

Anwendung der mathematischen Optimierung bei der physikalisch und geometrisch nichtlinearen Analyse und Bemessung seismisch beanspruchter Tragwerke

Raue, E.¹; Timmler, H.-G.¹; Schüler, H.²

1 Einführung

Moderne Bemessungskonzepte für seismisch beanspruchte Hochbauten planen inelastisches Verhalten einzelner Bereiche der Konstruktion beim Entwurf a priori ein, um so einen Teil der durch das Beben eingetragenen Energie als inelastische Formänderungsarbeit zu absorbieren. Eine solche Bemessungsstrategie ist die Methode der Kapazitätsbemessung seismisch beanspruchter Tragwerke, deren Grundprinzipie bereits in einer Reihe neuerer Normen verankert sind.

Wird bei Akzeptanz inelastischen Verhaltens eine bestimmte Belastungsintensität überschritten, kann es infolge zyklischer Einwirkungen zu einer unbegrenzten Akkumulation inelastischer Deformationen in Form von alternierender oder progressiver Plastizierung kommen. Unterhalb dieser Belastungsintensität, die als adaptive Grenzlast oder Einspiellast bezeichnet wird, bildet sich nach anfänglichen Plastizierungen ein stabiler Restspannungszustand im System aus, so daß alle weiteren Lastfolgen keine inelastischen Deformationen hervorrufen und die von der Struktur geleistete plastische Formänderungsarbeit begrenzt ist.

Die adaptive Grenzlast stellt damit für zyklische Einwirkungen eine geeignete Kenngröße zur Bewertung der Tragwerksqualität dar, bei der neben der Sicherung des Gleichgewichts ein bestimmtes Schädigungsniveau nicht überschritten wird.

In Abschnitt 2 des vorliegenden Beitrages werden die Grundzüge eines Bemessungs- und Nachweiskonzeptes für seismisch beanspruchte Stahlbetontragwerke, das unter Einbeziehung der Grundprinzipie der Kapazitätsbemessung von einem einheitlichen Kriterium zur Beschreibung des Grenzzustandes der Tragfähigkeit auf der Basis der adaptiven Grenzlast ausgeht, vorgestellt. Dabei ist die Abschätzung der Verformungen notwendiger Bestandteil des Nachweis- bzw. Bemessungskonzeptes, da plastische Deformationen mit gravierenden Schädigungen verbunden sein können.

Bei der Aufstellung des Berechnungsmodells wird von den Theoremen der dynamischen Einspieltheorie ausgegangen, die auf einer Aufspaltung des Spannungs- und Formänderungszustandes im Zustand der Adaption in einen elastodynamischen Anteil und einen Restanteil basieren. Die Definition eines Bereichs zulässiger elastodynamischer Spannungsantworten erlaubt eine tragwerksbezogene Festlegung der Grenzen der Belastung, ohne daß die Lastgeschichte der Einwirkung näher spezifiziert sein muß.

Die Extremalprinzipie zur Ermittlung des Restanteils werden u.a in [1, 2, 3] formuliert und führen für die diskretisierte Struktur auf lineare bzw. quadratische Optimierungsprobleme (Abbildung 1).

<p>Zielfunktion:</p> $\mathbf{p}_A = \mathbf{p} \Rightarrow \text{Maximum}$ <p>Nebenbedingungen:</p> $\mathbf{D}_e \sigma_r = \mathbf{0} \quad \in V$ $\mathbf{R}_s \sigma_r = \mathbf{0} \quad \in S_f$ $F(\sigma_e(t) + \sigma^0 + \sigma_r) \leq C \quad \in V$ $p \geq 0 \quad t \geq t_A, \in \Pi$	<p>Zielfunktion:</p> $\frac{1}{2} \int \sigma_r^T \mathbf{D}^{-1} \sigma_r \Rightarrow \text{Minimum}$ <p>Nebenbedingungen:</p> $\mathbf{D}_e^T \sigma_r = \mathbf{0} \quad \in V$ $\mathbf{R}_S^T \sigma_r = \mathbf{0} \quad \in S_f$ $F(\sigma_e(t) + \sigma^0 + \sigma_r) - C \leq 0 \quad \in V, t \geq t_A, \in \Pi$
---	--

Abbildung 1: Optimierungsprobleme zur Analyse des adaptiven Tragverhaltens

¹ Bauhaus-Universität Weimar, Fakultät Bauingenieurwesen

² BGS Ingenieursozietät Frankfurt, Büro Berlin, vormals: Bauhaus-Universität Weimar

Bei Druckgliedern bedingt die physikalische Nichtlinearität i. allg. eine Verstärkung geometrisch nichtlinearer Effekte, so daß die Berücksichtigung des Einflusses der Verformungen notwendiger Bestandteil des Bemessungskonzeptes sein muß. Entsprechende Erweiterungen der Berechnungsmodelle zur Berücksichtigung des Einflusses geometrisch nichtlinearer Effekte im Sinne der Theorie 2. Ordnung wurden in [1] erarbeitet und werden im Abschnitt 3 vorgestellt.

