

Technische Universität Ilmenau
Institut für Mathematik



Preprint No. M 18/10

**Remarks to generalized Petersen
Graphs – Bemerkungen zu
generalisierten Petersen**

Peter E. John

Oktober 2018

URN: urn:nbn:de:gbv:ilm1-2018200143

Impressum:

Hrsg.: Leiter des Instituts für Mathematik
Weimarer Straße 25
98693 Ilmenau

Tel.: +49 3677 69-3621

Fax: +49 3677 69-3270

<http://www.tu-ilmenau.de/math/>

ilmedia

Remarks to generalized Petersen Graphs – Bemerkungen zu generalisierten Petersen Graphen

Peter E. John

Institut für Mathematik der Technischen Universität Ilmenau

In memoriam Horst Sachs, Ilmenau, 1927 – 2016

Schlagworte: kubischer Graph, verallgemeinerter Petersen Graph, I-Graph, Speichengraph, charakteristisches Polynom, Eigenwerte, Duplex eines Graphen, cospectraler Graph, Desargue-Levi Graph, einfache Polynombeziehungen

1. Einführung

Im Jahr 1891 erschien von dem Dänischen Mathematiker Julius Petersen (1839 - 1910) eine Arbeit⁽¹⁾ mit dem Titel "Die Theorie der regulären Graphen", in welcher die Faktorisierung regulärer Graphen untersucht wurde. Hier sind erstmals grundlegende Ergebnisse der Graphentheorie und der nach Petersen benannte Graph $Pe = G(5, 2)$ (s. Abb. 1) publiziert. Dieser wird in vielen Veröffentlichungen als signifikantes Beispiel verwendet. In $G(5, 2)$ steht die „5“ für den aus den u -Knotenpunkten gebildeten u -Kreis C^u und die „2“ bringt zum Ausdruck, dass der aus den v -Knotenpunkten gebildete v -Kreis C^v jeweils einen v -Knoten überspringt.

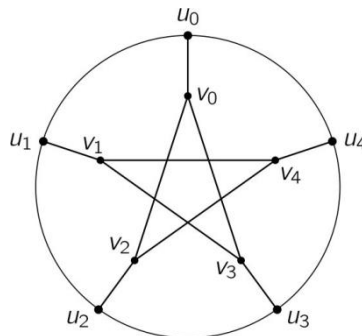


Abb. 1: Der Petersen-Graph $Pe = G(5, 2)$

Es sei $G = G(V; E)$ ein zusammenhängender Graph mit der Knotenpunktmenge $V = V(G)$ und der Kantenmenge $E = E(G) \subseteq V \times V$. Die Anzahl der Knotenpunkte und Kanten von G werden mit $n = n(G)$ bzw. $m = m(G)$ bezeichnet.

Graph G heißt *kubisch* (*3-regulär*), falls jeder seiner Knotenpunkte mit genau drei Kanten von G inzidiert, wobei Mehrfachkanten und Schlingen zugelassen sind. Sei s eine Schlinge, die sich am Knotenpunkt w von G befindet. Der Beitrag von s zur Valenz von w und zum Eintrag a_{ii} in der Adjazenzmatrix $\mathbf{A} = \mathbf{A}(G) = (a_{ij})$ von G ist 2.

Die Menge aller endlichen Graphen wie die aller endlichen kubischen Graphen werde mit \mathbf{G} bzw. \mathbf{G}^3 bezeichnet. Zwei Graphen $G, G' \in \mathbf{G}$ heißen *isomorph* (kurz: $G \cong G'$), wenn es eine Bijektion $\beta': V(G) \leftrightarrow V(G')$ gibt mit $(u, v) \in E(G)$ genau dann, wenn $(\beta'(u), \beta'(v)) \in E(G')$ für alle $u, v \in V(G)$ ist.

Graph G heiße *paarer Graph*, falls seine Knotenpunkte so schwarz und weiß gefärbt werden können, dass jede Kante von G Knotenpunkte unterschiedlicher Farbe miteinander verbindet. Ist G paarer Graph, so hat jeder Kreis von G gerade Länge.

2. Der verallgemeinerte Petersen Graph

Es ist $K_2 = (V(K_2), E(K_2))$ der vollständige Graph mit $V(K_2) = \{u, v\}$ und $E(K_2) = \{(u, v)\}$. Der hier interessierende *verallgemeinerte Petersen Graph* $G(c, k) \in \mathbf{G}^3$ ($c = 1, 2, \dots; 0 \leq k \leq c - 1$) hat die Knotenpunktmenge $V(G(c, k)) = \{u_i, v_i; i = 0, 1, \dots, c - 1\}$ und die Kantenmenge $E(G(c, k)) = \{(u_i, u_{i+1}), (u_i, v_i), (v_i, v_{i+k}); i = 0, 1, \dots, c - 1 \text{ und der Index wird (mod } c) \text{ reduziert}\}$ (in Abb. 1 sind $c = 5$ und $k = 2$). Graph $G(c, k)$ wird mit Hilfe von c Kopien des K_2 und den entsprechenden u - und v -Kreisen konstruiert. Die Menge der verallgemeinerten Petersen-Graphen werde mit \mathbf{PG} bezeichnet. Diese Graphen sind zuerst von H. S. M. Coxeter⁽²⁾ und K. Bannai⁽³⁾ untersucht worden. In einer Arbeit von R. Gera und P. Stanica⁽⁴⁾ findet der interessierte Leser die Herleitung des charakteristischen Polynomes (siehe hierzu Punkt 3) von Graphen aus \mathbf{PG} mittels zirkulanter Matrizen. A. W. Dudek⁽⁵⁾ untersucht bei wachsendem c Grenzwerte von Eigenwerten verallgemeinerter Petersen Graphen.

Bobachtung 1:

Graph $G(c, k)$ hat insgesamt $n = 2c$ Knotenpunkte und $m = 3c$ Kanten falls $c > 1$ und $k > 0$ sind. Ist $k = 0$, so hat $G(1, 0)$ eine Kante und zwei Schlingen und die Graphen $G(c > 1, 0)$ haben genau $2c$ Kanten und c Schlingen (s. Abb. 2).

Graph $G(c, k > 0)$ ist paarer Graph genau dann, wenn c gerade und k ungerade sind. Man färbe z. B. die Knotenpunkte u_i und v_{i+1} für i gerade weiß und für i ungerade schwarz, wobei der Index (mod c) genommen wird.

Es sei $g = \text{ggT}(c > 1, k > 1)$ der größte gemeinsame Teiler von c und k . Graph $G(c, k)$ hat im Falle $g = 1$ neben dem Kreis C^u einen Kreis C^v der Länge c und im Falle $g > 1$ genau g C^v -Kreise der Länge c/g . Die beiden Graphen $G(c, k)$ und $G(c, c - k)$ sind isomorph. Deshalb kann $k \leq c/2$ gewählt werden. Ist $k = c/2 > 1$, so findet man im Graphen $G(c = 2k, k)$ genau k *Doppelkanten* (Kreise der Länge 2, mitunter auch als „Zweiecke“ bezeichnet, siehe Watkins⁽⁶⁾ und Abb. 6), womit er auch zur Menge \mathbf{PG} gehört.

