauptsächliche Verwendung finden solche proportionalen Verträge besonders in der obligatorischen Rückversicherung. Vor allem kleine Erstversicherer wählen diese Vertragsart, da diese in größerem Ausmaß von einzelnen größeren Schäden oder auch der Schadenshäufigkeit gefährdet werden. Dies ist dem Versicherungskollektiv geschuldet, da das Gesetz der großen Zahlen noch nicht für einen ausreichenden Risikoausgleich sorgt. Das Gesetz besagt, dass mit steigender Anzahl von gleichartigen Ereignissen[21] sich der tatsächliche Ausgang (Summe der Schäden) dem erwarteten Ausgang (erwartete Summe der Schäden) anpasst. Dabei nimmt die Variabilität der Summe der Schäden um die erwartete Summe der Schäden ab[22].

Im Folgenden wird näher auf die Vertragsarten der proportionalen Rückversicherung eingegangen.

1.3.1.1 Quoten-Rückversicherung

Die Quoten-Rückversicherung ist eine der Hauptformen der proportionalen Rückversicherungen. Dabei übernimmt der Zessionär immer den gleichen prozentualen Anteil (Quote) von allen Erstversicherungsverträgen während der gesamten Vertragszeit innerhalb einer Sparte oder Branche[23].

[19]Vgl. Pfeiffer (1986), S. 45.
[20]Vgl. Schwepcke (2001), S. 111.
[21]Im Versicherungskontext sind das die Schadensfälle.
[22]Vgl. Schulte (2006) S, 54 ff.
[23]Vgl. Grossmann (1990), S. 89. Die Übernahmepflicht des Zessionärs ist dabei in der Summe beschränkt.

Entsprechend der festgelegten Quote werden dann die Prämien, Haftungen und die Schadensleistungen zwischen den Parteien aufgeteilt. Der Beteiligungssatz der Rückversicherer ergibt sich dabei aus dem Quotient von Versicherungssumme reduziert um den Selbstbehalt[24] und der Versicherungssumme.

Der Vorteil dieser Vertragsart liegt dabei besonders in der einfachen Handhabung, der weniger kostenintensiven Verwaltung und dem Schutz vor der Kumulierung vieler kleiner und mittlerer Schäden, die im Schadensfall meist auftreten. Sie empfiehlt sich besonders für die Versicherung mehrerer gleichartiger Risiken, bei denen eine differenzierte Behandlung nicht von Interesse ist. Die Risikoüberwälzung ist dabei optimal, wenn sich die versicherten Risiken möglichst ähnlich sind.

Da die Quoten-Rückversicherung keine nivellierende, ausgleichende Wirkung besitzt, ist sie weit weniger verbreitet als die Summenexzedenten-Rückversicherung. Generell ist sie zum Beispiel in der Allgemeinen Unfall- und Haftpflichtversicherung, in der Kreditversicherung, in der Kraftfahrzeug-Haftplichtversicherung und in der Krankenversicherung aufzufinden. Sie ist besonders für den Klein- und Mittelschadenbereich geeignet, im Bereich der großen Einzelschäden ist sie aufgrund der fehlenden ausgleichenden Wirkung weniger zu empfehlen.

Die Risikoteilung zwischen Erst- und Rückversicherer bei der Quoten-Rückversicherung soll im Folgenden an zwei Beispielen, einmal ohne und einmal mit Haftungsbeschränkung des Rückversicherers, verdeutlicht werden.

Beispiel 1.3.1 *(Quoten-Rückversicherung ohne Haftungsbeschränkung)*
Ein Erstversicherer möchte seinen gesamten Kraftfahrzeughaftpflichtbestand rückversichern. Die Summe der von ihm eingenommenen Prämien belaufe sich auf 10 000 Euro und die Versicherungssumme aller Verträge sei 250 000 Euro. Zwischen dem Zedent und dem Zessionär wurde eine Quoten-Rückversicherung mit einer Quote von 40 % vereinbart.

Zunächst werden die eingenommenen Versicherungsprämien entsprechend der Quote zwischen beiden Parteien aufgeteilt. Somit erhält der Rückversicherer als Rückversicherungsprämie[25] *40 % von allen Erstversicherungsprämien, d. h. 4 000 Euro. Die restlichen 6 000 Euro verbleiben dem Zedenten als Gegenleistung für sein übernommenes Risiko.*

Es tritt ein Schaden von 50 000 Euro ein. Somit muss der Rückversicherer für 40 Prozent des Schadens, also 20 000 Euro, haften. Der Zedent übernimmt die restlichen 30 000 Euro. Treten weitere Schäden ein, bleibt das Aufteilungsverhältnis von 40 Prozent unverändert.

Beispiel 1.3.2 *(Quoten-Rückversicherung mit Haftungsbeschränkung)*
Man unterstelle den gleichen Sachverhalt des vorangegangenen Beispiels mit einer Prämiensumme von 10 000 und einer Versicherungssumme von 250 000 Euro. Ebenfalls sei eine

---

[24] Den Schaden, der vom Erstversicherer übernommen wird, bezeichnet man als Selbstbehalt. Somit gibt die Quote den Anteil des Rückversicherers an den Schäden und Prämien an.

[25] Das Entgelt für das vom Rückversicherer übernommene Risiko wird Rückversicherungsprämie genannt.

Quote von 40 % vereinbart worden. Zusätzlich möchte der Rückversicherer seine Haftung bezogen auf den Maximalschaden auf 200 000 Euro beschränken. Dies entspricht einer Haftung von 80 %. Dies bedeutet, dass bei allen auftretenden Schäden nur 80 % der Schadenssumme unter den Rückversicherungsvertrag fallen.

Demzufolge stehen dem Rückversicherer als Prämie nur 40 % von 80 % (8 000 Euro) der eingenommenen Versicherungsprämien zu. Somit zahlt der Zedent an den Zessionär eine Rückversicherungsprämie von 3 200 Euro.

Analog verhält es sich bei den eingetretenen Schäden. Es trete ein Schaden von 50 000 Euro ein. Unter den Rückversicherungsvertrag fallen aber nur 80 %, also 40 000 Euro. Diese werden entsprechend der Quote zwischen dem Erst- (24 000 Euro) und Rückversicherer (16 000 Euro) aufgeteilt.

Die vom Quoten-Vertrag nicht abgedeckten 20 % der Schäden werden entweder vom Zedenten getragen oder durch eine weitere Rückversicherung versichert. Dafür stehen dem Erstversicherer 20 % der Versicherungsprämien (2 000 Euro) zur Verfügung.

Im Folgenden soll auf die zweite Hauptform der proportionalen Rückversicherung, die Summenexzedenten-Rückversicherung, eingegangen werden.

1.3.1.2 Summenexzedenten-Rückversicherung

Bei der Summenexzedenten-Rückversicherung transferiert der Zedent nur die Haftung der Risiken oberhalb eines Selbstbehaltes an den Rückversicherer. Das Verhältnis der Risikoteilung zwischen beiden Vertragsparteien ist somit von Fall zu Fall verschieden[26]. Dabei werden verschiedene Policen entsprechend ihrer Risiken zu Gruppen zusammengefasst. Die Rückversicherung findet dann anhand einer festgelegten Summe statt.

Der Anteil des Rückversicherers bestimmt sich aus den übernommenen Rückversicherungssummen bezogen auf die Gesamtversicherungssumme des Zedenten. Er wird im Vergleich zum Quotenrückversicherungsvertrag nicht mehr an der Absicherung aller Risiken beteiligt, sondern nur an Schäden, die den Selbstbehalt des Zedenten übersteigen. Diese Schäden werden dann proportional unter den Vertragsparteien aufgeteilt. Dabei wird sich an höheren Risiken stärker beteiligt als an kleinen. Häufig wird die Rückversicherungssumme (Summenexzedent)[27] seitens des Zessionärs begrenzt, so dass eine Höchstzeichnungsgrenze für den Zedent entsteht[28]. Dabei findet diese Vertragsart üblicherweise in Form der obligatorischen oder semi-obligatorischen Rückversicherung Anwendung. Die Schadensteilung für die Summenexzedenten-Rückversicherung soll Abbildung 1.2 verdeutlichen.

Der Vorteil der Summenexzedenten-Rückversicherung ist in diesem Rahmen die Reduktion von Spitzenrisiken und die resultierende Homogenisierung des risikobehafteten Bestandes des Zedenten. Für den Erstversicherer erhöht sich aufgrund dieser Art der Risikoübernahme seine

[26]Vgl. Helbig (1987), S. 110.
[27]Im Englischen auch surplus genannt.
[28]Vgl. Farny (1995), S. 488.

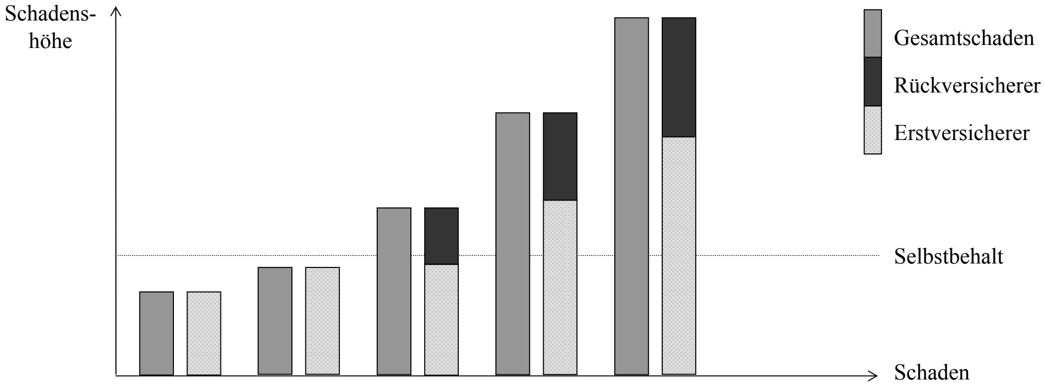


Abbildung 1.2: Aufteilung der Schäden bei der Summenexzedenten-Rückversicherung.

Zeichnungskapazität. Es wird ihm ermöglicht, größere Risiken zu übernehmen. Im Vergleich zur Quotenrückversicherung setzt der Vertrag erst mit einer bestimmten Schadenshöhe ein. Dafür ist er jedoch auch für uneinheitliche Risiken zu verwenden.

Besonders lässt sich diese Vertragsart in den Sachversicherungszweigen, der Feuer-, Unfall- und Lebensversicherung finden. Vor allem in Branchen mit stark unterschiedlichen Versicherungssummen ist diese ein bewährtes Instrument. Nachteilig ist jedoch der mit ihr verbundene höhere Verwaltungs- und Kostenaufwand. Außerdem bietet der Summenexzedent keinen absoluten Schutz vor Kumulschäden[29].

Die Summenexzedenten-Rückversicherung ist die älteste und gleichzeitig auch wichtigste Art der proportionalen Rückversicherung und soll zum Abschluss an zwei Beispielen veranschaulicht werden.

Beispiel 1.3.3 *(Summenexzedenten-Rückversicherung ohne Haftungsbeschränkung)*
Ein Zedent besitzt ein Versicherungsportfolio bzgl. Feuerversicherung mit einer Versicherungssumme von 1 Million Euro. Dafür hat er insgesamt Versicherungsprämien im Wert von 5 000 Euro eingenommen. Der Zedent möchte die Schäden aus diesem Versicherungsportfolio reduzieren und schließt eine Summenexzedenten-Rückversicherung ab. Dabei ist er bereit, Schäden unter 200 000 Euro (Selbstbehalt) selbst zutragen.

Zunächst wird das Verhältnis zwischen Selbstbehalt und Haftungsstrecke bestimmt. Der Selbstbehalt beträgt 200 000 Euro und somit ist die Haftungsstrecke 800 000 Euro, zusammen eine Million Euro. Es liegt ein Verhältnis von 1:4 vor. Dieses Verhältnis ist die Grundlage zur Berechnung der Rückversicherungsprämie. Dem Zessionär stehen vier von fünf Teilen der eingenommenen Versicherungsprämien zu, also 4 000 Euro.

Es trete ein Schaden nach dem Vertragsabschluss der Rückversicherung in Höhe von 160 000 Euro ein. Dieser fällt aufgrund des Selbstbehaltes nicht unter den Rückversicherungsschutz. Für diesen Schaden haftet allein der Erstversicherer. Es trete ein zweiter Scha-

[29]Vgl. Strauß (1988), S. 14.

den von 400 000 Euro ein. Dieser Schaden überschreitet den Selbstbehalt und wird zwischen dem Zedenten und dem Zessionär entsprechend dem festgestellten Verhältnis geteilt. Somit übernimmt der Rückversicherer vier von fünf Teilen des Schadens (320 000 Euro) und für den restlichen Teil von 80 000 Euro haftet der Erstversicherer.

Beispiel 1.3.4 *(Summenexzedenten-Rückversicherung mit Haftungsbeschränkung)*
Es bestehe gleicher Sachverhalt wie im vorherigen Beispiel. Zusätzlich möchte der Zessionär seine Haftung auf den dreifachen Selbstbehalt beschränken. Somit haftet der Rückversicherer bei einem Maximalschaden mit 600 000 Euro, der restliche Schaden von 400 000 Euro ist vom Zedenten zu decken. Somit ist das Verhältnis zwischen Erst- und Rückversicherer 400 000 zu 600 000 bzw. 2 zu 3.

Für die Rückversicherungsprämie zahlt der Zedent damit drei von fünf Teilen der eingenommenen Versicherungsprämien, also 3 000 Euro. Es trete ein Schaden von 160 000 Euro ein, dieser ist kleiner als der Selbstbehalt und muss somit allein vom Erstversicherer getragen werden. Ein Schaden von 400 000 Euro wird entsprechend dem Verhältnis 2:3 zwischen dem Erst- (160 000 Euro) und Rückversicherer (240 000 Euro) aufgeteilt.

Bei dieser Summenexzedenten-Rückversicherung mit Haftungsbeschränkung trägt der Erstversicherer nicht 20 Prozent[30]*, sondern 40 Prozent des Schadens, wenn der Schaden oberhalb des Selbstbehaltes liegt. Dieses zusätzlich übernommene Risiko kann der Zedent durch eine weitere Rückversicherung decken lassen.*

1.3.1.3 Mischformen der proportionalen Rückversicherung

Neben Quoten- und Summenexzedenten-Rückversicherung existiert eine Mischform aus diesen zwei Hauptarten, die Quotenexzedenten-Rückversicherung. Ihre Aufgabe ist im Allgemeinen die Kombination der Finanzierungsweise der Quoten-Rückversicherung mit der Homogenisierungs- und Kapazitätsbeschaffungsfunktion der Summenexzedenten-Rückversicherung und damit die optimale Anpassung an die Bedürfnisse der Erstversicherer. Meist stellt sie jedoch eher eine Übergangslösung für noch im Wachstum befindliche Unternehmen dar.

Bei dieser Mischform findet eine weitere Reduktion des Selbstbehaltes des Erstversicherers in dessen Summenexzendenten-Rückversicherung durch eine Quotenrückversicherung statt.

Die in diesem Prozess einfließenden Anteile müssen nicht identisch sein. Sind Beteiligungsumfang und Beteiligte identisch, so spricht man allgemein von der Quotenexzedenten-Rückversicherung, die eine identische Schadensaufteilung zur Quoten-Rückversicherung aufweist. Sind die Anteile nicht identisch, lassen sich zwei Unterarten entsprechend ihrer zeitlichen Anwendungsreihenfolge unterscheiden. Dabei bezeichnet man die Unterart, in der die Quote zeitlich vorangehend ist, dass heißt rechnerisch zuerst angewendet wird, als Summenexzedent mit Vorwegquote, die Unterart, in der die Quote rechnerisch zuletzt angewendet wird, als Quote mit Vorwegexzedent.

[30] 20 Prozent ist der Anteil des Erstversicherers ohne Haftungsbeschränkung.

Bei ersterer steht dabei die Finanzierungsfunktion stärker im Vordergrund, bei letzterer dagegen ist meist die Kapazitätsbeschaffung und Homogenisierung von Versicherungsbeständen von höherer Bedeutung. Die Aufteilung der Schäden für die Summenexzedenten-Rückversicherung mit Vorwegquote[31] und die Quoten-Rückversicherung mit Vorwegexzedent[32] stellen die Abbildungen 1.3 und 1.4 dar.

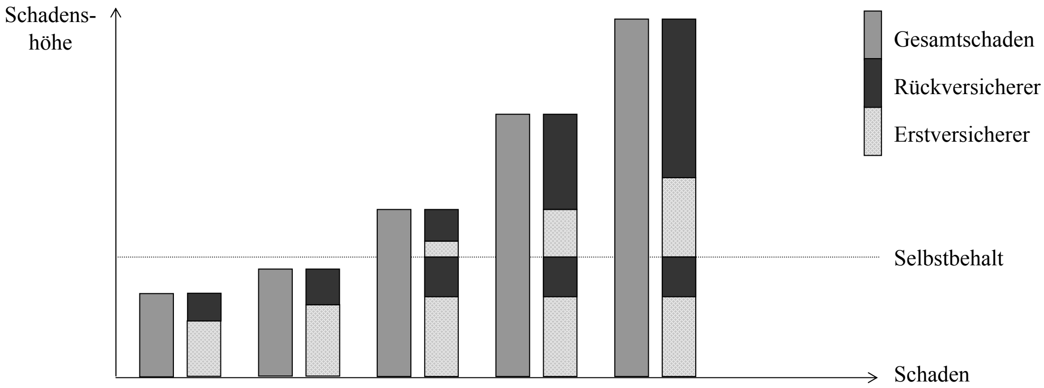


Abbildung 1.3: Aufteilung der Schäden bei der Summenexzedenten-Rückversicherung mit Vorwegquote.

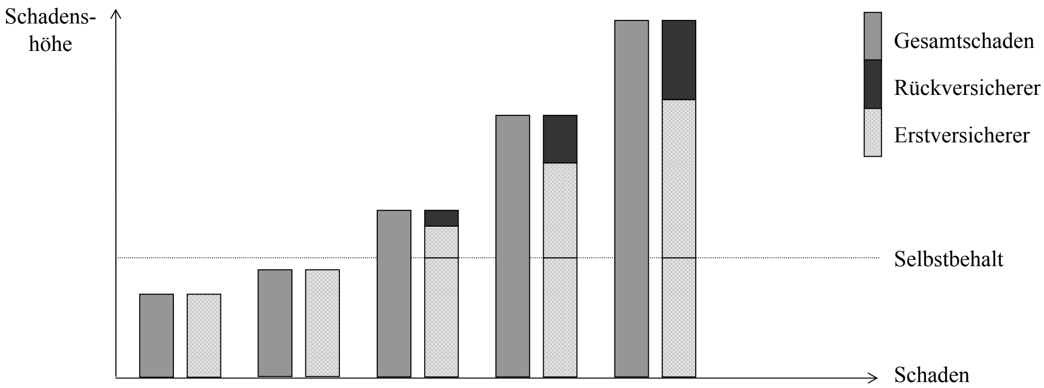


Abbildung 1.4: Aufteilung der Schäden bei der Quoten-Rückversicherung mit Vorwegexzedent.

[31] Bei der Summenexzedenten-Rückversicherung mit Vorwegquote werden alle Schäden unterhalb des Selbstbehaltes entsprechend einer Quote geteilt, die Schäden oberhalb, entsprechend mit einer anderen Quote. Die zuerst angesprochene Quote wird auch Vorwegquote genannt.

[32] Die Schadensteilung zwischen Zedent und Zessionär betrifft nur die Schäden, die den Selbstbehalt übersteigen. Wenn dies der Fall ist, wird nur der Schaden oberhalb des Selbstbehaltes mit einer Quote zwischen den Vertragsparteien aufgeteilt.

1.3.2 Nicht-proportionale Rückversicherung

An dieser Stelle soll nun die nicht-proportionale Rückversicherung, auch Schadenrückversicherung genannt, betrachtet werden. Sie wird charakterisiert durch die Beteiligung des Rückversicherers an der Höhe schadensbedingter Aufwendungen des Erstversicherers.

Bei den darunter fallenden Vertragsformen trägt der Erstversicherer von dem Schaden das Erstrisiko, das heißt er haftet für den Schaden bis zu einem vereinbarten Höchstbetrag d, der Priorität genannt wird. Den Schaden, der von der Priorität überstiegen wird, zahlt der Rückversicherer. Somit bekommt der Erstversicherer bei einem Schaden oberhalb der Priorität den Schaden minus der Priorität vom Rückversicherer ersetzt. Der Schaden kann sich dabei nicht nur auf einen Einzelschaden aus einem Risiko, sondern auch auf einen Kumulschaden aus mehreren Risiken aufgrund eines Schadensereignisses sowie auf den Jahresgesamtschaden beziehen[33].

Darüber hinaus wird eine Deckungsobergrenze c mit dem Rückversicherer vereinbart, dass heißt ein Übernahmemaximum, ab der der Rückversicherer den Schaden nicht mehr bezahlt. Diese wird Plafond genannt. Den Bereich zwischen Plafond und Priorität bezeichnet man als Haftungsstrecke.

Bei der nicht-proportionalen Rückversicherung wird der Plafond so hoch gewählt, dass alle Schäden unterhalb diesem liegen. Die Ausnahme bilden dabei die Extremschäden. Tritt ein Extremschäden ein, trägt der Rückversicherer nur den Plafond minus die Priorität. Der restliche Schaden muss vom Erstversicherer selbst getragen werden.

Den Zusammenhang zwischen Priorität[34], Plafond und Haftung[35] soll beispielhaft Abbildung 1.5 verdeutlichen.

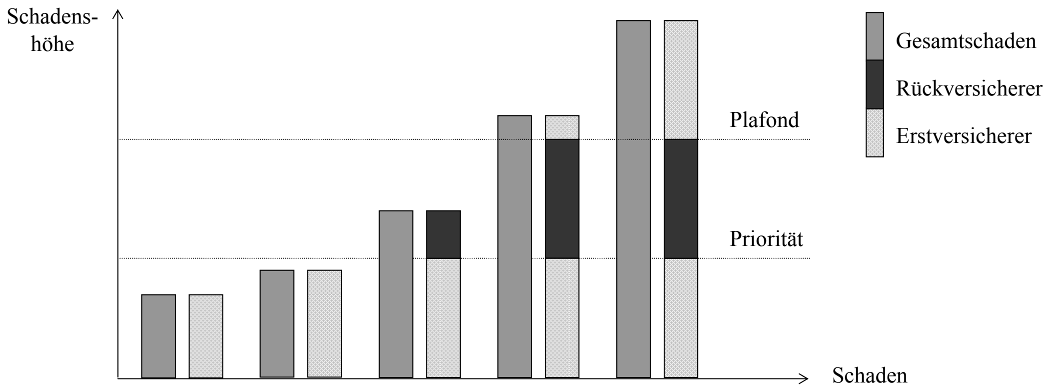


Abbildung 1.5: Aufteilung der Schäden bei nicht-proportionalen Rückversicherungsverträgen.

Der Erstversicherer erhält also Schutz vor unvorhergesehenen, hohen Schadensbelastungen.

[33]Vgl. Helbig (1987), S. 113.
[34]Englisch: deductible oder excess.
[35]Englisch: cover oder layer.

Gleichzeitig wird das Entgelt, also die Rückversicherungsprämie, nach der individuellen Risikosituation kalkuliert. In diese Prämie fließen neben der Bedarfsprämie auch Verwaltungskosten, Zinsen auf Schadensreserven und Gewinnzuschläge ein. Die auslösenden Faktoren, dass heißt Ursache und Höhe des Schadens, als auch die Höhe der Leistungspflicht werden vorab vertraglich auf einen bestimmten Zeitraum festgelegt.

Hinsichtlich der Typen nicht-proportionaler Rückversicherungen unterscheidet man hauptsächlich drei Gruppen von Rückversicherungsverträgen:

- die Schadenexzedenten-Rückversicherung[36],
- die Jahresschadenexzedenten-Rückversicherung[37] und
- die Höchstschaden-Rückversicherung.

Erstere lässt sich dabei weiter einerseits in die Einzelschadenexzedenten-[38] und andererseits in die Kumulschadenexzedenten-Rückversicherung[39] untergliedern. Die Typen der nicht-proportionalen Rückversicherung sollen im Folgenden aufgrund ihrer thematischen Relevanz für die vorliegende Arbeit näher erläutert werden.

Der Unterschied besteht zwischen Einzel-, Kumul- und Jahresschadenexzedenten-Rückversicherung rein in der Interpretation der Schadenshöhe[40]. Sie bezieht sich demnach auf einzelne Schäden, Kumulschäden oder auf den Gesamtjahresschaden. Für den Typ der Jahresschadenexzedenten-Rückversicherung ist auch der hier ebenfalls verwendete Begriff der Jahresüberschaden-Rückversicherung verbreitet.

Anwendungsfelder findet die nicht-proportionale Rückversicherung zum Beispiel in Allgemeiner und Kraftfahrtzeug-Haftpflichtversicherung, Kasko-, Sturm- oder Industrie-Feuerversicherung. In der Ausgestaltung finden sich sowohl fakultative als auch obligatorische Formen. Proportionale und nicht-proportionale Arten sind kombinierbar.

Eine konkrete Leistungsverpflichtung seitens des Rückversicherers entsteht erst, wenn im Rahmen der vereinbarten Policen tatsächliche Schäden eintreten, welche zusätzlich eine vorher festgelegte Grenze überschreiten. Die Höhe der Beteiligung hängt in diesem Rahmen von der Höhe der tatsächlichen Schäden ab. Eine Festlegung vorab findet nicht statt.

Die nicht-proportionale Art der Rückversicherung wird unter anderem verwendet, da sie einfach umzusetzen sowie relativ kostengünstig ist und gleichzeitig dem Rückversicherer erlaubt, eine spezifische Rate statt eines proportionalen Anteils der Risikoübernahme festzulegen.

---

[36] Die Schadenexzedenten-Rückversicherung wird auch Excess of Loss genannt(Abkürzung: XL).

[37] Die Jahresschadenexzedenten-Rückversicherung wird auch Stop Loss genannt (Abkürzung: SL).

[38] Die Einzelschadenexzedenten-Rückversicherung wird auch Excess of Loss per Risk oder auch Working Excess of Loss genannt (Abkürzung: WXL).

[39] Die Kumulschadenexzedenten-Rückversicherung wird auch Excess of Loss per Event oder auch Catastrophe Excess of Loss genannt (Abkürzung: Cat XL).

[40] Vgl. Schmidt (2002), S. 203.

1.3.2.1 Einzelschadenexzedenten-Rückversicherung (Excess of Loss per Risk)

Die Schadenexzedenten-Rückversicherung dient im Schadensfall der Deckung der tatsächlichen Schäden eines festgelegten Portfolios, insofern die Schäden oberhalb der Priorität des Erstversicherers liegen. Der Unterschied zwischen Summen- und Schadenexzedenten-Rückversicherung[41] besteht dabei darin, dass nicht ein variabler Überschuss, sondern ein festgelegter Schadensüberschuss[42] rückversichert wird. Die zugehörige Prämie berechnet sich direkt aus der rückversicherten Schadensmasse[43]. Dabei unterscheidet man die Schadenexzedenten-Rückversicherung grundlegend in die Deckung pro Risiko (Einzelschadenexzedenten-Rückversicherung) und die Deckung pro Ereignis (Kumulschadenexzedenten-Rückversicherung).

Bei der Einzelschadenexzedenten-Rückversicherung[44] sind alle Schäden aus einer bestimmten Sparte oder Branche rückversichert. Dabei trägt der Zessionär an jedem Schaden aus dieser Branche den vom Selbstbehalt übersteigenden Schadensbetrag[45]. Der Selbstbehalt wird dabei vom Erstversicherer festgelegt und auch Erstrisiko bzw. Priorität genannt. Die Haftung des Zessionärs ist aber nicht unbegrenzt, sondern auf ein bestimmtes Schadensvolumen pro Einzelschaden beschränkt. Diese Deckungsobergrenze wird als Plafond bezeichnet. Die Haftungsstrecke des Rückversicherers ist somit der Plafond minus die Priorität. Die Rückversicherungsprämie richtet sich dabei nach dem Schadensvolumen der Haftungsstrecke. Je höher der Zedent diese präferiert, desto höher wird die zu entrichtende Prämie sein. Zusätzlich besteht seitens des Zessionärs die Möglichkeit die Gesamtschadensforderung im Vertragszeitraum zu beschränken[46].

Aufgabe der Einzelschadenexzedenten-Rückversicherung ist also die Begrenzung des Schadens auf den Selbstbehalt und damit die Homogenisierung eines Portfolios in Hinsicht der Schadenshöhen. Sie findet vor allem Anwendung, wenn von den einzelnen Risiken aus dem Portfolio des Zedenten die Gefahr großer Schadensereignisse ausgeht.

Das folgende Beispiel soll die Wirkungsweise einer Einzelschadenexzedenten-Rückversicherung verdeutlichen.

Beispiel 1.3.5 *(Einzelschadenexzedenten-Rückversicherung)*
Ein Erstversicherer hält ein Portfolio von allgemeinen Haftpflichtversicherungen seiner Privatkunden. Er wählt eine Priorität von 1 Million Euro. Der Rückversicherer legt die Deckungsobergrenze (Plafond) auf 10 Millionen Euro fest. Für diesen Rückversicherungsvertrag bezahlt der Erstversicherer eine Rückversicherungsprämie an den Zessionär. Es treten in dem Portfolio folgende drei Schäden ein: 800 000 Euro, 3 Millionen Euro und 11 Millionen Euro.

Der Schaden von 800 000 Euro liegt unterhalb der Priorität und wird allein vom Zedent getragen. Der zweite Schaden von 3 Millionen Euro dagegen überschreitet die Priorität und führt

---

[41] Englisch: Excess of Loss. Abkürzung: XL.
[42] Es sind alle Schäden oberhalb des Selbstbehaltes bei der Schadenexzedenten-Rückversicherung versichert.
[43] Vgl. Schmidt (1991), S. 298.
[44] Wird im technischen Sprachgebrauch auch 'Working cover' oder 'Working Excess of Loss' genannt. Abkürzung: 'WXL'.
[45] Vgl. Grossmann (1990), S. 119.
[46] Vgl. Gerathewohl (1976), S. 87.

zum Eintreten des Rückversicherungsvertrages. In diesem Fall haftet der Erstversicherer mit der Priorität von 1 Million Euro, den übersteigenden Teil von 2 Millionen Euro übernimmt der Zessionär. Bei dem dritten Schaden von 11 Millionen Euro tritt der Rückversicherungsvertrag ebenfalls in Kraft. Da der Schaden selbst den Plafond übersteigt, haftet der Zessionär für den Betrag zwischen Plafond und Priorität, also für 9 Millionen Euro. Der restliche Schaden von 2 Millionen Euro wird vom Erstversicherer übernommen. In den meisten Fällen ist der den Plafond übersteigende Schaden[47] *durch eine weitere Rückversicherung abgedeckt.*

Eine Spezialform des Excess of Loss per Risk stellt der Zweitversicherungsvertrag dar. Er zeichnet sich durch eine vergleichsweise komplexere Bestimmung des Rückversicherungspreises aus. Bei dieser wird für jedes Risiko einzeln entsprechend seines Risikopotentials der Teil der Originalprämie einschließlich des Schwankungszuschlages ermittelt. Zusätzlich fließt eine vorher festgesetzte Rückversicherungsprovision in die Berechnung mit ein.

Der Unterschied der Einzelschadenexzedenten-Rückversicherung zur Summenexzedenten-Rückversicherung liegt grundlegend darin, dass die Rückversicherung hauptsächlich auf den konkreten Großschaden und nicht nur die Möglichkeit eines großen Schadens, ausgerichtet ist. Darüber hinaus findet keine proportionale Beteiligung an der Originalprämie und den anfallenden Schäden pro Risiko statt. Liegt der Schaden unterhalb der Priorität, erfolgt keine Beteiligung an den Schäden. Im anderen Fall wird eine teilweise Beteiligung im Rahmen der vereinbarten Haftung fällig.

1.3.2.2 Kumulschadenexzedenten-Rückversicherung (Excess of Loss per Event)

Die Kumulschadenexzedenten-Rückversicherung versichert im Vergleich zur Einzelschadenexzedenten-Rückversicherung die Akkumulation von Schäden in Form von Katastrophen. Sie soll den Erstversicherer vor der Kumulierung von Schäden schützen. Das heißt, sie bezieht ihre Deckung nicht auf ein einzelnes Risiko wie der Excess of Loss per Risk, sondern deckt im Schadensfall alle mit dem gleichen Schadensereignis verbundenen Schäden einer definierten Menge von Policen ab. Dabei tritt die Rückversicherung in Kraft, falls die Kumulation der Schäden aus einem Schadensereignis (Erdbeben, Sturm, Überschwemmung) den Selbstbehalt des Zedenten (Priorität) übersteigt. Der die Priorität übersteigende Betrag wird vom Rückversicherer getragen[48].

Da die kumulierten Schäden oft katastrophenartige Ausmaße haben und gleichzeitig durch ein spezifisches Ereignis hervorgerufen werden, ist die Kumulschadenexzendeten-Rückversicherung auch unter den Begriffen Catastrophe Excess of Loss[49] oder Excess of Loss per Event bekannt.

Die Definition des Begriffs Katastrophe[50], also die Festlegung der einzelnen Schadensereignis-

[47] In diesem Beispiel ist der übersteigende Schaden 1 Million.

[48] Vgl. Mack (1997), S. 326 bzw. Schwepcke (2001), S. 155.

[49] Abkürzung: Cat-XL.

[50] Eine Katastrophe bzw. ein Schadensereignis muss eine gemeinsame Ursache besitzen sowie das Bestehen eines räumlichen und zeitlichen Zusammenhangs zwischen den Schäden aufweisen. Der zeitliche Zusammenhang wird durch die konkrete Festlegung der Dauer eines Schadensereignisses in Stunden definiert, daher auch Stundenklauseln genannt. So zählen zu einem Schadensereignis im Allgemeinen bei Sturm alle Schäden, die innerhalb von 48 Stunden, bei Erdbeben innerhalb von 72 Stunden und bei Flutkatastrophen innerhalb von 168 Stunden entstanden sind.

se im Rahmen der Vertragsabschlüsse, spielt hierbei eine zentrale Rolle. Dies liegt begründet in der Tatsache, dass alle durch eine Katastrophe entstandenen Schäden zu ersetzen sind. Die vorher festgelegte Definition stellt also den Maßstab für spätere Versicherungszahlungen dar.

Generell ist die Priorität so hoch zu wählen, dass sie von einem Einzelschaden aus der Menge der Schäden nicht erreicht wird. Zweck hiervon ist, dass die Zahlungsverpflichtung des Rückversicherers tatsächlich erst bei Eintreten mehrerer Einzelschäden im Rahmen einer Schadensursache erfolgt. Da im Fall von Katastrophenschäden aufgrund der damit verbundenen geringeren Eintrittswahrscheinlichkeit seitens der Erstversicherer eine größere Risikobereitschaft besteht, ist die Priorität im Fall von Kumulschäden darüber hinaus höher als im Fall von Einzelschäden anzusiedeln.

Ebenso wie bei der Einzelschadenexzedenten-Rückversicherung wird die Haftung des Zessionärs pro Schadensereignis durch den Plafond beschränkt. Außerdem besitzt dieser das Mittel der Haftungsbeschränkung, wobei die Gesamthaftungssumme innerhalb des Vertragszeitraumes beschränkt ist[51].

Den Sachverhalt der Kumulschadenexzedenten-Rückversicherung mit einer beschränkten Gesamthaftung seitens des Zessionärs illustriert das folgende Beispiel.

Beispiel 1.3.6 *(Kumulschadenexzedenten-Rückversicherung mit Haftungsbeschränkung)*
Ein Erstversicherer möchte seine Verpflichtungen gegenüber seinen Kunden bei dem Schadensereignis Erdbeben versichern. Er schließt eine Kumulschadenexzedenten-Rückversicherung mit einer Priorität von 1 Million und einem Plafond von 30 Millionen Euro ab. Weiterhin wurde eine Haftungsbeschränkung für den Rückversicherer von 40 Millionen und eine Stundenklausel von 72 Stunden vereinbart.

Ein Erdbeben verursacht vier zerstörte Häuser mit einem Wert von je 200 000 Euro. Es ist ein Schaden von 800 000 Euro entstanden. Der Gesamtschaden liegt somit unterhalb der Priorität. Folglich haftet der Zedent allein für diesen Schaden. Fünf Tage später ereignet sich ein weiteres Beben, welches aufgrund der Stundenklausel als eigenes Schadensereignis zu betrachten ist. Bei diesem wurden 175 Häuser zerstört mit einem Gesamtschaden von 35 Millionen Euro. In diesem Fall übersteigt der Schaden sogar den Plafond. Somit haftet der Zessionär für die komplette Haftungsstrecke von 29 Millionen Euro und der Erstversicherer für den restlichen Schaden von 6 Millionen Euro (Priorität plus den Plafond übersteigenden Betrag). Nach weiteren vier Tagen verursacht das Nachbeben eine Zerstörung von weiteren 100 Häusern mit einem Gesamtschaden von 20 Millionen Euro. Der Zedent haftet in diesem Fall für die Priorität. Der übersteigende Betrag von 19 Millionen Euro müsste vom Zessionär übernommen werden. Der Rückversicherungsvertrag sah aber eine Haftungsbeschränkung von 40 Millionen vor. Von diesen sind schon 29 Millionen Euro vom vorangegangenen Beben aufgebraucht. Somit haftet der Zessionär mit 11 Millionen Euro. Der Zedent trägt dagegen die restlichen 8 Millionen Euro Schadensforderungen selbst.

Bei Verträgen mit Haftungsbeschränkung gibt es die Möglichkeit, die Wiederherstellung der

[51]Vgl. Dienst (1987), S. 117.

Originalhaftung des Zessionärs durch Zahlung einer Prämie vertraglich festzulegen. Diese Vertragsklausel wird Wiederauffüllung oder Reinstatement genannt. Die gezahlte Prämie heißt Wiederauffüllungsprämie.

Wenn in diesem Beispiel der Vertrag die Möglichkeit von Wiederauffüllung vorsieht und die Zahlung der Wiederauffüllungsprämie erfolgte, dann hätte der Rückversicherer den gesamten Betrag, der von der Priorität im dritten Erdbeben überstiegen wurde, zahlen müssen.

1.3.2.3 Jahresüberschaden-Rückversicherung (Stop Loss)

Bei der Jahresüberschaden-Rückversicherung werden alle Schäden innerhalb eines Jahres einer Branche des Zedenten rückversichert. Dabei haftet der Zessionär für den Schadensanteil am Jahresgesamtschaden, der von der Priorität überstiegen wurde. Somit ist der Jahresschaden des Zedenten begrenzt und gibt diesem Vertragstyp auch seinen Namen 'Stop Loss'[52].

Ziel des Stop Loss ist der Schutz gegen Schwankungen des Jahresgesamtschadens. Dabei ist es egal, ob der Gesamtjahresschaden durch viele kleine oder wenige hohe Einzelschäden entstanden ist[53]. Weitergehendes Ziel dieser Vertragsform ist vor allem die Bilanz des Erstversicherers vor extremen Schadenswirkungen zu schützen und somit diese stabil zu halten. Die häufigste Anwendung ist dabei in der Sturm- und Hagelversicherung zu verzeichnen, ansonsten ist diese Vertragsform selten vorzufinden.

Bei dem Excess of Loss werden Priorität und Plafond vertraglich in absoluten Werten in Euro oder Dollar angegeben. Grundlage der Rückversicherungsprämie ist der erwartete Schadensverlauf. Bei dem Stop Loss werden dagegen zwei prozentuale Werte vertraglich fixiert. Der erste Wert ist die Priorität in Prozent bezogen auf alle Prämien, die der Zedent in der betrachteten Versicherungsbranche einnimmt. Der zweite Wert ist die Haftungsstrecke, die sich aus dem Plafond minus der Priorität, bezogen auf die eingenommenen Versicherungsprämien des Erstversicherers, ergibt.

1.3.2.4 Höchstschaden-Rückversicherung

Neben den bereits erwähnten sowie weiteren aber meist nur wenig variierenden Rückversicherungsarten, lässt sich als wichtige nicht-proportionale Vertragsart noch die Höchstschaden-Rückversicherung nennen. Diese wurde von der 'Schweizer Rück' entwickelt.

Die Höchstschaden-Rückversicherung ist wie folgt definiert: "This sort of treaty stipulates that the reinsurer pays a certain number of the largest claims of one year (e.g. the three largest ones)."[54]. Dies bedeutet, der Rückversicherer verpflichtet sich, den größten Schaden beziehungsweise eine vorher vertraglich festgelegte Anzahl der größten Schäden eines Jahres zu übernehmen. Die Übernahme findet dafür im Prinzip zu 100 Prozent statt.

In der Praxis findet diese, auch unter der Bezeichnung COSIMA[55] oder HS-RV bekannte

[52]Vgl. Schmidt (1991), S. 299. Wiederum kann der Zessionär seine Haftung mit Hilfe des Plafonds beschränken.
[53]Vgl. Pfeiffer (1986), S. 61.
[54]Vgl. Straub (1988), S. 68.
[55]Couverture des Sinistres Majeurs.

Vertragsart jedoch wenig Anwendung.

1.4 Retrozession

Rückversicherungsverträge können auch zwischen zwei Rückversicherern angewendet werden. Dies wird als Retrozession bezeichnet[56]. Dabei versichert ein Zessionär einen Teil der von ihm übernommenen Schäden bei einem anderen Rückversicherer weiter[57]. Somit ist Retrozession, die "Rückversicherung von Rückversicherungen"[58].

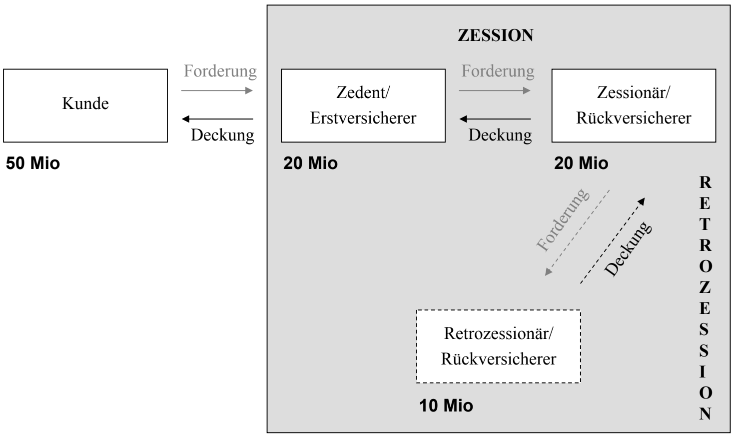


Abbildung 1.6: Zusammenhang zwischen Zedent und Zessionär.

Retrozession kann dabei in zwei Arten unterschieden werden, zum einen in die Weiterrückversicherung, auch Retrozession im eigentlichen Sinn, und zum anderen in die Retrozession im engeren Sinn[59].

Bei "der Weiterrückversicherung werden Teile der vom Rückversicherer übernommenen Haftungen grundsätzlich zu Orginalbedingungen und proportional an die Retrozessionäre[60] weitergeben"[61]. Es handelt sich somit um die Weitergabe von Risiken aus einem Rückversicherungsvertrag, der rückversichert wird. Dagegen wird bei der Retrozession im engeren Sinne das Rückversicherungsportfolio des Retrozedenten versichert. Bei beiden Arten übt der Re-

[56] Vgl. Schmidt (2002), S. 205.
[57] Vgl. Gerathewohl (1976), S. 52.
[58] Vgl. Mainardi (1925), S. 7.
[59] Vgl. Gerathewohl (1979), S. 674 f.
[60] Ein Retrozessionär ist ein Rückversicherer, der Teile des Risikos von einem anderen Rückversicherer übernimmt. Der Rückversicherer, der Teile seines Risikos abgibt, wird Retrozedent genannt. Der Retrozessionär wiederum kann gleichzeitig auch ein Retrozedent sein, wenn er Teile des übernommenen Risikos an einen weiteren Rückversicherer transferiert.
[61] Vgl. Gerathewohl (1979) , S. 674.

trozedent die passive[62] und der Retrozessionär die aktive[63] Retrozession aus[64].

Grundlegendes Ziel einer Retrozession ist dabei die Beschränkung und Streuung der Risiken des Retrozedenten. Die Abbildung 1.6 stellt die Aufteilung eines Schadens von 50 Millionen Euro zwischen einem Zedenten und mehreren Zessionären[65] exemplarisch dar.

1.5 Zusammenfassung und Überblick

Nach der Definition des Begriffes der Rückversicherung wurden sowohl deren Formen als auch Arten der Rückversicherung im Rahmen des Kapitels näher beleuchtet. Die Formen der Rückversicherung treffen dabei Aussagen über die Ausgestaltung von Verträgen, die Arten treffen Aussagen über die Methoden der Risikodeckung.

Als typische Formen ließen sich die fakultative, obligatorische und semiobligatorische Rückversicherung benennen. Fakultative Verträge besagen, dass die Risikoabgabe durch den Erstversicherer beziehungsweise die Risikoübernahme durch den Rückversicherer freiwillig geschieht. Obligatorische Verträge verpflichten zur Risikoabgabe beziehungsweise Risikoübernahme. Semiobligatorische Verträge deuten auf eine Vermischung von obligatorischer und fakultativer Form hin. Jeweils eine der Parteien stellt das fakultative, die andere das obligatorische Element des Vertrages dar.

Bei der Betrachtung der Methoden der Risikodeckung und damit der Versicherungsarten konnten zwei wesentliche Arten unterschieden werden: Die proportionale und die nicht-proportionale Rückversicherung. Diese unterscheidet sich darin, in welchem Verhältnis Schäden und Prämien zwischen Erst- und Rückversicherer aufgeteilt werden. Dabei findet bei der proportionalen Rückversicherung eine Aufteilung in gleichem und bereits festem Verhältnis, bei der nicht-proportionalen Rückversicherung in ungleichem Verhältnis statt.

Bei der proportionalen Rückversicherung lassen sich zwei Typen, die Quoten- und die Summenexzedenten-Rückversicherung, benennen. Als Mischformen aus beiden Arten sei nur am Rande die Quotenexzedenten-Rückversicherung erwähnt. Sie lässt sich weiter entsprechend ihrer Anwendungsreihenfolge in die Unterarten Summenexzendent mit Vorwegquote und Quote mit Vorwegexzedent unterscheiden.

Bei der nicht-proportionalen Rückversicherung findet im Vergleich zur proportionalen Rückversicherung eine reine Orientierung an der Höhe des Schadens statt. Die einzelnen Risiken und die damit verbundenen Prämien finden keine Beachtung.

Verschiedene Grenzen werden im Rahmen von nicht-proportionalen Verträgen definiert. Zu diesen gehört die Priorität, die die Höhe des Selbstbehaltes des Erstversicherers bezeichnet und der Plafond, die Deckungsobergrenze, bis zu der ein Rückversicherer einen Schaden über-

[62] Als passive Retrozession wird der Kauf einer Rückversicherung durch einen Zessionär bezeichnet.

[63] Als aktive Retrozession wird die Bereitstellung von Versicherungsschutz für einen Rückversicherer durch einen Zessionär bezeichnet.

[64] Vgl. Liebwein (2000), S. 292.

[65] Der zweite Zessionär, der den ersten Zessionär rückversichert, wird auch Retrozessionär genannt.

nimmt. Aus beiden bestimmt sich die Haftung, auch Layer genannt. Sie bezeichnet die Summe, die ein Rückversicherer maximal im Schadensfall zu zahlen hat.

Innerhalb der nicht-proportionalen Rückversicherung lassen sich folgende Arten unterscheiden: die Schadenexzedenten-Rückversicherung, welche sich in Excess of Loss per Risk, dass heißt Einzelschadenexzedenten-Rückversicherung und Excess of Loss per Event, dass heißt Kumulschadenexzentenden-Rückversicherung untergliedert, des Weiteren die Jahresüberschaden-Rückversicherung, dass heißt der Stop Loss Vertrag und als letztes die Höchstschaden-Rückversicherung.

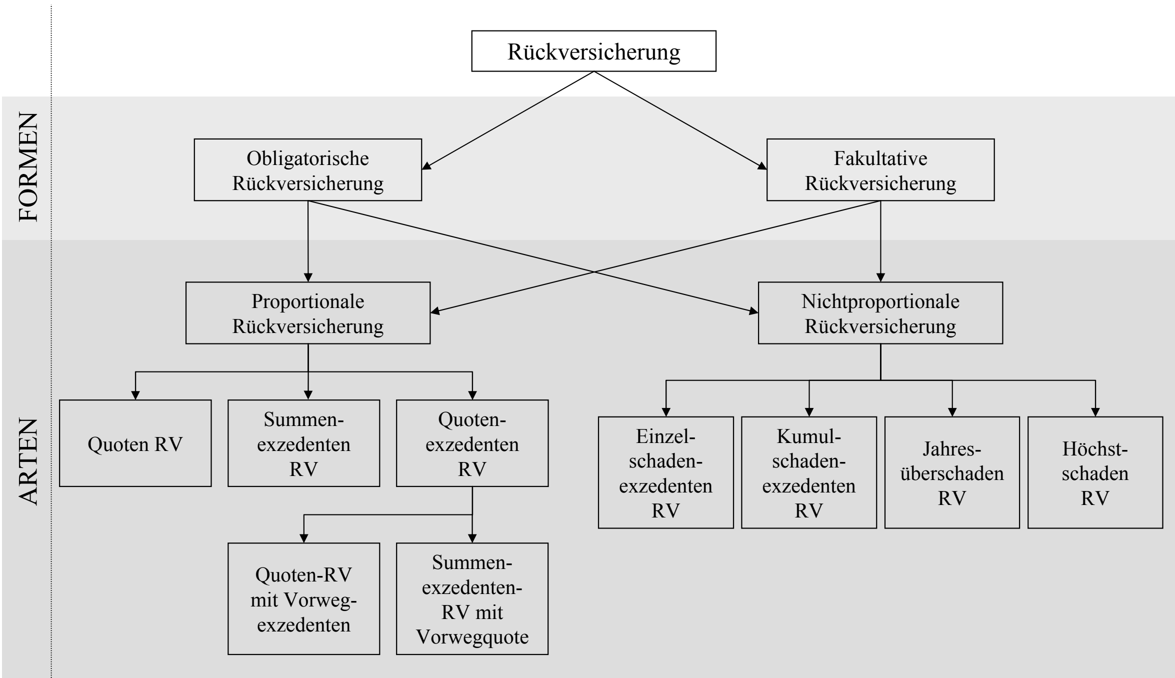


Abbildung 1.7: Übersicht über die Rückversicherungsvertragsarten.

Alle Arten besitzen eine ähnliche versicherungstechnische Wirkung. Der Unterschied ist eher in der Interpretation der Schadenshöhe zu sehen. Sie bezieht sich auf einzelne Schäden, kumulierte Schäden oder auf einen Gesamtschaden.

Ähnlichkeiten herrschen dabei vor allem seitens des Zwecks zwischen Summenexzendenten- und Schadenexzedenten-Rückversicherung. Dieser ist beim Erstversicherer besonders im letztendlichen Ausgleich der Schadenslast, dass heißt der Homogenisierung des Schadensverlaufs, über den gesamten Bestand zu sehen.

Wie auch proportionale Verträge können nicht-proportionale Verträge auf die Dauer von einem Jahr abgeschlossen werden. Bei höherer oder unbestimmter Dauer wird zusätzlich meist eine Kündigungsmöglichkeit am Ende des Deckungsjahres eingebaut.

Vor allem in der Inkonsistenz der Vertragsbeziehungen und in der zum Teil schwereren Lösungsfindung aufgrund abweichender Interessenlagen der Vertragspartner unterscheidet sich die nicht-proportionale von der proportionalen Rückversicherung.

Dies ist begründet in der Tatsache, dass nicht-proportionale Rückversicherungsverträge zwar einerseits für den Erstversicherer eine sehr gute Möglichkeit sind, die Netto-Schadenshöhe vor außergewöhnlichen und weit über dem normalen Maß liegenden Schadensursachen zu schützen, andererseits der Rückversicherer aber diese extremen Ausmaße zu tragen und sich damit einer starken Belastung auszusetzen hat.

Sowohl proportionale als auch nicht-proportionale Vertragsarten können in fakultativer oder obligatorischer Form eingegangen werden. Zahlreiche Sonderformen und Ergänzungen existieren, sollen aber aufgrund der geringeren Relevanz innerhalb der vorliegenden Thematik keine Beachtung finden. Ein Anspruch auf Vollständigkeit liegt nicht vor. Die behandelten Vertragsarten im Überblick stellt Abbildung 1.7 dar.

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit findet ausschließlich die nicht-proportionale Rückversicherung Anwendung. Zuvor gibt das folgende Kapitel einen Einblick in die Entscheidungstheorie.

Kapitel 2

Entscheidungstheorie

2.1 Einführung in die Grundlagen der Entscheidungstheorie

Das vorliegende Kapitel soll einen kurzen Abriss über die bedeutendsten Ansätze und Modelle der Entscheidungstheorie geben. Dies ist zweckdienlich, da im Rahmen des entwickelten Ansatzes rationales beziehungsweise intendiert rationales Entscheidungsverhalten von Erst- beziehungsweise Rückversicherern Grundlage der Untersuchung ist.

Die Entscheidungstheorie lässt sich dabei in folgende zwei Bereiche[1] unterteilen:

- präskriptive Entscheidungstheorie[2] und
- deskriptive Entscheidungstheorie.

"Im Mittelpunkt der präskriptiven Entscheidungstheorie steht die Entscheidungslogik; es wird nach Regeln zur Bewertung von Aktionsresultaten gesucht, die dem Postulat rationalen Verhaltens entsprechen. Die präskriptive Entscheidungstheorie ist somit im Wesentlichen eine Rationalitätsanalyse, sie kann als Erklärung des Rationalverhaltens aufgefasst werden."[3]. Zu diesem Zweck stellt sie Verfahren zur Fällung rationaler und praktikabler Entscheidungen bereit und geht der Frage nach, wie Entscheidungen unter gegebenen Bedingungen zu fällen sind.

Die deskriptive Entscheidungstheorie hingegen untersucht Entscheidungsverhalten in der Realität und ermittelt hierbei empirisch, wie Entscheidungen in der Wirklichkeit getroffen werden und aus welchem Grund diese in der vorgefundenen Weise zustande gekommen sind. Ziel dabei ist die Herleitung eines unbekannten Explanans, das heißt eines zu erklärenden Sachverhaltes, aus einem bekannten Explanandum, welches aus einer Menge von Aussagen besteht[4].

"Ziel der deskriptiven Entscheidungstheorie ist es, empirisch gehaltvolle Hypothesen über das Verhalten von Individium und (Personen-)Gruppen im Entscheidungsprozess zu formulieren,

[1] Vgl. Saliger (1998), S. 1.
[2] Die präskriptive Theorie wird auch als normative Entscheidungstheorie bezeichnet. Vgl. Laux (2003), S. 2 bzw. Bamberg, Trost (1996), S. 642 ff.
[3] Vgl. Bamberg, Coenenberg (2006), S. 3.
[4] Vgl. Rommelfanger, Eickemeier (2002), S. 3 bzw. Bamberg, Coenenberg (2006), S. 4 f.

mit deren Hilfe bei Kenntnis der jeweiligen Ausgangssituation Entscheidungen prognostiziert werden können"[5].

2.2 Grundmodell der Entscheidungstheorie

Hinsichtlich der verschiedenen Verwendungsmöglichkeiten lassen sich Modelle in der Betriebswirtschaftslehre in Beschreibungs-, Erklärungs- und Entscheidungsmodelle unterscheiden[6]. Die Erstellung eines Entscheidungsmodells ist dabei im Rahmen betriebswirtschaftlicher Untersuchungen von großem Interesse. Aufgrund der Tatsache, dass es sich im vorliegenden Fall um die Analyse von Entscheidungsverhalten handelt, soll der Bereich der Entscheidungsmodelle im Weiteren näher beleuchtet werden.

Ein Entscheidungsmodell besteht dabei grundlegend aus einem Entscheidungsfeld und dem Zielsystem. Das Entscheidungsfeld umfasst erstens den Aktionsraum, dass heißt die Menge der möglichen Handlungsalternativen, zweitens den Zustandsraum, dass heißt die Menge der möglichen Umweltzustände und drittens eine Ergebnisfunktion. Die Ergebnisfunktion ordnet jeder Kombination von Aktion und Zustand einen Wert zu[7].

Hinsichtlich des Zustandsraumes und hierbei insbesondere des Informationsstandes des Entscheidungsträgers über den wahren Umweltzustand lassen sich als Zustände dabei die Entscheidung unter Sicherheit und die Entscheidung unter Unsicherheit unterscheiden. Letztere lässt sich weiter in Entscheidungen unter Risiko und Entscheidungen unter Ungewissheit gliedern[8]. Diese Zustände sollen im Weiteren näher erläutert werden.

2.3 Entscheidung unter Sicherheit

Von einer Entscheidung unter Sicherheit spricht man, wenn sämtliche eintretenden Umweltsituationen bekannt sind. Das heißt, es liegt vollkommene Information über die Ergebnisse vor[9]. Da dies in der Wirklichkeit sehr selten der Fall ist, findet dieser Ansatz verstärkt bei der Formulierung stark schematisierter Modelle, meist deterministischer[10] Entscheidungsmodelle Anwendung.

2.4 Entscheidung unter Unsicherheit

Im Fall von Entscheidungen unter Unsicherheit ist von einer unvollkommenen Informationssituation auszugehen. Nur ein Teil, etwa die Umweltsituationen u_i, $i = 1, ..., N$ sind bekannt. Entscheidungen unter Unsicherheit lassen sich in Entscheidungen unter Risiko und in Entscheidungen unter Ungewissheit unterscheiden.

---

[5] Vgl. Laux (2003).
[6] Vgl. Jung (2006), S. 41.
[7] Vgl. Rommelfanger, Eickemeier (2002), S. 12 f.
[8] Vgl. Scholl (2001) , S. 43.
[9] Vgl. Jung (2006), S. 186.
[10] Deterministische Ansätze gehen von nur einem möglichen Zustand aus, dem ein eindeutiger Ergebniswert zugeordnet ist. Lediglich die Angabe der Präferenzvorstellungen des Entscheiders bzgl. des Ergebnisses wird benötigt. Vgl. Rommelfanger, Eickemeier (2002), S. 28.

2.4.1 Entscheidung unter Risiko

Charakteristisch für Entscheidungen unter Risiko ist, dass zu den möglichen Umweltsituationen u_i auch die Eintrittswahrscheinlichkeiten P_i bekannt sind. Es gilt $P_i \geq 0$ für alle i und $\sum_{i=1}^{N} P_i = 1$[11].

Es handelt sich hierbei um ein stochastisches Entscheidungsmodell, wobei die Eintrittswahrscheinlichkeiten meist aus historischen Daten geschätzt werden. Auch Erstversicherer kennen ihre möglichen Umweltzustände, die Schadenshöhen, die eintreten können und deren Eintrittswahrscheinlichkeiten, die sie aus historischen Schadensforderungen geschätzt haben[12].

Wenn eine Handlungsalternative immer zu dem besten Ergebnis unter allen Handlungsalternativen führt, ist die Bestimmung der optimalen Handlungsalternative unproblematisch. Meist ist so eine Situation aber nicht vorzufinden. Entscheidungsregeln wägen die Ergebnisse von Handlungsalternativen unter Verwendung ihrer Eintrittswahrscheinlichkeiten gegeneinander ab[13]. Diese Entscheidungsregeln können die Risikoeinstellung von Entscheidern abbilden.

2.4.1.1 Risikoeinstellungen und Präferenzfunktional

Entscheider können anhand ihrer Risikoeinstellung in drei Gruppen eingeteilt werden. Sie sind entweder risikoavers, risikoneutral oder riskofreudig[14].

Definition 2.4.1
Ein Entscheider ist risikoavers, wenn er jeder Aktion, die zu dem Ergebnis $Y \neq E(Y)$ führt, jede Aktion, die zu dem Ergebnis $X = E(Y) = E(X)$ führt, vorzieht[15].

Ein Entscheider ist risikofreudig, wenn er jeder Aktion, die zu dem Ergebnis $X = E(Y) = E(X)$ führt, jede Aktion, die zu dem Ergebnis $Y \neq E(Y)$ führt, vorzieht[16].

Ein Entscheider ist risikoneutral, wenn er zwischen jeder Aktion, die zu dem Ergebnis $Y \neq E(Y)$ führt und der Aktion, die zu dem Ergebnis $X = E(Y) = E(X)$ führt, indifferent ist[17].

Um Entscheidungsverhalten, wie zum Beispiel bei der Wahl von Versicherungsverträgen, zu erklären, ist es sinnvoll nicht nur die versicherungsstatistische Datenlage für die Bestimmung von Eintrittswahrscheinlichkeiten von Entscheidungen zu berücksichtigen, sondern auch die Risikoeinstellung der Entscheidungsträger und daraus resultierend deren subjektive Nutzenbewertung der möglichen Ergebnisse einzubeziehen. Der sich daraus ergebende Nutzenerwartungswert wie er von Bernoulli begründet und von Neumann und Morgenstern in Axiomen[18]

---

[11] Vgl. Jung (2006), S. 189.
[12] Vgl. Farny et al.(1988), S. 712. Es wird u. a. unterschieden zwischen der "Schätzung der Schadensverteilung aufgrund der im Portfolio beobachteten Schadenserfahrung" und "Schätzung der Schadensverteilung aufgrund der Schadenserfahrung anderer Portfolios".
[13] Vgl. Laux (2003), S. 145.
[14] Vgl. Eisenführ, Weber (1999), S. 225.
[15] Dass heißt, der Entscheider zieht in jeder Situation die sichere Aktion der unsicheren Aktion vor. Vgl. Wilhelm (2008).
[16] Dass heißt, der Entscheider zieht in jeder Situation die unsichere Aktion der sicheren Aktion vor.
[17] Dass heißt, der Entscheider kann sich zwischen der sicheren Aktion und der unsicheren Aktion nicht entscheiden.
[18] Vgl. Wiese (2002), S. 34 ff. bzw. die Originalquelle vgl. Neumann, Morgenstern (1947).

festgehalten wurde, ist heute als Bernoulli-Prinzip bekannt.

Seien X_1 und X_2 die Ergebnisse aus der Aktion 1 bzw. aus der Aktion 2. Dabei stellen X_1 und X_2 Zufallsvariablen dar. Dann besagt das Bernoulli-Prinzip: $1 \succeq 2$ genau dann, wenn $E(u(X_1)) \geq E(u(X_2))$[19], wobei E der Erwartungswert und u eine Nutzenfunktion[20] ist. Somit zieht der Entscheider die Aktion 1 immer der Aktion 2 vor, genau dann, wenn der erwartete Nutzen der Aktion 1 größer als der von Aktion 2 ist.

Bei Kenntnis der möglichen Aktionen lässt sich somit zu jeder Handlungsoption der Nutzenerwartungswert bestimmen. Da der erwartete Nutzen in Form einer reellen Zahl ausgedrückt wird, werden Handlungsoptionen somit vergleichbar und die Ermittlung optimaler Handlungsalternativen möglich. Es lässt sich ein Verhältnis der Nutzenerwartungen ermitteln.

Risikoeinstellungen sind Grundlage für die Bewertungsentscheidung von Handlungsalternativen $a \in A$. Dabei ist A der Aktionenraum. Die Bewertung einer Alternative a kann formal durch die Abbildung $\Phi : A \to \mathbb{R}$ mit $a \mapsto \Phi(a)$ dargestellt werden. Die Abbildung Φ wird dabei Präferenzfunktional genannt. Eine Alternative a ist besser als eine Alternative b, genau dann, wenn $\Phi(a) \geq \Phi(b)$. Ziel ist es, die optimale Alternative $a^* \in A$ durch die Maximierung des Präferenzfunktionals

$$\Phi(a^*) = \max_{a \in A} \Phi(a)$$

zu finden. Im Fall des Bernoulli-Prinzips ist $\Phi(a) = E(u(X_a))$[21].

Durch die Bewertung der Alternativen mittels eines Präferenzfunktionals wird eine Präferenzrelation $\succeq$ zwischen den Alternativen des Aktionenraumes induziert. Dabei können folgende Forderungen an das Bernoulli-Prinzip für eine Präferenzrelation abgeleitet werden[22]:

- **Ordinales Prinzip**[23]: Es gilt das ordinale Prinzip, wenn eine Präferenzrelation $\succeq$ zum einen transitiv und zum anderen vollständig ist.
  - Eine Präferenzrelation $\succeq$ heißt transitiv, wenn für je drei Zufallsvariablen X, Y, Z gilt: $X \succeq Y$ und $Y \succeq Z \Rightarrow X \succeq Z$[24].
  - Eine Präferenzrelation $\succeq$ heißt vollständig, wenn für je zwei Zufallsvariablen gilt: $X \succeq Y$ oder $Y \succeq X$[25].
- **Stetigkeitsaxiom**: Es seien x, y, z Ergebnisse mit der Beziehung $y \prec x \prec z$. Dann existiert ein $p \in (0, 1)$, so dass x gleichwertig ist zu $pz + (1 - p)y$. In Zeichen: $x \sim$

[19] Vgl. Bamberg, Coenenberg (2006), S. 85.
[20] Bzgl. der Anforderungen der Nutzenfunktion vgl. Bamberg , Coenenberg (2006), S. 85. Die Nutzenfunktion des Bernoulli-Prinzips ist auch unter dem Namen Utility-Funktion, Expected Utility Hypothesis, Bernoulli-Funktion, Bernoulli-Nutzen, von Neumann-Morgenstern-Nutzen bzw. Risikopräferenzfunktion bekannt.
[21] Vgl. Bamberg, Coenenberg (2006), S.86.
[22] Vgl. Bamberg, Coenenberg (2006), S. 100 f.
[23] Gilt für eine Relation das ordinale Prinzip, wird diese auch als vollständige Präordnung oder als Quasiordnung bezeichnet.
[24] Die Eigenschaft der Transitivität gewährleistet die Vergleichbarkeit zwischen einzelnen Präferenzrelationen. Wenn X der Zufallsvariablen Y und Y der Zufallsvariable Z vorgezogen wird, dann wird auch X der Zufallsvariable Z vorgezogen.
[25] Die Eigenschaft der Vollständigkeit gewährleistet somit die Vergleichbarkeit von je zwei Zufallsvariablen.

$pz + (1-p)y$[26].

- **Substitutionsaxiom**: Sei Z eine Zufallsvariable und $p \in (0,1)$ beliebig, dann gilt $X \succeq Y$, genau dann, wenn $XpZ \succeq YpZ$[27].

2.4.1.2 Entscheidungsregeln

Neben dem Bernoulli-Prinzip existieren zahlreiche weitere Entscheidungsregeln. Auf einige der bedeutendsten soll in diesem Abschnitt näher eingegangen werden.

Bayes-Kriterium

Eine im Vergleich zum Bernoulli-Prinzip historisch weiter zurückliegende Entscheidungsregel ist das Bayes-Kriterium. Grundlage des Bayes-Kriteriums ist der Erwartungswert einer Zufallsvariable X. Aus diesem Grund wird das Bayes-Kriterium auch Erwartungswert- beziehungsweise μ-Kriterium genannt[28]. Das Kriterium benutzt das Präferenzfunktional

$$\Phi_B(X) := E(X).$$

Dass heißt Grundlage des Bayes-Kriteriums ist allein die erwartete Ausprägung von X. Dieser Ansatz wird von risikoneutralen Entscheidungsträgern verwendet[29].

CVaR-Prinzip

Grundlage des CVaR-Prinzips[30] ist der Conditional Value at Risk[31]. Dieser berechnet den unteren bedingten Erwartungswert der $\alpha \cdot 100$ % schlechtesten Ausprägungen von X. Es gilt

$$CVaR_\alpha(X) = E(X|X \leq x_\alpha) = \frac{1}{\alpha}\int_{-\infty}^{x_\alpha} x \; dF_X(x)$$[32]

[26] Das Stetigkeitsaxiom besagt, dass ein p existiert, so dass ein Entscheider zwischen dem sicheren Ereignis x und einer Lotterie mit den Ergebnissen y und z indifferent ist. Das Stetigkeitsaxiom ist in der Realität meist erfüllt, es können jedoch Situationen konstruiert werden, in denen es verletzt ist. Vgl. dazu Marschak (1950).

[27] Das Substitutionsaxiom wird auch als Unabhängigkeitsaxiom bezeichnet. Vgl. Köster (2006), S. 48.

[28] Das Bayes-Kriterium ist benannt nach dem englischen Mathematiker Thomas Bayes (1702 - 1761). Die Bezeichnung Bayes- bzw. Erwartungswertkriterium wird verwendet, wenn die Benutzung des Erwartungswertes unterstrichen werden soll. Der Begriff μ-Kriterium findet Anwendung, wenn man das Kriterium im Vergleich zu anderen verteilungsparameterabhängigen Entscheidungskriterien betrachtet. Vgl. Bamberg, Coenenberg (2006), S. 103.

[29] Vgl. Klein, Scholl (2004), S. 386 bzw. Bamberg, Coenenberg (2006), S. 103.

[30] Der Begriff Entscheidungsprinzip wird verwendet, wenn die Entscheidungsregel individuell wählbare Parameter enthält, diese aber noch nicht festgelegt sind. Erst nach Festlegung der Parameter spricht man von einer Entscheidungsregel. Das Bayes-Kriterium hat keine frei wählbaren Parameter, ist also eine Entscheidungsregel. Der Begriff ‘Kriterium’ ist der Oberbegriff für Entscheidungsregeln und -prinzipien. Vgl. Laux (2003), S.28.

[31] Der Conditional Value at Risk ist auch als Expected Shortfall, Mean Excess oder Tail Conditional Expectation bekannt.

[32] Eine alternative Darstellung ist $CVaR_\alpha(X) = E(X|X \leq -VaR_\alpha(X))$. Dabei ist $VaR_\alpha(X)$ der Value at Risk. Sei F_X^{-1} die inverse Verteilungsfunktion von X, dann gilt $VaR_\alpha(X) = -x_\alpha = -F_X^{-1}(\alpha)$. Der VaR selbst kann auch als Entscheidungsprinzip genutzt werden, bietet jedoch in Bezug auf die Risikomessung einige Nachteile. Vgl. diesbzgl. Hanisch (2006), S. 24 ff. Vgl. in Bezug auf allgemeine Schadensverteilungen Rockafellar, Uryasev (2002).

mit $\alpha \in (0,1)$. x_α sei das α-Quantil von X[33]. Das Präferenzfunktional des CVaR-Prinzips lautet somit

$$\Phi_\alpha(X) := CVaR_\alpha(X)$$

und ist für risikoaverse Entscheider geeignet[34]. Der Conditional Value at Risk nähert sich für $\alpha \to 1$ dem Erwartungswert und somit dem Bayes-Kriterium an. Für $\alpha \to 0$ dagegen werden immer größere Bereiche der Verteilung von X vernachlässigt. Somit wird ein Entscheider mit geringer Risikoaversion ein α von fast eins und ein Entscheider mit hoher Risikoaversion ein α von fast null präferieren.

Der CVaR betrachtet nicht alle Teile einer Verteilung. Es ist daher sinnvoll, nicht nur ein Risikomaß wie den CVaR, sondern auch ein Wertmaß wie zum Beispiel den Erwartungswert in die Betrachtung eines Entscheiders einzubeziehen. Entscheidungskriterien, die sich aus mehreren Entscheidungsprinzipien bzw. -regeln zusammensetzen, nennt man hybride Entscheidungsprinzipien bzw. -regeln.

Hybride Entscheidungsprinzipien

Das historisch gesehen älteste hybride Entscheidungsmodell ist die Kombination aus dem Erwartungswert und der Varianz, das so genannte μ-σ-Prinzip:

$$\Phi_\varepsilon(X) := E(X) - \frac{\varepsilon}{2} Var(X)^{35}$$

mit dem Risikoparameter $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Dieser ist individuell festzulegen und korrigiert die erwartete Ausprägung der Zufallsgröße X um das mit der Größe X verbundene Risiko[36]. Dabei bildet das μ-σ-Prinzip für $\varepsilon > 0$ einen risikofreudigen, für $\varepsilon < 0$ einen risikoaversen und für $\varepsilon = 0$ einen risikoneutralen Entscheider ab. In diesem Fall ist das Entscheidungsprinzip identisch mit dem Bayes-Kriterium. Da die Varianz die Anforderungen eines kohärenten Risikomaßes[37] im Sinne der Risikomessung[38] nicht erfüllt, wurden hybride Präferenzfunktionale auf der Grundlage des Erwartungswertes[39] und des CVaR[40] entwickelt.

Im Folgenden werden vier hybride Entscheidungsprinzipien auf der Grundlage des Erwartungswertes und des CVaR vorgestellt. Das erste Prinzip stellt eine Analogie zum μ-σ-Prinzip

[33] Im Folgenden sei das α-Quantil von X eindeutig bestimmt.

[34] Vgl. Jammernegg, Kischka (2005), S. 215 f.

[35] Vgl. Bamberg, Coenenberg (2006), S. 108.

[36] Vgl. Müller, Stoyan (2002), S. 274.

[37] Vgl. Artner et al. (1999), S. 209 f. bzw. Dölker (2006), S. 100 ff.

[38] Man unterscheidet bei der Verwendung von Präferenzfunktionalen in den Bereich Präferenzmessung und Risikomessung. Bei der Präferenzmessung steht die Optimierung des Präferenzfunktionals zur Bestimmung einer optimalen Handlungsalternative im Vordergrund. Das Präferenzfunktional wird also als Entscheidungsprinzip verwendet. In der Risikomessung dagegen steht das Präferenzfunktional zur Bestimmung des zu hinterlegenden Eigenkapitals im Sinne von Basel II und Solvency II im Vordergrund. Vgl. bzgl. Basel II BaFin (2008a), bzgl. Solvency II BaFin (2008b).

[39] Der negative Erwartungswert ist ein kohärentes Risikomaß. Vgl. Hanisch (2006), S. 77 f.

[40] Der negative CVaR ist ein kohärentes Risikomaß. Vgl. Nguyen (2008), S. 210. bzw. Hanisch (2006), S. 79 ff. Bei Hanisch ist der CVaR mit anderem Vorzeichen definiert, somit ist bei ihm der CVaR ein kohärentes Risikomaß.

dar. Bei diesem wird der CVaR durch einen Risikoparameter ε beeinflusst. Im Folgenden wird dieses Prinzip als μ-$CVaR$-Prinzip (1) bezeichnet und besitzt das Präferenzfunktional

$$\Phi_{\alpha,\varepsilon}(X) := E(X) + \varepsilon CVaR_{\alpha}(X)$$

mit $\alpha \in (0,1)$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Dieses Präferenzfunktional spiegelt somit für $\varepsilon > 0$ einen risikoaversen, für $\varepsilon < 0$ einen risikofreudigen und für $\varepsilon = 0$ einen risikoneutralen Entscheider wider[41]. Im letzten Fall ist das μ-$CVaR$-Prinzip (1) mit dem Bayes-Kriterium identisch.

Das zweite hybride Entscheidungsprinzip auf der Basis des CVaR ist aufgrund der Tatsache, dass eine Konvexkombination von kohärenten Risikomaßen wieder ein kohärentes Risikomaß darstellt[42], für die Risikomessung entwickelt worden. Es wird im Folgenden μ-$CVaR$-Prinzip (2) genannt. Das zugehörige Präferenzfunktional lautet

$$\Phi_{\alpha,\kappa}(X) := (1-\kappa)E(X) + \kappa CVaR_{\alpha}(X)$$

mit $\alpha \in (0,1)$ und $\kappa \in [0,1]$. Das negative Präferenzfunktional ist dabei ein kohärentes Risikomaß[43] und ist aufgrund der Beschränkung von κ auf das Einheitsintervall nur für risikoaverse und neutrale Entscheider geeignet. Es entspricht dem Bayes-Kriterium im Fall $\kappa = 0$ und dem CVaR-Prinzip für $\kappa = 1$.

Um auch Risikofreude abbilden zu können, wurde das μ-$CVaR$-Prinzip (2) verallgemeinert. Grundlage des verallgemeinerten Entscheidungsprinzips ist eine Konvexkombination des oberen und unteren bedingten Erwartungswertes. Dieses verallgemeinerte Prinzip wird im Folgenden μ-$CVaR$-Prinzip (3) genannt. Das zugehörige Präferenzfunktional lautet

$$\Phi_{\alpha,\lambda}(X) := \lambda E(X|X \leq x_{\alpha}) + (1-\lambda)E(X|X \geq x_{\alpha})^{44} \tag{2.1}$$

mit x_{α} dem α-Quantil, $\alpha \in (0,1)$ und $\lambda \in [0,1]$. Durch geeignete Umformung werden die Wert- und Risikokomponente[45] des Präferenzfunktionals sichtbar und führen zur Gestalt des μ-$CVaR$-Prinzips (3)

$$\Phi_{\alpha,\lambda}(X) = \frac{1-\lambda}{1-\alpha}E(X) + \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}E(X|X \leq x_{\alpha}). \tag{2.2}$$

Ebenso ist eine Darstellung dieses Prinzips mit dem oberen bedingten Erwartungswert möglich. Diese lautet

$$\Phi_{\alpha,\lambda}(X) = \frac{\lambda}{\alpha}E(X) + \left(1-\frac{\lambda}{\alpha}\right)E(X|X \geq x_{\alpha})^{46}. \tag{2.3}$$

Aus der Formel (2.1) sieht man deutlich, dass für $\lambda > \alpha$ der untere bedingte Erwartungswert übergewichtet und der obere bedingte Erwartungswert untergewichtet wird. Somit erhalten die kleinen Ausprägungen von X einen höheren Einfluss (Risikoaversion). Dagegen besitzen

[41] Vgl. Jammernegg, Kischka (2005), S. 2 bzw. Kischka (2005), S. 147 ff.
[42] Vgl. Acerbi (2002), S. 1507 bzw. Fischer (2003).
[43] Vgl. Hanisch (2006), S. 130.
[44] Vgl. Jammernegg, Kischka (2005), S. 6 f.
[45] Der Erwartungswert stellt dabei die Wert- und der CVaR die Risikokomponente dar.
[46] Die entsprechenden Umformungen befinden sich im Anhang A S. 166.

für $\lambda < \alpha$ die besten Ausprägungen von X eine erhöhte Relevanz und stellen somit Risikofreude dar. Aus den Formeln (2.2) und (2.3) ist zusehen, dass für $\lambda = \alpha$ beide Darstellungen des Präferenzfunktionals auf den Erwartungswert zusammenfallen und somit Risikoneutralität ausdrücken. Als Spezialfall ist das CVaR-Prinzip für $\lambda = 1$ (ersichtlich aus Formel (2.2)) im μ-$CVaR$-Prinzip (3) enthalten[47].

Das vierte Prinzip auf Basis des CVaR stellt eine Analogie zum μ-$CVaR$-Prinzip (3) dar und wird im Folgenden mit μ-$CVaR$-Prinzip (4)bezeichnet. Grundlage diesen Prinzips ist eine entgegengesetzte Gewichtung von oberem und unterem bedingten Erwartungswert. Es lautet

$$\Phi_{\beta,\delta}(X) := (1-\delta)E(X|X \leq x_{1-\beta}) + \delta E(X|X \geq x_{1-\beta}). \tag{2.4}$$

Dabei ist $x_{1-\beta}$ das $(1-\beta)$-Quantil der Zufallsgröße X, $\beta \in (0,1)$ und $\delta \in [0,1]$. Analog zu dem μ-$CVaR$-Prinzip (3) sind folgende äquivalente Darstellungen dieses Prinzips möglich

$$\Phi_{\beta,\delta}(X) = \frac{1-\delta}{1-\beta}E(X) + \frac{\delta-\beta}{1-\beta}E(X|X \geq x_{1-\beta}) \tag{2.5}$$

bzw.

$$\Phi_{\beta,\delta}(X) = \frac{\delta}{\beta}E(X) + \left(1 - \frac{\delta}{\beta}\right) E(X|X \leq x_{1-\beta})^{48}. \tag{2.6}$$

Für $\delta < \beta$ (ersichtlich aus Darstellung (2.4)) wird der untere bedingte Erwartungswert übergewichtet und der obere bedingte Erwartungswert untergewichtet und spiegelt somit Risikoaversion wider. Für $\delta > \beta$ dagegen gewichtet das Präferenzfunktional den oberen bedingten Erwartungswert über und gleichzeitig den unteren bedingten Erwartungswert unter. Dies stellt Risikofreude dar. Im Fall identischer Risikoparameter fällt das Präferenzfunktional auf das Bayes-Kriterium zusammen (ersichtlich aus Darstellung (2.5) und (2.6))[49]. Das CVaR-Prinzip ist ebenfalls als Spezialfall im Präferenzfunktional $\Phi_{\beta,\delta}(X)$ für $\delta = 0$ und $\alpha = 1-\beta$ (ersichtlich aus Darstellung (2.6)) enthalten.

Abschließend sei erwähnt, dass die beiden letztgenannten Präferenzfunktionale für die Risikoeinstellungen Risikoaversion und -neutralität, kohärente Risikomaße[50] für die Risikomessung darstellen. Genauer gesagt, sind die negativen Präferenzfunktionale kohärente Risikomaße. Dabei ist

$$-\Phi_{\alpha,\lambda}(X) = \frac{1-\lambda}{1-\alpha}(-E(X)) + \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}(-E(X|X \leq x_\alpha))^{51}$$

[47] Im Anhang A S. 166 befindet sich der formale Beweis zur Risikoeinstellung des Präferenzfunktionals $\Phi_{\alpha,\lambda}(X)$.

[48] Die entsprechenden Umformungen befinden sich im Anhang A S. 168.

[49] Im Anhang A S. 169 befindet sich der formale Beweis zur Risikoeinstellung des Präferenzfunktionals $\Phi_{\beta,\delta}(X)$.

[50] Vgl. zu kohärenten Risikomaßen Artzner et al. (1997), S. 69 f. bzw. (1999) S. 203 f. sowie Albrecht (2003), S.11 ff. Im Allgemeinen bezieht sich die Thematik der kohärenten Risikomaße auf eine Gewinnvariable. Bzgl. kohärenter Risikomaße unter Verwendung von Verlustvariablen vgl. Dölker (2006), S. 100 ff., Panjer (2001), S. 2 f. sowie Koryciorz (2004), S. 41 ff. Bzgl. Kritik an den kohärenten Risikomaßen vgl. Goovaerts et al. (2003), S. 44 ff. bzw. Barbosa, Ferreira (2004).

für $\alpha \leq \lambda$ und

$$-\Phi_{\beta,\delta}(X) = \frac{\delta}{\beta}(-E(X)) + \left(1 - \frac{\delta}{\beta}\right)(-E(X|X \leq x_{1-\beta}))^{52}$$

für $\beta \geq \delta$ eine Konvexkombination aus kohärenten Risikomaßen und stellt somit wieder ein kohärentes Risikomaß dar[53].

2.4.2 Entscheidung unter Ungewissheit

Im Vergleich zu Entscheidungen unter Risiko lassen sich Entscheidungen unter Ungewissheit wie folgt charakterisieren: Die möglichen Umweltzustände u_i, $i = 1, ..., N$, die eintreten können, sind bekannt, deren Eintrittswahrscheinlickeiten P_i jedoch nicht. Für die unbekannten Wahrscheinlichkeiten gilt

1. $P_i > 0$, d.h. es werden nur mögliche Umweltzustände berücksichtigt und
2. $\sum_{i=1}^{N} P_i = 1$, d.h. es werden alle Umweltzustände berücksichtigt[54].

Eine anschauliche Darstellung für eine endliche Anzahl von Handlungsalternativen a_j und von Umweltzuständen u_i sowie der daraus resultierenden Ergebnisse e_{ji} mit $i = 1, \ldots, N$ und $j = 1, \ldots, M$ findet meist in Form einer Entscheidungsmatrix statt. Die daraus resultierende Entscheidungsmatrix[55] illustriert Tabelle 2.1.

	$u_1 \cdots u_N$
a_1	$e_{11} \cdots e_{1N}$
$\vdots$	$\vdots \quad\quad \vdots$
a_M	$e_{M1} \cdots e_{MN}$

Tabelle 2.1: Entscheidungsmatrix bei Ungewissheit.

Aufgrund der Unkenntnis der Eintrittswahrscheinlichkeiten der Umweltzustände können die Entscheidungsprinzipien aus dem Abschnitt "Entscheidung unter Risiko“ nicht angewendet werden. Einen Lösungsansatz für die Situation unter Ungewissheit stellen unter anderem die Entscheidungsregeln[56] Maximin, Maximax, Hurwicz und Minimax-Regret dar. Auf diese wird im Folgenden näher eingegangen.

Maximin-Regel

[51] Folgt aus Formel (2.2).
[52] Folgt aus Formel (2.6).
[53] Der negative Erwartungswert und der negative untere bedingte Erwartungswert sind kohärente Risikomaße. Vgl. dazu Hanisch (2006), S. 77 ff. Bzgl. der Konvexkombination von kohärenten Risikomaßen vgl. S. 79.
[54] Vgl. u. a. Stelling (2005), S. 324 bzw. Bamberg, Coenenberg (2006), S. 19.
[55] Vgl. Klein, Scholl (2004), S. 393, Sturm (2006), S. 16 sowie Zimmermann (2005), S. 15 f.
[56] Vgl. bzgl. Entscheidungsregeln für Entscheidungen unter Ungewissheit Schulenburg (2005), S. 240 ff., Bradtke (2003), S. 74 ff. sowie Bamberg, Coenenberg (2006), S. 130 ff.

Die Maximin-Regel[57] betrachtet jeweils das ungünstigste Ergebnis für jede Aktion über alle N Umweltzustände. Anschließend werden die ungünstigen Ereignisse über die Handlungsalternativen (Aktionen) maximiert. Es gilt formal

$$\max_j \Phi^{Mm}(a_j) := \max_j \min_i e_{ji}.$$

Somit gilt diejenige Entscheidung als optimal, bei der die ungünstigsten Folgen noch am günstigsten ausfallen. Die Orientierung dieser Regel an den schlechtesten Umweltentwicklungen spiegelt damit einen extrem risikoscheuen Entscheider wider[58]. Dieser Ansatz wird vor allem in der Spieltheorie beziehungsweise der statistischen Entscheidungstheorie in Fällen verwendet, in denen rational handelnde Gegenspieler angenommen werden. Wird als Grundlage der Betrachtung eine Schadens- beziehungsweise Verlustmatrix angesetzt, findet der umgekehrte Ansatz, die Minimax-Regel ihre Anwendung. Ziel dieser Regel ist die Minimierung des maximales Verlustes beziehungsweise Schadens[59].

Maximax-Regel

Im Gegensatz zur Maximin-Regel stellt die Maximax-Regel[60] einen optimistischen Ansatz dar. Es wird jeweils das günstigste Ereignis über alle Umweltsituationen von allen Handlungsalternativen a_j bestimmt. Anschließend werden die günstigen Ereignisse über die Handlungsalternativen a_j maximiert. Es gilt

$$\max_j \Phi^{MM}(a_j) := \max_j \max_i e_{ji}.$$

Bei Verwendung einer Schadensmatrix findet wiederum die analoge Minimin-Regel Anwendung[61].

Hurwicz-Regel

Die Hurwicz-Regel[62] erlaubt Kompromisse zwischen der pessimistischen Maximin-Regel und der optimistischen Maximax-Regel. De facto ist die Hurwicz-Regel eine Konvexkombination aus den zwei vorangegangenen Entscheidungsregeln. Es gilt

$$\max_j \Phi^{H}(a_j) := \Pi \max_j \max_i e_{ji} + (1 - \Pi) \max_j \max_i e_{ji}$$

mit Optimismusparameter $\Pi \in [0, 1]$. Dieser Optimissmusparameter bringt die persönliche und subjektive Einstellung eines Entscheidungsträgers zum Ausdruck und ist individuell festzulegen. Je größer der Optimismusparameter, desto stärker wird das günstigste Handlungsergebnis präferiert. Ist der Optimismusparameter gleich eins, so ist die Hurwicz-Regel gleich der

[57] Die Maximin-Regel wird auch Wald-Regel genannt, benannt nach dem deutschsprachigen Mathematiker Abraham Wald (1902 - 1950). In der Spieltheorie ist die Maximin-Regel auch als Sattelpunktkriterium bekannt. Vgl. Zimmermann, Stache (2001), S. 277.

[58] Vgl. Zimmermann, Stache (2001), S. 277 bzw. Rosenkranz, Missler-Behr (2005), S. 80 f.

[59] Vgl. Bamberg, Coenenberg (2006), S. 131.

[60] Vgl. Rosenkranz, Missler-Behr (2005), S. 80 bzw. Bamberg, Coenenberg (2006), S. 131.

[61] Vgl. Bamberg, Coenenberg (2006), S. 131.

[62] Vgl. Rosenkranz, Missler-Behr (2005), S. 81, Bamberg, Coenenberg (2006), S. 131 f. sowie Borch (1969), S. 132.

Maximax-Regel. Für einen Optimismusparameter von null dagegen fällt die Hurwicz-Regel auf die Maximin-Regel zusammen. Somit wägt die Hurwicz-Regel die günstigste und ungünstigste Konsequenz gegeneinander ab. Voraussetzung ist eine kardinale Nutzenmessung[63]. Kritisch ist jedoch, dass sie nur von den jeweils extremsten Konsequenzen ausgeht und diese gleichzeitig als gleichwertig betrachtet.

Minimax-Regret-Regel[64]

Im Gegensatz zu den zuvor genannten Regeln beurteilt die Minimax-Regret-Regel nicht die Alternativen auf der Grundlage der Ergebnisse, sondern basiert auf Werten des Bedauerns. Dabei wird diejenige Alternative gewählt, welche das maximale Bedauern minimiert. Es gilt

$$\min_j \Phi^{mMR}(a_j) := \min_j \max_i r_{ji}$$

mit $r_{ji} = \max_j e_{ji} - e_{ji}$, wobei $\max_i r_{ji}$ den größten Regret, also das größte Bedauern, darstellt[65].

Weitere Entscheidungsregeln unter Ungewissheit sind u. a. die Laplace- und die Krelle-Regel. Da beide Regeln in dieser Arbeit keine Anwendung finden, wird auf die Vorstellung dieser Regeln verzichtet[66].

Im Folgenden wird auf die Erwartungsnutzen- und anschliessend auf die duale Nutzentheorie eingegangen, um die Konsistenz bzgl. ausgewählter Entscheidungsprinzipien zu zeigen[67].

2.5 Konsistenzbetrachtungen zur Erwartungsnutzentheorie

Im Folgenden soll die Konsistenz bzw. die Inkonsistenz von Entscheidungsprinzipien bzgl. der Bernoulli-Erwartungsnutzentheorie behandelt werden. “Zentrales Element der Erwartungsnutzentheorie ist eine Nutzenfunktion u, über deren Erwartungswert Präferenzen abgebildet werden können”[68]. Diese Vorgehensweise wird auch Bernoulli-Prinzip genannt und fordert eine vollständige und transitive Präferenzrelation, die das Stetigkeits- und Substitutionsaxiom erfüllt[69].

Die Axiomatik für die Erwartungsnutzentheorie ist in der Literatur nicht einheitlich. Vielmehr findet man verschiedene Axiomensysteme, welche aber alle die Erwartungsnutzentheorie implizieren. So führt Hanisch[70] folgendes Axiomensystem für die Erwartungsnutzentheorie an:

[63] Vgl. Bamberg, Coenenberg (2006), S. 132.
[64] Die Minimax-Regret-Regel wird auch Savage-Niehans-Regel bzw. Prinzip des kleinsten Bedauerns genannt. Vgl. Bamberg, Coenenberg (2006), S. 134.
[65] Vgl. Scholl (2001), S. 55.
[66] Vgl. bzgl. Laplace- und Krelle-Regel Bamberg, Coenenberg (2006), S. 133 ff.
[67] Einen kleinen Überblick über ausgewählte Nutzentheorien sowie deren Literaturverweise bietet Hanisch (2006), S. 149. Einen ausführlichen Überblick findet man bei Weber, Camerer (1987) bzw. Kischka, Puppe (1992).
[68] Vgl. Kottke (2005), S. 8.
[69] Vgl. Abschnitt 2.4.1.1 bzw. Kottke (2005), S. 9.
[70] Vgl. Hanisch (2006), S. 134 ff.

- Neutralitätsaxiom: Wenn $F_X = F_Y$ gilt, dann folgt $X \sim Y$[71].
- Ordinales Prinzip: Eine Präferenzordnung $\succeq$ existiert.
- Stetigkeitsaxiom: Die Präferenzordnung $\succeq$ ist stetig.
- Monotonieaxiom: Wenn $F_X(x) \leq F_Y(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, dann folgt $F_X(x) \succeq F_Y(x)$.
- Unabhängigkeitsaxiom: Wenn $F_X(x) \succeq F_Y(x)$ gilt, dann folgt für alle $\alpha \in [0,1]$: $\alpha F_X + (1-\alpha)F_Z \succeq \alpha F_Y + (1-\alpha)F_Z$.

Die Konsistenz zwischen einer Entscheidungsregel und einer Präferenztheorie mit zugehöriger Präferenzordnung $\succeq$ ist dabei wie folgt definiert:

Definition 2.5.1
Seien X und Y Zufallsvariablen. Eine Präferenzordnung $\succeq$ und eine Entscheidungsregel Φ heißen konsistent genau dann, wenn gilt

$$X \succeq Y \quad \Leftrightarrow \quad \Phi(X) \geq \Phi(Y)^{72}.$$

Hanisch hat die Konsistenz des Erwartungswertes und der Varianz bzgl. der Erwartungsnutzentheorie gezeigt. Fortführend beweist er in seiner Arbeit die Inkonsistenz des CVaR und die Inkonsistenz des hybriden Präferenzfunktionals $\Phi^H_{\alpha,\lambda}(X) = (1-\lambda)E(X) + \lambda E(X|X \leq x_\alpha)$ zur Erwartungsnutzentheorie[73]. Dies formuliert der folgende Satz.

Satz 2.5.1
Sei $\lambda \in (0,1]$[74] und $\alpha \in (0,1)$ beliebig, dann ist die Entscheidungsregel $\Phi^H_{\alpha,\lambda}(X)$ nicht mit der Erwartungsnutzentheorie konsistent.

Satz 2.5.2
Sei $\lambda \in [0,1]$ und $\alpha \in [0,1)$ beliebig, dann ist die Entscheidungsregel $\Phi_{\alpha,\lambda}(X)$ im Allgemeinen nicht mit der Erwartungsnutzentheorie konsistent.
Sei $\delta \in [0,1]$ und $\beta \in [0,1)$ beliebig, dann ist die Entscheidungsregel $\Phi_{\beta,\delta}(X)$ im Allgemeinen nicht mit der Erwartungsnutzentheorie konsistent.

Beweis:
1. Behauptung:
Für $\lambda > \alpha$ sind die Gewichte des Präferenzfunktionals $\Phi_{\alpha,\lambda}(X)$ zwischen null und eins. Damit stellt dieses Präferenzfunktional ebenso eine Konvexkombination aus Erwartungswert und unterem bedingten Erwartungswert wie das Präferenzfunktional $\Phi^H_{\alpha,\lambda}(X)$ dar. Für dieses hat Hanisch gezeigt, dass es im Allgemeinen nicht konsistent zur Erwartungsnutzentheorie ist.

2. Behauptung:

---

[71] Das Neutralitätsaxiom besagt, wenn zwei Alternativen die gleiche Verteilung besitzen, dann sind die Alternativen gleichwertig.
[72] Vgl. Sarin, Weber (1993), S. 142.
[73] Vgl. dazu Hanisch (2006), S. 140 ff.
[74] Der Fall $\lambda = 0$ muss hier ausgeschlossen werden, da in diesem Fall das Präferenzfunktional $\Phi^H_{\alpha,\lambda}(X)$ gleich dem Erwartungswert und dieser konsistent zur Erwartungsnutzentheorie ist.

Zum Beweis benötigt man die alternative Darstellung (2.6) für das Präferenzfunktional $\Phi_{\beta,\delta}(X)$, um die Äquivalenz zum Präferenzfunktional $\Phi^H_{\alpha,\lambda}(X)$ herstellen zu können. Es gilt

$$\Phi_{\beta,\delta}(X) \quad = \quad \frac{\delta}{\beta}E(X) + \left(1 - \frac{\delta}{\beta}\right) E(X|X \leq x_{1-\beta}).$$

Für $\delta < \beta$ sieht man, dass die Gewichte in der alternativen Darstellung des Präferenzfunktionals $\Phi_{\beta,\delta}(X)$ Werte zwischen null und eins annehmen. Damit stellt dieses Präferenzfunktional ebenso eine Konvexkombination aus Erwartungswert und unterem bedingten Erwartungswert wie das Präferenzfunktional $\Phi^H_{\alpha,\lambda}(X)$ dar. Folglich ist dieses nicht im Allgemeinen konsistent zur Erwartungsnutzentheorie.

QED

Der nächste Abschnitt ist der dualen Nutzentheorie gewidmet. Es wird die Konsistenz der hybriden Präferenzfunktionale $\Phi_{\alpha,\lambda}(X)$ und $\Phi_{\beta,\delta}(X)$ zu dieser bewiesen.

2.6 Duale Nutzentheorie

Im Folgenden soll die Konsistenz der zwei Präferenzfunktionale zur dualen Nutzentheorie von Yaari[75] gezeigt werden. Diese unterstellt folgende Axiomatik:

Auf einer Menge χ mit $Q = \{F^*_X : X \in \chi\}$ der Menge der Quantilsfunktionen sei eine Präferenzordnung $\succeq$ charakterisiert mit folgenden Eigenschaften[76]:

1. Neutralitätsaxiom: $X \succeq Y \Leftrightarrow F^*_X \succeq F^*_Y$.

2. Stetigkeitsaxiom: Für $F^*_X \in Q$ sind die Mengen $\{F^*_Y \in Q : F^*_X \succ F^*_Y\}$ und $\{F^*_Y \in Q : F^*_X \prec F^*_Y\}$ offen.

3. Monotonieaxiom: Wenn für $F^*_X(t) \geq F^*_Y(t)$ für alle $t \in [0,1]$ gilt, dann ist $F^*_X \succeq F^*_Y$[77].

4. Duales Substitutionsaxiom: Für alle $F^*_X, F^*_Y, F^*_Z \in Q$ und alle $\varepsilon \in [0,1]$ gilt: $F^*_X \succeq F^*_Y \Rightarrow \varepsilon F^*_X + (1-\varepsilon)F^*_Z \succeq \varepsilon F^*_Y + (1-\varepsilon)F^*_Z$.

Die Anforderungen an ein Präferenzfunktional, welches die Axiomatik der dualen Nutzentheorie erfüllt, fomuliert der folgende Satz.

Satz 2.6.1
Eine Präferenzordnung $\succeq$ erfüllt die Axiome der dualen Nutzentheorie genau dann, wenn eine

[75] Ein Entscheider, der sich nach der dualen Nutzentheorie verhält, wird dualer Entscheider oder auch Yaari-Entscheider genannt. Vgl. dazu Yaari (1987).

[76] Vgl. dazu Hanisch (2006), S. 153. Dabei bezeichne F^*_X die verallgemeinerte Inverse einer Verteilungsfunktion F_X. Diese ist wie folgt definiert: $F^*_X : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $F^*_X(\alpha) := \begin{cases} sup\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \leq \alpha\}, & \text{für } \alpha \in [0,1) \\ \lim\limits_{t \to 1-0} F^*_X(t), & \text{für } \alpha = 1 \end{cases}$.
Vgl. diesbzgl. Hanisch (2006), S. 47.

[77] Das Monotonieaxiom impliziert somit die stochastische Dominanz erster Ordnung.

reellwertige, stetige und monoton wachsende Funktion $\upsilon : [0,1] \to [0,1]$ *existiert mit* $\upsilon(0) = 0$ *und* $\upsilon(1) = 1$*, so dass die Präferenzordnung* $\succeq$ *über das Präferenzfunktional*

$$\Phi^Y(X) := \int_0^1 F_X^*(t) d\upsilon(t)$$

charakterisiert werden kann[78]*.*

Hanisch[79] hat bereits die Konsistenz für das Präferenzfunktional

$$\Phi^H_{\alpha,\lambda}(X) = (1-\lambda)E(X) + \lambda E(X|X \leq x_\alpha)$$

mit $\lambda \in [0,1]$ gezeigt. Für den Nachweis verwendete Hanisch die Nutzenfunktion

$$\upsilon(t) = (1-\lambda)t + \lambda \min(\alpha^{-1}t, 1).$$

Damit lässt sich auch die Konsistenz zur dualen Nutzentheorie des Präferenzfunktionals $\Phi_{\alpha,\lambda}(X)$ für $\lambda \geq \alpha$ ableiten, da in diesem Fall das Präferenzfunktional ebenfalls eine Konvexkombination aus Erwartungswert und CVaR darstellt. Auf gleiche Weise kann man aus der Darstellung (2.6) des Präferenzfunktionals $\Phi_{\beta,\delta}(X)$ für $\delta \leq \beta$ die Konsistenz folgern.

Im Folgenden wird allgemein die Konsistenz dieser zwei Präferenzfunktionale gezeigt und dafür jeweils eine spezielle Nutzenfunktion angegeben. Zunächst betrachte man das Präferenzfunktional $\Phi_{\alpha,\lambda}(X)$ mit der Nutzenfunktion

$$\upsilon(t) = \frac{1-\lambda}{1-\alpha}t + \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\min(\alpha^{-1}t, 1).$$

Satz 2.6.2
Das Präferenzfunktional $\Phi_{\alpha,\lambda}(X)$ *ist konsistent zur dualen Nutzentheorie.*

Beweis:
Man verwende zum Nachweis folgende Nutzenfunktion

$$\upsilon(t) = \frac{1-\lambda}{1-\alpha}t + \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\min(\alpha^{-1}t, 1) = \frac{1-\lambda}{1-\alpha}t + \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\begin{cases} \alpha^{-1}t, & \text{für} \quad t \leq \alpha \\ 1, & \text{für} \quad t \geq \alpha \end{cases}.$$

Für die Nutzenfunktion gilt

$$\upsilon(0) = \frac{1-\lambda}{1-\alpha}\cdot 0 + \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\min(\alpha^{-1}\cdot 0, 1) = \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\cdot 0 = 0$$

und

$$\upsilon(1) = \frac{1-\lambda}{1-\alpha}\cdot 1 + \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\min(\alpha^{-1}\cdot 1, 1) = \frac{1-\lambda}{1-\alpha} + \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha} = 1.$$

[78] Vgl. dazu Hanisch (2006), S. 159. Für den Beweis siehe Denneberg (1988). Der Satz ist dabei eine Folgerung aus dem Darstellungstheorem der dualen Nutzentheorie Guriev (2001), S. 121.
[79] Vgl. Hanisch (2006), S. 168 f.

Man untersuche die Grenze der Fallunterscheidung zur Überprüfung der Stetigkeit. Es gilt

$$\upsilon(\alpha) = \frac{1-\lambda}{1-\alpha}\alpha + \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\begin{cases} \alpha^{-1}\alpha, & \text{für} \quad t \leq \alpha \\ 1, & \text{für} \quad t \geq \alpha \end{cases} = \frac{1-\lambda}{1-\alpha}\alpha + \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}.$$

Es liegt somit Stetigkeit vor. Zur Überprüfung der Monotonie differenziere man die Nutzenfunktion[80]. Es gilt für den Fall $t < \alpha$:

$$\frac{d}{dt}\upsilon(t) = \frac{1-\lambda}{1-\alpha} + \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\alpha^{-1} = \frac{\lambda}{\alpha} \geq 0$$

und für den Fall $t > \alpha$:

$$\frac{d}{dt}\upsilon(t) = \frac{1-\lambda}{1-\alpha} + \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha} \cdot 0 = \frac{1-\lambda}{1-\alpha} \geq 0.$$

Somit ist die Nutzenfunktion monoton wachsend. Man berechne das Präferenzfunktional der dualen Nutzentheorie für diese Nutzenfunktion. Es gilt

$$\begin{aligned}
\Phi^Y(X) &= \int_0^1 F_X^*(t)\ d\upsilon(t) = \int_0^1 F_X^*(t)\ d\left[\frac{1-\lambda}{1-\alpha}t + \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\min(\alpha^{-1}t, 1)\right] \\
&= \int_0^1 F_X^*(t)\ d\left(\frac{1-\lambda}{1-\alpha}t\right) + \int_0^\alpha F_X^*(t)\ d\left(\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\alpha^{-1}t\right) + \int_\alpha^1 F_X^*(t)\ d\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha} \\
&= \frac{1-\lambda}{1-\alpha}\int_0^1 F_X^*(t)\ dt + \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha F_X^*(t)\ dt + 0 \\
&= \frac{1-\lambda}{1-\alpha}E(X) + \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}E(X|X \leq x_\alpha).
\end{aligned}$$

QED

Analog kann mit der Nutzenfunktion

$$\upsilon(t) = \frac{1-\delta}{1-\beta}t + \frac{\delta-\beta}{1-\beta}\max(0, \beta^{-1}(t-(1-\beta)))$$

die Konsistenz des Präferenzfunktionals $\Phi_{\beta,\delta}(X)$ gezeigt werden.

Satz 2.6.3
Das Präferenzfunktional $\Phi_{\beta,\delta}(X)$ ist konsistent zur dualen Nutzentheorie[81].

[80] Die Nutzenfunktion $\upsilon(t)$ ist für $t \neq \alpha$ differenzierbar.
[81] Der Beweis von Satz 2.6.3 kann im Anhang A S. 170 nachvollzogen werden.

An dieser Stelle sei zusätzlich auf Jammernegg/Kischka (2005)[82] verwiesen. Dort ist der Beweis der Konsistenz für allgemeine hybride Präferenzfunktionale basierend auf Erwartungswert und CVaR zu finden. Es wird für

$$\Phi(X) = aE(X) + (1-a)E(X|X \leq x_\alpha)$$

mit $0 \leq a \leq \frac{1}{1-\alpha}$ die Konsistenz zur dualen Nutzentheorie gezeigt.

