1920.

WISSENSCHAFT UND HYPOTHESE

IV

ROBERTO BONOLA
PROFESSOR AN DER SCUOLA NORMALE ZU PAVIA

DIE NICHTEUKLIDISCHE GEOMETRIE

HISTORISCH-KRITISCHE DARSTELLUNG IHRER ENTWICKLUNG

AUTORISIERTE DEUTSCHE AUSGABE

BESORGT VON

PROF. DR. HEINRICH LIEBMANN

MIT 52 FIGUREN IM TEXT

ZWEITE AUFLAGE

VERLAG VON B. G. TEUBNER · LEIPZIG · BERLIN 1919

Vorwort.

Der Geist des Werkes des allzufrüh verstorbenen Verfassers R. Bonola († 16. Mai 1911) ist erhalten geblieben, die Fassung und Anordnung wurde zum Teil unter Berücksichtigung der Anregungen der Kritik umgestaltet, wobei das Ziel war, die Durchdringung von historischer und systematischer Darstellung noch inniger zu gestalten, eine Kunst, für die die Vorlesungen von Felix Klein ein kürzlich von A. Voß treffend charakterisiertes und von der modernen Mathematik allgemein anerkanntes Vorbild abgeben.

In diesem Sinne werden die Freunde der nichteuklidischen Geometrie auch den neuen funktionentheoretischen Anhang, den Herr L. Schlesinger zu verfassen die Güte hatte, als dringend erwünschten Zuwachs betrachten.

Im übrigen sei an dieser Stelle noch besonders auf die umfassende „Bibliography of non-euclidean geometry“ von M. Sommerville (London 1911) und den S. 87 angeführten Artikel von M. Zacharias hingewiesen.

Heinrich Liebmann.

Inhalt.

Erstes Kapitel.

Die Beweise des V. euklidischen Postulats.

Zweites Kapitel.

Die Vorläufer der nichteuklidischen Geometrie.

Drittes Kapitel.

Die klassische Zeit der nichteuklidischen Geometrie.

Viertes Kapitel.

Erstes Kapitel.

Die Beweise des V. euklidischen Postulats.

Das Postulat der Parallelen bei den griechischen Geometern.

§ 1. Euklid [um 300 v. Chr.] nennt zwei in einer Ebene gelegene Gerade Parallele, wenn sie, verlängert, einander nicht treffen [Def. XXIII][1]. Er beweist [Prop. XXVII, XXVIII], daß zwei Gerade, die mit einer ihrer Transversalen gleiche innere Wechselwinkel oder gleiche korrespondierende Winkel oder auf derselben Seite innere Winkel bilden, die einander zu zwei Rechten ergänzen, parallel sind. Um dann die Umkehrungen dieser Sätze zu beweisen, bedient sich Euklid des folgenden Postulats [V]:

Wenn eine Gerade zwei Gerade trifft und mit ihnen auf derselben Seite innere Winkel bildet, deren Summe kleiner ist als zwei Rechte, so treffen sich die beiden Geraden, wenn man sie auf dieser Seite verlängert.

Die euklidische Parallelentheorie wird dann vervollständigt durch die folgenden Lehrsätze:

Gerade Linien, die zu ein und derselben Geraden parallel sind, sind untereinander parallel [Prop. XXX].

Durch einen gegebenen Punkt kann man eine einzige Gerade ziehen, die zu einer gegebenen Geraden parallel ist [Prop. XXXI].

Geradenabschnitte, die zwischen gleichen und parallelen Geradenabschnitten liegen, sind gleich und parallel [Prop. XXXIII].

[1] Bei Angaben des euklidischen Textes werden wir uns immer an die kritische Ausgabe von J. L. Heiberg (Leipzig 1883, Teubner) halten.

Aus dem letzten Satz wird die Äquidistanz von zwei Parallelen abgeleitet. Zu den wichtigsten Folgerungen aus dieser Theorie gehört der bekannte Lehrsatz von der Winkelsumme im Dreieck und die Eigenschaften der ähnlichen Figuren.

§ 2. Schon die ältesten Erklärer des euklidischen Textes meinten, daß das V. Postulat nicht hinreichend selbstverständlich sei, um es ohne Beweis hinzunehmen, weshalb sie versuchten, es als Folgerung aus anderen Sätzen abzuleiten.

Proclus [410—485] überliefert uns in seiner Erklärung zum ersten Buch Euklids[1] wertvolle Nachrichten über die ersten in dieser Hinsicht gemachten Versuche. Er berichtet z. B., daß Posidonius [im I. Jahrh. v. Chr.] vorgeschlagen hatte, zwei Gerade in einer Ebene parallel zu nennen, wenn sie gleichen Abstand haben. Diese Definition und die von Euklid entsprechen also zwei Tatsachen, die sich getrennt vorfinden können, und Proclus [S. 177] führt, wobei er auf eine Abhandlung von Geminos [I. Jahrh. v. Chr.] verweist, in dieser Beziehung die Beispiele der Hyperbel und der Conchoïde an und ihr Verhalten in bezug auf die entsprechenden Asymptoten, um zu zeigen, daß Linien im euklidischen Sinne parallel sein können, d. h., daß diese Linien ins Unendliche verlängert, einander nicht treffen, und trotzdem nicht parallel im Sinne von Posidonius, d. h. nicht äquidistant sind.

Diese Tatsache wird von Geminus — immer nach Angabe des Proclus — als die widersinnigste [παραδοξότατον] der ganzen Geometrie bezeichnet.

Weiter lehnt Proclus [S. 364] ab, es unter die Forderungen zu rechnen; er erwähnt zur Unterstützung dieser seiner Ansicht die Tatsache, daß seine Umkehrung [„Die Summe zweier Winkel eines Dreiecks ist kleiner als zwei Rechte“] ein von Euklid bewiesener Lehrsatz ist [Prop. XVII], und es

[1] Den Text des Proclus entnehmen wir aus G. Friedleins Ausgabe: Procli Diadochi in primum Euclidis elementorum librum Commentarii. Leipzig 1873, Teubner.

schien ihm unmöglich, daß ein Satz, dessen Umkehrung beweisbar ist, seinerseits unbeweisbar sein sollte.

Er warnt auch vor mißbräuchlichen Berufungen auf die Selbstverständlichkeit und besteht auf der Möglichkeit, daß es asymptotische Gerade geben kann [p. 191—192].

Ptolemäus [II. Jahrh. n. Chr.], immer nach Angabe des Proclus [p. 362—365], suchte die Frage mit folgender seltsamen Erwägung zu lösen.

Seien (Fig. 1) AB, CD zwei Parallelen, FG eine Transversale, α und β die beiden inneren Winkel zur Linken von FG und α' und β' die beiden inneren Winkel zur Rechten. Dies festgesetzt, wird die Summe $\alpha + \beta$ entweder größer oder kleiner oder gleich zwei Rechten sein. Man „gibt zu", daß, wenn für ein Paar von Parallelen z. B. der erste Fall

$$[\alpha + \beta > 2 \text{ Rechte}]$$

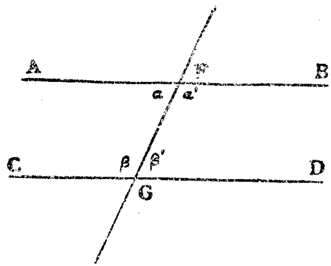


Fig. 1.

gilt, er gleichfalls eintritt für jedes andere Paar. Da weiter die Geraden FB, GD einander parallel sind, weil die Geraden FA, GC parallel sind, so folgt aus:

$$\alpha + \beta > 2 \text{ Rechte}: \alpha' + \beta' > 2 \text{ Rechte}.$$

Es würde folgen $\alpha + \beta + \alpha' + \beta' > 4$ Rechte, was offenbar widersinnig ist. Demnach kann nicht $\alpha + \beta > 2$ Rechte sein. In derselben Art beweist man, daß nicht

$$\alpha + \beta < 2 \text{ Rechte}$$

sein kann, also muß $\alpha + \beta = 2$ Rechte sein (Proclus p. 365).

Aus diesem Ergebnis entnimmt man leicht das euklidische Postulat.

§ 3. Nachdem Proclus [p. 371] die Betrachtung des Ptolemäus beurteilt hat, sucht er dasselbe Ziel auf anderem Wege zu erreichen. Der Beweis des Proclus beruht auf folgendem Satz, den er als selbstverständlich annimmt. Der Abstand zwischen zwei auf zwei einander schneidenden Geraden gelegenen Punkten kann beliebig groß gemacht werden, wenn man die beiden Geraden hinreichend verlängert.[1] Hieraus leitet er den Hilfssatz ab:

Eine Gerade, die eine von zwei Parallelen trifft, trifft notwendig auch die andere.

Proclus schließt so: Seien (Fig. 2) AB, CD zwei Parallele und EG eine Transversale, die in F die erste trifft. Der Abstand eines veränderlichen Punktes auf dem Strahl FG von der Geraden AB wächst über alle Grenzen, wenn der Punkt sich unbegrenzt von F entfernt; und da der Abstand von zwei Parallelen endlich ist, so wird die Gerade EG die Gerade CD notwendig treffen müssen.

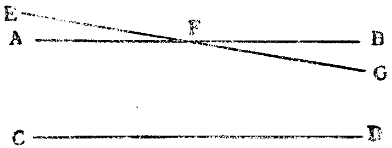


Fig. 2.

Proclus führte also die Annahme ein, daß der Abstand von zwei Parallelen endlich bleibt, eine Annahme, aus der logisch die des Euklid folgt.

§ 4. Daß das Postulat des Euklid Gegenstand von Diskussionen und Untersuchungen bei den Griechen war, ergibt sich auch aus der folgenden widersinnigen Betrachtung, mit der man, nach Angabe des Proclus [p. 369], zu beweisen vorgab, daß zwei von einer dritten geschnittene Gerade sich nicht treffen, auch wenn die Summe der inneren Winkel auf derselben Seite kleiner ist als zwei rechte Winkel.

Sei (Fig. 3) AC eine Transversale der beiden Geraden AB, CD und E der Mittelpunkt von AC. Auf derjenigen Seite von

[1] Dieser als selbstverständlich angenommene Satz wird von Proclus mit der Autorität des Aristoteles gestützt. Vgl. De Coelo, I, 5. Ein strenger Beweis des genannten Satzes wurde vom Pater G. Saccheri gegeben. Vgl. Kap. II, § 11.

AC, wo die Summe der inneren Winkel kleiner ist als zwei Rechte, werden auf AB und CD die Abschnitte AF und CG gleich AE abgetragen. Die beiden Geraden AB und CD können sich nicht treffen zwischen den Punkten AF und CG, weil im Dreieck jede Seite kleiner ist als die Summe der beiden anderen.

Nachdem man dann die Punkte F, G verbunden hat, wiederhole man von FG an die vorhergehende Konstruktion, d. h. man bestimme auf AB und CD die beiden Abschnitte FK und GL, beide gleich der Hälfte von FG. Die beiden Geraden AB, CD werden sich nicht zwischen den Punkten F, K und G, L treffen können. Und da dieses Verfahren unbeschränkt wiederholt werden kann, wollte man schließen, daß die beiden Geraden AB, CD sich niemals treffen.

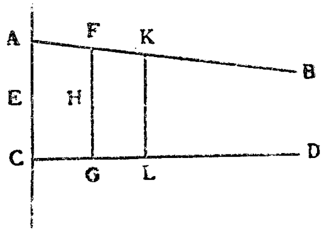


Fig. 3.

Der Grundfehler der Betrachtung beruht auf dem Gebrauch des Unendlichen, da doch die Abschnitte AF, FK durch fortwährende Abnahme nach Null streben könnten, während ihre Summe endlich ist. Der Erfinder dieses Widerspruchs hat von demselben Grundsatz Gebrauch gemacht, mit dem Zeno [495—435 v. Chr.] zu beweisen behauptete, daß Achilles die Schildkröte nicht erreichen würde, auch wenn er sich mit doppelt so großer Geschwindigkeit als sie bewegte.

Dies ist unter anderer Form Proclus bekannt [p. 369—370], wenn er nämlich sagt, daß so nur bewiesen wird, daß man mit dem angegebenen Verfahren den Schnittpunkt nicht erreichen [bestimmen: ὁρίζειν] kann, nicht, daß er nicht vorhanden ist.

Proclus bemerkt überdies, daß, „da die Summe von zwei Winkeln im Dreieck kleiner ist als zwei Rechte [Euklid. XVII], es Gerade gibt, die von einer dritten geschnitten sich auf der Seite treffen, wo die Summe der inneren Winkel kleiner ist als zwei Rechte; man kann also dem, der behauptet, daß für jeden Unterschied zwischen genannter Summe und zwei Rechten Winkeln die beiden Geraden sich nicht treffen, antworten, daß bei kleineren Unterschieden die Geraden sich treffen".

„Aber wenn es für irgendwelche Paare von Geraden, die mit einer dritten auf derselben Seite innere Winkel bilden, deren Summe kleiner ist als zwei Rechte, einen Schnittpunkt gibt, so muß noch nachgesehen werden, ob dies für alle Paare eintritt. Alsdann könne man feststellen, daß es einen bestimmten Unterschied [von zwei rechten Winkeln] gibt, für den sie [die Geraden] sich nicht treffen, während sich dagegen alle andern treffen, für die dieser Unterschied größer sei" [Proclus, p. 371]. Aus dem Folgenden wird sich ergeben, daß die hier von Proclus aufgeworfene Frage nur in dem Fall berechtigt ist, wo der Abschnitt AC der Transversale unverändert bleibt [Fig. 3], während die beiden Geraden des Paares bei der Drehung um die Punkte A und C ihren Winkelunterschied ändern.

§ 5. Ein anderer sehr alter Beweis des V. Postulats, der im arabischen Kommentar des Al-Nirizi[1] [IX. Jahrh.] wiedergegeben ist, und zu uns auch durch die lateinische Übersetzung des Gherardo da Cremona[2] [XII. Jahrh.] gelangt ist, wird Aganis[3] zugeschrieben.

Der Teil dieses Kommentars, der sich auf die Definitionen, Postulate und Axiome bezieht, enthält häufige Verweise auf den

[1] Cf. R. O. Besthorn u. J. L. Heiberg, Codex Leidensis 399, 1. Euclidis Elementa ex interpretatione Al-Hadschdschadsch cum commentariis Al-Narizii. Copenhague 1893—97, F. Hegel.

[2] Cf. M. Curtze, Anaritii in decem libros priores Elementorum Euclidis Commentarii. Ex interpretatione Gherardi Cremonensis in codice Cracoviensi 569 servata. Leipzig 1899, Teubner.

[3] Aganis wird von Curtze und Heiberg mit Geminus identifiziert. P. Tannery dagegen verwirft diese Identifizierung. Cf. Tannery, Le philosophe Aganis est-il identique a Germinus? Bibliotheca Math. (3), t. 2, p. 9—11 (1901).

Namen Sambelichius, der leicht zu identifizieren ist mit Simplicius, dem berühmten Erklärer des Aristoteles, der im VI. Jahrhundert lebte. Simplicius habe also eine Einführung geschrieben zum I. Buch des Euklid, worin er Gedanken aussprach ähnlich denen des Geminus und Posidonius, indem er behauptete, daß das V. Postulat nicht selbstverständlich ist, und den Beweis seines Genossen Aganis wiedergab.

Dieser Beweis wird gegründet auf die Annahme, daß es äquidistante Gerade gibt, Gerade, die Aganis wie schon Posidonius Parallele nennt. Aus dieser Annahme leitet er ab, daß der kleinste Abstand von zwei Parallelen eine Strecke senkrecht zu beiden Geraden ist; daß zwei Gerade, die zu einer dritten senkrecht sind, untereinander parallel sind; daß zwei Parallele, die von einer dritten geschnitten werden, auf derselben Seite innere Winkel bilden, welche sich zu zwei Rechten ergänzen und umgekehrt.

Diese Sätze sind so einfach abzuleiten, daß wir über die Beweise des Aganis nicht zu berichten brauchen. Nachdem wir erwähnt haben, daß aus ihnen die Sätze XXX und XXXIII bei Euklid folgen [cf. p. 1], wollen wir angeben, wie Aganis den Schnittpunkt von zwei nicht äquidistanten Geraden konstruiert.

Seien (Fig. 4) AB, GD zwei Gerade, die von der Transversale EZ geschnitten werden, sodaß die Summe der inneren Winkel AEZ und EZD kleiner ist als zwei Rechte. Ohne irgend etwas von der Allgemeinheit der Figur aufzuheben, kann man voraussetzen, daß $\sphericalangle AEZ$ ein Rechter ist.

Man nehme dann auf ZD einen willkürlichen Punkt T an, von dem aus man TL senkrecht zu ZE zieht; dann teile man, durch den Punkt P, den Abschnitt EZ in zwei gleiche Teile, sodann, durch den Punkt M, den Abschnitt PZ in zwei gleiche Teile usw., bis einer der Mittelpunkte $P, M \ldots$ auf den Abschnitt LZ fällt. Wenn dies z. B. der Punkt M ist, so ziehe man in M die Gerade senkrecht zu EZ, die ZD in N treffen wird. Man konstruiere schließlich auf ZD den Abschnitt ZC, der von ZN das gleiche Vielfache ist, wie ZE von ZM. In unserem Fall ist $ZC = 4 \cdot ZN$. Der so erhaltene Punkt C ist der Schnittpunkt der beiden Geraden AB und GD.

Um das zu zeigen, müßte man beweisen, daß die aufeinanderfolgenden gleichen Abschnitte ZN, NS . . . der Geraden ZD gleiche Projektionen auf ZE haben. Wir werden nicht bei diesem Umstand verweilen, weil wir darauf später zurückkommen müssen [p. 11]. Übrigens wird der Beweis durch die Figur des Aganis selbst nahe gelegt.

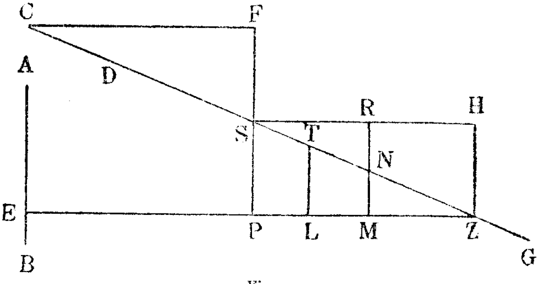


Fig. 4.

Enthüllen wir das Charakteristische der vorhergehenden Konstruktion: sie beruht (implizite) auf dem Gebrauch des sogenannten Archimedischen Postulates, das notwendig ist zur Bestimmung des Segments MZ, eines Bruchteils von EZ, der zugleich kleiner ist als LZ.

Das Parallelenpostulat bei den Arabern.

§ 6. Die Araber, die Nachfolger der Griechen in der mathematischen Vorherrschaft, beschäftigten sich wie diese mit dem V. Postulat. Einige aber übernahmen ohne weiteres die Gedanken und die Beweise ihrer Meister, wie z. B. Al-Nirizi [IX. Jahrh.], dessen Erklärung zu den Definitionen, Postulaten und Axiomen des I. Buches der Einführung zu den „Elementen" nachgebildet ist, die wir Simplicius verdanken und dessen Beweis der V. Euklidischen Annahme der oben [§ 5] erwähnte des Aganis ist.

Andere trugen ihren persönlichen Anteil bei zu der Frage. Nasîr-Eddîn [1201—1274] z. B. bewies zwar das V. Postulat, indem er das von Aganis befolgte Kriterium benützt, verdient aber doch erwähnt zu werden wegen der originellen Fassung, daß er ausdrücklich den Lehrsatz über die Summe der Winkel eines Dreiecks vorausschickt, und wegen der erschöpfenden Form seiner Beweisführung.[1]

Folgendes ist der Hauptteil der Annahme, die er macht: Wenn von zwei Geraden r und s die eine senkrecht, die andere schräg steht zur Strecke AB, so sind die Abschnitte der von s auf r gefällten Lote kleiner als AB auf der Seite, wo AB mit s einen spitzen Winkel bildet, und größer auf der Seite, wo AB mit s einen stumpfen Winkel bildet. Es folgt unmittelbar, daß, wenn zwei gleiche Abschnitte AB, $A'B'$ auf dieselbe Seite fallen und senkrecht zur Geraden BB' sind, die Gerade AA' ihrerseits auf den gegebenen Abschnitten senkrecht stehen wird. Überdies wird man haben: $AA' = BB'$, will sagen, die Figur $AA'B'B$ ist ein Viereck mit rechten Winkeln und gleichen gegenüberliegenden Seiten, d. h. ein Rechteck.

Aus diesem Ergebnis entnimmt Nasîr-Eddîn leicht, daß die Summe der Winkel im Dreieck zwei Rechten gleich ist. Für das rechtwinklige Dreieck ist die Sache offenkundig, da es die Hälfte eines Rechtecks ist; für ein beliebiges Dreieck erhält man das Ergebnis durch Zerlegung des Dreiecks in zwei rechtwinklige Dreiecke.

Dies angenommen zeigen wir hier kurz, wie der arabische Geometer das euklidische Postulat beweist [vgl. Aganis].

---

[1] Vgl. Euclidis elementorum libri XII studii Nassiredini. Roma 1594. Dieses in arabischer Sprache geschriebene Werk wurde nachgedruckt 1657, 1801. Es gibt keine Übersetzung in eine andere Sprache.

Seien (Fig. 5) AB, CD zwei Strahlen, der eine schräg, der andere senkrecht zur Geraden AC. Auf AB nehme man den Abschnitt AH an, und von H fälle man das Lot HH' auf AC. Wenn der Punkt H' in C fällt oder auf die Seite, welche A gegenüberliegt hinsichtlich C, treffen sich die beiden Strahlen AB, CD ohne weiteres. Wenn sodann H' zwischen A und C fällt, ziehe man die Strecke AL senkrecht zu AC und gleich HH'.

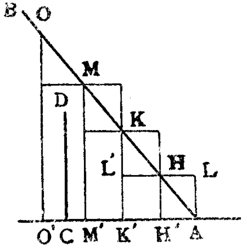


Fig. 5.

Dann wird nach dem oben Gesagten sein: $HL = AH'$. Anschließend an AH nehme man HK gleich AH und von K fälle man das Lot KK' auf AC. Da KK' größer als HH' ist, bilde man $L'K' = H'H$ und man verbinde H mit L'. Da die beiden Vierecke $K'H'HL'$, $H'ALH$ alle beide Rechtecke sind, so liegen die drei Punkte L', H, L in gerader Linie. Es folgt: $\sphericalangle L'HK = \sphericalangle AHL$ und folglich die Gleichheit der beiden Dreiecke AHL, $HL'K$. Daher: $L'H = HL$ und wegen der Eigenschaft der Rechtecke: $K'H' = H'A$.

Man nehme jetzt KM gleich mit und anschließend an HK, und von M fälle man MM' senkrecht auf AC. Durch eine der eben entwickelten gleiche Beweisführung zeigt man:

$$M'K' = K'H' = H'A.$$

Nachdem dies erste Ergebnis erhalten ist, nehme man ein Vielfaches von AH', das größer ist als AC (Postulat des **Archimedes**). Es sei z. B.

$$AO' = 4 \cdot AH' > AC.$$

Dann konstruiere man auf AB die Strecke $AO = 4 \cdot AH$ und von O fälle man das Lot auf AC. Dieses Lot wird offenbar OO' sein. Dann wird im rechtwinkligen Dreieck $AO'O$ die Gerade CD, die senkrecht steht auf der Kathete $O'A$, da sie die andere Kathete nicht treffen kann, notwendig die Hypotenuse OA treffen.

Hierdurch ist erwiesen, daß zwei Gerade AB und CD, von denen die eine senkrecht, die andere schräg steht zur Transversale AC, einander treffen. Mit anderen Worten, das euklidische Postulat ist für den Fall bewiesen, wo einer der inneren Winkel ein rechter ist. Nasîr-Eddîn macht dann Gebrauch vom Lehrsatz über die Winkelsumme im Dreieck und führt so den allgemeinen Fall auf diesen besonderen zurück. Wir wollen die Beweisführung nicht wiedergeben, weil wir im folgenden über eine gleiche berichten werden müssen.[1]

Das Parallelenpostulat während der Renaissance und des achtzehnten Jahrhunderts.

§ 7. Sowohl die ersten Übersetzungen der „Elemente", die im XII. und XIII. Jahrhundert nach den arabischen Texten gemacht sind, als die späteren, die nach den griechischen Texten am Ende des XV. und in der ersten Häfte des XVI. zusammengestellt sind, geben im allgemeinen keine kritische Anmerkung zum V. Postulat. Die Kritik entsteht neu nach 1550, besonders durch Anstoß des Kommentars von Proclus.[2] Um sie besser verfolgen zu können, führen wir kurz die Ansichten der angesehensten Erklärer im XVI. und XVII. Jahrhundert an.

E. Commandino [1509—1575] fügt in die euklidische Definition der Parallelen ohne Rechtfertigung den Begriff der

---

[1] Der Beweis des Nasîr-Eddîn für das V. Postulat wird von dem englischen Geometer J. Wallis ausführlich im zweiten Band seiner Werke wiedergegeben (vgl. die Anmerkung S. 15) und auch von G. Castillon in einer Schrift, die in den Mém. de l'Académie Royale de Sciences et Belles-lettres in Berlin T. XVIII, p. 175—183 (1788—1789) veröffentlicht ist. Außer ihnen erwähnen den Beweis G. S. Klügel (vgl. die Anm. zu § 18), J. Hoffmann (Kritik der Parallelentheorie, Jena 1807), V. Flauti (Nuova dimostrazione del postulato quinto, Napoli 1818) und andere.

[2] Der Kommentar des Proclus wurde zum erstenmal in Basel (1533) im Urtext gedruckt, dann in Padua (1560) in der lateinischen Bearbeitung von Barozzi.

Äquidistanz ein; hinsichtlich des V. Postulats gibt er die Ansicht und den Beweis des Proclus wieder.[1]

C. Clavio [1537—1612] gibt in seiner lateinischen Übersetzung des euklidischen Textes[2] die Kritik und den Beweis des Proclus wieder. Er trägt dann einen neuen Beweis der euklidischen Annahme vor, der sich auf den Lehrsatz stützt: „Die Linie gleichen Abstands von einer Geraden ist eine Gerade“, den er durch analoge Beweisführung zu rechtfertigen sucht. Der Beweis des Clavius hat viel Berührungspunkte mit dem des Nasîr-Eddîn.

P. A. Cataldi [?—1626] ist der erste moderne Geometer, der eine ausschließlich der Parallelenfrage gewidmete Arbeit veröffentlicht hat.[3] Cataldi geht vom Begriff der äquidistanten und nichtäquidistanten Geraden aus, aber um die wirkliche Existenz von äquidistanten Geraden zu beweisen, geht er zurück auf die Annahme, „daß nicht äquidistante Gerade in einer Richtung sich nähern und nach der anderen auseinandergehen“ [vgl. Nasîr-Eddîn].[4]

G. A. Borelli [1608—1679] nimmt bei dem Versuch es zu rechtfertigen das folgende Axiom an [XIV]: „Wenn eine Strecke seitwärts in derselben Ebene so einer anderen Geraden entlang hinbewegt wird, daß sie diese immer mit dem einen Endpunkt berührt und während ihrer ganzen Bewegung auf ihr senkrecht steht, so wird ihr anderer Endpunkt bei ihrer Bewegung eine gerade Linie beschreiben.“

Er beweist in der Folge, daß zwei zu einer dritten senkrechte

[1] Elementorum libri XV. Pesaro 1572.

[2] Euclidis elementorum libri XV. Rom 1574.

[3] Operetta della linee rette equidistanti, et non equidistanti. Bologna 1603.

[4] Weitere Bemerkungen über den Gegenstand wurden gemacht von Cataldi in Aggiunta all' operetta delle linee rette equidistanti et non equidistanti. Bologna 1604.

Gerade äquidistant sind, und erklärt die Parallelen als äquidistante Gerade. Es folgt die Theorie der Parallelen.[1]

§ 8. Giordano Vitale [1633—1711], der wieder anknüpft an den von Posidonius aufgestellten Begriff der Äquidistanz, erkennt mit Proclus die Notwendigkeit, zu widerlegen, daß die Parallelen Euklids ein asymptotisches Verhalten zeigen können. Zu diesem Zweck definiert er als parallel zwei äquidistante Gerade, und sucht zu beweisen, daß der Ort der von einer Geraden äquidistanten Punkte eine Gerade ist.[2]

Der Beweis beruht wesentlich auf diesem Hilfssatz: Wenn zwischen den auf irgend einer Kurve, deren Hohlseite gegen H liegt, angenommenen Punkten A, C die Gerade AC gezogen wird, und wenn von den unendlich vielen Punkten des Bogens AC Lote auf eine Gerade gefällt werden, so behaupte ich, es sei unmöglich, daß diese Lote untereinander gleich sind.

Die „eine Gerade", von der in dem Satz die Rede ist, ist nicht eine beliebige Gerade der Ebene, sondern eine in folgender Weise konstruierte Gerade (Fig. 6): Vom Punkte B des Bogens AC fälle man BD senkrecht auf die Sehne AC; dann errichte man AG in A ebenfalls senkrecht zu AC; endlich nehme man zwei gleiche Abschnitte AG und DF auf den konstruierten Loten und verbinde die Endpunkte G, F. GF ist die Gerade, welche Giordano bei seinem Beweis betrachtet; eine Gerade, in bezug auf die der Bogen AB sicher keine äquidistante Linie ist.

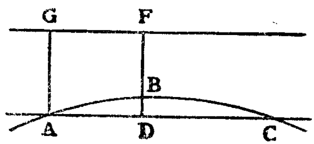


Fig. 6.

Aber wo der Verfasser beweisen will, daß der Ort der von einer Geraden gleich weit abstehenden Punkte auch eine Gerade ist, wendet er den vorstehenden Hilfssatz auf eine Figur

[1] Borelli, Euclides restitutus. Pisa 1658.

[2] Giordano Vitale, Euclide restituto overo gli antichi elementi geometrici ristaurati, e facilitati. Libri XV. Roma 1680.

an, in der die Beziehungen nicht verwirklicht sind, die zwischen dem Bogen ABC und der Geraden GF bestehen, weshalb die Folgerungen, die er über die Existenz äquidistanter Geraden zieht, in der Tat nicht erlaubt sind.

In dieser Hinsicht bildet der Beweis des Giordano keinen Fortschritt gegen die früheren; ferner enthält er einen sehr bekannten Satz, dessen Bedeutung in der Folge zu weiterer Entwicklung gelangen wird.

Es sei (Fig. 7) $ABCD$ ein Viereck mit den rechten Winkeln A und B und mit den gleichen Seiten AD und BC; es sei überdies HK ein Lot, das von einem Punkt H der Strecke DC auf die Grundlinie AB des Vierecks gefällt ist. Giordano beweist: 1. Daß die Winkel D, C gleich sind, 2. daß, wofern die Strecke HK der Strecke AD gleich ist, die zwei Winkel D, C rechte sind und CD äquidistant zu AB ist.

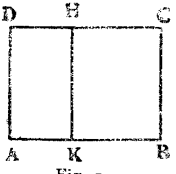


Fig. 7.

Mit diesem Lehrsatz führt Giordano die Frage der äquidistanten Geraden darauf zurück, die Existenz eines Punktes H auf DC zu beweisen, dessen Abstand von AB den beiden Strecken AD, CB gleich ist. Dies erscheint uns als eines der bemerkenswertesten Ergebnisse, das bis zu jenem Zeitpunkt über die Parallelenlehre erhalten worden ist.[1]

§ 9. J. Wallis [1616—1703] gab den Begriff der Äquidistanz auf, der ohne Erfolg von den vorausgehenden Geometern ausgebeutet war, und gab einen neuen Beweis des V. Postulats, der sich gründet auf den allgemeinen Satz: Zu jeder Figur gibt es eine ähnliche von willkürlicher Größe. Hier geben wir kurz an, wie Wallis verfährt.[2]

[1] Vgl. Bonola, Un teorema di Giordano Vitale da Bitonto sulle rette equidistanti. Bollettino di Bibliografia et Storia delle Scienze Mat. (1905).

[2] Vgl. Wallis, De Postulato Quinto; et Definitione Quinta, Lib. 6. Euclidis; disceptatio geometrica; in den Opera Math. t. II. p. 669—678.

Es seien (Fig. 8) a, b zwei Gerade, die in A und B von der Transversale c geschnitten werden; α, β seien die inneren Winkel auf derselben Seite von c, wobei $\alpha + \beta$ kleiner ist als zwei rechte Winkel. Zieht man durch A die Gerade b', sodaß b und b' mit c gleiche korrespondierende Winkel einschließen, so ist klar, daß b' in den Nebenwinkel von α fallen wird. Verschieben wir dann die Gerade b stetig, sodaß B die Strecke AB durchläuft und daß der Winkel, den sie mit c bildet, beständig gleich β bleibt, so muß die Gerade b, bevor sie die Endlage b' erreicht, notwendig a treffen. So wird ein Dreieck AB_1C_1 bestimmt mit den Winkeln in A und B, die entsprechend gleich α und β sind. Aber nach Annahme des Wallis über die Existenz ähnlicher Figuren kann über AB als der AB_1 entsprechenden Seite ein Dreieck ABC ähnlich dem Dreieck AB_1C_1 konstruiert werden, was zeigt, daß die Geraden a, b in einem Punkt zusammentreffen müssen, nämlich in der dritten Ecke C des Dreiecks ABC. Also usw.

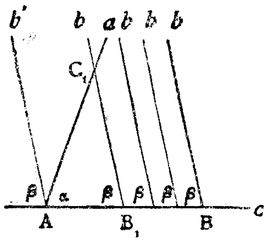


Fig. 8.

Wallis sucht dann seine besondere Ansicht zu rechtfertigen, indem er bemerkt, daß Euklid, wenn er die Existenz eines Kreises von gegebenem Mittelpunkt und gegebenem Halbmesser fordert [III. Postulat], in Wirklichkeit das Prinzip der Ähnlichkeit für die Kreise fordert. Aber so sehr auch die Anschauung diese Ansicht in günstigem Sinne unterstützt, so bildet

Oxford 1693. Diese Schrift von Wallis enthält zwei Vorlesungen, die er an der Universität Oxford hielt, die eine 1651, die andere 1663. Darin wird auch der Beweis des Nasîr-Eddîn wiedergegeben. Der Beweis des Wallis wurde ins Deutsche übersetzt von Engel und Stäckel in der „Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauß". S. 21—36. Leipzig 1895, Teubner. Dies Werk wird im folgenden angeführt als: Th. d. P.

doch der Begriff der Gestalt einer Figur unabhängig von der Größe eine Annahme, die keineswegs selbstverständlicher ist, als jenes euklidische Postulat.

Wir erwähnen noch, daß Wallis einfacher die Existenz von Dreiecken mit gleichen Winkeln hätte annehmen können oder, wie wir in der Folge sehen werden, von nur zwei verschiedenen Dreiecken mit entsprechend gleichen Winkeln [vgl. § 13].

§ 10. Die kritische Arbeit der vorhergehenden Geometer genügt, die geschichtliche Entwicklung unserer Frage im XVI. und XVII. Jahrhundert ins Licht zu setzen, weshalb wir für überflüssig halten, von andern bedeutenden Forschern zu sprechen, wie z. B. Oliviero di Bury [1604], Luca Valerio [1613], H. Savile [1621], A. Tacquet [1654], A. Arnauld [1667] waren.[1] Wir erachten es vielmehr für nötig, einige Worte über die Stelle zu sagen, welche die euklidische Annahme im geometrischen Organismus bei den verschiedenen Erklärern der „Elemente" einnimmt.

In der lateinischen Ausgabe der „Elemente" [1482], die nach arabischen Texten von Campanus ausgeführt wurde [XIII. Jahrhundert], wird die fragliche Annahme unter die Postulate eingereiht. Gleiches wäre zu sagen von der aus dem Griechischen ins Lateinische gemachten Übersetzung von B. Zamberti [1505], von den Ausgaben von Luca Paciolo [1509], von N. Tartaglia [1543], von F. Commandino [1572], von A. Borelli [1658].

Dagegen enthält der erste Druck der „Elemente" in griechischer Sprache [Basel 1533] die Annahme unter den Axiomen [Axiom XI]. In der Folge rechnen sie unter die Axiome F. Candalla [1556], C. Clavio [1574], Giordano Vitale [1680] und auch Gregory [1703] in seiner klassischen lateinischen Übersetzung der Werke des Euklid.

---

[1] Über den vorliegenden Gegenstand vgl. man: Riccardi, Saggio di una bibliografia Euclidea. Mem. di Bologna 1890, serie 5, T. 1, p. 27—34.

Um zu versuchen, sich Rechenschaft zu geben über diese Verschiedenheiten, die mehr als auf die eben genannten Autoren zurückgehen auf die von den Griechen überlieferten Handschriften, wird es gut sein zu wissen, welche Bedeutung die letzteren den Wörtern „Postulat“ [αἰτήματα] und „Axiome“ [ἀξιώματα] zuerteilt haben.[1] Bemerken wir vor allem, daß das Wort Axiome hier steht, um das zu bezeichnen, was Euklid in seinem Text „Gemeinbegriffe“ nennt [κοιναὶ ἔννοιαι].

Bei Proclus sind drei verschiedene Arten der Erklärung des Unterschieds zwischen Axiomen und Postulaten angegeben.

Die erste Art knüpft an den Unterschied, der zwischen Aufgabe und Lehrsatz besteht. Das Postulat unterscheidet sich vom Axiom wie die Aufgabe sich vom Lehrsatz unterscheidet, sagt Proclus. Darunter muß man verstehen, daß das Postulat die Möglichkeit einer Konstruktion bejaht.

Die zweite Art besteht in der Aussage, daß das Postulat ein Satz geometrischen Inhalts ist, während das Axiom ein Satz zugleich geometrischen und arithmetischen Inhalts ist.

Die dritte Art endlich, den Unterschied beider Worte zu verstehen, die Proclus anführt, wird auf die Autorität des Aristoteles [382—322] gestützt. Die Wörter Axiom und Postulat erscheinen bei Aristoteles nicht in ausschließlich mathematischem Sinne gebraucht. Axiom ist das, was an sich selbst wahr ist, kraft der Bedeutung der Worte, die es enthält, Postulat ist das, was zwar ohne Axiom zu sein, im oben erklärten Sinn, doch ohne Beweis gilt.

[1] Über das folgende vgl. Proclus, im Kapitel, das die Überschrift Petita et axiomata trägt. Neuerdings hat G. Vailati in einem seiner Vorträge auf dem dritten Mathematikerkongreß (Heidelberg 1904) die Aufmerksamkeit der Gelehrten wieder auf die Bedeutung dieser Wörter bei den Griechen gelenkt. Vgl.: Intorno al significato della distinzione tragli assiomi ed i postulati nella geometria greca. Verh. des dritten Math.-Kongresses, p. 575—581. Leipzig 1905, Teubner.

Solchermaßen wird also das Wort Axiom, wie noch besser aus einem von Aristoteles gebrachten Beispiel hervorgeht [zieht man Gleiches von Gleichem ab, so sind die Reste gleich], in einem Sinn gebraucht, der fast genau dem der Gemeinbegriffe des Euklid entspricht, während das Wort Postulat bei Aristoteles eine von den beiden oben angeführten verschiedene Bedeutung hat.[1]

Je nachdem man nun die eine oder die andere dieser Unterscheidungen zwischen den beiden Wörtern annimmt, wird ein bestimmter Satz unter den Postulaten oder unter den Axiomen eingereiht werden können. Nimmt man die erste an, so würden unter den fünf euklidischen Postulaten nach Proclus nur die drei ersten diesen Namen verdienen, insofern nur in ihnen gefordert wird, eine Konstruktion machen zu können [zwei Punkte zu verbinden, eine Gerade zu verlängern, einen Kreis von willkürlichem Mittelpunkt und Halbmesser zu beschreiben]. Das IV. [die rechten Winkel sind gleich] und das V. müßten statt dessen in die Axiome eingereiht werden.

Nimmt man dagegen die zweite oder die dritte Unterscheidung an, so sind die euklidischen Postulate alle fünf unter den Postulaten aufzuzählen.

Dadurch ist der Ursprung der Abweichung zwischen den verschiedenen Handschriften leicht erklärlich. Zur Bekräftigung dieser Erklärung können wir hinzufügen, in welcher Unsicherheit sich die Historiker befinden, wenn sie Euklid die Postulate, die Gemeinbegriffe und die Definitionen des ersten

[1] Vgl. Aristoteles, Analytica Posteriora, I, 10, § 8. Wir wollen diese ein wenig dunkle Stelle, wo der Philosoph vom Postulat spricht, vollständig anführen: "Οσα μὲν οὖν δεικτὰ ὄντα λαμβάνει αὐτὸς μὴ δείξας, ταῦτα ἐὰν μὲν δοκοῦντα λαμβάνῃ τῷ μανθάνοντι ὑποτίθεται. Καὶ ἔστιν οὐχ ἁπλῶς ὑπόθεσις ἀλλὰ πρὸς ἐκεῖνον μόνον. Ἐὰν δὲ ἢ μηδεμίας ἐνούσης δόξης ἢ καὶ ἐναντίως ἐνούσης λαμβάνῃ, τὸ αὐτὸ αἰτεῖται. Καὶ τούτῳ διαφέρει ὑπόθεσις καὶ αἴτημα. ἔστι γὰρ αἴτημα τὸ ὑπεναντίον τοῦ μανθάνοντος τῇ δόξῃ.

Buches zuerteilen. Was die Postulate anbetrifft, so erheben sich die stärksten Zweifel gegen die beiden letzten: die Anwesenheit der ersten drei stimmt hinreichend mit dem ganzen Plan des Werkes.[1]

Läßt man, selbst gegen die Autorität des Geminus und Proclus, die Annahme zu, daß das IV. und V. Postulat nicht von Euklid sind, so mußte doch die äußerste Strenge der „Elemente" die späteren Geometer dazu führen, im Schoß des Werkes alle ohne Beweis angenommenen Sätze zu suchen. Nun findet sich der, der uns interessiert, in sehr gedrängter Form ausgesprochen im Beweis des Satzes XXIX. Hieraus konnte also der Inhalt des V. Postulats entnommen und zu den Postulaten der Konstruktion oder zu den Axiomen gefügt werden, je nach der Meinung des Abschreibers des Werkes von Euklid.

Sein natürlicher Platz wäre übrigens, auch nach der Meinung von Gregory, nach dem Satz XVII, dessen Umkehrung es ausspricht.

Wir bemerken schließlich, daß, in welcher Weise man auch die oben aufgeworfene Wortfrage löst, die moderne Philosophie der Mathematik im allgemeinen dazu neigt, den Unterschied zwischen Postulat und Axiom, wie er bei der zweiten und dritten oben erwähnten Erklärungsart angestrebt ist, zu unterdrücken, weil die Ansicht überwiegt, den Grundsätzen der Geometrie den Charakter von Annahmen zu geben, welche auf die Grundlage der Erfahrung gestützt sind, während es überflüssig erscheint, einen Unterschied zu machen zwischen diesen Sätzen und den Behauptungen, die einfache Folgerungen der gegebenen Erklärungen sind.

[1] Vgl. P. Tannery, Sur l'authenticité des axiomes d'Euclide. — Bull. Sciences Math. (2) t. VIII, p. 162—175 (1884).

Zweites Kapitel.

Die Vorläufer der nichteuklidischen Geometrie.

Gerolamo Saccheri [1667—1733].

§ 11. Das Werk des Paters Gerolamo Saccheri: *Euclides ab omni naevo vindicatus: sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa universae Geometriae Principia* [Mailand 1733], ist zum größten Teil dem Beweis des V. Postulats gewidmet. Der Leitgedanke der Untersuchungen des Saccheri findet sich in seiner „*Logica demonstrativa*" [Torino 1697] und besteht vor allem in einer besonderen Schlußweise, die schon von Euklid gebraucht wurde [Lib. IX, Prop. XII], nämlich, „auch unter der Voraussetzung der Annahme, daß der Satz falsch ist, den man beweisen will, gelangt man gleichwohl zu dem Schluß, daß er wahr ist".[1]

Diesem Gedanken sich anpassend, nimmt der Verfasser als gegeben an die ersten 26 Sätze bei Euklid und die Annahme der Falschheit des V. Postulats, und sucht unter den Folgerungen aus dieser Annahme irgendeinen Satz, der ihn berechtigt, die Wahrheit des Postulats selbst zu bejahen.

Bevor wir die Arbeit Saccheris erläutern, erinnern wir daran, daß Euklid, um seinen 16. Satz zu beweisen [Der Außenwinkel im Dreieck ist größer als jeder der beiden gegenüberliegenden Innenwinkel], versteckt annimmt, daß die Gerade unendlich ist, indem seine Beweisführung wesentlich beruht auf der Existenz einer Strecke, die doppelt so groß ist wie eine gegebene Strecke.

[1] Vgl. G. Vailati, Di un' opera dimenticata del P. Gerolamo Saccheri. Rivista Filosofica 1903.

Über die Möglichkeit, diese Annahme fallen zu lassen, werden wir in der Folge sprechen: für jetzt bemerken wir, daß Saccheri sie stillschweigend annimmt, denn er macht im Verlauf seines Werkes Gebrauch vom Satz vom Außenwinkel.

Bemerken wir schließlich, daß er sich auch auf das Postulat des Archimedes stützt und auf die Annahme der Stetigkeit der Geraden[1], um auf alle Figuren eines gegebenen Typus gewisse Sätze auszudehnen, die als richtig nur für eine Figur von diesem Typus bewiesen sind.

§ 12. Die Grundfigur des Saccheri ist das zweirechtwinklige gleichschenklige Viereck, d. h. das Viereck mit zwei gegenüberliegenden gleichen auf der Grundlinie senkrechten Seiten. Die Eigenschaften dieser Figur leiten sich aus folgendem leicht zu beweisendem ersten Hilfssatz ab:

Wenn im Viereck $ABCD$ mit aufeinanderfolgenden rechten Winkeln A, B die Seiten AD und BC gleich sind, dann ist auch der Winkel C dem Winkel D gleich [Satz I] und wenn die Seiten AD und BC ungleich sind, so ist von den beiden Winkeln C und D der größere der, welcher der kleineren Seite anliegt und umgekehrt.

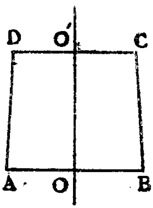


Fig. 9.

Es sei jetzt (Fig. 9) $ABCD$ ein zweirechtwinkliges

$$[A = B = 1 \text{ Rechter}]$$

und gleichschenkliges $[AD = BC]$ Viereck: bei der euklidischen Annahme sind auch die Winkel C, D rechte, so daß durch die Annahme, daß

[1] Diese Hypothese wird von Saccheri in der Form gebraucht: eine Strecke, die stetig von der Länge a zur Länge b übergeht, die von a verschieden ist, nimmt während der Änderung jede beliebige zwischen a und b enthaltene Länge an. — Gegen die in neueren Untersuchungen [M. Dehn, s. § 14] verwendeten Pseudogeometrien ohne archimedisches Postulat hat P. Mansion vom Standpunkt der Anschauung aus Verwahrung eingelegt (Bruxelles 1905, Ann. Soc. scient. 29A, p. 200).

diese Winkel alle beide stumpf oder spitz sein können, das V. Postulat stillschweigend verneint wird. Saccheri erörtert genau die drei Annahmen hinsichtlich der Winkel C, D, die er entsprechend benannte: Hypothese des rechten Winkels $[C = D = 1$ Rechter$]$, Hypothese des stumpfen Winkels

$$[C = D > 1 \text{ Rechter}],$$

Hypothese des spitzen Winkels

$$[C = D < 1 \text{ Rechter}].$$

Ein erstes bemerkenswertes Ergebnis ist das folgende: Je nachdem im zweirechtwinkligen gleichschenkligen Viereck $ABCD$ die Hypothese des rechten, die des stumpfen oder die des spitzen Winkels verwirklicht ist, hat man entsprechend $AB = CD$, $AB > CD$, $AB < CD$ [Satz III]. In der Tat, bei der Hypothese des rechten Winkels wird aus dem vorhergehenden Hilfssatz sofort abgeleitet $AB = CD$. Bei der Hypothese des stumpfen Winkels teilt das Lot OO' auf der Mitte der Strecke AB das Hauptviereck in zwei gleiche und in O und O' rechtwinklige Vierecke.

Da dann $D > A$, so ist nach dem genannten Hilfssatz $AO > DO'$, daher $AB > CD$. Bei der Hypothese des spitzen Winkels ändern diese Ungleichheiten den Sinn, daher $AB < CD$. Der bewiesene Lehrsatz wird umgekehrt, indem man per absurdum schließt [Satz IV].

Wenn in einem einzigen Fall die Hypothese des rechten Winkels richtig ist, so ist sie in jedem andern Fall richtig [Satz V].

Es sei (Fig. 10) im zweirechtwinkligen gleichschenkligen Viereck $ABCD$ die Hypothese des rechten Winkels verwirklicht. Nimmt man auf AD und BC die Punkte H und K in gleichem Abstand von AB, so entsteht das Viereck $ABKH$. Wenn HK senkrecht ist zu AH und BK, dann wäre auch im neuen Viereck die Hyp. d. rechten W. wahr. Sonst nehme man an, es sei $\sphericalangle AHK$ spitz und folglich sein Nebenwinkel $\sphericalangle DHK$ stumpf. Dann wäre im Viereck $ABKH$, zufolge der Hyp. d. spitzen W., $AB < HK$, während im Viereck $HKCD$, wegen der Hyp. d. stumpfen W., $HK < DC$ sein würde. Aber diese beiden Ungleichheiten sind widersprechend, weil $AB = DC$ ist [Hyp. d. rechten W. in $ABCD$]. Also kann $\sphericalangle AHK$ nicht spitz sein; und da man mit derselben Begründung beweisen könnte, daß $\sphericalangle AHK$ nicht stumpf sein kann, so schließt man, daß auch im Viereck $ABKH$ die Hyp. d. rechten W. gilt.

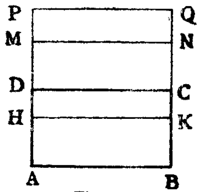


Fig. 10.

Auf den Verlängerungen von AD und BC nehme man die Punkte M, N in gleichem Abstand von der Grundlinie AB an (Fig. 10). Ich sage, daß auch im Viereck $ABNM$ die Hyp. d. rechten W. gilt. In der Tat, wenn AM ein Vielfaches von AD ist, so ist der Satz unmittelbar klar; sonst nehme man ein Vielfaches von AD, das größer ist als AM [Post. d. Archimedes], und auf den Strahlen $AD\ldots$, $BC\ldots$ die beiden Abschnitte AP, BQ gleich diesem Vielfachen. Nach dem oben Gesagten gilt im Viereck $ABQP$ die Hyp. des rechten W. und folglich gilt dieselbe Hypothese auch im Viereck $ABNM$.

Endlich gilt die fragliche Hypothese auch für ein Viereck mit beliebiger Grundlinie, denn man kann in Fig. 10 eine der auf AB senkrechten Seiten als Grundlinie annehmen.

Bemerkung. Dieser Lehrsatz von Saccheri ist dem Wesen nach enthalten in dem auf S. 14 angeführten von Giordano Vitale. In der Tat, es ist in Fig. 7 die Hypothese

$$DA = HK = CB$$

gleich berechtigt mit der andern

$$D = H = C = 1 \text{ Rechter}.$$

Aber aus der ersten folgt die Äquidistanz der beiden Geraden

DC, AB[1], also die Gültigkeit der Hyp. d. rechten W. in allen zweirechtwinkligen gleichschenkligen Vierecken, deren Höhe gleich der Strecke DA ist. Dieselbe Hypothese gilt dann auch noch in einem Viereck von beliebiger Höhe, weil man in ihm die Rollen der beiden Strecken, Grundlinie und Höhe, vertauschen kann.

Wenn in einem einzigen Falle die Hypothese des stumpfen Winkels richtig ist, dann ist sie in jedem andern Fall [Satz VI] richtig.

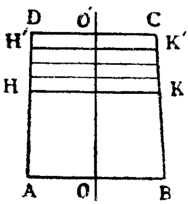


Fig. 11.

Wir betrachten (Fig. 11) unser gewohntes Viereck $ABCD$, indem wir annehmen, daß die Winkel C, D stumpf sind. Nimmt man auf AD und BC die Punkte H, K in gleichem Abstand von AB an, so bemerkt man zuerst, daß die Strecke HK nicht senkrecht sein kann auf den beiden Seiten AD, BC, insofern als im Viereck $ABKH$ und folglich im Hauptviereck dann die Hyp. d. rechten W. verwirklicht sein würde. Sei nun angenommen, daß Winkel KHA spitz ist, dann würde, nach der Hyp. d. spitzen W., $HK > AB$ sein, während, da in $ABCD$ die Hyp. d. stumpfen W. gilt, $AB > CD$. Es folgt $HK > AB > CD$. Bewegt man jetzt die Gerade HK stetig, so daß sie senkrecht bleibt zu der Mittellinie OO' des Grundvierecks, so würde die von den gegenüberliegenden Seiten AD und BC eingeschlossene Strecke HK, die in der Anfangslage größer als AB ist, in der Endlage CD kleiner als AB werden. Auf Grund des Postulats der Stetigkeit würde es dann eine mittlere Lage geben $H'K'$, für die $H'K' = AB$. Folglich würde im

[1] In der Tat betrachtet Giordano in seinem Beweis ausdrücklich die Punkte der Strecke DC, von denen er zeigt, daß sie von der Grundlinie AB des Vierecks gleichen Abstand haben. Weiter ist derselbe Beweis anwendbar auf alle Punkte der Geraden DC. — Vgl. die oben (S. 14) angeführte Note von Bonola.

Viereck $ABK'H'$ die Hyp. d. rechten W. gelten [Satz III], die nach dem vorhergehenden Lehrsatz in $ABCD$ nicht die Hyp. d. stumpfen W. bestehen ließe. Der Beweis gilt auch noch, wenn die Strecken AH, BK größer sind als AD, also ist es unmöglich, daß der Winkel AHK spitz ist. Also gilt in $ABKH$ die Hyp. d. stumpfen W. wie in $ABCD$.

Wir gehen jetzt über zum Beweis des Lehrsatzes für ein Viereck mit beliebiger Grundlinie, z. B. mit der Grundlinie BK.

Da (Fig. 12) die Winkel K, H stumpf sind, so wird das Lot in K auf KB die Strecke AH im Punkte M treffen, den stumpfen Winkel AMK bildend [Satz vom Außenwinkel]. Dann wird in $ABKM$ nach dem ersten Hilfssatz: $AB > KM$. Nimmt man dann auf AB die Strecke $BN = MK$, so kann das zweirechtwinklige gleichschenklige Viereck $BKMN$ konstruiert werden mit dem stumpfen Winkel MNB, weil er Außenwinkel im Dreieck ANM ist. Dann gilt auch im neuen Viereck die Hypothese des stumpfen Winkels.

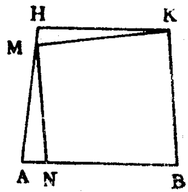


Fig. 12.

Damit ist der Lehrsatz vollständig bewiesen.