In den kleinsten Graphen von \mathbf{PG} (siehe Abb.2) findet man neben den $u - v$ -Kanten

in $G(1, 0)$: zwei Schlingen $(u_0 - u_0, v_0 - v_0)$,

in $G(2, 0)$: eine Doppelkante $(u_0 - u_1 - u_0)$ und zwei Schlingen $(v_0 - v_0, v_1 - v_1)$ und

in $G(2, 1)$: zwei Doppelkanten $(u_0 - u_1 - u_0, v_0 - v_1 - v_0)$.

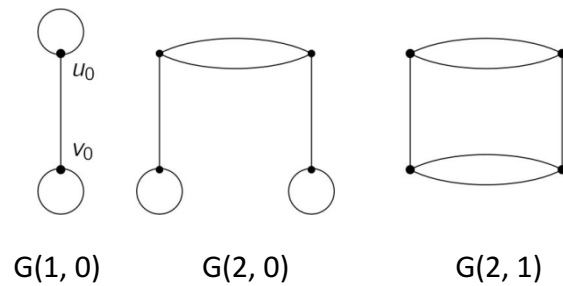


Abb. 2: Die drei kleinsten verallgemeinerten Petersen Graphen

Eine interessante Erweiterung der verallgemeinerten Petersen Graphen stellen die seit 1988 aus dem Foster Census⁽⁷⁾ bekannten I-Graphen dar.

Der I-Graph $I(c, k_1, k_2)$, $1 \leq k_1, k_2 < c$ und $k_1, k_2 \neq c/2$, hat die Knotenpunktmenge $V(I) = \{u_i, v_i; i = 0, 1, \dots, c - 1\}$ und die Kantenmenge $E(I) = \{(u_i, u_{i+k_1}), (u_i, v_i), (v_i, v_{i+k_2}); i = 0, 1, \dots, c - 1, \text{ wobei der Index (mod } c) \text{ gew\u00e4hlt wird}\}$. Somit ist jeder verallgemeinerte Petersen Graph auch ein I-Graph, denn es ist $G(c, k) = I(c, 1, k)$. Allerdings ist die Umkehrung falsch: nicht jeder I-Graph ist zugleich ein Graph aus **PG** (siehe Punkt 6, Abb. 12). I-Graphen haben T. Pisanski^(8,9) und Mitarbeiter umfassend untersucht.

Eine weitere M\u00f6glichkeit, den Petersen Graph zu verallgemeinern, ist durch die *Y- und H-Graphen* von J. D. Horton und I. Z. Bouwer⁽¹⁰⁾ gegeben. Der Y-Graph z. B. besteht 4 Segmenten mit je v Knotenpunkten. Das zentrale Segment S_0 hat v isolierte Knotenpunkte x_{0j} , $j = 1, 2, \dots, v$, w\u00e4hrend in den anderen drei Segmente S_i , $i = 1, 2, 3$, die Knotenpunkte x_{ij} jeweils einen Kreis bilden (hier k\u00f6nnte auch weiter verallgemeinert werden!). Es ist Knotenpunkt x_{ij} mit Knotenpunkt $x_{i,j+k_i}$ verbunden, wobei der zweite Index modulo v gew\u00e4hlt wird; man beachte: $1 \leq k_1, k_2, \dots, k_v < v$. Zum Schlu\u00df f\u00fcge man noch diejenigen Kanten ein, welche die vier Segmente untereinander verbinden: x_{0j} wird f\u00fcr $i = 1, 2, 3$ mit x_{ij} verbunden. Der resultierende Graph $Y(v; k_1, k_2, k_3)$ hat genau $4v$ Knotenpunkte und ist 3-regul\u00e4r. Der H-Graph enth\u00e4lt genau sechs Segmente, wobei die zwei zentralen Segmente mit sich und je zwei weiteren Segmenten, \u00e4hnlich dem Y-Graph, verbunden sind.

Graph $G \in \mathbf{G}$ habe die Knotenpunktmenge $V(G) = \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$ und die Kantenmenge $E(G) = \{(i, j); i, j \in V(G)\}$. Der Duplex $D = D(G) = (V(D), E(D))$ von Graph G wird folgenderma\u00dfen konstruiert: Ist $i \in V(G)$, so sind $i', i'' \in V(D)$. Der Kante $(i, j) \in E(G)$ werden die beiden Kanten (i', j') , $(i'', j'') \in E(D)$ zugeordnet. F\u00e4rbt man die Knotenpunkte i', j' z.B. wei\u00df und die Knotenpunkte i'', j'' schwarz, so verbindet jede Kante von D einen wei\u00dfen mit einem schwarzen Knotenpunkt. Befindet sich am Knotenpunkt w von G eine Schlinge s , so geht diese in einen Kreis C_2 mit den beiden Knotenpunkten w' und w'' \u00fcber.

In dieser Arbeit wird eine einfache M\u00f6glichkeit zur Berechnung des charakteristischen Polynoms und der Eigenwerte f\u00fcr jeden Graphen $G(c, k) \in \mathbf{GP}$ aufgezeigt. Die Spektren der I-Graphen k\u00f6nnen ganz analog gefunden werden.

F\u00fcr welche Graphen $G = G(c, k)$ ist der Duplex $D = D(G)$ wieder ein verallgemeinerter Petersen Graph $D = D(G) = D(c, k) = G(c_D, k_D)$?

Daran schlie\u00dft sich eine Bemerkung zum Desargue-Levi-Graph^(11,12) $DL = G(10, 3)$ an, wobei

ein Graph G^* angegeben wird, der zu DL co- bzw. isopektral aber nicht isomorph ist. Den Abschluss dieser Arbeit bilden Beziehungen der charakteristischen Polynome verallgemeinerter Petersen Graphen, sowie von Speichen- und I-Graphen.

3. Charakteristisches Polynom und Eigenwerte

Es sei $\mathbf{A} = \mathbf{A}(G)$ die $n \times n$ -Adjazenzmatrix eines Graphen $G \in \mathcal{G}$. Mit der $n \times n$ -Einheitsmatrix \mathbf{I}_n ist das *charakteristische Polynom* $p_G(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A})$ von G in Abhängigkeit von λ gegeben. λ^0 ist ein *Eigenwert* von Matrix \mathbf{A} und somit von Graph G , falls $p_G(\lambda^0) = 0$ ist^(13,14). Das *Spektrum von Graph G* ist eine Zusammenfassung aller Lösungen der Gleichung $p_G(\lambda) = 0$, also aller Eigenwerte mit ihren Vielfachheiten.

