

Köppler, H./Roos, D./Burkhardt, G.:

Zur Berechnung vielschichtiger Schalen mit orthotropen Schichten

Wirklichkeitsnahe Erfassung und Beschreibung des Trag- und Verformungsverhaltens von Strukturen baulicher Anlagen hat in den letzten Jahrzehnten ständig an Bedeutung gewonnen. Tragkonstruktionen werden aus ökonomischen und ökologischen Gründen mit immer weiter abnehmendem Materialeinsatz entworfen und realisiert. Andererseits werden Strukturen baulicher Anlagen im Hoch- und Industriebau zunehmend multifunktional genutzt - die "Grenzen" zwischen Bauwerk und Tragwerk, zwischen Hüll- und Tragkonstruktion lösen sich auf. Werden raumabschließende Elemente (Wände, Decken, Dächer) gleichzeitig als Tragelemente und wärme- und schalldämmende Konstruktionen ausgeführt, so entstehen beispielsweise Sandwichplatten, deren Schichten sehr stark differierende Materialeigenschaften aufweisen.

Wichtig für die Inanspruchnahme der Wetterschutzschale bei der Untersuchung der Tragwirkung ist insbesondere die Verbundwirkung, die zwischen Außenschale und tragender Innenschicht durch die sehr schubweiche Zwischenschicht zu realisieren ist.

Das im folgenden vorgestellte vielschichtige, isoparametrische Schalenelement kann zur Beschreibung des mechanischen Verhaltens derartiger Konstruktionselemente einen Beitrag leisten.

Beim Aufbau des FEM-Modells für vielschichtige Schalen können die Formänderungshypothesen für jede Schicht einzeln /1/ als auch für die Schale insgesamt /2/ gegeben werden. Im ersten Fall ist der Knotenfreiheitsgrad von der Schichtenzahl abhängig, im zweiten Fall nicht. Im weiteren wird eine Formänderungshypothese für das Schichtenpaket angenommen. Grundlage bildet die Arbeit /3/ und deren Weiterentwicklungen in der Anwendung auf homogene und geschichtete Schalen. Ausgegangen wird von den Gleichungen der 3D-Elastizitätstheorie. Bei der Entwicklung der FE-Steifigkeitsmatrix werden die Annahmen der Schalentheorie bei Berücksichtigung der Querkraftschubverformungen eingearbeitet. Dadurch ergibt sich die Möglichkeit

- einer adäquaten Beschreibung der Verformungen sowohl dünner Schalen als auch von Schalen mittlerer Dicke;
- die Berechnung der Krümmungen und der LAMEschen Parameter der Bezugsfläche zu umgehen, was für komplizierte Schalenformen eine selbständige Aufgabe ist;
- eines natürlichen Übergangs von homogenen zu geschichteten Schalen.

Ein vielschichtiges, isoparametrisches Schalen-FE (Bild 1) wird durch jeweils acht Knoten (vier Eckknoten, vier Seitenmittelknoten) der unteren Deckfläche (i_u) und der oberen Deckfläche (i_o) beschrieben. Die acht Knoten der Mittelfläche (i) des Schalen-FE liegen auf den Verbindungsgeraden zwischen den Knoten der Deckflächen. Das ermöglicht eine gute Beschreibung des Schalenraumes auch dann, wenn die in einem Knoten zusammentreffenden FE keine gemeinsame Tangentialebene haben. Die Knoten der Schalenmittelfläche brauchen also nicht explizit gegeben zu werden.

Für das FE-Modell werden vier Koordinatensysteme verwendet:

- Globales kartesisches Koordinatensystem, in dem die Knotenkoordinaten des FE, die Knotenverschiebungen, die Steifigkeitsmatrix des Systems und der Belastungsvektor beschrieben werden;
- FE-Knoten-Koordinatensystem in jedem Knoten v_{ij} ($i=1, \dots, n$; $j=1, 2, 3$). Der Vektor v_{i3} verbindet die FE-Knoten auf den Schalenoberflächen. Mit Hilfe des Vektors v_{i3} bzw. v_{in} , der nicht senkrecht zur Schalenmittelfläche (FE-Mittelfläche) zu stehen braucht, wird die Verträglichkeit an den FE-Grenzen bei zusammengesetzten Flächentragwerken gewährleistet.

