

Beitrag zur Standortidentifizierung mit Oberflächenwellen

Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor - Ingenieur

an der Fakultät Bauingenieurwesen
der
Bauhaus-Universität Weimar

vorgelegt von

Frank Wuttke
aus Erfurt/Thüringen

Weimar

Gutachter:

1. Prof.Dr.-Ing.habil.T.Schanz
2. Prof.Dr.-Ing.habil.Th.Triantafyllidis
3. Prof.Dr.-Ing.habil.C.Bucher
4. Prof.Dr.rer.nat.habil.K.Gürlebeck

Tag der Disputation: 15.02.2005

Vorwort des Herausgebers

Die vorliegende Promotionsschrift von Herrn Dr.-Ing. Frank Wuttke ist dem Forschungs- und Arbeitsgebiet „Bodendynamik“ zuzuordnen. Die behandelte Fragestellung ergab sich aus den jahrzehntelangen Forschungsarbeiten an der Professur Bodenmechanik auf diesem Gebiet. Neben den eigentlichen Methoden der Bodendynamik, die signifikant weil originär weiterentwickelt wurden, sind wesentliche Komponenten aus den Gebieten der Angewandten Mathematik (inkl. der Signalverarbeitung) und der Geophysik, zur erfolgreichen Bearbeitung notwendig gewesen. Die Untersuchungen beziehen ihre Aktualität aus den weltweit laufenden Bestrebungen, Standortstrukturen und Bodenparameter realitätsnah und effektiv zu ermitteln. Eine wesentliche Entwicklungsrichtung ist in diesem Rahmen die Ergänzung konventioneller Erkundungsmethoden mit seismischen Feld- und Laboruntersuchungen. Seismische Oberflächenwellen sind wegen ihrer speziellen Eigenschaften (Dispersion, höhere Moden) hervorragende Informationsträger von dem durchlaufenen Medium. Da mit diesen Messungen außerdem die ungestörten natürlichen Standortverhältnisse zerstörungsfrei und effizient untersucht werden, ist die Motivation gegeben, sich gerade mit diesem Wellentyp in besonderer Weise auseinanderzusetzen. Die Messung und Auswertung seismischer Oberflächenwellenfelder liefert eine großflächige und schnelle Analyse der ungestörten Standortverhältnisse. Die mit seismischen Messungen ausgewiesenen maximalen Steifigkeiten der Böden im Bereich sehr kleiner Dehnungen nehmen eine zentrale Stellung bei der Beschreibung des dehnungsabhängigen Bodenverhaltens ein. Im Bereich des Erdbebeningenieurwesens lassen sich verbesserte Aussagen zum Übertragungsverhalten seismischer Wellen in oberflächennahen Sedimentschichten, also zu den standortabhängigen Einflüssen und zu dominanten Standortfrequenzen ableiten, wodurch Einschätzungen zum Grad seismischer Gefährdungen in betroffenen Gebieten wesentlich qualifiziert werden können. Phänomene der Ausbreitung von Verkehrs-, Bau- und anderen Erschütterungen können zutreffender prognostiziert werden. Die Arbeit umfasst bei genauerer Betrachtung eigentlich drei „kleine“ Forschungsarbeiten:

- a. Die Weiterentwicklung des zu Grunde liegenden theoretischen Konzepts (Stichwort: Beschreibung geschichteter Halbraum, „Trennung“ der unterschiedlichen Wellentypen) und damit die Möglichkeit zur Generierung synthetischer Seismogramme,
- b. die Weiterentwicklung der Analysemöglichkeiten von synthetischen bzw. experimentellen Wellenfeldern (Stichwort: Berücksichtigung von höheren Moden bei der Inversionsaufgabe),

- c. und die Umsetzung der Strategie in eine praxistaugliche Prozedur, deren erfolgreiche Anwendung an Fallbeispielen gezeigt werden kann.

Besonders hervorzuheben ist an dieser Stelle die eigenständige Lösung der Wellenausbreitung im geschichteten Halbraum infolge einer Impulslast an der Geländeoberfläche, mit der synthetische Seismogramme und Erschütterungsausbreitungen infolge Verkehr oder anderer technologischer Prozesse prognostiziert werden können. Ein weiterer wesentlicher Schritt, der in der vorliegenden Arbeit gelungen ist, ist die Einbeziehung höherer Moden in den Inversionsprozess, wodurch sehr realitätsnahe tiefenabhängige Steifigkeitsprofile mit Bodensteifigkeiten im Bereich kleiner Dehnungen ermittelt werden können.

Weimar, im Mai 2005

Tom Schanz

Vorwort des Verfassers

Die vorliegende Arbeit entstand zum Großteil während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Professur für Bodenmechanik der Bauhaus-Universität Weimar. Mein besonderer Dank gilt Herrn Dr.-Ing. H.-G. Schmidt für die Anregung zu dieser Arbeit, für seine ständige Unterstützung und stete Diskussionsbereitschaft.

Herrn Professor Dr.-Ing. habil. T. Schanz danke ich recht herzlich für die Übernahme des Berichts. Zudem hat er durch viele wertvolle Anregungen zum Gelingen der Arbeit beigetragen.

Herrn Professor Dr. rer. nat. habil. K. Gürlebeck danke ich für die vielen wichtigen und kritischen Hinweise und Bemerkungen zu den oft aufkommenden mathematischen Fragen und die Übernahme eines Berichtes.

Ebenso danke ich Herrn Professor Dr.-Ing. habil. Th. Triantafyllidis sowie Herrn Professor Dr.-Ing. habil. C. Bucher für die Übernahme eines Berichtes zu meiner Arbeit.

Für die immer freundlichen, aufgeschlossenen und konstruktiven Diskussionen zu diversen Problemen der Thematik sowie dem ständigen Interesse an meiner Arbeit danke ich Herrn Professor Dr. rer. nat. habil. P. G. Malischewsky vom Institut für Geowissenschaften Jena.

Außerdem möchte ich mich bei allen Kolleginnen und Kollegen der Professur Bodenmechanik und der Professur Grundbau für die gute Zusammenarbeit während meiner Tätigkeit an der Professur Bodenmechanik bedanken. Mit ihren Studien- und Diplomarbeiten haben auch Herr Dipl.-Ing. T. Weber, Herr Dipl.-Ing. L. Karl und Herr Dipl.-Ing. C. Karg einen Beitrag zum Fortgang dieser Arbeit geleistet.

Aufs herzlichste bedanke ich mich bei meiner Familie, insbesondere meinen Kindern Dennis und Eric, die mir viel Geduld entgegen bringen mussten. Meinen Eltern bin ich dankbar, dass Sie meine Arbeit stets mit allen Mitteln unterstützten.

Frank Wuttke

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Einführung und Motivation	1
1.2	Stand der Forschung	2
1.3	Ziele und Inhalt der Arbeit	7
2	Strukturmodellierung	9
2.1	Grundgleichung der Elastodynamik	10
2.2	Lösung der Wellengleichung	11
2.2.1	Helmholtz'scher Darstellungssatz	11
2.2.2	Integraltransformationen	14
2.2.3	Rand- und Kontinuitätsbedingungen	18
2.3	Matrixmethoden vertikal heterogener Böden	21
2.3.1	Thomson-Haskell-Algorithmus	23
2.3.2	Methode der allgemeinen Reflexions- und Transmissionskoeffizienten	25
2.3.3	Herleitung der Reflexions- und Transmissionskoeffizienten aus dem Thomson-Haskell-Algorithmus	29
2.4	Elastische Wellen im Boden	31
2.4.1	Körperwellen	33
2.4.2	Oberflächenwellen	34
2.4.2.1	Rayleighwellen	34
2.4.2.2	Oberflächenwellen in geschichteten Medien	36
2.4.2.3	Phasen- und Gruppengeschwindigkeit	40
2.5	Synthetische Seismogramme	43
2.5.1	Grundlagen	46
2.5.2	Frequenzbereichslösung des homogenen Halbraums	48
2.5.3	Frequenzbereichslösung des geschichteten Halbraums	55
2.5.4	Berechnung der Green'schen Funktionen	69
2.5.4.1	Normalmoden-Superposition	69
2.5.4.2	Wellenzahl-Integration	74
2.5.4.3	Zeitbereichsdarstellung	76

3	Wellenfeldanalyse / Parameteridentifikation	81
3.1	Wellenfeldanalyse	83
3.1.1	Methoden zur Dispersionsanalyse mit einem Aufnehmer	83
3.1.2	Methoden zur Dispersionsanalyse mit mehreren Aufnehmern	85
3.1.2.1	Phasendifferenzen-Methode	85
3.1.2.2	Frequenz-Wellenzahl-Analyse	88
3.1.2.3	Wellenfeld-Transformation	90
3.1.2.4	Diskrete Bessel-Transformation	92
3.1.2.5	Darstellungseigenschaften der Dispersionsanalysen	93
3.2	Nutzung von Oberflächenwellen zur Bodenidentifikation	101
3.2.1	Lineare Inversion	101
3.2.2	Nichtlineare Inversion	103
3.2.2.1	Methoden der nichtlinearen Inversion	103
3.2.2.2	Durchführung der Inversion	105
3.2.2.3	Partielle Ableitungen / Sensitivitätsanalyse	108
3.2.2.4	Einbeziehung höherer Moden in die Inversion	113
3.2.3	Oskulationen von Normalmoden	119
4	Theoretische Fallstudien / Anwendung auf Felddaten	125
4.1	Eigenschaften des Wellentransportes	126
4.1.1	Normal dispersive Böden (normal geschichtete Böden)	126
4.1.1.1	Geometrische Dämpfung	126
4.1.1.2	Verhalten der Green'schen Funktion	128
4.1.1.3	Energietransport in den Schichten	132
4.1.1.4	Starre Randbegrenzung	138
4.1.2	Anormal dispersive Profile (unregelmäßig geschichtete Böden)	141
4.1.2.1	Geometrische Dämpfung	141
4.1.2.2	Verhalten der Green'schen Funktion	142
4.1.2.3	Energietransport in den Schichten	142
4.2	Standortuntersuchungen	154
4.2.1	Messung Halde Freiberg	154
4.2.1.1	Das Untersuchungsgebiet	154
4.2.1.2	Experiment und Interpretation	154
4.2.2	Messung Oberlausitz	160
4.2.2.1	Das Untersuchungsgebiet	160
4.2.2.2	Experiment und Interpretation	161
4.2.3	Messung Niederlausitz	163
4.2.3.1	Das Untersuchungsgebiet	163
4.2.3.2	Experiment und Interpretation	163

5	Zusammenfassung und Ausblick	169
5.1	Zusammenfassung der vorgestellten Verfahren	169
5.2	Zusammenfassung der Ergebnisse	171
5.3	Ausblick	172
A	Nebenrechnungen / Funktionen	185
A.1	Zylinderfunktionen	185
A.1.1	Differentiations- und Transformationsregeln für Zylinderfunktionen	185
A.1.2	Substitutionsregeln und Asymptotische Entwicklung von Zylinderfunktionen	186
A.1.3	Grenzübergang von der Kreis- zur Punktlast	187
A.2	Eigenschaften der Übertragungsmatrizen	189
A.3	Grenzwertbetrachtungen zu den Konturintegralen	195
A.3.1	Verhalten der Integrale entlang der Kontur $A \rightarrow D$ und $C \rightarrow D$	195
A.3.2	Verhalten der Integrale um die Verzweigungspunkte $k_{s,N+1}$ und $k_{p,N+1}$	200
A.4	Konturintegration mit komplexen Wellenzahlen k_s und k_p	201
A.5	Anregungsimpuls und -spektrum / theoretische Bodenprofile	206
A.5.1	Definition der verwendeten Impulsformen	206
A.5.2	Definition der theoretischen Bodenprofile	208
B	Symbolverzeichnis	215
B.1	Indizierung	215
B.2	Formelzeichen	215
B.3	Operatoren/Kürzel	215
B.4	Verwendete Bezeichnungen	216

Abbildungsverzeichnis

2-1	Darstellung der Reflexionen an der Halbraumkante	20
2-2	Darstellung der Reflexionen und Transmissionen an einer Schichtgrenze	20
2-3	Verwendetes Bodenmodell nach (Chen 1993).	24
2-4	Wellenkoeffizienten an den Schichtgrenzen	28
2-5	Einfallende Raumwellen aus dem Halbraum.	32
2-6	Darstellung der Eigenwertverteilung entlang der k-Achse	32
2-7	Beziehung zwischen Querdehnzahl, P-, S- und Rayleighwellengeschwindigkeit	35
2-8	Verschiebungsverhältnis der Eigenformen der Rayleighwelle	36
2-9	Zunahme der Oszillationen in der Frequenzgleichung	41
2-10	Gruppen- und Phasengeschwindigkeit	42
2-11	Airyphase	42
2-12	Berechnung theoretischer Seismogramme	45
2-13	Verzweigungspunkte und -schnitte in der komplexen Ebene.	50
2-14	Verzweigungsschnitte bei reellen Wellenzahlen k_S und k_P	51
2-15	Integrationspfad im I. und IV. Quadranten mit komplexen Wellenzahlen k_S und k_P	52
2-16	Integrationspfad im I. Und IV. Quadranten mit reellen Wellenzahlen.	54
2-17	Zeitverlauf und Partikelbewegung der Rayleighwelle an der Oberfläche des Halbraums	54
2-18	Wahl des Integrationspfades im I. und IV. Quadranten mit reellen Wellenzahlen k_S und k_P	58
2-19	Abbildung eines Oberflächenwellen- bzw. kompletten Wellenfeldes im geschichteten Halbraum	78
2-20	Abbildung eines Oberflächenwellen- bzw. kompletten Wellenfeldes im homogenen Halbraum	80
3-1	Mögliche Aufnehmeranordnungen nach (Gucunski & Woods 1991 <i>b</i>)	86
3-2	Phasengang des Kreuzleistungsspektrums und Kohärenzspektrum, Messung Halde Freiberg	87
3-3	Dateninterpretation nach (Doyle 1995) der in einem f/k-Spektrum enthaltenen Wellenanteile.	90

3-4	Durchführung der Stapelung mit fixiertem τ und veränderlichem p (McMechan & Ottolini 1980).	91
3-5	Abbildung einer konstanten Referenzgeschwindigkeit im Bildbereich .	94
3-6	Abbildung von auftretenden Aliasing einer konstanten Referenzgeschwindigkeit im Bildbereich	96
3-7	Abbildung einer linearen Referenzgeschwindigkeit im Bildbereich . . .	97
3-8	Abbildung zweier linearen Referenzgeschwindigkeiten als unterschiedliche Moden im Bildbereich	98
3-9	Abbildung der Moden eines synthetischen Wellenfeldes im Bildbereich	99
3-10	Funktion der partiellen Ableitungen für den Grundmode, Profil 1 . .	111
3-11	Funktion der partiellen Ableitungen für den Grundmode, Profil 63 . .	112
3-12	Effekte von auftretenden höheren Moden in den Dispersionsanalysen .	114
3-13	Dispersion einer Zweifachschichtung mit ausgeprägten Energieübergang am Oskulationspunkt	120
3-14	Gruppengeschwindigkeit und Energieübergang an Oskulationspunkten	121
4-1	Einhüllende der Abnahmefunktionen für die normal dispersiven Schichtungen	127
4-2	Darstellung der Green'schen Funktion von a) Profil 6 und b) Profil 9.	128
4-3	Darstellung der Green'schen Funktion a) und der Transferfunktion b) von Profil 38.	129
4-4	Darstellung der Green'schen Funktion von a) Profil 35, c) Profil 36 und der Transferfunktion von b) Profil 35 und d) Profil 36.	130
4-5	Darstellung der a) normierten Realteile der Green'schen Funktion der Profile 19, 20 und 23 und b) normierten Imaginärteile der Green'schen Funktion der Profile 19, 20 und 23.	131
4-6	Darstellung der a) normierten Realteile der Green'schen Funktion der Profile 20, 22 und 24 und b) normierten Imaginärteile der Green'schen Funktion der Profile 20, 22 und 24.	131
4-7	Darstellung der a) normierten Realteile der Green'schen Funktion der Profile 25 und 35 und b) normierten Imaginärteile der Green'schen Funktion der Profile 25 und 35.	132
4-8	Normierte Energierate der Moden 1, 2 und 3 in den unterschiedlichen Schichtungsbereichen, Profil 9.	134
4-9	Normierte Energierate der unterschiedlichen Moden innerhalb a) der ersten Schicht und b) im Halbraum des Profils 9.	134
4-10	Dispersionsverhalten des synthetischen Wellenfeldes von Profil 9. . . .	135
4-11	Normierte Verschiebung u_z und u_r über die Tiefe, Profil 9.	136
4-12	Ausrichtung der Partikelbewegung an der Oberfläche, Profil 9.	136
4-13	Dispersionsverhalten des synthetischen Wellenfeldes von Profil 35. . .	137

4-14	Normierte Energierate der Moden 1, 2 und 3 in den unterschiedlichen Schichtungsbereichen von Profil 35.	137
4-15	Normierte Energieraten der unterschiedlichen Moden innerhalb der ersten Schicht, der zweiten Schicht, der dritten Schicht und des Halbraums von Profil 35.	138
4-16	Darstellung der Abstrahlungsbedingungen für einen starren Halbraum.	139
4-17	Dispersionsverhalten des starr gelagerten Profils 10 (a) im Vergleich zu dem Dispersionsverhalten des Profil 10 Berücksichtigung des Halbraums (b).	140
4-18	Gegenüberstellung von Dispersionskurve und Transfer-Funktion des Profils 10.	140
4-19	Green'sche Funktion des starr gelagerten Schichtungsmodells (a) und des auf elastischem Halbraum gelagerten Modells (b).	141
4-20	Einhüllende der Abnahmefunktionen für die anormal dispersiven Schichtungen	145
4-21	Darstellung der Green'schen Funktion und Transferfunktion	146
4-22	Darstellung der Green'schen Funktion und Transferfunktion	146
4-23	Dispersionsverhalten des synthetischen Wellenfeldes von a) Profil 43, b) Profil 63 und c) Profil 65.	147
4-24	Normierte Energierate der Moden 1, 2 und 3 in den unterschiedlichen Schichtungsbereichen des Profils 63.	148
4-25	Normierte Energierate der unterschiedlichen Moden innerhalb a) der ersten Schicht, b) der zweiten Schicht und c) im Halbraum des Profils 63.	149
4-26	Dispersions- und Gruppengeschwindigkeiten des Profils 63.	149
4-27	Verhalten der normierten Verschiebung u_z und u_r über die Tiefe, Profil 63.	150
4-28	Normierte Eigenformen des Grundmodes von Profil 63 mit diskreten Frequenzen von 5 (a) bis 110 Hz (z) mit 5Hz Schrittweite.	151
4-29	Normierte Eigenformen des 2. Modes von Profil 63 mit diskreten Frequenzen von 5 (a) bis 110 Hz (z) mit 5Hz Schrittweite.	152
4-30	Ausrichtung der Partikelbewegung an der Oberfläche von Profil 63.	153
4-31	Normierte Verschiebung u_z und u_r über die Tiefe bei Anregung in der weichen Schicht von Profil 55.	153
4-32	Spurnormiertes Wellenfeld für Phasen-Differenzen-Auswertung und Wellenfeld-Transformation - Halde Freiberg	155
4-33	f-k- und Wellenfeld-Analyse in unterschiedlichen Schussrichtung - Halde Freiberg	156
4-34	Analyse und Auswertung der PhasenDifferenzen-Methode - Halde Freiberg	157

4-35	Dispersionskurve und Ergebnisprofil für die Referenzpunktmessung - Halde Freiberg	159
4-36	Inversionsergebnis und Varianz der Geschwindigkeiten - Halde Freiberg	160
4-37	Spurnormiertes Wellenfeld und gemittelte Dispersionskurve der Messung - Oberlausitz	161
4-38	Transformation und Inversionsergebnis der Messung - Oberlausitz . .	162
4-39	Transformationsabbildungen der Messung - Niederlausitz	164
4-40	Phasengang und gemittelte Dispersionskurve - Niederlausitz	165
4-41	Vergleich der Dispersionsanalysen und Inversionsergebnis am Messpunkt 1 - Niederlausitz	166
4-42	Schubmodulverlauf und Iterationsabfolge - Niederlausitz	167
A-1	Definition der Punktlast.	187
A-2	Spannungs- und Verschiebungsrandbedingungen eines einfach geschichteten Bodenmodells.	189
A-3	Kontur um die Verzweigungspunkte auf der reellen Achse nach Bild 2-18.	200
A-4	Zeitverlauf und Amplitudenspektrum des Rickerimpulses a) 0. Ordnung, b) 1. Ordnung, c) 2. Ordnung und d) 3. Ordnung.	207

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Einführung und Motivation

Die Beschreibung der Ausbreitung von Wellen ist eine fundamentale Aufgabe der Bodendynamik. Durch die immer enger werdende Bebauung in den Städten und die Zunahme schwingungsempfindlicher Bauwerke bei gleichzeitigem Anwachsen der Erschütterungsquellen ist eine zuverlässige Prognose zu erwartender Störungen erforderlich. Für eine realitätsnahe Beschreibung der Übertragungsprozesse muss ein zu nutzendes Modell die geologischen Besonderheiten des jeweiligen Untergrundes abbilden können. Folgerichtig nimmt die Quantifizierung dynamischer Untergrundparameter als Voraussetzung von Prognoserechnungen einen immer größeren Planungsanteil ein. Speziell beim Bauen auf seismisch gefährdeten Böden ist es zum Verständnis und zur Quantifizierung der seismischen Filter- und Übertragungswirkung geschichteter Böden notwendig, realitätsnahe Bodenparameter der Standorte zur Verfügung zu haben.

Für das Verständnis einer Wellenausbreitung sind Oberflächenwellen ein elementarer Bestandteil der Analyse. Aufgrund der physikalischen Eigenarten dieses Wellentyps haben sie einen ganz entscheidenden Anteil am Inhalt eines laufenden Wellenfeldes. Zum einen transportieren die Oberflächenwellen den weitaus größten Teil der Energie (Richart, Hall & Woods 1969) und zum anderen erschließen sich mit ihnen völlig neue Aspekte bei der Auswertung von Wellenfeldern. Der besondere Stellenwert der Oberflächenwellen gegenüber anderen Wellentypen liegt in der großen Empfindlichkeit für die Schubsteifigkeit des durchlaufenen Materials. Durch die Messung von Oberflächenwellen bietet sich auch die Möglichkeit, Standortparameter zerstörungsfrei in situ bei gleichzeitig sehr kleinen Dehnungsniveaus (*small strain*) zu erhalten, was mit anderen üblichen geotechnischen Feldversuchen nicht realisiert werden kann (Burland 1989, Hight, Bennell, Chana, Davis, Jardin & Porovic 1997).

Bei der Untersuchung von Wellen, insbesondere von Oberflächenwellen, ist schon für

elementare Aussagen über die mechanischen Eigenschaften der durchlaufenen Medien eine Nutzung von theoretischen Modellen unumgänglich. Dazu ist in der Literatur eine Vielfalt von möglichen Bodenmodellen zu finden. Um daraus das geeignete Bodenmodell zu wählen, sind unterschiedliche Voraussetzungen zu erfüllen. Zum einen muss das Modell die Realität möglichst gut beschreiben, und zum anderen darf es nicht zu viele Variablen besitzen. Damit wird für jegliche Art der Nutzung von Wellen das mechanisch - mathematische Modell der Wellenausbreitung zum zentralen Punkt der Untersuchung. Als theoretische Grundlage der Berechnungen wird ein Modell auf Basis der Kontinuumstheorie gewählt. Der Vorteil dieses Modells liegt in der begrenzten Anzahl von Parametern für die Berechnung der Wellenausbreitung und der Möglichkeit, die in einer Inversion oft erforderlichen partiellen Ableitungen analytisch beschreiben zu können.

Für die Interpretation von Beobachtungen wird es ebenfalls wichtig, auftretende Besonderheiten der Wellenausbreitung zu kennen. Damit ist die Klärung der Fragestellungen immer an eine gleichzeitige Betrachtung der Messungen und der theoretischen Berechnung gekoppelt. Die Komplexität der Vorgänge während einer Wellenausbreitung bedarf ausführlicher theoretischer Studien, um befriedigende Antworten geben zu können. Die Behandlung von theoretischen Seismogrammen zusammen mit der Rekonstruktion von Bodenstrukturen aus Wellenfeldern nimmt in Folge dessen einen entsprechend breiten Raum in den Geowissenschaften und in dieser Arbeit ein.

Zur Prüfung der Ergebnisse durchgeführter seismischer Messungen bzw. der Inversion zu Baugrundparametern und Schichtungsprofilen, wurden diese -sofern möglich und notwendig- nochmals mit den Ergebnissen herkömmlicher Erkundungsmethoden verglichen.

1.2 Stand der Forschung

Sehr viele Untersuchungen auf dem Gebiet der Geowissenschaften im Zusammenhang mit einer Wellenausbreitung implizieren direkt oder indirekt die Betrachtung von Oberflächenwellen. Aufgrund der Vielzahl der allein auf dem geotechnischen Gebiet durchgeführten Untersuchungen würde eine vollständige Bibliographie den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Dennoch soll versucht werden, die wesentlichen Entwicklungen und Vorarbeiten zu nennen, auf denen diese Arbeit aufbaut.

Ferner gewinnt die Nutzung und Analyse von Wellen, insbesondere von Oberflächenwellen, einen zunehmenden Einfluss in anderen Forschungsbereichen der Geotechnik bzw. des Bauingenieurwesens. Diese Tendenz ist an die besonderen Eigenschaften von Oberflächenwellen gebunden. Sie eignen sie sich hervorragend als Informationsträger zum Erhalt von *small strain* - in situ Parametern (Jamiolkowski, LoPresti

& Pallara 1995, Ishihara 1996, Mauerer, Van der Veen, Gindici & Springman 1999). Diese nehmen in der derzeitigen Forschung einen elementaren Platz bei den Bodenkennwerten ein. Weiterhin besitzen die Oberflächenwellen wegen ihrer schwachen geometrischen Dämpfung einen entscheidenden Einfluss in der Analyse von Erschütterungsausbreitung in urbanen Gebieten.

Modellierung des Untergrundes

Das Fundament für das Verständnis von Oberflächenwellen wurde durch Rayleigh (Rayleigh 1885) und Love (Love 1903) mit der Beschreibung der gleichnamigen Rayleigh- und Lovewellen gelegt. Lamb (Lamb 1904) veröffentlichte die ersten theoretischen Untersuchungen eines belasteten Halbraums. In den 50er Jahren legten Thomson (Thomson 1950) und Haskell (Haskell 1953) die theoretische Grundlage zur Behandlung mehrfach geschichteter Strukturen. In der Folgezeit gab es unterschiedliche Entwicklungen, um die diesem Verfahren innewohnenden numerischen Probleme zu beheben (Dunkin 1965, Watson 1972, Schwab & Knopoff 1970). Doch erst Mitte der 90er Jahre gelang es Chen (Chen 1993), diese Probleme entgeltig zu beseitigen. Einen sehr guten Überblick der später auf Grundlage des Thomson-Haskell-Algorithmus unterschiedlich entwickelten Verfahren gibt Buchen und Ben-Hador (Buchen & Ben-Hador 1996).

Mit dem Aufkommen der Berechnungsmöglichkeit der Dispersionseigenschaften bestand jedoch das vordergründige Interesse in der Untersuchung des Erdkrustenaufbaus, wie die Fülle der Publikationen auf dem geophysikalischen Gebiet zu diesem Thema schließen lässt (Harkrider & Anderson 1966, Saito 1967, Takeuchi & Dorman 1963). Weitere Entwicklungen erfolgten in den 70er Jahren durch Fuchs (Fuchs & Müller 1971) und Müller (Müller 1985) mit der Berechnung vollständiger Seismogramme sowie durch theoretische Untersuchungen von Oberflächenwellen in lateral heterogenen Medien (Malischewsky 1973, Malischewsky 1987, Keilis-Borok & Yanovskaya 1962).

Parallel zu den Matrizenverfahren wurden mehrere numerische Methoden zur Berechnung der Wellenausbreitung entwickelt. Hierzu seien an dieser Stelle die Finite Differenzen- und Finite Element-Methode sowie hybride Methoden (Kausel & Roesset 1981) genannt, die vordergründig für die Untersuchung der Wellenausbreitung in komplexen Strukturen entwickelt wurden. Vorrangige Zielrichtung der theoretischen Untersuchungen in den Ingenieurwissenschaften war zumeist die Interaktion von Bauwerk und Boden (Savidis 1977, Hirschauer 2001) und (Bode 2000). Doch auch die Auswirkung baulicher Strukturen auf die Ausbreitung von Oberflächenwellen wurden untersucht und Konzepte zur Erschütterungsminderung abgeleitet (Haupt 1977). Auersch (Auersch 1981, Auersch 1994) und Rücker (Rücker 1979) untersuchten die Ausbreitung von Erschütterungen in geschichteten Systemen mittels

numerischer Methoden. Die oben genannte hybride Methode nach Kausel (Kausel & Roesset 1981) stellt einen interessanten Ansatz dar, da diese Methode aus den Übertragungsmatrizen (Haskell 1953) einer Schichtung ableitbar ist. Eine ausführliche Zusammenstellung dieser Ableitungen ist in (Wolf 1985) enthalten. Die Zunahme der Steifigkeit im Halbraum mit der Tiefe wird bei diesem Ansatz durch die Unterteilung in viele schmale, homogene Schichten mit unterschiedlichen Moduln vorgenommen. Dieses Vorgehen wird in der Literatur auch oft als *Thin Layer Method* (Waas 1972) bezeichnet. Park (Park 2002) weist in diesem Zusammenhang auf das Vorhandensein einer numerischen Dispersion innerhalb der hybriden Lösungen hin. Problematisch wird diese, wenn die Berechnungsergebnisse hinsichtlich der systemeigenen Dispersion analysiert werden.

Neben den Vorzügen der breiten Entwicklung und Anwendung der FEM auf dem Gebiet des Ingenieurwesens, sind im Zusammenhang mit experimentellen Untersuchungen und der Nutzung inverser Methoden die Matrizenverfahren von Vorteil. Dieser Vorzug besteht in der geringen Anzahl zu invertierender Variablen und der klaren Aussagefähigkeit synthetisch berechneter Ergebnisse.

Hinweise auf die Abhängigkeit der Wellenausbreitung von Anregungsquelle, -tiefe und dem Schichtenprofil sind in (Aki & Richards 1980, Hisada 1994) und (Harkrider 1964) zu finden. Wie schon erwähnt, ist eine umfassende Analyse von Oberflächenwellen nur unter Berücksichtigung synthetischer Seismogramme möglich. Die meisten Entwicklungen bezüglich theoretischer Seismogramme haben die Betrachtung eines kompletten Wellenfeldes zum Inhalt. Die vorhandenen Probleme während der durchzuführenden Integration durch Singularitäten auf der Integrationsachse werden in (Bouchon 1981, Luco & Apsel 1983, Müller 1985) und (Hisada 1994) mit der Einführung einer Dämpfung beseitigt. Dieses Vorgehen ist durchaus legitim, da auch der natürliche Boden eine gewisse Materialdämpfung aufweist. Das Ergebnis ist ein entsprechend der auftretenden Wellentypen zu interpretierendes Seismogramm.

Die Betrachtung eines reinen Oberflächenwellenfeldes ohne weitere Berücksichtigung der Körperwellen kann nach (Harkrider 1964) durch die Lösung der Normalmoden Superposition erfolgen¹. Aufwendig und problematisch zum Erreichen dieses Zieles ist die notwendige Zerlegung des Feldes in mögliche Wellentypen. Diese Zerlegung kann nur durch eine analytische Lösung der partiellen Differentialgleichung und der Ableitung der Verschiebungsfunktionen (Green'schen Funktionen) erreicht werden. Mit Reissner (Reissner 1936) und Bycroft (Bycroft 1956) sowie weiteren Autoren wurde in den Ingenieurwissenschaften dieser Weg bis in die 50er Jahre verfolgt, wobei der Schwerpunkt dieser Betrachtungen auf der Boden-Fundament-Interaktion

¹Mitunter wird stellvertretend für den Begriff der Normalmoden Superposition auch die Bezeichnung Fernfeldlösung benutzt.

bzw. der Angabe von Impedanzfunktionen lag. Die genannte Wellenfeld-Trennung ergab sich zwangsläufig innerhalb der analytischen Lösung. Spezielle Ableitungen zur Fernfeldlösung im Hinblick auf die Wellenausbreitung wurden von (Harkrider 1964, Harkrider & Anderson 1966) und (Saito 1967) im Zuge von Untersuchungen zum Aufbau der Erdkruste publiziert. In (Aki & Richards 1980) wird neben der Fernfeldlösung auch eine physikalische Interpretation der Eigenwertlösung gegeben. Tokimatsu (Tokimatsu 1997) publiziert eine interessante Lösung des entkoppelten Wellenfeldes unter der Angabe des Verweises auf die japanische Originalliteratur nach Saito (Saito 1993, Saito & Kabasawa 1993). Das Verfahren von Gilbert und Backus (Gilbert & Backus 1966) bildet die Grundlage dieser Ableitungen. Durch Vereinfachungen der angegebenen komplexen Ausdrücke erhält man wieder das Verfahren von Haskell. In Kapitel 2 wird eine eigene Lösung abgeleitet, die aber auf den vorgenannten anschaulicheren Matrizenverfahren nach (Chen 1993) bzw. (Hisada 1994) beruht. Die resultierenden Verschiebungsgleichungen ähneln in der Formulierung der Lösung von Saito.

Interpretation und Inversion von Felddaten

Die seismischen Wellen, speziell die Oberflächenwellen, werden seit Mitte der 80er Jahre in der Geotechnik für die Standorterkundung verwendet (Nazarian 1984, Nazarian & Stokoe 1986). Seitdem erfolgte eine vielfältige Analyse zu Eigenschaften dieses Wellentyps. Dabei wurden die weitaus meisten Anwendungen und Untersuchungen mit Hilfe der SASW (Spektrale Analyse von Oberflächenwellen) durchgeführt. Aus der Vielzahl der Veröffentlichungen zur SASW werden folgende Publikationen beispielhaft genannt: (Rix 1988, Gucunski & Woods 1991a, Tokimatsu, Tamura & Kojima 1992, Haegeman & Van Impe 1995, Joh 1996, Matthews, Hope & Clayton 1996). Die Grundlage dieses Verfahrens ist die Ermittlung *einer* experimentellen Dispersionskurve, womit im nächsten Schritt die Inversion der Parameter erfolgt. In den meisten Publikationen wird die experimentelle Dispersionskurve dem Fundamentalmode zugeordnet. Die ursprüngliche Rayleighwellen - Dispersionsmessung mit der Wellenanregung infolge einer harmonischen Quelle wurde durch die SASW mit Nutzung einer Impulsquelle in der Erkundung ergänzt bzw. abgelöst.

Bei der Inversion, welche letztlich ein Optimierungsproblem darstellt, können unterschiedliche Lösungsstrategien verfolgt werden. Zur Anwendung der Methode des kleinsten Fehlerquadrats in der iterative Näherung zwischen den experimentellen und synthetischen Daten ist es üblich, die nichtlinearen Abhängigkeiten der Modellparameter zu linearisieren (Wiggins 1972, Yuan & Nazarian 1993). Die Einsatzbreite dieser Gradientenmethode wird anhand der dazu existierenden Literatur deutlich: (Menichetti & Guillen 1983, Hering, Misiak, Gyulai, Ormos, Dobroka & Dresen 1995, Nazarian, Yuan & Baker 1994, Forbriger 2003b). Die dabei benötigten

Ableitungen nach den Schichtparametern lassen sich auf unterschiedlichen Wegen bestimmen (Novotný 1976). Von Vorteil hat sich die Berechnung der Ableitungen auf Grundlage der Variationsprinzipien erwiesen (Harkrider & Anderson 1966), da die Berechnung stabil und genau erfolgt.

Neben diesen Aspekten muss auch beachtet werden, dass die Bereitstellung einer geeigneten Dispersionskurve für die weitere Inversion ein praktisch durchaus schwieriges Unterfangen werden kann (Al-Hunaidi 1992). Dementsprechend ist die Signalverbesserung (Hayes 1999) durch Stapel-, Filterverfahren oder andere Methoden der Signalverarbeitung unumgänglich. Außer diesen Schritten muss ebenfalls das Auftreten höherer Moden und die Auswirkungen auf die Bestimmung *einer* Dispersionskurve (Tokimatsu et al. 1992) beachtet werden. Für eine Analyse von Bodenprofilen, die das Auftreten höherer Moden fördern, wurde von Gucunski (Gucunski 1991) erste Untersuchungen hinsichtlich einer scheinbaren Dispersionskurve in den Messungen infolge des Einflusses höherer Moden getätigt. Lai und Rix (Lai & Rix 1998) berechnen eine synthetische (effektive) Dispersionskurve, in der die Anregung der jeweiligen Moden berücksichtigt ist. Mit dieser gewichteten, scheinbaren Dispersionskurve kann der formale Inversionsalgorithmus der SASW beibehalten werden.

Für den Erhalt von Informationen zu höheren Moden und der Verbesserung der Modenabbildung erfolgte in (Forchap 1996, Foti 2000) und (Tokimatsu et al. 1992) die Nutzung einfacher Wellenfeldtransformationen anstatt des oft genutzten Phasen-Differenzen-Verfahrens (SASW). Im überwiegenden Teil wurden für die Abbildung von höheren Moden Frequenz-Wellenzahl-Analysen (f/k -Analysen) in Verbindung mit einer harmonischen Anregung (Forchap 1996) und einer Impulslast (Foti 2000) genutzt. Weitaus effektivere Methoden zur Untersuchung einer auftretenden Dispersion sind auf dem geophysikalischen Gebiet erarbeitet worden. McMechan (McMechan & Yedlin 1981) entwickelte die Grundzüge eines Stapelverfahrens, das in Kombination mit der Fourier-Transformation der Zeitabhängigkeit eine deutlich bessere Abbildung der Dispersionscharakteristiken als die übliche f/k -Analyse aufweist. Interessanterweise war das ursprüngliche Ansinnen dieser Entwicklung, den störenden Einfluss der Oberflächenwellen aus den seismischen Messungen zugunsten der Körperwellendetektion zu eliminieren. In der Folge wurde dieses Verfahren hinsichtlich der Auflösung (Park, Miller & Xia 1998) verbessert bzw. für zylinderförmig ausbreitende Wellen (Forbriger 2003b) erweitert.

In den 90er Jahren wurden auch auf dem geophysikalischen Gebiet wieder vermehrt Untersuchungen im Zusammenhang mit flachseismischen Oberflächenwellen getätigt, wobei die Mehrzahl der Publikationen auf der gemeinsamen Inversion unterschiedlicher Messverfahren (Menichetti & Guillen 1983) beruht oder auf die Erfassung lateraler Strukturen abzielt (Schneider 1993).

Neben diesen Entwicklungen wurden auch wesentlich kompliziertere und umfassendere Inversionsstrategien verfolgt, um in der Inversion das vollständige Wellenfeld mit seinen Einflüssen zu berücksichtigen. So entwickelten Maquering, Snieder und Nolet

(Marquering, Snieder & Nolet 1996) bzw. Nolet und Dorman (Nolet & Dorman 1996) eine Wellenforminversion im Zeitbereich sowie Forbriger (Forbriger 2003*b*) eine Inversion komplexer Wellenfeldspektren zur Berücksichtigung möglichst vieler Informationen aus dem Wellenfeld. Diese Methoden benötigen allerdings eine wesentliche Erweiterung in der Inversionsmethodik. Zusätzlich haben sie hinsichtlich der Komplexität häufig das Problem ein brauchbares Startmodell zu finden und weisen mitunter infolge vieler freier Parameter eine Divergenz des Algorithmus' auf. Deshalb wurden zur Verbesserung des Konvergenzverhaltens die Vorteile unterschiedlicher Inversionsmethoden in (Herrmann & Wang 1985) miteinander kombiniert.

1.3 Ziele und Inhalt der Arbeit

Das Ziel der vorliegenden Arbeit besteht in der Identifizierung der Standortparameter unter Einbeziehung auftretender höherer Moden in einem Oberflächenwellenfeld. Die Konzentration der Aufgabenstellung auf Oberflächenwellen beruht auf den bereits genannten Vorteilen:

Sie transportieren bei den meisten Anregungsformen den größten Teil der Energie eines Wellenzuges. Sie können auch in großer Entfernung signifikante Störungen hervorrufen und speichern auf relativ empfindliche Art und Weise den Informationsgehalt der Scherwellengeschwindigkeit des Untergrundes.

Zur Umsetzung dieser Zielstellung sind die folgenden maßgeblichen Schritte, die auch die Gliederung der Arbeit bestimmen, notwendig:

1. Strukturmodellierung, -analyse
2. Wellenfeldanalyse
3. Inversion der Felddaten.

Die Strukturmodellierung bzw. die Erarbeitung eines entsprechenden theoretischen Modells erfolgt in **Kapitel 2**. Dabei steht die Forderung nach möglichst wenig freien Parametern im Modell bei gleichzeitig ausreichend guter Beschreibung der realen Situation im Vordergrund. Zur Grundlage der Berechnung synthetischer Wellenfelder wird eine Kontinuumsbeschreibung gewählt. Ausgehend von der homogenen Halbraumlösung erfolgt in Kapitel 2 eine Lösung des geschichteten Halbraums im Frequenzbereich. Aufbauend auf der Beschreibung eines horizontal geschichteten Untergrunds nach (Chen 1993) und (Haskell 1953) wird die analytische Lösung mittels der Konturintegration abgeleitet. Der Vorteil dieser Lösung ist das Vorliegen von Verschiebungsanteilen, die den unterschiedlichen Wellentypen zugeordnet werden können.

In den Analysen unterschiedlicher Felddaten zeigte sich, dass die in der Geotechnik zur Verfügung stehenden experimentellen Methoden oft unzureichend die Dispersionscharakteristiken wiedergeben. Aus dieser Notwendigkeit heraus wurden in **Kapitel 3** erweiterte Methoden der Geophysik übernommen, um Aussagen zu höheren Moden zu erhalten. Zur gemeinsamen Interpretation dieser auftretenden Moden wurde ein Inversionsmodell erarbeitet, das auf der Grundlage des kleinsten Fehlerquadrates eine Fehlerminimierung durchführt. Die mathematische Grundlage der Inversion ist ein Gradientenverfahren (Levenberg-Marquardt) der nichtlinearen Optimierung.

Aufbauend auf den vorangegangenen Kapiteln werden im **Kapitel 4** mögliche Erscheinungsformen und Zusammenhänge der Wellenausbreitung in Abhängigkeit der Standortcharakteristiken dargestellt. Diese liefern die Voraussetzung für die Interpretation der Felddaten und damit die Grundlage für eine erfolgreiche Inversion. Die theoretischen Untersuchungen beschränken sich auf eine der Messkonfiguration konforme Quell- und Aufnehmeranordnung in der Modellstruktur. In den Ausführungen zu experimentellen Untersuchungen werden von der Vielzahl der Messungen drei Fallbeispiele vorgestellt. Die Voraussetzung zur Durchführung der dort durchgeführten Dispersionsanalysen und Parameterinvertierungen bilden die Ausführungen im Kapitel 2 und 3. Die Ergebnisse dieser Kapitel konnten basierend auf den erarbeiteten experimentellen und theoretischen Methoden erfolgreich validiert und verifiziert werden.

Kapitel 2

Strukturmodellierung

In der erfolgreichen Bearbeitung jeglicher bodendynamischer Problemstellungen ist die Definition eines klaren mathematisch - physikalischen Modells von entscheidender Bedeutung. Das zu verwendende Modell ist dabei auf die konkrete Aufgabenstellung abzustimmen. Bei der Wahl des Modells steht man meist vor dem Problem, dass das Modell einerseits die Realität möglichst getreu widerspiegeln, andererseits aber auch nicht zu kompliziert sein sollte. Das ist um so mehr geboten für die Auswertung von Felddaten zur Standortidentifizierung. In diesem Zusammenhang steht die Forderung, dass das zugrundeliegende Modell nicht mehr als notwendig Struktur aufweisen soll. Wird hingegen ein sehr anspruchsvolles Modell für die Umsetzung gewählt, so steigen die mathematischen und numerischen Schwierigkeiten. Die entstehenden Probleme können so groß werden, dass eine Invertierung nicht mehr möglich ist. Mit dieser Forderung wurde auf eine weitestgehende analytische Beschreibung des Modells zurückgegriffen. Dieses hat den Vorteil der recht klaren Ergebnisinterpretation der synthetischen Daten und einer sehr guten Eignung für eine Inversion aufgrund der geringen Anzahl von Parametern im Modell. Der Nachteil dabei ist die zum Teil anspruchsvollere theoretische Vorarbeit sowie die Begrenzung auf bestimmte geometrische Strukturen.

Das nachfolgende Kapitel zur Erarbeitung eines verwendbaren Modells ist in folgende Teilabschnitte gegliedert:

1. Lösung der bodendynamischen Grundgleichungen
2. Geometrische Modellierung einer möglichen Bodenstruktur (Schichtung) unter dem Aspekt der numerischen Stabilität
3. Ableitung der Verschiebungsgleichungen des geschichteten Halbraums
4. Berechnung von synthetischen Seismogrammen, angepasst in Quelltyp und -spektrum an die durchzuführende Standorterkundung

Die Bestimmung eines robusten Modelltyps ist dabei nicht nur für die formale Durchführung der Inversion notwendig. Insbesondere ermöglicht die synthetische Berechnung das Studium von speziellen Verhaltensmustern typischer Standortprofile. Damit wird in der Wellenfeldanalyse häufig erst eine Interpretation der Felddaten möglich.

In diesem Kapitel werden die Voraussetzungen zur Lösung der bodendynamischen Grundgleichung (Lame-Navier'schen Differentialgleichung) für den rotationssymmetrischen Fall aufgearbeitet. Die Nutzung dieser Koordinaten entspricht dem Belastungsregime der zu tätigenen Messungen. Mit Hilfe der Integraltransformationen und den entsprechenden Rand- und Kontinuitätsbedingungen werden die Spannungs- und Verschiebungsgleichungen für einen beliebigen Punkt im horizontal geschichteten Medium definiert. In der gemeinsamen Betrachtung des Thomson-Haskell-Rekursionsalgorithmus und der Methode der Reflexions- und Transmissionskoeffizienten kann eine analytische Lösung der Green'schen Funktionen im Frequenzbereich angegeben werden, die in der numerischen Berechnung stabil ist. Analog dem homogenen Halbraum wird die Lösung des geschichteten Halbraums unter Nutzung der Funktionentheorie abgeleitet. Des Weiteren werden ausgehend von der erhaltenen Lösung unterschiedliche Berechnungsstrategien für synthetische Seismogramme untersucht. Damit werden die Grundlagen für eine weitere Analyse theoretischer Modelle und für die Durchführung der Parameterinversion geschaffen. Die getätigten Herleitungen und Darstellungen wurden dabei immer unter dem besonderen Blickwinkel der zu analysierenden Oberflächenwellen betrachtet.

2.1 Grundgleichung der Elastodynamik

Die allgemeine Beschreibung des mechanischen Verhaltens des Bodens erfolgt auf der Grundlage der Kontinuumstheorie. Die idealisierte Annahme des Kontinuums vereinfacht die tatsächlich vorhandene diskrete Struktur der Materie und vereinbart idealisierte Eigenschaften innerhalb dieses Kontinuums. Die Berechtigung für eine derartige Modellbildung beruht auf der Tatsache, dass eine Vielzahl von Vorgängen und Phänomenen mit dieser Idealisierung hinreichend genau beschrieben werden kann. Die Prüfung dieser Hypothesen stützt sich dabei auf zu beobachtende Erscheinungen als auch auf experimentell nachweisbare Gesetzmäßigkeiten. Im Wesentlichen durchläuft die Analyse dabei die Punkte: Modellbildung und Idealisierung, Lösung der mathematischen Ausdrücke unter Verwendung der angewandten Mathematik sowie Bestätigung in experimentellen Untersuchungen, wobei die Abfolge der Punkte nicht zwingend in dieser Reihenfolge erfolgen muss. Für die vorliegende Arbeit ist die lineare, elastische Bewegungsgleichung der Ausgangspunkt aller Betrachtungen. Folgt man Sommerfeld (Sommerfeld 1992a) bzw. (Ewing, Jardetzky & Press 1957) in der Betrachtung der Spannungsbilanz eines infinitesimalen Volumenelementes, so

gelangt man zu den Grundgleichungen, die die Dynamik eines elastischen Körpers beschreiben.

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathcal{F} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (2.1)$$

Die auftretenden Formelzeichen in Gl.(2.1) stellen mit $\boldsymbol{\sigma}$ den Spannungstensor¹, mit \mathcal{F} den Vektor der äußeren Kräfte pro Volumeneinheit und mit $\rho \cdot \ddot{\mathbf{u}}$ die Trägheitskraft ($\ddot{\mathbf{u}} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$) dar. Durch Anwendung der Stoffbeziehungen für das elastisch-isotrope Material

$$\tau_{ij} = \lambda e_{rr} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad (2.2)$$

ergibt sich unter Vernachlässigung der Volumenkräfte \mathcal{F} die Bewegungsgleichung als ein gekoppeltes partielles Differentialgleichungssystem 2. Ordnung, die so genannte Lamé-Navier'sche Verschiebungs-Differentialgleichung.

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\mu + \lambda) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (2.3)$$

In der beschriebenen Differentialgleichung (2.3) sind μ und λ die Lamé'schen Materialkonstanten, ν die Querdehnungszahl, μ der Schubmodul sowie E der Elastizitätsmodul und ρ die Dichte des Kontinuums. Der auftretende Operator Δ in (2.3) kennzeichnet den Laplace-Operator $\nabla \cdot \nabla = \nabla^2$.

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.4)$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (2.5)$$

Diese Differentialgleichung bildet die Grundlage für den weiteren Lösungsweg. Zur Lösung von partiellen Differentialgleichungen bietet die mathematische Literatur unterschiedliche Lösungswege an. Die vorliegende dreidimensionale Wellengleichung wird in der Regel unter Nutzung eines Potentialansatzes entkoppelt und damit weiterführenden Lösungsmethoden zugänglich.

2.2 Lösung der Wellengleichung

2.2.1 Helmholtz'scher Darstellungssatz

Nach Sommerfeld (Sommerfeld 1992a) kann jedes stetige im ganzen Raum definierte Vektorfeld in einen wirbel- und quellenfreien Bestandteil entsprechend dem Helmholtz'schen Darstellungssatz zerlegt werden. Diese Zerlegung des Verschiebungsvek-

¹Die Anwendung der Vektordivergenz $\nabla \cdot$ auf den Spannungstensor erfolgt nach Sommerfeld (Sommerfeld 1992a).

tors \mathbf{u} erfolgt durch die Einführung eines skalaren Potentials φ und eines Vektorpotentials $\boldsymbol{\psi}$ nach (Schmutzer 1989).

$$\mathbf{u} = \nabla\varphi + \nabla \times \boldsymbol{\psi} \quad (2.6)$$

Damit wird der Verschiebungsvektor in den wirbel- und divergenzfreien (quellenfreien) Bestandteil zerlegt. Die separierten Felder genügen den Bedingungen

$$\text{rot } \varphi = 0 \text{ bzw. } \text{div } \boldsymbol{\psi} = 0. \quad (2.7)$$

Aus (2.7) folgt, dass die Divergenz des Feldes vollständig in $\nabla\varphi$ und die Rotation des Feldes vollständig in $\nabla \times \boldsymbol{\psi}$ enthalten ist. Die jeweiligen Verschiebungsanteile werden durch die Potentiale ausgedrückt. Physikalisch repräsentiert das skalare Potential φ innerhalb (2.6) den wirbelfreien, also den formerhaltenden Anteil des Verschiebungsvektors. Mit $\boldsymbol{\psi}$ hingegen wird der divergenzfreie und damit der volumenerhaltende Anteil ausgedrückt. Nach Sommerfeld (Sommerfeld 1992a) korrespondieren die transversalen Wellen mit dem quellenfreien und die longitudinalen Wellen mit den wirbelfreien Bestandteilen des Verschiebungsfeldes.