Die Berechnung des charakteristischen Polynoms $p_G(\lambda)$ von $G = G(c, k)$ gestaltet sich wegen dessen Symmetrie recht einfach^(15,16). Dem Graphen $G = G(c, k)$ werden zunächst die c Graphen $\mathcal{G}(l, k) = G^w(1, 0)$, $l = 0, 1, \dots, c - 1$, zugeordnet, wobei $G^w(1, 0)$ ein schlingengewichteter $G(1, 0)$ ist (s. Abb. 3), deren Adjazenzmatrizen $\mathfrak{A}(l, k) = \mathbf{A}(\mathcal{G}(l, k))$ die einfache Gestalt

$$\mathfrak{A}(l, k) = \begin{pmatrix} 2 \cos(2l\pi/c) & 1 \\ 1 & 2 \cos(2kl\pi/c) \end{pmatrix} \text{ haben.} \quad (1)$$

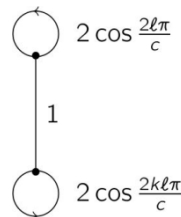


Abb. 3: Der Graph $\mathcal{G}(l, k)$ und $l = 0, 1, \dots, c - 1$

Man beachte, dass $\mathcal{G}(0, k) = G(1, 0)$ ist.

Mit $\mathfrak{A}(l, k)$ ist das charakteristische Polynom von $\mathcal{G}(l, k)$ gegeben zu

$$p_{\mathcal{G}(l, k)}(\lambda) = \lambda^2 - 2(\cos(2l\pi/c) + \cos(2kl\pi/c))\lambda + 4 \cos(2l\pi/c)\cos(2kl\pi/c) - 1, \quad (2)$$

wobei $l = 0, 1, \dots, c - 1$ durchläuft. Polynom $p_{\mathcal{G}(l, k)}(\lambda)$ wird *Faktorpolynom* genannt.

Das Polynom des Graphen $G = G(c, k)$ ergibt sich somit als Produkt der c Faktorpolynome zu

$$p_G(\lambda) = \prod_{l=0}^{l=c-1} p_{\mathcal{G}(l, k)}(\lambda). \quad (3)$$

Mit Gleichung (2) sind die Eigenwerte der Graphen $\mathcal{G}(l, k)$ in Abhängigkeit von $l = 0, 1, \dots, c - 1$ gegeben zu

$$\lambda_{1,2} = [\cos(2l\pi/c) + \cos(2kl\pi/c)] \pm \sqrt{([\cos(2l\pi/c) - \cos(2kl\pi/c)]^2 + 1)}$$

Für den Petersen Graphen $P_5 = G(5, 2)$ findet man

$$\lambda_{11,12} = [\cos(2l\pi/5) + \cos(4l\pi/5)] \pm \sqrt{([\cos(2l\pi/5) - \cos(4l\pi/5)]^2 + 1)}, l = 0, 1, \dots, 4$$

und somit die Eigenwerte $3^1, 1^5, -2^4$; die Hochzahlen geben deren Vielfachheit an.

Das charakteristische Polynom von P_5 ist $p_{P_5}(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda - 1)^5(\lambda + 2)^4$.

An dieser Stelle soll ein spezielles Ergebnis für das charakteristische Polynom $p_G(\lambda)$ für Graphen $G = G(c, k)$ gegeben werden, das später noch benötigt wird.

Satz 1:

Sei $G = G(c > 1, k > 1)$ ein verallgemeinerter Petersen Graph und c gerade.

Ist k gerade so gilt $p_G(\lambda) = (\lambda^2 - 5)q_G(\lambda)$ und $q_G(\lambda)$ ist ein Polynom vom Grad $(2c - 2)$.

Bei ungeradem k enthält das Polynom $p_G(\lambda)$ den Faktor $(\lambda^2 - 5)$ nicht.

Beweis von Satz 1:

In $G = G(c, k)$ ist c gerade.

Ein Vergleich von $(\lambda^2 - 5)$ mit Gleichung (2) führt zu den beiden Gleichungen

$$\cos(2l\pi/c) + \cos(2kl\pi/c) = 0 \text{ und } \cos(2l\pi/c)\cos(2kl\pi/c) = -1, l = 0, 1, \dots, c-1. \quad (4)$$

Dieses Gleichungssystem (4) in den Unbekannten $a = \cos(2l\pi/c)$ und $b = \cos(2kl\pi/c)$ hat das Lösungspaar $(a, b) \in \{(1, -1), (-1, 1)\}$. Für $a = 1$ ist Parameter $l = 0$ und beide Gleichungen sind nicht erfüllt.

Ist $a = -1$, so wähle man $l = c/2$. Es ergeben sich die Gleichungen

$$a + b = \cos(\pi) + \cos(k\pi) = 0 \text{ und } ab = \cos(\pi)\cos(k\pi) = -1.$$

Beide Gleichungen sind für $\cos(k\pi) = 1$ erfüllt, falls k gerade ist.

Ist $l \neq 0$ bzw. $l \neq c/2$, so kann der Faktor $(\lambda^2 - 5)$ nicht auftreten. ☺

Beispiel:

Die charakteristischen Polynome der in Abb. 2 dargestellten Graphen sind:

$$p_{G(1,0)}(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda - 3)(\lambda + 1),$$

$$p_{G(2,0)}(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^3 - 2\lambda^2 + 20\lambda - 15 = (\lambda - 1)(\lambda - 3)(\lambda^2 - 5) \text{ und}$$

$$p_{G(2,1)}(\lambda) = \lambda^4 - 10\lambda^2 + 9 = (\lambda^2 - 2\lambda - 3)(\lambda^2 + 2\lambda - 3) = (\lambda^2 - 9)(\lambda^2 - 1).$$

4. Der Duplex

Zunächst betrachte man die einfache

Beobachtung 2:

Jeder Kreis $C_n \in \mathbf{G}$ hat als Duplex den Kreis $D(C_n) = C_{2n}$, falls n ungerade ist und für n gerade hat $D(C_n)$ zwei isomorphe Kopien des Kreises C_n .

Denn sind die Knotenpunkte des Kreises C_n fortlaufend mit $0, 1, \dots, n-1$ nummeriert, so wird für den Duplex $D = D(C_n)$ zunächst jedem Knotenpunkt $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ ein weißer und ein schwarzer Knotenpunkt i' bzw. i'' zugeordnet und diese $2n$ Knotenpunkte in der oben gegebenen Weise miteinander verknüpft. Ist n ungerade, so erhält man den Kreis $0'-1''-2'-\dots-(n-2)''-(n-1)''-0''-1'-\dots-(n-2)''-(n-1)''-0'$.

Wird n gerade gesetzt, so ergeben sich die beiden Kreise
 $0'-1''-2'-\dots-(n-2)'-(n-1)''-0'$ und $0''-1'-2''-\dots-(n-2)''-(n-1)''-0''$.

☺

Satz 2:

Es sei $D = D(G) \in \mathbf{G}$ der Duplex eines Graphen $G \in \mathbf{G}$, $\mathbf{A} = \mathbf{A}(G)$ bzw. $\mathbf{B} = \mathbf{A}(D)$ sind deren Adjazenzmatrizen und $\mathbf{I}_{2n}, \mathbf{I}_n$ bezeichnen die $2n$ - bzw. n - dimensionale Einheitsmatrix. Das charakteristische Polynom $p_D(\lambda)$ von $D = D(G)$ errechnet sich zu

$$p_D(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{I}_{2n} - \mathbf{B}) = p_G(\lambda) p_G(-\lambda), \tag{5}$$

wobei $p_G(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A})$ das charakteristische Polynom von Graph G ist.