Bild 1 zeigt ein 8-Knoten-Schalen-FE. Mit den natürlichen Koordinaten x^j lauten die kartesischen Koordinaten eines Punktes im FE mit p Knotenpunkten vor und nach der Verformung

$$z^{k'}(x^j) = \sum_{i=1}^p N_i(x^\alpha) \left[{}^s z_i^{k'} + (x^3/2) d_i^s v_{in}^{k'} \right]. \quad (1)$$

Hierin sind $N_i(x^\alpha)$ die Interpolationsfunktionen.

i	N_i	hinzufügen, falls Knoten i definiert				
		i=5	i=6	i=7	i=8	i=9
1	$(1-x^1)(1-x^2)/4$	$-N_5/2$	$-N_6/2$			$-N_9/4$
2	$(1+x^1)(1-x^2)/4$	$-N_5/2$			$-N_8/2 \quad -N_9/4$	
3	$(1-x^1)(1+x^2)/4$		$-N_6/2$	$-N_7/2$		$-N_9/4$
4	$(1+x^1)(1+x^2)/4$			$-N_7/2$	$-N_8/2 \quad -N_9/4$	
5	$(1-(x^1)^2)(1-x^2)/2$					$-N_9/4$
6	$(1-x^1)(1-(x^2)^2)/2$					$-N_9/4$
7	$(1-(x^1)^2)(1+x^2)/2$					$-N_9/4$
8	$(1+x^1)(1-(x^2)^2)/2$					$-N_9/4$
9	$(1-(x^1)^2)(1-(x^2)^2)$					

(2)

Interpolationsfunktionen für ein zweidimensionales FE mit einer von 4 bis 9 variablen Knotenzahl (Bild 1).

Ferner sind

${}^s z^{k'}$ - kartesische Koordinaten eines beliebigen Punktes im FE;

${}^s z_i$ - kartesische Koordinaten des Knotenpunktes i;

d_i - Abstand zwischen den Knoten i_u und i_o (in Richtung x_3);

${}^s v$ - Koordinaten des Einheitsvektors auf der Verbindungsgeraden zwischen den Knoten (i_u) der unteren und (i_o) der oberen Deckfläche des FE ${}^{sv}_{in}$ (in Richtung x_3).

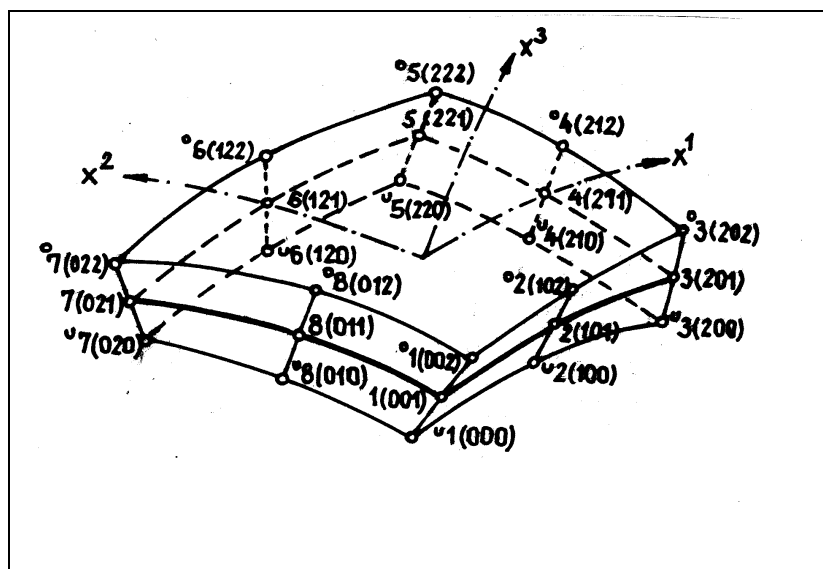


Bild 1 8-Knoten-FE

Der linke obere Index kennzeichnet die Konfiguration des FE vor ($s=0$) und nach ($s=1$) der Verformung. Gemäß Gl.(1) erhält man die Koordinaten des Verschiebungsvektors:

$$u^{k'}(x^j) = \sum_{i=1}^p N_i(x^\alpha) [v_i^{k'} + (x^3/2) d_i v_{in}^{k'}]. \quad (3)$$

Die polyquadratischen Formfunktionen für das 8knoten-SERENDIPITY-Flächen-FE lauten:
Eckknoten:

$$N_i(x^\alpha) = \frac{1}{4} (1 + x_i^1 x^1) (1 + x_i^2 x^2) (x_i^1 x^1 + x_i^2 x^2 - 1);$$

Seitenmittelknoten:

$$N_i(x^\alpha) = \frac{1}{2} (1 + x_i^1 x^1) (1 + x_i^2 x^2) (1 - (x_i^1 x^2)^2 - (x_i^2 x^1)^2).$$

