

Simultane Konfidenzbänder für die nichtparametrische Trendfunktion

D i s s e r t a t i o n

zur Erlangung des akademischen Grades
doctor rerum naturalium (Dr. rer. nat.)

vorgelegt dem Rat der Fakultät für Mathematik und Informatik
der Friedrich-Schiller-Universität Jena

von Dipl.-Math. oec Nadine Müller
geboren am 15.05.1987 in Suhl

Gutachter

1. Prof. Dr. Michael H. Neumann (Friedrich-Schiller-Universität Jena)
2. Prof. Dr. Jens-Peter Kreiß (Technische Universität Braunschweig)

Tag der öffentlichen Verteidigung: 18. April 2017

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit dem Schätzen von Trendmodellen. Dabei konstruieren wir simultane Konfidenzbänder für die Trendfunktion basierend auf nichtparametrischen Schätzern. Unter der Annahme von unabhängigen Fehlern wurde die Konstruktion von simultanen Konfidenzbändern u. a. in Bickel und Rosenblatt (1973) und Neumann und Polzehl (1996) behandelt. Die Beobachtungen, welche der hier untersuchten Trendfunktion zugrunde liegen, werden jedoch als abhängig vorausgesetzt. Bei der nichtparametrischen Trendschätzung mit abhängigen Fehlern greifen Wu und Zhao (2007) für die Konstruktion von simultanen Konfidenzbändern auf das *strong invariance principle* zurück.

Mit Hilfe von simultanen Konfidenzbändern wird ein visueller Eindruck von der Abweichung des Schätzers zu der wahren Funktion geliefert. Sie können weiterhin auch der Überprüfung von parametrischen Modellen dienen.

Für die Konstruktion der simultanen Konfidenzbänder werden wir in dieser Arbeit das von Efron (1979) eingeführte *Bootstrap*-Verfahren nutzen. Da wir abhängige Fehler vorliegen haben, muss diese Abhängigkeit durch das Bootstrap-Verfahren berücksichtigt werden. Dazu verwenden wir zwei Modifikationen des von Shao (2010) eingeführten *Dependent Wild Bootstrap*-Verfahrens, zum einen das *Blockwise Dependent Wild Bootstrap* und zum anderen das *Autoregressive Dependent Wild Bootstrap*.

Um in die oben genannte Thematik einzuführen, werden wir zunächst die asymptotische Korrektheit von punktweisen Konfidenzintervallen für die obige Trendfunktion nachweisen. Für die Konstruktion der punktweisen Konfidenzintervalle nutzen wir das Blockwise Dependent Wild Bootstrap-Verfahren und den Nachweis der asymptotischen Korrektheit liefern wir mit Hilfe des Zentralen Grenzwertsatzes für Regressionsmodelle von Roussas et al. (1992).

Danach gehen wir dazu über, die asymptotische Korrektheit der simultanen Konfidenzbänder nachzuweisen. Dazu nutzen wir die sogenannte *Coupling*-Technik. Mit dieser koppeln wir die Partialsummenprozesse, welche aus dem stationären Fehlerprozess und aus dem Bootstrap-Fehlerprozess bestehen, an den gleichen Wiener Prozess. Auf der Originalseite nutzen wir dafür ein bekanntes Resultat der starken Approximation von Shao und Lu (1987). Auf der Bootstrap-Seite leiten wir das Coupling der Partialsummenprozesse für beide oben genannte Bootstrap-Verfahren her. Bei der Konstruktion der simultanen Konfidenzbänder untersuchen wir jedoch nicht die Original- und Bootstrap-Fehlerprozesse, sondern eine gewichtete Summe von diesen. Daher ist es ebenso notwendig eine gewichtete Summe der Zuwächse des Wiener Prozesses zu betrachten. Mit Hilfe des obigen Couplings auf der Original- und Bootstrap-Seite

erhalten wir die gleichmäßige Approximation der gewichteten Summe der Fehler an die gewichtete Summe der Bootstrap-Fehler. Zum Schluss nutzen wir eine Abwandlung des bekannten Resultates zur asymptotischen Verteilung des Maximums eines stationären Gaußprozesses. Dieses wurde auch von Bickel und Rosenblatt (1973) zur Konstruktion von simultanen Konfidenzbändern bei unabhängigen und identisch verteilten Daten genutzt. Da wir in dieser Arbeit einen abhängigen Fehlerprozess betrachten, müssen wir die unbekannte Kovarianzfunktion mit berücksichtigen. Wir weisen somit eine Erweiterung des klassischen Resultates auf abhängige Zufallsvariablen nach. Mit diesem Ergebnis und durch die gleichmäßige Approximation der gewichteten Summen der Original- und Bootstrap-Fehler erhalten wir den Nachweis der asymptotischen Korrektheit der simultanen Konfidenzbänder.

Zum Abschluss soll eine Simulationsstudie und ein Datenbeispiel die vorangegangenen asymptotischen Aussagen veranschaulichen. Die Studie liefert uns Überdeckungswahrscheinlichkeiten der simultanen Konfidenzbänder, welche durch das Blockwise Dependent Wild Bootstrap-Verfahren und das Autoregressive Dependent Wild Bootstrap-Verfahren konstruiert wurden. Zur weiteren Illustration konstruieren wir abschließend simultane Konfidenzbänder mit Hilfe von Daten der globalen Erderwärmung.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen bedanken, die mir auf dem Weg zur Erstellung meiner Dissertation geholfen und mich unterstützt haben.

Meinen besonderen Dank möchte ich meinem Betreuer Prof. Dr. Michael H. Neumann für seine umfassende Unterstützung aussprechen. Weiterhin bedanke ich mich bei meinen Kollegen, mit welchen ich meine Doktorandenzeit verbringen durfte, speziell bei meiner Kollegin Juliane Geller für eine schöne gemeinsame Zeit im Büro.

Für ihre großartige Unterstützung, ihren Rückhalt und ihr Vertrauen möchte ich mich besonders bei meiner Familie und meinem Partner Martin Vogel bedanken.

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|---|------------|
| 1 | Einleitung | 1 |
| 2 | Vorbetrachtungen | 5 |
| 2.1 | Kernschätzer der Regressionsfunktion | 5 |
| 2.2 | Abhängigkeitsstruktur | 12 |
| 2.3 | Dependent Wild Bootstrap | 15 |
| 2.3.1 | Blockwise DWB | 17 |
| 2.3.2 | Autoregressive DWB | 18 |
| 3 | Punktweise Konfidenzintervalle | 21 |
| 4 | Coupling von Partialsummen | 33 |
| 4.1 | Starke Approximation für α -mischende Prozesse | 33 |
| 4.2 | Starke Approximation für lineare Prozesse | 37 |
| 4.3 | Coupling von Partialsummen für das Blockwise DWB | 41 |
| 4.4 | Coupling von Partialsummen für das Autoregressive DWB | 70 |
| 5 | Simultane Konfidenzbänder | 105 |
| 6 | Simulation und Datenbeispiel | 123 |
| 6.1 | Simulationsstudie | 123 |
| 6.2 | Anwendung an Daten der globalen Erderwärmung | 124 |
| 7 | Fazit und Ausblick | 131 |
| 8 | Anhang | 133 |
| | Symbolverzeichnis | 141 |
| | Tabellenverzeichnis | 145 |
| | Abbildungsverzeichnis | 145 |
| | Literaturverzeichnis | 147 |

1 Einleitung

In der Zeitreihenanalyse stellt das Schätzen von Trendmodellen ein wichtiges Problem dar. Die Anwendung dieser Modelle ist dabei weit verbreitet, z. B. bei der Untersuchung der globalen Erderwärmung, u. a. in Woodward und Gray (1993). Falls diese Trendmodelle eine parametrische Form besitzen, existieren Methoden um die Regressionsfunktion zu schätzen und Konfidenzbänder zu konstruieren. Jedoch sind in vielen Fällen keine parametrischen Formen bekannt und es müssen nichtparametrische Techniken genutzt werden. Daher werden wir in der vorliegenden Arbeit simultane Konfidenzbänder für die Trendfunktion basierend auf nichtparametrischen Schätzern und im Zusammenhang mit abhängigen Beobachtungen konstruieren. Unter anderem in Wu und Zhao (2007) wurde dies bereits genauer untersucht. Wir betrachten in der nachfolgenden Arbeit das Modell

$$X_i = m(i/n) + e_i$$

für $i = 1, \dots, n$. Hierbei werden die Daten X_1, \dots, X_n beobachtet. Weiterhin ist m eine unbekannte, glatte Regressionsfunktion, welche auf dem Intervall $[0, 1]$ definiert ist. Zusätzlich ist $(e_i)_{i=1, \dots, n}$ ein stationärer Prozess mit $\mathbb{E}(e_i) = 0$ und $\text{Var}(e_i) < \infty$. Im Allgemeinen ist X_i nicht stationär.

Simultane Konfidenzbänder liefern einen visuellen Eindruck von der Abweichung des Schätzers zu der wahren Funktion. Sie zeigen somit die Angemessenheit eines solchen Schätzers auf. Weiterhin dienen sie auch der Überprüfung von parametrischen Modellen. Dabei sind simultane Konfidenzbänder informativer als punktweise Konfidenzintervalle, wenn entschieden werden muss, ob ein Merkmal der geschätzten Kurve als Struktur der unbekanntes Funktion betrachtet werden kann, oder durch zufällige Schwankungen des Schätzers erklärbar ist.

Unter der Annahme von unabhängigen Fehlern wurde die Konstruktion von simultanen Konfidenzbändern bereits in verschiedenen Arbeiten behandelt. Darunter zählen z. B. Bickel und Rosenblatt (1973) im Falle der Kerndichteschätzung, sowie Liero (1982), Eubank und Speckman (1993) und Neumann und Polzehl (1996) im Falle der nichtparametrischen Regression. Die Konstruktion von simultanen Konfidenzbändern wird sichtlich erschwert, wenn die Fehler als abhängig vorausgesetzt werden. Einen Schritt in diese Richtung macht Bühlmann (1998). Dort wird die nichtparametrische Trendschätzung mit einem autoregressiven Fehlerterm untersucht. Hierbei wird ein sogenanntes *Sieve Bootstrap*-Verfahren genutzt, um simultane Konfidenzregionen zu erstellen. Dafür werden simultane Konfidenzbänder für eine endliche Zahl von Umgebungen, deren Größe durch die Ordnung der Bandbreite bestimmt ist, konstruiert.

Diesem Ansatz, simultane Konfidenzbänder für Teilintervalle zu konstruieren, wird auch in Wu und Zhao (2008) für die nichtparametrische Regression nachgegangen. Jedoch wurde auf die Konstruktion von simultanen Konfidenzbändern mit abhängigen Fehlern für das gesamte Intervall $[0, 1]$ in der Literatur bisher wenig eingegangen. Für deren Konstruktion greifen Wu und Zhao (2007) bei der nichtparametrischen Trendschätzung auf das *strong invariance principle* für stationäre Prozesse zurück.

Das ursprüngliche Ziel dieser Arbeit bestand darin, mit einem Schätzer \hat{m} für die Regressionsfunktion m ein $t_{n,1-\alpha}^*$ zu bestimmen, sodass für $\alpha \in (0, 1)$ die Konvergenz

$$P(m(t) \in [\hat{m}(t) - t_{n,1-\alpha}^*, \hat{m}(t) + t_{n,1-\alpha}^*]) \forall t \in [0, 1] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 - \alpha$$

erreicht wird.

Die Güte eines Schätzers wird häufig durch dessen *mean square error* (MSE) bestimmt. Dieser misst die mittlere quadratische Abweichung des Schätzers \hat{m} vom zu schätzenden Parameter m . Er setzt sich aus der Varianz von \hat{m} und dem quadrierten Verzerrungsterm (*Bias*) zusammen. Angestrebt ist natürlich ein kleiner MSE, sodass die Schätzwerte wenig streuen und der Schätzer im Mittel in der Nähe des zu schätzenden Wertes liegt. Der MSE eines nichtparametrischen MSE-optimalen Schätzers \hat{m} setzt sich aus einem quadrierten Bias und einer Varianz von gleicher Größenordnung zusammen. Diese Schätzverzerrungen müssen durch das Verfahren zur Erstellung von simultanen Konfidenzbändern berücksichtigt werden. Dadurch wird sichergestellt, dass die Bänder korrekt zentriert sind und eine korrekte Überdeckung erreicht werden kann. In der Literatur werden zwei Möglichkeiten betrachtet, um den Bias zu korrigieren. Bei der ersten Methode wird bei der Berechnung der Konfidenzbänder ein Schätzer des unbekanntes Bias abgezogen. Für diese Biaskorrektur müssen zusätzliche Glattheitsgrade der Regressionsfunktion vorhanden sein. Für die zweite Methode wird der Schätzer unterglättet, d. h. es wird bei der Berechnung des Schätzers eine so kleine Bandbreite gewählt, dass der Bias vernachlässigbar wird. Dadurch erhöht sich jedoch die Varianz des Schätzers. Weiterhin ist das Unterglätten schwierig in der Praxis anzuwenden, da es keine Richtlinie gibt, wie eine asymptotisch unterglättete Bandbreite definiert wird. Somit ergeben sich bei beiden Möglichkeiten, um dieses Bias-Problem zu behandeln, technische Schwierigkeiten. Weiterhin führen sie auch notwendigerweise dazu, dass der zugrunde liegende Schätzer nicht asymptotisch optimal im Sinne des MSE ist. Statt für die Regressionsfunktion m werden wir deshalb ein simultanes Konfidenzband für eine geglättete Version von m erstellen, mit welcher der Bias-Term ausgeschaltet wird. Damit betrachten wir im Folgenden die geglättete Version $K_{b_n} * m$ von m

$$K_{b_n} * m(t) = K_{b_n}(m)(t) = \frac{1}{nb_n} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{t - i/n}{b_n}\right) m(i/n)$$

mit einem Kern K und einer Bandbreite b_n , welche im nachfolgenden Kapitel näher erläutert werden. Somit soll nun ein $t_{n,1-\alpha}^*$ bestimmt werden, sodass für $\alpha \in (0, 1)$ die Konvergenz

$$P(K_{b_n}(m)(t) \in [\hat{m}(t) - t_{n,1-\alpha}^*, \hat{m}(t) + t_{n,1-\alpha}^*] \forall t \in [0, 1]) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 - \alpha$$

erreicht wird.

Im Fall der Kerndichteschätzung mit unabhängigen und identisch verteilten Daten nutzen Bickel und Rosenblatt (1973) das klassische Resultat der asymptotischen Verteilung des Maximums eines stationären Gaußprozesses zum Konstruieren von simultanen Konfidenzbändern. Demgegenüber nutzt Neumann (1998) zur Konstruktion von simultanen Konfidenzbändern in der Dichteschätzung mit abhängigen Daten das sogenannte „whitening by windowing“-Prinzip. Dieses Prinzip wurde von Hart (1996) beschrieben. Des Weiteren wurde in Neumann und Kreiss (1998) im Falle der Supremum-Typ Statistiken und in Neumann (2002) für den Fall der gemeinsamen Verteilung von nichtparametrischen Schätzern der bedingten Erwartungswertfunktion eine geeignete Version des „whitening by windowing“-Prinzips hergeleitet. Dieses Prinzip beschreibt die Tatsache, dass durch das Abfallen der Bandbreite des Kernschätzers gegen Null bei wachsendem Stichprobenumfang, die Abhängigkeit der Zufallsvariablen vernachlässigbar wird. Aufgrund dieses Prinzips können Dichteschätzer unter schwacher Abhängigkeit durch Dichteschätzer unter Unabhängigkeit approximiert werden. Somit können simultane Konfidenzbänder für Dichteschätzer mit abhängigen Daten konstruiert werden wie im Falle mit unabhängigen. Da im vorliegenden Fall der Trendschätzung die Abhängigkeit der Daten asymptotisch nicht vernachlässigbar ist, kann das Prinzip des „whitening by windowing“ in dieser Arbeit nicht genutzt werden. Wird nun der klassische Ansatz zur Konstruktion von simultanen Konfidenzbändern von Bickel und Rosenblatt (1973) auf den hier betrachteten Fall von abhängigen Daten angewendet, führt dies zwar zu asymptotisch korrekten simultanen Konfidenzbändern, jedoch mit einer langsamen Konvergenzrate, wie Hall (1993) untersuchte. Des Weiteren müsste wegen ihrer Unbekanntheit die Summe der Kovarianzen des stationären Prozesses $(e_i)_{i=1, \dots, n}$ geschätzt werden. Um dies zu umgehen und dennoch korrekte simultane Konfidenzbänder zu konstruieren, greifen wir in der vorliegenden Arbeit auf das durch Efron (1979) eingeführte *Bootstrap*-Verfahren zurück. Mit diesem Verfahren wurden bereits im unabhängigen Fall Konfidenzintervalle von Härdle und Bowman (1988), sowie simultane Fehlerbalken an endlich vielen Punkten von Härdle und Marron (1991) und simultane Konfidenzbänder von Neumann und Polzehl (1996) für die nichtparametrische Regression konstruiert. Des Weiteren untersuchte Hall (1993) das Bootstrap-Verfahren für die Konstruktion von Konfidenzbändern in der Dichteschätzung. Da wir abhängige Daten betrachten, nutzen wir eine Modifikation dieses Verfahrens, das sogenannte *Dependent Wild Bootstrap*-Verfahren von Shao (2010).

Die vorliegende Arbeit ist wie folgt aufgebaut. In Kapitel 2 werden wir die Grundlagen für diese Arbeit einführen. Dazu zählen die Vorstellung und Untersuchung des Kernschätzers, sowie eine Erläuterung der genutzten Abhängigkeitsstruktur und die Einführung des Bootstrap-

Verfahrens. Den Nachweis der asymptotischen Korrektheit von punktweisen Konfidenzintervallen nehmen wir danach in Kapitel 3 vor. In Kapitel 4.1 gehen wir auf das *Coupling* des Partialsummenprozesses der Originalfehler mit Hilfe der starken Approximation von Shao und Lu (1987) ein. Weiterführend weisen wir in Kapitel 4.2 die starke Approximation für lineare Prozesse nach. In Kapitel 4.3 und 4.4 leiten wir das Coupling der Partialsummenprozesse auf der Bootstrap-Seite her. Zusammen mit dem Nachweis der Erweiterung des klassischen Resultates der asymptotischen Verteilung des Maximums eines stationären Gaußprozesses auf abhängige Daten in Kapitel 5 werden wir die asymptotische Korrektheit der simultanen Konfidenzbänder nachweisen. Zur Veranschaulichung der asymptotischen Aussagen werden wir in Kapitel 6 eine Simulationsstudie durchführen, sowie ein Datenbeispiel betrachten. Im abschließenden Kapitel 7 fassen wir diese Arbeit zusammen und liefern einen kurzen Ausblick. Im Anschluss daran werden wir im Anhang noch einige technische Aussagen beweisen.

2 Vorbetrachtungen

In diesem Kapitel werden wir die Grundlagen für die nachfolgende Arbeit darstellen. Dazu zählen die Einführung des genutzten Schätzers für die Regressionsfunktion, sowie die Vorstellung der Abhängigkeitsstruktur, welche wir für den Fehlerprozess annehmen. Des Weiteren wird das in dieser Arbeit genutzte Bootstrap-Verfahren und zwei seiner Modifikationen vorgestellt.

Mit Hilfe dieser Grundlagen werden wir im Folgenden die Hauptresultate der vorliegenden Arbeit liefern. Dazu zählt zunächst der Nachweis der asymptotischen Korrektheit von punktwisen Konfidenzintervallen in Kapitel 3, welche mit Hilfe einer im Folgenden dargestellten Variante des Bootstrap-Verfahrens konstruiert werden. Des Weiteren werden wir in Kapitel 4 das Coupling der Partialsummenprozesse sowohl für den Fehlerprozess, als auch für beide Bootstrap-Fehlerprozesse, welche sich durch die nachfolgend vorgestellten Modifikationen des Bootstrap-Verfahrens ergeben, herleiten. Anschließend werden wir in Kapitel 5 eine Erweiterung des klassischen Resultates der asymptotischen Verteilung des Maximums eines stationären Gaußprozesses und damit die asymptotische Korrektheit der simultanen Konfidenzbänder nachweisen.

2.1 Kernschätzer der Regressionsfunktion

Um simultane Konfidenzbänder zu konstruieren benötigen wir einen Schätzer für die unbekannte Regressionsfunktion m aus dem Trendmodell. Da eine parametrische Form für diese Regressionsfunktion nicht bekannt ist, nutzen wir die nichtparametrische Regression um m zu schätzen. Dafür werden wir in der vorliegenden Arbeit den Priestley-Chao-Schätzer

$$\hat{m}(t) := \sum_{i=1}^n w_n(t, i) X_i = \frac{1}{nb_n} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{t - i/n}{b_n}\right) X_i \quad (2.1)$$

mit einem Kern K und einer Bandbreite b_n benutzen. Dieser Schätzer wurde von Priestley und Chao (1972) eingeführt. Die Kernfunktion K stellt dabei eine Art „Gewichtungsfunktion“ dar und durch das Variieren der Bandbreite b_n kann die „Weite“ dieser Gewichtungsfunktion variiert werden. Die Wahl der Kernfunktion ist bis auf wenige Einschränkungen willkürlich, im Gegensatz dazu hat die Wahl der Bandbreite einen höheren Einfluss auf die Eigenschaften des Schätzers.

Neben dem Priestley-Chao-Schätzer ist auch die Anwendung anderer Schätzer zum Schätzen der unbekanntenen Regressionsfunktion m möglich. Weitere Schätzer wären u. a. der Gasser-Müller-Schätzer aus Gasser und Müller (1979), oder der Nadaraya-Watson-Schätzer von Nadaraya (1964) und Watson (1964).

Für den weiteren Verlauf dieser Arbeit treffen wir folgende Voraussetzungen

[A1]

- (i) Der Kern K kommt aus der Menge der beschränkten Funktionen mit dem Träger $[-1, 1]$. Weiterhin ist sowohl K als auch K' Lipschitz-stetig.
- (ii) K ist ein Kern der Ordnung 2, d. h. $\int K(s) ds = 1$ und $\int s K(s) ds = 0$.
- (iii) Die Regressionsfunktion m ist zweimal stetig differenzierbar auf $[0, 1]$.
- (iv) Für die Bandbreite b_n gilt $b_n \rightarrow 0$ und $nb_n \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$.
- (v) Weiterhin gelte $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\gamma(k)| < \infty$, wobei $\gamma(k) := \text{Cov}(e_i, e_{i+k})$.

Bemerkungen

- Da der Fehlerprozess $(e_i)_{i=1, \dots, n}$ stationär ist, gilt

$$\text{Cov}(e_i, e_{i+k}) = \text{Cov}(e_0, e_k).$$

- Die Voraussetzungen für den Kern K werden u. a. vom Rechteck-, Dreiecks-, Quartic-, Epanechnikov-, Triweight- und Kosinus-Kern erfüllt.

Wie bereits erwähnt wird die Güte eines Schätzers häufig durch dessen mean square error bestimmt. Dieser misst die mittlere quadratische Abweichung des Schätzers \hat{m} vom zu schätzenden Parameter m . Somit hat der MSE von $\hat{m}(t)$ die Form

$$\begin{aligned} \text{MSE}(\hat{m}(t)) &= \mathbb{E}(\hat{m}(t) - m(t))^2 \\ &= \mathbb{E}(\hat{m}(t) - \mathbb{E}(\hat{m}(t)))^2 + (\mathbb{E}(\hat{m}(t)) - m(t))^2 \\ &= \text{Var}(\hat{m}(t)) + (\text{Bias}(\hat{m}(t)))^2. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Das Schätzverfahren mit dem kleinsten MSE ist dabei das Beste. Im Folgenden werden wir den MSE des Priestley-Chao-Schätzers bestimmen.

Lemma 2.1

Unter den Voraussetzungen [A1] gilt für den mittleren quadratischen Fehler des Priestley-Chao-Schätzers von (2.1) gleichmäßig für $t \in [b_n, 1 - b_n]$

$$\begin{aligned} \text{MSE}(\widehat{m}(t)) &= \frac{1}{nb_n} \int_{-1}^1 K^2(u) du \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma(k) + \frac{b_n^4}{4} \left(m''(t) \int_{-1}^1 u^2 K(u) du \right)^2 \\ &\quad + O\left(b_n^5 + \frac{1}{(nb_n)^2} + \frac{b_n}{n}\right) \end{aligned}$$

für $b_n \rightarrow 0$ und $nb_n \rightarrow \infty$ falls $n \rightarrow \infty$.

Beweis

Der mittlere quadratische Fehler von $\widehat{m}(t)$ hat die in (2.2) angegebene Form. Um zunächst den Bias von $\widehat{m}(t)$ zu bestimmen, betrachten wir den Erwartungswert von $\widehat{m}(t)$ und unterteilen diesen in

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\widehat{m}(t)) &= \frac{1}{nb_n} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{t - i/n}{b_n}\right) m(i/n) \\ &= \frac{1}{nb_n} \int_0^n K\left(\frac{t - y/n}{b_n}\right) m(y/n) dy \\ &\quad + \frac{1}{nb_n} \sum_{i=1}^n \int_{i-1}^i \left[K\left(\frac{t - i/n}{b_n}\right) m(i/n) - K\left(\frac{t - y/n}{b_n}\right) m(y/n) \right] dy. \end{aligned}$$

Mit der Substitution $s := y/n$ gilt für den ersten Term

$$\frac{1}{nb_n} \int_0^n K\left(\frac{t - y/n}{b_n}\right) m(y/n) dy = \frac{1}{b_n} \int_0^1 K\left(\frac{t - s}{b_n}\right) m(s) ds.$$

Weiterhin unterteilen wir den zweiten Term und erhalten aufgrund der Lipschitz-Stetigkeit von K und der Stetigkeit von m für $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{nb_n} \sum_{i=1}^n \int_{i-1}^i m(i/n) \left[K\left(\frac{t - i/n}{b_n}\right) - K\left(\frac{t - y/n}{b_n}\right) \right] dy \\ &\quad + \frac{1}{nb_n} \sum_{i=1}^n \int_{i-1}^i K\left(\frac{t - y/n}{b_n}\right) [m(i/n) - m(y/n)] dy \\ &= O\left(\frac{1}{nb_n}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right) = O\left(\frac{1}{nb_n}\right). \end{aligned}$$

Somit gilt für den Erwartungswert für $n \rightarrow \infty$

$$\mathbb{E}(\widehat{m}(t)) = \frac{1}{b_n} \int_0^1 K\left(\frac{t-s}{b_n}\right) m(s) ds + O\left(\frac{1}{nb_n}\right).$$

Nun wenden wir auf das Integral die Substitution $u := \frac{t-s}{b_n}$ an und erhalten mit der Taylor-Formel und [A1] (i) für $b_n \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\widehat{m}(t)) &= \int_{-\frac{1-t}{b_n}}^{\frac{t}{b_n}} K(u) m(t - ub_n) du + O\left(\frac{1}{nb_n}\right) \\ &= \int_{-\frac{1-t}{b_n}}^{\frac{t}{b_n}} K(u) \left[m(t) - ub_n m'(t) + \frac{1}{2}(ub_n)^2 m''(t) \right] du + O(b_n^3) + O\left(\frac{1}{nb_n}\right) \\ &= m(t) \int_{-1}^1 K(u) du - b_n m'(t) \int_{-1}^1 u K(u) du + \frac{1}{2} b_n^2 m''(t) \int_{-1}^1 u^2 K(u) du \\ &\quad + O\left(b_n^3 + \frac{1}{nb_n}\right). \end{aligned}$$

Somit ergibt sich mit [A1] (ii), dass

$$\mathbb{E}(\widehat{m}(t)) = m(t) + \frac{b_n^2}{2} m''(t) \int_{-1}^1 u^2 K(u) du + O\left(b_n^3 + \frac{1}{nb_n}\right).$$

Dadurch gilt für den Bias von $\widehat{m}(t)$ gleichmäßig für $t \in [b_n, 1 - b_n]$, dass

$$\text{Bias}(\widehat{m}(t)) = \frac{b_n^2}{2} m''(t) \int_{-1}^1 u^2 K(u) du + O\left(b_n^3 + \frac{1}{nb_n}\right). \quad (2.3)$$

Weiterhin untersuchen wir die Varianz des Schätzers $\widehat{m}(t)$ und erhalten mit [A1] (v)

$$\begin{aligned} \text{Var}(\widehat{m}(t)) &= \text{Var}\left(\frac{1}{nb_n} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{t-i/n}{b_n}\right) e_i\right) \\ &= \frac{1}{(nb_n)^2} \sum_{i,j=1}^n K\left(\frac{t-i/n}{b_n}\right) K\left(\frac{t-j/n}{b_n}\right) \text{Cov}(e_i, e_j) \\ &= \frac{1}{(nb_n)^2} \sum_{i,j=1}^n K\left(\frac{t-i/n}{b_n}\right) K\left(\frac{t-j/n}{b_n}\right) \gamma(j-i). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Nun gilt mit $k := j - i$ die Umformung

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{nb_n} \sum_{i,j=1}^n K\left(\frac{t-i/n}{b_n}\right) K\left(\frac{t-j/n}{b_n}\right) \gamma(j-i) \\
&= \frac{1}{nb_n} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1-i}^{n-i} K\left(\frac{t-i/n}{b_n}\right) K\left(\frac{t-(i+k)/n}{b_n}\right) \gamma(k) \\
&= \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} \gamma(k) \frac{1}{nb_n} \sum_{i=\max\{1,1-k\}}^{\min\{n-k,n\}} K\left(\frac{t-i/n}{b_n}\right) K\left(\frac{t-(i+k)/n}{b_n}\right). \tag{2.5}
\end{aligned}$$

Den zweiten Faktor von (2.5) unterteilen wir und nutzen danach $s := y/n$ für den ersten Term. Somit folgt

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{nb_n} \sum_{i=\max\{1,1-k\}}^{\min\{n-k,n\}} K\left(\frac{t-i/n}{b_n}\right) K\left(\frac{t-(i+k)/n}{b_n}\right) \\
&= \frac{1}{nb_n} \int_{\max\{0,-k\}}^{\min\{n-k,n\}} K\left(\frac{t-y/n}{b_n}\right) K\left(\frac{t-(y+k)/n}{b_n}\right) dy \\
&+ \frac{1}{nb_n} \sum_{\max\{1,1-k\}}^{\min\{n-k,n\}} \int_{i-1}^i \left[K\left(\frac{t-i/n}{b_n}\right) K\left(\frac{t-(i+k)/n}{b_n}\right) - K\left(\frac{t-y/n}{b_n}\right) K\left(\frac{t-(y+k)/n}{b_n}\right) \right] dy \\
&= \frac{1}{b_n} \int_{\max\{0,-k/n\}}^{\min\{1-k/n,1\}} K\left(\frac{t-s}{b_n}\right) K\left(\frac{t-s-k/n}{b_n}\right) ds \\
&+ \frac{1}{nb_n} \sum_{\max\{1,1-k\}}^{\min\{n-k,n\}} \int_{i-1}^i \left[K\left(\frac{t-i/n}{b_n}\right) K\left(\frac{t-(i+k)/n}{b_n}\right) - K\left(\frac{t-y/n}{b_n}\right) K\left(\frac{t-(y+k)/n}{b_n}\right) \right] dy.
\end{aligned}$$

Somit gilt für (2.5) für $n \rightarrow \infty$ mit der absoluten Summierbarkeit von $\gamma(\cdot)$ und der majorisierten Konvergenz für den ersten Term, sowie mit der absoluten Summierbarkeit von $\gamma(\cdot)$ und der Lipschitz-Stetigkeit von K für den zweiten Term, dass

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{nb_n} \sum_{i,j=1}^n K\left(\frac{t-i/n}{b_n}\right) K\left(\frac{t-j/n}{b_n}\right) \gamma(j-i) \\
&= \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} \gamma(k) \frac{1}{b_n} \int_{\max\{0,-k/n\}}^{\min\{1-k/n,1\}} K\left(\frac{t-s}{b_n}\right) K\left(\frac{t-s-k/n}{b_n}\right) ds \\
&+ \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} \gamma(k) \frac{1}{nb_n} \sum_{\max\{1,1-k\}}^{\min\{n-k,n\}} \int_{i-1}^i \left[K\left(\frac{t-i/n}{b_n}\right) K\left(\frac{t-(i+k)/n}{b_n}\right) \right. \\
&\quad \left. - K\left(\frac{t-y/n}{b_n}\right) K\left(\frac{t-(y+k)/n}{b_n}\right) \right] dy
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{b_n} \int_0^1 K^2 \left(\frac{t-s}{b_n} \right) ds \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma(k) + O \left(\frac{1}{nb_n} \right).$$

Damit folgt wieder mit der Substitution $u := \frac{t-s}{b_n}$ und [A1] (ii), dass

$$\begin{aligned} & \frac{1}{nb_n} \sum_{i,j=1}^n K \left(\frac{t-i/n}{b_n} \right) K \left(\frac{t-j/n}{b_n} \right) \gamma(j-i) \\ &= \frac{1}{b_n} \int_{\frac{t}{b_n}}^{\frac{t-1}{b_n}} K^2(u) (-b_n) du \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma(k) + O \left(\frac{1}{nb_n} \right) \\ &= \int_{-1}^1 K^2(u) du \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma(k) + O \left(\frac{1}{nb_n} \right) \end{aligned}$$

für $b_n \rightarrow 0$. Somit erhalten wir für (2.4)

$$\text{Var}(\widehat{m}(t)) = \frac{1}{nb_n} \int_{-1}^1 K^2(u) du \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma(k) + O \left(\frac{1}{(nb_n)^2} \right). \quad (2.6)$$

Dadurch gilt für den MSE des Priestley-Chao-Schätzers von (2.1) mit (2.2), (2.3) und (2.6)

$$\begin{aligned} \text{MSE}(\widehat{m}(t)) &= \frac{1}{nb_n} \int_{-1}^1 K^2(u) du \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma(k) + \frac{b_n^4}{4} \left(m''(t) \int_{-1}^1 u^2 K(u) du \right)^2 \\ &+ O \left(b_n^6 + b_n^5 + \frac{1}{(nb_n)^2} + \frac{b_n}{n} \right) \end{aligned}$$

für $b_n \rightarrow 0$ und $nb_n \rightarrow \infty$. □

Da wir in der vorliegenden Arbeit eine asymptotische Überdeckung der simultanen Konfidenzbänder betrachten, müssen wir nicht auf die sogenannten Randeffekte eingehen, welche bei der Kernregression vorkommen. Diese entstehen für die Werte $t \in [0, b_n)$ und $t \in (1 - b_n, 1]$ und müssten mit entsprechenden Methoden, wie sie bspw. in Gasser und Müller (1979) und Rice (1984) vorgeschlagen werden, behandelt werden.

Wie bereits erwähnt dient die Kernfunktion K dem Zweck Gewichte zu berechnen, welche den Beobachtungen zugeordnet werden. Des Weiteren bestimmt die Bandbreite b_n die Weite in welcher diese Gewichte berechnet werden. Somit kontrolliert der Betrag der Bandbreite die Glattheit des resultierenden Schätzers der Regressionsfunktion. Für den Fall der nichtparametrischen Regression mit unabhängigen und identisch verteilten Daten bietet die in der Literatur weit verbreitete Kreuzvalidierung eine datenbasierte Methode, um eine optimale Bandbreite zu wählen, bspw. in Härdle und Marron (1985). Jedoch scheitert diese Methode

im Falle der nichtparametrischen Regression mit abhängigen Daten, worauf bspw. in Chu und Marron (1991) und Hart (1991) eingegangen wird. In diesen Arbeiten werden auch Methoden vorgestellt, um die entstehenden Fehler zu korrigieren. Chu und Marron (1991) liefert dafür eine modifizierte Methode der Kreuzvalidierung, die sogenannte „leave-k-out“-Kreuzvalidierung. Diese führt zu einem asymptotisch optimalen Ergebnis, falls k mit einer geeigneten Größenordnung wächst. Darüber hinaus liefern Hall et al. (1995) neben der modifizierten Kreuzvalidierung auch eine *Block Bootstrap*-Methode zur Bestimmung einer asymptotisch optimalen Bandbreite im Fall der nichtparametrischen Regression mit „short“- und „long-range“ abhängigen Daten. Dabei liefern sie auch die benötigten „leave-out“-Zahlen bzw. Blockgrößen, welche zu einem optimalen Ergebnis führen.

Da wir in der vorliegenden Arbeit ein simultanes Konfidenzband bestimmen wollen, welches eine gegebene Überdeckungswahrscheinlichkeit asymptotisch erreicht, benötigen wir keine konkrete Bandbreite, sondern nur deren Größenordnung. Wir erhalten diese Größenordnung indem wir den asymptotischen MSE aus Lemma 2.1 minimieren. Dabei ergibt sich mit den Voraussetzungen [A1] und falls $m''(t) \neq 0$ für die optimale Bandbreite b_n^* , dass

$$b_n^* = \left(\frac{\int_{-1}^1 K^2(u) du \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma(k)}{\left(m''(t) \int_{-1}^1 u^2 K(u) du \right)^2} \right)^{1/5} n^{-1/5} = O\left(n^{-1/5}\right). \quad (2.7)$$

Zur Berechnung der optimalen Bandbreite kann (2.7) nicht genutzt werden, da sowohl $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma(k)$, als auch $m''(t)$ unbekannt sind und wir bspw. für die konsistente Schätzung von $m''(t)$ eine Bandbreite benötigen. Daher werden die oben genannten Verfahren für die Berechnung genutzt. Mit Hilfe der Größenordnung der optimalen Bandbreite (2.7) hat der MSE aus Lemma 2.1 die Größenordnung

$$\text{MSE}(\widehat{m}(t)) = O\left(n^{-4/5}\right).$$

Wie eingangs erwähnt, werden wir in dieser Arbeit ein simultanes Konfidenzband für eine geglättete Version von m ,

$$K_{b_n}(m)(t) = \frac{1}{nb_n} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{t - i/n}{b_n}\right) m(i/n),$$

erstellen. Mit Hilfe des in diesem Kapitel vorgestellten Priestley-Chao-Schätzers und dieser geglätteten Version betrachten wir somit

$$\widehat{m}(t) - K_{b_n}(m)(t) = \frac{1}{nb_n} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{t - i/n}{b_n}\right) [m(i/n) + e_i] - \frac{1}{nb_n} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{t - i/n}{b_n}\right) m(i/n)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{nb_n} \sum_{i=1}^n K \left(\frac{t - i/n}{b_n} \right) e_i \\
&=: m_0(t).
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Daher wollen wir für $\alpha \in (0, 1)$ ein $t_{n,1-\alpha}^*$ bestimmen, sodass

$$P \left(\sup_{t \in [0,1]} |m_0(t)| \leq t_{n,1-\alpha}^* \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 - \alpha.$$

Dem Fehlerprozess $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ kommt bei dieser Aufgabenstellung eine große Bedeutung zu, weshalb wir diesen auf den nachfolgenden Seiten näher betrachten werden.

2.2 Abhängigkeitsstruktur

Um allgemeinere und realistischere Modelle zu betrachten, ist es notwendig, mit abhängigen Zufallsvariablen zu arbeiten. Deshalb betrachten wir in der vorliegenden Arbeit schwach abhängige Zufallsvariablen. Eine Vielzahl an Konzepten der schwachen Abhängigkeit ist in der Literatur zu finden, darunter auch die Klasse der mischenden Prozesse. Heuristisch betrachtet erfüllt eine Zeitreihe die Mischungsbedingung, falls der Grad der Abhängigkeit zwischen den Beobachtungen mit einer wachsenden Zeitlücke zwischen den zugehörigen Zeitpunkten der Beobachtungen abnimmt. Hierbei muss dieser Grad der Abhängigkeit auf eine gewisse Weise angegeben werden.

In dieser Arbeit nutzen wir das bekannte Konzept der stark mischenden Prozesse, welches von Rosenblatt (1956) eingeführt wurde.

Definition 2.1

In einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P) ist der stark mischende Koeffizient, auch α -Mischungskoeffizient, für zwei σ -Algebren \mathcal{U} und $\mathcal{V} \subset \mathcal{A}$ definiert als

$$\alpha(\mathcal{U}, \mathcal{V}) := \sup_{U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V}} |P(U \cap V) - P(U)P(V)|.$$

Der α -Mischungskoeffizient eines zufälligen Prozesses $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ ist definiert als

$$\begin{aligned}
\alpha(r) &:= \sup_{k \in \mathbb{Z}} \alpha(\sigma(X_i, i \leq k), \sigma(X_i, i \geq k+r)) \quad \text{und} \\
\alpha(0) &:= 1/4
\end{aligned}$$

für $r \in \mathbb{N}$, wobei $\sigma(X_i, i \leq k)$ die σ -Algebra bezeichnet, welche durch $(X_i)_{i \leq k}$ generiert wird.

Ein zufälliger Prozess $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ heißt stark mischend, oder α -mischend, falls

$$\alpha(r) \longrightarrow 0 \quad \text{für } r \rightarrow \infty.$$

Bemerkung

Für zwei σ -Algebren \mathcal{U} und $\mathcal{V} \subset \mathcal{A}$ gilt

$$0 \leq \alpha(\mathcal{U}, \mathcal{V}) \leq 1/4.$$

Falls $\alpha(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = 0$ ist sind \mathcal{U} und \mathcal{V} unabhängig; siehe Doukhan (1994).

Die α -Mischungseigenschaft ist nur eine von mehreren verschiedenen Mischungseigenschaften welche bspw. in Doukhan (1994) dargestellt werden. Sie stellt die schwächste Mischungsbedingung dar und deckt eine Vielzahl von Prozessen ab. Ein stationärer $AR(p)$ -Prozess

$$X_t = a_1 X_{t-1} + \dots + a_p X_{t-p} + \epsilon_t$$

mit einer unabhängigen und identisch standardnormalverteilten Folge von Innovationen $(\epsilon_t)_t$ ist bspw. stark mischend, falls die Nullstellen des autoregressiven Polynoms außerhalb des Einheitskreises liegen. Dies wird u. a. in Athreya und Pantula (1986) aufgezeigt, welche auch erläutern, dass endliche ARMA-Prozesse unter obigen Bedingungen und mit einem stark mischenden Prozess als *moving-average* Anteil ebenso stark mischend sind. Jedoch existieren auch Prozesse, welche nicht stark mischend, aber dennoch schwach abhängig im obigen Sinne sind. Ein bekanntes Beispiel dafür, von Andrews (1984), ist ein stationärer $AR(1)$ -Prozess

$$X_t = aX_{t-1} + \epsilon_t$$

mit $|a| \in (0, 1/2]$ und einer unabhängigen Folge von Innovationen $(\epsilon_t)_t$ welche binomialverteilt sind, mit den Parametern $n = 1$ und $p = 1/2$.

Die α -Mischungsbedingung wurde in der Literatur bereits gründlich untersucht. In Doukhan (1994) und Bradley (2007) werden einige wichtige Aussagen wie bspw. der zentrale Grenzwertsatz oder Momentenungleichungen für stark mischende Prozesse dargestellt. Somit können Instrumente, welche bei der Untersuchung von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen genutzt werden, auch auf abhängige Variablen übertragen werden.

In der vorliegenden Arbeit werden wir häufig einige Ungleichungen für α -mischende Prozesse nutzen. Dazu zählt die Kovarianzungleichung für α -mischende Prozesse

Lemma 2.2 (Bradley (2007), Korollar 10.16)

Es seien X und Y Zufallsvariablen mit $\|X\|_p < \infty$ bzw. $\|Y\|_q < \infty$ und $p, q \in (1, \infty]$, sodass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} := 1 - K_\alpha$ für $K_\alpha \in (0, 1)$. Dann gilt

$$|\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)| \leq 4 \|X\|_p \|Y\|_q [\alpha(\sigma(X), \sigma(Y))]^{K_\alpha}.$$

Darüber hinaus nutzen wir die Rosenthal-Ungleichung für α -mischende Prozesse

Lemma 2.3 (Doukhan (1994), Theorem 1.4.2)

Es sei $(X_t)_{t \in T}$, mit $T \subseteq \mathbb{N}$, eine endliche Familie von reellen Zufallsvariablen, welche die folgende Mischungsbedingung erfüllt. Für ein $\epsilon > 0$, ein $a > 2$ und ein $c \in 2\mathbb{N}$ mit $c \geq a$ sei

$$\sum_{r=1}^{\infty} (r+1)^{c-2} (\alpha(r))^{\frac{\epsilon}{c+\epsilon}} < \infty.$$

Weiterhin sei $\mathbb{E}(X_t) = 0$ und $\mathbb{E}|X_t|^{a+\epsilon} < \infty$ für $t \in T$. Dann existiert eine Konstante C , welche nur von a und den α -Mischungskoeffizienten $\alpha(r)$ abhängt, sodass

$$\mathbb{E} \left(\left| \sum_{t \in T} X_t \right|^a \right) \leq C \sum_{t \in T} (\mathbb{E}(|X_t|^{a+\epsilon}))^{\frac{a}{a+\epsilon}} + C \left(\sum_{t \in T} (\mathbb{E}(|X_t|^{2+\epsilon}))^{\frac{2}{2+\epsilon}} \right)^{\frac{a}{2}}.$$

In der vorliegenden Arbeit möchten wir die asymptotische Korrektheit von simultanen Konfidenzbändern für das Trendmodell nachweisen. Dabei setzen sich die beobachteten Daten aus einer unbekanntem Regressionsfunktion m und einem Fehlerprozess $(e_i)_{i=1, \dots, n}$ zusammen. Für diesen Fehlerprozess nehmen wir im weiteren Verlauf der Arbeit folgende Voraussetzungen an

[A2]

(i) Der Prozess $(e_i)_{i=1, \dots, n}$ sei stationär und α -mischend mit $\mathbb{E}(e_i) = 0$ und $\text{Var}(e_i) < \infty$.

(ii) Es gilt $\mathbb{E}(|e_1|^s) < \infty$ für ein $s \geq 4$.

(iii) Für den α -Mischungskoeffizienten gilt für obiges s , dass $\sum_{r=0}^{\infty} (\alpha(r))^{\frac{1}{2} - \frac{1}{s}} < \infty$.

(iv) Weiterhin gelte $\sigma^2 := \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}(e_0 e_i) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \text{Cov}(e_0, e_i) \in (0, \infty)$.

Dabei werden die Voraussetzungen [A2] (ii) und (iii) jeweils innerhalb der nachfolgenden Kapitel verschärft.

Bemerkung

Aufgrund der Mischungsvoraussetzungen gilt $\sum_{i \in \mathbb{Z}} |\text{Cov}(e_0, e_i)| < \infty$. Für die Partialsumme

S_n , mit

$$S_n = \sum_{i=1}^n e_i,$$

folgt mit Hilfe von [A2] (i) und der majorisierten Konvergenz, dass

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \mathbb{E}(S_n^2) &= \frac{1}{n} \text{Var} \left(\sum_{i=1}^n e_i \right) = \frac{1}{n} \sum_{i,k=1}^n \text{Cov}(e_i, e_k) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=-(n-1)}^{n-1} (n - |i|) \text{Cov}(e_0, e_i) = \sum_{i=-(n-1)}^{n-1} \left(1 - \frac{|i|}{n} \right) \text{Cov}(e_0, e_i) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \text{Cov}(e_0, e_i) = \sigma^2. \end{aligned}$$

2.3 Dependent Wild Bootstrap

Bradley Efron hat 1979 das Bootstrap-Verfahren eingeführt, welches eine universelle Methode darstellt, um die Verteilung einer interessierenden Statistik zu approximieren. Dabei werden anhand von beobachteten Daten neue Daten generiert und mit Hilfe dieser neu generierten Daten die unbekannte Verteilung der interessierenden Statistik approximiert. In Efron (1979) wird die Anwendbarkeit dieses Verfahrens an einer Reihe von statistischen Problemen, welche auf unabhängigen Zufallsvariablen basieren, gezeigt. Darüber hinaus liefern Bickel und Freedman (1981) asymptotische Ergebnisse für Efrons Bootstrap, welches auf lineare und ähnliche Statistiken angewendet wird. Ein modellbasiertes Bootstrap-Verfahren zur Bearbeitung von linearen Regressionsmodellen wird in Freedman (1981) vorgestellt.

Um nun mit unabhängigen und heteroskedastischen Fehlern in Regressionsproblemen umgehen zu können, wurde ein modifiziertes Bootstrap-Verfahren von Wu (1986) eingeführt, das sogenannte *Wild Bootstrap*-Verfahren (WB). Bei diesem Verfahren werden die Bootstrap-Variablen erzeugt, indem unabhängige Hilfsvariablen an die Residuen multipliziert werden. Seitdem wurde das Verfahren modifiziert und weiterentwickelt, um es auf verschiedenste statistische Probleme anwenden zu können.

Mit Hilfe des *Block Bootstrap*-Verfahrens (BB) wurde eine weitere Methode eingeführt, um mit abhängigen Daten umgehen zu können. Hierbei werden mehrere Zufallsvariablen der Originalstichprobe in sogenannten Blöcken zusammengefasst. Die Bootstrap-Stichprobe wird nun gewonnen, indem aus der Originalstichprobe eine bestimmte Anzahl von Blöcken mit einer bestimmten Länge (d. h. Anzahl an Zufallsvariablen) unabhängig gezogen werden. Dabei muss die Länge der Blöcke mit dem Stichprobenumfang wachsen, um die Abhängigkeitsstruktur der Originalstichprobe aufzufangen. Des Weiteren muss die Anzahl der Blöcke mit der Anzahl der Beobachtungen wachsen, um die Verteilung der interessierenden Statistik gut imitieren zu können. Dabei haben sich verschiedene Versionen des Block Bootstrap entwickelt,

bspw. das *Moving BB* oder *Non-Overlapping BB*. Die verschiedenen Modifikationen des Block Bootstrap-Verfahrens werden in Lahiri (2003) vorgestellt und verglichen.

Durch Shao (2010) wurde 2010 das sogenannte *Dependent Wild Bootstrap* (DWB) für Funktionale des Stichprobenmittels eingeführt, um stationäre, schwach abhängige Daten und somit stationäre Zeitreihen zu behandeln. Es erweitert somit das traditionelle Wild Bootstrap von Wu (1986) auf Zeitreihen. Beim DWB sind die Hilfsvariablen des WB abhängige Zufallsvariablen, wodurch die Abhängigkeit der Originalstichprobe aufgefangen wird. Weiterhin ist das Verfahren einfach zu implementieren, sogar für den Fall von fehlenden Daten. Daher stellt es eine gute Alternative zu blockbasierten Bootstrap-Methoden dar, deren Algorithmen genau angepasst werden müssen. Die Idee des DWB wurde bereits von Bühlmann (1993, Kapitel 3.3) unter dem Namen „dependent multiplier bootstrap“ im Kontext von Empirischen Prozessen eingeführt. In diesem Rahmen wurde es von Bücher und Ruppert (2013) und Bücher und Kojadinovic (2016) aufgegriffen.

Seit seiner Einführung wurde das DWB schon erfolgreich im Bereich des Hypothesentestens durch Shao (2011), Leucht und Neumann (2013), Smeekees und Urbain (2014) und Doukhan et al. (2015) angewendet. Shao (2011) liefert als eine Variante des DWB ein *Blockwise Wild Bootstrap*. Hierbei sind die Hilfsvariablen des WB innerhalb eines Blockes gleich und zwischen verschiedenen Blöcken unabhängig und identisch verteilt. Demgegenüber führen Leucht und Neumann (2013) eine Abwandlung des DWB im Kontext von U - und V -Statistiken für abhängige Zufallsvariablen ein. Dort werden die zugrundeliegenden Zufallsvariablen nicht direkt gebootstrapt, sondern Summanden der U - und V -Statistiken. In Smeekees und Urbain (2014) wird neben dem DWB von Shao (2010) und dessen Variante des Blockwise WB (Shao (2011)) eine weitere Modifikation des DWB, ein *Autoregressive WB*, angewendet. Mit Hilfe dieser Verfahren soll mit der Heteroskedastizität im Falle von Einheitswurzeltests bei multivariaten Zeitreihen umgegangen werden. Weiterhin haben im Rahmen von empirischen Prozessen Doukhan et al. (2015) eine modellfreie Bootstrap-Methode mit Hilfe einer angepassten Version des DWB vorgeschlagen.

Die Idee des Dependent Wild Bootstrap von Shao (2010) besteht darin, für schwach abhängige, reellwertige Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n sogenannte Pseudo-Beobachtungen

$$X_i^* = \bar{X}_n + (X_i - \bar{X}_n) W_i \quad (2.9)$$

für $i = 1, \dots, n$ zu konstruieren. Hierbei ist $\bar{X}_n = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i$ das Stichprobenmittel und $(W_i)_{i=1, \dots, n} = (W_{i,n})_{i=1, \dots, n}$ ein Dreiecks-Schema von schwach abhängigen Zufallsvariablen, welche unabhängig von den Beobachtungen X_1, \dots, X_n sind. Dabei gilt $\mathbb{E}(W_i) = 0$, $\text{Var}(W_i) = 1$ und $\text{Cov}(W_i, W_{i+k}) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Die Abhängigkeit der Hilfsvariablen $(W_i)_{i=1, \dots, n}$ ermöglicht es, die Abhängigkeit der Originalstichprobe aufzufangen. Shao (2010) zeigt, dass für eine glatte Funktion H und unter bestimmten Bedingungen die Verteilung von $\sqrt{n} (H(\bar{X}_n) - H(\mathbb{E}(X_1)))$ durch die von $\sqrt{n} (H(\bar{X}_n^*) - H(\bar{X}_n))$ approximiert werden kann, wobei $\bar{X}_n^* = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i^*$.

Im vorliegenden Fall der nichtparametrischen Trendschätzung werden wir den stationären Fehlerprozess $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ mit Hilfe eines Bootstrap-Verfahrens approximieren, um damit simultane Konfidenzbänder für das Trendmodell konstruieren zu können. Für eine bestmögliche Approximation muss die Abhängigkeit des Fehlerprozesses aufgefangen werden. Dies soll durch die Anwendung der beiden nachfolgend dargestellten Modifikationen des Dependent Wild Bootstrap-Verfahrens geschehen.

2.3.1 Blockwise DWB

Nun möchten wir das Bootstrap-Verfahren auf unseren Fall der nichtparametrischen Trendschätzung anwenden. Wie oben erwähnt, soll aufgrund der abhängigen Fehler $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ das Dependent Wild Bootstrap von Shao (2010) angewendet werden. Dazu nutzen wir zunächst eine blockweise Variante des Verfahrens, das sogenannte *Blockwise Dependent Wild Bootstrap*, wie sie auch in Shao (2011) betrachtet wird.

Beim Blockwise Dependent Wild Bootstrap-Verfahren berechnen wir zuerst die Residuen

$$\hat{e}_i := X_i - \hat{m}(i/n)$$

für $i = 1, \dots, n$. Mit deren Hilfe bestimmen wir die sogenannten Pseudo-Fehler

$$e_i^* := \hat{e}_i W_i$$

für $i = 1, \dots, n$. Die Zentrierung beim DWB wie in (2.9) ist nicht nötig, da $\mathbb{E}(e_i) = 0$. Der Prozess $(W_i)_{i=1,\dots,n} = (W_{i,n})_{i=1,\dots,n}$ sei unabhängig von den Residuen $(\hat{e}_i)_{i=1,\dots,n}$. Weiterhin gilt für $i = 1, \dots, n$, dass $\mathbb{E}(W_i) = 0$, $\text{Var}(W_i) = 1$ und $\text{Cov}(W_i, W_{i+k}) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.

Beim Blockwise DWB werden nun diese Hilfsvariablen W_1, \dots, W_n in Blöcke der maximalen Länge l_n unterteilt, d. h. maximal l_n Variablen von $(W_i)_{i=1,\dots,n}$ bilden einen sogenannten Block. Nachfolgend bezeichnet $[\cdot]$ den ganzzahligen Anteil. Falls n/l_n ganzzahlig ist und somit $n/l_n = [n/l_n]$ werden die Hilfsvariablen in $[n/l_n]$ Blöcke der Länge l_n unterteilt. Falls jedoch $n/l_n > [n/l_n]$ unterteilen wir die Hilfsvariablen in $[n/l_n]$ Blöcke der Länge l_n und einen Restblock mit $n - [n/l_n]l_n$, also weniger als l_n , Variablen. Innerhalb eines solchen Blockes sind die Hilfsvariablen gleich und werden definiert als

$$W_{(l-1)l_n+j} := V_l$$

für $j = 1, \dots, l_n$ bei den vollständigen Blöcken $l = 1, \dots, [n/l_n]$ und für $j = 1, \dots, n - [n/l_n]l_n$ für den Restblock $l = [n/l_n] + 1$. Hierbei sind $(V_l)_{l=1,\dots,[n/l_n]+1}$ unabhängige und standardnormalverteilte Zufallsvariablen. Zum Schluss berechnen wir nun mit Hilfe der Pseudo-Fehler

$(e_i^*)_{i=1,\dots,n}$ das Bootstrap-Gegenstück zu m_0 von (2.8) mit

$$m_0^*(t) = \sum_{i=1}^n w_n(t, i) e_i^*.$$

Die Abhängigkeit der Hilfsvariablen $(W_i)_{i=1,\dots,n}$ ermöglicht es, die Abhängigkeit des Originalprozesses $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ aufzufangen. Dabei spielt l_n eine ähnliche Rolle wie die Blocklänge von einem Block Bootstrap-Verfahren. Für $n \rightarrow \infty$ konvergiere somit die Blocklänge $l_n \rightarrow \infty$, um die Abhängigkeitsstruktur von $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ zu erfassen. Des Weiteren muss auch die Anzahl der Blöcke mit der Anzahl der Beobachtungen wachsen, um die Verteilung der interessierenden Statistik imitieren zu können.

2.3.2 Autoregressive DWB

Nun soll auf das *Autoregressive Dependent Wild Bootstrap* als eine weitere Modifikation des DWB eingegangen werden. Diese Variante wurde in Leucht und Neumann (2013), Smeekes und Urbain (2014) und Doukhan et al. (2015) betrachtet. Hierbei werden die Hilfsvariablen des Dependent Wild Bootstrap-Verfahrens als autoregressiver Prozess angenommen und damit die Abhängigkeit des Originalprozesses aufgefangen.

Beim Autoregressive Dependent Wild Bootstrap-Verfahren berechnen wir zuerst wieder die Residuen

$$\widehat{e}_i := X_i - \widehat{m}(i/n)$$

und bestimmen danach die Pseudo-Fehler

$$e_i^* := \widehat{e}_i W_i$$

für $i = 1, \dots, n$. Dabei sei $(W_i)_{i=1,\dots,n} = (W_{i,n})_{i=1,\dots,n}$ ein stationärer Prozess, welcher unabhängig von $(\widehat{e}_i)_{i=1,\dots,n}$ ist und für $i = 1, \dots, n$ gilt $\mathbb{E}(W_i) = 0$, $\text{Var}(W_i) = 1$ und $\text{Cov}(W_i, W_{i+k}) \rightarrow 1$ für $n \rightarrow \infty$. Beim Autoregressive DWB sei nun $(W_i)_{i=1,\dots,n}$ ein AR(1)-Prozess mit

$$W_i := e^{-1/l_n} W_{i-1} + u_i$$

für $i \in \mathbb{N}$ und l_n positiv, wobei $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ unabhängig und identisch verteilt sind mit

$$u_i \sim \mathcal{N}\left(0, 1 - e^{-2/l_n}\right).$$

Weiterhin sind $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ und W_0 unabhängig mit $W_0 \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Zum Schluss berechnen wir nun wieder das Bootstrap-Gegenstück zu m_0 mit Hilfe der Pseudo-Fehler $(e_i^*)_{i=1, \dots, n}$, sodass

$$m_0^*(t) = \sum_{i=1}^n w_n(t, i) e_i^*.$$

Eine Art Blocklänge der Größe l_n wird über den Tuning-Parameter e^{-1/l_n} in den Prozess eingebracht. Um die asymptotische Gültigkeit des Bootstrap zu erhalten, muss die Konvergenz $e^{-1/l_n} \rightarrow 1$ für $n \rightarrow \infty$ gelten. Dies erreichen wir, indem $l_n \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$ und damit die Abhängigkeitsstruktur des Originalprozesses aufgefangen wird.