Als Abschluss der entscheidungstheoretischen Grundlagen soll folgend in die Thematik der stochastischen Dominanz eingeführt werden.

2.7 Stochastische Dominanz

In dieser Arbeit sollen verschiedene Kenngrößen, wie zum Beispiel der Gewinn, der erwartete Gewinn, die Deckungsgrößen und die Rückversicherungsprämie mit Hilfe der stochastischen Dominanz[83] abgeschätzt werden. Die stochastische Dominanz wurde in den Arbeiten von Hadar/Russel (1969), Hanoch/Levy (1969), Rothschild/Stiglitz (1970) und Whitemore (1970) erstmals entwickelt und auf ökonomische Sachverhalte angewendet. Mit Hilfe der "stochastischen Dominanz ist es möglich, unter relativ allgemeinen Anforderungen an die Präferenz des Entscheiders und für beliebige Verteilungsfunktionen durch paarweisen Vergleich eine Vorauswahl unter den möglichen Handlungsalternativen zu treffen"[84]. Die stochastische Dominanz erster Ordnung ist dabei wie folgt definiert.

Definition 2.7.1
Seien X und Z Zufallsvariablen und F_X und F_Z die dazugehörigen Verteilungsfunktionen. Z dominiert X stochastisch erster Ordnung, wenn $F_X(a) \geq F_Z(a)$ für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt.
Symbol: $X \preceq_{FSD} Z$.

Aus der Definition 2.7.1 folgt bei Existenz der inversen Verteilungen $F_X^{-1}(b) \leq F_Z^{-1}(b)$ für alle $b \in [0,1]$. Zur Verdeutlichung illustriert die Abbildung 2.1 die stochastische Dominanz erster Ordnung. Wenn die Zufallsvariable Z die Zufallsvariable X stochastisch in erster Ord-

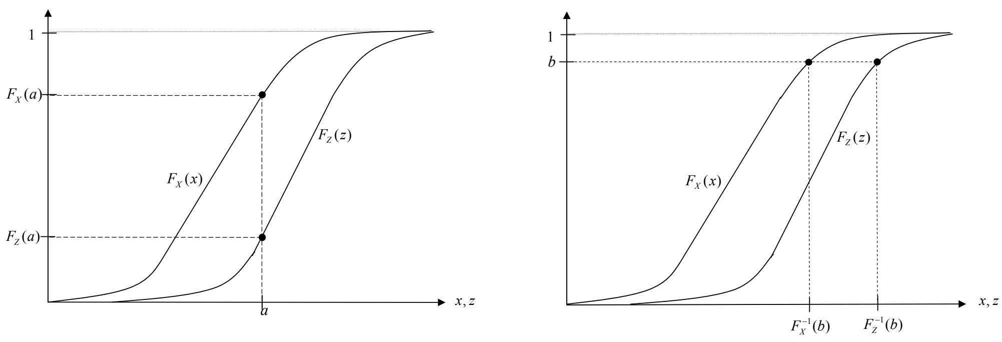


Abbildung 2.1: Stochastische Dominanz erster Ordnung.

[82]Vgl. Jammernegg, Kischka (2005), S. 5 f.
[83]Vgl. Dietrich, Vollmer (2005), S. 14 ff. bzw. Mauer (2000), S. 22.
[84]Vgl. Mauer (2000), S. 21.

nung dominiert, dann verläuft die Verteilungsfunktion von X immer oberhalb oder auf der Verteilungsfunktion von Z, aber nie unterhalb.

Die stochastische Dominanz zweiter Ordnung ist wie folgt definiert.

Definition 2.7.2
Seien X und Z Zufallsvariablen und F_X und F_Z die dazugehörigen Verteilungsfunktionen. Z dominiert X stochastisch zweiter Ordnung, wenn

$$\int_{-\infty}^{a} F_X(t)\ dt \geq \int_{-\infty}^{a} F_Z(t)\ dt$$

für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt. Symbol: $X \preceq_{SSD} Z$.

Wenn die inversen Verteilungen von X und Z existieren und die Zufallsvariable Z die Zufallsvariable X stochastisch in zweiter Ordnung dominiert, dann gilt

$$\int_{0}^{b} F_X^{-1}(t)\ dt \leq \int_{0}^{b} F_Z^{-1}(t)\ dt$$

für alle $b \in [0,1]$. Die folgende Abbildung illustriert die stochastische Dominanz zweiter Ordnung. Es gilt, dass die Fläche unterhalb der Verteilungsfunktion von X bis zum Punkt a immer

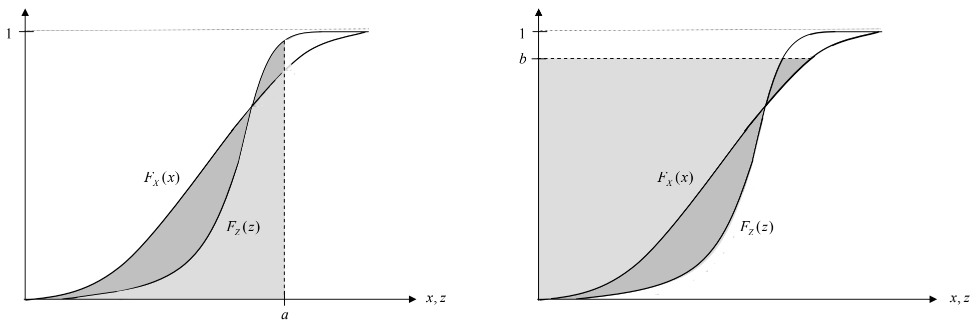


Abbildung 2.2: Stochastische Dominanz zweiter Ordnung.

größer gleich der Fläche unter der Verteilungsfunktion von Z bis zum Punkt a ist. Dies muss für alle $a \in \mathbb{R}$ gelten.

Mit der stochastischen Dominanz sind alle entscheidungstheoretischen Grundlagen für diese Arbeit gelegt. Im Folgenden wird auf das Newsvendor Modell, ein Modell aus dem Supply Chain Management[85], eingegangen. Die Herangehensweise[86] des Newsvendor Modells wird im weiteren Verlauf dieser Arbeit auf ein Rückversicherungsproblem übertragen und die Analogie zwischen beiden Modellen näher beleuchtet.

[85] Vgl. bzgl. verschiedener Modelle des Supply Chain Managements Tayur, Ganeshan, Magazine (1999) und speziell für das Newsvendor Modell S. 202 ff.
[86] Es werden dabei die selben Entscheidungsprinzipien unterstellt und analoge Kenngrößen betrachtet.

Kapitel 3

Newsvendor Modell

3.1 Einführung in das Newsvendor Modell

Im Newsvendor Modell[1] vertreibt ein Händler ein Produkt zum Preis p. Dieses Produkt kann jedoch nur innerhalb eines bestimmten Zeitraumes abgesetzt werden. Der Händler muss vor dem tatsächlichen Verkaufszeitraum das Produkt zum Preis c bestellen. Die Bestellmenge sei dabei y. Die tatsächliche Nachfrage X im Verkaufszeitraum ist zum Bestellzeitpunkt nicht bekannt. Somit ist X eine Zufallsvariable mit der Verteilungsfunktion $F(x)$ und der dazugehörigen Dichte $f(x)$. Für die Dichtefunktion gilt $f(x) = 0$ für alle $x < 0$, da die Nachfrage nicht negativ sein kann.

Eine Nachbestellung aufgrund erhöhter Nachfrage ist im Newsvendor Modell ausgeschlossen. Dies führt dazu, dass dem Händler bei hoher Nachfrage Gewinne entgehen. Im Fall niedriger Nachfrage dagegen können nicht alle bestellten Produkte abgesetzt werden. Es besteht die Möglichkeit, nach der Verkaufsperiode die nicht abgesetzten Produkte zu entsorgen oder an den Lieferanten zurückgegeben. Der Rückgabepreis z[2] ist dabei niedriger als der Einkaufspreis c.

Der Umsatz des Newsvendors hängt somit von der Bestellmenge y sowie der Nachfrage X ab. Für den Umsatz U gilt

$$U(y, X) = \begin{cases} p \cdot y, & \text{für } y \leq X \\ p \cdot X, & \text{für } y > X \end{cases} = p \cdot min(y, X).$$

Die Einkaufskosten ergeben sich aus den Stückkosten c sowie der Bestellmenge y und sind unabhängig von der Nachfrage X. Es gilt für die Einkaufskosten $K = c \cdot y$. Der alternative Umsatz U_A aus der nichtabgesetzten Restmenge ist null, wenn die gesamte Bestellmenge

[1]Bzgl. einer Übersicht über das klassische Newsvendor Modell und dessen Erweiterungen vgl. Khouja (1999), S. 537 ff. Für eine Einführung in das Newsvendor Modell vgl. Cachon, Terwiesch (2006), S. 178 ff. und Chopra, Meindl (2004), Kapitel 12.

[2]Der Rückgabepreis z ist negativ, wenn es sich um Entsorgungskosten und positiv, wenn es sich um Rückgabeerstattungen handelt. Er ist null, wenn weder Kosten für die Entsorgung noch Einnahmen aus der Abgabe der Restmenge entstehen. Im letzten Fall spricht man auch vom Flowergirl Problem. Vgl. Casimir (1990), S. 395 ff. und Dupacova (2002), S. 285 ff.

abgesetzt werden konnte. Dagegen ist der alternative Umsatz der Restmenge $z \cdot (y - X)$, wenn die Bestellmenge größer als die Nachfrage war. Es gilt

$$U_A(y, X) = \begin{cases} 0, & \text{für } y \leq X \\ z \cdot (y - X), & \text{für } y > X \end{cases} = z \cdot max(0, y - X).$$

Für die Gewinnfunktion G des Newsvendors erhält man damit

$$\begin{aligned} G(y, X) &= \underbrace{p \cdot min(y, X)}_{\text{Umsatz}} - \underbrace{c \cdot y}_{\text{Einkaufskosten}} + \underbrace{z \cdot max(0; y - X)}_{\text{Umsatz bzw. Kosten aus der Restmenge}} \\ &= \begin{cases} p \cdot y - c \cdot y, & \text{für } y \leq X \\ p \cdot X - c \cdot y + z(y - X), & \text{für } y > X \end{cases}. \end{aligned}$$

Im Folgenden wird kurz auf das klassische Newsvendor Modell eingegangen, welches den erwarteten Gewinn hinsichtlich der Bestellmenge y maximiert.

3.2 Klassisches Newsvendor Modell

Das klassische Newsvendor Modell[3] geht von einem risikoneutralen Entscheider, der seinen erwarteten Gewinn maximiert, aus. Für den erwarteten Gewinn im klassischen Newsvendor gilt

$$E(G(y, X)) = (p - c)y - (p - z) \int_0^y (y - x) f_X(x)\ dx.$$

Für die optimale Bestellmenge y^* ergibt sich daraus

$$F_X(y^*) = \frac{p - c}{p - z}.$$

Wenn F_X invertierbar[4] ist, dann gilt die optimale Bestellmenge

$$y^* = F_X^{-1}\left(\frac{p - c}{p - z}\right).$$

Da das klassische Modell aussschließlich für risikoneutrale Entscheider geeignet ist, soll im Folgenden die Erweiterung des Newsvendor Modells für risikofreudige und -averse Entscheidungsträger vorgestellt werden.

---

[3] Vgl. Cachon, Terwiesch (2006), Kapitel 9.4 und Chopra, Meindl (2004), Kapitel 12.

[4] Wenn F_X eine stetige monoton wachsende Verteilungsfunktion ist, dann existiert auch die inverse Verteilungsfunktion F_X^{-1}. Anderenfalls müsste man an dieser Stelle die verallgemeinerte Inverse fordern. Vgl. bzgl. verallgemeinerter Inverse Koryciorz (2004), S. 31 f., Tasche (2002), S. 1520 bzw. Dhaene et al. (2002), S. 10.

3.3 Newsvendor Modell mit Risikopräferenzen

Ein nicht risikoneutraler Newsvendor wird seinen erwarteten Gewinn nicht maximieren[5]. Er bewertet hohe und niedrige Gewinne bzw. hohe und niedrige Verluste unterschiedlich. Eine Möglichkeit, diese unterschiedlichen Bewertungen zu berücksichtigen, stellt das *μ-CVaR*-Prinzip (3) dar. Nach Formel (2.1) bzw. Formel (2.2) gilt für die Zielfunktion des Newsvendors mit Risikopräferenzen[6]

$$\Phi_{\alpha,\lambda}(G(y,X)) = \lambda E(G(y,X)|G(y,X) \leq g_\alpha(y)) + (1-\lambda)E(G(y,X)|G(y,X) \geq g_\alpha(y))$$

bzw.

$$\Phi_{\alpha,\lambda}(G(y,X)) = \frac{1-\lambda}{1-\alpha}E(G(y,X)) + \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}E(G(y,X)|G(y,X) \leq g_\alpha(y)),$$

wobei $g_\alpha(y)$ das α-Quantil des Gewinns bezeichne und $\lambda \in [0,1]$ und $\alpha \in (0,1)$ die Risikoparameter des Modells sind. Die Zielfunktion ist somit eine Konvexkombination aus oberem und unterem bedingtem erwarteten Gewinn. Dabei kann λ als Pessimismusparameter verstanden werden. Je niedriger ein Entscheider λ wählt, desto höher gewichtet er hohe Gewinne. Ein risikoneutraler Entscheider präferiert dabei identische Risikoparameter, ein risikoaverser $\alpha < \lambda$ und ein risikofreudiger Entscheider $\alpha > \lambda$[7]. Die optimale Bestellmenge in Abhängigkeit von den Risikoparametern α und λ ist[8]

$$y^*(\alpha,\lambda) = \begin{cases} F_X^*\left(\frac{p-c}{p-z} + \frac{\alpha-\lambda}{1-\lambda}\cdot\frac{c-z}{p-z}\right), & \text{für } \lambda \leq \frac{p-c}{p-z} \\ F_X^*\left(\frac{p-c}{p-z}\cdot\frac{\alpha}{\lambda}\right), & \text{für } \lambda \geq \frac{p-c}{p-z} \end{cases},$$

wobei F_X^* die verallgemeinerte Inverse bezeichne. Für identische Risikoparameter fällt die Lösung mit der Lösung des klassischen Newsvendors y_N^* zusammen. Dagegen gilt für $\alpha < \lambda$ (Risikoaversion) $y^*(\alpha,\lambda) < y_N^*$ und für $\alpha > \lambda$ (Risikofreude) $y^*(\alpha,\lambda) > y_N^*$. Demzufolge bestellt ein risikoaverser weniger und ein risikofreudiger mehr als ein risikoneutraler Entscheider. Somit steigt die optimale Bestellmenge mit der Zunahme von Risikofreude an.

Natürlich kann auch das *μ-CVaR*-Prinzip (4), die Analogie zum *μ-CVaR*-Prinzip (3), für das Newsvendor Modell Anwendung finden. Die Zielfunktion lautet nach Formel (2.4)

$$\Phi_{\beta,\delta}(G(y,X)) := (1-\delta)E(G(y,X)|G(y,X) \leq g_{1-\beta}(y) + \delta E(G(y,X)|G(y,X) \geq g_{1-\beta}(y))$$[9]

und führt zur optimalen Lösung

$$y^*(\beta,\delta) = \begin{cases} F_X^*\left(\frac{p-c}{p-z} + \frac{\delta-\beta}{\delta}\cdot\frac{c-z}{p-z}\right), & \text{für } \delta \geq \frac{c-z}{p-z} \\ F_X^*\left(\frac{p-c}{p-z}\cdot\frac{1-\beta}{1-\delta}\right), & \text{für } \delta \leq \frac{c-z}{p-z} \end{cases}$$

[5]Da das Erwartungswertkriterium nur für risikoneutrale Entscheider geeignet ist und kein Risiko erfassen kann.
[6]Vgl. Jammernegg, Kischka (2005), S. 6 oder (2007), S. 99.
[7]Vgl. bzgl. der Parameterkonstellationen und deren Risikoeinstellung Abschnitt 2.4.1.2.
[8]Vgl. Jammernegg, Kischka (2007), S. 101.
[9]Es sei $g_{1-\beta}(y)$ das $(1-\beta)$-Quantil des Gewinns.

mit F_X^* als der verallgemeinerten Inversen[10]. Für die Lösung folgt für identische Risikoparameter die klassische Newsvendorlösung y_N^*. Für $\beta > \delta$ (Risikoaversion) gilt $y^*(\beta, \delta) < y_N^*$ und für $\beta < \delta$ (Risikofreude) $y^*(\beta, \delta) > y_N^*$. Ein risikoaverser Newsvendor bestellt damit weniger und ein risikofreudiger mehr als ein risikoneutraler Newsvendor[11].

Im nächsten Abschnitt soll eine zweite Erweiterung zum klassischen Newsvendor betrachtet werden. Im Folgenden wird nicht mehr von einer linearen Kostenfunktion ausgegangen, sondern allgemein von einer nicht-linearen Kostenfunktion.

3.4 Newsvendor Modell mit nicht-linearer Kostenfunktion

3.4.1 Bestimmung der optimalen Bestellmenge

In den Abschnitten zuvor wurde das klassische Newsvendor Modell und dessen Erweiterung mit Risikopräferenzen vorgestellt. Im Folgenden soll eine Erweiterung des Modells betrachtet werden, indem die lineare Kostenfunktion durch eine allgemeine Kostenfunktion ersetzt wird. Als Zielfunktion finden dabei die Präferenzfunktionale des μ-$CVaR$-Prinzips (3) und (4) Anwendung. Im späteren Verlauf der Arbeit werden die Modelle mit nicht-linearer Kostenfunktion in Bezug zu den noch vorzustellenden Rückversicherungsproblemen gesetzt und deren Analogie beleuchtet.

Die bisher betrachteten Newsvendor Modelle verwenden in der Gewinnfunktion eine lineare Kostenfunktion $c \cdot y$

$$G(y, X) = \underbrace{p \cdot min(y, X)}_{\text{Umsatz}} - \underbrace{c \cdot y}_{\text{lineare Kostenfunktion}} + \underbrace{z \cdot max(0; y - X)}_{\text{Alternativer Umsatz aus der Restmenge}}.$$

In Analogie kann für die Gewinnfunktion des Newsvendors mit nicht-linearer Kostenfunktion $k(y)$

$$G(y, X) = \underbrace{p \cdot min(y, X)}_{\text{Umsatz}} - \underbrace{k(y)}_{\text{nicht-lineare Kostenfunktion}} + \underbrace{z \cdot max(0; y - X)}_{\text{Alternativer Umsatz aus der Restmenge}}$$

bzw.

$$G(y, X) = p \cdot y - k(y) - (p - z) \cdot \begin{cases} 0, & \text{für } X > y \\ y - X, & \text{für } X \leq y \end{cases} \tag{3.1}$$

geschrieben werden. Der folgende Satz formuliert die Anwendung der Gewinnfunktion auf das μ-$CVaR$-Prinzip (3).

Satz 3.4.1
Es sei $G(y, X)$ die Gewinnfunktion des Newsvendors mit nicht-linearer Kostenfunktion und $\Phi_{\alpha,\lambda}(G(y, X))$ die Zielfunktion des Newsvendors. Dann besitzt das Maximierungsproblem

$$\max_y \ \Phi_{\alpha,\lambda}(G(y, X))$$

[10] Der Beweis der optimalen Lösung für das μ-$CVaR$-Prinzip (4) kann im Anhang B S. 172 ff. nachvollzogen werden.
[11] Vgl. bzgl. der Risikoeinstellung des μ-$CVaR$-Prinzips (4) Abschnitt 2.4.1.2.

folgende implizite Lösung

$$y^*(\alpha,\lambda) = y^* = \begin{cases} F_X^*\left(\frac{p-k_y(y^*)}{p-z} + \frac{\alpha-\lambda}{1-\lambda}\frac{k_y(y^*)-z}{p-z}\right), \\ \text{für } \lambda \leq \frac{p-k_y(y^*)}{p-z} \text{ und } -k_{yy}(y^*) - \frac{1-\lambda}{1-\alpha}(p-z)f_X(y^*) < 0 \\ \\ F_X^*\left(\frac{p-k_y(y^*)}{p-z}\cdot\frac{\alpha}{\lambda}\right), \\ \text{für } \lambda \geq \frac{p-k_y(y^*)}{p-z} \text{ und } -k_{yy}(y^*) - \frac{\lambda}{\alpha}(p-z)f_X(y^*) < 0 \end{cases},$$

wobei k_y und k_{yy} das erste bzw. das zweite Differential von $k(y)$, α und λ die Risikoparameter der Zielfunktion mit $\alpha \in (0,1)$, $\lambda \in [0,1]$ sind und F_X^* die verallgemeinerte Inverse ist.

Die optimale Lösung besteht aus zwei Fällen, zum einen dem Fall $\lambda \leq \frac{p-k_y(y^*)}{p-z}$ mit optimaler Lösung

$$y^* = F_X^*\left(\frac{p-k_y(y^*)}{p-z} + \frac{\alpha-\lambda}{1-\lambda}\frac{k_y(y^*)-z}{p-z}\right)$$

und Maximalbedingung $-k_{yy}(y^*) - \frac{1-\lambda}{1-\alpha}(p-z)f_X(y^*) < 0$ und zum anderen dem Fall $\lambda \geq \frac{p-k_y(y^*)}{p-z}$ mit optimaler Lösung

$$y^* = F_X^*\left(\frac{p-k_y(y^*)}{p-z}\cdot\frac{\alpha}{\lambda}\right)$$

und Maximalbedingung $-k_{yy}(y^*) - \frac{\lambda}{\alpha}(p-z)f_X(y^*) < 0$. Der Beweis des Satzes 3.4.1 kann im Anhang B S. 174 ff. nachvollzogen werden.

Als Spezialfall soll das Erwartungswertkriterium ($\lambda = \alpha$) aus der Lösung von Satz 3.4.1 abgeleitet werden[12]. Für $\lambda = \alpha$ folgt für die implizite Lösung

$$\begin{aligned} y^* &= \begin{cases} F_X^*\left(\frac{p-k_y(y^*)}{p-z}\right), \\ \text{für } \lambda \leq \frac{p-k_y(y^*)}{p-z} \text{ und } -k_{yy}(y^*) - (p-z)f_X(y^*) < 0 \\ \\ F_X^*\left(\frac{p-k_y(y^*)}{p-z}\right), \\ \text{für } \lambda \geq \frac{p-k_y(y^*)}{p-z} \text{ und } -k_{yy}(y^*) - (p-z)f_X(y^*) < 0 \end{cases} \\ &= F_X^*\left(\frac{p-k_y(y^*)}{p-z}\right) \end{aligned}$$

mit Maximalbedingung $-k_{yy}(y^*) - (p-z)f_X(y^*) < 0$.

Analog zum Satz 3.4.1 formuliert Satz 3.4.2 die Resultate unter Verwendung des μ-$CVaR$-Prinzips (4).

Satz 3.4.2
Es sei $G(y,X)$ die Gewinnfunktion des Newsvendors mit nicht-linearer Kostenfunktion und $\Phi_{\beta,\delta}(G(y,X))$ die Zielfunktion des Newsvendors. Dann besitzt das Maximierungsproblem

$$\max_y \ \Phi_{\beta,\delta}(G(y,X))$$

[12] Der betrachtete Spezialfall kann somit als klassisches Newsvendor Modell mit nicht-linearer Kostenfunktion bezeichnet werden.

folgende implizite Lösung

$$y^*(\beta,\delta) = y^* = \begin{cases} F_X^*\left(\frac{p-k_y(y^*)}{p-z} + \frac{\delta-\beta}{\delta}\frac{k_y(y^*)-z}{p-z}\right), \\ \text{für } \delta \geq \frac{k_y(y^*)-z}{p-z} \text{ und } -k_{yy}(y^*) - \frac{\delta}{\beta}(p-z)f_X(y^*) < 0 \\ \\ F_X^*\left(\frac{p-k_y(y^*)}{p-z} \cdot \frac{1-\beta}{1-\delta}\right), \\ \text{für } \delta \leq \frac{k_y(y^*)-z}{p-z} \text{ und } -k_{yy}(y^*) - \frac{1-\delta}{1-\beta}(p-z)f_X(y^*) < 0 \end{cases},$$

wobei k_y, k_{yy} *das erste bzw. das zweite Differential von* $k(y)$, α *und* λ *die Risikoparameter der Zielfunktion mit* $\beta \in (0,1)$, $\delta \in [0,1]$ *und* F_X^* *die verallgemeinerte Inverse ist*[13].

Durch beide Modelle könnte somit jeweils eine optimale Bestellmenge $(y^*(\alpha,\lambda), y^*(\beta,\delta))$ ermittelt werden. Dabei sind die Bestellmengen der beiden Modelle identisch. Ein Newsvendor, der bei dem μ-$CVaR$-Prinzip (3) die Risikoparameter α und λ präferiert, wird bei dem μ-$CVaR$-Prinzip (4) die Risikoparameter $\beta = 1-\alpha$ und $\delta = 1-\lambda$ wählen. Es handelt sich somit in beiden Entscheidungsprinzipien um die gleiche optimale Bestellmenge y^*.

3.4.2 Kenngrößen für die optimale Bestellmenge

Im Folgenden werden die Formeln für ausgewählte Kenngrößen, wie zum Beispiel für den erwarteten Gewinn, für die Verlustwahrscheinlichkeit und für den erwarteten Verlust, für das Newsvendor Modell mit Risikopräferenzen und nicht-linearer Kostenfunktion gegeben. Die Kenngrößen werden dabei für die optimale Bestellmenge y^* formuliert.

Für den Gewinn mit optimaler Bestellmenge y^* kann nach (3.1)

$$G(y^*,X) = p\cdot y^* - k(y^*) - (p-z)\cdot \begin{cases} 0, & \text{für } X > y^* \\ y^*-X, & \text{für } X \leq y^* \end{cases}$$

festgehalten werden. Daraus ergibt sich für den erwarteten Gewinn

$$E(G(y^*,X)) = py^* - k(y^*) - (p-z)\left[\int_0^{y^*}(y^*-x)f_X(x)\,dx\right].$$

Für die Verlustwahrscheinlichkeit (probability of loss) der optimalen Bestellmenge gilt

$$PL^* = P\left(G(y^*,X) \leq 0\right).$$

Die Gewinnfunktion des Newsvendors kann nur im Fall $X \leq y$ negativ werden. Damit folgt für die Verlustwahrscheinlichkeit bei optimaler Bestellmenge

$$\begin{aligned} PL^* &= P\left(p\cdot y^* - k(y^*) - (p-z)(y^*-X) \leq 0\right) \\ &= P\left((p-z)X - k(y^*) + zy^* \leq 0\right) \\ &= P\left(X \leq \frac{k(y^*)-zy^*}{p-z}\right) = F_X\left(\frac{k(y^*)-zy^*}{p-z}\right). \end{aligned}$$

[13]Der Beweis von Satz 3.4.2 befindet sich im Anhang B S. 177 ff.

Mit Hilfe der Verlustwahrscheinlichkeit kann der erwartete Verlust (expected loss) bei optimaler Bestellmenge wie folgt berechnet werden

$$
\begin{aligned}
EL^* &= E\left(G(y^*, X) \mid G(y^*, X) \leq 0\right) \\
&= -k(y^*) + zy^* + (p-z)E\left(X \mid X \leq \frac{k(y^*) - zy^*}{p-z}\right) \\
&= -k(y^*) + zy^* + (p-z)\frac{\int_0^{\frac{k(y^*)-zy^*}{p-z}} x f_X(x)\ dx}{P\left(X \leq \frac{k(y^*)-zy^*}{p-z}\right)} \\
&= -k(y^*) + zy^* + \frac{p-z}{PL^*} \int_0^{\frac{k(y^*)-zy^*}{p-z}} x f_X(x)\ dx.
\end{aligned}
$$

Im Folgenden wird auf die Vorstellung weiterer Newsvendor Modelle verzichtet[14]. Zentraler Inhalt dieser Arbeit sei im nächsten Kapitel die Übertragung der Herangehensweise aus dem Newsvendor Modell auf die nicht-proportionale Rückversicherung unter Einbezug entscheidungstheoretischer Überlegungen. Es findet folglich eine Verknüpfung der vorangegangenen drei Kapitel und deren Ausführungen statt.

[14]Newsvendor Modelle, die ebenfalls die Risikoeinstellung berücksichtigen, sind im Kontext der Erwartungsnutzentheorie bei Eeckhoudt, Gollier, Schlesinger (1995) und im Kontext des CVaR bei Chen, Sim, Simchi-Levi, Sun (2007) bzw. Chen, Xu, Zhang (2009) zu finden. Das Newsvendor Modell bei Ungewissheit der Nachfrageverteilung ist Gegenstand von Perakis, Roels (2008), Gallego, Moon (1993) bzw. Jammernegg, Kischka (2009). Hinsichtlich Erweiterungen bzgl. eines Kundenrückgaberechtes sei auf Mostard, de Koster, Teunter (2005) und für die Berücksichtigung von Ausschuss auf Gallego, Moon (1993) verwiesen. Bei Gallego, Moon (1993) sind auch Mehrprodukt-Modelle bzw. bei Petruzzi, Dada (1998) Mehrperioden-Modelle aufgeführt. Gleiches gilt für das Newsvendor Modell mit variablem Verkaufspreis und einer preisabhängigen Nachfrage.

Teil III

Nicht-proportionale Rückversicherungsmodelle

Kapitel 4

Einführung

Im folgenden Kapitel werden die optimalen Deckungsgrenzen aus der Sicht eines Erstversicherers für nicht-proportionale Rückversicherungsverträge bestimmt. Dies soll anhand verschiedener Präferenzfunktionale geschehen unter Einbezug der Risikoeinstellung eines Zedenten. Zentrales Ziel ist dabei die Bestimmung der Risikoeinstellung des Zedenten. Durch Kenntnis der Risikoeinstellung kann dem Entscheider, in diesem Fall dem Zedenten, eine Entscheidungsunterstützung zur Verfügung gestellt werden. Zuvor soll jedoch die Gewinnfunktion eines Erstversicherers eingeführt werden, da diese die Grundlage jedes berechneten Präferenzfunktionals ist.

4.1 Gewinnfunktion eines Erstversicherers

Die Gewinnfunktion eines wirtschaftlichen Subjektes setzt sich aus den Einnahmen und den Ausgaben zusammen, so auch die Gewinnfunktion eines Erstversicherers. Die Einnahmen eines Erstversicherers ergeben sich aus der Prämiensumme Pr aus dem Kundengeschäft und aus der Auszahlung des Rückversicherungsvertrages im Schadensfall. Letztere Einnahme wird Rückversicherungsschaden RVS genannt[1]. Der Rückversicherungsschaden kann dabei Werte größer gleich null annehmen. Dieser ist gleich null, wenn einerseits die Rückversicherung nicht gekauft wird oder andererseits, wenn der Schaden unterhalb des Selbstbehaltes des Erstversicherers liegt. Für die Prämiensumme Pr gilt $Pr > 0$.

Ein Kostenfaktor für einen Erstversicherer ist der Schaden X, den der Erstversicherer an die Privatkunden im Schadensfall laut vereinbartem Versicherungsvertrag ausbezahlen muss. Dieser stellt eine Zufallsgröße dar und besitze die Verteilung $F_X(x)$ mit der dazugehörigen Verteilungsdichte $f_X(x)$. Da keine negativen Schäden auftreten können, ist $f_X(x) = 0$ für negative Werte von x.

Ein weiterer Kostenfaktor für den Erstversicherer ist die Prämie für den Rückversicherungsvertrag, die so genannte Rückversicherungsprämie RVP. Diese stellt das Entgelt für das vom Zessionär übernommene Risiko im Schadensfall dar. Wird die Rückversicherung nicht gewählt, so ist die Rückversicherungsprämie gleich null.

[1] Der Rückversicherungsschaden wird auch als Zweitrisiko, der Schaden, den der Erstversicherer trägt, als Erstrisiko bezeichnet. Vgl. dazu Mack (1997), S. 330 f.

Alle weiteren Kosten sollen unter den allgemeinen Betriebskosten B abgedeckt werden. Die Betriebskosten enthalten zum Beispiel fixe Kosten, Personalkosten und Verwaltungskosten.

Somit kann die Gewinnfunktion eines Erstversicherers formal wie folgt definiert werden.

Definition 4.1.1
Es sei $G := Pr - B - X - RVP + RVS$*, wobei*

Pr	=	*Summe der Prämien aus dem Kundengeschäft*
X	=	*Schaden*
RVP	=	*Rückversicherungsprämie*
RVS	=	*Rückversicherungsschaden*
B	=	*Betriebskosten*

sind. Dann heißt G Gewinnfunktion des Erstversicherers.

Der Rückversicherungsschaden[2] $RVS(c, d, X)$, abhängig von den nicht-proportionalen Deckungsgrenzen Priorität d und Plafond c, ist dabei null, wenn ein Schaden unterhalb der Priorität d eintritt und somit der Rückversicherungsvertrag nicht zur Geltung kommt. Er ist der Schaden minus Priorität, wenn ein Schaden zwischen dem Plafond und der Priorität vertraglich geregelt werden muss und er ist der Plafond minus Priorität, wenn der Schaden sich oberhalb des Plafonds befindet. Es gilt dementsprechend

$$RVS(c, d, X) = \begin{cases} 0, & \text{für } X < d \\ X - d, & \text{für } d \leq X < c = \min(c - d, \max(X - d, 0)) \\ c - d, & \text{für } c \leq X \end{cases}$$

und wird durch Abbildung 4.1 illustriert.

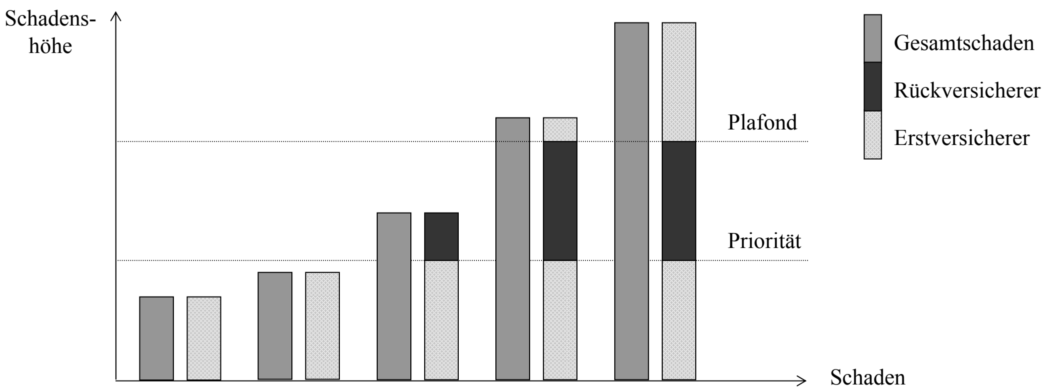


Abbildung 4.1: Schadensaufteilung bei nicht-proportionalen Rückversicherungsverträgen.

Die wesentliche Deckungsgrenze stellt dabei die Priorität dar. Sie teilt das Schadensrisiko zwischen dem Zedenten und dem Zessionär auf. Der Plafond dient lediglich zur Haftungsbegrenzung des Zessionärs. Im Folgenden soll ein Plafond von Unendlich angenommen werden.

[2]Vgl. Rückversicherungsschaden bei nicht-proportionaler Rückversicherung, Abschnitt 1.3.2.

Es wird somit ein Rückversicherungsvertrag in Abhängigkeit von der Priorität und ohne Haftungsbeschränkung betrachtet. Für den Rückversicherungsschaden folgt in diesem Fall

$$RVS(d,X) = \begin{cases} 0, & \text{für } X < d \\ X - d, & \text{für } d \leq X \end{cases} = \max(X-d,0).$$

Die dazugehörige Gewinnfunktion des Zedenten lautet

$$G(d,X) = Pr - B - X - RVP(d) + RVS(d,X). \tag{4.1}$$

Aus einem Rückversicherungsvertrag entstehen im Schadensfall dem Zessionär Kosten. Diese Kosten werden als Rückversicherungsschaden bezeichnet. Da Unsicherheit über die Höhe des tatsächlich eintretenden Schadens besteht, kalkuliert der Zessionär den erwarteten Rückversicherungsschaden. Dieser stellt seine Aufwendung bzgl. des Vertrages zwischen ihm und dem Erstversicherer dar. Er fordert als Gegenleistung für sein Risiko eine Rückversicherungsprämie in Abhängigkeit von seinen Aufwendungen. Somit sind folgende Strukturen von Rückversicherungsprämien möglich[3] :

- Die Rückversicherungsprämie ist der erwartete Rückversicherungsschaden versehen mit einem Gewinnaufschlag γ. Es gilt $RVP = (1+\gamma)E(RVS)$. Diese Prämie ist somit abhängig von der Größe des vom Zessionär übernommenen Risikos und dem Gewinnaufschlag. Der Rückversicherer erlangt dabei seinen Gewinn aus dem Versicherungsvolumen.

- Eine andere Struktur der Rückversicherungsprämie ist die Abhängigkeit von der Varianz des erwarteten Rückversicherungsschadens. Diese hat die Form $RVP = E(RVS) + \gamma Var(RVS)$. Der Gewinnaufschlag des Rückversicherers fließt dabei nicht in den erwarteten Rückversicherungsschaden, sondern in dessen Varianz ein. In diesem Fall zieht der Zessionär seinen Gewinn nicht aus dem Versicherungsvolumen, sondern aus dessen Streuung. Je mehr der Rückversicherungsschaden schwankt, desto mehr verdient der Rückversicherer.

- Eine weitere Struktur ist die Verwendung der Standardabweichung für die Bestimmung der Rückversicherungsprämie. Die Intension für diese Struktur ist die gleiche wie bei der vorangegangenen Prämie. Sie lautet $RVP = E(RVS) + \gamma S(RVS)$ und führt bei Rückversicherungsschäden mit größeren Schwankungen zu einer höheren Rückversicherungsprämie.

Alle drei vorgestellten Rückversicherungsprämien enthalten für $\gamma = 0$ die faire Rückversicherungsprämie. Unter der fairen Rückversicherungsprämie versteht man eine Prämie ohne Gewinnaufschlag seitens des Zessionärs. Ein ökonomisch handelnder Rückversicherer wird allerdings immer einen positiven Gewinnaufschlag verlangen. Der Aspekt der fairen Prämie ist jedoch aus entscheidungstheoretischer Sicht von Interesse.

In dieser Arbeit findet nur die erstgenannte Rückversicherungsprämie Verwendung[4] und wird im weiteren Verlauf als spezielle Rückversicherungsprämie bezeichnet.

---

[3]Vgl. Kaluszka, S. 61 ff, Mack, S. 26 ff., Grimmer (2008), S. 7 und Heilmann (1987), S. 111 f.

[4]Die Verwendung der zwei zuletzt genannten Rückversicherungsprämien führen bei den im Folgenden betrachteten Modellen zu Lösungen mit nicht auflösbaren Integraltermen. Die Interpretation der Lösungen ist daher nicht möglich und wird nicht in dieser Arbeit behandelt.

Definition 4.1.2
Es sei E(RVS) der erwartete Rückversicherungsschaden und γ der Gewinnaufschlag des Rückversicherers mit $\gamma \geq 0$. Dann heißt $RVP := (1+\gamma)E(RVS)$ spezielle Rückversicherungsprämie.

Im folgenden Verlauf werden die optimalen Deckungsgrenzen für verschiedene Präferenzfunktionale, beginnend mit dem Erwartungswertkriterium bis hin zu hybriden Entscheidungprinzipien mit Risikoparametern, bestimmt. Grundlage für die Bestimmung der optimalen Deckungsgrenzen sind die unterstellten Schadensverteilungen. Im folgenden Abschnitt sollen die gebräuchlichsten Verteilungen vorgestellt werden.

4.2 Schadensverteilungen

Für die Bestimmung von optimalen Deckungsgrenzen für Rückversicherungsverträge ist die unterstellte Schadensverteilung von zentralem Interesse. Welche Schadensverteilung eintritt, ist jedoch zuvor nicht bekannt. Wenn ein Erstversicherer seine optimalen Deckungsgrenzen bestimmen möchte, muss er zuvor eine Schadensverteilung annehmen von der er vermutet, dass diese eintritt. Dabei nimmt der Zedent eine spezielle Schadensverteilung aus subjektiven und historischen Überlegungen an. Zur Modellierung von Schadensverteilungen eignen sich bestimmte Verteilungsklassen, so unter anderem die Klasse der Nullpunkt-Pareto-, die Klasse der Loglogistischen und die Klasse der Weibull-Verteilung[5]. Diese besitzen folgende Verteilungsfunktionen

- die Nullpunkt-Paretoverteilung $F_X(x) = 1 - \left(\frac{b+x}{b}\right)^{-\vartheta}$
- die Loglogistische Verteilung $F_X(x) = \left(1 + \left(\frac{x}{b}\right)^{-\vartheta}\right)^{-1}$
- die Weibull-Verteilung $F_X(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{b}\right)^{\vartheta}}$.

Diese Verteilungklassen besitzen jeweils einen Formparameter ϑ und einen Skalenparameter b. Der Formparameter beeinflusst dabei die Gestalt der Schadensverteilung und der Skalenparameter die Häufigkeit der Schäden.
Die Anpassung an die unterstellte Schadensverteilung erfolgt mittels Justierung des Form- und des Skalenparameters[6]. Im Großschadensbereich können dabei folgende Parameter Anwendung finden

- für die Nullpunkt-Paretoverteilung: $\vartheta = 1,04$ und $b = 16,4$
- für die Loglogistische Verteilung: $\vartheta = 1,02$ und $b = 15,7$
- für die Weibull-Verteilung: $\vartheta = 0,25$ und $b = 0,63$[7].

Die Schadensdichten und die Schadensverteilungen sind in der Abbildung 4.2 dargestellt.

[5]Eine Zusammenstellung von Verteilungsklassen, welche sich zur Schadensmodellierung eignen, findet sich bei Mack (1997), S. 99.

[6]Der Skalenparameter b bezieht sich dabei auf 1 Million Euro. Die Werte der Verteilungsfunktion und der Schadensdichte beziehen sich somit ebenfalls auf 1 Million Euro.

[7]Vgl. dazu Mack (1997), S. 105 für Verteilungsanpassungsparameter im Großschadensbereich und S. 106 für Parameter über alle Schadenshöhen. Für die angegebenen Parameter ist der Erwartungswert der Nullpunkt-Paretoverteilung 15,77, der Erwartungswert der Loglogistischen Verteilung 16,15 und der Erwartungswert der Weibull-Verteilung 15,12.

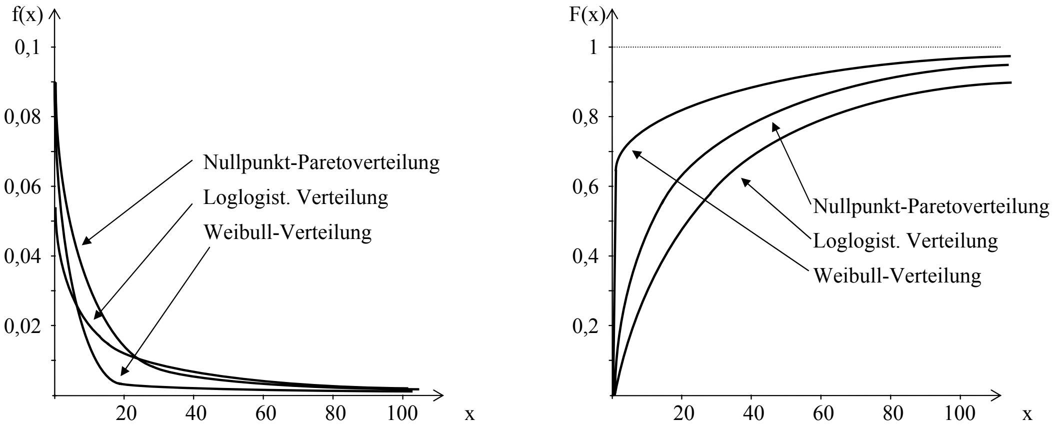


Abbildung 4.2: Schadensdichten und Schadensverteilungen.

Auch bei Verteilungen, die zur Modellierung von Großschäden verwendet werden, befindet sich die Verteilungsmasse bei vergleichsweise kleinen Schäden. Großschäden unterliegen in jedem Fall einer geringeren Eintrittswahrscheinlichkeit. Der Einfluss des Formparameters sei exemplarisch an der Nullpunkt-Paretoverteilung in der Abbildung 4.3 dargestellt.

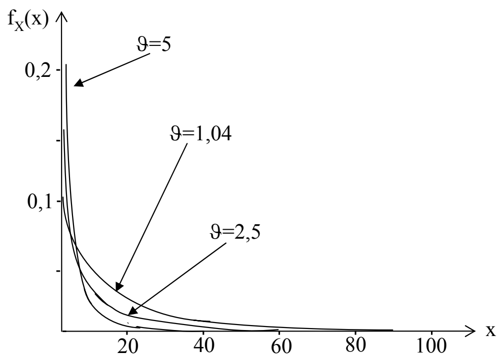


Abbildung 4.3: Schadensdichten der Nullpunkt-Paretoverteilung.

Im Folgenden soll ein erweiterter Literaturüberblick[8] über die Möglichkeiten der Modellierung von Erst- bzw. Rückversicherungsmodellen gegeben werden. Zusätzlich wird in diesem Zusammenhang auf das Arrow-Theorem bzgl. der Optimalität von Prioritäten sowie auf Eigenschaften der Risikomessung (Kohärenz und Komonotonie) hingewiesen.

[8] Auf eine Betrachung der Literatur bzgl. Erwartungswertkriterium und μ-σ-Prinzip wird an dieser Stelle verzichtet, da auf diese bereits in der Einleitung der Arbeit hinreichend eingegangen wurde.

4.3 Erweiterter Literaturüberblick

Das wohl bekannteste Resultat in der Versicherungsliteratur ist das Arrow-Theorem[9] bzgl. der Optimalität von Prioritäten. Kenneth Arrow´s[10] Theorem besagt: "If an insurance company is willing to offer any insurance policy against loss desired by the buyer at a premium which depends only on the policy´s actuarial value, then the policy chosen by a risk-averting buyer will take the form of 100 per cent coverage above a deductible minimum."[11]. Zentrale Aussage ist somit, dass ein risikoaverser Entscheider, wenn er die Versicherung präferiert, alle Schäden oberhalb einer optimalen Priorität versichern lassen möchte. Diese fundamentale Aussage des Arrow-Theorems bzgl. der Optimalität von Prioritäten ist Grundlage für viele Publikationen im Versicherungsbereich.

Borch war der erste, welcher in diesem Zusammenhang endogene optimale Versicherungspolicen betrachtete. Er untersuchte dabei pareto-optimale Versicherungsverträge[12]. Die Arbeit von Borch (1969) bildete wiederum die Grundlage für Arrow (1971), welcher pareto-optimale Versicherungsverträge zum einen für einen riskoaversen Versicherungskäufer und zum anderen für einen risikoneutralen Versicherer betrachtet. Später erweiterte Arrow diese Ergebnisse auf Nutzenfunktionen[13]. Fortführende Untersuchungen mit engem Bezug zu den Arbeiten von Arrow und Borch finden sich u. a. bei Raviv (1979), Garven (2007), Babbel, Economides (1985) und Gollier, Schlesinger (1996).

Raviv (1979) betrachtet dabei den optimalen Versicherungsschutz für fixe Prämien bzw. für Haftungsobergrenzen mit Nutzenfunktionen unter engem Bezug zum Arrow´s Theorem. Dagegen wendet Garven (2007) für sein Modell das Erwartungsnutzenkriterium an und unterstellt eine logarithmische Nutzenfunktion. Babbel, Economides (1985) beleuchten wiederum Lebensversicherungen unter Pareto-Optimalität.

Die Publikation Gollier, Schlesinger (1996) geht dagegen einen anderen Weg und betrachtet ein Modell zur Bestimmung von optimalen Selbstbehalten unter Verwendung von Arrow´s Theorem. Dabei verwenden die Autoren zur Modellierung bewusst nicht das Erwartungsnutzenkriterium, sondern die stochastische Dominanz erster und zweiter Ordnung. Im Speziellen unterstellen Gollier und Schlesinger eine Vermögensvariable, welche sich aus einem Start- bzw. Initialvermögen abzüglich der Versicherungsprämie und einem Schaden X plus der Auszahlungen aus dem Versicherungsvertrag I(X) zusammensetzt. Der Schaden X ist dabei eine Zufallsvariable. Durch diesen beeinflusst, sind die Auszahlungen aus dem Versicherungsvertrag I(X) und die Vermögensvariable ebenfalls Zufallsvariablen. Des Weiteren wird für zwei Verteilungsfunktionen der Vermögensvariable stochastische Dominanz zweiter Ordnung gefordert. Mit Hilfe des Arrow-Theorems folgt aus den Betrachtungen von Gollier und Schlesinger, dass eine Priorität d existiert, welche zu der optimalen Auszahlung aus dem Versicherungs-

[9]Vgl. Arrow (1963), S. 969.
[10]Kenneth Joseph Arrow geboren am 23. August 1921 in New York erhielt im Jahr 1972 zusammen mit John Richard Hicks den Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften.
[11]Vgl. Arrow (1963), S. 969.
[12]Vgl. diesbzgl. Borch (1960) und (1969). Für spätere weitergehende Untersuchungen mit der Pareto-optimalität vgl. Borch (1975) und (1983).
[13]Vgl. Arrow (1974).

vertrag $I^*(x) = \max(0, x - d)$ führt[14].

Eine Erweiterung von Arrow´s Ergebnissen bzgl. der Optimalität des Rückversicherungsvertrages Stop Loss findet sich bei Kaluszka (2004a). Die Ausführungen von Kaluszka sind aus der Sicht des Zedenten. Dieser bestimmt sein Risiko mit einem Risikomaß aus der Klasse konvexer Risikomaße[15]. Bei der Rückversicherungsprämie unterstellt Kaluszka Prämien auf Basis des Erwartungswertes oder der Varianz des Rückversicherungsschadens. Diese Betrachtungen führen zu einer Erweiterung der Aussagen des Arrow-Theorems auf das Gebiet des Rückversicherungsvertrages Stop Loss.

Grundlegende Aussagen zu Versicherungsverträgen bzgl. des Erwartungsnutzenkriteriums finden sich sehr zahlreich in der Literatur, wie bereits in der Einleitung dieser Arbeit erwähnt[16]. Für die Bestimmung optimaler Selbstbehalte in Abhängigkeit von Risikoaversion und Risikograd der Schadensverteilung mit diversen Erwartungsnutzenfunktionen sind als Literaturquellen neben Raviv (1979) und Garven (2007) zum Beispiel Rothschild, Stiglitz (1971), Schlesinger (1981), Kanbur (1982), Huberman, Mayer, Smith (1983), Meyer, Ormiston (1983), Eeckhoudt, Gollier, Schlesinger (1991) und Zhou, Wu, Wu (2010) zu nennen.

Rothschild, Stiglitz (1971) wenden das Erwartungsnutzenkriterium für Portfoliomodelle an. Zentraler Betrachtungspunkt von Meyer, Ormiston (1983) ist die Versicherungsnachfrage in einem Portfolio von Finanzanlagen. Schlesinger (1981) beleuchtet dagegen den Aspekt der optimalen Priorität bei Risikoaversion. Zentrale Aussage ist dabei, dass ein risikoaverser Entscheider die Versicherung präferieren, aber auch ablehnen kann. Dies ist u. a. abhängig von der unterstellten Nutzenfunktion und der Versicherungsprämie. Dabei wird, wenn eine risikoaversere Nutzenfunktion zur Anwendung kommt, eine niedrigere optimale Priorität gewählt. Eine weitere Aussage der Arbeit von Schlesinger ist, dass bei einem weniger verfügbaren Vermögen ebenfalls eine niedrigere optimale Priorität gewählt und somit mehr Risiko an den Versicherungsgeber übertragen wird. Schlesinger (1981) behandelt ebenfalls die Themen Vollversicherung und Versicherungsablehnung bzgl. des Erwartungsnutzenkriteriums.

Im Gegensatz dazu betrachten Cummins, Mahul (2004) nicht nur den Selbsthehalt oder die Nachfrage an Versicherung, sondern zusätzlich die Haftungsobergrenze bzgl. eines Versicherungsvertrages im Erwartungsnutzenkontext. Diese verwenden folgenden Rückversicherungsschaden $I(x) = \max(x-D, 0) - \max(x-(D+\bar{I}), 0)$. Dabei ist D in diesem Kontext die Priorität, $\bar{I}$ die Haftungsstrecke, $(D + \bar{I})$ der Plafond und x eine Realisation vom Schaden X[17]. Dabei wird in dem Modell von Cummins und Mahul die gleiche Rückversicherungsprämienstruktur verwendet wie in dieser Arbeit. Grundlage der Betrachtungen ist dabei eine Vermögensvariable wie bereits bei der Literatur Gollier, Schlesinger (1996) vorgestellt. Zielfunktion von Cummins und Mahul ist die Maximierung des Erwartungsnutzens der Vermögensvariable be-

[14] Dabei ist x eine Realisation vom Schaden X.

[15] Konvexe Risikomaße sind zum Beispiel die Semi-Varianz $E(X - E(X))^2_+$, das Exponentialmoment $E(exp(\beta(X - E(X)))$ mit $\beta > 0$ und das obere dritte Moment $E(X - E(X))^3_+$.

[16] Vgl. dazu die Einleitung bzw. für den Versicherungskontext Schulenburg, Greiner (2007), S. 37 f., Wagner (2000), S. 48, Ritter (2006), S. 23 und Rosenkranz, Missler-Behr (2005) sowie für den Rückversicherungskontext Guerra, Centeno (2008), Samson (1986) sowie Samson, Thompson (1983).

[17] Der Rückversicherungsschaden entspricht dem in dieser Arbeit verwendeten Rückversicherungsschaden.

züglich des Versicherungsschadens und der Versicherungsprämie. Dies führt zu der Lösung $I^*(x) = \min[\max(0, x - d), \bar{I}]$.

Zentraler Gegenstand von Huberman, Mayer, Smith (1983) ist ebenfalls ein Modell mit optimalen Selbstbehalt und Haftungsobergrenze. Zusätzlich wird in deren Model ein Moral Hazard Problem modelliert.

Eeckhoudt, Gollier, Schlesinger (1991) zeigen in ihrer Erwartungsnutzenpublikation, dass mit Zunahme an Risikoaversion der optimale Selbstbehalt sinkt und damit der Risikotransfer vom Versicherungsnehmer zur Versicherung steigt. Grundlage der Betrachtungen ist ebenfalls eine Vermögensvariable wie bereits bei der Literatur Gollier, Schlesinger (1996) vorgestellt wurde[18]. Für die Schadensverteilung wird dabei ein Träger [0,L] unterstellt, wobei die Trägerobergrenze kleiner gleich dem Initialvermögen ist. Grundannahme der Ausführungen von Eeckhoudt, Gollier und Schlesinger ist eine allgemeine Nutzenfunktion. Für diese allgemeine Nutzenfunktion werden Aussagen für die Priorität getroffen.

Zhou, Wu, Wu (2010) untersuchen ein Modell mit Haftungsbeschränkung seitens des Versicherers, welches hinsichtlich der nachgefragten Deckung optimiert wird. Dabei wird die Annahme getroffen, dass der Preis der Versicherung nur vom versicherungstechnischen Wert abhängt. Die Kalkulation des Versicherungspreises basiert dabei auf dem Erwartungswert. Zielfunktion in diesem Modell ist die Maximierung des Erwartungsnutzens der Vermögensfunktion des Versicherers. Das zentrale Ergebnis der Untersuchungen von Zhou, Wu und Wu ist, dass die Haftungsbeschränkung zu einem höheren Erwartungsnutzen des Versicherers führt.

Zusammenfassend sind die Kernaussagen der Erwartungsnutzenliteratur, dass ein risikoaverser Entscheider die Versicherung präferieren, aber auch ablehnen kann. Dies ist abhängig von der Stärke der Risikoaversion und von der unterstellten Versicherungsprämie. Die Stärke der Risikoaversion ist von der unterstellten Nutzenfunktion, die Versicherungsprämie von dem Gewinnaufschlag des Versicherungsgebers beeinflusst. Diese Kernaussagen werden auch für die Modelle in dieser Arbeit erhalten. Dabei werden zur Modellierung der Risikoeinstellung eines Entscheiders nicht Nutzenfunktionen, sondern Entscheidungsprinzipien mit Risikoparametern verwendet. Des Weiteren führt eine risikoaversere Nutzenfunktion bei der Erwartungsnutzentheorie zu einer niedrigeren Priorität. Ebenso führen Risikoparameter bei den in dieser Arbeit verwendeten Modellen, welche eine hohere Risikoaversion abbilden, zu einer niedrigeren Priorität und somit zu mehr Risikotransfer.

Die nächsten Ausführungen beziehen sich auf die Größen Value at Risk (VaR) bzw. Conditional Value at Risk (CVaR). An dieser Stelle muss klar unterschieden werden, ob diese Größen zur Risikomessung oder zur Präferenzmessung angewendet werden[19].

Risikomessung mit VaR und CVaR

Risikomessung findet statt, wenn die Größen VaR und CVaR als Risikomaß Verwendung

[18] Dabei ist in dieser Publikation bereits der Schaden des Versicherungsnehmers mit dem Versicherungsschaden verrechnet.

[19] Vgl. diesbzgl. Brandtner (2010).

finden, wie zum Beispiel bei der Betrachtung von Einzelrisiken von Versicherungen[20]. Die Risikomessung wird dabei vornehmlich mit dem Value at Risk im Versicherungsbereich durchgeführt[21]. Dieser wird u. a. als Risikomaß bei Bestimmung der Eigenkapitalhinterlegung eines Versicherungsunternehmens durch die Bestimmungen Solvency II[22] verwendet[23]. Durch die gesetzlichen Bestimmungen sind Ausführungen bzgl. des Risikomanagements und der Eigenkapitalhinterlegung von Versicherungen zahlreich in der Literatur vertreten[24].

Ebenfalls seien an dieser Stelle die Schwächen bzw. die Stärken des VaR bzw. CVaR bzgl. der Risikomessung zu nennen. Die wohl bekannteste Eigenschaft bzgl. der Risikomessung ist die Eigenschaft der Kohärenz. Dabei ist R ein kohärentes Risikomaß über eine Menge V von Risiken, wenn für beliebige X und Y aus V gilt:

1. Monotonie: Sei $X \leq Y$, dann ist $R(X) \geq R(Y)$[25].
2. Positive Homogenität: Sei $h \in \mathbb{R}_+$, dann ist $R(hX) = h \cdot R(X)$[26].
3. Translationsinvarianz: Sei $a \in \mathbb{R}$, dann ist $R(X + a) = R(X) - a$[27].
4. Subadditivität: Sei $X + Y \in V$, dann ist $R(X + Y) \leq R(X) + R(Y)$[28].

Dabei ist festzuhalten, dass der VaR nicht kohärent ist, da er nicht subadditiv ist. Dagegen besitzt der CVaR die gewünschte Eigenschaft der Kohärenz, aber auch an der Verwendung des CVaR im Sinne der Risikomessung wird bzgl. des impliziten Risikoverständnisses Kritik geübt[29]. So kann unter gewissen Umständen der CVaR dem individuellen Risikoverständnis eines Entscheiders zu wider laufen[30].

Fortführend sind im Kontext der Risikomessung die Komonotonie und die Verteilungsinvarianz zwei weitere wichtige Eigenschaften. Für diese gilt[31]:

---

[20] Vgl. Koryciorz (2004), S. 102 f.

[21] Vgl. Albrecht, Koryciorz (1999), S. 5 ff. bzw. Albrecht, Bährle, König (1997), S. 1 ff.

[22] Die Regularien Solvency II schreiben die Verwendung des VaR vor. Zum Teil kommt aber auch der CVaR für die interne Bestimmung der Eigenkapitalanforderung zur Anwendung. Die Verwendung des CVaR gegenüber dem VaR führt zu einer Erhöhung des Eigenkapitalbedarfs, ist aber auch komplexer in seiner Berechnung. Zur Verwendung interner Risikomodelle in Versicherungsunternehmen vgl. Osetrova, Schmeiser (2005).

[23] Vgl. Vollmer (2007), S. 12.

[24] Vgl. bzgl. Risikomessung in einem Versicherungsunternehmen und Solvabilitätsregulierung Molinari, Nguyen (2009), Nguyen und Molinari (2009), Vollmer (2007), Milliman (2007) bzw. bei Rückversicherungen Schubert, Stienen, Kraft (2007). Empirische Untersuchungen zum Aspekt Risikomanagement und Solvency II vgl. Capgemin (2004).

[25] Monotonie bedeutet: Wenn eine Zufallsgröße X (z. B. der Gewinn) immer kleiner gleich der Zufallsvariable Y ist für jede Merkmalsausprägung, dann ist das Risiko von X immer größer gleich dem Risiko von Y.

[26] Positive Homogenität bedeutet: Wenn n-mal die gleiche Risikoposition vorliegt, dann ist das Risiko n-mal so groß.

[27] Translationsinvarianz bedeutet: Wird einer risikobehafteten Position ein sicherer Geldbetrag hinzugefügt, so minimiert sich das Risiko um diesen Geldbetrag.

[28] Subadditivität bedeutet: Das Risiko eines Portfolios ist höchstens so groß wie die Addition der Risiken seiner einzelnen Bestandteile.

[29] Vgl. diesbzgl. Kürsten, Brandtner (2009).

[30] Vgl. Kürsten, Brandtner (2009). Dafür wurde ein Axiomensystem für Akzeptanzmengen unterstellt.

[31] Vgl. Dhaene et al. (2002).

- Zwei Risiken X und Y heißen komonoton, wenn es ein Risiko Z und zwei wachsende Funktionen g und h gibt, so dass für alle Zustände ω gilt: $X(\omega) = g(Z(\omega))$ und $Y(\omega) = h(Z(\omega))$. Dass heißt, die Risiken X und Y hängen gleichläufig von einem einzigen Risikofaktor ab.

- Ein Risiko R heißt verteilungsinvariant, wenn aus $F_X = F_Y$ immer $R(X) = R(Y)$ für alle X, Y aus V folgt.

Komonotonie ist dabei im Risikomanagement die "schlimmste Art" der Abhängigkeit, da sie nicht nur lineare wie die Korrelation, sondern auch nicht-lineare Abhängigkeiten erfassen kann. Für komonotone Risiken X und Y gilt dabei die komonotone Additivität mit $R(X + Y) = R(X) + R(Y)$. Dass bedeutet, es tritt kein Diversifizierungseffekt ein. Folglich mindert ein Portfolio von komonotonen Risiken nicht das Risiko.

Die Verteilungsinvarianz fordert hingegen, dass bei Vorlage von zwei identischen Verteilungsfunktion auch das Risiko identisch sein soll. Eine Abhängigkeit von Expertenwissen oder Ähnlichem soll also nicht bestehen. Der VaR und der CVaR sind bzgl. der Eigenschaften der Risikomessung komonoton additiv und verteilungsinvariant.

Präferenzmessung mit VaR und CVaR

Die nächsten Ausführungen betreffen den VaR bzw. den CVaR bzgl. der Präferenzmessung. Cai, Tan, Weng, Zhang (2008) berechnen mit Hilfe von VaR und CVaR die optimale Schadensfunktion eines Erstversicherers. Dagegen werden VaR und CVaR von Bernard, Tian (2009) zur Minimierung des Insolvenzrisikos eines Erstversicherers in Verbindung mit Rückversicherungsverträgen[32] sowie bei Cai, Tan (2007) zur Bestimmung optimaler Selbstbehalte in VaR bzw. CVaR-gestützten Modellen verwendet. In letzterer Publikation wird dabei der total risk exposure minimiert. Aufgrund der sehr thematischen Nähe dieser zwei Publikationen, insbesondere von Cai, Tan (2007), zu dieser Arbeit sind diese als direktes Vorgängerresultat anzusehen[33].

Im Speziellen wird in Cai, Tan (2007) zunächst ein VaR-Modell mit drei verschiedenen Anforderungsszenarien und anschließend ein CVaR-Modell betrachtet. Dabei wird die gleiche Rückversicherungsprämienstruktur wie in dieser Arbeit verwendet, jedoch kommt innerhalb dieser Struktur eine allgemeine Funktion für den Rückversicherungsschaden zur Anwendung. An diese Rückversicherungsschadensfunktion und die Rückversicherungsprämie werden im VaR-Modell innerhalb von drei Szenarien verschiedene Anforderungen gestellt. Die Zielfunktion bei Cai, Tan (2007) ist die Minimierung des VaR bzw. CVaR vom total risk exposure. Dabei setzt sich der total risk exposure bei Cai und Tan aus dem Erstversicherungsschaden und der Rückversicherungsprämie zusammen.

Eine Schwäche des Artikels von Cai und Tan ist, dass Sie ihr Vorgehen als die Minimierung von Risikomaßen bezeichnen und damit indirekt auf Risikomessung verweisen. Eine klare Aus-

[32] Vgl. Bernard, Tian (2009) für den VaR S. 2 ff. und bzgl. CVaR S. 7ff.

[33] Die Bedingung für die optimale Lösung beim CVaR-Prinzip ist dabei identisch zu den in dieser Arbeit vorgestellten Rückversicherungsmodellen unter dem CVaR-Prinzip.

sage, dass es sich im vorliegenden Artikel um Präferenzmessung handelt, unterbleibt.

Das CVaR-Modell von Cai und Tan besitzt die größte Nähe zu dieser Arbeit und soll daher näher betrachtet werden. Die Zielfunktion ist die Minimierung des CVaR vom total risk exposure bzgl. der Schadensfunktion des Zedenten. Der CVaR des total risk exposures für die optimale Schadensfunktion ist im Fall $\alpha < \frac{1}{1+\rho}$[34] die optimale Priorität plus die Rückversicherungsprämie. Im Fall $\alpha > \frac{1}{1+\rho}$ ist der CVaR des total risk exposures für die optimale Schadensfunktion der CVaR vom Schaden X. Bei Cai und Tan wird auf den Hinweis, dass es sich im ersten Fall um hohe Risikoaversion und im zweiten Fall um niedrige Risikoaversion handelt, verzichtet. Ebenso findet keine Spezifikation der optimalen Priorität statt[35].

Abschließend sei auf die Eigenschaft der Tendenz zu Randlösungen des CVaR bzgl. der Präferenzmessung hingewiesen. Der CVaR führt bzgl. der Präferenzmessung im diskreten Fall zu Randlösungen. So wird bei einer Zufallsvariable X mit Ausprägungen a und b entweder a oder b präferiert, aber nie eine Mischung aus beiden. Diese Eigenschaft kommt hingegend bei stetigen Verteilungsfunktionen aufgrund deren Stetigkeitscharakters im Allgemeinen nicht zum Tragen[36].

Nach dem erweiterten Literaturüberblick bzgl. des Erwartungsnutzenkriteriums und (C)Var im Versicherungskontext sowie der Erläuterung der Stärken und Schwächen des VaR bzw. CVaR werden im Folgenden verschiedene Rückversicherungsmodelle vorgestellt. Bei allen Modellen wird das unterstellte Präferenzfunktional auf die Gewinnfunktion des Zedenten angewendet und hinsichtlich der Deckungsgrenzen maximiert. Dies geschieht zunächst für jede Deckungsgrenze einzeln. Dabei wird mit der Priorität begonnen.

[34] Dabei ist α der Risikoparameter des CVaR-Prinzips und ρ der loading factor der Rückversicherung. In dieser Arbeit ist das ρ der Gewinnaufschlag γ.

[35] In der vorliegenden Arbeit wird für jedes Modell auch für das CVaR-gestütze Modell die optimale Priorität gegeben. Dies stellt somit eine wesentliche Erweiterung zu der bisherigen VaR/CVaR-Literatur dar.

[36] Vgl. Brandtner (2010).

Kapitel 5

Prioritätsoptimierungsproblem

Die wesentliche Deckungsgrenze eines Rückversicherungsvertrages ist die Priorität. Diese teilt den Schaden zwischen dem Erst- und Rückversicherer auf. Auf den Plafond dagegen, der Haftungsobergrenze des Rückversicherers, besitzt der Zedent nur geringen Einfluss. De facto wird die Haftungsobergrenze nur selten von einem Schadensereignis überschritten. Vielmehr sichert sich der Zessionär durch Retrozession ab. Es wird zunächst ein Plafond von Unendlich angenommen. Somit gilt für die Gewinnfunktion die Formel (4.1)

$$G(d, X) = Pr - B - X - RVP(d) + RVS(d, X).$$

Diese bildet die Grundlage für die Maximierung verschiedener Präferenzfunktionale bzgl. der Priorität. Das erste Präferenzfunktional, das näher betrachtet wird, ist das für risikoneutrale Entscheider[1] geeignete Erwartungswertkriterium.

5.1 Erwartungswertkriterium

Das Erwartungswertkriterium berücksichtigt nur die erwartete Ausprägung einer Handlungsalternative bzw. Zufallsvariable. Für das Rückversicherungsproblem lautet das Erwartungswertkriterium somit $\Phi_B(G(d, X)) := E(G(d, X))$. Es soll dabei folgendes Maximierungsproblem gelöst werden

$$\max_{d} \ \Phi_B(G(d, X)). \tag{5.1}$$

Satz 5.1.1
Es sei $\Phi_B(G(d, X))$ das Präferenzfunktional eines risikoneutralen Entscheiders mit Gewinnfunktion $G(d, X) = Pr - B - X - RVP(d) + RVS(d, X)$. Dann besitzt das Maximierungsproblem (5.1) folgende implizite Lösung

$$F_X(d^*) = 1 + RVP_d(d^*)$$

mit der Maximalbedingung $-RVP_{dd}(d^*) + f_X(d^*) < 0$[2].

[1] Vgl. Bamberg, Coenenberg (2006), S. 104 f.
[2] Der Beweis von Satz 5.1.1 befindet sich im Anhang C.1 S. 180 f.

Diese implizite Lösung kann ebenso aus dem klassischen Newsvendor Modell mit nicht-linearer Kostenfunktion $k(y)$ hergeleitet werden[3]. Das Modell unterstellt ebenfalls das Erwartungswertkriterium und verwendet die Gewinnfunktion[4]

$$G(y, \tilde{X}) \quad = \quad p \cdot min(y, \tilde{X}) - k(y) + z \cdot max(0; y - \tilde{X}).$$

Dabei führt die Maximierung des erwarteten Gewinns zu der impliziten Lösung $F_{\tilde{X}}(y^*) = \frac{p-k_y(y^*)}{p-z}$ mit Maximalbedingung

$$-k_{yy}(y^*) - (p-z) f_{\tilde{X}}(y^*) < 0.$$

Die Gewinnfunktion für das Rückversicherungsmodell lautet

$$G(d, X) = Pr - B - X - RVP(d) + \max(0, X - d).$$

Da die Erstversicherungsprämien Pr als auch die Betriebskosten B unabhängig von der Priorität d sind, spielen diese Terme für den Maximierungsprozess keine Rolle. Somit bringt die Gewinnfunktion

$$\begin{aligned}\tilde{G}(d, X) &= -X - RVP(d) + \max(0, X - d) \\ &= -\min(d, X) - RVP(d)\end{aligned}$$

die selben Lösungen hervor. Durch Vergleich der Gewinnfunktionen $\tilde{G}(d, X)$ und $G(y, \tilde{X})$ kann eine Analogie festgestellt werden. Diese ist in der folgenden Tabelle dargestellt:

Newsvendor Modell	Rückversicherungsmodell
Nachfrage $\tilde{X}$	Schaden X
Bestellmenge y	Priorität d
nicht-lineare Kostenfunktion k	nicht-lineare RV-Prämie RVP
Verkaufspreis p	-1[5]
Rückgabepreis z	0[6]

Tabelle 5.1: Analogie zwischen dem Newsvendor- und dem Rückversicherungsmodell.

Entsprechend kann für $p = -1$, $k_y(y) = RVP_d(d)$, $k_{yy}(y) = RVP_{dd}(d)$ und $z = 0$ die Lösung des Newsvendor Modells in die des Rückversicherungsmodells überführt werden.

Im Folgenden soll die spezielle Rückversicherungsprämie aus Definition 4.1.2 auf Satz 5.1.1 angewendet werden. Dafür benötigt man das erste und zweite Differential der Rückversicherungsprämie. Diese stellt das folgende Lemma zur Verfügung.

[3]Vgl. Kapitel 3.4.
[4]Die Nachfrage wird in der Gewinnfunktion zur Unterscheidung vom Schaden mit $\tilde{X}$ bezeichnet.
[5]Der Verkaufspreis p des Newsvendors entspricht einer monetären Einheit nicht eingekauften Deckungsschutzes.
[6]Gilt, da der eingekaufte Deckungsschutz der Rückversicherung nicht zurückgegeben werden kann.

Lemma 5.1.1
Es sei $RVP(d)$ die Rückversicherungsprämie aus Definition 4.1.2, dann gilt für die ersten zwei Differentiale der Prämie $RVP_d(d) = (1+\gamma)[-1+F_X(d)]$ und $RVP_{dd}(d) = (1+\gamma)f_X(d)$.

Beweis von Lemma 5.1.1:
Es gilt für die Rückversicherungsprämie laut Definition 4.1.2

$$\begin{aligned} RVP(d) &= (1+\gamma)E(RVS(d,X)) = (1+\gamma)E(\max(d,X)) \\ &= \int\limits_d^{\infty} (x-d)\ dF_X(x) = \int\limits_d^{\infty} x\ dF_X(x) - d[1-F_X(d)]. \end{aligned}$$

Somit ergibt sich für das erste Differential der Rückversicherungsprämie

$$RVP_d(d) \quad = \quad (1+\gamma)[-df_X(d) - 1 + F_X(d) + df_X(d)] = (1+\gamma)[-1+F_X(d)]$$

bzw. für das zweite Differential $RVP_{dd}(d) = (1+\gamma)f_X(d)$.

QED

Das folgende Beispiel illustriert die spezielle Rückversicherungsprämie zu einer gegebenen Schadensverteilung.

Beispiel 5.1.1 *(Spezielle Rückversicherungsprämie)*
Für die Berechnung der Rückversicherungsprämie wird als Schadensverteilung die Nullpunkt-Paretoverteilung angenommen. Zur Berechnung der Prämie des Rückversicherers benötigt man das Integral $\int\limits_d^{\infty} xf(x)dx$, wobei $f(x)$ die Dichte der Nullpunkt-Paretoverteilung ist. Für die Verteilungsfunktion gilt $F_X(x) = 1 - \left(\frac{b+x}{b}\right)^{-\vartheta}$[7]. Somit folgt durch Differenzieren für die Dichte $f_X(x) = \frac{\vartheta}{b}\left(\frac{b+x}{b}\right)^{-\vartheta-1}$. Es gilt für das Integral $\int\limits_d^{\infty} xf(x)dx = \frac{\vartheta}{b}\int\limits_d^{\infty} x\left(1+\frac{x}{b}\right)^{-\vartheta-1} dx$. Man substituiere $t = 1+\frac{x}{b}$, somit gilt $x = (t-1)b$, $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{b}$ bzw. $dx = b\ dt$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \int\limits_d^{\infty} xf(x)dx &= \frac{\vartheta}{b}\int (t-1)bt^{-\vartheta-1}b\ dt = \vartheta b\int (t-1)t^{-\vartheta-1}dt \\ &= \vartheta b\left[\int t^{-\vartheta}dt - \int t^{-\vartheta-1}dt\right] = \vartheta b\left[\frac{1}{-\vartheta+1}t^{-\vartheta+1} - \frac{1}{-\vartheta}t^{-\vartheta}\right]^{8} \\ &= \vartheta b\left[\frac{1}{-\vartheta+1}\left(1+\frac{x}{b}\right)^{-\vartheta+1} - \frac{1}{-\vartheta}\left(1+\frac{x}{b}\right)^{-\vartheta}\right]_d^{\infty} \\ &= \vartheta b\left[\frac{1}{1-\vartheta}\left(1+\frac{x}{b}\right)^{1-\vartheta} + \frac{1}{\vartheta}\left(1+\frac{x}{b}\right)^{-\vartheta}\right]_d^{\infty} \\ &= -\vartheta b\left[\frac{1}{1-\vartheta}\left(1+\frac{d}{b}\right)^{1-\vartheta} + \frac{1}{\vartheta}\left(1+\frac{d}{b}\right)^{-\vartheta}\right]. \end{aligned}$$

[7] Vgl. Abschnitt 4.2.
[8] Für $\vartheta \neq 1$ und $\vartheta \neq 0$.

Somit ist für die Rückversicherungsprämie bei Annahme der Nullpunkt-Paretoverteilung

$$\begin{aligned} RVP(d) &= (1+\gamma)\left\{\int_d^\infty x\ dF_X(x) - d[1-F_X(d)]\right\} \\ &= (1+\gamma)\left\{-\vartheta b\left[\frac{1}{1-\vartheta}\left(1+\frac{d}{b}\right)^{1-\vartheta} + \frac{1}{\vartheta}\left(1+\frac{d}{b}\right)^{-\vartheta}\right] - d\left(\frac{b+d}{b}\right)^{-\vartheta}\right\}. \end{aligned}$$

Exemplarisch zeigt Abbildung 5.1 den Verlauf der Rückversicherungsprämie unter Verwendung der Parameter $\vartheta = 5$, $b = 16,4$ *und* $\gamma = 0,2$.

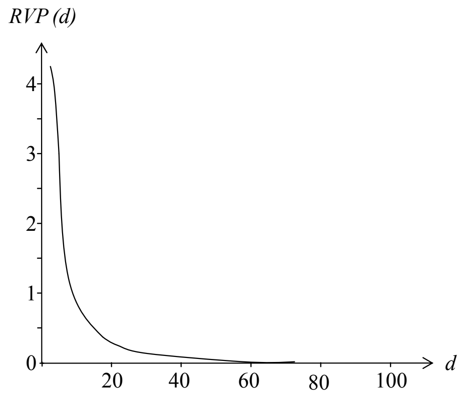


Abbildung 5.1: Rückversicherungsprämie in Abhängigkeit von der Priorität.

Die Rückversicherungsprämie sinkt dabei mit der Zunahme der Priorität. Somit wird der Deckungsschutz mit höherer Priorität kostengünstiger. Dies liegt darin begründet, dass der erwartete Rückversicherungsschaden sinkt. In diesem Fall übernimmt der Zedent selbst mehr Risiko. Abbildung 5.2 zeigt den Verlauf der ersten und zweiten Ableitung der Rückversicherungsprämie[9].

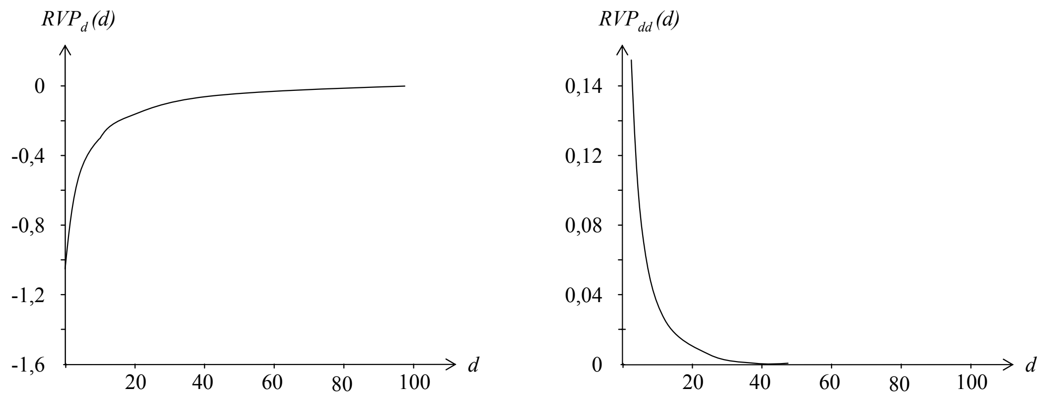


Abbildung 5.2: Ableitungen der Rückversicherungsprämie in Abhängigkeit von der Priorität.

[9]Es gilt $RVP_d(d) = -(1+\gamma)\left(\frac{b+x}{b}\right)^{-\vartheta}$ und $RVP_{dd}(d) = (1+\gamma)\frac{\vartheta}{b}\left(\frac{b+x}{b}\right)^{-\vartheta-1}$.

Die erste Ableitung ist eine negative Funktion, da die Rückversicherungsprämie monoton fallend ist. Wesentlich interessanter ist der Verlauf der zweiten Ableitung. Die zweite Ableitung ist dabei eine nicht negative monoton fallende Funktion. Daraus folgt, dass die Rückversicherungsprämie bei kleinen Prioritäten pro Versicherungseinheit stärker sinkt als bei größeren Prioritäten. Somit ist es für einen Zedenten von Interesse, auf kleine Prioritäten zu verzichten, da die Rückversicherung bei einem größeren gewählten Selbstbehalt pro Versicherungseinheit günstiger wird.

Am kostspieligsten ist die Rückversicherung jedoch bei der Vollversicherung. In diesem Fall entspricht sie dem erwarteten Schaden des Zedenten versehen mit dem Gewinnaufschlag[10] des Zessionärs.

Der folgende Satz formuliert an dieser Stelle die optimale Lösung des Rückversicherungsmodells unter Verwendung der betrachteten speziellen Rückversicherungsprämie.

Satz 5.1.2
Es sei $\Phi_B(G(d,X))$ das Präferenzfunktional eines risikoneutralen Zedenten mit Gewinnfunktion $G(d,X) = Pr - B - X - RVP(d) + RVS(d,X)$ und spezieller Rückversicherungsprämie $RVP(d) = (1+\gamma)E(RVS(d,X))$. Dann besitzt das Maximierungsproblem (5.1) die Lösung $F_X(d^*) = 1$ mit der Maximalbedingung $-\gamma f_X(d^*) < 0$[11].

Für das Maximum gilt $F_X(d^*) = 1$, dass heißt die optimale Priorität soll sich oberhalb aller Schäden befinden oder gleich dem größten Schaden sein[12]. Somit präferiert ein risikoneutraler Zedent eine Priorität, die größer oder gleich dem größten Schaden ist, der bei der unterstellten Schadensverteilung auftreten kann[13]. Ein risikoneutraler Zedent gibt damit kein Risiko an den Zessionär ab, solange der Rückversicherer einen positiven Gewinnaufschlag fordert[14].

Betrachtet man den Spezialfall einer fairen Prämie, erhält man folgendes: Es gilt $\gamma = 0$. Die zweite Ableitung des Präferenzfunktionals ist dementsprechend ebenfalls null. Der Satz liefert somit kein Maximum. Für den erwarteten Gewinn gilt $E(G(d,X)) = Pr - B - E(X) - RVP(d) + E(RVS(d)) = Pr - B - E(X)$[15] für alle d. Der erwartete Gewinn stellt faktisch eine Konstante dar und jede gewählte Priorität wäre ein Maximum. Somit ist ein risikoneutraler Entscheider bei einer fairen Rückversicherungsprämie indifferent zwischen den einzelnen Prioritäten.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass ein risikoneutraler Erstversicherer die Rückversicherung mit positivem Gewinnaufschlag ablehnt. Bei einer fairen RV-Prämie ist dieser indifferent.

---

[10] Hier wurde ein Gewinnaufschlag von 20 Prozent angenommen.

[11] Der Beweis befindet sich im Anhang C.1 S. 181.

[12] Der Wert einer Verteilungsfunktion an der Stelle x ist gleich eins, wenn x größer ist als alle Ausprägungen der Zufallsvariable oder x die größte Ausprägung der Zufallsvariable annimmt.

[13] Es sei im Folgenden die optimale Priorität d^* die kleinste Priorität für welche $F_X(d^*) = 1$ gilt. Für alle weiteren Optimierungsprobleme mit der Lösung $F_X(d^*) = a \in [0,1]$ sei die optimale Priorität $d^* \geq 0$ die kleinste Priorität, für die $F_X(d^*) = a$ gilt.

[14] Die Maximalbedingung ist für positive Gewinnaufschläge erfüllt, da die Verteilungsdichte keine negativen Werte annehmen kann, da keine negativen Schäden existieren.

[15] Im Fall einer fairen Rückversicherungsprämie ist der erwartete Rückversicherungsschaden gleich der Rückversicherungsprämie.

5.2 CVaR-Prinzip

Im Gegensatz zum Erwartungswertkriterium berücksichtigt das CVaR-Prinzip[16] das Risiko einer Handlungsalternative bzw. einer Zufallsvariable. Es ist damit für risikoaverse Entscheider geeignet und besitzt folgendes Präferenzfunktional für das Rückversicherungsmodell

$$\Phi_\alpha(G(d,X)) = CVaR_\alpha(G(d,X)) = E(G(d,X) \mid G(d,X) \leq g_\alpha(d)).$$

Das Präferenzfunktional ist in diesem Zusammenhang der untere bedingte erwartete Gewinn in Abhängigkeit von der Priorität d und dem zufälligen Schaden X. In das Präferenzfunktional fließen dabei die $\alpha \cdot 100$ % schlechtesten Ausprägungen des Gewinns ein, wobei der Risikoparameter $\alpha \in (0,1)$ individuell von jedem Entscheider gewählt wird. Für sehr kleine α bleibt somit ein großer Teil der Verteilung unberücksichtigt und es fließen nur Gewinne mit sehr kleinen Ausprägungen ein. Dies stellt hohe Risikoaversion dar. Im Grenzfall $\alpha \to 1$ dagegen nähert sich dieser untere bedingte erwartete Gewinn dem erwarteten Gewinn an und spiegelt damit geringe Risikoaversion wider.

Der folgende Satz formuliert die Lösung für das Rückversicherungsmodell unter Verwendung des CVaR-Prinzips und der speziellen Rückversicherungsprämie aus Definition 4.1.2.

Satz 5.2.1
Es sei $\Phi_\alpha(G(d,X))$ das Präferenzfunktional eines risikoaversen Zedenten mit Gewinnfunktion $G(d,X) = Pr - B - X - RVP(d) + RVS(d,X)$ und der speziellen Rückversicherungsprämie $RVP(d) = (1+\gamma)E(RVS(d,X))$. Dann besitzt das Maximierungsproblem

$$\max_d \ \Phi_\alpha(G(d,X))$$

folgende implizite Lösung

$$F_X(d^*) = \begin{cases} 1, & \text{\textit{für}} \ \ \alpha > \frac{1}{1+\gamma} \\ \frac{\gamma}{1+\gamma}, & \text{\textit{für}} \ \ \alpha < \frac{1}{1+\gamma} \end{cases} {}^{17}.$$

Es gilt $0 < \frac{1}{1+\gamma} \leq 1$, da der Gewinnaufschlag keine negativen Werte annimmt. Somit teilt die Fallunterscheidung den Risikoparameter α in zwei Gruppen ein:

- Fall $\frac{1}{1+\gamma} < \alpha < 1$:
  Diese Gruppe beinhaltet alle größeren Ausprägungen des Risikoparameters nahe eins. Das Präferenzfunktional nähert sich für $\alpha \to 1$ dem erwarteten Gewinn an. Somit stellt

[16] CVaR ist die Abkürzung für Conditional Value at Risk.

[17] Der Beweis von Satz 5.2.1 kann im Anhang C.1 S. 181 ff. nachvollzogen werden. An dieser Stelle sei auf das direkte Vorgängerresultat, die Publikation von Cai, Tan (2007), verwiesen. Die Bedingung für die optimale Lösung beim CVaR-Prinzip von Cai, Tan (2007) ist dabei zu der hier angegeben Lösung identisch. Ausgangspunkt sind jedoch unterschiedliche Zielfunktionen. Cai und Tan verwenden nicht die Gewinnfunktion eines Erstversicherers, sondern den total risk exposure. Des Weiteren wird keine Lösung für die optimale Priorität gegeben.

dieser Fall niedrige Risikoaversion dar. Es gilt dabei $F_X(d^*) = 1$[18]. Demzufolge wird keine Rückversicherung nachgefragt. Ein Entscheider mit niedriger Risikoaversion verhält sich wie ein risikoneutraler Entscheider.

- Fall $0 < \alpha < \frac{1}{1+\gamma}$:
  Diese Gruppe beinhaltet alle niedrigen Ausprägungen des Risikoparameters und bildet damit hohe Risikoaversion ab. In diesem Fall gilt $F_X(d^*) = \frac{\gamma}{1+\gamma} \in [0,1]$ und bringt für $\gamma \neq 0$ positive optimale Prioritäten hervor. Somit entscheidet sich der Zedent für die Rückversicherung. Dabei ist zu bemerken, dass die Höhe der optimalen Priorität bei der Rückversicherungswahl (hohe Risikoaversion) unabhängig vom Risikoparameter α ist. Allein der Gewinnaufschlag des Rückversicherers beeinflusst die Höhe der optimalen Priorität[19].

Der Risikoparameter α entscheidet nur darüber, ob eine Rückversicherung nachgefragt wird. Dabei setzt die Rückversicherungswahl des Zedenten für höhere Gewinnaufschläge seitens des Zessionärs erst später (bei noch höherer Risikoaversion) ein. Dies illustriert die linke Grafik von Abbildung 5.3 mit der Darstellung der Veränderung zwischen der Entscheidung für oder gegen die Rückversicherung ($\alpha = \frac{1}{1+\gamma}$) in Abhängigkeit vom Gewinnaufschlag des Rückversicherers.

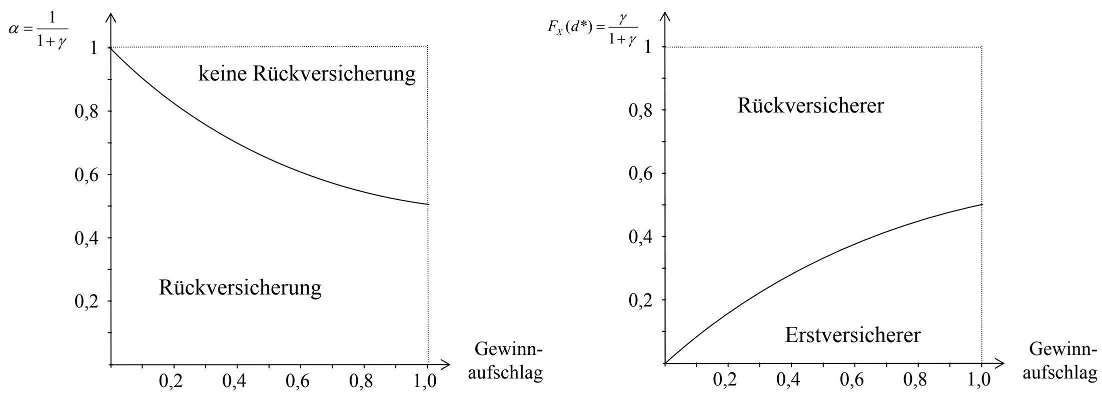


Abbildung 5.3: Links: Rückversicherungswahl in Abhängigkeit vom Gewinnaufschlag. Rechts: $F_X(d^*)$ bei Rückversicherungswahl in Abhängigkeit vom Gewinnaufschlag.

Die Fläche oberhalb der Kurve stellt alle Ausprägungen des Risikoparameters α für einen entsprechenden Gewinnaufschlag, die zur Ablehnung der Rückversicherung führen, dar. Die Fläche unterhalb beinhaltet alle Ausprägungen des Risikoparameters für die Rückversiche-

[18] Die optimale Priorität d^* ist vom Risikoparameter α abhängig. Die präzisere Schreibweise für d^* ist $d^*(\alpha)$. Aufgrund der Komplexität der Lösungen bei den noch zu verwendenden Präferenzfunktionalen wird im Folgenden auf die Angabe der Risikoparameter bei den optimalen Lösungen verzichtet. Des Weiteren tritt hier die Tendenz des CVaR-Prinzips zu Randlösungen auf, welche im diskreten Fall generell, aber im stetigen Fall im Allgemeinen nicht eintritt.

[19] An dieser Stelle sei ein Vergleich zur Erwartungsnutzentheorie vorgenommen. Grundlegendes Verhalten von optimalen Prioritäten untersuchte dabei Schlesinger (1981). Deckungsgleich ist dabei die Aussage, dass ein risikoaverser Entscheider die Versicherung präferieren, aber auch ablehnen kann. Dies ist abhängig u. a. von der Stärke der Risikoaversion und von der unterstellten Versicherungsprämie.

rungswahl. Die Kurve selbst bildet indifferentes Verhalten seitens des Entscheiders ab[20].

Die rechte Grafik von Abbildung 5.3 stellt den Verlauf der impliziten Lösung ($F_X(d^*)$) bei Rückversicherungswahl in Abhängigkeit von dem Gewinnaufschlag des Zessionärs dar. Man erkennt, dass bei höheren Gewinnaufschlägen der Wert der Verteilung an der Stelle der optimalen Priorität höher als bei kleinen Gewinnaufschlägen ist.

Ein höheres $F_X(d^*)$ bedeutet dabei, dass der Erstversicherer mehr Risiko selbst tragen möchte, denn Schäden, die oberhalb der Priorität liegen, werden vom Zessionär getragen. Es gilt, je höher die Priorität, desto mehr Risiko übernimmt der Erstversicherer.

Allgemein ist festzustellen, dass bei höheren Gewinnaufschlägen nur Entscheider mit höherer Risikoaversion die Rückversicherung wählen und dann aufgrund der höheren Kosten der Rückversicherungsprämie weniger Versicherung nachfragen als bei geringeren Gewinnaufschlägen.

Zur Veranschaulichung der gewonnenen Ergebnisse betrachte man folgendes Beispiel.

Beispiel 5.2.1 *(Rückversicherungsmodell und CVaR-Prinzip)*
Zwei Zedenten handeln nach dem CVaR-Prinzip. Der erste Zedent konstatiert für sich einen Risikoparameter $\alpha = 0,8$, der zweite Zedent ein $\alpha = 0,5$. Erst- und Rückversicherer sind sich einig, dass die Schäden X der Kunden der Nullpunkt-Paretoverteilung mit den Parametern $\vartheta = 5$ und $b = 16,4$[21] folgen. Der Rückversicherer fordert für seine Aufwendungen einen Gewinnaufschlag von 40 Prozent.

Für den ersten Zedenten gilt $\alpha = 0,8 > \frac{1}{1+0,4} = 0,71$. Demzufolge lehnt dieser die Rückversicherung ab. Für den zweiten Zedenten ist $\alpha = 0,5 < \frac{1}{1+0,4} = 0,71$ und damit $F_X(d^*) = \frac{\gamma}{1+\gamma} = 0,29$. Für die inverse Nullpunkt-Paretoverteilung gilt

$$F_X^{-1}(x) = b \cdot (1-x)^{-\frac{1}{\vartheta}} - b.$$

Somit folgt für die Inverse bei Verwendung der entsprechenden Parameter $F_X^{-1}(0,29) = 1,14$. In diesem Fall wird der zweite Zedent einen Rückversicherungsvertrag mit einem Selbstbehalt von 1,14 Millionen Euro mit dem Rückversicherer vereinbaren.

Der Rückversicherer senkt seinen Gewinnaufschlag auf 20 %. Damit gilt $\frac{1}{1+\gamma} = 0,8\overline{3}$. In diesem Fall entscheiden sich beide Erstversicherer für die Rückversicherung, und zwar für die Priorität von jeweils 0,61 Millionen Euro.

Die nächsten Ausführungen betrachten den Spezialfall einer fairen Rückversicherungsprämie. Es gilt damit für den Gewinnaufschlag des Rückversicherers $\gamma = 0$. Aus der Lösung von Satz 5.2.1 folgt für $\gamma = 0$

$$F_X(d^*) = \begin{cases} 1, & \text{für } \alpha > 1 \\ 0, & \text{für } \alpha < 1 \end{cases}.$$

[20] In diesem Fall kann sich der Zedent nicht zwischen der Wahl und der Ablehnung der Rückversicherung entscheiden.

[21] Der Skalenparameter bezieht sich auf 1 Million Euro.

Da α nur Werte kleiner eins annehmen kann, fällt die Lösung auf den zweiten Fall zusammen und es gilt $F_X(d^*) = 0$. Bei einer fairen Rückversicherungsprämie entscheidet sich jeder Zedent, der das CVaR-Prinzip verwendet, für eine Vollversicherung. Ob ein Zedent niedrige oder hohe Risikoaversion besitzt, spielt dabei keine Rolle[22].

Ist für einen Entscheider seine Risikoeinstellung von Interesse, so muss er seinen Risikoparameter $\tilde{\alpha}$ bzgl. gewählter Rückversicherungsverträge bestimmen. Dies kann auf folgende Weise geschehen.

Bestimmung des Risikoparameters und Möglichkeiten der Entscheidungsfindung

1. Der Erstversicherer hat eine Rückversicherung mit der Priorität $\tilde{d}_X$ in Anspruch genommen. Die Schäden X folgen der Verteilung $F_X(x)$. Dann gilt $F_X(\tilde{d}_X) = \frac{\gamma_X}{1+\gamma_X}$. Damit kann der Gewinnaufschlag des Zessionärs γ_X für diesen Vertrag durch $\gamma_X = \frac{F_X(\tilde{d}_X)}{1-F_X(\tilde{d}_X)}$[23] bestimmt werden. Für den Risikoparameter $\tilde{\alpha}$ kann somit folgende Ungleichung festgehalten werden $\tilde{\alpha} < \frac{1}{1+\gamma_X}$.

   Durch die Ablehnung und Wahl mehrerer Rückversicherungsverträge erhält man mehrere dieser Ungleichungen, mit denen der Risikoparameter $\tilde{\alpha}$ genauer abgeschätzt werden kann.

2. Die einfachere Art, den Risikoparameter $\tilde{\alpha}$ zu bestimmen, ist der Tatsache geschuldet, dass dieser einen direkten Zusammenhang zum Gewinnaufschlag des Rückversicherers aufweist. Fragt man den Zedenten, welchen Gewinnaufschlag des Zessionärs $\tilde{\gamma}$ er gerade noch akzeptiert, so kann daraus der Risikoparameter $\tilde{\alpha} = \frac{1}{1+\tilde{\gamma}}$ berechnet werden.

   Wenn der geforderte Gewinnaufschlag des Rückversicherers bei einem neu angebotenen Rückversicherungsvertrag kleiner oder gleich dem Grenzgewinnaufschlag $\tilde{\gamma}$ ist, dann wählt der Zedent die Rückversicherung, anderenfalls lehnt er diese ab.

3. Es wird der Sachverhalt betrachtet, dass der Erstversicherer einen Rückversicherungsvertrag mit einem Gewinnaufschlag des Zessionärs γ_X in Anspruch genommen hat. Dabei wurden alle Schäden, die aus einem Versicherungsprodukt des Zedenten entstehen können, durch den Rückversicherungsvertrag versichert. Es wird angenommen, dass die Schäden der Verteilung F_X folgen. Der Zedent möchte ein anderes Versicherungsprodukt rückversichern. Dabei werden Schäden mit der Verteilung F_Z angenommen. Der Zessionär fordert für die Absicherung dieser Schäden aufgrund eines ähnlichen Schadenstyps den gleichen Gewinnaufschlag. Dann kann der Zedent seine Priorität wie folgt berechnen

$$\tilde{d}_Z = F_Z^{-1}\left(\frac{\gamma_X}{1+\gamma_X}\right) = F_Z^{-1}\left(F_X(\tilde{d}_X)\right).$$

[22] Im Fall der fairen Prämie bei Verwendung des CVaR-Prinzips tritt auch im stetigen Fall die Tendenz zu Randlösungen auf, die sonst nur generell im diskreten Fall vorliegt.

[23] Folgt durch Umstellung von $F_X(\tilde{d}_X) = \frac{\gamma_X}{1+\gamma_X}$ nach γ_X.

4. Man nehme an, dass der Rückversicherer bei Versicherung eines zweiten Versicherungsproduktes des Erstversicherers einen anderen Gewinnaufschlag $\gamma_{_Z}$ verlangt. Der Zedent wählt die Rückversicherung, wenn $\gamma_{_Z} \leq \tilde{\gamma}$ ist. Die Priorität wird in diesem Fall mit

$$\tilde{d}_Z = F_Z^{-1}\left(\frac{\gamma_{_Z}}{1+\gamma_{_Z}}\right)$$

bestimmt. Im Fall $\gamma_{_Z} > \tilde{\gamma}$ lehnt er die Rückversicherung ab.

Im Folgenden soll das Rückversicherungsmodell auf hybride Entscheidungsprinzipien angewendet werden. Mit diesen ist es möglich, auch risikofreudige Entscheider zu modellieren. Begonnen wird dabei mit dem Entscheidungsprinzip $\Phi_{\alpha,\lambda}(G(d,X))$.

5.3 Hybrides Entscheidungsprinzip $\Phi_{\alpha,\lambda}(G(d,X))$

Ein in diesem Rahmen vorgestelltes Entscheidungspräferenzfunktional stellt die Konvexkombination aus Erwartungswert und unterem bedingten Erwartungswert dar. Es gilt für das Rückversicherungsproblem nach Formel (2.2)

$$\Phi_{\alpha,\lambda}(G(d,X)) = \frac{1-\lambda}{1-\alpha}E(G(d,X)) + \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}E(G(d,X)|G(d,X) \leq g_\alpha(d)),$$

wobei $g_\alpha(d)$ das α-Gewinnquantil bezeichne. Das Präferenzfunktional drückt risikoneutrales Verhalten für die Gleichheit der Risikoparameter λ und α aus. Für $\lambda < \alpha$ spiegelt es risikofreudiges und für $\lambda > \alpha$ risikoaverses Verhalten wider[24]. Das Präferenzfunktional bietet somit den Vorteil, alle drei Risikoeinstellungen abbilden zu können.

Die Anwendung des Präferenzfunktionals $\Phi_{\alpha,\lambda}(G(d,X))$ auf das Rückversicherungsproblem formuliert der Satz 5.3.1. Dabei wird das Präferenzfunktional maximiert bzgl. der Priorität unter Verwendung einer allgemeinen nicht-linearen Rückversicherungsprämie.

Satz 5.3.1
Es sei $\Phi_{\alpha,\lambda}(G(d,X))$ das Präferenzfunktional eines Zedenten mit Gewinnfunktion $G(d,X) = Pr - B - X - RVP(d) + RVS(d,X)$. Dann besitzt das Maximierungsproblem

$$\max_d \; \Phi_{\alpha,\lambda}(G(d,X))$$

folgende implizite Lösung

$$F_X(d^*) = \begin{cases} 1 + \frac{\alpha}{\lambda}RVP_d(d^*), \\ \text{für } \lambda \geq -RVP_d(d^*) \text{ und } -RVP_{dd}(d^*) + \frac{\lambda}{\alpha}f_X(d^*) < 0 \\ \\ \frac{1-\alpha}{1-\lambda}[1 + RVP_d(d^*)], \\ \text{für } \lambda < -RVP_d(d^*) \text{ und } -RVP_{dd}(d^*) + \frac{1-\lambda}{1-\alpha}f_X(d^*) < 0 \end{cases}.$$

[24] Vgl. dazu Abschnitt 2.4.1.2.

Die implizite Lösung unterteilt sich dabei in zwei Fälle. Zum einen in den Fall $\lambda \geq -RVP_d(d^*)$ mit impliziter Lösung

$$F_X(d^*) = 1 + \frac{\alpha}{\lambda} RVP_d(d^*)^{25}$$

und Maximalbedingung $-RVP_{dd}(d^*) + \frac{\lambda}{\alpha} f_X(d^*) < 0$ und zum anderen in den Fall $\lambda < -RVP_d(d^*)$ mit impliziter Lösung

$$F_X(d^*) = \frac{1-\alpha}{1-\lambda}[1 + RVP_d(d^*)]$$

und Maximalbedingung $-RVP_{dd}(d^*) + \frac{1-\lambda}{1-\alpha} f_X(d^*) < 0$. Der Beweis von Satz 5.3.1 kann im Anhang C.1 S. 184 f. nachvollzogen werden.

Die Verwendung der allgemeinen nicht-linearen Rückversicherungsprämie ermöglicht zum einen, verschiedene Rückversicherungsprämienstrukturen zu unterstellen[26] und zum anderen, die Analogie zum Newsvendor Modell mit nicht-linearer Kostenfunktion herstellen zu können. Letzteres soll im Folgenden näher betrachtet werden.

Analogie zum Newsvendor Modell mit nicht-linearer Kostenfunktion und Risikopräferenzen

Das Präferenzfunktional $\Phi_{\alpha,\lambda}$ wurde bereits auf das Newsvendor Modell[27] mit linearer[28] und nicht-linearer[29] Kostenfunktion angewendet. Die Lösung des Rückversicherungsproblem soll im Folgenden aus der Lösung des Newsvendor Modells mit nicht-linearer Kostenfunktion und Risikopräferenzen abgeleitet werden.

Für das Präferenzfunktional des Newsvendors gilt

$$\Phi_{\alpha,\lambda}(G(y,X)) = \frac{1-\lambda}{1-\alpha} E(G(y,X)) + \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha} E(G(y,X)|G(y,X) \leq g_\alpha(y)).$$

Da die $\alpha \cdot 100$ % kleinsten Gewinne[30] bei den $\alpha \cdot 100$ % kleinsten Nachfragen[31] realisiert werden, kann

$$E(G(y,X)|G(y,X) \leq g_{\alpha X}(y)) = E(G(y,X)|X \leq x_\alpha(y))$$

geschrieben werden. Dabei bezeichne $x_\alpha(y)$ das α-Quantil der Nachfragen. Damit wird folgendes Maximierungsproblem gelöst

$$\max_y \frac{1-\lambda}{1-\alpha} E(G(y,X)) + \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha} E(G(y,X)|X \leq x_\alpha(y)).$$

[25] Die optimale Priorität d^* ist von den Risikoparametern α und λ abhängig. Folglich müsste man für d^* präziser Weise $d^*(\alpha,\lambda)$ schreiben. Um den Umfang der Formeln nicht weiter zu vergrößern, wird zur übersichtlicheren Darstellung der Formeln auf die Angabe der Risikoparameter bei den optimalen Lösungen verzichtet.

