

# **Deterministische und stochastische Systemidentifikation mit Methoden der linearen Algebra zur Formulierung von mathematischen Modellen im Lebensdauerzyklus von Bauwerken**

A. Lenzen und H. Waller <sup>1</sup>

## **Zusammenfassung**

Wenn Bauwerke nur für eine begrenzte Lebensdauer ausgelegt werden, kann es erforderlich werden die Tragfähigkeit von Tragkonstruktionen zu überwachen, um Schäden zu vermeiden und eine sichere Funktionsweise zu gewährleisten. Diese Überwachung, das sogenannte Monitoring, wird zumeist von einer rechnergestützten Messtechnik automatisch durchgeführt. Der Computer überprüft spezielle physikalische Kennwerte oder Kennfunktionen des Tragwerks auf Veränderungen. Diese Eigenschaften werden auf dem Überwachungssystem anhand von Modellen abgebildet. Eine Schädigung ruft eine Veränderung dieser Eigenschaften hervor, Aufgabe der Systemidentifikation ist es, eine solche Veränderung zu erkennen. Modellbildung und Systemidentifikation sind eng benachbarte Fachgebiete. Die Modellbildung kann auf Grund von Konstruktionsunterlagen auf theoretischer Basis erfolgen, z.B. als finite Element Modellierung, oder als Black Box Modellierung aus Messwerten mit der Methodik der Systemidentifikation. Neuere Entwicklungen der Numerik, der Rechentechnik und der Messtechnik haben die Möglichkeiten der Systemidentifikation in den letzten Jahren erheblich erweitert, so dass heute auch große Strukturen, wie sie im Bauwesen zu finden sind, einer experimentellen Analyse zugänglich sind. Fortschritte auf dem Gebiet der Linearen Algebra, wie z.B. die Entwicklung der Singulärwert- oder der QR-Zerlegung, haben die Arbeit mit Messdaten erheblich verbessert. Die Arbeit mit singulären oder überbestimmten Gleichungssystemen ist damit erst stabil möglich geworden. Auf der Basis gemessener oder simulierter Daten bzw. Informationen eines Prozesses, z.B. der Schwingungsantworten eines Bauwerks in dessen Lebensdauerzyklus, kann ein Parametermodell mit numerischen Methoden entwickelt und zur Überwachung benutzt werden. Natürlich ist es auch möglich, ein solches Modell mit theoretischen Modellen zu verknüpfen.

In diesem Aufsatz werden zunächst die Grundlagen der Beschreibung der Dynamik von mechanischen Strukturen kurz für die Systemidentifikation aufbereitet. Es folgen ausführliche Ausführungen zur Systemidentifikation mit den Mitteln der Linearen Algebra - der sogenannten Subspace-Identifikation. Diese Darstellungen beginnen mit der Behandlung von Impuls-Erregungen, es folgt die Beschreibung der Analyse allgemeiner deterministischer und stochastischer Erregungen und deren Schwingungsantworten. Simulationen und Laborexperimente zeigen überzeugend die Überlegenheit dieses Vorgehens gegenüber einer Fourier-Analyse. Als Anwendungsbeispiele für die Bauwerksüberwachung werden im weiteren Beispiele zur Schadenserkennung und -lokalisierung vorgestellt. Den Abschluss bilden Ausführungen zur numerischen Modellierung von Windlasten als stochastischen Prozess und der Kopplung dieser Modelle mit finiten Element-Modellen, um eine bessere Vorab-Abschätzung der Lebensdauer eines Bauwerks schon im Entwurfsprozess zu ermöglichen.

---

<sup>1</sup>Prof. Dr.-Ing. Armin Lenzen, Prof. Dr.-Ing. Heinz Waller  
HTWK-Leipzig, Ruhr-Universität Bochum  
E-Mail: lenzen@fbb.htwk-leipzig.de, Heinz.Waller@ruhr-uni-bochum.de

# 1. Systemidentifikation mit Methoden der linearen Algebra

## 1.1 Historisches zur Systemidentifikation

Mitte der 60er Jahre formulierten Cooley und Tuckey die diskrete Fourier-Transformation für den Gebrauch mit einem Digitalrechner neu und schufen die schnelle Fourier-Transformation (FFT), die schon von Gauß vorgeschlagen worden war. Zur Zeit von Gauß gab es noch keine ausreichende Rechnerleistung, um eine verbreitete Anwendung der Fourier-Transformation zu ermöglichen. Der Erfolg der FFT begann anfang der 70er Jahre. In der Strukturdynamik entstand die sogenannte experimentelle Modalanalyse, mit der die Bestimmung der dynamischen Eigenschaften von Konstruktionen stark vereinfacht wurde. Es ist in der Schwingungslehre bekannt, daß resonanzfähige Strukturen nur in speziellen Formen, den sogenannten Eigenformen, antworten. Zu jeder Eigenform gehört auch eine zugeordnete Eigenfrequenz. In der Vergangenheit wurden meist harmonische Erregerfunktionen benutzt, um den Frequenzgang und damit die charakteristischen dynamischen Eigenschaften eines Tragwerks aufzunehmen. Das war ein mühseliges und zeitaufwendiges Vorgehen. Heute ist es möglich, mit einer einzigen schlagartigen Erregung unter Benutzung der FFT, die Gewichtsfunktion und damit auch die modalen Parameter einer Struktur zu bestimmen. Es ist aber allgemein bekannt, daß die diskrete Fourier-Transformation einige Nachteile – systematische Fehler – besitzt, die dem Laboringenieur das Leben schwer machen. Selbst heute können Personen mit wenig Erfahrung Probleme mit der Benutzung der Fourier-Transformation haben.

Vor ungefähr fünfzehn Jahren wurde eine völlig andere Vorgehensweise in der Signalanalyse und Regelungstechnik eingeführt, deren Ursprünge in einer Methode zur Realisierung linearer Systeme aus experimentellen Daten bestehen, die schon 1966 von Ho und Kalman vorgeschlagen wurde [3]. Die vorgeschlagene Methode war damals schwierig zu handhaben, da geeignete robuste Algorithmen fehlten. Seit der stabile Algorithmus der Singulärwert-Zerlegung in der linearen Algebra entwickelt worden ist, kann erwartet werden, daß die sogenannte Subspace-Methode sich zu einem Verfahren vergleichbar oder sogar noch besser als die Fourier-Analyse entwickeln wird. Der Name Subspace-Methode stammt aus der linearen Algebra, er wird meist in der Signaltheorie und Regelungstechnik verwendet. In diesem Bericht werden zunächst die theoretischen Grundlagen der Subspace-Methode erläutert. Die Meßdaten werden in einer Hankel-Matrix abgelegt, aus der dann mit der Singulärwert-Zerlegung die Systemmatrizen **A**, **B**, **C**, **D** berechnet werden. Ein Vergleich der Subspace-Methode mit der Fourier-Transformation zeigt die Ähnlichkeit bzw. Gleichwertigkeit der Methoden für Identifikationsprobleme.

## 1.2 Mathematische Beschreibung und Modellierung mechanischer Strukturen

Bei mechanischen Strukturen wie Balken, Platten, Schalen oder dreidimensionalen Kontinua sind die Elastizität und die Masse kontinuierlich verteilt, es handelt sich um ein orts- und zeitkontinuierliches System. Die dynamischen Eigenschaften solcher Strukturen werden durch partielle Differentialgleichungen beschrieben. Für die Behandlung derartiger Systeme mit dem Digitalrechner ist eine Orts- und Zeitdiskretisierung notwendig. Das geschieht heute mit finiten Elementen oder Differenzen. Für die Schwingungsanalyse werden meist lineare Gleichungen aufgestellt, dann erhält man als Bewegungsgleichung für eine in finite Elemente diskretisierte

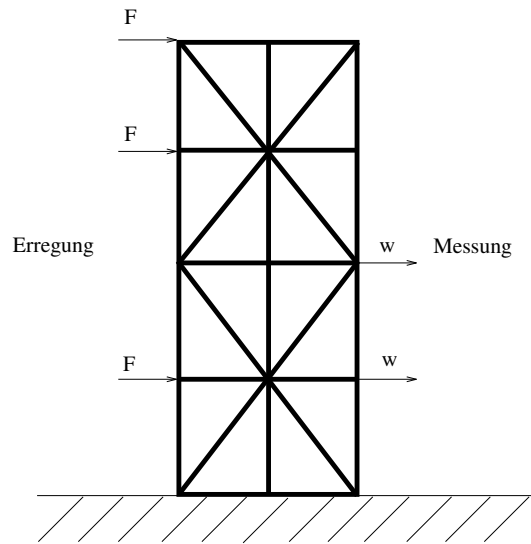


Abbildung 1: Finites-Element-Modell

Struktur (Bild 1) ein System linearer Differentialgleichungen, das in Matrizenform folgendermaßen formuliert werden kann

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{w}} + (\mathbf{C}^*\dot{\mathbf{w}}) + \mathbf{K}\mathbf{w} = \mathbf{f}. \quad (1)$$

- mit  $\mathbf{K}$  : Steifigkeitsmatrix  
 $\mathbf{M}$  : Massenmatrix  
 $\mathbf{C}^*$  : Dämpfungsmatrix  
 $\mathbf{w}$  : Vektor der Auslenkungen  
 $\mathbf{f}$  : Erregungsvektor.

Wünschenswert ist es nun, den heute gebräuchlichen Zusammenhang dieser Gleichungen mit der Zustandsraumdarstellung linearer Systeme aufzuzeigen. Dazu werden die Geschwindigkeiten als zusätzliche Zustandgrößen eingeführt, und die Bewegungsgleichung wird umformuliert [2,11,12]

$$\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{v}$$

$$\ddot{\mathbf{w}} = \dot{\mathbf{v}} = -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}^*\mathbf{v} - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{w} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}$$

oder

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{w}} \\ \dot{\mathbf{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f} \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{h}. \quad (2)$$

In der experimentellen Schwingungsanalyse kann die Bewegung eines mechanischen Systems nur an wenigen, speziell definierten Punkten gemessen werden. Eine Erregung kann auch nur an wenigen Punkten eingeleitet werden. Diesem Sachverhalt wird Rechnung getragen, durch die Einführung der Meßmatrix  $\mathbf{C}$  und der Erregungs- oder Eingangsmatrix  $\mathbf{B}$ . Dann lautet die Zustandsraumformulierung eines zeitkontinuierlichen Systems (Bild 1.2) folgendermaßen

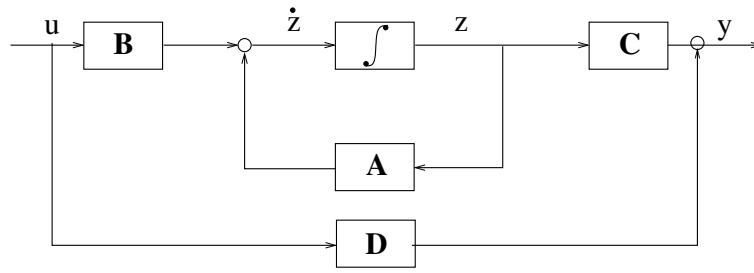


Abbildung 2: Zustandsraummodell

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{z} + (\mathbf{D}\mathbf{u}). \quad (3)$$

Manchmal ist eine Erweiterung mit der Durchgriffsmatrix  $\mathbf{D}$  sinnvoll. Für die Arbeit mit dem Digitalrechner ist eine zusätzliche Zeitdiskretisierung erforderlich. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{k+1} &= \bar{\mathbf{A}}\mathbf{z}_k + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k &= \bar{\mathbf{C}}\mathbf{z}_k + \bar{\mathbf{D}}\mathbf{u}_k. \end{aligned} \quad (4)$$

Die Lösung der obigen Differenzgleichung für eine Erregung mit einem Einheitsimpuls  $\mathbf{u}_0 = \mathbf{1}$  und  $\mathbf{D} = \mathbf{0}$  erhält man zu

$$\mathbf{y}_k = \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^k\bar{\mathbf{B}}.$$

Die Werte  $\mathbf{y}_k$  werden in der gezeigten Weise in einer Hankelmatrix angeordnet.

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_0 & \mathbf{y}_1 & \mathbf{y}_2 & \mathbf{y}_3 & \cdots \\ \mathbf{y}_1 & \mathbf{y}_2 & \mathbf{y}_3 & \mathbf{y}_4 & \cdots \\ \mathbf{y}_2 & \mathbf{y}_3 & \mathbf{y}_4 & \mathbf{y}_5 & \cdots \\ \mathbf{y}_3 & \mathbf{y}_4 & \mathbf{y}_5 & \mathbf{y}_6 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^0\bar{\mathbf{B}} & \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^1\bar{\mathbf{B}} & \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^2\bar{\mathbf{B}} & \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^3\bar{\mathbf{B}} & \cdots \\ \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^1\bar{\mathbf{B}} & \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^2\bar{\mathbf{B}} & \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^3\bar{\mathbf{B}} & \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^4\bar{\mathbf{B}} & \cdots \\ \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^2\bar{\mathbf{B}} & \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^3\bar{\mathbf{B}} & \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^4\bar{\mathbf{B}} & \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^5\bar{\mathbf{B}} & \cdots \\ \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^3\bar{\mathbf{B}} & \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^4\bar{\mathbf{B}} & \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^5\bar{\mathbf{B}} & \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^6\bar{\mathbf{B}} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Nach dem Theorem von Cayley-Hamilton können Matrizenpotenzen  $\mathbf{A}^n, \mathbf{A}^{n+1}$  usw. der Matrix  $\mathbf{A}$  der Dimension  $n \times n$  durch eine Summe der Matrizenpotenzen  $\mathbf{A}^0, \mathbf{A}^1$  bis  $\mathbf{A}^{n-1}$  ausgedrückt werden.

$$\mathbf{A}^{n+k} = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \mathbf{A}^i. \quad (6)$$

Für  $k = 0$  sind die Koeffizienten  $c_i$  gleich den Koeffizienten des charakteristischen Polynoms.

Obwohl die Dimension der Hankelmatrix  $\mathbf{H}$  unendlich ist, kann der Rang von  $\mathbf{H}$  endlich sein. Für eine nichtsinguläre Matrix  $\mathbf{A}$  mit der Dimension  $n \times n$  ist der Rang von  $\mathbf{H}$  aufgrund des Theorems von Cayley-Hamilton gleich  $n$ . Numerisch kann der Rang mit hoher Genauigkeit mit der Singulärwertzerlegung bestimmt werden.

Für zeitkontinuierliche Systeme erfolgt die Vorgehensweise zur Aufstellung der Hankelmatrix entsprechend. Die Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (7)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{z} + \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (8)$$

ist

$$\mathbf{z}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{z}_0 + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau, \quad (9)$$

An einzelnen Abtastpunkten erhält man

$$\mathbf{z}(n\Delta t) = e^{n\mathbf{A}\Delta t}\mathbf{z}_0 + \sum_{i=0}^n \int_{i\Delta t}^{(i+1)\Delta t} e^{\mathbf{A}(i\Delta t-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (10)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{z}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t). \quad (11)$$

Die Ableitung der Subspace-Methode kann am besten aufgezeigt werden am Beispiel eines Systems, das zunächst in Ruhe ist und dann mit einem Dirac-Impuls erregt wird ( $\mathbf{D}$  sei gleich Null). Als Lösung für das zeitkontinuierliche System erhält man

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}. \quad (12)$$

Es sei daran erinnert, daß

$$\mathbf{z}(t) = \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}\delta(0)d\tau = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B} \quad (13)$$

ist.  $e^{\mathbf{A}t}$  stellt dabei eine Matrixfunktion dar, die in eine Taylor-Reihe entwickelt werden kann

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{A}^0 + \mathbf{A}^1t + \frac{\mathbf{A}^2t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3t^3}{3!} + \frac{\mathbf{A}^4t^4}{4!} + \dots \quad \text{mit } \mathbf{A}^0 = \mathbf{I}. \quad (14)$$

Nach dem Theorem von Cayley-Hamilton können nun wieder Potenzen mit Hochzahlen größer  $n-1$  durch Reihen mit Summen von Potenzen bis  $\mathbf{A}^{n-1}$  ausgedrückt werden.