Bei der Implementierung des Autoregressive DWB starten wir mit der Hilfsvariablen $W_0 \sim \mathcal{N}(0, 1)$ und definieren für $i = 1, \dots, n$

$$W_i := e^{-1/l_n} W_{i-1} + u_i$$

mit den unabhängigen und identisch $\mathcal{N}(0, 1 - e^{-2/l_n})$ -verteilten Zufallsvariablen $(u_i)_{i=1, \dots, n}$.

Für die Herleitung des Couplings der Bootstrap-Partialsumme in Kapitel 4.4 nutzen wir zur Vereinfachung der Berechnungen die verteilungsgleiche Darstellung

$$W_0 := \sum_{s=0}^{\infty} e^{-\frac{s}{l_n}} u_{-s}.$$

Hierdurch gelangen wir zu der weiteren stationären Lösung

$$W_i = \sum_{s=0}^{\infty} e^{-\frac{s}{l_n}} u_{i-s}$$

für alle $i = 1, \dots, n$.

3 Punktweise Konfidenzintervalle

In der vorliegenden Arbeit haben wir das Ziel simultane Konfidenzbänder für die nichtparametrische Trendfunktion zu erstellen. Um in dieses Themengebiet einzuführen, möchten wir in diesem Kapitel zunächst die asymptotische Korrektheit von punktweisen Konfidenzintervallen nachweisen. Die Konfidenzintervalle werden auch hier für eine geglättete Version von m , $K_{b_n}(m)$, erstellt. Somit werden wir für $t \in [0, 1]$ ein $t_{n,1-\alpha}^*$ bestimmen, sodass für $\alpha \in (0, 1)$ die Konvergenz

$$P\left(K_{b_n}(m)(t) \in \left[\widehat{m}(t) - \frac{1}{\sqrt{nb_n}} t_{n,1-\alpha}^*, \widehat{m}(t) + \frac{1}{\sqrt{nb_n}} t_{n,1-\alpha}^*\right]\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 - \alpha$$

erreicht wird. Als Schätzer für die Regressionsfunktion m wird der in Kapitel 2.1 eingeführte Priestley-Chao-Schätzer $\widehat{m}(t)$ mit (2.1) genutzt. Mit diesem wurde $m_0(t)$ definiert als

$$m_0(t) = \widehat{m}(t) - K_{b_n}(m)(t) = \frac{1}{nb_n} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{t - i/n}{b_n}\right) e_i$$

mit einer Bandbreite b_n und einem Kern K . Dadurch bestimmen wir für $t \in [0, 1]$ ein $t_{n,1-\alpha}^*$, sodass wir für $\alpha \in (0, 1)$ die Konvergenz

$$P\left(\sqrt{nb_n} |m_0(t)| \leq t_{n,1-\alpha}^*\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 - \alpha$$

erreichen. Die Voraussetzungen [A1] seien erfüllt. Somit besitzt der Kern K den beschränkten Träger $[-1, 1]$, wodurch bei der Berechnung von $m_0(t)$ für $t \in [0, 1]$ nur $O(nb_n)$ Summanden berücksichtigt werden. Dadurch betrachten wir für die Summe von $m_0(t)$ nur die Indizes $i = 1, \dots, n$ mit $i \in [nt - nb_n, nt + nb_n]$.

Für die Konstruktion des punktweisen Konfidenzintervalles nutzen wir nun das Blockwise Dependent Wild Bootstrap-Verfahren für den stationären Prozess $(e_i)_{i=1, \dots, n}$, welches in Kapitel 2.3.1 eingeführt wurde. Hierbei werden die Hilfsvariablen W_1, \dots, W_n in $[n/l_n]$ Blöcke der Länge l_n und einen möglichen Restblock mit einer geringeren Länge von $n - [n/l_n]l_n$ unterteilt. Mit diesen Hilfsvariablen werden nun die Bootstrap-Variablen e_1^*, \dots, e_n^* erzeugt, mit deren Hilfe sich der Bootstrap-Wert $m_0^*(t)$ ergibt. Auch hier fließt aufgrund des beschränkten Trägers des Kerns K nur eine verringerte Anzahl von Summanden in die Berechnung von $m_0^*(t)$ ein. Somit betrachten wir für die Summe von $m_0^*(t)$ ebenso nur die Indizes $i = 1, \dots, n$ mit $i \in [nt - nb_n, nt + nb_n]$. Dadurch wird beim Blockwise DWB auch nicht die vollständige

dige Anzahl der Blöcke benötigt, sondern nur die Blocknummern $j = 1, \dots, \lceil n/l_n \rceil + 1$ mit $j \in \left[\frac{nt-nb_n}{l_n}, \frac{nt+nb_n}{l_n} + 1 \right]$.

Zusätzlich zu [A1] und [A2] benötigen wir für den Nachweis der asymptotischen Korrektheit der punktweisen Konfidenzintervalle noch folgende Voraussetzungen

[A3]

(i) Für den Prozess $(e_i)_{i=1, \dots, n}$ gilt $\|e_i\|_6 < \infty$.

(ii) Weiterhin sei $\sum_{r=0}^{\infty} (r+1)^2 (\alpha(r))^{1/4} < \infty$.

(iii) Für die Blocklängen $(l_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gilt $l_n \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$ und $l_n = o(nb_n)$.

Bemerkung

Mit der Voraussetzung [A3] (iii) wird die Bedingung des Blockwise DWB erfüllt, dass die Blocklänge l_n mit steigendem Stichprobenumfang wachsen muss, um die Abhängigkeit des Originalprozesses aufzufangen. Jedoch wird dies eingeschränkt mit der Bedingung $l_n = o(nb_n)$, d. h. die Blocklänge darf nicht so stark wie die Anzahl der betrachteten Summanden wachsen. Somit wird sichergestellt, dass eine wachsende Anzahl an Blöcken in die Berechnung der Bootstrap-Größe $m_0^*(t)$ eingeht, um die Verteilung der Statistik gut imitieren zu können.

Der folgende Satz liefert nun den Nachweis der asymptotischen Korrektheit des punktweisen Konfidenzintervalles für die geglättete Version von m .

Satz 3.1

Sei $t \in [0, 1]$ und $\alpha \in (0, 1)$. Weiterhin seien die Voraussetzungen [A1] bis [A3] erfüllt. Dann gilt die Konvergenz

$$P \left(K_{b_n}(m)(t) \in \left[\hat{m}(t) - \frac{1}{\sqrt{nb_n}} t_{n,1-\alpha}^*, \hat{m}(t) + \frac{1}{\sqrt{nb_n}} t_{n,1-\alpha}^* \right] \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 - \alpha,$$

wobei $t_{n,1-\alpha}^*$ das $(1 - \alpha)$ -Quantil von $\sqrt{nb_n} |m_0^*(t)|$ ist.

Beweis

Für $t \in [0, 1]$ gilt

$$K_{b_n}(m)(t) \in \left[\hat{m}(t) - \frac{1}{\sqrt{nb_n}} t_{n,1-\alpha}^*, \hat{m}(t) + \frac{1}{\sqrt{nb_n}} t_{n,1-\alpha}^* \right]$$

genau dann, wenn

$$\sqrt{nb_n} m_0(t) = \sqrt{nb_n} (\hat{m}(t) - K_{b_n}(m)(t)) \in [-t_{n,1-\alpha}^*, t_{n,1-\alpha}^*].$$

Somit ist für $t \in [0, 1]$ und $\alpha \in (0, 1)$ ein $t_{n,1-\alpha}^*$ zu bestimmen, sodass

$$P\left(\sqrt{nb_n} |m_0(t)| \leq t_{n,1-\alpha}^*\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 - \alpha.$$

Um diese Konvergenz nachzuweisen, möchten wir Lemma 8.3 anwenden und prüfen daher dessen Voraussetzungen. Dazu bestimmen wir zuerst die Grenzverteilung von $\sqrt{nb_n} m_0(t)$, welche eine stetige Verteilungsfunktion besitzen muss. Danach wenden wir das Blockwise Dependent Wild Bootstrap-Verfahren aus Kapitel 2.3.1 an, um die Verteilung von $\sqrt{nb_n} m_0(t)$ mit Hilfe von $\sqrt{nb_n} m_0^*(t)$ zu approximieren. Somit muss $\sqrt{nb_n} m_0^*(t)$ in Wahrscheinlichkeit die gleiche Grenzverteilung wie die Originalgröße besitzen. Dann erhalten wir mit Hilfe des Continuous Mapping Theorems und Lemma 8.3 die gesuchte Konvergenz, wobei $t_{n,1-\alpha}^*$ das $(1 - \alpha)$ -Quantil von $\sqrt{nb_n} |m_0^*(t)|$ ist.

Um die Grenzverteilung von $\sqrt{nb_n} m_0(t)$ zu bestimmen, wenden wir den Zentralen Grenzwertsatz für Regressionsmodelle von Roussas et al. (1992, Theorem 4.3) an. Dort wird, wie in unserem Fall, ein Regressionsmodell mit einem stark mischenden stationären Prozess betrachtet. Als Schätzer wird unter anderem der Priestley-Chao-Schätzer angenommen. Mit [A3] sind die Voraussetzungen von Theorem 4.3 von Roussas et al. (1992) erfüllt und es wird die asymptotische Normalität

$$\frac{\hat{m}(t) - \mathbb{E}(\hat{m}(t))}{\sqrt{\text{Var}(\hat{m}(t))}} \xrightarrow{d} Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

für alle $t \in (0, 1)$ erreicht. Nun gilt weiterhin, dass

$$\hat{m}(t) - \mathbb{E}(\hat{m}(t)) = \sum_{i=1}^n w_n(t, i) e_i = m_0(t),$$

sowie

$$\text{Var}(\hat{m}(t)) = \text{Var}(m_0(t)).$$

Dadurch erhalten wir die Grenzverteilung von $\sqrt{nb_n} m_0(t)$ mit

$$\frac{\sqrt{nb_n} m_0(t)}{\sqrt{\text{Var}(\sqrt{nb_n} m_0(t))}} \xrightarrow{d} Z \sim \mathcal{N}(0, 1). \quad (3.1)$$

Wie oben erwähnt, wenden wir nun das Blockwise DWB auf den stationären Prozess $(e_i)_{i=1, \dots, n}$ an und erhalten die Bootstrap-Größe $m_0^*(t)$. Da auch hier der Kern K einen beschränkten Träger besitzt gehen nur $O(nb_n)$ Summanden in die Berechnung ein. Somit interessieren nur die Summanden mit Indizes aus dem Intervall

$$I_{t,n} := \{i = 1, \dots, n : i \in [nt - nb_n, nt + nb_n]\}.$$

Beim Blockwise DWB werden, wie eingangs erwähnt, die Hilfsvariablen W_1, \dots, W_n in $[n/l_n]$ Blöcke der Länge l_n mit den Blocknummern $j = 1, \dots, [n/l_n]$ unterteilt. Falls $n/l_n > [n/l_n]$ existiert noch ein Restblock mit der geringeren Länge $n - [n/l_n]l_n$ mit der Blocknummer $j = [n/l_n] + 1$. Die Hilfsvariablen $(W_i)_{i=1, \dots, n}$ innerhalb eines solchen Blockes werden als eine Zufallsvariable V_j für $j = 1, \dots, [n/l_n]$ bzw. $j = 1, \dots, [n/l_n] + 1$ definiert. Aufgrund des beschränkten Trägers des Kerns gehen in die Berechnungen nun auch nicht alle Variablen $(V_j)_{j=1, \dots, [n/l_n]}$ ein, sondern nur diese mit den Indizes aus dem Intervall

$$J_{t,n} := \left\{ j = 1, \dots, [n/l_n] : j \in \left[\frac{nt - nb_n}{l_n}, \frac{nt + nb_n}{l_n} + 1 \right] \right\}$$

und evtl. $V_{[n/l_n]+1}$ für die Hilfsvariablen des Restblockes. Somit betrachten wir für die Berechnung $O\left(\frac{nb_n}{l_n}\right)$ Variablen $(V_j)_{j=1, \dots, [n/l_n]+1}$. Nach Definition sind diese Zufallsvariablen V_j für $j = 1, \dots, [n/l_n] + 1$ unabhängig und standardnormalverteilt. Für $t \in [0, 1]$ setzt sich $m_0^*(t)$ somit aus einem Hauptterm und einem möglichen Restterm wie folgt zusammen

$$\begin{aligned} m_0^*(t) &= \sum_{i=1}^n w_n(t, i) e_i^* = \sum_{i \in I_{t,n}} w_n(t, i) \hat{e}_i W_i \\ &= \sum_{j \in J_{t,n}} V_j \sum_{i=(j-1)l_n+1}^{jl_n} w_n(t, i) \hat{e}_i + V_{[n/l_n]+1} \sum_{i=[n/l_n]l_n+1}^n w_n(t, i) \hat{e}_i. \end{aligned}$$

Der Restterm wird durch den beschränkten Träger des Kerns K automatisch Null, falls die Indizes $i = [n/l_n]l_n + 1, \dots, n$ nicht im Intervall $I_{t,n}$ liegen. Aufgrund der Unabhängigkeit und der Normalverteilung der $(V_j)_{j=1, \dots, [n/l_n]+1}$ ist $m_0^*(t)$ eine Summe von normalverteilten Zufallsvariablen mit

$$\frac{\sqrt{nb_n} m_0^*(t)}{\sqrt{\text{Var}^*(\sqrt{nb_n} m_0^*(t))}} \sim \mathcal{N}(0, 1). \quad (3.2)$$

Hierbei bezeichnet $\text{Var}^*(\cdot)$ die Bootstrap-Varianz bedingt auf die Originalstichprobe X_1, \dots, X_n . Ebenso bezeichnet nachfolgend $\mathbb{E}^*(\cdot)$ den Bootstrap-Erwartungswert bedingt auf die Originalstichprobe X_1, \dots, X_n .

Um nun zu zeigen, dass $m_0(t)$ und $m_0^*(t)$ die gleiche Grenzverteilung besitzen, beweisen wir

$$nb_n |\text{Var}^*(m_0^*(t)) - \text{Var}(m_0(t))| = o_P(1).$$

Die blockförmige Einteilung durch die Hilfsvariablen des Blockwise DWB können wir auch auf der Originalseite vornehmen. Dadurch erhalten wir bei der Berechnung der obigen Approximation eine Unterteilung in einen Hauptterm, welcher aus den Variablen mit Indizes innerhalb der vollständigen Blöcke mit einer Länge von l_n besteht, sowie einen möglichen Restterm, welcher durch einen eventuellen Restblock entsteht. Zusätzlich entstehen dazu noch zwei Ko-

varianzterme. Somit gilt

$$\begin{aligned}
& nb_n |\text{Var}^*(m_0^*(t)) - \text{Var}(m_0(t))| \\
&= nb_n \left| \text{Var}^* \left(\sum_{j \in J_{t,n}} V_j \sum_{i=(j-1)l_n+1}^{jl_n} w_n(t,i) \hat{e}_i + V_{\lfloor \frac{n}{l_n} \rfloor + 1} \sum_{i=\lfloor \frac{n}{l_n} \rfloor l_n + 1}^n w_n(t,i) \hat{e}_i \right) \right. \\
&\quad \left. - \text{Var} \left(\sum_{j \in J_{t,n}} \sum_{i=(j-1)l_n+1}^{jl_n} w_n(t,i) e_i + \sum_{i=\lfloor \frac{n}{l_n} \rfloor l_n + 1}^n w_n(t,i) e_i \right) \right| \\
&= nb_n \left| \sum_{j \in J_{t,n}} \left(\sum_{i=(j-1)l_n+1}^{jl_n} w_n(t,i) \hat{e}_i \right)^2 + \left(\sum_{i=\lfloor \frac{n}{l_n} \rfloor l_n + 1}^n w_n(t,i) \hat{e}_i \right)^2 \right. \\
&\quad \left. - \text{Var} \left(\sum_{j \in J_{t,n}} \sum_{i=(j-1)l_n+1}^{jl_n} w_n(t,i) e_i \right) - \text{Var} \left(\sum_{i=\lfloor \frac{n}{l_n} \rfloor l_n + 1}^n w_n(t,i) e_i \right) \right. \\
&\quad \left. - 2 \text{Cov} \left(\sum_{j \in J_{t,n}} \sum_{i=(j-1)l_n+1}^{jl_n} w_n(t,i) e_i, \sum_{k=\lfloor \frac{n}{l_n} \rfloor l_n + 1}^n w_n(t,k) e_k \right) \right| \\
&\leq nb_n \left| \sum_{j \in J_{t,n}} \left[\left(\sum_{i=(j-1)l_n+1}^{jl_n} w_n(t,i) \hat{e}_i \right)^2 - \mathbb{E} \left(\sum_{i=(j-1)l_n+1}^{jl_n} w_n(t,i) e_i \right)^2 \right] \right| \\
&\quad + nb_n \left| \left(\sum_{i=\lfloor \frac{n}{l_n} \rfloor l_n + 1}^n w_n(t,i) \hat{e}_i \right)^2 - \mathbb{E} \left(\sum_{i=\lfloor \frac{n}{l_n} \rfloor l_n + 1}^n w_n(t,i) e_i \right)^2 \right| \\
&\quad + 2nb_n \left| \sum_{j \in J_{t,n}} \sum_{\substack{l \in J_{t,n} \\ l > j}} \sum_{i=(j-1)l_n+1}^{jl_n} \sum_{k=(l-1)l_n+1}^{ll_n} w_n(t,i) w_n(t,k) \text{Cov}(e_i, e_k) \right| \\
&\quad + 2nb_n \left| \sum_{j \in J_{t,n}} \sum_{i=(j-1)l_n+1}^{jl_n} \sum_{k=\lfloor \frac{n}{l_n} \rfloor l_n + 1}^n w_n(t,i) w_n(t,k) \text{Cov}(e_i, e_k) \right| \\
&=: T_1 + T_2 + T_3 + T_4. \tag{3.3}
\end{aligned}$$

Zur Untersuchung dieser vier Terme möchten wir zunächst zwei Vorbetrachtungen vornehmen. Zum einen hat das Gewicht $w_n(t, i)$ die Form $(nb_n)^{-1} K\left(\frac{t-i/n}{b_n}\right)$. Dadurch folgt aus der Beschränktheit des Kerns K , dass

$$\max_{1 \leq i \leq n} \max_{0 \leq t \leq 1} |w_n(t, i)| = O\left(\frac{1}{nb_n}\right). \tag{3.4}$$

Zum anderen untersuchen wir die Kovarianzen zwischen den abhängigen Variablen $(e_i)_{i=1, \dots, n}$.

Diese lassen sich mit Hilfe der Kovarianzgleichung aus Lemma 2.2 mit $p = q = 8/3$ und $K_\alpha = 1/4$ abschätzen. Mit der Voraussetzung [A3] (i) erhalten wir $\sup_i \|e_i\|_{8/3} \sup_m \|e_m\|_{8/3} \leq C < \infty$ und somit gilt für $i, m = 1, \dots, n$ mit $i \leq m$ und $r := m - i$, dass

$$\begin{aligned} |\text{Cov}(e_i, e_m)| &\leq 4 \|e_i\|_{8/3} \|e_m\|_{8/3} (\alpha(r))^{1/4} \\ &\leq 4 \sup_i \|e_i\|_{8/3} \sup_m \|e_m\|_{8/3} (\alpha(r))^{1/4} \\ &\leq 4C (\alpha(r))^{1/4}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Nun untersuchen wir den Hauptterm T_1 von (3.3) und unterteilen diesen weiter, indem wir die Abstände zwischen den Residuen und Fehlern betrachten

$$\begin{aligned} T_1 &= nb_n \left| \sum_{j \in J_{t,n}} \left[\left(\sum_{i=(j-1)l_n+1}^{jl_n} w_n(t, i) (\widehat{e}_i - e_i + e_i) \right)^2 - \mathbb{E} \left(\sum_{i=(j-1)l_n+1}^{jl_n} w_n(t, i) e_i \right)^2 \right] \right| \\ &\leq nb_n \left| \sum_{j \in J_{t,n}} \left(\sum_{i=(j-1)l_n+1}^{jl_n} w_n(t, i) (\widehat{e}_i - e_i) \right)^2 \right| \\ &\quad + 2nb_n \left| \sum_{j \in J_{t,n}} \left(\sum_{i=(j-1)l_n+1}^{jl_n} w_n(t, i) (\widehat{e}_i - e_i) \right) \left(\sum_{i=(j-1)l_n+1}^{jl_n} w_n(t, i) e_i \right) \right| \\ &\quad + nb_n \left| \sum_{j \in J_{t,n}} \left[\left(\sum_{i=(j-1)l_n+1}^{jl_n} w_n(t, i) e_i \right)^2 - \mathbb{E} \left(\sum_{i=(j-1)l_n+1}^{jl_n} w_n(t, i) e_i \right)^2 \right] \right| \\ &=: T_{1,1} + T_{1,2} + T_{1,3}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Für die Summanden des ersten Terms $T_{1,1}$ untersuchen wir zunächst deren Erwartungswert. Mit der Jensenschen Ungleichung erhalten wir

$$\left(\sum_{i=(j-1)l_n+1}^{jl_n} w_n(t, i) (\widehat{e}_i - e_i) \right)^2 \leq l_n \sum_{i=(j-1)l_n+1}^{jl_n} w_n^2(t, i) (\widehat{e}_i - e_i)^2,$$

wodurch für dessen Erwartungswert die Ungleichung

$$\mathbb{E} \left(\sum_{i=(j-1)l_n+1}^{jl_n} w_n(t, i) (\widehat{e}_i - e_i) \right)^2 \leq l_n \sum_{i=(j-1)l_n+1}^{jl_n} w_n^2(t, i) \mathbb{E} (\widehat{e}_i - e_i)^2$$

gilt. Nun folgt für den mittleren quadratischen Abstand von Residuum und Fehler mit (2.2), dass

$$\mathbb{E} (\widehat{e}_i - e_i)^2 = \mathbb{E} (\widehat{m}(i/n) - m(i/n))^2 = \text{MSE}(\widehat{m}(i/n)).$$

Mit Hilfe von Lemma 2.1 und der berechneten Größenordnung für die optimale Bandbrei-

te (2.7) erhalten wir somit

$$\max_{1 \leq i \leq n} \mathbb{E} (\widehat{e}_i - e_i)^2 = O \left(n^{-4/5} \right).$$

Zusammen mit (3.4) erhalten wir damit für das zweite Moment

$$\mathbb{E} \left(\sum_{i=(j-1)l_n+1}^{jl_n} w_n(t, i) (\widehat{e}_i - e_i) \right)^2 = O \left(\frac{l_n^2}{(nb_n)^2} n^{-4/5} \right). \quad (3.7)$$

Somit folgt zusammen mit der Größenordnung $O(nb_n/l_n)$, welche die Anzahl der Indizes von $J_{t,n}$ wiedergibt, sowie [A3] (iii) und $nb_n = O(n^{4/5})$, was sich durch die optimale Bandbreite (2.7) ergibt, für $T_{1,1}$, den ersten Term von (3.6), dass

$$T_{1,1} = O_P \left(nb_n \frac{nb_n}{l_n} \frac{l_n^2}{(nb_n)^2} n^{-4/5} \right) = O_P \left(l_n n^{-4/5} \right) = o_P(1). \quad (3.8)$$

Für den zweiten Term von (3.6)

$$T_{1,2} = 2nb_n \left| \sum_{j \in J_{t,n}} \left(\sum_{i=(j-1)l_n+1}^{jl_n} w_n(t, i) (\widehat{e}_i - e_i) \right) \left(\sum_{i=(j-1)l_n+1}^{jl_n} w_n(t, i) e_i \right) \right|$$

benötigen wir zusätzlich zu (3.7) noch das zweite Moment von $\sum_{i=(j-1)l_n+1}^{jl_n} w_n(t, i) e_i$. Da der Fehlerprozess $(e_i)_{i=1, \dots, n}$ einen Erwartungswert von Null besitzt, gilt dafür mit (3.4), (3.5) und [A3] (ii), dass

$$\begin{aligned} \text{Var} \left(\sum_{i=(j-1)l_n+1}^{jl_n} w_n(t, i) e_i \right) &= \sum_{i, l=(j-1)l_n+1}^{jl_n} w_n(t, i) w_n(t, l) \text{Cov}(e_i, e_l) \\ &\leq 2 \sum_{(j-1)l_n+1 \leq i \leq l \leq jl_n} |w_n(t, i) w_n(t, l)| 4C (\alpha(l-i))^{1/4} \\ &= C \sum_{i=(j-1)l_n+1}^{jl_n} \sum_{r=0}^{jl_n-i} |w_n(t, i) w_n(t, r+i)| (\alpha(r))^{1/4} \\ &= O \left(\frac{l_n}{(nb_n)^2} \right). \end{aligned}$$

Zusammen mit (3.7), [A3] (iii) und (2.7) erhalten wir somit

$$T_{1,2} = O_P \left(nb_n \frac{nb_n}{l_n} \frac{l_n}{nb_n} n^{-2/5} \frac{\sqrt{l_n}}{nb_n} \right) = O_P \left(\sqrt{l_n} n^{-2/5} \right) = o_P(1). \quad (3.9)$$

Die Größenordnung des dritten Terms $T_{1,3}$ von (3.6) erhalten wir durch die Untersuchung der

Varianz

$$\begin{aligned}
& \text{Var} \left[\sum_{j \in J_{t,n}} \left(\sum_{i=(j-1)l_n+1}^{jl_n} w_n(t,i) e_i \right)^2 \right] \\
&= \sum_{j \in J_{t,n}} \text{Var} \left[\left(\sum_{i=(j-1)l_n+1}^{jl_n} w_n(t,i) e_i \right)^2 \right] \\
&\quad + 2 \sum_{j \in J_{t,n}} \sum_{\substack{l \in J_{t,n} \\ l > j}} \text{Cov} \left(\left(\sum_{i=(j-1)l_n+1}^{jl_n} w_n(t,i) e_i \right)^2, \left(\sum_{k=(l-1)l_n+1}^{ll_n} w_n(t,k) e_k \right)^2 \right) \\
&=: T_{1,3,1} + T_{1,3,2}. \tag{3.10}
\end{aligned}$$

Um die Varianz von $T_{1,3,1}$ zu berechnen, benötigen wir die Kenngröße der Kumulante, welche bspw. in Cramér (1946) erläutert wird. Die gemeinsame Kumulante der zentrierten Zufallsvariablen e_p, e_q, e_r, e_s ist definiert als

$$\text{cum}(e_p, e_q, e_r, e_s) = \mathbb{E}(e_p e_q e_r e_s) - \mathbb{E}(e_p e_q) \mathbb{E}(e_r e_s) - \mathbb{E}(e_p e_r) \mathbb{E}(e_q e_s) - \mathbb{E}(e_p e_s) \mathbb{E}(e_q e_r). \tag{3.11}$$

Mit Hilfe dieser Kenngröße unterteilen wir die Varianz in

$$\begin{aligned}
& \text{Var} \left[\left(\sum_{i=(j-1)l_n+1}^{jl_n} w_n(t,i) e_i \right)^2 \right] \\
&= \mathbb{E} \left(\sum_{i=(j-1)l_n+1}^{jl_n} w_n(t,i) e_i \right)^4 - \left[\mathbb{E} \left(\sum_{i=(j-1)l_n+1}^{jl_n} w_n(t,i) e_i \right)^2 \right]^2 \\
&= \sum_{p,q,r,s=(j-1)l_n+1}^{jl_n} w_n(t,p) w_n(t,q) w_n(t,r) w_n(t,s) [\mathbb{E}(e_p e_q e_r e_s) - \mathbb{E}(e_p e_q) \mathbb{E}(e_r e_s)] \\
&= \sum_{p,q,r,s=(j-1)l_n+1}^{jl_n} w_n(t,p) w_n(t,q) w_n(t,r) w_n(t,s) \text{cum}(e_p, e_q, e_r, e_s) \\
&\quad + \sum_{p,q,r,s=(j-1)l_n+1}^{jl_n} w_n(t,p) w_n(t,q) w_n(t,r) w_n(t,s) [\mathbb{E}(e_p e_r) \mathbb{E}(e_q e_s) + \mathbb{E}(e_p e_s) \mathbb{E}(e_q e_r)] \\
&=: T_{1,3,1,1} + T_{1,3,1,2}. \tag{3.12}
\end{aligned}$$

Die Abschätzung der Kumulante wird in Lemma 8.1 im Anhang durchgeführt. Unter der Voraussetzung [A3] (i) können wir Lemma 8.1 anwenden und erhalten $|\text{cum}(e_p, e_q, e_r, e_s)| \leq 16C(\alpha(u))^{1/4}$ für $u = \max\{q-p, r-q, s-r\}$ falls $p \leq q \leq r \leq s$. Für $(j-1)l_n + 1 \leq p \leq jl_n$ zerlegen wir die Menge $\{(q, r, s) : p \leq q \leq r \leq s \leq jl_n, \max\{q-p, r-q, s-r\} \geq 0\}$

in Mengen

$$G_u(p) = \{(q, r, s) : p \leq q \leq r \leq s \leq jl_n, \max\{q - p, r - q, s - r\} = u\}.$$

Somit beinhaltet $G_u(p)$ alle (q, r, s) bei denen die größte Lücke zwischen p, q, r und s gleich u ist. Da wir den Abstand zwischen vier Variablen betrachten, gibt es drei Möglichkeiten für eine größte Lücke. Die Größe der beiden kleineren Lücken können wir mit Hilfe von u , der Größe der größten Lücke, abschätzen. Daher gilt $\#G_u(p) \leq 3(u+1)^2$. Mit Hilfe dieser Mengen, sowie mit Lemma 8.1, (3.4) und [A3] (ii) schätzen wir den ersten Term $T_{1,3,1,1}$ wie folgt ab

$$\begin{aligned} T_{1,3,1,1} &\leq 4! \sum_{(j-1)l_n+1 \leq p \leq q \leq r \leq s \leq jl_n} |w_n(t, p) w_n(t, q) w_n(t, r) w_n(t, s) \text{cum}(e_p, e_q, e_r, e_s)| \\ &\leq 4! \sum_{p=(j-1)l_n+1}^{jl_n} \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{(q,r,s) \in G_u(p)} |w_n(t, p) w_n(t, q) w_n(t, r) w_n(t, s)| 16 C (\alpha(u))^{1/4} \\ &\leq C l_n \sum_{u=0}^{\infty} 3(u+1)^2 O\left(\frac{1}{(nb_n)^4}\right) (\alpha(u))^{1/4} \\ &= O\left(\frac{l_n}{(nb_n)^4}\right). \end{aligned} \tag{3.13}$$

Des Weiteren gilt mit (3.4), (3.5) und [A3] (ii) für den zweiten Term

$$\begin{aligned} T_{1,3,1,2} &= \sum_{p,q,r,s=(j-1)l_n+1}^{jl_n} w_n(t, p) w_n(t, q) w_n(t, r) w_n(t, s) [\mathbb{E}(e_p e_r) \mathbb{E}(e_q e_s) + \mathbb{E}(e_p e_s) \mathbb{E}(e_q e_r)] \\ &= 2 \left(\sum_{p,q=(j-1)l_n+1}^{jl_n} w_n(t, p) w_n(t, q) \mathbb{E}(e_p e_q) \right)^2 \\ &\leq 2 \left(2 \sum_{(j-1)l_n+1 \leq p \leq q \leq jl_n} |w_n(t, p) w_n(t, q)| 4 C (\alpha(q-p))^{1/4} \right)^2 \\ &= O\left(\frac{l_n^2}{(nb_n)^4}\right). \end{aligned} \tag{3.14}$$

Somit erhalten wir mit (3.12), (3.13) und (3.14) insgesamt für die Varianz die Größenordnung

$$\text{Var} \left[\left(\sum_{i=(j-1)l_n+1}^{jl_n} w_n(t, i) e_i \right)^2 \right] = O\left(\frac{l_n}{(nb_n)^4}\right) + O\left(\frac{l_n^2}{(nb_n)^4}\right) = O\left(\frac{l_n^2}{(nb_n)^4}\right).$$

Durch das Aufsummieren dieser Varianzen für die Indizes j aus dem Intervall $J_{t,n}$ erhalten

wir für $T_{1,3,1}$, den ersten Term von (3.10), dass

$$T_{1,3,1} = O\left(\frac{nb_n}{l_n} \frac{l_n^2}{(nb_n)^4}\right) = O\left(\frac{l_n}{(nb_n)^3}\right). \quad (3.15)$$

Nun untersuchen wir den Kovarianzterm $T_{1,3,2}$ von (3.10), welcher die Kovarianzen zwischen dem Produkt zweier Fehlervariablen mit jeweiligen Indizes aus zwei verschiedenen Blöcken betrachtet. Für diesen erhalten wir mit (3.4) und (3.5) die Abschätzung

$$\begin{aligned} & T_{1,3,2} \\ &= 2 \sum_{j \in J_{t,n}} \sum_{\substack{l \in J_{t,n} \\ l > j}} \text{Cov} \left(\left(\sum_{i=(j-1)l_n+1}^{jl_n} w_n(t, i) e_i \right)^2, \left(\sum_{k=(l-1)l_n+1}^{ll_n} w_n(t, k) e_k \right)^2 \right) \\ &= 2 \sum_{j \in J_{t,n}} \sum_{\substack{l \in J_{t,n} \\ l > j}} \sum_{\substack{i,p=(j-1)l_n+1 \\ i < p}}^{jl_n} \sum_{\substack{k,q=(l-1)l_n+1 \\ k < q}}^{ll_n} w_n(t, i) w_n(t, p) w_n(t, k) w_n(t, q) \text{Cov}(e_i e_p, e_k e_q) \\ &\leq 8 \sum_{j \in J_{t,n}} \sum_{\substack{l \in J_{t,n} \\ l > j}} \sum_{(j-1)l_n+1 \leq i \leq p \leq jl_n} \sum_{(l-1)l_n+1 \leq k \leq q \leq ll_n} |w_n(t, i) w_n(t, p) \\ &\quad \cdot w_n(t, k) w_n(t, q)| 4C(\alpha(k-p))^{1/4} \\ &\leq C \cdot O\left(\frac{l_n^2}{(nb_n)^4}\right) \sum_{j \in J_{t,n}} \sum_{l-j=1}^{2\frac{nb_n}{l_n}+1} \sum_{p=(j-1)l_n+1}^{jl_n} \sum_{k=(l-1)l_n+1}^{ll_n} (\alpha(k-p))^{1/4} \\ &= C \cdot O\left(\frac{l_n^2}{(nb_n)^4}\right) \sum_{j \in J_{t,n}} \sum_{p=(j-1)l_n+1}^{jl_n} \sum_{k=jl_n+1}^{(j+1)l_n+2nb_n} (\alpha(k-p))^{1/4}. \end{aligned}$$

Durch den α -Mischungskoeffizienten interessiert uns nur noch der Abstand der Indizes von einem Block zu den Indizes seiner nachfolgenden Blöcke. Dies geschieht für alle Blöcke mit den Blocknummern aus dem Intervall $J_{t,n}$. Dadurch können wir $T_{1,3,2}$ mit [A3] (ii) abschätzen durch

$$\begin{aligned} T_{1,3,2} &\leq C \cdot O\left(\frac{l_n^2}{(nb_n)^4}\right) \frac{nb_n}{l_n} \sum_{r=1}^{\infty} r(\alpha(r))^{1/4} \\ &= O\left(\frac{l_n}{(nb_n)^3}\right). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Damit ergibt sich mit (3.10), (3.15) und (3.16) die Größenordnung der Varianz

$$\text{Var} \left[\sum_{j \in J_{t,n}} \left(\sum_{i=(j-1)l_n+1}^{jl_n} w_n(t, i) e_i \right)^2 \right] = O\left(\frac{l_n}{(nb_n)^3}\right).$$

Diese benötigen wir, um die Größenordnung von $T_{1,3}$ von (3.6) zu bestimmen. Dafür gilt mit

der Voraussetzung [A3] (iii), dass

$$T_{1,3} = O_P \left(nb_n \sqrt{\frac{l_n}{(nb_n)^3}} \right) = O_P \left(\sqrt{\frac{l_n}{nb_n}} \right) = o_P(1). \quad (3.17)$$

Fassen wir nun (3.6), sowie alle drei Terme (3.8), (3.9) und (3.17) zusammen, dann ergibt sich für den Hauptterm T_1 von (3.3) die Größenordnung

$$T_1 = o_P(1). \quad (3.18)$$

Der zweite Term T_2 von (3.3) ergibt sich aufgrund eines möglichen Restterms. Er besitzt den gleichen Aufbau wie der Hauptterm T_1 , jedoch setzt er sich nur aus einem Block mit einer geringeren Blocklänge von weniger als l_n Summanden zusammen. Somit verlaufen seine Berechnungen analog zu denen von T_1 und wir erhalten

$$T_2 = o_P(1). \quad (3.19)$$

Im Folgenden müssen wir noch die Kovarianzterme T_3 und T_4 von (3.3) untersuchen. Beim dritten Term T_3 werden die Kovarianzen zwischen den Fehlervariablen mit Indizes aus zwei verschiedenen Blöcken der Länge l_n für alle Blöcke aus der Menge $J_{t,n}$ betrachtet. Daher gilt mit (3.4), (3.5), [A3] (ii) und (iii), dass

$$\begin{aligned} T_3 &= 2nb_n \left| \sum_{j \in J_{t,n}} \sum_{\substack{l \in J_{t,n} \\ l > j}} \sum_{i=(j-1)l_n+1}^{jl_n} \sum_{k=(l-1)l_n+1}^{ll_n} w_n(t, i) w_n(t, k) \text{Cov}(e_i, e_k) \right| \\ &\leq 2nb_n \sum_{j \in J_{t,n}} \sum_{l=j+1}^{2\frac{nb_n}{l_n}+1} \sum_{i=(j-1)l_n+1}^{jl_n} \sum_{k=(l-1)l_n+1}^{ll_n} |w_n(t, i) w_n(t, k)| 4C (\alpha(k-i))^{1/4} \\ &= Cnb_n O \left(\frac{1}{(nb_n)^2} \right) \sum_{j \in J_{t,n}} \sum_{i=(j-1)l_n+1}^{jl_n} \sum_{k=jl_n+1}^{(j+1)l_n+2nb_n} (\alpha(k-i))^{1/4} \\ &\leq Cnb_n O \left(\frac{1}{(nb_n)^2} \right) \frac{nb_n}{l_n} \sum_{r=1}^{\infty} r (\alpha(r))^{1/4} \\ &= O \left(\frac{1}{l_n} \right) = o(1). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Beim vierten Term T_4 von (3.3) werden die Kovarianzen zwischen den Fehlervariablen mit Indizes aus dem Restblock und allen anderen Blöcken mit der Länge l_n berechnet. Somit ergibt sich ebenso mit (3.4), (3.5), [A3] (ii) und [A1] (iv), dass

$$T_4 \leq 2nb_n \left| \sum_{j \in J_{t,n}} \sum_{i=(j-1)l_n+1}^{jl_n} \sum_{k=\lceil \frac{n}{l_n} \rceil l_n+1}^n w_n(t, i) w_n(t, k) 4C (\alpha(k-i))^{1/4} \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq C n b_n O\left(\frac{1}{(n b_n)^2}\right) \sum_{r=1}^{\infty} r (\alpha(r))^{1/4} \\
&= O\left(\frac{1}{n b_n}\right) = o(1). \tag{3.21}
\end{aligned}$$

Alle vier Terme des Abstandes der Varianzen von $m_0(t)$ auf der Originalseite und $m_0^*(t)$ auf der Bootstrap-Seite in (3.3) haben mit (3.18), (3.19), (3.20) und (3.21) eine Größenordnung von $o_P(1)$ oder $o(1)$, also erhalten wir

$$\left| \text{Var}^*\left(\sqrt{n b_n} m_0^*(t)\right) - \text{Var}\left(\sqrt{n b_n} m_0(t)\right) \right| = o_P(1).$$

Mit dieser Approximation und der Normalverteilung der Bootstrap-Größe $m_0^*(t)$ in (3.2) erhalten wir die Konvergenz

$$\frac{\sqrt{n b_n} m_0^*(t)}{\sqrt{\text{Var}(\sqrt{n b_n} m_0(t))}} \xrightarrow{d} Z \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{in Wahrscheinlichkeit.} \tag{3.22}$$

Mit Hilfe des Continuous Mapping Theorems, z. B. aus Billingsley (1968, Theorem 5.1) gelten die Verteilungs-Konvergenzen (3.1) und (3.22) auch für $\sqrt{n b_n} |m_0(t)|$ und $\sqrt{n b_n} |m_0^*(t)|$. Somit konvergiert die Originalgröße $\sqrt{n b_n} |m_0(t)|$ und die Bootstrap-Größe $\sqrt{n b_n} |m_0^*(t)|$ gegen die gleiche normalverteilte Zufallsvariable $|Z|$. Die Normalverteilung stellt eine stetige Grenzverteilung dar. Dadurch sind alle Voraussetzungen von Lemma 8.3 erfüllt und wir erhalten die Konvergenz

$$P\left(\sqrt{n b_n} |m_0(t)| \leq t_{n,1-\alpha}^*\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 - \alpha,$$

wobei $t_{n,1-\alpha}^*$ das $(1 - \alpha)$ -Quantil von $\sqrt{n b_n} |m_0^*(t)|$ ist. □

4 Coupling von Partialsummen

Um in Kapitel 3 den Nachweis der asymptotischen Korrektheit der punktweisen Konfidenzintervalle zu liefern, analysierten wir die Grenzverteilungen auf der Originalseite und der Bootstrap-Seite. Dies wurde durch die punktweise Betrachtung für $t \in [0, 1]$ ermöglicht. Bei dem Nachweis der asymptotischen Korrektheit von simultanen Konfidenzbändern im nachfolgenden Kapitel können wir wegen der Wahrscheinlichkeit einer simultanen Überdeckung nicht auf die Analyse der Grenzverteilungen zurückgreifen. Daher nutzen wir die sogenannte Coupling-Technik. Mit diesem Verfahren können wir die Partialsummenprozesse, welche aus dem Fehlerprozess und aus dem Bootstrap-Fehlerprozess bestehen, aneinander koppeln, indem wir beide Prozesse jeweils an den gleichen Wiener Prozess koppeln.

Für den Fehlerprozess nutzen wir in Kapitel 4.1 ein bekanntes Resultat der starken Approximation von Shao und Lu (1987). Zusätzlich werden wir in Kapitel 4.2 die starke Approximation für lineare Prozesse nachweisen. In den nachfolgenden Kapiteln 4.3 und 4.4 werden wir das Coupling für die Partialsummenprozesse der Bootstrap-Fehler, welche durch das Blockwise DWB und das Autoregressive DWB erzeugt werden, herleiten.

4.1 Starke Approximation für α -mischende Prozesse

Um die asymptotische Korrektheit von simultanen Konfidenzbändern nachzuweisen, müssen die jeweiligen Partialsummenprozesse der Original- und der Bootstrap-Fehler aneinander gekoppelt werden. Dies erfolgt mit Hilfe des Couplings beider Prozesse an den gleichen Wiener Prozess. In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der starken Approximation des Fehlerprozesses.

Die starke Approximation, auch strong invariance principle genannt, wurde von Strassen (1964) für Partialsummen mit unabhängigen und identisch verteilten Daten eingeführt. Nachfolgend haben Breiman (1967), sowie Komlós et al. (1975) und Komlós et al. (1976) die Approximationsrate unter bestimmten Voraussetzungen verbessert. Die Erweiterung der starken Approximation auf abhängige Daten wurde unter anderem in Philipp und Stout (1975), Berkes und Philipp (1979), Bradley (1983) und Shao (1993) unter verschiedenen Abhängigkeitsbedingungen vorgenommen. In der vorliegenden Arbeit betrachten wir einen stark mischenden Prozess, sodass wir die starke Approximation für α -mischende Prozesse von Shao und Lu (1987) nutzen.

Wir betrachten im Folgenden den Partialsummenprozess $(S_k)_{k=1,\dots,n}$ des Fehlerprozesses $(e_i)_{i=1,\dots,n}$, wobei

$$S_k = \sum_{i=1}^k e_i$$

für $k = 1, \dots, n$. Für den Fehlerprozess $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ werden zusätzlich zu [A2] noch die folgenden Voraussetzungen angenommen

[A4]

(i) Für den Prozess $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ sei $\sup_i \|e_i\|_s < \infty$ für ein $s > 4$.

(ii) Weiterhin gilt für obiges s , dass $\sum_{r=0}^{\infty} (\alpha(r))^{\frac{1}{4}-\frac{1}{s}} < \infty$.

Unter diesen Voraussetzungen ist die starke Approximation von Shao und Lu (1987) anwendbar. Es existiert somit ein Wiener Prozess \mathbb{W} , sodass auf einem hinreichend reichhaltigen Wahrscheinlichkeitsraum der Partialsummenprozess $(S_k)_{k=1,\dots,n}$, mit $S_k = \sum_{i=1}^k e_i$, gleichmäßig durch diesen Wiener Prozess approximiert werden kann.

Satz 4.1 (Shao und Lu (1987), Theorem 4.1)

Unter den Voraussetzungen [A2] und [A4] existiert auf einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P) eine Version des Partialsummenprozesses $(S_k)_{k=1,\dots,n}$ und ein Wiener Prozess \mathbb{W} , sodass für $t \geq 0$

$$S_t - \mathbb{W}(\sigma^2 t) = O_{f.s.} \left(t^{1/4} (\log t)^{3/2} \right),$$

wobei $\sigma^2 = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}(e_0 e_i)$. Somit folgt

$$\max_{1 \leq k \leq n} |S_k - \mathbb{W}(\sigma^2 k)| = O_{f.s.} \left(n^{1/4} (\log n)^{3/2} \right).$$

Bemerkung

Die Notation $o_{f.s.}$ und $O_{f.s.}$ bezeichnet die Landau-Notation in P -fast sicher. Dabei gilt

$$b_n = o_{f.s.}(a_n),$$

falls

$$\left| \frac{b_n}{a_n} \right| \xrightarrow{f.s.} 0.$$

Des Weiteren gilt

$$b_n = O_{f.s.}(a_n),$$

falls

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{b_n}{a_n} \right| < \infty \quad \text{fast sicher.}$$

Mit Hilfe dieser starken Approximation haben wir nun den Partialsummenprozess $(S_k)_{k=1, \dots, n}$ des Fehlerprozesses an einen Wiener Prozess gekoppelt. Bei der Konstruktion der simultanen Konfidenzbänder untersuchen wir mit $m_0(t)$ von (2.8) jedoch nicht den Fehlerprozess $(e_i)_{i=1, \dots, n}$, sondern eine gewichtete Summe von diesem. Daher ist es notwendig nicht nur den Wiener Prozess zu betrachten, sondern auch eine gewichtete Summe der Zuwächse des Wiener Prozesses. Somit definieren wir für den weiteren Verlauf dieser Arbeit den Gaußprozess

$$\mu_0(t) := \sum_{i=1}^n w_n(t, i) [\mathbb{W}(\sigma^2 i) - \mathbb{W}(\sigma^2(i-1))] \quad (4.1)$$

für $t \in [0, 1]$ mit dem gleichen Gewicht $w_n(t, i) = (nb_n)^{-1} K\left(\frac{t-i/n}{b_n}\right)$ des Priestley-Chao-Schätzers. Mit Hilfe von Satz 4.1 erhalten wir im Folgenden die gleichmäßige Approximation zwischen $m_0(t)$ und dem Gaußprozess $\mu_0(t)$.

Lemma 4.1

Unter den Voraussetzungen [A1], [A2] und [A4] folgt die gleichmäßige Approximation

$$\max_{0 \leq t \leq 1} |m_0(t) - \mu_0(t)| = o_{f.s.} \left(\frac{1}{\sqrt{nb_n} \sqrt{\log n}} \right).$$

Beweis

Für nachfolgende Berechnungen definieren wir zuerst

$$\Omega_n(t) := |w_n(t, n)| + \sum_{i=2}^n |w_n(t, i) - w_n(t, i-1)| \quad (4.2)$$

für $t \in [0, 1]$. Nun wenden wir die Abelsche partielle Summation, bspw. aus Heuser (2009), auf den Abstand von $m_0(t)$ und $\mu_0(t)$ an und erhalten

$$|m_0(t) - \mu_0(t)| = \left| \sum_{i=1}^n w_n(t, i) (e_i - [\mathbb{W}(\sigma^2 i) - \mathbb{W}(\sigma^2(i-1))]) \right|$$

$$= \left| w_n(t, n) \sum_{i=1}^n (e_i - [\mathbb{W}(\sigma^2 i) - \mathbb{W}(\sigma^2(i-1))]) + \sum_{i=2}^n (w_n(t, i-1) - w_n(t, i)) \sum_{k=1}^{i-1} (e_k - [\mathbb{W}(\sigma^2 k) - \mathbb{W}(\sigma^2(k-1))]) \right|.$$

Da für den Wiener Prozess $\mathbb{W}(0) = 0$ gilt, folgt für die Summe der Zuwächse

$$\sum_{i=1}^k [\mathbb{W}(\sigma^2 i) - \mathbb{W}(\sigma^2(i-1))] = \mathbb{W}(\sigma^2 k).$$

Somit erhalten wir mit (4.2) und Satz 4.1, dass

$$\begin{aligned} & |m_0(t) - \mu_0(t)| \\ & \leq |w_n(t, n)| |S_n - \mathbb{W}(\sigma^2 n)| + \sum_{i=2}^n |w_n(t, i-1) - w_n(t, i)| |S_{i-1} - \mathbb{W}(\sigma^2(i-1))| \\ & \leq \left\{ |w_n(t, n)| + \sum_{i=2}^n |w_n(t, i-1) - w_n(t, i)| \right\} \max_{1 \leq i \leq n} |S_i - \mathbb{W}(\sigma^2 i)| \\ & = \Omega_n(t) O_{f.s.} \left(n^{1/4} (\log n)^{3/2} \right). \end{aligned}$$

Aufgrund der beschränkten Totalvariation des Kerns K folgt

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq t \leq 1} \Omega_n(t) &= \max_{0 \leq t \leq 1} \left\{ |w_n(t, n)| + \sum_{i=2}^n |w_n(t, i-1) - w_n(t, i)| \right\} \\ &= \frac{1}{nb_n} \max_{0 \leq t \leq 1} \left\{ \left| K\left(\frac{t-1}{b_n}\right) \right| + \sum_{i=2}^n \left| K\left(\frac{t-i/n}{b_n}\right) - K\left(\frac{t-(i-1)/n}{b_n}\right) \right| \right\} \\ &= O\left(\frac{1}{nb_n}\right). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Damit gilt mit der optimalen Bandbreite (2.7) für die gleichmäßige Approximation zwischen $m_0(t)$ und $\mu_0(t)$ die Größenordnung

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq t \leq 1} |m_0(t) - \mu_0(t)| &= \max_{0 \leq t \leq 1} \Omega_n(t) O_{f.s.} \left(n^{1/4} (\log n)^{3/2} \right) = O_{f.s.} \left(\frac{1}{nb_n} n^{1/4} (\log n)^{3/2} \right) \\ &= O_{f.s.} \left(\frac{1}{\sqrt{nb_n} \sqrt{\log n} n^{1/4} b_n^{1/2}} \right) = O_{f.s.} \left(\frac{1}{\sqrt{nb_n} \sqrt{\log n}} \right). \end{aligned}$$

□

4.2 Starke Approximation für lineare Prozesse

Im vorhergehenden Abschnitt haben wir die starke Approximation für α -mischende Prozesse aufgezeigt. In diesem Fall haben Shao und Lu (1987) die Schranke $O_{f.s.} \left(n^{1/4} (\log n)^{3/2} \right)$, unter Vorliegen von endlichen Momenten $\sup_i \|e_i\|_s < \infty$ für ein $s > 4$ und Voraussetzungen an die Mischungsbedingung, erreicht. Im Fall von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen wurde in Komlós et al. (1975) und Komlós et al. (1976) unter Vorliegen einer endlichen momenterzeugenden Funktion $O_{f.s.} (\log n)$ als beste Rate erhalten. Falls jedoch keine endliche momenterzeugende Funktion vorliegt, aber endliche Momente $\mathbb{E}(|X|^r) < \infty$ für ein $r > 3$ existieren, so wird immer noch die Schranke $o_{f.s.} (n^{1/r})$ erreicht.

Daher möchten wir in diesem Abschnitt die starke Approximation eines linearen Prozesses untersuchen, um eine bessere Rate, so wie im unabhängigen Fall, zu erhalten.

Nachfolgend sei nun $(Y_i)_{i=1,\dots,n}$ ein kausaler linearer Prozess mit

$$Y_i = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j \varepsilon_{i-j}$$

für $i = 1, \dots, n$. Für diesen Prozess werden folgende Voraussetzungen angenommen

[A5]

- (i) Es sei $(Y_i)_{i=1,\dots,n}$ ein kausaler linearer Prozess mit unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen $(\varepsilon_i)_{i \in \mathbb{Z}}$.
- (ii) Für $(\varepsilon_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ gelte $\mathbb{E}(\varepsilon_i) = 0$, $\mathbb{E}(\varepsilon_i^2) =: \sigma_\varepsilon^2 < \infty$ und $\mathbb{E}(|\varepsilon_i|^r) < \infty$ für ein $r > 3$.
- (iii) Weiterhin sei $|\beta_j| \leq C\rho^j$ für ein $\rho < 1$ und $j \in \mathbb{N}_0$. Zusätzlich definieren wir $\beta := \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j$.

Bemerkungen

- Der kausale lineare Prozess $(Y_i)_{i=1,\dots,n}$ ist unter obigen Voraussetzungen stark stationär.
- Unter [A5] gilt $\sum_{i \in \mathbb{Z}} |\text{Cov}(Y_0, Y_i)| < \infty$. Somit folgt für die Partialsumme \bar{S}_n , mit $\bar{S}_n = \sum_{i=1}^n Y_i$, mit Hilfe der majorisierten Konvergenz und den Voraussetzungen [A5], dass

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \text{Var}(\bar{S}_n) &= \sum_{i=-(n-1)}^{n-1} \left(1 - \frac{|i|}{n}\right) \text{Cov}(Y_0, Y_i) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \text{Cov}(Y_0, Y_i) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{j,l=0}^{\infty} \beta_j \beta_l \text{Cov}(\varepsilon_{-j}, \varepsilon_{i-l}) = \beta^2 \sigma_\varepsilon^2. \end{aligned}$$

Der nachfolgende Satz liefert die starke Approximation eines linearen Prozesses.

Satz 4.2

Es sei $(Y_i)_{i=1,\dots,n}$ ein linearer Prozess mit

$$Y_i = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j \varepsilon_{i-j}$$

für $i = 1, \dots, n$, für welchen die Voraussetzungen [A5] gelten. Dann existiert auf einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum eine Version des Partialsummenprozesses $(\bar{S}_k)_{k=1,\dots,n}$, mit $\bar{S}_k = \sum_{i=1}^k Y_i$, und ein Wiener Prozess \bar{W} , sodass

$$\max_{1 \leq k \leq n} |\bar{S}_k - \bar{W}(k\beta^2\sigma_\varepsilon^2)| = o.f.s. \left(n^{1/r} \right).$$

Beweis

Aufgrund der Unabhängigkeit der Zufallsvariablen $(\varepsilon_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ können wir die Partialsumme des linearen Prozesses für $k = 1, \dots, n$ in einen Hauptterm und zwei Restterme mit unabhängigen Summanden aufteilen

$$\begin{aligned} \bar{S}_k &= \sum_{i=1}^k Y_i = \sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j \varepsilon_{i-j} \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^k \varepsilon_i \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j}_{=: \bar{S}_{k,0}} + \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_{-i} \sum_{j=1+i}^{k+i} \beta_j}_{=: \bar{R}_{k,1}} - \underbrace{\sum_{i=1}^k \varepsilon_i \sum_{j=k-i+1}^{\infty} \beta_j}_{=: \bar{R}_{k,2}}. \end{aligned}$$

Damit können wir für die starke Approximation die Unterteilung

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq k \leq n} |\bar{S}_k - \bar{W}(k\beta^2\sigma_\varepsilon^2)| &\leq \max_{1 \leq k \leq n} |\bar{S}_{k,0} - \bar{W}(k\beta^2\sigma_\varepsilon^2)| \\ &\quad + \max_{1 \leq k \leq n} |\bar{R}_{k,1}| + \max_{1 \leq k \leq n} |\bar{R}_{k,2}| \end{aligned} \quad (4.4)$$

vornehmen. Mit Hilfe von Komlós et al. (1976) werden wir nachfolgend die starke Approximation für den Hauptterm $\bar{S}_{k,0}$ herleiten und danach die Beschränktheit der beiden Restterme $\bar{R}_{k,1}$ und $\bar{R}_{k,2}$ zeigen.