[26] Vgl. bzgl. verschiedener Rückversicherungsstrukturen Abschnitt 4.1. In dieser Arbeit wird nur die spezielle Rückversicherung aus Definition 4.1.2 Anwendung finden.

[27] Vgl. Cachon, Terwiesch (2006), Kap. 9.4 oder Chopra, Meindl (2004), Kap. 12.

[28] Vgl. bzgl. Newsvendor Modell mit Risikopräferenzen und linearer Kostenfunktion Jammernegg, Kischka (2005b).

[29] Vgl. Abschnitt 3.4.

[30] Das sind die Gewinne, die sich unterhalb des α-Gewinnquantils befinden.

[31] Das sind die Nachfragen, die sich unterhalb des α-Quantils der Nachfrage befinden.

Dagegen lautet das Präferenzfunktional für das Rückversicherungsproblem

$$\Phi_{\alpha,\lambda}(G(d,X)) = \frac{1-\lambda}{1-\alpha}E(G(d,X)) + \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}E(G(d,X)|G(d,X) \leq g_\alpha(d)),$$

wobei

$$E(G(d,X)|G(d,X) \leq g_\alpha(d)) = E(G(d,X)|X \geq x_{1-\alpha}(d))$$

gilt[32]. Es wird also folgendes Maximierungsproblem gelöst

$$\max_d \frac{1-\lambda}{1-\alpha}E(G(d,X)) + \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}E(G(d,X)|X \geq x_{1-\alpha}(d)), \tag{5.2}$$

wobei $x_{1-\alpha}(d)$ das $(1-\alpha)$-Schadensquantil bezeichne. Man erkennt, dass es sich nicht um das gleiche Optimierungsproblem handelt. Das Optimierungsproblem des Newsvendors beinhaltet einen unteren bedingten Erwartungswert, das Optimierungsproblem des Zedenten dagegen einen oberen bedingten Erwartungswert. Dies ist begründet in der Tatsache, dass Nachfragen und Schäden eine komplimentäre Wirkung haben. Große Nachfragen sind positiv für einen Entscheider, große Schäden sind es dagegen nicht. Dies ist auch aus den Gewinnfunktionen erkennbar. So ist die Gewinnfunktion des Newsvendors in Abhängigkeit von der Nachfrage bei fester Bestellmenge eine monoton wachsende Funktion. Die Gewinnfunktion des Zedenten in Abhängigkeit von dem Schaden bei fester Priorität dagegen eine monoton fallende Funktion. Dies illustrieren die Abbildungen 5.4 und 5.5.

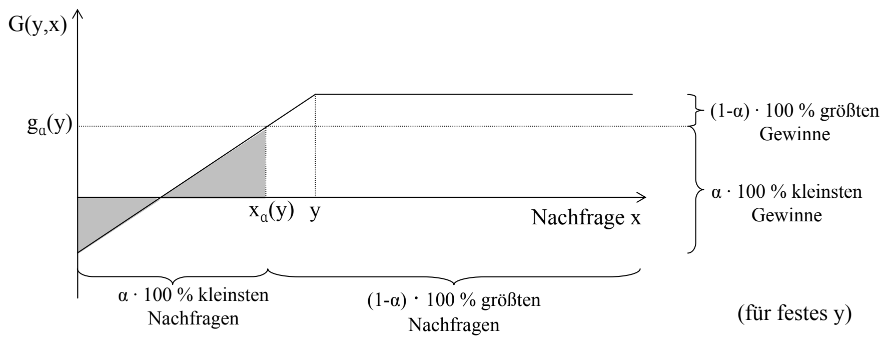


Abbildung 5.4: Gewinnfunktion des Newsvendors mit α-Gewinnquantil.

Betrachtet man das Newsvendor Modell mit nicht-linearer Kostenfunktion und dem Präferenzfunktional $\Phi_{\beta,\delta}$, so gilt

$$\Phi_{\beta,\delta}(G(y,X)) = \frac{1-\delta}{1-\beta}E(G(y,X)) + \frac{\delta-\beta}{1-\beta}E(G(y,X)|G(y,X) \geq g_{1-\beta}(y)).$$

Die $\beta{\cdot}100$ % größten Gewinne werden bei den $\beta{\cdot}100$ % größten Nachfragen, also bei Nachfragen oberhalb des $1-\beta$-Quantils der Nachfragen, realisiert. Somit ergibt sich

$$E(G(y,X)|G(y,X) \geq g_{1-\beta}(y)) = E(G(y,X)|X \geq x_{1-\beta}(y)).$$

[32]Die $\alpha \cdot 100$ % kleinsten Gewinne werden bei den $\alpha \cdot 100$ % größten Schäden realisiert werden. Somit befinden sich unterhalb des Schadensquantils $(1-\alpha) \cdot 100$ % der Schäden. Es ist damit das $(1-\alpha)$-Schadensquantil.

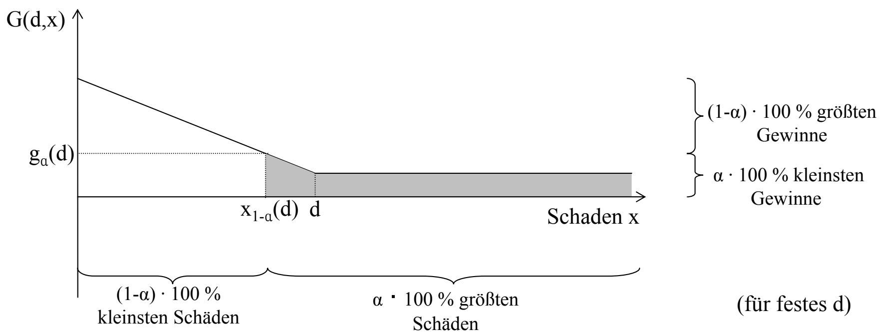


Abbildung 5.5: Gewinnfunktion des Erstversicherers mit α-Gewinnquantil.

Das zugehörige Maximierungsproblem lautet

$$\max_y \frac{1-\delta}{1-\beta} E(G(y,X)) + \frac{\delta-\beta}{1-\beta} E(G(y,X)|X \geq x_{1-\beta}(y)).$$

Dieses Maximierungsproblem ist entsprechend äquivalent zum Maximierungsproblem (5.2) des Rückversicherungsproblems. Die Analogie[33] zwischen dem Newsvendor und dem Rückversicherungsmodell stellt Tabelle 5.2 dar.

Newsvendor Modell	Rückversicherungsmodell
Nachfrage X	Schaden X
Bestellmenge y	Priorität d
Kostenfunktion k	RV-Prämie RVP
k_y	RVP_d
k_{yy}	RVP_{dd}
Verkaufspreis p	-1
Rückgabepreis z	0
$\beta = 1-\alpha$	α
$\delta = 1-\lambda$	λ
$\Phi_{\beta,\delta} = \Phi_{1-\alpha,1-\lambda}$	$\Phi_{\alpha,\lambda}$

Tabelle 5.2: Analogie zwischen dem Newsvendor- und dem Rückversicherungsmodell mit Risikopräferenzen.

Mit Hilfe dieser Analogie kann die Newsvendorlösung unter Verwendung des Präferenzfunktionals $\Phi_{\beta,\delta}$ in die Lösung des Rückversicherungsproblems für das komplementäre Präferenzfunktional $\Phi_{\alpha,\lambda}$ überführt werden[34].

[33]Die ersten Analogien sind bereits aus Abschnitt 5.1 bekannt und wurden aus der Gewinnfunktion abgeleitet. Die letzten drei Analogien ergeben sich aus der Anwendung von Risikopräferenzen auf komplementäre monotone Gewinnfunktionen.

[34]Die direkte Übertragung der Lösungen befindet sich im Anhang C.1 S. 186.

Der sich im Folgenden anschließende Untersuchungsgegenstand ist die Betrachtung des Rückversicherungsmodells unter Verwendung des Präferenzfunktionals $\Phi_{\alpha,\lambda}$ mit der speziellen Rückversicherungsprämie aus Definition 4.1.2.

Rückversicherungsproblem mit spezieller Rückversicherungsprämie

Der folgende Satz formuliert die Lösung des Rückversicherungsmodells für die spezielle Rückversicherungsprämie.

Satz 5.3.2
Es sei $\Phi_{\alpha,\lambda}(G(d,X))$ das Präferenzfunktional eines Zedenten mit Gewinnfunktion $G(d,X) = Pr - B - X - RVP(d) + RVS(d,X)$ und der speziellen Rückversicherungsprämie $RVP(d) = (1+\gamma)E(RVS(d,X))$. Dann besitzt das Maximierungsproblem

$$\max_d \ \Phi_{\alpha,\lambda}(G(d,X))$$

folgende implizite Lösung

$$F_X(d^*) = \begin{cases} 1, & \text{für } 1+\gamma > \frac{\lambda}{\alpha} \\ \frac{\gamma(1-\alpha)}{(1-\alpha)(1+\gamma)-(1-\lambda)}, & \text{für } 1+\gamma < \frac{\lambda}{\alpha} \end{cases} {}^{35}.$$

Die Rückversicherung wird für $F_X(d^*) = 1$ nicht gewählt. Die Bedingung dafür lautet $1+\gamma > \frac{\lambda}{\alpha}$. Für $\lambda \leq \alpha$ ist die Bedingung immer erfüllt. In diesem Fall ist die rechte Seite der Bedingung kleiner gleich eins. Diese Risikoparameterkombinationen bilden einen risikoneutralen[36] bzw. einen risikofreudigen Zedenten ab. Demzufolge entscheidet sich ein risikofreudiger bzw. ein risikoneutraler Zedent gegen die Rückversicherung.

Die Grenze $(1+\gamma = \frac{\lambda}{\alpha})$ zwischen beiden optimalen Lösungen splittet damit den Bereich der α-λ-Kombinationen für Risikoaversion in zwei Bereiche auf. Dabei beinhaltet ein Bereich die α-λ-Kombinationen der niedrigen und ein Bereich die α-λ-Kombinationen der hohen Risikoaversion. Im Bereich der niedrigen Aversion gilt zwar $\lambda > \alpha$, dennoch ist die Ungleichung $1+\gamma > \frac{\lambda}{\alpha}$ erfüllt. Demzufolge lehnt ein Zedent mit niedriger Risikoaversion die Rückversicherung ab.

Im Fall hoher Risikoaversion dagegen gilt

$$F_X(d^*) = \frac{\gamma(1-\alpha)}{(1-\alpha)(1+\gamma)-(1-\lambda)} \in [0, 1-\alpha[.$$

Daraus resultieren optimale Prioritäten, die kleiner sind als der größte mögliche Schaden der angenommenen Schadensverteilung. Ein hochrisikoaverser Zedent entscheidet sich also für die

[35] Der Beweis von Satz 5.3.2 kann im Anhang C.1 S. 184 ff. nachvollzogen werden.
[36] Im Fall der Risikoneutralität gilt die Gleichheit der Risikoparameter α und λ.

Rückversicherung[37]. Die Abbildung 5.6[38] stellt die α-λ-Kombinationen für Riskofreude, Risikoneutralität und Risikoaversion als auch die Grenze[39] zwischen der Akzeptanz und der Ablehnung der Rückversicherung im Risikopräferenzraum dar.

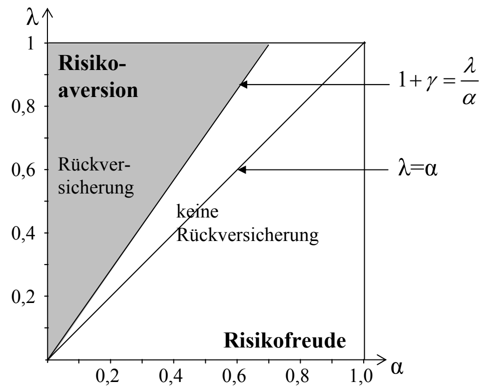


Abbildung 5.6: Risikopräferenzraum bei $\Phi_{\alpha,\lambda}(G(d,X))$.

Die Hauptdiagonale ($\alpha = \lambda$) des Risikopräferenzraums bildet dabei Risikoneutralität ab. Die α-λ-Kombinationen unterhalb dieser Hauptdiagonalen sind die Kombinationen für Risikofreude und oberhalb die für Risikoaversion. Die Grenze der optimalen Lösungen ($1 + \gamma = \frac{\lambda}{\alpha}$) teilt die Risikoaversion in zwei Teile. Oberhalb dieser Grenze wird die Rückversicherung akzeptiert mit der optimalen impliziten Lösung

$$F_X(d^*) = \frac{\gamma(1-\alpha)}{(1-\alpha)(1+\gamma) - (1-\lambda)}.$$

Unterhalb dieser Grenze dagegen wird die Rückversicherung abgelehnt mit $F_X(d^*) = 1$.

Der Gewinnaufschlag des Rückversicherers beeinflusst die Grenze zwischen Akzeptanz und Ablehnung der Rückversicherung. Die Grenze für verschiedene Gewinnaufschläge stellt Abbildung 5.7 dar.

Die Grenze zwischen Akzeptanz und Ablehnung der Rückversicherung verschiebt sich in Bereiche höherer Risikoaversion mit der Zunahme des Gewinnaufschlages des Rückversicherers. Dass heißt, ein Zedent muss für die Akzeptanz des Vertrages mit steigendem Gewinnaufschlag

---

[37] Ein risikoaverser Entscheider wählt also u. U. die (Rück-)Versicherung. Die zentrale Aussage des Arrow-Theorems (1963) war, dass ein risikoaverser Entscheider, wenn er die (Rück-)Versicherung präferiert, alle Schäden oberhalb einer optimalen Priorität versichern lassen möchte. Bzgl. Erwartungsnutzentheorie im Versicherungskontext vgl. Schlesinger (1981). Kernaussage ist, dass ein risikoaverser Entscheider die Versicherung präferieren, aber auch ablehnen kann. Dies ist abhängig u. a. von der Stärke der Risikoaversion, welche durch die Nutzenfunktion abgebildet wird und der unterstellten Versicherungsprämie. Des Weiteren führt eine risikoaversere Nutzenfunktion zu einer niedrigeren Priorität. Ebenso führen Risikoparameter beim hybriden Modell, welche eine hohere Risikoaversion abbilden, zu einer niedrigeren Priorität und somit zu mehr Risikotransfer.

[38] Für den Risikopräferenzraum wurde ein Gewinnaufschlag seitens des Rückversicherers von 40 Prozent angenommen.

[39] An der Grenze zwischen Akzeptanz und Ablehnung der Rückversicherung ist der Zedent indifferent zwischen den optimalen Lösungen.

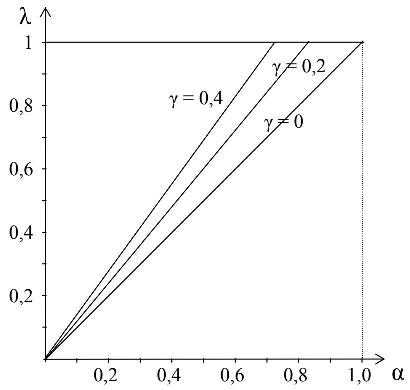


Abbildung 5.7: Risikopräferenzraum in Abhängigkeit vom Gewinnaufschlag bei $\Phi_{\alpha,\lambda}(G(d,X))$.

eine höhere Riskoaversion besitzen. Bei einer fairen Rückversicherungsprämie dagegen bilden die α-λ-Kombinationen der Risikoneutralität die Grenze zwischen den optimalen Lösungen.

Besonders bei Rückversicherungswahl ist die Höhe der optimalen Priorität von Interesse. Dies illustriert Abbildung 5.8 für verschiedene gegebene $\widetilde{\alpha}$.

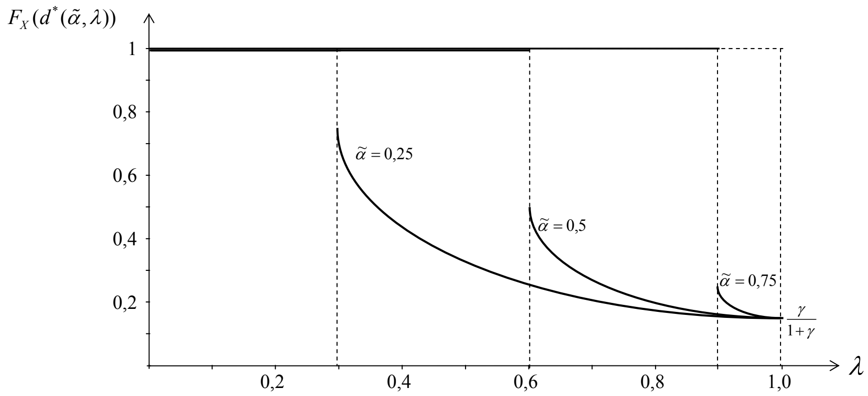


Abbildung 5.8: Optimale Priorität bei $\Phi_{\widetilde{\alpha},\lambda}(G(d,X))$.

Es wird der Verlauf des Wertes der Verteilung der optimalen Priorität $F_X(d^*(\tilde{\alpha},\lambda))$[40] für gegebene $\tilde{\alpha}$ und $\gamma = 0,2$ in Abhängigkeit vom Risikoparameter λ dargestellt. Kleine Ausprägungen des Risikoparameters λ spiegeln dabei Risikofreude und hohe Ausprägungen Risikoaversion wider. Für Risikofreude ($\lambda \to 0$) ist $F_X(d^*(\tilde{\alpha},\lambda)) = 1$[41]. An der Stelle, an welcher die Bedingung für die Akzeptanz der Rückversicherung erstmals erfüllt ist, beginnt $F_X(d^*(\tilde{\alpha},\lambda))$ vom Wert $1 - \widetilde{\alpha}$ zu fallen, bis diese im Punkt der höchsten Risikoaversion ($\lambda = 1$) den Wert $\frac{\gamma}{1+\gamma}$ erreicht. Damit ist eine Vollversicherung nur für eine faire Rückversicherungsprämie rea-

[40] Die optimale Priorität ist abhängig von den Risikoparametern. Auf die Darstellung dieser Abhängigkeit wird aber im Allgemeinen verzichtet.
[41] Die Rückversicherung wird abgelehnt.

lisierbar. Zusätzlich wird bei gleichem Risikoparameter λ für kleinere Risikoparameter α[42] eine niedrigere Priorität[43] und damit verbunden eine größere Abdeckung der Schäden durch den Rückversicherer nachgefragt.

Die Abbildung 5.9 stellt den Verlauf der impliziten optimalen Lösung $F_X(d^*(\tilde{\alpha}, \lambda))$ für verschiedene Gewinnaufschläge des Rückversicherers dar. Dafür wurde $\widetilde{\alpha} = 0,25$ gewählt.

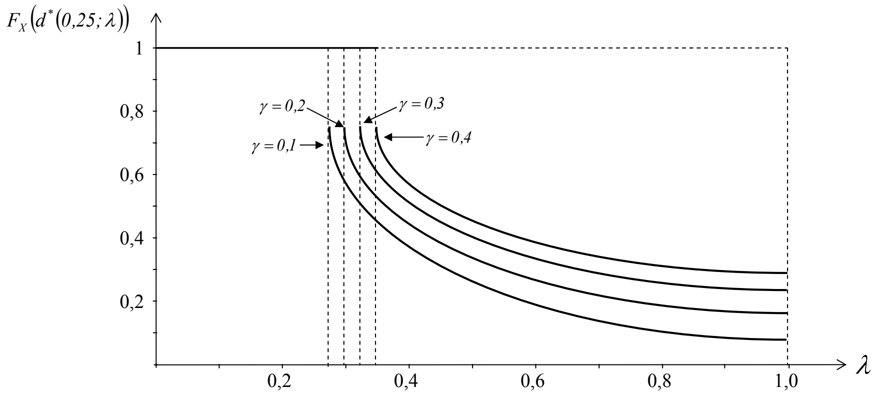


Abbildung 5.9: Optimale Priorität bei $\Phi_{\alpha,\lambda}(G(d, X))$.

Die Grenze zwischen Akzeptanz und Ablehnung der Rückversicherung verschiebt sich zu höheren Werten des Risikoparameters λ mit der Zunahme des Gewinnaufschlages des Rückversicherers. Dabei bleibt der Wert der Verteilung von der optimalen Priorität bei Rückversicherungswahl an der Grenze konstant. Im Punkt höchster Risikoaversion dagegen unterscheiden sich die Werte. Je höher der Gewinnaufschlag, desto größer ist $F_X(d^*(0,25; 1))$ und somit auch die optimale Priorität $d^*(0,25; 1)$. Dass heißt, je höher der Gewinnaufschlag, desto weniger Deckungsschutz kauft ein Zedent ein. Dieser Sachverhalt gilt auch allgemein für beliebige Risikoparameter λ. Es gilt somit für festes $\tilde{\alpha}$ und $\widetilde{\lambda}$:

$$F_X(d^*(\tilde{\alpha}, \widetilde{\lambda}, \gamma_1)) \leq F_X(d^*(\tilde{\alpha}, \widetilde{\lambda}, \gamma_2))^{44}$$

für $\gamma_1 < \gamma_2$.

Die gewonnenen Ergebnisse sollen durch ein Beispiel verdeutlicht werden. Es wird dabei wieder die Nullpunkt-Paretoverteilung unterstellt.

---

[42] Wenn der Risikoparameter α gegen null geht, steigt die Risikoaversion an.

[43] Für festes λ gilt $F_X(d^*(\alpha_1, \lambda)) \leq F_X(d^*(\alpha_2, \lambda))$ für $\alpha_1 < \alpha_2$.

[44] Zur Erläuterung des Zusammenhangs wurde die Abhängigkeit der optimalen Priorität um die Komponente des Gewinnaufschlages erweitert. Diese Erweiterung wird aber im Folgenden wieder fallen gelassen um das Arbeiten mit den Lösungen zu erleichtern.

Beispiel 5.3.1 *(Rückversicherungsmodell bei Präferenzfunktional $\Phi_{\alpha,\lambda}$)*
Es werden vier Zedenten mit folgenden α-λ-Kombinationen betrachtet: Es wird angenommen,

Zedent	α	λ
1	0,25	0,5
2	0,25	0,65
3	0,5	0,5
4	0,5	0,65

Tabelle 5.3: Risikoparameter der Zedenten für Beispiel 5.3.1.

dass die Schäden der Nullpunkt-Paretoverteilung mit den Parametern $\vartheta = 5$ und $b = 16,4$ folgen. Jeder dieser Zedenten verhandelt mit zwei Rückversicherern. Der Rückversicherer 1 verlangt dabei einen Gewinnaufschlag von 20 und der Rückversicherer 2 von 40 Prozent auf seinen erwarteten Rückversicherungsschaden. Die folgenden Tabellen geben für diese Zedenten die optimale Priorität[45] für die zwei Gewinnaufschläge der Rückversicherer wieder:

Zedent	α	λ	RV-Wahl	$F_X(d^*)$	d^*
1	0,25	0,5	Ja	0,545	2,8
2	0,25	0,65	Ja	0,429	1,94
3	0,5	0,5	Nein	–	–
4	0,5	0,65	Nein	–	–

Tabelle 5.4: Optimale Prioritäten für Beispiel 5.3.1 mit $\gamma = 0,4$.

Zedent	α	λ	RV-Wahl	$F_X(d^*)$	d^*
1	0,25	0,5	Ja	0,375	1,62
2	0,25	0,65	Ja	0,273	1,08
3	0,5	0,5	Nein	–	–
4	0,5	0,65	Ja	0,4	1,76

Tabelle 5.5: Optimale Prioritäten für Beispiel 5.3.1 mit $\gamma = 0,2$.

Aus den Tabellen ist ersichtlich, dass der Zedent 3 in beiden Fällen ($\gamma = 0,2$; $\gamma = 0,4$) die Rückversicherungen ablehnt. Er besitzt identische Risikoparameter, ist somit risikoneutral und risikoneutrale Zedenten wählen keine Rückversicherung. Die Zedenten 1 und 2[46] wählen in beiden Fällen die Rückversicherung. Dabei präferiert Zedent 1 immer eine höhere Priorität als Zedent 2. Zedent 1 möchte also weniger Deckungsschutz einkaufen. Dies ist verständlich, da Zedent 1 zwar risikoavers ist, aber eine niedrigere Aversion als Zedent 2 besitzt. Der Zedent 4[47]

[45] Optimale Priorität in Millionen Euro.
[46] Zedent 1 und 2 sind risikoavers. Die Stärke der Risikoaversion ist dabei unterschiedlich.
[47] Zedent 4 ist ebenfalls risikoavers, besitzt jedoch eine geringere Aversion als Zedent 1. Diese reicht bei einem Gewinnaufschlag von 40 Prozent nicht mehr aus, um den Rückversicherungsschutz in Anspruch zu nehmen.

entscheidet sich bei niedrigen Gewinnaufschlag für und bei hohen Gewinnaufschlag gegen die Rückversicherung. Bei der Rückversicherungswahl ($\gamma = 0,2$) entscheidet er sich im Vergleich zu Zedent 1 und 2 für eine höhere Priorität.

Im Folgenden sollen aus der Lösung von Satz 5.3.2 Spezialfälle abgeleitet werden.

Spezialfälle

1. Faire Rückversicherungsprämie:
   Für die faire Rückversicherungsprämie gilt $\gamma = 0$, damit folgt für die Lösung des Rückversicherungsproblems aus Satz 5.3.2
   $$F_X(d^*) = \begin{cases} 1, & \text{für } 1 > \frac{\lambda}{\alpha} \\ 0, & \text{für } 1 < \frac{\lambda}{\alpha} \end{cases} .$$
   Somit fragt ein risikoaverser Zedent ($\lambda > \alpha$) die Vollversicherung nach, ein risikofreudiger Zedent ($\lambda < \alpha$) lehnt dagegen die Versicherung seines Schadens ab. Ein risikoneutraler Zedent ist indifferent.

2. Erwartungswertkriterium:
   Das Erwartungswertkriterium ist als Spezialfall im Präferenzfunktional $\Phi_{\alpha,\lambda}$ für identische Risikoparameter enthalten. Die Lösung fällt in diesem Fall auf den ersten Fall ($1 + \gamma > \frac{\lambda}{\alpha}$) zusammen und es gilt $F_X(d^*) = 1$ für $\gamma > 0$.

3. CVAR-Prinzip:
   Das CVAR-Prinzip ist für $\lambda = 1$ im Präferenzfunktional $\Phi_{\alpha,\lambda}$ als Spezialfall enthalten. Es gilt für die Lösung von Satz 5.3.2 mit $\lambda = 1$
   $$F_X(d^*) = \begin{cases} 1, & \text{für } 1+\gamma > \frac{1}{\alpha} \\ \frac{\gamma(1-\alpha)}{(1-\alpha)(1+\gamma)-(1-1)}, & \text{für } 1+\gamma < \frac{1}{\alpha} \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{für } \alpha > \frac{1}{1+\gamma} \\ \frac{\gamma}{1+\gamma}, & \text{für } \alpha < \frac{1}{1+\gamma} \end{cases} .$$
   Die Lösung von Satz 5.3.2 fällt für $\lambda = 1$ somit auf die Lösung von Satz 5.2.1 zusammen.

Die folgenden Ausführungen sollen die Möglichkeit aufzeigen, die kompatiblen Risikoparameter zu einer bereits gewählten nicht-proportionalen Rückversicherung zu bestimmen[48]. Dabei impliziert der Zedent das α-λ-Entscheidungsprinzip. Die bestimmten kompatiblen Risikoparameter werden anschließend zur Entscheidungsunterstützung für einen anderen nicht-proportionalen Rückversicherungsvertrag genutzt.

Bestimmung der Risikoparameter

Für die Schäden X einer Versicherungssparte eines Zedenten wird die Verteilung F_X angenommen. Der Zedent wählt bzgl. X einen nicht-proportionalen Rückversicherungsvertrag. Der Rückversicherer verlangt dabei den Gewinnaufschlag γ_X. Weiterhin kennt der Zedent für sich folgende zwei Prioritäten:

[48] In der Entscheidungstheorie ist es üblich, die Risikoparameter zu einem Entscheidungsprinzip als gegeben anzusehen. Im Allgemeinen ist die Risikopräferenz (die Risikoparameter) eines Entscheiders aber nicht bekannt und muss zuvor bestimmt werden.

- $\hat{d}$ die niedrigste Priorität, welche inakzeptabel für ihn ist[49] und
- $\tilde{d}$ die Priorität, die er präferiert bzw. die er bzgl. des nicht-proportionalen Rückversicherungsvertrages gewählt hat.

Die Priorität $\hat{d}$ ist gerade die Priorität des Grenzfalls ($1+\gamma = \frac{\lambda}{\alpha}$), also die Priorität zwischen Ablehnung und Akzeptanz der Rückversicherung. Für diese gilt $F_X(\hat{d}) = 1 - \hat{\alpha}$. Somit kann der zugehörige Risikoparameter $\hat{\alpha}$ mit

$$\hat{\alpha} = 1 - F_X(\hat{d})$$

bestimmt werden. In diesem Fall gilt $1+\gamma = \frac{\lambda}{\alpha}$. Somit ist es möglich, den zweiten Risikoparameter $\hat{\lambda}$ der Grenze mit

$$\hat{\lambda} = \hat{\alpha}(1+\gamma_X)$$

zu berechnen. Ergebnis ist die Risikopräferenz $(\hat{\lambda}, \hat{\alpha})$ des Zedenten an der Grenze zwischen Akzeptanz und Ablehnung der Versicherung.

Die Prioritäten $\hat{d}$ und $\tilde{d}$ befinden sich für einen gegebenen Risikoparameter α auf der selben Kurve. Dies ist ersichtlich aus Abbildung 5.8. Damit gilt $\tilde{\alpha} = \hat{\alpha}$. Für die Rückversicherungswahl gilt folgende implizite Lösung

$$\begin{aligned} F_X(\tilde{d}) &= \frac{(1-\tilde{\alpha})\gamma_X}{(1-\tilde{\alpha})(1+\gamma_X) - (1-\tilde{\lambda})} = \frac{(1-\hat{\alpha})\gamma_X}{(1-\hat{\alpha})(1+\gamma_X) - (1-\tilde{\lambda})}^{50} \\ &= \frac{F_X(\hat{d})\gamma_X}{F_X(\hat{d})(1+\gamma_X) - (1-\tilde{\lambda})}^{51}. \end{aligned}$$

Durch Umstellen dieser Formel kann der Risikoparameter $\tilde{\lambda}$ erhalten werden

$$\tilde{\lambda} = 1 + F_X(\hat{d}) \left[\frac{\gamma_X}{F_X(\tilde{d})} - (1+\gamma_X) \right].$$

Durch die tatsächliche Wahl einer Rückversicherung kann somit ein Zedent mit der vorliegenden Schadensverteilung und durch Kenntnis des Gewinnaufschlages des Rückversicherers seine kompatible Risikopräferenz $(\tilde{\alpha}, \tilde{\lambda})$ bestimmen. Diese soll im Folgenden bei der Bestimmung der Deckungsgrenze bei Vorlage anderer Schäden und auch anderer Gewinnaufschläge des Zessionärs genutzt werden.

Es sei F_Z die Schadensverteilung einer anderen Schadensvariable Z. Für die Abwicklung dieser Schäden verlangt der Zessionär den dazugehörigen Gewinnaufschlag γ_Z.

Zunächst interessiert sich der Zedent, ob er die Rückversicherung bei einem Gewinnaufschlag γ_Z wählen sollte. Die Bestimmung ist mit folgender Ungleichung möglich

$$1 + \gamma_Z \lessgtr \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\alpha}}. \tag{5.3}$$

[49] Ist gerade die Priorität, die sich über der Priorität befindet, die der Zedent maximal bereit ist zu tragen. Also den größten Selbstbehalt, den er finanziell verkraften kann.

[50] Folgt aus $\tilde{\alpha} = \hat{\alpha}$.

[51] Folgt aus $\hat{\alpha} = 1 - F_X(\hat{d})$.

Wenn in der Ungleichung ein “<”-Zeichen ist, dann sollte sich der Zedent für die Rückversicherung entscheiden. Tritt dagegen ein “>”-Zeichen in der Ungleichung auf, sollte der Zedent die Rückversicherung ablehnen.

Im Fall, dass der Zedent die Rückversicherung wählt, kann eine Empfehlung für die Priorität $\tilde{d_Z}$ wie folgt berechnet werden

$$F_Z(\tilde{d_Z}) = \frac{(1-\tilde{\alpha})\gamma_Z}{(1-\tilde{\alpha})(1+\gamma_Z)-(1-\tilde{\lambda})}.$$

Beispiel 5.3.2 *(Bestimmung der kompatiblen Risikoparameter)*
Ein Zedent wählt eine Rückversicherung mit einer Priorität von 1,76 Millionen Euro. Die Schäden folgen der Nullpunkt-Paretoverteilung F_X mit den Parametern $\vartheta = 5$ und $b = 16,4$. Der Zessionär fordert einen Gewinnaufschlag von 20 Prozent. Der Zedent weiß, dass er aufgrund seiner finanziellen Stärke, Schäden ab 2,44 Millionen Euro vom Rückversicherer übernehmen lassen muss.

Man betrachte zunächst die Bestimmung der Risikopräferenz $(\hat{\lambda}, \hat{\alpha})$ des Grenzfalls. Es gilt

$$\hat{\alpha} = 1 - F_X(\hat{d}) = 1 - F_X(2,44) = 1 - 0,5 = 0,5$$

und

$$\hat{\lambda} = \hat{\alpha}(1+\gamma_X) = 0,5(1+0,2) = 0,6.$$

Der Zedent besitzt damit die Grenzrisikopräferenz (0,5 ;0,6).

Der Zedent kann jetzt zur Bestimmung der kompatiblen Risikopräferenz übergehen. Es gilt $\tilde{\alpha} = \hat{\alpha} = 0,5$ und

$$\tilde{\lambda} \;=\; 1 + F_X(\hat{d})\left[\frac{\gamma_X}{F_X(\tilde{d})} - (1+\gamma_X)\right] = 1 + 0,5\left[\frac{0,2}{F_X(1,76)} - (1+0,2)\right] = 0,65.$$

Die kompatible Risikopräferenz des Zedenten ist damit (0,5;0,65).

Dieser Zedent möchte eine weitere seiner Versicherungssparten von dem Zessionär rückversichern lassen. Die Schäden dieser Sparte sind Nullpunkt-Pareto-verteilt mit den Parametern $\vartheta = 4,5$ und $b = 16,4$. Der Zessionär verlangt jetzt jedoch einen Gewinnaufschlag von 25 Prozent. Somit ist F_Z die Nullpunkt-Paretoverteilung mit den Parametern $\vartheta = 4,5$ und $b = 16,4$ und $\gamma_Z = 0,25$. Es gilt für Ungleichung (5.3)

$$1 + 0,25 < \frac{0,65}{0,5}.$$

Der Zedent entscheidet sich somit auch bei einem Gewinnaufschlag von 25 Prozent für die Rückversicherung. Seine zugehörige Priorität kann er wie folgt berechnen

$$F_Z(\tilde{d_Z}) = \frac{(1-\tilde{\alpha})\gamma_Z}{(1-\tilde{\alpha})(1+\gamma_Z)-(1-\tilde{\lambda})} = \frac{(1-0,5)0,25}{(1-0,5)(1+0,25)-(1-0,65)} = 0,45$$

und $\tilde{d_Z} = F_Z^{-1}(0,45) = 2,36$. In diesem Fall liegt die Empfehlung für die Priorität bei 2,36 Millionen Euro.

Im Folgenden soll das zu $\Phi_{\alpha,\lambda}$ komplementäre Präferenzfunktional betrachtet werden.

5.4 Hybrides Entscheidungsprinzip $\Phi_{\beta,\delta}(G(d,X))$

Im Folgenden soll ein Zedent betrachtet werden, dessen Grundlage das Präferenzfunktional $\Phi_{\beta,\delta}(G(d,X))$ ist. Das Präferenzfunktional ist eine Gewichtung aus erwartetem Gewinn und oberem bedingten erwartetem Gewinn. Für das Präferenzfunktional des Rückversicherungsmodells gilt

$$\Phi_{\beta,\lambda}(G(d,X)) \quad = \quad \frac{1-\delta}{1-\beta}E(G(d,X)) + \frac{\delta-\beta}{1-\beta}E(G(d,X)|G(d,X) \geq g_{1-\beta}(d))$$

mit $g_{1-\beta}(d)$ dem $(1-\beta)$-Gewinnquantil und den Risikoparametern $\beta \in (0,1)$ und $\delta \in [0,1]$.

Der folgende Satz gibt die Lösung für die Maximierung des Präferenzfunktionals bzgl. der Priorität wieder. Dabei wird zunächst von einer allgemeinen Rückversicherungsprämie ausgegangen.

Satz 5.4.1
Es sei $\Phi_{\beta,\delta}(G(d,X))$ das Präferenzfunktional eines Zedenten mit Gewinnfunktion $G(d,X) = Pr - B - X - RVP(d) + RVS(d,X)$, dann besitzt das Maximierungsproblem

$$\max_d \; \Phi_{\beta,\delta}(G(d,X))$$

folgende implizite Lösung

$$F_X(d^*) = \begin{cases} 1 + \frac{1-\beta}{1-\delta}RVP_d(d^*), \\ \textit{für } \delta \leq 1 + RVP_d(d^*) \textit{ und } -RVP_{dd}(d^*) + \frac{1-\delta}{1-\beta}f_X(d^*) < 0 \\ \\ \frac{\beta}{\delta}[1 + RVP_d(d^*)], \\ \textit{für } \delta > 1 + RVP_d(d^*) \textit{ und } -RVP_{dd}(d^*) + \frac{\delta}{\beta}f_X(d^*) < 0 \end{cases} {}^{52}.$$

Die implizite Lösung unterteilt sich dabei ebenfalls in zwei Fälle. Zum einen den Fall $\delta \leq 1 + RVP_d(d^*)$ mit impliziter Lösung

$$F_X(d^*) = 1 + \frac{1-\beta}{1-\delta}RVP_d(d^*)$$

und Maximalbedingung $-RVP_{dd}(d^*) + \frac{1-\delta}{1-\beta}f_X(d^*) < 0$ und zum anderen den Fall $\delta > 1 + RVP_d(d^*)$ mit impliziter Lösung

$$F_X(d^*) = \frac{\beta}{\delta}[1 + RVP_d(d^*)]$$

und Maximalbedingung $-RVP_{dd}(d^*) + \frac{\delta}{\beta}f_X(d^*) < 0$.

Ebenfalls soll das Rückversicherungsmodell exemplarisch für die spezielle Rückversicherungsprämie berechnet werden. Dies formuliert der folgende Satz.

[52]Der Beweis von Satz 5.4.1 befindet sich im Anhang C.1 S. 189 ff.

Satz 5.4.2
Es sei $\Phi_{\beta,\delta}(G(d,X))$ das Präferenzfunktional eines Zedenten mit Gewinnfunktion $G(d,X) = Pr - B - X - RVP(d) + RVS(d,X)$ und der speziellen Rückversicherungsprämie $RVP(d) = (1+\gamma)E(RVS(d,X))$. Dann besitzt das Maximierungsproblem

$$\max_d \; \Phi_{\beta,\delta}(G(d,X))$$

folgende implizite Lösung

$$F_X(d^*) = \begin{cases} 1, & \textit{für } 1+\gamma > \frac{1-\delta}{1-\beta} \\ \frac{\gamma\beta}{\beta(1+\gamma)-\delta}, & \textit{für } 1+\gamma < \frac{1-\delta}{1-\beta} \end{cases} {}^{53}.$$

Die Lösung besteht aus zwei Fällen. Zum einen dem Fall $1+\gamma > \frac{1-\delta}{1-\beta}$, indem die Rückversicherung nicht gewählt wird[54] und zum anderen dem Fall $1+\gamma > \frac{1-\delta}{1-\beta}$ mit der Lösung

$$F_X(d^*) = \frac{\gamma\beta}{\beta(1+\gamma)-\delta} \in [0,\beta[.$$

Im letzteren Fall wird dabei die Rückversicherung gewählt. Im Grenzfall $1+\gamma = \frac{1-\delta}{1-\beta}$ ist der Zedent indifferent zwischen beiden Lösungen. Die Abbildung 5.10 illustriert den zugehörigen Präferenzraum[55].

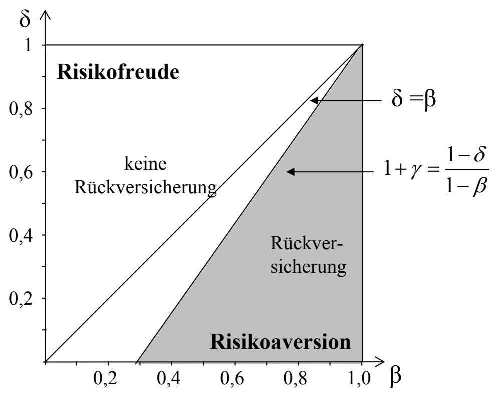


Abbildung 5.10: Risikopräferenzraum bei $\Phi_{\beta,\delta}(G(d,X))$.

Der Risikopräferenzraum stellt die β-δ-Kombinationen für Riskofreude, Risikoneutralität und Risikoaversion als auch die Grenze zwischen der Akzeptanz und der Ablehnung der Rückversicherung dar. Die Hauptdiagonale ($\beta = \delta$) umfasst dabei die Risikoparameterkombinationen für die Risikoneutralität. Die Risikoparameterkombinationen unterhalb der Hauptdiagonalen bilden Risikoaversion ab, die oberhalb Risikofreude[56]. Die Grenze der optimalen Lösungen

[53]Der Beweis von Satz 5.4.2 kann im Anhang C.1 S. 191 ff. nachvollzogen werden.
[54]Es gilt $F_X(d^*) = 1$. Somit präferiert der Zedent eine Priorität, die sich oberhalb von allen Schadensausprägungen befindet.
[55]Für den Risikopräferenzraum wurde ein Gewinnaufschlag seitens des Rückversicherers von 40 Prozent angenommen.
[56]Vgl. bzgl. der Risikoparameterkonstellationen und deren Risikoeinstellung Abschnitt 2.4.1.2.

($1+\gamma = \frac{1-\delta}{1-\beta}$) splittet den Bereich der Risikoaversion in zwei Teile auf. Oberhalb dieser Grenze wird die Rückversicherung nicht akzeptiert mit der optimalen Lösung $F_X(d^*) = 1$, dagegen wird unterhalb die Rückversicherung präferiert mit der Lösung

$$F_X(d^*) = \frac{\gamma\beta}{\beta(1+\gamma)-\delta}.$$

Der Gewinnaufschlag des Zessionärs beeinflusst die Entscheidung der Rückversicherungswahl. Die Grenze zwischen Akzeptanz und Ablehnung der Rückversicherung für verschiedene Gewinnaufschläge stellt Abbildung 5.11 dar.

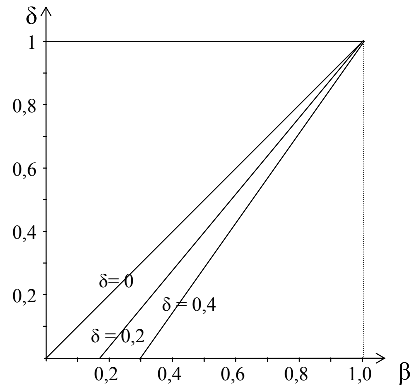


Abbildung 5.11: Risikopräferenzraum in Abhängigkeit vom Gewinnaufschlag bei $\Phi_{\beta,\delta}(G(d,X))$.

Es ist ersichtlich, dass die Grenze zwischen Akzeptanz und Ablehnung der Rückversicherung sich mit der Zunahme des Gewinnaufschlages des Rückversicherers in Bereiche höherer Risikoaversion verschiebt. Ein Zedent muss für die Akzeptanz des Vertrages mit steigendem Gewinnaufschlag auch eine höhere Riskoaversion besitzen. Bei einer fairen Rückversicherungsprämie dagegen sind die β-δ-Kombinationen der Risikoneutralität die Grenze zwischen den optimalen Lösungen. In dieser Situation ist der Zedent indifferent in seiner Entscheidung.

Von besonderem Interesse ist die Höhe der optimalen Priorität, die ein Zedent bei bestimmten Risikoeinstellungen wählt. Dies illustriert Abbildung 5.12 für verschiedene gegebene $\widetilde{\beta}$.

Die Abbildung 5.12[57] stellt dabei den Verlauf des Wertes der Verteilung für die optimale Priorität für gegebene Risikoparameter $\tilde{\beta}$ dar. Kleine Ausprägungen des Risikoparameters δ spiegeln dabei Risikoaversion und hohe Ausprägungen Risikofreude wider. Für $\delta = 0$ (höchste Risikoaversion bei gegebem β) ist $F_X(d^*) = \frac{\gamma}{1+\gamma}$. Mit steigendem Risikoparameter δ steigt der Wert von $F_X(d^*)$ an. Das Ansteigen des Risikoparameters δ bedeutet eine Abnahme der Risikoaversion. Somit wählt ein Zedent mit einer höheren Risikoaversion eine niedrigere Priorität und gibt mehr Risiko an den Rückversicherer ab.

---

[57]Es wurde ein Gewinnaufschlag des Zessionärs von 20 Prozent angenommen.

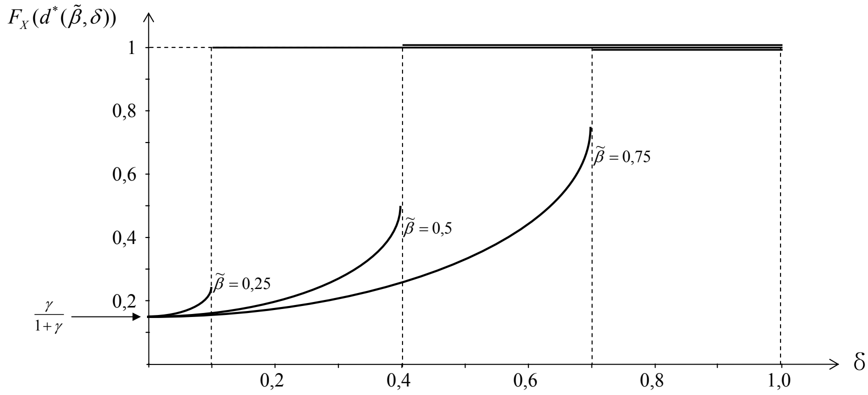


Abbildung 5.12: Optimale Priorität bei $\Phi_{\widetilde{\beta},\delta}(G(d,X))$.

Für einen festen Risikoparameter δ wird ebenfalls mehr Rückversicherung nachgefragt, je höher der Risikoparameter β ist[58]. Ein Ansteigen des Risikoparameters β bei festem δ ist gleichbedeutend mit der Zunahme von risikoaversem Verhalten. Damit gilt in beiden Fällen, dass die Priorität mit der Zunahme an Risikoaversion sinkt.

Hier stellt sich die Frage des Einflusses des Gewinnaufschlages auf die Höhe der gewählten Prioritäten. Dies gibt folgende Grafik wieder. Diese verdeutlicht die Veränderungen in Abhängigkeit vom Gewinnaufschlag für einen gegebenen Risikoparameter $\beta = 0,75$.

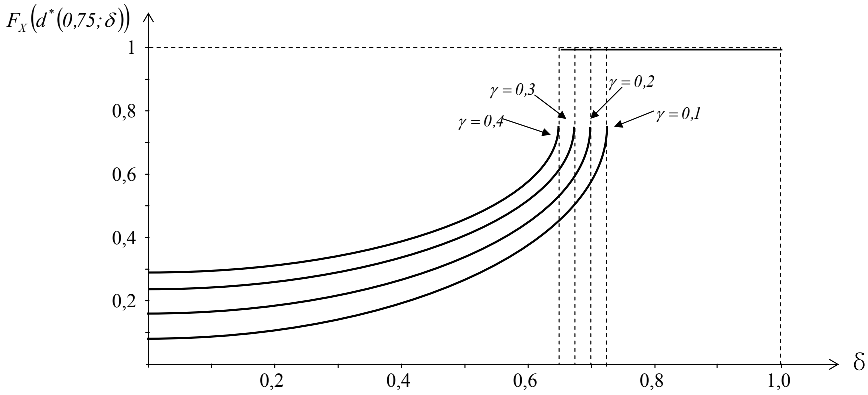


Abbildung 5.13: Optimale Priorität bei $\Phi_{\beta,\delta}(G(d,X))$.

Die Grenze zwischen Akzeptanz und Ablehnung der Rückversicherung verschiebt sich mit der Zunahme des Gewinnaufschlages des Zessionärs zu kleineren Werten des Risikoparameters δ. Der Wert der Verteilung der optimalen Priorität an der Grenze zwischen Annahme und Ablehnung der Rückversicherung bleibt aber konstant. Im Punkt höchster Risikoaversion ($\delta = 0$) unterscheiden sich die Werte. Je höher der Gewinnaufschlag, desto größer ist der Wert der Verteilung an der Stelle der optimalen Priorität. Damit gilt, je höher der Gewinnaufschlag, desto weniger Deckungsschutz kauft ein Zedent ein. Dies gilt auch für beliebige Risikopara-

[58]Für festes δ gilt $F_X(d^*(\beta_1,\delta)) \geq F_X(d^*(\beta_2,\delta))$ für $\beta_1 < \beta_2$.

meter δ.

Es ist festzustellen, dass die Lösung für das Präferenzfunktional $\Phi_{\beta,\delta}$ für $\beta = 1 - \alpha$ und $\delta = 1 - \lambda$ identisch zur Lösung des Präferenzfunktionals $\Phi_{\alpha,\lambda}$ ist[59].

Die Ergebnisse sollen anhand des Sachverhaltes von Beispiel 5.3.1 verdeutlicht werden.

Beispiel 5.4.1 *(Rückversicherungsmodell bei Präferenzfunktional $\Phi_{\beta,\delta}$)*
Es werden vier Zedenten mit unterschiedlichen β-δ-Kombinationen betrachtet. Die Risikoparameter der einzelnen Zedenten gibt Tabelle 5.6 wieder.

Zedent	β	δ
1	0,75	0,5
2	0,75	0,35
3	0,5	0,5
4	0,5	0,35

Tabelle 5.6: Risikoparameter der Zedenten für Beispiel 5.4.1.

Für die Schäden wird die Nullpunkt-Paretoverteilung mit den Parametern $\vartheta = 5$ und $b = 16,4$ angenommen. Jeder dieser Zedenten verhandelt mit zwei Rückversicherern. Der Rückversicherer 1 verlangt dabei einen Gewinnaufschlag von 20 und der Rückversicherer 2 von 40 Prozent auf seinen erwarteten Rückversicherungsschaden.

Aufgrund der komplementären Wahl der Risikoparameter β und δ zu den Risikoparametern α und λ aus Beispiel 5.3.1 sind die Ergebnisse identisch zu Beispiel 5.3.1. Die folgenden Tabellen geben für diese vier Zedenten die optimale Priorität in Millionen Euro für die zwei Gewinnaufschläge der Rückversicherer wieder:

Zedent	β	δ	RV-Wahl	$F_X(d^*)$	d^*
1	0,75	0,5	Ja	0,545	2,8
2	0,75	0,35	Ja	0,429	1,94
3	0,5	0,5	Nein	–	–
4	0,5	0,35	Nein	–	–

Tabelle 5.7: Optimale Prioritäten für Beispiel 5.4.1 mit $\gamma = 0,4$.

Als Spezialfall ist ebenfalls der Aspekt der fairen Rückversicherungsprämie in der Lösung enthalten. Für $\gamma = 0$ folgt

$$F_X(d^*) = \begin{cases} 1, & \text{für } \delta > \beta \\ 0, & \text{für } \delta < \beta \end{cases} .$$

[59] Aufgrund der Konstruktion der beiden Präferenzfunktionale ist der Beweis von Satz 5.4.1 bzw. 5.4.2 äquivalent zu dem Beweis von Satz 5.3.1 bzw. 5.3.2. Um das Nachvollziehen der Sätze 5.4.1 und 5.4.2 zu erleichtern, sind die Beweise von Satz 5.4.1 bzw. 5.4.2 im Anhang aufgeführt.

Zedent	β	δ	RV-Wahl	$F_X(d^*)$	d^*
1	0,75	0,5	Ja	0,375	1,62
2	0,75	0,35	Ja	0,273	1,08
3	0,5	0,5	Nein	–	–
4	0,5	0,35	Ja	0,4	1,76

Tabelle 5.8: Optimale Prioritäten für Beispiel 5.4.1 mit $\gamma = 0,2$.

Für Risikoaversion ($\delta < \beta$) präferiert der Zedent die Vollversicherung, für Risikofreude ($\delta > \beta$) dagegen lehnt er die Rückversicherung ab. Ein risikoneutraler Entscheider ist indifferent zwischen den Lösungen.

Aufgrund der komplementären Struktur der Präferenzfunktionale können folgende analoge Formeln zur Berechnung der Risikoparameter erhalten werden.

Bestimmung der Risikoparameter

Das Ziel ist es, die kompatiblen Risikoparameter $\tilde{\beta}$ und $\tilde{\delta}$ des Erstversicherers bzgl. eines gewählten nicht-proportionalen Rückversicherungsvertrages zu bestimmen. Dazu müssen folgende Größen bei Vorlage der Schadensverteilung F_X bekannt sein:

- der Gewinnaufschlag γ_X des Rückversicherers,
- $\hat{d}$ die niedrigste Priorität, welche inakzeptabel für ihn ist[60] und
- $\tilde{d}$ die Priorität, die er bzgl. des nicht-proportionalen Rückversicherungsvertrages gewählt hat.

Die Priorität $\hat{d}$ ist die Priorität zwischen Ablehnung und Akzeptanz der Rückversicherung[61]. In diesem Fall gilt $F_X(\hat{d}) = \hat{\beta}$. Durch Einsetzen in die Grenzbedingung $1 + \gamma_X = \frac{1-\delta}{1-\beta}$ folgt für Risikoparameter $\hat{\delta} = 1 - (1 + \gamma_X)(1 - \hat{\beta}) = 1 - (1 + \gamma_X)(1 - F_X(\hat{d}))$. Damit gilt für die Risikoparameter des Grenzbereichs $(\hat{\beta}, \hat{\delta}) = (F_X(\hat{d}), 1 - (1 + \gamma_X)(1 - F_X(\hat{d})))$.

Die Prioritäten $\hat{d}$ und $\tilde{d}$ befinden sich für einen gegebenen Risikoparameter β auf der selben Kurve[62]. Somit gilt für den Risikoparameter $\tilde{\beta} = \hat{\beta}$. Bei Rückversicherungswahl gilt für die implizite Lösung

$$F_X(\tilde{d}) \quad = \quad \frac{\tilde{\beta}\gamma_X}{\tilde{\beta}(1 + \gamma_X) - \tilde{\delta}}.$$

[60] Ist gerade die Priorität, die sich über der Priorität befindet, die der Zedent maximal bereit ist zu tragen. Also den größten Selbstbehalt, den er finanziell verkraften kann.

[61] Es gilt dabei $1 + \gamma_X = \frac{1-\delta}{1-\beta}$.

[62] Vgl. dazu Abbildung 5.12.

Durch Umstellen nach dem Risikoparameter $\tilde{\delta}$ und unter Verwendung der bisher gewonnenen Beziehungen ist

$$\begin{aligned}\tilde{\delta} &= \tilde{\beta}(1+\gamma_X) - \frac{\tilde{\beta}\gamma_X}{F_X(\tilde{d})} = \tilde{\beta}\left[1+\gamma_X - \frac{\gamma_X}{F_X(\tilde{d})}\right] = \tilde{\beta}\left[1+\gamma_X\left(1-\frac{1}{F_X(\tilde{d})}\right)\right] \\ &= F_X(\hat{d})\left[1+\gamma_X\left(1-\frac{1}{F_X(\tilde{d})}\right)\right].\end{aligned}$$

Damit sind die kompatiblen Risikoparameter mit

$$(\tilde{\beta},\tilde{\delta}) = \left(F_X(\hat{d}), F_X(\hat{d})\left[1+\gamma_X\left(1-\frac{1}{F_X(\tilde{d})}\right)\right]\right)$$

bestimmbar.

Durch die tatsächliche Wahl einer Rückversicherung kann ein Erstversicherer seine kompatible Risikopräferenz $(\tilde{\beta},\tilde{\delta})$ ermitteln. Dazu muss die Schadensverteilung und der Gewinnaufschlag des Rückversicherers bekannt sein. Anschließend kann die kompatible Risikopräferenz genutzt werden, um bei Vorlage einer anderen Schadensverteilung die Deckungsgrenzen zu errechnen. Dazu sei F_Z die Schadensverteilung einer Schadensvariable Z. Für die Abwicklung dieser Schäden verlangt der Rückversicherer den Gewinnaufschlag γ_Z.

Zunächst interessiert sich der Erstversicherer, ob er die Rückversicherung mit dem Gewinnaufschlag γ_Z wählen oder ablehnen sollte. Die Bestimmung ist mit folgender Ungleichung möglich

$$1+\gamma_Z \lessgtr \frac{1-\tilde{\delta}}{1-\tilde{\beta}}.$$

Gilt in der Ungleichung ein "<"-Zeichen, dann sollte der Zedent die Rückversicherung wählen. Wenn dagegen in der Ungleichung ein ">"-Zeichen gilt, sollte der Zedent die Rückversicherung ablehnen.

Im Fall der Rückversicherungswahl kann eine Empfehlung für die Priorität wie folgt berechnet werden

$$F_Z(\tilde{d}_Z) = \frac{\tilde{\beta}\gamma_Z}{\tilde{\beta}(1+\gamma_Z)-\tilde{\delta}}.$$

Im Folgenden soll das Präferenzfunktional $\Phi_{\beta,\delta}(G(d,X))$ aufgrund der analogen Resultate zum Präferenzfunktional $\Phi_{\alpha,\lambda}(G(d,X))$ nicht weiter betrachtet werden. Es wird sich stattdessen auf das Präferenzfunktional $\Phi_{\alpha,\lambda}(G(d,X))$ konzentriert.

Der nächste Abschnitt betrachtet einige Kenngrößen für das Rückversicherungsproblem.

5.5 Kenngrößen

Im Folgenden werden wichtige Kenngrößen für den Zedenten, wie zum Beispiel der Gewinn, der erwartete Gewinn, die Verlustwahrscheinlichkeit und der erwartete Verlust, bestimmt.

Diese Größen sind für jedes wirtschaftlich agierende Unternehmen, so auch für einen Erstversicherer, von höchstem Interresse. Dabei werden diese allgemein ohne Annahme der speziellen Rückversicherungsprämie gegeben.

Die erste Kenngröße ist dabei die Gewinnfunktion eines Zedenten mit optimaler Priorität d^*. Nach Formel (4.1) und durch Einsetzen des Rückversicherungsschadens gilt

$$\begin{aligned} G(d^*, X) &= Pr - B - X - RVP(d^*) - RVS(d^*, X) \\ &= Pr - B - X - RVP(d^*) - \begin{cases} 0, & für\ X \leq d^* \\ X - d^*, & für\ X > d^* \end{cases} \\ &= Pr - B - RVP(d^*) - \begin{cases} X, & für\ X \leq d^* \\ d^*, & für\ X > d^* \end{cases}. \end{aligned}$$

Natürlich möchte ein Zedent bzgl. der gewählten Rückversicherung seinen Gewinn in Abhängigkeit von dem zufälligen Schaden X betrachten. Dies besitzt höchste Relevanz für den Zedenten. Solange die konkrete zukünftige Ausprägung des Schadens X nicht bekannt ist und damit der Gewinn nicht explizit berechenbar ist, stellt der erwartete Gewinn die gebräuchlichste Möglichkeit dar eine Aussage über den Gewinn des Zedenten in der Zukunft zu treffen. Es ist dabei zu beachten, dass der Wert der Gewinnfunktion im Allgemeinen in der Zukunft nicht eintritt. Für den erwarteten Gewinn bei optimaler Priorität d^* ergibt sich

$$\begin{aligned} E(G(d^*, X)) &= Pr - B - RVP(d^*) - \int_0^{d^*} x \; dF_X(x) - \int_{d^*}^{\infty} d^* \; dF_X(x)^{63} \\ &= Pr - B - RVP(d^*) - \int_0^{d^*} x \; dF_X(x) - d^*(1 - F_X(d^*))^{64}. \end{aligned}$$

Der erwartete Gewinn hängt damit zentral von der gewählten Priorität und von der Schadensverteilung ab. Ebenso ist die Verlustwahrscheinlichkeit bzw. der erwartete Verlust eine zentrale Größe für einen wirtschaftlichen Akteur, da diese eine Aussage über den worst case, den Verlust bzw. Ruin aus einer Transaktion, einem Finanzprodukt oder wie hier aus einem Rückversicherungsgeschäft erlaubt. Dazu soll folgende Annahme unterstellt werden: Ein Versicherungsunternehmen sollte bei Erwerb der Rückversicherung von seinen Prämieneinnahmen aus dem Kundengeschäft die allgemeinen Betriebskosten, die Rückversicherungsprämie als auch den Selbstbehalt der Rückversicherung bezahlen können, andernfalls ist das Versicherungsgeschäft ein Minusgeschäft für den Erstversicherer und er wird es nicht durchführen. Unter diesen Überlegungung gilt die Annahme

$$Pr - B - RVP(d^*) - d^* \geq 0.$$

[63] Die Rückversicherungsprämie besteht aus statistischen Lage -und Streuungsparametern sowie einem Gewinnaufschlag. Vgl. diesbzgl. Abschnitt 4.1. Die Rückversicherungsprämie ist somit eine reelle Zahl. Der Erwartungswert einer Zahl ist die Zahl selbst. Somit gilt $E(RVP(d^*)) = RVP(d^*)$.

[64] Es gilt $\int_{d^*}^{\infty} d^* \; dF_X(x) = d^* \int_{d^*}^{\infty} dF_X(x) = d^*(1 - F_X(d^*))$.

In diesem Fall kann die Gewinnfunktion nicht negativ werden. Es gilt somit für die Verlustwahrscheinlichkeit (probability of loss) eines Zedenten

$$PL^* = P(G(d^*, X) < 0) = 0$$

bzw. für den erwarteten Verlust (expected loss)

$$EL^* = E(G(d^*, X)|G(d^*, X) < 0) = 0.$$

Das heißt, dass eine gewählte Rückversicherung (ohne Haftungsobergrenze des Rückversicherers) zu einer Verlustwahrscheinlichkeit von Null und damit verbunden auch zu einem erwarteten Verlust von Null führt. Die Minimierung des Verlustes bzw. der Verlustwahrscheinlichkeit des Zedenten ist gerade das eigentliche Ziel einer Rückversicherung. Im Fall der Ablehnung der Rückversicherung sind die Kosten für den Erstversicherer, der in diesem Rahmen für den gesamten Schaden haften muss, nicht begrenzt. Für die Gewinnfunktion gilt in diesem Fall $G(\infty, X) = Pr - B - X$. Damit folgt für die Verlustwahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} PL^* &= P(G(\infty, X) \leq 0) = P(Pr - B - X \leq 0) = P(X \geq Pr - B) \\ &= 1 - P(X \leq Pr - B) = 1 - F_X(Pr - B) \end{aligned}$$

bzw. für den erwarteten Verlust

$$\begin{aligned} EL^* &= E(G(\infty, X) \mid G(\infty, X) \leq 0) = Pr - B - E(X \mid G(\infty, X) \leq 0) \\ &= Pr - B - E(X \mid X \geq Pr - B) = Pr - B - \frac{\int\limits_{Pr-B}^{\infty} x \, dF_X(x)}{P(X \geq Pr - B)} \\ &= Pr - B - \frac{1}{PL^*} \int\limits_{Pr-B}^{\infty} x \, dF_X(x). \end{aligned}$$

Da bei Ablehnung der Rückversicherung kein zusätzlicher Schutz für den Erstversicherer besteht, sind im Allgemeinen Verlustwahrscheinlichkeit und erwarteter Verlust positiv.

Im folgenden Abschnitt werden die bereits berechneten als auch weitere Kenngrößen, wie zum Beispiel der Erst- und Rückversicherungsschaden für zwei verschiedene Schadensverteilungen gegeneinander abgeschätzt. An die Schadensverteilung wird dabei die Annahme der stochastischen Dominanz gestellt.

5.6 Folgerungen aus der Stochastischen Dominanz

In diesem Abschnitt werden mit Hilfe der stochastischen Dominanz erster und zweiter Ordnung Abschätzungen für verschiedene Kenngrößen, wie zum Beispiel für den Erst- und Rückversicherungsschaden, für die Rückversicherungsprämie und für den erwarteten Gewinn gegeben. Die Anforderung der stochastischen Dominanz wird dabei an zwei verschiedene Schadensvariablen X und Z gestellt. Die Definition der stochasischen Dominanz erster und zweiter Ordnung wurde im Kapitel Entscheidungstheorie bereitgestellt. Dabei ist die stochasische Dominanz erster Ordnung die stärkere Forderung, so dass bei Vorlage stochastischer Dominanz erster Ordnung auch stochastische Dominanz zweiter Ordnung vorliegt, aber nicht umgekehrt. Dies bringt der folgende Satz zum Ausdruck.

Satz 5.6.1
X und Z seien Zufallsvariablen und Z dominiere X stochastisch erster Ordnung. Dann dominiert Z auch X stochastisch zweiter Ordnung.

Beweis:
Wenn Z die Zufallsvariable X stochastisch in erster Ordnung dominiert, dann gilt $F_X(a) \geq F_Z(a)$ für alle $a \in \mathbb{R}$. Da die Verteilungsfunktion von X immer oberhalb oder auf der von Z liegt, ist die Fläche unterhalb der Funktion bei X immer größer oder gleich der Fläche unterhalb der Funktion von Z mit den Grenzen minus Unendlich und a, wobei a beliebig und $a \in \mathbb{R}$. Somit gilt $\int\limits_{-\infty}^{a} F_X(t)\ dt \geq \int\limits_{-\infty}^{a} F_Z(t)\ dt$ für alle $a \in \mathbb{R}$. Dies entspricht der Definition der stochastischen Dominanz zweiter Ordnung.

QED

Um die Abschätzung der Kenngrößen zu erleichtern, sollen einige Hilfsabschätzungen zur Verfügung gestellt werden. Der Satz 5.6.2 formuliert dabei die benötigten Abschätzungen für die stochastische Dominanz erster und Satz 5.6.3 die Abschätzungen für die stochastische Dominanz zweiter Ordnung.

Satz 5.6.2
X und Z seien Zufallsvariablen und F_X und F_Z die dazugehörigen Verteilungsfunktionen. Z dominiert X stochastisch in erster Ordnung, dann gilt

1. $\int\limits_{a}^{\infty} x\ dF_X(x) \leq \int\limits_{a}^{\infty} z\ dF_Z(z)$ *für alle* $a \in \mathbb{R}$
2. $\int\limits_{a}^{\infty} (x-a)\ dF_X(x) \leq \int\limits_{a}^{\infty} (z-a)\ dF_Z(z)$ *für alle* $a \in \mathbb{R}$
3. $\int\limits_{a}^{\infty} (x-a)\ dF_X(x) \geq \int\limits_{b}^{\infty} (x-b)\ dF_X(x)$ *für alle* $a \leq b$ *und* $a, b \in \mathbb{R}$[65].

Satz 5.6.3
X und Z seien Zufallsvariablen und F_X und F_Z die dazugehörigen Verteilungsfunktionen. Z dominiert X stochastisch in zweiter Ordnung, dann gilt

1. $E(\min(a, X)) \leq E(\min(a, Z))$ *für alle* $a \in \mathbb{R}$
2. $E(\min(a, X)) \leq E(\min(b, Z))$ *für alle* $a \leq b$ *und* $a, b \in \mathbb{R}$
3. $E(X) \leq E(Z)$[66].

Die erste Kenngröße, die betrachtet werden soll, ist das Schadensniveau eines Zedenten. Dieses ist wie folgt definiert.

[65] Der Beweis befindet sich im Anhang D.1 S. 239 ff.
[66] Der Beweis befindet sich im Anhang D.1 S. 241 ff.

Definition 5.6.1
Sei Schaden X eine Zufallsvariable und F_X die Schadensverteilung bzgl. dieses Schadens, dann heißt $SN(d, X) = F_X(d)$ Schadensniveau des Zedenten.

Das Schadensniveau gibt somit den Anteil, den der Zedent selbst an der Schadensvariable X tragen möchte, wieder. Das Schadensniveau ist damit analog zum Kundenservicegrad im Newsvendor Modell[67] definiert.

Satz 5.6.4
Z dominiert X stochastisch in erster Ordnung, dann gilt für das Schadensniveau des Zedenten $SN(d, X) \geq SN(d, Z)$ für alle $d \geq 0$.

Beweis:
Z dominiert X stochastisch in erster Ordnung, dann gilt $F_X(d) \geq F_Z(d)$ für alle $d \geq 0$. Aus der Definition des Schadensniveaus folgt $SN(d, X) \geq SN(d, Z)$ für alle $d \geq 0$.

QED

Wenn X die dominierte Zufallsvariable ist und d ein fester Selbstbehalt, dann liegen mehr Schäden der Verteilung von X unterhalb des Selbstbehaltes als bei der Verteilung von Z. Somit ist das Schadensniveau bei der dominierten Verteilung für den Zedenten höher. Dies verdeutlicht ebenfalls Abbildung 5.14.

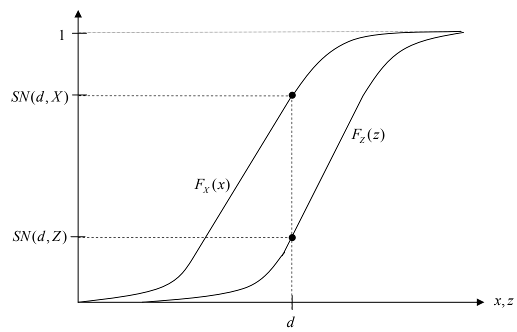


Abbildung 5.14: Schadensniveau bei zwei Schadensverteilungen.

Man nehme an: Der Zedent hat sich für eine festgelegte Priorität $\hat{d}$ entschieden. Dieser kennt aber die zukünftige Schadensverteilung nicht. Es werden zwei mögliche Schadensverteilungen F_X und F_Z erwartet, wobei Z die Zufallsvariable X stochastisch in erster Ordnung dominiert. Dann gilt $SN(\hat{d}, X) \geq SN(\hat{d}, Z)$. Bei der Verteilung F_X erwartet der Zedent also ein höheres Schadensniveau[68]. Bei der Forderung der stochastischen Dominanz zweiter Ordnung kann keine Aussage bzgl. des Schadensniveaus getroffen werden.

[67] Vgl. bzgl. Kundenservicegrad (customer service level CSL) im Newsvendor Modell Jammernegg, Kischka (2005b), S. 13.

[68] Dies ist offensichtlich, da sich bei der Verteilung F_X mehr Schäden unterhalb der festgelegten Priorität befinden als bei F_Z.

Man betrachte die optimale Priorität für das Präferenzfunktional $\Phi_{\alpha,\lambda}$ unter der Annahme zweier Schadensverteilungen[69].

Satz 5.6.5
Seien X und Z Zufallsvariablen mit den entsprechenden Schadensverteilungen. Z dominiert X stochastisch in erster Ordnung. d_X^* und d_Z^* sind die optimalen Prioritäten des Optimierungsproblems $\max_d \ \Phi_{\alpha,\lambda}G(d,X)$ bzw. $\max_d \ \Phi_{\alpha,\lambda}G(d,Z)$. Dann gilt $d_X^*(\alpha,\lambda) \leq d_Z^*(\alpha,\lambda)$.

Beweis:
Z dominiert X stochastisch in erster Ordnung, dann gilt $F_X(a) \geq F_Z(a)$ für alle $a \geq 0$ bzw. $F_X^{-1}(b) \leq F_Z^{-1}(b)$ für alle $b \in [0,1]$. Für die Risikoparameter α und λ fest, gilt $F_X(d^*(\alpha,\lambda)) = F_Z(d^*(\alpha,\lambda)) = SN_d^*(\alpha,\lambda)$[70]. Setze $b := SN_d^*(\alpha,\lambda)$, dann folgt

$$F_X^{-1}(SN_d^*(\alpha,\lambda)) \leq F_Z^{-1}(SN_d^*(\alpha,\lambda))$$

für alle $SN_d^*(\alpha,\lambda) \in [0,1]$ bzw.

$$d_X^*(\alpha,\lambda) \leq d_Z^*(\alpha,\lambda).$$

QED

Das Resultat des vorangegangenen Satzes veranschaulicht der folgende Sachverhalt. Ein Zedent hat das gleiche Schadensniveau $SN^*(\alpha,\lambda)$ bzgl. zweier Schadensverteilungen. Da die dominierte Verteilung F_X tendenziell kleinere Schäden beinhaltet, befindet sich die optimale Priorität bei der Schadensverteilung F_X bei kleineren Schäden als bei der Schadensverteilung F_Z. Den Sachverhalt stellt ebenfalls Abbildung 5.15 dar.

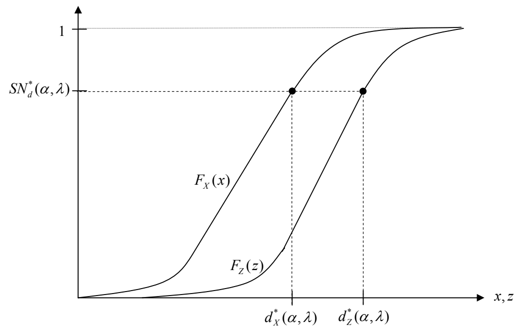


Abbildung 5.15: Optimale Priorität bei stochastischer Dominanz erster Ordnung.

Die Minderung der Forderung auf stochastische Dominanz zweiter Ordnung zwischen der Schadensvariablen X und Z führt zu keiner eindeutigen Lösung[71].

Die nächsten zu betrachtenden Kenngrößen sind der erwartete Erst- und der Rückversicherungsschaden. Es gelten folgende Aussagen bzgl. des Erstversicherungsschadens.

[69] Auf Betrachtungen für das Präferenzfunktional $\Phi_{\beta,\delta}$ wird verzichtet.

[70] $SN_d^*(\alpha,\lambda)$ bezeichne das optimale Schadensniveau bzgl. der Priorität für bestimmte Risikoparameter α und λ.

[71] Z dominiere X stochastisch in zweiter Ordnung, dann muss sich die Verteilungsfunktion von X nicht immer oberhalb oder auf der Verteilungsfunktion von Z befinden. Damit kann nicht geklärt werden, ob $d_X^*(\alpha,\lambda) \leq d_Z^*(\alpha,\lambda)$ oder $d_X^*(\alpha,\lambda) \geq d_Z^*(\alpha,\lambda)$ gilt.

Satz 5.6.6
Es seinen X und Z zufällige Schäden und $E(EVS(d,X)) = E(min(d,X))$ *bzw.* $E(EVS(d,Z)) = E(min(d,Z))$ *der zugehörige erwartete Erstversicherungsschaden bzgl. X bzw. bzgl. Z.*

1. *Z dominiert X stochastisch in zweiter Ordnung. Dann gilt* $E(EVS(d,X)) \leq E(EVS(d,Z))$ *für alle* $d \geq 0$.

2. *Z dominiert X stochastisch in erster Ordnung. Dann gilt* $E(EVS(d^*_X(\alpha,\lambda),X)) \leq E(EVS(d^*_Z(\alpha,\lambda),Z))$.

Beweis:
1. Behauptung:
Z dominiert X stochastisch in zweiter Ordnung. Wegen Satz 5.6.3 Behauptung (1) gilt $E(min(d,X)) \leq E(min(d,Z))$ für alle $d \geq 0$, damit folgt $E(EVS(d,X)) \leq E(EVS(d,Z))$ für alle $d \geq 0$.

2. Behauptung:
Z dominiere X stochastisch in erster Ordnung. Damit gilt $d^*_X(\alpha,\lambda) \leq d^*_Z(\alpha,\lambda)$. Z dominiert X stochastisch in erster Ordnung, so auch in zweiter Ordnung. Aus Satz 5.6.3 Behauptung (2) folgt $E(EVS(d^*_X(\alpha,\lambda),X)) \leq E(EVS(d^*_Z(\alpha,\lambda),Z))$.

QED

Die erste Behauptung[72] besagt, dass der erwartete Erstversicherungsschaden bei einer festen Priorität d bei einer Schadensverteilung mit tendenziell kleinen Schäden kleiner ist als bei einer Schadensverteilung mit tendenziell größeren Schäden. Wichtig dabei ist, dass man dafür nur die stochastische Dominanz zweiter Ordnung fordern muss. Natürlich gilt die erste Behauptung auch bei stochastischer Dominanz erster Ordnung.

Die zweite Behauptung entspricht folgendem Sachverhalt. Es tritt entweder die Schadenszufallsvariable X oder Z ein. Zu diesen Schadensvariablen ist entsprechend der Risikoeinstellung des Zedenten die optimale Priorität und der erwartete Erstversicherungsschaden bestimmbar. Da die Schadensvariable X tendenziell kleinere Schäden als die Schadensvariable Z beinhaltet, wird eine niedrigere optimale Priorität bei X gewählt. Dadurch ist auch der erwartete Erstversicherungsschaden bei X kleiner als bei Z. Die Forderung der stochastischen Dominanz erster Ordnung wird dabei für die Abschätzung der optimalen Priorität benötigt.

Satz 5.6.7
Es seien X und Z zufällige Schäden und $E(RVS(d,X))$ *bzw.* $E(RVS(d,Z))$ *der zugehörige erwartete Rückversicherungsschaden*[73] *bzgl. X bzw. bzgl. Z. Z dominiert X stochastisch in erster Ordnung, dann gilt*

[72] Aus der ersten Behauptung von Satz 5.6.6 folgt zusätzlich für die optimalen Prioritäten der Schadensvariable X bzw. Z: $E(EVS(d^*_X(\alpha,\lambda),X)) \leq E(EVS(d^*_X(\alpha,\lambda),Z))$ und $E(EVS(d^*_Z(\alpha,\lambda),X)) \leq E(EVS(d^*_Z(\alpha,\lambda),Z))$.

[73] Es gilt $E(RVS(d,X)) = E(X - min(d,X)) = \int\limits_d^\infty (x-d)\, dF_X(x)$ bzw. $E(RVS(d,Z)) = E(Z - min(d,Z)) = \int\limits_d^\infty (z-d)\, dF_Z(z)$.

1. *$E(RVS(d,X)) \leq E(RVS(d,Z))$ für alle $d \geq 0$.*
2. *$E(RVS(d_X^*,X)) \geq E(RVS(d_Z^*,X))$ und $E(RVS(d_X^*,Z)) \geq E(RVS(d_Z^*,Z))$*[74]*.*

Beweis:
1. Behauptung:
Z dominiere X stochastisch in erster Ordnung. Es gilt nach Satz 5.6.2 Behauptung (2)
$\int\limits_a^\infty (x-a)\ dF_X(x) \leq \int\limits_a^\infty (z-a)\ dF_Z(z)$ für alle $a \geq 0$.
Für $a = d$ folgt $E(RVS(d,X)) \leq E(RVS(d,Z))$ für alle $d \geq 0$.

2. Behauptung:
Für die erwarteten Rückversicherungschäden bzgl. der optimalen Prioritäten d_X^* und d_Z^* gilt $E(RVS(d_X^*,X)) = \int\limits_{d_X^*}^\infty (x-d_X^*)\ dF_X(x)$ und $E(RVS(d_Z^*,X)) = \int\limits_{d_Z^*}^\infty (x-d_Z^*)\ dF_X(x)$. Z dominiert X stochastisch in erster Ordnung, dann gilt $d_X^* \leq d_Z^*$. Nach Satz 5.6.2 Behauptung (3) folgt $E(RVS(d_X^*,X)) \geq E(RVS(d_Z^*,X))$. Analog folgt $E(RVS(d_X^*,Z)) \geq E(RVS(d_Z^*,Z))$.

QED

Für eine feste Priorität ist damit auch der erwartete Rückversicherungsschaden kleiner, wenn eine Schadensverteilung mit tendenziell kleineren Schäden vorliegt. Für diese Aussage muss die stochastische Dominanz erster Ordnung gefordert werden. Die zweite Behauptung besagt, dass bei einer höheren optimalen Priorität der erwartete Rückversicherungsschaden kleiner ist, egal, ob eine Klein- oder Großschadensverteilung vorliegt[75].

Die spezielle Rückversicherungsprämie ist der erwartete Rückversicherungsschaden versehen mit einem Gewinnaufschlag. Damit sind die Ergebnisse des erwarteten Rückversicherungsschadens aus der stochastischen Dominanz direkt auf die Rückversicherungsprämie übertragbar.

Satz 5.6.8
Es seien X und Z zufällige Schäden und $RVP_X(d)$ bzw. $RVP_Z(d)$ die zugehörigen Rückversicherungsprämien[76] *bzgl. X bzw. bzgl. Z. Z dominiert X stochastisch in erster Ordnung, dann gilt*

1. *$RVP_X(d) \leq RVP_Z(d)$ für alle $d \geq 0$.*
2. *$RVP(d_X^*,Z) \geq RVP(d_X^*,X) \geq RVP(d_Z^*,X)$ und*
   $RVP(d_X^*,Z) \geq RVP(d_Z^*,Z) \geq RVP(d_Z^*,X)$[77]*.*

---

[74]Die optimalen Prioritäten $d_X^* = d_X^*(\alpha,\lambda)$ und $d_Z^* = d_Z^*(\alpha,\lambda)$ beziehen sich auf die gleiche Risikoeinstellung des Zedenten. Die erweiterte Darstellung mit den Risikoparametern ist zwar exakter, soll aber aufgrund der Übersichtlichkeit weggelassen werden. Im gesamten Abschnitt beziehen sich dabei alle optimalen Prioritäten immer auf eine bestimmte Risikoeinstellung des Zedenten.

[75]Insgesamt folgen aus Satz 5.6.7 folgende Ungleichungen für den erwarteten Rückversicherungsschaden: $E(RVS(d_X^*,Z)) \geq E(RVS(d_X^*,X)) \geq E(RVS(d_Z^*,X))$ und $E(RVS(d_X^*,Z)) \geq E(RVS(d_Z^*,Z)) \geq E(RVS(d_Z^*,X))$.

[76]Es gilt $RVP_X(d) = (1+\gamma)E(RVS(d,X))$ bzw. $RVP_Z(d) = (1+\gamma)E(RVS(d,Z))$.

[77]Der Beweis folgt unmittelbar aus Satz 5.6.7, da $(1+\gamma) \geq 0$ ist.

Dabei geht aus Behauptung (1) hervor, dass ein Zessionär bei einer Großschadensverteilung mehr Rückversicherungsprämie verdient als bei einer Kleinschadensverteilung.

Die nächste zu betrachtende Kenngröße ist der erwartete Gewinn. Es gilt für diesen bei einer Schadensvariable X

$$E(G(d,X)) = Pr - B - E(X) - RVP_X(d) + E(RVS(d,X)) = Pr - B - E(X) - \gamma E(RVS(d,X)).$$

Satz 5.6.9
Seien X und Z Zufallsvariablen und Z dominiert X stochastisch in erster Ordnung, dann gilt für den erwarteten Gewinn

1. $E(G(d,X)) \geq E(G(d,Z))$ *für alle* $d \geq 0$.
2. $E(G(d_Z^*,X)) \geq E(G(d_X^*,X)) \geq E(G(d_X^*,Z))$ *und*
   $E(G(d_Z^*,X)) \geq E(G(d_Z^*,Z)) \geq E(G(d_X^*,Z))$[78].

Damit hat ein Zedent mit einem höheren erwarteten Gewinn zu rechnen, wenn eine Kleinschadensverteilung eintritt. Dies folgt aus Behauptung (1). Behauptung (2) gibt eine Abschätzung für den erwarteten Gewinn bei Vorlage unterschiedlicher Verteilungen und gewählter optimaler Prioritäten wieder.

Für die Verlustwahrscheinlichkeit und den erwarteten Verlust bei Rückversicherungswahl gilt $PL(d,X) = PL(d,Z) = 0$ bzw. $EL(d,X) = EL(d,Z) = 0$ für alle $d \geq 0$[79]. Somit gilt bei stochastischer Dominanz erster und zweiter Ordnung $PL(d,X) = PL(d,Z)$ bzw. $EL(d,X) = EL(d,Z)$ für alle $d \geq 0$.

Dagegen gilt bei Ablehnung der Rückversicherung für die Verlustwahrscheinlichkeit $PL_X^* = 1 - F_X(Pr - B)$ für die Schadensvariable X bzw. $PL_Z^* = 1 - F_Z(Pr - B)$ für die Schadensvariable Z. Z dominiere X in erster Ordnung, dann gilt per Definition $F_X(a) \geq F_Z(a)$ für alle $a \in \mathbb{R}$. Damit gilt $1 - F_X(a) \leq 1 - F_Z(a)$ für alle $a \in \mathbb{R}$. Somit ist $PL_X^* \leq PL_Z^*$. Das bedeutet, wird die Rückversicherung nicht gewählt, so ist die Verlustwahrscheinlichkeit bei einer Großschadensverteilung höher als bei einer Kleinschadensverteilung.

Die nächste zu betrachtende Kenngröße ist die Gewinnfunktion. Für diese gilt unter stochastischer Dominanz folgende Aussage:

Satz 5.6.10
Sei $G(d,X) = Pr - B - X - RVP_X(d) + \min(0, X - d)$ *die Gewinnfunktion bzgl. der Zufallsvariable X und* $G(d,Z) = Pr - B - Z - RVP_Z(d) + \min(0, Z - d)$ *bzgl. Z. Wenn Z stochastisch erster Ordnung X dominiert, dann gilt* $F_{G(d,X)}(a) \leq F_{G(d,Z)}(a)$ *für alle* $a \in \mathbb{R}$ *und* $G(d,Z) \preceq_{FSD} G(d,X)$ *für alle* $d \geq 0$[80].

[78] Der Beweis befindet sich im Anhang D.1 S. 243.

[79] Dies ist aus dem vorangegangenen Abschnitt bekannt. Dabei wurde die Annahme $Pr - B - RVP(d^*) - d^* \geq 0$ getroffen.

[80] Der Beweis befindet sich im Anhang D.1 S. 244 f.

Der Satz trifft somit die Aussage: Wenn zwei verschiedene Schadensverteilungen eintreten können und die Schadensverteilung Z eine Schadensverteilung X stochastisch dominiert in erster Ordnung, so dominiert der Gewinn von X den Gewinn von Z stochastisch in erster Ordnung[81].

Die letzten Untersuchungen bzgl. der stochastischen Dominanz werden für die im Kapitel unterstellten Präferenzfunktionale durchgeführt.

Satz 5.6.11
Seien X und Z Zufallsvariablen und Z dominiert X stochastisch in erster Ordnung, dann gilt

1. $\Phi_\alpha(G(d, X)) \geq \Phi_\alpha((G(d, Z))$ *für alle* $d \geq 0$.
2. $\Phi_{\alpha,\lambda}(G(d, X)) \geq \Phi_{\alpha,\lambda}((G(d, Z))$ *für alle* $d \geq 0$.
3. $\Phi_{\beta,\delta}(G(d, X)) \geq \Phi_{\beta,\delta}((G(d, Z))$ *für alle* $d \geq 0$[82].

Für alle drei Präferenzfunktionale folgt somit, dass diese bei der dominierten Verteilung (bei der Kleinschadensverteilung) am größten sind. Unter Verwendung der optimalen Prioritäten bzgl. beider Verteilungen können folgende Aussagen für die Präferenzfunktionale getroffen werden:

1. $\Phi_\alpha(G(d^*_X, X)) \geq \Phi_\alpha((G(d^*_X, Z))$ und
   $\Phi_\alpha(G(d^*_Z, X)) \geq \Phi_\alpha((G(d^*_Z, Z))$.
2. $\Phi_{\alpha,\lambda}(G(d^*_X, X)) \geq \Phi_{\alpha,\lambda}((G(d^*_X, Z))$ und
   $\Phi_{\alpha,\lambda}(G(d^*_Z, X)) \geq \Phi_{\alpha,\lambda}((G(d^*_Z, Z))$.
3. $\Phi_{\beta,\delta}(G(d^*_X, X)) \geq \Phi_{\beta,\delta}((G(d^*_X, Z))$ und
   $\Phi_{\beta,\delta}(G(d^*_Z, X)) \geq \Phi_{\beta,\delta}((G(d^*_Z, Z))$.

Hiermit sei die Untersuchung des Prioritätsmodells abgeschlossen. Es konnten für alle Kenngrößen mit Hilfe der stochastischen Dominanz Aussagen getroffen werden. Leider muss in den meisten Fällen die stochastische Dominanz erster Ordnung gefordert werden. Diese ist jedoch eine sehr starke Forderung, die die Schadensvariablen X und Z klar in eine Groß- und in eine Kleinschadensvariable trennt. Für die stochastische Dominanz zweiter Ordnung konnte nur in den seltensten Fällen eine Abschätzung erhalten werden.

5.7 Zusammenfassung und Überblick

In diesem Kapitel wurde das Rückversicherungsmodell unter Beachtung der Priorität für verschiedene Präferenzfunktionale vorgestellt. Es ist festzustellen, dass dabei ein risikofreudiger und risikoneutraler Zedent die Rückversicherung für positive Gewinnaufschlage seitens des Zessionärs ablehnen wird. Ein risikoaverser Zedent kann sich zum einen für, aber auch gegen die Rückversicherung entscheiden. Seine Entscheidung ist dabei abhängig, zum einen von

[81] Für die optimalen Prioritäten d^*_X und d^*_Z folgt aus dem Satz $G(d^*_X, Z) \preceq_{FSD} G(d^*_X, X)$ und $G(d^*_Z, Z) \preceq_{FSD} G(d^*_Z, X)$. Dabei beziehen sich die optimalen Prioritäten auf die gleiche Risikoeinstellung des Zedenten.
[82] Der Beweis befindet sich im Anhang D.1 S. 245 ff.

seiner eigenen Risikoeinstellung und zum anderen von dem Gewinnaufschlag des Rückversicherers. Die Erhöhung des Gewinnaufschlages des Rückversicherers führt zu einer höheren Risikoaversionspräferenz, ab welcher die Rückversicherung bevorzugt wird. Somit kann die Anhebung des Gewinnaufschlages durch den Zessionär zur Ablehnung der Rückversicherung durch den Zedent führen, obwohl dieser zuvor die Rückversicherung bei einem niedrigeren Gewinnaufschlag präferiert hat.

Bei Rückversicherungswahl wählt der risikoaverse Zedent dabei eine Teilversicherung, wobei das Volumen des abgegebenen Risikos[83] mit der Zunahme an Risikoaversion steigt. Die Erhöhung des Gewinnaufschlages seitens des Zessionärs führt zur Reduzierung des abgegeben Risikos und kann sogar zur Ablehnung der Rückversicherung führen. Der Zedent ist bei zunehmender Verteuerung der Rückversicherung bereit mehr Risiko selbst zu tragen.

Aus entscheidungstheoretischer Sicht wurde weiterhin der Spezialfall der fairen Rückversicherungsprämie betrachtet. In diesem Fall wählt jeder risikoaverse Zedent die Vollversicherung, jeder risikofreudige Zedent lehnt die Rückversicherung ab und jeder risikoneutrale Zedent ist indifferent in seiner Entscheidung. Fortführend wird in diesem Kaptiel die Möglichkeit der Messung der Risikopräferenz eines Zedenten vorgestellt. Grundlage dieser Berechnung sind bereits gewählte Rückversicherungsverträge. Die ermittelte Risikopräferenz des Zedenten kann anschliessend als Entscheidungsunterstützung für zukünftige Rückversicherungsverträge genutzt werden.

Außerdem werden für den Zedenten diverse Kenngrößen, wie zum Beispiel der optimale Gewinn, der erwartete Gewinn, die Verlustwahrscheinlichkeit und der erwarteten Verlust gegeben. Abschliessend werden diese und weitere Kenngrößen, wie die Rückversicherungsprämie als auch die Präferenzfunktionale, auf Robustheit untersucht. Dabei ist für eine festgewählte Priorität festzustellen, dass das Präferenzfunktional bei der dominierten Schadensverteilung (Kleinschadensverteilung) größer gleich dem Präferenzfunktional bei der dominierenden Verteilung (Großschadensverteilung) ist. Diese Aussage konnte für alle in dieser Arbeit verwendeten Präferenzfunktionale getroffen werden.

Das folgende Kapitel geht auf die Entscheidung des Zedenten bzgl. der zweiten Deckungsgrenze eines Rückversicherungsvertrages, dem Plafond, ein.

[83]Das ist das Risiko, welches der Rückversicherer trägt.

Kapitel 6

Plafondoptimierungsproblem

6.1 Einführung

Der Plafond, die zweite Deckungsobergrenze eines Rückversicherungsvertrages, ist für den Zedenten die existenzbedrohende Deckungsgrenze, da oberhalb des Plafonds der Zedent für die Schäden selbst aufkommen muss und diese nicht mehr durch den Rückversicherer gedeckt werden. Im Allgemeinen ist der Plafond wesentlich höher als die Priorität. Der Zedent kann nur bedingten Einfluss auf den Plafond nehmen. Vielmehr wird der Plafond durch den Zessionär bestimmt. Es handelt sich bei dem Plafond um die Schutzgrenze gegen den Ruin des Rückversicherers. Trotzdem versichert ein Rückversicherer auch Schäden, die seine finanzielle Leistungsfähigkeit überschreiten, da er in diesem Fall das Mittel der Retrozession nutzen kann. Im folgenden Kapitel soll der Frage nachgegangen werden, welchen Plafond der Zedent aufgrund seiner Risikoeinstellung präferiert[1]. Dazu wird ein nicht-proportionaler Rückversicherungsvertrag mit einer Priorität von null betrachtet[2]. Somit trägt der Rückversicherer gegen Zahlung einer Rückversicherungsprämie durch den Erstversicherer entweder die komplette Schadenshöhe[3] oder nur den Plafond[4]. Formal gilt für den Rückversicherungsschaden in Abhängigkeit vom Plafond c

$$RVS(c) = \begin{cases} X & \text{für } X \leq c \\ c & \text{für } X > c \end{cases} = \min(X, c).$$

Der Gesamtschaden X setzt sich zusammen aus dem Rückversicherungs- und Erstversicherungsschaden. Damit gilt für den Erstversicherungsschaden

$$EVS(c, X) = X - RVS(c, X) = X - \min(X, c) = \max(0, X - c).$$

Die Abbildung 6.1 stellt die Aufteilung des Schadens in die Erstversicherer- und Rückversichererkomponente bei einer Priorität von null graphisch dar.

[1] Dabei kann ein Zedent zwar einen bestimmten Plafond präferieren, letztendlich wird der Plafond jedoch vom Rückversicherer festgesetzt.
[2] Die Priorität soll damit im Folgenden keine Rolle für die Entscheidung des Zedenten spielen.
[3] Dies ist der Fall, wenn der Schaden kleiner gleich dem Plafond ist.
[4] Dies ist der Fall, wenn der Schaden größer ist als der Plafond.

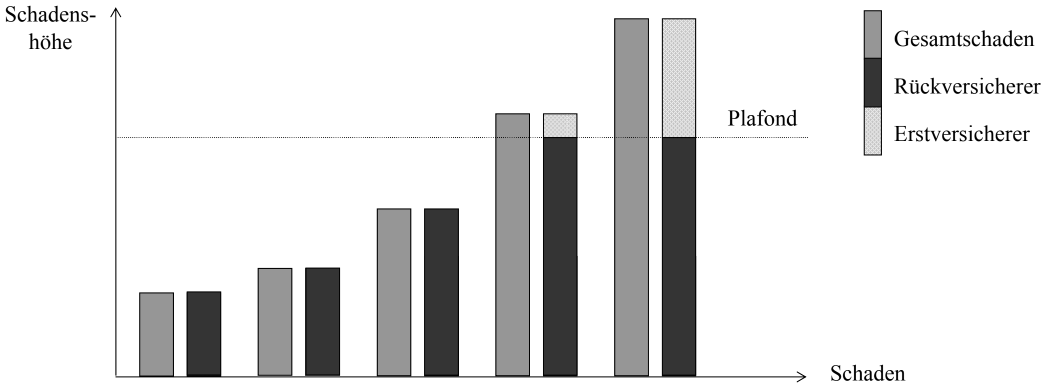


Abbildung 6.1: Erstversicherungs- und Rückversicherungsschaden bei einer Priorität von Null.

Für die Gewinnfunktion eines Zedenten gilt nach Definition 4.1.1

$$G = Pr - B - X - RVP + RVS,$$

wobei

Pr	=	Summe der Prämien aus dem Kundengeschäft
X	=	Schaden
RVP	=	Rückversicherungsprämie
RVS	=	Rückversicherungsschaden
B	=	Betriebskosten

sind. Der Rückversicherungsschaden und die Rückversicherungsprämie sind dabei von dem Schaden X und dem Plafond c abhängig. Es gilt somit für die Gewinnfunktion des Zedenten des Plafondmodells

$$\begin{aligned} G(c, X) &= Pr - B - X - RVP(c) + RVS(c, X) \\ &= Pr - B - X - RVP(c) + \min(X, c). \end{aligned} \tag{6.1}$$

Im Folgenden wird das Präferenzfunktional $\Phi_{\alpha,\lambda}$ mit der Gewinnfunktion $G(c, X)$ betrachtet und bzgl. des Plafonds optimiert. Aus der optimalen Lösung können dann auch die Spezialfälle, das CVaR-Prinzip und das Erwartungswertkriterium, abgeleitet werden. Auf die Betrachtung des Präferenzfunktionals $\Phi_{\beta,\delta}$ wird aufgrund der analogen Ergebnisse zum Präferenzfunktional $\Phi_{\alpha,\lambda}$ verzichtet.

6.2 Hybrides Entscheidungsprinzip $\Phi_{\alpha,\lambda}(G(c, X))$

Im Kapitel Entscheidungstheorie wurde das Präferenzfunktional $\Phi_{\alpha,\lambda}$ eingeführt. Es besitzt den Vorteil, alle drei Risikoarten[5] abbilden zu können. Für $\lambda = \alpha$ spiegelt es Risikoneutralität, für $\lambda < \alpha$ Risikofreude und für $\lambda > \alpha$ Risikoaversion wider. Dieses Präferenzfunktional soll im Folgenden auf das Rückversicherungsproblem des Plafonds angewendet werden.

[5]Risikofreude, Risikoneutralität und Risikoaversion.

Satz 6.2.1
Es sei $\Phi_{\alpha,\lambda}(G(c,X))$ das Präferenzfunktional eines Zedenten mit Gewinnfunktion

$$G(c,X) = Pr - B - X - RVP(c) + RVS(c,X),$$

dann besitzt das Maximierungsproblem

$$\max_c \ \Phi_{\alpha,\lambda}(G(c,X))$$

folgende implizite Lösung

$$F_X(c^*) = \begin{cases} 1 - \frac{\alpha}{\lambda} RVP_c(c^*), \\ \textit{für } \lambda \geq RVP_c(c^*) \textit{ und } -RVP_{cc}(c^*) - \frac{\lambda}{\alpha} f_X(c^*) < 0 \\ \\ \frac{1-\alpha}{1-\lambda}[1 - RVP_c(c^*)], \\ \textit{für } \lambda < RVP_c(c^*) \textit{ und } -RVP_{cc}(c^*) - \frac{1-\lambda}{1-\alpha} f_X(c^*) < 0 \end{cases} {}^6.$$

Die implizite Lösung unterteilt sich in zwei Fälle. Zum einen den Fall $\lambda \geq RVP_c(c^*)$ mit impliziter Lösung

$$F_X(c^*) = 1 - \frac{\alpha}{\lambda} RVP_c(c^*)$$

und Maximalbedingung $-RVP_{cc}(c^*) - \frac{\lambda}{\alpha} f_X(c^*) < 0$ und zum anderen den Fall $\lambda < RVP_c(c^*)$ mit impliziter Lösung

$$F_X(c^*) = \frac{1-\alpha}{1-\lambda}[1 - RVP_d(d^*)]$$

und Maximalbedingung $-RVP_{cc}(c^*) - \frac{1-\lambda}{1-\alpha} f_X(c^*) < 0$. Die Lösung ermöglicht somit die Kalkulation des optimalen Plafonds für beliebige Rückversicherungsprämienstrukturen[7].

Der optimale Plafond c^* ist von den Risikoparametern α und λ abhängig. Somit wäre die korrekte Schreibweise für den optimalen Plafond $c^*(\alpha, \lambda)$. Um den Umfang der Formeln nicht weiter zu vergrößern, wird im Allgemeinen auf die Angabe der Risikoparameter bei dem optimalen Plafond verzichtet.

Im Folgenden soll das Newsvendor Modell dem Rückversicherungsmodell des Plafonds gegenübergestellt werden.

Analogie zum Newsvendor Modell mit nicht-linearer Kostenfunktion und Risikopräferenzen

Für das Newsvendor Modell mit nicht-linearer Kostenfunktion und dem Präferenzfunktional $\Phi_{\beta,\delta}$ gilt

$$\Phi_{\beta,\delta}(G(y,X)) = \frac{1-\delta}{1-\beta} E(G(y,X)) + \frac{\delta-\beta}{1-\beta} E(G(y,X)|G(y,X) \geq g_{1-\beta}(y)).$$

[6]Der Beweis von Satz 6.2.1 befindet sich im Anhang C.2 S. 194 ff.
[7]Vgl. dazu Abschnitt 4.1.

Die $\beta{\cdot}100$ % größten Gewinne werden bei den $\beta{\cdot}100$ % größten Nachfragen, also bei Nachfragen oberhalb des $(1-\beta)$-Quantils der Nachfragen, realisiert. Somit gilt

$$E(G(y,X)|G(y,X) \geq g_{1-\beta}(y)) = E(G(y,X)|X \geq x_{1-\beta}(y)).$$

Das zugehörige Maximierungsproblem lautet

$$\max_y \frac{1-\delta}{1-\beta}E(G(y,X)) + \frac{\delta-\beta}{1-\beta}E(G(y,X)|X \geq x_{1-\beta}(y))^8.$$

Für das Rückversicherungsmodell (Plafond) in Verbindung mit dem Präferenzfunktional $\Phi_{\alpha,\lambda}$ gilt

$$\Phi_{\alpha,\lambda}(G(d,X)) = \frac{1-\lambda}{1-\alpha}E(G(c,X)) + \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}E(G(c,X)|G(c,X) \leq g_\alpha(c)).$$

Die Gewinnfunktion des Erstversicherers in Abhängigkeit vom Plafond lässt sich wie folgt abbilden (Abbildung 6.2):

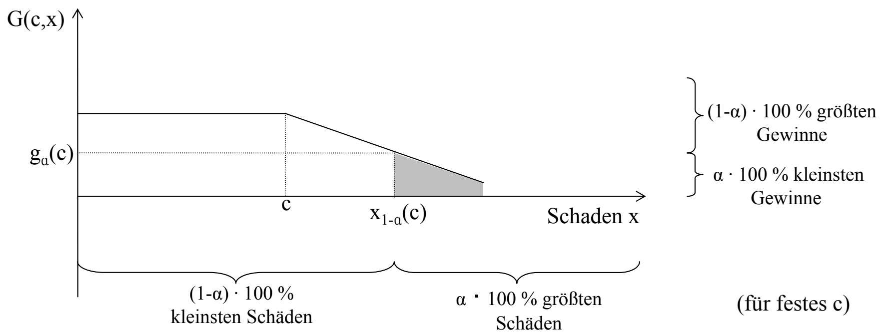


Abbildung 6.2: Gewinnfunktion (Plafond) des Erstversicherers mit α-Gewinnquantil.

Aufgrund der Tatsache, dass die $\alpha \cdot 100$ % kleinsten Gewinne bei den $\alpha \cdot 100$ % größten Schäden realisiert werden, befinden sich diese $\alpha{\cdot}100$ % kleinsten Gewinne oberhalb des $(1-\alpha)$-Schadensquantils. Demzufolge gilt

$$E(G(c,X)|G(c,X) \leq g_\alpha(c)) = E(G(c,X)|X \geq x_{1-\alpha}(c)).$$

Es wird somit das Maximierungsproblem

$$\max_c \frac{1-\lambda}{1-\alpha}E(G(c,X)) + \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}E(G(c,X)|X \geq x_{1-\alpha}(c))$$

gelöst, wobei $x_{1-\alpha}(c)$ das $(1-\alpha)$-Schadensquantil bezeichne. Man erkennt, dass beide Optimierungsprobleme die gleiche Struktur aufweisen. Die folgende Tabelle gibt die Analogie zwischen beiden Modellen wieder.

[8] Vgl. Abschnitt 5.3 bei der Analogie zwischen Newsvendor Modell und Rückversicherungsmodell (Priorität).

Newsvendor Modell	Rückversicherungsmodell
Nachfrage X	Schaden X
Bestellmenge y	Plafond c
Kostenfunktion k	RV-Prämie RVP
k_y	RVP_c
k_{yy}	RVP_{cc}
Verkaufspreis p	1[9]
Rückgabepreis z	0[10]
$\beta = 1 - \alpha$	α
$\delta = 1 - \lambda$	λ
$\Phi_{\beta,\delta} = \Phi_{1-\alpha,1-\lambda}$	$\Phi_{\alpha,\lambda}$

Tabelle 6.1: Analogie zwischen dem Newsvendor- und dem Rückversicherungsmodell (Plafond) mit Risikopräferenzen.

Mit Hilfe dieser Analogie kann die Newsvendorlösung unter Verwendung des Präferenzfunktionals $\Phi_{\beta,\delta}$ in die Lösung des Rückversicherungsproblems für das komplementäre Präferenzfunktional $\Phi_{\alpha,\lambda}$ überführt werden.

Der nächste Untersuchungsgegenstand ist das Rückversicherungsmodell unter Verwendung des Präferenzfunktionals $\Phi_{\alpha,\lambda}$ mit der speziellen Rückversicherungsprämie aus Definition 4.1.2.