Beweis von Satz 2:

Duplex $D = D(G)$ von G hat die Adjazenzmatrix $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{A}' \\ \mathbf{A}'' & 0 \end{pmatrix}$, wobei $\mathbf{A}' = \mathbf{A}$ und \mathbf{A}'' die

transponierte Matrix von \mathbf{A} , also $\mathbf{A}'' = \mathbf{A}'^T$ ist. Sei $\mathbf{v} = (\mathbf{v}', \mathbf{v}'')^T$ ein Eigenvektor von Graph D zum Eigenwert λ , also $\mathbf{B}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$. Nach Umformung ergeben sich $\mathbf{A}'\mathbf{v}'' = \lambda \mathbf{v}'$ und $\mathbf{A}''\mathbf{v}' = \lambda \mathbf{v}''$. Die beiden Gleichungen bleiben erhalten, falls λ durch $-\lambda$ und \mathbf{v}'' durch $-\mathbf{v}''$ ersetzt werden. Das bedeutet aber: Ist $(\mathbf{v}', \mathbf{v}'')^T$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ , so ist $(\mathbf{v}', -\mathbf{v}'')^T$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $-\lambda$.

☺

Zur Konstruktion des Duplex $D = D(G)$ von $G = G(c, k)$ wird eine vereinfachte Knotenpunktnumerierung eingeführt:

Graph $G = G(c, k) \in \mathbf{PG}$ hat die Knotenpunktmenge $V = V(G) = \{u_i, v_i; i = 0, 1, \dots, c-1\}$ und die entsprechende Kantenmenge $E = E(G)$. Es ist zweckmäßig, jedem Knotenpunkt $w \in V(G)$ eine Zahl $z(w)$ folgendermaßen zuzuordnen: $z(u_i) = i$ und $z(v_i) = c + i$. Diese Nummerierung ist für die Konstruktion des Duplex $D = D(G) = D(c, k)$ von $G = G(c, k)$ übersichtlicher. Den Kanten $(i, i+1)$, $(i, c+i)$ und $(c+i, c+i+k)$ von G entsprechen in D die Kanten $(i', (i+1)'')$, $(i'', (i+1)')$ bzw. $(i', (c+i)'')$, $(i'', (c+i)')$ bzw. $((c+i)', (c+i+k)'')$, $((c+i)'', (c+i+k)')$, $k = 0, 1, \dots, c-1$ und $(c+i)$ bzw. $(c+i+k)$ sind $(\text{mod } c)$ zu nehmen.

In Abb. 4 ist für den Petersen Graphen $Pe = G(5, 2)$ aus Abb. 1 die Konstruktion seines Duplex $D(Pe) = G(10, 3)$ dargestellt. Knotenpunkt $0'$ hat in $D = D(G)$ neben c'' die beiden Nachbarknoten $1''$ und $(c-1)''$ und Knotenpunkt $5''$ hat die Nachbarn $0'$, $7'$ und $8'$.

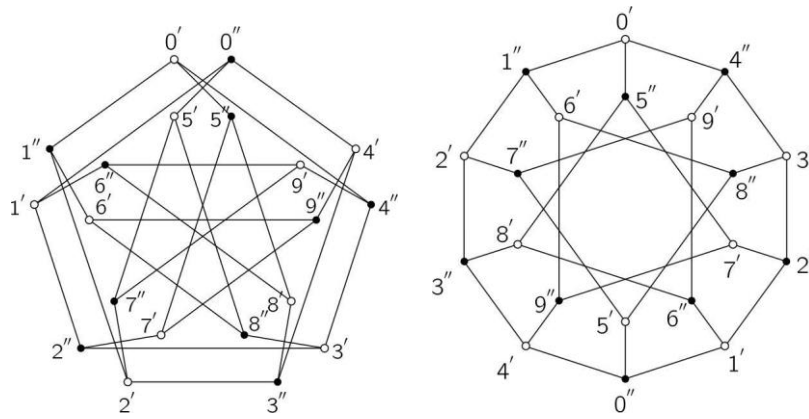


Abb. 4: Konstruktion des Graphen $D(\text{Pe}) = D(5, 2) = G(10, 3)$

Frage:

Für welche Graphen $G = G(c, k)$ ist der Duplex $D = D(G)$ wieder ein verallgemeinerter Petersen Graph $D = G(c_D, k_D)$ mit den Parametern c_D und k_D ?

Offensichtlich ist $G = G(c, k)$ mit c gerade und k ungerade ein paarer Graph und somit ergibt sich als Duplex $D(G)$ ein Graph mit zwei Komponenten, die isomorph zu $G(c, k)$ sind (Beobachtung 2). Deshalb bleiben noch zwei Fälle zu untersuchen:

- c ungerade und k beliebig sowie
- c und k gerade.

Satz 3:

Der Duplex $D = D(c, k)$ mit $0 \leq k < c$ ist mit c ungerade ein verallgemeinerter Petersen Graph $D = D(c, k) = G(c_D, k_D)$ falls

$c_D = 2c$ und

$k_D = c - k$, falls k gerade bzw. $k_D = k$, falls k ungerade ist.

Beweis von Satz 3:

Es sei $G = G(c, k)$ mit $0 \leq k < c$ ein verallgemeinerter Petersen Graph und c ungerade.

Der Kreis C^U von G mit ungerader Länge c ist durch die Transformation von G in D in einen Kreis der Länge $c_D = 2c$ (Knotenpunkte: $0'-1''-2'-3''- \dots -(c-2)''-(c-1)''-0''-1'- \dots -(c-2)''-$

$(c-1)''-0'$) übergegangen. Zur Berechnung des k_D -Wertes betrachte man folgende Kanten: Knotenpunkt c'' ist in D verbunden mit $0', (c+k)'$ und $(2c-k)'$. Die beiden zuletzt genannten Punkte sind in D mit den Punkten k'' bzw. $(c-k)''$ verbunden (s. Abb. 5).

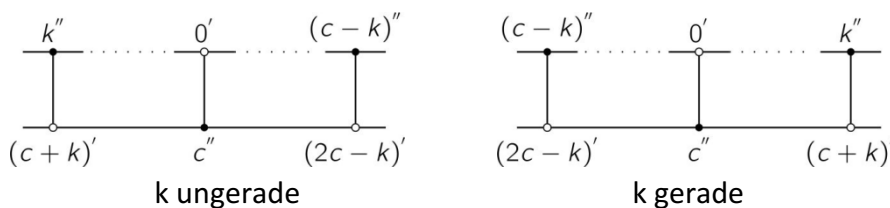


Abb. 5: Anordnung ausgewählter Knotenpunkte in $D(c, k)$

Da in beiden Fällen $c_D = 2c$, also gerade ist, muß k_D ungerade sein, damit ein bipartiter Graph vorliegt (Beobachtung 1). Also ergeben sich mit c ungerade:

für k ungerade: $D = G(c_D = 2c, k_D = k)$ ist Duplex von $G(c, k)$, und

für k gerade: $D = G(c_D = 2c, k_D = c - k)$ ist Duplex von $G(c, k)$. ☺

Beispiel:

Von $G(c, 0)$ mit c ungerade errechnet sich der Duplex zu $D(c, 0) = G(2c, c)$. Für $c = 1$ ergibt sich somit $D(1, 0) = G(2, 1)$; siehe Abb. 2. Graph $G(1, 0)$ hat das charakteristische Polynom

$$p_{G(1,0)}(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$$

und Graph $G(2, 1)$ das Polynom

$$p_{G(2,1)}(\lambda) = p_{D(1,0)}(\lambda) = \lambda^4 - 10\lambda^2 + 9 = (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 - 9) = p_{G(1,0)}(\lambda)p_{G(1,0)}(-\lambda). \quad (6)$$

In Abb. 6 ist der Graph $D(3, 0) = G(6, 3)$ gegeben. Sein charakteristisches Polynom ist

$$p_{G(6,3)}(\lambda) = p_{D(3,0)}(\lambda) = (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 - 9)(\lambda^2 \pm \lambda - 3)^2.$$

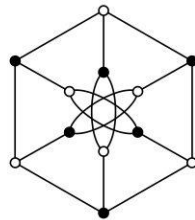


Abb. 6 Der Graph $G(6, 3)$

Satz 4:

Der Duplex $D = D(G)$ von $G = G(c, k)$, $0 \leq k < c$, wobei c und k gerade sind, ist nicht isomorph zu einem verallgemeinerten Petersen-Graphen $G(c_D, k_D)$.

Beweis von Satz 4:

Falls in $G(c, k)$ sowohl c als auch k gerade sind, müssen im Duplex $D(G) = G(c_D, k_D)$ wegen Beobachtung 1 c_D gerade und k_D ungerade sein. Dann hat nach Satz 1 das charakteristische Polynom $p_G(\lambda)$ von G den Faktor $(\lambda^2 - 5)$, während das charakteristische Polynom $p_D(\lambda)$ von $D = D(G)$ den Faktor $(\lambda^2 - 5)$ nicht enthält. ☺

Beispiel:

Der Graph $G(c, 0)$ mit c gerade hat als Duplex $D(c, 0)$ zwei Kreise der Länge c , nämlich $0'-1''-\dots-(c-2)''-(c-1)''-0'$ und $0''-1'-\dots-(c-2)''-(c-1)''-0''$, und c Kreise C_2 . Die Graphen $D(2, 0)$ und $D(4, 0)$ sind in Abb. 7 dargestellt. Ihre charakteristischen Polynome errechnen sich zu

$$p_{D(2,0)}(\lambda) = (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 - 9)(\lambda^2 - 5)^2 \text{ und}$$

$$p_{D(4,0)}(\lambda) = (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 - 9)(\lambda^2 - 5)^2(\lambda^2 - 6\lambda - 1)^2.$$

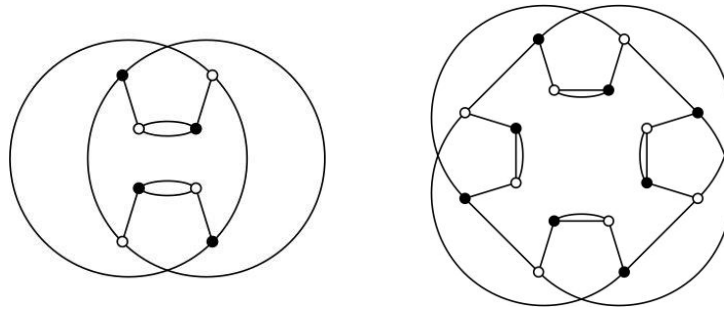


Abb. 7 Die Duplexe $D(2, 0)$ und $D(4, 0)$

Satz 5:

Das Polynom von $D = D(c, k)$ ist für c ungerade

$p_D(\lambda) = p_{D(1,0)}(\lambda) q_D(\lambda)$, und $q_D(\lambda)$ ist ein Polynom vom Grad $(2c - 4)$.

Beweis von Satz 5:

Das Polynom $p_{D(1,0)}(\lambda)$ ist in Gleichung (6) gegeben.

Für Graph $D = D(c, k) = G(2c, k_D)$ sind mit Satz 3 sowohl c als auch k_D ungerade.

Analog den Gleichungen (2) findet man für D mit $l = 0, 1, \dots, 2c - 1$ die $2c$ Gleichungen

$$p_{\mathfrak{D}(l, k_D)}(\lambda) = \lambda^2 - 2(\cos(l\pi/c) + \cos(k_D l\pi/c))\lambda + 4 \cos(l\pi/c)\cos(k_D l\pi/c) - 1. \quad (2_D)$$

Ist $l = 0$, so haben wir $p_{\mathfrak{D}(0, k_D)}(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$.

Setzt man $l = c$ und k_D ungerade, so ergibt sich

$$p_{\mathfrak{D}(c, k_D)}(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 3 = (\lambda + 1)(\lambda + 3).$$

Also hat das Polynom $p_D(\lambda)$ das Produkt $p_{\mathfrak{D}(0, k_D)}(\lambda) p_{\mathfrak{D}(c, k_D)}(\lambda) = p_{D(1,0)}(\lambda)$ für c und k_D ungerade als Faktor. ☺

An dieser Stelle sollen zwei allgemeinere Beispiele gegeben werden.

Für einen Speichengraphen⁽¹⁷⁾ $G \in \mathbf{G}^3$ mit Speiche $Sp \in \mathbf{G}$ können ganz analoge Aussagen zum Duplex $D = D(G)$ gemacht werden.

Der verallgemeinerte Petersen Graph $G(c, k)$ wird als Speichengraph folgendermaßen dargestellt: $G(Sp = K_2; c, [1, k])$. So ist z. B. der Petersen Graph $Pe = G(5, 2) = G(K_2; 5, [1, 2])$.

Wählt man als Speiche den Stern $Sp = S_4$ (Abb. 8) mit 4 Knotenpunkten, dann ist

$G(S_4; c, [k_1 = 1, k_2, k_3])$ die allgemeine Darstellung eines Speichengraphen mit Speiche $Sp = S_4$.

So ist z. B. für den in Abb. 9 gegebenen Speichengraph $Pf = G(S_4; c = 7, [k_1 = 1, k_2 = 3, k_3 = 2])$ der Duplex $D(Pf) = D(S_4; 7, [1, 3, 2]) = G(S_4; 14, [1, 3, 5])$.

