

Peter Hilgers

Verteilte Zustandsschätzung nichtlinearer Systeme

Verteilte Zustandsschätzung nichtlinearer Systeme

Peter Hilgers



Universitätsverlag Ilmenau
2012

Impressum

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Angaben sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Diese Arbeit hat der Fakultät für Informatik und Automatisierung der Technischen Universität Ilmenau als Dissertation vorgelegen.

Tag der Einreichung: 27. Oktober 2011
1. Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Christoph Ament
(Technische Universität Ilmenau)
2. Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Thomas Rauschenbach
(Fraunhofer IOSB, Anwendungszentrum Systemtechnik, Ilmenau)
3. Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Cristina Tarin
(Universität Stuttgart)
Tag der Verteidigung: 24. April 2012

Technische Universität Ilmenau/Universitätsbibliothek

Universitätsverlag Ilmenau

Postfach 10 05 65

98684 Ilmenau

www.tu-ilmenau.de/universitaetsverlag

Herstellung und Auslieferung

Verlagshaus Monsenstein und Vannerdat OHG

Am Hawerkamp 31

48155 Münster

www.mv-verlag.de

ISBN 978-3-86360-031-0 (Druckausgabe)

URN [urn:nbn:de:gbv:ilm1-2012000053](http://nbn:de:gbv:ilm1-2012000053)

Titelfoto: photocase.com

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung	xxiii
Abstract	xxv
Vorwort	xxvii
1. Einführung und Stand der Technik	1
1.1. Einführung	1
1.2. Stand der Technik	3
1.3. Gliederung der Arbeit	6
2. Grundlagen	7
2.1. Systemdarstellung im Zustandsraum	7
2.1.1. Lineare Systeme	8
2.1.2. Nichtlineare Systeme	9
2.1.3. Zeitdiskrete Darstellung	9
2.1.4. Stochastische Störungen	10
2.2. Definitionen	11
2.2.1. Zustände	12
2.2.2. Parameter	12
2.2.3. Störungen	12
2.2.4. Zustandsschätzung	13
2.3. Kalman-Filter	13
2.3.1. Herleitung	14
2.3.2. Anschauliche Interpretation	21
2.3.3. Algorithmus	24
2.3.4. Eigenschaften	25
2.4. Das Erweiterte Kalman-Filter	25

Inhaltsverzeichnis

2.5. Nichtlineare Transformationen	27
2.5.1. Erwartungswert	28
2.5.2. Kovarianz	29
2.6. Die Unscented Transformation	31
2.7. Unscented Kalman-Filter	36
2.7.1. Algorithmus	36
2.7.2. Eigenschaften	39
3. Verteilte und Dezentrale Zustandsschätzer	41
3.1. Motivation	41
3.2. Dezentrales Kalman-Filter	42
3.2.1. Dezentralisierung der Messungen	43
3.2.2. Dezentralisierung des Zustands	46
3.3. Verteiltes Und Dezentrales Kalman-Filter	48
3.3.1. Transformationsmatrizen	48
3.3.2. Wahl der Transformationsmatrizen	49
3.3.3. Verteilung von Schätzwerten und Kovarianzma- trizen	51
3.3.4. Algorithmus	54
3.3.5. Eigenschaften	56
3.4. Verteiltes Und Dezentrales Unscented Kalman-Filter . .	56
3.4.1. Verteilung der Modelle	57
3.4.2. Verteilung und Fusion im UKF	60
3.4.3. Algorithmus	60
3.5. Beobachtbarkeit	63
3.5.1. Beobachtbarkeit linearer Systeme	63
3.5.2. Beobachtbarkeit nichtlinearer Systeme	64
3.5.3. Beobachtbarkeit verteilter und dezentraler Sy- steme	67
4. Anwendung auf unterschiedliche Systeme	69
4.1. Dreitanksystem	69
4.1.1. Modellierung	70
4.1.2. Lokale Modelle und lokale Zustände	72
4.1.3. Simulation	77

4.1.4.	Zentrale Schätzung	78
4.1.5.	Verteilte Schätzung	79
4.2.	Multilasertrackersystem I – Verfolgung	83
4.2.1.	Beschreibung eines Lasertracker	83
4.2.2.	Multilasertracker	84
4.2.3.	Modellierung	85
4.2.4.	Zentrale Schätzung	87
4.2.5.	Referenzbewegungen	90
4.2.6.	Dezentrales Filter	93
4.2.7.	Dezentrale Schätzung	95
4.2.8.	Ausfall von Messeinrichtungen	95
4.2.9.	Umkonfiguration des Messsystems	101
4.3.	Multilasertrackersystem II – Beobachtung	106
4.3.1.	Modellierung mehrerer gekoppelter Pendel	106
4.3.2.	Parameter des Testsystems	114
4.3.3.	Verteilung des Modells	118
4.3.4.	Beobachtbarkeit	123
4.3.5.	Zentrales Filter	124
4.3.6.	Verteiltes Filter	125
4.3.7.	Testbewegungen	127
4.3.8.	Verteilte Schätzung	127
4.3.9.	Ausfall einer Messeinrichtung	132
4.3.10.	Betrachtung der Berechnungszeiten	147
4.4.	Bewertung	154
5.	Die Estimation Toolbox für Matlab	157
5.1.	Beschreibung	157
5.1.1.	Die <code>model</code> -Klasse	157
5.1.2.	Die <code>estimator</code> -Klasse	160
5.2.	Erweiterung für verteilte und dezentrale Schätzungen	162
5.2.1.	Die <code>ddestimator</code> -Klasse	162
5.2.2.	Benutzung der <code>ddestimator</code> -Klasse	163
6.	Zusammenfassung und Ausblick	165

Inhaltsverzeichnis

A. Trajektorien der Verfolgung eines zufällig bewegten Objektes	171
B. Bewegung der Reflektoren im Trackerkoordinatensystem	189

Tabellenverzeichnis

4.1. Position der vier Tracker im globalen Koordinatensystem.	90
4.2. Parameter des Systems	117
4.3. Betrag der minimalen Änderung eines Pendelwinkels $\Delta\varphi$, um eine Änderung des Spiegelwinkels um $\pm\sigma$ zu bewirken.	132
4.4. Betrag des maximalen Fehlers bei der ersten Testbewegung, der durch die Verteilung im DDUKF im Vergleich zum zentralen UKF entsteht. In der rechten Spalte ist das Minimum des Betrags der Änderung des Pendelwinkels $\Delta\varphi$ angegeben, die zu einer Änderung des Messsignals von $\pm\sigma$ führt.	147
4.5. Die Rechenzeiten, die das UKF und das DDUKF benötigen, werden für unterschiedlich lange Simulationszeiten gemessen. Die Rechenzeiten werden immer auf die jeweilige Rechenzeit des UKF normiert. Da der Fusions-schritt in der Implementierung nicht einzelnen Knoten zugeordnet werden kann und auf allen Knoten durchgeführt werden muss, wird er anschließend zu der Rechenzeit addiert.	153

Abbildungsverzeichnis

4.1. Dreitanksystem des Fachgebietes Systemanalyse.	72
4.2. Schematische Darstellung des Dreitanksystem mit Zuständen, Zuläufen und Auslauf.	73
4.3. Aufgezeichnete Messwerte der Füllstandssensoren für die Testfolge. Die Messungen entsprechen direkt den Füllhöhen in den einzelnen Tanks.	73
4.4. Ausgangssignale des globalen Modells, welches nur durch die Eingangsfolge bei korrekten Initialwerten erregt wird. Im Vergleich zur realen Messung ist die Drift deutlich zu erkennen.	74
4.5. Jeder Knoten wird durch einen Kreis repräsentiert. Die Zugehörigkeit der direkten lokalen Zustände wird durch gebogene, vertikale Pfeile verdeutlicht. Horizontal sind die Verbindungen zu den benachbarten Knoten angedeutet.	78
4.6. Schätzwerte des zentralen UKF. Die Zustände sind die Füllhöhen in den einzelnen Tanks.	80
4.7. Differenz zwischen gemessenen und durch das zentrale UKF geschätzten Werten für die Füllstände.	80
4.8. Differenz zwischen den gemessenen und durch das DDUKF in Knoten 3 geschätzten Werten für die Füllstände.	82
4.9. Differenz zwischen den durch das zentrale UKF und durch das DDUKF in Knoten 3 geschätzten Werten für die Füllstände. Diese Differenz ist der durch das DDUKF zusätzlich verursachte Fehler, wenn das UKF als Referenz betrachtet wird.	82

Abbildungsverzeichnis

4.10. Koordinatensystem und Definition der Winkel für das Lasertrackersystem. φ ergibt sich bei negativer Drehung um die x -Achse, ϑ bei positiver Drehung um die y -Achse. Falls beide Winkel Null sind, ist der Strahl mit der z -Achse identisch.	87
4.11. Zentrale Schätzung der ersten Testbewegung sowie Positionen der Lasertracker 1 bis 4 (rotes x). Unten links sind die räumliche Anordnung der Tracker und die Trajektorien dargestellt. Die anderen Abbildungen zeigen jeweils Projektionen auf die drei Hauptebenen.	91
4.12. Zentrale Schätzung der zweiten Testbewegung sowie Positionen der Lasertracker 1 bis 4 (rotes x). Unten links sind die räumliche Anordnung der Tracker und die Trajektorien dargestellt. Die anderen Abbildungen zeigen jeweils Projektionen auf die drei Hauptebenen.	92
4.13. Euklidischer Abstand der zentral und dezentral geschätzten Position des Ziels im Verlauf der Messung für die erste Testbewegung im ersten Knoten.	96
4.14. Euklidischer Abstand der zentral und dezentral geschätzten Position des Ziels im Verlauf der Messung für die erste Testbewegung im zweiten Knoten.	96
4.15. Euklidischer Abstand der zentral und dezentral geschätzten Position des Ziels im Verlauf der Messung für die erste Testbewegung im dritten Knoten.	97
4.16. Euklidischer Abstand der zentral und dezentral geschätzten Position des Ziels im Verlauf der Messung für die erste Testbewegung im vierten Knoten.	97
4.17. Euklidischer Abstand der zentral und dezentral geschätzten Position des Ziels im Verlauf der Messung für die zweite Testbewegung im ersten Knoten.	98
4.18. Euklidischer Abstand der zentral und dezentral geschätzten Position des Ziels im Verlauf der Messung für die zweite Testbewegung im zweiten Knoten.	98

4.19. Euklidischer Abstand der zentral und dezentral geschätzten Position des Ziels im Verlauf der Messung für die zweite Testbewegung im dritten Knoten.	99
4.20. Euklidischer Abstand der zentral und dezentral geschätzten Position des Ziels im Verlauf der Messung für die zweite Testbewegung im vierten Knoten.	99
4.21. Euklidischer Abstand der zentral und dezentral geschätzten Position des Ziels im Verlauf der Messung für die erste Testbewegung im ersten Knoten. Von 1 s bis 2 s wird eine Strahlunterbrechung für Tracker 2 und 4 simuliert.	102
4.22. Euklidischer Abstand der zentral und dezentral geschätzten Position des Ziels im Verlauf der Messung für die erste Testbewegung im zweiten Knoten. Von 1 s bis 2 s wird eine Strahlunterbrechung für Tracker 2 und 4 simuliert.	102
4.23. Euklidischer Abstand der zentral und dezentral geschätzten Position des Ziels im Verlauf der Messung für die erste Testbewegung im dritten Knoten. Von 1 s bis 2 s wird eine Strahlunterbrechung für Tracker 2 und 4 simuliert.	103
4.24. Euklidischer Abstand der zentral und dezentral geschätzten Position des Ziels im Verlauf der Messung für die erste Testbewegung im vierten Knoten. Von 1 s bis 2 s wird eine Strahlunterbrechung für Tracker 2 und 4 simuliert.	103
4.25. Euklidischer Abstand der zentral und dezentral geschätzten Position des Ziels im Verlauf der Messung für die erste Testbewegung im ersten Knoten. Tracker 3 wird nach einer, Tracker 4 nach zwei Sekunden zum Filter hinzugefügt.	104

Abbildungsverzeichnis

4.26. Euklidischer Abstand der zentral und dezentral geschätzten Position des Ziels im Verlauf der Messung für die erste Testbewegung im zweiten Knoten. Tracker 3 wird nach einer, Tracker 4 nach zwei Sekunden zum Filter hinzugefügt.	104
4.27. Euklidischer Abstand der zentral und dezentral geschätzten Position des Ziels im Verlauf der Messung für die erste Testbewegung im dritten Knoten. Tracker 3 wird nach einer, Tracker 4 nach zwei Sekunden zum Filter hinzugefügt.	105
4.28. Euklidischer Abstand der zentral und dezentral geschätzten Position des Ziels im Verlauf der Messung für die erste Testbewegung im vierten Knoten. Tracker 3 wird nach einer, Tracker 4 nach zwei Sekunden zum Filter hinzugefügt.	105
4.29. System aus drei gekoppelten Pendeln.	107
4.30. Wirkung der Schwerkraft auf ein Pendel.	108
4.31. Wirkung einer Feder, die zwischen zwei Pendeln fixiert ist.	111
4.32. Prinzipielle Konfiguration des Mehrpendelsystems. . .	115
4.33. Das Multipendelsystem mit Kopplung über Federn ist im Hintergrund zu sehen. Von links nach rechts befinden sich die Pendel 1, 2 und 3. Das Lasertrackersystem mit vier Trackern ist im Vordergrund sichtbar. Von links nach rechts befinden sich die Tracker 2, 3, 1 und 4. . . .	116
4.34. Winkel des Pendels 1 der ersten Messung.	128
4.35. Winkel des Pendels 2 der ersten Messung.	128
4.36. Winkel des Pendels 3 der ersten Messung.	129
4.37. Winkel des Pendels 1 der zweiten Messung.	129
4.38. Winkel des Pendels 2 der zweiten Messung.	130
4.39. Winkel des Pendels 3 der zweiten Messung.	130
4.40. Differenz zwischen zentraler Schätzung und verteilter Schätzung im ersten Knoten für den ersten globalen Zustand.	133

4.41. Differenz zwischen zentraler Schätzung und verteilter Schätzung im ersten Knoten für den zweiten globalen Zustand.	134
4.42. Differenz zwischen zentraler Schätzung und verteilter Schätzung im ersten Knoten für den dritten globalen Zustand.	135
4.43. Differenz zwischen zentraler Schätzung und verteilter Schätzung im zweiten Knoten für den ersten globalen Zustand.	136
4.44. Differenz zwischen zentraler Schätzung und verteilter Schätzung im zweiten Knoten für den dritten globalen Zustand.	137
4.45. Differenz zwischen zentraler Schätzung und verteilter Schätzung im zweiten Knoten für den vierten globalen Zustand.	138
4.46. Differenz zwischen zentraler Schätzung und verteilter Schätzung im zweiten Knoten für den fünften globalen Zustand.	139
4.47. Differenz zwischen zentraler Schätzung und verteilter Schätzung im dritten Knoten für den dritten globalen Zustand.	140
4.48. Differenz zwischen zentraler Schätzung und verteilter Schätzung im dritten Knoten für den fünften globalen Zustand.	141
4.49. Differenz zwischen zentraler Schätzung und verteilter Schätzung im dritten Knoten für den sechsten globalen Zustand.	142
4.50. Abweichung des Pendelwinkels von Pendel 2 von einer bestimmten Pendelposition, die im Tracker 1 zu einer Änderung des Spiegelwinkels von σ führt.	143
4.51. Abweichung des Pendelwinkels von Pendel 1 von einer bestimmten Pendelposition, die im Tracker 2 zu einer Änderung des Spiegelwinkels von σ führt.	144

Abbildungsverzeichnis

4.52. Abweichung des Pendelwinkels von Pendel 2 von einer bestimmten Pendelposition, die im Tracker 3 zu einer Änderung des Spiegelwinkels von σ führt. 145

4.53. Abweichung des Pendelwinkels von Pendel 3 von einer bestimmten Pendelposition, die im Tracker 4 zu einer Änderung des Spiegelwinkels von $\pm\sigma$ führt. 146

4.54. Differenz zwischen zentraler Schätzung und verteilter Schätzung im ersten Knoten für den ersten globalen Zustand bei Ausfall eines Trackers. 148

4.55. Differenz zwischen zentraler Schätzung und verteilter Schätzung im ersten Knoten für den zweiten globalen Zustand bei Ausfall eines Trackers. 148

4.56. Differenz zwischen zentraler Schätzung und verteilter Schätzung im ersten Knoten für den dritten globalen Zustand bei Ausfall eines Trackers. 149

4.57. Differenz zwischen zentraler Schätzung und verteilter Schätzung im zweiten Knoten für den ersten globalen Zustand bei Ausfall eines Trackers. 149

4.58. Differenz zwischen zentraler Schätzung und verteilter Schätzung im zweiten Knoten für den dritten globalen Zustand bei Ausfall eines Trackers. 150

4.59. Differenz zwischen zentraler Schätzung und verteilter Schätzung im zweiten Knoten für den vierten globalen Zustand bei Ausfall eines Trackers. 150

4.60. Differenz zwischen zentraler Schätzung und verteilter Schätzung im zweiten Knoten für den fünften globalen Zustand bei Ausfall eines Trackers. 151

4.61. Differenz zwischen zentraler Schätzung und verteilter Schätzung im dritten Knoten für den dritten globalen Zustand bei Ausfall eines Trackers. 151

4.62. Differenz zwischen zentraler Schätzung und verteilter Schätzung im dritten Knoten für den fünften globalen Zustand bei Ausfall eines Trackers. 152

4.63. Differenz zwischen zentraler Schätzung und verteilter Schätzung im dritten Knoten für den sechsten globalen Zustand bei Ausfall eines Trackers.	152
A.1. Dezentrale (rot) und zentrale (blau) Schätzung der ersten Testbewegung im ersten Knoten sowie Position des Lasertrackers 1 (rotes x). Die Positionen der zur Fusion benutzten Tracker 2 bis 4 sind ebenfalls dargestellt (rotes x). Unten links sind die räumliche Anordnung der Tracker und die Trajektorien dargestellt. Die anderen Abbildungen zeigen jeweils Projektionen auf die drei Hauptebenen.	172
A.2. Dezentrale (rot) und zentrale (blau) Schätzung der ersten Testbewegung im zweiten Knoten sowie Position des Lasertrackers 2 (rotes x). Die Positionen der zur Fusion benutzten Tracker 1, 3 und 4 sind ebenfalls dargestellt (rotes x). Unten links sind die räumliche Anordnung der Tracker und die Trajektorien dargestellt. Die anderen Abbildungen zeigen jeweils Projektionen auf die drei Hauptebenen.	173
A.3. Dezentrale (rot) und zentrale (blau) Schätzung der ersten Testbewegung im dritten Knoten sowie Position des Lasertrackers 3 (rotes x). Die Positionen der zur Fusion benutzten Tracker 1, 2 und 4 sind ebenfalls dargestellt (rotes x). Unten links sind die räumliche Anordnung der Tracker und die Trajektorien dargestellt. Die anderen Abbildungen zeigen jeweils Projektionen auf die drei Hauptebenen.	174

Abbildungsverzeichnis

- A.4. Dezentrale (rot) und zentrale (blau) Schätzung der ersten Testbewegung im vierten Knoten sowie Position des Lasertrackers 4 (rotes x). Die Positionen der zur Fusion benutzten Tracker 1 bis 3 sind ebenfalls dargestellt (rotes x). Unten links sind die räumliche Anordnung der Tracker und die Trajektorien dargestellt. Die anderen Abbildungen zeigen jeweils Projektionen auf die drei Hauptebenen. 175

- A.5. Dezentrale (rot) und zentrale (blau) Schätzung der zweiten Testbewegung im ersten Knoten sowie Position des Lasertrackers 1 (rotes x). Die Positionen der zur Fusion benutzten Tracker 2 bis 4 sind ebenfalls dargestellt (rotes x). Unten links sind die räumliche Anordnung der Tracker und die Trajektorien dargestellt. Die anderen Abbildungen zeigen jeweils Projektionen auf die drei Hauptebenen. 176

- A.6. Dezentrale (rot) und zentrale (blau) Schätzung der zweiten Testbewegung im zweiten Knoten sowie Position des Lasertrackers 2 (rotes x). Die Positionen der zur Fusion benutzten Tracker 1, 3 und 4 sind ebenfalls dargestellt (rotes x). Unten links sind die räumliche Anordnung der Tracker und die Trajektorien dargestellt. Die anderen Abbildungen zeigen jeweils Projektionen auf die drei Hauptebenen. 177

- A.7. Dezentrale (rot) und zentrale (blau) Schätzung der zweiten Testbewegung im dritten Knoten sowie Position des Lasertrackers 3 (rotes x). Die Positionen der zur Fusion benutzten Tracker 1, 2 und 4 sind ebenfalls dargestellt (rotes x). Unten links sind die räumliche Anordnung der Tracker und die Trajektorien dargestellt. Die anderen Abbildungen zeigen jeweils Projektionen auf die drei Hauptebenen. 178

A.8. Dezentrale (rot) und zentrale (blau) Schätzung der zweiten Testbewegung im vierten Knoten sowie Position des Lasertrackers 4 (rotes x). Die Positionen der zur Fusion benutzten Tracker 1 bis 3 sind ebenfalls dargestellt (rotes x). Unten links sind die räumliche Anordnung der Tracker und die Trajektorien dargestellt. Die anderen Abbildungen zeigen jeweils Projektionen auf die drei Hauptebenen. 179

A.9. Dezentrale (rot) und zentrale (blau) Schätzung der ersten Testbewegung im ersten Knoten sowie Position des Lasertrackers 1 (rotes x). Die Positionen der zur Fusion benutzten Tracker 2 bis 4 sind ebenfalls dargestellt (rotes x). Unten links sind die räumliche Anordnung der Tracker und die Trajektorien dargestellt. Die anderen Abbildungen zeigen jeweils Projektionen auf die drei Hauptebenen. Es wird ein Ausfall der Tracker 2 und 4 für eine Sekunde simuliert. 180

A.10. Dezentrale (rot) und zentrale (blau) Schätzung der ersten Testbewegung im zweiten Knoten sowie Position des Lasertrackers 2 (rotes x). Die Positionen der zur Fusion benutzten Tracker 1, 3 und 4 sind ebenfalls dargestellt (rotes x). Unten links sind die räumliche Anordnung der Tracker und die Trajektorien dargestellt. Die anderen Abbildungen zeigen jeweils Projektionen auf die drei Hauptebenen. Es wird ein Ausfall der Tracker 2 und 4 für eine Sekunde simuliert. 181

A.11. Dezentrale (rot) und zentrale (blau) Schätzung der ersten Testbewegung im dritten Knoten sowie Position des Lasertrackers 3 (rotes x). Die Positionen der zur Fusion benutzten Tracker 1, 2 und 4 sind ebenfalls dargestellt (rotes x). Unten links sind die räumliche Anordnung der Tracker und die Trajektorien dargestellt. Die anderen Abbildungen zeigen jeweils Projektionen auf die drei Hauptebenen. Es wird ein Ausfall der Tracker 2 und 4 für eine Sekunde simuliert. 182

Abbildungsverzeichnis

A.12. Dezentrale (rot) und zentrale (blau) Schätzung der ersten Testbewegung im vierten Knoten sowie Position des Lasertrackers 4 (rotes x). Die Positionen der zur Fusion benutzten Tracker 1 bis 3 sind ebenfalls dargestellt (rotes x). Unten links sind die räumliche Anordnung der Tracker und die Trajektorien dargestellt. Die anderen Abbildungen zeigen jeweils Projektionen auf die drei Hauptebenen. Es wird ein Ausfall der Tracker 2 und 4 für eine Sekunde simuliert. 183

A.13. Dezentrale (rot) und zentrale (blau) Schätzung der ersten Testbewegung im ersten Knoten sowie Position des Lasertrackers 1 (rotes x). Die Positionen der zur Fusion benutzten Tracker 2 bis 4 sind ebenfalls dargestellt (rotes x). Unten links sind die räumliche Anordnung der Tracker und die Trajektorien dargestellt. Die anderen Abbildungen zeigen jeweils Projektionen auf die drei Hauptebenen. Tracker 3 wird nach einer, Tracker 4 nach zwei Sekunden zum Filter hinzugefügt. 184

A.14. Dezentrale (rot) und zentrale (blau) Schätzung der ersten Testbewegung im zweiten Knoten sowie Position des Lasertrackers 2 (rotes x). Die Positionen der zur Fusion benutzten Tracker 1, 3 und 4 sind ebenfalls dargestellt (rotes x). Unten links sind die räumliche Anordnung der Tracker und die Trajektorien dargestellt. Die anderen Abbildungen zeigen jeweils Projektionen auf die drei Hauptebenen. Tracker 3 wird nach einer, Tracker 4 nach zwei Sekunden zum Filter hinzugefügt. 185

A.15. Dezentrale (rot) und zentrale (blau) Schätzung der ersten Testbewegung im dritten Knoten sowie Position des Lasertrackers 3 (rotes x). Die Positionen der zur Fusion benutzten Tracker 1, 2 und 4 sind ebenfalls dargestellt (rotes x). Unten links sind die räumliche Anordnung der Tracker und die Trajektorien dargestellt. Die anderen Abbildungen zeigen jeweils Projektionen auf die drei Hauptebenen. Tracker 3 wird nach einer, Tracker 4 nach zwei Sekunden zum Filter hinzugefügt. 186

A.16. Dezentrale (rot) und zentrale (blau) Schätzung der ersten Testbewegung im vierten Knoten sowie Position des Lasertrackers 4 (rotes x). Die Positionen der zur Fusion benutzten Tracker 1 bis 3 sind ebenfalls dargestellt (rotes x). Unten links sind die räumliche Anordnung der Tracker und die Trajektorien dargestellt. Die anderen Abbildungen zeigen jeweils Projektionen auf die drei Hauptebenen. Tracker 3 wird nach einer, Tracker 4 nach zwei Sekunden zum Filter hinzugefügt. 187

B.1. Position des Reflektors 1 im Trackersystem (x-Koordinate) der ersten Messung. 190

B.2. Position des Reflektors 1 im Trackersystem (y-Koordinate) der ersten Messung. 190

B.3. Position des Reflektors 2 im Trackersystem (x-Koordinate) der ersten Messung. 191

B.4. Position des Reflektors 2 im Trackersystem (y-Koordinate) der ersten Messung. 191

B.5. Position des Reflektors 3 im Trackersystem (x-Koordinate) der ersten Messung. 192

B.6. Position des Reflektors 3 im Trackersystem (y-Koordinate) der ersten Messung. 192

B.7. Position des Reflektors 1 im Trackersystem (x-Koordinate) der zweiten Messung. 193

B.8. Position des Reflektors 1 im Trackersystem (y-Koordinate) der zweiten Messung. 193

Abbildungsverzeichnis

B.9. Position des Reflektors 2 im Trackersystem (x-Koordinate) der zweiten Messung.	194
B.10. Position des Reflektors 2 im Trackersystem y-Koordinate) der zweiten Messung.	194
B.11. Position des Reflektors 3 im Trackersystem (x-Koordinate) der zweiten Messung.	195
B.12. Position des Reflektors 3 im Trackersystem (y-Koordinate) der zweiten Messung.	195

Zusammenfassung

Die Arbeit handelt von der Kombination des Unscented Kalman-Filters mit den Methoden der Dezentralisierung, Verteilung und Fusion. Zu Anfang werden die allgemeinen Grundlagen der optimalen Zustandsschätzung für das lineare Filter hergeleitet. Aus diesen Betrachtungen, die auch mit Blick auf die praktische Umsetzbarkeit geführt werden, wird dann das Unscented Kalman-Filter beschrieben, welches gegenüber anderen nichtlinearen Erweiterungen deutliche Vorteile bietet. Die Gemeinsamkeiten beider Filterstrukturen werden herausgearbeitet. In der Folge werden zunächst die Dezentralisierung und Verteilung des linearen Filters präsentiert. Auf Grund der Ähnlichkeiten der beiden Filter können diese dann erfolgreich übertragen werden, so dass das Verteilte Und Dezentrale Unscented Kalman-Filter präsentiert werden kann.

Zum erfolgreichen Einsatz dieser Methoden ist eine Verteilung eines globalen, nichtlinearen Systemmodells notwendig. Das vorgestellte Verfahren beruht auf einer Partitionierung des Systems. Für direkte Zustände werden die Differentialgleichungen formuliert. Für weitere Zustände wird eine Modellierung ohne eigene Dynamik vorgenommen. Dies entspricht Parametern oder Störungen.

Der Frage der Beobachtbarkeit für nichtlineare Filter und deren dezentrale und verteilte Anwendung wird ebenfalls nachgegangen. Es wird gezeigt, dass die Benutzung der empirischen Gramschen Beobachtbarkeitsmatrix für den praktischen Einsatz besonders gut geeignet ist.

Die Anwendung dieser Konzepte erfolgt auf zwei Systemen mit unterschiedlichen Voraussetzungen. An einem Dreitanksystem wird das verteilte Filter gezeigt. Danach folgt der Einsatz in einem Multilasertrackersystem. Dieses wird sowohl dezentral als auch verteilt benutzt.

Zusammenfassung

Im dezentralen Fall wird eine zufällige Bewegung eines Ziels verfolgt. Im verteilten Fall wird ein gekoppeltes, mechanisches System beobachtet.

Der dezentrale Einsatz des Filters zeigt, dass in allen Filterknoten die Schätzungen miteinander übereinstimmen. Die durch die Dezentralisierung auftretenden Fehler sind dabei im Vergleich zu einer zentralen Schätzung vernachlässigbar. Bei der verteilten Schätzung wird durch die damit verbundene Ordnungsreduktion erreicht, dass in den einzelnen Knoten nie der gesamte globale Zustandsvektor geschätzt werden muss. Die direkten Zustände werden dabei mit einer hohen Genauigkeit geschätzt. Die zusätzlichen Zustände haben einen größeren Fehler, der jedoch im Vergleich mit dem jeweiligen Messrauschen immer noch nicht erheblich ist.

Neben diesen Ansätzen werden auch der Ausfall von Messeinrichtungen und die Umkonfiguration des Systems simuliert. In beiden Fällen wird die Filterstruktur nicht destabilisiert. Die Schätzungen sind nach wie vor von hoher Genauigkeit. Durch das Filternetzwerk entsteht somit ein gegenüber Störungen robuster Beobachter. Ebenso können zur Laufzeit Anpassungen der Topologie vorgenommen werden.

Die durch die Verteilung entstehende Ordnungsreduktion schlägt sich in einem verringerten Rechenbedarf pro Knoten nieder. In der Folge ist somit die benötigte Rechenleistung in einem lokalen Controller geringer, als sie in einem zentralen System ist. Durch die nicht vollvernetzte Struktur besteht außerdem nicht die Gefahr, dass sich ein Flaschenhals in der Kommunikation ergibt.

Die Filteralgorithmen werden erfolgreich in eine bestehende Toolbox für Matlab integriert. Diese Toolbox wurde im Rahmen dieser Arbeit produktiv eingesetzt.

Abstract

This thesis presents the combination of the Unscented Kalman Filter with decentralisation, distribution, and fusion techniques. First, the basics of optimal linear state estimation are presented. Besides a focus on practical implications, the non-linear Unscented Kalman Filter is derived. It serves many advantages over other non-linear extensions of the basic algorithm. The similarities of both are shown. Next, decentralisation and distribution techniques for the linear filter are presented and due to the common structure adapted to the unscented filter. Thus, the Distributed And Decentralised Unscented Kalman Filter is derived.

To successfully implement those filters the distribution of the global system dynamics is essential. The presented method consists of a partitioning of this global model. Direct states are described by their differential equations. Added states get no dynamics. They are modeled as parameters or disturbances.

The observability of non-linear filters and their application to decentralised and distributed cases is discussed. The empirical Gramian observability matrices pose the best possibilities for practical usage.

The application of these methodologies is shown for two systems with various conditions. A system of three coupled tanks is used for distributed application. A system of multiple laser trackers is used for both decentralised and distributed application. In case of decentralised operation a random motion of a target is tracked. A coupled mechanical system is estimated in the distributed case.

In its decentralised form the filter yields identical estimation in all nodes. The errors introduced by the filter are negligible when compared to a centralised estimation. The decentralised form imposes an order reduction of the local systems. Thus, the global state vector is

Abstract

never estimated completely. Direct states are estimated with high precision. Added states are estimated with a higher error level but still not significant.

Besides those applications both a complete loss of one sensor unit and a reconfiguration of the filter network are simulated. In both cases the filter is not destabilised. Estimations are again of high precision. The network inherently imposes a robustness against disturbances or service. Online adaptations of the network topology are possible, as well.

The reduction of system orders lead to a reduced need of computational time per node. Thus, the required computational power of a local controller is diminished when compared to a centralised setup. The risk of a bottleneck in communications is gone, since the network is not fully connected.

The algorithms are successfully integrated in an existing toolbox for Matlab. This was subsequently used context of this work.

Vorwort

Es gibt viele Menschen, bei denen ich mich für unterschiedlichste Arten von Unterstützung in den vergangenen Jahren bedanken muss.

An erster Stelle gilt dieser Dank Christoph Ament. Er hat seit Ende meines Studiums meinen beruflichen und wissenschaftlichen Werdegang begleitet und diese Arbeit betreut. Sie wäre ohne die vielen Gespräche und Diskussionen mit ihm so nicht entstanden, wie sie nun vorliegt. Besonders sein sehr großes Interesse an diesem Thema und seine Fähigkeit zu motivieren, waren in Phasen längerer Durststrecken enorm wichtig.

Für die vielfältige Unterstützung in den letzten Monaten bedanke ich mich bei Mike Eichhorn. Durch seinen Einsatz habe ich die Möglichkeit erhalten, sehr zielgerichtet und fokussiert die letzten Teile der Arbeit fertigzustellen. Insbesondere die Hilfe beim Aufbau der Pendel war sehr wichtig.

Mein Dank gilt außerdem Tran Trung Nguyen für die Möglichkeit, seine Lasertracker benutzen zu dürfen. Diese haben sich als zentrales Element des Anwendungsteils herausgestellt.

In der Anfangszeit in Freiburg waren Andreas Peter und Christian Wachten nicht nur für fachliche Diskussionen wichtige Gesprächspartner, sie haben auch die Arbeit in der Systemtheorie sehr angenehm gemacht.

Bei den ehemaligen Kollegen aus der Systemanalyse muß ich mich besonders bei Holger Bönicke und Carsten Stiller bedanken. Fachlich haben unzählige Gespräche nicht nur bei der Lösung eigener Probleme geholfen. Die vielfältigen Themen, die in den vergangenen Jahren bearbeitet und diskutiert wurden, haben meinen eigenen Blick immer wieder auf Konzepte und Ansätze aus anderen Gebieten gelenkt. Ich habe dabei sowohl viel gelernt, als auch immer wieder neue Ideen be-

Vorwort

kommen, um die eigene Arbeit fortzuführen. Neben diesen Aspekten waren sie aber auch sowohl während als auch außerhalb der Arbeitszeit zwei wichtige Menschen, ohne die ich vermutlich die Ilmenauer Zeit dieser Arbeit nicht durchgehalten hätte. Für die angenehme gemeinsame Zeit innerhalb und außerhalb der Uni vielen Dank!

Allen anderen gilt mein Dank für die hervorragende Zusammenarbeit und Unterstützung.

Einen großen Anteil an der Fertigstellung dieser Arbeit haben meine Eltern. Beide haben mich während der gesamten Zeit nach ihren Kräften unterstützt, mir den Rücken gestärkt und mich in meinen Entscheidungen immer bekräftigt.

Schließlich haben meine Freunde ebenfalls einen unbeschreiblichen Anteil. Viele, viele Stunden, in denen man gegenseitig von Erfolgen oder Misserfolgen erzählt, sich gemeinsam freut oder den anderen aufbaut, und noch viel mehr Stunden, in denen man sich von der Arbeit ablenkt und neue Kraft tankt, sind nicht hoch genug einzuschätzen. Ich werde nicht anfangen, hier Namen zu nennen, aber jeder von ihnen, der diese Zeilen liest, wird wissen, dass er gemeint ist. Danke!

1. Einführung und Stand der Technik

1.1. Einführung

Die Entwicklung im Bereich der Datenverarbeitungssysteme hat in den vergangenen Jahren enorme Fortschritte gemacht. Die rasant ansteigende Rechenleistung, die auf kleinstem Raum zur Verfügung gestellt werden kann, hat dazu geführt, dass in etlichen Bereichen Prozesse und Geräte von leistungsfähigen Controllern gestützt werden. Ein Ende dieser Entwicklung ist zur Zeit nicht abzusehen. Diese Verfügbarkeit von Rechenleistung hat zwei wesentliche Folgen. Zum einen geht bei einer gegebenen Aufgabe der Kostenfaktor für nötige Berechnungen immer stärker zurück. Zum anderen werden immer komplexere Algorithmen für immer anspruchsvollere Aufgaben entwickelt. Als eines von vielen Beispielen sei hier nur auf den Mobilfunkmarkt verwiesen.

Die gleichen Überlegungen gelten auch im Bereich der Automatisierungs- und Messtechnikanwendungen. Unter dem Schlagwort *intelligente Sensoren (smart sensors)* wird schon seit einiger Zeit das Konzept beschrieben, dass direkt am Sensor eine komplexe Datenverarbeitung in einem Mikrocontroller stattfindet. Sind hingegen im Hintergrund der eigentlichen Funktion eines Gerätes hochintegrierte Systeme tätig und ist deren Bedienung nicht Aufgabe des Nutzer ist, so spricht man von *Eingebetteten Systemen (embedded systems)*. Dies steht in Abgrenzung zum herkömmlichen Vorgehen, alle Sensorsignale eines Systems zu einem zentralen Prozessor zu übermitteln und dort zu verarbeiten. Dieses neue Konzept kann aber erst auf Grund der oben beschriebenen

1. Einführung und Stand der Technik

nen Entwicklungen sinnvoll eingesetzt werden.

Eine weitere technische Entwicklung, die in allen Bereichen Einzug gefunden hat, ist die Vernetzung. Die vielfältigen, auf unterschiedliche Szenarien ausgelegten und optimierten, kabelgebundenen und kabellosen Übertragungsverfahren machen zusammen mit der Leistungsfähigkeit aktueller Controller bestimmte Anwendungen plausibel oder gar möglich. Exemplarisch dafür sei die Automatisierung von Privatwohnungen und -häusern sowie die zunehmende Auslagerung von Datenverarbeitungsaufgaben in Rechnercluster über das Internet genannt.

Betrachtet man nun diese neuartigen Sensor- und Systemkonzepte, so stellen sich schnell unterschiedliche Fragen, oder es ergeben sich Konstellationen, in denen neue Probleme offensichtlich werden. Erlangen Teile eines Systems durch lokale Controller, intelligente Sensoren oder eingebettete Systemfunktionen selber einen solchen Umfang, dass sie ein autonomes System sind, so müssen sie auch über Zustandsinformationen verfügen. Diese Informationen sind nötig, um Diagnoseaufgaben zu erfüllen. Dies kann sowohl die Diagnose der Umgebung aber auch des eigenen Systems sein. Höhere Funktionen beinhalten eine Entscheidungsfindung auf Basis der Diagnose. Komplexe Szenarien machen auch eine Regelung möglich. Da diese lokalen Systeme nach wie vor in einem Verbund mit anderen Teilen sind, ist es nicht ausreichend, diese Zustandsinformationen nur aus lokalen Informationen zu berechnen. Sie müssen immer mit Blick auf das globale System errechnet werden.

Die Berechnung von Zustandsinformationen ist in der Regel modellbasiert. Dieses Konzept ermöglicht aber neben der Bestimmung des aktuellen Zustands immer auch eine Prädiktion des Verlaufs in der nahen Zukunft. Dies ist zum Beispiel dann von Vorteil, wenn eine Störung der Kommunikation oder der Sensoren einen normalen Betrieb nicht möglich macht, die oben angesprochene Diagnose oder Entscheidungsfindung aber weiter aufrechterhalten werden soll. Hier kann bei modellbasierter Prädiktion zumindest mit Annahmen über das System eine gewisse Zeit überbrückt werden.

Sind Systeme durch ein Kommunikationsnetzwerk verbunden und

bestehen aus sehr vielen Teilen, so kann sich eine zentrale Kommunikation zu einem Flaschenhals entwickeln. Der benötigte Datendurchsatz wird häufig zum beschränkenden Faktor. Um dies zum umgehen, können dezentrale Kommunikationsstrukturen helfen, die mit der Größe des Systems skalieren. Ebenso sind modellbasierte Ansätze möglich, die nur dann Daten übertragen, wenn sie auch neue Informationen enthalten.

Schließlich kann an solche Netzwerke auch die Forderung gestellt werden, diese zur Laufzeit umkonfigurieren zu können. Ebenso müssen sie robust gegenüber Störungen oder Ausfällen sein.

1.2. Stand der Technik

Unter dem Begriff *Networked Control Systems (NCS)* werden seit mehreren Jahren Systeme untersucht, bei denen ein geregeltes System auch eine Netzwerkkomponente enthält. Dies beinhaltet Fälle, in denen der eigentliche Regler nicht direkt am System befindlich ist. Es werden aber auch Fälle betrachtet, in denen ein räumlich verteiltes System geregelt werden soll. Diese Variante ist dem Konzept von intelligenten Sensoren und vernetzten Systemen sehr verwandt. Räumlich verteilte Systeme werden zum Beispiel in (Bamieh u. a., 2002; D'Andrea und Dullerud, 2003) betrachtet. Hier stehen vor allem Entwürfe von Reglern im Vordergrund. Das Konzept, einzelne Sensoren direkt mit lokal vorhandenen Schätzern auszustatten, wird ebenfalls in vielen Veröffentlichungen dargestellt (Montestruque und Antsaklis, 2002a,b, 2003; Naghshtabrizi und Hespanha, 2005; Xu und Hespanha, 2005). Zum Teil werden auch Strukturen vorgeschlagen, in denen mehrere Kalman-Filter zum Einsatz kommen. In (Matveev und Savkin, 2009) wird schließlich ebenfalls eine Schätzung des Systemzustandes in entfernten Systemen diskutiert.

Im Kontext dieser Entwicklungen steht die folgende Arbeit zur Entwicklung und dem Einsatz von nichtlinearen, verteilten Zustandsschätzalgorithmen. Da fast alle modernen Reglerkonzepte auf Zustandsrückführungen basieren, ist die Benutzung eines Zustands-

1. Einführung und Stand der Technik

schätzers notwendig. Solche Schätzer sind auch in den meisten Veröffentlichungen zum Thema NCS vorhanden.

Das verwandte Unscented Kalman-Filter ist ein rekursiver Schätzalgorithmus, der auf Grund seiner Komplexität erst in den vergangenen Jahren sinnvoll eingesetzt werden konnte. Die Verteilungs- und Fusionschritte, die zum Aufbau eines Schätzernetzwerks benötigt werden, ergeben ebenso erst dann Sinn, wenn der Einsatz mehrerer Controller in einem System auf Grund der zu erwartenden geringen Kosten in der Summe Vorteile bringt und angemessene Kommunikationsmöglichkeiten zwischen den Controllern zur Verfügung stehen.

1960 wurde mit dem Kalman-Filter ein rekursiver Zustandsschätzalgorithmus entwickelt (Kalman, 1960). Ziel einer solchen Berechnungsvorschrift ist auf Basis eines dynamischen Systemmodells und bei der Existenz von Messungen des Systems, die inneren Zustände möglichst genau zu bestimmen. Im Falle linearer Systeme kann nach jeder Messung eine Minimierung eines quadratischen Fehlermaßes im Sinne der Optimalität durch Carl Friedrich Gauss vorgenommen werden. Dieses Vorgehen ist jedoch für den praktischen Einsatz zur Laufzeit ungeeignet, da nach jedem Messschritt sämtliche Größen neu bestimmt werden müssen und außerdem die Dimension der benötigten Matrizen stetig zunimmt. Durch die Formulierung als *rekursiven* Algorithmus hat Kalman somit eine Möglichkeit geschaffen, mit den damals vorhandenen Rechenmaschinen eine optimale Zustandsschätzung linearer Systeme zur Laufzeit zu ermöglichen. Die Beschränkung auf lineare Systeme wurde in der Folge durch das Erweiterte Kalman-Filter aufgehoben, indem der Algorithmus durch eine integrierte Linearisierung um den aktuellen Arbeitspunkt erweitert wurde (Bellantoni und Dodge, 1967). Diese beiden Verfahren haben von 1960 bis zur Mitte der 1990er Jahre in unterschiedlichen Varianten in etlichen Anwendungen Einzug gefunden und zahlreiche Systeme erst möglich gemacht.

Stochastische Schätzer werden aus unterschiedlichen Gründen eingesetzt. Falls man von vorhandenen, bekannten Störprozessen im System und vor allem in den Messeinrichtungen ausgeht, so werden die Schätzer zur Steigerung der Genauigkeit von Messeinrichtungen ein-

gesetzt. Aus dieser Anwendung heraus hat sich die Bezeichnung Kalman-Filter ergeben, da es sich um ein Signalfilter handelt. Der korrekte Einsatz von Kalman-Filtern zur Rauschunterdrückung führt dabei zu deutlich besseren Ergebnissen, als es zum Beispiel eine reine Mittelwertbildung erreichen würde. Darüber hinaus können diese Filter aber auch eingesetzt werden, um nicht direkt messbare Größen dynamisch zu rekonstruieren, statische, unbekannte Modellparameter zu bestimmen oder durch einen Parallelbetrieb Fehlerzustände des Systems zu erkennen.

Die Beschränkung auf lineare Systeme oder eine Linearisierung hat Mitte der 1990er Jahre zur Entwicklung der sogenannten *Unscented Transformation* geführt (Julier und Uhlmann, 1995, 1996; Julier u. a., 1997, 2000; Julier und Uhlmann, 2004). Statt ein System um einen Arbeitspunkt zu linearisieren, werden mehrere Punkte des Zustandsraumes mit Hilfe der nichtlinearen Systemgleichungen transformiert und die so erhaltenen transformierten Punkte dann wieder zu den benötigten Größen – Mittelwert und Kovarianz – zurückberechnet. Dieses Verfahren bietet etliche Vorteile gegenüber der Linearisierung, ist aber mit einem erhöhten Rechenaufwand verbunden.

Ebenfalls zu dieser Zeit wurden Algorithmen entwickelt, die den klassischen, zentralen Filteralgorithmus dezentralisieren (Rao u. a., 1993; Rao und Durrant-Whyte, 1991). Damit ist gemeint, dass jede einzelne Messeinrichtung oder ein Verbund aus einzelnen Messeinrichtungen mit einem eigenen Filter ausgestattet werden. Statt zentral alle Messungen im Filter zu verarbeiten, erfolgt die Berechnung dezentral, wobei ein Datenaustausch zwischen diesen Einheiten stattfindet. Diese Dezentralisierung bietet den Vorteil, dass alle relevanten Schätzergebnisse lokal am Ort der Messung vorliegen und dort weiterverarbeitet werden können. Die nächste Entwicklung war eine Verteilung des Systemmodells auf die einzelnen Filter (Mutambara und Durrant-Whyte, 1994; Mutambara, 1998). Dadurch wird eine Reduktion der einzelnen Filtermodelle erreicht und die Vernetzung der einzelnen Filter reduziert. Das Ergebnis dieser Verteilungs- und Fusionsalgorithmen ist ein nicht vollvernetztes System einzelner Kalman-Filter. Dies ermöglicht neben der Berechnung direkt am

1. Einführung und Stand der Technik

Messort auch eine Reduktion der dort benötigten Rechenkapazitäten.

1.3. Gliederung der Arbeit

Im Rahmen dieser Arbeit werden diese beiden Techniken – die Unscented Transformation beziehungsweise das Unscented Kalman-Filter und die Verteilung und Dezentralisierung – kombiniert, um die Vorteile beider Entwicklungen zu nutzen. Neben der Herleitung werden auch unterschiedliche Anwendungsfälle gezeigt.

In Kapitel 2 (Seite 7) werden die Grundlagen der Zustandsschätzung eingeführt. Neben Zustandsraumdarstellungen und Begriffsdefinitionen sind dies vor allem Herleitungen zum zentralen Kalman-Filter sowie dem Unscented Kalman-Filter. Kapitel 3 (Seite 41) beschreibt den Übergang von zentralen zu dezentralen Filtern. Die Verteilung der linearen und nichtlinearen Zustandsraummodelle, um ein nicht vollvernetztes und in seiner Dimension reduziertes Filternetzwerk zu erhalten, werden ebenso erklärt. Das folgende Kapitel 4 (Seite 69) zeigt dann die Anwendung der vorgeschlagenen nichtlinearen, verteilten Filterstruktur an drei unterschiedlichen Systemen und diskutiert unterschiedliche Szenarien. Zunächst erfolgt eine Füllstandsschätzung in einem Mehrtanksystem. Dann folgen unterschiedliche Anwendungen eines Multilasertrackers: Die Positionsschätzung eines Ziels mit unbekannter Dynamik und die Schätzung eines gekoppelten, mechanischen Systems, für das ein dynamisches Modell erstellt werden kann. Die für die Simulationen benutzte Software-Toolbox wird kurz in Kapitel 5 (Seite 157) erklärt. Eine Zusammenfassung der Ergebnisse und ein Ausblick folgen schließlich in Kapitel 6 (Seite 165).

2. Grundlagen

Dieses Kapitel klärt zunächst grundlegende Systemdarstellungen und Begriffe. Danach werden die Zustandsschätzung mit Hilfe von linearen und nichtlinearen Kalman-Filtern eingeführt und deren Unterschiede erklärt. Die Ausführungen zu den Filtern und deren Herleitungen basieren dabei zum größten Teil auf dem Buch „Optimal State Estimation“ von Dan Simon (Simon, 2006).

2.1. Systemdarstellung im Zustandsraum

Es gibt viele Möglichkeiten, dynamische Systeme zu beschreiben. Für Systeme mit nur einem Ein- und Ausgang wird meistens eine Transformation in den Bildbereich vorgenommen, so dass ein System durch seine Übertragungsfunktion beschrieben wird. Der Vorteil dieser Darstellungsart ist eine leichte Verarbeitung von Systemen höherer Ordnung sowie eine Analyse des dynamischen Verhaltens durch graphische Methoden. Die Ursprünge dieser Verfahren stammen aus den Zeiten, als Berechnungen noch hauptsächlich von Hand ohne Rechnerunterstützung durchgeführt wurden. Alle Methoden, die auf Beschreibungen mit Übertragungsfunktionen beruhen, haben jedoch nach wie vor Berechtigung. Sobald die Systeme jedoch mehrere Eingänge oder Ausgänge besitzen, sind Beschreibungen mit Übertragungsfunktionen sehr unübersichtlich, da für jede Eingangs-/Ausgangskombination je eine Übertragungsfunktion aufgestellt werden muss.

Mit der Verbreitung von leistungsfähigen Datenverarbeitungssystemen ist für Mehrgrößensysteme die sogenannte Zustandsraumdarstellung üblich geworden. Diese ermöglicht eine kompakte Beschrei-

2. Grundlagen

bung sowie eine einfache Analyse der Systemeigenschaften, welche leicht mit Hilfe von Rechnern umgesetzt werden kann.

Basis dieser Darstellung ist die Überführung der Systembeschreibung in einen Satz von Differentialgleichungen erster Ordnung. Dies kann aus einem Blockschaltbild heraus geschehen, aus einer Beschreibung durch Differentialgleichungen höherer Ordnung oder durch eine Darstellung im Bildbereich. Zentrales Element ist der Zustandsvektor \mathbf{x} . Der Zustandsvektor muss so gewählt werden, dass mit ihm zu jedem Zeitpunkt der komplette Zustand des Systems vollständig beschrieben werden kann. Die einzelnen Komponenten sind die Zustände. Durch die Zustände wird ein Vektorraum, der Zustandsraum, aufgespannt. Jeder mögliche Zustand des Systems ist durch genau einen Punkt in diesem Raum definiert. Das zeitliche Verhalten eines Systems ist durch eine Trajektorie $\mathbf{x}(t)$ definiert, welche der Zustandsvektor beschreibt. Ein Nachteil der Zustandsraumdarstellung ist das Fehlen einer Beschreibungsmöglichkeit für Systeme mit Totzeiten.

2.1.1. Lineare Systeme

Für lineare, zeitkontinuierliche Systeme ist eine Beschreibung mit Vektoren und Matrizen möglich. Eine Beschreibung erfolgt dann durch die Systemgleichung

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \quad (2.1.1)$$

und die Ausgangsgleichung

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t). \quad (2.1.2)$$

Hierbei ist $\mathbf{A}(t)$ die Systemmatrix, welche die innere Dynamik des Systems beschreibt. Über die Eingangsmatrix $\mathbf{B}(t)$ werden die Komponenten des Eingangsvektors $\mathbf{u}(t)$ eingekoppelt. Die einzelnen Ausgänge $\mathbf{y}(t)$ werden durch die Ausgangsmatrix $\mathbf{C}(t)$ aus den Zuständen $\mathbf{x}(t)$ gebildet. Falls es einen direkten, unverzögerten Einfluss eines Eingangs auf einen Ausgang gibt, so wird dies durch die Durchgriffsmatrix $\mathbf{D}(t)$ repräsentiert. In vielen realen Systemen ist dies nicht der

2.1. Systemdarstellung im Zustandsraum

Fall und der Term $\mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t)$ kann gestrichen werden. Die Abhängigkeiten der Matrizen von der Zeit t deutet an, dass die Systembeschreibung zeitvariant sein kann. Eine solche Beschreibung ist für Systeme im Bildbereich nicht möglich. Sollten die Systeme zeitinvariant sein, sind die Matrizen entsprechend nur mit Konstanten besetzt. Die Ordnung des Systems entspricht der Dimension des Zustandsvektors n . Die Dimension der Eingänge wird mit m angegeben; die der Ausgänge mit p .

2.1.2. Nichtlineare Systeme

Bei nichtlinearen, zeitkontinuierlichen Systemen ist eine Beschreibung auf Basis von Matrizen naturgemäß nicht mehr möglich, da hier nicht nur Linearkombinationen der Zustände für die Differenzgleichungen realisiert werden. Die Systemgleichung und die Ausgangsgleichung werden statt dessen mit vektorwertigen Funktionen beschrieben:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad (2.1.3)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t). \quad (2.1.4)$$

Hier werden die einzelnen Differentialgleichungen, die erneut erster Ordnung sind, zu einer Vektorfunktion \mathbf{f} zusammengefasst. Das Gleiche geschieht mit den Ausgangsfunktionen, die ebenfalls nichtlineare Elemente enthalten dürfen und in der vektorwertigen Ausgangsfunktion \mathbf{h} beschrieben werden.

2.1.3. Zeitdiskrete Darstellung

In der Folge werden unterschiedliche Filteralgorithmen gezeigt. Diese werden üblicherweise bei abgetasteten Systemen verwendet und in Mikrocontrollern implementiert. Aus diesem Grund müssen auch die dynamischen Systeme zeitdiskret formuliert werden. Es wird daher

2. Grundlagen

ein zeitdiskretes, lineares System

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B}_{k-1}\mathbf{u}_{k-1}, \quad (2.1.5)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}_k\mathbf{x}_k \quad (2.1.6)$$

betrachtet. Dieses ähnelt zunächst dem System (2.1.1) und (2.1.2). Im Gegensatz zur bisherigen Notation wird statt der Zeitvariable t der Zeitindex k verwendet, der ein ganzzahliges Vielfaches einer konstanten Abtastzeit ist. Gleichzeitig wird er zur Vereinfachung tiefgestellt notiert, sofern aus dem Kontext die Bedeutung erkennbar ist. Zur weiteren Vereinfachung wird auf eine Durchgriffsmatrix verzichtet. Die sonstigen Matrizen und Vektoren entsprechen in der Bezeichnung und Bedeutung ihrem jeweiligen Pendant der zeitkontinuierlichen Beschreibung. Für nichtlineare Systeme gilt entsprechend:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, t_{k-1}), \quad (2.1.7)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k, t_k). \quad (2.1.8)$$

2.1.4. Stochastische Störungen

Die bisherigen Systembeschreibungen sind alle deterministisch. Das bedeutet, dass bei Kenntnis der Eingänge die Ausgänge ebenfalls bekannt sind. Diese Annahme ist nur begrenzt auf reale Systeme übertragbar. Um eine realistische Systemdarstellung zu erhalten, werden deshalb stochastische Störungen in den System- und Ausgangsgleichungen angenommen. Zu diesem Zweck werden die Gleichungen durch \mathbf{w} und \mathbf{v} erweitert:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B}_{k-1}\mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1}, \quad (2.1.9)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}_k\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k. \quad (2.1.10)$$

Diese beiden Vektoren sind stochastische Variablen, welche auch Zufallsvariablen genannt werden. Durch die Existenz dieser Terme in den Gleichungen werden auch \mathbf{x} und \mathbf{y} zu stochastischen Variablen. Stochastischen Variablen werden im Gegensatz zu herkömmlichen

2.2. Definitionen

Variablen nicht exakte Werte zugeordnet, sondern sie werden stattdessen durch Verteilungs- oder Dichtefunktionen beschrieben. Diese stellen einen Zusammenhang zwischen dem Wert der Variablen und der Wahrscheinlichkeit für diese Zuordnung dar. Man spricht auch von einer Realisierung der Funktion.

Besitzt die Dichtefunktion nur ein Maximum, so wird sie *monomodal* genannt. Bei zwei oder mehreren Maxima ist sie entsprechend *bimodal* oder *multimodal*.

Ist A eine stochastische Variable und ist p_A die zugehörige Dichtefunktion, so kann man den Mittelwert oder Erwartungswert $\mu = E\{A\}$ nach

$$E\{A\} = \int_{-\infty}^{\infty} a p_A(a) da \quad (2.1.11)$$

berechnen. Dies wird auch das erste Moment genannt. Höhere Momente berechnen sich analog nach

$$m_k = \int_{-\infty}^{\infty} a^k p_A(a) da. \quad (2.1.12)$$

Zur Charakterisierung von stochastischen Variablen werden neben den Momenten auch die Zentralen Momente k -ter Ordnung μ_k herangezogen, die folgendermaßen definiert sind:

$$\mu_k = E\{(A - \mu)^k\}. \quad (2.1.13)$$

Das zweite Zentrale Moment ist die Varianz, das dritte nach Normierung ist die Schiefe.

Im Zusammenhang mit der Systembeschreibung werden \mathbf{w} und \mathbf{v} als Zustandsrauschen und Messrauschen bezeichnet, weil die Zufallsprozesse in der Regel ein Rauschen sind.

2.2. Definitionen

Bei der Zustandsschätzung müssen verschiedene Begriffe definiert werden, da sie häufig benutzt werden.

2. Grundlagen

2.2.1. Zustände

Zustände sind alle Komponenten des Zustandsvektors. Dieser setzt sich so zusammen, wie es in Abschnitt 2.1 beschrieben wurde. Jeder Zustand besitzt eine eigene Dynamik, die durch eine Differentialgleichung beschrieben wird. Diese kann je nach System linear oder nicht-linear sein. In der Differentialgleichung können andere Zustände und Parameter vorkommen.