2 Ein Bemessungs- und Nachweiskonzept für seismisch beanspruchter Stahlbetontragwerke

In [1] wird ein einheitliches Bemessungs- und Nachweiskonzept für seismisch beanspruchte Stahlbetontragwerke formuliert, das von der Sicherstellung der Adaptionfähigkeit als maßgebendem Kriterium zur Beschreibung des Grenzzustandes der Tragfähigkeit ausgeht. Dieses Konzept stellt eine Erweiterung der Methode der Kapazitätsbemessung [4] dar und ist charakterisiert durch:

- die gezielte Berücksichtigung des Auftretens plastischer Formänderungen zur Aufnahme der Energie des Bebens bei gleichzeitiger impliziter Begrenzung der inelastischen Formänderungsarbeit in den potentiellen plastischen Bereichen zur Vermeidung progressiver oder alternierender Schädigungsmechanismen,
- die Möglichkeiten der Abschätzung und des Nachweises der Verschiebungen und plastischen Verformungen sowie der Kontrolle des vorausgesetzten kinematischen Mechanismus im Zustand der Adaption,
- die Möglichkeiten der Erfassung der inelastischen Verformungsfähigkeit (Duktilität) sowohl des Tragwerkes als auch einzelner Querschnitte, ohne die gesamte Belastungsgeschichte verfolgen zu müssen,
- die Möglichkeiten der Abschätzung des Schädigungszustandes des Tragwerkes und seiner Querschnitte auf der Grundlage von Modellen für Schädigungsindikatoren,
- eine von der Lastgeschichte unabhängige Erfassung der Einwirkung auf der Grundlage der zulässigen elastodynamischen Spannungsantwort des Systems und
- die Möglichkeiten umfangreiche Variantenuntersuchungen zu realisieren, um so eine optimale Verteilung und Auslegung der inelastischen Bereiche zu finden.

Dieses Bemessungs- und Nachweiskonzept ist in folgende Teilschritte untergliedert:

1 Entwurf und Modellierung des Tragwerkes

In Analogie zu den Entwurfsgrundsätzen der Kapazitätsbemessung können durch die Festlegung potentieller inelastischer Bereiche und einer entsprechenden konstruktiven Durchbildung Plastizierungen nicht unkontrolliert entstehen, sondern nur in den dafür vorgesehenen Bereichen. Daraus folgt, daß der kinematische Mechanismus zulässig und bekannt ist.

2 Modellierung des Entwurfsbebens

Auf der Basis von Lastmodellen (Beschleunigungszeitverläufe, Antwortspektren, quasistatische Ersatzlasten) werden Grunderregungen definiert, die den Bereich zulässiger Erregungen im Raum der Lasten definieren. Diese zulässigen Lasten sind durch ihre Grenzen und nicht durch ihre Lastgeschichte festgelegt.

3 Ermittlung der Entwurfskapazität

Mit dem Übergang zu nichtlinearen Berechnungsverfahren zur Schnittgrößenermittlung und dem damit verbundenen Nachweisformat auf der Grundlage von aufnehmbaren Belastungen ist die Tragfähigkeit (Kapazität) der kritischen Schnitte vorab festzulegen. Der Vorbemessung des Tragwerkes, insbesondere der potentiellen plastischen Bereiche, kommt daher eine besondere Bedeutung zu.

4 Ermittlung des Bereiches der zulässigen elastodynamischen Spannungsantwort

Der Bereich der zulässigen elastischen Antworten wird im Raum der Spannungen definiert. Die Aufspaltung des Gesamtspannungszustandes in einen elastischen und in einen Restanteil ermöglicht die Ermittlung der Extremwerte der elastischen Antwort auf der Basis linear elastischer Berechnungen (statische Analyse, Antwortspektrenverfahren, Zeitintegrationsverfahren).