Zusammen mit der Taylor Reihe kann die Lösung  $\mathbf{y}(t)$  folgendermaßen geschrieben werden

$$\begin{aligned}
y(t) &= \mathbf{C}\mathbf{A}^0\mathbf{B} + \mathbf{C}\mathbf{A}^1\mathbf{B}t + \frac{\mathbf{C}\mathbf{A}^2\mathbf{B}}{2!}t^2 + \frac{\mathbf{C}\mathbf{A}^3\mathbf{B}}{3!}t^3 + \dots \\
&= \mathbf{M}_0 + \mathbf{M}_1t + \mathbf{M}_2\frac{t^2}{2!} + \mathbf{M}_3\frac{t^3}{3!} + \dots
\end{aligned} \tag{15}$$

Die Laplace-Transformierte dieser Gleichung lautet:

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{M}_0 + \frac{\mathbf{M}_1}{s} + \frac{\mathbf{M}_2}{s^2} + \frac{\mathbf{M}_3}{s^3} + \dots$$

Die Koeffizienten  $\mathbf{M}_i$  werden Markov-Parameter genannt, sie können folgenderweise in einer Hankelmatrix angeordnet werden

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_0 & \mathbf{M}_1 & \mathbf{M}_2 & \mathbf{M}_3 & \dots \\ \mathbf{M}_1 & \mathbf{M}_2 & \mathbf{M}_3 & \mathbf{M}_4 & \dots \\ \mathbf{M}_2 & \mathbf{M}_3 & \mathbf{M}_4 & \mathbf{M}_5 & \dots \\ \mathbf{M}_3 & \mathbf{M}_4 & \mathbf{M}_5 & \mathbf{M}_6 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}. \tag{16}$$

Durch Vergleich der Lösungen des zeitdiskreten und zeitkontinuierlichen Systems können die folgenden Beziehungen abgeleitet werden

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{A}} &= e^{\mathbf{A}\Delta t} \\
\bar{\mathbf{B}} &= \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} e^{\mathbf{A}(n\Delta t-\tau)}\mathbf{B}d\tau \\
\bar{\mathbf{C}} &= \mathbf{C} \\
\bar{\mathbf{D}} &= \mathbf{D}.
\end{aligned} \tag{17}$$

### 1.3 Deterministische Systemidentifikation - Impulsantwort

Die Impulsantwort sei als Antwort eines Systems messbar. Dann kann die Hankel-Matrix mit der Singulärwertzerlegung (siehe Anhang A) in zwei Matrizen  $\mathbf{P}$  und  $\mathbf{Q}$  zerlegt werden [17].

$$\mathbf{H} = \mathbf{P}\mathbf{Q} \tag{18}$$

mit

$$\mathbf{Q} = [\bar{\mathbf{A}}^0\bar{\mathbf{B}} \quad \bar{\mathbf{A}}^1\bar{\mathbf{B}} \quad \bar{\mathbf{A}}^2\bar{\mathbf{B}} \quad \bar{\mathbf{A}}^3\bar{\mathbf{B}} \quad \dots] \tag{19}$$

und

$$\mathbf{P}^T = [\bar{\mathbf{A}}^0\bar{\mathbf{C}}^T \quad \bar{\mathbf{A}}^1\bar{\mathbf{C}}^T \quad \bar{\mathbf{A}}^2\bar{\mathbf{C}}^T \quad \dots] = \mathbf{P}_1^T \tag{20}$$

Diese Tatsache kann durch Rückmultiplikation verifiziert werden. Für vollständig steuer- und beobachtbare Systeme ist der Rang von  $\mathbf{P}$  und  $\mathbf{Q}$  gleich  $n$ .

Nun kann zusätzlich zur ersten eine zweite Hankel-Matrix aufgebaut werden

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_2 &= \mathbf{P}_1 \bar{\mathbf{A}} \mathbf{Q} \\ &= \mathbf{P}_2 \mathbf{Q}\end{aligned}\quad (21)$$

mit

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_2^T &= [\bar{\mathbf{A}}^{1T} \bar{\mathbf{C}}^T \quad \bar{\mathbf{A}}^{2T} \bar{\mathbf{C}}^T \quad \bar{\mathbf{A}}^{3T} \bar{\mathbf{C}}^T \quad \dots] \\ \mathbf{Q} &= [\bar{\mathbf{A}}^0 \bar{\mathbf{B}} \quad \bar{\mathbf{A}}^1 \bar{\mathbf{B}} \quad \bar{\mathbf{A}}^2 \bar{\mathbf{B}} \quad \dots].\end{aligned}\quad (22)$$

Beide Hankel-Matrizen werden nun mit der Quotienten-Singulärwert-Zerlegung transformiert

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_1 &= \mathbf{U} \Sigma_{H_1} \mathbf{X}^{-1} = \mathbf{P}_1 \mathbf{Q} = \mathbf{P} \bar{\mathbf{A}}^0 \mathbf{Q} \\ \mathbf{H}_2 &= \mathbf{U} \Sigma_{H_2} \mathbf{X}^{-1} = \mathbf{P}_2 \mathbf{Q} = \mathbf{P} \bar{\mathbf{A}}^1 \mathbf{Q}.\end{aligned}\quad (23)$$

Mit der Wahl von

$$\bar{\mathbf{C}} = {}^q \mathbf{P}_1 = {}^q \mathbf{U} \quad {}^n \Sigma_{H_1} \quad (24)$$

und

$$\bar{\mathbf{B}} = {}^n \mathbf{Q} = {}^n \mathbf{X}^{-1} \quad (25)$$

und

$${}^n \bar{\mathbf{A}} = {}^n \mathbf{P}_1 \quad {}^q \mathbf{P}_2 \quad |^2 \quad (26)$$

sind die Systemmatrizen  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{C}$  bestimmt. Diese Tatsache kann wieder durch Rückmultiplikation und Vergleich mit den ursprünglichen Hankelmatrizen verifiziert werden. Die gefundene Lösung ist nicht eindeutig. Durch eine Ähnlichkeitstransformation mit frei wählbaren Matrizen  $\mathbf{T}$  können andere Realisierungen gefunden werden.

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{A}} &= \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} \\ \tilde{\mathbf{B}} &= \mathbf{T}^{-1} \mathbf{B} \\ \tilde{\mathbf{C}} &= \mathbf{C} \mathbf{T}.\end{aligned}\quad (27)$$

---

<sup>2</sup>(das Symbol  $\dagger$  bedeutet Pseudoinverse)

## 1.4 Deterministische Systemidentifikation - Allgemeine Erregungen

Die Systemmatrizen  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  und  $\mathbf{D}$  einer zeitdiskreten Zustandsraumgleichung erster Ordnung können auch aus den Eingangs- und Ausgangsdaten  $\mathbf{u}_k$  und  $\mathbf{y}_k$  geschätzt werden

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k \quad (28)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{D}\mathbf{u}_k. \quad (29)$$

Diese Vorgehensweise hat ihren Ursprung in der Systemtheorie und wird Black-Box-Identifikation oder -Realisierung genannt. Für das Identifikationsproblem wird die diskrete Differentialgleichung in folgender Weise geschrieben

$$\mathbf{Y} = \mathbf{\Gamma}\mathbf{X} + \bar{\mathbf{H}}\mathbf{U} \quad (30)$$

$\mathbf{Y}$  und  $\mathbf{U}$  sind semi infiniten Hankel-Matrizen. Die Matrix  $\mathbf{\Gamma}$  entspricht der Beobachtbarkeitsmatrix eines Regelungssystems

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_i & \mathbf{y}_{i+1} & \cdots & \mathbf{y}_{i+nf-1} \\ \mathbf{y}_{i+1} & \mathbf{y}_{i+2} & \cdots & \mathbf{y}_{i+nf} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{y}_{i+s} & \mathbf{y}_i & \cdots & \mathbf{y}_{i+nf+s} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}\mathbf{A}^0 \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i & \mathbf{x}_{i+1} & \cdots & \mathbf{x}_{i+nf-1} \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} \mathbf{D} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^0\mathbf{B} & \mathbf{D} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{s-1}\mathbf{B} & \mathbf{C}\mathbf{A}^{s-2}\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{C}\mathbf{A}^0\mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_i & \mathbf{u}_{i+1} & \cdots & \mathbf{u}_{i+nf-1} \\ \mathbf{u}_{i+1} & \mathbf{u}_{i+2} & \cdots & \mathbf{u}_{i+nf} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{u}_{i+s} & \mathbf{u}_i & \cdots & \mathbf{u}_{i+nf+s} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (31)$$

Die semi infinite Hankel-Matrizen  $\mathbf{Y}$  und  $\mathbf{U}$  stellen die Relationen von  $\mathbf{Y}$  und  $\mathbf{U}$  mit  $\mathbf{R}$  und  $\mathbf{Q}$  dar

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{Y} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11} & 0 \\ \mathbf{R}_{21} & \mathbf{R}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{Y}\mathbf{Q}_2^T &= \mathbf{R}_{21} \underbrace{\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2^T}_0 + \mathbf{R}_{22} \underbrace{\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_2^T}_\mathbf{I} \\ \mathbf{Y}\mathbf{Q}_2^T &= \mathbf{\Gamma} \underbrace{\mathbf{X}\mathbf{Q}_2^T}_\mathbf{T} + \bar{\mathbf{H}}\mathbf{R}_{11} \underbrace{\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2^T}_0. \end{aligned} \quad (32)$$

Wegen der Orthogonalität der Unterräume kann die gewünschte Beziehung

$$\mathbf{\Gamma}\mathbf{T} = \mathbf{R}_{22}. \quad (33)$$



abgeleitet werden. Durch die Rangbestimmung von  $\Gamma$  mit der Singulärwert-Zerlegung ergibt sich die Dimension von  $\mathbf{A}$ . Da die Anzahl der Eingänge  $p$  und der Ausgänge  $q$  vorgegeben ist, wird es möglich, die Systemparameter  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{C}$  aus der Beobachtbarkeitsmatrix zu berechnen

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \Gamma_1^\dagger \Gamma_2 \quad \text{with } \Gamma_2 = \Gamma_1 \mathbf{A} \\ \mathbf{C} &= \Gamma_{[1:q;1:n]}.\end{aligned}\quad (34)$$

$\mathbf{B}$  und  $\mathbf{D}$  können durch eine anschließende Rechnung ermittelt werden. Der erste Schritt ist die Generierung einer fiktiven Signalmatrix  $\mathbf{y}_g$

$$\bar{\mathbf{y}}_g^j = [\mathbf{y}_{g1}^j \ \dots \ \mathbf{y}_{gn}^j] \quad (35)$$

mit der diskreten Zustandsdifferentialgleichung. Dabei werden die geschätzten Parameter  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{C}$  und eine Einheitsmatrix  $\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{I}$  mit der Dimension  $n \times n$  verwendet.

Die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1}^{ij} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_k^{ij} + \text{vec}(\bar{\mathbf{B}}_i)\mathbf{u}_k^j \\ \mathbf{y}_k^{ij} &= \mathbf{C}\mathbf{x}_k^{ij}.\end{aligned}\quad (36)$$

für alle fiktiven Zeitsignale und ursprünglich gemessenen Werte  $\mathbf{y}_m$  liefert die noch unbekannt Matrix  $\mathbf{B}$  und wenn gewünscht  $\mathbf{D}$

$$\mathbf{y}_m = \bar{\mathbf{y}}_g^1 \mathbf{b}_1 + \bar{\mathbf{y}}_g^2 \mathbf{b}_2 + \dots + \bar{\mathbf{y}}_g^p \mathbf{b}_p + \mathbf{u}_m^1 \mathbf{d}_1 + \mathbf{u}_m^2 \mathbf{d}_2 + \dots + \mathbf{u}_m^p \mathbf{d}_p. \quad (37)$$

Dieses System von Matrixgleichungen

$$\mathbf{Y}_m = \Gamma \mathbf{X}_0 + \mathbf{Y}_{ij} \text{col}(\mathbf{B}) + \mathbf{U}_{ij} \text{col}(\mathbf{D}) \quad (38)$$

wird mit einer Total-Least-Squares-Schätzung (TLS) gelöst. Analog zu der Bestimmung der Parameter  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{C}$  wird eine QR-Zerlegung benutzt

$$[\Gamma \ \mathbf{Y}_{ij} \ \mathbf{U}_{ij} \ \mathbf{Y}_m] = [\mathbf{Q}_1 \ \mathbf{Q}_2 \ \mathbf{Q}_3 \ \mathbf{Q}_4] \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11} & \mathbf{R}_{12} & \mathbf{R}_{13} & \mathbf{R}_{14} \\ 0 & \mathbf{R}_{22} & \mathbf{R}_{23} & \mathbf{R}_{24} \\ 0 & 0 & \mathbf{R}_{33} & \mathbf{R}_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{R}_{44} \end{bmatrix}. \quad (39)$$

Wegen der Orthogonalität der Unterräume kann folgende Zuordnung bestimmt werden

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}_m &= \mathbf{Q}_1 \mathbf{R}_{11} \mathbf{X}_0 + (\mathbf{Q}_1 \mathbf{R}_{12} + \mathbf{Q}_2 \mathbf{R}_{22}) \text{col}(\mathbf{B}) + (\mathbf{Q}_1 \mathbf{R}_{13} + \mathbf{Q}_2 \mathbf{R}_{32} + \mathbf{Q}_3 \mathbf{R}_{33}) \text{col}(\mathbf{D}) \\ \mathbf{Q}_2^T \mathbf{Y}_m &= \mathbf{R}_{22} \text{col}(\mathbf{B}) + \mathbf{R}_{23} \text{col}(\mathbf{D}) = \mathbf{R}_{24} \\ \mathbf{Q}_3^T \mathbf{Y}_m &= \mathbf{R}_{33} \text{col}(\mathbf{D}) = \mathbf{R}_{34}.\end{aligned}\quad (40)$$

Die Lösung eines zweiten linearen Gleichungssystems liefert die unbekannt Matrizen  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{D}$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{24} \\ \mathbf{R}_{34} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{22} & \mathbf{R}_{23} \\ 0 & \mathbf{R}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{col}(\mathbf{B}) \\ \text{col}(\mathbf{D}) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \text{col}(\mathbf{B}) \\ \text{col}(\mathbf{D}) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{22} & \mathbf{R}_{23} \\ 0 & \mathbf{R}_{33} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{24} \\ \mathbf{R}_{34} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (41)$$

## 1.5 Stochastische Systemidentifikation - Formfilter

Im Gegensatz zur Identifikation von Modellen auf Basis deterministischer Signale, wie zuvor beschrieben, wird im Folgenden die Systemidentifikation auf Basis stochastischer Signale aufgezeigt. Insbesondere wird beschrieben wie eine Modellierung mit Hilfe von Korrelationen gemessener Daten am Ausgang eines stochastischen Prozesses unter der Annahme eines weißen Rauschen als Eingangsgrößen erfolgen kann. Diese Methode ist auch als Formfilter - Identifikation bekannt.

Das lineare zeitdiskrete deterministische System wird um die Modellprozesse weißes Rauschen erweitert. Das weiße Rauschen ist dadurch gekennzeichnet, daß es über alle Frequenzen den gleichen Leistungsinhalt besitzt. Das Leistungsspektrum ist also konstant. Damit wird die Korrelationsfunktion zu einem Dirac-Impuls, wie sich aus den Wiener-Khintchin Gleichungen ergibt

$$\Phi_{ww}(\tau = 0) = \Phi_{vv}(\tau = 0) = \text{diag}(\delta) \quad \text{und} \quad \Phi_{ww}(\tau \neq 0) = \Phi_{vv}(\tau \neq 0) = \mathbf{0}. \quad (42)$$

Das diskrete Zustandsraummodell wird um den Prozess  $\mathbf{v}$  als Messfehlerrauschen und den Prozess  $\mathbf{w}$  als Eingangsrauschen erweitert.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k \\ y_k &= \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{D}\mathbf{u}_k + \mathbf{v}_k \end{aligned} \quad (43)$$

Ist der deterministische Eingang  $\mathbf{u}=\mathbf{0}$ , kann die Korrelationsfunktion des Ausgangs auf Grundlage des Zustandsraummodells parametrisiert werden.

$$\begin{aligned} \Phi_{yy,(k=0)} &= \mathbf{C}\mathbf{E}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_k^T)\mathbf{C}^T + \mathbf{E}(\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_k^T) \\ &= \mathbf{C}\mathbf{P}_{xx}\mathbf{C}^T + \mathbf{R}_2 \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{yy,(k>0)} &= \mathbf{C}\mathbf{A}^k\mathbf{E}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_k^T)\mathbf{C}^T + \mathbf{C}\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{E}(\mathbf{w}_k, \mathbf{v}_k^T) \\ &= \mathbf{C}\mathbf{A}^k\mathbf{P}_{xx}\mathbf{C}^T + \mathbf{C}\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{R}_{12} \\ &= \mathbf{C}\mathbf{A}^{k-1}(\mathbf{A}\mathbf{P}_{xx}\mathbf{C}^T + \mathbf{R}_{12}) \\ &= \mathbf{C}\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{M} \end{aligned} \quad (45)$$