2.2.2. Parameter

Parameter sollen von den Zuständen unterschieden werden: Sie besitzen keine eigene Dynamik, das heißt, sie werden im Modell als zeitlich konstant angenommen. Es ist aber auch möglich, dass sie zeitvariant sind oder zumindest nicht konstant oder unbekannt. In diesem Fall können die Parameter ebenfalls mit einem Kalman-Filter geschätzt werden. Dazu wird der Zustandsvektor um die Parameter erweitert und die entsprechende Differentialgleichung identisch Null angesetzt. Wenngleich der Parameter keine eigene Dynamik besitzt, wird durch die Korrektur des Filteralgorithmus der Initialwert im Verlauf der Schätzung angepasst.

Letztlich ist die Unterscheidung zwischen Zustand und Parameter für den Algorithmus des Kalman-Filters unerheblich; sie ist aber dennoch sinnvoll, da eine reine Zustandsschätzung eine andere Aufgabe ist als eine Parameterschätzung.

2.2.3. Störungen

Störungen können an zwei Stellen im System auftreten. Zum einen gibt es die *Ausgangsstörung*. Diese bezieht sich auf alle Störungen, die durch die Messeinrichtung in das Ausgangssignal eingebracht werden. In der Regel kann die Ausgangsstörung durch Kenntnis der Sensoren oder durch eine exakte Messung sehr gut bestimmt werden.

Zum anderen gibt es die *Zustandsstörung*. Diese ist in der Praxis deutlich schwieriger zu beschreiben, als sie in der Modellierung angenommen wird. Will man sie als echte Störung beschreiben, so muss

man von Prozessen ausgehen, die direkt auf die Strecke einwirken oder gegebenenfalls auch auf die Eingänge der Strecke. Oft sind damit aber auch Ungenauigkeiten der Modellierung auf Grund von Vereinfachungen, nicht exakt bestimmbaren Parametern, Drift, thermischem Rauschen und ähnlichen Fehlern gemeint. In Abschnitt 2.3.1 wird die Herleitung für das Kalman-Filter beschrieben. Anschließend folgt eine anschauliche Interpretation. Der Unterschied zwischen der theoretischen Herleitung und der praktischen Bestimmbarkeit des Zustandsrauschens ist häufig der Grund für die unterschiedlichen Betrachtungen der Arbeitsweise des Kalman-Filters und die Einstellung der Filterparameter.

2.2.4. Zustandsschätzung

Der Begriff Zustandsschätzung beschreibt allgemein einen Algorithmus, dessen Ziel es ist, den Zustandsvektor eines Systems zu einem bestimmten Zeitpunkt zu bestimmen. Eine direkte Berechnung nur auf Grund des Messvektors ist oft nicht möglich oder nur mit erheblichem Aufwand und stark fehlerbehaftet erreichbar. Da es in einer Anwendung meistens erwünscht ist, zur Laufzeit eine Schätzung durchzuführen, sind Algorithmen bevorzugt, die nicht auf das Vorhandensein einer kompletten Messreihe angewiesen sind. Von praktischer Bedeutung sind dabei vor allem rekursive Algorithmen, da sie nicht sämtliche benötigten Daten für jeden Zeitschritt speichern müssen. Aus diesem Grund werden hier nur rekursive Algorithmen betrachtet. Auf Grund ihrer Eigenschaften werden sie auch Filter im Sinne einer Signalverarbeitung genannt. In dieser Form werden sie benutzt, um gemessene Signale vom Messrauschen zu befreien.

2.3. Kalman-Filter

Das Kalman-Filter (Kalman Filter, KF) ist ein linearer Zustandsschätzer und bildet die Grundlage für etliche Anwendungen. Der Name geht auf die Veröffentlichung „A New Approach to Linear Filtering

2. Grundlagen

and Prediction Problems“ von Rudolf Emil Kalman aus dem Jahre 1960 zurück (Kalman, 1960). In dieser wurden die rekursiven Gleichungen hergeleitet, die eine optimale Zustandsschätzung im Sinne einer Minimierung des Fehlerquadrates ermöglichen, falls sowohl der Zustand als auch die Messung Größen sind, die von einem weißen Rauschen überlagert sind. Im Folgenden wird sowohl die exakte mathematische als auch anschließend eine anschauliche, für die Praxis besser geeignete Herleitung der Rekursionsformeln gegeben.

2.3.1. Herleitung

In diesem Abschnitt wird zunächst eine formale, mathematische Herleitung des linearen Kalman-Filters präsentiert. Diese beruht auf der Beschreibung von stochastischen Prozessen und der Berechnung von Erwartungswerten.

Es wird das lineare System aus Abschnitt 2.1.4 betrachtet:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B}_{k-1}\mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1} \quad (2.3.1)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}_k\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \quad (2.3.2)$$

Die beiden Störungen \mathbf{w} und \mathbf{v} sind das Zustandsrauschen und das Messrauschen. In Abschnitt 2.1.4 wurden noch keine Eigenschaften für diese beiden stochastischen Variablen angenommen. Dies wird nun eingeschränkt, indem von beiden Rauschprozessen angenommen wird, dass sie jeweils folgende Eigenschaften erfüllen:

- Das Rauschen ist weiß; das bedeutet, dass das Leistungsdichtespektrum konstant über alle Frequenzen beziehungsweise dass die Autokorrelation dem Dirac-Impuls entspricht.
- Das Rauschen ist mittelwertfrei.
- Die Rauschprozesse sind untereinander unkorreliert.
- Die Signalamplituden sind gaußverteilt.
- Die zugehörige Kovarianzmatrix ist bekannt.

Das Zustandsrauschen \mathbf{w} wird durch die Kovarianzmatrix \mathbf{Q} charakterisiert. Das Messrauschen \mathbf{v} wird durch die Kovarianzmatrix \mathbf{R} charakterisiert. Es gilt

$$\mathbf{Q}_k \delta_{ij} = E \left\{ \mathbf{w}_k \mathbf{w}_j^T \right\} \quad (2.3.3)$$

und

$$\mathbf{R}_k \delta_{ij} = E \left\{ \mathbf{v}_k \mathbf{v}_j^T \right\} \quad (2.3.4)$$

wobei δ_{ij} das Kronecker-Delta ($\delta_{ij} = 1$ für $i = j$ und $\delta_{ij} = 0$ für $i \neq j$) ist. Durch die Existenz dieser beiden Rauschprozesse werden sowohl der Zustandsvektor als auch der Ausgangsvektor selbst zu stochastischen Variablen. Auf Grund der Eigenschaften von linearen Transformationen besitzen beide Größen die Eigenschaften, ebenfalls gaußverteilt und weiß zu sein.

Das Ziel ist es, den Zustand \mathbf{x} zum Zeitpunkt k zu schätzen. Grundlage dafür ist die Kenntnis der Systemdynamik und aller Messungen bis zum Zeitpunkt k . Wenn alle Messungen für die Schätzung vorhanden sind, so wird der Schätzwert *a posteriori* genannt und mit $\hat{\mathbf{x}}^+$ bezeichnet. Es gilt

$$\hat{\mathbf{x}}_k^+ = E \left\{ \mathbf{x}_k | \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_k \right\}. \quad (2.3.5)$$

Ist die letzte Messung noch nicht verfügbar oder wurde sie noch nicht verarbeitet, so wird der Schätzwert *a priori* genannt und mit $\hat{\mathbf{x}}^-$ bezeichnet. Analog gilt hier

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = E \left\{ \mathbf{x}_k | \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_{k-1} \right\}. \quad (2.3.6)$$

Dieser Notation entsprechend wird der Initialwert für den Zustand mit $\hat{\mathbf{x}}_0^+$ bezeichnet. Ebenso wird der Initialwert als Erwartungswert des echten Anfangszustands definiert:

$$\hat{\mathbf{x}}_0^+ = E \left\{ \mathbf{x}_0 \right\}. \quad (2.3.7)$$

Neben dem Schätzwert, der als Erwartungswert des Zustandes und somit Mittelwert der Verteilung definiert wurde, ist als zweite Größe die Kovarianz des Schätzfehlers wichtig, um die Beschreibung der

2. Grundlagen

Schätzung als Zufallszahl zu ermöglichen. Wie auch die a priori und a posteriori Schätzwerte können somit zwei Kovarianzmatrizen definiert werden:

$$\mathbf{P}_k^- = E \left\{ (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-) (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-)^T \right\}, \quad (2.3.8)$$

$$\mathbf{P}_k^+ = E \left\{ (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^+) (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^+)^T \right\}. \quad (2.3.9)$$

2.3.1.1. Prädiktion

Mit diesen Definitionen kann der Algorithmus für die rekursive Zustandsschätzung hergeleitet werden. Geht man vom Initialzustand $\hat{\mathbf{x}}_0^+$ aus, so muss zunächst $\hat{\mathbf{x}}_1^-$ berechnet werden. Für lineare Systeme gilt, dass der Mittelwert $\bar{\mathbf{x}}$ wie folgt propagiert wird, wenn das Rauschen mittelwertfrei und gaußverteilt ist:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}_k &= E \{ \mathbf{x}_k \} \\ &= E \{ \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B}_{k-1} \mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1} \} \\ &= \mathbf{A}_{k-1} \bar{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{B}_{k-1} \mathbf{u}_{k-1}. \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

Da gelten soll, dass $\hat{\mathbf{x}}_1^- = E \{ \mathbf{x}_1 \}$ und da $\hat{\mathbf{x}}_0^+ = E \{ \mathbf{x}_0 \}$ gilt, kann man folgende Gleichung direkt ableiten:

$$\hat{\mathbf{x}}_1^- = \mathbf{A}_0 \hat{\mathbf{x}}_0^+ + \mathbf{B}_0 \mathbf{u}_0. \quad (2.3.11)$$

Diese Gleichung ist für allgemeine Zeiten gültig und gibt an, wie sich aus einem bekannten a posteriori Schätzwert mit Kenntnis der Systemdynamik der korrekte a priori Schätzwert für den nächsten Zeitschritt berechnen lässt:

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \mathbf{A}_{k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+ + \mathbf{B}_{k-1} \mathbf{u}_{k-1}. \quad (2.3.12)$$

Als nächstes muss die Berechnung einer Rekursionsformel für die Kovarianzmatrix hergeleitet werden. Dazu wird zunächst Folgendes

berechnet:

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}_k) (\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}_k)^\top &= (\mathbf{A}_{k-1} \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B}_{k-1} \mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1} - \bar{\mathbf{x}}_k) \\
 &\quad \cdot (\mathbf{A}_{k-1} \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B}_{k-1} \mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1} - \bar{\mathbf{x}}_k)^\top \\
 &= (\mathbf{A}_{k-1} (\mathbf{x}_{k-1} - \bar{\mathbf{x}}_{k-1}) + \mathbf{w}_{k-1}) \\
 &\quad \cdot (\mathbf{A}_{k-1} (\mathbf{x}_{k-1} - \bar{\mathbf{x}}_{k-1}) + \mathbf{w}_{k-1})^\top \\
 &= \mathbf{A}_{k-1} (\mathbf{x}_{k-1} - \bar{\mathbf{x}}_{k-1}) (\mathbf{x}_{k-1} - \bar{\mathbf{x}}_{k-1})^\top \mathbf{A}_{k-1}^\top \\
 &\quad + \mathbf{w}_{k-1} \mathbf{w}_{k-1}^\top + \mathbf{A}_{k-1} (\mathbf{x}_{k-1} - \bar{\mathbf{x}}_{k-1}) \mathbf{w}_{k-1}^\top \\
 &\quad + \mathbf{w}_{k-1} (\mathbf{x}_{k-1} - \bar{\mathbf{x}}_{k-1})^\top \mathbf{A}_{k-1}^\top.
 \end{aligned} \tag{2.3.13}$$

Um nun die Kovarianz zu ermitteln, wird der Erwartungswert von obigem Term bestimmt. Da $(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})$ und \mathbf{w} nicht korreliert sind, fallen die entsprechenden Terme weg. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}_k &= E \left\{ (\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}_k) (\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}_k)^\top \right\} \\
 &= E \left\{ \mathbf{A}_{k-1} (\mathbf{x}_{k-1} - \bar{\mathbf{x}}_{k-1}) (\mathbf{x}_{k-1} - \bar{\mathbf{x}}_{k-1})^\top \mathbf{A}_{k-1}^\top \right. \\
 &\quad \left. + \mathbf{w}_{k-1} \mathbf{w}_{k-1}^\top + \mathbf{A}_{k-1} (\mathbf{x}_{k-1} - \bar{\mathbf{x}}_{k-1}) \mathbf{w}_{k-1}^\top \right. \\
 &\quad \left. + \mathbf{w}_{k-1} (\mathbf{x}_{k-1} - \bar{\mathbf{x}}_{k-1})^\top \mathbf{A}_{k-1}^\top \right\} \\
 &= E \left\{ \mathbf{A}_{k-1} (\mathbf{x}_{k-1} - \bar{\mathbf{x}}_{k-1}) (\mathbf{x}_{k-1} - \bar{\mathbf{x}}_{k-1})^\top \mathbf{A}_{k-1}^\top \right\} \tag{2.3.14} \\
 &\quad + E \left\{ \mathbf{w}_{k-1} \mathbf{w}_{k-1}^\top \right\} + \mathbf{0} + \mathbf{0} \\
 &= \mathbf{A}_{k-1} E \left\{ (\mathbf{x}_{k-1} - \bar{\mathbf{x}}_{k-1}) (\mathbf{x}_{k-1} - \bar{\mathbf{x}}_{k-1})^\top \right\} \mathbf{A}_{k-1}^\top \\
 &\quad + E \left\{ \mathbf{w}_{k-1} \mathbf{w}_{k-1}^\top \right\} \\
 &= \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{A}_{k-1}^\top + \mathbf{Q}_{k-1},
 \end{aligned}$$

wobei $\mathbf{0}$ die korrekt dimensionierte Nullmatrix ist. Wie schon beim Zustand kann diese Gleichung nun genutzt werden, um ausgehend

2. Grundlagen

vom Initialzustand des Systems folgende Gleichung herzuleiten:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_0^+ &= E \left\{ (\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}_0) (\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}_0)^T \right\} \\ &= E \left\{ (\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0) (\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)^T \right\}\end{aligned}\tag{2.3.15}$$

$$\mathbf{P}_1^- = \mathbf{A}_0 \mathbf{P}_0^+ \mathbf{A}_0^T + \mathbf{Q}_0.\tag{2.3.16}$$

Auch diese Gleichung ist für alle Zeitschritte gültig und gibt an, wie sich aus einer bekannten a posteriori Kovarianzmatrix des Schätzfehlers mit Kenntnis der Systemdynamik die korrekte a priori Kovarianzmatrix des Schätzfehlers für den nächsten Zeitschritt berechnen lässt:

$$\mathbf{P}_k^- = \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{P}_{k-1}^+ \mathbf{A}_{k-1}^T + \mathbf{Q}_{k-1}.\tag{2.3.17}$$

Die Gleichungen (2.3.12) und (2.3.17) beschreiben die so genannte Prädiktion im Kalman-Filter. Damit ist der Teil gemeint, in dem auf Basis der vorangehenden Schätzung nur mittels der Systemdynamik eine Vorhersage für den nächsten Zeitschritt getroffen wird, ohne eine weitere Messung zu berücksichtigen. Das Einbeziehen der Messung wird im folgenden Schritt, der Korrektur, durchgeführt.

2.3.1.2. Korrektur

Ausgehend von den a priori Termen wird nun eine Messung zur Verbesserung der Schätzung hinzugezogen. Da durch diesen Vorgang bei der optimalen Zustandsschätzung die Unsicherheit der Schätzung verbessert wird, spricht man auch davon, die Prädiktion zu korrigieren; der Schritt wird entsprechend Korrektur genannt.

Ein linearer, rekursiver Schätzer für einen statischen, also zeitinvarianten Zustand \mathbf{x} kann allgemein folgendermaßen beschrieben werden:

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}_k \mathbf{x} + \mathbf{v}_k\tag{2.3.18}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1}).\tag{2.3.19}$$

Es wird also $\hat{\mathbf{x}}_k$ auf Basis der vorherigen Schätzung $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$, der Messung \mathbf{y}_k und einer noch zu bestimmenden Matrix \mathbf{K}_k berechnet. \mathbf{K}_k ist die

so genannte *Kalman-Verstärkung* oder auch Verstärkung des Schätzers. Sie bestimmt, in welchem Maß der vorige Schätzwert korrigiert wird. Der hintere Term besteht dabei aus der Differenz zwischen der ihrerseits verrauschten Messung und dem Systemausgang, der mit der letzten Schätzung berechnet wird. Es handelt sich also um den Schätzfehler bezogen auf die Messung des Systems.

Zunächst wird der Erwartungswert des Schätzfehlers $\varepsilon_{x,k} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_k$ betrachtet:

$$\begin{aligned}
 E \{ \varepsilon_{x,k} \} &= E \{ \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_k \} \\
 &= E \{ \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1} - \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1}) \} \\
 &= E \{ \varepsilon_{x,k-1} - \mathbf{K}_k (\mathbf{C}_k \mathbf{x} + \mathbf{v}_k - \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1}) \} \quad (2.3.20) \\
 &= E \{ \varepsilon_{x,k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}) - \mathbf{K}_k \mathbf{v}_k \} \\
 &= (\mathbf{1} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k) E \{ \varepsilon_{x,k-1} \} - \mathbf{K}_k E \{ \mathbf{v}_k \}
 \end{aligned}$$

Hier ist $\mathbf{1}$ die entsprechend dimensionierte Einheitsmatrix. Aus dieser Gleichung lässt sich eine wichtige Eigenschaft des späteren Filters ableiten: Wenn das Messrauschen wie gefordert mittelwertfrei ist ($E \{ \mathbf{v} \} = 0$) und der Erwartungswert des Schätzfehlers zum vorherigen Zeitschritt gleich Null war ($E \{ \varepsilon_{x,k-1} \} = 0$), dann ist auch der Erwartungswert des Schätzfehlers zum neuen Zeitpunkt Null. Ein rekursives Filter, das auf diesen Gleichungen basiert, ist also *erwartungstreu*.

Nun soll die optimale Verstärkung \mathbf{K} bestimmt werden. Optimal heißt dabei, dass die Summe der Schätzfehlerquadrate minimiert werden soll. Das Gütekriterium ist also

$$\begin{aligned}
 J_k &= E \{ (x_1 - \hat{x}_1)^2 \} + E \{ (x_2 - \hat{x}_2)^2 \} + \dots + E \{ (x_n - \hat{x}_n)^2 \} \\
 &= E \{ \varepsilon_{x_1,k}^2 + \dots + \varepsilon_{x_n,k}^2 \} \\
 &= E \{ \varepsilon_{x,k} \varepsilon_{x,k}^T \} \\
 &= E \{ \text{Spur} \{ \varepsilon_{x,k} \varepsilon_{x,k}^T \} \} \\
 &= \text{Spur} \{ \mathbf{P}_k \}. \quad (2.3.21)
 \end{aligned}$$

2. Grundlagen

Nun wird eine Rekursion für die Kovarianzmatrix bestimmt:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}_k &= E \left\{ \varepsilon_{x,k} \varepsilon_{x,k}^T \right\} \\
 &= E \left\{ ((\mathbf{1} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k) \varepsilon_{x,k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{v}_k) ((\mathbf{1} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k) \varepsilon_{x,k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{v}_k)^T \right\} \\
 &= (\mathbf{1} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k) E \left\{ \varepsilon_{x,k-1} \varepsilon_{x,k-1}^T \right\} (\mathbf{1} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k)^T \\
 &\quad - \mathbf{K}_k E \left\{ \mathbf{v}_k \varepsilon_{x,k-1}^T \right\} (\mathbf{1} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k)^T \\
 &\quad - (\mathbf{1} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k) E \left\{ \varepsilon_{x,k-1} \mathbf{v}_k^T \right\} \mathbf{K}_k^T \\
 &\quad + \mathbf{K}_k E \left\{ \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T \right\} \mathbf{K}_k^T.
 \end{aligned} \tag{2.3.22}$$

Der Schätzfehler $\varepsilon_{x,k-1}$ ist unabhängig vom Messrauschen \mathbf{v}_k , daher gilt:

$$\begin{aligned}
 E \left\{ \mathbf{v}_k \varepsilon_{x,k-1}^+ \right\} &= E \left\{ \mathbf{v}_k \right\} E \left\{ \varepsilon_{x,k-1}^+ \right\} \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.3.23}$$

Damit ergibt sich folgende Beziehung:

$$\mathbf{P}_k = (\mathbf{1} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k) \mathbf{P}_{k-1} (\mathbf{1} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k)^T + \mathbf{K}_k \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^T. \tag{2.3.24}$$

Diese Gleichung zeigt die rekursive Berechnung der Kovarianzmatrix des Schätzfehlers in Abhängigkeit der noch zu bestimmenden Verstärkung \mathbf{K} und der Kovarianzmatrix des Messrauschens \mathbf{R} . Zur Bestimmung der Verstärkung muss nun genau der Wert von \mathbf{K} gefunden werden, der die Kostenfunktion J minimiert. Dies ist die Spur von \mathbf{P} . Das bedeutet, dass die Schätzung nicht nur mittelwertfrei sein wird, sondern auch immer eine minimale Streuung besitzen wird. Man betrachtet folgenden Ansatz:

$$\frac{\partial J_k}{\partial \mathbf{K}_k} = 2 (\mathbf{1} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k) \mathbf{P}_{k-1} \left(-\mathbf{C}_k^T \right) + 2 \mathbf{K}_k \mathbf{R}_k. \tag{2.3.25}$$

Wird diese Ableitung zu Null gesetzt und nach \mathbf{K}_k aufgelöst, erhält man:

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_k \mathbf{R}_k &= (\mathbf{1} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k) \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{C}_k^T \Leftrightarrow \\ \mathbf{K}_k \left(\mathbf{R}_k + \mathbf{C}_k \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{C}_k^T \right) &= \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{C}_k^T \Leftrightarrow \\ \mathbf{K}_k &= \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{C}_k^T \left(\mathbf{C}_k \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{C}_k^T + \mathbf{R}_k \right)^{-1}.\end{aligned}\quad (2.3.26)$$

Die Gleichungen (2.3.26), (2.3.19) und (2.3.24) bilden die Grundlage für den Korrekturschritt des Kalman-Filters.

Diese Herleitung gilt für den Fall eines statischen Zustands \mathbf{x} . Um sie auf dynamische Systeme anzupassen, wird sie modifiziert und mit dem Prädiktionsschritt kombiniert. Ausgehend von der letzten a posteriori Schätzung wird im Prädiktionsschritt auf Grundlage der Systemdynamik die korrekte Vorhersage für den nächsten Zeitschritt getroffen. Diese Vorhersage, der a priori Schätzwert, wird nun mit den gerade hergeleiteten Formeln korrigiert und bildet den nachfolgenden a posteriori Schätzwert. Dazu müssen die Größen $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$ und \mathbf{P}_{k-1} durch $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ und \mathbf{P}_k^- und $\hat{\mathbf{x}}_k$ und \mathbf{P}_k durch $\hat{\mathbf{x}}_k^+$ und \mathbf{P}_k^+ ersetzt werden. Es ergeben sich somit die folgenden Beziehungen:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^T \left(\mathbf{C}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^T + \mathbf{R}_k \right)^{-1}, \quad (2.3.27)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k^+ = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_k^-), \quad (2.3.28)$$

$$\mathbf{P}_k^+ = (\mathbf{1} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k) \mathbf{P}_k^- (\mathbf{1} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k)^T + \mathbf{K}_k \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^T. \quad (2.3.29)$$

2.3.2. Anschauliche Interpretation

Die Herleitung aus Abschnitt 2.3.1 ergibt das lineare Filter, welches unter den gegebenen Voraussetzungen die optimale Schätzung berechnet. Zur Realisierung ist es aber zwingend nötig, die Varianzen der beteiligten Rauschprozesse zu kennen. Diese Voraussetzung ist aber in aller Regel in der Realität nicht gegeben. Zum einen existiert weißes Rauschen in der Realität auf Grund der gleichförmigen Leistungsdichte für alle Frequenzen bis unendlich nicht. Zum anderen stellt die Bestimmung der Rauschstatistik erhebliche Probleme

2. Grundlagen

dar. Während die Varianz des Messrauschens im Normalfall aus Datenblättern oder durch eine hochgenaue Messung bestimmt werden kann, ist die Varianz des Zustandsrauschens nur schwierig oder sogar unmöglich zu bestimmen. Das Kalman-Filter kann allerdings dennoch eingesetzt werden, auch wenn die Voraussetzungen in diesem Sinne nur eingeschränkt erfüllt sind. In diesem Zusammenhang kann eine anschauliche Interpretation des Filters betrachtet werden, die an Stelle der stochastischen Überlegung einen anderen Ansatz verfolgt, der näher an einer praktischen Umsetzung der Filtersynthese ist.

Zunächst betrachtet man Gleichung (2.3.27) für die Berechnung der Kalman-Verstärkung:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^T \left(\mathbf{C}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^T + \mathbf{R}_k \right)^{-1} \quad (2.3.30)$$

Wenn die Kovarianz des Messrauschens, also die Unsicherheit der Messung, gegen Null geht, ergibt sich für die Kalman-Verstärkung für den Fall, dass es ebenso viele Mess- wie Zustandsgrößen gibt,

$$\lim_{\mathbf{R}_k \rightarrow \mathbf{0}} \mathbf{K}_k = \mathbf{C}^{-1}. \quad (2.3.31)$$

Geht hingegen die a priori Kovarianz des Schätzfehlers gegen Null, was für $\mathbf{Q}_k \rightarrow \mathbf{0}$ der Fall sein kann, so ergibt sich

$$\lim_{\mathbf{P}_k^- \rightarrow \mathbf{0}} \mathbf{K}_k = \mathbf{0}. \quad (2.3.32)$$

Dabei wird die a priori Kovarianz des Schätzfehlers, wenn man die Rekursion auflöst, durch den Initialwert und die Kovarianz des Zustandsrauschens bestimmt. Man kann also vereinfacht die beiden Extremfälle betrachten: Bei minimaler Unsicherheit der Messung, also maximaler Genauigkeit der Messung konvergiert \mathbf{K} gegen \mathbf{C}^{-1} . Bei minimaler Unsicherheit des Prozesses, also bei völlig ungestörtem Prozessverhalten konvergiert \mathbf{K} gegen Null. Die Korrektur des Schätzwertes lautet $\hat{\mathbf{x}}_k^+ = \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1})$. Im ersten Fall wird der a posteriori Schätzwert also in jedem Schritt durch den aus der Messung zurückgerechneten Zustand ersetzt. Im zweiten Fall hingegen

wird der Einfluss der Messung völlig verworfen. Aus dieser Betrachtung der beiden Extremfälle kann man vereinfacht feststellen, dass die Wahl von \mathbf{Q} und \mathbf{R} ein Maß für das Vertrauen in den modellierten Prozess und die Messung ist. Die Kalman-Verstärkung \mathbf{K} passt die Korrektur entsprechend an.

Es ist aber auch eine andere Betrachtung möglich, welche ebenfalls nicht stochastisch basiert ist, aber zu einer ähnlichen Interpretation führt. Für das stationäre Kalman-Filter, also das Filter, welches sich bei konstanten System-, Eingangs-, Ausgangs- und Rauschkovarianzmatrizen nach unendlicher Zeit ergibt, kann man folgende Zustandsgleichung aufstellen:

$$\mathbf{e}_k = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k \quad (2.3.33)$$

$$\mathbf{e}_{k+1} = (\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C}) \mathbf{e}_k \quad (2.3.34)$$

Aus dieser Darstellung kann die Dualität mit dem Entwurf eines Riccati-Zustandsreglers hergestellt werden. Das zu Grunde liegende Gütemaß, welches zur Bestimmung von \mathbf{K} entsprechend aufgestellt wird und beim Entwurf über die Riccati-Gleichung minimiert wird, lautet:

$$J = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} \left(\mathbf{e}_k^T \mathbf{Q} \mathbf{e}_k + \mathbf{u}_{\mathbf{e},k}^T \mathbf{R} \mathbf{u}_{\mathbf{e},k} \right) \right\}. \quad (2.3.35)$$

Hierbei ist $\mathbf{u}_{\mathbf{e},k} = -\mathbf{K}_k \mathbf{e}_k$. Die beiden Matrizen \mathbf{Q} und \mathbf{R} gewichten dabei vereinfacht gesagt jeweils die Abweichungen im prädierten Prozess und der Messung. Daraus lässt sich eine Interpretation über die Wahl der Einträge ableiten, die der obigen entspricht. Dominieren die Einträge in \mathbf{Q} , so wird die Schätzung stärker von der Modellierung abhängen. Im umgekehrten Fall wird der Einfluss der Messung zunehmen.

Wie bereits in der Einleitung zu diesem Abschnitt festgestellt, hat diese Betrachtung eine praktische Bedeutung. Die stochastische und mathematische Grundlage des Filters ist exakt und notwendig, um für bestimmte Bedingungen ein Filter mit optimalen Eigenschaften zu erhalten. Lockert man diese Bedingungen hingegen, so ist man in der Lage, ein Filter mit nur eingeschränkter Kenntnis über alle Prozesse iterativ einzustellen.

2. Grundlagen

2.3.3. Algorithmus

Fasst man die Ergebnisse zusammen, so erhält man die komplette Beschreibung des Kalman-Filters. Für ein lineares System nach (2.1.9) und (2.1.10) wird das Kalman-Filter folgendermaßen initialisiert:

$$\hat{\mathbf{x}}_0^+ = E \{ \mathbf{x}_0 \}, \quad (2.3.36)$$

$$\mathbf{P}_0^+ = E \left\{ (\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0^+) (\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0^+)^T \right\}. \quad (2.3.37)$$

Folgende Gleichungen werden dann in jedem Zeitschritt $k = 1, 2, \dots$ berechnet:

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \mathbf{A}_{k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+ + \mathbf{B}_{k-1} \mathbf{u}_{k-1}, \quad (2.3.38)$$

$$\mathbf{P}_k^- = \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{P}_{k-1}^+ \mathbf{A}_{k-1}^T + \mathbf{Q}_{k-1}, \quad (2.3.39)$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^T \left(\mathbf{C}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^T + \mathbf{R}_k \right)^{-1}, \quad (2.3.40)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k^+ = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_k^-), \quad (2.3.41)$$

$$\mathbf{P}_k^+ = (\mathbf{1} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k) \mathbf{P}_k^- (\mathbf{1} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k)^T + \mathbf{K}_k \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^T. \quad (2.3.42)$$

Es sind auch andere, mathematisch äquivalente Formulierungen für einige der Berechnungsschritte möglich. Gleichung (2.3.42) stellt sicher, dass \mathbf{P}_k^+ immer symmetrisch und positiv-definit ist, falls \mathbf{P}_k^- symmetrisch und positiv-definit ist. Eine andere Berechnung ist:

$$\mathbf{P}_k^+ = (\mathbf{1} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k) \mathbf{P}_k^-. \quad (2.3.43)$$

Diese Form ergibt sich, wenn man die Kalman-Verstärkung aus Gleichung (2.3.40) mit (2.3.42) verrechnet. Sie ist einfacher zu berechnen als (2.3.42), garantiert numerisch aber nicht die Symmetrie und positive Definitheit. Eine dritte Möglichkeit ist

$$\mathbf{P}_k^+ = \left((\mathbf{P}_k^-)^{-1} + \mathbf{C}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{C}_k \right)^{-1}. \quad (2.3.44)$$

Diese Berechnung ist vor allem sinnvoll, um das Konzept der Informationsmatrix und die damit verbundene Möglichkeit der Verteilung

2.4. Das Erweiterte Kalman-Filter

von Filtern in Kapitel 3 zu erklären. Wenn diese Berechnung implementiert wird, so ist es außerdem möglich

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^+ \mathbf{C}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \quad (2.3.45)$$

zu benutzen.

2.3.4. Eigenschaften

Das Kalman-Filter besitzt folgende Eigenschaften (Simon, 2006, Kapitel 5.2):

- Falls das Zustandsrauschen und das Messrauschen gaußverteilt, mittelwertfrei, unkorreliert und weiß sind, so ist das Kalman-Filter genau das Filter, welches zu jedem Iterationsschritt den Erwartungswert einer beliebig gewichteten quadratischen Norm des Schätzfehlers minimiert. Das heißt

$$\min E \left\{ \mathbf{e}_k^T \mathbf{S}_k \mathbf{e}_k \right\} \quad (2.3.46)$$

für alle positiv-definiten Matrizen \mathbf{S}_k . Das Filter ist somit das optimale Filter im Sinne einer Minimierung der Fehlerquadrate.

- Falls das Zustandsrauschen und das Messrauschen lediglich mittelwertfrei, unkorreliert und weiß sind, so ist das Kalman-Filter das beste lineare Filter, zur Minimierung des obigen Problems. Es gibt in diesem Fall zwar Filter, die das Problem besser lösen; jedoch sind diese dann nicht linear.
- Falls die Rauschprozesse korreliert oder farbig sind, so kann man Anpassungen am Algorithmus vornehmen, um das obige Problem zu lösen.

2.4. Das Erweiterte Kalman-Filter

Auf das Erweiterte Kalman-Filter (Extended Kalman Filter, EKF) soll hier nur kurz eingegangen werden. Im weiteren Zusammenhang wird

2. Grundlagen

es nur im Vergleich zum Unscented Kalman-Filter herangezogen, so dass auf eine Herleitung verzichtet wird und nur der Algorithmus angegeben wird. Es wurde zum ersten Mal zur im Bereich der Raumfahrt eingesetzt (Bellantoni und Dodge, 1967). Ein nichtlineares System, wie es in den Gleichungen (2.1.3) und (2.1.4) definiert ist, wird um Rauschprozesse erweitert zu

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, t_{k-1}) + \mathbf{w}_{k-1} \quad (2.4.1)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k, t_k) + \mathbf{v}_k. \quad (2.4.2)$$

Für die beiden Rauschprozesse gelten die gleichen Eigenschaften, wie sie in Abschnitt 2.3 definiert wurden: Sie sind weiß, mittelwertfrei, gaußverteilt und unkorreliert. Die jeweiligen Kovarianzmatrizen sind erneut \mathbf{Q} für das Zustandsrauschen und \mathbf{R} für das Messrauschen. Das Filter wird erneut nach folgenden Regeln initialisiert:

$$\hat{\mathbf{x}}_0^+ = E \{x_0\}, \quad (2.4.3)$$

$$\mathbf{P}_0^+ = E \left\{ (\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0^+) (\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0^+)^T \right\}. \quad (2.4.4)$$

Für alle Zeitschritte $k = 1; 2; \dots$ wird nun das Folgende berechnet: Die partielle Ableitung der Systemgleichung:

$$\mathbf{F}_{k-1} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}_{k-1}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+}. \quad (2.4.5)$$

Die Prädiktion:

$$\mathbf{P}_k^- = \mathbf{F}_{k-1} \mathbf{P}_{k-1}^+ \mathbf{F}_{k-1}^T + \mathbf{Q}_{k-1}^+, \quad (2.4.6)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \mathbf{f}_{k-1}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+, \mathbf{u}_{k-1}, 0). \quad (2.4.7)$$

Die partielle Ableitung der Ausgangsgleichung:

$$\mathbf{C}_k = \left. \frac{\partial \mathbf{h}_k}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_k^-}. \quad (2.4.8)$$

2.5. Nichtlineare Transformationen

Die Korrektur:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^T \left(\mathbf{C}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^T + \mathbf{R}_k \right)^{-1} \quad (2.4.9)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k^+ = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{h}_k(\hat{\mathbf{x}}_k^-, 0)) \quad (2.4.10)$$

$$\mathbf{P}_k^+ = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k) \mathbf{P}_k^- \quad (2.4.11)$$

Im Wesentlichen wird bei jeder Iteration jeweils vor der Prädiktion und vor der Korrektur eine Linearisierung um den letzten Schätzwert durchgeführt. Die sonstigen Filtergleichungen entsprechen denen des linearen Filters. Der grundsätzliche Unterschied und die Einschränkungen dieser Filtervariante sind somit auch deutlich. Zur Behandlung nichtlinearer Funktionen wird eine Linearisierung durchgeführt, wobei der Linearisierungspunkt immer der aktuell geschätzte Zustand ist. Sind Nichtlinearitäten vorhanden und weicht der geschätzte von tatsächlichen Zustand ab, so sind dadurch systematische und signifikante Fehler vorhanden. Außerdem ist die Linearisierung auch in der Implementierung der größte Nachteil. Die Berechnung der Jacobi-Matrizen kann sich im Einzelfall als sehr komplex oder unmöglich erweisen, falls der nichtlineare Zusammenhang nicht differenzierbar ist. Das Vorhandensein dieser Matrizen ist darüber hinaus nicht für jedes System gegeben. Falls man den Einfluss der Rauschprozesse genauer kennt, kann man diese auch als Teil der nichtlinearen Gleichungen modellieren. In diesem Fall erweitert sich der Algorithmus um zusätzliche partielle Ableitungsmatrizen, die die Kovarianzmatrizen skalieren.

Um die oben genannten Nachteile auszugleichen, wird immer häufiger das Unscented Kalman-Filter eingesetzt.

2.5. Nichtlineare Transformationen

Um die Nachteile des EKF besser erklären zu können und die Herleitung des Unscented Kalman-Filters zu erleichtern, werden nun die Transformationen von Mittelwert und Kovarianz durch eine nichtlineare Funktion betrachtet. Für eine nichtlineare Vektorfunktion $\mathbf{f}(\mathbf{x})$

2. Grundlagen

sieht die Taylor-Reihenentwicklung um einen Arbeitspunkt $\bar{\mathbf{x}}$ mit der Abweichung $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}$ wie folgt aus:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}(\mathbf{x}) &= \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) + \left(\tilde{x}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \tilde{x}_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \mathbf{f} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}} \\
 &+ \frac{1}{2!} \left(\tilde{x}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \tilde{x}_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^2 \mathbf{f} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}} \\
 &+ \frac{1}{3!} \left(\tilde{x}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \tilde{x}_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^3 \mathbf{f} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}} + \dots \\
 &= \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) + D_{\bar{\mathbf{x}}} \mathbf{f} + \frac{1}{2!} D_{\bar{\mathbf{x}}}^2 \mathbf{f} + \frac{1}{3!} D_{\bar{\mathbf{x}}}^3 \mathbf{f} + \dots
 \end{aligned} \tag{2.5.1}$$

Hier wurde der Operator

$$D_{\bar{\mathbf{x}}}^\eta \mathbf{f} = \left(\sum_{i=1}^n \tilde{x}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^\eta \mathbf{f}(\mathbf{x}) \Big|_{\bar{\mathbf{x}}} \tag{2.5.2}$$

eingeführt. Wendet man dies nun auf eine allgemeine, nichtlineare Ausgangsfunktion $\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x})$ an, so erhält man:

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}) = \mathbf{h}(\bar{\mathbf{x}}) + D_{\bar{\mathbf{x}}} \mathbf{h} + \frac{1}{2!} D_{\bar{\mathbf{x}}}^2 \mathbf{h} + \frac{1}{3!} D_{\bar{\mathbf{x}}}^3 \mathbf{h} + \dots \tag{2.5.3}$$

Man kann nun die Transformation des Erwartungswertes und der Kovarianz der stochastischen Variablen $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ berechnen.

2.5.1. Erwartungswert

Der Erwartungswert berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) &= E \left\{ \mathbf{h}(\bar{\mathbf{x}}) + D_{\bar{\mathbf{x}}} \mathbf{h} + \frac{1}{2!} D_{\bar{\mathbf{x}}}^2 \mathbf{h} + \frac{1}{3!} D_{\bar{\mathbf{x}}}^3 \mathbf{h} + \dots \right\} \\
 &= \mathbf{h}(\bar{\mathbf{x}}) + E \left\{ D_{\bar{\mathbf{x}}} \mathbf{h} + \frac{1}{2!} D_{\bar{\mathbf{x}}}^2 \mathbf{h} + \frac{1}{3!} D_{\bar{\mathbf{x}}}^3 \mathbf{h} + \dots \right\}
 \end{aligned} \tag{2.5.4}$$

2.5. Nichtlineare Transformationen

Für den ersten Term der Summe gilt:

$$\begin{aligned}
 E \{ D_{\bar{\mathbf{x}}} \mathbf{h} \} &= E \left\{ \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i \frac{\partial}{\partial x_n} \mathbf{h}(\mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}} \right\} \\
 &= \sum_{i=1}^n E \{ \tilde{x}_i \} \frac{\partial}{\partial x_n} \mathbf{h}(\mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}} \\
 &= 0,
 \end{aligned} \tag{2.5.5}$$

da $E \{ \tilde{x}_i \} = 0$. Betrachtet man nun den dritten Term, so gilt ebenfalls

$$\begin{aligned}
 E \{ D_{\bar{\mathbf{x}}}^3 \mathbf{h} \} &= E \left\{ \left(\sum_{i=1}^n \tilde{x}_i \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^3 \mathbf{h}(\mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}} \right\} \\
 &= \sum_{i=1}^n E \{ (\tilde{x}_i)^3 \} \frac{\partial}{\partial x_n} \mathbf{h}(\mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}} \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.5.6}$$

Dies liegt daran, dass alle Momente der dritten Ordnung ebenfalls Null sind ($E \{ (\tilde{x}_1)^3 \}, E \{ (\tilde{x}_1)^2 (\tilde{x}_2)^1 \}, \dots$). Da man allgemein zeigen kann, dass dies bei symmetrischen Verteilungsfunktionen für alle ungeraden Momente gilt, vereinfacht sich die obige Gleichung zu

$$\bar{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = \mathbf{h}(\bar{\mathbf{x}}) + \frac{1}{2!} E \{ D_{\bar{\mathbf{x}}}^2 \mathbf{h} \} + \frac{1}{4!} E \{ D_{\bar{\mathbf{x}}}^4 \mathbf{h} \} + \dots \tag{2.5.7}$$

Dieser Zusammenhang zeigt, dass bei einer nichtlinearen Funktion zur korrekten Berechnung des Erwartungswertes für symmetrische Verteilungsfunktionen alle geraden Momente benötigt werden, was offensichtlich nicht möglich ist.

2.5.2. Kovarianz

Als nächstes betrachtet man die Kovarianz für diese Transformation:

$$\mathbf{P}_y = E \{ (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}) (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})^T \}. \tag{2.5.8}$$

2. Grundlagen

Den Term $\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}$ kann man mit den Herleitungen von oben ersetzen:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}} &= \left[\mathbf{h}(\bar{\mathbf{x}}) + D_{\bar{\mathbf{x}}}\mathbf{h} + \frac{1}{2!}D_{\bar{\mathbf{x}}}^2\mathbf{h} + \dots \right] \\
 &\quad - \left[\mathbf{h}(\bar{\mathbf{x}}) + \frac{1}{2!}E \left\{ D_{\bar{\mathbf{x}}}^2\mathbf{h} \right\} + \frac{1}{4!}E \left\{ D_{\bar{\mathbf{x}}}^4\mathbf{h} \right\} + \dots \right] \\
 &= \left[D_{\bar{\mathbf{x}}}\mathbf{h} + \frac{1}{2!}D_{\bar{\mathbf{x}}}^2\mathbf{h} + \dots \right] - \left[\frac{1}{2!}E \left\{ D_{\bar{\mathbf{x}}}^2\mathbf{h} \right\} + \frac{1}{4!}E \left\{ D_{\bar{\mathbf{x}}}^4\mathbf{h} \right\} + \dots \right].
 \end{aligned} \tag{2.5.9}$$

Somit ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P} &= E \left\{ D_{\bar{\mathbf{x}}}\mathbf{h} (D_{\bar{\mathbf{x}}}\mathbf{h})^T \right\} \\
 &\quad + E \left\{ \frac{D_{\bar{\mathbf{x}}}\mathbf{h} (D_{\bar{\mathbf{x}}}^3\mathbf{h})^T}{3!} + \frac{D_{\bar{\mathbf{x}}}^2\mathbf{h} (D_{\bar{\mathbf{x}}}^2\mathbf{h})^T}{2!2!} + \frac{D_{\bar{\mathbf{x}}}^3\mathbf{h} (D_{\bar{\mathbf{x}}}\mathbf{h})^T}{3!} \right\} \\
 &\quad + E \left\{ \frac{D_{\bar{\mathbf{x}}}^2\mathbf{h}}{2!} \right\} E \left\{ \frac{D_{\bar{\mathbf{x}}}^2\mathbf{h}}{2!} \right\}^T + \dots
 \end{aligned} \tag{2.5.10}$$

Der erste Term kann wie folgt umgeschrieben werden:

$$\begin{aligned}
 E \left\{ D_{\bar{\mathbf{x}}}\mathbf{h} (D_{\bar{\mathbf{x}}}\mathbf{h})^T \right\} &= E \left\{ \left(\sum_{i=1}^n \tilde{x}_i \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial x_i} \Big|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}} \right) \left(\sum_{i=1}^n \tilde{x}_i \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial x_i} \Big|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}} \right)^T \right\} \\
 &= E \left\{ \sum_{i,j} \tilde{x}_i \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial x_i} \Big|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}} \frac{\partial \mathbf{h}^T}{\partial x_j} \Big|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}} \tilde{x}_j \right\} \\
 &= \sum_{i,j} \mathbf{C}_i E \left\{ (\tilde{x}_i \tilde{x}_j) \right\} \mathbf{C}_j^T \\
 &= \sum_{i,j} \mathbf{C}_i \mathbf{P}_{ij} \mathbf{C}_j^T.
 \end{aligned} \tag{2.5.11}$$

Man kann aus dieser Umformung die Definition des Vektors der partiellen Ableitungen \mathbf{C}_i und des Erwartungswertes \mathbf{P}_{ij} entnehmen.

2.6. Die Unscented Transformation

Gleichzeitig kann man weitere Umformungen durchführen:

$$\begin{aligned}
 E \left\{ D_{\bar{\mathbf{x}}}\mathbf{h} (D_{\bar{\mathbf{x}}}\mathbf{h})^T \right\} &= \sum_{i,j} \mathbf{C}_i \mathbf{P}_{ij} \mathbf{C}_j^T \\
 &= \mathbf{C} \mathbf{P} \mathbf{C}^T \\
 &= \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}} \mathbf{P} \left. \frac{\partial \mathbf{h}^T}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}} .
 \end{aligned} \tag{2.5.12}$$

Die Matrix der partiellen Ableitungen \mathbf{C} und die Kovarianzmatrix \mathbf{P} werden hierdurch definiert. In Gleichung (2.5.11) ist \mathbf{C}_i die i -te Spalte von \mathbf{C} und \mathbf{P}_{ij} das Element in der i -ten Zeile und j -ten Spalte von \mathbf{P} . Man ist nun in der Lage, die Taylorreihe für die nichtlineare Transformation einer Kovarianzmatrix aufzuschreiben:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P} &= \mathbf{C} \mathbf{P} \mathbf{C}^T + E \left\{ \frac{D_{\bar{\mathbf{x}}}\mathbf{h} (D_{\bar{\mathbf{x}}}^3\mathbf{h})^T}{3!} + \frac{D_{\bar{\mathbf{x}}}^2\mathbf{h} (D_{\bar{\mathbf{x}}}^2\mathbf{h})^T}{2!2!} + \frac{D_{\bar{\mathbf{x}}}^3\mathbf{h} (D_{\bar{\mathbf{x}}}\mathbf{h})^T}{3!} \right\} \\
 &\quad + E \left\{ \frac{D_{\bar{\mathbf{x}}}^2\mathbf{h}}{2!} \right\} E \left\{ \frac{D_{\bar{\mathbf{x}}}^2\mathbf{h}}{2!} \right\}^T + \dots
 \end{aligned} \tag{2.5.13}$$

Wie auch schon bei der Transformation des Mittelwertes sieht man, dass auch höhere Momente benötigt werden, um eine korrekte Berechnung durchzuführen. Mit diesen Betrachtungen kann nun einerseits kurz das Erweiterte Kalman-Filter bewertet werden. Andererseits kann danach die Unscented Transformation als Basis des Unscented Kalman-Filters eingeführt werden, welches in Abschnitt 2.7 geschieht.

2.6. Die Unscented Transformation

Im vorigen Abschnitt wurden die Nachteile einer Linearisierung gezeigt. Eine Methode, diese Nachteile zu überkommen, ist die Unscented Transformation (UT). Betrachtet man die Grundstruktur des Kalman-Filters, so sieht man, dass zur Berechnung die ersten beiden Mo-

2. Grundlagen

mente der Zufallsprozesse – Mittelwert und Varianz – benötigt werden. Die Unscented Transformation hat daher zum Ziel, diese beiden Momente genauer unter einer nichtlinearen Transformation bestimmen zu können, als dies bei einer Linearisierung der Fall ist. Im Allgemeinen ist es unmöglich, für eine beliebige nichtlineare Transformation die transformierte Verteilungsfunktion analytisch zu bestimmen. Die Idee der Unscented Transformation beruht auf folgender Intuition: Es ist leicht, eine beliebige Anzahl von Punkten einzeln zu transformieren. Werden diese Punkte geschickt gewählt, so kann man aus den abgebildeten Punkten das erste und zweite Moment der transformierten Verteilung bestimmen.

Es wird zunächst die Bildungsvorschrift für die Punkte gegeben; danach folgt eine Betrachtung, weshalb diese Punkte geeignet sind, die obige Idee umzusetzen. Es existiert eine Zufallsvariable \mathbf{x} mit Dimension n und Mittelwert $\bar{\mathbf{x}}$. Ein Satz von $2n$ so genannter Sigma-Punkte bildet sich aus den Reihen oder Spalten der Matrix $\pm \left(\sqrt{(n + \kappa)\mathbf{P}} \right)$, wobei \mathbf{P} die Kovarianzmatrix zur Zufallszahl \mathbf{x} ist. Auf diese wird jeweils noch der Vektor $\bar{\mathbf{x}}$ addiert. Der 0-te Punkt ist der Vektor $\bar{\mathbf{x}}$ selber. Das heißt:

$$\sigma_0 = 0, \quad (2.6.1)$$

$$\sigma_\nu = + \left(\sqrt{(n + \kappa)\mathbf{P}} \right)_\nu \quad \text{für } \nu = 1, \dots, n, \quad (2.6.2)$$

$$\sigma_\nu = - \left(\sqrt{(n + \kappa)\mathbf{P}} \right)_\nu \quad \text{für } \nu = n + 1, \dots, 2n, \quad (2.6.3)$$

$$\mathbf{x}^{(\nu)} = \sigma_\nu + \bar{\mathbf{x}} \quad \text{für } \nu = 0, \dots, 2n, \quad (2.6.4)$$

wobei $\left(\sqrt{\cdot} \right)_\nu$ die ν -te Zeile oder Spalte der Matrix ist, $\mathbf{x}^{(\nu)}$ die so genannten Sigma-Punkte sind und κ ein Parameter, auf dessen Bedeutung noch eingegangen wird. Somit berechnet sich die skalierte Kovarianz der Sigma-Punkte zu

$$\mathbf{P}_{xx} = \frac{1}{2(n + \kappa)} \sum_{\nu=1}^{2n} \left(\mathbf{x}^{(\nu)} - \bar{\mathbf{x}} \right) \left(\mathbf{x}^{(\nu)} - \bar{\mathbf{x}} \right)^T. \quad (2.6.5)$$

2.6. Die Unscented Transformation

Diese Punkte werden nun durch eine nichtlineare Abbildung $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ transformiert, so dass man $2n$ Punkte im Bildbereich erhält:

$$\mathbf{y}^{(v)} = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}^{(v)}\right). \quad (2.6.6)$$

Für diese Punkte kann man nun deren Mittelwert und Kovarianz berechnen:

$$\bar{\mathbf{y}} = \frac{1}{n + \kappa} \left(\kappa \mathbf{y}^{(0)} + \frac{1}{2} \sum_{v=1}^{2n} \mathbf{x}^{(v)} \right), \quad (2.6.7)$$

$$\mathbf{P}_{yy} = \frac{1}{n + \kappa} \quad (2.6.8)$$

$$\cdot \left(\kappa \left(\mathbf{y}^{(0)} - \bar{\mathbf{y}} \right) \left(\mathbf{y}^{(0)} - \bar{\mathbf{y}} \right)^{\top} + \frac{1}{2} \sum_{v=1}^{2n} \left(\mathbf{y}^{(v)} - \bar{\mathbf{y}} \right) \left(\mathbf{y}^{(v)} - \bar{\mathbf{y}} \right)^{\top} \right). \quad (2.6.9)$$

Werden für κ negative Werte angenommen, so wird die Kovarianz mit

$$\mathbf{P}_{yy} = \frac{1}{2(n + \kappa)} \sum_{v=1}^{2n} \left(\mathbf{y}^{(v)} - \bar{\mathbf{y}} \right) \left(\mathbf{y}^{(v)} - \bar{\mathbf{y}} \right)^{\top} \quad (2.6.10)$$

berechnet. Mit dieser Formel wird der Fehler der Berechnung zwar leicht erhöht, allerdings wird damit sichergestellt, dass die Kovarianzmatrix immer positiv-semidefinit ist.

Wird $\kappa = 0$ gewählt, so erhält man die Variante der UT, die nur $2n$ Punkte benötigt, da der zentrale Wert wegfällt. Für diesen Fall kann man nun den Mittelwert und die Kovarianz aus (2.6.7) und (2.6.9) genauer untersuchen. Nach einer Reihenentwicklung der nichtlinearen Funktion \mathbf{f} kann man auf Grund der Symmetrie der Sigma-Punkte alle Terme mit ungerader Ordnung streichen, da sie Null sind. Somit erhält man

$$\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) + \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \left(\frac{1}{2!} D_{\bar{\mathbf{x}}}^2 \mathbf{f} + \frac{1}{4!} D_{\bar{\mathbf{x}}}^4 \mathbf{f} + \dots \right). \quad (2.6.11)$$

2. Grundlagen

Wenn man für den ersten Term der Summe den D -Operator auflöst und (2.6.2) und (2.6.3) einsetzt, so kann man ihn zu

$$\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{2!} D_{\bar{\mathbf{x}}}^2 \mathbf{f} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \mathbf{P}_{ij} \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}_i \partial \mathbf{x}_j} \Big|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}} \quad (2.6.12)$$

umformen. Um nun (2.6.11) und (2.6.12) mit (2.5.7) zu vergleichen, muss man den zweiten Term in (2.5.7) umformen. Löst man auch hier den Operator auf und setzt den Erwartungswert ein, so erhält man

$$\frac{1}{2!} E \left\{ D_{\bar{\mathbf{x}}}^2 \mathbf{h} \right\} = \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^n \mathbf{P}_{ij} \frac{\partial^2 \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}_i \partial \mathbf{x}_j} \Big|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}} . \quad (2.6.13)$$

Die UT ist somit im Gegensatz zur Linearisierung bei der Berechnung des Mittelwerts bis zu Termen einschließlich der dritten Ordnung exakt.

Für die Berechnung der Kovarianz stellt man nun gleiche Überlegungen an. Zunächst wird in (2.6.9) die nichtlineare Funktion ersetzt und durch eine Reihe entwickelt. Einige der so entstehenden Terme werden nach dem Ausmultiplizieren Null, so dass man schließlich folgenden Ausdruck erhält:

$$\mathbf{P}_{yy} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} (D_{\bar{\mathbf{x}}} \mathbf{f}) (D_{\bar{\mathbf{x}}} \mathbf{f})^T + \dots \quad (2.6.14)$$

Die weiteren Terme sind alle höherer Ordnung, die für die weitere Betrachtung ignoriert werden. Wird nun erneut der D -Operator aufgelöst, so kann man

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{yy} &= \sum_{j,k=1}^n \mathbf{P}_{jk} \frac{\partial \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})}{\partial \mathbf{x}_j} \left(\frac{\partial \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})}{\partial \mathbf{x}_k} \right)^T \\ &= \mathbf{CPC}^T \end{aligned} \quad (2.6.15)$$

zeigen. Ein Vergleich mit (2.5.13) zeigt, dass die UT die Kovarianz mit Gliedern einschließlich der dritten Ordnung korrekt berechnet. Diese

2.6. Die Unscented Transformation

Genauigkeit entspricht der Linearisierung. Man kann mit weiteren Betrachtungen außerdem zeigen, dass die Fehleranteile für die Unscented Transformation in den höheren Momenten geringer skalieren.

Durch die Wahl von κ kann die Genauigkeit der Berechnung von Mittelwert und Kovarianz im Vergleich zu den echten Werten nun unter bestimmten Voraussetzungen noch weiter erhöht werden. Die bisherigen Betrachtungen behalten dabei ihre Gültigkeit, es muss lediglich $n + \kappa \neq 0$ gelten. Für multidimensionale System sollte

$$\kappa = 3 - n \quad (2.6.16)$$

gelten. In diesem Fall werden für den Fall gaußförmiger Störungen außerdem einige der Fehler vierter Ordnung für den Mittelwert und die Kovarianz minimiert.

Grundsätzlich ist somit die Genauigkeit der Unscented Transformation immer besser oder gleich der Linearisierung. Dies gilt auch, wenn die Verteilung nicht gaußförmig ist. Außerdem ergeben sich auf Grund der Berechnung weitere Vorteile:

- Partielle Ableitungen oder Annäherungen an die Funktion f müssen nicht berechnet werden.
- Aus diesem Grund ist die Berechnung auch dann möglich, wenn die Funktion an diversen Stellen nicht differenzierbar ist. In einem solchen Fall wäre eine Linearisierung unmöglich.
- Die einzelnen Berechnungen bestehen lediglich aus einfachen Matrixoperationen. Die Berechnung der Matrixwurzelfunktion ist am komplexesten. Diese kann durch die Cholesky-Zerlegung numerisch effizient und stabil durchgeführt werden.
- Randbedingungen können sehr einfach implementiert werden, indem sie auf jeden Punkt $\mathbf{x}^{(v)}$ angewandt werden.

Mit dieser Berechnungsvorschrift und auf Grund der Kenntnis der Eigenschaften kann nun das Unscented Kalman-Filter im folgenden Abschnitt formuliert werden.

2. Grundlagen

2.7. Unscented Kalman-Filter

Das normale Kalman-Filter ist nur für lineare Systeme geeignet. Will man jedoch eine Zustandsschätzung für nichtlineare Systeme durchführen, benötigt man auch ein nichtlineares Filter. Im Abschnitt 2.4 wurde kurz auf das Erweiterte Kalman-Filter eingegangen, welches durch Linearisierung die Benutzung eines Kalman-Filters ermöglicht. Die sich dadurch ergebenden Nachteile wurden im Abschnitt 2.5 gezeigt. Die Unscented Transformation wurde in Abschnitt 2.6 als eine Methode eingeführt, für nichtlineare Transformationen einer Zufallszahl eine höhere Genauigkeit als bei einer Linearisierung zu erreichen, ohne dabei einen unverhältnismäßig großen Rechenaufwand betreiben zu müssen. Schaut man sich die grundlegende Struktur des Kalman-Filters an, so kann man diese sehr einfach um die Unscented Transformation erweitern. Das Unscented Kalman-Filter (Unscented Kalman Filter, UKF) wurde von Julier und Uhlmann formuliert und weiterentwickelt (Julier und Uhlmann, 1995, 1996; Julier u. a., 1997, 2000; Julier und Uhlmann, 2004). Das UKF ist eine relativ neue Erweiterung der rekursiven Zustandsschätzer. Es wird aber mit zunehmender Häufigkeit eingesetzt (van der Merwe und Wan, 2001, 2003, 2004; van der Merwe u. a., 2004; Crassidis, 2006).