5 Einspieluntersuchung/Grenzzustandsanalyse

Mit der Nutzung der adaptiven Grenzlast als Kriterium für den Grenzzustand der Tragfähigkeit wird die Schädigung des Tragwerkes für den gesamten betrachteten Einwirkungszeitraum begrenzt. Wird für einen nach den Grundprinzipien der Kapazitätsbemessung ermittelten kinematischen Mechanismus der Einspielzustand sichergestellt, so sind die umgelagerten Schnittgrößen mit den Restschnittgrößen im Zustand der Adaption identisch.

6 Explizite Duktilitäts- und Energiebilanz

Obwohl die plastischen Verformungen und die inelastische Formänderungsarbeit nach dem Einspielen des Tragwerkes nicht weiter zunehmen, können diese Werte schon vor der Adaption zulässige Größen überschreiten und zu lokalem Versagen führen. Die Zulässigkeit der Verformungen wird im vorgestellten Bemessungs- und Nachweiskonzept auf der Grundlage expliziter Duktilitäts- und Energiebilanzen nachgewiesen.

3 Erweiterung des Berechnungsmodells adaptiver Tragwerke unter Berücksichtigung geometrisch nichtlinearer Einflüsse

Ein von den Normalkräften (N) und von der Zeit (t) abhängiger Gesamtverschiebungsvektor $\tilde{\mathbf{u}}$ eines Systems kann als Überlagerung des aktuellen Verschiebungszustandes \mathbf{u} und eines Ausgangszustandes $\bar{\mathbf{u}}$ angegeben werden:

$$\tilde{\mathbf{u}}(N, t) = \mathbf{u}(N, t) + \bar{\mathbf{u}}(N) \quad \text{mit} \quad \bar{\mathbf{u}}(N) = \mathbf{u}_e^{(g)}(N) + \mathbf{u}^0(N). \quad (3.1)$$

Entsprechend den grundlegenden Theoremen der dynamischen Einspieltheorie kann der aktuelle Verschiebungszustand \mathbf{u} elastisch-plastischer Systeme unter dynamischen Einwirkungen im Zustand der Adaption als Summe der aktuellen elastodynamischen Verschiebungsantwort \mathbf{u}_e und zeitunabhängiger Restverschiebungsfelder \mathbf{u}_r , die dem Tragwerk infolge plastischer Dehnungen eingepägt sind, dargestellt werden:

$$\mathbf{u}(N, t) = \mathbf{u}_e(N, t) + \mathbf{u}_r(N). \quad (3.2)$$

Unter der Voraussetzung, daß sowohl die elastischen als auch die Restanteile der Spannungen in Abhängigkeit des aktuellen Gesamtverschiebungszustandes $\tilde{\mathbf{u}}$ beschrieben werden können, läßt sich der aktuelle Spannungszustand des Systems im Zustand der Adaption analog aufspalten:

$$\mathbf{s}(\tilde{\mathbf{u}}, t) = \mathbf{s}_e(\tilde{\mathbf{u}}, t) + \mathbf{s}_r(\tilde{\mathbf{u}}). \quad (3.3)$$

Das elastische dynamische Tragverhalten des Systems wird durch die Bewegungsgleichung

$$\left[\mathbf{A}_G(\tilde{\mathbf{u}}) \right] \mathbf{s}_e(t) + \left[\mathbf{K}_\varphi(\bar{\mathbf{s}}) \right] \mathbf{u}_e(t) = \mathbf{F}(t) - \mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}}_e(t) - \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}}_e(t) \quad (3.4)$$

mit $\mathbf{u}_e(0) = \mathbf{u}_{e,0} \quad \dot{\mathbf{u}}_e(0) = \dot{\mathbf{u}}_e$

beschrieben. \mathbf{A}_G ist dabei der geometrisch nichtlineare Operator der Gleichgewichtsbedingungen, während \mathbf{K}_φ die linear von den eingepprägten Normalkrften abhngige geometrische Steifigkeitsmatrix darstellt. Die Gleichgewichtsbedingungen beinhalten sowohl die Verfrmungsanteile der Ausgangskonfiguration infolge der eingepprägten Restspannungen und der stndigen Lasten als auch die aktuellen elastodynamischen Verschiebungsantworten.

Für die Ermittlung der elastodynamischen Antwort sind alle Methoden und Verfahren der Baudynamik, die das geometrisch nichtlineare Verhalten berücksichtigen, anwendbar.

