

**Christian Busch**

**Ein Beitrag zum modellbasierten  
Regelungsentwurf elektropneumatischer  
Applikationen**



**Ein Beitrag zum modellbasierten  
Regelungsentwurf  
elektropneumatischer  
Applikationen**

Christian Busch



Universitätsverlag Ilmenau  
2014

## Impressum

### **Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek**

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Angaben sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Diese Arbeit hat der Fakultät für Informatik und Automatisierung der Technischen Universität Ilmenau als Dissertation vorgelegen.

Tag der Einreichung: 28. Oktober 2013

1. Gutachter: Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Christoph Ament  
(Technische Universität Ilmenau)

2. Gutachter: Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Oliver Sawodny  
(Universität Stuttgart)

3. Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Steven Lambeck  
(Hochschule Fulda)

Tag der Verteidigung: 27. Februar 2014

Technische Universität Ilmenau/Universitätsbibliothek

### **Universitätsverlag Ilmenau**

Postfach 10 05 65

98684 Ilmenau

[www.tu-ilmenau.de/universitaetsverlag](http://www.tu-ilmenau.de/universitaetsverlag)

### **Herstellung und Auslieferung**

Verlagshaus Monsenstein und Vannerdat OHG

Am Hawerkamp 31

48155 Münster

[www.mv-verlag.de](http://www.mv-verlag.de)

ISBN 978-3-86360-098-3 (Druckausgabe)

URN [urn:nbn:de:gbv:ilm1-2014000090](http://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:gbv:ilm1-2014000090)

---

Titelfoto: [photocase.com](http://photocase.com)

# Inhaltsverzeichnis

<b>Formel- und Abkürzungsverzeichnis</b>	<b>XI</b>
<b>1 Einleitung und Zielsetzung</b>	<b>1</b>
<b>2 Ausgewählte Aspekte der Regelung technischer Systeme</b>	<b>5</b>
2.1 Aufbau digitaler Reglerplattformen . . . . .	5
2.2 Kennzahlen und Prozesse . . . . .	7
2.3 Grundkenntnisse zeitdiskreter Systeme . . . . .	11
2.3.1 Signalerfassung und zeitliche Diskretisierung	11
2.3.2 Quantisierungseffekte in digitalen Systemen	15
2.3.3 Signalrekonstruktion und Stellgröße . . .	17
2.4 Systemmodelle im Zustandsraum . . . . .	21
2.4.1 Kontinuierliche Zustandsraummodelle . .	21
2.4.2 Zeitdiskrete Zustandsraummodelle . . . .	23
2.5 Regelungsstrategien . . . . .	25
2.5.1 Der Stabilitätsbegriff . . . . .	25
2.5.2 Das optimale Regelgesetz . . . . .	28
2.5.3 Verbreitete Regelungsmethoden innerhalb der Elektropneumatik . . . . .	30
2.5.4 Exakte Linearisierung eingangsafliner Sys- teme . . . . .	34

<b>3</b>	<b>Modellierung pneumatischer Druck- und Durchflussstrecken</b>	<b>41</b>
3.1	Grundbegriffe und Definitionen . . . . .	41
3.2	Massenerhaltung und Kontinuität . . . . .	44
3.3	Massenstrom und Luftmenge . . . . .	47
3.4	Strömungsvorgänge kompressibler Medien . . . . .	47
3.4.1	Strömungsgeschwindigkeit $c$ . . . . .	49
3.4.2	Strahlkontraktion und Geschwindigkeitsreduktion . . . . .	51
3.4.3	Strömungen in pneumatischen Rohren . . . . .	53
3.5	Generalisierung und Analogie zur Elektrotechnik	56
3.5.1	Generalisierte Koordinaten . . . . .	56
3.5.2	Analogiebetrachtungen . . . . .	57
3.6	Stellglieder für Pneumatikventile . . . . .	63
3.6.1	Aufbau elektromechanischer Ventilstellglieder . . . . .	63
3.6.2	Modellierung des elektromechanischen Antriebs . . . . .	65
3.7	Modellstruktur pneumatischer Regelstrecken . . . . .	67
<b>4</b>	<b>Zustandsschätzung bei Systemen mit unsicheren Parametern</b>	<b>73</b>
4.1	Beobachtbarkeit nichtlinearer Systeme . . . . .	76
4.2	Nichtlinearer Normalform-Beobachter . . . . .	77
4.3	High-Gain-Beobachter für nichtlineare Systeme . . . . .	80
4.4	Simultane Zustands- und Parameterschätzung . . . . .	83
4.4.1	Allgemeine Herangehensweise . . . . .	83
4.4.2	Linearisierende Beobachterprinzipien . . . . .	84
4.5	Adaptive Zustandsschätzung . . . . .	94
4.5.1	Ljapunov basierende Methodik . . . . .	95
4.5.2	Beobachter mit simultaner Parameteroptimierung . . . . .	100
4.6	Zeitdiskrete Berechnung von Zustandsgrößen . . . . .	113

4.6.1	Numerisches Differenzieren . . . . .	113
4.6.2	Zustandsvariablenfilter . . . . .	116
<b>5</b>	<b>Regelungskonzept pneumatischer Systemmodelle</b>	<b>119</b>
5.1	Maßnahmen zur Modellvereinfachung . . . . .	120
5.1.1	Die geeignete Strategie . . . . .	120
5.1.2	Regelung mit Strukturvarianz . . . . .	126
5.1.3	Entwurf des unterlagerten Regelkreises . . . . .	132
5.1.4	Messergebnisse . . . . .	134
5.2	Reduzierte Gesamtmodellstruktur . . . . .	135
5.3	Entwicklung der Regelungsstruktur . . . . .	137
5.3.1	Verallgemeinerung der Problemstellung . . . . .	139
5.3.2	Kompensationsmethodik . . . . .	140
5.4	Reglerauslegung . . . . .	144
5.4.1	Auslegung nach Standardverfahren . . . . .	145
5.4.2	Darstellungsformen unsicherer Streckenmodelle . . . . .	148
5.4.3	Robustheitsanalyse . . . . .	150
5.4.4	Auslegung unter Parameterunsicherheiten . . . . .	156
5.5	Anwendungsbeispiele und Regelungsergebnisse . . . . .	158
5.5.1	Druckregelung für konstante Volumina . . . . .	159
5.5.2	Luftmengenregelung . . . . .	162
5.5.3	Regelung pneumatischer Antriebe . . . . .	167
<b>6</b>	<b>Konzepterweiterung für Strecken mit Transportvorgängen</b>	<b>171</b>
6.1	Lineare Modellierungsformen von Totzeiteffekten . . . . .	173
6.1.1	Padé-Approximation . . . . .	173
6.1.2	Approximation der Exponentialfunktion . . . . .	174
6.1.3	Zeitdiskrete Modellierungsform . . . . .	175
6.1.4	Methodenvergleich . . . . .	176
6.2	Erweiterte Gesamtmodellstruktur . . . . .	177
6.3	Beobachtergestützte Totzeitstreckenregelung . . . . .	180

6.4	Alternative Totzeitstreckenregelung . . . . .	181
6.5	Regelungsergebnisse . . . . .	183
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>185</b>

## Anhang

<b>A</b>	<b>Digitale Signalverarbeitung</b>	<b>191</b>
A.1	Zeitdiskrete Zustandsraumdarstellung . . . . .	191
A.2	Zeitdiskretes Kalman-Filter . . . . .	192
A.3	Rekursiv gleitende Signalauswertung . . . . .	195
A.4	Schrittweitenoptimierung für das Gradientensuchverfahren . . . . .	197
<b>B</b>	<b>Pneumatische Modellgleichungen</b>	<b>199</b>
B.1	Pneumatisches Ersatzmodell . . . . .	199
B.1.1	Kompakte Modellgleichung der unterlagerten Druckregelung . . . . .	200
B.1.2	Vollständige Modellgleichung der unterlagerten Druckregelung . . . . .	201
B.2	Koordinatentransformation Druckluftmotor . . .	202
B.3	Koordinatentransformation pneumatischer Linearantriebe . . . . .	203
<b>C</b>		<b>207</b>
C.1	Ungleichung von geometrischen und arithmetischen Mittel . . . . .	207
C.2	Matrix-Riccati-Differentialgleichung . . . . .	208
C.2.1	Zeitkontinuierliche Matrix-Riccati-Differentialgleichung . . . . .	208
C.2.2	Zeitdiskrete Matrix-Riccati-Differenzgleichung . . . . .	208



C.3 Ablaufplan zur Reglerauslegung unter Parameterunsicherheiten . . . . .	209
--	-----

<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>228</b>
-----------------------------	------------



# Formel- und Abkürzungsverzeichnis

## Abkürzungen

AAF	.....	<b>A</b> nti- <b>A</b> liasing- <b>F</b> ilter
ADC	.....	engl. ‘ <b>A</b> nalog to <b>D</b> igital <b>C</b> onverter’; Analog zu Digital Wandler
DAC	.....	engl. ‘ <b>D</b> igital to <b>A</b> nalog <b>C</b> onverter’; Digital zu Analog Wandler
E/A	.....	<b>E</b> in-/ <b>A</b> usgang
EKF	.....	Erweitertes Kalman-Filter, extended Kalman-Filter
PWM	....	Pulsweitenmodulation
SISO	.....	engl.: Single Input Single Output
SVR	.....	<b>S</b> trukturvariable <b>R</b> egelung
ZVF	.....	<b>Z</b> ustandsvariablenfilter

## Formelzeichen

$\alpha(\underline{x})$	.....	Nichtlineares Funktional in Originalkoordinaten innerhalb der transformierten Modellgleichung
$\alpha_Q$	.....	Kontraktionszahl

$\beta(\underline{x})$ . . . . .	Nichtlineares Funktional in Originalkoordinaten innerhalb der transformierten Modellgleichung
$\beta(u_{p_1}, \dots)$ .	Nichtlineare Funktion zur Beschreibung des Zusammenhangs von Luftmenge und Stößelposition
$\Delta$ . . . . .	Unbekannte Unsicherheitsmatrix
$\underline{\Delta}$ . . . . .	Menge aller möglichen Unsicherheiten
$\delta$ . . . . .	Differenzenordnung, relativer Grad
$\delta(t)$ . . . . .	Dirac-Funktion
$\delta_{a_i, b}$ . . . . .	Normierte Parameterunsicherheiten der Streckenkoeffizienten $a_i$ , $i = 1..n-1$ und $b$
$\gamma_L$ . . . . .	Lipschitz-Konstante
$\Gamma, \Gamma_i$ . . . . .	Iterationsschrittweite im Gradientenverfahren
$\hat{\underline{\xi}}$ . . . . .	Geschätzter transformierter Zustandsvektor
$\kappa$ . . . . .	Isentropenexponent
$\lambda$ . . . . .	Eigenwert, Polstelle
$\lambda_R$ . . . . .	Rohrreibungszahl
$\underline{\lambda}(t)$ . . . . .	Kozustandsvektor
$\underline{\Phi}(T_s)$ . . . . .	Zeitdiskrete Systemmatrix
$\underline{\Theta}(T_s)$ . . . . .	Zeitdiskrete Eingangsmatrix
$\mu_Q$ . . . . .	Ausflusszahl
$\nu$ . . . . .	Kinematische Viskosität
$\nu_m$ . . . . .	Überschwingweite
$\omega_0$ . . . . .	Kennkreisfrequenz
$\sigma(\underline{\xi})$ . . . . .	Zustandstrajektorie im Phasenraum
$\varphi_Q$ . . . . .	Geschwindigkeitszahl
$\varrho$ . . . . .	Dichte des Mediums
$\varrho_{el}(x, y, z)$	Elektrische Raumladungsdichte
$\vartheta$ . . . . .	Temperatur, thermodynamische Zustandsgröße
$v$ . . . . .	Störung, Stellgliedstörung
$\underline{\eta}(t)$ . . . . .	Prozessrauschen
$\hat{\underline{x}}(t)$ . . . . .	Geschätzter Zustandsvektor
$\underline{\theta}, \hat{\underline{\theta}}$ . . . . .	Parametervektor, Vektor der geschätzten Parameter

$\underline{\xi}$ .....	Transformierter Zustandsvektor
$\underline{\zeta}(t)$ .....	Messrauschen
$\underline{a}(x)$ .....	Systemvektor eines nichtlinearen Zustandsraummodells
$\underline{A}$ .....	Systemmatrix eines linearen bzw. linearisierten Zustandsraummodells
$\underline{b}(x)$ .....	Eingangsvektor eines nichtlinearen Zustandsraummodells
$\underline{B}$ .....	Eingangsvektor bzw. Eingangsmatrix eines linearen bzw. linearisierten Zustandsraummodells
$\mathbf{B}$ .....	Definierter Bereich, Raum
$\underline{c}(x)$ .....	Ausgangsvektor eines nichtlinearen Zustandsraummodells
$\underline{C}$ .....	Ausgangsvektor bzw. Ausgangsmatrix eines Zustandsraummodells
$\underline{e}$ .....	Schätzfehler des Zustandsvektors
$\underline{H}$ .....	Vektor der Beobacherverstärkung
$\underline{K}, \underline{K}_d$ ....	Vektor der Zustandsreglerverstärkung, zeitdiskret
$\underline{r}$ .....	Koeffizienten einer Zustandstrajektorie im Phasenraum
$\underline{T}(x)$ .....	Variablentransformationsvektor, Transformationsvorschrift
$\underline{x}(t)$ .....	Zustandsvektor in Originalkoordinaten
$\underline{x}_A(t)$ .....	Zustandsvektor der jeweiligen Applikation
$\underline{x}_p(t)$ .....	Vektor der pneumatischen Zustandsgrößen
$A_R$ .....	Rohrquerschnitt, Querschnittsfläche
$A_V(x_S)$ ...	Ventilöffnungsquerschnitt (effektiv)
$c$ .....	Strömungsgeschwindigkeit
$C, C_p$ .....	Kapazität, thermodynamische Kapazität
$c_S$ .....	Schallgeschwindigkeit
$D$ .....	Dämpfungsgrad
$e(t)$ .....	Regelabweichung

$E_{kin}$ .....	Kinetische Energie
$E_{pot}$ .....	Potentielle Energie
$F_v$ .....	Auf das System einwirkende Störeinflüsse/Störkraft
$F_m$ .....	Magnetkraft innerhalb elektromechanischer Stellglieder
$f_s$ .....	Abtastfrequenz
$f(u)$ .....	Stellgrößenabhängiges Störmodell
$g$ .....	Gravitationskonstante
$G_0$ .....	Nominales Streckenmodell, Nominalmodell
$G_p$ .....	Pneumatischer Leitwert, Blendenleitwert
$G_R$ .....	Reglerübertragungsfunktion, dynamisches Reglermodell
$H$ .....	Enthalpie, thermodynamische Zustandsgröße
$h$ .....	Spezifische Enthalpie
$h_i$ .....	Element der Beobacherverstärkung
$i(t)$ .....	Verallgemeinerte Stromvariable
$i_Q$ .....	Verallgemeinerte Stromvariable ‘Luftmassenstrom’
$\underline{I}$ .....	Einheitsmatrix
$J$ .....	Gütefunktional
$k$ .....	Tuning-Parameter für Regler mit Strukturvarianz
$K_D$ .....	Differentialverstärkung PID-Regler
$K_I$ .....	Integralverstärkung PID-Regler
$k_i$ .....	Element der Zustandsreglerverstärkung
$K_P$ .....	Proportionalverstärkung PID-Regler
$l$ .....	Länge, Rohrlänge
$L, L_p$ .....	Induktivität, thermodynamische Induktivität
$L_v f(\underline{x})$ ...	Lie-Ableitung einer Funktion $f(\underline{x})$ bezüglich eines Vektors $\underline{v}$
$\underline{M}$ .....	Messwertmatrix
$M, M_L$ ...	Mechanisches Moment, Lastmoment
$m, \dot{m}$ ....	Masse; Massenstrom, Luftmenge
$\underline{m}_k$ .....	Messwertvektor im Abtastschritt $kT_s$ (Zeilenvektor)

$\underline{m}_i$ .....	Spaltenvektor der Messwertmatrix $\underline{M}$
$Ma$ .....	Mach-Zahl
$n$ .....	Modellordnung, Ordnung einer Differentialgleichung
$p(\lambda)$ .....	Charakteristisches Polynom
$p$ .....	Druck, thermodynamische Zustandsgröße
$\underline{P}$ .....	Symmetrisch positiv definite Matrix
$\underline{P}(t)$ .....	Kovarianzmatrix des Zustandsvektorschätzfehlers
$q_k, \tilde{q}$ .....	Tuning-Parameter für Regler mit Strukturvarianz
$Q_{el}$ .....	Elektrische Ladung
$\underline{Q}$ .....	Symmetrisch positiv definite Matrix
$\underline{R}$ .....	Symmetrisch positiv definite Matrix
$R$ .....	Stellgrößenwichtung der Zustandsrückführung
$r_0, r_1, r_2$ ..	Diskretisierte PID-Regelkoeffizienten
$R_m$ .....	Spezielle Gaskonstante
$R_p$ .....	Pneumatischer Widerstand, Rohrwiderstand
$Re$ .....	Reynoldszahl
$S$ .....	Entropie, thermodynamische Zustandsgröße <b>oder</b> Vorfilter eines Zustandsreglers
$t$ .....	Zeit
$T_1, T_2$ ....	Zeitkonstante eines PT1-Filters
$T_i(\underline{x})$ .....	Variablentransformationsvorschrift für die Koordinate $\xi_i$
$T_s$ .....	Abtastzeit, mit der ein analoges Signal zeitlich quantisiert erfasst wird
$T_t$ .....	Totzeit, Zeitverschiebung aufgrund von Transportvorgängen
$T_V$ .....	Tastverhältnis
$U$ .....	Innere Energie, thermodynamische Zustandsgröße
$u(t)$ .....	Stellgröße <b>oder</b> Verallgemeinerte Spannungsvariable
$u^*$ .....	Nichtlineares Anregungsfunktional eines linearen Systems

$u_p$ .....	Verallgemeinerte Spannungsvariable ‘Druck’
$u_R$ .....	Stellgröße der Zustandsvektorrückführung, Reglerstellgröße
$V$ .....	Volumen, thermodynamische Zustandsgröße
$v$ .....	Spezifisches Volumen $v = \frac{V}{m} = \frac{1}{\rho}$
$V(\underline{x}), V(\underline{\xi})$	Ljapunov-Funktion
$W$ .....	Arbeit (Energie)
$W_p$ .....	Druckenergie
$W_q$ .....	Wärme, Wärmemenge
$y$ .....	Systemausgang, messbare Systemausgangsgröße, Regelgröße
$Z_p$ .....	Pneumatischer Lastwiderstand aus Sicht eines Druckregelventils



# 1 Einleitung und Zielsetzung

In den vergangenen Jahrzehnten erfuhr die Regelungstechnik durch die Entwicklung neuer und effektiverer Methoden eine hohe Zunahme des meist mathematisch geprägten Wissensstandes. Viele wissenschaftliche Beiträge dieser Ingenieursdisziplin beschäftigen sich daher mit der Anwendung und Umsetzung solcher modernen Methoden in Industrie und Technik. Mit dem Siegeszug der Computertechnik im letzten Jahrhundert hielten auch die rechnergestützten Technologien Einzug in den Bereich der Regelungstechnik. Die modernen und meist zeitkontinuierlichen Regelungsmethoden fanden damit auch den Weg auf digitale Rechnerplattformen, die heutzutage fast ausschließlich in der Industrie verwendet werden.

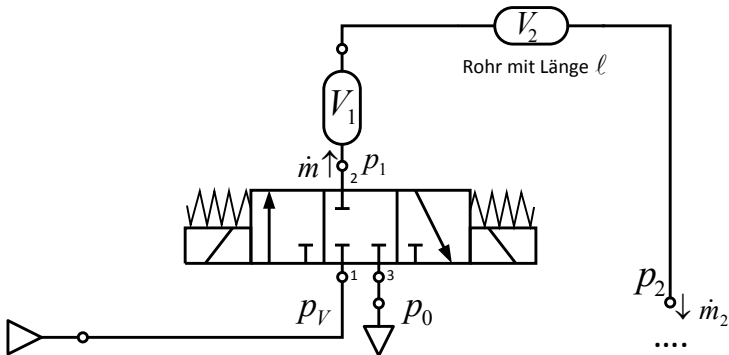
Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Regelung zeitkontinuierlicher Strecken im industriellen Umfeld. Eine robuste Auslegung und einfache Parametrierung der implementierten Regelstrukturen sind definiertes Ziel bei der Entwicklung industrieller Regelungstechnik. Dementsprechend wird dieses Ziel in den folgenden Untersuchungen auch fokussiert werden. Weil die Austauschbarkeit einzelner Komponenten (wie zum Beispiel Reglerbaugruppen oder Aktoren), eine schnelle, einfache Umrüstung und Inbetriebnahme des Gesamtsystems sowie dessen Systemkomponenten einen hohen Stellenwert in industriellen Produktions- und Veredlungsanlagen besitzen, muss auch garantiert sein, dass das

Subsystem mit den parametrisierten Datensätzen annähernd optimale bzw. akzeptable Ergebnisse erzielen kann. Diese Ergebnisse sollten auch bei auftretenden Streckenänderungen sicher erreichbar sein, da eine manuelle Umparametrierung der Geräte viel Zeit in Anspruch nehmen kann und daher sehr oft unerwünscht ist. Je nach verwendeter Abtastzeit und vorhandener Streckendynamik werden diese Algorithmen entsprechend für den quasi-kontinuierlichen oder rein zeitdiskreten Fall entworfen. Ein weiterer Kernpunkt dieser Arbeit ist es daher, die Einsatzfähigkeit digitaler Regelungstechnik für pneumatische Anwendungsfälle zu untersuchen und, basierend auf existierenden mechanischen Konstruktionen, geeignete Methoden für die Handhabung dieser Technologie zu entwickeln. Nicht messbare Zustandsgrößen, die für eine stabile Regelung notwendig sind, sollen wiederum mit Hilfe geeigneter Methoden geschätzt bzw. rekonstruiert werden. Eine präzise Zustandsschätzung auch unter vorhandenen Parameterunsicherheiten sowie existierenden Modellfehlern macht daher einen wichtigen Bestandteil der Untersuchungen aus. Aber auch zur Diagnose und sicheren Fehlererkennung bilden erwartungstreue Schätzwerte eine durchaus wichtige Basis in industriellen Reglerbaugruppen. Nur so kann der zuverlässige und stabile Einsatz jedes einzelnen Systems in der Gesamtanlage sichergestellt werden.

Die Grundlage der in dieser Arbeit geführten Untersuchungen bilden direkt gesteuerte Druckregelventile mit integrierter Elektronik und Sensorik. Aufgrund der für die Pneumatik typischen Druckbereiche und der damit wirkenden Kräfte, herrschen an den bewegten Teilen innerhalb der Ventile meist hohe Reibkräfte. Diese Reibkräfte wirken sich als nichtlineare Störungen auf das Gesamtsystem und damit auch immens auf die Regelgüte der Systemausgangsgröße aus. Die Forderung nach einer hohen Unterdrückung dieser Störungen und der damit verbundenen Prä-

zision ist daher selbsterklärend.

Pneumatik findet in vielen Branchen der industriellen Produktion und Veredelung ihre Anwendung. In der Lebensmittelindustrie, Flaschen- und Gläserproduktion wie auch in der Automobilproduktion und Handhabungstechnik werden pneumatische Technologien eingesetzt. Weil Luft das Arbeitsmedium der Pneumatik ist, besitzen die zu regelnden Strecken in den meisten Fällen nicht zu vernachlässigende Nichtlinearitäten, welche beispielsweise der hohen Kompressibilität des Arbeitsmediums geschuldet sind. Aber auch die durch den Stofftransport verursachten Laufzeiteffekte haben Auswirkung auf das Regelverhalten räumlich weit ausgedehnter Anlagen. Die räumliche Ausdehnung besitzt erheblichen Einfluss auf das sich ergebende dynamische Verhalten des geschlossenen Regelkreises und sollte dementsprechend auf ein Minimum beschränkt sein. Die Physik komprimierter Luft, welche die Grundlage des entwickelten Regelungskonzeptes darstellt, ist ein wichtiger Bestandteil dieser Arbeit und wird innerhalb eines separaten Kapitels näher betrachtet werden.



**Abbildung 1.1.** Allgemeine pneumatische Regelstrecke mit Druckregelventil

## 1 Einleitung und Zielsetzung

---

Den prinzipiellen Aufbau der vorhandenen Regelstrecken verdeutlicht Abbildung 1.1. Darin werden eine direkt gesteuerte elektromechanische Ventileinheit, eine funktionierende Druckluftversorgung am Anschluss 1 des Ventils sowie eine vollständige pneumatische Verrohrung bis hin zur eigentlichen Applikation vorausgesetzt. Die elektromechanische Ventileinheit ermöglicht das Steuern eines Luftmassenstroms  $\dot{m}$ , der sich aufgrund eines Druckgefälles zwischen dem anliegenden Versorgungsdruck  $p_V$  und den folgenden Teilen der pneumatischen Anlage mit den Arbeitsdrücken  $p_1$  und  $p_2$  ergibt. Grundlegende Elemente der für einen stabilen geschlossenen Regelkreis benötigten digitalen Signalverarbeitung, geeignete Algorithmen zur Signalaufbereitung und Regelung sowie eine komfortable Methodik zur mathematischen Modellierung der pneumatischen Strecke und der damit verknüpften physikalischen Effekte sind elementare Bausteine der in dieser Arbeit präsentierten Untersuchungen sowie deren Resultate.

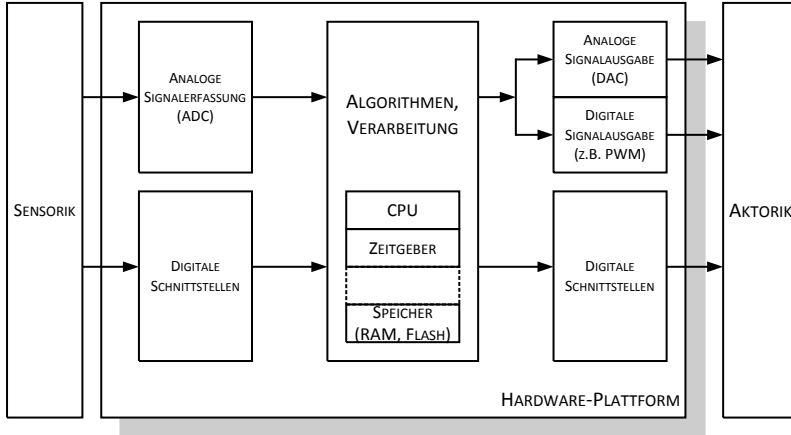
## 2 Ausgewählte Aspekte der Regelung technischer Systeme

### 2.1 Aufbau digitaler Reglerplattformen

Für die Realisierung digitaler Reglerplattformen kommen Mikrorechner unterschiedlichster Leistungsfähigkeit und Baugröße zum Einsatz. Die „kleinsten“ in der Industrie verwendeten Mikrorechner basieren auf einer 8-Bit-Architektur ohne rechnerisch unterstützender Hardware, wie es beispielsweise integrierte Multiplizierer- oder Dividiererschaltungen sein können. Technisch weiter entwickelte Controller bauen meistens auf einer 32-Bit-Architektur auf und beinhalten oft viele interne Hardware-schaltungen sowie rechnerisch unterstützende Komponenten. Neben den hoch integrierten und damit baulich kleinen Hardwarelösungen auf Basis von Mikrocontrollern, kommen aber auch leistungsfähige PC-Plattformen wie man sie vom Arbeitsplatz her kennt, für sehr anspruchsvolle Steuer- und Regelungsabläufe zum Einsatz.

Heutzutage werden industrielle Hardwareplattformen oft auf der Grundlage von Mikrorechnern mit der modernen 32-Bit-Architektur sowie zusätzlicher rechnerisch unterstützender Hardware-schaltungen entwickelt. Zurückblickend auf die technischen Möglichkeiten vor noch wenigen Jahren, hat sich die Leistungsfähig-

## 2 Ausgewählte Aspekte der Regelung technischer Systeme



**Abbildung 2.1.** Prinzipieller Hardwareaufbau digitaler Reglerplattformen

keit solcher Hardwarelösungen immens gesteigert. Trotz allem soll die Umsetzung von Regelaufgaben und digitaler Signalverarbeitung ressourcenschonend erfolgen, um auch andere Aufgaben und Abläufe abarbeiten zu können.

Das kontrollierte Beeinflussen eines Prozesses beginnt mit der Erfassung vorhandener Prozessgrößen. Oftmals handelt es sich dabei um direkt messbare Größen, so dass die Signalerfassung mit einer dafür notwendigen Sensorik den Ausgangspunkt der Betrachtungen darstellt. Elektrische sowie elektromechanische Sensoren wandeln nach physikalischen Prinzipien die Messgrößen  $x_1, \dots, x_n$  in elektrische Zustandsgrößen wie Strom oder Spannung um. Diese Messwerte werden daraufhin über eine analoge Signalverarbeitung auf die im industriellen Einsatzgebieten standardisierten Wertebereiche 0..20mA, 4..20mA oder 0..10V skaliert und über eine analoge Schnittstelle den nachfolgenden Systemkomponenten zur Verfügung gestellt.

Die in Abbildung 2.1 gezeigte generische Elektronik verdeutlicht den prinzipiellen Aufbau typischer Hardwareplattformen für digitale Regelkreise. Mit Hilfe einer analogen Signalerfassung werden die ebenfalls analogen Messsignale in eine Zeit- und wertdiskrete Messwertfolge gewandelt. Handelt es sich um Sensoren mit digitaler Schnittstelle, so beinhaltet der Sensor selbst diese Messwertumformung und liefert die diskrete Messwertfolge über die sensorspezifische digitale Schnittstelle an die Signalverarbeitungseinheit.

Die implementierten Regelalgorithmen, die benötigten Signalmodifikationen und gegebenenfalls weitere Steuerungsabläufe laufen typischerweise zyklisch auf der Plattform ab. Dieser Verarbeitungszyklus findet vorzugsweise zu äquidistanten Zeitpunkten statt, welche durch einen Zeitgeber synchronisiert werden. In den meisten digitalen Regelkreisen entspricht diese Zykluszeit auch gleich der Abtastzeit  $T_s$ , mit der die Messgrößen erfasst werden. Die Stellgröße(n)  $u$  als Resultat eines Verarbeitungszyklus, wird darauf folgend über analoge oder digitale Schnittstellen der eigentlichen Aktorik zugeführt. Ein Aktor, welcher unter anderem ein Leistungsstellglied sein kann, beeinflusst den Prozess damit in programmierter Form.

## 2.2 Kennzahlen und Prozesse

Die Beurteilung eines Prozesses erfolgt anhand definierter Kennzahlen. Auch in dieser Arbeit wird versucht, anhand solcher Kennzahlen eine Aussage über die Güte und somit der Einsatzfähigkeit verschiedener Algorithmen im Hinblick des industriellen Einsatzbereichs zu treffen. In den folgenden Abschnitten wird daher ein kurzer Überblick über die gebräuchlichsten Kennzahlen gegeben. Handelt es sich um einen stationären Prozess<sup>1</sup>, werden nach

---

<sup>1</sup>In stationären Prozessen sind alle Kenngrößen zeitunabhängig [14]

[99, 160] und [94] fast ausschließlich die beiden statistischen Momente **Erwartungswert** und **Kovarianz** (bzw. **Varianz**) zur Charakterisierung eines solchen Prozesses herangezogen. Diese statistischen Momente sind wie folgt definiert:

**Definition 1** (Erwartungswert [160, 53, 138, 14, 94, 96]). *Der Erwartungswert einer Variablen  $x$  ist durch*

$$E \{x\} = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx \quad (2.1)$$

*mit der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $p(x)$  definiert. Die diskrete Form des Erwartungswerts dieser Zufallsvariablen ist in Analogie zu (2.1) mit*

$$E \{x\} = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p(x_k) \quad (2.2)$$

*gegeben. Handelt es sich um eine begrenzte Anzahl  $m$  an Messdaten auf einem Intervall  $I \subset \mathbb{N}$ , so wird diese Menge **Stichprobe** genannt und (2.2) ist der Erwartungswert der Stichprobe.*

Meist ist es in der Praxis ausreichend die Annahme zu treffen, dass für ein ausreichend großes Intervall  $I \subset \mathbb{N}$ , d.h. einer ausreichend großen Anzahl an vorhandenen Messwerten  $x_k$ , der Erwartungswert der Grundgesamtheit gleich dem Erwartungswert der Stichprobe entspricht.

**Definition 2** (Kovarianz, Varianz [53, 138, 14, 94, 96]). *Die Kovarianz zweier Messreihen ist als Maß für den linearen Zusammenhang beider Größen zu verstehen und mit*

$$\text{cov} \{x, y\} = E \left\{ (x - E \{x\}) (y - E \{y\}) \right\} \quad (2.3)$$

*definiert. Wird  $x = y$  gesetzt erhält man aus der Berechnung (2.3)*



die Varianz

$$E \left\{ (x - E \{x\})^2 \right\} = \text{cov} \{x, x\} = \text{var} \{x\}$$

der Messgröße. Die Varianz entspricht damit der quadratischen Abweichung zum Erwartungswert aller Werte  $x$  innerhalb der Messreihe.

Die beiden statistischen Momente Erwartungswert und (Ko)Varianz finden auch in der digitalen Regelungstechnik Verwendung. Sie können beispielsweise zur Fehlerdetektion (Diagnosezwecke) oder zur Anpassung geschätzter Kovarianzmatrizen in einer optimierten Zustandsschätzung verwendet werden. Durch den Einsatz von Ringspeichern ist es möglich, diese beiden Kennzahlen rekursiv auch auf einfachen Mikrorechnerplattformen zu berechnen. Die Herleitung und rekursive Berechnung von Mittelwert und Streuung aus einer Stichprobenmenge ist dem Anhang A.3 zu entnehmen.

Handelt es sich um einen dynamischen Prozess<sup>2</sup>, kann für die meisten technischen Systeme das Maß der **ausreichenden Systemanregung**<sup>3</sup> definiert werden. Dieses Maß ist mit Definition 3 entsprechend festgelegt. Der Wert der durch die Stellgröße verursachten Systemanregung muss stark genug sein, damit bei einer Systemidentifikation bzw. Parameterschätzung relevante Ergebnisse erzielt werden können.

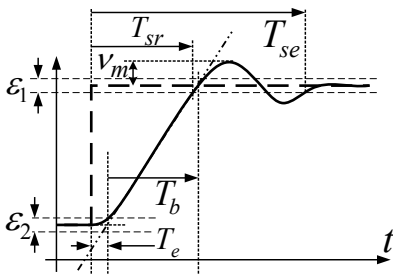
**Definition 3** (Ausreichende Systemanregung [13, 123]). *Ein System mit dem Zustandsvektor  $\underline{x}(t)$  ist ausreichend durch die Stellgröße  $\underline{u}(t)$  angeregt, wenn jeder einzelne Zustand  $x_i \in \underline{x}$  durch die wirkende Stellgröße ausreichend angeregt wird.*

<sup>2</sup>In dynamischen Prozessen sind die kennzeichnenden Maßzahlen zeitabhängig [86]

<sup>3</sup>In der englischsprachigen Literatur als **Persistent Excitation** bezeichnet.

## 2 Ausgewählte Aspekte der Regelung technischer Systeme

Im Hinblick auf das Führungs- und Störverhalten eines geschlossenen Regelkreises wird meist nur die Regelgröße  $y(t)$  betrachtet und weniger die inneren, nach außen nicht immer sichtbaren Zustandsgrößen  $\underline{x}(t)$ . Übergangsvorgänge eines rückgekoppelten Systems in Form von Sprungantworten<sup>4</sup>, werden in der Regelungstechnik nach [25, 2, 148] anhand der in Tabelle 2.1 beschriebenen Kenngrößen bewertet. Diese Kenngrößen sind bezeichnend für diese Art von dynamischen Prozessen.



Kennzahl	Name
$\varepsilon_{1,2}$	Einschwingtoleranz
$\nu_m$	Überschwingweite
$T_b$	Ausgleichszeit
$T_e$	Verzugszeit
$T_{sr}$	Anschwingzeit
$T_{se}$	Einschwingzeit

**Abbildung 2.2.**

Führungsverhalten:  
Sprungantwort

**Tabelle 2.1.** Kenngrößen einer Sprungantwort [25, 148, 2]

Für lineare Strecken zweiter Ordnung, welche sich mit der Differentialgleichung

$$\ddot{x} = -a_1\dot{x} - a_0x + bu(t) = -2D\omega_0\dot{x} - \omega_0^2x + bu(t) \quad (2.4)$$

modellieren lassen, werden in [25] noch zusätzlich die Größen  $\omega_0$  als **Kennkreisfrequenz** und  $D$  als **Dämpfungsgrad** eingeführt. Mit den in Tabelle 2.2 beschriebenen Größenordnungen des Dämpfungsgrades, lässt sich so das Schwingverhalten dieses Streckentyps im Zeitbereich mit nur einem Parameter definie-

<sup>4</sup>Eine Sprungantwort bezeichnet nach [14, 93] und [104] die Systemanregung bzw. Systemreaktion durch Anregung mit einem Einheitssprung  $\sigma(t)$

Dämpfungsgrad $D$	Zeitliches Streckenverhalten
$> 1$	Aperiodisch kriechend
$= 1$	Aperiodischer Grenzfall
$0 < D < 1$	Asymptotisch stabile, abklingende Schwingung
$= 0$	Dauerschwingung konstanter Amplitude
$< 0$	Instabile Schwingung, aufklingende Schwingung

**Tabelle 2.2.** Einschwingverhalten Strecken zweiter Ordnung in Abhängigkeit des Dämpfungsgrades  $D$  [114, 2, 53]

ren. Viele lineare und auch linearisierte Strecken lassen sich in der Praxis als System zweiter Ordnung approximieren. In Analogie zu Tabelle 2.2 ist es daher ebenso möglich, eine vereinfachte Aussage über die Streckendämpfung auch für approximierete Streckenmodelle zu treffen.

## 2.3 Grundkenntnisse zeitdiskreter Systeme

### 2.3.1 Signalerfassung und zeitliche Diskretisierung

Im Gegensatz zu zeitkontinuierlichen Reglern, findet in digitalen Regelkreisen die Berechnung der Stellgröße(n) sowie die Erfassung aller zur Regelung notwendigen Messgrößen zu fest definierten Zeitpunkten statt. Ist eine Vernachlässigung der benötigten Rechenzeit  $t_{\text{Rech}}$  möglich, so existiert keine merkbare Verzögerung zwischen Signalerfassung und Stellgrößenabgabe. Dieser Ansatz ermöglicht eine idealisierte Reglerberechnung sowie Sys-

temanalyse und wird deshalb in allen nachfolgenden Untersuchungen vorausgesetzt. Andernfalls wäre es notwendig die verschobene Stellgrößenausgabe in der Reglerauslegung durch geeignete Methoden mit zu berücksichtigen. Dieser Aspekt führt dementsprechend zu einer Erhöhung der Systemkomplexität.

Die zeitliche Diskretisierung einer allgemein gültigen Funktion  $u(t, \underline{x})$  kann nach [2, 122, 44] und [43] mit der mathematischen Beschreibung der Dirac-Funktion in (2.5) als Abtastfunktional  $f(t)$  zu den fest definierten Zeitpunkten  $t = kT_s$  erfolgen.

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s) \quad (2.5)$$

Die Abtastfunktion (2.5) beruht auf dem Erfassen von Messwerten zu äquidistanten Zeitpunkten und wird zur Umsetzung praktischer Aufgabenstellungen innerhalb der Regelungstechnik angewendet [44, 43]. Eine zeitkontinuierliche Funktion  $u(t, \underline{x})$  wird durch das Abtasten in eine Reihe von zeitdiskreten Funktionswerten transformiert. Dieser Vorgang kann mathematisch mit

$$u^*(t, \underline{x}) = u(t, \underline{x}) \cdot f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(kT_s, \underline{x}) \cdot \delta(t - kT_s) \quad (2.6)$$

beschrieben werden [44] und führt so zu einer zeitdiskreten Funktion. Das Frequenzspektrum dieser zeitdiskreten Funktion erhält man durch die Fouriertransformation in den Frequenzbereich. Da es sich um eine Multiplikation zwischen abgetastetem Nutzsignal und der Abtastfunktion im Zeitbereich handelt, kann dieses Spektrum durch eine Faltung beider, zuvor einzeln transformier-

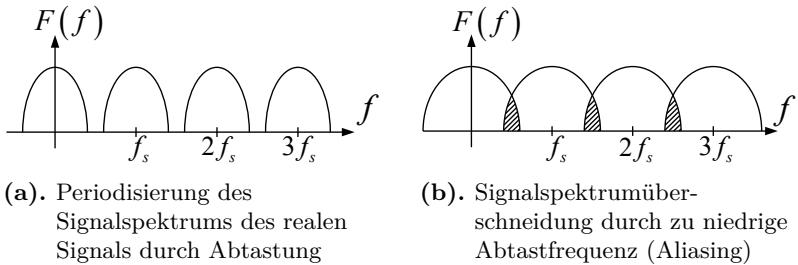
ter Signale im Bildbereich durch den Zusammenhang

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} u(kT_s, \mathbf{x})\delta(t - kT_s)$$

$$\circ \bullet \quad F(f) * X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu) \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - kf_s - \nu) d\nu \quad (2.7)$$

$$= \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(f - kf_s) = F_s(f)$$

errechnet werden. Aus (2.7) ist deutlich erkennbar, dass das Spektrum des abgetasteten Signals periodisch ist und sich mit der Abtastfrequenz  $f_s$  wiederholt (vgl. Abbildung 2.3a). Problematisch erscheint dieser Sachverhalt deswegen, weil bei einem breiten Spektrum und niedriger Abtastfrequenz ein Überschneiden der periodifizierten Spektren wahrscheinlich wird (siehe Frequenzbandüberlappung in Abbildung 2.3b). Dieser Effekt wird



**Abbildung 2.3.** Periodisierung des Signalspektrums durch Abtastung

**Aliasing** genannt und sollte durch eine Bandbreitenlimitierung im Vorfeld unterdrückt werden. In einfachster Weise wird ein analoges Filter (in Funktion als AAF-Filter) mit einer maximalen Grenzfrequenz  $f_G = \frac{f_s}{2}$  noch vor das Abtastglied geschaltet.

## 2 Ausgewählte Aspekte der Regelung technischer Systeme

---

Dieser Schaltungsteil auf der Hardware hat zur Folge, dass das abzutastende Signal eine maximale Bandbreite von  $\pm \frac{f_s}{2}$  besitzt und ein Überschneiden der periodisierten Frequenzspektren nahezu unmöglich wird.

Ohne Anwendung diese Maßnahme in digitalen Regelkreisen, wäre eine Transformation von hochfrequenten Signalanteilen in einen tieffrequenten Spektrumsteil möglich was wiederum zur Folge hat, dass der geschlossene Regelkreis unruhiges bis instabiles Verhalten aufweisen könnte.

Das *Parseval'sche Theorem* für Energiesignale<sup>5</sup> besagt, dass die mittlere Leistung eines Signals im Zeitbereich gleich der mittleren Leistung des Signals im Frequenzbereich ist [151, 86, 103] und so

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df \quad (2.8)$$

gelten muss. Im Hinblick auf einwirkende stochastische Störeinflüsse wie dem weißen<sup>6</sup> oder rosa<sup>7</sup> Rauschen, kann man sich diese Gegebenheit zu nutze machen: Durch Überabtastung<sup>8</sup> des mit Störsignalen überlagerten und bandbegrenzten Nutzsignals sowie dem Einsatz eines geeigneten Tiefpassfilters (in analoger Form als AAF) besteht dadurch die Möglichkeit die Energie des vor allem breitbandigen Störsignals zu verkleinern. Die dadurch entstehende Minimierung breitbandiger Störeinflüsse auf das eigentliche Nutzsignal durch Überabtastung sollte beim Entwurf digitaler Regelungssysteme gegebenenfalls mit berücksichtigt werden.

---

<sup>5</sup>Energiesignale sind Signale für die  $W = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2$  endlich ist[151]

<sup>6</sup>Weißes Rauschen [159, 14]: Mittelwertfreies und unkorreliertes Rauschen, konstantes Leistungsdichtespektrum

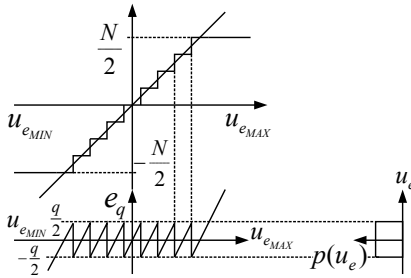
<sup>7</sup>rosa Rauschen [14]: bandbegrenztes Rauschen mit überwiegendem Signalanteil im unteren Frequenzbereich

<sup>8</sup>engl. auch *Oversampling* genannt

### 2.3.2 Quantisierungseffekte in digitalen Systemen

Digitale Systeme, und damit auch das Resultat erfasster Werte von Analog- oder Digitalwandlern, besitzen eine endliche Wortbreite. Im Gegensatz zur realen Umwelt führt dieser Sachverhalt allerdings zu einer Begrenzung des nutzbaren Wertebereichs. Damit ist die Natur eines digital arbeitenden Reglers nicht nur zeitdiskret, sondern auch diskret im Hinblick auf die Amplitude der Eingangs- und Stellgrößen.

Beleuchtet man das Phänomen der Amplitudenquantisierung am Beispiel von analog zu digital gewandelten Signalen näher, so ist festzustellen, dass bei der Gegenüberstellung von konvertierten zu realen Signalverlauf ein Fehler auftreten kann. Abbildung 2.4 veranschaulicht die Ursache des Quantisierungsfehlers  $e_q(u_e) = u_e - \hat{u}_e$  am Beispiel einer linearen Quantisierungskennlinie. Dieser Effekt kann nach [75, 82, 163] und [151] auch als das sogenannte **Quantisierungsrauschen**, das dem eigentlichen Messsignal überlagert ist, bezeichnet werden.



**Abbildung 2.4.**  
Zusammenhang zwischen Amplitudendiskretisierung und Rauschen

- $N$  Quantisierungsstufenanzahl des Wandlers
- $q$  Quantisierungsstufe, Amplitude  
 $q = \frac{u_{e\_MAX} - u_{e\_MIN}}{N}$
- $e_q(u_e)$  Quantisierungsfehler
- $p(u_e)$  Verteilungsdichtefunktion des Rauschsignals

## 2 Ausgewählte Aspekte der Regelung technischer Systeme

---

Mit steigender Wortbreite der AD-Wandler sinkt die Höhe jeder einzelnen Quantisierungsstufe, so dass die Amplitude des Quantisierungsrauschens ebenso sinken muss. Die genaue Wertebereichsquantisierung des Wandlers wird nach [151] auch als **Wandlerrauflösung** bezeichnet und ist in **BIT** angegeben. Die Quantisierungsstufenanzahl  $N$  eines AD-Wandlers lässt sich mit  $N = 2^n$ , wobei  $n$  die Bitanzahl ist, berechnen.

Wie unter anderem in [75, 82] gezeigt, lassen sich auch Mittelwert und Varianz des Quantisierungsrauschens einfach bestimmen. Für den Erwartungswert des Quantisierungsfehlers  $\mu_{e_q} = E\{e_q\}$  nach Definition 1 gilt

$$E\{e_q\} = \frac{1}{q} \int_{-\frac{q}{2}}^{\frac{q}{2}} e_q(u_e) du_e = 0, \quad (2.9)$$

so dass sich für die Varianz des Quantisierungsfehlers nach Definition 2 der Absolutwert

$$E\{e_q(u_e)^2\} = \frac{1}{q} \int_{-\frac{q}{2}}^{\frac{q}{2}} e_q^2(u_e) du_e = \frac{q^2}{12} = \frac{(u_{e_{MAX}} - u_{e_{MIN}})^2}{12N^2} \quad (2.10)$$

bestimmen lässt. Die Verteilungsdichtefunktion  $p(x) = p(e_q)$  des Quantisierungsfehlers ist im Histogramm in Abbildung 2.4 dargestellt. Es handelt sich dabei um eine Gleichverteilung. In der Literatur, wie auch in [75], wird daher aus praktischer Sicht der Charakter des Quantisierungsrauschens als weißes Rauschen definiert. Der mathematische Beweis ist der Literatur zu entnehmen.

Wird das reale Signal über die maximal wandelbare Signalamplitude hinaus angesteuert (positiv oder negativ), spricht man auch von **Übersteuerung** [151]. Der sich daraus ergebende Gesamtfehler zwischen gewandeltem und realem Signal setzt sich dementsprechend aus dem gleichverteiltem Quantisierungsrau-



schen (2.10) [102] und dem Übersteuerungsfehler zusammen.

Werden Reglerkoeffizienten durch (skalierte) ganze Zahlen dargestellt (Rechnung im Integer-Format), werden diese in der Praxis zunächst gerundet. Nach [58] haben die daraus entstehenden Quantisierungen allerdings zu vernachlässigenden Einfluss auf das Verhalten des geschlossenen Regelkreises. Die Koeffizienten eines digitalen Reglers sind allerdings so zu skalieren und zu runden, dass der Regelalgorithmus stabilen Charakter besitzt und vom gewünschten Verlauf lediglich minimal abweicht.

### 2.3.3 Signalrekonstruktion und Stellgröße

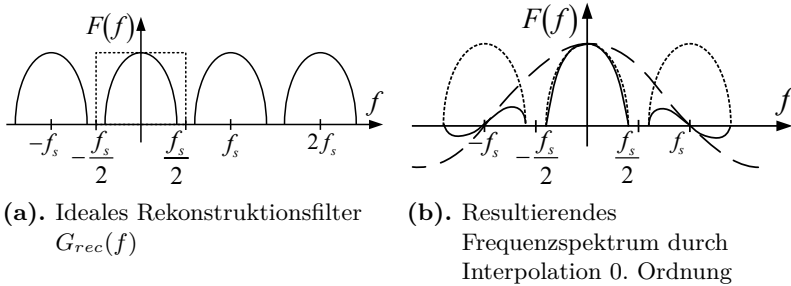
#### Stellgrößenausgabe mit Digital-Analog-Wandler

Im Zusammenhang der digitalen Regelung kontinuierlicher Strecken, bedeutet der Begriff der Signalrekonstruktion die Ausgabe benötigter analoger Stellgrößen und verkörpert damit die analoge Stellgliedansteuerung. Idealerweise werden dazu Rekonstruktionsfilter benötigt, die das Grundspektrum  $U(f)$  des Ausgangssignals mit

$$\begin{aligned} U(f) &= G_{rec}(f) \cdot F_s(f) = T_s \cdot \text{rect}\left(\frac{f}{f_s}\right) \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(f - kf_s) \\ &= F(f) \end{aligned} \tag{2.11}$$

aus dem periodifizierten Frequenzspektrum filtern. Das ideale Rekonstruktionsfilter ist daher ein ideales Tiefpassfilter mit der Grenzfrequenz  $f_G = \frac{f_s}{2}$  (vgl. dazu Abb. 2.5a).

Da dieses ideale Filter technisch nur schwer umsetzbar ist, soll nun anstatt einer Synthese die Analyse der technischen Machbarkeit erfolgen: Die Ausgabe eines zeit- und wertediskreten Signals mit Hilfe eines DA-Wandlers.



**Abbildung 2.5.** Sich ergebende Signalfrequenzspektren aus realen und idealen Rekonstruktionsfilter

Die Verwendung eines DA-Wandlers zur analogen Ausgabe der Stellgröße führt dazu, dass von Ausgabezeitpunkt zu Ausgabezeitpunkt der jeweilige ausgegebene Wert konstant gehalten wird und damit ein Halteglied entsteht. Diese Art der Rekonstruktion wird auch **Interpolation 0. Ordnung** genannt und kann nach [44] mathematisch mit

$$\bar{u}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k (\sigma(t - kT_s) - \sigma(t - (k + 1)T_s)) \quad (2.12)$$

$$\bar{U}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \left( \frac{e^{-skT_s}}{s} - \frac{e^{-s(k+1)T_s}}{s} \right) = \frac{1 - e^{-sT_s}}{s} \sum_{k=0}^{\infty} u_k e^{-skT_s} \quad (2.13)$$

beschrieben werden. Die spektrale Analyse der nun zeitkontinuierlichen Stellgröße  $\bar{u}(t)$  führt zur Multiplikation des Grundspektrums  $U(f)$  mit der  $si(f)$ -Funktion<sup>9</sup> (vgl. Abbildung 2.5b). Die

<sup>9</sup> $si(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ , eine mit  $\frac{1}{x}$  abklingende Sinus-Schwingung

Verwendung eines zusätzlichen Glättungsfilters ergibt zusätzlich eine spektrale Bereinigung der Stellgröße. Grund dafür ist die Filterwirkung selbst, die zu einer Unterdrückung der Restspektren im ausgegebenen Treppensignals führt. Ausgehend von der Regelung physikalischer Strecken wird dieses Glättungsfiler oftmals überflüssig erscheinen. Dies ist genau dann der Fall, wenn die zu regelnde Strecke ausreichend starken Tiefpasscharakter besitzt und daher die Restspektren des Steuerfunktionals  $\bar{u}(t)$  am Streckenausgang durch die eigentliche Strecke sehr gut unterdrückt werden können.

Wie auch in [102] und [44] gezeigt, kann aus der Haltefunktion (2.13) des DA-Wandlers die komplexe Übertragungsfunktion

$$G_H(s) = \frac{1 - e^{-sT_s}}{s} \quad (2.14)$$

definiert werden. Beim Entwurf digitaler Regelkreise sind daher die Eigenschaften des Halteglieds mit seiner zusätzlich hinzugefügten Übertragungsfunktion  $G_H(s)$  mitzubersichtigen.

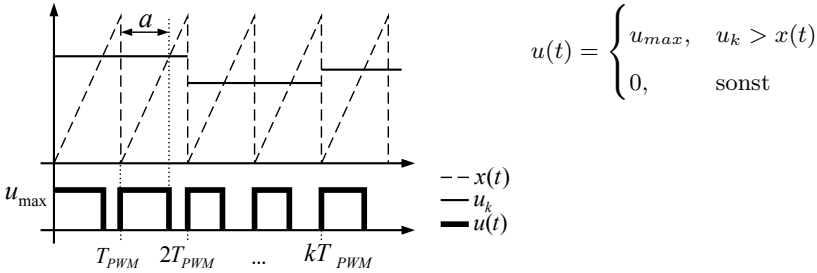
### **Stellgrößenabgabe mit Pulsweitenmodulation**

Die Pulsweitenmodulation (PWM) ist eine weit verbreitete Technologie in verschiedensten technischen Anwendungsfeldern. Zum einen ist sie in der Nachrichten- und Messtechnik als Übermittlungsverfahren im Einsatz und zum anderen wird sie in der Industrie gern dazu benutzt, Leistungsstellglieder wie Motoren oder elektromagnetische Antriebe direkt anzusteuern.

Ein großer Vorteil einer pulswertenmodulierten Stellgliedansteuerung ist der einfache Aufbau der elektronischen Leistungsendstufe. Aber auch die effektivere Leistungseinspeisung in Hinblick auf den Gesamtwirkungsgrad des geregelten Systems ist von großer Bedeutung. Im Gegensatz zu linear geregelten Endstufen, wird bei schaltenden Leistungsendstufen deutlich weniger Energie in

## 2 Ausgewählte Aspekte der Regelung technischer Systeme

der Endstufe selbst umgesetzt, was letztendlich zu einem höheren Wirkungsgrad und zu weniger Wärmeentwicklung führt.



**Abbildung 2.6.** Beispiel zur Erzeugung eines pulswidenmodulierten Signals

Bei einem pulswidenmoduliertem Signal handelt es sich um ein periodisches Signal mit der Periodendauer  $T_{PWM}$ . Der Parameter  $a$  als variabel einstellbare Haltezeit kann idealerweise einen Wertebereich von  $a \in [0..T_{PWM}]$  annehmen. Der Betrag der Stellgröße befindet sich somit nicht als Amplitude wieder, sondern zeitbezogen auf die Periodendauer. Die Beziehung mit der mathematischen Formulierung

$$\frac{a}{T_{PWM}} = T_V \in [0..1] \quad (2.15)$$

wird als **Tastverhältnis**  $T_V$  bezeichnet.

Vorausgesetzt der Tatsache, dass die Haltezeit  $T_s$  der Stellgrößenangabe deutlich größer ist als die der des pulswidenmodulierten Signals und damit  $T_s \gg T_{PWM}$  gilt, kann aufgrund der Periodizität des Signals, eine Fourierreihenentwicklung des ausgegebenen

Stellgrößensignals nach Gleichung (2.16) durchgeführt werden.

$$\bar{u}(t) = u_{\max} \cdot T_V + u_{\max} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n} \sin(\pi n \cdot T_V) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_{\text{PWM}}} \cdot n \cdot t\right) \quad (2.16)$$

Der Gleichanteil  $u_{\text{eff}} = u_{\max} \cdot T_V$  des Steuersignals ist linear mit dem Tastverhältnis  $T_V = \frac{a}{T_{\text{PWM}}}$  verknüpft und damit der Stellgröße  $u_k$  äquivalent. Die Oberwellen, welche in Gleichung (2.16) als unendliche Summe definiert sind, werden durch die Trägheit der Strecke, welches bekanntermaßen meist Tiefpassverhalten  $n$ -ter Ordnung aufweist, stark gedämpft. Idealerweise ist die Dämpfung der Oberwellen so stark, dass sich diese auf den Stellgliedausgang nahezu verschwindend auswirken. Bei der Wahl der Ansteuerfrequenz ist also auch darauf zu achten, dass das Tiefpassverhalten des Stellgliedes für  $f_{\text{PWM}}$  ausreichend ausgeprägt ist um unerwünschte Störungen der Regelgröße (sogenannte „Rippel“) zu vermeiden.