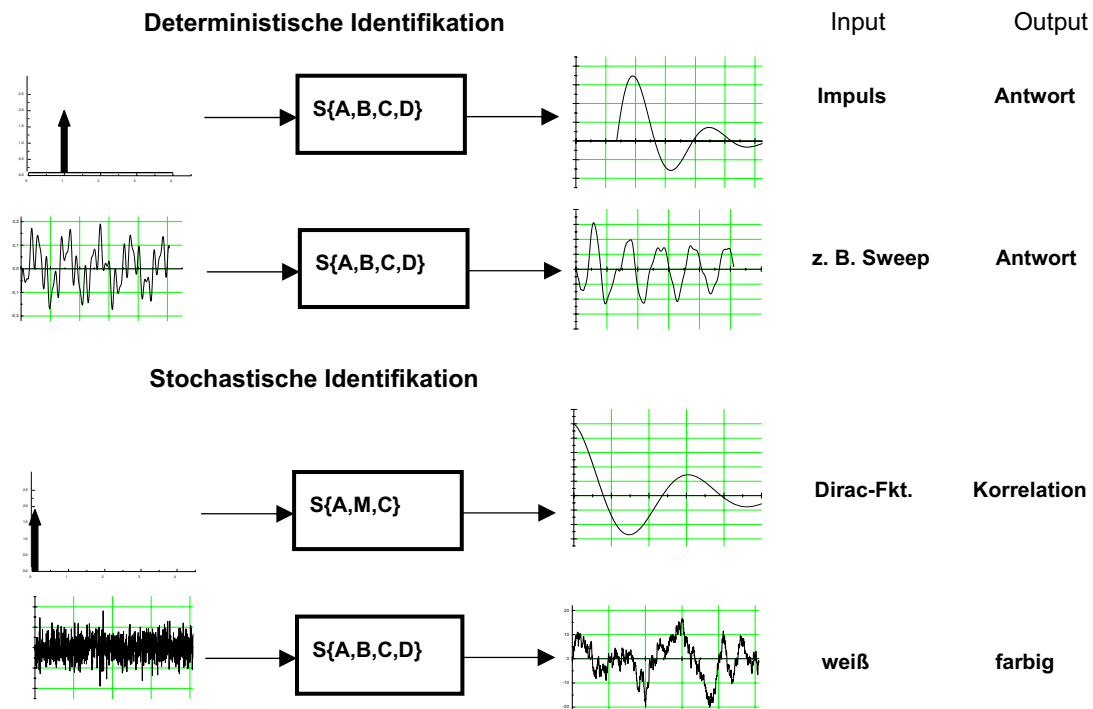


Abbildung 3: Deterministische und stochastische Black box Identifikation

Die Prozessinformationen auf Grundlage von Korrelationen oder Leistungsspektren, wie z.B. Erregerprozesse im Fahrzeugbau oder Lastprozesse infolge Wind im Bauwesen, liegen oftmals in Regelwerken vor und sind aus Messdaten von Prozessen z.B. durch Korrelieren mit der Fast Fourier Transformation und Mittelwertbildung über mehrere Messreihen zu erzeugen.

Die gesuchten Parameter **A**, **C** der Zustandsraumdarstellung sind vergleichbar der Parameterbestimmung aus einer diskretisierten Impulsantwort, siehe Abbildung 3, aus der diskretisierten Korrelationsfunktion zu ermitteln, da man für die Korrelationsfunktion des Ausgangs  $\Phi_{yy}$  nach der Theorie stochastischer Differentialgleichungen eine ähnliche Funktion wie die Impulsantwort erhält.

Mit den diskreten Werten der Korrelationsfunktion  $\Phi_{yy,k>0}$ , siehe Gleichung 45, lassen sich ähnlich wie mit den Impulsantworten Hankelmatrizen aufbauen

$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{CA}^0\mathbf{M} & \mathbf{CA}^1\mathbf{M} & \mathbf{CA}^2\mathbf{M} & \dots \\ \mathbf{CA}^1\mathbf{M} & \mathbf{CA}^2\mathbf{M} & \mathbf{CA}^3\mathbf{M} & \dots \\ \mathbf{CA}^2\mathbf{M} & \mathbf{CA}^3\mathbf{M} & \mathbf{CA}^4\mathbf{M} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (46)$$

und  $\mathbf{H}_2$  um einen Zeitschritt verschoben. Diese Hankelmatrizen lassen sich wiederum, wie be-

reits gezeigt, mit der Singulärwertzerlegung transformieren

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}_1 &= \mathbf{\Gamma}_1 \mathbf{Q} \\
 &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}\mathbf{A}^0 \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^1 \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^2 \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}^0 \mathbf{M} & \mathbf{A}^1 \mathbf{M} & \mathbf{A}^2 \mathbf{M} & \dots \end{bmatrix} \\
 &= \mathbf{U}_1 \mathbf{\Sigma}_1 \mathbf{V}_1^T
 \end{aligned} \tag{47}$$

und  $\mathbf{H}_2$  entsprechend

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{\Gamma}_2 \mathbf{Q} = \mathbf{\Gamma}_2 \mathbf{V}_1^T. \tag{48}$$

Aus diesen Beziehungen lassen sich, wie bereits bekannt, die Systemparameter bestimmen

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= \mathbf{\Gamma}_1^\dagger \mathbf{\Gamma}_2 \\
 \mathbf{C} &= {}^q \mathbf{\Gamma}_1^n \\
 \mathbf{M} &= {}^n \mathbf{Q}^q.
 \end{aligned} \tag{49}$$

Mit den identifizierten Parametern ist die Prozessdynamik über die Matrix  $\mathbf{A}$  abgebildet, ebenso kann eine Zustandsraumtransformation in modale Form erfolgen.

Das Prozessmodell ist jedoch nicht vollständig beschrieben, da die Skalierung bzw. Verstärkung der Übertragungsfunktion des identifizierten Prozesses noch unbekannt ist. Diese bedeutsame Tatsache ist dadurch bedingt, daß das Zustandsraummodell nur am Ausgang gemessen wurde und am Eingang der Musterprozess des weißen Rauschen angenommen wurde.

Diese Modellbildung wird in der Literatur auch häufig als "output - only" bezeichnet und wird in der Strukturidentifikation und Modalanalyse mechanischer Systeme auf Basis zufälliger Messdaten mit Erfolg angewendet [ 16 ].

Das vollständige Zustandsraummodell zur Beschreibung des stochastischen Prozesses mit weißen Rauschen als Eingang, die sogenannte Rückführung von farbigem Rauschen auf den weißen Musterprozess bzw. die Modellbildung eines sogenannten Formfilters, ist mit Hilfe eines Schätzalgorithmus bestimmbar; hier findet der Kalman Filter Verwendung.[ 4 ]

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{x}}_{k+1} &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{K}(y_k - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_k) \\
 \hat{y}_k &= \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_k
 \end{aligned} \tag{50}$$

Der Kalman Filter schätzt den zukünftigen Zustand  $\hat{\mathbf{x}}_k$  rekursiv auf Basis der Fehlerminimierung zwischen den diskreten zurückliegenden geschätzten und gemessenen Prozessinformationen  $\hat{y}_{k-1}, y_{k-1}$ . Die Kalman Verstärkung  $\mathbf{K}$  führt dazu den Fehler  $e_{k-1} = y_{k-1} - \hat{y}_{k-1}$  in das Modell zurück.

Da der deterministische Eingang  $u_k$ , hier als Spezialfall des Kalman Filters, gleich Null ist, kann der Fehler  $e_k$  als neue Information interpretiert werden, die nicht auf den in der Zeit zurückliegenden Prozessdaten basiert; deshalb wird der Fehler auch als Innovation bezeichnet. Über die Herleitung des Kalman Filters kann gezeigt werden, daß die Innovationen einen weißen Prozess darstellen.

Stellt man die gemessenen Prozessgrößen  $y_k$  des ursprünglichen Modells, siehe Gleichung 43, über den Kalman Filter dar, so erhält man das Innovations Modell.

$$\begin{aligned}\hat{x}_{k+1} &= A\hat{x}_k + Ke_k \\ y_k &= C\hat{x}_k + e_k\end{aligned}\quad (51)$$

Dieses stochastische Zustandsraummodell beinhaltet die Parameter  $A$ ,  $C$  aus der Hankelrealisierung und die Kalman Verstärkung  $K$  des Kalman Filters und kann als der gesuchte Formfilter interpretiert werden, der das farbige Prozessrauschen auf einen weißen Musterprozess, hier die Innovationen, zurückführt.

Das gesuchte vollständige Zustandsraummodell wird damit in zwei Schritten realisiert: 1. Bestimmung der Prozess- Dynamik, 2. Bestimmung der - Verstärkung bzw. - Skalierung.

Zur Bestimmung der Kalman Verstärkung  $K$  ist die Lösung der Ricatti - Gleichung erforderlich.

$$\begin{aligned}\hat{P}_{xx} &= A\hat{P}_{xx}A^T + (M - \hat{P}_{xx}AC^T)(\Phi_{yy,(0)} - C\hat{P}_{xx}C^T)^{-1}(M - \hat{P}_{xx}AC^T)^T \\ &= A\hat{P}_{xx}A^T + (M - \hat{P}_{xx}AC^T)(CP_{xx}C^T + R_2 - C\hat{P}_{xx}C^T)^{-1}(M - \hat{P}_{xx}AC^T)^T \\ &= A\hat{P}_{xx}A^T + (M - \hat{P}_{xx}AC^T)(E(e_k e_k^T))^{-1}(M - \hat{P}_{xx}AC^T)^T\end{aligned}\quad (52)$$

Ist die Ricatti Gleichung gelöst kann die Kalman Verstärkung zu

$$K = (M - \hat{P}_{xx}AC^T)(E(e_k e_k^T))^{-1}\quad (53)$$

bestimmt werden. Die Ljapunov-Gleichung des Formfilters

$$\hat{P}_{xx} = A\hat{P}_{xx}A^T + KE(e_k e_k^T)K^T.\quad (54)$$

ist damit ebenfalls erfüllt, siehe dazu auch Gleichungen 52 u. 53.

Für die Lösung der Ricatti - Gleichung ist es erforderlich, daß die Korrelationsfunktion positiv definit ist. Wie Simulationen gezeigt haben, ist diese Tatsache nicht immer erfüllt [ 13 ]. Insbesondere bei Korrelationsfunktionen die aus realen Messdaten erzeugt werden besteht diese Problematik, da endliche Messzeitfenster und Faltungsfehler häufig zu einem Verlust der positiv Definitheit führen. Dies hat dann zur Folge, daß das Leistungsspektrum negativ wird, was physikalisch unhaltbar ist. Eine Lösung der Ricatti - Gleichung existiert dann nicht.

Auf diese bedeutsame Problematik wird in der Literatur zur Realisierung stochastischer Systeme

leider sehr selten hingewiesen.

Betrachtet man die Parametrisierung der diskretisierten Korrelationsfunktion und die Ricatti - Gleichung, so ist ersichtlich, daß über eine Skalierung von

$$\Phi_{yy,(k=0)} = \mathbf{C}\mathbf{P}_{xx}\mathbf{C}^T + \mathbf{R}_2 \quad (55)$$

die geforderte positive Definitheit erzielbar ist. An der Stelle  $k = 0$  der Korrelationsfunktion der Prozessdaten ist diese mit einer Dirac - Korrelationsfunktion, des als weiß angenommenen Messrauschen, überlagert. Skaliert man diesen Wert  $\mathbf{R}_2$ , so wird die Lösung der Ricatti - Gleichung möglich.

Physikalisch wird das Spektrum nach oben geschiftet und bedeutet, daß man den Prozessdaten am Ausgang zusätzlich einen Anteil Messrauschen hinzufügt. Über diese Methode ist eine Regularisierung der Ricatti - Gleichung möglich. Mit den durchgeführten Simulationsrechnungen auf Basis der Skalierung konnten plausible Ergebnisse erzielt werden.

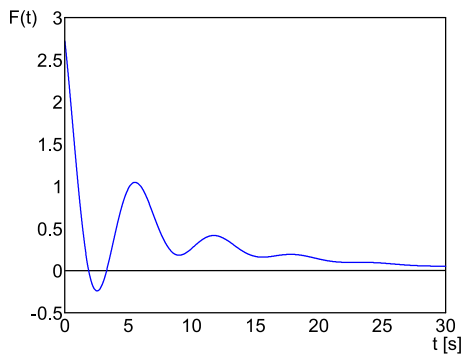
Es ist anzumerken, daß die beschriebene Problematik zur Lösung der Ricatti - Gleichung bei der stochastischen Realisierung aktueller Forschungsgegenstand ist.

## 2. Beispiele zur mathematischen Modellbildung im Lebensdauerzyklus von Bauwerken

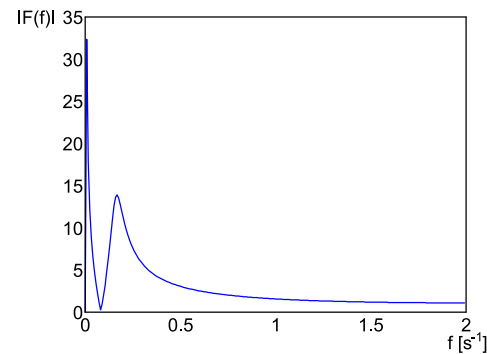
### 2.1 Einige Simulationsergebnisse zur Verifikation der Identifikation

In den folgenden Bildern sind einige Beispiele für Testfunktionen angegeben, die die Grenzen der Fourier-Transformation aufzeigen. In den Bildern auf der rechten Seite ist das Fourier-Spektrum dargestellt, das keine wichtige nutzbare Information enthält. Auf der linken Seite sind die Funktionen abgebildet, die mit der Subspace-Methode identifiziert wurden. Diese Funktionen sind im Rahmen der Genauigkeit einer Computerzeichnung identisch mit den vorgegebenen Funktionen.

a)  $F(t) = e^{-0.1t} + e^{-0.2t} \cos(t + 0.2) + e^{-0.3t} \cos(1.01t + 0.7)$ :

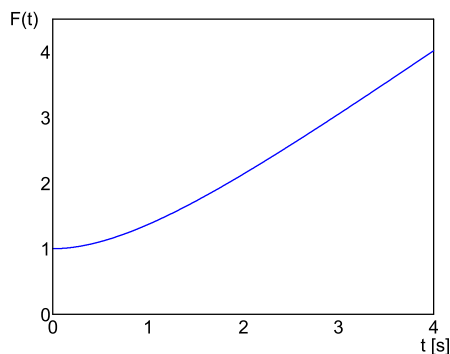


(1) Zeitfunktion

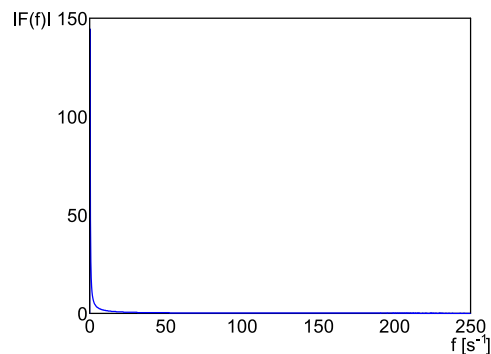


(2) Fourier Spektrum

b)  $F(t) = e^{-t} + t$ :



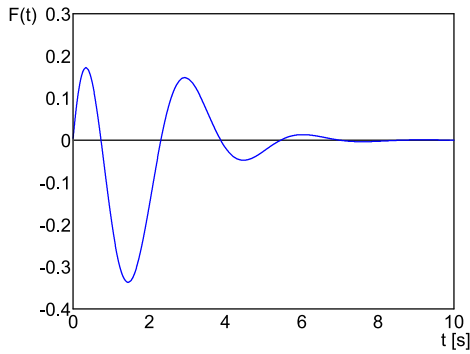
(3) Zeitfunktion



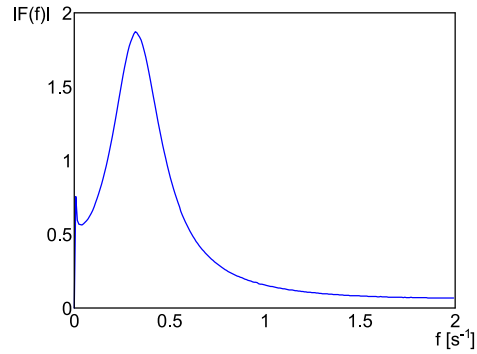
(4) Fourier Spektrum

Abbildung 4: Einige spezielle Zeitfunktionen und deren Fourier Spektren

c)  $F(t) = te^{-t} \cos(2t + 0.1)$ :

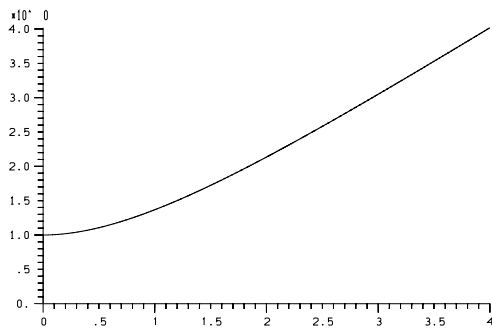


(5) Zeitfunktion

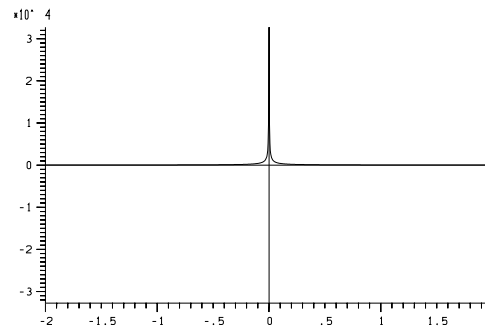


(6) Fourier Spektrum

d)  $F(t) = e^{-0.2t} \sin(2t + 1) + \sin(t)$ :



