

Simultane Lösung gekoppelter Struktur-Fluid-Systeme aus dem Bereich des Bauingenieurwesens

Björn Hübner, Elmar Walhorn, Andreas Kölke und Dieter Dinkler

Institut für Statik, Technische Universität Braunschweig
Beethovenstraße 51, 38106 Braunschweig, Deutschland
Telefon: +49 (0)531 / 391-3667, Fax: +49 (0)531 / 391-8116, E-Mail: statik@tu-bs.de

1. Einleitung

Weitgespannte Brücken, hohe Masten und leichte Membran- oder Seilkonstruktionen können infolge Bauwerk-Wind-Wechselwirkungen einstürzen, wenn das gekoppelte dynamische System instabil wird, siehe [1]. Auch das Schwingungsverhalten flüssigkeitsgefüllter Tanks und der Wellenschlag auf elastische Tragwerke wird maßgeblich von Fluid-Struktur-Wechselwirkungen beeinflusst. Die Konstruktion und Bemessung der Tragwerke erfordert nach dem aktuellen Stand der Technik daher aufwendige experimentelle Untersuchungen. Numerische Simulationen der stark gekoppelten Systeme können die Kosten deutlich reduzieren und Entwicklungszeiten verkürzen. Voraussetzung ist die Formulierung und Diskretisierung geeigneter Modellgleichungen für Tragwerksdynamik, Strömung und Kopplung der Teilsysteme.

Die Entwicklung von effizienten und genauen Lösungsverfahren für komplexe Aufgabenstellungen mit Fluid-Struktur-Wechselwirkungen bleibt auch in nächster Zeit noch eine große Herausforderung für die Forschung im Bereich der numerischen Mechanik. Die Lösungsstrategien reichen von der schwachen Kopplung [2, 3] unterschiedlicher Löser über die starke Kopplung [4, 5] bis hin zur simultanen Lösung des gekoppelten Gesamtsystems [6, 7].

Hier wird ein simultanes Lösungsverfahren vorgestellt, das auf einer konsistenten Raum-Zeit-Diskretisierung der gekoppelten Modellgleichungen aufbaut und in einem objektorientierten Programmsystem implementiert ist. Das Berechnungsmodell besteht aus einer elastischen Struktur, die von einem instationären Strömungsfeld umgeben ist. Die Modellierung der Struktur erfolgt mit der geometrisch nichtlinearen Elastizitätstheorie in total Lagrangescher Formulierung und führt auf ein System nichtlinearer partieller Differentialgleichungen zur Beschreibung der Impulsbilanz, des Materialverhaltens und der Kinematik. Die Formulierung der Strömung erfolgt mit den Navier-Stokes-Gleichungen für inkompressible viskose Fluide. Der in einem zeitveränderlichen Gebiet definierte Gleichungssatz besteht aus den Bilanzgleichungen für die Masse und den Impuls. Ist das Strömungsverhalten maßgeblich von Turbulenzeffekten beeinflusst, so gelten die Modellgleichungen für gemittelte Beschreibungsvariablen, wobei zusätzliche Transportgleichungen für die Variablen des Turbulenzmodells, hier das k - ω -Turbulenzmodell nach Wilcox [8], hinzukommen. Bei Strömungen mit komplexen freien Oberflächen mit Tropfen- oder Hohlräum- und bei Zwei-Phasen-Strömungen wird zur Identifikation der Grenzfläche die Level-Set-Methode [9] eingesetzt, die eine zusätzliche Transportgleichung zur Beschreibung der Grenzflächenbewegung erfordert. Elemente, die von der Grenzfläche geschnitten werden, erhalten angereicherte Ansätze, um diskontinuierliche Verläufe der Gradienten zu erfassen. Bei der Kopplung von Struktur und Fluid sichern die Kopplungsbedingungen für Geschwindigkeiten und Randspannungen in Verbindung mit der Forderung nach geometrischer Kontinuität zwischen den Feldern die Erhaltung von Masse, Impuls und mechanischer Energie.