Unter Verwendung von Zylinderkoordinaten erhält man für die Verschiebungen in (2.6) die folgenden Ausdrücke

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\psi_z}{\partial\phi} - \frac{\partial\psi_\phi}{\partial z} \\ u_\phi &= \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\phi} + \frac{\partial\psi_r}{\partial z} - \frac{\partial\psi_z}{\partial r} \\ u_z &= \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\psi_\phi r)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial\psi_r}{\partial\phi}. \end{aligned} \quad (2.8a-c)$$

Für die eingeführten Potentiale gilt weiterhin die Beziehung:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\psi} = \frac{\partial\psi_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\psi_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial\psi_z}{\partial z} = 0. \quad (2.9)$$

Durch die Anwendung des Potentialansatzes von (2.6) auf die Differentialgleichung (2.3), folgt die entkoppelte Darstellung der Gleichung bezüglich der Divergenz und Rotation des gesamten Wellenfeldes.

$$\nabla [(\lambda + 2\mu) \nabla^2 \varphi - \rho \ddot{\varphi}] + \nabla \times [\mu \nabla^2 \boldsymbol{\psi} - \rho \ddot{\boldsymbol{\psi}}] = 0 \quad (2.10)$$

Die Lösung der Differentialgleichung (2.10) erhält man, wenn die Klammerausdrücke beider Summanden in Gl.(2.10) Null werden. Beachtet man zusätzlich für den entkoppelten Teil des Vektorpotentials $\boldsymbol{\psi}$ die Beziehung $\nabla^2 \boldsymbol{\psi} = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{\psi}) - \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{\psi}$, so

lässt sich die entkoppelte Differentialgleichung (2.10) in den folgenden vier partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung darstellen.

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \varphi &= \frac{1}{c_p^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \\
\nabla^2 \psi_r - \frac{\psi_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_\phi}{\partial \phi^2} &= \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \psi_\phi}{\partial t^2} \\
\nabla^2 \psi_\phi - \frac{\psi_\phi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \psi_r}{\partial \phi} &= \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \psi_\phi}{\partial t^2} \\
\nabla^2 \psi_z &= \frac{1}{c_p^2} \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial t^2}.
\end{aligned} \tag{2.11a-c}$$

Für den Fall der Axialsymmetrie unter Anwendung einer vertikalen Punktlast und der Nutzung von Zylinderkoordinaten reduzieren sich die in Gl.(2.8) gegebenen Verschiebungen²

$$\begin{aligned}
u_r &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\partial \psi_\phi}{\partial z} \\
u_\phi &= \frac{\partial \psi_r}{\partial z} - \frac{\partial \psi_z}{\partial r} \\
u_z &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\psi_\phi r)}{\partial r}
\end{aligned}$$

sowie die entkoppelten partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung (2.11) um die Abhängigkeit nach dem Azimut.

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \varphi &= \frac{1}{c_p^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \\
\nabla^2 \psi_r - \frac{\psi_r}{r^2} &= \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \psi_r}{\partial t^2} \\
\nabla^2 \psi_\phi - \frac{\psi_\phi}{r^2} &= \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \psi_\phi}{\partial t^2} \\
\nabla^2 \psi_z &= \frac{1}{c_p^2} \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{2.12a-c}$$

²Im Fall der Axialsymmetrie und dem alleinigen Vorhandensein einer vertikalen Punktlast wird die Veränderung der Verschiebungen bzw. der Potentiale um den Azimut $\frac{\partial}{\partial \phi}$ zu Null gesetzt.

Die auftretenden Abkürzungen c_s und c_p repräsentieren Scher- und Kompressionswellengeschwindigkeit in Abhängigkeit von den Lamé'schen Parametern.

$$c_p^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}$$

$$c_s^2 = \frac{\mu}{\rho}. \quad (2.13a,b)$$

Der in Gl.(2.12) auftretende Laplace-Operator ∇^2 ist ebenfalls in Zylinderkoordinaten definiert

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Die partiellen Differentialgleichungen (2.11) repräsentieren die entsprechenden Differentialgleichungen für die Kompressions- oder P-Welle sowie die Scher- oder S-Welle. In der Literatur treten, im Zusammenhang mit den beschriebenen Eigenschaften der Potentiale φ und ψ , mitunter auch die Bezeichnungen *Longitudinal- bzw. Rotationswelle* für die entsprechenden Gleichungen auf. Der Ansatz von Helmholtz, eingeführt in die ursprüngliche, gekoppelte Differentialgleichung (2.3), ergibt somit die einzig möglichen Wellentypen, die sich im unendlich ausgedehnten elastischen Kontinuum ausbreiten können. Weiterführend werden nur die Verschiebungen in radialer und vertikaler Richtung betrachtet, da aus diesen der zu untersuchende Oberflächenwellentyp hervorgeht.

Ausgehend von den in Gl.(2.12a-c) entkoppelten Differentialgleichungen werden die entsprechenden Spannungs- und Verschiebungsbeziehungen in einem Punkt des Kontinuums abgeleitet. Zur Lösung der partielle Differentialgleichungen 2.Ordnung werden in dieser Arbeit die Integraltransformationen genutzt.

2.2.2 Integraltransformationen

Für die analytische Lösung der Wellengleichungen (2.12) werden in den angewandten Naturwissenschaften im Wesentlichen die zwei folgenden Wege gegangen: zum einen der Separationsansatz der Variablen und zum anderen die Möglichkeit der Integraltransformationen. Beide führen zu einer möglichen Lösung. Für die Lösung der Gl.(2.12a-c) werden die Integraltransformationen genutzt. Diese stellen ein elegantes Hilfsmittel dar, die entstandenen partiellen Differentialgleichungen in einen Bildbereich zu transformieren, in dem sie dann als gewöhnliche Differentialgleichungen erscheinen. Diese gewöhnliche Differentialgleichung kann anschließend mit einem einfachen Produktansatz gelöst werden. In Abhängigkeit der zu transformierenden Kernfunktionen kann die Rücktransformation mitunter sehr umfangreich ausfallen

oder analytisch unmöglich sein³.

Im vorliegenden Fall, zur Lösung der in Zylinderkoordinaten beschriebenen Wellengleichungen (2.12), wird eine Hankeltransformation \mathfrak{H} bezüglich der Ortskoordinate r und eine Fouriertransformation \mathfrak{F} bezüglich der Zeitvariablen t verwendet. Die verwendeten Transformationsregeln sind nachfolgend für die Transformation in den Bildbereich

$$\begin{aligned}\mathfrak{H}(f) &= f^{Hn}(k) = \int_0^{\infty} f(r) J_n(kr) r dr \\ \mathfrak{F}(f) &= \tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt\end{aligned}\quad (2.14a,b)$$

und für die Rücktransformation in den Originalbereich definiert.

$$\begin{aligned}\mathfrak{H}(f^{Hn}) &= f(r) = \int_0^{\infty} f^{Hn}(k) J_n(kr) k dk \\ \mathfrak{F}(\tilde{f}) &= f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.\end{aligned}\quad (2.15a,b)$$

In Gl.(2.14) und (2.15) sind k (Wellenzahl) und ω (Kreisfrequenz) die entsprechenden Integrationsparameter der Integraltransformation. Zur Anwendung der Transformationen auf die Wellengleichungen (2.11) sind die folgenden Rechenregeln für die Transformationen der partiellen Ableitungen im Originalbereich⁴ erforderlich.

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) &= i\omega \mathfrak{F}(f) = i\omega \tilde{f} \\ \mathfrak{F}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right) &= -\omega^2 \mathfrak{F}(f) = -\omega^2 \tilde{f} \\ \mathfrak{H}_n\left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r}\right)\right) &= -k^2 \mathfrak{H}_n(f) = -k^2 f^{Hn}\end{aligned}\quad (2.16a-c)$$

³Im Regelfall wird die Rücktransformation numerisch durchgeführt. Nur in Sonderfällen kann diese analytisch angegeben werden.

⁴Die Ableitungen der Fouriertransformation sind vielfach zitiert (Bronstein, Semendjajew, Musiol & Mühlig 2001, Trim 1990). Die entsprechenden Ableitungen der Hankeltransformation erhält man nach Durchführung der Transformation mit der Hankelfunktion gewünschter Ordnung n .

Die zeitlichen Anfangsbedingungen der Potentiale $\varphi, \dot{\varphi}$ und $\psi, \dot{\psi}$ können analog den Bedingungen von u bzw. \dot{u} definiert werden:

$$\varphi(r, z, t = 0) = \psi(r, z, t = 0) = \dot{\varphi}(r, z, t = 0) = \dot{\psi}(r, z, t = 0) = 0. \quad (2.17a,b)$$

Mit Transformation der Gleichungen (2.12) bezüglich der Zeit ergibt sich die bekannte Darstellung der Helmholtz'schen Differentialgleichung:

$$(\nabla^2 + k_p^2) \varphi = 0. \quad (2.18)$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung ergibt das Potential $\varphi(r, z, \omega)$, jedoch erst mit der Anwendung der inversen Fouriertransformation

$$\phi(r, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(r, z, \omega) e^{i\omega t} d\omega$$

wird die endgültige Lösung von $\varphi(r, z, t)$ bestimmt. Das heißt, die Lösung der Helmholtzgleichung korrespondiert mit einer Lösung oder einem Spektrum im Frequenzbereich.

Für die Transformation der Gl.(2.12) bezüglich der Ortskoordinate r wird in der Wahl der zu nutzenden Ordnung n für die Besselfunktion J_n dem Vorgehen von (Achenbach 1980) gefolgt. Danach wird für das Potential φ eine Hankeltransformation 0. Ordnung und für das Potential ψ eine Transformation 1. Ordnung durchgeführt. Mit diesen Transformationen werden die Differentialgleichungen (2.18) bzw. (2.12) in gewöhnliche Differentialgleichungen der Koordinate z überführt.

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2}{c_p^2} \tilde{\varphi}^{H_0} + \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}^{H_0}}{\partial z^2} - k^2 \tilde{\varphi}^{H_0} &= 0 \\ \frac{\omega^2}{c_s^2} \tilde{\psi}^{H_1} + \frac{\partial^2 \tilde{\psi}^{H_1}}{\partial z^2} - k^2 \tilde{\psi}^{H_1} &= 0 \end{aligned} \quad (2.19a,b)$$

Mit $\gamma = \sqrt{k^2 - k_p^2}$ und $\nu = \sqrt{k^2 - k_s^2}$ kann die gesamte Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichungen (2.19) mit den unbekanntem noch zu bestimmenden Wellenkoeffizienten $C_{sd}, C_{su}, C_{pd}, C_{pu}$

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}^{H_0} &= \tilde{\varphi}^{H_0}(k, \omega, z) = C_{pu} e^{\gamma z} + C_{pd} e^{-\gamma z} \\ \tilde{\psi}^{H_1} &= \tilde{\psi}^{H_1}(k, \omega, z) = C_{su} e^{\nu z} + C_{sd} e^{-\nu z} \end{aligned} \quad (2.20a,b)$$

im zweifachen Bildbereich $k - \omega$ angegeben werden. Mit k_s und k_p seien hier die Wellenzahlen der Scher- und Kompressionswellen als Quotienten der Kreisfrequenz

zu der jeweiligen Wellengeschwindigkeit $k_p = \frac{\omega}{c_p}$ und $k_s = \frac{\omega}{c_s}$, bezeichnet⁵.

Bei späteren Betrachtungen werden die genutzten Wurzel­ausdrücke durch eine komplexe Erweiterung zu doppeldeutigen Funktionen von k und ω . Um zu einer eindeutigen Lösung im Zusammenhang mit diesen Funktionen zu gelangen, wird der zu einem positiven Realteil von γ und ν führende Lösungsteil betrachtet, d.h. es soll

$$\Re\{\gamma\} \geq 0 \text{ und } \Re\{\nu\} \geq 0 \quad (2.21a,b)$$

gelten (Ewing et al. 1957). Entsprechend dieser Feststellung streben die Terme mit C_{su} , C_{pu} von Gleichung (2.20) mit zunehmender Tiefe z gegen unendlich, mit ihnen auch die Potentiale φ und ψ und damit letztlich auch die Verschiebungen, was aus physikalischer Sicht der Abstrahlungsbedingung jedoch ausgeschlossen werden muss. Diese Abstrahlungsbedingungen gelten für den Fall, dass ein homogener Halbraum angenommen wird. Im Gegensatz dazu können im Bereich der vorhandenen Bodenschichtung durch Reflexionen und Refraktionen der Wellen an den Schichtgrenzen beide Terme der Lösungsfunktion (2.20) auftreten.

Um die multiplen Reflexionen und Refraktionen an den Schichtgrenzen bei gleichzeitigem Abklingen der Wellen in großer Tiefe sicherzustellen, werden daher nur die Koeffizienten C_{pu} und C_{su} in der Definition des Halbraums zu Null gesetzt, so dass diese Terme in der Beschreibung des Halbraums verschwinden. Auf die Definitionen der weiteren Randbedingungen, die zur vollständigen Beschreibung der vertikalen Heterogenität eines Bodens einschließlich einer entsprechenden Quelle notwendig sind, wird in Kapitel 2.2.3 eingegangen. Es hat sich gezeigt, dass die Anpassung von Randbedingungen wesentlich einfacher im Bildbereich vorgenommen werden kann. Zu diesem Zweck werden vorab die über den Helmholtz'schen Darstellungssatz ausgedrückten Verschiebungen (2.8) in den Bildbereich transformiert. Unter Berücksichtigung der Transformationsregeln (2.14) für die partiellen Ableitungen ergeben sich für die transformierten Verschiebungen

$$\begin{aligned} \tilde{u}_r^{H_1} &= -k\tilde{\varphi}^{H_0} - \frac{\partial\tilde{\psi}^{H_1}}{\partial z} \\ \tilde{u}_z^{H_0} &= \frac{\partial\tilde{\varphi}^{H_0}}{\partial z} + k\tilde{\psi}^{H_1}. \end{aligned} \quad (2.22a,b)$$

Unter Nutzung der Spannungsdefinition in elastisch-isotropen Materialien erhält man

⁵Die Indizes der Gleichungen (2.19a,b und 2.20a,b), H_0 und H_1 , bezeichnen die genutzte Art der Hankelfunktion während der Transformation. Die Kenntnis über die genutzten Transformationen sind für die korrekte Rücktransformation notwendig.

für die entsprechenden Spannungskomponenten im Bildbereich

$$\begin{aligned}\tilde{\tau}_z^{H_0} &= \mu \left\{ \left(2k^2 - \frac{\omega^2}{c_s^2} \right) \tilde{\varphi}^{H_0} + 2k \frac{\partial \tilde{\psi}^{H_1}}{\partial z} \right\} \\ \tilde{\tau}_{zr}^{H_1} &= -\mu \left\{ 2k \frac{\partial \tilde{\varphi}^{H_0}}{\partial z} + \left(2k^2 - \frac{\omega^2}{c_s^2} \right) \tilde{\psi}^{H_1} \right\}.\end{aligned}\quad (2.23a,b)$$

Werden die erhaltenen Lösungen der Potentiale φ und ψ (Gl.2.20) in die Gleichungen (2.22) und (2.23) eingesetzt, so können die transformierten Spannungen und Verschiebungen an einem Punkt innerhalb des Kontinuums angegeben werden.

$$\begin{aligned}\tilde{u}_r^{H_1} &= -k (C_{pu}e^{\gamma z} + C_{pd}e^{-\gamma z}) - \frac{\partial}{\partial z} (C_{su}e^{\nu z} + C_{sd}e^{-\nu z}) \\ \tilde{u}_z^{H_0} &= \frac{\partial}{\partial z} (C_{pu}e^{\gamma z} + C_{pd}e^{-\gamma z}) + k (C_{su}e^{\nu z} + C_{sd}e^{-\nu z}) \\ \tilde{\tau}_z^{H_0} &= \mu \left\{ \left(2k^2 - \frac{\omega^2}{c_s^2} \right) (C_{pu}e^{\gamma z} + C_{pd}e^{-\gamma z}) + 2k \frac{\partial}{\partial z} (C_{su}e^{\nu z} + C_{sd}e^{-\nu z}) \right\} \\ \tilde{\tau}_{zr}^{H_1} &= -\mu \left\{ 2k \frac{\partial}{\partial z} (C_{pu}e^{\gamma z} + C_{pd}e^{-\gamma z}) + \left(2k^2 - \frac{\omega^2}{c_s^2} \right) (C_{su}e^{\nu z} + C_{sd}e^{-\nu z}) \right\}\end{aligned}\quad (2.24a-d)$$

Auf Basis dieses Gleichungssystems wird in den nächsten Kapiteln, mit entsprechenden Rand- und Kontinuitätsbedingungen, das Modell des belasteten, vertikal heterogenen Halbraums formuliert.

2.2.3 Rand- und Kontinuitätsbedingungen

In der Definition der Belastung des Modells wird diese den durchzuführenden Experimenten in der Standortidentifikation angepasst. Entsprechend dieser Aufgabenstellung wird die Belastung als vertikale Punktlast definiert. Nach Harkrider (Harkrider 1964) kann eine seismische Quelle zur Berechnung der Verschiebungen als Spannungsdiskontinuität definiert werden. Damit können die Verschiebungen und Spannungen -in Abhängigkeit von der seismischen Quelle- im Frequenzbereich beschrieben werden. Diese Funktionen stellen die Green'schen Funktionen im Frequenzbereich dar.⁶ Für den hier betrachteten Fall wird zur Herleitung der Punktbelastung von einer kreisförmigen Last ausgegangen werden (siehe Anhang A). Die gegebenen Spannungs

⁶In (Bode 2000) wird die Bezeichnung der *Green'schen Funktion* im Zusammenhang mit der Fundamentallösung des homogenen Halbraumproblems genutzt. Dabei ist die Green'sche Funktion als die Antwort eines linear elastischen Systems auf die Beanspruchung einer Dirac-Impulsfunktion definiert. Für komplexere Strukturen ist oftmals eine Zeitbereichslösung nicht mehr möglich und eine entsprechende Lösung im Frequenzbereich wird in der Literatur als Green'sche Funktion im Frequenzbereich bezeichnet.

- Randbedingungen haben nach der Transformation in den Bildbereich die Form

$$\begin{aligned}\tilde{\tau}_z^{H_0} &= \frac{P_z}{2\pi} \\ \tilde{\tau}_{zr}^{H_1} &= 0.\end{aligned}\tag{2.25a,b}$$

Zur Beschreibung eines vertikal inhomogenen Bodens können unterschiedliche Modelle herangezogen werden. Vrettos (Vrettos 1988) modifizierte die allgemeine Grundgleichung (2.5) durch die Einführung eines kontinuierlichen, tiefenabhängigen Schubmoduls. Dieses Vorgehen entspricht in der Annahme dem Gibson-Halbraum (Gibsonmodell (Awojobi 1972)): $\mu(z) = \mu_0(1 + bz)$ bzw. dem Wurzel-Halbraum: $\mu(z) = \mu_0(1 + b\sqrt{z})$. Gupta (Gupta 1966) und (Ewing et al. 1957) nutzen zur Modifizierung die Funktion des Schubmoduls $\mu(z) = \mu_0(1 + bz)^p$.

In dieser Arbeit soll eine andere Vorgehensweise genutzt werden, um die Steifigkeitsveränderung im Boden zu beschreiben. Dazu wird dieser mit horizontalen, homogenen, elastischen und isotropen Schichten beschrieben, die an natürliche Begebenheiten angepasst werden. In numerischen Lösungen wird diese Vorgehensweise oft als *Thin-Layer-Method* (TLM) (Kausel & Roesset 1981) und (Waas 1972) benannt. Die analytisch korrekte Lösung wird bei dieser Vorgehensweise approximiert.

Der Vorteil dieser Modellierung besteht darin, dass problemlos Änderungen im Steifigkeitsverhalten über die Tiefe, wie eingelagerte Schichten mit niedriger Wellengeschwindigkeit, in das Modell integriert werden können. Eine Interaktion der Schichtpakete findet über die entsprechenden Grenzflächen der jeweiligen Schichten statt. Die Kopplung der unterschiedlicher Schichten wird dabei über Kontinuitätsbedingungen an den Schichtgrenzen erreicht. Diese Definition beinhaltet die Gesetzmäßigkeiten der Reflexion und Refraktion an Schichtgrenzen. Die so entstehenden Übertragungseigenschaften einer Schichtung werden durch die definierten Grenzflächen beeinflusst.

In Abhängigkeit von der Art der Grenzfläche tritt an ihr eine Modifikation der Wellentypen auf. An der Oberfläche des Halbraums⁷ (geschichtet oder ungeschichtet) wird eine Totalreflexion der Wellen angenommen, Abb.(2-1).

Die in den Abb.(2-1) nicht dargestellten Oberflächenwellen können auch als das Resultat der Interferenz von laufenden Körperwellen an Grenzflächen verstanden werden und mit einem imaginären Einfallswinkel an der Oberfläche entlang propagieren.

⁷Im Regelfall wird als Modell ein Halbraum-Vakuum-Modell angenommen. Damit sind bei der Untersuchung mechanischer Wellen die Amplituden von einfallender und reflektierter Welle, aufgrund des Impedanzsprungs, gleich. Das eigentlich anstehende Luft-Gasgemisch wird nur in Sonderfällen berücksichtigt. Die exakte physikalische Lösung bringt damit eine Aufteilung der Energie in reflektierte und refraktierte Welle an der Oberfläche mit sich. In Fällen mit geringem Impedanzunterschied zwischen der festen oder flüssigen oberflächigen Schichtung und der Luft kann es vorkommen, dass die als Luftschall transportierte Energie bedeutsam wird (Ewing et al. 1957).



Abbildung 2-1: Darstellung der Reflexionen an der Halbraumkante bei einfallenden P- und SV-Wellen.

Eine Grenzfläche zwischen zwei Medien ist neben auftretenden Reflexionen von Refraktionen geprägt, Abb.(2-2). Für die Reflexion und Refraktion gelten die Gesetze der Optik, insbesondere das Snell'sche Gesetz. Demnach ist der Winkel der refraktierten bzw. reflektierten Welle abhängig vom Impedanzunterschied zwischen den angrenzenden Medien. Wesentlich für jede Art der Reflexion und Refraktion an

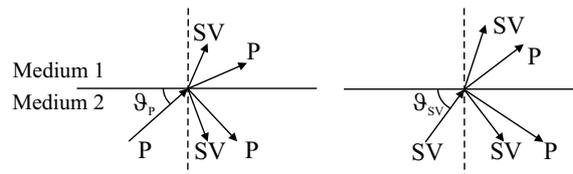


Abbildung 2-2: Darstellung der Reflexionen und Transmissionen an einer Schichtgrenze bei einfallenden P- und SV-Wellen.

einer Schichtgrenze ist die Erhaltung der transportierten Energie in einer Welle, welche sich in eine reflektierte und eine refraktierte Welle aufspaltet, aber in der Summe gleich bleibt. Der Verlust von Energie in einer Welle kann nur durch eine Materialdämpfung im Korngerüst (Reibung) erfolgen. Die geometrische Dämpfung bezieht sich nur auf die Verteilung der Gesamtenergie, auf den Radius der propagierenden Wellenfront. Ist keine seismische Quelle an einer Schichtgrenze vorhanden, so kann die Kontinuitätsbedingung an einer Schichtgrenze in Form der Gl.(2.26) definiert werden.

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}_r^{H_1} \\ \tilde{u}_z^{H_0} \\ \tilde{\tau}_{zr}^{H_1} \\ \tilde{\tau}_z^{H_0} \end{pmatrix}_i = \begin{pmatrix} \tilde{u}_r^{H_1} \\ \tilde{u}_z^{H_0} \\ \tilde{\tau}_{zr}^{H_1} \\ \tilde{\tau}_z^{H_0} \end{pmatrix}_{i+1} \quad (2.26)$$

Befindet sich in einem Schichtenpaket eine Flüssigkeitsschicht, so ist die Formulierung (2.26) nicht mehr in ihrer kompletten Definition übertragbar. Infolge des Fehlens von S-Wellen in einer solchen Schicht und der Unbestimmtheit der horizontalen Verschiebung an der Schichtgrenze, werden gesonderte Vereinbarungen getroffen (Ewing et al. 1957). Auf die Besonderheiten und Untersuchungen von aufliegenden oder eingelagerten Flüssigkeitsschichten wird allerdings in dieser Arbeit verzichtet. Für die Behandlung der Wellenausbreitung in geschichteten Medien ist die Nutzung von Matrixmethoden bequem und von methodischem Vorteil. In den nachfolgenden

Kapiteln werden zwei Matrixmethoden geschichteter Böden als Grundlage für eigene Untersuchungen genutzt. Die leicht umgestellte Schreibweise der resultierenden Spannungs-Verschiebungs-Gleichungen in Matrizenform (Gl.2.27) ist die mathematische Grundlage dieser Verfahren.

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}_r^{H_1} \\ \tilde{u}_z^{H_0} \\ \tilde{\tau}_{zr}^{H_1} \\ \tilde{\tau}_z^{H_0} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -k & \nu & -k & -\nu \\ -\gamma & k & \gamma & k \\ 2\mu k \gamma & -\mu(2k^2 - k_s^2) & -2\mu k \gamma & -\mu(2k^2 - k_s^2) \\ \mu(2k^2 - k_s^2) & -2\mu k \nu & \mu(2k^2 - k_s^2) & 2\mu k \nu \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{-\gamma z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\nu z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\gamma z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\nu z} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} C_{pd} \\ C_{sd} \\ C_{pu} \\ C_{su} \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\{\tilde{f}^{H_n}\} = E \cdot \Lambda(z) \cdot \{C\} \quad (2.27a,b)$$

Die Variable k_s^2 in Gl.(2.27) kennzeichnet das Verhältnis $\frac{\omega^2}{c_s^2}$.

2.3 Matrixmethoden vertikal heterogener Böden

Die Modellierung einer veränderlichen Halbraumsteifigkeit kann als Abfolge homogener Schichten realisiert werden. Die Vorzüge des Modells bestehen in der Anpassung an eine Vielzahl von Randbedingungen unter Beibehaltung der Ähnlichkeit zu geologischen Strukturen. Durch die weitestgehend analytischen Formulierungen existiert eine entsprechend gute Interpretierbarkeit in den resultierenden Verschiebungsgleichungen.

Die so definierte Beschreibung des geschichteten Halbraums kann numerisch sehr effizient ausgewertet werden. Das verbreiteteste Verfahren ist der Thomson-Haskell-Rekursionsalgorithmus (nachfolgend T/H - Methode genannt), der zur Bestimmung von Phasen- und Gruppengeschwindigkeiten geschichteter Profile des Erdmantels entwickelt wurde (Haskell 1953). Die Leistungsfähigkeit der Methode in der Umsetzung numerischer Berechnungen unter Beibehaltung eines übersichtlichen, physikalischen Modells, führten zur vielfachen Verwendung in bereits existierenden Programmen. Ein Nachteil des Algorithmus ist die große numerische Instabilität bei der Untersuchung von Oberflächenwellenfeldern bzw. kompletter Wellenfelder. Diese Instabilität erklärt sich durch das Auftreten der Schichtdicke, Frequenz und Wellenzahl in positiven Exponentialtermen als Bestandteil der Lösungsfunktionen der elastischen Wellengleichung (2.24a-d). Neben den zum Teil numerisch nicht mehr darstellbaren Zahlengrößen treten Fehler in der Berechnung aufgrund der endlichen Rechengenauigkeiten auf. Beispielsweise *verschlucken* die numerisch großen Terme

andere, unabhängige Anteile der Lösung, die um Größenordnungen kleiner sind. Zur Verminderung oder Vermeidung dieser numerischen Instabilitäten wurden verschiedene erweiternde Techniken zu dem genannten Verfahren sowie neue Verfahren entwickelt. Frühe Überlegungen zu diesem Problem und einer teilweisen Verbesserung sind in Dunkin (Dunkin 1965) und Watson (Watson 1972) publiziert. Es erfolgt bei Anwendung dieser Verfahren aber nur eine teilweise Vermeidung der Multiplikation von Exponenten. Die anwachsenden Exponenten sind noch immer vorhanden. Unabhängig davon wurde von Schwab & Knopoff (Schwab & Knopoff 1970) eine eigene Methode entwickelt, die eine ähnliche Wirkung bezüglich der Exponenten aufweist, aber in der Rechenzeit zur Bestimmung von Dispersionskurven wesentlich schneller ist.

Die Delta Matrix Methode (Buchen & Ben-Hador 1996) ist neben der Abo-Zena Methode (Abo-Zena 1979) ein weiterer Versuch, die numerischen Schwierigkeiten bei der Bestimmung von Phasengeschwindigkeiten zu beseitigen und die Berechnungsgenauigkeit zu erhöhen. Beide Verfahren basieren auf der Umordnung bzw. Erweiterung der ursprünglichen Frequenzgleichung. Die Verwendung dieser Methoden ist dabei ausschließlich auf die Ermittlung von Eigenwerten ausgerichtet, so dass eine erweiterte Nutzung im Zusammenhang mit einer Quelle schlecht realisierbar ist.

Mitte der achtziger Jahre veröffentlichte Kennett (Kennett 1983) eine umfassende Darstellung der Reflektivitätsmethode, welche in Müller (Müller 1985) sehr anschaulich nachvollzogen werden kann. Die Grundlage dieser interessanten Methode sind Wellenfelder, welche sich im elastischen Vollraum, von der Quelle ausgehend, durch das Medium fortpflanzen. An jeder Diskontinuität wird die physikalisch notwendige Stetigkeit dadurch erreicht, dass als sekundäre Wellen, transmittierte und reflektierte Kompressions- und Scherwellen in Abhängigkeit von der einfallenden Körperwelle erzeugt werden. Formuliert man auf diese Weise das komplette Wellenfeld mit allen Mehrfachreflexionen, führt die Beschreibung auf eine Verkettung von Matrizen, die analytisch geschlossen ausgedrückt werden kann.

Ein entscheidender Punkt dieses Verfahrens ist, dass die angesprochenen numerischen Instabilitäten nicht auftreten. Formal wird dies von Kennett & Kerry (Kennett, Kerry & Woodhouse 1978) gezeigt.

Ausgehend von Kennett (Kennett 1983) und Apsel (Luco & Apsel 1983) entwickelte Chen (Chen 1993) die *Methode der Allgemeinen Reflexions- und Transmissionskoeffizienten* (nachfolgend R/T-Methode genannt). Die entscheidenden Vorzüge dieser Methode gegenüber der von Kennett liegen in der wesentlichen Vereinfachung des Verfahrens durch die Einführung von allgemeinen Reflexions- und Transmissionskoeffizienten und dem klar umrissenen physikalisch-mathematischen Hintergrund.

Ein weiterer Vorzug liegt in der Nutzung von Basislösungen die denen des T/H-Verfahren entsprechen (siehe Kapitel 2.3.3). Es findet im Wesentlichen nur eine Umformung der Terme zur Beschreibung der Schichteigenschaften statt, womit die mathematischen Eigenschaften des Haskell-Rekursionsalgorithmus auch für die Methode

der R/T-Koeffizienten gelten. Der Vorteil liegt in der Vermeidung der exponentiell anwachsenden Terme bzw. der damit verbundenen numerischen Instabilitäten sowie der Nutzung eines klaren physikalischen Modells, siehe Kapitel 2.3.3.

Aufbauend auf der Approximation des vertikal heterogenen Halbraums durch eine vertikale Schichtung, wird die Quelle nach Gleichungen (2.25) als eine Spannungsdiskontinuität, analog Harkrider (Harkrider 1964), definiert. Die Position der seismischen Quelle kann in einer beliebigen Tiefe des geschichteten Halbraums in die homogene Schicht eingeführt werden (Hisada 1994).

So problematisch die Verwendung des Lösungsverfahrens von Thomson und Haskell (Haskell 1953) auch ist, bei der analytischen Untersuchung des Wellenfeldes ist das Verfahren durch die übersichtliche mathematische Darstellungsweise von erheblichem Nutzen. Um eine solche Analyse nach der Reflektivitätsmethode (Kennett 1974) oder der R/T - Methode (Chen 1993) realisieren zu können, müssten viele der zusätzlich auftretenden Ausdrücke ebenfalls analytisch ausgewertet werden. Das würde zu den gleichen Matrizen führen, die auch der T/H-Algorithmus verwendet, allerdings in andere Faktoren zerlegt (Buchen & Ben-Hador 1996).

Aufgrund der hohen numerischen Stabilität der R/T-Methode wurde in den numerischen Untersuchungen ausschließlich diese Methode verwendet. Für analytische Betrachtungen, wie z.B. innerhalb der Konturintegration, wird aus Gründen der Übersichtlichkeit das T/H-Verfahren genutzt. Durch die gegenseitige Substitutionsmöglichkeit beider Methoden können die jeweilig vorteilhaften Eigenschaften in den theoretischen und numerischen Untersuchungen genutzt werden.

2.3.1 Thomson-Haskell-Algorithmus

In dem Thomson-Haskell-Algorithmus (T/H-Methode) werden die Transfereigenschaften einer horizontalen Schicht durch mathematisch kompakte Übertragungsmatrizen beschrieben. Die Herleitung dieser Matrizen ist an verschiedene Randbedingungen (Kapitel 2.2.3) bezüglich Oberfläche und Grenzflächen in einer Schichtung geknüpft. Als Forderung steht die Kontinuität des Wellenfeldes an jeder Grenzfläche sowie die Einhaltung der Abstrahlungsbedingungen im homogenen Halbraum. Bei den Abstrahlungsbedingungen ist die Anordnung der seismischen Quelle zu berücksichtigen. So werden im Fall einer auf der Oberfläche bzw. innerhalb der Schichten positionierten Quelle nur mit der Tiefe abnehmende Wellenterme im anstehenden Halbraum zugelassen (siehe Kapitel 2.2.2).

Für den Fall einer im Halbraum liegenden Quelle werden durch die sphärische Abstrahlung der Wellen aus dem Halbraum ankommende Wellen zugelassen. Ein dafür typisches Beispiel ist das Einfallen von Erdbebenwellen in die aufliegende Boden-

schichtung und die daraus resultierende Wellenmodifikation⁸. Ausschlaggebend bei der Untersuchung verschiedener Wellentypen ist der Einfallswinkel innerhalb der Schichtung. Ein realer Winkel ist Indiz für die Existenz von Körperwellen, während imaginäre Einfallswinkel Grenzschichtwellen definieren.

Die nachfolgend aufgeführte mathematische Formulierung beschreibt mit den genannten Randbedingungen die theoretische Wellenausbreitung in einem Medium, wobei die nach Gl.(2.24) auftretenden Wellenarten zugelassen sind. Für die Ableitung der Methode ist in Abb.(2-3) das in diesem und den weiteren Verfahren verwendete Bodenmodell abgebildet. Aufbauend auf diesem Modell sind die verwendeten Koordinaten und Notationen in den Methoden definiert.

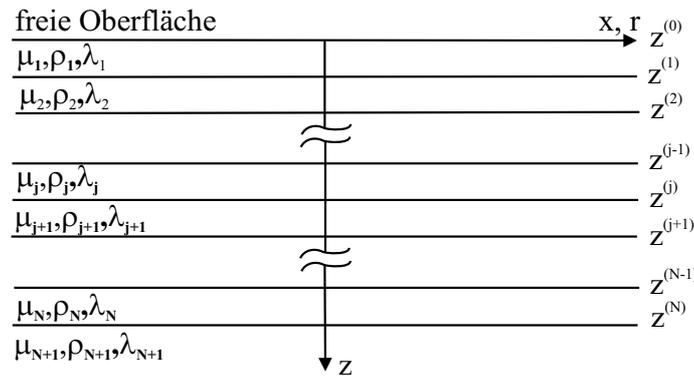


Abbildung 2-3: Verwendetes Bodenmodell nach (Chen 1993).

Ausgehend von der ursprünglichen Entwicklung dieser Methode, der Untersuchung der Eigenwertproblematik eines Kontinuums, wird die Definition einer spannungsfreien Oberfläche bei $z = 0$ eingeführt.

$$\left(\tilde{\tau}_z^{H_1}, \tilde{\tau}_{zr}^{H_0} \right)^T = 0 \quad (2.28)$$

Wie in Kapitel 2.2.3 beschrieben, erfordert das Ausschließen seismischer Quellen an

⁸Im Regelfall werden die einfallenden seismischen Wellen infolge Erdbeben durch die aufliegenden Bodenschichten verstärkt. Die dabei auftretende Modifikation kann mittels den Übertragungsfunktionen für einfallende Körperwellen relativ einfach bestimmt werden. Das Ergebnis derartiger Untersuchungen ergibt u.a. die Definition sogenannter standortabhängiger Antwortspektren zur Bemessungshilfe seismisch beanspruchter Bauwerke. In Weißenburg (Weißenburg 1994) wurde das Verhalten von verschiedenen Bodenmodellen unter dem Einfluss einfallender Erdbebenzeitverläufe untersucht. Das anelastische Materialverhalten unter seismischer Beanspruchung wurde durch eine äquivalent lineare Berechnung simuliert. Die theoretische Basis derartiger Untersuchungen liefert ebenfalls, leicht modifiziert, das Thomson-Haskell-Verfahren (Roesset & Whitman 1969, Roesset & Jones Jr. 1970).

einer Grenzschicht folgende Kontinuitätsbedingung an den Schichtgrenzen

$$\tilde{f}_j^{H_n}(z^j) = \tilde{f}_{j+1}^{H_n}(z^j). \quad (2.29)$$

Mit der Beschreibung der Spannungen und Verschiebungen an den oberen und unteren Grenzflächen ist nach kurzer Umformung und unter Beachtung der Kontinuitätsbedingungen nach Gl.(2.29) die Definition der Übertragungsmatrix einer Schicht j möglich. Diese Betrachtungsweise entspricht dem Zuweisen eines lokalen Koordinatensystems zu jeder Schicht, siehe Abb.(2-4a).

$$\left\{ \tilde{f}_j^{H_n} \right\}_{(z=0)} = [E^j] \left[\Lambda_{(z=0)}^j \right] \left[\Lambda_{(z=h)}^j \right]^{-1} [E^j]^{-1} \left\{ \tilde{f}_j^{H_n} \right\}_{(z=h)} = [D^j] \left\{ \tilde{f}_j^{H_n} \right\}_{(z=h)} \quad (2.30)$$

Mit dem Produkt aller auftretender Transfermatrizen D^j und der Halbraumbeschreibung kann die Modifikation des Wellensignals durch die gekoppelte Schichtenabfolge - N Schichten gelagert auf einem Halbraum - in Gl.(2.31) geschlossen beschrieben werden.

$$\left\{ \tilde{f}_1^{H_n} \right\}_{(z=0)} = \prod_{j=1}^N [D^j] \cdot E^{N+1} \Lambda^{N+1} \{C\}^{N+1} \quad \text{mit } j = 1 \dots N \quad (2.31)$$

Die in Gl.(2.31) genutzte Indizierung j entspricht der Schichtung bzw. $N + 1$ dem überlagerten Halbraum im Profil. Die Beschreibung der Matrizen E, Λ ist in Gl.(2.27) gegeben.

Für die Untersuchung des Eigenwertproblems freier Oberflächenwellen besitzt man damit einen Algorithmus, der über die Kopplung der Matrizen alle reflektierten und transmittierten Wellen an den Schichtgrenzen einschließt. Über das Auftreten von reellen oder imaginären Wurzelausdrücken ν_i und γ_i in den Exponenten von Gl.(2.31) bzw. Gl.(2.27a,b) wird die Art der Welle, Körper- oder Oberflächenwelle, bestimmt.

2.3.2 Methode der allgemeinen Reflexions- und Transmissionskoeffizienten

Diese Methode löst das numerische Stabilitätsproblem durch eine Zerlegung bzw. Umgruppierung der Matrizen sowie der Zuordnungsänderung der in jeder Schicht vorhandenen Exponenten aus der Lösung der Differentialgleichung. Es existiert eine Ähnlichkeit zum Verfahren von Kennett (Kennett 1983), doch das physikalische Modell ist klarer formuliert. Für die Ableitung der Methode wird analog zu dem T/H-Verfahren von den Spannungs- und Verschiebungsdefinitionen eines Punktes des Kontinuums ausgegangen

$$\left\{ \tilde{f}^{H_n} \right\} = E \cdot \Lambda(z) \cdot \{C\}. \quad (2.32)$$

Für die Formulierung der Reflexions- und Transmissionskoeffizienten muss das obige Gleichungssystem in Form der darin enthaltenen Submatrizen und Subvektoren beschrieben werden. Der Index j steht für die betrachtete Schichtung j , mit den vorhandenen Spannungen, Verschiebungen und Kennwerten, siehe auch Abb.(2-3).

$$\begin{pmatrix} \tilde{U}_j^{H_n}(z) \\ \tilde{\Sigma}_j^{H_n}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{11}^j & E_{12}^j \\ E_{21}^j & E_{22}^j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_d^j(z) & 0 \\ 0 & \Lambda_u^j(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{d,j} \\ C_{u,j} \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

Die Zerlegung erfolgt in der Art, dass E_{11} , E_{12} , E_{21} und E_{22} je 2 x 2 Submatrizen von E^j und die Terme

$$\tilde{U}_j^{H_n}, \tilde{\Sigma}_j^{H_n}, C_{d,j}, C_{u,j}$$

jeweils 1 x 2 Subvektoren des Verschiebungs- und Spannungs- sowie des Koeffizientenvektors sind.

$$\tilde{U}_j^{H_n}(z) = \begin{Bmatrix} \tilde{u}_{r,j}^{H_1}(z) \\ \tilde{u}_{z,j}^{H_0}(z) \end{Bmatrix}, \quad \tilde{\Sigma}_j^{H_n}(z) = \begin{Bmatrix} \tilde{\tau}_{zr,j}^{H_1}(z) \\ \tilde{\tau}_{z,j}^{H_0}(z) \end{Bmatrix} \quad (2.34)$$

$$C_d^j = \begin{Bmatrix} C_{pd}^j \\ C_{sd}^j \end{Bmatrix}, \quad C_u^j = \begin{Bmatrix} C_{pu}^j \\ C_{su}^j \end{Bmatrix} \quad \text{für } j = 1, 2, \dots, N \quad (2.35)$$

Nach Chen (Chen 1993) werden die Exponenten in $\Lambda(z)$ so definiert, dass keine exponentiell anwachsenden Terme vorhanden sind. Dazu werden die Terme $\Lambda_d^j(z)$ und $\Lambda_u^j(z)$ durch die Multiplikation mit Faktoren $\exp(+\nu^j z^{j-1})$ und $\exp(-\nu^j z^j)$ sowie $\exp(+\gamma^j z^{j-1})$ und $\exp(-\gamma^j z^j)$ modifiziert. Physikalisch stehen die Ausdrücke in $\Lambda_d^j(z)$ und $\Lambda_u^j(z)$ für abwärts und aufwärts laufende Wellen der Schicht j , während C_d^j und C_u^j die entsprechenden Koeffizienten derselben sind.

$$\Lambda_d^j(z) = \text{diag} \left\{ \exp[-\gamma^j (z - z^{j-1})], \exp[-\nu^j (z - z^{j-1})] \right\}$$

$$\Lambda_u^j(z) = \text{diag} \left\{ \exp[-\gamma^j (z^j - z)], \exp[-\nu^j (z^j - z)] \right\} \quad (2.36)$$

Die Modifikation der Exponenten kann als das Hinzufügen einer Erweiterungsmatrix zu dem Exponentialausdruck verstanden werden,

$$\begin{pmatrix} \tilde{U}_j^{H_n}(z) \\ \tilde{\Sigma}_j^{H_n}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{11}^j & E_{12}^j \\ E_{21}^j & E_{22}^j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_d^j(z) & 0 \\ 0 & \Lambda_u^j(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_{d,\text{mod}}^j & 0 \\ 0 & \Lambda_{u,\text{mod}}^j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{d,j} \\ C_{u,j} \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

wobei die Erweiterungsausdrücke $\Lambda_{d,\text{mod}}^j(z)$ und $\Lambda_{u,\text{mod}}^j(z)$ unabhängig von der globalen Laufvariable z sind.

$$\Lambda_{d,\text{mod}}^j(z) = \text{diag} \left\{ \exp[\gamma^j z^{j-1}], \exp[\nu^j z^{j-1}] \right\}$$

$$\Lambda_{u,\text{mod}}^j(z) = \text{diag} \left\{ \exp[-\gamma^j z^j], \exp[-\nu^j z^j] \right\} \quad (2.38)$$

Die Erweiterung der Exponentialmatrix ist so zu interpretieren, dass die Faktoren zuvor in den unbekanntem Koeffizienten C_d^j und C_u^j enthalten waren. Mit diesem Vorgang wird das lokale Koordinatensystem im T/H-Verfahren aufgelöst. Ausgangspunkt ist das globale Koordinatensystem nach Abb.(2-3), das mit den lokalen Exponentialfunktionen $\exp(\pm\nu^j z^{j-1})$ und $\exp(\pm\gamma^j z^{j-1})$ modifiziert wird.

Betrachtet man die Verschiebungsbeziehung zwischen oberer und unterer Grenze einer einzelnen Schicht, so kann mit Gl.(2.37) leicht nachgewiesen werden, dass diese Formulierung in die Schreibweise nach Gl.(2.30) überführt werden kann. Zusammen mit der Überführung der kompletten R/T-Methode in die T/H-Methode nach Kapitel 2.3.3 sind die entsprechenden mathematisch und physikalischen Eigenschaften der beiden Methoden gleich. Dieses dient als Voraussetzung für die Lösung und Berechnung der Green'schen Funktionen in Kapitel 2.5.

Für die Aufstellung der notwendigen Gleichungen der Reflexions- und Transmissionskoeffizienten wird von einer anderen Darstellung der Schichtinteraktion als beim Thomson-Haskell-Rekursionsalgorithmus ausgegangen. Die Grundlage für die R/T-Methode sind die entstehenden Wellentypen aufgrund von Reflexionen und Transmissionen einfallender Wellenfelder an Grenzflächen. Entsprechend dieser Betrachtung werden die an jeder Schichtgrenze modifizierten Reflexions- und Transmissionskoeffizienten definiert. Diese werden nachfolgend mit R und T für die Reflexion und Transmission bezeichnet. Der Index d bzw. u steht für eine abwärts und aufwärts gerichtete Wellenbewegung.

$$\begin{aligned} C_d^{j+1} &= T_d^j C_d^j + R_u^j C_u^{j+1} \\ C_u^j &= R_d^j C_d^j + T_u^j C_u^{j+1} \quad \text{für } j = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (2.39)$$

Für den unterlagerten Halbraum ergeben sich durch das Ausschließen einfallender Wellenfelder an der Grenzfläche N folgende Beziehungen.

$$C_d^N = T_d^N C_d^N \quad C_u^N = R_u^N C_u^N \quad (2.40)$$

Bei Verwendung von Gl.(2.37) für die j -te und $(j+1)$ -te Bodenschicht unter Beachtung der Kontinuitätsbedingungen aus Kapitel 2.2.3 lassen sich die modifizierten Reflexions- und Transmissionskoeffizienten an den jeweiligen Grenzschichten explizit als

$$\begin{bmatrix} T_d^j & R_u^j \\ R_d^j & T_u^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11}^{j+1} & -E_{12}^j \\ E_{21}^{j+1} & -E_{22}^j \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} E_{11}^j & -E_{12}^{j+1} \\ E_{21}^j & -E_{22}^{j+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_d^j(z^j) & 0 \\ 0 & \Lambda_u^{j+1}(z^j) \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} T_d^N \\ R_d^N \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11}^{N+1} & -E_{12}^N \\ E_{21}^{N+1} & -E_{22}^N \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} E_{11}^N \Lambda_d^N(z^N) \\ E_{21}^N \Lambda_d^N(z^N) \end{Bmatrix} \quad (2.41a,b)$$

angeben, mit $j = 1, 2, \dots, N - 1$. Die als allgemeine Reflexions- und Transmissionskoeffizienten \hat{R}_d^j und \hat{T}_d^j an jeder Grenzfläche definierten Terme

$$C_d^{j+1} = \hat{T}_d^j C_d^j \quad \text{und} \quad C_u^j = \hat{R}_d^j C_d^j \quad \text{für } j = 1, 2, \dots, N$$

können nun unter Nutzung der modifizierten R/T-Koeffizienten abgeleitet werden.

$$\hat{T}_d^j = \left\{ I - R_u^j \hat{R}_d^{j+1} \right\}^{-1} T_d^j$$

$$\hat{R}_d^j = R_d^j + T_u^j \hat{R}_d^{j+1} \hat{T}_d^j \quad \text{für } j = 1, 2, \dots, N - 1$$

$$\hat{T}_d^N = T_d^N$$

$$\hat{R}_d^N = R_d^N \quad \text{für } j = N \quad (2.42)$$

Physikalisch beinhalten die allgemeinen R/T-Koeffizienten die Aufspaltung der Wellenenergie an einer Schichtgrenze in die entstehenden reflektierten und refraktierten Wellenanteile an einer Schichtgrenze, Abb.(2-4b).

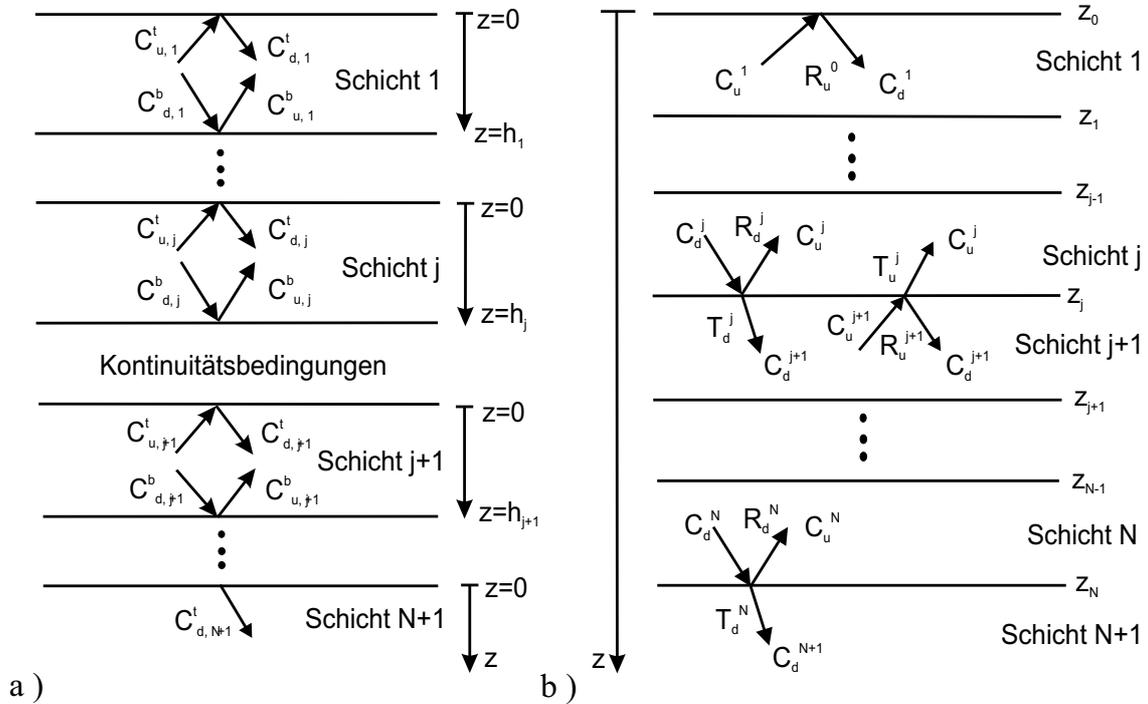


Abbildung 2-4: a) Wellenkoeffizienten an den entsprechenden Schichtgrenzen für die T/H-Methode, b) Wellenkoeffizienten an den entsprechenden Schichtgrenzen für die R/T-Methode.