## 2.4 Systemmodelle im Zustandsraum

### 2.4.1 Kontinuierliche Zustandsraummodelle

Die mathematische Beschreibung dynamischer Vorgänge erfolgt üblicherweise mit Differentialgleichungen in denen die Regelgröße(n) und Systemparameter enthalten sind. Diese Gleichungen entsprechen damit **parametrischen Modellen** [123]. Differentialgleichungen als Systemmodellgleichungen beinhalten nicht nur die Prozess- bzw. Regelgröße  $x(t)$  selbst, sondern auch deren zeitliche Ableitungen  $\dot{x}, \dots, x^{(n)}$ . Die höchste Ableitung innerhalb der Gleichung legt dabei die Ordnung  $n$  der Differentialgleichung fest. Eine darauf aufbauende Beschreibungsform dynamischer Vorgänge repräsentieren **Zustandsraummodelle**. Sie

stellen das Pendant zum Modell als Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung dar und sind als Zusammenfassung von  $n$  linearen oder nichtlinearen Differentialgleichungen erster Ordnung zu verstehen. Die allgemeinste Form einer Zustandsraumdarstellung für die Modellierung dynamischer Vorgänge ist mit

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, u) = \begin{pmatrix} f_1(\underline{x}, u) \\ \vdots \\ f_n(\underline{x}, u) \end{pmatrix}, \quad \underline{y} = \underline{c}(\underline{x}) \quad (2.17)$$

definiert. In dieser Darstellung lassen sich sehr allgemein lineare und nichtlineare Zusammenhänge technischer Systeme als mathematisches Gleichungssystem handhaben.

**Definition 4** (Nichtlineare Systeme [150, 115, 14]). *Dynamische **nichtlineare Systeme** sind durch Differentialgleichungen oder Differentialgleichungssystemen beschrieben, in denen die Systemzustände  $\underline{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ , der Systemausgang  $y(t) \in \mathbb{R}$  oder die Steuergröße  $u(t) \in \mathbb{R}$  im nichtlinearen Zusammenhang auftreten. Gilt für ein dynamisches System weder das Superpositionsprinzip*

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) \quad (2.18)$$

*noch das Verstärkungsprinzip*

$$f(\alpha \cdot x_1) = \alpha \cdot f(x_1), \quad (2.19)$$

*so handelt es sich um ein nichtlineares System.*

Eine Klasse nichtlinearer Systeme, die vor allem häufig bei technischen System mit nur einer Steuergröße vorzufinden ist, sind Systeme mit der Linearität bezüglich der Stellgröße  $u(t) \in \mathbb{R}$  auf der Systemeingangsseite [35, 3, 66, 85]. Diese Klasse nichtlinearer Systeme wird nach [3, 66] und [85] auch **eingangsliniere**

bzw. *eingangsaффine* Systeme genannt. Die allgemeine Beschreibungsform eingangsaффiner Systeme ist durch das Zustandsraummodell

$$\dot{\underline{x}} = \underline{a}(\underline{x}) + \underline{b}(\underline{x})u, \quad \underline{y}(\underline{x}) = \underline{c}(\underline{x}) \quad (2.20)$$

mit  $\underline{x}, \underline{a}(\underline{x}), \underline{b}(\underline{x}) \in \mathbb{R}^{(n,1)}, \underline{c}(\underline{x}) \in \mathbb{R}^{(p,n)}, \underline{y}(\underline{x}) \in \mathbb{R}^{(p,1)}$  gekennzeichnet [3]. Im Übrigen lassen sich auch pneumatische Systeme und Anwendungen in der Gleichungsform nach (2.20) beschreiben. Existiert nur eine Ausgangs- bzw. Regelgröße  $\underline{y}(\underline{x})=y(\underline{x}) \in \mathbb{R}$ , so wird (2.20) auch als nichtlineares eingangsaффines SISO<sup>10</sup>-System bezeichnet.

### 2.4.2 Zeitdiskrete Zustandsraummodelle

Für die Implementierung kontinuierlicher Zustandsraummodelle auf Mikrorechnerplattformen, wie sie auch für die Umsetzung modellbasierter Beobachterstrukturen gebraucht werden, bedarf es einer zeitlichen Diskretisierung des zeitkontinuierlichen Systemmodells.

Der Momentanwert einer Funktion  $x(t)$  zum Zeitpunkt  $t$  ist mit der Verwendung der äquidistanten Abtastfunktion (2.5) durch

$$x_k = x(t=kT_s)$$

gegeben. Die zeitliche Ableitung  $\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}$  einer allgemeinen nichtlinearen Funktion  $x(t)$  kann im einfachsten Fall durch eine geeignete Approximation ersetzt werden.

Ohne Anspruch auf Vollständigkeit stellen die in Tabelle 2.3 gezeigten Methoden die in der Praxis weit verbreiteten Ansätze dar, um den Differentialquotienten durch einen geeigneten Differenzenquotienten anzunähern [44, 43, 87].

---

<sup>10</sup>SISO: engl. für Systeme mit nur einem Ein- und einem Ausgang (Single Input, Single Output)

## 2 Ausgewählte Aspekte der Regelung technischer Systeme

Zeitdiskrete Approximation für $y(t)=\dot{x}(t)$	Methode
$y_k = \frac{1}{T_s} (x_{k+1} - x_k)$	Vorwärtsdifferenzenmethode
$y_k = \frac{1}{T_s} (x_k - x_{k-1})$	Rückwärtsdifferenzenmethode
$y_k = \frac{2}{T_s} (x_k - x_{k-1}) - y_{k-1}$	Bilineare Transformation, Tustin-Methode

**Tabelle 2.3.** Approximationsmethoden zu zeitlichen Diskretisierung kontinuierlicher Ableitungen

Neben diesen Approximationsmethoden ist es in der Praxis aber genauso üblich, die exakte Lösung  $\underline{x}(t)$  des zeitkontinuierlichen Zustandsraummodells für die Systemdiskretisierung zu verwenden. Ist das zeitkontinuierliche Lösungsfunktional mit

$$\underline{x}(t) = \underline{F}(t, \underline{x}(t), u(t)) \quad (2.21)$$

bekannt, ist der Zustandsvektor im nächsten Tastschritt  $t_1 = (k+1)T_s$  direkt aus dem aktuellen Tastschritt  $t_0 = kT_s$  berechenbar. Mit  $t_0 = kT_s$  folgt damit das verallgemeinerte zeitdiskrete Zustandsraummodell

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{F}(t - t_0, \underline{x}(t_0), u(t_0)) = \underline{F}(T_s, \underline{x}_k, u_k). \quad (2.22)$$

Handelt es sich um ein lineares Zustandsraummodell kann direkt auch die in [44, 87, 148] verwendete Beschreibungsform

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{\Phi}(T_s)\underline{x}_k + \underline{\Theta}(T_s)u_k \quad (2.23)$$

verwendet werden. Die beiden Matrizen  $\underline{\Phi}(T_s)$  und  $\underline{\Theta}(T_s)$  ergeben sich dann direkt aus der zeitkontinuierlichen Transitionsmatrix  $e^{\underline{A}t}$  für  $t=T_s$  und sind dementsprechend linear und konstant. Die Berechnung beider Matrizen ist in Anhang A.1 beschrieben.



## 2.5 Regelungsstrategien

Der Vorgang des Steuerns technischer Systeme versteht sich als gezielte Beeinflussung dieses Systems [41]. Das Ziel eines solch eingreifenden Vorgangs entspricht dem Aufprägen gewollten Verhaltens. Anhand der in Abschnitt 2.2 definierten Kennzahlen, können Stabilität, Dynamik, Genauigkeit und Reproduzierbarkeit der realisierten Steuerung bzw. Regelung des beeinflussten Prozesses beurteilt werden. Die nun weiterführenden Begriffserklärungen und Definitionen dienen als Übersicht existierender Analysemethoden und Regelverfahren, die vor allem auch bei der Entwicklung industrieller Produkte und damit auch innerhalb pneumatischer Systeme ihre Anwendung finden. Eine kurze Übersicht über oft verwendete Regelungsmethoden für pneumatische Technologien innerhalb dieses Abschnittes, soll dem interessierten Leser einen Einblick in das Arbeitsfeld pneumatischer Regelungstechnik vermitteln. Darauf aufbauend wird die bewährte Methode der exakten E/A-Linearisierung für nichtlineare Strecken detailliert betrachtet werden. Sie stellt im späteren Teil der Arbeit einen Kernpunkt des entwickelten Gesamregelungskonzeptes dar. Aufgrund der Tatsache, dass manche, in dieser Arbeit verwendeten Methoden auf der Grundlage asymptotischer Stabilität entworfen werden, soll zunächst der Begriff der Stabilität und deren Analysemöglichkeit nochmals kurz vorgestellt werden.

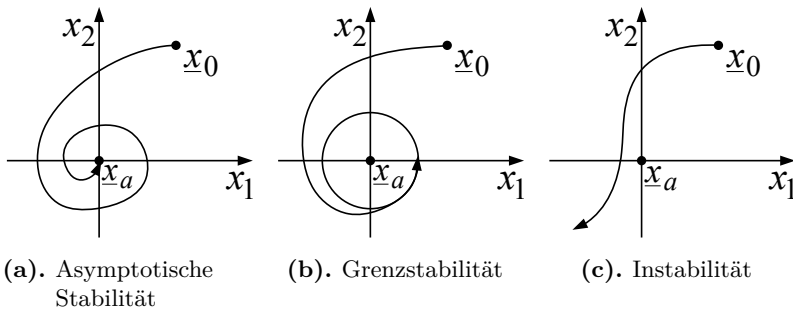
### 2.5.1 Der Stabilitätsbegriff

Die Stabilität dynamischer Systeme im Zustandsraum lässt sich anhand der Erreichbarkeit einer definierten Ruhelage  $\underline{x}_a = 0$  von einem bestimmten Ausgangspunkt  $\underline{x}(0) = \underline{x}_0$  aus und in Abhängigkeit eines definierten Parameters formulieren. Bei dynamischen Systemen ist dieser Parameter fast ausschließlich die

Zeit  $t$ . Eine grundlegende Einteilung der Stabilität kann nach [104, 86] in die Klassen

- **Asymptotische Stabilität**,
- **Grenzstabilität** und
- **Instabilität**

erfolgen. Am Beispiel von Systemen zweiter Ordnung ist es sehr gut möglich diese Stabilitätsklassen auch graphisch darzustellen. Eine Übersicht hierzu ist in Abbildung 2.7 gezeigt. Die Übertragbarkeit auf Systeme höherer Ordnung ist dabei selbstverständlich.



**Abbildung 2.7.** Übersicht existierender Stabilitätsklassen

Im Gegensatz zu nichtlinearen Systemen, lassen sich lineare zeitinvariante Systeme anhand ihrer festen Eigenwertlage sehr einfach in eine dieser drei Klassen einordnen [162, 109, 86]. Eine Verallgemeinerung der Stabilitätsanalyse, die auch auf nichtlineare Systeme anwendbar ist, stellt die Stabilitätstheorie nach **Ljapunov**<sup>11</sup> dar. Diese Methode ist beispielsweise in [3, 7] und

---

<sup>11</sup>A.M. Ljapunov: Russischer Mathematiker im Fachgebiet der Stabilitätstheorie

[109] detailliert beschrieben und beruht auf dem Minimum eines von allen Zustandsgrößen abhängigen Funktionals, welches in einer existierenden Ruhelage  $\underline{x}_a$  sein Minimum besitzt. Außerhalb dieser definierten Ruhelage muss für ein stabiles System dieser Funktionswert stets höher sein.

**Definition 5** (Direkte Methode nach Ljapunov [3, 7, 109]). *Ein dynamisches System in der allgemein gültigen Zustandsraumdarstellung*

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}) \quad (2.24)$$

*besitzt die Ruhelage  $\underline{x}_a = 0$ . Existiert nun eine stetig und auch stetig differenzierbare Funktion  $V(\underline{x})$ , die die Bedingungen*

1.  $V(\underline{x}=\underline{x}_a) = 0$ ,
2.  $V(\underline{x}\neq\underline{x}_a) > 0$  und
3.  $\dot{V}(\underline{x}\neq\underline{x}_a) = \frac{\partial V}{\partial \underline{x}} \dot{\underline{x}} < 0$

*für einen Zustandsvektor  $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$  in einer Umgebung  $U(\underline{x}_a)$  der Ruhelage erfüllt, so ist die Ruhelage  $\underline{x}_a$  lokal asymptotisch stabil. Gilt für den Vektor  $\underline{x}$  zusätzlich die Bedingung*

$$\lim_{|\underline{x}| \rightarrow \infty} V(\underline{x}) = \infty,$$

*so ist die Ruhelage  $\underline{x}_a$  global asymptotisch stabil. Die Funktion  $V(\underline{x})$  wird somit entsprechend als Ljapunov-Funktion bezeichnet.*

Ein großer Vorteil der Stabilitätsanalyse nach Ljapunov ist der, dass das zeitkontinuierliche Lösungsfunktional von (2.24) nicht notwendig ist um eine Aussage über die Systemstabilität zu treffen. Kennt man eine Funktion  $V(\underline{x})$ , so sind Bedingungen 1) und 2) durch direktes Einsetzen von  $\underline{x} = \underline{x}_a$  und  $\underline{x} \neq \underline{x}_a$  überprüfbar. Bedingung 3), die sich mit

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial \underline{x}} \dot{\underline{x}} = \langle \text{grad}(V), \underline{f}(\underline{x}) \rangle \quad (2.25)$$

berechnen lässt, beinhaltet lediglich die Richtungsableitung der gewählten Ljapunov-Funktion  $V(\underline{x})$  entlang der zeitlichen Änderung des Zustandsvektors, die durch die vorhandene Modellgleichung (2.24) ebenso bekannt ist.

Diese Methodik ist direkt auch auf den zeitdiskreten Anwendungsfall übertragbar. Bedingung 3) kann beispielsweise mit der Vorwärtsdifferenzenmethode (vgl. Tabelle 2.3) als Differenz der eigentlichen Ljapunov-Funktion zum aktuellen und darauf folgenden Abtastschritt durch

$$\Delta V = V_{k+1} - V_k \quad (2.26)$$

approximiert werden [3].

Für weiterführende Ausarbeitungen sei an dieser Stelle auf vertiefende Literatur wie [3, 7, 128, 97] und [109] verwiesen.

### 2.5.2 Das optimale Regelgesetz

Ein Regler dient laut [86] und [148] in erster Linie dazu, dynamische Systeme gezielt zu beeinflussen und in einen definierten Zustand zu überführen. Auch die Reduktion äußerer Störeinflüsse kann ein Hauptaugenmerk einer technischen Regeleinheit sein. Das Regelgesetz, welches den Regler als solchen charakterisiert, entspricht dem Herzstück der Regeleinheit. Es erzeugt nach einer definierten Berechnungsvorschrift die Stellgröße(n) des Reglers als technische Einheit. In der Technik existieren eine Vielzahl von Reglern mit den jeweils zugehörigen Regelgesetzen. Im Folgenden soll zunächst die Regelstrategie als dynamisches Optimierungsproblem in Kurzform vorgestellt werden.

Die Herleitung eines optimalen Regelgesetzes basiert auf der Berechnung einer optimalen Steuertrajektorie als zeitkontinuierliche Funktion oder zeitdiskrete Steuerfolge. Die Herangehensweise für diese Berechnung ist hinlänglich bekannt und kann detail-

liert den Literaturquellen [127, 36, 34, 85] und [105] entnommen werden. Sie beruht auf den mathematischen Instrumenten der dynamischen Optimierung und Variationsrechnung.

Die optimale Steuertrajektorie ist die zeitliche Stellgröße  $u(t)$ , die die Problemstellung

$$\min_{u(t)} \{J(\underline{x}, u)\}, \quad J(\underline{x}, u) = \int_{t_0}^{t_e} F(\underline{x}, u, t) dt \quad (2.27)$$

mit dem definierten Gütefunktional  $J = J(\underline{x}, u)$ ,  $J \in \mathbb{R}$  minimiert. Sieht man das eigentliche dynamische Systemmodell

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, u) \rightarrow \underline{g}(\underline{x}, u) = \dot{\underline{x}} - \underline{f}(\underline{x}, u) = 0$$

mit einer ggf. für reale technische Systeme geltenden Stellgrößenbeschränkung

$$u \in [u_{\min} \dots u_{\max}]$$

als Nebenbedingung an, so ist das Minimierungsproblem (2.27) in ein beschränktes dynamisches Optimierungsproblem zu überführen. Die allgemeine Lösung eines quadratischen Optimierungsproblems für das eingangsafligne Systemmodell (2.20) ohne Stellgrößenbegrenzung ist mit der Stellgrößenwichtung  $R \in \mathbb{R}$ ,  $R > 0$  durch

$$u(t) = -R^{-1} \underline{b}(\underline{x})^T \underline{\lambda}(t) \quad (2.28)$$

gegeben [105]. In den meisten Fällen ist nach [87, 105, 36] der Kozustandsvektor  $\underline{\lambda}(t)$  mit

$$\dot{\underline{\lambda}}(t) = \underline{P}(t) \underline{x}(t) \quad (2.29)$$

zu berechnen. Aus (2.28) und (2.29) kann man direkt erkennen, dass für eine optimale Regelung der vollständige Zustandsvektor über verschiedene Verstärkungsfaktoren auf den Stelleingang zurückgeführt wird. Ist das zu regelnde System als nichtlineares

Zustandsraummodell beschrieben, ist die Zustandsrückführmatrix  $\underline{b}(\underline{x})^T \underline{P}(t)$  sehr oft zeitlich nicht konstant. Handelt es sich hingegen um ein lineares SISO-Zustandsraummodell, ist die Matrix  $\underline{P}(t)$  und der Eingangsvektor  $\underline{b}(\underline{x}) = \underline{B}$  zeitlich konstant. In diesem Fall wird der Regler als **linearer Zustandsregler** bezeichnet. Die lineare zeitkontinuierliche Zustandsrückführung wird letztendlich mit der Stellgröße

$$u(t) = Sw(t) - \underline{K}\underline{x}(t). \quad (2.30)$$

erreicht. Die Stellgrößenberechnungsvorschrift

$$u_k = Sw_k - \underline{K}x_k \quad (2.31)$$

beschreibt wiederum den zeitdiskreten Algorithmus eines linearen Zustandsreglers für Eingrößensysteme. Eine Verschiebung um den Sollwert  $w$  aus dem Nullpunkt heraus, wird durch eine Addition der optimalen Steuertrajektorie mit dem durch  $S$  gewichteten Sollwert erreicht. Diese Reglerform ist auch für digitale Regelungen sehr geeignet, da sie sehr einfach zu implementieren ist und wenig Rechenleistung benötigt. In der später folgenden Reglerauslegung soll die eigentliche Berechnungszeit  $t_{\text{Rech}}$  der Stellgröße für lineare zeitdiskrete Zustandsregler wiederum unberücksichtigt bleiben.

### 2.5.3 Verbreitete Regelungsmethoden innerhalb der Elektropneumatik

Im Industriefeld der Pneumatik haben sich im Laufe der letzten Jahre verschiedene Methoden der Regelungstechnik etabliert. Je nach Anwendungsfall, wurden von Ingenieuren und Wissenschaftlern genau für diesen expliziten Streckenaufbau geeignete Regler entwickelt, untersucht und auch in kommerziellen Produkten implementiert. Als in der Praxis auch heute noch sehr

häufig eingesetzte Regelmethode lassen sich die klassischen **P**-Regler, **PI**-Regler und **PID**-Regler nennen. Diese Reglertypen verwenden lediglich die Regelabweichung  $e(t) = w - y(t)$ , deren zeitliches Integral  $\int e dt$  sowie deren zeitliche Ableitung  $\dot{e}$  zum Berechnen der Stellgröße  $u(t)$ . Mit Hilfe der folgenden Definition, lassen sich auch die klassischen Reglerformen in den Zustandsraum überführen.

**Definition 6** (PID-Regler im Zustandsraum). *Für lineare Systeme in Regelungsnormalform mit*

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots \\ & \ddots & \dots \\ -a_0 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n,n)}, \underline{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n,1)},$$

$$\underline{C} = (b_0 \quad \dots \quad b_{n-1}) \in \mathbb{R}^{(1,n)} \quad \text{und} \quad D = 0,$$

ist der PID-Regelalgorithmus durch  $u = K_P e + K_I \int e dt + K_D \dot{e}$  gegeben, wobei o.B.d.A.  $w = 0$  und die Substitution  $\epsilon = -\int e dt$  definiert sind. Daraus lässt sich die Stellgröße

$$u = -\frac{\begin{pmatrix} K_P \underline{C} + K_D \underline{C} \underline{A} & K_I \end{pmatrix}}{1 + K_D \underline{C} \underline{B}} \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \epsilon \end{pmatrix} = -\underline{K} \underline{\xi}$$

mit dem Regelkoeffizientenvektor  $\underline{K}$  und um den Zustand  $\epsilon$  erweitertem Zustandsvektor

$$\underline{K} = \left( \frac{K_P \underline{C} + K_D \underline{C} \underline{A}}{1 + K_D \underline{C} \underline{B}} \quad \frac{K_I}{1 + K_D \underline{C} \underline{B}} \right) \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad \underline{\xi} = \begin{pmatrix} \underline{x}^T & \epsilon \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$$

direkt ableiten. Der so definierte Zustandsregler ist durch geeignete Wahl von  $K_P, K_I, K_D$  in der Lage max.  $n + 1$  Eigenwerte direkt zu verschieben, so dass für Strecken der Ordnung  $n = 2$  noch optimale Ergebnisse erzielt werden können.

Die zeitdiskrete Umsetzung eines PID-Reglers in digitalen Regelkreisen kann einerseits durch eine separate Diskretisierung von I- und D-Anteil erfolgen oder andererseits als die Differenzgleichung

$$u_k = \frac{r_0 + r_1 z^{-1} + r_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}} \quad (2.32)$$

umgesetzt werden. Wird der PID-Regler in Form einer Differenzgleichung implementiert, ist eine getrennte Konfiguration von P-, I- oder D-Anteil nur in Verbindung aller drei Koeffizienten  $r_0$ ,  $r_1$  und  $r_2$  durchführbar.

In vielen Arbeiten, wie unter anderem in [129, 89, 92] und [19] werden diese klassischen Regler auch um adaptive Anteile erweitert. Das Ziel solch einer Erweiterung ist die automatische Anpassung der Regelparameter im laufenden Betrieb um dabei die Möglichkeit zu schaffen, auch bei auftretenden Streckenänderungen ein definiertes Verhalten des geschlossenen Kreises zu erwirken.

Aber auch nichtlineare Fuzzy-Regler, wie sie beispielsweise in [46] vorgestellt werden oder gar die in [92, 20] untersuchten neuronalen Netze wurden schon für pneumatische Applikationen untersucht. Weil deren Auslegung aber nicht explizit auf mathematischen Modellen beruht, werden diese Art von Reglern hier nicht näher betrachtet werden.

Vor allem auf dem Arbeitsgebiet der Servopneumatik wurden aufgrund der nichtlinearen und hohen Reibkrafteffekte im Zylinderantrieb auch strukturvariable Regelungen untersucht. Insbesondere lassen sich für diesen Reglertyp die Sliding Mode Regler nennen, die unter anderem von [136, 134] und [135] an verschiedenen pneumatischen Aufbauten untersucht wurden. Aufgrund der Eigenschaften dieses Reglertyps, wird diese Art der Regelung auch in dieser Arbeit verwendet werden. Vor allem wenn es darum geht, robust stabiles Verhalten von Regelkreisen mit



Parameterunsicherheiten zu erlangen.

Auch werden in vielen Arbeiten zum Thema der Regelung in der Fluidtechnik differenzialgeometrische Ansätze verwendet. Eine typische Methode zur Steuerung oder auch in Kombination mit einem Standard-Regler ist die der flachen Steuerung, wie sie beispielsweise in [56] Verwendung findet. Einen guten Überblick zur Theorie und Anwendung dieses Verfahrens bietet [116]. Aus dem Grund, dass die flache Steuerung auf dem inversen Streckenmodell aufbaut, müssen alle dafür notwendigen Parameter exakt bekannt sein. Wie schon erwähnt, ist das leider nicht immer möglich oder eine exakte Parametrierung nicht gewollt, so dass auch diese Methode in dieser Arbeit nicht untersucht werden wird.

Ein weiteres in der Pneumatik oft eingesetztes und ebenfalls auf der Differenzialalgebra beruhendes Regelverfahren ist das der exakten Linearisierung. Wie in [54, 49, 18] und [17] gezeigt, ist bei diesem Verfahren die Kompensation existierender Nichtlinearitäten elementarer Bestandteil. Als Resultat erhält man ein, im möglichen Stellgrößenbereich lineares Streckenmodell, an dem sich wiederum bewährte und lineare Regelmethoden einsetzen lassen. Obwohl zur Kompensation der nichtlinearen Terme alle darin enthaltenen Parameter genau bekannt sein müssen, wird diese Methode aufgrund der sich ergebenden Streckenstruktur in dieser Arbeit untersucht und verwendet. Einen Überblick über die Theorie dieses Verfahrens ist im nachfolgenden Abschnitt gegeben.

### 2.5.4 Exakte Linearisierung eingangsafliner Systeme

Im Gegensatz zu linearen Systemen gestaltet sich die Handhabung nichtlinearer Strecken oftmals schwieriger. Zur Vollständigkeit seien an dieser Stelle einige etablierte Methoden nichtlinearer Steuerungs- und Regelstrategien in Tabelle 2.4 aufgeführt. In dieser Arbeit richtet sich der Fokus auf die Anwendung der *exakten Linearisierung* im Einsatzgebiet industrieller Applikationen. Wie im nächsten Kapitel gezeigt wird, kann man diese Aussage damit begründen, dass es sich bei pneumatischen Systemen fast ausschließlich um eingangsaflin sowie parameterlineare Strecken handelt.

Die exakte Ein-/Ausgangs-Linearisierung sowie die exakte Zustandslinearisierung stellen in der Regelungstechnik wichtige Verfahren zur dynamischen Beeinflussung nichtlinearer Strecken dar [3, 35, 31, 142, 63, 62]. Diese Methodik ermöglicht es, einem nichtlinearen eingangsaflinen System unter Beachtung der gegebenen physikalischen Begrenzungen<sup>12</sup>, lineares Verhalten zwischen Systemein- und Systemausgang aufzuprägen und so die nichtlinearen Systemanteile zu kompensieren. Die ursprünglich nichtlineare Strecke kann daraufhin als Blackbox-Modell mit linearer Dynamik betrachtet werden. Bei Anwendung der exakten Ein-/Ausgangslinearisierung besitzt das sich ergebende Blackbox-Modell mit einer Differenzenordnung  $\delta < n$  allerdings nicht mehr die volle Systemordnung wie das Originalsystem. Die Begriffserklärung der Differenzenordnung ist in Definition 7 gegeben.

**Definition 7** (Differenzenordnung [85, 3, 123]). *Die **Differenzenordnung**  $\delta$  oder auch **relativer Grad** genannt, entspricht für lineare Systeme der Differenz zwischen der Anzahl von Polen*

---

<sup>12</sup>Unter dem Begriff der Begrenzung fallen Stellgrößen- sowie Ratenbegrenzungen

Strategie	Beschreibung
Exakte Linearisierung	Kompensationsmethodik. Es wird versucht die nichtlinearen Systemanteile durch Kompensation zu entfernen und dem System linearen Charakter aufzuprägen [3].
Flachheitsbasierter Entwurf	Verallgemeinert den Begriff der Steuerbarkeit linearer Systeme. Führt zu einer Systeminversion, die als Vorsteuerung genutzt werden kann. Auch die Erweiterung zur einem geschlossenen Regelkreis ist möglich [88].
Ljapunov Steuerung	Die Grundlage der Reglerauslegung bildet eine geeignete Ljapunov-Funktion und die Stabilitätstheorie nach Ljapunov. Die Stellgröße $u(t)$ wird so ausgelegt, dass die zeitliche Abnahme der definierten Ljapunov-Funktion $\dot{V}(\underline{x})$ sicher negativ und minimal ist [72, 3]. Im Gegensatz zur exakten Linearisierung werden nicht alle Nichtlinearitäten zwingend kompensiert.
Backstepping	Für nichtlineare Systeme in strenger Rückkopplungsform (engl. auch <b><i>strict feedback form</i></b> ) stellt dieses Verfahren einen rekursiven Algorithmus auf Grundlage der Ljapunov Steuerung dar. Eine gute Übersicht hierzu bietet [3, 169, 72].

**Tabelle 2.4.** Übersicht ausgewählter Regelungsstrategien für nichtlineare Strecken

$n$  und der Anzahl an Nullstellen  $m$  in der linearen Übertragungsfunktion  $G(s)$ . Es gilt:

$$\delta = n - m. \quad (2.33)$$

Im Allgemeinen entspricht die Differenzenordnung nach [123] dem Abstand zwischen Systemeingriff und Systemausgang. Ein Maß diesen Abstandes stellt nach [123] eine Anzahl von Integratoren dar.

**Definition 8** (Nulldynamik [3, 142, 123]). *Besitzt ein nichtlineares System der Ordnung  $n$  einen Differenzegrad  $\delta < n$ , so besitzt das System eine nichtbeobachtbare **Nulldynamik** (oder auch **interne Dynamik** genannt).*

*Sofern die im nichtlinearen System existierende Nulldynamik stabil ist, beeinflusst diese die Ausgangsgröße  $y(t)$  nicht, was wiederum zur Nichtbeobachtbarkeit der Nulldynamik führt.*

Ein Grund für die mögliche Reduzierung der Systemordnung ist die Koordinatentransformation selbst, die zwar die mathematische Beschreibung des technischen Systems ändert, nicht aber die Physik verändern kann. Das Gesamtsystem ist und bleibt trotz Koordinatentransformation nichtlinear. Nach Definition 8 sind die restlichen dynamischen Systemanteile weder beobachtbar noch steuerbar, wirken sich aber auch nicht auf den transformierten Systemausgang aus – vorausgesetzt sie sind stabil.

Betrachtet wird ein nichtlineares SISO-System der Form (2.20) mit linearem Stelleingriff. Wie sich noch zeigen wird, sind die meisten pneumatischen Systeme nichtlineare SISO-Systeme innerhalb eines spezifischen Anwendungsfalls. Daher sollen sich die folgenden Ausführungen lediglich auf nichtlineare SISO-Systeme mit nur einem Ein- und einem Ausgang beziehen.

Das Prinzip der exakten Linearisierung geht zunächst von einem

transformierbaren nichtlinearen Systemmodell aus. Um eine Koordinatentransformation der Form

$$\underline{\xi} = \underline{T}(\underline{x}) \quad (2.34)$$

durchzuführen, bedient man sich der Lie-Ableitung nach Definition 9.

**Definition 9** (Lie-Ableitung [3, 85, 88, 4]). *Die Richtungsableitung einer Funktion mehrerer Veränderlicher  $f(\underline{x})$  entlang eines Vektorfeldes  $\underline{v}(\underline{x})$*

$$\langle \text{grad}(f(\underline{x})), \underline{v}(\underline{x}) \rangle = \left\langle \frac{\partial f^T}{\partial \underline{x}}, \underline{v}(\underline{x}) \right\rangle = L_{\underline{v}}f(\underline{x}) \quad (2.35)$$

wird in der Differentialgeometrie auch **Lie-Ableitung** von  $f$  bezüglich  $\underline{v}$  bezeichnet. Das Bilden der mehrfachen Richtungsableitung bezüglich eines Vektorfeldes  $\underline{v}$  führt zu den mehrfachen Lie-Ableitungen, die mit

$$L_{\underline{v}}^i f(\underline{x}) = \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \left( L_{\underline{v}}^{i-1} f(\underline{x}) \right) f(\underline{x}) \quad (2.36)$$

definiert sind.

Die zeitliche Ableitung des Systemausgangs  $y(t) = c(\underline{x})$  eines nichtlinearen SISO-Systems in der Beschreibungsform nach Gl. (2.17) lässt sich mit Anwendung der Lie-Ableitung durch

$$L_{\underline{f}}c(\underline{x}) = \frac{\partial c}{\partial \underline{x}} \underline{f}(\underline{x}, u) = \frac{\partial c}{\partial \underline{x}} \dot{\underline{x}} = \dot{y}(t) \quad (2.37)$$

beschreiben.

Ist die Systemordnung  $n$  gleich der Differenzenordnung  $\delta$  des transformierten Systems, ergibt sich für das SISO-System (2.20) durch  $\delta$ -faches zeitliches Ableiten der Ausgangsgröße  $y(t)$  die

**nichtlineare Regelungsnormalform** [3, 62, 123] mit der Struktur

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{\delta-1} \\ \dot{\xi}_\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{\underline{a}}c(\underline{x}) \\ \vdots \\ L_{\underline{a}}^{\delta-1}c(\underline{x}) \\ L_{\underline{a}}^\delta c(\underline{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_\delta \\ \alpha(\underline{x}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta(\underline{x}) \end{pmatrix} u(t),$$

$$y = \underline{C}\underline{\xi} = \xi_1. \quad (2.38)$$

Weil die exakte Linearisierung auf der Kompensation existierender Nichtlinearitäten beruht, ist es mit der zeitkontinuierlichen Steuerfunktion

$$u(t) = \frac{\begin{pmatrix} -a_0 & \dots & -a_{\delta-1} & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_\delta \\ w \end{pmatrix} - \alpha(\underline{x})}{\beta(\underline{x})} \quad (2.39)$$

möglich, das System exakt zu linearisieren und mit den Parametern  $a_0, a_1, \dots, a_{\delta-1}$  und  $b$  eine, in gewissen Grenzen fest vorgebbare lineare Dynamik zu definieren [110, 85, 3]. Sind die beiden nichtlinearen Funktionen  $\alpha(\underline{x})$  und  $\beta(\underline{x})$  vollständig bekannt, ergibt sich durch Einsetzen von (2.39) in (2.38) das lineare System-

modell in den transformierten Koordinaten in Gleichung (2.40).

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{\delta-1} \\ \dot{\xi}_\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{\delta-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_\delta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{pmatrix} w(t),$$

$$y = \xi_1. \quad (2.40)$$

Ist die Differenzenordnung  $\delta$  kleiner der Systemordnung  $n$  in Originalkoordinaten und damit  $\delta < n$  gilt, ergibt sich das transformierte System [3] mit

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \vdots \\ \dot{\xi}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{\underline{a}}c(\underline{x}) \\ \vdots \\ L_{\underline{a}}^\delta c(\underline{x}) \\ \dot{T}_{\delta+1}(\underline{x}) \\ \vdots \\ \dot{T}_n(\underline{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_\delta \\ \alpha(\underline{x}) \\ \dot{T}_{\delta+1}(\underline{x}) \\ \vdots \\ \dot{T}_n(\underline{x}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta(\underline{x}) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} u(t),$$

$$y = \underline{C}\underline{\xi} = \xi_1. \quad (2.41)$$

In diesem Fall besitzt das transformierte System eine **Nulldynamik** nach Definition 8 [3, 142, 123]. Damit ist das Gesamtsystem nur dann stabil, wenn das transformierte System mit dem relativen Grad  $\delta$  und die internen Dynamiken stabil sind. Existieren interne Dynamiken in der transformierten Modellgleichung, so ist es zwingend erforderlich eine Stabilitätsprüfung dieser Nulldynamik durchzuführen um die Stabilität des exakt linearisierten Gesamtsystems gewährleisten zu können. Für die eindeutige

## 2 Ausgewählte Aspekte der Regelung technischer Systeme

---

Transformation (2.34) sind nach [3] die Terme  $T_{\delta+1} \dots T_n$  geeignet aber frei wählbar, solange sie Lösungen der partiellen Differentialgleichungen  $\dot{\xi}_i = \dot{T}_i(\underline{x}) = \frac{\partial T_i}{\partial \underline{x}} \dot{\underline{x}}$ ,  $i = \delta+1..n$  sind.

Für eine weiterführende und tiefgründigere theoretische Beschreibung des Verfahrens sei an dieser Stelle auf die Literaturquellen [3, 63, 62, 35, 123, 142, 110] verwiesen.



# 3 Modellierung pneumatischer Druck- und Durchflusstrecken

Das folgende Kapitel beschäftigt sich mit der Modellierung pneumatischer Druck- und Durchflusstrecken. In Bezug auf die praktische Relevanz im späteren Teil der Arbeit, sollen die resultierenden Systemmodelle weniger die Strömung bzw. Strömungsvorgänge des Fluids im Detail beschreiben. Vielmehr ist das Hauptaugenmerk auf die thermodynamischen Zustandsgrößen selbst gerichtet, welche an der Stelle  $x$  zur Umsetzung der technischen Zielsetzung dienen.

## 3.1 Grundbegriffe und Definitionen

Die Modellierungsaufgabe technischer Systeme ist ein weites Arbeitsgebiet der Systemtechnik und der Systemanalyse. Als Berechnungsgrundlage dienen vor allem physikalische Erhaltungssätze, wie beispielsweise der

- Energieerhaltungssatz,
- Massenerhaltungssatz und
- Impulserhaltungssatz

um eine Systembeschreibung in Form von Differentialgleichungen zu erhalten. Diese Fundamentalsätze finden auch in strömungstechnischen Modellierungsaufgaben ihre Anwendung. So lassen

### 3 Modellierung pneumatischer Druck- und . . .

---

sich auch pneumatische Strecken mit Hilfe thermodynamischer Grundlagen und dem Wissen aus der Strömungslehre beschreiben. Eine Einteilung thermodynamischer Systeme lässt sich nach

<b>Bezeichnung</b>	<b>Beschreibung</b>
Offenes System	Ein offenes System ist durchlässig für Materie und lässt einen Energieaustausch (zum Beispiel in Form von Wärme) zu. Die Systemgrenzen offener Systeme werden von mindestens einer Stoffströmung durchsetzt.
Geschlossenes System	Ein geschlossenes System ist undurchlässig für Materie und lässt einen Energieaustausch (zum Beispiel in Form von Wärme) zu. Die Systemgrenzen geschlossener Systeme werden damit durch keinerlei Stoffströmung durchsetzt.
Abgeschlossenes System	Abgeschlossene Systeme sind undurchlässig für Materie und lassen auch keinen Energieaustausch zu. Abgeschlossene Systeme sind damit undurchlässig für jegliche Art von Stoffströmungen. Damit kein Energieaustausch in Form von Wärme stattfinden kann, müssen abgeschlossene Systeme ausreichend isoliert sein.

**Tabelle 3.1.** Einteilung thermodynamischer Systemklassen

[106, 53, 117] und [52] durch die Art ihrer Systemgrenzen in die in Tabelle 3.1 beschriebenen Klassen einordnen. Als technisch relevante Klassifizierung im pneumatischen Anwendungsfeld können allerdings nur *offene* und *geschlossene Systeme* genannt werden. Abgeschlossene Systeme treten in industriellen Anwendungen, in denen Pneumatik eingesetzt wird, so gut wie nie auf. Grund dafür ist die (meist) fehlende Isolierung der Luftführenden Rohrleitungen. Diese erlauben durch die vorhandene Konvektion einen Wärmeaustausch mit der Umgebung und widersprechen damit der Definition eines abgeschlossenen Systems. Der Zustand der Systeme innerhalb ihrer genannten Einteilungen ist durch die Zustandsgrößen beschreibbar. Thermodynamische Zustandsgrößen sind nach [53, 137] in *kalorische* und *thermische Zustandsgrößen* unterteilt. Unter dem Begriff der thermischen Zustandsgrößen fallen nach [84, 53]

- die Temperatur  $\vartheta$ ,
- der Druck  $p$  und
- das Volumen  $V$  eines Gases.

Der Begriff der kalorischen Zustandsgrößen beinhaltet nach [53, 137] hingegen die

- die innere Energie  $U$ ,
- die Enthalpie  $H$  und die
- Entropie  $S$ .

Das Arbeitsmedium innerhalb pneumatischer Anwendungen ist komprimierte Luft. Da Luft als annähernd ideales Gas angesehen werden kann [156, 139], ist die Gültigkeit der *allgemeinen Zustandsgleichung idealer Gase* [53, 145, 52]

$$pV = mR_m\vartheta \quad \text{bzw.} \quad pv = R_m\vartheta \quad (3.1)$$

in guter Näherung anzunehmen und kann damit auch zur mathematischen Streckenmodellierung herangezogen werden. Dabei ist  $m$  die Gesamtmasse des Gases,  $R_m$  die spezielle Gaskonstante und  $v = \frac{1}{\varrho}$  das spezifische Volumen.

## 3.2 Massenerhaltung und Kontinuität

Einer der wichtigsten Erhaltungssätze in der Physik, insbesondere im Bezug zur Modellierung pneumatischer Systeme, ist der **Massenerhaltungssatz**. Für Systeme mit Zu- und Abflussmöglichkeiten führt dieser Satz weiter zur bekannten **Kontinuitätsgleichung**. Die Grundaussage zum Erhalt der Masse lässt sich zu der folgenden Formulierung zusammenfassen.

**Satz 1** (Massenerhaltung [140, 141, 133]). *Die Masse innerhalb eines geschlossenen Systems bleibt konstant. Für offene Systeme ist die zeitliche Änderung der Masse in innerhalb eines räumlich definierten Bereichs  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^3$  gleich der Differenz von zeitlich einströmender zu ausströmender Masse.*

Aus dieser Formulierung heraus, lässt sich bezugnehmend auf die Klasse der offenen Systeme, die mathematische Beschreibung unter Hinzunahme der räumlichen Massendichteverteilung  $\varrho(x, y, z)$  mit

$$\dot{m} = \dot{m}_{\text{ein}} - \dot{m}_{\text{aus}} = \frac{d}{dt} \iiint_{\mathbf{B}} \varrho(x, y, z) dV = \text{konstant} \quad (3.2)$$

heraus ableiten [133]. Diese zeitliche Massenänderung innerhalb eines definierten Bereichs  $\mathbf{B}$  kann durch das Vertauschen von zeitlicher Differentiation und räumlicher Integration zu der Formulierung

$$\frac{dm}{dt} = \iiint_{\mathbf{B}} \left( \frac{d\varrho}{dt} dV + \varrho \frac{dV}{dt} \right) = \text{konstant} \quad (3.3)$$

umgeschrieben werden. Nach [137, 133] und [145] ist mit Hilfe des totalen Differentials

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

die folgende Beschreibungsgleichung zur Modellierung der zeitlichen Massenänderung heraus ableitbar.

$$\begin{aligned} \dot{m} &= \iiint_{\mathbf{B}} \left( \frac{d\rho}{dt} dV + \rho \left( \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial V}{\partial z} \dot{z} \right) \right) \\ &= \iiint_{\mathbf{B}} \left( \frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div}(\rho \underline{c}) \right) dV = \text{konstant} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Gleichung (3.4) entspricht der allgemein bekannten Kontinuitätsgleichung eines verlustlosen Strömungsvorgangs in Integralform. Diese Strömung breitet sich mit der Strömungsgeschwindigkeit  $c$  innerhalb des definierten Bereichs  $\mathbf{B}$  aus.

Die zeitliche Änderung der Masse  $\frac{dm}{dt} = \dot{m}$  ist auch als **Massenstrom** definiert. Findet die Betrachtung des Massenstroms innerhalb einer Rohrströmung statt, so ist davon auszugehen, dass innerhalb des Rohres als Weiterleitungsglied der Massenstrom nach dem Gesetz der Kontinuität konstant ist. Dies gilt sofern es sich um ein gut abgedichtetes Rohr ohne Leckagen<sup>1</sup> handelt. Ist diese Bedingung gewährleistet, kann aus (3.4) die partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div}(\rho \underline{c}) = 0 = f(x, y, z, t), \quad (3.5)$$

abgeleitet werden. Diese Differentialgleichung wird in der Technik auch **Transportgleichung** genannt und beschreibt die zeit-

---

<sup>1</sup>Als Leckage werden all diese ungewollten Strömungen bezeichnet, die aufgrund einer Undichtigkeit (ein Leck) in das bzw. aus dem System ein- bzw. ausströmen.

### 3 Modellierung pneumatischer Druck- und . . .

liche Änderung der Dichte innerhalb des betrachteten räumlichen Koordinatensystems. In [133] wird erwähnt, dass sich die einzelnen Terme aus (3.5) den in Tabelle 3.2 beschriebenen Bedeutungen zuordnen lassen.

Term	Bezeichnung	Bedeutung
$\frac{d\rho}{dt}$	Transienter Term	Der transiente Term beschreibt die zeitliche Änderung der Dichte an der Stelle $(x, y, z)$ .
$div(\rho\vec{c})$	Konvektiver Term	Der konvektive Term ist als Ausdruck des Transports durch die Strömung zu verstehen.
$f(x, y, z, t)$	Quelle oder Senke	Anregendes Funktional, welches als Ursache einer beginnenden Strömung anzusehen ist.

**Tabelle 3.2.** Bedeutung der Einzelterme innerhalb der Transportgleichung [133]

Die Transportgleichung (3.5) beschreibt damit einen von Raum und Zeit abhängigen Ausbreitungsvorgang. Dieser ist durch die zeitliche Massendichteänderung eines allgemein kompressiblen Fluides charakterisiert. Ebenso kann aus diesem Zusammenhang her auch abgeleitet werden, dass der Transport des eigentlichen Arbeitsmediums entlang einer Rohrleitung Zeit benötigt. Im Hinblick auf die später untersuchten regelungstechnischen Aufgabenstellungen bedeutet das vor allem, dass davon ausgegangen werden muss den Transportvorgang bei langen Rohrleitungssystemen mit zu berücksichtigen.

### 3.3 Massenstrom und Luftmenge

Der Massenstrom  $\dot{m}$  eines Fluids wird allgemein als zeitlicher Durchfluss eines Mediums durch einen gewissen Querschnitt  $A$  bezeichnet. Diese Aussage liegt darin begründet, dass sich aus der Kontinuitätsgleichung (3.4) die Beziehung

$$\dot{m} = \iiint_{\mathbf{B}} \operatorname{div}(\rho \vec{c}) dV = \oiint_{\partial V} \rho \vec{c} \cdot d\vec{A} \quad (3.6)$$

für durchströmte Rohre ableiten lässt. Grund dafür ist die fehlende zeitliche Änderung der Dichte ( $\frac{d\rho}{dt} = 0$ ) senkrecht zum durchströmten Rohrquerschnitt  $A = A_R$ . Nach [133, 117] gilt diese Aussage auch bei kompressiblen Medien, obwohl die Dichteverteilung eines strömenden Gases entlang der führenden Rohrleitung sehr unterschiedlich ist. Daher ist es möglich, aus (3.6) die Beziehung

$$\dot{m} = \rho \cdot c \cdot A_R \quad (3.7)$$

zu berechnen. Gleichung (3.7) wird nach [133] auch als *allgemeine Durchflussgleichung* in der Stromfadentheorie bezeichnet und besitzt für inkompressible wie auch für kompressible Medien gleichermaßen Gültigkeit.

### 3.4 Strömungsvorgänge kompressibler Medien

Druck- und Temperaturänderungen innerhalb kompressibler Fluide führen bei diesen Arbeitsmedien zu einer Volumen- bzw. Dichteänderung. Diese Effekte treten auch bei Strömungsvorgängen der Fluide auf und müssen dementsprechend mit berücksichtigt werden. Die Mach-Zahl „**Ma**“ dient dabei als Kenngröße kompressibler Strömungen. Sie ist nach [133] und [145] aus dem Ver-

hältnis von Strömungsgeschwindigkeit  $c$  zur Schallgeschwindigkeit  $c_S$  mit

$$Ma = \frac{c}{c_S} \quad (3.8)$$

definiert. Mit Hilfe dieser Kennzahl werden nach [170, 145, 132] und [141] kompressible Strömungen in die folgenden drei verschiedene Strömungsbereiche unterteilt.

$Ma < 1$	<b><i>Unterschallbereich</i></b> für $Ma \leq 0,3$ „quasi-inkompressibel“ für $Ma \approx 0,3$ bis $0,75$ subsonischer Bereich
$Ma \approx 1$	<b><i>Transsonischer Bereich</i></b> Die Strömungsgeschwindigkeit ist mit $0,8 < Ma < 1,2$ nahe der Schallgeschwindigkeit
$Ma > 1$	<b><i>Überschallbereich</i></b> supersonischer Bereich

Handelt es sich um Gase oder Dämpfe, so kann nach Angaben verschiedener Literaturquellen (wie z.B. [133] und [42]), die Kompressibilität dieser Medien bis etwa zu einer Mach-Zahl von  $Ma \leq 0,3$  vernachlässigt und das Medium als quasi-inkompressibel angesehen werden.

Zur Vervollständigung sei noch die Charakterisierung des eigentlichen Strömungsverhaltens eines Fluids anhand der Ähnlichkeitsgröße **Reynoldszahl** „*Re*“ genannt [140, 51, 156, 12]. Die Reynoldszahl ist als Funktion der Strömungsgeschwindigkeit mit

$$Re = f(c) = \frac{c \cdot D}{\nu} \quad (3.9)$$

definiert [133, 140, 141]. Dabei sind  $D$  der Durchmesser der Strömungsführung und  $\nu$  die kinematische Viskosität des Fluids. In der Fluidmechanik kann anhand dieser Größe zwischen



$Re < Re_{\text{kritisch}}$     **unterkritischer Fall**    Die Strömung weist laminares Verhalten auf

$Re > Re_{\text{kritisch}}$     **überkritischer Fall**    Die Strömung weist turbulentes Verhalten auf

$Re = Re_{\text{kritisch}}$     **kritischer Fall**

unterschieden werden [145, 137, 156].

### 3.4.1 Strömungsgeschwindigkeit $c$

In der technischen Strömungslehre und Fluidmechanik ist nach [133, 141] die Strömungsgeschwindigkeit als die Geschwindigkeit einzelner Fluidteilchen entlang eines Stromfadens<sup>2</sup> innerhalb der eigentlichen Strömung definiert. Sie lässt sich für kompressible als auch für inkompressible Medien aus der Energiebilanz und dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik berechnen.

**Satz 2** (Erster Hauptsatz der Thermodynamik [53, 52, 133]).  
*Die Änderung der inneren Energie  $U$  wird allein durch Arbeit  $W$  oder Wärme  $W_q$  hervorgerufen. Dieser Zusammenhang lässt sich in der differentiellen Form*

$$dU = dW_q + dW \quad (3.10)$$

*beschreiben. In der Thermodynamik stellt die innere Energie ein Maß für die thermische Bewegung der Gasteilchen dar [51, 156].*

Neben der inneren Energie  $U$ , der kinetischen Bewegungsenergie  $E_{kin} = m \frac{c^2}{2}$  und der Lageenergie  $E_{pot} = mgz$  existieren noch

---

<sup>2</sup>Als **Stromfaden** bezeichnet man eine Tangentenkurve am Geschwindigkeitsvektor im Strömungsfeld mit infinitesimal kleinem Querschnitt. Innerhalb diesen Querschnitts sind Dichte, Temperatur, Druck und Strömungsgeschwindigkeit jeweils konstant [133, 141].

### 3 Modellierung pneumatischer Druck- und . . .

---

weitere Energieformen in einer Gasströmung. Zunächst sei daher die Druckenergie mit

$$W_p = \int_{x_1}^{x_2} p \cdot A dx = pV = m \frac{p}{\rho} \quad (3.11)$$

genannt [156, 133]. Handelt es sich bei dem strömenden Fluid um ein reales Gas in „rauer“ Umgebung, so müssen nach [133] auftretende Strömungsverluste infolge von innerer und auch äußerer Reibung mit berücksichtigt werden. Ein Teil der kinetischen Energie wird so als Reibungsarbeit  $W_R$  in Wärme  $W_q$  dissipiert [133].

Unter Berücksichtigung aller auftretenden Energieformen ist es mit dem allgemeinen Energieerhaltungssatz [52, 157] einer reibungsbehafteten Strömung möglich, die Energiebilanz

$$\begin{aligned} E_{Ges} &= E_{pot} + W_p + E_{kin} + U \\ &= mgz + m \frac{p}{\rho} + m \frac{c^2}{2} + U + W_R - W_q = \text{konstant} \end{aligned} \quad (3.12)$$

einer verlustbehafteten realen Strömung darzustellen. Gleichung (3.12) besitzt zunächst für inkompressible als auch für kompressible Fluide gleichermaßen Gültigkeit.

Weil die Dichte von Luft nicht sehr hoch und damit deren Masse vernachlässigbar klein ist, kann der vorhandene Gravitations-einfluss, und somit die Lageenergie  $E_{pot}$ , für nicht allzu große Höhenunterschiede  $\Delta z$  unberücksichtigt bleiben [145, 133].

In der technischen Fluidmechanik/Strömungslehre ist die kalorische Zustandsgröße Enthalpie mit

$$H = U + pV \quad (3.13)$$

definiert [52, 133, 12]. Daher reduziert sich die Energiebilanz

(3.12) zu der massenbezogenen Energiebilanz

$$\frac{c^2}{2} + \frac{H + W_R - W_q}{m} = \frac{c^2}{2} + h + w_R - w_q = \text{konstant}, \quad (3.14)$$

aus der sich nun wiederum die Strömungsgeschwindigkeit  $c$  berechnen lässt.

Weil nach [133] und [145] die spezifische Reibarbeit  $w_R$  gleich der dissipierten spezifischen Wärme  $w_q$  sein muss, ist die Strömungsgeschwindigkeit aus der spezifischen Enthalpiedifferenz  $\Delta h = h_1 - h_2$  und der (bekannten) Einströmgeschwindigkeit  $c_1$  mit

$$c_2 = \sqrt{c_1^2 + 2\Delta h} \quad (3.15)$$

zu berechnen [133, 141]. Die Strömungsgeschwindigkeit ist demnach direkt vom spezifischen Enthalpiegefälle  $\Delta h = h_1 - h_2$  sowie der kinetischen Einströmenergie  $\frac{c_1^2}{2}$  an der Stelle  $x = x_1$  abhängig.

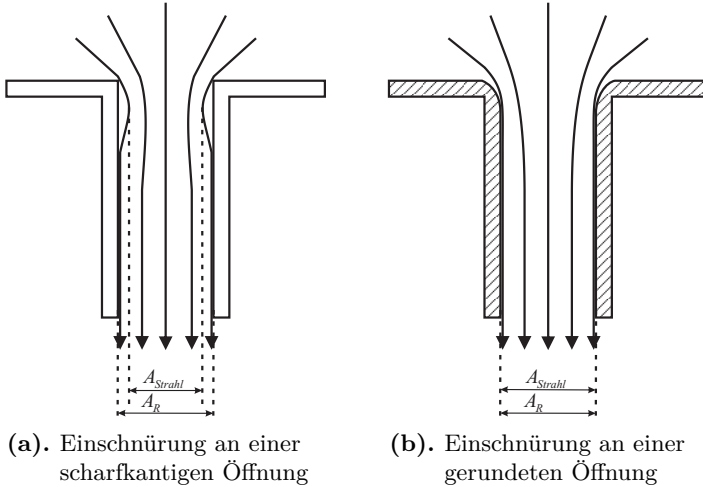
### 3.4.2 Strahlkontraktion und Geschwindigkeitsreduktion

Wird ein Fluid scharf umgelenkt oder tritt es in eine scharfkantige Öffnung ein, führt dieser Vorgang zum Effekt der Strahlein-schnürung (auch: Strahlkontraktion genannt, siehe auch Abbildung 3.1) [133, 141, 170].

Dieser Effekt ist mit der Definition der Kontraktionszahl  $\alpha_Q$  als Funktion der mechanischen Öffnungsform modellierbar. Der minimale Strahlquerschnitt durch die durchströmte Öffnung ist daher aus Gleichung (3.16) bestimmbar.

$$A_{\text{Strahl}} = \alpha_Q \cdot A_R \quad (3.16)$$

Nach [133] ist die Kontraktionszahl  $\alpha_Q$  experimentell zu bestimm-



**Abbildung 3.1.** Strahleinschnürungen an verschiedenen Mündungsformen

men und kann unter anderem die in Tabelle 3.3 angegebenen Größenordnungen annehmen.

Öffnungsform	Zahlenwert $\alpha_Q$
scharfkantige Öffnung (Bohrung)	0,61...0,64
gerundete Öffnung	$\approx 1$

**Tabelle 3.3.** Beispielwerte der Kontraktionszahl  $\alpha_Q$  nach [133]

Je größer die Strahlkontraktion im Einschnürbereich ist, desto größere Reibungsverluste treten innerhalb dieses Bereichs auf und führen so zu einer Verringerung der Strömungsgeschwindigkeit aufgrund der reduzierten kinetischen Energie durch diese dissipativen Anteile [133]. Dieser Effekt ist wiederum mit der De-

definition der Geschwindigkeitszahl  $\varphi_Q$  zu berücksichtigen. Genau wie  $\alpha_Q$ , ist  $\varphi_Q$  experimentell zu bestimmen [133].

Weil in experimentellen Versuchen die beiden Öffnungskennzahlen  $\alpha_Q$  und  $\varphi_Q$  nur schwer auseinanderzuhalten sind, führt man den Begriff der **Ausflusszahl**

$$\mu_Q = \alpha_Q \cdot \varphi_Q \quad (3.17)$$

ein [133, 53]. Aufgrund des Effektes der Strahleinschnürung wird eine Reduzierung des Massenstroms in Gleichung (3.7) bewirkt. Aus diesem Grund ist Gleichung (3.7) mit

$$\dot{m} = \varrho \cdot \varphi_Q \cdot c \cdot \alpha_Q \cdot A_R = \mu_Q \cdot \varrho c A_R \quad (3.18)$$

für die reale Berechnung des Massenstroms zu erweitern.