Wenn in einem einzigen Fall die Hypothese des spitzen Winkels richtig tst, so ist sie richtig in allen Fällen. [Satz VII.]

Der Lehrsatz läßt sich sofort indirekt beweisen.

§ 13. Aus den letzten Lehrsätzen erhielt Saccheri leicht eine wichtige Folgerung hinsichtlich der Dreiecke. Je nachdem die Hypothese des rechten Winkels, die Hypothese des stumpfen Winkels oder die Hypothese des spitzen Winkels sich in der Wirklichkeit vorfindet, ist die Winkelsumme im Dreieck entsprechend gleich, größer oder kleiner als zwei Rechte. [Satz IX.]

Sei (Fig. 13) ABC ein bei B rechtwinkliges Dreieck. Man ergänze das Viereck, indem man AD gleich BC und senkrecht zu AB zieht und dann D mit C verbindet. Bei der Hyp. d.

rechten W. sind die beiden Dreiecke ABC, ACD gleich, daher: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DCA$. Es folgt unmittelbar, daß im Dreieck ABC:

$$\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 2 \text{ Rechte}.$$

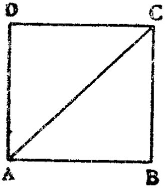


Fig. 13.

Bei der Hyp. d. stumpfen W. ist, weil

$$AB > CD : ACB > DAC^1;$$

weshalb wir im betrachteten Dreieck haben werden

$$\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C > 2 \text{ Rechte}.$$

Bei der Hyp. d. spitzen W. folgt, weil $AB < DC$ ist: $\sphericalangle ACB < \sphericalangle DAC$, daher in demselben Dreieck:

$$\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C < 2 \text{ Rechte}.$$

Der bewiesene Lehrsatz, der leicht auf ein beliebiges Dreieck auszudehnen ist durch Zerlegung der Figur in zwei rechtwinklige Dreiecke, wird von Saccheri in Satz XV umgekehrt mittels eines indirekten Beweisverfahrens.

Eine leichte Folgerung aus diesen Ergebnissen ist der folgende Lehrsatz:

Wenn in einem einzigen Dreieck die Summe der Winkel gleich, größer oder kleiner als zwei rechte Winkel ist, dann ist in jedem andern Dreieck die genannte Summe entsprechend gleich, größer oder kleiner als zwei rechte Winkel.

Dieser Satz, den Saccheri nicht ausdrücklich ausspricht, wurde im Fall der ersten und der dritten Hypothese wiedergefunden und bekannt gemacht von Legendre, etwa ein Jahrhundert später. Man wird ihn daher Lehrsatz von Saccheri und nicht Lehrsatz von Legendre nennen müssen, wie es gewöhnlich geschieht.

---

[1] Diese Ungleichheit wird von Saccheri in seinem VIII. Satz bewiesen und dient als Hilfssatz zu Satz IX. Wir haben den leichten Beweis ausgelassen, weil er sich sehr oft in ganz elementaren Texten findet, vor der Parallelentheorie.

§ 14. Die vorstehenden Sätze über das zweirechtwinklige gleichschenklige Viereck wurden von Saccheri und in der Folge von andern Geometern bewiesen mit Hilfe des archimedischen Postulats und des Prinzips der Stetigkeit. [Vgl. Satz V und VI.] Herr M. Dehn[1] hat übrigens bewiesen, daß sie davon unabhängig sind. Wir können diesen Umstand auf elementarem Weg in folgender Weise feststellen.[2]

Auf der Geraden r (Fig. 14) seien zwei Punkte B, D fest angenommen, in ihnen zwei einander gleiche Lote BA, DC errichtet und sodann die beiden Punkte A und C mittels der Geraden s verbunden. Die erhaltene Figur, in der man offenbar hat $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DCA$, ist für unsere Betrachtungen grundlegend, und an sie werden wir uns beständig halten. Dies festgesetzt seien E und E' zwei Punkte von s, der erste zwischen A und C gelegen, der zweite nicht; überdies seien F und F' die Fußpunkte der von E und E' auf die Gerade r gefällten Lote. Dann gelten die folgenden Lehrsätze:

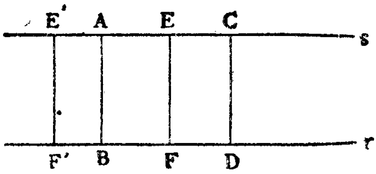


Fig. 14.

1. Wenn $\left\{\begin{array}{c} EF = AB \\ \text{oder} \\ E'F' = AB \end{array}\right\}$, so sind die Winkel BAC, DCA rechte.

2. Wenn $\left\{\begin{array}{c} EF > AB \\ \text{oder} \\ E'F' < AB \end{array}\right\}$, so sind die Winkel BAC, DCA stumpfe.

[1] Vgl. Math. Ann. 53 (1900), S. 405—439: Die Legendreschen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck.

[2] Vgl. Bonola, I teoremi del Padre Gerolamo Saccheri sulla somma degli angoli di un triangolo e le ricerche di M. Dehn. Rend. Istituto Lombardo, serie II, vol. XXXVIII (1905).

3. Wenn $\left\{\begin{array}{c} EF < AB \\ \text{oder} \\ E'F' > AB \end{array}\right\}$, so sind die Winkel BAC, DCA spitze.

Wir beweisen den ersten Satz.

Aus der Annahme $EF = AB$ leitet man die folgenden Beziehungen ab:

$$\sphericalangle BAE = \sphericalangle FEA; \quad \sphericalangle FEC = \sphericalangle DCE,$$

die zusammen mit der grundlegenden Beziehung:

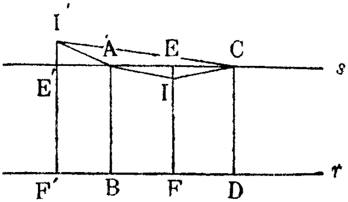


Fig. 15.

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle DCA$$

zur Feststellung der Gleichheit der beiden Winkel $\sphericalangle FEA$, $\sphericalangle FEC$ führen. Da sie Nebenwinkel sind, werden sie beide rechte sein, und folglich werden die beiden Winkel $\sphericalangle BAC$ und $\sphericalangle DCA$ rechte sein.

Dieselbe Betrachtung ist anwendbar bei der Annahme

$$E'F' = AB.$$

Beweisen wir den zweiten Satz (vgl. Fig. 15).

Nehmen wir an erster Stelle an $EF > AB$. Dann nehmen wir auf EF an $EJ = AB$ und verbinden J mit A und C.

Es gelten dann die folgenden Beziehungen:

$$\sphericalangle BAJ = \sphericalangle FJA, \quad \sphericalangle DCJ = \sphericalangle FJC.$$

Überdies haben wir nach dem Satz vom Außenwinkel [Euklid XVII] auch:

$$\sphericalangle FJA + \sphericalangle FJC > \sphericalangle FEA + \sphericalangle FEC = 2 \text{ Rechte}.$$

Und da man hat:

$$\sphericalangle BAC + \sphericalangle DCA > \sphericalangle BAJ + \sphericalangle DCJ,$$

so folgt:

$$\sphericalangle BAC + \sphericalangle DCA > \sphericalangle FJA + \sphericalangle FJC > 2 \text{ Rechte}.$$

Sodann erhält man wegen der Gleichheit der Winkel $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle DCA$:

$$\sphericalangle BAC > 1 \text{ Rechter, w. z. b. w.}$$

Nehmen wir zweitens an $E'F' < AB$. Wir verlängern sodann $E'F'$, bis wir die Strecke $F'J' = AB$ erhalten, und verbinden J' mit C und A (vgl. Fig. 15).

Es gelten nach demselben Schlußverfahren die folgenden Beziehungen:

$$\sphericalangle F'J'A = \sphericalangle BAJ'; \quad \sphericalangle F'J'C = \sphericalangle DCJ';$$
$$\sphericalangle J'AE' > \sphericalangle J'CE'; \quad \sphericalangle F'J'A < \sphericalangle F'J'C.$$

Setzt man diese Beziehungen zusammen, so folgt erstens

$$\sphericalangle BAJ' < \sphericalangle DCJ'$$

und hieraus erhalten wir, indem wir gliedweise die vorletzte der vorangegangenen Gleichungen abziehen:

$$\sphericalangle BAE' < \sphericalangle DCE' = \sphericalangle BAC.$$

Aber die beiden Winkel $\sphericalangle BAE'$, $\sphericalangle BAC$ sind Nebenwinkel, daher ergibt sich, daß $\sphericalangle BAC$ stumpf ist, w. z. b. w.

In vollkommen ähnlicher Weise wird der dritte Lehrsatz bewiesen.

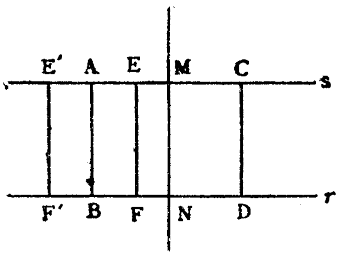


Fig. 16.

Diese Lehrsätze lassen sich dann leicht durch indirektes Schlußverfahren umkehren.

Wenn im besonderen M und N die Mittelpunkte der beiden Strecken AC und BD sind, so haben wir für den Abschnitt MN des gemeinsamen Lotes der beiden Geraden AC, BD (vgl. Fig. 16):

wenn: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DCA = 1$ Rechter, dann: $MN = AB$;

wenn: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DCA > 1$ Rechter, dann: $MN > AB$;

wenn: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DCA < 1$ Rechter, dann: $MN < AB$.

Außerdem ist leicht zu sehen, daß:

1. wenn: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DCA = 1$ Rechter, auch:
$$\left.\begin{matrix}\sphericalangle FEM \\ \sphericalangle F'E'M\end{matrix}\right\} = 1 \text{ Rechter;}$$
2. wenn: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DCA > 1$ Rechter, auch:
$$\left.\begin{matrix}\sphericalangle FEM \\ \sphericalangle F'E'M\end{matrix}\right\} > 1 \text{ Rechter;}$$
3. wenn: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DCA < 1$ Rechter, auch:
$$\left.\begin{matrix}\sphericalangle FEM \\ \sphericalangle F'E'M\end{matrix}\right\} < 1 \text{ Rechter.}$$

In der Tat gelten im ersten Fall, da die Geraden r und s äquidistant sind, die folgenden Beziehungen:
$$\sphericalangle NMA = \sphericalangle FEM = \sphericalangle BAC = \sphericalangle F'E'M = 1 \text{ Rechter.}$$

Um den zweiten und dritten Fall zu beweisen, genügt es, indirekt zu schließen, wobei man die oben erhaltenen Ergebnisse sich vergegenwärtigt.

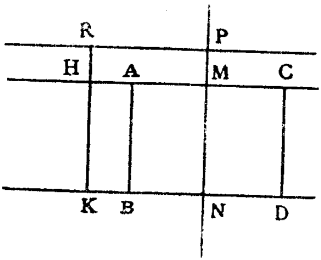


Fig. 17.

Sei jetzt (Fig. 17) P ein nicht zwischen den Punkten M und N gelegener Punkt der Geraden MN. Sei PR senkrecht zu MN und RK senkrecht auf BD in K. Dies letztere Lot wird AC in einem Punkt H treffen. Dies festgesetzt, erlauben die vorausgehenden Lehrsätze ohne weiteres zu behaupten, daß:

wenn: $\sphericalangle BAM = 1$ Rechter, auch:
$$\left.\begin{matrix}\sphericalangle KHM \\ \sphericalangle KRP\end{matrix}\right\} = 1 \text{ Rechter;}$$
wenn: $\sphericalangle BAM > 1$ Rechter, auch:
$$\left.\begin{matrix}\sphericalangle KHM \\ \sphericalangle KRP\end{matrix}\right\} > 1 \text{ Rechter;}$$

wenn: $\sphericalangle BAM <$ 1 Rechter, auch:

$$\left.\begin{array}{l}\sphericalangle KHM \\ \sphericalangle KRP\end{array}\right\} < 1 \text{ Rechter.}$$

Wie man leicht folgert, gelten diese Eigenschaften auch, wenn der Punkt P zwischen M und N fällt.

Schließlich sind also die drei letzten Lehrsätze, die offenbar mit denen von Saccheri über die zweirechtwinkligen gleichschenkligen Vierecke zusammenfallen, nämlich: je nachdem in einem Fall die Hypothese des rechten Winkels, des stumpfen Winkels oder des spitzen Winkels richtig ist, so ist sie in jedem andern Fall richtig, unabhängig vom Postulat des Archimedes bewiesen.

Wollen wir jetzt von den Lehrsätzen über die Vierecke übergehen auf die Lehrsätze über die Dreiecke, die am Anfang dieses Paragraphen ausgesprochen sind, so können wir ohne weiteres auf die Beweise von Saccheri (vgl. S. 26) verweisen, weil diese Beweise in der Tat nicht von dem fraglichen Postulat abhängen. Hiermit ist das Ergebnis erreicht, das wir erzielen wollten.

§ 15. Um die Auseinandersetzung des Werkes von Saccheri kürzer zu gestalten, lösen wir aus den Sätzen XI und XII den Inhalt des folgenden zweiten Hilfssatzes heraus.

Sei ABC ein in C rechtwinkliges Dreieck, sei H der Mittelpunkt von AB und K der Fußpunkt des von H auf AC gefällten Lotes, dann werden wir haben:

$AK = KC$ bei der Hyp. d. rechten W.,

$AK < KC$ bei der Hyp. d. stumpfen W.,

$AK > KC$ bei der Hyp. d. spitzen W.

Der die Hyp. d. rechten W. betreffende Teil ist unmittelbar klar. Bei der Hyp. d. stumpfen W. wird, da die Summe der Winkel im Viereck größer ist als vier rechte Winkel: $\sphericalangle AHK < \sphericalangle HBC$. Fällt man dann (Fig. 18) HL von H senkrecht auf BC, so ergeben die Dreiecke AHK, HBL mit gleichen Hypotenusen kraft der vorstehenden Beziehung die Ungleichheit $AK < HL$. Aber im dreirechtwinkligen Viereck $HKCL$ ist $\sphericalangle H$ stumpf [Hyp. d. stumpfen W.], daher wird: $HL < KC$, also: $AK < KC$.

In derselben Art beweist man den dritten Teil des Hilfssatzes.

Dieser Hilfssatz könnte in folgender Weise ausgedehnt werden (vgl. Fig. 19):

Nimmt man auf dem einen Schenkel eines Winkels mit dem Scheitelpunkt A aufeinanderfolgend die gleichen Abschnitte AA_1, A_1A_2, A_2A_3 ... und konstruiert

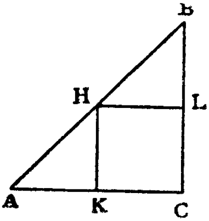


Fig. 18.

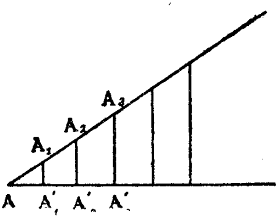


Fig. 19.

man die entsprechenden Projektionen AA_1', $A_1'A_2'$, $A_2'A_3'$ auf dem zweiten Schenkel des Winkels, so gelten die folgenden Beziehungen:

$AA_1' = A_1'A_2' = A_2'A_3' = \ldots$ bei der Hyp. d. rechten W.,

$AA_1' < A_1'A_2' < A_2'A_3' < \ldots$ bei der Hyp. d. stumpfen W.,

$AA_1' > A_1'A_2' > A_2'A_3' > \ldots$ bei der Hyp. d. spitzen W.

Wir beweisen jetzt den Satz (Satz XI, XII):

Bei der Hypothese des rechten Winkels und der des stumpfen Winkels schneiden sich das Lot und die zu einer Geraden schräge Gerade.

Es seien (Fig. 20) LP und AD zwei Gerade, die eine senkrecht, die andere schräg zur Geraden AP, und der Winkel DAP sei spitz. Nachdem auf AD die gleichen Abschnitte AD,

DF_1 aneinanderschließend angenommen sind, fällen wir von D und F_1 die Lote DB und F_1M_1 auf die Gerade AP. Kraft des vorausgeschickten Hilfssatzes wird man haben:

$$BM_1 \geqq AB \quad \text{oder} \quad AM_1 \geqq 2\,AB.$$

Sei F_1F_2 eine Strecke gleich mit und anschließend an AF_1 und sei M_2 der Fußpunkt des von F_2 auf AP gefällten Lotes; dann haben wir entsprechend:

$$AM_2 \geqq 2\,AM_1$$

und folglich
$$AM_2 \geqq 2^2\,AB.$$

Dies Verfahren kann wiederholt werden, dann nochmals wiederholt usw. So werden wir einen Punkt F_n von AD erhalten, derart, daß seine Projektion M_n auf AP einen Abschnitt AM_n bestimmt, der die Beziehung erfüllt:

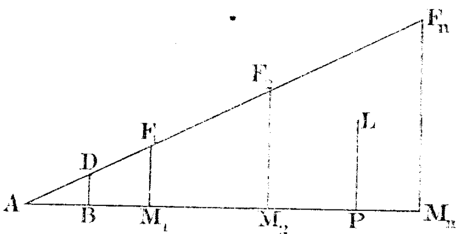


Fig. 20.

$$AM_n \geqq 2^n\,AB.$$

Aber für hinreichend großes n hat man [Archimedisches Postulat[1]]

$$2^n AB > AP$$

und hieraus
$$AM_n > AP.$$

Der Punkt P liegt also auf der Kathete AM_n des rechtwinkligen Dreiecks AM_nF_n. Dann muß das Lot PL auf AP, da es die Kathete AM_n trifft, aber nicht die andere Kathete M_nF_n, notwendig die Hypotenuse AF_n treffen, d. h. die Gerade AD.

Damit ist der Lehrsatz bewiesen.[2]

---

[1] Das Postulat des Archimedes, von dem hier Gebrauch gemacht wird, schließt hier offenbar versteckt die Unendlichkeit der Geraden ein.

[2] Die von Saccheri befolgte Methode, diesen Satz zu beweisen, ist

Hieraus folgert man dann den Satz:

Bei der Hypothese des rechten Winkels und bei der des stumpfen Winkels ist das V. Postulat des Euklid richtig. [Satz XIII.]

Seien (Fig. 21) AB, CD zwei von der Geraden AC geschnittene Gerade. Wir setzen voraus, daß

$$\sphericalangle BAC + \sphericalangle ACD < 2 \text{ Rechte},$$

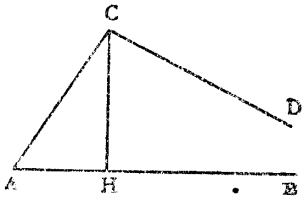


Fig. 21.

dann ist einer der beiden Winkel $\sphericalangle BAC$ und $\sphericalangle ACD$, z. B. der erste, spitz. Von C fälle man das Lot CH auf AB. Im Dreieck ACH wird kraft der gemachten Annahmen:

$$\sphericalangle A + \sphericalangle C + \sphericalangle H \geqq 2 \text{ Rechte.}$$

Aber nach Voraussetzung haben wir noch:

$$\sphericalangle BAC + \sphericalangle ACD < 2 \text{ Rechte.}$$

Durch Zusammensetzung dieser beiden Beziehungen erhält man

$$\sphericalangle H > \sphericalangle HCD.$$

Und da der Winkel H ein rechter ist, ergibt sich $\sphericalangle HCD$ als spitzer Winkel. Dann treffen sich kraft der Sätze XI, XII die Geraden CD und AB.[1]

Dieses Ergebnis gestattet Saccheri zu schließen, daß die Hypothese des stumpfen Winkels falsch ist [Satz XIV]. In der Tat, bei dieser Hypothese gilt das euklidische Postulat [Satz XIII], und folglich gelten die gewöhnlichen Lehr-

wesentlich identisch mit der des Nasîr-Eddîn. Nasîr-Eddîn aber betrachtet die Hyp. d. rechten W., da er schon vorher bewiesen hat, daß die Summe der Winkel im Dreieck zwei rechten Winkeln gleich ist. — Angebrachtermaßen bemerken wir, daß Saccheri das Werk des arabischen Geometers gekannt und kritisiert hat.

[1] Auch dieser Beweis befindet sich im Werk des Nasîr-Eddîn, wodurch Saccheri offenbar zu seinen Untersuchungen veranlaßt wurde.

sätze, die aus diesem Postulat folgen. Aber dann ist im Fundamentalviereck die Summe der Winkel gleich vier rechten Winkeln, d. h. die Hypothese des rechten Winkels ist richtig.[1]

§ 16. Da Saccheri beweisen will, daß das V. Postulat ganz unabhängig gilt, so rüstet er sich, auch die Hyp. d. spitzen W. zu zerstören.

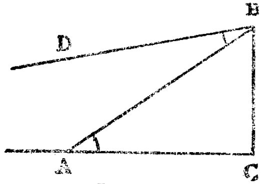


Fig. 22.

Zuerst ist die Bemerkung angebracht, daß es bei dieser Hypothese ein Lot und eine zu derselben Geraden schräge Gerade gibt, die sich nicht treffen [Satz XVII]. Um sie zu konstruieren, ziehe man (Fig. 22) von der Ecke B des in C rechtwinkligen Dreiecks ABC die Gerade BD, so daß

$$\sphericalangle ABD = \sphericalangle BAC$$

ist. Dann ist bei der Hyp. d. spitzen W. der Winkel CBD spitz und die beiden Geraden CA und BD, die sich nicht treffen [Euklid, XXVII], sind die eine schräg, die andere senkrecht zu AB.

Von hier ab werden wir ausschließlich die Hyp. d. spitzen W. betrachten.

Seien (Fig. 23) a, b zwei einander nicht schneidende Gerade in derselben Ebene. Von den Punkten A_1, A_2 von a fälle man die Lote A_1B_1, A_2B_2 auf b. Die Winkel $\sphericalangle A_1$ und $\sphericalangle A_2$ des erhaltenen Vierecks können sein: 1. der eine ein rechter und der andere spitz; 2. alle beide spitz; 3. der eine spitz und der

[1] Es ist angebracht zu bemerken, daß Saccheri bei diesem Beweis von einem besonderen Schlußverfahren Gebrauch macht, von dem wir in § 11 sprachen. In der Tat: auch bei der Annahme, daß die Hyp. d. stumpfen W. wahr ist, gelangt man zum Schluß, daß die Hyp. d. rechten W. wahr ist. Das ist eine charakteristische Form, die in diesem Fall das gewöhnliche indirekte Schlußverfahren annehmen kann.

andere stumpf. Im ersten Fall existiert ohne weiteres das gemeinsame Lot der beiden Geraden a und b. Im zweiten Fall beweist man die Existenz des gemeinsamen Lotes durch einen Stetigkeitsschluß [Saccheri, Satz XXII]. In der Tat, wenn man die Gerade A_1B_1 stetig bewegt, indem man sie immer senkrecht zu b bleiben läßt, bis man sie nach A_2B_2 bringt, so wächst der Winkel $\sphericalangle B_1A_1A_2$, der in der Anfangslage spitz ist, bis er stumpf wird: es folgt die Existenz einer mittleren Lage AB, bei der der Winkel $\sphericalangle BAA_2$ ein rechter ist. Dann ist AB das gemeinsame Lot der beiden Geraden a, b.

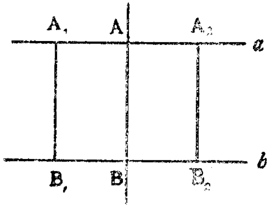


Fig. 23.

Im dritten Fall haben die beiden Geraden a, b entweder kein gemeinsames Lot, oder, wenn das Lot existiert, fällt es nicht zwischen B_1 und B_2.

Wenn als Hypothese die Existenz von zwei in derselben Ebene gelegenen einander nicht schneidenden Geraden ohne gemeinsames Lot gegeben ist, so beweist Saccheri, daß solche Gerade sich immer mehr nähern [Satz XXIII], und daß ihr Abstand schließlich kleiner wird als eine beliebig kleine Strecke [Satz XXV]. Mit andern Worten, gibt es zwei Gerade in einer Ebene, die sich nicht schneiden und kein gemeinsames Lot haben, so müssen sie sich asymptotisch zueinander verhalten.[1]

§ 17. An dieser Stelle versucht Saccheri ein Schlußverfahren, wobei er sich mehr als auf die Logik, auf die Anschauung und den Glauben an die Gültigkeit des V. Postulats

[1] Vgl. hierzu die Bemerkung des Geminos (S. 3). — Im Werk Saccheris finden sich andere interessante Sätze, z. B.: Wenn zwei Gerade sich immer näher kommen und ihr Abstand bleibt immer größer als eine bestimmte angegebene Strecke, so wird die Hypothese des spitzen Winkels zerstört. Also kommt es, wenn man das Nichtvorhandensein asymptotischer Geraden fordert, hinaus auf die Annahme des euklidischen Postulats.

verläßt. Um zu beweisen, daß die Hypothese des spitzen Winkels unbedingt falsch ist, weil sie der Natur der geraden Linie widerspricht [Satz XXXIII], stützt er sich auf fünf Hilfssätze, die auf reichlich 16 Seiten entwickelt sind; im wesentlichen aber beschränkt er sich auf die Behauptung, daß, wenn sie wahr wäre, die Gerade AP' (Fig. 24) mit MB ein Lot gemein hätte im gemeinsamen unendlich fernen Punkt, was der Natur der geraden Linie widerspricht. Der angebliche Beweis von Saccheri gründet sich also auf Ausdehnung für das Unendliche von bestimmten Eigenschaften, die für Figuren in endlicher Entfernung gelten.

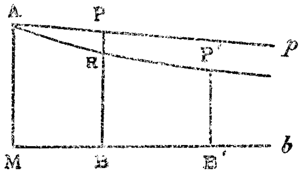


Fig. 24.

Obwohl es sein Ziel verfehlt, ist das Werk von Saccheri von großer Wichtigkeit; außer daß es den größten Versuch zugunsten des V. Postulats darstellt, konnte es nicht umhin, gerade durch die Tatsache, daß es keine Widersprüche unter den Folgerungen aus der Hyp. d. spitzen W. entdeckte, die Vermutung einzuflößen, daß auf dieser Hypothese ein logisch folgerichtiges geometrisches System errichtet werden kann, und daß das euklidische Postulat unbeweisbar ist.[1]

[1] Das Werk von P. Saccheri war ziemlich verbreitet nach seiner Veröffentlichung und zwei Geschichtswerke der Mathematik sprachen davon, das von J. C. Heilbronner (Leipzig 1742) und das von Montucla (Paris 1758). Übrigens wird es eingehend analysiert von G. S. Klügel in seiner hier unten (Anm. 2, S. 38) angeführten Dissertation. Nichtsdestoweniger geriet es in Vergessenheit. Erst 1889 rief E. Beltrami mit seiner Mitteilung: Un precursore italiano di Legendre e di Lobatschewsky wieder die Aufmerksamkeit der Geometer wach (Rend. Acc. Lincei [4] V, p. 441—448). In der Folge wurde das Werk Saccheris ins Englische übersetzt von G. B. Halsted, Am. Math. Monthly I, 1894 u. ff., ins Deutsche von den Herren Stäckel und Engel, Th. d. P. 1895, ins Italienische, und dabei gekürzt verarbeitet von G. Boccardini, Milano 1904, Höpli.

Johann Heinrich Lambert [1728—1777].

§ 18. Welchen Einfluß das Werk von Saccheri auf die Geometer des XVIII. Jahrhunderts ausgeübt hat, kann man nicht genau angeben.[1] Der Schweizer Geometer Lambert, der in seiner „Theorie der Parallellinien" [1766] eine Dissertation von G. S. Klügel [1739—1812] zitiert[2], wo das italienische Werk eingehend analysiert wird, kannte es nur aus dieser Dissertation. Die Theorie der Parallellinien von Lambert, deren Veröffentlichung 1786 nach dem Tode des Verfassers von J. Bernoulli und C. F. Hindenburg besorgt ist[3], ist in drei Teile geteilt. Der erste, kritischer und philosophischer Natur, gibt Bemerkungen über die doppelte Frage, die man sich hinsichtlich des V. Postulats vorlegen kann, nämlich, ob man es einfach mit Hilfe der vorhergehenden Sätze beweisen kann, oder ob statt dessen nicht die Anwendung einer andern Hypothese erforderlich ist. Der zweite Teil ist der Auseinandersetzung verschiedener Versuche gewidmet, in denen das euklidische Postulat auf sehr einfache Sätze zurückgeführt wird, die übrigens ihrerseits bewiesen werden müßten. Der dritte wichtigste enthält ein System von Untersuchungen ähnlich denen des Paters Saccheri, das wir kurz zusammenfassen wollen.

§ 19. Die Grundfigur von Lambert ist ein dreirechtwinkliges Viereck, und die drei Hypothesen werden über die Natur des vierten Winkels gemacht. Die erste ist die Hyp. d. rechten W., die zweite die Hyp. d. stumpfen W., die

[1] Vgl. Segre, Congetture intorno alla influenza di Girolamo Saccheri sulla formazione della geometria non euclidea. Atti Acc. Scienze di Torino t. XXXVIII, 1903.

[2] Conatuum praecipuorum theoriam parallelarum demonstrandi recensio, quam publico examini submittent A. G. Kaestner et auctor respondens G. S. Klügel. Göttingen 1763.

[3] Vgl. Magazin für reine und angewandte Math. 2. Stück, p. 137—164, 3. Stück, p. 325—358 (1786) — Das Werk Lamberts wurde wieder veröffentlicht von Engel und Stäckel in ihrer Th. der P., S. 135—208.

dritte die Hyp. d. spitzen W. Auch bei der Behandlung dieser Hypothesen nähert sich der Verfasser der Methode von Saccheri.

Die erste Hypothese führt leicht auf das euklidische System.

Um die zweite Hypothese zurückzuweisen, kommt Lambert auf eine Figur (Fig. 25), die von zwei Geraden gebildet ist, welche auf einer dritten Geraden senkrecht stehen. Von den aufeinander folgenden Punkten B, B_1, B_2 ... B_n von b fällt man die Lote BA, B_1A_1 ... B_nA_n und beweist an erster Stelle, daß die Abschnitte der Lote zwischen A und B vom Lot AB an abnehmen, sodann, daß der Unterschied eines jeden und des nächstfolgenden beständig wächst. So ergibt sich:

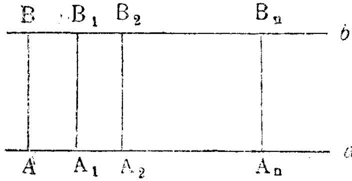


Fig. 25.

$$BA - B_nA_n > (BA - B_1A_1) \cdot n.$$

Aber, wenn n hinreichend groß ist, so wird das zweite Glied der Ungleichheit so groß als man will [Post. d. Archimedes][1], während das erste Glied immer kleiner als BA ist. Dieser Widerspruch erlaubt Lambert die Erklärung, daß die zweite Hypothese falsch ist.

Um die dritte Hypothese zu behandeln, stützt sich Lambert wieder auf die vorhergehende Figur, an der er beweist, daß die Strecken BA, B_1A_1, B_2A_2 ... B_nA_n wachsen, und daß zu gleicher Zeit die Unterschiede jeder Strecke von der vorhergehenden wachsen. Dieses Ergebnis führt ihn aber nicht auf Widersprüche, und deshalb wird er, wie schon Saccheri, gezwungen, in den Schlüssen fortzufahren. Er findet nachher

[1] Das Postulat des Archimedes wird auch hier in der Form gebracht, daß es die unendliche Länge der Geraden in sich schließt. Vgl. Saccheri, Anm. S. 35.

bei der dritten Hypothese, daß die Summe der Winkel eines Dreiecks kleiner ist als zwei rechte Winkel, und, über Saccheri hinausgehend, entdeckt er, daß der Defekt eines Polygons, d. h. der Unterschied zwischen $2(n-2)$ rechten Winkeln und der Winkelsumme eines Polygons proportional der Fläche desselben Polygons ist. Dies Ergebnis erhält man leichter, wenn man beachtet, daß sowohl der Flächeninhalt wie der Defekt eines Polygons, das die Summe von mehreren andern ist, entsprechend die Summe der Flächen und der Defekte der Teilpolygone ist.[1]

§ 20. Eine andere bemerkenswerte Entdeckung von Lambert bezieht sich auf die Messung der geometrischen Größen. Sie besteht gerade darin, daß, während in der gewöhnlichen Geometrie bei der Messung von Strecken der Wahl einer besonderen Einheit nur eine relative Bedeutung zukommt, bei der auf die dritte Hypothese begründeten man ihr eine absolute Bedeutung verleihen kann.

Wir müssen vor allem den Unterschied aufklären, der sich hier zwischen absolut und relatv zeigt. Bei vielen Fragen tritt es ein, daß die als gegeben vorausgesetzten Elemente in zwei Gruppen geteilt werden können, derart, daß die der ersten Gruppe festbleiben im ganzen Bereich unserer Betrachtungen, während die der zweiten Gruppe sich in eine Vielheit möglicher Fälle abwandeln können. Wenn das eintritt, pflegt man oft die ausdrückliche Erwähnung der gegebenen Stücke der ersten Gruppe zu übergehen und als relativ alles das zu betrachten, was von den gegebenen Veränderlichen abhängt, als absolut alles, was von den fest gegebenen Größen abhängt.

---

[1] Es muß erwähnt werden, daß schon Saccheri dem genannten Defekt begegnet war bei der Hyp. d. spitzen W., und daß er auch implizite bemerkt hatte, daß ein Viereck, daß die Summe von mehreren anderen ist, zum Defekt die Defektsumme hat (Satz. XXV). Vgl. Th. d. P., S. 94. Allerdings hatte er keine Folgerung über die Proportionalität zwischen Fläche und Defekt daraus gezogen.

So nimmt man bei der Theorie der Rationalitätsbereiche als gegebene Größen der zweiten Gruppe [veränderliche Größen] gewisse Grundirrationalitäten [die eine Basis bilden] und als gegeben in der ersten Gruppe die Einheit [1], die oft unerwähnt bleibt, weil sie allen Rationalitätsgebieten gemein ist. Spricht man dann von einer Zahl, so sagt man, sie sei rational hinsichtlich einer bestimmten Basis, wenn sie dem durch diese Basis definierten Rationalitätsbereich angehört; man sagt dagegen, sie sei absolut rational, wenn sie sich als rational in bezug auf die Basis 1 erweist, die allen Bereichen gemein ist.

Zur Geometrie übergehend bemerken wir, daß bei jeder vorliegenden Aufgabe im allgemeinen bestimmte Figuren und daher die Größen ihrer Elemente als gegeben vorausgesetzt sind; aber außer diesen gegebenen Veränderlichen [der zweiten Gruppe], die in willkürlicher Weise gewählt werden können, ist immer noch implizite vorausgesetzt die Anwendung der Grundgebilde: Gerade, Ebenen, Büschel usw. [feste gegebene Stücke der ersten Gruppe]. Es muß dann jede Konstruktion, jede Messung, jede Eigenschaft einer Figur für relativ gelten, wenn sie im wesentlichen sich bezieht auf die veränderlichen Stücke; sie muß aber absolut heißen, wenn sie sich bezieht nur auf die festen Stücke [Fundamentalfiguren] oder auch wenn sie, obwohl für abhängig von den veränderlichen Stücken erklärt, von ihnen nur scheinbar abhängt, sodaß sie unverändert bleibt bei ihrer Veränderung.

In diesem Sinne ist es klar, daß die Streckenmessung in der gewöhnlichen Geometrie notwendig relative Bedeutung hat. In der Tat erlaubt uns die Existenz der Ähnlichkeitstransformationen in keiner Weise die Größe einer Strecke hinsichtlich der Grundgebilde [Gerade, Büschel usw.] zu individualisieren. Für den Winkel aber kann man einen Maßstab wählen, der eine absolute Eigenschaft von ihm ausdrückt: es genügt in der Tat, seine Beziehung zum Vollwinkel zu nehmen, d. h. zum ganzen Büschel, das eines der Grundgebilde ist.

Kehren wir jetzt zu Lambert und seiner der dritten Hypothese entsprechenden Geometrie zurück. Er hat bemerkt, daß man jeder Strecke einen bestimmten leicht konstruierbaren Winkel entsprechen lassen kann. Daraus folgt, daß jede Strecke mit dem Grundgebilde Büschel in Beziehung steht, und daß man daher in der [hypothetischen] neuen Geometrie auch der Streckenmessung eine absolute Bedeutung zuerteilen kann.

Um sodann in der einfachsten Weise zu sehen, wie man jeder Strecke einen Winkel zuordnen und so eine absolute zahlenmäßige Darstellung der Strecken erhalten kann, nehmen wir an, es sei über jeder Strecke ein gleichseitiges Dreieck konstruiert. Wir können jeder Strecke den Winkel des entsprechenden Dreiecks zuordnen und folglich die Maßzahl dieses Winkels, wo zu beachten ist, daß eine eineindeutige Beziehung zwischen den Strecken und den in bestimmten Grenzen enthaltenen Winkeln besteht.

Die erhaltene Zahlendarstellung der Strecken besitzt aber nicht die distributive Eigenschaft, die den Längen zukommt; denn summiert man zwei Strecken, so werden die entsprechenden Winkel nicht summiert. Man kann allerdings eine Funktion des Winkels bestimmen, die diese Eigenschaft besitzt, und einer Strecke nicht den fraglichen Winkel, sondern diese Funktion des Winkels zuordnen. Diese Funktion gibt uns bei jedem Wert des Winkels, der innerhalb der bestimmten Grenzen liegt, ein absolutes Maß für die Strecken. Die absolute Einheit ist die Strecke, für die die Funktion den Wert 1 annimmt.

Beachtet man dann, daß, sobald eine bestimmte Funktion des Winkels im oben angegebenen Sinne distributiv ist, auch das Produkt dieser Funktion mit einer willkürlichen Konstanten dieselbe Eigenschaft besitzt, so ist es klar, daß man über diese Konstante immer so verfügen können wird, daß die absolute Streckeneinheit gerade die Strecke ist, die einem vorgeschriebenen Winkel entspricht, etwa dem Winkel von 45^0. Die Möglichkeit, bei gegebenem Winkel die absolute Streckeneinheit zu konstruieren, ist an die Lösung der folgenden Aufgabe geknüpft: Bei der Hypothese des spitzen Winkels ein gleichseitiges Dreieck mit vorgegebenem Defekt zu konstruieren.[1]

Was die absolute Messung der Polygonflächeninhalte betrifft, so bemerken wir, daß sie ohne weiteres durch den Defekt der Polygone gegeben ist. Auch von den Polyedern könnte man ein absolutes Maß angeben.

Aber nach unserer Raumanschauung erscheint uns die absolute Messung aller dieser geometrischen Größen nicht möglich, daher könnte man mit Lambert, wenn man die Existenz einer absoluten Einheit für die Strecken verneint, die dritte Hypothese verwerfen.

§ 21. Man glaube nicht, daß Lambert meint, das V. Postulat hiermit bewiesen zu haben, da er weiß, wie willkürlich die vorstehende Behauptung ist!

Um den gewünschten Beweis zu erhalten, geht er in der Untersuchung der Folgen aus der dritten Hypothese weiter, aber es gelingt ihm nur, seine Frage in eine andere gleich schwer zu lösende umzuformen.

Andere sehr interessante Sachen sind in der Theorie der Parallellinien enthalten, z. B. die nahe Beziehung der Geometrie, die auf der Ebene bei Annahme der zweiten Hypothese gelten würde, zur sphärischen Geometrie[2] und eine Bemerkung bezüglich der Unabhängigkeit dieser letzteren vom Parallelenpostulat. Hinsichtlich der dritten Hypothese sprach er dann folgende scharfsinnige und originelle Ansicht aus: Ich sollte daraus fast den Schluß machen, die dritte Hypothese komme bey einer imaginären Kugelfläche vor.

[1] Die Konstruktion des Dreiecks aus den drei Winkeln ist unten, Kap. IV, § 57, angegeben.

[2] In der Tat ist in der sphärischen Geometrie die Summe der Winkel eines Vierecks größer als vier rechte Winkel usw.

Zu dieser Auffassung der Dinge gelangte er vielleicht von der Formel $r^2(A+B+C-\pi)$ aus, die den Inhalt eines sphärischen Dreiecks ausdrückt, denn sie wird, wenn man darin den Radius r mit dem imaginären Radius $r\sqrt{-1}$ vertauscht:

$$r^2(\pi - A - B - C),$$

also die Formel für den Inhalt eines ebenen Dreiecks bei der dritten Hypothese von Lambert.[1]

§ 22. Lambert läßt also die Frage in der Schwebe, vielmehr da er seine Untersuchungen nicht veröffentlicht hat, darf man vermuten, daß er schon den Ausblick zu einem neuen Standpunkt hatte.

Übrigens ist wohl zu bemerken, daß bei dem allgemeinen Mißerfolg derartiger Untersuchungen in der zweiten Hälfte des XVIII. Jahrhunderts sich die Überzeugung bildete, daß man notwendig das euklidische Postulat ohne Beweis annehmen müsse oder ein anderes gleichberechtigtes Postulat.

In Deutschland, wo viele Arbeiten über den Gegenstand einander folgten, hatte die Überzeugung schon eine ziemlich feste Form angenommen. Wir finden sie wieder bei A. G. Kästner, dem großen Förderer der Untersuchungen über die Parallelen[2], bei seinem Schüler G. S. Klügel, dem Verfasser der wertvollen Kritik über die berühmtesten Versuche zum Beweis des V. Postulats. In diesem Werke kommt Klügel, nachdem er alle vorliegenden Beweisversuche für ungenügend befunden hat, auf die Möglichkeit, daß einander nicht schneidende Gerade divergieren können [„Möglich wäre es freilich, daß Gerade, die sich nicht schneiden, voneinander abweichen“, „Daß so etwas widersinnig ist, wissen wir nicht infolge strenger Schlüsse oder vermöge deutlicher Begriffe von der geraden und der krummen

[1] Vgl. Stäckel und Engel, Th. d. P., S. 146.

[2] Zur Orientierung über Kästner vgl. Stäckel und Engel, Th. der P., S. 139—141.

Linie, vielmehr durch die Erfahrung und durch das Urteil unserer Augen"].

Die Untersuchungen von Saccheri und Lambert neigen dazu, die Meinung von Klügel zu stützen, aber man kann sie nicht für Beweise der Unbeweisbarkeit der euklidischen Hypothese ansehen. Und dennoch könnte man zu einem Beweis gelangen, indem man, auf dem von den beiden genannten Geometern eröffneten Weg fortschreitend, beliebig viele weitere Sätze ableitet, die mit den Grundsätzen der Geometrie nicht in Widerspruch stehen.

Jedenfalls, daß man sich auf dies letztere Gebiet wagte ohne Saccheris Voreingenommenheit, der dabei Widersprüche entdecken wollte, das bildet in geschichtlicher Folge den entscheidenden Schritt, die Unbeweisbarkeit des euklidischen Postulats zu erobern und die nichteuklidischen Geometrien zu entdecken.

Aber von dem Werk von Saccheri und Lambert bis zu dem von Lobatschefskij und Bolyai, das nach dem hier ausgesprochenen Gedanken geformt ist, mußte noch mehr als ein halbes Jahrhundert vergehen!

Die französischen Geometer am Ende des XVIII. Jahrhunderts.

§ 23. Die Kritik über die Parallelen, die schon in Italien und in Deutschland zu Ergebnissen von großem Interesse geführt hatte, erhielt gegen das Ende des XVIII. Jahrhunderts und im Anfang des XIX. auch in Frankreich merkliche Belebung.

D'Alembert [1717—1783] erklärt in einem seiner Aufsätze über Geometrie [1759]: „La definition et les propriétés de la ligne droite, ainsi que des lignes paralleles sont l'écueil et pour ainsi dire le scandale des eleménts de Géometrie."[1] Er meint,

[1] Vgl. D'Alembert, Mélanges de Litterature, d'Histoire et de Philosophie, t. V, § 11 (1759). — Vgl. auch: Encyclopédie Méthodique Mathématique, t. II, p. 519, Artikel: Parallèles (1785).

daß durch eine gute Definition der geraden Linie beide Schwierigkeiten vermieden werden müßten. Er schlägt vor, Parallele zu einer gegebenen Geraden eine beliebige Gerade in derselben Ebene zu nennen, die zwei gleich abstehende Punkte auf derselben Seite der Geraden verbindet. Diese Definition erlaubt unmittelbar die Parallelen zu konstruieren: aber man müßte beweisen, daß die Geraden äquidistant sind. Dieser Lehrsatz wurde von D'Alembert gleichsam als Herausforderung seinen Zeitgenossen vorgesetzt.

§ 24. De Morgan erzählt in seiner Sammlung von Paradoxien, daß Lagrange [1736—1813] gegen Ende seines Lebens eine Abhandlung über die Parallelen schrieb. Als er sie der französischen Akademie vorlegte, unterbrach er das Lesen mit dem Ausruf: „Il faut que j'y songe encore!" und behielt das Manuskript zurück.[1]

Überdies berichtet Houël, daß Lagrange in einer Unterhaltung mit Biot die Unabhängigkeit der sphärischen Trigonometrie vom euklidischen Postulat behauptet hat. Zur Bekräftigung dieser Behauptung kann hinzugefügt werden, daß Lagrange sich mit besonderem Interesse mit der sphärischen Trigonometrie[2] beschäftigte, und daß er, wenn er nicht der Verfasser ist, so doch die Anregung zu einer Abhandlung gegeben hat: „*Sur les principes fondamentaux de la Mécanique* [1760—1761][3], worin D. de Foncenex eine Unabhängigkeitsfrage entwickelt, die der oben genannten der sphärischen Trigonometrie entspricht. Genau gesagt, Foncenex beweist, daß das analytische Gesetz für die Zusammensetzung sich schneidender Kräfte weder vom V. Postulat noch von irgend einem gleichberechtigten abhängt.

§ 25. Der als grundlegend schon von Wallis 1663 [vgl. § 9]

[1] A. de Morgan, Budget of Paradoxes, p. 173. London 1872.

[2] Vgl. J. Houël, Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire, S. 84, Anmerkung. Paris 1883, G. Villars.

[3] Vgl. Lagrange, Oeuvres, t. VII, S. 331—363.

gebrauchte Begriff der Ähnlichkeit erscheint wieder um den Anfang des XIX. Jahrhunderts, gestützt auf die Autorität zweier großen Geometer: L. N. M. Carnot [1753—1823] und Laplace [1749—1827].

In einer Anmerkung [S. 481] zu seiner „*Géométrie de Position*" [1803] behauptet Carnot, daß die Parallelentheorie mit dem Begriff der Ähnlichkeit verknüpft ist, die nahezu ebenso selbstverständlich ist wie die Gleichheit, und daß es, wenn man einmal diesen Begriff zugegeben hat, leicht ist, die fragliche Theorie streng zu begründen.

Nachdem Laplace [1824] die Bemerkung gemacht hat, daß das Newtonsche Gesetz [das allgemeine Anziehungsgesetz] wegen seiner Einfachheit, wegen seiner Allgemeinheit und wegen seiner Übereinstimmung mit den physischen Erscheinungen als streng betrachtet werden muß, bemerkt er, daß es eine seiner wichtigsten Eigenschaften ist, daß, wofern die Abmessung aller Körper des Weltalls, ihre gegenseitigen Entfernungen und ihre Geschwindigkeit im Verhältnis abnehmen würden, die Himmelskörper vollkommen den von ihnen beschriebenen Bahnen ähnliche beschreiben würden, derart, daß das Weltall, wenn es sich nach und nach auf den denkbar kleinsten Raum zusammenzöge, immer den Beobachtern denselben Anblick bieten würde. Dieser Anblick, so fährt er fort, ist also unabhängig von den Abmessungen des Weltalls, sodaß die Einfachheit der Naturgesetze dem Beobachter nur die Verhältnisse zu erkennen gestattet. An diesen astronomischen Raumbegriff anknüpfend fügt er in einer Anmerkung hinzu: „Die Versuche der Geometer, das Postulat Euklids über die Parallelen zu beweisen, waren bisher wertlos. Allerdings hegt niemand Zweifel an diesem Postulat und den Lehrsätzen, die Euklid daraus abgeleitet hat. Der Begriff des Raumes schließt also eine besondere Eigenschaft ein, die an sich selbstverständlich ist, und ohne die man die Eigenschaften der Parallelen nicht streng begründen kann. Die Vorstellung der begrenzten Ausdehnung z. B. des Kreises enthält nichts, was von seiner absoluten Größe abhängt. Verkleinern wir jetzt in Gedanken seinen Halbmesser, so werden wir unbezwinglich dazu gebracht, im selben Verhältnis seinen Umfang und die Seiten aller einbeschriebenen Figuren zu verkleinern. Diese Proportionalität scheint mir ein natürliches Postulat zu sein als das von Euklid, und es ist richtig, daß man es bei den Ergebnissen der allgemeinen Gravitation wiederfindet.[1]

§ 26. Zusammen mit den vorhergehenden Geometern pflegt man auch an J. B. Fourier [1768—1830] zu erinnern, wegen einer Auseinandersetzung, die er mit Monge über die gerade Linie hatte.[2] Will man diese Erörterungen mit den Untersuchungen über die Parallelen in Zusammenhang bringen, so braucht man nur auf den von D'Alembert ausgesprochenen Gedanken zu verweisen, daß der Beweis des Postulats mit der Definition der Geraden verknüpft werden kann. [Vgl. § 23.]

Fourier, der als ursprünglich den Begriff des Abstands zwischen zwei Punkten annimmt, schlägt vor, zuerst die Kugel zu definieren, dann die Ebene als Ort der Punkte, die von

[1] Vgl. Laplace, Oeuvres, t. VI, libre V, ch. V, p. 72. Bei dieser Gelegenheit ist zu erwähnen, daß man bei angemessener Erweiterung der Newtonschen Kraft oder, genauer gesagt, des Newtonschen Potentials auf die nichteuklidischen Geometrien Gesetze für die Planetenbewegung erhält, die weitgehende Übereinstimmung mit den Keplerschen Gesetzen zeigen. (Vgl. die ausführlichen Literaturangaben von Stäckel, Bolyai I, S. 243—244.) Schon auf W. Bolyai ist die Anregung zurückzuführen; es sind ferner Lipschitz (Quarterly Journal 12 [1873], S. 349—370), W. Killing (Journal für r. u. a. Math. 98 [1885], S. 1—49), C. Neumann (Leipz. Ber. 38 [1886], S. 1—2), H. Liebmann (Leipz. Ber. 54 [1902], S. 393—423 u. ebenda 55 [1903], S. 146—153) u. a. zu nennen. Eine eingehende Darstellung findet sich bei Liebmann, Nichteuklidische Geometrie, 2. Aufl. (Leipzig 1912), Kap. VII. Eine numerisch quantitative Behandlung, um aus Unstimmigkeiten in der Planetenbewegung etwa Schlüsse auf die Natur des Fixsternraumes zu ziehen, steht noch aus.

[2] Vgl.: Séances de l'École normale, Débats, t. I, p. 28—33 (1795). Die Diskussion wurde wieder abgedruckt in Mathésis, t. IX, S. 139—141 (1883).

zwei gegebenen Punkten gleichen Abstand haben[1], dann die Gerade, als Ort der Punkte, die von drei gegebenen Punkten gleichen Abstand haben. Diese Art, die Aufgabe der Grundlagen der Geometrie darzustellen, stimmt überein mit den Gedanken, die in der Folge von andern Geometern ausgesprochen wurden, die sich ausdrücklich mit der Parallelenfrage beschäftigten [W. Bolyai, N. Lobatschefskij, de Tilly]. In diesem Sinne findet die Erörterung zwischen Fourier und Monge ihren Platz unter den ersten Urkunden, welche sich auf die nichteuklidische Geometrie beziehen.[2]

Adrien Marie Legendre [1752—1833].

§ 27. Die ebengenannten Geometer beschränken sich darauf, die Schwierigkeit aufzudecken und Urteile über das Postulat auszusprechen; Legendre dagegen war es, der dies in einen Lehrsatz zu verwandeln suchte; seine Untersuchungen, die in den verschiedenen Auflagen seiner „*Eléments de Géométrie*“ [1794—1823] verteilt sind, sind gesammelt in den „*Reflexions sur différentes manières de démontrer la théorie des parallèles ou le théorème sur la somme des trois angles du triangle*“. [Mém. Académie Sciences, Paris, t. XIII, 1833.]

Mit hochinteressanten Versuchen greift Legendre wie schon Saccheri die Frage von der Seite der Winkelsumme im Dreieck an, indem er von der Summe beweisen will, daß sie zwei rechten Winkeln gleich ist.

Es gelingt ihm zu diesem Zweck schon von Anfang an Saccheris Hypothese des stumpfen Winkels auszumustern, indem

[1] Diese Definition der Ebene wurde von Leibniz ungefähr ein Jahrhundert zuvor gegeben. Vgl. z. B. die Opuscules et fragments inédits, veröffentlicht von L. Couturat, p. 554—5. Paris 1903, Alcan.

[2] Wir fügen hinzu, daß spätere Arbeiten und Untersuchungen zeigten, daß auch Fouriers Definition nicht gestattet, die euklidische Parallelentheorie ohne die Hilfe des V. Postulats oder eines andern gleichberechtigten Postulats zu schaffen.

er feststellt, daß „in jedem Dreieck die Summe der Winkel kleiner [Hyp. d. spitzen W.] oder gleich [Hyp. d. rechten W.] zwei rechten Winkeln ist“.

Wir geben einen einfachen und eleganten Beweis von Legendre wieder.

Es seien (Fig. 26) auf einer Geraden n aufeinanderfolgende gleiche Abschnitte A_1A_2, $A_2A_3 \cdots A_nA_{n+1}$ gegeben und über ihnen auf derselben Seite der Geraden n gleiche Dreiecke konstruiert, deren dritte Ecken die Punkte $B_1 B_2 \cdots B_n$ sind.

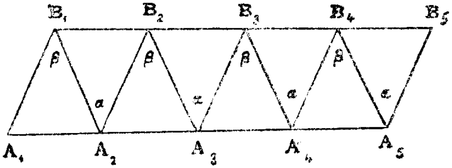


Fig. 26.

Die Strecken B_1B_2, $B_2B_3, \cdots B_{n-1}B_n$, die diese letzteren Ecken verbinden, sind gleich und können als Grundlinien von n weiteren gleichen Dreiecken betrachtet werden: $B_1A_2B_2$, $B_2A_3B_3 \cdots B_{n-1}A_nB_n$. Man ergänze die Figur durch das Dreieck $B_nA_{n+1}B_{n+1}$, das den früheren gleich ist.

Bezeichnet man mit β den Winkel des Dreiecks $A_1B_1A_2$ in B_1 und mit α den Winkel des folgenden Dreiecks in A_2, so behaupte ich, es ist $\beta \leqq \alpha$. In der Tat, wäre $\beta > \alpha$, so würde aus dem Vergleich der beiden Dreiecke $A_1B_1A_2$ und $B_1A_2B_2$, die zwei gleiche Seiten haben, folgen, daß $A_1A_2 > B_1B_2$.