Die Polynome für den Speichengraph Pf und seinen Duplex $D(Pf)$ sind:

$$p_{Pf}(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda^2 + 2\lambda - 1)^6(\lambda + 1)^7(\lambda - 2)^8 \quad \text{und}$$

$$p_{D(Pf)}(\lambda) = (\lambda^2 - 9)(\lambda^2 \pm 2\lambda - 1)^6(\lambda^2 - 1)^7(\lambda^2 - 4)^8.$$

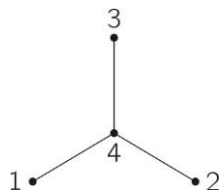


Abb. 8: Speiche $Sp = S_4$

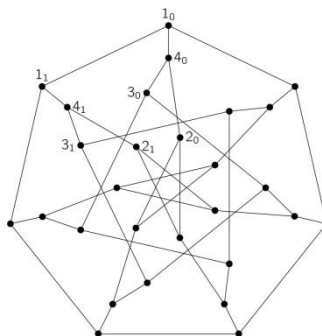


Abb. 9: Der Speichengraph Pf

Noch ein Beispiel für einen 4-regulären Speichengraphen $Pg = G(C_4; 5, [1, 2, 1, 2])$, dessen Duplex $D(Pg) = D(C_4; 5, [1, 2, 1, 2]) = G(C_4; 10, [1, 3, 1, 3])$ ist. Deren Polynome sind $p_{Pg}(\lambda) = \lambda(\lambda - 4)(\lambda - 2)^2(\lambda^2 + \lambda - 1)^4(\lambda^2 + \lambda - 5)^4$ und $p_{D(Pg)}(\lambda) = \lambda^2(\lambda \mp 4)(\lambda \mp 2)^2(\lambda^2 \pm \lambda - 1)^4(\lambda^2 \pm \lambda - 5)^4$.

5. Der Desargue-Levi Graph $G(10, 3)$ – Ein Beispiel

Im Jahre 1929 erschien von F. Levi⁽¹¹⁾ ein Buch über Geometrische Konfigurationen, in dem erstmals die Desargue-Konfiguration erwähnt wird. Interessanterweise taucht der Desargue-Levi Graph auch im Zusammenhang mit chemischen Reaktionsgraphen^(12,18,19) auf. In einer Arbeit von B. und M. Stoppel⁽²⁰⁾ wird die Symmetriegruppe des Desargue-Levi Graphen untersucht.

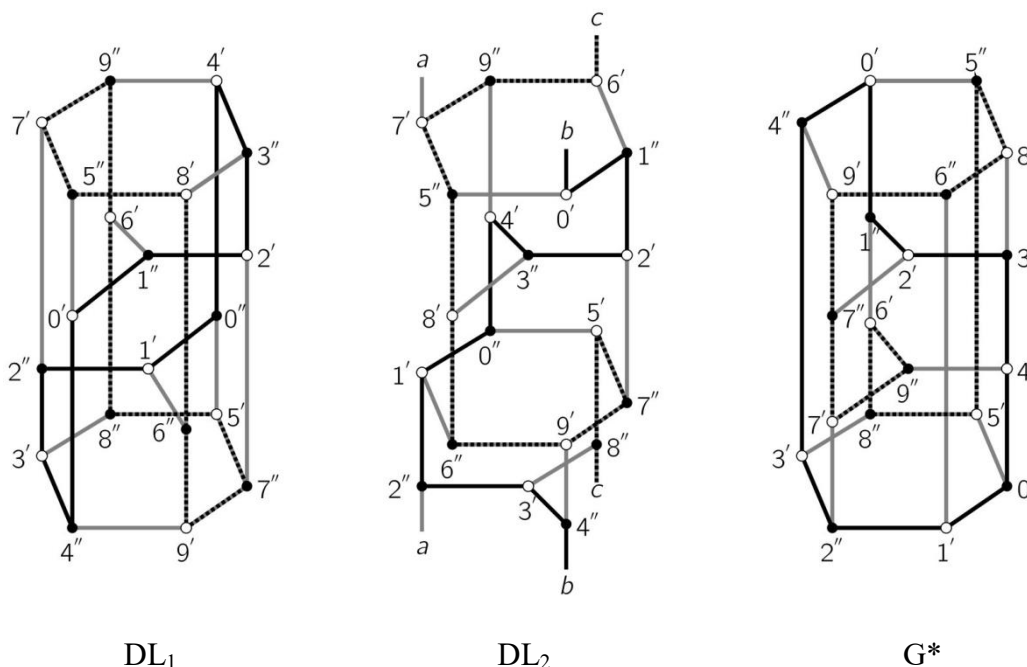


Abb. 10: Zwei Darstellungen des Graphen DL und ein dazu nichtisomorpher Graph G^*

Der *Desargue-Levi Graph* (kurz: DL) ist der Duplex des Petersen Graphen $Pe = G(5, 2)$; nach Satz 3 ergibt sich $DL = D(5, 2) = G(10, 3) \in \mathbf{PG}$. Für diesen Graphen (Abb. 4) findet der interessierte Leser auch im Internet weitere geeignete Darstellungen. In Abb. 10 sind eine

bekannte zylindrische DL_1 - und eine offensichtlich noch nicht bekannte toroidale DL_2 -Darstellung zu finden. Dass DL_2 isomorph zu DL_1 ist, erkennt man an der in Abb. 10 angegebenen Nummerierung der Knotenpunkte, die mit der Nummerierung der Knotenpunkte aus Abb. 4 übereinstimmt.

Mit Satz 2 und $p_{pe}(\lambda)$ ergibt sich für $DL = D(5, 2)$ das charakteristische Polynom $p_{DL}(\lambda) = (\lambda \pm 3)(\lambda \pm 1)^5(\lambda \pm 2)^4 = p_{D(1,0)}(\lambda)[p_{K2}(\lambda)p_{C2}(\lambda)]^4$.

Wird in DL_1 von Abb. 10 ein „inneres Dreiein“ um 60° gedreht, so entsteht der Graph G^* . Graph G^* kann auch aus der Darstellung von $G(10, 3)$ in Abb.4 gefunden werden, indem die beiden Kanten $5'-7''$ und $7'-5''$ gelöscht und durch die beiden Kanten $5'-5''$ und $7'-7''$ ersetzt werden (s. Abb. 11). Graph G^* ist nach MAPLE-Rechnung isospektral zu Graph DL .

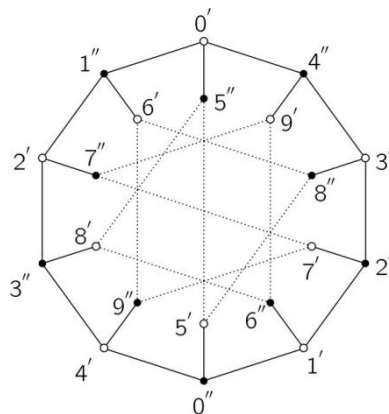


Abb. 11: Eine weitere Darstellung von G^*

Zwei Graphen nennt man auch ein $PING^{(13.S.156)}$ (Pair of Isospectral Non-isomorphic Graphs), falls sie nicht isomorph jedoch isospektral sind.