2.7.1. Algorithmus

Es ist ein nichtlineares System wie in Gleichungen (2.4.1) und (2.4.2) gegeben:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, t_{k-1}) + \mathbf{w}_{k-1} \quad (2.7.1)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k, t_k) + \mathbf{v}_k. \quad (2.7.2)$$

Das Zustandsrauschen \mathbf{w}_k ist mittelwertfrei und besitzt die Kovarianz \mathbf{Q}_k ; das Messrauschen \mathbf{v}_k ist ebenfalls mittelwertfrei und besitzt die Kovarianz \mathbf{R}_k . Die Initialisierung erfolgt für den Zeitpunkt $k = 0$ nach

$$\hat{\mathbf{x}}_0^+ = E \{x_0\}, \quad (2.7.3)$$

$$\mathbf{P}_0^+ = E \left\{ (\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0^+) (\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0^+)^T \right\}. \quad (2.7.4)$$

2.7. Unscented Kalman-Filter

Für alle Zeitschritte $k = 1, 2, \dots$ werden nun die folgenden Schritte berechnet. Die Prädiktion des Zustandes wird mit Hilfe der Unscented Transformation auf Basis der letzten a posteriori Schätzung durchgeführt:

$$\tilde{\mathbf{x}}^{(0)} = \mathbf{0}, \quad (2.7.5)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}^{(v)} = + \left(\sqrt{(n + \kappa) \mathbf{P}_{k-1}^+} \right)_v \quad \text{für } v = 1, \dots, n, \quad (2.7.6)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}^{(v+n)} = -\tilde{\mathbf{x}}^{(v)} \quad \text{für } v = 1, \dots, n, \quad (2.7.7)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^{(v)} = \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+ + \tilde{\mathbf{x}}^{(v)} \quad \text{für } v = 0, \dots, 2n, \quad (2.7.8)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k^{(v)} = \mathbf{f} \left(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^{(v)}, \mathbf{u}_{k-1}, t_{k-1} \right) \quad \text{für } v = 0, \dots, 2n, \quad (2.7.9)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \frac{\kappa}{n + \kappa} \hat{\mathbf{x}}_k^{(0)} + \frac{1}{2(n + \kappa)} \sum_{v=1}^{2n} \hat{\mathbf{x}}_k^{(v)} \quad \text{für } v = 1, \dots, 2n \quad (2.7.10)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k^- &= \frac{\kappa}{n + \kappa} \left(\hat{\mathbf{x}}_k^{(0)} - \hat{\mathbf{x}}_k^- \right) \left(\hat{\mathbf{x}}_k^{(0)} - \hat{\mathbf{x}}_k^- \right)^T \\ &+ \frac{1}{2(n + \kappa)} \sum_{v=1}^{2n} \left(\hat{\mathbf{x}}_k^{(v)} - \hat{\mathbf{x}}_k^- \right) \left(\hat{\mathbf{x}}_k^{(v)} - \hat{\mathbf{x}}_k^- \right)^T + \mathbf{Q}_{k-1} \quad (2.7.11) \\ &\text{für } v = 1, \dots, 2n. \end{aligned}$$

Hierbei ist $\left(\sqrt{\cdot} \right)_v$ die v -te Zeile oder Spalte der Matrix, $\hat{\mathbf{x}}^{(v)}$ sind die Sigma-Punkte, n ist die Dimension des Systems und κ ist ein Parameter des Filters, der nach Gleichung (2.6.16) eingestellt wird. Der a priori Schätzwert des Zustandsvektors $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ und die dazu gehörige a priori Kovarianzmatrix des Schätzfehlers \mathbf{P}_k^- haben dabei die gleiche Bedeutung wie beim linearen Filter. Mit ihnen kann nun der Korrekturschritt berechnet werden. Hierzu werden auf Basis der a priori Werte mit einer zweiten Unscented Transformation die Messungen unter Kenntnis der nichtlinearen Ausgangsfunktion einbezogen:

$$\tilde{\mathbf{x}}^{(0)} = \mathbf{0}, \quad (2.7.12)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}^{(v)} = + \left(\sqrt{(n + \kappa) \mathbf{P}_k^-} \right)_v \quad \text{für } v = 1, \dots, n, \quad (2.7.13)$$

2. Grundlagen

$$\tilde{\mathbf{x}}^{(v+n)} = -\tilde{\mathbf{x}}^{(v)} \quad \text{für } v = 1, \dots, n, \quad (2.7.14)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k^{(v)} = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \tilde{\mathbf{x}}^{(v)} \quad \text{für } v = 0, \dots, 2n, \quad (2.7.15)$$

$$\hat{\mathbf{y}}_k^{(v)} = \mathbf{h} \left(\hat{\mathbf{x}}_k^{(v)}, t_{k-1} \right) \quad \text{für } v = 0, \dots, 2n, \quad (2.7.16)$$

$$\hat{\mathbf{y}}_k = \frac{\kappa}{n + \kappa} \hat{\mathbf{y}}_k^{(0)} + \frac{1}{2(n + \kappa)} \sum_{v=1}^{2n} \hat{\mathbf{y}}_k^{(v)} \quad \text{für } v = 1, \dots, 2n, \quad (2.7.17)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{y,k} &= \frac{\kappa}{n + \kappa} \left(\hat{\mathbf{y}}_k^{(0)} - \hat{\mathbf{y}}_k^- \right) \left(\hat{\mathbf{y}}_k^{(0)} - \hat{\mathbf{y}}_k^- \right)^T \\ &+ \frac{1}{2(n + \kappa)} \sum_{v=1}^{2n} \left(\hat{\mathbf{y}}_k^{(v)} - \hat{\mathbf{y}}_k^- \right) \left(\hat{\mathbf{y}}_k^{(v)} - \hat{\mathbf{y}}_k^- \right)^T + \mathbf{R}_k \end{aligned} \quad (2.7.18)$$

für $v = 1, \dots, 2n$,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{xy,k} &= \frac{\kappa}{n + \kappa} \left(\hat{\mathbf{x}}_k^{(0)} - \hat{\mathbf{x}}_k^- \right) \left(\hat{\mathbf{y}}_k^{(0)} - \hat{\mathbf{y}}_k^- \right)^T \\ &+ \frac{1}{2(n + \kappa)} \sum_{v=1}^{2n} \left(\hat{\mathbf{x}}_k^{(v)} - \hat{\mathbf{x}}_k^- \right) \left(\hat{\mathbf{y}}_k^{(v)} - \hat{\mathbf{y}}_k^- \right)^T \end{aligned} \quad (2.7.19)$$

für $v = 1, \dots, 2n$,

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{xy,k} \mathbf{P}_{y,k}^{-1} \quad (2.7.20)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k^+ = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_k), \quad (2.7.21)$$

$$\mathbf{P}_k^+ = \mathbf{P}_k^- - \mathbf{K}_k \mathbf{P}_{y,k} \mathbf{K}_k^T. \quad (2.7.22)$$

Die Berechnung der Kalman-Verstärkung erfolgt in (2.7.20) nach einer anderen Formel, als sie im linearen Fall gezeigt wurde; diese ist jedoch algebraisch äquivalent. Der so berechnete a posteriori Schätzwert für den Zustand und die Kovarianzmatrix des Schätzfehlers haben ebenfalls die gleiche Bedeutung wie beim linearen Filter.

Um die Äquivalenz der a priori und a posteriori Werte zu erklären, muss man sich die Herleitung der Unscented Transformation in Erinnerung rufen. Das lineare Kalman-Filter beruht in seiner Struktur auf einer optimalen Verrechnung des ersten und zweiten Moments einer Zufallszahl. Im linearen Fall können diese Werte exakt berechnet werden, da die lineare Transformation einer entsprechenden Vertei-

lungsfunktion deren Art nicht ändert. Statt der linearen Transformation wird nun die Unscented Transformation gesetzt, an deren Ende erneut das erste und zweite Moment berechnet werden. Die eigentliche Berechnung der Kalman-Verstärkung wird nicht geändert; lediglich die zu verrechnenden Werte werden anders bestimmt.

Genau wie beim Erweiterten Kalman-Filter kann man auch hier die Rauschprozesse genauer in die Filterung mit einbeziehen, indem man sie zu Teilen der nichtlinearen Gleichungen macht. Zu diesem Zweck müssen der Zustandsvektor und die Kovarianzmatrizen entsprechend um die Komponenten der Rauschprozesse erweitert werden. Das genaue Vorgehen ist in (Julier und Uhlmann, 2004; Simon, 2006) erklärt.

2.7.2. Eigenschaften

Die Eigenschaften, die sich für das Unscented Kalman-Filter ergeben, hängen direkt mit den Eigenschaften der Unscented Transformation zusammen. Eine Aussage über die Optimalität kann wie auch beim Erweiterten Kalman-Filter nicht getroffen werden. Im Vergleich zum Erweiterten Kalman-Filter treffen aber alle Vorteile zu, die sich aus den Überlegungen aus Abschnitt 2.6 ergeben. Fehler in den Berechnungen beruhen auf Termen von Ordnung vier und höher, so dass die Genauigkeit des Filters deutlich über der des Erweiterten Kalman-Filters liegt. Gleichzeitig sind zur Berechnung keine Ableitungen nötig, was einerseits die Komplexität reduziert und andererseits das Filter auch für System- und Ausgangsgleichungen anwendbar macht, welche nicht durchgehend differenzierbar sind. Beliebige Nichtlinearitäten wie zum Beispiel unstetige, nicht differenzierbare oder abschnittsweise definierte Funktionen können direkt benutzt werden, da die Berechnungen auf der einzelnen Transformation von Punkten beruht. Der Unterschied zu Filtern mit einer viel größeren Anzahl von Berechnungspunkten, wie dem Partikelfilter oder Monte Carlo-Filtern, liegt darin, dass eine genau definierte Anzahl von Punkten benutzt wird, die von der Dimension des Systems abhängt und so gewählt wird, dass Mittelwert und Kovarianz möglichst gut berechnet werden. Die Einschränkungen liegen hier lediglich in der Forderung, dass die vor-

2. Grundlagen

handenen Rauschprozesse mittelwertfrei, symmetrisch, monomodal und unkorreliert sein müssen. Die Wahl von κ beeinflusst dabei die Genauigkeit der Schätzung. Für gaußverteilte Rauschprozesse erhält man mit $n + \kappa = 3$ das beste Ergebnis. Für alle anderen Verteilungen ist in jedem Fall sichergestellt, dass die Schätzung nie schlechter ist als die Linearisierung, ohne dass der dortige Berechnungsaufwand nötig ist oder deren Einschränkungen gelten.

3. Verteilte und Dezentrale Zustandsschätzer

In diesem Kapitel wird das lineare Kalman-Filter in einer verteilten und dezentralisierten Form vorgestellt. Anschließend werden die Verteilung und Dezentralisierung benutzt, um dies auch für den nichtlinearen Fall des Unscented Kalman-Filter durchzuführen.

3.1. Motivation

Die bisherigen Filteralgorithmen sind allesamt zentral. Damit sind insbesondere zwei Aspekte gemeint: Zum einen müssen zur Berechnung alle Messungen zur Verfügung stehen, zum anderen wird immer der komplette Zustandsvektor geschätzt und damit auch entsprechend dimensionierte Matrizen. Diese beiden Eigenschaften zeigen, welche möglichen Probleme in einem realen Einsatz auftreten können. Besitzt das System eine große Anzahl von Messungen, so kann dies zu Engpässen bei der Kommunikation führen. Besitzt das System hingegen eine große Ordnung, so werden die nötigen Berechnungen sehr rechenintensiv und zu aufwändig für die vorhandene Hardware. Die Verteilung und Dezentralisierung eines zentralen Filters sind geeignete Maßnahmen, um diese Probleme zu verhindern.

Dezentralisierung bedeutet, dass verschiedene Messeinrichtungen zu einzelnen Knoten oder Subsystemen zusammengefasst werden. In jedem Knoten wird dann eine Filterung auf Basis der lokal vorhandenen Messungen durchgeführt. Besonderes Merkmal dezentraler Filter ist dabei, dass alle Filter den kompletten Zustandsvektor als Grundlage haben. Das heißt, dass keine Veränderung an den Systemgleichun-

3. Verteilte und Dezentrale Zustandsschätzer

gen durchgeführt wird. Zur Einbeziehung von Messungen in anderen Filtern ist außerdem noch eine Kommunikation zwischen den Filtern nötig. Dabei sind in dezentralen Filtern alle Knoten miteinander verbunden.

Findet zusätzlich zur Dezentralisierung auch eine Verteilung statt, so ist damit gemeint, dass auch in den Knoten immer nur ein Unterraum des Zustandsraums abgebildet wird. Um zwischen den lokalen Filtern einen Austausch von Informationen durchzuführen, muss daher mit Transformationsmatrizen gearbeitet werden. Diese Struktur ermöglicht es, dass in der Regel nicht jeder Knoten mit jedem anderen verbunden ist.

In den folgenden Abschnitten wird erst die Dezentralisierung der Messungen vorgestellt. Anschließend wird durch die Verteilung des globalen Systems auf unterschiedliche lokale Systeme eine Verteilung des Filteralgorithmus erreicht, die die gewünschten Eigenschaften besitzt.

3.2. Dezentrales Kalman-Filter

Das Verteilte Und Dezentrale Kalman-Filter (Distributed And Decentralised Kalman-Filter, DDKF) basiert zunächst auf den Gleichungen aus Abschnitt 2.3.3:

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \mathbf{A}_{k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+ + \mathbf{B}_{k-1} \mathbf{u}_{k-1}, \quad (3.2.1)$$

$$\mathbf{P}_k^- = \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{P}_{k-1}^+ \mathbf{A}_{k-1}^T + \mathbf{Q}_{k-1}, \quad (3.2.2)$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^T \mathbf{R}_k^{-1}, \quad (3.2.3)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k^+ = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_k^-), \quad (3.2.4)$$

$$\mathbf{P}_k^+ = \left((\mathbf{P}_k^-)^{-1} + \mathbf{C}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{C}_k \right)^{-1}. \quad (3.2.5)$$

Wobei hier (2.3.45) und (2.3.44) für die a posteriori Kovarianz und die Kalman-Verstärkung benutzt werden.

3.2.1. Dezentralisierung der Messungen

Es wird erst eine Dezentralisierung der Messungen vorgenommen. Der zentrale Messvektor kann in l einzelne Komponenten zerlegt werden, die jeweils einem Subsystem oder Knoten zuzuordnen sind:

$$\mathbf{y}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_{1,k} \\ \mathbf{y}_{2,k} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{l,k} \end{pmatrix}. \quad (3.2.6)$$

Analog dazu lässt sich die Ausgangsmatrix zerlegen:

$$\mathbf{C}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_{1,k} \\ \mathbf{H}_{2,k} \\ \vdots \\ \mathbf{H}_{l,k} \end{pmatrix}. \quad (3.2.7)$$

Die Anzahl der Zeilen in den einzelnen Messvektoren und Messmatrizen p ist dabei nicht identisch mit der Dimension des zentralen Messvektors. Schließlich muss der Vektor des Messrauschens entsprechend partitioniert werden:

$$\mathbf{v}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_{1,k} \\ \mathbf{v}_{2,k} \\ \vdots \\ \mathbf{v}_{l,k} \end{pmatrix}. \quad (3.2.8)$$

Für die einzelnen Komponenten wird angenommen, dass sie nicht miteinander korreliert sind, so dass man die Kovarianz wie folgt aufstellen kann:

$$E \left\{ \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T \right\} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{1,k} & \mathbf{0} & \dots \\ \mathbf{0} & \ddots & \\ \vdots & & \mathbf{R}_{l,k} \end{pmatrix}. \quad (3.2.9)$$

3. Verteilte und Dezentrale Zustandsschätzer

Mit diesen Voraussetzungen kann nun eine lokale Filterung für jedes lokale Subsystem i durchgeführt werden:

$$\hat{\mathbf{x}}_{i,k}^- = \mathbf{A}_{k-1} \hat{\mathbf{x}}_{i,k-1}^+ + \mathbf{B}_{k-1} \mathbf{u}_{k-1}, \quad (3.2.10)$$

$$\mathbf{P}_{i,k}^- = \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{P}_{i,k-1}^+ \mathbf{A}_{k-1}^\top + \mathbf{Q}_{k-1}, \quad (3.2.11)$$

$$\mathbf{K}_{i,k} = \mathbf{P}_{i,k}^+ \mathbf{H}_{i,k}^\top \mathbf{R}_{i,k}^{-1}, \quad (3.2.12)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_{i,k}^+ = \hat{\mathbf{x}}_{i,k}^- + \mathbf{K}_{i,k} \left(\mathbf{y}_{i,k} - \mathbf{H}_{i,k} \hat{\mathbf{x}}_{i,k}^- \right), \quad (3.2.13)$$

$$\tilde{\mathbf{P}}_{i,k}^+ = \left(\left(\mathbf{P}_{i,k}^- \right)^{-1} + \mathbf{H}_{i,k}^\top \mathbf{R}_{i,k}^{-1} \mathbf{H}_{i,k} \right)^{-1}. \quad (3.2.14)$$

Auch wenn der Zustand in jedem lokalen Subsystem dem globalen Zustandsvektor entspricht, wurde hier eine Indizierung mit i vorgenommen, um zwischen Schätzwerten, die auf unterschiedlichen Messungen beruhen, zu unterscheiden. Da die Korrektur nicht mit der kompletten Messung erfolgt, wird statt der üblichen Bezeichnung für die a posteriori Werte eine andere Notation verwendet, nämlich $\tilde{\mathbf{x}}_{i,k}^+$ für den Zustandsschätzwert und $\tilde{\mathbf{P}}_{i,k}^+$ für die Kovarianz des Schätzfehlers im Subsystem i . Diese unterschiedlichen lokalen Schätzungen müssen nun zu einer globalen Schätzung fusioniert werden, um ein korrektes Ergebnis zu erhalten. Dazu betrachtet man folgende Gleichung, die sich aus der Partitionierung der Ausgangsmatrix ergibt:

$$\mathbf{C}_k^\top \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{C}_k = \sum_{i=1}^l \mathbf{H}_{i,k}^\top \mathbf{R}_{i,k}^{-1} \mathbf{H}_{i,k}. \quad (3.2.15)$$

Die Gleichungen zur Berechnung der a posteriori Kovarianzmatrix im Kalman-Filter (3.2.5) und ihr Pendant in der lokalen Schätzung (3.2.14) können wie folgt umgeschrieben werden:

$$\mathbf{C}_k^\top \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{C}_k = \left(\mathbf{P}_k^+ \right)^{-1} - \left(\mathbf{P}_k^- \right)^{-1}, \quad (3.2.16)$$

$$\mathbf{H}_{i,k}^\top \mathbf{R}_{i,k}^{-1} \mathbf{H}_{i,k} = \left(\tilde{\mathbf{P}}_{i,k}^+ \right)^{-1} - \left(\mathbf{P}_{i,k}^- \right)^{-1}. \quad (3.2.17)$$

3.2. Dezentrales Kalman-Filter

Aus diesen Gleichungen kann man nun Folgendes herleiten:

$$\left(\mathbf{P}_k^+\right)^{-1} = \left(\mathbf{P}_k^-\right)^{-1} + \sum_{j=1}^l \left(\left(\tilde{\mathbf{P}}_{j,k}^+\right)^{-1} - \left(\mathbf{P}_{j,k}^-\right)^{-1} \right). \quad (3.2.18)$$

Diese Gleichung beschreibt die Berechnung der globalen a posteriori Kovarianzmatrix des Schätzfehlers auf Basis aller lokalen Werte. Die Inverse der Kovarianzmatrix wird auch als *Informationsmatrix* bezeichnet. Während die Varianz ein Maß für die Unsicherheit einer Zufallszahl ist, kann man die Inverse als Maß für die Sicherheit interpretieren. Je größer ihr Wert ist, desto sicherer ist die Aussage über den Zufallswert. In Abschnitt 2.3.3 wurden bereits für das lineare Kalman-Filter mit Gleichungen (2.3.44) und (2.3.45) die Korrektur für diese Matrix und die entsprechende Berechnung der Kalman-Verstärkung angegeben. Mit dieser Interpretation kann man nun zunächst den Term in der Summation betrachten. $\left(\mathbf{P}_{j,k}^-\right)^{-1}$ ist die Information, die nach der Prädiktion über den Zustand vorhanden ist. Diese ist nur von der Modellgenauigkeit abhängig und unabhängig von der Messung. Die Differenz $\left(\tilde{\mathbf{P}}_{j,k}^+\right)^{-1} - \left(\mathbf{P}_{j,k}^-\right)^{-1}$ drückt somit aus, um wie viel sich die Information durch die lokale Korrektur erhöht hat. Hat die Messung keinerlei Anteil an der Genauigkeit der Schätzung ($\mathbf{R} \rightarrow \infty$), so ist diese Differenz gleich Null, da $\left(\tilde{\mathbf{P}}_{j,k}^+\right)^{-1} = \left(\mathbf{P}_{j,k}^-\right)^{-1}$. Die Summe aller Differenzen ist somit gleichbedeutend für die gesamte Verbesserung der Information auf Grund aller Messungen. Diese wird zur Information der Prädiktion addiert, um die Information für den korrigierten Wert zu erhalten. Ist nur ein lokales System vorhanden, liegt also keine Dezentralisierung vor, so reduziert sich Gleichung (3.2.18) zu

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{P}_k^+\right)^{-1} &= \left(\mathbf{P}_k^-\right)^{-1} + \left(\tilde{\mathbf{P}}_k^+\right)^{-1} - \left(\mathbf{P}_k^-\right)^{-1} \\ &= \left(\tilde{\mathbf{P}}_k^+\right)^{-1}. \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

Der globale Wert entspricht somit dem lokalen. Da jedes lokale System den gleichen Zustandsvektor mit dem gleichen Modell schätzt, kann

3. Verteilte und Dezentrale Zustandsschätzer

man nun Gleichung (3.2.18) direkt für die lokalen Systeme benutzen, indem man lediglich formal eine Indizierung vornimmt:

$$\left(\mathbf{P}_{i,k}^+\right)^{-1} = \left(\mathbf{P}_{i,k}^-\right)^{-1} + \sum_{j=1}^l \left(\left(\tilde{\mathbf{P}}_{j,k}^+\right)^{-1} - \left(\mathbf{P}_{j,k}^-\right)^{-1} \right). \quad (3.2.20)$$

3.2.2. Dezentralisierung des Zustands

Die Dezentralisierung des Zustandes kann nun analog hergeleitet werden. Zunächst kann man mit der Verteilung von Messvektor und Ausgangsmatrix folgendes aufstellen:

$$\mathbf{C}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{y}_k = \sum_{i=1}^l \mathbf{H}_{i,k}^T \mathbf{R}_{i,k}^{-1} \mathbf{y}_{i,k}. \quad (3.2.21)$$

Gleichung (3.2.16) wird von links mit \mathbf{P}_{k+1}^+ multipliziert und mit Gleichung (3.2.3) zu

$$\mathbf{1} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{C}_{k+1} = \mathbf{P}_{k+1}^+ \left(\mathbf{P}_{k+1}^- \right)^{-1} \quad (3.2.22)$$

verrechnet. Als nächstes wird Gleichung (3.2.4) mit $\left(\mathbf{P}_{k+1}^+ \right)^{-1}$ von links multipliziert und mit Gleichung (3.2.22) verrechnet:

$$\mathbf{C}_{k+1}^T \left(\mathbf{R}_{k+1} \right)^{-1} \mathbf{y}_{k+1} = \left(\mathbf{P}_{k+1}^+ \right)^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^+ - \left(\mathbf{P}_{k+1}^- \right)^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^-. \quad (3.2.23)$$

Ähnliches wird mit Gleichung (3.2.16) durch Vormultiplizieren mit $\tilde{\mathbf{P}}_{i,k+1}^+$ und Verrechnen von Gleichung (3.2.12) durchgeführt:

$$\mathbf{1} - \mathbf{K}_{i,k+1} \mathbf{H}_{i,k+1} = \tilde{\mathbf{P}}_{i,k+1}^+ \left(\mathbf{P}_{i,k+1}^- \right)^{-1}. \quad (3.2.24)$$

Gleichung (3.2.24) wird nun mit $\left(\tilde{\mathbf{P}}_{i,k+1}^+ \right)^{-1}$ vormultipliziert und zu

$$\mathbf{H}_{i,k+1}^T \left(\mathbf{R}_{i,k+1} \right)^{-1} \mathbf{y}_{i,k+1} = \left(\tilde{\mathbf{P}}_{i,k+1}^+ \right)^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{i,k+1}^+ - \left(\mathbf{P}_{i,k+1}^- \right)^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{i,k+1}^- \quad (3.2.25)$$

3.2. Dezentrales Kalman-Filter

umgestellt. Nun kann man Gleichungen (3.2.23) und (3.2.25) in Gleichung (3.2.21) einsetzen und erhält:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^+ = \mathbf{P}_{k+1}^+ \cdot \left(\left(\mathbf{P}_{k+1}^- \right)^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- + \sum_{j=1}^l \left(\left(\tilde{\mathbf{P}}_{j,k+1}^+ \right)^{-1} \tilde{\mathbf{x}}_{j,k+1}^+ - \left(\mathbf{P}_{j,k+1}^- \right)^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{j,k+1}^- \right) \right). \quad (3.2.26)$$

Schließlich muss nur noch eine Verteilung für jeden Knoten durchgeführt werden um

$$\hat{\mathbf{x}}_{i,k+1}^+ = \mathbf{P}_{i,k+1}^+ \cdot \left(\left(\mathbf{P}_{i,k+1}^- \right)^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{i,k+1}^- + \sum_{j=1}^l \left(\left(\tilde{\mathbf{P}}_{j,k+1}^+ \right)^{-1} \tilde{\mathbf{x}}_{j,k+1}^+ - \left(\mathbf{P}_{j,k+1}^- \right)^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{j,k+1}^- \right) \right) \quad (3.2.27)$$

zu erhalten. Diese Gleichung beschreibt die Fusion der a posteriori Schätzwerte aller Knoten j in einem bestimmten Knoten i .

Das Dezentrale Kalman-Filter (Decentralised Kalman Filter, DKF) lässt sich somit mit den Gleichungen (3.2.10) bis (3.2.14), (3.2.20) und (3.2.27) beschreiben. Jeder Knoten führt auf Basis der vorhandenen Messung eine lokale Schätzung durch. Anschließend erfolgt eine Fusion aller lokalen Zwischenergebnisse in allen Knoten, um so zu einem globalen Ergebnis zu kommen.

Ein solches Filter hat die Notwendigkeit, alle Messungen zentral zu verarbeiten, beseitigt. Nach wie vor wird aber mit dem vollständigen Zustandsvektor operiert. Um diese Beschränkung aufzuheben, muss nun eine Verteilung des zentralen Modells erfolgen.

Die Herleitung des DKF findet sich zum ersten Mal in Veröffentlichungen von Rao (Rao und Durrant-Whyte, 1991; Rao u. a., 1993).

3.3. Verteiltes Und Dezentrales Kalman-Filter

Nach dem dezentralen Filter wird nun das verteilte und dezentrale Filter gezeigt. Seine Erweiterung besteht in der Verteilung der Systemmodelle, so dass in einzelnen Knoten nicht das komplette Systemmodell implementiert werden muss.

3.3.1. Transformationsmatrizen

Die Verteilung linearer Systeme beruht auf einer linearen Abbildung des globalen Zustandsraumes auf lokale Unterräume mit Hilfe von Transformationsmatrizen. Es gilt, dass ein lokaler Zustandsvektor x_i sich vom globalen Zustandsvektor x mit

$$x_i = T_i x \quad (3.3.1)$$

ableiten lässt. Dabei wird x_i in der Regel eine niedrigere Dimension als x besitzen und somit also einen Unterraum des globalen Zustandsraums abbilden. Ist der Ausgangsvektor wie in Abschnitt 3.2 zerlegt, so kann man zwischen der lokalen Ausgangsmatrix des dezentralisierten Systems $H_{i,k}$ und der lokalen Ausgangsmatrix des verteilten und dezentralisierten Systems $C_{i,k}$ folgender Zusammenhang herstellen:

$$H_{i,k} = C_{i,k} T_{i,k}. \quad (3.3.2)$$

Mit dieser lokalen Ausgangsmatrix ergibt sich die lokale Ausgangsgleichung

$$y_{i,k} = C_{i,k} x_{i,k}, \quad (3.3.3)$$

welche die lokale Messung mit dem lokalen Zustand in Verbindung bringt.

Mit Hilfe dieser Transformationsmatrizen können aus der globalen Systemmatrix lokale Matrizen abgeleitet werden. Zum lokalen Zustandsvektor $x_{i,k}$ kann mit

$$A_{i,k} = T_i A_k T_k^\dagger \quad (3.3.4)$$

3.3. Verteiltes Und Dezentrales Kalman-Filter

die lokale Systemmatrix gebildet werden. Da die Transformationsmatrizen im Allgemeinen nicht quadratisch sind, kann man keine einfache Inverse bilden. Daher ist es nötig, mit der *Moore-Penrose-Pseudoinversen* (kurz Pseudoinverse) \mathbf{T}^\dagger zu arbeiten.

Für das verteilte Filter ist es nötig, Informationen zwischen unterschiedlichen Knoten auszutauschen. Dies kann natürlich durch eine Transformation vom lokalen Zustandsraum i zum globalen mit anschließender Transformation in einen anderen lokalen Zustandsraum j erfolgen. Diese Berechnung kann aber auch vereinfacht werden. Für die Transformation vom Unterraum i in das globale System gilt:

$$\mathbf{x}_{i,k} = \mathbf{T}_{i,k}\mathbf{x}_k. \quad (3.3.5)$$

Andererseits kann man den globalen Zustandsvektor mit

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{T}_{j,k}^\dagger\mathbf{x}_{j,k} \quad (3.3.6)$$

in den Unterraum in Knoten j transformieren. Kombiniert man nun Gleichungen (3.3.5) und (3.3.6), so erhält man

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{i,k} &= \mathbf{T}_{i,k}\mathbf{x}_k \\ &= \mathbf{T}_{i,k}\mathbf{T}_{j,k}^\dagger\mathbf{x}_{j,k} \\ &= \mathbf{V}_{ji,k}\mathbf{x}_{j,k} \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

und damit die Matrix

$$\mathbf{V}_{ji,k} = \mathbf{T}_{i,k}\mathbf{T}_{j,k}^\dagger \quad (3.3.8)$$

welche die direkte Transformation aus einem Unterraum j in einen anderen Unterraum i des Systems beschreibt. Überschneiden sich beide Räume nicht, ist also nicht eine Komponente aus \mathbf{x}_i mit einer aus \mathbf{x}_j identisch, so ist $\mathbf{V}_{ji} = \{ \}$. Ist hingegen $\mathbf{x}_i \equiv \mathbf{x}_j$, so ist $\mathbf{V}_{ji} = \mathbf{1}$.

3.3.2. Wahl der Transformationsmatrizen

Die Wahl der lokalen Systeme ist über die Transformationsmatrizen mit dem globalen System verknüpft. Bei der praktischen Umsetzung

3. Verteilte und Dezentrale Zustandsschätzer

kann es dabei sowohl die Möglichkeit geben, dass ein System zunächst global bekannt und modelliert ist und dann daraus lokale Systeme abgeleitet werden, als auch die Variante, dass lokale Systeme unabhängig von einander modelliert und dann über ihre Verkopplungen das globale System erstellt werden. Das Resultat ist in jedem Fall eine globale Systemmatrix A und ein Satz an Transformationsmatrizen T_i . Da im Rahmen dieser Arbeit davon ausgegangen wird, dass die Transformationsmatrix lediglich eine Auswahl des globalen Zustandsvektors repräsentiert, wird sie lediglich 1 oder 0 als Eintrag besitzen. Es gibt zwei praktikable Ansätze, wie die Verteilung des Systems erfolgen kann.

Häufig wird eine Partitionierung auf Grund verschiedener Bestandteile des Systems erfolgen. Ein System, welches einen inneren Fluss besitzt, wie zum Beispiel eine chemische Anlage mit mehreren Rührkesseln und Reaktoren, wird man entsprechend in hintereinander verkoppelte Untersysteme aufteilen. In jedem einzelnen Teil werden Vorgänge entsprechend ihrer Reaktionen und ihres Flussverhaltens modelliert und es wird nur wenige Zustände geben, die am Austausch zwischen den Systemen beteiligt sind. Ebenso wird man bei Systemen, die unterschiedliche Domänen verknüpfen, wie zum Beispiel elektromechanische, versuchen, eine Grobeinteilung in diese Domänen vorzunehmen und dann erneut die Größen bestimmen, die eine Verknüpfung herstellen. Das übliche Vorgehen ist eine Zuordnung der Zustände zu lokalen Systemen. Anschließend kann durch die globale Systemmatrix bestimmt werden, welche weiteren Zustände zur Berechnung der Differenzgleichungen nötig sind. Dieses Vorgehen kann es erforderlich machen, dass weitere Zustände für den jeweiligen lokalen Raum ausgewählt werden müssen. Für das Beispiel hintereinander geschalteter Reaktorrührkessel kann dieses Vorgehen dazu führen, dass am Ende mehrere lokale Systeme entstehen, die alle eine geringere Systemordnung als das globale System besitzen und nicht alle miteinander verbunden sind. Es ist aber auch möglich, dass durch immer weiteres Hinzufügen von Zuständen genau dieses nicht erreicht wird. Dadurch entsteht ein vollständig vernetztes System, welches dem Ziel einer Verteilung widerspricht. Allgemein kann man das Vor-

3.3. Verteiltes Und Dezentrales Kalman-Filter

gehen folgendermaßen beschreiben:

- a) Auf Basis der beschriebenen Systembetrachtung erfolgt eine Einteilung in Teilsysteme; man erhält so für jedes Teilsystem i einen Zustandsvektor x_i . Diese Zustände werden im Folgenden *lokale Zustände* genannt. Zu dieser Verteilung der Zustände gehört auch die Dezentralisierung der Messungen, so dass die lokalen Systeme auch einen Messvektor y_i besitzen.
- b) Im nächsten Schritt werden die Differenzen- und Ausgangsgleichungen angepasst. Dazu werden die zugehörigen globalen Differenzgleichungen betrachtet. Sind über sie noch weitere Zustände verkoppelt, so werden diese *zusätzlichen lokalen Zustände* dem lokalen Zustandsvektor hinzugefügt. Da durch diese Zustände weitere Differenzgleichungen berücksichtigt werden müssen, kann es vorkommen, dass der komplette globale Zustandsvektor gebildet wird. Um dies zu verhindern, können Zustände, die nur einen geringen Einfluss haben, gestrichen werden. Dies kann auch automatisiert erfolgen, indem alle Einträge in der Systemmatrix, die einen Schwellenwert unterschreiten, zu Null gesetzt werden. Auf Grund der schon vorhandenen Zuordnung der Komponenten des Messvektors müssen dann noch die Ausgangsmatrizen entsprechend angepasst werden.

Dieses Vorgehen wird in den meisten Fällen von Vorteil sein und lässt sich mit einer Analyse der globalen Systemmatrix leicht bewerkstelligen. Es führt natürlich wie bei jeder Ordnungsreduktion zu einer verringerten Genauigkeit des Modells und somit zu größeren systematischen Fehlern bei der Schätzung. Ein Vergleich mit einem zentralen Filter ist nicht mehr möglich, da dieser mit einem anderen Modell arbeitet.

3.3.3. Verteilung von Schätzwerten und Kovarianzmatrizen

Mit Hilfe dieser Überlegungen können Transformationen von Schätzungen der Zustandsvektoren und der dazugehörigen Kovarianzma-

3. Verteilte und Dezentrale Zustandsschätzer

trizen aus einem Unterraum in einen anderen formuliert werden. Dazu müssen die Überlegungen der Transformation auf die benötigten Größen angewandt werden. Wie später noch gezeigt wird, muss zwischen Größen unterschieden werden, die in einem Knoten j auf Grund des dort vorhandenen Filters und der verfügbaren Messungen berechnet werden, und Größen, die in einen anderen Knoten i transformiert, aber noch nicht weiter verarbeitet wurden. Für die Transformation ist es unerheblich, ob die Ausgangsgröße ein a priori oder a posteriori Schätzwert, eine a priori oder a posteriori Kovarianz oder ein Zwischenschritt ist. Daher werden zur Herleitung der Transformationen die Bezeichnungen $\check{\mathbf{x}}_{j,k}$ und $\check{\mathbf{P}}_{j,k}$ für die Größen des Ursprungssystems j benutzt und $\check{\mathbf{x}}_{ji,k}$ und $\check{\mathbf{P}}_{ji,k}$ für die so in das System i transformierten Größen, die dann bei der Anwendung auf den Filteralgorithmus durch die entsprechenden Bezeichnungen ersetzt werden.

Die Transformation eines Schätzwertes erfolgt so, wie es bereits für den eigentlichen Zustand überlegt wurde. Mit

$$\check{\mathbf{x}}_{ji,k} = \mathbf{V}_{ji,k} \check{\mathbf{x}}_{j,k} \quad (3.3.9)$$

kann man einen Zustand aus dem lokalen System j in ein anderes System i überführen, wobei die Matrix $\mathbf{V}_{ji,k}$ nach Gleichung (3.3.8) bestimmt wird. Die Transformation einer Kovarianzmatrix lässt sich mit Hilfe der Definition über den Erwartungswert leicht bestimmen. Zunächst wird die Transformation einer Kovarianzmatrix in den globalen Zustandsraum betrachtet; dazu wird zusätzlich eine Indizierung mit g eingeführt, falls das globale System gemeint ist.

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{P}}_{jg,k} &= E \left\{ \left(\mathbf{T}_{j,k}^\dagger (\mathbf{x}_k - \check{\mathbf{x}}_{j,k}) \right) \left(\mathbf{T}_{j,k}^\dagger (\mathbf{x}_k - \check{\mathbf{x}}_{j,k}) \right)^\top \right\} \\ &= \mathbf{T}_{j,k}^\dagger E \left\{ (\mathbf{x}_k - \check{\mathbf{x}}_{j,k}) (\mathbf{x}_k - \check{\mathbf{x}}_{j,k})^\top \right\} \left(\mathbf{T}_{j,k}^\dagger \right)^\top \\ &= \mathbf{T}_{j,k}^\dagger \check{\mathbf{P}}_{j,k} \left(\mathbf{T}_{j,k}^\dagger \right)^\top. \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

Formuliert man dafür wieder den Erwartungswert und transformiert

3.3. Verteiltes Und Dezentrales Kalman-Filter

ihn in das System i , so ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \check{\mathbf{P}}_{ji,k} &= E \left\{ \left(\mathbf{T}_{i,k} \left(\mathbf{x}_k - \check{\mathbf{x}}_{jg,k} \right) \right) \left(\mathbf{T}_{i,k} \left(\mathbf{x}_k - \check{\mathbf{x}}_{jg,k} \right) \right)^T \right\} \\
 &= \mathbf{T}_{i,k} E \left\{ \left(\mathbf{x}_k - \check{\mathbf{x}}_{jg,k} \right) \left(\mathbf{x}_k - \check{\mathbf{x}}_{jg,k} \right)^T \right\} \mathbf{T}_{i,k}^T \\
 &= \mathbf{T}_{i,k} \check{\mathbf{P}}_{jg,k} \mathbf{T}_{i,k}^T.
 \end{aligned} \tag{3.3.11}$$

Durch Einsetzen erhält man

$$\begin{aligned}
 \check{\mathbf{P}}_{ji,k} &= \mathbf{T}_{i,k} \check{\mathbf{P}}_{jg,k} \mathbf{T}_{i,k}^T \\
 &= \mathbf{T}_{i,k} \left(\mathbf{T}_{j,k}^+ \check{\mathbf{P}}_{j,k} \left(\mathbf{T}_{j,k}^+ \right)^T \right) \mathbf{T}_{i,k}^T \\
 &= \mathbf{V}_{ji} \check{\mathbf{P}}_{j,k} \mathbf{V}_{ji}^T
 \end{aligned} \tag{3.3.12}$$

und somit eine direkte Umformung einer Kovarianzmatrix aus einem lokalen System j in ein anderes System i .

Da in den Fusionsgleichungen (3.2.20) und (3.2.27) die Inversen der Kovarianzmatrizen benötigt werden, ist es hilfreich, die Beziehung

$$\left(\check{\mathbf{P}}_{ji,k} \right)^{-1} = \left(\mathbf{V}_{ji}^T \right)^+ \left(\check{\mathbf{P}}_{j,k} \right)^{-1} \mathbf{V}_{ji}^+ \tag{3.3.13}$$

herzuleiten. Gleichzeitig stellt man fest, dass in den Fusionsgleichungen zwei Arten von Termen auftreten, die transformiert werden müssen: Die Inversen von Kovarianzmatrizen und das Produkt aus Inverser und einem Zustandsvektor. Aus diesem Grund bietet es sich an, auch die Transformation für den zweiten Term zur Vereinfachung gesondert herzuleiten:

$$\begin{aligned}
 \check{\mathbf{P}}_{ji,k}^{-1} \mathbf{x}_{ji,k} &= \left(\mathbf{T}_{j,k}^+ \check{\mathbf{P}}_{j,k} \left(\mathbf{T}_{j,k}^+ \right)^+ \right)^{-1} \mathbf{V}_{ji,k} \check{\mathbf{x}}_{j,k}, \\
 &= \left(\mathbf{V}_{ji}^T \right)^+ \left(\check{\mathbf{P}}_{j,k} \right)^{-1} \mathbf{V}_{ji}^+ \mathbf{V}_{ji,k} \check{\mathbf{x}}_{j,k}, \\
 &= \left(\mathbf{V}_{ji}^T \right)^+ \left(\check{\mathbf{P}}_{j,k} \right)^{-1} \check{\mathbf{x}}_{j,k}.
 \end{aligned} \tag{3.3.14}$$

3. Verteilte und Dezentrale Zustandsschätzer

Wenn man nun

$$\mathbf{e}_{j,k} = \left(\tilde{\mathbf{P}}_{j,k}^+\right)^{-1} \tilde{\mathbf{x}}_{j,k}^+ - \left(\mathbf{P}_{j,k}^-\right)^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{j,k}^- \quad (3.3.15)$$

und

$$\mathbf{E}_{j,k} = \left(\tilde{\mathbf{P}}_{j,k}^+\right)^{-1} - \left(\mathbf{P}_{j,k}^-\right)^{-1} \quad (3.3.16)$$

definiert, so kann man die aus dem System j in das System i transformierten Ausdrücke $\mathbf{E}_{ji,k}$ und $\mathbf{e}_{ji,k}$ folgendermaßen herleiten.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{ji,k} &= \left(\mathbf{V}_{ji,k}^T\right)^\dagger \left(\tilde{\mathbf{P}}_{j,k}^+\right)^{-1} \mathbf{V}_{ji,k}^+ - \left(\mathbf{V}_{ji,k}^T\right)^\dagger \left(\mathbf{P}_{j,k}^-\right)^{-1} \mathbf{V}_{ji,k}^+ \\ &= \left(\mathbf{V}_{ji,k}^T\right)^\dagger \left(\left(\tilde{\mathbf{P}}_{j,k}^+\right)^{-1} - \left(\mathbf{P}_{j,k}^-\right)^{-1} \right) \mathbf{V}_{ji,k}^+ \\ &= \left(\mathbf{V}_{ji,k}^T\right)^\dagger \mathbf{E}_{j,k} \mathbf{V}_{ji,k}^+ \end{aligned} \quad (3.3.17)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{ji,k} &= \left(\mathbf{V}_{ji}^T\right)^\dagger \left(\tilde{\mathbf{P}}_{j,k}^+\right)^{-1} \tilde{\mathbf{x}}_{j,k}^+ - \left(\mathbf{V}_{ji}^T\right)^\dagger \left(\mathbf{P}_{j,k}^-\right)^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{j,k}^- \\ &= \left(\mathbf{V}_{ji}^T\right)^\dagger \left(\left(\tilde{\mathbf{P}}_{j,k}^+\right)^{-1} \tilde{\mathbf{x}}_{j,k}^+ - \left(\mathbf{P}_{j,k}^-\right)^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{j,k}^- \right) \\ &= \left(\mathbf{V}_{ji}^T\right)^\dagger \mathbf{e}_{j,k}. \end{aligned} \quad (3.3.18)$$

Somit lassen sich die Fusionsgleichungen (3.2.20) und (3.2.27) um eine Transformation erweitern:

$$\left(\mathbf{P}_{i,k}^+\right)^{-1} = \left(\mathbf{P}_{i,k}^-\right)^{-1} + \sum_{j=1}^l \left(\mathbf{E}_{ji,k}\right), \quad (3.3.19)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{i,k+1}^+ = \mathbf{P}_{i,k+1}^+ \left(\left(\mathbf{P}_{i,k+1}^-\right)^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{i,k+1}^- + \sum_{j=1}^l \left(\mathbf{e}_{ji,k}\right) \right). \quad (3.3.20)$$

3.3.4. Algorithmus

Mit Hilfe dieser Zusammenhänge kann nun das Dezentrale Kalman-Filter um eine Verteilung erweitert werden, so dass man das *Verteilte Und Dezentrale Kalman-Filter* erhält. Die Vorgehensweise ist dabei

3.3. Verteiltes Und Dezentrales Kalman-Filter

weitestgehend analog. Sie wird lediglich um eine Verteilung der Modelle und einer Anpassung des Fusionsschrittes mit Hilfe der Transformationsmatrizen erweitert. Zunächst werden für alle Knoten i die lokalen Modelle aufgestellt, die über die Transformationsmatrizen \mathbf{T}_i mit dem globalen Modell und über \mathbf{V}_{ji} untereinander in Bezug stehen. In jedem Knoten werden lokale Kalman-Filter implementiert. Zu Beginn werden die Filter jeweils initialisiert. Anschließend wird in jedem Zeitschritt k eine Prädiktion durchgeführt:

$$\hat{\mathbf{x}}_{i,k}^- = \mathbf{A}_{i,k-1} \hat{\mathbf{x}}_{i,k-1}^+ + \mathbf{B}_{i,k-1} \mathbf{u}_{i,k-1}, \quad (3.3.21)$$

$$\mathbf{P}_{i,k}^- = \mathbf{A}_{i,k-1} \mathbf{P}_{i,k-1}^+ \mathbf{A}_{i,k-1}^T + \mathbf{Q}_{i,k-1}. \quad (3.3.22)$$

Danach werden auf Basis der lokal verfügbaren Messungen die Korrekturen berechnet. Da die Ergebnisse dieses Schrittes noch nicht den globalen a posteriori Schätzungen entsprechen, wird die Notation erneut durch eine Tilde angepasst:

$$\mathbf{K}_{i,k} = \mathbf{P}_{i,k}^+ \mathbf{C}_{i,k}^T \mathbf{R}_{i,k}^{-1}, \quad (3.3.23)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_{i,k} = \hat{\mathbf{x}}_{i,k}^- + \mathbf{K}_{i,k} \left(\mathbf{y}_{i,k} - \mathbf{C}_{i,k} \hat{\mathbf{x}}_{i,k}^- \right), \quad (3.3.24)$$

$$\tilde{\mathbf{P}}_{i,k}^+ = \left(\left(\mathbf{P}_{i,k}^- \right)^{-1} + \mathbf{C}_{i,k}^T \mathbf{R}_{i,k}^{-1} \mathbf{C}_{i,k} \right)^{-1} \quad (3.3.25)$$

Im letzten Schritt müssen die bisherigen Schätzungen zum jeweiligen lokalen a posteriori Wert fusioniert werden. Dazu muss ein Austausch der benötigten Informationen zwischen allen verbundenen Knoten stattfinden. Verbunden sind alle diejenigen Knoten i und j miteinander, bei denen \mathbf{V}_{ji} nicht der leeren Menge entspricht. Der Fall $i = j$ muss ebenfalls mit berechnet werden. Die Argumente der Summen berechnen sich nach

$$\mathbf{E}_{j,k} = \left(\tilde{\mathbf{P}}_{j,k}^+ \right)^{-1} - \left(\mathbf{P}_{j,k}^- \right)^{-1}, \quad (3.3.26)$$

$$\mathbf{e}_{j,k} = \left(\tilde{\mathbf{P}}_{j,k+1}^+ \right)^{-1} \tilde{\mathbf{x}}_{j,k+1}^+ - \left(\mathbf{P}_{j,k+1}^- \right)^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{j,k+1}^-, \quad (3.3.27)$$

$$\mathbf{E}_{ji,k} = \left(\mathbf{V}_{ji,k}^T \right)^\dagger \mathbf{E}_{j,k} \mathbf{V}_{ji,k}^+ \quad (3.3.28)$$

3. Verteilte und Dezentrale Zustandsschätzer

und

$$\mathbf{e}_{ji,k} = \left(\mathbf{V}_{ji}^T\right)^\dagger \mathbf{e}_{j,k}, \quad (3.3.29)$$

so dass man die Fusion mit

$$\left(\mathbf{P}_{i,k}^+\right)^{-1} = \left(\mathbf{P}_{i,k}^-\right)^{-1} + \sum_{j=1}^l \left(\mathbf{E}_{ji,k}\right) \quad (3.3.30)$$

und

$$\hat{\mathbf{x}}_{i,k+1}^+ = \mathbf{P}_{i,k+1}^+ \left(\left(\mathbf{P}_{i,k+1}^-\right)^- \hat{\mathbf{x}}_{i,k+1}^- + \sum_{j=1}^l \left(\mathbf{e}_{ji,k}\right) \right) \quad (3.3.31)$$

berechnen kann.

Das DDKF wurde von Mutambara in mehreren Veröffentlichungen präsentiert (Mutambara und Durrant-Whyte, 1994; Mutambara, 1998).

3.3.5. Eigenschaften

Das Verteilte Und Dezentrale Kalman-Filter entspricht ohne eine Verteilung der Modelle algebraisch dem Dezentralen Kalman-Filter, welches wiederum äquivalent zum linearen Kalman-Filter ist.

Die Vorteile der verteilten und dezentralen Schätzung liegen in der guten Skalierbarkeit des Filternetzwerkes und der reduzierten lokalen Systemordnung. Für große Systeme wird man unter Verwendung einer lokalen Ordnungsreduktion eine Vernetzung haben, die gut mit der Anzahl der lokalen Systeme skaliert. Gleichzeitig werden alle lokalen Systeme einer solchen Ordnung sein, dass die Berechnungen mit annehmbarem Aufwand durchgeführt werden können.

3.4. Verteiltes Und Dezentrales Unscented Kalman-Filter

In den vorangegangenen Abschnitten 3.2 und 3.3 wurden ausgehend vom linearen Kalman-Filter durch Dezentralisierung des Messvektors

3.4. Verteiltes Und Dezentrales Unscented Kalman-Filter

und Verteilung des Systemmodells die jeweiligen Filter hergeleitet. Die Vorteile, die sich dadurch im Vergleich zum normalen Kalman-Filter ergeben, liegen vor allem in der guten Skalierbarkeit und im geringeren lokalen Rechenbedarf für große Systeme. Im Abschnitt 2.7 wurde das Unscented Kalman-Filter eingeführt. Dort wurden ebenfalls die Vorteile gegenüber dem linearen Kalman-Filter hervorgehoben, die sich für nichtlineare Systeme ergeben.

Die Vorteile beider Mechanismen, die Verteilung und Dezentralisierung sowie die Unscented Transformation, werden nun kombiniert, um mit dem *Verteilten Und Dezentralen Unscented Kalman-Filter* (Distributed and Decentralised Kalman Filter, DDUKF) einen rekursiven Zustandsschätzer zu erhalten, der für nichtlineare Systeme bei hoher Genauigkeit, geringem Rechenaufwand und guter Skalierbarkeit einsetzbar ist.

3.4.1. Verteilung der Modelle

Wie in Abschnitt 2.1.2 beschrieben, wird ein nichtlineares System durch

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \mathbf{w}, \quad (3.4.1)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v} \quad (3.4.2)$$

definiert. Eine zeitdiskrete Form liegt mit

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, t_{k-1}) + \mathbf{w}_{k-1}, \quad (3.4.3)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k, t_k) + \mathbf{v}_k \quad (3.4.4)$$

vor. Eine Verteilung des Zustandsvektors lässt sich wie bei linearen Systemen durch eine Transformationsmatrix beschreiben:

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{T}_i \mathbf{x}. \quad (3.4.5)$$

Die Verteilung des Systemmodells auf dieser Basis unterliegt den gleichen Einschränkungen wie im linearen Fall und hat das gleiche Ziel. Es soll erreicht werden, dass die Systemordnung in den lokalen Systemen geringer ist als im globalen. Im Allgemeinen wird dies aber

3. Verteilte und Dezentrale Zustandsschätzer

nur in Systemen, die bereits aus einzelnen, nicht in rückgekoppelten Teilen bestehen, zu einem verteilten System führen. Bei linearen Systemen kann man durch einfaches Streichen der Komponenten in der Systemmatrix eine Vereinfachung vornehmen, da hier nur Linearkombinationen der Zustände erzeugt werden. So kann ein Zustand, der nur einen geringen Beitrag zur Entwicklung eines anderen Zustandes hat, ignoriert werden. Bei nichtlinearen Systemen ist dies nicht möglich, da hier alle mögliche Formen der Abhängigkeit vorliegen können.

Eine Möglichkeit, eine Verteilung vorzunehmen, wird mit der folgenden Heuristik gegeben:

- a) Ausgehend von einem vorliegenden modellierten Gesamtsystem muss eine Einteilung in verschiedene Systemteile erfolgen. Werden Teile des Systems zum Beispiel in unterschiedlichen Domänen wie Fluidik, Mechanik oder Elektronik beschrieben, so deutet dies auf verschiedene Bereiche hin, die einerseits geschlossen beschrieben werden können und andererseits nur über wenige Größen miteinander verkoppelt sind. Ein anderer Ansatz ist eine Betrachtung von leicht zu erkennenden Einheiten, wie zum Beispiel unterschiedliche Komponenten eines mechanischen Systems. Ebenso kann die Frage, welche Größen wo gemessen werden, bei dieser Fragestellung hilfreich sein. Auf Basis dieser Einschätzung kann nun die Zuteilung der Zustände zu verschiedenen Teilsystemen erfolgen; man erhält so für jedes Teilsystem i einen Zustandsvektor x_i . Diese Zustände werden im Folgenden *lokale Zustände* genannt.
- b) Im nächsten Schritt wird zunächst die vektorwertige Differenzgleichungsfunktion f_i der jeweiligen lokalen Zustände für die lokalen Systeme formuliert. Es wird dabei im Allgemeinen immer der Fall auftreten, dass diese Funktion f_i nicht nur von x_i abhängt, sondern noch zusätzliche Komponenten des globalen Zustandsvektors beinhaltet.
- c) Diese *zusätzlichen lokalen Zustände* können aus den genannten Gründen nicht einfach gestrichen werden. Daher ist es nötig, den

3.4. Verteiltes Und Dezentrales Unscented Kalman-Filter

Zustandsvektor in den Systemen um diese zusätzlichen Zustände zu erweitern.

- d) Würde man die Schritte b) und c) für die zusätzlichen lokalen Zustände wiederholen, so würde durch weitere Differenzgleichungen die Notwendigkeit entstehen, weitere Zustände hinzuzufügen. Dies würde so lange weitergehen, bis der komplette globale Zustandsvektor abgebildet ist oder zumindest maximal große, durch fehlende Verkopplung getrennte Systeme. Da dieses Vorgehen nicht wünschenswert ist, wird mit den Differenzgleichungen der zusätzlichen lokalen Zustände anders verfahren. Da jeder globale Zustand mindestens in einem Teilsystem auch lokaler Zustand ist, ist seine Differenzgleichung ebenfalls mindestens ein Mal implementiert. Daher reicht es aus, im Falle von zusätzlichen lokalen Zuständen diese als zu schätzende Parameter des lokalen Systems zu definieren. Das heißt in der Umsetzung, dass im lokalen System die Differenzgleichung für den Zeitschritt $k + 1$ den gleichen Wert wie im Zeitschritt k zuordnet. Im Falle eines zeitkontinuierlichen Systems, welches durch numerische Verfahren diskretisiert wird, entspricht dies einer Differentialgleichung, die zu Null gesetzt wird. Für das lokale System wird der Zustand somit als Konstante angenommen. Durch die Eigenschaften der Kalman-Filter kann ein solcher Parameter aber zur Laufzeit dennoch seinen Wert ändern. Da der Zustand in anderen Systemen auf Basis seiner korrekten Modellierung prädiziert und durch Messungen korrigiert wird, ergibt sich somit die Möglichkeit, dass der korrekte Wert durch den Fusionschritt auch auf Knoten übertragen wird, die ihn als zusätzlichen Zustand betrachten und somit als Parameter ohne eigene Dynamik modelliert haben. Dabei muss auf die Beobachtbarkeit der so erzeugten Subsysteme geachtet werden. Dies wird in Abschnitt 3.5 behandelt.

Eine andere Interpretation dieses Vorgehens kann diese zusätzlichen Zustände als Störungen des lokalen Systems betrachten. Diese werden ebenfalls mit einer Nulldynamik modelliert und

3. Verteilte und Dezentrale Zustandsschätzer

durch das Filter im Laufe der Schätzung an ihren echten Wert angepasst. Das lokale Filter wirkt somit gleichzeitig als Störbeobachter für diese Zustände.

3.4.2. Verteilung und Fusion im UKF

In den Abschnitten 2.5 und 2.6 wurden die Eigenschaften nichtlinearer Transformationen von Mittelwerten und den dazugehörigen Kovarianzmatrizen hergeleitet und auf die Eigenschaften der Unscented Transformation eingegangen. Auf dieser Basis erfolgte dann die Herleitung des UKF in Abschnitt 2.7. Die bei dieser Herleitung wichtige Argumentation ist auch bei der Anwendung der Fusion entscheidend. Das UKF besitzt die gleiche Struktur wie das KF. Insbesondere die Tatsache, dass es im Kern um die – im linearen Fall optimale – Schätzung des Mittelwertes und der Varianz der Verteilung einer Zufallszahl geht, ist für die Anwendung der UT wichtig. Da die UT lediglich an Stelle einer exakten Berechnung im linearen Fall benutzt wird, wird durch sie nicht die Interpretation sondern lediglich die Genauigkeit der Größen im Vergleich zum linearen Fall geändert. Das heißt, dass die a priori und a posteriori Schätzwerte auch beim UKF die gleiche Bedeutung besitzen und demzufolge auch andere Annahmen, die darauf aufbauen, sinngemäß übernommen werden können. Die Herleitung der Fusion in Abschnitt 3.2 lässt die Struktur des Filters ebenso unberührt und erweitert die Verarbeitung der Daten lediglich um einen nachgeschalteten Schritt. Die Berechnung der Schätzwerte ist in jedem einzelnen Schritt des DKF identisch zum KF. Aus diesen Gründen wird nun die Fusion auf auch das UKF angewandt. Eine andere Betrachtungsweise geht vom KF aus und sieht lediglich eine gleichzeitige Anwendung beider Konzepte – der UT und der Verteilung und Fusion – vor.