Die Verwendung von Geschwindigkeitsvariablen zur Formulierung der Modellgleichungen von Struktur und Fluid und die Anwendung der Raum-Zeit-Finite-Element-Methode [10, 11] auf beide Kontinua führt auf eine konsistente Diskretisierung des Gesamtsystems bei einheitlicher Behandlung von Raum und Zeit. Für die Strömung ermöglicht die Methode eine natürliche Beschreibung des infolge der Strukturbewegung veränderlichen Strömungsgebiets, da sich die räumliche Geometrie der isoparametrischen Raum-Zeit-Elemente im zeitlichen Verlauf ändern kann, siehe Abbildung 1. Auch erfüllt die Raum-Zeit-Formulierung automatisch das Raumerhaltungsgesetz, siehe [12].

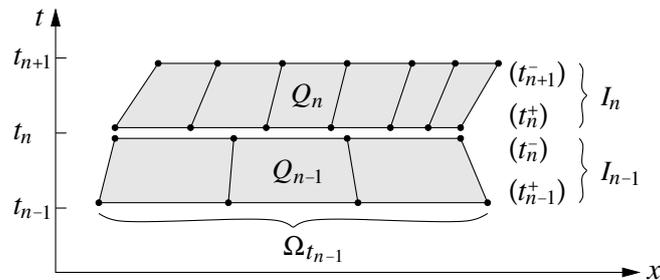


Abbildung 1: Bewegtes Raum-Zeit-Netz

Die Verwendung des diskontinuierlichen Galerkin-Verfahrens mit diskontinuierlichen Ansätzen in der Zeit, siehe Abbildung 2, führt auf eine implizite, A-stabile Zeitintegration [13], die bei linearen Ansatzfunktionen von dritter Ordnung genau ist.

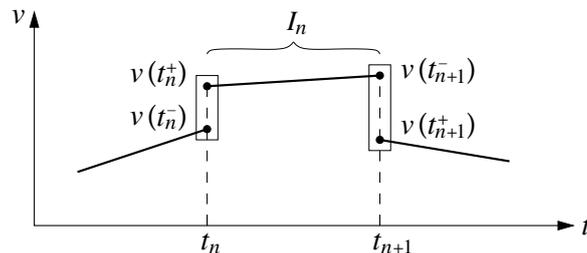


Abbildung 2: Zeitdiskontinuierlicher Ansatz

Die Stabilisierung der Raum-Zeit-Elemente [14] verhindert oszillierende Lösungen der hyperbolischen Differentialgleichungen und liefert auch bei Ansätzen gleicher Ordnung für Druck und Geschwindigkeit stabile Lösungen der Navier-Stokes-Gleichungen. Die gemischt-hybride Geschwindigkeits-Spannungs-Formulierung der Elastodynamik besitzt global nur Geschwindigkeitsvariablen, so daß eine direkte Kopplung mit den Fluidgeschwindigkeiten möglich ist. Die gewichtete Integralformulierung der Kopplungsbedingungen mit Randspannungsvariablen auf dem Interface sichert eine konservative Kopplung der Teilsysteme. Die Zusammenfassung der diskretisierten Modellgleichungen zu einem Gesamtgleichungssystem kann als Ausgangspunkt für mathematische Analysen des gekoppelten Systemverhaltens dienen.

2. Modellgleichungen

Bezüglich der lokalen Formulierung der Modellgleichungen von Fluid und Struktur sei auf die Arbeiten von Walhorn [6] und Hübner [7] verwiesen. Im folgenden werden nur die schwachen Formen angegeben, da diese die Basis für die Diskretisierung bilden.

2.1 Geometrisch nichtlineare Elastodynamik

Die Raum-Zeit-Finite-Element-Formulierung der geometrisch nichtlinearen Elastodynamik für die Raum-Zeit-Scheibe $Q_{0,n} = \Omega_0 \times I_n$ der Referenzkonfiguration mit dem Dirichlet-Rand $P_{0,n}^g = \Gamma_0^g \times I_n$ und dem Neumann-Rand $P_{0,n}^h = \Gamma_0^h \times I_n$ lautet in gemischt-hybrider Darstellung

$$\int_{Q_{0,n}} \delta \mathbf{v} \cdot \rho_0 \dot{\mathbf{v}} \, dQ_0 + \int_{Q_{0,n}} \dot{\mathbf{E}}(\delta \mathbf{v}, \mathbf{u}) \cdot \mathbf{S} \, dQ_0 - \int_{Q_{0,n}} \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_0 \, dQ_0 \quad (1a)$$

