

Optimale Trassenführung: Diskretisierung – Splineapproximation – Variationsmethoden

A. Hommel und M. Richter

Ausgehend von mathematischen Überlegungen haben wir Modellansätze zur Bearbeitung eines speziellen Optimierungsproblems erarbeitet und erste numerische Tests durchgeführt. Wir formulieren das Problem zunächst als Variationsproblem und diskutieren einige Spezialfälle. Eine notwendige Bedingung, der die Lösungsfunktion genügen muß, ist die Euler-Lagrangesche Differentialgleichung. Mit Hilfe der Hamiltonschen Funktion ist es möglich, diese Differentialgleichung in kanonischer Form zu schreiben. Diese Formulierung erscheint für unsere praktischen Untersuchungen zunächst zu abstrakt. Durch die Arbeit mit problem-spezifischen Funktionen kann das Modell jedoch so weit konkretisiert werden, bis das System der kanonischen Gleichungen unmittelbar als Ausgangspunkt für numerische Untersuchungen betrachtet werden kann. Die noch freien Parameter werden mit Hilfe einer Richtungsableitung spezifiziert. Einige numerische Testbeispiele werden in der Arbeit vorgestellt und graphisch veranschaulicht.

1. Problemstellung

Eine Landkarte wird in Quadrate unterteilt, wobei jedes Quadrat mit einem Faktor zu bewerten ist. Dieser Wichtungsfaktor sei klein, wenn das Gebiet problemlos passierbar ist und entsprechend groß, wenn es sich um ein Naturschutzgebiet, einen See oder ein schwer befahrbares Gebiet handelt. Gesucht wird nach einer günstigen Verbindung vom Punkt A zum Punkt B , wobei die durch den Wichtungsfaktor gegebenen landschaftlichen Besonderheiten zu berücksichtigen sind.

Mathematische Formulierung: Wir wichten die Quadrate mit dem Faktor α_i , wobei gelten soll $\alpha_i \rightarrow \infty$ bei Naturschutzgebieten, Seen, Sümpfen... und $\alpha_i \rightarrow 0$ bei ebenen, problemlos durchfahrbaren Bereichen. Gesucht ist eine möglichst kurze Verbindung von A nach B unter der Nebenbedingung

$$\sum_{i \in Q_w} \alpha_i \rightarrow \min.$$

Dabei sind Q_w die Quadrate, die der Weg durchquert.

2. Das Variationsproblem und einige Spezialfälle

Wir betrachten das obige Problem in der xy -Ebene. In Anlehnung an die Definition der Bogenlänge untersuchen wir das Variationsproblem

$$J = \int_a^b F(x, y, y') dx \rightarrow \min \quad \text{mit} \quad F(x, y, y') = \alpha(x, y) \sqrt{1 + y'^2}. \quad (1)$$

Eine notwendige Bedingung, der die Lösung genügen muß, ist die Euler-Lagrangesche Differentialgleichung $F_y = \frac{d}{dx} F_{y'}$. Für das betrachtete Variationsproblem gilt

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} y' (1 + y'^2) + \alpha y'' = \frac{\partial \alpha}{\partial y} (1 + y'^2)^2.$$

Daraus ergibt sich im Spezialfall $\alpha(x, y) = c$ die Differentialgleichung $y'' = 0$ mit der Lösung $y = ax + b$, dem sogenannten Problem der kürzesten Linie.

Wir betrachten einige weitere Spezialfälle des obigen Variationsproblems:

- Auf dem Gebiet der geometrischen Optik wird das Fermatsche Prinzip genutzt. Dies besagt, daß in einem optischen Medium die Bahn des Lichtes zwischen zwei Punkten A und B mit derjenigen Kurve zusammenfällt, welche unter allen die Punkte A und B verbindenden Kurven die kleinste optische Länge hat. Dabei ist die optische Länge einer Kurve die Zeit, in der die Kurve bei einer Bewegung mit Lichtgeschwindigkeit durchlaufen wird.
- Das Problem der Brachistochrone (Johann Bernoulli 1696): Gesucht ist eine ebene Kurve, auf der der Massepunkt in kürzester Zeit aus der Ruhelage A nach B gleitet. Hier gilt

$$F = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}.$$

- Durch zwei in der xy -Ebene liegende Punkte $A(a, y_a)$ und $B(b, y_b)$ ist eine Kurve $y(x)$ so zu legen, daß die Fläche, die durch Drehung des Kurvenbogens um die x -Achse entsteht, ein Minimum wird. Dieses Problem wird mit Hilfe der Funktion $F = y\sqrt{1+y'^2}$ beschrieben.