Überdies hätte man, da die gebrochene Strecke $AB_1B_2 \cdots B_{n+1}A_{n+1}$ größer ist als die Strecke A_1A_{n+1}:

$$A_1B_1 + (B_1B_2)n + A_{n+1}B_{n+1} > (A_1A_2)n,$$

also

$$2A_1B_1 > (A_1A_2 - B_1B_2)n.$$

Aber diese Ungleichheit widerspricht bei hinreichend großem n dem Postulat des Archimedes, deshalb kann nicht $A_1A_2 > B_1B_2$ sein, und folglich ist die Voraussetzung $\beta > \alpha$ absurd.

Es folgt $\beta \leqq \alpha$, woraus man sofort erhält, daß die Summe der drei Winkel im Dreieck $A_1 B_1 A_2$ kleiner oder gleich ist zwei rechten Winkeln.

Diesen Lehrsatz pflegt man unberechtigterweise den ersten Legendreschen Lehrsatz zu nennen. Wir sagen unberechtigterweise, weil Saccheri mit seinem Beweis der Falschheit der Hyp. d. stumpfen W. fast ein Jahrhundert früher diesen Lehrsatz begründet hatte. [Vgl. § 15.]

Der sogenannte zweite Legendresche Lehrsatz, der auch von Saccheri, und zwar in allgemeinerer Gestalt angegeben ist [vgl. § 14], ist folgender:

Wenn in einem einzigen Dreieck die Summe der Winkel kleiner oder gleich zwei rechten Winkeln ist, so ist sie entsprechend kleiner oder gleich zwei rechten Winkeln in jedem andern Dreieck.

Wir geben den Beweis dieses Satzes nicht wieder, weil er nicht wesentlich verschieden ist von dem Saccheris.

Hier wollen wir vielmehr zeigen, wie Legendre beweist, daß die Summe der drei Winkel eines Dreiecks zwei rechten Winkeln gleich ist.

Im Dreieck ABC nehme man an, es sei

$$\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C < 2 \text{ Rechte.}$$

Durch D auf der Seite AB ziehe man die Transversale DE so, daß der Winkel $\sphericalangle ADE$ dem Winkel $\sphericalangle B$ gleich ist. Im Viereck $DBCE$ ist die Summe der Winkel kleiner als vier Rechte, also $\sphericalangle AED > \sphericalangle ACB$. Der Winkel des Dreiecks ADE bei E ist also eine wohlbestimmte [abnehmende] Funktion der Seite AD oder, was dasselbe ist, die Länge der Seite AD ist vollständig bestimmt, wenn man [in rechten Winkeln] die Maßzahl des Winkels E und der beiden Winkel A und B kennt. Aber dies Ergebnis ist nach Legendre widersinnig, weil die Länge einer Strecke keine Bedeutung hat, wenn man die Maßeinheit nicht kennt, auf die sie bezogen ist, und die

Natur der Frage in keiner Weise auf eine derartige Einheit hinweist.

Daher fällt die Hypothese

$$\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C < 2 \text{ Rechte},$$

und folglich wird man haben:

$$\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 2 \text{ Rechte}.$$

Aber aus dieser Gleichheit folgt leicht der Beweis des euklidischen Postulats.

Die Methode von Legendre ruht also auf dem Postulat von Lambert, das die Existenz einer absoluten Einheit verneint.

§ 28. In einem andern Beweis macht Legendre Gebrauch von der Voraussetzung: „Von einem beliebig im Innern eines Winkels angenommenen Punkt kann man immer eine Gerade ziehen, die die beiden Schenkel des Winkels trifft.[1] Er verfährt so:

Es sei ABC ein Dreieck, in dem, wenn es möglich ist, die Summe der Winkel kleiner ist als zwei rechte Winkel.

Es sei:

$$2 \text{ Rechte} - \sphericalangle A - \sphericalangle B - \sphericalangle C = \alpha \text{ [Defekt]}$$

gesetzt und man konstruiere den Punkt A', das Spiegelbild von A an BC. Der Defekt des neuen Dreiecks CBA' ist auch α. Sodann ziehe man kraft der oben ausgesprochenen Hypothese durch A' eine Transversale, die in B_1 und C_1 die Schenkel des Winkels $\sphericalangle A$ trifft. Der Defekt des Dreiecks AB_1C_1 ist, wie man leicht bestätigen kann, die Summe der Defekte der vier Dreiecke, die es zusammensetzen [vgl. auch Lambert § 19], also größer als 2α. Wiederholt man vom Dreieck AB_1C_1 aus die vorhergende Konstruktion, so wird man ein neues Dreieck

[1] Dieser Annahme hatte sich bereits J. F. Lorenz zu demselben Zweck bedient, vgl.: Grundriß der reinen und angewandten Mathematik. Helmstedt 1791.

erhalten mit einem Defekt größer als 4α. Nach n Schritten dieser Art hat man ein Dreieck konstruiert mit einem Defekt größer als $2^n\alpha$. Aber für hinreichend großes n ist $2^n\alpha > 2$ Rechte [archimedisches Postulat], was widersinnig ist. Es folgt: $\alpha = 0$, also $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 2$ Rechte.

Dieser Beweis ist auf das archimedische Postulat gestützt. Hier noch eine Angabe, wie man den Gebrauch dieses Postulats vermeiden könnte: Es seien (Fig. 27) AB und HK

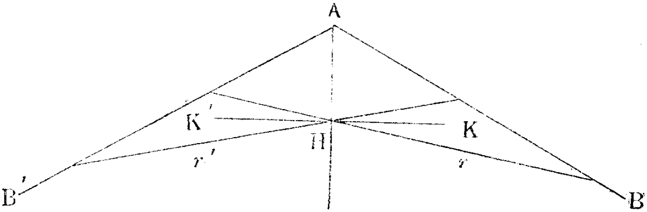


Fig. 27.

eine Schräge und eine Senkrechte zu AH. Man konstruiere die Gerade AB' symmetrisch zu AB in bezug auf AH. Durch den Punkt H geht kraft der Legendreschen Hypothese eine Gerade r, die die beiden Schenkel des Winkels BAB' trifft. Wenn sie von HK verschieden ist, dann hat die i. b. auf AH symmetrische Gerade r' dieselbe Eigenschaft und folglich auch HK. Also treffen sich ein Lot und eine Schräge zur Geraden AH immer. Daraus folgt die gewöhnliche Theorie der Parallelen, also $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 2$ Rechte.

In andern Beweisen macht Legendre Gebrauch von analytischen Schlüssen und auch in irrtümlicher Weise von unendlichen Größen.

Wolfgang Bolyai [1775—1856].

§ 29. In diesem Kapitel wird auch des ungarischen Geometers W. Bolyai gedacht, der sich seit seiner Göttinger Studienzeit [1796—99] mit der Parallelentheorie beschäftigte, wahrscheinlich auf Rat von Kästner und des jungen Professors der Astronomie K. F. Seyffer [1762—1822], mit dem er freundschaftlich verkehrte.

1804 schickte er an Gauß, seinen Göttinger Studienfreund, eine „*Theoria Parallelarum*", die einen Versuch des Beweises der Existenz äquidistanter Geraden enthielt.[1] Gauß widerlegte diesen Beweis. Bolyai hörte aber deswegen nicht auf, sich mit dem XI. Axiom zu beschäftigen, doch gelang es ihm nur das Axiom durch andere von größerer oder geringerer Selbstverständlichkeit zu ersetzen. So gelangte er dazu, an der Beweisbarkeit zu zweifeln und die Unmöglichkeit der Zurückführung der euklidischen Hypothese einzusehen, weil [wie er versichert] die aus der Verneinung des XI. Axioms abgeleiteten Folgerungen den Grundsätzen der Geometrie nicht widersprechen können, insofern, als die gemeinhin angenommenen Gesetze über den Schnitt zweier Geraden eine neue Tatsache darstellen, unabhängig von den andern ihnen vorausgehenden.[2]

Wolfgang stellte seine Ansichten über die Grundlagen der Mathematik in dem Werk: „*Tentamen juventutem studiosam in elementa Matheseos* . . ." [1832—35] zusammen und im besondern seine Untersuchungen über das Axiom XI, indem er bei jedem Versuch die neue Hypothese ins Licht setzte, die zur strengen Durchführung des Beweises nötig war.

Auf folgendes wichtige Postulat führt Wolfgang das euklidische zurück: Vier Punkte, die nicht auf einer Ebene

[1] Die Theoria Parallelarum ist lateinisch und in deutscher Übersetzung veröffentlicht von den Herren Stäckel und Engel in Bd. XLIX der Math. Ann., S. 168—205 (1897).

[2] Vgl. Stäckel, Die Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie durch J. Bolyai. Math. u. Naturw. Ber. aus Ungarn, t. XVII (1901) und die zusammenfassende Darstellung: Urkunden zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie II, 1 und 2. Wolfgang und Johann Bolyai von P. Stäckel. Leipzig 1913. Wir wollen dieses Werk i. F. immer mit „Bolyai" anführen.

liegen, liegen immer auf einer Kugel, oder, was dasselbe besagt: drei nicht auf einer Geraden gelegene Punkte gehören immer einem Kreise an.[1]

Man kann das euklidische Postulat so daraus ableiten: Es sei AB senkrecht zu BB' und $\sphericalangle BAA' < \frac{\pi}{2}$, wobei A' und B' auf derselben Seite von AB liegen. Will man nun zeigen, daß es durch jeden Punkt außerhalb einer Geraden nur eine Nichtschneidende gibt, so hat man nur nachzuweisen, daß AA' und BB', gehörig verlängert, einander schneiden. Dieser Schnittpunkt aber wird eben durch das Bolyaische Postulat gewährleistet, nämlich als Mittelpunkt des Kreises durch M (auf AB) und seine gewiß nicht mit M in einer Geraden liegenden Spiegelbilder M' (an AA') und M'' (an BB').

Friedrich Ludwig Wachter [1792—1817].

§ 30. Nachdem man eingesehen hatte, daß das euklidische Postulat von der Möglichkeit abhängt, einen Kreis durch drei beliebige nicht auf einer Geraden gelegene Punkte zu ziehen, ergab sich von selbst der Gedanke, die Existenz eines so beschaffenen Kreises zu beweisen, vor jeder Untersuchung über die Parallelen.

Ein Versuch in dieser Richtung wurde von F. L. Wachter gemacht.

Wachter, ein Schüler von Gauß in Göttingen [1809] und Professor der Mathematik am Gymnasium zu Danzig, beschäftigte sich zu wiederholten Malen mit dem Beweis des Postulats, und glaubte sein Ziel erreicht zu haben zuerst in einem Brief an Gauß [Dezember 1816] und dann in einem 1817 in Danzig gedruckten Werkchen.[2]

---

[1] Vgl. W. Bolyai, Kurzer Grundriß eines Versuchs usw., S. 46. Maros Vásárhely 1851, abgedruckt in Bolyai 2, S. 119—179. — Man beachte auch den folgenden Paragraphen.

[2] Demonstratio axiomatis geometrici in Euclideis undecimi.

In dieser Veröffentlichung sucht er vergeblich zu beweisen, daß durch vier beliebige Punkte im Raum [die nicht einer Ebene angehören] eine Kugel geht, wobei er sich auf das Postulat stützt: Vier Punkte im Raum bestimmen völlig eine Fläche [die Fläche der vier Punkte] und zwei solche Flächen schneiden sich in einer einzigen Linie, die durch drei Punkte völlig bestimmt ist.

In dem Brief an Gauß, wo von der Grenzfläche einer Kugel die Rede ist, deren Halbmesser ins Unendliche wächst, behauptet Wachter, daß auf ihr auch im Fall der Falschheit des V. Postulats eine Geometrie gelten würde, die mit der der gewöhnlichen Ebene identisch ist.

Diese Behauptung ist von größter Wichtigkeit, denn hier taucht eines der wichtigsten Ergebnisse auf, das in dem der Saccherischen Hypothese des spitzen Winkels entsprechenden geometrischen System gilt. [Vgl. § 31, 3, § 40, 2 und § 64.][1]

[1] Über Wachter vgl. P. Stäckel, Friedrich Ludwig Wachter, ein Beitrag zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie. Math. Ann., Bd. LIV, S. 49—85 (1901). In diesem Aufsatz sind die Briefe von Wachter über den Gegenstand wiedergegeben und das oben angeführte Werkchen von 1817.

Drittes Kapitel.

Die klassische Zeit der nichteuklidischen Geometrie.

C. F. Gauß [1777—1855].

§ 31. Karl Friedrich Gauß, der *princeps mathematicorum*, ist zu den ersten Schöpfern der nichteuklidischen Geometrie zu rechnen, der er auch den Namen gab. Ein Lehrgebäude hat er aber nicht errichtet; den Reiz zur geschlossenen Darstellung nahm ihm, wie er am 27. I. 1829 an Bessel schrieb, die Scheu vor dem „Geschrei der Böotier". So kannte man bis zur Drucklegung von Band VIII der Werke [1900] außer einzelnen Briefstellen, die, wie z. B. die Inhaltsformel für den nichteuklidischen Kreis in einem Brief an Schumacher vom 12. VII. 1831, eine tiefergehende Kenntnis verraten, im wesentlichen nur eine Reihe scharfsinniger und vernichtender Besprechungen von verunglückten Beweisversuchen des Euklidischen Postulats.

Sein mühsames, schon früh jedenfalls durch Göttinger Anregungen [Kästner, Klügel] erwecktes und durch mündlichen und schriftlichen Austausch von Gedanken insbesondere mit dem Freunde Wolfgang Bolyai wachgehaltenes Ringen mit der „partie honteuse", dem euklidischen Postulat, hat in jüngster Zeit nochmals Stäckel zusammenfassend dargestellt.[1]

---

[1] Materialien für eine wissenschaftliche Biographie von Gauß Heft V. C. F. Gauß als Geometer. Leipzig 1918. — Das Wort von Stäckel (Math. Ann. 49, S. 151, 1897), „daß die Erkenntnis von der logischen Unanfechtbarkeit der nichteuklidischen Geometrie Gauß nicht durch eine geniale Intuition zuteil geworden ist, sondern daß er sie erst in hartem Kampfe gegen das alte Vorurteil errungen hat", ist in vollem

Ihm verdanken wir auch die Erklärungen zu den meist sehr kurzen Andeutungen, die eben in Band VIII veröffentlicht sind, Andeutungen, die den Gipfeln eines noch im Meere ruhenden großen Kontinents gleichen. Es seien hier genannt:

1. „Zur Theorie der Parallellinien". Werke VIII, S. 202 bis 209. Die wesentlichen Eigenschaften, welche die nichteuklidischen Parallelen mit den Euklidischen [und den Cliffordschen (§ 88—89)] gemein haben, nämlich Unabhängigkeit der Eigenschaft vom Ausgangspunkt, Gegenseitigkeit und Transitivität, sind hier entwickelt. Der Ort der „korrespondierenden Punkte" auf den Geraden eines Parallelbüschels[1], die Trope [der Grenzkreis] wird besprochen. Diese Notiz stammt vermutlich aus dem Jahre 1831.

2. „Bemerkungen zur Kubatur der Pyramiden." Werke VIII, S. 228 und 232—233, aus dem „Handbuch", die erste wohl aufgezeichnet bei Entwurf des folgenden Briefes.

3. „Brief an Wolfgang Bolyai vom 6. März 1832" [Werke VIII, S. 220—224], worin die Begriffe Paracykl [Grenzkreis], Parasphäre [Grenzkugel], sowie Hypercykl [ebene Kurve konstanten Abstands von einer Geraden] und Hypersphäre [Fläche konstanten Abstands von einer Ebene] aufgestellt werden und der Nachweis erbracht wird, daß der Inhalt eines Dreiecks mit den Winkeln α, β, γ dem Defekt $\pi - \alpha - \beta - \gamma$ proportional ist.

4. „Die sphärische und die nichteuklidische Geometrie." Werke VIII, S. 254—257. Hier wird der Nachweis erbracht, daß in einer zweidimensionalen Geometrie mit frei beweglichen Figuren aus der Gültigkeit der euklidischen Geometrie für „unendlich kleine" Dreiecke dann für „endliche" Dreiecke die euklidische, nichteuklidische oder sphärische Geometrie be-

---

Einklang mit dem Ergebnis auch der späteren Forschungen. Auf die Bedeutung der Forschungen Gaußens über Flächentheorie für die nichteuklidische Geometrie kommen wir an anderer Stelle (§ 77) zu sprechen.

[1] Die Punkte A und B auf den Parallelen AA' und BB' heißen „korrespondierend", wenn $\sphericalangle BAA' = \sphericalangle ABB'$.

stehen muß.[1] Der Zettel, aus den Jahren 1840—1846 stammend, fand sich als Einlage in dem Handexemplar Gaussens von N. J. Lobatschefskijs Geometrischen Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien. Berlin 1840. — Ein interessanter Vorläufer dazu ist die „Scheda" aus dem Jahre 1801 [Werke X 1, 1917, S. 451], die einer eingehenden Erklärung bedurfte.

§ 32. Wir geben hier die Hauptsache von (1) wieder und bemerken noch, daß Gauß — ebenso wie J. Bolyai und Lo-

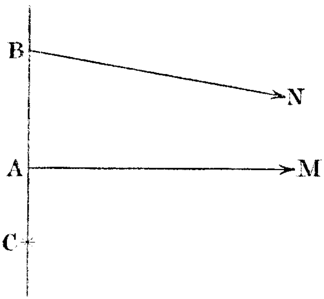


Fig. 28.

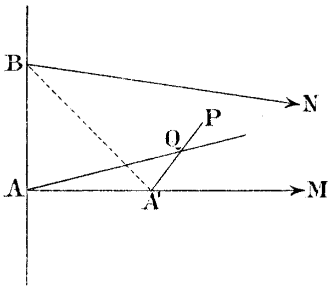


Fig. 29.

batschefskij — die Existenz einer Geraden BN, die zwischen den AM Schneidenden und den Nichtschneidenden die Grenze bildet, nichts als Postulat faßt, wie später Hilbert[2], sondern sie als selbstverständlich annimmt.

Gauß definiert die Parallelen so:

Wenn (Fig. 28) die Geraden $AM\ldots$, $BN\ldots$ einander nicht schneiden, jede durch A zwischen $AM\ldots$ und $AB\ldots$ gelegte Gerade hingegen die $BN\ldots$ schneidet: so heißt $AM\ldots$ mit $BN\ldots$ parallel.

Bei der Gaußschen Definition scheint der Punkt A eine be-

[1] S. unten § 38.

[2] D. Hilbert, Neue Begründung der Bolyai-Lobatschefskijschen Geometrie. Math. Ann. 57 (1903), S. 137—150. — Abdruck in D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, 3. Aufl. (Leipzig 1909), Anhang III.

sondere Bedeutung zu haben, weshalb man notwendig beweisen muß, daß die Parallele AM von A unabhängig ist.

Diese Unabhängigkeit beweist **Gauß** folgendermaßen:

Nimmt man (Fig. 29) anstatt A einen andern Anfangspunkt A' auf der Linie $AM\ldots$, zieht durch A' zwischen $A'M\ldots$ und $A'B$ die Gerade $A'P$ in beliebiger Richtung, und durch einen Punkt Q zwischen A' und P die Gerade $AQ\ldots$, so wird solche (Definition) die $BN\ldots$ schneiden, woraus von selbst klar ist, daß auch $QP\ldots$ die $BN\ldots$ schneiden wird.

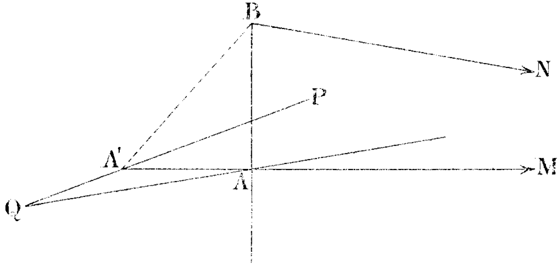


Fig. 30.

Nimmt man (Fig. 30) aber A' auf der rückwärts fortgesetzten $AM\ldots$ und zieht durch A' zwischen $A'M\ldots$ und $A'B\ldots$ in beliebiger Richtung die Gerade $A'P$, verlängert solche rückwärts und nimmt darauf einen beliebigen Punkt Q, so wird $QA\ldots$ die $BN\ldots$ schneiden (Definition), z. B. in R. $A'P$ ist also in der geschlossenen Figur $A'ARB$ und wird daher eine der vier Seiten $A'A$, AR, RB, BA' schneiden, offenbar muß dies aber die dritte RB sein, daher also auch $A'M\ldots$ mit $BN\ldots$ parallel ist.

Aus der Definition der Parallelen ergibt sich auch nicht von selbst die **Gegenseitigkeit** des Parallelismus, das will sagen, daß auch BN zu AM parallel ist. Diese Eigenschaft ist der Gegenstand des folgenden schönen Beweises von **Gauß**. (S. Fig. 31.)

„Es ist verstattet $ab*$ und $cd*$ zu vertauschen."

Es sei (Fig. 31) 1 und 2 parallel. Wäre nun nicht 2 mit 1 parallel, so sei cd' mit 1 parallel. Es sei ca senkrecht auf 1 und

$$acb = acb' = \tfrac{1}{2} dcd'.$$

Ferner $cbe = cb'b$. Es wird also be die 2 schneiden in e'.

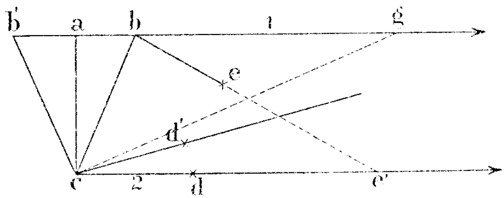


Fig. 31.

Macht man nun $b'g = be'$, so wird cg und cd' mit cb' einerlei Winkel machen, welches absurd ist.

Schließlich beweist er, daß zwei zu einer dritten parallele Gerade zueinander parallel sind*(Transitivität).

Lehrsatz. Ist die Gerade 1 sowohl mit 2 als mit 3 parallel, so ist auch 2 mit 3 parallel.

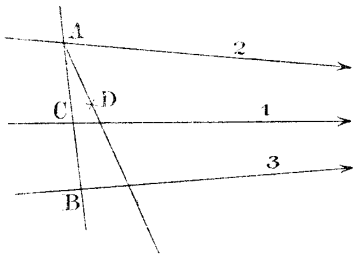


Fig. 32.

Beweis: Erster Fall, wenn (Fig. 32) 1 zwischen 2 und 3 liegt. Es seien A, B Punkte auf 2 und 3 und AB schneide die 1 in C. Durch A ziehe man eine beliebige Gerade AD . . . zwischen 2 und AB, welche also 1 schneiden wird; da dieses von jeder AD . . . gilt, so ist 2 mit 3 parallel.

Zweiter Fall, wenn (Fig. 33) 1 außerhalb 2 und 3 liegt. Es liege 2 zwischen 1 und 3. Wäre 2 mit 3 nicht parallel, so läßt sich durch einen beliebigen Punkt von 3 eine von 3 verschiedene Gerade ziehen, die mit 2 parallel ist. Diese ist also vermöge des ersten Falls auch mit 1 parallel, welches absurd ist.

Hier ist zu bemerken, daß Gauß stillschweigend meint den Parallelismus in einem gegebenem Sinn. In der Tat, seine Definition der Parallelen betrachtet die von A auf einem bestimmten Ufer der Transversale AB, z. B. dem rechten, ausgehenden Strahlen, so zwar, daß man AM die Parallele zu BN nach rechts hin nennen müßte. Die Parallele zu BN nach links hin ist nicht notwendig AM, diese Voraussetzung würde vielmehr auf eine dem euklidischen Postulat äquivalente Hypothese hinauskommen.

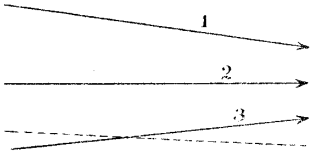


Fig. 33.

§ 33. Der geschichtlichen Entwicklung vorgreifend bringen wir des Zusammenhangs wegen an dieser Stelle eine Konstruktion von Hilbert für das gemeinsame Lot zweier einander nicht schneidenden und nicht parallelen Geraden, dessen Existenz keiner seiner Vorgänger auf elementarem Wege erwiesen hat.

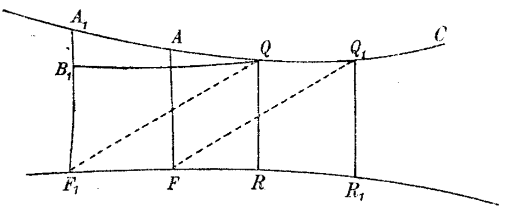


Fig. 34.

Von den Punkten A und A_1 der einen Geraden fällt man die Lote AF und A_1F_1 auf die zweite; es sei $AF < A_1F_1$. Dann macht man $F_1B_1 = FA$. Trägt man dann in B_1 den Winkel $\alpha = \sphericalangle FAC$ an, so schneidet der zweite Schenkel des Winkels die erste Gerade reell, was leicht durch Betrachtung der durch F zu AC gezogenen Parallelen bewiesen werden kann. Es sei Q dieser Schnittpunkt. Macht man dann $AQ_1 = BQ$, so sind die Dreiecke B_1QF_1 und AQF kongruent, daher auch die Dreiecke F_1QR

und FQ_1R_1, die bei R bez. R_1 rechte Winkel haben. Hiermit sind also zwei Punkte Q und Q_1 gefunden, die von der zweiten Geraden den gleichen Abstand haben. Die Verbindungslinie der Mitten von QQ_1 und RR_1 steht dann auf beiden Geraden senkrecht.[1]

Damit sind dann drei Arten linearer Strahlbüschel bekannt: Die Gesamtheit der Geraden durch einen reellen Punkt (P), die Gesamtheit der Geraden, die — einseitig — parallel sind, oder, in Hilberts bezeichnender Ausdrucksweise, ein Ende (E) gemein haben und endlich die Gesamtheit aller Geraden, die auf einer und derselben Geraden senkrecht stehen, oder, wie wir sagen wollen, einen „idealen Punkt" I gemein haben. Zwei „Punkte" haben im allgemeinen eine (reelle) Verbindungslinie, nur dürfen im letzten Falle die Geraden, auf denen die gesuchte Gerade senkrecht stehen soll, weder einen P noch ein E gemein haben.

Von den sechs Aufgaben, eine Gerade durch P_1P_2, P_1E_2, P_1I_2, E_1E_2, E_1I_2, I_1I_2 zu legen, sind die erste und die dritte trivial, die sechste hat Hilbert gelöst, die zweite und vierte haben ihre Geschichte, die noch zu besprechen ist; die dritte endlich ist leicht auf die vierte zurückzuführen. Ein „Ende" wird bei den Aufgaben immer vorgeschrieben gedacht in Gestalt irgendeiner Geraden, zu der die gesuchte in vorgeschriebenem Sinn parallel sein soll.

§ 34. Der Inhalt des Dreiecks. Wir wollen ein Dreieck (einfach, zweifach, dreifach) asymptotisch nennen, je nachdem eine, zwei oder alle drei Ecken „Enden" sind. Schlechtweg „asymptotisch" soll ein Dreieck heißen, wenn alle drei Ecken im Unendlichen liegen, jede Seite also nach ihren beiden Richtungen hin zu je einer der beiden anderen parallel ist. In dem erwähnten Brief an W. Bolyai postuliert Gauß

[1] Hilbert a. a. O. (Grundlagen), S. 162. — Anderer Existensbeweis und andere Konstruktion des gemeinsamen Lotes bei Liebmann, Nichteukl. Geom., S. 25—27.

für das asymptotische Dreieck einen endlichen Inhalt $k\pi$. Daraus kann er dann die Inhaltsformel

$$\triangle ABC = k(\pi - \alpha - \beta - \gamma)$$

folgendermaßen ableiten. Es sei D ein Punkt auf einer Seite eines (dreifach) asymptotischen Dreiecks, δ und $\pi - \delta$ die Winkel, die die Verbindungslinie mit dem der Seite gegenüberliegenden Ende und die beiden Teile der Seite einschließen. Auf diese Weise ist das Dreieck in zwei zweifach asymptotische Dreiecke zerlegt, deren Inhalte nur von δ, bez. $\pi - \delta$ abhängen

$$\triangle ABD = kf(\delta), \quad \triangle ADC = kf(\pi - \delta).$$

Es ist dann $$f(\delta) + f(\pi - \delta) = \pi,$$

also wegen $f(0) = \pi$ und $f(\pi) = 0$

$$f(\delta) = \pi - \delta.$$

Ist sodann ABC ein zweifach asymptotisches Dreieck mit den Winkeln α, β, 0 und A_1 und B_1 die Enden der verlängerten Strecken BA und AB, so erhält man, indem man noch C mit A_1 und B_1 verbindet:

$$\begin{aligned} k\pi = \triangle A_1B_1C &= \triangle A_1AC + \triangle ABC + \triangle CBB_1 \\ &= k\cdot\alpha + \triangle ABC + k\cdot\beta, \end{aligned}$$

also $$\triangle ABC = k(\pi - \alpha - \beta).$$

Sind alle drei Winkel ABC von Null verschieden und ist α der größte, so verlängert man AC bis zum Ende C_1, AB bis zum Ende B_1 und verbindet C_1 mit B und B_1. Bezeichnet man $\sphericalangle B_1BC_1$ mit δ, $\sphericalangle C_1BC$ mit ϵ, so erhält man (mit Rücksicht auf $\delta + \epsilon = \pi - \beta$):

$$\begin{aligned} \triangle ABC &= \triangle AB_1C_1 - \triangle B_1BC_1 - \triangle C_1BC \\ &= k(\pi - \alpha - \pi + \delta - \pi + \epsilon + \pi - \gamma) \\ &= k(\pi - \alpha - \beta - \gamma). \end{aligned}$$

Diese Ableitung setzt noch voraus, daß ein (dreifach) asymptotisches Dreieck endlichen Inhalt hat. Sie kann durch eine andere ersetzt werden, die mit Hilfe der für die sphärischen Dreiecke von Gerwien [1833] gegebenen Konstruktion zeigt, daß der Inhalt jedes Dreiecks seinem Defekt proportional ist. Die Inhaltsformel für das asymptotische Dreieck erscheint dann nicht als Ausgangspunkt, sondern als Folgerung, so daß die stillschweigend gemachte Hypothese von der Endlichkeit seines Inhalts entbehrlich wird.[1]

Ferdinand Karl Schweikart [1780—1859].

§ 35. Gleichzeitig mit und unabhängig von den Gaußschen Untersuchungen sind die des Professors der Jurisprudenz F. K. Schweikart[2], der 1807 „Die Theorie der Parallellinien nebst dem Vorschlage ihrer Verbannung aus der Geometrie“ veröffentlichte, in der er Klügel und Lambert zitiert, übrigens nicht etwa das euklidische Postulat beseitigen, sondern als Anknüpfungspunkt und Grundlage das Parallelogramm einsetzen will.

Das Zeugnis seiner nichteuklidischen Forschungen ist die folgende, im Dezember 1818 für Gauß an Gerling übergebene[3]

[Notiz.]

„Es gibt eine zwiefache Geometrie — eine Geometrie im engern Sinn —, die euklidische, und eine astralische Größenlehre.

„Die Dreiecke der letzteren haben das Eigene, daß die Summe der drei Winkel nicht zwei Rechten gleich ist.

[1] Liebmann, N. E. G., 2. Aufl., S. 50—56. Finzel, Die Lehre vom Flächeninhalt. Diss. Straßburg 1911. Lobatschefskij hat (vgl. S. 266 des § 37 angeführten Werkes) einmal den Irrtum begangen, zu glauben, daß jedes Dreieck sich in ein rechtwinkliges verwandeln ließe!

[2] Er studierte Recht an der Universität Marburg und besuchte von 1796—1798 die mathematischen Vorlesungen, welche an der Universität Professor J. K. F. Hauff hielt, der Verfasser von mehreren Schriften über die Parallelen. S. Th. d. P., S. 243.

[3] Gauß Werke VIII, S. 180—181.

„Dies vorausgesetzt, läßt es sich auf das strengste beweisen

a) daß die Summe der drei Winkel kleiner als zwei Rechte sei;

b) daß die Summe immer kleiner werde, je mehr Inhalt das Dreieck umfaßt;

c) daß die Höhe eines rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks zwar immer zunimmt, je mehr man die Schenkel verlängert, daß sie aber eine gewisse Linie, die ich die 'Konstante' nenne, nicht übersteigen könne.[1]

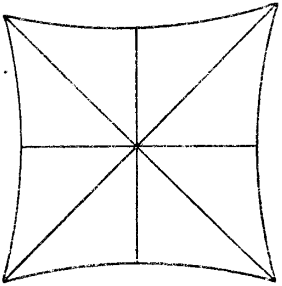


Fig. 35.

„Die Quadrate haben daher folgende Gestalt (Fig. 35).

„Ist diese Konstante für uns die halbe Erdachse (wonach jede im Weltraume von einem Fixstern zum andern, die 90^0 voneinander entfernt sind, gezogene Linie eine Tangente der Erdkugel sein würde), so ist sie in Beziehung auf die, im täglichen Leben vorkommenden, Räume unendlich groß.

„Die euklidische Geometrie gilt nur unter der Voraussetzung, daß die Konstante unendlich groß sei. Nur dann ist es wahr, daß die drei Winkel eines jeden Dreiecks zwei Rechten gleich seien; auch läßt sich dieses, sowie man sich den Satz, daß die Konstante unendlich groß sei, geben läßt, leicht beweisen."

---

[1] Der Zusammenhang der Schweikartschen Konstanten C mit der von Lobatschefskij gewählten Streckeneinheit k ist durch die Formel (§ 36) gegeben

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\Pi(a) = e^{-\frac{a}{k}}.$$

a wird gleich C, wenn $\Pi(a)$ gleich $\frac{\pi}{4}$ ist, es ist also

$$C = k \log\cot \frac{\pi}{8}.$$

Im März 1819 antwortete Gauß an Gerling inbetreff der Astralgeometrie, lobt Schweikart und erklärt seine Zustimmung zu allem, was das ihm geschickte Blättchen enthält. Er fügt hinzu, daß er die Astralgeometrie so weit ausgebildet hat, daß er alle Aufgaben vollständig lösen kann, sobald die Konstante von Schweikart gegeben ist.

Franz Adolf Taurinus [1794—1874].

§ 36. Schweikart hat auch seinen Neffen Taurinus[1] angeregt [1820], sich mit der Astralgeometrie zu beschäftigen, und es ist eine seltsame Entwicklung, daß der Neffe den Onkel in mancher Hinsicht weit überholte, indem er in seinen *Geometriae prima elementa* [Köln 1826] die nichteuklidische oder „logarithmisch-sphärische" Trigonometrie aufbaute, an theoretischer Einsicht aber hinter ihm zurückblieb — er war und blieb überzeugt von der Wahrheit des V. Postulats.

Taurinus geht hier den später von Lobatschefskij beschrittenen Weg einer analytischen Konstruktion. Vom Cosinussatz der sphärischen Trigonometrie

$$\cos\frac{a}{k} = \cos\frac{b}{k}\cdot\cos\frac{c}{k} + \sin\frac{b}{k}\sin\frac{c}{k}\cdot\cos\alpha$$

ausgehend, ersetzt er den reellen Radius k durch den imaginären ik [wo $i = \sqrt{-1}$]. Die von Taurinus erhaltene Formel kann mit Hilfe von Anwendung der hyperbolischen

[1] Die große Bedeutung von Schweikart und Taurinus für die Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie wurde aufgedeckt und ins Licht gesetzt von den Herren Stäckel und Engel, die in der „Th. d. P." ihnen ein ganzes Kapitel widmen (S. 237—286) und die wichtigsten Stellen der Werke von Taurinus wiedergeben, sowie einige Briefe, die zwischen ihm, Gauß und Schweikart gewechselt wurden. Man vergleiche noch den Artikel von Stäckel über „Franz Adolph Taurinus", Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik IX, S. 397 bis 427 (1899).

Funktionen[1] in folgender Form geschrieben werden:

$$(1) \qquad ch\frac{a}{k} = ch\frac{b}{k}\, ch\frac{c}{k} - sh\frac{b}{k}\, sh\frac{c}{k} \cos\alpha.$$

wird also wieder reell, was wesentlich ist.

Für Taurinus blieb die „logarithmisch-sphärische" Trigonometrie ein unwirkliches Gedankending — und doch drang er

[1] Zur Bequemlichkeit für den Leser erinnern wir an die analytische Definition und die Haupteigenschaften der hyperbolischen Funktionen:

$$(\mathrm{I}) \qquad \begin{cases} sh\,x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots \\[2ex] ch\,x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots \\[2ex] th\,x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}; \qquad cth\,x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}. \end{cases}$$

Vergleicht man mit den bekannten Entwicklungen

$$(\mathrm{II}) \qquad \begin{cases} \sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \dfrac{x}{1!} - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots \\[2ex] \cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \cdots \\[2ex] \operatorname{tg} x = \dfrac{1}{i}\,\dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}}; \qquad \operatorname{ctg} x = i\,\dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{e^{ix} - e^{-ix}}, \end{cases}$$

so sieht man leicht, daß die Kreisfunktionen und die hyperbolischen durch die folgenden Beziehungen verknüpft sind:

$$(\mathrm{III}) \qquad \begin{cases} i\,sh\,x = \sin(ix); \qquad i\,th\,x = \operatorname{tg}(x) \\ ch\,x = \cos(ix); \qquad -i\,cth\,x = \operatorname{cotg}(ix). \end{cases}$$

Diese letzteren gestatten die Fundamentalformeln der Goniometrie in die entsprechenden für die hyperbolischen Funktionen umzuwandeln. Es sind dies folgende:

$$(\mathrm{IV}) \qquad \begin{cases} ch^2 x - sh^2 x = 1 \\ sh(x \pm y) = sh\,x\,ch\,y \pm sh\,y\,ch\,x \\ ch(x \pm y) = ch\,x\,ch\,y \pm sh\,x\,sh\,y. \end{cases}$$

in diesem Gebiet sehr weit vor. Er kennt das asymptotische Dreieck, dem wir bei Gauß begegnet sind; er gewinnt die Formeln

$$2\pi k sh\frac{r}{k} \qquad \text{und} \qquad 2\pi k^2\left(ch\frac{r}{k} - 1\right)$$

für Umfang und Inhalt des Kreises vom Radius r, ebenso die Formeln

$$4\pi k^2 sh^2\frac{r}{k} \qquad \text{und} \qquad 4\pi k^3\left(sh\frac{r}{k}\, ch\frac{r}{k} - \frac{r}{k}\right)$$

für Oberfläche und Inhalt der Kugel. Er gewinnt aus dem polaren Cosinussatz der sphärischen Trigonometrie

$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos\frac{a}{k}$$

den entsprechenden der logarithmisch-sphärischen Trigonometrie

$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\, ch\frac{a}{k}$$

und erhält aus ihm, indem er $\alpha = 0$ und $\gamma = 90^0$ setzt die Beziehung zwischen den Größen, die wir jetzt mit Lobatschefskij als „Lot" und „zugehörigen Parallelwinkel" benennen,

$$ch\frac{a}{k} = \frac{1}{\sin\beta},$$

und die, wenn man $k = 1$ setzt und den Parallelwinkel mit $\Pi(a)$ bezeichnet, sich schreibt:

$$cha = \frac{1}{\sin\Pi(a)},$$

woraus wegen

$$\frac{1}{\sin\Pi(a)} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(a) + \cot\frac{1}{2}\Pi(a)\right)$$

die Formel in ihrer durch Lobatschefskij klassisch gewordenen Gestalt

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\Pi(a) = e^{-a}$$

folgt. —

Es ist ein seltsamer Streich des Dämons, der die Forscher leitet: Lambert ahnte, wie wir oben gesehen haben [§ 21], daß die „zwote Hypothese", die „des spitzen Winkels", auf der Kugel mit imaginärem Radius gilt, auch hat er sich eingehend mit den hyperbolischen Funktionen *ch*, *sh* beschäftigt — aber er stellte die Beziehung nicht her. Taurinus dagegen findet und verwendet sie sachgemäß — gibt aber den Glauben an das Euklidische Postulat nicht auf.[1]

N. I. Lobatschefskij [1793—1856].

§ 37. Nikolaj Iwanowitsch Lobatschefskij[2], geboren den 22. Oktober (2. November) 1793 im Gouvernement Nischnij-Nówgorod, gestorben am 12. (24.) Februar 1856 in Kasan, hat mit zäher Kraft und unermüdlicher Ausdauer das Lehrgebäude der nichteuklidischen Geometrie in einer Reihe von Arbeiten begründet, von den verschiedensten Gesichtspunkten aus dargestellt und daraus die Nutzanwendung auch für die Zwecke der Analysis gezogen. Im Ganzen unterscheidet ihn von I. Bolyai die viel weitergehende Durchbildung der Formeln, die Durchdringung der Raumgeometrie und die weitausschauende allgemeine Axiomatik. So verbindet er mit der Gedankenkühnheit des Sohnes Johann die tiefgehende Bedächtigkeit des Vaters Wolfgang Bolyai.

Die Anregung zur Beschäftigung mit dem heikeln Gegenstand geht wohl auf J. M. C. Bartels [1769—1836] den Freund von Gauß zurück, der 1807 als Professor nach Kasan berufen wurde. Auch seine Entwicklung beginnt mit Beweisversuchen des Euklidischen Postulates, bald aber bahnt er sich den richtigen Weg.

[1] Vgl. Stäckel, Bemerkungen zu Lamberts Theorie der Parallellinien. Bibl. Math., S. 107—110 (1899).

[2] Was historische und kritische Bemerkungen über Lobatschefskij betrifft, so verweisen wir ein für allemal auf den Band von F. Engel: N. J. Lobatschefskij, Zwei geometrische Abhandlungen aus dem Russischen übersetzt mit Anmerkungen und mit einer Biographie des Verfassers. Leipzig 1899, Teubner. — Wir führen dieses Werk infolge an als „Lobatschefskij". Daselbst S. 446—449 ein vollständiges Verzeichnis seiner Schriften.

1815 beschäftigte sich Lobetschefskij schon mit den Parallelen und in einem seiner Manuskripte zu den Vorlesungen von 1815—1817 finden sich einige Versuche zum Beweis des V. Postulats und Untersuchungen ähnlich denen von Legendre. Aber erst nach 1825 hat er die imaginäre Geometrie erdacht. Das geht aus einer geschriebenen Abhandlung von ihm über die elementare Geometrie hervor, wo gesagt wird, daß man keinen Beweis des V. Postulats besitzt, aber daß ein solcher Beweis nicht unmöglich sein kann.

Zwischen 1813 und 1825 richteten sich Lobatschefskijs Gedanken auf eine Geometrie, die unabhängig von der Hypothese des Euklid ist, und die erste Frucht seiner neuen Studien ist die „*Exposition succincte des principes de la géométrie avec une démonstration rigoureuse du théorème des parallèles*“, die er am 12. [24.] Februar 1826 der physiko-mathematischen Abteilung der Universität vorlegte.

1829—1830 gab er dann eine Abhandlung „Über die Anfangsgründe der Geometrie“ in Druck[1], die den Hauptteil seiner vorhergehenden „Vorlesung“ enthielt und weitere Anwendungen der neuen Theorie auf die Analysis. Der Reihe nach kamen dann heraus die „Imaginäre Geometrie“ [1835][2], die „neuen Anfangsgründe der Geometrie, mit einer vollständigen Theorie der Parallellinien“ [1835—1838][3], die „Anwendungen der imaginären Geometrie auf einige Intgrale“ [1836][4], dann die „*Géométrie*

[1] Kasaner Bote. 1829—1830. — Geometrische Abhandlungen von Lobatschefskij. Kasan 1883—1886. Bd. I, S. 1—67. — Deutsche Übersetzung von F. Engel, S. 1—66 des soeben genannten Werkes.

[2] Kasaner Gelehrte Schriften. 1835. — Geom. Abh. Bd. I, S. 71—120. — Deutsche Übersetzung mit Anmerkungen von H. Liebmann. Abh. z. Gesch. d. Math. XIX, S. 3—50. Leipzig 1904, Teubner.

[3] Kasaner Gelehrte Schriften. 1835—1838. — Geom. Abh., Bd. I, S. 219—486. — Deutsche Übersetzung von F. Engel in Lobatschefskij, S. 67—235.

[4] Kasaner Gelehrte Schriften. 1836. — Geom. Abh., Bd. I, S. 121

imaginaire" [1837][1] und 1840 das zusammenfassende Werkchen: „Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien"[2], das in deutscher Sprache geschrieben ist und von Lobatschefskij bestimmt war, die Aufmerksamkeit der Geometer auf seine Untersuchungen zu lenken. Endlich diktierte und veröffentlichte er 1855 in französischer und russischer Sprache, ein Jahr vor seinem Tod und bereits erblindet, eine vollständige Auseinandersetzung seines geometrischen Systems unter dem Titel: „*Pangéométrie ou précis de géométrie fondée sur une théorie générale et rigoureuse des parallèles.*"[3]

§ 38. Die wichtigsten analytischen Ergebnisse von Lobatschefskij sind:

a) Für Dreiecke mit sehr kleinen [unendlich kleinen] Seiten kann man an Stelle der Formeln der imaginären Trigonometrie wenigstens bis auf unendlich kleine Größen höherer Ordnung die gewöhnlichen trigonometrischen Formeln setzen.[4]

---

bis 218. — Deutsche Übersetzung von H. Liebmann, S. 51—130 des in Anm. 2 S. 71 genannten Buches.

[1] Crelles Journal, Bd. XVII, S. 295—320. — Geom. Abh. II, S. 581—613.

[2] Berlin 1840. Neudruck 1887. — Geom. Abh. II, S. 553—578. — Französische Übersetzung von J. Hoüel, enthalten in den Mém. de Bordeaux IV (1866) und auch in den „Recherches géométriques sur la théorie des parallèles". Paris 1900, Hermann.

[3] Sammlung gelehrter Abhandlungen, verfaßt von Professoren der kaiserlichen Universität Kasan zur Erinnerung an ihr fünfzigjähriges Bestehen. Bd. I, S. 279—340 (1856). — Geom. Abh., Bd. II, S. 617—680. — Italienische Übersetzung von G. Battaglini im Giornale di Mat., T. V, S. 273—336 (1867). — Deutsche Übersetzung von H. Liebmann, Leipzig 1902. (Sammlung von Klassikern der exakten Wissenschaften Nr. 130.) — Faksimile-Neudruck. Paris 1905.

[4] Umgekehrt kann die Annahme der Gültigkeit der euklidischen Geometrie im Umendlichkleinen als Ausgangspunkt für die Ableitung der nichteuklidischen Geometrie benützt werden, und es ist eine der interessantesten Entdeckungen bei der erneuten Durcharbeitung des Gaußschen Nachlasses, daß schon der *Princeps mathematicorum* diesen Weg beschritten sat. Vgl. Gauß' Werke VIII, p. 255—264.

b) Die Vertauschung der Seiten a, b, c mit rein imaginären Seiten ia, ib, ic verwandelt die Formeln der imaginären Trigonometrie in die Formeln der sphärischen Trigonometrie.

c) Führt man auf der Ebene oder im Raum ein Koordinatensystem ähnlich dem gewöhnlichen kartesianischen ein, so kann man mit den Methoden der analytischen Geometrie die Längen von Kurven, die Inhalte von Flächen, den Rauminhalt von Körpern berechnen.

Da wir weiterhin (Kap. IV) von der Elementargeometrie ein geschlossenes Bild auch unter Berücksichtigung aller späteren Fortschritte geben wollen, und da in diesem systematischen Zusammenhang die Früchte seines Geistes voll zur Geltung kommen, so wollen wir hier uns mit dem Urteil begnügen, das Gauß nach der Lektüre der „Geometrischen Untersuchungen" in einem Brief an Schumacher vom 28. November 1846 gefällt hat: „Sie wissen, daß ich schon seit 54 Jahren (seit 1792) dieselbe Überzeugung habe.... Materiell für mich Neues habe ich also im Lobatschefskyschen Werke nicht gefunden, aber die Entwicklung ist auf einem andern Wege gemacht, als ich selbst eingeschlagen habe, und zwar von Lobatschefsky auf eine meisterhafte Art in ächt geometrischem Geiste".

Gauß meint damit die Heranziehung der Raumgeometrie und der auf der Grenzkugel geltenden euklidischen Geometrie, die Hilfsmittel also, denen wir auch bei Johann Bolyai begegnen werden, die aber durch neuere Forschungen ebenso

— Auf dtesem Prinzip ist das Werk von Flye St. Marie (Théorie analytique sur la théorie des parallèles. Paris 1871) und W. Killings Werk (Die nichteuklidischen Raumformen in analytischer Behandlung. Leipzig 1885) aufgebaut. Die Abhandlung von M. Simon (Die Trigonometrie in der absoluten Geometrie. Journal f. d. reine und angew. Math. 109 [1892], S. 187—198) beginnt mit der dort nicht begründeten Annahme über eine Beziehung in einem zwar „unendlich sehmalen" aber nicht in jeder Abmessung unendlich kleinem Dreieck und bedarf also in dieser Hinsicht einer Ergänzung.

entbehrlich werden für die Begründung der nichteuklidischen ebenen Geometrie, wie die euklidische Raumgeometrie für die Ableitung der sphärischen Trigonometrie. (Vgl. § 70—73.)

Hinsichtlich der Darstellungsweise müssen wir mit F. Engel, insbesondere, was die „Anwendung der imaginären Geometrie" anbetrifft, dem Urteil von Gauß beipflichten, daß sie „mehr einem verworrenen Walde gleichen, durch den es, ohne alle Bäume erst einzeln kennen gelernt zu haben, schwer ist, einen Durchgang und Übersicht zu finden".

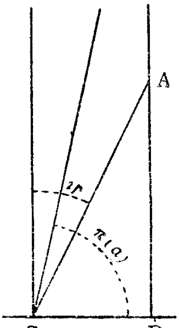


Fig. 36.

§ 39. Lobatschefskij hat sich auch die Aufgabe gestellt, aus kosmischen Dreiecken Aufschluß über die Natur unseres Fixsternraumes zu erhalten, nämlich eine untere Grenze für die durch die Beziehung

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \Pi(a) = e^{\frac{-a}{k}}$$

bestimmte Streckeneinheit k zu finden. Zu diesem Zweck benützte er ein rechtwinkliges Dreieck ABC, wo die Seite $BC = a$ senkrecht der Erdbahnhalbmesser ist und A ein Fixstern zur Richtung BC. (Vgl. Fig. 36.) Wir bezeichnen mit $2p$ die größte Parallaxe des Sterns A.

Dann kommt $\quad \Pi(a) > \sphericalangle ACB = \frac{\pi}{2} - 2p, \quad$ woraus folgt:

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \Pi(a) > \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - p\right) = \frac{1 - \operatorname{tg} p}{1 + \operatorname{tg} p},$$

daher
$$e^{\frac{a}{k}} < \frac{1 + \operatorname{tang} p}{1 - \operatorname{tang} p}.$$

Wir haben dann bei der Annahme $p < \frac{\pi}{4}$

$$\frac{a}{k} = \log \frac{1 + \operatorname{tang} p}{1 - \operatorname{tang} p} = 2\left(\operatorname{tg} p + \tfrac{1}{3} \operatorname{tg}^3 p + \tfrac{1}{5} \operatorname{tg}^5 p + \cdots\right).$$

Überdies weil

$$\operatorname{tg} 2p = \frac{2 \operatorname{tg} p}{1 + \operatorname{tg}^2 p} = 2\left(\operatorname{tg} p + \operatorname{tg}^3 p + \operatorname{tg}^5 p + \cdots\right),$$

so wird endlich $$\frac{a}{k} < \operatorname{tg} 2p.$$

Nimmt man mit Lobatschefskij für $2p$ die Parallaxe des Sirius, die $1'',24$ beträgt, und führt man die Rechnung aus, so kommt $$\frac{a}{k} < 0{,}000006012.$$

Die Streckeneinheit ist also mindestens gleich 166320 Erdbahndurchmesser, sodaß für terrestrische Dreiecke die euklidische Geometrie mit mehr als genügender Annäherung gilt.[1]

Johann Bolyai [1802—1860].

§ 40. Johann Bolyai[2], der Sohn Wolfgangs, geboren zu Klausenburg am 15. Dezember 1802, gestorben 27. Januar 1860 in Maros-Vásárhely, gehört zu den frühreifen Genies. Er hat schon als Schüler der kaiserlichen Ingenieurakademie in Wien, allen Warnungen seines Vaters zum Trotz, sich gemeinsam mit seinem Freund Karl Szász [1798—1853] am Beweis des Parallelenpostulats und an den Folgerungen aus seiner Nichtgiltigkeit versucht. Am 23. November 1823 konnte er seinem skeptischen Vater mitteilen: ... „Ich habe so großartige Sachen hervorgebracht, daß ich selbst verblüfft war und daß es ewig schade wäre, wenn sie verloren gingen. Wenn Sie es sehn

[1] Vgl. S. 76—78 der oben S. 72 Anm. 3 genannten Übersetzung der Pangeometrie, ferner K. Schwarzschild, Vierteljahrsschrift der astr. Gesellschaft, Berlin 1900, S. 337—347, und P. Harzer, Jahresber. d. deutsch. Math. Ver. 17 (1908), S. 237—267. — H. Poincaré hat in seinem bekannten Werk „Hypothese und Wissenschaft" (Deutsch von L. und F. Lindemann, 2. Aufl. 1906) nachdrücklichst darauf hingewiesen, daß jede Abweichung der Messungen von den Gesetzen der euklidischen Geometrie durchaus physikalisch erklärt werden kann, und daß dem Erfahrungsraum immer die euklidische Geometrie zugrunde gelegt werden kann.

[2] Vgl hierzu das in § 29 angeführte Werk „Bolyai" von P. Stäckel und Schlesinger, J. Bolyai, Festrede gehalten am 16. Januar 1903. Deutsche Math. Ver. 12 (1903), S. 165—194.

werden, werden Sie es auch erkennen; jetzt kann ich nur soviel sagen: daß ich aus Nichts eine neue Welt geschaffen habe".

Der Vater wollte die Theorie als Anhang dem Tentamen einverleiben, wies übrigens darauf hin, daß eine rasche Veröffentlichung angebracht sei „da manche Dinge gleichsam eine Epoche haben, wo sie dann an mehreren Orten aufgefunden werden, gleichwie im Frühjahr die Veilchen mehrwärts ans Licht kommen".

1825 teilte Johann seine Arbeit seinem ehemaligen Lehrer an der Kriegsakademie J. Walter von Eckwehr [1789—1857] mit, doch ist über den Verbleib dieses Entwurfes nichts bekannt.[1] Die lateinische Bearbeitung übergab Johann 1829 dem Vater. Im Juni 1831 erschienen die ersten Sonderabzüge mit dem langen Titel: *Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens: a veritate aut falsitate Axiomatis XI Euclidei, a priori haud unquam decidenda, independentem; adjecta ad causam falsitatis quadratura circuli geometrica.*[2]

In engen Rahmen zusammengepreßt — sei es, um den Raum eines *Appendix* nicht zu überschreiten, sei es, um mit einem gewissen Stolz die Reife und Geschlossenheit zu unterstreichen — gibt das Büchlein in 43 zum Teil sehr kurzen Paragraphen einen vollständigen, klassisch geschriebenen Abriß der „absoluten" Geometrie, d. h. der Geometrie in einer Fassung, die, soweit dies irgend geht, offen läßt, ob das alte Parallelenpostulat oder das allgemeinere gilt, wonach durch einen Punkt zwei nichtzusammenfallende Parallelen zu einer Geraden gehn.