(7) Zeitfunktion ohne Rauschen



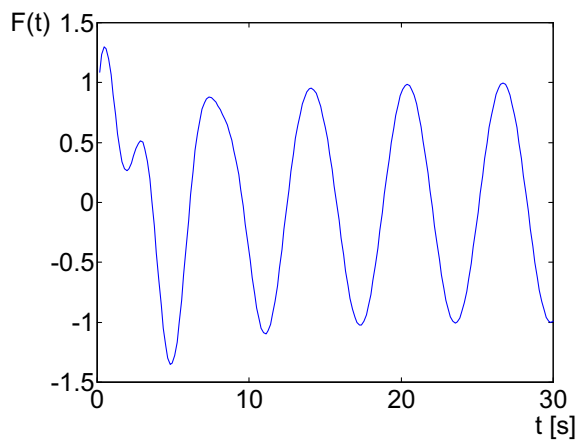
(8) Fourier Spektrum

Abbildung 5: Zu Bild 4

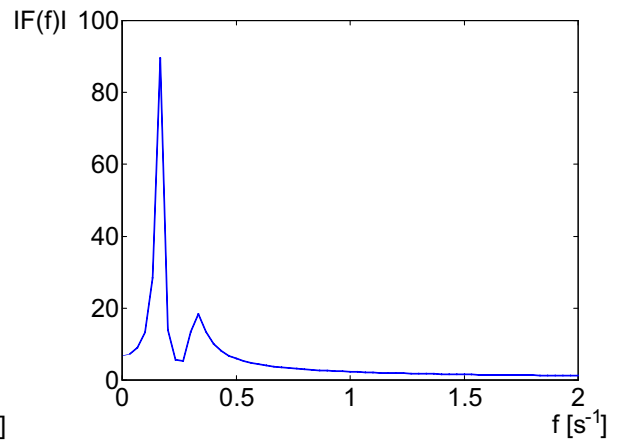
In den Bildern 6 und 7 sind die Singulärwerte der Zeitfunktion ohne und mit zusätzlichem Rauschen dargestellt. Die Differenz zwischen den Singulärwerten die zu dem Originalsystem (hier vier Werte = Zahl der Eigenwerte) und dem Rest ist beachtlich für die Funktion ohne Rauschen. Hier sollten die restlichen Singulärwerte theoretisch gleich Null sein, es ergeben sich aus numerischen Gründen aber leichte Abweichungen von Null. Ohne Rauschen ist es also sehr einfach zwischen dem eigentlichen Signalraum und dem Rest zu unterscheiden. Infolge des Rauscheinflusses werden die restlichen Singulärwerte größer und es wird schwieriger, zwischen Rausch- und Signalraum zu unterscheiden. Für stärkeres Rauschen wird es unmöglich, Unterschiede zwischen Rauschen und Nutzsignal festzustellen.



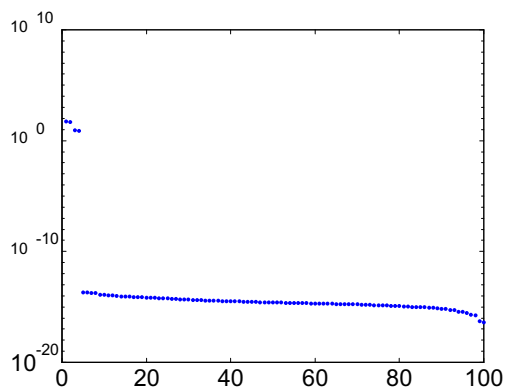
a)  $F(t) = e^{-0.2t} \sin(2t + 1) + \sin(t)$ :



(a) Zeitfunktion ohne Rauschen



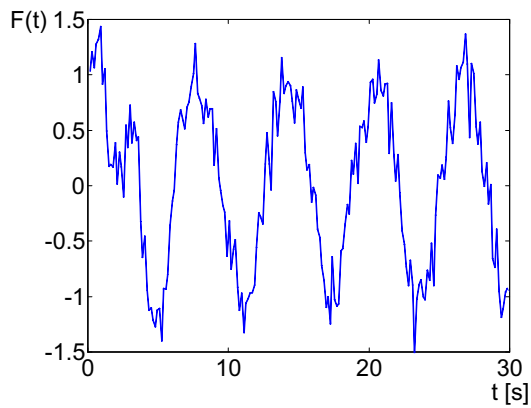
(b) Fourier Spektrum



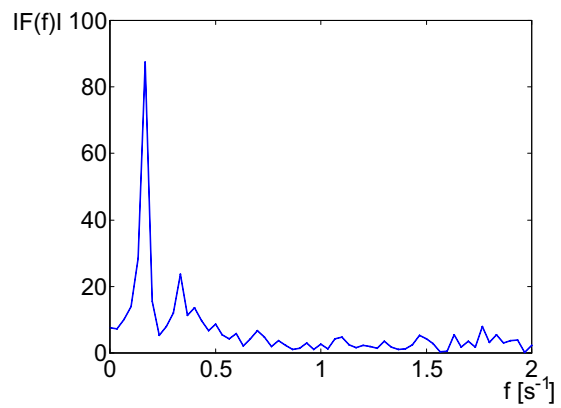
(c) Singulärwerte

Abbildung 6: Der Einfluß von Rauschen auf die Singulärwerte und das Spektrum (a)

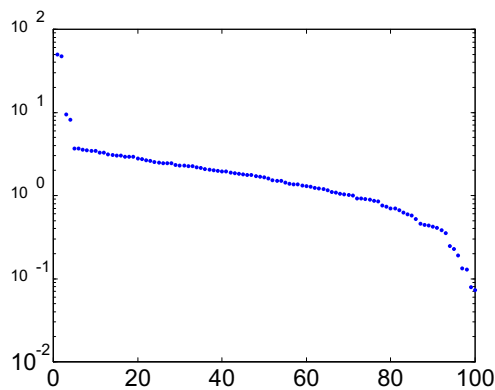
b)  $F(t) = e^{-0.2t} \sin(2t + 1) + \sin(t) + 10\%$  Rauschen:



(a) Funktion mit 10% Rauschen



(b) Fourier Spektrum



(c) Singulärwerte

Abbildung 7: Der Einfluß von Rauschen auf die Singulärwerte und das Spektrum (b)

Im nächsten Abschnitt ist eine Rechnersimulation für eine eingespannte, schwingende Platte und deren Analyse mit der Fourier-Transformation und der Subspace-Methode aufgezeigt. Das Ziel dieser Darstellung ist es, zu zeigen, daß die Subspace-Methode auch ein sehr nützliches und genaues Werkzeug für die Identifikation von Eigenwerten und -formen ist. Die Ergebnisse sind den vorgegebenen Werten der numerischen Rechnung mit der finiten Elementmethode nahezu gleich.

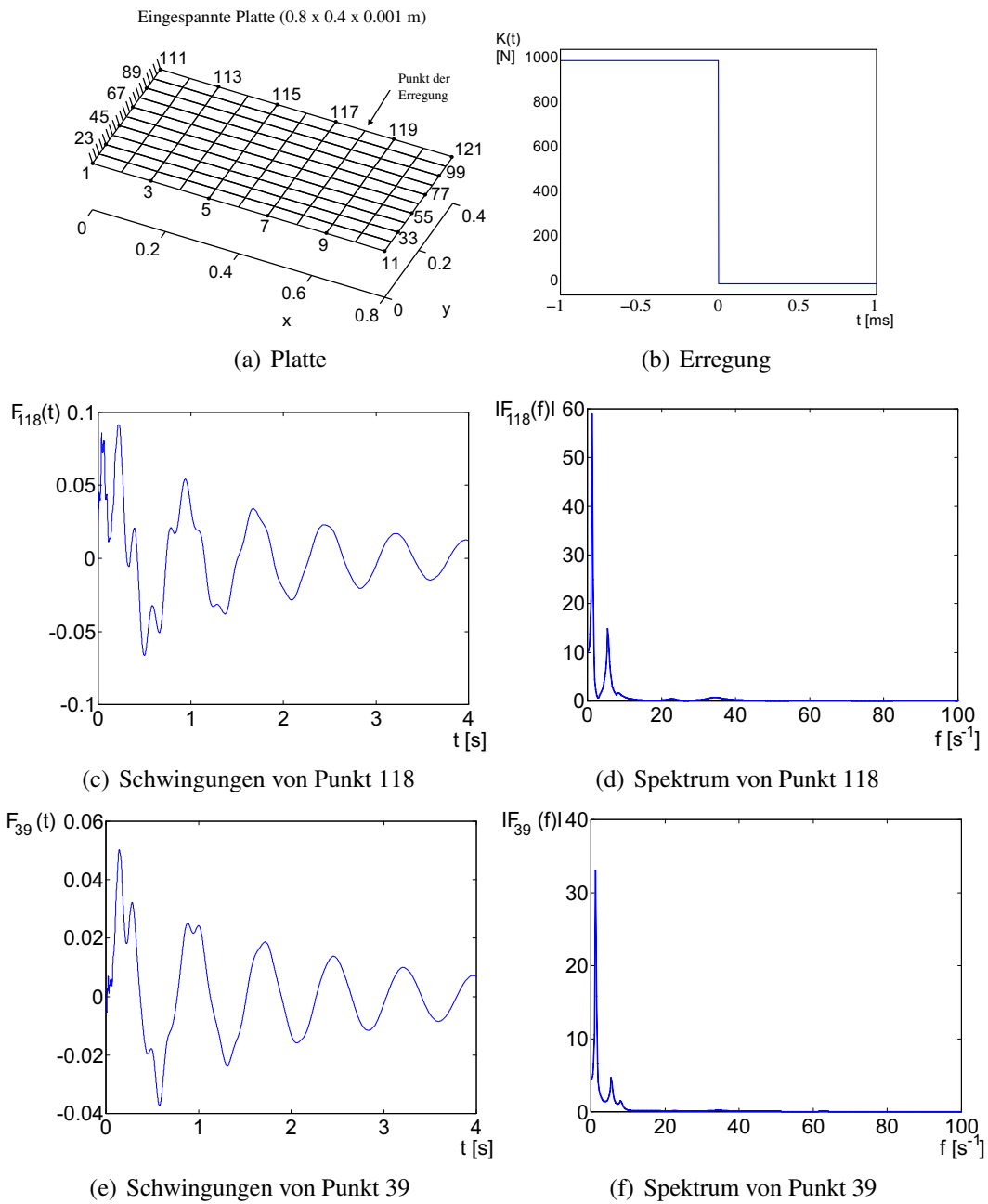
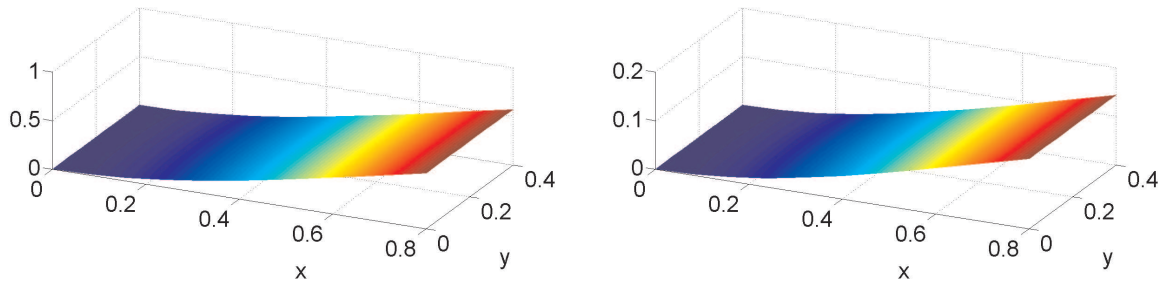
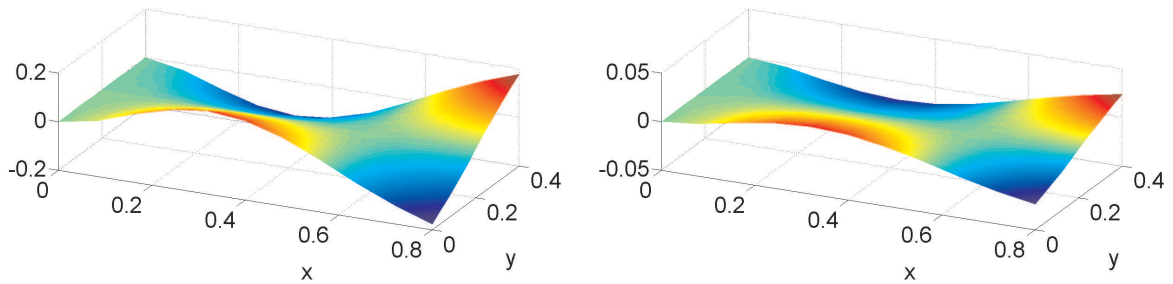


Abbildung 8: Finite Element Simulation einer eingespannten Platte und die Ergebnisse der Identifikation



(a) Erste Eigenform berechnet mit der finiten Element Methode (b) Erste Eigenform ermittelt mit der Subspace-Identifikation

Eigenfrequenz  $f_1 = 1.32255\text{Hz}$



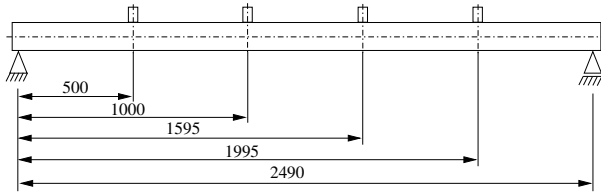
(c) Vierte Eigenform berechnet mit der finiten Element Methode (d) Vierte Eigenform ermittelt mit der Subspace-Identifikation

Eigenfrequenz  $f_4 = 18.0378\text{Hz}$

Abbildung 9: Eigenformen einer eingespannten Platte

Die nächstfolgenden Bilder (Abb. 10) beschreiben die gemessenen ersten drei Eigenformen eines realen Balkens, wie er im Foto abgebildet ist. Die Messung erfolgte mit Beschleunigungsaufnehmern. Die Abtastrate betrug  $\Delta t = \frac{1}{4096}$  und die Meßzeit  $T = 10\text{s}$ . Die Differenz der Amplituden der einzelnen Moden ergibt sich aus der Art der Impulserregung.