Dazu hat Herr Tibor Toth⁽²¹⁾ mit Hilfe des Programmes „SAGE“ in dankenswerter Weise für $DL = G(10, 3)$ und G^* die chromatischen Polynome $ch_{DL}(x)$ und $ch_{G^*}(x)$ berechnet:

$$ch_{DL}(x) = (x - 1)x(x^{18} - 29x^{17} + 406x^{16} - 3654x^{15} + 23751x^{14} - 118735x^{13} + 474540x^{12} - 1555230x^{11} + 4251065x^{10} - 9796793x^9 + 19146110x^8 - 31766090x^7 + 44562315x^6 - 52301735x^5 + 50358537x^4 - 38449500x^3 + 21935165x^2 - 8337330x + 1585121)$$

und

$$ch_{G^*}(x) = (x - 1)x(x^{18} - 29x^{17} + 406x^{16} - 3654x^{15} + 23751x^{14} - 118735x^{13} + 474540x^{12} - 1555234x^{11} + 4251133x^{10} - 9797317x^9 + 19148530x^8 - 31773542x^7 + 44578387x^6 - 52326459x^5 + 50385469x^4 - 38469536x^3 + 21944609x^2 - 8339790x + 1585385).$$

Es sei angemerkt, dass die Koeffizienten in den großen Klammern jeweils bis zu x^{12} gleich sind, und danach stimmen sie zumindest in den ersten drei Ziffern überein.

Damit sind die beiden Graphen DL und G^* ein $PING$. Sie haben nach MAPLE-Rechnungen jeweils 60 Linearfaktoren und 24 Hamiltonkreise. Die Determinante ihrer Adjazenzmatrizen errechnet sich zu $p_{DL}(0) = (2^4 3)^2 = 48^2$.

In allen drei Graphen von Abb. 10 sind die Kreise C^u und C^v entsprechend hervorgehoben.

6. Einfache Polynombeziehungen

Gegeben sind die Graphen $G_1, G_2 \in \mathbf{G}$ mit $n_1 = n(G_1)$ bzw. $n_2 = n(G_2)$ Knotenpunkten und deren Polynome $p_{G_1}(\lambda), p_{G_2}(\lambda)$.

Das Polynom $p_{G_1}(\lambda)$ teilt das Polynom $p_{G_2}(\lambda)$ genau dann, wenn es ein Polynom $q_{12}(\lambda)$ vom Grad $(n_2 - n_1)$ gibt, sodass $p_{G_2}(\lambda) = p_{G_1}(\lambda)q_{12}(\lambda)$ ist. Mit anderen Worten: das Spektrum von Graph G_1 ist im Spektrum des Graphen G_2 enthalten.

Über die Teilbarkeit von verallgemeinerten Petersen Graphen gibt der folgende Satz Auskunft.

Satz 6:

Es sind $G = G(c, k), G' = G(c', k') \in \mathbf{PG}$. Sind $c' = 2c$ und $k' \in \{k, c - k\}$, so gibt es ein Polynom $q(\lambda)$ vom Grad $2c$ derart, dass $p_{G'}(\lambda) = p_G(\lambda)q(\lambda)$ ist.

Beweis von Satz 6:

Dazu beachte man die in Gleichung (2) gegebenen Faktorpolynome für $G(c, k)$

$$p_{\mathbb{S}(l, k)}(\lambda) = \lambda^2 - 2(\cos(2l\pi/c) + \cos(2kl\pi/c))\lambda + 4\cos(2l\pi/c)\cos(2kl\pi/c) - 1 \quad (2)$$

und $l = 0, 1, \dots, c - 1$.

Für $G(c', k')$ und $c' = 2c$ ergeben sich die $2c$ Faktorpolynome

$$p_{\mathbb{S}(l', k')}(\lambda) = \lambda^2 - 2(\cos(l'\pi/c) + \cos(k'l'\pi/c))\lambda + 4\cos(l'\pi/c)\cos(k'l'\pi/c) - 1 \quad (2')$$

und $l' = 0, 1, \dots, 2c - 1$.

Setzt man in Gleichung (2') zunächst $l' = 2l$, so ergibt sich

$$p_{\mathbb{S}(2l, k')}(\lambda) = \lambda^2 - 2(\cos(2l\pi/c) + \cos(2k'l\pi/c))\lambda + 4\cos(2l\pi/c)\cos(2k'l\pi/c) - 1. \quad (2'')$$

Ist $k' = k$, so sind die Gleichungen (2) und (2'') identisch.

Ist $k' = c - k$, so ergibt eine einfache Umformung

$$\cos(2k'l\pi/c) = \cos(2[c - k]l\pi/c) = \cos(2l\pi - [2kl\pi/c]) = \cos(2kl\pi/c).$$

Damit ist Satz 6 bewiesen. ☺

Als Beispiel sei wieder der Petersen Graph $P_5 = G(5, 2)$ gewählt. Dann teilt das Polynom $p_{G(5, 2)}(\lambda)$ die beiden Polynome $p_{G(10, 2)}(\lambda)$ und $p_{G(10, 3)}(\lambda)$ und diese wiederum die Polynome $p_{G(20, 2)}(\lambda)$,

$p_{G(20, 8)}(\lambda)$ bzw. $p_{G(20, 3)}(\lambda), p_{G(20, 7)}(\lambda)$:

$$p_{G(5, 2)}(\lambda) = p_{P_5}(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda - 1)^5(\lambda + 2)^4,$$

$$p_{G(10, 2)}(\lambda) = p_{G(5, 2)}(\lambda)\lambda^4(\lambda^2 - 5)^3,$$

$$p_{G(10, 3)}(\lambda) = p_{G(5, 2)}(\lambda)(\lambda + 3)(\lambda - 2)^4(\lambda + 1)^5,$$

$$p_{G(20, 2)}(\lambda) =$$

$$= p_{G(10, 2)}(\lambda)(\lambda^8 - 2\lambda^7 - 10\lambda^6 + 18\lambda^5 + 29\lambda^4 - 48\lambda^3 - 20\lambda^2 + 32\lambda - 4)^2$$

$$(\lambda^2 + 2\lambda - 1)^2 = p_{G(20, 8)}(\lambda) \quad \text{und}$$

$$p_{G(20, 3)}(\lambda) = p_{G(10, 3)}(\lambda)(\lambda^8 - 14\lambda^6 + 61\lambda^4 - 84\lambda^2 + 16)^2(\lambda^2 - 1)^2 = p_{G(20, 7)}(\lambda).$$

Das Ergebnis von Satz 6 kann auch auf Speichengraphen übertragen werden. So haben z. B. für den in Abb. 9 gegebenen Speichengraph $Pf = G(S_4; 7, [1, 3, 2])$ die daraus resultierenden Graphen $G1 = G(S_4; 14, [1, 3, 2]), G2 = G(S_4; 14, [1, 3, 5]), G3 = G(S_4; 14, [1, 4, 2])$ und $G4 = G(S_4; 14, [1, 4, 5])$ die Polynome

$$\begin{aligned}
p_{Pf}(\lambda) &= (\lambda - 3)(\lambda^2 + 2\lambda - 1)^6(\lambda + 1)^7(\lambda - 2)^8, \\
p_{GI}(\lambda) &= p_{Pf}(\lambda)(\lambda + 2)(\lambda^3 - 7\lambda + 2)(\lambda^{12} - \lambda^{11} - 16\lambda^{10} + 14\lambda^9 + 92\lambda^8 - 68\lambda^7 - 234\lambda^6 + 142\lambda^5 + 263\lambda^4 - 127\lambda^3 - 106\lambda^2 + 40\lambda + 8)^2, \\
p_{G2}(\lambda) &= p_{D(Pf)}(\lambda) = (\lambda^2 - 9)(\lambda^2 \pm 2\lambda - 1)^6(\lambda^2 - 1)^7(\lambda^2 - 4)^8, \\
p_{G3}(\lambda) &= p_{Pf}(\lambda)(\lambda - 2)(\lambda^3 - 7\lambda - 2)(\lambda^{12} + \lambda^{11} - 16\lambda^{10} - 14\lambda^9 + 92\lambda^8 + 68\lambda^7 - 234\lambda^6 - 142\lambda^5 + 263\lambda^4 + 127\lambda^3 - 106\lambda^2 - 40\lambda + 8)^2 \text{ und} \\
p_{G4}(\lambda) &= p_{GI}(\lambda).
\end{aligned}$$