---

[1] Herr Stäckel schrieb mir darüber (5. Februar 1918): „Im Nachlaß Wolfgangs wie Johanns fehlt dieses wichtige Schriftstück. Frischauf hat seiner Zeit auf meine Veranlassung bei der Familie v. Eckwehr Nachforschungen angestellt, leider ohne Erfolg."

[2] Prachtausgabe Budapest 1902. Übersetzung in „Bolyai" II, S. 182 bis 216.

Wir versuchen den Inhalt durch Stichworte und einige Leitsätze zu charakterisieren:

1. Definition der Parallelen als asymptotischer Geraden und ihrer Eigenschaften (Unabhängigkeit, Transitivität usw.) unabhängig vom Euklidischen Postulat.

2. Kreis und Kugel von unendlich großem Radius (*Linea L*, *superficies F*). Die Geometrie auf F ist identisch mit der gewöhnlichen Geometrie.

3. Durch konstruktiven Zusammenhang mit dem Paralleldreikant gegebener Nachweis der absoluten Gültigkeit der sphärischen Trigonometrie.

4. Ebene Trigonometrie. Berechnung von Flächen- und Rauminhalten.

5. Verschiedene Konstruktionen, z. B. die Parallelenkonstruktion, und die Quadratur des Kreises in speziellen Fällen. —

Den ihm zugedachten Abzug erhielt Gauß erst Anfang Februar 1832 durch einen Bekannten der Bolyais, Baron von Zeyk und äußerte sich schon am 14. Februar darüber an Gerling: „Noch bemerke ich, daß ich dieser Tage eine kleine Schrift aus Ungarn über die nichteuklidische Geometrie erhalten habe, worin ich alle meine eigenen Ideen und Resultate wiederfinde, mit großer Eleganz entwickelt, obwohl in einer für jemand, dem die Sache fremd ist, wegen der Konzentrierung etwas schwer zu folgenden Form“.

Dem jungen Entdecker aber stellte Gauß am 6. März 1832 einen Meisterbrief aus, der, an Wolfgang gerichtet, den Ruhm des Sohnes für alle Zeiten sichert: „Jetzt Einiges über die Arbeit Deines Sohnes. Wenn ich damit anfange, daß ich solche nicht loben darf, so wirst Du wohl einen Augenblick stutzen: aber ich kann nicht anders; sie loben hieße mich selbst loben: denn der ganze Inhalt der Schrift, der Weg, den Dein Sohn eingeschlagen hat, und die Resultate, zu denen er geführt hat, kommen fast durchgehends mit meinen zum Teil schon seit

30—35 Jahren angestellten Meditationen überein. In der Tat bin ich dadurch auf das Äußerste überrascht".

Diesen Gipfel seines Erfolges sollte Johann Bolyai nicht mehr überschreiten. So bewahrt Lobatschefskij entschieden den Vorrang bei der Bestimmung des Tetraederinhaltes, einer Aufgabe, die Gauß in jenem „Meisterbrief" vorgeschlagen hatte, wohl wissend, daß sie zu keinem einfachen Ergebnis führt. —

Traurig ist die Strandung bei dem vergeblichen Versuch, das Parallelenpostulat Euklids doch noch durch vermeintliche Widersprüche in den Relationen zwischen den Abständen von fünf Punkten im Raum erweisen zu wollen.[1] Auch dürfen wir wohl davon absehn, seine peinlichen Anwandlungen, dem *princeps mathematicorum* den Kranz zu entreißen und seinen ihm zufällig (im Druck) zuvorgekommenen Mitbewerber Lobatschefskij durch öde Schulmeisterei herabzusetzen, hier zu besprechen.

Dies gehört in das traurige und pathologisch so interessante — leider unerschöpfliche — Kapitel der Nervosität, die in ihrem Übermaß an Größen- und Verfolgungswahn streift. Für die Psychologie des Forschers überhaupt ist es ein klassischer Beitrag — das reine Bild, das uns Johann Bolyai im *Appendix* von der Höhe seines frühreifen Schaffens gibt, würde dadurch nur getrübt werden.

§ 41. Zur Charakteristik von J. Bolyais Bestreben, in der absoluten Geometrie sich möglichster Kürze zu bedienen, wollen wir noch seine Zeichen

[1] Der Titel der Schrift von Johann, worin er diesen Beweis auseinandersetzen wollte, lautet: „Beweis des bis nun auf der Erde immer noch zweifelhaft gewesenen, weltberühmten und, als der gesammten Raum- und Bewegungslehre zu Grunde dienend, auch in der That allerhöchst wichtigsten 11. Euklid'schen Axioms. Von J. Bolyai von Bolya, k. k. Genie-Stabshauptmann in Pension." Vgl. darüber die Schrift von P. Stäckel, Untersuchungen aus der absoluten Geometrie aus Johann Bolyais Nachlaß. Math. u. naturw. Berichte aus Ungarn XVIII, S. 280—307 (1902).

$$\bigcirc a \quad \text{und} \quad \oplus a$$

für Umfang und Inhalt des Kreises vom Radius a erwähnen. Später hat der belgische Geometer De Tilly[1] noch die Bezeichnung

$$Ea$$

für das Verhältnis des Bogens der Abstandslinie, des Gaußschen Hypercykls zu dem Grundlinienstück, über dem der Bogen steht und von dem er den Abstand a hat, eingeführt. In dieser Bezeichnung sind die Grundformeln für das rechtwinklige Dreieck ABC mit den Winkeln $\sphericalangle BCA = \frac{\pi}{2}$, $\sphericalangle CAB = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$

$$(1) \quad \begin{cases} \bigcirc a = \bigcirc c \cdot \sin\alpha, \\ \bigcirc b = \bigcirc c \cdot \sin\beta, \end{cases} \qquad (2) \quad \begin{cases} \cos\alpha = Ea \cdot \sin\beta, \\ \cos\beta = Eb \cdot \sin\alpha, \end{cases}$$

$$(3) \qquad Ec = Ea \cdot Eb.$$

Bonola[2] hat u. a. die folgende allgemeine Formel für das rechtwinklige Dreieck hinzugefügt

$$\bigcirc^2 a\,(Ea + Eb \cdot Ec) + \bigcirc^2 b \cdot (Eb + Ec \cdot Ea) \\ = \bigcirc^2 c\,(Ec + Ea \cdot Eb).$$

In dieser allgemeinen Gestalt gelten die Formeln für die euklidische und nichteuklidischen Geometrien.

---

[1] De Tilly, Études de Mécanique abstraite. Mémoires couronnés et autres Mémoires von der kgl. Akademie in Belgien, Bd. XXI (1870). Man sehe auch von demselben Verfasser: Essai sur les principes fondamenteaux de la Géométrie et de la Mécanique. Mém. de la Société des Sciences de Bordeaux, t. III, 1^er cahier (1878). Eine eingehende Kritik der Grundlagen von De Tillys Untersuchungen findet man in Lie, Theorie der Transformationsgruppen III, S. 524—528. Leipzig 1893.

[2] Vgl. R. Bonola, La trigonometria assoluta secondo Giovanni Bolyai. Rend. Istituto Lombardo (2) t. XXXVIII (1905). — Vgl. auch Liebmann, Begründung der sphärischen Trigonometrie unabhängig vom Parallelenpostulat verbunden mit neuer Begründung der hyperbolischen Geometrie. Leipziger Berichte 60 (1908), S. 289—305.

Die Aufnahme der nichteuklidischen Geometrie.

§ 42. Die Werke von Lobatschefskij und Bolyai fanden bei ihrem Erscheinen nicht die Aufnahme, die so viele Jahrhunderte langsamer und stetiger Vorbereitung zu versprechen schienen. Darüber darf man sich weiter nicht wundern, weil die Geschichte der Wissenschaft uns lehrt, daß jede radikale Änderung in den einzelnen Fächern nicht mit einem Schlag die Überzeugungen und die Vorurteile niedertritt, auf denen Forscher und Lehrer eine lange Zeit hindurch ihre Lehren errichteten.

In unserem Fall wurde die Zustimmung zur nichteuklidischen Geometrie aus besonderen Gründen verzögert, z. B. die Schwierigkeit, welche die Lektüre der russischen Werke von Lobatschefskij bereitete, die unbekannten Namen der beiden Neuerer und die damalige Auffassung von Kants Raumlehre.

Um die Dunkelheit zu zerstreuen, die in den ersten Jahren die neuen Lehren verhüllte, dienten die französischen und deutschen Schriften von Lobatschefskij, vor allem aber die beständige und unermüdliche Arbeit einiger Geometer, deren Namen jetzt mit der Verbreitung und dem Sieg der nichteuklidischen Geometrie verknüpft sind. Wir wollen hauptsächlich von C. L. Gerling [1788—1864], R. Baltzer [1818—1887] und Fr. Schmidt [1827—1901] in Deutschland sprechen; ferner von J. Hoüel [1823—1866], G. Battaglini [1826—1894], E. Beltrami [1835—1900] und A. Forti in Frankreich und in Italien.

§ 43. Gerling, der seit 1816 mit Gauß in Briefwechsel über die Parallelen stand[1], und der ihm 1819 die Note von Schweikart über die „Astralgeometrie“ [vgl. § 35] mitteilte, hatte von Gauß selbst [1832] und in Worten, die in ihm notwendig eine berechtigte Neugier erwecken mußten, die Angabe

[1] Vgl. Bd. VIII der Werke von Gauß, S. 167—169.

über eine „kleine Schrift" über die nichteuklidische Geometrie, verfaßt von einem jungen österreichischen Offizier, dem Sohn von W. Bolyai.[1] Die später erfolgte genaue Literaturangabe [1844] über die Werke von Lobatschefskij und Bolyai[2] durch Gauß veranlaßte Gerling, sich die „Geometrischen Untersuchungen" und den „Appendix" zu verschaffen und sie so der Vergessenheit zu entreißen, in die sie verbannt zu sein schienen.

§ 44. Der von 1860—1863 veröffentlichte Briefwechsel zwischen Gauß und Schumacher[3] und die Versuche von Legendre, auch in den elementaren Lehrbüchern strenge Ordnung in die Parallelentheorie zu bringen, veranlaßten Baltzer, in der zweiten Auflage seiner „Elemente der Mathematik" [1867] die euklidische Definition der Parallelen zu ersetzen durch die aus dem neuen Raumbegriff abgeleitete und mit Lobatschefskij die Beziehung: $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$, die das euklidische Dreieck charakterisiert, zu den experimentellen Eigenschaften zu rechnen. Um dann diese Neuerung zu rechtfertigen, verfehlte Baltzer nicht, eine kurze Andeutung über die theoretische Möglichkeit einer Geometrie zu entwickeln, die allgemeiner ist als die gewöhnliche und die sich auf die Annahme von zwei Parallelen gründet, ferner die Namen ihrer Begründer ins rechte Licht zu setzen.[4] Zur selben Zeit lenkte Hoüel,

---

[1] Vgl. den Brief von Gauß an Gerling auf S. 220, Bd. VIII von Gauß Werken. In diesem Brief spricht Gauß vom Inhalt des „Appendix" und sagt: „worin ich alle meine eigenen Ideen und Resultate wiederfinde mit größter Eleganz entwickelt" und vom Verfasser der Schrift: „Ich halte diesen jungen Geometer v. Bolyai für ein Genie erster Größe".

[2] Gauß' Werke, Bd. VIII, S. 234—238.

[3] Briefwechsel zwischen C. F. Gauß und H. C. Schumacher, Bd. II, S. 268, 341; Bd. V, S. 246. Altona 1860—1863. Über die damals bekannten Gedanken von Gauß siehe auch: Sartorius v. Waltershausen, Gauß zum Gedächtnis, S. 80—81. Leipzig 1856. Vgl. Gauß' Werke, Bd. VIII, S. 267—268.

[4] Vgl. die Elemente der Mathematik von Baltzer, Bd. II, 5. Aufl.,

dessen Interesse für Fragen der elementaren Geometrie wohlbekannt war, im Gebiete der Wissenschaft das Interesse auf die nichteuklidische Geometrie[1] und wurde durch sein Interesse angespornt, die „Geometrischen Untersuchungen" und den „Appendix" ins Französische zu übersetzen.

§ 45. Die französische Übersetzung des Werkchens von Lobatschefskij erschien 1866 zusammen mit der eines kurzen Auszuges des Briefwechsels zwischen Gauß und Schumacher[2]. Die so erhaltene Nebeneinanderstellung der Gedanken von Lobatschefskij-Bolyai und derer von Gauß war äußerst fruchtbar, weil der Name Gauß und seine Zustimmung zu den Entdeckungen der beiden damals verborgenen und unbekannten Geometer beitrug, in der wirksamsten und sichersten Weise der neuen Lehre Glauben und Geltung zu verschaffen.

Die französische Übersetzung des „Appendix" erschien 1867[3], begleitet von einer vorausgehenden „*Notice sur la vie et les travaux de deux mathématiciens hongrois W. et J. Bolyai de*

S. 12—14. Leipzig 1878. Bd. IV, S. 5—7, 24—31 der italienischen Übersetzung von L. Cremona. Genova 1867.

[1] Hoüel hatte damals schon veröffentlicht seinen berühmten: Essai d'une exposition rationelle des principes fondamenteaux de la Géométrie élémentaire. Arch. d. Math. u. Phys., Bd. 40 (1863).

[2] Mémoires de la Société des Sciences Phys. et Naturelles de Bordeaux t. IV, p. 88—120 (1866). Sie wurde auch in einem besonderen Werkchen veröffentlicht mit dem Titel: Études géométriques sur la théorie des parallèles par N. J. Lobatschefskij, Conseiller d'État de l'Empire de Russie et Professeur à l'Université de Kasan; traduit de allemand par J. Hoüel, Suivie d'un Extrait de la correspondance de Gauß et de Schumacher. Paris 1866, G. Villars.

[3] Mém. Soc. Scienc. Phys. et Nat. de Bordeaux, t. V, p. 189—248. Sie erschien auch besonders in einem Werkchen des Titels: La science absolue de l'espace, indépendante de la vérité ou fausseté de l'Axiome XI d'Euclide (que l'on ne pourra jamais établir a priori): suivie de la quadrature géométrique du cercle, dans le cas de la fausseté de l'Axiome XI, par Jean Bolyai, Capitaine au corps du génie dans l'armée autrichienne; Précédé d'une notice sur la vie et les travaux de W. et de J. Bolyai, par M. Fr. Schmidt. Paris 1868, G. Villars.

Bolya", die vom Architekten Fr. Schmidt auf Ersuchen von Hoüel[1] geschrieben war, und nachfolgenden Bemerkungen von W. Bolyai, die aus dem 1. Band seines „Tentamen" entnommen waren und aus einem zusammenfassenden Werkchen von Wolfgang über die Grundlagen der Arithmetik und der Geometrie.[2]

Die von Schmidt gesammelten Angaben über die beiden Bolyai wurden gleichzeitig [1867] im „Archiv d. Math. u. Phys." veröffentlicht und im folgenden Jahr machte A. Forti, der schon einen historisch-kritischen Artikel über Lobatschefskij[3] geschrieben hatte, die Italiener mit den Namen und den Werken der nunmehr berühmten ungarischen Mathematiker bekannt.[4]

Zu Ehren von Hoüel muß auch sein Interesse für die Manuskripte von Johann Bolyai erwähnt werden, die damals [1867] kraft einer testamentarischen Verfügung von Wolfgang in der Bibliothek des reformierten Kollegiums von Maros-Vásárhely verwahrt wurden. Durch Vermittlung des Fürsten B.

[1] Vgl. P. Stäckel, Franz Schmidt. Jahresberichte der Deutschen Math.-Ver., Bd. XI, S. 141—146 (1902).

[2] Dieses Werkchen von W. Bolyai wird gewöhnlich kurz mit den ersten Worten seines Titels zitiert: Kurzer Grundriß. Es wurde 1851 in Maros-Vásárhely gedruckt.

[3] Intorno alla geometria immaginaria o non euclidiana. Considerazioni storico-critiche; Rivista Bolognese di scienze, lettere, arti e scuole, t. II, p. 171—184 (1867). Er wurde besonders gedruckt in einem Werkchen von 16 Seiten (Bologna 1867, Fava e Garagnani). Dieselbe Schrift mit verschiedenen Zusätzen und unter dem Titel: Studii geometrici sulla teorica delle parallele di N. J. Lobatschefskij wurde abgedruckt in dem politischen Journal La Provincia di Pisa, Jahrg. III, No. 25, 27, 29, 30 (1867) und zum Teil wieder veröffentlicht unter dem ursprünglichen Titel. Pisa 1867, Nistri.

[4] Vgl.: Intorno alla vita ed agli scritti di Wolfgang e Giovanni Bolyai di Bolya, matematici ungheresi. Bolletino di Bibliographia e di Storia delle scienze Mat. e Fisiche, t. I, p. 277—299 (1869). Dieser Artikel von Forti ist bereichert durch umfängliche historische und bibliographische Anmerkungen von B. Boncompagni.

Boncampagni [1821—1894], der seinerseits den ungarischen Kultusminister Baron Eötvös dafür interressierte, erreichte er, daß sie [1869] bei der ungarischen Akademie der Wissenschaften in Budapest[1] hinterlegt wurden und so Gegenstand der Geduld erfordernden und sorgfältigen Studien von Schmidt, neuerdings von Stäckel werden konnten.

Überdies verfehlte Houël bei der allerverschiedensten Gelegenheit nicht sich zu bemühen, daß der nichteuklidischen Geometrie ein dauernder Triumph gesichert würde; es genüge, seinen „*Essai critique sur les principes fondamenteaux de la géométrie*“[2] anzuführen, die Artikel „*Sur l'impossibilité de démontrer par une construction plane le postulatum d'Euclide*“[3], die „*Notices sur la vie et les travaux de N. J. Lobatschefskij*“[4], endlich seine französischen Übersetzungen verschiedener Schriften über die nichteuklidische Geometrie[5], um einzusehen, welch glühenden Apostel sie in dem berühmten französischen Mathematiker gefunden hat.

§ 46. Mit ebensoviel Überzeugung wie Eifer führte in Italien Giuseppe Battaglini die neuen geometrischen Spekulationen ein und verbreitete sie, und das von ihm gegründete und geleitete „Giornale di Matematica“ war von 1867 an das gleichsam amtliche Organ für die nichteuklidische Geometrie.

Der ersten Arbeit von Battaglini: „*Sulla geometria immaginaria di Lobatschewsky*“[6], die geschrieben ist, um unmittelbar

[1] Vgl. den oben im Text zitierten Artikel von Stäckel über Fr. Schmidt.

[2] 1. Aufl. Paris 1867, G. Villars; 2. Aufl. 1883. Vgl. Anm. 2 S. 46.

[3] Giornale di Matematiche, t. VII, p. 84—89; Nouvelles Annales (2), t. IX, p. 93—96.

[4] Bull. des Sciences Math., t. I, p. 66—71, 324—328, 384—388 (1870).

[5] Außer den Übersetzungen, von denen im Text die Rede ist, übersetzte Houël eine Schrift von G. Battaglini (vgl. die folgende Anm.), zwei von Beltrami (vgl. die Anm. zu § 46); eine von Riemann (§ 91) und eine von Helmholtz (§ 93).

[6] Giornale di Mat., t. V, p. 217—231 (1867). — Napoli, Rend. Acc.

das Prinzip aufzustellen, welches zur Grundlage der allgemeinen Parallelentheorie und der Lobatschefskijschen Geometrie dient, folgt wenige Seiten darauf die italienische Übersetzung der „Pangeometrie“[1], und auf diese 1868 die Übersetzung des „Appendix“. Gleichzeitig kam im 6. Band des „Giornale di Matematica“ das berühmte „*Saggio di interpretazione della geometria non euclidea*“[2] von E. Beltrami heraus, „das ein unerwartetes Licht auf die damals schwebende Streitfrage über die grundlegenden Prinzipien der Geometrie und über die Ideen von Gauß und Lobatschefskij warf“.[3]

Blättert man die folgenden Jahrgänge des „Giornale di Matematica“ auf, so begegnet man häufig Schriften über die nichteuklidische Geometrie: zwei von Beltrami [1872], die sich an den vorgenannten „Saggio“ anschließen, verschiedene von Battaglini [1874—78] und d'Ovidio [1875—77], die einige Fragen der neuen Geometrie mit den von Cayley geschaffenen projektiven Methoden behandeln; die von Houël [1870] über die Unbeweisbarkeit des euklidischen Postulats; andere von Cassini [1873—81], Günther [1876], De Zolt [1877], Frattini [1878], Ricordi [1880] usw.

Science Fis. et Matem., t. VI, p. 157—173 (1867). — Französische Übersetzung von Houël, Nouv. Annales, t. VII, p. 209—221, 265—277 (1868).

[1] Sie wurde auch besonders gedruckt in einem Werkchen mit dem Titel: Pangeometria o sunto di geometria fondata sopra una teoria generale e rigorosa delle parallele. Napoli 1867, 2. Aufl. 1874.

[2] Ins Französische übersetzt von Houël in den Annales Scient. de l'École Normale Sup., p. 251—288, t. VI (1869).

[3] Vgl. die Commemorazione di E. Beltrami von L. Cremona. Giornale di Mat., t. XXXVIII, p. 362 (1900), sowie den Nachruf von E. Pascal (Math. Annalen 57, S. 65—107. Leipzig 1903).

Viertes Kapitel.

Nichteuklidisch-hyperbolische Elementargeometrie.

§ 47. In diesem Kapitel ist das Ziel gesteckt, ein geschlossenes Bild der nichteuklidischen Elementargeometrie zu geben. Die Grundlagen, nämlich die Eigenschaften der Parallelen haben wir bei der Darstellung von Gauß Entdekkungen kennen gelernt. Im übrigen erscheint es zweckmäßig, sich dabei auch aller Fortschritte zu bedienen, die seit den Tagen der Klassiker, also vor allem Lobatschefskij und J. Bolyai in dieser Hinsicht gemacht worden sind.

Solcher Darstellungen gibt es in mehr oder weniger umfangreichen Werken eine ganze Anzahl, doch bemühen sich nicht alle um eine wirklich elementare Darstellung. Ziemlich eng an das Vorbild J. Bolyais lehnt sich noch Frischauf[1]; seit dem Erscheinen seiner Bücher hat das Gebiet insbesondere durch die Behandlung der Fragen, zu denen der vor allem von Engel und Stäckel eröffnete Zugang zu den Klassikern Anlaß gegeben hat, mehrfache Durcharbeitung und Vereinfachung erfahren.[2]

---

[1] J. Frischauf, Absolute Geometrie nach J. Bolyai. Leipzig 1872. — Elemente der absoluten Geometrie. Leipzig 1876.

[2] Wir führen einige Bücher an, ohne Vollständigkeit beanspruchen zu wollen: J. Barbarin, La géometrie non-euclidienne. Paris 1902. — J. L. Coolidge, The elements of non-euclidean geometry. Oxford 1909. — D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie. 3. Aufl. Leipzig 1909. — W. Killing, Die nichteuklidischen Raumformen in analytischer Behandlung. Leipzig 1885. — W. Killing, Einführung in die Grundlagen der Geometrie. Bd. I, Leipzig 1893. Bd. II, Leipzig 1898. — H. Liebmann, Nichteuklidische Geometrie. 2. Aufl. Leipzig 1912.

Indem wir Fragen der Axiomatik vorläufig zurückstellen (sie kommen in § 74 und in Kapitel V zur Sprache) stützen wir uns hier auf die von Gauß entwickelten Grundeigenschaften der Parallelen[1] und auf die von Hilbert in einfachster Weise durch Konstruktion begründete Existenz des gemeinsamen Lotes zweier einander nichtschneidenden und nichtparallelen Geraden[2] und benützen die Bezeichnung $\Pi(p)$ = Parallelwinkel der zum Lot p gehört.[3] Absolute Vollständigkeit der Verweise wird wegen der vielfachen Wiederkehr ähnlicher Betrachtungen schon bei demselben Autor, insbesondere bei Lobatschefskij, nicht unbedingt erforderlich erachtet; im Sinne der Freunde der nichteuklidischen Geometrie wird es mehr liegen, eine in sich abgerundete Systematik mit kritischen Bemerkungen vor Augen zu haben.

Die Transversalen des allgemeinen Dreiecks.

§ 48. Im euklidischen Dreieck treffen die von den Ecken nach den Mitten der Gegenseiten gezogenen Transversalen ein-

— F. Schur, Grundlagen der Geometrie. Leipzig 1909. — Darstellungen der nichteuklidischen Geometrie finden sich auch in: F. Enriques(-Thieme), Fragen der Elementargeometrie I. Die Grundlagen der Geometrie. Leipzig 1901 (Artikel VIII von Bonola). — E. Pascal(-Timerding), Repertorium der höheren Geometrie. 2. Aufl. II, 1. Grundlagen und ebene Geometrie. Leipzig 1910. — Weber-Wellstein, Enzyklopädie der elementaren Geometrie. 2. Aufl. Leipzig 1907. — M. Zacharias, Elementargeometrie und elementare nichteuklidische Geometrie in synthetischer Behandlung. (Math. Enz. III AB 9, Leipzig 1918.) Nr. 29—32.

[1] Kap. III, § 32. Lobatschefskij, S. 169—171. Bolyai, S. 185 bis 187.

[2] Kap. III, § 33. Lobatschefskij (S. 26, 256) errechnet das gemeinsame Lot auf mühseligem Weg, der überdies die Raumgeometrie voraussetzt. Durch Hilberts Konstruktion hat die Elementargeometrie eine wesentliche Vereinfachung erhalten, von der wir ausgiebigen Gebrauch machen.

[3] Kap. III, § 39. Die Bezeichnung $\Pi(p)$ hat Lobatschefskij im Jahre 1836 eingeführt (Lob. Seite 167).

ander in einem Punkt, desgleichen die Mittelsenkrechten der drei Seiten, die Halbierungslinien der drei Innenwinkel oder eines Innenwinkels und zweier ihm nicht anliegenden Außenwinkel, endlich die drei Höhen. Alle diese Sätze behalten ihre Geltung in der nichteuklidischen Geometrie, wie sie ja bekanntlich auch für die sphärische Geometrie bestehen, wenn sich auch die Beweisform ändert.

§ 49. Die Mittelsenkrechten der Seiten[1]. Es sind drei Fälle zu unterscheiden: Wenn man in den Mittelpunkten D, E, F der Seiten BC, CA, AB die Senkrechten errichtet, so können zwei von ihnen einen reellen oder idealen Punkt oder ein Ende gemein haben, und es ist dann nachzuweisen, daß die dritte Mittelsenkrechte ebenfalls durch diesen Punkt hindurchgeht.

Im ersten Fall wird genau wie in der euklidischen Geometrie verfahren, um nachzuweisen, daß die dritte Mittelsenkrechte durch den Schnittpunkt der beiden anderen geht.

Im zweiten Fall mögen etwa die auf a und b errichteten Mittelsenkrechten eine gemeinsame Senkrechte $D'E'$ haben. Auf diese Gerade fällen wir von den Ecken des Dreiecks aus die Lote AA', BB', CC'. Dann sind die dreirechtwinkligen Vierecke $AEE'A'$ und $CEE'C'$, ebenso $CDD'C'$ und $BDD'B'$ einander paarweise symmetrisch kongruent, daher

$$AA' = CC' = BB'.$$

Verbindet man jetzt im Viereck $AA'B'B$ die Mittelpunkte F und F' der Gegenseiten AB und $A'B'$, so entstehen wieder zwei symmetrisch kongruente Vierecke, die bei A und B spitze, bei F und F' aber rechte Winkel haben. Es steht also die im Mittelpunkt F von AB errichtete Senkrechte auch (in F') senkrecht auf dem gemeinsamen Lot der beiden andern Mittelsenkrechten, w. z. b. w.

Der dritte Fall ist durch indirekten Beweis zu erledigen.

---

[1] Lobatschefskij, S. 181—184. Bolyai, S. 189. Die unten folgende einfache indirekte Beweisführung bei Liebmann, S. 29—30.

Haben zwei von den drei Mittelsenkrechten ein Ende gemein, so liegt jedenfalls keiner der beiden ersten Fälle vor. Demnach müssen jetzt die drei Mittelsenkrechten entweder ein Ende gemein haben oder ein asymptotisches Dreieck bilden. Wir bezeichnen jetzt im gegebenen Dreieck den größten Winkel mit γ. Dann schneiden wegen $\alpha \leqq \gamma$ und $\beta \leqq \gamma$ die Mittelsenkrechten der Seiten b und a sicher die Seite c; es gibt also eine Seite, die von allen drei Mittelsenkrechten getroffen wird. Da es aber keine Gerade gibt, die die drei Seiten eines asymptotischen Dreiecks trifft, so folgt schließlich, daß jetzt die drei Mittelsenkrechten ein Ende gemein haben.

J. Bolyai hat diesen dritten Fall benützt um die Konstruktion von p bei gegebenem $\Pi(p)$ auszuführen, wenn man die Konstruktion von $\Pi(p)$ bei gegebenem p, also das Parallelenziehen als bekannt voraussetzt.[1]

§ 50. Die Winkelhalbierenden. Die drei Halbierungslinien der Innenwinkel eines Dreiecks treffen einander immer in einem Punkt, der innerhalb des Dreiecks liegt. Das wird genau wie in der euklidischen Geometrie bewiesen.

Für die Halbierungslinien eines Innenwinkels und zweier ihm nicht anliegenden Außenwinkel sind wieder drei Fälle zu unterscheiden, genau wie bei der Untersuchung der Mittelsenkrechten. Nur der zweite und dritte Fall bedarf noch einer Betrachtung.

Haben etwa die Halbierungslinien der Außenwinkel bei A und B eine gemeinsame Senkrechte $A'B'$, so müssen, weil die halben Außenwinkel doch spitz sind, AB und $A'B'$ ein gemeinsames Lot besitzen, dessen Fußpunkte F und F' zwischen A und B, bezw. zwischen A' und B' liegen. Spiegelt man FF' an AA', so erhält man auch die Fußpunkte E und E' des gemeinsamen Lotes von CA und $A'B'$. Spiegelung von FF' an BB' gibt uns das gemeinsame Lot DD' von CB und $A'B'$.

[1] Bolyai, Appendix § 35 (S. 210).

Aus
$$EE' = FF' = DD'$$
erkennt man dann leicht, daß, wenn C' den Fußpunkt des von C auf die Gerade $E'A'F'B'D'$ gefällten Lotes bedeutet, die bei $E(D), E'(D')$, $C'(C')$ rechtwinkligen Vierecke $CEE'C'$, $CDD'C'$ symmetrisch kongruent sind, also
$$\sphericalangle ACC' = \sphericalangle BCC'.$$
Damit ist auch dieser Fall erledigt.

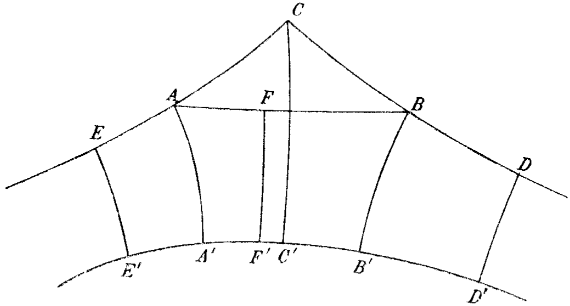


Fig. 37.

Der dritte Fall ist genau wie oben, bei der Untersuchung der drei Mittelsenkrechten, zu behandeln.

Schließlich ist noch zu erwähnen, daß ein „Schnittpunkt" der drei Winkelhalbierenden auch dann existiert, wenn die Ecken nicht mehr reelle Punkte sind. Unter der Halbierungslinie eines Winkels im allgemeinen Sinn ist dabei die Gerade zu verstehen, zu der die beiden Schenkel des Winkels symmetrisch liegen, also z. B. die Mittelsenkrechte des gemeinsamen Lotes bei zwei Geraden, die einander nicht schneiden und nicht parallel sind.

In diesen Zusammenhang gehört die Konstruktion korrespondierender Punkte auf Parallelen. Verbindet man zwei Punkte A und B auf zwei Parallelen mit dem gemeinsamen Ende C, so braucht man nur die Halbierungslinien der Winkel bei A und B zum Schnitt zu bringen (M) und von M aus die

Lote auf die beiden Parallelen zu fällen. Sind D und E die Fußpunkte der Lote, so ist die Halbierunglinie von $\sphericalangle DME$ zugleich Halbierungslinie des Nullwinkels C.

§ 51. Der Höhenschnittpunkt.[1] In der euklidischen Geometrie kann man bekanntlich den Satz vom Höhenschnittpunkt auf die Sätze über die Schnittpunkte von Winkelhalbierenden zurückführen.

Man geht von der Betrachtung aus, daß die Halbierungslinien der drei Außenwinkel bei A, B und C, wenn man sie verlängert, ein Dreieck $A_1 B_1 C_1$ ergeben. Durch A_1 geht dann außer den Halbierungslinien der Außenwinkel bei B und C noch die auf $A_1 C_1$ senkrecht stehende Halbierungslinie des Innenwinkels bei B, d. h. $B_1 B$ ist eine Höhe des Dreiecks $A_1 B_1 C_1$ und zugleich Halbierungslinie des Innenwinkels B des Dreiecks ABC. Die drei Höhen des Dreiecks $A_1 B_1 C_1$ sind zugleich innere Winkelhalbierende des Dreiecks ABC, gehn also durch einen Punkt.

Durch indirekten Beweis kann dann festgestellt werden, daß umgekehrt die Höhen eines Dreiecks Winkelhalbierende der drei Innenwinkel oder eines Innenwinkels und zweier Außenwinkel des Dreiecks ihrer Fußpunkte sind.

Diese Betrachtungen gelten mit den gehörigen Begriffsverallgemeinerungen, die oben im Einzelnen durchgeführt worden sind, auch für die nichteuklidische Geometrie.

Unter Verwendung des Satzes vom Höhenschnittpunkt können jetzt zwei Aufgaben relativ gelöst werden, d. h. wenn man voraussetzt, daß zwei Parallelen gegeben sind.

Die Konstruktion von $\Pi(p)$ bei gegebenem p ist so auszuführen: Zwischen den Parallelen mit gemeinsamem Ende C wähle man H im übrigen beliebig, jedoch so, daß sein Abstand HD von der einen Parallelen gleich p ist. Von H fälle man auch

[1] Den Höhenschnittpunkt benützt zuerst systematisch L. Gérard in seiner Thèse: Sur la géometrie non-euclidienne. Paris 1892.

das Lot HE auf die andere Parallele. Dann bestimme man den Schnittpunkt A von DH mit der zweiten und B von EH mit der ersten Parallelen. Die „Punkte" A und B können stets gefunden werden, wenn nötig mit Heranziehung der Hilbertschen Konstruktion (§ 33). Das von H auf AB gefällte Lot HF geht, rückwärts verlängert, durch das Ende C, weil es die dritte Höhe im Dreieck ABC ist, und $\sphericalangle DHC$ ist der gesuchte Parallelwinkel $\Pi(p)$. —

Man kann auch die Aufgabe lösen: Auf einer von zwei gegebenen Parallelen den Punkt P so zu bestimmen, daß das Lot PF auf die andere eine vorgeschriebene Länge p hat. Zu diesem Zweck wähle man Q auf der ersten Geraden so, daß das Lot QF' größer als p ist. Dann trage man auf $F'Q$ ab $F'P' = p$. Die von P' durch das zweite Ende der zweiten Geraden gelegte Parallele schneidet, rückwärts verlängert, die erste Gerade in einem reellen Punkt S, und wenn man SP' auf der ersten Geraden nach der Seite des gemeinsamen Endes hin abträgt, erhält man P. —

Die elementarsten Schnittpunktssätze, das ist das Hauptergebnis, führen also schon auf eine Reihe von Konstruktionen.

Daß auch die drei „Transversalen" im engeren Sinne, d. h. die Transversalen von den Ecken nach den Mitten der Gegenseiten durch einen Punkt gehen, hat Liebmann durch Heranziehung eines Satzes von Hjelmslev und mit Benützung räumlicher Konstruktionen bewiesen. Die Existenz des gemeinsamen Schnittpunkts der drei flächenhalbierenden Transversalen ordnet sich vorläufig noch dem (analytisch zu erweisenden) Cevaschen Satz für die hyperbolische Geometrie unter, von dem nur die hier besprochenen elementaren Spezialfälle elementar erwiesen sind.[1]

---

[1] Liebmann, a. a. O. S. 17—19.

Lobatschefskijs zugeordnete Figuren und ihre Anwendungen.[1]

§ 52. Grundlegend für die absolute, (d. h. nicht die Kenntnis zweier Parallelen voraussetzende) Parallelenkonstruktion ist die von Lobatschefskij gefundene Zuordnung jedes rechtwinkligen Dreiecks zu einem ihm entsprechenden dreirechtwinkligen Viereck.

Sie kann jetzt mit ganz elementaren Hilfsmitteln und ohne Heranziehung der nichteuklidischen Raumgeometrie bewiesen werden.

Hierfür sind bestimmte Bezeichnungen angebracht. Lot (p) und Parallelwinkel $\Pi(p)$ sollen durchweg durch entsprechende lateinische und griechische Buchstaben bezeichnet werden:

$$\alpha = \Pi(a), \quad \beta = \Pi(b) \text{ usw.}$$

Zwei Strecken sollen komplementär genannt werden und mit $a - a'$, $b - b'$ usw. bezeichnet werden, wenn

$$\alpha + \alpha' = \Pi(a) + \Pi(a') = \frac{\pi}{2} \cdots \qquad \text{ist.}$$

Endlich setzen wir fest, daß

$$\Pi(-a) = \pi - \Pi(a) \qquad \text{gesetzt wird. —}$$

Die Beziehungen am rechtwinkligen Dreieck.

Mit a, b, c sollen im rechtwinkligen Dreieck die beiden Katheten und die Hypotenuse bezeichnet werden, mit $\lambda = \Pi(l)$ und $\mu = \Pi(m)$ die a und b gegenüberliegenden Winkel. Dann

[1] Diese Figurenzuordnung hat Lobatschefskij auf dem Umweg über den Raum gefunden. Vgl. unten § 68 und die Zusammenstellung von Engel, Lobatschefskij, S. 346—347. Er leitet zwar die Beziehungen (1)—(3)′ am rechtwinkligen Dreieck in der Ebene ab; daß man aber in gleicher Weise [vgl. (I)—(III)′] mit dem dreirechtwinkligen Viereck verfahren kann, hat erst Liebmann, Math. Annalen 61 (1905), S. 185—199 ausgeführt.

lassen sich zwischen den fünf Bestimmungsstücken drei Paare von grundlegenden geometrischen, nur der Einfachheit halber hier in der Gestalt von Gleichungen ausgedrückten Beziehungen gewinnen.[1]

Verlängert man CB unbeschränkt, zieht durch A die Parallele dazu und errichtet man endlich auf der Verlängerung von AB die durch das gemeinsame Ende gehende Senkrechte, so liest man unmittelbar aus der Figur ab

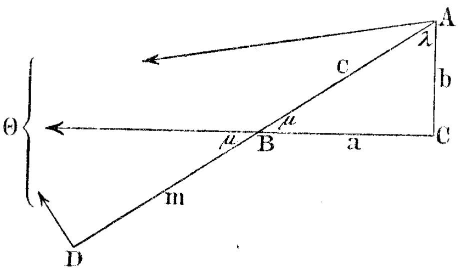


Fig. 38.

(1) $\lambda + \Pi(c+m) = \beta$.

Genau so gilt

(1′) $\mu + \Pi(c+l) = \alpha$.

Verlängert man AC über C hinaus unbeschränkt, legt durch B die Parallele dazu und errichtet auf AB die Senkrechte, die durch das gemeinsame Ende geht, so erhält man, je nachdem $l \gtrless c$ entweder

$$\mu + \alpha = \pi - \Pi(l - c)$$

oder

$$\mu + \alpha = \Pi(c - l). \tag{2}$$

Auf Grund unserer oben gemachten Festsetzung umfaßt (2) auch die erste Gleichung mit. Hierzu kommt

$$\lambda + \beta = \Pi(c - m). \tag{2′}$$

Verlängert man endlich BA über A hinaus und fällt von dem dadurch bestimmten Ende die Lote auf die Verlängerungen von CA und BC, so erhält man, wenn man sich noch C mit diesem Ende verbunden denkt

[1] Die folgenden „Gleichungen" sind also symbolisch geschriebene Kongruenzen, nicht „Beziehungen zwischen Maßzahlen".

(3) $$\Pi(b+l)+\Pi(m-a)=\tfrac{1}{2}\pi$$ und ebenso

(3′) $$\Pi(a+m)+\Pi(l-b)=\tfrac{1}{2}\pi.$$

§ 53. Die Beziehungen am dreirechtwinkligen Viereck. Wir untersuchen jetzt ein dreirechtwinkliges Viereck, an dessen Bezeichnung man sich nicht stoßen wolle. Sie ist in „prästabilierter Harmonie" zum rechtwinkligen Dreieck gewählt. Verlängert man $B_1 C_1$ unbeschränkt und denkt sich das dadurch bestimmte Ende mit A_1 verbunden, außerdem von ihm aus das Lot auf die Verlängerung von $A_1 D_1$ gefällt, so ist die Strecke von D_1 bis zum Fußpunkt des Lotes die zu m_1' komplementäre, also m_1, und man erhält

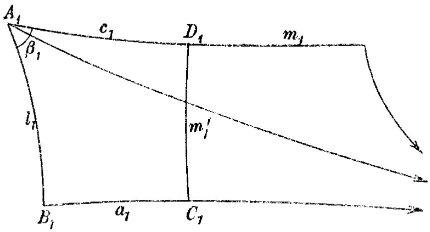


Fig. 39.

(I) $\lambda_1+\Pi(c_1+m_1)=\beta_1$

und entsprechend, weil c_1 und m_1' mit l_1 und a_1 vertauschbar sind,

(I′) $\gamma_1+\Pi(l_1+a_1')=\beta_1$.

Verlängert man $C_1 B_1$ unbeschränkt, verbindet man das dadurch bestimmte Ende mit A_1 und fällt außerdem von ihm aus das Lot auf $D_1 A_1$ (oder die Verlängerung) so folgt

(II) $$\lambda_1+\beta_1=\Pi(c_1-m_1)$$

und entsprechend

(II′) $$\gamma_1+\beta_1=\Pi(l_1-a_1').$$

Verlängert man $D_1 A_1$ unbeschränkt und fällt von dem hierdurch bestimmten Ende die Lote auf die Verlängerung von $B_1 A_1$ und $C_1 B_1$, so erhält man

(III) $$\Pi(l_1+b_1)+\Pi(m_1-a_1)=\tfrac{1}{2}\pi$$

(III′) $$\Pi(c_1+b_1)+\Pi(a_1'-m_1')=\tfrac{1}{2}\pi.$$

§ 54. Die Zuordnung. Das rechtwinklige Dreieck ist durch zwei Stücke, z. B. c und μ, vollkommen bestimmt, ebenso das dreirechtwinklige Viereck, z. B. durch c_1 und m_1'. Wir wählen jetzt c_1 gleich c und m_1' gleich m'. Dann haben wir beim Dreieck wegen (1) und (2)

$$2\lambda = \Pi(c-m) - \Pi(c+m)$$
$$2\beta = \Pi(c-m) + \Pi(c+m)$$

und beim Viereck wegen (I) und (II)

$$2\lambda_1 = \Pi(c_1-m_1) - \Pi(c_1+m_1)$$
$$2\beta_1 = \Pi(c_1+m_1) + \Pi(c_1-m_1),$$

also
$$\lambda = \lambda_1, \quad \beta = \beta_1,$$

Aus (3) und (III) folgt dann noch

$$a = a_1.$$

Hieraus folgt der fundamentale Satz:

Zu jedem rechtwinkligen Dreieck ABC mit den Bestimmungsstücken

$$AB = c, \ BC = a, \ CA = b$$
$$\sphericalangle ABC = \mu, \ \sphericalangle BAC = \lambda$$

gehört ein dreirechtwinkliges Viereck $A_1 C_1 B_1 D_1$ mit den Bestimmungsstücken

$$A_1 B_1 = l, \ B_1 C_1 = a, \ C_1 D_1 = m', \ D_1 A_1 = c$$
$$\sphericalangle B_1 A_1 D_1 = \beta.$$

§ 55. Die absolute Parallelenkonstruktion. Wenn wir jetzt zwei zugeordnete Figuren dieser Art betrachten und die Kathete CB auf $B_1 C_1$ legen, sodaß A zwischen A_1 und B_1 zu liegen kommt, so ist

$$\sphericalangle A C_1 D_1 = \frac{\pi}{2} - \mu = \Pi(m'),$$

also ist $C_1 A$ zu $D_1 A_1$ parallel. Außerdem ist $C_1 A_1 = BA = c$.

Hierin ist die von Engel angegebene Parallelenkonstruktion enthalten[1]: Um zu einer Geraden g durch einen außer-

[1] Lobatschefskij, S. 256. Andere, gleichfalls elementargeometrische Beweise, die sich aber nicht auf die Zuordnung stützen, haben O. Pund

halbgelegenen Punkt P_1 die Parallele zu ziehen, fälle man das Lot P_1F_1 auf g, errichte auf F_1P_1 die Senkrechte und fälle auf sie von irgend einem Punkt P_2 der ersten Geraden aus das Lot P_2F_2. Nimmt man dann die Strecke $s = P_1P_2$ in den Zirkel und schneidet F_2P_2 mit dem Kreis, dessen Radius s, dessen Mittelpunkt F_1 ist, so ist die Gerade, die F_1 mit diesem Schnittpunkt S_2 verbindet, zu $P_1P_2\ldots$ parallel.

Auf die Konstruktion von p bei gegebenem $\Pi(p)$ kommen wir gleich zu sprechen.

In etwas erweiterter Fassung können wir den der Konstruktion zugrunde liegenden Satz auch so aussprechen:

Fällt man von einem Punkt P_1 aus das Lot P_1F_1 auf eine Gerade g, errichtet dann auf F_1P_1 die Senkrechte h und schneidet eine durch F_1 gehende Gerade g' mit den von den Punkten $P_2, P_3\ldots$ der Geraden h auf g gefällten Lote, sodaß die Punkte $S_2, S_3\ldots$ erhalten werden, so gilt für die entsprechenden Strecken auf h und g'

$$P_\mu P_\nu = S_\mu S_\nu$$

wenn die Geraden parallel sind;

$$P_\mu P_\nu > S_\mu S_\nu$$

wenn sie ein gemeinsames Lot haben;

$$P_\mu P_\nu < S_\mu S_\nu$$

wenn sie einander reell schneiden.

§ 56. Die Engelsche (Lambertsche) Dreiecksgruppe.[1]

(Berlin, Sitz.-Ber. Math. Ges. 8 [1909], S. 21—22) und H. Liebmann (Leipzig, Ber. Ges. Wiss. 62 [1910], S. 35—41) gegeben. Die Unzulänglichkeit der Beweisversuche von M. Simon ist in den Leipziger Berichten 68 (1906), S. 566—570 dargelegt.

[1] Diesen Dreieckszyklus hat Engel (Lobatschefskij, S. 347) zusammengestellt. Der Zusammenhang mit dem Lambert-Gaußschen *Pentagramma mirificum* ist dargelegt von Liebmann, München Ber. 1912, S. 273—287. Vgl. auch § 73.

Zu einem rechtwinkligen Dreieck, dessen Bestimmungsstücke wir im Hinblick auf Fig. 38 kurzweg mit a, λ, b, μ, c bezeichnen wollen, gehört, wie wir jetzt wissen ein dreirechtwinkliges Viereck mit dem spitzen Winkel β und den Seiten l, a, m' und c (Fig. 39). Zu diesem Viereck mit den Seiten c, m', a und l und dem Winkel β gibt es dann ein zweites rechtwinkliges Dreieck mit den Winkeln

$$\lambda_1 = \Pi(c) = \gamma, \quad \mu_1 = \frac{\pi}{2} - \Pi(a) = \frac{\pi}{2} - \alpha,$$

denen die Katheten a_1 und b_1 gegenüberliegen, wobei

$$\Pi(a_1) = \frac{\pi}{2} - \mu, \quad \Pi(b_1) = \beta$$

ist und die Hypotenuse durch

$$\Pi(c_1) = \lambda$$

gegeben ist, oder also

$$a_1 = m', \quad b_1 = b, \quad c_1 = l.$$

Verfolgt man diese Zuordnung weiter, so erhält man eine fünfgliedrige Kette von rechtwinkligen Dreiecken, deren Aufbau aus folgender Tabelle zu ersehen ist

a	λ	b	μ	c
m'	γ	b	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	l
c'	λ	m'	$\frac{\pi}{2} - \beta$	a'
l'	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	c'	μ	b'
a	$\frac{\pi}{2} - \beta$	l'	γ	m.

Es gibt also z. B. ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten c' und m', den ihnen gegenüberliegenden Winkeln λ und $\frac{\pi}{2} - \beta$ und der Hypotenuse a'.

Noch einfacher ist die dasselbe besagende Regel, daß man die fünf Stücke a', l, c, m, b' zyklisch vertauschen kann, wobei sie ihre Bedeutung als Bestimmungsstücke eines rechtwinkligen Dreiecks behalten.

§ 57. Wir besprechen hiermit im Zusammenhang noch einige Aufgaben.

Da es zu jedem rechtwinkligen Dreieck a, λ, b, μ, c ein zweites $m', \gamma, b, \frac{\pi}{2} - \alpha, l$ gibt, so kann man, wenn μ vorgeschrieben und ein erstes rechtwinkliges Dreieck konstruiert ist, das diesen Winkel enthält, das zweite aus der Kathete b und dem Winkel $\lambda_1 = \gamma$ konstruieren. (γ ist aus c konstruierbar). Damit hat man auch $c_1 = l$, also das Lot l zum Parallelwinkel $\lambda = \Pi(l)$.

Man kann ferner ein rechtwinkliges Dreieck aus den Winkeln λ und μ konstruieren, denn es gibt ein zugeordnetes rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse $c_1 = m$ und einer Kathete $b_1 = l'$, aus dem dann leicht die Seiten des ersten Dreiecks entnommen werden können. Die Konstruktion hat auch ihre „Determination", d. h. im Sinne der ehrwürdigen Schulgeometrie die Umgrenzung der Konstruktionsmöglichkeit.

Können, so lautet die „Determinationsfrage", m und l' wirklich Hypotenuse und Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks sein? Die Antwort beruhigt selbstverständlich alle Zweifel, denn, da die Winkelsumme im Dreieck kleiner als zwei Rechte ist, müssen die gegebenen Stücke die Ungleichheit

$$\lambda + \mu < \frac{\pi}{2} \qquad \text{erfüllen; daher ist}$$

$$\frac{\pi}{2} - \lambda > \mu \qquad \text{und folglich} \qquad l' < m,$$

das zweite rechtwinklige Dreieck also nicht mit einem Widerspruch behaftet.

Um ein Dreieck aus den drei Winkeln φ (gegenüber a), χ (gegenüber b) und ψ gegenüber c zu konstruieren, nehmen wir an, es sei φ der größte der drei Winkel.[1]) Wir denken uns dann

[1] Liebmann, Leipzig. Ber. (53), 1901. In dieser Arbeit sind auch alle möglichen Sonderfälle, die sich ergeben, wenn die Ecken des Drei-

7*

das Dreieck durch die von A aus gefällte Höhe AD in zwei Teildreiecke zerlegt und die in der nebenstehenden Figur angegebenen Bezeichnungen eingeführt,

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \varphi, \quad \chi_1 = \mu_1, \quad \psi = \mu_2.$$

Durch Anwendung der Zuordnung auf die Teildreiecke, die man dann wieder aneinanderlegt, erhält man die Figur, in der

$$\tau_1 = \frac{\pi}{2} - \beta_1 = \frac{\pi}{2} - \beta_2 = \tau_2 \qquad \text{ist.}$$

Jetzt sind m_1', m_2' und $\lambda_1 + \lambda_2$ bekannt, man kann also $D_1 S D_2$ konstruieren, dann die Senkrechten errichten, zum Schnitt bringen

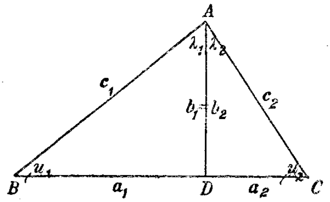


Fig. 40.

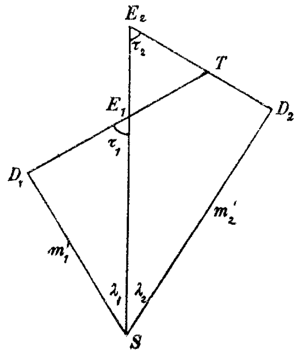


Fig. 41.

(T) und erhält ϵ_1 und ϵ_2 leicht als Schnitte des von S auf die Halbierungslinie des Winkels bei T gefällten Lotes mit jenen Senkrechten. Es ist dann $D_1 E_1 = c_1'$, $D_2 E_2 = c_2'$, also hat man jetzt c_1 und c_2 und kann ABC konstruieren. —

In dieser Weise werden alle Dreiecksaufgaben zugänglich, die etwa der Schüler der mittleren Klassen einer „nichteuklidischen Mittelschule" von seinem gestrengen Professor zu er-

ecks „Enden" oder „ideale Punkte" sind, im einzelnen durchgeführt. Engel hat (Lobatschefskij, S. 329) darauf hingewiesen, daß die Durchführung von Konstruktionen damals (1899) noch viel zu wenig berücksichtigt war. — Vgl. auch die Verallgemeinerung des pythagoräischen Lehrsatzes von C. Piel, Arch. d. Math. u. Phys. (3) 22 (1914), p. 199—204.

lernen hätte. Mit diesem Scherzwort sollen die Aufgaben nicht herabgewürdigt werden, es soll nur unterstrichen werden, daß die Elementaraufgaben auch elementaren und bodenständigen Methoden zugänglich sind — und das hatte man, die Ansätze der Schöpfer der nichteuklidischen Geometrie über Gebühr bei Seite lassend, lange Zeit völlig vernachlässigt.

Die Zykeln und ihre Messung.

§ 58. Außer dem Kreis gibt es noch zwei Kurven, die mit ihm die Eigenschaft gemein haben, eine ganze Schar von Symmetrieachsen zu besitzen. Es kommen dazu noch die Abstandslinien, d. h. die Kurven, die sich als geometrische Örter der Punkte konstanten Abstands von einer Geraden ergeben. Dazu kommen die Grenzkreise, sie bilden die Übergangsform. Ein Grenzkreis ist der Ort korrespondierender Punkte auf einem Büschel von Parallelen (vgl. § 31).