Mit der Definition

$$\tilde{S}_{k,0} := \sum_{i=1}^k \varepsilon_i,$$

für die Partialsumme der unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen $(\varepsilon_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, und

[A5] (iii) erhalten wir für den Hauptterm $\bar{S}_{k,0}$ die Darstellung

$$\bar{S}_{k,0} = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j \sum_{i=1}^k \varepsilon_i = \beta \tilde{S}_{k,0}. \quad (4.5)$$

Unter den Voraussetzungen [A5] (i) und (ii) erhalten wir $\mathbb{E}(\tilde{S}_{k,0}) = 0$ und $\text{Var}(\tilde{S}_{k,0}) = k \sigma_\varepsilon^2$. Dadurch ergibt sich für den Hauptterm $\bar{S}_{k,0}$, dass $\mathbb{E}(\bar{S}_{k,0}) = 0$ und $\text{Var}(\bar{S}_{k,0}) = k \beta^2 \sigma_\varepsilon^2$. Wie bereits erwähnt, liefert Komlós et al. (1976) eine starke Approximation für unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen. Unter [A5] (i) und (ii) können wir Theorem 2 aus Komlós et al. (1976) auf $\tilde{S}_{k,0}$ anwenden und erhalten auf einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum die starke Approximation von $\tilde{S}_{k,0}$ durch einen Wiener Prozess \widetilde{W} mit

$$\max_{1 \leq k \leq n} \left| \tilde{S}_{k,0} - \widetilde{W}(k\sigma_\varepsilon^2) \right| = o_{f.s.} \left(n^{1/r} \right). \quad (4.6)$$

Nun werden wir diese starke Approximation auf $\bar{S}_{k,0}$ übertragen. Unter [A5] (iii) gilt mit der geometrischen Reihe für β , dass

$$\beta = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j \leq C \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j = C \frac{1}{1-\rho} < \infty.$$

Des Weiteren definieren wir einen Wiener Prozess \bar{W} für alle $t \geq 0$ mit Hilfe des Wiener Prozesses \widetilde{W} , sodass

$$\bar{W}(t) := \beta \widetilde{W}(t/\beta^2).$$

Somit erhalten wir zusammen mit (4.5) und (4.6) die starke Approximation für $\bar{S}_{k,0}$

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq k \leq n} \left| \bar{S}_{k,0} - \bar{W}(k\beta^2\sigma_\varepsilon^2) \right| &= \max_{1 \leq k \leq n} \left| \beta \tilde{S}_{k,0} - \beta \widetilde{W}(k\sigma_\varepsilon^2) \right| \\ &= \beta \max_{1 \leq k \leq n} \left| \tilde{S}_{k,0} - \widetilde{W}(k\sigma_\varepsilon^2) \right| = o_{f.s.} \left(n^{1/r} \right). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Im Folgenden werden wir die Restterme untersuchen. Für den ersten Restterm $\bar{R}_{k,1}$ betrachten wir die Abschätzung

$$|\bar{R}_{k,1}| = \left| \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_{-i} \sum_{j=1+i}^{k+i} \beta_j \right| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |\varepsilon_{-i}| \sum_{j=1+i}^{\infty} |\beta_j|.$$

Da diese Abschätzung für alle $k = 1, \dots, n$ gilt, folgt für das Maximum von $\bar{R}_{k,1}$

$$\max_{1 \leq k \leq n} |\bar{R}_{k,1}| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |\varepsilon_{-i}| \sum_{j=1+i}^{\infty} |\beta_j|.$$

Um nun die Größenordnung dieses Terms zu berechnen, untersuchen wir seinen Erwartungswert. Wir erhalten mit den Voraussetzungen [A5] und der geometrischen Reihe, dass

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\max_{1 \leq k \leq n} |\bar{R}_{k,1}| \right] &\leq \mathbb{E} \left[\sum_{i=0}^{\infty} |\varepsilon_{-i}| \sum_{j=1+i}^{\infty} |\beta_j| \right] \leq \mathbb{E} (|\varepsilon_1|) \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1+i}^{\infty} C \rho^j \\ &= C \mathbb{E} (|\varepsilon_1|) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\rho^{i+1}}{1-\rho} = C \mathbb{E} (|\varepsilon_1|) \frac{\rho}{(1-\rho)^2} < \infty. \end{aligned}$$

Dadurch folgt

$$\max_{1 \leq k \leq n} |\bar{R}_{k,1}| = O_{f.s.}(1). \quad (4.8)$$

Mit ähnlichen Überlegungen untersuchen wir nun den zweiten Restterm $\bar{R}_{k,2}$. Wir erhalten zunächst die Abschätzung

$$|\bar{R}_{k,2}| = \left| \sum_{i=1}^k \varepsilon_i \sum_{j=k-i+1}^{\infty} \beta_j \right| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\varepsilon_i| \sum_{j=i}^{\infty} |\beta_j|$$

für alle $k = 1, \dots, n$ und somit auch für dessen Maximum

$$\max_{1 \leq k \leq n} |\bar{R}_{k,2}| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\varepsilon_i| \sum_{j=i}^{\infty} |\beta_j|.$$

Nun erhalten wir analog zu obigen Rechnungen, dass

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\max_{1 \leq k \leq n} |\bar{R}_{k,2}| \right] &\leq \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^{\infty} |\varepsilon_i| \sum_{j=i}^{\infty} |\beta_j| \right] \leq \mathbb{E} (|\varepsilon_1|) \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=i}^{\infty} C \rho^j \\ &= C \mathbb{E} (|\varepsilon_1|) \frac{\rho}{(1-\rho)^2} < \infty, \end{aligned}$$

wodurch

$$\max_{1 \leq k \leq n} |\bar{R}_{k,2}| = O_{f.s.}(1). \quad (4.9)$$

Zum Schluss fassen wir die drei Terme (4.7), (4.8) und (4.9) zusammen und erhalten mit (4.4) die starke Approximation

$$\max_{1 \leq k \leq n} |\bar{S}_k - \bar{\mathbb{W}}(k\beta^2\sigma_\varepsilon^2)| = o_{f.s.}(n^{1/r}) + O_{f.s.}(1) = o_{f.s.}(n^{1/r}).$$

□

Somit erhalten wir für die starke Approximation eines linearen Prozesses mit Satz 4.2 die gleiche Rate wie sie Komlós et al. (1976) im Fall von unabhängigen Zufallsvariablen beim Vorliegen von endlichen Momenten erreicht haben.

Da sich verschiedene Prozesse unter gewissen Voraussetzungen als lineare Prozesse darstellen lassen, wie Brockwell und Davis (1991) zeigt, lässt sich Satz 4.2 auf eine Vielzahl von Fällen anwenden. Dazu zählen zum einen MA-Prozesse, weil diese Spezialfälle des linearen Prozesses sind. Zum anderen können auch autoregressive Prozesse unter bestimmten Voraussetzungen in lineare Prozesse umgeformt werden. Wir betrachten hierfür einen AR(p)-Prozess $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ mit

$$X_t = \sum_{k=1}^p \alpha_k X_{t-k} + \epsilon_t,$$

wobei wir eine stationäre Folge $(\epsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ gegeben haben. Für diese gilt $\mathbb{E}(\epsilon_t) = 0$, $\mathbb{E}(\epsilon_t^2) < \infty$ und $\sup_t \mathbb{E}(|\epsilon_t|) < \infty$. Mit Hilfe des Verschiebungsoperators B mit $BX_t := X_{t-1}$ gilt $\alpha(B)X_t = \epsilon_t$ mit $\alpha(B) = B^0 - \alpha_1 B^1 - \dots - \alpha_p B^p$. Falls nun das autoregressive Polynom $\alpha(\cdot)$ keine Nullstellen im komplexen Einheitskreis besitzt, existiert eine Folge $(\beta_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ mit $\alpha(z) \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k z^k = 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$, wobei $|z| < c := \min\{|c_1|, \dots, |c_p|\}$ und c_1, \dots, c_p sind die Nullstellen von $\alpha(\cdot)$. Dabei sind die β_k reell mit $|\beta_k| \leq C_\epsilon (c - \epsilon)^{-k}$ für alle $\epsilon > 0$ und $k \in \mathbb{N}_0$. Unter diesen Bedingungen können wir X_t als kausalen linearen Prozess

$$X_t = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \epsilon_{t-k}$$

darstellen.

Des Weiteren besteht ein ARMA-Prozess aus einem autoregressiven Anteil und einem moving-average Anteil. Daher kann dieser unter oben genannten Voraussetzungen auch in einen linearen Prozess umgeformt werden.

4.3 Coupling von Partialsummen für das Blockwise DWB

Den Nachweis der asymptotischen Korrektheit des simultanen Konfidenzbandes führen wir mit Hilfe der Coupling-Technik. Dazu wurde die Partialsumme des Fehlerprozesses in Kapitel 4.1 mit der starken Approximation an einen Wiener Prozess gekoppelt. Im vorliegenden Abschnitt werden wir nun das Coupling des Bootstrap-Partialsummenprozesses $(S_k^*)_{k=1, \dots, n}$, mit

$$S_k^* = \sum_{m=1}^k e_m^*$$

für $k = 1, \dots, n$, herleiten. Dabei ergeben sich die Pseudo-Fehler $(e_i^*)_{i=1, \dots, n}$ mit Hilfe des Blockwise Dependent Wild Bootstrap-Verfahrens aus Kapitel 2.3.1. Die Hilfsvariablen $(W_i)_{i=1, \dots, n}$ werden hierbei in sogenannte Blöcke der maximalen Länge l_n unterteilt, d. h. l_n Hilfsvariablen bilden einen Block. Somit erhalten wir $[n/l_n]$ Blöcke der Länge l_n , plus einen möglichen Restblock mit $n - [n/l_n]l_n$ Variablen, falls n/l_n nicht ganzzahlig ist. Innerhalb des l -ten Blockes werden die Zufallsvariablen $W_{(l-1)l_n+1}, \dots, W_{ll_n}$ als eine Zufallsvariable V_l für $l = 1, \dots, [n/l_n]$, sowie die Zufallsvariablen $W_{[n/l_n]l_n+1}, \dots, W_n$ des Restblockes als $V_{[n/l_n]+1}$, definiert. Wir unterteilen die Partialsumme S_k^* in einen Hauptterm, welcher die Bootstrap-Variablen mit Indizes innerhalb der vollständigen Blöcke der Länge l_n untersucht, und einen Restterm, welcher sich durch einen möglichen Restblock ergibt. Dadurch gilt

$$\begin{aligned} S_k^* &= \sum_{m=1}^k e_m^* = \sum_{m=1}^k \hat{e}_m W_m \\ &= \sum_{l=1}^{[k/l_n]} V_l \sum_{m=(l-1)l_n+1}^{ll_n} \hat{e}_m + V_{[k/l_n]+1} \sum_{m=[k/l_n]l_n+1}^k \hat{e}_m \end{aligned}$$

für $k = 1, \dots, n$. Die Zufallsvariablen $(V_l)_{l=1, \dots, [n/l_n]+1}$ sind unabhängig und standardnormalverteilt, somit ist S_k^* , bedingt auf die Originalstichprobe $(X_i)_{i=1, \dots, n}$, normalverteilt mit

$$S_k^* \sim \mathcal{N} \left(0, \sum_{l=1}^{[k/l_n]} \left(\sum_{m=(l-1)l_n+1}^{ll_n} \hat{e}_m \right)^2 + \left(\sum_{m=[k/l_n]l_n+1}^k \hat{e}_m \right)^2 \right).$$

Des Weiteren sind die Partialsummen der Bootstrap-Variablen deren Indizes innerhalb eines Blockes liegen und die Partialsummen der Bootstrap-Variablen deren Indizes innerhalb eines anderen Blockes liegen aufgrund der Unabhängigkeit und Normalverteilung der Zufallsvariablen $(V_l)_{l=1, \dots, [n/l_n]+1}$ unabhängig voneinander und jeweils normalverteilt. Wodurch eine Summe über diese Partialsummen ebenso normalverteilt ist. Diese Verteilungseigenschaft besitzt auch ein Wiener Prozess.

Für den Nachweis der asymptotischen Korrektheit des simultanen Konfidenzbandes soll der Bootstrap-Fehlerprozess das Verhalten des unbekanntes Fehlerprozesses imitieren. Hierfür werden wir die jeweiligen Partialsummenprozesse $(S_k)_{k=1, \dots, n}$ und $(S_k^*)_{k=1, \dots, n}$ aneinander koppeln. Die starke Approximation des Partialsummenprozesses der Fehlervariablen $(e_i)_{i=1, \dots, n}$ wurde in Kapitel 4.1 aufgezeigt. Weiterhin werden wir im vorliegenden Abschnitt die gleichmäßige Approximation der Bootstrap-Partialsumme S_k^* durch einen Wiener Prozess herleiten. Das abschließende Coupling der Partialsummenprozesse $(S_k)_{k=1, \dots, n}$ und $(S_k^*)_{k=1, \dots, n}$ erfolgt im nachfolgenden Kapitel 5 mit Hilfe des Couplings der beiden Partialsummenprozesse an denselben Wiener Prozess.

Für die gleichmäßige Approximation von $(S_k^*)_{k=1, \dots, n}$ durch einen Wiener Prozess benötigen wir zusätzlich zu [A1] und [A2] noch die folgenden Voraussetzungen

[A6]

- (i) Für den Prozess $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ gilt für ein $\delta > 0$, dass $\mathbb{E}(|e_1|^{28+\delta}) < \infty$.
- (ii) Des Weiteren gilt für obiges δ , dass $\sum_{r=0}^{\infty} (r+1)^{26} (\alpha(r))^{\frac{\delta}{28+\delta}} < \infty$.
- (iii) Für die Blocklängen $(l_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gilt $l_n \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$, sowie $l_n = O\left(\frac{\sqrt{nb_n}}{\log(n)}\right)$ und $\frac{1}{l_n} = o\left(\frac{1}{\log(n)}\right)$.

Bemerkung

Beim Blockwise DWB muss die Blocklänge l_n mit steigendem Stichprobenumfang wachsen. Somit wird sichergestellt, dass die Abhängigkeit des Originalprozesses durch eine wachsende Blockgröße aufgefangen wird. Jedoch muss auch eine wachsende Anzahl an Blöcken in die Berechnung der Bootstrap-Größe $m_0^*(t)$ eingehen, um die Verteilung der Statistik gut imitieren zu können. Deshalb wird die Blocklänge durch $O(\sqrt{nb_n}/\log(n))$ beschränkt.

Beim Nachweis der asymptotischen Korrektheit der punktweisen Konfidenzintervalle in Kapitel 3 benötigten wir für die Beschränkung der Blocklänge l_n bereits die Größenordnung $o(nb_n)$. Diese Größenordnung muss beim Nachweis der asymptotischen Korrektheit von simultanen Konfidenzbändern notwendigerweise verschärft werden, da wir eine gleichmäßige Überdeckung und nicht nur eine punktweise erhalten wollen.

Im weiteren Verlauf der Arbeit nutzen wir eine Notation, welche in Neumann und Polzehl (1996) und Neumann und Paparoditis (2008) vorgestellt wurde.

Definition 4.1 (Neumann und Polzehl (1996), Definition 2.1)

Für jede Folge von Zufallsvariablen $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und jede Folge von nichtnegativen Konstanten $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gilt

$$Y_n = \tilde{O}(\alpha_n, \beta_n),$$

falls ein $C < \infty$ existiert, sodass

$$P(|Y_n| > C\alpha_n) \leq C\beta_n.$$

Bemerkung

Diese Notation ist stärker als die allgemein genutzte Notation O_P . Wir nutzen sie hier, weil wir für den Nachweis der asymptotischen Korrektheit von simultanen Konfidenzbändern Ergebnisse von der Art benötigen, dass mit einer hohen Wahrscheinlichkeit eine große Zahl von Zufallsvariablen gleichmäßig unter einem entsprechenden Schwellenwert liegen.

Für die Herleitung des Couplings des Bootstrap-Partialsummenprozesses benötigen wir den Abstand zwischen den Residuen und den Fehlern. Deshalb betrachten wir zunächst das folgende Lemma.

Lemma 4.2

Unter den Voraussetzungen [A1], [A2] und [A6] erhalten wir, für ein beliebig kleines $\delta > 0$ und ein beliebig großes $\gamma < \infty$, für den Abstand zwischen Residuum und Fehler die Größenordnung

$$|\hat{e}_i - e_i| = \tilde{O}\left(n^{\delta-2/5}, n^{-\gamma}\right)$$

für $i = 1, \dots, n$. Somit folgt für den maximalen Abstand

$$\sup_{1 \leq i \leq n} |\hat{e}_i - e_i| = \tilde{O}\left(n^{\delta-2/5}, n^{1-\gamma}\right).$$

Beweis

Für die Residuen gilt

$$\hat{e}_i = X_i - \hat{m}(i/n) = e_i + m(i/n) - \hat{m}(i/n)$$

für $i = 1, \dots, n$. Somit erhalten wir für den Abstand zwischen Residuum und Fehler

$$|\hat{e}_i - e_i| = |\hat{m}(i/n) - m(i/n)|.$$

In Kapitel 2.1 haben wir mit Hilfe der optimalen Bandbreite (2.7) die Größenordnung $O(n^{-4/5})$ für den mittleren quadratischen Fehler von $\hat{m}(t)$ berechnet. Dadurch erhalten wir mit (2.2) und der Jensenschen Ungleichung, dass $\mathbb{E}(|\hat{e}_i - e_i|) = O(n^{-2/5})$. Nun sei $\delta > 0$ beliebig klein, $\gamma < \infty$ beliebig groß und $a \in \mathbb{N}$. Dann gilt mit der Markov-Ungleichung die Abschätzung

$$P\left(|\hat{e}_i - e_i| \geq n^{-2/5} n^\delta\right) \leq \frac{\mathbb{E}(|\hat{e}_i - e_i|^a)}{n^{-2a/5} n^{a\delta}}. \quad (4.10)$$

Des Weiteren erhalten wir mit der Ungleichung $|b + c|^p \leq 2^{p-1}(|b|^p + |c|^p)$ für $1 \leq p < \infty$, sowie $\text{Bias}(\hat{m}(t)) = \mathbb{E}(\hat{m}(t)) - m(t)$ für $t \in [0, 1]$, dass

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(|\hat{e}_i - e_i|^a) \\ &= \mathbb{E}(|\hat{m}(i/n) - m(i/n)|^a) \\ &\leq 2^{a-1} \left\{ \mathbb{E}(|\hat{m}(i/n) - \mathbb{E}(\hat{m}(i/n))|^a) + \mathbb{E}(|\mathbb{E}(\hat{m}(i/n)) - m(i/n)|^a) \right\} \\ &= 2^{a-1} \left\{ \mathbb{E} \left(\left| \sum_{j=1}^n w_n(i/n, j) X_j - \mathbb{E} \left(\sum_{j=1}^n w_n(i/n, j) X_j \right) \right|^a \right) + |\mathbb{E}(\hat{m}(i/n)) - m(i/n)|^a \right\} \\ &= 2^{a-1} \left\{ \mathbb{E} \left(\left| \sum_{j=1}^n w_n(i/n, j) [m(j/n) + e_j] - \sum_{j=1}^n w_n(i/n, j) m(j/n) \right|^a \right) + |\text{Bias}(\hat{m}(i/n))|^a \right\} \end{aligned}$$

$$= 2^{a-1} \left\{ \mathbb{E} \left(\left| \sum_{j=1}^n w_n(i/n, j) e_j \right|^a \right) + |\text{Bias}(\widehat{m}(i/n))|^a \right\}. \quad (4.11)$$

Um nun das a -te absolute Moment des ersten Terms abzuschätzen, können wir unter den Voraussetzungen [A2] und [A6] die Rosenthal-Ungleichung von Lemma 2.3 für $2 < a \leq 28$ anwenden und erhalten

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left(\left| \sum_{j=1}^n w_n(i/n, j) e_j \right|^a \right) \\ & \leq C \sum_{j=1}^n (\mathbb{E} (|w_n(i/n, j) e_j|^{a+\epsilon}))^{\frac{a}{a+\epsilon}} + C \left[\sum_{j=1}^n (\mathbb{E} (|w_n(i/n, j) e_j|^{2+\epsilon}))^{\frac{2}{2+\epsilon}} \right]^{a/2} \\ & = C \sum_{j=1}^n |w_n(i/n, j)|^a (\mathbb{E} (|e_j|^{a+\epsilon}))^{\frac{a}{a+\epsilon}} + C \left[\sum_{j=1}^n |w_n(i/n, j)|^2 (\mathbb{E} (|e_j|^{2+\epsilon}))^{\frac{2}{2+\epsilon}} \right]^{a/2} \\ & \leq C \left(\max_{1 \leq j \leq n} \mathbb{E} (|e_j|^{a+\epsilon}) \right)^{\frac{a}{a+\epsilon}} \sum_{j=1}^n |w_n(i/n, j)|^a \\ & \quad + C \left(\max_{1 \leq j \leq n} \mathbb{E} (|e_j|^{2+\epsilon}) \right)^{\frac{a}{2+\epsilon}} \left[\sum_{j=1}^n |w_n(i/n, j)|^2 \right]^{a/2}. \end{aligned}$$

Unter den Voraussetzungen [A1] gilt für die Summe der Gewichte

$$\sum_{j=1}^n |w_n(i/n, j)|^a = \frac{1}{(nb_n)^a} \sum_{j=1}^n \left| K \left(\frac{i-j}{nb_n} \right) \right|^a = O \left(\frac{1}{(nb_n)^{a-1}} \right),$$

wodurch wir zusammen mit [A6] (i) die Größenordnung

$$\mathbb{E} \left(\left| \sum_{j=1}^n w_n(i/n, j) e_j \right|^a \right) = O \left(\frac{1}{(nb_n)^{a/2}} \right)$$

für den ersten Term von (4.11) erhalten. Weiterhin ergibt sich für den Bias unter [A1] und mit (2.3), dass $|\text{Bias}(\widehat{m}(i/n))|^a = O(b_n^{2a})$. Somit erhalten wir mit der optimalen Bandbreite (2.7) für (4.11), dass

$$\begin{aligned} \mathbb{E} (|\widehat{e}_i - e_i|^a) & \leq 2^{a-1} \left\{ O \left(\frac{1}{(nb_n)^{a/2}} \right) + O(b_n^{2a}) \right\} \\ & = O \left(n^{-4a/10} + n^{-2a/5} \right) = O \left(n^{-2a/5} \right). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Dadurch gilt mit (4.10) die Größenordnung

$$P\left(|\widehat{e}_i - e_i| \geq n^{-2/5}n^\delta\right) = O\left(n^{-a\delta}\right).$$

Wir setzen nun

$$a := \gamma/\delta. \tag{4.13}$$

Dadurch ergibt sich mit Definition 4.1 für den Abstand von Residuum und Fehler

$$|\widehat{e}_i - e_i| = \widetilde{O}\left(n^{\delta-2/5}, n^{-\gamma}\right).$$

Weiterhin erhalten wir für den Supremums-Abstand mit der Bonferroni-Ungleichung, sowie mit (4.10), (4.12) und (4.13), dass

$$\begin{aligned} P\left(\sup_{1 \leq i \leq n} |\widehat{e}_i - e_i| \geq n^{-2/5}n^\delta\right) &\leq \sum_{i=1}^n P\left(|\widehat{e}_i - e_i| \geq n^{-2/5}n^\delta\right) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \frac{\mathbb{E}\left(|\widehat{e}_i - e_i|^a\right)}{n^{-2a/5}n^{a\delta}} \\ &= O\left(\frac{n}{n^{a\delta}}\right) = O\left(n^{1-\gamma}\right). \end{aligned}$$

Mit Definition 4.1 folgt somit schlussendlich

$$\sup_{1 \leq i \leq n} |\widehat{e}_i - e_i| = \widetilde{O}\left(n^{\delta-2/5}, n^{1-\gamma}\right).$$

□

Bemerkung

Für den weiteren Verlauf dieser Arbeit nutzen wir für $a = \gamma/\delta$ mit einem beliebig kleinen $\delta > 0$ und einem beliebig großen $\gamma < \infty$ die Werte $a = 12$, $\delta = 9/100$ und $\gamma = 27/25$.

Nachfolgend bezeichnet $o_{P^*}(\cdot)$ und $O_{P^*}(\cdot)$ die Landau-Notation in P^* -Wahrscheinlichkeit. Hierbei bezeichnet P^* die Bootstrap-Verteilung, bedingt auf die Originalstichprobe $(X_i)_{i=1, \dots, n}$, d. h. $P^*(\cdot) = P(\cdot | X_1, \dots, X_n)$. Somit gilt

$$b_n = o_{P^*}(a_n),$$

falls für alle $\epsilon > 0$ die Konvergenz

$$P^*\left(\left|\frac{b_n}{a_n}\right| > \epsilon\right) \xrightarrow{P} 0$$

gilt. Weiterhin gilt

$$b_n = O_{P^*}(a_n),$$

falls für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta \in \mathbb{R}$ existiert, sodass

$$P^*(|b_n| \geq \delta|a_n|) \leq \epsilon.$$

Im nachfolgenden Teil des Abschnittes werden wir das Coupling des Partialsummenprozesses $(S_k^*)_{k=1, \dots, n}$, mit

$$S_k^* = \sum_{m=1}^k e_m^*,$$

an einen Wiener Prozess herleiten. Der Partialsummenprozess besteht hierbei aus den Pseudo-Fehlern $(e_i^*)_{i=1, \dots, n}$, welche mit Hilfe des Blockwise Dependent Wild Bootstrap-Verfahrens aus Kapitel 2.3.1 erzeugt werden.

Satz 4.3

Unter den Voraussetzungen [A1], [A2] und [A6] existiert auf einer geeigneten Erweiterung des zugrunde liegenden Wahrscheinlichkeitsraumes (Ω, \mathcal{A}, P) der Bootstrap-Partialsummenprozess $(S_k^*)_{k=1, \dots, n}$ und ein Wiener Prozess \mathbb{W}^* , sodass

$$\sup_{\substack{1 \leq j \leq \left\lfloor \frac{n}{M_n l_n} \right\rfloor \\ 1 \leq l \leq c M_n l_n}} \left| \left(S_{(j-1)M_n l_n + l}^* - S_{(j-1)M_n l_n}^* \right) - \left(\mathbb{W}^*(\sigma^2((j-1)M_n l_n + l)) - \mathbb{W}^*(\sigma^2(j-1)M_n l_n) \right) \right| = o_{P^*} \left(\frac{\sqrt{nb_n}}{\sqrt{\log(n)}} \right),$$

wobei $M_n := \left\lfloor \frac{nb_n}{l_n} \right\rfloor$ und $c \leq C < \infty$ fest.

Beweis

Wir möchten durch ein geeignetes Coupling den Partialsummenprozess $(S_k^*)_{k=1, \dots, n}$ der Bootstrap-Fehler an einen Wiener Prozess koppeln. Zur Berechnung der Bootstrap-Fehler nutzen wir das Blockwise DWB aus Kapitel 2.3.1. Wie zu Beginn des Abschnittes erläutert, werden bei diesem Verfahren die Hilfsvariablen in sogenannten Blöcken der Länge l_n zusammengefasst, d. h. l_n Hilfsvariablen bilden einen Block. Allen Hilfsvariablen innerhalb eines solchen Blockes wird eine standardnormalverteilte Zufallsvariable zugeteilt. Zum Abschätzen des Approximationsfehlers unterteilen wir somit heuristisch betrachtet die Summanden der Bootstrap-Partialsumme in große Blöcke der Länge nb_n und jeden solchen Block wiederum in kleine Blöcke der Länge l_n . Damit wir ganzzahlige Werte erhalten, nutzen wir jeweils den

ganzzahligen Anteil.

Die kleinen Blöcke bestehen jeweils aus l_n Variablen und die ganzzahlige Anzahl der kleinen Blöcke innerhalb eines großen Blockes definieren wir als $M_n := \left\lceil \frac{nl_n}{l_n} \right\rceil$. Somit bestehen die großen Blöcke jeweils aus $M_n l_n$ Variablen. Falls nun $\frac{n}{M_n l_n}$ ganzzahlig ist, erhalten wir $\left\lceil \frac{n}{M_n l_n} \right\rceil$ vollständige große Blöcke mit einer jeweiligen Länge von $M_n l_n$. Falls jedoch $\frac{n}{M_n l_n} > \left\lceil \frac{n}{M_n l_n} \right\rceil$, betrachten wir ebenso $\left\lceil \frac{n}{M_n l_n} \right\rceil$ vollständige große Blöcke der Länge $M_n l_n$, plus einen Block mit $n - \left\lceil \frac{n}{M_n l_n} \right\rceil M_n l_n$ und somit weniger als $M_n l_n$ Variablen.

1. Fall: $\frac{n}{M_n l_n} = \left\lceil \frac{n}{M_n l_n} \right\rceil$

Wir werden zunächst den Fall untersuchen, bei welchem $\frac{n}{M_n l_n}$ ganzzahlig ist. Hierbei unterteilen wir die Summanden der Bootstrap-Partialsumme in $\left\lceil \frac{n}{M_n l_n} \right\rceil$ große Blöcke der Länge $M_n l_n$ mit den Blocknummern $j = 1, \dots, \left\lceil \frac{n}{M_n l_n} \right\rceil$. Diese großen Blöcke unterteilen wir wiederum in M_n kleine Blöcke der Länge l_n mit den Blocknummern $l = 1, \dots, M_n$. Des Weiteren können die Indizes der Summanden der Partialsumme S_k^* ein Vielfaches der Blocklängen l_n bzw. $M_n l_n$ sein oder nicht. Somit betrachten wir die Indizes

$$k = (j-1)M_n l_n + (l-1)l_n + u \quad \text{mit}$$

$$j = 1, \dots, \left\lceil \frac{n}{M_n l_n} \right\rceil, l = 1, \dots, M_n \text{ und } u = 1, \dots, l_n.$$

Für den Fall, dass u den Wert l_n annimmt, ist k ein Vielfaches von l_n , ansonsten nicht.

Für alle $k = 1, \dots, n$ untersuchen wir nun die Bootstrap-Partialsumme deren Summanden innerhalb eines großen Blockes liegen, für alle großen Blöcke $j = 1, \dots, \left\lceil \frac{n}{M_n l_n} \right\rceil$. Ein solcher großer Block besteht aus M_n kleinen Blöcken der Länge l_n . Somit erhalten wir, je nachdem ob k ein Vielfaches von l_n ist, oder nicht, eine Unterteilung in eine Summe, deren Summanden wir vollständig in kleine Blöcke der Länge l_n aufteilen können und zusätzlich einen Restterm mit maximal l_n Summanden. Somit gilt für $k = (j-1)M_n l_n + (l-1)l_n + u$

$$\begin{aligned} S_k^* - S_{(j-1)M_n l_n}^* &= S_{(j-1)M_n l_n + (l-1)l_n + u}^* - S_{(j-1)M_n l_n}^* \\ &= \left(S_{(j-1)M_n l_n + (l-1)l_n}^* - S_{(j-1)M_n l_n}^* \right) + \left(S_{(j-1)M_n l_n + (l-1)l_n + u}^* - S_{(j-1)M_n l_n + (l-1)l_n}^* \right) \\ &= \sum_{h=1}^{l-1} \sum_{m=(j-1)M_n l_n + (h-1)l_n + 1}^{(j-1)M_n l_n + hl_n} e_m^* + \sum_{m=(j-1)M_n l_n + (l-1)l_n + 1}^{(j-1)M_n l_n + (l-1)l_n + u} e_m^* \end{aligned} \quad (4.14)$$

für $j = 1, \dots, \left\lceil \frac{n}{M_n l_n} \right\rceil$, $l = 1, \dots, M_n$ und $u = 1, \dots, l_n$. Der Übersichtlichkeit halber fassen wir die Indizes der Bootstrap-Fehlervariablen, welche einen sogenannten kleinen Block bilden,

in einer Menge zusammen. Daher betrachten wir die Mengen

$$I_{j,l} := \{(j-1)M_n l_n + (l-1)l_n + 1, \dots, (j-1)M_n l_n + ll_n\} \quad (4.15)$$

für $j = 1, \dots, \left\lfloor \frac{n}{M_n l_n} \right\rfloor$ und $l = 1, \dots, M_n$. Aufgrund des Blockwise DWB sind, wie bereits erwähnt, alle Hilfsvariablen $W_{(j-1)M_n l_n + (l-1)l_n + 1}, \dots, W_{(j-1)M_n l_n + ll_n}$ innerhalb eines kleinen Blockes als eine unabhängige und standardnormalverteilte Zufallsvariable $V_{(j-1)M_n l_n + l}$ für $j = 1, \dots, \left\lfloor \frac{n}{M_n l_n} \right\rfloor$ und $l = 1, \dots, M_n$ definiert. Somit sind die Bootstrap-Partialsummen der Fehlervariablen, deren Indizes innerhalb eines kleinen Blockes der Länge l_n liegen, unabhängig und normalverteilt mit

$$\sum_{m \in I_{j,l}} e_m^* = \sum_{m \in I_{j,l}} \hat{e}_m V_{(j-1)M_n l_n + l} \sim \mathcal{N} \left(0, \left(\sum_{m \in I_{j,l}} \hat{e}_m \right)^2 \right).$$

Die Partialsumme der Bootstrap-Fehlervariablen mit Indizes aus einem solchen vollständigen kleinen Block lässt sich daher als Zuwachs eines Wiener Prozesses darstellen. Ein Restterm in (4.14) mit weniger als l_n Summanden besteht aus abhängigen Fehlervariablen und kann somit nicht als Zuwachs eines Wiener Prozesses dargestellt werden. An seiner Stelle betrachten wir den Wiener Prozess mit einer anteiligen Stoppzeit. Damit die Stoppzeiten $\tau_{j,l}^*$ des Wiener Prozesses auf der Bootstrap-Seite mit den Stoppzeiten des Wiener Prozesses von der starken Approximation der Originalfehler übereinstimmen, werden die Stoppzeiten $\tau_{j,l}^*$ für $j = 1, \dots, \left\lfloor \frac{n}{M_n l_n} \right\rfloor$ und $l = 1, \dots, M_n$ geeignet gewählt und eine Normierung über den jeweiligen Block der Länge $M_n l_n$ vorgenommen.

Somit definieren wir für jeden Block der Länge $M_n l_n$ für $j = 1, \dots, \left\lfloor \frac{n}{M_n l_n} \right\rfloor$ und $l = 1, \dots, M_n$ die Bootstrap-Partialsumme der Fehlervariablen, deren Indizes innerhalb eines vollständigen kleinen Blockes liegen, als einen normierten Zuwachs eines Wiener Prozesses \mathbb{W}^* so, dass

$$\sum_{m \in I_{j,l}} e_m^* := \sqrt{\frac{\text{Var}^* \left(S_{jM_n l_n}^* - S_{(j-1)M_n l_n}^* \right)}{\sigma^2 M_n l_n}} \left[\mathbb{W}^* \left(\tau_{j,l}^* \right) - \mathbb{W}^* \left(\tau_{j,l-1}^* \right) \right] \quad (4.16)$$

mit

$$\frac{\tau_{j,l}^* - \tau_{j,0}^*}{\sigma^2 M_n l_n} := \frac{\text{Var}^* \left(S_{(j-1)M_n l_n + ll_n}^* - S_{(j-1)M_n l_n}^* \right)}{\text{Var}^* \left(S_{jM_n l_n}^* - S_{(j-1)M_n l_n}^* \right)} = \frac{\sum_{h=1}^l \left(\sum_{m \in I_{j,h}} \hat{e}_m \right)^2}{\text{Var}^* \left(S_{jM_n l_n}^* - S_{(j-1)M_n l_n}^* \right)}$$

und

$$\tau_{j,0}^* := (j-1) \sigma^2 M_n l_n.$$

Mit Hilfe dieses Couplings erhalten wir

$$S_{(j-1)M_n l_n + l_n}^* - S_{(j-1)M_n l_n + (l-1)l_n}^* = \sqrt{\frac{\text{Var}^*(S_{jM_n l_n}^* - S_{(j-1)M_n l_n}^*)}{\sigma^2 M_n l_n}} [\mathbb{W}^*(\tau_{j,l}^*) - \mathbb{W}^*(\tau_{j,l-1}^*)]$$

für alle $j = 1, \dots, \lfloor \frac{n}{M_n l_n} \rfloor$ und $l = 1, \dots, M_n$, wodurch die Approximationen der Partialsummen der jeweiligen großen Blöcke aneinander gereiht werden können. Somit genügt es, die Approximation der Bootstrap-Partialsumme eines großen Blockes zu untersuchen. Daher betrachten wir nun die Partialsumme der Bootstrap-Fehlervariablen mit Indizes aus einem großen Block mit einer Länge von $M_n l_n$. Somit untersuchen wir die Approximation von $S_k^* - S_{(j-1)M_n l_n}^*$ durch den Zuwachs des Wiener Prozesses mit $k = (j-1)M_n l_n + (l-1)l_n + u$ für $j = 1, \dots, \lfloor \frac{n}{M_n l_n} \rfloor$, $l = 1, \dots, M_n$ und $u = 1, \dots, l_n$. Dafür ergibt sich mit einer anteiligen Stoppzeit für den Restterm in (4.14) die Unterteilung

$$\begin{aligned} & \left| \left(S_{(j-1)M_n l_n + (l-1)l_n + u}^* - S_{(j-1)M_n l_n}^* \right) - \left(\mathbb{W}^* \left(\tau_{j,l-1}^* + \frac{u}{l_n} (\tau_{j,l}^* - \tau_{j,l-1}^*) \right) - \mathbb{W}^* (\tau_{j,0}^*) \right) \right| \\ & \leq \left| \left(S_{(j-1)M_n l_n + (l-1)l_n}^* - S_{(j-1)M_n l_n}^* \right) - \left(\mathbb{W}^* (\tau_{j,l-1}^*) - \mathbb{W}^* (\tau_{j,0}^*) \right) \right| \\ & \quad + \left| S_{(j-1)M_n l_n + (l-1)l_n + u}^* - S_{(j-1)M_n l_n + (l-1)l_n}^* \right| \\ & \quad + \left| \mathbb{W}^* \left(\tau_{j,l-1}^* + \frac{u}{l_n} (\tau_{j,l}^* - \tau_{j,l-1}^*) \right) - \mathbb{W}^* (\tau_{j,l-1}^*) \right| \\ & =: Z_1 + Z_2 + Z_3. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Dabei liefert der erste Term Z_1 die Approximation der Bootstrap-Partialsumme, deren Variablenindizes vollständig in kleine Blöcke der Länge l_n unterteilt werden können. Die Terme Z_2 und Z_3 entstehen aufgrund des Restterms von (4.14) mit maximal l_n Summanden. Für den Hauptterm Z_1 erhalten wir mit Hilfe des Couplings von (4.16) zunächst

$$\begin{aligned} & S_{(j-1)M_n l_n + (l-1)l_n}^* - S_{(j-1)M_n l_n}^* \\ & = \sum_{h=1}^{l-1} \sum_{m \in I_{j,h}} e_m^* \\ & = \sum_{h=1}^{l-1} \sqrt{\frac{\text{Var}^*(S_{jM_n l_n}^* - S_{(j-1)M_n l_n}^*)}{\sigma^2 M_n l_n}} [\mathbb{W}^*(\tau_{j,h}^*) - \mathbb{W}^*(\tau_{j,h-1}^*)] \\ & = \sqrt{\frac{\text{Var}^*(S_{jM_n l_n}^* - S_{(j-1)M_n l_n}^*)}{\sigma^2 M_n l_n}} [\mathbb{W}^*(\tau_{j,l-1}^*) - \mathbb{W}^*(\tau_{j,0}^*)]. \end{aligned}$$

Damit gilt für Z_1 die Abschätzung

$$\begin{aligned} Z_1 &= \left| \left(S_{(j-1)M_n l_n + (l-1)l_n}^* - S_{(j-1)M_n l_n}^* \right) - (\mathbb{W}^*(\tau_{j,l-1}^*) - \mathbb{W}^*(\tau_{j,0}^*)) \right| \\ &\leq \left| \left(\sqrt{\frac{\text{Var}^*(S_{jM_n l_n}^* - S_{(j-1)M_n l_n}^*)}{\sigma^2 M_n l_n}} - 1 \right) [\mathbb{W}^*(\tau_{j,l-1}^*) - \mathbb{W}^*(\tau_{j,0}^*)] \right|. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Für die Zuwächse eines Wiener Prozesses gilt mit Ungleichung 1 aus Kapitel 14.1 von Shorack und Wellner (1986, S. 536), dass

$$\sup_{h \in [0, s]} \sup_{t \in [0, 1-h]} |\mathbb{W}(t+h) - \mathbb{W}(t)| = O_P \left(\sqrt{s \log(1/s)} \right)$$

für $0 < s < 1$. Damit erhalten wir für $0 < a < n$ mit der Selbstähnlichkeit des Wiener Prozesses

$$\begin{aligned} \sup_{h \in [0, a]} \sup_{t \in [0, n-h]} |\mathbb{W}(t+h) - \mathbb{W}(t)| &= \sup_{h \in [0, a/n]} \sup_{t \in [0, 1-h]} |\mathbb{W}(n(t+h)) - \mathbb{W}(nt)| \\ &\stackrel{d}{=} \sup_{h \in [0, a/n]} \sup_{t \in [0, 1-h]} \left| \sqrt{n} \widetilde{\mathbb{W}}(t+h) - \sqrt{n} \widetilde{\mathbb{W}}(t) \right| \\ &= \sqrt{n} \sup_{h \in [0, a/n]} \sup_{t \in [0, 1-h]} \left| \widetilde{\mathbb{W}}(t+h) - \widetilde{\mathbb{W}}(t) \right| \\ &= \sqrt{n} O_P \left(\sqrt{a/n \log(n/a)} \right) \\ &= O_P \left(\sqrt{a \log(n)} \right). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Dadurch gilt für den maximalen Zuwachs des Wiener Prozesses aus (4.18) die Größenordnung

$$\sup_{\substack{1 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{M_n l_n} \rfloor \\ 1 \leq l \leq M_n}} |\mathbb{W}^*(\tau_{j,l-1}^*) - \mathbb{W}^*(\tau_{j,0}^*)| = O_{P^*} \left(\sqrt{nb_n} \sqrt{\log(n)} \right). \quad (4.20)$$

Weiterhin untersuchen wir den ersten Faktor der rechten Seite von (4.18). Dafür erhalten wir die Ungleichung

$$\left| \sqrt{\frac{\text{Var}^*(S_{jM_n l_n}^* - S_{(j-1)M_n l_n}^*)}{\sigma^2 M_n l_n}} - 1 \right| \leq \left| \frac{\text{Var}^*(S_{jM_n l_n}^* - S_{(j-1)M_n l_n}^*) - \sigma^2 M_n l_n}{\sigma^2 M_n l_n} \right|. \quad (4.21)$$

Den Zähler der rechten Seite unterteilen wir in

$$\begin{aligned}
& \left| \text{Var}^* \left(S_{jM_n l_n}^* - S_{(j-1)M_n l_n}^* \right) - \sigma^2 M_n l_n \right| \\
& \leq \left| \text{Var}^* \left(S_{jM_n l_n}^* - S_{(j-1)M_n l_n}^* \right) - \text{Var} \left(S_{jM_n l_n} - S_{(j-1)M_n l_n} \right) \right| \\
& \quad + \left| \text{Var} \left(S_{jM_n l_n} - S_{(j-1)M_n l_n} \right) - \sigma^2 M_n l_n \right| \\
& =: Z_{1,1} + Z_{1,2}. \tag{4.22}
\end{aligned}$$

Mit Hilfe des nachfolgenden Lemmas 4.3 erhalten wir für den ersten Term die Größenordnung

$$\begin{aligned}
Z_{1,1} &= \left| \text{Var}^* \left(S_{jM_n l_n}^* - S_{(j-1)M_n l_n}^* \right) - \text{Var} \left(S_{jM_n l_n} - S_{(j-1)M_n l_n} \right) \right| \\
&= \tilde{O} \left(nb_n l_n n^{2\delta-4/5} + nb_n l_n^{1/2} n^{2\delta-2/5} + \sqrt{nb_n l_n} n^\delta, n^{-\gamma} \right) + O \left(\frac{nb_n}{l_n} \right). \tag{4.23}
\end{aligned}$$

Weiterhin untersuchen wir für $Z_{1,2}$ den Abstand der Varianz der Partialsumme, welche aus den Fehlervariablen mit Indizes aus einem großen Block besteht, und $\sigma^2 M_n l_n$. Hierbei nutzen wir die Kovarianzungleichung (4.39) aus Lemma 4.3. Diese besagt

$$|\text{Cov}(e_i, e_m)| \leq 4C(\alpha(r))^{\frac{\delta}{28+\delta}}$$

für $i, m = 1, \dots, n$ mit $i \leq m$ und $r = m - i$. Dadurch erhalten wir mit [A2] und [A6] (ii) die Abschätzung

$$\begin{aligned}
Z_{1,2} &= \left| \text{Var} \left(S_{jM_n l_n} - S_{(j-1)M_n l_n} \right) - \sigma^2 M_n l_n \right| \\
&= M_n l_n \left| \frac{1}{M_n l_n} \sum_{h,m=(j-1)M_n l_n+1}^{jM_n l_n} \text{Cov}(e_h, e_m) - \sigma^2 \right| \\
&= M_n l_n \left| \sum_{h=-(M_n l_n-1)}^{M_n l_n-1} \left(1 - \frac{|h|}{M_n l_n} \right) \text{Cov}(e_0, e_h) - \sum_{h=-\infty}^{\infty} \text{Cov}(e_0, e_h) \right| \\
&= M_n l_n \left| \sum_{h=-\infty}^{\infty} \left(1 - \left(1 - \frac{|h|}{M_n l_n} \right)_+ \right) \text{Cov}(e_0, e_h) \right| \\
&\leq 2 M_n l_n \sum_{h=0}^{\infty} \frac{h}{M_n l_n} 4C(\alpha(h))^{\frac{\delta}{28+\delta}} \\
&= C \sum_{h=0}^{\infty} h (\alpha(h))^{\frac{\delta}{28+\delta}} < \infty
\end{aligned}$$

und somit

$$Z_{1,2} = O(1). \tag{4.24}$$

Dadurch ergibt sich mit (4.21), (4.22), (4.23) und (4.24) für den ersten Faktor von Z_1 die

Größenordnung

$$\begin{aligned}
& \left| \sqrt{\frac{\text{Var}^* \left(S_{jM_n l_n}^* - S_{(j-1)M_n l_n}^* \right)}{\sigma^2 M_n l_n}} - 1 \right| \\
&= \frac{1}{\sigma^2 M_n l_n} \left[\tilde{O} \left(nb_n l_n n^{2\delta-4/5} + nb_n l_n^{1/2} n^{2\delta-2/5} + \sqrt{nb_n l_n} n^\delta, n^{-\gamma} \right) + O \left(\frac{nb_n}{l_n} \right) + O(1) \right] \\
&= \tilde{O} \left(l_n n^{2\delta-4/5} + l_n^{1/2} n^{2\delta-2/5} + \sqrt{\frac{l_n}{nb_n}} n^\delta, n^{-\gamma} \right) + O \left(\frac{1}{l_n} + \frac{1}{nb_n} \right) \\
&= \tilde{O} \left(l_n n^{2\delta-4/5} + l_n^{1/2} n^{2\delta-2/5} + \sqrt{\frac{l_n}{nb_n}} n^\delta, n^{-\gamma} \right) + O \left(\frac{1}{l_n} \right).
\end{aligned}$$

Damit folgt für den maximalen Abstand über alle Indizes der großen Blöcke

$$\begin{aligned}
& \sup_{1 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{M_n l_n} \rfloor} \left| \sqrt{\frac{\text{Var}^* \left(S_{jM_n l_n}^* - S_{(j-1)M_n l_n}^* \right)}{\sigma^2 M_n l_n}} - 1 \right| \\
&= \tilde{O} \left(l_n n^{2\delta-4/5} + l_n^{1/2} n^{2\delta-2/5} + \sqrt{\frac{l_n}{nb_n}} n^\delta, n^{1-\gamma} \right) + O \left(\frac{1}{l_n} \right) \\
&= o_P \left(l_n n^{2\delta-4/5} + l_n^{1/2} n^{2\delta-2/5} + \sqrt{\frac{l_n}{nb_n}} n^\delta \right) + O \left(\frac{1}{l_n} \right),
\end{aligned}$$

da $\gamma > 1$ nach der Bemerkung auf Seite 46. Zusammen mit (4.18) und (4.20) erhalten wir für das Supremum von Z_1

$$\begin{aligned}
& \sup_{\substack{1 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{M_n l_n} \rfloor \\ 1 \leq l \leq M_n}} Z_1 \\
&= \left[o_P \left(l_n n^{2\delta-4/5} + l_n^{1/2} n^{2\delta-2/5} + \sqrt{\frac{l_n}{nb_n}} n^\delta \right) + O \left(\frac{1}{l_n} \right) \right] O_{P^*} \left(\sqrt{nb_n} \sqrt{\log(n)} \right) \\
&= o_{P^*} \left(\sqrt{\log(n)} \left\{ \sqrt{nb_n} l_n n^{2\delta-4/5} + \sqrt{nb_n l_n} n^{2\delta-2/5} + \sqrt{l_n} n^\delta \right\} \right) + O_{P^*} \left(\frac{\sqrt{nb_n} \sqrt{\log(n)}}{l_n} \right).
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Weiterhin müssen die Größenordnungen für die Restterme Z_2 und Z_3 von (4.17) bestimmt werden. Dafür betrachten wir zunächst das zweite Moment von Z_2 . Die Partialsumme, welche durch Z_2 dargestellt wird, besteht aus maximal l_n Summanden in Abhängigkeit von u . Den Hilfsvariablen $W_{(j-1)M_n l_n + (l-1)l_n + 1}, \dots, W_{(j-1)M_n l_n + (l-1)l_n + u}$ der Bootstrap-Fehlervariablen dieser Partialsumme wird eine standardnormalverteilte Variable $V_{(j-1)M_n l_n + l}$ durch das Blockwise DWB zugeordnet. Dadurch erhalten wir mit dem Abstand zwischen Residuum und Fehler

die Unterteilung

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^*(Z_2)^2 &= \text{Var}^* \left(\sum_{m=(j-1)M_n l_n + (l-1)l_n + 1}^{(j-1)M_n l_n + (l-1)l_n + u} e_m^* \right) = \left(\sum_{m=(j-1)M_n l_n + (l-1)l_n + 1}^{(j-1)M_n l_n + (l-1)l_n + u} \widehat{e}_m \right)^2 \\
&= \left(\sum_{m=(j-1)M_n l_n + (l-1)l_n + 1}^{(j-1)M_n l_n + (l-1)l_n + u} (\widehat{e}_m - e_m) \right)^2 + \left(\sum_{m=(j-1)M_n l_n + (l-1)l_n + 1}^{(j-1)M_n l_n + (l-1)l_n + u} e_m \right)^2 \\
&\quad + 2 \left(\sum_{m=(j-1)M_n l_n + (l-1)l_n + 1}^{(j-1)M_n l_n + (l-1)l_n + u} (\widehat{e}_m - e_m) \right) \left(\sum_{m=(j-1)M_n l_n + (l-1)l_n + 1}^{(j-1)M_n l_n + (l-1)l_n + u} e_m \right) \\
&=: Z_{2,1} + Z_{2,2} + Z_{2,3}.
\end{aligned}$$

Mit Lemma 4.2 ergibt sich für den ersten Term die Größenordnung

$$Z_{2,1} = \widetilde{O} \left(l_n^2 n^{2\delta-4/5}, n^{-\gamma} \right).$$

Weiterhin erhalten wir für $Z_{2,2}$ mit analogen Berechnungen wie für (4.41) aus Lemma 4.3, dass

$$Z_{2,2} = \widetilde{O} \left(l_n n^{2\delta}, n^{-\gamma} \right).$$

Zum Schluss folgt durch das Produkt der Wurzeln von $Z_{2,1}$ und $Z_{2,2}$ mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung, dass

$$Z_{2,3} = \widetilde{O} \left(l_n^{3/2} n^{2\delta-2/5}, n^{-\gamma} \right).$$

Fassen wir nun alle drei Terme zusammen, so erhalten wir für Z_2 und den maximalen Wert von Z_2 die Größenordnungen

$$\begin{aligned}
Z_2 &= \widetilde{O} \left(l_n n^{\delta-2/5} + \sqrt{l_n} n^\delta, n^{-\gamma} \right), \\
\sup_{\substack{1 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{M_n l_n} \rfloor \\ 1 \leq l \leq M_n \\ 1 \leq u \leq l_n}} Z_2 &= \widetilde{O} \left(l_n n^{\delta-2/5} + \sqrt{l_n} n^\delta, n^{1-\gamma} \right) = o_P \left(l_n n^{\delta-2/5} + \sqrt{l_n} n^\delta \right), \quad (4.26)
\end{aligned}$$

da $\gamma > 1$. Des Weiteren gilt die Größenordnung

$$\sup_{\substack{1 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{M_n l_n} \rfloor \\ 1 \leq l \leq M_n}} |\tau_{j,l}^* - \tau_{j,l-1}^*| = O_P(l_n).$$

Dadurch erhalten wir mit (4.19) für das Maximum des Zuwachses des Wiener Prozesses in Z_3

von (4.17), dass

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{1 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{M_n l_n} \rfloor \\ 1 \leq l \leq M_n \\ 1 \leq u \leq l_n}} Z_3 &= \sup_{\substack{1 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{M_n l_n} \rfloor \\ 1 \leq l \leq M_n \\ 1 \leq u \leq l_n}} \left| \mathbb{W}^* \left(\tau_{j,l-1}^* + \frac{u}{l_n} (\tau_{j,l}^* - \tau_{j,l-1}^*) \right) - \mathbb{W}^* (\tau_{j,l-1}^*) \right| \\ &= O_{P^*} \left(\sqrt{l_n} \sqrt{\log(n)} \right). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Nun erhalten wir mit (4.17), (4.25), (4.26) und (4.27) die Approximation der Bootstrap-Partialsumme, welche aus den Fehlervariablen besteht, deren Indizes innerhalb eines großen Blockes liegen. Es gilt

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{1 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{M_n l_n} \rfloor \\ 1 \leq l \leq M_n \\ 1 \leq u \leq l_n}} & \left| \left(S_{(j-1)M_n l_n + (l-1)l_n + u}^* - S_{(j-1)M_n l_n}^* \right) \right. \\ & \left. - \left(\mathbb{W}^* \left(\tau_{j,l-1}^* + \frac{u}{l_n} (\tau_{j,l}^* - \tau_{j,l-1}^*) \right) - \mathbb{W}^* (\tau_{j,0}^*) \right) \right| \\ &= O_{P^*} \left(\sqrt{\log(n)} \left\{ \sqrt{nb_n l_n} n^{2\delta-4/5} + \sqrt{nb_n l_n} n^{2\delta-2/5} + \sqrt{l_n} n^\delta \right\} + l_n n^{\delta-2/5} \right. \\ & \quad \left. + \sqrt{l_n} n^\delta \right) + O_{P^*} \left(\frac{\sqrt{nb_n} \sqrt{\log(n)}}{l_n} + \sqrt{l_n} \sqrt{\log(n)} \right). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Für $j = 1, \dots, \lfloor \frac{n}{M_n l_n} \rfloor$ sind alle Partialsummen $S_{(j-1)M_n l_n + (l-1)l_n + u}^* - S_{(j-1)M_n l_n}^*$ mit maximal $M_n l_n$ Summanden aufgrund der Unabhängigkeit der Variablen $(V_h)_{h=1, \dots, \lfloor n/l_n \rfloor}$ des Blockwise DWB unabhängig voneinander. Des Weiteren gilt, wie bereits erwähnt, $S_{(j-1)M_n l_n + l_n}^* - S_{(j-1)M_n l_n + (l-1)l_n}^* = \sqrt{\text{Var}^*(S_{jM_n l_n}^* - S_{(j-1)M_n l_n}^*) / \sigma^2 M_n l_n} \left[\mathbb{W}^* (\tau_{j,l}^*) - \mathbb{W}^* (\tau_{j,l-1}^*) \right]$. Daher können wir die Approximationen dieser Partialsummen aneinanderreihen. Weiterhin besitzen sie mit (4.28) alle den gleichen Approximationsfehler. Aufgrund des geeigneten Couplings der Bootstrap-Partialsummen an die normierten Zuwächse des Wiener Prozesses erhalten wir für die Approximation des Bootstrap-Partialsummenprozesses

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{1 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{M_n l_n} \rfloor \\ 1 \leq l \leq c M_n l_n}} & \left| \left(S_{(j-1)M_n l_n + l}^* - S_{(j-1)M_n l_n}^* \right) \right. \\ & \left. - \left(\mathbb{W}^* (\sigma^2 ((j-1)M_n l_n + l)) - \mathbb{W}^* (\sigma^2 (j-1)M_n l_n) \right) \right| \\ &= O_{P^*} \left(\sqrt{\log(n)} \left\{ \sqrt{nb_n l_n} n^{2\delta-4/5} + \sqrt{nb_n l_n} n^{2\delta-2/5} + \sqrt{l_n} n^\delta \right\} \right. \\ & \quad \left. + l_n n^{\delta-2/5} + \sqrt{l_n} n^\delta \right) + O_{P^*} \left(\frac{\sqrt{nb_n} \sqrt{\log(n)}}{l_n} + \sqrt{l_n} \sqrt{\log(n)} \right), \end{aligned}$$

für $c \leq C < \infty$ fest.