Durch die Einführung veränderter Randbedingungen bezüglich der Spannungen und Verschiebungen in einem Punkt des geschichteten Halbraums, wie Position der Erregungsquelle, Spannung- oder Verschiebungsfreiheit einer Schichtgrenze, sind die R/T-Koeffizienten jeweils an die entsprechenden Randbedingungen anzupassen. Für die Herleitung dieser Betrachtungen sei auf die Kapitel 2.5 und 4 verwiesen.

2.3.3 Herleitung der Reflexions- und Transmissionskoeffizienten aus dem Thomson-Haskell-Algorithmus

Die Herleitung der R/T-Methode soll ausgehend von den Gleichungen einer Mehrschichtung in der Schreibweise der Übertragungsmatrizen dargestellt werden. Die Grundgleichung der gekoppelten Transfermatrizen ist nach Gleichung (2.31) durch den Ausdruck

$$\left\{ \tilde{f}_1^{H_n} \right\}_{(z=0)} = \prod_{j=1}^N \{D^j\} \cdot E^{N+1} \Lambda^{N+1} \{C\}^{N+1}$$

beschrieben. Wird die obige Gleichung in den einzelnen Matrizen dargestellt, so folgt

$$\left\{ \tilde{f}_j^{H_n} \right\}_{(z=0)} = D^1 \cdot D^2 \cdot D^3 \cdot \dots \cdot D^{N-1} \cdot D^N \cdot E^{N+1} \Lambda^{N+1} \{C\}^{N+1}. \quad (2.43)$$

Substituiert man zusätzlich die Ausdrücke nach Gl.(2.30) in die Übertragungsmatrizen, erhält man die ausführliche Darstellung von Gl.(2.31).

$$\begin{aligned} \left\{ \tilde{f}_j^{H_n} \right\}_{(z=0)} = & \\ & \left([E^1] [\Lambda_{(z=0)}^1] [\Lambda_{(z=h)}^1]^{-1} [E^1]^{-1} \right) \cdot \left([E^2] [\Lambda_{(z=0)}^2] [\Lambda_{(z=h)}^2]^{-1} [E^2]^{-1} \right) \cdot \dots \\ & \left([E^3] [\Lambda_{(z=0)}^3] [\Lambda_{(z=h)}^3]^{-1} [E^3]^{-1} \right) \cdot \dots \cdot \left([E^{N-1}] [\Lambda_{(z=0)}^{N-1}] [\Lambda_{(z=h)}^{N-1}]^{-1} [E^{N-1}]^{-1} \right) \cdot \dots \\ & \left([E^N] [\Lambda_{(z=0)}^N] [\Lambda_{(z=h)}^N]^{-1} [E^N]^{-1} \right) \cdot E^{N+1} \Lambda_{(z=0)}^{N+1} \{C\}^{N+1} \end{aligned} \quad (2.44)$$

Durch eine Umgruppierung der ursprünglich in Gl.(2.44) zusammengefassten Klammerausdrücke (...) zu neuen Ausdrücken

$$\begin{aligned} \left\{ \tilde{f}_j^{H_n} \right\}_{(z=0)} = & [E^1] [\Lambda_{(z=0)}^1] \left([\Lambda_{(z=h)}^1]^{-1} [E^1]^{-1} [E^2] [\Lambda_{(z=0)}^2] \right) \cdot \dots \\ & \left([\Lambda_{(z=h)}^2]^{-1} [E^2]^{-1} [E^3] [\Lambda_{(z=0)}^3] \right) \cdot \dots \cdot \left([\Lambda_{(z=h)}^{N-1}]^{-1} [E^{N-1}]^{-1} [E^N] [\Lambda_{(z=0)}^N] \right) \cdot \dots \\ & \left([\Lambda_{(z=h)}^N]^{-1} [E^N]^{-1} E^{N+1} \Lambda_{(z=0)}^{N+1} \right) \cdot \{C\}^{N+1} \end{aligned} \quad (2.45)$$

erhält man das umgeschriebene Matrixprodukt

$$f_{(z=0)}^1 = E^1 \Lambda_{z=0}^1 \prod_{j=1}^N [S^j] C^{N+1}. \quad (2.46)$$

Die neu zusammengefassten Klammersausdrücke (...) in Gl.(2.45) mit

$$S^j = \left[\Lambda_{(z=h)}^j \right]^{-1} [E^j]^{-1} [E^{j+1}] \left[\Lambda_{(z=0)}^{j+1} \right]$$

entsprechen den dargestellten Reflexions- und Transmissionsbetrachtungen an der Schichtgrenze j in Gl.(2.41a)

$$\{C\}_{(z=d)}^j = [S^j] \{C\}_{(z=0)}^j. \quad (2.47)$$

Grundlage dieser Gleichung ist die Kontinuitätsbedingung der betrachteten Schichtgrenze j .

$$\tilde{f}_j^{H_n}(z^j) = \tilde{f}_{j+1}^{H_n}(z^j)$$

Mit einfachen Umformungen innerhalb des Gleichungssystems (2.47) ergeben sich die gleichen Ausdrücke wie in Gl.(2.39) bzw. Gl.(2.41a,b)

$$\left\{ \begin{array}{c} C_d^{j+1} \\ C_u^j \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cc} E_{11}^{j+1} & -E_{12}^j \\ E_{21}^{j+1} & -E_{22}^j \end{array} \right]^{-1} \left[\begin{array}{cc} E_{11}^j & -E_{12}^{j+1} \\ E_{21}^j & -E_{22}^{j+1} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} \Lambda_d^j(z^j) & 0 \\ 0 & \Lambda_u^{j+1}(z^j) \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} C_d^j \\ C_u^{j+1} \end{array} \right\} \quad (2.48)$$

$$\text{bzw.} \quad \left\{ \begin{array}{c} C_d^{j+1} \\ C_u^j \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cc} T_d^j & R_u^j \\ R_d^j & T_u^j \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} C_d^j \\ C_u^{j+1} \end{array} \right\}. \quad (2.49)$$

Zum Erhalt der gewünschten numerischen Stabilität ist nur die Modifikationsmatrix nach Gl.(2.37) zu Gl.(2.48) hinzuzufügen und man erhält nach dieser Koordinatentransformation eine identische Darstellung des Matrixverfahrens nach Chen. Aufgrund der Abstrahlungsbedingung $C_u^{N+1} = 0$ im Halbraum kann der letzte Klammersausdruck (...) in Gl.(2.45)

$$\{C\}_{(z=d)}^N = [S^N] \{C\}_{(z=0)}^{N+1}$$

in die Darstellung der Gl.(2.40) bzw. Gl.(2.41b) umgeformt werden, womit die komplette Methode von Chen (Chen 1993) aus dem Thomson-Haskell-Algorithmus hervorgeht.

$$\left\{ \begin{array}{c} C_d^{N+1} \\ C_u^N \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{c} T_d^N \\ R_d^N \end{array} \right] C_d^N \quad (2.50)$$

2.4 Elastische Wellen im Boden

Innerhalb eines elastischen Mediums bilden sich durch das Vorhandensein von Störungen, wie z.B. Schichtgrenzen und Heterogenitäten, neben den ursprünglichen Körperwellen im Vollraum (siehe Gl.2.11) weitere Wellenarten heraus. Diese Wellenarten sind oftmals bedeutsame Bestandteile registrierter Seismogramme, da sie zum hauptsächlichen Energieträger der propagierenden Wellen ab einer bestimmten Entfernung von der Quelle werden. Im Allgemeinen sind diese Wellen an die jeweilige Störung gebunden und breiten sich nur entlang dieser aus. Diese Tatsache ist gleichzeitig die Ursache dafür, dass die geometrische Dämpfung bzw. Energieabnahme mit der Entfernung von derartigen Wellen wesentlich geringer ist als die der Körperwellen.

Durch die natürlich anstehende Schichtung von Böden ergibt sich die markanteste Eigenschaft der Oberflächenwellen⁹ - die Dispersion. Diese Dispersion resultiert aus dem Vorhandensein einer frequenzabhängigen Phasengeschwindigkeit, wobei die theoretische Berechnung der Phasengeschwindigkeit auf dem Eigenwertproblem des jeweiligen Mediums basiert.

Ein geschichteter Halbraum besitzt die Eigenschaft, die eingetragene Energie ab einer gewissen Entfernung von der Quelle auf vorhandenen Dispersionsmoden (Dispersionsfunktionen) der Oberflächenwelle zu transportieren. Damit ist die Bedeutung der Untersuchung so genannter freier Wellen, ihrer Eigenwerte und Eigenformen, als eine wesentliche Grundlage zur Interpretation erzwungener Wellen vorweggenommen. Für den Erhalt der Lösungen des entsprechenden Eigenwertproblems sind die Randbedingungen hinsichtlich der Spannungs- und Abstrahlungsdefinitionen aus Kapitel 2.2.3 sowie die Matrixmethoden des Kapitels 2.3 zusammenzuführen. Die Lösung der entstehenden transzendenten Gleichung, der Frequenzgleichung, liefert die entsprechenden Eigenwerte eines Mediums.

In der Berechnung synthetischer Seismogramme tritt die Frequenz- oder Sekulargleichung als Divisor im Integranden auf, so dass die diskreten Punkte der Phasengeschwindigkeiten als Singularität im Integranden vorkommen (diskrete Wellenzahlen) und exakt lokalisiert werden müssen. In Kapitel 2.5 wird gezeigt, dass diese Singularitäten mit dem Residuensatz der Funktionentheorie berechnet werden können und die Lösung der Normalmoden-Summation ergeben.

Bei der Untersuchung von elastischen Wellen, ausgehend von den Spannungs- und Verschiebungsgleichungen in einem homogen, isotropen und elastischen Halbraum, können die ersten Betrachtungen an freien Wellen vorgenommen werden. Die in Gl.(2-24) dargestellten Ausdrücke beinhalten die Beschreibung unterschiedlicher Wel-

⁹Mitunter werden die Oberflächenwellen in der Literatur auch als *quergedämpfte Wellen* bezeichnet.

lentypen. Für die Analyse des freien Systems bedeutet dies, dass neben den Eigenformen der Oberflächenwellen, auch Körperwellen vorhanden sind.

In den genannten Gleichungen von freien Wellen, werden neben den exponentiell abklingenden Eigenformen, auch nicht mit zunehmender Tiefe abklingende Eigenformen zugelassen. Mit dieser Erweiterung kommt zu dem diskreten Spektrum der Eigenwerte von Oberflächenwellen ein begrenztes, kontinuierliches Spektrum der Raumwellen hinzu. Zur Veranschaulichung der kontinuierlichen Eigenfunktionen werden in Abb.(2-5) in den ungeschichteten Halbraum einfallende Raumwellen unter beliebigem Einfallswinkel ϑ betrachtet.

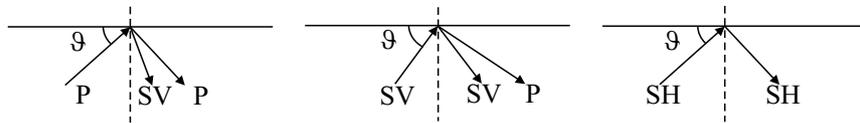


Abbildung 2-5: Einfallende Raumwellen aus dem Halbraum.

Die Randbedingungen an der freien Oberfläche, die natürlich gleichermaßen für Oberflächen- wie auch für Raumwellen erfüllt sein müssen, erfordern die Gleichheit aller Wellenzahlen k ($k = \frac{\omega}{c}$, mit c als scheinbare Wellengeschwindigkeit) von einfallenden und reflektierten Wellen (Malischewsky 1973). In der Betrachtung von Raumwellen wird die Wellenzahl im Exponenten des Gleichungssystems (2.24) durch die Funktion $k = k_{p,s} \cdot \sin\vartheta$ beschrieben. Die Wellenzahl k wird dabei als ein kontinuierlicher Eigenwert bezüglich der Raumwellen interpretiert. Mit der Variation von k als Änderung des Einfallswinkels ϑ kann gemäß der Variation von k die Verteilung von kontinuierlichen Eigenwerten neben den diskreten Eigenwerten der Oberflächenwellen in Abb.(2-6) angegeben werden. Eine erweiterte Darstellung bezüglich der Eigenwerte ist in Malischewsky (Malischewsky 1973)¹⁰ zu finden.

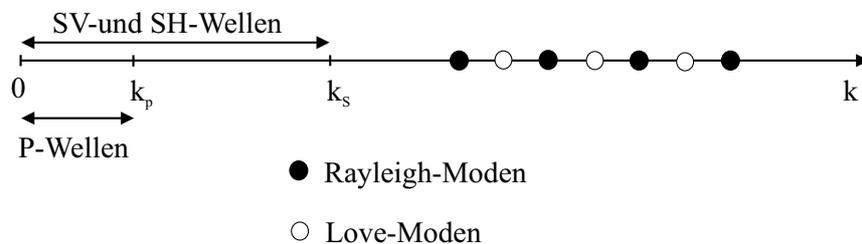


Abbildung 2-6: Darstellung der Eigenwertverteilung entlang der k -Achse (Malischewsky 1973).

¹⁰Die in (Malischewsky 1973) ebenfalls vorhandenen Leaking-Moden sind in dieser Abbildung nicht berücksichtigt.

2.4.1 Körperwellen

Wird die Wellenzahl k kleiner als k_s bzw. k_p mit ($k_s, k_p \in \mathbb{Q}_+$), so entstehen negative Argumente in den Wurzelfunktionen der Exponentialfunktionen von Gl.(2.24). Die Exponenten mit den so entstandenen rein imaginären Argumenten repräsentieren, da sie nun keine mit der Tiefe abnehmende Funktionen darstellen, keine Oberflächenwellen mehr. Der Term c korrespondiert jetzt mit der scheinbaren Geschwindigkeit einer Welle gemessen an der Erdoberfläche. Damit ergibt sich beispielsweise der Quotient c_s/c als die \cos -Funktion des Einfallswinkels der Scherwelle gegen die Horizontale im geschichteten Halbraum. Nach (Wolf 1985) ist dieser Quotient als der Richtungskosinus m_x der Welle bezeichnet. Das Gleichungssystem in (2.24) beschreibt auftretende Körperwellen, wenn der Wert des Richtungskosinus' ≤ 1 ist. Diese Bedingung entspricht einem Einfallswinkel ϑ von einem beliebigen positiven reellen Wert im Bereich von 0 bis $\pi/2$. Das Gleichungssystem in (2.24) im Wertebereich $k < k_s, k_p$, kann infolgedessen mit leicht geänderten Argumenten der Exponentialfunktionen geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_r^{H_1} &= -k (C_{pu} e^{ik_p \gamma z} + C_{pd} e^{-ik_p \gamma z}) - \frac{\partial}{\partial z} (C_{su} e^{ik_s \nu z} + C_{sd} e^{-ik_s \nu z}) \\ \tilde{u}_z^{H_0} &= \frac{\partial}{\partial z} (C_{pu} e^{ik_p \gamma z} + C_{pd} e^{-ik_p \gamma z}) + k (C_{su} e^{ik_s \nu z} + C_{sd} e^{-ik_s \nu z}) \\ \tilde{\tau}_z^{H_0} &= \mu \left\{ \left(2k^2 - \frac{\omega^2}{c_s^2} \right) (C_{pu} e^{ik_p \gamma z} + C_{pd} e^{-ik_p \gamma z}) + 2k \frac{\partial}{\partial z} (C_{su} e^{ik_s \nu z} + C_{sd} e^{-ik_s \nu z}) \right\} \\ \tilde{\tau}_{zr}^{H_1} &= -\mu \left\{ 2k \frac{\partial}{\partial z} (C_{pu} e^{ik_p \gamma z} + C_{pd} e^{-ik_p \gamma z}) + \left(2k^2 - \frac{\omega^2}{c_s^2} \right) (C_{su} e^{ik_s \nu z} + C_{sd} e^{-ik_s \nu z}) \right\}. \end{aligned} \quad (2.51a-d)$$

Die Wurzelausdrücke reduzieren sich auf die Beschreibung des jeweiligen Richtungskosinus'¹¹

$$l_z = \gamma = \sqrt{1 - l_x^2}, \quad m_z = \nu = \sqrt{1 - m_x^2}, \quad l_x = \frac{c_p}{c}, \quad m_x = \frac{c_s}{c} \quad (2.52a-d)$$

mit l_x bzw. m_x gleich dem Kosinus des Einfallswinkels ϑ von Kompressions- bzw. Scherwelle in der Ebene.

$$l_x = \cos \vartheta_P, \quad m_x = \cos \vartheta_{SV} \quad (2.53a,b)$$

Ausgehend von den Definitionen in Gl.(2.51) können leicht die üblichen Darstellungen der vertikalen Übertragungsfunktionen¹² von Körperwellen abgeleitet werden.

¹¹Hier sei die Notation von kartesischen Koordinaten sinnbildlich zur Definition des Richtungskosinus' genutzt.

¹²Die Übertragungsfunktionen beschreiben das Verhältnis von Verschiebungen an gewählten Punkten im geschichteten Medium.

Diese Funktionen werden hauptsächlich für Untersuchungen im geotechnischen Erdbebeningenieurwesen genutzt (Schmidt, Schwarz & Wuttke 1998, Schwarz, Schmidt, Lang, Golbs & Wuttke 1999), aber auch in Kapitel 4.1 wurde auf diese Funktionen zum Vergleich von Eigenschaften der Green'schen Funktionen zurückgegriffen .

2.4.2 Oberflächenwellen

2.4.2.1 Rayleighwellen

Die überwiegenden Untersuchungen dieser Arbeit beziehen sich auf das Verhalten von Oberflächenwellen. Deshalb soll hier nochmals kurz auf die Rayleighwellen eingegangen werden. Aus den genannten Gl.(2.24) können relativ schnell die Eigenwerte (Phasengeschwindigkeit) und die Eigenformen dieses Wellentyps bestimmt werden. Ausgangspunkt zur Ermittlung der Eigenwerte ist die Frequenzgleichung für den homogenen Halbraum.

Unter Berücksichtigung der Abstrahlungsbedingungen im Halbraum

$$C_{pu} = C_{su} = 0$$

reduzieren sich die Spannungs- und Verschiebungsgleichungen zur Beschreibung des elastisch, homogenen Halbraums auf

$$\left\{ \tilde{f}^{H_n} \right\} = \begin{bmatrix} -k & \nu \\ -\gamma & k \\ 2\mu k \gamma & -\mu(2k^2 - \frac{\omega^2}{c_s^2}) \\ \mu(2k^2 - \frac{\omega^2}{c_s^2}) & -2\mu k \nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-\gamma z} & 0 \\ 0 & e^{-\nu z} \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} C_{pd} \\ C_{sd} \end{matrix} \right\}. \quad (2.54)$$

Die Frequenzgleichung kann aus Gl.(2.54) und Berücksichtigen der Spannungsfreiheit an der Oberfläche leicht hergeleitet werden. Die nichttriviale Lösung ergibt sich, wenn die Determinante der Submatrix für die Spannungsformulierungen in Gl.(2.54) mit $\tilde{\tau}_z^{H_0}(z=0) = \tilde{\tau}_{zr}^{H_1}(z=0) = 0$ zu Null erfüllt ist. Als Ergebnis erhält man die bekannte Rayleighgleichung

$$(k^2 + \nu^2)^2 - 4k^2 \gamma \nu = 0$$

bzw.

$$\left(2k^2 - \frac{\omega^2}{\beta^2} \right)^2 - 4k^2 \gamma \nu = 0. \quad (2.55)$$

Durch Substitution der Wellenzahl k mit $k = \omega/c$ in die Gl.(2.55) kann die Frequenzabhängigkeit eliminiert werden und die Rayleighwellengeschwindigkeit nimmt einen

konstanten Wert an.

$$\left[2 - \frac{c_R^2}{c_s^2}\right]^2 - 4\sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_p^2}}\sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_s^2}} = 0 \quad (2.56)$$

Die Rayleighwellengeschwindigkeit $c = c_R$ ist in diesem Fall nur noch von der Scher- und Kompressionswellengeschwindigkeit bzw. von der Querdehnzahl abhängig. Diese Abhängigkeit ist in Abb.(2-7) als Verhältnis der Scher- bzw. Kompressions- und der Rayleighwellengeschwindigkeit zur Scherwellengeschwindigkeit dargestellt. Das wesentliche Merkmal dieser Darstellung ist die enge Verwandtschaft zwischen der Rayleigh- und der Scherwellengeschwindigkeit über den fast gesamten Bereich der Querdehnzahl Abb.(2-7).

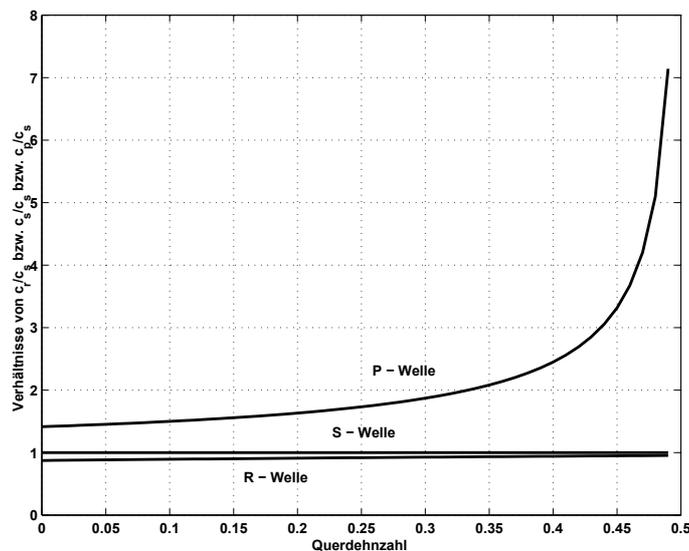


Abbildung 2-7: Beziehung zwischen Querdehnzahl ν , der Ausbreitungsgeschwindigkeit der P- und S-Wellen sowie der Rayleighwellengeschwindigkeit in einem linear elastischen Halbraum nach (Richart et al. 1969).

Die resultierende Bewegung der Rayleighwelle ist zusammengesetzt aus einer transversalen und longitudinalen Komponente. Das typische Merkmal der Rayleighwellen ist die vorhandene elliptisch, retrograde Partikelbewegung an der Oberfläche aufgrund der 90° Phasenverschiebung zwischen den vertikalen und horizontalen Verschiebungsanteilen (Lamb 1904). In Kapitel 2.5 wird dieses Merkmal für die Verifizierung der Halbraumlösung genutzt. In größeren Tiefen existieren Knotenpunkte der Bewegungsform, d.h. die Bewegungsrichtung kehrt sich an diesen Punkten um und wird prograde. Da die Welle an die Oberfläche gebunden ist, wird sie maßgeblich von den mechanischen Eigenschaften der Bodenzonen beeinflusst, welche in der Tiefe von

einer Wellenlänge liegen. Der hauptsächliche Beeinflussungsparameter auf die Welle ist die in der Tiefe vorherrschende Scherwellengeschwindigkeit des Bodens. Diese Eigenschaft der Oberflächenwelle wird zur zerstörungsfreien Untersuchung von Böden oder Medien genutzt, um ein vorhandenes Scherwellenprofil zu ermitteln. Nutzt man die Gl.(2.54) und beachtet die Randbedingungen an der Oberfläche, so erhält man die bekannten normierten Eigenformdarstellungen der Rayleighwelle in einem Halbraum, welche das Abklingverhalten dieser Wellen darstellen (Abb.2-8).

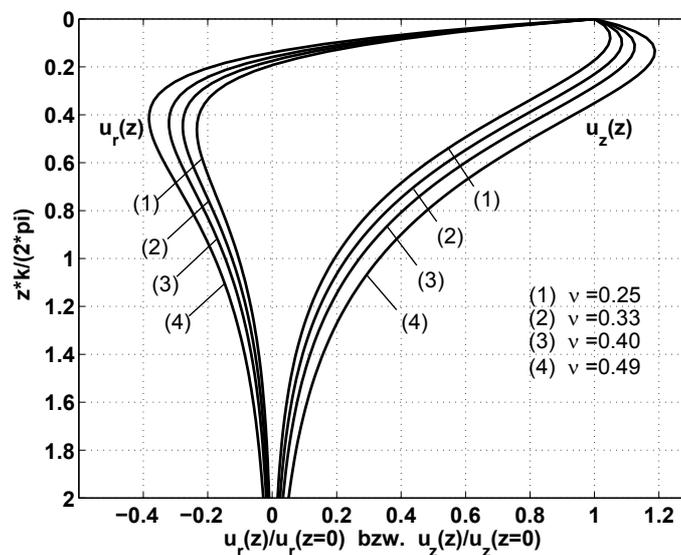


Abbildung 2-8: Verschiebungsverhältnis der Eigenformen einer Rayleighwelle über die dimensionslose Tiefe eines linear elastischen Halbraums. Die Eigenformen wurden analog (Richart et al. 1969) für die Querdehnzahlen $\nu = 0.25, 0.33, 0.4$ und 0.49 berechnet.

2.4.2.2 Oberflächenwellen in geschichteten Medien

Die Untersuchung von Oberflächenwellen in geschichteten Medien ist durch eine wesentlich größere Komplexität geprägt, als es im homogenen Halbraum der Fall ist. Neben der mathematische Bearbeitung, die wesentlich umfangreicher und komplexer ist, ist auch das Verhalten von Oberflächenwellen in derartigen Medien in der Regel ein völlig anderes.

Das dynamische Verhalten geschichteter Medien ist von der dort vorhandenen Dispersion geprägt. Deshalb ist die Analyse der Eigenwert- und formverteilungen¹³ in Untersuchungen zur Wellenausbreitung eines geschichteten Mediums immer notwendig, um weiterführende Interpretationen zu erhalten. In den Analysen liefert die

¹³Die resultierenden Dispersionskurven kennzeichnen die Zuordnung diskreter Eigenwerte eines Frequenzpunktes zu einem auftretenden Mode.

Untersuchung freier Normalmoden - neben den dispersiven Eigenschaften - Aussagen zur Amplituden-Tiefenverteilung (Eigenform) von erzwungenen Normalmoden und damit die wichtigste Information über die Oberflächenwellen. Das gilt für einfache als auch komplizierte Schichtprofile. Obwohl keine direkte Korrelation zwischen Amplituden - Tiefenverteilungen und Empfindlichkeit von Oberflächenwellen zu elasto - dynamischen Materialeigenschaften existiert, können diese Aussagen als erste Annäherung dienen.

Für die Einschätzung, ob eine bestimmte Wellenmode an der Oberfläche dominant werden kann, ist die relative Amplitude an der Oberfläche ein wesentliches Indiz. Welche Moden in realen Situationen tatsächlich auftreten, hängt von der Tiefenlage, vom Frequenzbereich und vom Typ der seismischen Quelle ab.

Die praktische Bedeutung der Analyse von Eigenwerten und -formen der Oberflächenwellen wird an der Tatsache deutlich, dass das Wellenfeld mit zunehmender Entfernung von den möglichen Normalmoden dominiert wird.

Die Bestimmung der Dispersion ist im Allgemeinen nicht mehr rein analytisch zu lösen, sondern muss numerisch berechnet werden. Speziell für dieses Problem wurde eine Vielzahl von Ansätzen und Berechnungsverfahren entwickelt. Das wahrscheinlich älteste und wohl auch umfassendste Verfahren ist die beschriebene Transfer-Matrix Methode (Thomson 1950), welche fortschreitend (Haskell 1953) modifiziert und weiterentwickelt wurde (Kapitel 2.3.1). Die Übersichtlichkeit und einfache mathematische Formulierung des Verfahrens wird durch den Nachteil der numerischen Instabilität überschattet. In Kapitel 2.3 wurden bereits die wesentlichen Entwicklungen in den letzten Jahrzehnten genannt. Für die Berechnungen von Eigenwerten und -formen zur Analyse freier Wellen wird das R/T-Verfahren nach Kapitel 2.3.2 aufgrund seiner hohen numerischen Stabilität genutzt.

Trotz des Vorteils der numerischen Stabilität in der eigentlichen Gleichungsberechnung sind noch weitere numerische Probleme bei der Ermittlung einer kompletten Dispersionskurve mit ausreichender Genauigkeit zu bewältigen.

Zur numerischen Lösung der nichtlinearen Frequenzgleichung (Gl.2.59 bzw. Gl.2.64) und Auffinden der reellen Eigenwerte wird ein Sekanten-Verfahren genutzt. In der numerischen Umsetzung folgt mit Erfüllen der Bedingung

$$\{\Im(f(x_n)) \cdot \Im(f(x_{n-1})) < 0\} \quad \& \quad \{\Re(f(x_n)) \cdot \Re(f(x_{n-1})) < 0\} \quad \text{für } c > c_{s,min}$$

$$\text{bzw. } \{\Re(f(x_n)) \cdot \Re(f(x_{n-1})) < 0\} \quad \text{für } c < c_{s,min}$$

der Start des eigentlichen, iterativen Suchverfahrens

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\Im(f(x_n)) \cdot 2h}{\Im(f(x_n + h)) - \Im(f(x_n - h))} \quad \text{für } c > c_{s,min}.$$

Die Iteration erfolgt bis der Fehler e zwischen zwei aufeinander folgenden Berechnungsschritten eine vorgegebene Fehlerschranke e_{soll} unterschreitet.

$$|x_{n+1} - x_n| < e_{soll} \quad \& \quad \Im(f(x_{n+1})) < e_{soll} \quad \text{für } c > c_{s,min}$$

Die Abtastung der Frequenzgleichung muss für jeden diskreten Frequenzpunkt des vorgegebenen Frequenzbereiches durchgeführt werden. In Abhängigkeit von der Frequenz, den elasto-dynamischen Schichtparametern und dem Schichtaufbau wird die Frequenzgleichung¹⁴ eine mehr oder weniger starke Zunahme von auftretenden Moden (Nullstellen) aufweisen. Diese Zunahme drückt sich durch eine starke Oszillation der komplexwertigen Frequenzgleichung mit multiplen Nullstellen entlang der Abzisse aus, siehe Abb.(2-9). Es können Bereiche auftreten, bei denen diese Nullstellen eine sehr kleine Differenz voneinander aufweisen, so dass an diesen Stellen eine höhere Abtastung notwendig wird¹⁵. Eine wesentliche Beschleunigung in der Nullstellensuche wurde durch den Start der Iteration an einem neuen Frequenzpunkt, ausgehend von der Geschwindigkeit der gefundenen Nullstellen zum vorhergehenden Frequenzpunkt, erreicht. Für die Berechnung der Fundamentalmode in hohen Frequenzbereichen und der Separation höherer Moden nahe der ersten Mode, sind weitere numerische Verbesserungen unumgänglich (Chen 2001).

Ein Problem kann darüber hinaus die Zuordnung von gefundenen Nullstellen an einem Frequenzpunkt zu dem entsprechenden Mode darstellen. Auftretende Sprünge innerhalb der berechneten Normalmode kennzeichnen im Allgemeinen eine Fehlzuordnung der Phasengeschwindigkeiten zur entsprechenden Mode. Numerisch wurde das Problem gelöst, indem der nachfolgende Punkt auf dem Dispersionsast - ausgehend von dem vorhergehenden Punkt - berechnet wird und bei einer Fehlzuordnung das Suchraaster in dem entsprechenden Bereich im Programm verfeinert wird. Bei der Durchführung der Berechnung ist auch das Auftreten von anormal dispersiven Frequenzabschnitten in einzelnen Modenteilen zu beachten. Damit wird es notwendig, neben der Suchraasterverfeinerung auch die Anzahl der Nullstellen im Vergleich zu der vorhergehenden Frequenz zu prüfen.

An dieser Stelle sei kurz auf die Begriffe normale und anormale Dispersion eingegangen. Unter einer normalen Dispersion wird eine Abnahme der Phasengeschwindigkeit mit zunehmender Frequenz entlang eines Dispersionsastes (Modes) verstanden.

¹⁴In der Literatur auch Sekular- oder Dispersionsfunktion bezeichnet.

¹⁵An diesen Punkten kommen sich die Phasengeschwindigkeiten der jeweiligen Modenäste sehr nahe. Die nachhaltige Bedeutung und Auswirkung dieser Stellen wird in Kapitel 3.3 näher untersucht.

Typische Schichtenprofile für einen derartigen Verlauf sind solche, bei denen die Scherwellengeschwindigkeit bzw. der Schubmodul mit der Tiefe zunehmen. Mit dem Auftreten einer anormalen Dispersion eines ganzen Astes oder gewisser Teilbereiche wird eine Zunahme der Phasengeschwindigkeit mit ansteigender Frequenz verbunden. Schichtenprofile, die ein solches Verhalten hervorrufen, sind dadurch gekennzeichnet, dass Schichten geringer Scherwellengeschwindigkeit in steifere Schichten (Schichten größerer Scherwellengeschwindigkeit) eingebettet sind oder über große Tiefen die Steifigkeiten in dem Profil abnehmen. Als Beispiel sei auf die Abb.(4-13) für einen normaldispersiven Verlauf und auf die Abb.(4-23) für einen anormaldispersiven Verlauf verwiesen.

Für den Erhalt der Frequenzgleichung zur Bestimmung der Eigenwerte müssen die entsprechenden Randbedingungen an der Oberfläche (Spannungen und Verschiebungen) sowie im Halbraum (Abstrahlungsbedingungen) beachtet werden. Das bedeutet, dass die Spannungen an der Oberfläche und einfallende Wellenterme aus dem Halbraum zu Null gesetzt werden müssen (Gl.2.28).

Diese Randbedingungen können im T/H-Algorithmus (Gl.2.31) über

$$e_{34}^T DE^{N+1} e_{13} = 0 \quad (2.57)$$

mit den Matrizen e_{34} und e_{13} berücksichtigt werden (Buchen & Ben-Hador 1996). Das entspricht dem Einsetzen der Randbedingungen aus Gl.(2.28) in die Spannungs- und Verschiebungsausdrücke und dem Einsetzen von $C_{pu}^{N+1} = C_{su}^{N+1} = 0$ in die unbekanntenen Wellenkoeffizienten.

$$e_{34} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad e_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

Die Frequenzgleichung der Dispersion ergibt sich, indem die Determinante der Matrixgleichung (2.57) gleich Null gesetzt wird.

$$\det |e_{34}^T DE^{N+1} e_{13}| = \det |F| = 0 \quad (2.59)$$

Nach Kapitel 2.3.1 beschreibt die Matrix D die Übertragungseigenschaften des jeweiligen Schichtpakets

$$D = [E^j] \left[\Lambda_{(z=0)}^j \right] \left[\Lambda_{(z=h)}^j \right]^{-1} [E^j]^{-1}. \quad (2.60)$$

Für die Durchführung der Berechnung und für den Erhalt sinnvoller Ergebnisse sind neben der genannten Vorgehensweise noch folgende Punkte zu beachten:

- Die Stellen mit $k = k_{p,N+1}$ bzw. $k = k_{s,N+1}$ sind singuläre, nicht definierte Punkte.

- Ist $k > k_{p,N+1}$ bzw. $k > k_{s,N+1}$, so sind für die Eigenwertanalyse die entsprechenden Abstrahlungsbedingungen nach Gl.(2.21) einzuhalten.

Werden die oben genannten Randbedingungen der Halbraumoberfläche ($\sigma_{xx}^0 = \tau_{rz}^0 = 0$) in die Spannungsausdrücke der ersten Schicht der R/T-Methode eingeführt, so ergibt sich die folgende Darstellung der Spannungen und Verschiebungen an der Halbraumoberfläche:

$$\begin{Bmatrix} U^1(z) \\ \Sigma^1(z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U^1(z) \\ 0 \end{Bmatrix} = E^1 \Lambda^1(z^1 = 0) C^1. \quad (2.61)$$

Den Reflexionskoeffizient nach (Chen 1993) an der Halbraumoberfläche¹⁶ erhält man durch Umstellen der Gleichung (2.61):

$$C_d^1 = (-E_{21}^1)^{-1} E_{22}^1 \Lambda_u^1(z^1 = 0) C_u^1 = R_u^0 C_u^1. \quad (2.62)$$

Die Beschreibung der allgemeinen Reflexionen und Transmissionen an einer Schichtgrenze sind nach Gl.(2.42) definiert als $C_d^{j+1} = \hat{T}_d^j C_d^j$, $C_u^j = \hat{R}_d^j C_d^j$ und $C_d^1 = R_u^0 C_u^1$, wobei sich diese Koeffizienten aus der Kopplung der Schichten vom Halbraum bis zur obersten Schicht ergeben.

Durch Kopplung der entsprechenden Reflexions- und Transmissionskoeffizienten ist die Frequenzgleichung die nichttriviale Lösung des nachfolgenden Gleichungssystems.

$$(I - R_u^0 \hat{R}_d^1) C_d^1 = 0 \quad (2.63)$$

$$\det(I - R_u^0 \hat{R}_d^1) = 0 \quad (2.64)$$

Die Terme innerhalb der Frequenzgleichung stellen 2x2 Matrizen mit I als Einheitsmatrix dar. An dieser Stelle seien kurz die sogenannten Grenzschichtwellen¹⁷ genannt, deren Existenz an tiefer liegende Schichtgrenzen gebunden ist. Dieser Wellentyp besitzt analog der Oberflächenwelle eine exponentiale Dämpfung quer zur Ausbreitungsrichtung. Jedoch wird im Gegensatz zu den Oberflächenwellen dieser Wellentyp durch zwei aufeinander liegende Halbräume unterschiedlicher Medien beschrieben.

2.4.2.3 Phasen- und Gruppengeschwindigkeit

Ein weiteres Merkmal freier Oberflächenwellen in geschichteten Böden ist das Auftreten einer Gruppengeschwindigkeit U , d.h. die Geschwindigkeit mit der sich ein

¹⁶Die Definition des Reflexionskoeffizienten an der Halbraumoberfläche erfolgt unter der Annahme der totalen Reflexion.

¹⁷Streng genommen sind die in Kapitel 2.4.2 dargestellten Oberflächenwellen ebenfalls Grenzschichtwellen.

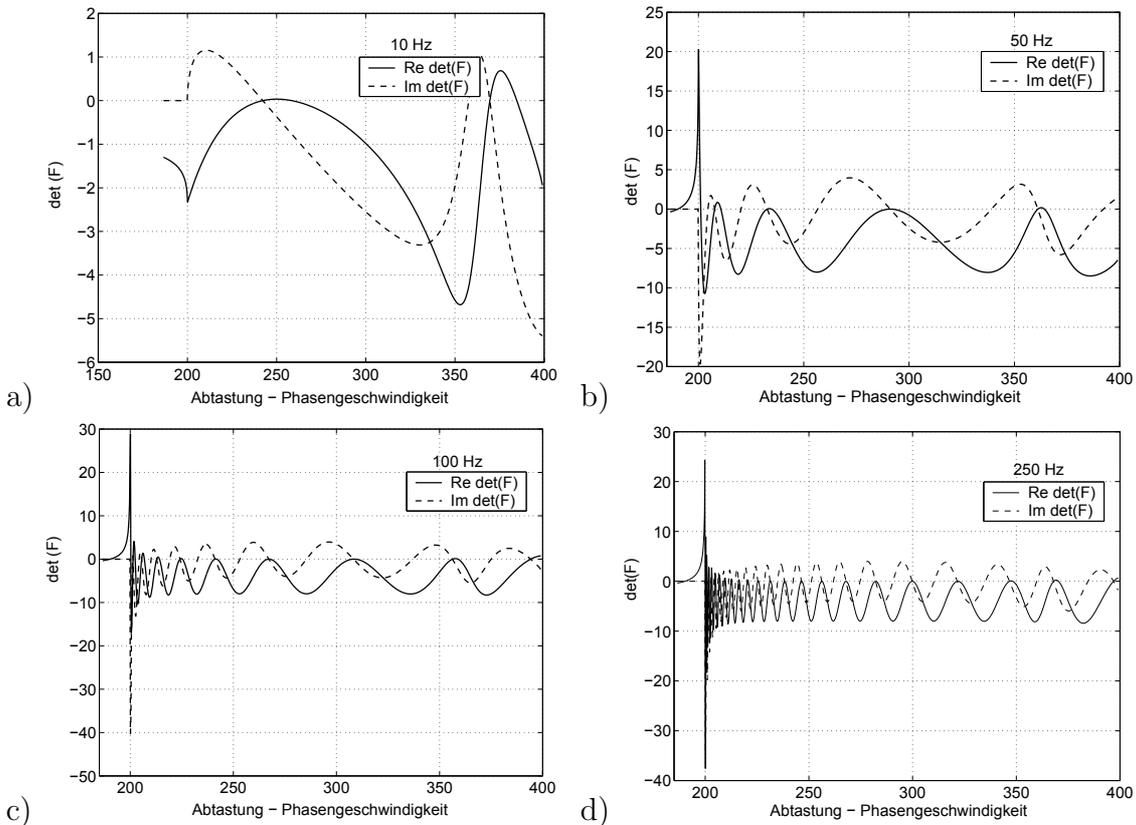


Abbildung 2-9: Zunahme der Oszillationen in der Frequenzgleichung mit steigendem Frequenzwert. Abgebildet ist der Real- und Imaginärteil der Frequenzgleichung innerhalb des Suchbereichs der Nullstelle bei unterschiedlichen Frequenzen.

Wellenberg oder ein schmaler Bereich um dessen Peak-Punkt ausbreitet. Zu beobachten ist diese Eigenschaft bei der Ausbreitung von Impulsanregungen, die nach einer gewissen Entfernung in dispergierte Wellenzüge übergehen. Hier bilden sich Seismogrammabschnitte -*Gruppen*- mit klarem Frequenzinhalt heraus.

Die Gruppengeschwindigkeit - mit der Ableitung der Phasengeschwindigkeit c nach der Frequenz oder Wellenlänge Λ - kann durch folgende Gleichung nach (Müller 1991) ermittelt werden.

$$U = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c}{1 - \frac{\omega}{c} \frac{dc}{d\omega}} = \frac{c}{1 - \frac{T}{c} \frac{dc}{dT}} \quad (2.65)$$

Aus der obigen Gleichung ist ersichtlich, dass für den Fall einer abnehmenden Phasengeschwindigkeit mit zunehmender Frequenz (normal dispersiv), die Gruppengeschwindigkeit immer kleiner als die Phasengeschwindigkeit ist (siehe dazu auch Abb.4-26).

Die Betrachtung der Gruppengeschwindigkeit in geschichteten Medien ist ein wichtiges Indiz bei der Energieverteilung innerhalb eines Wellenzuges. So bewegt sich

jeder harmonische Bestandteil in einem Oberflächenwellenzug mit der eigenen Phasengeschwindigkeit, während die Gruppengeschwindigkeit an die Geschwindigkeit des Maximums des gesamten Wellenzuges gebunden ist. Diese Beziehung ist dargestellt in Abb.(2-10) (Sheriff & Geldhard 1995).

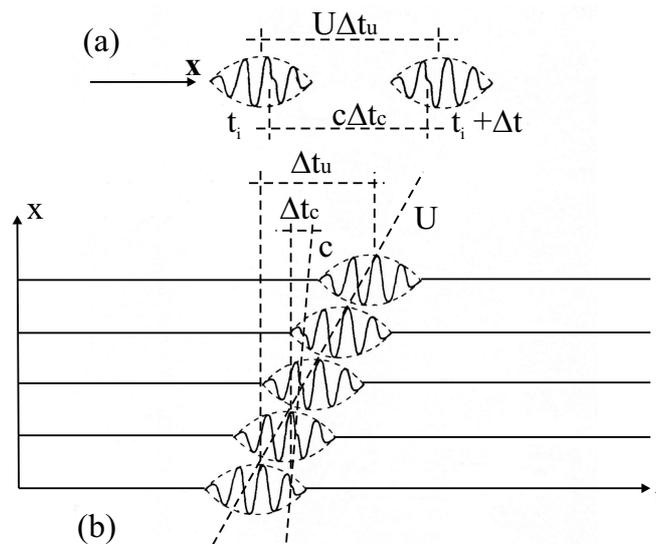


Abbildung 2-10: a) Gruppen- und Phasengeschwindigkeit, b) unterschiedliche Ausbreitungsgeschwindigkeiten der Phasen- und Gruppengeschwindigkeiten einer Welle mit zunehmender Entfernung nach (Sheriff & Geldhard 1995).

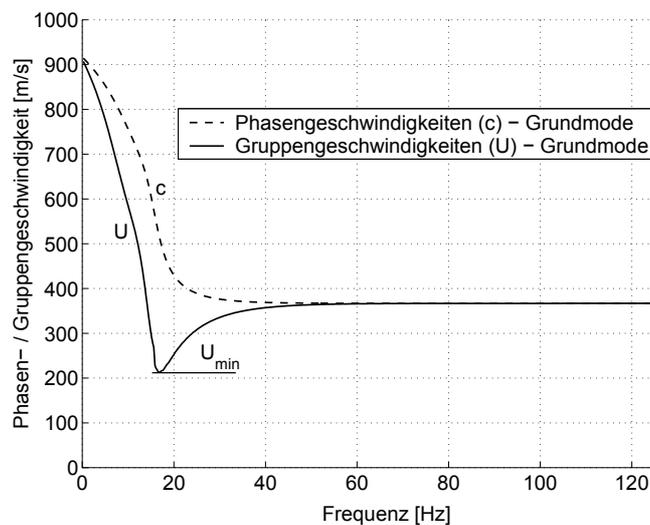


Abbildung 2-11: Airyphase (am Punkt U_{\min}) im Verlauf der Phasen- und Gruppengeschwindigkeit einer Grundmode.

Das Ende der durch die Phasengeschwindigkeit dispergierten Seismogramme wird oft von einer Airyphase begrenzt. Airyphasen kennzeichnen den Punkt einer oder mehrerer Frequenzen (Abb. 2-11), bei denen die Ableitung der Gruppengeschwindigkeit Null ist: $U'(\omega) = 0$. Die Bedeutung der Airyphase liegt in den relativ großen auftretenden Amplituden, mit denen sie begleitet wird, wenn ein Gruppengeschwindigkeitsminimum- oder maximum vorliegt.

In Abhängigkeit von einem Minimum oder Maximum endet oder beginnt das Seismogramm mit großen Amplituden. Durch die schwache geometrische Dämpfung dieser Phase tritt diese mit wachsender Entfernung deutlicher hervor.

2.5 Synthetische Seismogramme

Die Berechnung theoretischer Seismogramme ist für eine Untersuchung und Beurteilung der Wellenausbreitung unerlässlich. Die grundlegende Arbeit zu dem Problem -seismische Quelle auf homogenen Halbraum- wurde von H. Lamb 1904 (Lamb 1904) durchgeführt. Er veröffentlichte damit das erste synthetische Seismogramm.

Die Berechnung von theoretischen Seismogrammen kann auf unterschiedlichen Wegen erfolgen. In der Geotechnik werden überwiegend Green'sche Funktionen im Frequenzbereich genutzt, wobei auch direkte Lösungen im Zeitbereich möglich sind¹⁸. Eine ausführliche Zusammenstellung für die fachliche Definition einer Green'schen Funktion findet sich in (Wolf 1985) und (Bode 2000). Die geringe Anzahl von Zeitbereichslösungen hat ihre Ursache in der schwierigen Ableitung aus den partiellen Differentialgleichungen. Die Tatsache jedoch, dass die Zeitbereichslösungen verschiedene Vorteile besitzen, hat die Entwicklung der Green'schen Zeitbereichsfunktionen, speziell die des Halbraums, vorangetrieben (Triantafyllidis 1989) und (Bode 2000). In (Bode 2000) werden neben der Zeitbereichslösung auch die Vorteile hinsichtlich Zeitersparnis und nichtlinearer Anwendungsbereiche betrachtet.

Die Vielzahl der entwickelten Methoden zur Berechnung eines kompletten Zeitverlaufs erschweren die Entscheidung in der zu verwendenden Methode. In Abb.(2-12) sind einige Lösungsmöglichkeiten, ausgehend von der direkten analytischen Lösung der partiellen Differentialgleichung, strukturiert angegeben. In Abhängigkeit von der Berechnungsmethode existieren unterschiedliche Wellenanteile im Zeitverlauf.

Aus diesem Grund sind speziell die Lösungswege von Interesse, die eine differenzierte Berechnung der Wellentypen zulassen. Für eine genaue Untersuchung des Wellenfeldes kann die konventionelle Zuordnung der Wellenanteile aus dem berechneten Seismogramm vereinfacht werden.

Betrachtet man die Darstellung des Wellenzahlspektrums in Abb.(2-6), so ist er-

¹⁸Diese Lösungen im Zeitbereich werden auch als Fundamentallösung bezeichnet. Sie werden als Antwort eines Mediums auf eine Diracfunktion verstanden.

sichtlich, dass es aus Anteilen eines kontinuierlichen und eines diskreten Spektrums besteht. Das diskrete Spektrum reflektiert dabei die vorhandenen Oberflächenwellen innerhalb der analytischen Lösung während das kontinuierliche Spektrum den Körperwellen zugeordnet wird. Gelingt es durch Verwendung der Konturintegration diese beiden Spektren getrennt anzugeben, so sind diese beiden Wellenanteile entkoppelt darstellbar. Durch diese Trennung können die Oberflächen- und Körperwellen in theoretischen Rechnungen getrennt untersucht werden.

Ein weiterer Grund zur Verwendung der Konturintegration für die Lösung der gegebenen Gl.(2.73) und Gl.(2.74) ist das Ergebniss von numerisch problemlos auswertbaren Gleichungen, da eine normale, numerische Lösung dieser Integrale nicht möglich ist. Die Integrationsgrenzen sind zum einen infinitiv, zum anderen besitzen die Integranden diskrete Singularitäten im Integrationsgebiet, die mit den Wellenzahlen der ermittelten Phasengeschwindigkeiten (Eigenwerte der Frequenzgleichung) korrespondieren.