Für die Geometrie wird vorausgesetzt, daß der Knoten der Schalenmittelfläche immer auf der Geraden zwischen den entsprechenden Knoten der Deckflächen liegt. Für die Formänderungen gelte die Hypothese von TIMOSHENKO, derzufolge die Normale zur unverformten Schalenmittelfläche gerade, jedoch nicht notwendig normal zur verformten Schalenmittelfläche bleibt. Deshalb wird die Approximation in Richtung der lokalen Koordinate ξ linear durchgeführt:

$$N_i(x^j) = N_i(x^\alpha) (1 + x_i^3 x^3) / 2.$$

Somit lauten die Formfunktionen des FE:
Eckknoten:

$$N_i(x^j) = \frac{1}{8} (1 + x_i^1 x^1) (1 + x_i^2 x^2) (1 + x_i^3 x^3) (x_i^1 x^1 + x_i^2 x^2 - 1); \quad (4)$$

Seitenmittelknoten:

$$N_i(x^j) = \frac{1}{4} (1 + x_i^1 x^1) (1 + x_i^2 x^2) (1 + x_i^3 x^3) (1 - (x_i^1 x^2)^2 - (x_i^2 x^1)^2). \quad (5)$$

Der Vektor v_{in} erfaßt den Zuwachs der Richtungskosinus von v_{in}^{ov} infolge der Verformung, d.h. von $s=0$ nach $s=1$:

$$v_{in}^p = v_{in}^{1p} - v_{in}^{0p}. \quad (6)$$

Die Koordinaten von v_{in} können durch die Verdrehungen am Knoten i ausgedrückt werden. Dafür werden zwei Einheitsvektoren v_{i1}^{ov} und v_{i2}^{ov} , die orthogonal zu v_{in}^{ov} sind, definiert:

$$v_{i1}^{ov} = (e_2' \times v_{in}^{0p}) / |e_2' \times v_{in}^{0p}| \quad (7a)$$

e_2' ist der Einheitsvektor in Richtung der z' -Achse. Für den Sonderfall, daß v_{in}^{ov} parallel zu e_2' ist, kann v_{i1}^{ov} einfach gleich e_1' gesetzt werden. Weiter ist dann

$$v_{i2}^{ov} = v_{in}^{0p} \times v_{i1}^{ov}. \quad (7b)$$

Wenn θ_i bzw. ϕ_i die Verdrehungen des Normalenvektors v_{in}^{ov} um die Vektoren v_{i1}^{ov} bzw. v_{i2}^{ov} sind,

gilt mit Berücksichtigung dessen, daß es sich um kleine Winkel handelt,

$$\rho_{in} = -{}^0\rho_{i2} * \alpha_i + {}^0\rho_{i1} * \beta_i. \quad (8)$$

Durch Einsetzen von Gl.(8) in Gl.(3) ergibt sich

$$u^{k'}(x^j) = \sum_{i=1}^p N_i(x^\alpha) [v_i^{k'} + (x^3/2) d_i (-{}^0v_{i2}^{k'} * \alpha_i + {}^0v_{i1}^{k'} * \beta_i)]. \quad (9)$$

Mit den Koordinaten nach Gl.(1) und den Verschiebungen nach Gl.(9) können nun die FE-Matrizen in der üblichen Weise berechnet werden. Die Einträge in die Verschiebungsinterpolationsmatrix des Schalen-FE sind durch Gl.(9) gegeben. Aus Gl.(9) erhält man die zur Berechnung der Verzerrungs-Verschiebungs-Matrix erforderlichen Ableitungen

$$\begin{Bmatrix} u^{k',1} \\ u^{k',2} \\ u^{k',3} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^p \begin{bmatrix} (N_i(x^\alpha)_{,1}) [1 & x^3 a_{i1}^{k'} & x^3 a_{i2}^{k'}] \\ (N_i(x^\alpha)_{,2}) [1 & x^3 a_{i1}^{k'} & x^3 a_{i2}^{k'}] \\ N_i(x^\alpha) [0 & a_{i1}^{k'} & a_{i2}^{k'}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i^{k'} \\ \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} \quad (10)$$

In Gl.(10) bedeutet

$$\rho_{i1} = -(d_i {}^0\rho_{i2})/2; \quad \rho_{i2} = (d_i {}^0\rho_{i1})/2. \quad (11)$$