3. Hamiltonsche Funktion

Wir gehen von der Funktion $y(x)$ über zur Parameterdarstellung $x_1(t)$ und $x_2(t)$ und schreiben das Problem (1) in der Form

$$J = \int_{t_1}^{t_2} \alpha(x_1, x_2) \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2} dt. \quad (2)$$

Eine Hamiltonsche Funktion besitzt folgende Eigenschaften:

- $H(x_1, x_2, y_1, y_2)$ sei mindestens zweimal stetig differenzierbar.
- Die partiellen Ableitungen H_{y_1} und H_{y_2} seien nicht gleichzeitig identisch Null.
- $H(x_1, x_2, F_{\dot{x}_1}, F_{\dot{x}_2}) \equiv 0$.

Ausgehend von (2) definieren wir

$$y_1 = F_{\dot{x}_1} = \alpha(x_1, x_2) \frac{\dot{x}_1}{\sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}} \quad \text{und} \quad y_2 = F_{\dot{x}_2} = \alpha(x_1, x_2) \frac{\dot{x}_2}{\sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}}.$$

Ist $\alpha(x_1, x_2)$ hinreichend glatt, so erfüllt die Funktion $2H = y_1^2 + y_2^2 - \alpha^2(x_1, x_2)$ alle Bedingungen, die an eine Hamiltonsche Funktion gestellt werden. Ferner gilt

$$F(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = \alpha(x_1, x_2) \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2} = \alpha(x_1, x_2) \frac{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}{\sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}} = F_{\dot{x}_1} \dot{x}_1 + F_{\dot{x}_2} \dot{x}_2 = y_1 \dot{x}_1 + y_2 \dot{x}_2.$$

Aus dem Ansatz $\dot{x}_1 = \lambda H_{y_1} = \lambda y_1$ und $\dot{x}_2 = \lambda H_{y_2} = \lambda y_2$ folgt $F(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = \lambda(y_1^2 + y_2^2) > 0$, wenn $\lambda > 0$. Da nur das Vorzeichen des Parameters λ von Interesse ist, kann $\lambda = 1$ gesetzt werden. Daraus ergeben sich die kanonischen Gleichungen

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= y_1 & \dot{y}_1 &= -H_{x_1} = \alpha(x_1, x_2) \frac{\partial \alpha(x_1, x_2)}{\partial x_1} \\ \dot{x}_2 &= y_2 & \dot{y}_2 &= -H_{x_2} = \alpha(x_1, x_2) \frac{\partial \alpha(x_1, x_2)}{\partial x_2}. \end{aligned}$$

4. Vereinfachung des Ausgangsmodells

Da die obigen kanonischen Gleichungen für unsere praktischen Untersuchungen zu allgemein erschienen, haben wir das Modell wie folgt vereinfacht:

Wir verwandeln die ursprüngliche Landschaft in eine „Berglandschaft“, wobei hohe Berge schwer passierbare Gebiete charakterisieren. Das einfachste Modell ist ein einzelner Berg, der mit Hilfe der Dichtefunktion einer zweidimensionalen Normalverteilung erzeugt werden soll. Wir setzen

$$\alpha(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

mit den von der Dichte der Normalverteilung bekannten Größen (μ_1, μ_2) zur Beschreibung der Koordinaten des Gipfelpunktes des Berges und (σ_1, σ_2) zur Charakterisierung der Form des Berges (ob steil oder flach) und dem Korrelationskoeffizienten ρ . Diese spezielle Wichtungsfunktion ist hinreichend glatt, so daß die in den kanonischen Gleichungen auftretenden Ableitungen problemlos berechnet werden können. Konkret sei $\rho=0$, $(\mu_1, \mu_2) = (0.25, 0.75)$ und $(\sigma_1, \sigma_2) = (0.25, 0.25)$. Die kanonischen Gleichungen haben in diesem Fall die Gestalt

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= y_1 & \dot{y}_1 &= \alpha^2(x_1, x_2)(-16x_1 + 4) \\ \dot{x}_2 &= y_2 & \dot{y}_2 &= \alpha^2(x_1, x_2)(-16x_2 + 12)\end{aligned}$$

und aus der Eigenschaft

$$2H(x_1, x_2, F_{x_1}, F_{x_2}) = 2H(x_1, x_2, y_1, y_2) = y_1^2 + y_2^2 - \alpha^2(x_1, x_2) = 0$$

der Hamiltonschen Funktion folgt $\dot{y}_1 = (-16x_1 + 4)(y_1^2 + y_2^2)$ und $\dot{y}_2 = (-16x_2 + 12)(y_1^2 + y_2^2)$.