$$+ \sum_e \int_{Q_{0,n}^e} \delta \mathbf{S} \cdot (\underline{\mathbf{C}}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{S}} - \dot{\mathbf{E}}(\mathbf{v}, \mathbf{u})) \, dQ_0 \quad (b)$$

$$+ \int_{\Omega_0} \delta \mathbf{v}(t_n^+) \cdot \rho_0 (\mathbf{v}(t_n^+) - \mathbf{v}(t_n^-)) \, d\Omega_0 \quad (c)$$

$$+ \sum_e \int_{\Omega_0^e} \delta \mathbf{S}(t_n^+) \cdot \underline{\mathbf{C}}^{-1} \cdot (\mathbf{S}(t_n^+) - \mathbf{S}(t_n^-)) \, d\Omega_0 \quad (d)$$

$$+ \sum_e \int_{Q_{0,n}^e} \tau_{Imp}^S \cdot \delta \dot{\mathbf{v}} \cdot (\rho_0 \dot{\mathbf{v}} - \text{div}_0(\mathbf{F}\mathbf{S}) - \mathbf{f}_0) \, dQ_0 \quad (e)$$

$$- \int_{P_{0,n}^g} \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}_0 \, dP_0 + \int_{P_{0,n}^g} \delta \mathbf{t}_0 \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{g}) \, dP_0 \quad (f)$$

$$- \int_{P_{0,n}^h} \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{h}_0 \, dP_0 = 0 \quad \forall \delta \mathbf{v}, \delta \mathbf{S}, \delta \mathbf{t}_0. \quad (g)$$

Die numerische Lösung im Raum-Zeit-Gebiet Q_0 erfolgt durch sukzessive Auswertung von (1) für alle Zeitscheiben $Q_{0,0}, \dots, Q_{0,N-1}$ und beginnt mit den Anfangsbedingungen

$$\mathbf{v}(t_0^-) = \mathbf{v}_a \quad \text{und} \quad \mathbf{S}(t_0^-) = \mathbf{0} \quad \text{in} \quad \Omega_0. \quad (2)$$

Primale Variablen sind Geschwindigkeiten \mathbf{v} und Piola-Kirchhoff-II-Spannungen \mathbf{S} sowie die Randspannungen \mathbf{t}_0 auf dem Dirichlet-Rand. Die Verschiebungen am Ende der Zeitscheibe folgen durch Integration der Geschwindigkeiten über alle vorhergehenden Zeitscheiben

$$\mathbf{u}(t_{n+1}) = \sum_{i=0}^n \int_{I_i} \mathbf{v} \, dt \quad \text{in} \quad \Omega_0, \quad (3)$$

und die Verzerrungsgeschwindigkeiten $\dot{\mathbf{E}}$ in den Zeilen (a) und (b) von Gleichung (1) folgen aus der materiellen Zeitableitung des Greenschen Verzerrungstensors \mathbf{E} . Zeile (a) zeigt die nach Standard-Galerkin-Wichtung und partieller Integration folgende schwache Form der Impulsbilanz. In Zeile (b) folgt die Ratenformulierung der Materialgleichung nach Anwendung des Standard-Galerkin-Verfahrens. Die Sprungterme der zeitdiskontinuierlichen Formulierung der Geschwindigkeiten (c) und der Spannungskomponenten (d) erfüllen die Übergangsbedingungen zwischen den Zeitscheiben in integraler Form. Die für die Untersuchung von Wellenausbreitungsphänomenen erforderliche Petrov-Galerkin-Stabilisierung der Elemente in Zeile (e) erweitert die Standard-Galerkin-Wichtung der Impulsbilanz um den mit der Matrix der Stabilisierungsparameter τ_{Imp}^S multiplizierten Trägheitsterm der starken Form. Das erste Randintegral in Zeile (f) entsteht bei der partiellen Integration der Impulsbilanz und dient der Bestimmung der Randspannungen auf dem Dirichlet-Rand. Der zweite Term beinhaltet die mit der Randspannungsvariation gewichtete Integralformulierung der geometrischen Randbedingungen. Die letzte Zeile (g) berücksichtigt die auf dem Neumann-Rand eingprägten Randlasten \mathbf{h}_0 .