#### 3.4.3 Strömungen in pneumatischen Rohren

Die Zuleitung des mit dem Ventil steuerbaren Luftmassenstroms findet in der Praxis durch eine pneumatische Rohrleitung der Länge  $l$  und dem Rohrquerschnitt  $A_R$  statt. Die Führung einer Rohrleitung kann verschiedene Umlenkstellen sowie diverse Verbindungselemente beinhalten, die zum Effekt der Strahleinschnürung und somit zur Geschwindigkeitsreduktion führen. Die Innenwandung eines pneumatischen Rohrs besitzt zudem eine gewisse Rauheit, so dass reale Gase durch die auftretende Rohrreibung in ihrer Strömung beeinflusst werden.

Aus [133] und [145] ist bekannt, dass sich die Strömungsgeschwindigkeit für reibungsfreie (isentrope) Strömungen aus (3.15) mit dem Isentropenexponent  $\kappa$  durch

$$c_1^* = \sqrt{c_0^2 + 2 \cdot \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_1}{\varrho_1} \left( 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right)} \quad (3.19)$$

### 3 Modellierung pneumatischer Druck- und . . .

---

berechnen lässt. Infolge innerer und äußerer Reibung realer Fluide mit der Strömungsgeschwindigkeit  $c_1$  ist nach [133] das Entalpiegefälle  $\Delta h = h_1 - h_2$  kleiner als bei reibungsfreien idealen Strömungen mit der theoretisch berechneten Strömungsgeschwindigkeit  $c_1^*$ . Daher kommt es auch in dieser Betrachtung zu einer Geschwindigkeitsreduktion der Form

$$c_1 = \varphi_c \cdot c_1^*. \quad (3.20)$$

Zusammengefasst kann somit der Massenstrom (3.7) am Rohreintrittsort als Funktion der Strömungsgeschwindigkeit mit

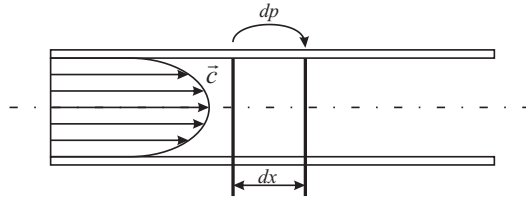
$$\begin{aligned} \dot{m} &= \mu_Q \cdot \varrho_1 \cdot A_R \sqrt{c_0^2 + 2 \cdot \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_1}{\varrho_1} \left( 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right)} \\ &= \mu_Q \cdot A_R \cdot p_1 \cdot \Psi \sqrt{\frac{2}{R\vartheta}} \end{aligned} \quad (3.21)$$

beschrieben werden. Ist der Einfluss der kinetischen Zuströmenergie vernachlässigbar klein, d.h. gilt näherungsweise der Sachverhalt  $c_0 \approx 0$ , so reduziert sich das Funktional  $\Psi = \Psi \left( \frac{p_2}{p_1} \right)$  aus Gleichung (3.21) zu

$$\Psi(p) = \sqrt{\frac{\kappa}{\kappa - 1} \left( \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{2}{\kappa}} - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa}} \right)}. \quad (3.22)$$

Wie in [133, 141, 12] und [60] beschrieben ist, wird (3.22) auch als **Ausflussfunktion** bezeichnet. Die Berechnung der Ausflussfunktion in Gleichung (3.22) besitzt vor allem dann Gültigkeit wenn es sich um ein Ausströmen aus großen Behältern handelt. Ebenso ist es aber auch möglich Gleichung (3.22) in guter Näherung für pneumatische Druckregelventile mit vorgeschalteten Puffervolumen anzuwenden. Je nach Strömungsrichtung sind die

Drücke  $p_1$  und  $p_2$  zu definieren.



**Abbildung 3.2.** Schematische Luftströmung in einem Rohr

Zur Berechnung beschleunigter kompressibler Strömungen kann nach [141] die spezifische Reibungsarbeit

$$\Delta h_R = \lambda_R \frac{c^2}{2D} \Delta x \quad (3.23)$$

mit der Rohrreibungszahl  $\lambda_R$  herangezogen werden. Handelt es sich um laminare Strömungen, so ist die Rohrreibungszahl nach dem Gesetz von Hagen-Poiseulle mit

$$\lambda_R = \frac{\text{konstant}}{Re} \quad (3.24)$$

eine Funktion der Rohrrauigkeit als auch der Reynoldszahl [133, 132, 156, 145, 170]. Hat man es im Gegensatz dazu mit einer rau turbulenten Strömung zu tun, so ist die Rohrreibungszahl  $\lambda_R$  lediglich eine Funktion der Rauheit [145, 141].

Beschleunigte kompressible Strömungen sind aufgrund der von Reibung verursachten Temperaturerhöhung  $d\vartheta$  im Gas zu erklären [141]. Die darauf folgende Verringerung der Dichte führt aufgrund der geforderten Massenstromkontinuität in stationären Strömungen ( $\dot{m} \stackrel{!}{=} \text{konst.}$ ) zu der Beschleunigungskraft

$$F_B = \frac{d}{dt}(m \cdot c) = A_R \cdot \rho c dc. \quad (3.25)$$

Aus der sich damit ergebenden Bewegungsgleichung (vgl. auch in [133, 141, 12])

$$\lambda_R \frac{c^2}{2D} dx + cdc + \frac{dp}{\varrho} = 0 \quad (3.26)$$

lassen sich Geschwindigkeit und Druckabfall  $dp$  (siehe auch Abbildung 3.2) entlang eines strömungsführenden Rohres numerisch iterativ bestimmen. Die analytische Beschreibung des Druckabfalls entlang einer durchströmten Rohrleitung ist nach [145, 133] und [156] mit

$$\Delta p \approx \lambda_R \cdot \varrho_1 \frac{l}{2D} \cdot c_1^2, \quad (3.27)$$

aus der Bewegungsgleichung (3.26) näherungsweise gegeben. Sie beschreibt approximativ den Druckabfall entlang eines pneumatischen Rohres der Länge  $l$  mit Innendurchmesser  $D$  und kann damit für die Modellbildung pneumatischer Systeme verwendet werden.

## 3.5 Generalisierung und Analogie zur Elektrotechnik

### 3.5.1 Generalisierte Koordinaten

Aus Abschnitt 3.1 ist bekannt, dass der Zustand thermodynamischer Systeme anhand der vorhandenen Zustandsgrößen beschrieben wird. In der Elektrotechnik entsprechen die elektrische Spannung  $u(t)$  und der elektrische Strom  $i(t)$  den elementaren physikalischen Zustandsgrößen. Bezugnehmend auf die vorangegangenen Abschnitte zur Modellierung pneumatischer Strömungsvorgänge, können demnach der für die Fluidströmung charakterisierende Massenstrom  $\dot{m}$  und der vorhandene Druck  $p$  als generalisierte Koordinaten festgelegt werden. Per Definition ist



es daher legitim die verallgemeinerte Stromvariable

$$i_Q(t) \hat{=} \dot{m}(t) \quad (3.28)$$

und verallgemeinerte Spannungsvariable

$$u_p(t) \hat{=} p(t) \quad (3.29)$$

festzulegen. Wie allgemein bekannt ist, ist die Spannung als Ursache des als Wirkung zu verstehenden Stroms zu betrachten.

### 3.5.2 Analogiebetrachtungen

#### Speichervermögen (Kapazität)

Der Begriff **Kapazität** bezieht sich auf die Speicherfähigkeit eines Objekts. Für elektrische Systeme ist die Menge aller Ladungsträger, dessen Verteilung sich durch die Raumladungsdichte  $\varrho_{el}(x, y, z)$  beschreiben lässt, durch Integration über das gesamte betrachtete Volumen  $V$  gleich der elektrischen Ladung  $Q_{el}$  [30]. Die elektrische Raumladungsdichte ist als Analogon der räumlichen Massendichteverteilung  $\varrho(x, y, z)$  zu verstehen. Die Integration von  $\varrho(x, y, z)$  über das Gesamtvolumen  $V$  entspricht der Gesamtmasse  $m$ . Aus diesem Zusammenhang her abgeleitet, ist die mathematische Beschreibung

$$Q_{el} = \iiint_V \varrho_{el} dV \hat{=} m = \iiint_V \varrho(x, y, z) dV \quad (3.30)$$

genau dieser Formulierung äquivalent. Der aus der bekannten Proportionalität zwischen Ladung und Spannung definierte Integralparameter Kapazität  $C$ , ist dementsprechend mit

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\iiint_V \varrho_{el} dV}{\int_{l_1}^{l_2} E dl} \hat{=} \frac{m}{p} = \frac{V}{R_m \cdot \vartheta} = \frac{A_R}{R_m \cdot \vartheta} l = C_p \quad (3.31)$$

als Ähnlichkeitsgröße abzuleiten [156]. In thermodynamischen Systemen ist dieser Integralparameter nicht nur von den geometrischen Gegebenheiten abhängig, sondern wird auch durch die thermische Zustandsgröße Temperatur  $\vartheta$  mit beeinflusst.

#### Induktivität

Als Induktivität wird in der Elektrotechnik die Größe bezeichnet, die die Änderung der magnetischen Flussdichte mit dem daraus verursachten elektrischen Feld verknüpft. Aus den Maxwell'schen Gleichungen und dem Satz von Stokes ist es daher möglich, den Integralparameter

$$L = \frac{d\Psi}{di} = \frac{\iint B dA}{\oint H dl} \rightarrow u(t) = -L \frac{di}{dt} \quad (3.32)$$

als *elektrische Induktivität* zu definieren [30].

Induktivitäten verknüpfen die Spannung mit der zeitlichen Änderung von Strömen. Dieser Aussage entsprechend, kann der geltende Zusammenhang von Druckdifferenzen und der zeitlichen Änderung von Massenflüssen aus Abschnitt 3.4.3 dazu genutzt werden, auch thermodynamische Induktivitäten zu definieren.

In der Strömungstechnik wird das Auftreten von Trägheitskräften durch den aus Abschnitt 3.4.3 bekannten Reibkräften verursacht. Dabei spielt Rohrreibung als auch innere Reibung der Luftmoleküle eine wesentliche Rolle. Findet Reibung statt, wird Bewegungsenergie in Wärme dissipiert. Die sich daraus ergebende Erhöhung der Gastemperatur hat zur Folge, dass die Fluidichte nach thermodynamischen Gesetzen abnimmt. Da aber auch in diesem Fall die Kontinuität des Massenstroms aus Gleichung (3.4) gelten muss, wird die Strömung demnach eine Beschleunigung erfahren müssen. Aus der daraus resultierenden

Kraftänderung

$$dF = d\left(m \frac{dc}{dt}\right) = \rho A dx \frac{dc}{dt} = \frac{\rho A dc}{dt} dx = \frac{d\dot{m}}{dt} dx = A dp, \quad (3.33)$$

welche durch die genannten Effekte und Erhaltungssätze hervorgerufen wird, kann die auftretende Druckänderung mit

$$dp = \frac{d\dot{m}}{dt} \frac{dx}{A} \quad (3.34)$$

berechnet werden. Ist die zeitliche Änderung des im Rohr strömenden Massenstroms  $\dot{m}$  nicht vom Weg abhängig, so kann durch Integration der Druckänderung  $dp$  entlang des Weges  $x$  der Druckabfall mit der Gleichung

$$p_{12} = \frac{d\dot{m}}{dt} \int_{l_1}^{l_2} \frac{1}{A} dx = L_p \frac{d\dot{m}}{dt} \quad (3.35)$$

modelliert werden. Die zeitliche Änderung des Massenstroms verursacht demnach eine Druckänderung entlang des Weges  $x$ . Diese beiden Größen sind somit durch die thermodynamische Induktivität

$$L_p = \frac{l}{A} \quad (3.36)$$

direkt verkoppelt [156]. Die Induktivität einer geradlinigen Rohrleitung ist damit ausschließlich von den geometrischen Gegebenheiten entlang des Weges  $x$  abhängig.

### Widerstand und Leitwert

Der elektrische Widerstand  $R_{el}$  ist in der Elektrotechnik durch das ohm'sche Gesetz

$$R_{el} = \frac{u}{i} = \frac{\int_l E dl}{\iint_A J dA} \quad (3.37)$$

### 3 Modellierung pneumatischer Druck- und . . .

---

als Integralparameter definiert [30]. Der elektrische Widerstand kann keine Energie speichern und ist damit als rein dissipatives Bauelement zu betrachten, welches einen Teil elektrischer Energie in Wärme umwandelt. Die Inversion von  $R_{el}$  führt zum elektrischen Leitwert

$$G_{el} = \frac{1}{R_{el}} = \frac{i}{u}. \quad (3.38)$$

Beide Parameter stellen einen linearen Zusammenhang zwischen Stromfluss und Spannung bzw. einem Spannungsabfall her.

Auch in der Strömungstechnik können Leitwert und Widerstand, die den direkten Zusammenhang zwischen Luftmenge und Druckdifferenz herstellen, definiert werden. Nach ISO 6358 [64] kann für strömungstechnische Komponenten ein konstanter Leitwert angegeben werden, welcher bei maximalen Durchfluss im überkritischen Bereich zu bestimmen ist. Ein technisch interessanter Anwendungsfall stellen Blenden oder allgemein Öffnungen dar, die die Fluidströmung ganz oder nur teilweise in die Umgebung abführen. In dieser Arbeit bezieht sich der Begriff „Leitwert“ (bzw. Blendenleitwert) auf genau diese realen Umsetzungen.

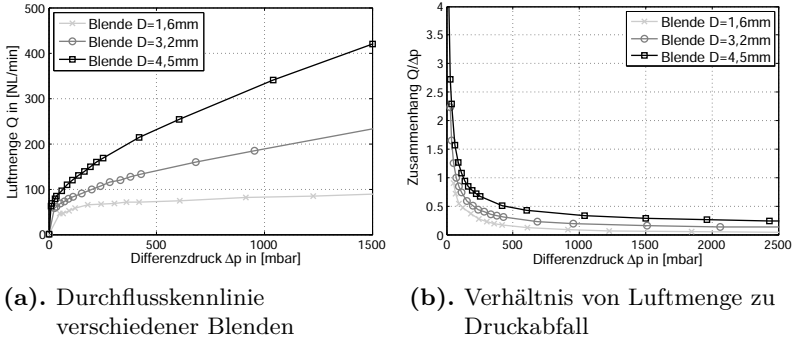
Aus dem sich einstellenden Verhältnis von strömender Luftmenge zu Druckabfall über der verwendeten Blende, lässt sich der Blendenleitwert bestimmen. Mit der theoretischen Berechnung des Massenstroms in (3.21) ergibt sich der vom Differenzdruck abhängige Leitwert

$$G_p = \frac{\dot{m}}{\Delta p} = \mu_Q A_{Blende} \sqrt{\frac{2}{R_m \vartheta}} \Psi \left( \frac{p_2}{p_1} \right) \frac{p_1}{p_1 - p_2} = G_p(p_1, p_2) \quad (3.39)$$

einer beliebigen Blende mit dem Blendenquerschnitt  $A_{Blende}$ .

Die exemplarische Kennlinienvermessungen verschiedener Blenden in Abbildung 3.3, verdeutlicht den Einfluss der Ausflussfunktion  $\Psi$  aus Gleichung (3.22).

Strömungswiderstände entlang pneumatischer Transportsysteme



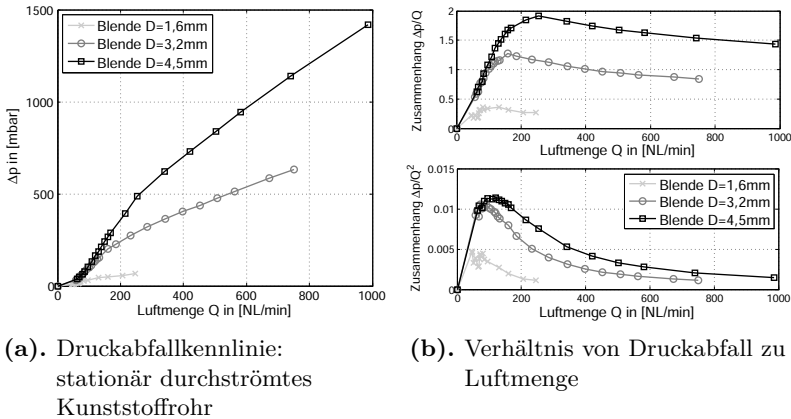
**Abbildung 3.3.** Druckverlust und Luftmenge als Funktion der Rohrreibung und des Durchflusses

lassen sich aufgrund der in Abschnitt 3.4.3 diskutierten Strömungsverluste durch existierende Rohrreibung, die wiederum zu einem Druckabfall entlang der Fluidströmung führt, erklären. Demzufolge kann einer strömungsführenden Rohrleitung auch ein pneumatischer Widerstand  $R_p$  zugeordnet werden. Der elektrischen Definition entsprechend, wird auch bei pneumatischen Strömungen ein Teil der Fluidenergie in Wärme dissipiert, so dass eine beschleunigte kompressible Strömung resultiert (vgl. Abschnitt 3.4.3).

Aufgrund des verursachten Druckabfalls entlang der Strömungsrichtung, kann aus dem näherungsweise geltenden Zusammenhang (3.27) und der Massenstromdefinition (3.7), der Rohrwiderstand  $R_p$  in Abhängigkeit der Strömungsart definiert werden. Für runde Rohrquerschnitte und einer laminaren Strömung, kann mit der Definition der Reynoldszahl aus (3.9) der lineare Zusammenhang

$$\Delta p = \lambda_R(Re) \cdot \frac{l}{2D} \rho_1 \cdot c_1^2 = \lambda_R(Re) \cdot c_1 \frac{2l}{\pi D^3} \dot{m} = R_{p_{\text{lam}}} \dot{m} \quad (3.40)$$

### 3 Modellierung pneumatischer Druck- und ...



**Abbildung 3.4.** Druckverlust und Luftmenge als Funktion der Rohrreibung und des Durchflusses; Rohrrinnendurchmesser  $D_{\text{innen}}=5,6\text{mm}$ , Länge  $l=1,5\text{m}$

zwischen Luftmenge und Druckabfall ermittelt werden [156]. Hat man es mit einer rau turbulenten Strömung zu tun, so ist die Rohrreibungszahl nahezu unabhängig von der mittleren Strömungsgeschwindigkeit [145, 141]. Für runde Rohrquerschnitte ergibt sich für eine turbulente Strömung daher der quadratische Zusammenhang

$$\Delta p = \lambda_R \cdot \frac{l}{2D} \rho_1 \cdot c_1^2 = R_{p_{\text{turb}}} \dot{m}^2 \quad (3.41)$$

zwischen Druckabfall und Luftstrom entlang der Rohrleitung. Aus dem Grund, dass sich der in die Strömungsführung eingeprägte Massenstrom mit (3.21) berechnen lässt, wird mit steigender Druckdifferenz entlang dieser Strömungsführung, der Zusammenhang zwischen Massenstrom und Differenzdruck allmählich linear. Grund dafür ist die in (3.22) definierte Ausflussfunktio-

on, welche ab dem kritischen Druckverhältnis (im überkritischen Bereich) ihr Maximum erreicht und ab diesem Punkt wiederum konstant verläuft.

Die Länge  $l$  der verwendeten Strömungsführung beeinflusst nach Gleichung (3.27) den Strömungswiderstand linear und somit auch den maximalen Durchfluss bei konstanter Druckdifferenz.

### 3.6 Stellglieder für Pneumatikventile

Die Regelgüte vieler fluidtechnischer Anwendungen hängt im Wesentlichen vom Algorithmus des implementierten Applikationsreglers ab. Für eine hohe Regelgüte ist es aber ebenso notwendig, eine reproduzierbare Steuerbarkeit des eingesetzten Stellglieds zu gewährleisten. Im folgenden Abschnitt werden daher mögliche Fehler- und Störungsquellen innerhalb des verwendeten Stellglieds untersucht, um gegebenenfalls eine Störkompensation im späteren Applikationsregler entwickeln zu können.

#### 3.6.1 Aufbau elektromechanischer Ventilstellglieder

Die Aufgabe von Stellgliedern innerhalb fluidtechnischer Anwendungen ist es, den Zu- und Abfluss des Arbeitsmediums gezielt zu steuern. Wenn möglich, sollte so eine optimale Steuerung des Fluidstroms gewährleistet werden können.

Abbildung 3.5 verdeutlicht den prinzipiellen mechanischen Aufbau eines Stellglieds in der Fluidtechnik, welches die folgenden drei möglichen Ventilstellungen einnehmen kann.





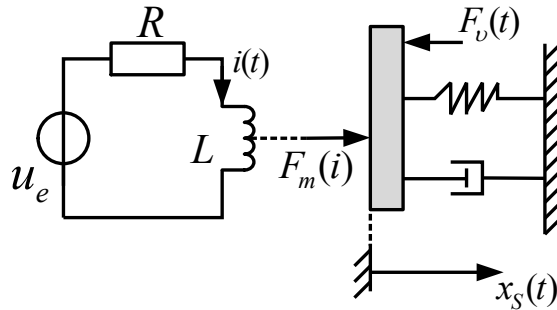
dige Antriebskraft wird durch die Verwendung eines Proportionalmagneten hervorgerufen.

### 3.6.2 Modellierung des elektromechanischen Antriebs

Die magnetische Antriebskraft  $F_m$  eines Proportionalmagneten innerhalb seines linearen Steuerbereichs (dem sog. Linearitätsbereich) steht nach [60, 91] und [70] mit

$$F_m(i) = k_x i(t) \quad (3.42)$$

im direkten Zusammenhang zum eingepprägten Spulenstrom  $i(t)$ . Der prinzipielle Aufbau des verwendeten Stellgliedes ist in Abbil-



**Abbildung 3.6.** Funktionsprinzip des elektromechanischen Stellgliedes

dung 3.6 verdeutlicht. Die magnetische Kraft  $F_m(i)$  wirkt direkt auf das mechanische Stellglied ein. Dieses ist als lineares Feder-Masse-Dämpfer-System modellierbar. Für die Stellgliedposition  $x_S = x_S(i)$  ergibt sich unter Verwendung von (3.42) in Analogie

zu (2.4) die lineare Differentialgleichung

$$\ddot{x}_S = -a_1\dot{x}_S - a_0x_S + b_0i(t) - F_v(t) \quad (3.43)$$

unter Berücksichtigung von wirkenden äußeren Störkräften. Die einwirkende Störkraft  $F_v(t)$  fasst die physikalischen Effekte zusammen, die funktionsbedingt bei der Verwendung von Elektromagneten und Dichtelementen in Erscheinung treten und damit direkten Einfluss auf den linearen Antrieb nehmen. Darunter fallen:

- Magnetische Hysterese und Sättigungseffekte des antreibenden Magnetkreises wie sie beispielsweise in [60, 30, 91] beschrieben sind,
- Nichtlineare Reibeffekte aufgrund der notwendigen Verwendung von Dichtelementen: Die Kombination von Haftreibung und geschwindigkeitsabhängigen Reibeffekten führt zu einer sich ändernden Reibungszahl  $\mu_R = \mu_R(\dot{x})$  [143, 90, 144, 98, 107, 12],
- Auf das Antriebssystem einwirkende Kräfte aufgrund von vorhandenen Differenzdrücken über mechanischen Komponenten [12] sowie
- Sonstige Störungen.

Eine ungestörte Funktionsfähigkeit des Antriebssystems ist insbesondere für ein gutes Feinregelverhalten (Kleinsignalverhalten) ausschlaggebend. Abbildung 3.7 illustriert am Beispiel eines realen Ventilstellers das zeitliche Verhalten der Stellgliedposition  $x_S(t)$  in Abhängigkeit des eingepprägten Spulenstroms. Zusätzlich zu magnetischen Effekten und Reibungseinflüssen (linke Abbildungshälfte) wirken auch druckabhängige Kräfte bei vorhandener Druckluft (rechte Abbildungshälfte). Dieses Verhalten kann eine präzise Steuerung immens beeinflussen oder sogar stören.

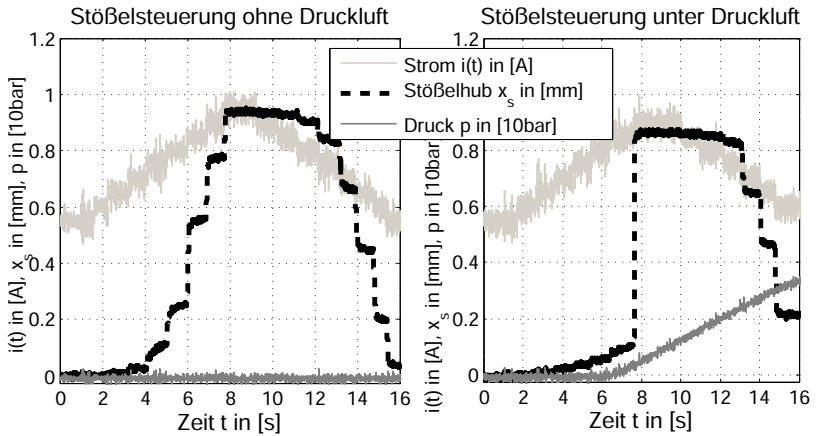


Abbildung 3.7. Stellgliedynamik unter Störeinflüssen

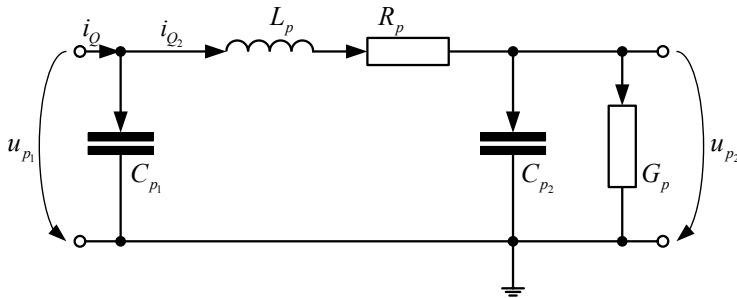
### 3.7 Modellstruktur pneumatischer Regelstrecken

Mit den in Abschnitt 3.5 vorgestellten Analogiebetrachtungen ist es machbar elektrische Ersatzschaltbilder für pneumatische Regelstrecken zu entwickeln. Eines des grundlegenden Streckenelemente sind pneumatische Regelventile mit einer internen Kapazität  $C_{p1}$  an der Stelle  $x = 0$ . Diese elektromechanischen Stellglieder ermöglichen es den Luftstrom  $i_Q(t)$ , der durch die angeschlossene Verrohrung strömt, zu steuern. Damit verbunden ist ein Druckanstieg  $\dot{u}_{p1}$  innerhalb des Ventils. Der sich einstellende Überdruck  $u_{p1}(t)$  kann direkt an dieser Stelle gemessen werden. Der Rest des Luftstroms, der durch das Ventil als steuerbare Stromquelle zur Verfügung gestellt wird, strömt weiter entlang des Rohrs mit der Länge  $l$ . Die verwendete Rohrleitung selbst besitzt wiederum eine pneumatische Kapazität  $C_{pR}$ , einen Strömungswiderstand  $R_p$  sowie eine pneumatische Induktivität  $L_p$

### 3 Modellierung pneumatischer Druck- und . . .

---

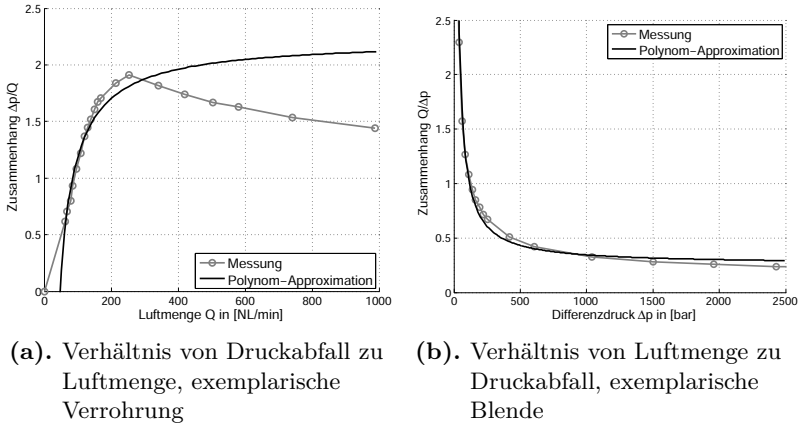
und verbindet das Ventil mit der eigentlichen Applikation. Diese Applikation kann weitere Volumina oder Blenden beinhalten, so dass man diese zusätzlichen Komponenten zusammen mit denen des Rohrs als Ersatzkapazität  $C_{p2}$  und dem Systemleitwert  $G_p$  zusammenfassen kann.



**Abbildung 3.8.** Ersatzschaltbild pneumatischer Applikationen mit Rohrzuleitung

Abbildung 3.8 veranschaulicht die berücksichtigten Effekte in einem elektrischen Ersatzschaltbild. Dieses Modell verkörpert damit die Verallgemeinerung pneumatischer Streckenmodelle in ihrer Grundform. Aufgrund der Differenzdruckabhängigkeit des Blendenleitwerts  $G_p$  und des von der Strömungsart abhängigen Rohrwidestands  $R_p$ , sind pneumatische Strecken stets nichtlineare Systeme. Vor allem die Nichtlinearität des Blendenleitwerts  $G_p = G_p(u_{p1}, u_{p2})$  äußert sich signifikant in der statischen Kennlinie von Luftmengenregelsystemen.

Um die Handhabbarkeit der nichtlinearen Kennwerte von Widerstand und Leitwert zu vereinfachen, sind diese Parameter durch



**Abbildung 3.9.** Polynomapproximation von pneumatischem Widerstand und Blendenleitwert

die approximierten Polynomfunktionen

$$R_p = R_p(i_{Q_2}) \approx R_{p_0} - \frac{R_{p_1}}{i_{Q_2}}, R_p \in [0, R_{p_0}], i_{Q_2} \neq 0 \quad (3.44)$$

bzw.

$$G_p = G_p(u_{p_1}, u_{p_2}) \approx G_{p_0} + \frac{G_{p_1}}{u_{p_2}}, G_p \in [G_{p_0}, G_{p_{\max}}], u_{p_2} \neq 0 \quad (3.45)$$

in dieser Arbeit berücksichtigt worden. Abbildung 3.9 zeigt die Messverläufe von Widerstand und Leitwert im Vergleich zu ihrer Approximation.

Aus dem illustrierten Ersatzschaltbild 3.8 kann das parameterli-

naere Zustandsraummodell

$$\begin{pmatrix} \dot{i}_{Q_2} \\ \dot{u}_{p_2} \\ \dot{u}_{p_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R_p}{L_p} & -\frac{1}{L_p} & \frac{1}{L_p} \\ \frac{1}{C_{p_2}} & -\frac{G_p}{C_{p_2}} & 0 \\ -\frac{1}{C_{p_1}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{Q_2} \\ u_{p_2} \\ u_{p_1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{C_{p_1}} \end{pmatrix} i_Q \quad (3.46)$$

pneumatischer Durchfluss- und Druckregelstrecken mathematisch abgeleitet werden. Die von der Ventilkonstruktion vorgegebene Stellglieddynamik zur Steuerung der speisenden Luftmenge  $i_Q(t)$  ist mit der Bewegungsdifferentialgleichung (3.43) mathematisch beschrieben. Das Stellglied und dessen konstruktive Ausführung bestimmt den sich einstellenden Luftmengenstrom. Dieser Zusammenhang kann mit

$$i_Q(t) = \beta(u_{p_1}, p_V, x_S \dots) x_S(t) \quad (3.47)$$

formuliert werden. In der nichtlinearen Funktion  $\beta(u_{p_1}, p_V, x_S \dots)$ , lassen sich die in (3.21) beschriebenen Nichtlinearitäten des gesteuerten Luftstroms sowie die geometrischen Zusammenhänge zwischen der Stellgliedposition  $x_S(t)$  und dem effektiven Ventilöffnungsquerschnitt  $A_V(x_S)$  zusammenfassen. Im einfachsten Fall handelt es sich um einen linearen Zusammenhang zwischen  $x_S$  und  $A_V(x_S)$ . Ist das der Fall, ist  $A_V(x_S)$  mit einer Geradengleichung aus dem Koordinatenursprung modellierbar. Der direkt am Ventileingang herrschende Vordruck  $p_V$  begrenzt in diesem Zusammenhang den maximal möglichen Luftmengenstrom  $i_{Q_{\max}}$ , der sich nach Gleichung (3.21) mit  $p_1 = p_V$  bestimmen lässt. Für die Beschreibung der Funktion  $\beta$  ist außerdem zwischen einströmenden und ausströmenden Vorgängen zu unterscheiden. Dieser Unterschied rührt von der druckabhängigen Ausflussfunktion (3.22) her, welche direkt an das Druckverhältnis  $\frac{p_2}{p_1}$  gekoppelt ist. Je nach Strömungsrichtung, sind  $p_1$  und  $p_2$  zu de-

finieren.

Das Zustandsraummodell (3.46) des pneumatischen Systems wird durch Gleichung (3.47) und der Dynamikgleichung des elektromechanischen Stellgliedes (3.43) verkoppelt. Zusammengefasst ergibt sich daraus die verallgemeinerte Modellgleichung direkt gesteuerter elektropneumatischer Strecken. Diese Strecken lassen sich mit dem Zustandsraummodell

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \dot{x}_S \\ \ddot{x}_S \\ \dot{u}_{p1} \\ \dot{u}_{p2} \\ \dot{i}_{Q2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -a_0 & -a_1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\beta}{C_{p1}} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{C_{p1}} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{G_p}{C_{p2}} & \frac{1}{C_{p2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_p} & -\frac{1}{L_p} & -\frac{R_p}{L_p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_S \\ \dot{x}_S \\ u_{p1} \\ u_{p2} \\ i_{Q2} \end{pmatrix} \\
 &+ \begin{pmatrix} 0 \\ b_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} i(t) - \begin{pmatrix} 0 \\ v(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.48)
 \end{aligned}$$

in den generalisierten Koordinaten

$$\underline{x} = \left( x_S \quad \dot{x}_S \quad u_{p1} \quad u_{p2} \quad i_{Q2} \right)^T$$

beschreiben. Dieses Differentialgleichungssystem bildet die Basis für alle nachstehenden Untersuchungen. Es handelt sich um ein eingangsaffines parameterlineares Systemmodell fünfter Ordnung. Aufgrund des nichtlinearen Strömungsverhaltens des kompressiblen Arbeitsmediums „Luft“, sind die Streckenparameter, wie Widerstand und Leitwert, meist abhängig vom aktuellen Ar-

### 3 Modellierung pneumatischer Druck- und . . .

---

beitspunkt und damit nicht konstant. Weiterhin muss je nach Anwendungsfall auch die Beeinflussung der Parameter durch weitere Dynamikkomponenten, wie zum Beispiel der Bewegung eines angetriebenen Pneumatikzylinders, beim späteren Regelungsentwurf mit berücksichtigt werden. Die Gesamtsystemordnung erhöht sich dementsprechend.



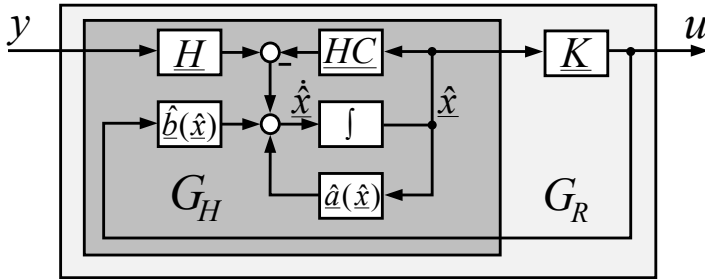
## 4 Zustandsschätzung bei Systemen mit unsicheren Parametern

Die Vorbetrachtungen möglicher Regelungsstrategien aus Abschnitt 2.5 zeigten, dass zur optimalen Steuerung eines Systems der vollständige Vektor aller im System vorhandenen Zustandsgrößen bekannt sein muss. Sind nicht alle der dynamischen Zustandsgrößen bekannt, kann keine stabile und zugleich optimale Zustandsrückführung gewährleistet werden. Dieses Kapitel beschäftigt sich daher mit der Schätzung aller nicht direkt messbaren Zustandsgrößen, die für eine stabile Regelung notwendig sind. Die im späteren Teil der Arbeit verwendete Reglerstruktur  $G_R$  wird dementsprechend ein Zustandsschätzsystem  $G_H$  beinhalten. Den prinzipiellen Aufbau dieser Reglerstruktur  $G_R$  verdeutlicht der Signalfussplan in Abbildung 4.1.

Das im Allgemeinen nichtlineare Beobachtungsfehlerdifferentialgleichungssystem eingangsaffiner Systeme

$$\dot{\underline{e}} = \dot{\underline{x}} - \dot{\hat{\underline{x}}} = \underline{a}(\underline{x}) - \hat{\underline{a}}(\hat{\underline{x}}) + \left( \underline{b}(\underline{x}) - \hat{\underline{b}}(\hat{\underline{x}}) \right) u(t) - \underline{H}(y - \hat{y}), \quad (4.1)$$

bildet die Basis für die Problematik einer Zustandsschätzung mit Hilfe von Beobachtern. Beinhaltet das verwendete Streckenmodell unsichere Parameter, wird es zu einem bleibenden Fehler



**Abbildung 4.1.** Reglerstruktur mit modellbasiertem Zustandsschätzsystem

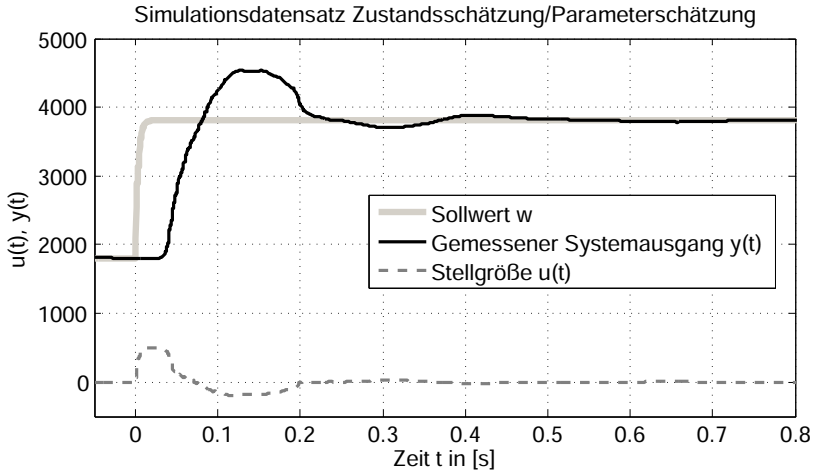
$e(t)$  zwischen Schätzwert  $\hat{x}(t)$  und den wahren Zustandsgrößen  $\underline{x}(t)$  kommen. Diese Problematik soll im Hinblick auf den späteren praktischen Einsatz in industriellen Anwendungsbereichen für Systeme in nichtlinearer Normalformdarstellung genauer beleuchtet werden. Darüber hinaus werden in diesem Kapitel Methoden vorgestellt, die den Einfluss existierender Parameterfehler auf die Schätzgüte reduzieren und damit eine präzise Zustandsschätzung gewährleisten können. Konvergiert der Schätzfehler garantiert gegen Null, kann ab diesem Zeitpunkt von einer erwartungstreuen Schätzung nach Definition 10 ausgegangen werden.

**Definition 10** (Erwartungstreue Schätzung [96, 158, 138]). *Die Schätzung einer Variablen  $x(t)$  durch ihren Schätzwert  $\hat{x}(t)$  heißt genau dann **erwartungstreu**, wenn die Beziehung*

$$E \{ \hat{x} \} = x$$

*bewiesenermaßen erfüllt ist. Für eine dynamische Schätzung bedeutet das, dass der Erwartungswert (respektive Mittelwert) einer geschätzten Größe gleich ihrem wahren Wert innerhalb des*

definierten Beobachtungszeitraums entspricht.



**Abbildung 4.2.** Dynamischer Verlauf einer realen Messung (Datensatz)

Für die Untersuchung geeigneter Strategien steht der gemessene Datensatz einer Luftmengenregelstrecke mit dem in Abbildung 4.2 gezeigten dynamischen Verlauf zur Verfügung. Dieser Datensatz gilt als Basis der untersuchten Verfahren, deren Resultate in der offline-Simulation zu bewerten sind. Bekannt sind die gemessene Luftmenge  $Q$  als Systemausgangsgröße  $y(t)$  sowie die Stellgröße  $u(t)$ . Wie in Abschnitt 5.5 gezeigt werden wird, handelt es sich um ein zeitkontinuierliches Streckenmodell zweiter Ordnung mit

$$\dot{\underline{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -a_1 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} u \quad \text{und der Regelgröße} \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \underline{x}, \quad (4.2)$$

welches durch eine der in Abschnitt 2.4.2 vorgestellten Methoden sehr einfach zeitlich diskretisiert werden kann. Modellfehler, die aufgrund von Näherungen und Vernachlässigungen entstehen, sowie einwirkende Störgrößen sind nicht Teil dieses linearen Modellansatzes. Daher werden sich für die angewendeten Verfahren unterschiedliche Ergebnisse in der Parameterschätzung ergeben müssen.

### 4.1 Beobachtbarkeit nichtlinearer Systeme

Ein wichtiger Aspekt zur Realisierung einer Zustandsschätzung für dynamische Systemen ist die **Beobachtbarkeit**. Sie trifft eine Aussage darüber, inwieweit aus den vorhandenen Messgrößen alle nicht messbaren Zustandsgrößen sicher geschätzt bzw. rekonstruiert werden können. Der Begriff der Beobachtbarkeit lässt sich für nichtlineare Systeme, wie unter anderem auch in [3, 13, 85] beschrieben, in zwei Gruppen unterteilen: die **globale Beobachtbarkeit** und die **lokale Beobachtbarkeit**.

**Definition 11** (Globale Beobachtbarkeit nichtlinearer Systeme [3, 13, 85]). *Das dynamische System*

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, u), \quad y = c(\underline{x})$$

mit  $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}$  und  $u \in \mathbb{R}$  ist genau dann global beobachtbar, wenn es innerhalb eines endlichen Zeitintervalls  $t \in [t_0, t_1]$  machbar ist, den Anfangszustandsvektor  $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$  aus den bekannten Größen  $u(t)$  und  $y(t)$  eindeutig zu bestimmen.

Eine abgeschwächte Form der globalen Beobachtbarkeit aus Definition 11 stellt die lokale Beobachtbarkeit dar.

**Definition 12** (Lokale Beobachtbarkeit nichtlinearer Systeme [3, 13]). *Das dynamische System*

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, u), \quad y = c(\underline{x})$$

mit  $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}$  und  $u \in \mathbb{R}$  ist dann lokal beobachtbar, wenn es innerhalb eines endlichen Zeitintervalls  $t \in [t_0, t_1]$  machbar ist, den Anfangszustandsvektor  $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$  aus den bekannten Größen  $u(t)$  und  $y(t)$  in einer Umgebung

$$U = \{ \underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n \mid \| \underline{x}_0 - \hat{\underline{x}}_0 \| < \epsilon \}$$

eines Punktes  $\hat{\underline{x}}_0$  innerhalb des Definitionsbereichs zu bestimmen.

## 4.2 Nichtlinearer Normalform-Beobachter

Der Entwurf eines Beobachters für die Rekonstruktion bzw. Schätzung der vorhandenen Zustandsgrößen nichtlinearer Systeme ist eine anspruchsvolle Aufgabe für einen stabilen Regelungsentwurf. Ist es allerdings machbar die Systembeschreibung auf eine Normalformdarstellung, wie sie aus der linearen Systemtheorie her bekannt und in Abschnitt 2.5.4 vorgestellt ist zu transformieren, so lassen sich verallgemeinerte Herangehensweisen für diese spezielle Notation anwenden.

**Definition 13** (Nichtlinearer Normalform-Beobachter [3, 100, 165, 85, 23]). *Lässt sich ein nichtlineares SISO-System mit Hilfe einer geeigneten Koordinatentransformationsvorschrift*

$$\underline{\xi} = \underline{T}(\underline{x}), \quad \underline{\xi}, \underline{T}, \underline{x} \in \mathbb{R}^n \tag{4.3}$$

auf ein Systemmodell in der Form

$$\begin{aligned} \dot{\underline{\xi}} &= \underline{A}\underline{\xi} + \underline{B}\left(\alpha\left(\underline{T}^{-1}(\underline{\xi})\right) + \beta\left(\underline{T}^{-1}(\underline{\xi})\right)u\right), \\ \underline{A} &\in \mathbb{R}^{(n,n)}, \underline{B} \in \mathbb{R}^{(n,1)}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (4.4)$$

transformieren, so lässt sich ein **nichtlinearer Normalform-Beobachter** mit

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\underline{\xi}}} &= \underline{A}\hat{\underline{\xi}} + \underline{B}\left(\alpha\left(\underline{T}^{-1}(\hat{\underline{\xi}})\right) + \beta\left(\underline{T}^{-1}(\hat{\underline{\xi}})\right)u\right) + \underline{H}\left(y - \underline{C}\hat{\underline{\xi}}\right), \\ \underline{H} &\in \mathbb{R}^{(n,1)}, \underline{C} \in \mathbb{R}^{(1,n)}, y \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (4.5)$$

entwerfen, sofern die inverse Transformation

$$\underline{x} = \underline{T}^{-1}\left(\underline{\xi}\right) \quad (4.6)$$

existiert und eindeutig ist. Diese Beschreibungsform entspricht einem linearen Zustandsraummodell, dass mit dem nichtlinearen Funktional  $\alpha(\underline{x}) + \beta(\underline{x})u(t)$  angeregt wird [111, 23].

Die meisten eingangsaффinen SISO-Systeme in der Darstellung (2.20) mit der Regelgröße  $y = c(\underline{x}) \in \mathbb{R}$  lassen sich durch die Anwendung der Lie-Derivativen

$$L_f^i c(\underline{x}), \quad i = 1.. \delta$$

aus Definition 9, auf die Beschreibungsform (4.4) transformieren. Der Vektor aus Systemausgang und dessen zeitlichen Ableitungen ergibt sich damit zu

$$\underline{\xi} = \underline{T}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ y^{(\delta-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_f^0 c(\underline{x}) \\ L_f^1 c(\underline{x}) \\ \vdots \\ L_f^{\delta-1} c(\underline{x}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(\delta,1)} \quad (4.7)$$

und entspricht nach [3, 85, 62] dem transformierten Zustandsvektor von  $\underline{x}$ . Die Anwendung der Transformationsvorschrift (4.7) auf eingangsaffine SISO-Systeme führt dementsprechend zu den linearen Matrizen

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

und einer nichtlinearen Systemanregung mit

$$\alpha \left( \underline{T}^{-1} \left( \underline{\xi} \right) \right) + \beta \left( \underline{T}^{-1} \left( \underline{\xi} \right) \right) u = L_{\underline{f}}^{\delta-1} c \left( \underline{T}^{-1} \left( \underline{\xi} \right) \right) = L_{\underline{f}}^{\delta-1} c \left( \underline{x} \right). \quad (4.8)$$

Ist (4.8) eindeutig bekannt, so sind dynamische Modelle in der Normalformdarstellung (4.4) auch global beobachtbar nach Definition 11.

In den nächsten Abschnitten sollen nun einige Beobachter für nichtlineare Strecken vorgestellt werden. Diese sind zum Teil für Zustandsraummodelle in Normalformdarstellung entwickelt worden und sind damit ideal für Systeme in der Beschreibungsform nach Definition 13 [165, 13, 85, 118, 3].

**Definition 14** (Stetigkeit [32, 161]). *Eine Funktion  $f(x)$  für den Definitionsbereich  $\mathcal{D}$  stellt eine Abbildung  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  dar. Die Funktion  $f(x)$  ist stetig, wenn der Grenzwert*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

*existiert und links- sowie rechtsseitiger Grenzwert identisch sind.*

**Definition 15** (Lipschitz-Stetigkeit [32, 1, 5]). *Eine Funktion  $f(x)$  für den Definitionsbereich  $\mathcal{D}$  stellt eine Abbildung  $f :$*

$\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  dar. Die Variation des Arguments von  $f$  ist mit  $\Delta x = x_2 - x_1$  gegeben, so dass sich die Änderung der Funktion aus  $\Delta f = f(x_2) - f(x_1)$  ermitteln lässt. Existiert dann eine positive Konstante  $\gamma_L$ , so dass die Bedingung

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq \gamma_L |x_2 - x_1| \quad (4.9)$$

erfüllt ist, so ist  $f(x)$  für alle  $x_1$  und  $x_2$  **Lipschitz-stetig** mit der **Lipschitz-Konstanten**  $\gamma_L$ .

Definition 14 und 15 dienen der Vollständigkeit und werden im Folgenden benötigt, um einige Vereinfachungen bei der Herleitung der vorgestellten Zustandsschätzer (Beobachter) vornehmen zu können.

### 4.3 High-Gain-Beobachter für nichtlineare Systeme

Die Grundlage für den Entwurf eines High-Gain-Beobachters<sup>1</sup> stellt die Normalformdarstellung (4.4) dar [3]. Existiert die eindeutige Rücktransformation (4.6), so besteht die Beobachtungsaufgabe lediglich darin einen linearen Beobachter für das in den transformierten Koordinaten befindliche System zu entwerfen. Der Zustandsvektor  $\underline{x}$  in Originalkoordinaten ergibt sich dann direkt aus der Rücktransformationvorschrift (4.6) [3, 165]. Damit gilt der Diffeomorphismus  $\underline{\xi} = \underline{T}(\underline{x})$  und  $\underline{x} = \underline{T}^{-1}(\underline{\xi})$  für die Anwendbarkeit des High-Gain-Beobachters in Verbindung mit nichtlinearen Systemen als zwingende Voraussetzung.

Aus der Beobachtergleichung

$$\dot{\hat{\underline{\xi}}} = \underline{A}\hat{\underline{\xi}} + \underline{B}\left(\alpha(\underline{T}^{-1}(\hat{\underline{\xi}})) + \beta(\underline{T}^{-1}(\hat{\underline{\xi}}))u\right) + \underline{H}\left(y - \underline{C}\hat{\underline{\xi}}\right) \quad (4.10)$$

---

<sup>1</sup>"High-Gain"[engl.]: Hohe Verstärkung, Hochverstärkung



ergibt sich die Fehlerdifferentialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{\underline{e}} &= (\underline{A} - \underline{HC}) \underline{e} \\ &+ \underline{B} \left( \alpha(\underline{T}^{-1}(\underline{\xi})) - \alpha(\underline{T}^{-1}(\hat{\underline{\xi}})) + \left( \beta(\underline{T}^{-1}(\underline{\xi})) - \beta(\underline{T}^{-1}(\hat{\underline{\xi}})) \right) u \right) \end{aligned} \quad (4.11)$$

für den Beobachtungsfehlervektor  $\underline{e} = \underline{\xi} - \hat{\underline{\xi}}$  in den transformierten Koordinaten. Erfüllt die nichtlineare Systemanregung die Lipschitz-Bedingung aus Definition 15, d.h. ist die Bedingung

$$\left| \alpha(\underline{T}^{-1}(\underline{\xi})) - \alpha(\underline{T}^{-1}(\hat{\underline{\xi}})) + \left( \beta(\underline{T}^{-1}(\underline{\xi})) - \beta(\underline{T}^{-1}(\hat{\underline{\xi}})) \right) u \right| \leq \gamma_L \cdot \left\| \underline{\xi} - \hat{\underline{\xi}} \right\| \quad (4.12)$$

erfüllt, ist es möglich den Verstärkungsvektor  $\underline{H}$  so auszulegen, dass ein stabiler Beobachter entsteht [13, 111, 110, 165].

Wie sich sehr leicht nachrechnen lässt, resultiert

$$\lambda^n + h_1 \lambda^{n-1} + \dots + h_{n-1} \lambda + h_n = p(\lambda) \quad (4.13)$$

als charakteristisches Polynom der Fehlerdynamik  $\dot{\underline{e}} = (\underline{A} - \underline{HC}) \underline{e}$ . Legt man

$$h_i = \frac{\hat{h}_i}{\epsilon^i} \quad (4.14)$$

für die einzelnen Elemente der Beobacherverstärkung fest, so kann nach [3] Gleichung (4.13) auch durch

$$p(\lambda) = \left( \lambda + \frac{p_1}{\epsilon} \right) \cdot \dots \cdot \left( \lambda + \frac{p_n}{\epsilon} \right) \quad (4.15)$$

beschrieben werden. Die Pollage  $\hat{p}_i = \frac{p_i}{\epsilon}$  kann mit dem Parameter  $\epsilon$  nun linear verändert werden. Die Beobachtungsmatrix, welche als Funktion des Parameters  $\epsilon$  mit  $\epsilon > 0$  zu verstehen ist,

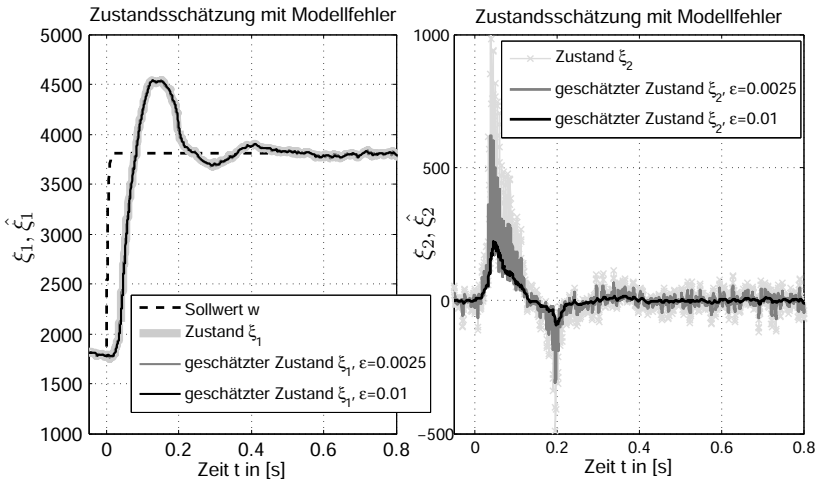
ist daher mit

$$\underline{H} = \underline{H}(\epsilon) = \begin{pmatrix} \hat{h}_1 & \hat{h}_2 & \dots & \hat{h}_n \\ \epsilon & \epsilon^2 & & \epsilon^n \end{pmatrix}^T \quad (4.16)$$

gegeben. Diese Methode hat den Vorteil, dass alle Pole der linearen Fehlerübertragungsfunktion gleichmäßig mit der Variation von  $\epsilon$  verschoben werden können. Mit dem Grenzwert

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Re \{ \hat{p}_i \} = -\infty \quad (4.17)$$

der Pollagen des charakteristischen Polynoms (4.13) ist auch der Name dieser Beobachterform selbsterklärend. Nach [3] ist für ein sehr kleines  $\epsilon$  auch das Verschwinden von Beobachterfehlern bei ungenauer Modellierung der Funktionen  $\alpha$  und  $\beta$  gegeben.



**Abbildung 4.3.** Simulation einer Zustandsschätzung mit High-Gain-Beobachter

Die einfache Implementierbarkeit in Kombination mit wenig Re-

chenleistung zeichnet den High-Gain-Beobachter als Beobachter für nichtlineare Systeme aus. Hinzu kommt auch, dass dieser Beobachertyp ein definiert stabiles System darstellt. Bei der Implementierung als zeitdiskretes System, kann die hohe Verstärkung, die den High-Gain-Beobachter charakterisiert, aber auch zu Instabilitäten führen. Abbildung 4.3 zeigt die Ergebnisse im Hinblick auf die Beobachtungsgüte am Beispiel des verwendeten Simulationsdatensatzes. Es ist deutlich erkennbar, dass ein hohes Maß an Störanteilen aufgrund der hohen Verstärkung und des damit verbundenen differenzierenden Verhaltens in den beobachteten Signalen vorhanden ist. Befindet sich das System in der Ruhelage  $\xi = 0$ , so wird die Kombination von Regler und High-Gain-Beobachter in diesem Arbeitspunkt das Stellglied aufgrund des hohen Anteils an Störungen ständig beanspruchen. Im Endeffekt wird ein unruhig wirkendes Regelsystem geschaffen. Aus diesem Grund ist dieser Beobachter nur bedingt für die Zustandsschätzung an Strecken mit zu erwartenden Parameterunsicherheiten zu empfehlen.

## 4.4 Simultane Zustands- und Parameterschätzung

### 4.4.1 Allgemeine Herangehensweise

Das Vorhandensein unsicherer Parameter ist ein fundamentales Problem einer sicheren und fehlerfreien Zustandsschätzung. In der industriellen Praxis hat man es oft mit Strecken zu tun, deren Parameter und die auf die Strecke einwirkenden äußeren Einflüsse unsicher oder gänzlich unbekannt sind. Um dieses Problem dennoch handhaben zu können, besteht bei einigen Systemen die Möglichkeit, Systemzustände und Systemparameter simultan, also gleichzeitig mit nur einem Beobachter zu schätzen. Setzt man

## 4 Zustandsschätzung bei Systemen mit unsicheren...

---

parameterlineare Systeme voraus, in denen die Verkopplung von Parametervektor  $\underline{\theta} \in \mathbb{R}^m$  und dem Zustandsvektor  $\underline{\xi} \in \mathbb{R}^d$  sich als das Skalarprodukt

$$\varphi(\underline{\theta}, \underline{\xi}) = \langle \underline{\theta}, \underline{\xi} \rangle = \underline{\theta}^T \underline{\xi}, \quad \varphi \in \mathbb{R} \quad (4.18)$$

beschreiben lässt, erhält man ein nichtlineares Zustandsraummodell mit multiplikativ verkoppelten Zustandsgrößen. Der transformierte Zustandsvektor  $\underline{\xi}$  lässt sich zusammen mit dem Parametervektor  $\underline{\theta}$  zum erweiterten Zustandsvektor

$$\underline{\tilde{\xi}} = \begin{pmatrix} \underline{\xi} & \underline{\theta} \end{pmatrix}^T, \quad \underline{\tilde{\xi}} \in \mathbb{R}^{\delta+m} \quad (4.19)$$

zusammenfassen. Für eine simultane Zustandsschätzung werden die Systemparameter als dynamische Zustandsgrößen aufgefasst und können mit Hilfe nichtlinearer Beobachterformen geschätzt werden. Zur Modellierung der zu verwendeten Parameterdynamik existieren wiederum mehrere Ansätze. Der am meisten verbreitetste Ansatz besteht darin, alle Systemparameter als zeitlich invariant vorzusetzen, d.h. für zeitkontinuierliche Strecken

$$\dot{\underline{\theta}} = 0 \quad (4.20)$$

zu setzen [105, 22]. Mögliche Beobachteransätze für diese Art der Zustandsschätzung sollen nun in den nächsten Abschnitten vorgestellt und diskutiert werden.