4. Numerische Untersuchungen

Wir verbleiben beim Modell des Berges aus Abschnitt 4 und suchen nach einem günstigen Weg vom Anfangspunkt $A = (0.5, 0.3)$ zum Endpunkt $B = (b_1, b_2) = (0.9, 0.9)$ (vgl. Abbildung 1). Gelöst werden die kanonischen Gleichungen mit dem Runge-Kutta-Verfahren für kleine Wegabschnitte. Dazu sind Anfangsbedingungen für die Differentialgleichungen vorzugeben. Für $x_1(0)$ und $x_2(0)$ setzen wir stets die Koordinaten des bisher erreichten Punktes auf unserem Weg ein. Wir bezeichnen diesen Punkt mit $A^{act} = (a_1^{act}, a_2^{act})$ und bemerken, daß zu Beginn $A = A^{act}$ gilt. Die Wahl von $y_1(0)$ und $y_2(0)$ erweist sich als schwieriger. Wir versuchen, uns immer ein kleines Stück vom Punkt A^{act} in Richtung B zu bewegen. Aus der Punkt-Richtungs-Gleichung der Geraden

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^{act} \\ a_2^{act} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} b_1 - a_1^{act} \\ b_2 - a_2^{act} \end{pmatrix}$$

und der Eigenschaft der Hamiltonschen Funktion $\alpha^2(x_1^{act}, x_2^{act}) = y_1^2 + y_2^2$ bestimmen wir den Parameter t . (Momentan wird in der Lösungsformel der quadratischen Gleichung für t unter der Wurzel der Betrag gebildet, um komplexe Lösungen zu vermeiden. Praktisch bewährt sich diese heuristische Vorgehensweise deshalb, weil wir relativ kleine Wegabschnitte wählen.) Wir benutzen im weiteren eine der Lösungen der quadratischen Gleichung und bezeichnen diese mit t^{*act} . Als Anfangsbedingungen wählen wir $y_1(0) = a_1^{act} + t^{*act}(b_1 - a_1^{act})$ und $y_2(0) = a_2^{act} + t^{*act}(b_2 - a_2^{act})$. In unserem Beispiel werden 18 kleine Teilstrecken aneinander-

gefügt bis die Abbruchbedingung $|a_1^{act} - b_1| + |a_2^{act} - b_2| \leq 0.04$ erfüllt ist. Diese Teilstrecken sind charakterisiert durch die in Tabelle 1 angegebenen Koordinaten des Punktes A^{act} .

a_1^{act}	a_2^{act}	a_1^{act}	a_2^{act}
0.5	0.3	0.7718	0.4305
0.5183	0.3028	0.8075	0.4631
0.5387	0.3073	0.8432	0.5016
0.5611	0.3136	0.8778	0.5472
0.5855	0.3218	0.9095	0.6007
0.6119	0.3322	0.9358	0.6635
0.6404	0.3452	0.9525	0.7366
0.6708	0.3610	0.9519	0.8212
0.7030	0.3810	0.9130	0.9157
0.7368	0.4031		

Tabelle1 Charakterisierung der Wegstrecke im Beispiel 1
In Abbildung 1 ist der numerisch berechnete Weg graphisch dargestellt.

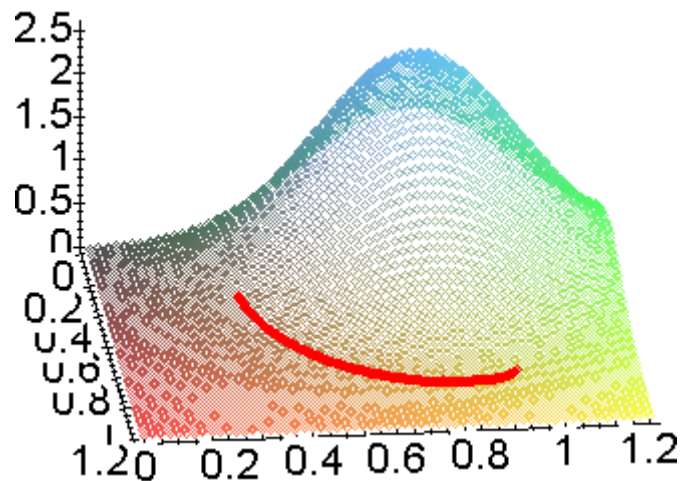


Abbildung 1: berechneter Weg von $A=(0.5,0.3)$ nach $B=(0.9,0.9)$

Der berechnete Weg für ein weiteres Testbeispiel ist in Abbildung 2 graphisch dargestellt. Der Weg unterteilt sich in 16 Teilstrecken.