3.4.3. Algorithmus

In jedem lokalen Knoten werden UKF mit den entsprechenden Modellen implementiert. Die Initialisierung erfolgt wie beim zentralen Filter

3.4. Verteiltes Und Dezentrales Unscented Kalman-Filter

mit:

$$\hat{\mathbf{x}}_{i,0}^+ = E \{ \mathbf{x}_{i,0} \}, \quad (3.4.6)$$

$$\mathbf{P}_{i,0}^+ = E \left\{ \left(\mathbf{x}_{i,0} - \hat{\mathbf{x}}_{i,0}^+ \right) \left(\mathbf{x}_{i,0} - \hat{\mathbf{x}}_{i,0}^+ \right)^T \right\}. \quad (3.4.7)$$

Anschließend werden in den Knoten i für alle Zeitschritte k die folgenden Größen berechnet. Die Prädiktion erfolgt mit

$$\tilde{\mathbf{x}}_i^{(0)} = 0 \quad (3.4.8)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_i^{(v)} = + \left(\sqrt{(n_i + \kappa) \mathbf{P}_{i,k-1}^+} \right)_v \quad \text{für } v = 1, \dots, n, \quad (3.4.9)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_i^{(v+n)} = -\tilde{\mathbf{x}}_i^{(v)} \quad \text{für } v = 1, \dots, n, \quad (3.4.10)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{i,k-1}^{(v)} = \hat{\mathbf{x}}_{i,k-1}^+ + \tilde{\mathbf{x}}_i^{(v)} \quad \text{für } v = 0, \dots, 2n, \quad (3.4.11)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{i,k}^{(v)} = \mathbf{f}_i \left(\hat{\mathbf{x}}_{i,k-1}^{(v)}, \mathbf{u}_{i,k-1}, t_{k-1} \right) \quad \text{für } v = 0, \dots, 2n, \quad (3.4.12)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{i,k}^- = \frac{\kappa}{n_i + \kappa} \hat{\mathbf{x}}_{i,k}^{(0)} + \frac{1}{2(n_i + \kappa)} \sum_{v=1}^{2n_i} \hat{\mathbf{x}}_{i,k}^{(v)} \quad \text{für } v = 1, \dots, 2n, \quad (3.4.13)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{i,k}^- &= \frac{\kappa}{n_i + \kappa} \left(\hat{\mathbf{x}}_{i,k}^{(0)} - \hat{\mathbf{x}}_{i,k}^- \right) \left(\hat{\mathbf{x}}_{i,k}^{(0)} - \hat{\mathbf{x}}_{i,k}^- \right)^T \\ &+ \frac{1}{2(n_i + \kappa)} \sum_{v=1}^{2n} \left(\hat{\mathbf{x}}_{i,k}^{(v)} - \hat{\mathbf{x}}_{i,k}^- \right) \left(\hat{\mathbf{x}}_{i,k}^{(v)} - \hat{\mathbf{x}}_{i,k}^- \right)^T + \mathbf{Q}_{i,k-1} \end{aligned} \quad (3.4.14)$$

für $v = 1, \dots, 2n$.

Dies sind die gewohnten Prädiktionsgleichungen mit der vorherigen Berechnung für σ -Punkte. Die Systemordnung n_i ist die Dimension des jeweiligen Subsystems i . Danach werden die Korrekturen auf Basis der lokal verfügbaren Messungen $\mathbf{y}_{i,k}$ durchgeführt, die aber noch nicht den a posteriori Werten entsprechen:

$$\tilde{\mathbf{x}}_i^{(0)} = 0, \quad (3.4.15)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_i^{(v)} = + \left(\sqrt{(n_i + \kappa) \mathbf{P}_{i,k}^-} \right)_v \quad \text{für } v = 1, \dots, n, \quad (3.4.16)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_i^{(v+n)} = -\tilde{\mathbf{x}}_i^{(v)} \quad \text{für } v = 1, \dots, n, \quad (3.4.17)$$

3. Verteilte und Dezentrale Zustandsschätzer

$$\hat{\mathbf{x}}_{i,k}^{(\nu)} = \hat{\mathbf{x}}_{i,k}^- + \tilde{\mathbf{x}}_i^{(\nu)} \quad \text{für } \nu = 0, \dots, 2n, \quad (3.4.18)$$

$$\hat{\mathbf{y}}_{i,k}^{(\nu)} = \mathbf{h}_i \left(\hat{\mathbf{x}}_{i,k}^{(\nu)}, t_{k-1} \right) \quad \text{für } \nu = 0, \dots, 2n, \quad (3.4.19)$$

$$\hat{\mathbf{y}}_{i,k} = \frac{\kappa}{n_i + \kappa} \hat{\mathbf{y}}_{i,k}^{(0)} + \frac{1}{2(n_i + \kappa)} \sum_{\nu=1}^{2n_i} \hat{\mathbf{y}}_{i,k}^{(\nu)} \quad \text{für } \nu = 1, \dots, 2n, \quad (3.4.20)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{y,i,k} &= \frac{\kappa}{n_i + \kappa} \left(\hat{\mathbf{y}}_{i,k}^{(0)} - \hat{\mathbf{y}}_{i,k}^- \right) \left(\hat{\mathbf{y}}_{i,k}^{(0)} - \hat{\mathbf{y}}_{i,k}^- \right)^\top \\ &+ \frac{1}{2(n_i + \kappa)} \sum_{\nu=1}^{2n_i} \left(\hat{\mathbf{y}}_{i,k}^{(\nu)} - \hat{\mathbf{y}}_{i,k}^- \right) \left(\hat{\mathbf{y}}_{i,k}^{(\nu)} - \hat{\mathbf{y}}_{i,k}^- \right)^\top + \mathbf{R}_{i,k} \end{aligned} \quad (3.4.21)$$

für $\nu = 1, \dots, 2n$,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{xy,i,k} &= \frac{\kappa}{n_i + \kappa} \left(\hat{\mathbf{x}}_{i,k}^{(0)} - \hat{\mathbf{x}}_{i,k}^- \right) \left(\hat{\mathbf{y}}_{i,k}^{(0)} - \hat{\mathbf{y}}_{i,k}^- \right)^\top \\ &+ \frac{1}{2(n_i + \kappa)} \sum_{\nu=1}^{2n_i} \left(\hat{\mathbf{x}}_{i,k}^{(\nu)} - \hat{\mathbf{x}}_{i,k}^- \right) \left(\hat{\mathbf{y}}_{i,k}^{(\nu)} - \hat{\mathbf{y}}_{i,k}^- \right)^\top \end{aligned} \quad (3.4.22)$$

für $\nu = 1, \dots, 2n$,

$$\mathbf{K}_{i,k} = \mathbf{P}_{xy,i,k} \mathbf{P}_{y,i,k}^{-1} \quad (3.4.23)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_{i,k}^+ = \hat{\mathbf{x}}_{i,k}^- + \mathbf{K}_{i,k} (\mathbf{y}_{i,k} - \hat{\mathbf{y}}_{i,k}), \quad (3.4.24)$$

$$\tilde{\mathbf{P}}_{i,k}^+ = \mathbf{P}_{i,k}^- - \mathbf{K}_{i,k} \mathbf{P}_{y,i,k} \mathbf{K}_{i,k}^\top. \quad (3.4.25)$$

Anschließend werden die Werte aller verbundenen Knoten in das jeweilige Zielsystem transformiert und dort zu den jeweiligen a posteriori Schätzwerten fusioniert:

$$\mathbf{E}_{j,k} = \left(\tilde{\mathbf{P}}_{j,k}^+ \right)^{-1} - \left(\mathbf{P}_{j,k}^- \right)^{-1}, \quad (3.4.26)$$

$$\mathbf{e}_{j,k} = \left(\tilde{\mathbf{P}}_{j,k+1}^+ \right)^{-1} \tilde{\mathbf{x}}_{j,k+1}^+ - \left(\mathbf{P}_{j,k+1}^- \right)^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{j,k+1}^-, \quad (3.4.27)$$

$$\mathbf{E}_{ji,k} = \left(\mathbf{V}_{ji,k}^\top \right)^\dagger \mathbf{E}_{j,k} \mathbf{V}_{ji,k}^\dagger, \quad (3.4.28)$$

$$\mathbf{e}_{ji,k} = \left(\mathbf{V}_{ji}^\top \right)^\dagger \mathbf{e}_{j,k}, \quad (3.4.29)$$

$$\left(\mathbf{P}_{i,k}^+\right)^{-1} = \left(\mathbf{P}_{i,k}^-\right)^{-1} + \sum_{j=1}^l \left(\mathbf{E}_{ji,k}\right), \quad (3.4.30)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{i,k+1}^+ = \mathbf{P}_{i,k+1}^+ \left(\left(\mathbf{P}_{i,k+1}^-\right)^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{i,k+1}^- + \sum_{j=1}^l \left(\mathbf{e}_{ji,k}\right) \right). \quad (3.4.31)$$

Das DDUKF wurde in (Hilgers und Ament, 2010) vorgestellt.

3.5. Beobachtbarkeit

Bei der Zustandsschätzung stellt sich immer auch die Frage der Beobachtbarkeit. Formal ist ein System genau dann beobachtbar, wenn der Initialzustand $\mathbf{x}(0)$ nach einer endlichen Zeit $t > 0$ bei Kenntnis des Eingangsvektors $\mathbf{u}(\tau)$ und Ausgangsvektors $\mathbf{y}(\tau)$ für alle Zeiten $0 \leq \tau \leq t$ eindeutig bestimmbar ist. Beobachtbarkeit ist dabei wie auch zum Beispiel Stabilität oder Steuerbarkeit eine Systemeigenschaft.

Für lineare Systeme gibt es verschiedene Kriterien, um die Beobachtbarkeit eines Systems zu überprüfen. Bei nichtlinearen Systemen ist die Nachweisbarkeit im Allgemeinen nur sehr schwer möglich.

3.5.1. Beobachtbarkeit linearer Systeme

Für lineare Systeme gibt es das Kalman-Kriterium für Beobachtbarkeit. Ein System ist genau dann beobachtbar, falls die *Beobachtbarkeitsmatrix*

$$\mathbf{Q}_B = \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{pmatrix} \quad (3.5.1)$$

vollen Rang besitzt, falls also gilt:

$$\text{rang} \{ \mathbf{Q}_B \} = n. \quad (3.5.2)$$

3. Verteilte und Dezentrale Zustandsschätzer

Mit diesem Kriterium kann keine Aussage darüber getroffen werden, ob einzelne Komponenten des Zustandsvektors beobachtbar sind oder nicht. Ebenso wird die Frage, wie gut ein Zustand beobachtbar ist, nicht beantwortet.

Will man auf diese Fragen Antworten finden, so kann eine Untersuchung mit Hilfe der Gramschen Matrizen erfolgen. Ein System ist zunächst genau dann beobachtbar, wenn

$$\mathbf{W}_B = \int_0^t e^{\mathbf{A}^T \tau} \mathbf{C}^T \mathbf{C} e^{\mathbf{A} \tau} d\tau \quad (3.5.3)$$

vollen Rang besitzt. Dies wird mit Hilfe der Singulärwerte überprüft, die dazu allesamt ungleich Null sein müssen. Ist die Rangbedingung erfüllt, so kann die Beobachtbarkeit einzelner Zustände betrachtet und bewertet werden. Dabei korrespondieren die Diagonalelemente dieser Matrix mit den jeweiligen Zuständen. Ihre relative Größe zueinander ist dabei das Maß für den verallgemeinerten Energietransfer aus den Zuständen in die Ausgänge und damit für deren Beobachtbarkeit. Ist ein Diagonalelement gleich Null, so ist der entsprechende Zustand nicht beobachtbar.

Diese Gramsche Matrix wird nun für nichtlineare Systeme benutzt, um dort ein einfaches Mittel zur Verfügung zu haben, die Beobachtbarkeit eines Systems zu testen.

3.5.2. Beobachtbarkeit nichtlinearer Systeme

Für nichtlineare Systeme gibt es kein einfach zu testendes Kriterium für die Beobachtbarkeit. Ein entscheidender Unterschied zu linearen Systemen liegt darin, dass die Beobachtbarkeit nicht nur vom System selber, sondern auch von der Eingangsfolge abhängt. Aus diesem Grund werden viele Beobachtbarkeitskriterien zunächst nur für autonome Systeme formuliert. Da für die folgenden Betrachtungen diese Methoden nicht berücksichtigt werden, folgt nur eine kurze Beschreibung.

Ein analytisches Vorgehen betrachtet den Verlauf der Ausgangswerte sowie einen Satz an Zeitableitungen dieses Verlaufs (Zeit, 1984).

Mit Hilfe dieser Lie-Ableitungen kann nun eine Beobachtbarkeitsabbildung formuliert werden. Ist diese Abbildung invertierbar, so ist das autonome System beobachtbar. Kann man zusätzlich den Zustandsraum auf ein Gebiet um einen Arbeitspunkt einschränken, so kann für dieses Gebiet die Beobachtbarkeit des Systems mit einer Überprüfung des Rangs der Jacobi-Matrix der Beobachtbarkeitsabbildung getestet werden. Diese Methode kann auf die Kalmansche Beobachtbarkeitsmatrix zurückgeführt werden.

Während diese Methoden alle unter den gegebenen Voraussetzungen zu einer eindeutigen Aussage führen, so ist ihre Durchführung für reale Systeme sehr komplex. Insbesondere die Berücksichtigung der Eingangsfolge stellt weitere Anforderungen dar.

Ursprünglich zu Zwecken der Ordnungsreduktion wurden von Lall u. a. (1999, 2002) Methoden zur empirischen Bestimmung der Gramschen Matrizen entwickelt. Diese beschreiben, wie durch gemessene oder simulierte Signalverläufe die Gramschen Matrizen rekonstruiert werden können, um dann eine Analyse durchzuführen. Diese Methode findet sich auch in anderen Veröffentlichungen (Hahn und Edgar, 2000; Singh und Hahn, 2005).

Zur Berechnung werden unterschiedliche Initialwerte

$$\mathbf{x}(0) = c_m T_i e_i \quad (3.5.4)$$

generiert. Diese basieren auf folgenden Mengen:

$$\mathbb{T}^n = \left\{ T_1, \dots, T_r \mid T_i \in \mathbb{R}^{n \times n}; T_i^T T_i = \mathbf{I}; i = 1, \dots, r \right\}, \quad (3.5.5)$$

$$\mathbb{M} = \left\{ c_1, \dots, c_s \mid c_i \in \mathbb{R}; c_i > 0; i = 1, \dots, s \right\}, \quad (3.5.6)$$

$$\mathbb{E} = \left\{ e_1, \dots, e_n \mid e_i \text{ sind die kanonischen Einheitsvektoren aus } \mathbb{R}^n \right\}. \quad (3.5.7)$$

Es werden also alle Kombinationen aus beliebigen, orthogonalen Matrizen und positiven Skalierungsfaktoren jeweils komponentenweise erzeugt und dann als Initialwert für das System festgelegt. Davon ausgehend werden nun für eine hinreichend lange Zeit die Ausgangsverläufe entweder am realen System aufgezeichnet oder simuliert. Man

3. Verteilte und Dezentrale Zustandsschätzer

erhält also die Ausgangsverläufe

$$\mathbf{y}^{ilm}(t).$$

Für die jeweiligen Verläufe werden die Mittelwerte

$$\bar{\mathbf{y}}^{ilm}(t)$$

gebildet. Mit diesen Größen wird nun die Matrix $\Psi \in \mathbb{R}^{n \times n}$ bestimmt, wobei sich die Komponenten in Zeile i und Spalte j nach

$$\Psi_{ij}^{lm}(t) = \left(\mathbf{y}^{ilm}(t) - \bar{\mathbf{y}}^{ilm} \right)^T \left(\mathbf{y}^{ilm}(t) - \bar{\mathbf{y}}^{ilm} \right) \quad (3.5.8)$$

berechnen. Nun kann die empirische Gramsche Beobachtbarkeitsmatrix mit

$$\mathbf{W}_B = \sum_{l=1}^r \sum_{m=1}^s \frac{1}{rsc_m^2} \int_0^\infty \mathbf{T}_l \Psi^{lm}(t) \mathbf{T}_l^T dt \quad (3.5.9)$$

berechnet werden.

Für die Wahl von \mathbb{T} und \mathbb{M} wird vorgeschlagen, \mathbb{T} mit einer positiven und einer negativen Einheitsmatrix zu besetzen, um positive und negative Eingänge zu verwenden. Über die Skalierungsfaktoren in \mathbb{M} werden die Zustände so angeregt, dass sie die gleiche Größenordnung besitzen, wie es auch im realen Betrieb des Systems zu erwarten ist. Damit wird also ein bestimmter Bereich des Zustandsraums abgedeckt.

Eine Variation ist bei Hahn und Edgar (2002) zu finden. Zum einen werden die Initialwerte dort mit

$$\mathbf{x}(0) = c_m T_l e_i + \mathbf{x}_0 \quad (3.5.10)$$

angegeben. \mathbf{x}_0 ist dabei der Ruhezustand des Systems. Zum anderen wird für die Berechnung der Komponenten von Ψ

$$\Psi_{ij}^{lm}(t) = \left(\mathbf{y}^{ilm}(t) - \mathbf{y}_0^{ilm} \right)^T \left(\mathbf{y}^{ilm}(t) - \mathbf{y}_0^{ilm} \right) \quad (3.5.11)$$

benutzt, wobei \mathbf{y}_0^{ilm} als der Ausgangsvektor angegeben wird, wenn sich das System im Ruhezustand befindet.

Eine weitere Variation findet sich bei Geffen u. a. (2008). Dort werden die Initialwerte mit

$$\mathbf{x}(0) = c_m T_l e_i + \bar{\mathbf{x}}_{\text{nom}} \quad (3.5.12)$$

bestimmt. $\bar{\mathbf{x}}_{\text{nom}}$ ist ein nicht näher angegebener Nominalwert. Es werden aber auch Veränderungen in der Bestimmung der Menge \mathbb{T} vorgeschlagen. Statt orthogonaler Matrizen, die die Anregungsrichtung bestimmen, werden die Matrizen \mathbf{T}_i so festgelegt, dass sie beliebige Anregungsrichtungen beinhalten und somit eine vollfaktorielle Anregung simuliert werden kann. Ein Ruhezustand des Systems wird benutzt, um die Nominalwerte der Zustände zu definieren. Durch diese veränderten Bedingungen ist eine erweiterte und vereinfachte Methode gegeben, um die nötigen Messwerte zur Berechnung der empirischen Gramschen Beobachtbarkeitsmatrix aus Experimenten oder Simulationen zu erhalten.

Im Gegensatz zu den erwähnten analytischen Methoden kann somit für ein beliebiges nichtlineares System nicht nur eine absolute Entscheidung über die vollständige Beobachtbarkeit getroffen, sondern jeder Zustand einzeln bewertet werden.

3.5.3. Beobachtbarkeit verteilter und dezentraler Systeme

In den Herleitungen zum Dezentralen Kalman-Filter wird nicht auf die Frage der Beobachtbarkeit eingegangen (Rao und Durrant-Whyte, 1991; Rao u. a., 1993). Das Gleiche gilt für die Ausführungen zur Verteilung des globalen Zustandsvektors (Mutambara und Durrant-Whyte, 1993a,b, 1994; Mutambara und Al-Haik, 1997; Mutambara, 1998, 1999; Mutambara und Durrant-Whyte, 2000).

Für dezentrale Filter kann man daher davon ausgehen, dass eine Beobachtbarkeit des globalen Systems auch eine Beobachtbarkeit für einen dezentralen Zustandsschätzer bedingt. Diese Annahme wird dadurch bekräftigt, dass sich die Algorithmen der dezentralen Filter alle auf die des Kalman-Filters zurückführen lassen, da durch die Fusion ein algebraisch gleichwertiger Algorithmus erzeugt wird. Des wei-

3. Verteilte und Dezentrale Zustandsschätzer

teren ergibt sich für dezentrale Zustandsschätzer unter idealen Bedingungen keine Abweichung der Schätzung von einem zentralen Filter, so dass sich alle relevanten Größen stets identisch verhalten.

Berechnet man für Systeme, bei denen dies analytisch machbar ist, die Beobachtbarkeitsabbildung, die oben kurz beschrieben wurde, so stellt man fest, dass die linear unabhängigen Zeilen des globalen Systems je nach Dezentralisierung des Messvektors auch in den Beobachtbarkeitsabbildungen der dezentralen Systeme vorkommen. Eine Beobachtbarkeit scheint also dann gegeben zu sein, wenn sich aus den einzelnen Abbildungen durch Rekombination der Zeilen zu einer Matrix wieder eine Abbildung ergibt, die vollen Rang besitzt.

Für verteilte Systeme – insbesondere nichtlineare Systeme, die nach dem vorgeschlagenen Prinzip einer Ordnungsreduktion erzeugt werden – muss eine andere Forderung gestellt werden, um in jedem Fall zu einem beobachtbaren System zu kommen. Da sich die zusätzlichen lokalen Zustände in den lokalen Systemen wie modellierte Störgrößen verhalten, kann die gleiche Forderung wie an einen zentralen Störgrößenbeobachter gestellt werden: Jedes System muss für sich betrachtet vollständig beobachtbar sein, damit das verteilte Filter eingesetzt werden kann. Dies wird exemplarisch in Abschnitt 4.3.4 gezeigt.

4. Anwendung auf unterschiedliche Systeme

Dieses Kapitel zeigt unterschiedliche Anwendungsfälle der verteilten und dezentralen Zustandsschätzung. Zunächst wird ein Filter für ein Dreitanksystem eingerichtet, um hier exemplarisch das Vorgehen zu zeigen. Anschließend wird ein Lasertrackersystem benutzt. An diesem werden zunächst die dezentrale und dann die verteilte Schätzung sowie unterschiedliche Szenarien gezeigt. Die einzelnen Systeme und die Filteranwendungen werden jeweils beschrieben. Eine Bewertung folgt am Ende des Kapitels.

4.1. Dreitanksystem

Das erste System, an dem die Funktionsweise des DDUKF gezeigt wird, ist ein Dreitanksystem. Es wurde im Fachgebiet Systemanalyse der TU Ilmenau unter anderem zur Durchführung eines Praktikums aufgebaut. Es besteht aus drei separaten Wassertanks, die unterschiedlich miteinander verbunden werden können. Es besitzt zwei Pumpen, um die äußeren Tanks zu befüllen und ist mit Füllstandssensoren für alle drei Tanks ausgerüstet. Die Sensoren sind zwar sehr genaue Ultraschallsensoren, die im Deckel der jeweiligen Behälter montiert sind, um den Füllstand zu messen. Da aber durch die Einlässe das Wasser aus einer gewissen Höhe auf die Wasseroberfläche trifft, ist bedingt durch die Bewegungen dort das Sensorsignal stark gestört. Der begrenzende Faktor der Genauigkeit ist somit nicht die das eigentliche Sensorrauschen, sondern Wellen an der Wasseroberfläche.

4. Anwendung auf unterschiedliche Systeme

4.1.1. Modellierung

Das Testsystem für diese Arbeit ist in Abbildung 4.2 abstrahiert dargestellt. Die globale Modellierung führt zu:

$$\mathbf{x}_g(t) = \begin{pmatrix} x_{g_1}(t) \\ x_{g_2}(t) \\ x_{g_3}(t) \end{pmatrix} \quad (4.1.1)$$

$$\dot{x}_{g_1}(t) = \frac{u_1(t) - q(x_{g_1}(t), x_{g_3}(t))}{A_T}, \quad (4.1.2)$$

$$\dot{x}_{g_2}(t) = \frac{u_2(t) - q(x_{g_3}(t), x_{g_2}(t)) - q(x_{g_2}(t), 0)}{A_T}, \quad (4.1.3)$$

$$\dot{x}_{g_3}(t) = \frac{q(x_{g_1}(t), x_{g_3}(t)) - q(x_{g_3}(t), x_{g_2}(t))}{A_T}, \quad (4.1.4)$$

$$q(\alpha, \beta) = \begin{cases} A_R \cdot a_z \cdot \sqrt{2 \cdot g(\alpha - \beta)}; & \alpha > \beta \\ -A_R \cdot a_z \cdot \sqrt{2 \cdot g(\beta - \alpha)}; & \alpha < \beta. \end{cases}, \quad (4.1.5)$$

$$y_i(t) = x_i(t). \quad (4.1.6)$$

Um für die spätere Festlegung von lokalen Modellen eine Unterscheidung zwischen globalen und lokalen Größen zu haben, wird hier eine zusätzliche Indizierung mit g vorgenommen, um global definierte Größen zu bezeichnen. Die Wasserhöhen im Tank i werden als Zustand x_i eingeführt. Die Einlässe sind Eingänge des Systems und werden mit u_i bezeichnet. Der Fluss zwischen benachbarten Tanks wird durch die Funktion $q(\alpha, \beta)$ beschrieben. Wird eines der Argumente zu Null gesetzt, so modelliert die Funktion einen Abfluss. A_T , A_R sind geometrische Konstanten der Tanks und Leitungen, und a_z ist ein Korrekturterm. Die Erdbeschleunigung ist g . Die Ausgänge des Systems werden mit y_i bezeichnet. Für die nachfolgenden Berechnungen wurden diese Differentialgleichungen mit einem Runge-Kutta-Verfahren diskretisiert. Als nächstes wird von diesem globalen System ausgehend eine Verteilung und Dezentralisierung vorgenommen; dieses Vorgehen entspricht der vorgestellten Heuristik aus Abschnitt 3.4.1.

Wie bei jeder Modellierung werden bei der hier gezeigten Ungenauigkeiten bewusst hingenommen. Die Volumina der Tanks werden so

4.1. Dreitanksystem

modelliert, dass eine konstante Grundfläche A_T angenommen wird. Wie aus Abbildung 4.1 ersichtlich, ist dies für den unteren Teil der Tanks deutlich nicht gegeben. Bei den folgenden Messungen wurde daher darauf geachtet, dass die Wasserhöhen sich nie in diesem unteren, stark konischen Bereich befinden. Um für die Wasserhöhen eine handhabbare Skalierung der Werte zu erhalten, war die Auswertungssoftware für das Dreitanksystem auf die Längenbasiseinheit Dezimeter ausgelegt. Im Rahmen der für diese Arbeit relevanten Versuche wurde diese Skalierung übernommen, so dass im Folgenden der Dezimeter und nicht wie üblich der Meter als Bezugsgröße für Längen benutzt wird. Für den größten Teil der Tanks ist die Variation in der Grundfläche zwar vorhanden, aber nicht sehr stark ausgeprägt. A_T wird mit einem Durchschnittswert von $1,5 \text{ dm}^2$ angenommen. Für den Fluss zwischen den Tanks ist die Querschnittsfläche maßgeblich. Diese wird durch die vorhandenen, aber nicht benutzten Sensoren stark eingeschränkt und zu $A_R = 0,005268 \text{ dm}^2$ bestimmt. Die zu Grunde liegende Torricelli-Gleichung zur Bestimmung des Querflusses geht nicht von Verlusten durch Reibung in einem Rohr aus. Um diese real vorhandenen Effekte abbilden zu können, muss der Korrekturterm a_z angepasst werden. Hier hat sich ein Wert von 0,3 als passend erwiesen.

Für die folgenden Versuche wurde das Dreitanksystem von einem Initialwert aus mit einer willkürlichen Folge von Eingangssignalen beaufschlagt. Die Vorgabe dabei war lediglich, dass die Wasserhöhen in den Tanks im relevanten Bereich deutlichen Schwankungen unterliegen. Die Eingangsfolge und die Messungen der drei Sensoren wurden dabei aufgezeichnet, so dass anschließend mit echten Eingangs- und Ausgangsdaten Filter in einem Quasiechtzeitbetrieb eingesetzt werden konnten. Die Güte des hier gezeigten globalen Modells erkennt man, wenn man die Messwerte der Sensoren mit den Werten vergleicht, die das Modell mit korrektem Initialwert nur auf Grund der Eingangsfolge erzeugt (feed forward). Abbildung 4.3 zeigt die Messdaten der Sensoren und Abbildung 4.4 den Modellausgang. Es ist deutlich zu erkennen, dass die Dynamik gut durch das Modell abgebildet wird. Es stellt sich allerdings sehr schnell ein Driftverhalten ein,

4. Anwendung auf unterschiedliche Systeme



Abbildung 4.1.: Dreitanksystem des Fachgebietes Systemanalyse.

was vor allem auf Ungenauigkeiten in der Modellierung des Querflusses beruht, da hier der Korrekturfaktor nur experimentell bestimmt wurde.

Durch eine Betrachtung der Messwerte kann man das für die Parametrisierung des Filters relevante Rauschen bestimmen. Wenn man für die größten Schwankungen einen Wert von 3σ annimmt, so ergibt sich umgerechnet $\sigma = 0,014$ dm.

4.1.2. Lokale Modelle und lokale Zustände

Auf Grund der offensichtlichen Partitionierung in einzelne Tanks wird jeder Tank als lokale Einheit festgelegt. Lokale Zustände sind die jeweiligen Füllhöhen. Dies wird durch die direkte Beziehung zu den

4.1. Dreitanksystem

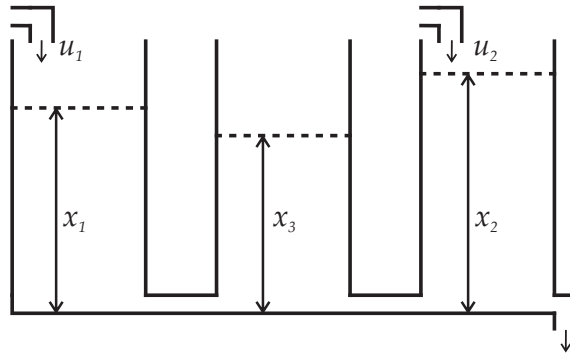


Abbildung 4.2.: Schematische Darstellung des Dreitanksystem mit Zuständen, Zuläufen und Auslauf.

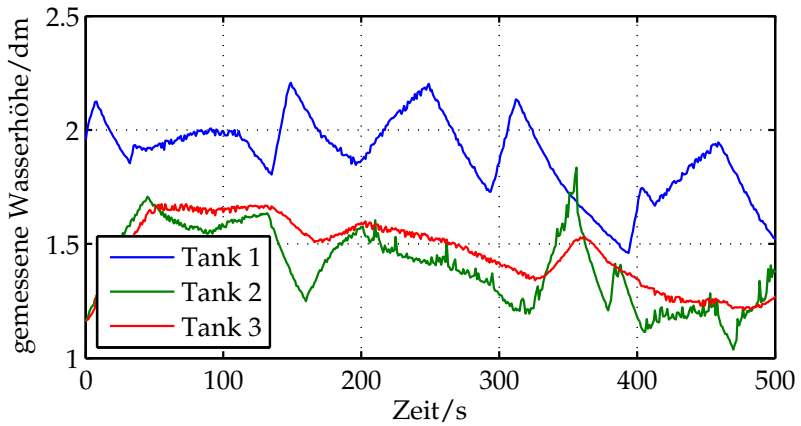


Abbildung 4.3.: Aufgezeichnete Messwerte der Füllstandssensoren für die Testfolge. Die Messungen entsprechen direkt den Füllhöhen in den einzelnen Tanks.

4. Anwendung auf unterschiedliche Systeme

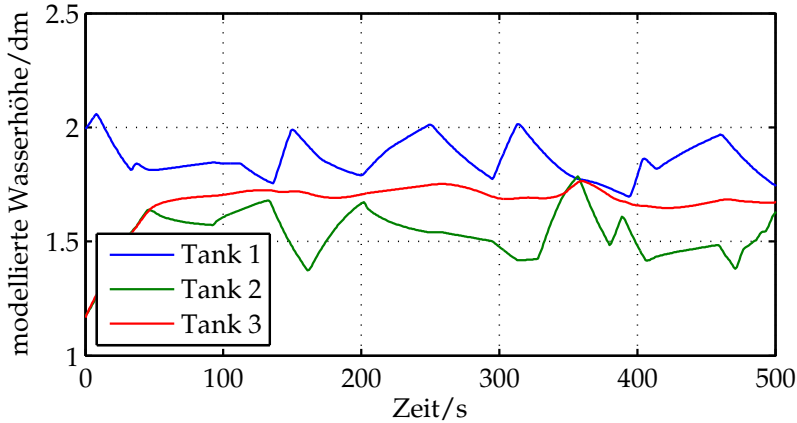


Abbildung 4.4.: Ausgangssignale des globalen Modells, welches nur durch die Eingangsfolge bei korrekten Initialwerten erregt wird. Im Vergleich zur realen Messung ist die Drift deutlich zu erkennen.

so definierten Einheiten motiviert, aber auch durch die Tatsache, dass diese Zustände jeweils direkt gemessen werden. Es gilt somit:

$$\mathbf{x}_1(t) = (x_{1_1}(t)) = (x_{g_1}(t)), \quad (4.1.7)$$

$$\mathbf{x}_2(t) = (x_{2_1}(t)) = (x_{g_2}(t)), \quad (4.1.8)$$

$$\mathbf{x}_3(t) = (x_{3_1}(t)) = (x_{g_3}(t)). \quad (4.1.9)$$

Wie bereits erklärt, rückt im Index ein g an die Stelle des lokalen Index i , um eine globale Größe zu kennzeichnen. Wird dieser nochmals indiziert, so bezieht sich dies auf die Komponenten eines Vektors. Gemeint ist somit, dass der Zustandsvektor im ersten lokalen System (\mathbf{x}_1) eine Komponente (x_{1_1}) besitzt, die der ersten Komponente des globalen Zustandsvektors (x_{g_1}) entspricht. Die Transformationsmatrizen ergeben sich mit dieser Wahl zu:

$$\mathbf{T}_1 = (1 \ 0 \ 0), \quad (4.1.10)$$

$$\mathbf{T}_2 = (0 \ 1 \ 0), \quad (4.1.11)$$

4.1. Dreitanksystem

$$\mathbf{T}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.1.12)$$

Als Ausgangsgleichungen in den lokalen Systemen werden jeweils die korrespondierende Ausgangsgleichung des globalen Systems gewählt:

$$\mathbf{y}_1(t) = (y_{1_1}(t)) = (x_{1_1}(t)), \quad (4.1.13)$$

$$\mathbf{y}_2(t) = (y_{2_1}(t)) = (x_{2_1}(t)), \quad (4.1.14)$$

$$\mathbf{y}_3(t) = (y_{3_1}(t)) = (x_{3_1}(t)). \quad (4.1.15)$$

Mit dieser Festlegung kann man die einzelnen Differentialgleichungen für die lokalen Systeme aufstellen. Dafür werden die globalen Zustandsdifferentialgleichungen herangezogen:

$$\dot{\mathbf{x}}_1(t) = \left(\frac{u_1(t) - q(x_{1_1}(t), x_{g_3}(t))}{A_T} \right), \quad (4.1.16)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_2(t) = \left(\frac{u_2(t) - q(x_{g_3}(t), x_{2_1}(t)) - q(x_{2_1}(t), 0)}{A_T} \right), \quad (4.1.17)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_3(t) = \left(\frac{q(x_{g_1}(t), x_{3_1}(t)) - q(x_{3_1}(t), x_{g_2}(t))}{A_T} \right). \quad (4.1.18)$$

Um den nächsten Schritt – das Hinzufügen der zusätzlichen, lokalen Zustände – besser zu veranschaulichen, wurden alle Zustände, die bisher noch nicht lokal definiert sind, mit ihrer globalen Bezeichnung belassen. Genau diese Zustände müssen nun den lokalen Zustandsvektoren hinzugefügt werden. Die Zuordnung ist auch aus Abbildung 4.5 ersichtlich:

$$\mathbf{x}_1(t) = \begin{pmatrix} x_{1_1}(t) \\ x_{1_2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{g_1}(t) \\ x_{g_3}(t) \end{pmatrix}, \quad (4.1.19)$$

$$\mathbf{x}_2(t) = \begin{pmatrix} x_{2_1}(t) \\ x_{2_2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{g_2}(t) \\ x_{g_3}(t) \end{pmatrix}, \quad (4.1.20)$$

$$\mathbf{x}_3(t) = \begin{pmatrix} x_{3_1}(t) \\ x_{3_2}(t) \\ x_{3_3}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{g_3}(t) \\ x_{g_1}(t) \\ x_{g_2}(t) \end{pmatrix}. \quad (4.1.21)$$

4. Anwendung auf unterschiedliche Systeme

Somit müssen nun auch die Transformationsmatrizen erweitert werden:

$$\mathbf{T}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.1.22)$$

$$\mathbf{T}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.1.23)$$

$$\mathbf{T}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.1.24)$$

Da die Position der einzelnen Zustände im Vektor unerheblich ist, wird nun noch eine Umsortierung vorgenommen, bei der die ursprüngliche Reihenfolge des globalen Vektors zu Grunde gelegt wird. Somit ergeben sich für die Zustandsvektoren und die Transformationsmatrizen

$$\mathbf{x}_1(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ x_{12}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{g1}(t) \\ x_{g3}(t) \end{pmatrix}, \quad (4.1.25)$$

$$\mathbf{x}_2(t) = \begin{pmatrix} x_{21}(t) \\ x_{22}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{g2}(t) \\ x_{g3}(t) \end{pmatrix}, \quad (4.1.26)$$

$$\mathbf{x}_3(t) = \begin{pmatrix} x_{31}(t) \\ x_{32}(t) \\ x_{33}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{g1}(t) \\ x_{g2}(t) \\ x_{g3}(t) \end{pmatrix}, \quad (4.1.27)$$

$$\mathbf{T}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.1.28)$$

$$\mathbf{T}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.1.29)$$

$$\mathbf{T}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.1.30)$$

Für die zusätzlichen lokalen Zustände müssen nun noch Differentialgleichungen formuliert werden. Hier wird nun entsprechend der

vorgeschlagenen Heuristik eine Ordnungsreduktion durchgeführt, indem die Zustände als Parameter ohne Dynamik modelliert werden. Somit ergibt sich:

$$\dot{\mathbf{x}}_1(t) = \begin{pmatrix} \frac{u_1(t) - q(x_{1_1}(t), x_{1_2}(t))}{A_T} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.1.31)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_2(t) = \begin{pmatrix} \frac{u_2(t) - q(x_{2_2}(t), x_{2_1}(t)) - q(x_{2_1}(t), 0)}{A_T} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.1.32)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_3(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{q(x_{3_1}(t), x_{3_3}(t)) - q(x_{3_3}(t), x_{3_2}(t))}{A_T} \end{pmatrix}. \quad (4.1.33)$$

Schließlich müssen noch die lokalen Ausgangsgleichungen an die nun geänderte Notation angepasst werden:

$$\mathbf{y}_1(t) = (y_{1_1}(t)) = (x_{1_1}(t)), \quad (4.1.34)$$

$$\mathbf{y}_2(t) = (y_{2_1}(t)) = (x_{2_2}(t)), \quad (4.1.35)$$

$$\mathbf{y}_3(t) = (y_{3_1}(t)) = (x_{3_3}(t)), \quad (4.1.36)$$

Das so partitionierte System wird in Abbildung 4.5 abstrahiert dargestellt. Die großen Kreise repräsentieren die lokalen Knoten, aus denen die direkten lokalen Zustände abgeleitet werden. Durch die zusätzlichen Zustände wird auch die Vernetzung der Knoten untereinander deutlich. Wie die Wassertanks auch haben nur benachbarte Knoten eine direkte Verbindung zueinander.

4.1.3. Simulation

Zum Test des DDUKF wurde eine Simulationsumgebung in Simulink unter Einbeziehung von Matlab-Scripten aufgebaut. Die eigentlichen Filteralgorithmen sowie die Modellgleichungen wurden als M-Dateien programmiert. Mit diesen Dateien als Fundament wurden einzelne Funktionsblöcke in Simulink aufgebaut und mit einander verschaltet. Die einzelnen Schätzungen konnten dann wiederum in eine Datei gespeichert und ausgewertet werden.

4. Anwendung auf unterschiedliche Systeme

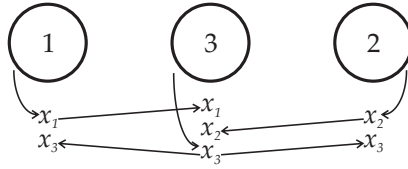


Abbildung 4.5.: Jeder Knoten wird durch einen Kreis repräsentiert. Die Zugehörigkeit der direkten lokalen Zustände wird durch gebogene, vertikale Pfeile verdeutlicht. Horizontal sind die Verbindungen zu den benachbarten Knoten angedeutet.

4.1.4. Zentrale Schätzung

Um für die Schätzwerte des DDUKF einen Vergleich zu haben, wird zunächst ein zentrales UKF programmiert, welches dann als Referenz dient. Wie in Abschnitt 4.1.1 dargestellt, ist es sinnvoll, die Diagonalelemente der Kovarianzmatrix der Messungen auf $0,014^2 \text{ dm}^2$ zu setzen. Für die Kovarianzmatrix der Zustände werden die gleichen Werte gewählt. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird auf die Angabe der Einheiten in den folgenden Gleichungen verzichtet. Alle Komponenten von \mathbf{Q} und \mathbf{R} sind auf dm^2 normiert. Es gilt somit

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0,014^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0,014^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0,014^2 \end{pmatrix} \quad (4.1.37)$$

und

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0,014^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0,014^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0,014^2 \end{pmatrix}. \quad (4.1.38)$$

Das so eingestellte UKF erzeugt Schätzwerte, wie sie in Abbildung 4.6 zu sehen sind. Es ist deutlich zu erkennen, dass der Verlauf der Füllstände im Vergleich zum unkorrigierten Modell keine Drift zeigt. Gleichzeitig ist das Rauschen im Vergleich zu den reinen Messwerten reduziert. Dieser Zusammenhang ist in Abbildung 4.7 zu sehen; hier

ist die Differenz zwischen Messung und Schätzung aufgetragen. Das durch das Filter unterdrückte Rauschen ist deutlich zu erkennen und bewegt sich einem Bereich von $\sigma = \pm 0,01$ dm. Einzelne Ausreißer liegen in einem Bereich von bis zu $3\sigma = \pm 0,03$ dm. Dies entspricht der Wahl der Kovarianzmatrizen.

4.1.5. Verteilte Schätzung

Das DDUKF wird nach der Verteilung des globalen Modells aus Abschnitt 4.1.2 angesetzt. Die lokalen Kovarianzmatrizen für die Zustände und die Messungen werden so gewählt, dass ihre Diagonalelemente den korrespondierenden Werten der Matrizen für das zentrale UKF entsprechen. Erneut sind alle Größen der Matrizen auf dm^2 normiert. Damit gilt

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{pmatrix} 0,014^2 & 0 \\ 0 & 0,014^2 \end{pmatrix}, \quad (4.1.39)$$

$$\mathbf{R}_1 = (0,014^2), \quad (4.1.40)$$

$$\mathbf{Q}_2 = \begin{pmatrix} 0,014^2 & 0 \\ 0 & 0,014^2 \end{pmatrix}, \quad (4.1.41)$$

$$\mathbf{R}_2 = (0,014^2), \quad (4.1.42)$$

$$\mathbf{Q}_3 = \begin{pmatrix} 0,014^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0,014^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0,014^2 \end{pmatrix}, \quad (4.1.43)$$

$$\mathbf{R}_3 = (0,014^2). \quad (4.1.44)$$

Somit ist eine Vergleichbarkeit der Schätzungen gegeben. Um die Güte des verteilten und dezentralisierten Filters zu bewerten, werden exemplarisch die Schätzungen des lokalen Knotens Nummer drei betrachtet. Hier ist der dritte Zustand der direkte lokale Zustand, während die beiden anderen Zustände nicht durch eine Messung verfügbar sind und demzufolge durch die Fusion berechnet werden. Abbildung 4.8 zeigt zunächst die Differenz zwischen den globalen

4. Anwendung auf unterschiedliche Systeme

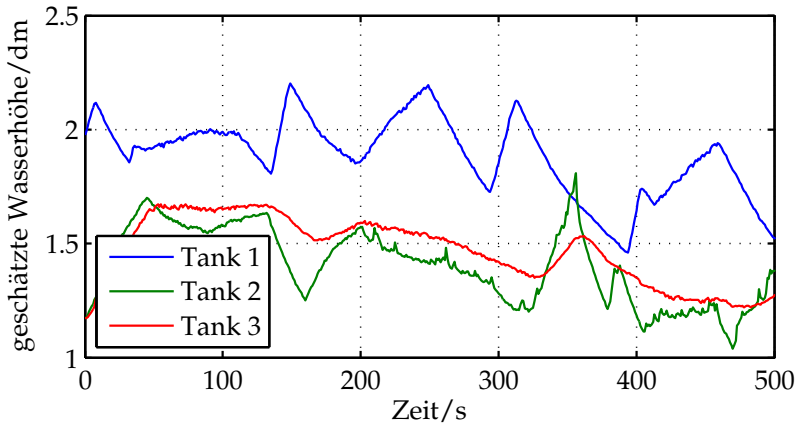


Abbildung 4.6.: Schätzwerte des zentralen UKF. Die Zustände sind die Füllhöhen in den einzelnen Tanks.

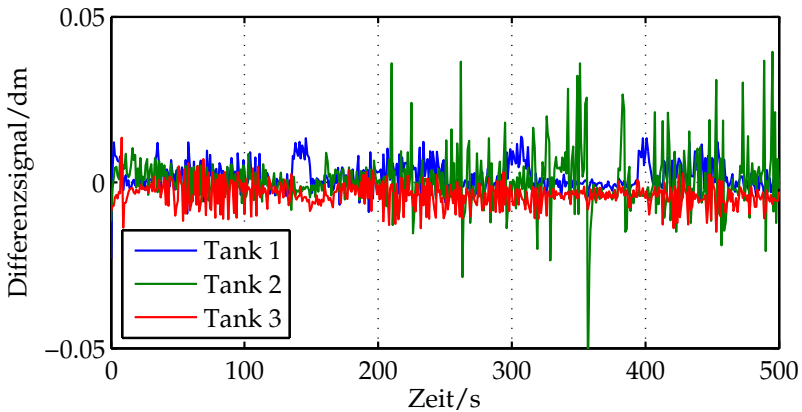


Abbildung 4.7.: Differenz zwischen gemessenen und durch das zentrale UKF geschätzten Werten für die Füllstände.

4.1. Dreitanksystem

Messwerten und den Schätzwerten an Knoten drei. Im direkten Vergleich zu Abbildung 4.7 kann man sehen, dass diese Differenz bei der verteilten Schätzung im Mittel so wie die zentrale Schätzung bei Null liegt; das Filter divergiert also nicht. Außerdem liegen die Abweichungen im Bereich gleicher Größenordnung wie im zentralen Fall. Ein qualitativer Unterschied ist nicht zu erkennen.

Um nun aber das DDUKF bewerten zu können, wird die Differenz zwischen dem zentralen UKF und dem DDUKF im Knoten drei betrachtet; dies ist in Abbildung 4.9 zu sehen. Unter der Voraussetzung, dass das UKF die bestmögliche Schätzung liefert, ist hier der Fehler aufgetragen, der durch das verteilte und dezentralisierte Schema in die Schätzung eingebracht wird. Für den Zustand drei sieht man, dass dieser Fehler eine Größenordnung von ungefähr $\pm 2 \cdot 10^{-4}$ dm besitzt und somit bezogen auf das Signalniveau vernachlässigbar ist. Bezogen auf das Rauschen liegt der Fehler zwei Größenordnungen unter dem Rauschniveau. Für die zusätzlichen Zustände eins und zwei liegt der Fehler im Bereich von gut $\pm 1 \cdot 10^{-2}$ dm und hat damit die gleiche Größenordnung wie das Rauschen. Man kann für dieses Beispiel somit folgern, dass die zusätzlichen Fehler für die direkten Zustände vernachlässigbar und für die zusätzlichen lokalen Zustände nicht dominant sind.

4. Anwendung auf unterschiedliche Systeme

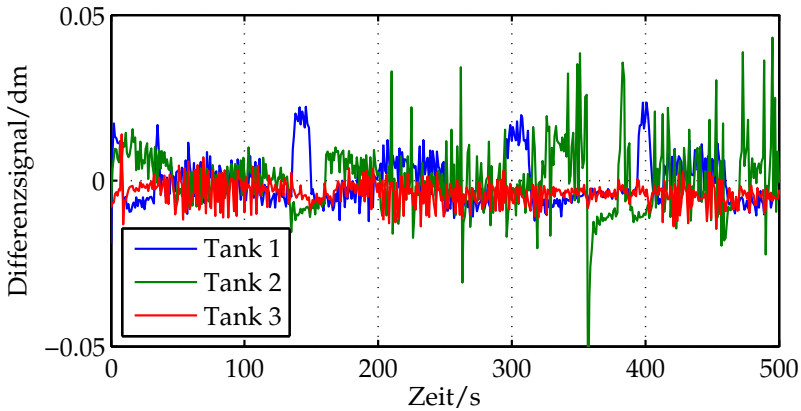


Abbildung 4.8.: Differenz zwischen den gemessenen und durch das DDUKF in Knoten 3 geschätzten Werten für die Füllstände.

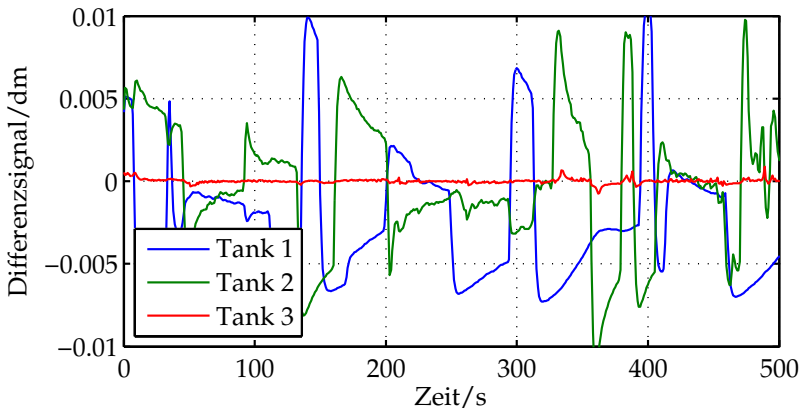


Abbildung 4.9.: Differenz zwischen den durch das zentrale UKF und durch das DDUKF in Knoten 3 geschätzten Werten für die Füllstände. Diese Differenz ist der durch das DDUKF zusätzlich verursachte Fehler, wenn das UKF als Referenz betrachtet wird.

4.2. Multilasertrackersystem – Verfolgung eines zufällig bewegten Objektes

Als zweites Testsystem dient ein Multilasertrackersystem. Dieses System besteht aus mehreren einzelnen Trackerköpfen, deren Funktion kurz beschrieben wird.

4.2.1. Beschreibung eines Lasertracker

Ein Lasertracker oder auch Trackerkopf besteht aus einer Laserquelle, deren Strahl über zwei drehbare Spiegel, deren Drehachsen senkrecht zueinander angeordnet sind, in den Raum abgelenkt wird. Durch diese Anordnung kann der Strahl innerhalb der mechanischen Grenzen beliebig in den Raum gerichtet werden. Das zu verfolgende Ziel ist mit einem *Retroreflektor* ausgestattet. Dies kann zum Beispiel ein Tripel-Spiegel sein, bei dem die drei Spiegelflächen alle senkrecht zueinander stehen. Wenn der Laserstrahl auf diesen Reflektor eines zunächst als unbeweglich angenommenen Ziels trifft, so wird er auf Grund der Reflektoreigenschaften auf dem gleichen Wege zurück zum Trackerkopf gelenkt. Die eingesetzten Reflektoren besitzen dabei die Eigenschaft, dass sie den rücklaufenden Strahl parallel zum einlaufenden reflektieren. Ein Parallelversatz entsteht allerdings immer dann, wenn der Reflektor nicht genau mittig getroffen wird. Im Trackerkopf erfolgt durch einen Strahlteiler eine Auskopplung des rücklaufenden Strahls auf eine Vierquadrantendiode. Mit Hilfe dieser Diode kann der Versatz des Strahls mit Bezug zum auslaufenden Strahl bestimmt werden. Eine vorhandene Regelung kann mit den Daten der Diode eine Strahlnachführung erreichen, so dass durch Änderung der Ablenkwinkel der Spiegel der Strahl in der Mitte des Reflektors gehalten wird, auch wenn das zu verfolgende Ziel sich bewegt.

Das hier eingesetzte System eines einzelnen Trackers mit integrierter Regelung zur Strahlnachführung basiert vor allem auf der Arbeit von Wachten (2009).

4. Anwendung auf unterschiedliche Systeme

4.2.2. Multilasertracker

Mit Hilfe von einem oder mehreren Trackern kann die Position eines Ziels bestimmt werden, wobei Genauigkeit und Dynamik von der Wahl des Messverfahrens abhängen. Ist nur ein Kopf im Einsatz, so kann durch Auswertung der beiden Ablenkwinkel und einer zusätzlichen Bestimmung des Laufweges vom Tracker zum Ziel und wieder zurück die Position des Ziels im Raum bestimmt werden. Kommen zwei oder mehr Köpfe zum Einsatz und sind deren Positionen im Raum bekannt, können zum Beispiel Trilateration oder Triangulation benutzt werden, bei denen durch Kenntnis von Abständen oder Ablenkwinkeln jeweils die Position des Ziels bestimmbar ist.

Bei diesen Verfahren wird im Allgemeinen zwischen *direkter Kinematik* und *indirekter Kinematik* unterschieden. Die direkte Kinematik ist dabei der Satz an Gleichungen, der als Eingänge die Winkel φ und Abstände d enthält und als Funktionswerte die Koordinaten des Zielpunktes ergibt. Die inverse Kinematik ist entsprechend diejenige Funktion, welche bei Kenntnis des Zielpunktes alle Winkel und Abstände berechnet. Die Begriffe stammen vor allem aus dem Bereich der Robotik, in dem es die Aufgabe ist, den Endeffektor einer Maschine durch Veränderung aller Gelenkwinkel in die gewünschte Position zu bringen. Gerade wenn hochpräzise Ortsbestimmungen erwünscht sind, werden in diesen Gleichungen sehr viele Effekte modelliert, die wiederum die Kenntnis etlicher Parameter erfordern. Exemplarisch seien hier nur Materialeigenschaften wie temperaturabhängige Brechungsindizes aber auch Umwelteinflüsse wie der Luftdruck genannt. Bei Kenntnis einer der beiden Kinematiken ist es oft nicht trivial oder sogar unmöglich, die andere zu berechnen, da die Funktionen im Allgemeinen nicht invertierbar sind.

Für die üblichen Verfahren der Zielpositionsbestimmung werden im Falle der Triangulation die Stellwinkel der einzelnen Ablenkspiegel gemessen oder sind auf Grund der vorhandenen Regelung bereits bekannt. Diese Winkel werden dann zusammen mit den bekannten Positionen der Trackerköpfe mit Hilfe der direkten Kinematik verrechnet, so dass man die Position des Ziels erhält.

4.2. Multilasertrackersystem I – Verfolgung

Die hier benutzten Multilasertracker wurden im Fachgebiet Systemanalyse der TU Ilmenau aufgebaut. An ihnen werden Verfahren der Multilateration mit mehreren Lasertrackern untersucht (Nguyen u. a., 2010, 2011; Markweg u. a., 2011).

Im Folgenden wird der Einsatz von dezentralen Kalman-Filtern für die Signalauswertung in diesem Messsystem gezeigt. Da die Winkel die Messgrößen des Systems sind, die wiederum von der Position des Ziels abhängen, entsprechen die Ausgangsgleichungen genau der inversen Kinematik. Diese fließt somit in die Modellbildung, die dem Filter zu Grunde liegt ein. Der Beobachter selber invertiert diesen Zusammenhang, so dass er an Stelle der direkten Kinematik tritt. Ein Beobachteransatz kann somit den oftmals nötigen Aufwand, beide Kinetiken zu bestimmen, reduzieren.

4.2.3. Modellierung

Um ein verteiltes Tracking durchzuführen, muss zunächst eine Modellierung erfolgen. Der zu bestimmende Zustand ist die Position des Ziels. Dies sind die drei Raumkoordinaten, die vom gewählten Koordinatensystem abhängen. Im Folgenden wird zu diesem Zweck immer ein rechtshändiges, kartesisches, ortsfestes Koordinatensystem betrachtet. Der Zustand setzt sich somit aus den Komponenten der drei Raumrichtungen zusammen. Der Unterschied zur bisherigen Betrachtung liegt nun darin, dass die Position und auch die Änderungen der Position nicht modellierbar sind. Solange keine Kenntnis über die Art der Bewegung vorliegt, kann keine Modellierung der Dynamik vorgenommen werden. In einem solchen Fall kann die Dynamik wie bei einem Parameter lediglich mit Null angesetzt werden und muss dann durch das Filter angepasst werden. Sind jedoch Kenntnisse vorhanden, so können diese eingesetzt werden.

Für einen solchen Fall ist es nicht sinnvoll, außer der Position weitere Informationen wie zum Beispiel die Geschwindigkeit in den Zustandsvektor zu übernehmen. Damit ergibt sich für den Zustandsvek-

4. Anwendung auf unterschiedliche Systeme

tor

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_Z \\ y_Z \\ z_Z \end{pmatrix} \quad (4.2.1)$$

wobei x_Z , y_Z und z_Z die drei Koordinaten des Ziels sind. Die Systemgleichung lautet nach obigen Überlegungen

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.2.2)$$

Die eigentliche Kenntnis über die Trackerköpfe fließt wie oben angedeutet in die Ausgangsgleichungen ein. Für die weiteren Schritte wird hier von einem sehr vereinfachten Ansatz ausgegangen, da nicht die Genauigkeit der Messung im Mittelpunkt steht, sondern das Konzept der verteilten Schätzung. Es wird angenommen, dass die Strahlablenkung genau in einem Punkt erfolgt. Einflüsse durch den Spiegelabstand oder der Versatz des Auftreffpunktes von den Drehachsen werden ignoriert.

Mit Bezug auf das globale Koordinatensystem wird nun festgelegt, dass der erste Ablenkwinkel φ die x-Achse als Drehachse besitzt und um diese negativ gezählt wird. Der zweite Ablenkwinkel ϑ besitzt die y-Achse als Drehachse bei positiver Zählung. Sind beide Winkel gleich Null, so läuft der Strahl parallel zur z-Achse. Diese Zusammenhänge sind exemplarisch in Abbildung 4.10 dargestellt. Alle Trackerköpfe sind stets entsprechend dieser Festlegung angeordnet.

Geht man nun davon aus, dass sich ein Tracker im Ursprung des Systems und das Ziel an den Koordinaten $(x \ y \ z)^T$ befindet, so kann man leicht die Gleichungen herleiten, die zu den gemessenen Winkeln der Ablenkspiegel führen:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{z}\right), \quad (4.2.3)$$

$$\vartheta = \arctan\left(\frac{x}{z}\right). \quad (4.2.4)$$

4.2. Multilasertrackersystem I – Verfolgung

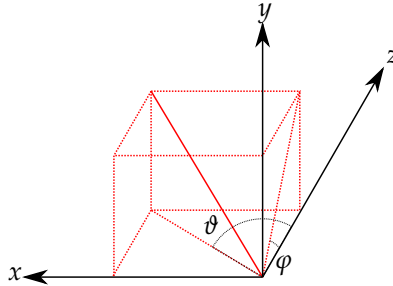


Abbildung 4.10.: Koordinatensystem und Definition der Winkel für das Lasertrackersystem. φ ergibt sich bei negativer Drehung um die x -Achse, ϑ bei positiver Drehung um die y -Achse. Falls beide Winkel Null sind, ist der Strahl mit der z -Achse identisch.