2. Fall: $\frac{n}{M_n l_n} > \left\lceil \frac{n}{M_n l_n} \right\rceil$

Wir untersuchen nun den Fall, dass $\frac{n}{M_n l_n}$ nicht ganzzahlig ist. Dadurch ist noch ein Block mit weniger als $M_n l_n$ Variablen zu berücksichtigen. Somit unterteilen wir die Summanden der Bootstrap-Partialsumme diesmal in $\left\lceil \frac{n}{M_n l_n} \right\rceil - 1$ große Blöcke der Länge $M_n l_n$ mit den Blocknummern $j = 1, \dots, \left\lceil \frac{n}{M_n l_n} \right\rceil - 1$, plus einen Restblock mit mindestens $M_n l_n$ und weniger als $2M_n l_n$ Summanden für $j = \left\lceil \frac{n}{M_n l_n} \right\rceil$. Somit wird der letzte vollständige Block der Länge $M_n l_n$ mit dem Block, welcher weniger als $M_n l_n$ Variablen besitzt, in einem Restblock zusammengefasst. Dieser besteht somit aus $n - \left(\left\lceil \frac{n}{M_n l_n} \right\rceil - 1 \right) M_n l_n$ Variablen. Das Coupling für die Bootstrap-Partialsummen, welche aus den Fehlervariablen bestehen deren Indizes innerhalb eines großen Blockes der Länge $M_n l_n$ liegen, wurde bereits im vorhergehenden Fall bestimmt und es gilt die Approximation (4.28). Wir müssen somit nur noch die Approximation der Bootstrap-Partialsumme, deren Fehlerindizes innerhalb des Restblockes $j = \left\lceil \frac{n}{M_n l_n} \right\rceil$ liegen, untersuchen. Dabei können die Indizes der Summanden ein Vielfaches von der kleinen Blocklänge l_n sein oder nicht. Falls also $\frac{n}{l_n} - \left(\left\lceil \frac{n}{M_n l_n} \right\rceil - 1 \right) M_n$ ganzzahlig ist, kann der Restblock in vollständige kleine Blöcke der Länge l_n unterteilt werden. Diese ganzzahlige Anzahl an kleinen Blöcken der Länge l_n im Restblock definieren wir zur Übersichtlichkeit als $N_n := \left\lceil \frac{n}{l_n} - \left(\left\lceil \frac{n}{M_n l_n} \right\rceil - 1 \right) M_n \right\rceil$. Wir betrachten nachfolgend für $j = \left\lceil \frac{n}{M_n l_n} \right\rceil$ die Indizes

$$k = (j - 1)M_n l_n + (l - 1)l_n + u$$

mit $l = 1, \dots, N_n$ und $u = 1, \dots, l_n$ innerhalb der vollständigen kleinen Blöcke. Falls jedoch $\frac{n}{l_n} - \left(\left\lceil \frac{n}{M_n l_n} \right\rceil - 1 \right) M_n > \left\lceil \frac{n}{l_n} - \left(\left\lceil \frac{n}{M_n l_n} \right\rceil - 1 \right) M_n \right\rceil$ und dadurch noch ein Restterm existiert, gilt ebenso $l = 1, \dots, N_n$ und $u = 1, \dots, l_n$, plus für den Restterm mit $l = N_n + 1$ gilt $u = 1, \dots, n - \left(\left\lceil \frac{n}{M_n l_n} \right\rceil - 1 \right) M_n l_n - N_n l_n$. Somit erhalten wir für die Bootstrap-Partialsumme mit den Indizes aus dem Restblock eine Unterteilung in eine Summe, deren Summanden wir vollständig in kleine Blöcke der Länge l_n aufteilen können und zusätzlich einen Restterm mit maximal l_n Summanden. Es gilt

$$\begin{aligned} S_k^* - S_{(j-1)M_n l_n}^* &= \left(S_{(j-1)M_n l_n + (l-1)l_n}^* - S_{(j-1)M_n l_n}^* \right) + \left(S_{(j-1)M_n l_n + (l-1)l_n + u}^* - S_{(j-1)M_n l_n + (l-1)l_n}^* \right) \\ &= \sum_{h=1}^{l-1} \sum_{m \in I_{j,h}} e_m^* + \sum_{m=(j-1)M_n l_n + (l-1)l_n + 1}^{(j-1)M_n l_n + (l-1)l_n + u} e_m^* \end{aligned}$$

für $j = \left\lceil \frac{n}{M_n l_n} \right\rceil$ und $u = 1, \dots, l_n$ für $l = 1, \dots, N_n$, sowie $u = 1, \dots, n - \left(\left\lceil \frac{n}{M_n l_n} \right\rceil - 1 \right) M_n l_n - N_n l_n$ bei $l = N_n + 1$. Wie im Fall zuvor nutzen wir die Menge (4.15) für $j = \left\lceil \frac{n}{M_n l_n} \right\rceil$ und $l = 1, \dots, N_n$. Falls $l = N_n + 1$ gilt nutzen wir eine anteilige Menge

$$I_{j, N_n + 1} := \{(j - 1)M_n l_n + N_n l_n + 1, \dots, n\}$$

für $j = \left\lfloor \frac{n}{M_n l_n} \right\rfloor$. Wie im vorhergehenden Fall sind die Partialsummen der Bootstrap-Fehler mit Indizes aus einem vollständigen kleinen Block aufgrund der Unabhängigkeit und Normalverteilung der Variablen $(V_h)_{h=1, \dots, \lfloor n/l_n \rfloor + 1}$ des Blockwise DWB unabhängig und normalverteilt und lassen sich somit als Zuwachs des Wiener Prozesses darstellen. Der Restterm besteht wieder aus abhängigen Zufallsvariablen und kann somit nicht als Zuwachs des Wiener Prozesses dargestellt werden. Hierfür betrachten wir wieder einen Wiener Prozess mit einer anteiligen Stoppzeit. Damit die Stoppzeiten $\tau_{j,l}^*$ wieder mit den Stoppzeiten des Wiener Prozesses von der starken Approximation der Originalfehler übereinstimmen, werden die Stoppzeiten $\tau_{j,l}^*$ im untersuchten Restblock für $j = \left\lfloor \frac{n}{M_n l_n} \right\rfloor$ und $l = 1, \dots, N_n + 1$ geeignet gewählt und mit der Blocklänge $n - \left(\left\lfloor \frac{n}{M_n l_n} \right\rfloor - 1 \right) M_n l_n$ normiert. Für eine Bootstrap-Partialsumme aus dem Restblock, welche einen vollständigen kleinen Block der Länge l_n umfasst, definieren wir für $j = \left\lfloor \frac{n}{M_n l_n} \right\rfloor$ und $l = 1, \dots, N_n$

$$\sum_{m \in I_{j,l}} e_m^* := \sqrt{\frac{\text{Var}^*(S_n^* - S_{(j-1)M_n l_n}^*)}{\sigma^2 \left(n - \left(\left\lfloor \frac{n}{M_n l_n} \right\rfloor - 1 \right) M_n l_n \right)}} [\mathbb{W}^*(\tau_{j,l}^*) - \mathbb{W}^*(\tau_{j,l-1}^*)] \quad (4.29)$$

mit

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{j,l}^* - \tau_{j,0}^*}{\sigma^2 \left(n - \left(\left\lfloor \frac{n}{M_n l_n} \right\rfloor - 1 \right) M_n l_n \right)} &= \frac{\text{Var}^*(S_{(j-1)M_n l_n + l_n}^* - S_{(j-1)M_n l_n}^*)}{\text{Var}^*(S_n^* - S_{(j-1)M_n l_n}^*)} \\ &= \frac{\sum_{h=1}^l \left(\sum_{m \in I_{j,h}} \hat{e}_m \right)^2}{\text{Var}^*(S_n^* - S_{(j-1)M_n l_n}^*)} \end{aligned}$$

und

$$\tau_{j,0}^* := (j-1) \sigma^2 M_n l_n,$$

sowie

$$\frac{\tau_{j,N_n+1}^* - \tau_{j,0}^*}{\sigma^2 \left(n - \left(\left\lfloor \frac{n}{M_n l_n} \right\rfloor - 1 \right) M_n l_n \right)} = \frac{\sum_{l=1}^{N_n} \left(\sum_{m \in I_{j,l}} \hat{e}_m \right)^2 + \left(\sum_{m \in I_{j,N_n+1}} \hat{e}_m \right)^2}{\text{Var}^*(S_n^* - S_{(j-1)M_n l_n}^*)}.$$

Wir untersuchen nun die Approximation der Bootstrap-Partialsumme, bei welcher die Indizes der Fehlervariablen im Restblock liegen, durch den Zuwachs des Wiener Prozesses. Dabei

erhalten wir mit einer anteiligen Stoppzeit für den Restterm folgende Unterteilung

$$\begin{aligned}
& \left| \left(S_{(j-1)M_n l_n + (l-1)l_n + u}^* - S_{(j-1)M_n l_n}^* \right) - \left(\mathbb{W}^* \left(\tau_{j,l-1}^* + \frac{u}{l_n} (\tau_{j,l}^* - \tau_{j,l-1}^*) \right) - \mathbb{W}^* (\tau_{j,0}^*) \right) \right| \\
& \leq \left| \left(S_{(j-1)M_n l_n + (l-1)l_n}^* - S_{(j-1)M_n l_n}^* \right) - \left(\mathbb{W}^* (\tau_{j,l-1}^*) - \mathbb{W}^* (\tau_{j,0}^*) \right) \right| \\
& \quad + \left| S_{(j-1)M_n l_n + (l-1)l_n + u}^* - S_{(j-1)M_n l_n + (l-1)l_n}^* \right| \\
& \quad + \left| \mathbb{W}^* \left(\tau_{j,l-1}^* + \frac{u}{l_n} (\tau_{j,l}^* - \tau_{j,l-1}^*) \right) - \mathbb{W}^* (\tau_{j,l-1}^*) \right| \\
& =: U_1 + U_2 + U_3, \tag{4.30}
\end{aligned}$$

für $j = \left\lfloor \frac{n}{M_n l_n} \right\rfloor$ und $u = 1, \dots, l_n$ für $l = 1, \dots, N_n$, sowie $u = 1, \dots, n - \left(\left\lfloor \frac{n}{M_n l_n} \right\rfloor - 1 \right) M_n l_n - N_n l_n$ bei $l = N_n + 1$. Nun nutzen wir das Coupling der Bootstrap-Partialsumme eines vollständigen kleinen Blockes an den normierten Zuwachs des Wiener Prozesses von (4.29). Damit erhalten wir zunächst

$$\begin{aligned}
& S_{(j-1)M_n l_n + (l-1)l_n}^* - S_{(j-1)M_n l_n}^* \\
& = \sum_{h=1}^{l-1} \sum_{m \in I_{j,h}} e_m^* \\
& = \sum_{h=1}^{l-1} \sqrt{\frac{\text{Var}^* \left(S_n^* - S_{(j-1)M_n l_n}^* \right)}{\sigma^2 \left(n - \left(\left\lfloor \frac{n}{M_n l_n} \right\rfloor - 1 \right) M_n l_n \right)}} \left[\mathbb{W}^* (\tau_{j,h}^*) - \mathbb{W}^* (\tau_{j,h-1}^*) \right] \\
& = \sqrt{\frac{\text{Var}^* \left(S_n^* - S_{(j-1)M_n l_n}^* \right)}{\sigma^2 \left(n - \left(\left\lfloor \frac{n}{M_n l_n} \right\rfloor - 1 \right) M_n l_n \right)}} \left[\mathbb{W}^* (\tau_{j,l-1}^*) - \mathbb{W}^* (\tau_{j,0}^*) \right].
\end{aligned}$$

Dadurch gilt für U_1 die Abschätzung

$$\begin{aligned}
U_1 & = \left| \left(S_{(j-1)M_n l_n + (l-1)l_n}^* - S_{(j-1)M_n l_n}^* \right) - \left(\mathbb{W}^* (\tau_{j,l-1}^*) - \mathbb{W}^* (\tau_{j,0}^*) \right) \right| \\
& \leq \left| \left(\sqrt{\frac{\text{Var}^* \left(S_n^* - S_{(j-1)M_n l_n}^* \right)}{\sigma^2 \left(n - \left(\left\lfloor \frac{n}{M_n l_n} \right\rfloor - 1 \right) M_n l_n \right)}} - 1 \right) \left[\mathbb{W}^* (\tau_{j,l-1}^*) - \mathbb{W}^* (\tau_{j,0}^*) \right] \right|. \tag{4.31}
\end{aligned}$$

Die Berechnungen des ersten Faktors der rechten Seite von (4.31) verlaufen analog zu den Berechnungen von (4.21). Daher betrachten wir zunächst den Abstand der Varianzen der Original- und Bootstrap-Partialsumme deren Variablenindizes innerhalb des Restblockes liegen. Aufgrund der Unabhängigkeit der Bootstrap-Partialsummen mit Variablenindizes inner-

halb der kleinen Blöcke gilt die Unterteilung

$$\begin{aligned}
& \left| \text{Var}^* \left(S_n^* - S_{(j-1)M_n l_n}^* \right) - \text{Var} \left(S_n - S_{(j-1)M_n l_n} \right) \right| \\
&= \left| \text{Var}^* \left(\sum_{l=1}^{N_n} \sum_{m \in I_{j,l}} e_m^* + \sum_{m \in I_{j, N_n+1}} e_m^* \right) - \text{Var} \left(\sum_{l=1}^{N_n} \sum_{m \in I_{j,l}} e_m + \sum_{m \in I_{j, N_n+1}} e_m \right) \right| \\
&\leq \left| \text{Var}^* \left(\sum_{l=1}^{N_n} \sum_{m \in I_{j,l}} e_m^* \right) - \text{Var} \left(\sum_{l=1}^{N_n} \sum_{m \in I_{j,l}} e_m \right) \right| \\
&\quad + \left| \text{Var}^* \left(\sum_{m \in I_{j, N_n+1}} e_m^* \right) - \text{Var} \left(\sum_{m \in I_{j, N_n+1}} e_m \right) \right| \\
&\quad + 2 \left| \text{Cov} \left(\sum_{l=1}^{N_n} \sum_{m \in I_{j,l}} e_m, \sum_{h \in I_{j, N_n+1}} e_h \right) \right| \\
&=: U_{1,1} + U_{1,2} + U_{1,3}. \tag{4.32}
\end{aligned}$$

Die Größenordnung des ersten Terms $U_{1,1}$ erhalten wir mit dem nachfolgenden Lemma 4.3. $U_{1,1}$ betrachtet den Abstand der Varianzen der Bootstrap- und Originalpartialsumme mit weniger als $2M_n l_n$ Summanden. Somit kann $U_{1,1}$ abgeschätzt werden mit dem Abstand der Varianzen der Bootstrap- und Originalpartialsumme von genau $M_n l_n$ Summanden, was in Lemma 4.3 untersucht wird. Dadurch folgt

$$U_{1,1} = \tilde{O} \left(nb_n l_n n^{2\delta-4/5} + nb_n l_n^{1/2} n^{2\delta-2/5} + \sqrt{nb_n l_n} n^\delta, n^{-\gamma} \right) + O \left(\frac{nb_n}{l_n} \right). \tag{4.33}$$

Des Weiteren betrachten wir in $U_{1,2}$ ebenso den Abstand der Varianzen der Bootstrap- und Originalpartialsumme, jedoch nur für weniger als l_n Summanden, anstatt $M_n l_n$. Somit kann die Größenordnung von $U_{1,2}$ auf analoge Weise zum Beweis von Lemma 4.3 bestimmt werden. Wir erhalten

$$U_{1,2} = \tilde{O} \left(l_n^2 n^{2\delta-4/5} + l_n^{3/2} n^{2\delta-2/5} + l_n n^\delta, n^{-\gamma} \right),$$

was jedoch durch die Größenordnung von $U_{1,1}$ dominiert wird. Zum Schluss untersuchen wir den Kovarianzterm $U_{1,3}$, bei welchem die Kovarianzen zwischen den Fehlervariablen mit Indizes aus den vollständigen kleinen Blöcken der Länge l_n und denen mit Indizes des kleineren Restterms verglichen werden. Mit der Kovarianzgleichung (4.39) aus Lemma 4.3 und

[A6] (ii) erhalten wir die Größenordnung

$$\begin{aligned}
U_{1,3} &\leq 2 \sum_{l=1}^{N_n} \sum_{m \in I_{j,l}} \sum_{h \in I_{j,N_n+1}} |\text{Cov}(e_m, e_h)| \\
&\leq 2 \cdot 4C \sum_{l=1}^{N_n} \sum_{r=0}^{\infty} r (\alpha(r))^{\frac{\delta}{2\delta+\delta}} \\
&= O\left(\frac{nb_n}{l_n}\right).
\end{aligned}$$

Weiterführend gilt analog zu den Berechnungen für $Z_{1,2}$ auf Seite 52, dass

$$\left| \text{Var}(S_n - S_{(j-1)M_n l_n}) - \sigma^2 \left(n - \left(\left\lfloor \frac{n}{M_n l_n} \right\rfloor - 1 \right) M_n l_n \right) \right| = O(1).$$

Somit gilt zusammen mit (4.32) und (4.33) für den ersten Faktor der rechten Seite von (4.31) die Größenordnung

$$\begin{aligned}
&\left| \sqrt{\frac{\text{Var}^*(S_n^* - S_{(j-1)M_n l_n}^*)}{\sigma^2 \left(n - \left(\left\lfloor \frac{n}{M_n l_n} \right\rfloor - 1 \right) M_n l_n \right)}} - 1 \right| \\
&\leq \left| \frac{\text{Var}^*(S_n^* - S_{(j-1)M_n l_n}^*) - \sigma^2 \left(n - \left(\left\lfloor \frac{n}{M_n l_n} \right\rfloor - 1 \right) M_n l_n \right)}{\sigma^2 \left(n - \left(\left\lfloor \frac{n}{M_n l_n} \right\rfloor - 1 \right) M_n l_n \right)} \right| \\
&= \tilde{O} \left(l_n n^{2\delta-4/5} + l_n^{1/2} n^{2\delta-2/5} + \sqrt{\frac{l_n}{nb_n}} n^\delta, n^{-\gamma} \right) + O\left(\frac{1}{l_n} + \frac{1}{nb_n}\right) \\
&= o_P \left(l_n n^{2\delta-4/5} + l_n^{1/2} n^{2\delta-2/5} + \sqrt{\frac{l_n}{nb_n}} n^\delta \right) + O\left(\frac{1}{l_n}\right).
\end{aligned}$$

Für den zweiten Faktor der rechten Seite von (4.31) erhalten wir mit (4.19), dass

$$\sup_{1 \leq l \leq N_n+1} |\mathbb{W}^*(\tau_{j,l-1}^*) - \mathbb{W}^*(\tau_{j,0}^*)| = O_{P^*} \left(\sqrt{nb_n} \sqrt{\log(n)} \right).$$

Dadurch gilt mit (4.31)

$$\begin{aligned}
&\sup_{1 \leq l \leq N_n+1} U_1 \\
&= \left[o_P \left(l_n n^{2\delta-4/5} + l_n^{1/2} n^{2\delta-2/5} + \sqrt{\frac{l_n}{nb_n}} n^\delta \right) + O\left(\frac{1}{l_n}\right) \right] O_{P^*} \left(\sqrt{nb_n} \sqrt{\log(n)} \right) \\
&= o_{P^*} \left(\sqrt{\log(n)} \left\{ \sqrt{nb_n} l_n n^{2\delta-4/5} + \sqrt{nb_n l_n} n^{2\delta-2/5} + \sqrt{l_n} n^\delta \right\} \right) + O_{P^*} \left(\frac{\sqrt{nb_n} \sqrt{\log(n)}}{l_n} \right).
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Die Berechnung der Größenordnung der Partialsumme U_2 von (4.30) erfolgt analog zu der Berechnung von Z_2 auf Seite 54, da U_2 eine Partialsumme mit höchstens der gleichen Anzahl an Summanden wie in Z_2 betrachtet. Dadurch folgt mit $\gamma > 1$ nach der Bemerkung auf Seite 46, dass

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{1 \leq l \leq N_n+1 \\ 1 \leq u \leq l_n}} U_2 &= \tilde{O} \left(l_n n^{\delta-2/5} + \sqrt{l_n} n^\delta, n^{1-\gamma} \right) \\ &= o_P \left(l_n n^{\delta-2/5} + \sqrt{l_n} n^\delta \right). \end{aligned} \quad (4.35)$$

Für den Zuwachs des Wiener Prozesses in U_3 von (4.30) gilt mit (4.19) und analogen Betrachtungen wie für Z_3 auf Seite 55, dass

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{1 \leq l \leq N_n+1 \\ 1 \leq u \leq l_n}} U_3 &= \sup_{\substack{1 \leq l \leq N_n+1 \\ 1 \leq u \leq l_n}} \left| \mathbb{W}^* \left(\tau_{j,l-1}^* + \frac{u}{l_n} (\tau_{j,l}^* - \tau_{j,l-1}^*) \right) - \mathbb{W}^* (\tau_{j,l-1}^*) \right| \\ &= O_{P^*} \left(\sqrt{l_n} \sqrt{\log(n)} \right). \end{aligned} \quad (4.36)$$

Fassen wir nun alle drei Terme (4.34), (4.35) und (4.36) zusammen, dann erhalten wir für die Approximation der Partialsumme mit Bootstrap-Fehlervariablen aus dem Restblock $j = \left\lfloor \frac{n}{M_n l_n} \right\rfloor$ durch den Zuwachs des Wiener Prozesses die Größenordnung

$$\begin{aligned} &\sup_{\substack{1 \leq l \leq N_n+1 \\ 1 \leq u \leq l_n}} \left| \left(S_{(j-1)M_n l_n + (l-1)l_n + u}^* - S_{(j-1)M_n l_n}^* \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\mathbb{W}^* \left(\tau_{j,l-1}^* + \frac{u}{l_n} (\tau_{j,l}^* - \tau_{j,l-1}^*) \right) - \mathbb{W}^* (\tau_{j,0}^*) \right) \right| \\ &= O_{P^*} \left(\sqrt{\log(n)} \left\{ \sqrt{nb_n} l_n n^{2\delta-4/5} + \sqrt{nb_n l_n} n^{2\delta-2/5} + \sqrt{l_n} n^\delta \right\} \right. \\ &\quad \left. + l_n n^{\delta-2/5} + \sqrt{l_n} n^\delta \right) + O_{P^*} \left(\frac{\sqrt{nb_n} \sqrt{\log(n)}}{l_n} + \sqrt{l_n} \sqrt{\log(n)} \right). \end{aligned} \quad (4.37)$$

Dies stellt die gleiche Größenordnung wie die Approximationen aller anderen Bootstrap-Partialsummen mit Fehlervariablen, deren Indizes innerhalb der großen Blöcke liegen, in (4.28) dar. Alle Partialsummen für $j = 1, \dots, \left\lfloor \frac{n}{M_n l_n} \right\rfloor - 1$ mit $M_n l_n$ Summanden, sowie die Partialsumme des Restblockes $j = \left\lfloor \frac{n}{M_n l_n} \right\rfloor$ sind aufgrund der Unabhängigkeit der Variablen $(V_h)_{h=1, \dots, \lfloor n/l_n \rfloor + 1}$ des Blockwise DWB unabhängig voneinander. Weiterhin gilt $S_{(j-1)M_n l_n + ll_n}^* - S_{(j-1)M_n l_n + (l-1)l_n}^* = \sqrt{\text{Var}^*(S_{jM_n l_n}^* - S_{(j-1)M_n l_n}^*) / \sigma^2 M_n l_n} \left[\mathbb{W}^* (\tau_{j,l}^*) - \mathbb{W}^* (\tau_{j,l-1}^*) \right]$, wodurch wir die Approximationen dieser Partialsummen aneinanderreihen können. Des Weiteren besitzen sie mit (4.28) und (4.37) für den Restblock alle den gleichen Approximationsfehler. Aufgrund des geeigneten Couplings dieser Bootstrap-Partialsummen an die normierten Zuwächse des

Wiener Prozesses erhalten wir für die Approximation des Bootstrap-Partialsummenprozesses

$$\begin{aligned}
& \sup_{\substack{1 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{M_n l_n} \rfloor \\ 1 \leq l \leq c M_n l_n}} \left| \left(S_{(j-1)M_n l_n + l}^* - S_{(j-1)M_n l_n}^* \right) \right. \\
& \quad \left. - \left(\mathbb{W}^* \left(\sigma^2 \left((j-1)M_n l_n + l \right) \right) - \mathbb{W}^* \left(\sigma^2 \left((j-1)M_n l_n \right) \right) \right) \right| \\
& = o_{P^*} \left(\sqrt{\log(n)} \left\{ \sqrt{nb_n l_n} n^{2\delta-4/5} + \sqrt{nb_n l_n} n^{2\delta-2/5} + \sqrt{l_n} n^\delta \right\} \right. \\
& \quad \left. + l_n n^{\delta-2/5} + \sqrt{l_n} n^\delta \right) + O_{P^*} \left(\frac{\sqrt{nb_n} \sqrt{\log(n)}}{l_n} + \sqrt{l_n} \sqrt{\log(n)} \right),
\end{aligned}$$

für $c \leq C < \infty$ fest. Dies stellt den gleichen Approximationsfehler wie beim ersten Fall dar.

Mit [A6] (iii), der optimalen Bandbreite (2.7) und für ein $\delta < 1/10$, was laut der Bemerkung auf Seite 46 gilt, können wir die Größenordnungen des Approximationsfehlers beider obigen Fälle weiter abschätzen und erhalten

$$\begin{aligned}
\sqrt{nb_n l_n} n^{2\delta-4/5} \sqrt{\log(n)} &= O \left(\frac{\sqrt{nb_n} \sqrt{nb_n}}{\log(n)} n^{2\delta-4/5} \sqrt{\log(n)} \right) = O \left(\frac{\sqrt{nb_n} n^{2\delta-2/5}}{\sqrt{\log(n)}} \right) \\
&= o \left(\frac{\sqrt{nb_n}}{\sqrt{\log(n)}} \right), \\
\sqrt{nb_n l_n} n^{2\delta-2/5} \sqrt{\log(n)} &= O \left(\sqrt{nb_n} \frac{(nb_n)^{1/4}}{\sqrt{\log(n)}} n^{2\delta-2/5} \sqrt{\log(n)} \right) \\
&= O \left(\frac{\sqrt{nb_n} n^{2\delta-1/5} \sqrt{\log(n)}}{\sqrt{\log(n)}} \right) = o \left(\frac{\sqrt{nb_n}}{\sqrt{\log(n)}} \right), \\
\sqrt{l_n} n^\delta \sqrt{\log(n)} &= O \left(n^\delta \frac{(nb_n)^{1/4}}{\sqrt{\log(n)}} \sqrt{\log(n)} \right) = O \left(\frac{\sqrt{nb_n} n^{\delta-1/5} \sqrt{\log(n)}}{\sqrt{\log(n)}} \right) \\
&= o \left(\frac{\sqrt{nb_n}}{\sqrt{\log(n)}} \right), \\
l_n n^{\delta-2/5} &= O \left(\frac{\sqrt{nb_n}}{\log(n)} n^{\delta-2/5} \right) = O \left(\frac{\sqrt{nb_n} n^{\delta-2/5}}{\sqrt{\log(n)} \sqrt{\log(n)}} \right) = o \left(\frac{\sqrt{nb_n}}{\sqrt{\log(n)}} \right), \\
\sqrt{l_n} n^\delta &= O \left(\frac{(nb_n)^{1/4}}{\sqrt{\log(n)}} n^\delta \right) = O \left(\frac{\sqrt{nb_n} n^{\delta-1/5}}{\sqrt{\log(n)}} \right) = o \left(\frac{\sqrt{nb_n}}{\sqrt{\log(n)}} \right), \\
\frac{\sqrt{nb_n}}{l_n} \sqrt{\log(n)} &= o \left(\frac{\sqrt{nb_n}}{\log(n)} \sqrt{\log(n)} \right) = o \left(\frac{\sqrt{nb_n}}{\sqrt{\log(n)}} \right), \\
\sqrt{l_n} \sqrt{\log(n)} &= O \left(\frac{(nb_n)^{1/4}}{\sqrt{\log(n)}} \sqrt{\log(n)} \right) = O \left(\frac{\sqrt{nb_n} \sqrt{\log(n)} n^{-1/5}}{\sqrt{\log(n)}} \right) \\
&= o \left(\frac{\sqrt{nb_n}}{\sqrt{\log(n)}} \right).
\end{aligned}$$

Dadurch erhalten wir schlussendlich für das Coupling des Bootstrap-Partialsummenprozesses an den Wiener Prozess die Größenordnung

$$\sup_{\substack{1 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{M_n l_n} \rfloor \\ 1 \leq l \leq c M_n l_n}} \left| \left(S_{(j-1)M_n l_n + l}^* - S_{(j-1)M_n l_n}^* \right) - \left(\mathbb{W}^* \left(\sigma^2 \left((j-1)M_n l_n + l \right) \right) - \mathbb{W}^* \left(\sigma^2 \left((j-1)M_n l_n \right) \right) \right) \right| = o_{P^*} \left(\frac{\sqrt{nb_n}}{\sqrt{\log(n)}} \right),$$

für $c \leq C < \infty$ fest. □

Mit Satz 4.3 haben wir nun die Partialsumme von $(e_i^*)_{i=1, \dots, n}$ an einen Wiener Prozess \mathbb{W}^* gekoppelt. Für diesen Nachweis war ein Hilfsresultat nötig, auf welches wir im Folgenden eingehen werden.

Lemma 4.3

Unter den Voraussetzungen von Satz 4.3 erhalten wir für den Abstand der Varianzen der Bootstrap- und der Originalpartialsumme, welche aus $M_n l_n$ Summanden bestehen, die Größenordnung

$$\begin{aligned} & \left| \text{Var}^* \left(S_{jM_n l_n}^* - S_{(j-1)M_n l_n}^* \right) - \text{Var} \left(S_{jM_n l_n} - S_{(j-1)M_n l_n} \right) \right| \\ & = \tilde{O} \left(nb_n l_n n^{2\delta-4/5} + nb_n l_n^{1/2} n^{2\delta-2/5} + \sqrt{nb_n l_n} n^\delta, n^{-\gamma} \right) + O \left(\frac{nb_n}{l_n} \right) \end{aligned}$$

für $j = 1, \dots, \lfloor \frac{n}{M_n l_n} \rfloor$, wobei $M_n = \lfloor \frac{nb_n}{l_n} \rfloor$.

Beweis

Wir betrachten den Abstand der Varianzen der Original- und Bootstrap-Partialsummen deren Variablenindizes innerhalb eines sogenannten großen Blockes der Länge $M_n l_n$ liegen, für alle Blöcke $j = 1, \dots, \lfloor \frac{n}{M_n l_n} \rfloor$. Aufgrund der Hilfsvariablen des Blockwise DWB werden die Indizes der Bootstrap-Variablen in M_n kleine Blöcke der Länge l_n unterteilt. Den Hilfsvariablen innerhalb eines kleinen Blockes wird eine unabhängige und standardnormalverteilte Zufallsvariable zugeordnet. Wir übernehmen diese blockweise Struktur auch für die Originalpartialsumme, obwohl die Fehlervariablen dort abhängig voneinander sind. Mit Hilfe der Intervalle $I_{j,l}$ aus (4.15) für $j = 1, \dots, \lfloor \frac{n}{M_n l_n} \rfloor$ und $l = 1, \dots, M_n$ erhalten wir aufgrund der Unabhängigkeit und Standardnormalverteilung der Hilfsvariablen des Blockwise DWB und mit der Zentriertheit des Fehlerprozesses $(e_i)_{i=1, \dots, n}$, sowie mit dem Abstand zwischen Resi-

duum und Fehler die Unterteilung

$$\begin{aligned}
& \left| \text{Var}^* \left(S_{jM_n l_n}^* - S_{(j-1)M_n l_n}^* \right) - \text{Var} \left(S_{jM_n l_n} - S_{(j-1)M_n l_n} \right) \right| \\
&= \left| \text{Var}^* \left(\sum_{l=1}^{M_n} \sum_{m \in I_{j,l}} e_m^* \right) - \text{Var} \left(\sum_{l=1}^{M_n} \sum_{m \in I_{j,l}} e_m \right) \right| \\
&= \left| \sum_{l=1}^{M_n} \left(\sum_{m \in I_{j,l}} \hat{e}_m \right)^2 - \sum_{l=1}^{M_n} \mathbb{E} \left(\sum_{m \in I_{j,l}} e_m \right)^2 - 2 \sum_{l=1}^{M_n-1} \sum_{h=l+1}^{M_n} \text{Cov} \left(\sum_{m \in I_{j,l}} e_m, \sum_{p \in I_{j,h}} e_p \right) \right| \\
&\leq \left| \sum_{l=1}^{M_n} \left(\sum_{m \in I_{j,l}} (\hat{e}_m - e_m) \right)^2 \right| + 2 \left| \sum_{l=1}^{M_n} \left(\sum_{m \in I_{j,l}} (\hat{e}_m - e_m) \sum_{m \in I_{j,l}} e_m \right) \right| \\
&\quad + \left| \sum_{l=1}^{M_n} \left(\sum_{m \in I_{j,l}} e_m \right)^2 - \sum_{l=1}^{M_n} \mathbb{E} \left(\sum_{m \in I_{j,l}} e_m \right)^2 \right| + 2 \left| \sum_{l=1}^{M_n-1} \sum_{h=l+1}^{M_n} \text{Cov} \left(\sum_{m \in I_{j,l}} e_m, \sum_{p \in I_{j,h}} e_p \right) \right| \\
&=: S_1 + S_2 + S_3 + S_4. \tag{4.38}
\end{aligned}$$

Um diese vier Terme untersuchen zu können, möchten wir zunächst die Kovarianzen zwischen den abhängigen Variablen $(e_i)_{i=1, \dots, n}$ untersuchen. Diese lassen sich mit Hilfe der Kovarianzungleichung aus Lemma 2.2 mit $p = q = \frac{28+\delta}{14}$ und $K_\alpha = \frac{\delta}{28+\delta}$ abschätzen. Unter der Voraussetzung [A6] (i) gilt $\sup_i \|e_i\|_{2+\delta/14} \sup_m \|e_m\|_{2+\delta/14} \leq C < \infty$ und somit erhalten wir für $i, m = 1, \dots, n$ mit $i \leq m$ und $r := m - i$, dass

$$\begin{aligned}
|\text{Cov}(e_i, e_m)| &\leq 4 \|e_i\|_{2+\delta/14} \|e_m\|_{2+\delta/14} (\alpha(r))^{\frac{\delta}{28+\delta}} \\
&\leq 4 \sup_i \|e_i\|_{2+\delta/14} \sup_m \|e_m\|_{2+\delta/14} (\alpha(r))^{\frac{\delta}{28+\delta}} \\
&\leq 4C (\alpha(r))^{\frac{\delta}{28+\delta}}. \tag{4.39}
\end{aligned}$$

Beim ersten Term S_1 betrachten wir nun den Abstand von Residuum und Fehler. Die Größenordnung hierfür wurde in Lemma 4.2 bestimmt und wir erhalten dadurch

$$S_1 = \tilde{O} \left(\frac{nb_n}{l_n} l_n^2 n^{2\delta-4/5}, n^{-\gamma} \right) = \tilde{O} \left(nb_n l_n n^{2\delta-4/5}, n^{-\gamma} \right). \tag{4.40}$$

Für den zweiten Term S_2 betrachten wir mit (4.39), [A2] (i) und [A6] (ii) zunächst das zweite Moment

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left(\sum_{m \in I_{j,l}} e_m \right)^2 &\leq \sum_{m \in I_{j,l}} \text{Var}(e_m) + 2 \sum_{m \in I_{j,l}} \sum_{\substack{h \in I_{j,l} \\ m < h}} |\text{Cov}(e_m, e_h)| \\
&\leq l_n \text{Var}(e_1) + 8C l_n \sum_{r=1}^{\infty} (\alpha(r))^{\frac{\delta}{28+\delta}} = O(l_n).
\end{aligned}$$

Unter den Voraussetzungen [A2] und [A6] ist die Rosenthal-Ungleichung aus Lemma 2.3 für $2 < a \leq 28$ anwendbar und wir erhalten für das a -te zentrale Moment

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\left| \sum_{m \in I_{j,l}} e_m \right|^a \right) &\leq C \sum_{m \in I_{j,l}} (\mathbb{E}(|e_m|^{a+\epsilon}))^{\frac{a}{a+\epsilon}} + C \left[\sum_{m \in I_{j,l}} (\mathbb{E}(|e_m|^{2+\epsilon}))^{\frac{2}{2+\epsilon}} \right]^{a/2} \\ &\leq C \sum_{m \in I_{j,l}} \max_{m \in I_{j,l}} \mathbb{E}(|e_m|^{a+\epsilon}) + C \left[\sum_{m \in I_{j,l}} \max_{m \in I_{j,l}} \mathbb{E}(|e_m|^{2+\epsilon}) \right]^{a/2} \\ &= O(l_n + l_n^{a/2}) = O(l_n^{a/2}). \end{aligned}$$

Damit ergibt sich mit der Markov-Ungleichung und (4.13), $a = \gamma/\delta$, die Abschätzung

$$P \left(\left| \sum_{m \in I_{j,l}} e_m \right| \geq l_n^{1/2} n^\delta \right) \leq \frac{\mathbb{E} \left(\left| \sum_{m \in I_{j,l}} e_m \right|^a \right)}{l_n^{a/2} n^{a\delta}} = O \left(\frac{l_n^{a/2}}{l_n^{a/2} n^{a\delta}} \right) = O(n^{-\gamma}),$$

wodurch wir mit der Notation aus Definition 4.1

$$\sum_{m \in I_{j,l}} e_m = \tilde{O} \left(l_n^{1/2} n^\delta, n^{-\gamma} \right) \quad (4.41)$$

erhalten. Mit Hilfe von Lemma 4.2 und (4.41) folgern wir für den zweiten Term, dass

$$S_2 = \tilde{O} \left(\frac{nb_n}{l_n} l_n n^{\delta-2/5} l_n^{1/2} n^\delta, n^{-\gamma} \right) = \tilde{O} \left(nb_n l_n^{1/2} n^{2\delta-2/5}, n^{-\gamma} \right). \quad (4.42)$$

Um die Größenordnung des dritten Terms S_3 von (4.38) zu erhalten, untersuchen wir zunächst das zweite Moment von S_3 und somit folgende Varianz

$$\begin{aligned} \text{Var} \left[\sum_{l=1}^{M_n} \left(\sum_{m \in I_{j,l}} e_m \right)^2 \right] &= \sum_{l=1}^{M_n} \text{Var} \left[\left(\sum_{m \in I_{j,l}} e_m \right)^2 \right] \\ &\quad + 2 \sum_{l=1}^{M_n-1} \sum_{h=l+1}^{M_n} \text{Cov} \left(\left(\sum_{m \in I_{j,l}} e_m \right)^2, \left(\sum_{q \in I_{j,h}} e_q \right)^2 \right) \\ &=: S_{3,1} + S_{3,2}. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Zur Berechnung der Varianz von $S_{3,1}$ nutzen wir wieder die Kenngröße der gemeinsamen

Kumulanten in (3.11) und erhalten folgende Unterteilung

$$\begin{aligned}
& \text{Var} \left[\left(\sum_{m \in I_{j,l}} e_m \right)^2 \right] \\
&= \mathbb{E} \left(\sum_{m \in I_{j,l}} e_m \right)^4 - \left[\mathbb{E} \left(\sum_{m \in I_{j,l}} e_m \right)^2 \right]^2 \\
&= \sum_{p,q,r,s \in I_{j,l}} [\mathbb{E}(e_p e_q e_r e_s) - \mathbb{E}(e_p e_q) \mathbb{E}(e_r e_s)] \\
&= \sum_{p,q,r,s \in I_{j,l}} \text{cum}(e_p, e_q, e_r, e_s) + \sum_{p,q,r,s \in I_{j,l}} [\mathbb{E}(e_p e_r) \mathbb{E}(e_q e_s) + \mathbb{E}(e_p e_s) \mathbb{E}(e_q e_r)] \\
&=: S_{3,1,1} + S_{3,1,2}. \tag{4.44}
\end{aligned}$$

Die Abschätzung der Kumulante findet in Lemma 8.1 statt. Unter der Voraussetzung [A6] (i) können wir Lemma 8.1 anwenden und erhalten $|\text{cum}(e_p, e_q, e_r, e_s)| \leq 16C(\alpha(v))^{\frac{\delta}{28+\delta}}$ für $v = \max\{q-p, r-q, s-r\}$ falls $p \leq q \leq r \leq s$. Für $p \in I_{j,l}$ zerlegen wir die Menge $\{(q, r, s) : p, q, r, s \in I_{j,l} \text{ mit } p \leq q \leq r \leq s, \max\{q-p, r-q, s-r\} \geq 0\}$ in Mengen

$$G_v(p) = \{(q, r, s) : p, q, r, s \in I_{j,l} \text{ mit } p \leq q \leq r \leq s, \max\{q-p, r-q, s-r\} = v\}.$$

Somit beinhaltet $G_v(p)$ alle (q, r, s) bei denen die größte Lücke zwischen p, q, r und s gleich v ist. Da wir den Abstand zwischen vier Variablen betrachten, gibt es drei Möglichkeiten für eine größte Lücke. Die Größe der beiden kleineren Lücken können wir mit Hilfe von v , der Größe der größten Lücke, abschätzen. Daher gilt $\#G_v(p) \leq 3(v+1)^2$. Mit Hilfe dieser Mengen, sowie mit Lemma 8.1 und [A6] (ii) können wir die Kumulantensumme in (4.44) wie folgt abschätzen

$$\begin{aligned}
S_{3,1,1} &\leq 4! \sum_{\substack{p,q,r,s \in I_{j,l} \\ p \leq q \leq r \leq s}} |\text{cum}(e_p, e_q, e_r, e_s)| \\
&\leq 4! \sum_{p \in I_{j,l}} \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{(q,r,s) \in G_v(p)} 16C(\alpha(v))^{\frac{\delta}{28+\delta}} \\
&\leq C l_n \sum_{v=0}^{\infty} 3(v+1)^2 (\alpha(v))^{\frac{\delta}{28+\delta}} \\
&= O(l_n). \tag{4.45}
\end{aligned}$$

Weiterhin ergibt sich wieder mit (4.39) und [A6] (ii) für den zweiten Term $S_{3,1,2}$, dass

$$\begin{aligned} S_{3,1,2} &= 2 \left(\sum_{p,q \in I_{j,l}} \mathbb{E}(e_p e_q) \right)^2 \leq 2 \left(2 \sum_{\substack{p,q \in I_{j,l} \\ p \leq q}} 4C (\alpha(q-p))^{\frac{\delta}{28+\delta}} \right)^2 \\ &\leq 2 \left(C l_n \sum_{v=0}^{\infty} (\alpha(v))^{\frac{\delta}{28+\delta}} \right)^2 = O(l_n^2). \end{aligned} \quad (4.46)$$

Somit erhalten wir mit (4.44), (4.45) und (4.46) für die Varianz die Größenordnung

$$\text{Var} \left[\left(\sum_{m \in I_{j,l}} e_m \right)^2 \right] = O(l_n^2).$$

Durch Aufsummieren dieser Varianzen für $l = 1, \dots, M_n$ ergibt sich für den ersten Term in (4.43)

$$S_{3,1} = O\left(\frac{nb_n}{l_n} l_n^2\right) = O(nb_n l_n). \quad (4.47)$$

Nun untersuchen wir den Kovarianzterm $S_{3,2}$ von (4.43), welcher die Kovarianzen zwischen dem Produkt zweier Fehlervariablen mit jeweiligen Indizes aus zwei verschiedenen Blöcken betrachtet. Dabei interessieren uns bei der Berechnung aufgrund des α -Mischungskoeffizienten nur noch die Abstände der Indizes von einem Block zu den Indizes seiner nachfolgenden Blöcke. Dadurch erhalten wir mit (4.39) und [A6] (ii), dass

$$\begin{aligned} S_{3,2} &\leq 8 \sum_{l=1}^{M_n-1} \sum_{h=l+1}^{M_n} \sum_{\substack{m,p \in I_{j,l} \\ m \leq p}} \sum_{\substack{v,q \in I_{j,h} \\ v \leq q}} |\text{Cov}(e_m e_p, e_v e_q)| \\ &\leq 8 l_n^2 \sum_{l=1}^{M_n-1} \sum_{b=1}^{M_n-1} \sum_{p \in I_{j,l}} \sum_{v \in I_{j,b+l}} 4C (\alpha(v-p))^{\frac{\delta}{28+\delta}} \\ &\leq C l_n^2 \sum_{l=1}^{M_n-1} \sum_{p \in I_{j,l}} \sum_{v \in (I_{j,l+1} \cup \dots \cup I_{j,l+M_n-1})} (\alpha(v-p))^{\frac{\delta}{28+\delta}} \\ &\leq C l_n^2 \sum_{l=1}^{M_n-1} \sum_{r=0}^{\infty} r (\alpha(r))^{\frac{\delta}{28+\delta}} \\ &= O\left(\frac{nb_n}{l_n} l_n^2\right) = O(nb_n l_n). \end{aligned} \quad (4.48)$$

Fassen wir nun die Werte (4.47) und (4.48) zusammen, so erhalten wir mit (4.43) die Größen-

ordnung des zweiten Momentes von S_3 mit

$$\mathbb{E} \left(\sum_{l=1}^{M_n} \left(\sum_{m \in I_{j,l}} e_m \right)^2 - \sum_{l=1}^{M_n} \mathbb{E} \left(\sum_{m \in I_{j,l}} e_m \right)^2 \right)^2 = O(nb_n l_n).$$

Diese Größenordnung dient uns als Schranke für die nachfolgend gesuchte Wahrscheinlichkeit. Für weitere Berechnungen definieren wir uns die Zufallsvariablen

$$Z_{j,l} := \left(\sum_{m \in I_{j,l}} e_m \right)^2 - \mathbb{E} \left(\sum_{m \in I_{j,l}} e_m \right)^2$$

für $j = 1, \dots, \left\lfloor \frac{n}{M_n l_n} \right\rfloor$ und $l = 1, \dots, M_n$. Die Zufallsvariablen $Z_{j,l}$ bestehen aus l_n Fehlervariablen $(e_i)_{i=1, \dots, n}$ mit Indizes aus jeweils demselben kleinen Block. Somit können wir den Mischungskoeffizienten von $Z_{j,l}$ durch den Mischungskoeffizienten des Fehlerprozesses abschätzen. Damit folgt

$$\alpha(\sigma(Z_{j,l}, Z_{j,l-1}, \dots), \sigma(Z_{j,l+r}, Z_{j,l+r+1}, \dots)) \leq \alpha((r-1)l_n + 1) \leq \alpha(r)$$

mit $r \geq 1$. Unter dieser Bedingung, sowie mit Hilfe der Voraussetzungen [A6] können wir die Rosenthal-Ungleichung aus Lemma 2.3 für $2 < a \leq 12$ auf die Zufallsvariablen $Z_{j,l}$ anwenden. Dadurch erhalten wir mit dem nachfolgenden Lemma 4.4 und (4.13), dass

$$\begin{aligned} & P \left(\left| \sum_{l=1}^{M_n} \left(\sum_{m \in I_{j,l}} e_m \right)^2 - \sum_{l=1}^{M_n} \mathbb{E} \left(\sum_{m \in I_{j,l}} e_m \right)^2 \right| \geq \sqrt{nb_n l_n} n^\delta \right) \\ & \leq \frac{\mathbb{E} \left(\left| \sum_{l=1}^{M_n} Z_{j,l} \right|^a \right)}{(nb_n l_n)^{a/2} n^{a\delta}} \\ & \leq \frac{C \sum_{l=1}^{M_n} (\mathbb{E}(|Z_{j,l}|^{a+\epsilon}))^{\frac{a}{a+\epsilon}} + C \left[\sum_{l=1}^{M_n} (\mathbb{E}(|Z_{j,l}|^{2+\epsilon}))^{\frac{2}{2+\epsilon}} \right]^{a/2}}{(nb_n l_n)^{a/2} n^{a\delta}} \\ & = \frac{O \left(\frac{nb_n}{l_n} l_n^a + \left(\frac{nb_n}{l_n} \right)^{a/2} l_n^a \right)}{(nb_n l_n)^{a/2} n^{a\delta}} = \frac{O \left((nb_n l_n)^{a/2} \right)}{(nb_n l_n)^{a/2} n^{a\delta}} = O \left(n^{-a\delta} \right) = O \left(n^{-\gamma} \right), \end{aligned}$$

wodurch S_3 die Größenordnung

$$S_3 = \left| \sum_{l=1}^{M_n} \left(\sum_{m \in I_{j,l}} e_m \right)^2 - \sum_{l=1}^{M_n} \mathbb{E} \left(\sum_{m \in I_{j,l}} e_m \right)^2 \right| = \tilde{O} \left(\sqrt{nb_n l_n} n^\delta, n^{-\gamma} \right) \quad (4.49)$$

besitzt. Zum Schluss untersuchen wir den Kovarianzterm S_4 von (4.38), welcher die Kovarianz

zwischen den Fehlervariablen mit Indizes aus zwei verschiedenen Intervallen $I_{j,l}$ betrachtet. Daher gilt mit (4.39), [A6] (ii) und analogen Berechnungen zu (4.48), dass

$$\begin{aligned}
S_4 &= 2 \left| \sum_{l=1}^{M_n-1} \sum_{h=l+1}^{M_n} \text{Cov} \left(\sum_{m \in I_{j,l}} e_m, \sum_{p \in I_{j,h}} e_p \right) \right| \\
&\leq 2 \sum_{l=1}^{M_n-1} \sum_{h=l+1}^{M_n} \sum_{m \in I_{j,l}} \sum_{p \in I_{j,h}} |\text{Cov}(e_m, e_p)| \\
&\leq 2 \sum_{l=1}^{M_n-1} \sum_{b=1}^{M_n-1} \sum_{m \in I_{j,l}} \sum_{p \in I_{j,b+l}} 4C(\alpha(p-m))^{\frac{\delta}{28+\delta}} \\
&\leq C M_n \sum_{r=0}^{\infty} r(\alpha(r))^{\frac{\delta}{28+\delta}} = O\left(\frac{nb_n}{l_n}\right). \tag{4.50}
\end{aligned}$$

Nun haben wir die Größenordnungen aller vier Terme und dadurch den Abstand der Varianzen der Bootstrap- und Originalpartialsummen deren Variablenindizes innerhalb eines Blockes der Länge $M_n l_n$ liegen, bestimmt. Somit erhalten wir mit (4.38), (4.40), (4.42), (4.49) und (4.50), dass

$$\begin{aligned}
&\left| \text{Var}^* \left(S_{jM_n l_n}^* - S_{(j-1)M_n l_n}^* \right) - \text{Var} \left(S_{jM_n l_n} - S_{(j-1)M_n l_n} \right) \right| \\
&= \tilde{O} \left(nb_n l_n n^{2\delta-4/5} + nb_n l_n^{1/2} n^{2\delta-2/5} + \sqrt{nb_n l_n} n^\delta, n^{-\gamma} \right) + O\left(\frac{nb_n}{l_n}\right).
\end{aligned}$$

□

Zum Schluss liefern wir ein weiteres Hilfsresultat, welches in Lemma 4.3 genutzt wurde.

Lemma 4.4

Unter den Voraussetzungen von Satz 4.3 erhalten wir für $a \in 2\mathbb{N}$ mit $a \leq 14$, dass

$$\mathbb{E} \left| \left(\sum_{m \in I_{j,l}} e_m \right)^2 - \mathbb{E} \left(\sum_{m \in I_{j,l}} e_m \right)^2 \right|^a = O(l_n^a),$$

wobei $I_{j,l} = \{(j-1)M_n l_n + (l-1)l_n + 1, \dots, (j-1)M_n l_n + ll_n\}$ für $j = 1, \dots, \left\lfloor \frac{n}{M_n l_n} \right\rfloor$ und $l = 1, \dots, M_n$, mit $M_n = \left\lfloor \frac{nb_n}{l_n} \right\rfloor$.

Beweis

Mit Hilfe der Minkowski-Ungleichung und der Jensenschen Ungleichung erhalten wir für eine Zufallsvariable Y und ein $p \in 2\mathbb{N}$ folgende Ungleichung für das p -te zentrale Moment

$$\mathbb{E} (Y - \mathbb{E}(Y))^p \leq C_p (\mathbb{E}Y^p + (\mathbb{E}Y)^p). \tag{4.51}$$

Für alle geradzahigen $a \leq 14$ erhalten wir mit dieser Ungleichung die Abschätzung für das gesuchte a -te zentrale absolute Moment

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left| \left(\sum_{m \in I_{j,l}} e_m \right)^2 - \mathbb{E} \left(\sum_{m \in I_{j,l}} e_m \right)^2 \right|^a &\leq C_a \left(\mathbb{E} \left(\sum_{m \in I_{j,l}} e_m \right)^{2a} + \left(\mathbb{E} \left(\sum_{m \in I_{j,l}} e_m \right)^2 \right)^a \right) \\ &=: C_a (H_1 + H_2). \end{aligned}$$

Unter den Voraussetzungen [A6] können wir die Rosenthal-Ungleichung aus Lemma 2.3 für $2a \leq 28$ auf H_1 anwenden. Somit gilt mit [A6] (i), dass

$$\begin{aligned} H_1 &\leq C \sum_{m \in I_{j,l}} \left(\mathbb{E} (|e_m|^{2a+\epsilon}) \right)^{\frac{2a}{2a+\epsilon}} + C \left[\sum_{m \in I_{j,l}} \left(\mathbb{E} (|e_m|^{2+\epsilon}) \right)^{\frac{2}{2+\epsilon}} \right]^a \\ &\leq C \sum_{m \in I_{j,l}} \max_{m \in I_{j,l}} \mathbb{E} (|e_m|^{2a+\epsilon}) + C \left[\sum_{m \in I_{j,l}} \max_{m \in I_{j,l}} \mathbb{E} (|e_m|^{2+\epsilon}) \right]^a \\ &= O(l_n + l_n^a) = O(l_n^a). \end{aligned}$$

Des Weiteren gilt mit der Kovarianzungleichung (4.39) und [A6] (ii) die Abschätzung

$$\begin{aligned} H_2 &= \left(\sum_{m,p \in I_{j,l}} \mathbb{E} (e_m e_p) \right)^a \leq \left(2 \sum_{\substack{m,p \in I_{j,l} \\ m \leq p}} |\text{Cov} (e_m e_p)| \right)^a \\ &\leq \left(2 \sum_{m \in I_{j,l}} 4C \sum_{r=0}^{\infty} (\alpha(r))^{\frac{\delta}{28+\delta}} \right)^a = O(l_n^a). \end{aligned}$$

Damit besitzt das a -te zentrale absolute Moment die Größenordnung

$$\mathbb{E} \left| \left(\sum_{m \in I_{j,l}} e_m \right)^2 - \mathbb{E} \left(\sum_{m \in I_{j,l}} e_m \right)^2 \right|^a = O(l_n^a).$$

□

4.4 Coupling von Partialsummen für das Autoregressive DWB

In diesem Kapitel werden wir wieder ein Coupling des Bootstrap-Partialsummenprozesses $(S_k^*)_{k=1,\dots,n}$ herleiten. Die Bootstrap-Variablen $(e_i^*)_{i=1,\dots,n}$ werden nun mit Hilfe des Autoregressive Dependent Wild Bootstrap-Verfahrens aus Kapitel 2.3.2 erzeugt. Bei diesem Verfah-

ren werden die Hilfsvariablen $(W_i)_{i=1,\dots,n}$ durch einen AR(1)-Prozess

$$W_i = e^{-1/l_n} W_{i-1} + u_i \quad \text{für } i \in \mathbb{N},$$

mit unabhängigen und identisch verteilten Innovationen $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ definiert. Weiterhin sind $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ und W_0 unabhängig mit $W_0 \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Zur Vereinfachung der nachfolgenden Berechnungen nutzen wir die verteilungsgleiche Darstellung

$$W_0 = \sum_{s=0}^{\infty} e^{-\frac{s}{l_n}} u_{-s},$$

wodurch wir die Lösung des AR(1)-Prozesses

$$W_i = \sum_{s=0}^{\infty} e^{-\frac{s}{l_n}} u_{i-s}$$

erhalten. Für die Bootstrap-Partialsumme ergibt sich somit

$$S_k^* = \sum_{m=1}^k e_m^* = \sum_{m=1}^k \hat{e}_m W_m = \sum_{m=1}^k \hat{e}_m \sum_{s=0}^{\infty} e^{-\frac{s}{l_n}} u_{m-s}$$

für $k = 1, \dots, n$. Da diese Reihe mit Wahrscheinlichkeit 1 absolut konvergiert, können wir die Summationsreihenfolge ändern und S_k^* für $k = 1, \dots, n$ in einen Hauptterm und zwei Restterme mit unabhängigen Summanden unterteilen

$$\begin{aligned} S_k^* &= \sum_{m=1}^k \hat{e}_m \sum_{s=0}^{\infty} e^{-\frac{s}{l_n}} u_{m-s} \\ &= \underbrace{\sum_{m=1}^k u_m \sum_{s=m}^n e^{-\frac{s-m}{l_n}} \hat{e}_s}_{=: S_{k,0}^*} - \underbrace{\sum_{m=1}^k u_m \sum_{s=k+1}^n e^{-\frac{s-m}{l_n}} \hat{e}_s}_{=: R_{k,1}^*} + \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} u_{-m} \sum_{s=1}^k e^{-\frac{m+s}{l_n}} \hat{e}_s}_{=: R_{k,2}^*}. \end{aligned}$$

Für den Nachweis der asymptotischen Korrektheit des simultanen Konfidenzbandes werden wir die Partialsummenprozesse $(S_k)_{k=1,\dots,n}$ und $(S_k^*)_{k=1,\dots,n}$ aneinander koppeln. Dies erreichen wir mit Hilfe der Approximation der beiden Prozesse durch den gleichen Wiener Prozess. Dazu wurde in Kapitel 4.1 die starke Approximation des Partialsummenprozesses der Fehlervariablen $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ aufgezeigt. Nun erhalten wir das Coupling des Partialsummenprozesses $(S_k^*)_{k=1,\dots,n}$ an einen Wiener Prozess, indem wir die gleichmäßige Approximation des Hauptterms $(S_{k,0}^*)_{k=1,\dots,n}$ durch diesen Wiener Prozess herleiten und weiterhin die Größenordnungen der Restterme $(R_{k,1}^*)_{k=1,\dots,n}$ und $(R_{k,2}^*)_{k=1,\dots,n}$ bestimmen. Im nachfolgenden Kapitel 5 betrachten wir abschließend das Coupling von $(S_k)_{k=1,\dots,n}$ und $(S_k^*)_{k=1,\dots,n}$.

Wir untersuchen somit zunächst den Hauptterm $S_{k,0}^*$ für $k = 1, \dots, n$. Aufgrund der Unab-

hängigkeit und der $\mathcal{N}(0, 1 - e^{-2/l_n})$ -Verteilung der Zufallsvariablen $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ erhalten wir für dessen Varianz, bedingt auf die Originalstichprobe $(X_i)_{i=1, \dots, n}$,

$$\begin{aligned} \text{Var}^*(S_{k,0}^*) &= \text{Var}^* \left(\sum_{m=1}^k u_m \sum_{s=m}^n e^{-\frac{s-m}{l_n}} \hat{e}_s \right) = \sum_{m=1}^k \text{Var}(u_1) \left(\sum_{s=m}^n e^{-\frac{s-m}{l_n}} \hat{e}_s \right)^2 \\ &= \sum_{m=1}^k \left(1 - e^{-2/l_n} \right) \sum_{s,t=m}^n e^{-\frac{s+t-2m}{l_n}} \hat{e}_s \hat{e}_t. \end{aligned}$$

Zur Vereinfachung von späteren Rechnungen formen wir diese Varianz weiter um und erhalten

$$\text{Var}^*(S_{k,0}^*) = \sum_{s,t=1}^n \hat{e}_s \hat{e}_t \left(1 - e^{-2/l_n} \right) \sum_{m=1}^{\min(s,t,k)} e^{-\frac{s+t-2m}{l_n}} = \sum_{s,t=1}^n \hat{e}_s \hat{e}_t \rho_{1,k}(s, t, l_n),$$

mit Hilfe der Definition

$$\rho_{i,j}(s, t, l_n) := \left(1 - e^{-2/l_n} \right) \sum_{m=i}^{\min(s,t,j)} e^{-\frac{s+t-2m}{l_n}}$$

für $i, j, s, t = 1, \dots, n$ und $l_n > 0$. Da die Variablen $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ unabhängig und normalverteilt sind, ist $S_{k,0}^*$ ebenso normalverteilt mit dem Erwartungswert Null und obiger Varianz, d. h.

$$S_{k,0}^* \sim \mathcal{N} \left(0, \sum_{s,t=1}^n \hat{e}_s \hat{e}_t \rho_{1,k}(s, t, l_n) \right).$$

Im Folgenden werden wir den Term $\rho_{i,j}(s, t, l_n)$ genauer untersuchen und fassen im nachfolgenden Lemma wichtige Eigenschaften von diesem zusammen.

Lemma 4.5

Es sei

$$\rho_{i,j}(s, t, l_n) := \left(1 - e^{-2/l_n} \right) \sum_{m=i}^{\min(s,t,j)} e^{-\frac{s+t-2m}{l_n}}$$

für $i, j, s, t = 1, \dots, n$ und $l_n > 0$. Wir erhalten für alle $i \leq j$ folgende Eigenschaften

- (I) $\rho_{i,j}(s, t, l_n) \leq 1$,
- (II) $|1 - \rho_{i,j}(s, t, l_n)| \leq 2 \frac{|s-t|}{l_n} + e^{-\frac{s+t-2(i-1)}{l_n}}$ für $j \geq \min(s, t)$,
- (III) $\max_{1 \leq i, j \leq n} \max_{1 \leq s \leq n} \sum_{t=1}^n \rho_{i,j}(s, t, l_n) = O(l_n)$.

Beweis

Um besser zu sehen, dass $\rho_{i,j}(s, t, l_n)$ hauptsächlich vom Abstand $|s - t|$ abhängt, formen wir den Term weiter um und erhalten

$$\begin{aligned} \rho_{i,j}(s, t, l_n) &= \left(1 - e^{-2/l_n}\right) \sum_{m=i}^{\min(s,t,j)} e^{-\frac{2\min(s,t)+|s-t|-2m}{l_n}} \\ &= \left(1 - e^{-2/l_n}\right) e^{-\frac{|s-t|}{l_n}} e^{-\frac{2\min(s,t)}{l_n}} \frac{e^{\frac{2i}{l_n}} - e^{\frac{2(\min(s,t,j)+1)}{l_n}}}{1 - e^{2/l_n}} \\ &= \left(1 - e^{-2/l_n}\right) e^{-\frac{|s-t|}{l_n}} e^{-\frac{2\min(s,t)}{l_n}} \frac{e^{\frac{2\min(s,t,j)}{l_n}} - e^{\frac{2(i-1)}{l_n}}}{1 - e^{-2/l_n}} \\ &= e^{-\frac{|s-t|}{l_n}} \left(e^{-(2/l_n)[\min(s,t)-\min(s,t,j)]} - e^{-(2/l_n)[\min(s,t)-(i-1)]} \right). \end{aligned}$$

Beachten wir, dass $\rho_{i,j}(s, t, l_n) = 0$ ist für $i > \min(s, t, j)$, dann können wir an obiger Gleichung erkennen, dass Eigenschaft (I), $\rho_{i,j}(s, t, l_n) \leq 1$, erfüllt ist. Des Weiteren erhalten wir für den Fall $j \geq \min(s, t)$ mit der Ungleichung $|e^z - 1| \leq 2|z|$ für $|z| \leq 1$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} |1 - \rho_{i,j}(s, t, l_n)| &= \left| 1 - e^{-\frac{|s-t|}{l_n}} \left(1 - e^{-(2/l_n)[\min(s,t)-(i-1)]} \right) \right| \\ &\leq \left| 1 - e^{-\frac{|s-t|}{l_n}} \right| + \left| e^{-\frac{s+t-2(i-1)}{l_n}} \right| \\ &\leq 2 \frac{|s-t|}{l_n} + e^{-\frac{s+t-2(i-1)}{l_n}}. \end{aligned}$$

Womit Eigenschaft (II) gezeigt ist. Für die dritte Eigenschaft nutzen wir die Abschätzung

$$\begin{aligned} &\max_{1 \leq i, j \leq n} \max_{1 \leq s \leq n} \sum_{t=1}^n \rho_{i,j}(s, t, l_n) \\ &= \max_{1 \leq i, j \leq n} \max_{1 \leq s \leq n} \sum_{t=1}^n e^{-\frac{|s-t|}{l_n}} \left(e^{-(2/l_n)[\min(s,t)-\min(s,t,j)]} - e^{-(2/l_n)[\min(s,t)-(i-1)]} \right) \\ &\leq \max_{1 \leq s \leq n} \sum_{t=1}^n e^{-\frac{|s-t|}{l_n}} \leq 2 \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\frac{m}{l_n}} = \frac{2}{1 - e^{-1/l_n}}. \end{aligned}$$

Weiterhin gilt mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung, dass

$$1 - e^{-1/l_n} = e^0 - e^{-1/l_n} = e^\xi \frac{1}{l_n} \quad (4.52)$$

für ein $\xi \in (-1/l_n, 0)$. Zusammen erhalten wir dadurch (III). \square

Nachfolgend werden wir nun die gleichmäßige Approximation der Bootstrap-Partialsumme S_k^* für $k = 1, \dots, n$ durch einen Wiener Prozess nachweisen. Hierfür benötigen wir zusätzlich zu den Voraussetzungen [A1] und [A2] noch folgende Annahmen

[A7]

- (i) Für den Prozess $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ gilt für ein $\delta > 0$, dass $\mathbb{E}(|e_1|^{28+\delta}) < \infty$.
- (ii) Weiterhin gilt für obiges δ , dass $\sum_{r=0}^{\infty} (r+1)^{26} (\alpha(r))^{\frac{\delta}{28+\delta}} < \infty$.
- (iii) Für die AR-Parameter $(l_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gilt $l_n \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$, sowie $l_n = O\left(\frac{\sqrt{nb_n}}{\log(n)}\right)$ und $\frac{1}{l_n} = o\left(\frac{1}{\log(n)}\right)$.