Position der Sensoren:



Mode	Frequency
1	11.66 Hz
2	46.64 Hz
3	104.93 Hz
4	186.77 Hz

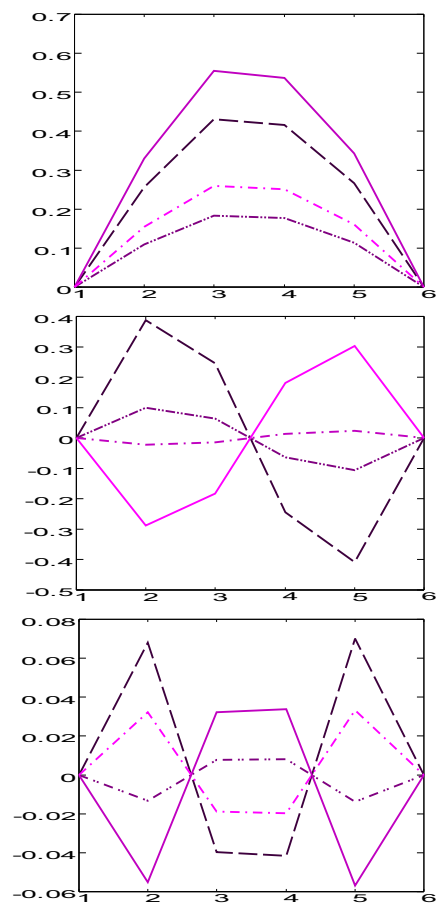
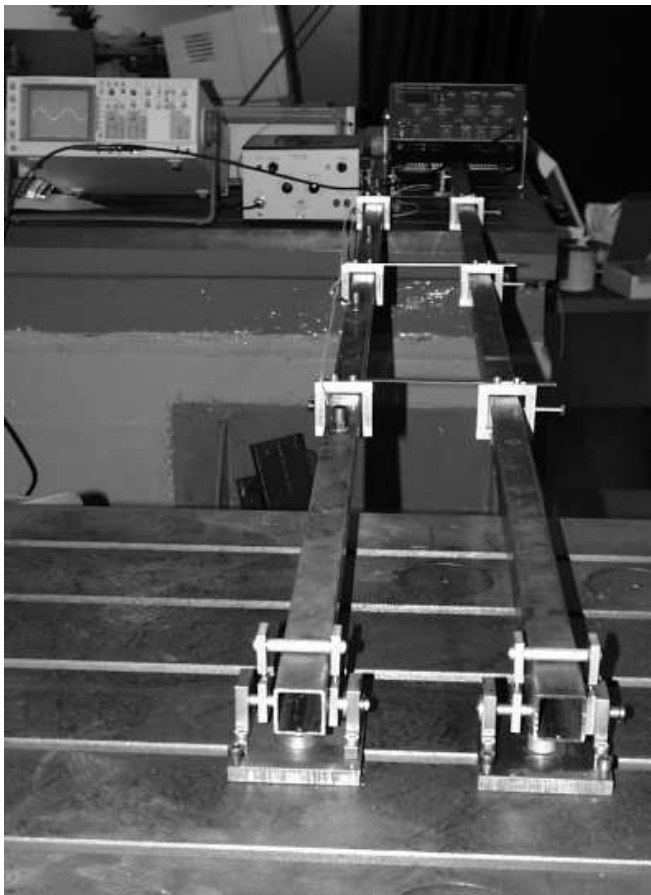


Abbildung 10: Versuchsaufbau und Identifikationsergebnisse

## 2.2 Schadenserkennung- und lokalisation von Bauwerken

Eine wichtige Anwendung des vorgeschlagenen Identifikationsverfahrens ist die Schadenserkennung bei Bauwerken. Dafür werden die dynamischen Eigenschaften des mechanischen Systems meist in modaler Formulierung benutzt. Die Grundidee ist dabei, die Unterschiede der Schwingungsparameter zwischen dem geschädigten und dem ungeschädigten System zu analysieren. Bei den folgenden Versuchen im Labor, an einer Brücke und einer Halle sind die Eigenfrequenzen als ein wichtiger Parameter bei der Identifikation betrachtet worden. Sie stellen zwar kein direktes Kriterium zur Schädigungslokalisierung dar, sind aber dennoch brauchbare Kennwerte. Erst durch die Änderung der Eigenfrequenzen ist eine grobe Abschätzung möglich, hieraus ersieht man, ob die zu vergleichenden Messungen überhaupt zueinander passen. Eigenformen werden von vielen Autoren als sensitive Parameter angesehen [9], durch sie ist es möglich, die Bewegungsform, die ein Objekt in seinen Eigenfrequenzen beschreibt, wiederzugeben. Schädigungen nehmen oft Einfluß auf die Form und somit auf die Orthogonalität untereinander, damit kann die Beurteilung der Orthogonalität der Eigenformen auch als Größe für eine vorliegende Systemveränderung brauchbar sein.

Zu beachten ist jedoch, daß die Orthogonalität nicht in jedem Fall gewahrt sein muß, insbesondere wenn die Aufnehmerposition zwischen Referenz- und Kontrollmessung nicht exakt übereinstimmen. Das gleiche Problem stellt sich beim *model updating*. Der Vergleich eines mit sehr vielen Freiheitsgraden versehenen FE-Modells und dem durch nur ‚wenige‘ Meß-Stellen gewonnenen Modells, ist mit einer ähnlichen Problematik versehen und in [1] beschrieben.

Ein zusätzlicher Informationsverlust muß hingenommen werden, wenn die Eigenformen, wie es in der Modalanalyse üblich ist, auf die Massen normiert werden. Damit gehen die Informationen über die Reaktion des Systems auf seine Eingänge verloren. Dieser Nachteil wird durch die bei [E1] erstmals verwendeten Einflußlinien kompensiert. Der Unterschied zwischen Eigenformen und Einflußlinien ist in [E10] dargestellt worden. Ein Vorteil der Subspace-Identifikation ist dabei die physikalische Wichtung der Eigenformen mit den Erregungen. Gewöhnlich benutzt man in der Modalanalyse eine Normalisierung mit der Massenmatrix

$$\mathbf{W}^T \mathbf{M} \mathbf{W} = \mathbf{I}. \quad (56)$$

Den Unterschied zwischen massennormierten und erregungsgewichteten Eigenformen findet man in Abbildung 11 und in den nachfolgenden Ausführungen. Die Eigenformen haben an Information verloren und eine Änderung des Erregerortes zeigt keine Unterschiede in der Systemreaktion.

Im Zusammenhang mit der Schadenserkennung ist es wichtig, geeignete Schädigungsindikatoren zu verwenden, die empfindlich genug sind Schädigungen aufzuzeigen. Es ergab sich, daß es günstig ist, eine Konstruktion an mehreren Stellen zu erregen. Die Reaktion zeigt stärkere Unterschiede, wenn die Erregung in der Nähe der geschädigten Stelle eingeleitet wird. Deshalb ist es sinnvoller, für die Schadensindikatoren dynamische Einflußzahlen zu definieren, als normale Eigenformen zu benutzen, welche bereits mit einer einzigen geeigneten Erregung (z.B. Schlag) ermittelt werden können.

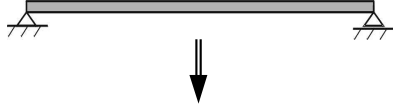
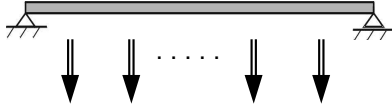
Unterschied zwischen Eigenformen und Einflusszahlen in der Modalanalyse		
	Eigenformen	Einflusszahlen
<b>Eingang</b>	$u = 0$	$u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_{n-1} \quad u_n \quad 0$
<b>System</b>		
<b>Ergebnis</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Eigenformen zu <math>i</math></li> </ul> $i = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$	<ul style="list-style-type: none"> <li>Einflusszahlen zu <math>i</math> von <math>u_i</math></li> </ul> $F_{dyn,i} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{bmatrix}$
<b>Normierung</b>	• über Masse	• über Intensität des Eingangs

Abbildung 11: Differenz zwischen Eigenformen und Einflußlinien in der Modalanalyse

Die Einflußlinien stellen eine Erweiterung der Eigenformen dar. Sie werden aus dem Frequenzgang gewonnen und haben den Vorteil, nicht normiert zu sein. Es werden die physikalischen Gegebenheiten durch ihre Amplituden wiedergegeben, sodaß die Reaktion des Systems auf verschiedene Eingangsintensitäten und -orte zu studieren ist.

Dieser Vorteil macht sich bei der Schädigungsdetektion bemerkbar, wenn die Reaktion des Systems im ungeschädigten Zustand, mit einem System im geschädigten Zustand verglichen wird. Dabei wurde beobachtet, daß bei einer Differenzbildung der Einflußlinien an den Stellen besonders große Differenzen oder Unsymmetrien auftraten, an denen Systemveränderungen vorlagen.

Mit den identifizierten Systemmatrizen **A**, **B** und **C** ergibt sich

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^t \mathbf{F}_{dyn,i} e^{\lambda_i(t-\sigma)} \mathbf{u}(\sigma) d\sigma. \quad (57)$$

Die Laplace-Transformation dieser Gleichung führt zum Ausdruck

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(s) &= \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_{dyn,i} \frac{1}{(s - \lambda_i)} \mathbf{u}(s) \\ &= \mathbf{H}(s) \mathbf{u}(s) \\ &= \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \mathbf{u}(s). \end{aligned} \quad (58)$$

Eine Approximation von  $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$  mit der Taylor-Reihe liefert den Zusammenhang von Gleichung

chung (15)

$$\mathbf{H}(s) = \frac{\mathbf{CIB}}{s} + \frac{\mathbf{CAB}}{s^2} + \dots + \frac{\mathbf{CA}^{i-1}\mathbf{B}}{s^i} + \dots \quad (59)$$

und nach einer Jordan-Transformation  $\{\mathbf{CT}, \mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT}, \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}\} = \{\tilde{\mathbf{C}}, \mathbf{I}, \tilde{\mathbf{B}}\}$  kann man jetzt für jede Eigenfrequenz ein dyadisches Produkt angeben

$$\mathbf{H}(s) = \sum_{i=1}^n \frac{\tilde{\mathbf{c}}_i \otimes \tilde{\mathbf{b}}_i^T}{(s - \lambda_i)} = \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{F}_{dyn,i}}{(s - \lambda_i)}. \quad (60)$$

$\mathbf{F}_{dyn}$  wird dynamische Einflußmatrix genannt, die Dimension beträgt  $p \times q$  – die Erregung wird an  $p$  Stellen eingeleitet und wird an  $q$  Punkten gemessen.  $\mathbf{F}_{dyn}$  enthält physikalisch gewichtete Eigenformen für jede der  $p$  Erregungen. Informationen über Systemveränderungen – hier Schäden – erhält man durch Vergleich der Messungen des Referenz- mit denen des geschädigten Systems.

$$\Delta\mathbf{F}_{dyn} = \mathbf{F}_{dyn,ref} - \mathbf{F}_{dyn,act}. \quad (61)$$

Beschränkt man sich nicht nur auf die Differenz der Einflußlinien sondern untersucht Abweichungen in der Symmetrie, so sind die Indikatoren bei einfachen Balkensystemen gut einzusetzen. Die Abhängigkeit von der Geometrie stellt jedoch eine Einschränkung dar, welche durch die Verwendung von allgemeineren Formulierungen umgangen werden kann. Um diese unabhängige Formulierung zu erhalten, ist ein Indikator gewählt worden, der ursprünglich aus dem Bereich des *finite element model updatings* stammt. Diese COMAC-Werte sind dann in abgewandelter Form, zur Schädigungsdetektion zu verwenden.

Da beim *updating* allerdings keine Einflußzahlen verwendet, sondern nur die auf die Masse normierten Eigenformen benutzt werden, war bisher keine Aussage über die Reaktion des Systems auf verschiedene Eingänge gegeben. Die Erweiterung der COMAC-Werte durch die dynamischen Einflußlinien hat den Vorteil, daß sie ihre Sensitivität gegenüber der Erregung behalten und gleichzeitig eine Geometrie unabhängige Aussage liefern. Dies stellt gleichzeitig eine Verbesserung der von [E1] verwendeten Differenzen der Einflußlinien dar.

Man erhält als Ergebnis für jede Meßstelle einen Indikator, der Werte zwischen 0 und 1 annehmen kann. Bei einer guten Übereinstimmung, im Falle eines ungeschädigten Systems, sind die Indikatoren alle nahe bei 1 und im Schadensfall fallen die Indikatoren, die der Schadenstelle sehr nahe sind gegenüber den anderen Indikatoren ab

$$\text{COMAC}(i) = \frac{\sum_l |(\hat{\mathbf{x}}_{ref,l}(i) \cdot \hat{\mathbf{x}}_{act,l}(i))|^2}{\sum_l (\hat{\mathbf{x}}_{ref,l}(i))^2 \cdot \sum_l (\hat{\mathbf{x}}_{act,l}(i))^2}. \quad (62)$$

$l$  repräsentiert alle identifizierten Frequenzen und

$i$  steht für die diskreten Meßpunkte

$\hat{\mathbf{x}}_{ref}$  Eigenform oder Einflußlinie des Referenzsystems

$\hat{\mathbf{x}}_{act}$  Eigenform oder Einflußlinie des Kontrollsystems



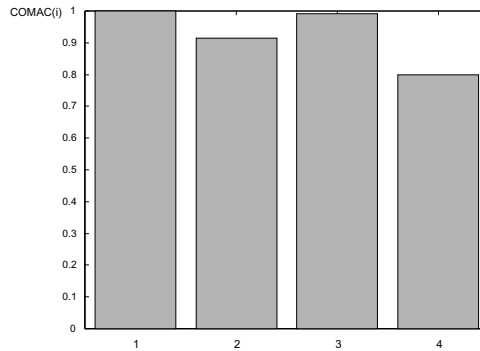


Abbildung 12: COMAC Werte

Um die Brauchbarkeit der Methode zu dokumentieren, werden einige ausgewählte Versuchsobjekte betrachtet.

Zunächst dient als primitivste Möglichkeit eine einfache Balkenstruktur im Labor als Beispiel. Die Laborrealisierung hatte den Vorteil, daß Fehler, welche durch den meßtechnischen Aufbau hervorgerufen werden, sich auf ein Minimum reduzieren liessen. Desweiteren bestand hierbei die Möglichkeit, verschiedenste Schadens- und Erregerszenarien kostengünstig zu simulieren.

Im weitem sind die Versuchsobjekte um eine Brücke erweitert worden, um die Erfolge, die sich bei der Untersuchung des Laborbalkens eingestellt haben, an einem großen balkenähnlichen Objekt zu bestätigen. Die Fußgängerbrücke an der Schloßallee in Lünen ist eine 80 m lange Brücke in Stahlbauweise und ruhiger Lage, welche die Lippe überspannt. Es standen noch weitere Brückenbauwerke zur Verfügung, an denen allerdings die Auswertung wegen unserer hochsensiblen Beschleunigungsaufnehmer schwierig gewesen wäre. Der dort vorhandene Verkehrslärm hätte sich als Meßrauschen wie bei einem Mikrofon auf die Messungen überlagert.

Bei der Untersuchung des Hallenrahmens stand die Eignung des neuen Algorithmus bei komplexeren Gebilden im Vordergrund. Da die Rahmenstruktur noch im Gebrauch ist, konnte sie verständlicherweise nicht geschädigt werden. Als Schadenssimulation ist der Rahmen mit einem Stahlseil abgespannt und mit dem Referenzmodell verglichen worden.

### 2.2.1 Laborbalken

Im ersten Beispiel wurde dem Laborbalken eine Steifigkeitsänderung durch einen Sägeschnitt zugefügt. Dieser entsprach einer Steifigkeitsänderung an der Schädigungsstelle von ca. 10%. Die entsprechenden Differenzen der Einflußlinien sind in der nachfolgenden Abbildung 13 für die Frequenz des Mode 2 dargestellt.

Es handelt sich um vier Differenzlinien der Einflußzahlen, weil vier Systemreaktionen durch Erregung an allen vier Sensorpositionen untersucht wurden, welche in einem Grafen zusammengefaßt sind. Dabei ist eine leichte Abweichung der Einflußlinie, die an Sensorposition vier erregt wurde, im Mode 2 zu verzeichnen.

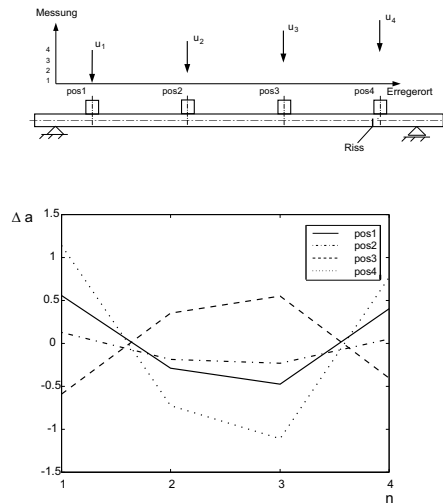


Abbildung 13: Differenz der Einflußzahlen bei Steifigkeitsänderungen im Mode 2

Als zusätzlicher Indikator sind in dieser Arbeit erstmals die COMAC-Werte benutzt worden, die als neue Variante bei der Lokalisation von Defekten zum Einsatz kamen. Wichtig ist bei dieser Betrachtung die Variation der Erregungspositionen, weil hierbei eine Zusatzinformation über den Ort der Schädigung gewonnen wird!

In Abbildung 14 sind deshalb die einzelnen Sensorpositionen 1 – 4 Aufgetragen. Jede Position wird in dem Blockdiagramm mit vier Balken, den einzelnen COMAC-Werten an den unterschiedlichen Erregerorten, beschrieben.

Die Reihenfolge der Balkengrafiken an den Sensorpositionen repräsentiert die Erregungsreihenfolge 1 – 4. Damit lassen sich durch die Abweichungen des Maximalwertes 1 der COMAC-Werte, Aussagen über den Ort der Schädigung tätigen. Es ist in diesem Beispiel der Steifigkeitsänderung an der Stelle 4 eine deutliche Abnahme des COMAC's festzustellen.

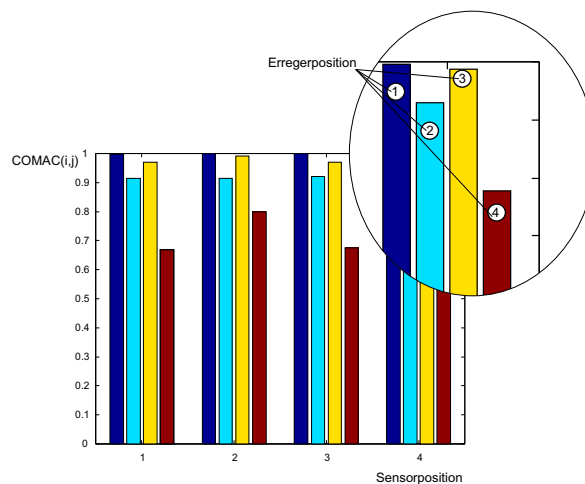


Abbildung 14: COMAC-Werte mit unterschiedlichen Erregungsstellen bei Steifigkeitsänderungen

Um die Eignung der Methode auch im Fall des Balkens für die Detektion von Masseveränderungen (Simulation von Systemänderungen) nachzuweisen, sind an dem Laborbalken Zusatzmassen angebracht worden. Das Gewicht dieser Massen war in dem hier betrachteten Fall  $< 2\%$  des Gesamtbalkengewichtes und wurde durch Magnetmassen realisiert.