Befindet sich der Tracker selber an einer Position $(x_s \ y_s \ z_s)^T$, so müssen die Gleichungen entsprechend adaptiert werden:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{y - y_s}{z - z_s}\right), \quad (4.2.5)$$

$$\vartheta = \arctan\left(\frac{x - x_s}{z - z_s}\right). \quad (4.2.6)$$

4.2.4. Zentrale Schätzung

Um die dezentralen und verteilten Filter bewerten zu können, wird zunächst wieder eine zentrale Schätzung, die auf einem UKF basiert, durchgeführt. Als Systemmodell wird mit einem Zustandsvektor

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_Z \\ y_Z \\ z_Z \end{pmatrix} \quad (4.2.7)$$

4. Anwendung auf unterschiedliche Systeme

nach dem Ansatz aus Gleichung (4.2.2)

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.2.8)$$

gewählt. Die Ausgangsfunktion für ein System mit vier Trackern ergibt sich nach obigen Betrachtungen zu:

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \arctan \left(\frac{x_2 - y_{S1}}{x_3 - z_{S1}} \right) \\ \arctan \left(\frac{x_1 - x_{S1}}{x_3 - z_{S1}} \right) \\ \arctan \left(\frac{x_2 - y_{S2}}{x_3 - z_{S2}} \right) \\ \arctan \left(\frac{x_1 - x_{S2}}{x_3 - z_{S2}} \right) \\ \arctan \left(\frac{x_2 - y_{S3}}{x_3 - z_{S3}} \right) \\ \arctan \left(\frac{x_1 - x_{S3}}{x_3 - z_{S3}} \right) \\ \arctan \left(\frac{x_2 - y_{S4}}{x_3 - z_{S4}} \right) \\ \arctan \left(\frac{x_1 - x_{S4}}{x_3 - z_{S4}} \right) \end{pmatrix}. \quad (4.2.9)$$

Die Positionsangaben erfolgen in Metern. Die Winkel werden in Radiant gemessen. Im realen System erfolgt die Messung der Winkel über das Auslesen der Ansteuerspannungen der Stellwinkel. Die Umrechnung in Radiant ist aber schon durch das Testsystem gegeben, so dass für die Modellierung mit Winkeln gerechnet werden kann.

Für das UKF wird als Modellunsicherheit eine Standardabweichung von 10^{-4} m für alle Dimensionen angenommen. Für die Messungen wird eine Standardabweichung von $2 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{2\pi}{360} = 3,49 \cdot 10^{-5}$ rad angenommen. Die folgenden Darstellungen der Kovarianzmatrizen enthalten aus Gründen der Übersichtlichkeit keine Einheiten. Alle Komponenten von \mathbf{Q} sind auf m^2 normiert. Die Komponenten von \mathbf{R} sind auf rad^2 normiert. Somit ergeben sich

$$\mathbf{Q} = \left(10^{-4}\right)^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.2.10)$$

4.2. Multilasertrackersystem I – Verfolgung

und

$$\mathbf{R} = \left(3,49 \cdot 10^{-5}\right)^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.2.11)$$

Das Filter wird mit

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = \begin{pmatrix} 0,08 \\ 0 \\ 1,8 \end{pmatrix} \quad (4.2.12)$$

und

$$\mathbf{P}_0 = \left(10^{-2}\right)^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.2.13)$$

initialisiert, wobei die Werte von $\hat{\mathbf{x}}_0$ auf m und die Werte von \mathbf{P}_0 auf m^2 normiert sind. Auf Grund der Überlegungen zur Systemmodellierung muss die Dimensionierung der Kovarianzmatrix des Schätzfehlers als grobe Einstellung des Vertrauens in die Positionsschätzung betrachtet werden. Ein Modellrauschen, wie es von der Theorie des Kalman-Filters verlangt wird, liegt nicht vor.

Das Messrauschen kann nicht exakt bestimmt werden, da keine Angaben zur Genauigkeit der Winkelmessung bekannt sind. Es ist allerdings möglich, aus mehreren Messungen, bei denen sich das Ziel nicht bewegt, die Standardabweichung des Rauschens der Spiegelwinkel zu bestimmen. Aus diesen Berechnungen ergibt sich ein Messrauschen mit einer Standardabweichung von $\sigma = 10^{-5}$ rad. Der gewählte Wert für das Filter liegt leicht darüber, um eine konservative Einstellung zu erreichen.

Das UKF wurde genutzt, um die Position des Ziels für zwei Referenzbewegungen zu schätzen. Dies wird im folgenden Abschnitt beschrieben.

4. Anwendung auf unterschiedliche Systeme

Tabelle 4.1.: Position der vier Tracker im globalen Koordinatensystem.

Tracker	x_s in m	y_s in m	z_s in m
1	0	0	0
2	0,3124	0	0
3	0,1567	0,1136	0
4	0,0501	0,1531	-0,2633

4.2.5. Referenzbewegungen

Die Referenzbewegungen sind in den Abbildungen 4.11 und 4.12 dargestellt. Um die Bewegungen zu erhalten, wurde der Reflektor von Hand im Raum bewegt, während er von allen vier Trackern erfasst war. Zur Berechnung hat ein zentrales UKF aus der Kenntnis der vier Trackerpositionen und der Messwinkel die Position des Ziels geschätzt. Im linken unteren Feld wird die Bewegung perspektivisch entsprechend der Definition der Raumachsen gezeigt. Die restlichen Felder zeigen Projektionen der Bewegung auf die entsprechenden Hauptebenen.

Die Positionen der Tracker sind in Tabelle 4.1 aufgeführt. Die Anfangsposition des Ziels befindet sich für die erste Referenzbewegung bei $\mathbf{x}_0 = (0,0861 \quad -0,0081 \quad 1,3443)^T$ m und für die zweite Referenzbewegung bei $\mathbf{x}_0 = (0,2262 \quad -0,0817 \quad 1,3317)^T$ m. Ein Vergleich mit den Initialwerten des UKF zeigt somit, dass das Filter mit einem Fehler initialisiert wird. Die Bewegungen wurden mit einer Samplingrate von 0,0025 s aufgenommen. Die erste Bewegung hat eine Gesamtdauer von 2,9975 s, die zweite von 4,0000 s.

Diese Referenzbewegungen werden im Folgenden benutzt, um eine dezentrale Schätzung in Abschnitt 4.2.7 bewerten zu können. Sie werden aber auch in zwei weiteren Anwendungsfällen, dem Ausfall von Messeinrichtungen in Abschnitt 4.2.8 und der Umkonfiguration des Messsystems in Abschnitt 4.2.9, verwendet.

4.2. Multilasertrackersystem I – Verfolgung

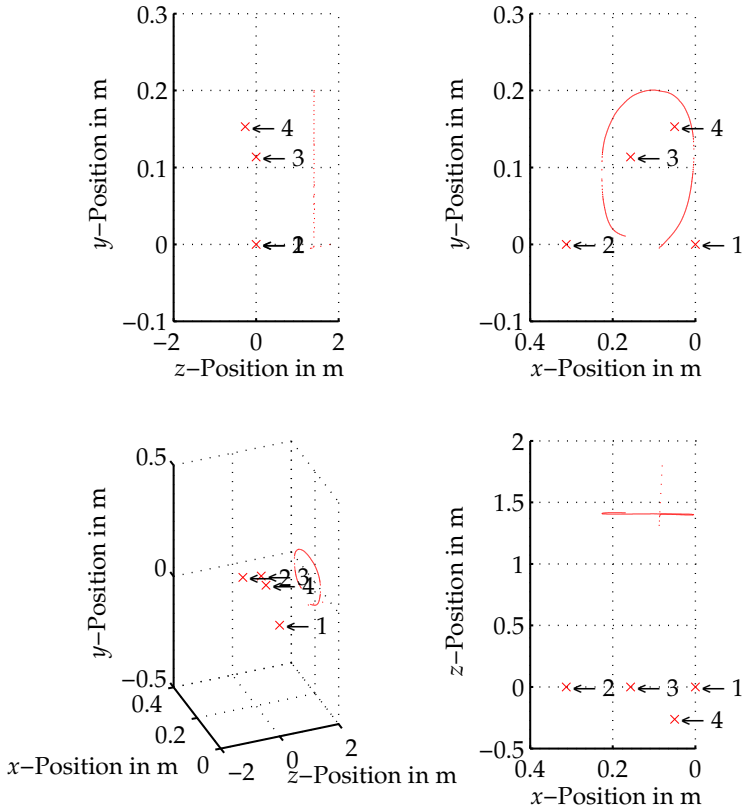


Abbildung 4.11.: Zentrale Schätzung der ersten Testbewegung sowie Positionen der Lasertracker 1 bis 4 (rotes x). Unten links sind die räumliche Anordnung der Tracker und die Trajektorien dargestellt. Die anderen Abbildungen zeigen jeweils Projektionen auf die drei Hauptebenen.

4. Anwendung auf unterschiedliche Systeme

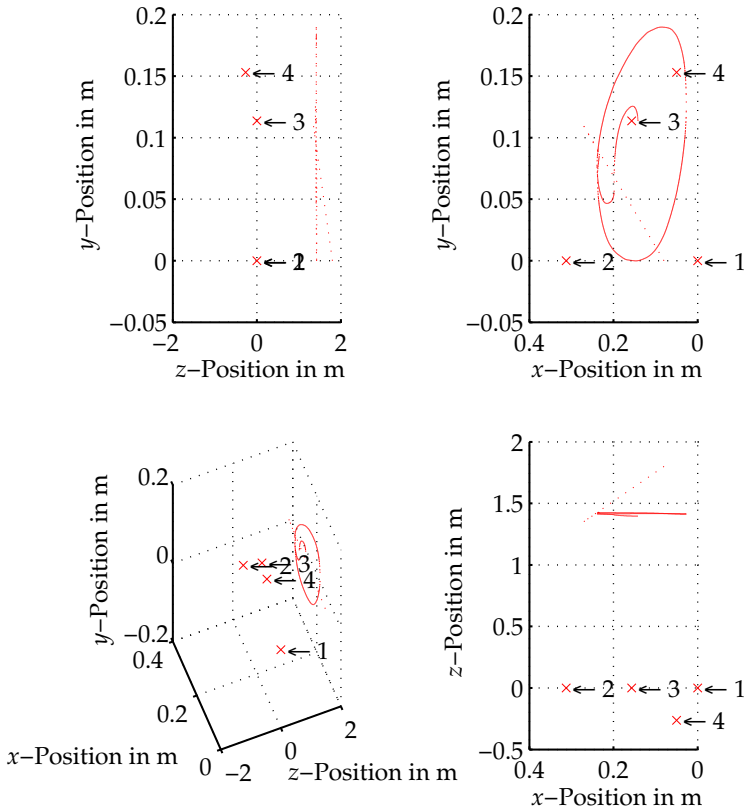


Abbildung 4.12.: Zentrale Schätzung der zweiten Testbewegung sowie Positionen der Lasertracker 1 bis 4 (rotes x). Unten links sind die räumliche Anordnung der Tracker und die Trajektorien dargestellt. Die anderen Abbildungen zeigen jeweils Projektionen auf die drei Hauptebenen.

4.2.6. Dezentrales Filter

Da in der bestehenden Modellierung nur ein Ziel vorhanden ist, kann hier keine Verteilung des globalen Zustandsvektors durchgeführt werden. Da aber auch mit einer rein dezentralen Schätzung wichtige Konzepte gezeigt werden können, wird nun zunächst auf diese eingegangen.

4.2.6.1. Lokale Modelle und lokale Zustände

Wie im vorigen Abschnitt dargelegt, wird keine Verteilung des Systemmodells erfolgen. Somit wird in jedem lokalen Knoten der komplette Zustandsvektor implementiert werden. Da für jeden Tracker ein Knoten eingerichtet wird, entsprechen die vier Transformationsmatrizen der Einheitsmatrix mit Dimension 3:

$$\mathbf{T}_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.2.14)$$

Daher gilt auch

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_g = \begin{pmatrix} x_Z \\ y_Z \\ z_Z \end{pmatrix} \quad (4.2.15)$$

und die Modellannahme

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.2.16)$$

wobei $\dot{\mathbf{x}}_i$ auf m normiert ist. Die Ausgangsfunktionen setzen sich jeweils aus den beiden Winkelgleichungen im Tracker zusammen:

$$\mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} \arctan\left(\frac{x_{12} - y_1}{x_{13} - z_1}\right) \\ \arctan\left(\frac{x_{11} - x_1}{x_{13} - z_1}\right) \end{pmatrix}, \quad (4.2.17)$$

4. Anwendung auf unterschiedliche Systeme

$$y_2 = \begin{pmatrix} \arctan\left(\frac{x_{22}-y_2}{x_{23}-z_2}\right) \\ \arctan\left(\frac{x_{21}-x_2}{x_{23}-z_2}\right) \end{pmatrix}, \quad (4.2.18)$$

$$y_3 = \begin{pmatrix} \arctan\left(\frac{x_{32}-y_3}{x_{33}-z_3}\right) \\ \arctan\left(\frac{x_{31}-x_3}{x_{33}-z_3}\right) \end{pmatrix}, \quad (4.2.19)$$

$$y_4 = \begin{pmatrix} \arctan\left(\frac{x_{42}-y_4}{x_{43}-z_4}\right) \\ \arctan\left(\frac{x_{41}-x_4}{x_{43}-z_4}\right) \end{pmatrix}. \quad (4.2.20)$$

4.2.6.2. DDUKF

In jedem Knoten werden nun DDUKF eingerichtet, die wie das zentrale Filter initialisiert werden und deren Kovarianzmatrizen mit den entsprechenden Dimensionen ebenfalls wie das zentrale Filter festgelegt werden. Wie schon im zentralen Filter werden auch hier die Größen normiert dargestellt. Alle Einträge in \mathbf{Q}_i sind auf m^2 , alle Einträge in \mathbf{R}_i sind auf rad^2 , alle Einträge in $\hat{\mathbf{x}}_{i_0}$ sind auf m und alle Einträge in \mathbf{P}_{i_0} sind auf m normiert:

$$\mathbf{Q}_i = 0,01^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.2.21)$$

$$\mathbf{R}_i = \left(0,2 \cdot \frac{2\pi}{360}\right)^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.2.22)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{i_0} = \begin{pmatrix} 0,08 \\ 0 \\ 1,8 \end{pmatrix}, \quad (4.2.23)$$

$$\mathbf{P}_{i_0} = 0,1^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.2.24)$$

Auf dieser Basis wird nun die Position des Zieles für beide Referenzbewegungen dezentral geschätzt.

4.2.7. Dezentrale Schätzung

Der euklidische Abstand zwischen lokaler und zentraler Schätzung der ersten Testbewegung ist jeweils für die vier Knoten in den Abbildungen 4.13, 4.14, 4.15 und 4.16 dargestellt. Für die zweite Testbewegung ist er in 4.17, 4.18, 4.19 und 4.20 gezeigt. Die jeweiligen Trajektorien sind im Anhang aufgeführt (A.1, A.2, A.3, A.4, A.5, A.6, A.7, A.8).

Die Betrachtung der dezentralen Schätzung zeigt, dass die geschätzten Positionen trotz eines Fehlers in der Initialisierung innerhalb kürzester Zeit nur eine geringe Abweichung von der zentralen Schätzung haben. Nachdem der Schätzer eingeschwungen ist, bleibt der maximale euklidische Abstand zwischen lokaler und globaler Schätzung unter 1 nm. Betrachtet man das berechnete Messrauschen von 10^{-5} rad in den Spiegelwinkeln und geht von einem durchschnittlichen Abstand des Ziels von den Trackern von 1,5 m aus, so ergibt sich ein geschätzter Fehler der Positionsbestimmung von circa $15 \mu\text{m}$. Man sieht somit, dass der Fehler der dezentralen Schätzung im Vergleich zu einer globalen Schätzung mehrere Größenordnungen unterhalb des Fehlers liegt, der auf Grund der Systemeigenschaften vorhanden ist. Der Fehler durch die Dezentralisierung ist somit vernachlässigbar.

Durch die Filterung in der Messeinrichtung in Kombination mit einer Kommunikation zwischen diesen Sensoren liegen diese Ergebnisse aber auch dezentral in allen Knoten vor und nicht nur in einer zentralen Fusionsinstanz. Die Vorteile eines solchen Aufbaus werden exemplarisch an zwei Szenarien in den folgenden Abschnitten gezeigt. Zunächst wird der Fall betrachtet, dass eine Messeinrichtung durch eine Störung oder einen Ausfall betroffen sein kann. Danach wird eine Umkonfiguration des Netzwerks berücksichtigt.

4.2.8. Ausfall von Messeinrichtungen

Zunächst wird der Fall betrachtet, dass während der laufenden Schätzung eine Unterbrechung des Strahls zu einem Tracker stattfindet. In einem solchen Fall soll gewährleistet sein, dass die Schätzung auf-

4. Anwendung auf unterschiedliche Systeme

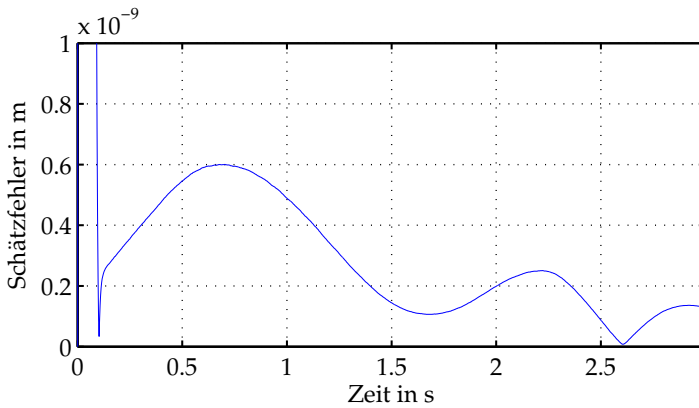


Abbildung 4.13.: Euklidischer Abstand der zentral und dezentral geschätzten Position des Ziels im Verlauf der Messung für die erste Testbewegung im ersten Knoten.

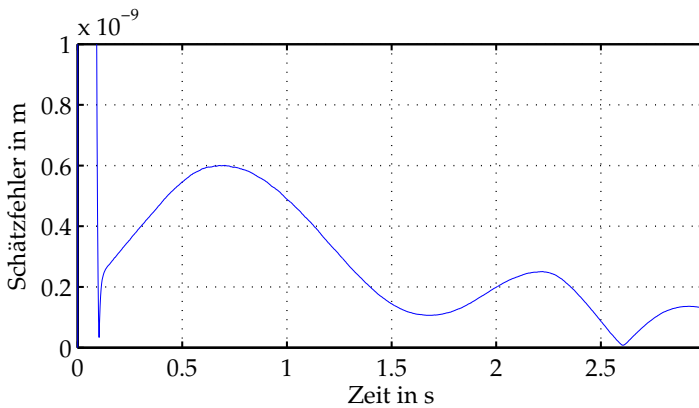


Abbildung 4.14.: Euklidischer Abstand der zentral und dezentral geschätzten Position des Ziels im Verlauf der Messung für die erste Testbewegung im zweiten Knoten.

4.2. Multilasertrackersystem I – Verfolgung

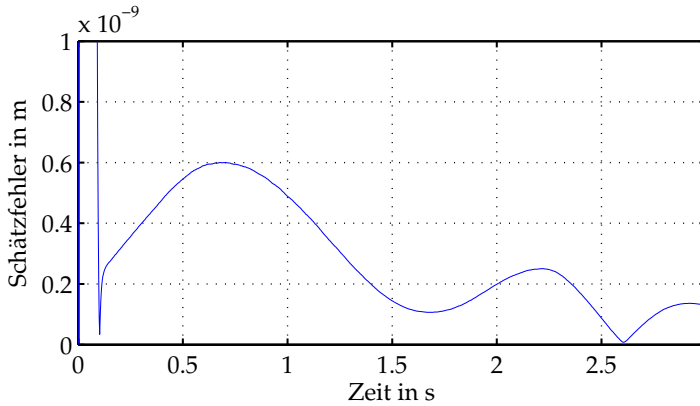


Abbildung 4.15.: Euklidischer Abstand der zentral und dezentral geschätzten Position des Ziels im Verlauf der Messung für die erste Testbewegung im dritten Knoten.

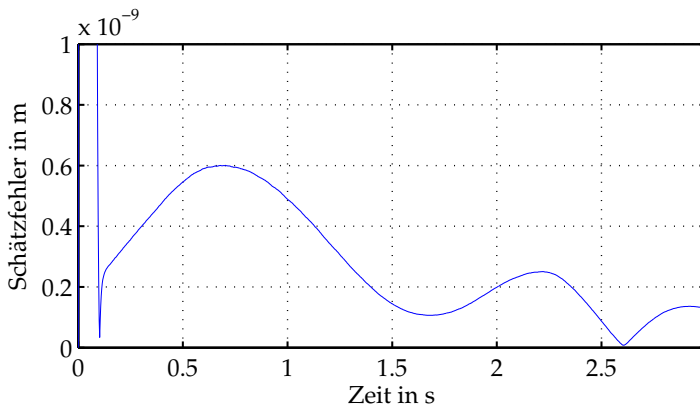


Abbildung 4.16.: Euklidischer Abstand der zentral und dezentral geschätzten Position des Ziels im Verlauf der Messung für die erste Testbewegung im vierten Knoten.

4. Anwendung auf unterschiedliche Systeme

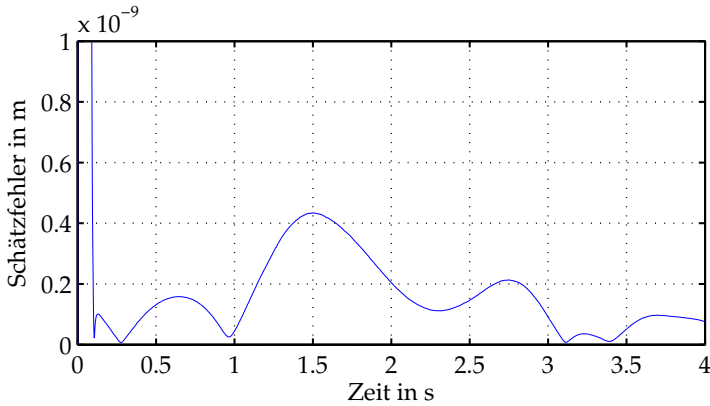


Abbildung 4.17.: Euklidischer Abstand der zentral und dezentral geschätzten Position des Ziels im Verlauf der Messung für die zweite Testbewegung im ersten Knoten.

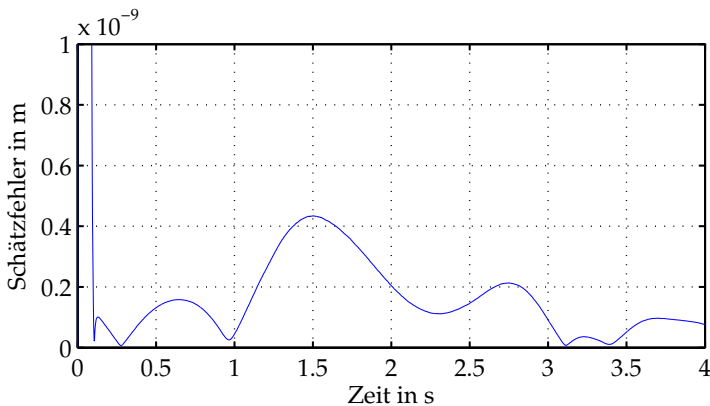


Abbildung 4.18.: Euklidischer Abstand der zentral und dezentral geschätzten Position des Ziels im Verlauf der Messung für die zweite Testbewegung im zweiten Knoten.

4.2. Multilasertrackersystem I – Verfolgung

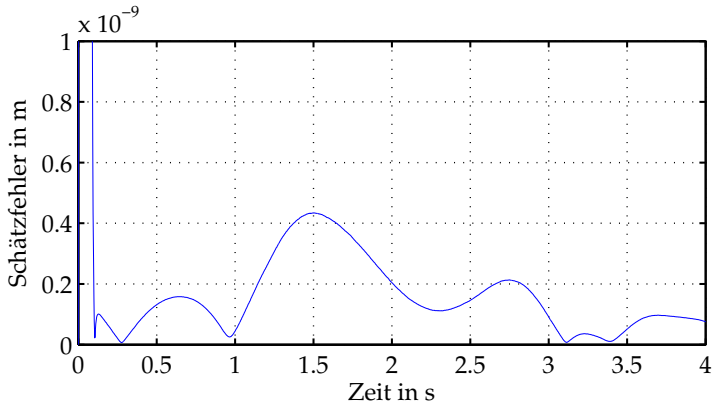


Abbildung 4.19.: Euklidischer Abstand der zentral und dezentral geschätzten Position des Ziels im Verlauf der Messung für die zweite Testbewegung im dritten Knoten.

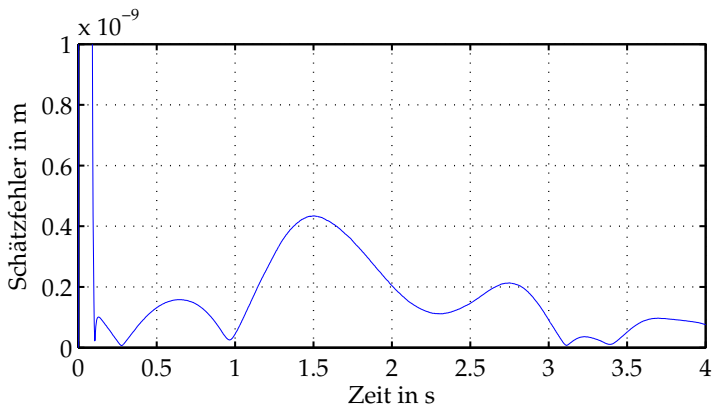


Abbildung 4.20.: Euklidischer Abstand der zentral und dezentral geschätzten Position des Ziels im Verlauf der Messung für die zweite Testbewegung im vierten Knoten.

4. Anwendung auf unterschiedliche Systeme

rechterhalten wird, auch wenn dabei die Genauigkeit abnehmen kann. Der Ausfall von Messungen wird im Folgenden simuliert.

Es werden die Messungen der beiden Referenzbewegungen benutzt. Zunächst erfolgt eine Initialisierung der Filter wie im vorigen Abschnitt. Die erste Sekunde wird normal berechnet. Danach werden die gemessenen Winkel der Tracker zwei und vier zu Null gesetzt. Die Einträge in den jeweiligen Kovarianzmatrizen für den Messfehler werden mit 10^9 multipliziert, um diese Werte aus den Berechnungen des Filters praktisch auszuschließen. Diese Einstellung könnte für nicht verfügbare Knoten im Multitrackersystem automatisch vorgenommen werden, sobald die Unterbrechung der Kommunikation oder ein sonstiger Ausfall eines Trackers festgestellt werden. In diesem Zustand wird die nächste Sekunde weiter berechnet. Zu Beginn der dritten Sekunde werden die Messungen in den beiden Trackern wieder berücksichtigt und die Kovarianzmatrizen auf ihre ursprünglichen Werte gesetzt. Das Ergebnis der Schätzungen in den einzelnen Trackern ist in den Abbildungen 4.21, 4.22, 4.23 und 4.24 zu sehen. Die zugehörigen Trajektorien (A.9, A.10, A.11, A.12) sind im Anhang zu sehen.

Die Schätzungen aller vier Systeme verlaufen identisch. In den Zeiten, in denen alle Tracker arbeiten, stimmen sie mit der zentralen Schätzung überein. Zwischen Sekunde eins und zwei weichen sie von der Referenzschätzung ab, divergieren jedoch nicht. Da weniger Messungen zur Verfügung stehen, ist dieses Verhalten zu erwarten. Der Übergang vom gestörten zum wieder voll funktionsfähigen System erfolgt zügig. Es wird also nicht nur sichergestellt, dass in den ungestörten Trackern während des Ausfalls eine Schätzung fortgeführt wird, sondern auch, dass diese Werte in den gestörten Trackern selber vorhanden sind. Betrachtet man dieses dezentrale Filter unter dem Gesichtspunkt einer redundanten Auslegung, so sieht man, dass der Ausfall eines einzelnen Knotens nicht zu einem Versagen des gesamten Schätzernetzwerks führt. Dies ist beim dezentralen Schätzer ein großer Vorteil gegenüber einer zentralen Ausführung.

Für das Multitrackersystem ist es vorteilhaft, wenn im Falle einer Strahlunterbrechung das Ziel möglichst schnell wieder anvisiert wird.

4.2. Multilasertrackersystem I – Verfolgung

Zu diesem Zwecke werden normalerweise Algorithmen ausgeführt, die den Laserstrahl einen bestimmten Teil des Raumes abfahren lassen, um so das Ziel wieder zu treffen. Wenn, wie im Falle der dezentralen Schätzung, die Position des Ziels zumindest mit verringerter Genauigkeit bekannt ist, so kann das Wiederfinden des Reflektors erheblich beschleunigt werden, da der Suchalgorithmus immer vom aktuellen Schätzwert aus starten kann.

4.2.9. Umkonfiguration des Messsystems

Eine weitere Möglichkeit, die ein dezentrales Schätznetzwerk bietet, ist die Änderung der Konfiguration zur Laufzeit. Dieses Verhalten wird erneut mit Hilfe der bereits dargestellten Messungen gezeigt. Zu Beginn wird das Schätznetzwerk lediglich aus den Trackern 1 und 2 aufgebaut, initialisiert und gestartet. Nach einer Sekunde wird der Tracker 3 hinzugefügt. Ihm werden zur Initialisierung die aktuellen Schätzwerte sowie die Kovarianzmatrix des Schätzfehlers zur Verfügung gestellt. Nach einer weiteren Sekunde wird mit den gleichen Bedingungen der letzte Tracker zum System hinzugefügt.

Die Abbildungen 4.25, 4.26, 4.27 und 4.28 zeigen die Ergebnisse dieses Szenarios. Die Trajektorien (A.13, A.14, A.15, A.16) sind erneut im Anhang zu sehen. Es ist zu sehen, dass nach dem Hinzufügen des letzten Trackers die Schätzung des Gesamtsystems mit der des zentralen Schätzers identisch ist. Es wird also trotz unterschiedlicher Anfangsvoraussetzungen nach kurzer Zeit das gleiche Schätzergebnis wie im zentralen Fall erreicht. Dass die Schätzungen in der Phase, in der drei Tracker aktiv sind, sich im Vergleich zum zentralen Filter mit Bezug auf die Phase mit zwei Trackern leicht verschlechtern, lässt sich damit erklären, dass das Messsystem nicht ausreichend kalibriert ist und es somit möglich ist, dass der dritte Tracker die Gesamtleistung leicht verschlechtern kann. Mit Blick auf die gesamte Schätzung sieht man, dass das dezentralisierte Filter nicht divergiert und die Umkonfigurationen innerhalb sehr kurzer Zeit wieder zu stabilen Schätzungsverläufen führen.

4. Anwendung auf unterschiedliche Systeme

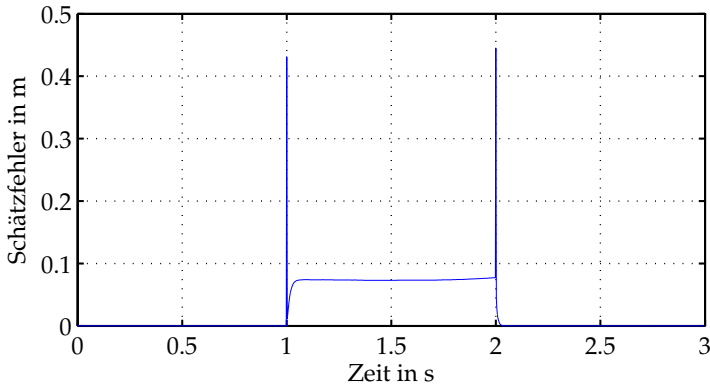


Abbildung 4.21.: Euklidischer Abstand der zentral und dezentral geschätzten Position des Ziels im Verlauf der Messung für die erste Testbewegung im ersten Knoten. Von 1 s bis 2 s wird eine Strahlunterbrechung für Tracker 2 und 4 simuliert.

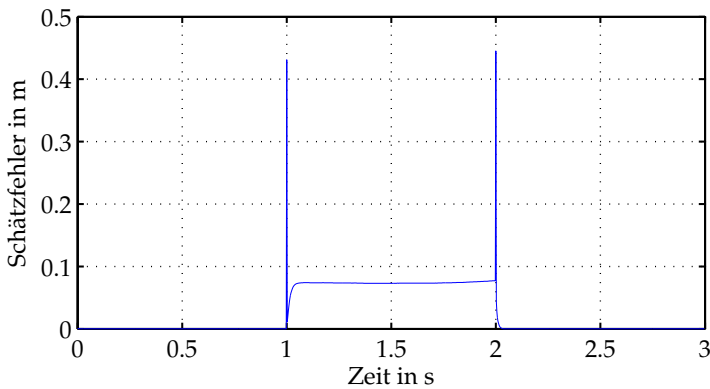


Abbildung 4.22.: Euklidischer Abstand der zentral und dezentral geschätzten Position des Ziels im Verlauf der Messung für die erste Testbewegung im zweiten Knoten. Von 1 s bis 2 s wird eine Strahlunterbrechung für Tracker 2 und 4 simuliert.

4.2. Multilasertrackersystem I – Verfolgung

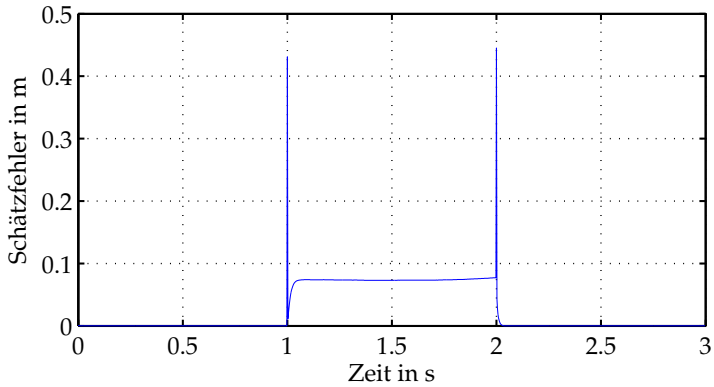


Abbildung 4.23.: Euklidischer Abstand der zentral und dezentral geschätzten Position des Ziels im Verlauf der Messung für die erste Testbewegung im dritten Knoten. Von 1 s bis 2 s wird eine Strahlunterbrechung für Tracker 2 und 4 simuliert.

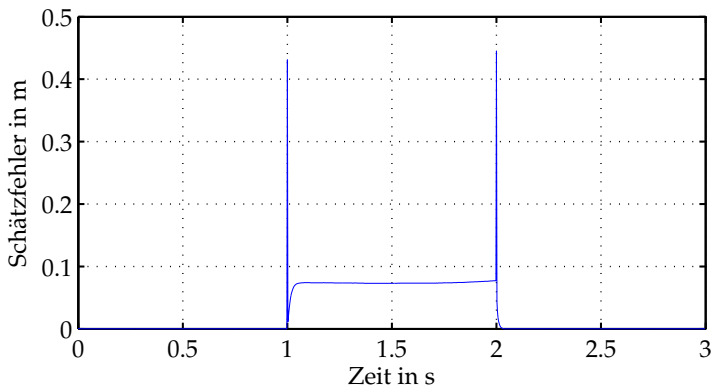


Abbildung 4.24.: Euklidischer Abstand der zentral und dezentral geschätzten Position des Ziels im Verlauf der Messung für die erste Testbewegung im vierten Knoten. Von 1 s bis 2 s wird eine Strahlunterbrechung für Tracker 2 und 4 simuliert.

4. Anwendung auf unterschiedliche Systeme

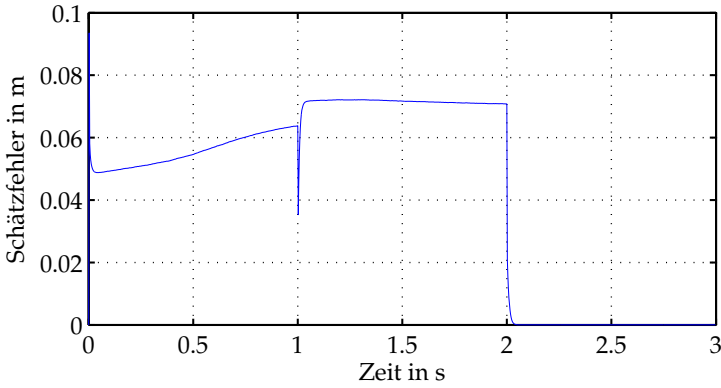


Abbildung 4.25.: Euklidischer Abstand der zentral und dezentral geschätzten Position des Ziels im Verlauf der Messung für die erste Testbewegung im ersten Knoten. Tracker 3 wird nach einer, Tracker 4 nach zwei Sekunden zum Filter hinzugefügt.

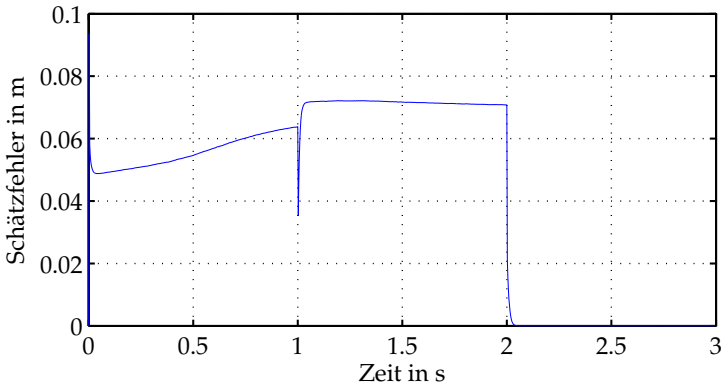


Abbildung 4.26.: Euklidischer Abstand der zentral und dezentral geschätzten Position des Ziels im Verlauf der Messung für die erste Testbewegung im zweiten Knoten. Tracker 3 wird nach einer, Tracker 4 nach zwei Sekunden zum Filter hinzugefügt.

4.2. Multilasertrackersystem I – Verfolgung

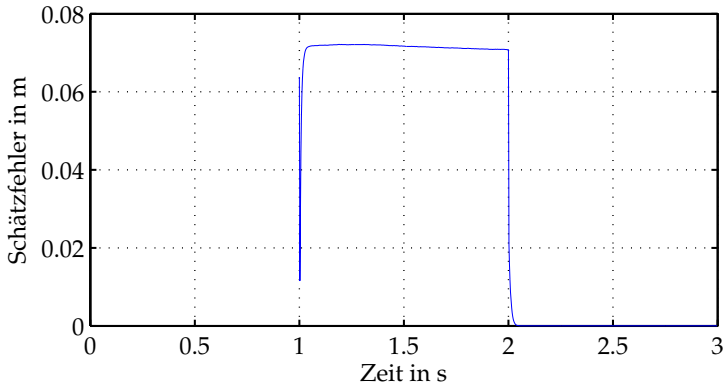


Abbildung 4.27.: Euklidischer Abstand der zentral und dezentral geschätzten Position des Ziels im Verlauf der Messung für die erste Testbewegung im dritten Knoten. Tracker 3 wird nach einer, Tracker 4 nach zwei Sekunden zum Filter hinzugefügt.

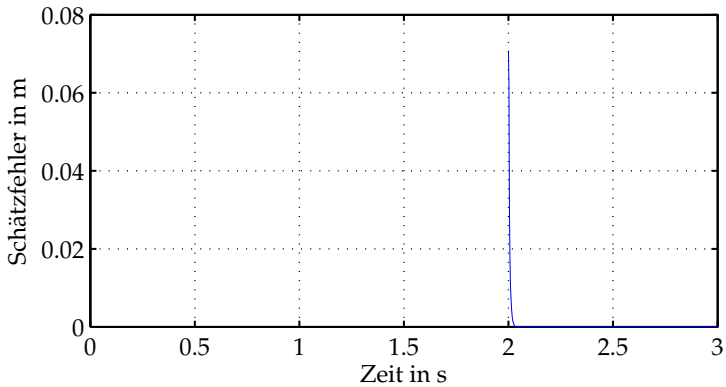


Abbildung 4.28.: Euklidischer Abstand der zentral und dezentral geschätzten Position des Ziels im Verlauf der Messung für die erste Testbewegung im vierten Knoten. Tracker 3 wird nach einer, Tracker 4 nach zwei Sekunden zum Filter hinzugefügt.

4. Anwendung auf unterschiedliche Systeme

4.3. Multilasertrackersystem – Beobachtung eines gekoppelten, mechanischen Systems

Nachdem im vorangegangenen Abschnitt unterschiedliche Aspekte eines dezentralisierten Systems gezeigt wurden, wird nun das Multilasertrackersystem benutzt, um eine verteilte und dezentrale Schätzung durchzuführen. Zu diesem Zweck wird ein gekoppeltes, nichtlineares, mechanisches System benutzt.

4.3.1. Modellierung mehrerer gekoppelter Pendel

Als System werden drei über Federn gekoppelte Pendel, wie sie in Abbildung 4.29 zu sehen sind, verwendet. Zur Modellierung dieses Systems werden folgende Konventionen festgelegt: Die x -Achse läuft in horizontaler Richtung von links nach rechts; die y -Achse läuft in vertikaler Richtung von oben nach unten. Winkel sind in der x - y -Ebene gleich Null, wenn ein Vektor in die positive y -Richtung zeigt.

4.3.1.1. Bewegungen von Pendeln

Es gilt im Allgemeinen für einen ausgedehnten Körper, der eine Rotation um eine fixe Drehachse ausführen kann, folgendes Bewegungsgesetz:

$$\ddot{\varphi} = \frac{\mathbf{M}}{I}. \quad (4.3.1)$$

Hierbei sind \mathbf{M} das resultierende Drehmoment in Nm und I das Massenträgheitsmoment in $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ und $\ddot{\varphi}$ die resultierende Winkelbeschleunigung in rad/s^2 .

Das Massenträgheitsmoment hängt von der Beschaffenheit des Körpers ab. Für ein Pendel wird angenommen, dass das sich die effektive Masse m in kg im Schwerpunkt des Pendels mit Abstand l zur Drehachse in m auf kleinem Raum konzentriert. In einem solchen Fall bestimmt sich das Massenträgheitsmoment nach dem Satz von Steiner zu

$$I = m \cdot l^2. \quad (4.3.2)$$

4.3. Multilasertrackersystem II – Beobachtung

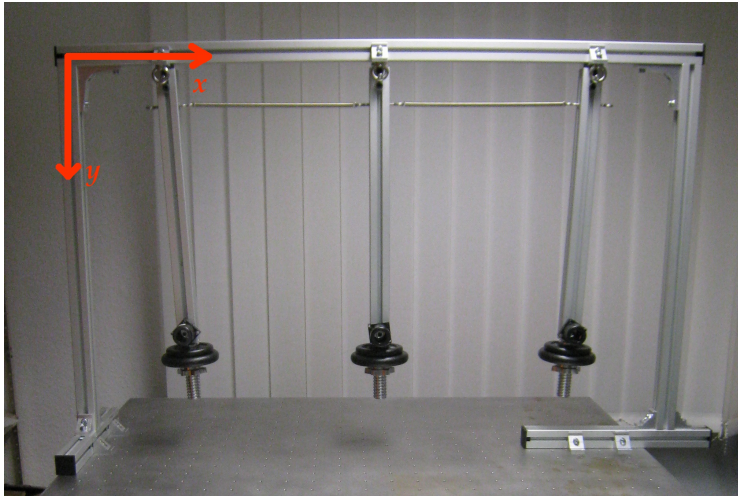


Abbildung 4.29.: System aus drei gekoppelten Pendeln.

Da als Einschränkung für den folgenden Aufbau gilt, dass mit Ausnahme der Rotation um die feste Achse alle Bewegungen durch das Achsenlager aufgenommen werden, kann man jedes einzelne angreifende Drehmoment mit

$$M_i = l_i \cdot F_{i,t} \quad (4.3.3)$$

bestimmen, wobei $F_{i,t}$ der in tangentialer Richtung wirkende Bestandteil einer externen Kraft F_i in N ist und l_i der Abstand von der Drehachse in m, bei der diese Kraft angreift. Um bei mehreren Kräften das resultierende Drehmoment zu bestimmen, muss die Summe aller Drehmomente betrachtet werden. Das heißt, dass die Summe aller Tangentialkräfte, die mit den Abständen zur Drehachse skaliert werden, bestimmt werden muss. Auf diese Art und Weise kann nun jedes Drehmoment einzeln identifiziert werden.

Schwerkraft: Die Wirkung der Schwerkraft lässt sich sehr einfach darstellen. Da eine konstante Erdbeschleunigung $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ ange-

4. Anwendung auf unterschiedliche Systeme

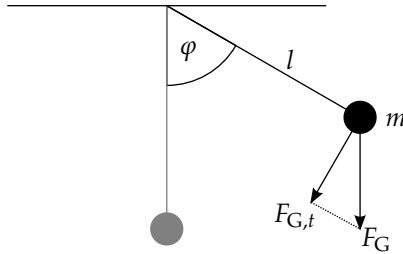


Abbildung 4.30.: Wirkung der Schwerkraft auf ein Pendel.

nommen wird, wirkt eine Kraft $F_G = m \cdot g$ immer in y -Richtung. Die Projektion auf die Tangentialrichtung entspricht somit immer dem Sinus des Pendelwinkels. Die wirksame Kraft ist somit

$$F_{G,t} = (m \cdot g) \sin \varphi. \quad (4.3.4)$$

Der Abstand zur Pendelaufhängung, an dem die Kraft angreift, entspricht dem Abstand bis zum Schwerpunkt des Pendels. Somit gilt

$$l_G = l. \quad (4.3.5)$$

Dieser Zusammenhang ist in Abbildung 4.30 dargestellt.

Zugfeder: Zwischen zwei benachbarten Pendeln ist eine Zugfeder befestigt. Dies ist in Abbildung 4.31 dargestellt. Diese Feder übt eine Kraft aus, die proportional zu ihrer Länge ist. Im unbelasteten Zustand ist sie maximal kontrahiert und übt ihre Vorspannung aus. Die Krafrichtung entspricht immer der Längsrichtung der Feder und ist zu ihrer Mitte gerichtet. Da sich die Federlänge und ihre Ausrichtung relativ zu den Pendeln in Abhängigkeit der beiden Pendelwinkel ändern, müssen sowohl der Betrag der Federkraft als auch der Tangentialanteil für jedes der beiden Pendel modelliert werden. Für die folgenden Betrachtungen wird festgelegt, dass die Feder, die sich weiter rechts befindet, mit 2 indiziert ist, und diejenige, die sich links befindet, mit 1.

4.3. Multilasertrackersystem II – Beobachtung

Der Betrag der Federkraft berechnet sich mit

$$F_F = F_0 + k \cdot s, \quad (4.3.6)$$

wobei F_0 die Kraft in N ist, die benötigt wird, um die Feder aus ihrer Ruhelänge d_0 in m heraus auszudehnen (Vorspannung). Die Verlängerung der Feder ist s in m. Die Proportionalitätskonstante für den linearen Bereich der Feder ist k in $\frac{\text{N}}{\text{m}}$. Die Federlänge $d_1 = d_0 + s$ muss nun in Abhängigkeit der Winkel φ_1 und φ_2 und dem Abstand der beiden Pendel a in m bestimmt werden. Die kartesischen Koordinaten der Aufhängungspunkte in den Pendeln berechnen sich für das linke und das rechte mit

$$x_{F,l} = h_1 \sin(\varphi_1) + b_1 \cos(\varphi_1), \quad (4.3.7)$$

$$y_{F,l} = h_1 \cos(\varphi_1) + b_1 \sin(\varphi_1), \quad (4.3.8)$$

$$x_{F,r} = h_2 \sin(\varphi_2) + a - b_2 \cos(\varphi_2), \quad (4.3.9)$$

$$y_{F,r} = h_2 \cos(\varphi_2) - b_2 \sin(\varphi_2). \quad (4.3.10)$$

Die jeweils ersten Terme der Summen bestimmen dabei den Punkt, der auf Höhe h in m der Federaufhängung auf der Pendelachse liegt. Da das reale Pendel eine Ausdehnung besitzt und eine benötigte Befestigung Platz beansprucht, wird dies in den jeweils zweiten Termen berücksichtigt. Für eine Aufhängung der Länge b in m, die sich immer senkrecht zum Pendel befindet, werden so die Endpunkte der Feder bestimmt. Die eigentliche Länge d_1 kann man nun über

$$d_1 = \sqrt{(x_{F,r} - y_{F,r})^2 + (y_{F,r} - y_{F,l})^2} \quad (4.3.11)$$

bestimmen. Die Federkraft ist somit

$$F_F = F_0 + k(d_1 - d_0). \quad (4.3.12)$$

Der Tangentialanteil, der auf ein Pendel wirkt, hängt wiederum von beiden Winkeln ab. Er ergibt sich durch Skalierung mit

$$\sin(\alpha) = \sin(\vartheta - \varphi). \quad (4.3.13)$$

4. Anwendung auf unterschiedliche Systeme

α ist der relevante Winkel zwischen dem Pendel und der Feder. Um diesen in Abhängigkeit vom Pendelwinkel zu berechnen, muss als Hilfsgröße ϑ aus der Position der Endpunkte der Feder bestimmt werden und ergibt sich zu

$$\vartheta_1 = \arctan\left(\frac{x_{F,1,2} - x_{F,1,1}}{y_{F,1,2} - y_{F,1,1}}\right) \quad (4.3.14)$$

und

$$\vartheta_2 = \arctan\left(\frac{x_{F,1,2} - x_{F,1,1}}{y_{F,1,2} - y_{F,1,1}}\right) - \pi. \quad (4.3.15)$$

Somit ergibt sich für die Tangentialanteile der Federkraft

$$F_{F,t_1} = F_F \cdot \sin\left(\arctan\left(\frac{x_{F,1,2} - x_{F,1,1}}{y_{F,1,2} - y_{F,1,1}}\right) - \varphi_1\right) \quad (4.3.16)$$

für das linke Pendel und

$$F_{F,t_2} = F_F \cdot \sin\left(\arctan\left(\frac{x_{F,1,2} - x_{F,1,1}}{y_{F,1,2} - y_{F,1,1}}\right) - \pi - \varphi_2\right) \quad (4.3.17)$$

für das rechte Pendel. Die jeweiligen Abstände zur Drehachse müssen noch mit

$$l_{F,1} = h_1 \quad (4.3.18)$$

und

$$l_{F,2} = h_2 \quad (4.3.19)$$

berücksichtigt werden.

Reibung: Die Reibung wird als einfache Kraft modelliert, welche proportional zur Winkelgeschwindigkeit ist. Der Reibungskoeffizient wird experimentell so angepasst, dass die Dämpfung der Schwingung

4.3. Multilasertrackersystem II – Beobachtung

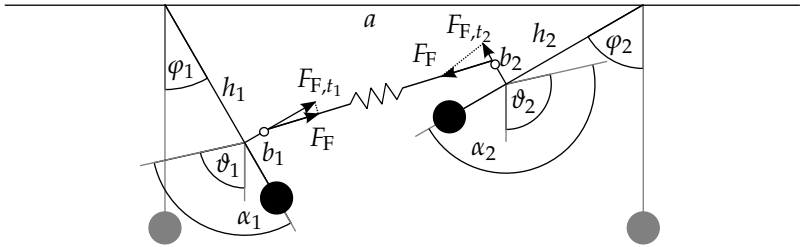


Abbildung 4.31.: Wirkung einer Feder, die zwischen zwei Pendeln fixiert ist.

eines einzelnen Pendels im Modell dem realen Aufbau entspricht. Die Reibungskraft ist außerdem immer in tangentialer Richtung wirksam:

$$F_{R,t} = F_R = -c \cdot \dot{\varphi}. \quad (4.3.20)$$

Da der Koeffizient c in $\text{N} \cdot \text{s}/\text{rad}$ nur experimentell bestimmt wird und genau so wie die Hebellänge multiplikativ in die Berechnung des Drehmoments eingeht, kann man auf eine separate Hebellänge verzichten.

4.3.1.2. Modellierung des Gesamtsystems

Das Gesamtsystem besteht, wie in Abbildung 4.32 dargestellt ist, aus drei Pendeln. Die Längen der Pendel bis zu ihrem Schwerpunkt sind mit l bezeichnet. Die für die Modellierung angenommenen effektiven Massen des Pendels sind m . Die Pendelwinkel werden erneut mit φ bezeichnet. Diese Größen werden jeweils mit einem Index versehen, um sie den drei Pendeln zuzuordnen. Die Abstände zwischen dem ersten und dem zweiten, sowie dem zweiten und dem dritten Pendel sind a_1 und a_2 . Die erste Feder, die zwischen dem ersten und dem zweiten Pendel befestigt ist, hat eine Grundlänge $d_{0,1}$ und eine Federkonstante k_1 . Für die Feder zwischen dem zweiten und dritten Pendel sind diese Größen entsprechend $d_{0,2}$ und k_2 . Der Abstand zur Pendelaufhängung, in dem die Federn befestigt sind, wird mit h und ei-

4. Anwendung auf unterschiedliche Systeme

nem doppeltem Index bezeichnet. Der erste Index bezieht sich auf die Feder, der zweite auf das Pendel. Die Länge der senkrechten Federbefestigung von der Pendelachse wird mit b und gleicher doppelter Indizierung bezeichnet. Die Reibkonstante ist c .

Um eine Darstellung im Zustandsraum zu erhalten, werden die drei Pendelwinkel und die jeweiligen Winkelgeschwindigkeiten benötigt, um den Zustandsvektor aufzubauen:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \dot{\varphi}_1 \\ \varphi_2 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \varphi_3 \\ \dot{\varphi}_3 \end{pmatrix}. \quad (4.3.21)$$

Mit den Betrachtungen aus Abschnitt 4.3.1.1 können nun die Differentialgleichungen aufgestellt werden:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (4.3.22)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{I_1} \cdot (l_{G,1}F_{G,t,1} + l_{F,1}F_{F,t,1} + F_{R,t,1}), \quad (4.3.23)$$

$$\dot{x}_3 = x_4, \quad (4.3.24)$$

$$\dot{x}_4 = \frac{1}{I_2} \cdot (l_{G,2}F_{G,t,2} + l_{F,2,1}F_{F,t,2,1} + l_{F,2,2}F_{F,t,2,2} + F_{R,t,2}), \quad (4.3.25)$$

$$\dot{x}_5 = x_6, \quad (4.3.26)$$

$$\dot{x}_6 = \frac{1}{I_3} \cdot (l_{G,3}F_{G,t,3} + l_{F,3}F_{F,t,3} + F_{R,t,3}), \quad (4.3.27)$$

$$I_1 = m_1 \cdot l_1^2, \quad (4.3.28)$$

$$I_2 = m_2 \cdot l_2^2, \quad (4.3.29)$$

$$I_3 = m_3 \cdot l_3^2, \quad (4.3.30)$$

$$F_{G,t,1} = -m_1 \cdot g \sin(x_1), \quad (4.3.31)$$

$$l_{G,1} = l_1, \quad (4.3.32)$$

$$F_{F,t,1} = (F_{0,1} + (k_1(d_{1,1} - d_{0,1}))) \sin(\alpha_{1,1}), \quad (4.3.33)$$

$$l_{F,1} = h_{1,1}, \quad (4.3.34)$$

4.3. Multilasertrackersystem II – Beobachtung

$$\alpha_{1,1} = \arctan \left(\frac{x_{F,1,2} - x_{F,1,1}}{y_{F,1,2} - y_{F,1,1}} \right) - x_1, \quad (4.3.35)$$

$$F_{R,t,1} = -c \cdot x_2, \quad (4.3.36)$$

$$F_{G,t,2} = -m_2 \cdot g \sin(x_3), \quad (4.3.37)$$

$$l_{G,2} = l_2, \quad (4.3.38)$$

$$F_{F,t,2,1} = (F_{0,1} + (k_1 (d_{1,1} - d_{0,1}))) \sin(\alpha_{2,1}), \quad (4.3.39)$$

$$l_{F,2,1} = h_{1,2}, \quad (4.3.40)$$

$$\alpha_{2,1} = \arctan \left(\frac{x_{F,1,2} - x_{F,1,1}}{y_{F,1,2} - y_{F,1,1}} \right) - \pi - x_3, \quad (4.3.41)$$

$$F_{F,t,2,2} = (F_{0,2} + (k_2 (d_{2,2} - d_{0,2}))) \sin(\alpha_{2,2}), \quad (4.3.42)$$

$$l_{F,2,2} = h_{2,2}, \quad (4.3.43)$$

$$\alpha_{2,2} = \arctan \left(\frac{x_{F,2,3} - x_{F,2,2}}{y_{F,2,3} - y_{F,2,2}} \right) - x_3, \quad (4.3.44)$$

$$F_{R,t,2} = -c \cdot x_4, \quad (4.3.45)$$

$$F_{G,t,3} = -m_3 \cdot g \sin(x_5), \quad (4.3.46)$$

$$l_{G,3} = l_3, \quad (4.3.47)$$

$$F_{F,t,3} = (F_{0,2} + (k_2 (d_{2,2} - d_{0,2}))) \sin(\alpha_{2,3}), \quad (4.3.48)$$

$$l_{F,3} = h_{2,3}, \quad (4.3.49)$$

$$\alpha_{2,3} = \arctan \left(\frac{x_{F,2,3} - x_{F,2,2}}{y_{F,2,3} - y_{F,2,2}} \right) - \pi - x_5, \quad (4.3.50)$$

$$F_{R,t,3} = -c \cdot x_6, \quad (4.3.51)$$

$$d_{1,1} = \sqrt{(x_{F,1,2} - x_{F,1,1})^2 + (y_{F,1,2} - y_{F,1,1})^2}, \quad (4.3.52)$$

$$d_{2,2} = \sqrt{(x_{F,2,3} - x_{F,2,2})^2 + (y_{F,2,3} - y_{F,2,2})^2}, \quad (4.3.53)$$

$$x_{F,1,2} = h_{1,2} \sin(x_3) + a_1 - b_{1,2} \cos(x_3), \quad (4.3.54)$$

$$x_{F,1,1} = h_{1,1} \sin(x_1) + b_{1,1} \cos(x_1), \quad (4.3.55)$$

$$y_{F,1,2} = h_{1,2} \cos(x_3) - b_{1,2} \sin(x_3), \quad (4.3.56)$$

$$y_{F,1,1} = h_{1,1} \cos(x_1) + b_{1,1} \sin(x_1), \quad (4.3.57)$$

$$x_{F,2,3} = h_{2,3} \sin(x_5) + a_2 - b_{2,3} \cos(x_5), \quad (4.3.58)$$

4. Anwendung auf unterschiedliche Systeme

$$x_{F,2,2} = h_{2,2} \sin(x_3) + b_{2,2} \cos(x_3), \quad (4.3.59)$$

$$y_{F,2,3} = h_{2,3} \cos(x_5) - b_{2,3} \sin(x_5), \quad (4.3.60)$$

$$y_{F,2,2} = h_{2,2} \cos(x_3) + b_{2,2} \sin(x_3). \quad (4.3.61)$$

Nun muss die Ausgangsfunktion modelliert werden. Die grundsätzlichen Zusammenhänge wie in (4.2.9) sind weiterhin gültig. Allerdings muss noch eine Transformation aus dem Koordinatensystem der Pendel in das Koordinatensystem der Tracker erfolgen. Dazu muss der Ruhepunkt der einzelnen Pendel abgebildet werden, um dann die Bewegung der Pendel in eine Bewegung im Trackersystem zu überführen.