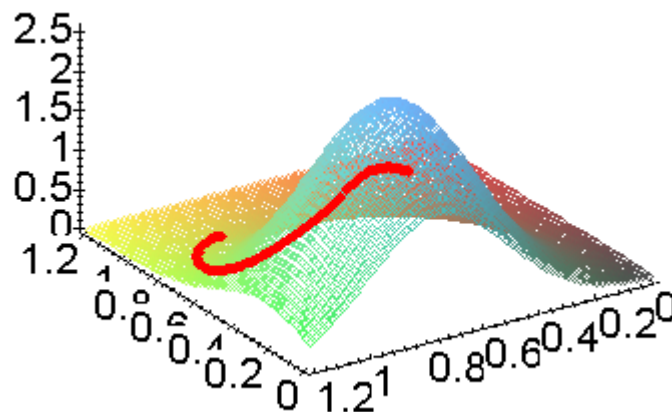


Abbildung 2: berechneter Weg von $A=(0.08,0.8)$ nach $B=(0.9,0.9)$

Das nächst kompliziertere Modell ist kein einzelner Berg, sondern zwei sich überlappende Berge. Auch für dieses Modell haben wir numerische Tests durchgeführt. Dazu simulieren wir zwei Berge mit den Gipfelpunkten $(2.0,2.0)$ und $(4.0,4.0)$ mit Hilfe der Funktion

$$\alpha(x_1, x_2) = e^{-(x_1-2.0)^2-(x_2-2.0)^2} + 2e^{-(x_1-4.0)^2-(x_2-4.0)^2}.$$

In den folgenden drei Abbildungen sind unterschiedliche numerisch berechnete Wege dargestellt. Diese Wege unterteilen sich in Abbildung 3 in 27 Teilabschnitte, in Abbildung 4 in 54 Abschnitte und in Abbildung 5 in 15 Abschnitte. Die Abbruchbedingung im ersten Beispiel lautet $|a_1^{act} - b_1| + |a_2^{act} - b_2| \leq 0.1$ und in den letzten beiden Beispielen $|a_1^{act} - b_1| + |a_2^{act} - b_2| \leq 0.2$.