Der Umfang der Kreise ist, wie später gezeigt wird (§ 63)

$$2\pi\, shr,$$

den Inhalt[1] erhalten wir leicht durch Grenzübergang aus dem umbeschriebenen regulären Polygon von 2^n Seiten. Ist τ der Winkel zweier benachbarter Tangenten, so ist der Inhalt des Vierecks, dessen Ecken der Kreismittelpunkt, eine Ecke des Polygons und die Berührungspunkte der weiten ausgedehnten Tangenten sind, also (§ 34) der Defekt dieser Figur

$$2\pi - \pi - \varphi - (\pi - \tau) = \tau - \varphi$$

wobei $\varphi = 2\pi : 2^n$ ist. Die Vierecke haben zusammen den Inhalt

$$\sum \tau - \sum \varphi = 2^n \tau - 2\pi.$$

Ferner ist (§ 63) $\quad \sin\frac{\tau}{2} = ch\, r \cdot \sin\frac{\varphi}{2},$

[1] Lobatschefskij berechnet den Kreisinhalt auf analytisch-geometrischem Weg (S. 37), ebenso Bolyai, Appendix § 32, S. 205. Wir bevorzugen einen direkten Grenzübergang.

sodaß sich für den Kreisinhalt ergibt

$$\lim_{n=\infty} 2^n \tau - 2\pi = \lim_{n=\infty} 2^{n+1} \sin\frac{\tau}{2} - 2\pi$$

$$= ch\, r \cdot \lim_{n=\infty} 2^{n+1} \sin\frac{\pi}{2^n} - 2\pi = 2\pi\,(ch\, r - 1)$$

§ 59 Die „Quadratur des Kreises". Johann Bolyai hat sich den sensationellen Effekt einer Quadratur des Kreises geleistet.[1] Das geht so zu: Errichtet man in der Mitte der Strecke r die Senkrechte, und zieht zu ihr durch die Endpunkte die Parallelen, so schließen sie mit r den Winkel $\frac{1}{2}\Pi(r)$ ein. Fällt man dann von dem einen Endpunkt A das Lot AC auf die vom Endpunkt B ausgehende Parallele und errichtet man auf CA in A die Senkrechte, so bildet sie mit der von A ausgehenden Parallelen einen Winkel γ, aus dem umgekehrt r konstruiert werden kann. Man kann aus

$$\gamma = \frac{\pi}{2} + \Pi\left(\frac{r}{2}\right) - \sphericalangle\, CAB$$

unter Verwendung der Formeln für das rechtwinklige Dreieck [§ 63 am Schluß] ABC, in dem

$$AB = r, \quad \sphericalangle\, ABC = \Pi\left(\frac{r}{2}\right)$$

ist, die Beziehung

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{2}{\operatorname{tg}\Pi\left(\frac{r}{2}\right)} = 2\, sh\,\frac{r}{2}$$

ableiten; der Inhalt des Kreises vom Radius r ist dann

---

[1] Appendix § 43. (Bolyai II, S. 214.) Quadratur ist überhaupt möglich, sobald $\operatorname{tang}^2\gamma$ eine ganze Zahl ist oder eine rationale, deren Nenner aus einer Potenz von 2 und einfachen Potenzen von Primzahlen der Form $2^n + 1$ zusammengesetzt ist. — Es sei auch darauf hingewiesen, daß die Rektifikation der Streckeneinheit (§ 76) nicht möglich ist, ebensowenig Streckenteilung, vom trivialen Fall der fortgesetzten Halbierung abgesehen. (Liebmann, Archiv f. Math. 3, 5 [1903], S. 213 bis 215).

$$2\pi(ch\, r - 1) = 4\pi\, sh^2 \frac{r}{2} = \pi \operatorname{tang}^2 \gamma.$$

Für $\gamma = \frac{\pi}{4}$ hat der in diesem Falle leicht konstruierbare Kreis also den Inhalt π, der gleich dem Inhalt einer geradlinigen Figur, nämlich des asymptotischen Dreiecks ist. Wer am asymptotischen Dreieck Anstoß nimmt, kann statt dessen ein reguläres Viereck nehmen. Der Inhalt des Vierecks ist

$$2\pi - 4\omega,$$

unter ω den Winkel zweier Nachbarseiten verstanden. Wählt man $\omega = \frac{\pi}{4}$, so wird der Inhalt also gleich π. Das rechtwinklige Dreieck, das zum Aufbau dieses regulären Vierecks gebraucht wird, hat die Winkel $\frac{\pi}{8}$ und $\frac{\pi}{4}$; es kann (§ 57) leicht konstruiert werden.

§ 60. Zur Berechnung des Bogens einer Abstandslinie[1], der über dem Stück s dieser Geraden steht und von ihm den Abstand a hat, kann man (vgl. § 71) eine Funktionalgleichung aufstellen. Ist $E(a)$ die Funktion, mit der man s zu multiplizieren hat, um den Bogen zu erhalten, so findet man durch die hier erwähnte und unten ausgeführte Überlegung dieselbe Funktionalgleichung[2]

$$E(a+b) + E(a-b) = 2\,E(a)\,E(b),$$

diesmal mit der Lösung

$$E(a) = ch\, a.$$

Für den Inhalt der vom Bogen, der Grundstrecke s und den beiden begrenzenden Loten a berandeten Fläche findet man

$$s \cdot I(a) = s \cdot sh\, a.$$

[1] Die Abstandslinie, d. h. der Ort der Punkte, die von einer Geraden gleichen Abstand haben, kommt bei Lobatschefskij (S. 34) nur ganz gelegentlich vor, während J. Bolyai von ihr ausgiebig Gebrauch macht.

[2] Diese Funktionalgleichungen sind von Cauchy behandelt. Analyse algébrique, Paris 1821, Chap. V.

Die zweite Formel ist damit in Einklang, daß die Gleichung

$$\lim_{\Delta a = 0} \frac{I(a + \Delta a) - I(a)}{\Delta a} = E(a)$$

bestehen muß.

§ 61. Messung des Grenzkreisbogens.[1] Das Wichtigste ist die Messung des Grenskreisbogens, weil sie auch zur Trigonometrie überführt.

Sind A, B Anfangs- und Endpunkt eines Grenzkreisbogens (AB), A_1 und B_1 die entsprechenden Endpunkte eines zweiten Grenzkreisbogens, den man erhält, wenn man auf den Achsen und zwar nach innen, d. h. nach der Seite des gemeinsamen Endes der Achsen hin dieselbe Strecke a abträgt; sind ferner P und P_1 zwei Punkte, von denen der erste auf dem äußeren Bogen beliebig gewählt ist, der zweite ihm auf dem innern Bogen entspricht, dann ist

$$(AP) : (PB) = (A_1 P_1) : (P_1 B_1).$$

Diese Beziehung gilt genau so bei konzentrischen Kreisen oder bei Abstandslinien, die über derselben Geraden stehen.

Es ist auch das Verhältnis $(AP) : (A_1 P_1)$ von der Wahl des Punktes P unabhängig und allein durch den Abstand a der Grenzkreisbogen bestimmt, weil alle Grenzkreise kongruent sind. [Beim Kreis ist das Verhältnis noch vom Radius, bei der Abstandslinie vom Abstand abhängig, den sie von der Grundlinie hat.] Wir wollen jetzt die Streckeneinheit[2] so wählen, daß die Verjüngung

$$s_1 : s = (A_1 P_1) : (AP)$$

für $a = 1$ gerade gleich e^{-1} ist.

Dann erhält man sofort das Ergebnis: Es sei $s = AP$ ein

[1] Vgl. Lobatschefskij, S. 33ff. und Pangeometrie (deutsche Ausgabe), S. 34. Bolyai, Appendix § 22—24, S. 193—194.

[2] Daß diese Streckeneinheit gerade der in den nächsten Zeilen definierte Bogen S ist, wird sich später (§ 76) zeigen; es spielt für die nächsten Untersuchungen noch gar keine Rolle.

Grenzkreisbogen. Konstruiert man auf Grund der angegebenen Maßbestimmung den inneren, im Abstand x dazu äquidistanten Grenzkreisbogen, so hat er die Länge

$$s_1 = s e^{-x}.$$

Diese eine Beziehung genügt, um die Gleichung des Grenzkreises in rechtwinkligen Koordinaten aufzustellen, wobei x die auf einer Achse vom auf dem Grenzkreis gelegenen Anfangspunkt, y die Ordinate, die Länge der auf der x-Achse errichteten Senkrechten bis zu einem Punkte des Grenzkreises ist.

Es sei s ein Grenzkreisbogen, dessen Ausdehnung dahin beschränkt ist, daß die Tangente in einem Endpunkt noch von der (nach außen verlängerten) Achse im andern Endpunkt getroffen wird; die Abschnitte auf Tangente und Achse mögen mit t und u bezeichnet werden. Wächst t unbegrenzt, so daß Tangente und Achsenverlängerung parallel werden, so möge s in den durch diesen Grenzübergang wohldefinierten Bogen S übergehen. Dann ist, wie die durch Pfeilspitzen nach den vorkommenden „Enden" hin andeutende Zeichnung zeigt[1],

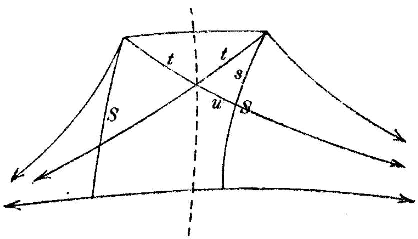


Fig. 42.

$$S - s = S e^{-t-u}.$$

Nach einer entsprechenden Zeichnung, die der Leser schon aus der folgenden Formel selbst entnehmen kann, erhält man

$$S + s = S e^{t-u}.$$

Hieraus folgt

$$e^u = \frac{e^t + e^{-t}}{2} = ch\, t,$$

$$s = S(1 - e^{-t-u}) = S th\, t.$$

[1] Die geradlinigen Bestandteile der Figur liegen symmetrisch zur punktierten Linie.

Für $t = \infty$ geht s in S über. Die Strecken u und t lassen sich auch als Abszisse und Ordinate für einen Grenzkreisbogen s' deuten, der von s den Abstand u hat; man erhält also gleich noch die Gleichung des Grenzkreisbogens in rechtwinkligen Koordinaten

$$e^x = chy,$$

außerdem

$$s' = s e^x = e^x Sthy = Sshy.$$

Hyperbolische Funktionen komplementärer Strecken.

Für später (§ 76) bemerken wir noch, wie man die hyperbolischen Funktionen komplementärer Strecken a und a', d. h. solcher Strecken a und a', für die[1]

$$\Pi(a) + \Pi(a') = \frac{\pi}{2}$$

ist, durch eine einfache Figur erhalten kann, in der die Grenzkreisbogen S und s als Hilfslinien eingespannt sind. Die Figur ergibt

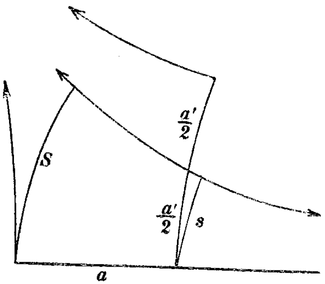


Fig. 43.

$$Se^{-a} = s = Sth\frac{a'}{2},$$

also

$$e^{-a} = th\frac{a'}{2}$$

[1] Bei dieser Gelegenheit sei die „Komplementärtransformation" der Ebene erwähnt. Ordnet man jedem Punkt P der Ebene einen Punkt P' zu, indem man das Lot $y = PF$ auf eine feste Achse fällt und P' auf diesem Lot so annimmt, daß $P'F$ die Komplementärstrecke zu y ist, so erhält man (mit Hilfe der Lehre von den zugeordneten Figuren § 54) leicht die Einsicht, daß bei dieser Abbildung Cykeln in Cykeln übergehen und gelangt von hieraus auf sehr elementarem und übersichtlichem Weg zur Lehre von den Kreisverwandtschaften überhaupt. Analytisch behandelt von Hausdorff (Leipzig. Ber. 51 [1899], S. 161—214), synthetisch von Liebmann (ebenda 54 [1902], S. 244—260) und in Zusammenhang gebracht mit der Poincaréschen Abbildung (§ 69), Jahresber. d. D. M. V. 24 (1915), S. 304—309.

und hieraus leicht

$$sh\,a' = \frac{1}{sh\,a}, \quad ch\,a' = cth\,a, \quad th\,a' = \frac{1}{ch\,a}, \quad cth\,a = ch\,a.$$

Trigonometrie der hyperbolischen Ebene.

§ 62. Es genügt, eine einzige Formel für das rechtwinklige Dreieck abzuleiten; alle andern gehen daraus durch Übertragung mit Hilfe der Engelschen Regel (§ 56) hervor. Man erhält in dieser Weise zunächst nur Beziehungen zwischen den hyperbolischen Funktionen der drei Seiten und den durch $\lambda = \Pi(l)$, $\mu = \Pi(m)$ bestimmten Strecken — also eine „Streckentrigonometrie". Erst nachträglich werden Winkel eingeführt.[1]

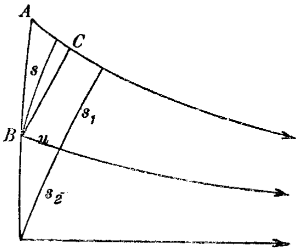


Fig. 44.

Verlängert man die Hypotenuse über B hinaus und errichtet auf ihr die zur Verlängerung von AC parallele Senkrechte, spannt ferner, wie in der Figur ersichtlich, Grenzkreisbogen zwischen den verschiedenen Parallelen ein, so erhält man (§ 52, § 61)

$$\begin{aligned} s &= S \cdot sh\,a, \\ s_1 + s_2 &= S \cdot th\,l, \\ s_2 &= S\,th(l - c), \\ e^u &= ch(l - c), \end{aligned}$$

also $\quad S \cdot sh\,a = s = s_1 e^u = ch(l - c) \cdot S \cdot (th\,l - th\,(l - c)),$

[1] Die folgende Darstellung ist eine Bearbeitung der Entwicklungen von Bolyai und Lobatschefskij, wie sie sich durch Verwendung der „zugeordneten Figuren" ganz naturgemäß ergeben hat, wobei die räumlichen Hilfsmittel gänzlich ausgeschaltet werden konnten. Vgl. Liebmann, Leipz. Ber. 59 (1907). S. 187—210. Weitergehende Ausführung gibt z. B. A. Ranum (Deutsche Math. Ver. 21 [1912], S. 228 bis 248) und V. Varičak (ebenda 17 [1908], S. 70—83). Im übrigen sei auf alle zu Anfang des Kapitels genannten Lehrbücher verwiesen.

und hieraus durch rein formale Rechnung

(1) $$sh a \cdot ch l = sh c.$$

Vertauscht man hier auf Grund der Engelschen Regel

$$a \text{ mit } l', \quad l \text{ mit } c, \quad e \text{ mit } m,$$

so erhält man $$sh l' ch c = sh m$$ oder nach § 61

(2) $$ch c = sh l \cdot sh m.$$

Durch weitere Vertauschungen im Sinne jener Regel erhält man

(3) $$sh b = th a sh l,$$

(4) $$ch c = ch a ch b,$$

(5) $$th a = th m th c.$$

Vom allgemeinen Dreieck wollen wir hier im Rahmen der „Streckentrigonometrie" nur den Cosinussatz anführen. Wir bezeichnen mit $\mu = \Pi(m)$ den b gegenüberliegenden Winkel, mit d die von A ausgehende Höhe, mit p (Projektion von b) und $a - p$ die Abschnitte auf a; dann folgt aus

$$th(a-p) = th c \, th m,$$

$$ch b = ch d \, ch p,$$

$$ch c = ch d \, ch(a-p)$$

durch Elimination von p der „Kosinussatz"

$$ch b = ch a \, ch c - sh a \, sh c \, th m.$$

§ 63. Die Einführung der Winkel. Die Maßzahl eines Winkels legen wir durch das Verhältnis von Kreisbögen fest. Das Verhältnis des Kreisbogens (vom Radius r) der zu einem Zentriwinkel „α_1" gehört, zum Kreisbogen, der zum rechten Winkel gehört, bestimmt das Verhältnis der Maßzahlen. Dem rechten Winkel ist die Maßzahl $\frac{\pi}{2}$ zugewiesen.

Der Winkel α ist zunächst nur durch

$$\alpha_1 = \Pi(a_1)$$

definiert, also eine Konstruktion, keine Messung.

Nach dem Cosinussatz ist die Sehne, die über diesem Zentriwinkel steht, gegeben durch

$$ch\, s_1 = ch^2 r - sh^2 r\, th\, a_1 .$$

Ersetzt man die Sehne s_1 durch einen regulären Sehnenzug von 2^n gleichen Sehnen s_n, so ist der Kreisbogen gleich

$$\operatorname*{limes}_{n=\infty} 2^{n-1} s_n = \operatorname*{limes}_{n=\infty} 2^n\, sh \frac{s_n}{2} .$$

Bezeichnen wir den zur Sehne s_r gehörigen Zentriwinkel mit α_r und denken uns a_r durch

$$\alpha_r = \Pi(a_r)$$

bestimmt, so ist

$$sh \frac{s_r}{2} = \sqrt{\frac{ch\, s_r - 1}{2}} = sh\, r \sqrt{\frac{1 - th\, a_r}{2}}$$

und aus den rechtwinkligen Dreiecken, die man erhält, wenn man vom Mittelpunkt des Kreises das Lot auf s_r fällt, hat man

$$\frac{1}{ch\, a_{r+1}} = \frac{sh \frac{1}{2} s_r}{sh\, r} = \sqrt{\frac{1 - th\, a_r}{2}} .$$

Setzt man also

$$\frac{1}{ch\, a_1} = \sin \varphi_1 ,$$

so wird

$$\frac{1}{ch\, a_2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \varphi_1}{2}} = \sin \frac{\varphi_1}{2}$$

und allgemein

$$\frac{1}{ch\, a_r} = \sin \frac{\varphi_1}{2^{r-1}} ,$$

und man erhält für den Bogen

$$\operatorname*{limes}_{n=\infty} 2^n\, sh \frac{s_n}{2} = sh\, r \cdot \operatorname*{limes}_{n=\infty} 2^n \sin \frac{\varphi_1}{2^n} = \varphi_1\, sh\, r.$$

Die Maßzahl $\bar{\alpha}_1$ des Winkels α_1 ist dann auf Grund unserer Forderung durch

$$\tfrac{1}{2}\pi \cdot sh\, r : \varphi_1 \cdot sh\, r = \tfrac{1}{2}\pi : \bar{\alpha}_1$$

bestimmt; es ist also $\quad \varphi_1 = \bar{\alpha}_1 .$

Bezeichnen wir endlich die Maßzahl des durch

$$\alpha = \Pi(a)$$

bestimmten Winkels mit demselben Zeichen α, wie den Winkel, so haben wir die Beziehung

$$\sin\alpha = \frac{1}{ch\,a}$$

und demgemäß

$$\cos\alpha = th\,a,$$

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{1}{sh\,a},$$

$$\cot\alpha = sh\,a.$$

Insbesondere ist noch

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\Pi(a) = \sqrt{\frac{1 - th\,a}{1 + th\,a}} = e^{-a}.$$

Es kann jetzt die „Streckengeometrie" des rechtwinkligen Dreiecks durch die erwünschte Trigonometrie ersetzt werden, in der statt der hyperbolischen Funktionen der Strecken l und m wirklich die trigonometrischen Funktionen der Maßzahlen λ und μ der Winkel auftreten, die den Katheten a und b gegenüberliegen, und man erhält

(1′)	$sh\,a = sh\,c \cdot \sin\lambda,$	(4′)	$ch\,c = ch\,a\,ch\,b$
(2′)	$ch\,c = \cot\lambda\,\cot\mu,$	(5′)	$\cos\lambda = ch\,a\,\sin\mu,$
(3′)	$sh\,b = th\,a \cdot \cot\mu,$	(6′)	$th\,a = th\,c \cdot \cos\mu.$

§ 64. Aus diesen Formeln kann dann die Trigonometrie des schiefwinkligen Dreiecks abgeleitet werden, genau wie dies in der ebenen und sphärischen Trigonometrie geschieht.

Zerlegt man z. B. ein allgemeines Dreieck durch eine Höhe in zwei rechtwinklige Dreiecke und wendet auf beide (1′) an, so erhält man den Sinussatz, also den Satz, daß die hyperbolischen Sinus der Seiten sich wie die Sinus der gegenüberliegenden Winkel verhalten. Eine Zusammenstellung von Formeln erübrigt sich, man kann ja im Sinne der logarithmisch-sphärischen Trigonometrie des **Taurinus** [§ 36] oder der imaginären Geometrie Lobatschefskijs [§ 38] bequem jede Formel der sphärischen Trigonometrie in eine entsprechende der nichteuklidisch-hyperbolischen übersetzen.

Nur auf eine dieser Formeln wollen wir noch hinweisen, die den Defekt

$$\epsilon = \pi - \alpha - \beta - \gamma$$

eines Dreiecks durch zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel ausdrückt[1]:

$$\operatorname{tg} \frac{\epsilon}{2} = \frac{th\frac{b}{2}\, th\frac{c}{2} \sin \alpha}{1 - th\frac{b}{2}\, th\frac{c}{2} \cos \alpha}.$$

Hyperbolische Raumgeometrie.

§ 65. Die Theorie des hyperbolischen Raumes hat in der geschichtlichen Entwicklung eine größere Rolle gespielt, als ihr in mancher Hinsicht jetzt noch zukommt. Sie diente zur Bestimmung der Lobatschefskijschen Figurenzuordnung und

---

[1] Zu dieser Formel ist noch zu bemerken: Die Proportionalität zwischen Defekt und Inhalt wurde oben (§ 34) festgestellt. Setzen wir jetzt die Einheitsstrecke (§ 61) gleich k, so folgt für „unendlich kleine" Dreiecke

$$\frac{\epsilon}{2} = \frac{bc}{4k^2} \sin \alpha = \frac{1}{2k^2} \triangle I,$$

unter $\triangle I$ den Inhalt des Dreiecks verstanden. Hieraus folgt dann umgekehrt für den Inhalt des endlichen Dreiecks

$$I = k^2(\pi - \alpha - \beta - \gamma).$$

Vgl. hierzu die Flächenmessungen z. B. in Lobatschefskijs Pangeometrie, deutsche Ausgabe, S. 45—56. — Die Formel für den Defekt oder Inhalt bildet auch die Grundlage für einen strengen Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft des Kreises, unter allen Kurven mit gegebenem Umfang den größten Inhalt zu besitzen, die selbstverständlich auch in der hyperbolischen Geometrie gilt (Liebmann, München. Ber. 1918, S. 499—505). Als eine Stufe zum Beweis wollen wir hier das Ergebnis anführen, daß ein Dreieck, von dem zwei Seiten b und c gegeben sind, den größten Inhalt erreicht, wenn der von b und c eingeschlossene Winkel gleich der Summe der beiden anderen ist.

zur Aufstellung der Trigonometrie, sie hat ferner den Ausgangspunkt für eine Reihe von Integralumformungen[1] gegeben, sie war aber endlich auch als Hilfsmittel geboten, mit deren Verwendung Johann Bolyai in den Tagen seines Abstiegs in den Schoß der „alleingiltigen" euklidischen Geometrie zurückkehren wollte (§ 40).

Wenn wir hier kurz auf sie eingehen, so geschieht dies hauptsächlich wegen der interessanten „Grenzkugel", einer Fläche, auf der die euklidische Geometrie gilt; auch darf die Konstruktion der Parallelen auf diesem Weg selbst in einer summarischen Darstellung der nichteuklidischen Geometrie nicht gern vermißt werden.

§ 66. Die Parallelen im Raum. Betrachten wir ein Dreikant[2], das wir uns von einer Kugel geschnitten denken, deren Mittelpunkt der Scheitel des Dreikants ist, und sind α, β, γ die Keilwinkel, a, b, c die Winkel, die je zwei Kanten miteinander einschließen, so ist, genau wie in der euklidischen Geometrie, der Flächeninhalt des ausgeschnittenen sphärischen Dreiecks dem Exzeß, d. h. dem Überschuß der Keilwinkelsumme über π proportional. [Überhaupt gilt auf der Kugel die gewöhnliche sphärische Trigonometrie, vgl. § 70.]

Im „eigentlichen" Dreikant, dessen Scheitelpunkt reell ist, ist daher, genau wie beim euklidischen Dreikant,

$$\alpha + \beta + \gamma > \pi;$$

ferner sind im „Dreikant mit idealer Ecke", gebildet aus den Streifen dreier Ebenen, die auf jener vierten Ebene senkrecht stehen, die Keilwinkel gleich den Winkeln des Spurendrei-

[1] Auf die mühseligen Volumbestimmungen, die z. B. Lobatschefskij in der „Imaginären Geometrie" und der „Anwendung der imaginären Geometrie" ausgeführt hat, gehen wir nicht näher ein, verweisen vielmehr auf die vergleichende Kritik der Leistungen der Klassiker und ihrer Nachfolger, die P. Stäckel gegeben hat (Bolyai, S. 109–118 und S. 242).

[2] Lobatschefskij, S. 165 ff.

ecks, also, da die Winkelsumme im Dreieck kleiner als zwei Rechte ist, $$\alpha + \beta + \gamma < \pi.$$

Um jetzt zum „Paralleldreikant" überzugehen, haben wir erst uns mit parallelen Geraden im Raum zu beschäftigen.

Zwei Parallele liegen immer in einer gemeinsamen Ebene. Sind nun zwei Parallele g_1 und g_2 gegeben und legt man durch einen nicht in der Ebene $(g_1 g_2)$ gelegenen Punkt P die Ebenen $E_1 = (Pg_1)$ und $E_2 = (Pg_2)$, so kann die Gerade g_3, in der E_1 und E_2 einander schneiden, g_1 nicht schneiden, denn durch diesen Schnittpunkt müßte auch g_2 gehen, was mit dem vorausgesetzten Parallelismus in Widerspruch stünde.

Hätten ferner g_3 und g_1 ein gemeinsames Lot $F_3 F_1$, so würde die durch $F_3 F_1$ senkrecht zu g_3 und g_1 gelegte Ebene die Ebenen $(g_1 g_2)$ und $E_2 = (g_3 g_2)$ senkrecht schneiden, also auch g_2. g_1 und g_2 hätten also im Widerspruch zur Voraussetzung ein gemeinsames Lot.

Demnach bleibt nur der Fall übrig, daß g_3 zu g_1 und g_2 parallel ist. Entweder bilden dann die drei Geraden ein asymptotisches Dreieck, und dann wären sie gegen die Voraussetzung in einer Ebene gelegen, oder sie haben dasselbe Ende gemein, sie sind nach derselben Seite hin parallel.

Es ergibt sich also, daß die Ebenen (Pg_1) und (Pg_2) sich in einer Geraden schneiden, die zu g_1 und g_2 im Sinne ihres gegenseitigen Parallelismus parallel ist.

Hieraus kann die Transitivität der Beziehung des Parallelismus im Raum leicht bewiesen werden. Sind g_1 und g_2 zueinander parallel, ebenso g_2 und g_3 in demselben Sinne wie g_1 und g_2, so ist die Schnittgerade zweier Ebenen, die durch einen Punkt P_3 von g_3 gehen und von denen die eine g_1, die andere g_2 enthält, zu g_2 parallel, also mit g_3 identisch. Es entsteht aber ein Paralleldreikant, also ist g_3 auch zu g_1 parallel.

§ 67. Das Paralleldreikant und die Grenzkugel. Im Paralleldreikant beträgt die Summe der Kantenwinkel zwei Rechte.

Das ist leicht einzusehen. Es seien A, B, C drei Punkte auf den Kanten, Ω das gemeinsame Ende. Läßt man nun einen Punkt Q auf $A\Omega$ sich nach Ω hin bewegen, so braucht man nur das Dreikant mit dem Scheitel Q, den Kanten QA, QB, QC zu betrachten und darin die Winkel (Kantenwinkel) und Seiten (Winkel AQB, BQC, CQA). Diese Seiten nähern sich, wenn Q nach Ω wandert, alle drei asymptotisch der Grenze Null, daher die um π verminderte Summe der Kantenwinkel, die dem Inhalt des sphärischen Dreiecks proportional ist, das die Kanten aus einer Kugel um Q als Mittelpunkt ausschneidet, ebenfalls. Die Summe der Kantenwinkel nähert sich daher dem Wert π; der Kantenwinkel an QA ist aber α, und die an QB und QC nähern sich asymptotisch den Kantenwinkeln β und γ an ΩB und ΩC, also ist $\alpha + \beta + \gamma$ gleich π.

Wenn man jetzt die Gesamtheit aller korrespondierenden Punkte betrachtet, die man aus einem Punkt (A) auf einer Geraden eines Parallelbündels auf den parallelen Geraden erhält, so ist die entstehende Fläche in sich beweglich: Man nehme noch zwei beliebige Gerade des Bündels hinzu und auf ihnen die zu A korrespondierenden Punkte B und C, ferner sei M der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der drei Seiten des Dreiecks ABC. Dann ist leicht nachzuweisen, daß MD auf der Ebene des Dreiecks senkrecht steht, woraus folgt, daß B und C einander korrespondierende Punkte sind. Wenn man also von B statt von A bei der Konstruktion ausgeht, würde man dieselbe Fläche erhalten, d. h. sie ist in sich beweglich. Die Spuren der durch D gehenden Ebenen auf der Fläche sind Grenzkreise, die Winkel eines Dreiecks dreier solcher Grenzkreisbögen gleich denen des Paralleldreikants der von den Ecken des Dreiecks ausgehenden Achsen, also gleich π.

Demnach haben wir das Ergebnis:[1]

Auf der Grenzkugel, d. h. der Fläche, die alle Ge-

[1] Lobatschefskij, S. 12; Bolyai Appendix § 21, S. 192.

raden eines Bündels von Parallelen mit gemeinsamem Ende D senkrecht schneidet, gilt die euklidische Geometrie.

Dieser Umstand ist namentlich deswegen wichtig geworden, weil man ihn benützen konnte, um die Trigonometrie der hyperbolischen Ebene durch besondere Konstruktionen daraus abzuleiten.

§ 68. Die Parallelenkonstruktion, aus dem Raum abgeleitet[1]. Man errichtet auf der Ebene des dreirechtwinkligen Vierecks $ABCD$ mit den Bestimmungsstücken

$$\sphericalangle BCD = \beta,\ AD = a,$$
$$DC = l,\ CB = c,$$
$$BA = m'$$

in A die Senkrechte, deren eines Ende mit Ω bezeichnet sei, zieht ferner $B\Omega$, $C\Omega$, $D\Omega$ und endlich noch die Parallele $A\Theta$ zu $BC\Theta$, die DC in E schneidet. Außerdem zieht man noch $E\Omega$.

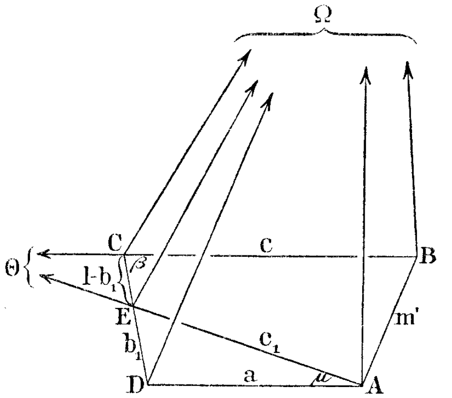


Fig. 45.

Dann ist
$$\sphericalangle EAD = \frac{\pi}{2} - \Pi(m') = \mu,$$
$$\sphericalangle AB\Omega = \Pi(m') = \frac{\pi}{2} - \mu.$$

Die Dreikante $C(DB\Omega)$ und $E(DA\Omega)$ haben, das zweite an EA, das erste an $C\Omega$, rechte Winkel. [Dies folgt daraus, daß das Parallelvierkant, von dem die Winkel an ΩB, ΩA, ΩD

[1] Wir geben hier Bonolas Konstruktion (Ist. Lomb. Rendiconti II [37], 1904, S. 255—258), die sich nur wenig von einer von Engel herrührenden (Leipzig. Ber. 50 [1898], S. 187—191) unterscheidet.

rechte sind, auch an ΩC einen rechten Winkel aufweisen muß.] Die Winkel an CD und ED sind beide gleich $\alpha = \Pi(a)$. Der Winkel an CB ist gleich $\frac{\pi}{2} - \mu$ und der an $E\Omega$, weil $\Omega(ADE)$ ein Paralleldreikant ist, mit den Kantenwinkeln $\frac{\pi}{2}$ an ΩD und μ an ΩA, ebenfalls gleich $\frac{\pi}{2} - \mu$.

Die beiden Dreikante sind also kongruent, daher

$$\sphericalangle BC\Omega = \sphericalangle \Omega EA,$$

also sind die zu diesen Winkeln (als Parallelwinkeln, die zugeordnete Lote bestimmen) gehörenden Lote

$$c = BC \quad \text{und} \quad c_1 = AE$$

einander gleich. Dies führt wieder genau die Parallelenkonstruktion von Engel (§ 55).

Ferner ist noch

$$(\lambda_1) = \sphericalangle DEA = \sphericalangle DC\Omega = \lambda,$$
$$\beta = \sphericalangle DCB = \sphericalangle DE\Omega = \Pi(b_1)$$

und damit ist wieder die Zuordnung von rechtwinkligem Dreieck und dreirechtwinkligem Viereck (§ 54) erwiesen.

§ 69. Die Randbilder von Ebenen. Wir kommen mit einigen Worten auf die Behandlung der Kreisverwandtschaften zurück [vgl. § 61, Anm. über die Komplementärtransformation]. Es gibt im Raum drei Arten von Strahlenbündeln, die Strahlen durch einen reellen Punkt, die von konzentrischen Kugeln orthogonal geschnitten werden, die Strahlen durch ein „Ende", die von Grenzflächen und endlich die Strahlen senkrecht zu einer Ebene, die von Abstandsflächen senkrecht geschnitten werden. Wenn man unter den Durchmessern einer Sphäre den auf einer Ebene senkrecht stehenden auswählt und die zu ihm parallelen Durchmesser mit der Sphäre schneidet, so entsteht das Randbild der Ebene auf der Sphäre. Es wird, wenn die Sphäre Kugel oder Grenzkugel ist, stets ein Kreis. Indem man von allen Ebenen des Raumes auf zwei Sphären die Randbilder entwirft, erhält man eine Kreisverwandtschaft und zugleich winkeltreue Abbildung zwischen den Sphären.

Nimmt man insbesondere zur einen Sphäre eine Grenzkugel, zur andern die sie im Anfangspunkt eines Polarkoordinatensystems berührende Ebene, und bezeichnet man die Polarkoordinaten auf der Grenzkugel mit r, φ, in der Ebene mit ρ, φ, so wird für zugeordnete Punkte nach § 61

$$r = k\,th\,\frac{\rho}{2k},$$

und da das Bogenelement in der Ebene durch

$$d\sigma^2 = d\rho^2 + k^2 sh^2 \frac{\rho}{k}\,d\varphi^2$$

auf der Grenzkugel aber durch

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$$

gegeben ist, so ergibt sich durch Benützung der hyperbolischen Funktionen leicht

$$d\sigma^2 = \frac{4k^2 ds^2}{(k^2 - r^2)^2}.$$

Die hyperbolische Ebene ist damit konform auf die euklidische Ebene (vielmehr die Grenzkugel) und zwar auf das Innere eines Kreises vom Radius k [= Streckeneinheit] abgebildet und zwar eben durch eine Kreisverwandtschaft. Insbesondere entsprechen den Geraden Kreise, welche jenen Kreis senkrecht schneiden und den Bewegungen Kreisverwandtschaften, welche den Kreis $x^2 + y^2 - k^2 = 0$ in sich überführen [vgl. § 78].

Absolute sphärische Trigonometrie.

§ 70. Man kann die sphärische Trigonometrie so begründen, daß für den Raum, dem die Kugel angehört, lediglich die Beweglichkeit vorausgesetzt wird, oder schärfer gesagt, daß dabei von den Axiomen oder Postulaten der euklidischen Geometrie das Parallelenpostulat ganz bei Seite gelassen wird.[1]

Wir messen die Bogenlängen von Hauptkreisbogen durch den Zentriwinkel, den die vom Mittelpunkt der Kugel nach den Endpunkten gezogenen Radien einschließen. Als Faktor tritt hinzu noch eine Funktion des Radius, die aber in den Formeln der sphärischen Trigonometrie gar keine Rolle spielt. Desgleichen messen wir den Inhalt eines sphärischen, aus Hauptkreisbogen gebildeten Dreiecks durch den Exzeß, d. h. den Überschuß der Winkelsumme $\alpha + \beta + \gamma$ über π, ohne uns um den vom Radius abhängenden Faktor zu kümmern, der noch hinzutritt und ja, wie bei der Messung von Hauptkreisbogen, für alle auf derselben Kugel gelegenen Dreiecke derselbe ist.

Ebenso wie diese Messungen sind auch die weiteren zu verwendenden Beziehungen vom Parallelenpostulat unabhängig, die wir jetzt aufzählen und als bekannte elementare Kenntnisse voraussetzen dürfen.

1. Zu jedem sphärischen Dreieck mit den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ gehört ein dazu polares Dreieck, dessen Seiten $\pi - \alpha$, $\pi - \beta$, $\pi - \gamma$ und dessen Winkel $\pi - a$, $\pi - b$, $\pi - c$ sind.

2. Ist r der sphärische Radius eines Kleinkreises, d. h. der Hauptkreisbogen, der den Schnittpunkt der Kugel und der auf der Ebene des Kreises senkrecht stehenden Achse, also den auf der Kugelfläche gelegenen Mittelpunkt mit irgendeinem Punkt der Peripherie verbindet, so sind Kreisbogen und Kreis-

---

[1] Daß die sphärische Trigonometrie vom Parallelenpostulat unabhängig gilt, haben Lobatschefskij (S. 235) und Bolyai (Appendix § 26, S. 195) wieder, wie die ganze Trigonometrie überhaupt, auf die Untersuchung von Parallelkanten im Raum zurückgeführt. Wir bevorzugen den hier beschrittenen, grundsätzlich einfacheren Weg, der lediglich die innere Kinematik der Kugel benützt. Vgl. Liebmann, Leipz. Ber. 60 (1908), S. 289—305.

sektor des sphärischen Kleinkreises dem Zentriwinkel [Winkel der sphärischen Radien] proportional. Ist α der Zentriwinkel, a der Radius, so mögen diese Funktionen mit $\bigcirc(a)$ und $\oplus(a)$ bezeichnet werden. Es ist dann

$$0 = \bigcirc(0) < \bigcirc(a) < \bigcirc\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \qquad \left(0 < a < \frac{\pi}{2}\right)$$

und
$$0 = \oplus(0) < \oplus(a) < \oplus\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,$$

denn Inhalt und Umfang wachsen von 0 bis 2π, wenn der Kreis in einen Hauptkreis übergeht [vgl. § 41].

3. Jeder Kleinkreis kann auch als „Abstandslinie“ aufgefaßt werden: Trägt man auf den Radien eines Hauptkreisbogenstückes von der Länge s die Strecke b ab, so entsteht eine „Abstandslinie“, die zugleich ein Kleinkreis mit dem Radius $\frac{\pi}{2} - b$ ist. Bogenstück und Inhalt der Fläche zwischen der Grundlinie s, dem Bogenstück und den begrenzenden Loten (b) sind proportional zu s und im übrigen Funktionen von b, die mit $E(b)$ und $I(b)$ bezeichnet werden sollen. Es ist dann

$$E(b) = \bigcirc\left(\frac{\pi}{2} - b\right),$$

$$I(b) = 1 - \oplus\left(\frac{\pi}{2} - b\right).$$

§ 71. **Die Funktionalgleichungen für $\bigcirc$, $\oplus$ und ihre Lösung.** Wir denken uns zu einem Kleinkreisbogen s im Abstand a auf beiden Seiten die äquidistanten Kleinkreisbogen u und v gezogen. Zerlegt man die Figur durch gemeinsame Radien in n kongruente Stücke, die man „Kopf gegen Fuß“ wieder aneinanderlegt, so entsteht eine neue Figur mit demselben Inhalt, und es ist auch der Umfang derselbe geblieben. Macht man den Grenzübergang, indem man die Anzahl der Teile unbegrenzt wachsen läßt, so geht die zweite Figur in zwei symmetrisch kongruente Figuren über, und der gebrochene Linienzug der Kleinkreisbogen von der Länge $\frac{s}{n}$ in einen Hauptkreisbogen von der Länge s, so daß wir erhalten

$$u + v = 2s \cdot E(a).$$

s möge jetzt ein Kleinkreisbogen sein, der, als Abstandslinie betrachtet, über dem Hauptkreisbogen t steht und von ihm den Abstand b hat. Dann ist

$$s = t \cdot E(b),$$
$$u = t \cdot E(a+b),$$
$$v = t \cdot E(a-b).$$

Man erhält also durch diese „Fleckenschneiderei" die Funktionalgleichung

$$E(a+b) + E(a-b) = 2\,E(a)\,E(b).$$

Wegen $$E(0) = 1, \quad E\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

ist die einzige stetige Lösung dieser Funktionalgleichung[1]

$$E(a) = \cos a,$$

und daher $$\bigcirc(a) = E\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a.$$

Durch Vertiefung der Beziehung, die zwischen einem Dreieck mit seinem polaren Dreieck besteht, kann man aber auch zeigen, daß zu jeder sphärischen Figur mit dem Umfang L und dem Inhalt F eine polare, d. h. von den Polen der die erste Figur umhüllenden Hauptkreise erzeugte existiert mit dem Inhalt

$$F' = 2\pi - U$$

mit dem Umfang $$U' = 2\pi - F.$$

Der zu einem Kleinkreis mit dem Radius a polare Kleinkreis hat aber den Radius $\frac{\pi}{2} - a$, so daß man erhält

[1] Vgl. die § 60 angeführte Untersuchung von Cauchy.

$$2\pi \oplus \left(\frac{\pi}{2} - a\right) = 2\pi - 2\bigcirc(c),$$

$$2\pi \bigcirc \left(\frac{\pi}{2} - a\right) = 2\pi - 2\pi \oplus (a),$$

es ist also
$$\oplus(a) = 1 - \cos a.$$

§ 72. Der Kosinussatz. Lassen wir ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Ecke A festgehalten wird, eine Drehung um den Winkel φ ausführen, wobei die Ecken C und B in C' und B' übergehen, so überstreicht AB die Fläche $\varphi(1 - \cos c)$ und AC die Fläche $\varphi(1 - \cos b)$, endlich CB ein Viereck $(CC'B'B)$, das von zwei Kreisbögen (CC') und (BB') und von zwei Hauptkreisbogen CB und $C'B'$ begrenzt ist; es ergibt sich also
$$\varphi(1 - \cos c) = \varphi(1 - \cos b) + (CC'B'B).$$

Den Wert von $CC'B'B$ kann man aber wieder durch Grenzübergang bestimmen, indem man auf dem Kleinkreisbogen CC' die Teilpunkte $C_1 \ldots C_{n-1}$ einschaltet. Ist $\triangle\tau$ der Winkel, den je zwei benachbarte, an den inneren Kreis gelegte Tangenten miteinander einschließen, so wird

$$(CC'B'B) = \lim_{n=\infty}\text{es}\, \triangle\tau\,(1 - \cos a).$$

Für den Exzeß oder Inhalt eines jeden der n kongruenten Vierecke, die von zwei benachbarten Kreisradien b und den Tangenten in ihren Endpunkten gebildet werden, erhält man

$$\frac{\varphi}{n} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + (\pi - \triangle t) - 2\pi = \frac{\varphi}{n} - \triangle t,$$

und da die Summe dieser Vierecke im Grenzfall gleich dem Sektor des inneren Kleinkreises wird, so folgt

$$\varphi(1 - \cos b) = \lim_{n=\infty}\left(n\left(\frac{\varphi}{n} - \triangle t\right)\right),$$

d. h.
$$\lim_{n=\infty} n\triangle t = \varphi \cdot \cos b.$$

Man erhält also

$$\varphi(1 - \cos c) = \varphi(1 - \cos b) + \varphi(1 - \cos a)\cos b$$

oder
$$\cos c = \cos a \cdot \cos b,$$
d. h. den Kosinussatz des rechtwinkligen Dreiecks.

§ 73. Das *Pentagramma mirificum.* Die weiteren Formeln der Trigonometrie des rechtwinkligen sphärischen Dreiecks findet man leicht aus dem Pentagramma mirificum[1], dem wir uns jetzt zuwenden.

Wenn man in einem rechtwinkligen sphärischen Dreieck die Kathete b über A hinaus um $b' = \frac{\pi}{2} - b$ bis A_1 verlängert, ebenso die Hypotenuse c über A hinaus um $c' = \frac{\pi}{2} - b$ bis C_1, so ist der Punkt A_1, weil $A_1C = \frac{\pi}{2}$ und $\sphericalangle A_1CB = \frac{\pi}{2}$, der Pol des Hauptkreises BCC_1, daher auch A_1B ein Hauptkreisquadrant $\left(= \frac{\pi}{2}\right)$. Wegen $BA_1 = \frac{\pi}{2} = BC_1$ ist dann B der Pol des Hauptkreisbogens A_1C_1, also im Nebendreieck AC_1A_1 der Winkel bei C_1 ein rechter. Verlängert man noch BC und A_1C_1 bis zum Schnitt (D), so ist im Dreieck BA_1D
$$BA_1 = \frac{\pi}{2} = \sphericalangle DA_1B = \sphericalangle DBA_1,$$
das Dreieck BA_1D ist also ein Kugeloktant, und wir können jetzt sämtliche Bestimmungsstücke des rechtwinkligen Nebendreiecks ablesen.

Hypotenuse: $c_1 = AA_1 = \frac{\pi}{2} - b;$

Katheten: $a_1 = C_1A_1 = \sphericalangle A_1BC_1 = \frac{\pi}{2} - \beta,$

$b_1 = AC_1 = \frac{\pi}{2} - c;$

Winkel: $\alpha_1 = \sphericalangle C_1AA_1 = \alpha,$

$\beta_1 = \sphericalangle AA_1C_1 = CD = \frac{\pi}{2} - a.$

[1] Die wichtigste Figur des *Pentagramma mirificum* hat Lambert in seinen „Beiträgen zur Mathematik“ I, 1765, untersucht. Vgl. A. v. Braunmühl, Geschichte der Trigonometrie II, Leipzig 1903, S. 13 u.

Setzt man die Konstruktion, die vom Ausgangsdreieck zum ersten Nebendreieck führte, fort, so fällt das fünfte Dreieck mit dem ersten BCA zusammen, und es entsteht die geschlossene Figur des „*Pentagramma mirificum*".

Aus ihr können alle Dreiecksformeln abgelesen werden. Das erste Nebendreieck ergibt z. B., wenn man den Kosinussatz anwendet:

$$\cos c_1 = \cos a_1 \cdot \cos b_1$$

oder

$$\sin b = \sin c \sin \beta.$$

Die übrigen Formeln können leicht gefunden werden durch weitere Heranziehung der Nebendreiecke und elementare Rechnungen, und mit dem rechtwinkligen Dreieck ist dann auch das allgemeine Dreieck in bekannter Weise eingeordnet.

Das *Pentagramma mirificum* bildet den Schlußstein der grundlegenden Elemente der absoluten sphärischen Trigonometrie.

Hypothesen, die mit dem euklidischen Postulat gleichberechtigt sind.[1]

§ 74. Bevor wir das elementare Gebiet verlassen, scheint es uns angebracht, die Aufmerksamkeit des Lesers darauf zu lenken, welchen Wert im Organismus der Geometrie die Sätze haben, die in einem bestimmten Sinne als dem V. Postulat äquivalente Hypothesen gelten können.

Um uns deutlich verständlich zu machen, beginnen wir mit der Erklärung der Bedeutung dieser Äquivalenz.

Zwei Hypothesen sind absolut gleichberechtigt, wenn jede von ihnen aus der anderen folgt ohne Hilfe einer neuen

---

131. Später hat ihr Gauß seine Aufmerksamkeit gewidmet (Werke III, 1876, S. 481—490 und VIII, 1900, S. 106—117). Vgl. auch Schlesinger, Journal f. Math. 124 (1902), S. 38—46. In der Schulmathematik, wo sie so fruchtbringend verwendet werden könnte, hat sie sich leider nicht eingebürgert!

[1] Wir geben diese logisch musterhafte Zusammenfassung Bonolas aus der ersten Auflage unverändert wieder.

Hypothese. In diesem Sinne sind absolut äquivalent die beiden folgenden Hypothesen:

a) Zwei zu einer dritten parallele Gerade sind untereinander parallel.

b) Durch einen Punkt außerhalb einer Geraden geht eine und nur eine Parallele zu dieser Geraden.

Diese Art von Äquivalenz hat nicht viel Interesse, weil die beiden Hypothesen einfach zwei verschiedene Formen eines und desselben Satzes sind. Wir wollen vielmehr zusehen, wie der Begriff der Äquivalenz verallgemeinert werden kann.

Nehmen wir an, es sei eine deduktive Theorie auf ein bestimmtes System von Hypothesen begründet, das wir mit $\{A, B, C \ldots H\}$ bezeichnen wollen. Seien dann M und N zwei neue Hypothesen, derart, daß aus dem System $\{A, B, C \ldots H, M\}$ das N abgeleitet werden kann und aus dem System $\{A, B, C \ldots H, N\}$ das M. Wir deuten das an, indem wir schreiben:

$$\{A, B, C \ldots H, M\} \cdot\supset\cdot N,$$

$$\{A, B, C \ldots H, N\} \cdot\supset\cdot M.$$

Verallgemeinern wir jetzt den Begriff der Äquivalenz, so können wir sagen, daß die beiden Hypothesen M, N äquivalent sind in bezug auf das Fundamentalsystem $\{A, B, C \ldots H\}$.

Wir betonen die Wichtigkeit, welche in dieser Definition das Fundamentalsystem $\{A, B, C \ldots H\}$ hat. In der Tat kann es eintreten, daß, wenn man das Fundamentalsystem einschränkt, indem man z. B. die Hypothese A ausläßt, die beiden Schlüsse

$$\{B, C \ldots H, M\} \cdot\supset\cdot N,$$

$$\{B, C \ldots H, N\} \cdot\supset\cdot M$$

nicht gleichzeitig möglich sind.

Dann sind die Hypothesen M, N hinsichtlich des neuen Fundamentalsystems $\{B, C \ldots H\}$ nicht äquivalent.

Nach diesen Erklärungen logischer Natur wollen wir sehen, was aus den vorhergehenden Entwicklungen für die Äquivalenz solcher Hypothesen und der euklidischen Hypothese folgt.

Nehmen wir an erster Stelle als Fundamentalsystem das aus den Postulaten der Assoziation [A] und Distribution [B] gebildete, die in der gewöhnlichen Weise die Begriffe der Geraden und der Ebene charakterisieren; ferner aus den Postulaten der Kongruenz [C] und aus dem in § 6, 11, 15 erwähnten Postulat des Archimedes [D].

In bezug auf dieses Fundamentalsystem, das wir mit $\{A, B, C, D\}$ bezeichnen werden, sind die folgenden Hypothesen untereinander und mit der von Euklid in seinem V. Postulat (§ 1) ausgesprochenen äquivalent.

a) Die inneren Winkel, die zwei Parallele mit einer Transversale auf derselben Seite bilden, sind supplementar [Ptolemäus, § 2].

b) Zwei parallele Gerade sind äquidistant [Cataldi, § 7].

c) Trifft eine Gerade die eine von zwei Parallelen, dann trifft sie auch die andere [Proclus, § 3]; oder: zwei zu einer dritten Geraden parallele Gerade sind untereinander parallel, oder auch: durch einen Punkt außerhalb einer Geraden geht eine und nur eine Parallele zu dieser Geraden.

d) Zu einem beliebigen Dreieck kann immer ein ähnliches Dreieck von beliebiger Größe konstruiert werden [Wallis, § 9].

e) Durch drei Punkte, die nicht in gerader Linie liegen, geht immer ein Kreis [W. Bolyai, § 29].

f) Durch einen Punkt, der zwischen den Schenkeln eines Winkels liegt, geht immer eine Gerade, die die beiden Schenkel des Winkels trifft [Lorenz, § 28].

α) Wenn von zwei Geraden r, s die eine senkrecht und die andere geneigt gegen die Transversale AB ist, so sind die von den Punkten von s auf r gefällten Lote sämtlich kleiner als AB auf der Seite, wo AB mit s einen spitzen Winkel bildet [Nasîr-Eddîn, § 6].

β) Der Ort von einer Geraden gleichweit entfernter Punkte ist eine Gerade [Clavio und Borelli, § 7].

γ) Die Winkelsumme im Dreieck ist gleich zwei Rechten [Saccheri, § 17].

Wir wollen jetzt das Fundamentalsystem von Hypothesen einschränken, indem wir von der Archimedischen Hypothese absehen. Dann sind die Sätze a), b), c), d), e), f) auch noch untereinander und mit dem V. euklidischen Postulat äquivalent in bezug auf das neue Fundamentalsystem $\{A, B, C\}$. Die Sätze α, β, γ sind zwar untereinander äquivalent in bezug auf das System $\{A, B, C\}$, aber keiner ist dem euklidischen Postulat äquivalent. Dieses Ergebnis, das die Stellung des Archimedischen Postulats hervortreten läßt, ist in einer schon zitierten Arbeit von M. Dehn [1900] enthalten.[1] In dieser Arbeit wird bewiesen, daß die Hypothese γ über die Winkelsumme im Dreieck nicht nur mit der gewöhnlichen elementaren Geometrie verträglich ist, sondern auch mit einer neuen, notwendigerweise nichtarchimedischen, wo das V. Postulat nicht gilt und wo durch einen Punkt unendlich viele Nichtschneidende hinsichtlich einer vorgezeichneten Geraden gehen. Dieser Geometrie gab der Entdecker den Namen: Semieuklidische Geometrie.

[1] Vgl. § 14 Anm. 1.

Fünftes Kapitel.

Neuere Wege und Ziele.

§ 75. Lange Zeit ruhten die Forschungen der Klassiker, von deren Ergebnissen wir im vorigen Kapitel ein zeitgemäß ergänztes Bild geben wollten, fast unbeachtet im Verborgenen.

Die weitere Entwicklung kann man ungefähr charakterisieren durch die Schlagworte: Abbildungen im Rahmen der euklidischen Geometrie, erweiterte Erforschung der Grundlagen, Anwendungen auf neue Gebiete (Funktionentheorie, Physik, insbesondere die klassische Relativitätstheorie).

In der summarischen Darstellung, die uns die Enge des zur Verfügung stehenden Umfangs aufnötigt, mag es gestattet sein, zeitlich Getrenntes, wenn die Systematik dies geeignet erscheinen läßt, vereint zu bringen. —

Unmittelbar an die im vorigen Kapitel entwickelte Elementargeometrie lassen sich die Entdeckungen von Beltrami [1835—1900] und die viel später erfolgten schließen, die Poincaré [1854—1912] und Klein in den Dienst der Funktionentheorie gestellt haben.

Die erst in den Händen von Klein zu einem neuen Eingangstor in die nichteuklidische Geometrie ausgestaltete projektive Maßbestimmung Cayleys [1821—1895] wurde zugleich eine Anregung zur Erforschung der Grundlagen der Geometrie überhaupt, die seitdem nicht ruht. Auch die „zweite Hypothese", also die Geometrie, deren einfachster Repräsentant die Kugel ist, kommt hier zur Sprache.