Die Pendel sind in einem festen Abstand parallel zu x-y-Ebene aufgebaut, so dass der Abstand z_0 konstant ist. Die Ruhelagen der Reflektoren sind $x_{0,1}, y_{0,1}, x_{0,2}, y_{0,2}, x_{0,3}, y_{0,3}$ im Koordinatensystem der Tracker. Über den Abstand zur Drehachse q und mit Hilfe von Sinus- und Kosinusfunktionen kann man somit die Position der Reflektoren berechnen und in die Messgleichungen einsetzen:

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \arctan\left(\frac{(y_{0,2}-q \cos(x_3))-y_{S1}}{z_0-z_{S1}}\right) \\ \arctan\left(\frac{(x_{0,2}-q \sin(x_3))-x_{S1}}{z_0-z_{S1}}\right) \\ \arctan\left(\frac{(y_{0,1}-q \cos(x_1))-y_{S2}}{z_0-z_{S2}}\right) \\ \arctan\left(\frac{(x_{0,1}-q \sin(x_1))-x_{S2}}{z_0-z_{S2}}\right) \\ \arctan\left(\frac{(y_{0,2}-q \cos(x_3))-y_{S3}}{z_0-z_{S3}}\right) \\ \arctan\left(\frac{(x_{0,2}-q \sin(x_3))-x_{S3}}{z_0-z_{S3}}\right) \\ \arctan\left(\frac{(y_{0,3}-q \cos(x_5))-y_{S4}}{z_0-z_{S4}}\right) \\ \arctan\left(\frac{(x_{0,3}-q \sin(x_5))-x_{S4}}{z_0-z_{S4}}\right) \end{pmatrix}. \quad (4.3.62)$$

4.3.2. Parameter des Testsystems

Abbildung 4.33 zeigt den Aufbau, der für die folgenden Messungen verwendet wurde. Von links nach rechts sind die Pendel 1, 2 und 3

4.3. Multilasertrackersystem II – Beobachtung

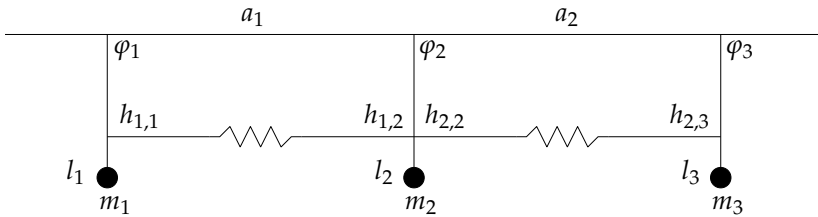


Abbildung 4.32.: Prinzipielle Konfiguration des Mehrpendelsystems.

im Hintergrund zu sehen. Auf Grund der Federn, die zwischen den Pendeln befestigt sind, sind die äußeren Pendel im Ruhezustand aus der Senkrechten ausgelenkt. Über den Gewichten der Pendel sind die Retroreflektoren befestigt.

Im Vordergrund sind die vier einzelnen Lasertracker zu sehen. Der mittlere Tracker definiert dabei das Trackerkoordinatensystem. Der Ursprung ist der Austrittspunkt des Lasers vom zweiten Spiegel dieses Trackers. Der zweite Tracker ist links davon angeordnet. Zwischen den beiden ist auf einem Podest der dritte Tracker montiert. Nach vorne versetzt steht der vierte Tracker.

In den folgenden Messungen wird das Pendel 1 von Tracker 2 verfolgt, das Pendel 3 von Tracker 4 und das Pendel 2 jeweils von Tracker 1 und 3. Da die Anordnung der Pendelebene bekannt und fest ist, kann man mit Hilfe nur eines Trackers die Position des Reflektors eindeutig bestimmen.

Die Parameter des Modells sind in Tabelle 4.2 zusammengefasst. Da die Parameter für jedes Pendel identisch gewählt wurden, ist in der Tabelle keine Indizierung für die einzelnen Größen vorhanden. Sämtliche Abstände die Pendel betreffend wurden gemessen. Die Pendellänge und -masse beziehen sich auf den Schwerpunkt und die effektive Masse. Die Daten zu den Federn wurden aus dem Datenblatt entnommen. Die Reibungskonstante wurde experimentell bestimmt.

4. Anwendung auf unterschiedliche Systeme

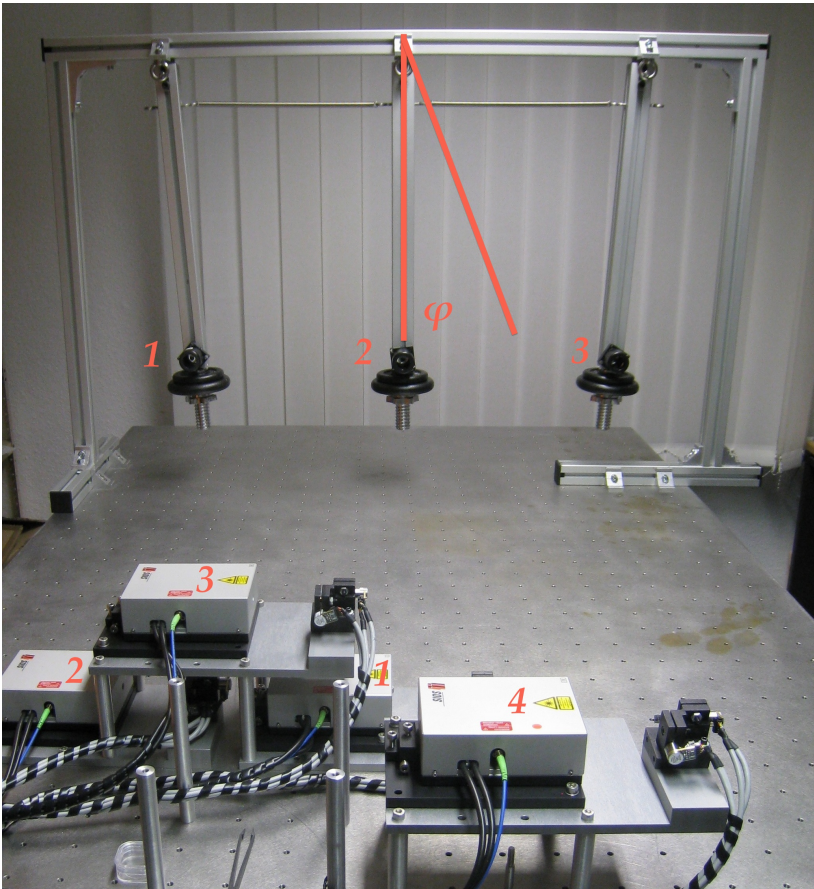


Abbildung 4.33.: Das Multipendelsystem mit Kopplung über Federn ist im Hintergrund zu sehen. Von links nach rechts befinden sich die Pendel 1, 2 und 3. Das Lasertrackersystem mit vier Trackern ist im Vordergrund sichtbar. Von links nach rechts befinden sich die Tracker 2, 3, 1 und 4.

4.3. Multilasertrackersystem II – Beobachtung

Tabelle 4.2.: Paramater des Systems

Formel-Zeichen	Bedeutung	Wert	Einheit
l	Länge Pendel	0,46	m
m	Masse Pendel	3,6	kg
g	Gravitationskonstante	9,81	m/s^2
k	Federkonstante	270	N/m
h	Abstand Drehpunkt-Federaufnahme	0,045	m
b	Abstand Öse-Pendelachse	0,045	m
d	Länge Feder im Ruhezustand	0,29	m
F	Federvorspannung im Ruhezustand	10,55	N
c	Reibungskonstante	0,0019	Ns/m
z	Abstand Pendelebene zur x-y-Ebene	0,983	m
q	Abstand Drehachse-Reflektor	0,507	m
a	Abstand Drehachse-Drehachse	0,425	m
$x_{0,1}$	Ruhelage von Reflektor 1	0,48	m
$y_{0,1}$	Ruhelage von Reflektor 1	0,195	m
$x_{0,2}$	Ruhelage von Reflektor 2	0,05	m
$y_{0,2}$	Ruhelage von Reflektor 2	0,195	m
$x_{0,3}$	Ruhelage von Reflektor 3	-0,38	m
$y_{0,3}$	Ruhelage von Reflektor 3	0,195	m

4. Anwendung auf unterschiedliche Systeme

4.3.3. Verteilung des Modells

Die Verteilung des globalen Modells auf lokale Systeme erfolgt nach den bereits vorgestellten Vorgehensweisen. Jedes Pendel wird als physikalische Einheit betrachtet. Die Modellierung des einzelnen Pendels hat somit den Winkel und die Winkelgeschwindigkeit als direkten lokalen Zustand. Für die beiden Pendel 1 und 3 muss der Winkel des jeweiligen Nachbarn (Pendel 2) als zusätzlicher Zustand hinzugefügt werden, da er für die Berechnung der Federkraft notwendig ist. Für das Pendel 2 sind beide benachbarten Pendelwinkel (1 und 3) notwendig.

4.3.3.1. Erstes lokales System

Für das erste System werden der Pendelwinkel und dessen zeitliche Ableitung des ersten Pendels als direkter lokaler Zustand festgelegt. Über eine Betrachtung der globalen Differentialgleichungen sieht man, dass der Pendelwinkel für das zweiten Pendel hinzugefügt werden muss. Für diesen Zustand wird eine Differentialgleichung mit Null angesetzt. Somit ergibt sich:

$$\mathbf{T}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.3.63)$$

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \dot{\varphi}_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \quad (4.3.64)$$

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (4.3.65)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{I_1} \cdot (l_{G,1} F_{G,t,1} + l_{F,1} F_{F,t,1} + F_{R,t,1}), \quad (4.3.66)$$

$$\dot{x}_3 = 0, \quad (4.3.67)$$

$$I_1 = m_1 \cdot l_1^2, \quad (4.3.68)$$

$$F_{G,t,1} = -m_1 \cdot g \sin(x_1), \quad (4.3.69)$$

4.3. Multilasertrackersystem II – Beobachtung

$$l_{G,1} = l_1, \quad (4.3.70)$$

$$F_{F,t,1} = (F_{0,1} + (k_1 (d_{1,1} - d_{0,1}))) \sin(\alpha_{1,1}), \quad (4.3.71)$$

$$l_{F,1} = h_{1,1}, \quad (4.3.72)$$

$$\alpha_{1,1} = \arctan\left(\frac{x_{F,1,2} - x_{F,1,1}}{y_{F,1,2} - y_{F,1,1}}\right) - x_1, \quad (4.3.73)$$

$$F_{R,t,1} = -c \cdot x_2, \quad (4.3.74)$$

$$d_{1,1} = \sqrt{(x_{F,1,2} - x_{F,1,1})^2 + (y_{F,1,2} - y_{F,1,1})^2}, \quad (4.3.75)$$

$$x_{F,1,2} = h_{1,2} \sin(x_3) + a_1 - b_{1,2} \cos(x_3), \quad (4.3.76)$$

$$x_{F,1,1} = h_{1,1} \sin(x_1) + b_{1,1} \cos(x_1), \quad (4.3.77)$$

$$y_{F,1,2} = h_{1,2} \cos(x_3) - b_{1,2} \sin(x_3), \quad (4.3.78)$$

$$y_{F,1,1} = h_{1,1} \cos(x_1) + b_{1,1} \sin(x_1). \quad (4.3.79)$$

$$(4.3.80)$$

Das erste Pendel wird nur vom zweiten Tracker verfolgt, daher ergibt sich folgende Ausgangsgleichung:

$$\mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} \arctan\left(\frac{(y_{0,1} - q \cos(x_1)) - y_{S2}}{z_0 - z_{S2}}\right) \\ \arctan\left(\frac{(x_{0,1} - q \sin(x_1)) - x_{S2}}{z_0 - z_{S2}}\right) \end{pmatrix}. \quad (4.3.81)$$

4.3.3.2. Zweites lokales System

Analog zum ersten Pendel werden für das zweite System der Pendelwinkel und die Winkelgeschwindigkeit des zweiten Pendels als direkte und die Winkel der benachbarten Pendel 1 und 3 als zusätzliche Zustände eingeführt:

$$\mathbf{T}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.3.82)$$

4. Anwendung auf unterschiedliche Systeme

$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_2 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \varphi_1 \\ \varphi_3 \end{pmatrix}, \quad (4.3.83)$$

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (4.3.84)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{I_2} \cdot (l_{G,2}F_{G,t,2} + l_{F,2,1}F_{F,t,2,1} + l_{F,2,2}F_{F,t,2,2} + F_{R,t,2}), \quad (4.3.85)$$

$$\dot{x}_3 = 0, \quad (4.3.86)$$

$$\dot{x}_4 = 0, \quad (4.3.87)$$

$$I_2 = m_2 \cdot l_2^2, \quad (4.3.88)$$

$$F_{G,t,2} = -m_2 \cdot g \sin(x_1), \quad (4.3.89)$$

$$l_{G,2} = l_2, \quad (4.3.90)$$

$$F_{F,t,2,1} = (F_{0,1} + (k_1 (d_{1,1} - d_{0,1}))) \sin(\alpha_{2,1}), \quad (4.3.91)$$

$$l_{F,2,1} = h_{1,2}, \quad (4.3.92)$$

$$\alpha_{2,1} = \arctan\left(\frac{x_{F,1,2} - x_{F,1,1}}{y_{F,1,2} - y_{F,1,1}}\right) - \pi - x_1, \quad (4.3.93)$$

$$F_{F,t,2,2} = (F_{0,2} + (k_2 (d_{2,2} - d_{0,2}))) \sin(\alpha_{2,2}), \quad (4.3.94)$$

$$l_{F,2,2} = h_{2,2}, \quad (4.3.95)$$

$$\alpha_{2,2} = \arctan\left(\frac{x_{F,2,3} - x_{F,2,2}}{y_{F,2,3} - y_{F,2,2}}\right) - x_1, \quad (4.3.96)$$

$$F_{R,t,2} = -c \cdot x_2, \quad (4.3.97)$$

$$d_{1,1} = \sqrt{(x_{F,1,2} - x_{F,1,1})^2 + (y_{F,1,2} - y_{F,1,1})^2}, \quad (4.3.98)$$

$$d_{2,2} = \sqrt{(x_{F,2,3} - x_{F,2,2})^2 + (y_{F,2,3} - y_{F,2,2})^2}, \quad (4.3.99)$$

$$x_{F,1,2} = h_{1,2} \sin(x_1) + a_1 - b_{1,2} \cos(x_1), \quad (4.3.100)$$

$$x_{F,1,1} = h_{1,1} \sin(x_3) + b_{1,1} \cos(x_3), \quad (4.3.101)$$

$$y_{F,1,2} = h_{1,2} \cos(x_1) - b_{1,2} \sin(x_1), \quad (4.3.102)$$

$$y_{F,1,1} = h_{1,1} \cos(x_3) + b_{1,1} \sin(x_3), \quad (4.3.103)$$

$$x_{F,2,3} = h_{2,3} \sin(x_4) + a_2 - b_{2,3} \cos(x_4), \quad (4.3.104)$$

4.3. Multilasertrackersystem II – Beobachtung

$$x_{F,2,2} = h_{2,2} \sin(x_1) + b_{2,2} \cos(x_1), \quad (4.3.105)$$

$$y_{F,2,3} = h_{2,3} \cos(x_4) - b_{2,3} \sin(x_4), \quad (4.3.106)$$

$$y_{F,2,2} = h_{2,2} \cos(x_1) + b_{2,2} \sin(x_1). \quad (4.3.107)$$

Das zweite Pendel wird vom ersten und dritten Tracker verfolgt, daher ergibt sich folgende Ausgangsgleichung:

$$\mathbf{y}_2 = \begin{pmatrix} \arctan\left(\frac{(y_{0,2}-q \cos(x_1))-y_{S1}}{z_0-z_{S1}}\right) \\ \arctan\left(\frac{(x_{0,2}-q \sin(x_1))-x_{S1}}{z_0-z_{S1}}\right) \\ \arctan\left(\frac{(y_{0,2}-q \cos(x_1))-y_{S3}}{z_0-z_{S3}}\right) \\ \arctan\left(\frac{(x_{0,2}-q \sin(x_1))-x_{S3}}{z_0-z_{S3}}\right) \end{pmatrix}. \quad (4.3.108)$$

4.3.3.3. Drittes lokales System

Das dritte System besitzt analog zum ersten wieder drei Zustände: Den Winkel und dessen zeitliche Ableitung des dritten Pendels als direkten und den Winkel des zweiten als dritten Zustand:

$$\mathbf{T}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.3.109)$$

$$\mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_3 \\ \dot{\varphi}_3 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \quad (4.3.110)$$

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (4.3.111)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{I_3} \cdot (l_{G,3} F_{G,t,3} + l_{F,3} F_{F,t,3} + F_{R,t,3}), \quad (4.3.112)$$

$$\dot{x}_3 = 0, \quad (4.3.113)$$

$$I_3 = m_3 \cdot l_3^2, \quad (4.3.114)$$

$$F_{G,t,3} = -m_3 \cdot g \sin(x_1), \quad (4.3.115)$$

$$l_{G,3} = l_3, \quad (4.3.116)$$

4. Anwendung auf unterschiedliche Systeme

$$F_{F,t,3} = (F_{0,2} + (k_2 (d_{2,2} - d_{0,2}))) \sin(\alpha_{2,3}), \quad (4.3.117)$$

$$l_{F,3} = h_{2,3}, \quad (4.3.118)$$

$$\alpha_{2,3} = \arctan\left(\frac{x_{F,2,3} - x_{F,2,2}}{y_{F,2,3} - y_{F,2,2}}\right) - \pi - x_1, \quad (4.3.119)$$

$$F_{R,t,3} = -c \cdot x_2, \quad (4.3.120)$$

$$d_{1,1} = \sqrt{(x_{F,1,2} - x_{F,1,1})^2 + (y_{F,1,2} - y_{F,1,1})^2}, \quad (4.3.121)$$

$$d_{2,2} = \sqrt{(x_{F,2,3} - x_{F,2,2})^2 + (y_{F,2,3} - y_{F,2,2})^2}, \quad (4.3.122)$$

$$x_{F,2,3} = h_{2,3} \sin(x_1) + a_2 - b_{2,3} \cos(x_1), \quad (4.3.123)$$

$$x_{F,2,2} = h_{2,2} \sin(x_3) + b_{2,2} \cos(x_3), \quad (4.3.124)$$

$$y_{F,2,3} = h_{2,3} \cos(x_1) - b_{2,3} \sin(x_1), \quad (4.3.125)$$

$$y_{F,2,2} = h_{2,2} \cos(x_3) + b_{2,2} \sin(x_3). \quad (4.3.126)$$

Das dritte Pendel wird nur vom vierten Tracker verfolgt, daher ergibt sich folgende Ausgangsgleichung:

$$y_3 = \begin{pmatrix} \arctan\left(\frac{(y_{0,3} - q \cos(x_1)) - y_{S4}}{z_0 - z_{S4}}\right) \\ \arctan\left(\frac{(x_{0,3} - q \sin(x_1)) - x_{S4}}{z_0 - z_{S4}}\right) \end{pmatrix}. \quad (4.3.127)$$

4.3.3.4. Eigenschaften

Während die Ordnung des globalen Systems die Größe sechs besitzt, sind die Größen der lokalen Systeme mit drei und vier in jedem Fall reduziert. Auch wenn man bei Pendel 2 für die Berechnung der Dynamik auf eine Kenntnis beider benachbarter Pendelwinkel angewiesen ist, ist die Ordnung dennoch reduziert, da die Pendelwinkelgeschwindigkeiten nicht berücksichtigt werden müssen. Dieses Beispiel zeigt, dass auch das Hinzuziehen eines beeinflussenden physikalischen System nicht automatisch ein Hinzufügen aller seiner Zustände bedeutet.

4.3.4. Beobachtbarkeit

In Abschnitt 3.5.2 wurden die Beobachtbarkeit nichtlinearer Systeme diskutiert. Dabei wurden auch dezentrale und verteilte Systeme betrachtet. Die empirische Gramschen Beobachtbarkeitsmatrix ist für die meisten Anwendungsfälle auf Grund der einfachen Zugänglichkeit die geeignete Methode, um die Beobachtbarkeit eines Systems zu testen. Im Gegensatz zu linearen Systemen sind die Aussagen im Allgemeinen keine universell gültigen Systemeigenschaften, sondern nur für den betrachteten Arbeitsbereich gültig.

Für das hier betrachtete System soll nun die Beobachtbarkeit sowohl für das zentrale System als auch für das verteilte System nachgewiesen werden. Eine Simulation des Systems zeigt, dass für eine Anfangsauslenkung $\mathbf{x}_0 = (-0,3 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$ rad nach 1000 Sekunden zwar noch nicht eine Ruhelage erreicht ist, die Amplituden der Zustandstrajektorien sind jedoch so weit abgeklungen, dass dieser Zeithorizont als ausreichend angesehen wird. Die Schrittweite für die Berechnung der Matrizen beträgt 0,1 s. Zur Bestimmung der empirischen Matrizen wird die letzte der vorgestellten Varianten benutzt, um eine vollfaktorielle Anregung des Systems zu erreichen. Als maximale Anregungsamplitude wird 0,1 rad gewählt. Es werden jeweils innerhalb dieser Grenze zehn zufällige Anregungen simuliert.

Nachdem die empirischen Gramschen Beobachtbarkeitsmatrizen berechnet wurden, werden deren Singulärwerte bestimmt. Sind diese alle ungleich Null, so besitzt die Beobachtbarkeitsmatrix vollen Rang und deren Diagonalelemente sind ein Maß für den Energietransfer aus den Zuständen in die Ausgänge.

Unter den angegebenen Randbedingungen ergibt sich für das zentrale System

$$\mathbf{s} = 10^3 \cdot \begin{pmatrix} 2,4853 \\ 0,3145 \\ 0,1682 \\ 0,0032 \\ 0,0018 \\ 0,0009 \end{pmatrix}. \quad (4.3.128)$$

4. Anwendung auf unterschiedliche Systeme

Das zentrale System ist somit im betrachteten Arbeitsraum beobachtbar. Dieses Ergebnis war zu erwarten. Für das erste Teilsystem des verteilten Systems ergeben sich für die Singulärwerte

$$\mathbf{s}_1 = 10^3 \cdot \begin{pmatrix} 5,0569 \\ 0,7348 \\ 0,0012 \end{pmatrix}. \quad (4.3.129)$$

Somit ist auch das erste Subsystem inklusive der als Störungen modellierten Zustände beobachtbar. Die Singulärwerte der empirischen Gramschen Beobachtbarkeitsmatrix sind für das zweite Teilsystem ebenfalls sämtlich ungleich Null:

$$\mathbf{s}_2 = \begin{pmatrix} 97,5514 \\ 6,2851 \\ 2,1822 \\ 0,6771 \end{pmatrix}. \quad (4.3.130)$$

Gleiches gilt für das dritte Teilsystem:

$$\mathbf{s}_3 = \begin{pmatrix} 44,7522 \\ 10,9028 \\ 0,5378 \end{pmatrix}. \quad (4.3.131)$$

Sämtliche Teilsysteme sind beobachtbar. Es kann also auf dieser Basis eine verteilte Zustandsschätzung durchgeführt werden.

4.3.5. Zentrales Filter

Um eine Referenz zu haben, wird ein zentrales UKF eingerichtet. Die Auslegung erfolgt analog zu der des DDUKF später. Es werden fol-

4.3. Multilasertrackersystem II – Beobachtung

gende Einstellungen vorgenommen:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0,001^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,001^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,001^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1^2 \end{pmatrix}, \quad (4.3.132)$$

$$\mathbf{R} = \left(0,002 \cdot \frac{2\pi}{360}\right)^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.3.133)$$

$$\mathbf{P}_0^+ = \begin{pmatrix} 0,001^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,001^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,001^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1^2 \end{pmatrix}. \quad (4.3.134)$$

Die ungeraden Diagonalelemente von \mathbf{Q} und \mathbf{P}_0^+ sind auf rad^2 , die geraden auf $(\text{rad/s})^2$ und die Diagonalelemente von \mathbf{R} sind auf rad^2 normiert.

4.3.6. Verteiltes Filter

Für das verteilte System wird ein DDUKF eingerichtet. Für alle Koeffizienten der Kovarianzmatrix des Zustandsrauschens werden für die Pendelwinkel $0,001^2 \text{ rad}^2$ und $0,1^2 (\text{rad/s})^2$ für die Winkelgeschwindigkeiten gewählt. Für das Messrauschen wird $(0,002 \cdot ((2 \cdot \pi)/360))^2$

4. Anwendung auf unterschiedliche Systeme

rad² gewählt. Somit ergeben sich die erneut normierten Matrizen:

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{pmatrix} 0,001^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0,001^2 \end{pmatrix}, \quad (4.3.135)$$

$$\mathbf{Q}_2 = \begin{pmatrix} 0,001^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,001^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,001^2 \end{pmatrix}, \quad (4.3.136)$$

$$\mathbf{Q}_3 = \begin{pmatrix} 0,001^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0,001^2 \end{pmatrix}, \quad (4.3.137)$$

$$\mathbf{R}_1 = \left(0,002 \cdot \frac{2\pi}{360}\right)^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.3.138)$$

$$\mathbf{R}_2 = \left(0,002 \cdot \frac{2\pi}{360}\right)^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.3.139)$$

$$\mathbf{R}_3 = \left(0,002 \cdot \frac{2\pi}{360}\right)^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.3.140)$$

Die Kovarianzmatrizen des Schätzfehlers werden gleichermaßen initialisiert und normiert:

$$\mathbf{P}_{1,0}^+ = \begin{pmatrix} 0,001^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0,001^2 \end{pmatrix}, \quad (4.3.141)$$

$$\mathbf{P}_{2,0}^+ = \begin{pmatrix} 0,001^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,001^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,001^2 \end{pmatrix}, \quad (4.3.142)$$

$$\mathbf{P}_{3,0}^+ = \begin{pmatrix} 0,001^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0,001^2 \end{pmatrix}. \quad (4.3.143)$$

4.3.7. Testbewegungen

Es wurden zwei Bewegungen der Pendel aufgenommen, bei denen jeweils Pendel 1 beziehungsweise Pendel 3 maximal ausgelenkt und dann losgelassen wurde. Als Messdaten liegen die Winkel der Ablenkspiegel in den einzelnen Lasertrackern vor. Die Daten sind mit einer Samplingrate von 0,0025 s aufgenommen worden. Da keine Referenzmessung vorhanden ist, wurden aus den Messdaten die Positionen der Reflektoren durch ein zentrales Filter in Trackerkoordinaten bestimmt und anschließend daraus die Pendelwinkel berechnet. Abbildungen 4.34, 4.35, 4.36 zeigen den Verlauf der drei Pendelwinkel für die erste Messung, bei der Pendel 1 zu Beginn ausgelenkt ist. Abbildungen 4.37, 4.38, 4.39 zeigen die drei Pendelwinkel für die zweite Messung; hier ist Pendel 3 ausgelenkt.

Die Bewegung der Reflektoren in kartesischen Koordinaten des Trackersystems sind im Anhang zu sehen (erste Bewegung in Abbildungen B.1, B.2, B.3, B.4, B.5 und B.6, zweite Bewegung in Abbildungen B.7, B.8, B.9, B.10, B.11 und B.12).

4.3.8. Verteilte Schätzung

Wie in den Abschnitten 4.3.5 und 4.3.6 gezeigt, wurden ein UKF und ein DDUKF eingerichtet. Dabei werden die Schätzungen des UKF als Referenz zur Bewertung des DDUKF benötigt. Das heißt, dass beide Filter unabhängig voneinander arbeiten und die Schätzungen für die jeweiligen Zustände verglichen werden. Abbildungen 4.40, 4.41, 4.42, 4.43, 4.44, 4.45, 4.46, 4.47, 4.48, 4.49 zeigen diese Differenzen für die einzelnen globalen Zustände in den lokalen Filtern. Dabei ist jeweils ein Ausschnitt zu Beginn der Schätzung vergrößert dargestellt. Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden nur die Ergebnisse für die erste Testbewegung gezeigt. Für die zweite Bewegung hat sich ein quantitativ gleichwertiges Bild ergeben.

Die Verläufe der Zustandsdifferenzen zeigen, dass das verteilte Filter nicht divergiert.

Bei der Betrachtung der maximalen Fehlerbeträge, die durch die

4. Anwendung auf unterschiedliche Systeme

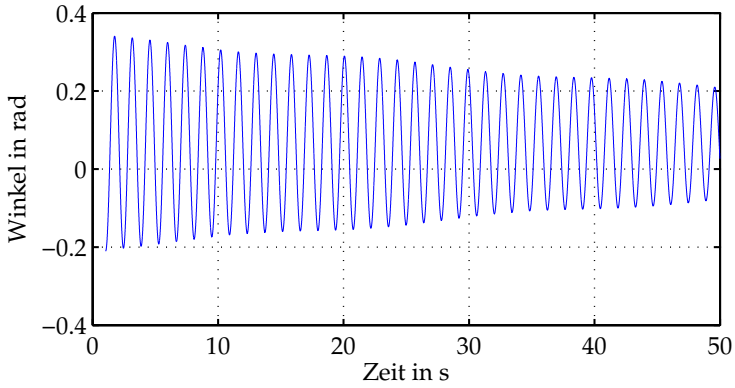


Abbildung 4.34.: Winkel des Pendels 1 der ersten Messung.

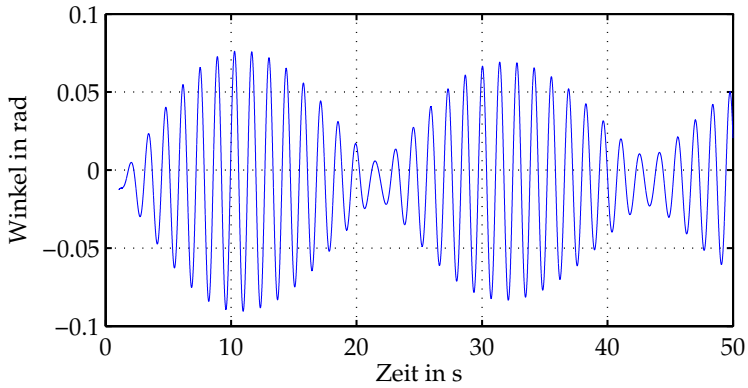


Abbildung 4.35.: Winkel des Pendels 2 der ersten Messung.

4.3. Multilasertrackersystem II – Beobachtung

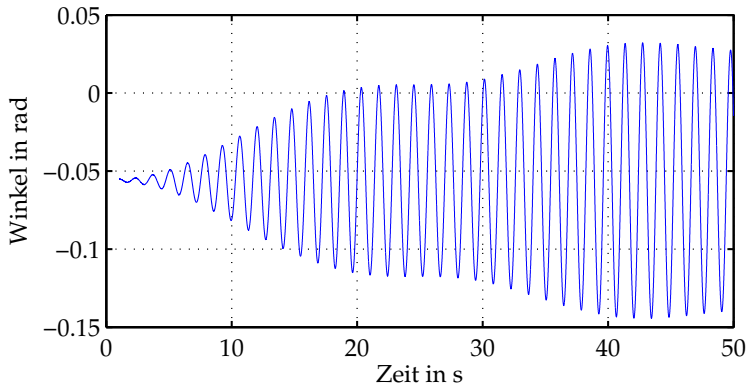


Abbildung 4.36.: Winkel des Pendels 3 der ersten Messung.

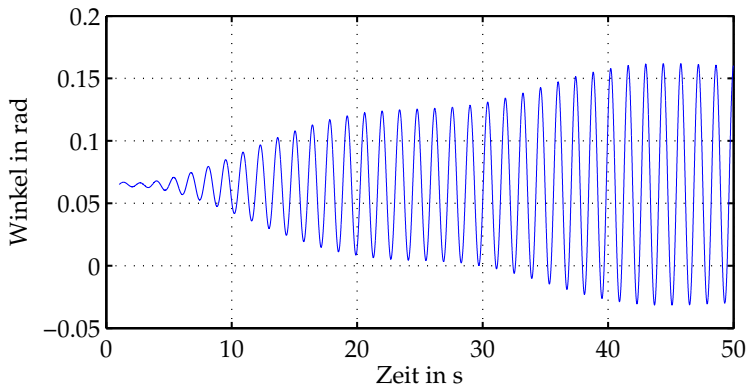


Abbildung 4.37.: Winkel des Pendels 1 der zweiten Messung.

4. Anwendung auf unterschiedliche Systeme

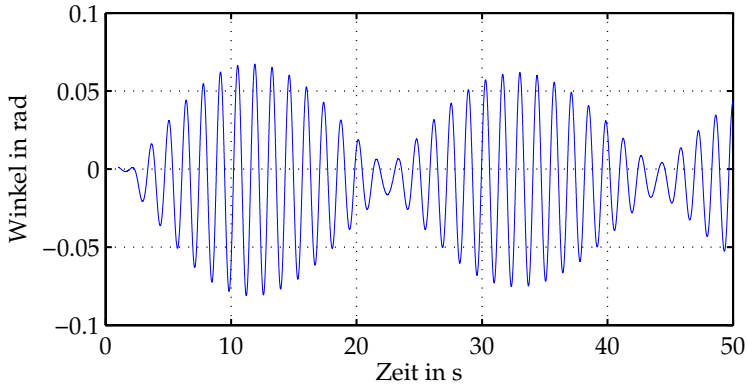


Abbildung 4.38.: Winkel des Pendels 2 der zweiten Messung.

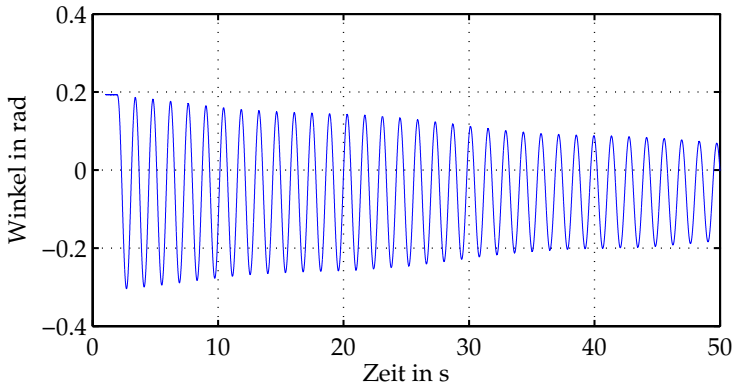


Abbildung 4.39.: Winkel des Pendels 3 der zweiten Messung.

4.3. Multilasertrackersystem II – Beobachtung

Verteilung entstehen, werden Abweichungen in den Zuständen berechnet. Um diese Fehler einordnen zu können, kann man sie zum Messrauschen in Beziehung setzen. Es besitzt eine Standardabweichung von 10^{-5} rad pro Spiegelwinkel. Um die Bedeutung für die Pendelwinkel zu erhalten, muss somit betrachtet werden, welche Abweichung $\Delta\varphi$ von einem beliebigen, als fix betrachtetem Pendelwinkel φ_0 einer Änderung des Spiegelwinkels im jeweiligen Tracker von $+10^{-5}$ rad oder -10^{-5} rad entspricht. Diese Zusammenhänge sind in den Abbildungen 4.50, 4.51, 4.52 und 4.53 dargestellt. Da die Unterschiede zwischen einer Abweichung von $+\sigma$ und $-\sigma$ sehr gering sind, werden nur erstere gezeigt. Die Zuordnung erfolgt nach der vorgestellten Dezentralisierung des Messvektors. Pendel 1 wird von Tracker 2, also den Komponenten 3 und 4 des Messvektors gemessen. Pendel 2 wird von den Trackern 1 und 3 verfolgt. Pendel 4 wird von Tracker 4 gemessen.

Für die ungeraden Komponenten des Messvektors ergibt sich ein einheitliches Bild. Die maximale Änderung der Pendelwinkel $\Delta\varphi$, welche eine Änderung der Messungen um $\pm\sigma$ ergibt, ist für einen Ausgangswinkel φ_0 von 0 rad maximal und beträgt weniger als $7 \cdot 10^{-3}$ rad. Im betrachteten Bereich von $\pm 0,3$ rad liegt das Minimum von $\Delta\varphi$ bei $6,6 \cdot 10^{-5}$ rad.

Für die geraden Komponenten sind die Ergebnisse qualitativ gleichwertig und auch quantitativ sehr ähnlich. Die maximale Änderung der Pendelwinkel $\Delta\varphi$ beträgt weniger als $3 \cdot 10^{-5}$ rad, die minimale $1,9 \cdot 10^{-5}$ rad. Die jeweiligen Minima sind in Tabelle 4.3 aufgeführt.

Vergleicht man die Minima von $\Delta\varphi$ mit den Maxima der Fehlerbeiträge der verteilten Schätzung für die einzelnen Pendel, so stellt man fest, dass der Fehler der direkt geschätzten Zustände zwei Größenordnungen unterhalb des Fehlers durch das Messrauschen liegt. Für zusätzliche Zustände ist der Fehler in der gleichen Größenordnung. Das heißt, dass Fehler durch die Verteilung für die direkten Zustände vernachlässigbar ist. Für die zusätzlichen Zustände liegen sie im Bereich der Messgenauigkeit des Systems und sind somit ebenfalls nicht signifikant. Dies ist in Tabelle 4.4 zusammengefasst.

Die verteilte Zustandsschätzung erfolgt in diesem Fall somit mit ei-

4. Anwendung auf unterschiedliche Systeme

Tabelle 4.3.: Betrag der minimalen Änderung eines Pendelwinkels $\Delta\varphi$, um eine Änderung des Spiegelwinkels um $\pm\sigma$ zu bewirken.

Komponente von y	$\Delta\varphi$ in 10^{-5} rad für $+\sigma$	$\Delta\varphi$ in 10^{-5} rad für $-\sigma$
1	6,882	6,883
2	1,942	1,942
3	6,882	6,883
4	1,976	1,976
5	6,623	6,624
6	1,954	1,954
7	8,426	8,428
8	2,522	2,522

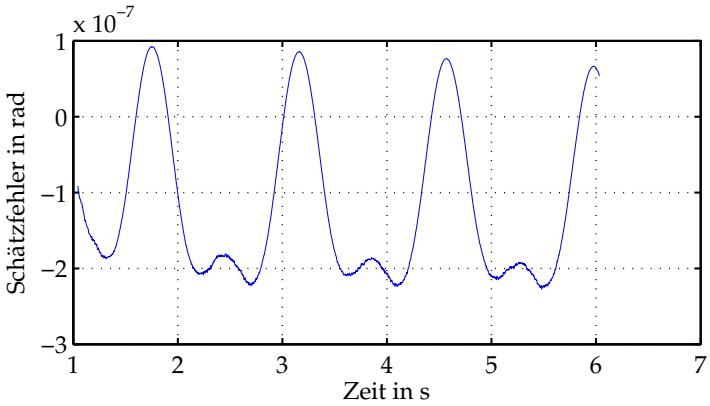
ner Genauigkeit, die besser ist als die Genauigkeit des Messsystems.

4.3.9. Ausfall einer Messeinrichtung

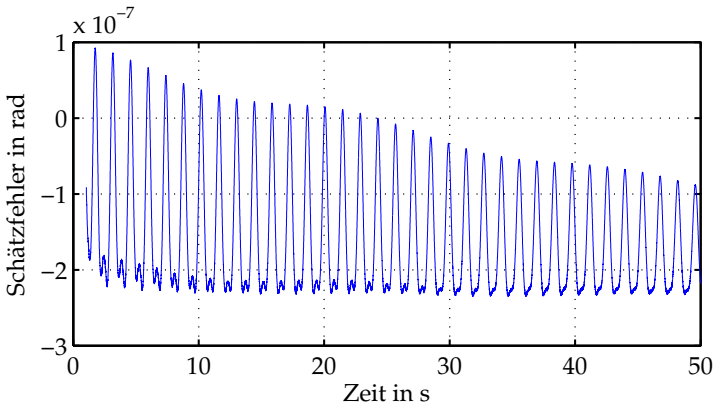
Es wurde der zeitweise Ausfall eines Trackers simuliert. Da das mittlere Pendel von zwei Trackern verfolgt wird, kann einer dazu benutzt werden. Abbildungen 4.54, 4.55, 4.56, 4.57, 4.58, 4.59, 4.60, 4.61, 4.62, 4.63 zeigen die Differenzen für die einzelnen globalen Zustände in den lokalen Filtern. Zu Beginn ist das System vollständig verfügbar. Nach 2,5 Sekunden wird der dritte Tracker abgeschaltet und nach 3,75 Sekunden wieder zugeschaltet.

Abgesehen von einer zu erwartenden, während des Ausfalls bleibenden Abweichung des dritten globalen Zustandes, werden alle anderen Zustände zuverlässig weitergeschätzt. Nachdem der Tracker wieder in die Berechnung einbezogen wird, verhält sich das DDUKF wie im vorigen Fall. Das heißt, dass durch das verteilte Filter bei redundanter Auslegung eine hohe Zuverlässigkeit des Systems gegeben ist. Die Schätzung der Zustände kann zuverlässig vorgenommen wer-

4.3. Multilasertrackersystem II – Beobachtung



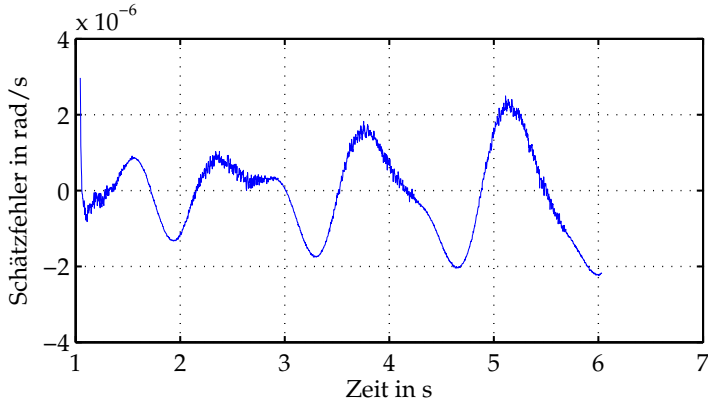
(a) Verlauf für die ersten 5 Sekunden.



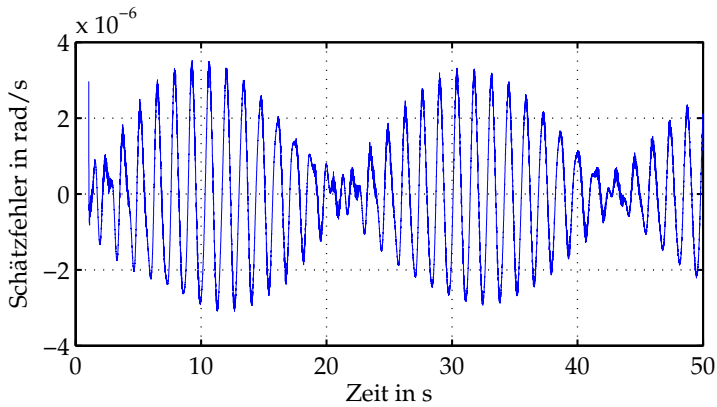
(b) Verlauf für die ersten 49 Sekunden.

Abbildung 4.40.: Differenz zwischen zentraler Schätzung und verteilter Schätzung im ersten Knoten für den ersten globalen Zustand.

4. Anwendung auf unterschiedliche Systeme



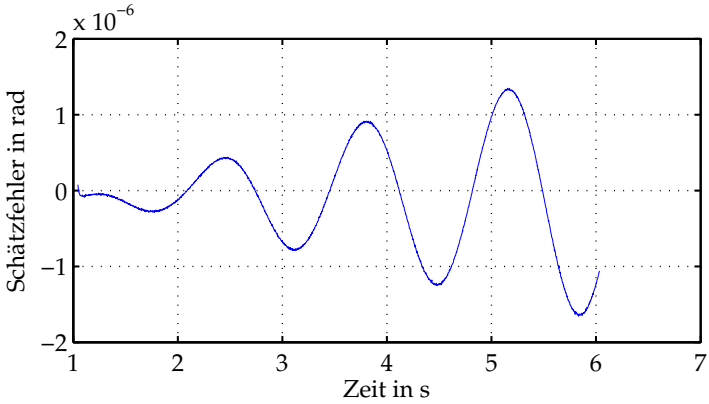
(a) Verlauf für die ersten 5 Sekunden.



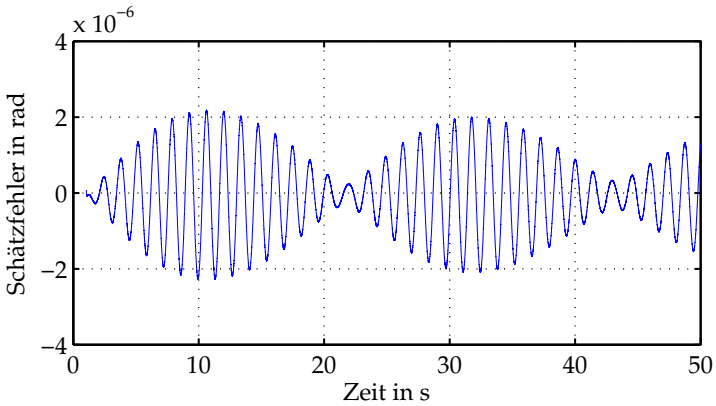
(b) Verlauf für die ersten 49 Sekunden.

Abbildung 4.41.: Differenz zwischen zentraler Schätzung und verteilter Schätzung im ersten Knoten für den zweiten globalen Zustand.

4.3. Multilasertrackersystem II – Beobachtung



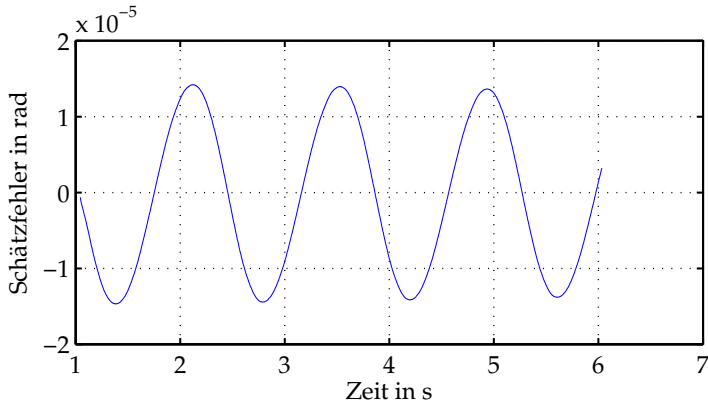
(a) Verlauf für die ersten 5 Sekunden.



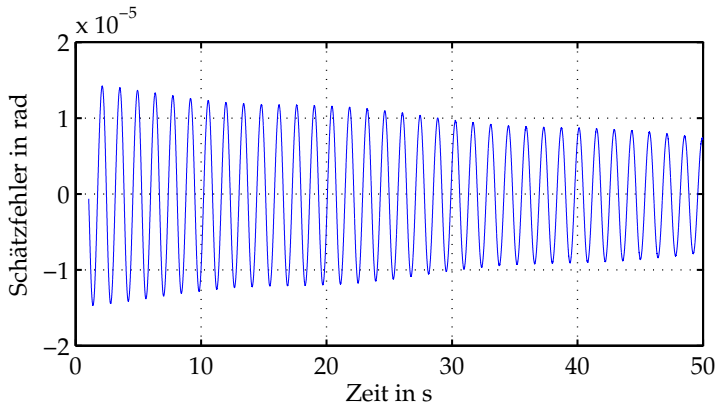
(b) Verlauf für die ersten 49 Sekunden.

Abbildung 4.42.: Differenz zwischen zentraler Schätzung und verteilter Schätzung im ersten Knoten für den dritten globalen Zustand.

4. Anwendung auf unterschiedliche Systeme



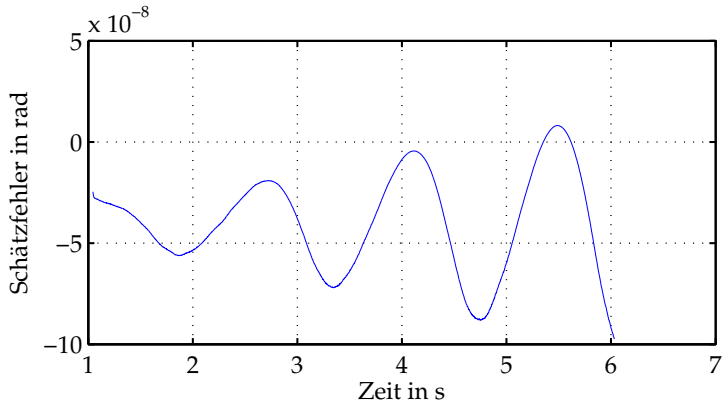
(a) Verlauf für die ersten 5 Sekunden.



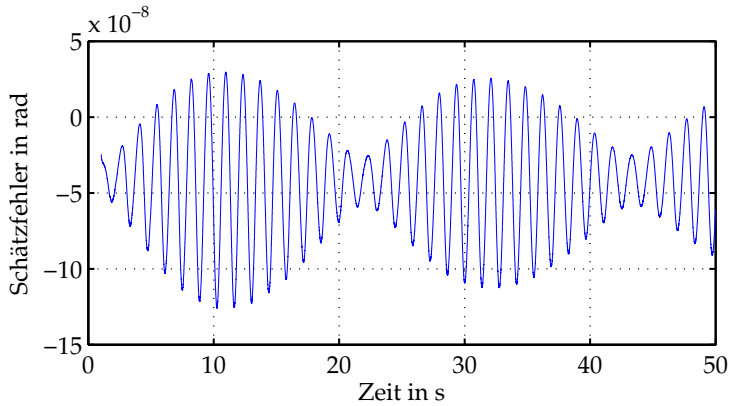
(b) Verlauf für die ersten 49 Sekunden.

Abbildung 4.43.: Differenz zwischen zentraler Schätzung und verteilter Schätzung im zweiten Knoten für den ersten globalen Zustand.

4.3. Multilasertrackersystem II – Beobachtung



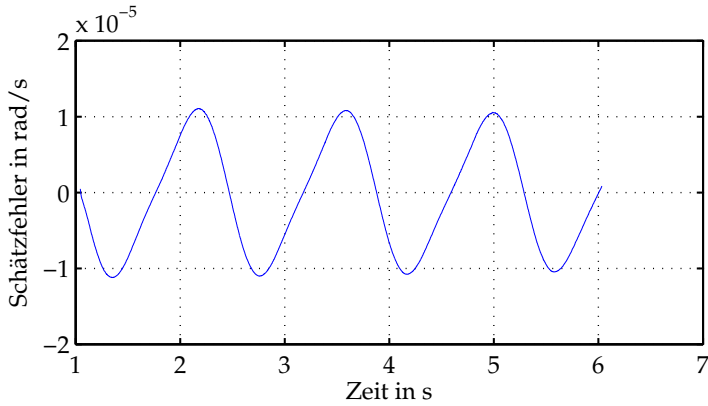
(a) Verlauf für die ersten 5 Sekunden.



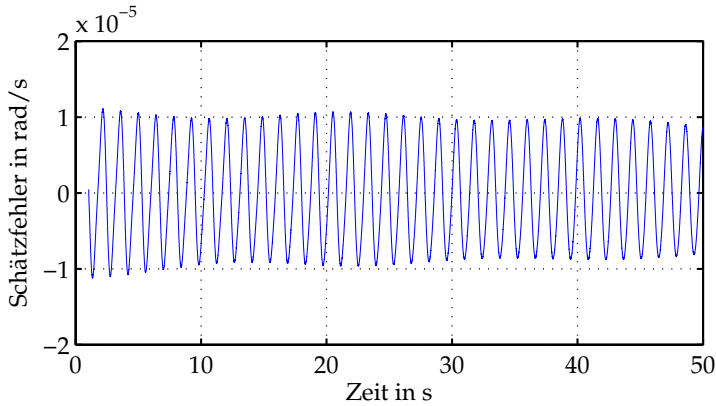
(b) Verlauf für die ersten 49 Sekunden.

Abbildung 4.44.: Differenz zwischen zentraler Schätzung und verteilter Schätzung im zweiten Knoten für den dritten globalen Zustand.

4. Anwendung auf unterschiedliche Systeme



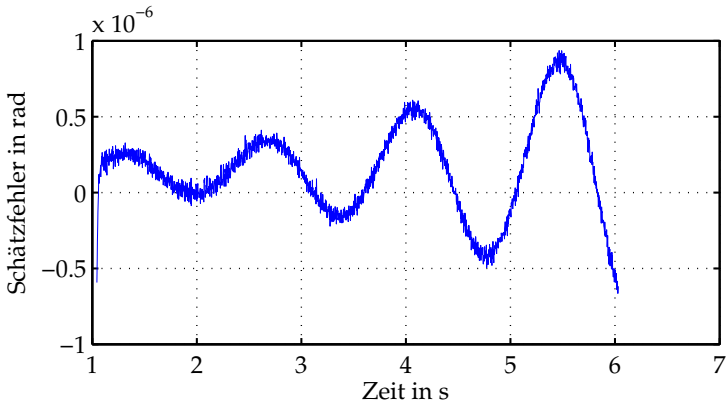
(a) Verlauf für die ersten 5 Sekunden.



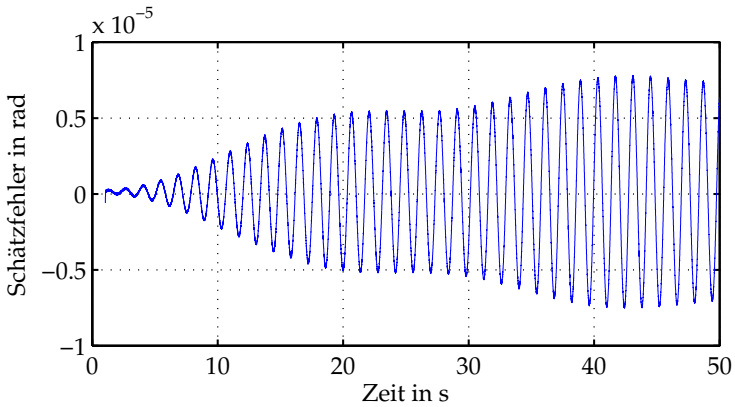
(b) Verlauf für die ersten 49 Sekunden.

Abbildung 4.45.: Differenz zwischen zentraler Schätzung und verteilter Schätzung im zweiten Knoten für den vierten globalen Zustand.

4.3. Multilasertrackersystem II – Beobachtung



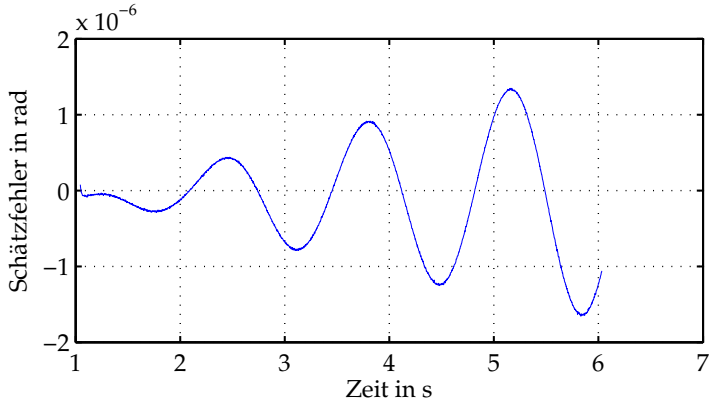
(a) Verlauf für die ersten 5 Sekunden.



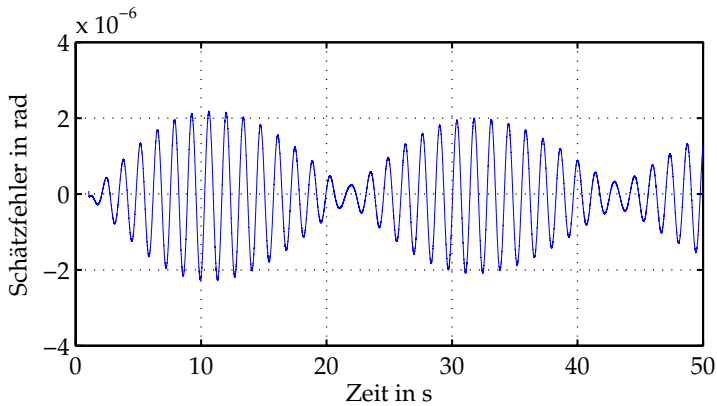
(b) Verlauf für die ersten 49 Sekunden.

Abbildung 4.46.: Differenz zwischen zentraler Schätzung und verteilter Schätzung im zweiten Knoten für den fünften globalen Zustand.

4. Anwendung auf unterschiedliche Systeme



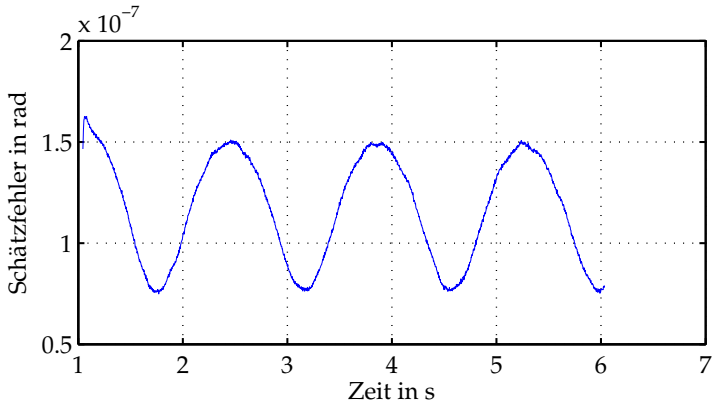
(a) Verlauf für die ersten 5 Sekunden.



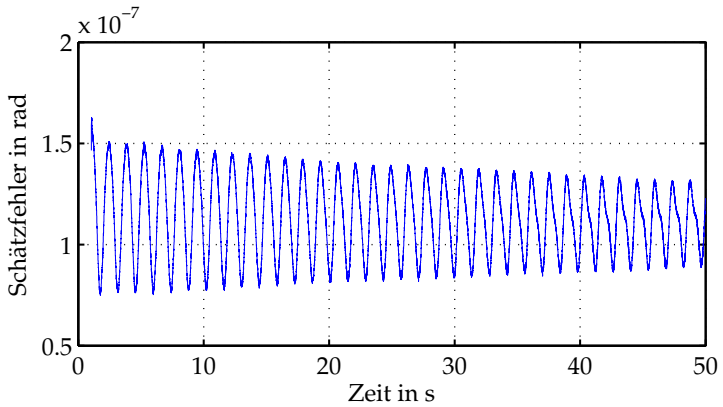
(b) Verlauf für die ersten 49 Sekunden.

Abbildung 4.47.: Differenz zwischen zentraler Schätzung und verteilter Schätzung im dritten Knoten für den dritten globalen Zustand.

4.3. Multilasertrackersystem II – Beobachtung



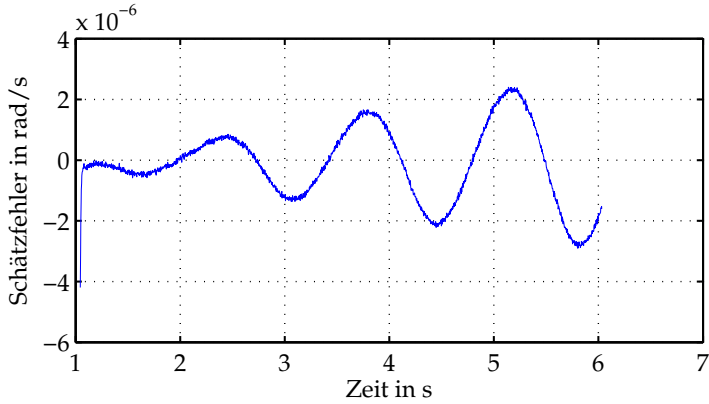
(a) Verlauf für die ersten 5 Sekunden.