So kann das in [5] für geometrisch lineare Probleme formulierte Extremalprinzip auf geometrisch nichtlineare Probleme im Sinne einer Theorie II. Ordnung erweitert werden, so daß gilt:

$$\int_0^t \int_V (\mathbf{s}_e(t))^T \mathbf{C} \mathbf{s}_e(t) + (\mathbf{u}_e(t))^T \mathbf{m} \mathbf{u}_e(t) dV dt \Rightarrow \min \quad (3.5)$$

mit den Nebenbedingungen

$$[\mathbf{A}_G(\tilde{\mathbf{u}})] \mathbf{s}_e(t) + [\mathbf{K}_\varphi(\bar{\mathbf{s}})] \mathbf{u}_e(t) = \mathbf{F}(t) - \mathbf{m}(\mathbf{u}_e(t)) \quad (3.6)$$

Über eine entsprechende Diskretisierung kann die Extremalaufgabe in ein Optimierungsproblem überführt werden, und damit die elastodynamische Spannungsantwort mit Methoden der mathematischen Optimierung berechnet werden.

Der Vektor der Umhüllenden der elastodynamischen Spannungsantwort $\mathbf{s}_e = \max(\mathbf{N} \mathbf{s}_e(t))$ als maximale Projektion der elastodynamischen Spannungsantwort auf die Außennormalen der Fließfläche wird mit den zugehörigen Verschiebungsfeldern \mathbf{u}_e ermittelt.

Die statisch zulässigen Restspannungen \mathbf{s}_r infolge eingepprägter plastischer Dehnungen erfüllen die Gleichgewichtsbedingungen und statischen Randbedingungen:

$$[\mathbf{A}_G(\tilde{\mathbf{u}})] \mathbf{s}_r + [\mathbf{K}_\varphi(\bar{\mathbf{s}})] \mathbf{u}_r = \mathbf{0} \quad (3.7)$$

sowie die Plastizitätsbedingungen,

$$\mathbf{F}(\mathbf{s}_e(\tilde{\mathbf{u}}) + \mathbf{s}_r(\tilde{\mathbf{u}}) + \bar{\mathbf{s}}(\bar{\mathbf{u}})) \leq \mathbf{S}_0 \quad (3.8)$$

Der Restschnittgrößen- und Formänderungszustand kann wiederum als Extremalaufgabe mit der Zielfunktion

$$\frac{1}{2} \mathbf{s}_r^T \mathbf{C} \mathbf{s}_r \Rightarrow \min \quad (3.9)$$

unter den Bedingungen (3.7) und (3.8) behandelt werden. Darin sind die Restverschiebungsanteile iterativ aus den Ergebnissen des zugehörigen Lagrange-Problems zu entwickeln.

Die adaptive Grenzlast ergibt sich analog aus der Lösung der Extremalaufgabe:

$$p_A = p \Rightarrow \max \quad (3.10)$$

mit den Nebenbedingungen (3.7) und

$$\mathbf{N}(p \mathbf{s}_e(\tilde{\mathbf{u}}) + \mathbf{s}_r(\tilde{\mathbf{u}}) + \bar{\mathbf{s}}(\bar{\mathbf{u}})) \leq \mathbf{S}_0. \quad (3.11)$$

Zur Ermittlung der Gesamtverschiebungen ist eine iterative Vorgehensweise erforderlich, wobei die Restverschiebungs- und Formänderungszustände als Ausgangszustände für die Ermittlung der elastodynamischen Spannungsantwort berücksichtigt werden müssen. Daraus ergibt sich der in Abbildung 2 dargestellte Ablauf der Berechnung.