Ganz andere Wege wieder hat Riemann [1826—1866] gebahnt, indem er von dem „Raum als Zahlenmannigfaltigkeit" ausging. Die weiteren nach dieser Richtung gehenden Untersuchungen von Helmholtz [1821—1894] bedurften der Klärung, welche Lie [1842—1899] durch die Gruppentheorie geschaffen hat. —

Hinsichtlich der Axiomatik werden wir später auf Literatur verweisen; an dieser Stelle mögen folgende Äußerungen die Schwierigkeiten kennzeichnen.

S. Lie[1] sagt: „Die Grundlagen der Geometrie sind ein Gebiet, dessen Bearbeitung schwierig und, sagen wir es offen, ziemlich undankbar ist; gibt es doch unter den vielen, die sich damit beschäftigt haben, nur wenige, die von allen ihren Nachfolgern anerkannt worden sind, und keinen, der ganz unangefochten geblieben wäre".

F. Schur[2] charakterisiert diese Schwierigkeit mit den Worten: „Ob es je gelingen werde ein solches System [von Postulaten ohne überflüssige Elemente] aufzustellen und seine Unabhängigkeit zu beweisen, erscheint uns schon deshalb sehr zweifelhaft, weil die meisten Postulate erst auf Grund früherer einen Sinn erhalten, die Frage also, ob jedes einzelne Postulat von allen übrigen unabhängig sei, garnicht gestellt werden kann".

Euklidische Bilder der nichteuklidischen Geometrie.

§ 76. Die Polarkoordinatensysteme der hyperbolischen Geometrie.[3] Das zunächst sich bietende Koordina-

---

[1] S. Lie, Theorie der Transformationsgruppen III, S. 535. Leipzig 1893.

[2] F. Schur, Grundlagen der Geometrie, S. VII. Leipzig 1909. — E. Picard (La science moderne et son état actuel. Paris 1905) sagt noch dramatischer (S. 61/62): „Studiert man die neuesten Arbeiten über die Prinzipien der Geometrie, so erschrickt man über die lange Liste der Postulate, die notwendig sind, damit die Geometrie den Charakter logischer Strenge erhält, den man ihr im allgemeinen zuerteilt."

[3] Von Koordinatensystemen macht schon Lobatschefskij an vielen Stellen Gebrauch, desgleichen fast durchweg die in § 47 aufgezählten Werke.

tensystem hat als Grundlage das Netz konzentrischer Kreise und ihrer Radien. Als Koordinatenanfang ist der Mittelpunkt der Kreise zu wählen, der Winkel φ wird von einem Anfangsstrahl aus gerechnet, genau wie in der euklidischen Geometrie. Das Element eines Kreisbogens hat dann die Länge (§ 63)

$$sh\,r \cdot d\varphi$$

und für das Quadrat des Bogenelementes erhält man

$$ds^2 = dr^2 + sh^2 r\, d\varphi^2$$

aus einem infinitesimalen rechtwinkligen Dreieck, entsprechend dem Ausdruck

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$$

in der euklidischen Geometrie.

Neben dieses eigentliche Koordinatensystem treten aber jetzt zwei andere Systeme, entsprechend den neuen Arten von Cykeln.

Die Abstandslinien geben Anlaß, folgende Koordinaten einzuführen, die, scheinbar den Cartesischen Koordinaten xy entsprechend, doch wohl eher als andere Form des nichteuklidischen Systems von Polarkoordinaten aufzufassen sind.

Wir wählen eine x-Achse und nehmen als Koordinaten eines Punktes P das mit Vorzeichen versehene Lot $PX = y$ auf die x-Achse und die Strecke $OX = x$. (Man beachte, daß das auf die y-Achse gefällte Lot PY nicht gleich x und OY nicht gleich y ist bei allgemeiner Wahl der Lage von P!)

Die Linien $y =$ konst. sind dann Abstandslinien und die Linien $x =$ konst. Gerade. Der über dem Element dx der x-Achse stehende Bogen einer Abstandslinie ist dann (§ 60)

$$ch y\; dx$$

und man erhält für das Quadrat des Bogenelementes

$$ds^2 = dy^2 + ch^2 y\, dx^2.$$

Als drittes System führen wir „Grenzkreiskoordinaten" ein. Die positive ξ-Halbachse wird von einem Punkt O nach rechts gezählt, als η-Achse wird ein Grenzkreis gewählt, der nach dem positiven Ende der x-Achse seine Hohlseite wendet. Die Koordinaten eines Punktes sind ξ, nämlich sein mit Vorzeichen versehener Abstand FP vom Grenzkreis, und η, nämlich der Grenzkreisbogen (OF). Die Linien $\xi =$ konst. sind Grenzkreire, und auf einem Grenzkreis ist das Bogenelement (§ 61)

$$e^{-\xi} d\eta.$$

Die Linien $\eta =$ konst. sind Gerade, und für das Quadrat des Bogenelementes erhält man

$$ds^2 = e^{-2\xi} d\xi^2 + d\eta^2.$$

Als unmittelbare Anwendung des zweiten Systems sei hier die Berechnung der Strecke S gegeben. Die Gleichung des nach der Seite $+x$ offenen Grenzkreises ist (§ 61)

$$e^x = ch\, y.$$

Lassen wir $\Pi(y)$ von $\frac{\pi}{2}$ bis $\frac{\pi}{4}$ abnehmen, so wächst s von 0 bis S. Man erhält jetzt die Messung aus

$$ds^2 = dy^2 + ch^2 y\, dx^2 = dy^2 + e^{2x} dx^2 = dy^2 + d(ch\, y)^2 = d^2(sh\, y),$$

oder wenn

$$\Pi(y) = \psi$$

gesetzt wird, nach § 63

$$ds = d \cot \psi, \quad s = \cot \psi$$

und

$$S = \cot \frac{\pi}{4} - \cot \frac{\pi}{2} = 1.$$

Bei der früher § 61 getroffenen Festsetzung ist also die Streckeneinheit gegeben durch den Grenzkreisbogen $1 = S = (AB)$, wobei die Tangente in A und die nach außen verlängerte Achse durch B parallel sind.

§ 77. Beltramis kongruentes Bild. Gauß[1] hat bekannt-

[1] Disquisitiones generales circa superficies curvas, Göttingen 1828 = Werke IV (1873), p. 217—258. Deutsch in Ostwalds Klassikern der exakten Wissenschaften Nr. 5 (Leipzig 1889) von Wangerin. — Vgl. auch zur Würdigung die Stäckel in den oben (§ 31) angeführten

lich gezeigt, daß das **Krümmungsmaß** einer Fläche

$$x = x(u, v) \quad y = y(u, v) \quad z = z(u, v),$$

bei der das Quadrat des Bogenelementes durch

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2;$$

$$e = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$$

$$f = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

$$g = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2$$

(die Indizes deuten die Differentiationen nach u und v an), gegeben ist durch eine Formel, die nur von e, f, g und ihren ersten und zweiten Differentialquotienten nach u und v abhängt. Die quadratische Form ihrerseits legt zwar die Gestalt der Fläche noch nicht fest, doch bewirkt die Gleichheit der e, f, g für zwei Flächen, daß sie stückweise aufeinander abwickelbar sind, wie ein (aufgeschnittener) Zylinder auf einen Parallelstreifen der Ebene, und ein längs einer Mantellinie aufgeschnittener Kegel auf einen von zwei Halbstrahlen begrenzten Sektor der Ebene.

Zwei in diesem Sinne „stückweise“ aufeinander abwickelbare Flächen haben also in entsprechenden Punkten gleiches Krümmungsmaß.

Für $f = 0$ wird das Krümmungsmaß

„Materialien“ über die flächentheoretischen Arbeiten von Gauß gegeben hat (S. 104—140). — Stäckel sagt ausdrücklich (S. 127): Ob Gauß die Geometrie auf einer krummen Fläche noch weiter ausgebaut, ob er im besonderen den Zusammenhang zwischen der Geometrie auf den Flächen konstanten Krümmungsmaßes und der nichteuklidischen Geometrie der Ebene erkannt hat, ist nicht mit Sicherheit zu entscheiden“. — E. Beltrami (1835—1900) erst hat in seinem Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea, Giorn. mat. 6 (1868), p. 284—312, diese durch Lambert (§ 21) und Taurinus (§ 36) vorbereiteten Schlüsse gezogen. — Eine ausführliche Darstellung findet sich in allen Büchern über Flächentheorie, am eingehendsten wohl in L. Bianchis Vorlesungen über Differentialgeometrie, deutsch von M. Lukat, Kap. XVI S. 418—439. Leipzig 1899.

$$K = \frac{1}{4e^2g^2}\left\{e(e_2g_2+g_1^2)+g(e_1g_1+e_2^2)-2eg(e_{22}+g_{11})\right\}.$$

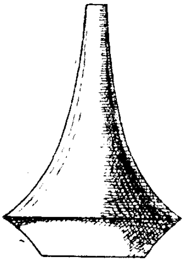
Demnach würde z. B. auf einer Fläche mit dem Bogenelementquadrat[1]

$$ds^2 = du^2 + sh^2u\,dv^2$$

$$K = \frac{1}{4sh^4u}\left\{4sh^2u\,ch^2u - 2sh^2u\cdot 2(ch^2u+sh^2u)\right\} = -1.$$

Dasselbe Ergebnis hat eine entsprechende Berechnung bei den beiden andern Formen für ds^2.

In einfachster Weise können dann Rotationsflächen im euklidischen Raum hergestellt werden, auf denen man direkt als Ausdruck für ds^2 eine der drei gefundenen Formen erhält. Es mag der zweite Fall hier als Beispiel genügen.



Pseudosphäre.
Fig. 46.

Läßt man eine Traktrix, d. h. eine Kurve, die die Eigenschaft hat, daß der Abschnitt der Tangente zwischen Berührungspunkt und Asymptote konstante Länge (k) hat, sich um die Asymptote drehen, so entsteht eine Fläche mit scharfem Rand, deren Gleichung leicht angegeben werden kann.

Sind r (Achsenabstand), z (Abstand von der xy-Ebene) und φ (Winkel der Meridianebene mit einer Anfangsmeridianebene) die „Zylinderkoordinaten", ferner ξ die Länge der Traktrix von dem Punkt an, wo die Spitze liegt, so ist das Quadrat des Tangentenabschnittes

$$k^2 = r^2 + r^2\left(\frac{dz}{dr}\right)^2$$

konstant, daher $\quad d\xi^2 = dr^2 + dz^2 = \frac{k^2}{r^2}dr^2,$

[1] Bezeichnet man die Länge der „Streckeneinheit S" (§ 61 u. 76) mit k, so wird

$$ds^2 = dr^2 + k^2 sh^2\frac{r}{k}\,d\varphi^2$$

und

$$K = -\frac{1}{k^2}.$$

also $$r = e^{-\frac{\xi}{k}}$$

und $$ds^2 = d\xi^2 + d\varphi^2 e^{-\frac{2\xi}{k}}.$$

Setzt man $k = 1$, $\varphi = \eta$ so erhält man genau

$$ds^2 = d\xi^2 + d\eta^2 e^{-2\xi}.$$

Hieraus erkennt man die Abwickelbarkeit handgreiflich: Ein Grenzkreissektor, der zwischen zwei Achsen und dem Bogenstück 2π eines Grenzkreisbogens eingeschlossen, ist, läßt sich auf den einen Trichter der Rotationstraktrix, der mit dem Scharfrand beginnt, abwickeln; wenn man den Radius dieses Kreises der hyperbolischen Streckeneinheit gleich wählt, wird die Halbtrichterfläche lückenlos überdeckt, mit einer Naht freilich, in der die begrenzenden Achsen des Grenzkreissektors zusammengeheftet sind. —

Zur Ergänzung weisen wir noch darauf hin, daß die Gleichheit des Krümmungsmaßes zweier Flächen in entsprechenden Punkten nicht ausreicht um die Abwickelbarkeit zugeordneter Flächenstücke sicher zu stellen; das tritt nur dann ohne weitere Nebenbedingung ein, wenn das Krümmungsmaß in allen Punkten der beiden Flächenstücke denselben Wert hat.[1]

Es ist Beltramis Verdienst, durch die hier in den Grundzügen entwickelte kongruente Abbildung der hyperbolischen Ebene auf die Flächen konstanter negativer Krümmung, die wir für die Drehfläche der Traktrix im Einzelnen ausgeführt haben, ihr „Bürgerrecht" gesichert zu haben. (Vgl. hierzu auch § 90).

Wir geben hier noch ein Bild einer Fläche konstanten nega-

[1] Es können zwei beliebige reguläre Flächenstücke durch unendlich viele Funktionenpaare so aufeinander bezogen werden, daß sie in entsprechenden Punkten gleiches Krümmungsmaß haben, wenn beide Flächen nicht von konstantem Krümmungsmaß sind (S. Schlesinger, Jahresber. d. Deutsch. Math. Ver. 14 [1905], S. 566).

tiven Krümmungsmaßes, nämlich die Photographie einer Papierhaut. Die Herstellung ist ebenso instruktiv wie mühsam. Die hyperbolische Ebene kann (im Gegensatz zur euklidischen) durch reguläre n-Ecke in kongruente Stücke zerschnitten werden, da der Eckenwinkel, der in der euklidischen Geometrie

$$\alpha = \left(1 - \frac{2}{n}\right)\pi$$

beträgt, dort beliebig klein gewählt werden kann. Nimmt man $n = 7$ und $\alpha = \frac{\pi}{3}$, so erhält man reguläre Siebenecke, die die hyperbolische Ebene einfach und lückenlos überdecken. Ein solches Siebeneck besteht aus 14 kongruenten bzw. symmetrisch-kongruenten Dreiecken, in denen je ein Winkel $\frac{\pi}{3}$ $\left(\text{nicht } \frac{5\pi}{14}\right)$ beträgt. Diese Dreiecke, natürlich nicht durch Gerade sondern durch schwach gekrümmte Kreisbogen begrenzt, schneidet man aus unserm „euklidischen" Papier aus und klebt sie zusammen. Es entsteht dann die hier abgebildete Flächenhaut, die sich ganz von selbst rollt.[1]

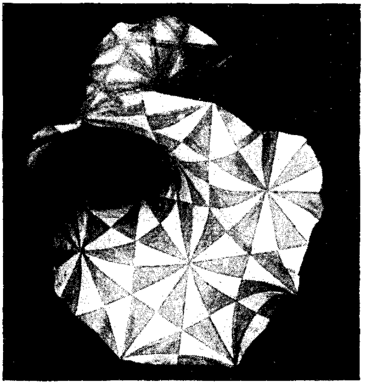


Fig. 47.

§ 78. Die winkeltreue Abbildung.[2] Die bekannte ste-

[1] Die erste Auflage enthielt (S. 141, Fig. 54) hier ein Bild von Beltramis im Seminar der Universität zu Pavia aufbewahrten Modell, ober nicht gerollt, sondern ausgebreitet, so daß Falten auftreten! — Wir bringen an seiner Stelle das Bild der von S. Finsterwalder hergestellten Flächenhaut.

[2] H. Poincaré, Mémoire sur les fonctions fuchsiennes. Acta mathematica 1 (1882), p. 1—62. — Übrigens steht im Grunde genommen

reographische Projektion bildet die Geometrie auf der Kugelfläche ab auf die Geometrie der euklidischen Ebene. Die Abbildung ist winkeltreu, doch entsprechen den kürzesten Linien der sphärischen Geometrie, den Hauptkreisen, nicht die Geraden der Ebene sondern gewisse Kreise. Um einen ganz einfachen Fall deutlich vor Augen zu haben, stellen wir die stereographische Projektion so her, daß wir die Punkte (P) der Kugel mit dem Nordpol (N) verbinden und die Verbindungslinien mit der Äquatorebene zum Schnitt bringen (Q). Jedem Kreis (P) entspricht dann ein Kreis (Q) und insbesondere den Hauptkreisen werden Kreise zugeordnet, die den Äquator „diametral", in einem Paar von Gegenpunkten schneiden. — Auf Einzelheiten wollen wir aber hier nicht weiter eingehen; die Betrachtung sollte uns nur als Vorbild für die Abbildung der hyperbolischen Ebene dienen.

Indem wir die Grenzkreiskoordinaten jetzt etwas anders bezeichnen, nämlich ξ und η in ihrer Bedeutung vertauschen, erhalten wir

$$ds^2 = d\eta^2 + e^{-2\eta}\, d\xi^2.$$

Die Entfernung ρ zweier Punkte $P_1(\xi_1 \eta_1)$ und $P_2(\xi_2 \eta_2)$ erhält man aus einem rechtwinkligen Dreieck mit der Hypotenuse $P_1 P_2$, dessen eine Kathete v der Geraden $\xi = \xi_2$ angehört. Der Fußpunkt der zweiten Kathete u trifft diese Gerade in einem Punkt, der von ihrem Schnitt mit dem durch P_1 gelegten Grenzkreis noch eine Entfernung w hat, die von Null verschieden ist.

Aus den Beziehungen

$$v + w = \eta_2 - \eta_1 \qquad e^{w} = ch\, u$$

$$sh\, u = e^{-\eta_1}(\xi_2 - \xi_1) \qquad ch\, \rho = ch\, u\, ch\, v$$

erhält man dann

$$ch\, \rho = ch(\eta_2 - \eta_1) + \frac{e^{-\eta_1 - \eta_2}}{2}(\xi_2 - \xi_1)^2.$$

---

diese Abbildung schon in Beltramis Abhandlung Teoria degli spazii di curvatura costante. Ann. mat. Milano 2 (2), 1868, p. 232—255.

Wir bilden jetzt auf die euklidische Ebene ab durch den Ansatz

$$(1) \qquad y = e^{\eta}, \qquad\qquad x = \xi$$

$$ch\,\rho = \tfrac{1}{2}\left(e^{\eta_2-\eta_1} + e^{\eta_1-\eta_2}\right) + \tfrac{1}{2}e^{-\eta_1-\eta_2}(\xi_2-\xi_1)^2$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\frac{y_2}{y_1} + \frac{y_1}{y_2}\right) + \frac{1}{2y_1y_2}(x_2-x_1)^2$$

oder $\qquad 2y_2y_1\,ch\,\rho = y_1^2 + y_2^2 + (x_2-x_1)^2$, d. i.

$$(2) \qquad (x_2-x_1)^2 + (y_2 - y_1\,ch\,\rho)^2 = y_1^2 \cdot sh^2\rho.$$

Hält man hierin ξ_1, η_1 also auch x_1 und y_1 und außerdem ρ fest, so wird in der hyperbolischen Ebene ein Kreis dargestellt, ebenso auch in der Euklidischen Halbebene.

Wir brauchen das Wort Halbebene, weil dem Bereich

$$-\infty < \xi < +\infty \qquad\qquad -\infty < \eta < +\infty$$

das Gebiet mit positivem y

$$-\infty < x < +\infty \qquad\qquad 0 < y < \infty \qquad \text{entspricht.}$$

Setzt man in (2) $y_2 = 0$, so kommt:

$$(x_2-x_1)^2 = y_1^2(sh^2\rho - ch^2\rho) = -y_1^2;$$

die Bilder der Halbebene sind also Kreise [der oberen Halbebene], die die x-Achse nicht schneiden.

Die Abbildung ist winkeltreu [konform], denn aus

$$dx^2 + dy^2 = d\eta^2 + e^{-2\eta}d\xi^2$$

folgt, daß das Bogenelement in der hyperbolischen Ebene zu dem entsprechenden Bogenelement der euklidischen Ebene in dem nur vom Ort abhängigen dagegen von der Richtung unabhängigen Verhältnis steht

$$\frac{\sqrt{d\eta^2 + e^{-2\eta}d\xi^2}}{\sqrt{dx^2+dy^2}} = e^{\eta} = y.$$

Die Orthogonaltrajektorien aller Kreise mit dem gemeinsamen Mittelpunkt $\xi_1\,\eta_1$ sind in der hyperbolischen Ebene Gerade durch diesen Punkt. Ihre Bilder in der euklidischen Ebene sind dann die Kurven, welche die Kreise (K_1)

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1 ch\,\rho)^2 = y_1^2 sh^2 \rho \; (0 \leqq \rho < \infty)$$

senkrecht schneiden. Die rechtwinkligen Koordinaten des Mittelpunktes und der Radius eines Kreises dieses Büschels sind durch

$$a_1 = x_1, \quad b_1 = y_1 ch\,\rho, \quad r_1 = y_1 sh\,\rho$$

gegeben und jeder Kreis (K_2) mit den Mittelpunktkoordinaten

$$a_2, \; b_2 \; (= 0)$$

und dem Radius r_2, wobei

$$r_2^2 = (a_2 - x_1)^2 + y_1^2 ch^2 \rho$$

ist, schneidet jeden Kreis K_1 senkrecht, weil die Summe der Quadrate der Radien von K_1 und K_2 gleich dem Quadrat des Abstands ihrer Mittelpunkte ist ·

$$r_1^2 + r_2^2 = (a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2 .$$

Die Bilder der Geraden (durch $\xi_1 \eta_1$) sind also die Kreise K_2 (durch x_1, y_1), und zwar Kreise[1], deren Mittelpunkte auf der x-Achse liegen, die folglich die x-Achse senkrecht schneiden.

Hieraus können auch die Bilder der Grenzkreise und der Abstandslinien erschlossen werden. Das Bild eines Parallelbüschels von Geraden [mit gemeinsamem Ende] sind Kreise (K_2) die alle auf der x-Achse einen Punkt gemein haben und sie dort senkrecht schneiden. Die Bilder ihrer Orthogonaltrajektorien, also von Grenzkreisen, deren Achsen ein Ende gemein haben, sind demnach Vollkreise, die die x-Achse im Bildpunkt des „Endes" berühren.

Abstandslinien sind Orthogonaltrajektorien eines Geradenbüschels, dessen Individuen auf einer Geraden senkrecht stehen, ihre Bilder also die Orthogonaltrajektorien von Kreisen (K_2), die auf einem bestimmten Kreis K_2 senkrecht stehen, daher wieder Kreise K_2 oder vielmehr Kreisbogen, die mit dem Halbkreis K_2,

[1] Besser wäre es zu sagen „Halbkreise", da als Feld nur die Halbebene $y > 0$ in Betracht kommt.

dem Bild der gemeinsamen „Grundlinie" der Abstandslinien, die Endpunkte gemein haben.[1]

§ 79. Analytische Darstellung der Bewegungen. Die allgemeinste Bewegung der hyperbolischen Ebene in sich kann man in verschiedener Weise aus drei Elementarbewegungen zusammensetzen. Die folgenden Elementarbewegungen sind unserm Koordinatensystem ξ, η angepaßt. Als erstes Element nehmen wir „Drehungen" um das „Ende" $\xi = 0$, $\eta = +\infty$, das sind Bewegungen, bei denen die Grenzkreise $\eta =$ konst. jeder in sich übergehen, die Spuren der Geraden $\xi =$ konst. auf dem Grenzkreis $\eta = 0$ um die Strecke a fortwandern. Dies gibt

$$\xi_1 = \xi + a, \quad \eta_1 = \eta.$$

Dazu kommen die Schiebungen längs $\xi = 0$ um die Strecke b; sie sind dargestellt durch

$$\xi_1 = \xi e^b, \quad \eta_1 = \eta + b.$$

Von diesen Gleichungen läßt die zweite die Verschiebungen der Grenzkreise erkennen, die erste geht aus der Beziehung hervor, die zwischen konzentrischen Grenzkreisbogen besteht.

Das dritte Element mag die Drehung um 180^0 bei festgehaltenem Koordinatenanfang sein. Dabei ändert sich der Abstand vom Nullpunkt nicht, es ist also

$$ch(OP) = ch\eta - \frac{e^{-\eta}}{2}\xi^2 = ch(OP_1) = ch\eta_1 - \frac{e^{-\eta_1}}{2}\xi_1^2.$$

Ist ferner YP der Abstand von der Achse $\xi = 0$, so ist bei dieser Drehung

$$YP + Y_1P_1 = 0,$$

daher

$$\xi_1 e^{-\eta_1} = -\xi e^{-\eta}.$$

[1] Durch Anwendung einer weiteren Kreisverwandtschaft (in der euklidischen Ebene), die die positive Halbebene auf das Innere eines Kreises abbildet, erhält man dann dieselbe Abbildung der hyperbolischen Ebene, die in § 69 unmittelbar im hyperbolischen Raum, mit Benützung der Grenzkugel und der „Randbilder" gewonnen worden ist.

Löst man die Gleichungen auf, so kommt

$$\xi_1 = \frac{-\xi}{\xi^2 + e^{2\eta}}, \quad e^{\eta_1} = \frac{e^{\eta}}{\xi^2 + e^{2\eta}}.$$

Durch die Abbildung verwandeln sich die Transformationen in

$$\begin{aligned} x_1 &= x + a, & y_1 &= y \\ x_1 &= x e^b, & y_1 &= y e^b, \\ x_1 &= -\frac{x}{x^2 + y^2}, & y_1 &= \frac{y}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Führt man die komplexen Größen

$$z = x + iy, \quad z_1 = x_1 + iy_1$$

ein, so erhält man

$$z_1 = z + a, \quad z_1 = z \cdot e^b, \quad z_1 = \frac{-x + iy}{x^2 + y^2} = \frac{-1}{x + iy} = -\frac{1}{z}.$$

Durch Zusammenfügen entsteht die allgemeine Formel[1]

$$z_1 = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

in der α, β, γ, δ reell sind, und der sogenannte „Modul“ ist

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Diese „unimodularen“ Substitutionen mit reellen Koeffizienten beherrschen die Theorie der automorphen Funktionen und setzen sie in engsten Zusammenhang mit der Gruppe der Bewegungen in der hyperbolischen Ebene.[2]

[1] Diese Darstellung — aus den ursprünglichen Vorstellungen der hyperbolischen Geometrie — nicht aus dem „Kreisbild“ gewonnen, bei Liebmann, Math. Ann. 59 (1903), S. 110—128.

[2] Die funktionentheoretische Verwertung, die zu der Theorie der automorphen Funktionen führt, erfordert zunächst die Aufstellung der diskontinuierlichen Gruppen hyperbolischer Bewegungen, vermöge deren die hyperbolische Ebene in ein Feld kongruenter „Fundamentalbereiche“ nach Art der „Periodenparallelogramme“ der elliptischen Funktionen zerfällt. — Außer den Abhandlungen von Poincaré, Acta mathematica I (1882), III, IV (1883) und Klein, Math. Ann. 21 (1883) sind

Man kann auch den umgekehrten Weg gehen, und mit der Deutung der in der Halbebene ($y \geqq 0$) gelegenen Halbkreise, deren Enden auf der x-Achse liegen, als „Pseudogeraden" einer Geometrie beginnend, in der als „Maß des Bogenelementes"

$$ds' = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y}$$

vorgeschrieben ist, die hyperbolische Geometrie entwickeln.[1] Die Fortschritte aber, die die von uns vorangestellte unmittelbare Erfassung der hyperbolischen Geometrie durch die erneute Kenntnis der grundlegenden Werke von Bolyai und Lobatschefskij gemacht hat, lassen doch wohl den von uns in Kap. IV beschrittenen Weg als historische Pflicht und zugleich als natürlichen Entwicklungsgang erscheinen — wenn auch die Schöpfung jener Zeiten erst durch ihre neue, hier in den Grundzügen gegebene Fassung für die Funktionentheorie aus dem Schatten ins Licht getreten ist.

Die projektive Richtung.

§ 80. Die bisher betrachteten Abbildungen sind entweder kongruente Darstellungen der nichteuklidischen Geometrie auf den Flächen konstanten Krümmungsmaßes im euklidischen Raum, oder konforme Abbildungen auf die euklidische Ebene, wobei den Geraden bestimmte Kreise entsprechen. Die dritte, noch zu besprechende Abbildung auf die euklidische Ebene

die zusammenfassenden Werke zu nennen: F. Klein und R. Fricke, Theorie der automorphen Funktionen I (1897), II (1911), L. Schlesinger, Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen II, 2 (1898), vgl. auch desselben Verfassers: De nonnullis absolutae geometriae ad theoriam complexae variabilis functionum applicationibus (1902) und den Enzyklopädieartikel II B 3 (Fricke) Automorphe Funktionen (Leipzig 1913), sowie den unten folgenden Anhang von Schlesinger.

[1] Vgl. Weber-Wellstein (angeführt § 47) und die erste Auflage von Liebmann, Nichteuklidische Geometrie, Kap. II. Leipzig 1905.

ist „geodätisch“, d. h. sie ordnet den geraden Linien wieder Gerade zu.

Sie geht auf Untersuchungen von Cayley zurück, die aber erst F. Klein in ihrer Bedeutung für die nichteuklidische Geometrie erkannt hat.[1]

Von da aus schreiten wir dann weiter mit Klein zu der unabhängig vom Parallelenpostulat begründeten Geometrie der Lage, auf der sich die Maßgeometrie in neuer Auffassung begründen läßt.

Im wesentlichen setzen wir zunächst nur die Grundbegriffe der elementaren, noch auf euklidischen Maßverhältnissen fußenden projektiven Geometrie voraus, bei der das Doppelverhältnis von vier Punkten einer Geraden

$$(S_1 M_1 S_2 M_2) = \frac{S_1 M_1}{S_2 M_1} : \frac{S_1 M_2}{S_2 M_2},$$

in bekannter Weise durch Strecken oder auch Koordinatendifferenzen-Quotienten gegeben ist, und das Doppelverhältnis von vier Geraden eines ebenen Strahlbüschels

$$(s_1 m_1 s_2 m_2),$$

gleich dem Doppelverhältnis der vier Schnittpunkte einer beliebigen Geraden mit den Strahlen des Büschels ist.

Dazu kommen noch die elementarsten Begriffe über Kegelschnitte und Flächen zweiten Grades.

§ 81. Die elliptische Maßbestimmung. Wir führen die Zentralprojektion der Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

[1] A. Cayley, Sixth memoir upon quantics. London Phil. Trans. 149 (1859), S. 61—90 = Coll. Papers II (1889), p. 561—592. — F. Klein, Über die sogenannte nichteuklidische Geometrie. Math. Ann. 4 (1871), S. 573—625; 6 (1873), S. 112—145; 7 (1874), S. 531 bis 537. — Vgl. die analytische Darstellung in Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie II, 1 (Leipzig 1891), S. 461 ff. und die elegant durchgeführte synthetische bei J. Thomae, Die Kegelschnitte in rein projektiver Behandlung (Halle 1894), S. 160 ff.

auf die Tangentialebene im Punkte $x = y = 0$, $z = 1$ aus, so daß sich der Zusammenhang

$$\xi = x : z, \quad \eta = y : z$$

ergibt. Dabei entsprechen den Hauptkreisen gerade Linien. Als „Entfernung" zweier Punkte der Ebene setzen wir den sphärischen Abstand ihrer Bilder auf der Kugel fest, d. h.

$$s = \arccos(x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2).$$

Hierfür kann jetzt, zunächst im Raum, dann in der Ebene, eine projektive Deutung gefunden werden. Der durch $P_1(x_1 y_1 z_1)$, $P_2(x_2 y_2 z_2)$ gehende Hauptkreis liegt in einer Ebene, deren weitere, vom Mittelpunkt O ausgehenden Geraden durch

$$\frac{x}{z} = \frac{x_1 + \lambda x_2}{z_1 + \lambda z_2}, \quad \frac{y}{z} = \frac{y_1 + \lambda y_2}{z_1 + \lambda z_2}$$

bestimmt sind. Zwei Strahlen $(m_1 m_2)$ dieses Büschels liegen auf dem (imaginären) Asymptotenkegel

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0,$$

und die beiden Werte von λ, welche diese Strahlen charakterisieren, sind durch die Wurzeln λ_1 und λ_2 von

$$0 = x^2 + y^2 + z^2 = (x_1 + \lambda x_2)^2 + (y_1 + \lambda y_2)^2 + (z_1 + \lambda z_2)^2$$
$$= 1 + 2\lambda \cos s + \lambda^2$$

bestimmt. Für das Doppelverhältnis der Strahlen $s_1(OP_1)$, $s_2(OP_2)$ m_1, m_2 findet man auf Grund der Definition

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1},$$

und aus der quadratischen Gleichung

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = e^{2is},$$

und hieraus $$s = \frac{1}{2i} \log(s_1, m, s_2, m_2).$$

Die Geraden des Asymptotenkegels heißen nach Lie Minimalgeraden, weil ihre Bogenelemente wegen der Gleichungsform die Länge Null haben: Man erhält ja die verschiedenen Punkte einer von o ausgehenden Minimalgeraden, wenn man in

$$x = ut, \quad y = vt, \quad z = wt$$

t sich frei verändern läßt, die Konstanten u, v, w aber der Bedingung

$$u^2 + v^2 + w^2 = 0$$

unterwirft, also ist längs jeder Minimalgeraden

$$ds^2 = (u^2 + v^2 + w^2)\, dt^2 = 0.$$

Der sphärische Abstand zweier Punkte $P_1 P_2$ oder der Winkel $P_1 O P_2$ ist also gleich dem durch $2i$ dividierten Doppelverhältnis, das diese Strahlen OP_1, OP_2 mit der durch O gehenden in der Ebene $P_1 O P_2$ gelegenen Minimalgeraden bilden; der Winkel ist durch ein Doppelverhältnis definiert.[1]

In der Zentralprojektion auf die Tangentialebene folgt dann die „Maßbestimmung“: Der Abstand zweier Punkte ξ_1, η_1 und ξ_2, η_2 wird gemessen durch das Doppelverhältnis, das die Punkte $Q_1 Q_2$ und die Schnittpunkte $S_1 S_2$ ihrer Verbindungslinie mit dem „nullteiligen“ Kegelschnitt

$$\xi^2 + \eta^2 + 1 = 0,$$

dem Schnitt des Asymptotenkegels und der Tangentialebene, bestimmen, es ist

$$s = \frac{1}{2i} \log (Q_1 S_1 Q_2 S_2).$$

Auch für den Winkel, zunächst auf der Kugel, dann in der Ebene, findet sich eine ähnliche Deutung.

Der Winkel zweier Hauptkreise $(g_1 g_2)$ auf der Kugel ist zugleich dem sphärischen Abstand ihrer Pole [so sollen wie in § 73 die Schnittpunkte der Kreisachse mit der Kugel heißen], also durch das Doppelverhältnis gegeben, das die Verbindungslinien von O mit den Polen und die in dieser Ebene gelegenen

[1] Diese Definition rührt von E. Laguerre (1834—1866) her: Sur la théorie des foyers. Nouv. Ann. 12 (1853), p. 57—66. — Oeuvres II (1902).

Minimalstrahlen einschließen. Der Pol der Ebene, oder des Hauptkreises, nach dem sie die Kugel schneidet, ist der Schnittpunkt P von g_1 und g_2, und Orthogonalprojektion auf die Tangentialebene in P zeigt dann, daß der Winkel (g_1, g_2) durch das Doppelverhältnis bestimmt ist, das die Tangenten an g_1 und g_2 mit den Minimalstrahlen durch den Punkt erzeugen. Endlich sind die Minimalstrahlen durch einen Punkt der Kugel die beiden durch ihn gehenden [imaginären] Geraden auf der Kugel. [Eine von $P(x, y, z)$ ausgehende Gerade, deren Punkte die Koordinaten

$$x + ut, \quad y + vt, \quad z + wt$$

besitzen, liegt auf der Kugel, wenn

$$\begin{aligned} 1 &= (x + ut)^2 + (y + vt)^2 + (z + wt)^2 \\ &= 1 + t(ux + vy + wz) + t^2(u^2 + v^2 + w^2) \end{aligned}$$

für jeden Wert von t gleich Null ist. Ihre Konstanten erfüllen also zwei Gleichungen, von denen die erste zeigt, daß sie der Tangentialebene angehört, die zweite, daß sie Minimalgerade ist. Letzteres ist auch insofern klar, als die Erzeugenden einer Fläche zweiten Grades immer den Mantellinien des Asymptotenkegels parallel sind.]

Durch Projektion auf die Tangentialebene folgt dann: Der Winkel zweier Geraden (g_1, g_2) ist durch das Doppelverhältnis bestimmt, das sie mit den durch ihren Schnittpunkt gehenden Tangenten t_1, t_2 an den Kegelschnitt [Fundamentalkegelschnitt]

$$\xi^2 + \eta^2 + 1 = 0$$

einschließen, und zwar ist der Winkel zu messen durch

$$\frac{1}{2i} \log (g_1, t_1, g_2, t_2).$$

Damit ist die einfache Übertragung der Maßbestimmung durch Zentralprojektion projektiv erfaßt, d. h. auf Doppelverhältnisse begründet, die wieder bei projektiven Transformationen, welche den Fundamentalkegelschnitt in sich überführen, unverändert bleiben. Gegeben werden diese Transformationen durch dieselben Gleichungen:

$$\bar{x} = \alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \alpha_{13}z,$$
$$\bar{y} = \alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \alpha_{23}z,$$
$$\bar{z} = \alpha_{31}x + \alpha_{32}y + \alpha_{33}z,$$

[mit den bekannten sechs Nebenbedingungen für die neun Koeffizienten], welche eine Drehung der Kugel in sich bedeuten.

§ 82. **Warum haben wir uns mit dieser Deutung abgemüht, statt einfach die Zentralprojektion zu besprechen?**

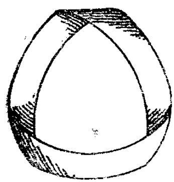
Das hat zwei Gründe: **Erstens** können wir jetzt die elliptische Maßbestimmung in der Ebene verallgemeinern, indem wir durch reelle projektive Transformation einen beliebigen „nullteiligen", d. h. durch eine reelle Gleichung zweiten Grades dargestellten aber keine reellen Punkte enthaltenden Kegelschnitt setzen, **zweitens** aber ist damit die beste Vorarbeit für die hyperbolische Maßbestimmung geleistet.

Was den ersten Punkt betrifft, so brauchen die Definitionen der neuen Entfernungs- und Winkelmaße durch Doppelverhältnisse nicht wiederholt zu werden. Für weitere Ausführung ist nur zu beachten, was die Bilder der Kreise, also die Kurven konstanten Abstands von einem Punkt sind. Auf der Kugel ist ein Kreis, der Schnitt mit einer beliebigen Ebene. Was ist eine Zentralprojektion? Wenn man durch einen Punkt außerhalb eines Ellipsoides oder einer Kugel die Tangenten legt und von seinem Scheitel aus eine Zentralprojektion auf irgendeine Ebene vornimmt, so berühren die Projektionen der ebenen Schnitte die Zentralprojektion des Umrisses in zwei Punkten, und hieraus folgt durch entsprechende Übertragung der analytisch leicht durchführbare Satz:

Kreise sind in unserer elliptischen Maßbestimmung die in zwei [imaginären] Punkten den Fundamentalkegelschnitt berührenden Kegelschnitte.

Zum Abschluß noch ein Wort über die Bezeichnung „elliptische" Maßbestimmung! Warum nicht sphärisch?

Es besteht im Teilgebiet zwar kein Unterschied, wohl aber im Totalgebiet. Absichtlich, um diese Frage für sich zu behandeln, haben wir bisher gar nicht darauf hingewiesen, daß unsere Zentralprojektion nicht umkehrbar eindeutig ist, daß sie vielmehr jedem Paar von Gegenpunkten auf der Kugel nur einen Punkt in der Ebene zuordnet. Auf der Kugel bestimmen zwei Punkte nur dann einen Hauptkreis eindeutig, wenn sie nicht Gegenpunkte sind; in der Projektion aber, wo ja Gegenpunkte zusammenfallen, bestimmen zwei Punkte eine Gerade. Die elliptische Maßbestimmung ist eigentlich kein vollkommenes Bild der Kugel, sondern des linearen Strahlenbündels, in dem ja von Geraden schlechtweg die Rede ist, nicht die beiden vom Scheitelpunkt ausgehenden Halbstrahlen unterschieden werden. Die Ebene der elliptischen Maßbestimmung wird dann durch eine Gerade nicht mehr in zwei getrennte Teile zerlegt, so wenig wie das Strahlenbündel durch O von einer Ebene durch O in zwei getrennte Teilsysteme zerfällt. Dies sich völlig klarzumachen erfordert gewisse Überlegung und Anspannung ganz anderer Art, als das Berechnen komplizierter Formeln. Ein Bild aber dieses ungewohnten Zusammenhangsverhältnisses gibt das Möbiussche Blatt, das man sich aus einem rechteckigen Papierstreifen $ABCD$ sofort herstellen kann, indem man die Schmalseiten AB, CD nicht so aneinanderheftet, daß A und D, B und C zur Deckung kommen, sondern so, daß A und C, B und D zur Deckung kommen. Der entstehende geschlossene Streifen hat dann eine einzige Randkurve und zerfällt durch einen Schnitt längs seiner Mittellinie nicht in zwei getrennte Teile.


Möbiussches Blatt.
Fig. 48.

Der elliptischen Maßbestimmung in der Ebene entsprechend gibt es auch eine elliptische Maßbestimmung im Raum. Die

Entfernung wird gemessen durch

$$\frac{1}{2i}\log(P_1 S_1 P_2 S_2),$$

wobei S_1 und S_2 — die Schnittpunkte der Geraden durch $P_1 P_2$ sind — mit einer „nullteiligen“, d. h. durch eine Gleichung mit reellen Koeffizienten, die aber nicht durch die Koordinaten reeller Punkte erfüllt wird, gegebenen „Fundamentalfläche“ zweiten Grades, z. B.

$$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0.$$

Ebenso ist der Winkel zweier Geraden g_1, g_2 zu messen durch

$$\frac{1}{2i}\log(g_1, t_1, g_2, t_2),$$

wobei $t_1 t_2$ die in dem durch g_1 und g_2 bestimmten linearen Strahlenbüschel enthaltenen Tangenten an die Fundamentalfläche sind.

„Cliffordsche Flächen“ (§ 89) sind dann dargestellt durch Flächen zweiten Grades, die mit der Fundamentalfläche vier Gerade gemein haben.

§ 83. Die hyperbolische Maßbestimmung. Mit dem zweischaligen Hyperboloid

$$z^2 - x^2 - y^2 = 1$$

können wir ähnlich verfahren wie mit der Kugel. O sei der Mittelpunkt, N der Punkt $x = y = 0$, $z = 1$, und wir führen wieder eine Zentralprojektion der Punkte P der Fläche auf die Punkte Q der Tangentialebene aus.

Erwähnt sei noch, daß in der Parameterdarstellung

$$z = ch\, r, \quad x = sh\, r \cos\varphi, \quad y = sh\, r \sin\varphi,$$

r der doppelte Inhalt des Sektors NOP eines Meridianschnittes ist.[1]

---

[1] Vgl. Lobatschefskij-Engel, S. 245 (nach einer Figur von Lambert).

Das Doppelverhältnis, das zwei Durchmesser durch $P_1(x_1, y_1, z_1)$ und $P_2(x_2, y_2, z_2)$ mit den Erzeugenden des Asymptotenkegels bilden, die in der Ebene $P_1 O P_2$ liegen, ist wieder (vgl. § 81) der Quotient der beiden Wurzeln der Gleichung

$$0 = (z_1 + \lambda z_2)^2 - (x_1 + \lambda x_2)^2 - (y_1 + \lambda y_2)^2$$
$$= 1 + 2\lambda(z_1 z_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2) + \lambda^2.$$

Setzen wir $\qquad z_1 z_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2 = ch\, s,$

so wird $\qquad \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = e^{2s},$

und wenn wir jetzt $\qquad s = \frac{1}{2} \log \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$

als „Längenmaß", als „Entfernung" $P_1 P_2$ bzw. in der Zentralprojektion als „Entfernung" $Q_1 Q_2$ einführen, so ist damit eine Maßbestimmung gewonnen, die unverändert bleibt, wenn man irgendeine projektive Transformation ausführt, die O festhält und das Hyperboloid in sich überführt.

Die perspektivische Übertragung ordnet den Punkten P die Punkte Q zu, die innerhalb des vom Asymptotenkegel ausgeschnittenen „Fundamentalkegelschnittes"

$$\xi^2 + \eta^2 - 1 = 0$$

liegen, und das „hyperbolische" Entfernungsmaß ist der halbe Logarithmus des Doppelverhältnisses der Punkte $Q_1 S_1 Q_2 S_2$, wobei S_1 und S_2 die Schnittpunkte der Verbindungslinie $Q_1 Q_2$ und des Fundamentalkegelschnittes sind. Den Diametralschnitten des Hyperboloides entsprechen Gerade, und das Entfernungsmaß ist unveränderlich bei projektiven Transformationen der Ebene, die den Fundamentalkegelschnitt in sich überführen; außerdem verhält es sich additiv, d. h. für drei Punkte einer Geraden hat man

$$[Q_1 Q_2] + [Q_2 Q_3] = \frac{1}{2} \log\left(\frac{S_1 Q_1}{S_2 Q_1} : \frac{S_1 Q_2}{S_2 Q_2}\right) + \frac{1}{2} \log\left(\frac{S_1 Q_2}{S_2 Q_2} : \frac{S_1 Q_3}{S_2 Q_3}\right)$$
$$= \frac{1}{2} \log\left(\frac{S_1 Q_1}{S_2 Q_1} : \frac{S_1 Q_3}{S_2 Q_3}\right) = [Q_1 Q_3],$$

so daß es allen Anforderungen einer „Bewegung" genügt. Daß man hiermit tatsächlich ein Bild der nichteuklidischen Geometrie im engeren Sinn vor sich hat, erkennt man am kürzesten durch Berechnung der quadratischen Differentialform für das Maß des Bogenelementes; man hat nämlich aus

$$ch(ds) = z(z + dz) - x(x + dx) - y(y + dy)$$

durch Entwicklung auf der linken Seite

$$1 + \tfrac{1}{2} ds^2$$

und auf der rechten Seite, kommt wegen

$$(z + dz)^2 - (x + dx)^2 - (y + dy)^2 = z^2 - x^2 - y^2 = 1,$$

als Ergebnis

$$z^2 - x^2 - y^2 + z\,dz - x\,dx - y\,dy = 1 + \tfrac{1}{2}(dx^2 + dy^2 - dz^2).$$

Es ist also in dieser Maßbestimmung

$$\begin{aligned} ds^2 = dx^2 + dy^2 - dz^2 &= -d^2(ch\,r) + d^2(sh\,r\cos\varphi) + d^2(sh\,r\sin\varphi) \\ &= dr^2 + sh^2 r\,d\varphi^2, \end{aligned}$$

in Übereinstimmung mit dem Bogenelementquadrat der nichteuklidischen Ebene (§ 76).

[Der Vollständigkeit halber wollen wir noch das Bogenelement der hyperbolischen Maßbestimmung durch die Koordinaten ξ und η ausdrücken.

Es ist

$$x = \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2}}, \quad y = \frac{\eta}{\sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2}}, \quad z = \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2}},$$

daher

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 - dz^2 = \frac{(1 - \xi^2 - \eta^2)(d\xi^2 + d\eta^2) + (\xi\,d\xi + \eta\,d\eta)^2}{(1 - \xi^2 - \eta^2)^2},$$

eine Form, die auch Beltrami[1] als Ausdruck des Bogenelementes auf den Flächen konstanter negativer Krümmung festgestellt hat.]

[1] Ann. di Mat. VII, p. 185 ff. = Opere Mat. I, p. 262—280 (1902).

§ 84. Ausführlicher kann dies noch durch Verwendung der Weierstraßschen Koordinaten[1] im einzelnen nachgewiesen werden; für eine übrigens vollständig genügende Orientierung reicht aber die schon früher [§ 77] benützte Berechnung des Bogenelementes aus, deren wir uns hier wieder bedient haben.

Der Winkel ergibt sich, wie wir nicht näher ausführen wollen, wieder als das durch $2i$ dividierte Doppelverhältnis, das seine Schenkel mit den durch ihren Schnittpunkt an den Fundamentalkegelschnitt gelegten Tangenten einschließen.

Die Zentralprojektion der ebenen Schnitte des zweischaligen Hyperboloides auf die Tangentialebene — also die Ebene unserer hyperbolischen Maßbestimmung — werden wieder Kegelschnitte, die je nach Lage der Schnittebenen den Fundamentalkegelschnitt in zwei imaginären, zwei zusammenfallenden reellen oder zwei getrennten reellen Punkten berühren und sind als Bilder der Kreise, Grenzcykeln und Hypercykeln, anzusprechen; dies könnte, wie gesagt, noch im einzelnen berechnet werden, geht aber hier über den zugewiesenen Raum hinaus.[2]

Diese Maßbestimmungen in der Ebene, insbesondere die hyperbolische, heißen Cayley-Kleinsche Maßbestimmungen. Über den Bindestrich, der eine nicht zu übersehende Stufe der Entwicklung kennzeichnet, wird noch zu sprechen sein (§ 86).

---

[1] Über diese Koordinaten, auf die wir hier nicht eingehen, vgl. z. B. W. Killing, Die nichteuklidischen Raumformen in analytischer Behandlung. Leipzig 1885. — Sie sind mehrfach benützt worden von Gérard, Hausdorff, Liebmann u. a., und sind eben nichts anderes, als die in § 83 eingeführten x, y, z.

[2] Auf die Theorie der Kegelschnitte in der nichteuklidischen Geometrie — die sich, wie schon ein Blick auf die sphärischen Kegelschnitte zeigt, in den homogenen (elliptisch-sphärischen, bez. Weierstraßschen) Koordinaten durch homogene Gleichungen zweiten Grades darstellen lassen — gehen wir nicht ein, verweisen vielmehr auf die in § 47 angeführten Lehrbücher. — Wer im einzelnen die Darstellungen nachsieht und ihren Zweck bedenkt, kann sich davon überzeugen, daß das Schlagwort „Theorie der Simultaninvarianten zweier Kegelschnitte“ eine Überschrift, aber kein Ersatz für den Inhalt dieser Theorie ist.

§ 85. Poincaré[1] hat noch auf eine weitere, durch das einschalige Hyperboloid zu gewinnende Maßbestimmung hingewiesen. In der Ebene erhält man als Feld die Punkte außerhalb einer Ellipse, als Winkelmaß den halben Logarithmus

$$\tfrac{1}{2}\log(g_1 t_1 g_2 t_2),$$

wobei t_1 und t_2 wieder die vom Schnittpunkte (g_1, g_2) an den Fundamentalkegelschnitt gelegten Tangenten sind, wozu eine entsprechende Bestimmung des Entfernungsmaßes kommt, bei dem die Tangenten — also reelle Geraden — die Länge Null haben. Er hat die Paradoxien dieser Maßbestimmung, bei der z. B. eine Gerade nicht eine Drehung um einen ihrer Punkte ausführen kann, die sie mit sich selbst zur Deckung bringt(!), geistreich ausgeführt und sich bei dieser Gelegenheit überhaupt über die Psychologie der Axiomatik verbreitet. Die moderne Axiomatik, deren Gebiet wir noch zu streifen haben, hat die Axiome, diese zumeist nicht gefühlten Nervenstränge der „normalen" Geometrie, herauspräpariert — doch aber hat sie mit gewissen Axiomen, die eben jene „Geometrie außerhalb der Ellipse" verletzt, sich nicht befaßt; obwohl auch hier noch die Annahme freier Beweglichkeit einer Strecke nicht verletzt wird. —

§ 86. Wir haben noch die Entdeckungen von Cayley und Klein in ihrem Verhältnis zu würdigen. Cayley hat im Jahre 1859 die Maßbestimmung mit Hilfe eines Kegelschnitts aufgestellt; er selbst aber sagt über die zwölf Jahre später erschienene Arbeit von Klein:

„Klein setzt an die Stelle meines $\cos^{-1}$ (= arccos)-Ausdruckes den Logarithmus

$$\text{dist.}(PQ) = c \log \frac{AP \cdot BQ}{AQ \cdot BP}.$$

[1] Poincaré, Sur les hypothèses fondamentales de la géometrie. Bull. Soc. math. 15 (1887), p. 203—216. Hier entwickelt der französische Forscher seine „vierte Geometrie", die er öfters betont hat, gerade diesem Kind seiner Muse mit besonderer Vorliebe zugetan.

Das ist eine große Verbesserung [*great improvement*], denn wir sehen sofort, daß die grundlegende Beziehung zwischen Abständen [auf einer Geraden] erfüllt ist; in der Tat wird

$$\text{dist.}\,(PQ) + \text{dist.}\,(QR) = \text{dist.}\,(PR)."$$

Noch deutlicher hat Forsyth in seiner Biographie Cayleys den Fortschritt gekennzeichnet, der die Jahre 1859 und 1871 zugleich verbindet und trennt und seinerseits damit der Gefahr vorgebaut, „daß die spätere Generation das Ergebnis von vornherein als etwas Feststehendes rezipiert, die früheren Meinungsverschiedenheiten überhaupt nicht versteht und über die ganze Sache mehr oder minder zur Tagesordnung übergeht." Forsyth schreibt:

„Die Wichtigkeit und Unabhängigkeit der von Cayley geschaffenen Ideen ist niemals in Frage gezogen worden, aber, wie dies oft (und natürlich) bei dem Entdecker eines fruchtbaren Gegenstandes der Fall ist, Cayley erläuterte weder noch sah er voraus den vollen Umfang der Anwendung seiner Ideen. Als seine Abhandlung zuerst veröffentlicht wurde, erkannte er die wunderbare Identität seiner verallgemeinerten Theorie der Maßgeometrie mit der nicht-Euklidischen Geometrie von Lobatschefkij und Bolyai nicht. Dieser fundamentale Schritt wurde von Klein vorgenommen in seiner bewunderungswürdigen Abhandlung [*admirable memoir!*] ‚Über die sogenannte Nichteuklidische Geometrie', die eine beträchtliche Vereinfachung gegenüber Cayleys ursprünglichem Gesichtspunkt enthält und eines der wichtigsten Ergebnisse der ganzen Theorie beibringt."

Kleins rein projektive Einführung der Maßgeometrie.[1]

§ 87. Ist mit der Cayley-Kleinschen Maßbestimmung eine Rechtfertigung der nichteuklidischen Geometrie gegeben? Wie

[1] F. Klein, Zur nichteuklidischen Geometrie. Math. Ann. 37 (1890), S. 544—572.

schwer es war, bis diese auf einen weiteren, noch tiefergehenden Gedanken von Kleins Abhandlung zu gründende Erkenntnis sich durchrang, dafür ist wieder Cayley ein klassischer Zeuge. Er unterschrieb noch im Jahre 1889 den Zweifel von R. S. Ball: „In dieser Theorie scheint es, als ob wir versuchen, den gewöhnlichen Begriff des Abstands zweier Punkte durch den Logarithmus eines gewissen Doppelverhältnisses zu ersetzen. Dieses Doppelverhältnis aber begreift doch die Vorstellung der in gebräuchlicher Weise gemessenen Entfernung in sich. Wieso darf man nun den alten Abstandsbegriff durch den nichteuklidischen Begriff ersetzen, da doch gerade die Definition des letzteren den ersteren voraussetzt?"