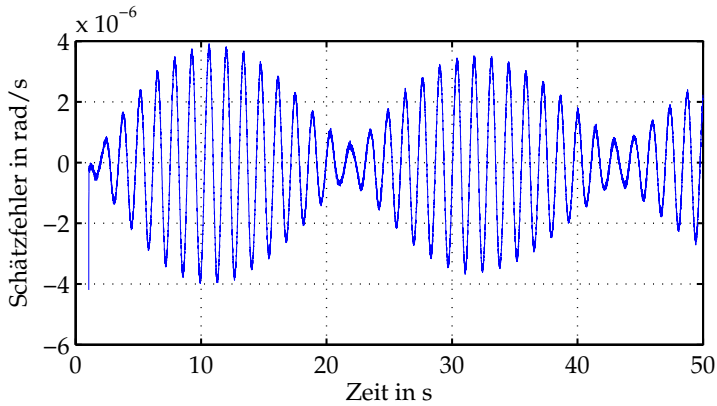
(b) Verlauf für die ersten 49 Sekunden.

Abbildung 4.48.: Differenz zwischen zentraler Schätzung und verteilter Schätzung im dritten Knoten für den fünften globalen Zustand.

4. Anwendung auf unterschiedliche Systeme



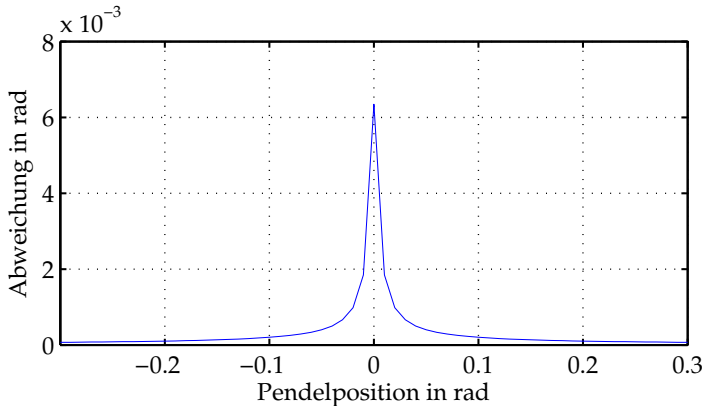
(a) Verlauf für die ersten 5 Sekunden.



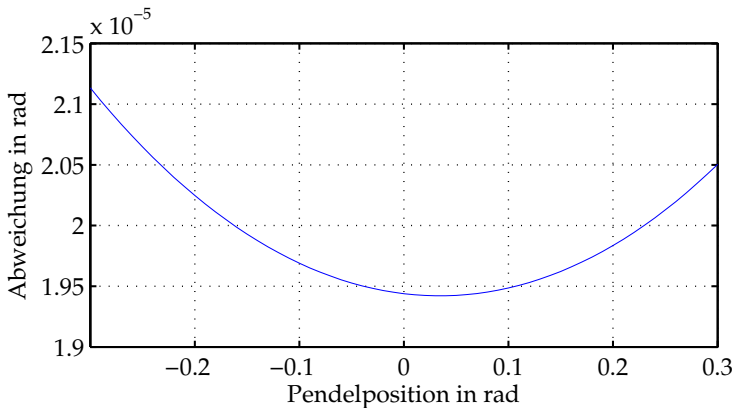
(b) Verlauf für die ersten 49 Sekunden.

Abbildung 4.49.: Differenz zwischen zentraler Schätzung und verteilter Schätzung im dritten Knoten für den sechsten globalen Zustand.

4.3. Multilasertrackersystem II – Beobachtung



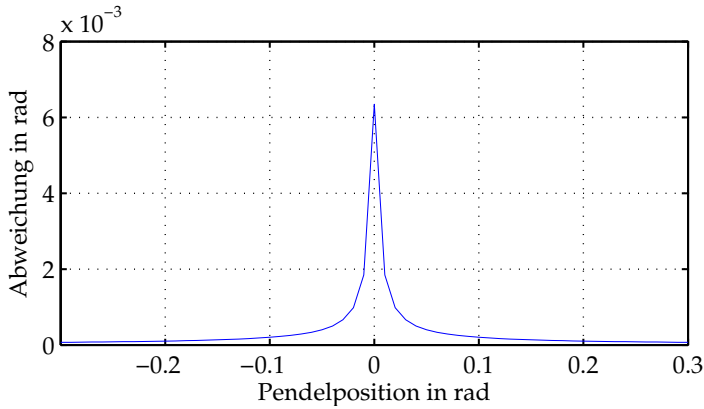
(a) Erster Spiegel im Tracker.



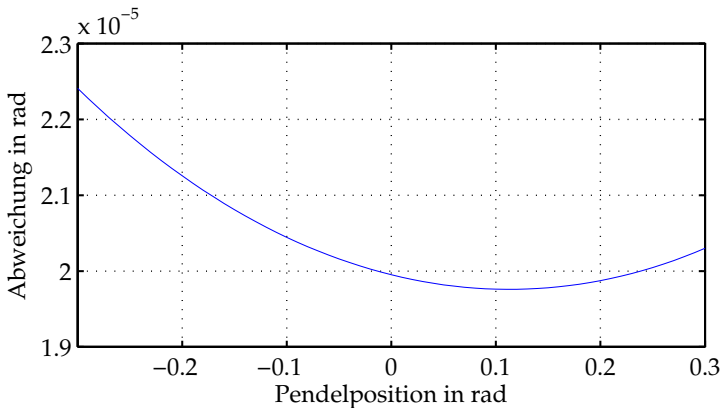
(b) Zweiter Spiegel im Tracker.

Abbildung 4.50.: Abweichung des Pendelwinkels von Pendel 2 von einer bestimmten Pendelposition, die im Tracker 1 zu einer Änderung des Spiegelwinkels von σ führt.

4. Anwendung auf unterschiedliche Systeme



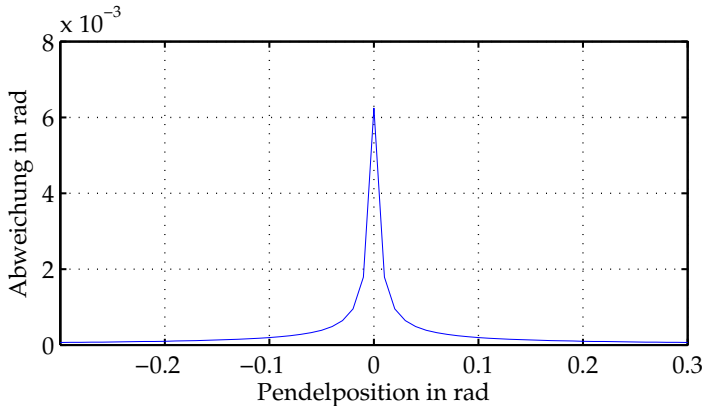
(a) Erster Spiegel im Tracker.



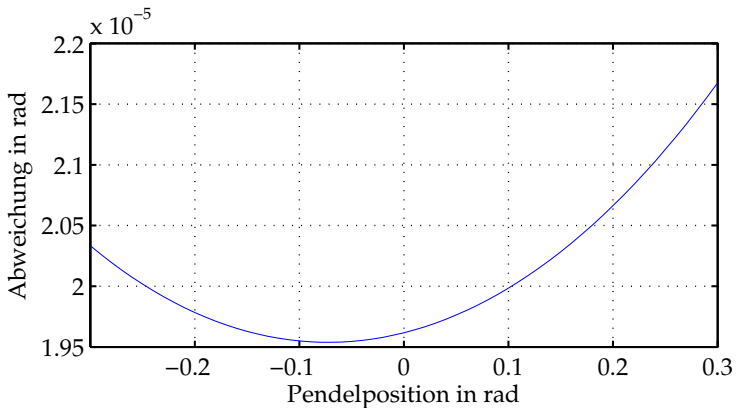
(b) Zweiter Spiegel im Tracker.

Abbildung 4.51.: Abweichung des Pendelwinkels von Pendel 1 von einer bestimmten Pendelposition, die im Tracker 2 zu einer Änderung des Spiegelwinkels von σ führt.

4.3. Multilasertrackersystem II – Beobachtung



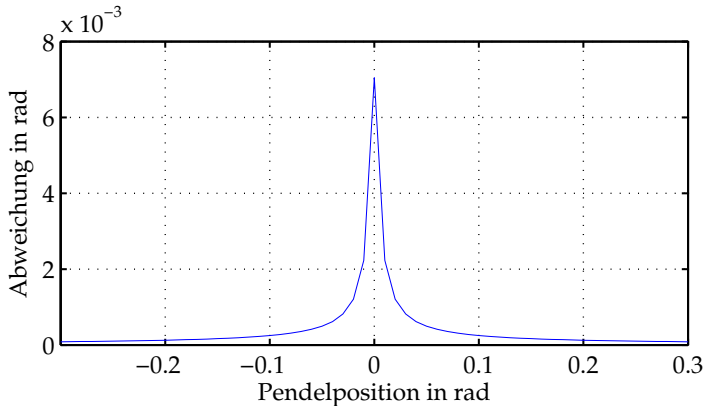
(a) Erster Spiegel im Tracker.



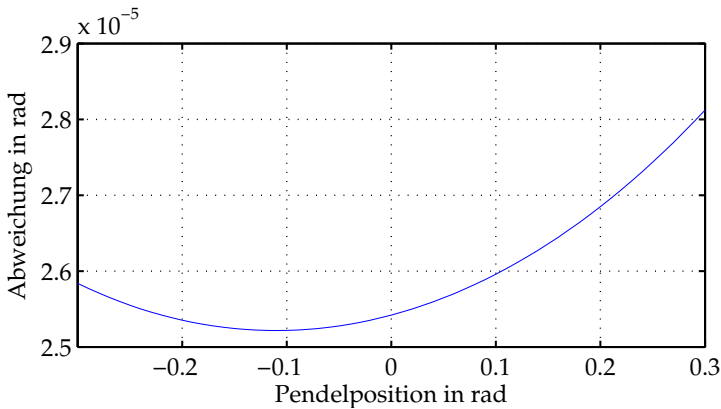
(b) Zweiter Spiegel im Tracker.

Abbildung 4.52.: Abweichung des Pendelwinkels von Pendel 2 von einer bestimmten Pendelposition, die im Tracker 3 zu einer Änderung des Spiegelwinkels von σ führt.

4. Anwendung auf unterschiedliche Systeme



(a) Erster Spiegel im Tracker.



(b) Zweiter Spiegel im Tracker.

Abbildung 4.53.: Abweichung des Pendelwinkels von Pendel 3 von einer bestimmten Pendelposition, die im Tracker 4 zu einer Änderung des Spiegelwinkels von $\pm\sigma$ führt.

4.3. Multilasertrackersystem II – Beobachtung

Tabelle 4.4.: Betrag des maximalen Fehlers bei der ersten Testbewegung, der durch die Verteilung im DDUKF im Vergleich zum zentralen UKF entsteht. In der rechten Spalte ist das Minimum des Betrags der Änderung des Pendelwinkels $\Delta\varphi$ angegeben, die zu einer Änderung des Messsignals von $\pm\sigma$ führt.

Zustand	Knoten 1	Knoten 2	Knoten 3	$\Delta\varphi$
φ_1 in rad	$3 \cdot 10^{-7}$	$2 \cdot 10^{-5}$	— — —	$1,9 \cdot 10^{-5}$
$\dot{\varphi}_1$ in rad/s	$4 \cdot 10^{-6}$	— — —	— — —	— — —
φ_2 in rad	$3 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-7}$	$3 \cdot 10^{-6}$	$1,9 \cdot 10^{-5}$
$\dot{\varphi}_2$ in rad/s	— — —	$2 \cdot 10^{-5}$	— — —	— — —
φ_3 in rad	— — —	$1 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-7}$	$2,5 \cdot 10^{-5}$
$\dot{\varphi}_3$ in rad/s	— — —	— — —	$4 \cdot 10^{-6}$	— — —

den. Weder zum Zeitpunkt des Ausfalls noch beim erneuten Hinzufügen der Messeinrichtung kommt es zu Störungen im Betrieb. Die kurzzeitigen Ausreißer gehen nach wenigen Iterationen zurück.

4.3.10. Betrachtung der Berechnungszeiten

Neben der Robustheit gegenüber Störungen oder Ausfällen von Messeinrichtungen oder Kommunikationswegen und der guten Skalierbarkeit ist ein weiteres Vorteil die Reduzierung des benötigten Rechenaufwands in jedem Filterknoten im Vergleich zu einem zentralen Filter. Die Summe aller Berechnungsschritte wird in einem Filternetzwerk größer sein, als in einem zentralen Filter, da notwendigerweise Gleichungen mehrfach berechnet und die Algorithmen selber mehrfach implementiert werden müssen. Hinzu kommen in einer Realisierung noch die nötigen Kommunikationsschritte. Den Rechenaufwand pro Filter kann man jedoch untersuchen. Die Ergebnisse sind in Tabelle 4.5 dargestellt. Hierzu wurden die Filter unterschiedlich lange betrieben.

4. Anwendung auf unterschiedliche Systeme

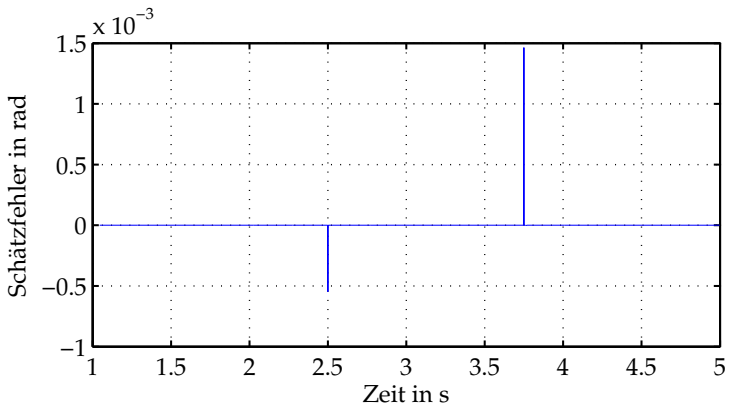


Abbildung 4.54.: Differenz zwischen zentraler Schätzung und verteilter Schätzung im ersten Knoten für den ersten globalen Zustand bei Ausfall eines Trackers.

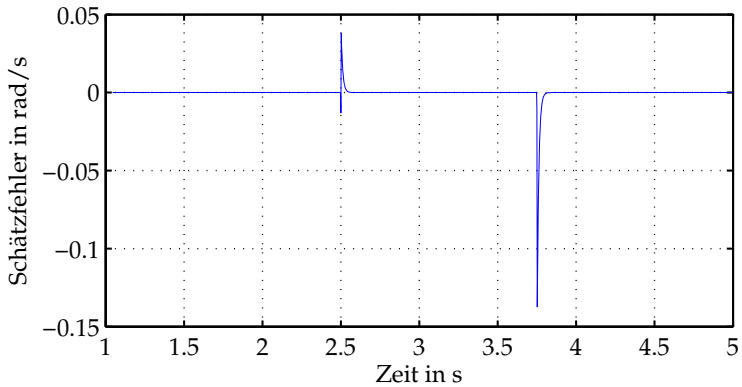


Abbildung 4.55.: Differenz zwischen zentraler Schätzung und verteilter Schätzung im ersten Knoten für den zweiten globalen Zustand bei Ausfall eines Trackers.

4.3. Multilasertrackersystem II – Beobachtung

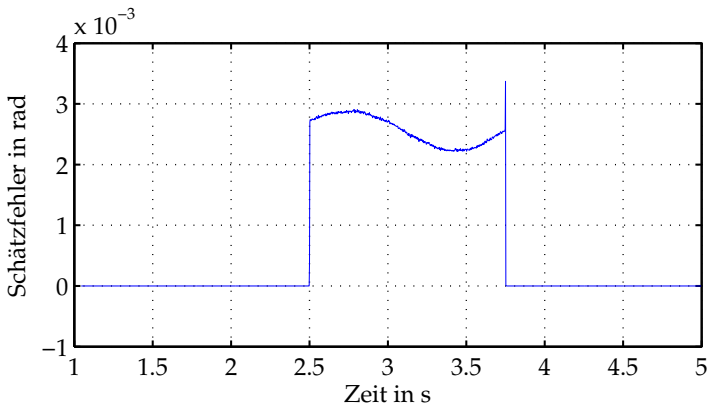


Abbildung 4.56.: Differenz zwischen zentraler Schätzung und verteilter Schätzung im ersten Knoten für den dritten globalen Zustand bei Ausfall eines Trackers.

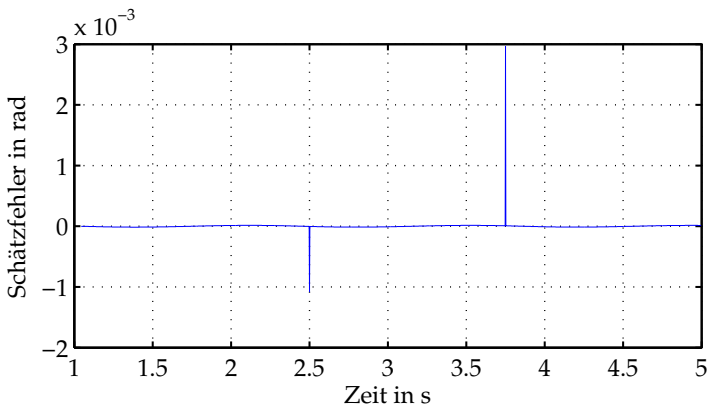


Abbildung 4.57.: Differenz zwischen zentraler Schätzung und verteilter Schätzung im zweiten Knoten für den ersten globalen Zustand bei Ausfall eines Trackers.

4. Anwendung auf unterschiedliche Systeme

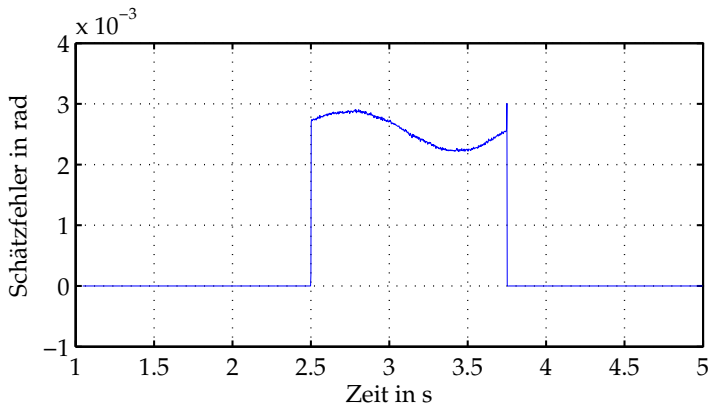


Abbildung 4.58.: Differenz zwischen zentraler Schätzung und verteilter Schätzung im zweiten Knoten für den dritten globalen Zustand bei Ausfall eines Trackers.

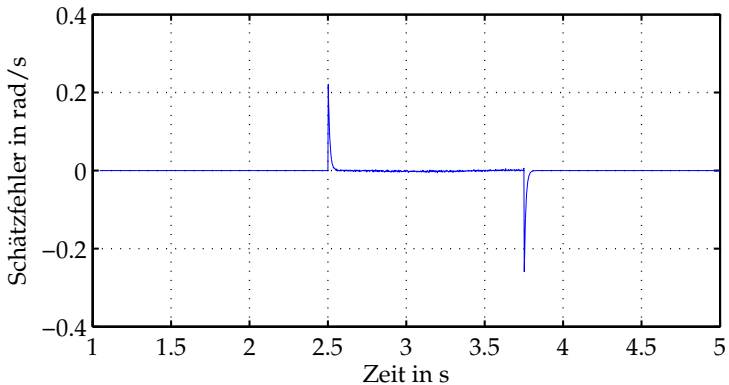


Abbildung 4.59.: Differenz zwischen zentraler Schätzung und verteilter Schätzung im zweiten Knoten für den vierten globalen Zustand bei Ausfall eines Trackers.

4.3. Multilasertrackersystem II – Beobachtung

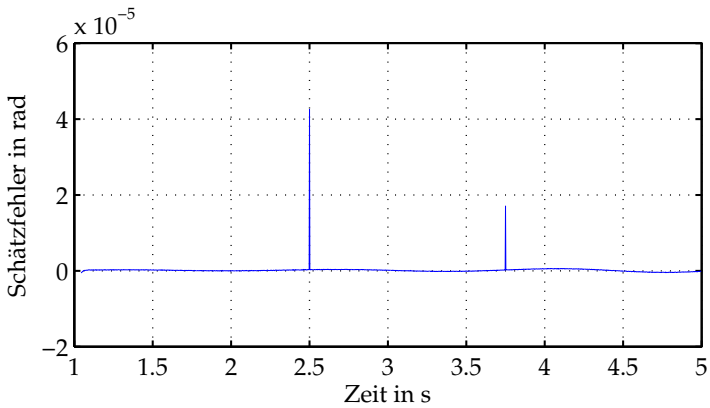


Abbildung 4.60.: Differenz zwischen zentraler Schätzung und verteilter Schätzung im zweiten Knoten für den fünften globalen Zustand bei Ausfall eines Trackers.

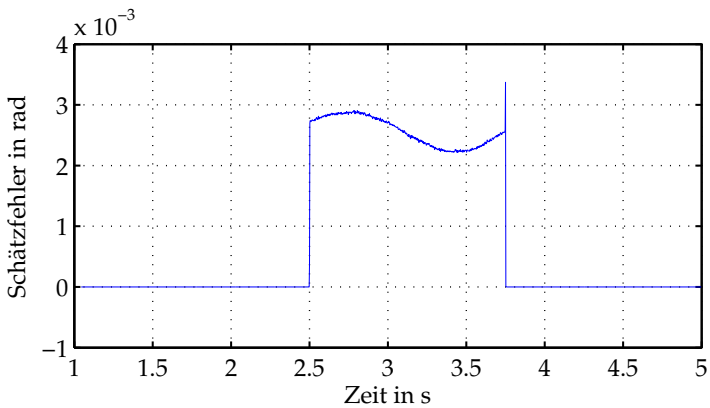


Abbildung 4.61.: Differenz zwischen zentraler Schätzung und verteilter Schätzung im dritten Knoten für den dritten globalen Zustand bei Ausfall eines Trackers.

4. Anwendung auf unterschiedliche Systeme

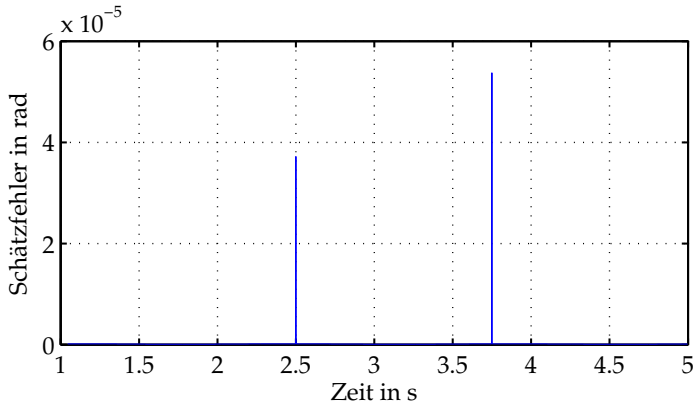


Abbildung 4.62.: Differenz zwischen zentraler Schätzung und verteilter Schätzung im dritten Knoten für den fünften globalen Zustand bei Ausfall eines Trackers.

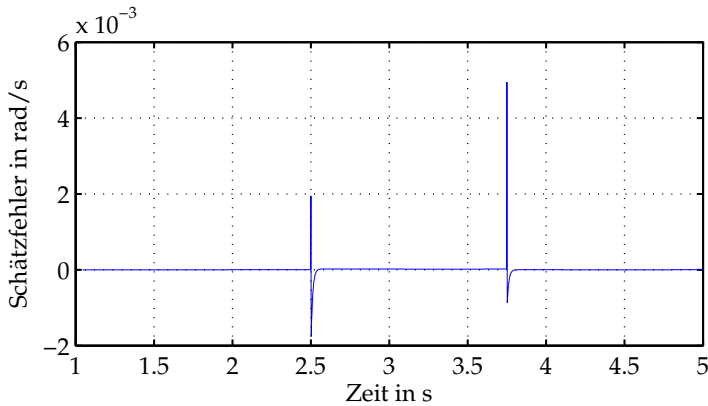


Abbildung 4.63.: Differenz zwischen zentraler Schätzung und verteilter Schätzung im dritten Knoten für den sechsten globalen Zustand bei Ausfall eines Trackers.

4.3. Multilasertrackersystem II – Beobachtung

Tabelle 4.5.: Die Rechenzeiten, die das UKF und das DDUKF benötigen, werden für unterschiedlich lange Simulationszeiten gemessen. Die Rechenzeiten werden immer auf die jeweilige Rechenzeit des UKF normiert. Da der Fusionsschritt in der Implementierung nicht einzelnen Knoten zugeordnet werden kann und auf allen Knoten durchgeführt werden muss, wird er anschließend zu der Rechenzeit addiert.

Simulierte Zeit in s	3,9625	11,4625	23,9625
Anzahl der Iterationen	1585	4585	9585
Rechenzeit UKF	1,00	1,00	1,00
Rechenzeit DDUKF gesamt	1,40	1,60	1,40
Rechenzeit Knoten 1	0,36	0,41	0,38
Rechenzeit Knoten 2	0,53	0,60	0,55
Rechenzeit Knoten 3	0,36	0,41	0,38
Rechenzeit Fusion	0,07	0,08	0,07
Rechenzeit Knoten 1 mit Fusion	0,43	0,49	0,45
Rechenzeit Knoten 2 mit Fusion	0,60	0,68	0,62
Rechenzeit Knoten 3 mit Fusion	0,43	0,49	0,45

Man sieht, dass die Summe aller Berechnungsdauern bei circa der anderthalbfachen Zeit eines UKF liegen. Addiert man aber die Berechnungsdauern der einzelnen lokalen Filter und die der Fusion zusammen, so zeigt sich, dass für die Knoten 1 und 3 die Zeiten zwischen 43% und 49% liegen; für den Knoten 2 liegen sie zwischen 60% und 68%. Während die Fusion weniger als 10% der normierten Berechnungsdauer des UKF benötigt, ergibt sich durch die Ordnungsreduktion in den Knoten ein erheblicher Vorteil, der sich auf das Gesamtergebnis auswirkt.

Für Systeme, die sich gut verteilen lassen, kann es also von Vorteil sein, ein Filter auf mehreren, weniger leistungsfähigen Einheiten zu implementieren.

4.4. Bewertung

An drei unterschiedlichen Systemen wurden mehrere Einsätze des DDUKF gezeigt. Die unterschiedlichen Ergebnisse können kategorisiert und gemeinsam bewertet werden.

Während die Zustandsschätzung einer zufälligen Bewegung eines Ziels in Abschnitt 4.2 auf Grund der Systemeigenschaften nur zu einer dezentralen Schätzung geführt hat, konnte beim Dreitanksystem sowie den gekoppelten Pendeln in den Abschnitten 4.1 und 4.3 eine echte Verteilung erreicht werden. Neben dieser grundsätzlichen Unterscheidung konnten aber auch zusätzlich zur eigentlichen Schätzung zwei Arten von Anwendungsfällen exemplarisch gezeigt werden. Der Ausfall einer Messeinrichtung wurde sowohl im dezentralen als auch im verteilten Einsatz des Filters simuliert. Das Umkonfigurieren des Filters zur Laufzeit wurde nur im dezentralen Fall gezeigt. Es ist allerdings leicht einzusehen, dass auf Grund der Ergebnisse, die beim Ausfall gezeigt werden, auch eine Umkonfiguration für verteilte Filter möglich ist.

Allen Fällen ist gemeinsam, dass der Einsatz verteilter und dezentraler Unscented Kalman-Filter ohne Divergenzprobleme möglich war. Es konnte auch gezeigt werden, dass im Vergleich zu parallel eingerichteten, zentralen Unscented Kalman-Filtern die Schätzungen zwar mit einem zusätzlichen Fehler versehen werden, dieser Fehler jedoch vernachlässigbar klein ist und sich nicht aufaddiert. Es lässt sich somit schlussfolgern, dass DDUKF mit Blick auf die Qualität der Zustandsschätzungen keine substantiellen Nachteile mit sich bringt.

Bei den dezentralen Filtern konnte gezeigt werden, dass der Vorteil darin liegt, dass die Schätzungen in den lokalen Knoten immer identisch sind. Somit liegen die Ergebnisse lokal am Ort der Messung vor und können gegebenenfalls dort direkt weiterverarbeitet werden. Dieses Konzept ist unter dem Begriff *intelligente Sensoren (smart sensors)* bekannt.

Bei den verteilten Filtern hingegen sind die Schätzwerte für identische globale Zustände in den einzelnen Knoten unterschiedlich. Dies ist eine direkte Folge der Verteilung. Direkte lokale Zustände werden

dabei mit einem geringeren Fehler geschätzt als hinzugefügte. Allerdings sind die Fehler allesamt vernachlässigbar. Vor allem zwei Effekte sind für den Vorteil der Verteilung verantwortlich. Einerseits wird das Filternetzwerk nicht vollvernetzt. Dies bedeutet im praktischen Einsatz, dass eine gute Skalierung für große Netze möglich ist und kein Kommunikationsflaschenhals entsteht. Die Anwendbarkeit ist also nicht durch die Größe des Netzwerkes beschränkt. Andererseits impliziert die Verteilung eine Ordnungsreduktion. Diese ist für große, globale Systeme von Vorteil. Die lokalen Filter haben eine deutlich verringerte Dimension, was die Komplexität in der Berechnung der einzelnen Filterschritte ebenfalls verringert. Dies ist für das Pendelsystem mit Blick auf die Berechnungszeiten gezeigt worden. Verteilte Filter ermöglichen somit eine gut skalierbare, auf mehrere Controller aufgeteilte Filterstruktur, ohne dabei in erheblichem Maße auf Genauigkeit zu verzichten.

Den hier gezeigten Filtern ist durch die Verwendung der Unscented Transformation dabei gemein, dass alle Vorteile dieser Transformation gegenüber einer Linearisierung erhalten bleiben. Dies sind mit Blick auf den praktischen Einsatz vor allem die einfache Modellierung mit nichtlinearen Differentialgleichungen ohne Rücksicht auf deren Differentierbarkeit.

Die Methoden der nichtlinearen und verteilten Zustandsschätzung konnten somit erstmalig erfolgreich angewandt werden. Dabei wurden die prognostizierten Vorteile und Einsatzmöglichkeiten gezeigt ohne Nachteile der Genauigkeit in Kauf nehmen zu müssen.

5. Die Estimation Toolbox für Matlab

Die *Estimation Toolbox* für Matlab ist eine Toolbox, welche am Fachgebiet Systemanalyse der TU Ilmenau entwickelt wurde, um die unterschiedlichen Zustandsschätzungsmethoden sowohl für den Einsatz in der Lehre aber auch zum produktiven Einsatz in der Forschung zuverlässig und einfach verfügbar zu haben. Sinn und Zweck ist dabei, nicht für jede neue Anwendung die Filteralgorithmen ebenfalls neu programmieren zu müssen.

5.1. Beschreibung

Die Toolbox besteht aus zwei grundlegenden Klassen, welche kurz beschrieben werden: Die `model`-Klasse (`model.m`) enthält alle nötigen Methoden, um die Modellbildung durchzuführen. Die `estimator`-Klasse (`estimator.m`) stellt dann die Methoden zur Verfügung, um verschiedene Varianten von Zustandsschätzern zu erzeugen.

5.1.1. Die `model`-Klasse

Diese Klasse ist zur Modellbildung des zu schätzenden Systems gedacht. Die wichtigsten Methoden der Klasse werden im Folgenden kurz beschrieben:

`mdl = model(name, Ts)` Es wird ein `model`-Objekt erzeugt, indem man einen Namen `name` und gegebenenfalls eine Abtastzeit `Ts` übergibt.

5. Die Estimation Toolbox für Matlab

`disp(md1)` Diese Methode gibt für das Objekt `md1` alle Eigenschaften aus.

`md1 = adddef(md1, expr)` Dem Objekt `md1` wird eine statische Zuweisung für eine Konstante zugefügt. Diese Zuweisung ist der String `expr`, also zum Beispiel `' a=10'`.

`md1 = addinput(md1, name)` Diese Methode fügt bei jedem Aufruf dem Objekt `md1` einen Systemeingang hinzu. Es wird der Name `name` vergeben.

`md1 = addstate(md1, expr, name)` Mit dem String `expr` wird eine nichtlineare Differentialgleichung übergeben. Die Zustände müssen mit $x(i)$ bezeichnet sein, wobei i den i -ten Zustand des Zustandsvektors bezeichnet. Eingänge werden mit $u(i)$ bezeichnet. Es können alle Ausdrücke benutzt werden, die der Matlab-Syntax entsprechen. Der erste Aufruf der Methode definiert die Differentialgleichung für den ersten Zustand, also für \dot{x}_1 . Die Reihenfolge der Aufrufe muss somit in aufsteigender Reihenfolge den Zustandsdifferentialgleichungen entsprechen. Mit `name` wird die Bezeichnung für den jeweiligen Zustand vergeben.

`md1 = addlinstate(md1, a, b, name)` Lineare Systeme können mit dieser Methode definiert werden. Dem Objekt `md1` werden pro Aufruf die Zeilen der Systemmatrix **A** und Ausgangsmatrix **B** definiert. In `a` und `b` müssen Strings angegeben sein, die den jeweiligen Zeilen entsprechen. Die einzelnen Spalten werden durch Leerzeichen getrennt. Die Zeilen- und Spaltenanzahlen müssen dabei konsistent sein. `name` legt erneut die Bezeichnung des gerade definierten Zustandes fest.

`md1 = addparam(md1, name)` Wie bei der Definition von Zuständen werden mit dieser Methode Parameter des Objektes `md1` definiert. Parameter werden von Zustandsschätzern geschätzt, sie besitzen aber

keine Dynamik. Mit `name` wird dem Parameter eine Bezeichnung zugewiesen.

`mdl = addoutput(mdl, expr, name)` Analog zur Definition der einzelnen Differentialgleichungen wird mit dieser Methode über den String `expr` eine Ausgangsgleichung dem Objekt `mdl` hinzugefügt. Die Reihenfolge der Aufrufe legt nacheinander die Ausgangsgleichungen fest. Einen Namen für den jeweiligen Ausgang kann man mit `name` festlegen.

`mdl = addlinoutput(mdl, c, d, name)` Diese Methode ist entspricht derjenigen für lineare Differentialgleichungen. Die Parameter `c` und `d` definieren die Zeilen der Ausgangs- und Durchgriffsmatrix. Sie müssen als String angegeben werden. Einzelne Spalten werden durch Leerzeichen getrennt. Der Name des Ausgangs wird mit `name` festgelegt.

`[xf, yf] = step(mdl, x0, u, Tspan)` Eine Simulation eines einzelnen Zeitschritts wird mit dieser Methode ausgeführt. Das Objekt `mdl` wird vom Initialwert `x0` mit Eingangsvektor `u` simuliert. Dazu wird in `Tspan` das Intervall `[T0 TFINAL]` übergeben. `T0` ist die Startzeit, zu der der Initialwert gehört. `TFINAL` ist die Zeit am Ende des zu simulierenden Schrittes. Die Rückgabewerte sind der Zustand `xf` und der Ausgang `yf` zum Zeitpunkt `TFINAL`.

`[Y, X] = sim(mdl, x0, U, T, show)` Soll eine ganze Zeitfolge simuliert werden, so kann dies mit dieser Methode erfolgen. Das Objekt `mdl` wird vom Initialwert `x0` ausgehend berechnet. Es müssen eine Eingangsmatrix `U` und ein Zeitvektor `T` übergeben werden. Die Eingangsmatrix muss so gestaltet sein, dass jede Spalte einen Eingangsvektor beinhaltet. Jede Spalte ist dabei zur entsprechenden Spalte im Zeitvektor zugehörig. Der Parameter `show` legt fest, welche Ausgaben während der Simulation erfolgen sollen. `'quite'` erzeugt keine Ausgaben. `'waitbar'` zeigt einen Fortschrittsbalken. `'plot'` zeigt

5. Die Estimation Toolbox für Matlab

am Ende der Simulation eine graphische Darstellung der Signalverläufe. Y und X sind die Rückgabewerte für Folgen der Ausgangs- und Zustandsvektoren.

$Q_0 = \text{obsv}(\text{mdl}, \text{option})$ Diese Methode berechnet für das Objekt mdl die Beobachtbarkeitsmatrix Q_0 . Mit option kann entweder durch 'sym' die Verwendung von symbolischen Variablen oder durch 'num' die Verwendung von numerischen Variablen festgelegt werden.

$W = \text{gram}(\text{mdl}, \text{type}, t_0)$ Für das Objekt mdl wird die Gramsche Beobachtbarkeitsmatrix W mit dieser Methode berechnet, wenn als type 'o' festgelegt wird. Falls kein Startzeitpunkt t_0 definiert ist, wird 0 angenommen.

$W = \text{empgram}(\text{mdl}, x_0, U, T, \text{type}, C, \text{show})$ Die empirische Bestimmung der Gramschen Beobachtbarkeitsmatrix W , kann für das Objekt mdl mit dieser Methode durchgeführt werden. Es müssen der Initialwert x_0 sowie analog zur Methode sim Eingangsfolgen U mit einem Zeitvektor T übergeben werden. Mit C werden gewünschten Signalamplituden festgelegt, die vom Initialwert aus angeregt werden. Wird für show 'plot' gesetzt, so werden die Ausgangstrajektorien dargestellt.

5.1.2. Die estimator-Klasse

Diese Klasse ist zur Modellbildung des zu schätzenden Systems gedacht. Es ist in jedem Fall erforderlich, zunächst mit Hilfe der model -Klasse ein dynamisches Modell zu definieren. Es werden die wichtigsten Methoden vorgestellt.

$\text{est} = \text{estimator}(\text{mdl}, x_0, P_0, \text{name})$ Zum Modell mdl erzeugt dieser Konstruktor ein Schätzer-Objekt est . Es müssen der Initial-

5.1. Beschreibung

wert x_0 sowie die initiale Kovarianzmatrix P_0 angegeben werden. Mit `name` wird der Name des Schätzerobjekts festgelegt.

`disp(est)` Diese Methode zeigt alle Eigenschaften des Objektes `est`.

`est = addprediction(est, predtype, Q, param)` Der Prädiktionsalgorithmus wird für jedes Schätzerobjekt `est` mit dieser Methode festgelegt. Der Parameter `predtype` kann dabei unterschiedliche Typen annehmen. Der Typ `'none'` führt bei der Berechnung zu einem Überspringen des Prädiktionsschrittes, ist also nur für eine Parameterschätzung sinnvoll. `'KF'`, `'EKF'` oder `'UKF'` legen die Algorithmen der jeweiligen Filter fest. `'KFsteady'` kann bei linearen Systemen zur Benutzung eines Kalman-Filters mit invarianter Kalman-Verstärkung benutzt werden. `Q` legt die Kovarianzmatrix des Zustandsrauschens fest. Mit `param` wird im Falle des UKF die Bestimmung der Sigmapunkte festgelegt. Wird dieser Wert nicht übergeben, werden $2n$ Punkte herangezogen. `'centered'` führt zur Benutzung von $2n + 1$ Punkten, wobei $\kappa = 3 - n$ festgelegt wird.

`est = addcorrection(est, corrtype, R, param)` Es wird der Korrekturschritt bestimmt. Die Methode besitzt die gleiche Syntax wie die zur Bestimmung des Prädiktionsschrittes.

`[est, y_hat, x_hat, P_hat] = step(est, y, u, Tspan)` Diese Methode berechnet einen einzelnen Zeitschritt der Zustandsschätzung, wenn ein Objekt `est` vollständig definiert ist. `y` ist dabei der aktuelle Messvektor, `u` der aktuelle Eingangsvektor und `Tspan` beinhaltet mit `[TSTART TEND]` die Zeit `TSTART`, von der die Schätzung ausgeht und die Zeit `TEND`, welche dem folgenden Zeitschritt entspricht. Der geschätzte Ausgangsvektor, der geschätzte Zustandsvektor sowie die zugehörige Kovarianzmatrix des Schätzfehlers sind die Rückgabewerte `y_hat`, `x_hat`, `P_hat`.

5. Die Estimation Toolbox für Matlab

`[Y_hat, X_hat, P_diag] = sim(est, Y, U, T, show)` Wenn das Objekt `est` für einen kompletten Zeitverlauf simuliert werden soll, so können mit dieser Methode Ausgangsverläufe mit `Y`, Eingangsverläufe mit `U` und die dazugehörigen Zeitschritte mit `T` übergeben werden. Jeder Vektor einer Spalte im Ausgangs- und Eingangsverlauf ist dabei dem jeweiligen Eintrag der Spalte in `T` zugehörig. Über `'quite'`, `'waitbar'` oder `'plot'` wird für den Parameter `show` eingestellt, ob die Simulation ohne Ausgabe, mit Fortschrittsbalken oder dem Signalverlauf am Ende erfolgen soll.

5.2. Erweiterung für verteilte und dezentrale Schätzungen

Diese beiden Klassen werden um `ddestimator` (`ddestimator.m`) erweitert, welche die Toolbox um verteilte und dezentrale Algorithmen ergänzt.

5.2.1. Die `ddestimator`-Klasse

Diese Klasse ist zur Modellbildung des zu schätzenden Systems gedacht. Voraussetzung zur Benutzung ist eine erfolgte Modellierung der lokalen Systeme und die Definition der lokalen Schätzer.

`ddest = ddestimator(name, m, n, p)` Mit der Konstruktor-Methode dieser Klasse wird ein Objekt `ddest` erzeugt. Es müssen die Anzahl der globalen Eingänge `m`, die Dimension des globalen Zustandsvektors `n` und die Anzahl der globalen Ausgänge `p` angegeben werden. Über `name` wird der Name des Objektes mit einem String übergeben.

`disp(ddest)` Diese Methode gibt alle Eigenschaften des Objektes `ddest` zur verteilten Schätzung aus.

5.2. Erweiterung für verteilte und dezentrale Schätzungen

`doest = addlocalestimator(ddest, est, T, in, out)` Mit dieser Methode werden lokale Schätzer `est`, welche bereits definiert sein müssen, dem verteilten Schätzerobjekt `ddest` hinzugefügt. Es muss außerdem die Transformationsmatrix `T` angegeben sein, welche die Zuordnung der lokalen Zustände vom globalen Zustandsvektor vornimmt. Mit `in` wird eine Matrix übergeben, die die Eingänge vom globalen zum lokalen System abbildet. `out` ist die entsprechende Matrix für die Ausgänge.

```
[ddest, y_hat, x_hat, P_hat] = step(ddest, y, u, Tspan)
```

Diese Methode ermöglicht wie bei einem normalem Schätzerobjekt eine Simulation eines einzelnen Zeitschritts für das Objekt `ddest`. Die Syntax entspricht der Methode aus der `estimator`-Klasse. Die Rückgabewerte sind Arrays, bei denen jedes Element einem lokalen Schätzer entspricht.

```
[Y_hat, X_hat, P_diag] = sim(ddest, Y, U, T, show)
```

Wie in der `estimator`-Klasse ermöglicht diese Methode die Simulation des verteilten Schätzers für komplette Signalfolgen. Die Syntax ist analog gewählt. Erneut werden die Rückgabewerte als Array gestaltet. Jedes Element entspricht einem lokalen Filter.

5.2.2. Benutzung der `ddestimator`-Klasse

Die `ddestimator`-Klasse ist so ausgelegt, dass mit möglichst wenigen Methoden eine verteilte Schätzung durchgeführt werden kann. Die Methoden sind dabei analog zu denjenigen der zentralen Schätzung ausgelegt. So wie für die zentrale Schätzung zunächst die Modellierung erforderlich ist, wird für die verteilte Schätzung die Bestimmung der lokalen Schätzer vorausgesetzt. Das heißt, dass jedes lokale Modell in einem `model`-Objekt definiert sein muss. Mit diesen werden dann lokale `estimator`-Objekte erzeugt. Um eine verteilte Schätzung durchzuführen, muss zunächst ein `ddestimator`-Objekt erzeugt werden. Danach werden die lokalen Schätzer hinzugefügt. Durch die Transformations- und Zuordnungsmatrizen besteht

5. Die Estimation Toolbox für Matlab

ein eindeutiger Zusammenhang zwischen lokalen und globalem Modell. Die Methoden zur schrittweisen Simulation und zur Berechnung von kompletten Eingangs- und Ausgangsfolgen sind analog zur zentralen Schätzung ausgelegt. Lediglich die Rückgabewerte geben Arrays der einzelnen Schätzer aus.

Intern werden nacheinander in jedem Zeitschritt Prädiktion und Korrektur für die einzelnen Schätzer durchgeführt und die nötigen Zwischengrößen gespeichert. Anschließend wird der Fusionsschritt für alle Knoten berechnet und somit die korrekten a-posteriori Schätzwerte bestimmt. Sämtliche Größen werden in den internen Variablen der lokalen Schätzer gespeichert, so dass alle davon abgeleiteten Methoden weiter funktionieren. Wenn es möglich ist, werden immer die Methoden der untergeordneten Klassen aufgerufen. Dies führt dazu, dass mögliche Codeoptimierungen der `estimator`-Klasse automatisch auch der `ddesitimator`-Klasse zur Verfügung stehen. Lediglich der Fusionsschritt wird durch Methoden der `ddesitimator`-Klasse ausgeführt.

6. Zusammenfassung und Ausblick

Im Mittelpunkt der Betrachtungen stand die Kombination des Unscented Kalman-Filters mit den Methoden der Dezentralisierung, der Verteilung der Systemmodelle und Fusionsalgorithmen.

Zunächst wurden die grundlegenden, theoretischen Eigenschaften der linearen, rekursiven Zustandsschätzung gezeigt. Aus ihnen geht hervor, dass die beiden relevanten Größen der Mittelwert und die Kovarianz der zu schätzenden Zustände sind. In der Theorie lassen sich bei linearen Systemen diese Kennwerte rekursiv mit minimalem quadratischem Fehler bestimmen, falls die zu Grunde liegenden Rauschprozesse alle Voraussetzungen erfüllen. Genau dies kann in der Realität nie der Fall sein, weshalb eine anschauliche Interpretation der Filtergleichungen angeführt wurde, um den Einsatz des Algorithmus für praktische Anwendungen zu rechtfertigen.

Danach wurden die Vorteile der Unscented Transformation aufgezeigt. Sie bietet im Vergleich zur Linearisierung eine deutlich verbesserte Möglichkeit, um Mittelwert und Kovarianz einer Verteilung unter dem Eindruck einer nichtlinearen Transformation zu berechnen. Eine Betrachtung der linearen Verteilung und Dezentralisierung der Schätzfilter zeigte, dass auch hier nur die Mittelwerte und Kovarianzen jeweils nach der Prädiktion und nach der Korrektur benötigt werden. Da diese Zwischengrößen sowohl im linearen als auch im nichtlinearen Filter äquivalent zueinander existieren, wurde geschlussfolgert, dass die Verteilungs- und Fusionsmechanismen auf das Unscented Kalman-Filter übertragbar sind. Auf dieser Basis wurde dann der Filteralgorithmus für das Verteilte Und Dezentrale Unscented Kalman-Filter formuliert. Zusätzlich zur eigentlichen Beschreibung

6. Zusammenfassung und Ausblick

des Filters war noch eine Vorschrift zur Verteilung der nichtlinearen Systembeschreibungen nötig. Hier wurde ein Vorgehen vorgeschlagen, welches zunächst eine Einteilung der Zustände auf einzelne Systemteile vorsieht. Dem folgte ein Vervollständigen der Differentialgleichungen, wobei die restlichen Zustände als Parameter oder auch externe Störgrößen modelliert werden. Diese Verteilungsvorschrift ist essentiell für den praktischen Einsatz des Filters.

Um die Frage der Beobachtbarkeit von verteilten, nichtlinearen Systemen zu beantworten, wurden zunächst verschiedene Methoden zu deren Bestimmung gezeigt. Als für den praktischen Einsatz besonders geeignet hat sich die Berechnung der empirischen Gramschen Beobachtbarkeitsmatrix gezeigt. Diese kann sowohl mit synthetischen Daten als auch mit gemessenen Daten bestimmt werden.

Mit diesem Filteralgorithmus und der Verteilungsvorschrift wurden dann an verschiedenen Systemen Zustandsschätzungen durchgeführt. Diese haben gezeigt, dass das vorgeschlagene Filter für den praktischen Einsatz geeignet ist und sich leicht implementieren lässt. Eine globale Betrachtung der Ergebnisse hat zunächst ergeben, dass im Vergleich zu einem zentralen Filter die Abweichungen auf Grund der Verteilung, Dezentralisierung und Fusion vernachlässigbar gering sind. Wird das Filter nur dezentral benutzt, so liegen in allen Knoten identische Schätzungen vor, da der Zustandsvektor nicht verteilt wird und auch keine Anpassung der Differentialgleichungen vorliegt. Ohne Verteilung entsteht jedoch ein Filternetzwerk, in dem alle Knoten mit allen anderen verbunden sind und sich daher im Fusionsschritt austauschen müssen.

Wird jedoch eine Verteilung benutzt, so beinhaltet diese immer auch eine Ordnungsreduktion in den einzelnen lokalen Systemen. Dies hat eine geringere Komplexität der Filter zur Folge. Sie führt aber auch dazu, dass sich nur diejenigen Filterknoten in der Fusion austauschen müssen, deren lokale Zustandsräume gemeinsame Zustände besitzen. Im Allgemeinen entsteht so ein nicht vollvernetztes System. Die Fehler dieser Filterstruktur sind für die direkten lokalen Zustände geringer als für die zusätzlich hinzugefügten. An einem Beispiel konnte gezeigt werden, dass die implizite Ordnungsreduktion zu einer erheblichen

Verringerung der benötigten Rechenzeit in einem einzelnen Knoten geführt hat. Durch diese Eigenschaft und die entstehende Netztopologie ist das verteilte, nichtlineare Filter für große, ausgedehnte Systeme geeignet. Es skaliert mit der Systemordnung. Außerdem müssen in den einzelnen Knoten keine besonders leistungsfähigen Controller eingesetzt werden. Es entstehen ebenfalls keine Knoten, die als Flaschenhals in der Kommunikation auffallen könnten.

Die so entstandenen lokalen Einheiten haben somit ihre Zustandsinformationen vorliegen. Damit wären Anwendungen wie die Diagnose oder die Entscheidungsfindung auf dieser Basis möglich, ohne dazu eine zentrale Instanz benutzen zu müssen. Ebenso könnte eine Prädiktion des Verlaufs der Zustände für die nahe Zukunft erfolgen. Beide Konzepte sind dann wichtig, wenn eine Störung der Kommunikation oder sonstige Fehler auftreten und der lokale Knoten autonom weiterarbeiten oder zumindest in einen geschützten Fehlerzustand übergehen soll.

Sind Systeme so ausgelegt, dass Zustände durch mehrere Messeinrichtungen beobachtbar sind, so kann eine redundante Struktur zu einer Robustheit des Netzwerkes führen. Zu diesem Zweck wurden Ausfälle von Messeinrichtungen simuliert und auch zur Laufzeit weitere Sensoren und lokale Schätzer dem Netzwerk hinzugefügt. Der Ausfall führt lediglich zu einer Verschlechterung der Schätzgüte. Das Gesamtfilter wird nicht beeinträchtigt und auch nicht destabilisiert. Nachdem wieder alle Knoten zur Verfügung stehen, verläuft die Schätzung ohne Nachwirkungen normal weiter. Das Hinzufügen von Knoten ist für Anwendungen wichtig, bei denen im Betrieb Änderungen an der Netztopologie vorgenommen werden müssen. Es kann aber auch dann eintreten, wenn auf Grund von unterschiedlichen Arbeitspunkten unterschiedliche Sensoren zum Einsatz kommen. Hier konnte ebenfalls gezeigt werden, dass ein reibungsloses Umstellen der Filter möglich ist.

Die hier vorgestellten Methoden wurden außerdem in die bestehende Estimator-Toolbox für Matlab integriert. Die Syntax wurde an die bereits bestehende angepasst, so dass der Übergang von zentralen zu verteilten Filtern leicht zu handhaben ist. Die Software ist so ausge-

6. Zusammenfassung und Ausblick

legt, dass zukünftige Optimierungen der Algorithmen sich auch auf die verteilten Filter auswirken. Die Toolbox soll dabei sowohl im Bereich der Lehre als auch produktiv in der Forschung und bei konkreten Projekten benutzt werden. Der produktive Einsatz wurde bereits für die hier gezeigten Anwendungen erzielt.

Weitere vielfältige Arbeiten sind auf diesem Gebiet möglich. Geht man vom Standpunkt der Entwicklung zentraler Filter aus, so ist eine weitere Variante die Kombination der Verteilungs- und Fusionsalgorithmen mit Partikelfiltern. Partikelfilter nutzen statt eines definierten Satzes von Punkten wie beim Unscented Kalman-Filter eine relativ große Punktwolke. Durch Transformation aller dieser Punkte, Betrachten der Wahrscheinlichkeitsverteilungen und gezieltem Auswählen einzelner Punkte können sehr gute Zustandsschätzungen durchgeführt werden. Partikelfilter setzen dabei auf den Einsatz sehr großer Rechenleistung. Sie haben den Vorteil, dass Einschränkungen durch die zu Grunde liegenden Rauschprozesse deutlich verringert sind. Sie kommen aktuell vor allem bei der selbständigen Lokalisierung von Robotern zum Einsatz. Da die Wahrscheinlichkeitsverteilungen beliebige Formen annehmen können und insbesondere nicht monomodal sein müssen, kann hier mit Partikelfiltern gearbeitet werden. Eine Adaption auf verteilte Filter muss sich daher mit der Frage auseinandersetzen, welches die äquivalenten Größen zu Mittelwert und Kovarianz sind und wie diese fusioniert werden können. Da Partikelfilter in der Regel mehrere hundert Einzelpunkte pro Zustand berechnen, könnte sich für große Systeme ein Einsatz durch Verteilung und Ordnungsreduktion überhaupt erst ergeben.

Mit Blick auf das benutzte Multitrackersystem ist der Einsatz im Bereich der Forschung an der TU Ilmenau vorstellbar. Das DDUKF kann eingesetzt werden, um im Falle des Strahlverlustes einzelner Tracker das Ziel sehr schnell wieder zu finden, da durch die Fusion die tatsächliche Position des Reflektors bekannt ist. Ebenso haben erste Simulationen gezeigt, dass mit Hilfe der verteilten, nichtlinearen Schätzung eine Selbstlokalisierung und Kalibrierung möglich ist.

Diese beiden Konzepte sind für die weitere Forschung in diesem Bereich sehr interessant. Eine konsequente Anwendung des Konzep-

tes intelligenter Sensoren kann hier auf die Trackereinheit angewandt werden. Da zur Regelung der Strahlnachführung bereits Controller eingesetzt werden, kann hier ein Netzwerk bestehend aus einzelnen Lasertrackern aufgebaut und im Raum verteilt werden. Ist die Position von nur wenigen Trackern sicher bekannt, so können weitere durch Lokalisationsverfahren bestimmt werden und anschließend selber an der Positionsschätzung des Ziels teilnehmen.

Weitere anspruchsvolle Konzepte, die betrachtet wurden, sind die Kombination verteilter Filter mit verteilten Regelungen. Dazu muss jedem lokalen Schätzer auch ein lokaler Regler beigelegt werden. Die besondere Herausforderung liegt dabei, die durch den Regler erzeugten Stellgrößen auch immer anderen Knoten zur Verfügung zu stellen, falls dies durch die Verteilung der Differentialgleichungen nötig ist. Diese Kombination würde zu lokalen Regelkreisen führen, die aber eine globale Regelungsaufgabe erfüllen. Die Schwierigkeiten eines solchen Konzeptes liegen in den Anforderungen, die Stabilität und gewünschte Regelgüte eines solchen Systems zu jedem Zeitpunkt zu gewährleisten.

A. Trajektorien der Verfolgung eines zufällig bewegten Objektes

Der euklidische Abstand zwischen lokaler und zentraler Schätzung der ersten und zweiten Testbewegung ist jeweils für die vier Knoten in Abschnitt 4.2.7 berechnet worden. Die jeweiligen Trajektorien sind in den Abbildungen A.1, A.2, A.3, A.4, A.5, A.6, A.7 und A.8 zu sehen. Im linken unteren Feld wird die Bewegung perspektivisch entsprechend der Definition der Raumachsen gezeigt. Die Projektionen der Bewegung auf die entsprechenden Hauptebenen werden in den restlichen Felder gezeigt.

A. Trajektorien der Verfolgung eines zufällig bewegten Objektes

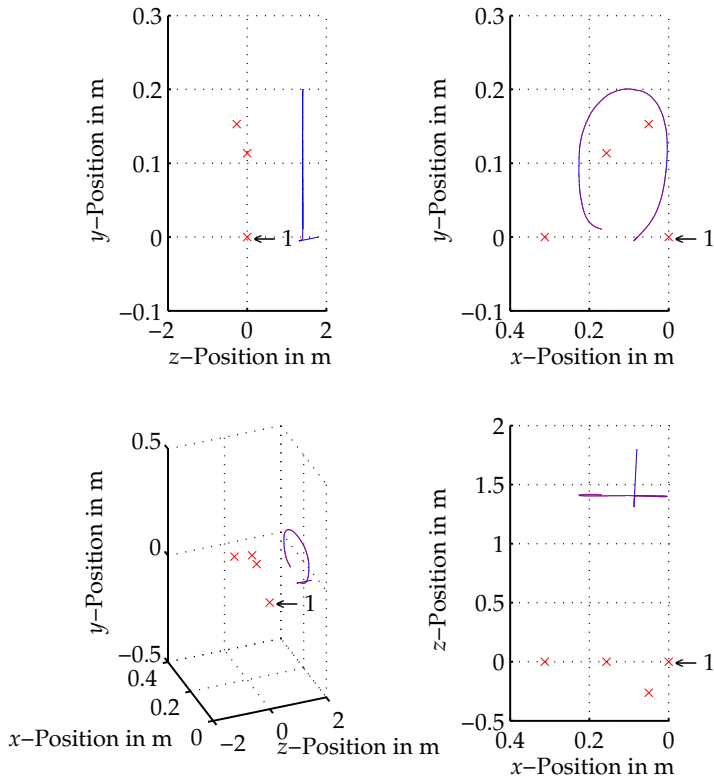


Abbildung A.1.: Dezentrale (rot) und zentrale (blau) Schätzung der ersten Testbewegung im ersten Knoten sowie Position des Lasertrackers 1 (rotes x). Die Positionen der zur Fusion benutzten Tracker 2 bis 4 sind ebenfalls dargestellt (rotes x). Unten links sind die räumliche Anordnung der Tracker und die Trajektorien dargestellt. Die anderen Abbildungen zeigen jeweils Projektionen auf die drei Hauptebenen.