Bemerkung

Diese Voraussetzungen sind äquivalent zu den Annahmen [A6], welche in Kapitel 4.3 für das Coupling der Bootstrap-Partialsumme, welche mit Hilfe des Blockwise DWB entsteht, benötigt wurden.

Der AR-Parameter l_n dient wieder dazu die Abhängigkeitsstruktur des Originalprozesses aufzufangen. Dies geschieht mit wachsendem l_n bei steigendem Stichprobenumfang. Dennoch muss auch hier der AR-Parameter durch $O\left(\frac{\sqrt{nb_n}}{\log(n)}\right)$ beschränkt werden, um die Verteilung der Statistik gut imitieren zu können. Somit stellt l_n eine Art Blocklänge des Blockwise DWB dar.

Um unser Ziel, die asymptotische Korrektheit von simultanen Konfidenzbändern nachzuweisen, zu erreichen, sollen die Partialsummenprozesse $(S_k)_{k=1,\dots,n}$ und $(S_k^*)_{k=1,\dots,n}$ mit Hilfe der Coupling-Technik an den gleichen Wiener Prozess gekoppelt werden. Zur Konstruktion der Pseudo-Fehler für die Bootstrap-Partialsumme wird in diesem Abschnitt das Autoregressive DWB genutzt. Wie bereits gezeigt, können wir die Bootstrap-Partialsumme in einen Hauptterm und zwei Restterme unterteilen. Somit werden wir, wie bereits erwähnt, die Approximation des Hauptterms $(S_{k,0}^*)_{k=1,\dots,n}$ durch einen Wiener Prozess nachweisen und zusätzlich die Restterme abschätzen.

Wie beim Abschätzen des Approximationsfehlers der Bootstrap-Partialsumme, welche durch das Blockwise DWB entsteht, in Kapitel 4.3, unterteilen wir zunächst auch hier die Indizes der Summanden von S_k^* in Blöcke der Länge nb_n . Für die Berechnungen benötigen wir wieder den ganzzahligen Anteil und definieren uns somit $m_n := [nb_n]$. Für den Fall das nb_n und $\frac{n}{nb_n}$ ganzzahlig sind erhalten wir somit $\left[\frac{n}{m_n}\right]$ Blöcke der Länge m_n . Falls jedoch $\frac{n}{m_n}$ nicht ganzzahlig ist erhalten wir ebenso $\left[\frac{n}{m_n}\right]$ Blöcke der Länge m_n , plus einen Block mit $n - \left[\frac{n}{m_n}\right] m_n$ und somit weniger als m_n Variablen.

Mit Hilfe des nachfolgenden Satzes werden wir das Coupling des Partialsummenprozesses $(S_{k,0}^*)_{k=1,\dots,n}$, mit

$$S_{k,0}^* = \sum_{m=1}^k u_m \sum_{s=m}^n e^{-\frac{s-m}{l_n}} \hat{e}_s,$$

herleiten. Hierbei sind $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ die unabhängigen und identisch verteilten Innovationen des AR(1)-Prozesses vom Autoregressive DWB aus Kapitel 2.3.2.

Satz 4.4

Unter den Voraussetzungen [A1], [A2] und [A7] existiert auf einer geeigneten Erweiterung des zugrunde liegenden Wahrscheinlichkeitsraumes (Ω, \mathcal{A}, P) der Bootstrap-Partialsummenprozess $(S_{k,0}^*)_{k=1,\dots,n}$ und ein Wiener Prozess \mathbb{W}^* , sodass

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{1 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{m_n} \rfloor \\ 1 \leq l \leq c m_n}} \left| \left(S_{(j-1)m_n+l,0}^* - S_{(j-1)m_n,0}^* \right) - \left(\mathbb{W}^*(\sigma^2((j-1)m_n+l)) - \mathbb{W}^*(\sigma^2(j-1)m_n) \right) \right| \\ & = o_{P^*} \left(\frac{\sqrt{nb_n}}{\sqrt{\log(n)}} \right), \end{aligned}$$

wobei $m_n := \lfloor nb_n \rfloor$ und $c \leq C < \infty$ fest.

Beweis

Wir möchten durch ein geeignetes Coupling die Bootstrap-Partialsumme $S_{k,0}^*$ an einen Wiener Prozess koppeln. $S_{k,0}^*$ ergibt sich aufgrund des Autoregressive DWB aus Kapitel 2.3.2. Hierbei werden die Hilfsvariablen $(W_i)_{i=1,\dots,n}$ durch einen AR(1)-Prozess mit unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ definiert. Für die Approximation von $S_{k,0}^*$ durch einen Wiener Prozess unterteilen wir, wie bereits oben erläutert, die Indizes der Summanden von $S_{k,0}^*$ in Blöcke der Länge $m_n = \lfloor nb_n \rfloor$. Dabei erhalten wir $\lfloor \frac{n}{m_n} \rfloor$ Blöcke der Länge m_n falls $\frac{n}{m_n}$ ganzzahlig ist. Gilt jedoch $\frac{n}{m_n} > \lfloor \frac{n}{m_n} \rfloor$ dann erhalten wir ebenso $\lfloor \frac{n}{m_n} \rfloor$ Blöcke der Länge m_n , plus einen Block mit $n - \lfloor \frac{n}{m_n} \rfloor m_n$ Variablen. Für die nachfolgenden Berechnungen betrachten wir daher $\lfloor \frac{n}{m_n} \rfloor - 1$ vollständige Blöcke der Länge m_n mit den Blocknummern $j = 1, \dots, \lfloor \frac{n}{m_n} \rfloor - 1$ und einen Restblock für $j = \lfloor \frac{n}{m_n} \rfloor$, welcher mindestens m_n und weniger als $2m_n$ Variablen umfasst. Somit fassen wir den letzten vollständigen Block mit dem möglicherweise zusätzlichen kleineren Block zu einem Restblock zusammen.

Des Weiteren können die Indizes der Summanden der Partialsumme $S_{k,0}^*$ ein Vielfaches der Blocklänge m_n sein, oder nicht. Somit betrachten wir die Indizes

$$k = (j-1)m_n + l$$

mit $l = 1, \dots, m_n$ für die vollständigen Blöcke $j = 1, \dots, \lfloor \frac{n}{m_n} \rfloor - 1$. Im Fall des Restblockes $j = \lfloor \frac{n}{m_n} \rfloor$ gilt $l = 1, \dots, n - \left(\lfloor \frac{n}{m_n} \rfloor - 1 \right) m_n$. Falls l den Wert m_n annimmt, so ist k ein Vielfaches der Blocklänge m_n , sonst nicht.

Wir untersuchen nun das Coupling der Bootstrap-Partialsumme, deren Indizes innerhalb eines Blockes mit der maximalen Länge von $2m_n$ liegen, für alle Blöcke $j = 1, \dots, \lfloor \frac{n}{m_n} \rfloor$. Die Partial-

summe $S_{k,0}^*$ ergibt sich aus der Summe von gewichteten, unabhängigen und $\mathcal{N}(0, 1 - e^{-2/l_n})$ -verteilten Zufallsvariablen $(u_i)_{i=1,\dots,k}$. Dadurch erhalten wir als Verteilung für einen Summanden ebenso eine Normalverteilung mit

$$\begin{aligned} S_{k+1,0}^* - S_{k,0}^* &= u_{k+1} \sum_{s=k+1}^n e^{-\frac{s-(k+1)}{l_n}} \hat{e}_s \\ &\sim \mathcal{N} \left(0, \left(1 - e^{-2/l_n}\right) \left(\sum_{s=k+1}^n e^{-\frac{s-(k+1)}{l_n}} \hat{e}_s \right)^2 \right) \end{aligned}$$

für $k = 1, \dots, n-1$. Aufgrund der Unabhängigkeit und der Normalverteilung eines jeden solchen Summanden können wir diese als Zuwächse eines Wiener Prozesses darstellen. Damit die Stopppzeiten $\tau_{j,l}^*$ des Wiener Prozesses auf der Bootstrap-Seite mit den Stopppzeiten des Wiener Prozesses von der starken Approximation der Originalfehler übereinstimmen, werden die Stopppzeiten $\tau_{j,l}^*$ für $j = 1, \dots, \lfloor \frac{n}{m_n} \rfloor - 1$ und $l = 1, \dots, m_n$ geeignet gewählt und eine Normierung über den jeweiligen Block der Länge m_n vorgenommen. Im Restblock werden die Stopppzeiten $\tau_{j,l}^*$ für $j = \lfloor \frac{n}{m_n} \rfloor$ und $l = 1, \dots, n - \left(\lfloor \frac{n}{m_n} \rfloor - 1\right) m_n$ mit der möglicherweise längeren Blocklänge $n - \left(\lfloor \frac{n}{m_n} \rfloor - 1\right) m_n$ normiert.

Somit definieren wir für die vollständigen Blöcke der Länge m_n für $j = 1, \dots, \lfloor \frac{n}{m_n} \rfloor - 1$ und $l = 1, \dots, m_n$ einen Bootstrap-Summanden als einen normierten Zuwachs eines Wiener Prozesses \mathbb{W}^* so, dass

$$\begin{aligned} S_{(j-1)m_n+l,0}^* - S_{(j-1)m_n+l-1,0}^* &= u_{(j-1)m_n+l} \sum_{s=(j-1)m_n+l}^n e^{-\frac{s-((j-1)m_n+l)}{l_n}} \hat{e}_s \\ &:= \sqrt{\frac{\text{Var}^* \left(S_{jm_n,0}^* - S_{(j-1)m_n,0}^* \right)}{\sigma^2 m_n}} \left[\mathbb{W}^* \left(\tau_{j,l}^* \right) - \mathbb{W}^* \left(\tau_{j,l-1}^* \right) \right] \end{aligned} \quad (4.53)$$

mit den Stopppzeiten

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{j,l}^* - \tau_{j,0}^*}{\sigma^2 m_n} &:= \frac{\text{Var}^* \left(S_{(j-1)m_n+l,0}^* - S_{(j-1)m_n,0}^* \right)}{\text{Var}^* \left(S_{jm_n,0}^* - S_{(j-1)m_n,0}^* \right)} \\ &= \frac{\sum_{h=1}^l (1 - e^{-2/l_n}) \left(\sum_{s=(j-1)m_n+h}^n e^{-\frac{s-((j-1)m_n+h)}{l_n}} \hat{e}_s \right)^2}{\text{Var}^* \left(S_{jm_n,0}^* - S_{(j-1)m_n,0}^* \right)} \end{aligned}$$

und

$$\tau_{j,0}^* := (j-1) \sigma^2 m_n.$$

Innerhalb des Restblockes $j = \left\lfloor \frac{n}{m_n} \right\rfloor$ definieren wir einen Bootstrap-Summanden für $l = 1, \dots, n - \left(\left\lfloor \frac{n}{m_n} \right\rfloor - 1 \right) m_n$ ebenso als normierten Zuwachs des Wiener Prozesses, jedoch mit einer anderen Normierung. Wir definieren

$$\begin{aligned} S_{(j-1)m_n+l,0}^* - S_{(j-1)m_n+l-1,0}^* &= u_{(j-1)m_n+l} \sum_{s=(j-1)m_n+l}^n e^{-\frac{s-((j-1)m_n+l)}{l_n}} \widehat{e}_s \\ &:= \sqrt{\frac{\text{Var}^*(S_{n,0}^* - S_{(j-1)m_n,0}^*)}{\sigma^2 \left(n - \left(\left\lfloor \frac{n}{m_n} \right\rfloor - 1 \right) m_n \right)}} [\mathbb{W}^*(\tau_{j,l}^*) - \mathbb{W}^*(\tau_{j,l-1}^*)] \end{aligned} \quad (4.54)$$

mit

$$\frac{\tau_{j,l}^* - \tau_{j,0}^*}{\sigma^2 \left(n - \left(\left\lfloor \frac{n}{m_n} \right\rfloor - 1 \right) m_n \right)} := \frac{\sum_{h=1}^l (1 - e^{-2/l_n}) \left(\sum_{s=(j-1)m_n+h}^n e^{-\frac{s-((j-1)m_n+h)}{l_n}} \widehat{e}_s \right)^2}{\text{Var}^*(S_{n,0}^* - S_{(j-1)m_n,0}^*)}$$

und

$$\tau_{j,0}^* := (j-1) \sigma^2 m_n.$$

Wir werden im Folgenden die Bootstrap-Partialsumme mit Indizes aus den vollständigen Blöcken der Länge m_n betrachten. Somit untersuchen wir die Approximation von $S_{k,0}^* - S_{(j-1)m_n,0}^*$ durch den Zuwachs des Wiener Prozesses mit $k = (j-1)m_n+l$ für $j = 1, \dots, \left\lfloor \frac{n}{m_n} \right\rfloor - 1$ und $l = 1, \dots, m_n$. Es ist ausreichend die Approximation der Partialsumme mit Indizes aus einem Block zu untersuchen, da aufgrund des Couplings

$$S_{(j-1)m_n+l,0}^* - S_{(j-1)m_n+l-1,0}^* = \sqrt{\frac{\text{Var}^*(S_{jm_n,0}^* - S_{(j-1)m_n,0}^*)}{\sigma^2 m_n}} [\mathbb{W}^*(\tau_{j,l}^*) - \mathbb{W}^*(\tau_{j,l-1}^*)]$$

für $j = 1, \dots, \left\lfloor \frac{n}{m_n} \right\rfloor - 1$ und $l = 1, \dots, m_n$ gilt und somit die jeweiligen Approximationen der Bootstrap-Partialsummen aneinander gereiht werden können.

Mit Hilfe des Couplings (4.53) erhalten wir zunächst

$$\begin{aligned} S_{(j-1)m_n+l,0}^* - S_{(j-1)m_n,0}^* &= \sum_{h=1}^l \left(S_{(j-1)m_n+h,0}^* - S_{(j-1)m_n+h-1,0}^* \right) \\ &= \sum_{h=1}^l \sqrt{\frac{\text{Var}^*(S_{jm_n,0}^* - S_{(j-1)m_n,0}^*)}{\sigma^2 m_n}} [\mathbb{W}^*(\tau_{j,h}^*) - \mathbb{W}^*(\tau_{j,h-1}^*)] \end{aligned}$$

$$= \sqrt{\frac{\text{Var}^*(S_{jm_n,0}^* - S_{(j-1)m_n,0}^*)}{\sigma^2 m_n}} [\mathbb{W}^*(\tau_{j,l}^*) - \mathbb{W}^*(\tau_{j,0}^*)].$$

Dadurch gilt für unsere gesuchte Approximation die Abschätzung

$$\begin{aligned} & \left| \left(S_{(j-1)m_n+l,0}^* - S_{(j-1)m_n,0}^* \right) - [\mathbb{W}^*(\tau_{j,l}^*) - \mathbb{W}^*(\tau_{j,0}^*)] \right| \\ & \leq \left| \left(\sqrt{\frac{\text{Var}^*(S_{jm_n,0}^* - S_{(j-1)m_n,0}^*)}{\sigma^2 m_n}} - 1 \right) [\mathbb{W}^*(\tau_{j,l}^*) - \mathbb{W}^*(\tau_{j,0}^*)] \right|. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Um nachfolgend den ersten Faktor der rechten Seite von (4.55) abzuschätzen, betrachten wir zuerst die Ungleichung

$$\left| \sqrt{\frac{\text{Var}^*(S_{jm_n,0}^* - S_{(j-1)m_n,0}^*)}{\sigma^2 m_n}} - 1 \right| \leq \left| \frac{\text{Var}^*(S_{jm_n,0}^* - S_{(j-1)m_n,0}^*) - \sigma^2 m_n}{\sigma^2 m_n} \right| \quad (4.56)$$

und unterteilen den Zähler der rechten Seite in

$$\begin{aligned} & \left| \text{Var}^*(S_{jm_n,0}^* - S_{(j-1)m_n,0}^*) - \sigma^2 m_n \right| \\ & \leq \left| \text{Var}^*(S_{jm_n,0}^* - S_{(j-1)m_n,0}^*) - \text{Var}(S_{jm_n} - S_{(j-1)m_n}) \right| \\ & \quad + \left| \text{Var}(S_{jm_n} - S_{(j-1)m_n}) - \sigma^2 m_n \right| \\ & =: V_1 + V_2. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Für den ersten Term V_1 berechnen wir nun den Abstand der Varianzen der Bootstrap- und Originalpartialsummen mit Indizes innerhalb eines vollständigen Blockes der Länge m_n . Aufgrund der Unabhängigkeit und der $\mathcal{N}(0, 1 - e^{-2/l_n})$ -Verteilung der Zufallsvariablen $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$, sowie mit $(\rho_{i,j}(\cdot))_{i,j=1,\dots,n}$ aus Lemma 4.5 gilt

$$\begin{aligned} V_1 &= \left| \text{Var}^* \left(\sum_{h=(j-1)m_n+1}^{jm_n} u_h \sum_{s=h}^n e^{-\frac{s-h}{l_n}} \hat{e}_s \right) - \text{Var} \left(\sum_{h=(j-1)m_n+1}^{jm_n} e_h \right) \right| \\ &= \left| \sum_{h=(j-1)m_n+1}^{jm_n} (1 - e^{-2/l_n}) \sum_{s,t=h}^n e^{-\frac{s+t-2h}{l_n}} \hat{e}_s \hat{e}_t - \sum_{h,m=(j-1)m_n+1}^{jm_n} \text{Cov}(e_h, e_m) \right| \\ &= \left| \sum_{s,t=(j-1)m_n+1}^n \hat{e}_s \hat{e}_t (1 - e^{-2/l_n}) \sum_{h=(j-1)m_n+1}^{\min(s,t,jm_n)} e^{-\frac{s+t-2h}{l_n}} - \sum_{h,m=(j-1)m_n+1}^{jm_n} \mathbb{E}(e_h e_m) \right| \\ &= \left| \sum_{h,m=(j-1)m_n+1}^n \hat{e}_h \hat{e}_m \rho_{(j-1)m_n+1, jm_n}(h, m, l_n) - \sum_{h,m=(j-1)m_n+1}^{jm_n} \mathbb{E}(e_h e_m) \right|. \end{aligned}$$

Durch eine unterschiedliche Anzahl der Summanden und die Differenz zwischen Residuum und Fehler erhalten wir weiterführend eine Unterteilung in drei Terme

$$\begin{aligned}
V_1 &\leq \left| \sum_{h,m=(j-1)m_n+1}^n (\widehat{e}_h \widehat{e}_m - e_h e_m) \rho_{(j-1)m_n+1, jm_n}(h, m, l_n) \right| \\
&\quad + \left| \sum_{h,m=(j-1)m_n+1}^{jm_n} (e_h e_m \rho_{(j-1)m_n+1, jm_n}(h, m, l_n) - \mathbb{E}(e_h e_m)) \right| \\
&\quad + \left| \sum_{h,m=jm_n+1}^n e_h e_m \rho_{(j-1)m_n+1, jm_n}(h, m, l_n) \right| \\
&=: K_1 + K_2 + K_3.
\end{aligned} \tag{4.58}$$

Weiterhin unterteilen wir den ersten Term K_1 mit den Abständen zwischen den Residuen und Fehlern folgendermaßen

$$\begin{aligned}
K_1 &= \left| \sum_{h,m=(j-1)m_n+1}^n (\widehat{e}_h \widehat{e}_m - e_h \widehat{e}_m + e_h \widehat{e}_m - e_h e_m) \rho_{(j-1)m_n+1, jm_n}(h, m, l_n) \right| \\
&\leq \left| \sum_{h,m=(j-1)m_n+1}^n (\widehat{e}_h - e_h) (\widehat{e}_m - e_m) \rho_{(j-1)m_n+1, jm_n}(h, m, l_n) \right| \\
&\quad + \left| \sum_{h,m=(j-1)m_n+1}^n (\widehat{e}_h - e_h) e_m \rho_{(j-1)m_n+1, jm_n}(h, m, l_n) \right| \\
&\quad + \left| \sum_{h,m=(j-1)m_n+1}^n e_h (\widehat{e}_m - e_m) \rho_{(j-1)m_n+1, jm_n}(h, m, l_n) \right| \\
&=: K_{1,1} + K_{1,2} + K_{1,3}.
\end{aligned}$$

Mit Lemma 4.2 und Eigenschaft (III) aus Lemma 4.5 erhalten wir die Größenordnung für den ersten Term von K_1 mit

$$\begin{aligned}
K_{1,1} &= \left| \sum_{h,m=(j-1)m_n+1}^n (\widehat{e}_h - e_h) (\widehat{e}_m - e_m) \rho_{(j-1)m_n+1, jm_n}(h, m, l_n) \right| \\
&\leq \left| \sum_{h,m=(j-1)m_n+1}^n \rho_{(j-1)m_n+1, jm_n}(h, m, l_n) \widetilde{O}\left(n^{2\delta-4/5}, n^{-\gamma}\right) \right| \\
&= \widetilde{O}\left(n l_n n^{2\delta-4/5}, n^{-\gamma}\right).
\end{aligned} \tag{4.59}$$

Nun untersuchen wir den zweiten Term $K_{1,2}$ mit Hilfe von analogen Berechnungen zu (4.41)

auf Seite 65, sowie mit Lemma 4.2 und (III) aus Lemma 4.5. Dadurch gilt

$$\begin{aligned}
& K_{1,2} \\
&= \left| \sum_{h,m=(j-1)m_n+1}^n (\hat{e}_h - e_h) e_m \rho_{(j-1)m_n+1, jm_n}(h, m, l_n) \right| \\
&= \left| \sum_{h=(j-1)m_n+1}^n (\hat{e}_h - e_h) \sum_{m=(j-1)m_n+1}^n e_m \rho_{(j-1)m_n+1, jm_n}(h, m, l_n) \right| \\
&\leq \left| \sum_{h=(j-1)m_n+1}^n (\hat{e}_h - e_h) \max_{(j-1)m_n+1 \leq m \leq n} \rho_{(j-1)m_n+1, jm_n}(h, m, l_n) \tilde{O}(\sqrt{n} n^\delta, n^{-\gamma}) \right| \\
&\leq \left| \max_{(j-1)m_n+1 \leq m \leq n} \sum_{h=(j-1)m_n+1}^n \rho_{(j-1)m_n+1, jm_n}(h, m, l_n) \tilde{O}(n^{\delta-2/5}, n^{-\gamma}) \tilde{O}(\sqrt{n} n^\delta, n^{-\gamma}) \right| \\
&= O(l_n) \tilde{O}(\sqrt{n} n^{2\delta-2/5}, n^{-\gamma}) \\
&= \tilde{O}(\sqrt{n} l_n n^{2\delta-2/5}, n^{-\gamma}) \tag{4.60}
\end{aligned}$$

und mit analogen Berechnungen erhalten wir ebenso für $K_{1,3}$ die gleiche Größenordnung

$$K_{1,3} = \tilde{O}(\sqrt{n} l_n n^{2\delta-2/5}, n^{-\gamma}).$$

Fassen wir (4.59) und (4.60) zusammen dann erhalten wir für K_1 von (4.58), dass

$$K_1 = \tilde{O}(n l_n n^{2\delta-4/5}, n^{-\gamma}) + \tilde{O}(\sqrt{n} l_n n^{2\delta-2/5}, n^{-\gamma}). \tag{4.61}$$

Auch den zweiten Term K_2 von (4.58) unterteilen wir weiter und erhalten folgende Terme

$$\begin{aligned}
K_2 &= \left| \sum_{h,m=(j-1)m_n+1}^{jm_n} (e_h e_m \rho_{(j-1)m_n+1, jm_n}(h, m, l_n) - \mathbb{E}(e_h e_m)) \right| \\
&\leq \left| \sum_{h,m=(j-1)m_n+1}^{jm_n} (e_h e_m - \mathbb{E}(e_h e_m)) \rho_{(j-1)m_n+1, jm_n}(h, m, l_n) \right| \\
&\quad + \left| \sum_{h,m=(j-1)m_n+1}^{jm_n} \mathbb{E}(e_h e_m) (1 - \rho_{(j-1)m_n+1, jm_n}(h, m, l_n)) \right| \\
&=: K_{2,1} + K_{2,2}. \tag{4.62}
\end{aligned}$$

Um die Größenordnung des ersten Terms $K_{2,1}$ zu bestimmen, untersuchen wir sein zweites Moment. Mit Hilfe der gemeinsamen Kumulanten von (3.11) erhalten wir folgende Unterteil-

lung

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} (K_{2,1}^2) \\
&= \sum_{h,m,p,q=(j-1)m_n+1}^{jm_n} \left(\mathbb{E} (e_h e_m e_p e_q) - \mathbb{E} (e_h e_m) \mathbb{E} (e_p e_q) \right) \rho_{(j-1)m_n+1, jm_n} (h, m, l_n) \\
&\quad \cdot \rho_{(j-1)m_n+1, jm_n} (p, q, l_n) \\
&\leq \sum_{h,m,p,q=(j-1)m_n+1}^{jm_n} |\text{cum} (e_h, e_m, e_p, e_q)| \rho_{(j-1)m_n+1, jm_n} (h, m, l_n) \rho_{(j-1)m_n+1, jm_n} (p, q, l_n) \\
&\quad + 2 \sum_{h,m,p,q=(j-1)m_n+1}^{jm_n} \mathbb{E} (e_h e_p) \mathbb{E} (e_m e_q) \rho_{(j-1)m_n+1, jm_n} (h, m, l_n) \rho_{(j-1)m_n+1, jm_n} (p, q, l_n) \\
&=: K_{2,1,1} + K_{2,1,2}.
\end{aligned}$$

Die Abschätzung der Kumulanten erfolgt in Lemma 8.1 im Anhang. Unter der Voraussetzung [A7] (i) können wir Lemma 8.1 anwenden und erhalten $|\text{cum} (e_h, e_m, e_p, e_q)| \leq 16 C (\alpha(u))^{\frac{\delta}{2\delta+\delta}}$ für $u = \max \{m - h, p - m, q - p\}$ falls $h \leq m \leq p \leq q$. Des Weiteren zerlegen wir für $(j-1)m_n + 1 \leq h \leq jm_n$ wieder die Menge $\{(m, p, q) : (j-1)m_n + 1 \leq h, m, p, q \leq jm_n \text{ mit } h \leq m \leq p \leq q, \max \{m - h, p - m, q - p\} \geq 0\}$ in Mengen

$$\begin{aligned}
G_u(h) &= \{(m, p, q) : (j-1)m_n + 1 \leq h, m, p, q \leq jm_n \text{ mit } h \leq m \leq p \leq q, \\
&\quad \max \{m - h, p - m, q - p\} = u\}.
\end{aligned}$$

Somit beinhaltet $G_u(h)$ alle (m, p, q) bei denen die größte Lücke zwischen h, m, p und q gleich u ist. Da wir den Abstand zwischen vier Variablen betrachten, gibt es drei Möglichkeiten für eine größte Lücke. Die Größe der beiden kleineren Lücken können wir mit Hilfe von u , der Größe der größten Lücke, abschätzen. Daher gilt $\#G_u(h) \leq 3(u+1)^2$. Mit Hilfe dieser Mengen und Lemma 8.1, sowie mit der Eigenschaft (I) aus Lemma 4.5 und [A7] (ii) erhalten wir für den ersten Term $K_{2,1,1}$, dass

$$\begin{aligned}
K_{2,1,1} &\leq 4! \sum_{(j-1)m_n+1 \leq h \leq m \leq p \leq q \leq jm_n} |\text{cum} (e_h, e_m, e_p, e_q)| \\
&\leq 4! \sum_{h=(j-1)m_n+1}^{jm_n} \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{(m,p,q) \in G_u(h)} 16 C (\alpha(u))^{\frac{\delta}{2\delta+\delta}} \\
&\leq C m_n \sum_{u=0}^{\infty} 3(u+1)^2 (\alpha(u))^{\frac{\delta}{2\delta+\delta}} \\
&= O(nb_n).
\end{aligned} \tag{4.63}$$

Im zweiten Term $K_{2,1,2}$ betrachten wir Kovarianzen vom Fehlerprozess $(e_i)_{i=1, \dots, n}$. Da die Voraussetzungen [A7] mit [A6] übereinstimmen, erhalten wir analog zu der Kovarianzunglei-

chung (4.39) für $i, m = 1, \dots, n$ mit $i \leq m$ und $r := m - i$ die Abschätzung

$$|\text{Cov}(e_i, e_m)| \leq 4C (\alpha(r))^{\frac{\delta}{28+\delta}}. \quad (4.64)$$

Somit erhalten wir für $K_{2,1,2}$ mit (4.64), sowie den Eigenschaften (I) und (III) aus Lemma 4.5 und [A7] (ii), dass

$$\begin{aligned} & K_{2,1,2} \\ & \leq 2 \sum_{h,m,p,q=(j-1)m_n+1}^{jm_n} 4C (\alpha(|h-p|))^{\frac{\delta}{28+\delta}} 4C (\alpha(|m-q|))^{\frac{\delta}{28+\delta}} \rho_{(j-1)m_n+1, jm_n}(h, m, l_n) \\ & \quad \cdot \rho_{(j-1)m_n+1, jm_n}(p, q, l_n) \\ & = C \sum_{h=(j-1)m_n+1}^{jm_n} \sum_{m-h=-m_n+1}^{m_n-1} \sum_{p-m=-m_n+1}^{m_n-1} \sum_{q-p=-m_n+1}^{m_n-1} (\alpha(|h-m+m-p|))^{\frac{\delta}{28+\delta}} \\ & \quad \cdot (\alpha(|m-p+p-q|))^{\frac{\delta}{28+\delta}} \rho_{(j-1)m_n+1, jm_n}(h, m, l_n) \rho_{(j-1)m_n+1, jm_n}(p, q, l_n) \\ & \leq C \sum_{h=(j-1)m_n+1}^{jm_n} \sum_{u=-m_n+1}^{m_n-1} \sum_{a=-m_n+1}^{m_n-1} \sum_{b=-m_n+1}^{m_n-1} (\alpha(|u+a|))^{\frac{\delta}{28+\delta}} (\alpha(|a+b|))^{\frac{\delta}{28+\delta}} \\ & \quad \cdot \rho_{(j-1)m_n+1, jm_n}(h, h+u, l_n) \\ & \leq C \sum_{h=(j-1)m_n+1}^{jm_n} 2 \sum_{u=0}^{m_n-1} \rho_{(j-1)m_n+1, jm_n}(h, h+u, l_n) 2 \sum_{s=0}^{\infty} (\alpha(s))^{\frac{\delta}{28+\delta}} 2 \sum_{t=0}^{\infty} (\alpha(t))^{\frac{\delta}{28+\delta}} \\ & = O(nb_n l_n). \end{aligned} \quad (4.65)$$

Dadurch gilt mit (4.63) und (4.65) für das zweite Moment von $K_{2,1}$ die Größenordnung

$$\mathbb{E}(K_{2,1}^2) = O(nb_n l_n). \quad (4.66)$$

Des Weiteren wird die Größenordnung des a -ten absoluten Momentes von $K_{2,1}$ für $2 < a \leq 12$ im nachfolgenden Lemma 4.6 bestimmt. Nun erhalten wir mit (4.66) die Schranke für die nachfolgende Wahrscheinlichkeit, für welche mit der Markov-Ungleichung, Lemma 4.6 und (4.13), $a = \gamma/\delta$, die Abschätzung

$$\begin{aligned} & P \left(\left| \sum_{h,m=(j-1)m_n+1}^{jm_n} (e_h e_m - \mathbb{E}(e_h e_m)) \rho_{(j-1)m_n+1, jm_n}(h, m, l_n) \right| \geq \sqrt{nb_n l_n} n^\delta \right) \\ & \leq \frac{\mathbb{E} \left| \sum_{h,m=(j-1)m_n+1}^{jm_n} (e_h e_m - \mathbb{E}(e_h e_m)) \rho_{(j-1)m_n+1, jm_n}(h, m, l_n) \right|^a}{(nb_n l_n)^{a/2} n^{a\delta}} \\ & = \frac{O((nb_n l_n)^{a/2})}{(nb_n l_n)^{a/2} n^{a\delta}} = O(n^{-a\delta}) = O(n^{-\gamma}) \end{aligned}$$

gilt. Dadurch erhalten wir als Größenordnung für $K_{2,1}$ von (4.62)

$$K_{2,1} = \tilde{O}\left(\sqrt{nb_n l_n} n^\delta, n^{-\gamma}\right). \quad (4.67)$$

Nun betrachten wir den Term $K_{2,2}$ von (4.62) mit der Kovarianzungleichung (4.64), der Eigenschaft (II) aus Lemma 4.5, [A7] (ii) und der geometrischen Reihe, sodass

$$\begin{aligned} K_{2,2} &= \left| \sum_{h,m=(j-1)m_n+1}^{jm_n} \mathbb{E}(e_h e_m) (1 - \rho_{(j-1)m_n+1, jm_n}(h, m, l_n)) \right| \\ &\leq 2 \sum_{h=(j-1)m_n+1}^{jm_n} \sum_{m=h}^{jm_n} |\text{Cov}(e_h, e_m)| |1 - \rho_{(j-1)m_n+1, jm_n}(h, m, l_n)| \\ &\leq 2 \sum_{h=(j-1)m_n+1}^{jm_n} \sum_{r=0}^{m_n-1} 4C (\alpha(r))^{\frac{\delta}{28+\delta}} \left\{ 2 \frac{r}{l_n} + e^{-\frac{r+2h-2(j-1)m_n}{l_n}} \right\} \\ &= C \sum_{h=(j-1)m_n+1}^{jm_n} \sum_{r=0}^{m_n-1} (\alpha(r))^{\frac{\delta}{28+\delta}} \frac{r}{l_n} \\ &\quad + C \sum_{h=(j-1)m_n+1}^{jm_n} e^{-2\frac{h-(j-1)m_n}{l_n}} \sum_{r=0}^{m_n-1} (\alpha(r))^{\frac{\delta}{28+\delta}} e^{-\frac{r}{l_n}} \\ &= O\left(\frac{nb_n}{l_n}\right) + O(l_n) = O\left(\frac{nb_n}{l_n}\right). \end{aligned} \quad (4.68)$$

Somit gilt insgesamt für (4.62) mit (4.67) und (4.68) die Größenordnung

$$K_2 = \tilde{O}\left(\sqrt{nb_n l_n} n^\delta, n^{-\gamma}\right) + O\left(\frac{nb_n}{l_n}\right). \quad (4.69)$$

Nachfolgend untersuchen wir den letzten Term K_3 von (4.58) und unterteilen ihn in folgende Glieder

$$\begin{aligned} K_3 &= \left| \sum_{h,m=jm_n+1}^n e_h e_m \rho_{(j-1)m_n+1, jm_n}(h, m, l_n) \right| \\ &\leq \left| \sum_{h,m=jm_n+1}^n (e_h e_m - \mathbb{E}(e_h e_m)) \rho_{(j-1)m_n+1, jm_n}(h, m, l_n) \right| \\ &\quad + \left| \sum_{h,m=jm_n+1}^n \mathbb{E}(e_h e_m) \rho_{(j-1)m_n+1, jm_n}(h, m, l_n) \right| \\ &=: K_{3,1} + K_{3,2}. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Diese Terme bestehen grundsätzlich aus sehr vielen Summanden. Jedoch hilft uns, dass $\rho_{(j-1)m_n+1, jm_n}(h, m, l_n)$ für $|h - m| > l_n$ gegen Null konvergiert und somit eine Vielzahl

der Summanden entfallen. Deshalb unterteilen wir für $K_{3,1}$ die Indizes der Summanden wie im nachfolgenden Lemma 4.6 in Intervalle der Länge L_n mit $L_n = \lceil l_n \rceil$, den aufgerundeten ganzzahligen Anteil von l_n . Dazu betrachten wir das kartesische Produkt

$$I'_{j,p,q} := \{jm_n + (p-1)L_n + 1, \dots, jm_n + pL_n\} \\ \times \{jm_n + (q-1)L_n + 1, \dots, jm_n + qL_n\}$$

für $j = 1, \dots, \lfloor \frac{n}{m_n} \rfloor - 1$ und $p, q = 1, \dots, \lfloor \frac{n-jm_n}{L_n} \rfloor$. Falls $\frac{n-jm_n}{L_n}$ nicht ganzzahlig ist bleiben mehrere Restintervalle mit einer geringeren Länge als L_n übrig. Für diese definieren wir die kartesischen Produkte

$$I'_{j,p, \lfloor \frac{n-jm_n}{L_n} \rfloor + 1} := \{jm_n + (p-1)L_n + 1, \dots, jm_n + pL_n\} \\ \times \left\{ jm_n + \left\lfloor \frac{n-jm_n}{L_n} \right\rfloor L_n + 1, \dots, n \right\}$$

und

$$I'_{j, \lfloor \frac{n-jm_n}{L_n} \rfloor + 1, \lfloor \frac{n-jm_n}{L_n} \rfloor + 1} := \left\{ jm_n + \left\lfloor \frac{n-jm_n}{L_n} \right\rfloor L_n + 1, \dots, n \right\} \\ \times \left\{ jm_n + \left\lfloor \frac{n-jm_n}{L_n} \right\rfloor L_n + 1, \dots, n \right\}$$

für $j = 1, \dots, \lfloor \frac{n}{m_n} \rfloor - 1$ und $p = 1, \dots, \lfloor \frac{n-jm_n}{L_n} \rfloor$. Damit erhalten wir für das a -te absolute Moment für $2 < a \leq 12$ von $K_{3,1}$

$$\mathbb{E} |K_{3,1}|^a = \mathbb{E} \left| \sum_{h,m=jm_n+1}^n (e_h e_m - \mathbb{E}(e_h e_m)) \rho_{(j-1)m_n+1, jm_n}(h, m, l_n) \right|^a \\ = \mathbb{E} \left| \sum_{p,q=1}^{\lfloor \frac{n-jm_n}{L_n} \rfloor + 1} \sum_{h,m \in I'_{j,p,q}} (e_h e_m - \mathbb{E}(e_h e_m)) \rho_{(j-1)m_n+1, jm_n}(h, m, l_n) \right|^a \\ = \mathbb{E} \left| \sum_{p,q=1}^{\lfloor \frac{n-jm_n}{L_n} \rfloor} Z'_{p,q} + Z'_{\lfloor \frac{n-jm_n}{L_n} \rfloor + 1, \lfloor \frac{n-jm_n}{L_n} \rfloor + 1} + 2 \sum_{p=1}^{\lfloor \frac{n-jm_n}{L_n} \rfloor} Z'_{p, \lfloor \frac{n-jm_n}{L_n} \rfloor + 1} \right|^a,$$

wobei $Z'_{p,q} := \sum_{h,m \in I'_{j,p,q}} (e_h e_m - \mathbb{E}(e_h e_m)) \rho_{(j-1)m_n+1, jm_n}(h, m, l_n)$ für $p, q = 1, \dots, \lfloor \frac{n-jm_n}{L_n} \rfloor + 1$.

Die Berechnungen verlaufen nun analog zum Beweis von Lemma 4.6 und wir erhalten

$$\mathbb{E} |K_{3,1}|^a = O\left((nl_n)^{a/2}\right)$$

und damit die Größenordnung für den ersten Term von (4.70) mit

$$K_{3,1} = \tilde{O}\left(\sqrt{nl_n} n^\delta, n^{-\gamma}\right). \quad (4.71)$$

Weiterhin gilt für $K_{3,2}$ von (4.70) mit (4.64), [A7] (ii) und Eigenschaft (III) aus Lemma 4.5 die Abschätzung

$$\begin{aligned} K_{3,2} &= \left| \sum_{h,m=jm_n+1}^n \mathbb{E}(e_h e_m) \rho_{(j-1)m_n+1, jm_n}(h, m, l_n) \right| \\ &\leq 2 \left| \sum_{jm_n+1 \leq h \leq m \leq n} \rho_{(j-1)m_n+1, jm_n}(h, m, l_n) |\text{Cov}(e_h, e_m)| \right| \\ &\leq 2 \left| \max_{jm_n+1 \leq m \leq n} \sum_{h=jm_n+1}^m \rho_{(j-1)m_n+1, jm_n}(h, m, l_n) \sum_{r=0}^{\infty} 4C(\alpha(r))^{\frac{\delta}{28+\delta}} \right| \\ &= O(l_n). \end{aligned} \quad (4.72)$$

Somit erhalten wir mit (4.71) und (4.72) für die Größenordnung von (4.70)

$$K_3 = \tilde{O}\left(\sqrt{nl_n} n^\delta, n^{-\gamma}\right) + O(l_n). \quad (4.73)$$

Insgesamt erhalten wir also für (4.58), den Abstand der Varianzen der Bootstrap- und Originalpartialsummen deren Indizes innerhalb eines vollständigen Blockes der Länge m_n liegen, mit (4.61), (4.69) und (4.73), dass

$$\begin{aligned} V_1 &= \left| \text{Var}^*(S_{jm_n,0}^* - S_{(j-1)m_n,0}^*) - \text{Var}(S_{jm_n} - S_{(j-1)m_n}) \right| \\ &= \tilde{O}\left(n l_n n^{2\delta-4/5} + \sqrt{n} l_n n^{2\delta-2/5} + \sqrt{nb_n l_n} n^\delta + \sqrt{nl_n} n^\delta, n^{-\gamma}\right) + O\left(\frac{nb_n}{l_n} + l_n\right). \end{aligned} \quad (4.74)$$

Des Weiteren gilt für den zweiten Term von (4.57) mit [A2], (4.64) und [A7] (ii), dass

$$\begin{aligned} V_2 &= |\text{Var}(S_{jm_n} - S_{(j-1)m_n}) - \sigma^2 m_n| \\ &= m_n \left| \frac{1}{m_n} \sum_{h,m=(j-1)m_n+1}^{jm_n} \text{Cov}(e_h, e_m) - \sigma^2 \right| \\ &= m_n \left| \sum_{h=-(m_n-1)}^{m_n-1} \left(1 - \frac{|h|}{m_n}\right) \text{Cov}(e_0, e_h) - \sum_{h=-\infty}^{\infty} \text{Cov}(e_0, e_h) \right| \\ &= m_n \left| \sum_{h=-\infty}^{\infty} \left(1 - \left(1 - \frac{|h|}{m_n}\right)_+\right) \text{Cov}(e_0, e_h) \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2m_n \sum_{h=0}^{\infty} \frac{h}{m_n} 4C(\alpha(h))^{\frac{\delta}{2\delta+\delta}} \\
&= C \sum_{h=0}^{\infty} h(\alpha(h))^{\frac{\delta}{2\delta+\delta}} < \infty
\end{aligned}$$

und somit die asymptotische Beschränktheit

$$V_2 = O(1). \quad (4.75)$$

Mit (4.56), (4.57), (4.74), (4.75) und der Division der Größenordnungen durch m_n erhalten wir insgesamt für den ersten Faktor der rechten Seite von (4.55), dass

$$\begin{aligned}
&\left| \sqrt{\frac{\text{Var}^*(S_{jm_n,0}^* - S_{(j-1)m_n,0}^*)}{\sigma^2 m_n}} - 1 \right| \\
&= \tilde{O} \left(\frac{l_n}{b_n} n^{2\delta-4/5} + \frac{l_n}{\sqrt{nb_n^2}} n^{2\delta-2/5} + \sqrt{\frac{l_n}{nb_n}} n^\delta + \sqrt{\frac{l_n}{nb_n^2}} n^\delta, n^{-\gamma} \right) + O \left(\frac{1}{l_n} + \frac{l_n}{nb_n} + \frac{1}{nb_n} \right) \\
&= \tilde{O} \left(\frac{l_n}{b_n} n^{2\delta-4/5} + \frac{l_n}{\sqrt{nb_n^2}} n^{2\delta-2/5} + \sqrt{\frac{l_n}{nb_n}} n^\delta + \sqrt{\frac{l_n}{nb_n^2}} n^\delta, n^{-\gamma} \right) + O \left(\frac{1}{l_n} \right).
\end{aligned}$$

Damit gilt für den maximalen Abstand über alle Blocknummern der vollständigen Blöcke die Größenordnung

$$\begin{aligned}
&\sup_{1 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{m_n} \rfloor - 1} \left| \sqrt{\frac{\text{Var}^*(S_{jm_n,0}^* - S_{(j-1)m_n,0}^*)}{\sigma^2 m_n}} - 1 \right| \\
&= \tilde{O} \left(\frac{l_n}{b_n} n^{2\delta-4/5} + \frac{l_n}{\sqrt{nb_n^2}} n^{2\delta-2/5} + \sqrt{\frac{l_n}{nb_n}} n^\delta + \sqrt{\frac{l_n}{nb_n^2}} n^\delta, n^{1-\gamma} \right) + O \left(\frac{1}{l_n} \right) \\
&= O_P \left(\frac{l_n}{b_n} n^{2\delta-4/5} + \frac{l_n}{\sqrt{nb_n^2}} n^{2\delta-2/5} + \sqrt{\frac{l_n}{nb_n}} n^\delta + \sqrt{\frac{l_n}{nb_n^2}} n^\delta \right) + O \left(\frac{1}{l_n} \right),
\end{aligned}$$

da $\gamma > 1$ nach der Bemerkung auf Seite 46. Des Weiteren untersuchen wir den zweiten Faktor auf der rechten Seite von (4.55) und somit den Zuwachs des Wiener Prozesses. Dazu wenden wir (4.19) an und erhalten für den maximalen Zuwachs die Größenordnung

$$\sup_{\substack{1 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{m_n} \rfloor - 1 \\ 1 \leq l \leq m_n}} |\mathbb{W}^*(\tau_{j,l}^*) - \mathbb{W}^*(\tau_{j,0}^*)| = O_{P^*} \left(\sqrt{nb_n} \sqrt{\log(n)} \right).$$

Dadurch ergibt sich mit (4.55) und mit Hilfe der optimalen Bandbreite (2.7) für die Approximation der Bootstrap-Partialsumme mit Indizes innerhalb eines vollständigen Blockes durch

den Zuwachs des Wiener Prozesses, dass

$$\begin{aligned}
& \sup_{\substack{1 \leq j \leq \left[\frac{n}{m_n}\right]-1 \\ 1 \leq l \leq m_n}} \left| \left(S_{(j-1)m_n+l,0}^* - S_{(j-1)m_n,0}^* \right) - [\mathbb{W}^*(\tau_{j,l}^*) - \mathbb{W}^*(\tau_{j,0}^*)] \right| \\
& \leq \sup_{\substack{1 \leq j \leq \left[\frac{n}{m_n}\right]-1 \\ 1 \leq l \leq m_n}} \left| \left(\sqrt{\frac{\text{Var}^*(S_{jm_n,0}^* - S_{(j-1)m_n,0}^*)}{\sigma^2 m_n}} - 1 \right) [\mathbb{W}^*(\tau_{j,l}^*) - \mathbb{W}^*(\tau_{j,0}^*)] \right| \\
& = \left[o_P \left(\frac{l_n}{b_n} n^{2\delta-4/5} + \frac{l_n}{\sqrt{nb_n^2}} n^{2\delta-2/5} + \sqrt{\frac{l_n}{nb_n}} n^\delta + \sqrt{\frac{l_n}{nb_n^2}} n^\delta \right) + O\left(\frac{1}{l_n}\right) \right] \\
& \quad \cdot O_{P^*} \left(\sqrt{nb_n} \sqrt{\log(n)} \right) \\
& = o_{P^*} \left(\sqrt{\log(n)} \left\{ \sqrt{nb_n} l_n n^{2\delta-3/5} + l_n n^{2\delta-3/10} + \sqrt{l_n} n^\delta + \sqrt{l_n} n^{\delta+1/10} \right\} \right) \\
& \quad + O_{P^*} \left(\frac{\sqrt{nb_n}}{l_n} \sqrt{\log(n)} \right). \tag{4.76}
\end{aligned}$$

Aufgrund der unabhängigen Zufallsvariablen $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sind alle Partialsummen $S_{jm_n,0}^* - S_{(j-1)m_n,0}^*$ für $j = 1, \dots, \left[\frac{n}{m_n}\right] - 1$ unabhängig voneinander. Zusammen mit der Tatsache, dass $S_{(j-1)m_n+l,0}^* - S_{(j-1)m_n+l-1,0}^* = \sqrt{\text{Var}^*(S_{jm_n,0}^* - S_{(j-1)m_n,0}^*)/\sigma^2 m_n} [\mathbb{W}^*(\tau_{j,l}^*) - \mathbb{W}^*(\tau_{j,l-1}^*)]$ können wir die Approximationen dieser Partialsummen aneinanderreihen. Weiterhin weisen sie alle durch das geeignete Coupling einen Approximationsfehler derselben Größenordnung auf.

Zum Schluss werden wir nun noch die Approximation der Bootstrap-Partialsumme $S_{(j-1)m_n+l,0}^* - S_{(j-1)m_n,0}^*$ des Restblockes $j = \left[\frac{n}{m_n}\right]$ und $l = 1, \dots, n - \left(\left[\frac{n}{m_n}\right] - 1\right) m_n$ durch den Zuwachs des Wiener Prozesses untersuchen. Für das Coupling werden die Stoppzeiten des Wiener Prozesses mit der möglicherweise größeren Blocklänge als m_n normiert. Somit gilt mit Hilfe des Couplings (4.54) für unsere gesuchte Approximation die Abschätzung

$$\begin{aligned}
& \left| \left(S_{(j-1)m_n+l,0}^* - S_{(j-1)m_n,0}^* \right) - (\mathbb{W}^*(\tau_{j,l}^*) - \mathbb{W}^*(\tau_{j,0}^*)) \right| \\
& \leq \left| \left(\sqrt{\frac{\text{Var}^*(S_{n,0}^* - S_{(j-1)m_n,0}^*)}{\sigma^2 \left(n - \left(\left[\frac{n}{m_n}\right] - 1\right) m_n \right)}} - 1 \right) [\mathbb{W}^*(\tau_{j,l}^*) - \mathbb{W}^*(\tau_{j,0}^*)] \right|. \tag{4.77}
\end{aligned}$$

Für die Berechnung des Approximationsfehlers bestimmen wir zunächst wieder die Abstände der Varianzen der Bootstrap- und Originalpartialsummen deren Indizes innerhalb des Restblockes liegen. Dafür erhalten wir analog zur Berechnung von V_1 auf Seite 79 mit der Unabhängigkeit und der $\mathcal{N}(0, 1 - e^{-2/l_n})$ -Verteilung der Zufallsvariablen $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$, sowie mit

$(\rho_{i,j}(\cdot))_{i,j=1,\dots,n}$ aus Lemma 4.5 die Unterteilung

$$\begin{aligned}
& \left| \text{Var}^* \left(S_{n,0}^* - S_{(j-1)m_n,0}^* \right) - \text{Var} \left(S_n - S_{(j-1)m_n} \right) \right| \\
&= \left| \text{Var}^* \left(\sum_{h=(j-1)m_n+1}^n u_h \sum_{s=h}^n e^{-\frac{s-h}{l_n}} \widehat{e}_s \right) - \text{Var} \left(\sum_{h=(j-1)m_n+1}^n e_h \right) \right| \\
&= \left| \sum_{s,t=(j-1)m_n+1}^n \widehat{e}_s \widehat{e}_t \left(1 - e^{-2/t_n} \right) \sum_{h=(j-1)m_n+1}^{\min(s,t,n)} e^{-\frac{s+t-2h}{l_n}} - \sum_{h,m=(j-1)m_n+1}^n \mathbb{E}(e_h e_m) \right| \\
&= \left| \sum_{h,m=(j-1)m_n+1}^n \left(\widehat{e}_h \widehat{e}_m \rho_{(j-1)m_n+1,n}(h,m,l_n) - \mathbb{E}(e_h e_m) \right) \right| \\
&\leq \left| \sum_{h,m=(j-1)m_n+1}^n \left(\widehat{e}_h \widehat{e}_m - e_h e_m \right) \rho_{(j-1)m_n+1,n}(h,m,l_n) \right| \\
&\quad + \left| \sum_{h,m=(j-1)m_n+1}^n \left(e_h e_m \rho_{(j-1)m_n+1,n}(h,m,l_n) - \mathbb{E}(e_h e_m) \right) \right| \\
&=: K_4 + K_5. \tag{4.78}
\end{aligned}$$

Der erste Term K_4 besitzt die gleiche Form wie K_1 von (4.58), aber er besteht nur aus weniger als $2m_n$ Summanden im Gegensatz zu den maximal n Summanden von K_1 . Somit erhalten wir mit analogen Berechnungen wie für K_1 die Größenordnung

$$K_4 = \widetilde{O} \left(nb_n l_n n^{2\delta-4/5} + \sqrt{nb_n l_n} n^{2\delta-2/5}, n^{-\gamma} \right). \tag{4.79}$$

Des Weiteren erhalten wir die Größenordnung vom Term K_5 , welcher aus weniger als $2m_n$ Summanden besteht, durch die Größenordnung vom Term K_2 von (4.58), welcher genau m_n Summanden betrachtet. Dadurch gilt mit (4.69)

$$K_5 = \widetilde{O} \left(\sqrt{nb_n l_n} n^\delta, n^{-\gamma} \right) + O \left(\frac{nb_n}{l_n} \right). \tag{4.80}$$

Weiterhin gilt analog zu (4.75), dass

$$\left| \text{Var} \left(S_n - S_{(j-1)m_n} \right) - \sigma^2 \left(n - \left(\left[\frac{n}{m_n} \right] - 1 \right) m_n \right) \right| = O(1).$$

Zusammen mit (4.78), (4.79), (4.80) und der Division durch nb_n folgt für den ersten Faktor

von (4.77) die Größenordnung

$$\begin{aligned} & \left| \sqrt{\frac{\text{Var}^*(S_{n,0}^* - S_{(j-1)m_n,0}^*)}{\sigma^2 \left(n - \left(\left[\frac{n}{m_n} \right] - 1 \right) m_n \right)}} - 1 \right| \\ &= \tilde{O} \left(l_n n^{2\delta-4/5} + \frac{l_n}{\sqrt{nb_n}} n^{2\delta-2/5} + \sqrt{\frac{l_n}{nb_n}} n^\delta, n^{-\gamma} \right) + O \left(\frac{1}{l_n} + \frac{1}{nb_n} \right) \\ &= o_P \left(l_n n^{2\delta-4/5} + \frac{l_n}{\sqrt{nb_n}} n^{2\delta-2/5} + \sqrt{\frac{l_n}{nb_n}} n^\delta \right) + O \left(\frac{1}{l_n} \right). \end{aligned}$$

Für den maximalen Zuwachs des Wiener Prozesses von (4.77) gilt mit (4.19), dass

$$\sup_{1 \leq l \leq n - \left(\left[\frac{n}{m_n} \right] - 1 \right) m_n} |\mathbb{W}^*(\tau_{j,l}^*) - \mathbb{W}^*(\tau_{j,0}^*)| = O_{P^*} \left(\sqrt{nb_n} \sqrt{\log(n)} \right).$$

Somit erhalten wir zusammen mit (4.77) für die Approximation der Bootstrap-Partialsumme deren Indizes innerhalb des Restblockes $j = \left[\frac{n}{m_n} \right]$ liegen die Größenordnung

$$\begin{aligned} & \sup_{1 \leq l \leq n - \left(\left[\frac{n}{m_n} \right] - 1 \right) m_n} \left| \left(S_{(j-1)m_n+l,0}^* - S_{(j-1)m_n,0}^* \right) - \left(\mathbb{W}^*(\tau_{j,l}^*) - \mathbb{W}^*(\tau_{j,0}^*) \right) \right| \\ &= \left[o_P \left(l_n n^{2\delta-4/5} + \frac{l_n}{\sqrt{nb_n}} n^{2\delta-2/5} + \sqrt{\frac{l_n}{nb_n}} n^\delta \right) + O \left(\frac{1}{l_n} \right) \right] O_{P^*} \left(\sqrt{nb_n} \sqrt{\log(n)} \right) \\ &= O_{P^*} \left(\sqrt{\log(n)} \left\{ \sqrt{nb_n} l_n n^{2\delta-4/5} + l_n n^{2\delta-2/5} + \sqrt{l_n} n^\delta \right\} \right) + O_{P^*} \left(\frac{\sqrt{nb_n}}{l_n} \sqrt{\log(n)} \right). \end{aligned}$$

Diese Größenordnung ist kleiner als die des Approximationsfehlers der Partialsummen mit Indizes innerhalb der vollständigen Blöcke in (4.76) und kann somit durch diese abgeschätzt werden. Alle Approximationen der Partialsummen $S_{(j-1)m_n+l,0}^* - S_{(j-1)m_n,0}^*$ für $j = 1, \dots, \left[\frac{n}{m_n} \right]$ können wir aufgrund der bereits erwähnten Unabhängigkeit der Partialsummen und $S_{(j-1)m_n+l,0}^* - S_{(j-1)m_n+l-1,0}^* = \sqrt{\text{Var}^*(S_{jm_n,0}^* - S_{(j-1)m_n,0}^*)} / \sigma^2 m_n \left[\mathbb{W}^*(\tau_{j,l}^*) - \mathbb{W}^*(\tau_{j,l-1}^*) \right]$ aneinanderreihen. Weiterhin besitzen sie alle den gleichen Approximationsfehler (4.76). Dadurch erhalten wir für das Coupling des Partialsummenprozesses

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{1 \leq j \leq \left[\frac{n}{m_n} \right] \\ 1 \leq l \leq c m_n}} \left| \left(S_{(j-1)m_n+l,0}^* - S_{(j-1)m_n,0}^* \right) - \left(\mathbb{W}^*(\sigma^2((j-1)m_n+l)) - \mathbb{W}^*(\sigma^2(j-1)m_n) \right) \right| \\ &= O_{P^*} \left(\sqrt{\log(n)} \left\{ \sqrt{nb_n} l_n n^{2\delta-3/5} + l_n n^{2\delta-3/10} + \sqrt{l_n} n^\delta + \sqrt{l_n} n^{\delta+1/10} \right\} \right) \\ &\quad + O_{P^*} \left(\frac{\sqrt{nb_n}}{l_n} \sqrt{\log(n)} \right), \end{aligned}$$

für $c \leq C < \infty$ fest. Nun können wir mit [A7] (iii), der optimalen Bandbreite (2.7) und dadurch $nb_n = O(n^{4/5})$ und für ein $\delta < 1/10$, was laut der Bemerkung auf Seite 46 gilt, die

Größenordnungen des obigen Approximationsfehlers weiter abschätzen und erhalten

$$\begin{aligned}
\sqrt{nb_n} l_n n^{2\delta-3/5} \sqrt{\log(n)} &= O\left(\frac{\sqrt{nb_n}}{\log(n)} n^{2\delta-3/5} \sqrt{\log(n)}\right) = O\left(\frac{\sqrt{nb_n}}{\sqrt{\log(n)}} n^{2\delta-1/5}\right) \\
&= o\left(\frac{\sqrt{nb_n}}{\sqrt{\log(n)}}\right), \\
l_n n^{2\delta-3/10} \sqrt{\log(n)} &= O\left(\frac{\sqrt{nb_n}}{\log(n)} n^{2\delta-3/10} \sqrt{\log(n)}\right) = O\left(\frac{\sqrt{nb_n}}{\sqrt{\log(n)}} n^{2\delta-3/10}\right) \\
&= o\left(\frac{\sqrt{nb_n}}{\sqrt{\log(n)}}\right), \\
\sqrt{l_n} n^\delta \sqrt{\log(n)} &= O\left(n^\delta \frac{(nb_n)^{1/4}}{\sqrt{\log(n)}} \sqrt{\log(n)}\right) = O\left(\frac{\sqrt{nb_n}}{\sqrt{\log(n)}} n^{\delta-1/5} \sqrt{\log(n)}\right) \\
&= o\left(\frac{\sqrt{nb_n}}{\sqrt{\log(n)}}\right), \\
\sqrt{l_n} n^{\delta+1/10} \sqrt{\log(n)} &= O\left(\frac{(nb_n)^{1/4}}{\sqrt{\log(n)}} n^{\delta+1/10} \sqrt{\log(n)}\right) = O\left(\frac{\sqrt{nb_n}}{\sqrt{\log(n)}} n^{\delta-1/10} \sqrt{\log(n)}\right) \\
&= o\left(\frac{\sqrt{nb_n}}{\sqrt{\log(n)}}\right), \\
\frac{\sqrt{nb_n}}{l_n} \sqrt{\log(n)} &= o\left(\frac{\sqrt{nb_n}}{\log(n)} \sqrt{\log(n)}\right) = o\left(\frac{\sqrt{nb_n}}{\sqrt{\log(n)}}\right).
\end{aligned}$$

Somit gilt schlussendlich für das Coupling des Bootstrap-Partialsummenprozesses an den Wiener Prozess, dass

$$\begin{aligned}
&\sup_{\substack{1 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{m_n} \rfloor \\ 1 \leq l \leq c m_n}} \left| \left(S_{(j-1)m_n+l,0}^* - S_{(j-1)m_n,0}^* \right) - \left(\mathbb{W}^*(\sigma^2((j-1)m_n+l)) - \mathbb{W}^*(\sigma^2(j-1)m_n) \right) \right| \\
&= o_{P^*} \left(\frac{\sqrt{nb_n}}{\sqrt{\log(n)}} \right),
\end{aligned}$$

für $c \leq C < \infty$ fest. □

Mit Satz 4.4 haben wir nun den Hauptterm $S_{k,0}^*$ an einen Wiener Prozess gekoppelt. Dafür war ein Hilfsresultat notwendig, welches wir nachfolgend beweisen werden.