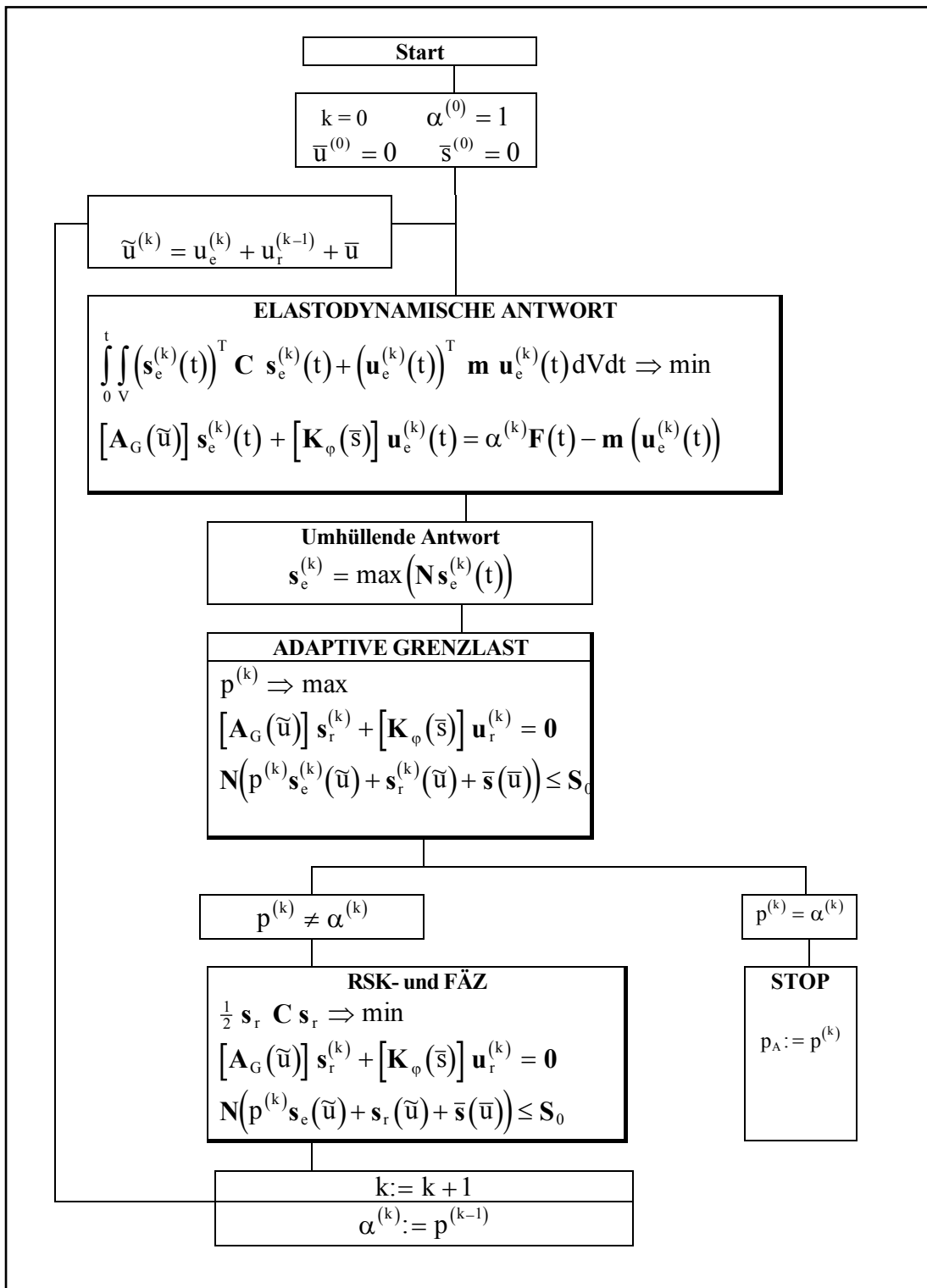


Abbildung 2: Iterativer Ablauf zur Ermittlung der adaptiven Grenzlast

Das vorgestellte Modell wird in das vorgeschlagene Bemessungs- und Nachweiskonzept für seismisch beanspruchte Konstruktionen eingearbeitet, wobei eine iterative Vorgehensweise zwischen elastischer Schnittgrößenermittlung und Grenzzustandsanalyse notwendig wird.

Literatur

- [1] Schüler, H.: Zur Bemessung und zur Analyse adaptiver Tragwerke aus Stahlbeton unter dynamischen Einwirkungen. - Dissertation Bauhaus-Universität Weimar, Fakultät Bauingenieurwesen, 1996
- [2] Raue, E.; Timmler, H.-G.; Saad, M.; Schüler, H.: Non-linear analysis of r/c structures allowing for second geometric effects using mathematical programming methods. Proceedings of the 6th International Conference on Computing in Civil and Building Engineering, Berlin, Balkema, 1995
- [3] Raue, E.; Schüler, H.; Timmler, H.-G.: Strategies for the design and the analysis of dynamisch excited r/c structures. - In: Proc. of the 3th European Conference on Structural Dynamics, Florence, Balkema, 1996
- [4] Paulay, Th.; Bachmann, H.; Moser, K.: Erdbebenbemessung von Stahlbetonhochbauten. - Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser 1990
- [5] Marx, S.; Weitzmann, R.: Anwendung der mathematischen Optimierung bei der nichtlinearen Berechnung von Tragwerken unter statischer und dynamischer Belastung. - In: Tagungsunterlagen VDI 8. Forum Bauinformatik - Junge Wissenschaftler forschen, Cottbus, 1996