Rückversicherungsproblem (Plafond) mit spezieller Rückversicherungsprämie

Im Folgenden soll die spezielle Rückversicherungsprämie eingesetzt werden. Dazu benötigt man folgenden Lemma.

Lemma 6.2.1
Es sei $RVP(c)$ die Rückversicherungsprämie aus Definition 4.1.2, dann gilt für die ersten zwei Differentiale der Prämie $RVP_c(c) = (1+\gamma)[1 - F_X(c)]$ und $RVP_{cc}(c) = -(1+\gamma) f_X(c)$[11].

Der folgende Satz formuliert die Lösung des Rückversicherungsproblems unter Verwendung der speziellen Rückversicherungsprämie.

Satz 6.2.2
Es sei $\Phi_{\alpha,\lambda}(G(c,X))$ das Präferenzfunktional eines Zedenten mit Gewinnfunktion

$$G(c,X) = Pr - B - X - RVP(c) + RVS(c,X)$$

und der speziellen Rückversicherungsprämie $RVP(c) = (1+\gamma)E(RVS(c,X))$. Dann besitzt das Maximierungsproblem

$$\max_c \ \Phi_{\alpha,\lambda}(G(c,X))$$

[9] Der Verkaufspreis p entspricht somit einer monetären Einheit eingekaufter Deckung. Im Fall des Rückversicherungsmodells der Priorität entsprach der Verkaufspreis p des Newsvendors einer monetären Einheit nicht eingekaufter Deckung.

[10] Nicht in Anspruch genommene Deckung kann bei einem Rückversicherungsvertrag nicht zurückgegeben werden. Somit ist der Rückgabepreis des Newsvendors im Rückversicherungsmodell gleich null.

[11] Der Beweis von Lemma 6.2.1 befindet sich im Anhang C.2 S. 197.

folgende implizite Lösung

$$F_X(c^*) = \begin{cases} 0, & \textit{für } 1+\gamma > \frac{\lambda}{\alpha} \\ 1, & \textit{für } 1+\gamma < \frac{\lambda}{\alpha} \end{cases} {}^{12}.$$

Das Ergebnis $F_X(c^*) = 1$ bedeutet, dass der Plafond in der Höhe des größtmöglichen Schadens gewählt wird. Das heißt der Rückversicherer soll alle Schäden tragen. Dies stellt eine Vollversicherung dar. $F_X(c^*) = 0$ dagegen bedeutet, dass der Plafond unterhalb aller Schäden liegen soll[13]. Der Erstversicherer möchte also alle Schäden selbst tragen. In diesem Fall wählt der Zedent die Rückversicherung nicht. Der Zedent wählt bei dem Rückversicherungsmodell (Plafond) nie eine Teilversicherung.

Die Rückversicherung wird für $1 + \gamma > \frac{\lambda}{\alpha}$ abgelehnt. Für Risikofreude gilt $\lambda < \alpha$. In diesem Fall ist immer die Bedingung zur Ablehnung der Rückversicherung erfüllt. Ebenso ist diese Bedingung bei Gleichheit der Risikoparameter erfüllt. Dies spiegelt einen risikoneutralen Zedenten wider. Somit lehnt ein risikofreudiger bzw. risikoneutraler Zedent die Rückversicherung ab.

Die Lösung des Rückversicherungsproblems teilt die Risikoparameter für Risikoaversion in zwei Gruppen. In der ersten Gruppe gilt die Bedingung $1+\gamma > \frac{\lambda}{\alpha}$ und in der zweiten Gruppe die Bedingung $1 + \gamma < \frac{\lambda}{\alpha}$. Die Risikoparameter mit $1 + \gamma > \frac{\lambda}{\alpha}$ repräsentieren niedrige Risikoaversion. Für diese wird die Rückversicherung abgelehnt. Die Risikoparameter mit $1+\gamma < \frac{\lambda}{\alpha}$ bilden hohe Risikoaversion ab. In diesem Fall wird die Vollversicherung nachgefragt. Ist die Bedingung $1 + \gamma = \frac{\lambda}{\alpha}$ erfüllt, ist der Zedent indifferent in seiner Entscheidung. Die entsprechende Aufteilung des Risikopräferenzraumes verdeutlicht Abbildung 6.3[14].

Die Hauptdiagonale stellt die Risikoparameterkonstellationen für Risikoneutralität ($\alpha = \lambda$) dar. Die α-λ-Kombinationen unterhalb dieser Hauptdiagonalen sind die Kombinationen für Risikofreude und oberhalb für Risikoaversion. Die Grenze der optimalen Lösungen ($1+\gamma = \frac{\lambda}{\alpha}$) teilt die α-λ-Kombinationen für Risikoaversion in zwei Teile. Oberhalb dieser Grenze wird die Rückversicherung präferiert mit $F_X(d^*) = 1$, unterhalb dieser Grenze dagegen wird die Rückversicherung abgelehnt. Der Risikopräferenzraum ist somit identisch zum Risikopräferenzraum für das Rückversicherungsmodell (Priorität)[15] unter Verwendung des Präferenzfunktionals $\Phi_{\alpha,\lambda}$. Der Unterschied zwischen den Modellen besteht allein in der unterschiedlichen Wirkungsweise der Deckungsgrenzen[16] und führt somit zu unterschiedlichen optimalen Lösungen.

---

[12] Der Beweis von Satz 6.2.2 befindet sich im Anhang C.2 S. 197 ff.

[13] Im Folgenden sei der optimale Plafond $c^* \geq 0$ zu einem Maximierungsproblem mit der Lösung $F_X(c^*) = a \in [0, 1]$ der kleinste Plafond für den $F_X(c^*) = a$ gilt. Somit ist für $F_X(c^*) = 0$ der optimale Plafond $c^* = 0$.

[14] Für die Abbildung wurde ein Gewinnaufschlag des Rückversicherers von 40 Prozent angenommen. Die Abbildung verdeutlicht u. a., dass ein risikoaverser Entscheider u. U. die Rückversicherung präferiert. Bzgl. Erwartungsnutzenkriterium und Haftungsobergrenze vgl. Cummins, Mahul (2004). Aufgrund einer anderen Zielstellung des Modells von Cummins und Mahul (Optimierung der Zielfunktion bzgl. Versicherungsschaden und -prämie) sind die Ergebnisse mit dem Plafondmodell nicht vergleichbar.

[15] Vgl. dazu Abbildung 5.6.

[16] Bei einer höheren Priorität wird weniger Rückversicherungsschutz und bei einem höheren Plafond mehr Deckungsschutz erworben.

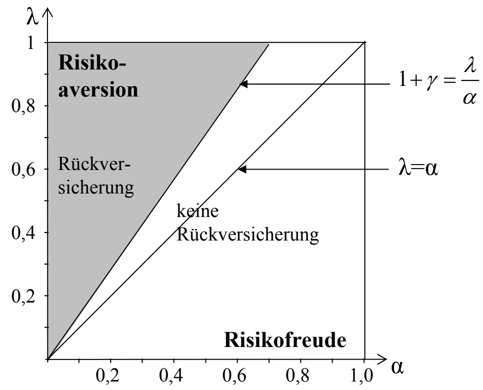


Abbildung 6.3: Risikopräferenzraum bei $\Phi_{\alpha,\lambda}(G(c,X))$.

Die Abbildung 6.4 stellt dabei die Verschiebung der Akzeptanzgrenze der Rückversicherung für verschiedene Gewinnaufschläge dar[17].

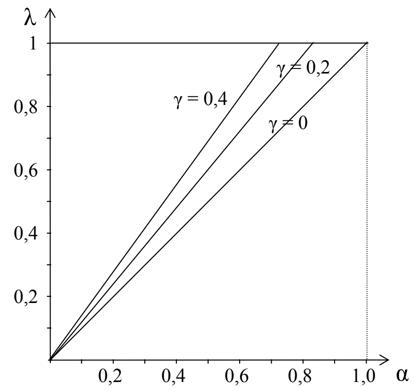


Abbildung 6.4: Risikopräferenzraum in Abhängigkeit vom Gewinnaufschlag bei $\Phi_{\alpha,\lambda}(G(c,X))$.

Die Grenze zwischen Wahl und Ablehnung der Rückversicherung verschiebt sich dabei für höhere Gewinnaufschläge seitens des Rückversicherers in Bereiche höherer Risikoaversion. Ein Zedent, der bei einem niedrigen Gewinnaufschlag γ_n die Rückversicherung wählt, wird die Rückversicherung ab einer gewissen Höhe des Gewinnaufschlages γ_B ablehnen[18]. Somit kann die Verteuerung[19] einer Rückversicherung zur Ablehnung der Rückversicherung führen. Im Fall einer fairen Rückversicherungsprämie dagegen bilden die α-λ-Kombinationen der Risikoneutralität die Grenze zwischen den optimalen Lösungen.

Die Ergebnisse sollen durch ein Beispiel verdeutlicht werden. Es werden die gleichen Annahmen wie in Beispiel 5.3.1 getroffen.

[17]Vgl. dazu Abbildung für das Rückversicherungsmodell (Priorität).
[18]Es gilt $\gamma_n < \gamma_B$.
[19]Basierend auf dem Gewinnaufschlag des Zessionärs.

Beispiel 6.2.1 *(Rückversicherungsmodell (Plafond) mit Präferenzfunktional $\Phi_{\alpha,\lambda}$)*
Es werden die vier Zedenten aus Beispiel 5.3.1 betrachtet. Jeder dieser Zedenten verhandelt mit zwei Rückversicherern. Rückversicherer 1 verlangt dabei einen Gewinnaufschlag von 20 und Rückversicherer 2 von 40 %. Als Schadensverteilung wird die Nullpunkt-Paretoverteilung mit den Parametern $\vartheta = 5$ und $b = 16,4$ angenommen. Die folgenden Tabellen geben für diese Zedenten den optimalen Plafond für die zwei angenommenen Gewinnaufschläge wieder:

Zedent	α	λ	RV-Wahl	$F_X(c^*)$	c^*
1	0,25	0,5	Ja	1	∞[20]
2	0,25	0,65	Ja	1	∞
3	0,5	0,5	Nein	0	0
4	0,5	0,65	Nein	0	0

Tabelle 6.2: Optimale Plafonds für Beispiel 6.2.1 mit $\gamma = 0,4$.

Zedent	α	λ	RV-Wahl	$F_X(c^*)$	c^*
1	0,25	0,5	Ja	1	∞
2	0,25	0,65	Ja	1	∞
3	0,5	0,5	Nein	0	0
4	0,5	0,65	Ja	1	∞

Tabelle 6.3: Optimale Plafonds für Beispiel 6.2.1 mit $\gamma = 0,2$.

Aus den Tabellen ist ersichtlich, dass Zedent 1 und 2, sowohl für den Gewinnaufschlag von 20 als auch von 40 % genügend risikoavers sind, um die Rückversicherung zu wählen. Dagegen lehnt Zedent 3[21] für beide Gewinnaufschläge die Rückversicherung ab. Zedent 4 ändert seine Entscheidung aufgrund des Gewinnaufschlages. Bei einem Gewinnaufschlag von 20 Prozent wird dieser die Rückversicherung wählen, bei 40 Prozent dagegen lehnt er diese ab. Wenn die Zedenten sich für die Rückversicherung entscheiden, wird ein Plafond von Unendlich präferiert, so dass sich alle möglichen Schäden unterhalb des Plafonds befinden und der Rückversicherer den gesamten Schaden trägt.

Im Folgenden sollen die drei Spezialfälle, die faire Rückversicherungsprämie, das Erwartungswertkriterium und das CVaR-Prinzip, betrachtet werden.

Spezialfälle

- Spezialfall: Faire Rückversicherungsprämie
  Für die Lösung aus Satz 6.2.2 folgt für $\gamma = 0$

$$F_X(c^*) = \begin{cases} 0, & \text{für } \alpha > \lambda \\ 1, & \text{für } \alpha < \lambda \end{cases} .$$

[20] Es gilt $\lim_{x \to 1} F_X^{-1}(x) = \infty$, wobei $F_X^{-1}(x) = b \cdot (1-x)^{-\frac{1}{\vartheta}} - b$ die Inverse der Nullpunkt-Paretoverteilung ist.
[21] Dieser ist risikoneutral.

Demzufolge lehnt ein risikofreudiger Zedent die Rückversicherung ab, ein risikoaverser Zedent dagegen präferiert die Vollversicherung. Im Gegesatz zum allgemeinen Fall präferiert bei einer fairen Rückversicherungsprämie jeder risikoaverse Zedent die Vollversicherung. Ergänzend ist zu sagen, dass ein risikoneutraler Zedent indifferent zwischen den zwei Optionen ist.

- Spezialfall: Erwartungswertkriterium
  Das Erwartungswertkriterium ist für $\lambda = \alpha$ im Präferenzfunktional $\Phi_{\alpha,\lambda}$ enthalten. Für $\lambda = \alpha$ folgt für die Lösung aus Satz 6.2.2

$$F_X(c^*) = \begin{cases} 0, & \text{für } 1+\gamma > 1 \\ 1, & \text{für } 1+\gamma < 1 \end{cases} = 0^{22}.$$

  Ein risikoneutraler Zedent lehnt somit für positive Gewinnaufschläge die Rückversicherung ab.

- Spezialfall: CVaR-Prinzip
  Das CVaR-Prinzip ist für $\lambda = 1$ im Präferenzfunktional $\Phi_{\alpha,\lambda}$ enthalten. Für $\lambda = 1$ folgt für die Lösung aus Satz 6.2.2

$$\begin{aligned} F_X(c^*) &= \begin{cases} 0, & \text{für } 1+\gamma > \frac{1}{\alpha} \\ 1, & \text{für } 1+\gamma < \frac{1}{\alpha} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & \text{für } \alpha > \frac{1}{1+\gamma} \\ 1, & \text{für } \alpha < \frac{1}{1+\gamma} \end{cases} {}^{23}. \end{aligned}$$

  Da $\frac{1}{1+\gamma}$ zwischen null und eins liegt, teilt die Bedingung $\alpha \gtrless \frac{1}{1+\gamma}$ die Risikoparameter α in zwei Gruppen ein. Große Risikoparameter α bilden dabei niedrige Risikoaversion, kleine Risikoparameter α hohe Risikoaversion ab. Für $\alpha \to 1$ nähert sich das CVaR-Prinzip dem Erwartungswertkriterium an. In diesem Fall gilt $F_X(c^*) = 0$. Die Rückversicherung wird also abgelehnt. Für niedrige Risikoparameter α hingegen wird mit $F_X(c^*) = 1$ die Vollversicherung gewählt. Dabei ist die Grenze zwischen Ablehnung und Akzeptanz der Rückversicherung identisch zum Rückversicherungsmodell (Priorität). Für den Risikopräferenzraum gelten somit die gleichen Darstellungen wie in Abbildung 5.3.

Im Folgenden wird die Äquivalenz zwischen dem Prioritäts- und Plafondmodell betrachtet:

- Im Prioritätsmodell wird das Präferenzfunktional angewendet auf die Gewinnfunktion

$$\begin{aligned} G(d,X) &= Pr - B - X - (1+\gamma)E(\max(0, X-d)) + \max(0, X-d) \\ &= Pr - B - X - (1+\gamma)E(X - \min(d,X)) + X - \min(d,X) \\ &= Pr - B - (1+\gamma)E(X) + (1+\gamma)E(\min(d,X)) - \min(d,X) \end{aligned}$$

[22] Gilt für positive Gewinnaufschläge des Rückversicherers.

[23] Bei der Anwendung des CVaR-Prinzips auf das Plafondproblem tritt auch im stetigen Fall die Tendenz zu Randlösungen auf, die sonst nur generell im diskreten Fall vorliegt. Des Weiteren sei auf das direkte Vorgängerresultat, die Publikation von Cai, Tan (2007), verwiesen. Die Bedingung für die optimale Lösung beim CVaR-Prinzip von Cai, Tan (2007) ist dabei zu der hier angegeben Lösung identisch. Ausgangspunkt sind jedoch unterschiedliche Zielfunktionen und Deckungsgrenzen. Cai und Tan verwenden nicht die Gewinnfunktion eines Erstversicherers mit dem Plafond, sondern den total risk exposure mit der Priorität.

und nach der Priorität d maximiert. Da der Term $Pr - B - (1+\gamma)E(X)$ unabhängig von der zu optimierenden Größe d ist, bringt die Gewinnfunktion

$$\tilde{G}(d,X) \quad = \quad (1+\gamma)E(\min(d,X)) - \min(d,X)$$

die gleichen optimalen Lösungen hervor wie die Gewinnfunktion G bzw. wie die Minimierung des Präferenzfunktionals mit der Gewinnfunktion

$$\breve{G}(d,X) \quad = \quad -(1+\gamma)E(\min(d,X)) + \min(d,X).$$

- Im Plafondmodell wird das Präferenzfunktional von der Gewinnfunktion

  $$G(c,X) \quad = \quad Pr - B - X - (1+\gamma)E(\min(c,X)) + \min(c,X)$$

  maximiert. Da der Term $Pr - B - X$ unabhängig von der zu optimierenden Größe c ist, bringt die Gewinnfunktion

  $$\tilde{G}(c,X) \quad = \quad -(1+\gamma)E(\min(c,X)) + \min(c,X)$$

  die gleichen optimalen Lösungen bei der Maximierung des Präferenzfunktionals hervor[24].

Somit ist die Lösung der Maximierung des Plafondmodells identisch zu der Lösung der Minimierung des Prioritätsmodells.

Im nächsten kurzen Abschnitt sollen die zu dem Rückversicherungsmodell (Plafond) zugehörigen Kenngrößen berechnet werden.

6.3 Kenngrößen

Die Kenngrößen Gewinn, erwarteter Gewinn, Verlustwahrscheinlichkeit und erwarteter Verlust werden im Folgenden gegeben. Deren Relevanz für einen Zedenten wurde bereits in Kapitel 5 thematisiert. Es wird keine spezielle Rückversicherungsprämie angenommen.

Nach Formel (6.1) gilt für die Gewinnfunktion eines Zedenten mit optimalem Plafond c^*

$$\begin{aligned} G(c^*,X) &= Pr - B - X - RVP(c^*) + \begin{cases} X, & f\ddot{u}r\; c^* \geq X \\ c^*, & f\ddot{u}r\; c^* < X \end{cases} \\ &= Pr - B - RVP(c^*) - \begin{cases} 0, & f\ddot{u}r\; c^* \geq X \\ X - c^*, & f\ddot{u}r\; c^* < X \end{cases} . \end{aligned}$$

[24]Damit liegt ein analoger Sachverhalt wie in der Finanzierungstheorie bei der Überführung von Maximierungs- bzw. Minimierungsproblemen von Eigen- und Fremdkapitalansprüchen unter beschränkter Haftung im Rahmen des Modigliani-Miller-Theorems vor. Vgl. diesbzgl. Modigliani, Miller (1958).

Für den erwarteten Gewinn bei optimalem Plafond c^* ergibt sich

$$\begin{aligned}
E(G(c^*,X)) &= Pr - B - E(X) - RVP(c^*) + E(min(c^*,X)) \\
&= Pr - B - E(X) - RVP(c^*) + \int_0^{c^*} x \; dF_X(x) + \int_{c^*}^{\infty} c^* \; dF_X(x) \\
&= Pr - B - RVP(c^*) + \int_{c^*}^{\infty} (c^* - x) \; dF_X(x) \\
&= Pr - B - RVP(c^*) - \int_{c^*}^{\infty} x \; dF_X(x) + c^*(1 - F_X(c^*)).
\end{aligned}$$

Es soll die Annahme $Pr - B \geq RVP(c^*)$ für einen Zedenten getroffen werden, da sonst der Zedent die Rückversicherungsprämie nicht abschließen kann. Im Fall $c^* \geq X$ ist die Gewinnfunktion unter dieser Annahme niemals negativ. Im Fall $c^* < X$ dagegen kann die Gewinnfunktion negative Werte annehmen. Es gilt für die Verlustwahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned}
PL^* &= P\left(G(c^*,X) \leq 0\right) = P(Pr - B - X - RVP(c^*) + c^* \leq 0) \\
&= P(X \geq Pr - B - RVP(c^*) + c^*) = 1 - P(X \leq Pr - B - RVP(c^*) + c^*) \\
&= 1 - F_X(Pr - B - RVP(c^*) + c^*)
\end{aligned}$$

bzw. für den erwarteten Verlust

$$\begin{aligned}
EL^* &= E(G(c^*,X) \mid G(c^*,X) \leq 0) = Pr - B - RVP(c^*) + c^* - E(X \mid G(c^*,X) \leq 0) \\
&= Pr - B - RVP(c^*) + c^* - \frac{\int_{Pr-B-RVP(c^*)+c^*}^{\infty} x \; dF_X(x)}{P\left(G(c^*,X) \leq 0\right)} \\
&= Pr - B - RVP(c^*) + c^* - \frac{1}{PL^*} \int_{Pr-B-RVP(c^*)+c^*}^{\infty} x \; dF_X(x).
\end{aligned}$$

Im folgenden Abschnitt werden diese Kenngroßen mit Hilfe der stochastischen Dominanz untersucht.

6.4 Folgerungen aus der Stochastischen Dominanz

Als erstes soll das Schadensniveau des Rückversicherers definiert werden. Dies geschieht in Analogie zum Prioritätsproblem.

Definition 6.4.1
Sei X eine Zufallsvariable und F_X die Schadensverteilung bzgl. dieser Zufallsvariable, dann heißt $SNR(c,X) = F_X(c)$ Plafondschadensniveau des Rückversicherers.

Satz 6.4.1
Z dominiert X stochastisch in erster Ordnung, dann gilt für das Plafondschadensniveau des Rückversicherers $SNR(c,X) \geq SNR(c,Z)$ für alle $c \geq 0$.

Beweis:
Z dominiert X stochastisch in erster Ordnung, dann gilt $F_X(c) \geq F_Z(c)$ für alle $c \geq 0$. Aus der Definition des Plafondschadensniveaus folgt $SNR(c, X) \geq SNR(c, Z)$ für alle $c \geq 0$.

QED

Wenn X die dominierte Zufallsvariable ist und c ein fester Plafond, dann liegen mehr Schäden der Verteilung von X unterhalb des Plafonds als bei der Verteilung von Z. Das Plafondschadensniveau ist somit für den Rückversicherer höher. Für die abgeschwächte Forderung der stochastischen Dominanz zweiter Ordnung kann dagegen keine Aussage bzgl. des Plafondschadensniveaus des Rückversicherers getroffen werden.

Satz 6.4.2
Seien X und Z Zufallsvariablen mit den entsprechenden Schadensverteilungen. Z dominiert X stochastisch in erster Ordnung. d_X^* *und* d_Z^* *sind die optimalen Prioritäten des Optimierungsproblems* $\max\limits_c \ \Phi_{\alpha,\lambda} G(c, X)$ *bzw.* $\max\limits_c \ \Phi_{\alpha,\lambda} G(c, Z)$*. Dann gilt* $c_X^*(\alpha, \lambda) \leq c_Z^*(\alpha, \lambda)$*.*

Beweis:
Z dominiert X stochastisch in erster Ordnung, dann gilt $F_X^{-1}(a) \leq F_Z^{-1}(a)$ für alle $a \in [0, 1]$. Setze $a := SNR_c^*(\alpha, \lambda)$[25], dann folgt $F_X^{-1}(SNR_c^*(\alpha, \lambda)) \leq F_Z^{-1}(SNR_c^*(\alpha, \lambda))$ für alle $SNR_c^*(\alpha, \lambda) \in [0, 1]$ bzw. $c_X^*(\alpha, \lambda) \leq c_Z^*(\alpha, \lambda)$.

QED

Die Aussage des vorangegangenen Satzes ist somit, dass ein Zedent bei gleicher Risikoeinstellung bei der Verteilung X einen niedrigeren oder gleichen Plafond wie bei Verteilung Z wählt. Wenn der Zedent die Rückversicherung ablehnt, dann gilt $c_X^*(\alpha, \lambda) = c_Z^*(\alpha, \lambda)$, dagegen wird bei Rückversicherungswahl als Plafond der größtmögliche Schaden der jeweiligen Verteilung gewählt. Dabei ist der größtmögliche Schaden bei der Verteilung X kleiner oder gleich als bei der Verteilung Z[26].

Die nächste Kenngröße, die betrachtet werden soll, ist der erwartete Erstversicherungsschaden. Es gilt:

Satz 6.4.3
Seien X und Z Zufallsvariablen mit dem entsprechenden erwarteten Erstversicherungsschäden
$E(EVS(c, X)) = E(X - min(c, X)) = \int\limits_c^\infty (x - c) \ dF_X(x)$ *bzw.*
$E(EVS(c, Z)) = E(X - min(c, Z)) = \int\limits_c^\infty (z - d) \ dF_Z(z)$*.*
Z dominiert X stochastisch in erster Ordnung, dann gilt

1. $E(EVS(c, X)) \leq E(EVS(c, Z))$ *für alle* $c \geq 0$*.*
2. $E(EVS(c_X^*(\alpha, \lambda), X)) \geq E(EVS(c_Z^*(\alpha, \lambda), X))$ *und*
   $E(EVS(c_X^*(\alpha, \lambda), Z)) \geq E(EVS(c_Z^*(\alpha, \lambda), Z))$*.*

[25] $SNR_c^*(\alpha, \lambda)$ bezeichne das optimale Schadensniveau bzgl. des Plafonds bei der Risikoeinstellung (α, λ).
[26] Die stochastische Dominanz zweiter Ordnung führt bei vorliegendem Sachverhalt zu keinem Resultat.

Beweis:
1. Behauptung:
Z dominiert X stochastisch in erster Ordnung. Wegen Satz 5.6.2 Behauptung (2) gilt
$\int_c^\infty (x-c)\ dF_X(x) \leq \int_c^\infty (z-c)\ dF_Z(z)$ für alle $c \geq 0$, damit folgt
$E(EVS(c,X)) \leq E(EVS(c,Z))$ für alle $c \geq 0$.

2. Behauptung:
Z dominiert X stochastisch in erster Ordnung, dann gilt $c_X^*(\alpha,\lambda) \leq c_Z^*(\alpha,\lambda)$. Für die erwarteten Erstversicherungsschäden gilt
$E(EVS(c_X^*(\alpha,\lambda),X)) = \int_{c_X^*(\alpha,\lambda)}^\infty (x - c_X^*(\alpha,\lambda))\ dF_X(x)$ und
$E(EVS(c_Z^*(\alpha,\lambda),X)) = \int_{c_Z^*(\alpha,\lambda)}^\infty (x - c_Z^*(\alpha,\lambda))\ dF_X(x)$.
Daraus folgt nach Satz 5.6.2 Behauptung (3) $E(EVS(c_X^*(\alpha,\lambda),X)) \geq E(EVS(c_Z^*(\alpha,\lambda),X))$.
Analog folgt aus
$E(EVS(c_X^*(\alpha,\lambda),Z)) = \int_{c_X^*(\alpha,\lambda)}^\infty (z - c_X^*(\alpha,\lambda))\ dF_Z(z)$ und
$E(EVS(c_Z^*(\alpha,\lambda),X)) = \int_{c_Z^*(\alpha,\lambda)}^\infty (z - c_Z^*(\alpha,\lambda))\ dF_Z(z)$
durch Anwendung von Satz 5.6.2 Behauptung (3) $E(EVS(c_X^*(\alpha,\lambda),Z)) \geq E(EVS(c_Z^*(\alpha,\lambda),Z))$.

QED

Folgerung:
Insgesamt folgt somit für die erwarteten Erstversicherungsschäden

$$E(EVS(c_X^*(\alpha,\lambda),Z)) \geq E(EVS(c_X^*(\alpha,\lambda),X)) \geq E(EVS(c_Z^*(\alpha,\lambda),X))$$

und

$$E(EVS(c_X^*(\alpha,\lambda),Z)) \geq E(EVS(c_Z^*(\alpha,\lambda),Z)) \geq E(EVS(c_Z^*(\alpha,\lambda),X)).$$

Der erwartete Erstversicherungsschaden ist somit größer, wenn entweder eine Kleinschadensverteilung (Verteilung X) erwartet wurde, aber eine Großschadensverteilung (Verteilung Z) eingetreten ist[27], oder es wurde ein zu niedriger Plafond für die zukünftige Schadensverteilung gewählt[28]. Dagegen ist der erwartete Erstversicherungsschaden kleiner, wenn entweder eine Großschadensverteilung (Verteilung Z) erwartet wurde, aber eine Kleinschadensverteilung (Verteilung X) eingetreten ist[29], oder es wurde ein zu großer Plafond für die zukünftige Schadensverteilung gewählt[30].

[27]In diesem Fall gilt $E(EVS(c_X^*,Z)) \geq E(EVS(c_X^*,X))$.
[28]In diesem Fall gilt $E(EVS(c_X^*,Z)) \geq E(EVS(c_Z^*,Z))$.
[29]In diesem Fall gilt $E(EVS(c_Z^*,Z)) \geq E(EVS(c_Z^*,X))$.
[30]In diesem Fall gilt $E(EVS(c_X^*,X)) \geq E(EVS(c_Z^*,X))$. Dabei wird aber auch ein höheres Entgelt für die Rückversicherung fällig.

Die nächste Kenngröße ist der erwartete Rückversicherungsschaden. Dieser ist für die Zufallsvariablen X und Z wie folgt definiert $E(RVS(c,X)) := E(min(c,X))$ bzw.
$E(RVS(c,Z)) := E(min(c,Z))$ für alle $c \geq 0$.

Satz 6.4.4
Seien X und Z Zufallsvariablen mit dem dazugehörigen erwarteten Rückversicherungsschaden.

1. *Z dominiert X stochastisch in zweiter Ordnung, dann gilt* $E(RVS(c,X)) \leq E(RVS(c,Z))$ *für alle* $c \geq 0$.

2. *Z dominiert X stochastisch in erster Ordnung, dann gilt* $E(RVS(c_X^*(\alpha,\lambda),X)) \leq E(RVS(c_Z^*(\alpha,\lambda),Z))$.

Beweis:
1. Behauptung:
Z dominiere X stochastisch in zweiter Ordnung. Wegen Satz 5.6.3 Behauptung (1) gilt $E(min(c,X)) \leq E(min(c,Z))$, damit folgt $E(RVS(c,X)) \leq E(RVS(c,Z))$ für alle $c \geq 0$.

2. Behauptung:
Z dominiere X stochastisch in erster Ordnung. Damit gilt $c_X^*(\alpha,\lambda) \leq c_Z^*(\alpha,\lambda)$. Z dominiert X stochastisch in erster Ordnung und so auch in zweiter Ordnung. Man wende Satz 5.6.3 Behauptung (2) an. Daraus folgt $E(RVS(c_X^*(\alpha,\lambda),X)) \leq E(RVS(c_Z^*(\alpha,\lambda),Z))$.

QED

Bemerkung:
Da die stochastische Dominanz zweiter Ordnung auch bei stochastischer Dominanz erster Ordnung gilt, gelten die Resultate des vorangegangenen Satzes auch für die stochastische Dominanz erster Ordnung.

Folgerung:
Aus der ersten Behauptung von Satz 6.4.4 können folgende Aussagen für den optimalen Plafond abgleitet werden: $E(RVS(c_X^*(\alpha,\lambda),X)) \leq E(RVS(c_X^*(\alpha,\lambda),Z))$ und
$E(RVS(c_Z^*(\alpha,\lambda),X)) \leq E(RVS(c_Z^*(\alpha,\lambda),Z))$.

Für die Rückversicherungsprämie für die zwei Zufallsvariablen X und Z gilt
$RVP_X(c) = (1+\gamma)E(RVS(c,X))$ bzw. $RVP_Z(c) = (1+\gamma)E(RVS(c,Z))$.

Satz 6.4.5
Seien X und Z Zufallsvariablen mit den dazugehörigen Rückversicherungsprämien $RVP_X(c)$ *bzw.* $RVP_Z(c)$.

1. *Z dominiert X stochastisch in zweiter Ordnung, dann gilt* $RVP_X(c) \leq RVP_Z(c)$ *für alle* $c \geq 0$.

2. *Z dominiert X stochastisch in erster Ordnung, dann gilt* $RVP_X(c_X^*(\alpha,\lambda)) \leq RVP_Z(c_Z^*(\alpha,\lambda))$.

Beweis:
1. Behauptung:
Z dominiere X stochastisch in zweiter Ordnung. Wegen Satz 6.4.4 Behauptung (1) ist $E(RVS(c, X)) \leq E(RVS(c, Z))$. Da $\gamma \geq 0$ gilt, folgt daraus $RVP_X(c) \leq RVP_Z(c)$ für alle $c \geq 0$.

2. Behauptung:
Z dominiere X stochastisch in erster Ordnung. Damit ist nach Satz 6.4.4 Behauptung (2) $E(RVS(c_X^*(\alpha, \lambda), X)) \leq E(RVS(c_Z^*(\alpha, \lambda), Z))$. Da $\gamma \geq 0$ gilt, folgt daraus $RVP_X(c_X^*(\alpha, \lambda)) \leq RVP_Z(c_Z^*(\alpha, \lambda))$.

QED

Bemerkung:
Da die stochastische Dominanz zweiter Ordnung auch bei stochastischer Dominanz erster Ordnung zutrifft, gelten die Aussagen des vorangegangenen Satzes auch für die stochastische Dominanz erster Ordnung. Des Weiteren folgt aus der ersten Behauptung $RVP_X(c_X^*(\alpha, \lambda)) \leq RVP_Z(c_X^*(\alpha, \lambda))$ und $RVP_X(c_Z^*(\alpha, \lambda)) \leq RVS_Z(c_Z^*(\alpha, \lambda))$.

Auf die Betrachtung weiterer Kenngrößen soll für das Plafondoptimierungsproblem verzichtet werden, da diese ausführlich für das zweidimensionale Rückversicherungsmodell, welches im Kapitel 7 vorgestellt wird, betrachtet werden.

6.5 Zusammenfassung und Überblick

In diesem Kapitel wurde das Rückversicherungsmodell mit der Deckungsgrenze Plafond optimiert. Anschließend wurden die Ergebnisse unter stochastischer Dominanz untersucht. Die Optimierung führte dabei zu gleichen Resultaten bzgl. der Annahme bzw. der Ablehnung der Rückversicherung. Allein die Deckungshöhe unterscheidet sich zum Prioritätsmodell, da der Zedent bei Rückversicherungswahl ohne Beachtung einer Priorität eine Vollversicherung wünscht. Somit wird bei gleicher Risikoeinstellung und gleichem Gewinnaufschlag seitens des Rückversicherers in beiden Modellen (Prioritäts- und Plafondmodell) entweder für oder gegen die Rückversicherung entschieden. Bei Rückversicherungswahl möchte dabei der Zedent im Plafondmodell alle Schäden abgesichert wissen. Im Prioritätsmodell sinkt dagegen der Selbstbehalt des Zedenten mit der Zunahme an Risikoaversion ab. Die Frage, die sich an dieser Stelle ergibt, ist: Welches Ergebnis wird durch die gleichzeitige Optimierung der Deckungsgrenzen Plafond und Priorität erhalten? Dies ist das zentrale Thema des nächsten Kapitels.

Kapitel 7

Das zweidimensionale Optimierungsmodell

7.1 Allgemeines Modell

In diesem Kapitel sollen die Priorität d und der Plafond c in einem zweidimensionalen Modell gleichzeitig optimiert werden.

Zuvor betrachte man hierfür die Gewinnfunktion des Erstversicherers. Es gilt

$$G(c, d, X) = Pr - B - X - RVP(c, d) + RVS(c, d, X).$$

An dieser Stelle soll der Rückversicherungsschaden genauer betrachtet werden. Ist der Schaden X unterhalb der Priorität d, so ist der Rückversicherungsschaden gleich null. In diesem Fall trägt der Erstversicherer den entstandenen Schaden. Liegt der Schaden hingegen zwischen Priorität d und Plafond c, so haftet der Erstversicherer mit der Priorität d und der Rückversicherer trägt den übersteigenden Betrag X-d. Für den Fall, dass der Schaden sogar den Plafond c überschreitet, zahlt der Rückversicherer den Schadensbetrag zwischen dem Selbstbehalt und dem Plafond. Der Erstversicherer bleibt auf der Priorität und dem Schaden, der den Plafond übersteigt, sitzen.

Berücksichtigt man diese Zusammenhänge, so kann für den Rückversicherungsschaden

$$RVS(c, d, X) = \begin{cases} 0, & \text{für } X \leq d \\ X - d, & \text{für } d < X \leq c \\ c - d, & \text{für } X > c \end{cases} = max(0, min(X - d, c - d))$$

konstatiert werden. Analog gilt für den Schaden des Erstversicherers EVS

$$EVS(c, d, X) = \begin{cases} X, & \text{für } X \leq d \\ d, & \text{für } d < X \leq c \\ X - (c - d), & \text{für } X > c \end{cases} = min(X, max(d, X - (c - d))).$$

Für die Gewinnfunktion des Erstversicherers kann damit

$$G(c,d,X) = Pr - B - X - RVP(c,d) + \begin{cases} 0, & \text{für } X \leq d \\ X - d, & \text{für } d < X \leq c \\ c - d, & \text{für } X > c \end{cases}$$

festgehalten werden.

Der folgende Satz gibt die implizite Lösung des zweidimensionalen Modells bei Verwendung des α-λ-Präferenzfunktionals an.

Satz 7.1.1
Es sei $\Phi_{\alpha,\lambda}(G(c,d,X))$ das Präferenzfunktional eines hybriden Entscheiders mit Gewinnfunktion $G(c,d,X) = Pr - B - X - RVP(c,d) + RVS(c,d,X)$, dann besitzt das Maximierungsproblem

$$\max_{c,d} \; \Phi_{\alpha,\lambda}(G(c,d,X))$$

folgende implizite Lösung

$$(F_X(c^*), F_X(d^*)) = \begin{cases} \left(1 - \frac{\alpha}{\lambda} RVP_c(c^*,d^*), 1 + \frac{\alpha}{\lambda} RVP_d(c^*,d^*)\right), \\ wenn\ \lambda \geq RVP_c(c^*,d^*)\ und\ \lambda \geq -RVP_d(c^*,d^*) \\ und\ die\ Hesse-Matrix \\ \begin{pmatrix} -\frac{\lambda}{\alpha} f_X(c^*) - RVP_{cc}(c^*,d^*) & -RVP_{cd}(c^*,d^*) \\ -RVP_{cd}(c^*,d^*) & \frac{\lambda}{\alpha} f_X(d^*) - RVP_{dd}(c^*,d^*) \end{pmatrix} \\ negativ\ definit\ ist \\ \\ \left(1 - \frac{\alpha}{\lambda} RVP_c(c^*,d^*), \frac{1-\alpha}{1-\lambda}(1 + RVP_d(c^*,d^*))\right), \\ wenn\ \lambda \geq RVP_c(c^*,d^*)\ und\ \lambda < -RVP_d(c^*,d^*) \\ und\ die\ Hesse-Matrix \\ \begin{pmatrix} -\frac{\lambda}{\alpha} f_X(c^*) - RVP_{cc}(c^*,d^*) & -RVP_{cd}(c^*,d^*) \\ -RVP_{cd}(c^*,d^*) & \frac{1-\lambda}{1-\alpha} f_X(d^*) - RVP_{dd}(c^*,d^*) \end{pmatrix} \\ negativ\ definit\ ist \\ \\ \left(\frac{1-\alpha}{1-\lambda}\left[1 - RVP_c(c^*,d^*)\right], \frac{1-\alpha}{1-\lambda}\left[1 + RVP_d(c^*,d^*)\right]\right), \\ wenn\ \lambda < RVP_c(c^*,d^*)\ und\ \lambda < -RVP_d(c^*,d^*) \\ und\ die\ Hesse-Matrix \\ \begin{pmatrix} -\frac{1-\lambda}{1-\alpha} f_X(c^*) - RVP_{cc}(c^*,d^*) & -RVP_{cd}(c^*,d^*) \\ -RVP_{cd}(c^*,d^*) & \frac{1-\lambda}{1-\alpha} f_X(d^*) - RVP_{dd}(c^*,d^*) \end{pmatrix} \\ negativ\ definit\ ist \end{cases}.$$

Der Beweis zu Satz 7.1.1 kann im Anhang C.3 S. 200 ff. nachvollzogen werden. Als Spezialfall wird ausschließlich das Erwartungswertkriterium aus der allgemeinen Lösung abgeleitet.

Folgerung:
Das Erwartungswertkriterium kann für $\lambda = \alpha$ aus dem Präferenzfunktional erhalten werden. Dabei fällt die implizite Lösung auf einen Fall zusammen und es gilt

$$(F_X(c^*), F_X(d^*)) = (1 - RVP_c(c^*, d^*), 1 + RVP_d(c^*, d^*)) \,.$$

Diese Lösung ist ein Maximum, wenn die Hesse-Matrix

$$\begin{pmatrix} -f_X(c^*) - RVP_{cc}(c^*, d^*) & -RVP_{cd}(c^*, d^*) \\ -RVP_{cd}(c^*, d^*) & f_X(d^*) - RVP_{dd}(c^*, d^*) \end{pmatrix}$$

negativ definit ist. Die Kenngrößen für das allgemeine Modell werden im nächsten Abschnitt angegeben.

7.2 Kenngrößen

Im folgenden Abschnitt werden die Kenngrößen, wie der erwartete Gewinn, die Verlustwahrscheinlichkeit und der erwartete Verlust für das allgemeine zweidimensionale Modell gegeben[1]. Für den erwarteten Gewinn bei optimalen Deckungsgrenzen[2] gilt

$$\begin{aligned} E(G(c^*, d^*, X)) &= Pr - B - E(X) - RVP(c^*, d^*) + \int_{d^*}^{c^*} x f_X(x)\ dx \\ &+ c^*(1 - F_X(c^*)) - d^*(1 - F_X(d^*)) \\ &= Pr - B - RVP(c^*) - \int_0^{d^*} x f_X(x)\ dx - \int_{c^*}^{\infty} x f_X(x)\ dx \\ &+ c^*(1 - F_X(c^*)) - d^*(1 - F_X(d^*)). \end{aligned}$$

Zur Berechnung der Verlustwahrscheinlichkeit betrachte man zunächst eine Ungleichung $G(d^*, c^*, X) \leq 0$. Es gilt für die Gewinnfunktion

$$G(c^*, d^*, X) = Pr - B - X - RVP(c^*, d^*) + \begin{cases} 0, & \text{für } X \leq d^* \\ X - d^*, & \text{für } d^* < X \leq c^* \\ c^* - d^*, & \text{für } X > c^* \end{cases} .$$

Für einen Erstversicherer muss folgende Ungleichung gelten

$$Pr - B - RVP(c^*, d^*) - d^* \geq 0^3$$

Man sieht, dass die Gewinnfunktion nur im Fall $X > c^*$ negativ werden könnte. In diesem Fall gilt für die Gewinnfunktion

$$Pr - B - X - RVP(c^*, d^*) + c^* - d^* \leq 0$$

[1]Die Relevanz dieser Größen für einen Zedenten wurde bereits im Kapitel 5 thematisiert.
[2]Vgl. dazu den Beweis von Satz 7.1.1.
[3]Vgl. Annahmen für die Gewinnfunktion aus dem Kapitel der Priorität. Ein Zedent sollte aus den Prämieneinnahmen immer die Betriebskosten, die Rückversicherungsprämie und den Selbstbehalt des Rückversicherungsvertrages bezahlen können.

und dies ist äquivalent zu

$$Pr - B - RVP(c^*, d^*) + c^* - d^* \leq X.$$

Somit ist die Verlustwahrscheinlichkeit PL^* für den optimalen Plafond c^* und die optimale Priorität d^*

$$\begin{aligned} PL^* &= P\left(G(c^*, d^*, X) \leq 0\right) = P(X \geq Pr - B - RVP(c^*, d^*) + c^* - d^*) \\ &= 1 - P(X \leq Pr - B - RVP(c^*, d^*) + c^* - d^*) \\ &= 1 - F_X(Pr - B - RVP(c^*, d^*) + c^* - d^*) \end{aligned} \tag{7.1}$$

und der erwartete Verlust

$$\begin{aligned} EL^* &= E(G(c^*, d^*, X) \mid G(c^*, d^*, X) \leq 0) \\ &= Pr - B - RVP(c^*, d^*) + c^* - d^* - E(X \mid G(c^*, d^*, X) \leq 0) \\ &= Pr - B - RVP(c^*, d^*) + c^* - d^* - \frac{\int\limits_{Pr-B-RVP(c^*,d^*)+c^*-d^*}^{\infty} x f_X(x)\ dx}{P(X \geq Pr - B - RVP(c^*, d^*) + c^* - d^*)} \\ &= Pr - B - RVP(c^*, d^*) + c^* - d^* - \frac{1}{PL^*} \int\limits_{Pr-B-RVP(c^*,d^*)+c^*-d^*}^{\infty} x f_X(x)\ dx. \end{aligned}$$

Im Folgenden wird die Lösung des zweidimensionalen Rückversicherungsproblems für die spezielle Rückversicherungsprämie gegeben.

7.3 Rückversicherungsmodell mit spezieller Rückversicherungsprämie

In diesem Abschnitt wird in Analogie zu den vorangegangenen Kapiteln eine spezielle Rückversicherungsprämie angenommen. Dabei wird die Rückversicherungsprämie aus Definition 4.1.2 verwendet. Es gilt $RVP(c, d) = (1 + \gamma)E(RVS(c, d, X))$ mit $\gamma \geq 0$. Das folgende Lemma gibt eine explizite Darstellung sowie die ersten und zweiten partiellen Ableitungen für die spezielle Rückversicherungsprämie an.

Lemma 7.3.1
Es sei die Rückversicherungsprämie definiert wie in Definition 4.1.2, dann gilt für diese

$$RVP(c, d) = (1 + \gamma) \left[\int\limits_d^c x\ dF_X(x) - d(1 - F_X(d)) + c(1 - F_X(c)) \right]$$

und für deren partielle Ableitungen

$$\begin{aligned} RVP_c(c, d) &= (1 + \gamma)[1 - F_X(c)] \\ RVP_{cc}(c, d) &= -(1 + \gamma) f_X(c) \\ RVP_d(c, d) &= (1 + \gamma)[-1 + F_X(d)] \\ RVP_{dd}(c, d) &= (1 + \gamma) f_X(d) \\ RVP_{cd}(c, d) &= RVP_{dc}(c, d) = 0. \end{aligned}$$

Die Ergebnisse des Lemmas[4] werden für den Beweis des nächsten Satzes benötigt. Dieser gibt die Lösung des Rückversicherungsproblems für die spezielle Rückversicherungsprämie an.

Satz 7.3.1
Es sei $\Phi_{\alpha,\lambda}(G(c,d,X))$ das Präferenzfunktional eines hybriden Entscheiders mit Gewinnfunktion $G(c,d,X) = Pr - B - X - RVP(c,d) + RVS(c,d,X)$ und $RVP(c,d) = (1+\gamma)E(RVS(c,d,X))$, dann besitzt das Maximierungsproblem

$$\max_{c,d} \ \Phi_{\alpha,\lambda}(G(c,d,X))$$

folgende implizite Lösung

$$(F_X(c^*), F_X(d^*)) = \begin{cases} (1,1), & \text{für } 1+\gamma > \frac{\lambda}{\alpha} \\ \left(1, \frac{\gamma(1-\alpha)}{(1-\alpha)(1+\gamma)-(1-\lambda)}\right), & \text{für } 1+\gamma < \frac{\lambda}{\alpha} \end{cases} {}^{5}.$$

Der zweidimensionale Fall bringt damit ähnliche Resultate wie die zwei eindimensionalen Modelle hervor. Es gilt somit, dass die Rückversicherung für $1+\gamma < \frac{\lambda}{\alpha}$ (hohe Risikoaversion) gewählt wird mit einem Plafond in der Höhe des größtmöglichen Schadens und einer Priorität, die mit Zunahme der Risikoaversion absinkt. Im Fall $1+\gamma > \frac{\lambda}{\alpha}$ dagegen wird die Rückversicherung nicht gewählt, da der Erstversicherer einen Plafond gleich der Priorität präferiert.

7.4 Folgerungen aus der Stochastischen Dominanz

Im Folgenden sollen die Kenngrößen für das zweidimensionale Modell unter stochastischer Dominanz untersucht werden.

Satz 7.4.1
Z dominiert X stochastisch in erster Ordnung, dann gilt für das Schadensniveau des Zedenten $SN(d,X) \geq SN(d,Z)$ für alle $d \geq 0$ und für das Plafondschadensniveau des Rückversicherers $SNR(c,X) \geq SNR(c,Z)$ für alle $c \geq 0$ und $c \geq d$.

Beweis:
Z dominiert X stochastisch in erster Ordnung, dann gilt $F_X(d) \geq F_Z(d)$ für alle $d \geq 0$. Aus der Definition des Schadensniveaus des Zedenten folgt $SN(d,X) \geq SN(d,Z)$ für alle $d \geq 0$. Analog gilt $F_X(c) \geq F_Z(c)$ für alle $c \geq 0$. Aus der Definition des Plafondschadensniveaus des Rückversicherers folgt $SNR(c,X) \geq SNR(c,Z)$ für alle $c \geq 0$ und $c \geq d$.

---

[4] Der Beweis des Lemmas kann im Anhang C.3 S. 207 f. nachvollzogen werden.

[5] Der Beweis von Satz 7.3.1 befindet sich im Anhang C.3 S. 208 ff., wobei die Resultate aus Lemma 7.3.1 Verwendung finden. Ein Modell, welches ebenso Priorität und Plafond betrachtet, ist das Modell von Cummins, Mahul (2004). Im Gegensatz zu dem Modell dieser Arbeit verwenden Cummins und Mahul das Erwartungsnutzenkriterium. Aufgrund einer anderen Zielstellung des Modells von Cummins und Mahul (Optimierung der Zielfunktion bzgl. Versicherungsschaden und -prämie) sind die Ergebnisse mit dem Modell dieser Arbeit nicht vergleichbar. Ein weiteres Modell mit Plafond und Priorität im Erwartungsnutzenkontext ist das Modell von Zhou, Wu, Wu (2010), welche eine Haftungsobergrenze vorgeben. Das Modell ist dabei aus der Sicht des Versicherungsgebers und nicht wie in dieser Arbeit aus der Sicht des Versicherungsnehmers. Ebenso wird eine andere Zielfunktion optimiert. Das Fazit von Zhou, Wu und Wu ist jedoch von Interesse, da es besagt, dass eine Haftungsbeschränkung den Erwartungsnutzen für einen Versicherungsgeber erhöht.

QED

Das Schadensniveau ist somit beim Zedenten als auch beim Zessionär bei der dominierenden Schadensverteilung größer.

Satz 7.4.2
Seien X und Z Zufallsvariablen mit den entsprechenden Schadensverteilungen. Z dominiert X stochastisch in erster Ordnung. $d_X^*(\alpha,\lambda), c_X^*(\alpha,\lambda)$ *und* $d_Z^*(\alpha,\lambda), c_Z^*(\alpha,\lambda)$ *sind die optimalen Deckungsgrenzen des Optimierungsproblems* $\max\limits_{c,d} \Phi_{\alpha,\lambda}G(c,d,X)$ *bzw.* $\max\limits_{c,d} \Phi_{\alpha,\lambda}G(c,d,Z)$.
Dann gilt $d_X^*(\alpha,\lambda) \leq d_Z^*(\alpha,\lambda)$ *und* $c_X^*(\alpha,\lambda) \leq c_Z^*(\alpha,\lambda)$.

Beweis:
Die Behauptung folgt aus den Beweisen von Satz 5.6.5 und Satz 6.4.2.

QED

Die nächste zu betrachtende Größe ist der erwartete Erstversicherungsschaden in Abhängigkeit von der Priorität und dem Plafond. Es gilt

$$\begin{aligned} E(EVS(c,d,X)) &= \int_0^d x\ dF_X(x) + \int_d^c d\ dF_X(x) + \int_c^\infty [x-(c-d)]\ dF_X(x) \\ &= \int_0^d x\ dF_X(x) + \int_d^\infty d\ dF_X(x) + \int_c^\infty x\ dF_X(x) - \int_c^\infty c\ dF_X(x) \\ &= E(EVS(d,X)) + E(EVS(c,X))^6. \end{aligned}$$

Somit ist der erwartete Erstversicherungsschaden in Abhängigkeit von der Priorität und dem Plafond eine Addition der erwarteten Erstversicherungsschäden der zwei eindimensionalen Optimierungsmodelle. Die Ergebnisse aus den vorangegangenen Abschnitten können somit genutzt werden, um Aussagen über die stochastische Dominanz des erwarteten Erstversicherungsschadens in diesem Modell zu treffen.

Satz 7.4.3
Seien X und Z Zufallsvariablen mit dem entsprechenden erwarteten Erstversicherungsschaden. Dann gilt bei stochastischer Dominanz erster Ordnung

$$E(EVS(c,d,X)) \leq E(EVS(c,d,Z))$$

für alle $c,d \geq 0$ *und* $c \geq d$.

Beweis:
Nach den Sätzen 5.6.6 und 6.4.3 gilt bei stochastischer Dominanz erster Ordnung $E(EVS(d,X)) \leq E(EVS(d,Z))$ bzw. $E(EVS(c,X)) \leq E(EVS(c,Z))$ für alle $c,d \geq 0$. Daraus folgt $E(EVS(c,d,X)) \leq E(EVS(c,d,Z))$ für alle $c,d \geq 0$ und $c \geq d$.

QED

[6]Vgl. dazu den erwarteten Erstversicherungsschaden in den Kapiteln 5 und 6.

Fazit ist somit, wie auch in den zwei eindimensionalen Optimierungsmodellen, dass der erwartete Erstversicherungsschaden bei der dominierenden Schadensverteilung größer ist. Dies ist verständlich, da bei einer dominierenden Verteilung größere Schäden zu erwarten sind.

Die nächste Kenngröße ist das Gegenstück zum erwarteten Erstversicherungsschaden, der erwartete Rückversicherungsschaden. Es gilt für diesen

$$\begin{aligned}
E(RVS(c,d,X)) &= \int_0^d 0 \; dF_X(x) + \int_d^c [x-d] \; dF_X(x) + \int_c^\infty [c-d] \; dF_X(x) \\
&= \int_d^c x \; dF_X(x) - \int_d^c d \; dF_X(x) + \int_c^\infty c \; dF_X(x) - \int_c^\infty d \; dF_X(x) \\
&+ \int_c^\infty x \; dF_X(x) - \int_c^\infty x \; dF_X(x) \\
&= \int_d^\infty x \; dF_X(x) - \int_d^\infty d \; dF_X(x) + \int_c^\infty c \; dF_X(x) - \int_c^\infty x \; dF_X(x) \\
&= \int_d^\infty [x-d] \; dF_X(x) - \int_c^\infty [x-c] \; dF_X(x) \\
&= E(RVS(d,X)) - E(EVS(c,X))^7.
\end{aligned}$$

Der erwartete Rückversicherungsschaden in Abhängigkeit von der Priorität und dem Plafond ist somit die Subtraktion aus dem erwarteten Rückversicherungsschaden des Prioritätsproblems und dem erwarteten Erstversicherungschaden des Plafondproblems. Es gilt der folgende Satz.

Satz 7.4.4
Seien X und Z Zufallsvariablen mit dem entsprechenden erwarteten Rückversicherungsschaden. Z dominiert X stochastisch in erster Ordnung, dann gilt

$$E(RVS(c,d,X)) \leq E(RVS(c,d,Z))$$

für alle $c, d \geq 0$ und $c \geq d$[8].

Somit gilt auch für den Zessionär, dass dessen erwarteter Schaden bei der dominierenden Schadensverteilung größer ist. Zusätzlich kann man leicht aus dem erwarteten Rückversicherungsschaden die Resultate für die spezielle Rückversicherungsprämie ableiten. Es gilt:

---

[7] Vgl. dazu den erwarteten Rückversicherungsschaden aus Kapitel 5 und den erwarteten Erstversicherungsschaden aus Kapitel 6.

[8] Der Beweis von Satz 7.4.4 befindet sich im Anhang D.2 S. 252 f.

Satz 7.4.5
Seien X und Z Zufallsvariablen mit den entsprechenden Rückversicherungsprämien $RVP_X(c,d)$ bzw. $RVP_Z(c,d)$. Z dominiert X stochastisch in erster Ordnung, dann gilt

$$RVP_X(c,d)) \leq RVP_Z(c,d))$$

für alle $c, d \geq 0$ und $c \geq d$[9].

Beweis:
Z dominiert X stochastisch in erster Ordnung, dann folgt aus Satz 7.4.4

$$E(RVS(c,d,X)) \leq E(RVS(c,d,Z))$$

für alle $c, d \geq 0$. Da $1 + \gamma \geq 0$ gilt, folgt

$$RVP_X(c,d)) \leq RVP_Z(c,d))$$

für alle $c, d \geq 0$ und $c \geq d$.

QED

Die Rückversicherungsprämie wird somit bei einer Schadensverteilung mit tendenziell größeren Schäden (dominierende Verteilung) höher ausfallen, da der Zessionär einen höheren Rückversicherungsschaden erwartet. Die Ergebnisse sind damit identisch zu den Resultaten in den eindimensionalen Modellen.

Man betrachte den erwarteten Gewinn. Es gilt bzgl. der Verteilung X für diesen

$$\begin{aligned} E(G(c,d,X)) &= Pr - B - E(X) - RVP_X(c,d) + E(RVS(c,d,X)) \\ &= Pr - B - E(X) - \gamma E(RVS(c,d,X)) \end{aligned}$$

und für die Verteilung Z

$$E(G(c,d,Z)) = \quad Pr - B - E(Z) - \gamma E(RVS(c,d,Z)).$$

Die Resultate unter stochastischer Dominanz gibt der folgende Satz wieder:

Satz 7.4.6
Seien X und Z Zufallsvariablen mit den entsprechenden erwarteten Gewinnen. Z dominiert X stochastisch in erster Ordnung, dann gilt $E(G(c,d,X)) \geq E(G(c,d,Z))$ für alle $c, d \geq 0$ und $c \geq d$[10].

Beweis:
Wenn Z stochastisch X in erster Ordnung dominiert, dann ist nach Satz 5.6.3 Behauptung (3) $-E(X) \geq -E(Z)$ und nach Satz 7.4.4 gilt $E(RVS(c,d,X)) \leq E(RVS(c,d,Z))$ und somit $-\gamma E(RVS(c,d,X)) \geq -\gamma E(RVS(c,d,Z))$ für $\gamma \geq 0$. Da die Gesamtprämie und die Betriebskosten für beide Gewinnfunktionen identisch sind, folgt insgesamt

$$E(G(c,d,X)) \geq E(G(c,d,Z))$$

für alle $c, d \geq 0$ und $c \geq d$.

[9] Im Folgenden werden die Rückversicherungsprämien mit der entsprechenden Schadensverteilung indiziert, um diese eindeutig der Schadensverteilung X bzw. Z zuordnen zu können.

[10] Der erwartete Gewinn ist somit bei der dominierten Schadensverteilung (Verteilung mit den kleineren Schäden) größer bei gleichen Prämieneinnahmen aus dem Erstversicherungsgeschäft und gleichen Betriebskosten.

QED

Nach dem erwarteten Gewinn stellt sich die Frage, welche Verlustwahrscheinlichkeit der Zedent besitzt und welche Aussagen für diese unter stochastischer Dominanz erster Ordnung getroffen werden können. Für die Verlustwahrscheinlichkeit gilt nach Formel (7.1)

$$PL(c,d,X) = 1 - F_X(Pr - B - RVP_X(c,d) + c - d).$$

Satz 7.4.7
Seien X und Z Zufallsvariablen mit den entsprechenden Verlustwahrscheinlichkeiten. Z dominiert X stochastisch in erster Ordnung, dann gilt $PL(c,d,X) \leq PL(c,d,Z)$ für alle $c,d \geq 0$ und $c \geq d$[11].

Beweis:
Für die Verlustwahrscheinlichkeit gilt $PL(c,d,X) = 1 - F_X(Pr - B - RVP_X(c,d) + c - d)$. Da wegen Satz 7.4.5 $RVP_X(c,d) \leq RVP_Z(c,d)$ zutrifft, ist

$$b_1 := Pr - B - RVP_X(c,d) + c - d \geq Pr - B - RVP_Z(c,d) + c - d =: b_2$$

Z dominiert X stochastisch in erster Ordnung. Dann gilt $F_X(b_1) \geq F_Z(b_1)$ für alle $b_1 \in \mathbb{R}$ und da F_Z eine Verteilungsfunktion und $b_1 \geq b_2$ ist, folgt $F_Z(b_1) \geq F_Z(b_2)$. Damit ergibt sich $F_X(b_1) \geq F_Z(b_2)$ für alle $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ und $b_1 \geq b_2$. Durch Umformung folgt $1 - F_x(b_1) \leq 1 - F_z(b_2)$ und somit $PL(c,d,X) \leq PL(c,d,Z)$ für alle $c,d \geq 0$ und $c \geq d$.

QED

Im Folgenden soll geprüft werden, in welcher stochastischen Dominanzbeziehung die Gewinnfunktionen für zwei Schadensverteilungen unter stochastischer Dominanz erster Ordnung stehen. Für die Gewinnfunktion gilt bzgl. der Schadensverteilung X

$$G(c,d,X) = Pr - B - X - RVP_X(c,d) + \begin{cases} 0, & \text{für } X \leq d \\ X - d, & \text{für } d < X \leq c \\ c - d, & \text{für } X > c \end{cases} {}^{12}.$$

Satz 7.4.8
Seien X und Z Zufallsvariablen mit den entsprechenden Gewinnfunktionen. Wenn Z stochastisch in erster Ordnung X dominiert, dann gilt $F_{G(c,d,X)}(a) \leq F_{G(c,d,Z)}(a)$ für alle $a \in \mathbb{R}$ und $G(c,d,Z) \preceq_{FSD} G(c,d,X)$ für alle $c,d \geq 0$ und $c \geq d$[13].

Zentrale Aussage des Satzes ist dabei, dass die Verteilung des Gewinns bei der dominierenden Schadensverteilung kleiner als bei der dominierten Schadensverteilung ist. In diesem Fall dominiert der Gewinn von X den Gewinn von Z. Dass heißt, bei einer Schadensverteilung mit tendenziell kleineren Schäden wird der Gewinn des Zedenten größer sein.

Die letzte Robustheitsuntersuchung für das zweidimensionale Modell wird für das α-λ-Präferenzfunktional durchgeführt. Es gilt:

---

[11] Die Verlustwahrscheinlichkeit ist somit bei der dominierenden Verteilung größer. Bei dieser können größere Schäden auftreten, die zu Verlusten führen können.

[12] Die Gewinnfunktion bzgl. der Schadensverteilung Z gestaltet sich analog.

[13] Der Beweis befindet sich im Anhang D.2 S. 253 f.

Satz 7.4.9
Seien X und Z Zufallsvariablen und Z dominiert X stochastisch in erster Ordnung, dann gilt für das α-λ-Präferenzfunktional

$$\Phi_{\alpha,\lambda}(G(c,d,X)) \geq \Phi_{\alpha,\lambda}(G(c,d,Z))$$

für alle $c, d \geq 0$ und $c \geq d$[14].

Folgerung:
Unmittelbar folgt aus dem vorangegangen Satz

$$\Phi_{\alpha,\lambda}(G(c_X^*, d_X^*, X)) \geq \Phi_{\alpha,\lambda}(G(c_X^*, d_X^*, Z))$$

und

$$\Phi_{\alpha,\lambda}(G(c_Z^*, d_Z^*, X)) \geq \Phi_{\alpha,\lambda}(G(c_Z^*, d_Z^*, Z)).$$

In diesem Abschnitt wurden umfangreiche Robustheitsuntersuchungen durchgeführt. Leider konnten meist nur unter der starken Annahme der stochastischen Dominanz erster Ordnung Aussagen getroffen werden. Diese Forderung teilt dabei zwei Verteilungen klar in eine Groß- und in eine Kleinschadensverteilung auf. Die erhaltenen Ergebnisse sind dabei deckungsgleich mit denen, die man intuitiv erwarten würde. So zum Beispiel, dass bei einer erwarteten Kleinschadensverteilung die Rückversicherungsprämie und die Verlustwahrscheinlichkeit natürlich kleiner bzw. der erwartete Erstversicherungsschaden und der erwartete Gewinn größer sind als bei einer erwarteten Großschadensverteilung.

Bisher wurden die Rückversicherungsmodelle im Rahmen von Entscheidungen unter Risiko betrachtet. Der Vollständigkeit wegen wird im folgenden Abschnitt das zweidimensionale Rückversicherungsmodell zusätzlich in der Situation "Entscheidung unter Ungewissheit" betrachtet.

7.5 Entscheidung unter Ungewissheit

Bei der Entscheidung unter Ungewissheit gehe man davon aus, dass n verschiedene Szenarien, also n verschiedene Schadensverteilungen $X_1, \ldots, X_n$ eintreten können. Welche Schadensverteilung eintritt ist zuvor nicht bekannt. Es gibt verschiedene Regeln wie ein Entscheider handeln könnte. Einige sollen näher betrachtet werden.

7.5.1 Maximax-Regel

Die Maximax-Regel ist eine optimistische Entscheidungsregel. Ausschlaggebend ist bei dieser das Szenario, welches zur günstigsten Alternative führt. Es gilt für das Rückversicherungsmodell

$$\Phi_{\alpha,\lambda}^{MM}(G(c,d,X_1), \ldots, G(c,d,X_n)) := \max_{x_j \in X} \Phi_{\alpha,\lambda}(G(c,d,X_j)).$$

Diese Zielfunktion wird wiederum maximiert, somit gilt für

$$(c_{MM}^*(\alpha,\lambda), d_{MM}^*(\alpha,\lambda)) = arg \max_{c,d} \Phi_{\alpha,\lambda}^{MM}(G(c,d,X_1), \ldots, G(c,d,X_n))^{15}.$$

[14]Der Beweis befindet sich im Anhang D.2 S. 254 ff.

Man nehme an, dass die Schadensverteilung von X_1 von allen anderen in erster Ordnung dominiert wird (formal: $X_1 \prec_{FSD} X_j$ für alle $j = 2, \ldots, n$). In diesem Fall ist das Präferenzfunktional bei Schadensverteilung X_1 größer gleich allen anderen Präferenzfunktionalen der übrigen n-1 Schadensverteilungen[16]. Somit gilt für das Präferenzfunktional unter der Maximax-Regel

$$\Phi^{MM}_{\alpha,\lambda}(G(c,d,X_1),\ldots,G(c,d,X_n)) = \Phi_{\alpha,\lambda}(G(c,d,X_1)).$$

Es folgt für die optimalen Deckungsgrenzen

$$(c^*_{MM}(\alpha,\lambda), d^*_{MM}(\alpha,\lambda)) = (c^*_{X_1}(\alpha,\lambda), d^*_{X_1}(\alpha,\lambda)).$$

Es gilt dabei $c^*_{X_1}(\alpha,\lambda) \leq c^*_{X_j}(\alpha,\lambda)$ und $d^*_{X_1}(\alpha,\lambda) \leq d^*_{X_j}(\alpha,\lambda)$ für alle $j = 2, \ldots, n$.

Diese Entscheidungsregel empfiehlt also die kleinste Schadensverteilung anzunehmen und die Deckungsgrenzen anhand dieser Schadensverteilung zu maximieren. Da es sich um eine Kleinschadensverteilung handelt, werden die optimalen Deckungsgrenzen auch entsprechend niedriger gewählt als bei Großschadensverteilungen. Folglich führt diese Entscheidungsregel in den meisten Situationen zu einer Überversicherung bzgl. des Rückversicherungsvertrages. Die Maximin-Regel verwendet dagegen die konträre Herangehensweise.

7.5.2 Maximin-Regel

Die Maximin-Regel ist eine pessimistische Handlungsregel. Entscheidend ist das Szenario, welches zur schlechtesten Alternative führt. Es gilt für das Rückversicherungsmodell

$$\Phi^{MM}_{\alpha,\lambda}(G(c,d,X_1),\ldots,G(c,d,X_n)) := \min_{x_j \in X} \Phi_{\alpha,\lambda}(G(c,d,X_j)).$$

Diese Zielfunktion wird wiederum maximiert, somit gilt für

$$(c^*_{Mm}(\alpha,\lambda), d^*_{Mm}(\alpha,\lambda)) = arg\max_{c,d} \Phi^{Mm}_{\alpha,\lambda}(G(c,d,X_1),\ldots,G(c,d,X_n)).$$

Man nehme an, dass die Schadensverteilung von X_n alle anderen dominiert in erster Ordnung (formal: $X_j \prec_{FSD} X_n$ für alle $j = 1, \ldots, n-1$). In diesem Fall ist das Präferenzfunktional bei der Schadensverteilung X_n kleiner gleich allen anderen n-1 Präferenzfunktionalen der übrigen Schadensverteilungen. Somit gilt für das Präferenzfunktional unter der Maximin-Regel

$$\Phi^{Mm}_{\alpha,\lambda}(G(c,d,X_1),\ldots,G(c,d,X_n)) = \Phi_{\alpha,\lambda}(G(c,d,X_n)).$$

Für die optimalen Deckungsgrenzen folgt damit

$$(c^*_{Mm}(\alpha,\lambda), d^*_{Mm}(\alpha,\lambda)) = (c^*_{X_n}(\alpha,\lambda), d^*_{X_n}(\alpha,\lambda)).$$

[15] Dies gilt unabhängig davon, ob die Rückversicherung gewählt wird oder nicht. Die Rückversicherungsentscheidung wird ausschließlich auf Grundlage der Risikoparameter α und λ sowie dem Gewinnaufschlag des Rückversicherers getroffen. Somit wird entweder in allen Szenarien die Rückversicherung gewählt oder in allen abgelehnt.

[16] Dies folgt aus Satz 7.4.9

Es ist zu bemerken, dass dabei $c^*_{X_j}(\alpha,\lambda) \leq c^*_{X_n}(\alpha,\lambda)$ und $d^*_{X_j}(\alpha,\lambda) \leq d^*_{X_n}(\alpha,\lambda)$ für alle $j = 1,\ldots,n-1$ gilt.

Diese Entscheidungsregel empfiehlt also die Schadensverteilung mit den größten Schäden anzunehmen und seine Deckungsgrenzen anhand dieser Schadensverteilung zu maximieren. Da es sich um eine Großschadensverteilung handelt, werden die optimalen Deckungsgrenzen auch entsprechend höher gewählt als bei Kleinschadensverteilungen. Es findet eine Unterversicherung bzgl. der Rückversicherung statt. Ein Kompromiss aus den beiden Entscheidungsregeln ist die Hurwicz-Regel.

7.5.3 Hurwicz-Regel

Die Hurwicz-Regel mischt die vorangegangenen Entscheidungsregeln mit Hilfe eines Optimismusparameters. Grundlage bildet bei dieser Entscheidungsregel das beste und das schlechteste Szenario. Es gilt

$$\begin{aligned}\Phi^H_{\alpha,\lambda,\pi}(G(c,d,X_1),\ldots,G(c,d,X_n)) : &= \pi\Phi^{MM}_{\alpha,\lambda}G(c,d,X_1),\ldots,G(c,d,X_n)) \\ &+ (1-\pi)\Phi^{Mm}_{\alpha,\lambda}G(c,d,X_1),\ldots,G(c,d,X_n)),\end{aligned}$$

wobei $\pi \in [0,1]$ der Optimismusparameter ist und von jedem Entscheider individuell gewählt werden muss. Diese Zielfunktion wird wiederum maximiert, somit gilt für die Deckungsgrenzen

$$(c^*_H(\alpha,\lambda,\pi), d^*_H(\alpha,\lambda,\pi)) = arg\max_{c,d}\Phi^H_{\alpha,\lambda,\pi}(G(c,d,X_1),\ldots,G(c,d,X_n)).$$

Es werde angenommen, dass die Schadensverteilung von X_1 von allen anderen dominiert wird in erster Ordnung und das X_n alle anderen dominiert in erster Ordnung (in Zeichen: $X_1 \prec_{FSD} X_j \prec_{FSD} X_n$ für alle $j = 2,\ldots,n-1$). Somit gilt für das Präferenzfunktional der Hurwicz-Regel

$$\Phi^H_{\alpha,\lambda,\pi}(G(c,d,X_1),\ldots,G(c,d,X_n)) = \pi\Phi_{\alpha,\lambda}(G(c,d,X_1)) + (1-\pi)\Phi_{\alpha,\lambda}(G(c,d,X_n))$$

Für die optimalen Deckungsgrenzen gilt in diesem Fall

$$c^*_H(\alpha,\lambda,\pi) \in [c^*_{X_1}(\alpha,\lambda), c^*_{X_n}(\alpha,\lambda)]$$

und

$$d^*_H(\alpha,\lambda,\pi) \in [d^*_{X_1}(\alpha,\lambda), d^*_{X_n}(\alpha,\lambda)].$$

Je nachdem, welche Entscheidungsregel durch den Optimismusparameter stärker gewichtet wird, desto größer oder kleiner sind die Deckungsgrenzen. Eine explizite Bestimmung der Deckungsgrenzen ist nur durch die individuelle Wahl des Optimismusparameters sowie durch die Kenntnis der dominierenden als auch der dominierten Schadensverteilung möglich.

Die folgende Entscheidungsregel verfolgt eine ganz andere Herangehensweise. Diese bildet aus allen möglichen Szenarien den Durchschnitt.

7.5.4 Laplace-Regel

Die Laplace-Regel bildet den Durchschnitt aus allen Alternativen. Grundlage bilden also alle Szenarien, die gemittelt werden. Es gilt

$$\Phi^L_{\alpha,\lambda}(G(c,d,X_1),\ldots,G(c,d,X_n)) := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\Phi_{\alpha,\lambda}(G(c,d,X_j)).$$

Diese Zielfunktion wird wiederum maximiert, somit gilt für

$$(c^*_L(\alpha,\lambda), d^*_L(\alpha,\lambda)) := arg\max_{c,d}\Phi^L_{\alpha,\lambda}(G(c,d,X_1),\ldots,G(c,d,X_n)).$$

Es gelte, dass die Schadensverteilung von X_1 von allen anderen in erster Ordnung dominiert wird und das X_n alle anderen dominiert in erster Ordnung (in Zeichen: $X_1 \prec_{FSD} X_j \prec_{FSD} X_n$ für alle $j = 2,\ldots,n-1$). Dann gilt für die optimalen Deckungsgrenzen

$$c^*_L(\alpha,\lambda) \in [c^*_{X_1}(\alpha,\lambda), c^*_{X_n}(\alpha,\lambda)]$$

und

$$d^*_L(\alpha,\lambda) \in [d^*_{X_1}(\alpha,\lambda), d^*_{X_n}(\alpha,\lambda)]^{17}.$$

Auch in diesem Fall[18] kann nur ein Intervall für die optimalen Deckungsgrenzen angegeben werden. Die explizite Berechnung der Deckungsgrenzen ist nur unter der Kenntnis aller möglichen Schadensverteilungen realisierbar. Dies setzt einen hohen Informationsstand des Zedenten über mögliche Schadensverteilungen voraus. Diese Regel ist eher unpraktikabel für einen Zedenten aufgrund des hohen Informationsbedarfs, dagegen benötigt die Huriwcz-Regel nur die Kenntnis von zwei Schadensverteilungen, dafür muss zuvor aber der individuelle Optimismusparameter bestimmt werden.

Die letzte Entscheidungsregel, die hier Beachtung finden soll, ist eine Regel, die das größte Bedauern[19] minimiert[20].

7.5.5 Minimax-Regret-Regel

Die Minimax-Regret-Regel minimiert das größte Bedauern. Es gilt für diese Entscheidungsregel

$$\Phi^{mMR}_{\alpha,\lambda}(G(c,d,X_1),\ldots,G(c,d,X_n)) := \max_{x_j\in X}\left(\max_{c,d}\Phi_{\alpha,\lambda}(G(c,d,X_j)) - \Phi_{\alpha,\lambda}(G(c,d,X_j))\right).$$

[17] Im Fall, dass alle Schadensverteilungen mit der dominierten Verteilung identisch sind, führt dies zu den kleinsten Deckungsgrenzen. Im Fall, dass alle Schadensverteilungen mit der dominierenden identisch sind, führt dies zu den größten Deckungsgrenzen. Also müssen sich im allgemeinen Fall alle Deckungsgrenzen zwischen den Deckungsgrenzen der dominierten und der dominierenden Schadensverteilung befinden.

[18] Bei der Hurwicz-Regel könnte auch nur ein mögliches Intervall der Deckungsgrenzen angegeben werden.

[19] Im Englischen “regret”.

[20] Dabei ist diese Entscheidungsregel unter den betrachteten für die Versicherungspraxis am plausibelsten, da alle anderen Regeln von einem Zedenten eher nicht gewählt werden und somit nur einen theoretischen Entscheider widerspiegeln.

Danach wird die Zielfunktion nach den Deckungsgrenzen minimiert. Es gilt somit

$$(c^*_{mMR}(\alpha,\lambda), d^*_{mMR}(\alpha,\lambda)) = arg\min_{c,d} \Phi^{mMR}_{\alpha,\lambda}(G(c,d,X_1),\ldots,G(c,d,X_n)).$$

Auch bei der Minimax-Regret-Regel ist nur eine explizite Bestimmung der Deckungsgrenzen bei Kenntnis aller möglichen Schadensverteilungen realisierbar und gestaltet sich aufgrund der Konstruktion der Entscheidungsregel aufwendiger als bei den vorangegangenen. Auf die Betrachtung weiterer Entscheidungsregeln unter Ungewissheit soll hiermit verzichtet werden. Im Folgenden soll ein weiterer Lösungsansatz, der Bayes'sche Lösungsansatz, untersucht werden.

7.6 Bayes'scher Lösungsansatz

Im Folgenden werden n mögliche Schadensverteilungen angenommen. Auch deren Eintrittswahrscheinlichkeiten sind bekannt. Der Bayes'sche Lösungsansatz beruht auf der Erwartungswertbildung. Jedes α-λ-Präferenzfunktional der einzelnen möglichen Schadensverteilungen wird mit seinen Eintrittswahrscheinlichkeiten multipliziert und anschließend aufsummiert und mit $\frac{1}{n}$ multipliziert. Das Präferenzfunktional des Bayes'schen Ansatzes für das Rückversicherungsmodell lautet damit

$$\Phi^B_{\alpha,\lambda}(G(c,d,X_1),\ldots,G(c,d,X_n)) := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} p_j \Phi_{\alpha,\lambda}(G(c,d,X_j)),$$

wobei $p_j \geq 0$ und $\sum\limits_{j=1}^{n} p_j = 1$ ist[21]. Für die optimale Lösung gilt folglich

$$(c^*_B(\alpha,\lambda), d^*_B(\alpha,\lambda)) := arg\max_{c,d} \Phi^B_{\alpha,\lambda}(G(c,d,X_1),\ldots,G(c,d,X_n)).$$

Der folgende Satz gibt die Lösung für den Bayes'schen Lösungsansatz wieder.

Satz 7.6.1
Sei $\Phi^B_{\alpha,\lambda}(G(c,d,X_1),\ldots,G(c,d,X_n))$ das Präferenzfunktional des Bayes'schen Lösungsansatzes und sei $G(c,d,X_j)$ die Gewinnfunktion eines Zedenten mit der speziellen Rückversicherungsprämie aus Definition 4.1.2 ($j = 1,\ldots,n$).

- *Fall $1+\gamma < \frac{\lambda}{\alpha}$: Dann gilt für die Priorität folgende implizite Darstellung* $\sum\limits_{j=1}^{n} p_j F_{X_j}(d^*_B(\alpha,\lambda)) = \frac{(1-\alpha)\gamma}{(1-\alpha)(1+\gamma)-(1-\lambda)}$.
- *Fall $1+\gamma > \frac{\lambda}{\alpha}$: Dann gilt für die Priorität folgende implizite Darstellung* $\sum\limits_{j=1}^{n} p_j F_{X_j}(d^*_B(\alpha,\lambda)) = 1$.

Beweis von Satz 7.6.1:
Folgt analog aus dem Satz 7.3.1 bzw. dem zugehörigen Beweis.

[21] Bei diesem Ansatz sind die Eintrittswahrscheinlichkeiten p_j bekannt. Wenn $p_1 = \ldots = p_n$ gilt, ist der Bayes'sche Lösungsansatz mit der Laplace-Regel identisch.

QED

Die Lösung ist damit analog zu den vorangegangenen Abschnitten[22]. Der Unterschied besteht darin, dass nicht eine spezielle Schadensverteilung X angenommen wird, sondern ein gewichtetes Mittel aus den möglichen zu erwartenden Schadensverteilungen X_j für alle $j = 1, \ldots, n$.

Die Verteilungsfunktion der gewichteten Zufallsvariable, welche sich aus den gewichteten Verteilungsfunktionen der einzelnen Schäden zusammensetzt, wird im Folgenden definiert.

Definition 7.6.1
Sei F_{X_j} mit $j = 1, \ldots, n$ Verteilungsfunktionen und p_j, den dazugehörigen Eintrittswahrscheinlichkeiten. Dann ist die zusammengesetzte Verteilung F_{X_B} wie folgt definiert:

$$F_{X_B}(a) := \sum_{j=1}^{n} p_j F_{X_j}(a)$$

für alle $a \in \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften einer Verteilungsfunktion:

1. *Da $\lim\limits_{a \to -\infty} F_{X_j}(a) = 0$ gilt für alle $j = 1, \ldots, n$, folgt $\lim\limits_{a \to -\infty} F_{X_B}(a) = 0$.*
2. *Da $\lim\limits_{a \to \infty} F_{X_j}(a) = 1$ gilt für alle $j = 1, \ldots, n$, folgt $\lim\limits_{a \to \infty} F_{X_B}(a) = 1$.*
3. *Da $F_{X_j}(a)$ monoton wachsende Funktionen für alle $j = 1, \ldots, n$ sind und $p_j \geq 0$ für alle j gilt, ist auch die zusammengesetzte Verteilungsfunktion $F_{X_B}(a)$ monoton wachsend für alle $a \in \mathbb{R}$.*
4. *Da alle $F_{X_j}(a)$ rechtsseitig stetig für $j = 1, \ldots, n$ sind, ist auch $F_{X_B}(a)$ rechtsseitig stetig für alle $a \in \mathbb{R}$.*

Somit folgt aus dem vorangegangenen Satz:

Folgerung
Sei $\Phi^B_{\alpha,\lambda}(G(c, d, X_1), \ldots, G(c, d, X_n))$ das Präferenzfunktional des Bayes'schen Lösungsansatzes und sei $G(c, d, X_j)$ die Gewinnfunktion eines Zedenten mit der speziellen Rückversicherungsprämie aus Definition 4.1.2 ($j = 1, \ldots, n$).

- Fall $1 + \gamma < \frac{\lambda}{\alpha}$: Dann gilt für die Priorität folgende implizite Darstellung $F_{X_B}(d^*_B(\alpha, \lambda)) = \frac{(1-\alpha)\gamma}{(1-\alpha)(1+\gamma)-(1-\lambda)}$.
- Fall $1 + \gamma > \frac{\lambda}{\alpha}$: Dann gilt für die Priorität folgende implizite Darstellung $F_{X_B}(d^*_B(\alpha, \lambda)) = 1$.

Die Kenngrößen, wie der erwartete Gewinn, die Verlustwahrscheinlichkeit und der erwartete Verlust berechnen sich analog zu denen in Abschnitt 7.2 durch Ersetzen der speziellen Schadensverteilung X durch die aus dem Bayes'schen Ansatz agrregierte Schadensverteilung X_B.

[22]Gemeint ist damit, dass die Verteilungsfunktion im Fall $1 + \gamma < \frac{\lambda}{\alpha}$ gleich $\frac{(1-\alpha)\gamma}{(1-\alpha)(1+\gamma)-(1-\lambda)}$ und im Fall $1 + \gamma > \frac{\lambda}{\alpha}$ gleich eins ist.

7.7 Zusammenfassung und Überblick

In diesem Kapitel wurde das Rückversicherungsproblem mit zwei Deckungsgrenzen betrachtet. Dies geschah zuerst für eine allgemeine Rückversicherungsprämie, später dann für eine spezielle Rückversicherungsprämie. Ein Zedent mit seiner Risikopräferenz wird im zweidimensionalen Rückversicherungsmodell die gleiche Entscheidung (Ablehnung oder Akzeptanz) bzgl. der Rückversicherung hervorbringen wie in den zwei eindimensionalen Modellen. Ein risikofreudiger und -neutraler Zedent wird die Rückversicherung ablehnen, ein risikoaverser Zedent dagegen kann die Rückversicherung ablehnen, aber auch präferieren. Dies ist abhängig von der Stärke seiner Risikoaversion und vom Gewinnaufschlag des Rückversicherers. Zusätzlich ist die Interpretation der optimalen Lösung des zweidimensionalen Modells eine Zusammensetzung aus denen der zwei eindimensionalen Modelle. Wenn die Rückversicherung gewählt wird, dann sinkt die optimale Priorität mit Risikoaversionzunahme des Zedenten. Der Zedent gibt mehr Risiko an den Rückversicherer ab. Eine Erhöhung des Gewinnaufschlages führt zu einer höheren optimalen Priorität und zu einer geringeren Menge an den Rückversicherer transferierten Risikos. Die Entscheidung für die Rückversicherung bei einem höheren Gewinnaufschlag des Zessionärs erfordert eine höhere Riskoaversion seitens des Zedenten. Dass heißt, ein Zedent mit seiner bestimmten Risikoeinstellung, der bei einem niedrigen Rückversicherungsgewinnaufschlag die Rückversicherung präferiert, kann diese bei einem höheren Gewinnaufschlag auch ablehnen. Wenn die Rückversicherung präferiert wird, sollen sich unterhalb des optimalen Plafonds alle möglichen Schäden befinden. Im weiteren Verlauf des Kapitels wurden die Kenngrößen für das zweidimensionale Modell gegeben und diese mit Hilfe der stochastischen Dominanz abgeschätzt.

Im zweiten Teil dieses Kapitels wurde das zweidimensionale Modell im Fall von Entscheidungen unter Ungewissheit und dem Bayes'schen Lösungsansatz betrachtet. So unter anderem für das Maximax- und Maximin-Kriterium. Für beide konnte mit Hilfe der stochastischen Dominanz erster Ordnung die Lösung auf eine bestimmte Verteilungsfunktion eingeschränkt werden. Aufgrund des sehr optimistischen bzw. pessimistischen Standpunktes der Kriterien werden sich vermutlich nur wenige Entscheidungsträger für diese Kriterien entscheiden. Einen Kompromiss stellen in diesem Fall das Hurwicz- und Laplace-Kriterium dar, welche die verschiedenen Szenarien einbeziehen und entsprechend gewichten. Dies geschieht bei der Hurwicz-Regel durch den Optimismusparameter, welcher die Präferenzfunktionale der Maximax- und der Maximin-Regel gewichtet und so nicht nur sehr extreme Entscheidungseinstellungen zulässt. Nachteil dabei ist, dass zuvor der individuelle Optimismusparameter bestimmt werden muss. Das Laplace-Kriterium bildet dagegen den Durchschnitt aus allen Szenarien und unterstellt dabei eine Gleichverteilung des Eintretens der einzelnen möglichen Schadensverteilungen. Für beide Kriterien kann nur ein Intervall für die optimalen Deckungsgrenzen gegeben werden. Der Bayes'sche Lösungsansatz geht dagegen einen Schritt weiter. Dieser gewichtet die einzelnen Szenarien mit deren Eintrittswahrscheinlichkeit. Durch Aggregation der einzelnen Schadensverteilungen zu einer zusammengesetzten Schadensverteilung kann für die implizite Lösung des Rückversicherungsmodells ein Ergebnis gegeben werden.

In den vorangegangenen Kapiteln wurden die Einnahmen des Zedenten, d. h. die Summe der Erstversicherungsprämien, als Konstante angenommen. Somit hatten diese bisher keinen Einfluss auf die Optimierung der Zielfunktionen. Natürlich spielen die Einnahmen aus dem

Erstversicherungsgeschäft jedoch eine Rolle für das Rückversicherungsgeschäft[23]. Im Folgenden sollen diesbezüglich folgende Fragen geklärt werden:

- Welchen Rückversicherungsschutz präferiert der Zedent in Abhängigkeit von seiner Erstversicherungsprämie?
- Welche Erstversicherungsprämie sollte der Zedent von seinen Privatkunden verlangen, wenn er die Möglichkeit zur Rückversicherung besitzt?
- Beeinflussen sich das Erst- und Rückversicherungsgeschäft des Zedenten gegenseitig?

Dazu wird im nächsten Kapitel das Erst- und Rückversicherungsgeschäft des Zedenten simultan optimiert. Dabei wird auf die Optimierung des Plafonds verzichtet, da dessen Optimierung für den Zedenten nur eine geringe Aussagekraft besitzt[24].

[23] Die Rückversicherungsprämie wird aus den Einnahmen aus dem Erstversicherungsgeschäft bezahlt.

[24] Die Optimierung des Plafonds trifft nur die Aussage, ob die Rückversicherung gewählt wird oder nicht. Diese Aussage wird aber auch durch die Optimierung der Priorität erreicht. Des Weiteren wird der Plafond bei Rückversicherungswahl immer so gewählt, dass alle möglichen Schäden sich unterhalb befinden und somit eine unendliche Deckungsgrenze von seitens des Zedenten gewünscht wird. Dies wird ein Rückversicherer allerdings nicht akzeptieren.

Kapitel 8

Simultane Optimierung des Erst- und Rückversicherungsgeschäfts

Im Folgenden soll nicht nur das Rückversicherungsgeschäft, sondern auch das Erstversicherungsgeschäft in die Überlegungen eines Zedenten mit einbezogen werden. Dabei wird davon ausgegangen, dass der Schaden des Rückversicherers beeinflusst ist durch die Prämie pro Erstversicherungsvertrag p. Dahinter steckt die Überlegung, dass wenn der Erstversicherer eine niedrige Prämie anbietet, mehr Versicherungsnehmer die Erstversicherung wählen und somit ein größerer Gesamtschaden X_p für den Zedenten entstehen kann. Dies bewirkt ein geändertes Verhalten bzgl. der nicht-proportionalen Rückversicherung.

Konkreter führt die niedrigere Erstversicherungsprämie p zum einem zu einem niedrigeren Gewinn pro Versicherungsvertrag und zum anderen aufgrund des größeren Gesamtschadenvolumens zu einem stärkeren Rückversicherungswunsch und schließlich zu einer erhöhten Rückversicherungsprämie. Somit stehen sich zwei entgegengesetzte Effekte, die niedrigere Erstversicherungsprämie der steigenden Rückversicherungsprämie, gegenüber. Da die Rückversicherungsprämie aus den Erstversicherungsprämien verdient werden muss, ist die Nachfrage an Erstversicherung die zentrale Größe. Entscheidend dabei ist der Verlauf der Nachfrage in Abhängigkeit von der Erstversicherungsprämie. Eine konkave Nachfrage wird im Vergleich zu einer linearen bzw. konvexen Nachfrage im Allgemeinen die Rückversicherungswahl begünstigen, da durch das höhere Nachfrageniveau auch das nötige Entgelt für eine höhere Rückversicherungsprämie zur Verfügung steht.

Die Modellierung des Rückversicherungsgeschäftes in Abhängigkeit vom Erstversicherungsgeschäft insbesondere durch die Erstversicherungsprämie und die Nachfrage an Erstversicherungen ist so nicht in der Literatur zu finden und beschreitet damit wissenschaftliches Neuland. Zunächst soll für diesen Ansatz die Gewinnfunktion des Zedenten für die simultane Optimierung des Erst- und Rückversicherungsgeschäftes eingeführt werden.

8.1 Gewinnfunktion des Erstversicherers

Die Gewinnfunktion eines Zedenten setzt sich zusammen aus den Prämieneinnahmen aus den Erstversicherungsverträgen[1] und dem Rückversicherungsschaden[2] abzüglich der Betriebskosten, dem Gesamtschaden aus den Erstversicherungsverträgen und der Rückversicherungsprämie[3]. Dabei soll nur die Priorität betrachtet werden. Formal gilt dann für die Gewinnfunktion in Abhängigkeit von der Priorität d und dem Gesamtschaden X_p

$$G(d, X_p) = Pr(p) - B - X_p - RVP(d, X_p) + RVS(d, X_p),$$

wobei

p	Prämie eines Erstversicherungsvertrages
d	Priorität (Selbstbehalt) des Rückversicherungsvertrages
X_p	Gesamtschäden aller Erstversicherungsverträge mit Verteilung F_{X_p}
$Pr(p)$	die Gesamtprämieneinnahmen aus den Erstversicherungsverträgen[4]
B	Betriebskosten
$RVP(d, X_p)$	Rückversicherungsprämie[5]
$RVS(d, X_p)$	Rückversicherungsschaden[6].

Für die Rückversicherungskomponenten gilt dabei

$$RVP(d, X_p) = (1 + \gamma)\ E(RVS(d, X_p))$$

und

$$RVS(d, X_p) = \begin{cases} 0, & \text{für } X_p < d \\ X_p - d, & \text{für } X_p \geq d \end{cases},$$

wobei $\gamma \geq 0$ der Gewinnaufschlag des Rückversicherers ist. Die Komponenten des Erstversicherungsgeschäfts sind die Gesamtprämieneinnahmen und der Gesamtschaden, der aus den Erstversicherungsverträgen entsteht. Die Gesamtprämie ist dabei die Summation aller $N(p)$[7] Erstversicherungsverträge mit der Prämie p. Es gilt

$$Pr(p) = \sum_{i=1}^{N(p)} p = N(p) \cdot p,$$

wobei die Nachfrage an Versicherungen $N(p)$ eine monoton fallende Funktion ist und $N(p) = 0$ für $p = p_{\max}$ gilt[8].

[1] Diese sind dabei abhängig von der Prämie eines einzelnen Erstversicherungsvertrages p. Es wird in diesem Kontext ein homogenes Portfolio von Schäden betrachtet, für die der Zedent die gleiche Prämie p verlangt.

[2] Der Rückversicherungsschaden ist dabei abhängig von der gewählten Deckungsgrenze und dem Gesamtschaden des Erstversicherungsportfolios.

[3] Die Rückversicherungsprämie ist dabei abhängig von der gewählten Deckungsgrenze des Rückversicherungsvertrages, dem Gesamtschaden und dem verlangten Gewinnaufschlag des Rückversicherers.

[4] Ist abhängig von der Einzelvertragsprämie p.

[5] Ist abhängig von der Priorität d, dem Gesamtschaden X_p und dem Gewinnaufschlag des Rückversicherers.

[6] Ist abhängig von der Priorität d und dem Gesamtschaden X_p.

[7] Dabei ist $N(p)$ die Nachfrage an Erstversicherung durch die Kunden in Abhängigkeit von der verlangten Einzelprämie p.

[8] Es gibt somit eine Maximalprämie, ab der die Nachfrage an Versicherung null ist.

Für den Gesamtschaden X_p gilt, dass sich dieser aus den Schäden der $N(p)$ Versicherungsverträge zusammensetzt. Die Verteilung der Schäden aus einem Versicherungsvertrag ist im Allgemeinen nicht bekannt, da diese vom jeweiligen Versicherungsnehmer und dem Versicherungsobjekt abhängt. Des Weiteren liegen meist keine Schadensdaten des jeweiligen Versicherungsnehmers zur Bestimmung seiner individuellen Schadensverteilung vor[9]. Somit ist eine Bestimmung der optimalen Prämie und der optimalen Rückversicherungsdeckungsgrenze für das Versicherungsportfolio des Zedenten über die Einzelschäden mit Hilfe von Faltung nicht möglich. Deshalb wird im Folgenden der Gesamtschaden in eine deterministische und in eine stochastische Komponente aufgeteilt. Als deterministische Komponente eignet sich der erwartete Gesamtschaden. Für diesen gelte in Abhängigkeit von der Nachfrage N(p)[10]

$$E(X_p) = N(p)\mu.$$

Dabei kann μ als durchschnittlicher zu erwartender Schaden aus einem Versicherungsvertrag angesehen werden. Im Folgenden muss entschieden werden, ob ein additiver oder multiplikativer Ansatz gewählt wird. Es sind folgende Modellierungen für den Gesamtschaden denkbar[11]:

- Additive Modellierung: In diesem Ansatz wird die deterministische Komponente $N(p)\cdot\mu$ und die stochastische Komponente ε additiv verknüpft. Für den Gesamtschaden gilt dann $X_p = N(p)\cdot\mu+\varepsilon$. Die stochastische Komponente fungiert dabei als Abweichung vom erwarteten Gesamtschaden. Der stochastische Einfluss ε besitze dabei die Verteilung F_ε mit dem Erwartungswert $E(\varepsilon) = 0$[12].

- Multiplikative Modellierung: Es gilt für den Gesamtschaden bei multiplikativer Verknüpfung der Komponenten $X_p = N(p)\cdot\mu\cdot\varepsilon$. Dabei besitze der stochastische Einfluss ε die Verteilung F_ε mit dem Erwartungswert $E(\varepsilon) = 1$[13].

Die Varianz eines Gesamtschadens ist generell beeinflusst durch das Schadensvolumen. Dass heißt, je mehr Verträge der Zedent in seinem Portfolio besitzt, desto mehr kann die tatsächliche Gesamtschadensausprägung schwanken. Damit sollte bei einem geeigneten Modell die Nachfrage N bzw. die Prämie p einen Einfluss auf die Varianz des Gesamtschadens aufweisen. Von den zwei vorgestellten Modellierungsmöglichkeiten erfüllt diese Anforderung nur der multiplikative Ansatz[14]. Somit ist der additive Ansatz zu verwerfen. Im Folgenden wird zur Lösung des Problems der multiplikative Ansatz gewählt.

8.2 Multiplikative Modellierung des Schadens mit deterministischem und stochastischem Einfluss

Im Folgenden gelte für den Gesamtschaden $X_p = N(p)\cdot\mu\cdot\varepsilon$ mit der deterministischen Komponente $N(p)\cdot\mu$ und dem stochastischen Einfluss ε. Dabei besitze der stochastische

[9]Dagegen ist die Verteilung des Gesamtschadens für den Zedenten aus historischen Daten kalkulierbar.

[10]Die Nachfrage ist wiederum von der Einzelvertragsprämie p beeinflusst.

[11]Die Vorgehensweise ist dabei analog zu Petruzzi, Dada (1999). In dieser Publikation wurde ein additiver und ein multiplikativer Ansatz für die Nachfrage im Newsvendor Modell verwendet.

[12]Es gilt somit $E(X_p) = E(N(p)\cdot\mu+\varepsilon) = N(p)\cdot\mu+E(\varepsilon) = N(p)\cdot\mu$.

[13]Es gilt somit $E(X_p) = E(N(p)\cdot\mu\cdot\varepsilon) = N(p)\cdot\mu\cdot E(\varepsilon) = N(p)\cdot\mu$.

[14]Für den additiven Ansatz gilt $Var(X_p) = Var(N(p)\cdot\mu+\varepsilon) = Var(\varepsilon)$. Die Varianz ist damit unabhängig von der Prämie p. Für den multiplikativen Ansatz gilt $Var(X_p) = Var(N(p)\cdot\mu\cdot\varepsilon) = (N(p)\cdot\mu)^2 Var(\varepsilon)$. In diesem Fall ist die Varianz des Gesamtschadens abhängig von der Nachfrage N bzw. von der Prämie p.

Einfluss ε die Verteilung F_ε mit dem Erwartungswert $E(\varepsilon) = 1$. Des Weiteren gilt folgende Beziehung zwischen der Verteilungsfunktion des Gesamtschadens und der Verteilungsfunktion des stochastischen Einflusses:

$$F_{X_p}(r) = F_\varepsilon\left(\frac{r}{N(p)\mu}\right)$$

für alle $r \in \mathbb{R}$ und $\mu < p \leq p_{\max}$[15].

8.2.1 Gewinnfunktion des Zedenten mit stochastischem Einfluss

Im Folgenden wird die Gewinnfunktion in Abhängigkeit von der Priorität d und dem Gesamtschaden X_p umgeschrieben in eine Gewinnfunktion in Abhänigkeit von der Priorität d, der Einzelprämie p und dem stochastischen Einfluss ε. Es gilt für die Erstversicherungskomponenten:

- Gesamtprämieneinnahmen aus dem Erstversicherungsgeschäft: $N(p) \cdot p$
- Gesamtschaden: $N(p) \cdot \mu \cdot \varepsilon$
- Betriebskosten: B

bzw. für die Rückversicherungskomponenten der Gewinnfunktion:

- Rückversicherungsschaden:

$$\begin{aligned} RVS(d,p,\varepsilon)) &= \begin{cases} 0, & \text{für } N(p)\cdot\mu\cdot\varepsilon < d \\ N(p)\cdot\mu\cdot\varepsilon - d, & \text{für } N(p)\cdot\mu\cdot\varepsilon \geq d \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & \text{für } \frac{d}{N(p)\cdot\mu} > \varepsilon \\ N(p)\cdot\mu\cdot\varepsilon - d, & \text{für } \frac{d}{N(p)\cdot\mu} \leq \varepsilon \end{cases} \end{aligned}$$

- Rückversicherungsprämie: $RVP(d,p,\varepsilon) = (1+\gamma)E(RVS(d,p,\varepsilon))$ mit Gewinnaufschlag $\gamma \geq 0$.

Somit folgt für die Gewinnfunktion eines Zedenten in Abhängigkeit von d, p und ε

$$\begin{aligned} G(d,p,\varepsilon) &= N(p)\cdot p - B - N(p)\cdot\mu\cdot\varepsilon - (1+\gamma)E(RVS(d,p,\varepsilon)) \\ &+ \begin{cases} 0, & \text{für } \frac{d}{N(p)\cdot\mu} > \varepsilon \\ N(p)\cdot\mu\cdot\varepsilon - d, & \text{für } \frac{d}{N(p)\cdot\mu} \leq \varepsilon \end{cases}. \end{aligned}$$

Im Folgenden soll das Erwartungswertkriterium und das α-λ-Prinzip für diese Gewinnfunktion eines Zedenten berechnet werden. Ziel ist es, die optimale Priorität d^* und die optimale Erstversicherungsprämie p^* für einen Zedenten zu bestimmen. Zunächst folgt das Erwartungswertkriterium.

---

[15] Es gilt stets $\mu < p$, da der durchschnittliche erwartete Schaden eines Erstversicherungsvertrages kleiner sein muss als die verlangte Prämie pro Versicherungsvertrag, anderenfalls würde der Zedent die Versicherungen nicht anbieten.

8.2.2 Erwartungswertkriterium

Ein Zedent, der nach dem Erwartungswertkriterium handelt, verwendet den erwarteten Gewinn als Zielfunktion[16]. Diesen maximiert er nach der Priorität d und nach der Erstversicherungsprämie p. Für den erwarteten Gewinn eines Zedenten gilt

$$\begin{aligned}
E(G(d,p,\varepsilon)) &= N(p)\cdot p - B - N(p)\cdot\mu\cdot E(\varepsilon) - (1+\gamma)E(RVS(d,p,\varepsilon)) + E(RVS(d,p,\varepsilon)) \\
&= N(p)\cdot p - B - N(p)\cdot\mu - \gamma E(RVS(d,p,\varepsilon))^{17} \\
&= N(p)[p-\mu] - B - \gamma\left[\int_{\frac{d}{N(p)\cdot\mu}}^{\infty} [N(p)\cdot\mu\cdot\varepsilon - d]\; dF_\varepsilon(\varepsilon)\right] \\
&= N(p)[p-\mu] - B - \gamma\left[N(p)\cdot\mu \int_{\frac{d}{N(p)\cdot\mu}}^{\infty} \varepsilon\; dF_\varepsilon(\varepsilon) - d\left(1 - F_\varepsilon\left(\frac{d}{N(p)\cdot\mu}\right)\right)\right].
\end{aligned}$$

Das Erwartungswertkriterium für dieses Rückversicherungsproblem lautet dabei

$$\Phi_B(G(d,p,\varepsilon)) := E(G(d,p,\varepsilon))$$

und soll nach der Priorität d und der Erstversicherungsprämie p maximiert werden, was zu dem Maximierungsproblem

$$\max_{d,p}\ \Phi_B(G(d,p,\varepsilon)). \tag{8.1}$$

führt. Die Lösung dieses Maximierungsproblems gibt der folgende Satz wieder.

Satz 8.2.1
Es sei $\Phi_B(G(d,p,\varepsilon))$ das Präferenzfunktional eines risikoneutralen Entscheiders mit Gewinnfunktion $G(d,p,\varepsilon) = N(p)\cdot p - B - N(p)\cdot\mu\cdot\varepsilon - (1+\gamma)E(RVS(d,p,\varepsilon)) + RVS(d,p,\varepsilon)$. Dann besitzt das Maximierungsproblem (8.1) folgende implizite Lösung bzgl. der Priorität

$$F_{X_p}(d^*) = F_\varepsilon\left(\frac{d^*}{N(p^*)\mu}\right) = 1$$

bzw. bzgl. der Erstversicherungsprämie

$$p^* = \arg\max_p [N(p)(p-\mu)]$$

für alle $p \in (\mu; p_{\max}]$[18].

Die Lösung für das Erwartungswertkriterium ist somit, dass die optimale Priorität größer gleich dem höchsten Gesamtschaden gewählt werden sollte[19]. Also wird die Rückversicherung

---

[16]Das Erwartungswertkriterium wird von risikoneutralen Entscheidern verwendet.
[17]Wegen $E(\varepsilon) = 1$.
[18]Der Beweis von Satz 8.2.1 befindet sich im Anhang C.4 S. 214.
[19]Dann gilt $F_{X_p}(d^*) = 1$.

abgelehnt.