Die Verschiebungsableitungen nach den kartesischen Koordinaten z^k erhält man aus der Standardtransformation mit $\underline{J} = |z^k_j|$ (k' : Spaltenindex, j : Zeilenindex):

$$(\)_{,k'} = \underline{J}^{-1}((\)_{,j}), \quad (12)$$

wobei die JACOBIsche Matrix \underline{J} die Ableitungen der kartesischen Koordinaten z^k nach den natürlichen Koordinaten x^j enthält. Mit Gl.(10) liefert die Transformation (12)

$$\begin{Bmatrix} u^{k',1} \\ u^{k',2} \\ u^{k',3} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^p \begin{bmatrix} N_i(x^\alpha)_{,1'} & a_{i1}^{k'} G_i^{1'} & a_{i2}^{k'} G_i^{1'} \\ N_i(x^\alpha)_{,2'} & a_{i1}^{k'} G_i^{2'} & a_{i2}^{k'} G_i^{2'} \\ N_i(x^\alpha)_{,3'} & a_{i1}^{k'} G_i^{3'} & a_{i2}^{k'} G_i^{3'} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i^{k'} \\ \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix}. \quad (13)$$

In (13) bedeuten, wobei J das Element (i,j) von \underline{J}^{-1} ist, usw.

$$N_i(x^\alpha)_{,k'} = J_{k'1}^1 N_i(x^\alpha)_{,1} + J_{k'2}^1 N_i(x^\alpha)_{,2}; \quad (13a)$$

$$G_i^{k'} = x^3 (J_{k'1}^1 N_i(x^\alpha)_{,1} + J_{k'2}^1 N_i(x^\alpha)_{,2}) + J_{k'3}^1 N_i(x^\alpha),$$

Mit den Verschiebungsableitungen gemäß (13) kann die Verzerrungs-Verschiebungs-Matrix \underline{B} eines Schalen-FE nun auf direktem Weg ermittelt werden. Wenn angenommen wird, daß die Zeilen dieser Matrix den sechs globalen kartesischen Verzerrungskomponenten $_{-1'1'},_{-2'2'}, \dots,_{-3'3'}$ entsprechen, können die Einträge in \underline{B} in der üblichen Weise konstruiert werden. Dann muß aber die Schalenannahme, daß die zur Schalenmittelfläche normale Spannung

Null ist, in das Spannungs-Verzerrungs-Gesetz eingebracht werden. Mit den Vektoren $\underline{\sigma}$ und $\underline{\varepsilon}$, die die kartesischen Spannungs- und Verzerrungskomponenten enthalten, gilt

$$\underline{\sigma} = \underline{C} \underline{\varepsilon}, \quad (14)$$

wobei

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}^T &= \{\sigma_{1'1'}, \sigma_{2'2'}, \sigma_{3'3'}, \sigma_{1'2'}, \sigma_{2'3'}, \sigma_{3'1'}\}, \\ \underline{\varepsilon}^T &= \{\varepsilon_{1'1'}, \varepsilon_{2'2'}, \varepsilon_{3'3'}, 2\varepsilon_{1'2'}, 2\varepsilon_{2'3'}, 2\varepsilon_{3'1'}\}. \end{aligned}$$

Die Deformationsgesetzmatrix im globalen wie auch im lokalen Koordinatensystem enthält folgende Tensorkoordinaten:

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} C^{1111} & C^{1122} & C^{1133} & C^{1112} & C^{1123} & C^{1131} \\ & C^{2222} & C^{2233} & C^{2212} & C^{2223} & C^{2231} \\ & & C^{3333} & C^{3312} & C^{3323} & C^{3331} \\ & & & C^{1212} & C^{1223} & C^{1231} \\ & \text{symmetrisch} & & & C^{2323} & C^{2331} \\ & & & & & C^{3131} \end{bmatrix} \quad (15)$$

Dabei sind die Indizes des globalen Koordinatensystems mit einem "" und des lokalen mit einem "*" zu kennzeichnen. Aus der Gleichsetzung der spezifischen Formänderungsarbeit im globalen kartesischen und im lokalen kartesischen Koordinatensystem ergibt sich:

$$C^{m'n'o'p'} = c_{i*}^{m'} c_{j*}^{n'} C^{i*j*k*l*} c_{k*}^{o'} c_{l*}^{p'}. \quad (16a)$$

Verschieden von Null sind für orthotropes Material im Orthotropie-Hauptachsen-Koordinatensystem die Koordinaten

$$\begin{aligned} C^{1*1*1*1*} &= E_1 / (1 - n y_{12} n y_{21}), \\ C^{1*1*2*2*} &= n y_{12} E_2 / (1 - n y_{12} n y_{21}), \\ C^{2*2*2*2*} &= E_2 / (1 - n y_{12} n y_{21}), \\ C^{1*2*1*2*} &= \sqrt{E_1 E_2} / (1 + \sqrt{n y_{12} n y_{21}}) / 2, \\ C^{2*3*2*3*} &= k_1 G_{23}, \quad C^{3*1*3*1*} = k_2 G_{31}. \end{aligned} \quad (16b)$$