Ähnlich verhält es sich mit den oben beschriebenen I-Graphen. Der Graph $I(6, 2, 3)$ ist, da in dieser Arbeit Zweiecke zugelassen sind, der kleinste I-Graph (Abb. 12), der zu keinem

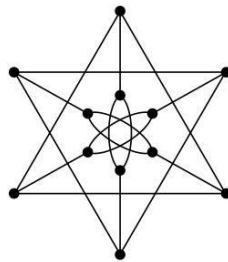


Abb. 12 Der Graph $I(6, 2, 3)$ mit Doppelkanten (Zweiecken)

verallgemeinerten Petersen Graphen isomorph ist. Sein Polynom ist

$$p_{I(6, 2, 3)}(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda - 1)(\lambda^2 - 5)(\lambda^2 + 3\lambda + 1)^2(\lambda^2 - \lambda - 3)^2.$$

Mit den Transformationen $(c, k_1, k_2) \rightarrow (2c, k_1, k_2)$, $(2c, c - k_1, k_2)$, $(2c, k_1, c - k_2)$ oder $(2c, c - k_1, c - k_2)$ lassen sich aus $I(6, 2, 3)$ genau zwei weitere Graphen $I(12, 4, 3)$ und $I(12, 2, 3)$ herleiten. Ihre Polynome sind

$$p_{I(12, 4, 3)}(\lambda) = p_{I(6, 2, 3)}(\lambda)(\lambda^2 + \lambda - 1)^4(\lambda^2 - 2\lambda - 1)^2 \text{ und}$$

$$p_{I(12, 2, 3)}(\lambda) = p_{I(6, 2, 3)}(\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 1)^4(\lambda^2 + 2\lambda - 1)^2.$$

Läßt man bei den I-Graphen neben Mehrfachkanten auch Schlingen zu, so teilt das Polynom $p_{I(3, 1, 0)}(\lambda)$ von $I(3, 1, 0) = G(3, 0)$ die Polynome $p_{I(6, 1, 0)}(\lambda)$, $p_{I(6, 1, 3)}(\lambda)$ und $p_{I(6, 2, 3)}(\lambda)$.

Werden nur schlichte Graphen betrachtet, also Graphen ohne Schlingen und Mehrfachkanten, so sind $I(12, 4, 3)$ und $I(12, 2, 3)$ die kleinsten I-Graphen, welche zu keinem Graphen aus \mathbf{PG} isomorph sind⁽⁸⁾.

An dieser Stelle möchte ich Frau Barbara Hamann für die sorgfältige Anfertigung der Abbildungen und Herrn Dr. Wilfried Rausch (beide TU Ilmenau) für das MAPLE-Programm danken.

7. Literatur

- 1 Petersen, J.: Die Theorie der regulären Graphen, Acta Math. **15** (1891), 193 - 220.
- 2 Coxeter, H. S. M.: Self-dual configurations and regular graphs, Bull. Amer. Math. Soc. **56** (1950), 413 – 455.
- 3 Bannai, K.: Hamiltonian cycles in generalized Petersen graphs, J. Combin. Theory, Ser. B, **24** (1978), 181 – 188.
- 4 Gera, R. and P. Stanica: The spectrum of generalized Petersen graphs, Australian J. Comb. **49**(2011), 39 – 45
- 5 Dudek, A. W.: On the Spectrum of the Generalised Petersen Graphs, arXiv:1412.3531v2 [math.CO] 10.Apr. 2015
- 6 Watkins, M. E.: A Theorem on Tait Colorings with an Application to the Generalized Petersen Graphs, J. Combin. Theory, **6** (1969), 152 – 164.
- 7 The Foster Census: R.M.Fosters Census of Connected Symmetric Trivalent Graphs, by Ronald M. Foster, I. Z. Bouwer, W. W. Chernoff, B. Monson and Z. Star, ISBN 0-919611-19-2, 1988
- 8 Boben, M, T. Pisanski, A. Zitnik: I-graphs and the corresponding configurations, J. Combin. Des., **13**(2005), 406 - 424
- 9 Horvat, B., T. Pisanski, A. Zitnik: Isomorphism Checking of I-Graphs, Graphs and Combinatorics, **28**(2012), 823 – 830
- 10 Horton, J. D. and I. Z. Bouwer: Symmetric Y-Graphs and H-Graphs, J. Combin. Theory Ser. B **53**(1991), 114 – 129
- 11 Levi, F. W.: Geometrische Konfigurationen, Leipzig, 1929, S. 139ff, siehe auch: Finite geometrical systems, Calcutta, 1942)
- 12 Randić', M.: Symmetry properties of graphs of interest in chemistry. II. Desargues-Levi graph, Int. J. Quant. Chem. **15** (1979), 663 – 682
- 13 Cvetkovic', D. M., M. Doob, H. Sachs: Spectra of Graphs, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1980/81; Academic Press, New york 1980; J.A. Barth Verlag, Heidelberg- Leipzig 1995.
- 14 Heilbronner, E.: 116. Molecular Orbitals in homologen Reihen mehrkerniger aromatischer Kohlenwasserstoffe: I. Die Eigenwerte von LCAO-MO's in homologen Reihen, Helv. Chim. Acta, **37** (1954), 921 – 935.
- 15 Davidson, R. A.: Spectral analysis of graphs by cyclic automorphism subgroups, Theoret. Chim. Acta (Berl.), **58** (1981), 193 – 231,

- 16 Sachs, H., P. E. John: Symmetric Graphs - Spectra and Eigenvectors, Technische Universität Ilmenau, Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften, Preprint No. 12-1.
- 17 John, P. E., W. Rausch: Spoke Graphs – Speichengraphen, Preprint TU Ilmenau, No. M 17/07
- 18 Mislow, K.: Role of pseudorotation in the stereochemistry of nucleophilic displacement reactions, Acc. Chem. Res. **3** (1970), 321 - 331, Fußnote 13
- 19 Waller, D.: Covering projections of chemical reaction graphs, match **4** (1978), 87 – 92
- 20 Stroppel, B., M. Stroppel: Desargues, doily, dualities and exceptional isomorphisms, Australian J. of Combinatorics **57** (2013), 251 – 270
- 21 Private Mitteilung von Herrn Dr. Tibor Toth (Köln)