Lemma 4.6

Unter den Voraussetzungen von Satz 4.4 erhalten wir für $2 < a \leq 12$

$$\mathbb{E} \left| \sum_{h,m=(j-1)m_n+1}^{jm_n} (e_h e_m - \mathbb{E}(e_h e_m)) \rho_{(j-1)m_n+1, jm_n}(h, m, l_n) \right|^a = O\left((nb_n l_n)^{a/2}\right),$$

wobei $(\rho_{i,j}(\cdot))_{i,j=1,\dots,n}$ wie in Lemma 4.5 definiert ist und $j = 1, \dots, \left\lceil \frac{n}{m_n} \right\rceil$ mit $m_n = \lfloor nb_n \rfloor$.

Beweis

Um im Folgenden das a -te absolute Moment zu untersuchen, unterteilen wir die Indizes der Summanden in Intervalle der Länge L_n , wobei $L_n := \lceil l_n \rceil$ der aufgerundete ganzzahlige Anteil des AR-Parameters l_n ist. Dazu definieren wir das kartesische Produkt

$$I_{j,p,q} := \{(j-1)m_n + (p-1)L_n + 1, \dots, (j-1)m_n + pL_n\} \\ \times \{(j-1)m_n + (q-1)L_n + 1, \dots, (j-1)m_n + qL_n\}$$

für $j = 1, \dots, \left\lceil \frac{n}{m_n} \right\rceil$ und $p, q = 1, \dots, \left\lceil \frac{m_n}{L_n} \right\rceil$. Falls $\frac{m_n}{L_n} > \left\lceil \frac{m_n}{L_n} \right\rceil$ bleiben mehrere Restintervalle mit einer geringeren Länge als L_n übrig. Für diese definieren wir die kartesischen Produkte

$$I_{j,p,\left\lceil \frac{m_n}{L_n} \right\rceil+1} := \{(j-1)m_n + (p-1)L_n + 1, \dots, (j-1)m_n + pL_n\} \\ \times \left\{ (j-1)m_n + \left\lceil \frac{m_n}{L_n} \right\rceil L_n + 1, \dots, jm_n \right\}$$

und

$$I_{j,\left\lceil \frac{m_n}{L_n} \right\rceil+1,\left\lceil \frac{m_n}{L_n} \right\rceil+1} := \left\{ (j-1)m_n + \left\lceil \frac{m_n}{L_n} \right\rceil L_n + 1, \dots, jm_n \right\} \\ \times \left\{ (j-1)m_n + \left\lceil \frac{m_n}{L_n} \right\rceil L_n + 1, \dots, jm_n \right\}$$

für $j = 1, \dots, \left\lceil \frac{n}{m_n} \right\rceil$ und $p = 1, \dots, \left\lceil \frac{m_n}{L_n} \right\rceil$. Mit Hilfe dieser kartesischen Produkte für die vollständigen Intervalle und Restintervalle, sowie der Definition

$$Z_{p,q} := \sum_{h,m \in I_{j,p,q}} (e_h e_m - \mathbb{E}(e_h e_m)) \rho_{(j-1)m_n+1, jm_n}(h, m, l_n)$$

für $p, q = 1, \dots, \left\lceil \frac{m_n}{L_n} \right\rceil + 1$, erhalten wir für das a -te absolute Moment die Unterteilung in

einen Hauptterm und zwei Restterme

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left| \sum_{h,m=(j-1)m_n+1}^{jm_n} (e_h e_m - \mathbb{E}(e_h e_m)) \rho_{(j-1)m_n+1, jm_n}(h, m, l_n) \right|^a \\
&= \mathbb{E} \left| \sum_{p,q=1}^{\lfloor m_n/L_n \rfloor} \sum_{h,m \in I_{j,p,q}} (e_h e_m - \mathbb{E}(e_h e_m)) \rho_{(j-1)m_n+1, jm_n}(h, m, l_n) \right. \\
&\quad + \sum_{h,m \in I_{j, \lfloor \frac{m_n}{L_n} \rfloor + 1, \lfloor \frac{m_n}{L_n} \rfloor + 1}} (e_h e_m - \mathbb{E}(e_h e_m)) \rho_{(j-1)m_n+1, jm_n}(h, m, l_n) \\
&\quad \left. + 2 \sum_{p=1}^{\lfloor m_n/L_n \rfloor} \sum_{h,m \in I_{j,p, \lfloor \frac{m_n}{L_n} \rfloor + 1}} (e_h e_m - \mathbb{E}(e_h e_m)) \rho_{(j-1)m_n+1, jm_n}(h, m, l_n) \right|^a \\
&\leq 3^{a-1} \left\{ \mathbb{E} \left| \sum_{p,q=1}^{\lfloor m_n/L_n \rfloor} Z_{p,q} \right|^a + \mathbb{E} \left| Z_{\lfloor \frac{m_n}{L_n} \rfloor + 1, \lfloor \frac{m_n}{L_n} \rfloor + 1} \right|^a + 2 \mathbb{E} \left| \sum_{p=1}^{\lfloor m_n/L_n \rfloor} Z_{p, \lfloor \frac{m_n}{L_n} \rfloor + 1} \right|^a \right\} \\
&=: 3^{a-1} \{Q_1 + Q_2 + 2Q_3\}. \tag{4.81}
\end{aligned}$$

Den Hauptterm Q_1 formen wir weiter um und erhalten

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \mathbb{E} \left| \sum_{p,q=1}^{\lfloor m_n/L_n \rfloor} Z_{p,q} \right|^a \\
&= \mathbb{E} \left| \sum_{p=1}^{\lfloor m_n/L_n \rfloor} Z_{p,p} + 2 \sum_{p=1}^{\lfloor m_n/L_n \rfloor - 1} \sum_{q=p+1}^{\lfloor m_n/L_n \rfloor - p} Z_{p,q} \right|^a \\
&= \mathbb{E} \left| \sum_{p=1}^{\lfloor m_n/L_n \rfloor} Z_{p,p} + 2 \sum_{r=1}^{\lfloor m_n/L_n \rfloor - 1} \sum_{p=1}^{\lfloor m_n/L_n \rfloor - r} Z_{p,p+r} \right|^a \\
&= \mathbb{E} \left| Z_0 + 2 \sum_{r=1}^{\lfloor m_n/L_n \rfloor - 1} Z_r \right|^a, \tag{4.82}
\end{aligned}$$

wobei $Z_r := \sum_{p=1}^{\lfloor m_n/L_n \rfloor - r} Z_{p,p+r}$ für $r = 0, \dots, \lfloor \frac{m_n}{L_n} \rfloor - 1$. Des Weiteren gilt mit der Minkowski-Ungleichung

$$\begin{aligned}
Q_1^{1/a} &= \left\| Z_0 + 2 \sum_{r=1}^{\lfloor m_n/L_n \rfloor - 1} Z_r \right\|_a \\
&\leq \|Z_0\|_a + 2 \sum_{r=1}^{\lfloor m_n/L_n \rfloor - 1} \|Z_r\|_a
\end{aligned}$$

$$= (\mathbb{E}|Z_0|^a)^{1/a} + 2 \sum_{r=1}^{\lfloor m_n/L_n \rfloor - 1} (\mathbb{E}|Z_r|^a)^{1/a}. \quad (4.83)$$

Wir unterteilen Z_r für $r = 0, \dots, \lfloor \frac{m_n}{L_n} \rfloor - 1$ im Folgenden weiter, sodass

$$Z_r = \sum_{p=1}^{\lfloor m_n/L_n \rfloor - r} Z_{p,p+r} = \sum_{p=1}^{r+2} \sum_{s \in \{0, \dots, \lfloor \frac{\lfloor m_n/L_n \rfloor - r - p}{r+2} \rfloor\}} Z_{p+(r+2)s, p+(r+2)s+r}. \quad (4.84)$$

Wenn wir nun die einzelnen Summanden in Abhängigkeit von s betrachten, dann haben die Intervalle $I_{j, p+(r+2)s, p+(r+2)s+r}$, welche in $Z_{p+(r+2)s, p+(r+2)s+r}$ betrachtet werden, einen Mindestabstand von L_n voneinander. Dadurch ist für weitere Berechnungen die α -Mischungsbedingung für die Summanden $Z_{p,p+r}, Z_{p+(r+2), p+(r+2)+r}, \dots, Z_{p+(r+2)\lfloor \frac{\lfloor m_n/L_n \rfloor - r - p}{r+2} \rfloor, p+(r+2)\lfloor \frac{\lfloor m_n/L_n \rfloor - r - p}{r+2} \rfloor + r}$ erfüllt und wir können die Rosenthal-Ungleichung für α -mischende Prozesse aus Lemma 2.3 anwenden. Um nun die Größenordnung von Q_1 zu bestimmen, muss das a -te absolute Moment von Z_r für $r = 0, \dots, \lfloor \frac{m_n}{L_n} \rfloor - 1$ abgeschätzt werden.

Für das a -te absolute Moment von Z_r erhalten wir mit der Jensenschen Ungleichung folgende Abschätzung

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|Z_r|^a &= \mathbb{E} \left| \sum_{p=1}^{r+2} \sum_{s \in \{0, \dots, \lfloor \frac{\lfloor m_n/L_n \rfloor - r - p}{r+2} \rfloor\}} Z_{p+(r+2)s, p+(r+2)s+r} \right|^a \\ &\leq (r+2)^{a-1} \sum_{p=1}^{r+2} \mathbb{E} \left| \sum_{s \in \{0, \dots, \lfloor \frac{\lfloor m_n/L_n \rfloor - r - p}{r+2} \rfloor\}} Z_{p+(r+2)s, p+(r+2)s+r} \right|^a. \end{aligned}$$

Aufgrund der Unterteilung von Z_r in (4.84) kann der α -Mischungskoeffizient von $Z_{p+(r+2)s, p+(r+2)s+r}$ durch den α -Mischungskoeffizienten der Fehlervariablen wie folgt abgeschätzt werden

$$\begin{aligned} &\alpha \left(\sigma \left(Z_{p+(r+2)s, p+(r+2)s+r}, Z_{p+(r+2)(s-1), p+(r+2)(s-1)+r}, \dots \right), \right. \\ &\quad \left. \sigma \left(Z_{p+(r+2)(s+u), p+(r+2)(s+u)+r}, Z_{p+(r+2)(s+u+1), p+(r+2)(s+u+1)+r}, \dots \right) \right) \\ &\leq \alpha \left([(r+2)u - (r+1)] L_n + 1 \right) \\ &\leq \alpha (u L_n + 1) \end{aligned}$$

für $u \geq 1$. Dadurch sind zusammen mit den Voraussetzungen [A7] die Voraussetzungen für die Rosenthal-Ungleichung aus Lemma 2.3 erfüllt. Somit wenden wir Lemma 2.3 mit $2 < a \leq 12$

auf die Zufallsvariablen $Z_{p+(r+2)s,p+(r+2)s+r}$ an und erhalten die Unterteilung

$$\mathbb{E} |Z_r|^a \leq (r+2)^{a-1} \sum_{p=1}^{r+2} \left\{ C \sum_{s \in \{0, \dots, \lfloor \frac{m_n/L_n}{r+2} - r - p \rfloor\}} \left(\mathbb{E} |Z_{p+(r+2)s,p+(r+2)s+r}|^{a+\epsilon} \right)^{\frac{a}{a+\epsilon}} \right. \\ \left. + C \left[\sum_{s \in \{0, \dots, \lfloor \frac{m_n/L_n}{r+2} - r - p \rfloor\}} \left(\mathbb{E} |Z_{p+(r+2)s,p+(r+2)s+r}|^{2+\epsilon} \right)^{\frac{2}{2+\epsilon}} \right]^{a/2} \right\}. \quad (4.85)$$

Die Größenordnung der absoluten Momente für $\tilde{a} \in 2\mathbb{N}$ mit $2 < \tilde{a} \leq 14$ erhalten wir mit Hilfe der Ungleichung (4.51), sowie mit [A7], Lemma 8.2 und (4.64). Es gilt

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} |Z_{p+(r+2)s,p+(r+2)s+r}|^{\tilde{a}} \\ &= \mathbb{E} \left(\sum_{h,m \in I_{j,p+(r+2)s,p+(r+2)s+r}} (e_h e_m - \mathbb{E}(e_h e_m)) \rho_{(j-1)m_n+1, jm_n}(h, m, l_n) \right)^{\tilde{a}} \\ &\leq C_{\tilde{a}} \mathbb{E} \left(\sum_{h,m \in I_{j,p+(r+2)s,p+(r+2)s+r}} e_h e_m \rho_{(j-1)m_n+1, jm_n}(h, m, l_n) \right)^{\tilde{a}} \\ &\quad + C_{\tilde{a}} \left(\sum_{h,m \in I_{j,p+(r+2)s,p+(r+2)s+r}} \mathbb{E}(e_h e_m) \rho_{(j-1)m_n+1, jm_n}(h, m, l_n) \right)^{\tilde{a}} \\ &\leq C_{\tilde{a}} \sum_{h_1, \dots, h_{\tilde{a}}, m_1, \dots, m_{\tilde{a}} \in I_{j,p+(r+2)s,p+(r+2)s+r}} |\mathbb{E}(e_{h_1} \dots e_{h_{\tilde{a}}} \cdot e_{m_1} \dots e_{m_{\tilde{a}}})| \\ &\quad \cdot |\rho_{(j-1)m_n+1, jm_n}(h_1, m_1, l_n)| \dots |\rho_{(j-1)m_n+1, jm_n}(h_{\tilde{a}}, m_{\tilde{a}}, l_n)| \\ &\quad + C_{\tilde{a}} \left(\sum_{h,m \in I_{j,p+(r+2)s,p+(r+2)s+r}} |\text{Cov}(e_h, e_m)| |\rho_{(j-1)m_n+1, jm_n}(h, m, l_n)| \right)^{\tilde{a}} \\ &\leq C_{\tilde{a}} \left\{ \max_{h,m \in I_{j,p+(r+2)s,p+(r+2)s+r}} |\rho_{(j-1)m_n+1, jm_n}(h, m, l_n)| \right\}^{\tilde{a}} \\ &\quad \cdot (2\tilde{a})! \sum_{\substack{t_1, \dots, t_{2\tilde{a}} \in I_{j,p+(r+2)s,p+(r+2)s+r} \\ t_1 \leq \dots \leq t_{2\tilde{a}}}} |\mathbb{E}(e_{t_1} \dots e_{t_{2\tilde{a}}})| \\ &\quad + C_{\tilde{a}} \left(\max_{h,m \in I_{j,p+(r+2)s,p+(r+2)s+r}} |\rho_{(j-1)m_n+1, jm_n}(h, m, l_n)| \right. \\ &\quad \left. \cdot 2 \sum_{\substack{h,m \in I_{j,p+(r+2)s,p+(r+2)s+r} \\ h \leq m}} 4C(\alpha(m-h))^{\frac{\delta}{28+\delta}} \right)^{\tilde{a}} \end{aligned}$$

$$= O \left(\left\{ \max_{h,m \in I_{j,p+(r+2)s,p+(r+2)s+r}} |\rho_{(j-1)m_n+1,jm_n}(h,m,l_n)| \right\}^{\tilde{a}} L_n^{\tilde{a}} \right). \quad (4.86)$$

Somit folgt mit (4.85) und (4.86) für das a -te absolute Moment von Z_r

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} |Z_r|^a \\ &= (r+2)^{a-1} \sum_{p=1}^{r+2} \left[O \left(\frac{m_n}{L_n} \left\{ \max_{h,m \in I_{j,p+(r+2)s,p+(r+2)s+r}} |\rho_{(j-1)m_n+1,jm_n}(h,m,l_n)| \right\}^a L_n^a \right) \right. \\ & \quad \left. + O \left(\left(\frac{m_n}{L_n} \left\{ \max_{h,m \in I_{j,p+(r+2)s,p+(r+2)s+r}} |\rho_{(j-1)m_n+1,jm_n}(h,m,l_n)| \right\}^2 L_n^2 \right)^{a/2} \right) \right] \\ &= (r+2)^a O \left(\left\{ \max_{h,m \in I_{j,p+(r+2)s,p+(r+2)s+r}} |\rho_{(j-1)m_n+1,jm_n}(h,m,l_n)| \right\}^a (nb_n L_n)^{a/2} \right). \quad (4.87) \end{aligned}$$

Für die weiteren Berechnungen schätzen wir zunächst das Maximum von $|\rho_{(j-1)m_n+1,jm_n}(h,m,l_n)|$ ab. Wir erhalten mit Lemma 4.5 und aufgrund der Definition der Intervalle $I_{j,p+(r+2)s,p+(r+2)s+r}$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} & \max_{h,m \in I_{j,p+(r+2)s,p+(r+2)s+r}} |\rho_{(j-1)m_n+1,jm_n}(h,m,l_n)| \\ &= \max_{h,m \in I_{j,p+(r+2)s,p+(r+2)s+r}} \left| e^{-\frac{|h-m|}{l_n}} \left(e^{-(2/l_n)[\min(h,m)-\min(h,m,jm_n)]} - e^{-(2/l_n)[\min(h,m)-(j-1)m_n]} \right) \right| \\ &\leq \max_{h,m \in I_{j,p+(r+2)s,p+(r+2)s+r}} \left| e^{-\frac{|h-m|}{l_n}} \right| \\ &\leq \begin{cases} e^0, & \text{für } r=0 \\ e^{-\frac{(r-1)L_n}{l_n}}, & \text{für } r \geq 1 \end{cases} \leq \begin{cases} 1, & \text{für } r=0 \\ e^{-(r-1)}, & \text{für } r \geq 1. \end{cases} \quad (4.88) \end{aligned}$$

Aufgrund der absoluten Summierbarkeit

$$\sum_{r=1}^{\lfloor m_n/L_n \rfloor - 1} (r+2) e^{-(r-1)} \leq \sum_{r=0}^{\infty} (r+3) e^{-r} < \infty$$

folgt mit (4.82), (4.83), (4.87) und (4.88) die Größenordnung für $Q_1^{1/a}$ mit

$$\begin{aligned} \left(\mathbb{E} \left| \sum_{p,q=1}^{\lfloor m_n/L_n \rfloor} Z_{p,q} \right|^a \right)^{1/a} &\leq O \left((nb_n L_n)^{1/2} \right) + 2 \sum_{r=1}^{\lfloor m_n/L_n \rfloor - 1} (r+2) e^{-(r-1)} O \left((nb_n L_n)^{1/2} \right) \\ &= O \left((nb_n L_n)^{1/2} \right). \end{aligned}$$

Somit erhalten wir für den Hauptterm von (4.81)

$$Q_1 = \mathbb{E} \left| \sum_{p,q=1}^{\lfloor mn/L_n \rfloor} Z_{p,q} \right|^a = O \left((nb_n L_n)^{a/2} \right) = O \left((nb_n l_n)^{a/2} \right), \quad (4.89)$$

da $L_n < 2l_n$. Der erste Restterm Q_2 von (4.81) betrachtet Summanden deren Indizes in einem Restintervall liegen. Dieses Restintervall besitzt weniger als L_n Werte. Somit erhalten wir mit analogen Berechnungen zu (4.86) und (4.88) für $r = 0$ die Größenordnung

$$Q_2 = \mathbb{E} \left| Z_{\lfloor \frac{m_n}{L_n} \rfloor + 1, \lfloor \frac{m_n}{L_n} \rfloor + 1} \right|^a = O(l_n^a).$$

Weiterhin können wir den zweiten Restterm Q_3 von (4.81) mit der Minkowski-Ungleichung wie folgt abschätzen

$$\begin{aligned} (Q_3)^{1/a} &= \left(\mathbb{E} \left| \sum_{p=1}^{\lfloor mn/L_n \rfloor} Z_{p, \lfloor \frac{m_n}{L_n} \rfloor + 1} \right|^a \right)^{1/a} = \left\| \sum_{p=1}^{\lfloor mn/L_n \rfloor} Z_{p, \lfloor \frac{m_n}{L_n} \rfloor + 1} \right\|_a \\ &\leq \sum_{p=1}^{\lfloor mn/L_n \rfloor} \left\| Z_{p, \lfloor \frac{m_n}{L_n} \rfloor + 1} \right\|_a = \sum_{p=1}^{\lfloor mn/L_n \rfloor} \left(\mathbb{E} \left| Z_{p, \lfloor \frac{m_n}{L_n} \rfloor + 1} \right|^a \right)^{1/a}. \end{aligned}$$

Da wir hier auch wieder Summanden mit Indizes aus den Restintervallen betrachten, in denen maximal L_n Indizes vorhanden sind, erhalten wir die Größenordnung der a -ten absoluten Momente durch analoge Berechnungen zu (4.86). Mit der Abschätzung für den maximalen Wert von $|\rho_{(j-1)m_n+1, jm_n}(h, m, l_n)|$ mit

$$\max_{h, m \in I_{j,p, \lfloor mn/L_n \rfloor + 1}} |\rho_{(j-1)m_n+1, jm_n}(h, m, l_n)| \leq e^{-\left(\lfloor \frac{m_n}{L_n} \rfloor - p\right)}$$

erhalten wir somit für das a -te Moment

$$\mathbb{E} \left| Z_{p, \lfloor \frac{m_n}{L_n} \rfloor + 1} \right|^a = O \left(e^{-a \left(\lfloor \frac{m_n}{L_n} \rfloor - p\right)} l_n^a \right).$$

Dadurch ergibt sich wieder mit der absoluten Summierbarkeit

$$\sum_{p=1}^{\lfloor mn/L_n \rfloor} e^{-\left(\lfloor \frac{m_n}{L_n} \rfloor - p\right)} \leq \sum_{p=0}^{\infty} e^{-p} < \infty,$$

dass

$$(Q_3)^{1/a} = \sum_{p=1}^{\lfloor mn/L_n \rfloor} e^{-\left(\lfloor \frac{m_n}{L_n} \rfloor - p\right)} O(l_n) = O(l_n).$$

Somit erhalten wir für den zweiten Restterm von (4.81) die Größenordnung

$$Q_3 = \mathbb{E} \left| \sum_{p=1}^{\lfloor m_n/L_n \rfloor} Z_{p, \lfloor \frac{m_n}{L_n} \rfloor + 1} \right|^a = O(l_n^a).$$

Die Größenordnungen der Restterme Q_2 und Q_3 , welche sich aus möglichen Restintervallen ergeben, werden durch die Größenordnung des Hauptterms Q_1 dominiert. Folglich gilt mit (4.81) und (4.89), dass

$$\mathbb{E} \left| \sum_{h,m=(j-1)m_n+1}^{jm_n} (e_h e_m - \mathbb{E}(e_h e_m)) \rho_{(j-1)m_n+1, jm_n}(h, m, l_n) \right|^a = O((nb_n l_n)^{a/2})$$

□

Wie zu Beginn dieses Abschnittes erläutert wird die Bootstrap-Partialsumme S_k^* in den Hauptterm $S_{k,0}^*$ und die zwei Restterme $R_{k,1}^*$ und $R_{k,2}^*$ für $k = 1, \dots, n$ unterteilt. In Satz 4.4 wurde das Coupling für den Hauptterm hergeleitet. Nun werden wir nachfolgend die Größenordnungen der zwei Restterme bestimmen.

Wir untersuchen zunächst im nachfolgenden Lemma den maximalen Wert des ersten Restterms $R_{k,1}^*$.

Lemma 4.7

Unter den Voraussetzungen [A1], [A2] und [A7] erhalten wir für das Maximum von $|R_{k,1}^*|$ die Größenordnung

$$\sup_{1 \leq k \leq n} |R_{k,1}^*| = o_{P^*} \left(\frac{\sqrt{nb_n}}{\sqrt{\log(n)}} \right).$$

Beweis

Wir formen $R_{k,1}^*$ wie folgt um

$$R_{k,1}^* = \sum_{m=1}^k u_m \sum_{s=k+1}^n e^{-\frac{s-m}{l_n}} \hat{e}_s = \sum_{m=1}^k u_m e^{\frac{m-k}{l_n}} \sum_{s=k+1}^n e^{-\frac{s-k}{l_n}} \hat{e}_s.$$

Nun betrachten wir das Maximum von $|R_{k,1}^*|$ und erhalten aufgrund der Differenz zwischen Residuum und Fehler und mit $w := s - k$ folgende Unterteilung

$$\max_{1 \leq k \leq n} |R_{k,1}^*| = \max_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{m=1}^k u_m e^{\frac{m-k}{l_n}} \sum_{s=k+1}^n e^{-\frac{s-k}{l_n}} \hat{e}_s \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \max_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{m=1}^k u_m e^{\frac{m-k}{l_n}} \sum_{w=1}^{n-k} e^{-\frac{w}{l_n}} (\hat{e}_{w+k} - e_{w+k}) \right| \\
&\quad + \max_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{m=1}^k u_m e^{\frac{m-k}{l_n}} \sum_{w=1}^{n-k} e^{-\frac{w}{l_n}} e_{w+k} \right| \\
&\leq \max_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{m=1}^k u_m e^{\frac{m-k}{l_n}} \right| \max_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{w=1}^{n-k} e^{-\frac{w}{l_n}} (\hat{e}_{w+k} - e_{w+k}) \right| \\
&\quad + \max_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{m=1}^k u_m e^{\frac{m-k}{l_n}} \right| \max_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{w=1}^{n-k} e^{-\frac{w}{l_n}} e_{w+k} \right| \\
&=: R_1 + R_2.
\end{aligned}$$

Wir untersuchen zunächst den jeweiligen ersten Faktor von R_1 und R_2 . Die Zufallsvariablen $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sind, bedingt auf die Originalstichprobe $(X_i)_{i=1, \dots, n}$, unabhängig und identisch $\mathcal{N}(0, 1 - e^{-2/l_n})$ -verteilt. Dadurch gilt mit der geometrischen Reihe

$$\begin{aligned}
\text{Var}^* \left(\sum_{m=1}^k u_m e^{\frac{m-k}{l_n}} \right) &= (1 - e^{-2/l_n}) \sum_{m=1}^k e^{\frac{2(m-k)}{l_n}} = (1 - e^{-2/l_n}) \sum_{v=0}^{k-1} e^{-\frac{2v}{l_n}} \\
&= (1 - e^{-2/l_n}) \frac{1 - e^{-2k/l_n}}{1 - e^{-2/l_n}} = 1 - e^{-2k/l_n} =: \sigma_k^2,
\end{aligned}$$

wodurch

$$\sum_{m=1}^k u_m e^{\frac{m-k}{l_n}} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_k^2).$$

Somit gilt ebenso

$$\max_{1 \leq k \leq n} \sigma_k^2 \leq K < \infty.$$

Weiterhin möchten wir Lemma 5.1.3 aus Marcus und Rosen (2006) anwenden. Dieses besagt, falls $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ist dann gilt für alle $c > 0$, dass

$$P(|Z| > c) \leq \exp\{-c^2/2\}. \tag{4.90}$$

Unter obigen Bedingungen gilt für $C > 1$ mit der Bonferroni-Ungleichung die Abschätzung

$$\begin{aligned}
P^* \left(\max_{1 \leq k \leq n} \frac{\left| \sum_{m=1}^k u_m e^{\frac{m-k}{l_n}} \right|}{\sqrt{K}} > C \sqrt{\log(n)} \right) &\leq P^* \left(\max_{1 \leq k \leq n} \frac{\left| \sum_{m=1}^k u_m e^{\frac{m-k}{l_n}} \right|}{\sigma_k} > C \sqrt{\log(n)} \right) \\
&\leq n P^* \left(\left| \sum_{m=1}^k u_m e^{\frac{m-k}{l_n}} \right| / \sigma_k > C \sqrt{\log(n)} \right)
\end{aligned}$$

$$\leq n e^{-\frac{C^2 \log(n)}{2}} = n^{1-C^2/2} = o(1).$$

Dadurch erhalten wir für den ersten Faktor von R_1 und R_2 die Größenordnung

$$\max_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{m=1}^k u_m e^{\frac{m-k}{l_n}} \right| = O_{P^*} \left(\sqrt{\log(n)} \right). \quad (4.91)$$

Für weitere Untersuchungen berechnen wir mit Hilfe von (4.52) und [A7] (iii) die Größenordnung der geometrischen Reihe

$$\sum_{w=1}^n e^{-\frac{w}{l_n}} = \frac{e^{-1/l_n} - e^{-(n+1)/l_n}}{1 - e^{-1/l_n}} = \frac{1 - e^{-n/l_n}}{e^{1/l_n} - 1} = O(l_n). \quad (4.92)$$

Zusammen mit Lemma 4.2 erhalten wir für den zweiten Faktor von R_1 die Abschätzung

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{w=1}^{n-k} e^{-\frac{w}{l_n}} (\hat{e}_{w+k} - e_{w+k}) \right| &\leq \sum_{w=1}^n e^{-\frac{w}{l_n}} \max_{1 \leq w \leq n} |\hat{e}_{w+n} - e_{w+n}| \\ &= O(l_n) o_P \left(n^{\delta-2/5} \right) = o_P \left(l_n n^{\delta-2/5} \right). \end{aligned}$$

Somit gilt mit (4.91) für R_1 , dass

$$R_1 = O_{P^*} \left(\sqrt{\log(n)} \right) o_P \left(l_n n^{\delta-2/5} \right) = o_{P^*} \left(l_n n^{\delta-2/5} \sqrt{\log(n)} \right). \quad (4.93)$$

Für den zweiten Faktor von R_2 betrachten wir zunächst das a -te absolute Moment seiner Summe. Unter den Voraussetzungen [A7] können wir die Rosenthal-Ungleichung aus Lemma 2.3 für $2 < a \leq 28$ anwenden und erhalten mit (4.92)

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left(\left| \sum_{w=1}^{n-k} e^{-\frac{w}{l_n}} e_{w+k} \right|^a \right) \\ &\leq C \sum_{w=1}^{n-k} \left(\mathbb{E} \left(\left| e^{-\frac{w}{l_n}} e_{w+k} \right|^{a+\epsilon} \right) \right)^{\frac{a}{a+\epsilon}} + C \left[\sum_{w=1}^{n-k} \left(\mathbb{E} \left(\left| e^{-\frac{w}{l_n}} e_{w+k} \right|^{2+\epsilon} \right) \right)^{\frac{2}{2+\epsilon}} \right]^{a/2} \\ &\leq C \sum_{w=1}^{n-k} e^{-\frac{aw}{l_n}} \left(\max_{1 \leq w \leq n-k} \mathbb{E} \left(|e_{w+k}|^{a+\epsilon} \right) \right)^{\frac{a}{a+\epsilon}} + C \left[\sum_{w=1}^{n-k} e^{-\frac{2w}{l_n}} \max_{1 \leq w \leq n-k} \mathbb{E} \left(|e_{w+k}|^{2+\epsilon} \right) \right]^{a/2} \\ &= O \left(l_n^{a/2} \right). \end{aligned}$$

Dann gilt mit der Bonferroni- und der Markov-Ungleichung und mit (4.13), $a = \gamma/\delta$, die Abschätzung

$$P \left(\max_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{w=1}^{n-k} e^{-\frac{w}{l_n}} e_{w+k} \right| \geq \sqrt{l_n} n^\delta \right) \leq n P \left(\left| \sum_{w=1}^{n-k} e^{-\frac{w}{l_n}} e_{w+k} \right| \geq \sqrt{l_n} n^\delta \right)$$

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left(\left| \sum_{w=1}^{n-k} e^{-\frac{w}{l_n}} e_{w+k} \right|^a \right) \\
& \leq n \frac{\mathbb{E} \left(\left| \sum_{w=1}^{n-k} e^{-\frac{w}{l_n}} e_{w+k} \right|^a \right)}{l_n^{a/2} n^{a\delta}} \\
& = \frac{n O \left(l_n^{a/2} \right)}{l_n^{a/2} n^{a\delta}} = O \left(n^{1-\gamma} \right),
\end{aligned}$$

wodurch wir für den zweiten Faktor von R_2 die Größenordnung

$$\max_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{w=1}^{n-k} e^{-\frac{w}{l_n}} e_{w+k} \right| = \tilde{O} \left(\sqrt{l_n} n^\delta, n^{1-\gamma} \right) = o_P \left(\sqrt{l_n} n^\delta \right) \quad (4.94)$$

erhalten, da $\gamma > 1$ laut der Bemerkung auf Seite 46. Somit gilt mit (4.91) für R_2 , dass

$$R_2 = o_{P^*} \left(\sqrt{\log(n)} \right) o_P \left(\sqrt{l_n} n^\delta \right) = o_{P^*} \left(\sqrt{l_n} n^\delta \sqrt{\log(n)} \right). \quad (4.95)$$

Mit (4.93) und (4.95) erhalten wir nun für das Maximum von $|R_{k,1}^*|$ die Größenordnung

$$\max_{1 \leq k \leq n} |R_{k,1}^*| = o_{P^*} \left(l_n n^{\delta-2/5} \sqrt{\log(n)} + \sqrt{l_n} n^\delta \sqrt{\log(n)} \right).$$

Mit Hilfe von [A7] (iii), der optimalen Bandbreite (2.7) und $\delta < 1/5$, was laut der Bemerkung auf Seite 46 erfüllt ist, können wir die Größenordnungen des obigen Maximums weiter abschätzen und erhalten

$$\begin{aligned}
l_n n^{\delta-2/5} \sqrt{\log(n)} &= O \left(\frac{\sqrt{nb_n}}{\log(n)} n^{\delta-2/5} \sqrt{\log(n)} \right) = O \left(\frac{\sqrt{nb_n}}{\sqrt{\log(n)}} n^{\delta-2/5} \right) \\
&= o \left(\frac{\sqrt{nb_n}}{\sqrt{\log(n)}} \right), \\
\sqrt{l_n} n^\delta \sqrt{\log(n)} &= O \left(\frac{(nb_n)^{1/4}}{\sqrt{\log(n)}} n^\delta \sqrt{\log(n)} \right) = O \left(\frac{\sqrt{nb_n}}{\sqrt{\log(n)}} n^{\delta-1/5} \sqrt{\log(n)} \right) \\
&= o \left(\frac{\sqrt{nb_n}}{\sqrt{\log(n)}} \right).
\end{aligned}$$

Damit gilt für den maximalen Wert von $|R_{k,1}^*|$ die Größenordnung

$$\sup_{1 \leq k \leq n} |R_{k,1}^*| = o_{P^*} \left(\frac{\sqrt{nb_n}}{\sqrt{\log(n)}} \right).$$

□

Weiterhin untersuchen wir den maximalen Wert des zweiten Restterms $R_{k,2}^*$.

Lemma 4.8

Unter den Voraussetzungen [A1], [A2] und [A7] erhalten wir für das Maximum von $|R_{k,2}^*|$ die Größenordnung

$$\sup_{1 \leq k \leq n} |R_{k,2}^*| = o_{P^*} \left(\frac{\sqrt{nb_n}}{\sqrt{\log(n)}} \right).$$

Beweis

Für das Maximum von $|R_{k,2}^*|$ erhalten wir aufgrund der Differenz zwischen Residuum und Fehler folgende Unterteilung

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq k \leq n} |R_{k,2}^*| &= \max_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{m=0}^{\infty} u_{-m} \sum_{s=1}^k e^{-\frac{m+s}{l_n}} \widehat{e}_s \right| \\ &= \max_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\frac{m}{l_n}} u_{-m} \sum_{s=1}^k e^{-\frac{s}{l_n}} \widehat{e}_s \right| \\ &\leq \max_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\frac{m}{l_n}} u_{-m} \sum_{s=1}^k e^{-\frac{s}{l_n}} (\widehat{e}_s - e_s) \right| \\ &\quad + \max_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\frac{m}{l_n}} u_{-m} \sum_{s=1}^k e^{-\frac{s}{l_n}} e_s \right| \\ &\leq \max_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\frac{m}{l_n}} u_{-m} \right| \max_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{s=1}^k e^{-\frac{s}{l_n}} (\widehat{e}_s - e_s) \right| \\ &\quad + \max_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\frac{m}{l_n}} u_{-m} \right| \max_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{s=1}^k e^{-\frac{s}{l_n}} e_s \right| \\ &=: R_3 + R_4. \end{aligned}$$

Mit analogen Berechnungen wie für (4.91) erhalten wir für den ersten Faktor von R_3 und R_4 die Größenordnung

$$\max_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\frac{m}{l_n}} u_{-m} \right| = O_{P^*} \left(\sqrt{\log(n)} \right). \quad (4.96)$$

Weiterhin gilt mit (4.92) und Lemma 4.2 für den zweiten Faktor von R_3 , dass

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{s=1}^k e^{-\frac{s}{l_n}} (\widehat{e}_s - e_s) \right| &\leq \sum_{s=1}^n e^{-\frac{s}{l_n}} \max_{1 \leq s \leq n} |\widehat{e}_s - e_s| \\ &= O(l_n) o_P \left(n^{\delta-2/5} \right) = o_P \left(l_n n^{\delta-2/5} \right). \end{aligned}$$

Zusammen mit (4.96) erhalten wir für R_3 die Größenordnung

$$R_3 = O_{P^*} \left(\sqrt{\log(n)} \right) o_P \left(l_n n^{\delta-2/5} \right) = o_{P^*} \left(l_n n^{\delta-2/5} \sqrt{\log(n)} \right). \quad (4.97)$$

Des Weiteren gilt mit analogen Berechnungen wie für (4.94) für den zweiten Faktor von R_4

$$\max_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{s=1}^k e^{-\frac{s}{l_n}} e_s \right| = o_P \left(\sqrt{l_n} n^\delta \right).$$

Dadurch gilt mit (4.96) für R_4 , dass

$$R_4 = O_{P^*} \left(\sqrt{\log(n)} \right) o_P \left(\sqrt{l_n} n^\delta \right) = o_{P^*} \left(\sqrt{l_n} n^\delta \sqrt{\log(n)} \right). \quad (4.98)$$

Somit erhalten wir mit (4.97), (4.98) und analogen Abschätzungen wie im Beweis von Lemma 4.7 für den maximalen Wert von $|R_{k,2}^*|$ die Größenordnung

$$\sup_{1 \leq k \leq n} |R_{k,2}^*| = o_{P^*} \left(l_n n^{\delta-2/5} \sqrt{\log(n)} + \sqrt{l_n} n^\delta \sqrt{\log(n)} \right) = o_{P^*} \left(\frac{\sqrt{nb_n}}{\sqrt{\log(n)}} \right).$$

□

Aufgrund der Aufteilung von S_k^* in den Hauptterm $S_{k,0}^*$ und die beiden Restterme $R_{k,1}^*$ und $R_{k,2}^*$, sowie mit Hilfe von Satz 4.4, Lemma 4.7 und Lemma 4.8 können wir im nachfolgenden Satz das Coupling des Partialsummenprozesses $(S_k^*)_{k=1,\dots,n}$, mit

$$S_k^* = \sum_{m=1}^k e_m^*,$$

an einen Wiener Prozess herleiten. Die Bootstrap-Partialsumme besteht dabei aus den Pseudo-Fehlern $(e_i^*)_{i=1,\dots,n}$, welche mit Hilfe des Autoregressive Dependent Wild Bootstrap-Verfahrens aus Kapitel 2.3.2 erzeugt werden.

Satz 4.5

Unter den Voraussetzungen [A1], [A2] und [A7] existiert auf einer geeigneten Erweiterung des zugrunde liegenden Wahrscheinlichkeitsraumes (Ω, \mathcal{A}, P) der Bootstrap-Partialsummenprozess $(S_k^*)_{k=1,\dots,n}$ und ein Wiener Prozess \mathbb{W}^* , sodass

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{1 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{m_n} \rfloor \\ 1 \leq l \leq c m_n}} \left| \left(S_{(j-1)m_n+l}^* - S_{(j-1)m_n}^* \right) - \left(\mathbb{W}^* \left(\sigma^2 \left((j-1)m_n + l \right) \right) - \mathbb{W}^* \left(\sigma^2 \left((j-1)m_n \right) \right) \right) \right| \\ & = o_{P^*} \left(\frac{\sqrt{nb_n}}{\sqrt{\log(n)}} \right), \end{aligned}$$

wobei $m_n := \lfloor nb_n \rfloor$ und $c \leq C < \infty$ fest.

Beweis

Für die gleichmäßige Approximation der Bootstrap-Partialsumme S_k^* durch den Wiener Prozess \mathbb{W}^* fassen wir Satz 4.4, Lemma 4.7 und Lemma 4.8 zusammen. Dadurch erhalten wir die Größenordnung

$$\begin{aligned}
& \sup_{\substack{1 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{m_n} \rfloor \\ 1 \leq l \leq cm_n}} \left| \left(S_{(j-1)m_n+l}^* - S_{(j-1)m_n}^* \right) - \left(\mathbb{W}^* (\sigma^2((j-1)m_n+l)) - \mathbb{W}^* (\sigma^2(j-1)m_n) \right) \right| \\
& \leq \sup_{\substack{1 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{m_n} \rfloor \\ 1 \leq l \leq cm_n}} \left| \left(S_{(j-1)m_n+l,0}^* - S_{(j-1)m_n,0}^* \right) \right. \\
& \quad \left. - \left(\mathbb{W}^* (\sigma^2((j-1)m_n+l)) - \mathbb{W}^* (\sigma^2(j-1)m_n) \right) \right| \\
& \quad + \sup_{\substack{1 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{m_n} \rfloor \\ 1 \leq l \leq cm_n}} \left| R_{(j-1)m_n+l,1}^* - R_{(j-1)m_n,1}^* \right| + \sup_{\substack{1 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{m_n} \rfloor \\ 1 \leq l \leq cm_n}} \left| R_{(j-1)m_n+l,2}^* - R_{(j-1)m_n,2}^* \right| \\
& \leq \sup_{\substack{1 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{m_n} \rfloor \\ 1 \leq l \leq cm_n}} \left| \left(S_{(j-1)m_n+l,0}^* - S_{(j-1)m_n,0}^* \right) \right. \\
& \quad \left. - \left(\mathbb{W}^* (\sigma^2((j-1)m_n+l)) - \mathbb{W}^* (\sigma^2(j-1)m_n) \right) \right| \\
& \quad + \sup_{1 \leq k \leq n} |R_{k,1}^*| + \sup_{1 \leq k \leq n} |R_{k,2}^*| \\
& = o_{P^*} \left(\frac{\sqrt{nb_n}}{\sqrt{\log(n)}} \right)
\end{aligned}$$

für $c \leq C < \infty$ fest. □

5 Simultane Konfidenzbänder

Im vorliegenden Kapitel werden wir nun die asymptotische Korrektheit der simultanen Konfidenzbänder nachweisen. Dafür nutzen wir das Coupling der Partialsummen aus Kapitel 4, sowie eine Erweiterung des klassischen Resultates zur asymptotischen Verteilung des Maximums eines stationären Gaußprozesses. Das klassische Resultat wurde auch von Bickel und Rosenblatt (1973) zur Konstruktion von simultanen Konfidenzbändern für Kerndichteschätzer im Fall von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen genutzt.

Zunächst erhalten wir mit Satz 4.1 die starke Approximation der Partialsummen, welche aus den Fehlern $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ bestehen, durch einen Wiener Prozess \mathbb{W} . Des Weiteren liefern Satz 4.3 und Satz 4.5 das jeweilige Coupling der Bootstrap-Partialsummen, welche aus den Fehlern $(e_i^*)_{i=1,\dots,n}$ bestehen, an einen Wiener Prozess \mathbb{W}^* . Hierbei werden die Bootstrap-Variablen mit Hilfe des Blockwise Dependent Wild Bootstrap-Verfahrens aus Kapitel 2.3.1 und mit dem Autoregressive Dependent Wild Bootstrap-Verfahren aus Kapitel 2.3.2 erzeugt. Nun werden wir im folgenden Satz, mit Hilfe dieser jeweiligen Approximationen der Partialsummen durch einen Wiener Prozess, die Partialsummenprozesse $(S_k)_{k=1,\dots,n}$ und $(S_k^*)_{k=1,\dots,n}$ aneinander koppeln.

Satz 5.1

Unter den Voraussetzungen von Satz 4.1 und Satz 4.3 bzw. Satz 4.5 existieren auf einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{P})$ Versionen der Partialsummenprozesse $(S_k)_{k=1,\dots,n}$ und $(S_k^*)_{k=1,\dots,n}$, sodass

$$\max_{\substack{1 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{[nb_n]} \rfloor \\ 1 \leq l \leq c[nb_n]}} \left| (S_{(j-1)[nb_n]+l} - S_{(j-1)[nb_n]}) - (S_{(j-1)[nb_n]+l}^* - S_{(j-1)[nb_n]}^*) \right| = o_{\tilde{P}} \left(\frac{\sqrt{nb_n}}{\sqrt{\log(n)}} \right)$$

für $c \leq C < \infty$ fest.

Beweis

Mit Hilfe eines geeigneten Couplings werden wir $Y_1 := \left((\mathbb{W}(t))_{t \in [0, \infty)}, (S_k)_{k \in \mathbb{N}} \right)$ und $Y_2 := \left((\mathbb{W}^*(t))_{t \in [0, \infty)}, (\tau_{j,l}^*)_{j,l \in \mathbb{N}} \right)$ aneinander koppeln. Dafür existieren auf einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{P})$ die Versionen $(\tilde{S}_k)_{k=1,\dots,n}$ und $(\tilde{S}_k^*)_{k=1,\dots,n}$ der Partialsummen

menprozesse $(S_k)_{k=1,\dots,n}$ bzw. $(S_k^*)_{k=1,\dots,n}$. Wir definieren $\tilde{Y}_1 := \left((\tilde{\mathbb{W}}(t))_{t \in [0,\infty)}, (\tilde{S}_k)_{k \in \mathbb{N}} \right)$ so, dass

$$\left((\tilde{\mathbb{W}}(t))_{t \in [0,\infty)}, (\tilde{S}_k)_{k \in \mathbb{N}} \right) \stackrel{d}{=} \left((\mathbb{W}(t))_{t \in [0,\infty)}, (S_k)_{k \in \mathbb{N}} \right).$$

Mit Satz 4.1 erhalten wir somit

$$\max_{1 \leq k \leq n} \left| \tilde{S}_k - \tilde{\mathbb{W}}(\sigma^2 k) \right| = o_{\tilde{P}} \left(\frac{\sqrt{nb_n}}{\sqrt{\log(n)}} \right).$$

Des Weiteren konstruieren wir \tilde{Y}_2 mit $\tilde{Y}_{2,1} := (\tilde{\mathbb{W}}(t))_{t \in [0,\infty)}$ und $\tilde{Y}_{2,2} := (\tilde{\tau}_{j,l}^*)_{j,l \in \mathbb{N}}$ so, dass $\tilde{Y}_{2,2}$ unabhängig von \tilde{Y}_1 ist und $\tilde{Y}_{2,2} \stackrel{d}{=} (\tau_{j,l}^*)_{j,l \in \mathbb{N}}$. Dadurch bleibt die Unabhängigkeit von $(\tau_{j,l}^*)_{j,l \in \mathbb{N}}$ und $(\mathbb{W}^*(t))_{t \in [0,\infty)}$ in Y_2 erhalten. Durch diese Konstruktion gilt

$$\left((\tilde{\mathbb{W}}(t))_{t \in [0,\infty)}, (\tilde{S}_k^*)_{k \in \mathbb{N}} \right) \stackrel{d}{=} \left((\mathbb{W}^*(t))_{t \in [0,\infty)}, (S_k^*)_{k \in \mathbb{N}} \right)$$

und wir erhalten mit Satz 4.3 bzw. Satz 4.5, dass

$$\begin{aligned} & \max_{\substack{1 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{nb_n} \rfloor \\ 1 \leq l \leq c \lfloor nb_n \rfloor}} \left| \tilde{S}_{(j-1)[nb_n]+l}^* - \tilde{S}_{(j-1)[nb_n]}^* - \left[\tilde{\mathbb{W}}(\sigma^2((j-1)[nb_n]+l)) - \tilde{\mathbb{W}}(\sigma^2(j-1)[nb_n]) \right] \right| \\ &= o_{\tilde{P}} \left(\frac{\sqrt{nb_n}}{\sqrt{\log(n)}} \right) \end{aligned}$$

für $c \leq C < \infty$ fest. Schlussendlich folgt

$$\begin{aligned} & \max_{\substack{1 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{nb_n} \rfloor \\ 1 \leq l \leq c \lfloor nb_n \rfloor}} \left| \left(\tilde{S}_{(j-1)[nb_n]+l} - \tilde{S}_{(j-1)[nb_n]} \right) - \left(\tilde{S}_{(j-1)[nb_n]+l}^* - \tilde{S}_{(j-1)[nb_n]}^* \right) \right| \\ & \leq \max_{1 \leq k \leq n} \left| \tilde{S}_k - \tilde{\mathbb{W}}(\sigma^2 k) \right| + \max_{\substack{1 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{nb_n} \rfloor \\ 1 \leq l \leq c \lfloor nb_n \rfloor}} \left| \tilde{S}_{(j-1)[nb_n]+l}^* - \tilde{S}_{(j-1)[nb_n]}^* \right. \\ & \quad \left. - \left[\tilde{\mathbb{W}}(\sigma^2((j-1)[nb_n]+l)) - \tilde{\mathbb{W}}(\sigma^2(j-1)[nb_n]) \right] \right| \\ &= o_{\tilde{P}} \left(\frac{\sqrt{nb_n}}{\sqrt{\log(n)}} \right) \end{aligned}$$

für $c \leq C < \infty$ fest. □

In Kapitel 4.1 wurde bereits erläutert, dass wir für den Nachweis der asymptotischen Korrektheit der simultanen Konfidenzbänder nicht den Fehlerprozess $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ selber, sondern mit $m_0(t)$ von (2.8) für $0 \leq t \leq 1$ die gewichtete Summe von diesem untersuchen. Daher ist

es ebenso notwendig die gewichtete Summe der Zuwächse des Wiener Prozesses $\mu_0(t)$, welche in (4.1) definiert wurde, zu betrachten. In Lemma 4.1 wurde deshalb die gleichmäßige Approximation von $m_0(t)$ und $\mu_0(t)$ bewiesen. Auf der Bootstrap-Seite betrachten wir mit $m_0^*(t)$ ebenso die gewichtete Summe des Bootstrap-Fehlerprozesses $(e_i^*)_{i=1,\dots,n}$. Somit werden wir im nachfolgenden Lemma die gleichmäßige Approximation von $m_0^*(t)$ und $\mu_0(t)$ herleiten.

Lemma 5.1

Unter den Voraussetzungen von Satz 5.1 folgt die gleichmäßige Approximation

$$\max_{0 \leq t \leq 1} |m_0^*(t) - \mu_0(t)| = o_{\tilde{P}} \left(\frac{1}{\sqrt{nb_n} \sqrt{\log(n)}} \right).$$

Beweis

Wir werden den Beweis analog zu dem Beweis von Lemma 4.1 führen. Daher betrachten wir den Abstand von $m_0^*(t)$ und $\mu_0(t)$

$$|m_0^*(t) - \mu_0(t)| = \left| \sum_{i=1}^n w_n(t, i) (e_i^* - [\mathbb{W}(\sigma^2 i) - \mathbb{W}(\sigma^2(i-1))]) \right|.$$

Aufgrund des beschränkten Trägers der Kernfunktion K werden für die Summation für $t \in [0, 1]$ nur $O(nb_n)$ Summanden berücksichtigt. Wir nehmen daher an, dass diese betrachteten Indizes im j -ten Block der Länge $[nb_n]$ beginnen und innerhalb von $c \leq C < \infty$ Blöcken liegen, für $j = 1, \dots, \lfloor \frac{n}{[nb_n]} \rfloor$ und $c = 1, \dots, \frac{n}{[nb_n]} - (j-1)$. Somit erhalten wir mittels Abelscher partieller Summation und der Definition (4.2), sowie Satz 5.1 die Abschätzung

$$\begin{aligned} & |m_0^*(t) - \mu_0(t)| \\ &= \left| \sum_{i=(j-1)[nb_n]+1}^{(j-1+c)[nb_n]} w_n(t, i) (e_i^* - [\mathbb{W}(\sigma^2 i) - \mathbb{W}(\sigma^2(i-1))]) \right| \\ &= \left| w_n(t, (j-1+c)[nb_n]) \sum_{i=(j-1)[nb_n]+1}^{(j-1+c)[nb_n]} (e_i^* - [\mathbb{W}(\sigma^2 i) - \mathbb{W}(\sigma^2(i-1))]) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=(j-1)[nb_n]+2}^{(j-1+c)[nb_n]} (w_n(t, i-1) - w_n(t, i)) \sum_{k=(j-1)[nb_n]+1}^{i-1} (e_k^* - [\mathbb{W}(\sigma^2 k) - \mathbb{W}(\sigma^2(k-1))]) \right| \\ &\leq |w_n(t, (j-1+c)[nb_n])| \left| S_{(j-1+c)[nb_n]}^* - S_{(j-1)[nb_n]}^* \right. \\ &\quad \left. - [\mathbb{W}(\sigma^2(j-1+c)[nb_n]) - \mathbb{W}(\sigma^2(j-1)[nb_n])] \right| \\ &\quad + \sum_{i=(j-1)[nb_n]+2}^{(j-1+c)[nb_n]} |w_n(t, i-1) - w_n(t, i)| \left| S_{i-1}^* - S_{(j-1)[nb_n]}^* \right. \\ &\quad \left. - [\mathbb{W}(\sigma^2(i-1)) - \mathbb{W}(\sigma^2(j-1)[nb_n])] \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left\{ |w_n(t, (j-1+c)[nb_n])| + \sum_{i=(j-1)[nb_n]+2}^{(j-1+c)[nb_n]} |w_n(t, i-1) - w_n(t, i)| \right\} \\
&\quad \max_{\substack{1 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{[nb_n]} \rfloor \\ 1 \leq l \leq c[nb_n]}} \left| \left(S_{(j-1)[nb_n]+l}^* - S_{(j-1)[nb_n]}^* \right) \right. \\
&\quad \quad \left. - [\mathbb{W}(\sigma^2((j-1)[nb_n]+l)) - \mathbb{W}(\sigma^2(j-1)[nb_n])] \right| \\
&\leq \Omega_n(t) \max_{\substack{1 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{[nb_n]} \rfloor \\ 1 \leq l \leq c[nb_n]}} \left| \left(S_{(j-1)[nb_n]+l}^* - S_{(j-1)[nb_n]}^* \right) \right. \\
&\quad \quad \left. - [\mathbb{W}(\sigma^2((j-1)[nb_n]+l)) - \mathbb{W}(\sigma^2(j-1)[nb_n])] \right| \\
&= \Omega_n(t) o_{\tilde{P}} \left(\frac{\sqrt{nb_n}}{\sqrt{\log(n)}} \right).
\end{aligned}$$

Somit folgt mit (4.3) die gleichmäßige Approximation von $m_0^*(t)$ und $\mu_0(t)$, sodass

$$\begin{aligned}
\max_{0 \leq t \leq 1} |m_0^*(t) - \mu_0(t)| &= \max_{0 \leq t \leq 1} \Omega_n(t) o_{\tilde{P}} \left(\frac{\sqrt{nb_n}}{\sqrt{\log(n)}} \right) \\
&= o_{\tilde{P}} \left(\frac{1}{nb_n} \frac{\sqrt{nb_n}}{\sqrt{\log(n)}} \right) \\
&= o_{\tilde{P}} \left(\frac{1}{\sqrt{nb_n} \sqrt{\log(n)}} \right).
\end{aligned}$$

□

Für die Approximation des zentrierten Kernschätzers durch sein Bootstrap-Gegenstück gilt die Gleichung

$$|\hat{m}(t) - \mathbb{E}(\hat{m}(t)) - m_0^*(t)| = |m_0(t) - m_0^*(t)|.$$

Somit untersuchen wir die Approximation von $m_0(t)$ durch $m_0^*(t)$. Mit Hilfe von Lemma 4.1 und Lemma 5.1 haben wir die gleichmäßige Approximation beider gewichteter Summen $m_0(t)$ bzw. $m_0^*(t)$ durch den gleichen Gaußprozess $\mu_0(t)$ für $t \in [0, 1]$ erhalten. Damit können wir im nachfolgenden Satz die Approximation des maximalen Wertes von $|m_0(t)|$ durch den von $|m_0^*(t)|$ nachweisen.

Satz 5.2

Unter den Voraussetzungen von Lemma 4.1 und Lemma 5.1 erhalten wir für die Approximation der Supremumsabstände von $|m_0|$ und $|m_0^*|$ die Größenordnung

$$\left| \sup_{t \in [0,1]} |m_0(t)| - \sup_{t \in [0,1]} |m_0^*(t)| \right| = o_{\tilde{P}} \left(\frac{1}{\sqrt{nb_n} \sqrt{\log(n)}} \right).$$

Beweis

Mit Hilfe von Lemma 4.1 und Lemma 5.1 folgt die Approximation

$$\begin{aligned} \left| \sup_{t \in [0,1]} |m_0(t)| - \sup_{t \in [0,1]} |m_0^*(t)| \right| &\leq \sup_{t \in [0,1]} |m_0(t) - m_0^*(t)| \\ &\leq \sup_{0 \leq t \leq 1} |m_0(t) - \mu_0(t)| + \sup_{0 \leq t \leq 1} |\mu_0(t) - m_0^*(t)| \\ &= o_{\tilde{P}} \left(\frac{1}{\sqrt{nb_n} \sqrt{\log(n)}} \right). \end{aligned}$$

□

Anhand von Satz 5.2 erkennen wir, dass die Bootstrap-Größe $\sup_{t \in [0,1]} |m_0^*(t)|$ das Verhalten von $\sup_{t \in [0,1]} |m_0(t)|$ imitiert.