### 4.4.2 Linearisierende Beobachterprinzipien

Ausgehend vom nichtlinearen Zustandsraummodell (2.17) kann der Beobachter

$$\hat{\dot{\mathbf{x}}} = \underline{f}(\hat{\mathbf{x}}, u) + \underline{H}(\hat{\mathbf{x}}, u) \cdot (\underline{y} - \hat{\underline{y}}), \quad \hat{\underline{y}} = \underline{c}(\hat{\mathbf{x}}), \quad \underline{f}, \hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n, \quad \hat{\underline{y}} \in \mathbb{R}^q \quad (4.21)$$

entworfen werden, insofern das System beobachtbar ist [13, 3]. Oftmals resultiert ein zeitvarianter Korrekturterm  $\underline{H}(\hat{\underline{x}}, \underline{u}) \in \mathbb{R}^{n,q}$  als Ergebnis der Berechnung [165, 3, 13, 85]. Dieser ist charakterisierend für diesen Beobachertyp.

### Linearisierender Beobachter

Beim Entwurf eines Luenberger-Beobachters für lineare Systeme, erfolgt die Festlegung des Korrekturverstärkungsvektors  $\underline{H}$  durch Polvorgabe oder der Auslegung anhand der Minimierung eines definierten Gütemaßes [85, 35, 87].

Für die eingangsaffinen nichtlinearen Systeme aus Gl. (2.20) ist die Fehlerdifferentialgleichung des Beobachtungsfehlers  $\underline{e}(t) = \underline{x}(t) - \hat{\underline{x}}(t)$  mit

$$\dot{\underline{e}} = \dot{\underline{x}} - \dot{\hat{\underline{x}}} = \underline{a}(\underline{x}) - \underline{a}(\hat{\underline{x}}) + \left( \underline{b}(\underline{x}) - \underline{b}(\hat{\underline{x}}) \right) \underline{u} - \underline{H}(\hat{\underline{x}}, \underline{u}) \cdot \left( \underline{c}(\underline{x}) - \underline{c}(\hat{\underline{x}}) \right) \quad (4.22)$$

gegeben. Eine grundlegende Methodik zur Festlegung der gewünschten Dynamik für das zeitliche Verhalten des Beobachtungsfehlers ist die Linearisierung des nichtlinearen Systemmodells entlang seines Zustandsvektors  $\underline{x}$ , wie es auch in [3, 35, 22, 165, 85] beschrieben ist. Diese Herangehensweise bietet eine sehr überschaubare Möglichkeit die bekannten Beobachterentwürfe aus der linearen Zustandsraummethodik verwenden zu können.

Durch eine Taylorreihen-Entwicklung der nichtlinearen Funktionen  $\underline{a}(\underline{x})$ ,  $\underline{b}(\underline{x})$  und  $\underline{c}(\underline{x})$  im aktuellen Arbeitspunkt  $\underline{x}(t=kT_s) = \underline{x}_k$  kann die Linearisierung des Gleichungssystems (2.20) erreicht werden [3, 165]. Aus der nichtlinearen Beobachterfehlerdifferentialgleichung (4.22) resultiert mit  $\underline{x} = \underline{e} + \hat{\underline{x}}$  die im aktuellen

Arbeitspunkt entwickelte Gleichung

$$\begin{aligned} \dot{\underline{e}} \approx \underline{a}(\hat{\underline{x}}_{kT_s}) + \left. \frac{\partial \underline{a}}{\partial \hat{\underline{x}}} \right|_{\hat{\underline{x}}=\hat{\underline{x}}(kT_s)} (\Delta \hat{\underline{x}} + \underline{e}) - \underline{a}(\hat{\underline{x}}_{kT_s}) - \left. \frac{\partial \underline{a}}{\partial \hat{\underline{x}}} \right|_{\hat{\underline{x}}=\hat{\underline{x}}(kT_s)} (\Delta \hat{\underline{x}}) \\ - \underline{H}(\hat{\underline{x}}, u) (y - \hat{y}) + \mathcal{O}(x, \hat{x}) \end{aligned} \quad (4.23)$$

unter der Voraussetzung, dass  $\underline{b}(\underline{x}) = \underline{b}(\hat{\underline{x}})$  erfüllt ist. Bei Vernachlässigung der nichtlinearen Restglieder  $\mathcal{O}(x, \hat{x})$  ergibt sich damit eine für den gegenwärtigen Arbeitspunkt  $\underline{x}(kT_s)$  annähernd lineare zeitkontinuierliche Fehlerdifferentialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{\underline{e}} \approx \left. \frac{\partial \underline{a}}{\partial \hat{\underline{x}}} \right|_{\hat{\underline{x}}=\hat{\underline{x}}(kT_s)} \underline{e} - \underline{H}(\hat{\underline{x}}, u) (y - \hat{y}) \\ = \left( \left. \frac{\partial \underline{a}}{\partial \hat{\underline{x}}} \right|_{\hat{\underline{x}}=\hat{\underline{x}}(kT_s)} - \underline{H}(\hat{\underline{x}}, u) \left. \frac{\partial c}{\partial \hat{\underline{x}}} \right|_{\hat{\underline{x}}=\hat{\underline{x}}(kT_s)} \right) \underline{e}, \end{aligned} \quad (4.24)$$

die für die Berechnung der Beobacherverstärkungen herangezogen werden kann [3, 165].

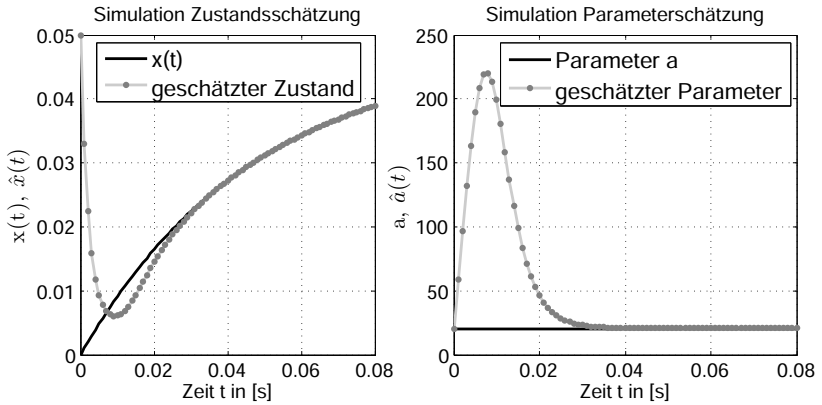
Für das beispielhafte Systemmodell erster Ordnung (4.25) mit dem unbekanntem Parameter  $a$ ,

$$\dot{x}(t) = -ax(t) + bu(t) \quad (4.25)$$

konnte in der Simulation die Funktionsfähigkeit des beschriebenen Verfahrens mit Hilfe einer kontinuierlichen und simultanen Schätzung des Zustandsvektors  $\tilde{\underline{\xi}} = \begin{pmatrix} x & a \end{pmatrix}^T$  für den Ansatz  $\dot{a} = 0$  nachgewiesen werden. Zur Auslegung der Beobacherverstärkung wurde eine konstante Pollage des charakteristischen Polynoms

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda(h_1 + a) - h_2x \quad (4.26)$$

der linearisierten Fehlerdifferentialgleichung für den Arbeitsbereich  $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$  gewählt.



**Abbildung 4.4.** Simuliertes Einschwingverhalten simultanen Parameterschätzung durch einen linearisierenden Beobachter mit konstanter Pollage

Leider ließ sich das Verfahren nicht robust auf geregelte Strecken mit mehreren unsicheren Parametern anwenden. Aufgrund der sich ändernden Streckenparameter resultiert eine, sich in jedem Tastschritt ändernde Beobachterverstärkung  $\underline{H}_k$ . In einigen Arbeitspunkten kann es daher zu sehr hohen Verstärkungen bis hin zur Instabilität kommen. Dieser Sachverhalt ist vor allem für die Umsetzung als zeitdiskretes System mehr als kritisch zu sehen, so dass diese Beobachterform für den industriellen Einsatz nur bedingt geeignet ist.

### Das erweiterte Kalman-Filter

Das erweiterte Kalman-Filter (EKF) entspricht einer Erweiterung des bekannten Kalman-Filters [22, 124, 85]. Diese Erweiterung bezieht sich in erster Linie auf die Linearisierung der existierenden Nichtlinearitäten im gegenwärtigen Arbeitspunkt [74]. In Analogie zu den zuvor abgeleiteten Vereinfachungen der

#### 4 Zustandsschätzung bei Systemen mit unsicheren...

---

Schätzfehlerdynamik in (4.24), ist für die Umsetzung eines EKF das Berechnen der Jacobi-Matrizen

$$\underline{A}_k = \left. \frac{\partial \underline{a}(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \right|_{\underline{x}=\underline{x}(kT_s)}, \quad \underline{A}_k \in \mathbb{R}^{(n,n)} \quad \text{und} \\ \underline{C}_k = \left. \frac{\partial \underline{c}(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \right|_{\underline{x}=\underline{x}(kT_s)}, \quad \underline{C}_k \in \mathbb{R}^{(1,n)} \quad (4.27)$$

in jeden Taktzeitpunkt  $t=kT_s$  notwendig. Weil das EKF auch in industriellen Einsatzgebieten weit verbreitet ist, soll die Funktionsweise an dieser Stelle näher untersucht und zuvor erläutert werden.

Für technische Systeme mit hohen Ansprüchen an die Signalreue der geregelten oder gemessenen Größen, mindern Mess- und Prozessrauschen die Qualität des Gesamtsystems. So spiegeln sich vorhandene Rauscheinflüsse in geschlossenen Regelkreisen in einer ständigen Belastung des Stellgliedes wider (vgl. auch Abschnitt 4.3), so dass eine Filterung der Mess- oder Zustandsgrößen zur Signalglättung unabdingbar ist. Die damit verbundene Phasenverschiebung kann für Regelkreise allerdings alles andere als förderlich sein: Es besteht die Möglichkeit der Instabilität des Gesamtsystems wenn der verwendete Filter beim Reglerentwurf unberücksichtigt bleibt.

Ein physikalisches System in Zustandsraumdarstellung unter einwirkenden stochastischen Störungen kann mit der Modellgleichung

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= \underline{a}(\underline{x}) + \underline{b}(\underline{x})\underline{u} + \underline{\eta}(t) \\ \underline{y} &= \underline{c}(\underline{x})\underline{x} + \underline{\zeta}(t) \end{aligned} \quad (4.28)$$

mathematisch beschrieben werden. Messungen und theoretische Überlegungen an realen Prozessen zeigen, dass in der Regel alle Systemzustände mit dem sogenannten **Prozessrauschen**  $\underline{\eta}(t)$ ,



in dem Störungen (in gewissen Grenzen auch mögliche Modellsicherheiten) auf das System zusammengefasst werden, und die eigentliche Messung mit dem sogenannten **Messrauschen**  $\underline{\zeta}(t)$  überlagert sind [87].

Unter der Annahme, dass Mess- und Prozessrauschen unkorreliert sind [87], führt das zu der Beziehung

$$\text{cov} \left\{ \underline{\eta}(t), \underline{\zeta}(t) \right\} = 0. \quad (4.29)$$

Setzt man für Mess- und Prozessrauschen die Natur eines unkorrelierten **weißen Rauschens** mit unendlich großem Frequenzspektrum voraus, so gilt

$$E \left\{ \underline{\eta}(t) \right\} = E \left\{ \underline{\zeta}(t) \right\} = 0 \quad (4.30)$$

$$E \left\{ \underline{\eta}(t) \underline{\eta}(t)^T \right\} = \underline{Q}, \quad \underline{Q} \in \mathbb{R}^{(n,n)} \quad (4.31)$$

$$E \left\{ \underline{\zeta}(t) \underline{\zeta}(t)^T \right\} = \underline{R}, \quad \underline{R} \in \mathbb{R}^{(n,n)} \quad (4.32)$$

per Definition [85, 3, 22, 87]. Die Matrizen  $\underline{Q}$  und  $\underline{R}$  besitzen aufgrund der erwartungswertfreien und stochastischen Unabhängigkeit aller existierenden Rauscheinflüsse untereinander, die Struktur einer Diagonalmatrix [125].

Der Einsatz eines Beobachters zur Rekonstruktion der Systemzustände führt zu dem Zustandsfehlervektor des im Arbeitspunkt linearisierten Systemmodells und so zur Beobachterfehlerdifferentialgleichung, die sich mit

$$\dot{\underline{e}} = \left( \underline{A}_k - \underline{H}_k \underline{C}_k \right) \cdot (\underline{x} - \hat{\underline{x}}) + \underline{\eta}_k - \underline{H}_k \underline{\zeta}_k \quad (4.33)$$

mathematisch beschreiben lässt. Mögliche Modellierungsfehler bleiben mit dieser Beschreibung unberücksichtigt, wohingegen vorhandenes Mess- und Prozessrauschen mit in die mathematische Modellierung einfließen. Zur Berechnung der Beobachter-

#### 4 Zustandsschätzung bei Systemen mit unsicheren...

---

verstärkung  $\underline{H}_k$ ,  $\underline{H}_k \in \mathbb{R}^n$ , welche beim EKF ebenso **Kalman-Verstärkung** genannt wird, ist die Minimierung der Kovarianzmatrix  $\underline{P}(t)$ ,  $\underline{P} \in \mathbb{R}^{(n,n)}$  des Schätzfehlervektors  $\underline{e} = \underline{x} - \hat{\underline{x}}$  ausschlaggebend.

Als Lösung des Optimierungsproblems

$$\min_{\underline{H}} E \left\{ \underline{e} \underline{e}^T \right\} = \min_{\underline{H}} \underline{P}(t) \quad (4.34)$$

für den zeitkontinuierlichen Anwendungsfall, ist in [87, 120, 124] der zeitvariante Beobachtervektor  $\underline{H} = \underline{H}(t)$  mit

$$\underline{H}(t) = \underline{P}(t) \underline{C}^T \underline{R}^{-1} \quad (4.35)$$

gegeben. Die Berechnungsvorschriften und der Berechnungsablauf zur Implementierung zeitdiskreter Kalman-Filterstrukturen sind im Anhang A.2 detailliert aufgeführt. Der zeitdiskrete Verstärkungsvektor  $\underline{H}_k$  ist aus der Kovarianzmatrix des prädiktierten Schätzfehlers

$$\underline{P}_k^* = \underline{A}_{k-1} \underline{P}_{k-1} \underline{A}_{k-1}^T + \underline{Q}_k. \quad (4.36)$$

und der Kovarianzmatrix des korrigierten Schätzfehlers

$$\underline{P}_k = (\underline{I} - \underline{H}_k \underline{C}) \underline{P}_k^* \quad (4.37)$$

unter Hinzunahme der zuletzt berechneten Kalman-Verstärkung in jedem Abtastschritt neu zu iterieren. Für den zeitdiskreten Anwendungsfall ergibt sich daraus in Analogie zu (4.35), die Berechnungsvorschrift der Kalman-Verstärkung mit

$$\underline{H}_k = \underline{P}_k^* \underline{C}^T \left( \underline{C} \underline{P}_k^* \underline{C}^T + \underline{R} \right)^{-1}. \quad (4.38)$$

Diese ist ebenfalls in jedem Tastschritt neu zu berechnen.

Wie im Anhang A.1 gezeigt ist, kann die benötigte zeitdiskrete

#### 4.4 Simultane Zustands- und Parameterschätzung

---

Systemmatrix  $\underline{A}_k$  aus der zeitkontinuierlichen Transitionsmatrix  $e^{\underline{A}t}$  berechnet werden. Entwickelt man  $e^{\underline{A}t}$  für  $t=T_s$  in einer Reihendarstellung [44], führt das zu

$$\underline{\Phi}(T_s) = e^{\underline{A}T_s} = \underline{I} + \underline{A}T_s + \underline{A}^2 \frac{T_s^2}{2} + \dots, \quad (4.39)$$

was sich weiterhin für kleine Abtastzeiten zu

$$\underline{\Phi}(T_s) \approx \underline{I} + \underline{A}T_s \quad (4.40)$$

vereinfachen lässt. Mit (4.40) ergibt sich daher für die prädizierte Schätzfehlerkovarianzmatrix aus (4.36), die Berechnungsvorschrift

$$\begin{aligned} \underline{P}_k^* &= (\underline{I} + \underline{A}T_s) \underline{P}_{k-1} (\underline{I} + \underline{A}T_s)^T + \underline{Q}_k \\ &= \underline{P}_{k-1} + T_s \left( \underline{P}_{k-1} \underline{A}^T + \underline{A} \underline{P}_{k-1} \right) + T_s^2 \underline{A} \underline{P}_{k-1} \underline{A}^T + \underline{Q}_k. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Legt man wiederum sehr kleine Tastzeiten zu Grunde, so resultiert aus (4.41) die vereinfachte Berechnungsvorschrift der prädizierten Schätzfehlerkovarianzmatrix mit

$$\underline{P}_k^* \approx \underline{P}_{k-1} + T_s \left( \underline{P}_{k-1} \underline{A}^T + \underline{A} \underline{P}_{k-1} \right) + \underline{Q}_k. \quad (4.42)$$

Gleichung 4.42 beinhaltet damit lediglich lineare Zusammenhänge der Systemmatrix  $\underline{A}$  des zeitkontinuierlichen Systemmodells.

Nach [61, 105] kann das erweiterte Kalman-Filter auch zur gleichzeitigen Parameterschätzung verwendet werden. Dadurch wird es ermöglicht, eine adaptive Zustandsschätzung mit simultaner Parameteridentifikation zu erreichen um die Güte der eigentlichen Zustandsschätzung zu verbessern.

In [22, 61, 105] ist der unbekannte bzw. unsichere Parameter-

vektor  $\underline{\theta}$  wiederum als zeitlich konstanter Vektor nach Gleichung (4.20) vorzusehen. Durch die zufällig normalverteilte Anregung der Parameteränderung<sup>2</sup>

$$\underline{\theta}_{k+1} = \underline{\theta}_k + \underline{\zeta}_k, \quad (4.43)$$

ist die Schätzung funktionsfähig [22, 61, 105]. Das erweiterte zeitdiskrete Systemmodell eines EKF mit gleichzeitig geschätzten Parametervektor kann daher mit

$$\begin{pmatrix} \underline{x}_{k+1} \\ \underline{\theta}_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{f}(\underline{\theta}_k, \underline{x}_k, u_k) \\ \underline{\theta}_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{\eta}_k \\ \underline{\zeta}_k \end{pmatrix} \quad (4.44)$$

angegeben werden [61, 22]. Nach [3] ist für das erweiterte Kalman-Filter allerdings keine generelle Aussage über dessen Stabilität machbar, wenn sich die linearisierte Systemmatrix

$$\underline{A}_k = \frac{\partial}{\partial \begin{pmatrix} \underline{x}^T & \underline{\theta}^T \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \underline{f}(\underline{\theta}_k, \underline{x}_k, u_k) \\ \underline{\theta}_k \end{pmatrix} \Bigg|_{\underline{x}_k, \underline{\theta}_k} \quad (4.45)$$

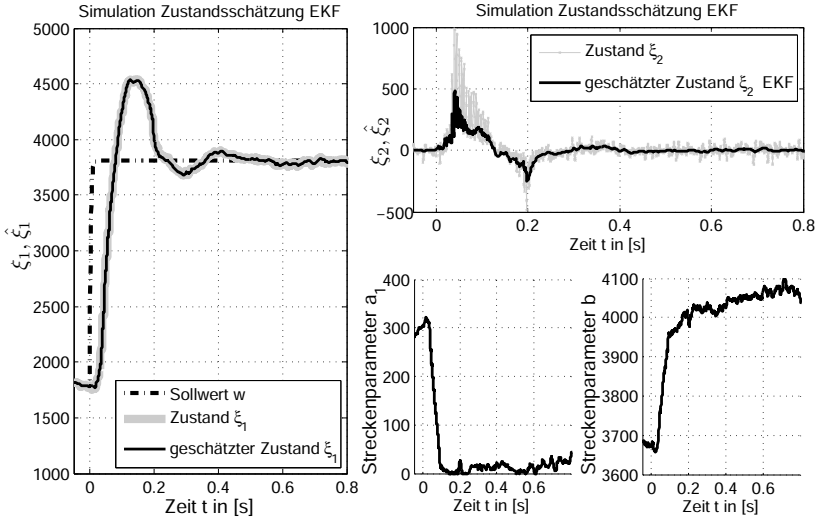
in jedem Tastschritt ändert. Die Stabilität kann bestenfalls anhand einer durchgeführten Simulation festgestellt werden und besitzt auch nur für diesen speziellen Fall Gültigkeit.

Die Methode eines erweiterten Kalman-Filters mit simultaner Parameterschätzung konnte erfolgreich auf den aus Abbildung 4.2 bekannten Simulationsdatensatzes angewendet werden. Dabei ließen sich die in Abbildung 4.5 dargestellten Ergebnisse erzielen. Fehlt die notwendige Systemanregung, so divergiert der zuvor geschätzte Parametervektor aufgrund der normalverteilt-

---

<sup>2</sup>Die zufällige Anregung einer im Normalfall zeitlich konstanten Größe wird auch als *Random Walk* oder zu deutsch als *zufällige Irrfahrt* bezeichnet.

## 4.4 Simultane Zustands- und Parameterschätzung



**Abbildung 4.5.** Erweitertes Kalman-Filter mit simultaner Parameternachführung

ten Anregung (4.43) zur Parameteränderung. Die Ursache des Divergierens lässt sich mit dem folgenden Satz begründen.

**Satz 3.** *Die simultane Zustands- und Parameterschätzung eines dynamischen Systemmodells beruht auf der Beobachtbarkeit des im Arbeitspunkt linearisierten erweiterten Zustandsraummodells*

$$\tilde{\xi}_{k+1} = \underline{A}_k \tilde{\xi}_k + \underline{B}_k u_k, \quad y_k = \underline{C} \tilde{\xi}_k$$

mit der Systemmatrix

$$\underline{A}_k = \left( \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial \xi} f(\tilde{\xi}_k, u_k) \\ \underline{I} \end{array} \right) \Bigg|_{\tilde{\xi}_k}, \quad \underline{A}_k \in \mathbb{R}^{\delta+m, \delta+m}$$

und dem erweiterten Zustandsvektor  $\tilde{\xi}_k \in \mathbb{R}^{\delta+m}$  nach (4.19).  
Besitzt die zeitdiskrete Beobachtbarkeitsmatrix

$$\underline{Q}_{b_k} = \begin{pmatrix} \underline{C} \\ \underline{CA}_k \\ \vdots \\ \underline{CA}_k^{\delta+m-1} \end{pmatrix}, \quad \underline{Q}_{b_k} \in \mathbb{R}^{(\delta+m, \delta+m)}$$

den vollen Rang und ist damit invertierbar, kann der Beobachtungsfehler des erweiterten Zustandsvektors zu Null konvergieren. Die Notwendigkeit einer ausreichenden Systemanregung aus Definition 3 ist dafür unumgänglich [125].  $\square$

Der Einsatz eines EKF mit kontinuierlicher, schneller und robuster Systemanpassung an sich ändernde Streckenparameter kann aus diesem Grund nicht ohne eine spezielle Modellanpassung gewährleistet werden. Damit eine schnelle Anpassung an die als unsicher geltende Strecke realisiert werden kann, soll im nächsten Abschnitt die Möglichkeit anderer adaptiver Schätzverfahren näher beleuchtet werden.

## 4.5 Adaptive Zustandsschätzung

Eine weitere Möglichkeit zur Schätzung von Zustandsgrößen unter Parameterunsicherheiten bieten adaptive Beobachter. Auch bei diesen Methoden wird vorausgesetzt, dass es sich um Systeme handelt, in denen die Parameter linear (nach Ansatz (4.18)) in die Modellgleichung eingehen [13, 152, 153]. Eine mögliche zeitliche Änderung der Modellparameter ist mit  $\dot{\theta} = 0$  zu vernachlässigen.

### 4.5.1 Ljapunov basierende Methodik

Die meisten adaptiven Beobachter, wie sie beispielsweise in [13] beschrieben werden, basieren auf dem gemeinsamen Entwurf von Adaptionsgesetz zur Parameteradaption und der Auslegung der eigentlichen Beobachterverstärkung für die Zustandsschätzung. Die Grundlage dieser Methodik bildet die Systemdarstellung in nichtlinearer adaptiver Beobachterform, um damit einen allgemeingültigen Ansatz schaffen zu können.

**Definition 16** (Nichtlinearer adaptiver Normalform-Beobachter [13, 68, 9]). *Auf der Grundlage der dynamischen Systembeschreibung*

$$\begin{aligned}\dot{\underline{\xi}} &= \underline{A}\underline{\xi} + \underline{B} \left( \alpha(\underline{\xi}) + \underline{\beta}(\underline{\xi}, u)\underline{\theta} \right) \\ \underline{y} &= \underline{C}\underline{\xi}\end{aligned}\tag{4.46}$$

mit den linearen und zeitlich konstanten Matrizen

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

kann ein **nichtlinearer adaptiver Normalform-Beobachter** der Form

$$\hat{\underline{\xi}} = \underline{A}\hat{\underline{\xi}} + \underline{B} \left( \alpha(\hat{\underline{\xi}}) + \underline{\beta}(\hat{\underline{\xi}}, u)\hat{\underline{\theta}}(t) \right) + \underline{H} \left( y - \underline{C}\hat{\underline{\xi}} \right), \quad \hat{\underline{\theta}} = \underline{f}(\underline{\xi} - \hat{\underline{\xi}})\tag{4.47}$$

entworfen werden.

Die Grundidee adaptiver Beobachterstrukturen beruht auf der asymptotischen Stabilität eines dynamischen Systemmodells mit

einer festgelegten Ljapunov-Funktion  $V(\xi)$ . Ein Kandidat der Ljapunov-Funktion stellt nach [153, 152, 108] die quadratische Summe aus Zustandsschätzfehlervektor  $\underline{e} = \underline{\xi} - \hat{\underline{\xi}}$  und dem Parameterschätzfehlervektor  $\tilde{\underline{\theta}} = \underline{\theta} - \hat{\underline{\theta}}$  mit

$$V = \underline{e}^T \underline{P} \underline{e} + \frac{1}{2} \tilde{\underline{\theta}}^T \underline{\Gamma}^{-1} \tilde{\underline{\theta}} \quad (4.48)$$

dar. Die zeitliche Differentiation von (4.48) ergibt zusammen mit der Beobachtungsfehlerdifferentialgleichung

$$\dot{\underline{e}} = (\underline{A} - \underline{H}\underline{C}) \underline{e} + \underline{B}(\alpha - \hat{\alpha}) + \underline{B} \left( \underline{\beta}(\underline{\xi}, u) \underline{\theta} - \underline{\beta}(\hat{\underline{\xi}}, u) \hat{\underline{\theta}} \right) \quad (4.49)$$

die zeitliche Änderung dieser definierten Ljapunov-Funktion mit

$$\begin{aligned} \dot{V} = \underline{e}^T & \left( (\underline{A} - \underline{H}\underline{C})^T \underline{P} + \underline{P}(\underline{A} - \underline{H}\underline{C}) \right) \underline{e} \\ & + 2 \left( \underline{\beta}(\underline{\xi}, u) \underline{\theta} - \underline{\beta}(\hat{\underline{\xi}}, u) \hat{\underline{\theta}} \right)^T \underline{B}^T \underline{P} \underline{e} + \tilde{\underline{\theta}}^T \underline{\Gamma}^{-1} \dot{\tilde{\underline{\theta}}}, \end{aligned} \quad (4.50)$$

sofern  $\alpha = \hat{\alpha} = 0$  voraus gesetzt werden kann. Damit asymptotische Stabilität des adaptiven Systems erreicht werden kann, ist es notwendig die folgende Annahme zu treffen.

**Annahme 1** ([21]). *Es existiert eine Matrix  $\underline{P}$  in der Form, dass aus (4.50) die positiv definite Matrix  $\underline{Q}$  mit*

$$(\underline{A} - \underline{H}\underline{C})^T \underline{P} + \underline{P}(\underline{A} - \underline{H}\underline{C}) = -\underline{Q} \quad (4.51)$$

berechnet werden kann.

Mit der Substitution des Parameterschätzfehlervektors  $\hat{\underline{\theta}} = \underline{\theta} - \tilde{\underline{\theta}}$  und der Voraussetzung, dass die Funktionen  $\alpha(\underline{\xi})$  und  $\beta(\underline{\xi})$  Lipschitz-stetig nach Definition 15 sind und damit

$$\left\| \left( \underline{\beta}(\underline{\xi}, u) - \underline{\beta}(\hat{\underline{\xi}}, u) \right) \underline{\theta} \right\| \leq \gamma_L \left\| \underline{\xi} - \hat{\underline{\xi}} \right\| \quad (4.52)$$



gelten muss, erhält man mit der Relation nach Anhang C.1

$$2|\underline{P}e| |e| \leq e^T \underline{P}Pe + e^T e \quad (4.53)$$

eine Abschätzung für die zeitliche Änderung von (4.48) [21, 152] durch

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq e^T & \left( (\underline{A} - \underline{H}\underline{C})^T \underline{P} + \underline{P}(\underline{A} - \underline{H}\underline{C}) + \gamma_L \left| \underline{B}^T \right| (\underline{P}\underline{P} + \underline{I}) \right) e \\ & + \tilde{\theta}^T \left( 2\underline{\beta}(\hat{x}, u)^T \underline{B}^T \underline{P}e + \underline{\Gamma}^{-1} \dot{\tilde{\theta}} \right). \end{aligned} \quad (4.54)$$

Aus dem Grund, dass  $\dot{\tilde{\theta}} = -\hat{\tilde{\theta}}$  für einen zeitlich konstanten Parametervektor mit  $\tilde{\theta} \approx 0$  gilt, kann als Parameteradaptionsgesetz

$$\dot{\tilde{\theta}} = \underline{\Gamma} \frac{1}{2} \underline{\beta}(\hat{\xi}, u)^T \underline{B}^T \underline{P}e \quad (4.55)$$

verwendet werden [21, 152, 153]. Damit hängt die Stabilität des dynamischen Systems von der positiven Definitheit der Matrix  $\tilde{Q}$  aus

$$-\tilde{Q} = (\underline{A} - \underline{H}\underline{C})^T \underline{P} + \underline{P}(\underline{A} - \underline{H}\underline{C}) + \gamma_L \left| \underline{B}^T \right| (\underline{P}\underline{P} + \underline{I}) \quad (4.56)$$

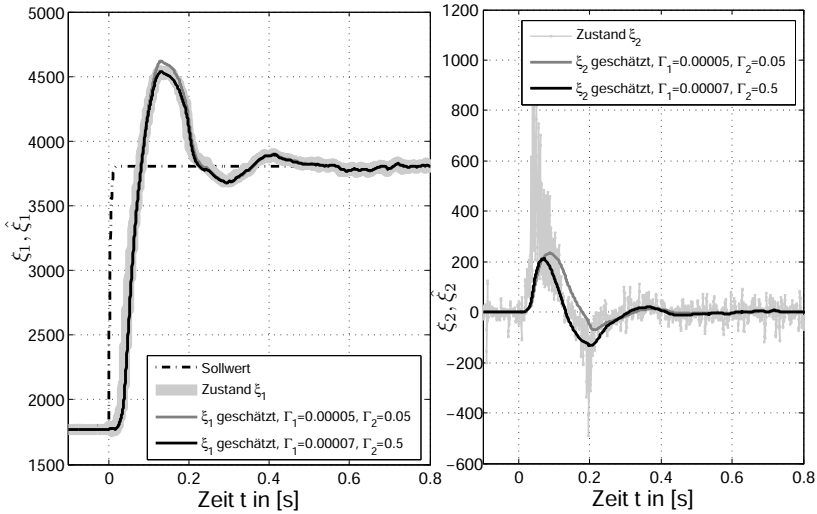
ab. Weil der messbare Zustandsschätzfehler lediglich der der Ausgangsgröße ist, ist es ebenfalls sinnvoll die folgende Annahme zu treffen.

**Annahme 2** ([68, 21, 153, 152]). *Es existiert eine Matrix  $\underline{P}$ , so dass Annahme 1 gilt und die Bedingung*

$$\underline{B}^T \underline{P} = \underline{C} \quad (4.57)$$

erfüllt ist.

Existiert ein  $\underline{P}$  in der Form, dass Annahme 2 erfüllt wird, ist es



**Abbildung 4.6.** Simulation der Zustandsschätzung mit adaptiven Beobachter

möglich, das notwendige Adaptionsgesetz (4.55) mit

$$\dot{\hat{\theta}} = \underline{\Gamma} \frac{1}{2} \underline{\beta} (\hat{\xi}, u)^T \underline{C} e = \underline{\Gamma} \frac{1}{2} \underline{\beta} (\hat{\xi}, u)^T (y - \hat{y}) \quad (4.58)$$

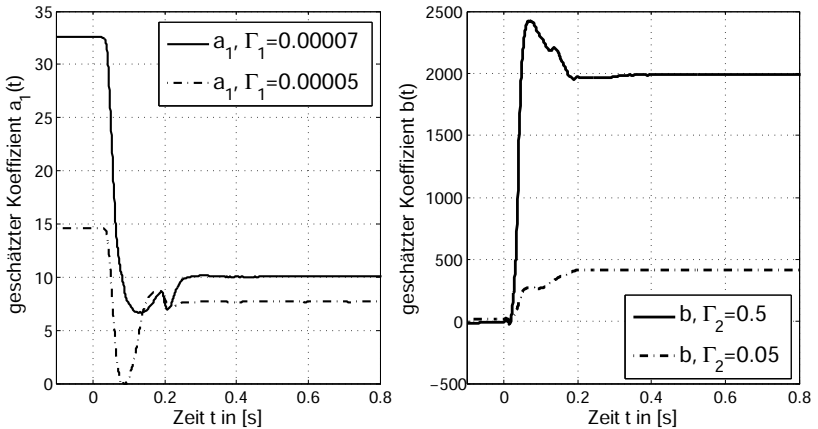
zu vereinfachen. Wie es auch in [153, 152] gezeigt ist, kann zur Berechnung der Matrix  $\underline{P}$  in (4.56), die zudem die Bedingung (4.57) erfüllt, die LMI<sup>3</sup>-Toolbox von MATLAB benutzt werden. Das entwickelte Adaptionsgesetz (4.58) beinhaltet damit lediglich den Schätzfehlerausgang für die Parameteränderungsanregung [21, 13, 153, 152]. Damit letztendlich auch der Parameter-

<sup>3</sup>LMI: engl. *Linear Matrix Inequality* bezeichnet eine lineare Matrix-Ungleichung

fehlervektor verschwindet und somit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\theta} = 0 \quad (4.59)$$

erreicht werden kann, ist es nach [13] wiederum notwendig eine kontinuierliche Systemanregung durch die Stellgröße zu gewährleisten. Im praktischen Einsatz rufen äußere Störeinflüsse ein Divergieren vom eigentlichen Parameterwert hervor. Auch vorhandenes Messrauschen beeinflusst die Güte des adaptiven Schätzsystems im stationären Zustand.



**Abbildung 4.7.** Simulation der geschätzten Koeffizienten (kontinuierliche Parametrierung) mit adaptiven Beobachter

Mit der freien Wahl der Elemente von  $\underline{\Gamma}$ , der Auslegung der Matrix  $\tilde{Q}$  und dem Festlegen von  $\gamma_L$  ist es nur schwer möglich eine verallgemeinerte Entwurfsvorschrift für jeden möglichen Anwendungsfall abzuleiten.

Für den Simulationsdatensatz ließen sich die in Abbildung 4.6 gezeigten Schätzergebnisse mit Hilfe eines adaptiven Beobachters erzielen. Der in Abbildung 4.7 gezeigte Verlauf verdeutlicht die

von der Auslegung des Parameters  $\underline{\Gamma}$  abhängige Einschwinggüte zur Schätzung des Parametervektors  $\hat{\underline{\theta}}$  für das angenommene lineare Streckenmodell aus (4.2). Eine erwartungstreue Schätzung von  $\hat{\underline{\theta}}$  ist auch mit dieser Methodik ohne kontinuierliche Systemanregung nicht möglich.

Aufgrund des nicht einfachen und handhabbaren Entwurfs und auch der nicht immer gegebenen erwartungstreuen Parameterschätzung, ist die Verwendung dieser Beobachterform im industriellen Einsatzbereich nur bedingt zu empfehlen.

### 4.5.2 Beobachter mit simultaner Parameteroptimierung

Das erweiterte Kalman-Filter aus Abschnitt 4.4.2 ist durch seine hohe Schätzgüte gegenüber stochastisch einwirkenden Störungen charakterisiert. Um die Schätzgüte des EKF (oder auch im Allgemeinen eines Beobachters) nochmals zu erhöhen, ist es durchaus sinnvoll die Modellparameter dieser dynamischen Struktur auch im laufenden Betrieb an die Umgebung anzupassen. Ist diese Anpassung losgelöst von der eigentlichen Zustandsschätzung umsetzbar, ist eine simultane und in gewissen Maßen unabhängige Schätzung von Zuständen und Parametern gegeben.

### Einführung in die Problemstellung

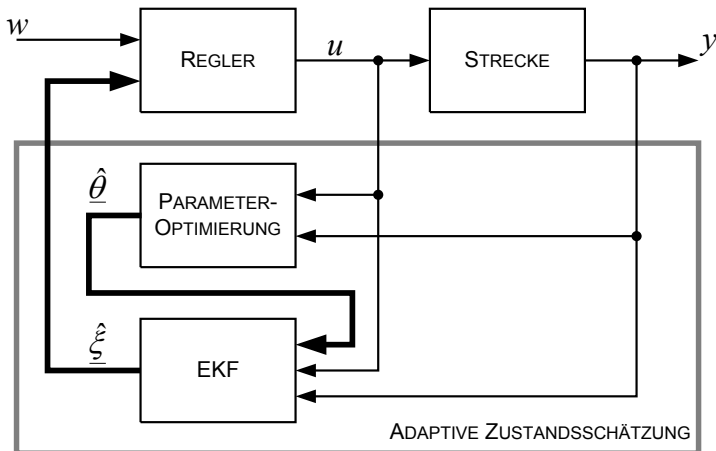
Das Nachführen von Systemparametern innerhalb dynamischer Zustandsschätzsysteme äußert sich darin, dass die Systemstabilität nicht nur durch die Nichtlinearität der eigentlichen Zustandsgrößen beeinflusst wird, sondern auch durch die Zeitvarianz der geschätzten Parameter. Wie in Abschnitt 4.5.1 gezeigt, lassen sich Zustandsgrößen und Parameter mit adaptiven Beobachtern simultan schätzen. Mit diesem Verfahren ist die Dynamik beider Schätzvorgänge jedoch nicht getrennt voneinander einstell-

bar. Um dennoch ein individuelles dynamisches Einschwingverhalten beider Schätzvorgänge umzusetzen, soll nun ein separates Parameter-Identifikationsverfahren in Verbindung mit einer dynamischen Zustandsschätzung untersucht werden.

Die Systembeschreibung nichtlinearer eingangsafliner SISO-Systeme mit zeitlich langsam veränderlichen Parametern lässt sich in der zeitdiskreten Form

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{a}_d(\underline{\theta}_k, \underline{x}_k) + \underline{b}_d(\underline{\theta}_k, \underline{x}_k) u_k, \quad y_k = c_d(\underline{x}_k) \quad (4.60)$$

mit den Vektoren  $\underline{a}_d, \underline{b}_d, \underline{x} \in \mathbb{R}^n, c_d, y \in \mathbb{R}, \underline{\theta} \in \mathbb{R}^q$  angeben.



**Abbildung 4.8.** Strukturdarstellung der adaptiven Zustandsschätzung mit simultaner Parameteroptimierung

Ist aus der Beschreibungsgleichung (4.60) eine nichtlineare Differenzgleichung in der Art ableitbar, dass der Systemausgangs-

wert direkt aus den existierenden Messwerten  $\underline{y}$ ,  $\underline{y} \in \mathbb{R}^m$  berechnet werden kann, so kann das Gütefunktional

$$J(\hat{\underline{\theta}}) = \frac{1}{2} \underline{e}^T \underline{e} = \frac{1}{2} (\underline{y} - \hat{\underline{y}}(\hat{\underline{\theta}}))^T (\underline{y} - \hat{\underline{y}}(\hat{\underline{\theta}})) \quad (4.61)$$

mit  $\underline{e} \in \mathbb{R}^m$  für  $m$  Stützstellen definiert werden [40, 59, 61]. Durch die Transformation in die nichtlineare adaptive Beobachterform aus Definition 16, sind derartige Systeme (4.60) meist als solche (nichtlinearen) Differenzgleichungssysteme darstellbar. Der gesuchte Parameterschätzvektor  $\hat{\underline{\theta}} \in \mathbb{R}^{(q,1)}$  resultiert als Ergebnis des statischen Optimierungsproblems

$$\min_{\hat{\underline{\theta}}} \{J\}. \quad (4.62)$$

Ein großer Vorteil dieser Methodik ist die erwartungstreue Parameterschätzung im Falle parameterlinearer Systeme, so dass nach Definition 10 der Erwartungswert des geschätzten Parametervektors dem der gesuchten Modellparameter entspricht. Voraussetzung einer erwartungstreuen Parameterschätzung ist wiederum ein Mindestmaß an Systemanregung nach Definition 3, das im Gegensatz zu einer reinen Zustandsschätzung linear modellierter Systemmodelle auch in diesem Fall zwingend notwendig ist [123, 61].

Ist die zeitdiskrete Modellgleichung mit der parameterlinearen Differenzgleichung

$$\underline{y}_k = \underline{m}_k \underline{\theta} \rightarrow \hat{\underline{y}}_k = \underline{m}_k \hat{\underline{\theta}} = \begin{pmatrix} f_1(\underline{y}_k, \underline{u}_k) & \dots & f_q(\underline{y}_k, \underline{u}_k) \end{pmatrix} \hat{\underline{\theta}}, \\ \underline{y}_k, \underline{u}_k \in \mathbb{R}^{(m,1)} \quad (4.63)$$

beschreibbar, so zeigt der folgende Beweis die Gültigkeit einer erwartungstreuen Parameterschätzung.

**Beweis 1** (Erwartungstreue Parameterschätzung [61]). *In parameterlinearen Differenzgleichungen lassen sich alle vorhandenen Messvektoren  $\underline{m}_k$  in der Messwertmatrix  $\underline{M}$  und alle vorhandenen Ausgangsgrößen im Ausgangsvektor  $\underline{y}_k$  zusammenfassen. Ist dann  $\hat{\underline{\theta}} = (\underline{M}^T \underline{M})^{-1} \underline{M}^T \underline{y}$  die Lösung des Iterationsproblems (4.62) und  $\underline{\theta}$  der wahre Parametervektor, so lässt sich der Erwartungswert des Schätzvektors  $\hat{\underline{\theta}}$  mit*

$$\begin{aligned} E \{ \hat{\underline{\theta}} \} &= E \left\{ (\underline{M}^T \underline{M})^{-1} \underline{M}^T \underline{y} \right\} \\ &= E \left\{ (\underline{M}^T \underline{M})^{-1} \underline{M}^T \underline{e} + (\underline{M}^T \underline{M})^{-1} \underline{M}^T \underline{M} \underline{\theta} \right\} \\ &= \underline{\theta} + E \left\{ (\underline{M}^T \underline{M})^{-1} \underline{M}^T \underline{e} \right\} \end{aligned}$$

berechnen. Ist dann  $E \left\{ (\underline{M}^T \underline{M})^{-1} \underline{M}^T \underline{e} \right\} = 0$ , so ist die Schätzung erwartungstreu nach Definition 10. Das ist genau dann der Fall, wenn  $\underline{e}$  allein durch mittelwertfreie Störungen verursacht wird [61].  $\square$

## Überblick existierender Lösungsverfahren

Das Minimierungsproblem (4.62) beschreibt ein statisches nichtlineares Optimierungsproblem [105]. Um die Vielzahl existierender Lösungsverfahren für diese Art von Optimierungsproblemen überschauen zu können, werden sie in mehrere Gruppen unterteilt. Tabelle 4.1 gibt einen kurzen Überblick in der Praxis oft verwendeter Verfahren zur numerischen Lösung nichtlinearer Optimierungsprobleme.

Für detaillierte Informationen zur Funktionsweise der genannten Verfahren sei auf weiterführende Literaturquellen wie [123, 105] und [69] verwiesen. Im Hinblick auf die Handhabbarkeit und Re-

#### 4 Zustandsschätzung bei Systemen mit unsicheren...

Klasse	Verfahren	Kennzeichnung
0. Ordnung	Simplex Hooks-Jeves	Ableitungsfreie Berechnungsmethodik; Auswertung des Gütefunktional $J$ in mehreren Punkten; langsame Konvergenz
1. Ordnung	Gradientenverfahren Gauss-Seidel-Verfahren	Nutzung der 1. Ableitung des Gütefunktional $J$ ; lineare Konvergenz
2. Ordnung	Newton-Verfahren Quasi-Newton-Verfahren	Nutzung der 2. Ableitung des Gütefunktional $J$ ; schnelle, bis hin zur quadratischen Konvergenz

**Tabelle 4.1.** Einteilung einiger Lösungsverfahren nichtlinearer Optimierungsprobleme [123, 105]

chenintensität in digitalen Regelsystemen, soll an dieser Stelle das Gradientenverfahren mit optimierter Schrittweite näher betrachtet werden. Ausschlaggebend dafür ist vor allem die Tatsache, dass eine aufwendige Matrizeninversion, wie sie beispielsweise beim Newton-Verfahren gebraucht wird, nicht umgesetzt werden muss. Da es sich um parameterlineare Modelle handelt, ist das Verfahren ideal für die Implementierung auch auf kleineren Mikrocontrollerplattformen geeignet. Die Optimierung kann im Betrieb nebenläufig zur zeitkritischen Regelungstask ablaufen.



## Das Gradientenverfahren zur Lösung von Optimierungsproblemen

Der iterative Lösungsweg des Optimierungsproblems (4.62) mit dem entsprechenden Gütefunktional (4.61) erfolgt sukzessive in Richtung des Minimums von  $J$ . Dessen Änderung, aufgrund der Variation  $\Delta \hat{\theta}$  des Parametervektors entgegengesetzt des Funktionalgradienten  $\frac{\partial J}{\partial \theta} = \nabla J$ , entspricht genau der Iterationsrichtung hin zum lokalen Minimum des Gütefunktionals. Ein vollständiger Iterationsschritt aller Parameter ist mit dem Gradientenverfahren durch

$$\hat{\theta}_{l+1} = \hat{\theta}_l - \Gamma \nabla J_l \quad (4.64)$$

gegeben, wohingegen die Iteration eines einzelnen Parameters sich mit

$$\hat{\theta}_{i_{l+1}} = \hat{\theta}_{i_l} - \Gamma_i \nabla_{\theta_i} J_l \quad (4.65)$$

berechnen lässt. Die Iterationsschrittweite  $\Gamma$  bzw.  $\Gamma_i$  kann durch eine weitere Optimierung so gewählt werden, dass mit  $\Gamma = \Gamma_{\text{opt}}$  bzw.  $\Gamma_i = \Gamma_{i_{\text{opt}}}$  das Gütemaß (4.61) für jeden einzelnen Iterationsschritt minimal ist (vgl. dazu die Berechnung im Anhang A.4 für parameterlineare Differenzgleichungen). Dabei führt jeder Iterationsschritt zu einer weiteren Verbesserung des Gütefunktionals. Die optimale Schrittweite  $\Gamma_{i_{\text{opt}}}$  zur Iteration einzelner Parameter für parameterlineare Differenzgleichungen nach (4.63), ist mit

$$\Gamma_{i_{\text{opt}}} = \frac{1}{\underline{m}_i^T \underline{m}_i} \quad (4.66)$$

gegeben und kann wiederum rekursiv bestimmt werden.

## Die kontinuierliche Parameteriteration

Eine große Herausforderung an technisch rechnergestützte Systeme stellt die kontinuierliche Schätzung von Parametern dar,

welche über einen weiten Zeithorizont und parallel zum Normalbetrieb ablaufen soll.

In der Praxis findet oftmals die Methode der **rekursiven kleinsten Quadrate** für diese Aufgabe ihre Anwendung [105, 126, 122, 123], in der alle vergangenen Messwerte berücksichtigt werden. Sollen hingegen längst vergangene Messwerte in Vergessenheit geraten damit das Ergebnis der Schätzung auch bei einer möglichen Streckenänderung sicher zum wahren Wert hin konvergiert, ist es sinnvoll jeden einzelnen Messwert adaptiv zu wichten. Diese Methode wird nach [105] auch die Methode der **adaptiven kleinsten Quadrate** bezeichnet. Kennzeichnend dafür ist das allmähliche Minimieren der Messwertwichtung längst vergangener Werte bis hin zu Null. Nach [105, 122] erfolgt die Modifizierung der jeweiligen Wichtung exponentiell mit wachsender Zeit. Um eine Adaption der geschätzten Parameter zu erreichen und den Rechenaufwand minimal halten zu können, soll nun die **Fenstermethode** bezüglich der eigentlichen Messdatenerfassung näher in den Fokus rücken. Für einen Iterationsschritt entgegengesetzt des Gradienten  $\nabla J = -\underline{M}^T \underline{e}$ , ergibt sich aus (4.64) der neue Schätzvektor zu

$$\hat{\theta}_{l+1} = \hat{\theta}_l + \Gamma \underline{M}^T \underline{e} = \left( \underline{I} - \Gamma \underline{M}^T \underline{M} \right) \hat{\theta}_l + \Gamma \underline{M}^T \underline{y}. \quad (4.67)$$

Die benötigten Matrizelemente  $\underline{M}^T \underline{M}$  und  $\underline{M}^T \underline{y}$  zur Anwendung der schrittweisen Iteration, lassen sich rekursiv mit Hilfe eines Ringspeichers berechnen. Alle Messwerte die älter als  $(k - m)T_s$  sind, geraten bei dieser Methode schlagartig in Vergessenheit.

**Maß für die Systemanregung** Wie schon in [61, 123] beschrieben, muss ein hohes Maß an Systemanregung in den vorhandenen Messwerten existieren um eine erwartungstreue Parameterschätzung zu erreichen.

Ausgehend vom Differenzgleichungsmodell (4.63), werden für die Identifikation nur die messbaren Ausgangsgrößen sowie alle bekannten Stellgrößen als zeitdiskrete Messwertfolge verwendet. Im stationären Zustand (ohne äußere Störeinflüsse), d.h. wenn

$$y_k = y_{k-1}, \quad u_k = u_{k-1} \quad \forall k \in [1..\infty] \quad (4.68)$$

gilt, lassen sich die aus Abschnitt 2.2 bekannten Kennzahlen für stationäre Prozesse

$$\begin{aligned} E\{\underline{y}\} &= y_k, \quad E\{\underline{u}\} = u_k, \\ \text{var}\{\underline{y}\} &= E\left\{\left(\underline{y} - E\{\underline{y}\}\right)^T \left(\underline{y} - E\{\underline{y}\}\right)\right\} = 0 \quad \text{und} \\ \text{var}\{\underline{u}\} &= E\left\{\left(\underline{u} - E\{\underline{u}\}\right)^T \left(\underline{u} - E\{\underline{u}\}\right)\right\} = 0 \end{aligned}$$

ermitteln. Außerhalb des stationären Zustands, weichen diese Kennzahlen deutlich von den eben genannten Größenordnungen ab. Daher können „Streuung“ und „Mittelwert“ als Maß der Systemanregung für diese Art der Modellgleichung angewendet werden.

Als Maß für die durch die Stellgröße verursachte Systemanregung ist es daher legitim, die Maßzahl

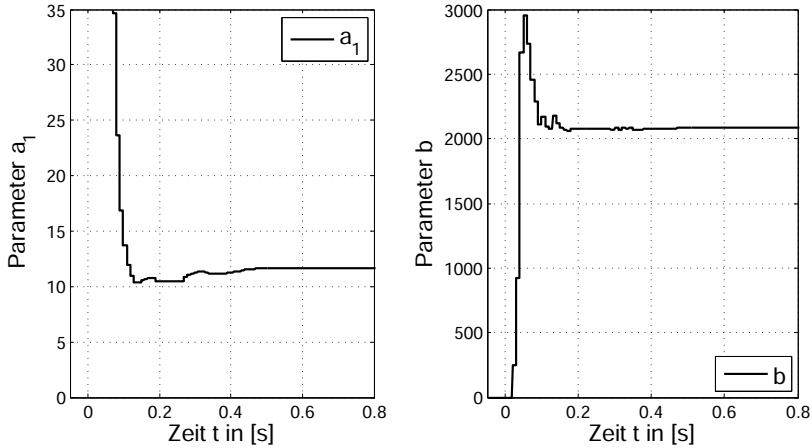
$$\tau_k = \text{var}\{\underline{u}\} \cdot \text{var}\{\underline{y}\}, \quad \tau_k \in \mathbb{R}, \quad \tau_k \geq 0 \quad (4.69)$$

zu definieren. Damit diese Maßzahl zu jedem Zeitpunkt  $k$  bestimmt werden kann, bietet es sich an die im Anhang A.3 vorgestellte rekursive Berechnungsmethodik zu verwenden. Das Ergebnis entspricht der Streuung und dem Erwartungswert der im Messpuffer befindlichen Datenmenge. Weil dieser Speicher als Ringspeicher ausgeführt ist, erhält man dadurch eine rekursiv gleitende Stichprobenauswertung.

**Modifikation der Schrittweite** Eine Möglichkeit, die kontinuierliche Parameteriteration mit dem im jeden Tastschritt aktualisierten Messspeicher durchzuführen, ist die Anpassung der Iterationsschrittweite. Es bietet sich damit an,  $\Gamma$  bzw.  $\Gamma_i$  mit

$$\Gamma_l = \Gamma_{l_{opt}} \cdot \alpha(\tau_k), \quad \alpha \in [0, 1], \alpha \in \mathbb{R} \quad (4.70)$$

in Abhängigkeit der vorhandenen Systemanregung zu variieren, um eine stabile prozessnebenläufige Iteration gewährleisten zu können und so ein Divergieren der Parameter aufgrund existierender Rauscheinflüsse zu vermeiden.

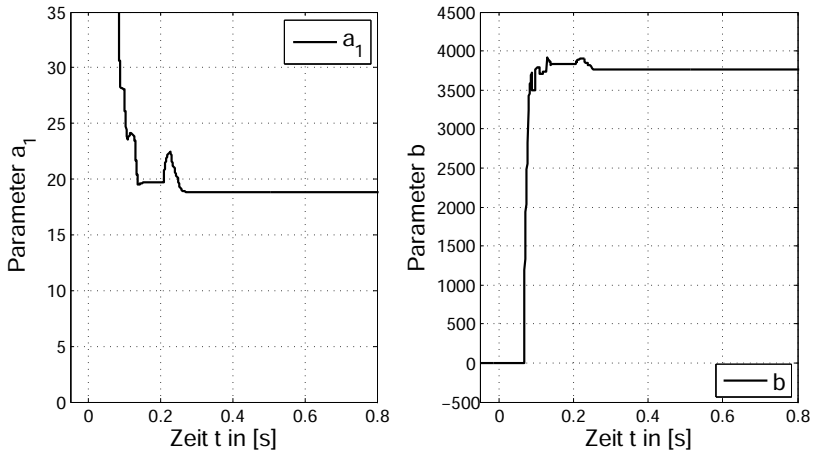


**Abbildung 4.9.** Simulation der geschätzten Koeffizienten mit adaptiven EKF unter Modifikation der Schrittweite

Dieser Ansatz führt für den vorhandenen Messdatensatz und der festgelegten Modellgleichung (4.2) zu einer adaptiven Zustandsschätzung, deren Ergebnisse in Abbildung 4.11 gezeigt sind. Die gesuchten Streckenparameter  $a_1$  und  $b$  konvergieren gegen den in Abbildung 4.9 dargestellten stationären Wert.