2.2 Strömungsmechanik inkompressibler viskoser Fluide

Die Raum-Zeit-Finite-Element-Formulierung der inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen für die Raum-Zeit-Scheibe $Q_n = \Omega_t \times I_n$ der Momentankonfiguration mit dem Dirichlet-Rand $P_n^g = \Gamma_t^g \times I_n$ und dem Neumann-Rand $P_n^h = \Gamma_t^h \times I_n$ lautet

$$\int_{Q_n} \delta \mathbf{v} \cdot \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad} \mathbf{v} \right) dQ + \int_{Q_n} \mathbf{D}(\delta \mathbf{v}) \cdot 2\mu \mathbf{D}(\mathbf{v}) dQ \quad (4a)$$

$$- \int_{Q_n} (\text{div} \delta \mathbf{v}) p dQ - \int_{Q_n} \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} dQ \quad (b)$$

$$+ \int_{Q_n} \delta p \text{div} \mathbf{v} dQ \quad (c)$$

$$+ \int_{\Omega_n} \delta \mathbf{v}(t_n^+) \cdot \rho (\mathbf{v}(t_n^+) - \mathbf{v}(t_n^-)) d\Omega \quad (d)$$

$$+ \sum_e \int_{Q_n^e} \tau_{Imp}^F \frac{1}{\rho} \mathcal{L}(\delta \mathbf{v}, \delta p) \cdot (\mathcal{L}(\mathbf{v}, p) - \mathbf{f}) dQ \quad (e)$$

$$+ \sum_e \int_{Q_n^e} \tau_{Kont}^F \rho (\text{div} \delta \mathbf{v}) \text{div} \mathbf{v} dQ \quad (f)$$

$$- \int_{P_n^g} \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} dP + \int_{P_n^g} \delta \mathbf{t} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{g}) dP \quad (g)$$

$$- \int_{P_n^h} \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{h} dP = 0 \quad \forall \delta \mathbf{v}, \delta p, \delta \mathbf{t}. \quad (h)$$

Die numerische Lösung im Raum-Zeit-Gebiet Q erfolgt durch sukzessive Auswertung von (4) für alle Zeitscheiben Q_0, \dots, Q_{N-1} und beginnt mit der Anfangsbedingung

$$\mathbf{v}(t_0^-) = \mathbf{v}_a \quad \text{mit} \quad \text{div} \mathbf{v}_a = 0 \quad \text{in} \quad \Omega_0. \quad (5)$$

In Gleichung (4) geben Zeilen (a) und (b) die durch Standard-Galerkin-Wichtung und anschließende partielle Integration entstandene schwache Form der Impulsbilanz an. Darin ist \mathbf{D} der Verzerrungsgeschwindigkeitstensor, p der Druck und \mathbf{f} das Eigengewicht des Fluids. In Zeile (c) folgt die Standard-Galerkin-Formulierung der Kontinuitätsgleichung, die in integraler Form die Inkompressibilität des Fluids erzwingt. Der Geschwindigkeitssprungterm in Zeile (d) erfüllt die Zeitscheibenübergangsbedingung der zeitdiskontinuierlichen Formulierung. Zeile (e) zeigt die Galerkin/Least-Squares-Stabilisierung der Impulsbilanz mit dem in Anlehnung an Tezduyar et al. [11] definierten Stabilisierungsparameter τ_{Imp}^F . Der nichtlineare Differentialoperator

$$\mathcal{L}(\mathbf{v}, p) = \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad} \mathbf{v} \right) - \text{div} (2\mu \mathbf{D}(\mathbf{v})) + \text{grad} p \quad (6)$$

gibt das Residuum der differentiellen Form der Impulsbilanz ohne Eigengewichtsanteil an. Die Galerkin/Least-Squares-Stabilisierung der Kontinuitätsgleichung mit dem Parameter τ_{Kont}^F folgt in Zeile (f). Das erste Randintegral in Zeile (g) entsteht bei der partiellen Integration der Impulsbilanz und dient der Bestimmung der Randspannungen auf dem Dirichlet-Rand. Der zweite Term beinhaltet die mit der Randspannungsvariation gewichtete Integralformulierung der geometrischen Randbedingungen. Die letzte Zeile (h) berücksichtigt auf dem Neumann-Rand eingepreßte Randspannungen \mathbf{h} .