Für den Nachweis der asymptotischen Korrektheit des simultanen Konfidenzbandes werden wir, wie bereits beim Nachweis der asymptotischen Korrektheit des punktweisen Konfidenzintervalles in Kapitel 3, Lemma 8.3 nutzen. Zunächst werden wir dafür in Anlehnung an das klassische Resultat zur asymptotischen Verteilung des Maximums eines stationären Gaußprozesses die Grenzverteilung von $\sup_{t \in [0,1]} |m_0(t)|$ herleiten. Danach werden wir mit Hilfe von Satz 5.2 nachweisen, dass die Grenzverteilungen von $\sup_{t \in [0,1]} |m_0^*(t)|$ und $\sup_{t \in [0,1]} |m_0(t)|$ übereinstimmen.

Um nun die Grenzverteilung von $\sup_{t \in [0,1]} |m_0(t)|$ herzuleiten, führen wir zunächst folgende Definition ein.

Definition 5.1 (Wu und Zhao (2007, Definition 1))

Sei $\mathcal{K}(\beta)$ mit $1 \leq \beta \leq 2$ die Menge der beschränkten Funktionen K mit beschränktem Träger für die gilt, dass der Grenzwert $D_K := \lim_{\delta \rightarrow 0} |\delta|^{-\beta} \int_{-\infty}^{\infty} (K(x+\delta) - K(x))^2 dx$ existiert und ungleich Null ist. Weiterhin sei $\kappa_K^2 := \int_{-\infty}^{\infty} K^2(s) ds < \infty$. Für $b_n^{-1} \geq 3$ definieren wir

$$B_K(1/b_n) := \sqrt{2 \log(1/b_n)} + \frac{1}{\sqrt{2 \log(1/b_n)}} \left[\frac{2-\beta}{2\beta} \log(\log(1/b_n)) + \log \left(\frac{C_K^{1/\beta} h_\beta 2^{1/\beta}}{2\sqrt{\pi}} \right) \right],$$

wobei $C_K := D_K/2\kappa_K^2$ und h_β die Pickands-Konstante ist.

Bemerkung

Die Pickands-Konstante h_β ist näher in Korollar A1 von Bickel und Rosenblatt (1973) und Theorem 2.1 von Pickands (1969a) erläutert. Die Werte $h_1 = 1$ und $h_2 = \pi^{-1/2}$ sind bekannt, sie wurden in Pickands (1969b) berechnet. Wie in Wu und Zhao (2007) erläutert, gilt $K \in \mathcal{K}(\beta)$ mit $\beta = 2$ für Dreiecks-, Quartic-, Epanechnikov- und Parzen-Kerne und mit $\beta = 1$ für Rechteck-Kerne.

Im nachfolgenden Satz werden wir nun die Grenzverteilung von $\sup_{t \in [0,1]} |m_0(t)|$ herleiten. Dies stellt eine Erweiterung des klassischen Resultates zur asymptotischen Verteilung des Maximums eines stationären Gaußprozesses dar. Dieses Resultat wurde von Bickel und Rosenblatt (1973) zur Konstruktion von simultanen Konfidenzbändern genutzt. Da der Fehlerprozess $(e_i)_{i=1, \dots, n}$ in unserem Fall abhängig ist, müssen wir die unbekannte Kovarianzfunktion $\sigma^2 = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \text{Cov}(e_0, e_i)$ berücksichtigen, wohingegen Bickel und Rosenblatt (1973) unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen untersuchten.

Satz 5.3

Unter der Annahme $K \in \mathcal{K}(\beta)$ sei ein Kern mit beschränktem Träger $[-1, 1]$, sowie den Voraussetzungen [A1], [A2] und [A4] gilt für alle $u \in \mathbb{R}$ die Konvergenz

$$P \left(\left[\frac{\sqrt{nb_n}}{\sigma \kappa_K} \sup_{t \in [b_n, 1-b_n]} |m_0(t)| \right] - B_K(1/b_n) \leq \frac{u}{\sqrt{2 \log(1/b_n)}} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-2e^{-u}}.$$

Beweis

Für $t \in [b_n, 1 - b_n]$ ist zu zeigen, dass

$$P \left(\frac{1}{\sigma \kappa_K} \max_{t \in [b_n, 1-b_n]} \left| \sqrt{nb_n} m_0(t) \right| - B_K(1/b_n) \leq \frac{u}{\sqrt{2 \log(1/b_n)}} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-2e^{-u}} \quad (5.1)$$

für alle $u \in \mathbb{R}$. Um diese Konvergenz nachzuweisen, werden wir $m_0(t)$ durch einen geeigneten stationären Gaußprozess approximieren und das bekannte Resultat der asymptotischen Verteilung des Maximums eines stationären Gaußprozesses anwenden.

Für die Approximation von $m_0(t)$ durch einen stationären Gaußprozess betrachten wir zunächst den Gaußprozess $\mu_0(t)$ von (4.1). Mit Hilfe von $d\widetilde{\mathbb{W}}(u) := \sigma^{-1} d\mathbb{W}(\sigma^2 u)$ erhalten wir die Unterteilung

$$\begin{aligned} \sqrt{nb_n} \mu_0(t) &= \frac{1}{\sqrt{nb_n}} \sum_{i=1}^n K \left(\frac{t - i/n}{b_n} \right) [\mathbb{W}(\sigma^2 i) - \mathbb{W}(\sigma^2(i-1))] \\ &= \frac{1}{\sqrt{nb_n}} \sum_{i=1}^n \int_{i-1}^i K \left(\frac{t}{b_n} - \frac{i}{nb_n} \right) d\mathbb{W}(\sigma^2 u) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sigma}{\sqrt{nb_n}} \sum_{i=1}^n \int_{i-1}^i K\left(\frac{t}{b_n} - \frac{u}{nb_n}\right) d\widetilde{\mathbb{W}}(u) \\
&\quad - \frac{\sigma}{\sqrt{nb_n}} \sum_{i=1}^n \int_{i-1}^i \left[K\left(\frac{t}{b_n} - \frac{u}{nb_n}\right) - K\left(\frac{t}{b_n} - \frac{i}{nb_n}\right) \right] d\widetilde{\mathbb{W}}(u). \tag{5.2}
\end{aligned}$$

Für weitere Berechnungen definieren wir den ersten Term als

$$\sqrt{nb_n} \bar{\mu}_0(t) := \frac{\sigma}{\sqrt{nb_n}} \int_0^n K\left(\frac{t}{b_n} - \frac{u}{nb_n}\right) d\widetilde{\mathbb{W}}(u), \tag{5.3}$$

sowie den zweiten Term als Restterm

$$\frac{\sigma}{\sqrt{nb_n}} R_n(t) := \frac{\sigma}{\sqrt{nb_n}} \sum_{i=1}^n \int_{i-1}^i \left[K\left(\frac{t}{b_n} - \frac{u}{nb_n}\right) - K\left(\frac{t}{b_n} - \frac{i}{nb_n}\right) \right] d\widetilde{\mathbb{W}}(u). \tag{5.4}$$

Um an dem ersten Term (5.3) eine Variablentransformation durchführen zu können, nutzen wir die partielle Integration für stochastische Integrale aus Øksendal (2005, Theorem 4.1.5). Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\sqrt{nb_n} \bar{\mu}_0(t) &= \frac{\sigma}{\sqrt{nb_n}} \int_0^n K\left(\frac{t}{b_n} - \frac{u}{nb_n}\right) d\widetilde{\mathbb{W}}(u) \\
&= \frac{\sigma}{\sqrt{nb_n}} \left[K\left(\frac{t}{b_n} - \frac{n}{nb_n}\right) \widetilde{\mathbb{W}}(n) - \int_0^n \widetilde{\mathbb{W}}(z) dK\left(\frac{t}{b_n} - \frac{z}{nb_n}\right) \right].
\end{aligned}$$

Auf das Integral der rechten Seite wenden wir die Substitution $v = \frac{z}{nb_n}$ an und nochmals die partielle Integration. Dadurch erhalten wir

$$\begin{aligned}
\sqrt{nb_n} \bar{\mu}_0(t) &= \frac{\sigma}{\sqrt{nb_n}} \left[K\left(\frac{t}{b_n} - \frac{n}{nb_n}\right) \widetilde{\mathbb{W}}(n) - \int_0^{1/b_n} \widetilde{\mathbb{W}}(nb_n v) dK\left(\frac{t}{b_n} - v\right) \right] \\
&= \frac{\sigma}{\sqrt{nb_n}} \left[K\left(\frac{t}{b_n} - \frac{1}{b_n}\right) \widetilde{\mathbb{W}}(n) - \left\{ K\left(\frac{t}{b_n} - \frac{1}{b_n}\right) \widetilde{\mathbb{W}}\left(\frac{nb_n}{b_n}\right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \int_0^{1/b_n} K\left(\frac{t}{b_n} - v\right) d\widetilde{\mathbb{W}}(nb_n v) \right\} \right] \\
&= \frac{\sigma}{\sqrt{nb_n}} \int_0^{1/b_n} K\left(\frac{t}{b_n} - v\right) d\widetilde{\mathbb{W}}(nb_n v).
\end{aligned}$$

Nun nutzen wir die Definition $d\widetilde{\mathbb{W}}(u) := (nb_n)^{-1/2} d\widetilde{\mathbb{W}}(nb_n u)$. Des Weiteren gilt aufgrund des beschränkten Trägers vom Kern K und $t \in [b_n, 1 - b_n]$, dass $\text{supp}(t/b_n - \cdot) \subseteq [0, 1/b_n]$. Somit erhalten wir für (5.3)

$$\sqrt{nb_n} \bar{\mu}_0(t) = \sigma \int_{-\infty}^{\infty} K\left(\frac{t}{b_n} - v\right) d\widetilde{\mathbb{W}}(v). \quad (5.5)$$

Um die Grenzverteilung (5.1) nachzuweisen, werden wir $\max_{t \in [b_n, 1 - b_n]} |\sqrt{nb_n} m_0(t)|$ durch den stationären Gaußprozess $\max_{t \in [b_n, 1 - b_n]} |\sqrt{nb_n} \bar{\mu}_0(t)|$ approximieren. Dafür erhalten wir mit (5.2) und (5.4) folgende Unterteilung

$$\begin{aligned} & \left| \max_{t \in [b_n, 1 - b_n]} |\sqrt{nb_n} m_0(t)| - \max_{t \in [b_n, 1 - b_n]} |\sqrt{nb_n} \bar{\mu}_0(t)| \right| \\ & \leq \sqrt{nb_n} \max_{t \in [b_n, 1 - b_n]} |m_0(t) - \bar{\mu}_0(t)| \\ & = \sqrt{nb_n} \max_{t \in [b_n, 1 - b_n]} |m_0(t) - \mu_0(t) + \mu_0(t) - \bar{\mu}_0(t)| \\ & \leq \sqrt{nb_n} \max_{t \in [b_n, 1 - b_n]} |m_0(t) - \mu_0(t)| + \frac{\sigma}{\sqrt{nb_n}} \max_{t \in [b_n, 1 - b_n]} |R_n(t)|, \end{aligned}$$

wodurch die Abschätzung

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sigma \kappa_K} \left| \max_{t \in [b_n, 1 - b_n]} |\sqrt{nb_n} m_0(t)| - \max_{t \in [b_n, 1 - b_n]} |\sqrt{nb_n} \bar{\mu}_0(t)| \right| \\ & \leq \frac{\sqrt{nb_n}}{\sigma \kappa_K} \max_{t \in [b_n, 1 - b_n]} |m_0(t) - \mu_0(t)| + \frac{1}{\sqrt{nb_n} \kappa_K} \max_{t \in [b_n, 1 - b_n]} |R_n(t)| \end{aligned} \quad (5.6)$$

gilt. Um die Größenordnung für den ersten Term der rechten Seite von (5.6) zu erhalten, nutzen wir Lemma 4.1. Weiterhin ist laut Definition 5.1 κ_K positiv und endlich, ebenso wie σ^2 nach Voraussetzung [A2] (iv). Somit erhalten wir

$$\frac{\sqrt{nb_n}}{\sigma \kappa_K} \max_{t \in [b_n, 1 - b_n]} |m_0(t) - \mu_0(t)| = \frac{\sqrt{nb_n}}{\sigma \kappa_K} \text{of. s.} \left(\frac{1}{\sqrt{nb_n} \sqrt{\log n}} \right) = \text{of. s.} \left(\frac{1}{\sqrt{\log n}} \right). \quad (5.7)$$

Nun untersuchen wir im Folgenden den Restterm

$$R_n(t) = \sum_{i=1}^n \int_{i-1}^i \left[K\left(\frac{t}{b_n} - \frac{u}{nb_n}\right) - K\left(\frac{t}{b_n} - \frac{i}{nb_n}\right) \right] d\widetilde{\mathbb{W}}(u),$$

um die Größenordnung des zweiten Terms der rechten Seite von (5.6) zu erhalten. Nach Theorem 3.2.1 aus Øksendal (2005) gilt $\mathbb{E}(R_n(t)) = 0$. Des Weiteren folgt mit der Unabhängigkeit der Zuwächse des Wiener Prozesses und der Ito-Isometrie aus Øksendal (2005, Korollar 3.1.7),

dass

$$\begin{aligned}
\text{Var}(R_n(t)) &= \sum_{i=1}^n \text{Var} \left(\int_{i-1}^i \left[K \left(\frac{t}{b_n} - \frac{u}{nb_n} \right) - K \left(\frac{t}{b_n} - \frac{i}{nb_n} \right) \right] d\widetilde{\mathbb{W}}(u) \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left(\int_{i-1}^i \left[K \left(\frac{t}{b_n} - \frac{u}{nb_n} \right) - K \left(\frac{t}{b_n} - \frac{i}{nb_n} \right) \right] d\widetilde{\mathbb{W}}(u) \right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^n \int_{i-1}^i \left[K \left(\frac{t}{b_n} - \frac{u}{nb_n} \right) - K \left(\frac{t}{b_n} - \frac{i}{nb_n} \right) \right]^2 du.
\end{aligned}$$

Aufgrund der Lipschitz-Stetigkeit von K nach Voraussetzung [A1] (i) gilt für den Abstand der Kernfunktionen die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\left| K \left(\frac{t}{b_n} - \frac{u}{nb_n} \right) - K \left(\frac{t}{b_n} - \frac{i}{nb_n} \right) \right| &\leq L \left| \frac{t}{b_n} - \frac{u}{nb_n} - \frac{t}{b_n} + \frac{i}{nb_n} \right| \\
&= L \frac{1}{nb_n} |i - u| = O \left(\frac{1}{nb_n} \right),
\end{aligned}$$

für eine reelle Konstante $L \geq 0$. Weiterhin sind wegen dem beschränkten Träger von K nur $O(nb_n)$ Summanden ungleich Null. Damit folgt für die Varianz die Größenordnung

$$\text{Var}(R_n(t)) = O \left(\frac{1}{nb_n} \right)$$

und wir erhalten damit $R_n(t) = O_p(1/\sqrt{nb_n})$ für ein festes t . Nun gilt es nach (5.6) zu zeigen, dass $(\sqrt{nb_n} \kappa_K)^{-1} \max_{t \in [b_n, 1-b_n]} |R_n(t)| = O_p(1/\sqrt{nb_n})$. Dafür zeigen wir, dass für beliebige $\eta, \epsilon > 0$ die Abschätzung

$$P \left(\sup_{t \in [b_n, 1-b_n]} |R_n(t)| > \eta \right) \leq \epsilon$$

gilt. Dazu betrachten wir den mittleren quadratischen Abstand von $R_n(t)$ an zwei verschiedenen Stellen. Mit Hilfe der Unabhängigkeit der Zuwächse des Wiener Prozesses, der Ito-Isometrie, der Lipschitz-Stetigkeit von K' und der Größenordnung der optimalen Bandbreite in (2.7) erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(R_n(t) - R_n(s))^2 \\
&= \text{Var}(R_n(t) - R_n(s))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \text{Var} \left(\sum_{i=1}^n \int_{i-1}^i \left[K \left(\frac{t}{b_n} - \frac{u}{nb_n} \right) - K \left(\frac{t}{b_n} - \frac{i}{nb_n} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - K \left(\frac{s}{b_n} - \frac{u}{nb_n} \right) + K \left(\frac{s}{b_n} - \frac{i}{nb_n} \right) \right] d\widetilde{\mathbb{W}}(u) \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left(\int_{i-1}^i \left[K \left(\frac{t}{b_n} - \frac{u}{nb_n} \right) - K \left(\frac{t}{b_n} - \frac{i}{nb_n} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - K \left(\frac{s}{b_n} - \frac{u}{nb_n} \right) + K \left(\frac{s}{b_n} - \frac{i}{nb_n} \right) \right] d\widetilde{\mathbb{W}}(u) \right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^n \int_{i-1}^i \left[K \left(\frac{t}{b_n} - \frac{u}{nb_n} \right) - K \left(\frac{t}{b_n} - \frac{i}{nb_n} \right) - K \left(\frac{s}{b_n} - \frac{u}{nb_n} \right) + K \left(\frac{s}{b_n} - \frac{i}{nb_n} \right) \right]^2 du \\
&= \sum_{i=1}^n \int_{i-1}^i \left[\left(-\frac{1}{nb_n} \right) \int_i^u \left(K' \left(\frac{t}{b_n} - \frac{v}{nb_n} \right) - K' \left(\frac{s}{b_n} - \frac{v}{nb_n} \right) \right) dv \right]^2 du \\
&= \sum_{i=1}^n \int_{i-1}^i O \left(\frac{|t-s|^2}{n^2 b_n^4} \right) du = O \left(\frac{|t-s|^2}{nb_n^3} \right) = O \left(n^{-2/5} |t-s|^2 \right). \tag{5.8}
\end{aligned}$$

Nun betrachten wir ein dyadisches Gitter auf $[0, 1]$. Für $j \in \mathbb{N}_0$ und $k = 0, \dots, 2^j$ definieren wir die Gitterpunkte $t_{j,k} := k 2^{-j}$ mit $t_{j,k} = t_{j+1,2k}$. Dann ist für $k = 1, \dots, 2^j$ mit (5.8) der Zuwachs

$$\Delta_{j,k} := R_n(t_{j,k}) - R_n(t_{j,k-1}) = R_n(k 2^{-j}) - R_n((k-1) 2^{-j})$$

normalverteilt mit Erwartungswert Null und Varianz $n^{-2/5} |k 2^{-j} - (k-1) 2^{-j}|^2 = n^{-2/5} 2^{-2j}$. Mit einem Schwellenwert $\lambda_j := n^{-1/5} 2^{-j} 2^{\vartheta j}$ mit $\vartheta \in (0, 1/2)$ gilt mit (4.90) für den Zuwachs $\Delta_{j,k}$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&P(|\Delta_{j,k}| > \lambda_j \text{ für mindestens ein } k \in \{1, \dots, 2^j\}) \\
&= P \left(\frac{|\Delta_{j,k}|}{n^{-1/5} 2^{-j}} > 2^{\vartheta j} \text{ für mindestens ein } k \in \{1, \dots, 2^j\} \right) \\
&\leq 2^j \exp \left\{ -\frac{2^{2\vartheta j}}{2} \right\} = 2^j \exp \left\{ -2^{2\vartheta j - 1} \right\}.
\end{aligned}$$

Für $j \rightarrow \infty$ konvergiert die rechte Seite und somit auch die Wahrscheinlichkeit der linken Seite gegen Null. Dadurch existiert analog zum Beweis vom Stetigkeitstheorem von Kolmogorov aus Karatzas und Shreve (1991, Theorem 2.8) ein Prozess R_n mit stetigen Pfaden für den gilt für

ein $J \in \mathbb{N}_0$, dass

$$\begin{aligned}
\sup_{t \in [b_n, 1-b_n]} |R_n(t)| &= \sup_{j \in \mathbb{N}_0} \max_{0 \leq k \leq 2^j} |R_n(k 2^{-j})| \\
&\leq \max_{0 \leq k \leq 2^J} |R_n(k 2^{-J})| + \sum_{j=J+1}^{\infty} \max_{1 \leq k \leq 2^j} |R_n(k 2^{-j}) - R_n((k-1) 2^{-j})| \\
&= \max_{0 \leq k \leq 2^J} |R_n(k 2^{-J})| + \sum_{j=J+1}^{\infty} \max_{1 \leq k \leq 2^j} |\Delta_{j,k}|. \tag{5.9}
\end{aligned}$$

Für den ersten Term der rechten Seite von (5.9) gilt für eine fixierte Skala J mit der Bonferroni-Ungleichung und (4.90), weil $(R_n(k 2^{-J}))_{k=0, \dots, 2^J}$ identisch normalverteilt ist mit Varianz $n^{-4/5}$, die Abschätzung

$$\begin{aligned}
P\left(\max_{k=0, \dots, 2^J} |R_n(k 2^{-J})| > \eta/2\right) &\leq \sum_{k=0}^{2^J} P(|R_n(k 2^{-J})| > \eta/2) \\
&= (2^J + 1) P(n^{2/5} |R_n(0)| > n^{2/5} \eta/2) \\
&\leq (2^J + 1) \exp\left\{-1/2 \left(n^{2/5} \eta/2\right)^2\right\} \\
&\leq \epsilon/2 \tag{5.10}
\end{aligned}$$

für $n \geq n_0$. Für den zweiten Term der rechten Seite von (5.9) betrachten wir nun die Ereignisse $A_j := \{\max_{1 \leq k \leq 2^j} |\Delta_{j,k}| \leq \lambda_j\}$ und deren Komplemente $A_j^c = \{\max_{1 \leq k \leq 2^j} |\Delta_{j,k}| > \lambda_j\}$. Die Wahrscheinlichkeit für A_j^c können wir wieder mit der Bonferroni-Ungleichung und (4.90) folgendermaßen abschätzen

$$\begin{aligned}
P(A_j^c) &= P\left(\max_{1 \leq k \leq 2^j} |\Delta_{j,k}| > \lambda_j\right) \leq \sum_{k=1}^{2^j} P(|\Delta_{j,k}| > n^{-1/5} 2^{-j} 2^{\vartheta j}) \\
&= \sum_{k=1}^{2^j} P\left(\frac{|\Delta_{j,k}|}{n^{-1/5} 2^{-j}} > 2^{\vartheta j}\right) \leq 2^j \exp\left\{-1/2 \left(2^{\vartheta j}\right)^2\right\}.
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$P\left(\bigcup_{j=J}^{\infty} A_j^c\right) \leq \sum_{j=J}^{\infty} P(A_j^c) \leq \sum_{j=J}^{\infty} 2^j \exp\left\{-\frac{2^{2\vartheta j}}{2}\right\} \leq \epsilon/2$$

für J hinreichend groß. Nun sei $A := \bigcap_{j=J}^{\infty} A_j$, dann gilt

$$P(A) = P\left(\bigcap_{j=J}^{\infty} A_j\right) = 1 - P\left(\bigcup_{j=J}^{\infty} A_j^c\right).$$

Falls also A eintritt, gilt $\max_{1 \leq k \leq 2^j} |\Delta_{j,k}| \leq \lambda_j$ und es folgt mit der geometrischen Reihe für den zweiten Term der rechten Seite von (5.9) die Abschätzung

$$\begin{aligned} \sum_{j=J+1}^{\infty} \max_{1 \leq k \leq 2^j} |\Delta_{j,k}| &\leq \sum_{j=J+1}^{\infty} \lambda_j = n^{-1/5} \sum_{j=J+1}^{\infty} 2^{-j(1-\vartheta)} \\ &= n^{-1/5} \frac{(2^{-(1-\vartheta)})^{J+1}}{1 - 2^{-(1-\vartheta)}} = n^{-1/5} \frac{1}{(2^{(1-\vartheta)} - 1) 2^{(1-\vartheta)J}} \leq \eta/2 \end{aligned} \quad (5.11)$$

falls J hinreichend groß. Für (5.9) gilt somit bei Eintreten von A mit (5.10) und (5.11), dass

$$\sup_{t \in [b_n, 1-b_n]} |R_n(t)| \leq \eta/2 + \eta/2 = \eta,$$

wodurch

$$P \left(\sup_{t \in [b_n, 1-b_n]} |R_n(t)| > \eta \right) \leq \epsilon.$$

Dadurch folgt

$$\frac{1}{\sqrt{nb_n} \kappa_K} \max_{t \in [b_n, 1-b_n]} |R_n(t)| = O_P \left(\frac{1}{\sqrt{nb_n}} \right) = o_P \left(\frac{1}{\sqrt{\log n}} \right). \quad (5.12)$$

Insgesamt erhalten wir für (5.6) mit (5.7) und (5.12) die Größenordnung

$$\frac{1}{\sigma \kappa_K} \left| \max_{t \in [b_n, 1-b_n]} \left| \sqrt{nb_n} m_0(t) \right| - \max_{t \in [b_n, 1-b_n]} \left| \sqrt{nb_n} \bar{\mu}_0(t) \right| \right| = o_P \left(\frac{1}{\sqrt{\log n}} \right).$$

Somit gilt für $\epsilon > 0$ beliebig für unsere gesuchte Wahrscheinlichkeit in (5.1), dass

$$\begin{aligned} &P \left(\frac{1}{\sigma \kappa_K} \max_{t \in [b_n, 1-b_n]} \left| \sqrt{nb_n} m_0(t) \right| - B_K(1/b_n) \leq \frac{u}{\sqrt{2 \log(1/b_n)}} \right) \\ &\leq P \left(\frac{\sqrt{nb_n}}{\sigma \kappa_K} \max_{t \in [b_n, 1-b_n]} |\bar{\mu}_0(t)| - B_K(1/b_n) \leq \frac{u + \epsilon}{\sqrt{2 \log(1/b_n)}} \right) \\ &\quad + P \left(\frac{\sqrt{nb_n}}{\sigma \kappa_K} \left| \max_{t \in [b_n, 1-b_n]} |m_0(t)| - \max_{t \in [b_n, 1-b_n]} |\bar{\mu}_0(t)| \right| > \frac{\epsilon}{\sqrt{2 \log(1/b_n)}} \right) \\ &= P \left(\frac{\sqrt{nb_n}}{\sigma \kappa_K} \max_{t \in [b_n, 1-b_n]} |\bar{\mu}_0(t)| - B_K(1/b_n) \leq \frac{u + \epsilon}{\sqrt{2 \log(1/b_n)}} \right) + o(1), \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
& P \left(\frac{1}{\sigma \kappa_K} \max_{t \in [b_n, 1-b_n]} \left| \sqrt{nb_n} m_0(t) \right| - B_K(1/b_n) \leq \frac{u}{\sqrt{2 \log(1/b_n)}} \right) \\
& \geq P \left(\frac{\sqrt{nb_n}}{\sigma \kappa_K} \max_{t \in [b_n, 1-b_n]} |\bar{\mu}_0(t)| - B_K(1/b_n) \leq \frac{u - \epsilon}{\sqrt{2 \log(1/b_n)}} \right) \\
& \quad - P \left(\frac{\sqrt{nb_n}}{\sigma \kappa_K} \left| \max_{t \in [b_n, 1-b_n]} m_0(t) - \max_{t \in [b_n, 1-b_n]} |\bar{\mu}_0(t)| \right| > \frac{\epsilon}{\sqrt{2 \log(1/b_n)}} \right) \\
& = P \left(\frac{\sqrt{nb_n}}{\sigma \kappa_K} \max_{t \in [b_n, 1-b_n]} |\bar{\mu}_0(t)| - B_K(1/b_n) \leq \frac{u - \epsilon}{\sqrt{2 \log(1/b_n)}} \right) + o(1).
\end{aligned}$$

Dadurch können wir m_0 durch $\bar{\mu}_0$ ersetzen und erhalten

$$\begin{aligned}
& P \left(\frac{1}{\sigma \kappa_K} \max_{t \in [b_n, 1-b_n]} \left| \sqrt{nb_n} m_0(t) \right| - B_K(1/b_n) \leq \frac{u}{\sqrt{2 \log(1/b_n)}} \right) \\
& = P \left(\frac{\sqrt{nb_n}}{\sigma \kappa_K} \max_{t \in [b_n, 1-b_n]} |\bar{\mu}_0(t)| - B_K(1/b_n) \leq \frac{u}{\sqrt{2 \log(1/b_n)}} \right) + o(1).
\end{aligned}$$

Mit der Definition

$$Y(t/b_n) := \int_{-\infty}^{\infty} K \left(\frac{t}{b_n} - v \right) d\bar{\mathbb{W}}(v)$$

und (5.5) erhalten wir für $s := t/b_n$

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{nb_n}}{\sigma \kappa_K} \max_{t \in [b_n, 1-b_n]} |\bar{\mu}_0(t)| &= \frac{1}{\sigma \kappa_K} \max_{t \in [b_n, 1-b_n]} |\sigma Y(t/b_n)| \\
&= \frac{1}{\kappa_K} \max_{t \in [b_n, 1-b_n]} |Y(t/b_n)| \\
&= \frac{1}{\kappa_K} \max_{s \in [1, 1/b_n - 1]} |Y(s)|.
\end{aligned}$$

Somit wollen wir nun

$$P \left(\frac{1}{\kappa_K} \max_{s \in [1, 1/b_n - 1]} |Y(s)| - B_K(1/b_n) \leq \frac{u}{\sqrt{2 \log(1/b_n)}} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-2e^{-u}}$$

für alle $u \in \mathbb{R}$ zeigen. Weil Y ein stationärer Gaußprozess ist, können wir Theorem 2.1 von Pickands (1969a) und Korollar A1 von Bickel und Rosenblatt (1973) anwenden, um obige Konvergenz zu erreichen. Somit prüfen wir die dortigen Voraussetzungen. Es gilt $\mathbb{E}(Y(s)) = 0$.

Für die Varianz von $Y(s)$ erhalten wir mit der Ito-Isometrie

$$\text{Var}(Y(s)) = \mathbb{E}(Y(s))^2 = \mathbb{E} \left(\int_{-\infty}^{\infty} K(s-u) d\overline{W}(u) \right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} K^2(s-u) du = \kappa_K^2.$$

Des Weiteren gilt mit der „cross-variation“ Formel (2.27) aus Karatzas und Shreve (1991, S. 142) und der Substitution $v = s - u$ für die Kovarianz

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Y(s), Y(s+\delta)) &= \mathbb{E}(Y(s)Y(s+\delta)) \\ &= \mathbb{E} \left(\int_{-\infty}^{\infty} K(s-u) d\overline{W}(u) \int_{-\infty}^{\infty} K(s-u+\delta) d\overline{W}(u) \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} K(s-u)K(s-u+\delta) du = \int_{-\infty}^{\infty} K(v)K(v+\delta) dv. \end{aligned}$$

Dadurch erhalten wir für den stationären Gaußprozess $(\kappa_K)^{-1}Y$, dass er den Erwartungswert Null besitzt, die Varianz

$$\text{Var} \left[\frac{Y(s)}{\kappa_K} \right] = \frac{\text{Var}[Y(s)]}{\kappa_K^2} = 1$$

und die Kovarianz

$$\text{Cov} \left[\frac{Y(s)}{\kappa_K}, \frac{Y(s+\delta)}{\kappa_K} \right] = \frac{1}{\kappa_K^2} \text{Cov}[Y(s), Y(s+\delta)] = \frac{1}{\kappa_K^2} \int_{-\infty}^{\infty} K(v)K(v+\delta) dv.$$

Für diese Kovarianz gilt

$$\begin{aligned} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} K(v)K(v+\delta) dv}{\kappa_K^2} &= 1 - \frac{1}{2} \frac{\kappa_K^2}{\kappa_K^2} - \frac{1}{2} \frac{\kappa_K^2}{\kappa_K^2} + \frac{\int_{-\infty}^{\infty} K(v)K(v+\delta) dv}{\kappa_K^2} \\ &= 1 - \frac{1}{2} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} K^2(v) dv}{\kappa_K^2} - \frac{1}{2} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} K^2(v+\delta) dv}{\kappa_K^2} + \frac{\int_{-\infty}^{\infty} K(v)K(v+\delta) dv}{\kappa_K^2} \\ &= 1 - \frac{1}{2\kappa_K^2} \int_{-\infty}^{\infty} (K^2(v) + K^2(v+\delta) - 2K(v)K(v+\delta)) dv \\ &= 1 - \frac{1}{2\kappa_K^2} \int_{-\infty}^{\infty} (K(v) - K(v+\delta))^2 dv. \end{aligned}$$

Mit Definition 5.1 erhalten wir für $\delta \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} K(v)K(v+\delta) dv}{\kappa_K^2} &= 1 - \frac{1}{2\kappa_K^2} |\delta|^\beta \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{|\delta|^\beta} \int_{-\infty}^{\infty} (K(v) - K(v+\delta))^2 dv + o(|\delta|^\beta) \\ &= 1 - |\delta|^\beta C_K + o(|\delta|^\beta). \end{aligned}$$

Damit sind für den Gaußprozess $(\kappa_K)^{-1} Y$ die Voraussetzungen von Theorem 2.1 von Pickands (1969a) und Korollar A1 von Bickel und Rosenblatt (1973) erfüllt und wir erhalten für $u \in \mathbb{R}$ die Konvergenz

$$P\left(\frac{1}{\kappa_K} \max_{s \in [1, 1/b_n - 1]} |Y(s)| - B_K(1/b_n - 2) \leq \frac{u}{\sqrt{2 \log(1/b_n - 2)}}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-2e^{-u}}.$$

Weiterhin gilt nach Definition 5.1, dass

$$\begin{aligned} &B_K(1/b_n - 2) \\ &= \sqrt{2 \log(1/b_n - 2)} + \frac{1}{\sqrt{2 \log(1/b_n - 2)}} \left[\frac{2 - \beta}{2\beta} \log(\log(1/b_n - 2)) + \log\left(\frac{C_K^{1/\beta} h_\beta 2^{1/\beta}}{2\sqrt{\pi}}\right) \right] \\ &= \sqrt{2 \log(1/b_n) + 2 \log(1 - 2b_n)} \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2 \log(1/b_n) + 2 \log(1 - 2b_n)}} \left[\frac{2 - \beta}{2\beta} \log(\log(1/b_n) + 2 \log(1 - 2b_n)) \right. \\ &\quad \quad \left. + \log\left(\frac{C_K^{1/\beta} h_\beta 2^{1/\beta}}{2\sqrt{\pi}}\right) \right] \\ &= \sqrt{2 \log(1/b_n)} + \frac{1}{\sqrt{2 \log(1/b_n)}} \left[\frac{2 - \beta}{2\beta} \log(\log(1/b_n)) + \log\left(\frac{C_K^{1/\beta} h_\beta 2^{1/\beta}}{2\sqrt{\pi}}\right) \right] + o(b_n) \\ &= B_K(1/b_n) + o(b_n). \end{aligned}$$

Auf analoge Weise gilt auch

$$\frac{1}{\sqrt{2 \log(1/b_n - 2)}} = \frac{1}{\sqrt{2 \log(1/b_n) + 2 \log(1 - 2b_n)}} = \frac{1}{\sqrt{2 \log(1/b_n)}} + o(b_n).$$

Mit beiden Umformungen und mit Hilfe des Theorems von Slutsky folgt mit obiger Konvergenz

$$\begin{aligned} & P \left(\frac{1}{\kappa_K} \max_{s \in [1, 1/b_n - 1]} |Y(s)| - B_K(1/b_n - 2) \leq \frac{u}{\sqrt{2 \log(1/b_n - 2)}} \right) \\ &= P \left(\frac{1}{\kappa_K} \max_{s \in [1, 1/b_n - 1]} |Y(s)| - B_K(1/b_n) + o(b_n) \leq \frac{u}{\sqrt{2 \log(1/b_n)}} + o(b_n) \right) \\ &= P \left(\frac{1}{\kappa_K} \max_{s \in [1, 1/b_n - 1]} |Y(s)| - B_K(1/b_n) \leq \frac{u}{\sqrt{2 \log(1/b_n)}} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-2e^{-u}} \end{aligned}$$

für alle $u \in \mathbb{R}$, wodurch der Satz bewiesen wäre. \square

Nun werden wir abschließend die asymptotische Korrektheit des simultanen Konfidenzbandes nachweisen. Dafür seien

$$T_n := \sup_{t \in [b_n, 1 - b_n]} |m_0(t)|$$

und

$$T_n^* := \sup_{t \in [b_n, 1 - b_n]} |m_0^*(t)|,$$

sowie $t_{n, 1-\alpha}$ und $t_{n, 1-\alpha}^*$ die $(1-\alpha)$ -Quantile von T_n bzw. T_n^* , mit dem Signifikanzniveau α . Für die geglättete Funktion $K_{b_n}(m)$ von der Regressionsfunktion m ergibt sich nun das folgende simultane Konfidenzband.

Satz 5.4

Mit Hilfe der Voraussetzungen von Satz 5.2 und Satz 5.3 erhalten wir für $\alpha \in (0, 1)$ die Konvergenz

$$P \left(K_{b_n}(m)(t) \in [\widehat{m}(t) - t_{n, 1-\alpha}^*, \widehat{m}(t) + t_{n, 1-\alpha}^*] \forall t \in [0, 1] \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 - \alpha,$$

wobei $t_{n, 1-\alpha}^*$ das $(1-\alpha)$ -Quantil von $T_n^* = \sup_{t \in [b_n, 1 - b_n]} |m_0^*(t)|$ ist.

Beweis

Für den Nachweis der asymptotischen Korrektheit des simultanen Konfidenzbandes werden wir Lemma 8.3 nutzen. Dafür prüfen wir die dortigen Voraussetzungen. Zunächst gilt nach Satz 5.3 für alle $u \in \mathbb{R}$ die Konvergenz

$$P \left(\sqrt{2 \log(1/b_n)} \left[\frac{\sqrt{nb_n}}{\sigma \kappa_K} \sup_{t \in [b_n, 1 - b_n]} |m_0(t)| \right] - \sqrt{2 \log(1/b_n)} B_K(1/b_n) \leq u \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-2e^{-u}},$$

mit der stetigen Grenzverteilung

$$F_0(u) := e^{-2e^{-u}}.$$

Die obige Wahrscheinlichkeit können wir wie folgt umschreiben

$$\begin{aligned} & P\left(\sqrt{2\log(1/b_n)} \left[\frac{\sqrt{nb_n}}{\sigma\kappa_K} \sup_{t \in [b_n, 1-b_n]} |m_0(t)| \right] - \sqrt{2\log(1/b_n)} B_K(1/b_n) \leq u\right) \\ &= P\left(\sup_{t \in [b_n, 1-b_n]} |m_0(t)| \leq \frac{\sigma\kappa_K}{\sqrt{2\log(1/b_n)}\sqrt{nb_n}} u + \frac{\sigma\kappa_K}{\sqrt{nb_n}} B_K(1/b_n)\right) \\ &= P\left(T_n \leq \frac{\sigma\kappa_K}{\sqrt{2\log(1/b_n)}\sqrt{nb_n}} u + \frac{\sigma\kappa_K}{\sqrt{nb_n}} B_K(1/b_n)\right), \end{aligned}$$

wodurch mit Satz 5.3 die Konvergenz

$$P\left(T_n \leq \frac{\sigma\kappa_K}{\sqrt{2\log(1/b_n)}\sqrt{nb_n}} u + \frac{\sigma\kappa_K}{\sqrt{nb_n}} B_K(1/b_n)\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F_0(u) \quad (5.13)$$

für alle $u \in \mathbb{R}$ gilt. Des Weiteren erhalten wir mit Satz 5.2

$$|T_n - T_n^*| = \left| \sup_{t \in [b_n, 1-b_n]} |m_0(t)| - \sup_{t \in [b_n, 1-b_n]} |m_0^*(t)| \right| = o_{\bar{P}}\left(\frac{1}{\sqrt{nb_n}\sqrt{\log(n)}}\right).$$

Somit gilt für $\epsilon > 0$ beliebig, dass

$$\begin{aligned} & P\left(T_n^* \leq \frac{\sigma\kappa_K}{\sqrt{2\log(1/b_n)}\sqrt{nb_n}} u + \frac{\sigma\kappa_K}{\sqrt{nb_n}} B_K(1/b_n)\right) \\ & \leq P\left(T_n \leq \frac{\sigma\kappa_K}{\sqrt{2\log(1/b_n)}\sqrt{nb_n}} (u + \epsilon) + \frac{\sigma\kappa_K}{\sqrt{nb_n}} B_K(1/b_n)\right) \\ & \quad + P\left(|T_n - T_n^*| > \frac{\sigma\kappa_K}{\sqrt{2\log(1/b_n)}\sqrt{nb_n}} \epsilon\right) \\ & = P\left(T_n \leq \frac{\sigma\kappa_K}{\sqrt{2\log(1/b_n)}\sqrt{nb_n}} (u + \epsilon) + \frac{\sigma\kappa_K}{\sqrt{nb_n}} B_K(1/b_n)\right) + o_{\bar{P}}(1), \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} & P\left(T_n^* \leq \frac{\sigma\kappa_K}{\sqrt{2\log(1/b_n)}\sqrt{nb_n}} u + \frac{\sigma\kappa_K}{\sqrt{nb_n}} B_K(1/b_n)\right) \\ & \geq P\left(T_n \leq \frac{\sigma\kappa_K}{\sqrt{2\log(1/b_n)}\sqrt{nb_n}} (u - \epsilon) + \frac{\sigma\kappa_K}{\sqrt{nb_n}} B_K(1/b_n)\right) \\ & \quad - P\left(|T_n - T_n^*| > \frac{\sigma\kappa_K}{\sqrt{2\log(1/b_n)}\sqrt{nb_n}} \epsilon\right) \end{aligned}$$

$$= P \left(T_n \leq \frac{\sigma_{\kappa K}}{\sqrt{2 \log(1/b_n) \sqrt{nb_n}}} (u - \epsilon) + \frac{\sigma_{\kappa K}}{\sqrt{nb_n}} B_K(1/b_n) \right) + o_{\bar{P}}(1).$$

Zusammen mit (5.13) gilt somit, dass

$$P \left(T_n^* \leq \frac{\sigma_{\kappa K}}{\sqrt{2 \log(1/b_n) \sqrt{nb_n}}} u + \frac{\sigma_{\kappa K}}{\sqrt{nb_n}} B_K(1/b_n) \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F_0(u) \quad \text{in Wahrscheinlichkeit.}$$

Dadurch sind alle Voraussetzungen von Lemma 8.3 erfüllt und wir erhalten mit $t_{n,1-\alpha}^*$, dem $(1 - \alpha)$ -Quantil von T_n^* , die Konvergenz

$$P(T_n \leq t_{n,1-\alpha}^*) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 - \alpha \quad (5.14)$$

für $\alpha \in (0, 1)$. Wir formen nun diese Wahrscheinlichkeit um indem wir T_n bzw. $m_0(t)$ einsetzen. Dadurch gilt

$$\begin{aligned} P(T_n \leq t_{n,1-\alpha}^*) &= P \left(\sup_{t \in [b_n, 1-b_n]} |m_0(t)| \leq t_{n,1-\alpha}^* \right) \\ &= P \left(\sup_{t \in [b_n, 1-b_n]} |\hat{m}(t) - K_{b_n}(m)(t)| \leq t_{n,1-\alpha}^* \right) \\ &= P(K_{b_n}(m)(t) \in [\hat{m}(t) - t_{n,1-\alpha}^*, \hat{m}(t) + t_{n,1-\alpha}^*] \forall t \in [0, 1]). \end{aligned}$$

Somit erhalten wir mit (5.14) die asymptotische Korrektheit des simultanen Konfidenzbandes für $K_{b_n}(m)$, die geglättete Version von m , mit

$$P(K_{b_n}(m)(t) \in [\hat{m}(t) - t_{n,1-\alpha}^*, \hat{m}(t) + t_{n,1-\alpha}^*] \forall t \in [0, 1]) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 - \alpha,$$

wobei $t_{n,1-\alpha}^*$ das $(1 - \alpha)$ -Quantil von T_n ist. □

6 Simulation und Datenbeispiel

6.1 Simulationsstudie

In diesem Abschnitt zeigen wir anhand einer Simulationsstudie die Überdeckungswahrscheinlichkeiten der in Kapitel 5 nachgewiesenen asymptotisch korrekten simultanen Konfidenzbänder für eine endliche Datenmenge. Dafür betrachten wir das Modell

$$X_i = m(i/n) + e_i$$

für $i = 1, \dots, n$. Hierbei nehmen wir einen autoregressiven Fehlerprozess mit

$$e_i = \beta e_{i-1} + \sqrt{1 - \beta^2} \epsilon_i$$

an, wobei ϵ_i unabhängige und standardnormalverteilte Zufallsvariablen sind und $|\beta| < 1$. Wir liefern Simulationsergebnisse für die Funktion

$$m(t) = \cos(2\pi t)$$

für $0 \leq t \leq 1$. Die nachfolgenden Implementierungen wurden mit Hilfe des statistischen Softwarepaketes R^1 durchgeführt. Für die Simulationen nutzen wir eine Stichprobengröße von $n = 1000$ und bestimmen die Überdeckungswahrscheinlichkeiten für 95 %-ige simultane Konfidenzbänder. Dabei durchlaufen wir $N = 800$ Simulationen. Des Weiteren stellen wir das in Kapitel 2.3.1 eingeführte Blockwise Dependent Wild Bootstrap-Verfahren dem Autoregressive Dependent Wild Bootstrap-Verfahren aus Kapitel 2.3.2 gegenüber. Somit wird das 95 %-ige Quantil $q_{0,95}$ mit Hilfe dieser beiden Bootstrap-Verfahren mit $n_b = 500$ Wiederholungen bestimmt. Das simultane Konfidenzband wird konstruiert durch $\hat{m} \pm q_{0,95}$. Liegt nun m innerhalb dieses Konfidenzbandes dann überdeckt das Band die Regressionsfunktion m .

Um zu untersuchen wie die Stärke der Abhängigkeit, sowie die Bandbreite b_n des Kernschätzers und die Bootstrap-Blocklänge bzw. der AR-Parameter l_n die Überdeckungswahrscheinlichkeit beeinflusst, betrachten wir verschiedene Werte für β , sowie b_n und l_n . Diese unterscheiden sich auch zwischen dem jeweils gewählten Bootstrap-Verfahren. Nachfolgend werden die Überdeckungswahrscheinlichkeiten der simultanen Konfidenzbänder für die zwei Bootstrap-Verfahren gegenüber gestellt.

¹R Foundation for Statistical Computing Wien, <http://www.R-project.org>

Blockwise DWB

Beim Blockwise Dependent Wild Bootstrap-Verfahren betrachten wir die Werte $\beta = 0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4$ und stellen die Bandbreiten $b_n = 0,04; 0,06; 0,08; 0,1; 0,12; 0,14$ und Blocklängen $l_n = 1, 3, 5, 7, 9$ gegenüber.

Die Tabellen 6.1 zeigen, dass wir eine Unterüberdeckung vorliegen haben. Das liegt an der Bestimmung des 95%-igen Quantils mit Hilfe des Bootstrap-Verfahrens. Bei der Konstruktion des Blockwise DWB sind die Bootstrap-Fehler innerhalb eines Blockes abhängig, aber zwischen den verschiedenen Blöcken unabhängig. Im Gegensatz dazu sind die Originalfehler abhängig voneinander. Somit entsteht ein Bias zwischen diesen zwei Tatsachen. Dennoch zeigt sich, dass die Überdeckungswahrscheinlichkeit von 0,95 annähernd erreicht wird. Weiterhin ist erkennbar, dass mit einer steigenden Abhängigkeit durch β die Blocklänge l_n ebenfalls ansteigen muss, um diese Abhängigkeit auffangen zu können. Dennoch muss auch eine ausreichende Anzahl an Blöcken vorhanden sein, um die Verteilung der Statistik gut imitieren zu können. Auch ist eine ansteigende Überdeckungswahrscheinlichkeit über 0,95 bspw. bei $\beta = 0$ und somit Unabhängigkeit mit wachsender Blocklänge l_n erkennbar. Dies ist möglicherweise darauf zurückzuführen, dass durch eine wachsende Blocklänge eine zusätzliche oder erhöhte Abhängigkeit in die Konstruktion eingebracht wird. Mit einer wachsenden Bandbreite b_n nimmt die Überdeckungswahrscheinlichkeit ab.

Autoregressive DWB

Beim Autoregressive Dependent Wild Bootstrap-Verfahren betrachten wir die Werte $\beta = 0; 0,05; 0,1; 0,2$ und stellen die Bandbreiten $b_n = 0,04; 0,06; 0,08; 0,1; 0,12; 0,14$ und AR-Parameter $l_n = 0,1; 0,3; 0,5; 0,7; 0,9$ gegenüber.

Die Tabellen 6.2 zeigen ebenfalls eine Unterüberdeckung auf. Weiterhin ist erkennbar, dass die Überdeckungswahrscheinlichkeiten von 0,95 bei der Konstruktion mit dem Autoregressive DWB-Verfahren weniger gut erreicht werden, als das beim Blockwise DWB der Fall war. Um die Abhängigkeit des Fehlerprozesses aufzufangen, muss auch hier der AR-Parameter l_n mit der Abhängigkeit durch β steigen. Jedoch wird bei einer erhöhten Abhängigkeit von $\beta > 0,1$ die Überdeckungswahrscheinlichkeit von 0,95 nicht einmal annähernd erreicht. Möglicherweise wird die Abhängigkeitsstruktur durch dieses Verfahren nicht ausreichend abgebildet. Mit einer wachsenden Bandbreite b_n nimmt die Überdeckungswahrscheinlichkeit zusätzlich ab.

6.2 Anwendung an Daten der globalen Erderwärmung

Simultane Konfidenzbänder liefern einen visuellen Eindruck von der Abweichung des Schätzers zu der wahren Funktion. Um diesen visuellen Eindruck zu erhalten, werden wir die Konstruktion des simultanen Konfidenzbandes mit Hilfe des Bootstrap-Verfahrens an Daten der globalen Erderwärmung durchführen.

| Überdeckungswahrscheinlichkeiten, $\beta = 0$ | | | | | | |
|---|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| l_n | b_n | | | | | |
| | 0,04 | 0,06 | 0,08 | 0,1 | 0,12 | 0,14 |
| 1 | 96,625 | 96,25 | 94,625 | 93,375 | 92,00 | 86,5 |
| 3 | 96,875 | 97,00 | 96,25 | 95,5 | 92,125 | 89,5 |
| 5 | 98,125 | 96,75 | 95,375 | 94,875 | 93,5 | 90,375 |
| 7 | 97,125 | 97,875 | 96,875 | 95,625 | 93,5 | 90,5 |
| 9 | 98,375 | 98,375 | 96,875 | 95,625 | 94,75 | 92,25 |

| Überdeckungswahrscheinlichkeiten, $\beta = 0,1$ | | | | | | |
|---|--------|--------|--------|--------|-------|--------|
| l_n | b_n | | | | | |
| | 0,04 | 0,06 | 0,08 | 0,1 | 0,12 | 0,14 |
| 1 | 87,5 | 87,125 | 87,625 | 90,375 | 86 | 79,00 |
| 3 | 95,625 | 94,125 | 95,25 | 92,625 | 90,25 | 86,00 |
| 5 | 97,5 | 95,875 | 96,125 | 94,75 | 93,00 | 87,875 |
| 7 | 97,5 | 96,5 | 96,25 | 93,75 | 94,25 | 87,875 |
| 9 | 97,625 | 96,5 | 95,875 | 96,375 | 94,25 | 91,5 |

| Überdeckungswahrscheinlichkeiten, $\beta = 0,2$ | | | | | | |
|---|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| l_n | b_n | | | | | |
| | 0,04 | 0,06 | 0,08 | 0,1 | 0,12 | 0,14 |
| 1 | 77,00 | 77,125 | 76,625 | 79,5 | 76,125 | 72,375 |
| 3 | 92,75 | 92,375 | 91,5 | 90,375 | 87,625 | 84,75 |
| 5 | 96,5 | 95,375 | 93,75 | 93,75 | 91,75 | 87,875 |
| 7 | 96,25 | 95,5 | 94,625 | 93,5 | 91,875 | 90,125 |
| 9 | 96,625 | 96,75 | 94,625 | 95,375 | 92,5 | 89,625 |

| Überdeckungswahrscheinlichkeiten, $\beta = 0,3$ | | | | | | |
|---|-------|--------|--------|--------|--------|--------|
| l_n | b_n | | | | | |
| | 0,04 | 0,06 | 0,08 | 0,1 | 0,12 | 0,14 |
| 1 | 55,25 | 60,625 | 63,875 | 62,00 | 63,75 | 60,875 |
| 3 | 88,75 | 88,875 | 86,00 | 87,25 | 86,5 | 81,5 |
| 5 | 94,00 | 91,5 | 92,00 | 93,25 | 88,5 | 85,25 |
| 7 | 95,5 | 95,5 | 92,625 | 93,375 | 90,625 | 90,875 |
| 9 | 95,25 | 95,5 | 94,375 | 93,5 | 92,25 | 88,25 |

| Überdeckungswahrscheinlichkeiten, $\beta = 0,4$ | | | | | | |
|---|--------|--------|--------|-------|--------|--------|
| l_n | b_n | | | | | |
| | 0,04 | 0,06 | 0,08 | 0,1 | 0,12 | 0,14 |
| 1 | 34,00 | 40,5 | 43,875 | 44,5 | 46,00 | 47,125 |
| 3 | 81,625 | 82,125 | 83,75 | 81,75 | 80,00 | 78,25 |
| 5 | 90,375 | 89,875 | 88,75 | 88,5 | 86,00 | 82,75 |
| 7 | 93,375 | 91,25 | 91,75 | 91,75 | 87,625 | 85,125 |
| 9 | 95,375 | 92,75 | 93,375 | 91,25 | 90,125 | 86,75 |

Tabelle 6.1: Überdeckungswahrscheinlichkeiten des simultanen Konfidenzbandes konstruiert mit dem Blockwise DWB-Verfahren für $\beta = 0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4$.

| Überdeckungswahrscheinlichkeiten, $\beta = 0$ | | | | | | |
|---|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| l_n | b_n | | | | | |
| | 0,04 | 0,06 | 0,08 | 0,1 | 0,12 | 0,14 |
| 0,1 | 95,375 | 95,375 | 92,875 | 90,5 | 87,00 | 82,625 |
| 0,3 | 96,00 | 95,00 | 92,25 | 90,25 | 87,75 | 80,125 |
| 0,5 | 97,00 | 93,5 | 92,25 | 89,75 | 86,75 | 81,5 |
| 0,7 | 94,625 | 92,25 | 91,375 | 87,375 | 84,875 | 79,125 |
| 0,9 | 92,875 | 91,125 | 88,75 | 87,5 | 83,25 | 77,25 |

| Überdeckungswahrscheinlichkeiten, $\beta = 0,05$ | | | | | | |
|--|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| l_n | b_n | | | | | |
| | 0,04 | 0,06 | 0,08 | 0,1 | 0,12 | 0,14 |
| 0,1 | 93,625 | 90,625 | 90,5 | 87,75 | 84,00 | 77,75 |
| 0,3 | 93,75 | 91,875 | 89,75 | 88,5 | 83,5 | 77,375 |
| 0,5 | 91,75 | 92,625 | 90,75 | 87,125 | 83,875 | 77,875 |
| 0,7 | 90,375 | 91,5 | 90,375 | 86,125 | 83,625 | 76,00 |
| 0,9 | 88,375 | 87,625 | 86,875 | 83,5 | 81,00 | 75,875 |

| Überdeckungswahrscheinlichkeiten, $\beta = 0,1$ | | | | | | |
|---|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| l_n | b_n | | | | | |
| | 0,04 | 0,06 | 0,08 | 0,1 | 0,12 | 0,14 |
| 0,1 | 88,375 | 86,875 | 84,75 | 84,875 | 81,375 | 73,5 |
| 0,3 | 90,125 | 87,875 | 86,875 | 83,00 | 79,00 | 74,375 |
| 0,5 | 89,25 | 86,625 | 87,375 | 85,25 | 81,00 | 73,125 |
| 0,7 | 87,25 | 88,25 | 86,5 | 84,375 | 80,75 | 73,625 |
| 0,9 | 85,875 | 83,375 | 84,25 | 83,375 | 80,625 | 75,00 |

| Überdeckungswahrscheinlichkeiten, $\beta = 0,2$ | | | | | | |
|---|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| l_n | b_n | | | | | |
| | 0,04 | 0,06 | 0,08 | 0,1 | 0,12 | 0,14 |
| 0,1 | 77,625 | 75,5 | 75,125 | 71,75 | 69,375 | 62,625 |
| 0,3 | 75,875 | 77,625 | 76,875 | 73,375 | 67,75 | 64,375 |
| 0,5 | 80,375 | 78,625 | 77,125 | 75,25 | 70,125 | 65,00 |
| 0,7 | 77,125 | 78,125 | 75,75 | 74,375 | 68,875 | 64,625 |
| 0,9 | 77,375 | 77,00 | 74,375 | 74,5 | 71,00 | 64,125 |

Tabelle 6.2: Überdeckungswahrscheinlichkeiten des simultanen Konfidenzbandes konstruiert mit dem Autoregressive DWB-Verfahren für $\beta = 0; 0,05; 0,1; 0,2$.

Die globale Temperaturfolge wurde in der statistischen Gemeinschaft intensiv untersucht, unter anderem von Bloomfield und Nychka (1992), Woodward und Gray (1993) und Wu et al. (2001). Dabei stellt sich die Frage, ob der Temperaturanstieg innerhalb der letzten zwei Jahrzehnte um etwa $0,5^\circ\text{C}$ der Beginn einer systematischen Erderwärmung ist, oder einfach ein Effekt der natürlichen Temperaturschwankungen. Im vorliegenden Abschnitt werden wir die Daten von Jones et al. (2016) betrachten. Dabei handelt es sich um die globalen jährlichen Temperaturabweichungen von 1850 bis 2015, relativ zum Mittelwert von 1961 bis 1990, d. h. jede Abweichung ist der Durchschnittswert des jeweiligen Jahres abzüglich der Durchschnittstemperatur der Jahre 1961 bis 1990. Der Datensatz umfasst somit $n = 166$ Werte. Zu Beginn der Aufzeichnungen zeigen die Daten eine relativ stabile Temperatur und um die frühen 1940'er Jahre eine relativ schnelle und beständige Erwärmung. Danach blieb die Temperatur wieder relativ stabil bis etwa zur Mitte der 1970'er Jahre, seitdem ein erneuter schneller Temperaturanstieg stattfindet. Das Jahr 2015 war das bisher wärmste Jahr in der globalen Temperaturaufzeichnung.

Die Abbildungen 6.1 und 6.2 zeigen die globalen jährlichen Temperaturabweichungen der Jahre 1850 bis 2015, sowie die 95 %-igen und 99 %-igen simultanen Konfidenzbänder, welche mit Hilfe des Blockwise DWB-Verfahrens bzw. des Autoregressive DWB-Verfahrens erstellt wurden. Bei der Konstruktion der simultanen Konfidenzbänder mit Hilfe des Blockwise DWB nehmen wir die Bandbreite $b_n = 0,07$ und die Blocklänge $l_n = 5$ an. Im Gegensatz dazu haben wir für die Konstruktion der simultanen Konfidenzbänder mit Hilfe des Autoregressive DWB die Bandbreite $b_n = 0,07$ und den AR-Parameter $l_n = 0,5$ gewählt.