Die Antwort auf diese Frage lag bereits vor, als sie von Cayley und Ball gestellt wurde. Sie ist gegeben durch die von Klein begründete Umkehrung der Gedankenfolge. Die klassische projektive Geometrie beruht gewiß letzten Endes auf Verwendung euklidischer Maßverhältnisse: Die neue, aus von Staudts [1798—1867] Forschungen erwachsene Geometrie der Lage läßt sich so gestalten, daß ihre Schlüsse sich nirgends mehr auf euklidische Maßverhältnisse oder auch nur auf das Euklidische Postulat (daß es in der Ebene durch einen Punkt P außerhalb einer Geraden g nur eine g Nichtschneidende gibt) stützen. Die „Maßverhältnisse" werden hinterher freilich als Zahlen eingeführt, aber diese Zahlen haben nicht mehr die Bedeutung von Kardinalzahlen (Fassung von Messungen), sondern von Ordinalzahlen und sind Umschreibungen von Konstruktionen, die man sich nicht mit Maßstab und Transporteur, sondern mit dem Lineal allein durch Projizieren und Schneiden oder noch anders gesagt, durch Einvisieren, „Einweisen" ausgeführt zu denken hat.

Wie ist die Einführung der Ordinalzahl möglich? Ein einfaches Beispiel, die Bezifferung der Punkte einer Geraden, mag dies zeigen. Es ist bekannt, daß die Schnittpunkte der Paare von Gegenseiten eines Vierecks (AC) und die Schnittpunkte ihrer Verbindungslinie mit den Diagonalen (BD) ein harmonisches Verhältnis [im metrischen Sinne] bilden, d. h. es gilt für die Strecken die Beziehung

$$\frac{AB}{CB} : \frac{AD}{BD} = -1.$$

Wenn wir also A als Anfangspunkt einer Messung wählen, B und C die Abszissen 1 und 2 haben, so ist D der unendlich ferne Punkt. Durch Einschaltung von Diagonalen usw. können wir dann die Punkte $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$ ... $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$ ... allgemein $m : 2^n$ lediglich mit Benützung des Lineals konstruieren, durch konstruktive Approximation in diesem Netz auch die irrationalen Punkte. Die Zahlen sind Maßzahlen, Kardinalzahlen.

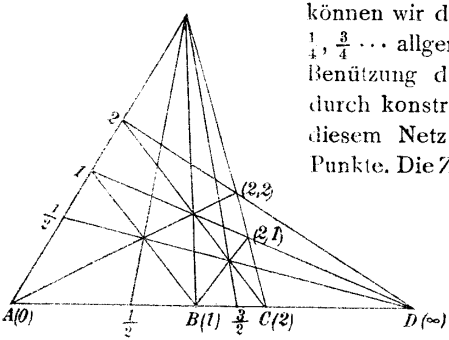


Fig. 49.

Jetzt zu Ordinalzahlen! Man nehme drei Punkte $A\,B\,C$, konstruiere dann mit Hilfe irgendeines Vierecks, von dem eine Diagonale durch B läuft, A und C aber die Schnittpunkte der Paare von Gegenseiten sind, den Punkt D als Schnittpunkt mit der zweiten Diagonale. Dies ist eine rein projektive Konstruktion, bei der man im Auge behalten darf, daß der Punkt D „im Unendlichen" liegen würde, wenn die Strecke AB im euklidischen Sinne gleich BC wäre.

Wir wollen aber von „Bewegungen" nichts wissen. Den Punkten ABC wollen wir Ordinalzahlen oder Rangziffern zuweisen, dann ist durch die Viereckskonstruktion dem Punkt D die Zahl ∞ zugewiesen. Ebenso können wir die Punkte $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$ ... usw. konstruieren, sie sind nicht durch Messungen sondern durch projektive Konstruktionen festgelegt.

In derselben Weise kann man, durch dieselbe **Netzkonstruktion**, wenn man den vier Ecken eines Vierecks — man denke dabei zunächst an ein Quadrat — die Ziffernpaare 0, 0; 1, 0; 1, 1; 0, 1 zuweist, durch Linienziehen alle Punkte finden, denen Ziffernpaare

$$x = \frac{m_1}{2^n}, \quad y = \frac{m_2}{2^n}$$

(m_1 und m_2 ganze Zahlen) zukommen, sowie durch besondere Axiome allen Punkten solche **Rangziffernpaare** zuweisen. — Ja, man kann umgekehrt jedem Rangziffernpaar dann, wenn dies nötig ist, d. h. kein zugänglicher Punkt als Repräsentant vorhanden ist, einen „idealen" Punkt zuweisen — man wird z. B. im Sinne des bekannten **Desarguesschen** Lehrsatzes von den perspektivischen Dreiecken sagen, die Geraden durch A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 gehen durch einen „Punkt", wenn die drei Paare entsprechender Seiten A_1B_1 und A_2B_2, B_1C_1 und B_2C_2, C_1A_1 und C_2A_2 der beiden Dreiecke sich in drei Punkten [ohne Gänsefüßchen] einer Geraden treffen.

Alle hierzu nötigen Axiome zu formulieren, würde zu weit führen, diese heikle Aufgabe ist in verschiedener Weise in harter Arbeit von **Pasch**, **Schur** u. a. weiter behandelt worden.

Man braucht sie, um zu zeigen, daß jede lineare Gleichung

$$ax + by + c = 0$$

eine **Konstruktion** bedeutet, die dem [reellen oder idealen] Punkt $P(x, y)$ eine Gerade als geometrischen Ort zuweist, daß eine quadratische Gleichung dem Punkt $P(x, y)$ einen Kegelschnitt zuweist, d. h. im Sinne der Geometrie der Lage den Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlen zweier projektiv aufeinander bezogener Strahlbüschel usw. und man kann dann **scheinbar** rechnend, in Wahrheit dabei nur Konstruktionen der reinen, **von jeder Annahme über die Gültigkeit des Euklidischen Postulates unabhängigen** Geometrie der Lage sich vorstellend, durch **Willkürakt** zu den, jetzt als Lagebeziehungen aufzufassenden „Maßbestimmungen" der euklidischen, elliptischen oder hyperbolischen Geometrie gelangen.

Dies ist in groben, aber wie wir annehmen, als Anhaltspunkt für oder doch als Hinweis auf eingehenderes Studium dieses schwierigen Gebietes hier ausreichenden Zügen geschildert, der zweite wichtige, ein ganzes Programm kennzeichnende Gedanke von **Klein**, den **Forsyth** in seinem Vergleich von **Cayley** und **Klein** noch nicht hervorgehoben hat.[1]

Die Cliffordschen Parallelen.

§ 88. Nachdem die zweidimensionale elliptisch-sphärische Geometrie — die Geometrie der S_2 — erledigt ist (§ 81–82), bietet auch die dreidimensionale — die Geometrie des S_3 wollen wir sie nennen — keine besondere Schwierigkeit.

Legt man durch eine Gerade g alle möglichen S_2, so hat die Gerade [man halte sich immer die Vorstellung des Hauptkreises einer Kugel vor, dessen beide Pole aber in der elliptischen Geometrie durch einen einzigen Pol ersetzt sind!] in jeder dieser S_2 einen Pol; der Ort dieser Pole ist ein Kreis mit dem Radius $\frac{\pi}{2}$, also wieder eine Gerade g'.

Die beiden Geraden g und g' heißen **absolute Polaren**; jeder Punkt der einen Polare hat von jedem Punkte der anderen Polare den Abstand $\frac{\pi}{2}$.

Dreht man den Raum um g mit dem Drehwinkel φ, so wandern dabei die Punkte auf g' um die Strecke φ weiter; **die Drehung des Raumes mit g als Achse und dem Drehwinkel φ kann also gleichzeitig als Schiebung längs der festbleibenden Polare g' um die Strecke φ gedeutet werden.**

[1] Über **Kleins** Stellungnahme zu weiteren axiomatischen Untersuchungen vgl. sein Gutachten zur ersten Verteilung des Lobatschefskijpreises. Math. Ann. 50 (1897), S. 583–600.

g und g' haben lauter gemeinsame Lote gleicher Länge $\frac{\pi}{2}$.

Indem man nach anderen Geradenpaaren mit lauter gemeinsamen Loten sucht, gelangt man zu den Cliffordschen Parallelen.[1] Das Wort „parallel" rechtfertigt sich dadurch, daß die Geradenpaare, genau wie euklidische Parallele, lauter gemeinsame Lote gleicher Länge haben. Sie liegen aber niemals in einer Ebene S_2.

Wir gelangen ganz naturgemäß zu dieser neuen, dem sphärisch-elliptischen Raume eigentümlichen Parallelenart, wenn wir einen Punkt A einer Geraden mit dem Pol G verbinden und die Strecke $AA_1 = a$ abtragen. In der S_2, die durch G und g bestimmt ist, legen wir durch A_1 die Gerade senkrecht zu AA_1, verbinden dann einen beliebigen Punkt F_1 dieser Geraden mit G und verlängern bis zum Schnitt P mit g. Auf der S_2 errichten wir noch in F_1 die Senkrechte und bestimmen auf ihr die beiden Punkte P_1 und P_2, die von P den Abstand

[1] W. K. Clifford (1845—1879) verfährt im wesentlichen analytisch, an die projektive Maßbestimmung anknüpfend. Vgl. seine Preliminary sketch of biquaternions. London Proc. Math. Soc. 4 (1873), p. 381—395. — Math. papers (London 1882), p. 181—200. — W. Vogt (1883—1915), Theorie der Cliffordschen Parallelen. Leipzig 1909. — T. Bonnesen, Analytiske Studier over ikke-euklidisk Geometri. Diss. Kopenhagen 1902, referiert in den Jahresber. der D. Math. Ver. 12 (1903), S. 129 bis 130. — Die folgenden Ausführungen schließen teils an Bonola (Erste Auflage dieses Buches. Anhang I, S. 195—207), teils an Liebmann (München. Ber. 1912, S. 273—287) an. An dieser Stelle wird auch die von E. Study im Zusammenhang mit einer Fülle inhaltsreicher Untersuchungen: Beiträge zur nichteuklidischen Geometrie (Amer. J. math. 29 [1907], p. 101—167) gegebene Abbildung der „Speere", d. h. der orientierten Geraden des elliptischen Raumes auf die Punktepaare einer Kugel geometrisch konstruiert.

Die kurzen Andeutungen von Clifford sind wohl zuerst durch die autographierten Vorlesungen von F. Klein über Nicht-euklidische Geometrie (I, Wintersemester 1889—1890; II, Sommersemester 1890) so recht zugänglich geworden.

a haben. [Man beachte, daß in dem dreirechtwinkligen Viereck AA_1F_1P die Seite $PF_1 = u$ kleiner ist als a.]

Das rechtwinklige Dreieck GA_1F_1 hat die Bestimmungsstücke

$$GF_1 = \frac{\pi}{2} - u, \quad GA_1 = \frac{\pi}{2} - a, \quad A_1F_1 = v,$$

$$\sphericalangle GF_1A_1 = \pi - \varphi, \quad \sphericalangle A_1GF_1 = s.$$

Hierzu gibt es wegen des Lambertschen *Pentagramma mirificum* [s. § 73] zugeordnete Dreiecke mit den Stücken

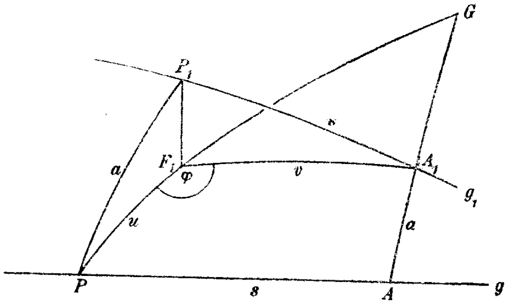


Fig. 50.

$$c_1 = a, \quad a_1 = u, \quad b_1 = \varphi - \frac{\pi}{2}, \quad \alpha_1 = \frac{\pi}{2} - v, \quad \beta_1 = s$$

und

$$c_2 = s, \quad a_2 = v, \quad b_2 = \varphi - \frac{\pi}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{\pi}{2} - u, \quad \beta_2 = a.$$

Das rechtwinklige Dreieck PP_1F_1 hat aber die Hypotenuse

$$PP_1 = a \quad \text{und eine Kathete} \quad PF_1 = u,$$

also ist es mit dem ersten zugeordneten Dreieck kongruent, daher $F_1P_1 = \varphi - \frac{\pi}{2}$; und das rechtwinklige Dreieck $A_1F_1P_1$ hat die Katheten v und $F_1P_1 = \varphi - \frac{\pi}{2}$; also ist es mit dem zweiten zugeordneten kongruent, daher ist

$$A_1P_1 = s.$$

Ferner ist noch $\sphericalangle F_1A_1P_1 = \beta_2 = a$,

also unabhängig von s.

Schließlich ist, weil die Dreiecke PAA_1 und A_1P_1P kongruent sind,

$$\sphericalangle PP_1A_1 = \sphericalangle A_1AP = \frac{\pi}{2}\,.$$

Hieraus folgt, wenn man noch gleichzeitig mit der Geraden A_1P_1 ihr Spiegelbild an der S_2 durch g und G einbezieht:

Errichtet man in irgendeinem Punkt A auf g die Senkrechte und gibt ihr die Länge $AA_1 = a$, so gehen durch A_1 zwei Gerade, die den konstanten Abstand a von g haben und mit der Ebene durch g und A_1 den Winkel a einschließen.

Diese beiden Geraden heißen die Cliffordschen Parallelen g_1 und g_2 zu g. Man darf wohl die Winkel $F_1A_1P_1 = F_1A_1P_2 = a$ als „zum Abstand a gehörige Parallelwinkel" bezeichnen.

Für $a = \frac{\pi}{2}$ fallen die beiden Parallelen g_1 und g_2 zusammen in die absolute Polare g' von g.

g_1 und g_2 werden aus g durch Schiebung längs AG, unter A jetzt einen beliebigen Punkt von g verstanden, in Verbindung mit Rechtsdrehung (g_1) und Linksdrehung (g_2) um den Winkel a erhalten. Läßt man A_1 auf AG wandern nach dem Pol G hin, so erhält man zwei Scharen von Parallelen, die durch Rechtsdrehung entstehende Schar der Parallelen (g_1) und die durch Linksdrehung entstehende Schar der Parallelen (g_2).

Je zwei Gerade der Schar g_1 gehen wieder durch Rechtsdrehung um einen Winkel, der gleich der von A_1 auf seinem Weg nach G zurückgelegten Strecke ist, auseinander hervor, sind also wieder untereinander „rechtsparallel", ebenso sind zwei Gerade der Schar g_2 „linksparallel".

Mutatis mutandis gilt also hier der in der hyperbolischen nichteuklidischen Geometrie (§ 32) bewiesene Satz:

Sind zwei Geraden einer dritten in demselben Sinne parallel, so sind sie auch untereinander in diesem Sinne parallel.

§ 89. Die Cliffordsche Fläche. Die beiden Scharen von Cliffordschen Parallelen zu einer Geraden g im Abstand a von ihr [oder $\frac{\pi}{2} - a$ von ihren Polaren g'] liegen auf einer Fläche, der Cliffordschen Fläche. Die Cliffordsche Fläche geht bei Drehung um g [mit Drehwinkel φ] verbunden mit Schiebung längs g' [Schiebungsstrecke ψ] in sich über, und diese Drehungen und Schiebungen sind zugleich Schiebung längs g und Drehungen um g'. Der Parameter φ der Drehung um g ist zugleich der Parameter der Schiebung längs g' und umgekehrt, wie aus den Betrachtungen des vorigen Paragraphen folgt. Jede Cliffordsche Fläche gestattet also eine „zweigliedrige kontinuierliche Gruppe von Punkttransformationen" in sich, deren Komponenten als Schiebungen [oder Drehungen] gedeutet werden können. Dieser Umstand kann die Vermutung nahe legen, daß die Flächen auf die euklidische Ebene abwickelbar sind.

Am einfachsten bestätigt man diese Eigenschaft, die die Cliffordsche Fläche gewissermaßen in Analogie zur Grenzkugel der hyperbolischen Raumgeometrie setzt, durch Berechnung des Bogenelementes. Ist a der Abstand von der Achse g, $d\varphi$ der Winkel der durch zwei Nachbarpunkte der Fläche und die Achse g gelegten Meridianebenen, $d\psi$ der Abstand der Fußpunkte der von den Punkten auf die Achse gefällten Lote, so wird

$$\begin{aligned} ds^2 &= \sin^2 a\, d\varphi^2 + \cos^2 a\, d\psi^2 \\ &= du^2 + dv^2, \end{aligned}$$

wobei

$$u = \varphi \sin a, \quad v = \psi \cos a$$

gesetzt ist. — Man kann die Abwickelbarkeit auf die euklidische Ebene, die aus dieser Gestalt der quadratischen Differentialform für das Quadrat des Bogenelementes folgt, auch auf grundsätzlich mehr elementaren, rechnerisch umständlicheren Weg durch Lösung von Funktionalgleichungen ableiten, was an dieser Stelle aber wohl unterlassen werden darf.

Das Clifford-Kleinsche Problem.[1]

§ 90. Die Cliffordsche Fläche ist ein Beispiel einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit, auf der für die Umgebung eines Punktes die euklidische Geometrie herrscht, dagegen nicht im Gesamtgebiet. Auf der Cliffordschen Fläche treten zwei Scharen von geschlossenen geodätischen Linien hervor, nämlich die Cliffordschen Parallelen zu den beiden Achsen. Sie sind geschlossen und von endlicher Länge, sie zerlegen die Fläche in Parallelogramme. In der euklidischen Ebene dagegen gibt es keine in sich zurücklaufenden Geraden von endlicher Länge. In etwas kürzerer Fassung gesagt: Die Cliffordsche Fläche ist ein ringförmiges Gebilde — nämlich der Torus [Kreiswulst] des elliptisch-sphärischen Raumes, die euklidische Ebene nicht. Sie ist überall regulär, aber sie hat nicht denselben Zusammenhang. — Ganz anders die Grenzkugel des hyperbolischen Raumes: Ihre Geometrie ist auch „im Großen" identisch mit der auf der euklidischen Ebene! (§ 67.)

Aus diesen Beispielen erklärt sich der Gegenstand des Clifford-Kleinschen Problems, nämlich der **Bestimmung aller zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten konstanter Krümmung, die überall regulär sind.**

Im euklidischen Raum gibt es als derartige Raumformen der Krümmung Null nur die Ebene, und die Zylinder mit geschlossenem Querschnitt, von konstanter positiver Krümmung nur die

[1] F. Klein, Zur nichteuklidischen Geometrie. Math. Ann. 37 (1890), S. 544—572, auch im „Evanston Colloquium" (angeführt unten § 94). — W. Killing, Einführung in die Grundlagen der Geometrie I (Paderborn 1893), S. 271—349.

Kugel [Satz von Liebmann[1]], von konstanter negativer Krümmung keinen [Satz von Hilbert[2]].

Übrigens kann man die Geometrie auf der Cliffordschen Fläche in der euklidischen Ebene durch bestimmte Verabredung oder Festsetzung auch realisieren: Schneidet man die Cliffordsche Fläche längs zweier Erzeugenden auf, die den beiden verschiedenen Scharen von Parallelen auf ihr angehören, so entsteht ein Viereck mit zwei Paaren von gleichen Gegenseiten, und dieses Viereck läßt sich völlig zur Deckung bringen mit einem euklidischen Rhombus. Verabredet man also, daß in einem Rhombus die je zwei Punkte, in denen ein Paar von Gegenseiten durch eine Parallele zu den beiden anderen Seiten geschnitten wird, als einen einzigen Punkt zu rechnen, so ist die Geometrie des Rhombus unbeschränkt identisch mit der der Cliffordschen Fläche.

Die Untersuchungen von Riemann, Helmholtz und Lie.

§ 91. Mit den Ausführungen über elliptische Geometrie [§ 81—82 und § 88—89] haben wir der Zeit vorgegriffen. Sie wurde in den Untersuchungen der Klassiker eigentlich beiseite geschoben, weil man die Hypothese der unendlichen Geraden nicht fallen lassen wollte. Erst B. Riemann hat sich davon ganz befreit in seinem berühmten Habilitationsvortrag von 1854: „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen".[3] Daselbst findet sich in III, 2 [2. Auflage

[1] Gött. Nachr. 1899, S. 44—55.

[2] Über Flächen konstanter Gaußscher Krümmung. Trans. Amer. Math. Soc. 2 (1901), p. 86—99. — Grundlagen der Geometrie. 3. Aufl. Anhang V, S. 237—255.

[3] Riemanns Werke, 1. Aufl. 1876, S. 254—269; 2. Aufl. 1892, S. 272—287. Sie wurde 1854 von Riemann verlesen bei seiner Habilitation in der philosophischen Fakultät in Göttingen, vor einem nicht nur

von Riemanns Werken, Seite 284] die folgende Erklärung: „Bei der Ausdehnung der Raumkonstruktionen ins Unmeßbargroße ist Unbegrenztheit und Unendlichkeit zu scheiden; jene gehört zu den Ausdehnungsverhältnissen, diese zu den Maßverhältnissen. Daß der Raum eine unbegrenzte dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit sei, ist eine Voraussetzung, welche bei jeder Auffassung der Außenwelt angewandt wird, nach welcher in jedem Augenblick das Gebiet der wirklichen Wahrnehmungen ergänzt und die möglichen Orte eines gesuchten Gegenstandes konstruiert werden und welche sich bei diesen Anwendungen fortwährend bestätigt. Die Unbegrenztheit des Raumes besitzt daher eine größere empirische Gewißheit, als irgendeine äußere Erfahrung. Hieraus folgt aber die Unendlichkeit keineswegs; vielmehr würde der Raum, wenn man Unabhängigkeit der Körper vom Ort voraussetzt, ihm also ein konstantes Krümmungsmaß zuschreibt, notwendig endlich sein,

aus Mathematikern zusammengesetzten Publikum. Die analytischen Erklärungen dazu finden sich in den Anmerkungen der von Riemann als Antwort auf eine Preisfrage der Pariser Akademie eingeschickten Abhandlung (Riemanns Werke, 1. Aufl., S. 384—391; 2. Aufl., S. 391—404).

Die philosophische Grundlage des „Habilitationsvortrags" ist das Studium der Dinge nach ihrem Verhalten im unendlich Kleinen. Vgl. die Rede von Klein; „Riemann und seine Bedeutung in der Entwicklung der modernen Mathematik", Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 4, S. 71—82, Berlin 1894, übersetzt ins Italienische von E. Pascal, Annali di Mat. (2), t. XXIII, S. 222.

Der „Habilitationsvortrag" wurde erst 1867 (Gött. Abh. XIII) nach dem Tode des Verfassers veröffentlicht von Dedekind, dann ins Französische übersetzt von J. Hoüel (Annali di Mat. [2], t. III, 1870; Oeuvres Math. de Riemann, 1876), ins Englische von W. Clifford (Nature, t. VIII, 1873) und von G. B. Halsted (Tokyo sugaku butsurigaku kwai kiji, t. VII, 1895), ins Polnische von Dickstein (Comm. Acad. Litt. Cracoviensis, t. IX, 1877), ins Russische von D. Sintsoff (Berichte der math.-phys. Gesellschaft an der kaiserlichen Universität Kasan [2], t. III, Anhang 1893).

sobald dieses Krümmungsmaß einen noch so kleinen positiven Wert hätte."[1]

Noch bekannter ist eine Andeutung Riemanns geworden, die wir hier anführen, weil sie in Zusammenhang mit der modernen allgemeinen Relativitätstheorie gebracht worden ist: „Solche Untersuchungen, welche, wie die hier geführte, von allgemeinen Begriffen ausgehen, können nur dann dazu dienen, daß diese Arbeit [die Umarbeitung der überkommenen räumlich-mechanischen Vorstellungen] nicht durch die Beschränktheit der Begriffe gehindert und der Fortschritt im Erkennen des Zusammenhangs der Dinge nicht durch überlieferte Vorurteile gehemmt wird.

Es führt das hinüber in das Gebiet einer andern Wissenschaft, der Physik . . ."[2]

§ 92. Das Riemann-Helmholtzsche Problem. Diese allgemeinen Untersuchungen von Riemann und ihr Verhältnis zu den weiteren von Helmholtz [1821—1894] hat Lie mit folgenden Worten charakterisiert:[3]

„Riemann stellt an die Spitze seiner Untersuchung den Satz, daß der Raum eine Zahlenmannigfaltigkeit sei, daß also die Punkte des Raumes durch Koordinaten bestimmt werden können. Sodann fragt er, welche Eigenschaften dieser Zahlen-

---

[1] Bei dieser Gelegenheit ist nachzutragen, daß, wenn man das archimedische Postulat fortläßt, die Annahme einer unbegrenzten offenen Geraden mit der Annahme einer Winkelsumme im Dreieck, die größer als zwei Rechte ist, verträglich wird. Das war zu vermuten, da die von Saccheri (§ 11—17), Lambert (§ 18—22) und Legendre (§ 27—28) gegebenen Widerlegungen der Hypothese des stumpfen Winkels sämtlich das archimedische Postulat benützten. Dehn hat die Frage im angegebenen Sinn entschieden durch Konstruktion einer nichtarchimedischen Geometrie, die er „Nicht-Legendresche" Geometrie nennt. Vgl. § 14.

[2] Angeführt von F. Klein, Math. Ann. 6 (1873), S. 114 und von H. Weyl, Raum, Zeit und Materie (Berlin 1918), S. 87.

[3] Lie, Theorie der Transformationsgruppen III (Leipzig 1893), S. 394.

mannigfaltigkeit zugeschrieben werden müssen, damit in ihr die euklidische oder eine ähnliche Geometrie gelte. Die Beantwortung dieser Frage ist offenbar eine rein analytische Aufgabe, die für sich allein gelöst werden kann.

Allerdings tritt bei Riemann die wahre Bedeutung des Satzes, daß der Raum eine Zahlenmannigfaltigkeit sei, nicht hervor. Riemann sucht diesen Satz zu beweisen, aber sein Beweis kann nicht als stichhaltig gelten. Will man wirklich beweisen, daß der Raum eine Zahlenmannigfaltigkeit ist, so muß man vorher unzweifelhaft eine nicht geringe Anzahl von Axiomen aufstellen[1] und dessen scheint sich Riemann nicht bewußt gewesen zu sein . . .

Die Geometrie der Zahlenmannigfaltigkeit begründet Riemann auf den Begriff des Bogenelementes, aus dem sich durch Integration der Begriff der Länge einer endlichen Linie ergibt. Er verlangt, daß das Quadrat des Bogenelementes eine ganze homogene Funktion zweiten Grades von den Differentialen der Koordinaten sei

$$ds^2 = \sum a_{ij} dx_i dx_j,$$

in dem er u. a. noch die Forderung hinzufügt, daß sich jede Linie beliebig ohne Änderung ihrer Länge bewegen könne, gelangt er zu dem Ergebnis, daß außer der euklidischen noch zwei andere Geometrien möglich seien [die hyperbolische und die sphärisch-elliptische] . . ."

§ 93. Helmholtz[2] griff die Untersuchungen Riemanns

[1] Vgl. § 75, letzte Anmerkung.

[2] „Über die tatsächlichen Grundlagen der Geometrie". Heidelberg, Verhandl. d. naturw.-med. Vereins, Bd. IV, S. 197—202 (1868); Bd. V, S. 31—32 (1869). — Wissenschaftliche Abhandlungen von H. Helmholtz, Bd. II, S. 610—617. Leipzig 1883. Sie wurde von J. Hoüel ins Französische übersetzt und in den Mémoires de la Société des Sciences Phys. et Nat. de Bordeaux (t. V, 1868) veröffentlicht und auch zusammen mit den „Études géométriques" von Lobatschefskij und der „Correspondance de Gauß et de Schumacher". Paris 1895, Hermann.
„Über die Tatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen". Gött.

auf, er spricht wirklich das Axiom aus, daß der Raum eine Zahlenmannigfaltigkeit sei und sucht die Bewegungen direkt als Scharen von Transformationen zu charakterisieren.

Seine Axiome hat Helmholtz in kompendiösen aber nicht durchgängig mathematisch unzweifelhaft zu erfassenden Sätzen formuliert; eine besondere Rolle spielt dabei das Monodromieaxiom, das im einfachsten Fall so lautet: „Wenn man eine Gerade in der Ebene um einen ihrer Punkte dreht, so führt die Drehung ohne Umkehr schließlich in die Anfangslage zurück, von der sie ausgegangen ist."

Man beachte, daß in Poincarés „vierter Geometrie" (§ 85) das Monodromieaxiom nicht erfüllt ist. — Hier dürfen wir das folgende Beispiel einer „Nichtbewegung" anführen:

Die Transformationen

$$z_1 = e^{(K+i)\alpha} z + b + ic,$$

die vermöge $\quad z_1 = x_1 + iy_1, \quad z = x + iy$

in ihren reellen und imaginären Bestandteil zerlegt, hinauskommen auf

$$x_1 = e^{\alpha K}(x \cos \alpha - y \sin \alpha) + b,$$

$$y_1 = e^{\alpha K}(x \sin \alpha + y \cos \alpha) + c,$$

bilden, mit Lie zu reden, eine „dreigliedrige Gruppe in der Ebene" mit den Parametern α, b, c, genau wie die durch

Nachr., t. XV, S. 193—221 (1868). — Wissenschaftliche Abhandlungen von Helmholtz, Bd. II, S. 618—639.

„The Axioms of Geometry". The Academy, t. I, p. 123—181 (1870). — Revue des cours scientifiques, t. VII, p. 498—501 (1870).

„Über die Axiome der Geometrie". Populäre wissenschaftliche Vorträge, 3. Heft, S. 21—54. Braunschweig 1876. — Engl. Übersetzung: Mind, t. I, p. 301—321. — Franz. Übersetzung: Revue scient. de la France et de l'Étranger (2), t. XII, p. 1197—1207 (1877).

„Über den Ursprung, Sinn und Bedeutung der geometrischen Sätze". Wissenschaftliche Abhandlungen von H. Helmholtz, B. II, S. 640—660. — Engl. Übersetzung: Mind, t. II, p. 212—224 (1878).

$$z_1 = e^{i\alpha} z + b + ic$$

dargestellten euklidischen Bewegungen; sie bilden eine Gruppe, d. h. zwei Transformationen hintereinander ausgeführt, lassen sich durch eine einzige derselben Art ersetzen. In der Tat, wenn man in
$$z_2 = e^{(K+i)\alpha_1} z_1 + b_1 + ic_1$$
den Wert von z_1 einführt, so kommt
$$z_2 = e^{(K+i)\alpha_2} z + b_2 + ic_2: \qquad \text{dabei ist}$$
$$\alpha_2 = \alpha_1 + \alpha, \quad b_2 = e^K(b\cos\alpha_1 - c\sin\alpha_1) + b_1,$$
$$c_2 = e^K(b\sin\alpha_1 + c\cos\alpha_1) + c_1.$$

Auch hat unsere dreigliedrige Gruppe mit den dreigliedrigen Gruppen der euklidischen und der beiden nichteuklidischen ebenen Bewegungen die Eigenschaft gemein, daß je zwei Punkte eine „Entfernung" oder doch „Pseudoentfernung", eine bei allen Transformationen der Gruppe unverändert bleibende Funktion der Koordinaten eines jeden Punktepaars aufweist, es ist dies die Funktion
$$\sqrt{u^2 + v^2}\, e^{-K \operatorname{artg} \frac{v}{u}},$$
wobei u die Abszissen-, v die Ordinatendifferenz bedeutet. Die Gruppe ist aber keine der zugelassenen Bewegungsarten, und in der Tat verletzt sie das Monodromieaxiom: Betrachtet man eine (eingliedrige) Untergruppe, die einen Punkt, etwa den Koordinatenanfang festhält, so entstehen keine geschlossenen Bahnkurven, sondern, wie mit Einführung von Polarkoordinaten aus
$$z_1 = e^{(K+i)\alpha} z, \quad r_1 = r e^{K\alpha}, \quad \varphi_1 = \varphi + K\alpha$$
hervorgeht, die logarithmischen Spiralen:
$$r = c \cdot e^{K\varphi}.$$

Also ist das Monodromieaxiom zur Charakterisierung von Bewegungen wirklich notwendig.

§ 94. Die Leistung von S. Lie ist nun, daß er das Riemann-Helmholtzsche Problem in bestimmter Weise gefaßt und gelöst hat. Die Fassung lautet:[1]

Es sollen solche Eigenschaften gefunden werden, die sowohl der euklidischen als den beiden Scharen von nichteuklidischen Bewegungen zukommen und durch die diese drei Scharen vor allen andern möglichen Scharen von Bewegungen ausgezeichnet sind.

F. Klein, der seinen Freund Lie veranlaßt hatte, seine große Schöpfung, die Theorie der Transformationsgruppen, zur Ergründung des Raumproblems in diesem Sinne zu verwenden, hat im „Evanston Colloquium" die Frucht dieser Arbeit mit folgenden Worten gekennzeichnet.[2]

„Ich gehe jetzt über zu dem Werk von Lie. Zunächst einmal die Ergebnisse. Lie hat die von Helmholtz bestätigt mit der einzigen Ausnahme, daß im Raum von drei Dimensionen das Monodromieaxiom unnötig ist, daß vielmehr die zu betrachtenden (Transformations-)Gruppen vollständig bestimmt sind durch die übrigen Axiome. Was die Beweise betrifft, so hat indessen Lie gezeigt, daß die Betrachtungen von Helmholtz ergänzt werden müssen. Die Sache ist die: Hält man einen Punkt des Raumes fest, so reduziert sich unsere G_6 [die sechsgliedrige, d. h. sechs willkürliche Parameter enthaltende Gruppe aller Bewegungen] auf eine G_3 [dreigliedrige Gruppe der Drehungen um einen Punkt]. Nun untersucht Helmholtz, wie die von dem festen Punkt ausgehenden Linienelemente bei dieser G_3 transformiert werden. Zu diesem Zweck schreibt er die Formeln an

$$\begin{aligned}
dx_1' &= a_{11}dx_1 + a_{12}dx_2 + a_{13}dx_3,\\
dx_2' &= a_{21}dx_1 + a_{22}dx_2 + a_{23}dx_3,\\
dx_3' &= a_{31}dx_1 + a_{32}dx_2 + a_{33}dx_3,
\end{aligned}$$

[1] Lie, a. a. O. S. 397.

[2] Klein, The Evanston Colloquium (28. Aug.—9. Sept. 1893). London 1894, p. 89.

und betrachtet die Koeffizienten als von drei veränderlichen Parametern abhängig. Aber Lie bemerkt, daß dies nicht ausreichend allgemein ist. Die oben angegebenen linearen Gleichungen stellen nur die ersten Glieder von Potenzreihen dar, und die Möglichkeit muß betrachtet werden, daß die drei Parameter der Gruppe nicht alle in den linearen Gliedern enthalten sind. Um alle möglichen Fälle zu behandeln, müssen die allgemeinen Entwickelungen von Lies Gruppentheorie angewendet werden, und dies eben tut Lie."[1]

Die Beziehung zur Philosophie.

§ 95. Gewiß erwarten nachdenkende Leser zuletzt noch eine Stellungnahme zu den alten und immer neuen Auseinandersetzungen zwischen Philosophie und Mathematik. Wir verweisen hinsichtlich dieses unerschöpflichen Kapitels auf die ausgezeichneten Darlegungen von A. Voß[2] in dem Sammelwerk „Die Kultur der Gegenwart" und auf H. Poincarés „Wissenschaft und Hypothese".

Das „labile Gleichgewicht" — man verzeihe den Ausdruck — das hier herrscht, hat É. Picard auskömmlich mit folgenden Worten charakterisiert: „Für Kant liegt die Quelle unserer

[1] Lies „Gegenbeispiele" von sechsgliedrigen Gruppen, die nicht mit der Gruppe der Bewegungen äquivalent sind, obwohl sie die — unvollständigen — Axiome von Helmholtz erfüllen, hat später Killing (Einführung in die Grundlagen der Geometrie II, Paderborn 1898, S. 324 ff.) nochmals eingehend besprochen.

Zur gruppenthooretischen Begründung der Geometrie vgl. auch Hilbert, Grundlagen, 3. Aufl., S. 177—236 und L. Brouwer, Die Theorie der endlichen kontinuierlichen Gruppen unabhängig von den Axiomen von Lie. Math. Ann. 67 (1909), S. 246—267.

[2] Die Kultur der Gegenwart III, 1. Lieferung 2 (1914): Die Beziehungen der Mathematik zur allgemeinen Kultur (S. 29—34: Mathematik und Philosophie); Lieferung 3 (1914): Über die mathematische Erkenntnis (S. 118—123: Metageometrische Untersuchungen). — Vgl. auch Voß, Über das Wesen der Mathematik (Leipzig 1908), S. 74—87.

geometrischen Kenntnisse in der Anschauung und die mehr oder weniger deutlich am Anfang der Geometrie geformten Axiome haben den Charakter absoluter Notwendigkeit: der Raum ist für Kant eine Form *a priori* unserer Empfindung. Die Geometer unterschreiben diese Meinung im allgemeinen nicht, seitdem erwiesen ist, daß verschiedene Geometrien frei von allen logischen Widersprüchen bei Ausgang von verschiedenen Postulatsystemen erhalten werden können; aber ich weiß, daß verschiedene Philosophen gerade darin eine Bestätigung der Kantischen Lehre sehen, nach der uns unter allen logisch möglichen Raumformen eine einzige Anschauungsform auferlegt ist, nicht durch die Vernunft, sondern durch unsere Natur als empfindende Wesen." [1]

Schließlich mögen noch aus dem Aufsatz von A. Schoenflies „Klein und die nichteuklidische Geometrie" [S. 288—297 des Felix Klein zur Feier seines siebzigsten Geburtstages gewidmeten Heftes, 17. Jahrgang 7 (1919) der Zeitschrift „Die Naturwissenschaften"] die Sätze angeführt werden:

„Angriffe, wie sie vor einigen Jahrzehnten von seiten einzelner Kreise gegen die mathematische Afterweisheit [die nichteuklidische Geometrie] gerichtet wurden, sind heute verstummt. Daß sehen kann, wer sehen mag, bedarf keiner Bekräftigung; wichtiger ist und erfreulicher für die Wissenschaft, wie für Klein selbst, daß die große Mehrzahl derer, die dazu berufen sind, auch sehen wollen."

[1] E. Picard, Das Wissen der Gegenwart in Mathematik und Naturwissenschaft (Leipzig 1913, Nr. XVI der Sammlung Wissenschaft und Hypothese), S. 48—49.

Einige Hauptformeln der nichteuklidischen (hyperbolischen) Geometrie.

1. Beziehung zwischen Parallelwinkel und Lot. Errichtet man auf einer Geraden eine Senkrechte $FP = p$, so gehen durch P zwei Parallele (eine nach rechts, eine nach links) zu der Geraden. Der Winkel $\Pi(p)$, den jede der beiden Parallelen mit dem Lot PF einschließt, heißt der zum Lote p gehörige Parallelwinkel und ist gegeben durch

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \Pi(p) = e^{-\frac{p}{k}} \quad (\S\ 63).$$

Aus dieser Formel folgt noch

$$\sin \Pi(p) = \frac{2}{e^{\frac{p}{k}} + e^{-\frac{p}{k}}} = \frac{1}{ch\,\frac{p}{k}}, \quad \cos \Pi(p) = \frac{e^{\frac{p}{k}} - e^{-\frac{p}{k}}}{e^{\frac{p}{k}} + e^{-\frac{p}{k}}} = th\,\frac{p}{k},$$

$$\operatorname{tg} \Pi(p) = \frac{2}{e^{\frac{p}{k}} - e^{-\frac{p}{k}}} = \frac{1}{sh\,\frac{p}{k}}, \quad \cot \Pi(p) = \frac{e^{\frac{p}{k}} - e^{-\frac{p}{k}}}{2} = sh\,\frac{p}{k}.$$

Hierin bedeutet k die Streckeneinheit (§ 76), die geometrisch am Grenzkreis (§ 61) und analytisch (§ 77) als $(-K)^{-\frac{1}{2}}$ definiert ist, wobei K das Krümmungsmaß der Fläche des euklidischen Raumes ist, auf welche die nichteuklidische Ebene nach Beltrami abgewickelt werden kann. Im Raume der Erfahrung ist k mindestens gleich 166 320 Erdbahndurchmessern (§ 39).

Parallelkonstruktionen sind in § 49—51, genauer § 55 und § 68 angegeben.

Komplementär heißen zwei Strecken p und p', wenn

$$\Pi(p) + \Pi(p') = \frac{\pi}{2} \quad (\S\ 61).$$

2. Trigonometrische Formeln. Die trigonometrischen Formeln (für $k = 1$) kann man sofort hinschreiben, wenn man beachtet, daß sie aus den Formeln der sphärischen Trigonometrie erhalten werden, in denen man die Winkel α, β, γ beibehält, die Seiten aber durch $a\sqrt{-1}$, $b\sqrt{-1}$, $c\sqrt{-1}$ ersetzt (§ 21, § 36, § 38).

Man erhält im rechtwinkligen Dreieck $\left(\gamma = \frac{\pi}{2}\right)$, vgl. § 63

$$ch\,c = ch\,a\,ch\,b = \cot\alpha \cdot \cot\beta,$$

$$sh\,a = sh\,c \sin\alpha, \quad sh\,b = sh\,c \sin\beta,$$

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{th\,a}{sh\,b}, \quad \operatorname{tang}\beta = \frac{th\,b}{sh\,a},$$

$$\cos\alpha = ch\,a \cdot \sin\beta, \quad \cos\beta = ch\,b \sin\alpha.$$

Aus der ersten Formel können alle andern auf Grund der Lambert-Engelschen Regel (§ 56, vgl. auch § 73) abgeleitet werden. Zugleich erhält man (§ 54) hieraus die Formeln für das dreirechtwinklige Viereck.

Die Hauptformeln für das schiefwinklige Dreieck (§ 36, § 64) sind:

$$sh\,a : sh\,b : sh\,c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma,$$

$$\cos\alpha = \frac{ch\,b\,ch\,c - ch\,a}{sh\,b\,sh\,c},$$

$$ch\,a = \frac{\cos\alpha + \cos\beta \cdot \cos\gamma}{\sin\beta \sin\gamma},$$

$$ch\,b\,sh\,c = ch\,c\,sh\,b \cos\alpha + sh\,a \cos\beta,$$

$$\cos\beta \sin\gamma = -\cos\gamma \sin\beta\, ch\,a + \sin\alpha\, ch\,b.$$

3. Einige Inhaltsbestimmungen. Um die Dimensionen erkennen zu lassen, führen wir wieder die Streckeneinheit ($k \neq 1$) ein.

Der Inhalt des Dreiecks ist (§ 34, 64)

$$\triangle = k^2(\pi - \alpha - \beta - \gamma).$$

$$th \frac{\triangle}{2k^2} = \frac{th \frac{b}{2k}\, th \frac{c}{2k} \sin\alpha}{1 - th \frac{b}{2k}\, th \frac{c}{2k} \cos\alpha}.$$

Kreisumfang (U) und -inhalt (I) sind für den Kreis vom Radius r gegeben durch

$$U = 2\pi k\, sh \frac{r}{k} \quad (\S\ 63),$$

$$I = 2\pi k^2 \left(ch \frac{r}{k} - 1\right) \quad (\S\ 58).$$

Diese Inhaltsformel hat J. Bolyai zu einer „geometrischen Quadratur des Kreises" benutzt (§ 59).

Oberfläche (O) und Volumen (V) der Kugel vom Radius r wird gegeben durch[1]

$$O = 4\pi k^2 sh^2 \frac{r}{k},$$

$$V = \pi k^3 \left(sh \frac{2r}{k} - 2\frac{r}{k}\right).$$

[1] Vgl. Lobatschefskij-Engel, S. 43 und 50.

Anhang.

Über einige Anwendungen der absoluten (nichteuklidischen) Geometrie auf die Lehre von den Funktionen einer komplexen Veränderlichen.

I. Die Vorläufer. Gauß und Riemann.

Die Anwendung geometrischer Vorstellungen auf die Analysis der komplexen Größen wurzelt in der Darstellung der komplexen Zahlen durch die Punkte einer euklidischen Ebene (Zahlenebene), wie sie von Gauß, vorher auch schon von Wessel und Argand, gegeben worden ist. Der Übergang von der Zahlenebene zur Zahlenkugel, wie ihn Riemann, wohl auch hier auf Gauß fußend, vollzogen hat[1], kann in gewissem Sinne schon als Einführung der Vorstellungsweisen der NEGeometrie[2] in die Analysis gelten, da ja die Kugel als Vertreterin der Ebene der elliptischen Geometrie angesehen werden kann. Dieser Übergang trägt dem Bedürfnis Rechnung, die Sonderstellung des Unendlichen aufzuheben, einem Bedürfnis, das schon in der Lehre von den rationalen Funktionen hervortritt, wo die unendlich großen Werte der unabhängig Veränderlichen ebenso wie die der Funktion keine ausgezeichnete Rolle spielen.

Die euklidische Ebene als Ort der unabhängig Veränderlichen bewährt sich dagegen in der Lehre solcher eindeutiger Funktionen, die für alle endlichen Werte der unabhängig Ver-

[1] Siehe Riemanns Werke, Nachträge, Leipzig 1902, S. 80, art. 3. Vgl. die nachgelassenen Aufzeichnungen von Gauß, Werke VIII, S. 353—356 und X, 1, S. 564.

[2] NEGeometrie = Nichteuklidische Geometrie, ebenso NEEbene.

änderlichen wohldefiniert sind, aber im Unendlichen eine wesentlich singuläre Stelle aufweisen[1], und man hat seit Cauchy namentlich in der Lehre von den periodischen Funktionen dieses geometrische Hilfsmittel mit dem besten Erfolge benutzt. Die Einführung des Periodenparallelogramms in die Lehre von den elliptischen Funktionen durch Liouville[2] kann als ein Markstein in der Entwicklung dieser Lehre angesehen werden. Es kommt also für Funktionen ohne wesentlich singuläre Stelle die elliptische, für Funktionen mit einer wesentlich singulären Stelle im Unendlichen die euklidische (parabolische) Ebene mit einem unendlich fernen Punkt als Ort der unabhängig Veränderlichen in Frage. Verfolgt man diesen Gedankengang weiter, so wird man dazu geführt, für Funktionen, die nur für einen beschränkten Bereich der unabhängig Veränderlichen wohldefiniert sind, während die Begrenzung dieses Bereiches mit wesentlich singulären Stellen überall dicht besetzt ist, als Ort der unabhängig Veränderlichen die hyperbolische (Bolyai-Lobatschefskijsche) Ebene heranzuziehen, bei der ja die unendlich fernen Punkte als auf einer geschlossenen Kurve zweiter Ordnung gelegen zu denken sind. In der geschichtlichen Entwicklung ist das erste Beispiel einer solchen Funktion das der Modulfunktion gewesen.

Gauß war schon Ende des 18. Jahrhunderts, von der Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels ausgehend, zur Modulfunktion gelangt, lange ehe er ihren Zusammenhang mit der Lehre von den doppeltperiodischen Funktionen erkannt hatte.[3]

[1] Wir denken dabei die euklidische Ebene als mit einem unendlich fernen Punkte behaftet, abweichend von der in der projektiven Geometrie üblichen Vorstellung der unendlich fernen Geraden.

[2] Siehe Leçons sur les fonctions doublement périodiques faites en 1847 par M. J. Liouville, Crelles Journal 88, 1879, S. 277.

[3] Die einschlägigen Stellen des Gaußschen Nachlasses sind abgedruckt in den Werken III, 1866, S. 360ff., VIII, 1900, S. 98ff., X, 1, 1917, S. 172ff., vgl. auch ebenda S. 251 die Erläuterungen von L. Schlesinger und desselben Verfassers Aufsatz „Über Gauß' Arbeiten zur Funk-

Mit Heranziehung der Potenzreihen, deren Exponenten eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung bilden, hatte er sich eine vollständige Theorie der Modulfunktion entwickelt und auch die Beziehungen zu der arithmetischen Lehre von den quadratischen Formen durchgedacht. Von der Lehre von den reduzierten Formen, also von arithmetischen Gesichtspunkten aus, hatte er dann den Bereich in der Zahlenebene entworfen, innerhalb dessen die Modulfunktion jeden Wert nur einmal annimmt; gemeint ist das in der Fig. 51 wiedergegebene Kreisbogenviereck mit verschwindenden Winkeln, das an mehreren Stellen des **Gauß**schen Nachlasses auftritt[1], der sogenannte Fundamentalbereich der Modulfunktion. Ob **Gauß** den Zusammenhang dieser Figur mit der NEGeometrie, die ihm ja auch geläufig war, und mit der Lehre von den Flächen konstanten negativen Krümmungsmaßes gekannt hat, läßt sich nicht mit Sicherheit entscheiden. Es spricht nichts gegen die Möglichkeit solcher Kenntnis; dafür ließe sich anführen, daß das Dreieck mit verschwindenden Winkeln, also mit drei im Unendlichen gelegenen Ecken der hyperbolischen Geometrie, das der Hälfte des Kreisbogenvierecks der Fig. 51 entspricht, in Aufzeichnungen und Briefen von **Gauß** auftritt[2], ferner die

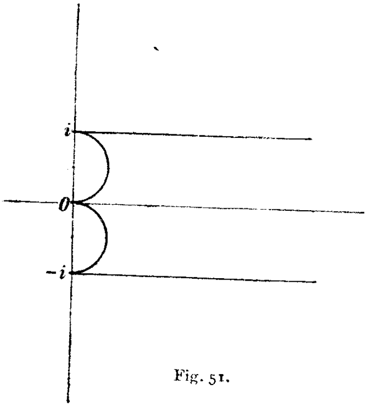


Fig. 51.

tionentheorie" in den Materialien für eine wissenschaftl. Biographie von Gauß, Heft III und in den Nachrichten der Kön. Gesellsch. d. Wissensch. zu Göttingen, 1912, Beiheft.

[1] In richtiger Zeichnung wiedergegeben im Bd. VIII der Werke von **Gauß**, S. 105.

[2] Siehe z. B. in dem Briefe an **Wolfgang Bolyai** vom 16. Dezember

folgende Stelle aus einem noch nicht vollständig veröffentlichten Briefe von Gauß an Hansen vom 11. Dezember 1825:

„Ich habe mich in diesem Herbst sehr viel mit der Betrachtung der krummen Flächen beschäftigt ... Jene Untersuchungen greifen in vieles andere, ich möchte sogar sagen in die Metaphysik der Raumlehre ein, und nur mit Mühe kann ich mich von solchen daraus entspringenden Folgen, wie z. B. die wahre Metaphysik der negativen und imaginären Größen ist, losreißen. Der wahre Sinn der $\sqrt{-1}$ steht mir dabei mit großer Lebendigkeit vor der Seele ...“

aus der hervorgeht, daß Gauß an einen Zusammenhang zwischen seiner Flächentheorie, den Grundlagen der Geometrie und der Analysis der komplexen Größen gedacht hat. Jedenfalls hat Gauß die Vervielfältigungen des in Rede stehenden Kreisbogenvierecks auf Grund des Prinzips der Spiegelung an einem Kreise sowohl geometrisch als auch arithmetisch verfolgt, und der Umstand, daß sich in seinem Nachlaß auch ein Netz von Kreisbogendreiecken mit den drei gleichen Winkeln von 45 Grad gefunden hat[1], zeigt, daß Gauß über die Modulfunktion hinausgehend, nach analogen Bildungen geometrisch vorgetastet hat.

Für die Entwicklung der Wissenschaft haben diese Untersuchungen von Gauß nur insofern eine Rolle gespielt, als bei seinen Lebzeiten durch spärliche mündliche Mitteilungen einige Andeutungen in Göttinger Gelehrtenkreisen bekannt geworden sein mögen, und nach seinem Tode der handschriftliche Nach-

---

1799, Werke VIII, S. 159: „es wäre ja wohl möglich, daß, so entfernt man auch die drei Endpunkte des Dreiecks im Raume von einander nähme, der Inhalt immer unter (infra) einer gegebenen Grenze wäre“, ferner in dem Briefe an denselben Empfänger vom 6. März 1832, Werke VIII, S. 220, wo die Auseinandersetzung eines Beweises, S. 221 unten, mit diesem Dreieck beginnt, weiter noch in dem Briefe an Gerling vom 16. März 1819, Werke VIII, S. 182, u. a. m.

[1] Gauß' Werke VIII, 1900, S. 104.

laß nach und nach studiert und veröffentlicht worden ist. In einer Vorlesung über die hypergeometrische Reihe, die Riemann im Winterhalbjahr 1858/9 in Göttingen in kleinem Kreise gehalten hat, und von der einige Auszüge 1902 veröffentlicht worden sind[1], hat Riemann die Figur des Kreisbogenvierecks mit verschwindenden Winkeln aus dem Gaußschen Nachlaß wiedergegeben und eine Reihe weitgehender Folgerungen daran geknüpft.[2] Von einer Beziehung zur NEGeometrie ist auch bei Riemann keine Rede.

Im Jahre 1866 ist, nach dem Tode Riemanns, der eigentlich für die Herausgabe des Gaußschen Nachlasses über Analysis ausersehen war, ein ansehnlicher Teil des Nachlasses durch Schering im Bande III von Gauß' Werken veröffentlicht worden. Die Vierecksfigur findet sich daselbst in undeutlicher Zeichnung auf S. 477 und 478; auf ihre wahre Bedeutung hat erst F. Klein 1883 im Bande 21 der Mathematischen Annalen, S. 278, aufmerksam gemacht. Der Hauptsatz der Lehre von der Modulfunktion ist im Bande III der Werke von Gauß auf S. 386 ausgesprochen. Er besagt in arithmetischer Einkleidung, daß die dort erklärte Modulfunktion $f(t)$ innerhalb des ihr entsprechenden Fundamentalbereichs jeden Wert einmal und nur einmal annimmt.

II. Die Dreiecksfunktionen. H. A. Schwarz (1873); Fuchs, Dedekind, Klein (1877—1879).

Ebensowenig wie bei Gauß und Riemann wird der Zusammenhang mit der NEGeometrie in der für unsere Theorie grundlegenden Abhandlung von H. A. Schwarz[3] erwähnt, die

[1] Riemanns Werke, Nachlaß, 1902, S. 69ff.

[2] A. a. O. S. 93; daß Riemann den Gaußschen Nachlaß schon 1857 gekannt hat, geht daraus hervor, daß er ihn in seiner aus diesem Jahre stammenden Abhandlung über die Gaußsche Reihe (siehe Werke, 2. Auflage, 1892, S. 67) anführt.

[3] Crelles Journal 75, 1873, S. 292 ff.

die Aufgabe behandelt, die Fälle anzugeben, in denen die Gaußsche oder hypergeometrische Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ eine algebraische Funktion von x darstellt. Da dann jedenfalls α, β, γ rationale Zahlen sein müssen, stellt sich Schwarz die Aufgabe, zunächst überhaupt für reelle Werte dieser Größen in der Differentialgleichung

$$(1) \quad x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]\frac{dy}{dx} - \alpha\beta\gamma = 0$$

der die Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ genügt[1], die Abbildung herzustellen, die der Quotient η zweier linear-unabhängiger Lösungen von den durch die reelle Achse begrenzten beiden x-Halbebenen entwirft. Setzt man

$$(2) \quad \left|\frac{1}{1-\gamma}\right| = g_1, \quad \left|\frac{1}{\gamma-\alpha-\beta}\right| = g_2, \quad \left|\frac{1}{\beta-\alpha}\right| = g_3,$$

so erscheint die oberhalb der reellen Achse gelegene x-Halbebene abgebildet auf ein Kreisbogendreiek der η-Ebene mit den Winkeln $\frac{\pi}{g_1}, \frac{\pi}{g_2}, \frac{\pi}{g_3}$, dessen Seiten den Abschnitten $(\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, \infty)$ der reellen x-Achse entsprechen, und das wir mit R_0 bezeichnen wollen. Der Fortsetzung in die untere x-Halbebene über einen dieser drei Abschnitte hinweg entspricht nach dem sogenannten Symmetrieprinzip[2] der Übergang von dem Dreieck R_0 zu seinem „Spiegelbild“, d. h. der har-

[1] Die Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma \cdot (\gamma+1)} x^2 + \cdots$ und die Differentialgleichung (1) finden sich zuerst bei Euler in einer 1778 verfaßten, 1801 in den Nova Acta Petropol. 12, S. 58 veröffentlichten Abhandlung. Zur ersten Orientierung über den Gegenstand vgl. etwa Schlesinger, Einführung in die Theorie der Differentialgleichungen, 2. Aufl. Leipzig 1904, S. 139 ff.