2.3 Kopplungsbedingungen

Analog zu den Raum-Zeit-Finite-Element-Formulierungen der Randbedingungen von Struktur und Fluid folgt die gewichtete Integralformulierung der Kopplungsbedingungen auf dem Interface $P^c = P^F \cap P^S$, um die Kontinuität von Kraft- und Weggrößen sicherzustellen. Die diskrete Form der Kopplungsbedingungen

$$+ \int_{P_n^c} \delta \mathbf{t}^F \cdot (\mathbf{v}^F - \mathbf{v}^S) dP - \int_{P_n^c} \delta \mathbf{v}^F \cdot \mathbf{t}^F dP - \int_{P_{0,n}^c} \delta \mathbf{v}^S \cdot \left(-\frac{d\Gamma_t}{d\Gamma_0} \mathbf{t}^F \right) dP_0 \quad (7)$$

kann formal als Dirichlet-Randbedingung für das Fluid und als Neumann-Randbedingung für die Struktur angesehen werden. Die Interface-Spannungen \mathbf{t}^F , die durch den kinematischen Zwang hervorgerufene Reaktionskräfte beschreiben, sind als Fluidgrößen gekennzeichnet, da sich das Vorzeichen auf den äußeren Randnormalenvektor des Fluids bezieht, die Spannungskomponenten auf der Momentankonfiguration definiert sind und die Diskretisierung mit den Ansatzfunktionen der Strömung erfolgt.

3. Lösungsstrategien

Die Bewegung der elastischen Struktur führt zu bewegten Rändern des Strömungsgebiets, womit das FE-Netz der Strömung an die aktuelle Lage des Kopplungsrandes angepaßt werden muß. Da die Raum-Zeit-Formulierung die Vorgabe beliebiger Knotenverschiebungen erlaubt, kann der Rand des Strömungsnetzes mit der Struktur mitbewegt werden. Aber auch im Gebiet müssen die Knoten in geeigneter Weise verschoben werden, um überlappende Elemente zu verhindern. Hierzu wird das Strömungsgebiet als linear elastische Struktur mit einer zur Elementgröße inversen Steifigkeitsverteilung aufgefaßt, der die realen Strukturbewegungen auf dem Rand als Dirichlet-Bedingungen eingepreßt werden. Die daraus folgenden Knotenverschiebungen bestimmen die neuen Koordinaten des Strömungsnetzes.

Die Auswertung der Raum-Zeit-Finite-Element-Formulierungen von Struktur, Fluid und Kopplungsbedingungen führt auf das in Abbildung 3 gezeigte gekoppelte Gesamtgleichungssystem, das infolge nichtlinearer Kinematik der Struktur, konvektiver Strömung sowie unbekannter Netzbewegung stark nichtlinear ist. Das Gesamtsystem wird zusammen mit der Netzbewegung in nur einer Iterationsschleife simultan gelöst, siehe Abbildung 3. Die Auflösung der Nichtlinearitäten erfolgt mit einem fixpunktartigen Picard-Iterationsverfahren. Die vorgestellte Methodik zeigt in allen untersuchten Anwendungsbeispielen sehr gute Konvergenzeigenschaften.

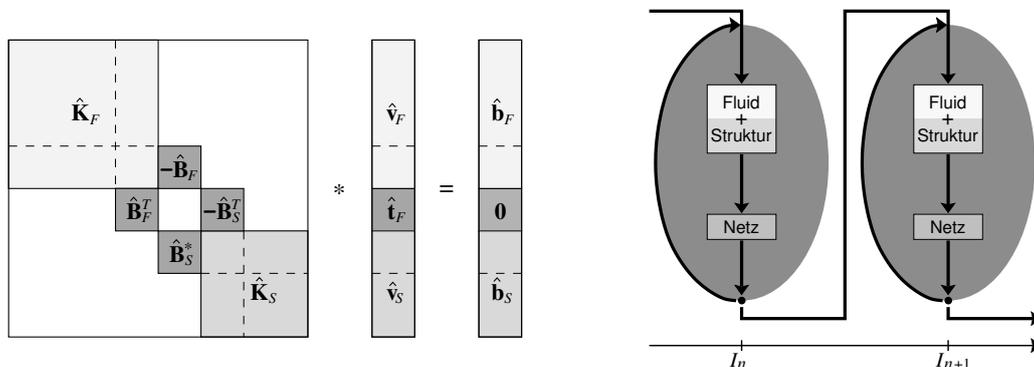


Abbildung 3: Gekoppeltes Gleichungssystem und simultane Lösung mit einer Iterationsschleife

4. Anwendungsbeispiele

Die folgenden numerischen Beispiele mit Bezug zum Bauingenieurwesen sollen die Leistungsfähigkeit des Berechnungsmodells belegen und mögliche Anwendungsgebiete aufzeigen.