Da die Zuordnung der Balkenformen sehr einfach zu erkennen war, gab es keine Schwierigkeiten bei der Auswahl der zu untersuchenden Einflußzahlen. Auch hier ist bei den von Mode 2 herrührenden Differenzen der Einflußzahlen, eine deutliche Abweichung in der zweiten Eigenform zu verzeichnen (Abbildung 15).

Die Untersuchung der COMAC-Werte bestätigte die zuvor schon gewonnenen Erfahrungen es reicht nicht, die von jeweils einer Erregerstelle abhängigen COMAC-Werte zu untersuchen, weil die Abweichungen an den einzelnen Knoten oder Freiheitsgraden keine Aussage über den Ort der Veränderung zulassen.

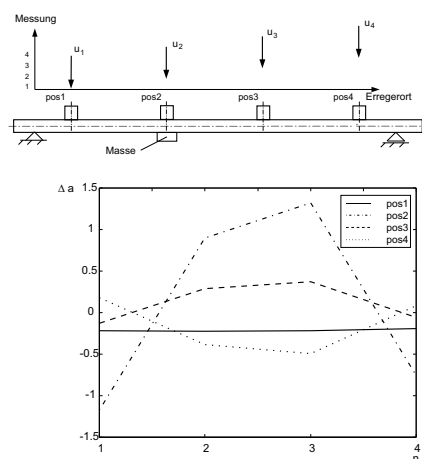


Abbildung 15: Differenz der Einflußzahlen bei Masseänderungen im Mode 2

Diese Anwendung der COMAC-Werte ist nur beim *model updating* von Bedeutung, wenn die Freiheitsgrade des FE-Modells mit den durch Messungen gewonnenen Werten verglichen werden, um die Modellgüte an den einzelnen Freiheitsgraden zu prüfen. In der Anwendung der Schädigungslokalisation wurde nur durch die Einbeziehung der Erregungsorte die Zusatzmasse am Sensor 2 bestätigt.

Die in den obigen Abschnitten simulierten Schäden sollten auch mit einer allgemeineren Erregung untersucht werden. Da im Fall der Impulserregung wenig Energie in das System gelangt, ist es schwierig wegen der vorhandenen Strukturdämpfung, die oberen Frequenzen in ihrem eingeschwungenen Zustand zu beobachten. Deshalb ist der Versuchsbalken mit einem Piezostapelaktor über eine Trägheitsmasse oder durch einen Schwingererger mit einer weichen Federkopplung an den einzelnen Sensorpositionen erregt worden.

Die erzielten Ergebnisse waren sehr positiv, weil sehr viel Energie vom System in Schwingungen gewandelt wurde. Bei niedrigeren Frequenzen lagen die Vorteile aufgrund des größeren

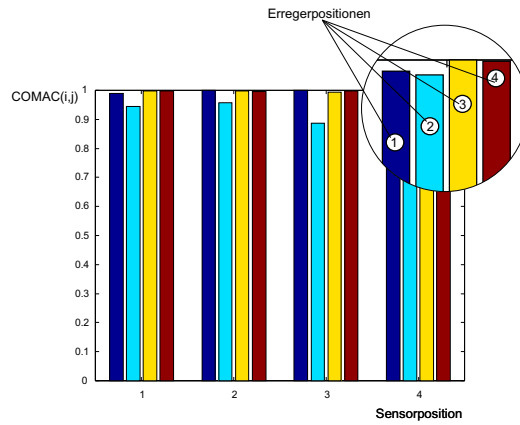


Abbildung 16: COMAC-Werte mit unterschiedlichen Erregungsorten bei Masseveränderungen

Stellweges beim Schwingerreger (Shaker), während bei den hohen Frequenzen ab  $100\text{ Hz}$  die kraftvolle Dynamik eines Piezostapelaktors mit Trägheitsmasse Vorteile aufwies.

Es zeigten sich die gleichen Ergebnisse wie bei den anderen Versuchen. Trotz der besser eingebrachten Energie ist noch keine Schädigung bei einer einzelnen Erregung zu erkennen gewesen, erst mit der Variation der Erregerposition ist dies auch in diesem Erregungsfall möglich. Die Abbildungen 17 und 18 zeigen die erzielten Resultate bei einer Zusatzmasse an der Position 1.

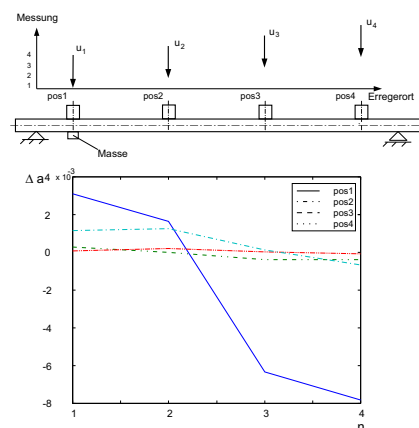


Abbildung 17: Sweeperregung und Masseänderungen im Mode 2

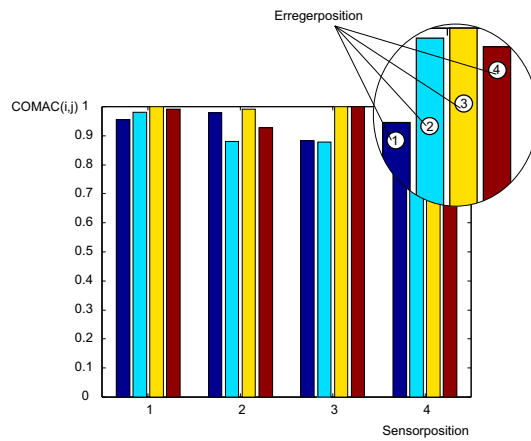


Abbildung 18: COMAC-Werte mit Sweep-Erregung

### 2.2.2 Die Brücke in Lünen

Bei der Untersuchung der Brücke sind acht Beschleunigungsaufnehmer gleichmäßig über die Brückenlänge verteilt und mit Magneten appliziert worden. Dabei ergab sich eine zusätzliche Schwierigkeit, da für die Energieversorgung ein Notstromagregat zum Einsatz kam, welches eine belastungsabhängige Drehzahlregulierung besaß. Die Einflüsse des Notstromagregates ließen sich in der Messung wiederfinden aber nicht durch entsprechende Filter vermeiden, weil sie direkt über das Netz in die Meßkette gelangt sind. Als Ausweg wurden die Meßwerte höher als nötig abgetastet, mit digitalen Filtern bereinigt und durch ein Resampling auf eine besser zu verarbeitende Größe gebracht.

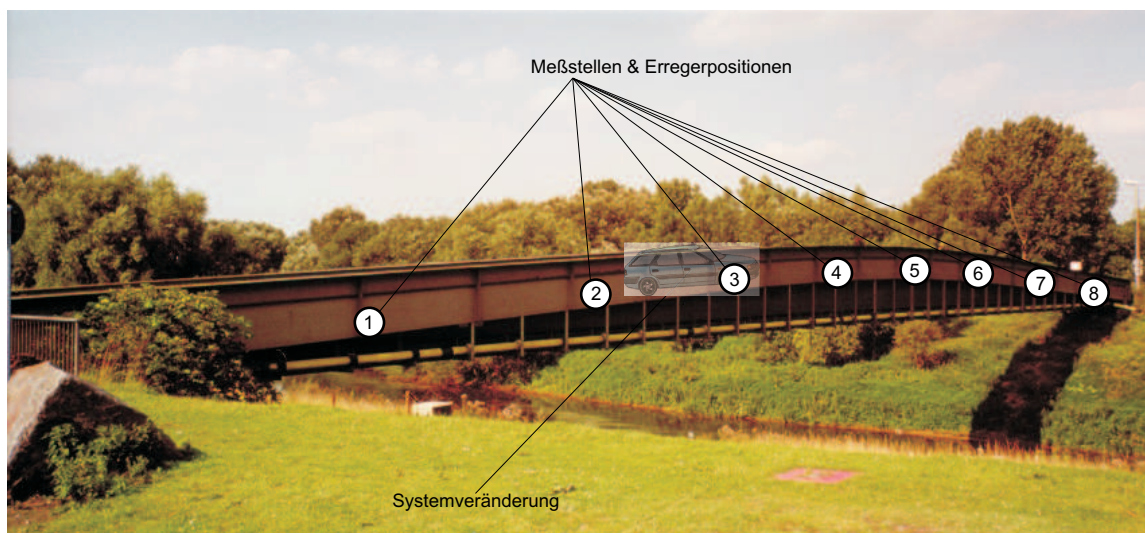
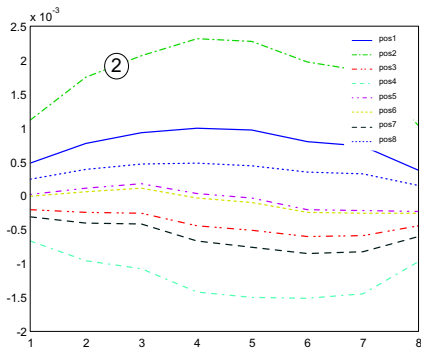
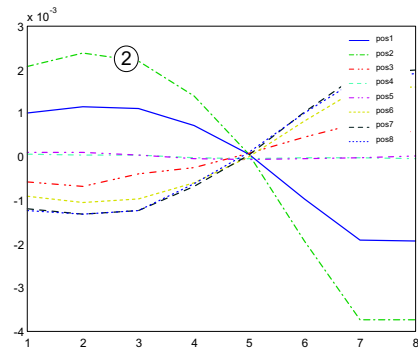


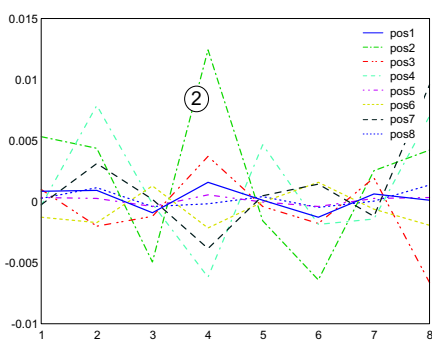
Abbildung 19: Die Fußgängerbrücke



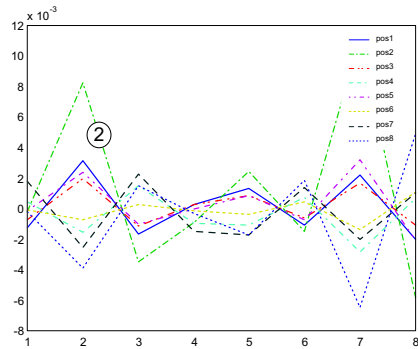
(a) Mode 1



(b) Mode 2



(c) Mode 3



(d) Mode 4

Abbildung 20: Differenzen der Einflußlinien

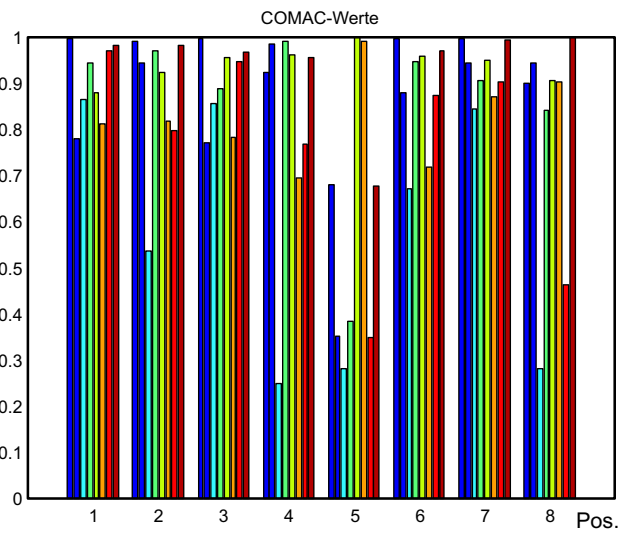


Abbildung 21: COMAC-Werte der Fußgängerbrücke

Ähnlich wie beim Laborbalken wurde eine Systemveränderung mit Zusatzmassen simuliert, dazu wurde ein PKW mit den Vorderrädern auf die Sensorposition drei plaziert, so daß er sich

zwischen den Sensoren zwei und drei befand. Neben den Effekten die durch das Notstromagregat hervorgerufen wurden, kam es bei der Auswertung zu einer weiteren Schwierigkeit. Da es nicht einfach ist, eine Struktur in der Größe der vorhandenen Brücke mit einem Impuls zu erregen und dann den eingeschwungenen Zustand zu ermitteln, traten Schwebungseffekte auf, die eine automatische Auswertung verhinderten.

Das Problem könnte durch eine geeignete Erregung mit einem Schwingerreger gelöst werden, da in diesem Fall beliebig viel Zeit für das Einschwingen vorhanden ist. Die erzielten Ergebnisse wären dann ähnlich deutlich wie im Fall der Balkensimulation mit Sweep. So zeigt die Auswertung, daß in den Abbildungen 20 und 21, die Systemveränderungen an den Stellen zwei und drei zu sehen ist.

### 2.2.3 Die Lagerhalle der DAR GmbH in Herten



Abbildung 22: Halle mit Sensorpositionen

Als weiteres Versuchsobjekt und Beispiel ist eine Lagerhalle in Herten ausgewählt worden.

Wie in den vorangegangenen Beispielen ist zur Detektion der Systemveränderungen eine Referenz- und eine Kontrollmessung durchgeführt worden. Zur Schädigungssimulation wurde ein Stahlseil über dem Aufnehmer zwei befestigt und dann diagonal zwischen den Aufnehmern sieben und acht abgespannt. Um einen besseren Eindruck über die Situation zu bekommen, ist für diese Messung ein FE-Modell angefertigt worden, das Aufschlüsse über die Veränderung der Schwingungen bringen sollte. Die Ergebnisse der FE-Berechnungen sind für die ersten sechs Moden in der Abbildung 24 dargestellt.

Die Betrachtung der Eigenformen in den beiden untersuchten Zuständen läßt keine großen Unterschiede erkennen. Deshalb ist die anschließende Untersuchung mit den dynamischen Einflußzahlen recht aufschlußreich.