Durch die Nutzung der Konturintegration kann dieses Problem vermieden werden. Dabei wird die vorhandene Integrationsvariable um einen imaginären Term in den komplexen Bereich erweitert und ein geeigneter Integrationspfad innerhalb des komplexen Integrationsbereiches gewählt. Unter Verwendung des Residuensatzes ist es möglich, die Singularitäten im Integrationsgebiet zu umgehen. Die verbleibenden Linienintegrale sind anschließend numerisch auswertbar. Im Gegensatz zum homogenen Halbraum wurde für das angestrebte Ziel, Lösung der Verschiebungsgleichungen mit differenzierter Zuordnung zu den auftretenden Wellentypen, in einem beliebig geschichteten Halbraum keine verwertbare Lösung gefunden. Die notwendige Herleitung wurde in dieser Arbeit durchgeführt.

Die verfügbaren Lösungen zur Berechnung der Green'schen Funktionen für den Fall des horizontal geschichteten, linear elastisch und isotropen Halbraums beruhen auf der numerischen Integration, bei der die Singularitäten auf dem Integrationsweg durch Einführung einer komplexen Geschwindigkeit vermieden werden. Bekannte Anwendungen sind die semianalytischen Methoden nach (Kausel & Roesset 1981) und (Wolf 1985), die Frequenz-Langsamkeits-Integration (Müller 1968, Fuchs & Müller 1971) oder die Frequenz-Wellenzahl-Integration (Bouchon 1981, Hisada 1994). Die Singularitäten gleiten durch die eingeführte komplexe Geschwindigkeit von der reellen Achse in das komplexe Gebiet und werden bei einer Integration entlang der reellen Achse nicht berührt.

Im Gegensatz dazu kann bei der analytischen Lösung des homogenen Halbraums durch die Konturintegration eine klare Differenzierung in den Verschiebungsanteilen in unterschiedliche Wellentypen vorgenommen werden. Die Auswertung der resultie-

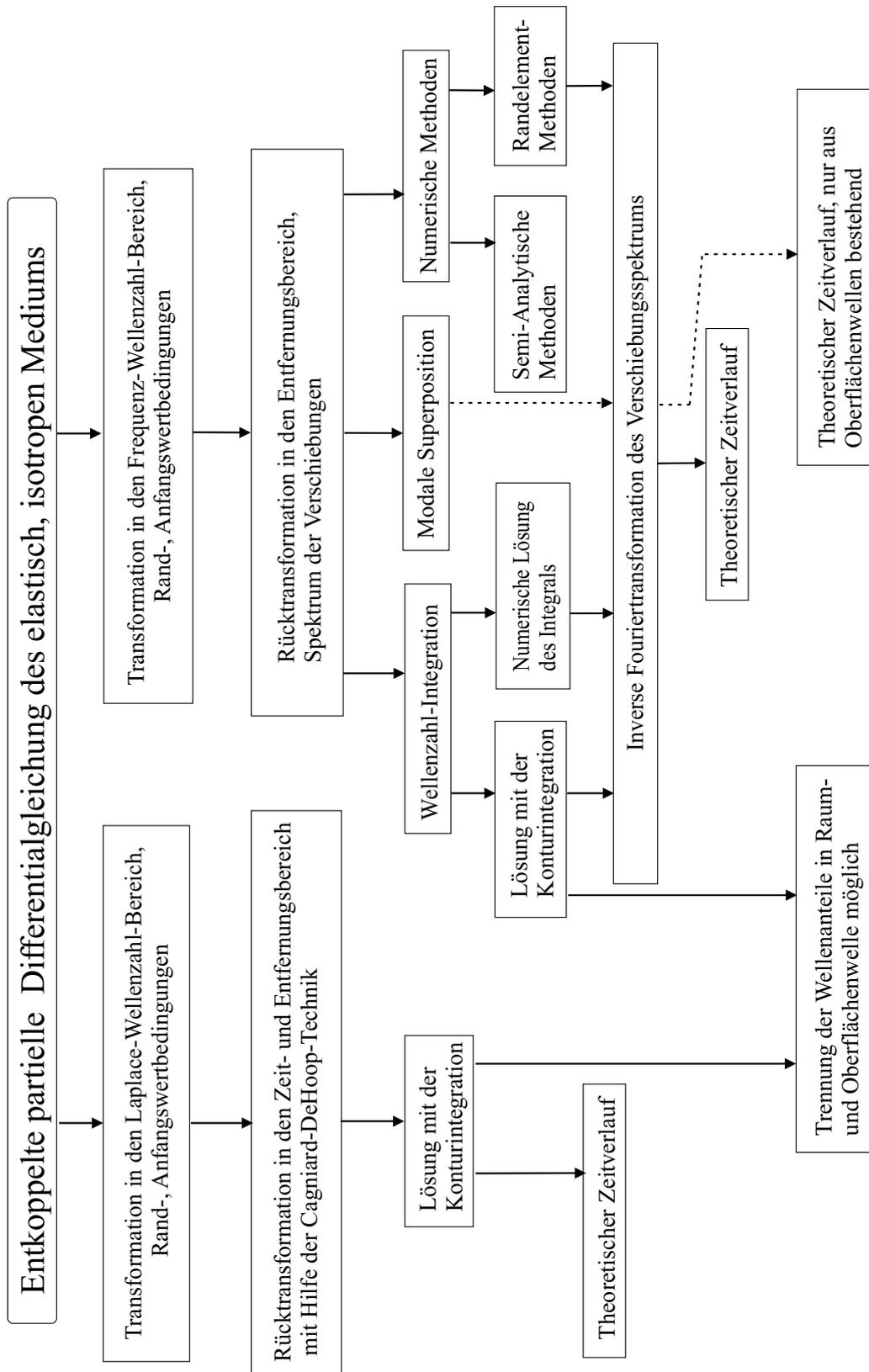


Abbildung 2-12: Berechnung theoretischer Seismogramme durch analytische Beschreibung des Kontinuums.

renden Integrale und Residuen ist danach numerisch problemlos möglich. Durch die Anwendung dieser Lösungsmöglichkeit auf den geschichteten Halbraum, können die genannten Vorteile ausgenutzt werden.

2.5.1 Grundlagen

Zur Untersuchung der Wellenausbreitung wird die seismische Quelle als Diskontinuität in der Spannungsdefinition nach Gl.(2.25) beschrieben. In dieser Arbeit wird eine auf der Halbraumoberfläche wirkende Spannungsquelle untersucht.

Geht man von den Gleichungen der allgemeinen Reflexions- und Transmissionskoeffizienten aus, so kann der Subvektor der Spannungen im Fall einer Punktquelle nach (Harkrider 1964) bzw. (Hisada 1994) wie folgt definiert werden

$$\begin{pmatrix} \tilde{U}_j^{H_n}(z) \\ \tilde{\Sigma}_j^{H_n}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta Q_p \end{pmatrix}. \quad (2.66)$$

Durch die Wahl einer vertikalen Einzellast auf der Halbraumoberfläche ergibt sich für ΔQ_p der Ausdruck (siehe Anhang A.1)

$$\Delta Q_p = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{2\pi} F_z \end{pmatrix}. \quad (2.67)$$

Substituiert man die obige Spannungsbeschreibung in Gl.(2.33), werden die unbekannt Koeffizienten aus Gl.(2.20) in Abhängigkeit vom Quellterm beschrieben.

$$C_d^1 = (E_{21}^1 + E_{22}^1 \Lambda_u^1(z^1 = 0) \hat{R}_d^1)^{-1} \Delta Q_p \quad (2.68)$$

Mit dem Einsetzen dieser Koeffizienten in die Verschiebungsgleichungen (2.32) können die Verschiebungen eines beliebig geschichteten Mediums vollständig beschrieben werden.

$$\begin{aligned} \tilde{U}_1^{H_n}(z) &= \left(E_{11}^1 \Lambda_d^1(z) + E_{12}^1 \Lambda_u^1(z) \hat{R}_d^1 \right) C_d^1 \\ &= \left(E_{11}^1 \Lambda_d^1(z) + E_{12}^1 \Lambda_u^1(z) \hat{R}_d^1 \right) \cdot \left[(E_{21}^1)^{-1} \left(I - R_u^0 \hat{R}_d^1 \right) \right]^{-1} \Delta Q_p \end{aligned} \quad (2.69)$$

Eine analoge Substitution kann in der T/H-Methode durchgeführt werden, d.h. die unbekannt Koeffizienten werden in Abhängigkeit von der Quelle definiert und in die Verschiebungsgleichungen eingesetzt. Durch die Bezeichnung des Matrixproduktes in Gl.(2.31) mit dem Term M

$$\left\{ \tilde{f}_1^{H_n} \right\}_{(z=0)} = \prod_{j=1}^N [D^j] \cdot E^{N+1} \Lambda^{N+1} \{C\}^{N+1} = M \cdot \{C\}^{N+1} \quad (2.70)$$

bzw. den entsprechenden 2 x 2 Submatrizen von M sowie der Beachtung der Abstrahlungsbedingungen ergeben sich die Verschiebungsgleichungen der T/H Methode in Abhängigkeit von den Submatrizen:

$$\tilde{U}_1^{H_n}(z) = M_{11} \cdot M_{21}^{-1} \cdot \Delta Q \quad (2.71)$$

$$\tilde{U}_1^{H_n}(z) = M_{11} \cdot \frac{1}{\det(M_{21})} \begin{pmatrix} M_{21}(1,2) & 0 \\ 0 & M_{21}(1,1) \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{2\pi} F_z \right). \quad (2.72)$$

Entsprechend Kapitel 2.2.2 müssen die Gleichungen zum Erhalt der Lösung aus dem Bildbereich in den Originalbereich zurück transformiert werden. Gemäß der Transformationsvorschrift Gl.(2.14) erhält man damit die im Entfernungsbereich vorliegenden Verschiebungsgleichungen

$$\tilde{U}_1(r, z) = \int_0^\infty \left(E_{11}^1 \Lambda_d^1(z) + E_{12}^1 \Lambda_u^1(z) \hat{R}_d^1 \right) \cdot \left[(E_{21}^1)^{-1} \left(I - R_u^0 \hat{R}_d^1 \right) \right]^{-1} \Delta Q_p \cdot k \cdot J_n(kr) dk \quad (2.73)$$

bzw.

$$\tilde{U}_1(r, z) = \int_0^\infty M_{11} \cdot \frac{1}{\det(M_{21})} \begin{pmatrix} M_{21}(1,2) & 0 \\ 0 & M_{21}(1,1) \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{2\pi} F_z \right) \cdot k \cdot J_n(kr) dk. \quad (2.74)$$

Die Lösung im Zeitbereich wird im Regelfall durch die Anwendung der schnellen Fouriertransformation (FFT) auf die gegebenen Gl.(2.73) und Gl.(2.74) gewonnen. In der Analyse der Gl.(2.73) und Gl.(2.74) können für eine Anwendung der Funktionentheorie auf diese Gleichungen folgende Eigenschaften zusammengefasst werden:

1. Die beschriebenen Funktionen können mittels einer einzigen, doppelpunktfreien Randkurve als Integrationsweg beschrieben werden, d.h. sie bilden ein einfach zusammenhängendes Gebiet.
2. Mit Ausnahme endlich vieler Punkte ist die Funktion nach Wahl des entsprechenden Riemann'schen Blattes eindeutig und analytisch.
3. Vorhandene Singularitäten sind durch Nullstellen der Frequenzgleichung sowie durch mehrdeutige Wurzelfunktionen definiert.
4. Die vorhandenen Singularitäten aus den Nullstellen des Nenners treten als einzeln isolierte Punkte in Abhängigkeit von der Frequenz auf.

Entsprechend dieser Punkte können die Integralsätze von Cauchy sowie der Residuensatz der Funktionentheorie zur Berücksichtigung vorhandener Singularitäten über ein einfach zusammenhängendes Gebiet für die Lösung der Gleichungen herangezogen werden (Bronstein et al. 2001).

2.5.2 Frequenzbereichslösung des homogenen Halbraums

In diesem Abschnitt wird auf die Herangehensweise zur Lösung der Verschiebungsgleichungen eines homogenen Halbraums eingegangen. Ausgehend von dieser Darstellung wird ein analoger Weg im Fall der Mehrschichtung im nachfolgenden Kapitel beschrieben.

Zur Lösung der Halbraumproblematik existieren in der Literatur unterschiedliche Ansätze. In den eigenen Untersuchungen wird den Ausführungen von (Lamb 1904) und (Ewing et al. 1957) zur Lösung des durch eine vertikale Punktlast belasteten homogenen Halbraums gefolgt.

Beruhend auf den Gl.(2.73) und Gl.(2.74) wird die reelle Integrationsvariable k in den komplexen Bereich hinein erweitert. Die damit entstehende komplexe Wellenzahl wird nachfolgend mit ζ bezeichnet. Für den homogenen Halbraum ergeben sich damit die Lamb'schen Verschiebungsgleichungen für den Fall der Rotationssymmetrie:

$$\begin{Bmatrix} \tilde{u}_r(\omega, r) \\ \tilde{u}_z(\omega, r) \end{Bmatrix} = \left\{ -\frac{F_z}{2\pi\mu} \right\} \int_0^\infty \begin{Bmatrix} \frac{\zeta^2 \left(2\nu\gamma + \frac{\omega^2}{c_s^2} - 2\zeta^2 \right)}{(\zeta^2 + \nu^2)^2 - 4\zeta^2\nu\gamma} \\ \frac{\zeta\gamma\frac{\omega^2}{c_s^2}}{(\zeta^2 + \nu^2)^2 - 4\zeta^2\nu\gamma} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} J_1(\zeta r) \\ J_0(\zeta r) \end{Bmatrix} d\zeta. \quad (2.75)$$

Zur Vereinfachung der Lösung von Gl.(2.75) wird die Besselfunktion durch die entsprechenden Hankelfunktionen (Anhang A1) ersetzt. Mit der vorhandenen Abhängigkeit von $\exp(i\omega t)$ müssen die Gleichungen nach der Hankelfunktion 2. Art entwickelt werden. Das wird durch die Verwendung des I. und IV. Quadrants als Integrationsebene erreicht. Zu beachten ist, dass durch den Übergang von der Integrationsvariable k zur komplexen Variable $\zeta = k \pm i\tau$ die in Gl.(2.75) enthaltenen Wurzelfunktionen, $\gamma(\zeta)$ und $\nu(\zeta)$, mehrdeutige Funktionen werden. Der Punkt $\zeta^2 = k_p^2$ bzw. $\zeta^2 = k_s^2$ ist der Verzweigungspunkt der mehrdeutigen Funktionen. Zusätzlich zu dieser Singularität kommt die Nullstelle im Nenner hinzu. Der Nenner der Gl.(2.75) mit reellen Wellenzahlen entspricht der Frequenzgleichung des homogenen Halbraums nach Gl.(2.55), wodurch die Nullstelle mit der Rayleighwellengeschwindigkeit des homogenen Halbraums gleichgesetzt werden kann. Der Zweck der Erweiterung der Integrationsvariable in den komplexen Bereich besteht in der Möglichkeit, die jeweiligen Verzweigungspunkte durch die Wahl eines entsprechenden Integrationsweges zu umgehen und den Residuensatz auf die vorhandene Singularitäten anzuwenden. Die im Integranden (2.75) zweideutigen Wurzelfunktionen können durch eine zweiblät-

rige Riemann'sche Fläche¹⁹ beschrieben werden (Burg, Wille & Haf 1990, Bronstein et al. 2001).

Zur Wahrung der Abstrahlungsbedingung ist auf dem gewählten Blatt die Bedingung (2.21) zu erfüllen, d.h. in Abhängigkeit dieser Forderung muss die Form und Lage des Verzweigungsschnittes bestimmen werden. Folgt man den Ausführungen von (Ewing et al. 1957) und setzt die Wellenzahlen k_p und k_s in den Wurzelfunktionen komplex an, entspricht das der Einführung einer komplexen Wellengeschwindigkeit oder komplexen Frequenz.

$$k_p = k_{p,1} - ik_{p,2} \quad k_s = k_{s,1} - ik_{s,2} \quad (2.76)$$

Von den Verzweigungspunkten ausgehend, werden nachfolgend die Betrachtungen zu den Eigenschaften der Verzweigungsschnitte geführt. Aus Bedingung (2.21) folgt mit

$$\Re\{\gamma\} = 0 \quad \Re\{\nu\} = 0, \quad (2.77)$$

dass γ^2 und ν^2 reell und negativ sein müssen. Mit $\zeta = k + i\tau$ erhält man an Stelle der quadrierten Wurzelfunktion die Gleichung

$$\gamma^2 = (k^2 + i2k\tau - \tau^2) - (k_{p,1}^2 - i2k_{p,1}k_{p,2} - k_{p,2}^2). \quad (2.78)$$

Wird Gl.(2.78) in den Real- und Imaginärteil zerlegt, so folgt aus $\Im\{\gamma^2\} = 0$ die Gleichung

$$k\tau = -k_{p,1}k_{p,2}. \quad (2.79a)$$

Die Forderung $\Re\{\gamma^2\} < 0$ aus (2.77) ergibt

$$k^2 - \tau^2 < k_{p,1}^2 - k_{p,2}^2. \quad (2.79b)$$

Stellt man die Gl.(2.79a) und Gl.(2.79b) um, so folgt die Beschreibung des Verzweigungsschnittes für die Wurzelfunktion der Scher- bzw. Kompressionswelle.

$$\begin{aligned} \tau &= -\frac{k_{p,1}k_{p,2}}{k} \quad \text{und} \quad k^2 - \tau^2 < k_{p,1}^2 - k_{p,2}^2 \\ \tau &= -\frac{k_{s,1}k_{s,2}}{k} \quad \text{und} \quad k^2 - \tau^2 < k_{s,1}^2 - k_{s,2}^2. \end{aligned} \quad (2.80a,b)$$

Die Form des Verzweigungsschnittes entspricht mit Gl.(2.79a) einer Hyperbel. Die Lage des Schnittes auf der Hyperbel wird durch Gl.(2.79b) festgelegt, d.h. der Schnitt befindet sich im Wertebereich von $k < k_{p,1}$ bzw. $k_{s,1}$ und $i\tau > ik_{p,2}$ bzw. $ik_{s,2}$ (siehe Abb.2-13).

¹⁹Riemann'sche Blätter erklären die Mehrdeutigkeit einer Funktion mittels einer verwobenen Struktur, welche an der Nahtstelle der Verzweigungsschnitte ineinander übergehen.

Eine Integration auf dem Blatt, ohne die bestimmten Schnitte zu kreuzen, liefert damit ein einheitlich positives Vorzeichen für den Realteil von γ und ν .

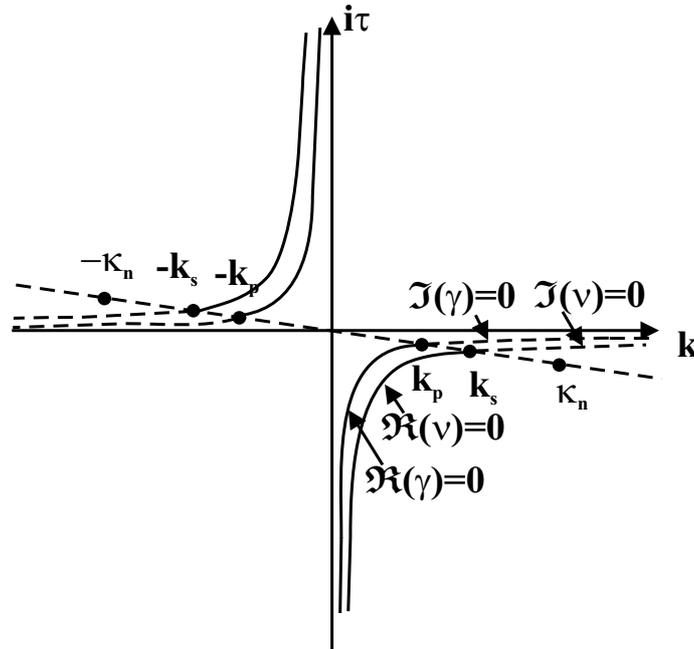
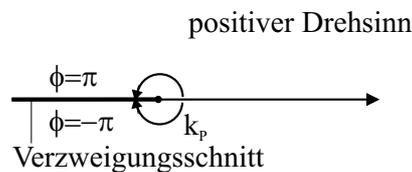


Abbildung 2-13: Verzweigungspunkte und -schnitte in der komplexen Ebene.

Wie in Abb.(2-13) dargestellt, besitzt die mehrdeutige Wurzelfunktion $\sqrt{\zeta^2 - k_{P,S}^2}$ zwei mögliche Verzweigungspunkte. Werden für die Darstellung der komplexen Integrationsvariable Polarkoordinaten eingeführt (Mitakidis 1991),



erhält man die Vorzeichen auf den entsprechenden Seiten des Verzweigungsschnittes (mit $\zeta = R e^{i\phi}$ im Bereich $[-\pi < \phi < \pi]$, wobei ϕ von der k -Achse aus gemessen wird).

$$\Re\{\gamma\} = \sqrt{R} \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \quad \text{stets positiv für} \quad [-\pi < \phi < \pi]$$

$$\Im\{\gamma\} = \sqrt{R} \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \begin{cases} \text{positiv für } [0 < \phi < \pi] \\ \text{negativ für } [-\pi < \phi < 0] \end{cases} \quad (2.81)$$

Entlang der dargestellten Verzweigungsschnitte in (Abb.2-14) wird die Kontur gemäß (Abb.2-15) gewählt, um das gesuchte Integral in Gl.(2.75) zu bestimmen.

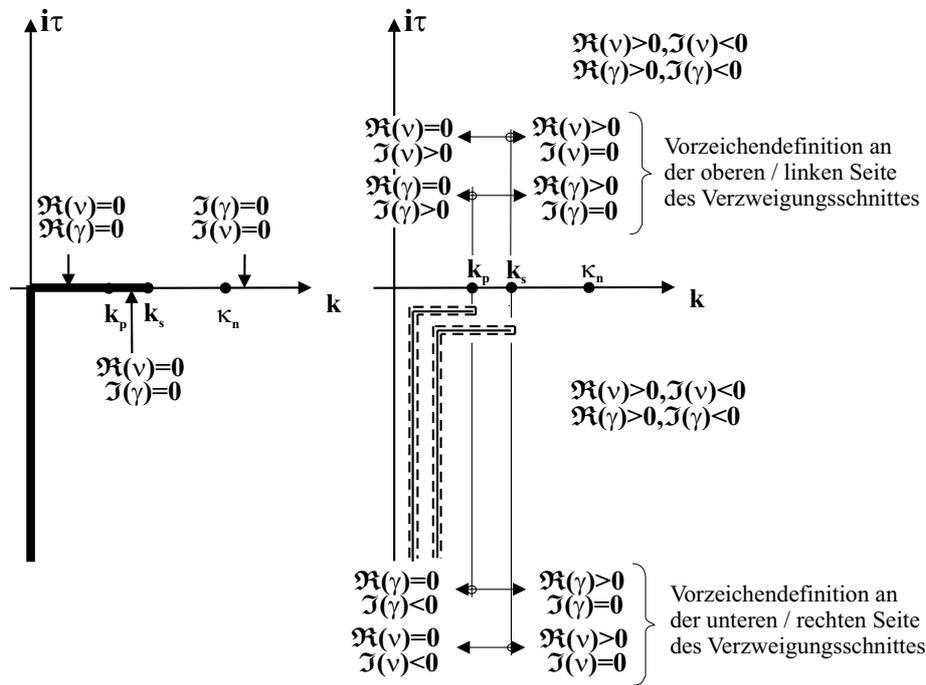


Abbildung 2-14: Verzweigungsschnitte bei reellen Wellenzahlen k_S und k_P , Betrachtung der Vorzeichendefinitionen im I. und IV. Quadranten.

Für die Integration wird zur Gewährleistung der Konvergenz im Unendlichen der I. Quadrant für den Integranden der Hankelfunktion 1. Art und der IV. Quadrant für die Hankelfunktion 2. Art gewählt, so dass ein Integrationsweg in den Grenzen von 0 bis $+\infty$ enthalten ist²⁰. Zur Durchführung der Integration wird die Kontur nach Abb.(2-15) genutzt und der imaginäre Anteil der Integrationsvariable zu Null gesetzt. Dabei zieht sich die Kontur auf die in Abb.(2-16) dargestellten Pfade zurück. Diese Kontur soll weiterhin als Grundlage für die anschließende Integration der Gleichung (2.75) dienen.

Entsprechend dem Residuensatz (Bronstein et al. 2001)

$$\oint_K I(\zeta) d\zeta = 2\pi i \sum_{\kappa=0}^n \text{Res} I(\zeta) |_{\zeta=\kappa_n} \quad (2.82)$$

ergeben sich für die zusammenhängenden Gebiete im I. und IV. Quadranten folgende Gleichungen

$$\oint_K I(\zeta) d\zeta = \int_B^A + \int_A^D + \int_D^B = 0$$

²⁰Das Konvergenzverhalten der Funktionen und Integranden wird Anhang A.1 und A.3 untersucht.

$$\oint_K I(\zeta) d\zeta = \int_B^C + \int_C^D + \int_D^B + \int_B^{k_s} + \int_{k_s}^{k_p} + \int_{k_p}^0 = 2\pi i \sum_{\kappa=0}^n \text{Res } I(\zeta) |_{\zeta=\kappa_n} \quad (2.83)$$

Gemäß den Ausführungen in Anhang A3 folgt, dass die Bogenintegrale im Unend-

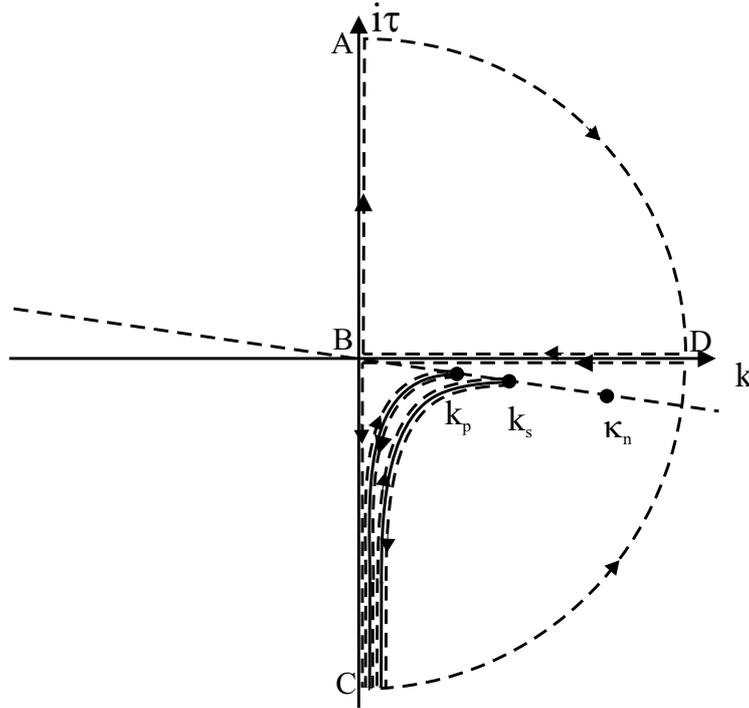


Abbildung 2-15: Integrationspfad im I. und IV. Quadranten mit komplexen Wellenzahlen k_S und k_P .

lichen gegen Null konvergieren. Die weiteren Betrachtungen reduzieren sich damit auf die Integrale entlang der imaginären Achse $i\tau$, entlang des Verzweigungsschnittes sowie des Residuums an der Stelle $\zeta = \kappa_n$, mit κ_n als Nullstelle des Nenners. Für den Fall des homogenen Halbraums existiert im Nenner des Integranden, der Frequenz- bzw. Rayleigh-Gleichung, nur eine reelle Nullstelle. Diese ist ein einfacher Pol 1. Ordnung. Entsprechend den Berechnungsvorschriften für eine derartige Polstelle kann das Residuum für diesen entsprechenden Fall (Bronstein et al. 2001) relativ einfach berechnet werden.

$$\operatorname{Res} \{I(\zeta)\}_{\zeta=\kappa} = \frac{\text{Zähler} \{I(\zeta)\}}{\frac{\partial}{\partial \zeta} \text{Nenner} \{I(\zeta)\}} \Big|_{\zeta=\kappa} \quad (2.84)$$

Als Ergebnis des gewählten Integrationspfades enthält man die komplette Lösung des Randwertproblems, das mit der Entfernung abklingende Wellen beschreibt. Durch die Umformung der Lösung nach Gl.(2.82) und G.(2.83) ergibt sich die Verschiebung in radiale und vertikale Richtung als Überlagerung der Körper- und Oberflächenwellen.

$$\begin{aligned} \tilde{u}_r(\omega, r) &= \frac{-F_z k_s^2}{\pi \mu} \int_{k_p}^{k_s} \frac{\nu^+ \gamma k^2 (2k^2 - k_s^2)}{\{(2k^2 - k_s^2)^4 - 16k^4 (\nu^+)^2 \gamma^2\}} H_1^2(kr) dk \\ &\quad - i \frac{F_z}{2\mu} \frac{\partial}{\partial k_n} \frac{k_n^2 (2k_n^2 - 2\nu_n \gamma_n - k_s^2)}{\{(2k_n^2 - k_s^2)^2 - 4k_n^2 \nu_n \gamma_n\}} H_1^2(k_n r) \\ \tilde{u}_z(\omega, r) &= \frac{-F_z k_s^2}{2\pi \mu} \int_0^\infty \frac{(-i\tau) \gamma^- H_0^2(-i\tau r)}{\{(2(-i\tau)^2 - k_s^2)^2 - 4(-i\tau)^2 \nu^- \gamma^-\}} d(-i\tau) \\ &\quad + \frac{-F_z k_s^2}{2\pi \mu} \int_0^{k_p} \frac{k \gamma^+ H_0^2(kr)}{\{(2k^2 - k_s^2)^2 - 4k^2 \nu^+ \gamma^+\}} dk \\ &\quad + \frac{-4F_z k_s^2}{\pi \mu} \int_{k_p}^{k_s} \frac{k^3 \gamma^2 \nu^+ H_0^2(kr)}{\{(2k^2 - k_s^2)^4 - 16k^4 (\nu^+)^2 \gamma^2\}} dk \\ &\quad + i \frac{F_z k_s^2}{2\mu} \frac{\partial}{\partial k_n} \frac{k_n \gamma_n H_0^2(k_n r)}{\{(2k_n^2 - k_s^2)^2 - 4k_n^2 \nu_n \gamma_n\}} \end{aligned} \quad (2.85a,b)$$

Die in der Frequenzgleichung des Residuums vorhandene Ableitung kann durch die folgende Funktion berechnet werden:

$$\frac{\partial}{\partial k_n} \left\{ (2k_n^2 - k_s^2)^2 - 4k_n^2 \nu \gamma \right\} = 4k_n \left(4k_n^2 - 2k_s^2 - \left\{ \frac{k_n^2 (k_s^2 - k_p^2)}{\sqrt{k_n^2 - k_p^2} \sqrt{k_n^2 - k_s^2}} \right\} \right).$$

Mit den in Gl.(2.85a,b) auftretenden Ausdrücken γ^+ bzw. ν^+ wird die Vorzeichen- definition von $\Im \{\gamma\} > 0$ bzw. $\Im \{\nu\} > 0$ für den Bereich $k < k_p$ bzw. k_s entlang der imaginären Achsen bezeichnet. Die Terme γ^- bzw. ν^- kennzeichnen die Vorzeichen- definition $\Im \{\gamma\} < 0$ bzw. $\Im \{\nu\} < 0$ im Bereich $k < k_p$ bzw. k_s und entlang der imaginären Achse. Für die Durchführung der Integration entlang der imaginären

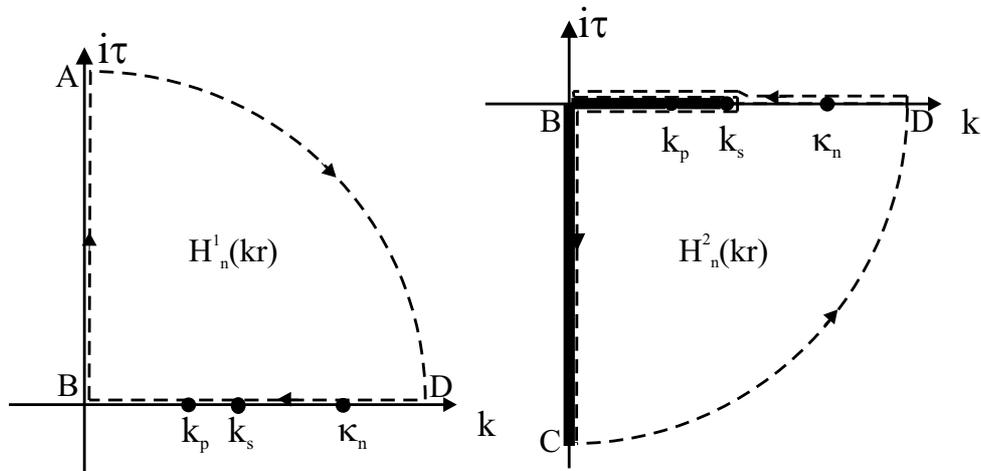


Abbildung 2-16: Integrationspfad im I. und IV. Quadranten mit reellen Wellenzahlen.

Achse ist zusätzlich die Integrationsvariable $(-i\tau)$ in den Wurzelausdrücken γ^- bzw. ν^- zu beachten.

Eine Verifikation der obigen Halbraumlösung wird mithilfe der Ergebnisse der Fernfeldlösung von Lamb (Lamb 1904) in Abb.(2-17) durchgeführt. Danach können die in Abb.(2-17) angegebenen numerisch berechneten Ergebnisse von Gl.(2.85) bestätigt werden. Die retrograde Partikelbewegung an der Halbraumoberfläche ergibt sich aus der gemeinsamen Betrachtung der zeitlich aufeinanderfolgenden Verschiebungsanteile u und w unter Beachtung der positiv definierten Koordinatenrichtungen in Abb.(2-3).

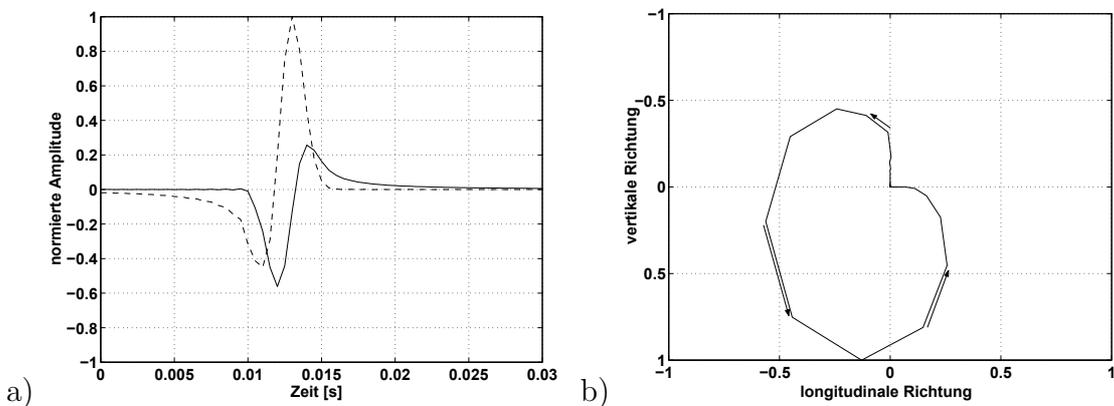


Abbildung 2-17: a) Zeitverlauf der normierten vertikalen (unterbrochene Linie) und radialen (durchgehende Linie) Verschiebung, b) Partikelbewegung der Rayleighwelle an der Oberfläche des Halbraums

2.5.3 Frequenzbereichslösung des geschichteten Halbraums

Aufbauend auf der Lösung des homogenen Halbraums wird gezeigt, dass ein analoger Weg für einen geschichteten Halbraum abgeleitet werden kann. In Kapitel 2.3 wurden die mathematischen Grundlagen der verwendeten Matrixverfahren erläutert. Dabei ist auf die gleichbleibenden Eigenschaften zwischen den gewählten Methoden hingewiesen worden. Die anschließende Nachweise erfolgen aus Gründen der Vereinfachung nur für den Fall der Übertragungsmatrizen des T/H-Verfahrens.

Die Formulierung der Verschiebungsgleichungen entsprechend der Gl.(2.73) und (2.74) führt in dem Fall einer Mehrfachsichtung auf eine gekoppelte Matrixdarstellung. Der Nenner des Integranden enthält analog zum homogenen Halbraum die Frequenzgleichung der freien Oberflächenwellen. Die Nullstellen des Nenners sind damit gleichzeitig die Singularitäten des Integranden.

Zur Anwendung der Funktionentheorie muss das Verhalten des Integranden bezüglich der Verzweigungspunkte näher untersucht werden. Für die Umformung und Zusammenfassung der Submatrizen aus Gl.(2.73) und Gl.(2.74) wird ebenfalls Kenntnis über die Ordnung der auftretenden Wellenzahlen k benötigt.

Die Lösung der partiellen Differentialgleichung des Vollraums (Gl.2.24) wurde unter Nutzung der Kontinuitätsbedingungen (Gl.2.26) auf einen geschichteten Halbraum übertragen (Gl.2.73) und (Gl.2.74). In diesen Gleichungen besitzt jede Schichtungsmatrix Wurzelterme die von den Materialkennwerten der jeweiligen Schicht abhängig sind. Der Integrand ist damit scheinbar mehrblättrig von der Ordnung $2(N + 1)$, mit N die Anzahl der Schichten.

Pekeris (Pekeris 1948) und Ewing (Ewing et al. 1957) stellten bei der Untersuchung von ein- und zweifachgeschichteten Flüssigkeitshalbräumen²¹ fest, dass durch die Kopplung von direkter und reflektierter Welle der Integrand die vorhandenen Mehrdeutigkeiten in den Schichten verlor. Es blieben nur die Mehrdeutigkeit und damit die Verzweigungspunkte des überlagerten Flüssigkeitshalbraums erhalten. Der spezielle Untersuchungsfall von Flüssigkeitsschichten beschränkt die auftretenden Wellentypen auf die Kompressionswelle. Die Grundgleichungen (2.18) vereinfachen sich durch die Annahme einer Flüssigkeit dahingehend, dass nur der wirbelfreie Ansatz innerhalb dieser Gleichungen berücksichtigt werden muss.

Um diese Aussagen auf einen geschichteten Halbraum mit vorhandener P- und SV-Welle zu übertragen, werden die Übertragungsmatrizen einer Schicht betrachtet. Diese beschreiben letztlich die Kombination der direkten und reflektierten Welle innerhalb der Schichtgrenzen.

²¹Die seismischer Quelle war bei diesen Untersuchungen in die Schichtung eingebettet.

Die formulierte Matrix (A.2-5) in Anhang A.2 verdeutlicht, dass in Schichten mit Wellenkoeffizienten C_u und C_d die entsprechenden Wurzelfunktionen immer in Kombination auftreten. Diese Ausdrücke, und damit auch der Integrand, werden zu geraden Funktionen bezüglich der Vorzeichen von $\Re(\nu_i)$, $\Re(\gamma_i)$ bzw. $\Im(\nu_i)$, $\Im(\gamma_i)$. Dadurch verschwinden die mit der jeweiligen Schichtung korrespondierenden Doppeldeutigkeiten der Wurzelfunktionen bzw. deren Verzweigungspunkte. Die Forderung nach Gl.(2.21) mit $\Re(\nu) \geq 0$ bzw. $\Re(\gamma) \geq 0$ ist innerhalb einer Schicht immer erfüllt.

In einer beliebigen Mehrfachsichtung existieren bei Berücksichtigung von Kompressions- und Scherwelle nur noch die Verzweigungspunkte des Halbraums ν_{N+1} und γ_{N+1} , wodurch die Riemann'sche Oberfläche analog dem homogenen Halbraum für jeden Verzweigungspunkt zweiblättrig ist.

Diese Erkenntnis ist die Grundlage für die Anwendung der Konturintegration auf ein Medium mit einer vorhandenen Mehrfachsichtung. Der wesentliche Unterschied zum homogenen Halbraum ist, dass an Stelle *einer frequenzunabhängigen* Singularität *mehrere frequenzabhängige* Singularitäten im Nenner des Integranden vorkommen.

Auch in der Analyse der auftretenden Ordnung von k kann entsprechend den Ausführungen in Anhang A2 (Gl.A.2-9 bis Gl.A.2-20) für beliebig geschichtete Böden ein Verhalten von Wellenzahlen gerader und ungerader Ordnung festgestellt werden, welches dem homogenen Halbraum analog ist. Mit diesen Erkenntnissen kann die Lösung des geschichteten Halbraums nahezu in Übereinstimmung mit dem homogenen Halbraum erfolgen.

Die Formulierung der Verschiebungen in Gl.(2.73) und Gl.(2.74) wird für die Ableitung der Lösungsfunktionen in abgekürzter Notation dargestellt. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird die Darstellung der Abhängigkeit der Verschiebungen von $\tilde{u}_{r,z}^{H_n}(\nu_{N+1}, \gamma_{N+1}, \mu, c_s, c_p, \omega, k, z)$ (Gl.2.69) auf die Variablen $\tilde{u}_{r,z}^{H_n}(\nu_{N+1}, \gamma_{N+1}, k)$ beschränkt.

$$\tilde{u}_{r,z}(\omega, r) = \left\{ -\frac{F_z}{2\pi} \right\} \int_0^{\infty} \tilde{u}_{r,z}^{H_n}(\nu_{N+1}, \gamma_{N+1}, k) k J_n(kr) dk \quad (2.86)$$

Der Index $N + 1$ kennzeichnet den homogenen Halbraum (siehe Abb.2-3).

Mit Substitution der Besselfunktionen n-ter Ordnung durch die Summe der Hankelfunktionen n-ter Ordnung 1. und 2. Art

$$[2J_n(x) = H_n^1(x) + H_n^2(x)]$$

erfolgt die Ableitung der Verschiebungsgleichungen analog zur Lösung des homogenen Halbraums. Zur Vereinfachung der Darstellung werden die Integranden in folgender Gleichung (Gl.2.87a,b) zusammengefasst.

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_r(\omega, r) &= \left\{ -\frac{F_z}{4\pi} \right\} \left\{ \int_0^\infty \underbrace{\tilde{u}_r^{H_1}(\nu_{N+1}, \gamma_{N+1}, k) H_1^1(kr) k dk}_{I_1} \right. \\
&\quad \left. + \int_0^\infty \underbrace{\tilde{u}_r^{H_1}(\nu_{N+1}, \gamma_{N+1}, k) H_1^2(kr) k dk}_{I_2} \right\} \\
\tilde{u}_z(\omega, r) &= \left\{ -\frac{F_z}{4\pi} \right\} \left\{ \int_0^\infty \underbrace{\tilde{u}_z^{H_0}(\nu_{N+1}, \gamma_{N+1}, k) H_0^1(kr) k dk}_{I_3} \right. \\
&\quad \left. + \int_0^\infty \underbrace{\tilde{u}_z^{H_0}(\nu_{N+1}, \gamma_{N+1}, k) H_0^2(kr) k dk}_{I_4} \right\} \quad (2.87a,b)
\end{aligned}$$

Es ergeben sich die Gleichungen (2.88a,b), die in Abhängigkeit von den Wurzelfunktionen des überlagerten Halbraums ν_{N+1}, γ_{N+1} und den Wellenzahlen k den Ausgangspunkt für die weiteren Betrachtungen darstellen.

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_r(\omega, r) &= \left\{ -\frac{F_z}{4\pi} \right\} \left\{ \int_0^\infty I_1(\nu_{N+1}, \gamma_{N+1}, k) dk + \int_0^\infty I_2(\nu_{N+1}, \gamma_{N+1}, k) dk \right\} \\
\tilde{u}_z(\omega, r) &= \left\{ -\frac{F_z}{4\pi} \right\} \left\{ \int_0^\infty I_3(\nu_{N+1}, \gamma_{N+1}, k) dk + \int_0^\infty I_4(\nu_{N+1}, \gamma_{N+1}, k) dk \right\} \\
&\hspace{20em} (2.88a,b)
\end{aligned}$$

Für die Durchführung der Konturintegration muss ein geschlossener Pfad auf dem Riemann'schen Blatt gewählt werden. Die Wahl des Integrationspfades sollte so erfolgen, dass mit dem auftretenden Typ der substituierten Hankelfunktionen das geforderte Konvergenzverhalten im Unendlichen sichergestellt werden kann (siehe Anlage A.3).

Wie für die Lösung des Halbraums wird aufgrund der vorhandenen Integrationsgrenzen $0 \rightarrow \infty$ die rechte Halbebene des Koordinatensystems als Integrationsebene gewählt. Da der Integrand nur noch eine Abhängigkeit von den Verzweigungspunkten des unterlagerten homogenen Halbraums besitzt, können die gewählten Verzweigungsschnitte nach Abb.(2-15) verwendet werden. Die Integrationspfade im I. und IV. Quadranten für die Integranden I_1, I_3 und I_2, I_4 sind der Abb.(2-18) zu entnehmen.

Die Wellenzahlen k_s und k_p werden nicht komplex definiert, so dass die Singularitäten auf der reellen k -Achse liegen. Die Verzweigungsschnitte liegen analog Abb.(2-16) auf der reellen Achse von k_s, k_p bis Null und von Null bis $-i\infty$ ²².

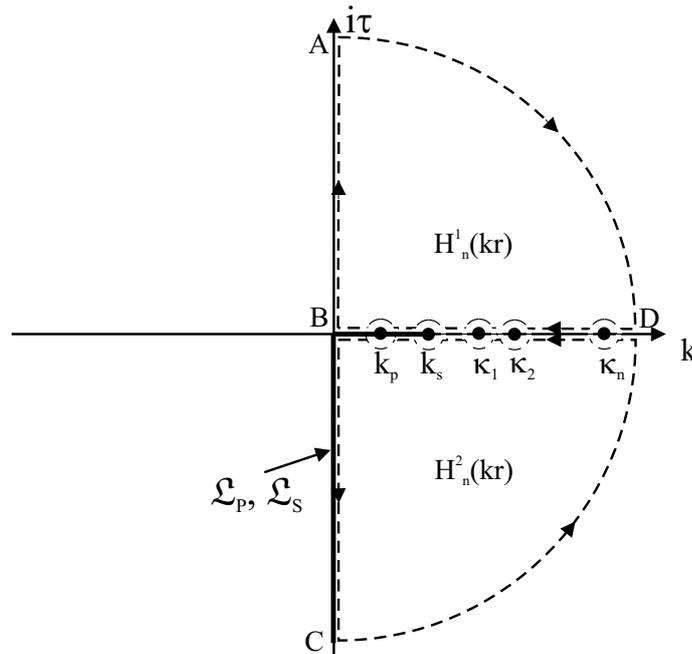


Abbildung 2-18: Wahl des Integrationspfades im I. und IV. Quadranten mit reellen Wellenzahlen k_s und k_p .

Für die Kontur in Abb.(2-18) liegen die Unstetigkeiten (Verzweigungspunkte und Nullstellen der Frequenzgleichung) auf der reellen Achse k . Die diskreten Punkte werden mit kleinen Halbbögen umfahren und liegen somit außerhalb der geschlossenen Kontur $B \rightarrow A \rightarrow D \rightarrow B$ bzw. $B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow B$. Nach (Myschkis 1981) ergeben auf dem Integrationsweg liegende Singularitäten den halben Betrag eines eingeschlossenen Residuums und das Bogenintegral um diese Singularität strebt gegen $\pm i\pi \operatorname{Res} f(z)$.

Mit dem Durchlaufen der Kontur (Abb.2-18) im mathematisch negativen Sinne²³ entlang des geschlossenen Integrationspfades im I. Quadranten ergeben sich die In-

²²Entsprechend der Riemann'schen Zahlenkugel liegt ein Verzweigungspunkt am unteren Pol, während der Verzweigungsschnitt über einen gewählten Meridian nach Unendlich zum oberen Pol laufen muss (Mitakidis 1991). Somit bilden beide Abschnitte einen gemeinsamen Verzweigungsschnitt.

²³Die positive Integrationsrichtung ist gegen den Uhrzeigersinn gerichtet. Die Richtung des durchlaufenen Pfades wird durch die dargestellten Pfeilrichtungen in der Integrationskontur gekennzeichnet.

tegrale entlang der Pfade:

$$\begin{aligned}
\oint I_1 d\zeta &= \int_B^A I_1(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^+, i\tau) id\tau + \int_A^D + \int_D^B I_1(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^+, k) dk \\
&= -i\pi \sum_{\kappa=1}^n Res \{ I_1(\nu_{N+1}, \gamma_{N+1}, k) \} \Big|_{k=\kappa_n} \\
\oint I_3 d\zeta &= \int_B^A I_3(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^+, i\tau) id\tau + \int_A^D + \int_D^B I_3(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^+, k) dk \\
&= -i\pi \sum_{\kappa=1}^n Res \{ I_3(\nu_{N+1}, \gamma_{N+1}, k) \} \Big|_{k=\kappa_n}. \tag{2.89a,b}
\end{aligned}$$

Der hochgestellte Index der Variablen ν_{N+1}^+ und γ_{N+1}^+ kennzeichnet das Vorzeichen der Wurzelfunktionen $\Im \{ \gamma_{N+1} \} > 0$ bzw. $\Im \{ \nu_{N+1} \} > 0$ am Rand des Verzweigungsschnittes für den Bereich $k < k_{p,N+1}$ bzw. $k_{s,N+1}$ und entlang der imaginären Achse.