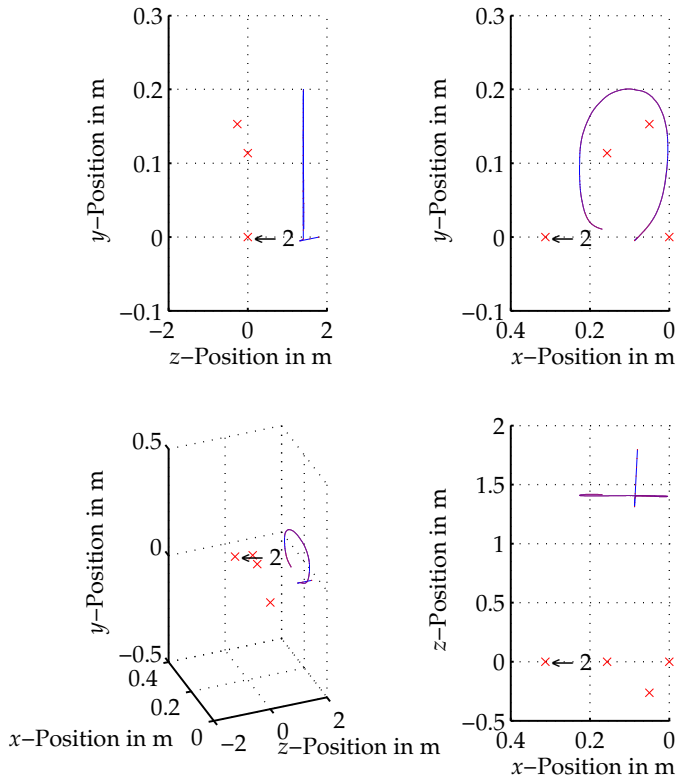


Abbildung A.2.: Dezentrale (rot) und zentrale (blau) Schätzung der ersten Testbewegung im zweiten Knoten sowie Position des Lasertrackers 2 (rotes x). Die Positionen der zur Fusion benutzten Tracker 1, 3 und 4 sind ebenfalls dargestellt (rotes x). Unten links sind die räumliche Anordnung der Tracker und die Trajektorien dargestellt. Die anderen Abbildungen zeigen jeweils Projektionen auf die drei Hauptebenen.

A. Trajektorien der Verfolgung eines zufällig bewegten Objektes

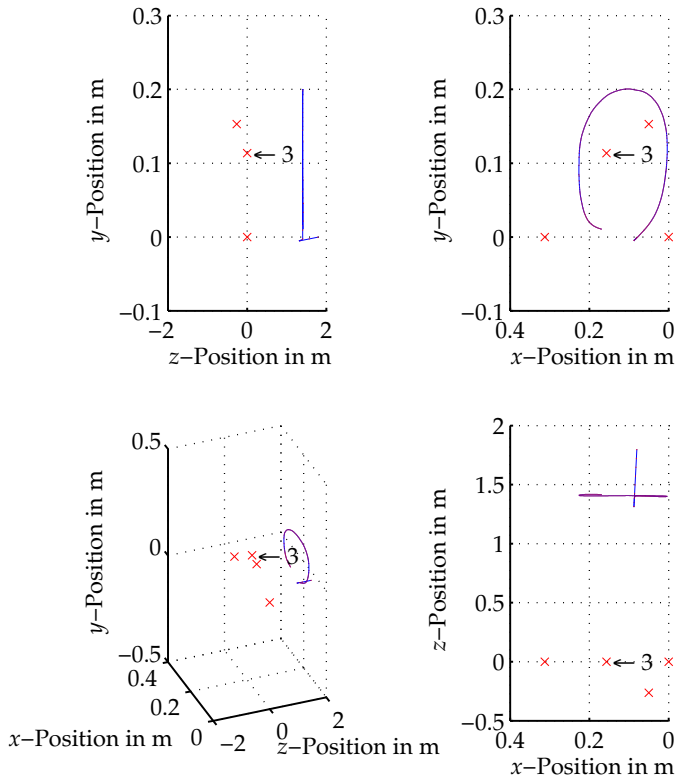


Abbildung A.3.: Dezentrale (rot) und zentrale (blau) Schätzung der ersten Testbewegung im dritten Knoten sowie Position des Lasertrackers 3 (rotes x). Die Positionen der zur Fusion benutzten Tracker 1, 2 und 4 sind ebenfalls dargestellt (rotes x). Unten links sind die räumliche Anordnung der Tracker und die Trajektorien dargestellt. Die anderen Abbildungen zeigen jeweils Projektionen auf die drei Hauptebenen.

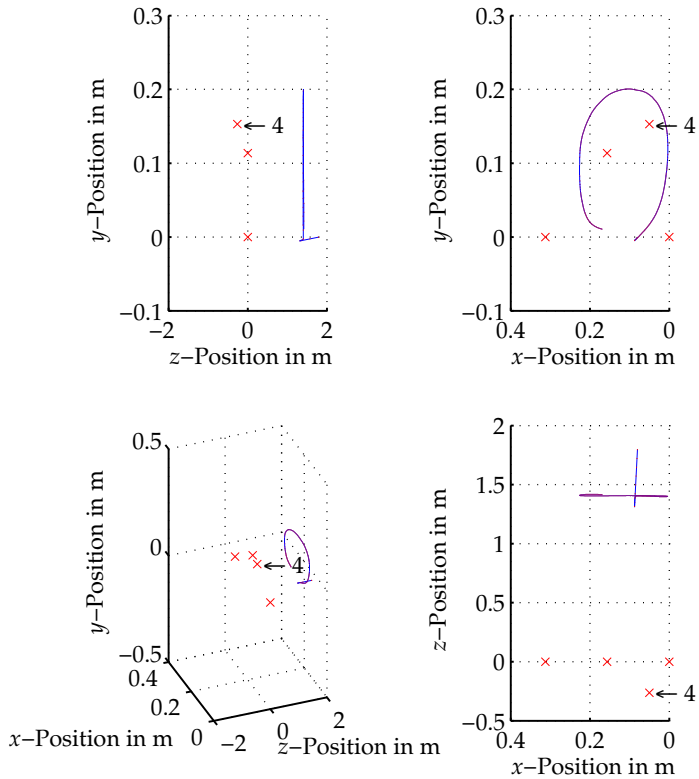


Abbildung A.4.: Dezentrale (rot) und zentrale (blau) Schätzung der ersten Testbewegung im vierten Knoten sowie Position des Lasertrackers 4 (rotes x). Die Positionen der zur Fusion benutzten Tracker 1 bis 3 sind ebenfalls dargestellt (rotes x). Unten links sind die räumliche Anordnung der Tracker und die Trajektorien dargestellt. Die anderen Abbildungen zeigen jeweils Projektionen auf die drei Hauptebenen.

A. Trajektorien der Verfolgung eines zufällig bewegten Objektes

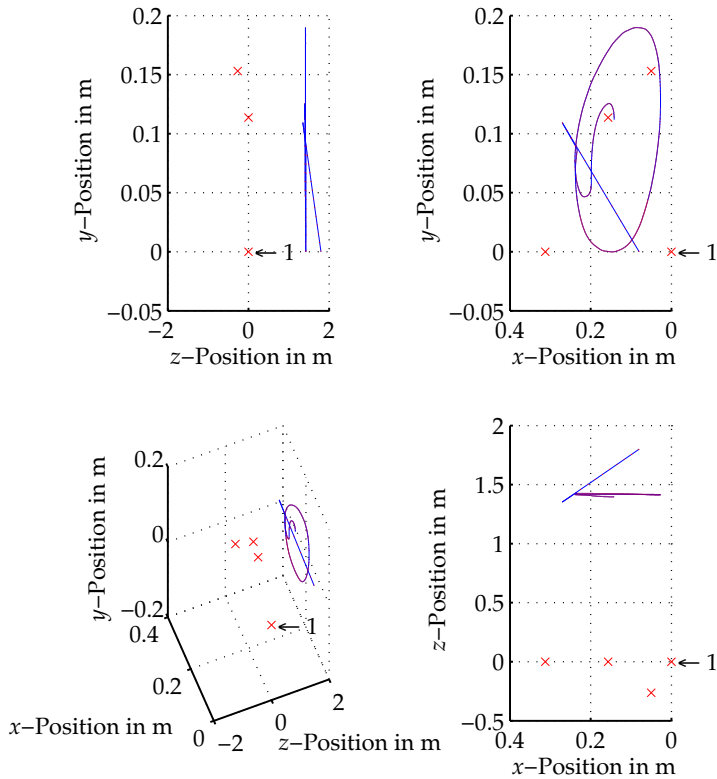


Abbildung A.5.: Dezentrale (rot) und zentrale (blau) Schätzung der zweiten Testbewegung im ersten Knoten sowie Position des Lasertrackers 1 (rotes x). Die Positionen der zur Fusion benutzten Tracker 2 bis 4 sind ebenfalls dargestellt (rotes x). Unten links sind die räumliche Anordnung der Tracker und die Trajektorien dargestellt. Die anderen Abbildungen zeigen jeweils Projektionen auf die drei Hauptebenen.

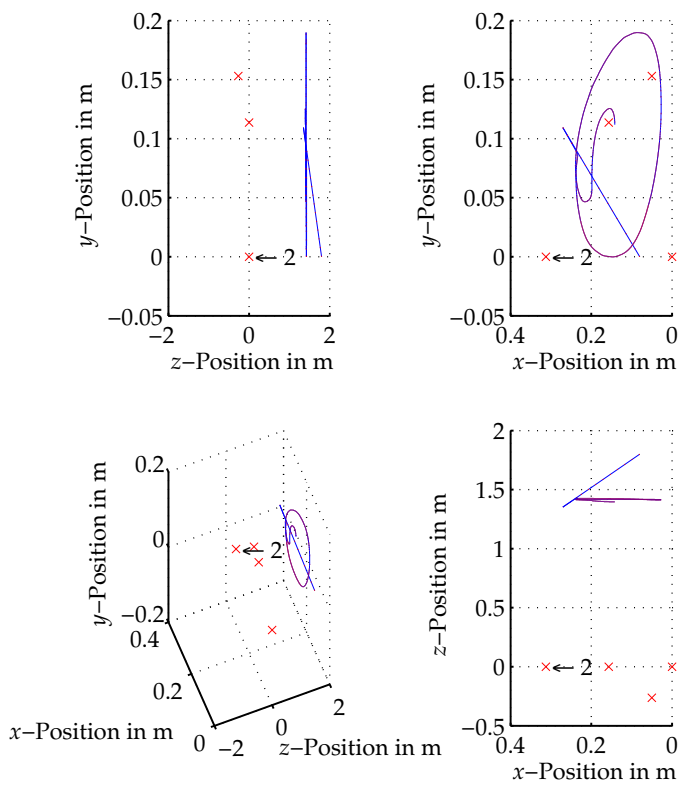


Abbildung A.6.: Dezentrale (rot) und zentrale (blau) Schätzung der zweiten Testbewegung im zweiten Knoten sowie Position des Lasertrackers 2 (rotes x). Die Positionen der zur Fusion benutzten Tracker 1, 3 und 4 sind ebenfalls dargestellt. Unten links sind die räumliche Anordnung der Tracker und die Trajektorien dargestellt. Die anderen Abbildungen zeigen jeweils Projektionen auf die drei Hauptebenen.

A. Trajektorien der Verfolgung eines zufällig bewegten Objektes

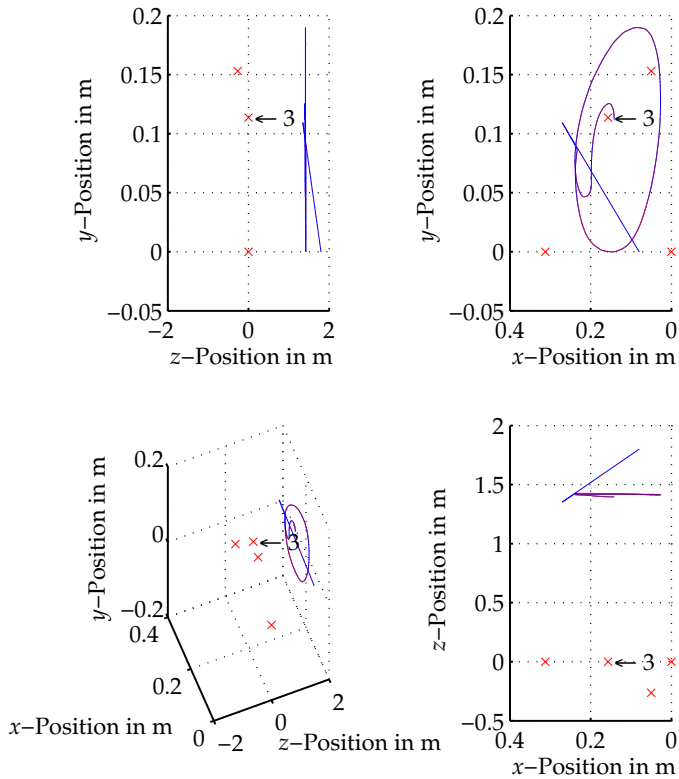


Abbildung A.7.: Dezentrale (rot) und zentrale (blau) Schätzung der zweiten Testbewegung im dritten Knoten sowie Position des Lasertrackers 3 (rotes x). Die Positionen der zur Fusion benutzten Tracker 1, 2 und 4 sind ebenfalls dargestellt (rotes x). Unten links sind die räumliche Anordnung der Tracker und die Trajektorien dargestellt. Die anderen Abbildungen zeigen jeweils Projektionen auf die drei Hauptebenen.

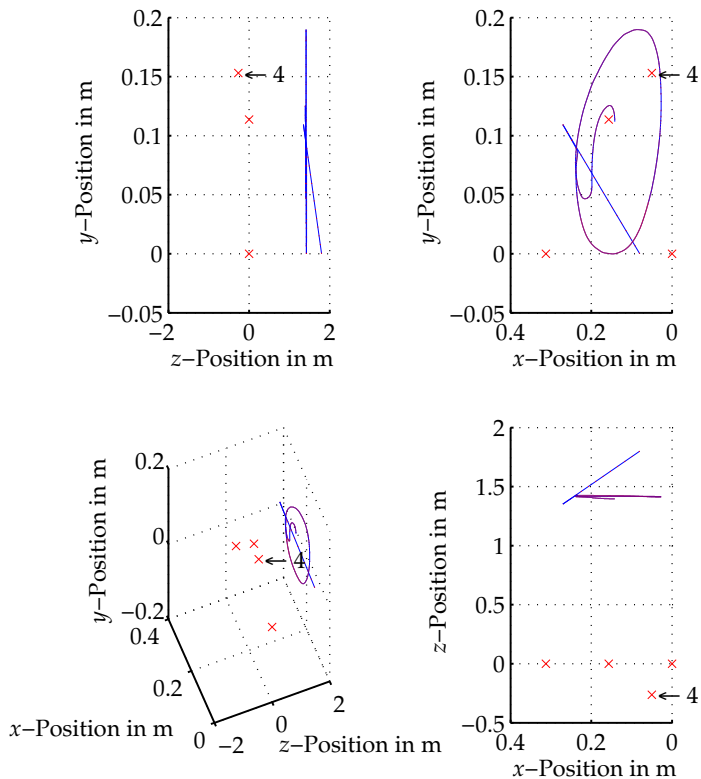


Abbildung A.8.: Dezentrale (rot) und zentrale (blau) Schätzung der zweiten Testbewegung im vierten Knoten sowie Position des Lasertrackers 4 (rotes x). Die Positionen der zur Fusion benutzten Tracker 1 bis 3 sind ebenfalls dargestellt (rotes x). Unten links sind die räumliche Anordnung der Tracker und die Trajektorien dargestellt. Die anderen Abbildungen zeigen jeweils Projektionen auf die drei Hauptebenen.

A. Trajektorien der Verfolgung eines zufällig bewegten Objektes

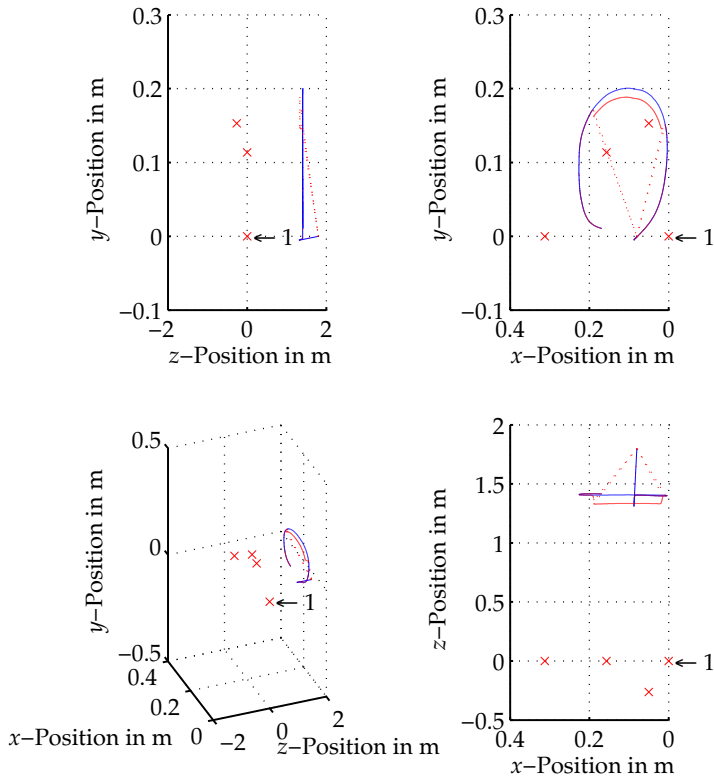


Abbildung A.9.: Dezentrale (rot) und zentrale (blau) Schätzung der ersten Testbewegung im ersten Knoten sowie Position des Lasertrackers 1 (rotes x). Die Positionen der zur Fusion benutzten Tracker 2 bis 4 sind ebenfalls dargestellt (rotes x). Unten links sind die räumliche Anordnung der Tracker und die Trajektorien dargestellt. Die anderen Abbildungen zeigen jeweils Projektionen auf die drei Hauptebenen. Es wird ein Ausfall der Tracker 2 und 4 für eine Sekunde simuliert.

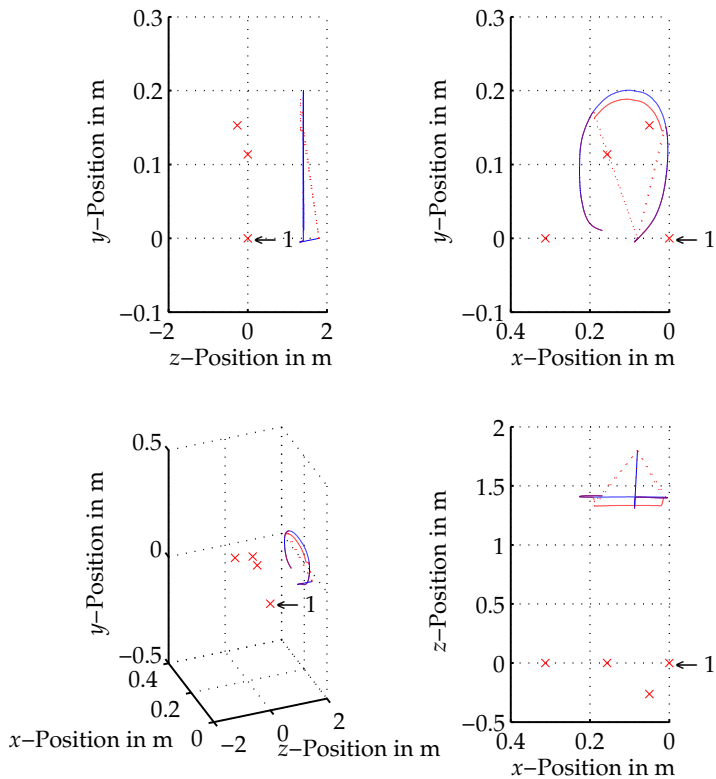


Abbildung A.10.: Dezentrale (rot) und zentrale (blau) Schätzung der ersten Testbewegung im zweiten Knoten sowie Position des Lasertrackers 2 (rotes x). Die Positionen der zur Fusion benutzten Tracker 1, 3 und 4 sind ebenfalls dargestellt (rotes x). Unten links sind die räumliche Anordnung der Tracker und die Trajektorien dargestellt. Die anderen Abbildungen zeigen jeweils Projektionen auf die drei Hauptebenen. Es wird ein Ausfall der Tracker 2 und 4 für eine Sekunde simuliert.

A. Trajektorien der Verfolgung eines zufällig bewegten Objektes

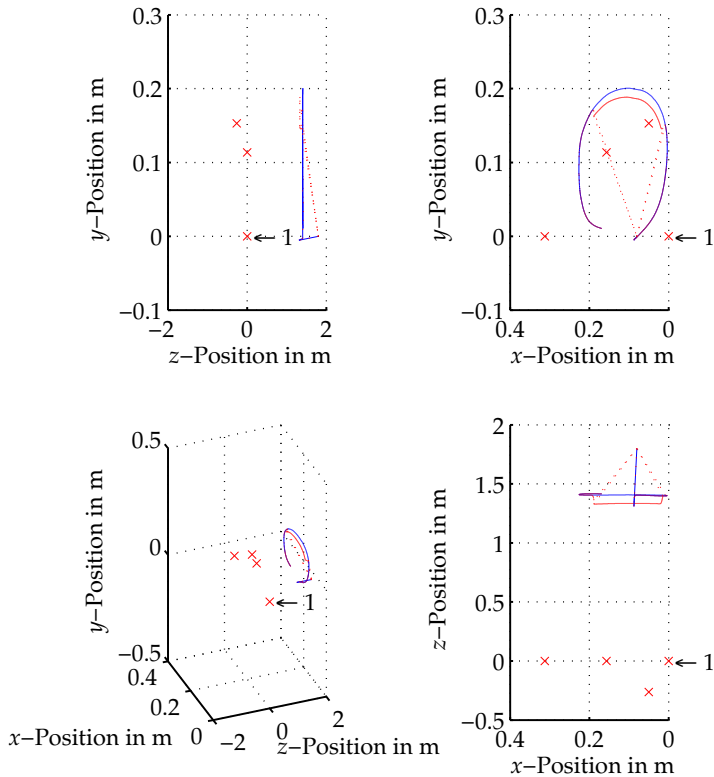


Abbildung A.11.: Dezentrale (rot) und zentrale (blau) Schätzung der ersten Testbewegung im dritten Knoten sowie Position des Lasertrackers 3 (rotes x). Die Positionen der zur Fusion benutzten Tracker 1, 2 und 4 sind ebenfalls dargestellt (rotes x). Unten links sind die räumliche Anordnung der Tracker und die Trajektorien dargestellt. Die anderen Abbildungen zeigen jeweils Projektionen auf die drei Hauptebenen. Es wird ein Ausfall der Tracker 2 und 4 für eine Sekunde simuliert.

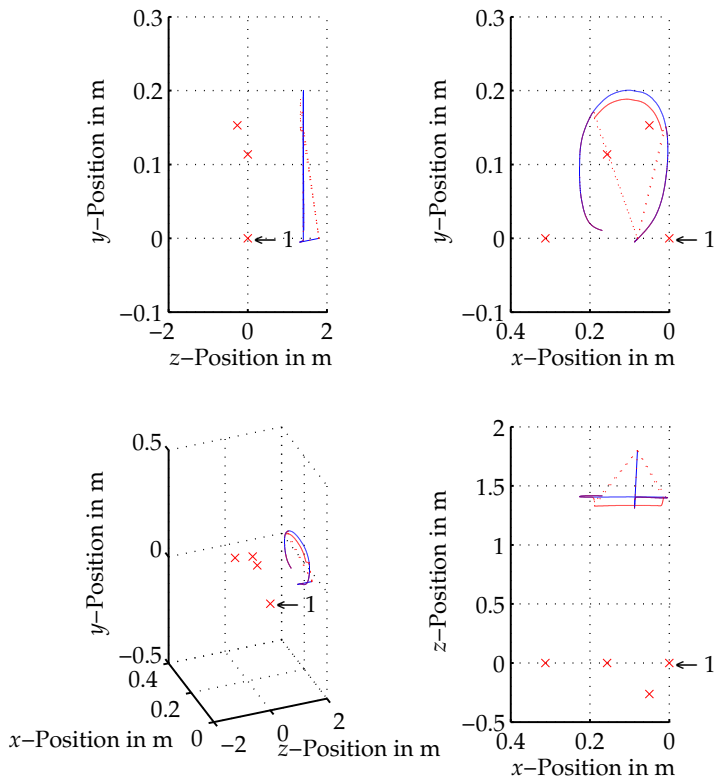


Abbildung A.12.: Dezentrale (rot) und zentrale (blau) Schätzung der ersten Testbewegung im vierten Knoten sowie Position des Lasertrackers 4 (rotes x). Die Positionen der zur Fusion benutzten Tracker 1 bis 3 sind ebenfalls dargestellt (rotes x). Unten links sind die räumliche Anordnung der Tracker und die Trajektorien dargestellt. Die anderen Abbildungen zeigen jeweils Projektionen auf die drei Hauptebenen. Es wird ein Ausfall der Tracker 2 und 4 für eine Sekunde simuliert.

A. Trajektorien der Verfolgung eines zufällig bewegten Objektes

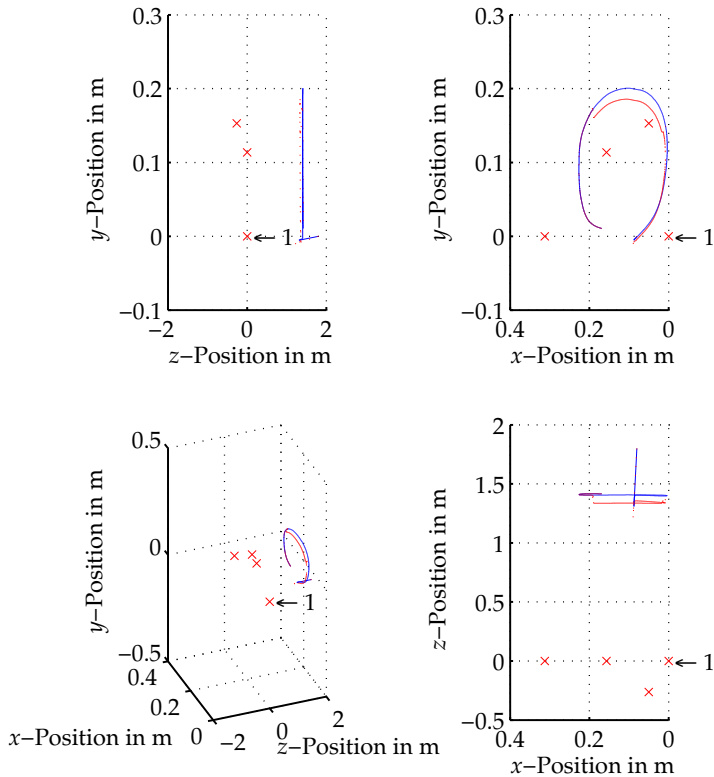


Abbildung A.13.: Dezentrale (rot) und zentrale (blau) Schätzung der ersten Testbewegung im ersten Knoten sowie Position des Lasertrackers 1 (rotes x). Die Positionen der zur Fusion benutzten Tracker 2 bis 4 sind ebenfalls dargestellt (rotes x). Unten links sind die räumliche Anordnung der Tracker und die Trajektorien dargestellt. Die anderen Abbildungen zeigen jeweils Projektionen auf die drei Hauptebenen. Tracker 3 wird nach einer, Tracker 4 nach zwei Sekunden zum Filter hinzugefügt.

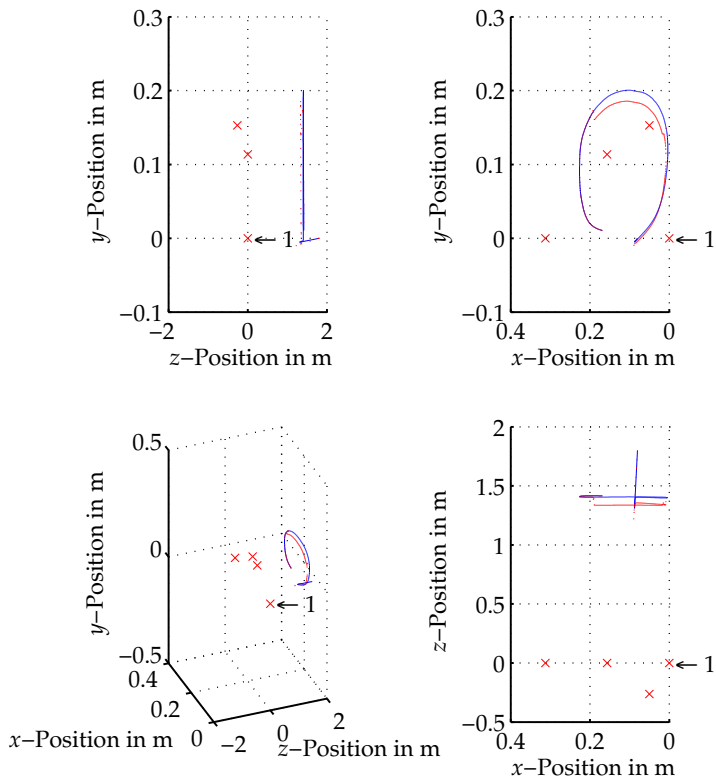


Abbildung A.14.: Dezentrale (rot) und zentrale (blau) Schätzung der ersten Testbewegung im zweiten Knoten sowie Position des Lasertrackers 2 (rotes x). Die Positionen der zur Fusion benutzten Tracker 1, 3 und 4 sind ebenfalls dargestellt (rotes x). Unten links sind die räumliche Anordnung der Tracker und die Trajektorien dargestellt. Die anderen Abbildungen zeigen jeweils Projektionen auf die drei Hauptebenen. Tracker 3 wird nach einer, Tracker 4 nach zwei Sekunden zum Filter hinzugefügt.

A. Trajektorien der Verfolgung eines zufällig bewegten Objektes

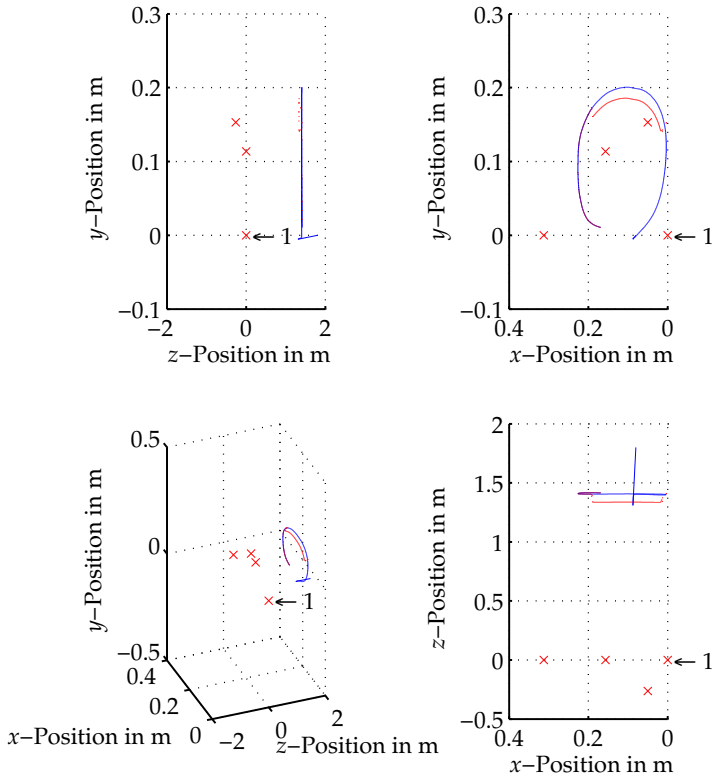


Abbildung A.15.: Dezentrale (rot) und zentrale (blau) Schätzung der ersten Testbewegung im dritten Knoten sowie Position des Lasertrackers 3 (rotes x). Die Positionen der zur Fusion benutzten Tracker 1, 2 und 4 sind ebenfalls dargestellt (rotes x). Unten links sind die räumliche Anordnung der Tracker und die Trajektorien dargestellt. Die anderen Abbildungen zeigen jeweils Projektionen auf die drei Hauptebenen. Tracker 3 wird nach einer, Tracker 4 nach zwei Sekunden zum Filter hinzugefügt.

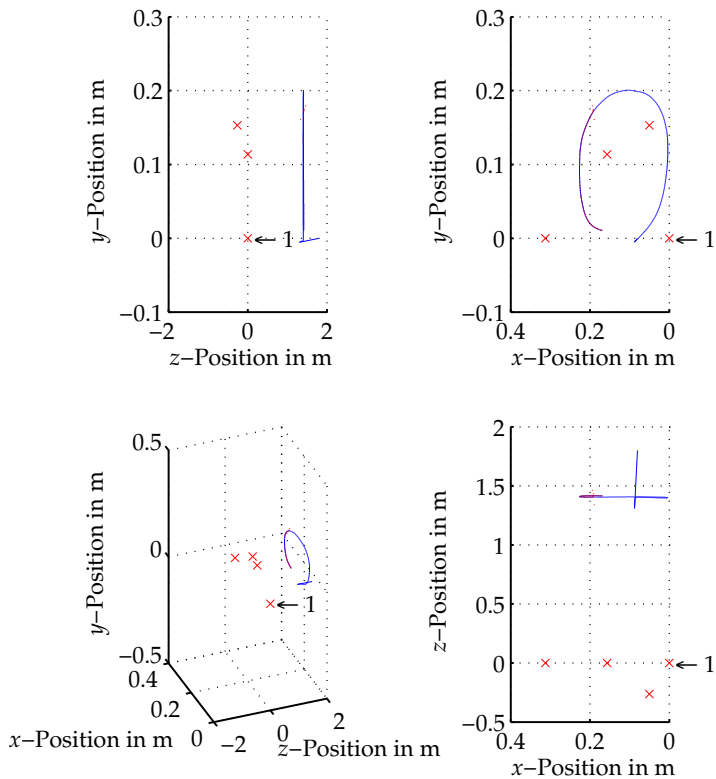


Abbildung A.16.: Dezentrale (rot) und zentrale (blau) Schätzung der ersten Testbewegung im vierten Knoten sowie Position des Lasertrackers 4 (rotes x). Die Positionen der zur Fusion benutzten Tracker 1 bis 3 sind ebenfalls dargestellt (rotes x). Unten links sind die räumliche Anordnung der Tracker und die Trajektorien dargestellt. Die anderen Abbildungen zeigen jeweils Projektionen auf die drei Hauptebenen. Tracker 3 wird nach einer, Tracker 4 nach zwei Sekunden zum Filter hinzugefügt.

B. Bewegung der Reflektoren im Trackerkoordinatensystem

In Abschnitt 4.3.7 wurde beschrieben, dass zwei Bewegungen der Pendel aufgenommen worden sind, bei denen jeweils Pendel 1 beziehungsweise Pendel 3 maximal ausgelenkt und dann losgelassen wurde. Als Messdaten liegen die Winkel der Ablenkspiegel in den einzelnen Lasertrackern vor. Da keine Referenzmessung vorhanden ist, wurden aus den Messdaten die Positionen der Reflektoren durch ein zentrales Filter in Trackerkoordinaten bestimmt. Diese Bewegung der Reflektoren in kartesischen Koordinaten des Trackersystems sind in den Abbildungen B.1, B.2, B.3, B.4, B.5 und B.6 für die erste Bewegung und in B.7, B.8, B.9, B.10, B.11 und B.12 für die zweite Bewegung zu sehen.

B. Bewegung der Reflektoren im Trackerkoordinatensystem

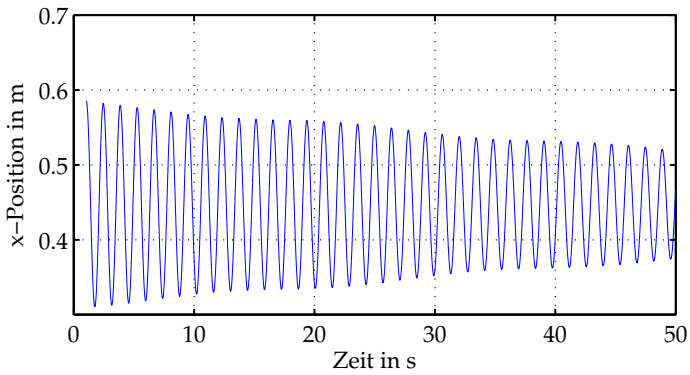


Abbildung B.1.: Position des Reflektors 1 im Trackersystem (x-Koordinate) der ersten Messung.

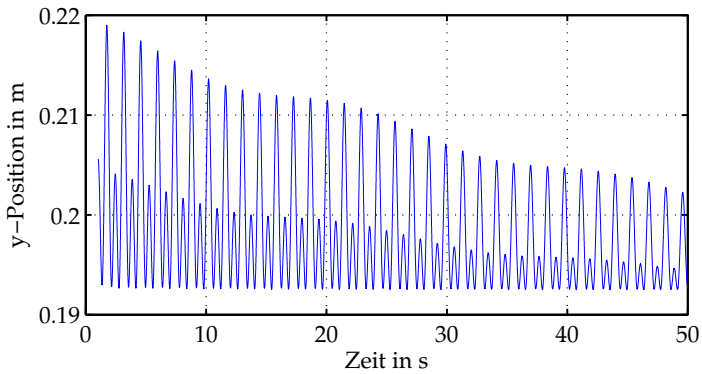


Abbildung B.2.: Position des Reflektors 1 im Trackersystem (y-Koordinate) der ersten Messung.

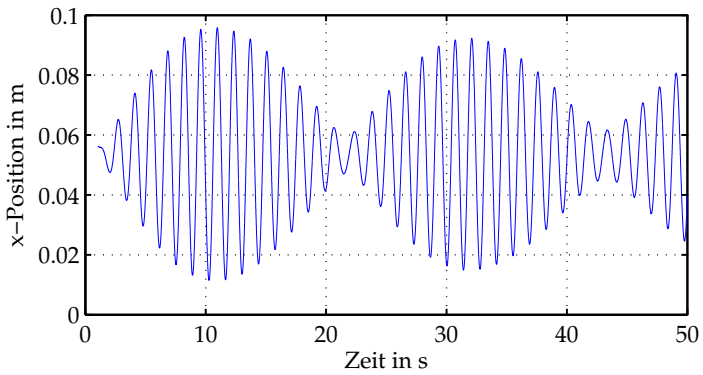


Abbildung B.3.: Position des Reflektors 2 im Trackersystem (x-Koordinate) der ersten Messung.

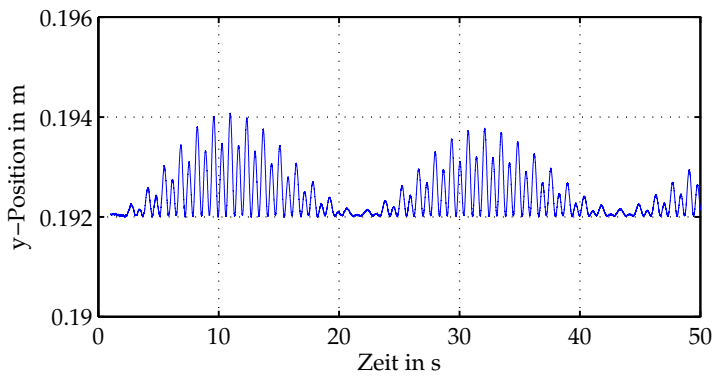


Abbildung B.4.: Position des Reflektors 2 im Trackersystem (y-Koordinate) der ersten Messung.

B. Bewegung der Reflektoren im Trackerkoordinatensystem

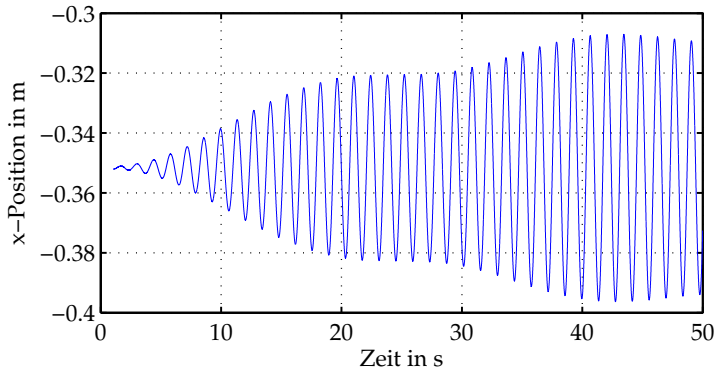


Abbildung B.5.: Position des Reflektors 3 im Trackersystem (x-Koordinate) der ersten Messung.

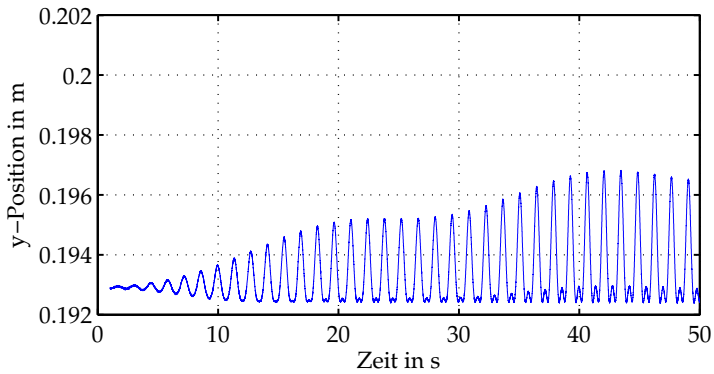


Abbildung B.6.: Position des Reflektors 3 im Trackersystem (y-Koordinate) der ersten Messung.

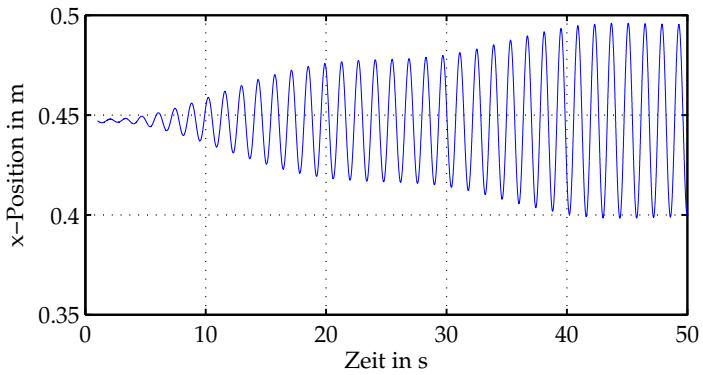


Abbildung B.7.: Position des Reflektors 1 im Trackersystem (x-Koordinate) der zweiten Messung.

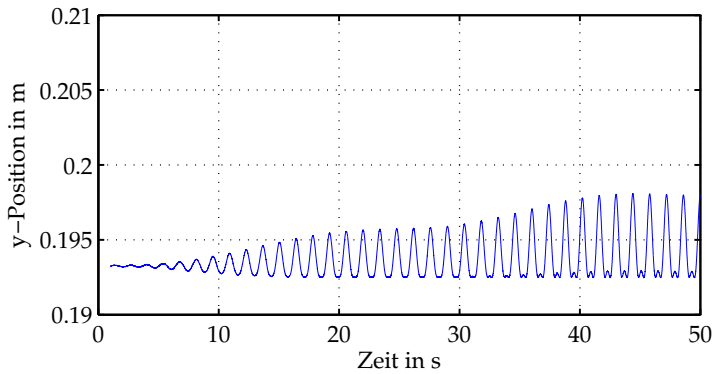


Abbildung B.8.: Position des Reflektors 1 im Trackersystem (y-Koordinate) der zweiten Messung.

B. Bewegung der Reflektoren im Trackerkoordinatensystem

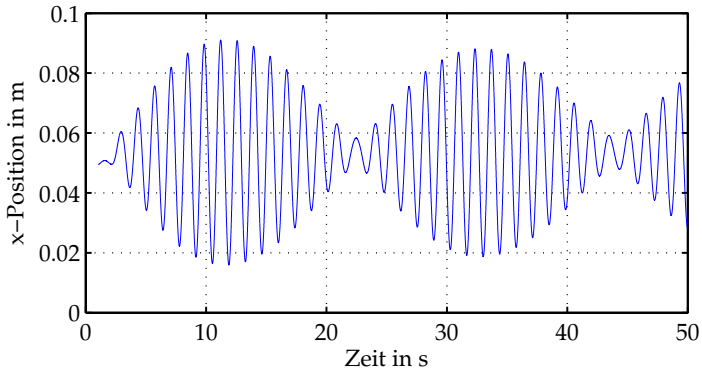


Abbildung B.9.: Position des Reflektors 2 im Trackersystem (x-Koordinate) der zweiten Messung.

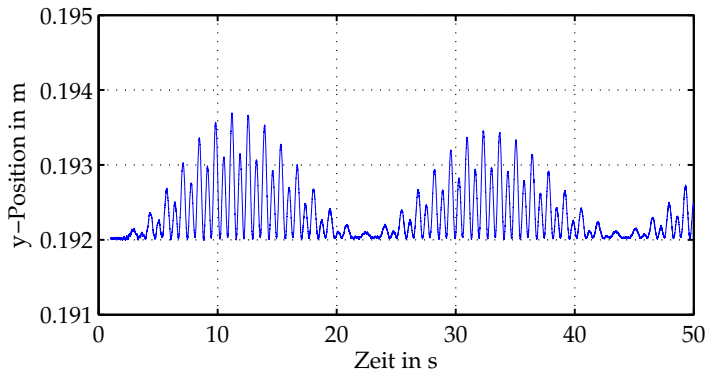


Abbildung B.10.: Position des Reflektors 2 im Trackersystem (y-Koordinate) der zweiten Messung.

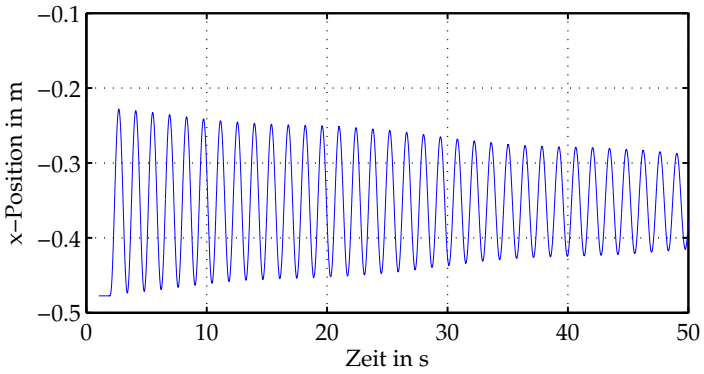


Abbildung B.11.: Position des Reflektors 3 im Trackersystem (x-Koordinate) der zweiten Messung.

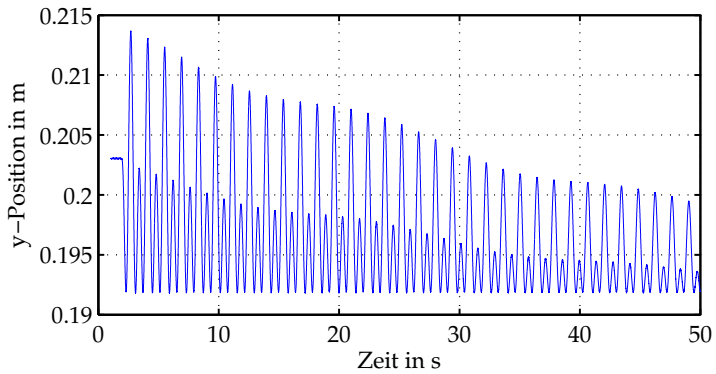


Abbildung B.12.: Position des Reflektors 3 im Trackersystem (y-Koordinate) der zweiten Messung.

Literaturverzeichnis

- [Bamieh u. a. 2002] BAMIEH, Bassam ; PAGANINI, Fernando ; DAHLEH, Munther A.: Distributed Control of Spatially Invariant Systems. In: *IEEE Transactions On Automatic Control* 47 (2002), Juli, Nr. 7, S. 1091–1107
- [Bellantoni und Dodge 1967] BELLANTONI, J. F. ; DODGE, K. W.: A square root formulation of the Kalman-Schmidt filter. In: *AIAA Journal* Bd. 5, 1967, S. 1309–1314
- [Crassidis 2006] CRASSIDIS, John L.: Sigma-Point Kalman Filtering for Integrated GPS and Inertial Navigation. In: *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems* 42 (2006), Nr. 2, S. 750–756
- [D’Andrea und Dullerud 2003] D’ANDREA, Raffaello ; DULLERUD, Geir E.: Distributed Control Design for Spatially Interconnected Systems. In: *IEEE Transactions On Automatic Control* 48 (2003), September, Nr. 9, S. 1478–1495
- [Geffen u. a. 2008] GEFFEN, D. ; FINDEISEN, R. ; SCHLIEMANN, M. ; ALLGÖWER, F. ; GUAY, M.: Observability Based Parameter Identifiability for Biochemical Reaction Networks. In: *Proceedings of the AAC*. Seattle, Washington, USA, Juni 2008, S. 2130–2135
- [Hahn und Edgar 2000] HAHN, Jürgen ; EDGAR, Thomas F.: Reduction of nonlinear models using balancing of empirical gramians and Galerkin projections. In: *Proceedings of the 2000 American Control Conference* Bd. 4. Chicago, Illinois, 2000, S. 2864–2868
- [Hahn und Edgar 2002] HAHN, Jürgen ; EDGAR, Thomas F.: An improved method for nonlinear model reduction using balancing

Literaturverzeichnis

- of empirical gramians. In: *Computers and Chemical Engineering* 26 (2002), Nr. 10, S. 1379–1397
- [Hilgers und Ament 2010] HILGERS, Peter ; AMENT, Christoph: Distributed and Decentralised Estimation of Non-linear Systems. In: *Proceedings of the IEEE International Conference on Control Applications*. Yokohama, Japan, September 2010, S. 328–333
- [Julier u. a. 2000] JULIER, Simon ; UHLMANN, Jeffrey ; DURRANT-WHYTE, Hugh F.: A New Method for the Nonlinear Transformation of Means and Covariances in Filters and Estimators. In: *IEEE Transactions On Automatic Control* 45 (2000), März, Nr. 3, S. 477–482
- [Julier und Uhlmann 1996] JULIER, Simon ; UHLMANN, Jeffrey K.: A General Method for Approximating Nonlinear Transformations of Probability Distributions / Robotics Research Group, Oxford University. Robotics Research Group, Oxford University, Mai 1996 (2001). – Dept of Engineering Science University of Oxford Tech Rep
- [Julier und Uhlmann 2004] JULIER, Simon J. ; UHLMANN, Jefferey K.: Unscented Filtering and Nonlinear Estimation. In: *Proceedings Of The IEEE Bd. 92 IEEE (Veranst.)*, März 2004, S. 401–422
- [Julier und Uhlmann 1995] JULIER, Simon J. ; UHLMANN, Jeffrey K.: A New Extension of the Kalman Filter to Nonlinear Systems. In: *Proceedings of the American Control Conference*. Seattle, Washington, USA, 1995, S. 1628–1632
- [Julier u. a. 1997] JULIER, Simon J. ; UHLMANN, Jeffry K. ; DURRANT-WHYTE, Hugh F.: A New Approach for Filtering Nonlinear Systems. In: *The Proceedings of AeroSense: The 11th International Symposium on Aerospace/ Defense Sensing, Simulation and Controls*. Orlando, FL, USA, 1997, S. 182–193
- [Kalman 1960] KALMAN, R. E.: A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. In: *Transactions of the ASME–Journal of Basic Engineering* 82 (1960), S. 35–45

- [Lall u. a. 1999] LALL, Sanjay ; MARSDEN, Jerrold E. ; GLAVASKI, Sonja: Empirical model reduction of controlled nonlinear systems. In: *Proceedings of the IFAC Congress F (1999)*, S. 473–478
- [Lall u. a. 2002] LALL, Sanjay ; MARSDEN, Jerrold E. ; GLAVASKI, Sonja: A subspace approach to balanced truncation for model reduction of nonlinear systems. In: *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 12 (2002), Nr. 6, S. 519–535
- [Markweg u. a. 2011] MARKWEG, E. ; NGUYEN, T.T. ; WEINBERGER, S. ; AMENT, Ch. ; HOFFMANN, M.: Development of a miniaturized multisensory positioning device for laser dicing technology. In: *Proceedings of the Sixth International WLT Conference on Lasers in Manufacturing* Bd. 12. München, Deutschland, 2011, S. 387–395
- [Matveev und Savkin 2009] MATVEEV, Alexey S. ; SAVKIN, Andrey V. ; LEVINE, William S. (Hrsg.): *Estimation and Control over Communication Networks*. Birkhäuser, 2009
- [van der Merwe und Wan 2003] MERWE, Rudolph van der ; WAN, Eric: Sigma-Point Kalman Filters for Probabilistic Inference in Dynamic State-Space Models. In: *Proceedings of the Workshop on Advances in Machine Learning*. Montreal, Canada, Juni 2003
- [van der Merwe und Wan 2001] MERWE, Rudolph van der ; WAN, Eric A.: The Square-Root Unscented Kalman Filter For State And Parameter-Estimation. In: *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 2001* Bd. 6 IEEE (Veranst.), 2001, S. 3461–3464
- [van der Merwe und Wan 2004] MERWE, Rudolph van der ; WAN, Eric A.: Sigma-Point Kalman Filters for Integrated Navigation. In: *Proceedings of the 60th Annual Meeting of The Institute of Navigation (ION)*. Dayton, OH, Juni 2004
- [van der Merwe u. a. 2004] MERWE, Rudolph van der ; WAN, Eric A. ; JULIER, Simon I. ; BOGDANOV, A. ; HARVEY, G. ; HUNT,

Literaturverzeichnis

- J.: Sigma-Point Kalman Filters for Nonlinear Estimation and Sensor Fusion: Applications to Integrated Navigation. In: *Proceedings of the AIAA Guidance Navigation & Control Conference*. Providence, RI, August 2004
- [Montestruque und Antsaklis 2002a] MONTESTRUQUE, Luis A. ; ANTSAKLIS, Panos J.: Model-Based Networked Control Systems — Necessary And Sufficient Conditions For Stability. In: *Proceedings of the 10th Mediterranean Conference on Control and Automtaion — MED2002*. Lisbon, Portugal, Juli 2002
- [Montestruque und Antsaklis 2002b] MONTESTRUQUE, Luis A. ; ANTSAKLIS, Panos J.: Model-Based Networked Control Systems — Stability. In: *ISIS 2002-001*. Geneva, Switzerland, April 2002
- [Montestruque und Antsaklis 2003] MONTESTRUQUE, Luis A. ; ANTSAKLIS, Panos J.: On the Model-Based Control of Networked Systems. In: *Automatica* 39 (2003), Oktober, Nr. 10, S. 1837–1843
- [Mutambara und Durrant-Whyte 1993a] MUTAMBARA, A. G. O. ; DURRANT-WHYTE, H. F.: A Formally Verified Modular Decentralized Robot Control System. In: *Proceedings of the 1993 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*. Yokohama, Japan, Juli 1993, S. 2023–2030
- [Mutambara und Durrant-Whyte 1993b] MUTAMBARA, A. G. O. ; DURRANT-WHYTE, H. F.: Modular Decentralized Robot Control. In: *Proc. Intelligent Vehicles '93 Symposium*, Juli 14–16, 1993, S. 101–106
- [Mutambara 1998] MUTAMBARA, Arthur G. O.: *Decentralized Estimation and Control for Multisensor Systems*. Boca Raton, Boston, London, New York, Washington D.C. : CRC Press, 1998. – 230 S
- [Mutambara und Al-Haik 1997] MUTAMBARA, Arthur G. O. ; AL-HAIK, Marwan S. Y.: State and Information Space Estimation: A Comparison. In: *Proceedings of the American Control Conference*. Albuquerque, New Mexico, Juni 1997, S. 2374–2375

- [Mutambara und Durrant-Whyte 1994] MUTAMBARA, Arthur G. O. ; DURRANT-WHYTE, Hugh: Distributed Decentralised Robot Control. In: *Proceedings of the American Control Conference*. Baltimore, Maryland, Juni 1994, S. 2266–2267
- [Mutambara und Durrant-Whyte 2000] MUTAMBARA, Arthur G. O. ; DURRANT-WHYTE, Hugh F.: Estimation and Control for a Modular Wheeled Mobile Robots. In: *IEEE Transactions On Control Systems Technology* 8 (2000), Januar, Nr. 1, S. 35–46
- [Mutambara 1999] MUTAMBARA, Arthur G.: Information Based Estimation for Both Linear and Nonlinear Systems. In: *Proceedings of the American Control Conference*. San Diego, California, Juni 1999, S. 1329–1333
- [Naghshtabrizi und Hespanha 2005] NAGHSHTABRIZI, Payam ; HESPANHA, João: Designing an observer-based controller for a network control system. In: *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference 2005*, 2005
- [Nguyen u. a. 2011] NGUYEN, T.T. ; AMTHOR, A. ; AMENT, C.: Communication of the Multi Laser tracker System Used as Position Feedback Sensor. In: *Proceedings of SPIE Eco-Photonics 2011: Sustainable Design, Manufacturing, and Engineering Workforce Education for a Green Future*. Strasbourg, France, April 2011
- [Nguyen u. a. 2010] NGUYEN, T.T. ; NGUYEN, Q.T. ; AMTHOR, A. ; AMENT, Ch.: Control of a Multi Laser Tracker System Used as a Position Feedback Sensor. In: *Proceedings of The 30th IASTED Conference on Modelling, Identification, and Control* Bd. 1. Phuket, Thailand, November 2010, S. 132–137
- [Rao und Durrant-Whyte 1991] RAO, B. S. ; DURRANT-WHYTE, H. F.: Fully decentralised algorithm for multisensor Kalman filtering. In: *IEE Proceedings D Control Theory and Applications* Bd. 138 IEE (Veranst.), September 1991, S. 413–420

Literaturverzeichnis

- [Rao u. a. 1993] RAO, B. S. Y. ; DURRANT-WHYTE, H. F. ; SHEEN, J. A.: A Fully Decentralized Multi-Sensor System For Tracking and Surveillance. In: *The International Journal of Robotics Research* 12 (1993), Februar, Nr. 1, S. 20–44
- [Simon 2006] SIMON, Dan: *Optimal State Estimation*. 1. Hoboken, New Jersey : John Wiley & Sons, Inc., 2006. – 526 S
- [Singh und Hahn 2005] SINGH, Abhay K. ; HAHN, Jürgen: On the Use of Empirical Gramians for Controllability and Observability Analysis. In: *Proceedings of the 2005 American Control Conference*. Portland, OR, USA, Juni 2005, S. 140–146
- [Wachten 2009] WACHTEN, Christian: *Entwicklung eines Lasertracker-systems mit Galvanometerscanner zur 3D-Positionsbestimmung*. Freiburg im Breisgau, Deutschland, IMTEK, Universität Freiburg, Dissertation, 2009
- [Xu und Hespanha 2005] XU, Yonggang ; HESPANHA, João: Estimation under uncontrolled and controlled communications in Networked Control Systems. In: *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference 2005*. Seville, Spain, Dezember 2005, S. 842 – 847
- [Zeit 1984] ZEITZ, M.: Observability canonical (phase-variable) form for nonlinear time-variable systems. In: *International Journal of Systems Science* 15 (1984), Nr. 9, S. 949–958