Frequenzen		Frequenzen	
1	3.69825	1	5.93137
2	10.47922	2	10.60368
3	21.77536	3	21.81860
4	26.33450	4	27.03312
5	36.81657	5	37.51160
6	57.05178	6	57.07413
7	64.84389	7	64.83054
8	80.20222	8	80.16485
9	97.72134	9	97.71800
10	111.10070	10	111.13420

Tabelle 1: Gemessene Eigenfrequenzen ohne und mit Systemveränderung

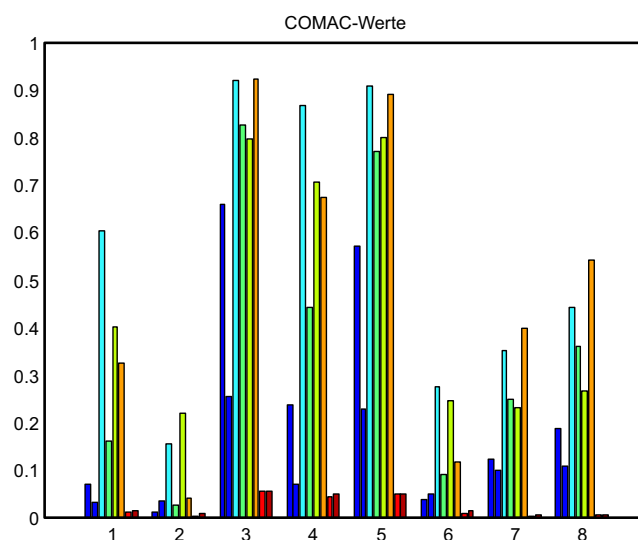


Abbildung 23: COMAC-Werte des Hallenrahmens



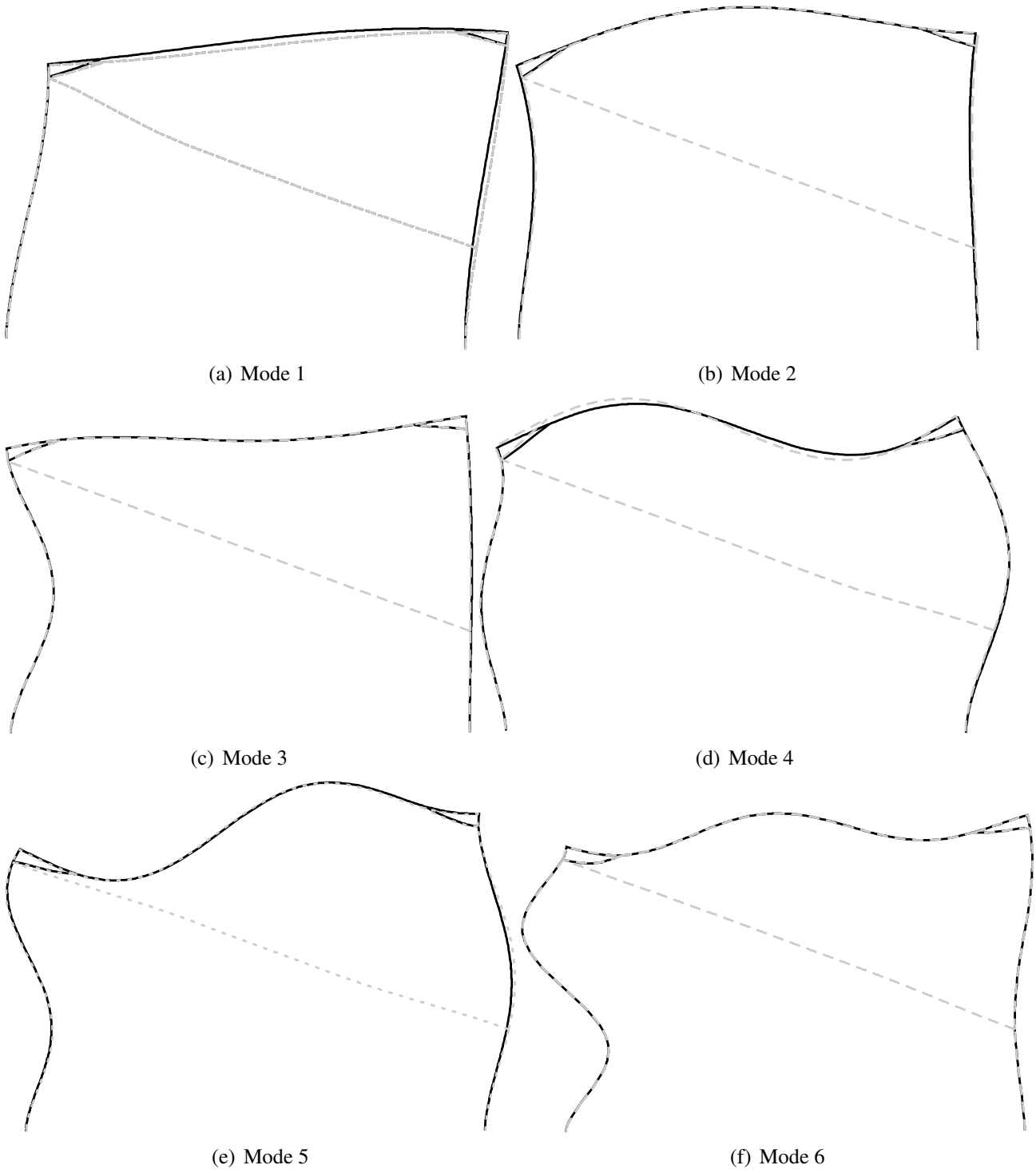
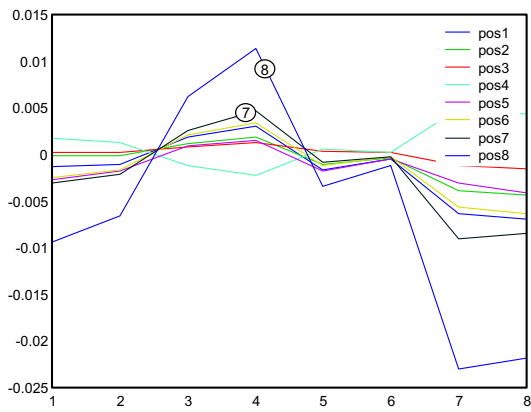
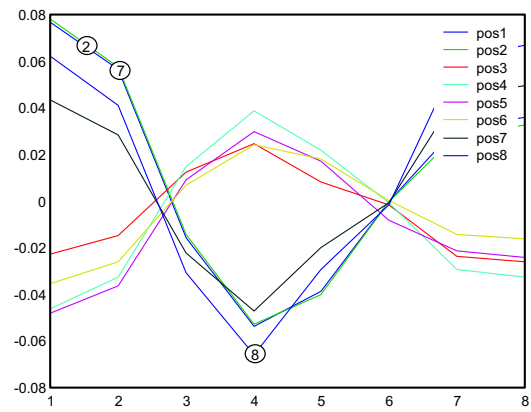


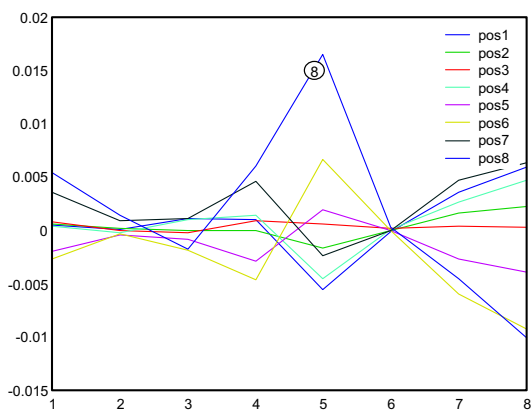
Abbildung 24: Eigenformen im Vergleich – mit und ohne Abspannung



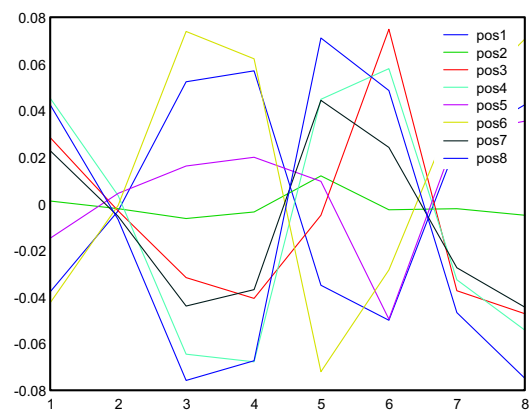
(a) Mode 1



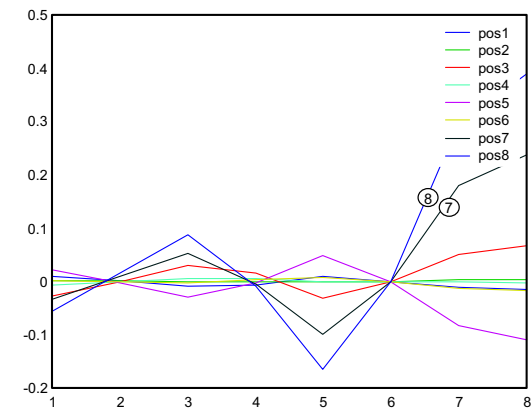
(b) Mode 2



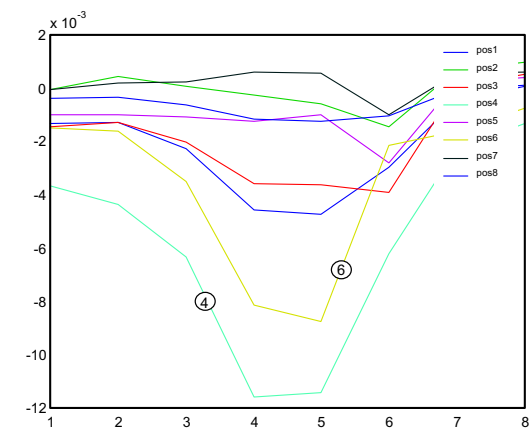
(c) Mode 3



(d) Mode 4



(e) Mode 5



(f) Mode 6

Abbildung 25: Differenz der Einflußlinien

Bei den Differenzen der dynamischen Einflußlinien sind zunächst keine eindeutigen Aussagen zu treffen, weil fast alle Sensorpositionen an den Stützen sich auffällig verhielten. Wobei ver-

stärkt die Differenzlinien hervortreten, welche in der Nähe der Abspannstellen zu finden sind, sodaß ein Trend durchaus verzeichnet werden kann (Abbildung 25).

Noch deutlicher war dies bei den COMAC-Werten zu beobachten, hier waren die Positionen zwei, sieben und acht deutlich von den anderen zu unterscheiden. Siehe dazu Abbildung 23.

### 2.3 Identifikation der Windbelastung als stochastischen Prozess, Kovarianzanalyse zur Lebensdauerabschätzung von mechanischen Strukturen

#### 2.3.1 Verifikation der stochastischen Modellbildung

Eine Simulation soll die stochastische Modellbildung verifizieren. Dazu ist eine mechanische Struktur als zwei Freiheitsgradsystem in die Zustandsraumdarstellung übertragen worden, siehe dazu Abbildung 26.

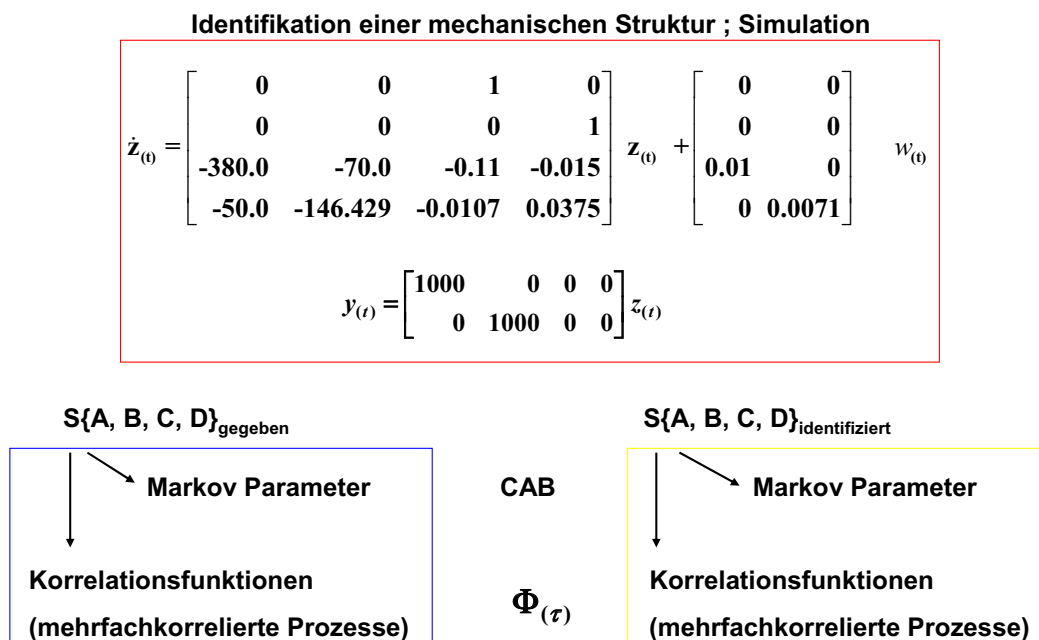


Abbildung 26: Identifikation eines mechanisches Modell über Korrelationsfunktionen

Auf der Grundlage von 100 simulierten Ausgangsmesszeitreihen infolge weißen Rauschen als Eingang in das mechanische Modell sind die Korrelationsfunktionen erzeugt worden, die anschließend gemittelt wurden. Auf Basis der gemittelten Korrelationsfunktion ist ein Zustandsraummodell realisiert worden.

Die Verifikation der Identifikation ist in Abbildung 27 an dem Vergleich von Markov Parametern und Korrelationsfunktionen dargestellt und zeigt gute Ergebnisse auf.

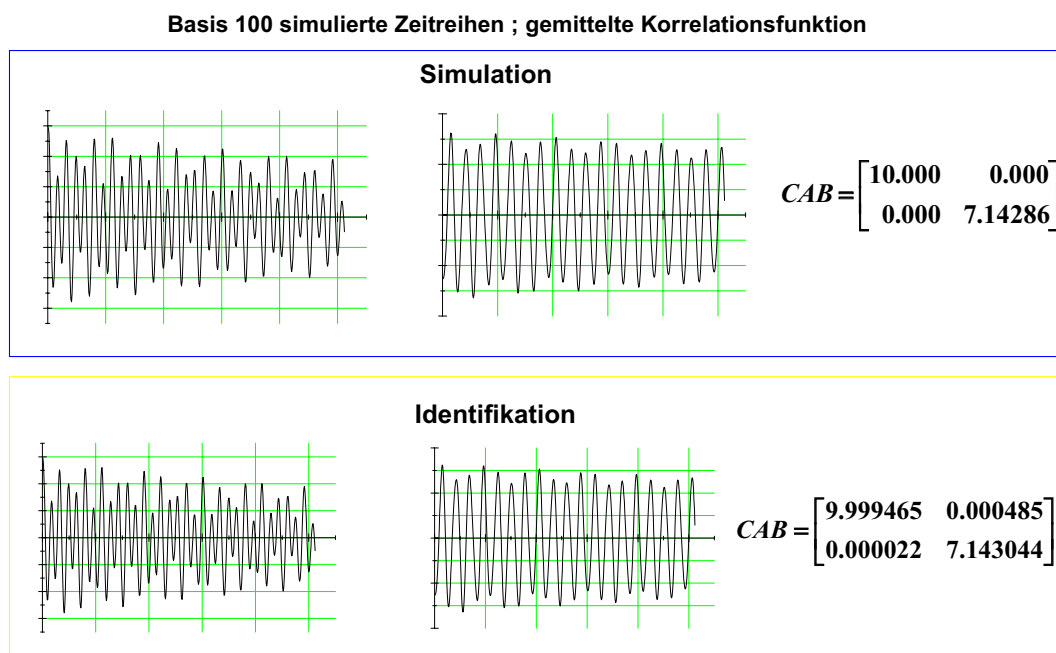


Abbildung 27: Ergebnisse der Simulation zur stochastischen Identifikation von Abb. 26

### 2.3.2 Identifikation der Windbelastung als stochastischen Prozess, Kovarianzanalyse

Als Beispiel für eine Modellbildung eines stochastischen Zustandsraummodells soll hier die Belastung eines hohen schlanken Bauwerkes infolge Wind dienen. Liegen Messdaten aus Windkanalversuchen oder reale Messreihen an Bauwerken vor kann die Windbelastung als farbiger stochastischer Prozess in Form eines Black box Modelles durch Rückführung auf weisses Rauschen identifiziert werden.

Reale Messreihen von Winddaten an dem 344 m hohen Mast in Gartow von [ 12 ] dienen zur beispielhaften Verifikation.

Wie in dem Simulationsbeispiel zuvor wurde das stochastische Modell für den Windprozess auf Grundlage der aus den Messdaten gemittelten Korrelationen erzeugt, siehe Abbildung 28.

Die Modellbildung erfolgte für eine Korrelationslänge von 40. Das mehrfachkorrelierte Modell wurde aus 8 Messkanälen, die über die Masthöhe verteilt waren, korreliert. Die Autokorrelation Kanal 1 mit 1 und die Kreuzkorrelation Kanal 1 mit 8 sind in Abbildung 28 beispielhaft gezeigt. Dargestellt sind die gemittelten Korrelationen der realen Messdaten ( grün ) und die aus dem Formfilter über simulierte Messreihen gemittelten Korrelationen ( rot ). Bis zur Korrelationslänge von 40, die als Information in die Hankelmatrix eingetragen wurde, ist die zuvor

beschriebenen stochastischen Modellierung zutreffend; größere Korrelationslängen optimieren das Ergebnis.