Mit der Anwendung des Residuensatzes entlang der Kontur $B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow B$ müssen neben den Unstetigkeiten auf der reellen Achse die wechselnden Vorzeichen entlang der Verzweigungsschnitte beachtet werden. Die auf der gewählten Kontur liegenden Singularitäten werden analog Gl.(2.89) mit kleinen Halbbögen umfahren. Für die Integration entlang des Pfades im IV. Quadranten ergeben sich folgende Integrale:

$$\begin{aligned}
\oint I_2 d\zeta &= \int_B^C I_2(\nu_{N+1}^-, \gamma_{N+1}^-, i\tau) id\tau + \int_C^D I_2 d\zeta + \int_D^{k_s} I_2(\nu_{N+1}, \gamma_{N+1}, k) dk \\
&\quad + \int_{k_s}^{k_p} I_2(\nu_{N+1}^-, \gamma_{N+1}, k) dk + \int_{k_p}^B I_2(\nu_{N+1}^-, \gamma_{N+1}^-, k) dk \\
&= i\pi \sum_{\kappa=1}^n Res \{ I_2(\nu_{N+1}, \gamma_{N+1}, k) \} \Big|_{k=\kappa_n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\oint I_4 d\zeta &= \int_B^C I_4(\nu_{N+1}^-, \gamma_{N+1}^-, i\tau) id\tau + \int_C^D I_4 d\zeta + \int_D^{k_s} I_4(\nu_{N+1}, \gamma_{N+1}, k) dk \\
&+ \int_{k_s}^{k_p} I_4(\nu_{N+1}^-, \gamma_{N+1}, k) dk + \int_{k_p}^B I_4(\nu_{N+1}^-, \gamma_{N+1}^-, k) dk \\
&= i\pi \sum_{\kappa=1}^n \text{Res} \{ I_4(\nu_{N+1}, \gamma_{N+1}, k) \} \Big|_{k=\kappa_n} \quad (2-90a,b)
\end{aligned}$$

Die Integrale entlang der Kontur $A \rightarrow D$ und $C \rightarrow D$ konvergieren im Unendlichen zu Null (s.a. Anlage A.3). Damit kann Gl.(2.91) angegeben werden als:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} I_1(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^+, k) dk &= \int_0^{\infty} I_1(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^+, i\tau) id\tau \\
&+ i\pi \sum_{\kappa=1}^n \text{Res} \{ I_1(\nu_{N+1}, \gamma_{N+1}, k) \} \Big|_{k=\kappa_n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} I_3(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^+, k) dk &= \int_0^{\infty} I_3(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^+, i\tau) id\tau \\
&+ i\pi \sum_{\kappa=1}^n \text{Res} \{ I_3(\nu_{N+1}, \gamma_{N+1}, k) \} \Big|_{k=\kappa_n} \quad (2.91a,b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{k_s}^{\infty} I_2(\nu_{N+1}, \gamma_{N+1}, k) dk &= \int_0^{-\infty} I_2(\nu_{N+1}^-, \gamma_{N+1}^-, i\tau) id\tau + \int_{k_s}^{k_p} I_2(\nu_{N+1}^-, \gamma_{N+1}, k) dk \\
&+ \int_{k_p}^0 I_2(\nu_{N+1}^-, \gamma_{N+1}^-, k) dk \\
&- i\pi \sum_{\kappa=1}^n \text{Res} \{ I_2(\nu_{N+1}, \gamma_{N+1}, k) \} \Big|_{k=\kappa_n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{k_s}^{\infty} I_4(\nu_{N+1}, \gamma_{N+1}, k) dk &= \int_0^{-\infty} I_4(\nu_{N+1}^-, \gamma_{N+1}^-, i\tau) id\tau + \int_{k_s}^{k_p} I_4(\nu_{N+1}^-, \gamma_{N+1}, k) dk \\
&+ \int_{k_p}^0 I_4(\nu_{N+1}^-, \gamma_{N+1}^-, k) dk \\
&- i\pi \sum_{\kappa=1}^n Res \{ I_4(\nu_{N+1}, \gamma_{N+1}, k) \} \Big|_{k=\kappa_n}. \quad (2.92(a,b))
\end{aligned}$$

Die vorhandenen Integranden können unter Beachtung der Gl.(A.2-17) in Form der auftretenden Ordnung der Wellenzahlen k so dargestellt werden, dass der verbleibende Verschiebungsausdruck \tilde{u}^{H_n} immer eine gerade Funktion bezüglich k repräsentiert, mit $m \in \mathbb{N}$. In der späteren Umformung des Residuums wird auf diese Darstellung zurückgegriffen.

$$\begin{aligned}
I_1 &= \{ k \cdot \tilde{u}_r^{H_1}(\nu_{N+1}, \gamma_{N+1}, k^{2m}) \} \cdot H_1^1(kr) \cdot k \\
I_2 &= \{ k \cdot \tilde{u}_r^{H_1}(\nu_{N+1}, \gamma_{N+1}, k^{2m}) \} \cdot H_1^2(kr) \cdot k \\
I_3 &= \{ \tilde{u}_z^{H_0}(\nu_{N+1}, \gamma_{N+1}, k^{2m}) \} \cdot H_0^1(kr) \cdot k \\
I_4 &= \{ \tilde{u}_z^{H_0}(\nu_{N+1}, \gamma_{N+1}, k^{2m}) \} \cdot H_0^2(kr) \cdot k \quad (2.93a-d)
\end{aligned}$$

Zum Ersetzen der uneigentlichen reellen Integrale nach Gl.(2.87) durch Integrale, die sich aus der gewählten Kontur in der komplexen Ebene ergeben, muss das ursprüngliche, uneigentliche Integral in den gewählten Konturgrenzen inbegriffen sein. Zum Erreichen dieses Ziels und zur Trennung der Integrationspfade um die Verzweigungsschnitte wird die Gl.(2.92a) um die Ausdrücke von I_2

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^{k_p} I_2(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^+, k) dk - \int_0^{k_p} I_2(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^+, k) dk + \int_{k_p}^{k_s} I_2(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}, k) dk \\
&- \int_{k_p}^{k_s} I_2(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}, k) dk + \int_{k_p}^0 I_2(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^-, k) dk - \int_{k_p}^0 I_2(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^-, k) dk \\
&+ \int_0^{-\infty} I_2(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^-, i\tau) id\tau - \int_0^{-\infty} I_2(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^-, i\tau) id\tau
\end{aligned}$$

und Gl.(2.92b) um die Ausdrücke I_4 unter Berücksichtigung der Vorzeichen der Wurzelfunktionen erweitert.

$$\begin{aligned}
0 = & \int_0^{k_p} I_4(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^+, k) dk - \int_0^{k_p} I_4(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^+, k) dk + \int_{k_p}^{k_s} I_4(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}, k) dk \\
& - \int_{k_p}^{k_s} I_4(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}, k) dk + \int_{k_p}^0 I_4(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^-, k) dk - \int_{k_p}^0 I_4(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^-, k) dk \\
& + \int_0^{-\infty} I_4(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^-, i\tau) id\tau - \int_0^{-\infty} I_4(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^-, i\tau) id\tau
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich eine Zuordnung der Integrale um die Verzweigungsschnitte, wobei nach (Ewing et al. 1957) die unterschiedlichen Verzweigungsschnitte einem Körperwellentyp zugerechnet werden können. Die Integrale entlang eines Integrationspfades um einen Verzweigungsschnitt, ausgehend von k_s und k_p , werden nachfolgend mit \mathcal{L} gekennzeichnet. Die Indizes S und P korrespondieren mit dem entsprechenden Wellentyp. Die jeweilige Gruppe der Integrale um den Verzweigungsschnitt werden mit $\int_{\mathcal{L}_S}$ bzw. $\int_{\mathcal{L}_P}$ bezeichnet.

$$\left. \begin{aligned}
\int_0^{\infty} I_2(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^+, k) dk = & \int_0^{-\infty} (I_2(\nu_{N+1}^-, \gamma_{N+1}^-, i\tau) - I_2(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^-, i\tau)) id\tau \\
& + \int_0^{k_p} (I_2(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^-, k) - I_2(\nu_{N+1}^-, \gamma_{N+1}^-, k)) dk \\
& + \int_{k_p}^{k_s} (I_2(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}, k) - I_2(\nu_{N+1}^-, \gamma_{N+1}, k)) dk \\
& + \int_0^{k_p} (I_2(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^+, k) - I_2(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^-, k)) dk
\end{aligned} \right\} \int_{\mathcal{L}_{S,ur}}$$

$$+ \int_0^{-\infty} I_2(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^-, i\tau) id\tau - i\pi \sum_{\kappa=1}^n \text{Res} \{ I_2(\nu_{N+1}, \gamma_{N+1}, k) \} \Big|_{k=\kappa_n}$$

Zusammengefasst ergibt sich für $\int_0^{\infty} I_2$ folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} I_2(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^+, k) dk = & \int_{\mathcal{L}_{S,ur}} + \int_0^{k_p} (I_2(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^+, k) - I_2(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^-, k)) dk \\
& + \int_0^{-\infty} I_2(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^-, i\tau) id\tau - i\pi \sum_{\kappa=1}^n \text{Res} \{ I_2(\nu_{N+1}, \gamma_{N+1}, k) \} \Big|_{k=\kappa_n}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} I_4(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^+, k) dk &= \int_0^{-\infty} (I_4(\nu_{N+1}^-, \gamma_{N+1}^-, i\tau) - I_4(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^-, i\tau)) id\tau \left. \vphantom{\int_0^{\infty}} \right\} \int_{\mathcal{L}_{S,uz}} \\
&\quad + \int_0^{k_p} (I_4(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^-, k) - I_4(\nu_{N+1}^-, \gamma_{N+1}^-, k)) dk \\
&\quad + \int_{k_p}^{k_s} (I_4(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^+, k) - I_4(\nu_{N+1}^-, \gamma_{N+1}^+, k)) dk \\
&\quad + \int_0^{k_p} (I_4(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^+, k) - I_4(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^-, k)) dk \\
&\quad + \int_0^{-\infty} I_4(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^-, i\tau) id\tau - i\pi \sum_{\kappa=1}^n \text{Res} \{ I_4(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^+, k) \} \Big|_{k=\kappa_n}
\end{aligned}$$

Für $\int_0^{\infty} I_4$ kann folgende zusammengefasste Gleichung angegeben werden:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} I_4(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^+, k) dk &= \int_{\mathcal{L}_{S,uz}} + \int_0^{k_p} (I_4(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^+, k) - I_4(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^-, k)) dk \\
&\quad + \int_0^{-\infty} I_4(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^-, i\tau) id\tau - i\pi \sum_{\kappa=1}^n \text{Res} \{ I_4(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^+, k) \} \Big|_{k=\kappa_n}.
\end{aligned}$$

Verwendet man die Substitutionsregeln der Zylinderfunktionen nach Anhang A.1 und die Eigenschaften der auftretenden Ordnung der Integrationsvariable k (Gl.2.93), können die in Gl.(2.95a,b) enthaltenen Integrale mit Hankelfunktionen 1. Art durch Integrale mit Hankelfunktionen 2. Art ausgedrückt werden.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} I_1(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^+, i\tau) id\tau &= \int_0^{\infty} (i\tau)^2 \tilde{u}_r^{H_1}(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^+, (i\tau)^{2m}) H_1^1(i\tau r) id\tau \\
&= - \int_0^{-\infty} (i\tau)^2 \tilde{u}_r^{H_1}(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^+, (i\tau)^{2m}) H_1^2(i\tau r) id\tau \\
&= - \int_0^{-\infty} I_2(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^+, i\tau) id\tau
\end{aligned}$$

Zusammengefasst ergeben sich die Verschiebungen $\tilde{u}_r^{H_1}$ und $\tilde{u}_z^{H_0}$ in Gl.(2.87) zu folgenden Ausdrücken:

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_r = & \left\{ -\frac{F_z}{4\pi} \right\} \left\{ \int_0^\infty I_1(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^+, i\tau) id\tau + i\pi \sum_{\kappa=1}^n \text{Res} \{ I_1(\nu_{N+1}, \gamma_{N+1}, k) \} \Big|_{k=\kappa_n} \right. \\
& + \int_{\mathcal{L}_{S,u_r}} + \int_0^{-\infty} I_2(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^-, i\tau) id\tau \\
& + \int_0^{k_p} \{ I_2(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^+, k) - I_2(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^-, k) \} dk \\
& \left. - i\pi \sum_{\kappa=1}^n \text{Res} \{ I_2(\nu_{N+1}, \gamma_{N+1}, k) \} \Big|_{k=\kappa_n} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_r = & \left\{ -\frac{F_z}{4\pi} \right\} \left\{ \int_{\mathcal{L}_{S,u_r}} \right. \\
& + i\pi \left(\sum_{\kappa=1}^n \text{Res} \{ I_1(\nu_{N+1}, \gamma_{N+1}, k) \} \Big|_{k=\kappa_n} - \sum_{\kappa=1}^n \text{Res} \{ I_2(\nu_{N+1}, \gamma_{N+1}, k) \} \Big|_{k=\kappa_n} \right) \\
& + \int_0^{-\infty} \{ I_2(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^-, i\tau) - I_2(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^+, i\tau) \} id\tau \\
& \left. + \int_0^{k_p} \{ I_2(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^+, k) - I_2(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^-, k) \} dk \right\} \Bigg\} \mathcal{L}_{P,u_r}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_z = & \left\{ -\frac{F_z}{4\pi} \right\} \left\{ \int_0^\infty I_3(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^+, i\tau) id\tau + i\pi \sum_{\kappa=1}^n \text{Res} \{ I_3(\nu_{N+1}, \gamma_{N+1}, k) \} \Big|_{k=\kappa_n} \right. \\
& + \int_{\mathcal{L}_{S,u_z}} + \int_0^{-\infty} I_4(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^-, i\tau) id\tau \\
& + \int_0^{k_p} \{ I_4(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^+, k) - I_4(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^-, k) \} dk \\
& \left. - i\pi \sum_{\kappa=1}^n \text{Res} \{ I_4(\nu_{N+1}, \gamma_{N+1}, k) \} \Big|_{k=\kappa_n} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_z = & \left\{ -\frac{F_z}{4\pi} \right\} \left\{ \int_{\mathcal{L}_{s,u_z}} \right. \\
& + i\pi \left(\sum_{\kappa=1}^n \text{Res} \{ I_3(\nu_{N+1}, \gamma_{N+1}, k) \} \Big|_{k=\kappa_n} - \sum_{\kappa=1}^n \text{Res} \{ I_4(\nu_{N+1}, \gamma_{N+1}, k) \} \Big|_{k=\kappa_n} \right) \\
& + \int_0^{-\infty} \{ I_4(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^-, i\tau) - I_4(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^+, i\tau) \} id\tau \\
& \left. + \int_0^{k_p} \{ I_4(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^+, k) - I_4(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^-, k) \} dk \right\} \Bigg\} \mathcal{L}_{P,u_z}.
\end{aligned} \tag{2.95a,b}$$

Schließlich müssen noch die Residuenausdrücke in den erhaltenen Gleichungen weiter untersucht werden. Die in den obigen Gleichungen von I_1, I_2, I_3 und I_4 vorhandenen Hankelfunktionen werden durch die Neumann'schen Funktionen N_n der entsprechenden Ordnung n ersetzt. Der dabei auftretende Ausdruck des Residuums ohne die Zylinderfunktionen wird durch $\overline{\text{Res} \{ I_{\tilde{u}_{r,z}} \}}$ gekennzeichnet.

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_r = & \left\{ -\frac{F_z}{4\pi} \right\} \left\{ \int_{\mathcal{L}_{p,u_r}} + \int_{\mathcal{L}_{s,u_r}} + i\pi \left(\sum_{\kappa=1}^n \text{Res} \{ I_1 \} \Big|_{k=\kappa_n} - \sum_{\kappa=1}^n \text{Res} \{ I_2 \} \Big|_{k=\kappa_n} \right) \right\} \\
= & \left\{ -\frac{F_z}{4\pi} \right\} \left\{ \int_{\mathcal{L}_{p,u_r}} + \int_{\mathcal{L}_{s,u_r}} + i\pi \sum_{\kappa=1}^n \overline{\text{Res} \{ I_{\tilde{u}_r} \}} (H_1^1(kr) - H_1^2(kr)) \Big|_{k=\kappa_n} \right\} \\
= & \left\{ -\frac{F_z}{4\pi} \right\} \left\{ \int_{\mathcal{L}_{p,u_r}} + \int_{\mathcal{L}_{s,u_r}} + 2i\pi \sum_{\kappa=1}^n \overline{\text{Res} \{ I_{\tilde{u}_r} \}} (iN_1)(kr) \Big|_{k=\kappa_n} \right\} \\
\tilde{u}_z = & \left\{ -\frac{F_z}{4\pi} \right\} \left\{ \int_{\mathcal{L}_{p,u_z}} + \int_{\mathcal{L}_{s,u_z}} + i\pi \left(\sum_{\kappa=1}^n \text{Res} \{ I_3 \} \Big|_{k=\kappa_n} - \sum_{\kappa=1}^n \text{Res} \{ I_4 \} \Big|_{k=\kappa_n} \right) \right\} \\
= & \left\{ -\frac{F_z}{4\pi} \right\} \left\{ \int_{\mathcal{L}_{p,u_z}} + \int_{\mathcal{L}_{s,u_z}} + i\pi \sum_{\kappa=1}^n \overline{\text{Res} \{ I_{\tilde{u}_z} \}} (H_0^1(kr) - H_0^2(kr)) \Big|_{k=\kappa_n} \right\} \\
= & \left\{ -\frac{F_z}{4\pi} \right\} \left\{ \int_{\mathcal{L}_{p,u_z}} + \int_{\mathcal{L}_{s,u_z}} + 2i\pi \sum_{\kappa=1}^n \overline{\text{Res} \{ I_{\tilde{u}_z} \}} (iN_0)(kr) \Big|_{k=\kappa_n} \right\} \tag{2.96a,b}
\end{aligned}$$

Die oben formulierten Residuen stellen eine Lösung dar, die die Abstrahlungsbedingungen noch nicht erfüllen. Durch vorhandene Neumann'sche Funktion und den darin beinhalteten Besselfunktionen stellen die Residuenterm der Gl.(2.96) noch

stehende Wellen²⁴ dar. Aus physikalischer Sicht ist das keine gewünschte Lösung, da aus dem Unendlichen rücklaufende Wellenanteile ausgeschlossen werden. Um die Gleichungen so zu verändern, dass ausschließlich von der Quelle auslaufende Wellen vorhanden sind, wird die Lösung der freien Wellen den Ausdrücken (2.96) überlagert. Bei der Nutzung der im Anhang A.2 verwendeten T/H-Methode ergeben sich, mit Beachtung der Randbedingungen an der Oberfläche nach Gl.(2.28), die Verschiebungen freier Wellen als:

$$\begin{aligned}\tilde{u}_r^{H_1} &= D \{m_{11}m_{32} - m_{12}m_{31}\} \\ \tilde{u}_z^{H_0} &= D \{m_{21}m_{32} - m_{22}m_{31}\}.\end{aligned}\quad (2.97a,b)$$

Für das Überlagern der Gl.(2.97a,b) mit den Lösungen von Gl.(2.96a,b), müssen beide Verschiebungen im rücktransformierten Originalbereich vorliegen. Die im Residuenanteil vorhandenen Wellenzahlen korrespondieren mit dem diskreten Spektrum der Eigenwerte. Um diesem Spektrum zu entsprechen wird von der rücktransformierten Gl.(2.97a,b) nur eine Summe gemäß der vorhandenen diskreten Wellenzahlen $k_m(\omega)$ genutzt.

$$\begin{aligned}\tilde{u}_r &= \sum_{\kappa=1}^m D_m \{m_{11}(k_m)m_{32}(k_m) - m_{12}(k_m)m_{31}(k_m)\} k_m J_1(k_m r) \Delta k \\ \tilde{u}_z &= \sum_{\kappa=1}^m D_m \{m_{21}(k_m)m_{32}(k_m) - m_{22}(k_m)m_{31}(k_m)\} k_m J_0(k_m r) \Delta k\end{aligned}\quad (2.98a,b)$$

Der unbekannte Wellenkoeffizient D wird so gewählt, dass in der Summation die rücklaufenden Wellenterme eliminiert werden.

$$D_m = \frac{-i2\pi}{\frac{\partial}{\partial k_m} \{m_{14}(k_m)m_{32}(k_m) - m_{42}(k_m)m_{31}(k_m)\} \Delta k}\quad (2.99)$$

²⁴Nach (Sommerfeld 1992b) kann die Besselfunktion als Überlagerung von aus allen Richtungen einfallenden, ebenen Wellen verstanden werden, die durch Interferenzen ein stehendes Wellenfeld erzeugen. Die beiden Lösungen der Differentialgleichung werden mit entgegengesetzten Wellenzahlvektoren einer nach der positiven x-Achse und einer nach der negativen x-Achse fortschreitenden Welle zugeordnet. Die Wahl der Vorzeichen geschieht dabei nach dem bequemeren mathematischen Weg in ein weglauendes Wellenfeld mit $y = A \cos(kr - \omega t)$ und ankommendes Wellenfeld mit $y = A \cos(-kr - \omega t)$. Die stehenden Wellen innerhalb der Besselfunktion ergeben sich dadurch, dass die Hankelfunktionen nach Sommerfeld, § 19.22 (Sommerfeld 1992b), innerhalb ihrer Integrationsgrenzen $H_0^1(kr) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{ikr \cos(\varphi)} d\varphi$ und $H_0^2(kr) = \frac{1}{\pi} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{ikr \cos(\varphi)} d\varphi$ einer von der Quelle auslaufenden und einer zur Quelle rücklaufenden Welle ($k, r \geq 0$) entsprechen. Zum Erreichen einer alleinig auslaufenden Zylinderwelle in Gl.(2.96), wird den Ausführungen von (Sommerfeld 1992b), § 32.14, gefolgt. Danach wird in der Kombination der Zeitabhängigkeit $e^{+i\omega t}$ aus der Rücktransformation des Frequenzbereichs zusammen mit der Hankelfunktion 2. Art den Abstrahlungsbedingungen im Unendlichen gerecht.

Für diesen Zweck müssen die Substitutionsregeln der Zylinderfunktionen zusammen mit der Zeitabhängigkeit $\exp(i\omega t)$ berücksichtigt werden, so dass eine auslaufende Welle entsteht.

$$-H_n^2(kr) = -[J_n(kr) - iN_n(kr)]. \quad (2.100)$$

Als Lösung der Superposition erhält man die folgenden Residuenausdrücke, die keine stehenden Wellen mehr enthalten.

$$\begin{aligned} \tilde{u}_r &= \left\{ -\frac{F_z}{4\pi} \right\} \left\{ \underbrace{\int_{\mathcal{L}_{p,u_r}}}_{\tilde{u}_{r,P}} + \underbrace{\int_{\mathcal{L}_{s,u_r}}}_{\tilde{u}_{r,S}} \right\} \\ &+ \left\{ -\frac{F_z}{4\pi} \right\} \left\{ \underbrace{-2\pi i \sum_{\kappa=1}^m \text{Res} \left\{ (k)^2 \cdot u_r^{H_1}(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^+, k^2) H_1^2(kr) \right\} \Big|_{k=\kappa_m}}_{\tilde{u}_{r,O}} \right\} \\ \tilde{u}_z &= \left\{ -\frac{F_z}{4\pi} \right\} \left\{ \underbrace{\int_{\mathcal{L}_{p,u_z}}}_{\tilde{u}_{z,P}} + \underbrace{\int_{\mathcal{L}_{s,u_z}}}_{\tilde{u}_{z,S}} \right\} \\ &+ \left\{ -\frac{F_z}{4\pi} \right\} \left\{ \underbrace{-2\pi i \sum_{\kappa=1}^m \text{Res} \left\{ k \cdot u_z^{H_0}(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^+, k^2) H_0^2(kr) \right\} \Big|_{k=\kappa_m}}_{\tilde{u}_{z,O}} \right\}. \end{aligned} \quad (2.101)$$

Die in Gl.(2.101) beschriebene Verschiebungen des Wellenfeldes in einem Punkt des geschichteten Halbraums ist die Überlagerung von Kompressions-, Scher- und Oberflächenwelle:

$$\tilde{u} = \tilde{u}_P + \tilde{u}_S + \tilde{u}_O.$$

In Anhang A4 wird zur Ergebniskontrolle der Gl.(2.101) ein alternativer Weg der Konturintegration unter Nutzung einer Materialdämpfung und analog der Halbraumlösung nachvollzogen. Der Vorteil des im Anhang A4 dargestellten Weges ist ein Ergebnis, das die Abstrahlungsbedingungen direkt erfüllt. Eine Überlagerung mit freien Wellen ist in dieser Lösung nicht weiter erforderlich.

Die Integralausdrücke entlang den Ufern der Verzweigungsschnitte \mathcal{L}_p und \mathcal{L}_s in Gl.(2.96a,b) werden vollständig durch folgende Terme beschrieben:

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathcal{L}_{p,u_r}} = \\
& -i \frac{2}{\pi} \int_0^\infty (-i\tau)^2 \{ u_r^{H_1}(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^+, (-i\tau)^{2n}) - u_r^{H_1}(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^-, (-i\tau)^{2n}) \} K_1^1(\tau r) d\tau \\
& + \int_0^{k_p} k^2 \{ u_r^{H_1}(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^+, k^{2n}) - u_r^{H_1}(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^-, k^{2n}) \} H_1^2(kr) \\
& \int_{\mathcal{L}_{s,u_r}} = \\
& -i \frac{2}{\pi} \int_0^\infty (-i\tau)^2 \{ u_r^{H_1}(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^-, (-i\tau)^{2n}) - u_r^{H_1}(\nu_{N+1}^-, \gamma_{N+1}^-, (-i\tau)^{2n}) \} K_1^1(\tau r) d\tau \\
& + \int_0^{k_p} k^2 \{ u_r^{H_1}(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^-, k^{2n}) - u_r^{H_1}(\nu_{N+1}^-, \gamma_{N+1}^-, k^{2n}) \} H_1^2(kr) dk \\
& + \int_{k_p}^{k_s} k^2 \{ u_r^{H_1}(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}, k^{2n}) - u_r^{H_1}(\nu_{N+1}^-, \gamma_{N+1}, k^{2n}) \} H_1^2(kr) dk \\
& \int_{\mathcal{L}_{p,u_z}} = \\
& \frac{2}{\pi} \int_0^\infty (-i\tau) \{ u_z^{H_0}(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^+, (-i\tau)^{2n}) - u_z^{H_0}(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^-, (-i\tau)^{2n}) \} K_0^1(\tau r) d\tau \\
& + \int_{k_p}^0 k \{ u_z^{H_0}(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^+, k^{2n}) - u_z^{H_0}(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^-, k^{2n}) \} H_0^2(kr) dk \\
& \int_{\mathcal{L}_{s,u_z}} = \\
& \frac{2}{\pi} \int_0^\infty (-i\tau) \{ u_z^{H_0}(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^-, (-i\tau)^{2n}) - u_z^{H_0}(\nu_{N+1}^-, \gamma_{N+1}^-, (-i\tau)^{2n}) \} K_0^1(\tau r) d\tau \\
& + \int_{k_p}^0 k \{ u_z^{H_0}(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^-, k^{2n}) - u_z^{H_0}(\nu_{N+1}^-, \gamma_{N+1}^-, k^{2n}) \} H_0^2(kr) dk \\
& + \int_{k_s}^{k_p} k \{ u_z^{H_0}(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}, k^{2n}) - u_z^{H_0}(\nu_{N+1}^-, \gamma_{N+1}, k^{2n}) \} H_0^2(kr) dk. \quad (2.102)
\end{aligned}$$

2.5.4 Berechnung der Green'schen Funktionen

Die Berechnung synthetischer Seismogramme aus den Lösungen der Green'schen Funktionen im Frequenzbereich kann auf unterschiedlichen Wegen erfolgen. In Kapitel 2.5.3 wurden die Verschiebungen des Wellenfeldes als Summation von Körper- und Oberflächenwellen dargestellt. Die weitere Berechnung synthetischer Seismogramme kann in Abhängigkeit vom Ziel der Untersuchung erfolgen.

Im Folgenden soll zwischen der exakten Berechnung der analytisch separierten Wellenanteile und der genäherten Berechnung des gesamten Wellenfeldes, der Wellenzahl-Integration, unterschieden werden. Bei der Berechnung der Gl.(2-101) wurden die Anteile der Körper- und Oberflächenwellen getrennt angegeben. Mit dem Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit auf Oberflächenwellen ist insbesondere die Berechnung der Residuenanteile aus Gl.(2-101) von Interesse, da mit diesen die theoretischen Oberflächenwellenfelder bestimmt werden. Zur Vermeidung numerischer Probleme während der Berechnung des Nenners des Residuums, der Ableitung der Frequenzgleichung, wird eine analytische Beschreibung dieser Ableitung verwendet. Die vorhandenen Integralterme in Gl.(2-101) können problemlos numerisch ausgewertet werden, da keine weiteren Singularitäten auf dem Integrationspfad zu berücksichtigen sind und die unbestimmten Integrale sehr schnell gegen Null konvergieren.

2.5.4.1 Normalmoden-Superposition

Die Berechnung der Oberflächenwellen aus dem Residuenanteil der Konturintegration macht es erforderlich, die Ableitung der Frequenzgleichung nach der jeweilig diskreten Wellenzahl durchzuführen. Die normalerweise verwendete numerische Differentiation zur Berechnung von Ableitungen kann, wie schon erwähnt, zu ungenauen Ergebnissen führen, da die entsprechende Wellenzahl gleichzeitig Nullstelle des Nennerters ist.

Einfacher und genauer ist die Nutzung der Variationsprinzipien für die Ableitung des Nenners (Saito 1967) nach der Wellenzahl k in Gl.(2-101). Da diese Methodik auch für die Berechnung der partiellen Ableitungen der Phasengeschwindigkeit nach den Schichtparametern in der Inversionstheorie genutzt werden kann, bietet sich deren Verwendung an.

Zur Analyse von Ableitungsproblemen sind die Variationsprinzipien eine in der geophysikalischen Literatur häufig genutzte Vorgehensweise (Kennett 1974, Aki & Richards 1980). Für den genannten Zweck werden die vorhandenen Lösungen an die eigenen Randbedingungen angepasst. Die Anwendung der Variationsprinzipie bezieht sich im Wesentlichen auf Eigenwertableitungen (Ableitung der Phasengeschwindigkeit nach Schichtparametern) bzw. die Ableitung der Frequenzgleichung. Da die Frequenzgleichung und damit die Eigenwertigenschaften als Systemeigenschaft nur von dem vertikalen Aufbau des Modells abhängig sind, ist es ausreichend, im Folgenden

ebene Wellen ($\partial y = 0$) zu betrachten.

Ausgangspunkt für die Betrachtungen ist die Lagrange Energiedichte (Achenbach 1980) eines Kontinuums für konservative Systeme²⁵,

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{K} - \mathfrak{U} \quad (2.103)$$

wobei \mathfrak{K} die kinetische und \mathfrak{U} die potentielle Energiedichte repräsentiert. Als kinetische Energiedichte ist

$$\mathfrak{K} = \frac{1}{2} \rho \left(\dot{u}_i \dot{u}_i \right)$$

und als potentielle Energiedichte die Formänderungsenergie definiert.

$$\mathfrak{U} = \frac{1}{2} \left(\sum \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \right)$$

Mit $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$ als die Komponenten des Dehnungstensors und $\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij}$ ($i, j = u, z$) als die Komponenten des Spannungstensors sowie $e_{kk} = (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz})$ als Volumendehnung ergibt sich die Lagrange Energiedichte für Verschiebungen u und w in der x, z -Ebene:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L} = \frac{1}{2} \left\{ \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial w}{\partial t} \right) - \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 - \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right. \\ \left. - 2\mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.104)$$

Gemäß dem Hamilton'schen Prinzip gibt es keine Variation der Lagrange Funktion innerhalb eines beliebigen Zeitabschnittes (Goldstein 1991).

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \iint_V \mathfrak{L} dx dz = 0 \quad (2.105)$$

Die Abhängigkeit der Verschiebungen u und w nach der Zeit innerhalb von Gl.(2.104) kann durch die Einführung der harmonischen Funktionen $w(x, z, t) = w(z) \cos(kx - \omega t)$ und $u(x, z, t) = u(z) \sin(kx - \omega t)$ aufgehoben werden. Durch die unterschiedlichen trigonometrischen Funktionen wird die Phasenverschiebung zwischen u und w berücksichtigt.

²⁵Unter einem konservativen System ist ein mechanisches System verstanden, in dem der Energieerhaltungssatz gilt und sich die Energie mit der Zeit nicht ändert (Stöcker 2000).

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \left\{ \rho\omega^2 (u^2(z) \sin^2(kx - \omega t) + w^2(z) \cos^2(kx - \omega t)) \right. \\ & - \lambda \left(ku(z) \sin(kx - \omega t) + \frac{\partial w(z)}{\partial z} \cos(kx - \omega t) \right)^2 \\ & - 2\mu \left[k^2 u^2(z) \sin^2(kx - \omega t) + \left(\frac{\partial w(z)}{\partial z} \right)^2 \cos^2(kx - \omega t) \right] \\ & \left. - \mu \left(\frac{\partial u(z)}{\partial z} \cos(kx - \omega t) - kw(z) \sin(kx - \omega t) \right)^2 \right\}. \end{aligned}$$

Für die weiteren Ableitungen ist es üblich, den zeitlichen Mittelwert der Energiedichte zu verwenden. Erreicht wird dieses durch die Integration über eine Periode T . Durch die Integration ergibt sich aus den vorhandenen Funktionen²⁶ $\cos^2(\omega t)$ und $\sin^2(\omega t)$ der Faktor $\frac{1}{2}$.

$$\frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{L} dt$$

Die mittlere Energiedichte in einer vertikalen Bodensäule mit der Horizontaldimension Δx kann damit in folgender Gleichung dargestellt werden:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L} \rangle = & \frac{1}{4} \Delta x \int_0^\infty \left\{ \rho\omega^2 (u^2(z) + w^2(z)) - \lambda \left(ku(z) + \frac{\partial w(z)}{\partial z} \right)^2 \right. \\ & \left. - 2\mu \left[k^2 u^2(z) + \left(\frac{\partial w(z)}{\partial z} \right)^2 \right] - \mu \left(\frac{\partial u(z)}{\partial z} - kw(z) \right)^2 \right\} dz. \end{aligned}$$

Multipliziert man die quadratischen Terme aus, so kann die Gleichung zu unterschiedlichen Integralausdrücken zusammengefasst werden. Diese Ausdrücke sind als Energieintegrale bekannt. In der Zusammenfassung zu Energieintegralen wird den Definitionen von (Harkrider & Anderson 1966) und (Aki & Richards 1980) gefolgt. Die Gleichung (2.105) stellt sich danach in folgender Form dar:

$$\delta (\omega^2 I_1 - k^2 I_2 - k I_3 - I_4) = 0. \quad (2.106)$$

Da die kinetische und die potentielle Energie den gleichen Betrag haben, ergibt sich zusätzlich die Gleichung

$$\omega^2 I_1 = k^2 I_2 + k I_3 + I_4. \quad (2.107)$$

Diese Beziehung muss immer erfüllt sein, auch nach Variation dieser Forderung, wie

²⁶Die Kombinationen von $\frac{1}{T} \int_0^T \sin(\omega t) \cos(\omega t) dt$ können unter Nutzung der partiellen Integration zu quadratischen Ausdrücken umgestellt werden.

in Gleichung (2.106) ausgedrückt. Die Ausdrücke der Energieintegrale von Gleichung (2.106) und (2.107) sind wie folgt definiert:

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \rho (u^2 + w^2) dz \quad I_2 = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [(\lambda + 2\mu) u^2 + \mu w^2] dz$$

$$I_3 = \int_0^{\infty} \left(\lambda u \frac{\partial w}{\partial z} - \mu w \frac{\partial u}{\partial z} \right) dz \quad I_4 = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left[(\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dz.$$

Die auf diese Weise definierten Gleichungen (2.106) und (2.107) stellen den Ausgangspunkt für die Ermittlung der notwendigen Ableitungen dar.

Da die Eigenwerte- und -formen nicht von der Art des gewählten Koordinatensystems abhängig sind können die definierten Verschiebungsgrößen u und w problemlos durch die Terme u_r und u_z ersetzt werden.

Für die Angabe der Ableitungen ist es erforderlich, die Gruppengeschwindigkeit in den Ausdrücken der Variationsprinzipie zu formulieren. Nach (Müller 1991) ist die Gruppengeschwindigkeit U eines Wellenzuges definiert als $\frac{d\omega}{dk}$. Durch Variation der Gl.(2.107) bezüglich der Parameter ω und k kann die Gruppengeschwindigkeit in Abhängigkeit von den Energieintegralen angegeben werden.

$$\begin{aligned} \omega^2 \delta I_1 + 2\omega I_1 \delta \omega &= k^2 \delta I_2 + k \delta I_3 + \delta I_4 \\ \omega^2 \delta I_1 &= k^2 \delta I_2 + 2k I_2 \delta k + k \delta I_3 + I_3 \delta k + \delta I_4 \end{aligned}$$

Nach Umstellen und Gleichsetzen ergibt sich die gesuchte Gruppengeschwindigkeit

$$2\omega \delta \omega I_1 = 2k \delta k I_2 + \delta k I_3$$

$$U = \frac{\delta \omega}{\delta k} = \frac{2k I_2 + I_3}{2\omega I_1} = \frac{I_2 + \frac{I_3}{2k}}{c I_1}. \quad (2.108)$$

Numerisch weitaus problematischer ist die Berechnung der Ableitung der Frequenzgleichung innerhalb der Residuen nach Gl.(2-101). Die Ableitung muss an der Stelle k_n erfolgen, bei der auch die Singularität des Integranden vorhanden²⁷ ist.

In der Berechnung der Verschiebungslösung von Oberflächenwellen werden nur die Residuen von Gl.(2-101) genutzt,

²⁷Die Singularität entspricht der Nullstelle k_n innerhalb der Frequenzgleichung in Gl.(2-59) bzw. Gl.(2-64).

$$\tilde{u}_r = \left\{ \frac{-F_z}{2\pi} \right\} \frac{1}{2} \left\{ \int_{\mathcal{L}_{p,u_r}} + \int_{\mathcal{L}_{s,u_r}} \right\} + \left\{ \frac{-F_z}{2\pi} \right\} \frac{1}{2} \left\{ -2\pi i \sum_{\kappa=1}^m \text{Res} \left\{ (k)^2 \cdot u_r^{H_1}(\nu_N^+, \gamma_N^+, k^2) H_1^2(kr) \right\} \Big|_{k=\kappa_m} \right\}$$

$$\tilde{u}_z = \left\{ \frac{-F_z}{2\pi} \right\} \frac{1}{2} \left\{ \int_{\mathcal{L}_{p,u_z}} + \int_{\mathcal{L}_{s,u_z}} \right\} + \left\{ \frac{-F_z}{2\pi} \right\} \frac{1}{2} \left\{ -2\pi i \sum_{\kappa=1}^m \text{Res} \left\{ k \cdot u_z^{H_0}(\nu_N^+, \gamma_N^+, k^2) H_0^2(kr) \right\} \Big|_{k=\kappa_m} \right\}$$

da diese mit den Oberflächenwellen korrespondieren.

$$\tilde{u}_{r,O} = \left\{ \frac{-F_z}{2\pi} \right\} \frac{1}{2} \left\{ -2\pi i \sum_{\kappa=1}^n \text{Res} \left\{ k^2 \cdot u_r^{H_1}(\nu_N^+, \gamma_N^+, k^m) H_1^2(kr) \right\} \Big|_{k=\kappa_n} \right\}$$

$$\tilde{u}_{z,O} = \left\{ \frac{-F_z}{2\pi} \right\} \frac{1}{2} \left\{ -2\pi i \sum_{\kappa=1}^n \text{Res} \left\{ k \cdot u_z^{H_0}(\nu_N^+, \gamma_N^+, k^m) H_0^2(kr) \right\} \Big|_{k=\kappa_n} \right\}$$

Drückt man das Residuum in Termen der H/T-Methode aus, so ergibt sich für die vertikale und radiale Verschiebung folgende zusammengefasste Gleichung.

$$\tilde{u}_{r,z} = - \left\{ \frac{-iF_z}{2} \right\} \sum_{\kappa=1}^n \left\{ \frac{M_{11}}{\frac{\partial(\det(M_{21}))}{\partial k}} \begin{pmatrix} M_{21}(1,2) & 0 \\ 0 & M_{21}(1,1) \end{pmatrix} \cdot k H_{1,0}^2(kr) \right\} \Big|_{k=\kappa_n} \quad (2.113)$$

Der Zähler in Gl.(2.113) beschreibt die jeweilige Eigenform des freien Systems, womit Gl.(2.113) auch in folgender Form geschrieben werden kann.

$$\tilde{u}_{r,z} = - \left\{ \frac{-F_z}{2\pi} \right\} \pi i \sum_{\kappa=1}^n k \frac{\hat{u}_{r,z}(k, \omega, z)}{\left(\frac{\partial F}{\partial k} \right)_{k=\kappa_n}} H_{1,0}^2(kr) \quad (2.114)$$

Der Term $\hat{u}(k, \omega, z)$ in Gl.(2.114) repräsentiert die Eigenform und F die Frequenzgleichung des Systems.

Für die notwendige Ableitung der Frequenzgleichung wird eine publizierte Lösung von (Aki & Richards 1980) bzw. (Saito 1967) verwendet

$$\left(\frac{\partial F}{\partial k} \right)^{-1} = \frac{u_z(k, \omega, 0)}{4kU I_1}. \quad (2.115)$$

Unter Nutzung der Gl.(2-115) ergeben sich die Gleichungen der Residuen komplett in Schreibweise der Energieintegrale und der Eigenformen des Systems.

$$\begin{aligned} u_r &= i \sum_n \frac{\hat{u}_r(k, \omega, z)}{8cUI_1} u_z(k, \omega, 0) F_z H_1^2(kr) \\ u_z &= i \sum_n \frac{\hat{u}_z(k, \omega, z)}{8cUI_1} u_z(k, \omega, 0) F_z H_0^2(kr) \end{aligned} \quad (2.116)$$

Zur Betrachtung der Fernfeldlösung können die vorhandenen Hankelfunktionen durch ihre asymptotische Beschreibung großer Argumenten, siehe Anhang A.1, ersetzt werden.

$$H_n^{1,2}(kr) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \exp \left[\pm i \left(kr - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi \right) \right]$$

Nutzt man diese zusammen mit der Umformung,

$$i \cdot e^{\left(i\frac{\pi}{4}\right)} = -e^{\left(-i\frac{\pi}{4}\right)} \quad \text{und} \quad i \cdot e^{\left(i\frac{3\pi}{4}\right)} = -e^{\left(i\frac{\pi}{4}\right)}$$

erhält man die Lösung der Green'schen Funktion von Oberflächenwellen aufgrund einer vertikalen Punktlast an der Halbraumoberfläche.

$$\begin{aligned} u_r &= - \sum_n \frac{\hat{u}_r(k, \omega, z)}{8cUI_1} u_z(k, \omega, 0) F_z \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{i\frac{\pi}{4}} e^{-ikr} \\ u_z &= - \sum_n \frac{\hat{u}_z(k, \omega, z)}{8cUI_1} u_z(k, \omega, 0) F_z \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{-ikr} \end{aligned} \quad (2.117)$$

Werden die Residuen in Hankelfunktionen 1. Art bei einer entsprechenden Zeitabhängigkeit von $\exp(-i\omega t)$ analog dem oben gezeigten Weg entwickelt und umgeformt, ergeben sich die Ausdrücke der Green'schen Funktionen in (Aki & Richards 1980). Der wesentliche Vorteil dieser Beschreibung liegt in der analytisch geschlossenen, numerisch stabilen Darstellung. Als Resultat der Summation ergibt sich ein Wellenfeld, das nur aus angeregten Normalmoden zusammengesetzt ist. Die hier fehlenden Körperwellenanteile verringern keinesfalls die Bedeutung dieser Lösung, da die Energie mit zunehmender Entfernung überwiegend von Oberflächenwellen transportiert und damit die angegebene Lösung im betrachteten Wellenfeld ebenfalls dominanter wird. Ein Beispiel der Normalmoden Summation ist in Abb.(2-19) gegeben.

2.5.4.2 Wellenzahl-Integration

Das gesamte Wellenfeld in einem geschichteten Halbraum setzt sich aus der Summation von Oberflächen- und Körperwellen zusammen (siehe Gl.2-101).

Mit der angegebenen Lösung von Kapitel 2.4 werden unterschiedliche Wege in der Berechnung des Wellenfeldes besprochen. Zum einen wird eine Wellenzahl-Integration entlang der reellen k -Achse und zum anderen eine Wellenzahl-Integration, entsprechend der Konturintegration durchgeführt werden. Unter Nutzung der Gl.(2-73) bzw. Gl.(2-74)

$$\begin{aligned}\tilde{U}_1(\omega, r, z) &= \\ &\int_0^\infty \left(E_{11}^1 \Lambda_d^1(z) + E_{12}^1 \Lambda_u^1(z) \hat{R}_d^1 \right) \cdot \left[(E_{21}^1)^{-1} \left(I - R_u^0 \hat{R}_d^1 \right) \right]^{-1} \Delta Q_p \cdot k \cdot J_n(kr) dk \\ \tilde{U}_1(\omega, r, z) &= \int_0^\infty M_{11} \cdot \frac{1}{\det(M_{21})} \begin{pmatrix} M_{21}(1, 2) & 0 \\ 0 & M_{21}(1, 1) \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2\pi} F_z \cdot k \cdot J_n(kr) dk\end{aligned}$$

werden die Green'schen Funktionen des Systems durch Integration über den gesamten Wellenzahlbereich bestimmt. Die vorhandenen Singularitäten des Integranden werden durch die Einführung einer hysteretischen Dämpfung²⁸ D (Wolf 1985) in die Materialkennwerte

$$\mu^* = \mu (1 + iD_S) \quad \text{und} \quad c_S^* = c_S \sqrt{1 + 2iD_S}, \quad c_P^* = c_P \sqrt{1 + 2iD_P} \quad (2.123)$$

von der reellen k -Achse in den 1. Quadranten²⁹ verlagert, so dass bei einer numerischen Integration über die reelle k -Achse die vorhandenen komplexen Singularitäten nicht stören. Für die Dämpfungsterme D_S und D_P können in erster Näherung gleiche Werte angenommen werden.

Das größte Problem dieser numerischen Integration über die reelle Wellenzahlachse k ist das Auftreten eines divergenten Integranden im Fall von gleich tief oder hoch liegenden Quell- und Aufnehmerpositionen. Entsprechend Hisada (Hisada 1994) konvergiert der Integrand mit zunehmender Wellenzahl k gegen die statische Lösung. Darüber hinaus schlägt (Hisada 1994) eine approximierte Lösung für $\omega = 0$ zur Verringerung dieses Problems vor, da keine explizit analytische Lösung angegeben werden kann. Durch Subtraktion der statischen Lösung vom Argument des Integranden erhält man eine mit zunehmender Wellenzahl gegen Null konvergierende Funktion des Integranden. In der Berechnung der Wellenzahl-Integration wurde die vorgeschlagene Näherungslösung der statischen Funktion genutzt, um den divergenten Integranden zu beseitigen. Die Integration der Green'schen Funktionen wurde auf Basis der numerischen Trapezquadratur durchgeführt.

In dem auf diesem Weg berechneten synthetischen Wellenfeld müssen mit zuneh-

²⁸Als hysteretische Dämpfung wird eine ausschließlich dehnungsabhängige Dämpfung bezeichnet.

²⁹Zur räumlichen Verschiebung der Singularitäten von der reellen k -Achse in den komplexen Bereich, siehe Kapitel 2.5.2.

mender Entfernung die entsprechenden Anteile von Körper- und Oberflächenwellen sichtbar werden. Aufgrund der höheren Ausbreitungsgeschwindigkeiten sind die direkten Körperwellen vor der Oberflächenwelle sichtbar. Vorhandene Reflexionen und Refraktionen, die durch die vorgegebenen Schichtungen im Wellenfeld entstehen, müssen innerhalb des Wellenfeldes sichtbar werden.

Ein Indikator für die Zuordnung eines Zeitabschnittes zu den Oberflächenwellen ist eine mit zunehmender Entfernung fortschreitende Aufweitung (Dispersion) des Wellenzuges mit deutlich harmonischen Anteilen. Naturgemäß wird die Identifizierung von Wellentypen nur selten in einem einzelnen Zeitverlauf gelingen; in der Regel bedarf es fast immer der Betrachtung eines kompletten Wellenfeldes. Ausnahmen bilden dabei Wellenzüge in sehr großer Entfernung von der seismischen Quelle, da diese sehr stark dispergiert sind, so dass nicht nur die Wellentypen sondern auch die Moden der Oberflächenwellen sichtbar werden können.

Verwendet man die Lösung der Konturintegration zur Berechnung des gesamten Wellenfeldes, dann bestimmt sich dieses aus der Superposition der einzelnen Wellentypen in Gl.(2-101). Die Berechnung der Körperwellenanteile (Konturintegrale um die Verzweigungsschnitte) kann dabei auch als eine Art der Wellenzahl-Integration aufgefasst werden, die mit der Normalmodenlösung (Residuenanteil) überlagert wird. Die numerische Auswertung der Integrale entlang der Integrationswege bereitet keine weiteren Schwierigkeiten, da die resultierenden Integrale endliche Grenzen besitzen bzw. die Integrale mit unendlichen Grenzen durch die auftretenden modifizierten Besselfunktionen K_n schnell gegen Null konvergieren. Als eigentliches Problem bei der Durchführung dieser Integration, stellte sich die Berechnungszeit heraus, da sich durch die größere Anzahl der Integrale, die zur Bestimmung der Körperwellen notwendig sind, der Zeitaufwand um ein Vielfaches gegenüber der Wellenzahl-Integration entlang der reellen k -Achse erhöht. Wegen dieses großen Zeitaufwands wurde diese Integration nur an wenigen Beispielen getestet.

2.5.4.3 Zeitbereichsdarstellung

Für die spätere Durchführung der Inversion seismischer Daten und die Untersuchung der Ausbreitungseffekte ist es notwendig, synthetische Seismogramme im Zeit- und Entfernungsbereich abbilden und analysieren zu können. Durch Anwendung der Inversen Fourier-Transformation kann die Verschiebungsfunktion im Zeitbereich dargestellt werden. Üblich ist die Verwendung der numerischen Inversen Fast-Fourier-Transformation (IFFT).

Nach Frazer (Frazer 1988) kann diese Rücktransformation auf zwei Wegen erfolgen: 1.) die *spektrale* Methode, in welcher zuerst das k - Integral und anschließend das ω - Integral berechnet wird, und 2.) die *slowness* Methode, bei welcher die Integrale in

umgekehrter Reihenfolge bestimmt werden.

$$u(x, t) = \int d\omega \int dk e^{i(kx - \omega t)} \tilde{u}(k, \omega). \quad (2.124)$$

Obwohl nach der *slowness* Methode das Seismogramm schneller berechnet werden kann (Frazer 1988), weist die *spektrale* Methode Vorteile in der Behandlung frequenzabhängiger Bodenkennwerte auf. Der Bezug auf die Frequenzabhängigkeit ist besonders dann wichtig, wenn experimentell bestimmte Geschwindigkeitsmodelle seismischer Daten miteinander verglichen werden. Der in dieser Arbeit gewählte Weg entspricht der *spektralen* Methode.

Zur Berechnung synthetischer Seismogramme müssen verschiedene Faktoren, die ein Seismogramm kennzeichnen, berücksichtigt werden. In den Green'schen Funktionen von Gl.(2-74) sind folgende unterschiedliche Ausdrücke enthalten:

$$\tilde{U}_1(\omega, r, z) = \int_0^{\infty} RT \cdot \Delta Q \cdot J_n(kr) dk. \quad (2.125)$$

Die vorhandenen Reflexionen und Transmissionen innerhalb der Schichtung werden mit den in Gl.(2-74) abgeleiteten Reflexions- und Transmissionskoeffizienten RT beschrieben. In den meisten Fällen sind diese Koeffizienten stark frequenzabhängig und komplex. Über den Wert der Koeffizienten lassen sich Aussagen zu einer konstruktiven Interferenz der Wellen in dem geschichteten Medium (große Koeffizienten) und einer destruktiven Interferenz (kleine Koeffizienten) machen.

Die Anregungsfunktion ΔQ , welche die Herdeigenschaften, die Quelltiefe und -richtung beinhaltet, bestimmt im Wesentlichen die Art der abgestrahlten Wellen und die Anregung spezifischer Moden. Die vorhandene Zylinderfunktion $J_n(kr)$ regelt die geometrische Dämpfung der Systems.

Eine weitere Voraussetzung für die Berechnung synthetischer Seismogramme ist die Zeitfunktion der Quelle, durch die das Anregungsspektrum der seismischen Quelle definiert wird. Die Form des Impulses ist den jeweiligen Anforderungen der verwendeten experimentellen Quelle bzw. der daraus emittierten Frequenzspektren anzupassen. In den eigenen Untersuchungen wurde überwiegend der Ricker-Impuls 0. bis 3. Ordnung verwendet (siehe Anlage A.5). Das sich ergebende Frequenzspektrum des Impulses wurde den experimentellen Gegebenheiten (Hammer- bzw. Fallgewichtanzregung) bzw. dem gewünschten Untersuchungsziel in der Dauer und Art des Impulses angepasst.