[2] Nimmt die Funktion η von x für ein Stück der reellen x-Achse reelle Werte an, so besagt das Symmetrieprinzip, daß bei Fortsetzung über dieses Stück der reellen x-Achse weg, konjugierten komplexen Werten von x konjugierte komplexe Werte von η entsprechen (Schwarz, Ges. Abhandlungen I, S. 12).

monischen Polarfigur in bezug auf diejenige Dreiecksseite, die jenem Abschnitt entspricht. Das aus der Vereinigung dieser beiden Dreiecke entstehende Viereck mit zwei Paaren gleicher Seiten entspricht der ganzen x-Ebene, es ist der Fundamentalbereich. Es sei

$$(3) \qquad 1 + c(\eta - \eta_0)(\bar{\eta} - \bar{\eta}_0) = 0 \text{ [1]}$$

die Gleichung des Kreises, der die drei Seiten von R_0 unter rechtem Winkel schneidet. Je nachdem die Winkelsumme in dem Dreieck R_0 größer, gleich oder kleiner als 180 Grad ist, d. h. je nachdem

$$(4) \qquad \frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_2} + \frac{1}{g_3}$$

größer, gleich oder kleiner als Eins ist, wird der Halbmesser des Kreises (3) imaginär, unendlich groß[2] oder reell.

Wenn die Zahlen g_1, g_2, g_3 insbesondere ganz oder unendlich groß sind, so ergibt sich durch Wiederholung des Spiegelungsverfahrens ein Netz von Dreiecken, die das „Innere" des Kreises (3), d. h. das Gebiet, wo die linke Seite von (3) positiv ist, schlicht und lückenlos bedecken; es ist also in diesem Falle x eine eindeutige Funktion von η.

Man kann nun das Gebiet, wo die linke Seite von (3) positiv ist, gegenseitig eindeutig und konform abbilden auf eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit mit dem Linienelement

$$(5) \qquad ds^2 = \frac{4\, d\eta\, d\bar{\eta}}{(1 + c(\eta - \eta_0)(\bar{\eta} - \bar{\eta}_0))^2}, \text{ [3]}$$

[1] Wenn a eine komplexe Größe bedeutet, so bezeichnen wir hier und im Folgenden stets mit $\bar{a}$ die konjugierte komplexe Größe.

[2] Auf diesen Fall, $c = 0$, läßt sich nämlich auch der, wo der Halbmesser des Kreises (3) gleich Null, also $c = \infty$ ist, durch die Transformation $\eta - \eta_0 = \frac{1}{\zeta}$ zurückführen.

[3] Diese Abbildung auf die Mannigfaltigkeit von konstantem Krümmungsmaß findet sich in der Abhandlung von H. A. Schwarz noch nicht; wir geben sie hier, aus Gründen der Systematik und um Wiederholungen zu vermeiden, gleich mit an.

deren Gaußsches Krümmungsmaß den konstanten Wert c besitzt, also je nachdem c positiv, gleich Null oder negativ ist, auf eine elliptische, parabolische oder hyperbolische Ebene, und zwar so, daß den Kreisen der η-Ebene, die den Kreis (3) unter rechtem Winkel schneiden, die geraden Linien und den Punkten dieser Kreislinie selbst die unendlich fernen Punkte jener Ebene entsprechen.

Die Dreiecksteilung des Kreisinnern überträgt sich also auf die betreffende absolute Ebene[1] in der Weise, daß die sämtlichen Dreiecke geradlinig und zu dem Ausgangsdreieck R_0 abwechselnd symmetrisch und kongruent sind. Die durch Vereinigung zweier benachbarter symmetrischer Dreiecke entstehenden Vierecke sind kongruent und gehen folglich durch Verschiebungen oder Bewegungen der Ebene in sich auseinander hervor. Eine solche Verschiebung wird durch eine lineargebrochene Substitution

$$(6) \qquad \eta' = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

gegeben, die den Kreis (3) in sich selbst transformiert. Die Gesamtheit aller Verschiebungen, die den Übergang zwischen den kongruenten Vierecken des Netzes vermitteln, bildet offenbar eine Gruppe und die durch die entsprechenden lineargebrochenen Substitutionen hervorgehenden Größen η' sind die verschiedenen Zweige, die aus η entstehen, wenn x die Verzweigungspunkte $0, 1, \infty$ der Lösungen der Differentialgleichung (1) umkreist.

Wenn c positiv ist, hat der gesamte Flächeninhalt der elliptischen Ebene einen endlichen Wert, nämlich $\frac{4\pi}{c}$; die Anzahl der die Ebene gerade ausfüllenden kongruenten Vierecke kann also auch nur eine endliche sein. Die Funktion η von x

[1] Im Sinne von Johann Bolyai, aber mit der Erweiterung, daß nicht nur, wie bei Bolyai, der parabolische und hyperbolische, sondern auch der elliptische Fall einbegriffen wird.

ist in diesem Falle von endlicher Vieldeutigkeit, x ist eine rationale Funktion von η, und damit ist die Aufgabe, die den ursprünglichen Gegenstand der Schwarzschen Abhandlung bildete, die Aufgabe, die Fälle anzugeben, in denen die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (3) eine algebraische Funktion ist, im wesentlichen gelöst. Man kann nämlich jetzt durch eine einfache Diskussion zeigen, daß der Ausdruck (4) nur in einer ganz begrenzten Anzahl von Fällen größer sein kann als Eins. Es sind dies die Fälle, die, auf die Kugel vom Krümmungsmaße c übertragen, den durch die regelmäßigen Körper bestimmten Konfigurationen entsprechen. Die Bewegungen der elliptischen Ebene in sich bewirken ja Drehungen der Kugel um ihren Mittelpunkt, und bei den den einzelnen Fällen zugehörigen Drehungsgruppen gehen die Punktsysteme auf der Kugel, die die Ecken der eingeschriebenen regelmäßigen Körper bilden, in sich über. Man findet eine klassische Darstellung dieser durch ihre innere Geschlossenheit ausgezeichneten Lehre in dem Buche von F. Klein „Vorlesungen über das Ikosaeder“, Leipzig 1884.

Auch in dem Falle $c = 0$, wo der Ausdruck (4) den Wert Eins annimmt, ergibt sich nur eine begrenzte Anzahl von Möglichkeiten. Die entsprechenden Gruppen von Bewegungen der euklidischen (parabolischen) Ebene in sich setzen sich aus Drehungen um einen festen Punkt zusammen; die zugehörigen Funktionen $x = f(\eta)$ sind doppelperiodische mit einer wesentlich singulären Stelle im Unendlichen und mit komplexer Multiplikation.

Allen ganzzahligen Wertesystemen der g_1, g_2, g_3, unendlich große Werte eingeschlossen, die in den beiden eben behandelten Fällen nicht vorkommen, entspricht ein Wert der Summe (4), der kleiner ist als Eins, und damit ein negativer Wert von c, d. h. eine hyperbolische Ebene. Die zugehörigen Funktionen sind nur für die Werte von η wohldefiniert, die der Ungleichung

$$(7) \qquad 1 + c(\eta - \eta_0)(\bar{\eta} - \bar{\eta}_0) > 0$$

genügen, d. h. für die im Endlichen gelegenen Punkte der hyperbolischen Ebene; der Kreis (3) selbst, also das unendlich ferne Gebilde der hyperbolischen Ebene, ist überall dicht besetzt mit wesentlich singulären Stellen der Funktion. Der Fall, wo alle drei Größen g unendlich groß sind, entspricht insbesondere der Modulfunktion, und unser Viereck ist dann der Gaußschen Figur 51 (siehe oben S. 176) durchaus gleichwertig; beide Figuren werden durch eine lineargebrochene Transformation ineinander verwandelt. Schwarz hebt diesen Fall besonders hervor und bemerkt, daß Weierstraß und Kronecker an dem ihnen aus der Lehre von den elliptischen Funktionen bekannten Falle der Modulfunktion zuerst die Möglichkeit von eindeutigen Funktionen erkannt haben, die nur in einem beschränkten Bereiche der Zahlenebene erklärt sind.

Wir haben die Ergebnisse der Schwarzschen Abhandlung etwas ausführlich und mit einigen Ergänzungen wiedergegeben, die über Schwarz' ursprünglichen Gedankengang hinausgehen, weil wir uns auf diese Weise eine bequeme Grundlage für unsere weiteren Darlegungen bereiten konnten. Die Einführung der hyperbolischen Ebene in die Theorie hat Klein für die Modulfunktion in den Jahren 1878 und 1879[1] gegeben. Wir heben noch besonders die Disjunktion hervor, die durch die drei Möglichkeiten

$$(8) \qquad \frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_2} + \frac{1}{g_3} \gtreqless 1$$

dargestellt wird, und fassen das Ergebnis dieses Abschnitts wie folgt zusammen:

In allen Fällen, wo in der Differentialgleichung (1) der hypergeometrischen Reihe x eine eindeutige Funktion (sogenannte Dreiecksfunktion) von η ist, wird der Existenzbereich dieser

[1] S. Math. Ann. 14, 1878, S. 111 und Münchener Berichte, Math. phys. Klasse 10, 1880, S. 89, datiert 1879.

Funktion durch die eigentlichen Punkte, die Begrenzung des Existenzbereichs durch die unendlich fern gelegenen Punkte einer absoluten Ebene im Sinne von Johann Bolyai dargestellt. Die Funktion x von η bleibt bei gewissen Gruppen von Bewegungen jener absoluten Ebene in sich selbst ungeändert; diese Bewegungsgruppe wird durch eine Teilung der absoluten Ebene in ein Netz kongruenter geradliniger Vierecke veranschaulicht. Die Fälle, wo das Krümmungsmaß jener Ebene positiv oder gleich Null ist, bilden gewissermaßen nur Ausnahmen; in fast allen Fällen, d. h. in allen, mit einer endlichen Anzahl von Ausnahmen, ist die Ebene eine hyperbolische.

Der bereits erwähnten Abhandlung von Klein, in der zuerst die NEGeometrie für die Lehre von der Modulfunktion zur Anwendung kommt, gehen zeitlich voran die auf dieselbe Funktion bezüglichen Arbeiten von Fuchs[1] und Dedekind[2], die wohl mit durch das 1876 erfolgte Erscheinen von Riemanns Gesammelten Werken veranlaßt worden sind, in denen aus dem Nachlaß Riemanns ein Fragment zur Theorie der Modulfunktion veröffentlicht worden war. Dedekind charakterisiert zuerst scharf arithmetisch den Fundamentalbereich und definiert die Valenz unter ausdrücklicher Bezugnahme auf die hierhergehörigen Stellen des Gaußschen Nachlasses[3], so daß hier zum ersten Male der Einfluß von Gauß' einschlägigen Arbeiten deutlich hervortritt. Die Arbeit von Klein aus dem Jahre 1879 ist besonders auch noch dadurch bemerkenswert, daß darin hervorgehoben wird, wie eine mehrdeutige Funktion $y = F(x)$ von x, die nur in den drei Punkten 0, 1, ∞ eine Verzweigung besitzt, sich in eine eindeutige Funktion von η verwandelt, wenn man x gleich der Modulfunktion $f(\eta)$ setzt. Es liegt dies daran, daß jeder geschlossene Weg

[1] Crelles Journal 83, 1877, S. 13.

[2] Crelles Journal 83, 1877, S. 265.

[3] Die Valenz ist genau die von Gauß, Werke III, S. 386 erklärte Funktion $f(t)$; vgl. oben S. 178.

von x, der eine Wertänderung von $F(x)$ bewirkt, auch η einen andern Wert annehmen läßt, so daß einem Werte von η niemals verschiedene Werte von $F(x)$ entsprechen können. Die Funktion mit den drei Verzweigungspunkten 0, 1, ∞ wird, wie man sagt, durch die Modulfunktion uniformisiert. Diese Bemerkung, die sich übrigens auch schon in der oben erwähnten Vorlesung von Riemann findet, gestattet eine weitgehende Verallgemeinerung, auf die wir noch zurückkommen.

III. Ältere Methoden der konformen Abbildung. H. A. Schwarz (1870) und Schottky (1877).

Eine erste Verallgemeinerung der aus der Abhandlung von Schwarz zu entnehmenden Ergebnisse kann an Untersuchungen angeknüpft werden, die Schwarz selbst und nach ihm Schottky im Anschluß an den Abbildungssatz von Riemann angestellt haben. Nach diesem Satze[1] kann ein von einer endlichen Anzahl analytischer Kurvenstücke begrenzter einfach zusammenhängender Bereich der Zahlenebene gegenseitig eindeutig und konform abgebildet werden auf das Innere eines Kreises und zwar nur auf eine Weise so, daß dem Kreismittelpunkt ein beliebiger innerer, und einem beliebig gegebenen Punkte der Kreislinie ein beliebig gegebener Punkt der Begrenzung des Bereiches entspricht. Schwarz hat einen Beweis für diesen Satz geliefert, bei dem besonders der Fall hervortritt, wo das Gebiet, das abgebildet werden soll, von Kreisbogen begrenzt wird.[2] Schottky hat in seiner Dissertation und ausführlicher in einer 1877 erschienenen Arbeit die Abbildung mehrfach zusammenhängender, von Kreisen begrenzter Bereiche untersucht.[3]

[1] Riemanns Dissertation 1851, Werke, 2. Aufl. 1892, S. 40.

[2] Monatsberichte der Berliner Akademie 1870, S. 767 und noch spätere Abhandlungen, abgedruckt im Bd. II der Gesammelten Abh.

[3] F. Schottky, Inauguraldissertation Berlin 1875; Crelles Journal 83, 1877, S. 300. Ähnliche Abbildungsaufgaben behandelt auch Riemann

Um die Beziehung dieser Fragestellungen zu unserem Gegenstande deutlich zu machen, wählen wir ein einfaches und wichtiges Beispiel.

Mit r beliebig ausgewählten unendlich fernen Punkten der hyperbolischen Ebene als Ecken bilden wir ein geradliniges Vieleck R_0, dessen Seiten sich nicht überkreuzen. Wenn wir den Umfang dieses Vielecks so durchlaufen, daß seine Fläche zur Linken bleibt, so mögen der Reihe nach die Ecken $\lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_r$ getroffen werden; die Seite (λ_1, λ_r) bezeichnen wir mit s_0 und spiegeln R_0 über diese Seite. Die Vereinigung von R_0 mit seinem so erhaltenen Spiegelbilde R_0' gibt ein Vieleck F_0 von $2r-2$ Seiten, von denen je zwei, in bezug auf die „Diagonale" s_0 symmetrische, einander gleich sind. Die Bezeichnung der Seiten und der neuen Ecken von F_0 ist aus der Fig. 52 zu ersehen, die die Abbildung von F_0 auf die η-Ebene wiedergibt, wobei wir $r=4$ genommen haben. Offenbar liegt R_0' ganz in dem von der Geraden s_0 begrenzten Teil der hyperbolischen Ebene, der R_0 nicht enthält, diese beiden symmetrischen Figuren können also nicht übereinandergreifen. Aus dem gleichen Grunde werden die Bereiche, die entstehen, wenn man das Spiegelungsverfahren in bezug auf alle Seiten der ursprünglichen und der neu hervorgehenden Bereiche fortsetzt, sich schlicht und lückenlos nebeneinanderlagern. Eine einfache Überlegung zeigt auch, daß die Gesamtheit der durch unbegrenzte Fortsetzung dieses Verfahrens entstehenden Bereiche, die abwechselnd mit R_0 kongruent und symmetrisch sind, die ganze hyperbolische Ebene ausfüllt. Wir erhalten also auf diese Weise eine **regulä re** Teilung der hyperbolischen Ebene in

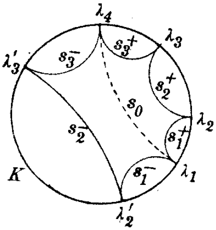


Fig. 52.

in einem nachgelassenen, erst 1876 in der ersten Auflage der Werke veröffentlichten Bruchstück; s. Werke 2. Aufl. S. 440.

lauter mit F_0 kongruente $(2r-2)$-Ecke, von denen jedes aus zwei symmetrischen Hälften besteht. Die Bewegungen der hyperbolischen Ebene, die jene kongruenten $(2r-2)$-Ecke ineinander überführen, bilden eine Gruppe, die durch die reguläre Teilung definiert ist.

In der η-Ebene ist der Bereich, der dem Bereiche R_0 entspricht, von Kreisbogen begrenzt, er kann also nach dem Riemannschen Abbildungssatze gegenseitig eindeutig und konform auf das Innere eines Kreises K abgebildet werden. Wenn $x = f(\eta)$ die abbildende Funktion ist, so kann diese nach dem Symmetrieprinzip zunächst nach dem zu R_0 symmetrischen Bereiche R_0' und dann weiter über die ganze hyperbolische Ebene hin fortgesetzt werden, und man erkennt leicht, daß $x = f(\eta)$ für alle im Endlichen gelegene Punkte der hyperbolischen Ebene den Charakter einer rationalen Funktion besitzt und bei den Verschiebungen der durch die Teilung definierten Gruppe ungeändert bleibt. Die Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_r$ der x-Ebene, die den Ecken $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ von R_0 entsprechen, liegen auf dem Kreise K; es sind die einzigen Verzweigungspunkte der unendlich vieldeutigen Funktion η von x. Wenn $r = 3$ ist und x so gewählt wird, daß $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = \infty$ ist, geht unsere Funktion in die Modulfunktion über. Wir haben es also hier mit einer unmittelbaren Verallgemeinerung der Modulfunktion zu tun. Eine Funktion $y = F(x)$, die nur die Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_r$ zu Verzweigungspunkten hat, wird durch Einführung von $f(\eta)$ an die Stelle von x uniformisiert, d. h. in eine eindeutige Funktion von η verwandelt.

IV. Automorphe Funktionen und Uniformisierung. Poincaré und Klein (1881–1884).

a) Die funktionentheoretisch brauchbaren Bewegungsgruppen.

Die Frage nach allen möglichen Gruppen von Verschiebungen einer absoluten Ebene in sich, bei denen eindeutige Funktionen ungeändert bleiben können, hat sich Poincaré gestellt, der zu diesen seinen Untersuchungen[1] durch andere Ziele verfolgende Arbeiten von Fuchs veranlaßt worden war. Die Anwendung der Sprechweise der NEGeometrie bei den funktionentheoretischen Untersuchungen, von denen hier die Rede sein soll, hat sich nicht etwa nur hinterher als ein brauchbares Mittel zur Veranschaulichung bewährt, sondern bildete für Poincaré von Anfang an ein heuristisches Hilfsmittel von großer Bedeutung; „cette terminologie m'a rendu de grands services dans mes recherches", heißt es in der ersten Abhandlung Poincarés in den Acta Mathematica 1, S. 8. Bei unseren folgenden Darlegungen stützen wir uns neben den Arbeiten von Poincaré besonders auch auf die gleichzeitigen Veröffentlichungen von F. Klein[2], benützen aber auch Beiträge jüngerer Forscher auf diesem Gebiete.

Die Frage nach den Bewegungsgruppen, die in der Lehre von den eindeutigen Funktionen brauchbar sind, kommt, wie wir schon an den behandelten Beispielen gesehen haben, darauf hinaus, geradlinige Vielecke in der absoluten Ebene anzugeben, die geeignet sind, die ganze Ebene schlicht und lückenlos mit einem Netz kongruenter Vielecke zu bedecken, die also, wie man sagt, als Fundamentalbereich für eine reguläre Teilung der absoluten Ebene dienen können. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen, denen ein solches Vieleck genügen muß, hat Poincaré aufgestellt; wir können sie, wie folgt, aussprechen, wobei wir uns auf Vielecke mit einer endlichen Anzahl von Seiten beschränken.

Ein Vieleck von der gewünschten Art hat stets eine gerade

[1] Die einschlägigen Arbeiten von H. Poincaré aus den Jahren 1881 ff. liegen im 2. Bande der „Oeuvres", Paris 1916, gesammelt vor.

[2] Die in den Bänden 19 ff. der Math. Ann., 1882 ff., zuerst veröffentlichten Arbeiten Kleins sind in dem Werke von Fricke und Klein, Theorie der automorphen Funktionen I, 1897, II, 1900—1912, verarbeitet und zusammengefaßt.

Anzahl von Seiten, die paarweise kongruent sind, also durch Bewegungen auseinander hervorgehen. Durch einfache Abänderungen kann das betreffende Vieleck stets auf eine Normalform gebracht werden, in der es $4p+2r-2$ Seiten aufweist, die wir wie folgt bezeichnen:

$$s_1^+,\ s_2^+,\ \ldots,\ s_{r-1}^+,\ \gamma_1^+,\ \delta_1^+,\ \gamma_1^-,\ \delta_1^-,\ \ldots,\ \gamma_p^+,\ \delta_p^+,\ \gamma_p^-,\ \delta_p^-,\ s_{r-1}^-,\ \ldots,\ s_1^-;$$

dabei sind immer die beiden Seiten, deren Zeichen sich nur durch das oben beigesetzte $+$ oder $-$ unterscheiden, kongruent und die Seiten folgen wie angegeben aufeinander, wenn der Umfang des Vielecks im positiven Sinne durchlaufen wird. Die Ecken werden in Zyklen verteilt, und zwar bilden Zyklen 1) die Ecke (s_1^+, s_1^-) für sich, 2) je zwei Ecken (s_{k-1}^-, s_k^-) und (s_{k-1}^+, s_k^+) für $k = 2, 3, \ldots, r-1$ und 3) alle übrigen $4p+1$ Ecken zusammengenommen. Damit nun dieses Vieleck als Fundamentalbereich einer regulären Ebenenteilung dienen kann, ist erforderlich und hinreichend, daß für jeden der r Eckenzyklen die Summe der Winkel ein aliquoter Teil $\frac{2\pi}{g_k}$ von 2π sei, für $k = 1, 2, \ldots, r$. Nach dem Gaußschen Satze von der Curvatura integra (Disquiss. circa superficies curvas, 1828, art. 20) ist dann das über das Vieleck erstreckte Doppelintegral

$$\text{(9)} \qquad \iint c\, dw = \sum_{k=1}^{r} \frac{2\pi}{g_k} - (4p + 2r - 4)\pi,$$

wo c das konstante Krümmungsmaß der absoluten Ebene, dw das Flächenelement bezeichnet. Aus dieser Gleichung ergibt sich das Vorzeichen von c und damit der Charakter der Ebene als elliptischer, parabolischer oder hyperbolischer. Eine einfache Diskussion zeigt hier, ähnlich wie oben bei dem Ausdruck (4), daß c nur in einer ganz begrenzten Anzahl von Fällen positiv oder gleich Null sein kann; die Fälle, wo c positiv ist, decken sich wieder mit den auch bei der hypergeometrischen Reihe gefundenen Konfigurationen der regelmäßigen Körper, für $c = 0$ haben wir natürlich wieder doppeltperiodische Funktionen, in allen übrigen Fällen also ist das Vieleck in der hyperbolischen Ebene gelegen. Den von Poincaré erbrachte Beweis, daß ein solches Vieleck stets als Fundamentalbereich einer regulären Teilung gelten kann, haben wir im vorigen Abschnitte für das dort behandelte Beispiel, wo er sich besonders einfach gestaltet, geführt; für den allgemeinen Fall soll er hier nicht wiedergegeben werden. Wir wenden uns vielmehr gleich der Aufgabe zu, Funktionen zu bilden, die in allen im Endlichen gelegenen Punkten der Ebene sich wie rationale Funktionen verhalten und bei der durch jene Teilung bestimmten Verschiebungsgruppe ungeändert bleiben.

b) Bildung der automorphen Funktionen.

Klein schlägt zum Nachweis der Existenz solcher Funktionen, die er automorphe nennt, ein Verfahren ein, das dem oben bei dem Beispiel des Abschnitts III angewandten ähnlich ist. — Die Verschiebungsgruppe wird aus den $2p + r - 1$ Bewegungen erzeugt, die die Paare kongruenter Seiten des Fundamentalbereichs F_0 ineinander überführen. Man hat also nur dafür zu sorgen, daß die zu bildenden Funktionen in entsprechenden Punkten der kongruenten Seiten von F_0 die gleichen Werte annehmen. Um dies geometrisch zur Anschauung zu bringen, denke man sich F_0 aus der absoluten Ebene ausgeschnitten und im Raume so umgestaltet, daß die entsprechenden Punkte der kongruenten Seiten zur Deckung gelangen. Dabei vereinigen sich die einen Zyklus bildenden Ecken zu je einem Punkte und wir erhalten eine geschlossene Fläche Φ vom Zusammenhange $2p + 1$. Durch Schnitte, deren Ufer die ehemaligen Seiten von F_0 sind, wird die Fläche, die aus Φ hervorgeht, indem man die den r Eckenzyklen entsprechenden Punkte aussticht, in eine einfachzusammenhangende zerschnitten. Auf Grund von Sätzen, die den Riemannschen Existenzsätzen der Theorie der algebraischen Funktionen nachgebildet sind, kann nun die Existenz von Funktionen erschlossen werden, die auf Φ eindeutig sind und in allen Punkten dieser Fläche den Charakter rationaler Funktionen haben; es sind die zu unserer Bewegungsgruppe gehörigen automorphen Funktionen. Alle diese Funktionen sind durch zwei geeignet gewählte unter ihnen $x = f(\eta)$, $y = h(\eta)$ rational ausdrückbar, während zwischen x und y eine algebraische Gleichung $G(x, y) = 0$ vom Range oder Geschlechte p besteht. Für $p = 0$ sind alle Funktionen durch eine $x = f(\eta)$ rational darstellbar, und diese eine ist bis auf eine lineargebrochene Transformation bestimmt.

Poincaré bewirkt die Bildung dieser Funktionen, die er als Fuchssche bezeichnet, durch Aufstellung von Reihen, die den invarianten Charakter bei den Bewegungen der Gruppe hervortreten lassen und zugleich ein Mittel für die Wertberechnung an die Hand geben. Da die Fälle, wo c positiv oder gleich Null ist, auf rationale bzw. doppeltperiodische Funktionen führen, können sie als erledigt gelten; wir dürfen uns demnach auf den Fall beschränken, wo c negativ ist, und wollen der Einfachheit wegen voraussetzen, daß $c = -1$ und daß der Mittelpunkt des Kreises der η-Ebene, der dem unendlich fernen Gebilde der hyperbolischen Ebene entspricht, der Punkt 0 sei, so daß also die Gleichung (3) jetzt

$$(3') \qquad 1 - \eta\bar{\eta} = 0$$

lautet. Bezeichnet man die lineargebrochenen Substitutionen in η, die die Bewegungen unserer Gruppe darstellen, in irgendeiner Reihenfolge durch

$$S_k(\eta) = \frac{\alpha_k \eta + \beta_k}{\gamma_k \eta + \delta_k}, \quad \alpha_k\delta_k - \beta_k\gamma_k = 1, \quad (k = 1, 2, 3, \ldots\ldots)$$

und bedeutet $H(\eta)$ eine rationale Funktion von η, die für keinen auf dem Kreise (3′) der η-Ebene gelegenen Wert von η unendlich wird, so bilde man nach Poincaré die Reihe

$$(10) \qquad \Theta(\eta) = \sum_{k=1}^{\infty} H(S_k(\eta)) \left(\frac{d\,S_k(\eta)}{d\eta}\right)^n,$$

wo n eine positive ganze Zahl bedeutet, die größer ist als Eins. Von dieser sogenannten Fuchsschen Thetareihe gilt, daß sie unbedingt und gleichmäßig konvergiert für alle Werte von η, mit Ausnahme derjenigen, die auf dem Kreise (3′) der η-Ebene gelegen sind, und derjenigen, in denen eine der rationalen Funktionen

$$H(S_k(\eta)), \quad \frac{d\,S_k(\eta)}{d\eta} \tag{11}$$

unendlich wird. Von den beiden Konvergenzbeweisen, die Poincaré geliefert hat, ist für uns der zweite besonders bemerkenswert, weil er sich durchaus auf die Metrik der hyperbolischen Ebene stützt. Es kommt alles darauf an, die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{d\,S_k(\eta)}{d\eta}\right|^n = \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{|\gamma_k\eta+\delta_k|^{2n}} \tag{12}$$

zu beweisen. Dazu denken wir uns in der hyperbolischen Ebene um den Mittelpunkt $\eta = 0$ mit den Halbmessern ρ, 2ρ, 3ρ, ... eine Schar konzentrischer Kreise C_1, C_2, C_3, ... beschrieben und bezeichnen mit U_h die Summe der Glieder der Reihe (12), für die $S_k(\eta)$ innerhalb des von den Kreisen C_{h-1} und C_h begrenzten Ringgebietes liegt. Dann ergibt sich, daß

$$U_h < K\frac{1}{e^{h(n-1)\varrho}} \tag{13}$$

ist, wo K eine von h unabhängige Konstante bezeichnet, und daraus folgt, daß die Reihe (12) wie eine geometrische Reihe konvergiert, und zwar ist die Konvergenz um so stärker, je größer der Flächeninhalt des in der hyperbolischen Ebene gelegenen Fundamentalbereichs ist. Daraus folgt weiter, daß die Reihe (10) in jedem endlichen Bereiche der hyperbolischen Ebene eine Funktion vom Charakter einer rationalen darstellt; die Gesamtheit der unendlich fernen Punkte der hyperbolischen Ebene, d. h. die Gesamtheit der η-Werte, deren absoluter Betrag gleich Eins ist, bildet eine natürliche Grenze für diese

Funktion, über die hinweg eine analytische Fortsetzung nicht möglich ist.

Aus der Form der Reihe (10) ist ersichtlich, daß für jede der Bewegungen $S_k(\eta)$ unserer Gruppe die Gleichung gilt:

$$\Theta(S_k(\eta)) = \left(\frac{dS_k(\eta)}{d\eta}\right)^{-n} \Theta(\eta) = (\gamma_k \eta + \delta_k)^{2n} \Theta(\eta). \tag{14}$$

Bildet man also den Quotienten zweier solcher Fuchsscher Thetareihen für denselben Wert von n, aber für verschiedene Wahl der rationalen Funktion H, so erhält man einen Ausdruck, der für alle im Endlichen gelegene Punkte der hyperbolischen Ebene sich wie eine rationale Funktion verhält und bei den Verschiebungen $S_k(\eta)$ ungeändert bleibt. Ein solcher Ausdruck ist also eine zu der Bewegungsgruppe gehörige automorphe Funktion, und Poincaré zeigt, daß sich auch jede solche Funktion mit Hilfe von Fuchsschen Thetareihen darstellen läßt.

Wir werden uns im folgenden der Einfachheit wegen auf den Fall $p = 0$ beschränken, wollen aber andererseits die bei der Aufstellung der Thetareihen eingeführte besondere Annahme eines negativen Wertes von c fallen lassen und also wieder mit einem beliebigen c, d. h. mit der absoluten Ebene im allgemeinsten Sinne arbeiten. — Es sei $x = f(\eta)$ eine der zu unserer Gruppe gehörigen automorphen Funktionen, durch die jede andere rational ausgedrückt werden kann; x ist dann nur bis auf eine Transformation von der Form

$$\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1, \tag{15}$$

bestimmt. Die Werte von x, die den Eckenzyklen des Fundamentalbereiches entsprechen, $a_1, a_2, \ldots, a_r$, sind die singulären Punkte der Funktion η von x; in bezug auf den analytischen Charakter dieser Funktion gilt das folgende: Setzt man

$$u_1 = \sqrt{\frac{dx}{d\eta}}, \quad u_2 = \eta \sqrt{\frac{dx}{d\eta}}, \tag{16}$$

so sind diese Größen Lösungen einer Differentialgleichung von der Form

$$(17) \qquad \frac{d^2 u}{dx^2} = Q(x)\, u,$$

wo $Q(x)$ eine rationale Funktion mit den Polen $a_1, a_2, \ldots, a_r$ bedeutet. Die Differentialgleichung (17) gehört dem sogenannten Fuchsschen Typus an, d. h. ihre Lösungen und ebenso der Quotient $\eta = \frac{u_2}{u_1}$ werden in den singulären Punkten nur von endlicher Ordnung unendlich. Der Fundamentalbereich F_0 wird durch die Funktion $x = f(\eta)$ abgebildet auf die durch einen Schnitt $(a_1 \ldots . a_r)$ zerschnittene x-Ebene; die Abbildung der gesamten absoluten Ebene durch dieselbe Funktion wird, wenn c nicht positiv ist, eine unendlich vielblättrige Fläche sein, die einfachzusammenhängend ist, und deren Blätter sich in den Punkten $a_1, a_2, \ldots, a_r$ in der Weise verzweigen, daß sich allemal je g_k Blätter um den Punkt a_k herumwinden. Man nennt diese Fläche die zu der Signatur

$$(18) \qquad \left(r \begin{matrix} a_1, & a_2, & \ldots, & a_r \\ g_1, & g_2, & \ldots, & g_r \end{matrix} \right)$$

gehörige Überlagerungsfläche, und unterscheidet in der Signatur einerseits die Reihe ganzer positiver Zahlen $r, g_1, g_2, \ldots, g_r$, durch die der topologische Bau der Fläche, andererseits die Reihe der komplexen Werte $a_1, a_2, \ldots, a_r$, durch die die Fläche quantitativ bestimmt wird. Der topologische Bau der Überlagerungsfläche wird am übersichtlichsten durch die Anordnung der Vielecke in der regulären Teilung der absoluten Ebene gegeben, die man sich in der Abbildung dieser Ebene auf das Gebiet (7) der η-Ebene anschaulich machen kann. Es kommt dabei gar nicht auf die besondere Lage der Ecken des Fundamentalbereichs F_0 an, sondern nur auf die Anzahl r der Eckenzyklen und auf die bei diesen Eckenzyklen auftretenden Winkelsummen $\frac{2\pi}{g_k}$, die die ganzen Zahlen g_k festlegen. Dagegen wird die Lage der singulären Punkte $a_1, a_2,$

$\ldots, a_r$ bei festgehaltenen Werten der ganzen Zahlen $r, g_1, g_2, \ldots, g_r$ durch die Lage der Ecken von F_0 bestimmt. — Wenn der Fundamentalbereich insbesondere in bezug auf die die Ecken (s_1^+, s_1^-) und (s_r^+, s_r^-) miteinander verbindende Diagonale symmetrisch ist, so folgt aus dem Symmetrieprinzip, daß die singulären Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_r$ auf einem Kreise liegen. Durch geeignete Wahl von $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in (15) kann man dann erreichen, daß $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = \infty$ und die übrigen a_k positive Zahlen größer als Eins werden. Dieser sogenannte symmetrische Fall liefert für $r = 3$ die aus der hypergeometrischen Reihe entspringenden Beispiele (Dreiecksfunktionen), für ein beliebiges r und unendlichgroße Werte der g_k das Beispiel, das im Abschnitt III behandelt wurde.

c) Uniformisierung. Der Fundamentalsatz.

Eine Funktion $y = F(x)$, die nur die Stellen $a_1, a_2, \ldots, a_r$ zu Verzweigungspunkten hat, und sich in a_k so verzweigt, daß alle ihre Zweige nach g_k-maliger Umkreisung von a_k zu ihren Ausgangswerten zurückkehren, ist auf der zu der Signatur (18) gehörigen Überlagerungsfläche eine eindeutige Funktion des Orts. Da diese Fläche durch die Funktion η von x gegenseitig eindeutig und konform auf die absolute Ebene, d. h. auf den ganzen Existenzbereich der Funktion x von η abgebildet erscheint, so wird $F(x)$ eine eindeutige Funktion von η sein, d. h. diese Funktion wird mit Hilfe der automorphen Funktion $x = f(\eta)$ uniformisiert. Durch die Funktion, die zu unendlichgroßen Werten der g_k gehört, wird demnach jede mehrdeutige Funktion von x mit den Verzweigungspunkten $a_1, a_2, \ldots, a_r$ uniformisiert.

Es entsteht nun die Frage, wie man die Uniformisierung einer Funktion $y = F(x)$ bewirken könnte, deren Verzweigungspunkte an den beliebig in der x-Ebene gelegenen Stellen $b_1, b_2, \ldots, b_r$ sich befinden, wobei zu b_k die positive ganze Zahl g_k gehören möge, in ähnlichem Sinne, wie vorhin zu a_k. Wenn zunächst $r = 3$ ist, so kann eine linear gebrochene Funktion x' von x stets so angegeben werden, daß den Werten b_1, b_2, b_3 von x die Werte 0, 1, ∞ von x' entsprechen. Als Funktion von x' wird dann y durch Vermittlung der aus der hypergeometrischen Reihe entspringenden, zu den Zahlen g_1, g_2, g_3 gehörigen Dreiecksfunktion uniformisiert. Insbesondere leistet also die Modulfunktion die Uniformisierung einer jeden Funktion, die nur drei Verzweigungspunkte besitzt, was auf die oben S. 185 erwähnte Bemerkung von Riemann und Klein hinauskommt.

Wenn r größer als drei ist, so handelt es sich um die Frage, in welcher Weise sich bei gegebenen Werten der ganzen Zahlen r, g_1, g_2, ..., g_r die Ecken des Fundamentalbereichs F_0 so wählen lassen, daß ihnen in der x-Ebene die vorgeschriebenen Lagen b_1, b_2, ..., b_r der singulären Punkte entsprechen. Daß diese Wahl stets und im wesentlichen nur auf eine Weise möglich ist, bildet den sogenannten Fundamentalsatz der Lehre von den automorphen Funktionen, für den zur Zeit eine ganze Reihe von Beweisen bekannt ist. Der älteste ist der Kontinuitätsbeweis von Klein und Poincaré[1], der zu zeigen sucht, daß sich durch stetige Änderung der Ecken von F_0 die entsprechenden Werte der automorphen Funktion $x = f(\eta)$ in die vorgeschriebenen Lagen b_1, b_2, ..., b_r hineindrängen lassen. Eine zweite Methode, die von Schwarz vorgeschlagen, von Picard und Poincaré ausgeführt worden ist[2], gründet sich auf die sogenannte Liouvillesche partielle Differentialgleichung

$$(19) \qquad 4\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial \bar{x}} = -2c \cdot e^w,$$

[1] Klein, Math. Ann. 21, 1883, S. 141; Poincaré, Acta mathem. 4, 1884, S. 201, Oeuvres II, S. 300. Vgl. auch die neueren Arbeiten von Fricke, Brouwer und Koebe.

[2] Schwarz, Ges. Abhandl. II, S. 356; Picard, Liouvilles Journal (4), 6, 1890, S. 145 und 9, 1893, S. 273; Poincaré, ebenda (5), 4, 1898, S. 137, Oeuvres II, S. 512; vgl. Schlesinger, Arch. d. Math. u. Physik (3), 1, 1901, S. 262; Bieberbach, Math. Ann. 77, 1916, S. 173.

die befriedigt wird, wenn e^w das Quadrat des Verhältnisses des Linienelements ds der absoluten Ebene vom Krümmungsmaß c zu dem Linienelement dS der x-Ebene ist, welche beiden Ebenen ja durch die Funktion $x = f(\eta)$ konform aufeinander abgebildet erscheinen. Wenn wir in (3) $\eta_0 = 0$ nehmen, so ist

$$(20) \qquad ds^2 = \frac{4\, d\eta\, d\bar{\eta}}{(1 + c\eta\bar{\eta})^2}, \quad dS^2 = dx\, d\bar{x},$$

also mit Rücksicht auf (16) das Verhältnis

$$(21) \qquad \frac{ds}{dS} = \frac{2}{u_1 \bar{u}_1 (1 + c\eta\bar{\eta})} = \frac{2}{u_1 \bar{u}_1 + c\, u_2 \bar{u}_2};$$

hier muß die Hermitesche Form $u_1\bar{u}_1 + cu_2\bar{u}_2$ für alle Bewegungen der Gruppe ungeändert bleiben, also eine eindeutige Funktion von x sein, und diese eindeutige Funktion hat in den singulären Punkten $b_1, b_2, \ldots, b_r$ ein durch die ganzen Zahlen $g_1, g_2, \ldots, g_r$ festgesetztes Verhalten zu zeigen. Picard und Poincaré beweisen, daß stets eine Lösung w der Gleichung (19) existiert, für die e^w das für die Funktion (21) erforderliche Verhalten aufweist.

Ein drittes Beweisverfahren, dessen Grundgedanke von Poincaré herrührt[1], beruht auf der Ausschöpfung der Überlagerungsfläche durch eine Folge von einander umfassenden Bereichen; es soll seiner Tragweite wegen etwas ausführlicher geschildert werden.

Die zu der Signatur

$$(22) \qquad \left(r\; \begin{matrix} b_1, b_2, \ldots, b_r \\ g_1, g_2, \ldots, g_r \end{matrix}\right)$$

gehörige Überlagerungsfläche möge durch die Folge $V_1, V_2, \ldots$ von einander umschließenden Bereichen in dem Sinne ausgeschöpft werden, daß jeder Punkt der Fläche für einen hinreichend großen Wert des Stellenzeigers n in allen Bereichen

[1] S. die Abhandlungen Acta mathem. 4, 1884, Oeuvres II, S. 300, insbesondere S. 385 und Bulletin de la Société mathém. de France 11, 1883, S. 112.

V_n, V_{n+1}, ... enthalten sei. Wenn jeder der Bereiche V_n aus einer endlichen Anzahl von Blättern besteht und durch eine endliche Anzahl von Stücken analytischer Kurven begrenzt wird, so gibt es nach dem oben S. 185 erwähnten, von Schwarz bewiesenen Riemannschen Abbildungssatze eine Funktion w_k von x, die die gegenseitig eindeutige konforme Abbildung des Bereiches V_k auf die Fläche eines Kreises, etwa des Kreises mit dem Mittelpunkte Null und dem Halbmesser Eins (kurz Einheitskreis!) der Zahlenebene liefert, oder, wie wir auch sagen können, den Bereich V_k auf eine hyperbolische Ebene vom Krümmungsmaße -1 abbildet. Wir normieren diese Funktionen w_k so, daß sie alle für einen im Innern des Bereiches V_k gelegenen Punkt c verschwinden und in der Umgebung von $x = c$ die Form haben

$$w_k = (x - c)\, C_k \mathfrak{P}_k(x - c), \tag{23}$$

wo C_k eine positive Konstante, $\mathfrak{P}_k(x - c)$ eine gewöhnliche Potenzreihe bedeutet, die für $x = c$ gleich Eins wird. Da auf der Begrenzung von B_k $|w_k| = 1$, $|w_{k+1}| < 1$ ist, so ist im Innern von B_k $|w_{k+1}| < |w_k|$, also $C_{k+1} < C_k$, d. h. die C_1, C_2, ... bilden eine abnehmende Folge. Wenn nun

1) $\lim\limits_{k \to \infty} C_k = C$ wesentlich positiv ist, so zeigt man nach einem von Poincaré a. a. O. angegebenen Schlußverfahren, daß die Funktionenfolge w_1, w_2, ... gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $\lim\limits_{k \to \infty} w_k = \eta$ konvergiert, die dann die gesamte Überlagerungsfläche auf den Einheitskreis der η-Ebene oder die hyperbolische Ebene abbildet und daß diese Funktion durch diese Eigenschaft eindeutig bestimmt ist. Die verschiedenen Zweige der Funktion η von x, d. h. die den verschiedenen Blättern der Überlagerungsfläche entsprechenden Bereiche der hyperbolischen Ebene, gehen durch Bewegungen auseinander hervor. Damit ist in diesem Falle der geforderte Beweis geliefert. Daß $C > 0$ ist, beweist man nach Poincaré a. a. O. in

den Fällen, wo in der Signatur (22) $\sum_{k=1}^{r} \frac{1}{g_k} < 1$, indem man mit Hilfe der Modulfunktion eine positive Konstante herstellt, die nicht größer ist als alle C_k. Nach einem von Koebe[1] herrührenden Verfahren kann man statt dessen wie folgt schließen:

Wenn 2) $C = 0$ ist, so konvergiert zwar nicht die Folge der $w_1, w_2, \ldots$ gegen eine von Null verschiedene Grenzfunktion, wohl aber die Folge der Funktionen $\frac{w_k}{C_k} = w_k'$, die die Abbildung der Bereiche V_k auf die Kreise mit den Halbmessern $\frac{1}{C_k}$ liefern. Die Grenzfunktion $\lim\limits_{k \to \infty} w_k' = \eta'$ bewirkt dann die Abbildung der Überlagerungsfläche auf den Kreis mit dem Halbmesser $\lim\limits_{k \to \infty} \frac{1}{C_k} = \infty$, d. h. auf die euklidische Ebene. Dieser Fall kann also nur eintreten, wenn in der Signatur (22) $\sum_{k=1}^{r} \frac{1}{g_k} = 1$ ist.

Es handelt sich jetzt nur noch um die Frage, ob man die Bereiche V_1, V_2, ... in der verlangten Weise anzugeben imstande ist.

Da werden zunächst die Fälle auszuscheiden sein, wo die Überlagerungsfläche nur aus einer endlichen Anzahl von Blättern besteht, d. h. wo in der Signatur (22) $\sum_{k=1}^{r} \frac{1}{g_k} > 1$ ist; es sind dies die bekannten Fälle der regelmäßigen Körper. Für diese erfolgt die Abbildung der Überlagerungsfläche auf eine elliptische Ebene; vgl. oben S. 182. In den übrigen Fällen kann die Bereichfolge in mannigfacher Weise gewählt werden. Man denkt sich zu dem Zweck am bequemsten die Überlagerungsfläche durch eine den in ihrer Signatur enthaltenen Zahlen r, g_1, g_2, ..., g_r entsprechende Teilung der absoluten Ebene dargestellt,

---

[1] S. etwa Math. Ann. 67, 1909, S. 214 ff.

die ihr ja topologisch völlig gleichwertig ist. Gibt man für eine solche Teilung, deren Fundamentalbereich F_0 heißen möge, eine Folge von Bereichen an, die die absolute Ebene ausschöpfen, so kann diese Folge unmittelbar auf die Überlagerungsfläche übertragen werden. Wenn alle $g_k = \infty$ sind, kann man z. B., wie folgt, verfahren:[1]

Wir nehmen V_1 als F_0 selbst; V_2 entstehe aus der Vereinigung von F_0 mit den $2r-2$ kongruenten Bereichen, die F_0 längs einer Seite benachbart sind (es kranzförmig umlagern). V_2 ist dann in der absoluten Ebene auch ein geradliniges Vieleck und die Ebene erscheint in lauter mit V kongruente Parzellen geteilt. Wir vereinigen nun V_2 mit den es kranzförmig umlagernden, mit ihm kongruenten Bereichen zu V_3 und fahren so fort. Wenn in der Überlagerungsfläche bzw. in der x-Ebene der die Punkte $b_1, b_2, \ldots, b_r$ verbindende Schnitt längs analytischen Kurvenstücken gelegt wird, so erfüllen die so hergestellten Bereiche V_k alle oben gestellten Anforderungen. Für endliche Werte der g_k kann das Verfahren leicht entsprechend abgeändert werden.[2] — Besondere Erwähnung verdient noch der Fall einer symmetrischen Überlagerungsfläche, wo also die $b_1, b_2, \ldots, b_r$ auf einem Kreise liegen. Wir werden alsdann zur topologischen Veranschaulichung auch eine symmetrische Teilung der absoluten Ebene heranholen, bei der also der Fundamentalbereich F_0 aus zwei symmetrischen Hälften R_0 und R_0' besteht. Wir richten dann die Bereichfolge so ein, daß V_1 als R_0 gewählt wird und V_2 dadurch entsteht, daß man R_0' mit den r es kranzförmig umlagernden symmetrischen Bereichen vereinigt. V_2 wird dann wieder von mit ihm symmetrischen Bereichen kranzförmig umlagert, die mit V_2 vereinigt V_3 liefern; usw. Bei dieser Wahl wird nun zunächst w_1 eine lineargebrochene Funktion von x, und von allen folgenden w_k ist sofort einzu-

[1] Schlesinger, Crelles Journal 110, 1892, S. 280ff.

[2] Schlesinger a. a. O. und Fricke-Klein, Automorphe Funktionen II, 1900—1912, S. 466.

zusehen, daß jedes w_k durch jedes folgende nnd also x durch jedes dieser w_k rational ausgedrückt werden kann. Die Koeffizienten dieser rationalen Funktionen hängen algebraisch von den singulären Stellen $b_1, b_2, \ldots, b_r$ ab und können ohne erhebliche Schwierigkeit angegeben werden. In diesem Falle wird also die Funktion η von x als Grenzwert einer Kette von algebraischen Funktionen erzeugt.[1] Wenn wir im Abschnitt III diese Funktionsgattung als die naturgemäße Verallgemeinerung der Modulfunktion bezeichnet haben, so bewährt sich dies also auch dadurch, daß wir hier für ihre Erzeugung einen algebraischen Algorithmus gefunden haben, ähnlich dem des arithmetrisch-geometrischen Mittels, durch den Gauß die Modulfunktion hergestellt hat.

In bezug auf eine zu der Signatur (22) gehörige Überlagerungsfläche gilt also der Satz, daß eine solche Fläche stets gegenseitig eindeutig und konform auf eine absolute Ebene abgebildet werden kann, deren Charakter durch die Disjunktion

$$\sum_{k=1}^{r} \frac{1}{g_k} \gtreqless 1$$

bestimmt wird. Die abbildende Funktion $x = f(\eta)$ ist eine automorphe, die jede auf der Überlagerungsfläche eindeutige Funktion des Ortes uniformisiert.

Dieser Satz, der als eine Verallgemeinerung des Riemannschen Satzes von der Abbildbarkeit eines von einer endlichen Anzahl analytischer Kurvenstücke begrenzten, aus endlich vielen Blättern bestehenden Bereiches auf eine hyperbolische Ebene angesehen werden kann, ist selbst noch einer bedeutsamen Verallgemeinerung fähig, von der zum Schluß noch kurz die Rede sein soll.

---

[1] Schlesinger, Crelles Journal 105, 1889, S. 181; vgl. auch Poincaré, a. a. O., Oeuvres II, S. 386.

d) Die allgemeine Uniformisierung.

Die Funktionen, die auf einer der im vorigen Abschnitt betrachteten Überlagerungsflächen eindeutige Funktionen des Orts sind, haben nur eine endliche Anzahl von Verzweigungspunkten. Fassen wir jetzt eine beliebige monogene, mehrdeutige Funktion $y = F(x)$ der komplexen Veränderlichen x ins Auge, so kann man nach Poincaré[1] stets eine einfachzusammenhangende Fläche P herstellen, auf der y eine eindeutige Funktion des Ortes ist. Diese Fläche besteht aus über die x-Ebene geschichteten ebenen Blättern, die miteinander in der Weise in Zusammenhang gebracht werden, daß Anfangs- und Endpunkt einer in der x-Ebene geschlossenen Kurve C in der Fläche P dann und nur dann als demselben Blatte angehörig betrachtet werden sollen, wenn alle Zweige von $F(x)$ längs C fortgesetzt zu ihrem Ausgangswerte zurückkehren, und C durch stetige Gestaltsänderung so auf einen Punkt zusammengezogen werden kann, daß ihr die hervorgehobene Eigenschaft in jedem Zustande gewahrt bleibt. Alle Punkte von P, in denen $F(x)$ sich nicht wie eine algebraische Funktion verhält, gelten als zu der Begrenzung von P gehörig.

Hat nun P überhaupt keine Begrenzung, so ist y eine algebraische Funktion vom Range 0 von x, und P kann auf eine elliptische Ebene gegenseitig eindeutig und konform abgebildet werden. Die abbildende Funktion η ist rational in x und y, die selbst durch η als rationale Funktionen dargestellt und so uniformisiert werden.

In jedem andern Falle hat P Grenzpunkte und kann dann ebenso behandelt werden wie die Überlagerungsfläche des vorigen Abschnitts. Sie kann durch eine Folge einander umfassender Bereiche ausgeschöpft werden, die sich einzeln

---

[1] Bulletin de la Soc. mathém. de France 11, 1883, S. 112; weiter kommen in Betracht die Arbeiten von Poincaré, Acta Mathem. 31, 1907, S. 1 und Koebe, Göttinger Nachr. 1907, S. 191.

vermöge des Riemannschen Abbildungssatzes auf hyperbolische Ebenen abbilden lassen. Die abbildenden Funktionen streben einer Grenzfunktion zu, die die Fläche P entweder auf eine hyperbolische oder auf eine euklidische Ebene abbildet. Die verschiedenen Zweige von η gehen durch Bewegungen der betreffenden Ebene auseinander hervor, aber der Fundamentalbereich der Gruppe dieser Bewegungen hat im allgemeinen unendlich viele Seiten. Die die Fläche P auf die absolute Ebene abbildende Funktion $x = f(\eta)$ ist eine automorphe, durch die die Funktion $y = f(x)$ uniformisiert wird. Die uniformisierende Veränderliche η ist in allen drei Fällen der elliptischen, parabolischen und hyperbolischen Ebene, abgesehen von einer Verschiebung in dieser Ebene, eindeutig festgelegt, sie gehört also zum Wesen der betreffenden Funktion.

Der in diesem Lehrsatz ausgesprochene tiefe Zusammenhang zwischen der absoluten Geometrie und den monogenen Funktionen einer komplexen Veränderlichen kann wohl als eines der bemerkenswertesten Ergebnisse der neueren mathematischen Forschung bezeichnet werden.

Literatur.

Zusammenfassende Darstellungen der im vorstehenden umrissenen Lehren geben die folgenden Werke:

Klein und Fricke, Theorie der elliptischen Modulfunktionen, I, 1890, II, 1892.

Fricke und Klein, Theorie der automorphen Funktionen, I, 1897.

L. Schlesinger, Handbuch der Theorie der lin. Differentialgleichungen, II, 2, 1898.

L. Schlesinger, De nonnullis absolutae geometriae ad theoriam complexae variabilis functionum applicationibus, Bolyai in memoriam, Klausenburg 1902.

Fricke und Klein, Theorie der automorphen Funktionen, II, 1900 bis 1912.

G. Fubini, Introduzione alla teoria dei gruppi discontinui e delle funzioni automorfe, 1908.

R. Fricke, Enzyklopädie der math. Wissensch. Bd. II 2; Art. II B. 4, 1913.

Namenregister.

(Die Nummern bedeuten die Seitenzahlen.)