Bei der Umströmung elastisch gelagerter Brückenquerschnitte ermöglichen numerische Simulationen die Untersuchung der Phänomenologie von Selbsterregungsmechanismen und die Identifikation von Ursachen für aeroelastische Instabilitäten. Die gleichförmige, laminare Anströmung eines federnd gelagerter H-Querschnitts bei einer Reynoldszahl von $Re = 1500$ führt nach einigen Wirbelablöseperioden zu einer angefachten Torsionsschwingung mit zunächst exponentiell und dann linear anwachsenden Verdrehungsamplituden, siehe Abbildung 4. Darin repräsentiert das auf den Querschnitt wirkende resultierende Moment der Fluidrandspannungen die zur Anregung des strukturellen Systems führende Einwirkung. Das Federmoment dagegen ist ein Maß für die Verdrehung des Querschnitts und beschreibt die Systemantwort.

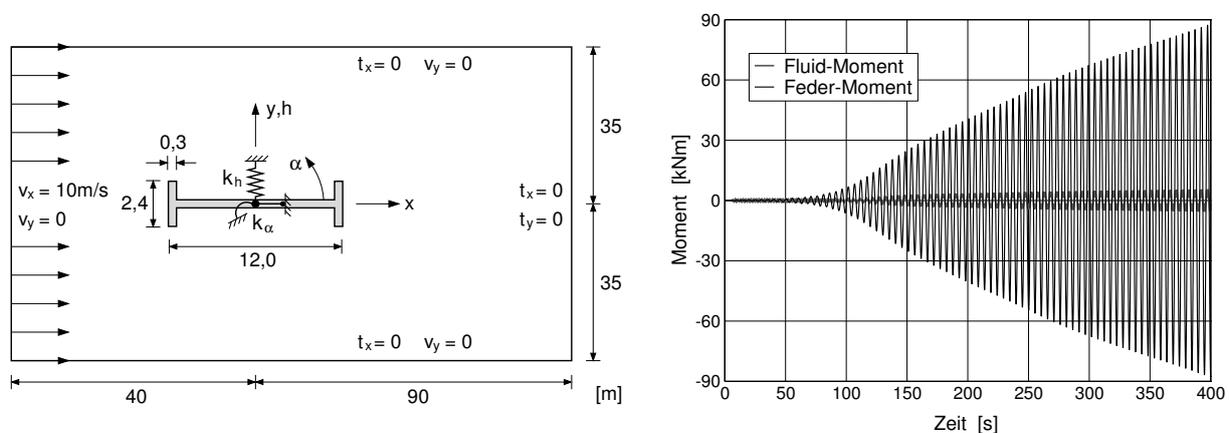


Abbildung 4: H-Querschnitt in laminarer Strömung, Zeitverläufe der Momente

Abbildung 5 zeigt die Geschwindigkeitsfelder der Strömung in Querschnittsnähe für eine halbe Periode der voll ausgebildeten gekoppelten Bewegung. Ein an der oberen Vorderkante des Querschnitts abgelöster Wirbel wandert über den Steg und verursacht dabei ein auf den Querschnitt wirkendes veränderliches Moment, da sich der horizontale Abstand zwischen Wirbel und Querschnittsschwerpunkt verändert. Wenn das Profil die horizontale Lage erreicht, befindet sich der Wirbel deutlich hinter dem Schwerpunkt und induziert ein in Richtung der Drehbewegung wirkendes Moment. Die Phasenverschiebung zwischen wirbelinduzierter Momenteneinwirkung und Querschnittsverdrehung führt zu einem Energietransfer von der Strömung in das Feder-Masse-System des Querschnitts und folglich zu einer angefachten Torsionsschwingung.