Der zu erkennende Temperaturanstieg wurde in Bloomfield und Nychka (1992) und Woodward und Gray (1993) bekräftigt. Die Tests in diesen Arbeiten deuten auf einen signifikanten deterministischen Trend hin, welcher nur aufgrund von natürlichen Schwankungen schwer erklärbar ist. Mit Hilfe der simultanen Konfidenzbänder kann nun die Angemessenheit eines Schätzers aufgezeigt werden. Für die vorliegenden globalen Temperaturdaten wurde hierfür ein linearer Trend von Woodward und Gray (1993), ein isotonischer Trend von Wu et al. (2001) und ein quadratischer Trend von Rust (2003) vorgeschlagen.

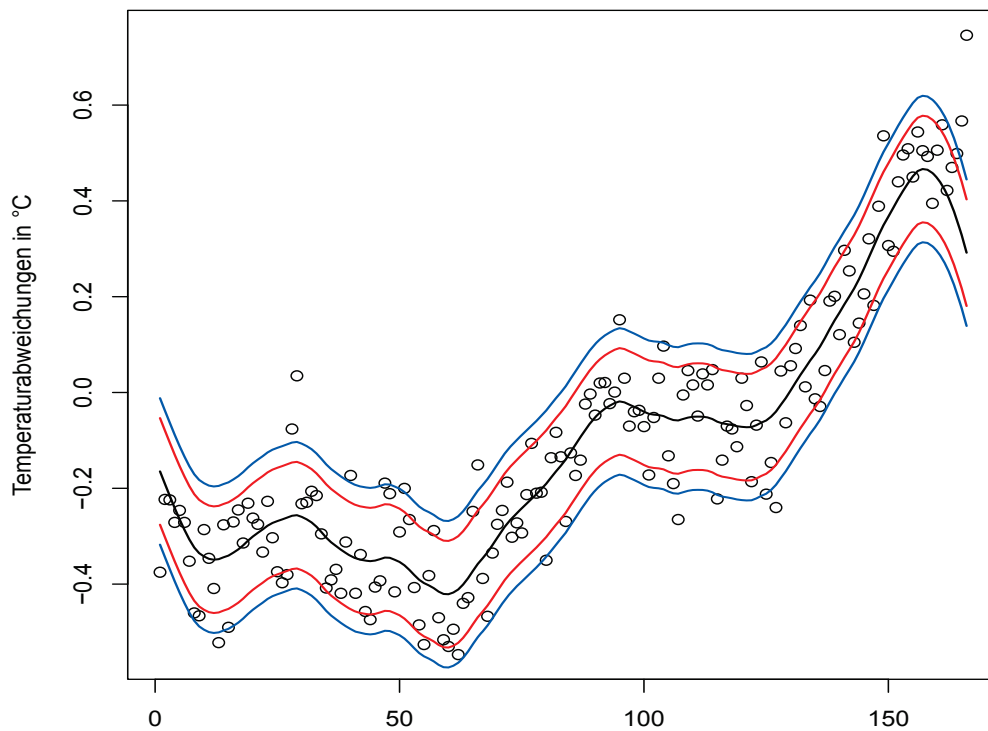


Abbildung 6.1: *Simultane Konfidenzbänder für die globalen Temperaturdaten: globale jährliche Temperaturabweichungen der Jahre 1850 bis 2015, lokaler Trendschätzer (schwarz), sowie das 95%-ige (rot) und 99%-ige (blau) simultane Konfidenzband konstruiert mit dem Blockwise DWB-Verfahren.*

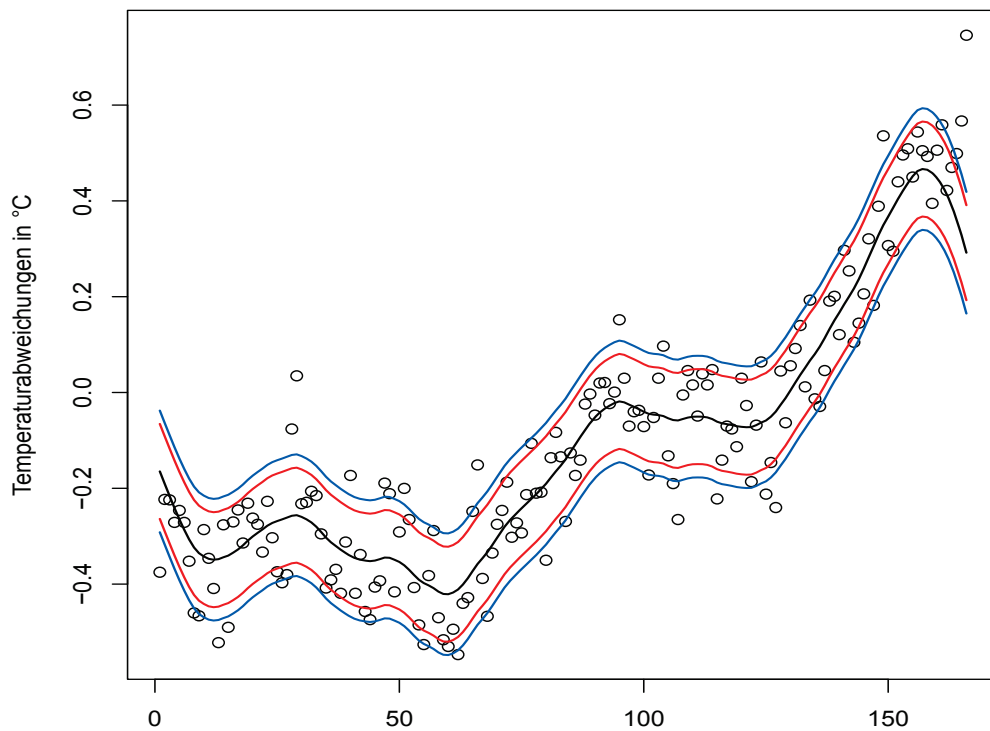


Abbildung 6.2: *Simultane Konfidenzbänder für die globalen Temperaturdaten: globale jährliche Temperaturabweichungen der Jahre 1850 bis 2015, lokaler Trendschätzer (schwarz), sowie das 95%-ige (rot) und 99%-ige (blau) simultane Konfidenzband konstruiert mit dem Autoregressive DWB-Verfahren.*

7 Fazit und Ausblick

Die vorliegende Arbeit liefert den Nachweis der asymptotischen Korrektheit von simultanen Konfidenzbändern für die Trendfunktion basierend auf nichtparametrischen Schätzern und im Zusammenhang mit abhängigen Beobachtungen. Um in diese Thematik einzuführen, haben wir zusätzlich die asymptotische Korrektheit von punktweisen Konfidenzintervallen für obige Trendfunktion untersucht.

Zum Schätzen der unbekanntes Regressionsfunktion nutzten wir den von Priestley und Chao (1972) eingeführten Priestley-Chao-Schätzer. Dennoch ist es möglich die Berechnungen ebenso mit anderen Schätzern, bspw. mit dem durch Gasser und Müller (1979) eingeführten Gasser-Müller-Schätzer oder den von Nadaraya (1964) und Watson (1964) eingeführten Nadaraya-Watson-Schätzer durchzuführen.

Bei der Konstruktion der punktweisen Konfidenzintervalle bzw. der simultanen Konfidenzbänder muss die Abhängigkeit der Beobachtungen berücksichtigt werden. Wir nutzten hierfür das durch Shao (2010) eingeführte Dependent Wild Bootstrap-Verfahren. Speziell haben wir zwei Modifikationen dieses Verfahrens zur Konstruktion der simultanen Konfidenzbänder angewendet, das Blockwise Dependent Wild Bootstrap-Verfahren und das Autoregressive Dependent Wild Bootstrap-Verfahren. Für die Konstruktion der punktweisen Konfidenzintervalle nutzten wir das Blockwise Dependent Wild Bootstrap-Verfahren. Einzig Wu und Zhao (2007) haben bisher die Konstruktion von simultanen Konfidenzbändern mit abhängigen Fehlern betrachtet. Sie griffen dafür aber auf das strong invariance principle für stationäre Prozesse zurück. Beim Dependent Wild Bootstrap-Verfahren wird die Abhängigkeitsstruktur der Daten mit Hilfe des Parameters l_n erfasst. Wie wir sehen konnten spielt dieser Parameter eine ähnliche Rolle wie die Blocklänge von einem Block Bootstrap-Verfahren. Um die Abhängigkeit des Originalprozesses aufzufangen, muss l_n daher mit steigendem Stichprobenumfang wachsen. Dennoch muss der Parameter l_n auch durch eine Potenz der Stichprobengröße beschränkt werden, um die Verteilung der Statistik gut imitieren zu können. Im Verlauf dieser Arbeit wurde ersichtlich, dass zum einen diese Beschränkung beim Nachweis der asymptotischen Korrektheit von simultanen Konfidenzbändern verschärft wurde, im Vergleich zum Nachweis der asymptotischen Korrektheit von punktweisen Konfidenzintervallen. Zum anderen ist die Beschränkung beim Nachweis der asymptotischen Korrektheit von simultanen Konfidenzbändern, welche mit dem Blockwise DWB und dem Autoregressive DWB konstruiert wurden, gleich. Möglicherweise dienen auch andere Modifikationen des Dependent Wild Bootstrap-Verfahrens dazu die Abhängigkeit der Daten aufzufangen und punktweise Konfidenzintervalle

bzw. simultane Konfidenzbänder zu konstruieren.

Für den Nachweis der asymptotischen Korrektheit von punktweisen Konfidenzintervallen konnten wir aufgrund der punktweisen Überdeckung einen Zentralen Grenzwertsatz nutzen. Im Gegensatz dazu haben wir für den Nachweis der asymptotischen Korrektheit von simultanen Konfidenzbändern auf die Coupling-Technik zurückgegriffen. Mit dieser Technik haben wir die Partialsummenprozesse, welche aus dem stationären Fehlerprozess und aus dem Bootstrap-Fehlerprozess bestehen, aneinander gekoppelt, indem wir beide an den gleichen Wiener Prozess gekoppelt haben.

Für das Coupling der Partialsumme der Originalfehler nutzten wir ein bekanntes Resultat der starken Approximation von α -mischenden Prozessen von Shao und Lu (1987). Die Rate der dortigen Schranke ist aufgrund der Abhängigkeit der Beobachtungen größer als die Rate, welche Komlós et al. (1975) und Komlós et al. (1976) im Fall von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen erreichen. Daher haben wir in dieser Arbeit zusätzlich die starke Approximation eines linearen Prozesses untersucht. Wir konnten eine bessere Rate nachweisen, so wie sie auch im Fall von unabhängigen Zufallsvariablen gilt. Somit sollte es möglich sein, die Rate der starken Approximation ebenso bei anderen Abhängigkeitsstrukturen zu verbessern.

Der Schwerpunkt dieser Arbeit bestand nun im Nachweis der gleichmäßigen Approximation der Bootstrap-Partialsummenprozesse, welche durch die beiden oben genannten Verfahren entstehen, durch einen Wiener Prozess mit Hilfe eines geeigneten Couplings. Durch das Coupling der Original- und Bootstrap-Partialsummenprozesse an den gleichen Wiener-Prozess konnten die jeweiligen Partialsummenprozesse aneinander gekoppelt werden. Weiterhin lieferten wir eine Erweiterung des klassischen Resultates der asymptotischen Verteilung des Maximums eines stationären Gaußprozesses auf abhängige Zufallsvariablen. Das klassische Resultat wurde bereits von Bickel und Rosenblatt (1973) zur Konstruktion von simultanen Konfidenzbändern für Kerndichteschätzer im Fall von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen genutzt. Mit Hilfe dieser Erweiterung des klassischen Resultates auf abhängige Zufallsvariablen zusammen mit dem Coupling der Original- und Bootstrap-Partialsummen konnten wir die asymptotische Korrektheit der simultanen Konfidenzbänder nachweisen.

Aufgrund des in dieser Arbeit genutzten Bootstrap-Verfahrens konnten wir asymptotisch korrekte simultane Konfidenzbänder konstruieren, welche eine schnellere Konvergenzrate besitzen im Vergleich zu der Rate, welche bei der Anwendung des klassischen Ansatzes der Konstruktion von simultanen Konfidenzbändern von Bickel und Rosenblatt (1973) auf den abhängigen Fall entstehen würde. Des Weiteren umgingen wir mit diesem Verfahren das Problem des Schätzens der unbekanntes Summe der Kovarianzen des stationären Fehlerprozesses $(e_i)_{i=1,\dots,n}$.

8 Anhang

Nachfolgende Hilfsresultate benötigen wir für den Nachweis der asymptotischen Korrektheit der punktweisen Konfidenzintervalle in Kapitel 3, sowie für das Coupling der Partialsummen in Kapitel 4 und damit den Nachweis der asymptotischen Korrektheit der simultanen Konfidenzbänder in Kapitel 5.

Die gemeinsame Kumulante der zentrierten Zufallsvariablen e_p, e_q, e_r, e_s ist definiert als

$$\text{cum}(e_p, e_q, e_r, e_s) = \mathbb{E}(e_p e_q e_r e_s) - \mathbb{E}(e_p e_q)\mathbb{E}(e_r e_s) - \mathbb{E}(e_p e_r)\mathbb{E}(e_q e_s) - \mathbb{E}(e_p e_s)\mathbb{E}(e_q e_r),$$

wie bspw. in Cramér (1946) nachzulesen ist. Diese soll im nachfolgenden Lemma geeignet abgeschätzt werden.

Lemma 8.1

Es sei $(e_i)_{i=1, \dots, n}$ ein stationärer, α -mischender Prozess mit $\mathbb{E}(e_i) = 0$, sowie $\sup_{1 \leq t \leq n} \|e_t\|_z \leq C < \infty$ für $z \geq 2$ und $4/z := 1 - K_\alpha$ mit $K_\alpha \in (0, 1)$. Weiterhin seien $1 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4 \leq n$ und $u = \max\{t_2 - t_1, t_3 - t_2, t_4 - t_3\}$. Dann gilt

$$|\text{cum}(e_{t_1}, e_{t_2}, e_{t_3}, e_{t_4})| \leq 16 C (\alpha(u))^{K_\alpha}.$$

Beweis

Wir betrachten im Folgenden die drei Fälle, $u = t_2 - t_1$, $u = t_3 - t_2$ und $u = t_4 - t_3$.

i) $u = t_2 - t_1$

Für die Kumulante erhalten wir die Abschätzung

$$\begin{aligned} |\text{cum}(e_{t_1}, e_{t_2}, e_{t_3}, e_{t_4})| &\leq |\mathbb{E}(e_{t_1} e_{t_2} e_{t_3} e_{t_4})| + |\mathbb{E}(e_{t_1} e_{t_2})| |\mathbb{E}(e_{t_3} e_{t_4})| \\ &\quad + |\mathbb{E}(e_{t_1} e_{t_3})| |\mathbb{E}(e_{t_2} e_{t_4})| + |\mathbb{E}(e_{t_1} e_{t_4})| |\mathbb{E}(e_{t_2} e_{t_3})|. \end{aligned}$$

Mit der Kovarianzgleichung aus Lemma 2.2 gilt

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}(e_{t_1} e_{t_2} e_{t_3} e_{t_4})| &= |\text{Cov}(e_{t_1}, e_{t_2} e_{t_3} e_{t_4})| \\ &\leq 4 \|e_{t_1}\|_z \|e_{t_2} e_{t_3} e_{t_4}\|_{\tilde{z}} (\alpha(u))^{K_\alpha}, \end{aligned}$$

wobei $\frac{1}{z} := \frac{3}{z}$. Daher erhalten wir mit der Hölder-Ungleichung

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}(e_{t_1} e_{t_2} e_{t_3} e_{t_4})| &\leq 4 \|e_{t_1}\|_z \|e_{t_2}\|_z \|e_{t_3}\|_z \|e_{t_4}\|_z (\alpha(u))^{K_\alpha} \\ &\leq 4 \sup_{t_1} \|e_{t_1}\|_z \sup_{t_2} \|e_{t_2}\|_z \sup_{t_3} \|e_{t_3}\|_z \sup_{t_4} \|e_{t_4}\|_z (\alpha(u))^{K_\alpha} \\ &\leq 4C (\alpha(u))^{K_\alpha}. \end{aligned}$$

Weiterhin erhalten wir mit Lemma 2.2 und der Lyapunov-Ungleichung

$$|\mathbb{E}(e_{t_1} e_{t_2})| = |\text{Cov}(e_{t_1}, e_{t_2})| \leq 4 \|e_{t_1}\|_z \|e_{t_2}\|_z (\alpha(u))^{K_\alpha},$$

sowie mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und der Lyapunov-Ungleichung

$$|\mathbb{E}(e_{t_3} e_{t_4})| \leq \sqrt{\mathbb{E}(e_{t_3}^2)} \sqrt{\mathbb{E}(e_{t_4}^2)} = \|e_{t_3}\|_2 \|e_{t_4}\|_2 \leq \|e_{t_3}\|_z \|e_{t_4}\|_z.$$

Fassen wir beides zusammen gilt insgesamt die Abschätzung

$$|\mathbb{E}(e_{t_1} e_{t_2})| |\mathbb{E}(e_{t_3} e_{t_4})| \leq 4C (\alpha(u))^{K_\alpha}.$$

Mit analogem Vorgehen für $|\mathbb{E}(e_{t_1} e_{t_3})| |\mathbb{E}(e_{t_2} e_{t_4})|$, sowie $|\mathbb{E}(e_{t_1} e_{t_4})| |\mathbb{E}(e_{t_2} e_{t_3})|$ ergibt sich

$$|\text{cum}(e_{t_1}, e_{t_2}, e_{t_3}, e_{t_4})| \leq 4 \cdot 4C (\alpha(u))^{K_\alpha}.$$

ii) $u = t_3 - t_2$

Wir erhalten für die Kumulante die Abschätzung

$$\begin{aligned} |\text{cum}(e_{t_1}, e_{t_2}, e_{t_3}, e_{t_4})| &\leq |\text{Cov}(e_{t_1} e_{t_2}, e_{t_3} e_{t_4})| \\ &\quad + |\mathbb{E}(e_{t_1} e_{t_3})| |\mathbb{E}(e_{t_2} e_{t_4})| + |\mathbb{E}(e_{t_1} e_{t_4})| |\mathbb{E}(e_{t_2} e_{t_3})|. \end{aligned}$$

Mit Lemma 2.2 gilt

$$|\text{Cov}(e_{t_1} e_{t_2}, e_{t_3} e_{t_4})| \leq 4 \|e_{t_1} e_{t_2}\|_{\bar{z}} \|e_{t_3} e_{t_4}\|_{\bar{z}} (\alpha(u))^{K_\alpha},$$

wobei $\frac{1}{\bar{z}} := \frac{2}{z}$. Somit erhalten wir wieder mit der Hölder-Ungleichung

$$\begin{aligned} |\text{Cov}(e_{t_1} e_{t_2}, e_{t_3} e_{t_4})| &\leq 4 \|e_{t_1}\|_z \|e_{t_2}\|_z \|e_{t_3}\|_z \|e_{t_4}\|_z (\alpha(u))^{K_\alpha} \\ &\leq 4C (\alpha(u))^{K_\alpha}. \end{aligned}$$

Weiterhin gilt mit Lemma 2.2 und der Lyapunov-Ungleichung

$$|\mathbb{E}(e_{t_1} e_{t_3})| = |\text{Cov}(e_{t_1}, e_{t_3})| \leq 4 \|e_{t_1}\|_z \|e_{t_3}\|_z (\alpha(u))^{K_\alpha},$$

sowie wieder mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und der Lyapunov-Ungleichung

$$|\mathbb{E}(e_{t_2}e_{t_4})| \leq \|e_{t_2}\|_2 \|e_{t_4}\|_2 \leq \|e_{t_2}\|_z \|e_{t_4}\|_z,$$

wodurch insgesamt

$$|\mathbb{E}(e_{t_1}e_{t_3})||\mathbb{E}(e_{t_2}e_{t_4})| \leq 4C(\alpha(u))^{K_\alpha}.$$

Analoge Rechnungen gelten für $|\mathbb{E}(e_{t_1}e_{t_4})||\mathbb{E}(e_{t_2}e_{t_3})|$ und somit erhalten wir

$$\begin{aligned} |\text{cum}(e_{t_1}, e_{t_2}, e_{t_3}, e_{t_4})| &\leq 4C(\alpha(u))^{K_\alpha} + 2 \cdot 4C(\alpha(u))^{K_\alpha} \\ &= 3 \cdot 4C(\alpha(u))^{K_\alpha}. \end{aligned}$$

iii) $u = t_4 - t_3$

Dieser Fall ist analog zu i) und es ergibt sich die Abschätzung

$$|\text{cum}(e_{t_1}, e_{t_2}, e_{t_3}, e_{t_4})| \leq 4 \cdot 4C(\alpha(u))^{K_\alpha}.$$

Nun fassen wir alle drei Fälle zusammen und erhalten

$$|\text{cum}(e_{t_1}, e_{t_2}, e_{t_3}, e_{t_4})| \leq 16C(\alpha(u))^{K_\alpha}.$$

□

Wir betrachten weiterhin den Fehlerprozess $(e_i)_{i=1, \dots, n}$ und werden im folgenden Lemma die Größenordnung für die Summe seines k -ten Momentes bestimmen.

Lemma 8.2

Es sei $(e_i)_{i=1, \dots, n}$ ein stationärer, stark mischender Prozess mit $\mathbb{E}(e_i) = 0$, $\sup_{1 \leq t \leq n} \|e_t\|_z \leq C < \infty$, sowie $k/z := 1 - K_\alpha$ für $k \geq 2$ und $K_\alpha \in (0, 1)$. Weiterhin sei $\sum_{r=0}^{\infty} (r+1)^{k-2} (\alpha(r))^{K_\alpha} < \infty$. Dann erhalten wir für die Summe des positiven k -ten Momentes

$$\sum_{1 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k \leq n} |\mathbb{E}(e_{t_1} \cdot \dots \cdot e_{t_k})| = \begin{cases} O(n^{k/2}), & \text{falls } k \text{ gerade} \\ O(n^{(k-1)/2}), & \text{falls } k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Beweis

Der Beweis wird als Induktionsbeweis geführt. Somit wird angenommen die Aussage gilt für k und gezeigt, dass sie auch für $k+1$ gültig ist.

Induktionsanfang

Wir zeigen, dass die Aussage für $k=2$ und $k=3$ gültig ist. Mit Hilfe von Lemma 2.2 erhalten

wir für $k = 2$

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq t_1 \leq t_2 \leq n} |\mathbb{E}(e_{t_1} e_{t_2})| &= \sum_{1 \leq t_1 \leq t_2 \leq n} |\text{Cov}(e_{t_1}, e_{t_2})| \leq \sum_{1 \leq t_1 \leq t_2 \leq n} 4C(\alpha(t_2 - t_1))^{K_\alpha} \\ &\leq \sum_{t_1=1}^n \sum_{r=0}^{\infty} 4C(\alpha(r))^{K_\alpha} = O(n). \end{aligned}$$

Für $k = 3$ betrachten wir die zwei Fälle $r = t_2 - t_1$ und $r = t_3 - t_2$, je nachdem zwischen welchen Variablen die größte Lücke ist.

i) Für $r = t_2 - t_1$ gilt mit Lemma 2.2 und der Hölder-Ungleichung

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}(e_{t_1} e_{t_2} e_{t_3})| &= |\text{Cov}(e_{t_1}, e_{t_2} e_{t_3})| \leq 4 \|e_{t_1}\|_z \|e_{t_2} e_{t_3}\|_{\bar{z}} (\alpha(r))^{K_\alpha} \\ &\leq 4 \|e_{t_1}\|_z \|e_{t_2}\|_z \|e_{t_3}\|_z (\alpha(r))^{K_\alpha} \leq 4C(\alpha(r))^{K_\alpha}, \end{aligned}$$

wobei $\frac{1}{\bar{z}} := \frac{2}{z}$.

ii) Für $r = t_3 - t_2$ erhalten wir analog

$$|\mathbb{E}(e_{t_1} e_{t_2} e_{t_3})| = |\text{Cov}(e_{t_1} e_{t_2}, e_{t_3})| \leq 4C(\alpha(r))^{K_\alpha}.$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq n} |\mathbb{E}(e_{t_1} e_{t_2} e_{t_3})| &\leq \sum_{1 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq n} 4C(\alpha(r))^{K_\alpha} \\ &\leq 2 \sum_{t_1=1}^n \sum_{r=0}^{\infty} 4C(r+1)(\alpha(r))^{K_\alpha} = O(n). \end{aligned}$$

Induktionsschritt

Nun werden wir zeigen, dass die Induktionsbehauptung auch für $k + 1$ gültig ist. Somit ist zu zeigen

$$\sum_{1 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{k+1} \leq n} |\mathbb{E}(e_{t_1} \dots e_{t_{k+1}})| = \begin{cases} O(n^{(k+1)/2}), & \text{falls } k+1 \text{ gerade} \\ O(n^{k/2}), & \text{falls } k+1 \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Für $1 \leq t_1 \leq n$ zerlegen wir die Menge $\left\{ (t_2, \dots, t_{k+1}) : t_1 \leq \dots \leq t_{k+1} \leq n, \max_{1 \leq j \leq k} (t_{j+1} - t_j) \geq 0 \right\}$ in Mengen $G_{r,m}(t_1) = \left\{ (t_2, \dots, t_{k+1}) : t_1 \leq \dots \leq t_{k+1} \leq n, \max_{1 \leq j \leq m} (t_{j+1} - t_j) < r = t_{m+1} - t_m = \max_{m \leq j \leq k} (t_{j+1} - t_j) \right\}$. Somit beinhaltet $G_{r,m}(t_1)$ alle (t_2, \dots, t_{k+1}) bei denen die größte Lücke zwischen den t_j 's gleich r ist und diese Lücke erstmals bei m erscheint. Nun

erhalten wir für das $(k + 1)$ -te Moment

$$\begin{aligned} & \sum_{1 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{k+1} \leq n} |\mathbb{E}(e_{t_1} \cdot \dots \cdot e_{t_{k+1}})| \\ & \leq \sum_{m=1}^k \sum_{1 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{k+1} \leq n} (|\text{Cov}(e_{t_1} \cdot \dots \cdot e_{t_m}, e_{t_{m+1}} \cdot \dots \cdot e_{t_{k+1}})| \\ & \quad + |\mathbb{E}(e_{t_1} \cdot \dots \cdot e_{t_m})| |\mathbb{E}(e_{t_{m+1}} \cdot \dots \cdot e_{t_{k+1}})|). \end{aligned}$$

Unter den Voraussetzungen erhalten wir mit Lemma 2.2 und der Hölder-Ungleichung

$$|\text{Cov}(e_{t_1} \cdot \dots \cdot e_{t_m}, e_{t_{m+1}} \cdot \dots \cdot e_{t_{k+1}})| \leq 4C(\alpha(t_{m+1} - t_m))^{K_\alpha}$$

und weil $\#G_{r,m}(t_1) \leq (r+1)^{(k-1)}$ gilt

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^k \sum_{1 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{k+1} \leq n} |\text{Cov}(e_{t_1} \cdot \dots \cdot e_{t_m}, e_{t_{m+1}} \cdot \dots \cdot e_{t_{k+1}})| \\ & \leq \sum_{t_1=1}^n \sum_{m=1}^k \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{(t_2, \dots, t_{k+1}) \in G_{r,m}(t_1)} 4C(\alpha(t_{m+1} - t_m))^{K_\alpha} \\ & \leq n \cdot k \sum_{r=0}^{\infty} (r+1)^{(k-1)} 4C(\alpha(r))^{K_\alpha} \\ & = O(n). \end{aligned}$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^k \sum_{1 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{k+1} \leq n} |\mathbb{E}(e_{t_1} \cdot \dots \cdot e_{t_m})| |\mathbb{E}(e_{t_{m+1}} \cdot \dots \cdot e_{t_{k+1}})| \\ & = \sum_{m=2}^{k-1} \sum_{1 \leq t_1 \leq \dots \leq t_m \leq n} |\mathbb{E}(e_{t_1} \cdot \dots \cdot e_{t_m})| \sum_{1 \leq t_{m+1} \leq \dots \leq t_{k+1} \leq n} |\mathbb{E}(e_{t_{m+1}} \cdot \dots \cdot e_{t_{k+1}})|, \end{aligned}$$

weil aufgrund der zentrierten Zufallsvariablen $(e_i)_{i=1, \dots, n}$ jeweils ein Faktor für $m = 1$ und $m = k$ Null ist. Auf die beiden Faktoren wenden wir die Induktionsvoraussetzung an und erhalten

$$\sum_{1 \leq t_1 \leq \dots \leq t_m \leq n} |\mathbb{E}(e_{t_1} \cdot \dots \cdot e_{t_m})| = \begin{cases} O(n^{m/2}), & \text{falls } m \text{ gerade} \\ O(n^{(m-1)/2}), & \text{falls } m \text{ ungerade} \end{cases}$$

und

$$\sum_{1 \leq t_{m+1} \leq \dots \leq t_{k+1} \leq n} |\mathbb{E}(e_{t_{m+1}} \cdot \dots \cdot e_{t_{k+1}})| = \begin{cases} O(n^{(k+1-m)/2}), & \text{falls } k+1-m \text{ gerade} \\ O(n^{(k-m)/2}), & \text{falls } k+1-m \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Nun unterscheiden wir zwischen $k+1$ gerade und ungerade. Dann erhalten wir die Größenordnungen

◦ $k+1$ gerade

$$\begin{aligned} & \sum_{m=2}^{k-1} \sum_{1 \leq t_1 \leq \dots \leq t_m \leq n} |\mathbb{E}(e_{t_1} \cdot \dots \cdot e_{t_m})| \sum_{1 \leq t_{m+1} \leq \dots \leq t_{k+1} \leq n} |\mathbb{E}(e_{t_{m+1}} \cdot \dots \cdot e_{t_{k+1}})| \\ &= (k-2) \cdot \begin{cases} O(n^{m/2}), & \text{falls } m \text{ gerade} \\ O(n^{(m-1)/2}), & \text{falls } m \text{ ungerade} \end{cases} \cdot \begin{cases} O(n^{(k+1-m)/2}), & \text{falls } m \text{ gerade} \\ O(n^{(k-m)/2}), & \text{falls } m \text{ ungerade} \end{cases} \\ &= \begin{cases} O(n^{(k+1)/2}), & \text{falls } m \text{ gerade} \\ O(n^{(k-1)/2}), & \text{falls } m \text{ ungerade} \end{cases} = O(n^{(k+1)/2}). \end{aligned}$$

◦ $k+1$ ungerade

$$\begin{aligned} & \sum_{m=2}^{k-1} \sum_{1 \leq t_1 \leq \dots \leq t_m \leq n} |\mathbb{E}(e_{t_1} \cdot \dots \cdot e_{t_m})| \sum_{1 \leq t_{m+1} \leq \dots \leq t_{k+1} \leq n} |\mathbb{E}(e_{t_{m+1}} \cdot \dots \cdot e_{t_{k+1}})| \\ &= (k-2) \cdot \begin{cases} O(n^{m/2}), & \text{falls } m \text{ gerade} \\ O(n^{(m-1)/2}), & \text{falls } m \text{ ungerade} \end{cases} \cdot \begin{cases} O(n^{(k-m)/2}), & \text{falls } m \text{ gerade} \\ O(n^{(k+1-m)/2}), & \text{falls } m \text{ ungerade} \end{cases} \\ &= \begin{cases} O(n^{k/2}), & \text{falls } m \text{ gerade} \\ O(n^{k/2}), & \text{falls } m \text{ ungerade} \end{cases} = O(n^{k/2}). \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir also

$$\sum_{1 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{k+1} \leq n} |\mathbb{E}(e_{t_1} \cdot \dots \cdot e_{t_{k+1}})| = \begin{cases} O(n^{(k+1)/2}), & \text{falls } k+1 \text{ gerade} \\ O(n^{k/2}), & \text{falls } k+1 \text{ ungerade,} \end{cases}$$

womit das Lemma bewiesen wäre. □

Das nachfolgende Lemma benötigen wir, um die asymptotische Überdeckungswahrscheinlichkeit für die punktweisen Konfidenzintervalle in Kapitel 3 und die simultanen Konfidenzbänder in Kapitel 5 zu erhalten.

Lemma 8.3

Es gelte

- i) $T_n \xrightarrow{d} Z$,
- ii) $T_n^* \xrightarrow{d} Z$ in Wahrscheinlichkeit,
- iii) F_Z ist stetig.

Weiterhin sei für $\beta \in (0, 1)$

$$t_{n,\beta}^* := \left(F_{T_n^*}^*\right)^{-1}(\beta) = \inf \left\{ t: F_{T_n^*}^*(t) \geq \beta \right\}$$

das β -Quantil von T_n^* . Dann gilt

$$P(T_n \leq t_{n,\beta}^*) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \beta.$$

Beweis

Mit den Voraussetzungen i) und iii) erhalten wir die folgende Konvergenz

$$\begin{aligned} \delta_n &:= \sup_t (F_{T_n}(t) - F_{T_n}(t-0)) \\ &\leq \sup_t |F_{T_n}(t) - F_Z(t)| + \sup_t |F_Z(t) - F_Z(t-0)| + \sup_t |F_Z(t-0) - F_{T_n}(t-0)| \\ &\leq 2 \sup_t |F_{T_n}(t) - F_Z(t)| \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned} \tag{8.1}$$

Des Weiteren erhalten wir aus i) bis iii) und mit Hilfe von Lemma 2.11 aus van der Vaart (1998), dass

$$\begin{aligned} \sup_t |F_{T_n}(t) - F_{T_n^*}^*(t)| &= \sup_t |F_{T_n}(t) - F_Z(t) + F_Z(t) - F_{T_n^*}^*(t)| \\ &\leq \sup_t |F_{T_n}(t) - F_Z(t)| + \sup_t |F_Z(t) - F_{T_n^*}^*(t)| \xrightarrow{P} 0. \end{aligned}$$

Somit existiert eine Nullfolge $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$P\left(\sup_t |F_{T_n}(t) - F_{T_n^*}^*(t)| \geq \epsilon_n\right) \leq \epsilon_n \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{8.2}$$

Weiterhin sei $t_{n,\beta} := \inf \{t: F_{T_n}(t) \geq \beta\}$ das β -Quantil von T_n . Falls nun $\sup_t |F_{T_n}(t) - F_{T_n^*}^*(t)| < \epsilon_n$, so erhalten wir mit

$$F_{T_n}(t_{n,\beta+\epsilon_n}) \geq \beta + \epsilon_n, \tag{8.3}$$

dass $F_{T_n^*}(t_{n,\beta+\epsilon_n}) \geq \beta$ und damit

$$t_{n,\beta}^* = \inf \left\{ t: F_{T_n^*}(t) \geq \beta \right\} \leq t_{n,\beta+\epsilon_n}.$$

Des Weiteren folgt mit

$$F_{T_n}(t_{n,\beta-\epsilon_n} - 0) < \beta - \epsilon_n, \quad (8.4)$$

dass $F_{T_n^*}(t_{n,\beta-\epsilon_n} - 0) < \beta$ und damit

$$t_{n,\beta}^* = \sup \left\{ t: F_{T_n^*}(t) \leq \beta \right\} \geq t_{n,\beta-\epsilon_n}.$$

Daher impliziert $\sup_t |F_{T_n}(t) - F_{T_n^*}(t)| < \epsilon_n$, dass

$$t_{n,\beta}^* \in [t_{n,\beta-\epsilon_n}, t_{n,\beta+\epsilon_n}].$$

Nun gilt mit (8.2) und (8.3)

$$\begin{aligned} P(T_n \leq t_{n,\beta}^*) &= P(T_n \leq t_{n,\beta}^*, t_{n,\beta}^* \in [t_{n,\beta-\epsilon_n}, t_{n,\beta+\epsilon_n}]) \\ &\quad + P(T_n \leq t_{n,\beta}^*, t_{n,\beta}^* \notin [t_{n,\beta-\epsilon_n}, t_{n,\beta+\epsilon_n}]) \\ &\leq P(T_n \leq t_{n,\beta+\epsilon_n}) + P(t_{n,\beta}^* \notin [t_{n,\beta-\epsilon_n}, t_{n,\beta+\epsilon_n}]) \\ &\leq F_{T_n}(t_{n,\beta+\epsilon_n}) - F_{T_n}(t_{n,\beta+\epsilon_n} - 0) + F_{T_n}(t_{n,\beta+\epsilon_n} - 0) + \epsilon_n \\ &\leq \delta_n + \beta + 2\epsilon_n \end{aligned}$$

und mit (8.2) und (8.4)

$$\begin{aligned} P(T_n \leq t_{n,\beta}^*) &= P(T_n \leq t_{n,\beta}^*, t_{n,\beta}^* \in [t_{n,\beta-\epsilon_n}, t_{n,\beta+\epsilon_n}]) \\ &\quad + P(T_n \leq t_{n,\beta}^*, t_{n,\beta}^* \notin [t_{n,\beta-\epsilon_n}, t_{n,\beta+\epsilon_n}]) \\ &\geq P(T_n \leq t_{n,\beta}^*, t_{n,\beta}^* \notin [t_{n,\beta-\epsilon_n}, t_{n,\beta+\epsilon_n}]) \\ &\geq P(T_n \leq t_{n,\beta-\epsilon_n}) - P(t_{n,\beta}^* \notin [t_{n,\beta-\epsilon_n}, t_{n,\beta+\epsilon_n}]) \\ &\geq \beta - 2\epsilon_n. \end{aligned}$$

Zusammen mit (8.1) erhalten wir somit

$$P(T_n \leq t_{n,\beta}^*) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \beta.$$

□

Symbolverzeichnis

| | |
|-------------------------------|---|
| $(X_i)_{i=1,\dots,n}$ | Originalstichprobe |
| $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ | stationärer Prozess |
| $(\hat{e}_i)_{i=1,\dots,n}$ | Residuen |
| $m(\cdot)$ | Regressionsfunktion |
| $\hat{m}(\cdot)$ | Schätzer der Regressionsfunktion m |
| $K(\cdot)$ | Kernfunktion |
| b_n | Bandbreite |
| $\gamma(\cdot)$ | $\gamma(\cdot) = \text{Cov}(e_i, e_{i+\cdot})$ |
| σ^2 | $\sigma^2 = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \text{Cov}(e_0, e_i)$ |
| $f * g$ | Faltung von f und g |
| $K_{b_n} * m(\cdot)$ | $K_{b_n} * m(\cdot) = K_{b_n}(m)(\cdot) = (nb_n)^{-1} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{\cdot-i/n}{b_n}\right) m(i/n)$, geglättete Version von m |
| $m_0(\cdot)$ | $m_0(\cdot) = \hat{m}(\cdot) - K_{b_n}(m)(\cdot) = \sum_{i=1}^n w_n(t, i) e_i$ |
| $\mu_0(\cdot)$ | Gaußprozess |
| α | Signifikanzniveau |
| $t_{n,1-\alpha}^*$ | $(1 - \alpha)$ -Quantil |
| $\sigma(\cdot)$ | σ -Algebra |
| $\alpha(\cdot, \cdot)$ | α -Mischungskoeffizient mit $\alpha(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \sup_{A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}} P(AB) - P(A)P(B) $ für die σ -Algebren \mathcal{A} und \mathcal{B} |
| $\alpha(\cdot)$ | α -Mischungskoeffizient eines zufälligen Prozesses $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ mit $\alpha(\cdot) = \sup_{k \in \mathbb{N}} \alpha(\sigma(X_i, i \leq k), \sigma(X_i, i \geq k + \cdot))$ |
| $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ | Normalverteilung mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 |
| $(W_i)_{i=1,\dots,n}$ | Hilfsvariablen im DWB, $(W_i)_{i=1,\dots,n} = (W_{i,n})_{i=1,\dots,n}$ mit $\mathbb{E}(W_i) = 0$, $\text{Var}(W_i) = 1$ und $\text{Cov}(W_i, W_{i+k}) \rightarrow 1$ für $n \rightarrow \infty$ |
| $(V_k)_{k=1,\dots,[n/l_n]+1}$ | Hilfsvariablen im Blockwise DWB, mit $V_k \sim \mathcal{N}(0, 1)$ unabhängig und identisch verteilt |
| $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ | Innovationen des AR(1)-Prozesses im Autoregressive DWB, mit $u_i \sim \mathcal{N}(0, 1 - e^{-2/l_n})$ unabhängig und identisch verteilt |
| $(e_i^*)_{i=1,\dots,n}$ | $e_i^* = \hat{e}_i W_i$, Pseudo-Fehler im DWB |
| $m_0^*(\cdot)$ | Bootstrap-Gegenstück zu $m_0(\cdot)$, $m_0^*(t) = \sum_{i=1}^n w_n(t, i) e_i^*$ |

| | |
|--|--|
| S_n | Partialsomme der Fehler $(e_i)_{i=1,\dots,n}$, $S_n = \sum_{i=1}^n e_i$ |
| S_n^* | Partialsomme der Fehler $(e_i^*)_{i=1,\dots,n}$, $S_n^* = \sum_{i=1}^n e_i^*$ |
| T_n, T_n^* | $T_n = \sup_{t \in [b_n, 1-b_n]} m_0(t) $ bzw. $T_n^* = \sup_{t \in [b_n, 1-b_n]} m_0^*(t) $ |
| l_n | Blocklänge oder AR-Parameter im Blockwise DWB bzw. Autoregressive DWB |
| M_n | $M_n = \left\lfloor \frac{nb_n}{l_n} \right\rfloor$, ganzzahlige Anzahl der kleinen Blöcke der Länge l_n innerhalb eines großen Blockes der Länge nb_n beim Blockwise DWB |
| N_n | $N_n = \left\lfloor \frac{n}{l_n} - \left(\left\lfloor \frac{n}{M_n l_n} \right\rfloor - 1 \right) M_n \right\rfloor$, ganzzahlige Anzahl an kleinen Blöcken der Länge l_n im Restblock beim Blockwise DWB |
| m_n | $m_n = \lfloor nb_n \rfloor$, ganzzahlige Anzahl der Indizes der Summanden innerhalb eines großen Blockes der Länge $\lfloor nb_n \rfloor$ beim Autoregressive DWB |
| L_n | $L_n = \lceil l_n \rceil$, aufgerundeter ganzzahliger Anteil des AR-Parameters l_n beim Autoregressive DWB |
| $(Y_i)_{i=1,\dots,n}$ | kausaler linearer Prozess |
| $(\varepsilon_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ | Innovationen des linearen Prozesses |
| σ_ε^2 | $\sigma_\varepsilon^2 = \mathbb{E}(\varepsilon_i^2)$ |
| \bar{S}_n | Partialsomme des linearen Prozesses $(Y_i)_{i=1,\dots,n}$, $\bar{S}_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ |
| $\mathbb{E}(\cdot)$ | Erwartungswert |
| $\text{Var}(\cdot)$ | Varianz |
| $\text{Cov}(\cdot, \cdot)$ | Kovarianz |
| $\text{Bias}(\cdot)$ | Verzerrung eines Schätzers, $\text{Bias}(\hat{m}) = \mathbb{E}(\hat{m} - m)$ |
| $\mathbb{E}^*(\cdot)$ | Bootstrap-Erwartungswert, bedingt auf die Originalstichprobe $(X_i)_{i=1,\dots,n}$, $\mathbb{E}^*(\cdot) = \mathbb{E}(\cdot X_1, \dots, X_n)$ |
| $\text{Var}^*(\cdot)$ | Bootstrap-Varianz, bedingt auf die Originalstichprobe $(X_i)_{i=1,\dots,n}$ |
| P^* | Bootstrap-Verteilung, bedingt auf die Originalstichprobe $(X_i)_{i=1,\dots,n}$ |
| W | Wiener Prozess |
| $\tau_{j,l}^*$ | Stoppzeiten des Wiener Prozesses auf der Bootstrap-Seite |
| $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ | Stichprobenmittel |
| C | positive, endliche Konstante, welche ihren Wert ändern kann |
| L | Lipschitz-Konstante |
| \forall | für alle |
| \exists | existiert |
| $\mathbb{1}(\cdot)$ | Indikatorfunktion, d. h. $\mathbb{1}(x \in A) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$ |
| \mathbb{N} | Menge der positiven natürlichen Zahlen |
| \mathbb{N}_0 | Menge der natürlichen Zahlen einschließlich 0 |
| \mathbb{Z} | Menge der ganzen Zahlen |
| \mathbb{R} | Menge der reellen Zahlen |
| \mathbb{C} | Menge der komplexen Zahlen |

| | |
|--------------------------------|--|
| $f'(\cdot), f''(\cdot)$ | erste bzw. zweite Ableitung der Funktion f |
| $ \cdot $ | Betrag |
| $\ \cdot\ _p$ | p -Norm |
| $[\cdot]$ | ganzzahliger Anteil |
| $\lceil \cdot \rceil$ | aufgerundeter ganzzahliger Anteil |
| $(\cdot)_+$ | positiver Anteil |
| $\cdot \times \cdot$ | kartesisches Produkt |
| \sim | $Z \sim Q$, die Zufallsvariable Z besitzt die Verteilung Q |
| $\stackrel{d}{=}$ | $Z \stackrel{d}{=} Y$, die Zufallsvariablen Z und Y besitzen die gleiche Verteilung |
| \xrightarrow{d} | Konvergenz in Verteilung |
| \xrightarrow{P} | Konvergenz in Wahrscheinlichkeit |
| $\xrightarrow{f.s.}$ | fast sichere Konvergenz |
| sup | Supremum |
| max | Maximum |
| lim sup | Limes Superior |
| supp(f) | Träger der Funktion f |
| $o(a_n), O(a_n)$ | Landau-Notation: $b_n = o(a_n)$, falls $\lim_{n \rightarrow \infty} \left \frac{b_n}{a_n} \right = 0$ $b_n = O(a_n)$, falls $\limsup_{n \rightarrow \infty} \left \frac{b_n}{a_n} \right < \infty$ |
| $o_P(a_n), O_P(a_n)$ | Landau-Notation in Wahrscheinlichkeit: $b_n = o_P(a_n)$, falls $\left \frac{b_n}{a_n} \right \xrightarrow{P} 0$ $b_n = O_P(a_n)$, falls $\forall \epsilon > 0 \exists \delta \in \mathbb{R}$, sodass $P(b_n \geq \delta a_n) \leq \epsilon, \forall n \in \mathbb{N}$ |
| $o_{f.s.}(a_n), O_{f.s.}(a_n)$ | Landau-Notation in P -fast sicher: $b_n = o_{f.s.}(a_n)$, falls $\left \frac{b_n}{a_n} \right \xrightarrow{f.s.} 0$ $b_n = O_{f.s.}(a_n)$, falls $\limsup_{n \rightarrow \infty} \left \frac{b_n}{a_n} \right < \infty$ fast sicher |
| $o_{P^*}(a_n), O_{P^*}(a_n)$ | Landau-Notation in P^* -Wahrscheinlichkeit: $b_n = o_{P^*}(a_n)$, falls $P^*\left(\left \frac{b_n}{a_n}\right > \epsilon\right) \xrightarrow{P} 0, \forall \epsilon > 0$ $b_n = O_{P^*}(a_n)$, falls $\forall \epsilon > 0 \exists \delta \in \mathbb{R}$, sodass $P^*(b_n \geq \delta a_n) \leq \epsilon, \forall n \in \mathbb{N}$ |
| $\tilde{O}(\alpha_n, \beta_n)$ | $a_n = \tilde{O}(\alpha_n, \beta_n)$, falls $\exists C < \infty$, sodass $P(a_n > C\alpha_n) \leq C\beta_n, \forall n \in \mathbb{N}$ |

Tabellenverzeichnis

| | | |
|-----|---|-----|
| 6.1 | Überdeckungswahrscheinlichkeiten des simultanen Konfidenzbandes konstruiert mit dem Blockwise DWB-Verfahren für $\beta = 0; 0, 1; 0, 2; 0, 3; 0, 4$ | 125 |
| 6.2 | Überdeckungswahrscheinlichkeiten des simultanen Konfidenzbandes konstruiert mit dem Autoregressive DWB-Verfahren für $\beta = 0; 0, 05; 0, 1; 0, 2$ | 126 |

Abbildungsverzeichnis

| | | |
|-----|---|-----|
| 6.1 | Simultane Konfidenzbänder für die globalen Temperaturdaten: globale jährliche Temperaturabweichungen der Jahre 1850 bis 2015, lokaler Trendschätzer (schwarz), sowie das 95 %-ige (rot) und 99 %-ige (blau) simultane Konfidenzband konstruiert mit dem Blockwise DWB-Verfahren. | 128 |
| 6.2 | Simultane Konfidenzbänder für die globalen Temperaturdaten: globale jährliche Temperaturabweichungen der Jahre 1850 bis 2015, lokaler Trendschätzer (schwarz), sowie das 95 %-ige (rot) und 99 %-ige (blau) simultane Konfidenzband konstruiert mit dem Autoregressive DWB-Verfahren. | 129 |

Literaturverzeichnis

- Andrews, D. W. K. (1984). Non-strong mixing autoregressive processes. *Journal of Applied Probability*, 21(4):930–934.
- Athreya, K. B. und Pantula, S. G. (1986). A note on strong mixing of ARMA processes. *Statistics & Probability Letters*, 4(4):187–190.
- Berkes, I. und Philipp, W. (1979). Approximation theorems for independent and weakly dependent random vectors. *The Annals of Probability*, 7(1):29–54.
- Bickel, P. J. und Freedman, D. A. (1981). Some asymptotic theory for the bootstrap. *The Annals of Statistics*, 9:1196–1217.
- Bickel, P. J. und Rosenblatt, M. (1973). On some global measures of the deviations of density function estimates. *The Annals of Statistics*, 1(6):1071–1095.
- Billingsley, P. (1968). *Convergence of Probability Measures*. John Wiley & Sons.
- Bloomfield, P. und Nychka, D. (1992). Climate spectra and detecting climate change. *Climate Change*, 21:275–287.
- Bradley, R. C. (1983). Approximation theorems for strongly mixing random variables. *Michigan Mathematical Journal*, 30:69–81.
- Bradley, R. C. (2007). *Introduction to Strong Mixing Conditions*, volume 1. Kendrick Press.
- Breiman, L. (1967). On the tail behavior of sums of independent random variables. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete*, 9:20–25.
- Brockwell, P. J. und Davis, R. A. (1991). *Time Series: Theory and Methods*. Springer.
- Bücher, A. und Kojadinovic, I. (2016). A dependent multiplier bootstrap for the sequential empirical copula process under strong mixing. *Bernoulli*, 22(2):927–968.
- Bücher, A. und Ruppert, M. (2013). Consistent testing for a constant copula under strong mixing based on the tapered block multiplier technique. *Journal of Multivariate Analysis*, 116:208–229.
- Bühlmann, P. (1993). *The blockwise bootstrap in time series and empirical processes*. PhD thesis, ETH Zürich.

- Bühlmann, P. (1998). Sieve bootstrap for smoothing in nonstationary time series. *The Annals of Statistics*, 26(1):48–83.
- Chu, C.-K. und Marron, J. S. (1991). Comparison of two bandwidth selectors with dependent errors. *The Annals of Statistics*, 19(4):1906–1918.
- Cramér, H. (1946). *Mathematical Methods of Statistics*. Princeton University Press.
- Doukhan, P. (1994). *Mixing: Properties and Examples*. Springer.
- Doukhan, P., Lang, G., Leucht, A. und Neumann, M. H. (2015). Dependent wild bootstrap for the empirical process. *Journal of Time Series Analysis*, 36:290–314.
- Efron, B. (1979). Bootstrap methods: Another look at the jackknife. *The Annals of Statistics*, 7:1–26.
- Eubank, R. L. und Speckman, P. L. (1993). Confidence bands in nonparametric regression. *Journal of the American Statistical Association*, 88:1287–1301.
- Freedman, D. A. (1981). Bootstrap regression models. *The Annals of Statistics*, 9(6):1218–1228.
- Gasser, T. und Müller, H.-G. (1979). Kernel estimation of regression functions. *Lecture Notes in Mathematics*, 757:23–68.
- Hall, P. (1993). On edgeworth expansion and bootstrap confidence bands in nonparametric curve estimation. *Journal of the Royal Statistical Society B*, 55:291–304.
- Hall, P., Lahiri, S. N. und Polzehl, J. (1995). On bandwidth choice in nonparametric regression with both short- and long-range dependent errors. *The Annals of Statistics*, 23(6):1921–1936.
- Hart, J. D. (1991). Kernel regression estimation with time series errors. *Journal of the Royal Statistical Society B*, 53(1):173–187.
- Hart, J. D. (1996). Some automated methods of smoothing time-dependent data. *Nonparametric Statistics*, 6:115–142.
- Heuser, H. (2009). *Lehrbuch der Analysis Teil 1*. Vieweg + Teubner.
- Härdle, W. und Bowman, A. W. (1988). Bootstrapping in nonparametric regression: Local adaptive smoothing and confidence bands. *Journal of the American Statistical Association*, 83(401):102–110.
- Härdle, W. und Marron, J. S. (1985). Optimal bandwidth selection in nonparametric regression function estimation. *The Annals of Statistics*, 13(4):1465–1481.

- Härdle, W. und Marron, J. S. (1991). Bootstrap simultaneous error bars for nonparametric regression. *Annals of Statistics*, 19(2):778–796.
- Jones, P. D., Osborn, D. E. und Briffa, K. R. (2016). Global and hemispheric temperature anomalies – land and marine instrumental records. In Trends: A Compendium of Data on Global Change. Oak Ridge National Laboratory.
- Karatzas, I. und Shreve, S. E. (1991). *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer, second edition.
- Komlós, J., Major, P. und Tusnády, G. (1975). An approximation of partial sums of independent rv's, and the sample df I. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete*, 32:111–131.
- Komlós, J., Major, P. und Tusnády, G. (1976). An approximation of partial sums of independent rv's, and the sample df II. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete*, 34:33–58.
- Lahiri, S. N. (2003). *Resampling Methods for Dependent Data*. Springer.
- Leucht, A. und Neumann, M. H. (2013). Dependent wild bootstrap for degenerate U- and V-statistics. *Journal of Multivariate Analysis*, 117:257–280.
- Liero, H. (1982). On the maximal deviation of the kernel regression function estimate. *Mathematische Operationsforschung Statistik, Series Statistics*, 13(2):171–182.
- Marcus, M. B. und Rosen, J. (2006). *Marcov Processes, Gaussian Processes and Local Times*. Cambridge University Press.
- Nadaraya, E. A. (1964). On estimating regression. *Theory of Probability and its Applications*, 9(1):141–142.
- Neumann, M. H. (1998). Strong approximation of density estimators from weakly dependent observations by density estimators from independent observations. *Annals of Statistics*, 26:2014–2048.
- Neumann, M. H. (2002). On robustness of model-based bootstrap schemes in nonparametric time series analysis. *Statistics*, 36(1):33–63.
- Neumann, M. H. und Kreiss, J.-P. (1998). Regression-type inference in nonparametric autoregression. *The Annals of Statistics*, 26(4):1570–1613.
- Neumann, M. H. und Paparoditis, E. (2008). Simultaneous confidence bands in spectral density estimation. *Biometrika*, 95(2):381–397.
- Neumann, M. H. und Polzehl, J. (1996). Simultaneous bootstrap confidence bands in nonparametric regression. *Nonparametric Statistics*, 9:307–333.

- Øksendal, B. (2005). *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*. Springer.
- Philipp, W. und Stout, W. (1975). *Almost sure invariance principle for partial sums of weakly dependent random variables*, volume 2. Memoirs of the American Mathematical Society.
- Pickands, J. (1969a). Asymptotic properties of the maximum in a stationary gaussian process. *Transactions of the American Mathematical Society*, 145:75–86.
- Pickands, J. (1969b). Upcrossing probabilities for stationary gaussian processes. *Transactions of the American Mathematical Society*, 145:51–73.
- Priestley, M. B. und Chao, M. T. (1972). Non-parametric function fitting. *Journal of the Royal Statistical Society B*, 34(3):385–392.
- Rice, J. (1984). Boundary modification for kernel regression. *Communications in Statistics – Theory and Methods*, 13(7):893–900.
- Rosenblatt, M. (1956). A central limit theorem and a strong mixing condition. *Proceedings of the National Academy of Sciences USA*, 42:43–47.
- Roussas, G. G., Tran, L. T. und Ioannides, D. A. (1992). Fixed design regression for time series: Asymptotic normality. *Journal of Multivariate Analysis*, 40:262–291.
- Rust, B. W. (2003). Separating signal from noise in global warming. *Computing Science and Statistics*, 35:263–277.
- Shao, Q. und Lu, C. (1987). Strong approximations for partial sums of weakly dependent random variables. *Scientia Sinica A*, 30(6):575–587.
- Shao, Q.-M. (1993). Almost sure invariance principle for mixing sequences of random variables. *Stochastic Processes and their Applications*, 48:319–334.
- Shao, X. (2010). The dependent wild bootstrap. *Journal of the American Statistical Association*, 105(489):218–235.
- Shao, X. (2011). A bootstrap-assisted spectral test of white noise under unknown dependence. *Journal of Econometrics*, 162:213–224.
- Shorack, G. R. und Wellner, J. A. (1986). *Empirical Processes with Applications to Statistics*. John Wiley & Sons.
- Smeeke, S. und Urbain, J.-P. (2014). A multivariate invariance principle for modified wild bootstrap methods with an application to unit root testing. *GSBE Research Memorandum RM/14/008, Maastricht University*.

- Strassen, V. (1964). An invariance principle for the law of the iterated logarithm. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete*, 3:211–226.
- van der Vaart, A. W. (1998). *Asymptotic Statistics*. Cambridge University Press.
- Watson, G. S. (1964). Smooth regression analysis. *The Indian Journal of Statistics*, 26(4):359–372.
- Woodward, W. A. und Gray, H. L. (1993). Global warming and the problem of testing for trend in time series data. *Journal of Climate*, 6:953–962.
- Wu, C. F. J. (1986). Jackknife, bootstrap and other resampling methods in regression analysis. *The Annals of Statistics*, 14:1261–1350.
- Wu, W. B., Woodroffe, M. und Mentz, G. (2001). Isotonic regression: Another look at the changepoint problem. *Biometrika*, 88(3):793–804.
- Wu, W. B. und Zhao, Z. (2007). Inference of trends in time series. *Journal of the Royal Statistical Society B*, 69(3):391–410.
- Wu, W. B. und Zhao, Z. (2008). Confidence bands in nonparametric time series regression. *The Annals of Statistics*, 36(4):1854–1878.

Ehrenwörtliche Erklärung

Hiermit erkläre ich,

- dass mir die Promotionsordnung der Fakultät bekannt ist,
- dass ich die Dissertation selbst angefertigt habe, keine Textabschnitte oder Ergebnisse eines Dritten oder eigenen Prüfungsarbeiten ohne Kennzeichnung übernommen und alle von mir benutzten Hilfsmittel, persönlich Mitteilungen und Quellen in meiner Arbeit angegeben habe,
- dass ich die Hilfe eines Promotionsberaters nicht in Anspruch genommen habe und dass Dritte weder unmittelbar noch mittelbar geldwerte Leistungen von mir für Arbeiten erhalten haben, die im Zusammenhang mit dem Inhalt der vorgelegten Dissertation stehen,
- dass ich die Dissertation noch nicht als Prüfungsarbeit für eine staatliche oder andere wissenschaftliche Prüfung eingereicht habe,
- dass ich bei der Auswahl und Auswertung des Materials sowie bei der Herstellung des Manuskripts nicht von Dritten unterstützt wurde,
- dass ich weder die gleiche, noch eine in wesentlichen Teilen ähnliche bzw. eine andere Abhandlung bereits bei einer anderen Hochschule als Dissertation eingereicht habe.

Jena, 15. Juni 2017

Nadine Müller