Entsprechend den Rechenoperationen der Fouriertransformation (Bronstein et al. 2001) kann das resultierende synthetische Seismogramm für eine beliebige zeitliche

Quellfunktion durch die Faltung des Impulsseismogramms $I(t)$ ³⁰ mit der Zeitfunktion der Quelle $F(t)$ sowohl im Zeit- als auch im Frequenzbereich berechnet werden.

$$\tilde{U}(\omega, r, z) \cdot \mathcal{F}\{F(t)\} \quad \Leftrightarrow \quad I(t) * F(t)$$

Aus Gründen der Vereinfachung und der Zeitersparnis wurde die Faltung beider Funktionen in der vorliegenden Arbeit im Frequenzbereich durchgeführt und anschließend in den Zeitbereich zurück transformiert. Zur Vermeidung von Aliasingeffekten ist bei der Durchführung der Transformation nach (Press, Flannery, Teukolsky & Vetterling 1989) zu beachten, dass die Green'schen Funktionen bis zur entsprechenden Nyquist-Frequenz bestimmt werden und durch Kopplung mit der Anregungsfunktion bis zu diesem Punkt auf Null abgeklungen sein müssen. Die Berechnung der in Gl.(2-74) beschriebenen Green'schen Funktionen benötigen den weitaus größten Teil der Berechnungszeit bei der Ermittlung synthetischer Seismogramme.

In Abb.(2-19a) ist die vertikale spurnormierte Verschiebung eines synthetischen Oberflächenwellenfeldes dargestellt. Für das einfach geschichtete Modell (Schicht, Halbraum) wurden folgende Kennwerte verwendet: $c_S = (200, 400)[m/s]$, $c_P = (800, 1600)[m/s]$, $\rho = (1800, 2000)[g/cm^3]$, $h = 10[m]$. Als Quellfunktion für die vertikale Einzellast diente ein Ricker-Impuls 1. Ordnung. Der anfänglich scharfe Anregungsimpuls läuft mit fortschreitender Entfernung deutlich auseinander. Die Ursache dafür ist die vorhandene Dispersion des Systems, d.h. unterschiedliche Phasengeschwindigkeiten innerhalb des Frequenzbereiches. Die Berechnung der Wellentypen ist ein wesentlicher Bestandteil in Kapitel 3 und 4.

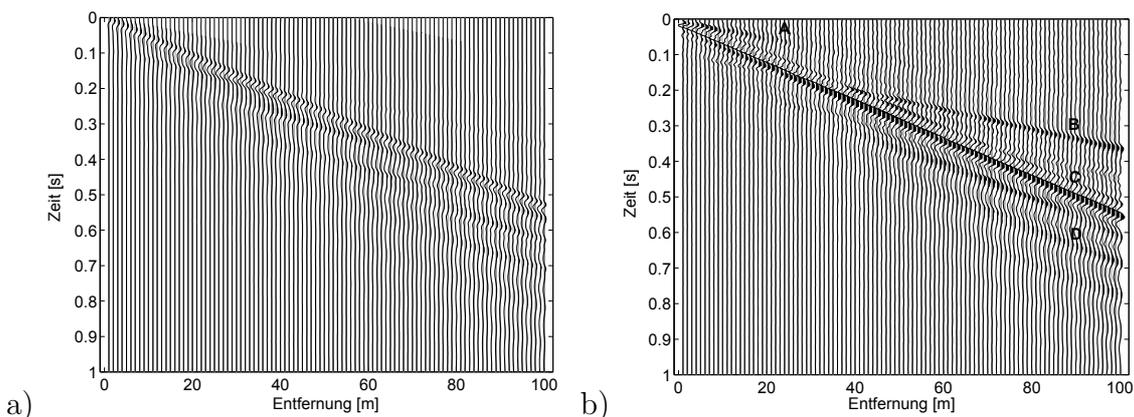


Abbildung 2-19: a) Spurnormiertes Oberflächenwellenfeld, b) komplettes synthetisches Wellenfeld

³⁰Das Impulsseismogramm stellt die invers transformierte der Green'schen Funktion dar $I(t) = \mathcal{F}^{-1}(\tilde{U}(\omega, r, z))$.

In Abb.(2-19b) ist ein komplettes synthetisches Wellenfeld der vertikalen Verschiebungskomponente u_z dargestellt. Für die Berechnung wurden die gleichen Modell- und Quellparameter wie für die Berechnung des Oberflächenwellenfeldes in Abb.(2-19a) genutzt. Der Punkt (A) in Abb.(2-19b) kann der direkten P-Welle und Punkt (B) der ersten refraktierten S-Welle aus dem Halbraum zugeordnet werden³¹. Der Indikator für die Anwesenheit der Oberflächenwelle ist das Dispergieren des ursprünglich kompakten Wellenzuges in Punkt (D). Infolge der geringen Geschwindigkeitsunterschiede zwischen Oberflächen- und S-Welle wird der Punkt (C) der direkten S-Welle zugeordnet.

Eine deutliche Trennung von Scher- und Oberflächenwelle ist erst bei sehr großen Distanzen möglich. Die refraktierte P-Welle ist aufgrund der kleinen Amplituden nicht erkennbar. Diese grundsätzlichen Wellentypzuordnungen können für andere Modelle infolge sehr kleiner Amplituden der jeweiligen Wellentypen sehr schwierig oder nicht realisierbar sein. Mitunter ist selbst die Dispersion der Oberflächenwelle visuell nicht erkennbar. Um Informationen über den Untergrund zu erhalten, ist es oft besser und sicherer die vorhandene Dispersion in einem Wellenfeld mit entsprechenden Methoden zu untersuchen.

Gegenüber den vorhergehenden Aussagen fehlen bei der Betrachtung des Wellenfeldes im homogenen Halbraum die Reflexionen der Körperwellen und eine dispergierende Oberflächenwelle. Im theoretisch homogenen Halbraum sind ausschließlich direkte Körperwellen und eine dispersionsfreie Rayleighwelle vorhanden. Aufgrund der sehr kleinen Amplituden der Körperwellen gegenüber der Oberflächenwelle, werden diese Wellen in Abb.(2-20b) gesondert dargestellt. Die Grundlage der Berechnung bilden die Kennwerte der Schicht in Abb.(2-19) bzw. die Gl.(2.85a,b). Der Punkt (A) entspricht dabei der direkten P-Welle und (B) der direkten S-Welle.

Zusammenfassung des Kapitels 2

In Kapitel 2 wurden die Grundlagen zur Definition und Lösung der Lamé-Navier'schen Differentialgleichung aufgearbeitet. Im Hinblick auf die Nutzung des Modells erfolgte eine Anpassung der Differentialgleichungslösung mit entsprechenden Rand- und Kontinuitätsbedingungen. Zum Zweck der Parameteridentifikation in Experimenten ist ein robustes Modell in Form des geschichteten Halbraums mittels horizontaler Schichten am besten geeignet. Dieses Modell besitzt eine gute Anpassungsfähigkeit bezüglich der tatsächlich vorkommenden Bodenschichten und benötigt für eine Berechnung relativ wenig Parameter.

³¹Die Zuordnung dieses Wellenanteils kann über die Nutzung der Methoden der Refraktionsseismik in diesem Beispiel relativ gut erfolgen. Im Allgemeinen ist die Anwendung dieser Methoden von Unsicherheit in der Wellenzuordnung geprägt.

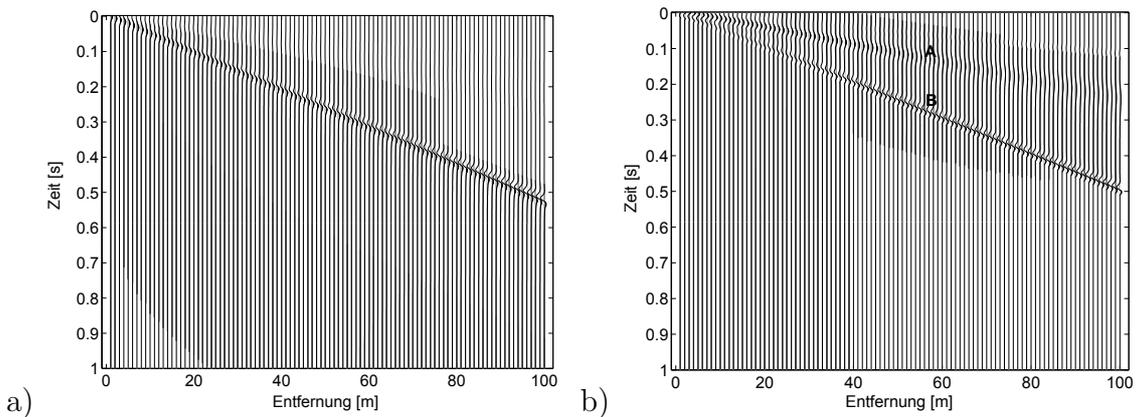


Abbildung 2-20: a) Spurnormiertes Wellenfeld mit Körper- und Oberflächenwellen im Halbraum, b) Spurnormiertes Körperwellenfeld im Halbraum.

Mit dieser Maßgabe wird ausgehend von dem mathematisch übersichtlichen Thomson-Haskell-Algorithmus und der numerisch stabilen Methode der Reflexions- und Transmissionskoeffizienten in Kapitel 2 eine analytische Lösung der Green'schen Funktionen für den geschichteten Halbraum abgeleitet. Die Grundlage für die Lösung ist eine dem homogenen Halbraum analoge Vorgehensweise unter Nutzung der Funktionentheorie. Mit der erhaltenen Lösung können die Wellentypen im Frequenzbereich getrennt angegeben werden. In einer weiteren Berechnung ist damit eine maximale Interpretationsmöglichkeit der resultierenden Seismogramme vorhanden.

Zur Bestimmung eines synthetischen Zeitverlaufs aus den Green'schen Funktionen wurden unterschiedliche Berechnungsmöglichkeiten getestet. Von Seiten der Interpretation ist die Lösung der Konturintegration immer vorzuziehen. Sehr nachteilig wirkt sich dabei die sehr lange Berechnungszeit aus. Letztlich stellte sich die schnellere numerische Wellenzahl-Integration und die Normalmoden-Summation für eine iterative Verwendung in den Inversionsalgorithmen als geeigneter heraus. Auch die Vorbetrachtung theoretischer Profile bezüglich auftretender Besonderheiten in einer Messung benötigt eine möglichst schnelle Berechnungsmethode, um eine entsprechende Anzahl von Modelltypen zu testen.

Mit der Wahl und der Aufbereitung des theoretischen Bodenmodells ist es möglich, experimentelle Ergebnisse nachzurechnen. In der Regel sind dazu unterschiedliche Schritte in der Aufbereitung der Wellenfelddaten notwendig. In den folgenden Kapiteln werden diese Punkte näher untersucht.

Kapitel 3

Wellenfeldanalyse / Parameteridentifikation

Mechanische Wellen stellen einen geeigneten Informationsträger dar, um Angaben über ein Medium hinsichtlich vorhandener Stoffparameter zu erhalten. Bei den in dieser Arbeit verwendeten seismischen Oberflächenwellen werden die Informationen von Amplitude und Phase innerhalb eines Zeitverlaufs ausgewertet.

Zum Erreichen der Erkundungsziele sind folgende Analyseschritte in der dargestellten Abfolge notwendig.

1. Durchführung der Messung unter Benutzung der geeigneten Messapparatur.
2. Aufbereitung der Rohdaten für die weitere Analyse (Signalverarbeitung).
3. Auswertung der korrigierten Daten hinsichtlich der Dispersionseigenschaften von Wellenfeldern, die die Grundlage für die weitere Auswertungen bildet.
4. Invertierung der experimentellen Dispersionseigenschaften mit dem Ziel eines realitätsnahen Modells.

Üblicherweise werden die Oberflächenwellen im geotechnischen Gebiet nur hinsichtlich eines Einzelmode untersucht. Mit dem alleinigen Vorhandensein eines Modes in einer folgenden Invertierung steigt die Möglichkeit der Fehlinterpretation der Messung. In diesem Kapitel werden die in der Geotechnik üblichen Dispersionsanalysen durch weitere Methoden aus dem geophysikalischen Bereich ergänzt. Auf Basis der gewonnenen Informationen wird ein Invertierungsmodell für Oberflächenwellen unter Einbeziehung auftretender höherer Moden erarbeitet. Als Grundlage der Inversion wird ein gedämpfter und gewichteter Levenberg-Marquardt-Algorithmus genutzt, um die mitunter problematische Numerik zu stabilisieren. Das vorrangige Ziel des Kapitels ist die vollständige Erfassung von auftretenden Moden der Oberflächenwellen und deren gemeinsame Invertierung.

Das Kapitel ist in zwei Teile gegliedert. In der ersten Hälfte werden die notwendigen und verwendeten Methoden der Datenaufbereitung und Wellenfeldanalysen vorgestellt und auf ihre Eigenschaften getestet. In der zweiten Hälfte des Kapitels wird ein auf höhere Moden erweitertes Inversionsmodell erarbeitet, diskutiert und für geotechnische Aufgaben anwendbar gemacht. Für die Umsetzung des Zieles werden bewährte Optimierungsalgorithmen genutzt.

Nachfolgend wird kurz auf die Gründe der Wahl von Oberflächenwellen für die Untersuchung der Struktur- und Kennwertermittlung eingegangen. Im Gegensatz zu den in dieser Arbeit genutzten Oberflächenwellen verwenden klassische Verfahren der Oberflächenseismik in der Wellenfeldauswertung ausschließlich Raumwellen. Die Vertreter dieser Verfahren, wie z.B. die Refraktions- und die Reflexionsseismik, werden im Sinne einer Strahlen-Näherung geometrisch interpretiert. Die Raumwellen, insbesondere die refraktierten Wellen, sind dabei oftmals der amplitudenschwächste Teil des Wellenfeldes, womit eine Interpretation erschwert wird. Die Oberflächenwellen, die auch als resonante Wellenausbreitung verstanden werden können, haben eine wesentlich größere Amplitude und ein besseres Signal-Stör-Verhältnis.

Zusätzlich limitiert insbesondere ein vorhandener anormaler Steifigkeitsverlauf über die Tiefe die Aussagekraft der Körperwellen-Verfahren. Im Gegensatz dazu können Oberflächenwellen bei beliebigen Schichtungsprofilen eingesetzt werden, sogar wenn die Profile Schichten kleinerer Wellengeschwindigkeit, einen sogenannten *Niedriggeschwindigkeitskanal*, enthalten. Die Nutzung von Oberflächenwellen in seismischen Wellenfeldern erhöht damit nicht nur den Informationsgehalt einer Erkundung, sondern erschließt aufgrund der großen Empfindlichkeit für die Scherwellengeschwindigkeit des Mediums ganz neue Aspekte in der Erkundung.

Eine Grundlage dafür ist die Gegebenheit, dass die Scherwellengeschwindigkeit für die Eigenschaften des Untergrundes charakteristischer als die Kompressionswellengeschwindigkeit ist. Besonders in Lockersedimenten wird die Kompressionswelle stark durch die vorhandene Wassersättigung S_r beeinflusst. Mit zunehmenden Sättigungsgrad geht die Kompressionswellengeschwindigkeit von der Wellengeschwindigkeit des trockenen ($S_r = 0$) bzw. teilgesättigten ($S_r < 1$) Sediments zur Wellengeschwindigkeit des Grundwassers im gesättigten Zustand ($S_r = 1$) des Bodens über. Weiterhin ist die Größe der Scherwellengeschwindigkeit für viele technische Fragestellungen von größerer Bedeutung als die Kompressionswellengeschwindigkeit.

Die große Empfindlichkeit der Oberflächenwellen für die seismischen Geschwindigkeiten in kleinen Tiefen machen sie zu einem idealen Werkzeug für die Bestimmung von Schichtgrenzen im oberflächennahen Bereich. In vielen Fällen ist es oftmals einfacher lateral, steil stehende Diskontinuitäten mit Oberflächenwellen anstatt mit Raumwellen (Schneider 1993) zu lokalisieren.

An dieser Stelle soll aber auch darauf hingewiesen werden, dass bei einer Vernachlässi-

gung der Raumwellen der gesamte Informationsgehalt eines Wellenfeldes nicht ausgenutzt werden kann. Die aus den unterschiedlichen Verfahren gewonnenen Informationen ergänzen sich mitunter.

Neben den oben genannten Vorteilen werden die Oberflächenwellen in den letzten Jahren dazu genutzt, den Schubmodul und die Dämpfung bei sehr kleinen Verzerrungen (*small strain parameter*) zu bestimmen. Besitzen doch gerade diese Kenngrößen eine essentielle Bedeutung für das mechanische Verhalten des Bodens. Dadurch erweitert sich der ursprüngliche Einsatz der seismischen Methoden zur geotechnischen Erkundung um die Bestimmung von elementaren Kenngrößen des Bodens. Hervorgehoben wird diese Anwendung durch die Tatsache, dass eine Ermittlung dieser Kennwerte im Labor oft an der Entnahme entsprechend ungestörter Proben scheitert. Bei der Durchführung der Oberflächenwellenmessung entsteht ein Messaufwand der den klassischen Verfahren vergleichbar ist. In der Regel genügt der Einsatz von Vertikal-Geophonen und einer vertikal ausgerichteten seismischen Quelle (Hammer, Fallgewicht). Eine Kombination mit den klassischen Verfahren in einer Messkonfiguration ist ohne Probleme möglich. Allerdings erfordert die Auswertung der Oberflächenwellen einen wesentlich größeren numerischen Aufwand.

3.1 Wellenfeldanalyse

3.1.1 Methoden zur Dispersionsanalyse mit einem Aufnehmer

Die Methoden, die nur ein Geophon zur Dispersionsanalyse benötigen, bauen im Wesentlichen auf der *Fensteranalyse* und der *Multiplen Filter Technik* auf (Dresen & Rüter 1994). Sie ermöglichen prinzipiell die Bestimmung mehrerer Moden.

Die erste Methode wird hier nur kurz erwähnt, da sie in den durchgeführten Untersuchungen nicht genutzt wurde. Es handelt sich dabei um eine Analyse ausgewählter Seismogrammabschnitte mittels eines gleitenden Fensters im Zeitbereich. Durch das Fenster wird ein kleiner Bereich aus dem Zeitverlauf "herausgeschnitten". Diese separierten Stücke, werden nach der Transformation in den Frequenzbereich in einer neuen Abbildung der erhaltenen Amplituden über die Frequenz f und Fenstermitzenzeit t_m , einer so genannten Gabormatrix $g(f, t_m)$, zusammengestellt. Über die bekannte Entfernung x des betrachteten Geophons zur Quelle oder zu anderen Geophonen und den auftretenden Maximalwerten in der Darstellung der Gabormatrix kann die Gruppengeschwindigkeit zu jedem Frequenzpunkt mit $U_m = x/t_m$ bestimmt werden.

Ein ähnliches Vorgehen nur im Frequenzbereich des Zeitverlaufes stellt das Verfahren der multiplen Filter nach (Dziewonski, Bloch & Landisman 1969) dar. Diese Methode ist eine der am meist verwendeten Verfahren zur Bestimmung der Gruppengeschwindigkeit bei den geophysikalischen Methoden.

Der Ablauf zur Bestimmung der Gruppengeschwindigkeit unterscheidet sich in den Veröffentlichungen nur durch die Wahl verschiedener Filterformen. In der Regel werden mit einem Satz schmaler Null-Phasen-Bandpass-Filter, so genannter Gaußfilter, die besten Ergebnisse in der Separierung von Moden erreicht. Die Übertragungsfunktion des Gaußfilters lautet,

$$H_n(\omega) = \exp \left[-\alpha \left(\frac{\omega - \omega_n}{\omega_n} \right)^2 \right], \quad (3.1)$$

wobei ω_n die Mittenfrequenz und α die Filterbreite bzw. Flankenneigung des Fensters beschreibt.

$$\alpha = \frac{\beta}{(\Delta\bar{\omega}/2)^2} \quad (3.2)$$

Die in α vorkommenden Terme beschreiben mit β die Neigung der Filterflanken und mit $\Delta\bar{\omega}$ die relative Bandbreite des Filters $(\omega_{oben} - \omega_{unten})/\omega_n$. Nach der Filterung im Frequenzbereich wird von dem in den Zeitbereich rücktransformierten, gefilterten Signal

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) \cdot H_n(\omega) e^{i(\omega t)} d\omega$$

die Amplitudeneinhüllende $A_n(t) = \sqrt{f(t)^2 + H(f(t))^2}$ mit der Hilberttransformierten $H(f(t))$ gebildet¹. Zum Maximum der Amplitudeneinhüllenden des Signals ergibt sich die Gruppenlaufzeit des gefilterten Signals. Über die bekannte Entfernung x des betrachteten Geophons und den auftretenden Maximalwerten in der Darstellung der Gabormatrix kann die Gruppengeschwindigkeit zu jedem Frequenzpunkt mit $U_m = x/t_m$ bestimmt werden.

Ein Schwachpunkt dieser Berechnung ist die Bestimmung der exakten Phasengeschwindigkeit aus diesen Messungen. Die Beziehung zwischen Gruppen- und Phasengeschwindigkeit nach Gleichung (2-65) ist zwar ohne größere Probleme numerisch auswertbar, aber ein entsprechender Anfangswert der Phasengeschwindigkeit muss auf einem anderem Weg bestimmt werden. Wird diese Methode mit anderen Verfahren zusammen betrachtet, so kann dieser Schwachpunkt beseitigt werden. Zu diesem Problem kommt zusätzlich eine versagende Separationsmöglichkeit der Moden bei ei-

¹Unter Hilbert-Transformierten wird hier das um $-\frac{\pi}{2}$ verschobene Signal verstanden: $H[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) H_n(\omega) e^{i(\omega t - \frac{\pi}{2})} d\omega$.

ner noch nicht ausreichenden vorangeschrittenen Dispersion im Zeitverlauf hinzu. In den Untersuchungen flachseismischer Messungen war dieses Fehlen der fortgeschrittenen Dispersion ein normaler Zustand, wodurch die Untersuchungen mit diesen Methoden auf wenige Versuche beschränkt blieben.

3.1.2 Methoden zur Dispersionsanalyse mit mehreren Aufnehmern

Von den im Rahmen der Dispersionsanalyse untersuchten Verfahren erwiesen sich diese, welche zwei oder mehrere Aufnehmer für die Abbildung der Dispersionseigenschaften benötigen, als die brauchbarsten Methoden. Die nachfolgend dargestellten Verfahren können oftmals mit gleicher Geophon-Anordnung durchgeführt werden, wodurch die Auswertungsmöglichkeit und das Zusammenspiel unterschiedlicher Verfahren erheblich vereinfacht sind. Der Anlass zur Betrachtung verschiedener Methoden liegt in deren unterschiedlichen Eignung, auftretende höhere Moden in einem Wellenfeld ermitteln zu können.

3.1.2.1 Phasendifferenzen-Methode

In zahlreicher geotechnischer Literatur wurde die Spektrale Analyse von Oberflächenwellen (SASW) veröffentlicht. Das der SASW zugrunde liegende Verfahren ist die Phasendifferenzen-Methode. Darin wird ausgenutzt, dass ein Phasenunterschied an zwei unterschiedlichen Entfernungspunkten x zu einem Zeitpunkt t aufgrund der Laufzeit einer harmonischen Welle $\Delta t = \frac{x}{c}$ entsteht².

Für die Durchführung der Messung können unterschiedliche Konfigurationen von Aufnehmerpositionen auf der Oberfläche gewählt werden (Abb. 3-1). Es empfiehlt sich aber eine Nutzung von mehreren Geophonen, um ein langwieriges Umsetzen der Aufnehmer für das Erfassen unterschiedlicher Wellenlängen zu vermeiden. In eigenen Untersuchungen hat sich eine Aufnehmeranordnung mit verdoppelnden Aufnehmerabstand hinsichtlich einer verwendbaren Datenqualität bewährt. Zur Minimierung des Einflusses von schwach geneigten Schichtverläufen bzw. geringen lateralen oder lokalen Diskontinuitäten wird eine Mittelung von Messungen in umgekehrten Schussrichtungen vorgenommen. Unter einer Schussrichtung sei die Ausrichtung der Quelle und der Geophonkette verstanden. Diese Mittelung empfiehlt sich für die nachfolgende Invertierung, da das darin verwendete Bodenmodell auf ebenen, parallelen Grenzen der vorhandenen Schichten beruht. Starke Neigungen in den Schichtverläufen oder ausgeprägte Diskontinuitäten im Untergrund führen zu nicht verwendbaren oder falschen Untersuchungsergebnissen.

²Wird Gleichung (3.19) an zwei unterschiedlichen Entfernungspunkten zu einer betrachteten Zeit bestimmt, so können die Grundlagen der Phasendifferenzen-Methode leicht nachvollzogen werden.

Für die Durchführung einer normalen Messung reicht der Einsatz von vertikal ausgerichteten Einaxial-Geophonen. Mit dem Einsatz von zusätzlichen Horizontalaufnehmern können die resultierenden Partikelbewegungen des Seismogramms besser zu den elliptisch ausgerichteten Partikelbewegungen der Oberflächenwellen zugeordnet werden (Tokimatsu 1997).

Für die Ermittlung des Phasenunterschieds bzw. den daraus resultierenden frequenzabhängigen Geschwindigkeiten werden die notwendigen Berechnungen mit Hilfe der Kreuzkorrelation im Frequenzbereich durchgeführt. Das Theorem der Kreuzkorrelation lautet

$$r_{ij}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g_i(\tau) g_j(\tau + t) d\tau \quad \Longleftrightarrow \quad R_{ij}(f) = G_i(f) \cdot G_j^*(f), \quad (3.4)$$

wobei $G_j^*(f)$ das konjugiert komplexe Spektrum von $g_j(t)$ ist. Die Phasengeschwin-

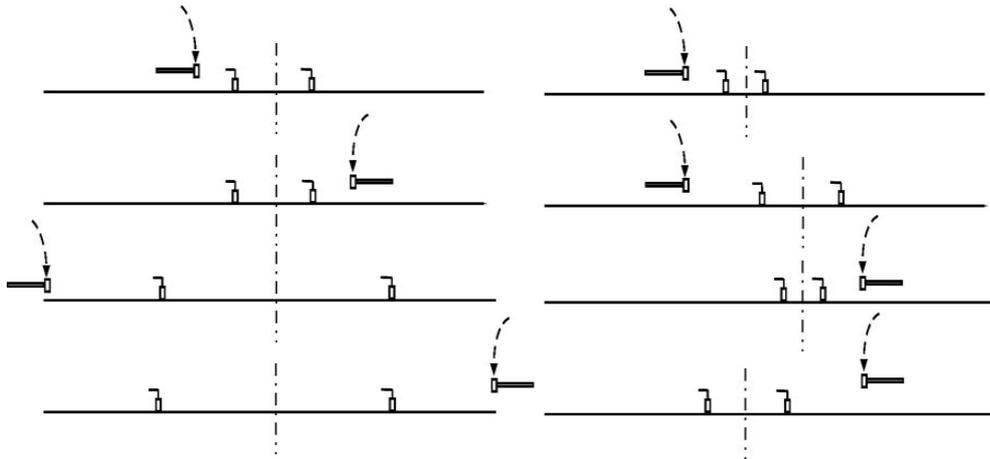


Abbildung 3-1: Mögliche Aufnehmeranordnungen nach (Gucunski & Woods 1991b)

digkeit als Funktion der Frequenz wird aus dem komplexen Spektrum $R_{ij}(f)$ über die Beziehung

$$c(f) = \frac{\Delta s \cdot 2\pi f}{\underbrace{\tan^{-1} \left\{ \frac{\Im(R_{ij}(f))}{\Re(R_{ij}(f))} \right\}}_{\Theta_{ij}(f)}} \quad (3.5)$$

berechnet, wobei $\Theta_{ij}(f)$ die Phase der Kreuzkorrelationsfunktion $R_{ij}(f)$ und Δs der Abstand zwischen den Aufnehmern ist.

Die vorhandene Kohärenz als Indikator der Qualität der Verwandtschaft zwischen den Signalen kann über die Kohärenzfunktion

$$\gamma_{ij}^2(f) = \frac{R_{ij}(f) R_{ij}^*(f)}{R_{ii}(f) R_{jj}(f)} \quad (3.6)$$

mit R_{ii} und R_{jj} als die Autokorrelierte der Eingangssignale i und j berechnet werden. Nur die Aufnehmerkombinationen, die eine ausreichende Kohärenz besitzen, werden für die weitere Auswertung genutzt. Als ausreichende Kohärenz wird ein Wert größer als 0.9 nach (Joh 1996) im Kohärenzspektrum verstanden (Abb.3-2). Die Nutzung

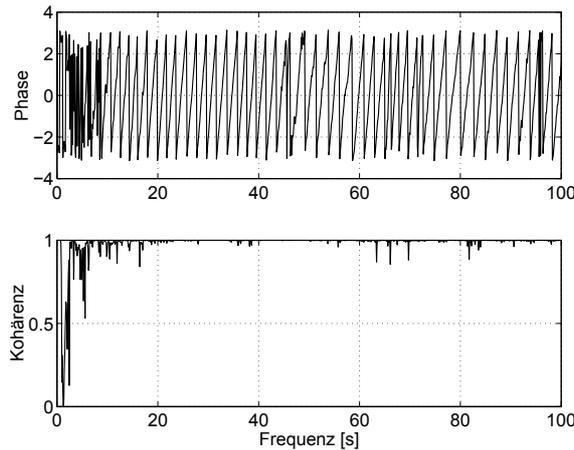


Abbildung 3-2: Phasengang des Kreuzleistungsspektrums und Kohärenzspektrum, Messung Halde Freiberg

von Kreuzleistungsspektren bzw. deren Phase zur Bestimmung des frequenzabhängigen Zeitversatzes basiert auf der Hypothese, dass die betrachtete Wellengruppe nur aus einer Mode zusammengesetzt und die Phasengeschwindigkeit folglich nur eine Funktion der Frequenz ist (Aki & Richards 1980). Alle weiteren Moden bzw. Körperwellen werden sich als störendes Rauschen oder anderweitige Veränderung in den Abbildungen des Phasengangs wiederfinden. Berücksichtigt man die geringen Auslagelängen in der Geotechnik, so ist es mit dieser Methode nicht möglich mehrere in einem Wellenfeld auftretende Moden aufzulösen.

Ein entscheidender Punkt für die Konstruktion der Dispersionsabbildungen ist die Entfaltung der Phase des Kreuzleistungsspektrums. Dabei zeigten sich in unterschiedlichen Untersuchungen, dass es an drei Stellen zu besonderen Schwierigkeiten kommt:

- im tieffrequenten Bereich des Phasengangs existiert meistens ein Abschnitt mit einem sehr schlechten Signal-Rausch-Verhältnis. Eine Zuordnung der Phasendurchgänge (2π -Wechsel) ist innerhalb dieses Bereichs sehr schwierig.
- ein Bereich mit ähnlich schlechten Signal-Rausch-Verhältnis existiert im hochfrequenten Bereich.
- der nutzbare Frequenzabschnitt mit einer Kohärenz < 0.9 wird teilweise auf

dem Phasengang durch andere Einflüsse gestört bzw. die Phase ist zwischen den 2π -Wechseln prinzipiell von Oszillationen überlagert.

Diese Ursache für die ausgeprägten tief- und hochfrequenten Bereiche mit einem sehr schlechten oder keinem Phasengang liegt im angeregten bandbegrenzten Frequenzbereich, der vorrangig vom Typ der seismischen Quelle beeinflusst wird. Die Störungen innerhalb der zu nutzenden Frequenzabschnitte wurden durch die Entwicklung des Phasengangs durch ein Polynom im Sinne des kleinsten Fehlerquadrates beseitigt. Die derart entwickelten Polynome wiesen einen wesentlich glatteren Funktionsverlauf auf. Auf die Näherung des Phasengangs durch ein Polynom wird in Kapitel 4 näher eingegangen. Die Umsetzung der Polynomentwicklung erfolgte unter Nutzung des Programmpakets MATLAB.

Trotz der genannten Einschränkungen und Probleme besitzt diese Methode unumstritten Vorteile, die sich zum einen in der Möglichkeit einer extrem kurzen Auslagenlänge von zwei Aufnehmer offenbart und zum anderen eine sehr klare Dispersionskurve liefert, wenn ein nutzbarer Phasengang der Kreuzkorrelierten abgebildet werden kann.

Das Problem der Separierung auftretender Moden kann mit dem Phasen-Differenzen-Verfahren nicht gelöst werden. Für eine notwendige Separierung müssen andere Verfahren herangezogen werden. In den in Kapitel 4 dargestellten Testmessungen wurde zur Separierung unterschiedlich auftretender Moden die Verfahren der Wellenzahl- bzw. Wellenfeldanalyse genutzt, bei denen das komplette Wellenfeld zeitlich und räumlich analysiert wird.

3.1.2.2 Frequenz-Wellenzahl-Analyse

Zur Untersuchung eines aufgezeichneten Wellenfeldes entlang mehreren in Reihe stehenden Geophonen wird eine zweidimensionale Fourier-Transformation bezüglich der Zeit t und des Ortes x auf das zweidimensionale Feld angewendet

$$F(\omega, k) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t, x) e^{-i2\pi(ft+kx)} dt dx. \quad (3.7)$$

Innerhalb der Gl.(3.7) ist k die Wellenzahl neben der bisher in Gl.(2.14b) genutzten Kreisfrequenz ω mit $\omega = 2\pi f$. Das sich im zweifachen Bildbereich ergebende Frequenz-Wellenzahl-Spektrum (f/k -Spektrum) stellt die Eigenschaften des Wellenfeldes ohne Verlust von Informationen dar. Durch die Darstellung im Bildbereich ist es möglich, unerwünschte Daten zu eliminieren bzw. herauszufiltern. Die Zuordnung der einzelnen Datenanteile in einem f/k -Spektrum kann nach (Doyle 1995) in Abb.(3-3) erfolgen. Mit den in einer Reihe angeordneten Geophonen wird das durchlaufende Wellenfeld neben einer zeitlichen Abtastung auch räumlich entlang dieser

Linie abgetastet. Für die korrekte Wiedergabe des Signals in diskreten Werten muss das Abtasttheorem erfüllt werden. Das bedeutet, dass das Abtastintervall Δt bzw. Δx so gewählt wird, dass die maximal aufzulösende Frequenz bzw. Wellenzahl kleiner als der Nyquistwert der Frequenz ω_N bzw. Wellenzahl k_N ist.

$$\omega_N = \frac{2\pi}{2 \Delta t} = \frac{\pi}{\Delta t} \geq \omega_{\max}$$

$$k_N = \frac{2\pi}{2 \Delta x} = \frac{\pi}{\Delta x} \geq k_{\max} \quad (3.8a,b)$$

Aus der Gl.(3.8) ergibt sich, dass ω_N die höchste Frequenz bzw. k_N die höchste Wellenzahl ist, die mit Δt bzw. Δx aufgelöst werden kann. Die Folge eines zu groben Abtastens ist das Entstehen von Aliasing. In der Regel stellt die Forderung nach Gl.(3.8a,b) für den Zeitbereich kein Problem dar, da die Aufnehmer über ein ausreichendes kleines Abtastintervall für die Zeit verfügen und zudem bei den meisten Geräten ein Anti-Alias Filter in der Hardware eingebaut ist. Im Wellenzahlbereich spielt das mögliche Aliasing aufgrund der recht groben räumlichen Abtastung eine weitaus größere Rolle. Zur Vermeidung des räumlichen Aliasings kann weder ein Hard- noch ein Softwarefilter verwendet werden, so dass die richtige Wahl der räumlichen Abtastpunkte den entscheidenden Einfluss hat. Im Bildbereich des transformierten Wellenfeldes werden die Oberflächenwellen als maximale Amplituden im Spektrum der Gl.(3.7) abgebildet, da sie das Wellenfeld ab einer bestimmten Distanz dominieren. Existieren mehrere Moden in dem betrachteten Wellenfeld, bilden sich unterschiedliche Äste in dem Spektrum ab (siehe Abb.3-8).

Die gesuchten Phasengeschwindigkeiten $c(\omega)$ ergeben sich aus dem Verhältnis von Frequenz $\omega = 2\pi f$ und Wellenzahl $k(\omega)$.

$$c(\omega) = \omega/k(\omega) \quad (3.9)$$

Zum Minimieren des auftretenden Gibbs'schen Phänomens in den transformierten Darstellungen werden die Daten $f(t, x)$ mit einem seitengedämpften Fenster (Hanningfenster) gewichtet. Eine Verbesserung des Signal-Noise-Verhältnis' wird durch eine Stapelung unterschiedlicher Schüsse gleicher Auslage erreicht.

Grundsätzlich ist die Doppel-Fourier-Transformations-Methode oder auch f/k -Analyse numerisch ein sehr robustes Verfahren, aber oft reicht die erzielte Auflösung in den Abbildungen der Dispersionskurven nicht aus, um eine klare Trennung zwischen Oberflächenwellen und Raumwellen / Noise zu erzielen. Zum Überwinden dieses Nachteils wurden in den durchgeführten Messungen weitere Transformationsmethoden genutzt.

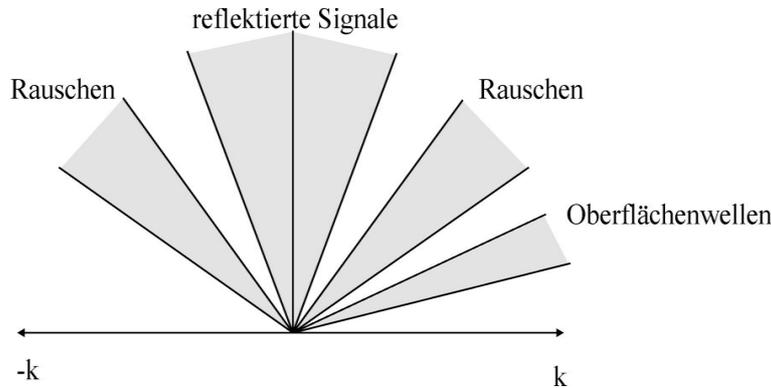


Abbildung 3-3: Dateninterpretation nach (Doyle 1995) der in einem f/k -Spektrum enthaltenen Wellenanteile.

3.1.2.3 Wellenfeld-Transformation

McMechan (McMechan & Yedlin 1981) entwickelte eine Transformationsmethode zur Abbildung der Dispersionseigenschaften mariner Wellenfelder. Die dazu genutzte τ - p -Transformation, eine spezielle Form der allgemeineren Radon-Transformation, wird um eine Fourier-Transformation bezüglich der verschobenen Zeit τ erweitert (siehe Gl.3.10). Die dabei verwendete zeitverschobene Stapelung (Slant-Stack) zerlegt das Wellenfeld in seine ebenen Langsamkeits-Parameter p ($p = 1/c$) mit $t_x = \frac{x}{c}$.

$$\tau = t - px \quad (3.10)$$

Die Variation des Strahlparameters in den numerischen Auswertungen in Kapitel 3 und 4 erfolgte über die variierende Neigung des Langsamkeitsstrahls p (siehe Abb.3-4). Ist die Welle entlang des Strahls kohärent, so wird ein Maximumwert innerhalb der Stapelung erzeugt. Durchläuft man die möglichen Langsamkeiten p , ist das Resultat ein Langsamkeits-Gitter. Eine Spur stellt die Ausbreitung einer ebenen Körperwelle mit einem bestimmten Einfallswinkel gegenüber der Vertikalen bzw. die einer Welle mit einer bestimmten Phasengeschwindigkeit an der Oberfläche dar.

$$\begin{aligned} S(p, \tau) &= \sum_x P(x, \tau + px) \\ S(p, \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} S(p, \tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \end{aligned} \quad (3.11)$$

Für die frequenzabhängige Darstellung wird auf das p - τ -Spektrum eine Fouriertransformation bezüglich der Zeitachse τ angewendet, womit das gesuchte Langsamkeits-Frequenz-Spektrum (p - ω -Spektrum) bestimmt wird. Die gesuchten Phasengeschwindigkeiten zeichnen sich durch die maximalen Werte dieses Spektrums aus.

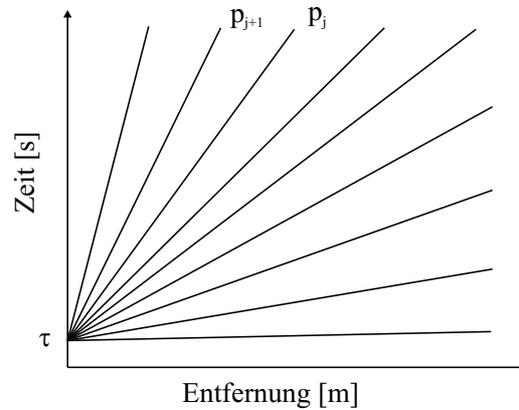


Abbildung 3-4: Durchführung der Stapelung mit fixiertem τ und veränderlichem p (McMechan & Ottolini 1980).

Der Vorteil dieser Transformation besteht in der klaren Separation der verschiedenen seismischen Einflüsse, insbesondere der Oberflächenwellen. Zusammenfassend können folgende wesentliche Berechnungsschritte für die Konstruktion des p - ω -Spektrums definiert werden:

1. lineare Zeitverschiebung der Zeitverläufe über die Geophonauslage
2. Summation über die Spuren (Gl.(3.11))
3. Wiederholung der Schritte 1 und 2 im Rahmen der vorgegebenen numerischen Abtastung von p
4. Fouriertransformation des resultierenden p - τ -Gitters über die Zeit τ (Gl.(3.11))

Eine Beschleunigung der Auswertungen wird erreicht, wenn die Stapelung und die Fouriertransformation in ihrer Berechnungsabfolge vertauscht werden. Entsprechend der Definition des Verschiebungstheorems (Bronstein et al. 2001)

$$\mathcal{F} \{f(t - \tau)\} \Leftrightarrow e^{-i\omega\tau} \tilde{f}(\omega) \quad (3.12)$$

ergibt sich die zeitliche Verschiebung $(t - px)$ der einzelnen Spuren in Gl.(3.10) als eine Phasenverschiebung $\exp(-i\omega px)$ im Bildbereich, womit die Wellenfeldtransformation in folgender Gleichung beschrieben werden kann:

$$S(p, \omega) = \sum_{i=1}^M u(x_j, \omega) e^{-i\omega px_j} \Delta r. \quad (3.13)$$

Die Berechnung der p - ω -Spektren kann für diesen Weg zu folgenden Schritten zusammengefasst werden:

1. Fouriertransformation des kompletten Wellenfeldes über die Zeit t
2. Multiplikation der Phasenverschiebung $\exp(-i\omega p x)$ zu dem jeweilig betrachteten Aufpunkt x zu der gegebenen Langsamkeit p
3. Summation über alle Spuren (Gl.(3.13))
4. Wiederholung der Schritte 2 und 3 im Rahmen der vorgegebenen Abtastung von p

Eine Verbesserung des Auflösungsvermögens innerhalb der Spektren, speziell für den Fall von kurzen Geophonauslagen, wie sie in geotechnischen Untersuchungen oft genutzt werden, kann nach (Park et al. 1998) mit einer Modifikation der Transformation in Gl.(3.13) erreicht werden.

$$S(\omega, c) = \sum_{i=1}^M e^{-i\omega p x_j} [u(x_j, \omega)] / [|u(x_j, \omega)|] \Delta r \quad (3.14)$$

Die Umformung basiert darauf, dass allein das Phasenspektrum eines Wellenfeldes die Informationen bezüglich der Dispersionseigenschaften beinhaltet. Das Amplitudenspektrum enthält die Informationen betreffend der geometrischen Dämpfung und der Materialdämpfung, deren unterschiedliche Amplituden sich störend in den Transformationen auswirken. Die frequenz- und geschwindigkeitsabhängige Darstellung des Spektrums erfolgt durch die Substitution von $c = \frac{1}{p}$.

3.1.2.4 Diskrete Bessel-Transformation

Bei den bisher behandelten Dispersionsanalysen wurde die Ausbreitung der Wellen in einer ebenen Front angenommen. Um der geometrisch bedingten Amplitudenabnahme entgegenzuwirken, müssen die Daten bei diesem Verfahren mit der aus dem Halbraum genäherten Funktion $f_i = \sqrt{r_i}$ in den Offset-Punkten korrigiert werden. Eine Abweichung wird bleiben, da die Abnahmefunktion der Wellen in einem geschichteten Medium auf diese Weise nur näherungsweise beschrieben werden kann. Um die Dispersionsanalyse auf Basis der Bessel-Transformation für eine zylinderförmige Wellenausbreitung nach Gl.(2.14a)

$$S(k, \omega) = \int_0^{\infty} u(r, \omega) J_n(\omega k) r dr \quad (3.16)$$

analog der Wellenfeld-Transformation nach Kap.3.1.2.4 durchzuführen, ist es günstiger, die gesamte Analyse im Frequenzbereich vorzunehmen.

Die vorhandene Besselfunktion wird dabei durch die entsprechenden Hankelfunktionen substituiert. Von den Hankelfunktionen wird nur die Funktion verwendet, die ein

Feld auslaufender Wellen beschreibt. Wird die Wellenzahl k durch die Langsamkeit p und die Entfernung der betrachteten Aufpunkte x ($k = px$) sowie die Besselfunktion durch die entsprechende Hankelfunktion ersetzt, kann die Transformation nach (Forbriger 2003b) in folgender Gleichung angegeben werden.

$$S(p, \omega) \approx \sum_{j=1}^M u_n(r_j, \omega) H_n^2(\omega p r_j) r_j \Delta r_j \quad (3.17)$$

Die diskrete Bessel-Transformation kann somit als eine spezielle Wellenfeld-Transformation in Zylinderkoordinaten betrachtet werden. In den Auswertungen durchgeführter Experimente wurde Gl.(3.17) entsprechend Gl.(3.14) für die Verbesserung der Auflösung modifiziert.

3.1.2.5 Darstellungseigenschaften der Dispersionsanalysen

Für die Abbildung der zu untersuchenden Dispersionseigenschaften von Oberflächenwellen mit den oben genannten Methoden ist die richtige räumliche Abtastung sehr wichtig, da die Interpretation der Signale bei der Nichtbeachtung der richtigen Abtastung stark verfälscht werden kann. Für die korrekte Abtastung ist in jedem Fall das Abtasttheorem zu erfüllen, das heißt, es müssen mindestens zwei Geophone pro Wellenlänge für die Rekonstruktion des Wellenfeldes vorhanden sein.

Zur Abschätzung dieser Einflüsse und Interpretation von auftretenden Signalen in den Dispersionsabbildungen wurden die Transformationsmethoden im Vorfeld zu den experimentellen Analysen mit synthetischen Wellenfeldern untersucht.

Ausgehend von der eindimensionalen Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.18)$$

beschreibt deren homogene Lösung das in positiver Richtung wandernde Wellenfeld

$$u(x, t) = A e^{-i2\pi f \left(t - \frac{x}{c} \right)} = A e^{-i2\pi f_{ref} (t - p_{ref} x)}. \quad (3.19)$$

Mit der Summation über eine endliche Anzahl diskreter Frequenzpunkte wird in einem ersten Schritt der Frequenzinhalt des zu untersuchenden dispersionsfreien Systems bestimmt.

$$u(t, x) = \sum_{j=1}^M A_j \exp \left[-i2\pi f_j \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] \quad (3.20)$$

Durch die Annahme eines dispersionsfreien Systems muss in den Spektren das Amplitudenmaximum als konstanter Geschwindigkeitswert über den gesamten Bereich der gewählten Frequenzen abgebildet werden. Für die Berechnung des Wellenfeldes in

Abb.(3-5a) wurden folgende Kennwerte zugrundegelegt: $p = 0.01[s/m]$, $f = 1...100 [Hz]$, $\Delta x = 1[m]$ mit p als Langsamkeit, f als Frequenz und Δx als äquidistanter Abstand der betrachteten Aufzeichnungspunkte. Das auf diese Weise berechnete synthetische Wellenfeld wurde einer Dispersionsanalyse mit den vorgestellten Methoden des Kap.3.1.2 unterzogen. Dabei wurden die Analysemöglichkeiten verwendet, die eine Separation multipler Moden erlauben.

Die in Abb.(3-5b), (3-5c) und (3-5d) dargestellten Ergebnisse sind der normierte Oberflächenplot des dreidimensionalen Amplitudenspektrums. Die Werte der Amplituden sind folgender farblichen Abstufung zugeordnet: maximale Werte - schwarze Plotbereiche, minimale Werte - weiße Plotbereiche.

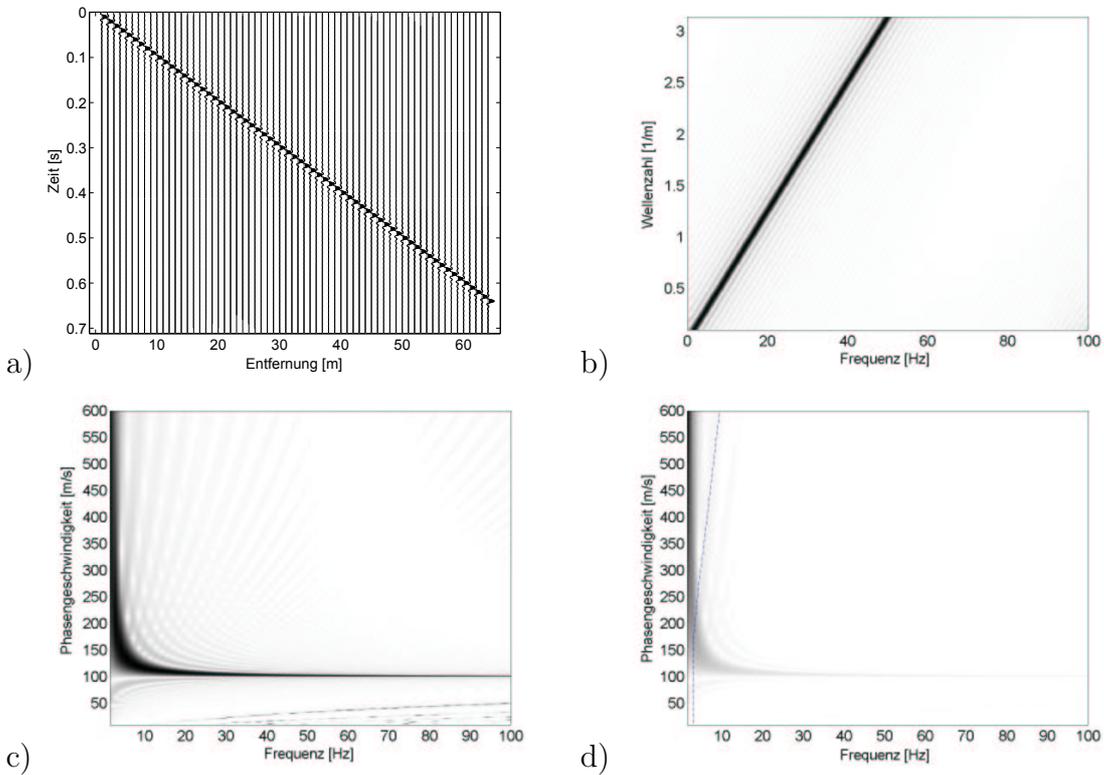


Abbildung 3-5: a) Spurnormiertes Wellenfeld, b) 2D Fourier-Transformation, c) Slant-Stack-Transformation und (d) Bessel-Transformation.