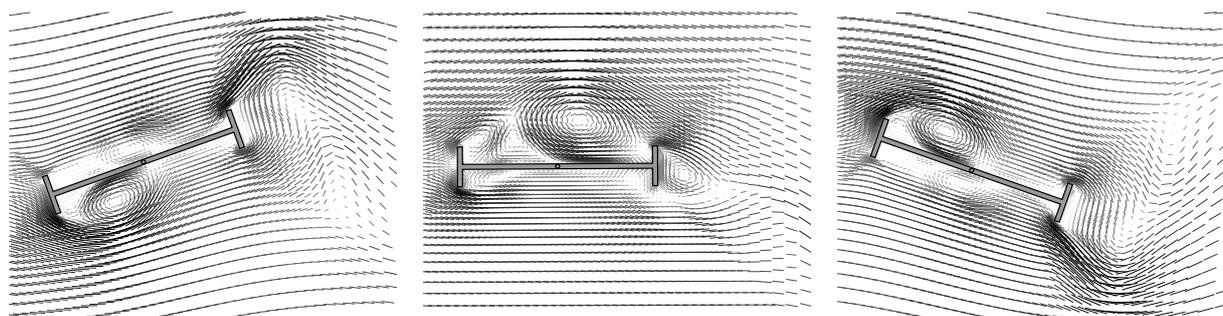


Abbildung 5: Geschwindigkeitsfelder für eine halbe Periode der angefachten Bewegung

Bei Membrantragwerken die nur durch das Eigengewicht vorgespannt sind kann das Zusammenwirken von Membranbewegung und gleichmäßiger Windanströmung zu selbsterregten Flatterschwingungen großer Amplituden führen. Die stark nichtlinearen Membranschwingungen, bei denen ein ständiges Durchschlagen der Membran auftritt, können erheblichen Lärm verursachen und auch Materialermüdung zur Folge haben. Abbildung 6 zeigt die Druckfelder der Strömung mit dem verformten Membrandach eines umströmten Gebäudes bei einer Reynoldszahl von $Re = 1700$. Im Gegensatz zum Fall eines starren Daches, bei dem oberhalb des Gebäudes eine Ablöseblase entsteht, bilden sich bei dem gekoppelten System hinter der Vorderkante Wirbel aus, die über das Dach wandern und zu einer Anregung der Membran führen. Rückwirkend ist die Membranbewegung wieder für die Bildung neuer Wirbel verantwortlich.

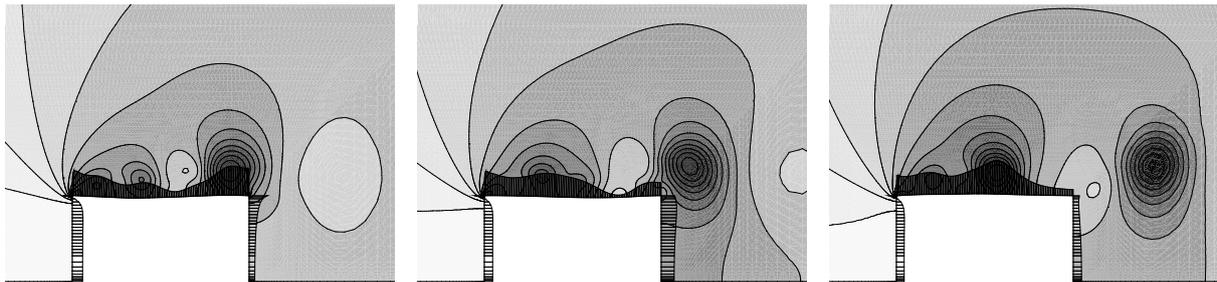


Abbildung 6: Druckfelder der Strömung mit schwingender Membran

Infolge der stark nichtlinearen Kinematik der Membran, deren Steifigkeit beim Durchschlagen fast verschwindet, und des nichtlinearen Strömungsverhaltens bildet sich kein periodischer Zustand aus. Jedoch sind in allen Bewegungszyklen ähnliche Schwingungsformen zu beobachten. Abbildung 7 zeigt einige Momentaufnahmen der Membran mit 10-fach überhöhter Verformung.

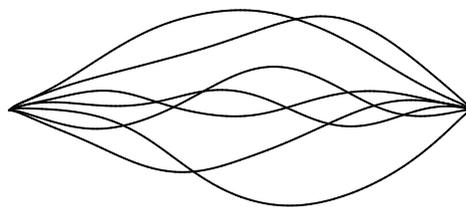


Abbildung 7: Momentaufnahmen der verformten Membran (10-fach überhöht)

Wenn sich nach einem Dammbbruch eine Fluidwelle ausbreitet und auf eine elastische Wand trifft kann der Wellenschlag große Verformungen der Wand verursachen, die rückwirkend die Ausbreitung des Fluids stark beeinflussen, siehe Abbildung 8.