**Modifikation der Messdatenerfassung** Als Alternative zur Schrittweisenmodifikation, kann auch die eigentliche Datenerfassung modifiziert werden. Wird ein Überschreiten der Systemanregung oberhalb eines definierten Grenzwerts  $\tau_{\min}$  mit

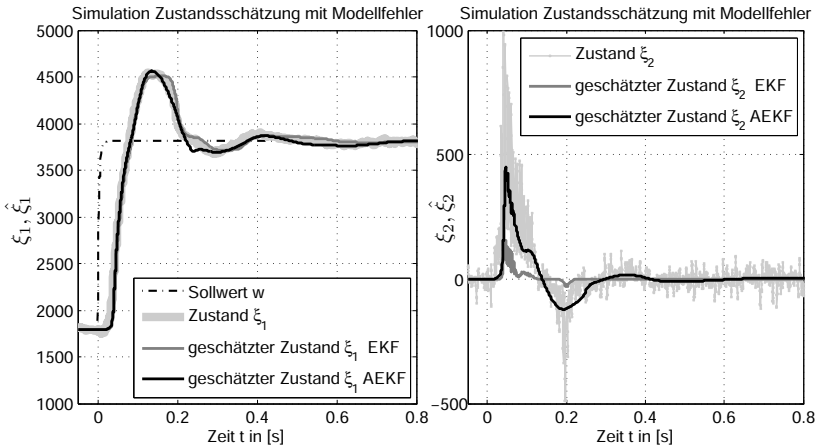
$$\tau_k > \tau_{\min}, \quad \tau_{\min} \in \mathbb{R}, \quad \tau_{\min} > 0 \quad (4.71)$$



**Abbildung 4.10.** Simulation der geschätzten Koeffizienten mit adaptiven EKF unter Modifikation der Messdatenerfassung

detektiert, wird nur der zu diesem Zeitpunkt erfasste Messvektor  $\underline{m}_k$  und Messwert  $y_k$  in den für die Parameteriteration notwendigen Speicher abgelegt. Diese Methodik verursacht allerdings die Notwendigkeit eines weiteren Ringspeichers, um das kontinuierliche Erfassen des Messvektors  $\underline{m}_k$  außerhalb des Speichers zur Parameteridentifikation umzusetzen. Ein großer Vorteil dieser Methode ist allerdings die, dass in den rekursiven Matrixelementen aus (4.67), nur Informationen von ausreichend angeregten Systemverhalten enthalten ist und eine Iterationsschritt-

weite mit stets optimaler Größe verwendet werden kann. Für den vorhandenen Simulationsdatensatz konvergieren die gesuchten Streckenparameter  $a_1$  und  $b$  gegen den in Abbildung 4.10 dargestellten stationären Wert.



**Abbildung 4.11.** Simulation der Zustandsschätzung mit EKF und adaptiven EKF unter existierenden Modellfehlern

### Stabilität und Konvergenz simultaner Parameteroptimierung

Mit der Anwendung des Gradientenverfahrens und der damit verbundenen Parameteriterationsvorschrift (4.64) bzw. (4.65) erhält man ein linear konvergentes Parameterschätzverfahren.

Vorausgesetzt es existiert eine ausreichend große Systemanregung durch die Stellgröße, konvergieren alle geschätzten Modellparameter  $\hat{\theta}$  aufgrund der gegebenen erwartungstreuen Parameterschätzung hin zum wahren Wert  $\underline{\theta}$ . Das dynamische Verhalten dieser Schätzung ist damit durch ein lineares Differentialglei-

chungssystem erster Ordnung

$$\dot{\hat{\theta}} = \lambda \hat{\theta} + \lambda \theta \quad (4.72)$$

mit unbekannter aber als konstant vorausgesetzter Systemmatrix  $\lambda$  approximierbar. Die Lösung dieses Differentialgleichungssystems kann in allgemeiner Form mit

$$\hat{\theta}(t) = \theta + e^{\lambda t} \hat{\theta}_0 \quad (4.73)$$

angegeben werden und konvergiert für  $t \rightarrow \infty$  gegen den wahren Wert der gesuchten Streckenparameter. Damit ist der Grenzwert

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\theta} = \theta$$

als erwartungstreuer Parameterschätzwert anzunehmen. Die Stabilität und Konvergenz des Beobachters kann unter diesen Voraussetzungen wie folgt bewiesen werden.

**Beweis 2** (Stabilität und Konvergenz simultaner Parameteroptimierung). *Der zeitvariante Zustandsbeobachter*

$$\dot{\hat{\xi}} = \underline{A} \hat{\xi} + \underline{B} \left( \alpha(\hat{\xi}) + \hat{\theta}(t)^T \underline{\beta}(\hat{\xi}, u) \right) + \underline{H}_k \underline{C} \left( \underline{x} - \hat{\xi} \right) \quad (4.74)$$

mit den Matrizen  $\underline{A}$ ,  $\underline{B}$  und  $\underline{C}$  aus (16) kann durch Anwendung einer Linearisierung in der Form umgeschrieben werden, dass sich mit Hilfe von

$$\underline{A}_k = \underline{A} + \underline{B} \left( \left. \frac{\partial \alpha}{\partial \hat{\xi}} \right|_{\hat{\xi}_k} + \theta^T \left. \frac{\partial \underline{\beta}}{\partial \hat{\xi}} \right|_{\hat{\xi}_k} \right) \quad (4.75)$$

und der Substitution

$$\hat{\theta} = \theta - \tilde{\theta} \quad (4.76)$$

die im Tastschritt  $t=kT_s$  linearisierte Zustandsschätzfehlerdynamik

$$\dot{\underline{e}} = \dot{\underline{\hat{x}}} - \dot{\underline{\hat{x}}} = (\underline{A}_k - \underline{H}_k \underline{C}) \underline{e} + \underline{B} \tilde{\theta}^T \left( \underline{\beta}(\hat{\underline{x}}_k, u_k) + \left. \frac{\partial \underline{\beta}}{\partial \hat{\underline{x}}} \right|_{\hat{\underline{x}}_k} (\underline{\hat{x}} - \hat{\underline{x}}_k) \right) \quad (4.77)$$

ergibt. Die Parameterschätzfehlerdynamik ist mit (4.73) direkt durch

$$\tilde{\underline{\theta}} = \underline{\theta} - \hat{\underline{\theta}} = \underline{\theta} - (\underline{\theta} + \hat{\underline{\theta}}_0 e^{\lambda t}) = -e^{\lambda t} \hat{\underline{\theta}}_0 \quad (4.78)$$

berechenbar und konvergiert für  $t \rightarrow \infty$  linear gegen 0. Damit gilt nach endlicher Zeit auch für den Zustandsschätzfehler

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \underline{e} = 0, \quad (4.79)$$

so dass eine erwartungstreue simultane Zustands- und Parameterschätzung umgesetzt werden kann.  $\square$

Die sich aus (4.75) ergebende zeitvariante Systemmatrix  $\underline{A}_k$  dient zur Auslegung des Beobachtervektors  $\underline{H} = \underline{H}_k$ . Dieser ist idealerweise ebenso zeitvariant zu wählen. Alternativ kann  $\underline{H}_k$  auch das Ergebnis einer Schätzfehlervarianzminimierung sein. Diese Konstellation entspricht der Verkopplung eines EKF aus Abschnitt 4.4.2 und einer fortlaufenden Parameteriteration. Aufgrund der hohen Schätzgüte des Kalman-Filters und der erwartungstreuen Parameterschätzung (wie in Beweis 1 gezeigt), bietet sich diese Kombination aus beiden Verfahren zur Implementierung einer adaptiven Zustandsschätzung auch in praxisrelevanten Regelkreisen an.



## 4.6 Zeitdiskrete Berechnung von Zustandsgrößen

In diesem Abschnitt sollen nun zwei wichtige Methoden zur direkten Berechnung zeitlicher Zustandsableitungen vorgestellt und diskutiert werden. Diese Verfahren gehören zwar nicht zu den Methoden einer Zustandsschätzung, können aber dazu verwendet werden, die Zustandsgrößen von Systemen in (nichtlinearer) Regelungsnormalform allein aus der Ausgangsgröße heraus zu berechnen. Grund dafür ist die Normalformstruktur, in der der transformierte Zustandsvektor (4.7) aus dem messbaren Systemausgang  $y(t)$  und seinen zeitlichen Ableitungen besteht.

Weil diese Methoden nur wenig Rechenleistung benötigen, wird die direkte Berechnung der transformierten Zustandsgrößen für die Umsetzung des hoch dynamisch ausgelegten Druckregelkreises in Abschnitt 5.1.3 verwendet werden.

Die in den Arbeiten [112] und [166] vorgestellten algebraischen Ableitungsschätzer als weitere Möglichkeit zur Berechnung zeitlicher Ableitungen wurden nicht näher untersucht.

### 4.6.1 Numerisches Differenzieren

Die einfachste Methodik zeitliche Ableitungen eines zeitdiskret vorliegenden Messsignals zu berechnen, ist die des numerischen Differenzierens. Per Definition ist die Ableitung einer beliebigen Funktion  $f(x) \in \mathbb{R}$  bezüglich  $x$  an der Stelle  $x_k$  durch den Grenzwert

$$\frac{df}{dx} = f'(x) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{f(x_k + \Delta x) - f(x_k)}{\Delta x}, \quad \Delta x = x_2 - x_1 \quad (4.80)$$

festgelegt [67]. Für die zeitliche Ableitung einer Messwertfolge  $x(kT) \in \mathbb{R}$ , wobei die zeitliche Änderung genau einer Perioden-

dauer  $\Delta x \hat{=} \Delta t = T_s$  des Abtastens entspricht, bedeutet das

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} \approx \frac{x(kT_s + T_s) - x(kT_s)}{T_s} = \frac{x_{k+1} - x_k}{T_s}, \quad (4.81)$$

und entspricht der in Tabelle 2.3 beschriebenen Vorwärtsdifferenzenmethode. Nachteilig wirkt sich dieser einfache Algorithmus auf die Güte des Ergebnisses unter Einfluss von Messstörungen aus. Mathematisch kann das mit dem Anwenden der Ableitungsregeln, wie sie auch in [67] gezeigt sind, auf ein allgemein gültiges periodisches Störsignal der Form  $\zeta(t) = \sin(\omega t)$  bewiesen werden. Wird das Nutzsignal  $x(t)$  additiv mit dieser beispielhaften Art von Störung überlagert, so ergibt sich die zeitliche Ableitung des gemessenen Signals  $y(t)$  zu

$$\dot{y}(t) = \frac{d}{dt} (x(t) + \zeta(t)) = \dot{x}(t) + \omega \cos(\omega t).$$

Je höher die Frequenzen des Störsignals sind, desto gravierender wirkt sich der Einfluss von  $\zeta(t)$  auf die numerisch bestimmte Zeitableitung des Messsignals aus.

In der Literatur (z.B. in [119]) werden Ansätze vorgestellt, welche dezimierende Interpolationsfilter zur numerischen Berechnung der zeitlichen Ableitung eines gemessenen Signals verwenden. Grundgedanke dieser Herangehensweise ist die Approximation des abgetasteten Signals durch ein Polynom, dessen zeitliche Ableitung sehr einfach analytisch mit

$$x(t) = \sum_{i=0}^n a_i t^i \rightarrow \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^n i \cdot a_i t^{i-1}. \quad (4.82)$$

zu bestimmen ist. Mit Hilfe der Splineinterpolation oder der Minimierung des quadratischen Fehlers (Regression) der Messwerte können somit Polynomkoeffizienten ermittelt werden, die als Fil-

terkoeffizienten des Interpolationsfilters eingesetzt werden. Dabei ist es sinnvoll, die Messwerterfassung des Nutzsignals  $n$ -mal schneller als die Abtastzeit des übergeordneten Algorithmus auszuliegen.

Ein numerischer Differenzierer besitzt somit die Struktur eines FIR<sup>4</sup>-Filters. FIR-Filter sind nichtrekursive Filter, welche per Definition nur die eingehenden Messwerte zur Berechnung der Ausgangsgröße benutzen. Im  $z$ -Bereich lässt sich daher die allgemeine Filtergleichung

$$G_F(z) = \sum_{i=0}^n b_i z^{-i} = b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n} \quad (4.83)$$

nichtrekursiver FIR-Filter definieren. Das modifizierte Signal  $y_k$  zum Zeitpunkt  $t=kT_s$  lässt sich allein aus den vorangegangenen Messwerten  $x_i$ ,  $i=k-n..k$  mit

$$y_k = b_0 x_k + b_1 x_{k-1} + \dots + b_n x_{k-n} \quad (4.84)$$

berechnen. Aus Gleichung (4.83) kann auch direkt die Stabilität eines FIR-Filters abgeleitet werden. Lineare FIR-Filter sind immer stabil, denn alle Polstellen des zeitdiskreten Systems liegen im Mittelpunkt des Einheitskreises in der  $z$ -Ebene.

Als einfachstes FIR-Filter sei nebenbei die gleitende Mittelwertbildung mit den konstanten Koeffizienten  $b_i = \frac{1}{n} \quad \forall i=0..n-1$  genannt.

Rückblickend auf Abschnitt 2.3.3 kann zum Entwurf eines FIR-Filters auch der gewünschte Frequenzgang der Übertragungsfunktion genutzt werden. Dazu wird die Rücktransformierte des vorgegebenen Frequenzganges, nämlich die Gewichtsfunktion  $g(t)$  an  $n$  Stellen abgetastet und diese Stützstellen mit dem zu filternden Signal gefaltet. Diese Methode kann zum Entwurf von

---

<sup>4</sup>engl. finite impulse response, Filter mit endlicher Impulsantwortzeit

Standard-Tiefpass-, Hochpass- oder Bandpassfiltern benutzt werden und wird als *Fenstermethode* bezeichnet [151].

### 4.6.2 Zustandsvariablenfilter

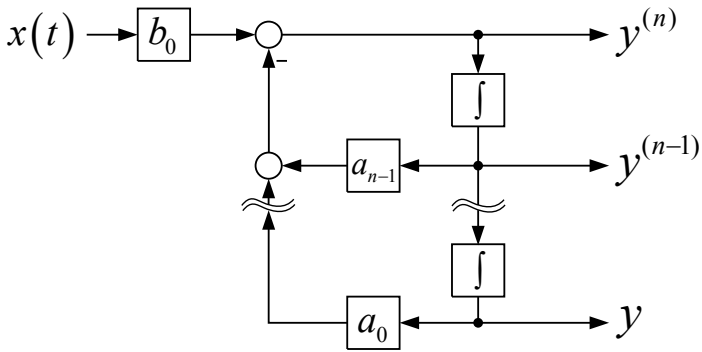
Die lineare Übertragungsfunktion eines kontinuierlichen Tiefpassfilters kann mit der mathematischen Formulierung

$$G_F(s) = \frac{b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}, \quad Y(s) = G_F(s)X(s) \quad (4.85)$$

im Frequenzbereich angegeben werden. Mit der Umformung auf die Ein-/Ausgangsgleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{y} + a_0y(t) = b_0x(t) \quad (4.86)$$

im Zeitbereich resultiert das Filtereingangssignal  $x(t) \in \mathbb{R}$  als Summe des Filterausgangssignals  $y(t) \in \mathbb{R}$  und dessen zeitlichen Ableitungen bis hin zum Grad  $n$ . Transformiert man das Filtersystem (4.85) aus dem Frequenzbereich in den Zustandsraum, so entsprechen die Zustände  $\underline{x} = (x_1 \dots x_n)^T \in \mathbb{R}^n$  dem Filterausgang und dessen zeitliche Ableitungen. Macht man sich dieses Ergebnis zu nutze, ist es demnach machbar ein gemessenes Signal  $x(t)$  durch eine geeignete Filterfunktion spektral zu bereinigen und zugleich dessen zeitliche Ableitungen ohne direkte numerische Differentiation ermitteln zu können. Die Koeffizienten  $a_0, \dots, a_{n-1}$  des Filters sind frei wählbar und sollten durch geeignete Verfahren des Filterentwurfs bestimmt werden (z.B. Butterworth-Filter [155, 93] oder allgemeines  $PT_n$ -Filter). Mit der Variation der Filterkoeffizienten kann die Signalgüte im Hinblick auf die anteilige Rauschleistung modifiziert werden. Hohe Filterzeitkonstanten wirken sich allerdings auf die Phasenverschiebung gegenüber der wahren Verläufe (vgl. auch Abbildung



**Abbildung 4.12.** Zustandsvariablenfilter in zeitkontinuierlicher Zustandsraumdarstellung [60]

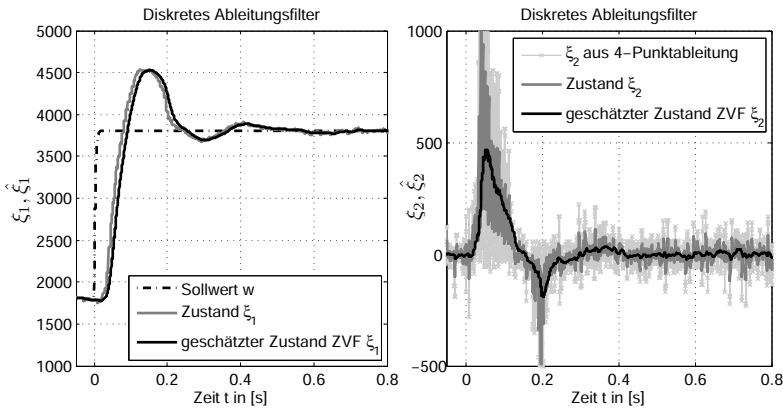
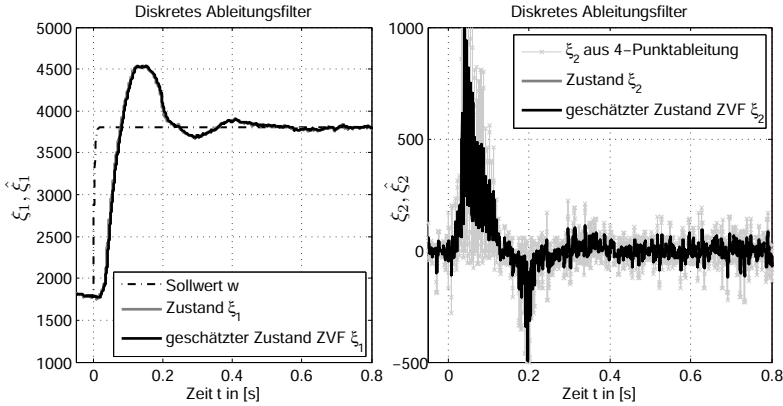
4.13) aus und können, wenn sie beim Reglerentwurf nicht berücksichtigt werden, auf einen geschlossenen Regelkreis destabilisierende Wirkung besitzen.

In der Literatur werden diese Filter meist als **Zustandsvariablenfilter** (ZVF) bezeichnet. Weiterführende Informationen sind [59, 60, 66] und [146] zu entnehmen.

Für den Einsatz von Zustandsvariablenfiltern muss somit ein guter Kompromiss zwischen anteiliger Rauschleistung und der verursachten Phasenverschiebung gefunden werden. Bei der zeitdiskreten Umsetzung in Mikrocontrollersystemen ist es ausreichend, die benötigten Integratoren zu diskretisieren. Einfache Methoden, wie die bekannte Rechteckregel oder Trapezregel, sind bei der Verwendung kleiner Abtastzeiten völlig ausreichend und bedürfen keiner hohen Rechenleistung.

Im Gegensatz zur vorgestellten Methodik aus dem vorhergehenden Abschnitt 4.6.1 erhöht sich zwar die benötigte Rechenleistung bei Verwendung eines ZVF, führt aber aufgrund der prinzipbedingten Störunterdrückung zu besseren Ergebnissen. Wie

## 4 Zustandsschätzung bei Systemen mit unsicheren...



**Abbildung 4.13.** Simulation der Zustandsschätzung mit ZVF (allgemeines  $PT_n$ -Filter) unter Verwendung verschiedener Filterzeitkonstanten

man leicht nachvollziehen kann, besitzen die berechneten Zustandsgrößen eines ZVF alle die gleiche Phasenverschiebung.

## 5 Regelungskonzept pneumatischer Systemmodelle

Das Hauptaugenmerk dieses Kapitels liegt auf dem Entwurf eines allgemein gültigen Regelungskonzeptes der verschiedenen pneumatischen Anwendungsfälle, die mit direkt gesteuerten Druckregelventilen in der Industrie umgesetzt werden. Die Grundlage des Konzeptentwurfs bildet Modellgleichung (3.48), die eine pneumatische Regelstrecke unter Verwendung eines direkt gesteuerten Druckregelventils beschreibt. Die für den geschlossenen Regelkreis benötigten Zustandsgrößen werden mit Hilfe der Strategien aus Kapitel 4 geschätzt. Ein ebenso wichtiger Grund für die Implementierung einer erwartungstreuen Schätzung ist die weitere Verwendbarkeit der Schätzgrößen, um in einfacher Weise Diagnoseinformationen gewinnen zu können oder gar Systemfehler zu identifizieren. Aufgrund der auf das Stellglied einwirkenden Störkräfte  $F_v(t)$ , die im Wesentlichen die Güte des Feinregelverhaltens erheblich mindern, ist es zusätzlich notwendig eine Möglichkeit zu schaffen deren Einfluss auf das Gesamtsystem zu reduzieren. Gleichermaßen ist es auch sinnvoll das Gesamtmodell zu vereinfachen, um eine sichere Schätzung der für die Regelung benötigten Zustandsgrößen und einen handhabbaren und einfach implementierbaren Regelalgorithmus zu realisieren. Die Umsetzbarkeit der Algorithmen soll folglich untersucht, auf ein

Mikrocontrollersystem implementiert und anhand der erzielten Ergebnisse validiert werden.

### 5.1 Maßnahmen zur Modellvereinfachung

Zur Vereinfachung mathematischer Modellgleichungen existieren in Wissenschaft und Technik verschiedene Ansätze. Einige dieser Herangehensweisen lassen sich beispielsweise in [147] und [29] detailliert nachlesen. Zwar besitzen die sich ergebenden vereinfachten Modelle nicht mehr den vollständigen Informationsgehalt des Originalsystems, sind aber dennoch so aussagekräftig um das dynamische und statische Verhalten ausreichend genau nachzubilden zu können.

Werden in einem System unterlagerte Regelkreise verwendet, ist es möglich auch Störeinflüsse auf die geregelten Systemzustände zu minimieren und diesem geregelten Systemteil stabiles und in gewissen Grenzen definiertes Dynamikverhalten zu verleihen. Oftmals lassen sich diese geregelten Teilstrecken als lineares  $PTn$ -Glied und somit annähernd als lineares Systemmodell beschreiben. Diese Vorüberlegungen führten dazu, das pneumatische Systemmodell mit Hilfe einer unterlagerten Regelung für den Ventildruck  $p_1 \hat{=} u_{p_1}$  an der Stelle  $x = 0$  auf eine sehr handhabbare Systemordnung zu vereinfachen. Eine geeignete Strategie soll nun diskutiert werden.

#### 5.1.1 Die geeignete Strategie

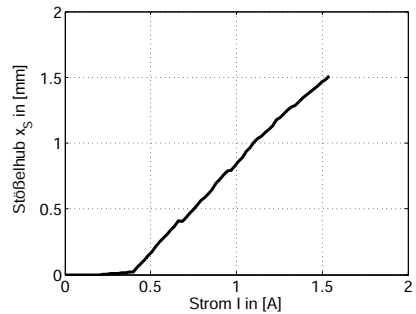
Die im Abschnitt 3.6.2 diskutierte Problematik des elektromechanischen Stellgliedes, muss für den Entwurf einer Regelung zwingend mit berücksichtigt werden. Ist es möglich den Einfluss wirkender Störungen zu minimieren, so kann hohe Dynamik und Präzision des geschlossenen Regelkreises durchgehend für den gesamten Arbeitsbereich garantiert werden.



Weil auf physikalische Strecken einwirkende Störungen im Allgemeinen nicht steuerbar sind, wird in der Regelungstechnik versucht deren Einfluss auf die Strecke durch Kompensation oder durch den Einsatz eines integralen Anteils innerhalb des Reglers zu minimieren. Ein I-Anteil im Regler kann die stationäre Genauigkeit des geschlossenen Regelkreises zwar garantieren, ist aber für das dynamische Verhalten unter Störeinflüssen nicht immer die optimale Wahl.

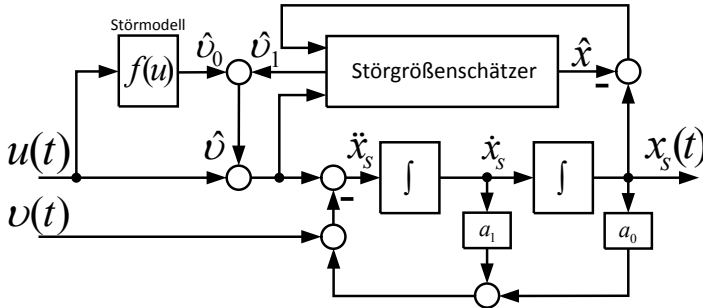
Die Verwendung einer Kompensation zur Beseitigung einwirkender Störeinflüsse (Kompensationsmethodik), wird meist als **Störgrößenaufschaltung** bezeichnet [87, 148, 121]. Diese hat sich in der Praxis in vielen Anwendungsbereichen bewährt und findet dementsprechend oft Verwendung.

Für die Anwendung dieser Methode ist es notwendig auftretende Störungen zu messen, durch ein Störmodell (welches auch adaptiv nachgeführt werden kann [6, 98, 143] oder dessen Koeffizienten von vornherein experimentell ermittelt wurden) zu approximieren [143, 33] oder mit Hilfe eines Störbeobachters zu schätzen [17]. Die Kombination einer modellbasierten Approximation und einer beobachtergestützten Schätzung, wie sie beispielsweise in [80] gezeigt ist, ist für den praktischen Einsatz vielversprechend um ein robustes und dynamisches geregeltes System zu erhalten. Den prinzipiellen Ansatz dieser Methodik verdeutlicht Abbildung 5.2 für ein dynamisches System zweiter Ordnung unter der einwirkenden



**Abbildung 5.1.** Statische Strom-Weg-Kennlinie des verwendeten elektromechanischen Antriebs

Störung  $v$ . Um den Einfluss von Störungen auch bei pneumatischen Stellgliedern zu reduzieren, soll nun auch diese Möglichkeit näher untersucht und diskutiert werden.



**Abbildung 5.2.** Mögliche Kompensationsmethodik einwirkender Stellgliedstörungen

Ein wichtiger a priori bekannter und als Systemstörung modellierbarer Parameter bei den verwendeten elektromechanischen Antrieben ist vor allem ein Offset-Strom, wie man ihn aus der exemplarischen statischen Kennlinie in Abbildung 5.1 erkennen kann. Dieser Parameter ist in Abhängigkeit der Stellgröße  $u(t)$  im Störmodell  $f(u)$  zu modellieren. Eine reine a priori Approximation kann in einfacher Weise mit

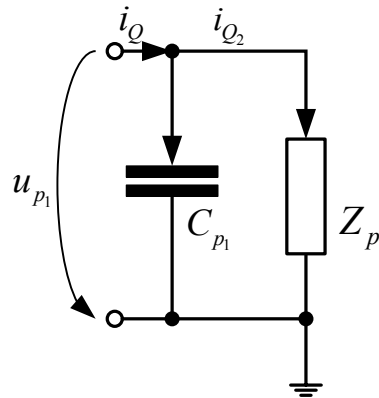
$$\hat{v}_0 = \begin{cases} +I_{\text{Offset1}}, & u > 0 \\ -I_{\text{Offset2}}, & u < 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (5.1)$$

umgesetzt werden. In diesem offensichtlichen Fall ist der Offset-Strom als Störung sicher modellierbar und kann nach Abbildung 5.2 direkt mit in die Stellgröße einfließen. Zur Minimierung ma-

gnetischer Hystereseeffekte und den deutlich vom Druck abhängenden Reibkräften innerhalb des Stellglieds, wäre es weiterhin möglich die verbleibenden Störungen als Summe der auftretenden Effekte zu schätzen. Wie in [80, 45, 17] umgesetzt, ist es mit erweiterten Zustandsbeobachtern machbar gute Ergebnisse mit einer Schätzung von wirkenden Störungen bei Systemen unter Reibeinflüssen zu erzielen. In den meisten Ventilen ist aus Kosten- oder gar Bauraumgründen die benötigte Ausgangsgröße des mechatronischen Systems, nämlich der effektive Ventilöffnungsquerschnitt  $A_V(x_S)$ , allerdings nicht messbar. Aus diesem Grund ist der explizite und sichere Einsatz dieser erweiterten Methodik leider nicht vollständig umsetzbar, so dass der in Abbildung 5.2 abgebildete Störgrößenschätzer in dieser Form nicht implementiert werden kann. Die Kompensation wirkender Stellgliedstörungen erfolgt daher lediglich mit Hilfe des Störmodells  $f(u)$ .

Weil sich aber der direkte Einfluss des Stellgliedes mit Gleichung (3.47) auf den Ventildruck  $u_{p1}(t)$  und dessen zeitlichen Ableitungen auswirkt, ist es die logische Konsequenz eine unterlagerte Regelung für diese Messgröße  $u_{p1}$  zu entwerfen.

Die Regelgröße eines Druckregelventils ist mit  $y = u_{p1}$  festgelegt. Zur Reduzierung der Streckenkomplexität, lassen sich alle an das Ventil angeschlossenen



**Abbildung 5.3.** Vereinfachtes Ersatzschaltbild der unterlagerten Regelstrecke

## 5 Regelungskonzept pneumatischer Systemmodelle

---

pneumatischen Elemente zu dem (komplexen) pneumatischen Lastwiderstand  $Z_p$  zusammenfassen. Weil komplexe Widerstände im Zeitbereich in dieser Form nicht existieren, soll die an das Ventil angeschlossene Last als zeitlich veränderbarer Lastwiderstand  $Z_p = Z_p(t)$ ,  $Z_p \in [Z_{p_{\min}} \dots \infty]$  angenommen werden. Mit dieser Zeitvarianz lassen sich später die angeschlossenen Elemente mit den zugehörigen Effekten in der Modellgleichung zusammenfassen. Die Grundlage für den Entwurf einer unterlagerten Druckregelung bildet damit das in Abbildung 5.3 dargestellte Streckenmodell. Infolgedessen, dass der effektive Ventilöffnungsquerschnitt, respektive die Stoßelposition  $x_S(t)$  nicht direkt gemessen werden kann, ist es schlüssig die aus Abschnitt 2.5.4 bekannte Zustandstransformation auf das mit  $Z_p = Z_p(t)$  vereinfachte Zustandsraummodell aus Gleichung (3.48) anzuwenden. Aufgrund dieser Vereinfachung reduziert sich die Modellordnung auf  $n = 3$  (vgl. dazu Abbildung 5.3).

Mit der Definition  $\xi_1 = y = u_{p1}$  ergeben sich die transformierten Zustandsgrößen

$$\xi_2 = \dot{\xi}_1 = \dot{u}_{p1} = -\frac{1}{C_{p1}}i_{Q2} + \frac{\beta}{C_{p1}}x_S(t) = -\frac{1}{Z_p C_{p1}}u_{p1} + \frac{\beta}{C_{p1}}x_S(t) \quad (5.2)$$

$$\xi_3 = \dot{\xi}_2 = \ddot{u}_{p1} = \frac{\beta}{C_{p1}}\dot{x}_S + \frac{\dot{\beta}}{C_{p1}}x_S - \frac{1}{Z_p C_{p1}}\dot{u}_{p1} + \frac{\dot{Z}_p}{Z_p^2 C_{p1}}u_{p1} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_3 = \ddot{u}_{p1} = & -a_1 \frac{\beta}{C_{p1}}\dot{x}_S - a_0 \frac{\beta}{C_{p1}}x_S + \frac{\beta}{C_{p1}}b_0 u(t) - \frac{\beta}{C_{p1}}v(t) \\ & - \frac{1}{C_{p1}Z_p}\ddot{u}_{p1} + \dots, \quad (5.4) \end{aligned}$$

aus denen sich wiederum das transformierte kontinuierliche Zustandsraummodell

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \\ \dot{\xi}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{C_{p1}Z_p} & -\left(a_0 + \frac{a_1}{C_{p1}Z_p}\right) & -\left(a_1 + \frac{1}{C_{p1}Z_p}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\beta}{C_{p1}}b_0 \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha(\underline{x}) \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

ableiten lässt (vgl. Rechnung im Anhang B.1).

Die transformierte Modellgleichung (5.5) besitzt die Systemordnung von  $\delta = n = 3$ , so dass entsprechend Definition 8 keine Nulldynamik im transformierten System enthalten ist. Die neben der Stellgröße einwirkende Systemanregung berechnet sich mit

$$\alpha(\underline{x}) = \frac{1}{C_{p1}} \left( 2 \frac{\dot{Z}_p}{Z_p^2} \left( \dot{u}_{p1} + \left( \frac{a_1}{2} - \frac{\dot{Z}_p}{Z_p} \right) u_{p1} \right) + \frac{\ddot{Z}_p}{Z_p^2} u_{p1} - \beta v(t) + 2\dot{\beta}x_S + \ddot{\beta}x_S + a_1\dot{\beta}x_S \right). \quad (5.6)$$

Lassen sich die Zeitabhängigkeiten mit  $\dot{\beta} \approx 0$ ,  $\frac{\dot{Z}_p}{Z_p^2} \approx 0$  und  $\frac{\ddot{Z}_p}{Z_p^2} \approx 0$  annehmen, so reduziert sich  $\alpha(\underline{x})$  lediglich auf die Stellgliedstörung  $v$ . Kann für die transformierte Systemgleichung (5.5) ein Regler entwickelt werden, so dass sich mit dem zurückgeführten Zustandsvektor

$$\underline{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} u_{p1} & \dot{u}_{p1} & \ddot{u}_{p1} \end{pmatrix}^T$$

unter dem Einfluss der restlichen Systemanregung (5.6) ein hochdynamisches Druckregelsystem ergibt, besteht die Möglichkeit diesen unterlagerten Regelkreis als lineares Modell reduzierter Ordnung innerhalb bestehender Dynamikgrenzen zu approximieren.

### 5.1.2 Regelung mit Strukturvarianz

Die robuste Auslegung eines Reglers mit festgelegter Struktur kann nicht für alle möglichen Strecken dynamisch optimale Ergebnisse erzielen. Der Kompromiss zwischen Robustheit gegenüber Parameterunsicherheiten (oder gar Parameteränderungen) und dem Verlust hoher Dynamik erklärt sich daher von selbst. Dieser Dynamikverlust, der beim Einsatz linearer Regler mit konstanten Koeffizienten an Strecken mit unsicheren Parametern immer entsteht, mindert oftmals die Qualität der eingesetzten Regelung. Die nachstehende Untersuchung soll nun dazu dienen, Dynamikeigenschaften zu definieren, die auch unter gewissen Unsicherheiten erreicht werden können.

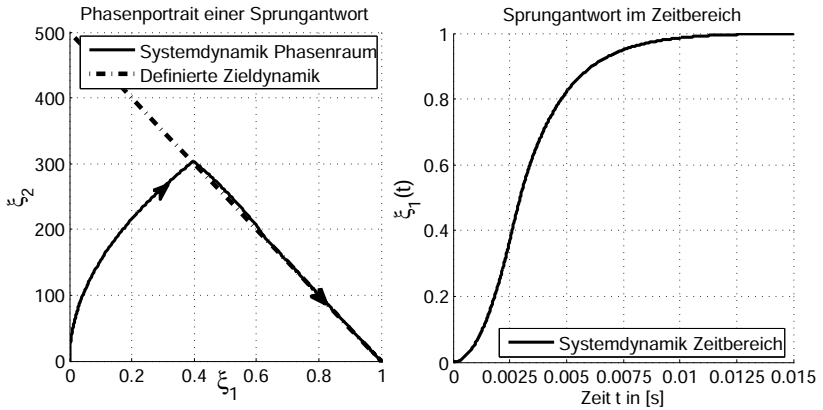
### Theoretische Vorüberlegungen in kontinuierlicher Zeit

Der Phasenraum eines linearen Zustandsraummodells wird durch den Zustandsvektor  $\underline{\xi}(t) \in \mathbb{R}^\delta$  aufgespannt. Damit lassen sich die Lösungstrajektorien des Systems (2.40) im Phasenraum als Funktionen  $\sigma = \sigma(\underline{\xi})$  beschreiben. Das Entwerfen eines Reglers durch Polvorgabe entspricht dem gezielten Einstellen einer Wunschdynamik. Solch Wunschdynamiken sind auch als lineare Hyperebenen

$$\sigma(\underline{\xi}) = \underline{r}^T \underline{\xi} = r_1 \xi_1 + \dots + r_\delta \xi_\delta \quad (5.7)$$

mit dem Parameter Zeit  $t$  im Phasenraum beschreibbar. Abbildung 5.4 verdeutlicht diese Herangehensweise am Beispiel ei-

ner Sprungantwort für ein geregeltes System zweiter Ordnung. Besitzt die Lösungstrajektorie des dynamischen Systems (2.40)



**Abbildung 5.4.** Dynamikverlauf einer Sprungantwort im Phasenraum und im Zeitbereich

die Wunschdynamik, entspricht das der Lösung  $\sigma(\underline{\xi}) = 0$  und kann so zu einer Ordnungsreduktion um eins führen [3]. Daraus direkt ableitbar ist die Definition eines quadratischen Gütemaßes

$$J = \frac{1}{2}\sigma(\underline{\xi})^2, \quad (5.8)$$

welches bei  $\sigma = 0$  sein Minimum besitzt. Ist  $J = V(\underline{\xi})$  ebenso eine Ljapunov-Funktion, ist zum Erreichen der geforderten Dynamik in endlicher Zeit die Bedingung

$$\dot{V} = \sigma\dot{\sigma} = \sigma \frac{\partial \sigma}{\partial \underline{\xi}} \dot{\underline{\xi}} < 0 \quad (5.9)$$

zu erfüllen. Gleichung (5.9) versteht sich daher auch als notwendige Bedingung zum Erreichen einer festgelegten Trajektorie

(5.7) [131]. Gehört die Vorgabe  $\sigma(\xi)$  nicht zur Lösungsmenge von (2.40) und befindet sich die Lösungstrajektorie dennoch auf der vorgegebenen Hyperebene  $\sigma$ , so handelt es sich um einen **Gleitzustand**. Ein solcher Regler, der das System auf eine vorgegebene Hyperebene zwingt wird daher auch **Gleitzustandsregler** bzw. **Sliding Mode Controller** genannt.

Aufgrund dessen, dass die Forderung (5.9) zum Erreichen einer festgelegten Dynamik erfüllt sein muss, ist es notwendig eine hinreichende Bedingung zu formulieren, die diesen Sachverhalt auch sicherstellen kann [3, 97, 83, 37]. Unter anderem ist es durch die direkte Vorgabe von  $\dot{\sigma}$  in (5.9) möglich, diese notwendige Bedingung abzusichern [3, 97, 83]. Die zeitliche Änderung der geforderten Hyperebene ist

$$\dot{\sigma} = \frac{\partial \sigma}{\partial \underline{\xi}} \dot{\underline{\xi}} = \underline{r}^T \left( \underline{A} \underline{\xi} + \underline{B} u \right), \quad (5.10)$$

so dass sich aus der zusätzlichen Forderung [8, 39, 3, 131, 83, 37]

$$\dot{\sigma} \stackrel{!}{=} -\tilde{q} \operatorname{sgn}(\sigma) - k\sigma, \quad \tilde{q}, k \in \mathbb{R}, \quad \tilde{q}, k > 0 \rightarrow \sigma \dot{\sigma} = -\tilde{q} |\sigma| - k\sigma^2 \leq 0 \quad (5.11)$$

das kontinuierliche Regelgesetz

$$u = - \left( \frac{\partial \sigma}{\partial \underline{\xi}} \underline{B} \right)^{-1} \left( \tilde{q} \operatorname{sgn}(\sigma) + k\sigma + \frac{\partial \sigma}{\partial \underline{\xi}} \underline{A} \underline{\xi} \right) \quad (5.12)$$

bestimmen lässt. Die in (5.9) und folgend in (5.11) gestellte Forderung ist auch als notwendige Erreichbarkeitsbedingung<sup>1</sup> definiert [3, 39, 8]. Aus der Beziehung  $k\sigma(\underline{\xi})$  und dem kontinuierlichen Regelgesetz (5.12) lässt sich wiederum der lineare Regel-

---

<sup>1</sup>In der Literatur oft auch als „Reaching Law“ bezeichnet.



vektor

$$\underline{K} = \left( \frac{\partial \sigma}{\partial \underline{\xi}} \underline{B} \right)^{-1} \left( k \underline{r}^T + \frac{\partial \sigma}{\partial \underline{\xi}} \underline{A} \right) = k \cdot \left( \underline{r}^T \underline{B} \right)^{-1} \underline{r}^T \left( \underline{I} + \frac{1}{k} \underline{A} \right) \quad (5.13)$$

mit dem freien Tuning-Parameter  $k$  direkt ableiten. Die berechnete Stellgröße (5.12) ist damit als Linearkombination eines linearen Zustandsreglers  $\underline{K}$  und einer vom Zustandsvektor  $\underline{\xi}$  abhängigen Schaltfunktion  $\tilde{q} \operatorname{sgn}(\sigma)$  zu verstehen.

Aufgrund real existierender Stellgrößenbeschränkungen  $-u_{\max} \leq u \leq u_{\max}$  ist es allerdings nicht möglich, jede Wunschdynamik innerhalb endlicher Zeit zu erreichen. Setzt man voraus, dass zum Erreichen des Gleitzustands die zeitliche Abnahme der vorgegebenen Hyperfläche stets negativ bzw. kleiner einer Konstanten  $-\epsilon \operatorname{sgn}(\sigma)$  sein muss, so resultiert aus der Bedingung

$$\dot{\sigma} = \underline{r}^T \dot{\underline{\xi}} \stackrel{!}{=} -\tilde{q} \operatorname{sgn}(\sigma) - k\sigma \leq -\epsilon \operatorname{sgn}(\sigma) \quad (5.14)$$

eine minimal benötigte Stellgröße  $|\tilde{u}_{\min}|$ . Beschränkt sich die maximal mögliche Stellgröße  $|u_{\max}|$  auf

$$|u_{\max}| \geq |\tilde{u}_{\min}| \quad (5.15)$$

innerhalb des physikalisch möglichen Zustandsraums  $|x_1| \leq |x_{1_{\max}}|, \dots, |x_n| \leq |x_{n_{\max}}|$ , so ist die Zieldynamik garantiert innerhalb endlicher Zeit erreichbar.

Aus dem Grund, dass die Schaltfunktion aus (5.12) die Stellgröße  $u$  in Abhängigkeit des Zustandsvektors in die Bereiche

$$u(\underline{\xi}(t)) = \begin{cases} u_+(\underline{\xi}), & \text{wenn } \sigma(\underline{\xi}) > 0 \\ u_-(\underline{\xi}), & \text{wenn } \sigma(\underline{\xi}) < 0 \end{cases} \quad (5.16)$$

unterteilt, gehört diese Art von Regelung auch zur Gruppe der

*strukturvariablen Regelungen (SVR)* [3, 149].

### Betrachtungen in diskreter Zeit

Um die Erreichbarkeit vorgegebener Dynamiken auch für Regelsysteme auf Mikrocontrollerbasis garantieren zu können, soll nun der zeitdiskrete Anwendungsfall näher beleuchtet werden.

Im einfachsten Fall kann dazu die notwendige Erreichbarkeitsbedingung (5.11) durch die zeitdiskrete Approximation

$$\dot{\sigma} \approx \frac{\sigma_{k+1} - \sigma_k}{T_s} \stackrel{!}{=} -\tilde{q} \operatorname{sgn}(\sigma_k) - k\sigma_k \quad (5.17)$$

verwendet werden [39, 8]. Im folgenden Abtastschritt ergibt sich daraus

$$\sigma_{k+1} = (1 - kT_s)\sigma_k - \tilde{q}T_s \operatorname{sgn}(\sigma_k), \quad \tilde{q}, k \in \mathbb{R}, \quad \tilde{q} > 0, k > 0 \quad (5.18)$$

mit der zusätzlichen Forderung

$$0 < 1 - kT_s < 1, \quad (5.19)$$

die die zeitdiskrete Konvergenz absichert [8, 167, 39]. Mit (5.19) ist der zulässige Wertebereich des Tuning-Parameters  $k$  definiert. Die Erreichbarkeit eines „echten“ Gleitzustandes in digitalen Regelkreisen ist nur für den Idealfall mit Abtastzeiten von  $T_s \approx 0$  gegeben. Aufgrund des durch die Zeitdiskretisierung verursachten „Taumelns“ um die definierte Schalthyperebene herum, kann daher nur ein Quasi-Gleitzustand erreicht werden [39]. Aus (5.18) ist die Breite der Änderung um die Schalthyperebene herum mit

$$\sigma_{k+1} = -\sigma_k \quad \longrightarrow \quad |\Delta| = \frac{\tilde{q}T_s}{2 - kT_s} \quad (5.20)$$

direkt berechenbar [39, 8, 167]. Wie aus (5.20) auch deutlich

wird, beeinflusst die Verstärkung der Schaltfunktion  $\tilde{q}$  das Taumeln um die definierte Zieldynamik in direkter Weise. In der Literatur (wie z.B. in [50, 8, 97]) existieren verschiedene Methoden, dieses Taumeln um die Schalthyperebene herum zu minimieren. Eine logische und auch einfache Methode basiert auf der zeitdiskreten Auswertung der definierten Ljapunov-Funktion und deren zeitlicher Änderung. Diese Methode soll nun näher betrachtet werden.

Die zeitliche Änderung der definierten Ljapunov-Funktion in Gleichung (5.8) unter Berücksichtigung einer zeitdiskreten Abtastung ist mit

$$\Delta V = V_{k+1} - V_k = \sigma_{k+1}^2 - \sigma_k^2 = \underline{\xi}_{k+1}^T \underline{r} \underline{r}^T \underline{\xi}_{k+1} - \underline{\xi}_k^T \underline{r} \underline{r}^T \underline{\xi}_k \quad (5.21)$$

zu berechnen. Verwendet man nun die zeitdiskrete Zustandsraumdarstellung

$$\underline{\xi}_{k+1} = \underline{\Phi} \underline{\xi}_k + \underline{\Theta} u(\underline{\xi}_k) \quad (5.22)$$

und die zeitdiskrete Stellgröße

$$u_k = - \left( \frac{\partial \sigma}{\partial \underline{\xi}} \underline{\Theta} \right)^{-1} \left( \underline{K}_d \underline{\xi}_k - \tilde{q} \operatorname{sgn}(\sigma_k) \right), \quad (5.23)$$

ergibt sich aus (5.21) der Zusammenhang

$$\Delta V = - \underline{\xi}_k^T \underline{Q} \underline{\xi}_k - 2 \tilde{q} \operatorname{sgn}(\sigma_k) \underline{r}^T \underline{\Phi} \underline{\xi}_k + \tilde{q}^2 \quad (5.24)$$

mit der Matrix

$$- \underline{Q} = \left( \underline{\Phi} - \underline{\Theta} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial \underline{\xi}} \underline{\Theta} \right)^{-1} \underline{K}_d \right)^T \underline{r} \underline{r}^T \left( \underline{\Phi} - \underline{\Theta} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial \underline{\xi}} \underline{\Theta} \right)^{-1} \underline{K}_d \right) - \underline{r} \underline{r}^T. \quad (5.25)$$

Ist  $\underline{Q}$  semi positiv definit, kann aus (5.24) ein zustandsvektorabhängiges Gesetz zur Berechnung der Schaltverstärkung  $\tilde{q} = q_k$

abgeleitet werden. Das Festlegen von

$$-2 \cdot \tilde{q} \operatorname{sgn}(\sigma_k) \underline{r}^T \underline{\Phi} \underline{\xi}_k + \tilde{q}^2 \leq 0 \quad (5.26)$$

als notwendige Bedingung mit einem zulässigen Wertebereich des Tuning-Parameters  $q_k \in [0..q_{\max}]$  führt dazu, dass  $q_k$  mit

$$q_k \leq 2 \operatorname{sgn}(\sigma_k) \underline{r}^T \underline{\Phi} \underline{\xi}_k \quad (5.27)$$

abgeschätzt werden kann. Wird beispielsweise daraus ein  $q_k$  mit der Berechnungsvorschrift

$$\begin{aligned} q_k &= \operatorname{sat} \left( \operatorname{sgn}(\sigma_k) \underline{r}^T \underline{\Phi} \underline{\xi}_k \right) \\ &= \begin{cases} \operatorname{sgn}(\sigma_k) \underline{r}^T \underline{\Phi} \underline{\xi}_k, & \left| \operatorname{sgn}(\sigma_k) \underline{r}^T \underline{\Phi} \underline{\xi}_k \right| < q_{\max} \\ \operatorname{sgn}(\sigma_k) q_{\max} & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned} \quad (5.28)$$

definiert, ergibt sich die notwendige zeitdiskrete Reglerstellgröße

$$u_k = - \left( \frac{\partial \sigma}{\partial \underline{\xi}} \underline{\Theta} \right)^{-1} \left( \underline{K}_d \underline{\xi}_k + \operatorname{sat} \left( \underline{r}^T \underline{\Phi} \underline{\xi}_k \right) \right). \quad (5.29)$$

Aus der berechneten Stellgröße (5.29) ist erkennbar, dass ein Sättigungsregler auch dazu führen kann, eine definierte Dynamik und somit auch eine hohe Regelgüte zu erreichen.

### 5.1.3 Entwurf des unterlagerten Regelkreises

Zur Vereinfachung des pneumatischen Gesamtmodells (3.48) soll in diesem Abschnitt ein geschlossener Regelkreis für das transformierte Zustandsraummodell (5.5) entwickelt werden. Die regelungstechnische Grundlage bilden die in Abschnitt 5.1.2 gewonnenen Erkenntnisse.

Damit infolge der Parameterabhängigkeit von  $Z_p$ ,  $Z_p \in [Z_{p_{\min}} \dots \infty)$

und auftretenden äußerer Störungen (Haftreibung im Kleinsignalverhalten) die sich daraus ergebende Regelabweichung zu Null geführt werden kann, wird dem in (5.29) abgeleiteten Regelalgorithmus die Integralverstärkung  $K_I$  hinzugefügt. Die Aufschaltung des a priori ausgemessenen Offset-Stroms (5.1) mit

$$u(t) = u_R(t) + \frac{1}{b_0} \hat{v}_0, \quad (5.30)$$

erwirkt zusätzlich eine Reduktion der stellgliedbeeinflussenden Störgröße  $v(t)$ . Mit der Stellgröße eines linearen Sättigungsreglers mit zusätzlicher Störkompensation

$$u(t) = \text{sat} \left( Sw - k_1 \xi_1 - k_2 \xi_2 - k_3 \xi_3 + K_I \int (w - \xi_1) dt \right) + \frac{1}{b_0} \hat{v}_0 \quad (5.31)$$

als Ergebnis des entwickelten zeitdiskreten Regelalgorithmus, kann eine hochdynamische Druckregelung für den Systemzustand  $u_{p1}$  erreicht werden. Die Regelkoeffizienten

$$\underline{K} = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix}, \quad S = k_1 \quad (5.32)$$

ergeben sich unter Verwendung verschwindend kleiner Tastzeit aus der Stellgröße (5.29). Die integrale Verstärkung  $K_I$  ist an dieser Stelle so auszulegen, dass die Stabilität des geschlossenen Kreises nicht verletzt werden kann und das System in jedem möglichen Arbeitspunkt ausreichend gute Regelergebnisse erzielt. Weiterhin sei darauf hingewiesen, dass es für einen stabilen und robusten Regelkreis mit integralem Anteil notwendig ist, Maßnahmen zur Verhinderung des **Wind up**<sup>2</sup>-Effekts zu implementieren. Eine gute Übersicht geeigneter Maßnahmen bietet [79] für zeitdiskrete Standardregelkreise.

---

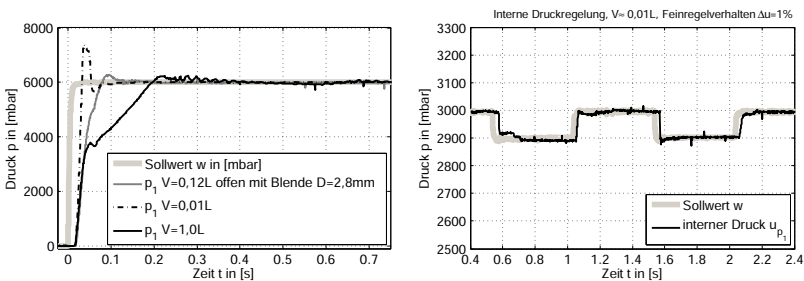
<sup>2</sup>„Wind up“, engl. für „Aufwickeln“ [3], bezeichnet einen, meist aufgrund von Stellgrößenbegrenzungen Sättigungseffekt des I-Anteils eines Reglers

## 5 Regelungskonzept pneumatischer Systemmodelle

Für die Berechnung der zeitlichen Ableitungen der gemessenen Regelgröße  $y = \xi_1$  wird ein Zustandsvariablenfilter, wie er in Abschnitt 4.6.2 vorgestellt wurde, verwendet. Erste und zweite Zeitableitung  $\dot{\xi}_1, \ddot{\xi}_1$  lassen sich daher mit den frei wählbaren Filterkoeffizienten als Tuning- bzw. Einstellparameter numerisch und mit nur wenig Rechenaufwand als quasikontinuierliche Zustandsgrößen abschätzen. Für den Filterentwurf selbst, sind Grenzfrequenz bzw. die Definition von Sperr- und Durchlassbereich ausschlaggebend. Im Hinblick auf die sich ergebende und prinzipbedingte Phasenverschiebung, ist es bei der Verwendung von Zustandsvariablenfiltern allerdings zwingend notwendig, keine allzu großen Zeitkonstanten zu parametrieren.

### 5.1.4 Messergebnisse

Die Implementierung einer unterlagerten geschlossenen Rückführung für die interne Regelgröße  $u_{p_1}$  ermöglicht durch die Verwendung eines Sättigungsreglers schnelles dynamisches Ausre-



(a). Dynamikverhalten unter verschiedenen Lastankopplungen

(b). Kleinsignalverhalten (Feinregelverhalten)

**Abbildung 5.5.** Messergebnisse des unterlagerten Regelkreises

geln von Sollwertwechseln auch unter auftretenden Störungen in Form von Stellgliedreibung oder Leckagen.

Das in Abbildung 5.5b dargestellte Zeitverhalten spiegelt die so erreichte Regelgüte des Kleinsignalverhaltens wider. Hohe Ansprechzeiten und präzises Ausregeln des geforderten Sollwerts zeichnen diesen hochdynamischen Regelkreis aus.

Auch unter auftretenden Parameterschwankungen innerhalb zulässiger Grenzen, erreicht der geschlossene Regelkreis robuste und stabile Dynamik zum Erreichen des Sollwerts. Das in Abbildung 5.5a dargestellte Zeitverhalten verdeutlicht das Ergebnis anhand einer Vergleichsmessung des entworfenen Regelkreises an verschiedenen Strecken.

## 5.2 Reduzierte Gesamtmodellstruktur

Mit dem Einsatz eines Führungsgrößenfilters<sup>3</sup> kann aus der Streckenabhängigkeit der Regeldynamik des in Abschnitt 5.1 entwickelten unterlagerten  $u_{p1}$ -Regelkreises, ein in guter Näherung streckenunabhängiges und somit zeitlich definiertes dynamisches Verhalten erreicht werden. Die entsprechende Filterzeitkonstante  $T_1$  ist so auszulegen, dass diese definierte Dynamik auch unter Berücksichtigung von etwaigen Stellgrößenbegrenzungen und Sättigungseffekten erreicht werden kann. Der Druckaufbau innerhalb des Ventils lässt sich so als Approximation mit

$$\dot{u}_{p1} = -a_{0_{p1}}u_{p1} + a_{0_{p1}}u(t) = -\frac{1}{T_1}u_{p1} + \frac{1}{T_1}u(t) \quad (5.33)$$

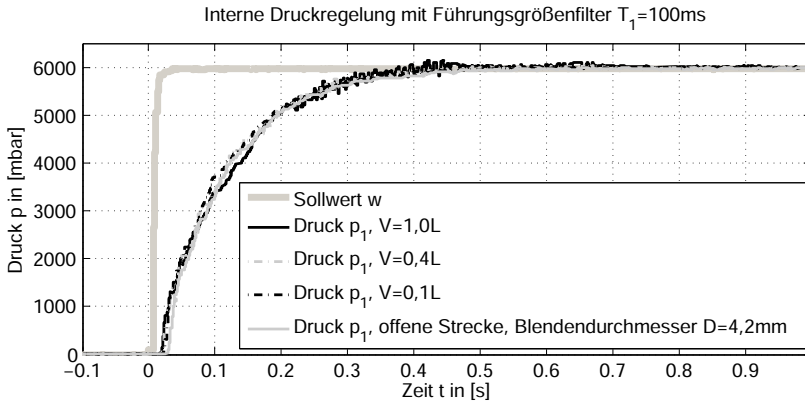
modellieren. Damit entspricht  $T_1$  in guter Näherung der Zeitkonstante des sich daraus ergebenden unterlagerten Regelkreises.

---

<sup>3</sup>Als Führungsgrößenfilter wird ein PT1-Glied mit einstellbarer Zeitkonstante  $T_1$  verwendet.

## 5 Regelungskonzept pneumatischer Systemmodelle

Die in Abbildung 5.6 dargestellten Verläufe zeigen das dynamische Verhalten des geschlossenen Regelkreises an verschiedenen pneumatischen Strecken mit einer parametrisierten Filterzeitkonstante  $T_1 = 100\text{ms}$ .



**Abbildung 5.6.** Regelkreisdynamik mit Führungsgrößenfilter an verschiedenen pneumatischen Strecken

Die Gesamtmodellbeschreibung (3.48) vereinfacht sich mit der unterlagerten Druckregelung und dem applizierten Führungsgrößenfilter so, dass mit

$$\dot{\underline{x}}_p = \begin{pmatrix} \dot{i}_{Q_2} \\ \dot{u}_{p_2} \\ \dot{u}_{p_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R_p}{L_p} & -\frac{1}{L_p} & \frac{1}{L_p} \\ \frac{1}{C_{p_2}} & -\frac{G_p}{C_{p_2}} & 0 \\ 0 & 0 & -a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{Q_2} \\ u_{p_2} \\ u_{p_1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_0 \end{pmatrix} u(t) \quad (5.34)$$

das Gesamtsystemverhalten gut abbildbar ist.