Die graphische Abbildung der Dispersion in Abb.(3-5b), (3-5c) und (3-5d) erfolgt entlang der vorgegebenen konstanten Referenz-Ausbreitungsgeschwindigkeit von $c_{ref} = 100m/s$ über den ganzen Frequenzbereich.

Neben der klaren Ausbildung des konstanten Geschwindigkeitswertes in den Transformationsabbildungen treten in der Abb.(3-5) Nebenmaxima und Unschärfe auf. Die vorhandenen Nebenmaxima lassen sich durch die Anwendung eines gefensterten Signals mit einer glatten Funktion mildern. In den untersuchten Beispielen wur-

den die x -Abhängigkeiten vor der Transformation mittels eines Hanning-Fensters gewichtet, um den Einfluss des vorhandenen „Rechteck-Fensters“ durch die räumliche Abtastung abzdämpfen. Das Auftreten der Nebenmaxima ist bei den einzelnen Transformationen unterschiedlich stark ausgeprägt, lässt sich aber nicht vollständig vermeiden.

Die auftretende Unschärfe der Abb.(3-5c) und Abb.(3-5d) ist in dem niederfrequenten Bereich deutlich sichtbar. Nach (Forbriger 2003b) lässt sich die Funktion der Unschärfe in Abhängigkeit von der Frequenz und der Auslagenlänge angeben als:

$$\Delta c = fL \quad (3.21)$$

mit $L = M\Delta r$ (M -Anzahl der Geophone). Entsprechend der Gl.(3.21) ist die Unschärfe im niederfrequenten Bereich der Abb.(3-5d) durch eine gestrichelte Linie gekennzeichnet. Aussagen zur Dispersion können nur im Frequenzbereich oberhalb der Unschärfe gemacht werden.

In Abb.(3-6) wurde zur Berechnung des Test-Signals der doppelte Geophonabstand verwendet. Durch diese Festlegung bildet sich neben der Unschärfe und den Nebenmaxima das erste Aliasing-Signal im Spektrum aus. Die Berechnung des Wellenfeldes basiert auf den gleichen Kennwerten wie in Abb.(3-5). Der Geophonabstand Δx wurde auf $2m$ verdoppelt. Die Vorgabe der konstanten Referenzgeschwindigkeit von $100m/s$ über den ganzen Frequenzbereich blieb ebenfalls bestehen.

In Abb.(3-6b) tritt ab einer Wellenzahl $k > 1.57$ Aliasing auf, da $k_{Nyq} = \pi/\Delta x$ und dieser Wert mit $f > 25Hz$ und $c = 100m/s$ überschritten wird. Erkennbar ist das erste Aliasing-Signal an dem hinzukommenden zweiten Maximum im Spektrum. Bilder (3-6c) und (3-6d) weisen an der Stelle des ersten Aliasing-Signals eine Hyperbel auf.

Wendet man auf die Lösung der eindimensionalen Wellengleichung eine Fourier-Transformation³ bezüglich der Zeit an und setzt die Lösung in die Transformationsgleichungen (3.13) ein, kann das auftretende Aliasing angegeben werden:

$$\tilde{u}(x, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} A e^{-i2\pi f_{ref}(t-p_{ref}x)} e^{i\omega t} dt = A e^{i2\pi f_{ref}p_{ref}x} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi t(f-f_{ref})} dt}_{\text{Maximum für } f_{ref}=f} \quad (3.22)$$

³Die Vorzeichen der Exponenten bei der hier dargestellten Fourier-Transformation sind der in Gl.(2.13) und Gl.(2.14) vereinbarten Definition entgegengesetzt, um einer auslaufenden Welle zu entsprechen.

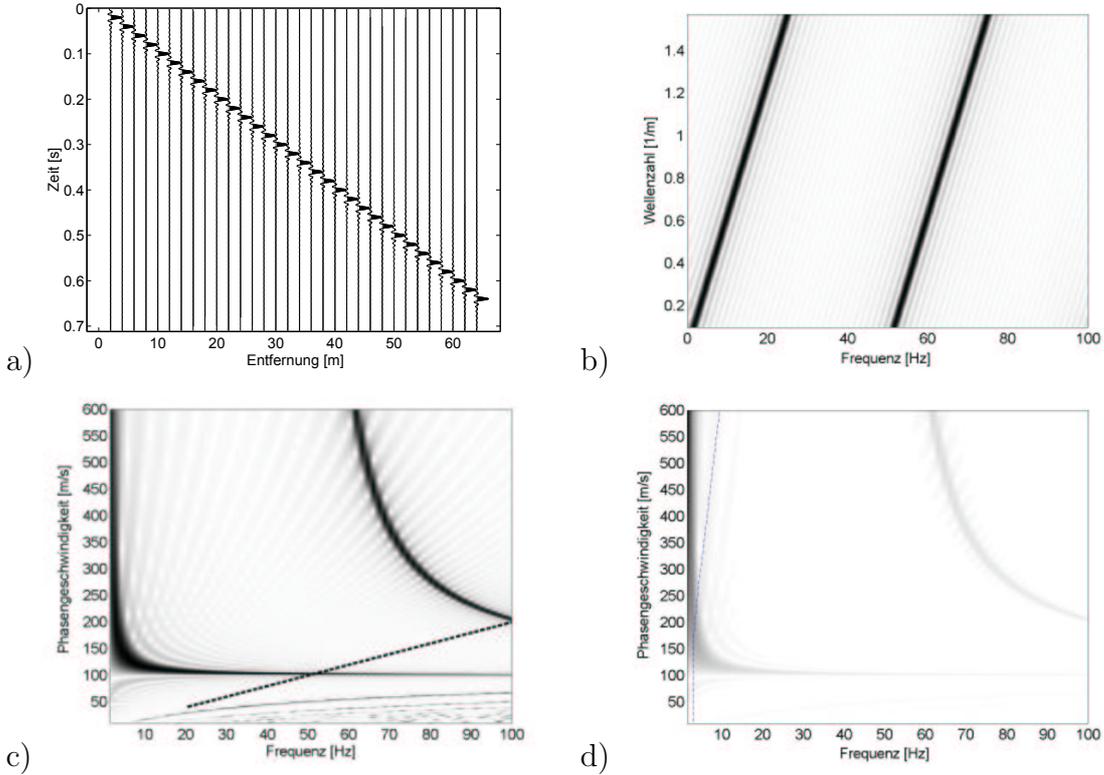


Abbildung 3-6: a) Spurnormiertes Wellenfeld, b) 2D Fourier-Transformation, c) Slant-Stack-Transformation und d) Bessel-Transformation.

$$\begin{aligned}
 S(p, \omega) &= \sum_{l=1}^M \tilde{u}(x, \omega) e^{-i\omega p x_l} \\
 &= A \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi t(f-f_{ref})} dt \cdot \sum_{l=1}^M \underbrace{e^{i2\pi f_{ref} p_{ref} x_n} e^{-i2\pi f p x_n}}_{e^{i2\pi n f \Delta x (p_{ref} - p)} \text{ für } f_{ref} = f \text{ und } x_n = n \Delta x} \quad (3.23)
 \end{aligned}$$

Der Ausdruck $e^{i2\pi f \Delta x (p_{ref} - p)}$ wird maximal für $p_{ref} = p$ und ein ganzzahliges Vielfaches n von 2π bei Verwendung der Gleichung $p = p_{ref} - n \frac{1}{f \Delta x}$ bzw. $p = p_{ref} - n \frac{2\pi}{\omega \Delta x}$. Mit n ($n = 1, 2, \dots$) ist die auftretende Ordnung des Aliasing-Signals im Spektrum definiert. Für $p_{ref} = p$ bzw. $n = 0$ ergibt sich das gesuchte Maximum, die Phasengeschwindigkeit $p = \frac{1}{c}$, im Spektrum. Das erste Aliasing-Signal bzw. die Aliasing-Hyperbel in Abb.(3-6c), beginnt am Schnittpunkt der Spektrenmaximalwerte aus vorgegebener Referenzgeschwindigkeit von $c_{ref} = 100 \text{ m/s}$ (dunkler Plotbereich) mit der Funktion $f \Delta x$ (linearer, gestrichelter Funktionsverlauf in Abb.3-6c).

Zu den vorangegangenen Annahmen einer konstanten Phasengeschwindigkeit wird in Abb.(3-7) ein Wellenfeld mit einem dispergierenden Signal simuliert. Dabei wurde eine linear abnehmende Funktion der Phasengeschwindigkeit von $p = 0.0025 \dots 0.00333$

$[s/m]$ über die Frequenzachse angenommen. Die übrigen Kennwerte sind $f = 1 \dots 100$ $[Hz]$ und $\Delta x = 1[m]$. Zur Vermeidung von Fehlinterpretationen wird die Abtastung des Signals so gewählt, dass ein Aliasing in den Spektren nicht auftritt.

Für die Simulation unterschiedliche Moden in einem Wellenfeld erfolgte in Abb.(3-8) die Überlagerung von zwei unterschiedlich linear abnehmenden Phasengeschwindigkeitsfunktionen. Diese werden durch den Bereich $p = 0.002 \dots 0.004$ $[s/m]$ und den zweiten Bereich $p = 0.00333 \dots 0.004$ $[s/m]$ definiert. Die restlichen Kennwerte aus der Berechnung zu Abb.(3-7) wurden übernommen. Die beschriebenen Annahmen der

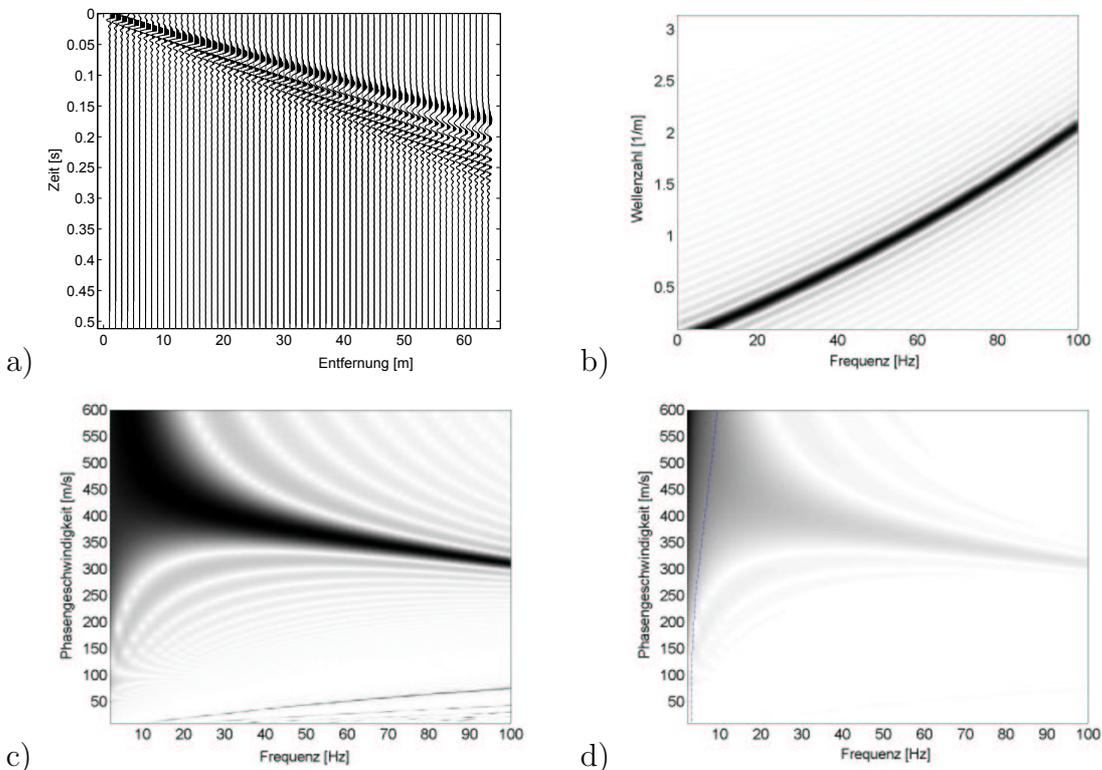


Abbildung 3-7: a) Spurnormiertes dispersives Wellenfeld, b) 2D Fourier-Transformation, c) Slant-Stack-Transformation und d) Bessel-Transformation.

synthetischen Wellenfelder wurden klar in den Abbildungen wiedergegeben. Nachteilig ist die mangelnde Auflösung der Darstellungen im niederfrequenten Bereichen sowie die schlechte Separationsfähigkeit der f/k -Analyse in Bezug auf das Auftreten mehrerer Moden in Schichtsystemen mit geringen Impedanzunterschieden.

Abschließend erfolgt in Abb.(3-9) die Analyse eines numerisch, auf Grundlage der Reflexions- und Transmissionskoeffizienten nach Kapitel 2, berechneten Wellenfeldes einfacher Schichtung. Zur Berechnung wurde die Normalmoden-Summation genutzt, um ausschließlich Oberflächenwellen im Wellenfeld zu berücksichtigen. Zur Prüfung

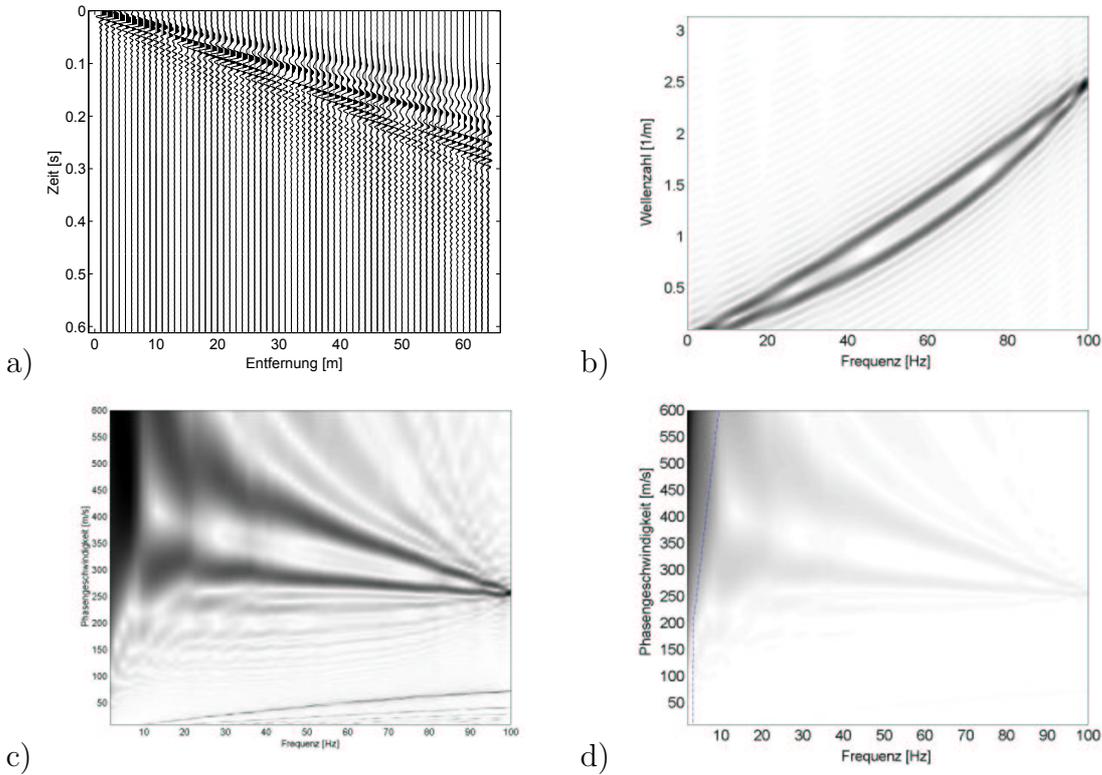


Abbildung 3-8: a) Spurnormiertes dispersives Wellenfeld bestehend aus zwei unterschiedlichen Geschwindigkeiten zu jedem Frequenzpunkt, b) 2D Fourier-Transformation, c) Slant-Stack-Transformation und d) Bessel-Transformation.

der abgebildeten Moden aus der Dispersionsanalyse sind die Funktionen der Eigenwerte des freien Systems in die Spektren der Dispersionsuntersuchung hineinprojiziert. Die Moden des freien Systems wurden zur besseren Visualisierung farblich und stilistisch von den Schattierungen des Spektrums abgesetzt. Als Berechnungsbeispiel wurden folgende Kennwerte einer Einzelschichtung (Schicht, Halbraum) gewählt: $d = 10[m]$, $c_S = 400, 680[m/s]$, $c_P = 1000, 1700[m/s]$, $\rho = 1800, 2000[kg/m^3]$, $\Delta x = 1[m]$. Als Anregungsfunktion für die simulierte Punktquelle diente ein Ricker-Impuls. Die Energieübertragung erfolgt bei diesem Bodenprofil im Wesentlichen durch den Fundamentalmode, aber auch höhere Moden werden angeregt. Die Amplituden in den dargestellten Spektren sind am maximal auftretenden Wert normiert.

Die Abbildungen der Wellenfeld-Transformationen spiegeln die auftretende Dispersion direkt wieder, da diese mit einem Abweichen der Maximalwerte von der Horizontalen einhergeht. Somit ist es letztlich auch möglich eine vorhandene Dispersion von Systemen mit geringem Impedanzunterschied zwischen den Schichten zu analysieren. Die vorhandenen Probleme der Modenidentifikation in der f/k -Analyse konnten verringert werden. Um die Nachteile der jeweiligen Verfahren zu kompensieren, ist es

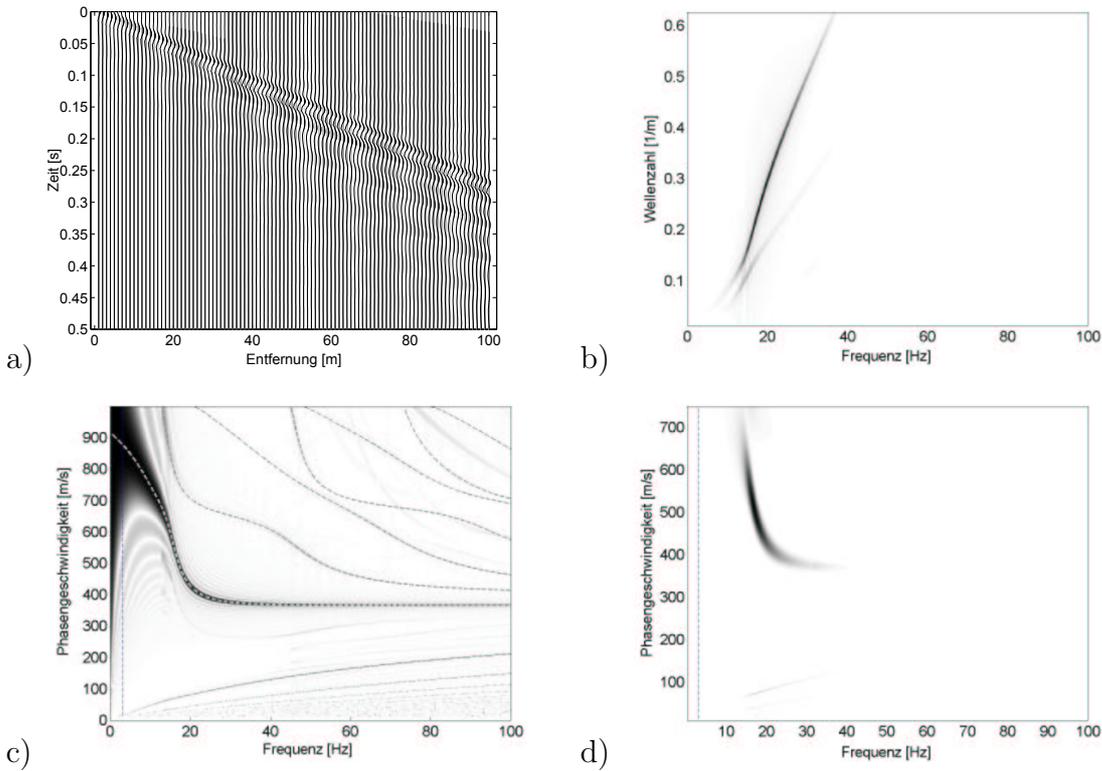


Abbildung 3-9: a) Spurnormiertes Wellenfeld, b) 2D Fourier-Transformation, c) Slant-Stack-Transformation, d) Bessel-Transformation.

sinnvoll, die unterschiedlichen Verfahren gemeinsam anzuwenden und zu interpretieren.

In Kapitel 4 werden neben synthetischen Wellenfeldern experimentelle Daten untersucht. Für die Interpretation der experimentellen Messwerte sind die Erkenntnisse an synthetischen Modellen von entscheidender Bedeutung, da diese die Informationen über typische Eigenschaften der jeweiligen Transformationsmethode liefern.

In der Betrachtung möglicher Dispersionsanalysen können folgende Erkenntnisse festgehalten werden:

1. Die beste Auflösung der Dispersionsrelation aus den gemessenen Daten liefern die Wellenzahl- und Bessel-Transformationen. Die Detektion mehrerer unabhängiger Moden in einem Wellenfeld stellt somit kein wesentliches Problem in der Dispersionsanalyse dar.
2. Bei Anwendung der Phasen-Differenzen-Methode ist immer eine Kontrolle mit einem der anderen genannten Verfahren notwendig, sofern dieses mit der verfügbaren Anzahl von Geophonen möglich ist.

3. Zur Verbesserung der Aussagefähigkeit und zur Kompensation bestehender Mängel in den einzelnen Verfahren sollten immer mehrere Verfahren, wie f/k -Analyse und Wellenfeld-Transformation, zusammen angewendet werden.
4. Die Nutzung der Dispersionsanalysen setzt eine entsprechende Kontrolle der Anwendungsfähigkeit an dem entsprechenden Standort voraus. Das heißt, das weitestgehend laterale Homogenität in den Schichten vorhanden sein muss. Doch auch bei einer mäßigen, lateralen Heterogenität können noch brauchbare Ergebnisse durch eine entsprechende Mittelung von Messungen entgegengesetzter Schussrichtungen erzielt werden.

3.2 Nutzung von Oberflächenwellen zur Bodenidentifikation

3.2.1 Lineare Inversion

Um aus einer experimentellen Wellenanalyse die entsprechenden Informationen zu vorhandenen Materialparametern bzw. geometrischen Strukturen zu erhalten, muss diese einer Inversion unterzogen werden. In diesem Sinn kann die Inversion als eine formale Interpretation von Daten mit einem möglichen Modell verstanden werden. Die Materialeigenschaften sind oftmals nur durch einen numerischen Suchprozess zu finden, da die physikalische Modellformulierung in der Regel sehr komplex sind. Grundsätzlich werden auftretende Inversionsprobleme nach der Verknüpfung der Modellparameter mit den Daten in eine lineare und nichtlineare Abhängigkeit unterteilt. Die lineare Inversion exakter Daten, welche oft den Ausgangspunkt weiterer Inversionsmethoden bildet, wird in (Parker 1994, Menke 1984, Bard 1974) und (Dahm 1998) ausführlich diskutiert. Von einer linearen Abhängigkeit zwischen den diskreten Daten d_i

$$d_i = [d_1, d_2, d_3, \dots, d_N]^T \quad N \in \mathbb{N} \quad (3.25)$$

und den Modellparametern m_j

$$m_j = [m_1, m_2, m_3, \dots, m_M]^T \quad M \in \mathbb{N} \quad (3.26)$$

spricht man, wenn der Zusammenhang von Modellparametern und Beobachtungsdaten durch eine lineare Funktion f_i beschrieben werden kann.

$$f_i(\mathbf{d}, \mathbf{m}) = 0 \quad (3.27)$$

Da die Form der Funktion f_i von der physikalischen Natur des Problems abhängig ist, kann diese nicht beliebig gewählt werden, sondern wird durch den gegebenen physikalischen Hintergrund bestimmt. Somit ist f_i häufig eine komplizierte nichtlineare Funktion, kann aber auch einfacher Natur sein.

In der linearen Form kann der Zusammenhang nach Gl.(3.27) in der folgenden Gleichung beschrieben werden:

$$f(\mathbf{d}, \mathbf{m}) = 0 = \mathbf{d} - \mathbf{g}(\mathbf{m}) = \mathbf{d} - \mathbf{G}\mathbf{m}. \quad (3.28)$$

Darin beinhaltet die Matrix \mathbf{G} , die Koeffizienten, die den Zusammenhang zwischen den Modellparametern \mathbf{m} und den Daten \mathbf{d} wiedergeben. Die Matrixform kann auch

als Summation angegeben werden:

$$d_i = \sum_{j=1}^M G_{ij} m_j. \quad (3.29)$$

Der Term G_{ij} mit $(i = 1, 2, \dots, N)$ und $(j = 1, 2, \dots, M)$ wird in der Literatur häufig, in Anlehnung an die Integraltransformationen *Kern* genannt.

Für den Fall von $N = M$ kann der lineare Zusammenhang von Gl.(3.28) direkt gelöst werden, d.h. das Inversionsproblem ist eindeutig lösbar. Im Fall der häufig auftretenden Überbestimmtheit mit $N > M$ und dem Fehlen eines gemeinsamen Schnittpunktes der einzelnen Funktionen im Modellraum, kann nur das Modell bestimmt werden, welches die geringste Abweichung zwischen den Modellergebnissen und den Daten besitzt.

Zusätzlich zu der vorhandenen Überbestimmtheit kommt der Umstand, dass die gemessenen Daten immer einen Anteil an zufälligen Signalen n beinhalten.

$$\mathbf{d} = \mathbf{g}(\mathbf{m}) + n \quad (3.30)$$

Diese Zufälligkeiten können nicht in dem Modell erfasst werden, so dass das Ziel einer Inversion nur darin bestehen kann, den Modellergebnisvektor \mathbf{d}_{syn} über die Variation des Modellvektors \mathbf{m} möglichst gut an die vorliegenden Daten \mathbf{d} innerhalb vorgegebener Fehlerschranken anzupassen. Die Suche nach der Lösung des Inversionsproblems mit dem minimalen Fehlervektor \mathbf{e}

$$\mathbf{e} = (\mathbf{d}_{obs} - \mathbf{d}_{syn}) \quad (3.31)$$

führt zur Definition des kleinsten Betragsquadrates des Fehlervektors bzw. der Summe der Fehlerquadrate

$$E = \mathbf{e}^T \mathbf{e} = (\mathbf{d} - \mathbf{G}\mathbf{m})^T (\mathbf{d} - \mathbf{G}\mathbf{m}) = \sum_{i=1}^N |e_i|^2 \stackrel{!}{=} \min. \quad (3.32)$$

Die damit entstandene Funktion⁴ E minimiert mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate die Größe oder Länge des Fehlervektors. In diesem Fall wird der Abstand zwischen experimentellen und synthetischen Daten minimiert. Mit dem Gebrauch der kleinsten Fehlerquadrate ist die Euklidische oder auch L_2 -Norm vorgegeben, wobei die Norm die Länge des Vektors beschreibt.

$$\|\mathbf{e}\|_2 = \left[(\mathbf{d}_{obs} - \mathbf{d}_{syn})^T (\mathbf{d}_{obs} - \mathbf{d}_{syn}) \right]^{1/2} \quad (3.33)$$

⁴In der Literatur wird die objektive Funktion E auch als *Misfit* oder *Cost function* bezeichnet.

Zur Lösung des Gleichungssystems $\mathbf{d} - \mathbf{G}\mathbf{m} = 0$ innerhalb von Gl.(3.32) existieren unterschiedliche numerische Methoden. Für die nähere Erläuterung dieser Methoden wird auf die Behandlung des vorliegenden nichtlinearen Problems der Invertierung der Oberflächenwellenfelder verwiesen. Die Tatsache, dass sich lineare Inversionsprobleme systematisch behandeln und lösen lassen, ist der Grund für die vielfältige Nutzung dieser Herangehensweise bei der Lösung nichtlinearer Inversionsprobleme.

3.2.2 Nichtlineare Inversion

Besteht ein nichtlinearer Zusammenhang von Modellparametern und Beobachtungsdaten, spricht man bei der Ermittlung der Modellparameter \mathbf{m} von einer nichtlinearen Inversion.

$$d_i = F_i(m_1, m_2, m_3, \dots, m_M) \quad (3.34)$$

Für die Lösung von derartigen, sehr häufig auftretenden Inversionsproblemen gibt es verschiedene mathematische Lösungsmöglichkeiten (Dahm 1998, Aki & Richards 1980). Hier seien kurz einige der üblichen Methoden angesprochen, um die Wahl des Lösungsweges zu begründen. Die genannten Wege bzw. weitere Methoden können bei Bedarf in der vielfältigen Literatur vertieft werden: (Parker 1994, Menke 1984, Dahm 1998, Müller 1991, Erfurth & Bieß 1975) und (Bard 1974).

3.2.2.1 Methoden der nichtlinearen Inversion

Die in den geotechnischen und geophysikalischen Gebieten verwendeten Inversionsmethoden lassen sich grundsätzlich in zwei Klassen einteilen: globale und lokale Suchmethoden, welche unterschiedliche Vor- und Nachteile besitzen.

1. Versuch und Irrtum-Methode:

Diese oft unbewusst angewendete Methode, auch als Modellrechnung bezeichnetes Verfahren, ist dadurch gekennzeichnet, dass ein auf Erfahrung beruhendes Modell vorgegeben wird. Im Vergleich der so entstandenen theoretischen Daten mit den beobachteten Daten, wird das Modell modifiziert bis eine Übereinstimmung von theoretischen und beobachteten Daten innerhalb der vorgegebenen Fehlergrenze vorhanden ist. Für eine erfolgreiche Anwendung dieser Methode ist große Erfahrung über das Verhalten des Mediums, aufgrund der eingehenden subjektiven Wichtungen, notwendig. Da dieses Verfahren kein systematische Suche im eigentlichen Sinne betreibt, kann die Methode einer globalen oder lokalen Suchmethode nur mit Vorbehalt zugeordnet werden.

2. Gitter-Such-Methode:

Bei diesen Methoden wird der gesamte Raum des Modellbereiches gleichmäßig gerastert und systematisch abgetastet. Die Methode ist damit ein globales

Suchverfahren. Jeder Punkt in diesem Gitter liefert einen anderen theoretischen Wert infolge des sich über den Modellraum verändernden theoretischen Modells. An der Stelle der kleinsten Differenz zwischen theoretischen und beobachteten Daten ergibt sich der optimale Modellvektor mit der kleinsten objektiven Funktion E . Der Berechnungsaufwand ist aufgrund des gleichmäßigen Ab tastens des gesamten Modellraums sehr hoch, dafür werden globale und lokale Minima im Suchraum erfasst. Zur sicheren Erfassung des globalen Minima darf das Ab tastintervall nicht zu groß gewählt werden. Mitunter kann sich die Kombination von Gitter-Such-Methode und Gradienten-Verfahren gut ergänzen.

3. Monte-Carlo-Verfahren:

Nach Zufallskriterien werden beliebige Punkte aus dem gesamten Modellraum ausgewählt und die theoretischen Ergebnisse mit den beobachteten Daten verglichen. Der Rechenaufwand ist auch bei dieser Methode relativ hoch.

Zu den Monte-Carlo-Verfahren zählen auch die Genetischen Algorithmen (Al-Hunaidi 1998). Sie sind eine Klasse von gerichteten Monte-Carlo-Verfahren. Wie die Bezeichnung *genetisch* andeutet, hat das Suchverfahren gewisse Parallelen zu Evolutionsprinzipien in der Natur. Der optimale Modellvektor ergibt sich auch bei diesen Methoden an der Stelle der kleinsten objektiven Funktion E . Ein Vorteil dieser Methoden ist der Verzicht auf die Bildung einer Gradientenmatrix.

4. Gradienten-Verfahren:

Ist es möglich für die nichtlineare Funktion F_i die partiellen Ableitungen nach den Modellparametern m_j anzugeben, können Gradienten-Verfahren der nichtlinearen Optimierung sehr effektiv zum Auffinden der kleinsten objektiven Funktion E verwendet werden. Bei diesen Verfahren nutzt man als Suchrichtung die Richtung, in der die Zielfunktion abfällt. In der Regel werden bei diesen Methoden die nichtlinearen Funktionen F_i linearisiert und die Lösung iterativ durchgeführt. Der Nachteil dieser Methoden ist der lokal begrenzte Suchraum. Zum Auffinden des eigentlichen Inversionsergebnisses muss der Startpunkt in der Nähe des globalen Minimums liegen. Die Anzahl der Iterationen hängt von der Nichtlinearität, dem verwendeten Inversionsalgorithmus und der Wahl des Startmodells ab. Von den unterschiedlichen Verfahren, seien beispielhaft die Methoden des steilsten Abstiegs, das Gauß-Newton-Verfahren und das Levenberg-Marquardt-Verfahren genannt.

Die Vorteile der globalen Suchmethoden sind die mehr oder weniger systematische Abstastung des gesamten Modellraums. Dabei können lokale und globale Minima unterschieden werden. Eine Eingrenzung des Modellraums durch ein in der Nähe des globalen Minimums liegendes Startmodell ist nicht notwendig. Probleme können

entstehen, wenn mehrere Minima in den vorgegebenen Fehlerschranken lokalisiert werden. Ebenso ist der große zeitliche Aufwand durch das systematischen Abtasten des Modellraums nachteilig.

Im Gegensatz zu den globalen Suchmethoden sind die lokalen Methoden nur in einem relativ kleinen Modellraum wirksam. Der daraus resultierende Vorteil ist die wesentlich kürzere Berechnungszeit. Allerdings ist aufgrund der eingeschränkten Suche in dem Modellraum und der Linearisierung des Inversionsproblems ein Startmodell erforderlich, das in der Nähe des zu erwartenden Modells liegt. Dieser Nachteil kann mit Vorinformationen über den Standort kompensiert werden.

Die weite Verbreitung der Gradientenverfahren für die verschiedensten Zwecke in den Geowissenschaften liegt in der relativ einfachen Handhabung, der großen Menge an Lösungsstrategien und den vergleichsweise kurzen Berechnungszeiten. Weiterhin sind zusätzliche Informationen bzw. Vorinformationen zu den Untersuchungsmedien der Geowissenschaften die Regel, so dass die Voraussetzungen für die Anwendung des Verfahrens gegeben sind.

3.2.2.2 Durchführung der Inversion

Für die Durchführung der Inversion ist es zweckmäßig, die nichtlineare Funktion von Modellparametern und Beobachtungsdaten zu linearisieren. Zur Linearisierung der Funktion $F_i(m_i)$ wird eine Taylor-Reihenentwicklung um ein Startmodell m_{i0} durchgeführt und die Reihe nach dem zweiten Glied abgebrochen:

$$d_i \approx F_i(m_{i0}) + \sum_{j=1}^M \frac{\partial F_i(m_{i0})}{\partial m_j} (m_j - m_{j0}) + R_n. \quad (3.35)$$

Der Sinn dieses Vorgehens ist die Vermeidung von partiellen Ableitungen höherer Ordnung bzw. Schwierigkeiten in deren Berechnung.

$$d_i \approx \underbrace{F_i(m_{i0})}_{d_{i0}} + \sum_{j=1}^M \underbrace{\frac{\partial F_i(m_{i0})}{\partial m_j}}_{G_{ij}} (m_j - m_{j0}) \quad (3.36)$$

Mit den Definitionen von G_{ij} als Matrix der partiellen Ableitungen nach den Materialparametern in Gl.(3.36), $(m_j - m_{j0})$ als Modelldifferenzenvektor δm_j und $(d_i - d_{i0})$ als Datendifferenzenvektor δd_i kann das Inversionsproblem analog den Formulierungen der linearen Inversion behandelt werden. Die objektive Funktion lautet:

$$E = \mathbf{e}^T \mathbf{e} = (\delta d_i - G_{ij} \delta m_j)^T (\delta d_i - G_{ij} \delta m_j). \quad (3.37)$$

Die Minimierung von E erfordert das Verschwinden der Ableitung von

$$\frac{\partial E}{\partial \delta \mathbf{m}^T} = 0. \quad (3.38)$$

Durch Anwendung der Gl.(3.38) auf (3.37), d.h. Ableitung der linearisierten objektiven Funktion unter Beachtung von $(G_{ij} \delta m_j)^T = \delta m_j^T G_{ij}^T$

$$\frac{\partial}{\partial \delta m_j^T} (\delta d_i^T \delta d_i - \delta d_i^T G_{ij} \delta m_j - \delta m_j^T G_{ij}^T \delta d_i + \delta m_j^T G_{ij}^T G_{ij} \delta m_j) = 0 \quad (3.39)$$

erhält man das linearisierte Inversionsproblem mit $\mathbf{G} = G_{ij}$, $\delta \mathbf{m} = \delta m_j$ und $\delta \mathbf{d} = \delta d_i$.

$$\mathbf{G}^T \mathbf{G} \delta \mathbf{m} = \mathbf{G}^T \delta \mathbf{d} \quad \text{bzw.} \quad \delta \mathbf{m} = (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \delta \mathbf{d} \quad (3.40)$$

Aufgrund der Linearisierung kann der mit Gl.(3.40) berechnete Modelldatenänderungsvektor $\delta \mathbf{m}$ nur eine Annäherung an das Minimum sein. Die Gleichung (3.40) muss also iterativ angewendet werden, das geänderte Modell dient nun als Startpunkt für einen neuen Iterationsschritt.

Nach Bronstein (Bronstein et al. 2001) können bei der Berechnung der Matrix $(\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1}$ numerische Schwierigkeiten und Ungenauigkeiten aufgrund einer schlecht konditionierten bzw. nahezu singulären Matrix⁵ entstehen. Dieses Problem kann durch unterschiedliche Verfahren, wie z.B. der Singulärwertzerlegung⁶ der Matrix \mathbf{G} , mit der Größe $(N \times M)$, vermieden werden. Die Singulärwertzerlegung ist definiert als $\mathbf{G} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}^T$. Die auftretende Matrix \mathbf{U} von der Größe $(N \times N)$ und die Matrix \mathbf{V} von der Größe $(M \times M)$ enthalten nach (Bronstein et al. 2001) die Eigenvektoren von $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$ und $\mathbf{G} \mathbf{G}^T$. Die Matrix $\mathbf{\Lambda}$ als Diagonalmatrix von der Größe $(N \times M)$ beinhaltet bis auf $diag(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$, den Eigenwerten von \mathbf{G} , nur Nullen. Der Wert p entspricht dem Rang der Matrix \mathbf{G} . Die auftretenden Matrizen \mathbf{U} und \mathbf{V} sind zusätzlich orthogonale Matrizen.

Zur Durchführung der Singulärwertzerlegung existiert eine Vielzahl von aufbereiteten numerischen Algorithmen, die die entsprechenden Matrizen \mathbf{U} , $\mathbf{\Lambda}$ und \mathbf{V} als Ergebnis liefern. Von den Matrizen \mathbf{U} und \mathbf{V} werden nur die Spalten $(1 \dots p)$ zusammen mit $\mathbf{\Lambda} = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ weiterhin genutzt, so dass die Inverse von $\mathbf{\Lambda}$ kein Problem darstellt aber \mathbf{G} erhalten bleibt: $\mathbf{G} = \mathbf{U}_p \mathbf{\Lambda}_p \mathbf{V}_p^T$. Beachtet man die mathematischen Regeln für orthogonale Matrizen $\mathbf{U}_p^T \mathbf{U}_p = \mathbf{V}_p^T \mathbf{V}_p = \mathbf{I}$, $\mathbf{U}_p^T = \mathbf{U}_p^{-1}$

⁵Die Konditionierung verweist auf die Änderung der Lösung aufgrund einer Störung der Eingangsdaten. Eine schlecht konditionierte Matrix hat eine hohe Konditionszahl und ist ein Indikator für eine nahezu singuläre Matrix A ($\det A = 0$).

⁶Die Singulärwertzerlegung wird in der Literatur auch *Faktorisierung*, *Eigenwertzerlegung* oder *SDV* (singular value decomposition) genannt.

zusammen mit den normalen Regeln für Matrizenoperationen $(\mathbf{UT})^T = \mathbf{V}^T \mathbf{U}^T$, $(\mathbf{UT})^{-1} = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{U}^{-1}$ und setzt die Zerlegung von \mathbf{G} in Gl.(3.40) ein, so erhält man den Ausdruck:

$$\delta \mathbf{m} = \underbrace{\mathbf{V}_p \mathbf{\Lambda}_p^{-1} \mathbf{U}_p^T}_{\mathbf{H}} \delta \mathbf{d}. \quad (3.41)$$

Der darin zusammengefasste Term \mathbf{H} wird auch als *generalisierte Inverse* oder *Pseudoinverse* von \mathbf{G} bezeichnet.

Die Nutzung der Singulärwertzerlegung zur Lösung des überbestimmten Gleichungssystems stellt eine Lösung dar, die zugleich den Betrag des Fehlervektors minimiert. In den durchgeführten Untersuchungen, wurden numerische Algorithmen von Press (Press et al. 1989) bzw. vorliegende Module des Programmpaketes MATLAB zur Eigenwertzerlegung genutzt. Die nach Gl.(3.41) definierte Inversion von Daten wurde bei Untersuchungen der Fundamentalmode (Schmidt, Wuttke & Schoenhardt 2001) im Rahmen der SASW angewendet. In der Bearbeitung unterschiedlicher Inversionsaufgaben an synthetischen und konkreten Standorten sind im Zusammenhang mit dem oben definierten Inversionsalgorithmus folgende numerische Probleme aufgetreten:

- mit dem Festlegen der Kennwerte des Startmodells in größerer Entfernung vom vorgegebenen synthetischen Modell (z.B. Startpunkt - homogener Halbraum) hat die Dauer der notwendigen Iterationen stark zugenommen.
- anstatt der Konvergenz gegen ein Minimum divergiert der Iterationsvorgang, d.h. der mittlere Fehler als Kontrollmaß schwankte zwischen abnehmenden und zunehmenden Werten oder stagnierte über dem vorgegebenen Fehlerabbruchswert

Zur numerischen Stabilisierung und Verbesserung des Inversionsalgorithmus' wurde auf das Levenberg-Marquardt Verfahren übergegangen. Dieses Verfahren beinhaltet einen zusätzlichen Dämpfungsterm, um die Größe und Richtung der Iterationsschrittweite zu beeinflussen. Nach Lines und Treitel (Lines & Treitel 1984) stellt das Marquardt Verfahren ein hybrides Verfahren zwischen der Methode des steilsten Abstiegs und dem Gauss-Newton Verfahren bzw. der Methode des kleinsten Fehlerquadrates dar. Es vereint die numerischen Vorteile beider Verfahren, wie die schnelle Konvergenz des Gauss-Newton Verfahrens in der Nähe des Minimums und das Auffinden der Abstiegsrichtung durch die Methode des steilsten Abstiegs. Damit ist zugleich die Idee des Marquardt Verfahrens umrissen, d.h. die Inversion mit der Methode des steilsten Abstiegs zu beginnen und im Laufe der Annäherung des Fehlervektors an das Minimum auf das Gauss-Newton Verfahren zu wechseln. Der Dämpfungsterm β hat dabei eine Schaltfunktion.

Die objektive Funktion für dieses Verfahren ergibt sich aus der Kopplung des Fehlerquadrates und dem gedämpften Materialänderungsvektor:

$$E = (\delta d_i - G_{ij}\delta m_j)^T (\delta d_i - G_{ij}\delta m_j) + \beta (\delta m_j)^T (\delta m_j). \quad (3.42)$$

Fordert man wieder das Verschwinden der Ableitung von E ,

$$\frac{\partial}{\partial \delta m_j^T} (\delta d_i^T \delta d_i - \delta d_i^T G_{ij} \delta m_j - \delta m_j^T G_{ij}^T \delta d_i + \delta m_j^T G_{ij}^T G_{ij} \delta m_j + \beta \delta m_j^T \delta m_j) = 0$$

erhält man die Gleichung des zu lösenden Inversionsproblems

$$\delta \mathbf{m} = (\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \beta \mathbf{I})^{-1} \mathbf{G}^T \delta \mathbf{d}. \quad (3.43)$$

Unter Verwendung der Singulärwertzerlegung $\mathbf{G} = \mathbf{U}_p \mathbf{\Lambda}_p \mathbf{V}_p^T$, der Matrixoperationen für orthogonale und normale Matrizen und der Umformung $\mathbf{V}_p \mathbf{\Lambda}_p^2 \mathbf{V}_p^T + \beta \mathbf{I} = \mathbf{V}_p (\mathbf{\Lambda}_p^2 + \beta \mathbf{I}) \mathbf{V}_p^T$ kann Gl.(3.43) folgendermaßen umgeschrieben werden

$$\delta \vec{m} = \mathbf{V}_p (\mathbf{\Lambda}_p^2 + \beta \mathbf{I})^{-1} \mathbf{\Lambda}_p \mathbf{U}_p^T \delta \vec{d} \quad (3.44)$$

wobei $\mathbf{\Lambda}_p^2$ und $\beta \mathbf{I}$ Diagonalmatrizen sind. Fasst man die Matrixaddition zu einer neuen Matrix \mathbf{K}_p zusammen, kann die Lösung der Gl.(3.44) gemäß (Jupp & Vozoff 1975) in Form der Gl.(3.45) angegeben werden.

$$\mathbf{G} = \mathbf{V}_p \mathbf{K}_p \mathbf{U}_p^T \quad (3.45)$$

Darin sind die Eigenwerte und der Dämpfungsterm in der Diagonalmatrix \mathbf{K}_p zusammengefasst zu:

$$\mathbf{K}_p = \text{diag} \left(\frac{1}{\lambda_1 + \beta/\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2 + \beta/\lambda_2}, \dots, \frac{1}{\lambda_M + \beta/\lambda_M} \right). \quad (3.46)$$

Die Wahl des Dämpfungswertes erfolgt nach Empfehlungen von Lines und Treitel (Lines & Treitel 1984) bzw. (Press et al. 1989). In Abhängigkeit der Änderung von E ist der zu nutzende Wert von β zu wählen. Als Startwert wird ein großer β -Wert (Methode des steilsten Abstiegs) verwendet und im Übergang zu kleineren Fehlerquadratsummen wird der β -Wert schrittweise verringert bis $\beta = 0$ (Gauss-Newton Verfahren) erreicht ist. Divergiert der Iterationszyklus, wird β erhöht bis eine Konvergenz wieder vorhanden ist.

3.2.2.3 Partielle Ableitungen / Sensitivitätsanalyse

Das Ziel der nachfolgenden Betrachtungen ist die Bestimmung der Matrix der partiellen Ableitungen in Gl.(3.35). Die dort vorhandene Funktion G_{ij} enthält die Ablei-

tungen nach den Materialparametern. Nach (Novotný 1976) kann die Bestimmung der Ableitungen in zwei Gruppen eingeteilt werden: die numerischen Ableitungen und die analytischen Ableitungen. Die analytischen Ableitungen werden nochmals unterschieden in die Variations-Methoden und die Funktionstheoreme. Eine wesentliche Voraussetzung für die beabsichtigte Inversion der Felddaten ist die möglichst exakte Berechnung der Ableitungen.

In der vorliegenden Arbeit wurden die Variations-Methoden zur Berechnung der partiellen Ableitungen benutzt. Ausgehend von Gl.(2.106) und Gl.(2.107) wird die Vorgehensweise von (Aki & Richards 1980) verwendet, um die gewünschten Ableitungen zu bestimmen.

Analog der Ermittlung der Gruppengeschwindigkeit Gl.(2.108) kann für sämtliche weitere Variablen der Gl.(2.107) eine Variation durchgeführt werden, um die Abhängigkeiten der Phasengeschwindigkeitsänderung von den Strukturparametern (c_s , λ , ρ , μ) zu erhalten.