Für die optimale Erstversicherungsprämie gilt

$$p^* = \arg \max_p [N(p)(p-\mu)] = \arg \max_p [N(p)p - N(p)\mu],$$

wobei $N(p)p$ die gesamten Prämieneinnahmen sind und $N(p)\cdot\mu$ der erwartete Gesamtschaden. Damit wird der erwartete Gewinn aus dem Erstversicherungsgeschäft[20] bzgl. der Prämie p maximiert. Die optimale Erstversicherungsprämie wird damit bei der Prämie gewählt, bei der das Erstversicherungsgeschäft den größten erwarteten Gewinn abwirft. Wesentlichen Einfluss auf die optimale Prämie besitzt dabei die Nachfragefunktion N.

Im Folgenden soll eine lineare, eine konkave und eine konvexe Nachfragefunktion betrachtet und dazu die optimale Prämie p^* bestimmt werden.

Beispiel 8.2.1 *(Lineare Nachfrage)*
Die Nachfrage folge einer linearen Funktion. Es gelte $N(p) = a - bp$, wobei für die Parameter $a, b > 0$ gilt. Die Nachfrage ist eine monoton fallende Funktion, welche bei der Maximalprämie $p_{\max}$ null ist. Es gilt somit $N(p) = 0$ für $p = \frac{a}{b} = p_{\max}$. Die größte Nachfrage ist bei der Nullprämie zu erwarten. Es gilt $N(0) = a - b \cdot 0 = N_{\max}$[21]. Der erwartete Gewinn aus dem Erstversicherungsgeschäft ist

$$g(p) \quad := \quad (a-bp)\,(p-\mu) = -bp^2 + (a+b\mu)p - a\mu$$

und besitzt die Nullstellen $p_1 = \mu$ und $p_2 = \frac{a}{b} = p_{\max}$[22]. Zur Bestimmung der Maximalstelle der Funktion $g(p)$ differenziere man diese. Es gilt

$$D_p(g(p)) = -2bp + a + b\mu.$$

Daraus folgt die Extremalstelle $p^*_{linear} = \frac{a+b\mu}{2b} = \frac{\frac{a}{b}+\mu}{2} = \frac{\mu+p_{\max}}{2}$, welche aufgrund der zweiten Ableitung der Funktion $g(p)$

$$D_{pp}(g(p)) = -2b < 0$$

ein Maximum ist. Dieses Maximum befindet sich in der Mitte des Intervalls $[\mu, p_{\max}]$. Die gewonnenen Sachverhalte illustriert zum Abschluss die folgende Abbildung.

Beispiel 8.2.2 *(Konkave Nachfrage)*
Die Nachfrage folge einer konkaven Funktion. Es gelte $N(p) = -bp^2 + a$, wobei für die Parameter $a, b > 0$ gilt. Die Nachfrage ist eine monoton fallende Funktion, welche bei der Maximalprämie $p_{\max}$ null ist. Es gilt somit $N(p) = 0$ für $p = \sqrt{\frac{a}{b}} = p_{\max}$. Die größte Nachfrage besitzt

[20] Das Erstversicherungsgeschäft setzt sich zusammen aus den gesamten Erstversicherungsprämien minus dem Gesamtschaden aus den Erstversicherungsverträgen.

[21] Es gilt somit $a = N_{\max}$ und $b = \frac{N_{\max}}{p_{\max}}$.

[22] Es gilt $-bp^2 + (a+b\mu)p - a\mu = 0$. Somit ergibt sich auch $p^2 - \frac{a+b\mu}{b} + \frac{\mu a}{b} = 0$. Durch Anwendung der quadratischen Lösungsformel folgt $p_{1/2} = \frac{a+b\mu}{2b} \pm \sqrt{\frac{\left(\frac{a+b\mu}{b}\right)^2}{4} - \frac{\mu a}{b}} = \frac{a+b\mu}{2b} \pm \sqrt{\frac{a^2+2ab\mu+(b\mu)^2-4ab\mu}{4b^2}} = \frac{a+b\mu}{2b} \pm \frac{a-b\mu}{2b}$. Daraus folgt $p_1 = \mu$ und $p_2 = \frac{a}{b} = p_{\max}$.

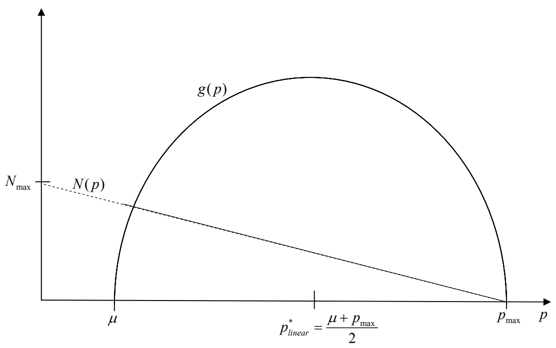


Abbildung 8.1: Beispiel: Lineare Nachfrage.

die Funktion bei der Nullprämie. Es ist $N(0) = -b \cdot 0^2 + a = N_{\max}$[23]*. Für den erwarteten Gewinn aus dem Erstversicherungsgeschäft folgt damit*

$$g(p) \quad := \quad (-bp^2 + a)\,(p - \mu) = -bp^3 + b\mu p^2 + ap - a\mu$$

und besitzt die Nullstellen $p_1 = \mu$ *und* $p_2 = \sqrt{\frac{a}{b}} = p_{\max}$[24]*. Zur Bestimmung der Maximalstelle der Funktion* $g(p)$ *differenziere man diese. Es lässt sich*

$$D_p(g(p)) = -3bp^2 + 2b\,\mu p + a$$

ermitteln. Daraus folgen die Extremalstellen $p_1^* = \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 + 3p_{\max}^2}}{3}$ *und* $p_2^* = \frac{\mu - \sqrt{\mu^2 + 3p_{\max}^2}}{3}$[25]*. Die zweite Extremalstelle entfällt, da diese negativ ist*[26]*. Somit besitzt die Funktion* $g(p)$ *für* $p \geq 0$ *nur die Extremalstelle* $p_1^* = \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 + 3p_{\max}^2}}{3} = p*_{konkav}$*, welche aufgrund der zweiten Ableitung der Funktion* $g(p)$

$$D_{pp}(g(p)) = -6bp + 2b\mu = -2b(3p - \mu)$$

für $p*_{konkav}$ *negativ ist*[27] *und somit die Extremalstelle als Maximum ausweist. Dieses Maximum befindet sich dabei im Intervall* $[\frac{\mu + p_{\max}}{2}, p_{\max}]$*. Dies soll im Folgenden gezeigt werden.*

---

[23]Damit ist $a = N_{\max}$ und $b = \frac{N_{\max}}{p_{\max}^2}$.

[24]Es gilt für $g(p) = (-bp^2 + a)\,(p - \mu)$. Somit ist $g(p) = 0$, wenn die Ausdrücke in den Klammern jeweils null sind. Daraus folgt $p_1 = \mu$ und $p_2 = \sqrt{\frac{a}{b}} = p_{\max}$. Die Lösung $-\sqrt{\frac{a}{b}}$ entfällt, da es keine negativen Prämien gibt.

[25]Folgt aus $-3bp^2 + 2b\,\mu p + a = 0$ und somit ist $p^2 - \frac{2}{3}\mu p - \frac{a}{3b} = 0$ bzw. durch die quadratische Lösungsformel $p_{1/2} = \frac{\mu}{3} \pm \sqrt{\frac{4\mu^2}{9 \cdot 4} + \frac{a}{3b}} = \frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2 + 3p_{\max}^2}}{3}$.

[26]Es gilt $\mu < \sqrt{\mu^2 + 3p_{\max}^2}$, da $p_{\max} > 0$.

[27]Es gilt $-2b(3p_1^* - \mu) < 0$, da $3p_1^* - \mu > 0$ bzw. $3\frac{\mu + \sqrt{\mu^2 + 3p_{\max}^2}}{3} - \mu = \mu + \sqrt{\mu^2 + 3p_{\max}^2} - \mu = \sqrt{\mu^2 + 3p_{\max}^2} > 0$.

Es muss gelten

$$\begin{aligned}
\frac{\mu + p_{\max}}{2} &\leq \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 + 3p_{\max}^2}}{3} \\
3\mu + 3p_{\max} &\leq 2\mu + 2\sqrt{\mu^2 + 3p_{\max}^2} \\
\mu + 3p_{\max} &\leq 2\sqrt{\mu^2 + 3p_{\max}^2} \\
\mu^2 + 6\mu p_{\max} + 9p_{\max}^2 &\leq 4\mu^2 + 12p_{\max}^2 \\
0 &\leq 3\mu^2 - 6\mu p_{\max} + 3p_{\max}^2 = 3(\mu - p_{\max})^2.
\end{aligned}$$

Diese Ungleichung ist für alle $\mu, p_{\max} \geq 0$ erfüllt. Somit ist $p^*_{konkav} \geq p^*_{linear}$. Die gewonnenen Sachverhalte illustriert zum Abschluss die Abbildung 8.2.

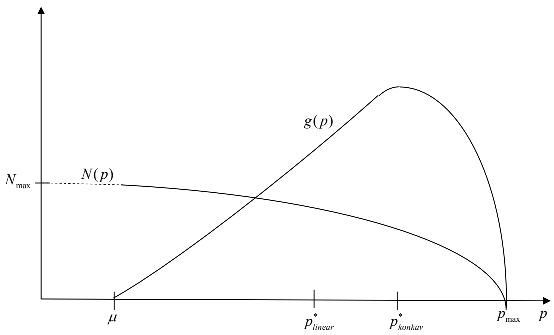


Abbildung 8.2: Beispiel: Konkave Nachfrage.

Beispiel 8.2.3 *(Konvexe Nachfrage)*
Die Nachfrage folge einer konvexen Funktion. Es gelte $N(p) = p^2 - ap + b$, wobei für die Parameter $a, b > 0$ gilt[28]*. Die konvexe Nachfrage ist ebenfalls eine monoton fallende Funktion, welche bei der Maximalprämie $p_{\max}$ null ist. Es gilt somit $N(p) = 0$ für $p = \frac{a}{2} = p_{\max}$*[29]*. Die größte Nachfrage wird bei der Nullprämie theoretisch realisert. Es gilt $N(0) = 0^2 - a \cdot 0 + b = b = N_{\max}$*[30]*. Für den erwarteten Gewinn aus dem Erstversicherungsgeschäft lässt sich*

$$g(p) \quad := \quad (p^2 - ap + b)\,(p - \mu) = p^3 - (a+\mu)p^2 + (b + \mu a)p - \mu b$$

festhalten. Diese Funktion besitzt die Nullstellen $p_1 = \mu$ und $p_2 = \frac{a}{2} = p_{\max}$. Zur Bestimmung der Maximalstelle der Funktion $g(p)$ differenziere man diese. Es gilt

$$D_p(g(p)) = 3p^2 - 2(a+\mu)p + b + \mu a.$$

Daraus folgen die Extremalstellen $p_1^* = \frac{a}{2} = p_{\max}$ und $p_2^* = \frac{\frac{a}{2}+2\mu}{3} = \frac{p_{\max}+2\mu}{3}$[31]*. Für die zweite*

---

[28] Zur Vereinfachung der Berechnungen wird $a^2 = 4b$ angenommen.
[29] Folgt aus der quadratischen Lösungsformel, wobei der Ausdruck in der Wurzel null ist.
[30] Es gilt somit $a = 2p_{\max}$ und $b = N_{\max}$.
[31] Folgt aus $3p^2 - 2(a+\mu)p + b + \mu a = 0$ und somit ist $p^2 - \frac{2}{3}(a+\mu)p + \frac{b+\mu a}{3} = 0$ bzw. durch die quadratische Lösungsformel $p_{1/2} = \frac{a+\mu}{3} \pm \sqrt{\frac{4(a+\mu)^2}{9 \cdot 4} - \frac{b+\mu a}{3}} = \frac{a+\mu \pm \sqrt{\frac{a^2+2a\mu+\mu^2-\frac{3}{4}}{a}^2 - 3a\mu}}{3} = \frac{a+\mu \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - a\mu + \mu^2}}{3}$ $= \frac{a+\mu \pm \sqrt{(\frac{1}{2}a - \mu)^2}}{3} = \frac{a+\mu \pm (\frac{1}{2}a - \mu)}{3}$.

Ableitung der Funktion $g(p)$ gilt

$$D_{pp}(g(p)) = 6p - 2(a + \mu).$$

Es ergibt sich für die erste Extremalstelle

$$D_{pp}(g(p_1^*)) = 6p_{\max} - 2(2p_{\max} + \mu) = 2(p_{\max} - \mu) > 0.$$

Somit ist die erste Extremalstelle ein Minimum. Für die zweite Extremalstelle gilt

$$D_{pp}(g(p_2^*)) = 6\frac{p_{\max} + 2\mu}{3} - 2(2p_{\max} + \mu) = 2(\mu - p_{\max}) < 0$$

und somit ist $p_2^* = \frac{p_{\max}+2\mu}{3} = p^*_{konvex}$ das Maximum. Dieses Maximum befindet sich dabei im Intervall $[\mu, \frac{\mu+p_{\max}}{2}]$. Dies soll im Folgenden gezeigt werden. Es muss gelten

$$\begin{aligned} \frac{p_{\max} + 2\mu}{3} &\leq \frac{\mu + p_{\max}}{2} \\ 2p_{\max} + 4\mu &\leq 3p_{\max} + 3\mu \\ \mu &\leq p_{\max}. \end{aligned}$$

Diese Ungleichung ist für alle $p_{\max} > \mu \geq 0$ erfüllt. Somit ist $p^*_{konvex} \leq p^*_{linear}$. Die gewonnenen Sachverhalte illustriert zum Abschluss die Abbildung 8.3.

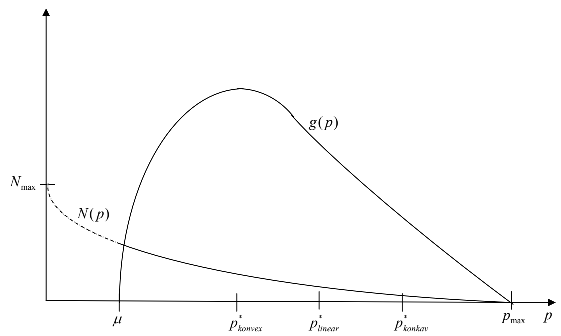


Abbildung 8.3: Beispiel: Konvexe Nachfrage.

Zusammenfassend gilt somit für die drei speziell gewählten Funktionen:

- Bei lineare Nachfrage gilt $p^* = \frac{\mu+p_{\max}}{2} = p^*_{\text{linear}}$.
- Für die spezielle konkave Nachfrage gilt $p^* \geq p^*_{\text{linear}}$.
- Für die spezielle konvexe Nachfrage gilt $p^* \leq p^*_{\text{linear}}$.

Damit wählt der Zedent bei der konkaven Nachfrage eine höhere und bei der konvexen Nachfrage eine niedrigere Prämie im Vergleich zur linearen Nachfrage[32].

[32]Die Übertragung der Ergebnisse auf allgemeine konvexe bzw. konkave Funktionen gelang jedoch nicht.

8.2.3 α-λ-Prinzip

Im Folgenden soll das Rückversicherungsproblem für das α-λ-Prinzip betrachtet werden. Es gilt für dieses bzgl. der Gewinnfunktion des Zedenten

$$\Phi_{\alpha,\lambda}(G(d,p,\varepsilon)) = \frac{1-\lambda}{1-\alpha}E(G(d,p,\varepsilon)) + \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}E(G(d,p,\varepsilon)|G(d,p,\varepsilon) \leq g_{\alpha,d,p,\varepsilon}).$$

Dabei sind $\alpha \in (0,1)$ und $\lambda \in [0,1]$. Es bezeichne $g_{\alpha,d,p,\varepsilon}$ das α-Quantil der Gewinnfunktion $G(d,p,\varepsilon)$. Bezüglich der Risikoeinstellung gilt für das Präferenzfunktional:

- $\lambda = \alpha$: Risikoneutralität
- $\lambda > \alpha$: Risikoaversion
- $\lambda < \alpha$: Risikofreude.

Im Folgenden soll das Maximierungspoblem

$$\max_{d,p} \; \Phi_{\alpha,\lambda}(G(d,p,\varepsilon)) \tag{8.2}$$

gelöst werden. Die Ergebnisse formuliert der folgende Satz.

Satz 8.2.2
Es sei $\Phi_{\alpha,\lambda}(G(d,p,\varepsilon))$ das Präferenzfunktional eines Entscheiders mit Gewinnfunktion

$$G(d,p,\varepsilon) = N(p)\cdot p - B - N(p)\cdot\mu\cdot\varepsilon - (1+\gamma)E(RVS(d,p,\varepsilon)) + RVS(d,p,\varepsilon),$$

wobei N konvav oder linear ist. Dann besitzt das Maximierungsproblem (8.2) folgende implizite Lösung bzgl. der Priorität

$$F_{X_p}(d^*) = F_\varepsilon\left(\frac{d^*}{N(p^*)\cdot\mu}\right) = \begin{cases} 1, & \textit{für } 1+\gamma > \frac{\lambda}{\alpha} \\ \frac{\gamma(1-\alpha)}{(1-\alpha)(1+\gamma)-(1-\lambda)}, & \textit{für } 1+\gamma < \frac{\lambda}{\alpha} \end{cases}$$

bzw. für die Erstversicherungsprämie

$$p^* = \begin{cases} \arg\max\limits_p \left[N(p)\left[p-\mu-\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu\Delta(\alpha,p)\right]\right], & \textit{für } 1+\gamma > \frac{\lambda}{\alpha} \\ \arg\max\limits_p \left[N(p)\left[p-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\mu\right]-\left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right]E(RVS(d^*,p,\varepsilon))\right], & \textit{für } 1+\gamma < \frac{\lambda}{\alpha} \end{cases}$$ [33]

für alle $p \in (\mu; p_{\max}]$[34].

Bzgl. der Priorität bringt die Maximierung des Präferenzfunktionals die gleiche Lösung wie im Prioritätsoptimierungproblem[35] hervor. Somit wird die Rückversicherung für positive Gewinnaufschläge seitens des Rückversicherers von einem risikofreudigen, risikoneutralen und

[33] Es gilt $\Delta(\alpha,p) = -1+\frac{1}{\alpha}\int\limits_{F_\varepsilon^{-1}\left(\frac{1-\alpha}{N(p)\cdot\mu}\right)}^{\infty} \varepsilon\, dF_\varepsilon(\varepsilon)$. Des Weiteren bedeutet $E(RVS(d^*,p,\varepsilon))$ im Fall $1+\gamma < \frac{\lambda}{\alpha}$, dass bei der Bestimmung des Maximums erst die Differentation durchgeführt, dann null gesetzt und anschließend erst die optimale Priorität d^* eingesetzt wird.

[34] Der Beweis von Satz 8.2.2 befindet sich im Anhang C.4 S. 214 ff.

[35] Vgl. diesbzgl. Kapitel 5

gering risikoaversen Zedenten abgelehnt. Ein Zedent mit einer hohen Risikoaversion dagegen wird sich für die Rückversicherung entscheiden. Dabei wird dieser mit zunehmender Risikoaversion immer mehr Risiko an den Zessionär transferieren[36]. Im speziellen Fall einer fairen Rückversicherungsprämie ($\gamma = 0$) wird jeder risikoaverse Zedent die Rückversicherung wählen und möchte in diesem speziellen Fall alle Schäden dem Zessionär übergeben. Er präferiert damit eine Vollversicherung. Weiterhin lehnen alle risikofreudigen Zedenten die Rückversicherung ab und die Risikoneutralen sind in ihrer Entscheidung indifferent.

Für den Spezialfall des Erwartungswertkriteriums ($\lambda = \alpha$) kann aus dem Satz $F_{X_p}(d^*) = 1$ und $p^* = \arg\max_p [N(p)[p - \mu]]$ abgeleitet werden. In diesem Fall lehnt der Zedent die Rückversicherung ab. Bzgl. der Prämie gelten die Aussagen aus den Beispielen 8.2.1, 8.2.2 und 8.2.3 .

Der Spezialfall des CVaR-Prinzips ($\lambda = 1$) führt bzgl. der Priorität zur Lösung

$$F_{X_p}(d^*) = F_\varepsilon\left(\frac{d^*}{N(p^*)\cdot\mu}\right) = \begin{cases} 1, & \text{für } \alpha > \frac{1}{1+\gamma} \\ \frac{\gamma}{1+\gamma}, & \text{für } \alpha < \frac{1}{1+\gamma} \end{cases}$$

bzw. für die Erstversicherungsprämie zur Lösung

$$p^* = \begin{cases} \arg\max_p [N(p)[p - \mu - \mu\Delta(\alpha,p)]], & \text{für } \alpha > \frac{1}{1+\gamma} \\ \arg\max_p [N(p)p - (1+\gamma)E(RVS(d^*,p,\varepsilon))], & \text{für } \alpha < \frac{1}{1+\gamma} \end{cases} .$$

Es stellt sich an dieser Stelle die Frage, welche optimale Prämie der Zedent bei Zunahme von Risikoaversion sowie im Spezialfall der fairen Rückversicherungsprämie präferiert. Dies wird exemplarisch für die lineare, später für die konkave Nachfragefunktion gezeigt.

Beispiel 8.2.4 *(Lineare Nachfrage und Rückversicherungswahl)*
Für die optimale Prämie gilt bei Rückversicherungswahl

$$p^* = \max_p \left[N(p)\left[p - \frac{1-\lambda}{1-\alpha}\mu\right] - \left[1 + \gamma - \frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right]E(RVS(d^*,p,\varepsilon))\right].$$

Je höher die Risikoaversion ist, desto niedriger wird der Zedent seine Priorität wählen. Der Rückversicherer übernimmt ein höheres Schadensvolumen und somit steigt mit Zunahme der Risikoaversion des Zedenten der erwartete Rückversicherungsschaden an. Zur Bestimmung

[36]Vgl. diesbzgl. die Grafiken und Erläuterungen im Kapitel 5.

der optimalen Priorität wird zunächst differenziert und null gesetzt. Es gilt

$$\begin{aligned}
N(p^*) + N_p(p^*)\left[p^* - \frac{1-\lambda}{1-\alpha}\mu\right] - \left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right] N_p(p^*)\mu \int\limits_{\frac{d^*}{N(p^*)\cdot\mu}}^{\infty} \varepsilon\ dF_\varepsilon(\varepsilon) &= 0^{37} \\
N(p^*) + N_p(p^*)\left[p^* - \frac{1-\lambda}{1-\alpha}\mu - \left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right]\mu \int\limits_{\frac{d^*}{N(p^*)\cdot\mu}}^{\infty} \varepsilon\ dF_\varepsilon(\varepsilon)\right] &= 0 \\
N(p^*) + N_p(p^*)\left[p^* - \frac{1-\lambda}{1-\alpha}\mu - \left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right]\mu\ R_{d^*}(\alpha,\lambda,\gamma)\right] &= 0^{38}.
\end{aligned}$$

Die Nachfrage folge einer linearen Funktion. Dabei ist $N(p) = a - bp$ bzw. $N_p(p) = -b$, wobei für die Parameter $a, b > 0$ gilt. Damit folgt für die optimale Prämie

$$\begin{aligned}
a - bp^* - b\left[p^* - \frac{1-\lambda}{1-\alpha}\mu - \left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right]\mu\ R_{d^*}(\alpha,\lambda,\gamma)\right] &= 0 \\
a + b\left[\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\mu + \left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right]\mu\ R_{d^*}(\alpha,\lambda,\gamma)\right] &= 2bp^*
\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}
p^* &= \frac{\frac{a}{b} + \frac{1-\lambda}{1-\alpha}\mu + \left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right]\mu\ R_{d^*}(\alpha,\lambda,\gamma)}{2} \\
&= \frac{p_{max} + \mu\left[\frac{1-\lambda}{1-\alpha} + \left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right]\ R_{d^*}(\alpha,\lambda,\gamma)\right]}{2}^{39} =: p^*_{linear,RV}{}^{40}.
\end{aligned}$$

Der Spezialfall einer fairen Rückversicherungsprämie ($\gamma = 0$) führt dazu, dass alle risikoaversen Zedenten die Vollversicherung wählen. Es gilt für die optimale Prämie

$$p^*_{linear,RV,\gamma=0} = \frac{p_{max} + \mu\left[\frac{1-\lambda}{1-\alpha} + \left[1-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right]\right]}{2}^{41} = \frac{\mu + p_{max}}{2}.$$

---

[37] Es gilt $D_p(E(RVS(d^*, p, \varepsilon))) = N_p(p)\mu \int\limits_{\frac{d^*}{N(p)\cdot\mu}}^{\infty} \varepsilon\ dF_\varepsilon(\varepsilon)$.

[38] Es sei $R_{d^*}(\alpha,\lambda,\gamma) := \int\limits_{\frac{d^*}{N(p)\cdot\mu}}^{\infty} \varepsilon\ dF_\varepsilon(\varepsilon)$. Die Abhängigkeit von den Risikoparametern findet über die optimale Priorität statt. Mit steigender Risikoaversion sinkt die optimale Priorität ab. Somit wird die positive Größe ε über einen größeren Bereich integriert. Damit steigt der Wert der Größe $R_{d^*}(\alpha,\lambda,\gamma)$ mit der Zunahme an Risikoaversion.

[39] Es gilt $\frac{a}{b} = p_{\max}$. Vgl. dazu Beispiel 8.2.1.

[40] $p^*_{linear,RV}$ steht für die optimale Prämie bei linearer Nachfrage und Rückversicherungswahl. Des Weiteren ist die optimale Prämie ein Maximum, da die zweite Ableitung negativ ist: $-b - b\left[1 + \left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right]\mu\left(\frac{d^*}{N(p^*)\cdot\mu}\right) f_\varepsilon\left(\frac{d^*}{N(p^*)\cdot\mu}\right)\right] < 0$.

In diesem Fall erhält man die gleiche optimale Prämie wie bei der Anwendung des Erwartungswertkriteriums[42] *für positive Rückversicherungsgewinnaufschläge. Damit verhält sich also ein risikoaverser Zedent, der eine faire Rückversicherung in Anspruch nehmen kann, bei der optimalen Prämienwahl wie ein risikoneutraler Entscheider. Dies ist auch verständlich, da er durch die Vollversicherung jegliches Risiko auf den Zessionär übertragen hat. Dabei gilt* $p^*_{linear,RV,\gamma=0} \leq p^*_{linear,RV}$[43].

Für den Spezialfall des CVaR-Prinzips ($\lambda = 1$) *folgt bei linearer Nachfrage und Rückversicherungswahl*

$$\begin{aligned} p^*_{linear,RV,CVaR} &= \frac{p_{max} + \mu\left[\frac{1-1}{1-\alpha} + \left[1+\gamma-\frac{1-1}{1-\alpha}\right]\ R_{d^*}(\alpha,1,\gamma)\right]}{2} \\ &= \frac{p_{max} + [1+\gamma]\mu\ R_{d^*}(\gamma)}{2}{}^{44}. \end{aligned}$$

Es stellt sich die Frage, welche Auswirkung eine Risikoaversionszunahme auf die optimale Prämie hat. Es gilt allgemein für die Prämie bei Rückversicherungswahl und linearer Nachfrage

$$\begin{aligned} p^*_{linear,RV} &= \frac{\frac{a}{b} + \frac{1-\lambda}{1-\alpha}\mu + \left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right]\mu\ R_{d^*}(\alpha,\lambda,\gamma)}{2} \\ &= \frac{p_{max} + \mu\left[\frac{1-\lambda}{1-\alpha} + \left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right]\ R_{d^*}(\alpha,\lambda,\gamma)\right]}{2}. \end{aligned}$$

In dieser Lösung wird nur der Term $\frac{1-\lambda}{1-\alpha} + \left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right]\ R_{d^*}(\alpha,\lambda,\gamma)$ *durch die Risikoparameter bestimmt. Jedoch hat auch die Störgröße* ε *einen Einfluss auf diesen Term, da diese* $R_{d^*}(\alpha,\lambda,\gamma)$ *beeinflusst. Wächst der Term* $\frac{1-\lambda}{1-\alpha} + \left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right]\ R_{d^*}(\alpha,\lambda,\gamma)$, *so steigt die optimale Prämie. Fällt dieser, so sinkt auch die optimale Prämie. Ein generelles Wachsen und Sinken dieses Terms und somit der optimalen Prämie mit Risikoaversionszunahme konnte nicht nachgewiesen werden. Allein die Aussage, dass die Prämie größer gleich der Prämie bei Risikoneutralität*[45] *ist, kann getroffen werden*[46]. *Damit muss jeder Zedent seine optimale Prämie mit seinen individuellen Risikoparametern und der vorliegenden Störgröße kalkulieren.*

[41] Es gilt $R_{d^*}(\alpha,\lambda,\gamma) = E(\varepsilon) = 1$.

[42] Das Erwartungswertkriterium ist für risikoneutrale Zedenten geeignet.

[43] Es gilt $\left[\frac{1-\lambda}{1-\alpha} + \left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right]\ R_{d^*}(\alpha,\lambda,\gamma)\right] \geq 1$. Dies folgt aus $R_{d^*}(\alpha,\lambda,\gamma) \geq -\frac{\frac{1-\lambda}{1-\alpha}}{1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}}$. Die linke Seite der Ungleichung ist immer positiv, die rechte Seite immer negativ. Somit ist die Ungleichung erfüllt.

[44] Die optimale Prämie ist beim CVaR-Prinzip und bei Rückversicherungswahl unabhängig vom Risikoparameter α, da die optimale Priorität unabhängig von α ist. Der Gewinnaufschlag des Rückversicherers hingegen besitzt einen Einfluss. Somit ist R_{d^*} von γ abhängig und wird durch $R_{d^*}(\gamma)$ dargestellt.

[45] Bei Risikoneutralität wird die Rückversicherung abgelehnt. Die optimale Prämie ist dabei identisch zu der optimalen Prämie bei RV-Wahl und fairer Rückversicherungsprämie.

[46] Vgl. dazu und für weiterführende Untersuchungen den Anhang C.4 S. 231.

Beispiel 8.2.5 *(Konkave Nachfrage und Rückversicherungswahl)*
Für die erste Ableitung bzgl. der Prämie gilt

$$N(p^*) + N_p(p^*)\left[p^* - \frac{1-\lambda}{1-\alpha}\mu - \left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right]\mu\ R_{d^*}(\alpha,\lambda,\gamma)\right] \quad = \quad 0.$$

Die Nachfrage sei jetzt konkav. Es sei $N(p) = -bp^2 + a$, *wobei für die Parameter* $a, b > 0$ *gilt. Damit folgt für die optimale Prämie*

$$\begin{aligned}
-b(p^*)^2 + a - 2bp^*\left[p^* - \frac{1-\lambda}{1-\alpha}\mu - \left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right]\mu\ R_{d^*}(\alpha,\lambda,\gamma)\right] &= 0\\
-3b(p^*)^2 - 2b\left[-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\mu - \left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right]\mu\ R_{d^*}(\alpha,\lambda,\gamma)\right]p^* + a &= 0\\
(p^*)^2 + \frac{2}{3}\left[-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\mu - \left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right]\mu\ R_{d^*}(\alpha,\lambda,\gamma)\right]p^* - \frac{a}{3b} &= 0
\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}
p^*_{1/2} &= \frac{\frac{2}{3}\left[\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\mu + \left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right]\mu\ R_{d^*}(\alpha,\lambda,\gamma)\right]}{2}\\
&\pm \sqrt{\frac{\frac{4}{9}\left[\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\mu + \left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right]\mu\ R_{d^*}(\alpha,\lambda,\gamma)\right]^2}{4} + \frac{a}{3b}}\\
&= \frac{\left[\frac{1-\lambda}{1-\alpha} + \left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right]\ R_{d^*}(\alpha,\lambda,\gamma)\right]\mu}{3}\\
&\pm \frac{\sqrt{\left[\frac{1-\lambda}{1-\alpha} + \left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right]\ R_{d^*}(\alpha,\lambda,\gamma)\right]^2\mu^2 + 3p^2_{\max}}}{3}{}^{47}.
\end{aligned}$$

Die zweite Extremalstelle entfällt, da diese negativ ist. Somit ist

$$\begin{aligned}
p^*_1 &= \frac{\left[\frac{1-\lambda}{1-\alpha} + \left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right]\ R_{d^*}(\alpha,\lambda,\gamma)\right]\mu}{3}\\
&+ \frac{\sqrt{\left[\frac{1-\lambda}{1-\alpha} + \left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right]\ R_{d^*}(\alpha,\lambda,\gamma)\right]^2\mu^2 + 3p^2_{\max}}}{3} =: p^*_{konkav,RV}
\end{aligned}$$

die optimale Prämie und ist in diesem Fall auch ein Maximum[48]. *Des Weiteren ist* $p^*_{konkav,RV} \geq p^*_{linear,RV}$[49].

[47] Folgt aus $\frac{a}{b} = p^2_{\max}$.

[48] Da für die zweite Ableitung $-6bp^* + 2b\left[\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\mu + \left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right]\mu\ R_{d^*}(\alpha,\lambda,\gamma)\right]$ $= -2b\sqrt{\left[\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\mu + \left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right]\mu\ R_{d^*}(\alpha,\lambda,\gamma)\right]^2 + 3p^2_{\max}} < 0$ gilt.

[49] Vgl. dazu den Vergleich der optimalen Prämie bei linearer und konkaver Nachfrage aus Beispiel 8.2.2. $p^*_{konkav,RV} \geq p^*_{linear,RV}$ folgt unmittelbar durch Ersetzen von μ durch $\left[\frac{1-\lambda}{1-\alpha} + \left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right]\ R_{d^*}(\alpha,\lambda,\gamma)\right]\mu$.

Der Spezialfall einer fairen Rückversicherungsprämie ($\gamma = 0$) führt dazu, dass alle risikoaversen Zedenten die Vollversicherung wählen[50]. *Die optimale Prämie lautet hierfür*

$$\begin{aligned} p^*_{konkav,RV,\gamma=0} &= \frac{\left[\frac{1-\lambda}{1-\alpha} + \left[1 - \frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right]\right]\mu}{3} + \frac{\sqrt{\left[\frac{1-\lambda}{1-\alpha} + \left[1 - \frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right]\ \right]^2 \mu^2 + 3p^2_{\max}}}{3} \\ &= \frac{\mu}{3} + \frac{\sqrt{\mu^2 + 3p^2_{\max}}}{3}. \end{aligned}$$

In diesem Fall erhält man die gleiche optimale Prämie wie bei der Anwendung des Erwartungswertkriteriums für positive Rückversicherungsgewinnaufschläge. Dabei gilt $p^*_{konkav,RV,\gamma=0} \leq p^*_{konkav,RV}$[51].

Für den Spezialfall des CVaR-Prinzips ($\lambda = 1$) folgt bei konkaver Nachfrage und Rückversicherungswahl

$$\begin{aligned} p^*_{konkav,RV,CVaR} &= \frac{[1+\gamma]\ \ R_{d^*}(\alpha,1,\gamma)\mu}{3} + \frac{\sqrt{[[1+\gamma]\ \ R_{d^*}(\alpha,1,\gamma)]^2 \mu^2 + 3p^2_{\max}}}{3} \\ &= \frac{[1+\gamma]\ \ R_{d^*}(\gamma)\mu}{3} + \frac{\sqrt{[[1+\gamma]\ \ R_{d^*}(\gamma)]^2 \mu^2 + 3p^2_{\max}}}{3}\,{}^{52}. \end{aligned}$$

Ebenfalls wie bei der linearen Nachfrage an Versicherungen kann keine allgemeine Aussage bzgl. des Verhaltens der optimalen Prämie

$$\begin{aligned} p^*_{konkav,RV} &= \frac{\left[\frac{1-\lambda}{1-\alpha} + \left[1+\gamma - \frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right]\ \ R_{d^*}(\alpha,\lambda,\gamma)\right]\mu}{3} \\ &+ \frac{\sqrt{\left[\frac{1-\lambda}{1-\alpha} + \left[1+\gamma - \frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right]\ \ R_{d^*}(\alpha,\lambda,\gamma)\right]^2 \mu^2 + 3p^2_{\max}}}{3} \end{aligned}$$

bei Risikoaversionszunahme getroffen werden. Dies liegt darin begründet, dass dieser von dem Term

$$\frac{1-\lambda}{1-\alpha} + \left[1+\gamma - \frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right]\ \ R_{d^*}(\alpha,\lambda,\gamma)$$

abhängt, für den keine Aussage bzgl. Risikoaversionzunahme getroffen werden kann, da er zum einen von den Risikoparametern und zum anderen von der Störgröße beeinflusst ist[53].

[50]Es gilt $R_{d^*}(\alpha,\lambda,\gamma) = E(\varepsilon) = 1$.

[51]Da $\left[\frac{1-\lambda}{1-\alpha} + \left[1+\gamma - \frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right]\ \ R_{d^*}(\alpha,\lambda,\gamma)\right] \geq 1$ gilt.

[52]Die optimale Prämie ist beim CVaR-Prinzip und bei Rückversicherungswahl unabhängig vom Risikoparameter α. Der Gewinnaufschlag des Rückversicherers hingegen besitzt einen Einfluss. Somit ist R_{d^*} von γ abhängig und wird durch $R_{d^*}(\gamma)$ dargestellt.

[53]Vgl. dazu Beispiel 8.2.4 mit linearer Nachfragefunktion.

Ähnlich verhält sich die optimale Prämie bei Ablehnung der Rückversicherung. In diesem Fall führt das Maximierungsproblem zu impliziten Lösungen. Zum Beispiel erhält man bei Unterstellung einer linearen Nachfrage die implizite Lösung

$$p^*_{linear,Nicht-RV} = \frac{\mu\left[1+\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\Delta(\alpha,p^*)\right]+p_{\max}\left[1-\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha,p^*))\right]}{2-\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha,p^*))}.$$

Für identische Risikoparameter fällt die Lösung auf die Lösung des Erwartungswertkriteriums zusammen. Für Riskofreude wird die optimale Prämie kleiner und für Risikoaversion größer als beim Erwartungswertkriterium sein. Es gilt also

$$p^*_{linear,Nicht-RV,R-aversion} \geq p^*_{linear,Nicht-RV,R-neutral} \geq p^*_{linear,Nicht-RV,R-freude}.$$ [54]

Trotzdem kann kein generelles Verhalten der optimalen Prämie in den einzelnen Risikoarten (Freude, Neutralität, Aversion) konstatiert werden, da dieses von der Störgröße ε abhängt. Allein der Vergleich zwischen den Risikoarten gelingt. Somit muss ein Zedent auch in diesem Fall die optimale Prämie mit seinen individuellen Risikoparametern, der Nachfragefunktion sowie der vorliegenden Störgröße ε berechnen.

Unterstellt man hingegen die konkave Funktion aus Beispiel 8.2.5, erhält man für die Ablehnung der Rückversicherung die optimale Prämie[55]

$$\begin{aligned} p_1^* &= \frac{\mu\left[1+\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\Delta(\alpha,p^*)\right]}{3-\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha,p^*))} \\ &+ \frac{\sqrt{\mu^2\left[1+\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\Delta(\alpha,p^*)\right]^2+p_{\max}^2\left[1-\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha,p^*))\right]\left[3-\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha,p^*))\right]}}{3-\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha,p^*))} \end{aligned}$$

für $3-\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha,p^*)) > 0$. Dies ist für $\lambda \geq \alpha$ (Risikoaversion und -neutralität) und für $\lambda < \alpha$ (Risikofreude) mit der Bedingung $3-\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha,p^*)) > 0$[56] erfüllt. Für $3-\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha,p^*)) < 0$[57] ist die optimale Prämie

$$\begin{aligned} p_2^* &= \frac{\mu\left[1+\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\Delta(\alpha,p^*)\right]}{3-\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha,p^*))} \\ &- \frac{\sqrt{\mu^2\left[1+\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\Delta(\alpha,p^*)\right]^2+p_{\max}^2\left[1-\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha,p^*))\right]\left[3-\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha,p^*))\right]}}{3-\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha,p^*))}. \end{aligned}$$

Für beide Lösungen gilt bei gleicher Risikoeinstellung, dass die optimale Prämie bei konkaver Nachfragefunktion größer gleich der optimalen Prämie bei linearer Nachfragefunktion ist. Eine

[54] Vgl. bzgl. der Bestimmung der optimalen Prämie sowie der Abschätzungen bzgl. der einzelnen Risikoeinstellungen den Anhang C.4 S. 231 ff.

[55] Berechnungen der optimalen Prämie bei Ablehnung der Rückversicherung und konkaver Nachfragefunktion sowie weiterführende Untersuchungen diesbezüglich befinden sich im Anhang C.4 S. 235 ff.

[56] Dabei gilt $D_p(\Delta(\alpha,p^*)) \leq 0$.

[57] Kann nur bei Risikofreude auftreten.

Abschätzung der optimalen Prämie zwischen den einzelnen Risikoeinstellungen (Risikofreude vs. Risikoneutralitat bzw. Risikoaversion vs. Risikoneutralität) ist jedoch nicht möglich. Somit muss ein Zedent entsprechend seiner Risikoeinstellung und der vorliegenden Störgröße seine entsprechende optimale Prämie bestimmen und anschließend die hinreichende Bedingung (Art des Extremums) prüfen.

8.3 Zusammenfassung und Überblick

In diesem Kapitel wurde das Erst- und das Rückversicherungsgeschäft simultan optimiert. Bzgl. des Rückversicherungsgeschäftes erhält man die gleichen Lösungen wie bei der alleinigen Optimierung des Rückversicherungsproblems. Somit lehnt ein risikofreudiger, risikoneutraler und ein niedrig risikoaverser Zedent die Rückversicherung ab, bei positiven Gewinnaufschlägen seitens des Rückversicherers. Ein Zedent mit hoher Risikoaversion hingegen wird die Rückversicherung wählen. Dabei gilt, dass dieser mit Zunahme an Risikoaversion mehr Risiko an den Zessionär transferieren möchte, d. h. er präferiert eine niedrigere Priorität. Handelt es sich um eine faire Rückversicherungsprämie, so wird der risikofreudige Zedent die Rückversicherung ablehnen, der risikoaverse Zedent dagegen die Vollversicherung präferieren. Der risikoneutrale Zedent ist indifferent.

Für die optimale Prämie bei Rückversicherungswahl hat man am Beispiel der linearen und konkaven Nachfragefunktion gesehen, dass diese größer ist als bei Risikoneutralität[58]. Dabei präferiert ein Zedent bei einer konkaven Nachfrage eine höhere optimale Prämie als bei einer linearen Nachfrage.

Ähnlich verhält sich die optimale Prämie bei Ablehnung der Rückversicherung. Ein risikofreudiger Zedent mit einer linearen Nachfragefunktion wird eine kleinere und ein risikoaverser Zedent eine größere Prämie als im risikoneutralen Fall präferieren.

Des Weiteren ist die optimale Prämie bei konkaver Nachfrage und Ablehnung der Rückversicherung größer als die optimale Prämie bei einer linearen Nachfrage. Zur weiteren Untersuchung der optimalen Prämie ist jeweils die spezielle Risikoeinstellung des Zedenten als auch Annahmen für die Störgröße ε notwendig.

[58] Bei Risikoneutralität wird die Rückversicherung nicht gewählt bzw. ist der Zedent bei $\gamma = 0$ indifferent.

Teil IV

Zusammenfassung und Ausblick

Ziel dieser Arbeit war die Modellierung von nicht-proportionalen Rückversicherungsverträgen mit Risikopräferenzen. Die Verwendung von Risikopräferenzen im Versicherungs- als auch im Rückversicherungskontext stellt dabei ein neues Forschungsfeld dar, auf dem bislang abgesehen vom μ-σ-Prinzip noch keinerlei Untersuchungen durchgeführt wurden. Grundlage der Modellierung sind in diesem Zusammenhang hybride Entscheidungsprinzipien basierend auf dem Conditional Value at Risk. Dabei wurden auch die Spezialfälle Erwartungswertkriterium und CVaR-Prinzip beleuchtet, welche in den verwendeten hybriden Entscheidungsprinzipien enthalten sind. Zusätzlich wurde der Spezialfall einer fairen Rückversicherungsprämie untersucht.

Die Modellierung wurde zunächst für jede Deckungsgrenze eines nicht-proportionalen Rückversicherungsvertrages einzeln und später in einem zweidimensionalen Modell zusammen vorgenommen. Dies hatte zum Ziel, den Informationsgehalt der einzelnen Modelle zu vergleichen und das beste Modell (einfachere Berechnung bei gleichem Informationsgehalt) herauszufinden. Abschließend fand eine Optimierung unter Einbezug des Erstversicherungsgeschäftes statt. Dabei werden die zu Beginn der Arbeit aufgestellten Fragen wie folgt beantwortet:

- Bei welcher Risikoeinstellung wird ein Erstversicherer die Rückversicherung präferieren?

  Ein risikofreudiger und ein risikoneutraler Zedent lehnt die Rückversicherung ab. Die Entscheidung eines risikoaversen Zedenten ist abhängig vom Gewinnaufschlag des Rückversicherers. Bei einem positiven Gewinnaufschlag seitens des Zessionärs wird ein Zedent mit einer niedrigen Aversion die Rückversicherung ablehnen und bei hoher Risikoaversion die Rückversicherung präferieren. Für diese Entscheidung ist neben der persönlichen Risikoeinstellung des Zedenten somit auch der Gewinnaufschlag des Zessionärs entscheidend. Eine Erhöhung des Gewinnaufschlags wird ab einem gewissen Punkt die Ablehnung der Rückversicherung durch den Zedent zur Folge haben. Im Fall der fairen Rückversicherungsprämie dagegen wird jeder risikoaverse Zedent die Rückversicherung präferieren[1].

- Wenn ein Erstversicherer die Rückversicherung präferiert, welche Deckungsgrenzen bevorzugt er bzw. wie ändern sich die präferierten Deckungsgrenzen mit der Zunahme an Risikoaversion?

  Wenn ein Zedent aufgrund seiner Risikoeinstellung die Rückversicherung präferiert, dann wählt er für seinen Schutz einen bestimmten Selbstbehalt (Priorität). Dieser ist zum einen von seiner Risikoeinstellung abhängig und zum anderen von der zu erwartenden Schadensverteilung sowie vom Gewinnaufschlag des Zessionärs. Eine höhere Risikoaversion führt dabei zu einer niedrigeren Priorität. Es wird mehr Risiko an den Rückversicherer transferiert. Die Schadensverteilung besitzt den gleichen Einfluss auf

[1] Dieses Verhalten der Zedenten kann auch bei der Anwendung des Bernoulli-Prinzips beobachtet werden. Vgl. Schulenburg, Greiner (2007), S. 37 f., bzgl. Bernoulli-Prinzip im Versicherungskontext Wagner (2000), S. 48 sowie Ritter (2006), S. 23. bzw. bzgl. der Anwendung im Rückversicherungkontext u. a. Guerra, Centeno (2008), Kaluszka, Okolewski (2008), Samson (1986) sowie Samson, Thompson (1983).

die Priorität. Eine höhere Schadensverteilung[2] führt immer auch zu einer höheren Priorität. Der Zedent dagegen präferiert in jedem Fall einen Plafond in einer Höhe, in der sich alle Schäden unterhalb des Plafonds befinden. In diesem Fall soll der Zessionär alle Schäden oberhalb des Selbstbehaltes übernehmen. In der Praxis ist dies jedoch nicht aufzufinden, da der Plafond vom Zessionär bestimmt wird[3].

- Welchen Einfluss hat der Gewinnaufschlag des Rückversicherers?

  Wie bereits angesprochen, besitzt der Gewinnaufschlag einen Einfluss darauf, ob die Rückversicherung gewählt wird oder nicht. Des Weiteren bedingt er auch die Höhe der nachgefragten Deckung. Wenn der Zedent aufgrund seiner Risikoeinstellung die Rückversicherung präferiert, dann wird er mit der Zunahme des Gewinnaufschlages eine höhere Priorität bevorzugen und weniger Risiko an den Zessionär weitergeben. Dies ist darin begründet, dass mit der Zunahme des Gewinnaufschlages die Rückversicherung immer teurer wird und der Zedent immer mehr bereit sein wird, kleinere Schäden selbst zu tragen. Dagegen führt ein theoretischer Gewinnaufschlag von null[4] zur Vollversicherung aller risikoaversen Zedenten, weil der Zessionär ohne Aufpreis für den erwarteten Schaden alle Schäden übernimmt.

- Wann ist der Erstversicherer indifferent in seiner Entscheidung?

  Im Allgemeinen ist der Zedent indifferent in seiner Entscheidung, wenn der Quotient aus seinen Risikoparametern gleich $1 + \gamma$ ist. Dies ist für positive Gewinnaufschläge seitens des Rückversicherers nur für risikoaverse Zedenten möglich[5]. Im Fall einer fairen Rückversicherungsprämie wählen alle risikoaversen Zedenten die Vollversicherung, die risikofreudigen lehnen die Rückversicherung ab und die risikoneutralen sind indifferent in ihrer Entscheidung.

Im Kapitel 5 und 6 wurden die Deckungsgrenzen getrennt voneinander optimiert. Dabei war festzustellen, dass die Entscheidung für oder gegen die Rückversicherung bei einer bestimmten Risikopräferenz seitens des Erstversicherers bei beiden Modellen gleich ist. Die Modelle unterscheiden sich allein in der nachgefragten Höhe der Deckungsgrenzen. Für den Plafond konnte dabei festgestellt werden, dass sich, wenn die Rückversicherung gewählt wird, alle Schäden unterhalb des Plafonds befinden. Dies ist die zentrale Aussage des Kapitels 6.

Im Anschluss an Kapitel 5 und 6 stellte sich die zentrale Frage:

---

[2]Dass heißt, wenn die Verteilungsfunktion eines Schadens immer oberhalb der Verteilungsfunktion eines anderen Schadens ist (Stochastische Dominanz erster Ordnung), wird die Priorität bei ersterer höher ausfallen.
[3]Der Plafond ist die Schutzgrenze des Zessionärs gegen die materielle Überforderung.
[4]In diesem Fall wählen alle risikoaversen Zedenten die Rückversicherung.
[5]Diese Ausführungen beziehen sich auf das in dieser Arbeit grundlegend verwendete α-λ-Präferenzfunktional.

- Beeinflussen sich die Deckungsober- und -untergrenze (Plafond und Priorität) bei einer simultanen Optimierung?

  Im Kapitel 7 wurde dabei festgestellt, dass sich die Deckungsgrenzen nicht gegenseitig beeinflussen. Die Interpretation der Lösung war identisch mit der Interpretation bei einzelner Betrachtung der Deckungsgrenzen. Somit war kein weiterer Informationsgewinn zu verzeichnen, außer der Feststellung, dass die Deckungsgrenzen nicht interagieren. Damit kann für die Bestimmung der optimalen Deckungsgrenzen die Lösung aus Kapitel 5 verwendet werden, mit der Aussage aus Kapitel 6, dass der Plafond alle möglichen Schäden beinhaltet, wenn die Rückversicherung präferiert wird und der Aussage aus Kapitel 7, dass die Deckungsgrenzen nicht interagieren.

Fortführend wurde im Kapitel 8 das Erstversicherungsgeschäft in die Überlegungen mit einbezogen. Es fand eine simultane Optimierung des Erst- und Rückversicherungsgeschäftes statt. Dabei wurde für das Rückversicherungsgeschäft die Priorität[6] und für das Erstversicherungsgeschäft die Versicherungsprämie bzgl. eines Erstversicherungsvertrages betrachtet. Zentrale Fragen, die dabei beantwortet wurden, sind:

- Welchen Deckungsschutz bzgl. der Rückversicherung präferiert der Erstversicherer?

  Die Ergebnisse bzgl. des Rückversicherungsgeschäftes sind identisch mit denen aus Kapitel 5[7]. Der einzige Unterschied besteht darin, dass die Lösung in Kapitel 5 vom Schaden X und in Kapitel 8 vom Schaden X_p abhängt. Bei Letzterem besitzt also die Erstversicherungsprämie p einen Einfluss. Eine niedrige Prämie p führt zu einer höheren Anzahl an verkauften Erstversicherungsverträgen und somit zu höheren Schäden. Dadurch wird der Zedent, wenn er eine Rückversicherung präferiert, eine höhere Priorität wählen.

- Welche Erstversicherungsprämie sollte der Versicherer von seinen Privatkunden verlangen?

  Die Erstversicherungsprämie ist zum einen abhängig von der Nachfrage[8] an Erstversicherungen und zum anderen von der Risikoeinstellung des Zedenten. Präferiert der Zedent eine Rückversicherung, besitzt die Rückversicherungsprämie ebenfalls einen Einfluss auf die Prämie p, da durch diese auch die Kosten der Rückversicherung gedeckt werden müssen. Aussagen bzgl. der Prämie können unter der Verteilungsannahme der Störgröße ε und der individuellen Risikoeinstellung des Zedenten kalkuliert werden.

[6] Der Plafond bleibt bei diesen Betrachtungen außen vor, da dessen Eigenschaften aus Kapitel 6 und 7 bekannt sind und die Berechnung unnötig verkomplizieren.

[7] Ein risikofreudiger, risikoneutraler und niedrig risikoaverser Zedent lehnt die Rückversicherung für positive Gewinnaufschläge seitens des Zessionärs ab. Ein hoch risikoaverser Zedent präferiert die Rückversicherung. Dabei sinkt bei Rückversicherungswahl die Priorität mit Zunahme an Risikoaversion.

[8] Ein Zedent präferiert bei einer konkaven Nachfrage eine höhere Prämie p als bei einer linearen Nachfrage.

- Beeinflussen sich das Erst- und Rückversicherungsgeschäft gegenseitig?

  Das Erstversicherungsgeschäft beeinflusst das Rückversicherungsgeschäft durch den Schaden X_p. Dieser führt für kleine Prämien zu höheren Prioritäten. Das Rückversicherungsgeschäft wirkt auf das Erstversicherungsgeschäft bei Rückversicherungswahl, da die Prämie für den Rückversicherer verdient werden muss und somit zu einer höheren Prämie führt.

Das Modell aus Kapitel 5 bietet eine einfache Berechnung der benötigten Deckung entsprechend der Risikoeinstellung des Zedenten, lässt aber das Erstversicherungsgeschäft außen vor. Das Modell aus Kapitel 8 beinhaltet dagegen das Erstversicherungsgeschäft, ist aber bei der Kalkulation wesentlich aufwendiger. Ein Anwender muss daher abwägen, ob er ein einfaches Modell ohne Erstversicherungsgeschäft oder ein komplexeres mit Erstversicherungsgeschäft verwenden möchte. In beiden Modellen ist die Bestimmung der Risikoparameter auf Grundlage eines gewählten Rückversicherungsvertrages möglich. Diese Risikoparameter können anschließend genutzt werden, um bei einer anderen Schadensverteilung die entsprechenden Deckungsgrößen zu bestimmen.

In dieser Arbeit wurde die spezielle Rückversicherungsprämie $RVP = (1+\gamma)E(RVS)$ verwendet. Es sind natürlich auch andere Prämienstrukturen möglich[9]. Diese können in die allgemein gegebenen Lösungen in Kapitel 5, 6 und 7 eingesetzt werden. Dabei führen Rückversicherungsprämien auf Basis von Varianz oder Standardabweichung zu nicht auflösbaren Integraltermen bei der optimalen Lösung der Deckungsgrenzen.

Des Weiteren ist das hybride μ-σ-Entscheidungsprinzip im Rückversicherungsgeschäft ein wenig praktikables Entscheidungsprinzip, da die Quadrierung der Gewinnfunktion des Zedenten und die anschließende Differentation ebenfalls zu unauflösbaren Integraltermen führt. Eine einfache Lösung für die Deckungsgrenzen kann dabei nicht mehr gegeben werden. Dies erklärt auch die geringe Verbreitung dieses Prinzips im Erst- und Rückversicherungskontext in der Literatur. Außerdem sind die Ergebnisse bedingt interpretierbar aufgrund des quadratischen Einflusses der Varianz[10].

Bzgl. der simultanen Optimierung des Erst- und Rückversicherungsgeschäftes geschah die Modellierung in Anlehnung an das Newsvendor Modell und wurde mit Hilfe der Aufspaltung der Zufallsvariable in einen deterministischen und einen stochastischen Teil durchgeführt. Zusätzlich besteht auch die Möglichkeit, den Gesamtschaden durch die Einzelschäden zu berechnen. Dabei ist es erforderlich, aus den Verteilungen der Einzelschäden mittels Faltung die Verteilung des Gesamtschadens zu bestimmen. Diese fließt dann in die Lösung der Deckungsgrenze bzw. der Prämie ein und muss nach Priorität bzw. Prämie aufgelöst werden.

---

[9] Vgl. Kapitel 4.

[10] Das μ-σ-Entscheidungsprinzip kann zum einen gegen das Zustands-Dominanz-Prinzip und zum anderen gegen die Axiome des Bernoulli-Prinzips (des rationalen Handelns) verstoßen. Vgl. u. a. Schmidt, Tyrell (2006), Breuer (2008).

Die vorliegende Arbeit hatte zum Ziel, Risikopräferenzen eines Erstversicherers bzgl. des Rückversicherungsgeschäftes zu modellieren. Dies geschah auf Grundlage von hybriden Entscheidungsprinzipien. Diese Herangehensweise ist bisher nicht in der Rückversicherungsliteratur als auch allgemein in der Versicherungsliteratur zu finden und ist damit wesentlicher Beitrag dieser Arbeit. Auch im Rückversicherungsgeschäft wird die Verwendung von Risikopräferenzen in Zukunft zu nehmen, so wie deren Verwendung auch schon in andere Bereiche Einzug gehalten hat. Die Verwendung anderer Rückversicherungsstrukturen als auch die jeweilige Anpassung an die speziell vorliegende nicht-proportionale Rückversicherung lässt diese Arbeit bewusst offen und kann Gegenstand zukünftiger wissenschaftlicher Abhandlungen sein.

Anhang A

Beweise zum Kapitel Entscheidungstheorie

Beweis der äquivalenten Darstellungen für das Präferenzfunktional $\Phi_{\alpha,\lambda}(X)$:
Es ist

$$\Phi_{\alpha,\lambda}(X) = \lambda E(X|X \leq x_\alpha) + (1-\lambda)E(X|X \geq x_\alpha). \tag{A.1}$$

Für den Erwartungswert gilt

$$E(X) = \alpha E(X|X \leq x_\alpha) + (1-\alpha)E(X|X \geq x_\alpha). \tag{A.2}$$

Durch Umstellen von (A.2) nach $E(X|X \geq x_\alpha)$ und Einsetzen in $\Phi_{\alpha,\lambda}(X)$ folgt

$$\begin{aligned}
\Phi_{\alpha,\lambda}(X) &= \lambda E(X|X \leq x_\alpha) \\
&+ \frac{1-\lambda}{1-\alpha}\left(E(X) - \alpha E(X|X \leq x_\alpha)\right) \\
&= \frac{1-\lambda}{1-\alpha}E(X) + \left(\lambda - \frac{1-\lambda}{1-\alpha}\alpha\right) E(X|X \leq x_\alpha) \\
&= \frac{1-\lambda}{1-\alpha}E(X) + \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}E(X|X \leq x_\alpha)^1.
\end{aligned}$$

Durch Umstellen von (A.2) nach $E(X|X \leq x_\alpha)$ und Einsetzen in (A.1) folgt

$$\begin{aligned}
\Phi_{\alpha,\lambda}(X) &= \frac{\lambda}{\alpha}\left(E(X) - (1-\alpha)E(X|X \geq x_\alpha)\right) \\
&+ (1-\lambda)E(X|X \geq x_\alpha) \\
&= \frac{\lambda}{\alpha}E(X) + \left(1 - \lambda - \frac{\lambda}{\alpha}(1-\alpha)\right) E(X|X \geq x_\alpha) \\
&= \frac{\lambda}{\alpha}E(X) + \left(1 - \frac{\lambda}{\alpha}\right) E(X|X \geq x_\alpha)^2.
\end{aligned}$$

---

[1] Es gilt $\left(\lambda - \frac{1-\lambda}{1-\alpha}\alpha\right) = \frac{\lambda(1-\alpha)-\alpha(1-\lambda)}{1-\alpha} = \frac{\lambda-\lambda\alpha-\alpha+\lambda\alpha}{1-\alpha} = \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}$.
[2] Es gilt $1 - \lambda - \frac{\lambda}{\alpha}(1-\alpha) = 1 - \frac{\alpha\lambda+\lambda(1-\alpha)}{\alpha} = 1 - \frac{\alpha\lambda+\lambda-\alpha\lambda}{\alpha} = 1 - \frac{\lambda}{\alpha}$.

QED

Nachweis der Risikoeinstellung für das Präferenzfunktional $\Phi_{\alpha,\lambda}(X)$:
Man betrachte das Präferenzfunktional

$$\Phi_{\alpha,\lambda}(X) = \frac{1-\lambda}{1-\alpha}E(X) + \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}E(X|X \leq x_\alpha).$$

Für das Präferenzfunktional mit Erwartungswert gilt

$$\begin{aligned}\Phi_{\alpha,\lambda}(E(X)) &= \frac{1-\lambda}{1-\alpha}E(E(X)) + \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}E(E(X)|X \leq x_\alpha)\\ &= \frac{1-\lambda}{1-\alpha}E(X) + \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}E(X)\\ &= E(X)^3.\end{aligned}$$

In den unteren bedingten Erwartungswert fließen die $1-\alpha$ größten Ausprägungen der Zufallsvariablen X nicht ein, somit ist dieser kleiner als der Erwartungswert

$$E(X) > E(X|X \leq x_\alpha).$$

Man multipliziere $\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}$. Es kann somit für $\alpha < \lambda$

$$\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}E(X) > \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}E(X|X \leq x_\alpha)$$

bzw. für $\alpha > \lambda$

$$\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}E(X) < \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}E(X|X \leq x_\alpha)^4$$

ermittelt werden. Es gilt $\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha} = 1 - \frac{1-\lambda}{1-\alpha}$. Damit folgt für die Ungleichungen

$$E(X) > \frac{1-\lambda}{1-\alpha}E(X) + \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}E(X|X \leq x_\alpha)$$

für $\alpha < \lambda$ bzw. für $\alpha > \lambda$

$$E(X) < \frac{1-\lambda}{1-\alpha}E(X) + \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}E(X|X \leq x_\alpha).$$

Die rechte Seite der Ungleichung ist gleich dem Präferenzfunktional. Die linke Seite ist gerade das Präferenzfunktional des Erwartungswertes. Damit gilt $\Phi_{\alpha,\lambda}(E(X)) > \Phi_{\alpha,\lambda}(X)$ für $\alpha < \lambda$ bzw. für $\alpha > \lambda$ $\Phi_{\alpha,\lambda}(E(X)) < \Phi_{\alpha,\lambda}(X)$. Deshalb zieht ein Entscheider für $\alpha < \lambda$ das Präferenzfunktional des Erwartungswertes (die sichere Aktion) dem Präferenzfunktional der Zufallsvariablen X (der unsicheren Aktion) vor. Das Präferenzfunktional spiegelt somit in diesem Fall Risikoaversion wider. Im Fall $\alpha > \lambda$ dagegen wird die unsichere Aktion (das Präferenzfunktional der Zufallsvariablen X) vorgezogen und stellt somit den Sachverhalt der Risikofreude dar.

[3] Es gilt $\frac{1-\lambda}{1-\alpha} + \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha} = 1$.
[4] In diesem Fall ist $\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}$ negativ. Somit kehrt sich das Relationszeichen um.

Betrachtet man den Fall identischer Risikoparameter, erkennt man, dass das Präferenzfunktional in diesem Fall auf den Erwartungswert zusammen fällt

$$\Phi_{\alpha,\lambda}(X) = \underbrace{\frac{1-\lambda}{1-\alpha}}_{=1} E(X) + \underbrace{\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}}_{=0} E(X|X \leq x_\alpha) = E(X).$$

Es gilt also $\Phi_{\alpha,\lambda}(E(X))) = E(X) = \Phi_{\alpha,\lambda}(X)$ für $\alpha = \lambda$. Ein Entscheider ist somit indifferent zwischen der sicheren und unsicheren Aktion und folglich risikoneutral[5].

QED

Beweis der äquivalenten Darstellungen für das Präferenzfunktional $\Phi_{\beta,\delta}(X)$:
Es ist

$$\Phi_{\beta,\delta}(X) = (1-\delta)E(X|X \leq x_{1-\beta}) + \delta E(X|X \geq x_{1-\beta}). \tag{A.3}$$

Für den Erwartungswert gilt

$$E(X) = (1-\beta)E(X|X \leq x_{1-\beta}) + \beta E(X|X \geq x_{1-\beta}). \tag{A.4}$$

Durch Umstellen von (A.4) nach $E(X|X \leq x_{1-\beta})$ und Einsetzen in $\Phi_{\beta,\delta}$ folgt

$$\begin{aligned}
\Phi_{\beta,\delta}(X) &= \frac{1-\delta}{1-\beta}\left(E(X) - \beta E(X|X \geq x_{1-\beta})\right) \\
&+ \delta E(X|X \geq x_{1-\beta}) \\
&= \frac{1-\delta}{1-\beta}E(X) + \left(\delta - \frac{1-\delta}{1-\beta}\beta\right) E(X|X \geq x_{1-\beta}) \\
&= \frac{1-\delta}{1-\beta}E(X) + \frac{\delta-\beta}{1-\beta}E(X|X \geq x_{1-\beta})^6.
\end{aligned}$$

Durch Umstellen von (A.4) nach $E(X|X \geq x_{1-\beta})$ und Einsetzen in (A.3) folgt

$$\begin{aligned}
\Phi_{\beta,\delta}(X) &= (1-\delta)E(X|X \leq x_{1-\beta}) \\
&+ \frac{\delta}{\beta}\left(E(X) - (1-\beta)E(X|X \leq x_{1-\beta})\right) \\
&= \frac{\delta}{\beta}E(X) + \left(1 - \delta - \frac{\delta}{\beta}(1-\beta)\right) E(X|X \leq x_{1-\beta}) \\
&= \frac{\delta}{\beta}E(X) + \left(1 - \frac{\delta}{\beta}\right) E(X|X \leq x_{1-\beta})^7.
\end{aligned}$$

QED

[5] Vgl. bzgl. der Definition der drei Risikoeinstellungen Definition 2.4.1

[6] Es gilt $\left(\delta - \frac{1-\delta}{1-\beta}\beta\right) = \frac{\delta(1-\beta)-\beta(1-\delta)}{1-\beta} = \frac{\delta-\delta\beta-\beta+\delta\beta}{1-\beta} = \frac{\delta-\beta}{1-\beta}$.

[7] Es gilt $1 - \delta - \frac{\delta}{\beta}(1-\beta) = 1 - \frac{\beta\delta+\delta(1-\beta)}{\beta} = 1 - \frac{\beta\delta+\delta-\beta\delta}{\beta} = 1 - \frac{\delta}{\beta}$.

Nachweis der Risikoeinstellung für das Präferenzfunktional $\Phi_{\beta,\delta}(X)$:
Man betrachte das Präferenzfunktional

$$\Phi_{\beta,\delta}(X) = \frac{1-\delta}{1-\beta}E(X) + \frac{\delta-\beta}{1-\beta}E(X|X \geq x_{1-\beta}).$$

Für das Präferenzfunktional mit Erwartungswert gilt

$$\begin{aligned}\Phi_{\beta,\delta}(E(X)) &= \frac{1-\delta}{1-\beta}E(E(X)) + \frac{\delta-\beta}{1-\beta}E(E(X)|X \geq x_{1-\beta}) \\ &= \frac{1-\delta}{1-\beta}E(X) + \frac{\delta-\beta}{1-\beta}E(X) \\ &= E(X)^8.\end{aligned}$$

In den oberen bedingten Erwartungswert fließen die $1-\alpha$ kleinsten Ausprägungen der Zufallsvariablen X nicht ein, somit ist dieser größer als der Erwartungswert

$$E(X) < E(X|X \geq x_\alpha).$$

Man multipliziere $\frac{\delta-\beta}{1-\beta}$. Es kann somit für $\beta < \delta$

$$\frac{\delta-\beta}{1-\beta}E(X) < \frac{\delta-\beta}{1-\beta}E(X|X \geq x_{1-\beta})$$

bzw. für $\beta > \delta$

$$\frac{\delta-\beta}{1-\beta}E(X) > \frac{\delta-\beta}{1-\beta}E(X|X \geq x_{1-\beta})^9$$

ermittelt werden. Es gilt $\frac{\delta-\beta}{1-\beta} = 1 - \frac{1-\delta}{1-\beta}$. Damit folgt für die Ungleichungen

$$E(X) < \frac{1-\delta}{1-\beta}E(X) + \frac{\delta-\beta}{1-\beta}1 - \alpha E(X|X \geq x_{1-\beta})$$

für $\beta < \delta$ bzw. für $\beta > \delta$

$$E(X) > \frac{1-\delta}{1-\beta}E(X) + \frac{\delta-\beta}{1-\beta}E(X|X \geq x_{1-\beta}).$$

Die rechte Seite der Ungleichung ist gleich dem Präferenzfunktional, die linke Seite ist gerade das Präferenzfunktional des Erwartungswertes. Damit gilt

$$\Phi_{\beta,\delta}(E(X)) < \Phi_{\beta,\delta}(X))$$

für $\beta < \delta$ bzw. für $\beta > \delta$

$$\Phi_{\beta,\delta}(E(X)) > \Phi_{\beta,\delta}(X).$$

Dem entsprechend zieht ein Entscheider für $\beta < \delta$ das Präferenzfunktional der Zufallsvariablen X (die unsichere Aktion) dem Präferenzfunktional des Erwartungswertes (die sichere Aktion) vor. Das Präferenzfunktional spiegelt somit in diesem Fall Risikofreude wider. Im

[8] Es gilt $\frac{1-\delta}{1-\beta} + \frac{\delta-\beta}{1-\beta} = 1$.
[9] In diesem Fall ist $\frac{\delta-\beta}{1-\beta}$ negativ. Somit kehrt sich das Relationszeichen um.

Fall $\beta > \delta$ dagegen wird die sichere Aktion (das Präferenzfunktional des Erwartungswertes) vorgezogen und stellt somit den Sachverhalt der Risikoaversion dar.

Für den Fall identischer Risikoparameter fällt das Präferenzfunktional auf den Erwartungswert zusammen

$$\Phi_{\beta,\delta}(X) = \underbrace{\frac{1-\delta}{1-\beta}}_{=1} E(X) + \underbrace{\frac{\delta-\beta}{1-\beta}}_{=0} E(X|X \geq x_{1-\beta}) = E(X).$$

Es gilt also $\Phi_{\beta,\delta}(E(X)) = E(X) = \Phi_{\beta,\delta}(X)$ für $\alpha = \lambda$. Ein Entscheider ist indifferent zwischen der sicheren und unsicheren Aktion und somit risikoneutral[10].

QED

Beweis von Satz 2.6.3:
Man verwende folgende Nutzenfunktion

$$\begin{aligned} \upsilon(t) &= \frac{1-\delta}{1-\beta}t + \frac{\delta-\beta}{1-\beta}\max(0, \beta^{-1}(t-(1-\beta))) \\ &= \frac{1-\delta}{1-\beta}t + \frac{\delta-\beta}{1-\beta}\begin{cases} 0, & \text{für} \quad t \leq 1-\beta \\ \beta^{-1}(t-(1-\beta)), & \text{für} \quad t \geq 1-\beta \end{cases}. \end{aligned}$$

Für diese reellwertige Nutzenfunktion gilt

$$\upsilon(0) = \frac{1-\delta}{1-\beta} \cdot 0 + \frac{\delta-\beta}{1-\beta} \cdot 0 = 0$$

und

$$\upsilon(1) = \frac{1-\delta}{1-\beta} \cdot 1 + \frac{\delta-\beta}{1-\beta}\beta^{-1}(1-(1-\beta)) = \frac{1-\delta}{1-\beta} + \frac{\delta-\beta}{1-\beta} = 1.$$

Man untersuche die Grenze der Fallunterscheidung zur Überprüfung der Stetigkeit. Es gilt

$$\upsilon(1-\beta) = \frac{1-\delta}{1-\beta}(1-\beta) + \frac{\delta-\beta}{1-\beta}\begin{cases} 0, & \text{für} \quad t \leq 1-\beta \\ \beta^{-1}((1-\beta)-(1-\beta)), & \text{für} \quad t \geq 1-\beta \end{cases} = 1-\delta.$$

Es liegt somit Stetigkeit vor.

Zur Überprüfung der Monotonie differenziere man die Nutzenfunktion. Für den Fall $t \leq 1-\beta$ gilt:

$$\frac{d}{dt}\upsilon(t) = \frac{1-\delta}{1-\beta} \geq 0$$

und für den Fall $t \geq 1-\beta$:

$$\frac{d}{dt}\upsilon(t) = \frac{1-\delta}{1-\beta} + \frac{\delta-\beta}{1-\beta}\beta^{-1} = \frac{\delta}{\beta} \geq 0.$$

---

[10]Vgl. bzgl. der Definition der drei Risikoeinstellungen Definition 2.4.1

Somit ist die Nutzenfunktion monoton wachsend. Man berechne das Präferenzfunktional der dualen Nutzentheorie für diese Nutzenfunktion. Es gilt

$$\begin{aligned}
\Phi^Y(X) &= \int_0^1 F_X^*(t)\ dv(t) = \int_0^1 F_X^*(t)\ d\left[\frac{1-\delta}{1-\beta}t + \frac{\delta-\beta}{1-\beta}\max(0, \beta^{-1}(t-(1-\beta)))\right] \\
&= \int_0^1 F_X^*(t)\ d\left(\frac{1-\delta}{1-\beta}t\right) + \int_{1-\beta}^1 F_X^*(t)\ d\left(\frac{\delta-\beta}{1-\beta}\frac{1}{\beta}t\right) + \int_{1-\beta}^1 F_X^*(t)\ d\left(\frac{\delta-\beta}{1-\beta}(-(1-\beta))\right) \\
&= \frac{1-\delta}{1-\beta}\int_0^1 F_X^*(t)\ dt + \frac{\delta-\beta}{1-\beta}\frac{1}{\beta}\int_{1-\beta}^1 F_X^*(t)\ dt + 0 \\
&= \frac{1-\delta}{1-\beta}E(X) + \frac{\delta-\beta}{1-\beta}E(X|X \geq x_{1-\beta}).
\end{aligned}$$

QED

Anhang B

Beweise zum Newsvendor Modell

B.1 Newsvendor Modell mit Risikopräferenzen

Beweis der optimalen Newsvendor Lösung für das Präferenzfunktional $\Phi_{\beta,\delta}$:
Es gilt die Zielfunktion

$$\Phi_{\beta,\delta}(G(y,X)) = (1-\delta)E(G(y,X)|G(y,X) \leq g_{1-\beta}(y)) + \delta E(G(y,X)|G(y,X) \geq g_{1-\beta}(y))$$

und ist zur Darstellung (2.6)

$$\Phi_{\beta,\delta}(G(y,X)) = \frac{\delta}{\beta}E(G(y,X)) + \left(1-\frac{\delta}{\beta}\right)E(G(y,X)|G(y,X) \leq g_{1-\beta}(y))$$

äquivalent. Somit gilt für die erste Ableitung[1] des Präferenzfunktionals

$$D_y(\Phi_{\beta,\delta}(G(y,X))) = \frac{\delta}{\beta}D_y(E(G(y,X))) + \left(1-\frac{\delta}{\beta}\right)D_y(E(G(y,X)|G(y,X) \leq g_{1-\beta}(y))).$$

Für die erste Ableitung des erwarteten und des unteren bedingten erwarteten Gewinns des Newsvendors gilt[2]

$$\begin{aligned} D_y(E(G(y,X))) &= p-c-(p-z)F_X(y) \\ D_y(E(G(y,X)|G(y,X) \leq g_{1-\beta}(y))) &= \begin{cases} -c+z, & \text{für } F_X(y) \geq 1-\beta \\ p-c-\frac{p-z}{1-\beta}F_X(y), & \text{für } F_X(y) \leq 1-\beta \end{cases}. \end{aligned}$$

Es folgt somit für die erste Ableitung des Präferenzfunktionals im Fall $F_X(y) \geq 1-\beta$

$$D_y(\Phi_{\beta,\delta}(G(y,X))) = \frac{\delta}{\beta}[p-c-(p-z)F_X(y)] + \left(1-\frac{\delta}{\beta}\right)[-c+z] = 0.$$

[1] Es bezeichne $D_y = \frac{d}{d\,y}$.

[2] Vgl. Jammernegg, Kischka (2005b), S. 32. Man ersetze bei Kischka, Jammernegg im unteren bedingten erwarteten Gewinn α durch $1-\beta$.

Durch Multiplikation mit $\frac{\beta}{\delta}$ ist

$$\begin{aligned} p-c-(p-z)F_X(y)+\left(1-\frac{\delta}{\beta}\right)\frac{\beta}{\delta}[-c+z] &= 0 \\ p-c-(p-z)F_X(y)+\left(\frac{\beta}{\delta}-1\right)[-c+z] &= 0 \\ p-c-(p-z)F_X(y)+\frac{\delta-\beta}{\delta}[c-z] &= 0. \end{aligned}$$

Somit folgt für das Optimum im Fall $F_X(y) \geq 1-\beta$

$$F_X(y^*(\beta,\delta)) = \frac{p-c}{p-z} + \frac{\delta-\beta}{\delta}\frac{c-z}{p-z}$$

bzw.

$$y^*(\beta,\delta) = F_X^*\left(\frac{p-c}{p-z} + \frac{\delta-\beta}{\delta}\frac{c-z}{p-z}\right).$$

Für die zweite Ableitung[3] gilt

$$D_{yy}(\Phi_{\beta,\delta}(G(y,X))) = -\frac{\delta}{\beta}(p-z)f_X(y) < 0$$

für alle y. Daraus folgt, dass $y^*(\beta,\delta)$ ein Maximum ist.

Man betrachte den Fall $F_X(y) \leq 1-\beta$. Es gilt

$$\begin{aligned} D_y(\Phi_{\beta,\delta}(G(y,X))) &= \frac{\delta}{\beta}[p-c-(p-z)F_X(y)] + \left(1-\frac{\delta}{\beta}\right)\left[p-c-\frac{p-z}{1-\beta}F_X(y)\right] \\ &= p-c-(p-z)F_X(y)\left(\frac{\delta}{\beta}+\left(1-\frac{\delta}{\beta}\right)\frac{1}{1-\beta}\right) \\ &= p-c-(p-z)F_X(y)\frac{1-\delta}{1-\beta}^{4} = 0. \end{aligned}$$

Damit gilt für das Optimum im Fall $F_X(y) \leq 1-\beta$

$$F_X(y^*(\beta,\delta)) = \frac{p-c}{p-z}\cdot\frac{1-\beta}{1-\delta}$$

bzw.

$$y^*(\beta,\delta) = F_X^*\left(\frac{p-c}{p-z}\cdot\frac{1-\beta}{1-\delta}\right).$$

Für die zweite Ableitung gilt

$$D_{yy}(\Phi_{\beta,\delta}(G(y,X))) = -\frac{1-\delta}{1-\beta}(p-z)f_X(y) < 0$$

---

[3]Es bezeichne $D_{yy} = \frac{d^2}{d\ y^2}$.

[4]Es gilt $\frac{\delta}{\beta}+\left(1-\frac{\delta}{\beta}\right)\frac{1}{1-\beta} = \frac{\delta}{\beta}+\frac{\beta-\delta}{\beta(1-\beta)} = \frac{\delta(1-\beta)+\beta-\delta}{\beta(1-\beta)} = \frac{\delta-\delta\beta+\beta-\delta}{\beta(1-\beta)} = \frac{\beta(1-\delta)}{\beta(1-\beta)} = \frac{1-\delta}{1-\beta}$.

für alle y. Daraus folgt, dass $y^*(\beta,\delta)$ im Fall $F_X(y) \leq 1-\beta$ ein Maximum ist.

Man betrachte die Grenze $F_X(y) \leq 1-\beta$. Es gilt $\frac{p-c}{p-z} \cdot \frac{1-\beta}{1-\delta} \leq 1-\beta$. Durch Umstellen folgt $\frac{p-c}{p-z} \leq 1-\delta$ bzw. $\delta \leq 1-\frac{p-c}{p-z} = \frac{c-z}{p-z}$. Damit gilt für das Maximum insgesamt

$$y^*(\beta,\delta) = \begin{cases} F_X^*\left(\frac{p-c}{p-z} + \frac{\delta-\beta}{\delta} \cdot \frac{c-z}{p-z}\right), & \text{für } \delta \geq \frac{c-z}{p-z} \\ F_X^*\left(\frac{p-c}{p-z} \cdot \frac{1-\beta}{1-\delta}\right), & \text{für } \delta \leq \frac{c-z}{p-z} \end{cases}.$$

QED

B.2 Newsvendor Modell mit nicht-linearer Kostenfunktion

Beweis von Satz 3.4.1:
Für die Gewinnfunktion des Newsvendors gilt

$$G(y,X) = py - k(y) - (p-z)\begin{cases} 0, & \text{für } X > y \\ y-X, & \text{für } X \leq y \end{cases}.$$

Man bilde den erwarteten Gewinn

$$\begin{aligned} E(G(y,X)) &= py - k(y) - (p-z)\left[\int_0^y (y-x) f_X(x)\, dx + \int_y^\infty 0 \cdot f_X(x)\, dx\right] \\ &= py - k(y) - (p-z)\int_0^y (y-x) f_X(x)\, dx \\ &= py - k(y) - (p-z)\left[y\int_0^y f_X(x)\, dx - \int_0^y x f_X(x)\, dx\right] \\ &= py - k(y) - (p-z)\left[yF_X(y) - \int_0^y x f_X(x)\, dx\right]. \end{aligned}$$

Es folgt für die erste Ableitung des erwarteten Gewinns

$$\begin{aligned} D_y(E(G(y,X))) &= p - k_y(y) - (p-z)\left[F_X(y) + yf_X(y) - yf_X(y)\right] \\ &= p - k_y(y) - (p-z)F_X(y). \end{aligned} \tag{B.1}$$

Man bilde den unteren bedingten erwarteten Gewinn. Für den Fall $F(y) \geq \alpha$ gilt

$$\begin{aligned}
E(G(y,X)|G(y,X) \leq g_\alpha(y)) &= \frac{1}{\alpha} \int_0^{F_X^*(\alpha)} [py - k(y) - (p-z)(y-x)] f_X(x)\, dx \\
&= [py - k(y) - (p-z)y] \frac{1}{\alpha} \int_0^{F_X^*(\alpha)} f_X(x)\, dx \\
&- (p-z)\frac{1}{\alpha} \int_0^{F_X^*(\alpha)} x f_X(x)\, dx^5 \\
&= py - k(y) - (p-z)y - (p-z)\frac{1}{\alpha} \int_0^{F_X^*(\alpha)} x f_X(x)\, dx \\
&= -k(y) + zy - (p-z)\frac{1}{\alpha} \int_0^{F_X^*(\alpha)} x f_X(x)\, dx.
\end{aligned}$$

Für den Fall $F(y) \leq \alpha$ gilt

$$\begin{aligned}
E(G(y,X)|G(y,X) \leq g_\alpha(y)) &= \frac{1}{\alpha} \int_0^{y} [py - k(y) - (p-z)(y-x)] f_X(x)\, dx \\
&+ \frac{1}{\alpha} \int_y^{F_X^*(\alpha)} [py - k(y)] f_X(x)\, dx \\
&= [py - k(y)] \frac{1}{\alpha} \int_0^{F_X^*(\alpha)} f_X(x)\, dx \\
&- (p-z)y\frac{1}{\alpha} \int_0^{y} f_X(x)\, dx + \frac{p-z}{\alpha} \int_0^{y} x f_X(x)\, dx \\
&= py - k(y) - \frac{p-z}{\alpha} y F_X(y) + \frac{p-z}{\alpha} \int_0^{y} x f_X(x)\, dx.
\end{aligned}$$

[5] Es gilt $\frac{1}{\alpha} \int_0^{F_X^*(\alpha)} f_X(x)\, dx = \frac{1}{\alpha} [F_X(x)]_0^{F_X^*(\alpha)} = \frac{1}{\alpha} F_X(F_X^*(\alpha)) = \frac{1}{\alpha}\alpha = 1.$

Damit lässt sich für den unteren bedingten Erwartungswert festhalten

$$E(G(y,X)|G(y,X) \leq g_\alpha(y)) \quad = \quad \begin{cases} -k(y) + zy - (p-z)\frac{1}{\alpha} \int\limits_0^{F_X^*(\alpha)} x f_X(x)\ dx, \\ \text{für } F_X(y) \geq \alpha \\ \\ py - k(y) - \frac{p-z}{\alpha} y F_X(y) + \frac{p-z}{\alpha} \int\limits_0^{y} x f_X(x)\ dx, \\ \text{für } F_X(y) \leq \alpha \end{cases} .$$

Für das erste Differential des bedingten Erwartungswertes folgt somit

$$D_y(E(G(y,X)|G(y,X) \leq g_\alpha(y))) \quad = \quad \begin{cases} -k_y(y) + z, & \text{für } F_X(y) \geq \alpha \\ p - k_y(y) - \frac{p-z}{\alpha} F_X(y), & \text{für } F_X(y) \leq \alpha \end{cases} . \tag{B.2}$$

Es gilt für das Präferenzfunktional des μ-$CVaR$-Prinzips (3)

$$\Phi_{\alpha,\lambda}(G(y,X)) = \frac{1-\lambda}{1-\alpha} E(G(y,X)) + \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha} E(G(y,X)|G(y,X) \leq g_\alpha(y))$$

und für dessen Ableitung

$$D_y(\Phi_{\alpha,\lambda}(G(y,X))) = \frac{1-\lambda}{1-\alpha} D_y(E(G(y,X))) + \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha} D_y(E(G(y,X)|G(y,X) \leq g_\alpha(y))).$$

Man betrachte den Fall $F_X(y) \geq \alpha$. Es gilt für die erste Ableitung des Präferenzfunktionals

$$D_y(\Phi_{\alpha,\lambda}(G(y,X))) \quad = \quad \frac{1-\lambda}{1-\alpha} \left[p - k_y(y) - (p-z)F_X(y)\right] + \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha} \left[-k_y(y) + z\right] = 0.$$

Durch Multiplikation mit $\frac{1-\alpha}{1-\lambda}$ ist

$$p - k_y(y) - (p-z)F_X(y) + \frac{\lambda-\alpha}{1-\lambda}[-k_y(y) + z] \quad = \quad 0.$$

Somit folgt für das Optimum im Fall $F_X(y) \geq \alpha$

$$F_X(y^*) = \frac{p - k_y(y^*)}{p-z} + \frac{\alpha-\lambda}{1-\lambda} \frac{k_y(y^*) - z}{p-z}$$

bzw.

$$y^*(\alpha,\lambda) = y^* = F_X^* \left(\frac{p - k_y(y^*)}{p-z} + \frac{\alpha-\lambda}{1-\lambda} \frac{k_y(y^*) - z}{p-z} \right).$$

Für die Maximalbedingung (zweite Ableitung) muss gelten

$$\begin{aligned} D_{yy}(\Phi_{\alpha,\lambda}(G(y^*,X))) \quad &= \quad \frac{1-\lambda}{1-\alpha} \left[-k_{yy}(y^*) - (p-z)f_X(y^*)\right] + \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha} \left[-k_{yy}(y^*)\right] \\ &= \quad -k_{yy}(y^*) - (p-z)\frac{1-\lambda}{1-\alpha} f_X(y^*) < 0. \end{aligned}$$

Man betrachte den Fall $F_X(y) \leq \alpha$. Es gilt für die erste Ableitung des Präferenzfunktionals

$$\begin{aligned}
D_y(\Phi_{\alpha,\lambda}(G(y,X))) &= \frac{1-\lambda}{1-\alpha}\left[p - k_y(y) - (p-z)F_X(y)\right] + \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\left[p - k_y(y) - \frac{p-z}{\alpha}F_X(y)\right] \\
&= p - k_y(y) - (p-z)F_X(y)\left[\frac{1-\lambda}{1-\alpha} + \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\frac{1}{\alpha}\right] \\
&= p - k_y(y) - (p-z)F_X(y)\frac{\lambda}{\alpha} = 0.
\end{aligned}$$

Damit gilt für das Optimum im Fall $F_X(y) \leq \alpha$

$$F_X(y^*) = \frac{p - k_y(y^*)}{p-z}\frac{\alpha}{\lambda}$$

bzw.

$$y^*(\alpha,\lambda) = y^* = F_X^*\left(\frac{p-k_y(y^*)}{p-z}\frac{\alpha}{\lambda}\right).$$

Die Maximalbedingung lautet in diesem Fall

$$D_{yy}(\Phi_{\alpha,\lambda}(G(y^*,X))) = -k_{yy}(y^*) - (p-z)f_X(y^*)\frac{\lambda}{\alpha} < 0.$$

Man betrachte die Grenze $F_X(y) \leq \alpha$. Es gilt $\frac{p-k_y(y)}{p-z}\frac{\alpha}{\lambda} \leq \alpha$. Durch Umstellen folgt $\frac{p-k_y(y)}{p-z} \leq \lambda$. Damit folgt für das Maximum insgesamt

$$y^*(\alpha,\lambda) = y^* = \begin{cases} F_X^*\left(\frac{p-k_y(y^*)}{p-z} + \frac{\alpha-\lambda}{1-\lambda}\frac{k_y(y^*)-z}{p-z}\right), \\ \quad \text{für } \lambda \leq \frac{p-k_y(y^*)}{p-z} \text{ und } -k_{yy}(y^*) - \frac{1-\lambda}{1-\alpha}(p-z)f_X(y^*) < 0 \\ \\ F_X^*\left(\frac{p-k_y(y^*)}{p-z}\cdot\frac{\alpha}{\lambda}\right), \\ \quad \text{für } \lambda \geq \frac{p-k_y(y^*)}{p-z} \text{ und } -k_{yy}(y^*) - \frac{\lambda}{\alpha}(p-z)f_X(y^*) < 0 \end{cases}.$$

QED

Beweis von Satz 3.4.2:
Es gilt das Präferenzfunktional

$$\Phi_{\beta,\delta}(G(y,X)) = \frac{\delta}{\beta}E(G(y,X)) + \left(1-\frac{\delta}{\beta}\right)E(G(y,X)|G(y,X) \leq g_{1-\beta}(y)).$$

Somit ergibt sich für die erste Ableitung des Präferenzfunktionals

$$D_y(\Phi_{\beta,\delta}(G(y,X))) = \frac{\delta}{\beta}D_y(E(G(y,X))) + \left(1-\frac{\delta}{\beta}\right)D_y(E(G(y,X)|G(y,X) \leq g_{1-\beta}(y))).$$

Für die erste Ableitung des erwarteten und des unteren bedingten erwarteten Gewinns gilt wegen Formel (B.1) und $(B.2)$[6]

$$\begin{aligned}
D_y(E(G(y,X))) &= p - k_y(y) - (p-z)F_X(y) \\
D_y(E(G(y,X)|G(y,X) \leq g_{1-\beta}(y))) &= \begin{cases} -k_y(y) + z, & \text{für } F_X(y) \geq 1-\beta \\ p - k_y(y) - \frac{p-z}{1-\beta}F_X(y), & \text{für } F_X(y) \leq 1-\beta \end{cases}.
\end{aligned}$$

[6]Bei der Formel $(B.2)$ muss dabei α durch $1-\beta$ ersetzt werden.

Damit folgt für die erste Ableitung des Präferenzfunktionals im Fall $F_X(y) \geq 1-\beta$

$$D_y(\Phi_{\beta,\delta}(G(y,X))) = \frac{\delta}{\beta}[p - k_y(y) - (p-z)F_X(y)] + \left(1 - \frac{\delta}{\beta}\right)[-k_y(y) + z] = 0.$$

Durch Multiplikation mit $\frac{\beta}{\delta}$ ist

$$\begin{aligned}
p - k_y(y) - (p-z)F_X(y) + \left(1 - \frac{\delta}{\beta}\right)\frac{\beta}{\delta}[-k_y(y) + z] &= 0 \\
p - k_y(y) - (p-z)F_X(y) + \left(\frac{\beta}{\delta} - 1\right)[-k_y(y) + z] &= 0 \\
p - k_y(y) - (p-z)F_X(y) + \frac{\delta - \beta}{\delta}[k_y(y) - z] &= 0.
\end{aligned}$$

Es folgt somit im Fall $F_X(y) \geq 1-\beta$

$$F_X(y^*) = \frac{p - k_y(y^*)}{p-z} + \frac{\delta - \beta}{\delta}\frac{k_y(y^*) - z}{p-z}$$

bzw.

$$y^*(\beta,\delta) = y^* = F_X^*\left(\frac{p - k_y(y^*)}{p-z} + \frac{\delta - \beta}{\delta}\frac{k_y(y^*) - z}{p-z}\right).$$

Für die zweite Ableitung gilt

$$\begin{aligned}
D_{yy}(\Phi_{\beta,\delta}(G(y,X))) &= \frac{\delta}{\beta}[-k_{yy}(y) - (p-z)f_X(y)] + \left(1 - \frac{\delta}{\beta}\right)[-k_{yy}(y)] \\
&= -k_{yy}(y) - (p-z)\frac{\delta}{\beta}f_X(y).
\end{aligned}$$

Das Optimum y^* ist somit ein Maximum, wenn $-k_{yy}(y^*) - (p-z)\frac{\delta}{\beta}f_X(y^*) < 0$ ist.

Man betrachte den Fall $F_X(y) \leq 1-\beta$. Es gilt

$$\begin{aligned}
D_y(\Phi_{\beta,\delta}(G(y,X))) &= \frac{\delta}{\beta}\left[p - k_y(y) - (p-z)F_X(y)\right] + \left(1 - \frac{\delta}{\beta}\right)\left[p - k_y(y) - \frac{p-z}{1-\beta}F_X(y)\right] \\
&= p - k_y(y) - (p-z)F_X(y)\left(\frac{\delta}{\beta} + \left(1 - \frac{\delta}{\beta}\right)\frac{1}{1-\beta}\right) \\
&= p - k_y(y) - (p-z)F_X(y)\frac{1-\delta}{1-\beta} = 0.
\end{aligned}$$

Damit ist das Optimum

$$F_X(y^*) = \frac{p - k_y(y^*)}{p-z} \cdot \frac{1-\beta}{1-\delta}$$

bzw.

$$y^*(\beta,\delta) = y^* = F_X^*\left(\frac{p - k_y(y^*)}{p-z} \cdot \frac{1-\beta}{1-\delta}\right).$$

Für die zweite Ableitung kann

$$D_{yy}(\Phi_{\beta,\delta}(G(y,X))) = -k_{yy}(y) - \frac{1-\delta}{1-\beta}(p-z)f_X(y)$$

erhalten werden. Das Optimum $y^* = F_X^*\left(\frac{p-k_y(y^*)}{p-z} \cdot \frac{1-\beta}{1-\delta}\right)$ ist damit ein Maximum, wenn $-k_{yy}(y^*) - \frac{1-\delta}{1-\beta}(p-z)f_X(y^*) < 0$ ist.

Man betrachte die Grenze $F_X(y) \leq 1-\beta$. Es gilt $\frac{p-k_y(y)}{p-z} \cdot \frac{1-\beta}{1-\delta} \leq 1-\beta$. Durch Umstellen folgt $\frac{p-k_y(y)}{p-z} \leq 1-\delta$ bzw. $\delta \leq 1 - \frac{p-k_y(y)}{p-z} = \frac{k_y(y)-z}{p-z}$. Damit gilt für das Maximum insgesamt

$$y^*(\beta,\delta) = y^* = \begin{cases} F_X^*\left(\frac{p-k_y(y^*)}{p-z} + \frac{\delta-\beta}{\delta}\frac{k_y(y^*)-z}{p-z}\right), \\ \text{für } \delta \geq \frac{k_y(y^*)-z}{p-z} \text{ und } -k_{yy}(y^*) - \frac{\delta}{\beta}(p-z)f_X(y^*) < 0 \\ \\ F_X^*\left(\frac{p-k_y(y^*)}{p-z} \cdot \frac{1-\beta}{1-\delta}\right), \\ \text{für } \delta \leq \frac{k_y(y^*)-z}{p-z} \text{ und } -k_{yy}(y^*) - \frac{1-\delta}{1-\beta}(p-z)f_X(y^*) < 0 \end{cases}.$$

QED

Anhang C

Beweise zu den Rückversicherungsmodellen

C.1 Beweise für das Prioritätsoptimierungsproblem

Beweis von Satz 5.1.1:
Es gilt

$$\begin{aligned}\Phi_B(G(d,X)) &= E(G(d,X)) = E\left(Pr - B - X - RVP(d) + \begin{cases}0, & \text{für } X < d\\ X-d, & \text{für } d \le X\end{cases}\right)\\ &= Pr - B - E(X) - RVP(d) + \int_0^d 0\ dF_X(x) + \int_d^\infty (x-d)\ dF_X(x)\\ &= Pr - B - E(X) - RVP(d) + \int_d^\infty (x-d)\ dF_X(x)^1\\ &= Pr - B - E(X) - RVP(d) + \int_d^\infty x\ dF_X(x) - d[1-F_X(d)].\end{aligned}$$

Man bilde das erste Differential des Präferenzfunktionals bzgl. der Priorität d

$$\begin{aligned}D_d(\Phi_B(G(d,X))) &= -RVP_d(d) - df_X(d) - 1 + F_X(d) + df_X(d)\\ &= -RVP_d(d) - 1 + F_X(d) = 0.\end{aligned}$$

Daraus folgt die implizite Lösung $F_X(d^*) = 1 + RVP_d(d^*)$. Für die zweite Ableitung kann

$$D_{dd}(\Phi_B(G(d,X))) \quad = \quad -RVP_{dd}(d) + f_X(d)$$

[1] Es ist $\int_d^\infty (x-d)\ dF_X(x) = \int_d^\infty x\ dF_X(x) - \int_d^\infty d\ dF_X(x) = \int_d^\infty x\ dF_X(x) - d\int_d^\infty\ dF_X(x) = \int_d^\infty x\ dF_X(x) - d[1-F_X(d)]$.
Letzte Umformung gilt aufgrund der Eigenschaften für Verteilungsfunktionen.

geschrieben werden. Somit ist $F_X(d^*) = 1 + RVP_d(d^*)$ ein Maximum, wenn $-RVP_{dd}(d^*) + f_X(d^*) < 0$ gilt.

QED

Beweis von Satz 5.1.2:
Man setze das erste Differential der Rückversicherungsprämie aus Lemma 5.1.1 in die implizite Lösung von Satz 5.1.1 ein und erhält die optimale Priorität unter Verwendung der speziellen Rückversicherungsprämie

$$F_X(d^*) = 1 + RVP_d(d^*) \;\Rightarrow\; F_X(d^*) = 1 + (1+\gamma)[-1 + F_X(d^*)] \;\Rightarrow\; \gamma[-1 + F_X(d^*)] = 0$$
$$\Rightarrow\; F_X(d^*) = 1.$$

Für die Maximalbedingung gilt durch Einsetzen der zweiten Ableitung der Rückversicherungsprämie

$$-RVP_{dd}(d^*) + f_X(d^*) < 0 \;\Rightarrow\; -(1+\gamma) f_X(d^*) + f_X(d^*) < 0 \;\Rightarrow\; -\gamma f_X(d^*) < 0.$$

QED

Beweis von Satz 5.2.1:
Für das Präferenzfunktional gilt $\Phi_\alpha(G(d, X)) = E(G(d, X)|G(d, X) \leq g_\alpha(d))$, wobei $g_\alpha(d)$ das α-Quantil der Gewinnverteilung ist. Das Präferenzfunktional ist damit der erwartete Gewinn der $\alpha \cdot 100$ % schlechtesten Gewinne. Man betrachte die Gewinnfunktion in Abhängigkeit vom Schaden. Dies illustriert die folgende Abbildung.

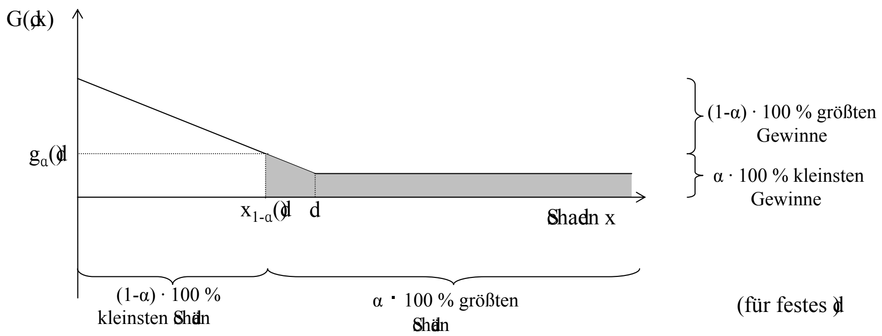


Abbildung C.1: Gewinnfunktion (Priorität) des Erstversicherers.

Man erkennt, dass die $\alpha \cdot 100$ % kleinsten Gewinne bei den $\alpha \cdot 100$ % höchsten Schäden eintreten. Dies sind gerade alle Gewinne bei Schäden oberhalb des $(1-\alpha)$-Quantils der Schadensverteilung. Damit gilt $\Phi_\alpha(G(d, X)) = E(G(d, X)|X \geq x_{1-\alpha}(d))$, wobei $x_{1-\alpha}(d)$ das $(1-\alpha)$-Quantil der Schadensverteilung ist.

Man betrachte den Fall $F_X(d) \geq 1-\alpha$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\Phi_\alpha(G(d,X)) &= E(G(d,x)|X \geq x_{1-\alpha}(d)) \\
&= \frac{1}{\alpha}\left[\int_d^\infty [Pr - B - RVP(d) - x + x - d] dF_X(x)\right. \\
&+ \left.\int_{F_X^{-1}(1-\alpha)}^d [Pr - B - RVP(d) - x] dF_X(x)\right] \\
&= \frac{1}{\alpha}[Pr - B - RVP(d)] \int_{F_X^{-1}(1-\alpha)}^\infty dF_X(x) - \frac{1}{\alpha} d \int_d^\infty dF_X(x) \\
&- \frac{1}{\alpha} \int_{F_X^{-1}(1-\alpha)}^d x dF_X \\
&= \frac{1}{\alpha}[Pr - B - RVP(d)][1-(1-\alpha)] - \frac{1}{\alpha} d[1-F_X(d)] \\
&- \frac{1}{\alpha} \int_{F^{-1}(1-\alpha)}^d x\ dF_X(x) \\
&= Pr - B - RVP(d) - \frac{1}{\alpha} d[1-F_X(d)] - \frac{1}{\alpha} \int_{F_X^{-1}(1-\alpha)}^d x\ dF_X(x).
\end{aligned}$$

Für die erste Ableitung gilt damit

$$\begin{aligned}
D_d(\Phi_\alpha(G(d,X))) &= -RVP_d(d) - \frac{1}{\alpha}(1-F_X(d)) + \frac{1}{\alpha} d\ f_X(d) - \frac{1}{\alpha} d\ f_X(d) \\
&= -RVP_d(d) - \frac{1}{\alpha}(1-F_X(d)) \\
&= -(1+\gamma)[-1+F_X(d)] + \frac{1}{\alpha}[-1+F_X(d)].
\end{aligned}$$

Durch Nullsetzen erhält man das Extremum $F_X(d^*) = 1$. Zur Bestimmung der Art des Extremums bilde man die zweite Ableitung des Präferenzfunktionals

$$D_{dd}(\Phi_\alpha(G(d,X))) = \left[-(1+\gamma) + \frac{1}{\alpha}\right] f_X(d).$$

Fall $f_X(d^*) \neq 0$: In diesem Fall ist $F_X(d^*) = 1$ ein Maximum[2], wenn $1+\gamma > \frac{1}{\alpha}$[3] bzw. $\alpha > \frac{1}{1+\gamma}$[4] gilt.

---

[2]Dies ist auch das globale Maximum, da es eine Randlösung ist und in diesem Fall kein lokales Minimum existiert.

[3]In diesem Fall ist die zweite Ableitung negativ, da die Verteilungsdichte keine negativen Ausprägungen besitzt.

[4]Folgt durch Umstellen aus $1+\gamma > \frac{1}{\alpha}$.

Fall $f_X(d^*) = 0$: In diesem Fall ist die zweite Ableitung gleich null. Es handelt sich somit um einen Wendepunkt. In diesem Fall befindet sich das globale Maximum am Rand. Es gilt für das Maximum $F_X(d^*) = 1$, da $\Phi_\alpha(G(d^*, X)) \geq \Phi_\alpha(G(d, X))$ für alle $d \geq 0$ ist. Dies soll im Folgenden gezeigt werden. Es gilt

$$\Phi_\alpha(G(d^*, X)) = Pr - B - \frac{1}{\alpha} \int_{F_X^{-1}(1-\alpha)}^{\infty} x \; dF_X(x)$$

bzw.

$$\begin{aligned}
\Phi_\alpha(G(d, X)) &= Pr - B - RVP(d) - \frac{1}{\alpha} d[1 - F_X(d)] - \frac{1}{\alpha} \int_{F_X^{-1}(1-\alpha)}^{d} x \; dF_X(x) \\
&= Pr - B - \frac{1}{\alpha} \int_{F_X^{-1}(1-\alpha)}^{\infty} x \; dF_X(x) - RVP(d) + \frac{1}{\alpha} E(RVS(d, X))^5 \\
&= Pr - B - \frac{1}{\alpha} \int_{F_X^{-1}(1-\alpha)}^{\infty} x \; dF_X(x) - \left(1 + \gamma - \frac{1}{\alpha}\right) E(RVS(d, X)).
\end{aligned}$$

Somit folgt für $1 + \gamma > \frac{1}{\alpha}$ bzw. $\alpha > \frac{1}{1+\gamma}$, dass $\Phi_\alpha(G(d^*, X)) \geq \Phi_\alpha(G(d, X))$ für alle $d \geq 0$ ist.