Transformation der Deformationsgesetzmatrix in Matrixschreibweise:

$$\underline{C} = \underline{T}_c^T \underline{C}^* \underline{T}_c. \quad (17)$$

\underline{T}_c stellt eine Matrix dar, die das Spannungs-Verzerrungs-Gesetz vom kartesischen, in der Tangentialebene an die Schalenmittelfläche im Ursprung des FE-eigenen Koordinatensy-

stems

orientierten Orthotropiehauptachsenkoordinatensystems x^{i*} in das globale kartesische Koordinatensystem z^k transformiert. Die Elemente der Matrix \underline{T}_c sind Produkte und Summen der Richtungskosinus der Koordinatenachsen x^{j*} gegen die Koordinatenrichtungen z^k :

$$\underline{T}_c = \begin{bmatrix} l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & l_1 m_1 & m_1 n_1 & n_1 l_1 \\ l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & l_2 m_2 & m_2 n_2 & n_2 l_2 \\ l_3^2 & m_3^2 & n_3^2 & l_3 m_3 & m_3 n_3 & n_3 l_3 \\ 2l_1 l_2 & 2m_1 m_2 & 2n_1 n_2 & l_1 m_2 + l_2 m_1 & m_1 n_2 + m_2 n_1 & n_1 l_2 + n_2 l_1 \\ 2l_2 l_3 & 2m_2 m_3 & 2n_2 n_3 & l_2 m_3 + l_3 m_2 & m_2 n_3 + m_3 n_2 & n_2 l_3 + n_3 l_2 \\ 2l_3 l_1 & 2m_3 m_1 & 2n_3 n_1 & l_3 m_1 + l_1 m_3 & m_3 n_1 + m_1 n_3 & n_3 l_1 + n_1 l_3 \end{bmatrix} \quad (17a)$$

mit

$$l_j = \cos(\underline{e}_{1'}^0; \underline{e}_j^s); \quad m_j = \cos(\underline{e}_{2'}^0; \underline{e}_j^s); \quad n_j = \cos(\underline{e}_{3'}^0; \underline{e}_j^s);$$

$$c_{1'}^{j*} = l_j; \quad c_{2'}^{j*} = m_j; \quad c_{3'}^{j*} = n_j.$$

Der Querschubkoeffizient k_i ($i = 1, 2$) ist von der Schubspannungsverteilung über die Schalendicke in der i -ten Koordinatenrichtung abhängig, nähere Ausführungen siehe /4/.

Bei der Berechnung einer allgemeinen Schale kann es erforderlich sein, die Matrix \underline{T}_c in jedem Punkt, der für die numerische Integration der Steifigkeitsmatrix verwendet wird, erneut zu berechnen. Wenn spezielle Schalen betrachtet bzw. Platten berechnet werden, müssen die Transformationsmatrix und die Spannungs-Verzerrungs-Matrix \underline{C} nur in bestimmten Punkten berechnet und können dann wiederholt verwendet werden. Z.B. muß man die Matrix \underline{C} für eine Gruppierung von ebenen Platten nur einmal für jeden ebenen Strukturteil berechnen.

Es ist aufschlußreich, die vorstehende Schalen-FE-Formulierung mit einer Formulierung zu vergleichen, in der ebene FE mit überlagerten Plattenbiegung- und Membranspannungszuständen verwendet werden, siehe /4/. Es ist vorgesehen, das vorgestellte Element in ein am Institut für Strukturmechanik der Bauhaus-Universität Weimar in Entwicklung befindliches Programmsystem STRUCTURAL LANGUAGE (SLANG) zu implementieren.

Literatur

- /1/ Grigoljuk, E.I.; Kulikov, G.M.: Mnogoslojnye armirovannye obolocki. - V kn. Rascet pnevmaticheskikh sin. - Moskva: Izd. Masinstroenie . 1988. - 288 str.
- /2/ Rasskazov, A.O.; Sokolovskaja, I.I.; Sul'c, N.A.: Teorija i rascet sloistyh ortotropnyh plastin i obolock. - Kiew: Izd. Visa skola. 1986. - 191 str.
- /3/ Ahmad, S.; Irons B. M.; Zienkiewicz, O. C.: Analysis of thick and thin shell structures by curved elements. In: International Journal for Numerical Methods in Engineering. 1970. - V.2; N3. p. 419 - 451
- /4/ Köppler, H.: Vielschichtiges isoparametrisches Schalen-FE mit orthotropen Schichten. In: HAB Weimar - Mitt. des Instituts für Strukturmechanik 95-1, S. 4.1-4.15