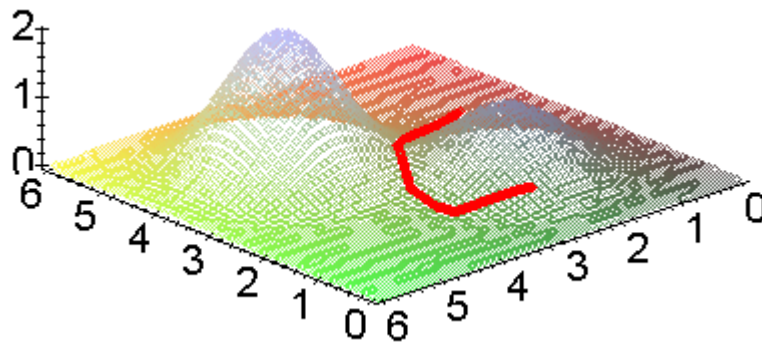


Abbildung 3: berechneter Weg von $A=(4.0,1.0)$ nach $B=(1.0,2.5)$

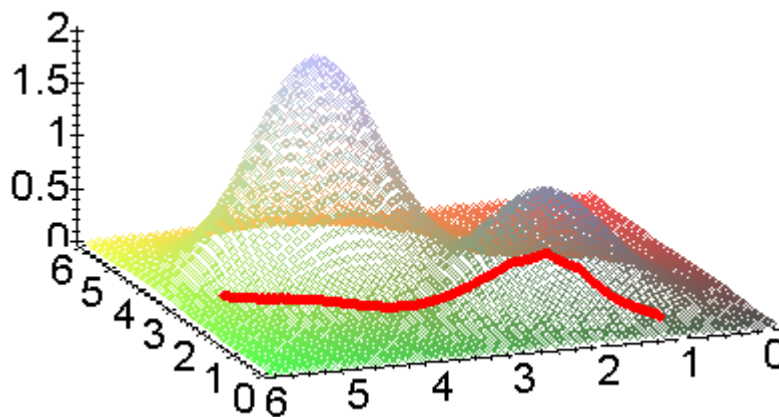


Abbildung 4: berechneter Weg von $A=(3.0,5.0)$ nach $B=(0.5,1.0)$

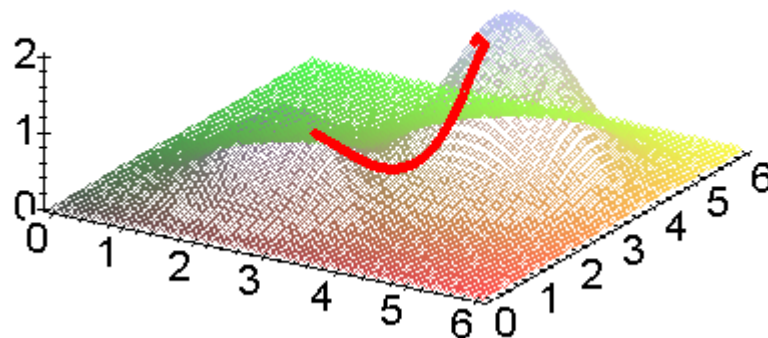


Abbildung 5: berechneter Weg von $A=(3.5,4.0)$ nach $B=(2.5,2.0)$

Abschließend soll ein Weg berechnet werden, der durch eine Schlucht führt. Dazu nutzen wir die Funktion

$$\alpha(x_1, x_2) = e^{-(x_1-2)^2 - (x_2-2)^2 - 1.5(x_1-2)(x_2-2)} + e^{-(x_1-4)^2 - (x_2-4)^2 - 1.5(x_1-4)(x_2-4)}.$$

Das numerische Ergebnis ist in Abbildung 6 graphisch dargestellt. Der Weg teilt sich in 31 Abschnitte und als Abbruchbedingung wurde gewählt $|a_1^{act} - b_1| + |a_2^{act} - b_2| \leq 0.1$.

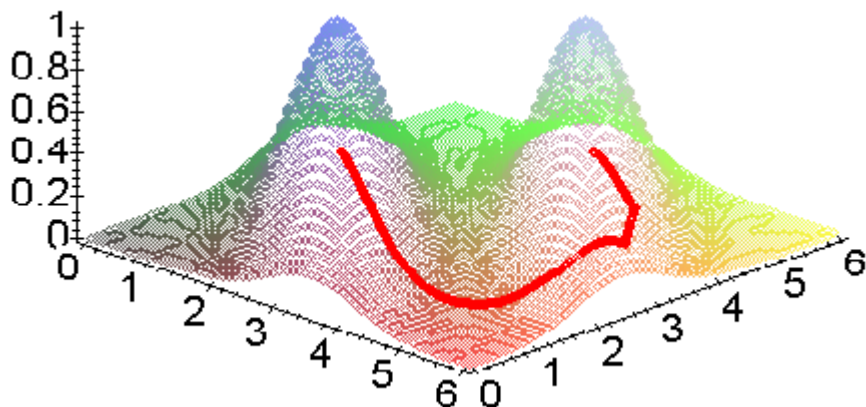


Tabelle 6: berechneter Weg von $A=(3.0,1.0)$ nach $B=(5.0,3.0)$

Abschließend sei bemerkt, daß bisher lediglich erste Tests zur Bearbeitung der eingangs vorgestellten Aufgabe durchgeführt wurden. Als Grundlage für die numerischen Berechnungen wurden einfache Modelle in Form eines einzelnen Berges, zweier sich überlappender Berge oder einer Schlucht herangezogen. Die Wahl der Wichtungsfunktion α erweist sich im Hinblick auf die Handhabbarkeit des Systems der kanonischen Gleichungen als günstig. Um tatsächlich praxisbezogene Probleme lösen zu können, ist im ersten Schritt ein erheblicher Modellierungsaufwand erforderlich, um territoriale Wichtungsfaktoren in eine solche Berglandschaft umzusetzen. Im Vergleich dazu wäre die Vorgabe eines Wichtungsfaktors für die in Quadrate unterteilte Landschaft wesentlich einfacher. Möglicherweise gibt es neben der hier vorgestellten Herangehensweise zur Bearbeitung des Problems, die auch von theoretischer Seite noch weiter abzusichern ist, auch die Variante der Arbeit mit Differenzenverfahren. Eine Diskretisierung des Problems erscheint zumindest im Hinblick auf die Unterteilung der Landschaft in einzelne Quadrate durchaus möglich.

Literatur

- [1] Burg;Haf,Wille: Höhere Mathematik für Ingenieure. Band III, Teubner Verlag 1993
- [2] C. Caratheodory: Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung. Teubner-Archiv zur Mathematik, Teubner Stuttgart-Leipzig 1994

Abschließend möchten wir Herrn Prof. L. Hempel sowie Herrn Dr. J. Petigk für ihre Anregungen und hilfreiche Unterstützung danken.