Man betrachte den Fall $F_X(d) < 1 - \alpha$. Es gilt für den bedingten erwarteten Gewinn

$$\begin{aligned}
\Phi_\alpha(G(d, X)) &= E(G(d, X) | X \geq x_{1-\alpha}(d)) \\
&= \frac{1}{\alpha} \int_{F_X^{-1}(1-\alpha)}^{\infty} [Pr - B - RVP(d) - x + x - d] dF_X(x) \\
&= \frac{1}{\alpha} [Pr - B - RVP(d) - d] \int_{F_X^{-1}(1-\alpha)}^{\infty} dF_X(x) \\
&= \frac{1}{\alpha} [Pr - B - RVP(d) - d][1 - (1 - \alpha)] = Pr - B - RVP(d) - d.
\end{aligned}$$

---

[5] Folgt wegen

$$-\frac{1}{\alpha} d[1 - F_X(d)] - \frac{1}{\alpha} \int_{F_X^{-1}(1-\alpha)}^{d} x \; dF_X(x) + \frac{1}{\alpha} \int_{F_X^{-1}(1-\alpha)}^{\infty} x \; dF_X(x) - \frac{1}{\alpha} \int_{F_X^{-1}(1-\alpha)}^{\infty} x \; dF_X(x)$$

$$= -\frac{1}{\alpha} \int_{F_X^{-1}(1-\alpha)}^{\infty} x \; dF_X(x) + \frac{1}{\alpha} \int_{d}^{\infty} (x - d) \; dF_X(x) = -\frac{1}{\alpha} \int_{F_X^{-1}(1-\alpha)}^{\infty} x \; dF_X(x) + \frac{1}{\alpha} E(RVS(d, X)).$$

Man differenziere und erhält

$$D_d(\Phi_\alpha(G(d,X))) = -RVP_d(d) - 1 = -(1+\gamma)[-1+F_X(d)] - 1^6.$$

Durch Nullsetzen der ersten Ableitung folgt $\gamma - (1+\gamma)F_X(d^*) = 0$ bzw. $F_X(d^*) = \frac{\gamma}{1+\gamma}$. Man betrachte die zweite Ableitung des Präferenzfunktionals

$$D_{dd}(E(G(d,X)|X \geq x_{1-\alpha}(d))) = -(1+\gamma)f_X(d).$$

Da γ und auch die Schadensverteilungsdichte nicht negativ sind, nimmt die zweite Ableitung immer negative Werte an. Somit ist $F_X(d^*) = \frac{\gamma}{1+\gamma}$ ein Maximum. Für das Maximum muss $F(d^*) < 1-\alpha$ gelten, damit ist $\frac{\gamma}{1+\gamma} < 1-\alpha$. Dies ist wiederum äquivalent zu $\alpha < \frac{1}{1+\gamma}$[7]. Daraus folgt, dass $F_X(d^*) = \frac{\gamma}{1+\gamma}$ ein Maximum[8] ist für $\alpha < \frac{1}{1+\gamma}$.

Insgesamt folgt somit $F_X(d^*) = 1$ ist das Maximum für $\alpha > \frac{1}{1+\gamma}$. Im Fall $\alpha < \frac{1}{1+\gamma}$ existiert gerade das andere Maximum $F_X(d^*) = \frac{\gamma}{1+\gamma}$.

QED

Beweis von Satz 5.3.1:
Es gilt

$$\Phi_{\alpha,\lambda}(G(d,X)) = \frac{1-\lambda}{1-\alpha}E(G(d,X)) + \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}E(G(d,X)|G(d,X) \leq g_\alpha(d)).$$

Aus dem Beweis von Satz 5.2.1 ist folgende Gleichheit bekannt

$$E(G(d,X)|G(d,X) \leq g_\alpha(d)) = E(G(d,X)|X \geq x_{1-\alpha}(d)).$$

Für die erste Ableitung des Präferenzfunktionals nach der Priorität folgt damit

$$D_d(\Phi_{\alpha,\lambda}(G(d,X))) = \frac{1-\lambda}{1-\alpha}D_d(E(G(d,X))) + \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}D_d(E(G(d,X)|X \geq x_{1-\alpha}(d))).$$

Aus den Beweisen von Satz 5.1.1 und Satz 5.2.1 ist die Ableitung des erwarteten Gewinns und des bedingten erwarteten Gewinns bekannt. Für diese gilt

$$\begin{aligned} D_d(E(G(d,X))) &= -RVP_d(d) - 1 + F_X(d) \\ D_d(E(G(d,X)|X \geq x_{1-\alpha}(d))) &= \begin{cases} -RVP_d(d) - 1, & \text{für } F_X(d) < 1-\alpha \\ -RVP_d(d) - \frac{1}{\alpha}(1-F_X(d)), & \text{für } F_X(d) \geq 1-\alpha \end{cases}. \end{aligned}$$

Man betrachte den Fall $F_X(d) < 1-\alpha$. Damit gilt für die erste Ableitung des Präferenzfunktionals

$$\begin{aligned} D_d(\Phi_{\alpha,\lambda}(G(d,X))) &= \frac{1-\lambda}{1-\alpha}[-RVP_d(d) - 1 + F_X(d)] + \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}[-RVP_d(d) - 1] \\ &= -RVP_d(d) - 1 + \frac{1-\lambda}{1-\alpha}F_X(d). \end{aligned}$$

[6] Es gilt $RVP_d(d) = (1+\gamma)[-1+F_X(d)]$. Vgl. dazu Lemma 5.1.1.

[7] Gilt wegen $\frac{\gamma}{1+\gamma} < 1-\alpha \Rightarrow \gamma < (1-\alpha)(1+\gamma) \Rightarrow \gamma < 1+\gamma-\alpha(1+\gamma) \Rightarrow 0 < 1-\alpha(1+\gamma) \Rightarrow \alpha(1+\gamma) < 1 \Rightarrow \alpha < \frac{1}{1+\gamma}$.

[8] Es ist auch das globale Maximum, da für diesen Fall nur dieses Maximum bestimmt werden konnte und kein Minimum und kein Wendepunkt existiert.

Durch Nullsetzen der ersten Ableitung und Umstellen kann die implizite Lösung $F_X(d^*) = \frac{1-\alpha}{1-\lambda}[1 + RVP_d(d^*)]$ erhalten werden. Für das zweite Differential gilt

$$D_{dd}(\Phi_{\alpha,\lambda}(G(d,X))) \quad = \quad -RVP_{dd}(d) + \frac{1-\lambda}{1-\alpha} f_X(d).$$

Somit ist die Lösung $F_X(d^*) = \frac{1-\alpha}{1-\lambda}[1 + RVP_d(d^*)]$ ein Maximum, wenn $-RVP_{dd}(d^*) + \frac{1-\lambda}{1-\alpha} f_X(d^*) < 0$ gilt. Für die Grenze $F_X(d) < 1-\alpha$ lässt sich $\frac{1-\alpha}{1-\lambda}[1+RVP_d(d^*)] < 1-\alpha$ bzw. durch Umstellen $\lambda < -RVP_d(d^*)$ festhalten.

Man betrachte den Fall $F_X(d) \geq 1-\alpha$. Es folgt für das erste Differential des Präferenzfunktionals

$$\begin{aligned} D_d(\Phi_{\alpha,\lambda}(G(d,X))) &= \frac{1-\lambda}{1-\alpha}[-RVP_d(d) - 1 + F(d)] + \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}[-RVP_d(d) - \frac{1}{\alpha}(1 - F_X(d))] \\ &= -RVP_d(d) + \left[\frac{1-\lambda}{1-\alpha} + \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\frac{1}{\alpha}\right][-1 + F_X(d)] \\ &= -RVP_d(d) + \frac{\lambda}{\alpha}[-1 + F_X(d)]^9. \end{aligned}$$

Man setze die Ableitung gleich null, stelle nach $F_X(d^*)$ um und erhält

$$F_X(d^*) = 1 + \frac{\alpha}{\lambda} RVP_d(d^*).$$

Für die zweite Ableitung des Präferenzfunktionals kann

$$D_{dd}(\Phi_{\alpha,\lambda}(G(d,X))) \quad = \quad -RVP_{dd}(d) + \frac{\lambda}{\alpha} f_X(d)$$

ermittelt werden. Somit ist für $\lambda \geq -RVP_d(d^*)$ die implizite Lösung $F_X(d^*) = 1 + \frac{\alpha}{\lambda} RVP_d(d^*)$ ein Maximum, wenn die Maximalbedingung $-RVP_{dd}(d^*) + \frac{\lambda}{\alpha} f_X(d^*) < 0$ erfüllt ist.

QED

[9] Es gilt $\frac{1-\lambda}{1-\alpha} + \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha(1-\lambda)+\lambda-\alpha}{\alpha(1-\alpha)} = \frac{\alpha-\alpha\lambda+\lambda-\alpha}{\alpha(1-\alpha)} = \frac{\lambda(1-\alpha)}{\alpha(1-\alpha)} = \frac{\lambda}{\alpha}$.

Überführung der Newsvendorlösung in die Lösung des Rückversicherungsmodells:

Für das Newsvendor Modell mit nicht-linearer Kostenfunktion und Risikopräferenzen β und λ[10] gilt

$$F_X(y^*) = \begin{cases} \frac{p-k_y(y^*)}{p-z} + \frac{\delta-\beta}{\delta}\frac{k_y(y^*)-z}{p-z}, \\ \text{für } \delta \geq \frac{k_y(y^*)-z}{p-z} \; und \; -k_{yy}(y^*) - \frac{\delta}{\beta}(p-z)f_X(y^*) < 0 \\ \\ \frac{p-k_y(y^*)}{p-z} \cdot \frac{1-\beta}{1-\delta}, \\ \text{für } \delta < \frac{k_y(y^*)-z}{p-z} \; und \; -k_{yy}(y^*) - \frac{1-\delta}{1-\beta}(p-z)f_X(y^*) < 0 \end{cases}.$$

Unter Verwendung der Analogie aus Tabelle 5.2 folgt

$$\begin{aligned} F_X(d^*) &= \begin{cases} \frac{-1-RVP_d(d^*)}{-1-0} + \frac{\lambda-\alpha}{\lambda}\frac{RVP_d(d^*)-0}{-1-0}, \\ \text{für } \lambda \geq \frac{RVP_d(d^*)-0}{-1-0} \; und \; -RVP_{dd}(d^*) - \frac{\lambda}{\alpha}(-1-0)f_X(d^*) < 0 \\ \\ \frac{-1-RVP_d(d^*)}{-1-0} \cdot \frac{1-\alpha}{1-\lambda}, \\ \text{für } \lambda < \frac{RVP_d(d^*)-0}{-1-0} \; und \; -RVP_{dd}(d^*) - \frac{1-\lambda}{1-\alpha}(-1-0)f_X(d^*) < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 + RVP_d(d^*) + \frac{\alpha-\lambda}{\lambda}RVP_d(d^*), \\ \text{für } \lambda \geq -RVP_d(d^*) \; und \; -RVP_{dd}(d^*) + \frac{\lambda}{\alpha}f_X(d^*) < 0 \\ \\ \frac{1-\alpha}{1-\lambda}[1 + RVP_d(d^*)], \\ \text{für } \lambda < -RVP_d(d^*) \; und \; -RVP_{dd}(d^*) + \frac{1-\lambda}{1-\alpha}f_X(d^*) < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 + \frac{\alpha}{\lambda}RVP_d(d^*), \\ \text{für } \lambda \geq -RVP_d(d^*) \; und \; -RVP_{dd}(d^*) + \frac{\lambda}{\alpha}f_X(d^*) < 0 \\ \\ \frac{1-\alpha}{1-\lambda}[1 + RVP_d(d^*)], \\ \text{für } \lambda < -RVP_d(d^*) \; und \; -RVP_{dd}(d^*) + \frac{1-\lambda}{1-\alpha}f_X(d^*) < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

und bringt die implizite Lösung von Satz 5.3.1 hervor.

Beweis von Satz 5.3.2:
Man setze das erste Differential der Rückversicherungsprämie aus Lemma 5.1.1 in die implizite Lösung von Satz 5.3.1 für den Fall $F_X(d) \geq 1-\alpha$[11] ein und erhält

$$\begin{aligned} F_X(d^*) = 1 + \frac{\alpha}{\lambda}RVP_d(d^*) \quad &\Rightarrow \quad F_X(d^*) = 1 + \frac{\alpha}{\lambda}(1+\gamma)[-1 + F_X(d^*)] \\ &\Rightarrow \quad \left[\frac{\alpha}{\lambda}(1+\gamma) - 1\right][-1 + F_X(d^*)] = 0 \\ &\Rightarrow \quad F_X(d^*) = 1. \end{aligned}$$

Für die zugehörige Maximalbedingung gilt durch Einsetzen der zweiten Ableitung der Rück-

[10] Vgl. dazu Abschnitt 3.4.
[11] Dies ist zu $\lambda \geq -RVP_d(d^*)$ äquivalent.

versicherungsprämie aus Lemma 5.1.1

$$\begin{aligned}
-RVP_{dd}(d^*) + \frac{\lambda}{\alpha} f_X(d^*) < 0 \quad &\Rightarrow \quad -(1+\gamma) f_X(d^*) + \frac{\lambda}{\alpha} f_X(d^*) < 0 \\
&\Rightarrow \quad \left(-(1+\gamma) + \frac{\lambda}{\alpha}\right) f_X(d^*) < 0.
\end{aligned}$$

Fall $f_X(d^*) \neq 0$: Da die Schadensdichte keine negativen Werte annehmen kann, ist

$$\left(-(1+\gamma) + \frac{\lambda}{\alpha}\right) f_X(d^*) < 0,$$

genau dann, wenn $1 + \gamma > \frac{\lambda}{\alpha}$ gilt. Somit ist $F_X(d^*) = 1$ das Maximum, wenn die Bedingung $1 + \gamma > \frac{\lambda}{\alpha}$ erfüllt ist. Dies ist gleichzeitig eine Randlösung und somit das globale Maximum.

Fall $f_X(d^*) = 0$: In diesem Fall ist die zweite Ableitung gleich null. Es handelt sich somit um einen Wendepunkt. In diesem Fall befindet sich das globale Maximum am Rand. Es gilt für das Maximum $F_X(d^*) = 1$, da $\Phi_{\alpha,\lambda}(G(d^*, X)) \geq \Phi_{\alpha,\lambda}(G(d, X))$ für alle $d \geq 0$ ist. Dies soll im Folgenden gezeigt werden. Es ist

$$\begin{aligned}
\Phi_{\alpha,\lambda}(G(d^*, X)) &= \frac{1-\lambda}{1-\alpha} \left[Pr - B - E(X)\right] \\
&+ \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha} \left[Pr - B - \frac{1}{\alpha} \int\limits_{F_X^{-1}(1-\alpha)}^{\infty} x \; dF_X(x)\right] \\
&= Pr - B - \frac{1-\lambda}{1-\alpha} E(X) - \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha} \frac{1}{\alpha} \int\limits_{F_X^{-1}(1-\alpha)}^{\infty} x \; dF_X(x)
\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}
\Phi_{\alpha,\lambda}(G(d, X)) &= \frac{1-\lambda}{1-\alpha} \left[Pr - B - E(X) - RVP(d) + E(RVS(d, X))\right] \\
&+ \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha} \left[Pr - B - RVP(d) - \frac{1}{\alpha} d[1 - F_X(d)] - \frac{1}{\alpha} \int\limits_{F_X^{-1}(1-\alpha)}^{d} x \; dF_X(x)\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= Pr - B - \frac{1-\lambda}{1-\alpha}E(X) - \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\frac{1}{\alpha}\int\limits_{F_X^{-1}(1-\alpha)}^{\infty} x\ dF_X(x) \\
&+ \frac{1-\lambda}{1-\alpha}[-RVP(d) + E(RVS(d,X))] \\
&+ \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\left[-RVP(d) + \frac{1}{\alpha}E(RVS(d,X))\right]^{12} \\
&= Pr - B - \frac{1-\lambda}{1-\alpha}E(X) - \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\frac{1}{\alpha}\int\limits_{F_X^{-1}(1-\alpha)}^{\infty} x\ dF_X(x) \\
&- RVP(d) + \frac{\lambda}{\alpha}E(RVS(d,X)) \\
&= Pr - B - \frac{1-\lambda}{1-\alpha}E(X) - \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\frac{1}{\alpha}\int\limits_{F_X^{-1}(1-\alpha)}^{\infty} x\ dF_X(x) \\
&- \left(1+\gamma-\frac{\lambda}{\alpha}\right)E(RVS(d,X)).
\end{aligned}
$$

Somit folgt für $1+\gamma > \frac{\lambda}{\alpha}$, dass $\Phi_{\alpha,\lambda}(G(d^*,X)) \geq \Phi_{\alpha,\lambda}(G(d,X))$ für alle $d \geq 0$ ist.

Man betrachte den Fall $F_X(d) < 1-\alpha$[13] und setze das erste Differential der Rückversicherungsprämie aus Lemma 5.1.1 in die implizite Lösung von Satz 5.3.1 ein. Es gilt

$$
\begin{aligned}
& F_X(d^*) = \frac{1-\alpha}{1-\lambda}[1 + RVP_d(d^*)] \\
\Rightarrow\ & F_X(d^*) = \frac{1-\alpha}{1-\lambda}[1 + (1+\gamma)[-1 + F_X(d^*)]] \\
\Rightarrow\ & \frac{1-\alpha}{1-\lambda} - \frac{1-\alpha}{1-\lambda}(1+\gamma) + \left(\frac{1-\alpha}{1-\lambda}(1+\gamma) - 1\right)F_X(d^*) = 0 \\
\Rightarrow\ & \frac{1-\alpha}{1-\lambda}(1-1-\gamma) + \left(\frac{1-\alpha}{1-\lambda}(1+\gamma) - 1\right)F_X(d^*) = 0 \\
\Rightarrow\ & -\gamma(1-\alpha) + ((1-\alpha)(1+\gamma) - (1-\lambda))\,F_X(d^*) = 0 \\
\Rightarrow\ & F_X(d^*) = \frac{\gamma(1-\alpha)}{(1-\alpha)(1+\gamma) - (1-\lambda)}.
\end{aligned}
$$

[12]Folgt wegen

$-\frac{1}{\alpha}d[1-F_X(d)] - \frac{1}{\alpha}\int\limits_{F_X^{-1}(1-\alpha)}^{d} x\ dF_X(x) + \frac{1}{\alpha}\int\limits_{F_X^{-1}(1-\alpha)}^{\infty} x\ dF_X(x) - \frac{1}{\alpha}\int\limits_{F_X^{-1}(1-\alpha)}^{\infty} x\ dF_X(x)$

$= -\frac{1}{\alpha}\int\limits_{F_X^{-1}(1-\alpha)}^{\infty} x\ dF_X(x) + \frac{1}{\alpha}\int\limits_{d}^{\infty}(x-d)\ dF_X(x) = -\frac{1}{\alpha}\int\limits_{F_X^{-1}(1-\alpha)}^{\infty} x\ dF_X(x) + \frac{1}{\alpha}E(RVS(d,X))$.

[13]Dies ist zu $\lambda < -RVP_d(d^*)$ äquivalent.

Man betrachte die zweite Ableitung zur Bestimmung der Art des Extremums. Es gilt

$$\begin{aligned} -RVP_{dd}(d^*) + \frac{1-\lambda}{1-\alpha} f_X(d^*) < 0 \quad & \Rightarrow \quad -(1+\gamma) f_X(d^*) + \frac{1-\lambda}{1-\alpha} f_X(d^*) < 0 \\ & \Rightarrow \quad \left[-(1+\gamma) + \frac{1-\lambda}{1-\alpha} \right] f_X(d^*) < 0. \end{aligned}$$

Da die Schadensdichte keine negativen Werte annehmen kann, ist die zweite Ableitung des Präferenzfunktionals nur dann negativ, wenn $1+\gamma > \frac{1-\lambda}{1-\alpha}$ erfüllt ist.

Es stellt sich die Frage nach der Existenz des Extremums. Dazu betrachte man $F_X(d^*) \geq 0$[14]. Dies gilt, wenn der Nenner der Lösung nicht negativ ist. Es muss somit

$$(1-\alpha)(1+\gamma) - (1-\lambda) \geq 0 \;\Rightarrow\; 1+\gamma \geq \frac{1-\lambda}{1-\alpha}$$

zutreffen. Damit ist $F_X(d^*) = \frac{\gamma(1-\alpha)}{(1-\alpha)(1+\gamma)-(1-\lambda)}$ ein Maximum, wenn $F_X(d^*) \geq 0$ gilt. Man betrachte die zweite Schranke $F_X(d^*) < 1-\alpha$ für das Extremum. Es gilt

$$\frac{\gamma(1-\alpha)}{(1-\alpha)(1+\gamma)-(1-\lambda)} < 1-\alpha$$

und dies ist zu $1+\gamma < \frac{\lambda}{\alpha}$ äquivalent[15]. Somit existiert das Extremum nur für $1+\gamma < \frac{\lambda}{\alpha}$ und ist gleichzeitig das Maximum[16]. Im Fall $1+\gamma > \frac{\lambda}{\alpha}$ konnte $F_X(d^*) = 1$ als Maximum bestimmt werden.

QED

Beweis von Satz 5.4.1:
Es gilt

$$\begin{aligned} \Phi_{\beta,\delta}(G(d,X)) &= \frac{1-\delta}{1-\beta} E(G(d,X)) + \frac{\delta-\beta}{1-\beta} E(G(d,X)|G(d,X) \geq g_{1-\beta}(d)) \\ &= \frac{\delta}{\beta} E(G(d,X)) + \left(1 - \frac{\delta}{\beta}\right) E(G(d,X)|G(d,X) \leq g_{1-\beta}(d))^{17}. \end{aligned}$$

Aus dem Beweis von Satz 5.2.1 ist folgende Gleichheit für den bedingten erwarteten Gewinn mit einem α-Gewinnquantil bekannt

$$E(G(d,X)|G(d,X) \leq g_\alpha(d)) = E(G(d,X)|X \geq x_{1-\alpha}(d)).$$

Für $1-\beta = \alpha$ folgt

$$E(G(d,X)|G(d,X) \leq g_{1-\beta}(d)) = E(G(d,X)|X \geq x_\beta(d)).$$

[14] Für die Existenz des Extremums muss $0 \leq F_X(d^*) < 1-\alpha$ gelten.

[15] Gilt wegen $\frac{\gamma(1-\alpha)}{(1-\alpha)(1+\gamma)-(1-\lambda)} < 1-\alpha \;\Rightarrow\; \gamma < (1-\alpha)(1+\gamma) - (1-\lambda) \;\Rightarrow\; (1-\alpha)(1+\gamma) - (1+\gamma) + \lambda > 0 \;\Rightarrow\; (1-\alpha-1)(1+\gamma) + \lambda > 0 \;\Rightarrow\; -\alpha(1+\gamma) + \lambda > 0 \;\Rightarrow\; 1+\gamma < \frac{\lambda}{\alpha}$.

[16] Es ist auch das globale Maximum, denn es konnte kein Minimum und auch kein Wendepunkt für diesen Fall erhalten werden. Für den Wendepunkt müsste dabei $1+\gamma = \frac{1-\lambda}{1-\alpha}$ gelten, aber in diesem Fall ist $F_X(d^*)$ nicht definiert.

[17] Vgl. dazu Abschnitt 2.4.1.2.

Für die erste Ableitung des Präferenzfunktionals nach der Priorität ergibt sich somit

$$D_d(\Phi_{\beta,\delta}(G(d,X))) = \frac{\delta}{\beta} D_d(E(G(d,X))) + \left(1 - \frac{\delta}{\beta}\right) D_d(E(G(d,X)|X \geq x_\beta(d))).$$

Aus den Beweisen von Satz 5.1.1 und Satz 5.2.1 ist die Ableitung des erwarteten Gewinns und des bedingten erwarteten Gewinns[18] bekannt. Für diese gilt

$$\begin{aligned} D_d(E(G(d,X))) &= -RVP_d(d) - 1 + F_X(d) \\ D_d(E(G(d,X)|X \geq x_\beta(d))) &= \begin{cases} -RVP_d(d) - 1, & \text{für } F_X(d) < \beta \\ -RVP_d(d) - \frac{1}{1-\beta}(1 - F_X(d)), & \text{für } F_X(d) \geq \beta \end{cases}. \end{aligned}$$

Man betrachte den Fall $F_X(d) < \beta$. Damit gilt für die erste Ableitung des Präferenzfunktionals

$$\begin{aligned} D_d(\Phi_{\beta,\delta}(G(d,X))) &= \frac{\delta}{\beta}[-RVP_d(d) - 1 + F_X(d)] + \left(1 - \frac{\delta}{\beta}\right)[-RVP_d(d) - 1] \\ &= -RVP_d(d) - 1 + \frac{\delta}{\beta} F_X(d). \end{aligned}$$

Durch Nullsetzen der ersten Ableitung und Umstellen kann die implizite Lösung $F_X(d^*) = \frac{\beta}{\delta}[1 + RVP_d(d^*)]$ erhalten werden. Für das zweite Differential gilt

$$D_{dd}(\Phi_{\beta,\delta}(G(d,X))) = -RVP_{dd}(d) + \frac{\delta}{\beta} f_X(d).$$

Somit ist die Lösung $F_X(d^*) = \frac{\beta}{\delta}[1+RVP_d(d^*)]$ ein Maximum, wenn $-RVP_{dd}(d^*)+\frac{\beta}{\delta} f_X(d^*) < 0$ ist. Für die Grenze $F_X(d) < \beta$ gilt $\frac{\beta}{\delta}[1 + RVP_d(d^*)] < \beta$. bzw. durch Umstellen $\delta > 1 + RVP_d(d^*)$.

Man betrachte den Fall $F_X(d) \geq \beta$. Es gilt für das erste Differential des Präferenzfunktionals

$$\begin{aligned} D_d(\Phi_{\beta,\delta}(G(d,X))) &= \frac{\beta}{\delta}[-RVP_d(d) - 1 + F(d)] \\ &+ \left(1 - \frac{\delta}{\beta}\right)\left[-RVP_d(d) - \frac{1}{1-\beta}(1 - F_X(d))\right] \\ &= -RVP_d(d) + \left[\frac{\beta}{\delta} + \left(1 - \frac{\delta}{\beta}\right)\frac{1}{1-\beta}\right][-1 + F_X(d)] \\ &= -RVP_d(d) + \frac{1-\delta}{1-\beta}[-1 + F_X(d)]^{19}. \end{aligned}$$

Man setze die Ableitung gleich null, stelle nach $F_X(d^*)$ um und erhalte

$$F_X(d^*) = 1 + \frac{1-\beta}{1-\delta} RVP_d(d^*).$$

Für die zweite Ableitung des Präferenzfunktionals kann

$$D_{dd}(\Phi_{\alpha,\lambda}(G(d,X))) = -RVP_{dd}(d) + \frac{1-\delta}{1-\beta} f_X(d)$$

[18] Für den bedingten Erwartungswert wurde die Beziehung $1 - \beta = \alpha$ angewendet.

[19] Es gilt $\frac{\delta}{\beta} + \left(1 - \frac{\delta}{\beta}\right)\frac{1}{1-\beta} = \frac{\delta}{\beta} + \frac{\beta-\delta}{\beta(1-\beta)} = \frac{\delta(1-\beta)+\beta-\delta}{\beta(1-\beta)} = \frac{\beta(1-\delta)}{\beta(1-\beta)} = \frac{1-\delta}{1-\beta}$.

festgehalten werden. Somit ist für $\delta \leq 1 + RVP_d(d^*)$ die implizite Lösung $F_X(d^*) = 1 + \frac{1-\beta}{1-\delta}RVP_d(d^*)$ ein Maximum, wenn die Maximalbedingung $-RVP_{dd}(d^*) + \frac{1-\delta}{1-\beta}f_X(d^*) < 0$ erfüllt ist.

QED

Beweis von Satz 5.4.2:
Man setze das erste Differential der Rückversicherungsprämie aus Lemma 5.1.1 in die implizite Lösung von Satz 5.4.1 für den Fall $F_X(d) \geq \beta$[20] ein und erhält

$$\begin{aligned}
F_X(d^*) = 1 + \frac{1-\beta}{1-\delta}RVP_d(d^*) \quad &\Rightarrow \quad F_X(d^*) = 1 + \frac{1-\beta}{1-\delta}(1+\gamma)[-1+F_X(d^*)] \\
&\Rightarrow \quad \left[\frac{1-\beta}{1-\delta}(1+\gamma) - 1\right][-1+F_X(d^*)] = 0 \\
&\Rightarrow \quad F_X(d^*) = 1.
\end{aligned}$$

Für die zugehörige Maximalbedingung gilt durch Einsetzen der zweiten Ableitung der Rückversicherungsprämie aus Lemma 5.1.1

$$\begin{aligned}
-RVP_{dd}(d) + \frac{1-\delta}{1-\beta}f_X(d) < 0 \quad &\Rightarrow \quad -(1+\gamma)f_X(d^*) + \frac{1-\delta}{1-\beta}f_X(d^*) < 0 \\
&\Rightarrow \quad \left(-(1+\gamma) + \frac{1-\delta}{1-\beta}\right) f_X(d^*) < 0.
\end{aligned}$$

Fall $f_X(d^*) \neq 0$: Da die Schadensdichte keine negativen Werte annehmen kann, ist

$$\left(-(1+\gamma) + \frac{1-\delta}{1-\beta}\right) f_X(d^*) < 0,$$

genau dann, wenn $1+\gamma > \frac{1-\delta}{1-\beta}$ gilt. Somit ist $F_X(d^*) = 1$ das Maximum, wenn die Bedingung $1+\gamma > \frac{1-\delta}{1-\beta}$ erfüllt ist. Dies ist gleichzeitig eine Randlösung und somit das globale Maximum.

Fall $f_X(d^*) = 0$: In diesem Fall ist die zweite Ableitung gleich null. Es handelt sich somit um einen Wendepunkt. In diesem Fall befindet sich das globale Maximum am Rand. Es gilt für das Maximum $F_X(d^*) = 1$, da $\Phi_{\beta,\delta}(G(d^*,X)) \geq \Phi_{\beta,\delta}(G(d,X))$ für alle $d \geq 0$ gilt. Dies soll im Folgenden gezeigt werden. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
\Phi_{\beta,\delta}(G(d^*,X)) &= \frac{\delta}{\beta}[Pr - B - E(X)] \\
&+ \left(1 - \frac{\delta}{\beta}\right)\left[Pr - B - \frac{1}{1-\beta}\int\limits_{F_X^{-1}(\beta)}^{\infty} x \, dF_X(x)\right] \\
&= Pr - B - \frac{\delta}{\beta}E(X) - \left(1 - \frac{\delta}{\beta}\right)\frac{1}{1-\beta}\int\limits_{F_X^{-1}(\beta)}^{\infty} x \, dF_X(x)
\end{aligned}$$

[20]Dies ist zu $\delta \leq 1 + RVP_d(d^*)$ äquivalent.

bzw.

$$\begin{aligned}
\Phi_{\beta,\delta}(G(d,X)) &= \frac{\delta}{\beta}\left[Pr - B - E(X) - RVP(d) + E(RVS(d,X))\right] \\
&+ \left(1-\frac{\delta}{\beta}\right)\Bigg[Pr - B - RVP(d) - \frac{1}{1-\beta}d[1-F_X(d)] \\
&- \frac{1}{1-\beta}\int\limits_{F_X^{-1}(\beta)}^{d} x\ dF_X(x)\Bigg]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= Pr - B - \frac{\delta}{\beta}E(X) - \left(1-\frac{\delta}{\beta}\right)\frac{1}{1-\beta}\int\limits_{F_X^{-1}(\beta)}^{\infty} x\ dF_X(x) \\
&+ \frac{\delta}{\beta}\left[-RVP(d) + E(RVS(d,X))\right] \\
&+ \left(1-\frac{\delta}{\beta}\right)\left[-RVP(d) + \frac{1}{1-\beta}E(RVS(d,X))\right]^{21} \\
&= Pr - B - \frac{\delta}{\beta}E(X) - \left(1-\frac{\delta}{\beta}\right)\frac{1}{1-\beta}\int\limits_{F_X^{-1}(\beta)}^{\infty} x\ dF_X(x) \\
&- RVP(d) + \frac{1-\delta}{1-\beta}E(RVS(d,X))^{22} \\
&= Pr - B - \frac{\delta}{\beta}E(X) - \left(1-\frac{\delta}{\beta}\right)\frac{1}{1-\beta}\int\limits_{F_X^{-1}(1-\alpha)}^{\infty} x\ dF_X(x) \\
&- \left(1+\gamma-\frac{1-\delta}{1-\beta}\right)E(RVS(d,X)).
\end{aligned}$$

Somit gilt für $1+\gamma > \frac{1-\delta}{1-\beta}$, dass $\Phi_{\beta,\delta}(G(d^*,X)) \geq \Phi_{\beta,\delta}(G(d,X))$ für alle $d \geq 0$ ist.

Man betrachte den Fall $F_X(d) < \beta$[23] und setze das erste Differential der Rückversicherungs-

---

[21] Folgt wegen

$$-\tfrac{1}{1-\beta}d[1-F_X(d)] - \tfrac{1}{1-\beta}\int\limits_{F_X^{-1}(\beta)}^{d} x\ dF_X(x) + \tfrac{1}{1-\beta}\int\limits_{F_X^{-1}(\beta)}^{\infty} x\ dF_X(x) - \tfrac{1}{1-\beta}\int\limits_{F_X^{-1}(\beta)}^{\infty} x\ dF_X(x)$$
$$= -\tfrac{1}{1-\beta}\int\limits_{F_X^{-1}(\beta)}^{\infty} x\ dF_X(x) + \tfrac{1}{1-\beta}\int\limits_{d}^{\infty}(x-d)\ dF_X(x) = -\tfrac{1}{1-\beta}\int\limits_{F_X^{-1}(\beta)}^{\infty} x\ dF_X(x) + \tfrac{1}{1-\beta}E(RVS(d,X)).$$

[22] Es gilt $\frac{\delta}{\beta} + \left(1-\frac{\delta}{\beta}\right)\frac{1}{1-\beta} = \frac{1-\delta}{1-\beta}$.

[23] Dies ist zu $\delta > 1 + RVP_d(d^*)$ äquivalent.

prämie aus Lemma 5.1.1 in die implizite Lösung von Satz 5.4.1 ein. Es gilt

$$\begin{aligned}
& F_X(d^*) = \frac{\beta}{\delta}[1 + RVP_d(d^*)] \\
\Rightarrow \quad & F_X(d^*) = \frac{\beta}{\delta}[1 + (1+\gamma)[-1 + F_X(d^*)]] \\
\Rightarrow \quad & \frac{\beta}{\delta} - \frac{\beta}{\delta}(1+\gamma) + \left(\frac{\beta}{\delta}(1+\gamma) - 1\right) F_X(d^*) = 0 \\
\Rightarrow \quad & \frac{\beta}{\delta}(1 - 1 - \gamma) + \left(\frac{\beta}{\delta}(1+\gamma) - 1\right) F_X(d^*) = 0 \\
\Rightarrow \quad & -\gamma\beta + (\beta(1+\gamma) - \delta)\, F_X(d^*) = 0 \\
\Rightarrow \quad & F_X(d^*) = \frac{\gamma\beta}{\beta(1+\gamma) - \delta}.
\end{aligned}$$

Man betrachte die zweite Ableitung zur Bestimmung der Art des Extremums. Es gilt

$$\begin{aligned}
-RVP_{dd}(d^*) + \frac{\delta}{\beta} f_X(d^*) < 0 \quad & \Rightarrow \quad -(1+\gamma) f_X(d^*) + \frac{\delta}{\beta} f_X(d^*) < 0 \\
& \Rightarrow \quad \left[-(1+\gamma) + \frac{\delta}{\beta}\right] f_X(d^*) < 0.
\end{aligned}$$

Da die Schadensdichte keine negativen Werte annehmen kann, ist die zweite Ableitung des Präferenzfunktionals nur dann negativ, wenn $1 + \gamma > \frac{\delta}{\beta}$ erfüllt ist.

Es stellt sich die Frage nach der Existenz des Extremums. Betrachte man dazu $F_X(d^*) \geq 0$[24]. Dies gilt, wenn der Nenner der Lösung nicht negativ ist. Es muss somit

$$\beta(1+\gamma) - \delta \geq 0 \;\Rightarrow\; 1 + \gamma \geq \frac{\delta}{\beta}$$

zutreffen. Damit ist $F_X(d^*) = \frac{\gamma\beta}{\beta(1+\gamma)-\delta}$ ein Maximum, wenn $F_X(d^*) \geq 0$ ist. Man betrachte die zweite Schranke $F_X(d^*) < \beta$ für das Extremum. Es muss

$$\frac{\gamma\beta}{\beta(1+\gamma) - \delta} < \beta$$

gelten und dies ist zu $1 + \gamma < \frac{1-\delta}{1-\beta}$ äquivalent[25]. Somit existiert das Extremum nur für $1 + \gamma < \frac{1-\delta}{1-\beta}$ und ist dann das Maximum[26]. Im Fall $1 + \gamma > \frac{1-\delta}{1-\beta}$ konnte $F_X(d^*) = 1$ als Maximum bestimmt werden.

QED

[24] Für die Existenz des Extremums muss $0 \leq F_X(d^*) < \beta$ gelten.

[25] Gilt wegen $\frac{\gamma\beta}{\beta(1+\gamma)-\delta} < \beta \;\Rightarrow\; \frac{\gamma}{\beta(1+\gamma)-\delta} < 1 \;\Rightarrow\; \gamma < \beta(1+\gamma) - \delta$ und $1 + \gamma < \frac{1-\delta}{1-\beta} \;\Rightarrow\; (1+\gamma)(1-\beta) < 1 - \delta \;\Rightarrow\; 1 + \gamma - \beta(1+\gamma) < 1 - \delta \;\Rightarrow\; \gamma < \beta(1+\gamma) - \delta$.

[26] Es ist auch das globale Maximum, denn es konnte kein Minimum und auch kein Wendepunkt für diesen Fall erhalten werden. Für den Wendepunkt muss dabei $1 + \gamma = \frac{\delta}{\beta}$ gelten, aber in diesem Fall ist $F_X(d^*)$ nicht definiert.

C.2 Beweise für das Plafondoptimierungsproblem

Beweis von Satz 6.2.1:
Es gilt nach Formel (2.3)

$$\Phi_{\alpha,\lambda}(G(c,X)) = \frac{\lambda}{\alpha}E(G(c,X)) + \left(1-\frac{\lambda}{\alpha}\right)E(G(c,X)|G(c,X) \geq g_\alpha(c))$$

und für das erste Differential des Präferenzfunktionals

$$D_c(\Phi_{\alpha,\lambda}(G(c,X))) = \frac{\lambda}{\alpha}D_c(E(G(c,X))) + \left(1-\frac{\lambda}{\alpha}\right)D_c(E(G(c,X)|G(c,X) \geq g_\alpha(c))).$$

Man bestimme das erste Differential des erwarteten und des oberen bedingten erwarteten Gewinns. Dazu verwende man die Gewinnfunktion. Es gilt

$$G(c,X) = Pr - B - X - RVP(c) + \begin{cases} X, & \text{für } X \leq c \\ c, & \text{für } X > c \end{cases}.$$

Somit ergibt sich für den erwarteten Gewinn

$$\begin{aligned} E(G(c,X)) &= Pr - B - E(X) - RVP(c) + \int_0^c x\, dF_X(x) + \int_c^\infty c\, dF_X(x) \\ &= Pr - B - E(X) - RVP(c) + \int_0^c x\, dF_X(x) + c(1-F_X(c)). \end{aligned}$$

Man differenziere

$$\begin{aligned} D_c(E(G(c,X))) &= -RVP_c(c) + cf_X(c) + 1 - F_X(c) + c(-f_X(c)) \\ &= -RVP_c(c) + 1 - F_X(c). \end{aligned}$$

Man bilde den unteren bedingten Erwartungswert. Es gilt

$$E(G(c,X)|G(c,X) \geq g_\alpha(c)) = E(G(c,X)|X \leq x_{1-\alpha}(c)).$$

Diese Beziehung verdeutlicht Abbildung C.2[27].

[27]Man erkennt, dass die $\alpha \cdot 100$ % kleinsten Gewinne bei den $\alpha \cdot 100$ % höchsten Schäden eintreten. Dies sind gerade alle Gewinne bei Schäden oberhalb des $(1-\alpha)$-Quantils der Schadensverteilung. Damit ist $E(G(c,X)|G(c,X) \geq g_\alpha(c)) = E(G(c,X)|X \leq x_{1-\alpha}(c))$, wobei $x_{1-\alpha}(c)$ das $(1-\alpha)$-Quantil der Schadensverteilung darstellt.

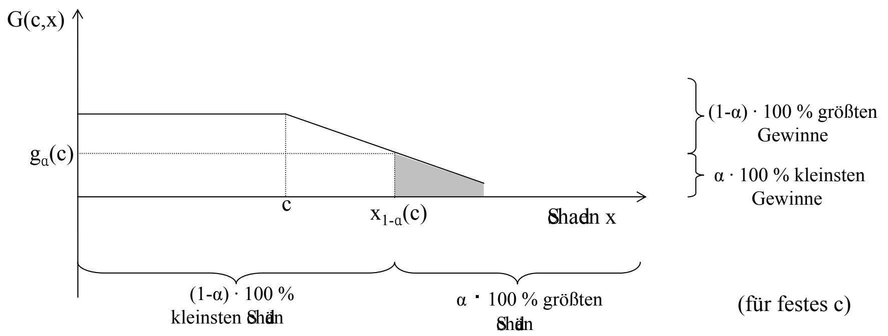


Abbildung C.2: Gewinnfunktion (Plafond) des Erstversicherers.

Fall $F_X(c) \geq 1-\alpha$: Es gilt

$$\begin{aligned} E(G(c,X)|X \leq x_{1-\alpha}(c)) &= \frac{1}{1-\alpha} \int_0^{F_X^{-1}(1-\alpha)} [Pr - B - x - RVP(c) + x]\ dF_X(x)^{28} \\ &= Pr - B - RVP(c). \end{aligned}$$

Durch Differenzieren folgt

$$D_c(E(G(c,X)|X \leq x_{1-\alpha}(c))) = -RVP_c(c).$$

Fall $F_X(c) < 1-\alpha$: Es gilt

$$E(G(c,X)|X \leq x_{1-\alpha}(c))^{29}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{1-\alpha}\left[\int_0^c [Pr - B - RVP(c)]\ dF_X(x) + \int_c^{F_X^{-1}(1-\alpha)} [Pr - B - RVP(c) - x + c]\ dF_X(x)\right] \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\left[\int_0^{F_X^{-1}(1-\alpha)} [Pr - B - RVP(c)]\ dF_X(x) + \int_c^{F_X^{-1}(1-\alpha)} [c - x]\ dF_X(x)\right] \end{aligned}$$

---

[28] In diesem Fall sind alle Schäden unterhalb des Plafonds. Folglich übernimmt der Zedent den Schaden x und bekommt diesen vom Rückversicherer wieder. Somit setzt sich die Gewinnfunktion nur aus den Prämieneinnahmen, den Betriebskosten und der Rückversicherungsprämie zusammen.

[29] In diesem Fall splittet sich der bedingte Erwartungswert in zwei Fälle auf. Zum einen den Fall, bei dem die Schäden sich unterhalb des Plafonds befinden. In diesem Fall ist die Gewinnfunktion $Pr-B-RVP(c)$, da der Rückversicherer alle Schäden übernimmt. Im anderen Fall befinden sich die Schäden oberhalb des Plafonds c, somit kommt zur Gewinnfunktion der Term c-x hinzu. Es tritt der Schaden x ein und der Plafond c wird vom Rückversicherer ausbezahlt.

$$E(G(c,X)|X \leq x_{1-\alpha}(c))$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{1-\alpha}(1-\alpha)[Pr - B - RVP(c)] + \frac{1}{1-\alpha}c[1-\alpha-F_X(c)] - \frac{1}{1-\alpha}\int_c^{F_X^{-1}(1-\alpha)} x\, dF_X(x) \\ &= Pr - B - RVP(c) + c\left[1 - \frac{1}{1-\alpha}F_X(c)\right] - \frac{1}{1-\alpha}\int_c^{F_X^{-1}(1-\alpha)} x\, dF_X(x). \end{aligned}$$

Durch Differenzieren folgt

$$\begin{aligned} D_c(E(G(c,X)|X \leq x_{1-\alpha})) &= -RVP_c(c) + 1 - \frac{1}{1-\alpha}F_X(c) \\ &- c\left[-\frac{1}{1-\alpha}f_X(c)\right] - \frac{1}{1-\alpha}(-cf_X(c)) \\ &= -RVP_c(c) + 1 - \frac{1}{1-\alpha}F_X(c). \end{aligned}$$

Somit gilt für die Ableitung des Präferenzfunktionals

$$\begin{aligned} D_c(\Phi_{\alpha,\lambda}(G(c,X))) &= \frac{\lambda}{\alpha}D_c(E(G(c,X))) + \left(1-\frac{\lambda}{\alpha}\right)D_c(E(G(c,X)|G(c,X) \geq g_{\alpha,X})) \\ &= \frac{\lambda}{\alpha}\left[-RVP_c(c) + 1 - F_X(c)\right] \\ &+ \left(1-\frac{\lambda}{\alpha}\right)\begin{cases} -RVP_c(c), & \text{für } F_X(c) \geq 1-\alpha \\ -RVP_c(c) + 1 - \frac{1}{1-\alpha}F_X(c), & \text{für } F_X(d) < 1-\alpha \end{cases}. \end{aligned}$$

Fall $F_X(c) \geq 1-\alpha$: Es gilt

$$\begin{aligned} D_c(\Phi_{\alpha,\lambda}(G(c,X))) &= \frac{\lambda}{\alpha}[-RVP_c(c) + 1 - F_X(c)] + \left(1-\frac{\lambda}{\alpha}\right)[-RVP_c(c)] \\ &= -RVP_c(c) + \frac{\lambda}{\alpha}[1-F_X(c)]. \end{aligned}$$

Durch Nullsetzen der ersten Ableitung und Umstellen kann folgende implizite Lösung erhalten werden $F_X(c^*) = 1 - \frac{\alpha}{\lambda}RVP_c(c^*)$. Für das zweite Differential gilt

$$D_{cc}(\Phi_{\alpha,\lambda}(G(c,X))) = -RVP_{cc}(c) - \frac{\lambda}{\alpha}f_X(c).$$

Somit ist die Lösung ein Maximum für $-RVP_{cc}(c^*) - \frac{\lambda}{\alpha}f_X(c^*) < 0$. Für die Grenze $F_X(c) \geq 1-\alpha$ ergibt sich $1 - \frac{\alpha}{\lambda}RVP_c(c^*) \geq 1-\alpha$ bzw. $\lambda \geq RVP_c(c^*)$[30].

[30]Folgt durch Umstellen von $1 - \frac{\alpha}{\lambda}RVP_c(c^*) \geq 1-\alpha$ nach λ.

Fall $F_X(c) < 1-\alpha$: Es gilt für das erste Differential des Präferenzfunktionals

$$\begin{aligned} D_c(\Phi_{\alpha,\lambda}(G(c,X))) &= \frac{\lambda}{\alpha}[-RVP_c(c)+1-F_X(c)] \\ &+ \left(1-\frac{\lambda}{\alpha}\right)[-RVP_c(c)+1-\frac{1}{1-\alpha}F_X(c)] \\ &= 1-RVP_c(c)-F_X(c)\left[\frac{\lambda}{\alpha}+\left(1-\frac{\lambda}{\alpha}\right)\frac{1}{1-\alpha}\right]^{31} \\ &= 1-RVP_c(c)-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}F_X(c). \end{aligned}$$

Durch Nullsetzen der ersten Ableitung und Umstellen kann die implizite Lösung

$$F_X(c^*) = \frac{1-\alpha}{1-\lambda}[1-RVP_c(c^*)]$$

erhalten werden. Für die zweite Ableitung des Präferenzfunktionals gilt

$$D_{cc}(\Phi_{\alpha,\lambda}(G(c,X))) = -RVP_{cc}(c)-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}f_X(c).$$

Somit ist im Fall $\lambda < RVP_c(c^*)$ die implizite Lösung $F_X(c^*) = \frac{1-\alpha}{1-\lambda}[1-RVP_c(c^*)]$ für $-RVP_{cc}(c^*)-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}f_X(c^*) < 0$ ein Maximum.

QED

Beweis von Lemma 6.2.1:
Es gilt für die Rückversicherungsprämie laut Definition 4.1.2

$$\begin{aligned} RVP(c) &= (1+\gamma)E(RVS(c,X)) = (1+\gamma)\left[\int_0^c x\,dF_X(x)+\int_c^\infty c\,dF_X(x)\right] \\ &= (1+\gamma)\left[\int_0^c x\,dF_X(x)+c[1-F_X(c)]\right]. \end{aligned}$$

Somit folgt für das erste Differential der Rückversicherungsprämie

$$RVP_c(c) = (1+\gamma)[cf_X(c)+1-F_X(d)+c(-f_X(c))] = (1+\gamma)[1-F_X(c)]$$

bzw. für das zweite Differential $RVP_{cc}(c) = -(1+\gamma)f_X(c)$.

QED

Beweis von Satz 6.2.2:
Man setze das erste Differential der Rückversicherungsprämie aus Lemma 6.2.1 in die implizite Lösung von Satz 6.2.1 für den Fall $F_X(c) \geq 1-\alpha$[32] ein und erhält

$$\begin{aligned} F_X(c^*) = 1-\frac{\alpha}{\lambda}RVP_c(c^*) \quad &\Rightarrow \quad F_X(d^*) = 1-\frac{\alpha}{\lambda}(1+\gamma)[1-F_X(c^*)]] \\ &\Rightarrow \quad \left[\frac{\alpha}{\lambda}(1+\gamma)+1\right][1-F_X(c^*)] = 0 \\ &\Rightarrow \quad F_X(c^*) = 1. \end{aligned}$$

[31] Es gilt $\frac{\lambda}{\alpha}+\left(1-\frac{\lambda}{\alpha}\right)\frac{1}{1-\alpha} = \frac{\lambda(1-\alpha)+\alpha-\lambda}{\alpha(1-\alpha)} = \frac{-\lambda\alpha+\alpha}{\alpha(1-\alpha)} = \frac{\alpha(1-\lambda)}{\alpha(1-\alpha)} = \frac{1-\lambda}{1-\alpha}$.
[32] Dies ist zu $\lambda \geq RVP_c(c^*)$ äquivalent.

Für die zugehörige Maximalbedingung gilt durch Einsetzen der zweiten Ableitung der Rückversicherungsprämie aus Lemma 6.2.1

$$\begin{aligned} -RVP_{cc}(d^*) - \frac{\lambda}{\alpha} f_X(c^*) < 0 \quad &\Rightarrow \quad (1+\gamma) f_X(c^*) - \frac{\lambda}{\alpha} f_X(c^*) < 0 \\ &\Rightarrow \quad \left(1 + \gamma - \frac{\lambda}{\alpha}\right) f_X(c^*) < 0. \end{aligned}$$

Fall $f_X(c^*) \neq 0$: Da die Schadensdichte keine negativen Werte annehmen kann, ist

$$\left(1 + \gamma - \frac{\lambda}{\alpha}\right) f_X(c^*) < 0,$$

genau dann, wenn $1 + \gamma < \frac{\lambda}{\alpha}$ gilt. Somit ist $F_X(c^*) = 1$ das Maximum, wenn die Bedingung $1 + \gamma < \frac{\lambda}{\alpha}$ erfüllt ist. Dies ist gleichzeitig eine Randlösung und somit das globale Maximum.

Fall $f_X(c^*) = 0$: In diesem Fall ist die zweite Ableitung gleich null. Es handelt sich somit um einen Wendepunkt. In diesem Fall befindet sich das globale Maximum am Rand. Es gilt für das Maximum $F_X(c^*) = 1$, da $\Phi_{\alpha,\lambda}(G(c^*, X)) \geq \Phi_{\alpha,\lambda}(G(c, X))$ für alle $c \geq 0$ ist. Dies soll im Folgenden gezeigt werden. Es ist

$$\begin{aligned} \Phi_{\alpha,\lambda}(G(c^*, X)) &= \frac{\lambda}{\alpha}[Pr - B - RVP(c^*)] + \left(1 - \frac{\lambda}{\alpha}\right)[Pr - B - RVP(c^*)] \\ &= Pr - B - RVP(c^*) = Pr - B - (1+\gamma)E(X) \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \Phi_{\alpha,\lambda}(G(c, X)) &= \frac{\lambda}{\alpha}[Pr - B - E(X) - RVP(c) + E(RVS(c, X))] \\ &+ \left(1 - \frac{\lambda}{\alpha}\right)[Pr - B - RVP(c)] \\ &= Pr - B - RVP(c) - \frac{\lambda}{\alpha}[E(X) - E(RVS(c, X))] \\ &= Pr - B - (1+\gamma)E(X) + (1+\gamma)E(X) \\ &- (1+\gamma)E(RVS(c, X)) - \frac{\lambda}{\alpha}[E(X) - E(RVS(c, X))] \\ &= Pr - B - (1+\gamma)E(X) \\ &- \left[-(1+\gamma) + \frac{\lambda}{\alpha}\right][E(X) - E(RVS(c, X))]. \end{aligned}$$

Somit gilt für $1 + \gamma < \frac{\lambda}{\alpha}$, dass $\Phi_{\alpha,\lambda}(G(c^*, X)) \geq \Phi_{\alpha,\lambda}(G(c, X))$ für alle $c \geq 0$ ist.

Man betrachte den Fall $F_X(c) < 1 - \alpha$[33] und setze das erste Differential der Rückversi-

[33]Dies ist zu $\lambda < RVP_c(c^*)$ äquivalent.

cherungsprämie aus Lemma 6.2.1 in die implizite Lösung von Satz 6.2.1 ein. Es gilt

$$\begin{aligned}
& F_X(c^*) = \frac{1-\alpha}{1-\lambda}[1 - RVP_c(c^*)] \\
\Rightarrow\quad & F_X(c^*) = \frac{1-\alpha}{1-\lambda}[1 - (1+\gamma)[1 - F_X(c^*)]] \\
\Rightarrow\quad & \frac{1-\alpha}{1-\lambda} - \frac{1-\alpha}{1-\lambda}(1+\gamma) + \left(\frac{1-\alpha}{1-\lambda}(1+\gamma) - 1\right) F_X(c^*) = 0 \\
\Rightarrow\quad & \frac{1-\alpha}{1-\lambda}(1 - 1 - \gamma) + \left(\frac{1-\alpha}{1-\lambda}(1+\gamma) - 1\right) F_X(c^*) = 0 \\
\Rightarrow\quad & -\gamma(1-\alpha) + ((1-\alpha)(1+\gamma) - (1-\lambda))\, F_X(c^*) = 0 \\
\Rightarrow\quad & F_X(c^*) = \frac{\gamma(1-\alpha)}{(1-\alpha)(1+\gamma) - (1-\lambda)}.
\end{aligned}$$

Man betrachte die zweite Ableitung zur Bestimmung der Art des Extremums. Es gilt

$$\begin{aligned}
-RVP_{cc}(c^*) - \frac{1-\lambda}{1-\alpha} f_X(c^*) < 0 \quad & \Rightarrow \quad (1+\gamma) f_X(d^*) - \frac{1-\lambda}{1-\alpha} f_X(c^*) < 0 \\
& \Rightarrow \quad \left[1 + \gamma - \frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right] f_X(c^*) < 0.
\end{aligned}$$

Da die Schadensdichte keine negativen Werte annehmen kann, ist die zweite Ableitung des Präferenzfunktionals nur dann negativ, wenn $1+\gamma < \frac{1-\lambda}{1-\alpha}$ erfüllt ist.

Es stellt sich die Frage nach der Existenz des Extremums. Dazu betrachte man $F_X(c^*) \geq 0$[34]. Dies gilt, wenn der Nenner der Lösung nicht negativ ist. Es muss somit

$$(1-\alpha)(1+\gamma) - (1-\lambda) \geq 0 \;\Rightarrow\; 1+\gamma \geq \frac{1-\lambda}{1-\alpha}$$

zutreffen. Damit ist die Lösung, wenn sie existiert, ein Minimum. Des Weiteren muss $F_X(c^*) < 1-\alpha$ gelten. Dies ist zu $1+\gamma < \frac{\lambda}{\alpha}$ äquivalent[35]. Somit ist $F_X(c^*) = \frac{\gamma(1-\alpha)}{(1-\alpha)(1+\gamma)-(1-\lambda)}$ ein Minimum für $1+\gamma < \frac{\lambda}{\alpha}$.

Zusammenfassend gilt folglich für $1+\gamma < \frac{\lambda}{\alpha}$ ist $F_X(c^*) = 1$ das Maximum und $F_X(c^*) = \frac{\gamma(1-\alpha)}{(1-\alpha)(1+\gamma)-(1-\lambda)}$ das Minimum. Im Fall $1+\gamma > \frac{\lambda}{\alpha}$ ist $F_X(c^*) = 1$ das Minimum, somit muss das Maximum am anderen Rand angenommen werden und es gilt $F_X(c^*) = 0$. Für das Maximum $F_X(c^*) = 0$ muss $\Phi_{\alpha,\lambda}(G(c^*, X)) \geq \Phi_{\alpha,\lambda}(G(c, X))$ für alle $c \geq 0$ und $1+\gamma > \frac{\lambda}{\alpha}$ gelten. Dies soll im Folgenden gezeigt werden. Es gilt

$$\begin{aligned}
\Phi_{\alpha,\lambda}(G(c^*, X)) &= \frac{\lambda}{\alpha}[Pr - B - E(X)] + \left(1 - \frac{\lambda}{\alpha}\right)\left[Pr - B - \frac{1}{1-\alpha}\int_0^{F_X^{-1}(1-\alpha)} x\, dF_X(x)\right] \\
&= Pr - B - \frac{\lambda}{\alpha}E(X) - \left(1 - \frac{\lambda}{\alpha}\right)\frac{1}{1-\alpha}\int_0^{F_X^{-1}(1-\alpha)} x\, dF_X(x)
\end{aligned}$$

---

[34]Für die Existenz des Extremums muss $0 \leq F_X(c^*) < 1-\alpha$ gelten.
[35]Vgl. Beweis zu Satz 5.3.2.

bzw.

$$\begin{aligned}
\Phi_{\alpha,\lambda}(G(c,X)) &= \frac{\lambda}{\alpha}\left[Pr - B - E(X) - RVP(c) + E(RVS(c,X))\right] \\
&+ \left(1-\frac{\lambda}{\alpha}\right)\left[Pr - B - RVP(c) + c\left[1 - \frac{1}{1-\alpha}F_X(c)\right]\right. \\
&- \left.\frac{1}{1-\alpha}\int\limits_c^{F_X^{-1}(1-\alpha)} x\, dF_X(x)\right] \\
&= Pr - B - \frac{\lambda}{\alpha}E(X) - \left(1-\frac{\lambda}{\alpha}\right)\frac{1}{1-\alpha}\int\limits_0^{F_X^{-1}(1-\alpha)} x\, dF_X(x) \\
&- RVP(c) + \left[\frac{\lambda}{\alpha} + \left(1-\frac{\lambda}{\alpha}\right)\frac{1}{1-\alpha}\right]E(RVS(c,X))^{36} \\
&= Pr - B - \frac{\lambda}{\alpha}E(X) - \left(1-\frac{\lambda}{\alpha}\right)\frac{1}{1-\alpha}\int\limits_0^{F_X^{-1}(1-\alpha)} x\, dF_X(x) \\
&- (1+\gamma)E(RVS(c,X)) + \frac{1-\lambda}{1-\alpha}E(RVS(c,X)) \\
&= Pr - B - \frac{\lambda}{\alpha}E(X) - \left(1-\frac{\lambda}{\alpha}\right)\frac{1}{1-\alpha}\int\limits_0^{F_X^{-1}(1-\alpha)} x\, dF_X(x) \\
&- \left[1+\gamma - \frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right]E(RVS(c,X)).
\end{aligned}$$

Somit folgt für $1+\gamma > \frac{\lambda}{\alpha}$ (in diesem Fall gilt auch $1+\gamma < \frac{1-\lambda}{1-\alpha}$), dass $\Phi_{\alpha,\lambda}(G(c^*,X)) \geq \Phi_{\alpha,\lambda}(G(c,X))$ für alle $c \geq 0$ und damit $F_X(c^*) = 0$ das globale Maximum ist.

QED

C.3 Beweise für das zweidimensionale Optimierungsproblem

Beweis von Satz 7.1.1:
Es gilt

$$\Phi_{\alpha,\lambda}(G(c,d,X)) = \frac{1-\lambda}{1-\alpha}E(G(c,d,X)) + \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}E(G(c,d,X)|G(c,d,X) \leq g_{\alpha,X}).$$

[36] Folgt wegen

$$\begin{aligned}
&c[1 - \tfrac{1}{1-\alpha}F_X(c)] - \tfrac{1}{1-\alpha}\int\limits_c^{F_X^{-1}(1-\alpha)} x\, dF_X(x) + \tfrac{1}{1-\alpha}\int\limits_0^{F_X^{-1}(1-\alpha)} x\, dF_X(x) - \tfrac{1}{1-\alpha}\int\limits_0^{F_X^{-1}(1-\alpha)} x\, dF_X(x) \\
&= -\tfrac{1}{1-\alpha}\int\limits_0^{F_X^{-1}(1-\alpha)} x\, dF_X(x) + \tfrac{1}{1-\alpha}\left[\int\limits_0^c x\, dF_X(x) + \int\limits_c^\infty c\, dF_X(x)\right] \\
&= -\tfrac{1}{1-\alpha}\int\limits_0^{F_X^{-1}(1-\alpha)} x\, dF_X(x) + \tfrac{1}{1-\alpha}E(RVS(d,X)).
\end{aligned}$$

Dies ist zu

$$\Phi_{\alpha,\lambda}(G(c,d,X)) = \frac{\lambda}{\alpha} E(G(c,d,X)) + \left(1 - \frac{\lambda}{\alpha}\right) E(G(c,d,X)|X \leq x_{1-\alpha})$$

äquivalent. Um das Präferenzfunktional zu optimieren, benötigt man dessen partielle Ableitungen. Für die Ableitungen des Präferenzfunktionals gilt

$$\begin{aligned}
D_c(\Phi_{\alpha,\lambda}(G(d,X))) &= \frac{\lambda}{\alpha} D_c(E(G(c,d,X))) + \left(1 - \frac{\lambda}{\alpha}\right) D_c(E(G(c,d,X)|X \leq x_{1-\alpha})) \\
D_d(\Phi_{\alpha,\lambda}(G(d,X))) &= \frac{\lambda}{\alpha} D_d(E(G(c,d,X))) + \left(1 - \frac{\lambda}{\alpha}\right) D_d(E(G(c,d,X)|X \leq x_{1-\alpha})).
\end{aligned}$$

Für die partiellen Ableitungen benötigt man die Ableitungen des erwarteten Gewinns und des bedingten erwarteten Gewinns. Zunächst betrachte man den Gewinn. Es gilt

$$G(c,d,X)) = Pr - B - RVP(c,d) - X + \begin{cases} 0 & X \leq d \\ X - d & d < X \leq c \\ c - d & X > c \end{cases}.$$

Daraus folgt für den erwarteten Gewinn

$$\begin{aligned}
E(G(c,d,X)) &= Pr - B - RVP(c,d) - E(X) \\
&+ \int_d^c (x-d)\ dF_X(x) + \int_c^\infty (c-d)\ dF_X(x) \\
&= Pr - B - RVP(c,d) - E(X) \\
&+ \int_d^c x\ dF_X(x) - \int_d^\infty d\ dF_X(x) + \int_c^\infty c\ dF_X(x) \\
&= Pr - B - RVP(c,d) - E(X) + \int_d^c x\ dF_X - d(1 - F_X(d)) + c(1 - F_X(c))
\end{aligned}$$

und für die ersten und zweiten partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned}
D_c(E(G(c,d,X))) &= -RVP_c(c,d) + cf_X(c) + c(-f_X(c)) + 1 - F_X(c) \\
&= -RVP_c(c,d) + 1 - F_X(c) \\
D_{cc}(E(G(c,d,X))) &= -RVP_{cc}(c,d) - f_X(c)
\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}
D_d(E(G(c,d,X))) &= -RVP_d(c,d) - df_X(d) - d(-f_X(d)) - 1 + F_X(d) \\
&= -RVP_d(c,d) - 1 + F_X(d) \\
D_{dd}(E(G(c,d,X))) &= -RVP_{dd}(c,d) + f_X(d) \\
D_{cd}(E(G(c,d,X))) &= D_{dc}(E(G(c,d,X))) = -RVP_{cd}(c,d).
\end{aligned}$$

1. Fall: $F_X(c) \geq F_X(d) \geq 1-\alpha$:
Für den bedingten Erwartungswert gilt

$$\begin{aligned} E(G(c,d,X)|X \leq x_{1-\alpha}) &= \frac{1}{1-\alpha}\left[\int\limits_0^{F_X^{-1}(1-\alpha)} [Pr - B - RVP(c,d) - x]\ dF_X(x)\right] \\ &= Pr - B - RVP(c,d) - \frac{1}{1-\alpha}\int\limits_0^{F_X^{-1}(1-\alpha)} x\ dF_X(x). \end{aligned}$$

Für die ersten und zweiten partiellen Ableitungen lässt sich

$$\begin{aligned} D_c(E(G(c,d,X)|X \leq x_{1-\alpha})) &= -RVP_c(c,d) \\ D_{cc}(E(G(c,d,X)|X \leq x_{1-\alpha})) &= -RVP_{cc}(c,d) \\ D_d(E(G(c,d,X)|X \leq x_{1-\alpha})) &= -RVP_d(c,d) \\ D_{dd}(E(G(c,d,X)|X \leq x_{1-\alpha})) &= -RVP_{dd}(c,d) \\ D_{cd}(E(G(c,d,X)|X \leq x_{1-\alpha})) &= D_{dc}(E(G(c,d,X)|X \leq x_{1-\alpha})) = -RVP_{cd}(c,d) \end{aligned}$$

feststellen. Somit gilt für die ersten Ableitungen des Präferenzfunktionals

$$\begin{aligned} D_c(\Phi_{\alpha,\lambda}(G(c,d,X))) &= \frac{\lambda}{\alpha}D_c(E(G(c,d,X))) + \left(1-\frac{\lambda}{\alpha}\right)D_c(E(G(c,d,X)|X \leq x_{1-\alpha})) \\ &= \frac{\lambda}{\alpha}[-RVP_c(c,d) + 1 - F_X(c)] + \left(1-\frac{\lambda}{\alpha}\right)[-RVP_c(c,d)] \\ &= -RVP_c(c,d) + \frac{\lambda}{\alpha}[1-F_X(c)] \\ D_d(\Phi_{\alpha,\lambda}(G(d,X))) &= \frac{\lambda}{\alpha}[-RVP_d(c,d) - 1 + F_X(d)] + \left(1-\frac{\lambda}{\alpha}\right)[-RVP_d(c,d)] \\ &= -RVP_d(c,d) + \frac{\lambda}{\alpha}[-1+F_X(d)]. \end{aligned}$$

Setzt man diese gleich null, erhält man folgende implizite Lösungen

$$\begin{aligned} F_X(c^*) &= 1 - \frac{\alpha}{\lambda}RVP_c(c^*,d^*) \\ F_X(d^*) &= 1 + \frac{\alpha}{\lambda}RVP_d(c^*,d^*). \end{aligned}$$

Für die zweiten Differentiale gilt

$$\begin{aligned} D_{cc}(\Phi_{\alpha,\lambda}(G(c,d,X))) &= -RVP_{cc}(c,d) - \frac{\lambda}{\alpha}f_X(c) \\ D_{dd}(\Phi_{\alpha,\lambda}(G(c,d,X))) &= -RVP_{dd}(c,d) + \frac{\lambda}{\alpha}f_X(d) \\ D_{cd}(\Phi_{\alpha,\lambda}(G(c,d,X))) &= D_{dc}(\Phi_{\alpha,\lambda}(G(c,d,X))) = -RVP_{cd}(c,d). \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der Art der Extrema benutzt man die Hesse-Matrix. Diese beinhaltet die zweiten partiellen Ableitungen des Präferenzfunktionals und muss negativ definit sein, wenn die zweidimensionale Lösung ein Maximum ist. Somit ist die implizite Lösung

$$(F_X(c^*), F_X(d^*)) = \left(1 - \frac{\alpha}{\lambda}RVP_c(c^*,d^*), 1 + \frac{\alpha}{\lambda}RVP_d(c^*,d^*)\right)$$

ein Maximum, wenn die Hesse-Matrix

$$\begin{aligned} H_1 &= \begin{pmatrix} D_{cc}(\Phi_{\alpha,\lambda}(G(c^*,d^*,X))) & D_{cd}(\Phi_{\alpha,\lambda}(G(c^*,d^*,X))) \\ D_{cd}(\Phi_{\alpha,\lambda}(G(c^*,d^*,X))) & D_{dd}(\Phi_{\alpha,\lambda}(G(c^*,d^*,X))) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{\lambda}{\alpha}f_X(c^*) - RVP_{cc}(c^*,d^*) & -RVP_{cd}(c^*,d^*) \\ -RVP_{cd}(c^*,d^*) & \frac{\lambda}{\alpha}f_X(d^*) - RVP_{dd}(c^*,d^*) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

negativ definit ist.
Man betrachte die Fallunterscheidung $F_X(c) \geq F_X(d) \geq 1-\alpha$. Es gilt somit

$$1 - \frac{\alpha}{\lambda}RVP_c(c^*,d^*) \geq 1-\alpha$$

bzw.

$$1 + \frac{\alpha}{\lambda}RVP_d(c^*,d^*) \geq 1-\alpha$$

und dies ist zu $\lambda \geq RVP_c(c^*,d^*)$ bzw. zu $\lambda \geq -RVP_d(c^*,d^*)$ äquivalent.

2. Fall: $F_X(c) \geq 1-\alpha > F_X(d)$:
Für den bedingten Erwartungswert gilt

$$\begin{aligned} E(G(c,d,X)|X \leq x_{1-\alpha}) &= \frac{1}{1-\alpha}\left[\int_0^d [Pr - B - RVP(c,d) - x]\, dF_X(x) \right. \\ &\quad \left. + \int_d^{F_X^{-1}(1-\alpha)} [Pr - B - RVP(c,d) - x + x - d]\, dF_X(x)\right] \\ &= Pr - B - RVP(c,d) - \frac{1}{1-\alpha}\int_0^d x\, dF_X(x) \\ &\quad - d\left[1 - \frac{1}{1-\alpha}F_X(d)\right]. \end{aligned}$$

Daraus folgt für die ersten und zweiten partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} D_c(E(G(c,d,X)|X \leq x_{1-\alpha})) &= -RVP_c(c,d) \\ D_{cc}(E(G(c,d,X)|X \leq x_{1-\alpha})) &= -RVP_{cc}(c,d) \\ D_d(E(G(c,d,X)|X \leq x_{1-\alpha})) &= -RVP_d(c,d) - \frac{1}{1-\alpha}df_X(d) - 1 + \frac{1}{1-\alpha}F_X(d) \\ &\quad + \frac{1}{1-\alpha}df_X(d) \\ &= -RVP_d(c,d) - 1 + \frac{1}{1-\alpha}F_X(d) \\ D_{dd}(E(G(c,d,X)|X \leq x_{1-\alpha})) &= -RVP_{dd}(c,d) + \frac{1}{1-\alpha}f_X(d) \\ D_{cd}(E(G(c,d,X)|X \leq x_{1-\alpha})) &= D_{dc}(E(G(c,d,X)|X \leq x_{1-\alpha})) = -RVP_{cd}(c,d). \end{aligned}$$

Entsprechend gilt für die ersten Ableitungen des Präferenzfunktionals

$$\begin{aligned}
D_c(\Phi_{\alpha,\lambda}(G(c,d,X))) &= \frac{\lambda}{\alpha} D_c(E(G(c,d,X))) + \left(1-\frac{\lambda}{\alpha}\right) D_c(E(G(c,d,X)|X \leq x_{1-\alpha})) \\
&= \frac{\lambda}{\alpha}[-RVP_c(c,d) + 1 - F_X(c)] + \left(1-\frac{\lambda}{\alpha}\right)[-RVP_c(c,d)] \\
&= -RVP_c(c,d) + \frac{\lambda}{\alpha}[1 - F_X(c)] \\
D_d(\Phi_{\alpha,\lambda}(G(d,X))) &= \frac{\lambda}{\alpha}[-RVP_d(c,d) - 1 + F_X(d)] \\
&+ \left(1-\frac{\lambda}{\alpha}\right)\left[-RVP_d(c,d) - 1 + \frac{1}{1-\alpha}F_X(d)\right] \\
&= -RVP_d(c,d) - 1 + \left(\frac{\lambda}{\alpha} + \left(1-\frac{\lambda}{\alpha}\right)\frac{1}{1-\alpha}\right)F_X(d) \\
&= -RVP_d(c,d) - 1 + \frac{1-\lambda}{1-\alpha}F_X(d)^{37}.
\end{aligned}$$

Man setze die Ableitungen gleich null und erhält folgende implizite Lösungen

$$\begin{aligned}
F_X(c^*) &= 1 - \frac{\alpha}{\lambda}RVP_c(c^*,d^*) \\
F_X(d^*) &= \frac{1-\alpha}{1-\lambda}(1 + RVP_d(c^*,d^*)).
\end{aligned}$$

Für die zweiten Differentiale gilt

$$\begin{aligned}
D_{cc}(\Phi_{\alpha,\lambda}(G(c,d,X))) &= -RVP_{cc}(c,d) - \frac{\lambda}{\alpha}f_X(c) \\
D_{dd}(\Phi_{\alpha,\lambda}(G(c,d,X))) &= -RVP_{dd}(c,d) + \frac{1-\lambda}{1-\alpha}f_X(d) \\
D_{cd}(\Phi_{\alpha,\lambda}(G(c,d,X))) &= D_{dc}(\Phi_{\alpha,\lambda}(G(c,d,X))) = -RVP_{cd}(c,d).
\end{aligned}$$

Zur Bestimmung der Art der Extrema benutzt man die Hesse-Matrix. Diese beinhaltet die zweiten partiellen Ableitungen des Präferenzfunktionals und muss negativ definit sein, wenn die zweidimensionale Lösung ein Maximum ist. Somit ist die implizite Lösung

$$(F_X(c^*), F_X(d^*)) = \left(1 - \frac{\alpha}{\lambda}RVP_c(c^*,d^*), \frac{1-\alpha}{1-\lambda}(1 + RVP_d(c^*,d^*))\right)$$

ein Maximum, wenn die Hesse-Matrix

$$\begin{aligned}
H_2 &= \begin{pmatrix} D_{cc}(\Phi_{\alpha,\lambda}(G(c^*,d^*,X))) & D_{cd}(\Phi_{\alpha,\lambda}(G(c^*,d^*,X))) \\ D_{cd}(\Phi_{\alpha,\lambda}(G(c^*,d^*,X))) & D_{dd}(\Phi_{\alpha,\lambda}(G(c^*,d^*,X))) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{\lambda}{\alpha}f_X(c^*) - RVP_{cc}(c^*,d^*) & -RVP_{cd}(c^*,d^*) \\ -RVP_{cd}(c^*,d^*) & \frac{1-\lambda}{1-\alpha}f_X(d) - RVP_{dd}(c^*,d^*). \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

[37] Es gilt $\frac{\lambda}{\alpha} + \left(1-\frac{\lambda}{\alpha}\right)\frac{1}{1-\alpha} = \frac{\lambda(1-\alpha)+\alpha-\lambda}{\alpha(1-\alpha)} = \frac{\lambda-\alpha\lambda+\alpha-\lambda}{\alpha(1-\alpha)} = \frac{\alpha(1-\lambda)}{\alpha(1-\alpha)} = \frac{1-\lambda}{1-\alpha}$.

negativ definit ist. In diesem Fall gilt $F_X(c) \geq 1-\alpha > F_X(d)$ und somit auch

$$1 - \frac{\alpha}{\lambda} RVP_c(c^*, d^*) \geq 1 - \alpha$$

bzw.

$$\frac{1-\alpha}{1-\lambda}(1 + RVP_d(c^*, d^*)) < 1 - \alpha$$

und dies ist zu $\lambda \geq RVP_c(c^*, d^*)$ bzw. zu $\lambda < -RVP_d(c^*, d^*)$ äquivalent.

3. Fall: $1-\alpha > F_X(c) \geq F_X(d)$:

Für den bedingten Erwartungswert gilt

$$\begin{aligned}
E(G(c,d,X)|X \leq x_{1-\alpha}) &= \frac{1}{1-\alpha}\left[\int_0^d [Pr - B - RVP(c,d) - x]\; dF_X(x)\right. \\
&+ \int_d^c [Pr - B - RVP(c,d) - x + x - d]\; dF_X(x) \\
&+ \left.\int_c^{F_X^{-1}(1-\alpha)} [Pr - B - RVP(c,d) - x + c - d]\; dF_X(x)\right] \\
&= Pr - B - RVP(c,d) - \frac{1}{1-\alpha}\int_0^d x\; dF_X(x) \\
&- \frac{1}{1-\alpha}\int_d^{F_X^{-1}(1-\alpha)} d\; dF_X(x) - \frac{1}{1-\alpha}\int_c^{F_X^{-1}(1-\alpha)} x\; dF_X(x) \\
&+ \frac{1}{1-\alpha}\int_c^{F_X^{-1}(1-\alpha)} c\; dF_X(x) \\
&= Pr - B - RVP(c,d) \\
&- \frac{1}{1-\alpha}\int_0^d x\; dF_X(x) - \frac{1}{1-\alpha}\int_c^{F_X^{-1}(1-\alpha)} x\; dF_X(x) \\
&- d\left(1 - \frac{1}{1-\alpha}F_X(d)\right) + c\left(1 - \frac{1}{1-\alpha}F_X(c)\right).
\end{aligned}$$

Es gilt für die ersten und zweiten partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned}
D_c(E(G(c,d,X)|X \leq x_{1-\alpha})) &= -RVP_c(c,d) + \frac{1}{1-\alpha} c f_X(c) + 1 - \frac{1}{1-\alpha} F_X(c) \\
&+ \frac{1}{1-\alpha} c(-f_X(c)) \\
&= -RVP_c(c,d) + 1 - \frac{1}{1-\alpha} F_X(c) \\
D_{cc}(E(G(c,d,X)|X \leq x_{1-\alpha})) &= -RVP_{cc}(c,d) - \frac{1}{1-\alpha} f_X(c) \\
D_d(E(G(c,d,X)|X \leq x_{1-\alpha})) &= -RVP_d(c,d) - \frac{1}{1-\alpha} d f_X(d) - 1 + \frac{1}{1-\alpha} F_X(d) \\
&+ \frac{1}{1-\alpha} d f_X(d) \\
&= -RVP_d(c,d) - 1 + \frac{1}{1-\alpha} F_X(d) \\
D_{dd}(E(G(c,d,X)|X \leq x_{1-\alpha})) &= -RVP_{dd}(c,d) + \frac{1}{1-\alpha} f_X(d) \\
D_{cd}(E(G(c,d,X)|X \leq x_{1-\alpha})) &= D_{dc}(E(G(c,d,X)|X \leq x_{1-\alpha})) = -RVP_{cd}(c,d).
\end{aligned}$$

Somit folgt für die ersten Ableitungen des Präferenzfunktionals

$$\begin{aligned}
D_c(\Phi_{\alpha,\lambda}(G(c,d,X))) &= \frac{\lambda}{\alpha} D_c(E(G(c,d,X))) + \left(1 - \frac{\lambda}{\alpha}\right) D_c(E(G(c,d,X)|X \leq x_{1-\alpha})) \\
&= \frac{\lambda}{\alpha}[-RVP_c(c,d) + 1 - F_X(c)] \\
&+ \left(1 - \frac{\lambda}{\alpha}\right)[-RVP_c(c,d) + 1 - \frac{1}{1-\alpha} F_X(c)] \\
&= 1 - RVP_c(c,d) - \left(\frac{\lambda}{\alpha} + \left(1 - \frac{\lambda}{\alpha}\right)\frac{1}{1-\alpha}\right) F_X(c) \\
&= 1 - RVP_c(c,d) - \frac{1-\lambda}{1-\alpha} F_X(c) \\
D_d(\Phi_{\alpha,\lambda}(G(d,X))) &= \frac{\lambda}{\alpha}[-RVP_d(c,d) - 1 + F_X(d)] \\
&+ \left(1 - \frac{\lambda}{\alpha}\right)[-RVP_d(c,d) - 1 + \frac{1}{1-\alpha} F_X(d)] \\
&= -RVP_d(c,d) - 1 + \left(\frac{\lambda}{\alpha} + \left(1 - \frac{\lambda}{\alpha}\right)\frac{1}{1-\alpha}\right) F_X(d) \\
&= -RVP_d(c,d) - 1 + \frac{1-\lambda}{1-\alpha} F_X(d).
\end{aligned}$$

Durch Nullsetzen der ersten Ableitungen erhält man die folgenden impliziten Lösungen

$$\begin{aligned}
F_X(c^*) &= \frac{1-\alpha}{1-\lambda}(1 - RVP_c(c^*, d^*)) \\
F_X(d^*) &= \frac{1-\alpha}{1-\lambda}(1 + RVP_d(c^*, d^*)).
\end{aligned}$$

Für die zweiten Differentiale gilt dann

$$\begin{aligned} D_{cc}(\Phi_{\alpha,\lambda}(G(c,d,X))) &= -RVP_{cc}(c,d) - \frac{1-\lambda}{1-\alpha} f_X(c) \\ D_{dd}(\Phi_{\alpha,\lambda}(G(c,d,X))) &= -RVP_{dd}(c,d) + \frac{1-\lambda}{1-\alpha} f_X(d) \\ D_{cd}(\Phi_{\alpha,\lambda}(G(c,d,X))) &= D_{dc}(\Phi_{\alpha,\lambda}(G(c,d,X))) = -RVP_{cd}(c,d). \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der Art der Extrema benutzt man die Hesse-Matrix. Diese beinhaltet die zweiten partiellen Ableitungen des Präferenzfunktionals und muss negativ definit sein, wenn die zweidimensionale Lösung ein Maximum ist. Somit ist die implizite Lösung

$$(F_X(c^*), F_X(d^*)) = \left(\frac{1-\alpha}{1-\lambda}(1 - RVP_c(c^*, d^*)), \frac{1-\alpha}{1-\lambda}(1 + RVP_d(c^*, d^*)) \right)$$

ein Maximum, wenn die Hesse-Matrix

$$\begin{aligned} H_3 &= \begin{pmatrix} D_{cc}(\Phi_{\alpha,\lambda}(G(c^*,d^*,X))) & D_{cd}(\Phi_{\alpha,\lambda}(G(c^*,d^*,X))) \\ D_{cd}(\Phi_{\alpha,\lambda}(G(c^*,d^*,X))) & D_{dd}(\Phi_{\alpha,\lambda}(G(c^*,d^*,X))) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1-\lambda}{1-\alpha} f_X(c^*) - RVP_{cc}(c^*,d^*) & -RVP_{cd}(c^*,d^*) \\ -RVP_{cd}(c^*,d^*) & \frac{1-\lambda}{1-\alpha} f_X(d) - RVP_{dd}(c^*,d^*). \end{pmatrix} \end{aligned}$$

negativ definit ist. In diesem Fall gilt $1-\alpha > F_X(c) \geq F_X(d)$ und somit auch

$$\frac{1-\alpha}{1-\lambda}(1 - RVP_c(c^*, d^*)) < 1-\alpha$$

bzw.

$$\frac{1-\alpha}{1-\lambda}(1 + RVP_d(c^*, d^*)) < 1-\alpha$$

und dies ist wiederum zu $\lambda < RVP_c(c^*, d^*)$ bzw. zu $\lambda < -RVP_d(c^*, d^*)$ äquivalent.

QED

Beweis von Lemma 7.3.1:
Es gilt für die Rückversicherungsprämie laut Definition 4.1.2

$$RVP(c,d) = (1+\gamma)E(RVS(c,d,X)).$$

Für den Rückversicherungsschaden ist

$$RVS(c,d,X)) = \begin{cases} 0, & \text{für } X < d \\ X-d, & \text{für } d \leq X < c \\ c-d, & \text{für } X \leq c \end{cases}.$$

Man setze diesen in die Rückversicherungsprämie ein und erhalte

$$\begin{aligned} RVP(c,d) &= (1+\gamma)\left[\int_d^c (x-d)\ dF_X(x) + \int_c^\infty (c-d)\ dF_X(x)\right] \\ &= (1+\gamma)\left[\int_d^c x\ dF_X(x) - d(1-F_X(d)) + c(1-F_X(c))\right]. \end{aligned}$$

Damit folgt für die ersten Differentiale der Rückversicherungsprämie

$$\begin{aligned} RVP_c(c,d) &= (1+\gamma)\left[cf_X(c)+1-F_X(c)+c(-f_X(c))\right] = (1+\gamma)[1-F_X(c)] \\ RVP_d(c,d) &= (1+\gamma)\left[-df_X(d)-1+F_X(d)+df_X(d)\right] = (1+\gamma)[-1+F_X(d)] \end{aligned}$$

bzw. für die zweiten Differentiale

$$\begin{aligned} RVP_{cc}(c,d) &= -(1+\gamma)f_X(c) \\ RVP_{dd}(c,d) &= (1+\gamma)f_X(d) \\ RVP_{cd}(c,d) &= RVP_{dc}(c,d) = 0. \end{aligned}$$

QED

Beweis von Satz 7.3.1:
Man setze das erste Differential der Rückversicherungsprämie aus Lemma 7.3.1 in die implizite Lösung von Satz 7.1.1 für den Fall $\lambda \geq RVP_c(c^*, d^*)$ und $\lambda \geq -RVP_d(c^*, d^*)$ ein und erhält

$$F_X(c^*) = 1 - \frac{\alpha}{\lambda} RVP_c(c^*) \;\Rightarrow\; F_X(d^*) = 1 - \frac{\alpha}{\lambda}(1+\gamma)[1-F_X(c^*)]]$$

$$\Rightarrow\; \left[\frac{\alpha}{\lambda}(1+\gamma)+1\right][1-F_X(c^*)] = 0 \;\Rightarrow\; F_X(c^*) = 1$$

bzw. für die optimale Priorität

$$F_X(d^*) = 1 + \frac{\alpha}{\lambda} RVP_d(d^*) \;\Rightarrow\; F_X(d^*) = 1 + \frac{\alpha}{\lambda}(1+\gamma)[-1+F_X(d^*)]$$

$$\Rightarrow\; \left[\frac{\alpha}{\lambda}(1+\gamma)-1\right][-1+F_X(d^*)] = 0 \;\Rightarrow\; F_X(d^*) = 1.$$

Für die Hesse-Matrix gilt in diesem Fall unter Verwendung der zweiten partiellen Ableitungen der Rückversicherungsprämie

$$\begin{aligned} H_1 &= \begin{pmatrix} -\frac{\lambda}{\alpha} f_X(c^*) - RVP_{cc}(c^*, d^*) & -RVP_{cd}(c^*, d^*) \\ -RVP_{cd}(c^*, d^*) & \frac{\lambda}{\alpha} f_X(d^*) - RVP_{dd}(c^*, d^*) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{\lambda}{\alpha} f_X(c^*) + (1+\gamma) f_X(c^*) & 0 \\ 0 & \frac{\lambda}{\alpha} f_X(d^*) - (1+\gamma) f_X(d^*) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} [1+\gamma-\frac{\lambda}{\alpha}] f_X(c^*) & 0 \\ 0 & [-(1+\gamma)+\frac{\lambda}{\alpha}] f_X(d^*) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Man definiere $\mu_1 := \left[(1+\gamma) - \frac{\lambda}{\alpha}\right]$. Damit ist

$$H_1 = \begin{pmatrix} \mu_1 f_X(c^*) & 0 \\ 0 & -\mu_1 f_X(d^*) \end{pmatrix}.$$

Man wende das Eigenwertkriterium[38] auf diese Matrix an. Es gilt

$$\begin{pmatrix} \mu_1 f_X(c^*) - \kappa_{11} & 0 \\ 0 & -\mu_1 f_X(d^*) - \kappa_{12} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

und man erhält das Gleichungssystem

$$[\mu_1 f_X(c^*) - \kappa_{11}] \cdot x_1 = 0 \qquad [-\mu_1 f_X(d^*) - \kappa_{12}] \cdot x_1 = 0.$$

Da $x_1, x_2 \neq 0$ ist, können nur die Ausdrücke in den eckigen Klammer null sein. Somit sind die Eigenwerte der Hesse-Matrix $\kappa_{11} = \mu_1 f_X(c^*)$ und $\kappa_{12} = -\mu_1 f_X(d^*)$.
Folglich besitzen die Eigenwerte entgegengesetzte Vorzeichen, die Hesse-Matrix ist damit indefinit und $(F_X(c^*), F_X(d^*)) = (1,1)$ ist somit ein Sattelpunkt, wenn $f_X(d^*), f_X(c^*) \neq 0$ gilt.
Zusätzlich gilt allgemein im Fall $\lambda \geq RVP_c(c^*)$ und $\lambda \geq -RVP_d(d^*)$ für

$$(F_X(c^*), F_X(d^*)) = (1,1),$$

dass

$$\Phi_{\alpha,\lambda}(G(c^*, d^*, X)) \geq \Phi_{\alpha,\lambda}(G(c,d,X))$$

für alle $c \geq d \geq 0$. Dies soll im Folgenden gezeigt werden. Es gilt

$$\begin{aligned}
\Phi_{\alpha,\lambda}(G(c^*, d^*, X)) &= \frac{\lambda}{\alpha}[Pr - B - E(X)] \\
&+ \left(1 - \frac{\lambda}{\alpha}\right)\left[Pr - B - \frac{1}{1-\alpha}\int\limits_0^{F_X^{-1}(1-\alpha)} x \, dF_X(x)\right] \\
&= Pr - B - \frac{\lambda}{\alpha}E(X) - \left(1 - \frac{\lambda}{\alpha}\right)\frac{1}{1-\alpha}\int\limits_0^{F_X^{-1}(1-\alpha)} x \, dF_X(x)
\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}
\Phi_{\alpha,\lambda}(G(c,d,X)) &= \frac{\lambda}{\alpha}[Pr - B - E(X) - RVP(c,d) + E(RVS(c,d,X))] \\
&+ \left(1 - \frac{\lambda}{\alpha}\right)\left[Pr - B - RVP(c,d) - \frac{1}{1-\alpha}\int\limits_0^{F_X^{-1}(1-\alpha)} x \, dF_X(x)\right]
\end{aligned}$$

[38] Das Eigenwertkriterium besagt, wenn beide Eigenwerte positiv sind, dann ist die Matrix positiv definit und es liegt ein Minimum vor. Sind dagegen die Eigenwerte negativ, so ist die Hesse-Matrix negativ definit und das Optimum ist ein Maximum. Haben die Eigenwerte unterschiedliche Vorzeichen, dann handelt es sich bei dem Extremum um einen Sattelpunkt und die symmetrische Matrix ist indefinit. Vgl. dazu Dobner, Engelmann (2003), S. 131 ff. Des Weiteren bestimmt man die Eigenwerte durch folgende Formel $(A - \vec{\kappa}E) \cdot \vec{x} = \vec{0}$, wobei $\vec{\kappa}$ der Eigenwertvektor, A eine quadratische Matrix, E die Einheitsmatrix, $\vec{0}$ der Nullvektor und $\vec{x}$ der Eigenvektor ist. Dieser Eigenvektor ist ungleich dem Nullvektor und die quadratische Matrix A ist die Hesse-Matrix. Aus dieser Formel gewinnt man im zweidimensionalen Fall ein Gleichungssystem mit zwei Gleichungen. Dieses löst man nach den Eigenwerten auf unter der Beachtung, dass die Komponenten des Vektors $\vec{x}$ ungleich null sind.

$$\begin{aligned}
&= Pr - B - \frac{\lambda}{\alpha}E(X) - \left(1 - \frac{\lambda}{\alpha}\right)\frac{1}{1-\alpha}\int\limits_0^{F_X^{-1}(1-\alpha)} x\ dF_X(x) \\
&- RVP(c,d) + \frac{\lambda}{\alpha}E(RVS(c,d,X)) \\
&= Pr - B - \frac{\lambda}{\alpha}E(X) - \left(1 - \frac{\lambda}{\alpha}\right)\frac{1}{1-\alpha}\int\limits_0^{F_X^{-1}(1-\alpha)} x\ dF_X(x) \\
&- \left[1 + \gamma - \frac{\lambda}{\alpha}\right] E(RVS(c,d,X)).
\end{aligned}$$

Entsprechend lässt sich für $1+\gamma > \frac{\lambda}{\alpha}$ feststellen, dass $\Phi_{\alpha,\lambda}(G(c^*,d^*,X)) \geq \Phi_{\alpha,\lambda}(G(c,d,X))$ für alle $c \geq d \geq 0$ ist[39].

Man setze das erste Differential der Rückversicherungsprämie aus Lemma 7.3.1 in die implizite Lösung von Satz 7.1.1 für den Fall $\lambda < RVP_c(c^*)$ und $\lambda < -RVP_d(d^*)$ ein und erhält

$$\begin{aligned}
F_X(c^*) = \frac{1-\alpha}{1-\lambda}[1 - RVP_c(c^*)] \ &\Rightarrow\ F_X(c^*) = \frac{1-\alpha}{1-\lambda}[1 - (1+\gamma)[1 - F_X(c^*)]] \\
&\Rightarrow\ \frac{1-\alpha}{1-\lambda} - \frac{1-\alpha}{1-\lambda}(1+\gamma) + \left(\frac{1-\alpha}{1-\lambda}(1+\gamma) - 1\right) F_X(c^*) = 0 \\
&\Rightarrow\ \frac{1-\alpha}{1-\lambda}(1 - 1 - \gamma) + \left(\frac{1-\alpha}{1-\lambda}(1+\gamma) - 1\right) F_X(c^*) = 0 \\
&\Rightarrow\ -\gamma(1-\alpha) + ((1-\alpha)(1+\gamma) - (1-\lambda))\, F_X(c^*) = 0 \\
&\Rightarrow\ F_X(c^*) = \frac{\gamma(1-\alpha)}{(1-\alpha)(1+\gamma) - (1-\lambda)}
\end{aligned}$$

bzw. für die optimale Priorität

$$\begin{aligned}
F_X(d^*) = \frac{1-\alpha}{1-\lambda}[1 + RVP_d(c^*,d^*)] \ &\Rightarrow\ F_X(d^*) = \frac{1-\alpha}{1-\lambda}[1 + (1+\gamma)[-1 + F_X(d^*)]] \\
&\Rightarrow\ \frac{1-\alpha}{1-\lambda} - \frac{1-\alpha}{1-\lambda}(1+\gamma) + \left(\frac{1-\alpha}{1-\lambda}(1+\gamma) - 1\right) F_X(d^*) = 0 \\
&\Rightarrow\ \frac{1-\alpha}{1-\lambda}(1 - 1 - \gamma) + \left(\frac{1-\alpha}{1-\lambda}(1+\gamma) - 1\right) F_X(d^*) = 0 \\
&\Rightarrow\ -\gamma(1-\alpha) + ((1-\alpha)(1+\gamma) - (1-\lambda))\, F_X(d^*) = 0 \\
&\Rightarrow\ F_X(d^*) = \frac{\gamma(1-\alpha)}{(1-\alpha)(1+\gamma) - (1-\lambda)}.
\end{aligned}$$

[39] Dies gilt immer für $F_X(c^*) = F_X(d^*) \geq 1 - \alpha$.

Für die Hesse-Matrix ergibt sich in diesem Fall unter Verwendung der zweiten partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} H_3 &= \begin{pmatrix} -\frac{1-\lambda}{1-\alpha} f_X(c^*) + (1+\gamma) f_X(c^*) & -RVP_{cd}(c^*, d^*) \\ -RVP_{cd}(c^*, d^*) & \frac{1-\lambda}{1-\alpha} f_X(d^*) - (1+\gamma) f_X(d^*) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1-\lambda}{1-\alpha} f_X(c^*) + (1+\gamma) f_X(c^*) & 0 \\ 0 & \frac{1-\lambda}{1-\alpha} f_X(d^*) - (1+\gamma) f_X(d^*) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} [1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}] f_X(c^*) & 0 \\ 0 & [-(1+\gamma)+\frac{1-\lambda}{1-\alpha}] f_X(d^*) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Man definiere $\mu_3 := (1+\gamma) - \frac{1-\lambda}{1-\alpha}$, woraus

$$H_3 = \begin{pmatrix} \mu_3 f_X(c^*) & 0 \\ 0 & -\mu_3 f_X(d^*) \end{pmatrix}$$

folgt. Man bestimme die Eigenwerte dieser Matrix. Es gilt

$$\begin{pmatrix} \mu_3 f_X(c^*) - \kappa_{31} & 0 \\ 0 & -\mu_3 f_X(d^*) - \kappa_{32} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Es lässt sich erkennen, dass die Eigenwerte der Hesse-Matrix $\kappa_{31} = \mu_3 f_X(c^*)$ und $\kappa_{32} = -\mu_3 f_X(d^*)$ sind. Somit besitzen die Eigenwerte entgegengesetzte Vorzeichen. Dementsprechend ist die Hesse-Matrix indefinit und der optimale Punkt ein Sattelpunkt, wobei der Sattelpunkt für $1+\gamma < \frac{\lambda}{\alpha}$ existiert[40].

Man setze das erste Differential der Rückversicherungsprämie aus Lemma 7.3.1 in die implizite Lösung von Satz 7.1.1 für den Fall $\lambda \geq RVP_c(c^*)$ und $\lambda < -RVP_d(d^*)$ ein und erhält

$$F_X(c^*) = 1 - \frac{\alpha}{\lambda} RVP_c(c^*) \;\Rightarrow\; F_X(c^*) = 1$$

bzw. für die optimale Priorität

$$F_X(d^*) = \frac{1-\alpha}{1-\lambda}[1 + RVP_d(c^*, d^*)] \;\Rightarrow\; F_X(d^*) = \frac{1-\alpha}{1-\lambda}[1 + (1+\gamma)[-1 + F_X(d^*)]]$$

$$\Rightarrow\; F_X(d^*) = \frac{\gamma(1-\alpha)}{(1-\alpha)(1+\gamma) - (1-\lambda)}.$$

Für die Hesse-Matrix folgt in diesem Fall unter Verwendung der zweiten partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} H_2 &= \begin{pmatrix} -\frac{\lambda}{\alpha} f_X(c^*) + (1+\gamma) f_X(c^*) & -RVP_{cd}(c^*, d^*) \\ -RVP_{cd}(c^*, d^*) & \frac{1-\lambda}{1-\alpha} f_X(d^*) - (1+\gamma) f_X(d^*) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \left[(1+\gamma) - \frac{\lambda}{\alpha}\right] f_X(c^*) & 0 \\ 0 & \left(-(1+\gamma) + \frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right) f_X(d^*) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mu_1 f_X(c^*) & 0 \\ 0 & -\mu_3 f_X(d^*) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

[40] Vgl. Beweise zu den eindimensionalen Problemen.

Die Eigenwerte sind damit $\kappa_{21} = \mu_1 f_X(c^*)$ und $\kappa_{22} = -\mu_3 f_X(d^*)$.

Fall $f_X(c^*), f_X(d^*) \neq 0$: Für $1+\gamma < \frac{\lambda}{\alpha}$[41] sind beide Eigenwerte negativ und es handelt sich somit um ein Maximum.

Fall $f_X(c^*) = 0$ bzw. $f_X(d^*) = 0$: Für $1+\gamma < \frac{\lambda}{\alpha}$ ist die Hesse-Matrix seminegativ definit. Die Art des Extremums kann somit nicht über das Eigenwertkriterium festgestellt werden. Die Art des Extremums soll durch den Vergleich mit der möglichen Randlösung bestimmt werden. Es wird im Folgenden

$$\Phi_{\alpha,\lambda}(G(c^*, d^*, X)) \geq \Phi_{\alpha,\lambda}(G(1, 0, X))$$

für $(F_X(c^*), F_X(d^*)) = \left(1, \frac{\gamma(1-\alpha)}{(1-\alpha)(1+\gamma)-(1-\lambda)}\right)$ bewiesen. Es gilt für die Präferenzfunktionale

$$\begin{aligned}
\Phi_{\alpha,\lambda}(G(1,0,X)) &= \frac{\lambda}{\alpha}\left[Pr - B - RVP(1,0)\right] + \left(1 - \frac{\lambda}{\alpha}\right)\left[Pr - B - RVP(1,0)\right] \\
&= Pr - B - RVP(1,0) = Pr - B - (1+\gamma)E(X)
\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}
\Phi_{\alpha,\lambda}(G(c^*, d^*, X)) &= \frac{\lambda}{\alpha}\left[Pr - B - E(X) - RVP(c^*, d^*) + E(RVS(c^*, d^*))\right] \\
&+ \left(1 - \frac{\lambda}{\alpha}\right)\left[Pr - B - RVP(c^*, d^*) - \frac{1}{1-\alpha}\int_0^{d^*} x \, dF_X(x)\right. \\
&- \left. d^*\left(1 - \frac{1}{1-\alpha}F_X(d^*)\right)\right] \\
&= Pr - B - RVP(c^*, d^*) - \frac{\lambda}{\alpha}\left[E(X) - E(RVS(c^*, d^*))\right] \\
&- \left(1 - \frac{\lambda}{\alpha}\right)\frac{1}{1-\alpha}\left[\int_0^{d^*} x \, dF_X(x) + \int_{d^*}^{F_X^{-1}(1-\alpha)} d^* \, dF_X(x)\right] \\
&= Pr - B - (1+\gamma)E(X) + (1+\gamma)E(X) \\
&- (1+\gamma)E(RVS(c^*, d^*, X)) - \frac{\lambda}{\alpha}\left[E(X) - E(RVS(c^*, d^*))\right] \\
&- \left(1 - \frac{\lambda}{\alpha}\right)\frac{1}{1-\alpha}\left[\int_0^{d^*} x \, dF_X(x) + \int_{d^*}^{F_X^{-1}(1-\alpha)} d^* \, dF_X(x)\right]
\end{aligned}$$

[41] Das Extremum existiert für $1+\gamma < \frac{\lambda}{\alpha}$, da $0 < F_X(d^*) < 1-\alpha$ gelten muss. Vgl. diesbzgl. Beweise zu den eindimensionalen Problemen.

$$
\begin{aligned}
&= Pr - B - (1+\gamma)E(X) + (1+\gamma)E(EVS(c^*, d^*, X)) \\
&- \frac{\lambda}{\alpha}E(EVS(c^*, d^*, X)) \\
&- \left(1 - \frac{\lambda}{\alpha}\right)\frac{1}{1-\alpha}\left[\int_0^{d^*} x\ dF_X(x) + \int_{d^*}^{F_X^{-1}(1-\alpha)} d^*\ dF_X(x)\right] \\
&= Pr - B - (1+\gamma)E(X) \\
&+ \left[1 + \gamma - \frac{\lambda}{\alpha} - \left(1 - \frac{\lambda}{\alpha}\right)\frac{1}{1-\alpha}\right]\left[\int_0^{d^*} x\ dF_X(x) + \int_{d^*}^{F_X^{-1}(1-\alpha)} d^*\ dF_X(x)\right] \\
&+ \left[1 + \gamma - \frac{\lambda}{\alpha}\right]\int_{F_X^{-1}(1-\alpha)}^{\infty} d^*\ dF_X(x) \\
&= Pr - B - (1+\gamma)E(X) \\
&+ \left[1 + \gamma - \frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right]\left[\int_0^{d^*} x\ dF_X(x) + d^*[1 - \alpha - F_X(d^*)]\right] \\
&+ \left[1 + \gamma - \frac{\lambda}{\alpha}\right] d^*\,[1 - (1-\alpha)] \\
&= Pr - B - (1+\gamma)E(X) + \left[1 + \gamma - \frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right]\int_0^{d^*} x\ dF_X(x) \\
&+ d^*\left[\left[1 + \gamma - \frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right][1 - \alpha - F_X(d^*)] + \left[1 + \gamma - \frac{\lambda}{\alpha}\right]\alpha\right] \\
&= Pr - B - (1+\gamma)E(X) + \left[1 + \gamma - \frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right]\int_0^{d^*} x\ dF_X(x)^{42}.
\end{aligned}
$$

Das Extremum existiert für $1+\gamma < \frac{\lambda}{\alpha}$. In diesem Fall gilt auch $1+\gamma > \frac{1-\lambda}{1-\alpha}$. Durch Vergleich der zwei Präferenzfunktionale folgt damit $\Phi_{\alpha,\lambda}(G(c^*, d^*, X)) \geq \Phi_{\alpha,\lambda}(G(1, 0, X))$. Da keine weiteren lokalen Extrema im Fall $1+\gamma < \frac{\lambda}{\alpha}$ existieren und das Präferenzfunktional für die optimale Lösung (c^*, d^*) auch größer als bei der möglichen Randlösung ist, ist $(F_X(c^*), F_X(d^*)) = \left(1, \frac{\gamma(1-\alpha)}{(1-\alpha)(1+\gamma)-(1-\lambda)}\right)$ globales Maximum.

Zusammenfassend ist somit $(F_X(c^*), F_X(d^*)) = (1, 1)$ das Maximum im Fall $1+\gamma > \frac{\lambda}{\alpha}$ und $(F_X(c^*), F_X(d^*)) = \left(1, \frac{\gamma(1-\alpha)}{(1-\alpha)(1+\gamma)-(1-\lambda)}\right)$ ist das Maximum im Fall $1+\gamma < \frac{\lambda}{\alpha}$.