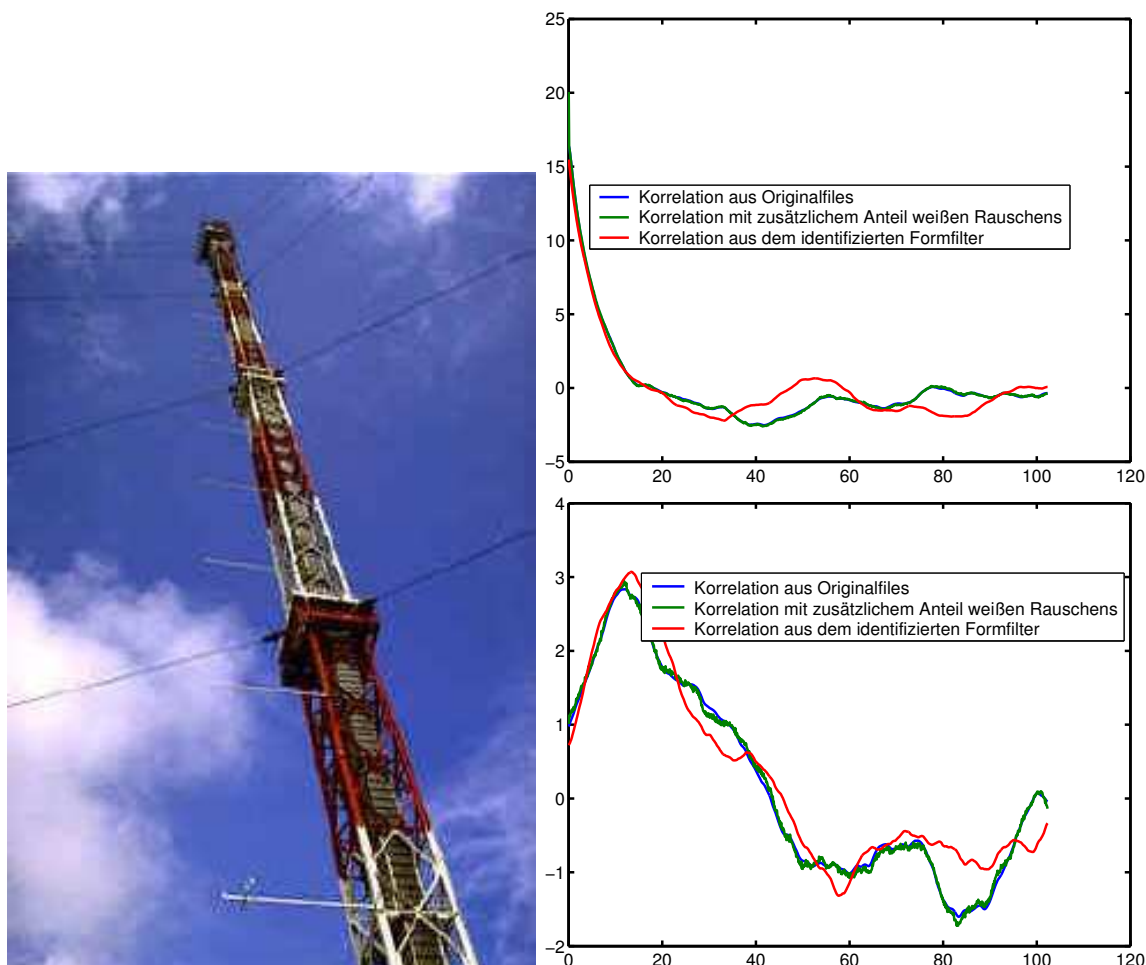


Abbildung 28: Mast Gartow, Bsp. realer u. simulierter Auto- und Kreuz- Korrelationen

### 2.3.3 Kovarianzanalyse, statistische Parameter einer mechanischen Struktur unter Windbelastung

Die Analyse von Bauwerken im Lebensdauerzyklus erfordert eine problemangepasste Modellbildung von mechanischer Struktur und Belastung. Beide Modelle müssen in gleicher mathematischer Güte vorliegen um zutreffende Berechnungsergebnisse zu liefern. Ist die mechanische Struktur z.B. als Zustandsraummodell beschrieben so kann die Modellbildung der dynamischen Belastung ebenfalls in Form eines solchen Modells erfolgen. Eine Reihenschaltung beider Modelle eins und zwei führt zu einem Gesamtzustandsraummodell, siehe Abbildungen 29 - 30.

### Formfilter aus gemessenem stochastischem Lastprozess / Kovarianzanalyse

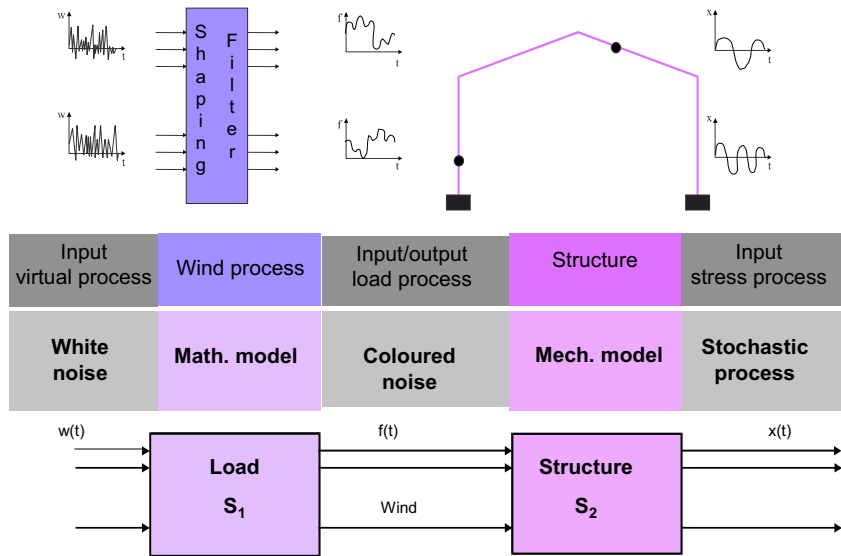


Abbildung 29: Reihenschaltung von mech. Struktur und Windprozess

### Identifiziertes mehrfachkorreliertes Lastprozessmodell gleichwertiges Belastungs- u. Strukturmechanik-Modell

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \ddot{x}_2 \\ \dot{z}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} & 0 \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D} & \mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}_1 \\ 0 & 0 & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ \dot{x}_2 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{B}_1 \end{bmatrix} w(t) \quad \mathbf{P}_{zz} = \int_0^\infty e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B} \mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T t} dt$$

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_2 \\ \dot{z}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_2 & \mathbf{X} \\ 0 & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_2 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{B}_1 \end{bmatrix} w(t) \quad \mathbf{A} \mathbf{P}_{zz} + \mathbf{P}_{zz} \mathbf{A}^T + \mathbf{B} \mathbf{B}^T = 0$$

$$\dot{z}_G = \mathbf{A}_G z_G + \mathbf{B}_G w(t)$$

#### Kovarianzanalyse

statistische Parameter zur Beschreibung des Antwortprozesses der mech. Struktur  
spektrale Momente, analytische Zählmethoden

Abbildung 30: Reihenschaltung von mech. Struktur und Belastungsprozess, Kovarianzanalyse

Über die Kovarianzanalyse dieses Gesamtmodells, die die Lösung der Ljapunov - Gleichung erfordert ( siehe Abbildung 30 ), können die statistischen Parameter wie Kovarianzen und spektrale Momente zur Beschreibung des Antwortprozesses der mechanischen Struktur bestimmt werden. Analytische Zählmethoden ermöglichen damit eine Lebensdauerbeurteilung der mechanischen Struktur [ E6, 14, 15, 17 ]

### 3. Zusammenfassung

Eine sehr effektive numerische Methode – die sogenannte Subspace-Methode – ist hier aus der Signaltheorie bzw. Systemtheorie für die Schwingungsanalyse aufbereitet worden. Für die Schadenserkennung und die Lebensdaueranalyse von grossen mechanischen Strukturen des Bauwesens wurde die deterministische und stochastische Modellbildung diskutiert und die Anwendung mit simulierten und realen Beispielen demonstriert bzw. verifiziert.

Es bleibt zu hoffen und zu wünschen, daß die Subspace-Methode bald größere Verbreitung erlangt.

**Anmerkung:** Abschließend soll der Deutschen - Forschungs - Gemeinschaft für die freundliche Förderung im SFB398 gedankt werden. Das fruchtbare kollegiale Arbeiten wurde als sehr angenehm empfunden.

### Anhang A: Singulärwertzerlegung

Die Singulärwertzerlegung ist ein numerischer Algorithmus, der die Zerlegung einer  $m \times n$  Matrix  $\mathbf{A}$  in zwei orthogonale Matrizen und eine Diagonalmatrix ermöglicht. Die Ursprünge der Singulärwertzerlegung gehen bis ungefähr 1873 zurück. Erst 1969 wurde von Businger und Golub ein stabiler Programmcode vorgestellt.

Es gilt also für  ${}^m_n \mathbf{A}$

$${}^m_n \mathbf{A} = {}^m_m \mathbf{U} {}^m_n \Sigma {}^n_n \mathbf{V}^*$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \sigma_r & & & \\ & & & 0 & & \\ 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{U}^* \mathbf{A} \mathbf{V}.$$

$\sigma_i$  sind die sogenannten Singulärwerte. Es gilt  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \dots \geq 0$ . Für reelle symmetrische Matrizen  $\mathbf{A}$  ist die Singulärwertzerlegung mit der Eigenwertzerlegung äquivalent.

Für die Rangbestimmung einer Matrix zählt man die von Null verschiedenen Singulärwerte ab. Eine Erweiterung der einfachen Singulärwertzerlegung ist die generalisierte Singulärwertzerlegung. Damit können zwei Matrizen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  gemeinsam zerlegt werden. Man unterscheidet die Produkt- und die Quotientensingulärwertzerlegung.

## 1. Produktsingulärwertzerlegung : ${}^m_n\mathbf{A}$ , ${}^n_p\mathbf{B}$

$${}^m_n\mathbf{A} = {}^m_m\mathbf{U}^* {}^m_n\alpha {}^n_n\mathbf{X}$$

$${}^n_p\mathbf{B} = {}^p_p\mathbf{V}^* {}^p_n\beta {}^n_n\mathbf{X}^{*-1}$$

mit

$$\alpha = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_r, \dots, \alpha_{r+s}, \dots, \alpha_k, 0)$$

$$\beta = \text{diag}(\beta_1, \dots, \beta_r, \dots, \beta_{r+s}, \dots, \beta_k, 0)$$

$\mathbf{X}$  invertierbar

und

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \sqrt{\sigma_i} & , & & \beta_i &= \sqrt{\sigma_i} & & i &= 1, \dots, r, \\ \alpha_i &= 1 & , & & \beta_i &= 0 & & i &= r+1, \dots, r+s, \\ \alpha_i &= 0 & , & & \beta_i &= 1 & & i &= r+s+1, \dots, k. \end{aligned}$$

## 2. Quotientensingulärwertzerlegung

$${}^m_n\mathbf{A} = {}^m_m\mathbf{U} {}^m_n\alpha {}^n_n\mathbf{X}^{-1}$$

$${}^n_p\mathbf{B} = {}^p_p\mathbf{V} {}^p_n\beta {}^n_n\mathbf{X}^{-1}$$

und

$$\begin{aligned} \alpha_i &= 1 & , & & \beta_i &= 0 & & i &= 1, \dots, r, \\ \alpha_i &< 1 & , & & \beta_i &> 0 & & i &= r+1, \dots, r+s, \\ \alpha_i &= 0 & , & & \beta_i &= 1 & & i &= r+s+1, \dots, k \\ & & & & \alpha_i^2 &+ \beta_i^2 &= & 1. \end{aligned}$$

## Literatur

- [1] Friswell, M.I., Mottershead, J.E.: *Finite Element Model Updating in Structural Dynamics*. Kluwer Academic Publishers, (1995).
- [2] G. Golub and C. Loan van. *Matrix Computations*. Johns Hopkins University Press, Baltimore London, 1989.
- [3] T. Kailath. *Linear Systems*. Prentice Hall, 1980.
- [4] R. E. Kalman. *Mathematical Description of Linear Dynamical Systems*. SIAM J. Control Vol. 1 No. 2, 1963.
- [5] S. Kung. *A New Identification and Model Reduction Algorithm Via Singular Value Decomposition*. 12<sup>th</sup> Asilomar Conference on Circuits, Systems and Computers, Nov. 1978, pp. 705-714.



- [6] J.-S. Lew, J.-N. Juang and R. W. Longman. *Comparison of Several System Identification Methods for Flexible Structures*. Journal of Sound and Vibration (1993), 167(3), pp. 461-480.
- [7] C. Loan van. *Generalizing the Singular Value Decomposition*. SIAM J. Num. Anal. Vol. 13 No. 1, March, 1976.
- [8] M. Moonen, B. DeMoor, L. Vandenberghe and J. Vandewalle. *On- and Off-line Identification of Linear State-Space Models*. International Journal of Control 49, pp. 219-232.
- [9] Natke, H.G.: *Einführung in die Theorie und Praxis der Zeitreihen- und Modalanalyse*. Vieweg Verlag, (1988).
- [10] Natke, H.G. and Cempel, C.: *Model Aided Diagnosis of Mechanical Systems*. Springer Verlag, Berlin 1997.
- [11] H. P. Zeiger and A. J. McEwen. *Approximate Linear Realizations of Given Dimensions Via Ho's Algorithm*. IEEE Transactions of Automatic Control, Vol. AC-19, No. 2, April 1974, pp. 153.
- [12] Peil U. und Telljohann G.: *Dynamisches Verhalten hoher Bauwerke im böigen Wind*. Stahlbau März 1997 Heft 3 S. 99 - 109, Ernst & Sohn Verlag.
- [13] Emmaneel M.: *Verifikation eines identifizierten, mehrfachkorrelierten Zustandsraummodells zur Abbildung stochastische Prozesse anhand von Simulationen und realen Messdaten*. Diplomarbeit März 2001, KIB Ruhr - Universität Bochum.
- [14] Goßmann E.: *Kovarianzanalyse mechanischer Zufallsschwingungen bei Darstellung mehrfach korrelierter Erregungen durch stochastische Differentialgleichungen*. Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik der RUB Heft 24, 1981.
- [15] Lenzen, A., Hartmann D. und Weber H.: *Prozessanalyse für die zuverlässigkeitsorientierte Optimierung*. GESA Warnemünde Mai 1999, VDI - Bericht 1463.
- [16] Peters B., De Roeck G.: *Reference - Based Stochastic Subspace Identification For Output - Only Modal Analysis*. Mechanical Systems and Signal Processing 1999 (13) p. 855 - 878, Academic Press.
- [17] Bouyssy V., Naboishikov S.M., Rackwitz R.: *Comparison of analytical counting methods for Gaussian processes*. Structural Safety 1993 (12) p. 35 - 57, Elsevier.
- [E1] Lenzen, A.: *Untersuchung von dynamischen Systemen mit der Singulärwertzerlegung. Erfassung von Strukturveränderungen*. Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik der RUB Heft 94, 1994.
- [E2] Lenzen, A. und Waller, H.: *Anwendung der Singulärwertzerlegung zur Schadenserkennung und -lokalisierung*. IV. Kolloquium Technische Diagnostik, Dresden, März 1996.
- [E3] Lenzen, A. und Waller, H.: *Numerische Modellierung von dynamischen Systemen aus Meßsignalen mit der verallgemeinerten Singulärwertzerlegung*. Tagung: Dynamische Probleme - Modellierung und Wirklichkeit im Oktober 1996, Curt-Risch Institut, Hannover.

- [E4] Lenzen, A. und Waller, H.: *New Developments in Systemidentification*. Ing. Archiv, 1996.
- [E5] Lenzen, A. und Waller, H.: *Identification Using the Algorithm of Singular Value Decomposition - An Application to Fault Detection and Localisation*. Mechanical Systems and Signal Processing, 1997.
- [E6] Kamarys, D., Lenzen, A. und Waller, H.: *Realisation of multicorrelated random excitations of structures*. Ed. Meskuuris und U. Witte, A.A. Balkuna Rotterdam/Brookfield 1997, Festschrift für Professor Krätzigs 65. Geburtstag.
- [E7] Kamarys, D. und Waller, H.: *Detektion von Strukturveränderungen mit Zustandsmodellen und der Singulärwertzerlegung*. Technische Diagnostik. Merseburg 1998.
- [E8] Kamarys, D. und Waller, H.: *Die Subspace Methode in der experimentellen Modalanalyse. Eine bessere Alternative zur Fourier Analyse*. Gesa VDI Tagung, Warnemünde 1999 – Anspruch und Tendenzen in der experimentellen Strukturmechanik, VDI Bericht Nr. 1463.
- [E9] Kamarys, D. und Waller, H.: *Experimentelle Schädigungslokalisation durch Subspace - Identifikationsverfahren in der Modalanalyse*. VDI - Schwingungstagung 2000, Kassel. VDI Bericht Nr. 1463.
- [E10] Kamarys, D.: *Detektion von Strukturveränderungen durch neue Identifikationsverfahren in der experimentellen Modalanalyse*. Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik der RUB Heft 119, Dezember 1999.
- [E11] Kamarys, D.: *Structural Identification using a Combination of Subspace Analysis and Block Sum Transformation*. Zur Veröffentlichung angenommen on Mechanical Sytsmes and Signal Processing.
- [E12] Kamarys, D.: *The Subspace Method, a Competition for the Fourier Analysis in Structural Dynamics*. Zur Veröffentlichung eingereicht bei Journal of Applied Mechanics.
- [E13] Xiao, H., Bruhns, O.T., Waller, H. und Meyers, A.: *An Input/Output-Based Procedure for Fully Evaluating and Monitoring Dynamic Properties of Structural Systems via Subspace Identification Method*. Zur Veröffentlichung angenommen: Journal of Sound and Vibration.
- [E14] Kamarys, D., Lenzen, A. und Waller, H.: *Damage Detection and Localisation with the Subspace Method*. International Conference on System Identification, September 2001, Kassel.