Das nichtlineare Differentialgleichungssystem (5.34) stellt damit die strukturelle Basis für alle nachstehenden Untersuchungen im Zusammenhang mit der Regelung verallgemeinerter pneumati-



scher Strecken dar.

Möglich hinzukommende Zustandsgrößen  $\underline{x}_A(t)$ , wie sie bei vielen verschiedenen Arten pneumatischer Anwendungsfälle vorkommen, können durch eine Erweiterung des rein pneumatischen Zustandsvektors  $\underline{x}_p(t)$  aus (5.34) mit

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} \underline{x}_p & \underline{x}_A \end{pmatrix}^T \quad (5.35)$$

in das erweiterte Systemmodell integriert werden. Für die jeweilige Applikation, ist das sich ergebende Streckenmodell in der erweiterten Darstellungsform

$$\begin{pmatrix} \dot{\underline{x}}_p \\ \dot{\underline{x}}_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{a}_{p1}(\underline{x}_p, \underline{x}_A)\underline{x}_p \\ \underline{a}_{p2}(\underline{x}_p, \underline{x}_A)\underline{x}_p + \underline{a}_A(\underline{x}_A)\underline{x}_A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_0 \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \quad (5.36)$$

beschreibbar. Die Modellgleichung (5.36) beinhaltet, zusätzlich zum verallgemeinerten nichtlinearen pneumatischen Grundsystem aus Gleichung (5.34), die spezifischen und im Allgemeinen nichtlinearen Anteile des jeweiligen Anwendungsfalls.

## 5.3 Entwicklung der Regelungsstruktur

Der Einsatz eines Reglers ohne Integrator erfordert zum Erreichen der Stationaritätsbedingung

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) \stackrel{!}{=} w$$

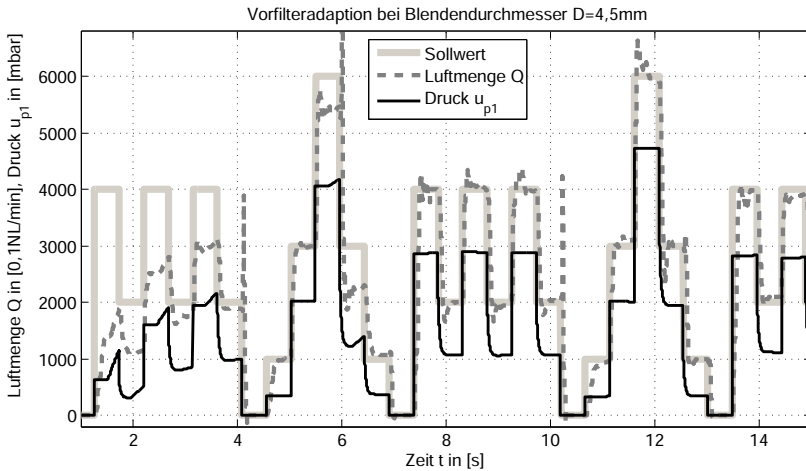
die exakte Kenntnis der Streckenparameter. Für den Fall einer Ausgangsdruck- oder einer Luftmengenregelung sind die von je-

## 5 Regelungskonzept pneumatischer Systemmodelle

dem Arbeitspunkt abhängigen Vorfilterkoeffizienten

$$S|_{y=i_{Q_2}} = \frac{G_p}{R_p G_p + 1} \quad \text{bzw.} \quad S|_{y=u_{p_2}} = \frac{1}{R_p G_p + 1} \quad (5.37)$$

für die jeweilige Regelgröße  $u_{p_2}$  bzw.  $i_{Q_2}$  notwendig. Damit die Führungsgröße  $w$  in endlicher Zeit erreicht werden kann, muss der jeweilige Wert des Vorfilters im stationären Arbeitspunkt entsprechend bekannt sein.



**Abbildung 5.7.** Vorfilteradaption bei Luftmengenregelung mit unterlagerter Druckregelung

Optimale Regelergebnisse im Sinne des Minimums eines definierten Gütemaßes (2.27) bedürfen der Kenntnis aller vorhandenen Streckenparameter. Existieren unsichere oder aufgrund einer fehlenden Streckenidentifikation teilweise unbekannte Parameter, können lediglich suboptimale Resultate erwartet werden. Sind lediglich die benötigten Vorfilterkoeffizienten unbekannt, so kann deren Arbeitspunktabhängigkeit durch ein geeignetes, von

der Führungsgröße abhängiges Funktional nachgebildet und unter Umständen adaptiv nachgeführt werden. Bei der in [19] vorgestellten Herangehensweise wird für eine Luftmengenregelung das dafür benötigte Vorfilter (5.37) kontinuierlich angepasst. Die Übernahme des iterierten Vorfilters in den aktiven Regelalgorithmus geschieht aus Gründen der Robustheit nur bei Sollwertwechseln. Das zeitliche Regelverhalten dieses adaptiven Systems zeigt Abbildung 5.7. Es ist eine starke Ähnlichkeit mit expliziten Lernzyklen erkennbar.

Um adaptive Algorithmen zu umgehen und trotzdem stationäre Genauigkeit erreichen zu können, kann die Anwendung einer Koordinatentransformation sinnvoll sein. Die Grundlage des in den nächsten Abschnitten entwickelten Regelungskonzeptes bildet die in Abschnitt 2.5.4 vorgestellte Methodik der exakten Linearisierung eingangsafliner Systeme.

### 5.3.1 Verallgemeinerung der Problemstellung

Als Ergebnis der durchgeführten Koordinatentransformation ergeben sich Streckenmodellgleichungen, die aufgrund der angewendeten Transformation strukturell identisch sind. Aus diesem Grund ist es sehr einfach machbar, diese verallgemeinert zu beschreiben und daraus einen allgemein gültigen Regelalgorithmus zu entwickeln.

Das dynamische Verhalten zwischen Systemein- und Ausgang pneumatischer Applikationen mit einer unterlagerten Druckregelung lässt sich mit dem zeitkontinuierlichen Zustandsraummo-

dell

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \vdots \\ \xi^{(\delta)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & -a_1 & \dots & -a_{\delta-1} \end{pmatrix} \underline{\xi} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (\alpha(\underline{x}(t)) + \beta(\underline{x}(t))u(t)) \quad (5.38)$$

beschreiben. Innerhalb der transformierten Zustandsraumkoordinaten  $\underline{\xi}$  ist dieses Modell (5.38) vollständig linear und wird mit dem nichtlinearen Funktional  $u^* = \alpha(\underline{x}) + \beta(\underline{x})u$  angeregt. Existieren interne Dynamiken, muss die Stabilität dieser Nulldynamik garantiert sein [3, 62, 142]. Nur dann kann auch gewährleistet werden, dass sich diese internen Dynamiken nicht auf den Systemausgang  $y(t)$  und der Stabilität des geschlossenen Regelkreises auswirken.

### 5.3.2 Kompensationsmethodik

Mit der vorgestellten Methodik der exakten Ein-/Ausgangslinearisation aus Abschnitt 2.5.4 lassen sich nichtlineare Einflüsse im ungesättigten Stellgrößenbereich direkt kompensieren. Die Anwendung des zeitkontinuierlichen Regelgesetzes (2.39) erfordert die exakte Kenntnis der nichtlinearen Einflussgrößen  $\alpha(\underline{x})$  und  $\beta(\underline{x})$  um diese letztendlich auch direkt kompensieren zu können. Kann eine Kompensation vollständig erreicht werden, ist das transformierte Streckenmodell (5.38) schlussendlich linearisiert.

### Quasikontinuierliche Kompensation

Die Verwendung der exakten E/A-Linearisation auf Digitalrechnern setzt die Berücksichtigung der zeitdiskreten Systemansteuerung voraus [10]. Weil innerhalb einer Tasterperiode  $T_s$  die

Stellgröße funktionsbedingt konstant gehalten wird (Halteglied), ist eine exakte Kompensation der zeitkontinuierlichen Funktionen  $\alpha$  und  $\beta$  nicht durchführbar. Dieser Sachverhalt lässt sich sehr einfach anhand einer allgemeinen zeitkontinuierlichen Funktion  $\gamma(t)$  nachvollziehen.

Die lineare Approximation einer nichtlinearen Funktion in kontinuierlicher Zeit ist im Abtastschritt  $t_0=kT_s$  mit

$$\begin{aligned} \gamma(t) = \gamma(\underline{x}(t)) &\approx \gamma(\underline{x}_k) + T_s \frac{\partial \gamma}{\partial \underline{x}} \dot{\underline{x}}_k \\ &\approx \gamma(\underline{x}_k) + \frac{\partial \gamma}{\partial \underline{x}} (\underline{x}(t - kT_s) - \underline{x}_k) \end{aligned} \quad (5.39)$$

gegeben. Im Hinblick auf die zeitkontinuierlichen Funktionen  $\alpha(\underline{x})$  und  $\beta(\underline{x})$ , die mit der zeitdiskreten Stellgröße

$$u_k = \frac{u_{R_k} - \alpha_k}{\beta_k} \quad (5.40)$$

kompensiert werden sollen, ergibt sich

$$u_k^* = u_{R_k} + \left( \frac{\partial \alpha}{\partial \underline{x}} - \frac{\alpha_k}{\beta_k} \frac{\partial \beta}{\partial \underline{x}} + u_{R_k} \frac{1}{\beta_k} \frac{\partial \beta}{\partial \underline{x}} \right) (\underline{x}(t - kT_s) - \underline{x}_k) \quad (5.41)$$

als verbleibende Systemanregung des transformierten Zustandsraummodells (5.38). Daraus ist deutlich erkennbar, dass diese Methodik nur für den kontinuierlichen und quasikontinuierlichen Regelungsentwurf befriedigende Ergebnisse liefern kann. Denn nur so bleibt der Einfluss der Zustandsvektoränderung  $\Delta \underline{x} = \underline{x}(t - kT_s) - \underline{x}_k$  vernachlässigbar klein, so dass sich die Systemanregung (5.41) zu  $u_{R_k}$  reduziert.

Für digitale Regler deren Abtastzeit so groß ist, dass diese Einflüsse nicht mehr vernachlässigt werden können, ist die zeitdiskrete Stellgröße (5.40) durch begünstigende Methoden zu erweitern. Beispiele hierfür sind unter anderem in [65] und [76] gezeigt.

## Regelungskonzept

Wie sich für die später vorgestellten Anwendungsfälle zeigen wird, beinhaltet das nichtlineare Funktional

$$u^* = \alpha(\underline{x}(t)) + \beta(\underline{x}(t))u(t) \quad (5.42)$$

immer den internen Ventildruck  $p_1 \hat{=} u_{p_1}$  an der Stelle  $x = 0$  in additiver Form. Damit ist die vollständige Kompensation dieses Zustands für die verwendete Dynamikapproximation immer unabhängig von Streckenparametern und somit robust und eindeutig durchführbar. Schließlich ist der aktuelle Druck  $u_{p_1}$  als unterlagerte Regelgröße immer direkt messbar und zu jedem Zeitpunkt  $t = kT_s$  bekannt. Je nach Anwendungsfall können die nichtlinearen Funktionen  $\alpha(\underline{x})$  und  $\beta(\underline{x})$  aber auch weitere Zustandsgrößen in Originalkoordinaten beinhalten. Diese müssen dementsprechend genauso bekannt sein um eine vollständige Kompensation zu erwirken. Weil  $\alpha$  und  $\beta$  festen Gesetzmäßigkeiten gehorchen, können sie in den folgenden Betrachtungen zur Reglerdimensionierung unberücksichtigt bleiben, wenn davon ausgegangen werden kann, dass diese Größen stets bekannt sind und quasikontinuierlich kompensiert werden können.

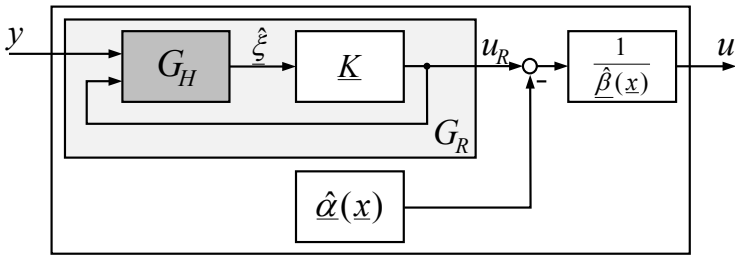
Die Anwendung dieser Kompensationsmethodik führt schließlich dazu, dass das geregelte System im stationären Zustand den gewünschten Sollwert immer erreicht. Grund dafür ist das integrale Verhalten des transformierten Streckenmodells. Daher ist es nicht notwendig einen integralen Reglertyp zu verwenden oder gar eine Parameteradaption zu implementieren. Zum sicheren Erfüllen des Regelziels  $y_{t \rightarrow \infty} = w$ , ist die Verwendung eines linearen Zustandsreglers

$$\underline{K} = \left( k_1 \quad k_2 \quad \dots \quad k_\delta \right) \quad (5.43)$$

mit der Steuertrajektorie

$$u = \frac{Sw - k_1\xi_1 - \dots - k_\delta\xi_\delta - \alpha(\underline{x})}{\beta(\underline{x})} = \frac{u_R - \alpha(\underline{x})}{\beta(\underline{x})} \quad (5.44)$$

für die im praktischen Einsatz auftretenden Strecken völlig ausreichend.



**Abbildung 5.8.** Regelungskonzept verallgemeinerter pneumatischer Streckenmodelle auf Grundlage einer unterlagerten Druckregelung

Das entstandene verallgemeinerte Regelungskonzept wird durch den Signalfussplan in Abbildung 5.8 verdeutlicht. Aufgrund der Tatsache, dass der transformierte Zustandsvektor  $\underline{\xi}$  in den meisten Fällen nicht direkt gemessen werden kann, finden auch in diesem Fall die im Kapitel 4 vorgestellten Methoden zur Zustandsschätzung ihre Anwendung. Praktische Relevanz für diese notwendige Zustandsschätzung besitzen dabei die Methode der Zustandsvariablenfilterung aus Abschnitt 4.6.2 sowie die Methode der Schätzfehlervarianzminimierung aus Abschnitt 4.4.2. Letztes ist auch in Kombination mit dem vorgestellten Parameteradaptionsverfahren aus 4.5.2 sehr gut umsetzbar.

## 5.4 Reglerauslegung

Pneumatische Regelstrecken sind im aktiven Betrieb möglichen Änderungen der physikalischen Parameter unterworfen. So können sich beispielsweise das angeschlossene Arbeitsvolumen oder diverse Blenden verändern.

Sind alle Parameter bekannt und mit den zulässigen Toleranzen als konstant anzunehmen, kann der implementierte Regler mit einem der Standardverfahren, welche im nachfolgenden Abschnitt kurz diskutiert werden, ausgelegt werden.

Sind nicht alle Parameter bekannt, existiert eine Menge von unsicheren Parametern, die bei der Auslegung nach den bekannten Standardverfahren unberücksichtigt bleibt und so zu einer Minderung der Regelgüte bis hin zur Instabilität führen kann. Wird außerdem für eine Menge möglicher Strecken ein Modell fester Ordnung zugrunde gelegt, werden unter Umständen auch vorhandene Dynamiken höherer Ordnung nicht mit berücksichtigt. Unter Hinzunahme der Funktionalitätsanforderungen des industriellen Umfeldes, welche sich nach [86] und [85] in

- das stabile Ausregeln von Sollwertfolgen,
- einer ausreichenden Dynamik in Hinsicht auf das Führungsverhalten und
- dem Unterdrücken von einwirkenden Störungen,

einteilen lassen, sollten diese Dinge beim späteren Reglerentwurf mit einbezogen werden um robuste Stabilität gewährleisten zu können. Der folgende Satz definiert zunächst den Begriff der robusten Stabilität.

**Satz 4** (Robuste Stabilität [86, 48, 113]). *Sei  $\mathcal{G}$  die Menge aller möglichen Strecken. Der geschlossene Regelkreis ist genau dann robust stabil, wenn der verwendete Regler  $\underline{K}$  an allen Strecken  $G \in \mathcal{G}$  E/A-stabiles Verhalten garantiert.*



In diesem Kapitel werden Möglichkeiten vorgestellt und diskutiert, Parameterunsicherheiten systematisch zu modellieren und beim Reglerentwurf zu berücksichtigen. Die Basis des eigentlichen Reglers bildet wiederum eine nahezu fehlerfreie Zustandsschätzung, die getrennt vom Regler zu betrachten ist.

### 5.4.1 Auslegung nach Standardverfahren

Das durch die Stellgröße (5.40) linearisierte Systemmodell (5.38), kann per Definition als das vollständig bekannte **Nominalmodell**

$$G_0 : \begin{cases} \dot{\underline{\xi}} = \underline{A}\underline{\xi} + \underline{B}u_R \\ y = \underline{C}\underline{\xi} \end{cases}, \quad \underline{\xi}, \underline{B} \in \mathbb{R}^{(n,1)}, \underline{A} \in \mathbb{R}^{(n,n)}, \underline{C} \in \mathbb{R}^{(1,n)}, u_R \in \mathbb{R} \quad (5.45)$$

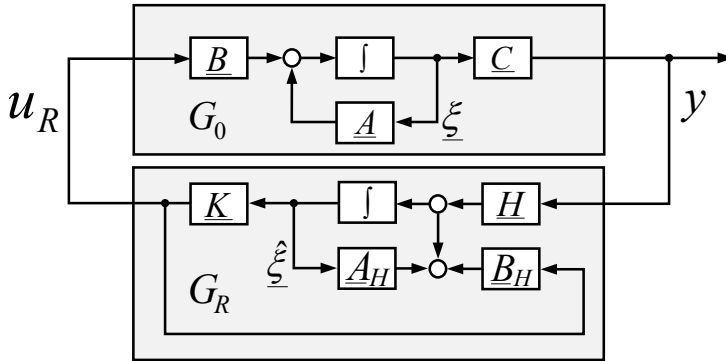
geschrieben werden. Der transformierte Zustandsvektor  $\underline{\xi}$  wird mit einer der vorgestellten Zustandsschätzmethoden ermittelt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit, ist für die Reglerauslegung die Führungsgröße mit  $w = 0$  anzunehmen. Schließt man den Regelkreis mit der Schätzvektorrückführung  $u_R = -\underline{K}\hat{\underline{\xi}}$ , ergibt sich die in Darstellung 5.9 gezeigte Regelkreisstruktur. Der eigentliche Regler kann mit

$$G_R : \begin{cases} \dot{\hat{\underline{\xi}}} = \underline{A}_H\hat{\underline{\xi}} + \underline{B}_H u_R + \underline{H}y \\ u_R = -\underline{K}\hat{\underline{\xi}} \end{cases}, \quad \hat{\underline{\xi}}, \underline{B}_H, \underline{H} \in \mathbb{R}^{(n,1)}, \underline{A}_H \in \mathbb{R}^{(n,n)}, \underline{K} \in \mathbb{R}^{(1,n)}, u_R \in \mathbb{R} \quad (5.46)$$

zu dem dynamischen System  $G_R$  zusammengefasst werden. Als Systemeingang dient die Messgröße  $y$ , als Systemausgang die Stellgröße  $u_R$ . Die angewendete Zustandsschätzmethode gibt den

## 5 Regelungskonzept pneumatischer Systemmodelle

Aufbau der Matrizen  $\underline{A}_H$ ,  $\underline{B}_H$  und  $\underline{H}$  vor. Als mögliche Zustands-schätzmethoden lassen sich anstandslos Beobachterformen oder Zustandsvariablenfilter implementieren.



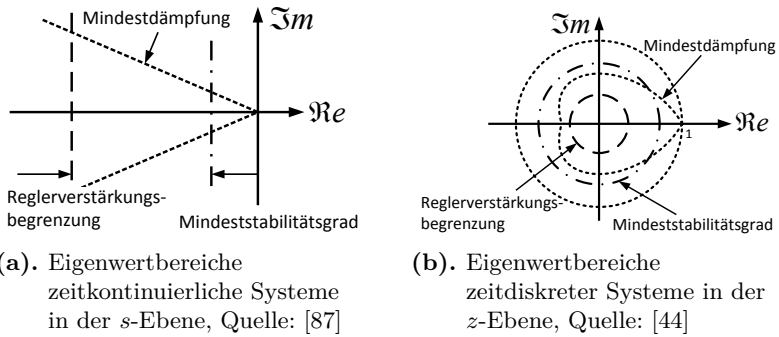
**Abbildung 5.9.** Regelkreisstruktur des E/A-linearisierten Systemmodells

Aufgrund der Tatsache, dass es sich um eine vollständig lineare Modellgleichung handelt, gilt das Separationstheorem [3, 87, 122]. D.h. die Reglerverstärkung  $\underline{K}$  kann getrennt vom Zustands-schätzsystem berechnet werden.

Die Auslegung des Reglers  $\underline{K}$ , kann mit der Vorgabe bestimmter Eigenwertlagen zum Einstellen geforderter Dynamiken erfolgen. Nach [87, 16] ist es mit einer Eigenwertvorgabe möglich, einen Mindeststabilitätsgrad, eine Mindestdämpfung als auch eine Begrenzung der Reglerverstärkung zu definieren (vgl. dazu auch Abbildung 5.10).

Auch für das zeitdiskretisierte Streckenmodell aus (5.38) und der durch den Regler (5.43) erzeugten Stellgröße (5.44) ist es machbar, die eben genannten Anforderungen an die Eigenwertlage(n) zu stellen.

Aus der Beschreibungsgleichung (2.4) für Systeme zweiter Ord-



**Abbildung 5.10.** Bevorzugte Eigenwertbereiche kontinuierlicher und zeitdiskreter Regelsysteme

nung, lassen sich die bevorzugten Eigenwertlagen kontinuierlicher Strecken mit einer parametrisierten Dämpfung  $D \leq 1$  und dem festzulegenden Parameter  $\omega_0$  durch

$$\Re \{ \lambda_i \} \in [-D\omega_{0\max} \dots - D\omega_{0\min}], \quad |\Im \{ \lambda_i \}| \in [0 \dots \omega_0 \sqrt{1 - D^2}] \tag{5.47}$$

bzw.

$$\Re \{ \lambda_i \} \in [-\omega_{0\max} \dots - \omega_{0\min}] \tag{5.48}$$

definieren. Diese Gebiete sollten vor allem für das dominante Eigenwertpaar bevorzugt vorgegeben werden.

In Anlehnung an Abschnitt 2.5.2, kann die Reglerkoeffizientenberechnung aber auch durch Minimierung eines quadratischen Gütemaßes  $J = J(\xi, u, t)$  erfolgen [85, 87, 148]. Für zeitinvariante lineare Systeme ist  $\underline{P}$  in (2.29) zeitlich konstant und kann aus der Matrix-Riccati-Gleichung (C.5) für zeitkontinuierliche bzw. aus (C.6) für zeitdiskrete Systemmodelle berechnet werden [87, 3, 85].

### 5.4.2 Darstellungsformen unsicherer Streckenmodelle

Unsichere Parameter lassen sich als Differenz zu einem bekannten oder gar vermuteten nominellen Parameter beschreiben. Für Systeme in Regelungsnormalform sind die unsicheren Parameter  $a_{i_0}$  und  $b_0$  durch

$$a_i = a_{i_0} + \Delta a_i, \quad b = b_0 + \Delta b \quad (5.49)$$

in der Modellierung zu berücksichtigen. Die nominellen Parameter werden in dieser Darstellungsweise oft als Mittelwert zwischen oberem und unterem Grenzwert festgelegt. Alle abweichenden Parameter  $\Delta a_i, i = 0..n-1$  und  $\Delta b$  lassen sich im Vektor

$$\theta_\Delta = \left( \Delta a_0 \quad \dots \quad \Delta a_{n-1} \quad \Delta b \right)^T, \\ \Delta a_i, b \in [\Delta a_{i_{\min}}, b_{\min} \dots \Delta a_{i_{\max}}, b_{\max}]$$

zusammenfassen. Aufgrund der stets bekannten und festen Struktur, werden nach [48, 147, 11] und [113] unsichere Parameter auch als **strukturierte Unsicherheiten** bezeichnet.

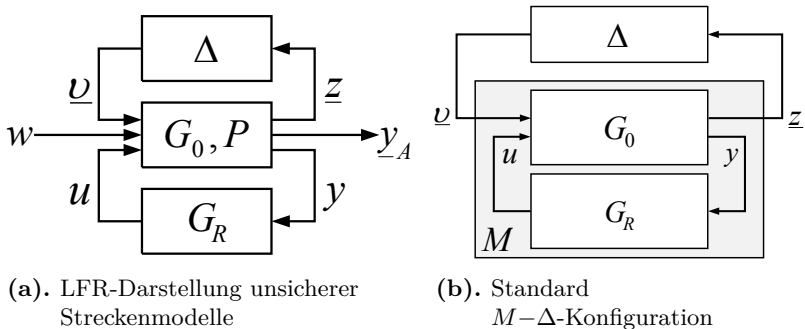
Auch lineare Zustandsraummodelle für Eingrößensysteme mit Parameterunsicherheiten lassen sich in der Modellierungsform mit  $\Delta \underline{A} = \Delta \underline{A}(\theta_\Delta)$  und  $\Delta \underline{B} = \Delta \underline{B}(\theta_\Delta)$  mit Gleichung (5.50) beschreiben [154].

$$\dot{\underline{x}} = (\underline{A} + \Delta \underline{A}) \underline{x} + (\underline{B} + \Delta \underline{B}) u, \\ \underline{x}, \underline{B}, \Delta \underline{B} \in \mathbb{R}^n, \underline{A}, \Delta \underline{A} \in \mathbb{R}^{(n,n)}, u \in \mathbb{R} \quad (5.50)$$

Wegen dieser feststehenden Struktur und einer ebenfalls festen Systemordnung, gehört auch diese Art der Unsicherheitsmodellierung zu den strukturierten Unsicherheiten.

Eine andere Darstellungsweise als (5.50) verdeutlichen die Si-

gnalfflusspläne in Abbildung 5.11 [164, 48, 27]. Diese Modellierungsformen werden in der Literatur sehr häufig angewandt und als LFR-Darstellung<sup>4</sup> bzw.  $M-\Delta$ -Konfiguration bezeichnet [77, 164, 48]. Das als sicher geltende Streckenmodell  $G_0$  (Nominalmodell), welches als Zustandsraummodell oder aber als (zeitdiskrete) Übertragungsfunktion im Frequenzbereich vorliegen kann, wird durch die von außen einwirkenden Eingangsgröße  $w$ , der durch den Regler  $G_R$  bereitgestellten Stellgröße  $u = u_R$  und den hervorgerufenen Störungen  $\underline{v}$  angeregt. Diese Störungen ergeben sich aufgrund der eigentlichen Unsicherheiten  $\Delta z$ . Die Stellgröße  $u$  wird aus dem messbaren Ausgang  $y$  und dem eigentlichen Regelalgorithmus gebildet. Als Systemausgang dieses erweiterten Streckenmodells ist der Vektor  $\underline{y}_A$  definiert. Dieser enthält alle verallgemeinerten Regelgrößen, wie z.B. den gewichteten Regelfehler.

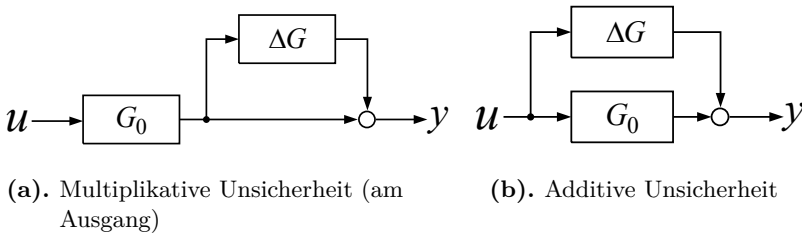


**Abbildung 5.11.** Darstellungsform strukturierter Unsicherheitsmodellierung

Gelten nicht nur Parameter als unsicher, sondern werden auch

<sup>4</sup>LFR: engl., linear fractional representation. Diese Vorgehensweise wird auch häufig als LFT, engl. linear fractional transformation, bezeichnet

Dynamiken höherer Ordnung vernachlässigt, handelt es sich um **unstrukturierte Unsicherheiten** [11, 48]. Die Modellierung dieser Art von Unsicherheiten findet meist im Frequenzbereich statt [48, 113]. Als die am häufigsten verwendeten Beschreibungsformen gelten nach [85, 86] und [113] die multiplikative Unsicherheit (am Ausgang) und die additive Unsicherheit wie sie in Abbildung 5.12 veranschaulicht sind.



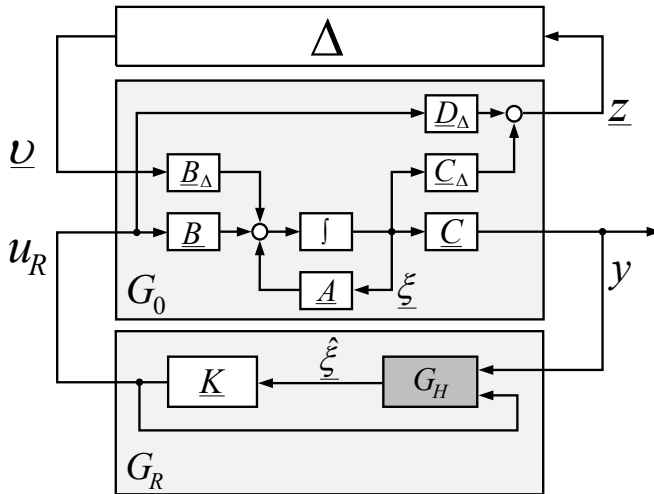
**Abbildung 5.12.** Unstrukturierte Unsicherheitsmodelle im Frequenzbereich

Mit der in Normalform vorliegenden E/A-Systembeschreibung (5.38) und dem kompensierenden Regelungskonzept (5.44) entsteht ein vollständig lineares Systemmodell. Das bedeutet aber auch, dass die bisher überlegten Anwendungsfälle sich als lineare Strecken mit Parameterunsicherheiten in den geeigneten Standardformen darstellen und untersuchen lassen.

### 5.4.3 Robustheitsanalyse

Für eine getrennte Darstellung des Gesamtsystems empfiehlt sich der Signalflussplan nach Abbildung 5.13. Die zu bestimmende Struktur  $G_R$  verwendet zum Erzeugen der Stellgröße  $u_R$  die messbare Systemausgangsgröße  $y$ . Diese Struktur  $G_R$  versteht sich als dynamisches System, bestehend aus dem Zustandsschät-

zer  $G_H$  und der eigentlichen Zustandsrückführung  $u = u_R = -\underline{K}\hat{\xi}$ . Über die unbekannte Unsicherheitsmatrix  $\Delta$  werden durch eine weitere Signalarückführung alle Parameterunsicherheiten getrennt vom Nominalmodell mit berücksichtigt. Das erweiterte Streckenmodell  $G_0$  ist in dieser Art der Modellierung stets bekannt und konstant.



**Abbildung 5.13.** Zeitkontinuierliche Regelkreisstruktur E/A-linearisierter Systemmodelle mit Parameterunsicherheiten

Ziel ist es nun, einen Regler  $G_R$  so zu bestimmen, dass für alle möglichen Unsicherheiten  $\Delta \in \underline{\Delta}$  die Forderungen nach

- asymptotischer Stabilität,
- ausreichender Störunterdrückung und
- ausreichender Dynamik in Hinblick auf das Führungsverhalten

erfüllt werden [48, 86, 85]. Wenn das der Fall ist, ist der durch die Reglerstruktur  $G_R$  geschlossene Regelkreis entsprechend des Satzes 4 robust stabil. Diese Aussage gilt auch gegenüber Veränderungen im Streckenmodell [86]. Werden zudem alle geforderten Eigenschaften an die Regelgüte im gesamt möglichen Parameterraum eingehalten, so besitzt der geschlossene Regelkreis eine **robuste Regelgüte** entsprechend des folgenden Satzes [113, 81].

**Satz 5** (Robuste Regelgüte<sup>5</sup> [113, 48, 147]). *Stabilisiert der Regler  $G_R$  die Strecke  $G_0 \in \mathcal{G}$  aus der Menge aller möglichen Strecken  $\mathcal{G}$  und sind zudem alle Anforderungen an die Regelgüte mit ein und dem selben Regler für all diese möglichen Strecken erfüllt, besitzt der geschlossene Regelkreis eine robuste Regelgüte bezüglich aller möglichen Streckenparameter.*

In der Literatur, wie z.B. in [86, 87, 48, 147, 85] und [113], findet der Entwurf robuster kontinuierlicher Regler oftmals im Frequenzbereich statt. Zur Beurteilung der Robustheit gegenüber äußeren Störeinflüssen spielt der Frequenzgang des geregelten Systems eine entscheidende Rolle. Dabei hat sich die  $\mathcal{H}_\infty$ -Theorie als eine bewährte Methode etabliert. Die Idee dieser Methode beruht darauf, ein Optimum zwischen hoher Stördämpfung und gutem Führungsverhalten, gegebenenfalls auch unter Berücksichtigung von äußeren Störeinflüssen zu finden. Einführende und auch tiefgreifende Abhandlungen können unter anderem in [48, 147, 81] und [85] nachgelesen werden. Des Weiteren wird zur Analyse der Robustheit unter vorhandenen Parameterunsicherheiten der strukturierter Singulärwert<sup>6</sup>  $\mu_\Delta$ <sup>7</sup> verwendet [81]. In der Literatur, wie beispielsweise in [48, 95] gezeigt,

---

<sup>5</sup>In der Literatur oftmals auch als robuste Performanz bzw. robuste Performance bezeichnet

<sup>6</sup>In Kurzform auch als SSV (structured singular value) bezeichnet

<sup>7</sup>Nach [78, 27, 81, 95] entspricht  $\mu_\Delta$  dem Kehrwert des größten Singulärwerts  $\bar{\sigma}$  des kleinsten  $\Delta$ , welcher  $I - M\Delta$  singular macht.



werden dafür Strecke und Regler sehr oft als Block  $M$  zusammengefasst. Das Resultat ergibt die in Abbildung 5.11b gezeigte  $M$ - $\Delta$ -Konfiguration. Auch bei dieser Methode handelt es sich um eine Analyse im Frequenzbereich, die zudem eng an die  $\mathcal{H}_\infty$ -Reglerauslegung gekoppelt ist. Für eine detaillierte Methodenbeschreibung sei an dieser Stelle auf [78, 48, 81, 27] und [26] verwiesen.

Das Resultat beider Herangehensweisen liefert die dynamische Struktur  $G_R$  (5.46) mit der Reglerverstärkung  $\underline{K}$  und einem Beobachter  $G_H$  als Zustandsschätzer. Diese Beobachterstruktur ist, im Gegensatz zu den in Kapitel 4 vorgestellten Verfahren, nicht darauf ausgelegt eine erwartungstreue Zustandsschätzung zu realisieren. Die nun folgende Auslegung des Reglers  $\underline{K}$  wird aus diesem Grund nicht mit einer der beiden Methoden erfolgen. Vielmehr wird an dieser Stelle der Schwerpunkt auf eine Reglerauslegung im Zustandsraum gelegt.

Unter Berücksichtigung von Parameterunsicherheiten, beschreibt die Modellgleichung

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= (\underline{A} + \Delta\underline{A}) \xi + (\underline{B} + \Delta\underline{B}) u_R, \\ \xi, \underline{B}, \Delta\underline{B} &\in \mathbb{R}^n, \quad \underline{A}, \Delta\underline{A} \in \mathbb{R}^{n,n}, \quad u_R \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (5.51)$$

die Systemdynamik der E/A-linearisierten Strecken aus Gleichung (5.38). Aufgrund des integralen Streckencharakters und der gegebenen Systemstruktur, sind die Matrizen mit

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$$

und

$$\Delta \underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 \\ 0 & -\Delta a_1 & \dots & -\Delta a_{n-1} \end{pmatrix}, \Delta \underline{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \Delta b \end{pmatrix} \quad (5.52)$$

fest strukturiert. Setzt man eine präzise Zustandsschätzung des transformierten Zustandsvektors  $\underline{\xi}$  mit einer der Methoden aus Kapitel 4 voraus, ist es möglich mit dem linearen Regler (5.43) eine stabilisierende Zustandsrückführung zu erreichen. Bezugnehmend auf den Signalflussplan in Abbildung 5.13, ergibt sich die Modellgleichung

$$\begin{aligned} \underline{\dot{\xi}} &= (\underline{A} - \underline{BK} + \underline{B}_\Delta \Delta (\underline{C}_\Delta - \underline{D}_\Delta \underline{K})) \underline{\xi} \\ \text{bzw. } \mathbf{M} : \begin{cases} \underline{\dot{\xi}} = (\underline{A} - \underline{BK}) \underline{\xi} + \underline{B}_\Delta v \\ z = (\underline{C}_\Delta - \underline{D}_\Delta \underline{K}) \underline{\xi} \end{cases} \end{aligned} \quad (5.53)$$

des geschlossenen Regelkreises unter vorhandenen Parameterunsicherheiten  $\Delta \in \underline{\Delta}$ . Die Unsicherheitsmatrix  $\Delta$  ist eine Diagonalmatrix und mit

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots \\ 0 & \delta_{a_1} & \\ \vdots & & \ddots \\ 0 & \dots & \delta_b \end{pmatrix} \quad (5.54)$$

für den normierten Wertebereich  $\delta_{a_i,b} \in [-1..1]$  definiert. Wei-

terhin lassen sich die linearen Matrizen

$$\underline{B}_\Delta = \begin{pmatrix} 0 & & \dots & 0 \\ & \vdots & & \\ 0 & |\Delta a_{1\max}| & \dots & |\Delta b_{\max}| \end{pmatrix},$$

$$\underline{C}_\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots \\ 0 & \ddots & \\ & & 1 \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{D}_\Delta = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (5.55)$$

aus der Modellgleichung (5.53) angeben. Diese Herangehensweise lässt sich auch direkt auf den zeitdiskreten Anwendungsfall übertragen, der an dieser Stelle aber nicht näher betrachtet werden soll.

Zur Stabilitätsanalyse des geregelten Systems (5.53), kann wiederum die direkte Methode nach Ljapunov aus Definition 5 verwendet werden. Aus der Festlegung der Ljapunov-Funktion mit

$$V = \underline{\xi}^T \underline{P} \underline{\xi}, \quad V(\underline{\xi} = 0) = 0, \quad V(\underline{\xi} \neq 0) > 0 \quad (5.56)$$

und der Zustandsrückführung

$$u_R = -\underline{K} \underline{\xi} = -\frac{1}{R} \underline{B}^T \underline{P} \underline{\xi}, \quad (5.57)$$

ergibt sich durch zeitliches Differenzieren die zeitliche Änderung von  $V$  mit

$$\begin{aligned} \dot{V} = \underline{\xi}^T \tilde{Q} \underline{\xi} = \underline{\xi}^T & \left( \underline{A}^T \underline{P} + \underline{P} \underline{A} + \underline{C}_\Delta^T \Delta^T \underline{B}_\Delta^T \underline{P} + \underline{P} \underline{B}_\Delta \Delta \underline{C}_\Delta \right. \\ & \left. - \frac{2}{R} \underline{P} \underline{B} \underline{B}^T \underline{P} - \frac{1}{R} \underline{P} \underline{B} \underline{D}_\Delta^T \Delta^T \underline{B}_\Delta^T \underline{P} - \frac{1}{R} \underline{P} \underline{B}_\Delta \Delta \underline{D}_\Delta \underline{B}^T \underline{P} \right) \underline{\xi}. \end{aligned} \quad (5.58)$$

Asymptotische Stabilität des Gesamtsystems unter Parameterunsicherheiten ist somit nur gegeben, wenn eine positiv definite Matrix  $\underline{P}$  existiert, so dass (5.58) für alle  $\Delta \in \underline{\Delta}$  stets negativ ist. Die gleiche Aussage gilt auch für den zeitdiskreten Fall, d.h. wenn  $V_{k+1} - V_k < 0$  für alle  $\Delta \in \underline{\Delta}$  gegeben ist, ist das System robust asymptotisch stabil.

#### 5.4.4 Auslegung unter Parameterunsicherheiten

Quadratische Funktionen mit einer symmetrischen Matrix  $\tilde{Q} = -\underline{Q}$  und deren Eigenwerten  $[\lambda_1 \dots \lambda_n] \in [\lambda_{\min} \dots \lambda_{\max}]$  erfüllen nach [71] die Ungleichung

$$\lambda_{\min} \underline{x}^T \underline{x} \leq \underline{x}^T \tilde{Q} \underline{x} \leq \lambda_{\max} \underline{x}^T \underline{x}. \quad (5.59)$$

Bezieht man diese Relation auf die zeitliche Änderung der Ljapunov-Funktion in Gleichung (5.58), ist es damit möglich Stabilitätsgrenzen für maximal zulässige Parameterunsicherheiten anzugeben: Ist  $\lambda_{\max}(\tilde{Q}(\underline{\Delta})) \geq 0$ , so ist das geschlossene Regelsystem nicht asymptotisch stabil. Das Lösen des Optimierungsproblems

$$\min \left\{ \lambda_{\max}(\tilde{Q}(\underline{\Delta}, \underline{P})) \right\} \quad (5.60)$$

kann zu einem robusten Regler  $\underline{K} = \frac{1}{R} \underline{B}^T \underline{P}$  führen, der über den gesamten Parameterraum  $\underline{\Delta}$  Stabilität und gutes Führungsverhalten garantiert. Zur Lösung dieses Optimierungsproblems, kann beispielsweise eines der Lösungsverfahren 0. Ordnung aus Tabelle 4.1 verwendet werden. Die Umsetzung dieser Methodik ist je nach Anzahl der unsicheren Parameter mit erheblichen Rechenaufwand verbunden. Der verwendete Entwurfsalgorithmus zum Lösen des Optimierungsproblems (5.60) ist im entsprechen-

den Ablaufplan in Anhang C.3 verdeutlicht.

Eine weitere Methodik besteht darin, Gleichung (5.58) von der Unsicherheitsmatrix  $\Delta$  unabhängig zu machen um eine Stabilitätsanalyse anhand aller bekannten und als sicher geltenden Parameter durchzuführen. Dazu ist es jedoch notwendig einige Vereinfachungen zu treffen.

**Annahme 3** ([73, 168, 154]). *Es existiert ein  $\alpha > 0$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , so dass die Ungleichung*

$$\underline{A}^T \underline{B} + \underline{B}^T \underline{A} \leq \alpha \underline{A}^T \underline{A} + \frac{1}{\alpha} \underline{B}^T \underline{B}$$

erfüllt ist.

Mit Hilfe von Annahme 3 ist es machbar Matrix  $\tilde{Q}$  aus Gleichung (5.58) in eine geeignete Form zu bringen. Wie sich leicht nachrechnen lässt, gelten des Weiteren die Beziehungen

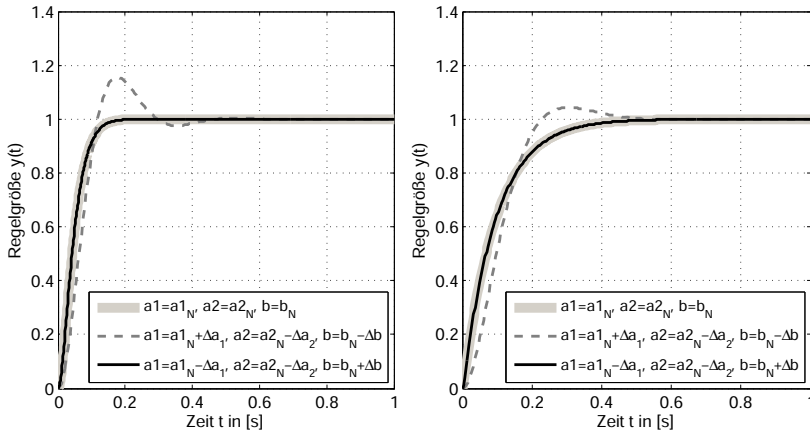
$$\Delta^T \Delta \leq \underline{I} \quad \text{und} \quad \Delta \underline{D}_\Delta \underline{D}_\Delta^T \Delta \leq \underline{I},$$

die dazu verwendet werden können,  $\tilde{Q}$  unabhängig von der Unsicherheitsmatrix  $\Delta$  zu machen. Als Ergebnis der durchgeführten Umformungen ergibt sich aus (5.58) die zeitliche Abnahme der definierten Ljapunov-Funktion mit

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \underline{\xi}^T \tilde{Q} \underline{\xi} \stackrel{!}{\leq} 0, \\ \tilde{Q} &\leq \underline{A}^T \underline{P} + \underline{P} \underline{A} - \underline{P} \left( \underline{B} \underline{B}^T - \frac{1}{\gamma^2} \underline{B}_\Delta \underline{B}_\Delta^T \right) \underline{P} + \underline{C}_\Delta^T \underline{C}_\Delta. \end{aligned} \quad (5.61)$$

Gleichung (5.61) entspricht der Lösung des  $\mathcal{H}_\infty$ -Optimierungsproblems im Zeitbereich, wie sie auch in [87, 28, 130] angegeben ist. Die positiv definite Matrix  $\underline{P}$  als Lösung der Riccati-Gleichung (5.61) für das kleinste  $\gamma \in \mathbb{R}$ ,  $\gamma \neq 0$ , ist nach [87, 130]

die gesuchte Lösung dieses Optimierungsproblems.



**Abbildung 5.14.** Vergleich der robusten Reglerauslegung an simulierter Strecke: links:  $\mathcal{H}_\infty$ , rechts:  $\min \left\{ \lambda_{\max}(\tilde{Q}) \right\}$

In der Simulation lieferten beide Reglerberechnungsmethoden gute Ergebnisse. Am Beispiel einer linearen Strecke 3. Ordnung mit der Struktur aus (5.38), konnte robuste Stabilität auch unter Parameterunsicherheiten nachgewiesen werden. Das in Abbildung 5.14 dargestellte Einschwingverhalten dieses simulierten Regelkreises deutet ebenso auf eine robuste Regelgüte hin.

## 5.5 Anwendungsbeispiele und Regelungsergebnisse

Die Verifizierung der entworfenen Regelung soll nun nachfolgend anhand praktischer Ergebnisse präsentiert und diskutiert werden. Eine quasikontinuierliche Kompensation der nichtlinearen Funktionen  $\alpha(\underline{x})$  und  $\beta(\underline{x})$  bildet wiederum die Grundlage dieser praktischen Untersuchungen.

### 5.5.1 Druckregelung für konstante Volumina

Für eine Ausgangsdruckregelung am Rohrende ist die Regelgröße  $u_{p_2}$  in der Modellgleichung (5.34) mit

$$y(t) = u_{p_2} = c(\underline{x}) \quad (5.62)$$

in den gegebenen Zustandsraumkoordinaten definiert. Damit etwaige Transportzeiten und die daraus resultierenden Streckentotzeiten vorerst nicht berücksichtigt werden müssen, soll zunächst die Rohrlänge  $l$  als vernachlässigbar klein angenommen werden.

Das Differenzieren der Regelgröße  $y(t) = u_{p_2}(t) = \xi_1(t)$  nach der Zeit  $t$  führt zur Richtungsableitung des Systemausgangs  $c(\underline{x})$  entlang der zeitlichen Ableitung aller Zustandsgrößen (vgl. Abschnitt 2.5.4). Für eine Druckregelung am Rohrende entspricht der Systemausgang gerade dem Skalarprodukt von Zustandsvektor  $\underline{x}$  und dem konstanten Ausgangsvektor  $\underline{C}$  mit

$$c(\underline{x}) = \underline{C}\underline{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underline{x}$$

im reduzierten pneumatischen Streckenmodell (5.34). Nach Definition 9 ist die erste Lie-Ableitung mit

$$\dot{\xi}_1 = L_a c(\underline{x}) = \frac{\partial c(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \dot{\underline{x}} = \dot{u}_{p_2} = -\frac{G_p}{C_{p_2}} \xi_1 + \frac{1}{C_{p_2}} i_{Q_2} \quad (5.63)$$

zu berechnen. Als Vereinfachung des vom Arbeitspunkt abhängigen Leitwerts  $G_p = G_p(u_{p_1}, y)$ , kann die Approximation aus Gleichung (3.45) mit der Polynomfunktion

$$G_p(u_{p_1}, y) \approx G_p(y) \approx G_{p_0} + \frac{G_{p_1}}{y}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, y > 0 \quad (5.64)$$

und den konstanten Parametern  $G_{p_0}$  und  $G_{p_1}$  verwendet werden. Die Berechnung der zweiten Lie-Ableitung vereinfacht sich somit

zu

$$\dot{\xi}_2 = L_a^2 c(\underline{x}) = - \left( \frac{G_{p0}}{C_{p2}} + \frac{R_{p0}}{L_p} \right) \xi_2 - \frac{1 + R_{p0} G_{p0}}{L_p C_{p2}} \xi_1 + \frac{1}{L_p C_{p2}} u_{p1} \quad (5.65)$$

unter der Voraussetzung, dass auch der pneumatische Widerstand approximiert wird. Die Approximation von  $R_p$  ist mit der Polynomfunktion (3.44) durchzuführen. Erst dadurch ist es möglich, die vereinfachte Differentialgleichung (5.65) mit nahezu konstanten Koeffizienten zu erhalten.

Da auch in Gleichung (5.65) die Stellgröße  $u(t)$  nicht explizit enthalten ist, ist es erforderlich auch die dritte Lie-Ableitung zu berechnen. Die zeitliche Differentiation von (5.65) ergibt

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_3 = L_a^3 c(\underline{x}) = & - \left( \frac{G_{p0}}{C_2} + \frac{R_{p0}}{L_p} \right) \xi_3 - \frac{1 + R_{p0} G_{p0}}{L_p C_{p2}} \xi_2 \\ & - \frac{a_0}{L_p C_{p2}} u_{p1} + \frac{a_0}{L_p C_{p2}} u(t) \quad (5.66) \end{aligned}$$

und führt letztendlich zum transformierten Zustandsraummodell

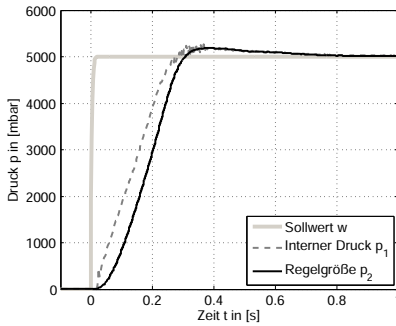
$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \\ \dot{\xi}_3 \end{pmatrix} = & \begin{pmatrix} \xi_2 \\ \xi_3 \\ -\frac{1+R_{p0}G_{p0}}{L_p C_{p2}} \xi_2 - \left( \frac{G_{p0}}{C_{p2}} + \frac{R_{p0}}{L_p} \right) \xi_3 \end{pmatrix} \\ & + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \left( \frac{a_0}{L_p C_{p2}} u(t) - \frac{a_0}{L_p C_{p2}} u_{p1} \right). \quad (5.67) \end{aligned}$$

Der relative Grad dieses Differentialgleichungssystems ist  $\delta = 3$  und demnach gleich der Ordnung der Modellgleichung (5.34) des Systems in Originalkoordinaten. Eine Nulldynamik nach Definition 8 existiert somit nicht.

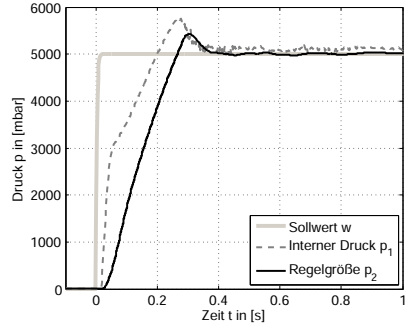
Die Reglerauslegung für ein Druckregelungssystem mit konstan-



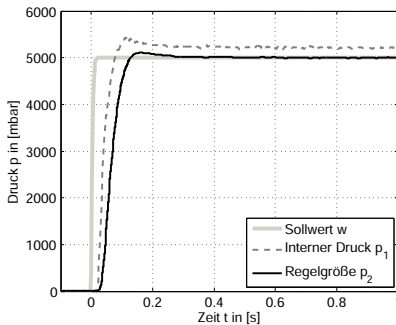
## 5.5 Anwendungsbeispiele und Regelungsergebnisse



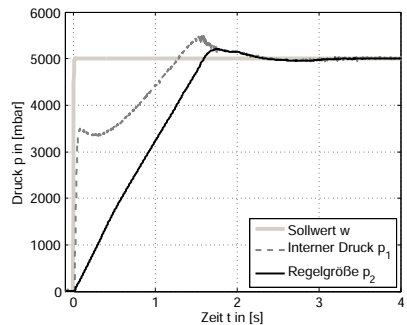
(a). Druckregelung geschlossenes Volumen  $V=1,0L$



(b). Druckregelung an offenem Volumen  $V=1,0L$



(c). Druckregelung an offenem Volumen  $V=0,0L$



(d). Druckregelung geschlossenes Volumen  $V=10,0L$

**Abbildung 5.15.** Vergleichende Druckregelung an offenen und geschlossenen Volumina

tem Volumen erfolgt am Systemmodell (5.67). Das zu kompensierende Funktional ist mit

$$\alpha(\underline{x}) = -a_0 u_{p1} \quad (5.68)$$

gegeben und aufgrund des unterlagerten Druckregelkreises mit

der Regelgröße  $u_{p_1}$  eindeutig bekannt. Da das transformierte Streckenmodell (5.67) den vollen Rang und somit keine internen Dynamiken besitzt, müssen keine weiterführenden Stabilitätsbetrachtungen, mit Ausnahme der eigentlichen Zustandsrückführung, getätigt werden.

Eine robust ausgelegte Zustandsregelung für den zeitdiskreten Anwendungsfall kann so für offene oder geschlossene Volumina verwendet werden (vgl. Messergebnisse in Abbildung 5.15).

### 5.5.2 Luftmengenregelung

Die Systemausgangsgröße beim Entwurf eines Regelkreises für die Luftmenge entlang seiner führenden Rohrleitung ist mit

$$y(t) = \xi_1(t) = i_{Q_2}(t) = c(\underline{x}) = \underline{C}\underline{x}(t) \quad (5.69)$$

definiert. Auch in diesem Fall ist der Systemausgang das Skalarprodukt von Zustandsvektor und einem konstanten Ausgangsvektor. Damit dieses System in der nichtlinearen Regelungsnormalform (2.38) dargestellt werden kann, müssen die beiden Lie-Ableitungen

$$\dot{\xi}_1 = \xi_2 = L_a c(\underline{x}) = \frac{\partial c}{\partial \underline{x}} \dot{\underline{x}} = i_{Q_2} = -\frac{R_p}{L_p} \xi_1 + \frac{1}{L_p} (u_{p_1} - u_{p_2}) \quad (5.70)$$

und

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_2 &= L_a^2 c(\underline{x}) = -\frac{R_{p_0}}{L_p} \xi_2 - \frac{1}{L_p} \dot{u}_{p_2} + \frac{1}{L_p} \dot{u}_{p_1} \\ &= -\frac{R_{p_0}}{L_p} \xi_2 + \frac{a_0}{L_p} u(t) - \frac{a_0}{L_p} u_{p_1} - \frac{1}{L_p} \dot{u}_{p_2} \\ &= -\frac{R_{p_0}}{L_p} \xi_2 + \frac{a_0}{L_p} u(t) - \frac{a_0}{L_p} u_{p_1} + \frac{G_p}{C_{p_2} L_p} u_{p_2} - \frac{1}{C_{p_2} L_p} i_{Q_2} \end{aligned} \quad (5.71)$$

berechnet werden. Wiederum ist es machbar, durch die Approximation des pneumatischen Widerstands mit der Polynomfunktion (3.44), die Vereinfachung zu Gleichung (5.71) durchzuführen. Die Differenzenordnung  $\delta$  des sich aus (5.70) und (5.71) ergebenden Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{R_{p0}}{L_p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \left( \frac{a_0}{L_p} u(t) + \alpha(\underline{x}) \right) \quad (5.72)$$

mit dem Funktional

$$\alpha(\underline{x}) = -\frac{1}{C_{p2} L_p} i_{Q2} + \frac{G_p}{C_{p2} L_p} u_{p2} - \frac{a_0}{L_p} u_{p1} \quad (5.73)$$

ist  $\delta = 2$  und dementsprechend kleiner dem der Modellordnung in den Originalkoordinaten. Daher besitzt dieses System eine interne Dynamik nach Definition 8.

Für eine vollständige Transformation nach Gleichung (2.34), ist die partielle Differentialgleichung

$$\dot{\xi}_3 = \dot{T}_3(\underline{x}) = \frac{\partial T_3}{\partial \underline{x}} \dot{\underline{x}} \quad (5.74)$$

für den transformierten Zustand  $\xi_3$  ableitbar. Zum Überprüfen der Stabilität der im System vorhandenen Nulldynamik ist es daher notwendig, eine Lösung des in (5.74) definierten Problems zu berechnen. Anhand des nun folgenden Beweises kann die Stabilität des geschlossenen Regelkreises trotz vorhandener interner Dynamiken sichergestellt werden.