QED

[42] Folgt wegen $\left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right][1-\alpha-F_X(d^*)] + \left[1+\gamma-\frac{\lambda}{\alpha}\right]\alpha$
$= (1+\gamma)(1-\alpha)-(1-\lambda)-\left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right]*\frac{\gamma(1-\alpha)}{(1-\alpha)(1+\gamma)-(1-\lambda)}+\alpha(1+\gamma)-\lambda = \gamma-\left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right]*\frac{\gamma(1-\alpha)}{(1-\alpha)(1+\gamma)-(1-\lambda)}$
$= \gamma - [(1+\gamma)(1-\alpha)-(1-\lambda)] * \frac{\gamma}{(1-\alpha)(1+\gamma)-(1-\lambda)} = 0.$

C.4 Beweise zur simultanen Optimierung von Erst- und Rückversicherungsgeschäft

Beweis von Satz 8.2.1:
Für den erwarteten Gewinn gilt

$$\begin{aligned} E(G(d,p,\varepsilon)) &= N(p)[p-\mu] - B - \gamma\left[E(RVS(d,p,\varepsilon))\right] \\ &= N(p)[p-\mu] - B - \gamma\left[N(p)\mu \int_{\frac{d}{N(p)\cdot\mu}}^{\infty} \varepsilon \; dF_\varepsilon(\varepsilon) - d\left(1 - F_\varepsilon\left(\frac{d}{N(p)\cdot\mu}\right)\right)\right] \end{aligned}$$

und durch Differenzieren bzgl. der Priorität folgt

$$\begin{aligned} D_d(E(G(d,p,\varepsilon))) &= -\gamma\left[N(p)\cdot\mu\left(-\frac{d}{N(p)\cdot\mu}\right) f_\varepsilon\left(\frac{d}{N(p)\cdot\mu}\right) - \left(1 - F_\varepsilon\left(\frac{d}{N(p)\cdot\mu}\right)\right)\right. \\ &\quad \left. -d\left(-f_\varepsilon\left(\frac{d}{N(p)\cdot\mu}\right)\right)\right] \\ &= -\gamma\left[-1 + F_\varepsilon\left(\frac{d}{N(p)\cdot\mu}\right)\right]. \end{aligned}$$

Somit lässt sich für die optimale Lösung bzgl. der Priorität

$$F_\varepsilon\left(\frac{d^*}{N(p^*)\mu}\right) = F_{X_p}(d^*) = 1$$

feststellen. Dieses Extremum ist eine Randlösung. Die Rückversicherung wird abgelehnt. In diesem Fall gilt für den erwarteten Gewinn

$$E(G(d^*,p,\varepsilon)) = N(p)(p-\mu) - B.$$

Man sieht, dass in diesem Fall der erwartete Gewinn am größten ist[43]. Somit gilt für die optimale Prämie

$$p* = \arg\max_p [N(p)[p-\mu] - B] = \arg\max_p [N(p)(p-\mu)]^{44}$$

für alle $p \in (\mu; p_{\max}]$.

QED

Beweis von Satz 8.2.2:
Man betrachte zunächst den Fall $F_{X_p}(d) < 1-\alpha$:

[43] Es gilt $N(p)\mu \int_{\frac{d^*}{N(p)\cdot\mu}}^{\infty} \varepsilon \; dF_\varepsilon(\varepsilon) - d^*\left(1 - F_\varepsilon\left(\frac{d^*}{N(p)\cdot\mu}\right)\right) = 0$.

[44] Da die Betriebskosten eine Konstante sind, sind diese für die Optimierung irrelevant.

Für den bedingten Erwartungswert in Abhängigkeit von der Priorität d und dem Gesamtschaden X_p gilt

$$\begin{aligned}
E(G(d, X_p)|G(d, X_p) \leq g_{\alpha,d,X_p}) &= \frac{1}{\alpha} \int\limits_{F_{X_p}^{-1}(1-\alpha)}^{\infty} [Pr(p) - B - RVP(d, X_p) - d] \, dF_{X_p}(x) \\
&= Pr(p) - B - (1+\gamma)E(RVS(d, X_p)) - d^{45}.
\end{aligned}$$

Somit ist für den bedingten Erwartungswert in Abhängigkeit von der Priorität d, der Prämie p und der Störgröße ε

$$E(G(d, p, \varepsilon)|G(d, p, \varepsilon) \leq g_{\alpha,d,p,\varepsilon}) = N(p) \cdot p - B - (1+\gamma)E(RVS(d, p, \varepsilon)) - d$$

und für dessen Ableitung bzgl. der Priorität

$$D_d(E(G(d, p, \varepsilon)|G(d, p, \varepsilon) \leq g_{\alpha,d,p,\varepsilon})) = -(1+\gamma)\left[-1 + F_\varepsilon\left(\frac{d}{N(p)\mu}\right)\right] - 1^{46}.$$

Für die erste Ableitung des erwarteten Gewinns bzgl. der Priorität gilt

$$D_d(E((G(d, p, \varepsilon)) = -\gamma\left[-1 + F_\varepsilon\left(\frac{d}{N(p)\mu}\right)\right]^{47}$$

und somit ist die erste Ableitung des Präferenzfunktionals bzgl. der Priorität

$$\begin{aligned}
D_d(\Phi_{\alpha,\lambda}(G(d, p, \varepsilon))) &= \frac{1-\lambda}{1-\alpha}\left[-\gamma\left(-1 + F_\varepsilon\left(\frac{d}{N(p)\mu}\right)\right)\right] \\
&+ \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\left[-(1+\gamma)\left[-1 + F_\varepsilon\left(\frac{d}{N(p)\mu}\right)\right] - 1\right] \\
&= \frac{1-\lambda}{1-\alpha}\gamma + \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}(-1+1+\gamma) \\
&+ \left[\frac{1-\lambda}{1-\alpha}(-\gamma) + \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}(-(1+\gamma))\right] F_\varepsilon\left(\frac{d}{N(p)\mu}\right) \\
&= \gamma - \left[\gamma\frac{1-\lambda}{1-\alpha} + \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}(1+\gamma)\right] F_\varepsilon\left(\frac{d}{N(p)\mu}\right).
\end{aligned}$$

Man setze die Ableitung gleich null und erhält

$$F_{X_p}(d^*) = F_\varepsilon\left(\frac{d^*}{N(p^*)\mu}\right) = \frac{(1-\alpha)\gamma}{\gamma(1-\lambda) + (\lambda-\alpha)(1+\gamma)} = \frac{(1-\alpha)\gamma}{(1+\gamma)(1-\alpha) - (1-\lambda)}.$$

---

[45] Vgl. bzgl. dem bedingten Erwartungswert die Beweise des Prioritätsoptimierungsproblems.

[46] Es gilt $D_d(E(RVS(d, p, \varepsilon))) = -1 + F_\varepsilon\left(\frac{d}{N(p)\mu}\right)$. Vgl. dazu Beweis für das simultane Problem mit dem Erwartungswertkriterium.

[47] Vgl. dazu Beweis für das simultane Problem mit dem Erwartungswertkriterium.

Dieses Extremum existiert dabei für $1+\gamma < \frac{\lambda}{\alpha}$[48]. Für die erste Ableitung des bedingten Erwartungswertes bzgl. der Prämie gilt

$$D_p(\Phi_{\alpha,\lambda}(G(d,p,\varepsilon))) \quad = \quad N_p(p)\cdot p + N(p) - (1+\gamma)D_p[E(RVS(d,p,\varepsilon))],$$

wobei für die Ableitung des erwarteten Rückversicherungsschadens[49]

$$\begin{aligned}
D_p(E(RVS(d,p,\varepsilon))) &= N_p(p)\cdot\mu \int\limits_{\frac{d}{N(p)\cdot\mu}}^{\infty} \varepsilon \; dF_\varepsilon(\varepsilon) \\
&+ N(p)\cdot\mu\left(-\frac{d}{N(p)\cdot\mu}\right) f_\varepsilon\left(\frac{d}{N(p)\cdot\mu}\right)\left(-\frac{d}{N^2(p)\cdot\mu}\right) N_p(p) \\
&+ df_\varepsilon\left(\frac{d}{N(p)\cdot\mu}\right)\left(-\frac{d}{N^2(p)\cdot\mu}\right) N_p(p) \\
&= N_p(p)\cdot\mu \int\limits_{\frac{d}{N(p)\cdot\mu}}^{\infty} \varepsilon \; dF_\varepsilon(\varepsilon)
\end{aligned}$$

geschrieben werden kann. Für den erwarteten Gewinn gilt

$$E((G(d,p,\varepsilon)) = N(p)[p-\mu] - B - \gamma\,[E(RVS(d,p,\varepsilon))]$$

und somit für dessen Ableitung bzgl. der Prämie p

$$D_p(E(G(d,p,\varepsilon))) = N_p(p)\cdot[p-\mu] + N(p) - \gamma D_p\,[E(RVS(d,p,\varepsilon))]\,.$$

Daraus folgt für das Präferenzfunktional

$$\begin{aligned}
\Phi_{\alpha,\lambda}(G(d,p,\varepsilon)) &= \frac{1-\lambda}{1-\alpha}\,[N(p)[p-\mu] - B - \gamma E(RVS(d,p,\varepsilon))] \\
&+ \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\,[N(p)\cdot p - B - (1+\gamma)E(RVS(d,p,\varepsilon)) - d] \\
&= N(p)p - B - \frac{1-\lambda}{1-\alpha}N(p)\mu - \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}d \\
&- \left[\gamma\frac{1-\lambda}{1-\alpha} + (1+\gamma)\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\right] E(RVS(d,p,\varepsilon)) \\
&= N(p)\left[p - \frac{1-\lambda}{1-\alpha}\mu\right] - B - \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}d - \left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right] E(RVS(d,p,\varepsilon))
\end{aligned}$$

und für dessen erste Ableitung bzgl. der Prämie p

$$D_p(\Phi_{\alpha,\lambda}(G(d,p,\varepsilon))) \quad = \quad N(p) + N_p(p)\left[p - \frac{1-\lambda}{1-\alpha}\mu\right] - \left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right] D_p[E(RVS(d,p,\varepsilon))].$$

---

[48] Vgl. z. B. Beweise zum Prioritätsproblem.

[49] Für den erwarteten Rückversicherungsschaden gilt

$$E(RVS(d,p,\varepsilon)) = N(p)\cdot\mu \int\limits_{\frac{d}{N(p)\cdot\mu}}^{\infty} \varepsilon \; dF_\varepsilon(\varepsilon) - d\left(1 - F_\varepsilon\left(\frac{d}{N(p)\cdot\mu}\right)\right).$$

Vgl. Beweis für das simultane Problem mit dem Erwartungswertkriterium.

Für die optimale Prämie[50] gilt dann

$$\begin{aligned} p^* &= \arg\max_p \left[N(p)\left[p - \frac{1-\lambda}{1-\alpha}\mu\right] - B - \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}d^* - \left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right] E(RVS(d^*,p,\varepsilon))\right] \\ &= \arg\max_p \left[N(p)\left[p - \frac{1-\lambda}{1-\alpha}\mu\right] - \left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right] E(RVS(d^*,p,\varepsilon))\right]^{51}. \end{aligned}$$

Im Folgenden soll die Hesse-Matrix für das Extremum bestimmt werden. Dazu benötigt man die zweiten partiellen Ableitungen. Es gilt

$$\begin{aligned} D_{dd}(\Phi_{\alpha\lambda}(G(d,p,\varepsilon))) &= -\left[\gamma\frac{1-\lambda}{1-\alpha} + \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}(1+\gamma)\right] f_\varepsilon\left(\frac{d}{N(p)\mu}\right)\frac{1}{N(p)\mu} \\ &= -\left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right] f_\varepsilon\left(\frac{d}{N(p)\mu}\right)\frac{1}{N(p)\mu} \\ D_{dp}(\Phi_{\alpha\lambda}(G(d,p,\varepsilon))) &= -\left[\gamma\frac{1-\lambda}{1-\alpha} + \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}(1+\gamma)\right] f_\varepsilon\left(\frac{d}{N(p)\mu}\right)\left(-\frac{d}{N^2(p)\mu}\right)N_p(p) \\ &= -\left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right] f_\varepsilon\left(\frac{d}{N(p)\mu}\right)\left(-\frac{d}{N^2(p)\mu}\right)N_p(p) \\ D_{pp}(\Phi_{\alpha\lambda}(G(d,p,\varepsilon))) &= N_p(p) + N_{pp}(p)\left[p-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\mu\right] + N_p(p) \\ &- \left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right] D_{pp}[E(RVS(d,p,\varepsilon))] \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} D_{pp}[E(RVS(d,p,\varepsilon))] &= N_{pp}(p)\cdot\mu \int_{\frac{d}{N(p)\cdot\mu}}^{\infty} \varepsilon\, dF_\varepsilon(\varepsilon) \\ &- N_p(p)\cdot\mu\frac{d}{N(p)\mu} f_\varepsilon\left(\frac{d}{N(p)\mu}\right)\left(-\frac{d}{N^2(p)\mu}\right)N_p(p) \\ &= N_{pp}(p)\cdot\mu \int_{\frac{d}{N(p)\cdot\mu}}^{\infty} \varepsilon\, dF_\varepsilon(\varepsilon) + \frac{d^2(N_p(p))^2}{N^3(p)\mu} f_\varepsilon\left(\frac{d}{N(p)\mu}\right). \end{aligned}$$

Die Hesse-Matrix lautet

$$H = \begin{pmatrix} D_{dd}(\Phi_{\alpha\lambda}(G(d^*,p^*,\varepsilon))) & D_{dp}(\Phi_{\alpha\lambda}(G(d^*,p^*,\varepsilon))) \\ D_{dp}(\Phi_{\alpha\lambda}(G(d^*,p^*,\varepsilon))) & D_{pp}(\Phi_{\alpha\lambda}(G(d^*,p^*,\varepsilon))) \end{pmatrix}.$$

Das Extremum (d^*,p^*) ist Maximum[52], genau dann, wenn $D_{dd}(\Phi_{\alpha\lambda}(G(d^*,p^*,\varepsilon))) < 0$ und $D_{dd}(\Phi_{\alpha\lambda}(G(d^*,p^*,\varepsilon)))\cdot D_{pp}(\Phi_{\alpha\lambda}(G(d^*,p^*,\varepsilon))) - (D_{dp}(\Phi_{\alpha\lambda}(G(d^*,p^*,\varepsilon))))^2 > 0$ zutrifft.

---

[50] Die optimale Prämie wird als Argument der Maximierung des Präferenzfunktionals angegeben, da eine Auflösung der gleich null gesetzten ersten Ableitung bzgl. der Prämie nicht möglich ist.

[51] Die Betriebskosten als auch der Term $\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}d$ sind bzgl. der Maximierung nach Prämie Konstanten und besitzen somit keinen Einfluss.

[52] Zur Bestimmung der Art des Optimums wird das Hauptminorenkriterium verwendet.

Das Extremum existiert für $1+\gamma < \frac{\lambda}{\alpha}$. In diesem Fall gilt $1+\gamma > \frac{1-\lambda}{1-\alpha}$. Somit ist

$$D_{dd}(\Phi_{\alpha,\lambda}(G(d^*,p^*,\varepsilon)) < 0.$$

Es muss gelten

$$D_{dd}(\Phi_{\alpha\lambda}(G(d^*,p^*,\varepsilon))) \cdot D_{pp}(\Phi_{\alpha\lambda}(G(d^*,p^*,\varepsilon))) - (D_{dp}(\Phi_{\alpha\lambda}(G(d^*,p^*,\varepsilon))))^2$$

$$\begin{aligned}
&= -\left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right] f_\varepsilon\left(\frac{d^*}{N(p^*)\mu}\right)\frac{1}{N(p^*)\mu} \\
&\cdot\left[N_p(p^*) + N_{pp}(p^*)\left[p^* - \frac{1-\lambda}{1-\alpha}\mu\right] + N_p(p^*)\right. \\
&\left. -\left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right]\left[N_{pp}(p^*)\cdot\mu \int\limits_{\frac{d^*}{N(p^*)\cdot\mu}}^{\infty} \varepsilon\; dF_\varepsilon(\varepsilon) + \frac{(d^*)^2(N_p(p^*))^2}{N^3(p^*)\mu} f_\varepsilon\left(\frac{d^*}{N(p^*)\mu}\right)\right]\right] \\
&-\left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right]^2 \left(f_\varepsilon\left(\frac{d^*}{N(p^*)\mu}\right)\right)^2 \left(-\frac{d^*}{N^2(p^*)\mu}\right)^2 (N_p(p^*))^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right] f_\varepsilon\left(\frac{d^*}{N(p^*)\mu}\right)\frac{1}{N(p^*)\mu} \\
&\cdot\left[N_p(p^*)\left\{2 - \left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right]\frac{(d^*)^2 N_p(p^*)}{N^3(p^*)\mu} f_\varepsilon\left(\frac{d^*}{N(p^*)\mu}\right)\right\}\right. \\
&\left. +N_{pp}(p^*)\left\{p^* - \mu\left(\frac{1-\lambda}{1-\alpha} + \left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right]\int\limits_{\frac{d^*}{N(p^*)\mu}}^{\infty} \varepsilon\; dF_\varepsilon(\varepsilon)\right)\right\}\right] \\
&-\left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right]^2 \left(f_\varepsilon\left(\frac{d^*}{N(p^*)\mu}\right)\right)^2 \left(-\frac{d^*}{N^2(p^*)\mu}\right)^2 (N_p(p^*))^2 > 0.
\end{aligned}$$

Man dividiere durch $-\left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right] f_\varepsilon\left(\frac{d^*}{N(p^*)\mu}\right)\frac{1}{N(p^*)\mu}$[53] und erhält

$$\begin{aligned}
&N_p(p^*)\left\{2 - \left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right]\frac{(d^*)^2 N_p(p^*)}{N^3(p^*)\mu} f_\varepsilon\left(\frac{d^*}{N(p^*)\mu}\right)\right\} \\
&+N_{pp}(p^*)\left\{p^* - \mu\left(\frac{1-\lambda}{1-\alpha} + \left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right]\int\limits_{\frac{d^*}{N(p^*)\mu}}^{\infty} \varepsilon\; dF_\varepsilon(\varepsilon)\right)\right\} \\
&+\left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right] f_\varepsilon\left(\frac{d^*}{N(p^*)\mu}\right)\frac{(d^*)^2}{N^3(p^*)\mu}(N_p(p^*))^2
\end{aligned}$$

[53]Dieser Ausdruck ist negativ, da $1+\gamma > \frac{1-\lambda}{1-\alpha}$ immer für $1+\gamma < \frac{\lambda}{\alpha}$ gilt und alle anderen Terme positiv sind bis auf das erste Minuszeichen.

$$= N_p(p^*)\left\{2 - \left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right]\frac{(d^*)^2 N_p(p^*)}{N^3(p^*)\mu} f_\varepsilon\left(\frac{d^*}{N(p^*)\mu}\right)\right.$$
$$\left. + \left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right] f_\varepsilon\left(\frac{d^*}{N(p^*)\mu}\right)\frac{(d^*)^2}{N^3(p^*)\mu}N_p(p^*)\right\}$$
$$+N_{pp}(p^*)\left\{p^* - \mu\left(\frac{1-\lambda}{1-\alpha} + \left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right]\int\limits_{\frac{d^*}{N(p^*)\mu}}^{\infty} \varepsilon \; dF_\varepsilon(\varepsilon)\right)\right\}$$

$$= 2N_p(p^*) + N_{pp}(p^*)\left\{p^* - \mu\left(\frac{1-\lambda}{1-\alpha} + \left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right]\int\limits_{\frac{d^*}{N(p^*)\mu}}^{\infty} \varepsilon \; dF_\varepsilon(\varepsilon)\right)\right\} < 0.$$

Sei $A := \frac{1-\lambda}{1-\alpha} + \left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right]\int\limits_{\frac{d^*}{N(p^*)\mu}}^{\infty} \varepsilon \; dF_\varepsilon(\varepsilon)$[54], so muss

$$2N_p(p^*) + N_{pp}(p^*)\left\{p^* - \mu A\right\} < 0 \tag{C.1}$$

gelten. Für die Lösung bzgl. der Prämie folgt

$$p^* \;=\; \arg\max_p \left[N(p)\left[p - \frac{1-\lambda}{1-\alpha}\mu\right] - \left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right]E(RVS(d^*,p,\varepsilon))\right].$$

Damit muss für das Differential Folgendes zutreffen

$$D_p\left[N(p)\left[p - \frac{1-\lambda}{1-\alpha}\mu\right] - \left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right]E(RVS(d^*,p,\varepsilon))\right]$$
$$= N(p) + N_p(p)\left[p - \frac{1-\lambda}{1-\alpha}\mu\right] - \left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right]N_p(p)\cdot\mu \int\limits_{\frac{d^*}{N(p)\cdot\mu}}^{\infty} \varepsilon \; dF_\varepsilon(\varepsilon)$$
$$= N(p) + N_p(p)\left[p - \mu\left\{\frac{1-\lambda}{1-\alpha} - \left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right]\int\limits_{\frac{d^*}{N(p)\cdot\mu}}^{\infty} \varepsilon \; dF_\varepsilon(\varepsilon)\right\}\right].$$

Für die optimale Prämie gilt demnach folgende implizite Gestalt

$$N(p^*) + N_p(p^*)\left[p^* - \mu\left\{\frac{1-\lambda}{1-\alpha} - \left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right]\int\limits_{\frac{d^*}{N(p^*)\cdot\mu}}^{\infty} \varepsilon \; dF_\varepsilon(\varepsilon)\right\}\right]$$
$$= N(p^*) + N_p(p^*)\left[p^* - \mu A\right] = 0.$$

[54]Es gilt $A > 0$, da für $1+\gamma < \frac{\lambda}{\alpha}$ auch $1+\gamma > \frac{1-\lambda}{1-\alpha}$ gilt und das Integral als auch der Term $\frac{1-\lambda}{1-\alpha}$ positiv sind.

Die implizite Lösung lautet damit $-\frac{N(p^*)}{N_p(p^*)} = p^* - \mu A$. Diese setze man in die Ungleichung (C.1) ein

$$2N_p(p^*) + N_{pp}(p^*)\{p^* - \mu A\} = 2N_p(p^*) - N_{pp}(p^*)\frac{N(p^*)}{N_p(p^*)} < 0.$$

Durch Multiplikation von $N_p(p^*)$[55] folgt

$$2(N_p(p^*))^2 - N_{pp}(p^*)N(p^*) > 0.$$

$(N_p(p^*))^2$ ist immer größer null für $p < p_{max}$. Für eine lineare Nachfrage ist der Term $N_{pp}(p^*)N(p^*)$ gleich null, da $N_{pp}(p^*)$ gleich null gilt. Somit ist die Ungleichung erfüllt, die Hesse-Matrix ist negativ definit und somit ist das Extremum ein Maximum. Für eine konkave Nachfrage ist der zweite Term $-N_{pp}(p^*)N(p^*) > 0$ für $p < p_{max}$, da für konkave Funktionen $N_{pp}(p^*) < 0$ gilt. Damit ist die Ungleichung auch für jede konkave Funktion erfüllt, die Hesse-Matrix ist negativ definit und das Extremum ist ein Maximum. Die Ungleichung ist auch für konvexe Funktionen erfüllt, wenn die Bedingung $2(N_p(p^*))^2 > N_{pp}(p^*)N(p^*)$ gilt. Andernfalls wäre der zweite Hauptminor positiv und somit die Hesse-Matrix indefinit. Es handelt sich dann um einen Sattelpunkt.

Im Folgenden wird gezeigt, dass das Extremum ein globales Maximum ist. Zunächst wird gezeigt, dass das Präferenzfunktional bei Ablehnung der Rückversicherung kleiner als bei dem eben bestimmten Maximum ist. Für das Präferenzfunktional gilt

$$\Phi_{\alpha,\lambda}(G(d,p,\varepsilon)) \quad = \quad N(p)\left[p - \frac{1-\lambda}{1-\alpha}\mu\right] - \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}d - B - \left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right]E(RVS(d,p,\varepsilon)).$$

Man betrachte die Randlösung $F_{X_p}(d) = F_\varepsilon\left(\frac{d}{N(p)\cdot\mu}\right) = 0$. In diesem Fall wird die Vollversicherung präferiert, der erwartete Rückversicherungsschaden ist der erwartete Schaden $N(p)\mu$. Es gilt also für das Präferenzfunktional bei der Randlösung

$$\Phi_{\alpha,\lambda}(G(0,p,\varepsilon)) \quad = \quad N(p)\left[p - \frac{1-\lambda}{1-\alpha}\mu\right] - B - \left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right]N(p)\mu.$$

Damit d^* auch das globale Maximum ist, muss gelten

$$\Phi_{\alpha,\lambda}(G(d^*,p,\varepsilon)) \geq \Phi_{\alpha,\lambda}(G(0,p,\varepsilon)).$$

[55] Es gilt $N_p(p) < 0$, da die Nachfrage eine monoton fallende Funktion ist.

Dies soll im Folgenden gezeigt werden. Es ist

$$
\begin{aligned}
& N(p)\left[p-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\mu\right]-\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}d^*-B-\left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right]E(RVS(d^*,p,\varepsilon)) \\
\geq\ & N(p)\left[p-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\mu\right]-B-\left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right]N(p)\mu
\end{aligned}
$$

$$
-\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}d^*-\left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right]E(RVS(d^*,p,\varepsilon))\geq-\left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right]N(p)\mu
$$

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right]N(p)\mu-\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}d^*-\left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right]E(RVS(d^*,p,\varepsilon)) \\
0 &\leq \left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right]\left[N(p)\mu-N(p)\mu\int_{\frac{d^*}{N(p)\cdot\mu}}^{\infty}\varepsilon\ dF_\varepsilon(\varepsilon)+d^*\left(1-F_\varepsilon\left(\frac{d^*}{N(p)\cdot\mu}\right)\right)\right] \\
&\quad -\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}d^* \\
0 &\leq \left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right]N(p)\mu\int_0^{\frac{d^*}{N(p)\cdot\mu}}\varepsilon\ dF_\varepsilon(\varepsilon)+\gamma d^*\left(1-F_\varepsilon\left(\frac{d^*}{N(p)\cdot\mu}\right)\right) \\
&\quad -\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}d^*F_\varepsilon\left(\frac{d^*}{N(p)\cdot\mu}\right)^{56}.
\end{aligned}
$$

Durch Einsetzen der optimalen Priorität folgt

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right]N(p)\mu\int_0^{\frac{d^*}{N(p)\cdot\mu}}\varepsilon\ dF_\varepsilon(\varepsilon) \\
&\quad +d^*\left[\gamma\left(1-\frac{(1-\alpha)\gamma}{(1+\gamma)(1-\alpha)-(1-\lambda)}\right)-\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\frac{(1-\alpha)\gamma}{(1+\gamma)(1-\alpha)-(1-\lambda)}\right]
\end{aligned}
$$

$$
0 \leq \left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right]N(p)\mu\int_0^{\frac{d^*}{N(p)\cdot\mu}}\varepsilon\ dF_\varepsilon(\varepsilon)^{57}.
$$

[56]Folgt wegen $1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}=\gamma+\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}$.

[57]Folgt aus $\gamma\left(1-\frac{(1-\alpha)\gamma}{(1+\gamma)(1-\alpha)-(1-\lambda)}\right)-\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\frac{(1-\alpha)\gamma}{(1+\gamma)(1-\alpha)-(1-\lambda)}=\gamma-\frac{(1-\alpha)\gamma^2+(\lambda-\alpha)\gamma}{(1+\gamma)(1-\alpha)-(1-\lambda)}=\gamma-\frac{\gamma((1-\alpha)\gamma+\lambda-\alpha)}{(1+\gamma)(1-\alpha)-(1-\lambda)}$ $=\gamma-\frac{\gamma((1+\gamma)(1-\alpha)-(1-\lambda))}{(1+\gamma)(1-\alpha)-(1-\lambda)}=0$.

Da im Fall $1+\gamma < \frac{\lambda}{\alpha}$ auch $1+\gamma > \frac{1-\lambda}{1-\alpha}$ gilt und alle anderen Terme ebenfalls nicht negativ sind, ist dies eine wahre Aussage. Man betrachte die zweite Randlösung für diesen Fall. Für die Randlösung d_2 gilt $F_{X_p}(d_2) = F_\varepsilon\left(\frac{d_2}{N(p)\cdot\mu}\right) = 1-\alpha$. Dabei muss

$$\Phi_{\alpha,\lambda}(G(d^*,p,\varepsilon)) \geq \Phi_{\alpha,\lambda}(G(d_2,p,\varepsilon))$$

ergeben, damit d^* ein globales Maximum ist. Dies soll im Folgenden gezeigt werden. Es gilt allgemein für das Präferenzfunktional

$$\begin{aligned}
\Phi_{\alpha,\lambda}(G(d,p,\varepsilon)) &= N(p)\left[p-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\mu\right]-\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}d-B-\left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right]E(RVS(d,p,\varepsilon))\\
&= N(p)\left[p-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\mu\right]-B-\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}d\\
&- \left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right]\left[N(p)\mu\int\limits_{\frac{d}{N(p)\cdot\mu}}^{\infty}\varepsilon\ dF_\varepsilon(\varepsilon)-d\left(1-F_\varepsilon\left(\frac{d}{N(p)\cdot\mu}\right)\right)\right]\\
&= N(p)\left[p-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\mu\right]-B-\left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right]N(p)\mu\int\limits_{\frac{d}{N(p)\cdot\mu}}^{\infty}\varepsilon\ dF_\varepsilon(\varepsilon)\\
&+ \left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right]d\left(1-F_\varepsilon\left(\frac{d}{N(p)\cdot\mu}\right)\right)-\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}d\\
&= N(p)\left[p-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\mu\right]-B-\left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right]N(p)\mu\int\limits_{\frac{d}{N(p)\cdot\mu}}^{\infty}\varepsilon\ dF_\varepsilon(\varepsilon)\\
&+ \gamma d\left(1-F_\varepsilon\left(\frac{d}{N(p)\cdot\mu}\right)\right)-\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}dF_\varepsilon\left(\frac{d}{N(p)\cdot\mu}\right)\text{[58]}.
\end{aligned}$$

Wenn d^* globales Maximum ist, dann muss $\Phi_{\alpha,\lambda}(G(d^*,p,\varepsilon)) \geq \Phi_{\alpha,\lambda}(G(d_2,p,\varepsilon))$ sein. Damit muss auch gelten, dass

$$\begin{aligned}
&- \left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right]N(p)\mu\int\limits_{\frac{d^*}{N(p)\cdot\mu}}^{\infty}\varepsilon\ dF_\varepsilon(\varepsilon)\\
&+ \gamma d^*\left(1-F_\varepsilon\left(\frac{d^*}{N(p)\cdot\mu}\right)\right)-\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}d^*F_\varepsilon\left(\frac{d^*}{N(p)\cdot\mu}\right)\\
&\geq -\left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right]N(p)\mu\int\limits_{\frac{d_2}{N(p)\cdot\mu}}^{\infty}\varepsilon\ dF_\varepsilon(\varepsilon)\\
&+ \gamma d_2\left(1-F_\varepsilon\left(\frac{d_2}{N(p)\cdot\mu}\right)\right)-\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}d_2F_\varepsilon\left(\frac{d_2}{N(p)\cdot\mu}\right)
\end{aligned}$$

[58] Folgt wegen $1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha} = \gamma+\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}$.

$$- \left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right] N(p)\mu \int\limits_{\frac{d^*}{N(p)\cdot\mu}}^{\frac{d_2}{N(p)\cdot\mu}} \varepsilon \; dF_\varepsilon(\varepsilon) + d^* \cdot 0 \geq d_2 \left[\gamma\left(1-(1-\alpha)\right) - \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}(1-\alpha)\right]^{59}$$

$$- \left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right] N(p)\mu \int\limits_{\frac{d^*}{N(p)\cdot\mu}}^{\frac{d_2}{N(p)\cdot\mu}} \varepsilon \; dF_\varepsilon(\varepsilon) \geq d_2 \left[(1+\gamma)\alpha-\lambda\right]$$

$$N(p)\mu \int\limits_{\frac{d^*}{N(p)\cdot\mu}}^{\frac{d_2}{N(p)\cdot\mu}} \varepsilon \; dF_\varepsilon(\varepsilon) \leq d_2 \frac{-(1+\gamma)\alpha+\lambda}{1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}} \cdot \frac{1-\alpha}{1-\alpha}$$

$$N(p)\mu \int\limits_{\frac{d^*}{N(p)\cdot\mu}}^{\frac{d_2}{N(p)\cdot\mu}} \varepsilon \; dF_\varepsilon(\varepsilon) \leq d_2 \left[1-\alpha-\frac{(1-\alpha)\gamma}{(1+\gamma)(1-\alpha)-(1-\lambda)}\right]^{60}.$$

Aufgrund der Beziehung zwischen der Störgröße ε und dem Schaden X_p folgt

$$\int\limits_{d^*}^{d_2} x \; dF_{X_p}(x) \leq d_2 \left[1-\alpha-\frac{(1-\alpha)\gamma}{(1+\gamma)(1-\alpha)-(1-\lambda)}\right]$$

bzw. durch Substitution

$$\int\limits_{\frac{(1-\alpha)\gamma}{(1+\gamma)(1-\alpha)-(1-\lambda)}}^{1-\alpha} F_{X_p}^{-1}(t) \; dt \leq d_2 \left[1-\alpha-\frac{(1-\alpha)\gamma}{(1+\gamma)(1-\alpha)-(1-\lambda)}\right]. \tag{C.2}$$

Man betrachte dazu die Abbildung C.3. Die Abbildung illustriert, dass diese Ungleichung eine wahre Aussage ist. Somit gilt insgesamt $\Phi_{\alpha,\lambda}(G(d^*,p,\varepsilon)) \geq \Phi_{\alpha,\lambda}(G(d,p,\varepsilon))$ für alle $d \in [0, 1-\alpha)$. Es fehlt nur noch zu zeigen, dass das Präferenzfunktional für die Randlösungen bzgl. Prämie ($p=\mu$, $p=p_{\max}$) nicht maximal ist. Es muss

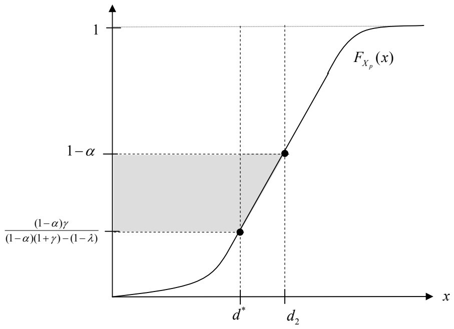
$$\Phi_{\alpha,\lambda}(G(d^*,p^*,\varepsilon)) \geq \Phi_{\alpha,\lambda}(G(d^*,\mu,\varepsilon))$$

und

$$\Phi_{\alpha,\lambda}(G(d^*,p^*,\varepsilon)) \geq \Phi_{\alpha,\lambda}(G(d^*,p_{\max},\varepsilon))$$

[59]Folgt aus $\gamma\left(1-\frac{(1-\alpha)\gamma}{(1+\gamma)(1-\alpha)-(1-\lambda)}\right) - \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\frac{(1-\alpha)\gamma}{(1+\gamma)(1-\alpha)-(1-\lambda)} = \gamma - \frac{(1-\alpha)\gamma^2+(\lambda-\alpha)\gamma}{(1+\gamma)(1-\alpha)-(1-\lambda)} = \gamma - \frac{\gamma((1-\alpha)\gamma+\lambda-\alpha)}{(1+\gamma)(1-\alpha)-(1-\lambda)}$ $= \gamma - \frac{\gamma((1+\gamma)(1-\alpha)-(1-\lambda))}{(1+\gamma)(1-\alpha)-(1-\lambda)} = 0.$

[60]Folgt aus $1-\alpha-\frac{(1-\alpha)\gamma}{(1+\gamma)(1-\alpha)-(1-\lambda)} = \frac{(1-\alpha)(1+\gamma-\alpha(1+\gamma)-1+\lambda)-(1-\alpha)\gamma}{(1+\gamma)(1-\alpha)-(1-\lambda)} = \frac{(1-\alpha)(-\alpha(1+\gamma)+\lambda)}{(1+\gamma)(1-\alpha)-(1-\lambda)} = \frac{-\alpha(1+\gamma)+\lambda}{1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}}.$



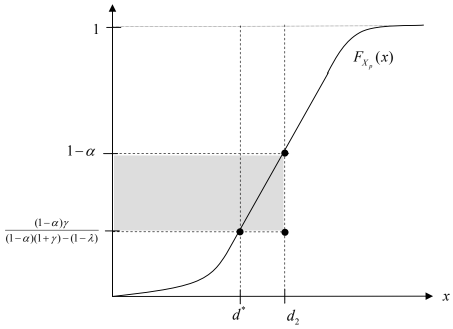


Abbildung C.3: Ungleichung (C.2).

gelten. Man zeige zunächst die zweite Ungleichung. Es ist

$$\begin{aligned} & N(p^*)\left[p^* - \frac{1-\lambda}{1-\alpha}\mu\right] - B - \left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right] N(p^*)\mu \int\limits_{F_\varepsilon^{-1}\left(\frac{(1-\alpha)\gamma}{(1+\gamma)(1-\alpha)-(1-\lambda)}\right)}^{\infty} \varepsilon \; dF_\varepsilon(\varepsilon) \\ + \; & \gamma d^* \left(1 - \frac{(1-\alpha)\gamma}{(1+\gamma)(1-\alpha)-(1-\lambda)}\right) - \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha} d^* \frac{(1-\alpha)\gamma}{(1+\gamma)(1-\alpha)-(1-\lambda)} \\ \geq \; & N(p_{\max})\left[p_{\max} - \frac{1-\lambda}{1-\alpha}\mu\right] - B - \left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right] N(p_{\max})\mu \int\limits_{F_\varepsilon^{-1}\left(\frac{(1-\alpha)\gamma}{(1+\gamma)(1-\alpha)-(1-\lambda)}\right)}^{\infty} \varepsilon \; dF_\varepsilon(\varepsilon) \\ + \; & \gamma d^* \left(1 - \frac{(1-\alpha)\gamma}{(1+\gamma)(1-\alpha)-(1-\lambda)}\right) - \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha} d^* \frac{(1-\alpha)\gamma}{(1+\gamma)(1-\alpha)-(1-\lambda)} \end{aligned}$$

$$N(p^*)\left[p^* - \frac{1-\lambda}{1-\alpha}\mu\right] - \left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right] N(p^*)\mu \int\limits_{F_\varepsilon^{-1}\left(\frac{(1-\alpha)\gamma}{(1+\gamma)(1-\alpha)-(1-\lambda)}\right)}^{\infty} \varepsilon \; dF_\varepsilon(\varepsilon) \geq 0^{61}$$

$$N(p^*)\left[p^* - \mu\left\{\frac{1-\lambda}{1-\alpha} - \left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right] \int\limits_{\frac{d^*}{N(p^*)\cdot\mu}}^{\infty} \varepsilon \; dF_\varepsilon(\varepsilon)\right\}\right] \geq 0$$

[61]Da $N(p_{\max}) = 0$ gilt.

$$N(p^*)\left(-\frac{N(p^*)}{N_p(p^*)}\right) \geq 0^{62}.$$

Dies ist eine wahre Aussage aufgrund der Tatsache, dass die erste Ableitung der Nachfrage negativ ist, da es eine monoton fallende Funktion ist.

Als nächstes zeige man die erste Ungleichung. Es ist

$$\begin{aligned}
& N(p^*)\left[p^* - \frac{1-\lambda}{1-\alpha}\mu\right] - B - \left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right] N(p^*)\mu \int\limits_{F_\varepsilon^{-1}\left(\frac{(1-\alpha)\gamma}{(1+\gamma)(1-\alpha)-(1-\lambda)}\right)}^{\infty} \varepsilon \; dF_\varepsilon(\varepsilon) \\
+ \quad & \gamma d^*\left(1-\frac{(1-\alpha)\gamma}{(1+\gamma)(1-\alpha)-(1-\lambda)}\right) - \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}d^*\frac{(1-\alpha)\gamma}{(1+\gamma)(1-\alpha)-(1-\lambda)} \\
\geq \quad & N(\mu)\left[\mu - \frac{1-\lambda}{1-\alpha}\mu\right] - B - \left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right] N(\mu)\mu \int\limits_{F_\varepsilon^{-1}\left(\frac{(1-\alpha)\gamma}{(1+\gamma)(1-\alpha)-(1-\lambda)}\right)}^{\infty} \varepsilon \; dF_\varepsilon(\varepsilon) \\
+ \quad & \gamma d^*\left(1-\frac{(1-\alpha)\gamma}{(1+\gamma)(1-\alpha)-(1-\lambda)}\right) - \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}d^*\frac{(1-\alpha)\gamma}{(1+\gamma)(1-\alpha)-(1-\lambda)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& N(p^*)\left[p^* - \frac{1-\lambda}{1-\alpha}\mu\right] - \left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right] N(p^*)\mu \int\limits_{F_\varepsilon^{-1}\left(\frac{(1-\alpha)\gamma}{(1+\gamma)(1-\alpha)-(1-\lambda)}\right)}^{\infty} \varepsilon \; dF_\varepsilon(\varepsilon) \\
\geq \quad & N(\mu)\left[\mu - \frac{1-\lambda}{1-\alpha}\mu\right] - \left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right] N(\mu)\mu \int\limits_{F_\varepsilon^{-1}\left(\frac{(1-\alpha)\gamma}{(1+\gamma)(1-\alpha)-(1-\lambda)}\right)}^{\infty} \varepsilon \; dF_\varepsilon(\varepsilon)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& N(p^*)\left[p^* - \mu\left\{\frac{1-\lambda}{1-\alpha} - \left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right] \int\limits_{F_\varepsilon^{-1}\left(\frac{(1-\alpha)\gamma}{(1+\gamma)(1-\alpha)-(1-\lambda)}\right)}^{\infty} \varepsilon \; dF_\varepsilon(\varepsilon)\right\}\right] \\
\geq \quad & N(\mu)\left[\mu - \mu\left\{\frac{1-\lambda}{1-\alpha} - \left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right] \int\limits_{F_\varepsilon^{-1}\left(\frac{(1-\alpha)\gamma}{(1+\gamma)(1-\alpha)-(1-\lambda)}\right)}^{\infty} \varepsilon \; dF_\varepsilon(\varepsilon)\right\}\right]
\end{aligned}$$

[62] Folgt aus der Beziehung der optimalen Prämie

$$N(p^*) + N_p(p^*)\left[p^* - \mu\left\{\tfrac{1-\lambda}{1-\alpha} - \left[1+\gamma-\tfrac{1-\lambda}{1-\alpha}\right] \int\limits_{\frac{d^*}{N(p^*)\cdot\mu}}^{\infty} \varepsilon \; dF_\varepsilon(\varepsilon)\right\}\right] = 0.$$

$$N(p^*)\left(-\frac{N(p^*)}{N_p(p^*)}\right) \geq N(\mu)\left[\mu - \frac{N(p^*)}{N_p(p^*)} - p^*\right]^{63}$$

$$0 \leq N(\mu)N_p(p^*)\mu - N(\mu)N_p(p^*)p^* - N(\mu)N(p^*) + (N(p^*))^2$$

$$0 \leq -N(\mu)N_p(p^*)[p^* - \mu] - N(\mu)N(p^*) + N(p^*)(N(\mu) + (p^* - \mu)\cdot N_p(p^*))^{64}$$

$$0 \leq -N(\mu)N_p(p^*)[p^* - \mu] + N(p^*)N_p(p^*)(p^* - \mu) = N_p(p^*)[p^* - \mu](N(p^*) - N(\mu)).$$

Dies ist eine wahre Aussage, da die erste Ableitung der Nachfrage negativ ist, d. h. $N(p^*) \leq N(\mu)$ und $p^* \geq \mu$ gilt. Somit kann keine Randlösung bzgl. der Prämie für lineare und konvexe Nachfragen ein größeres Präferenzfunktional als die optimale Lösung hervorbringen. Das lokale Maximum ist somit das globale Maximum.

Man betrachte den Fall $F_{X_p}(d) \geq 1 - \alpha$:
Für den bedingten Erwartungswert in Abhängigkeit von der Priorität d und dem Gesamtschaden X_p gilt

$$\begin{aligned} E(G(d,X_p)|G(d,X_p) \leq g_{\alpha,d,X_p}) &= \frac{1}{\alpha}\int\limits_{F_{X_p}^{-1}(1-\alpha)}^{d} [Pr(p) - B - x - RVP(d,X_p)]\, dF_{X_p}(x) \\ &+ \frac{1}{\alpha}\int\limits_{d}^{\infty} [Pr(p) - B - d - RVP(d,X_p)]\, dF_{X_p}(x) \\ &= Pr(p) - B - RVP(d,X_p) \\ &- \frac{1}{\alpha}\int\limits_{F_{X_p}^{-1}(1-\alpha)}^{d} x\, dF_{X_p}(x) - \frac{1}{\alpha}\int\limits_{d}^{\infty} d\, dF_{X_p}(x) \end{aligned}$$

---

[63] Folgt aus der Beziehung der optimalen Prämie
$$N(p^*) + N_p(p^*)\left[p^* - \mu\left\{\frac{1-\lambda}{1-\alpha} - \left[1 + \gamma - \frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right]\int\limits_{F_\varepsilon^{-1}\left(\frac{(1-\alpha)\gamma}{(1+\gamma)(1-\alpha)-(1-\lambda)}\right)}^{\infty} \varepsilon\, dF_\varepsilon(\varepsilon)\right\}\right] = 0.$$

[64] Für konvexe und lineare Funktionen gilt $f(x+h) \leq f(x) + h\cdot f'(x)$ für alle h aus den reellen Zahlen und $h \neq 0$. Angewendet auf die Nachfragefunktion gilt damit $N(\mu) = N(p - (p-\mu)) \leq N(p) - (p-\mu)\cdot N_p(p)$ bzw. $N(p) \geq N(\mu) + (p-\mu)\cdot N_p(p)$.

$$
\begin{aligned}
&= Pr(p) - B - (1+\gamma)E(RVS(d,X_p)) \\
&- \frac{1}{\alpha} \int\limits_{F_{X_p}^{-1}(1-\alpha)}^{d} x \; dF_{X_p}(x) - \frac{1}{\alpha} d[1 - F_{X_p}(d)]^{65}.
\end{aligned}
$$

Somit folgt für den bedingten Erwartungswert in Abhängigkeit von der Priorität d, der Prämie p und dem Zufallseinfluss ε

$$
\begin{aligned}
E(G(d,p,\varepsilon)|G(d,p,\varepsilon) \leq g_{\alpha,d,p,\varepsilon}) &= N(p)\, p - B - (1+\gamma)E(RVS(d,p,\epsilon)) \\
&- \frac{1}{\alpha} \int\limits_{F_{\epsilon}^{-1}\left(\frac{1-\alpha}{N(p)\mu}\right)}^{\frac{d}{N(p)\mu}} N(p)\mu\varepsilon \; dF_{\varepsilon}(\varepsilon) - \frac{1}{\alpha}\, d \left[1 - F_{\varepsilon}\left(\frac{d}{N(p)\mu}\right)\right]
\end{aligned}
$$

und für dessen Ableitung bzgl. der Priorität

$$
\begin{aligned}
D_d(E(G(d,p,\varepsilon)|G(d,p,\varepsilon) \leq g_{\alpha,d,p,\varepsilon})) &= -(1+\gamma)\left[-1 + F_{\varepsilon}\left(\frac{d}{N(p)\mu}\right)\right]^{66} \\
&- \frac{1}{\alpha} N(p)\mu \left(\frac{d}{N(p)\mu}\right) f_{\varepsilon}\left(\frac{d}{N(p)\mu}\right) \frac{1}{N(p)\mu} \\
&+ \frac{1}{\alpha} d\, f_{\varepsilon}\left(\frac{d}{N(p)\mu}\right) \frac{1}{N(p)\mu} - \frac{1}{\alpha}\left[1 - F_{\varepsilon}\left(\frac{d}{N(p)\mu}\right)\right] \\
&= \left[\frac{1}{\alpha} - (1+\gamma)\right]\left[-1 + F_{\varepsilon}\left(\frac{d}{N(p)\mu}\right)\right].
\end{aligned}
$$

Für die erste Ableitung des erwarteten Gewinns bzgl. der Priorität lässt sich

$$
D_d(E((G(d,p,\varepsilon)) = -\gamma\left[-1 + F_{\varepsilon}\left(\frac{d}{N(p)\mu}\right)\right]^{67}
$$

festhalten und somit ist die erste Ableitung des Präferenzfunktionals bzgl. der Priorität

$$
\begin{aligned}
D_d(\Phi_{\alpha,\lambda}(G(d,p,\varepsilon))) &= \frac{1-\lambda}{1-\alpha}\left[-\gamma\left[-1 + F_{\varepsilon}\left(\frac{d}{N(p)\mu}\right)\right]\right] \\
&+ \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\left[\frac{1}{\alpha} - (1+\gamma)\right]\left[-1 + F_{\varepsilon}\left(\frac{d}{N(p)\mu}\right)\right].
\end{aligned}
$$

Man setze die Ableitung gleich null und erhält

$$
F_{X_p}(d^*) = F_{\varepsilon}\left(\frac{d^*}{N(p^*)\mu}\right) = 1.
$$

[65] Vgl. bzgl. dem bedingten Erwartungswert die Beweise des Prioritätsoptimierungsproblems.

[66] Es gilt $D_d(E(RVS(d,p,\varepsilon))) = -1 + F_{\varepsilon}\left(\frac{d}{N(p)\mu}\right)$. Vgl. dazu Beweis für das simultane Problem mit dem Erwartungswertkriterium.

[67] Vgl. dazu Beweis für das simultane Problem mit dem Erwartungswertkriterium.

Somit ist dieses Extremum eine Randlösung. Die Rückversicherung wird abgelehnt. In diesem Fall gilt für das Präferenzfunktional

$$\begin{aligned}\Phi_{\alpha,\lambda}(G(d^*,p,\varepsilon))) &= \frac{1-\lambda}{1-\alpha}[N(p)(p-\mu)-B] \\ &+ \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\left[N(p)p-B-\frac{1}{\alpha}\int\limits_{F_\varepsilon^{-1}\left(\frac{1-\alpha}{N(p)\mu}\right)}^{\infty} N(p)\mu\varepsilon\ dF_\varepsilon(\varepsilon)\right].\end{aligned}$$

Im Folgenden wird gezeigt, dass das Präferenzfunktional mit der optimalen Priorität größer gleich dem allgemeinen Präferenzfunktional

$$\begin{aligned}\Phi_{\alpha,\lambda}(G(d,p,\varepsilon))) &= \frac{1-\lambda}{1-\alpha}\left[N(p)(p-\mu)-B-\gamma E(RVS(d,p,\varepsilon))\right] \\ &+ \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\Bigg[N(p)p-B-(1+\gamma)E(RVS(d,p,\epsilon)) \\ &- \frac{1}{\alpha}\int\limits_{F_\varepsilon^{-1}\left(\frac{1-\alpha}{N(p)\mu}\right)}^{\frac{d}{N(p)\mu}} N(p)\mu\varepsilon\ dF_\varepsilon(\varepsilon)-\frac{1}{\alpha}d\left[1-F_\varepsilon\left(\frac{d}{N(p)\mu}\right)\right]\Bigg]\end{aligned}$$

für $1+\gamma > \frac{\lambda}{\alpha}$ ist. Somit ist es in diesem Fall das globale Maximum. Im Fall $1+\gamma < \frac{\lambda}{\alpha}$ hatte man bereits $F_{X_p}(d^*) = \frac{\gamma(1-\alpha)}{(1-\alpha)(1+\gamma)-(1-\lambda)}$ und

$$p^* = \arg\max_p \left[N(p)\left[p-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\mu\right]-\left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right]E(RVS(d^*,p,\varepsilon))\right]$$

als globales Maximum erhalten.

Es muss also folgende Ungleichung gelten

$$\begin{aligned}&\frac{1-\lambda}{1-\alpha}[N(p)(p-\mu)-B]+\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\left[N(p)p-B-\frac{1}{\alpha}\int\limits_{F_\varepsilon^{-1}\left(\frac{1-\alpha}{N(p)\mu}\right)}^{\infty} N(p)\mu\varepsilon\ dF_\varepsilon(\varepsilon)\right] \\ \geq\ & \frac{1-\lambda}{1-\alpha}\left[N(p)(p-\mu)-B-\gamma E(RVS(d,p,\varepsilon))\right] \\ +\ & \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\Bigg[N(p)p-B-(1+\gamma)E(RVS(d,p,\epsilon)) \\ -\ & \frac{1}{\alpha}\int\limits_{F_\varepsilon^{-1}\left(\frac{1-\alpha}{N(p)\mu}\right)}^{\frac{d}{N(p)\mu}} N(p)\mu\varepsilon\ dF_\varepsilon(\varepsilon)-\frac{1}{\alpha}d\left[1-F_\varepsilon\left(\frac{d}{N(p)\mu}\right)\right]\Bigg]\end{aligned}$$

und somit auch die Ungleichung

$$\begin{aligned}
& \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\left[-\frac{1}{\alpha}\int\limits_{F_\varepsilon^{-1}\left(\frac{1-\alpha}{N(p)\mu}\right)}^{\infty} N(p)\mu\varepsilon\ dF_\varepsilon(\varepsilon)\right] \\
\geq\ & \frac{1-\lambda}{1-\alpha}\left[-\gamma E(RVS(d,p,\varepsilon))\right] + \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\left[-(1+\gamma)E(RVS(d,p,\epsilon))\right. \\
-\ & \left.\frac{1}{\alpha}\int\limits_{F_\varepsilon^{-1}\left(\frac{1-\alpha}{N(p)\mu}\right)}^{\frac{d}{N(p)\mu}} N(p)\mu\varepsilon\ dF_\varepsilon(\varepsilon) - \frac{1}{\alpha}d\left[1-F_\varepsilon\left(\frac{d}{N(p)\mu}\right)\right]\right]
\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}
-\ & \frac{1}{\alpha}\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\int\limits_{F_\varepsilon^{-1}\left(\frac{1-\alpha}{N(p)\mu}\right)}^{\infty} N(p)\mu\varepsilon\ dF_\varepsilon(\varepsilon) \\
\geq\ & -\left[\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\gamma + \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}(1+\gamma)\right]E(RVS(d,p,\varepsilon)) \\
+\ & \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\left[-\frac{1}{\alpha}\int\limits_{F_\varepsilon^{-1}\left(\frac{1-\alpha}{N(p)\mu}\right)}^{\frac{d}{N(p)\mu}} N(p)\mu\varepsilon\ dF_\varepsilon(\varepsilon) - \frac{1}{\alpha}d\left[1-F_\varepsilon\left(\frac{d}{N(p)\mu}\right)\right]\right]
\end{aligned}$$

bzw.

$$-\frac{1}{\alpha}\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}E(RVS(d,p,\varepsilon)) \geq -\left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right]E(RVS(d,p,\varepsilon))^{68}$$

bzw.

$$\begin{aligned}
\left[-\frac{1}{\alpha}\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}+1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right]E(RVS(d,p,\varepsilon)) &\geq 0 \\
\left[1+\gamma-\frac{\lambda}{\alpha}\right]E(RVS(d,p,\varepsilon)) &\geq 0.
\end{aligned}$$

Da der erwartete Rückversicherungsschaden größer gleich null ist, ist die Ungleichung genau dann erfüllt, wenn $1+\gamma > \frac{\lambda}{\alpha}$ gilt. Damit folgt $\Phi_{\alpha,\lambda}(G(d^*,p,\varepsilon)) \geq \Phi_{\alpha,\lambda}(G(d,p,\varepsilon)))$ für alle

[68]Folgt aus $\int\limits_{F_\varepsilon^{-1}\left(\frac{1-\alpha}{N(p)\mu}\right)}^{\infty} N(p)\mu\varepsilon\ dF_\varepsilon(\varepsilon) - \int\limits_{F_\varepsilon^{-1}\left(\frac{1-\alpha}{N(p)\mu}\right)}^{\frac{d}{N(p)\mu}} N(p)\mu\varepsilon\ dF_\varepsilon(\varepsilon) - d\left[1-F_\varepsilon\left(\frac{d}{N(p)\mu}\right)\right]$
$= \int\limits_{\frac{d}{N(p)\mu}}^{\infty} N(p)\mu\varepsilon\ dF_\varepsilon(\varepsilon) - d\left[1-F_\varepsilon\left(\frac{d}{N(p)\mu}\right)\right] = \int\limits_{\frac{d}{N(p)\mu}}^{\infty} N(p)\mu\varepsilon\ dF_\varepsilon(\varepsilon) - \int\limits_{\frac{d}{N(p)\mu}}^{\infty} d\ dF_\varepsilon(\varepsilon)$
$= \int\limits_{\frac{d}{N(p)\mu}}^{\infty} (N(p)\mu\varepsilon - d)\ dF_\varepsilon(\varepsilon) = E(RVS(d,p,\varepsilon)).$

d, p und $1 + \gamma > \frac{\lambda}{\alpha}$.

Für das Präferenzfunktional ergibt sich bei Ablehnung der Rückversicherung

$$\begin{aligned}\Phi_{\alpha,\lambda}(G(d^*, p, \varepsilon))) &= \frac{1-\lambda}{1-\alpha}[N(p)(p-\mu) - B] \\ &+ \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\left[N(p)p - B - \frac{1}{\alpha}\int\limits_{F_\varepsilon^{-1}\left(\frac{1-\alpha}{N(p)\mu}\right)}^{\infty} N(p)\mu\varepsilon \; dF_\varepsilon(\varepsilon)\right].\end{aligned}$$

Somit gilt für die optimale Prämie

$$\begin{aligned}p^* &= \arg\max_p \left[\frac{1-\lambda}{1-\alpha}[N(p)(p-\mu) - B]\right. \\ &+ \left.\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\left[N(p)p - B - \frac{1}{\alpha}\int\limits_{F_\varepsilon^{-1}\left(\frac{1-\alpha}{N(p)\mu}\right)}^{\infty} N(p)\mu\varepsilon \; dF_\varepsilon(\varepsilon)\right]\right] \\ &= \arg\max_p \left[N(p)\left[p - \frac{1-\lambda}{1-\alpha}\mu - \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu\frac{1}{\alpha}\int\limits_{F_\varepsilon^{-1}\left(\frac{1-\alpha}{N(p)\mu}\right)}^{\infty} \varepsilon \; dF_\varepsilon(\varepsilon)\right]\right] \\ &= \arg\max_p \left[N(p)\left[p - \mu - \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu\left(-1 + \frac{1}{\alpha}\int\limits_{F_\varepsilon^{-1}\left(\frac{1-\alpha}{N(p)\mu}\right)}^{\infty} \varepsilon \; dF_\varepsilon(\varepsilon)\right)\right]\right] \\ &= \arg\ \max_p \left[N(p)\left[p - \mu - \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu\Delta(\alpha,p)\right]\right],\end{aligned}$$

wobei $\Delta(\alpha,p) := -1 + \frac{1}{\alpha}\int\limits_{F_\varepsilon^{-1}\left(\frac{1-\alpha}{N(p)\cdot\mu}\right)}^{\infty} \varepsilon \; dF_\varepsilon(\varepsilon)$.

QED

Weiterführende Untersuchungen zur optimalen Prämie mit linearer Nachfragefunktion und Rückversicherungswahl:

Es gilt für den oberen bedingten Erwartungswert $\frac{1}{1-\alpha}\int\limits_{F_\varepsilon^{-1}(\alpha)}^{\infty} \varepsilon\, dF_\varepsilon(\varepsilon) \geq E(\varepsilon)$.

Somit folgt $\frac{1}{1-\frac{\gamma(1-\alpha)}{(1-\alpha)(1+\gamma)-(1-\lambda)}}\int\limits_{F_\varepsilon^{-1}\left(\frac{\gamma(1-\alpha)}{(1-\alpha)(1+\gamma)-(1-\lambda)}\right)}^{\infty} \varepsilon\, dF_\varepsilon(\varepsilon) \geq E(\varepsilon) = 1$

bzw. $\int\limits_{F_\varepsilon^{-1}\left(\frac{\gamma(1-\alpha)}{(1-\alpha)(1+\gamma)-(1-\lambda)}\right)}^{\infty} \varepsilon\, dF_\varepsilon(\varepsilon) \geq 1 - \frac{\gamma(1-\alpha)}{(1-\alpha)(1+\gamma)-(1-\lambda)} = \frac{\lambda-\alpha}{(1-\alpha)(1+\gamma)-(1-\lambda)}$.

Sei $\int\limits_{F_\varepsilon^{-1}\left(\frac{\gamma(1-\alpha)}{(1-\alpha)(1+\gamma)-(1-\lambda)}\right)}^{\infty} \varepsilon\, dF_\varepsilon(\varepsilon) = \frac{\lambda-\alpha}{(1-\alpha)(1+\gamma)-(1-\lambda)} + AW(\alpha,\lambda,\varepsilon)$, wobei $AW(\alpha,\lambda,\varepsilon) \geq 0$[69] ist. Die Abweichung zwischen Erwartungswert und bedingtem Erwartungswert wird kleiner, wenn die untere Intergrationsgrenze gegen null läuft. Dies ist der Fall, wenn die Risikoaversion zunimmt. Es gilt für den Term

$$\begin{aligned}
&\frac{1-\lambda}{1-\alpha} + \left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right]\left[\frac{\lambda-\alpha}{(1-\alpha)(1+\gamma)-(1-\lambda)} + AW(\alpha,\lambda,\varepsilon)\right] \\
= \; &\frac{1-\lambda}{1-\alpha} + \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\left[1 + \frac{AW(\alpha,\lambda,\varepsilon)\left[(1-\alpha)(1+\gamma)-(1-\lambda)\right]}{\lambda-\alpha}\right] \\
= \; &1 + AW(\alpha,\lambda,\varepsilon)\left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right].
\end{aligned}$$

Da $AW(\alpha,\lambda,\varepsilon)\left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right]$ bei Rückversicherungswahl[70] immer größer gleich null ist, ist auch die optimale Prämie größer gleich der optimalen Prämie bei Risikoneutralität. Ein generelles Verhalten dieses Termes bzgl. Risikoaversionszunahme kann nicht festgestellt werden, da $AW(\alpha,\lambda,\varepsilon)$ und $\left[1+\gamma-\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right]$ gegenläufiges Verhalten aufweisen.

Berechnung und weiterführende Untersuchungen zur optimalen Prämie bei Ablehnung der Rückversicherung und linearer Nachfragefunktion:

Es gilt für die optimale Prämie bei Ablehnung der Rückversicherung

$$p^* \;=\; \arg\max_p \left[N(p)\left[p-\mu-\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu\Delta(\alpha,p)\right]\right].$$

Durch Differenzieren und Nullsetzen folgt

$$N(p^*)\left[1-\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha,p^*))\right] + N_p(p^*)\left[p^*-\mu-\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu\Delta(\alpha,p^*)\right] = 0.$$

[69]AW steht für Abweichung.
[70]In diesem Fall liegt Risikoaversion vor.

Man setze die lineare Nachfragefunktion ein und erhält

$$[a-bp^*]\left[1-\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha,p^*))\right]-b\left[p^*-\mu-\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu\Delta(\alpha,p^*)\right]=0$$

$$-b\left[2-\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha,p^*))\right]p^*-b\left[-\mu-\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu\Delta(\alpha,p^*)\right]$$
$$+a\left[1-\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha,p^*))\right]=0$$

bzw.

$$p^* = \frac{\mu\left[1+\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\Delta(\alpha,p^*)\right]+p_{\max}\left[1-\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha,p^*))\right]}{2-\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha,p^*))} =: p^*_{linear,Nicht-RV}{}^{71}.$$

Für Risikoneutralität ($\lambda=\alpha$) folgt

$$p^*_{linear,Nicht-RV} = \frac{\mu+p_{\max}}{2}.$$

Für Risikoaversion ($\lambda>\alpha$) gilt

$$p^*_{linear,Nicht-RV,R-aversion}\geq p^*_{linear,Nicht-RV,R-neutral}.$$

Dies soll im Folgenden gezeigt werden. Es muss also gelten

$$\frac{\mu\left[1+\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\Delta(\alpha,p^*)\right]+p_{\max}\left[1-\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha,p^*))\right]}{2-\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha,p^*))}\geq\frac{\mu+p_{\max}}{2}$$

$$\mu\left[1+\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\Delta(\alpha,p^*)\right]+p_{\max}\left[1-\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha,p^*))\right]$$
$$\geq[\mu+p_{\max}]\left[1-\frac{1}{2}\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha,p^*))\right]^{72}$$

$$\mu\left[\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\Delta(\alpha,p^*)+\frac{1}{2}\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha,p^*))\right]+p_{\max}\left[-\frac{1}{2}\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha,p^*))\right]\geq 0.$$

Es gilt $\mu\leq p_{\max}$ und $-\frac{1}{2}\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha,p^*))\geq 0$, somit kann folgende Abschätzung vorgenommen werden

$$\mu\left[\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\Delta(\alpha,p^*)+\frac{1}{2}\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha,p^*))\right]+p_{\max}\left[-\frac{1}{2}\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha,p^*))\right]$$
$$\geq\mu\left[\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\Delta(\alpha,p^*)+\frac{1}{2}\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha,p^*))\right]+\mu\left[-\frac{1}{2}\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha,p^*))\right]$$
$$=\mu\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\Delta(\alpha,p^*)\geq 0.$$

[71] Es gilt $\frac{a}{b}=p_{\max}$.

[72] Folgt wegen $D_p(\Delta(\alpha,p^*)=\frac{1}{\alpha}\left(-F_\varepsilon^{-1}\left(\frac{1-\alpha}{N(p)\cdot\mu}\right)\right)f_\varepsilon\left(F_\varepsilon^{-1}\left(\frac{1-\alpha}{N(p)\cdot\mu}\right)\right)\leq 0$ bzw. $1-\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha,p^*))\geq 0$ für $\lambda>\alpha$.

Dies ist eine wahre Aussage, da $\lambda > \alpha$ und $\Delta(\alpha, p^*) \geq 0$ gilt. Somit ist

$$p^*_{linear,Nicht-RV,R-aversion} \geq p^*_{linear,Nicht-RV,R-neutral}.$$

Für Risikofreude ($\lambda < \alpha$) und $1 - \frac{1}{2}\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha, p^*)) \leq 0$ ergibt sich

$$p^*_{linear,Nicht-RV,R-freude} \geq p^*_{linear,Nicht-RV,R-neutral}.$$

Dies soll im Folgenden gezeigt werden. Es muss also gelten

$$\frac{\mu\left[1 + \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\Delta(\alpha, p^*)\right] + p_{\max}\left[1 - \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha, p^*))\right]}{2 - \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha, p^*))} \geq \frac{\mu + p_{\max}}{2}.$$

Fall $1 - \frac{1}{2}\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha, p^*)) \leq 0$:
Es gilt

$$\begin{aligned}
&\mu\left[1 + \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\Delta(\alpha, p^*)\right] + p_{\max}\left[1 - \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha, p^*))\right] \\
&\leq [\mu + p_{\max}]\left[1 - \frac{1}{2}\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha, p^*))\right]
\end{aligned}$$

$$\mu\left[\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\Delta(\alpha, p^*) + \frac{1}{2}\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha, p^*))\right] + p_{\max}\left[-\frac{1}{2}\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha, p^*))\right] \leq 0$$

$$\mu\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\Delta(\alpha, p^*) + [\mu - p_{\max}]\frac{1}{2}\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha, p^*)) \leq 0.$$

Dies ist eine wahre Aussage, da $\mu\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\Delta(\alpha, p^*) \leq 0$[73] und $[\mu - p_{\max}]\frac{1}{2}\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha, p^*)) \leq 0$[74] zutrifft. Somit ist

$$p^*_{linear,Nicht-RV,R-freude} \geq p^*_{linear,Nicht-RV,R-neutral}$$

für Risikofreude ($\lambda < \alpha$) und $1 - \frac{1}{2}\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha, p^*)) \leq 0$.

Für Risikofreude ($\lambda < \alpha$) und $1 - \frac{1}{2}\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha, p^*)) \geq 0$ lässt sich

$$p^*_{linear,Nicht-RV,R-freude} \leq p^*_{linear,Nicht-RV,R-neutral}$$

ermitteln. Dies soll im Folgenden gezeigt werden. Es muss also gelten

$$\frac{\mu\left[1 + \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\Delta(\alpha, p^*)\right] + p_{\max}\left[1 - \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha, p^*))\right]}{2 - \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha, p^*))} \leq \frac{\mu + p_{\max}}{2}.$$

---

[73]Gilt wegen $\lambda < \alpha$ und $\Delta(\alpha, p^*) \geq 0$.
[74]Gilt wegen $\lambda < \alpha$, $D_p(\Delta(\alpha, p^*)) \leq 0$ und $\mu \leq p_{\max}$.

Fall $1 - \frac{1}{2}\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha,p^*)) \geq 0$:
Es ist

$$\begin{aligned}
&\mu\left[1+\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\Delta(\alpha,p^*)\right] + p_{\max}\left[1-\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha,p^*))\right] \\
&\leq [\mu + p_{\max}]\left[1-\frac{1}{2}\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha,p^*))\right]
\end{aligned}$$

$$\mu\left[\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\Delta(\alpha,p^*) + \frac{1}{2}\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha,p^*))\right] + p_{\max}\left[-\frac{1}{2}\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha,p^*))\right] \leq 0$$

$$\mu\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\Delta(\alpha,p^*) + [\mu - p_{\max}]\frac{1}{2}\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha,p^*)) \leq 0.$$

Dies ist eine wahre Aussage, da $\mu\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\Delta(\alpha,p^*) \leq 0$[75] und $[\mu - p_{\max}]\frac{1}{2}\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha,p^*)) \leq 0$[76] gilt. Somit lässt sich

$$p^*_{linear,Nicht-RV,R-freude} \leq p^*_{linear,Nicht-RV,R-neutral}$$

für Risikofreude ($\lambda < \alpha$) und $1 - \frac{1}{2}\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha,p^*)) \geq 0$ festhalten.

Im Folgenden soll gezeigt werden, dass der Fall $1 - \frac{1}{2}\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha,p^*)) \leq 0$ auszuschließen ist. Es muss gelten

$$\frac{\mu\left[1+\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\Delta(\alpha,p^*)\right] + p_{\max}\left[1-\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha,p^*))\right]}{2-\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha,p^*))} \leq p_{\max}$$

$$\begin{aligned}
&\mu\left[1+\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\Delta(\alpha,p^*)\right] + p_{\max}\left[1-\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha,p^*))\right] \\
&-p_{\max}\left[2-\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha,p^*))\right] \geq 0
\end{aligned}$$

$$\mu\left[1+\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\Delta(\alpha,p^*)\right] - p_{\max} = \mu - p_{\max} + \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\Delta(\alpha,p^*)\mu \geq 0.$$

Es ist $\mu \leq p_{\max}$. Somit ist $\mu - p_{\max} \leq 0$. Es gilt $\Delta(\alpha,p^*) \geq 0$ und $\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha} \leq 0$. Damit ist $\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\Delta(\alpha,p^*)\mu \leq 0$. Dies führt zum Widerspruch. Der Fall $1 - \frac{1}{2}\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha,p^*)) \leq 0$ ist somit auszuschließen. Es gilt also insgesamt für Risikofreude

$$p^*_{linear,Nicht-RV,R-freude} \leq p^*_{linear,Nicht-RV,R-neutral}.$$

---

[75] Gilt wegen $\lambda < \alpha$ und $\Delta(\alpha,p^*) \geq 0$.
[76] Gilt wegen $\lambda < \alpha$, $D_p(\Delta(\alpha,p^*)) \leq 0$ und $\mu \leq p_{\max}$.

Im Folgenden soll die Maximalbedingung geprüft werden. Es gilt für die zweite Ableitung

$$\begin{aligned}
&[a-bp^*]\left[-\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_{pp}(\Delta(\alpha,p^*))\right]-b\left[1-\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha,p^*))\right]\\
&-b\left[1-\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha,p^*))\right]\\
&=[a-bp^*]\left[-\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_{pp}(\Delta(\alpha,p^*))\right]-2b\left[1-\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha,p^*))\right]\leq 0
\end{aligned}$$

für $\lambda \geq \alpha$[77] und für $\lambda < \alpha$ mit der Bedingung

$$[a-bp^*]\left[-\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_{pp}(\Delta(\alpha,p^*))\right]\leq 2b\left[1-\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha,p^*))\right]^{78}.$$

Berechnung und weiterführende Untersuchungen zur optimalen Prämie bei Ablehnung der Rückversicherung und konkaver Nachfragefunktion:

Es gilt für die optimale Prämie bei Ablehnung der Rückversicherung

$$p^* \quad = \quad \arg\max_p \left[N(p)\left[p-\mu-\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu\Delta(\alpha,p)\right]\right].$$

Durch Differenzieren und Nullsetzen folgt

$$N(p^*)\left[1-\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha,p^*))\right]+N_p(p^*)\left[p^*-\mu-\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu\Delta(\alpha,p^*)\right]=0.$$

Man setze die konkave Nachfragefunktion ein und erhält

$$\left[-b(p^*)^2+a\right]\left[1-\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha,p^*))\right]-2bp^*\left[p^*-\mu-\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu\Delta(\alpha,p^*)\right]=0$$

$$\begin{aligned}
&-b\left[3-\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha,p^*))\right](p^*)^2-2b\left[-\mu-\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu\Delta(\alpha,p^*)\right]p^*\\
&+a\left[1-\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha,p^*))\right]=0
\end{aligned}$$

[77]Für $\lambda \geq \alpha$ ist $p^*_{linear,Nicht-RV}$ immer ein Maximum, da $a-bp^*=N(p^*)\geq 0$, $-\underbrace{\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}}_{\geq 0}\mu\underbrace{D_{pp}(\Delta(\alpha,p^*))}_{\geq 0}\leq 0$ und $1-\frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha,p^*))\geq 0$ ist.

[78]Bei Risikofreude ist die optimale Prämie nicht zwangsläufig ein Maximum, sondern muss zusätzlich die angegebene Bedingung erfüllen.

$$(p^*)^2 - \frac{2\left[\mu + \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu\Delta(\alpha,p^*)\right]}{3 - \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha,p^*))}p^* - p_{\max}^2 \frac{\left[1 - \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha,p^*))\right]}{3 - \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha,p^*))} = 0^{79}$$

bzw.

$$\begin{aligned}
p_{1/2}^* &= \frac{\mu + \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu\Delta(\alpha,p^*)}{3 - \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha,p^*))} \\
&\pm \sqrt{\frac{\left[\mu + \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu\Delta(\alpha,p^*)\right]^2}{\left[3 - \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha,p^*))\right]^2} + p_{\max}^2 \frac{\left[1 - \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha,p^*))\right]}{3 - \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha,p^*))}} \\
&= \frac{\mu\left[1 + \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\Delta(\alpha,p^*)\right]}{3 - \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha,p^*))} \\
&\pm \frac{\sqrt{\mu^2\left[1 + \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\Delta(\alpha,p^*)\right]^2 + p_{\max}^2\left[1 - \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha,p^*))\right]\left[3 - \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha,p^*))\right]}}{3 - \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha,p^*))}.
\end{aligned}$$

Die Lösung

$$\begin{aligned}
p_1^* &= \frac{\mu\left[1 + \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\Delta(\alpha,p^*)\right]}{3 - \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha,p^*))} \\
&+ \frac{\sqrt{\mu^2\left[1 + \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\Delta(\alpha,p^*)\right]^2 + p_{\max}^2\left[1 - \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha,p^*))\right]\left[3 - \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha,p^*))\right]}}{3 - \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha,p^*))}
\end{aligned}$$

ist die einzige Lösung[80], wenn

$$p_{\max}^2\left[1 - \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha,p^*))\right]\left[3 - \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha,p^*))\right] \geq 0$$

und $3 - \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha,p^*)) > 0$ gilt. Dies ist für $\lambda \geq \alpha$ (Risikoaversion und -neutralität) und für $\lambda < \alpha$ (Risikofreude) mit der Bedingung $3 - \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha,p^*)) > 0$ erfüllt. Dabei gilt für diese Lösung

$$p_{linear,Nicht-RV}^* \leq p_{konkav,Nicht-RV}^*.$$

Dies soll im Folgenden gezeigt werden. Es muss gelten

$$\begin{aligned}
\frac{\mu A + p_{\max}B_1}{B_2} &\leq \frac{\mu A}{B_3} + \frac{\sqrt{\mu^2 A^2 + p_{\max}^2 B_1 B_3}}{B_3}{}^{81} \\
\mu A B_3 + p_{\max}B_1 B_3 &\leq \mu A B_2 + B_2\sqrt{\mu^2 A^2 + p_{\max}^2 B_1 B_3}
\end{aligned}$$

[79] Es gilt $\frac{a}{b} = p_{\max}^2$.
[80] In diesem Fall ist die zweite Lösung negativ.
[81] Es sei $A := 1 + \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\Delta(\alpha,p^*)$ und $B_j := j - \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha,p^*))$ mit j=1,2,3.

$$
\begin{aligned}
\mu A + p_{\max} B_1 B_3 &\leq B_2 \sqrt{\mu^2 A^2 + p_{\max}^2 B_1 B_3} \\
\mu^2 A^2 + 2\mu A p_{\max} B_1 B_3 + p_{\max}^2 B_1^2 B_3^2 &\leq \mu^2 A^2 B_2^2 + p_{\max}^2 B_1 B_3 B_2^2 \\
0 \leq \mu^2 A^2 (B_2^2 - 1) - 2\mu A p_{\max} B_1 B_3 &+ p_{\max}^2 B_1 B_3 (B_2^2 - B_1 B_3) \\
0 \leq \mu^2 A^2 (B_2^2 - 1) - 2\mu A p_{\max} B_1 B_3 &+ p_{\max}^2 B_1 B_3 \\
0 \leq \mu^2 A^2 B_1 B_3 - 2\mu A p_{\max} B_1 B_3 &+ p_{\max}^2 B_1 B_3 \\
0 \leq \mu^2 A^2 - 2\mu A p_{\max} &+ p_{\max}^2 \\
0 \leq (\mu A &+ p_{\max})^2.
\end{aligned}
$$

Dies ist eine wahre Aussage, es folgt somit $p^*_{linear,Nicht-RV} \leq p^*_{konkav,Nicht-RV}$.

Die Lösung

$$
\begin{aligned}
p_2^* &= \frac{\mu \left[1 + \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\Delta(\alpha,p^*)\right]}{3 - \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha,p^*))} \\
&- \frac{\sqrt{\mu^2 \left[1 + \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\Delta(\alpha,p^*)\right]^2 + p_{\max}^2 \left[1 - \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha,p^*))\right]\left[3 - \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha,p^*))\right]}}{3 - \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha,p^*))}
\end{aligned}
$$

ist die einzige Lösung[82], wenn $\lambda < \alpha$ (Risikofreude) mit der Bedingung $3 - \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}\mu D_p(\Delta(\alpha,p^*)) < 0$ erfüllt ist. Für diese Lösung ist dabei

$$p^*_{linear,Nicht-RV} \leq p^*_{konkav,Nicht-RV}.$$

Dies soll im Folgenden gezeigt werden. Es muss gelten

$$
\begin{aligned}
\frac{\mu A + p_{\max} B_1}{B_2} &\leq \frac{\mu A}{B_3} - \frac{\sqrt{\mu^2 A^2 + p_{\max}^2 B_1 B_3}}{B_3} \\
\mu A B_3 + p_{\max} B_1 B_3 &\geq \mu A B_2 - B_2 \sqrt{\mu^2 A^2 + p_{\max}^2 B_1 B_3} \\
\mu A + p_{\max} B_1 B_3 &\geq -B_2 \sqrt{\mu^2 A^2 + p_{\max}^2 B_1 B_3}
\end{aligned}
$$

[82] In diesem Fall ist die erste Lösung negativ.

$$
\begin{aligned}
-\mu A - p_{\max} B_1 B_3 &\leq B_2 \sqrt{\mu^2 A^2 + p_{\max}^2 B_1 B_3} \\
\mu^2 A^2 + 2\mu A p_{\max} B_1 B_3 + p_{\max}^2 B_1^2 B_3^2 &\leq \mu^2 A^2 B_2^2 + p_{\max}^2 B_1 B_3 B_2^2 \\
0 \leq \mu^2 A^2 (B_2^2 - 1) - 2\mu A p_{\max} B_1 B_3 &+ p_{\max}^2 B_1 B_3 (B_2^2 - B_1 B_3) \\
0 \leq \mu^2 A^2 (B_2^2 - 1) - 2\mu A p_{\max} B_1 B_3 &+ p_{\max}^2 B_1 B_3 \\
0 \leq \mu^2 A^2 B_1 B_3 - 2\mu A p_{\max} B_1 B_3 &+ p_{\max}^2 B_1 B_3 \\
0 \leq \mu^2 A^2 - 2\mu A p_{\max} &+ p_{\max}^2 \\
0 \leq (\mu A &+ p_{\max})^2.
\end{aligned}
$$

Ohne spezielle Annahmen bzgl. der Störgröße ε ist es nicht möglich, Aussagen über die Höhe der optimalen Prämie zu treffen. Auch eine Abschätzung der optimalen Prämie zwischen den einzelnen Risikoeinstellungen (Risikofreude vs. Risikoneutralitat bzw. Risikoaversion vs. Risikoneutralität) ist nicht möglich. Somit muss ein Zedent entsprechend seiner Risikoeinstellung und der vorliegenden Störgröße seine optimale Prämie bestimmen. Außerdem muss dieser seine optimale Prämie hinsichtlich der zweiten Ableitung überprüfen, damit auch wirklich ein Maximum vorliegt.

Anhang D

Beweise unter Stochastischer Dominanz

D.1 Beweise für das Prioritätsoptimierungsproblem

Beweis von Satz 5.6.2:
1. Behauptung:
X und Z sind Zufallsvariablen und Z dominiert X stochastisch erster Ordnung. Man betrachte die Abbildung D.1.

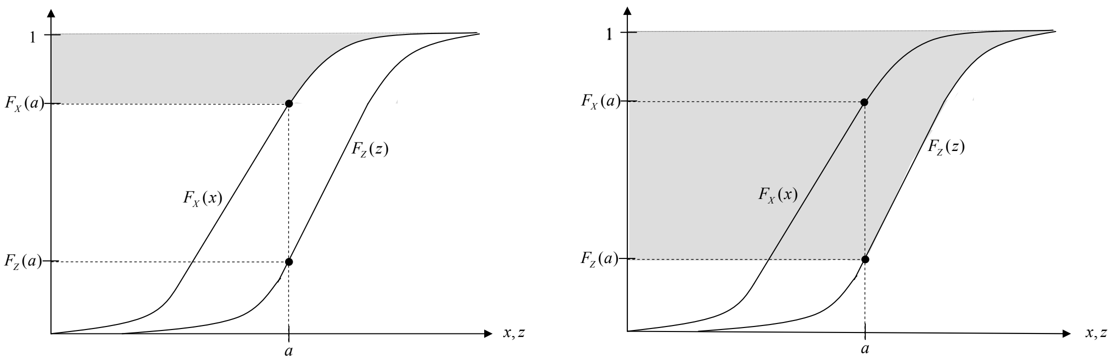


Abbildung D.1: Satz 5.6.2 Behauptung (1).

Es gilt $\int\limits_{F_X(a)}^{1} F_X^{-1}(t)\ dt \leq \int\limits_{F_Z(a)}^{1} F_Z^{-1}(t)\ dt$. Durch Substitution von $t = F_X(x)$ folgt

$$\int\limits_{F_X(a)}^{1} F_X^{-1}(t)\ dt = \int\limits_{a}^{\infty} F_X^{-1}(F_X(x))\ dF_X(x) = \int\limits_{a}^{\infty} x\ dF_X(x)^{1}.$$

[1]Man substituiere $t = F_X(x)$, somit ist $\frac{dF_x(x)}{dt} = 1$. Für die obere Integralsgrenze $F_X(x) = t = 1$ folgt $x = \infty$. Für die untere Integralsgrenze gilt $F_X(x) = t = F_X(a)$ und damit $x = a$.

Analog gilt für die Zufallsvariable Z mit Verteilung F_Z

$$\int_{F_Z(a)}^{1} F_Z^{-1}(t)\ dt = \int_a^{\infty} z\ dF_Z(z).$$

Daraus folgt $\int_a^{\infty} x\ dF_X(x) \leq \int_a^{\infty} z\ dF_Z(z)$ für alle $a \in \mathbb{R}$.

2. Behauptung:
X und Z sind Zufallsvariablen und Z dominiert X stochastisch erster Ordnung. Man betrachte die Abbildung D.2.

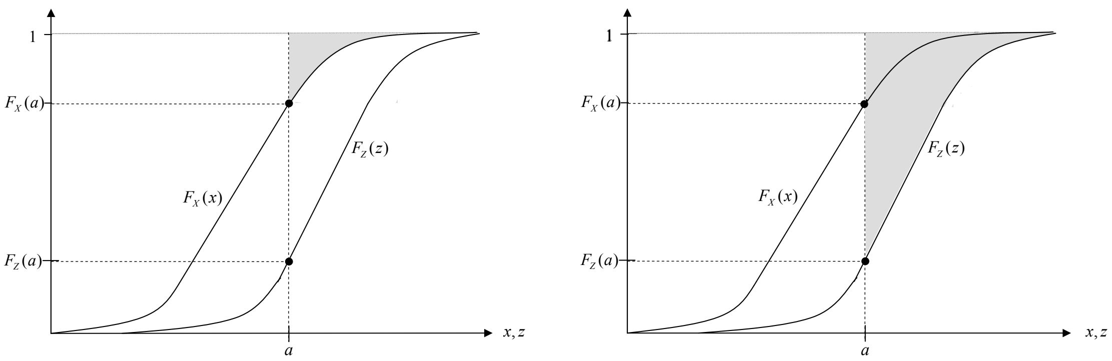


Abbildung D.2: Satz 5.6.2 Behauptung (2).

Es gilt

$$\int_{F_X(a)}^{1} F_X^{-1}(t)\ dt - \int_{F_X(a)}^{1} a\ dt \leq \int_{F_Z(a)}^{1} F_Z^{-1}(t)\ dt - \int_{F_Z(a)}^{1} a\ dt.$$

Durch Substitution von $t = F_X(x)$ folgt

$$\int_{F_X(a)}^{1} F_X^{-1}(t)\ dt - \int_{F_X(a)}^{1} a\ dt = \int_{F_X(a)}^{1} (F_X^{-1}(t) - a)\ dt = \int_a^{\infty} (x-a)\ dF_X(x)^2.$$

Analog gilt für die Zufallsvariable Z mit Verteilung F_Z

$$\int_{F_Z(a)}^{1} F_Z^{-1}(t)\ dt - \int_{F_Z(a)}^{1} a\ dt = \int_a^{\infty} (z-a)\ dF_Z(z).$$

Daraus folgt die Behauptung $\int_a^{\infty} (x-a)\ dF_X(x) \leq \int_a^{\infty} (z-a)\ dF_Z(z)$.

3. Behauptung:
Sei X eine Zufallsvariable und F_X die dazugehörige Verteilungsfunktion. Man betrachte die Abbildung D.3.

[2]Man substituiere $t = F_X(x)$, somit ist $\frac{dF_x(x)}{dt} = 1$. Für die obere Integralgrenze folgt $x = \infty$ bzw. für die untere $x = a$.

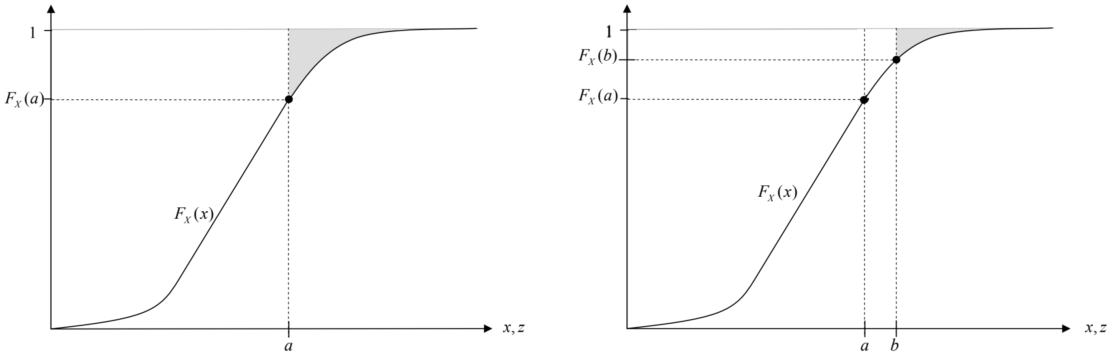


Abbildung D.3: Satz 5.6.2 Behauptung (3).

Es gilt

$$\int_{F_X(a)}^{1} (F_X^{-1}(t) - a)\ dt \geq \int_{F_X(b)}^{1} (F_X^{-1}(t) - b)\ dt.$$

Durch Substitution von $t = F_X(x)$ auf beiden Seiten folgt

$$\int_{a}^{\infty} (x - a)\ dF_X(x) \geq \int_{b}^{\infty} (x - b)\ dF_X(x)$$

für alle $a \leq b$ und $a, b \in \mathbb{R}$.

QED

Beweis von Satz 5.6.3:
1. Behauptung:
X und Z sind Zufallsvariablen und Z dominiert X stochastisch zweiter Ordnung, dann gilt

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{a} F_X(t)\ dt \geq \int_{-\infty}^{a} F_Z(t)\ dt \quad &\Rightarrow \quad -\int_{0}^{a} F_X(t)\ dt \leq -\int_{0}^{a} F_Z(t)\ dt \\ &\Rightarrow \quad \int_{0}^{a} 1\ dt - \int_{0}^{a} F_X(t)\ dt \leq \int_{0}^{a} 1\ dt - \int_{0}^{a} F_Z(t)\ dt.\end{aligned}$$

Dies veranschaulicht die Abbildung D.4.

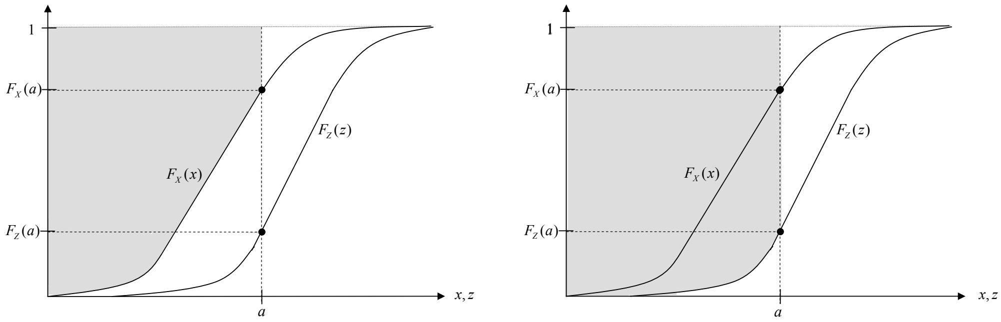


Abbildung D.4: Satz 5.6.3 Behauptung (1).

Man erkennt aus der Abbildung, dass folgende Ungleichung gilt

$$\int_0^{F_X(a)} F_X^{-1}(t)\ dt + \int_{F_X(a)}^{1} a\ dt \quad \leq \quad \int_0^{F_Z(a)} F_Z^{-1}(t) dt + \int_{F_Z(a)}^{1} a\ dt.$$

Es folgt daraus durch Substitution

$$\begin{aligned} \int_0^a x\ dF_X(x) + \int_a^\infty a\ dF_X(x) \quad &\leq \quad \int_0^a z\ dF_Z(z) + \int_a^\infty a\ dF_Z(z) \\ E(\min(a,X) \quad &\leq \quad E(\min(a,Z)) \end{aligned}$$

für alle $a \in \mathbb{R}$.

2. Behauptung:
X und Z sind Zufallsvariablen und Z dominiert X stochastisch zweiter Ordnung, dann gilt nach Behauptung (1) $E(\min(a,X) \leq E(\min(a,Z))$ für alle $a \in \mathbb{R}$. Für eine Verteilungsfunktion F_Z gilt $E(\min(a,Z)) \leq E(\min(b,Z))$ für alle $a \leq b$ und $a,b \in \mathbb{R}$. Dies illustriert die Abbildung D.5.

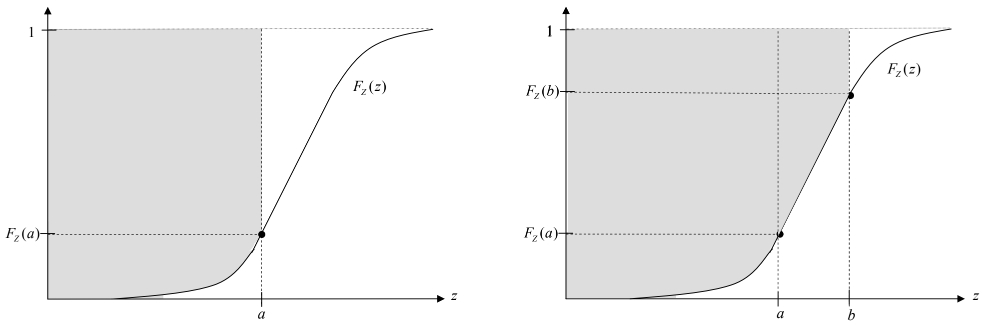


Abbildung D.5: Satz 5.6.3 Behauptung (2).

3. Behauptung:
X und Z sind Zufallsvariablen und Z dominiert X stochastisch zweiter Ordnung, dann gilt nach Behauptung (1)

$$\int_0^a x\ dF_X(x) + \int_a^\infty a\ dF_X(x) \quad \leq \quad \int_0^a z\ dF_Z(z) + \int_a^\infty a\ dF_Z(z).$$

Für $a = \infty$ folgt $\int_0^\infty x\ dF_X(x) \leq \int_0^\infty z\ dF_Z(z)$ bzw. $E(X) \leq E(Z)$.

QED

Beweis von Satz 5.6.9:
1. Behauptung:
Wegen Satz 5.6.3 Behauptung (3) gilt $E(X) \leq E(Z)$ für stochastische Dominanz zweiter als auch für stochastische Dominanz erster Ordnung. Somit ist $-E(X) \geq -E(Z)$. Für den erwarteten Rückversicherungsschaden folgt nach Satz 5.6.7 bei stochastischer Dominanz erster Ordnung $E(RVS(d,X)) \leq E(RVS(d,Z))$ für alle $d \geq 0$. Daraus ergibt sich, da $\gamma \geq 0$ ist, $-\gamma E(RVS(d,X)) \geq -\gamma E(RVS(d,Z))$ für alle $d \geq 0$. Insgesamt folgt somit $E(G(d,X)) \geq E(G(d,Z))$ für alle $d \geq 0$.

2. Behauptung:
Aus Behauptung (1) folgen für die optimalen Prioritäten d_X^* und d_Z^* die Ungleichungen $E(G(d_X^*,X)) \geq E(G(d_X^*,Z))$ und $E(G(d_Z^*,X)) \geq E(G(d_Z^*,Z))$.

Des Weiteren gilt bei stochastischer Dominanz erster Ordnung nach Satz 5.6.8

$$E(RVS(d_X^*,X)) \geq E(RVS(d_Z^*,X)).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} Pr - B - E(X) - \gamma E(RVS(d_X^*,X)) &\leq Pr - B - E(X) - \gamma E(RVS(d_Z^*,X)) \\ E(G(d_X^*,X)) &\leq E(G(d_Z^*,X)). \end{aligned}$$

Insgesamt lässt sich damit die Abschätzung

$$E(G(d_X^*,Z)) \leq E(G(d_X^*,X)) \leq E(G(d_Z^*,X))$$

festhalten. Die Abschätzung

$$E(G(d_X^*,Z)) \leq E(G(d_Z^*,Z)) \leq E(G(d_Z^*,X))$$

ergibt sich analog.

QED

Beweis von Satz 5.6.10:
Für die Gewinnfunktion bzgl. X gilt

$$G(d,X) = Pr - B - X - RVP_X(d) + \begin{cases} 0, & \text{für } X < d \\ X - d, & \text{für } X \geq d \end{cases}.$$

Dabei sei $G_{\min,X}$ der kleinste Gewinn, der bei der Verteilung von X auftreten kann. Es ist somit

$$G(d,X) = Pr - B - RVP_X(d) - d = G_{\min,X}.$$

Analog sei $G_{\min,Z}$ der kleinste Gewinn bzgl. Z. Für diesen folgt

$$G(d,Z) = Pr - B - RVP_Z(d) - d = G_{\min,Z}.$$

Nach Satz 5.6.8 gilt bei stochastischer Dominanz erster Ordnung für die Rückversicherungsprämien $RVP_X(d) \leq RVP_Z(d)$. Daraus folgt $G_{\min,Z} \leq G_{\min,X}$. Damit ist $G_{\min,Z} =: G_{\min}$ der Minimalgewinn.

Man betrachte den Fall $d \leq x, z$:
Sei a eine reelle Zahl kleiner als der Minimalgewinn, dann gilt $F_{G(d,X)}(a) = P(G(d,X) \leq a) = 0$ für alle $a < G_{\min}$ bzw. $F_{G(d,Z)}(a) = P(G(d,Z) \leq a) = 0$ für alle $a < G_{\min}$. Daraus folgt $F_{G(d,X)}(a) = F_{G(d,Z)}(a)\ \forall a < G_{\min}$.

Sei a nun eine reelle Zahl kleiner $G_{\min,X}$, aber größer als der Minimalgewinn, dann gilt $F_{G(d,X)}(a) = P(G(d,X) \leq a) = 0$ für alle $G_{\min} \leq a < G_{\min,X}$ bzw. $F_{G(d,Z)}(a) = P(G(d,Z) \leq a) > 0$ für alle $G_{\min} \leq a < G_{\min,X}$. Daraus folgt $F_{G(d,X)}(a) \leq F_{G(d,Z)}(a)\ \forall a < G_{\min,X}$.

Man betrachte den Fall $d > x, z$:
Für die Gewinnfunktion bzgl. X lässt sich

$$G(d,X) = Pr - B - RVP_X(d) - x \geq G_{\min}$$

und bzgl. Z

$$G(d,Z) = Pr - B - RVP_Z(d) - z \geq G_{\min}$$

festhalten. Somit kann man für die Gewinnverteilungsfunktion bzgl. X

$$\begin{aligned} F_{G(d,X)}(a) &= P(G(d,X) \leq a) = P(Pr - B - RVP_X(d) - X \leq a) \\ &= P(X \geq Pr - B - RVP_X(d) - a) = 1 - F_X(Pr - B - RVP_X(d) - a) \end{aligned}$$

für alle $a \geq G_{\min}$ schreiben. Analog gilt für die Verteilungsfunktion von Z

$$F_{G(d,Z)}(a) = 1 - F_Z(Pr - B - RVP_Z(d) - a)$$

für alle $a \geq G_{\min}$.

Man setze $b_1 = Pr - B - RVP_X(d) - a$ und $b_2 = Pr - B - RVP_Z(d) - a$. Daraus folgt bei stochastischer Dominanz erster Ordnung aufgrund der Beziehung zwischen den Rückversicherungsprämien $b_1 \geq b_2$. Daraus folgt für die Verteilungsfunktion von Z $F_Z(b_1) \geq F_Z(b_2)$. Da X von Z stochastisch dominiert wird, gilt laut Definition $F_X(b_1) \geq F_Z(b_1)$. Daraus folgt insgesamt $F_X(b_1) \geq F_Z(b_2)$.

Fortführend ist damit $1 - F_X(b_1) \leq 1 - F_Z(b_2)$ bzw. $F_{G(d,X)}(a) \leq F_{G(d,Z)}(a)$ für alle $a \geq G_{\min}$. Insgesamt folgt somit: $X \preceq_{FSD} Z \Rightarrow F_{G(d,X)}(a) \leq F_{G(d,Z)}(a)$ für alle $a \in \mathbb{R}$ bzw. $G(d,Z) \preceq_{FSD} G(d,X)$ für alle $d \geq 0$.

QED

Beweis von Satz 5.6.11:
1. Behauptung:
Für das CVaR-Prinzip[3] bzgl. eines Schadens X gilt

$$\begin{aligned}\Phi_\alpha(G(d,X)) &= E(G(d,X)|G(d,X) \leq g_\alpha(d)) \\ &= \begin{cases} Pr - B - RVP_X(d) - d, & \text{für } F_X(d) < 1-\alpha \\ \\ Pr - B - RVP_X(d) - \frac{1}{\alpha} d(1 - F_X(d)) & \\ -\frac{1}{\alpha} \int\limits_{F_X^{-1}(1-\alpha)}^{d} x \, dF_X(x), & \text{für } F_X(d) \geq 1-\alpha \end{cases} .\end{aligned}$$

Fall $F_Z(d) \leq F_X(d) < 1-\alpha$:
Z dominiert X stochastisch erster Ordnung, dann ist nach Satz 5.6.8 $RVP_X(d) \leq RVP_Z(d)$ bzw. $-RVP_X(d) \geq -RVP_Z(d)$. Daraus folgt

$$Pr - B - RVP_X(d) - d \quad \geq \quad Pr - B - RVP_Z(d) - d$$

bzw. $\Phi_\alpha(G(d,X)) \geq \Phi_\alpha(G(d,Z))$ für alle $d \geq 0$.

Fall $1 - \alpha \leq F_Z(d) \leq F_X(d)$:
Z dominiert X stochastisch in erster Ordnung. Betrachte dazu Abbildung D.6. Es gilt

$$\int\limits_{1-\alpha}^{F_X(d)} F_X^{-1}(t)\,dt + \int\limits_{F_X(d)}^{1} d\,dt \quad \leq \quad \int\limits_{1-\alpha}^{F_Z(d)} F_Z^{-1}(t)\,dt + \int\limits_{F_Z(d)}^{1} d\,dt.$$

[3]Vgl. Beweis zu Satz 5.2.1. Die Rückversicherungsprämie wird dabei mit dem Index “X” versehen, um diese später von der Rückversicherungsprämie bzgl. der Zufallsvariablen Z unterscheiden zu können.

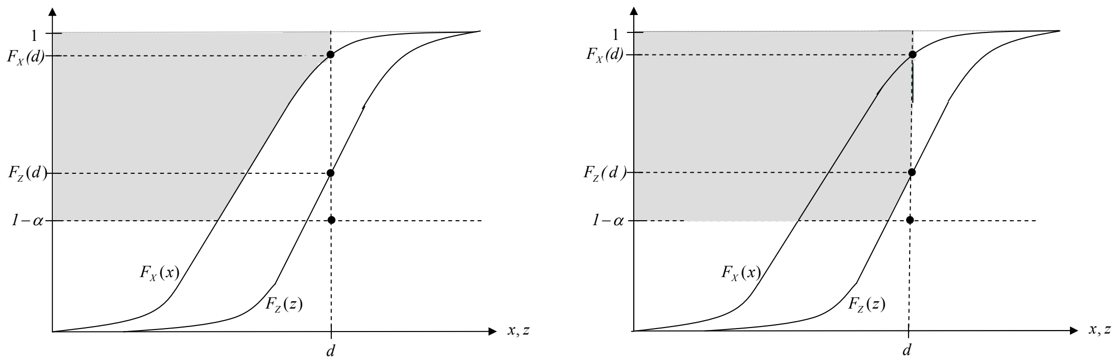


Abbildung D.6: Satz 5.6.11 Behauptung (1) Abbildung I.

Durch Substitution von $t = F_X(x)$ bzw. $t = F_Z(z)$ folgt

$$\begin{aligned}
\int\limits_{F_X^{-1}(1-\alpha)}^{d} x\ dF_X(x) + \int\limits_{d}^{\infty} d\ dF_X(x) &\leq \int\limits_{F_Z^{-1}(1-\alpha)}^{d} z\ dF_Z(z) + \int\limits_{d}^{\infty} d\ dF_Z(z) \\
\int\limits_{F_X^{-1}(1-\alpha)}^{d} x\ dF_X(x) + d(1 - F_X(d)) &\leq \int\limits_{F_Z^{-1}(1-\alpha)}^{d} z\ dF_Z(z) + d(1 - F_Z(d))
\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{\alpha} \int\limits_{F_X^{-1}(1-\alpha)}^{d} x\ dF_X(x) - \frac{1}{\alpha} d(1 - F_X(d)) \geq -\frac{1}{\alpha} \int\limits_{F_Z^{-1}(1-\alpha)}^{d} z\ dF_Z(z) - \frac{1}{\alpha} d(1 - F_Z(d)).$$

Für stochastische Dominanz erster Ordnung gilt nach Satz 5.6.8 $-RVP_X(d) \geq -RVP_Z(d)$ für alle $d \geq 0$. Damit ist auch

$$\begin{aligned}
&Pr - B - RVP_X(d) - \frac{1}{\alpha} d(1 - F_X(d)) - \frac{1}{\alpha} \int\limits_{F_X^{-1}(1-\alpha)}^{d} x\ dF_X(x) \\
\geq\ &Pr - B - RVP_Z(d) - \frac{1}{\alpha} d(1 - F_Z(d)) - \frac{1}{\alpha} \int\limits_{F_Z^{-1}(1-\alpha)}^{d} z\ dF_Z(z).
\end{aligned}$$

Daraus folgt $\Phi_\alpha(G(d, X)) \geq \Phi_\alpha(G(d, Z))$ für alle $d \geq 0$.

Fall $F_Z(d) < 1-\alpha \leq F_X(d)$:
Z dominiert X stochastisch in erster Ordnung. Betrachte dazu Abbildung D.7.