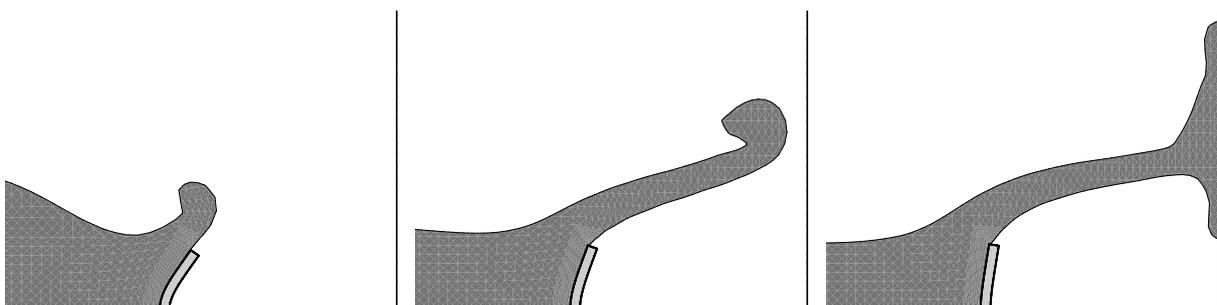


Abbildung 8: Wellenschlag auf eine elastische Wand

Literatur

- [1] E. Simiu and R. H. Scanlan: *Wind Effects on Structures. Fundamentals and Applications to Design*. John Wiley & Sons, New York, 1996.
- [2] R. Löhner, C. Yang, J. Cebral, J. D. Baum, H. Luo, D. Pelessone and C. Charman: *Fluid-structure interaction using a loose coupling algorithm and adaptive unstructured grids*. In M. Hafez and K. Oshima, editors, *Computational Fluid Dynamics Review 1995*. John Wiley & Sons, Chichester, 1995.
- [3] W. A. Wall: *Fluid-Struktur-Interaktion mit stabilisierten Finiten Elementen*. Dissertation, Universität Stuttgart, 1999.
- [4] D. P. Mok: *Partitionierte Lösungsansätze in der Strukturdynamik und der Fluid-Struktur-Interaktion*. Dissertation, Universität Stuttgart, 2001.
- [5] J. Steindorf: *Partitionierte Verfahren für Probleme der Fluid-Struktur-Wechselwirkung*. Dissertation, TU Braunschweig, 2002.
- [6] E. Walhorn: *Ein simultanes Berechnungsverfahren für Fluid-Struktur-Wechselwirkungen mit finiten Raum-Zeit-Elementen*. Dissertation, TU Braunschweig, 2002.
- [7] B. Hübner: *Simultane Analyse von Bauwerk-Wind-Wechselwirkungen*. Dissertation, TU Braunschweig, 2003.
- [8] D. C. Wilcox: *Turbulence Modeling for CFD*. DCW Industries, La Cañada, 1998.
- [9] S. Osher and R. Fedkiw: *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces*. Springer, New York, 2003.
- [10] T. J. R. Hughes and G. M. Hulbert: *Space-time finite element methods for elastodynamics: Formulations and error estimates*. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 66, 339-363, 1988.
- [11] T. E. Tezduyar, M. Behr and J. Liou: *A new strategy for finite element computations involving moving boundaries and interfaces – The deforming-spatial-domain / space-time procedure: I. The concept and the preliminary numerical tests*. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 94, 339-351, 1992.
- [12] M. Lesoinne and C. Farhat: *Geometric conservation laws for flow problems with moving boundaries and deformable meshes, and their impact on aeroelastic computations*. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 134, 71-90, 1996.
- [13] C. Johnson: *Discontinuous Galerkin finite element methods for second order hyperbolic problems*. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 107, 117-129, 1993.
- [14] T. J. R. Hughes, L. P. Franca and G. M. Hulbert: *A new finite element formulation for computational fluid dynamics: VIII. The Galerkin / least-squares method for advective-diffusive equations*. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 73, 173-189, 1989.