**Beweis 3** (Stabilität der Nulldynamik für Luftmengenregelungen). *Legt man die Transformationsvorschrift*

$$\xi_3 = T_3(\underline{x}) = \dot{u}_{p2} = -\frac{G_p}{C_{p2}} u_{p2} + \frac{1}{C_{p2}} i_{Q2} \quad (5.75)$$

## 5 Regelungskonzept pneumatischer Systemmodelle

---

zugrunde, ergibt sich in Bezug auf die partielle Differentialgleichung (5.74) die Berechnungsvorschrift

$$\dot{\xi}_3 = \frac{\partial T_3}{\partial i_{Q_2}} \dot{i}_{Q_2} + \frac{\partial T_3}{\partial u_{p_2}} \dot{u}_{p_2} = \frac{1}{C_{p_2}} \xi_2 - \frac{G_{p_0}}{C_{p_2}} \xi_3. \quad (5.76)$$

zur Beschreibung der internen Dynamik. Die gewählte Transformationsvorschrift (5.75) für die gesuchte Nulldynamik gewährleistet eine eindeutige Koordinatentransformation nach (2.34) als auch eine eindeutige Transformation

$$\underline{x} = \underline{T}^{-1}(\underline{\xi}) \quad (5.77)$$

zurück in die Originalkoordinaten. Aus der kontinuierlichen Kompensationsmethodik mit Zustandsrückführung

$$u = u_{p_1} + \frac{1}{a_0} \dot{u}_{p_2} - k_1 \xi_1 - k_2 \xi_2 \quad (5.78)$$

ergibt sich das transformierte Zustandsraummodell eines Luftmengenregelungssystems mit

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \\ \dot{\xi}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{a_0 k_1}{L_p} & -\frac{R_{p_0} + a_0 k_2}{L_p} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_{p_2}} & -\frac{G_{p_0}}{C_{p_2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \underline{A}_{LMR} \underline{\xi}. \quad (5.79)$$

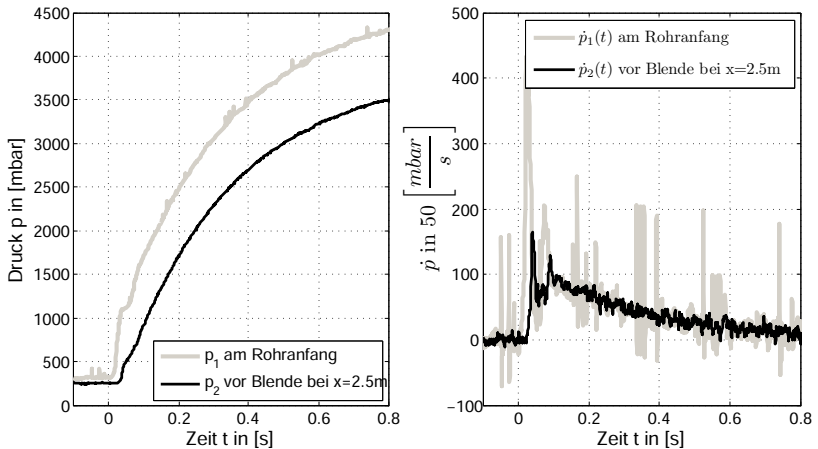
Es ist eindeutig erkennbar, dass die Zustandsvariable  $\xi_3$  keinen Einfluss auf die externen Dynamiken  $\xi_1$  und  $\xi_2$  nimmt und damit auch nicht beobachtbar ist. Die Stabilität dieses transformierten Zustandsraummodells kann für beliebige Arbeitspunkte als Funktion der physikalischen Parameter  $R_{p_0}$ ,  $G_{p_0}$  und  $C_{p_2}$  anhand der Pollage überprüft werden. Alternativ bietet sich aber auch die Möglichkeit an, aus einer definierten quadratischen Ljapunov-

Funktion und der daraus folgenden zeitlichen Ableitung

$$V = \frac{1}{2} \underline{\xi}^T \underline{P} \underline{\xi} \rightarrow \dot{V} = \underline{\xi}^T \left( \underline{A}_{LMR}^T \underline{P} + \underline{P} \underline{A}_{LMR} \right) \underline{\xi} \quad (5.80)$$

mit der symmetrischen positiv definiten Matrix  $\underline{P}$ , die positive (Semi-)Definitheit der Matrix  $\underline{Q} = - \left( \underline{A}_{LMR}^T \underline{P} + \underline{P} \underline{A}_{LMR} \right)$  nachzuweisen. Diese Überprüfung kann u. a. mit dem Kriterium nach Sylvester durch Determinantenberechnung aller einzelnen Hauptminoren nach [24] durchgeführt werden.

Ist das Zustandsraummodell (5.79) stabil, so ist auch die Stabilität der internen Dynamik bei dieser Art von Luftmengenregel-systemen erwiesen.  $\square$



**Abbildung 5.16.** Vergleich der Druckverläufe am Rohranfang und vor der Blende

Die Festlegung des Reglers  $\underline{K}$  findet am zeitdiskretisierten Systemmodell der kontinuierlichen Modellgleichung (5.72) statt. Damit das zeitkontinuierliche Funktional (5.73) vollständig kom-

## 5 Regelungskonzept pneumatischer Systemmodelle

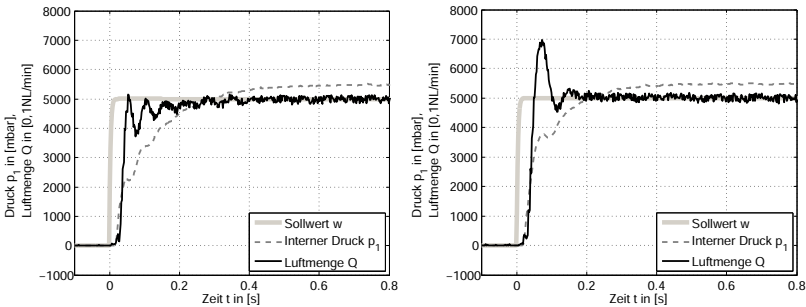
pensiert werden kann, ist es notwendig eine Approximation für die meist nicht messbare Zeitableitung des Zustands  $u_{p_2}$  zu finden. Mit der Annahme einer vernachlässigbar kleinen zweiten zeitlichen Ableitung der Regelgröße  $\frac{d^2 i_{Q_2}}{dt^2} \approx 0$ , kann in guter Näherung der Zusammenhang

$$\dot{u}_{p_1} \approx \dot{u}_{p_2} \quad (5.81)$$

gefolgert werden. Dass diese Annahme durchaus getroffen werden kann, ist anhand der Messung in Abbildung 5.16 zu sehen. Der gefilterte Wert des in der internen Druckregelung verwendeten Zustands

$$\dot{y} = \dot{u}_{p_1} \approx \dot{u}_{p_2} = -\frac{G_p}{C_{p_2}} u_{p_2} + \frac{1}{C_{p_2}} i_{Q_2} \quad (5.82)$$

kann mit dieser Näherung dazu verwendet werden, den Druckanstieg direkt vor der Blende zu approximieren und damit die Kompensation des Funktionals (5.73) durchzuführen [18].



(a). Luftmengenregelung ohne approximierter Kompensation  $\dot{u}_{p_2}$

(b). Luftmengenregelung mit approximierter Kompensation  $\dot{u}_{p_2}$

**Abbildung 5.17.** Vergleichende Luftmengenregelung mit und ohne approximierten Kompensationsterm

Unter diesen Voraussetzungen kann ein stabiles und gutes dynamisches Verhalten des geschlossenen Regelkreises erwirkt werden. Eine vergleichende Messung mit und ohne Kompensations-term  $\dot{u}_{p_1}$  zeigt Abbildung 5.17.

Da es sich um eine Regelung mit konstanten Reglerkoeffizienten handelt, ist das schnellstmögliche Erreichen eines stationären Zustandes der Drücke  $u_{p_1}$  und  $u_{p_2}$  am Rohranfang und direkt vor der Blende nicht möglich. Die Kopplung des in [19] vorgestellten Adaptionsalgorithmus für den notwendigen Vorfilter der Strecke in Originalkoordinaten und der Regelung im transformierten Koordinatenbereich ist daher als Kompromiss zwischen dem schnellstmöglichen Erreichen der stationären Druckendwerte und dem schnellen Ausregeln der Luftmenge anzusehen.

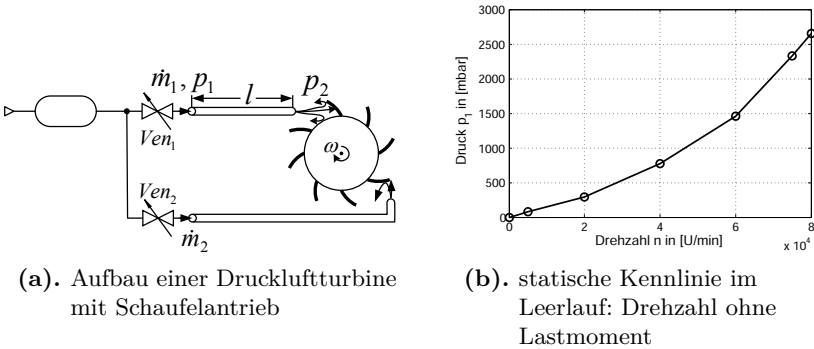
### 5.5.3 Regelung pneumatischer Antriebe

Die Antriebskraft pneumatischer Antriebe wird in den meisten Fällen direkt durch den Arbeitsdruck  $u_{p_2}$  hervorgerufen. Häufig finden lineare Zylinderantriebe oder rotatorische Druckluftmotoren Verwendung in industriellen Einsatzbereichen. Pneumatische Linearantriebe werden unter anderem in der Automobilindustrie dazu eingesetzt, um Positionieraufgaben meist in Kombination mit dem Erzeugen geregelter Presskräfte lösen zu können [17]. Pneumatische Rotationsantriebe hingegen werden des öfteren als Zerstäuber in der Lackiertechnik verwendet. Für einen einfach wirkenden Linearantrieb ist der Regelungsentwurf in Anhang B.3 beschrieben.

Ein typisches Beispiel von pneumatischen Rotationsantrieben sind Druckluftmotoren. Die allgemeine Funktionsweise eines solchen Motors mit Schaufelantrieb verdeutlicht die Schematik in Abbildung 5.18a. Die Motordrehzahl  $n$  als Systemausgangsgröße  $y$  ist mit

$$y = n = \frac{\omega}{2\pi} \quad (5.83)$$

## 5 Regelungskonzept pneumatischer Systemmodelle



**Abbildung 5.18.** Pneumatischer Druckluftmotor: Prinzipieller Aufbau und statische Kennlinie

gegeben. Aus der Druckkraft  $F_p = f(u_{p2})$  an den Schaufeln resultiert das Antriebsmoment

$$M_1 = K_1 \cdot u_{p2}.$$

Zusammen mit dem wirkenden Dämpfungsmoment  $M_2 = d \cdot \omega$  ist es daraus machbar, die sich ergebende Momentengleichung

$$\sum_i M_i = J\dot{\omega} = K_1 u_{p2} - d \cdot \omega \quad (5.84)$$

für einen Druckluftmotor mit Schaufelantrieb zu bestimmen. Unter Einbeziehung des reduzierten pneumatischen Analogiemodells (5.34), kann die vereinfachte dynamische Modellgleichung

$$\begin{pmatrix} \dot{n} \\ \dot{u}_{p2} \\ \dot{i}_{Q2} \\ \dot{u}_{p1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{d}{J} & \frac{K_1}{2\pi J} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{G_p}{C_{p2}} & \frac{1}{C_{p2}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L_p} & \frac{R_p}{L_p} & \frac{1}{L_p} \\ 0 & 0 & 0 & -a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ u_{p2} \\ i_{Q2} \\ u_{p1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ a_0 \end{pmatrix} u(t) \quad (5.85)$$



in Originalkoordinaten heraus abgeleitet werden. Da die Luft prinzipbedingt in die Umgebung ausströmt, besitzt das System einen vom Antriebsdruck abhängigen Leitwert  $G_p(u_{p2})$ . Diese Abhängigkeit führt wiederum dazu, dass die in Abbildung 5.18b dargestellte Ausgangskennlinie nichtlinearen Charakter besitzt.

Auch dieses pneumatische System lässt sich durch Koordinatentransformation in die Ein-/Ausgangsdarstellung bringen. Die Berechnungen zur Transformation der Modellgleichung (5.85) können dem Anhang B.2 entnommen werden. Mit der Anwendung dieser bekannten Transformationsvorschrift leitet sich die Modellgleichung

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \\ \dot{\xi}_3 \\ \dot{\xi}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ -a_3\xi_4 - a_2\xi_3 - a_1\xi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} a_0 \frac{K_1}{2\pi J C_{p2} L_p} (u(t) - u_{p1}),$$

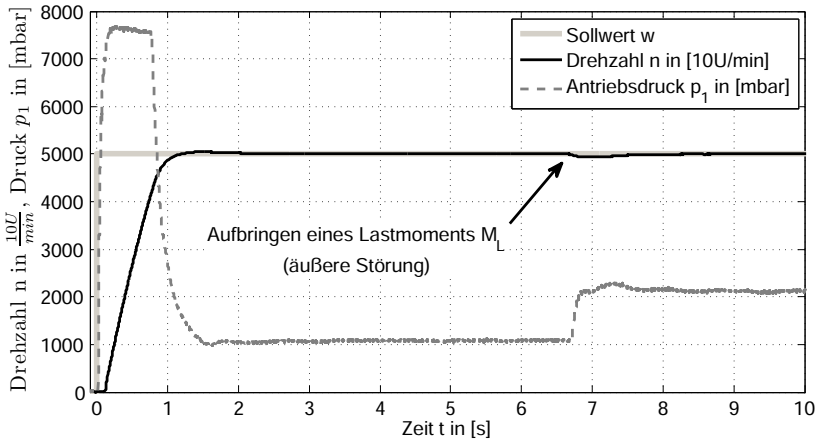
$$a_3 = \frac{d}{J} + \frac{G_{p0}}{C_{p2}} + \frac{R_p}{L_p}, a_2 = \frac{dG_{p0}}{J C_{p2}} + \frac{R_p}{L_p} \left( \frac{d}{J} + \frac{G_{p0}}{C_{p2}} \right) + \frac{1}{C_p L_p},$$

$$a_1 = \frac{J R_p G_{p0} + d}{J C_{p2} L_p} \quad (5.86)$$

ab. Dieses Streckenmodell besitzt den relativen Grad  $\delta = 4$ , der auch gleich dem der Systemordnung in Originalkoordinaten (5.85) entspricht. Das transformierte Streckenmodell (5.86) beinhaltet damit keine internen Dynamiken, die auf Stabilität zu überprüfen sind oder gar zusätzliche Instabilitäten hervorrufen könnten.

Für die Auslegung der Regelkoeffizienten einer Druckluftturbine wird das Systemmodell (5.86) als Berechnungsbasis benutzt. Das zu kompensierende Funktional ist lediglich mit

$$\alpha(\underline{x}) = -a_0 u_{p1} \quad (5.87)$$



**Abbildung 5.19.** Drehzahlregelung Druckluftturbine mit Lastmoment als äußere Störung

gegeben und kann wiederum direkt gemessen und dementsprechend kompensiert werden. Die von außen auf die Turbine wirkende Störungen können aufgrund der integralen Streckencharakteristik sehr einfach ausgeregelt werden. Das in Abbildung 5.19 dargestellte Führungs- und Störverhalten ist typisch für die eingesetzten Druckluftmotoren, deren Antriebsventil über eine nicht allzu lange Verrohung mit der eigentlichen Turbine verbunden ist.

## 6 Konzepterweiterung für Strecken mit Transportvorgängen

Der in Abschnitt 3.2 betrachtete Zusammenhang zeitlich veränderlicher Dichten von Stoffen entlang ihrer räumlichen Strömungsrichtung ist charakterisierend für Strecken mit Transportvorgängen. Transportvorgänge lassen sich demnach durch partielle Differentialgleichungen in Form der Transportgleichung (3.5) modellieren. Die Verallgemeinerung dieser Gleichung entspricht der mathematischen Beschreibungsgleichung

$$a_0 \frac{du(x, y, z, t)}{dt} + \underline{a} \nabla u(x, y, z, t) = b(x, y, z, t). \quad (6.1)$$

Findet die Bewegung entlang einer Rohrleitung statt, so handelt es sich um einen gerichteten Transport entlang der  $x$ -Koordinate. Damit reduziert sich (6.1) zu

$$a_0 \frac{du(x, t)}{dt} + a_1 \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = b(x, t). \quad (6.2)$$

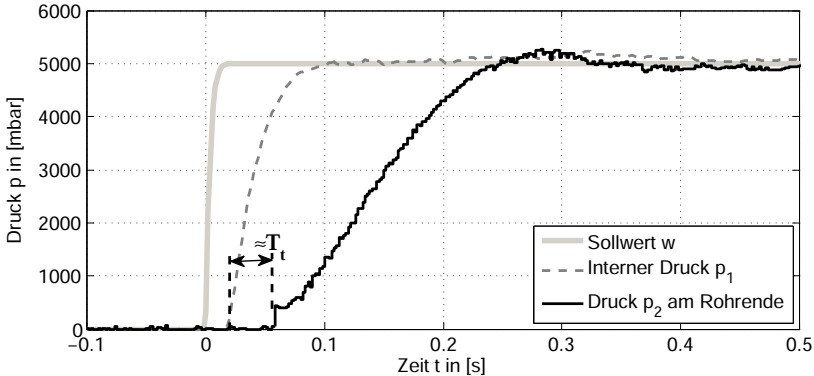
Die Lösung dieser Gleichung kann, wie sie auch in [30] gezeigt ist, durch Anwendung der Laplace-Transformation angegeben werden. Für diese Lösungsmethodik wird die Parameterkonstanz von

## 6 Konzepterweiterung für Strecken mit Transportvorgängen

$a_0$  und  $a_1$  vorausgesetzt. Mit  $b(x, t) = 0$  ergibt sich die homogene Lösung

$$\begin{aligned}
 U_h(x, s) &= U_0 e^{-sx \frac{a_0}{a_1}} \bullet \circ u_h(t, x) = u_0(t, x_0) * \delta\left(t - x \frac{a_0}{a_1}\right) \\
 &= u_0\left(t - x \frac{a_0}{a_1}, x_0\right). \quad (6.3)
 \end{aligned}$$

Diese Lösung entspricht einer reinen Zeitverschiebung entlang der  $x$ -Richtung des Rohrs, so dass  $u_0(t, x_0)$  um die Zeit  $T_t = x \frac{a_0}{a_1}$  verzögert an der Stelle  $x$  erscheint.  $T_t$  wird in der Technik auch als **Totzeit** bezeichnet.



**Abbildung 6.1.** Totzeiteffekt bei langen Rohrleitungen: Druckanstieg bei Lastvolumen  $V = 0,0L$  an den Stellen  $x = 0m$  und  $x = l = 14m$

Der in Abbildung 6.1 gezeigte Verlauf bildet genau diese um die Totzeit verzögerte Reaktion am Rohrende ab, wenn am Rohrfang ein Druck eingeprägt wird. Die Länge des Rohres beeinflusst auch die physikalischen Parameter der Strecke. Rohrwiderstand, Induktivität und Rohrkapazität sind entsprechend den Gleichungen (3.27), (3.36) und (3.31) direkt mit der Röhrlänge verknüpft.

## 6.1 Lineare Modellierungsformen von Totzeiteffekten

Die homogene Lösung des modellierten Transportprozesses (6.3) ist keine Systemdarstellung, die sich aus handhabbaren Differentialgleichungen beschreiben lässt. Zur Berücksichtigung solcher Laufzeiteffekte beim Entwurf geschlossener Regelkreise werden daher geeignete Modellierungsformen benötigt, die unter Umständen eine lineare Zustandsbeschreibung von Totzeitgliedern ermöglichen. Im einfachsten und auch handhabbarsten Fall kann die Übertragungsfunktion (6.3) der Totzeit mit Hilfe verschiedener Methoden approximiert werden. Nachfolgend sei daher ein kurzer Überblick über die gebräuchlichsten Methoden gegeben.

### 6.1.1 Padé-Approximation

Die von H.E. Padé<sup>1</sup> entwickelte Methode für die näherungsweise Darstellung allgemeiner Funktionen durch gebrochen rationale Funktionen, ist auch zur Beschreibung von Totzeiten geeignet. Demnach ist damit auch eine approximierte Darstellung als lineares Übertragungsglied möglich.

Diese Vorgehensweise ist dadurch charakterisiert, dass unter Verwendung der Reihendarstellung für die Exponentialfunktion mit

$$e^x = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{x^q}{q!}, \quad (6.4)$$

diese nach dem  $n+m$ -ten Glied abgebrochen wird und anhand eines Koeffizientenvergleichs die gesuchte komplexe Übertragungs-

---

<sup>1</sup>Französischer Mathematiker um 1900

funktion

$$G(x = sT_t) = \frac{\sum_i^m b_i (sT_t)^i}{\sum_i^n a_i (sT_t)^i} \stackrel{!}{=} \sum_{i=0}^{n+m} \frac{(-1)^i (sT_t)^i}{i!} \quad (6.5)$$

berechnet wird. In der praktischen Anwendung wird vor allem die Gleichheit der Koeffizientenanzahl mit  $n = m$  bevorzugt. Nur so ist eine Allpasscharakteristik für die approximierten Übertragungsfunktion (6.5) umsetzbar.

### 6.1.2 Approximation der Exponentialfunktion

Mit der Beschreibung der Exponentialfunktion als Grenzwert der Folge

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \rightarrow e^{-sT_t} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{sT_t}{n} + 1\right)^n}, \quad (6.6)$$

lässt sich die Totzeit-Übertragungsfunktion als Reihenschaltung von  $n$  PT1-Gliedern mit der entsprechenden Zeitkonstante  $T_1 = \frac{T_t}{n}$  entwickeln. Die sich ergebende Approximationsgüte ist stark von der Anzahl der in Reihe geschalteten Übertragungsglieder abhängig und erreicht erst für sehr hohe  $n$  sehr gute Ergebnisse.

Alternativ zur Darstellung als Grenzwert einer Folge, kann auch die Reihendarstellung der Exponentialfunktion als Totzeitapproximationsglied verwendet werden. Aus dem Grund, dass das Argument mit  $x = -sT_t$  vorgegeben ist, enthält diese Darstellung jedoch die zeitliche und die mehrfach zeitlichen Ableitungen der Eingangsgröße und ist damit äußerst anfällig gegenüber einwirkenden Messstörungen.

### 6.1.3 Zeitdiskrete Modellierungsform

Ist die Totzeit  $T_t$  ein ganzzahliges Vielfaches  $n$  der verwendeten Abtastzeit  $T_s$ , lässt sich die lineare Übertragungsfunktion

$$e^{-sT_t} = e^{-s \cdot nT_s} = z^{-n} \quad (6.7)$$

im  $z$ -Bereich als Totzeitbeschreibungsform angeben und direkt mit in die Übertragungsfunktion einbinden [101, 43, 44]. Je nachdem ob sich die Totzeit am Ausgang oder Steuereingang befindet, entspricht das einer Anzahl von  $n$  Null- bzw. Polstellen, die alle im Koordinatenursprung der  $z$ -Ebene liegen. Diese Beschreibungsform der Totzeit als Teil der zeitdiskreten Übertragungsfunktion findet oft in zeitdiskreten Smith-Prädiktoren, wie sie beispielsweise in [101] und [38] beschrieben sind, ihre Anwendung.

Gegeben sei das lineare Streckenmodell zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} \underline{x}_{k+1} &= \underline{A}_d \underline{x}_k + \underline{B}_d u_k = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \underline{x}_k + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} u_k, \\ y_k &= \underline{C} \underline{x}_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \underline{x}_k \end{aligned} \quad (6.8)$$

im zeitdiskreten Zustandsraum. Mit der Verwendung der Übertragungsfunktion (6.7) lässt sich eine Totzeit am Systemausgang durch die Erweiterung der zeitdiskreten Systemmatrix durch

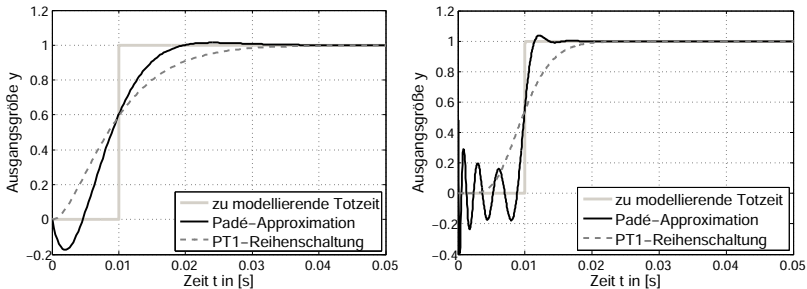
$$\hat{\underline{A}}_d = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad (6.9)$$

## 6 Konzepterweiterung für Strecken mit Transportvorgängen

mit im Zustandsraummodell (6.8) berücksichtigen [58]. Als logische Konsequenz erhöht sich die Systemmodellordnung in diesem Fall um die Ordnung  $n = \frac{T_t}{T_s}$ .

### 6.1.4 Methodenvergleich

Durch die variable und hohe Systemordnung des entstehenden Systemmodells bei der Anwendung der zeitdiskreten Modellierungsform, ist es im Hinblick auf den praktischen Einsatz nicht sinnvoll, diese Methodik auf ihre Ergebnisse hin zu untersuchen. Vielmehr soll sich auf diese Methoden beschränkt werden, deren Implementierung einfach auch auf Mikrocontrollersystemen stattfinden kann und zugleich gute Ergebnisse im Hinblick auf die Modellierung der Transportzeit liefern.



**Abbildung 6.2.** Direkter Methodenvergleich: Sprungantworten der Approximationsmethoden

Anhand der in Abbildung (6.2) gezeigten Sprungantworten mit einer Streckentotzeit von  $T_t=10\text{ms}$  kann man Rückschlüsse zur Modellierungsgüte für Padé- und Exponentialfunktionsapproximi-



mation ziehen. Die aus beiden Methoden resultierenden Übertragungsfunktionen können dazu genutzt werden, ein Systemmodell mit fester Struktur sowie konstanter Modellordnung auf der Reglerplattform zu implementieren.

## 6.2 Erweiterte Gesamtmodellstruktur

Aus der Modellierung pneumatischer Strecken ist erkennbar, dass die physikalischen Parameter wie Rohrwiderstand, Kapazität und Induktivität direkt von der Leitungslänge abhängen. Dieser Zusammenhang führt auch dazu, dass beispielsweise der Druckaufbau am Rohrende an Dynamik verliert und so die Approximationsgüte des eigentlichen Transporteffektes nicht übermäßig hoch sein muss.

Da die Modellordnung direkten Einfluss auf die benötigte Rechenleistung hat, ist es sinnvoll die Ordnung des Totzeitapproximationsgliedes auf ein Minimum zu reduzieren. In den weiteren Untersuchungen wird daher eine konstante Modellordnung von  $n = \delta$  und  $m = \delta - 1$  festgelegt. Mit dieser Festlegung ist es zwar nicht mehr machbar eine Allpasscharakteristik des Näherungsmodells bei Verwendung der Padé-Approximation zu erhalten, ermöglicht es jedoch in einfacher Weise dieses direkt in Rege-lungsnormalform mit in das Zustandsraummodell des Gesamtsystems zu integrieren.

Für ein Totzeitmodell der Ordnung  $n = 2$  ist bei Anwendung der Padé-Approximation das zeitkontinuierliche Streckenmodell mit den konstanten Matrizen

$$\underline{A}_{T_t} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{6}{T_t^2} & -\frac{4}{T_t} \end{pmatrix}, \quad \underline{B}_{T_t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{C}_{T_t} = \begin{pmatrix} \frac{6}{T_t^2} & -\frac{2}{T_t} \end{pmatrix} \quad (6.10)$$

zu erweitern. Im Gegensatz dazu, ist das zeitkontinuierliche Stre-

## 6 Konzepterweiterung für Strecken mit Transportvorgängen

---

ckenmodell mit den ebenso konstanten Matrizen

$$\underline{A}_{T_t} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{T_t} & \frac{2}{T_t} \\ 0 & -\frac{2}{T_t} \end{pmatrix}, \quad \underline{B}_{T_t} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{T_t} \end{pmatrix}, \quad \underline{C}_{T_t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.11)$$

zu erweitern, wenn eine PT1-Reihenschaltung als Totzeitapproximation zweiter Ordnung verwendet werden soll.

Setzt man die in (5.38) definierte Struktur verallgemeinerter pneumatischer Regelstrecken voraus, ergibt sich

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi}_{T_{t_1}} \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{T_{t_n}} \\ \dot{\xi}_1 \\ \vdots \\ \dot{\xi}_\delta \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{c|c} \underline{A}_{T_t} & \left( \underline{B}_{T_t} \mid \underline{0} \right) \\ \hline \underline{0} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & -a_1 & & -a_{\delta-1} \end{pmatrix} \end{array} \right) \begin{pmatrix} \xi_{T_{t_1}} \\ \vdots \\ \xi_{T_{t_n}} \\ \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_\delta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \left( \alpha(\underline{x}(t)) + \beta(\underline{x}(t))u(t) \right) \quad (6.12)$$

als zeitkontinuierliche Modellgleichung der mit Totzeit behafteten Strecke. Dieses Gleichungssystem entspricht der Approximation einer aufgrund des Transportvorgangs unendlich dimensionalen Regelstrecke mit einer endlichen Anzahl an Zustandsgrößen.

ßen.

Für den Entwurf eines geeigneten Reglers werden zunächst die Eigenschaften der entstandenen Systemmatrix in (6.12) untersucht. Die Eigenwertlage linearer Systeme lässt sich direkt aus der Beziehung

$$0 = \det(\lambda \underline{I} - \underline{A}_{T_t}) \det(\lambda \underline{I} - \underline{A}) \quad (6.13)$$

bestimmen. Aus dieser Gleichung kann ebenso direkt abgeleitet werden, dass die Eigenwertlage der approximierten Totzeitstrecke getrennt von der Eigenwertlage der zu regelnden Streckendynamik ohne Transportvorgang betrachtet werden kann. Aus dem Grund, dass der vorhandene Transportprozess in seiner Geschwindigkeit nicht beeinflussbar ist, ist es demnach völlig ausreichend eine Zustandsrückführung des transformierten Zustandsvektors  $\underline{\xi} = (\xi_1 \ \dots \ \xi_\delta)$  an der Stelle  $x = 0$  zu entwerfen. Unter Verwendung des Rückführvektors

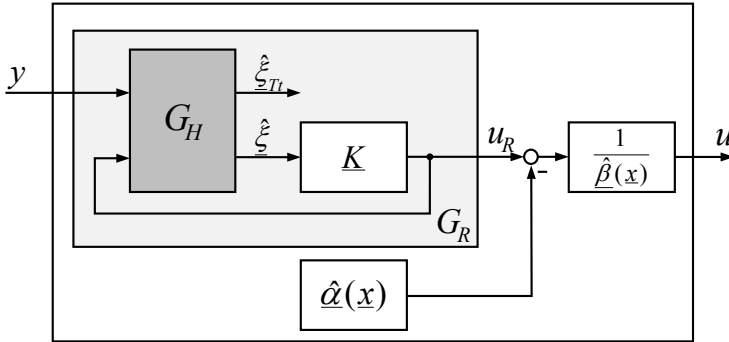
$$\underline{K}^* = \begin{pmatrix} \underline{0} & \underline{K} \end{pmatrix}, \quad (6.14)$$

kann die Eigenwertlage des erweiterten Systems (6.12) aus

$$0 = \det(\lambda \underline{I} - \underline{A}_{T_t}) \det(\lambda \underline{I} - \underline{A} + \underline{BK}) \quad (6.15)$$

berechnet werden.

Im Hinblick auf das in Abbildung 5.8 definierte Regelungskonzept, ist eine Erweiterung der Zustandsrekonstruktionsstruktur  $G_H$  in der Art vorzunehmen, dass die zur Regelung notwendigen Zustandsgrößen auch bei bestehenden Streckentotzeiten erwartungstreu geschätzt werden können. Diese Erweiterung führt letztendlich zu der in Abbildung 6.3 dargestellten Regelungsstruktur. In den folgenden Abschnitten sollen nun weitere Aspekte und Anmerkungen für die praktische Umsetzung dieser Erwei-



**Abbildung 6.3.** Regelungskonzept verallgemeinerter pneumatischer Streckenmodelle mit Totzeiterweiterung

terung betrachtet und erläutert werden.

### 6.3 Beobachtergestützte Totzeitstreckenregelung

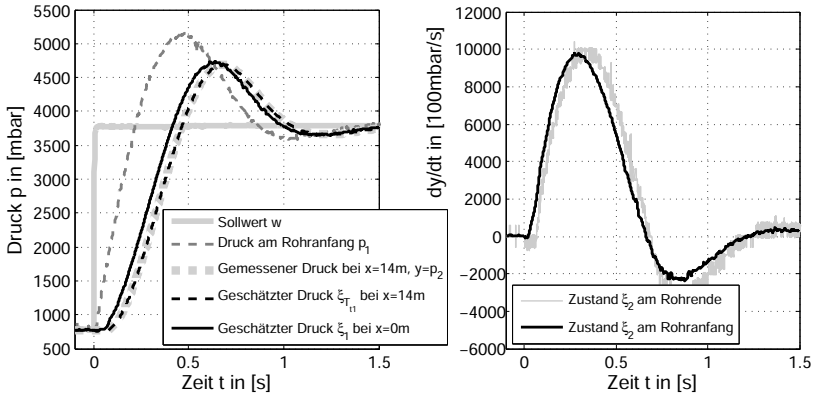
Ein Beobachterentwurf für das erweiterte Systemmodell (6.12) zur Schätzung der für die Regelung notwendigen Zustandsgrößen

$$\underline{\xi} = \left( \xi_1 \quad \dots \quad \xi_\delta \right)^T,$$

ist mit den in Kapitel 4 gezeigten Methoden unter Voraussetzung einer sicher bekannten Totzeit sehr gut umsetzbar.

Gelingt eine erwartungstreue Zustandsschätzung, so liefert die Rekonstruktion der benötigten Zustandsgrößen gute Ergebnisse (vgl. Abbildung 6.4).

Jedoch bleibt zu beachten, dass sich die Approximationsgüte der Streckentotzeit deutlich auf die Rekonstruktion der für die Regelung notwendigen Zustände auswirkt. Mögliche Restwelligkeiten



**Abbildung 6.4.** Zustandsrekonstruktion am erweiterten Systemmodell (Padé-Approximation,  $T_t \approx 50ms$ ) mit nahezu sicheren Parametern

des Ausgangsfehlers  $y - \hat{y}$  werden über den Beobachtervektor  $\underline{H}$  direkt auf die Zustandsschätzung zurück gekoppelt und können so zu einer deutlichen Verschlechterung der Schätzgüte führen.

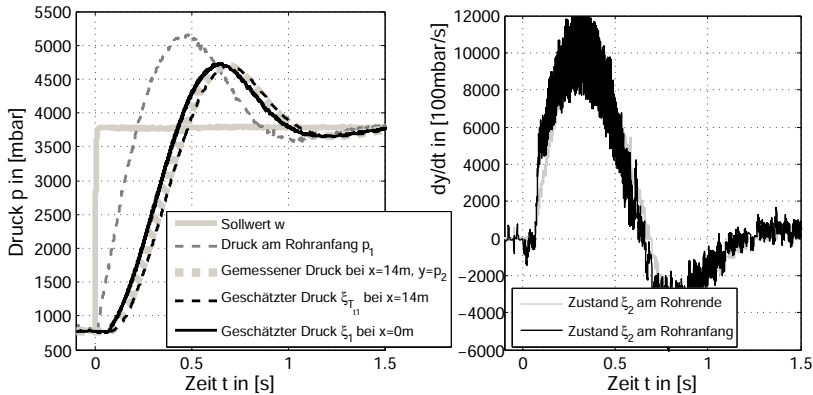
## 6.4 Alternative Totzeitstreckenregelung

Transformiert man das erweiterte Systemmodell (6.12) mit der Berechnungsvorschrift (4.7) in die nichtlineare Normalformdarstellung aus Definition 13, so kann aus der Rücktransformationsvorschrift (4.6) die Zustandsgröße  $\xi_1$  der um die Totzeit verschobenen Regelgröße direkt berechnet werden. Mit der Festlegung von  $n = 2$ , ergibt sich für eine beispielhafte PT1-Reihenschaltung als Approximationsglied die Rücktransformationsvorschrift

$$\xi_1 = t_3^{-1}(\tilde{\xi}) = y + T_t \dot{y} + \frac{T_t^2}{4} \ddot{y} \quad (6.16)$$

## 6 Konzepterweiterung für Strecken mit Transportvorgängen

und ist als Linearkombination der Messgröße am Ausgang und deren zeitlichen Ableitungen zu verstehen. Diese zeitlichen Ableitungen der Messgröße  $y = \xi_{T_1}$  können mit einem zusätzlich implementierten Zustandsvariablenfilter errechnet werden. Nachteilig wirkt sich dabei wiederum die funktionsbedingte Phasenverschiebung aus, wenn zu hohe Filterzeitkonstanten parametrisiert wurden. Die um die Totzeit verschobene Schätzgröße  $\xi_1$ , kann in diesem Fall nicht der eigentlich zu erwartenden Schätzgröße entsprechen und variiert in ihrem Wahrheitswert mit der Parametrisierung des verwendeten Zustandsvariablenfilters. Selbst für nicht stark verrauschte Messsignale muss jedoch eine gewisse Filterwirkung existieren, um ein ungestörtes Schätzsignal  $\xi_1$  zu erhalten. Beispielhaft sei dafür auf die Ergebnisse in Abbildung 6.5 verwiesen.



**Abbildung 6.5.** Zustandsrekonstruktion am erweiterten Systemmodell mit ZVF ( $T_t \approx 50ms, T_1 = T_2 = 8ms$ )

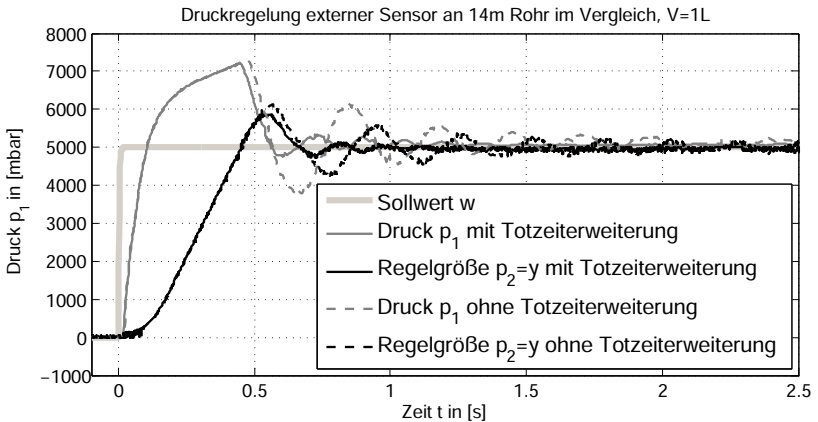
Werden die für die Regelung benötigten Zustandsgrößen ebenfalls mit Hilfe eines Zustandsvariablenfilters zur Verfügung gestellt, so kann die zuvor geschätzte Regelgröße an der Stelle

$x = 0$  als Eingangsgröße dieser Rekonstruktionsstruktur verwendet werden.

Mit dieser Erweiterung ist eine kompatible zu- und abschaltbare Totzeitstreckenerweiterung zu den aus den vorigen Abschnitten bekannten Regelstrecken implementierbar, ohne einen für diese Art von Streckenmodellen abweichenden Regelalgorithmus zu entwickeln.

## 6.5 Regelungsergebnisse

Hat man es in der technischen Anwendung mit großen Rohrlängen zu tun, so ist die Verwendung der vorgestellten Methodik zur Approximation der Regelgröße als Zustand ohne Transportvorgang sinnvoll.



**Abbildung 6.6.** Vergleich von Regelgüte mit und ohne Totzeiterweiterung zur Zustandsrekonstruktion

Das in Abbildung 6.6 gezeigte Regelverhalten verdeutlicht die signifikante Verbesserung des Führungsverhaltens. Bei gleich blei-

## 6 Konzepterweiterung für Strecken mit Transportvorgängen

---

bender Anschlagzeit erreicht das asymptotische Einschwingen mit der Verwendung der vorgestellten Totzeiterweiterung eine deutlich höhere Schwingungsdämpfung sowie ein kleineres Überschwingen. Dies führt letztendlich zu einem schnelleren Erreichen der Stationarität.



## 7 Zusammenfassung und Ausblick

Diese Arbeit stellt einen Überblick über die Funktionalität und Funktionsweise industrieller Hardware speziell für den regelungstechnischen Einsatz dar. Das Anwendungsfeld des in dieser Arbeit entwickelten Konzepts beschränkt sich zwar auf den Einsatz pneumatischer Regelventile in den verschiedensten industriellen Anwendungen, kann aber auf einfache Weise in andere Bereiche industrieller Regelungstechnik übertragen werden.

Die Definition der am häufigsten verwendeten Kennzahlen geregelter und gesteuerter Prozesse, wie auch eine komprimierte Übersicht zur Signalerfassung, -verarbeitung und der Ausgabe dieser modifizierten Signale als Stellgröße eines applizierten Reglers, gehören zum einleitenden Teil dieser Arbeit. Fast alle durchgeführten Untersuchungen finden im Zeitbereich statt. Aus diesem Grund ist im einleitenden Teil ein kurzer Überblick über die Zustandsraumdarstellung dynamischer Systeme gegeben. Eine Vorstellung existierender Methoden zur Steuerung und Regelung dynamischer Systeme ergänzt die Einführung dieser Arbeit. Am Beispiel pneumatischer Strecken, wie sie sich in vielen industriellen Applikationen vorfinden lassen, wurde ein verallgemeinertes Streckenmodell für genau diese Anwendungsfälle abgeleitet. Das Ergebnis der physikalischen Modellierung beinhaltet Analogiebetrachtungen zu passiven Bauelementen der Elektrotechnik auf der Grundlage verallgemeinerter Zustandsgrößen.

Dies führt zu einem leicht erweiterbaren, parameterlinearen aber dennoch nichtlinearen Zustandsraummodell der möglichen pneumatischen Strecken. Die vorhandenen Nichtlinearitäten lassen sich unter anderem mit den vom Arbeitspunkt abhängigen Analogieelementen „Leitwert“ und „Widerstand“ erklären. Aber auch Nichtlinearitäten, die aufgrund der eigentlichen Applikation, wie beispielsweise der Bewegung servopneumatischer Zylinderantriebe herrühren, können sehr einfach mit in diese Modellgleichungen integriert werden. Damit bietet diese Art und Weise der Modellierung pneumatischer Strecken eine sehr übersichtliche und zudem leicht erweiterbare Darstellungsform. Mit der Modellierung als parameterlineares Zustandsraummodell erhöht sich auch für fachfremde Ingenieure das Verständnis für pneumatische Systeme. Ein großer Unterschied zur Elektrotechnik liegt in der Tatsache begründet, dass die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Gasteilchen wesentlich geringer ist als die Bewegung der elektrischen Ladungsträger. Für räumlich ausgedehnte Anlagen ist es damit wichtig, die Transportzeit der Gasteilchen in der Regelung mit zu berücksichtigen um optimale Regelergebnisse erzielen zu können.

Ausgehend von einem parameterlinearen Zustandsraummodell, wurden zunächst Methoden zur Schätzung bzw. Rekonstruktion der für die Regelung notwendigen Zustandsgrößen vorgestellt. Der Fokus dieser ausgewählten Methoden liegt vor allem darauf, brauchbare und insbesondere präzise (bzw. erwartungstreue) Schätzergebnisse auch unter vorhandenen Modellfehlern zu liefern. Je nach Rechenleistung der verwendeten Hardware auf der die entworfenen Algorithmen implementiert werden sollen, können einige der vorgestellten Verfahren auch dazu verwendet werden, eine simultane Parameterschätzung zu realisieren um so die eigentliche Schätzgüte der für die Regelung notwendigen Zustandsgrößen nochmals zu verbessern. Sollen auch Diagnosesysteme zur Fehlererkennung implementiert werden, so können diese

erwartungstreuen Schätzgrößen wiederum dazu verwendet werden, Fehler oder Fehlfunktionen zu erkennen. Diese Anforderung ist für industrielle Produkte durchaus notwendig, jedoch in dieser Arbeit nicht näher beleuchtet worden.

Eine Klassifizierung der untersuchten Schätzalgorithmen erfolgt anhand ihres mathematischen Ansatzes. Als ein sehr geeignetes Verfahren ist die adaptive Zustandsschätzung unter Minimierung der Kovarianzmatrix des Schätzfehlers zu betrachten. Diese Methode ermöglicht es auch unter vorhandenen Störeinflüssen, wie zum Beispiel dem fast immer vorhandenen Mess- und Quantisierungsrauschen, präzise Schätzergebnisse mit nur minimalen Störanteilen zu erhalten und damit das Stellglied im stationären Arbeitspunkt nur minimal zu beanspruchen. Weiterhin werden bei dieser Methodik auch die geschätzten Modellparameter iterativ nachgeführt um damit auf Streckenveränderungen reagieren zu können. Bei ausreichender Systemanregung können erwartungstreue Modellparameter als Ergebnis dieses Adaptionsvorgangs erreicht werden. Die direkten Berechnungsmethoden, wie beispielsweise das numerische Differenzieren oder die Verwendung eines Zustandsvariablenfilters, ließen sich hingegen am einfachsten implementieren und benötigen nur wenig Rechenleistung. Je nach Verwendungszweck der berechneten Zustandsgrößen, muss daher das am Besten geeignete Verfahren ausgewählt werden. Der implementierte Zustandsschätzalgorithmus ist als fester Bestandteil der Reglerstruktur im Gesamtkonzept anzusehen.

Mit dem Entwurf eines unterlagerten, hochdynamisch ausgelegten Druckregelkreises, konnte die Gesamtordnung des Streckenmodells um zwei Freiheitsgrade reduziert werden. Die im Ventil vorhandenen Störungen, die hauptsächlich durch Reibeinflüsse und magnetische Effekte verursacht werden, konnten durch ein Störmodell und einer hohen Regelkreisverstärkung weitest-

gehend kompensiert werden. Durch die Verwendung einer Zustandstransformation und der sich daraus ergebenden E/A-Darstellung, konnte dem System einen integralen Charakter aufgeprägt werden. In den üblichen Anwendungsfällen konnte daher die Forderung nach stationärer Genauigkeit auch mit groben Modellierungsfehlern ohne die Verwendung eines integralen Reglers oder gar einer Vorfilteradaption erreicht werden. Die Grundlage des geschlossenen Regelkreises bildet die quasikontinuierliche Kompensation aller existierenden Nichtlinearitäten im möglichen Stellgrößenbereich. Diese Kompensation ist jedoch nur vollständig umsetzbar, wenn die verwendete Hardware so kleine Abtast- und Stellgrößenausgabezeiten realisieren kann, dass innerhalb eines Abtastintervalls die nichtlineare Systemanregung aufgrund der Zustandsvektoränderung  $\Delta \underline{x}$  verschwindend klein ausfällt. Soll die Prozessorauslastung reduziert werden, wäre es weiterhin denkbar unterschiedliche Zykluszeiten zu verwenden um so den linearen Regler und ggf. auch die notwendige Zustandsrekonstruktion in einer niedrigerfrequenten Task aufzurufen. In diesem Fall ist es zwingend erforderlich, den Regler und die Zustandsrekonstruktion als rein zeitdiskrete Elemente zu behandeln.

Ist nicht nur die robuste Stabilität sondern auch die robuste Regelgüte ein definiertes Ziel des eingesetzten Reglers, fällt die Dimensionierung aller Regelparameter unter die Problematik einer robusten Regelung. Die festgelegte Regelkreisstruktur mit einer implementierten erwartungstreuen Zustandsschätzung vermindert allerdings die Anzahl der notwendigen Freiheitsgrade zur Auslegung einer robusten Regelung, wie sie in der Literatur Verwendung findet. Aus diesem Grund besitzt die in dieser Arbeit angewendete Reglerparameterauslegung nicht den vollen Anspruch einer robusten Regelung. Dennoch bietet diese Herangehensweise die Möglichkeit einen Regler so zu dimensionieren, dass eine stabile Regelung mit hoher Dynamik auch an Strecken

mit unsicheren Parametern realisiert werden kann. Ist ein Regler in einem weiten Arbeitsbereich robust stabil und besitzt zudem noch gute Regeleigenschaften, so ist es machbar den Wunsch nach einfacher und unkomplizierter Austauschbarkeit sowie einer schnellen Umrüstung und Inbetriebnahme nahezu zu erfüllen. Das in dieser Arbeit entwickelte Regelungskonzept besitzt für eine hohe Anzahl an möglichen Strecken genau diese robuste Stabilität in Verbindung mit guten Regeleigenschaften. Darunter fallen kleine Anschlagzeiten sowie das garantierte Erreichen des geforderten Sollwerts. Dennoch ist es notwendig eine Abschätzung über den möglichen Arbeitsbereich zu treffen um die Geräte dementsprechend zu parametrieren und so einen stabilen Regelkreis zu erhalten. Um den Schritt einer exakten Parametrierung einzusparen, wäre es für zukünftige Entwürfe durchaus denkbar, die vom Schätzsystem erwartungstreu ermittelten Parameter mit im Regelalgorithmus zu verwenden, damit eine automatisierte Streckenanpassung umgesetzt werden kann.

Abschließend konnte gezeigt werden, dass auch der Vorgang eines Stofftransports in Form einer sich ergebenden Totzeit mit in das verallgemeinerte pneumatische Streckenmodell integriert werden kann. Derzeit existieren in der Literatur mehrere bekannte Methoden zur Modellierung einer Totzeit im Zeitbereich als handhabbare Funktion. Die Anwendbarkeit einiger ausgewählter Methoden wurde dementsprechend geprüft und beurteilt. Weil das entwickelte Regelungskonzept strukturell gleich für räumlich konzentrierte, wie auch für räumlich ausgedehnte Industrieanlagen aufgebaut sein soll, ist es wichtig eine dieser Totzeitapproximationsmethoden mit in den entworfenen Algorithmus zu integrieren. Für den implementierten Regelkreis bedeutet das eine Erweiterung des Zustandsschätzers  $G_H$ . Dabei konnte bewiesen werden, dass der Regler selbst strukturell unverändert bleiben kann. Lediglich ist eine Werteanpassung des Koeffizientenvektors

$\underline{K}$  durchzuführen, um auch bei dem Vorhandensein eines signifikanten Transportvorgangs gutes asymptotisch stabiles Verhalten gewährleisten zu können. Im Vergleich zum Standardregelkreis ohne Berücksichtigung des Stofftransports, wurden mit dieser Erweiterung deutlich bessere Sprungantwortkennzahlen erreicht. Bei gleichbleibender Anschlagzeit konnte die Überschwingweite und Einschwingzeit deutlich reduziert werden. Die Berücksichtigung der im System vorhandenen Totzeit, welche bei langen Rohrlängen signifikant in Erscheinung tritt und den Stofftransport entlang dieser Leitung modelliert, ist bei allen untersuchten Methoden an eine Bedingung geknüpft: Die sichere Kenntnis der Transportzeit  $T_t$ . Für zukünftige Umsetzungen ist es daher äußerst sinnvoll, die Machbarkeit einer robusten Totzeitschätzung zu untersuchen. Ziel dabei sollte es weitestgehend sein, die verwendeten Modellgleichungen stabil an diese Schätzung anzupassen.

# Anhang A

## Digitale Signalverarbeitung

### A.1 Zeitdiskrete Zustandsraumdarstellung

Die Lösung der linearen Zustandsgleichung im Zeitbereich ist mit

$$\underline{x}(t) = e^{\underline{A}(t-t_0)} \underline{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\underline{A}(t-\tau)} \underline{B}u(\tau) d\tau \quad (\text{A.1})$$

gegeben [86, 44]. Die zeitkontinuierliche Transitionsmatrix  $\underline{\Phi}(t)$  ist als

$$\underline{\Phi}(t - t_0) = e^{\underline{A}(t-t_0)} \quad (\text{A.2})$$

definiert. Setzt man eine ideale Abtastung zu äquidistanten Zeitpunkten voraus, so lässt sich aus den Zustandsvektoren

$$\underline{x}(t=t_0) = \underline{x}(kT_s), \quad \underline{x}(t=t_0 + kT_s) = \underline{x}((k+1)T_s), \quad (\text{A.3})$$

des aktuellen und folgenden Abtastschrittes, die zeitdiskrete Darstellungsform der Transitionsmatrix mit

$$\underline{\Phi}(t - t_0) = \underline{\Phi}(T_s) = e^{\underline{A}T_s} \quad (\text{A.4})$$

berechnen. Für die zeitdiskrete Lösung der erzwungenen Bewegung, die durch die Eingangsgröße  $u(t)$  hervorgerufen wird, ist das Integral aus (A.1) zu lösen. Unter Verwendung eines Haltegliedtes nullter Ordnung vereinfacht sich das zu lösenden Integral zu

$$\int_{t_0=kT_s}^{t=(k+1)T_s} e^{\underline{A}(t-\tau)} \underline{B}u(\tau) d\tau = u_k \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} \underline{\Phi}(t-\tau) \underline{B} d\tau \\ = \underline{A}^{-1} \left( \underline{\Phi}(T_s) - \underline{I} \right) \underline{B}, \quad (\text{A.5})$$

denn die Eingangsgröße ist innerhalb eines Tastschrittes konstant. Die Berechnungsvorschrift des zeitlich diskretisierten Eingangsvektors ergibt sich daher zu

$$\underline{\Theta}(T_s) = \underline{A}^{-1} \left( \underline{\Phi}(T_s) - \underline{I} \right) \underline{B}. \quad (\text{A.6})$$

Dieser ist wiederum eine Konstante und direkt von der Abtastzeit  $T_s$  abhängig.

## A.2 Zeitdiskretes Kalman-Filter

Zeitdiskrete Kalman-Filter sind als modellbasierte Beobachterstrukturen zu verstehen. Das implementierte dynamische Streckenmodell dient dabei zur Vorhersage des im aktuellen Abtastschritt zu erwartenden Zustandsvektors  $\underline{x}_k^*$ , der aus dem zuletzt vorliegenden und korrigierten Schätzwert  $\hat{\underline{x}}_k$  errechnet wird. Dieser Schätzwert ist aus der zeitdiskreten Modellgleichung

$$\underline{x}_k^* = \underline{\Phi}_{k-1} \hat{\underline{x}}_{k-1} + \underline{\Theta} u_k \quad (\text{A.7})$$

zu prädictieren [22]. Im nächsten Berechnungsschritt wird der vorhergesagte Zustandsvektor durch die Lösung eines Minimie-



rungsproblems mit dem gewichteten Fehler zwischen  $\underline{x}_k^*$  und dem eigentlichen Messwert  $y_k$  korrigiert. Dieser korrigierte Schätzwert  $\hat{\underline{x}}_k$  ergibt sich somit aus der Gleichung

$$\begin{aligned}\hat{\underline{x}}_k &= \underline{x}_k^* + \underline{H}_k \left( y_k - \underline{C}\underline{x}_k^* + \underline{\zeta}_k \right) \\ &= (\underline{I} - \underline{H}_k \underline{C}) \underline{x}_k^* + \underline{H}_k \underline{C} \underline{x}_k + \underline{H}_k \underline{\zeta}_k.\end{aligned}\tag{A.8}$$

Die Struktur eines zeitdiskreten Kalman-Filters ist damit gleich der allgemeinen Beobachterstruktur nach Luenberger. Die Grundlage zur Berechnung der Beobachtermatrix  $\underline{H} = \underline{H}_k$  ist jedoch verschieden und erfolgt in jedem Zyklus neu.