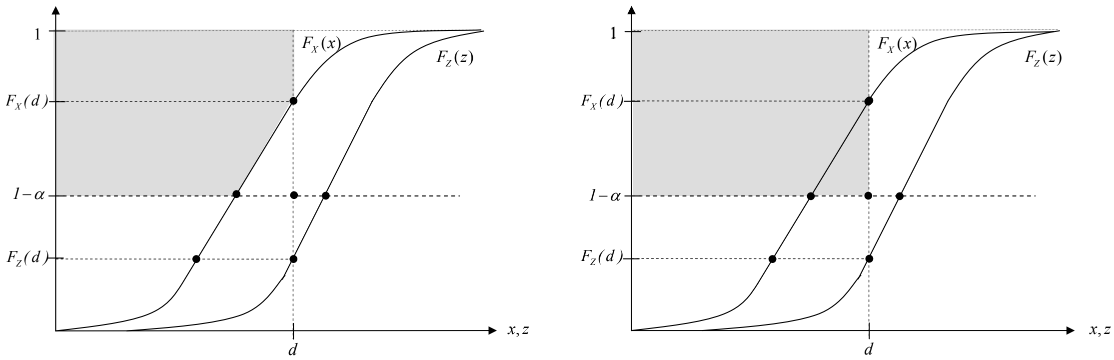


Abbildung D.7: Satz 5.6.11 Behauptung (1) Abbildung II.

Es gilt

$$\int_{1-\alpha}^{F_X(d)} F_X^{-1}(t)\ dt + \int_{F_X(d)}^{1} d\ dt \quad \leq \quad \alpha \cdot d.$$

Durch Substitution von $t = F_X(x)$ folgt

$$\begin{aligned}
\int_{F_X^{-1}(1-\alpha)}^{d} x\ dF_X(x) + \int_{d}^{\infty} d\ dF_X(x) \quad &\leq \quad \alpha \cdot d \\
\int_{F_X^{-1}(1-\alpha)}^{d} x\ dF_X(x) + d(1-F_X(d)) \quad &\leq \quad \alpha \cdot d \\
-\frac{1}{\alpha} \int_{F_X^{-1}(1-\alpha)}^{d} x\ dF_X(x) - \frac{1}{\alpha} d(1-F_X(d)) \quad &\geq \quad -d.
\end{aligned}$$

Für stochastische Dominanz erster Ordnung gilt Satz 5.6.8 $-RVP_X(d) \geq -RVP_Z(d)$ für alle $d \geq 0$. Damit ist auch

$$Pr - B - RVP_X(d) - \frac{1}{\alpha} \int_{F_X^{-1}(1-\alpha)}^{d} x\ dF_X(x) - \frac{1}{\alpha} d(1-F_X(d)) \quad \geq \quad Pr - B - RVP_Z(d) - d.$$

Daraus folgt $\Phi_\alpha(G(d,X)) \geq \Phi_\alpha(G(d,Z))$ für alle $d \geq 0$.

2. Behauptung:
Zum Beweis der Behauptung muss zunächst der obere bedingte Erwartungswert bestimmt und für die stochastische Dominanz abgeschätzt werden[4]. Für den oberen bedingten erwarteten Gewinn bzgl. Schaden X ergibt sich

$$E(G(d,X)|G(d,X) \geq g_\alpha(d))$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}\left[\int\limits_0^{F_X^{-1}(1-\alpha)} [Pr - B - RVP_X(d) - x]\, dF_X(x)\right], & \text{für } F_X(d) \geq 1-\alpha \\ \frac{1}{1-\alpha}\left[\int\limits_0^{d} [Pr - B - RVP_X(d) - x]\, dF_X(x) \right. \\ \left. + \int\limits_d^{F_X^{-1}(1-\alpha)} [Pr - B - RVP_X(d) - d]\, dF_X(x)\right], & \text{für } F_X(d) < 1-\alpha \end{cases}$$

$$= \begin{cases} Pr - B - RVP_X(d) - \frac{1}{1-\alpha}\int\limits_0^{F_X^{-1}(1-\alpha)} x\, dF_X(x), & \text{für } F_X(d) \geq 1-\alpha \\ Pr - B - RVP_X(d) - \frac{1}{1-\alpha}\int\limits_0^{d} x\, dF_X(x) \\ -\frac{1}{1-\alpha}\int\limits_d^{F_X^{-1}(1-\alpha)} d\, dF_X(x), & \text{für } F_X(d) < 1-\alpha \end{cases}$$

$$= \begin{cases} Pr - B - RVP_X(d) - \frac{1}{1-\alpha}\int\limits_0^{F_X^{-1}(1-\alpha)} x\, dF_X(x), & \text{für } F_X(d) \geq 1-\alpha \\ Pr - B - RVP_X(d) - \frac{1}{1-\alpha}\int\limits_0^{d} x\, dF_X(x) - d\left[1 - \frac{1}{1-\alpha}F_X(d)\right], & \text{für } F_X(d) < 1-\alpha \end{cases}.$$

[4]Ohne Abschätzung des oberen bedingten erwarteten Gewinns kann nur die Abschätzung des Präferenzfunktionals für $\lambda \geq \alpha$ gezeigt werden, denn es gilt nach Satz 5.6.9 $E(G(d,X)) \geq E(G(d,Z))$ und nach Behauptung (1) $E(G(d,X)|G(d,X) \leq g_\alpha(d)) \geq E(G(d,Z)|G(d,Z) \leq g_\alpha(d))$ für alle $d \geq 0$. Damit folgt für das Präferenzfunktional $\Phi_{\alpha,\lambda}(G(d,.)) = \frac{1-\lambda}{1-\alpha}E(G(d,.)) + \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}E(G(d,.)|G(d,.) \leq g_\alpha(d))$ für $\lambda \geq \alpha$: $\Phi_{\alpha,\lambda}(G(d,X)) \geq \Phi_{\alpha,\lambda}(G(d,Z))$ für alle $d \geq 0$.

Fall $F_Z(d) \leq F_X(d) < 1-\alpha$:
Z dominiert X stochastisch in erster Ordnung. Betrachte dazu Abbildung D.8.

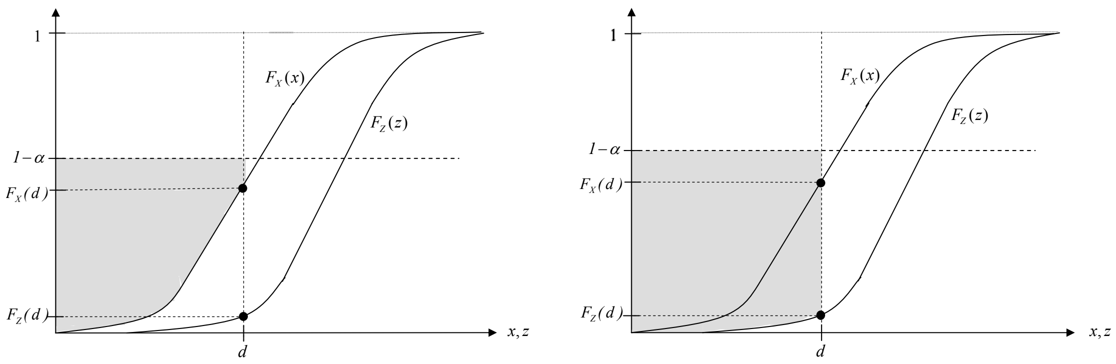


Abbildung D.8: Satz 5.6.11 Behauptung (2) Abbildung I.

Es gilt

$$\int_0^{F_X(d)} F_X^{-1}(t)\ dt + \int_{F_X(d)}^{1-\alpha} d\ dt \quad \leq \quad \int_0^{F_Z(d)} F_Z^{-1}(t)\ dt + \int_{F_Z(d)}^{1-\alpha} d\ dt.$$

Durch Substitution von $t = F_X(x)$ bzw. $t = F_Z(z)$ folgt

$$\begin{aligned}
\int_0^{d} x\ dF_X(x) + \int_d^{F_X^{-1}(1-\alpha)} d\ dF_X(x) \quad &\leq \quad \int_0^{d} z\ dF_Z(z) + \int_d^{F_Z^{-1}(1-\alpha)} d\ dF_Z(z) \\
\int_0^{d} x\ dF_X(x) + d(1-\alpha-F_X(d)) \quad &\leq \quad \int_0^{d} z\ dF_Z(z) + d(1-\alpha-F_Z(d)) \\
-\frac{1}{1-\alpha}\int_0^{d} x\ dF_X(x) - d\left(1-\frac{1}{1-\alpha}F_X(d)\right) \quad &\geq \quad -\frac{1}{1-\alpha}\int_0^{d} z\ dF_Z(z) - d\left(1-\frac{1}{1-\alpha}F_Z(d)\right).
\end{aligned}$$

Für stochastische Dominanz erster Ordnung gilt Satz 5.6.8 $-RVP_X(d) \geq -RVP_Z(d)$ für alle $d \geq 0$. Damit ist auch

$$\begin{aligned}
Pr-B-RVP_X(d) \quad &- \quad \frac{1}{1-\alpha}\int_0^{d} x\ dF_X(x) - d\left(1-\frac{1}{1-\alpha}F_X(d)\right) \\
\geq Pr-B-RVP_Z(d) \quad &- \quad \frac{1}{1-\alpha}\int_0^{d} z\ dF_Z(z) - d\left(1-\frac{1}{1-\alpha}F_Z(d)\right).
\end{aligned}$$

Daraus folgt $E(G(d,X)|G(d,X) \geq g_\alpha(d)) \geq E(G(d,Z)|G(d,Z) \geq g_\alpha(d))$ für alle $d \geq 0$.

Fall $1-\alpha \leq F_Z(d) \leq F_X(d)$:
Z dominiert X stochastisch in erster Ordnung. Betrachte dazu Abbildung D.9.

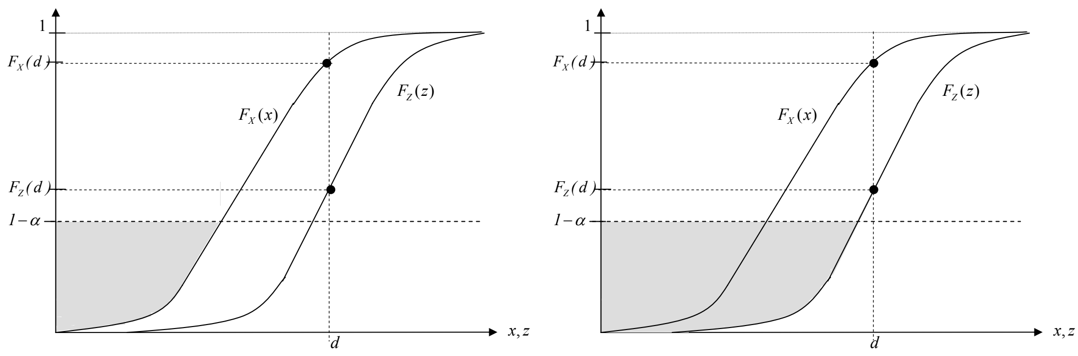


Abbildung D.9: Satz 5.6.11 Behauptung (2) Abbildung II.

Es gilt

$$\int_0^{1-\alpha} F_X^{-1}(t)\ dt \quad \leq \quad \int_0^{1-\alpha} F_Z^{-1}(t)\ dt.$$

Durch Substitution von $t = F_X(x)$ bzw. $t = F_Z(z)$ folgt

$$\begin{aligned} \int_0^{F_X^{-1}(1-\alpha)} x\ dF_X(x) \quad &\leq \quad \int_0^{F_Z^{-1}(1-\alpha)} z\ dF_Z(z) \\ -\frac{1}{1-\alpha}\int_0^{F_X^{-1}(1-\alpha)} x\ dF_X(x) \quad &\geq \quad -\frac{1}{1-\alpha}\int_0^{F_Z^{-1}(1-\alpha)} z\ dF_Z(z). \end{aligned}$$

Für stochastische Dominanz erster Ordnung gilt nach Satz 5.6.8 $-RVP_X(d) \geq -RVP_Z(d)$ für alle $d \geq 0$. Damit ist auch

$$\begin{aligned} &Pr - B - RVP_X(d) \quad - \quad \frac{1}{1-\alpha}\int_0^{F_X^{-1}(1-\alpha)} x\ dF_X(x) \\ \geq\ &Pr - B - RVP_Z(d) \quad - \quad \frac{1}{1-\alpha}\int_0^{F_Z^{-1}(1-\alpha)} z\ dF_Z(z). \end{aligned}$$

Daraus folgt $E(G(d,X)|G(d,X) \geq g_\alpha(d)) \geq E(G(d,Z)|G(d,Z) \geq g_\alpha(d))$ für alle $d \geq 0$.

Fall $F_Z(d) < 1-\alpha \leq F_X(d)$:
Z dominiert X stochastisch in erster Ordnung. Betrachte dazu Abbildung D.10.

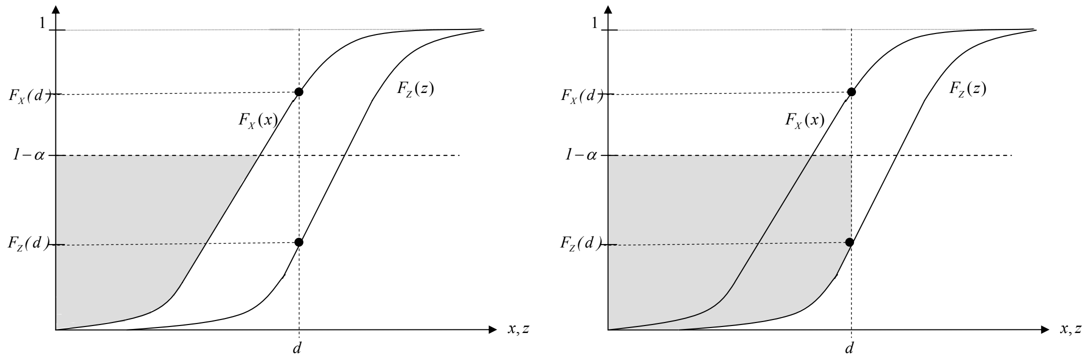


Abbildung D.10: Satz 5.6.11 Behauptung (2) Abbildung III.

Dann ist

$$\int_0^{1-\alpha} F_X^{-1}(t)\ dt \quad \leq \quad \int_0^{F_Z(d)} F_Z^{-1}(t)\ dt + \int_{F_Z(d)}^{1-\alpha} d\ dt.$$

Durch Substitution von $t = F_X(x)$ bzw. $t = F_Z(z)$ folgt

$$\int_0^{F_X^{-1}(1-\alpha)} x\ dF_X(x) \quad \leq \quad \int_0^{d} z\ dF_Z(z) + \int_d^{F_Z^{-1}(1-\alpha)} d\ dF_Z(z)$$

$$-\frac{1}{1-\alpha}\int_0^{F_X^{-1}(1-\alpha)} x\ dF_X(x) \quad \geq \quad -\frac{1}{1-\alpha}\int_0^{d} z\ dF_Z(z) - d\left(1-\frac{1}{1-\alpha}F_Z(d)\right).$$

Für stochastische Dominanz erster Ordnung gilt nach Satz 5.6.8 $-RVP_X(d) \geq -RVP_Z(d)$ für alle $d \geq 0$. Damit ist auch

$$\begin{aligned} & Pr-B-RVP_X(d) \quad - \quad \frac{1}{1-\alpha}\int_0^{F_X^{-1}(1-\alpha)} x\ dF_X(x) \\ \geq\ & Pr-B-RVP_Z(d) \quad - \quad \frac{1}{1-\alpha}\int_0^{d} z\ dF_Z(z) - d\left(1-\frac{1}{1-\alpha}F_Z(d)\right). \end{aligned}$$

Daraus folgt $E(G(d,X)|G(d,X) \geq g_\alpha(d)) \geq E(G(d,Z)|G(d,Z) \geq g_\alpha(d))$ für alle $d \geq 0$.

Insgesamt ergibt sich somit für alle drei Fälle $E(G(d,X)|G(d,X) \geq g_\alpha(d)) \geq E(G(d,Z)|G(d,Z) \geq g_\alpha(d))$ für alle $d \geq 0$.

Für das Präferenzfunktional gilt

$$\Phi_{\alpha,\lambda}(G(d,.)) = \lambda E(G(d,.)|G(d,.) \leq g_\alpha(d) + (1-\lambda)E(G(d,.)|G(d,.) \geq g_\alpha(d)).$$

Für $\lambda \in [0,1]$ sind die Gewichte vor dem oberen und unteren bedingten Erwartungswert größer gleich null. Es lässt sich die Ungleichung

$$\begin{aligned} \lambda E(G(d,X)|G(d,X) \leq g_\alpha(d)) \quad &+ \quad (1-\lambda)E(G(d,X)|G(d,X) \geq g_\alpha(d)) \\ \geq \lambda E(G(d,Z)|G(d,Z) \leq g_\alpha(d)) \quad &+ \quad (1-\lambda)E(G(d,Z)|G(d,Z) \geq g_\alpha(d)) \end{aligned}$$

festhalten. Daraus folgt die Behauptung.

3. Behauptung:
Es sei $E(G(d,X)|G(d,X) \leq g_\alpha(d)) \geq E(G(d,Z)|G(d,Z) \leq g_\alpha(d))$ für alle $d \geq 0$. Für $\alpha = 1-\beta$ lässt sich damit auch $E(G(d,X)|G(d,X) \leq g_{1-\beta}(d)) \geq E(G(d,Z)|G(d,Z) \leq g_{1-\beta}(d))$ für alle $d \geq 0$ schreiben. Ebenso folgt aus $E(G(d,X)|G(d,X) \geq g_\alpha(d)) \geq E(G(d,Z)|G(d,Z) \geq g_\alpha(d))$ für $\alpha = 1-\beta$ für den oberen bedingten erwarteten Gewinn bzgl. des $(1-\beta)$-Gewinnquantils $E(G(d,X)|G(d,X) \geq g_{1-\beta}(d)) \geq E(G(d,Z)|G(d,Z) \geq g_{1-\beta}(d))$.

Für das Präferenzfunktional gilt

$$\Phi_{\beta,\delta}(G(d,.)) = (1-\delta)E(G(d,.)|G(d,.) \leq g_{1-\beta}(d) + \delta E(G(d,.)|G(d,.) \geq g_{1-\beta}(d)).$$

Die Gewichte vor dem oberen und unteren bedingten Erwartungswert sind für $\delta \in [0,1]$ größer gleich null. Damit lautet die Ungleichung

$$\begin{aligned} &(1-\delta)E(G(d,X)|G(d,X) \leq g_{1-\beta}(d) + \delta E(G(d,X)|G(d,X) \geq g_{1-\beta}(d)) \\ \geq\ &(1-\delta)E(G(d,Z)|G(d,Z) \leq g_{1-\beta}(d) + \delta E(G(d,Z)|G(d,Z) \geq g_{1-\beta}(d)). \end{aligned}$$

Dementsprechend folgt die Behauptung.

QED

D.2 Beweise für das zweidimensionale Optimierungsproblem

Beweis von Satz 7.4.4:
Z dominiert X stochastisch erster Ordnung, dann gilt

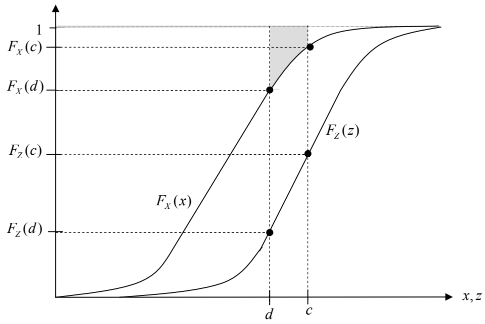
$$\int_{F_X(d)}^{1} [F_X^{-1}(t) - d]\ dt - \int_{F_X(c)}^{1} [F_X^{-1}(t) - c]\ dt \leq \int_{F_Z(d)}^{1} [F_Z^{-1}(t) - d]\ dt - \int_{F_Z(c)}^{1} [F_Z^{-1}(t) - c]\ dt \tag{D.1}$$

für alle $c, d \geq 0$ und $d \leq c$. Dies illustriert Abbildung D.11.
Durch Substitution folgt

$$\int_{d}^{\infty} [x-d]\ dF_X(x) - \int_{c}^{\infty} [x-c]\ dF_X(x) \quad \leq \quad \int_{d}^{\infty} [z-d]\ dF_Z(z) - \int_{c}^{\infty} [z-c]\ dF_Z(z)^5$$

und somit $E(RVS(c,d,X)) \leq E(RVS(c,d,Z))$ für alle $d, c \geq 0$.

[5]Vgl. Vorbetrachtungen zu Satz 7.4.4.



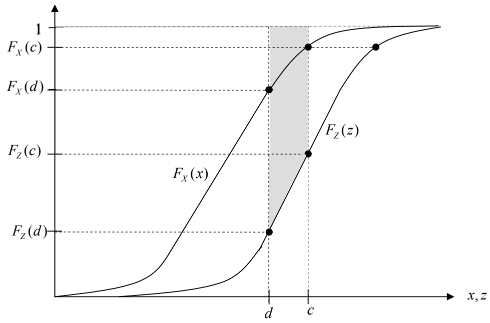


Abbildung D.11: Abschätzung für den erwarteten Rückversicherungsschaden.

QED

Beweis von Satz 7.4.8:
Die Gewinnfunktion bzgl. X sei

$$G(c,d,X) = Pr - B - X - RVP_X(c,d) + \begin{cases} 0, & \text{für } X \leq d \\ X - d, & \text{für } d < X \leq c \\ c - d, & \text{für } X > c \end{cases} .$$

Man betrachte den Fall $x, z \leq d$:
Es gilt für die Gewinnfunktion bzgl. X: $G(c,d,X) = Pr - B - X - RVP_X(c,d)$. Gleiches trifft für Z zu. Somit kann für die Zufallsvariable X

$$\begin{aligned} F_{G(c,d,X)}(a) &= P(G(c,d,X) \leq a) = P(Pr - B - X - RVP_X(c,d) \leq a) \\ &= P(X \geq Pr - B - RVP_X(c,d) - a) \\ &= 1 - F_X(Pr - B - RVP_X(c,d) - a) = 1 - F_X(b_1)^6 \end{aligned}$$

und für die Zufallsvariable Z

$$\begin{aligned} F_{G(c,d,Z)}(a) &= P(G(c,d,Z) \leq a) = P(Pr - B - Z - RVP_Z(c,d) \leq a) \\ &= P(Z \geq Pr - B - RVP_Z(c,d) - a) \\ &= 1 - F_Z(Pr - B - RVP_Z(c,d) - a) = 1 - F_Z(b_2)^7 \end{aligned}$$

erhalten werden.

Bei stochastischer Dominanz erster Ordnung gilt nach Satz 7.4.5 $RVP_X(c,d) \leq RVP_Z(c,d)$. Somit ist $b_1 \geq b_2$. Des Weiteren gilt bei stochastischer Dominanz erster Ordnung $F_X(b_1) \geq F_Z(b_1)$. Da F_Z eine Verteilungsfunktion ist, folgt auch $F_Z(b_1) \geq F_Z(b_2)$ für alle $b_1 \geq b_2$. Daraus ergibt sich $F_X(b_1) \geq F_Z(b_2)$ bzw. $1 - F_X(b_1) \leq 1 - F_Z(b_2)$. Damit ist $F_{G(c,d,X)}(a) \leq F_{G(c,d,Z)}(a)$ für alle $a \in \mathbb{R}$ bzw. $G(c,d,Z) \preceq_{FSD} G(c,d,X)$ für alle $c, d \geq 0$.

[6]Es gilt $b_1 := Pr - B - RVP_X(c,d) - a$.
[7]Es gilt $b_2 := Pr - B - RVP_Z(c,d) - a$.

Man betrachte den Fall $c < x, z$:
Es sei $G(c,d,X) = Pr - B - X - RVP_X(c,d) + c - d$. Analoges trifft für Z zu. Somit kann

$$\begin{aligned} F_{G(c,d,X)}(a) &= P(G(c,d,X) \leq a) = P(Pr - B - X - RVP_X(c,d) + c - d \leq a) \\ &= P(X \geq Pr - B - RVP_X(c,d) + c - d - a) \\ &= 1 - F_X(Pr - B - RVP_X(c,d)c - d - a) = 1 - F_X(b_1)^8 \end{aligned}$$

und für die Zufallsvariable Z

$$\begin{aligned} F_{G(c,d,Z)}(a) &= P(G(c,d,Z) \leq a) = P(Pr - B - Z - RVP_Z(c,d) \leq a) \\ &= P(Z \geq Pr - B - RVP_Z(c,d) - a) \\ &= 1 - F_Z(Pr - B - RVP_Z(c,d) + c - d - a) = 1 - F_Z(b_2)^9 \end{aligned}$$

ermittelt werden.

Bei stochastischer Dominanz erster Ordnung gilt nach Satz 7.4.5 $RVP_X(c,d) \leq RVP_Z(c,d)$. Somit ist $b_1 \geq b_2$. Des Weiteren gilt bei stochastischer Dominanz erster Ordnung $F_X(b_1) \geq F_Z(b_1)$. Da F_Z eine Verteilungsfunktion ist, lässt sich auch $F_Z(b_1) \geq F_Z(b_2)$ für alle $b_1 \geq b_2$ festhalten. Daraus folgt $F_X(b_1) \geq F_Z(b_2)$ bzw. $1 - F_X(b_1) \leq 1 - F_Z(b_2)$. Damit ist $F_{G(c,d,X)}(a) \leq F_{G(c,d,Z)}(a)$ für alle $a \in \mathbb{R}$ bzw. $G(c,d,Z) \preceq_{FSD} G(c,d,X)$ für alle $c, d \geq 0$.

Man betrachte den Fall $d < x, z \leq c$:
Es gilt $G(c,d,X) = Pr - B - X - RVP_X(c,d) + X - d = Pr - B - RVP_X(c,d) - d$ und analog für Z. Bei stochastischer Dominanz erster Ordnung folgt nach Satz 7.4.5 $RVP_X(c,d) \leq RVP_Z(c,d)$. Somit ist $G(c,d,X) \geq G(c,d,Z)$. Damit ist auch $F_{G(c,d,X)}(a) = P(G(c,d,X) \leq a) \leq P(G(c,d,Z) \leq a) = F_{G(c,d,Z)}(a)$ für alle $a \in \mathbb{R}$ und $G(c,d,Z) \preceq_{FSD} G(c,d,X)$ für alle $c, d \geq 0$.

Insgesamt folgt aus diesen Betrachtungen

$$X \preceq_{FSD} Z \Rightarrow F_{G(c,d,X)}(a) \leq F_{G(c,d,Z)}(a)\ \forall a \in \mathbb{R} \text{ und } G(c,d,Z) \preceq_{FSD} G(c,d,X)\ \forall c, d \geq 0.$$

QED

Beweis von Satz 7.4.9:
Das α-λ-Präferenzfunktional ist eine Konvexkombination aus oberem und unterem bedingten erwarteten Gewinn. Es gilt nach Lemma 1 und Lemma 2[10] für diese

$$E(G(c,d,X)|G(c,d,X) \geq g_{\alpha,X}(c,d)) \geq E(G(c,d,Z)|G(c,d,Z) \geq g_{\alpha,Z}(c,d))^{11}$$

und

$$E(G(c,d,X)|G(c,d,X) \leq g_{\alpha,X}(c,d)) \geq E(G(c,d,Z)|G(c,d,Z) \leq g_{\alpha,Z}(c,d))$$

[8] Es gilt $b_1 := Pr - B - RVP_X(c,d) + c - d - a$.
[9] Es gilt $b_2 := Pr - B - RVP_Z(c,d) + c - d - a$.
[10] Die Lemmas und deren Beweise befinden sich im Anschluss an den Beweis von Satz 7.4.9.
[11] Dabei bezeichne $g_{\alpha,X}(c,d)$ bzw. $g_{\alpha,Z}(c,d)$ das α-Quantil vom Gewinn in Abhängigkeit von der Priorität d und dem Plafond c bei Schadensverteilung X bzw. Z.

für alle $c, d \geq 0$ und $c \geq d$. Somit ist $\Phi_{\alpha,\lambda}(G(c,d,X)) \geq \Phi_{\alpha,\lambda}(G(c,d,Z))$ für alle $c, d \geq 0$ und $c \geq d$.

QED

Lemma 1
Seien X und Z Zufallsvariablen und Z dominiert X stochastisch erster Ordnung, dann gilt für den oberen bedingten erwarteten Gewinn

$$E(G(c,d,X)|G(c,d,X) \geq g_{\alpha,X}(c,d)) \geq E(G(c,d,Z)|G(c,d,Z) \geq g_{\alpha,Z}(c,d))$$

für alle $c, d \geq 0$.

Beweis von Lemma 1:
Für den oberen bedingten Erwartungswert lässt sich festhalten

$$E(G(c,d,X)|G(c,d,X) \geq g_{\alpha,X}(c,d)) = E(G(c,d,X)|X \leq x_{1-\alpha})$$

$$= \begin{cases} Pr - B - RVP_X(c,d) - d\left(1 - \frac{1}{1-\alpha}F_X(d)\right) + c\left(1 - \frac{1}{1-\alpha}F_X(d)\right) \\ -\frac{1}{1-\alpha}\int\limits_0^d x\ dF_X(x) - \frac{1}{1-\alpha}\int\limits_c^{F_X^{-1}(1-\alpha)} x\ dF_X(x), \\ \text{für } F_X(d) \leq F_X(c) < 1-\alpha \\ \\ Pr - B - RVP_X(c,d) - \frac{1}{1-\alpha}\int\limits_0^d x\ dF_X(x) - d\left[1 - \frac{1}{1-\alpha}F_X(d)\right], \\ \text{für } F_X(d) < 1-\alpha \leq F_X(c) \\ \\ Pr - B - RVP_X(c,d) - \frac{1}{1-\alpha}\int\limits_0^{F_X^{-1}(1-\alpha)} x\ dF_X(x), \\ \text{für } F_X(c) \geq F_X(d) \geq 1-\alpha \end{cases}.$$

1. Fall: $F_X(d) \geq F_Z(d) \geq 1 - \alpha$[12]:
Z dominiert X stochastisch erster Ordnung. Betrachte dazu Abbildung D.12.
Es gilt

$$\int\limits_0^{1-\alpha} F_X^{-1}(t)\ dt \quad \leq \quad \int\limits_0^{1-\alpha} F_Z^{-1}(t)\ dt.$$

Durch Substitution von $t = F_X(x)$ und $t = F_Z(z)$ folgt

$$\int\limits_0^{F_X^{-1}(1-\alpha)} x\ dF_X(x) \quad \leq \quad \int\limits_0^{F_Z^{-1}(1-\alpha)} z\ dF_Z(z)$$

$$-\frac{1}{1-\alpha}\int\limits_0^{F_X^{-1}(1-\alpha)} x\ dF_X(x) \quad \geq \quad -\frac{1}{1-\alpha}\int\limits_0^{F_Z^{-1}(1-\alpha)} z\ dF_Z(z).$$

[12] Damit ist auch $F_X(c) \geq F_Z(c) \geq 1 - \alpha$.

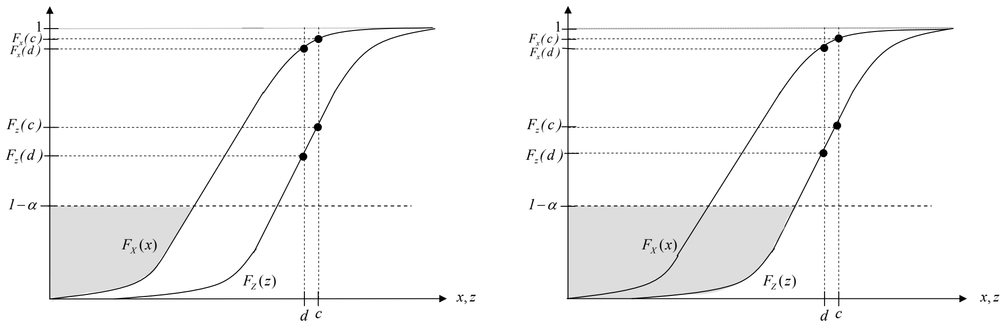


Abbildung D.12: Lemma 1 (1. Fall).

Für stochastische Dominanz erster Ordnung folgt nach Satz 7.4.5 $RVP_X(c,d) \leq RVP_Z(c,d)$ bzw. $-RVP_X(c,d) \geq -RVP_Z(c,d)$. Damit ist auch

$$
\begin{aligned}
& Pr - B - RVP_X(c,d) - \frac{1}{1-\alpha} \int\limits_0^{F_X^{-1}(1-\alpha)} x \; dF_X(x) \\
\geq \; & Pr - B - RVP_Z(c,d) - \frac{1}{1-\alpha} \int\limits_0^{F_Z^{-1}(1-\alpha)} z \; dF_Z(z) \\
& E(G(c,d,X)|G(c,d,X) \geq g_{\alpha,X}(c,d)) \geq E(G(c,d,Z)|G(c,d,Z) \geq g_{\alpha,Z}(c,d))
\end{aligned}
$$

für alle $c, d \geq 0$ und $c \geq d$.

2. Fall: $F_X(d) \geq 1-\alpha$[13] und $F_Z(c) \geq 1-\alpha > F_Z(d)$:
Z dominiert X stochastisch erster Ordnung. Betrachte dazu Abbildung D.13.

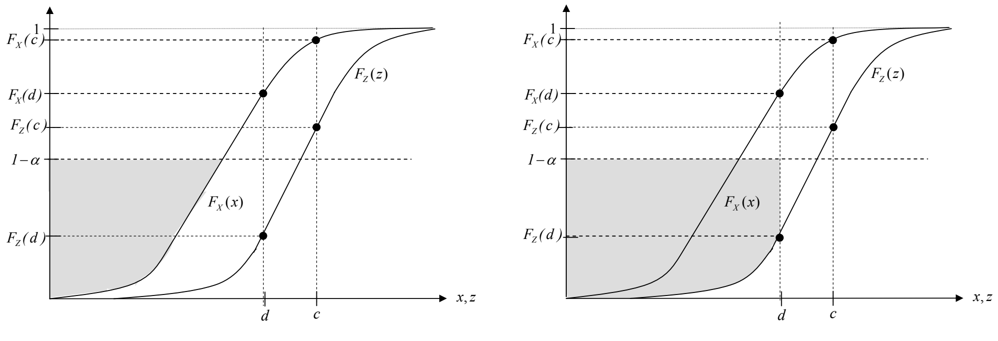


Abbildung D.13: Lemma 1 (2. Fall).

[13]Damit ist auch $F_X(c) \geq 1-\alpha$.

Es gilt

$$\int_0^{1-\alpha} F_X^{-1}(t)\ dt \quad \leq \quad \int_0^{F_Z(d)} F_Z^{-1}(t)\ dt + \int_{F_Z(d)}^{1-\alpha} d\ dt.$$

Durch Substitution von $t = F_X(x)$ und $t = F_Z(z)$ folgt

$$\begin{aligned}
\int_0^{F_X^{-1}(1-\alpha)} x\ dF_X(x) \quad &\leq \quad \int_0^{d} z\ dF_Z(z) + \int_d^{F_Z^{-1}(1-\alpha)} d\ dF_Z(z) \\
\int_0^{d} x\ dF_X(x) \quad &\leq \quad \int_0^{d} z\ dF_Z(z) + d(1-\alpha-F_Z(d)) \\
-\frac{1}{1-\alpha}\int_0^{F_X^{-1}(1-\alpha)} x\ dF_X(x) \quad &\geq \quad -\frac{1}{1-\alpha}\int_0^{d} z\ dF_Z(z) - d(1-\frac{1}{1-\alpha}F_Z(d)).
\end{aligned}$$

Für stochastische Dominanz erster Ordnung ist nach Satz 7.4.5 $RVP_X(c,d) \leq RVP_Z(c,d)$ bzw. $-RVP_X(c,d) \geq -RVP_Z(c,d)$. Damit lässt sich auch

$$\begin{aligned}
Pr - B - RVP_X(d) \quad &- \quad \frac{1}{1-\alpha}\int_0^{F_X^{-1}(1-\alpha)} x\ dF_X(x) \\
\geq Pr - B - RVP_Z(d) \quad &- \quad \frac{1}{1-\alpha}\int_0^{d} z\ dF_Z(z) - d\left(1-\frac{1}{1-\alpha}F_Z(d)\right) \\
E(G(c,d,X)|G(c,d,X) \geq g_{\alpha,X}(c,d)) \quad &\geq \quad E(G(c,d,Z)|G(c,d,Z) \geq g_{\alpha,Z}(c,d))
\end{aligned}$$

für alle $c, d \geq 0$ und $c \geq d$ schreiben.

3. Fall: $F_X(d) \geq 1-\alpha$ und $1-\alpha > F_Z(c)$[14]:
Z dominiert X stochastisch erster Ordnung. Betrachte dazu Abbildung D.14.
Es gilt

$$\int_0^{1-\alpha} F_X^{-1}(t)\ dt \quad \leq \quad \int_0^{F_Z(d)} F_Z^{-1}(t)\ dt + \int_{F_Z(d)}^{1-\alpha} d\ dt + \int_{F_Z(c)}^{1-\alpha} (F_Z^{-1}(t) - c)\ dt.$$

[14]Damit ist auch $F_X(c) \geq 1-\alpha$ und $1-\alpha > F_Z(d)$.

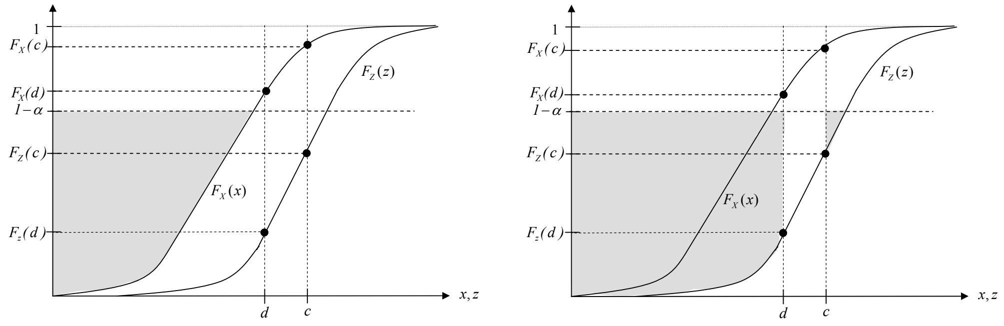


Abbildung D.14: Lemma 1 (3. Fall).

Durch Substitution von $t = F_X(x)$ und $t = F_Z(z)$ ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\int\limits_0^{F_X^{-1}(1-\alpha)} x\ dF_X(x) &\leq \int\limits_0^d z\ dF_Z(z) + \int\limits_d^{F_Z^{-1}(1-\alpha)} d\ dF_Z(z) \\
&+ \int\limits_c^{F_Z^{-1}(1-\alpha)} (z-c)\ dF_Z(z) \\
\int\limits_0^{F_X^{-1}(1-\alpha)} x\ dF_X(x) &\leq \int\limits_0^d z\ dF_Z(z) + \int\limits_c^{F_Z^{-1}(1-\alpha)} z\ dF_Z(z) \\
&+ d(1-\alpha-F_Z(d)) - c(1-\alpha-F_Z(c)) \\
-\frac{1}{1-\alpha}\int\limits_0^{F_X^{-1}(1-\alpha)} x\ dF_X(x) &\geq -\frac{1}{1-\alpha}\int\limits_0^d z\ dF_Z(z) - \frac{1}{1-\alpha}\int\limits_c^{F_Z^{-1}(1-\alpha)} z\ dF_Z(z) \\
&- d\left(1-\frac{1}{1-\alpha}F_Z(d)\right) + c\left(1-\frac{1}{1-\alpha}F_Z(c)\right).
\end{aligned}
$$

Für stochastische Dominanz erster Ordnung folgt nach Satz 7.4.5 $RVP_X(c,d) \leq RVP_Z(c,d)$ bzw. $-RVP_X(c,d) \geq -RVP_Z(c,d)$. Damit ist auch

$$
\begin{aligned}
Pr - B - RVP_X(d) &- \frac{1}{1-\alpha}\int\limits_0^{F_X^{-1}(1-\alpha)} x\ dF_X(x) \\
\geq Pr - B - RVP_Z(d) &- \frac{1}{1-\alpha}\int\limits_0^d z\ dF_Z(z) - \frac{1}{1-\alpha}\int\limits_c^{F_Z^{-1}(1-\alpha)} z\ dF_Z(z) \\
&- d\left(1-\frac{1}{1-\alpha}F_Z(d)\right) + c\left(1-\frac{1}{1-\alpha}F_Z(c)\right) \\
E(G(c,d,X)|G(c,d,X) \geq g_{\alpha,X}(c,d)) &\geq E(G(c,d,Z)|G(c,d,Z) \geq g_{\alpha,Z}(c,d))
\end{aligned}
$$

für alle $c, d \geq 0$ und $c \geq d$.

4. Fall: $F_X(c) \geq 1-\alpha > F_X(d)$ und $F_Z(c) \geq 1-\alpha > F_Z(d)$:
Z dominiert X stochastisch erster Ordnung. Betrachte dazu Abbildung D.15.

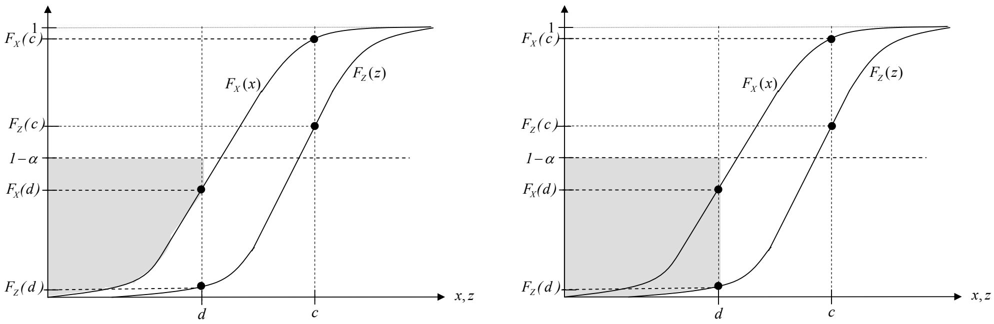


Abbildung D.15: Lemma 1 (4. Fall).

Es gilt

$$\int_0^{F_X(d)} F_X^{-1}(t)\ dt \int_{F_X(d)}^{1-\alpha} d\ dt \quad \leq \quad \int_0^{F_Z(d)} F_Z^{-1}(t)\ dt + \int_{F_Z(d)}^{1-\alpha} d\ dt.$$

Durch Substitution von $t = F_X(x)$ und $t = F_Z(z)$ folgt

$$\begin{aligned}
\int_0^{d} x\ dF_X(x) + \int_d^{F_X^{-1}(1-\alpha)} d\ dF_X(x) \quad &\leq \quad \int_0^{d} z\ dF_Z(z) + \int_d^{F_Z^{-1}(1-\alpha)} d\ dF_Z(z) \\
\int_0^{d} x\ dF_X(x) + d(1-\alpha-F_X(d)) \quad &\leq \quad \int_0^{d} z\ dF_Z(z) + d(1-\alpha-F_Z(d)) \\
-\frac{1}{1-\alpha}\int_0^{d} x\ dF_X(x) - d\left(1-\frac{1}{1-\alpha}F_X(d)\right) \quad &\geq \quad -\frac{1}{1-\alpha}\int_0^{d} z\ dF_Z(z) - d\left(1-\frac{1}{1-\alpha}F_Z(d)\right).
\end{aligned}$$

Für stochastische Dominanz erster Ordnung ist nach Satz 7.4.5 $RVP_X(c,d) \leq RVP_Z(c,d)$ bzw. $-RVP_X(c,d) \geq -RVP_Z(c,d)$. Damit lässt sich auch

$$\begin{aligned}
Pr-B-RVP_X(d) \quad &- \quad \frac{1}{1-\alpha}\int_0^{d} x\ dF_X(x) - d\left(1-\frac{1}{1-\alpha}F_X(d)\right) \\
\geq Pr-B-RVP_Z(d) \quad &- \quad \frac{1}{1-\alpha}\int_0^{d} z\ dF_Z(z) - d\left(1-\frac{1}{1-\alpha}F_Z(d)\right) \\
E(G(c,d,X)|G(c,d,X) \geq g_{\alpha,X}(c,d)) \quad &\geq \quad E(G(c,d,Z)|G(c,d,Z) \geq g_{\alpha,Z}(c,d))
\end{aligned}$$

für alle $c, d \geq 0$ und $c \geq d$ konstatieren.

5. Fall: $F_X(c) \geq 1-\alpha > F_X(d)$ und $1-\alpha > F_Z(c)$[15]:
Z dominiert X stochastisch erster Ordnung. Betrachte dazu Abbildung D.16.

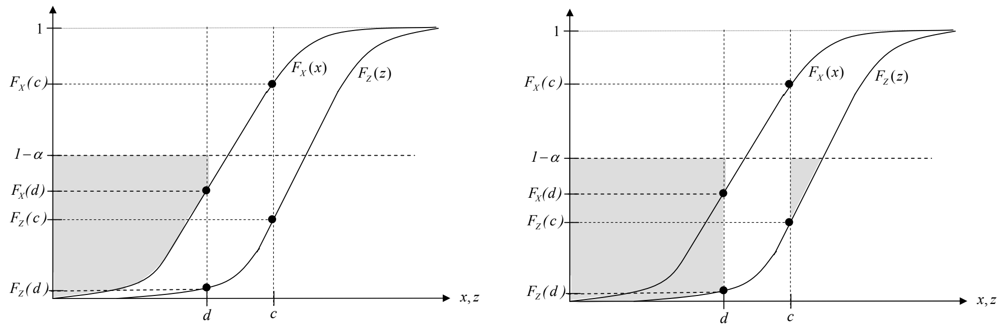


Abbildung D.16: Lemma 1 (5. Fall).

Es gilt

$$\int_0^{F_X(d)} F_X^{-1}(t)\ dt \int_{F_X(d)}^{1-\alpha} d\ dt \quad \leq \quad \int_0^{F_Z(d)} F_Z^{-1}(t)\ dt + \int_{F_Z(d)}^{1-\alpha} d\ dt + \int_{F_Z(c)}^{1-\alpha} (F_Z^{-1}(t) - c)\ dt.$$

Durch Substitution von $t = F_X(x)$ und $t = F_Z(z)$ folgt

$$\begin{aligned} & \int_0^d x\ dF_X(x) + \int_d^{F_X^{-1}(1-\alpha)} d\ dF_X(x) \\ \leq \quad & \int_0^d z\ dF_Z(z) + \int_d^{F_Z^{-1}(1-\alpha)} d\ dF_Z(z) + \int_c^{F_Z^{-1}(1-\alpha)} (z-c)\ dF_Z(z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{1-\alpha}\int_0^d x\ dF_X(x) - d\left(1 - \frac{1}{1-\alpha}F_X(d)\right) \\ \geq \quad & -\frac{1}{1-\alpha}\int_0^d z\ dF_Z(z) - \frac{1}{1-\alpha}\int_c^{F_Z^{-1}(1-\alpha)} z\ dF_Z(z) \\ & -d\left(1 - \frac{1}{1-\alpha}F_Z(d)\right) + c\left(1 - \frac{1}{1-\alpha}F_Z(c)\right). \end{aligned}$$

[15]Damit gilt auch $1-\alpha > F_Z(d)$.

Für stochastische Dominanz erster Ordnung folgt nach Satz 7.4.5 $RVP_X(c,d) \leq RVP_Z(c,d)$ bzw. $-RVP_X(c,d) \geq -RVP_Z(c,d)$. Damit ist auch

$$\begin{aligned}
Pr - B - RVP_X(d) \quad & - \quad \frac{1}{1-\alpha}\int\limits_0^d x\ dF_X(x) - d\left(1 - \frac{1}{1-\alpha}F_X(d)\right) \\
\geq Pr - B - RVP_Z(d) \quad & - \quad \frac{1}{1-\alpha}\int\limits_0^d z\ dF_Z(z) - \frac{1}{1-\alpha}\int\limits_c^{F_Z^{-1}(1-\alpha)} z\ dF_Z(z) \\
& - \quad d\left(1 - \frac{1}{1-\alpha}F_Z(d)\right) + c\left(1 - \frac{1}{1-\alpha}F_Z(c)\right)
\end{aligned}$$

$$E(G(c,d,X)|G(c,d,X) \geq g_{\alpha,X}(c,d)) \quad \geq \quad E(G(c,d,Z)|G(c,d,Z) \geq g_{\alpha,Z}(c,d))$$

für alle $c, d \geq 0$ und $c \geq d$.

6. Fall: $1-\alpha > F_X(c)$ und $1-\alpha > F_Z(c)$[16]:
Z dominiert X stochastisch erster Ordnung. Betrachte dazu Abbildung D.17.

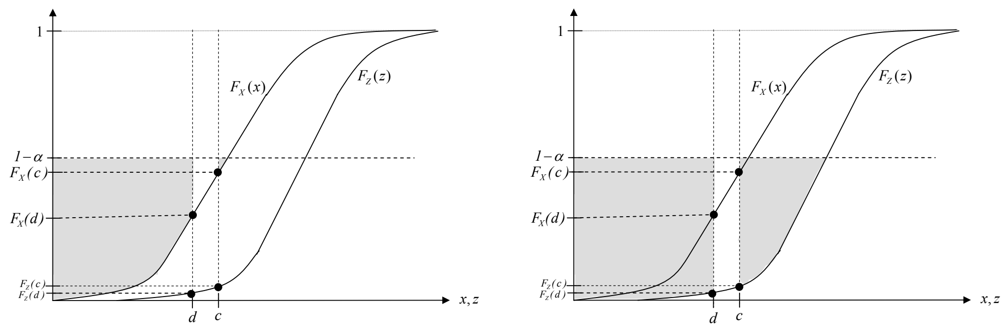


Abbildung D.17: Lemma 1 (6. Fall).

Es gilt

$$\begin{aligned}
& \int\limits_0^{F_X(d)} F_X^{-1}(t)\ dt + \int\limits_{F_X(d)}^{1-\alpha} d\ dt + \int\limits_{F_Z(c)}^{1-\alpha} (F_X^{-1}(t) - c)\ dt \\
\leq & \int\limits_0^{F_Z(d)} F_Z^{-1}(t)\ dt + \int\limits_{F_Z(d)}^{1-\alpha} d\ dt + \int\limits_{F_Z(c)}^{1-\alpha} (F_Z^{-1}(t) - c)\ dt.
\end{aligned}$$

[16]Damit ist auch $1-\alpha > F_X(d)$ und $1-\alpha > F_Z(d)$.

Durch Substitution von $t = F_X(x)$ und $t = F_Z(z)$ folgt

$$\begin{aligned}
&\int_0^d x\, dF_X(x) + \int_d^{F_X^{-1}(1-\alpha)} d\, dF_X(x) + \int_c^{F_X^{-1}(1-\alpha)} (x-c)\, dF_X(x) \\
\leq\ &\int_0^d z\, dF_Z(z) + \int_d^{F_Z^{-1}(1-\alpha)} d\, dF_Z(z) + \int_c^{F_Z^{-1}(1-\alpha)} (z-c)\, dF_Z(z)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{1-\alpha}\int_0^d x\, dF_X(x) - \frac{1}{1-\alpha}\int_c^{F_X^{-1}(1-\alpha)} x\, dF_X(x) \\
&-d\left(1-\frac{1}{1-\alpha}F_X(d)\right) + c\left(1-\frac{1}{1-\alpha}F_X(c)\right) \\
\geq\ &-\frac{1}{1-\alpha}\int_0^d z\, dF_Z(z) - \frac{1}{1-\alpha}\int_c^{F_Z^{-1}(1-\alpha)} z\, dF_Z(z) \\
&-d\left(1-\frac{1}{1-\alpha}F_Z(d)\right) + c\left(1-\frac{1}{1-\alpha}F_Z(c)\right).
\end{aligned}$$

Für stochastische Dominanz erster Ordnung gilt nach Satz 7.4.5 $RVP_X(c,d) \leq RVP_Z(c,d)$ bzw. $-RVP_X(c,d) \geq -RVP_Z(c,d)$. Damit ist auch

$$\begin{aligned}
&Pr - B - RVP_X(d) - \frac{1}{1-\alpha}\int_0^d x\, dF_X(x) - \frac{1}{1-\alpha}\int_c^{F_X^{-1}(1-\alpha)} x\, dF_X(x) \\
&\qquad -d\left(1-\frac{1}{1-\alpha}F_X(d)\right) + c\left(1-\frac{1}{1-\alpha}F_X(c)\right) \\
&\geq Pr - B - RVP_Z(d) - \frac{1}{1-\alpha}\int_0^d z\, dF_Z(z) - \frac{1}{1-\alpha}\int_c^{F_Z^{-1}(1-\alpha)} x\, dF_Z(z) \\
&\qquad -d\left(1-\frac{1}{1-\alpha}F_Z(d)\right) + c\left(1-\frac{1}{1-\alpha}F_Z(c)\right)
\end{aligned}$$

$$E(G(c,d,X)|G(c,d,X) \geq g_{\alpha,X}(c,d)) \geq E(G(c,d,Z)|G(c,d,Z) \geq g_{\alpha,Z}(c,d))$$

für alle $c, d \geq 0$ und $c \geq d$.

Aus den sechs Fällen folgt insgesamt die Behauptung von Lemma 1.

QED

Lemma 2

Seien X und Z Zufallsvariablen und Z dominiert X stochastisch erster Ordnung, dann resultiert für den unteren bedingten erwarteten Gewinn

$$E(G(c,d,X)|G(c,d,X) \leq g_{\alpha,X}(c,d)) \geq E(G(c,d,Z)|G(c,d,Z) \leq g_{\alpha,Z}(c,d))$$

für alle $c,d \geq 0$ und $c \geq d$.

Beweis von Lemma 2:

Für den unteren bedingten Erwartungswert gilt

$$E(G(c,d,X)|G(c,d,X) \leq g_{\alpha,X}(c,d)) = E(G(c,d,X)|X \geq x_{1-\alpha})$$

$$= \begin{cases} Pr - B - RVP_X(c,d) - \frac{1}{\alpha} \int\limits_{F_X^{-1}(1-\alpha)}^{\infty} [x-(c-d)]\ dF_X, \\ \text{für } F_X(d) \leq F_X(c) < 1-\alpha \\ \\ Pr - B - RVP_X(c,d) - \frac{1}{\alpha} \int\limits_{c}^{\infty} [x-(c-d)]\ dF_X - \frac{1}{\alpha} \int\limits_{F_X^{-1}(1-\alpha)}^{c} d\ dF_X, \\ \text{für } F_X(d) < 1-\alpha \leq F_X(c) \\ \\ Pr - B - RVP_X(c,d) - \frac{1}{\alpha} \int\limits_{c}^{\infty} [x-(c-d)]\ dF_X - \frac{1}{\alpha} \int\limits_{d}^{c} d\ dF_X - \frac{1}{\alpha} \int\limits_{F_X^{-1}(1-\alpha)}^{d} x\ dF_X, \\ \text{für } F_X(c) \geq F_X(d) \geq 1-\alpha \end{cases}.$$

1. Fall: $F_X(c) < 1-\alpha$ und $F_Z(c) < 1-\alpha$[17]:

Z dominiert X stochastisch erster Ordnung. Betrachte dazu Abbildung D.18.

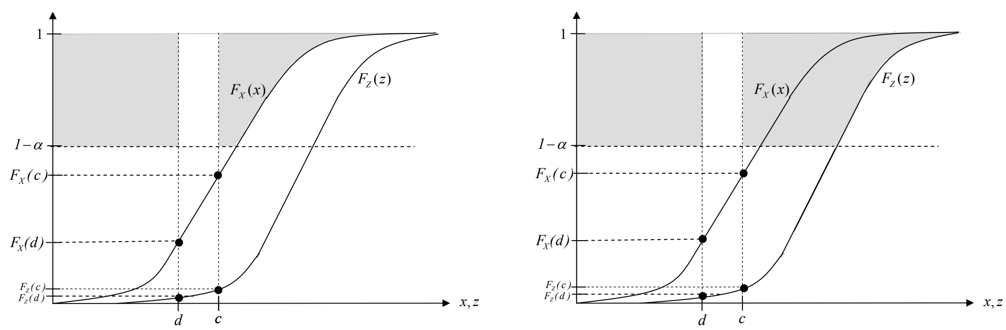


Abbildung D.18: Lemma 2 (1. Fall).

[17]Damit gilt auch $1-\alpha > F_X(d)$ und $1-\alpha > F_Z(d)$.

Es ist

$$\int_{1-\alpha}^{1} [F_X^{-1}(t) - (c-d)]\; dt \quad \leq \quad \int_{1-\alpha}^{1} [F_Z^{-1}(t) - (c-d)]\; dt.$$

Durch Substitution von $t = F_X(x)$ und $t = F_Z(z)$ folgt

$$\begin{aligned} \int_{F_X^{-1}(1-\alpha)}^{\infty} [x-(c-d)]\; dF_X(x) \quad &\leq \quad \int_{F_Z^{-1}(1-\alpha)}^{\infty} [z-(c-d)]\; dF_Z(z) \\ -\frac{1}{\alpha}\int_{F_X^{-1}(1-\alpha)}^{\infty} [x-(c-d)]\; dF_X(x) \quad &\geq \quad -\frac{1}{\alpha}\int_{F_Z^{-1}(1-\alpha)}^{\infty} [z-(c-d)]\; dF_Z(z). \end{aligned}$$

Für stochastische Dominanz erster Ordnung gilt nach Satz 7.4.5 $RVP_X(c,d) \leq RVP_Z(c,d)$ bzw. $-RVP_X(c,d) \geq -RVP_Z(c,d)$. Damit ist auch

$$\begin{aligned} Pr - B - RVP_X(c,d) \quad &- \quad \frac{1}{\alpha}\int_{F_X^{-1}(1-\alpha)}^{\infty} [x-(c-d)]\; dF_X(x) \\ \geq Pr - B - RVP_X(c,d) \quad &- \quad \frac{1}{\alpha}\int_{F_Z^{-1}(1-\alpha)}^{\infty} [z-(c-d)]\; dF_Z(z) \end{aligned}$$

$$E(G(c,d,X)|G(c,d,X) \geq g_{\alpha,X}(c,d)) \quad \geq \quad E(G(c,d,Z)|G(c,d,Z) \geq g_{\alpha,Z}(c,d))$$

für alle $c, d \geq 0$ und $c \geq d$.

2. Fall: $F_X(d) < 1-\alpha \leq F_X(c)$ und $F_Z(c) < 1-\alpha$[18]:
Z dominiert X stochastisch erster Ordnung. Betrachte dazu Abbildung D.19.
Es gilt

$$\int_{F_X(c)}^{1} [F_X^{-1}(t) - (c-d)]\; dt + \int_{1-\alpha}^{F_X(c)} d\; dt \quad \leq \quad \int_{1-\alpha}^{1} [F_Z^{-1}(t) - (c-d)]\; dt.$$

Durch Substitution von $t = F_X(x)$ und $t = F_Z(z)$ folgt

$$\begin{aligned} \int_{c}^{\infty} [x-(c-d)]\; dF_X(x) + \int_{F_X^{-1}(1-\alpha)}^{c} d\; dF_X(x) \quad &\leq \quad \int_{F_Z^{-1}(1-\alpha)}^{\infty} [z-(c-d)]\; dF_Z(z) \\ -\frac{1}{\alpha}\int_{c}^{\infty} [x-(c-d)]\; dF_X(x) - \frac{1}{\alpha}\int_{F_X^{-1}(1-\alpha)}^{c} d\; dF_X(x) \quad &\geq \quad -\frac{1}{\alpha}\int_{F_Z^{-1}(1-\alpha)}^{\infty} [z-(c-d)]\; dF_Z(z). \end{aligned}$$

[18]Damit ist auch $1-\alpha > F_Z(d)$.

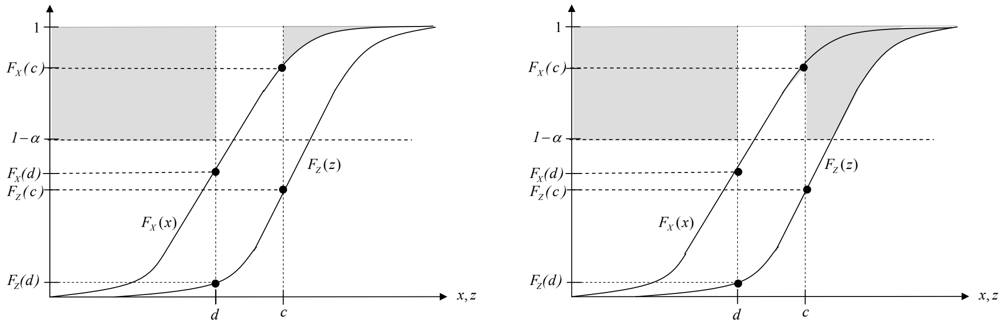


Abbildung D.19: Lemma 2 (2. Fall).

Für stochastische Dominanz erster Ordnung gilt nach Satz 7.4.5 $RVP_X(c,d) \leq RVP_Z(c,d)$ bzw. $-RVP_X(c,d) \geq -RVP_Z(c,d)$. Damit ist auch

$$
\begin{aligned}
& Pr - B - RVP_X(c,d) - \frac{1}{\alpha}\int\limits_{c}^{\infty}[x-(c-d)]\ dF_X(x) - \frac{1}{\alpha}\int\limits_{F_X^{-1}(1-\alpha)}^{c} d\ dF_X(x) \\
\geq\ & Pr - B - RVP_Z(c,d) - \frac{1}{\alpha}\int\limits_{F_Z^{-1}(1-\alpha)}^{\infty}[z-(c-d)]\ dF_Z(z)
\end{aligned}
$$

$$
E(G(c,d,X)|G(c,d,X) \geq g_{\alpha,X}(c,d)) \geq E(G(c,d,Z)|G(c,d,Z) \geq g_{\alpha,Z}(c,d))
$$

für alle $c, d \geq 0$ und $c \geq d$.

3. Fall: $1-\alpha \leq F_X(d)$ und $F_Z(c) < 1-\alpha$[19]:
Z dominiert X stochastisch erster Ordnung. Betrachte dazu Abbildung D.20.

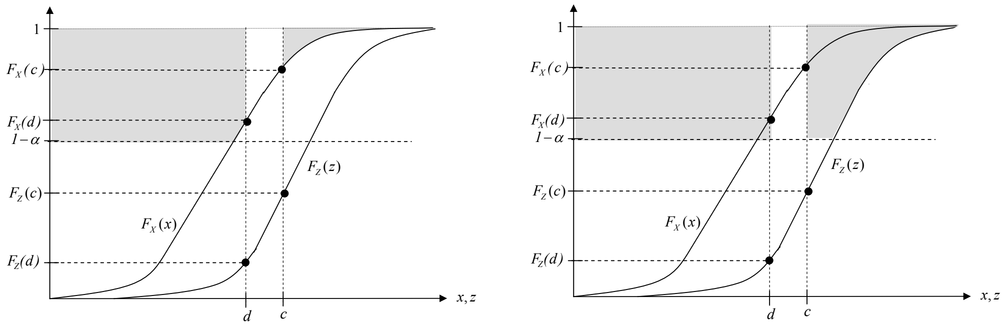


Abbildung D.20: Lemma 2 (3. Fall).

[19]Damit gilt auch $1-\alpha \leq F_X(c)$ und $1-\alpha > F_Z(d)$.

Es gilt

$$\begin{aligned}&\int\limits_{F_X(c)}^{1}[F_X^{-1}(t)-(c-d)]\ dt+\int\limits_{F_X(d)}^{F_X(c)} d\ dt+\int\limits_{1-\alpha}^{F_X(d)} F_X^{-1}(t)\ dt\\ \leq\ &\int\limits_{1-\alpha}^{1}[F_Z^{-1}(t)-(c-d)]\ dt.\end{aligned}$$

Durch Substitution von $t = F_X(x)$ und $t = F_Z(z)$ folgt

$$\begin{aligned}&\int\limits_{c}^{\infty}[x-(c-d)]\ dF_X(x)+\int\limits_{d}^{c} d\ dF_X(x)+\int\limits_{F_X^{-1}(1-\alpha)}^{d} x\ dF_X(x)\\ \leq\ &\int\limits_{F_Z^{-1}(1-\alpha)}^{\infty}[z-(c-d)]\ dF_Z(z)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{\alpha}\int\limits_{c}^{\infty}[x-(c-d)]\ dF_X(x)-\frac{1}{\alpha}\int\limits_{d}^{c} d\ dF_X(x)-\frac{1}{\alpha}\int\limits_{F_X^{-1}(1-\alpha)}^{d} x\ dF_X(x)\\ \geq\ &-\frac{1}{\alpha}\int\limits_{F_Z^{-1}(1-\alpha)}^{\infty}[z-(c-d)]\ dF_Z(z).\end{aligned}$$

Für stochastische Dominanz erster Ordnung gilt nach Satz 7.4.5 $RVP_X(c,d) \leq RVP_Z(c,d)$ bzw. $-RVP_X(c,d) \geq -RVP_Z(c,d)$. Damit ist auch

$$\begin{aligned}&Pr-B-RVP_X(c,d)-\frac{1}{\alpha}\int\limits_{c}^{\infty}[x-(c-d)]\ dF_X(x)\\ &-\frac{1}{\alpha}\int\limits_{d}^{c} d\ dF_X(x)-\frac{1}{\alpha}\int\limits_{F_X^{-1}(1-\alpha)}^{d} x\ dF_X(x)\\ \geq\ &Pr-B-RVP_Z(c,d)-\frac{1}{\alpha}\int\limits_{F_Z^{-1}(1-\alpha)}^{\infty}[z-(c-d)]\ dF_Z(z)\end{aligned}$$

$$E(G(c,d,X)|G(c,d,X)\geq g_{\alpha,X}(c,d))\geq E(G(c,d,Z)|G(c,d,Z)\geq g_{\alpha,Z}(c,d))$$

für alle $c, d \geq 0$ und $c \geq d$.

4. Fall: $F_X(d) < 1-\alpha \leq F_X(c)$ und $F_Z(d) < 1-\alpha \leq F_Z(c)$:
Z dominiert X stochastisch erster Ordnung. Betrachte dazu Abbildung D.21.

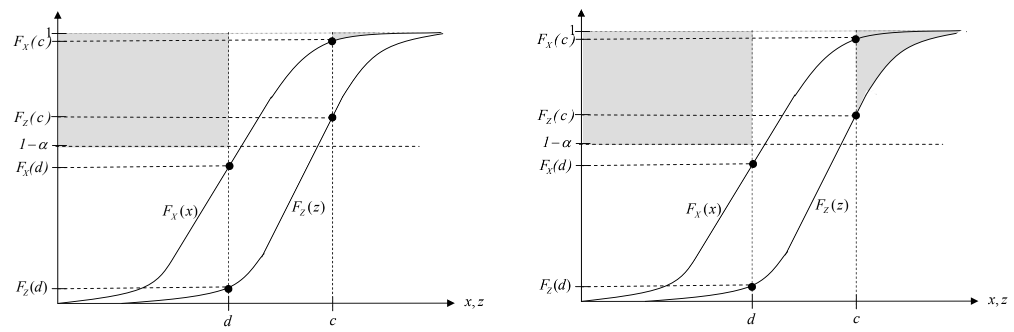


Abbildung D.21: Lemma 2 (4. Fall).

Es ist

$$\int_{F_X(c)}^{1} [F_X^{-1}(t) - (c-d)]\, dt + \int_{1-\alpha}^{F_X(c)} d\, dt \quad \leq \quad \int_{F_Z(c)}^{1} [F_Z^{-1}(t) - (c-d)]\, dt + \int_{1-\alpha}^{F_Z(c)} d\, dt.$$

Durch Substitution von $t = F_X(x)$ und $t = F_Z(z)$ folgt

$$\begin{aligned} & \int_c^{\infty} [x-(c-d)]\, dF_X(x) + \int_{F_X^{-1}(1-\alpha)}^{c} d\, dF_X(x) \\ \leq \quad & \int_c^{\infty} [z-(c-d)]\, dF_Z(z) + \int_{F_Z^{-1}(1-\alpha)}^{c} d\, dF_Z(z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\alpha}\int_c^{\infty} [x-(c-d)]\, dF_X(x) - \frac{1}{\alpha}\int_{F_X^{-1}(1-\alpha)}^{c} d\, dF_X(x) \\ \geq \quad & -\frac{1}{\alpha}\int_c^{\infty} [z-(c-d)]\, dF_Z(z) - \frac{1}{\alpha}\int_{F_Z^{-1}(1-\alpha)}^{c} d\, dF_Z(z). \end{aligned}$$

Für stochastische Dominanz erster Ordnung gilt nach Satz 7.4.5 $RVP_X(c,d) \leq RVP_Z(c,d)$ bzw. $-RVP_X(c,d) \geq -RVP_Z(c,d)$. Damit ist auch

$$\begin{aligned} & Pr - B - RVP_X(c,d) - \frac{1}{\alpha}\int_c^\infty [x-(c-d)]\ dF_X(x) - \frac{1}{\alpha}\int_{F_X^{-1}(1-\alpha)}^{c} d\ dF_X(x) \\ \geq\ & Pr - B - RVP_Z(c,d) - \frac{1}{\alpha}\int_c^\infty [z-(c-d)]\ dF_Z(z) - \frac{1}{\alpha}\int_{F_Z^{-1}(1-\alpha)}^{c} d\ dF_Z(z) \end{aligned}$$

$$E(G(c,d,X)|G(c,d,X) \geq g_{\alpha,X}(c,d)) \geq E(G(c,d,Z)|G(c,d,Z) \geq g_{\alpha,Z}(c,d))$$

für alle $c, d \geq 0$ und $c \geq d$.

5. Fall: $1-\alpha \leq F_X(d)$ und $F_Z(d) < 1-\alpha \leq F_Z(c)$[20]:
Z dominiert X stochastisch erster Ordnung. Betrachte dazu Abbildung D.22.

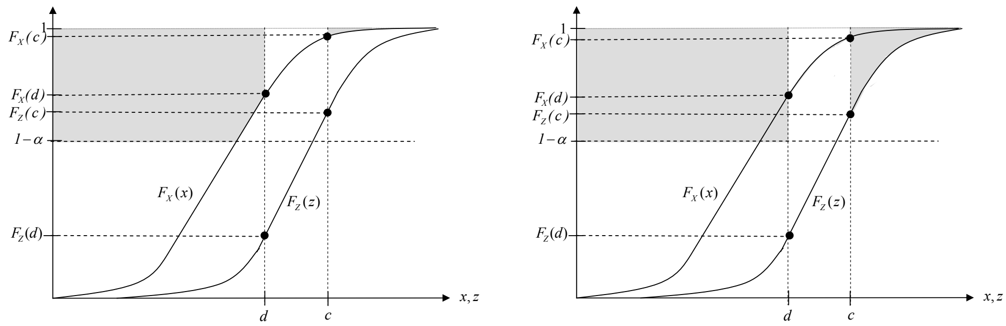


Abbildung D.22: Lemma 2 (5. Fall).

Es gilt

$$\begin{aligned} & \int_{F_X(c)}^{1} [F_X^{-1}(t) - (c-d)]\ dt + \int_{F_X(d)}^{F_X(c)} d\ dt + \int_{1-\alpha}^{F_X(d)} F_X^{-1}(t)\ dt \\ \leq\ & \int_{F_Z(c)}^{1} [F_Z^{-1}(t) - (c-d)]\ dt + \int_{1-\alpha}^{F_Z(c)} d\ dt. \end{aligned}$$

[20]Damit gilt auch $1-\alpha \leq F_X(c)$.

Durch Substitution von $t = F_X(x)$ und $t = F_Z(z)$ folgt

$$\begin{aligned}
&\int_c^\infty [x-(c-d)]\ dF_X(x) + \int_d^c d\ dF_X(x) + \int_{F_X^{-1}(1-\alpha)}^d x\ dF_X(x) \\
\leq\ &\int_c^\infty [z-(c-d)]\ dF_Z(z) + \int_{F_Z^{-1}(1-\alpha)}^c d\ dF_Z(z)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{\alpha}\int_c^\infty [x-(c-d)]\ dF_X(x) - \frac{1}{\alpha}\int_d^c d\ dF_X(x) - \frac{1}{\alpha}\int_{F_X^{-1}(1-\alpha)}^d x\ dF_X(x) \\
\geq\ &-\frac{1}{\alpha}\int_c^\infty [z-(c-d)]\ dF_Z(z) - \frac{1}{\alpha}\int_{F_Z^{-1}(1-\alpha)}^c d\ dF_Z(z).
\end{aligned}$$

Für stochastische Dominanz erster Ordnung gilt nach Satz 7.4.5 $RVP_X(c,d) \leq RVP_Z(c,d)$ bzw. $-RVP_X(c,d) \geq -RVP_Z(c,d)$. Damit ist auch

$$\begin{aligned}
&Pr - B - RVP_X(c,d) - \frac{1}{\alpha}\int_c^\infty [x-(c-d)]\ dF_X(x) \\
&-\frac{1}{\alpha}\int_d^c d\ dF_X(x) - \frac{1}{\alpha}\int_{F_X^{-1}(1-\alpha)}^d x\ dF_X(x) \\
\geq\ &Pr - B - RVP_Z(c,d) - \frac{1}{\alpha}\int_c^\infty [z-(c-d)]\ dF_Z(z) - \frac{1}{\alpha}\int_{F_Z^{-1}(1-\alpha)}^c d\ dF_Z(z)
\end{aligned}$$

$$E(G(c,d,X)|G(c,d,X) \geq g_{\alpha,X}(c,d)) \geq E(G(c,d,Z)|G(c,d,Z) \geq g_{\alpha,Z}(c,d))$$

für alle $c, d \geq 0$ und $c \geq d$.

6. Fall: $1-\alpha \leq F_X(d)$ und $1-\alpha \leq F_Z(d)$[21]:
Z dominiert X stochastisch erster Ordnung. Betrachte dazu Abbildung D.23.

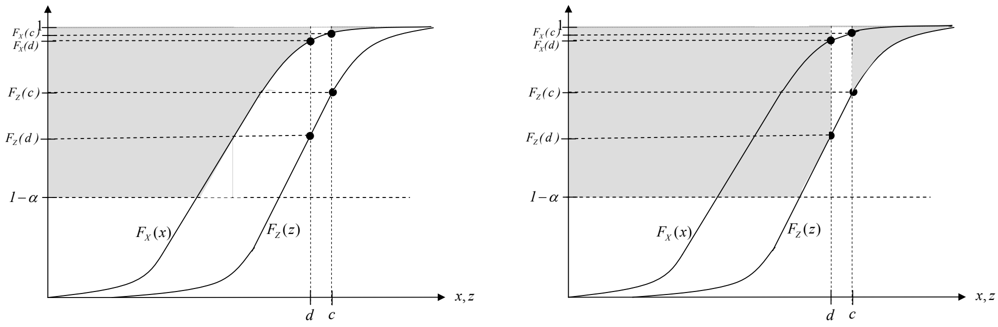


Abbildung D.23: Lemma 2 (6. Fall).

Es gilt

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{F_X(c)}^{1} [F_X^{-1}(t)-(c-d)]\ dt + \int\limits_{F_X(d)}^{F_X(c)} d\ dt + \int\limits_{1-\alpha}^{F_X(d)} F_X^{-1}(t)\ dt \\
\leq\ &\int\limits_{F_Z(c)}^{1} [F_Z^{-1}(t)-(c-d)]\ dt + \int\limits_{F_Z(d)}^{F_Z(c)} d\ dt + \int\limits_{1-\alpha}^{F_Z(d)} F_Z^{-1}(t)\ dt.
\end{aligned}$$

Durch Substitution von $t = F_X(x)$ und $t = F_Z(z)$ folgt

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{c}^{\infty}[x-(c-d)]\ dF_X(x) + \int\limits_{d}^{c} d\ dF_X(x) + \int\limits_{F_X^{-1}(1-\alpha)}^{d} x\ dF_X(x) \\
\leq\ &\int\limits_{c}^{\infty}[z-(c-d)]\ dF_Z(z) + \int\limits_{d}^{c} d\ dF_Z(z) + \int\limits_{F_Z^{-1}(1-\alpha)}^{d} z\ dF_Z(z))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{\alpha}\int\limits_{c}^{\infty}[x-(c-d)]\ dF_X(x) - \frac{1}{\alpha}\int\limits_{d}^{c} d\ dF_X(x) - \frac{1}{\alpha}\int\limits_{F_X^{-1}(1-\alpha)}^{d} x\ dF_X(x) \\
\geq\ &-\frac{1}{\alpha}\int\limits_{c}^{\infty}[z-(c-d)]\ dF_Z(z) - \frac{1}{\alpha}\int\limits_{d}^{c} d\ dF_Z(z) - \frac{1}{\alpha}\int\limits_{F_Z^{-1}(1-\alpha)}^{d} z\ dF_Z(z).
\end{aligned}$$

[21] Damit ist auch $1-\alpha \leq F_X(c)$ und $1-\alpha \leq F_Z(c)$.

Für stochastische Dominanz erster Ordnung gilt nach Satz 7.4.5 $RVP_X(c,d) \leq RVP_Z(c,d)$ bzw. $-RVP_X(c,d) \geq -RVP_Z(c,d)$. Damit ist auch

$$\begin{aligned} & Pr - B - RVP_X(c,d) - \frac{1}{\alpha}\int\limits_{c}^{\infty}[x-(c-d)]\ dF_X(x) \\ & -\frac{1}{\alpha}\int\limits_{d}^{c} d\ dF_X(x) - \frac{1}{\alpha}\int\limits_{F_X^{-1}(1-\alpha)}^{d} x\ dF_X(x) \\ \geq\ & Pr - B - RVP_Z(c,d) - \frac{1}{\alpha}\int\limits_{c}^{\infty}[z-(c-d)]\ dF_Z(z) \\ & -\frac{1}{\alpha}\int\limits_{d}^{c} d\ dF_Z(z) - \frac{1}{\alpha}\int\limits_{F_Z^{-1}(1-\alpha)}^{d} z\ dF_Z(z) \end{aligned}$$

$$E(G(c,d,X)|G(c,d,X) \geq g_{\alpha,X}(c,d)) \geq E(G(c,d,Z)|G(c,d,Z) \geq g_{\alpha,Z}(c,d))$$

für alle $c, d \geq 0$ und $c \geq d$.

QED

Literaturverzeichnis

[1] *Acerbi, C. (2002)*: Spectral measures of risk: A coherent representation of subjective risk aversion. In: Journal of Banking & Finance, Volume 26, Nr. 7.

[2] *Acerbi, C., Tasche, D. (2002)*: On the coherence of expected shortfall. In: Journal of Banking & Finance, Volume 26, Nr. 7.

[3] *Adam, D. (1996)*: Planung und Entscheidung: Modelle-Ziele-Methoden; mit Fallstudien und Lösungen, Gabler Verlag, Wiesbaden.

[4] *Albrecht, P. (2001)*: Management von Marktrisiken auf der Basis des Value-at-Risk (VaR)-Ansatzes, Mannheimer Manuskripte zur Risikotheorie, Portfolio Management und Versicherungswirtschaft, Nr. 132, Mannheim.

[5] *Albrecht, P. (2003)*: Zur Messung von Finanzrisiken, Mannheimer Manuskripte zur Risikotheorie, Portfolio Management und Versicherungswirtschaft, Nr. 143, Mannheim.

[6] *Albrecht, P., Bährle, H. F.W., König, A. (1999)*: Value-at-Risk: Eine risikotheoretische Analyse der konzeptionellen Grundlagen mit Folgerungen für die Risikokontrolle der Kapitalanlage von Versicherungsunternehmen. In: Zeitschrift für die gesamte Versicherungswissenschaft, Nr. 86.

[7] *Albrecht, P., Koryciorz, S. (1999)*: Value-at-Risk für Versicherungsunternehmen: Konzeptionelle Grundlagen und Anwendungen, Mannheimer Manuskripte zur Risikotheorie, Portfolio Management und Versicherungswirtschaft, Nr. 116, Mannheim.

[8] *Arneth, S., Sauka, C. (2008)*: Solvency II - Konsequenzen für das Kapitalanlagegeschäft der Versicherungen. In: Kreditwesen, Volume 16.

[9] *Arrow, K. (1963)*: Uncertainty and the Welfare Economics of Medical Care. In: American Economic Review, Volume 53, Nr. 5.

[10] *Arrow, K. (1971)*: Essays in the Theory of Risk-Bearing, North-Holland Pub. Co., Amsterdam.

[11] *Arrow, K. (1974)*: Optimal Insurance and Generalized Deductibles. In: Scandinavian Actuarial Journal, Volume 1.

[12] *Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J., Heath, D. (1997)*: Thinking Coherently. In: Risk, Volume 10, Nr. 11.

[13] *Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J., Heath, D. (1999)*: Coherent Measures of Risk. In: Mathematical Finance, Volume 9, Nr. 2.

[14] *Babbel, D., Economides, N. (1985)*: Pareto-optimal Design of Term Life Insurance Contracts. In: Scandinavian Actuarial Journal.

[15] *Balbás, A., Balbás, B., Heras, A. (2009)*: Optimal reinsurance with general risk measures. In: Insurance: Mathematics and Economics, Volume 44, Nr. 3.

[16] *Bamberg, G., Coenenberg, A. G. (2006)*: Betriebswirtschaftliche Entscheidungslehre, 13. Auflage, Vahlen, München.

[17] *Bamberg, G., Trost, R. (1996)*: Entscheidungen unter Risiko: Empirische Evidenz und Praktikabilität. In: Betriebswirtschaftliche Forschung und Praxis, Nr. 6.

[18] *Barbosa, A., Ferreira, M. (2004)*: Beyond Coherence and Extreme Losses: Root Lower Partial Moment as a Risk Measure, Working Paper, Lissabon.

[19] *Bernard, C., Tian, W. (2009)*: Optimal Reinsurance Arrangements Under Tail Risk Measures. In: Journal of Risk and Insurance, Volume 76, Nr. 3.

[20] *Borch, K. (1960)*: The safety loading of reinsurance premiums. In: Skandinavisk Aktuarietidskrift.

[21] *Borch, K. (1962)*: Equilibrium in a Reinsurance Market. In: Econometrica, Volume 30.

[22] *Borch, K. (1969)*: Wirtschaftliches Verhalten bei Unsicherheit, Oldenbourg Verlag, München.

[23] *Borch, K. (1975)*: Optimal Insurance Arrangements. In: ASTIN Bulletin, Volume 8.

[24] *Borch, K. (1983)*: The optimal insurance contract in a competitive market. In: Econonlic Lerrers, Volume 11.

[25] *Bradtke, T. (2003)*: Grundlagen in Operations Research für Ökonomen, Oldenbourg Verlag, München.

[26] *Brandtner, M. (2010)*: Moderne Methoden der Risiko- und Präferenzmessung - Konzeption, entscheidungstheoretische Implikationen und finanzwirtschaftliche Anwendungen, Dissertationsschrift, Friedrich-Schiller-Universität Jena, Jena.

[27] *Breuer, W. (2008)*: Portfolio-Selektion und μ-σ-Prinzip. Unter: <http://www.bfw.rwth-aachen.de/kos/WNetz?art=Folder.show&id=1430>, Thema 2, 08.11.2009.

[28] *Bundesanstalt für Finanzdienstleistungsaufsicht (2008a)*: Basel II. Unter: <http://www.bafin.de/cln_116/nn_724264/DE/Unternehmen/BankenFinanzdienstleister/Basel2/basel2_node.html?_nnn=true>, 20.10.2009.

[29] *Bundesanstalt für Finanzdienstleistungsaufsicht (2008b)*: Solvency II. Unter: <http://www.bafin.de/cln_116/nn_724054/DE/Unternehmen/VersichererPensionsfonds/Solvency2/solvency2_node.html?_nnn=true>, 20.10.2009.

[30] *Cachon, G., Terwiesch, C. (2006)*: Matching supply with demand, Mc Graw-Hill.

[31] *Cai, J., Tan, K. (2007)*: Optimal retention for a stop-loss reinsurance under the VaR and CTE risk measures. In: Astin Bulletin, Volume 37, Nr. 1.

[32] *Cai, J., Tan, K., Weng, C., Zhang, Y. (2008)*: Optimal reinsurance under VaR and CTE risk measures. In: Insurance: Mathematics and Economics, Volume 43.

[33] *Capgemini Deutschland GmbH (2004)*: Risikomanagement in Versicherungen und Solvency II. Unter: <http://www.at.capgemini.com/m/at/tl/Risikomanagement_in_Versi cherungen_und_Solvency_II.pdf>, 20.10.2009.

[34] *Casimir, R. (1990)*: The newsboy and the flower-girl. In: Omega, Volume 18, Nr. 4.

[35] *Centeno, M., Simões, O. (2009)*: Optimal reinsurance. In: RACSAM, Volume 103, Nr. 2.

[36] *Chopra, S., Meindl, P. (2004)*: Supply Chain Management, 2. Auflage, Prentice Hall.

[37] *Chen, X., Sim, M., Simchi-Levi, D., Sun, P. (2007)*: Risk Aversion in Inventory Management. In: Operations Research, Volume 55, Nr. 5.

[38] *Chen, Y., Xu, M., Zhang, Z. G. (2009)*: A Risk-Averse Newsvendor Model under the CVaR Criterion. In: Operations Research, Volume 57, Nr. 4.

[39] *Denneberg, D. (1988)*: Non-expected-utility preferences: The dual approach. In: Geld, Banken und Versicherungen, Nr. 4.

[40] *Dhaene, J., Denuit, M., Goovaerts, M., Kaas, R., Vyncke, D. (2002)*: The concept of comonotonicity in actuarial science and finance. In: Insurance: Mathematics and Economics, Volume 31, Nr. 1.

[41] *Dienst, H. - R. (1988)*: Mathematische Verfahren der Rückversicherung, Schriftenreihe Angewandte Versicherungsmathematik, Heft 19, Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe.

[42] *Dietrich, D., Vollmer, U. (2005)*: Finanzverträge und Finanzintermediation, Gabler Verlag, Wiesbaden.

[43] *Dillmann, T. (2007)*: Solvency II - Die neuen europäischen Solvabilitätsforderungen und ihre Folgen. Unter: <http://www.mathematik.uni-ulm.de/ivw/studium/vorl/russdillm /2007-01-17_Solvency-II_Teil2.pdf>, 20.10.2009.

[44] *Dobner, H., Engelmann, B. (2003)*: Analysis. 2. Integralrechnung und mehrdimensionale Analysis, Fachbuchverlag Leipzig, Leipzig.

[45] *Dölker, A. (2006)*: Das operationelle Risiko in Versicherungsunternehmen, Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe.

[46] *Dupacova, J. (2002)*: Applications of stochastic programming: Achievements and questions. In: European Journal of Operational Research, Volume 140, Nr. 2.

[47] *Eeckhoudt, L., Gollier, C., Schlesinger, H. (1991)*: Increases in risk and deductible insurance. In: Journal of Economic Theory, Volume 55.

[48] *Eeckhoudt, L., Gollier, C., Schlesinger, H. (1995)*: The Risk-averse (and Prudent) Newsboy. In: Management Science, Volume 41, Nr. 5.

[49] *Eisenführ, F., Weber, M. (1999)*: Rationales Entscheiden, 3. Auflage, Springer, Berlin.

[50] *Embrechts, P., Frey, R., McNeil, A. (2005)*: Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools, Princeton University Press, Oxford.

[51] *Farny, D., Helten, E., Koch, P., Schmidt, R. (1988)*: Handwörterbuch der Versicherung, Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe.

[52] *Farny, D. (1995)*: Versicherungsbetriebslehre, 2. Auflage, Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe.

[53] *Fischer, T. (2003)*: Risk capital allocation by coherent risk measures based on one-sided moments. In: Insurance: Mathematics and Economics, Volume 32.

[54] *Gajek, L., Zagrodny, D. (2000)*: Insurer's optimal reinsurance strategies. In: Insurance: Mathematics and Economics, Volume 27.

[55] *Gajek, L., Zagrodny, D. (2004)*: Optimal reinsurance under general risk measures. In: Insurance: Mathematics and Economics, Volume 34.

[56] *Gallego, G., Moon, I. (1993)*: The Distribution Free Newsboy Problem: Review and Extensions. In: Journal of the Operational Research Society, Volume 44, Nr. 8.

[57] *Garven, J. (2007)*: The demand for insurance. In: Risk Management and Insurance Review.

[58] *Gerathewohl, K. (1979)*: Rückversicherung Grundlagen und Praxis, Band II, Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe.

[59] *Gollier, C., Schlesinger, H. (1996)*: Increases in risk and deductible insurance. In: Journal of Economic Theory, Volume 55.

[60] *Goovaerts, M. J., Kaas, R., Dhaene, J. (2003)*: Economic capital allocation derived from risk measures. In: North American Actuarial Journal, Nr. 7.

[61] *Gries, T., Sieg, G., Strulik, H. (1996)*: Repetitorium Mikroökonomik, Springer-Verlag, Berlin.

[62] *Grimmer, A. (2008)*: Kalkulation versicherungstechnischer Risiken mit Beispielen aus den Sparten. Unter: http://www.hochschule-bochum.de/fileadmin/media/fb_w/Kaiser/praxis/Grimmer060606.pdf, 20.10.2009.

[63] *Gritzmann, N. (1998)*: Kapitalanlage-Controlling in Versicherungsunternehmen, Verlag für Versicherungswirtschaft, Karlsruhe.

[64] *Grossmann, M. (1990)*: Rückversicherung - eine Einführung, VW-Schriftenreihe, St. Gallen.

[65] *Guerra, M., Centeno, M.(2008)*: Optimal reinsurance policy: The adjustment coefficient and the expected utility criteria. In: Insurance: Mathematics and Economics, Volume 42.

[66] *Guriev, S. (2001)*: On Microfoundations of the Dual Theory of Choice. In: Geneva Papers on Risk and Insurance Theory, Volume 26.

[67] *Hadar, J., Russel, W. R. (1969)*: Rules for Ordering Uncertain Prospects. In: American Economic Review, Volume 59.

[68] *Hanisch, J. (2006)*: Risikomessung mit dem Conditional Value-at-Risk, Verlag Dr. Kovač, Hamburg.

[69] *Hanoch, G., Levy, H. (1969)*: The efficiency analysis of choices involving risk. In: Review of Economic Studies, Volume 36.

[70] *Hartung, T. (2006)*: Eigenkapitalregulierung bei Versicherungsunternehmen eine ökonomisch-risikotheoretische Analyse verschiedener Solvabilitätskonzeptionen, Verlag für Versicherungswirtschaft, Karlsruhe.

[71] *Heilmann, W. (1987)*: Grundbegriffe der Risikotheorie, Verlag für Versicherungswirtschaft, Karlsruhe.

[72] *Helbig, M. (1987)*: Beiträge zum versicherungsmathematischen Grundwissen. In: Schriftenreihe Angewandte Versicherungsmathematik, Heft 12, Verlag für Versicherungswirtschaft, Karlsruhe.

[73] *Herrmann, R. (2006)*: Value-at-Risk, Tail Value-at-Risk und Schadenverteilung in der Personenversicherung. In: Blätter der DGVFM, Volume 27, Nr. 4.

[74] *Huberman, G., Mayers, D. and Smith, C. (1983)*: Optimal Insurance Policy Indemnity Schedules. In: Bell Journal of Economics, Volume 14, Nr. 2.

[75] *Jammernegg, W., Kischka, P. (2005)*: A Decision Rule Based on the Conditional Value at Risk, In: Jenaer Schriften zur Wirtschaftswissenschaft, Nr. 9.

[76] *Jammernegg, W., Kischka, P. (2005a)*: Performance Measurement for Inventory Models with Risk Preferences. In: Logistik Management (Hrsg. R. Lasch, Ch. G. Janker), Gabler, Wiesbaden, 2005.

[77] *Jammernegg, W., Kischka, P. (2005b)*: The Newsvendor Model with Risk Preferences, Working Paper, Vienna University of Economics and Business Administration and Friedrich-Schiller University Jena. Unter: <http://www.wiwi.uni-jena.de/Statistik/Downloads/Newsvendor.pdf>, 22.10.2009.

[78] *Jammernegg, W., Kischka, P. (2009)*: Risk Preferences and Robust Inventory Decisions. In: International Journal of Production Economics, Volume 118, Nr. 1.

[79] *Jammernegg, W., Kischka, P. (2007)*: Risk-averse and risk-taking newsvendors: A conditional expected value approach. In: Review of Managerial Science, Nr. 1.

[80] *Jung, H. (2006)*: Allgemeine Betriebswirtschaftslehre, 10. Auflage, Oldenbourg Verlag, München.

[81] *Kaluszka, M. (2001)*: Optimal reinsurance under mean-variance premium principles. In: Insurance: Mathematics and Economics, Volume 28.

[82] *Kaluszka, M. (2004)*: Mean-variance optimal reinsurance arrangements. In: Scandinavian Actuarial Journal, Volume 1.

[83] *Kaluszka, M. (2004a)*: An Extension of Arrow's Result on Optimality of a Stop Loss Contract. In: Insurance: Mathematics and Economics, Volume 35.

[84] *Kaluszka, M., Okolewski, A. (2008)*: An Extension of Arrow's result on optimal reinsurance contract. In: Journal of Risk and Insurance, Volume 75, Nr. 2.

[85] *Kanbur, S., (1982)*: Increases in risk with kinked payoff functions. In: Journal of Economic Theory, Volume 7.

[86] *Khouja, M. (1999)*: The single-period (newsvendor) problem: Literature review and suggestions for future research. In: omega, the International Journal of Management Science, Nr. 27.

[87] *Kischka, P. (2005)*: Neuere Ansätze zur Lösung des 'Newsboy-Problems'. In: Greulich, G., Lösch, M., Müller, C., Stier, W.: Empirische Konjunktur- und Wachstumsforschung, Zürich, S.141 - 151.

[88] *Kischka, P., Puppe, C. (1992)*: Decisions under Risk and Uncertainty: A Survey of Recent Developments. In: Zeitschrift für Operations Research, Nr. 36.

[89] *Klein, R., Scholl, A. (2004)*: Planung und Entscheidung, Verlag Vahlen, München.

[90] *Köster, M. (2006)*: Rekursive Präferenzen und das Equity Premium Puzzle, Metropolis-Verlag, Marburg.

[91] *Kottke, N. (2005)*: Entscheidungs- und Anlageverhalten von Privatinvestoren: Psychologische Aspekte der Wertpapieranlage, Deutscher Universitätsverlag, Wiesbaden.

[92] *Korycіorz, S. (2004)*: Sicherheitskapitalbestimmung und -allokation in der Schadenversicherung: Eine risikotheoretische Analyse auf der Basis des Value-at-Risk und des Conditional Value-at-Risk, Verlag für Versicherungswirtschaft, Karlsruhe.

[93] *Kürsten, W., Brandtner, M. (2009)*: Kohärente Risikomessung versus individuelle Akzeptanzmengen - Anmerkungen zum impliziten Risikoverständnis des "Conditional Value-at-Risk". In: zfbf, Volume 61.

[94] *Laux, H. (2003)*: Entscheidungstheorie, 5.Auflage, Springer-Verlag, Berlin.

[95] *Liebwein, P. (2000)*: Klassische und moderne Formen der Rückversicherung, Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe.

[96] *Liebwein, P. (2000a)*: Strukturierung von Rückversicherungsentscheidungen: Ein entscheidungstheoretisches Modell der Risikopolitik von Versicherungsunternehmen, Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe.

[97] *Mack, T. (1997)*: Schadenversicherungsmathematik, Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe.

[98] *Mainardi, R.(1925)*: Die Rückversicherung (autorisierte deutsche Übersetzung aus dem Italienischen von A. Hillbrandt), 2. Auflage, Berlin.

[99] *Marschak, J. (1950)*: Rational behavior, uncertain prospects, and measurable utility. In: Econometrica, Volume 18.

[100] *Meyer, J., Ormiston, M. (1983)*: The comparative statics of cumulative distribution function changes for the class of risk averse agents. In: Journal of Economic Theory, Volume 31.

[101] *Meyer, R. (2000)*: Entscheidungstheorie, Verlag Gabler, Wiesbaden.

[102] *Milliman Inc. (2007)*: Die Auswirkungen von Solvency II auf Versicherungsunternehmen. Unter: <http://de.milliman.com/pdfs/die-auswirkungen-von-solvency-II-01-06-07.pdf>, 20.10.2009.

[103] *Modigliani, F., Miller, M.: (1958)*: The Cost of Capital, Corporation Finance and the Theory of Investment. In: American Economic Review, Nr. 2.

[104] *Molinari, R., Nguyen, T. (2009)*: Risikotheoretische Aspekte bei der Solvabilitätsregulierung von Versicherungsunternehmen. In: Schriften der Wissenschaftlichen Hochschule Lahr, Nr. 10.

[105] *Mostard, J., de Koster, R., Teunter, R. (2005)*: The distribution-free newsboy problem with resalable returns. In: International Journal of Production Economics, Volume 97, Nr. 3.

[106] *Neumann, J. von, Morgenstern, O. (1947)*: Theory of games and ecomomic behavior, 2. Auflage, Princeton University Press, Princeton.

[107] *Nguyen, T. (2008)*: Handbuch der wert- und risikoorientierten Steuerung von Versicherungsunternehmen, Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe.

[108] *Nguyen, T., Molinari, R. (2009)*: Analyse unterschiedlicher Konzeptionen zur Solvabilitätsregulierung. In: Schriften der Wissenschaftlichen Hochschule Lahr, Nr. 11.

[109] *Osetrova, A., Schmeiser H. (2005)*: Solvency II: Interne Risikosteuerungsmodelle aus wissenschaftlicher Sicht. In: Working Papers on Risk Management and Insurance, Nr. 11.

[110] *Panjer, H. (2001)*: Measurement of risk, solvency requirements and allocation of capital within financial conglomerates, Research report 01-15, Institute of Insurance and Pension Research, University of Waterloo.

[111] *Raviv, A. (1979)*: The design of an optimal insurance policy. In: American Economic Review, Volume 69.

[112] *Perakis, G., Roels, G. (2008)*: Regret in the Newsvendor Model with Partial Information. In: Operations Research, Volume 56, Nr. 1.

[113] *Petruzzi, N. C., Dada, M. (1999)*: Pricing and the Newsvendor Problem: A Review with Extentions. In: Operations Research, Volume 47, Nr. 2.

[114] *Pfeiffer, C. (1986)*: Einführung in die Rückversicherung, 3. Auflage, Gabler, Wiesbaden.

[115] *Poser, K., Wagner, M. (2007)*: Das Newsvendor Modell mit nicht-linearer Kostenfunktion und seine Anwendung bei nicht-proportionalen Rückversicherungsverträgen. In: Jena Research Papers in Business and Economics, Nr. 15.

[116] *Rothschild, M., Stiglitz, J. (1971)*: Increasing risk II: Its economic consequences. In: Journal of Economic Theory, Volume 3.

[117] *Ritter, M. (2006)*: Absicherung von Katastrophen-Risiko über Kapitalmärkte: Eine kritische Bestandsaufnahme, Deutscher Universitäts-Verlag, Wiesbaden.

[118] *Rockafellar, R. T., Uryasev, S. (2002)*: Conditional value-at-risk for general loss distributions. In: Journal of Banking & Finance, Volume 26, Nr. 7.

[119] *Rommelfanger, H. J., Eickemeier, S. H. (2002)*: Entscheidungstheorie, Verlag Springer, Heidelberg.

[120] *Rosenkranz, F., Missler-Behr, M. (2005)*: Unternehmensrisiken erkennen und managen: Einführung in die quantitative Planung, Verlag Springer, Berlin.

[121] *Rothschild, M., Stiglitz, J. E. (1970)*: Increasing Risk: a Definition. In: Journal of Economic Theory, Nr. 2.

[122] *Salinger, E. (1998)*: Betriebswirtschaftliche Entscheidungstheorie: Einführung in die Logik individueller und kollektiver Entscheidungen, 4. Auflage, Oldenbourg Verlag, München.

[123] *Samson, D. (1986)*: Expected utility strategic decision models for general insurers. In: Astin Bulletin, Volume 16.

[124] *Samson, D., Thompson, H. (1983)*: Reinsurance Decision Making and Expected Utility. In: Journal of Risk and Insurance, Volume 50, Nr. 2.

[125] *Sarin, R., Weber, M. (1993)*: Risk-value models. In: European Journal of Operational Research, Volume 70.

[126] *Schlesinger, H. (1981)*: The Optimal Level of Deductibility in Insurance Contracts. In: Journal of Risk and Insurance, Volume 48.

[127] *Schmidt, K. D. (2002)*: Versicherungsmathematik, Springer, Berlin.

[128] *Schmidt, R. (1991)*: Versicherungsalphabet: Begriffserläuterungen aus Praxis und Theorie der Individualversicherung, 8. Auflage, Verlag Versicherungswirtschaft e. V., Karlsruhe.

[129] *Schmidt, R. H., Tyrell, M.(2006)*: Entscheidungstheorie: Zusammenfassende Stichpunkte. Unter: <http://www.raute-wirtschaft.de/downloads_begin.php?ID=1235>, 08.11.2009.

[130] *Scholl, A. (2001)*: Robuste Planung und Optimierung: Grundlagen - Konzepte und Methoden - experimentelle Untersuchungen, Physica-Verlag, Heidelberg.

[131] *Schubert, T., Stienen, U., Kraft, M. (2007)*: Solvency II und Rückversicherung, Gesamtverband der Deutschen Versicherungswirtschaft e. V., Berlin.

[132] *Schulenburg, J. (2005)*: Versicherungsökonomik, Verlag Versicherungswirtschaft e. V., Karlsruhe.

[133] *Schulenburg, J., Greiner, W. (2007)*: Gesundheitsökonomik, Verlag Mohr Siebeck, Tübingen.

[134] *Schulte, O. (2006)*: Fast-Close-Abschlüsse und Schadenrückstellungen nach HGB, IAS/ IFRS und US-GAAP, 1. Auflage, Deutscher Universitätsverlag, Wiesbaden.

[135] *Schweizerische Rückversicherungs-Gesellschaft Zürich (2002)*: Einführung in die Rückversicherung. Unter: <http://www.swissre.com/Internet/pwsfilpr.nsf/vwFilebyIDKEY Lu/ULUR-5FLBPT/$FILE/Einf_RV_de.pdf>, 20.10.2009.

[136] *Schwepcke, A. (2001)*: Rückversicherung: Grundlagen und aktuelles Wissen: Ein Leitfaden zum Selbststudium, Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe.

[137] *Stelling, J. N. (2005)*: Kostenmanagement und Controlling, Verlag Oldenbourg, München.

[138] *Stocker, F., Strobach K. M. (2003)*: Mikroökonomik: Repetitorium und Übungen, Verlag Oldenbourg, München.

[139] *Straub, E. (1988)*: Non-Life Insurance Mathematics, Springer-Verlag, Berlin.

[140] *Strauß, J. (1988)*: Die Rückversicherungsverfahren in der Praxis. In: Deutsche Gesellschaft für Versicherungsmathematik (1988): Schriftenreihe Angewandte Versicherungsmathematik: Mathematische Verfahren der Rückversicherung, Heft 19, Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe.

[141] *Sturm, R. (2006)*: Allgemeine Betriebswirtschaftslehre, Oldenbourg Verlag, München.

[142] *Tasche, D. (2002)*: Expected shortfall and beyond. In: Journal of Banking & Finance, Volume 26, Nr. 7.

[143] *Tayur, S, Ganeshan, R., Magazine, M. (1999)*: Quantitative Models for Supply Chain Management, Springer, Boston.

[144] *Vollmer, J. (2007)*: Produktbezogene Lösungsansätze für Versicherer im Rahmen von Solvency II, Grin Verlag, München.

[145] *Wagner, F. (2000)*: Risk Management im Erstversicherungsunternehmen: Modelle, Strategien, Ziele, Mittel, Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe.

[146] *Wagner, M. (2008)*: Bestimmung von Deckungsgrenzen bei nicht-proportionalen Rückversicherungsverträgen: Selbstbehalte in Abhängigkeit von Risikoeinstellungen. In: Zeitschrift für die gesamte Versicherungswissenschaft, Nr. 3.

[147] *Weber, M., Camerer, C. (1987)*: Recent Developments in Modelling Preferences under Risk. In: OR-Spektrum, Nr. 9.

[148] *Whitemore, G. A. (1970)*: Third degree stochastic dominance. In: American Economic Review, Volume 60.

[149] *Wiese, H. (2002)*: Entscheidungs- und Spieltheorie, Springer, Berlin.

[150] *Wiese, H. (2005)*: Kooperative Spieltheorie, Verlag Oldenbourg, München.

[151] *Wilhelm, J. (2008)*: Risikoaversion und Risikomessung: ein Blick ins Innere des Bernoulli-Prinzips. In: Finanzierung, Investition und Entscheidung: einzelwirtschaftliche Analysen zur Bank- und Finanzwirtschaft.

[152] *Yaari, M. (1987)*: The dual theory of choice under risk. In: Econometrica, Volume 55.

[153] *Zhou, C., Wu, W., Wu, C. (2010)*: Optimal insurance in the presence of insurer's loss limit. In: Insurance: Mathematics and Economics, Volume 46, Nr. 2.

[154] *Zimmermann, H. (2005)*: Operations Research: Methoden und Modelle, Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden.

[155] *Zimmermann, W., Stache, U. (2005)*: Operations Research: Quantitative Methoden zur Entscheidungsvorbereitung, Oldenbourg Verlag, München.

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre, dass

1. mir die geltende Promotionsordnung bekannt ist,
2. die Dissertation von mir selbst angefertigt wurde,
3. alle von mir benutzten Hilfsmittel und Quellen angegeben sind,
4. mich keine Personen bei der Anfertigung der Arbeit unterstützt haben,
5. die Hilfe eines Promotionsberaters nicht in Anspruch genommen habe,
6. Dritte weder unmittelbar noch mittelbar geldwerte Leistungen von mir im Zusammenhang mit dem Inhalt der vorgelegten Dissertation erhalten haben,
7. ich die Dissertation zuvor noch nicht als Prüfungsarbeit für eine staatliche oder andere wissenschaftliche Prüfung eingereicht habe,
8. ich weder die gleiche, noch eine in wesentlichen Teilen ähnliche, noch eine andere Abhandlung bei einer anderen Hochschule bzw. anderen Fakultät als Dissertation eingereicht habe.

Jena, den 15.03.2010 Maik Wagner