Aus dem korrigierten Schätzfehler

$$\begin{aligned}\underline{e}_k &= \underline{x}_k - \hat{\underline{x}}_k = (\underline{I} - \underline{H}_k \underline{C}) (\underline{x}_k - \underline{x}_k^*) - \underline{H}_k \underline{\zeta}_k \\ &= (\underline{I} - \underline{H}_k \underline{C}) \underline{e}_k^* - \underline{H}_k \underline{\zeta}_k\end{aligned}\tag{A.9}$$

kann nun die zeitdiskrete Kovarianzmatrix des Schätzfehlers  $\underline{P}_k = E \left\{ \underline{e}_k \underline{e}_k^T \right\}$  berechnet werden. Unter der Voraussetzung von unkorrelierten und mittelwertfreien Mess- und Prozessrauschen, sind deren Erwartungswert und Varianz durch

$$E \left\{ \underline{\zeta} \right\} = E \left\{ \underline{\eta} \right\} = 0, \quad E \left\{ \underline{\zeta} \underline{\zeta}^T \right\} = \underline{R}, \quad E \left\{ \underline{\eta} \underline{\eta}^T \right\} = \underline{Q}, \tag{A.10}$$

gegeben. Besitzt diese Annahme Gültigkeit, ergibt sich die zeit-

diskrete Kovarianzmatrix des korrigierten Schätzfehlers (A.9) zu

$$\begin{aligned}
 \underline{P}_k &= E \left\{ \underline{e}_k \underline{e}_k^T \right\} \\
 &= E \left\{ \left[ (\underline{I} - \underline{H}_k \underline{C}) \underline{e}_k^* - \underline{H}_k \underline{\zeta}_k \right] \left[ \underline{e}_k^{*T} (\underline{I} - \underline{C}^T \underline{H}_k^T) - \underline{\zeta}_k^T \underline{H}_k^T \right] \right\} \\
 &= (\underline{I} - \underline{H}_k \underline{C}) E \left\{ \underline{e}_k^* \underline{e}_k^{*T} \right\} (\underline{I} - \underline{C}^T \underline{H}_k^T) + \underline{H}_k \underline{R} \underline{H}_k^T \\
 &= (\underline{I} - \underline{H}_k \underline{C}) \underline{P}_k^* (\underline{I} - \underline{C}^T \underline{H}_k^T) + \underline{H}_k \underline{R} \underline{H}_k^T \\
 &= \underline{P}_k^* - \underline{P}_k^* \underline{C}^T \underline{H}_k^T - \underline{H}_k \underline{C} \underline{P}_k^* + \underline{H}_k \underline{C} \underline{P}_k^* \underline{C}^T \underline{H}_k^T + \underline{H}_k \underline{R} \underline{H}_k^T.
 \end{aligned} \tag{A.11}$$

Die zeitdiskrete Kovarianzmatrix des prädiktierten Schätzfehlers

$$\begin{aligned}
 \underline{e}_k^* &= \underline{x}_k - \underline{x}_k^* = \underline{\Phi}_{k-1} \underline{x}_{k-1} + \underline{\Theta} u_k + \underline{\eta}_k - \underline{\Phi}_{k-1} \hat{\underline{x}}_{k-1} - \underline{\Theta} u_k \\
 &= \underline{\Phi}_{k-1} \underline{e}_{k-1} + \underline{\eta}_k
 \end{aligned} \tag{A.12}$$

ist aus der Berechnungsvorschrift

$$\begin{aligned}
 \underline{P}_k^* &= E \left\{ \underline{e}_k^* \underline{e}_k^{*T} \right\} \\
 &= E \left\{ \left[ \underline{\Phi}_{k-1} \underline{e}_{k-1} + \underline{\eta}_k \right] \left[ \underline{e}_{k-1}^T \underline{\Phi}_{k-1}^T + \underline{\eta}_k^T \right] \right\} \\
 &= \underline{\Phi}_{k-1} \underline{P}_{k-1} \underline{\Phi}_{k-1}^T + \underline{Q}_k
 \end{aligned} \tag{A.13}$$

zu bestimmen. Das eigentliche Ziel des zeitdiskreten Kalman-Filters besteht nun darin, die Schätzfehlerkovarianzmatrix  $\underline{P}_k$  durch den Verstärkungsvektor  $\underline{H}_k$  zu minimieren. Aus dieser Forderung ist die notwendige Bedingung

$$\frac{\partial \underline{P}_k}{\partial \underline{H}_k} \stackrel{!}{=} 0 = -2 \left( \underline{C} \underline{P}_k^* \right)^T + 2 \underline{H}_k \left( \underline{C} \underline{P}_k^* \underline{C}^T + \underline{R} \right) \tag{A.14}$$

für ein Minimum direkt ableitbar. Die gesuchte Verstärkungsma-

trix ist demzufolge mit

$$\underline{H}_k = \underline{P}_k^* \underline{C}^T \left( \underline{C} \underline{P}_k^* \underline{C}^T + R \right)^{-1}. \quad (\text{A.15})$$

gegeben. Weiteres Einsetzen von (A.15) in (A.11), führt zur direkten Berechnung der geschätzten Kovarianzmatrix

$$\underline{P}_k = (\underline{I} - \underline{H}_k \underline{C}) \underline{P}_k^* \quad (\text{A.16})$$

des Schätzfehlervektors aus (A.9).

### A.3 Rekursiv gleitende Signalauswertung

Für die Auswertung der Güte zeitdiskreter gemessener Signale ist es oft sinnvoll, statistische Kenngrößen wie **Mittelwert** und **Varianz** zu berechnen. Erfolgt diese Berechnung gleitend, d.h. werden in jedem Tastschritt der aktuell gemessene und  $n$  zurückliegende Signalwerte zur Berechnung dieser beiden statistischen Momente benutzt, so sind dazu mehrere mathematische Berechnungsschritte pro Moment durchzuführen. Um den Rechenaufwand zur Berechnung dieser beiden Kennzahlen so gering wie möglich zu gestalten, sollte diese Berechnung rekursiv erfolgen. Für den gleitenden Mittelwert kann aus der Formulierung

$$\mu_k = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} x_{k-i} \quad (\text{A.17})$$

die rekursive Form innerhalb jedes Tastschrittes

$$\mu_{k+1} = \mu_k + \frac{x_{k+1} - x_{k-n}}{n} \quad (\text{A.18})$$

entwickelt werden. Je nach Anzahl der verwendeten Messwerte  $n$ , reduziert sich der damit verbundene Rechenaufwand durch

## A Digitale Signalverarbeitung

---

diese rekursive Form immens (vgl. dazu auch Tabelle A.1).

Die Signalvarianz eines diskreten Signals kann nach

$$\sigma_k = \frac{1}{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{k-i} - \mu_k)^2 \quad (\text{A.19})$$

berechnet werden. Damit diese Berechnung überhaupt möglich ist, muss zuvor der aktuelle Erwartungswert ermittelt werden. Durch Definition der Hilfsvariablen  $\tilde{\sigma}_k$ , kann Gleichung (A.19) durch

$$\begin{aligned} \sigma_k &= \frac{1}{n-1} \left( n \cdot \mu_k^2 + \sum_{i=0}^{n-1} x_{k-i}^2 - 2\mu_k \cdot \sum_{i=0}^{n-1} x_{k-i} \right) \\ \sigma_{k+1} &= \frac{1}{n-1} \left( \tilde{\sigma}_k + x_{k+1}^2 - x_{k-n}^2 - n \cdot \mu_{k+1}^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

rekursiv ausgedrückt werden. Tabelle A.1 liefert dazu in kurzer Form die Anzahl benötigter Rechenoperationen im Vergleich.

Rechenoperation	$\mu$ (A.17)	$\mu$ (A.18)	$\sigma$ (A.19)	$\sigma$ (A.20)
Additionen	$n-1$	1	$n-1$	1
Subtraktionen	0	1	$n$	2
Multiplikationen	0	0	$n$	5
Divisionen	1	1	1	1

**Tabelle A.1.** Anzahl der Rechenoperationen zur Bestimmung beider statistischen Kennzahlen

## A.4 Schrittweitenoptimierung für das Gradientensuchverfahren

Für eine schnelle Konvergenz gradientenbezogener Optimierungsverfahren ist die Wahl der Schrittweite  $\Gamma$  von fundamentaler Bedeutung. Mathematisch formuliert, gilt es das Optimierungsproblem

$$\min_{\Gamma} \{J_{k+1}\} \quad (\text{A.21})$$

zu lösen. Mit dem Gradienten  $\nabla J_l$  des definierten Gütefunktionalns entlang des Parametervektors  $\underline{\theta}_l$ , lässt sich der Fehlervektor für den nächsten Iterationsschritt  $l+1$  aus dem nachfolgenden Zusammenhang ermitteln. Dabei gilt

$$\begin{aligned} J_{l+1} &= \frac{1}{2} \underline{e}_{l+1}^T \underline{e}_{l+1} \quad \text{mit} \quad \underline{e}_{l+1} = \underline{y} - \underline{M}\underline{\theta}_{l+1} = \underline{y} - \underline{M}(\underline{\theta}_l - \Gamma \nabla J) \\ &= \underline{y} - \underline{M}\underline{\theta}_l + \Gamma \underline{M} \nabla J, \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

so dass sich auch der Fehlervektor in rekursiver Form durch  $\underline{e}_{l+1} = \underline{e}_l + \Gamma \underline{M} \nabla J$  beschreiben lässt. Daraus resultiert mit

$$\begin{aligned} J_{l+1} &= \frac{1}{2} \left( \underline{e}_l^T + \Gamma \nabla J^T \underline{M}^T \right) (\underline{e}_l + \Gamma \underline{M} \nabla J) \\ &= J_l + \Gamma \underline{e}_l^T \underline{M} \nabla J + \frac{\Gamma^2}{2} \nabla J^T \underline{M}^T \underline{M} \nabla J \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

und der Optimalitätsbedingung

$$\frac{\partial J_{l+1}}{\partial \Gamma} \stackrel{!}{=} 0 = \underline{e}_l^T \underline{M} \nabla J + \Gamma \nabla J^T \underline{M}^T \underline{M} \nabla J \quad (\text{A.24})$$

die optimierte Schrittweite  $\Gamma_{opt}$  mit

$$\Gamma_{opt} = - \frac{\underline{e}_l^T \underline{M} \nabla J}{\nabla J^T \underline{M}^T \underline{M} \nabla J} = \frac{\nabla J^T \nabla J}{\nabla J^T \underline{M}^T \underline{M} \nabla J}. \quad (\text{A.25})$$

## A Digitale Signalverarbeitung

---

Wendet man das Gauss-Seidel-Verfahren zur Optimierung an, so wird innerhalb jedes Iterationsschrittes nur ein Parameter  $\theta_i$  verändert. Für die Suche parallel zur Koordinatenachse gilt demnach

$$\frac{\partial e_j}{\partial \theta_i} = -m_{ji} \rightarrow \nabla J = - \begin{pmatrix} m_{i1} & \dots & m_{im} \end{pmatrix} \underline{e} = -\underline{m}_i^T \underline{e}, \quad (\text{A.26})$$

so dass sich die optimale Schrittweite für die iterative Änderung des Parameters  $\theta_i$  zu

$$\Gamma_{optGS} = \frac{1}{\underline{m}_i^T \underline{m}_i} = \frac{1}{\sum_{j=1}^m m_{ji}^2} \quad (\text{A.27})$$

vereinfacht.

Möchte man einzelne Messwerte mehr, bzw. im entgegengesetzten Fall weniger in die Optimierung mit einbeziehen, kann man das mit dem Einführen eines **Wichtungsfaktors**  $q_j$  für jeden einzelnen Messfehler  $e_{k-j}$ ,  $j \in [1..m]$  im Gütemaß  $J_l$  berücksichtigen. D.h. das zu minimierende Gütemaß lässt sich durch

$$J = \sum_{j=1}^m \frac{1}{2} e_{k-j} q_j \cdot e_{k-j} = \frac{1}{2} \underline{e}^T \underline{Q} \underline{e} \quad (\text{A.28})$$

berechnen, wobei  $\underline{Q}$  die **Wichtungsmatrix** mit den einzelnen Wichtungsfaktoren auf der Hauptdiagonalen ist. Die daraus resultierenden Optimierungsgrößen sind mit

$$\nabla J = -\underline{M}^T \underline{Q} \underline{e} \quad (\text{A.29})$$

$$\Gamma_{Opt} = - \frac{\nabla J^T \nabla J}{\nabla J^T \underline{M}^T \underline{Q} \underline{M} \nabla J} \quad (\text{A.30})$$

$$\Gamma_{optGS} = \frac{1}{\underline{m}_i^T \underline{q}_i \underline{m}_i} = \frac{1}{\sum_{j=1}^m q_j \cdot m_{ji}^2} \quad (\text{A.31})$$

zu berechnen.

# Anhang B

## Pneumatische Modellgleichungen

### B.1 Pneumatisches Ersatzmodell

Auf der Grundlage des mit dem Ventil gesteuerten Massenstroms (3.21), der sich als gesteuerter Stromfluss nach Gleichung (3.47) mit

$$\dot{m} = \alpha \varphi p_V \sqrt{\frac{2}{R\vartheta}} \cdot A_V(x_S(t)) \hat{=} i_Q(t) = \beta(u_{p_1}, p_V, x_S \dots) x_S(t)$$

beschreiben lässt, kann das pneumatische Ersatzsystem wie folgt modelliert werden: Die Bewegungsgleichung des elektromechanischen Antriebs beschreibt (3.43) mit der Differentialgleichung

$$\ddot{x}_S(t) = -a_0 x_S(t) - a_1 \dot{x}_S(t) + b_0 u(t) - v(t). \quad (\text{B.1})$$

Es werden (Haft-)Reibung, Hystereseeffekte und weitere äußere Einflüsse in der Störgröße  $v(t)$  zusammengefasst und damit in der Modellierung berücksichtigt.

### B.1.1 Kompakte Modellgleichung der unterlagerten Druckregelung

Die Stößelposition  $x_S$  ist direkt aus Gleichung (5.2) mit

$$x_S(t) = \frac{1}{\beta} (C_{p_1} \dot{u}_{p_1} + i_{Q_2}) = \frac{1}{\beta} \left( C_{p_1} \dot{u}_{p_1} + \frac{1}{Z_p} u_{p_1} \right) \quad (\text{B.2})$$

zu berechnen. Des Weiteren resultiert mit  $\frac{d}{dt} i_{Q_2} = \frac{1}{Z_p} \dot{u}_{p_1} - \frac{\dot{Z}_p}{Z_p^2} u_{p_1}$  aus Gleichung (5.2) die Beschreibungsgleichung

$$\begin{aligned} \dot{x}_S(t) &= \frac{1}{\beta} \left( C_{p_1} \ddot{u}_{p_1} - \dot{\beta} x_S(t) + \dot{i}_{Q_2} \right) \\ &= \frac{1}{\beta} \left( C_{p_1} \ddot{u}_{p_1} - \dot{\beta} x_S(t) + \frac{1}{Z_p} \dot{u}_{p_1} - \frac{\dot{Z}_p}{Z_p^2} u_{p_1} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Werden diese beiden Gleichungen in (5.4) eingesetzt, so ergibt sich das in (5.5) beschriebene Zustandsraummodell bzw. die folgende Beschreibungsgleichung.

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_3 &= \ddot{u}_{p_1} \\ &= -a_1 \frac{\beta}{C_{p_1}} \dot{x}_S - a_0 \frac{\beta}{C_{p_1}} x_S + \frac{\beta}{C_{p_1}} b_0 u(t) - \frac{\beta}{C_{p_1}} v(t) - \frac{1}{C_{p_1} Z_p} \ddot{u}_{p_1} + \dots, \\ &= -a_1 \ddot{u}_{p_1} - a_0 \dot{u}_{p_1} + \frac{\beta}{C_{p_1}} b_0 u(t) - \frac{\beta}{C_{p_1}} v(t) \\ &\quad - \frac{1}{C_{p_1} Z_p} \ddot{u}_{p_1} - a_0 \frac{1}{C_{p_1}} i_{Q_2} - a_1 \frac{1}{C_{p_1}} \dot{i}_{Q_2} + a_1 \frac{\dot{\beta}}{C_{p_1}} x_S(t) + \dots \\ &= -\frac{a_0}{C_{p_1} Z_p} u_{p_1} - \left( a_0 + \frac{a_1}{C_{p_1} Z_p} \right) \dot{u}_{p_1} - \left( a_1 + \frac{1}{C_{p_1} Z_p} \right) \ddot{u}_{p_1} \\ &\quad + \frac{\beta}{C_{p_1}} b_0 u(t) - \frac{\beta}{C_{p_1}} v(t) + a_1 \frac{\dot{Z}_p}{C_{p_1} Z_p^2} u_{p_1} + a_1 \frac{\dot{\beta}}{C_{p_1}} x_S(t) + \dots \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$



### B.1.2 Vollständige Modellgleichung der unterlagerten Druckregelung

In der Modellbeschreibung (3.46) sind die Differentialgleichungen der verallgemeinerten Zustandsgrößen durch

$$\dot{u}_{p_1} = -\frac{1}{C_{p_1}}i_{Q_2} + \frac{\beta}{C_{p_1}}x_S(t) \quad (\text{B.5})$$

$$\dot{u}_{p_2} = -\frac{G_p}{C_{p_2}}u_{p_2} + \frac{1}{C_{p_2}}i_{Q_2} \quad (\text{B.6})$$

$$\frac{di_{Q_2}}{dt} = -\frac{R_p}{L_p}i_{Q_2} + \frac{1}{L_p}(u_{p_1} - u_{p_2}) \quad (\text{B.7})$$

definiert. Mit der Zustandsrückführung

$$u(t) = Sw - k_1u_1 - k_2\dot{u}_1 - k_3\ddot{u}_1, \quad (\text{B.8})$$

und den Gleichungen (B.1), (B.5) und (B.7) kann die zweite zeitliche Ableitung der inneren Zustandsgröße  $u_{p_1}$  berechnet werden. Diese ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \ddot{u}_{p_1} &= \frac{\beta}{C_{p_1}}\dot{x}_S + \frac{1}{C_{p_1}}\frac{\partial\beta}{\partial u_{p_1}}\dot{u}_{p_1}x_S - \frac{1}{C_{p_1}}\frac{di_{Q_2}}{dt} \\ &= \frac{\beta}{C_{p_1}}\dot{x}_S + \frac{1}{C_{p_1}}\frac{\partial\beta}{\partial u_{p_1}}\dot{u}_{p_1}x_S - \frac{1}{L_p C_{p_1}}u_{p_1} + \frac{1}{L_p C_{p_1}}u_{p_2} + \frac{R}{L_p C_{p_1}}i_{Q_2}. \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Aus den Gleichungen (B.5) und (B.9) ergibt sich die Stellgröße der Zustandsrückführung

$$\begin{aligned} u(t) &= Sw - k_2\frac{\beta}{C_{p_1}}x_S - k_3\frac{\beta}{C_{p_1}}\dot{x}_S - \left(k_1 - \frac{k_3}{L_p C_{p_1}}\right)u_1 - \frac{k_3}{L_p C_{p_1}}u_2 \\ &\quad - \left(\frac{R_p}{L_p C_{p_1}}k_3 - \frac{k_2}{C_{p_1}}\right)i_2 - \frac{k_3}{C_{p_1}}\frac{\partial\beta}{\partial u_1}\dot{u}_1x_S. \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Mit dieser entstandenen Rückführung werden auch die mechanischen Zustandsgrößen  $x_S$  und  $\dot{x}_S$  auf den Systemeingang zurückgeführt.

## B.2 Koordinatentransformation Druckluftmotor

Aus der vereinfachten dynamischen Modellgleichung (5.85) und der Motordrehzahl  $n$  als Systemausgang, kann durch mehrfaches zeitliches Differenzieren das System transformiert werden.

Mit Hilfe der vereinfachten Leitwertdarstellung aus (3.45)

$$G_p u_{p_2} \approx G_{p_0} u_{p_2} + G_{p_1}, \quad \forall u_{p_2} \in \mathbb{R}, u_{p_2} > 0 \quad (\text{B.11})$$

und der Vereinfachung für den Rohrwiderstand (3.44)

$$R_p i_{Q_2} \approx R_{p_0} i_{Q_2} - R_{p_1}, \quad \forall i_{Q_2} \in \mathbb{R}, i_{Q_2} > 0, \quad (\text{B.12})$$

kann das System wie folgt transformiert und vereinfacht werden. Die zeitliche Ableitung der Motordrehzahl

$$n = y = \xi_1$$

errechnet sich aus

$$\dot{y} = \xi_2 = \frac{K_1}{2\pi J} u_{p_2} - \frac{d}{J} \xi_1. \quad (\text{B.13})$$

Mit der Verwendung von (B.5), (B.6) und (B.7) sowie den genannten Vereinfachungen, lassen sich die höheren zeitlichen Ableitungen der Motordrehzahl entsprechend berechnen.

$$\ddot{y} = \xi_3 = \frac{K_1}{2\pi J} \dot{u}_{p_2} - \frac{d}{J} \xi_2 = - \left( \frac{d}{J} + \frac{G_{p_0}}{C_{p_2}} \right) \xi_2 - \frac{d \cdot G_{p_0}}{J \cdot C_{p_2}} \xi_1 + \frac{K_1}{2\pi J C_{p_2}} i_{Q_2} \quad (\text{B.14})$$

$$\ddot{y} = \xi_4 = - \left( \frac{d}{J} + \frac{G_{p_0}}{C_{p_2}} \right) \xi_3 - \frac{d \cdot G_{p_0}}{J \cdot C_{p_2}} \xi_2 \quad (\text{B.15})$$

$$+ \frac{K_1}{2\pi J C_{p_2}} \left( -\frac{R_p}{L_p} i_{Q_2} + \frac{1}{L_p} (u_{p_1} - u_{p_2}) \right)$$

$$= - \left( \frac{d}{J} + \frac{G_{p_0}}{C_{p_2}} + \frac{R_{p_0}}{L_p} \right) \xi_3$$

$$- \left( \frac{d G_{p_0}}{J C_{p_2}} + \frac{R_{p_0}}{L_p} \left( \frac{d}{J} + \frac{G_{p_0}}{C_{p_2}} \right) + \frac{1}{C_p L_p} \right) \xi_2$$

$$- \left( \frac{R_{p_0} G_{p_0}}{C_{p_2} L_p} + \frac{d}{J C_{p_2} L_p} \right) \xi_1 + \frac{R_{p_0} G_{p_1}}{C_{p_2} L_p} + \frac{K_1}{2\pi J C_{p_2} L_p} u_{p_1}$$

$$y^{(4)} = \dot{\xi}_4 = -a_3 \xi_4 - a_2 \xi_3 - a_1 \xi_2 + a_0 \frac{K_1}{2\pi J C_{p_2} L_p} (u(t) - u_{p_1}). \quad (\text{B.16})$$

Da die Stellgröße in (B.16) explizit auftritt, ist der Differenzgrad  $\delta = 4$  und entspricht damit der Systemordnung  $n$  in Originalkoordinaten.

## B.3 Koordinatentransformation pneumatischer Linearantriebe

Bei der Verwendung pneumatischer Linearantriebe unterscheidet man zwei Klassen existierender Antriebsprinzipien.

**Doppelt wirkende Zylinder** werden durch einen Differenzdruck über den Zylinderkolben angetrieben. Es werden somit zwei pneumatische Ventile zur Realisierung eines Luftmassenstroms in bzw. aus den jeweiligen Zylinderkammern benötigt.

Beim Überführen der Bewegungsgleichung (B.17) doppelt wirkender Zylinderantriebe in die nichtlineare Regelungsnormalform (2.38) kann festgestellt werden, dass der Differenzgrad  $\delta=4$  und somit kleiner der Systemordnung  $n = 5$  in Originalkoordi-

## B Pneumatische Modellgleichungen

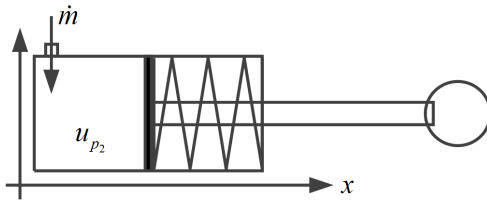
---

naten ist.

$$\ddot{x} = -\frac{d}{m}\dot{x} - g + A_2p_2 - A_1p_1 - \frac{1}{m}F_v. \quad (\text{B.17})$$

Damit besitzt die transformierte Systemdarstellung eine nicht-beobachtbare und nicht steuerbare Nulldynamik. In [49, 55, 47, 17] und [54] sind Methoden für genau diesen Anwendungsfall auf Basis der exakten Ein- / Ausgangslinearisierung beschrieben, die ein gewünschtes Führungsverhalten zur Kolbenpositionierung gewährleisten. Eine detaillierte Betrachtung dieses Anwendungsfalls soll in dieser Arbeit daher nicht geschehen.

**Einfach wirkende Zylinder** sind pneumatische Zylinder, deren Antriebskraft durch den Druck einer einzigen Druckkammer hervorgerufen wird. Die notwendige Rückstellkraft wird in den meisten Fällen durch eine im Zylinder integrierte Federkraft  $F_F = -kx$  erzeugt, so dass zur Positions- bzw. Kraftregelung lediglich ein pneumatisches Ventil notwendig ist.



**Abbildung B.1.** Prinzipieller Aufbau einfach wirkender Zylinder

Die Bewegungsgleichung einfach wirkender Zylinder kann daher mit

$$\ddot{x} = -\frac{d}{m}\dot{x} - \frac{k}{m}x - \frac{g}{m} + \frac{A_2}{m}p_2 - \frac{1}{m}F_v \quad (\text{B.18})$$

aufgestellt werden. Die Antriebskraft zur Bewegung des Zylinders

derkolbens wird durch die Druckkraft innerhalb der Zylinderkammer hervorgerufen. Der Druckaufbau innerhalb der Zylinderkammer ergibt sich aus dem Zusammenhang

$$\dot{u}_{p_2} = \frac{1}{C_2(x)} i_{Q_2} - \frac{G(\dot{x})}{C_2(x)} u_{p_2}, \quad (\text{B.19})$$

so dass auch hier das Analogiemodell (5.34) mit den nun von der Position abhängigen Parametern  $C_2 = C_2(x)$  und  $G = G(u_{p_2}, \dot{x})$  anwendbar ist.

Diese Bewegung des Kolbens ist mit einer Änderung des Kammervolumens verbunden, so dass der zum Volumen analoge Parameter  $C_p = C_p(x)$  eine Funktion der Kolbenposition  $x$  ist. Aus der Regelgröße, der Kolbenposition

$$y = x = \xi_1, \quad (\text{B.20})$$

erhält man durch zweifaches zeitliches Differenzieren die Kolbenbeschleunigung, die mit

$$\ddot{y} = \xi_3 = -\frac{d}{m}\xi_2 - \frac{k}{m}\xi_1 + \frac{A}{m}u_{p_2} - \frac{1}{m}F_v \quad (\text{B.21})$$

aus der Bewegungsgleichung (B.18) zu berechnen ist.

Vernachlässigt man den induktiven Charakter der Verrohrung, so dass die Luftmenge allein durch die sich ergebende Druckdifferenz mit  $i_{Q_2} = \frac{1}{R_p}(u_{p_1} - u_{p_2})$  berechnet werden kann, ergibt sich der Druckanstieg innerhalb der Zylinderkammer zu

$$\dot{u}_2 = \frac{1}{R_p C_p} \left( u_{p_1} - (1 + R_p \dot{C}_p) u_{p_2} \right). \quad (\text{B.22})$$

Aus (B.22) kann wiederum die dritte zeitliche Ableitung der Kol-

## B Pneumatische Modellgleichungen

---

benposition mit

$$\ddot{y} = \xi_4 = -\frac{d}{m}\xi_3 - \frac{k}{m}\xi_2 + \frac{A}{m} \frac{1}{R_p C_p(x)} (u_{p1} - (1 + R\dot{C}) u_{p2}) - \frac{1}{m} \dot{F}_v \quad (\text{B.23})$$

ermittelt werden. Die zweite Ableitung des Kammerdrucks ergibt sich durch das Differenzieren von (B.22) mit

$$\ddot{u}_{p2} = \frac{1}{R_p C_p} (a_0 u(t) - a_0 u_{p1} - (1 + R_p \dot{C}_p) \dot{u}_{p2} - R_p \ddot{C}_p u_{p2}) - \frac{\dot{C}_p}{C_p} \dot{u}_{p2}. \quad (\text{B.24})$$

Die Differentialgleichung des transformierten Systems leitet sich mit (B.24) zu

$$y^{(4)} = -\left(\frac{d}{m} + \frac{1 + RG}{RC_2}\right) \ddot{y} - \left(\frac{k}{m} + \frac{d}{m} \frac{1 + RG}{RC_2}\right) \dot{y} - \frac{k}{m} \frac{1 + RG}{RC_2} y + \frac{A_2}{m} \frac{a_0}{RC_2} u(t) - \frac{A_2}{m} \frac{a_0}{RC_2} u_{p1} - \frac{1 + RG}{RC_2} F_v \quad (\text{B.25})$$

ab. Die nichtlineare Anregungsfunktion  $\alpha(\underline{\xi}, \underline{x})$  ist mit

$$\alpha(\underline{\xi}, \underline{x}) = -\left(1 + 2R_p \dot{C}_p\right) \dot{u}_{p2} - R_p \ddot{C}_p u_{p2}. \quad (\text{B.26})$$

gegeben. Die transformierte Modellgleichung (B.25) besitzt einen relativen Grad  $\delta = 4$  und entspricht damit der vollen Systemordnung der Strecke in Originalkoordinaten. Aus diesem Grund existiert in der transformierten Modellgleichung keine internen Dynamiken.

Durch die kontinuierlich, entgegengesetzt der Antriebskraft  $F_{\text{Antrieb}} = \frac{A_2}{m} p_2$  wirkenden Federkraft  $F_{\text{Feder}} = -kx$ , können mit dieser Zylinderart nur deutlich geringere Presskräfte erzeugt werden als mit doppelt wirkenden Zylindern. Daher finden für die Regelungen größerer Kräfte diese Zylinderarten so gut wie nie Anwendung.

# Anhang C

## C.1 Ungleichung von geometrischen und arithmetischen Mittel

Die Ungleichung von geometrischem Mittel  $\bar{x}_g = \sqrt{x_1 x_2}$  [15, 5] und arithmetischem Mittel  $\bar{x}_a = \frac{x_1 + x_2}{2}$  [15, 5] ist mit

$$2\sqrt{x_1 x_2} \leq x_1 + x_2 \quad (\text{C.1})$$

definiert [57, 5]. Es sind die reellen Zahlen

$$\sqrt{x_1} = |\underline{P}e| = \sqrt{\underline{e}^T \underline{P} \underline{P} e} \quad (\text{C.2})$$

und

$$\sqrt{x_2} = |\underline{e}| = \sqrt{\underline{e}^T \underline{e}}. \quad (\text{C.3})$$

festgelegt worden. Dann gilt aus (C.1) letztendlich der Zusammenhang

$$2|\underline{P}e||\underline{e}| \leq \underline{e}^T \underline{P} \underline{P} e + \underline{e}^T \underline{e}. \quad (\text{C.4})$$

---

## C.2 Matrix-Riccati-Differentialgleichung

### C.2.1 Zeitkontinuierliche Matrix-Riccati-Differentialgleichung

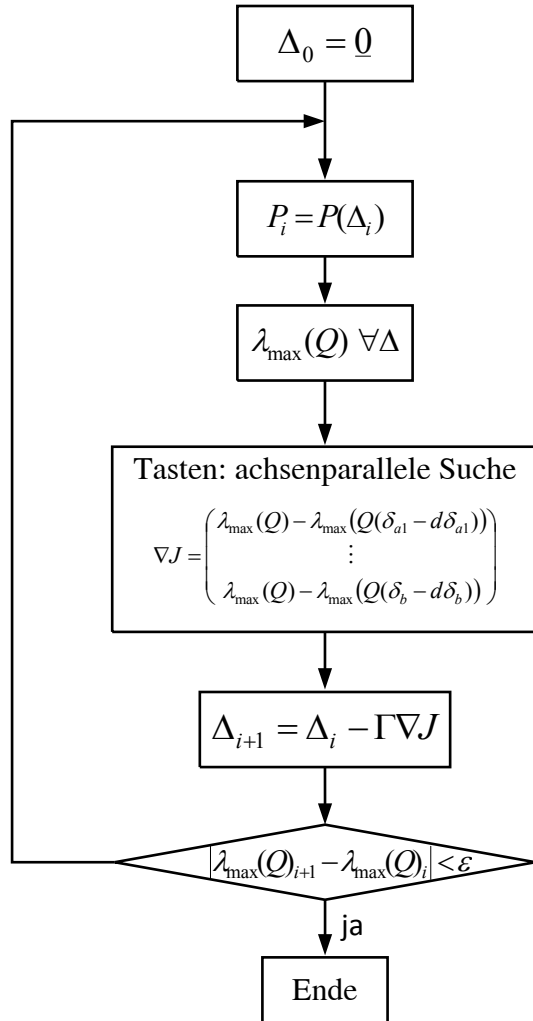
$$-\underline{Q} = \underline{A}^T \underline{P} + \underline{P} \underline{A} - \underline{P} \underline{B} \underline{R}^{-1} \underline{B}^T \underline{P} \quad (\text{C.5})$$

### C.2.2 Zeitdiskrete Matrix-Riccati-Differenzgleichung

$$-\underline{Q} = \underline{\Phi}^T \underline{P} \underline{\Phi} - \underline{\Phi}^T \underline{P} \underline{B} \left( \underline{R} + \underline{B}^T \underline{P} \underline{B} \right)^{-1} \underline{B}^T \underline{P} \underline{\Phi} - \underline{P} \quad (\text{C.6})$$



### C.3 Ablaufplan zur Reglerauslegung unter Parameterunsicherheiten





# Literaturverzeichnis

- [1] Abbaszadeh M., Marquez H.J. „Nonlinear Observer Design for One-Sided Lipschitz Systems“. *IEEE American Control Conference, AACC*, 2010.
- [2] Abel D., Bollig A. *Rapid Control Prototyping - Methoden und Anwendungen*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2006.
- [3] Adamy J. *Nichtlineare Regelungen*. Springer Verlag, Berlin, 2009.
- [4] Amann H., Escher J. *Analysis III*. Birkhäuser Verlag, Basel Boston Berlin, 2001.
- [5] Amann H., Escher J. *Analysis I*. Birkhäuser Verlag, Basel Boston Berlin, 2006.
- [6] Amthor A., Zschäck S., Ament Ch. „Adaptive Reibkraftkompensation zur modellbasierten Positionsregelung von Nanopositionier- und Nanomessmaschinen“. *at-Automatisierungstechnik, Oldenbourg Wissenschaftsverlag*, 02/2009.
- [7] Bacciotti A., Rosier L. *Liapunov Functions and Stability in Control Theory*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2005.

## LITERATURVERZEICHNIS

---

- [8] Bandyopadhyay B., Janardhanan B. *Discrete-time Sliding Mode Control*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2006.
- [9] Bastin G., Gevers M.R. „Stable Adaptive Observers for Nonlinear Time-Varying Systems“. *IEEE Transactions On Automatic Control*, Vol. 33, No. 7, 07/1988.
- [10] Bauer R., Dourdoumas N. „Zeitdiskrete approximative Zustandslinearisierung“. *at-Automatisierungstechnik, Oldenbourg Wissenschaftsverlag*, 01/2007.
- [11] Bautista-Quintero R., Pont M.J. „Implementation of H-Infinity Control Algorithms for Sensor-Constrained Mechatronic Systems Using Low-Cost Microcontrollers“. *IEEE Transactions On Industrial Informatics*, Vol. 4, No. 3, 08/2008.
- [12] Beater P. *Pneumatic Drives*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2007.
- [13] Besancon G. *Nonlinear Observers and Applications*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2007.
- [14] Beucher O. *Signale und Systeme: Theorie, Simulation, Anwendung*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2011.
- [15] Böge W., Plaßmann W. *Formeln und Tabellen Elektrotechnik*. Vieweg & Sohn Verlag, Wiesbaden, 2007.
- [16] Bünte T. „Die Anwendung des Parameterraumverfahrens auf Ortskurvenkriterien“. *at-Automatisierungstechnik, Oldenbourg Wissenschaftsverlag*, 12/2001.
- [17] Busch Chr. *Digitale Regelung in der Elektropneumatik*. Diplomarbeit, TU-Ilmenau, 2007.

- [18] Busch Chr., Brix N., Lambeck S. „Exact Linearization for Applications in Industrial Pneumatics“. *IEEE Conference on Industrial Electronics and Applications 2013*, 06/2013.
- [19] Busch Chr., Brix N., Lambeck S. „Adaptive Flow Control in Industrial Pneumatics“. *IEEE Conference on Industrial Electronics and Applications 2012*, 07/2012.
- [20] ChengRui, HongBin, XinLiang. „Electronic Pneumatic Clutch Control of the Heavy Truck based on Neural Network PID“. *IEEE International Conference On Vehicular Electronics and Safety, Peking*, 2006.
- [21] Cho M.Y., Rajamani R. „A systematic approach to adaptive observer synthesis for nonlinear systems“. *IEEE Transactions On Automatic Control, Vol. 42, Nr.4*, 1997.
- [22] Chui C.K., Chen G. *Kalman Filtering*. Springer Verlag, Berlin, 1999.
- [23] Deutscher J. „Entwurf nichtlinearer Beobachter für autonome Systeme basierend auf dem Hilfssatz von Lyapunov“. *at-Automatisierungstechnik, Oldenbourg Wissenschaftsverlag*, 2007.
- [24] Dietz H.M. *Eco Math2 - Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2010.
- [25] DIN EN 60027. „*DIN EN 60027-6 Formelzeichen für die Elektrotechnik - Teil6: Steuerungs- und Regelungstechnik*“. Beuth Verlag GmbH, Berlin, 2008.
- [26] Doyle J.C. „Analysis of feedback systems with structured uncertainties“. *IEE Proceedings, Vol. 129 Part D, Nr. 6*, 1982.

## LITERATURVERZEICHNIS

---

- [27] Doyle J.C. „Structured Uncertainty in Control System Design“. *IEEE Proceedings of 24th Conference on Decision and Control*, 1985.
- [28] Doyle J.C., Glover K., Khargonekar P.P. „State-Space Solutions to Standard  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  Control Problems“. *IEEE Transactions On Automatic Control*, Vol. 34, No. 8, 1989.
- [29] Dresig H. *Schwingungen und mechanische Antriebssysteme*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2006.
- [30] E. Wagner, H.-U. Seidel. *Allgemeine Elektrotechnik 1+2*. Carl Hanser Verlag, München Wien, 2003.
- [31] Engel S., Allgöwer F. *Entwurf nichtlinearer Regelungen*. Oldenbourg Verlag, München, 1995.
- [32] Estep D. *Angewandte Analysis in einer Unbekannten*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2005.
- [33] Ferretti G., Magnani G., Rocco P. „Single and Multistate Integral Friction Models“. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol.49, No.12, 2004.
- [34] Föllinger O. *Optimierung dynamischer Systeme*. Oldenbourg Verlag, München, 1988.
- [35] Föllinger O. *Nichtlineare Regelungen I+II*. Oldenbourg Verlag, München, 1993.
- [36] Föllinger O. *Optimale Regelung und Steuerung*. Oldenbourg Verlag, München, 1994.
- [37] Fridman L., Moreno J., Iriarte R. *Sliding Modes after the first Decade of the 21st Century*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2011.

- [38] Fujikawa H., Yamada S. „A Design Method of Self-Tuning Smith Predictor for Unknown Time Delay System“. *IEEE IECON 1991*, 1991.
- [39] Gao W., Wang Y., Homaifa A. „Discrete-Time Variable Structure Control Systems“. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Vol. 42, 1995, 1995.
- [40] Garnier H., Wang L. *Identification of Continuous-time Models from Sampled Data*. Springer-Verlag, London, 2008.
- [41] Gevatter H.-J., Grünhaupt U. *Handbuch der Mess- und Automatisierungstechnik in der Produktion*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 2006.
- [42] Gheorghiu V. *Technische Thermodynamik und Strömungslehre*. 2006.
- [43] Günther M. *Zeitdiskrete Steuerungssysteme*. VEB Verlag Technik, Berlin, 1988.
- [44] Günther M. *Kontinuierliche und zeitdiskrete Regelungen*. B.G. Teubner, Stuttgart, 1997.
- [45] Gomonwattanapanich O., Pattanapukdee A., Mongkolwongroj M. „Compensation and Estimation of Friction by Using Extended Kalman Filter“. *SICE-ICASE International Joint Conference 2006*, 2006.
- [46] Gross D.C., Rattann K.S. „A Feedforward MNN Controller for Pneumatic Cylinder Trajectory Tracking Control“. *IEEE International Conference on Neural Networks*, 1997.
- [47] Göttert M., Neumann R. „Bahnregelung servopneumatischer Antriebe - Ein Vergleich von linearen und nichtlinearen Reglern“. *at-Automatisierungstechnik*, Oldenbourg Wissenschaftsverlag, 02/2007.

## LITERATURVERZEICHNIS

---

- [48] Gu D.-W., Petkov P.Hr., Konstantinov M.M. *Robust Control Design with MATLAB*. Springer Verlag, London, 2005.
- [49] Hahn H. "Nichtlineare Regelung eines servopneumatischen Antriebs". *at-Automatisierungstechnik, Oldenbourg Wissenschaftsverlag*, 03/2000.
- [50] Hamerlain M., Youssef T., Bouyoucef K. "Reducing the chattering using the Generalized Variable Structure control applied to a manipulator arm". *Conference on Electrical and Computer Engineering*, 2000.
- [51] Harten U. *Physik*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2003-2012.
- [52] Heintz A. *Gleichgewichtsthermodynamik*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2011.
- [53] Hering E., Martin R., Stohrer M. *Taschenbuch der Mathematik und Physik*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 2009.
- [54] Hildebrandt A., Neumann R., Sawodny O. „Optimal System Design of SISO-Servopneumatic Positioning Drives“. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol. 18, 01/2010.
- [55] Hildebrandt A., Sawodny O. „Bahnplanung und Dimensionierung servopneumatischer SISO-Antriebe“. *at-Automatisierungstechnik, Oldenbourg Wissenschaftsverlag*, 02/2007.
- [56] Hildebrandt A., Sawodny O., Neumann R., Hartmann A. „A Flatness Based Design for Tracking Control of Pneumatic Muscle Actuators“. *Seventh International Conference*



- 
- on Control, Automation, Robotics and Vision (ICAR-CV'02)*, 12/2002.
- [57] Hochstättler W. *Algorithmische Mathematik*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2010.
- [58] Isermann R. *Digitale Regelsysteme, Band I+II*. Springer Verlag, Berlin, 1987-1988.
- [59] Isermann R. *Identifikation dynamischer Systeme Band I+II*. Springer Verlag, Berlin, 1992.
- [60] Isermann R. *Mechatronische Systeme - Grundlagen*. Springer Verlag, Berlin, 2008.
- [61] Isermann R., Münchhof M. *Identification of Dynamic Systems - An Introduction with Applications*. Springer Verlag, Heidelberg, London, New York, 2011.
- [62] Isidori A. *Nonlinear Control Systems: An Introduction*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1985.
- [63] Isidori A. *Springer Handbook of Automation – Control Theory of Automation: Fundamentals*. Springer Verlag, Berlin, 2009.
- [64] ISO 6358. „*ISO 6358 - Pneumatic fluid power - Components using compressible fluids - Determination of flow-rate characteristics*“. International Organization for Standardization, Schweiz, 1989.
- [65] Jaymaman G., Chixeck H.J. „Feedback Linearization of Discrete-Time Systems“. *IEEE Proceedings of the 32nd Conference on Decision and Control*, 1993.

## LITERATURVERZEICHNIS

---

- [66] Jelali M. *Über die nichtlineare Approximation und Zustandsschätzung zeitkontinuierlicher dynamischer Prozesse*. VDI Verlag GmbH, Düsseldorf, 1997.
- [67] Jänich K. *Mathematik 1*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2005.
- [68] Jo N.-H., Son Y.-I. „Adaptive observer design for nonlinear systems using generalized nonlinear observer canonical form“. *KSME International Journal Vol.18 Nr.7*, 2004.
- [69] Jungnickel D. *Optimierungsmethoden*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2008.
- [70] Kallenbach E., Eick R., Quendt P., Ströhla T., Feindt K., Kallenbach M. *Elektromagnete - Grundlagen, Berechnungen, Entwurf und Anwendung*. Vieweg + Teubner Verlag, Wiesbaden, 2008.
- [71] Kanzow C. *Numerik linearer Gleichungssysteme: Direkte und iterative Verfahren*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2005.
- [72] Karafyllis I., Jiang Z.-P. *Stability and Stabilization of Nonlinear Systems*. Springer Verlag, London, 2011.
- [73] Khargonekar P.P., Petersen I.R., Zhou K. „Robust Stabilization of Uncertain Linear Systems: Quadratic Stabilizability and  $H_\infty$  Control Theory“. *IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 35, No. 3*, 1990.
- [74] Köhler B.-W. *Konzepte der statistischen Signalverarbeitung*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2005.
- [75] Kiencke U., Eger R. *Messtechnik - Systemtheorie für Elektrotechniker*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2008.

- [76] Kimber R.L., Gray W.S. „The Effect of Sampling on Feedback Linearization: A Case Study“. *IEEE American Control Conference*, 1991.
- [77] Kozek M., Benatzky C. „Ein maßstäbliches Experiment zur aktiven Schwingungsdämpfung eines Eisenbahn-Wagenkastens“. *at-Automatisierungstechnik*, Oldenbourg Wissenschaftsverlag, 10/2008.
- [78] Lachmann S., Giesa D., Dlabka M. „Optimale Parametrisierung eines Triebwerkreglers“. *at-Automatisierungstechnik*, Oldenbourg Wissenschaftsverlag, 09/2003.
- [79] Lambeck S. *Analyse und Entwurf von Anti-Windup-Erweiterungen für zeitdiskrete Regler im Frequenzbereich*. PhD thesis, TU-Ilmenau, 2003.
- [80] Lampaert V., Swevers J., Al-Bender F. „Comparison of model and non-model based friction compensation techniques in the neighbourhood of pre-sliding friction“. *IEEE AACC American Control Conference Boston*, 2004.
- [81] Lavretsky E., Wise K.A. *Robust and Adaptive Control*. Springer Verlag, London, 2013.
- [82] Lerch R. *Elektrische Messtechnik - Analoge, digitale und computergestützte Verfahren*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2005.
- [83] Liu J., Wang X. *Advanced Sliding Mode Control for Mechanical Systems*. Tsinghua University Press, Springer Verlag, Peking, Berlin Heidelberg, 2012.
- [84] Lucas K. *Thermodynamik*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 1995-2007.

## LITERATURVERZEICHNIS

---

- [85] Ludyk G. *Theoretische Regelungstechnik 2 - Zustandsrekonstruktion, optimale und nichtlineare Regelungssysteme*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 1995.
- [86] Lunze J. *Regelungstechnik 1*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2008.
- [87] Lunze J. *Regelungstechnik 2*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2008.
- [88] Lévine J. *Analysis and Control of Nonlinear Systems*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2009.
- [89] Ma J., Guoming G.Z., Schock H. „Adaptive Control of a Pneumatic Valve Actuator for an Internal Combustion Engine“. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol. 19, 2011.
- [90] Majd V.J., Simaan M.A. „A Continuous Friction Model For Servo Systems with Friction“. *IEEE Conference*, 1995.
- [91] Marinescu M. *Elektrische und magnetische Felder - Eine praxisorientierte Einführung*. Springer Verlag, Berlin, 2009.
- [92] Matsukuma T., Fujiwara A., Namba M., Ishida Y. „Non-Linear PID Controller Using Neural Networks“. *IEEE International Conference on Neural Networks*, 1997.
- [93] Meyer M. *Signalverarbeitung - Analoge und digitale Signale, Systeme und Filter*. Vieweg & Sohn Verlag, Wiesbaden, 2006.
- [94] Mühl T. *Einführung in die elektrische Messtechnik*. Vieweg + Teubner Verlag, Wiesbaden, 2008.

- [95] Min W., Zhihong P., Chaohui T., Weihua G. „ $\mu$  Analysis and  $\mu$  synthesis for nonlinear robust control systems“. *Journal of Central South University of Technology*, Vol. 5, 1998.
- [96] Mittag H.-J. *Statistik*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2011.
- [97] Monsees G. „*Discrete-Time Sliding Mode Control*“. PhD thesis, Technische Universiteit Delft, 2002.
- [98] Márton L., Lantos B. „Modeling, Identification, and Compensation of Stick-Slip Friction“. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Vol.54, No.1, 2007.
- [99] Neusser K. *Zeitreihenanalyse in den Wirtschaftswissenschaften*. Vieweg + Teubner Verlag, Wiesbaden, 2006,2009.
- [100] Nijmeijer H., Fossen T.I. *New Directions in Nonlinear Observer Design*. Springer Verlag, London Berlin Heidelberg, 1999.
- [101] Normey-Rico J.E., Camacho E.F. *Control of Dead-time Processes*. Springer Verlag, London, 2007.
- [102] Ogata K. *Discrete-Time Control Systems*. Prentice Hall, Inc., New Jersey, 1995.
- [103] Ohm J.-R., Lüke H.D. *Signalübertragung - Grundlagen der digitalen und analogen Nachrichtenübertragungssysteme*. Springer Verlag, Berlin, 2007.
- [104] Orłowski P.F. *Praktische Regeltechnik*. Springer Verlag, Berlin, 1994-2008.
- [105] Papageorgiou M. *Optimierung*. Oldenbourg Verlag, München, 1996.

## LITERATURVERZEICHNIS

---

- [106] Peters N. *Thermodynamik 1+2*. 2008.
- [107] Popov V.L. *Kontaktmechanik und Reibung - Ein Lehr- und Anwendungsbuch von der Nanotribologie bis zur numerischen Simulation*. Springer Verlag, Berlin, 2009.
- [108] Pourgholi M., Majd V.J. A Nonlinear Adaptive Resilient Observer Design for a Class of Lipschitz Systems Using LMI. *Circuits Syst Signal Process, Springer Science+Business Media*, 2011.
- [109] Prüss J.W., Wilke M. *Gewöhnliche Differentialgleichungen und dynamische Systeme*. Birkhäuser, Basel, 2010.
- [110] Röbenack K. „Zum High-Gain-Beobachterentwurf für eingangs-/ausganglineare SISO-Systeme“. *at-Automatisierungstechnik, Oldenbourg Wissenschaftsverlag*, 10/2004.
- [111] Röbenack K., Lynch A.F. „High-gain nonlinear observer design using the observer canonical form“. *IEEE Control Theory & Applications*, 11/2007.
- [112] Reger J., Jouffroy J. „Algebraische Ableitungsschätzung im Kontext der Rekonstruierbarkeit“. *at-Automatisierungstechnik, Oldenbourg Wissenschaftsverlag*, 06/2008.
- [113] Reinschke K. *Lineare Regelungs- und Steuerungstheorie*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2006.
- [114] Reuter M., Zacher S. *Regelungstechnik für Ingenieure*. Vieweg + Teubner Verlag, Wiesbaden, 2008.
- [115] Rießinger T. *Mathematik für Ingenieure*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1996-2011.

- [116] Rothfuß R. *Anwendungen der flachheitsbasierten Analyse und Regelung*. VDI Verlag, Düsseldorf, 1997.
- [117] Schaber K. *Skriptum Technische Thermodynamik für Chemieingenieure und Verfahrenstechniker*. 2002.
- [118] Schaffner J., Zeitz M. „Variants of Nonlinear Normal Form Observer Design“. In *New Directions in Nonlinear Observer Design*. Springer Verlag, London Berlin Heidelberg, 1999.
- [119] Schüßler H.W. *Digitale Signalverarbeitung 2*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2010.
- [120] Schlitt H. *Systemtheorie für stochastische Prozesse*. Springer Verlag, Berlin, 1992.
- [121] Schneider W. *Praktische Regelungstechnik*. Vieweg + Teubner Verlag, Wiesbaden, 2008.
- [122] Schröder D. *Elektrische Antriebe - Regelung von Antriebssystemen*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2009.
- [123] Schröder D. *Intelligente Verfahren - Identifikation und Regelung nichtlinearer Systeme*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2010.
- [124] Schrick K.-W. *Anwendungen der Kalman-Filter-Technik*. Oldenbourg Verlag, München, 1977.
- [125] Schütte F., Beineke S., Rolfsmeier A., Grotstollen H. „Online Identification of Mechanical Parameters Using Extended Kalman Filters“. *IEEE Industry Applications Conference*, 1997.

## LITERATURVERZEICHNIS

---

- [126] Sequenz H., Keller K., Isermann R. „Zur Identifikation mehrdimensionaler Kennfelder für Verbrennungsmotoren“. *at-Automatisierungstechnik, Oldenbourg Wissenschaftsverlag*, 06/2012.
- [127] Sethi S.P., Thompson G.L. *Optimal Control Theory*. Springer Science+Business Media, Inc., New York, 2000.
- [128] Shaikhet L. *Lyapunov Functionals and Stability of Stochastic Difference Equations*. Springer Verlag, Birkhäuser, London, 2011.
- [129] Shavit G. „Tuning of PID DDC Controllers“. *IEEE Proceedings of the American Control Conference*, 1994.
- [130] Shen T., Tamura K. „Properties Of Algebraic Riccati Inequalities And  $\mathcal{H}_\infty$  Robust Sub-Optimal Controller Design“. *IEEE Proceedings of the 30th Conference on Decision and Control, Brighton, England*, 1991.
- [131] Shtessel Y., Edwards C., Fridman L., Levant A. *Sliding Mode Control and Observation*. Springer Verlag, Birkhäuser, Berlin, 2013.
- [132] Siekmann H.E., Thamsen P.U. *Strömungslehre*. Springer-Verlag, Berlin, 2008.
- [133] Sigloch H. *Technische Fluidmechanik*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2009.
- [134] Smaoui M., Brun X., Thomasset D. „Systematic control of an electropneumatic system: integrator backstepping and sliding mode control“. *IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol. 14*, 09/2006.



- [135] Smaoui M., Brun X., Thomasset D. „Robust position control of an electropneumatic system using second order sliding mode“. *IEEE International Symposium on Industrial Electronics*, 2004.
- [136] Smaoui M., Brun X., Thomasset D. „A Robust Differentiator-Controller Design for an Electropneumatic System“. *44th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*, 2005.
- [137] Spurk J.H., Aksel N. *Strömungslehre - Einführung in die Theorie der Strömungen*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1987-2010.
- [138] Steland A. *Basiswissen Statistik*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2010.
- [139] Stephan P., Schaber K., Stephan K., Mayinger F. *Thermodynamik*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1990, 1992, 1998, 1999, 2010.
- [140] Strybny J. *Ohne Panik Strömungsmechanik!* Vieweg Verlag, Wiesbaden, 2007.
- [141] Surek D., Stempin S. *Angewandte Strömungsmechanik*. Teubner Verlag, Wiesbaden, 2007.
- [142] Svaricek F. Nullodynamik linearer und nichtlinearer Systeme: Definitionen, Eigenschaften und Anwendungen. *at-Automatisierungstechnik, Oldenbourg Wissenschaftsverlag*, 07/2006.
- [143] Tan K.K., Lee T.H., Huang S.N., Jiang X. „Friction Modeling and Adaptive Compensation Using a Relay Feedback Approach“. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Vol.48, No.1, 2001.

## LITERATURVERZEICHNIS

---

- [144] Thierry S., Kunze M., Karimi A., Curnier A., Longchamp R. „Friction Modeling of a High-Precision Positioning System“. *IEEE American Control Conference Minneapolis, Minnesota*, 2006.
- [145] Truckenbrodt E. *Fluidmechanik - Band 2: Elementare Strömungsvorgänge dichteveränderlicher Fluide sowie Potential- und Grenzschichtströmungen*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 2008.
- [146] Truong T.T. *Parametervariable und strukturvariable Regelkonzepte für elektrische Antriebssysteme mit mechanisch-elastischer Übertragung*. PhD thesis, TU Chemnitz, 2001.
- [147] Turner M.C., Bates D.G. *Mathematical Methods for Robust and Nonlinear Control*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2007.
- [148] Unbehauen H. *Regelungstechnik I+II*. Vieweg & Sohn Verlag, Wiesbaden, 2007.
- [149] Utkin V.I. „Variable Structure Systems with Sliding Modes“. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-22, No. 2, 04/1977.
- [150] Voigt M. *Vorlesung Mathematik I-IV*. TU-Ilmenau, Ilmenau, 2002-2004.
- [151] von Grüningen D.-Ch. *Digitale Signalverarbeitung*. Fachbuchverlag Leipzig, München, 2004.
- [152] Wang H., Dong Y., Qin W. „Adaptive Observer Design for a Class Nonlinear Systems“. *IEEE Control, Automation and Systems Engineering CASE*, 07/2011.

- [153] Wang H., Dong Y., Qin W. „Adaptive Observer Design for a Class of Lipschitz Nonlinear Systems“. *IEEE Proceedings of the 30th Chinese Control Conference CCC*, 07/2011.
- [154] Wang S.-G., Dong Y., Qin W. „Robust Control for Structural Systems with Parametric and Unstructured Uncertainties“. *IEEE Proceedings of the American Control Conference Arlington*, 06/2001.
- [155] Wanhammar L. *Analog Filters Using MATLAB*. Springer Science+Business Media, Heidelberg London New York, 2009.
- [156] Watter H. *Hydraulik und Pneumatik*. Vieweg + Teubner Verlag, Wiesbaden, 2008.
- [157] Weigand B., Köhler J., von Wolfersdorf J. *Thermodynamik kompakt*. Springer-Verlag, Heidelberg Berlin, 2008, 2010.
- [158] Weigand C. *Statistik mit und ohne Zufall*. Physica Verlag, 2006, 2009.
- [159] Werner, M. *Digitale Signalverarbeitung mit MATLAB*. Friedr. Vieweg & Sohn Verlag, Wiesbaden, 2006.
- [160] Werner, M. *Signale und Systeme*. Vieweg + Teubner Verlag, Wiesbaden, 2008.
- [161] Westermann, Th. *Mathematik für Ingenieure*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1996,2003,2006,2008,2011.
- [162] Wirsching G.J. *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. B.G.Teubner Verlag, Wiesbaden, 2006.
- [163] Wunsch G., Schreiber H. *Stochastische Systeme*. Springer Verlag, Berlin, 2006.

## LITERATURVERZEICHNIS

---

- [164] Young J.-S. „The LFT Formulation of Dynamical Systems with the Uncertainties of Parameter Variations“. *Proceedings of 2011 International Conference on Electronic Engineering, Communication and Management (EECM 2011)*, 12/2011.
- [165] Zaretskiy E. *Modellierung eines pneumatischen Druck- oder Durchflusssystemes und Entwurf eines nichtlinearen Beobachters*. Diplomarbeit, Leibniz Universität Hannover, 2009.
- [166] Zehetner J., Reger J., Horn M. „Echtzeit-Implementierung eines algebraischen Ableitungsschätzverfahrens“. *at-Automatisierungstechnik, Oldenbourg Wissenschaftsverlag*, 11/2007.
- [167] Zheng Y., Jing Y., Yang G. „Design of Approximation Law for Discrete-time Variable Structure Control Systems“. *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision&Control*, 12/2006.
- [168] Zhengguang W., Wuneng Z., Linfang Z. „Robust H-Infinity Control with Alpha-Stability Constraints for Uncertain Delay Singular Systems“. *Proceedings of the 6th World Congress on Intelligent Control and Automation*, 06/2006.
- [169] Zhou J., Wen C. *Adaptive Backstepping Control of Uncertain Systems*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2008.
- [170] Zierep J. *Grundzüge der Strömungslehre*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 1993.