Als Ergebnis der Sensitivitätsuntersuchung der Modellparameter auf die Phasengeschwindigkeitsfunktion wird nur die Scherwellengeschwindigkeit c_S als freier Parameter während der Inversion geführt, siehe Abb.(3-10) und Abb.(3-11). Die Matrix G_{ij} besitzt damit nur die Ableitungen $\frac{\partial c_i}{\partial c_{s,j}}$. Beispielhaft wird nur für diesen Parameter die genutzte Ableitung vollständig dargestellt. Ausgehend von Gl.(2.107)

$$\omega^2 I_1 = k^2 I_2 + k I_3 + I_4 \quad (3.47)$$

wird eine Variation bezüglich μ und k durchgeführt:

$$\begin{aligned} \omega^2 \frac{1}{2} \int_0^\infty \rho (u^2 + w^2) dz - (k + \delta k)^2 \frac{1}{2} \int_0^\infty \{ (\lambda + 2(\mu + \delta\mu)) u^2 + (\mu + \delta\mu) w^2 \} dz - \\ k \int_0^\infty \left\{ \lambda u \frac{dw}{dz} - (\mu + \delta\mu) w \frac{du}{dz} \right\} dz - \\ \frac{1}{2} \int_0^\infty \left\{ (\lambda + 2(\mu + \delta\mu)) \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 + (\mu + \delta\mu) \left(\frac{du}{dz} \right)^2 \right\} dz = 0. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Werden die Variationen höherer Ordnung vernachlässigt und Gl.(2.107) von Gl.(3.48) abgezogen, erhält man unter Nutzung von Gl.(2.108) folgende Gleichung

$$\delta k 2\omega I_1 U = -\delta\mu \frac{1}{2} \int_0^\infty \left\{ 2k^2 u^2 + 2 \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 + \left(kw - \frac{du}{dz} \right)^2 \right\} dz. \quad (3.49)$$

Nutzt man die Beziehung

$$\frac{\delta c}{c} = -\frac{\delta k}{k}, \quad (3.50)$$

die aus der Variation der Gleichung

$$c = \frac{\omega}{k} \quad \rightarrow \quad (c + \delta c)(k + \delta k) = k \cdot c$$

gewonnen wird, kann man Gl.(3.49) in Abhängigkeit von der Variation δc darstellen, Gl.(3.51).

$$\delta c = \int_0^\infty \underbrace{\left[\frac{1}{4k^2 I_1 U} \left\{ 2k^2 u^2 + 2 \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 + \left(kw - \frac{du}{dz} \right)^2 \right\} \right]}_{\left[\frac{\partial c}{\partial \mu} \right]} \delta \mu dz. \quad (3.51)$$

Nach (Aki & Richards 1980) entspricht der Integrand in Gl.(3.51) den gesuchten partiellen Ableitungen $\frac{\partial c}{\partial \mu}$ in der jeweilig betrachteten Tiefe. Berücksichtigt man zusätzlich die Kettenregel der Differentiation $\left(\frac{\partial c}{\partial c_s} = \frac{\partial c}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial c_s} \right)$ und die Abhängigkeit des Schubmoduls nach Gl.(2.13) in der Ableitung von $\frac{\partial \mu}{\partial c_s} = 2c_s \rho$, erhält man die gesuchte Ableitung der Phasengeschwindigkeit nach dem Parameter in einem Punkt des Mediums

$$\frac{\partial c}{\partial c_s} = \frac{\rho c_s}{2k^2 I_1 U} \left\{ 2k^2 u^2 + 2 \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 + \left(kw - \frac{du}{dz} \right)^2 \right\}. \quad (3.52)$$

Die resultierende partielle Ableitung eines Schichtparamters ergibt sich durch Integration über die homogene Bodenschicht

$$\frac{\delta c}{\delta c_s} = \frac{\rho c_s}{2k^2 I_1 U} \int_{z^j}^{z^{j+1}} \left\{ 2k^2 u^2 + 2 \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 + \left(kw - \frac{du}{dz} \right)^2 \right\} dz \quad j \in \mathbb{N}. \quad (3.53)$$

Mit einer analogen Variation erhält man die Ableitungen der anderen Parameter für die Sensitivitätsuntersuchungen

$$\frac{\delta c}{\delta \rho} = \frac{c^2}{4I_1 U} \int_{z^j}^{z^{j+1}} (u^2 + w^2) dz \quad j \in \mathbb{N}$$

$$\frac{\delta c}{\delta c_p} = \frac{\rho c_p}{2k^2 I_1 U} \int_{z^j}^{z^{j+1}} \left(ku + \frac{dw}{dz} \right)^2 dz \quad j \in \mathbb{N}.$$

Die enthaltenen Ableitungen in G_{ij} sind ein Maß der Sensitivität des Modells auf Parameteränderungen. Diese Änderung von m_j beeinflusst die theoretische Vergleichsfunktion \mathbf{d}_{syn} im Fehlervektor $\mathbf{e} = (\mathbf{d}_{obs} - \mathbf{d}_{syn})$ und damit unmittelbar die Konvergenz des Inversionsverfahrens. Ist die Ableitung groß bzw. klein, so ist auch die Beeinflussung groß bzw. klein. Basierend auf der Größenordnung der jeweiligen Ableitung werden die freien Parameter einer Inversion festgelegt. Die Abb.(3-10) und Abb.(3-11) zeigt die Dominanz der Scherwellengeschwindigkeit im Funktionsverlauf der Ableitungen. Aus den Untersuchungen zum Profil 1 und Profil 63 (Anhang A5)

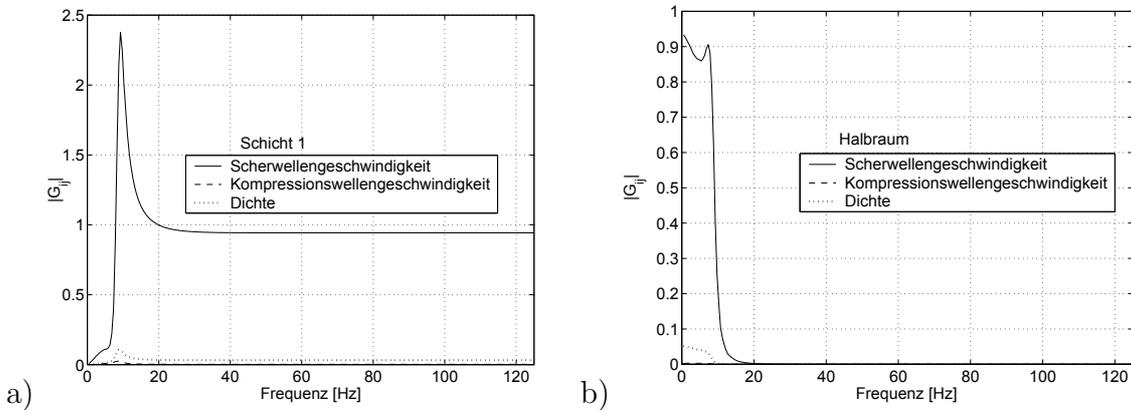


Abbildung 3-10: Funktion der partiellen Ableitungen für den Grundmode a) Schicht 1 und b) Halbraum für Profil 1 mit $d = 5[\text{m}]$, $c_S = 100, 400[\text{m/s}]$, $c_P = 200, 800[\text{m/s}]$, $\rho = 1500, 1800[\text{kg/m}^3]$ (Anhang A5).

können folgende grundsätzlichen Erkenntnisse zu den partiellen Ableitungen festgehalten werden:

1. Die Oberflächenwellen werden von der Scherwellengeschwindigkeit generell am stärksten beeinflusst. Der Einfluss der Dichte ist etwa um eine Größenordnung geringer. Die Sensitivität des Modells gegenüber der Kompressionswellengeschwindigkeit ist noch weitaus geringer als die der Dichte.
2. Die partiellen Ableitungen in G_{ij} sind in den einzelnen Schichten unterschiedlich stark ausgeprägt. Aufgrund der Frequenzabhängigkeit der Oberflächenwel-

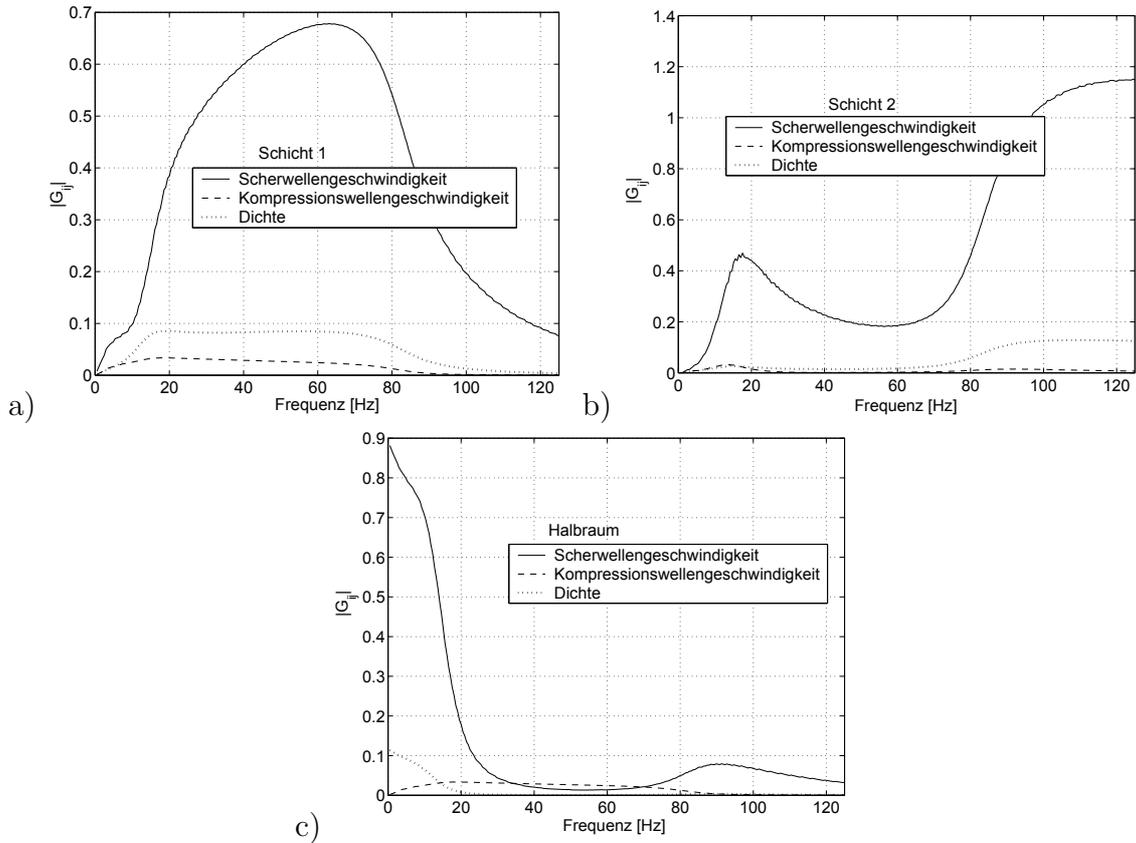


Abbildung 3-11: Funktion der partiellen Ableitungen für den Grundmode a) Schicht 1, b) Schicht 2 und c) Halbraum für Profil 63 mit $d = 5, 3$ [m], $c_S = 400, 300, 450$ [m/s], $c_P = 800, 600, 900$ [m/s], $\rho = 1700, 1500, 1800$ [kg/m³] (Anhang A5).

len wirken sich bestimmte Tiefenbereiche in speziellen Frequenzbereichen besonders stark aus. Der Funktionsverlauf der Ableitungen weist Ähnlichkeiten mit dem Verlauf der normierten Energieraten in den Schichten (siehe Kapitel 4, Abb.4-25) auf.

Ausgehend von diesen Feststellungen wird als freier Parameter nur die Scherwellengeschwindigkeit c_S zugelassen. Die Dichte ρ und die Kompressionswellengeschwindigkeit c_P bzw. Querdehnungszahl ν wurden in der Inversion vorgegeben. Eine Variation der Tiefe z zur Bestimmung der Sensitivität erfolgte nicht. Die unbekannte Schichtmächtigkeit am erkundeten Standort folgt als Ergebnis der Inversion aus analogen Wellengeschwindigkeiten c_S über einer Anzahl benachbarter dünner Schichten. In den Abb.(3-10) und Abb.(3-11) sind Unterschiede in den Größenordnungen der partiellen Parameter deutlich sichtbar. Die Abbildungen zeigen stellvertretend nur die Ableitungen des Grundmodes. Bei Berücksichtigung höherer Moden im Inversionsalgorithmus erfolgte die Berechnung der Ableitung für die Anzahl der ermittelten Moden. In den Gl.(3.53) sind in diesem Fall für die Phasengeschwindigkeiten c , Wellenzahlen k sowie der Eigenformen u und w die entsprechenden Werte des

betreffenden Modes einzusetzen.

3.2.2.4 Einbeziehung höherer Moden in die Inversion

Die in (Schmidt et al. 2001) genutzte Inversion der Fundamentalmode auf Grundlage der generalisierten Inversen ist die einfachste Möglichkeit, eine Information zu den Untergrundparametern mit Hilfe von Oberflächenwellen zu erhalten. Eine Wichtung der Daten ist in diesem Fall nicht notwendig, da nur der Grundmode betrachtet wird. Dabei auftretende numerische Probleme im Inversionsprozess konnten durch die Nutzung des Levenberg-Marquardt Verfahrens verringert und stabilisiert werden. Die Wahl der Größe des Dämpfungswertes β innerhalb der Iteration erfolgt nach (Press et al. 1989):

- Start der Inversion $E(\mathbf{m}_0)$ mit den Modellstartwerten \mathbf{m}_0 mit einem mittleren Dämpfungswert β von 0,001
- Kontrolle der Veränderung von $E(\mathbf{m}_0 + \delta\mathbf{m})$
 - a) Falls $E(\mathbf{m}_0 + \delta\mathbf{m}) < E(\mathbf{m}_0)$ wird der Dämpfungswert β in der nächsten Iteration um den Faktor 10 erhöht
 - b) Falls $E(\mathbf{m}_0 + \delta\mathbf{m}) > E(\mathbf{m}_0)$ wird der Dämpfungswert β in der nächsten Iteration um den Faktor 10 verringert
- Ist der vorgegebene mittlere Fehler von E unterschritten, stoppt der Iterationsvorgang

Die Inversion des Grundmodes wurde mit der Voraussetzung verwendet, dass die experimentelle Dispersionskurve in dem Phasen-Differenzen-Verfahren bzw. in der Abbildung der Wellenfeld-Transformationen als alleiniger Grundmode klar und deutlich zu identifizieren war. In Abb.(3-12) wurden beispielhaft die Dispersioneigenschaften eines synthetischen Bodenprofils bestimmt, das einen ausgeprägten Wechsel der Energie auf höhere Moden besitzt. Die Ursache dafür ist die Einlagerung einer Langsamkeitsschicht in das Bodenprofil, womit ein typischer Wellenleiter simuliert wird. Die Kennwerte des Profils sind: $h = 3, 5, 10[m]$, $\rho = 1800, 1700, 1800, 1900[kg/m^3]$, $c_S = 448, 355, 395, 453[m/s]$, $c_P = 795, 610, 690, 805[m/s]$, wobei die Kennwerte die Bodenparameter der Schichtung (Kennwert 1 bis N) und des homogenen Halbraums (Kennwert $N + 1$) darstellen. In den Abb.(3-12c), (3-12d) und (3-12f) sind die Einflüsse der höheren Moden durch das Ansteigen der Phasengeschwindigkeit deutlich sichtbar. Der Phasengang in der Abb.(3-12e) beinhaltet noch keine nennenswerten Störungen. Die dieser Abbildung zugrunde liegende Aufnehmerkombination entspricht einer kurzen Entfernung am Anfang der simulierten Aufpunkte. In Abb.(3-12f) werden die Störungen des Phasengangs deutlich. Die dabei vorhandene

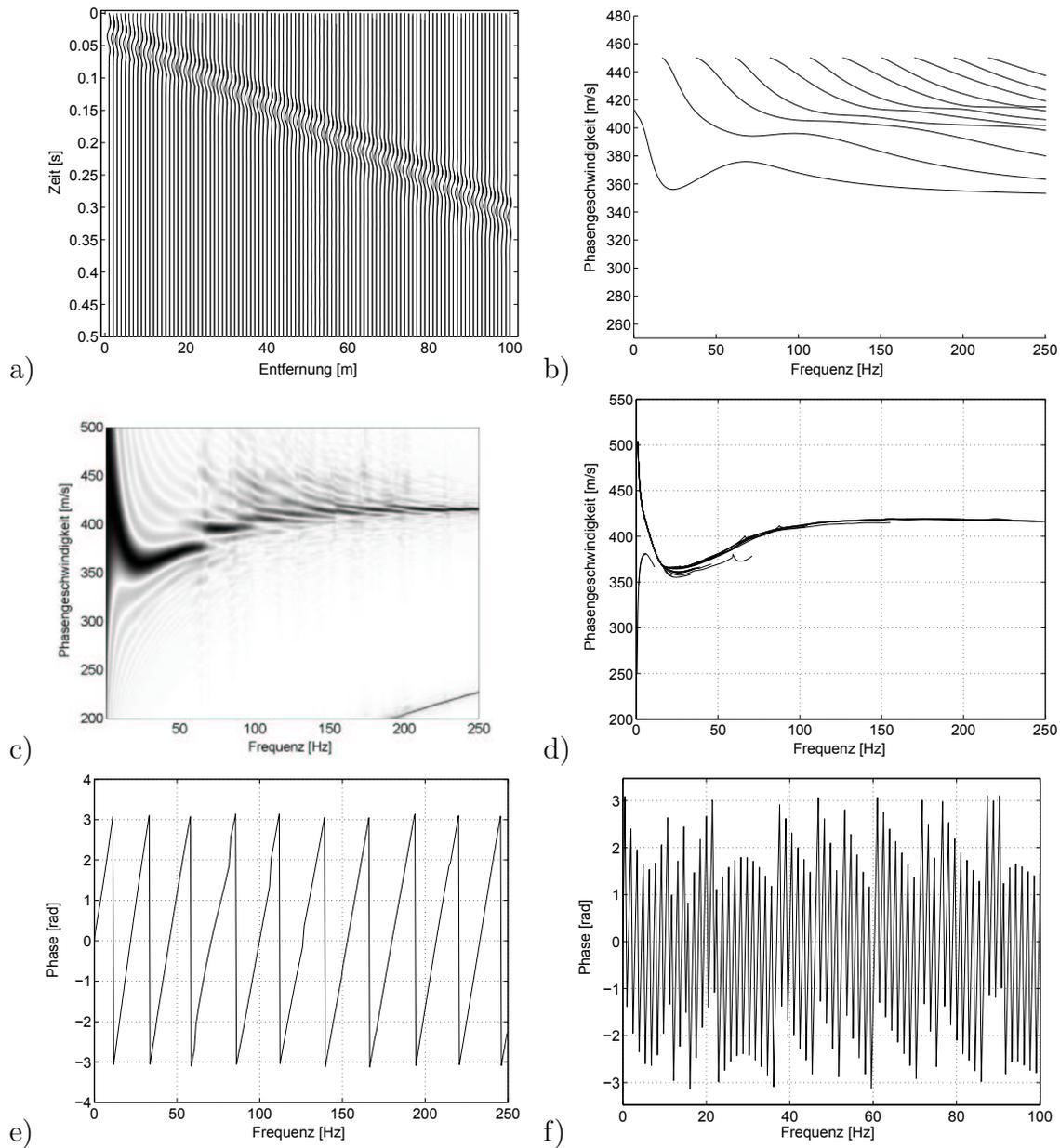


Abbildung 3-12: a) Spurnormierte Seismogramme, b) theoretische Dispersion des freien Systems, c) Wellenfeld-Transformation, d) Anwendung des Phasen-Differenzen-Verfahrens auf die synthetische Berechnung, e) und f) Abbildung des Phasengangs. Die synthetische Auslagenlänge wurde durch die Abstände zwischen den Aufpunkten mit 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256[m] vorgegeben.

Aufnehmerkombination entspricht dem größten Teil der Auslagenlänge.

Berechnet man aus den erhaltenen synthetischen Daten den Dispersionsverlauf, ohne auf Kohärenz oder erkennbare Bereiche einer ungestörten Phase zu achten, erhält man den in Abb.(3-12d) vorhandenen Verlauf des experimentell ermittelten scheinbaren Modes. Die noch vorhandenen fehlerhaften Zweige in Abb.(3-12d) würden in einer normalen Auswertung nicht berücksichtigt werden, so dass die scheinbare Dispersionskurve ähnlich den angeregten Dispersionsästen in Abb.(3-12c) verläuft. Für die abgebildete scheinbare Dispersionskurve in Abb.(3-12d) ist es ebenso möglich ein Modell zu finden, das einen ähnlichen Verlauf des Grundmodes besitzt. Befindet sich dieser Verlauf zusätzlich noch innerhalb der Fehlergrenzen von ϵ , so ist eine visuelle Unterscheidung von einem betrachteten Grundmode schwierig. Um an dieser Stelle eine bessere Annäherung vorzunehmen, wurde von (Gucunski & Woods 1991b) und (Tokimatsu et al. 1992) eine Gewichtung der Moden in der synthetischen Berechnung eingeführt. Die derart durch die Anregung gewichteten Moden wurden anschließend zu einer resultierenden Mode, der scheinbaren Dispersionskurve, zusammengefasst. Dieses Vorgehen berücksichtigt damit den starken anormalen Anstieg der mit dem Phasen-Differenzen-Verfahren ermittelten Dispersionskurve.

Der Vorteil des Vorgehens ist die Beibehaltung der üblichen Inversionsmethode, da eine theoretisch idealisierte Mode mit der experimentell bestimmten Mode verglichen wird. Nachteilig und problematisch wird diese Herangehensweise, wenn deutlich unterschiedliche Moden mit größerem Abstand auftreten und extrahiert werden können. In diesem Fall treten Sprünge in der scheinbaren Dispersionskurve auf und erschweren eine numerische Näherung. Ebenso problematisch ist der Fall, wenn mehrere Moden über einem größeren Frequenzbereich gleichzeitig angeregt werden, da die Kohärenz in dem Phasen-Differenzen-Verfahren nicht mehr gegeben ist. Zusätzlich erschwert die Abhängigkeit der Modenanregung von Quellfunktion, -tiefe und -art in den Green'schen Funktionen die Wichtung zu einer scheinbaren Dispersionskurve. Brauchbare Ergebnisse in den Untersuchungen mit scheinbaren Dispersionskurven sind nur für den Fall des schnellen Energieübergangs von einer Mode auf eine andere Mode erzielt worden. Neben diesen Nachteilen wird zusätzlich der Bereich möglicher Profile nicht verringert.

Es erscheint somit notwendig, die Inversion des Grundmodes auf die Möglichkeit auftretender und separierter höherer Moden zu erweitern. Die Nutzung von höheren Moden, sofern sie auftreten, bedeutet für die Inversion eine Erweiterung der möglichen Informationen, um die Anzahl der möglichen Bodenprofile, die die Anforderungen an eine Grundmode erfüllen, einzuengen und damit die Inversion zu einem wahrscheinlicheren Modell zu führen.

In der geotechnischen Literatur existieren zu diesem Sachverhalt keine verfügbare Informationen, mit dem Wissen um höhere Moden werden im Wesentlichen scheinbare Dispersionskurven konstruiert. Die geophysikalische Literatur liefert in der gemeinsamen Inversion unterschiedlicher Standortinformationen mehr Hinweise. Besonders in den letzten Jahrzehnten existierte die Bestrebung, nicht nur den Informationsgehalt eines Messverfahrens zu invertieren, sondern die Informationen aus unterschiedlichen Verfahren, welche sich sinnvoll ergänzen, zu kombinieren (Menichetti & Guillen 1983, Hering et al. 1995, Forbriger 2003b).

Zur Invertierung multipler Moden wird sich an den Modellen der simultanen Inversion von Magnetik und Gravimetrie (Menichetti & Guillen 1983) bzw. der gemeinsamen Inversion von Gruppengeschwindigkeit und Geoelektrik orientiert. Diese Modelle stellen einen ähnlichen Fall der Kombination von Informationen dar.

Ausgehend von den Wellenfeldanalysen in Kapitel 3.1.2 für die Auflösung höherer Moden (Abb.3-9c) wird eine angeregte Mode durch maximale Amplituden in den Spektren präsentiert. Diese stellen den Ausgangspunkt für die weiteren Inversionsalgorithmen dar. Sind in den Aufzeichnungen nur geringe Störeinflüsse vorhanden, ist eine Zuordnung der Amplituden zu unterschiedlichen Moden oft problemlos möglich. Bei stärkeren Einflüssen lassen sich die Amplituden der jeweiligen Moden nur schwierig zuordnen. Häufig wird dieser Umstand zusätzlich durch eine begrenzte Auslagenlänge und Aufnehmerabstand begünstigt.

Zur Umsetzung der Invertierung höherer Moden wird in Gl.(3.42) eine Erweiterung des Modell- und Datendifferenzvektors $\delta\mathbf{m}$ und $\delta\mathbf{d}$ vorgenommen. Neben dem ursprünglich vorhandenen Grundmode werden die Vektoren $\delta\mathbf{m}$ und $\delta\mathbf{d}$ um die Anteile der entsprechenden höheren Moden erweitert.

$$\delta\mathbf{d} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_{1,0} \\ \mathbf{d}_2 - \mathbf{d}_{2,0} \\ \vdots \\ \mathbf{d}_j - \mathbf{d}_{j,0} \end{array} \right\} \text{ mit } \mathbf{d}_j = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{d}_{j,1} - \mathbf{d}_{j,1,0} \\ \vdots \\ \mathbf{d}_{j,n} - \mathbf{d}_{j,n,0} \end{array} \right\} \text{ mit } j \in \mathbb{N}, j \neq 0 \quad (3.54)$$

Zusätzlich wird ein Wichtungsterm \mathbf{W} in die Inversionsgleichung eingeführt, da nicht alle Moden gleichermaßen angeregt werden. Als Wichtungsterm wird die Anregungsfunktion der jeweiligen Moden in den Spektren genutzt, wobei auch die Qualität und Interpretation der Daten als subjektive Einschätzung mit in die Wichtung einfließen kann. Damit ist von der ursprünglichen Form der Wichtung mit vorhandenen Varianzen der Daten $\mathbf{W} = \text{diag} \left(\frac{1}{\sigma_1^2}, \frac{1}{\sigma_2^2}, \dots, \frac{1}{\sigma_j^2} \right)$ abgewichen worden. Der Hauptgrund für die Vernachlässigung der Varianz der Daten liegt in der ungenügenden Kenntnis über die Messfehler. Numerisch stellt die getätigte Art der Wichtung kein Problem dar,

da die Daten in $\delta \mathbf{d}$ die gleiche physikalische Größen besitzen und der Wichtungsvektor aus dem normierten Spektrum der Wellenfeld-Transformation entnommen wird (Wuttke, Schmidt & Schanz 2004).

Die Wichtung der Daten hat den Zweck, diese im Anpassungsmaß stärker bzw. schwächer zu beeinflussen, da in theoretischen Untersuchungen festgestellt wurde, dass die maximalen Anpassungsbereiche fast immer einem Mode entsprechen. Im Gegensatz dazu sind schwach angeregte Bereiche innerhalb der Spektren oft schwierig von den durch die harmonische Entwicklung in der Fouriertransformation bedingten Nebenzipfeln (Gibbs Phänomen) zu trennen, weshalb keine strenge Anpassung gefordert wird.

Die objektive Funktion E ergibt sich durch die Wichtung von Gl.(3.42) mit der Diagonalmatrix $\mathbf{W} = \text{diag}(\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \dots, \mathbf{W}_j)$ und $\mathbf{W}_j = \text{diag}(\mathbf{W}_{j,1}, \mathbf{W}_{j,2}, \dots, \mathbf{W}_{j,n})$

$$E = (\delta d_i - G_{ij} \delta m_j)^T \mathbf{W} (\delta d_i - G_{ij} \delta m_j) + \beta (\delta m_j)^T (\delta m_j). \quad (3.55)$$

Analog den vorherigen Betrachtungen wird das Verschwinden der Ableitung der objektiven Funktion gefordert

$$0 = \frac{\partial}{\partial \delta m_j^T} (\delta d_i^T \mathbf{W} \delta d_i - \delta d_i^T \mathbf{W} G_{ij} \delta m_j - \delta m_j^T G_{ij}^T \mathbf{W} \delta d_i + \delta m_j^T G_{ij}^T \mathbf{W} G_{ij} \delta m_j + \beta \delta m_j^T \delta m_j) \quad (3.56)$$

Damit ergibt sich die gesuchte Inversionsaufgabe zu:

$$\delta \mathbf{m} = (\mathbf{G}^T \mathbf{W} \mathbf{G} + \beta \mathbf{I})^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{W} \delta \mathbf{d}. \quad (3.57)$$

Für die Anwendung der Singulärwertzerlegung wird die Wichtungsmatrix \mathbf{W} gemäß (Menke 1984) zerlegt:

$$\mathbf{W} = \mathbf{L}^T \mathbf{L} \quad \text{mit } \mathbf{L} = \mathbf{W}^{1/2}. \quad (3.58)$$

In der Zusammenfassung der Ausdrücke werden die ursprünglichen Terme substituiert durch $\mathbf{B} = \mathbf{L} \mathbf{G}$, $\mathbf{B}^T = \mathbf{G}^T \mathbf{L}^T$ und $\delta \hat{\mathbf{d}} = \mathbf{L} \delta \mathbf{d}$, womit Gl.(3.57) ähnlich Gl.(3.43) ausgedrückt werden kann:

$$\delta \mathbf{m} = (\mathbf{B}^T \mathbf{B} + \beta \mathbf{I})^{-1} \mathbf{B}^T \delta \hat{\mathbf{d}}. \quad (3.59)$$

Wendet man nun die Eigenwertzerlegung auf den gewichtete Matrix \mathbf{B} mit $\mathbf{B} = \tilde{\mathbf{U}}_p \tilde{\mathbf{\Lambda}}_p \tilde{\mathbf{V}}_p^T$ an⁷ und beachtet die Matrixoperationen für orthogonale und normale Matrizen sowie die Umformung $\tilde{\mathbf{V}}_p \tilde{\mathbf{\Lambda}}_p^2 \tilde{\mathbf{V}}_p^T + \beta \mathbf{I} = \tilde{\mathbf{V}}_p (\tilde{\mathbf{\Lambda}}_p^2 + \beta \mathbf{I}) \tilde{\mathbf{V}}_p^T$ kann Gl.(3.59)

⁷Mit der Tilde über den orthogonalen Matrizen $\tilde{\mathbf{U}}_p, \tilde{\mathbf{V}}_p^T$ sowie den Eigenwerten $\tilde{\mathbf{\Lambda}}_p$ wird das Ergebnis der SVD von der gewichteten Matrix \mathbf{B} gekennzeichnet.

umgeschrieben werden zu:

$$\delta \mathbf{m} = \tilde{\mathbf{V}}_p \left(\tilde{\mathbf{\Lambda}}_p^2 + \beta \mathbf{I} \right)^{-1} \tilde{\mathbf{\Lambda}}_p \tilde{\mathbf{U}}_p^T \delta \hat{\mathbf{d}}. \quad (3.60)$$

Numerisch wird die Wichtung mit $\mathbf{B} = \mathbf{L}\mathbf{G}$ vor der Berechnung der Singulärwertzerlegung angewendet, so dass das numerische Ergebnis dieser Zerlegung bereits $\tilde{\mathbf{U}}_p \tilde{\mathbf{\Lambda}}_p \tilde{\mathbf{V}}_p^T$ entspricht. Die Wichtung des ursprünglichen Datendifferenzenvektors $\mathbf{L}\delta \mathbf{d}$ kann während der Inversion problemlos erfolgen.

Die Durchführung der Inversion geschieht auf der Basis von extrahierten und geglätteten Dispersionskurven aus den Wellenfeldspektren. Die Auswahl der entsprechenden Punkte von unterschiedlichen Moden erfolgt numerisch aus den Spektren. Zur Suche der maximalen Punkte wird nach der Spektrenberechnung eine Anzahl von Bereichen markiert, in denen sich jeweils ein Mode befindet. In der Festlegung der Gebiete ist auftretendes Aliasing und Unschärfe zu beachten. Ein einzulesender Punkt wird durch die Definition einer Amplitudenschwelle fixiert. Gleichzeitig ergibt sich daraus der Wichtungsvektor. Mitunter ist es vorteilhaft, die resultierende Dispersionskurven, für den tieffrequenten Bereich aus den Auswertungen der f/k -Analyse und der Wellenfeld-Transformation zu mitteln. Die vorhandene Unschärfe der Wellenzahltransformationen im tieffrequenten Bereich kann dadurch kompensiert werden. Für die Glättung der extrahierten Kurven wird eine Polynom-Näherung entsprechend des kleinsten Fehlerquadrates unter Nutzung des Programmpaketes Matlab durchgeführt.

In der Analyse von Daten mit einem schlechten Signal-Noise-Verhältnis ist es besser, den Verlauf der einzulesenden Kurve durch ein Polynom vorzugeben. Zusätzlich wird ein schmaler Streifen um dieses Polynom für den abzutastenden Bereich vorgegeben. Die Verbesserung des Signal-Noise-Verhältnisses wird über eine Stapelung oder Filterung der Zeitreihen erreicht. Die Nutzung eines Filters hat mit Vorsicht zu geschehen, um den Informationsgehalt des Wellenfeldes nicht zu mindern.

Für die Wahl des Startmodells sind Vorinformationen, wie Schichtung oder Baugrundbeschaffenheit des Standortes, von Vorteil. Diese Informationen können aus geotechnischen Standarduntersuchungen oder aus den Untersuchungen der Laufzeiten des Wellenfeldes gewonnen werden. Bewährt hat sich ebenfalls eine einfache refraktionsseismische Analyse des Feldes als Vorinformationen zu Schichtungsgeschwindigkeiten und Schichtdicken. Problematisch war bei diesen Analysen mitunter die Frage der Zuordnung auftretender Wellenamplituden zu einem Körperwellentyp.

Entsprechend den Ausführungen der Sensitivitätsanalyse wurde als freier Parameter in der Inversion nur die Scherwellengeschwindigkeit der vorhandenen Schichten zugelassen. Zur numerischen Stabilisierung der Inversionsrechnung erfolgte eine Fi-

xierung der Schichtstärken. Innerhalb der vorgegebenen Schichten kann sich das jeweilige Schichtungsprofil durch die Änderung der Wellengeschwindigkeit ausbilden. Die restlichen Modellparameter wurden als nichtfreie (fixierte) Parameter vorgegeben. Der Vorteil der Inversion mit möglichst wenig freien Parametern liegt zum einen in der Rechenzeit und zum anderen in der Stabilität des Algorithmus. Damit entspricht dieses Vorgehen der Forderung, dass das Modell nicht mehr Struktur als nötig aufweisen soll.

Neben den Einschränkungen der Parameter sind folgende Bedingungen während der Inversion zu beachten.

1. Im Verlauf der Inversion sind zu kleine oder negative Modell-Wellengeschwindigkeiten durch die Korrektur des Modelländerungsvektors $\delta\mathbf{m}$ zu vermeiden. Die Bedingung lautet $\mathbf{c}_{S,i} = (\mathbf{c}_{S,i-1} + \delta\mathbf{m}) \geq \mathbf{c}_{S,\min}$ mit i als Laufvariable der Iteration.
2. Die Abbruchbedingung der Iteration ist erfüllt, wenn der mittlere Fehler des Fehlerquadrats die vorgegebene Schranke Φ unterschreitet $\sqrt{(\mathbf{e}^T \mathbf{e})/n} \leq \Phi$. Die Schranke Φ wurde in den Untersuchungen im Allgemeinen auf einen 5% Wert der experimentellen Daten festgesetzt $\Phi \sim 5\% \sqrt{\sum \mathbf{d}_{obs}^2}$.

3.2.3 Oskulationen von Normalmoden

In Abhängigkeit von den physikalischen Eigenschaften des Ausbreitungsmediums können die einzelnen Dispersionsäste der Phasengeschwindigkeiten einander sehr nahe kommen, sich fast berühren. Diese Punkte werden als Oskulation von Normalmoden bezeichnet. In der Literatur werden diese Stellen im Zusammenhang mit Stoneleywellen (Nolet & Dorman 1996) erwähnt. Eine kurze, aber sehr interessante Betrachtung dieses Phänomens gibt (Forbriger 2002). Eine andere, weiterreichende Überlegung im Zusammenhang mit diesem Problem erläutert (Lomnitz, Flores, Novaro, Seligman & Esquivel 1999) und (Lomnitz, Butler & Novaro 2002) in der Untersuchung der Kopplung von Grenzschicht-Moden.

Der Hintergrund dieser Analysen, speziell im submarinen Bereich für Stoneleywellen, ist die Untersuchung von zeitlich unterschiedlich ankommenden Körperwellen in einem Seismogramm. Interessant sind die Anmerkungen von (Nolet & Dorman 1996) zu diesen Untersuchungen, dass die Plateaus der Phasengeschwindigkeiten mit den Extremwerten der Gruppengeschwindigkeiten korrespondieren. Da an derartigen Plateaus keine oder nur eine geringe Dispersion existiert, werden diese Bereiche einer Körperwelle zugeordnet.

Auch in der Übertragung von Oberflächenwellen in geschichteten Böden sind häufig mehrere Moden beteiligt. In Abhängigkeit von der Quelltiefe und dem Quellspektrum

werden meistens nur Teilstücke der einzelnen Moden angeregt. Diese Form der Anregung von Modenabschnitten ist ein typisches Erscheinungsbild für einen natürlich gewachsenen Untergrund.

Oskulationen können dann zu einem Problem werden, wenn sie nicht als solche erkannt werden und unterschiedliche Modenabschnitte verschiedener Moden als ein Mode interpretiert werden.

In den durchgeführten experimentellen Versuchen konnten derartige Oskulationen von aktivierten Moden nur teilweise nachgewiesen werden. Doch war bei den entsprechenden Fällen deutlich die Tendenz zu erkennen, dass stets mehrere Moden an der Übertragung der Erregung beteiligt sind. Weitere Experimente mit einer größeren Auslagenlänge könnten einen besseren Aufschluss über die beteiligten Moden geben.

Zur Untersuchung der Oskulationen werden aus diesem Grund synthetische Seismogramme betrachtet, die ein derartiges Verhalten aufweisen.

Als ein Kriterium zum Auftreten von Oskulationen wird von (Lomnitz et al. 2002) ein bestimmtes Verhältnis der P- und S- Wellengeschwindigkeiten in benachbarten Schichten benannt. Danach muss das Verhältnis der P - zur S - Wellengeschwindigkeit in den benachbarten Schichten die Größenordnung $0.91v_s < v_p$ erreichen. Zur Untersuchung des Phänomens wird in Abb.(3-13) ein Modell mit folgenden Kennwerten betrachtet: $h = 5, 3[m]$, $c_S = 400, 300, 450[m/s]$, $c_P = 700, 500, 800[m/s]$. Das Wellenfeld wurde mittels Normal-Modensummutation berechnet, als Quellspektrum diente ein Ricker-Impuls 3.Ordnung. Die Abb.(3-13a) spiegelt die theoretischen Dispersi-

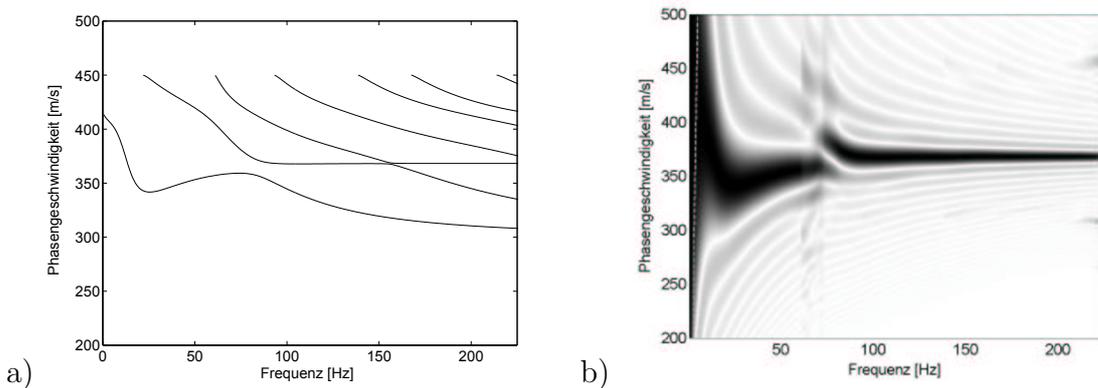


Abbildung 3-13: Dispersion einer Zweifachschichtung mit sichtbar auftretender Oskulation zwischen den höheren Moden. Die anscheinend auftretenden beiden Moden in der b) Wellenfeld-Transformation setzten sich aus unterschiedlichen Moden des freien Systems a) zusammen.

onskurven des freien Systems wieder. In Abb.(3-13b) sind die angeregten Moden des synthetischen Wellenfeldes nach der Transformation des Wellenfeldes dargestellt.

Deutlich bildet sich der Energieübergang zwischen dem zweiten und dritten Mode am Oskulationspunkt aus. Der Energieübergang zwischen den beiden Moden geschieht nahezu vollständig, so dass die Maximalwerte wie ein Mode aussehen. In einer experimentellen Auswertung würde eine Zuordnung zu höheren Moden scheitern. Betrachtet man die Gruppengeschwindigkeiten und die Anregungsfaktoren den ersten drei Moden, so wird deutlich, wie die Energie von Mode zu Mode „springt“ (Abb.3-14). Zusätzlich läuft die Energie auf den fast horizontalen Abschnitten der Moden, so dass keine Dispersion (Frequenzabhängigkeit) im höherfrequenten Bereich vorhanden ist. In den untersuchten Modellen wurde eine zum Teil große Annäherung

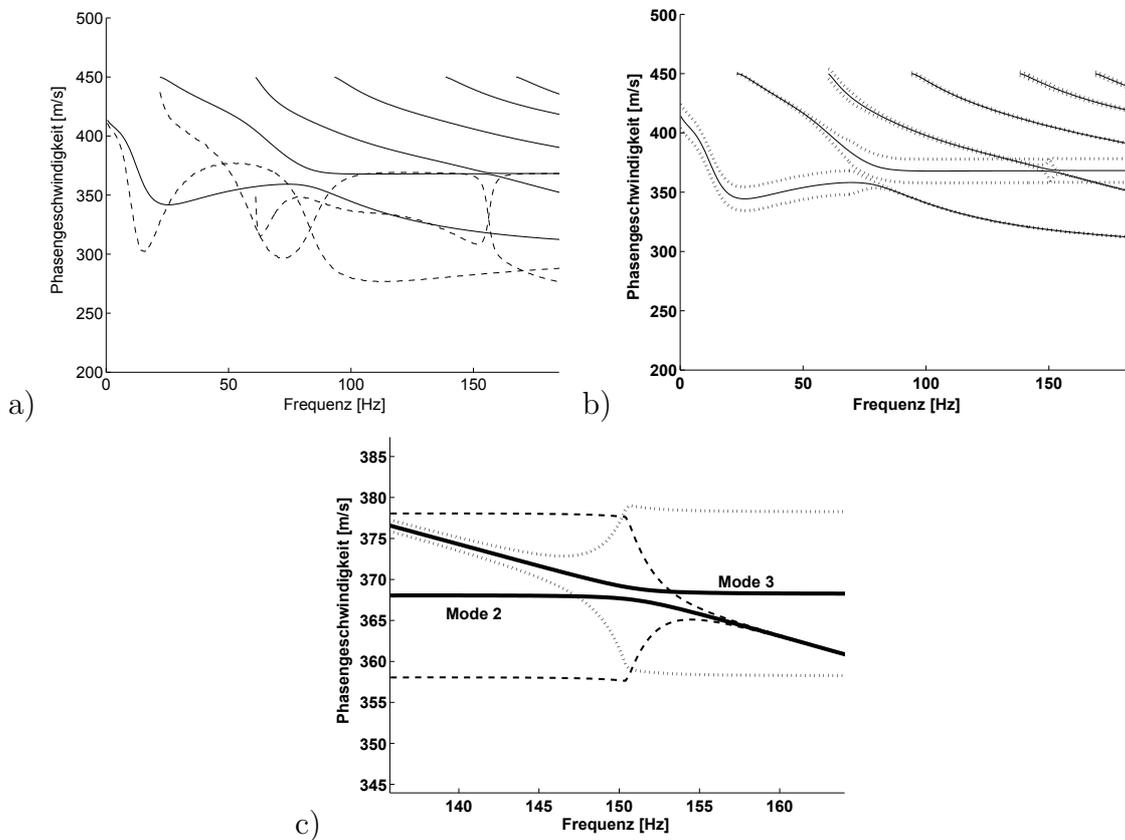


Abbildung 3-14: a) Gruppengeschwindigkeit (unterbrochene Linie) und Phasengeschwindigkeit (durchgezogene Linie) der einzelnen Moden, b) Bereiche der angeregten Moden (punktierte Linien) und c) der Anregungs-Übergang an dem Oskulationspunkt (Detaildarstellung von Abb.3-14b).

der Modenzweige bestimmt, aber ein Überschneiden der Äste konnte bei einer Annahme eines unterlagerten Halbraums nicht beobachtet werden.

Die Abb.(3-14a) zeigt deutlich, dass der Extremwert der jeweiligen Gruppengeschwindigkeitskurven auf dem Niveau des Plateaus der Dispersionskurven entlang läuft. Damit wird sich die Wellengruppe mit geringer bzw. keiner Dispersion entlang dieser Linie ausbreiten und entspricht damit dem Verhalten einer Körperwelle.

Die Anregung der Moden verhält sich über weite Frequenzbereiche konform zu den bezeichneten Maximalwerten der Gruppengeschwindigkeitskurven. Im Vergleich mit den Geschwindigkeiten der Schichten bzw. den Ausbreitungsgeschwindigkeiten der üblichen Wellenarten, wie P-, S- und Oberflächenwellen, kann die Geschwindigkeit der Wellengruppe, die dieser Gruppengeschwindigkeit entspricht, einer Rayleighwelle -dispersionsfrei- in der oberen Schicht zugeordnet werden.

Problematisch bei einem derartigen Anregungsverlauf in dem Spektrum ist eine Separation auftretender Moden (siehe auch Abb.3-13b) in der vorgestellten Inversion von Bodenparametern. Ist zusätzlich noch eine Begrenzung der Auslagenlänge auf nur wenige Meter möglich, wird die Unschärfe des transformierten Wellenfeldes größer. Mit dem Zusammenfallen beider Faktoren können die Moden bzw. der Übergang zwischen ihnen nicht mehr getrennt werden.

An diesem Punkt versagt die vorgestellte Inversion basierend auf Normalmoden, da eine Fehlinterpretation der Modenzuordnung und der resultierenden Schichten die Folge sein würde. Um dennoch zu einem Resultat zu gelangen, ist es notwendig, das Wellenfeld insgesamt zu invertieren. Nach Meinung des Autors wird es einfacher sein, eine Inversion im Bildbereich durchzuführen. Für das Umgehen der Inversion eines kompletten, komplexen Spektrums (Forbriger 2003a), wird vom Autor eine Amplitudeninversion der relevanten Bereiche innerhalb des Dispersions-Spektrums vorgeschlagen. Mit den Amplituden ist gleichzeitig die Form und der Anregungsbereich des jeweiligen Wellenfeldes gegeben, so dass eine Zuordnung zu den Moden entfällt und nur Bereiche des Feldes invertiert werden.

Nachteilig bei einer derartigen Vorgehensweise innerhalb einer linearisierten Inversionsmethode ist die nun notwendige numerische Berechnung der partiellen Ableitungen, die wahrscheinlich größere Berechnungszeit und der weitaus größere Speicheraufwand während der Inversion.

Zusammenfassung des Kapitels 3

In Kapitel 3 wurden neben den üblichen geotechnischen Methoden zur Dispersionsermittlung zwischen zwei Aufnehmern, erweiterte, auf der Auswertung eines gesamten Wellenfeldes beruhende Methoden vorgestellt. Der Vorteil dieser Verfahren ist eine weitestgehend problemlose Ermittlung auftretender Moden in einem Wellenfeld. Nachteilig ist dagegen der hohe Messaufwand und die erforderliche Auslagenlänge. Die vorgestellten Methoden der Wellenfeldanalyse sind die Grundlage für die vorgestellte Inversion multipler Moden. Ausgehend von dem anfänglich genutzten Gauss-Newton-Verfahren wurde auf ein gedämpftes, gewichtetes Gradientenverfahren der nichtlinearen Optimierung als mathematisches Modell der Inversion übergegangen. Die Vorteile dieses Verfahrens sind:

- a) relativ kurze Berechnungszeiten,

- b) eine schnelle Konvergenz in der Nähe des Minimums und
- c) ein numerisch stabiles Verfahren mit überschaubarem Programmieraufwand.

Ungünstig wirkt sich die ausschließlich lokale Suche nach dem Modell mit der geringsten Fehlerabweichung aus, was bei der Annahme von falschen Startparametern zu einem falschen Ergebnis führen kann. Mit zusätzlich vorhandenen Standortinformationen und dem Start der Iteration in der Nähe des möglichen Bodenprofils kann der Nachteil des lokalen Suchbereiches kompensiert werden. Letztlich wurden mit den Untersuchungen auftretender Oskulationspunkte⁸ in Dispersionsspektren die Grenzen des vorgeschlagenen Verfahrens aufgezeigt.

⁸Zur Erläuterung des Begriffs *Oskulationspunkt* wird auf den Anfang des Kapitels 3.2.3 verwiesen.

Kapitel 4

Theoretische Fallstudien / Anwendung auf Felddaten

In diesem Kapitel werden verschiedene Fallbeispiele eines linear elastischen, geschichteten Mediums theoretisch untersucht. Das Ziel der Untersuchungen sind tendenzielle Aussagen zur Erschütterungsausbreitung, zum Verhalten von Wellen in geschichteten Böden und zu Interpretationshilfen für experimentelle Auswertungen. Der besondere Schwerpunkt liegt dabei auf den in dieser Arbeit betrachteten Oberflächenwellen. Die verwendeten Grundlagen zur Berechnung und Auswertung sind bereits in den Kapiteln 2 und 3 dargestellt. Die Analyse erfolgt an Steifigkeitsprofilen, die die Charakteristiken normal dispersiver und invers/anormal dispersiver Medien wiedergeben. Die strukturellen Unterschiede dieser beiden Dispersionsarten beeinflussen die Art der Wellenausbreitung und Standortidentifizierung signifikant. Die Übertragung der Wellenenergie kann in geschichteten Böden in sehr differenzierter Form erfolgen. Die Aussagen zu den theoretischen Untersuchungen basieren auf der Annahme, dass sowohl die Quelle als auch der Aufnehmer auf dem geschichteten Halbraum positioniert sind.

Ausgehend vom erarbeiteten theoretischen Modell und dem Inversionsverfahren werden unterschiedliche Standorte untersucht. Voraussetzung für eine erfolgreiche Inversion der seismischen Daten ist die Transformation des Wellenfeldes in eine Darstellungsform (Dispersionsspektren), die eine Inversion erst ermöglicht. Eine entsprechende Vorkenntnis zu auftretenden Phänomenen in diesen Spektren und dem Erkennen vorhandener Moden ist unabdingbar.

4.1 Eigenschaften des Wellentransportes

4.1.1 Normal dispersive Böden (normal geschichtete Böden)

Normal dispersive Profile zeichnen sich durch eine zunehmende Steifigkeit mit zunehmender Tiefe z aus. Die betrachteten Modelle und ihre Parameter sind im Anhang A5 angegeben. Nachfolgend werden die Eigenschaften der gewählten Profile durch eine synthetische Berechnung näher untersucht. Als seismische Quelle wurde der einfache Fall einer vertikalen Punktlast auf der Oberfläche angenommen. Das Quellspektrum ist durch die Eingangswerte der Impulsform definiert. In der Regel wurde als Quellspektrum ein Ricker-Impuls genutzt.

4.1.1.1 Geometrische Dämpfung

Mit der geometrischen Dämpfung wird die Amplitudenabnahme beschrieben, die aufgrund der Vergrößerung der räumlichen Wellenfront entsteht. Die dem Material innewohnende Dämpfung wird nicht berücksichtigt. Beim Vergleich der Amplitudenabnahmen zwischen den betrachteten Modellen 1 bis 39 und den in der Literatur angegebenen Näherungen aus experimentellen bzw. numerischen Untersuchungen, z.B. (Gutowski & Dym 1976) und (Rücker 1989), ist eine relativ gute Übereinstimmung zu erkennen. Der in den theoretischen Berechnungen geringere Abfall der Amplituden gegenüber den Messungen nach (Gutowski & Dym 1976) hat die Ursache in verschiedenen Faktoren, z.B. auf die nicht berücksichtigte, aber tatsächlich vorhandene Materialdämpfung. Die in Abb.(4-1) größeren Amplitudenabnahmen gegenüber der geometrischen Halbraumdämpfung (Abb.4-1f) sind auf eine vorhandene Dispersion aufgrund der Bodenschichten zurückzuführen. Ab einer bestimmten Entfernung entspricht die Amplitudenabnahme im Funktionsverlauf der Abnahmefunktion des Halbraums $u \sim 1/\sqrt{r}$ mit der Entfernung r .

Die in Abb.(4-1) dargestellten Bereiche entsprechen den in Anhang A.5 zusammengestellten Bodenprofilen aus den Bereichen 1 bis 5 für normal dispersive Böden. Die Zusammenfassung der Bereiche erfolgte nach Wahl der Schichtenanzahl und der auftretenden Wellengeschwindigkeiten. Der Bereich 1 entspricht einer Einfachschichtung mit Wellengeschwindigkeit der *Schicht/Halbraum* von $c_S = 100/400[m/s]$ bzw. $100/1000[m/s]$ sowie einer Variation der Schichtmächtigkeit h von 5 bis 50[m]. Im Bereich 2 wurde bei gleichbleibender Variation von h die Wellengeschwindigkeit der Schicht erhöht ($c_S = 300/1000[m/s]$). Innerhalb des Bereiches 3 wurde zum einen die Poissonzahl der Schicht von $\nu = 0.20\dots 0.45$ in dem Profil $c_S = 100/400[m/s]$ mit $h = 20[m]$ variiert, zum anderen erfolgte die Modellierung des homogenen Halbraums mit der analytischen Lösung nach Kapitel 2.5.2 sowie über die Annahme einer sehr großen Höhe der Einfachschichtung. Die Kennwerte des Halbraums wurden zum Vergleich mit den Einfachschichtungen auf deren Schicht bzw. Halbraumkennwerte gesetzt. Der Bereich 4 umfasst die Modelle für die Untersuchungen zu Zweifach-

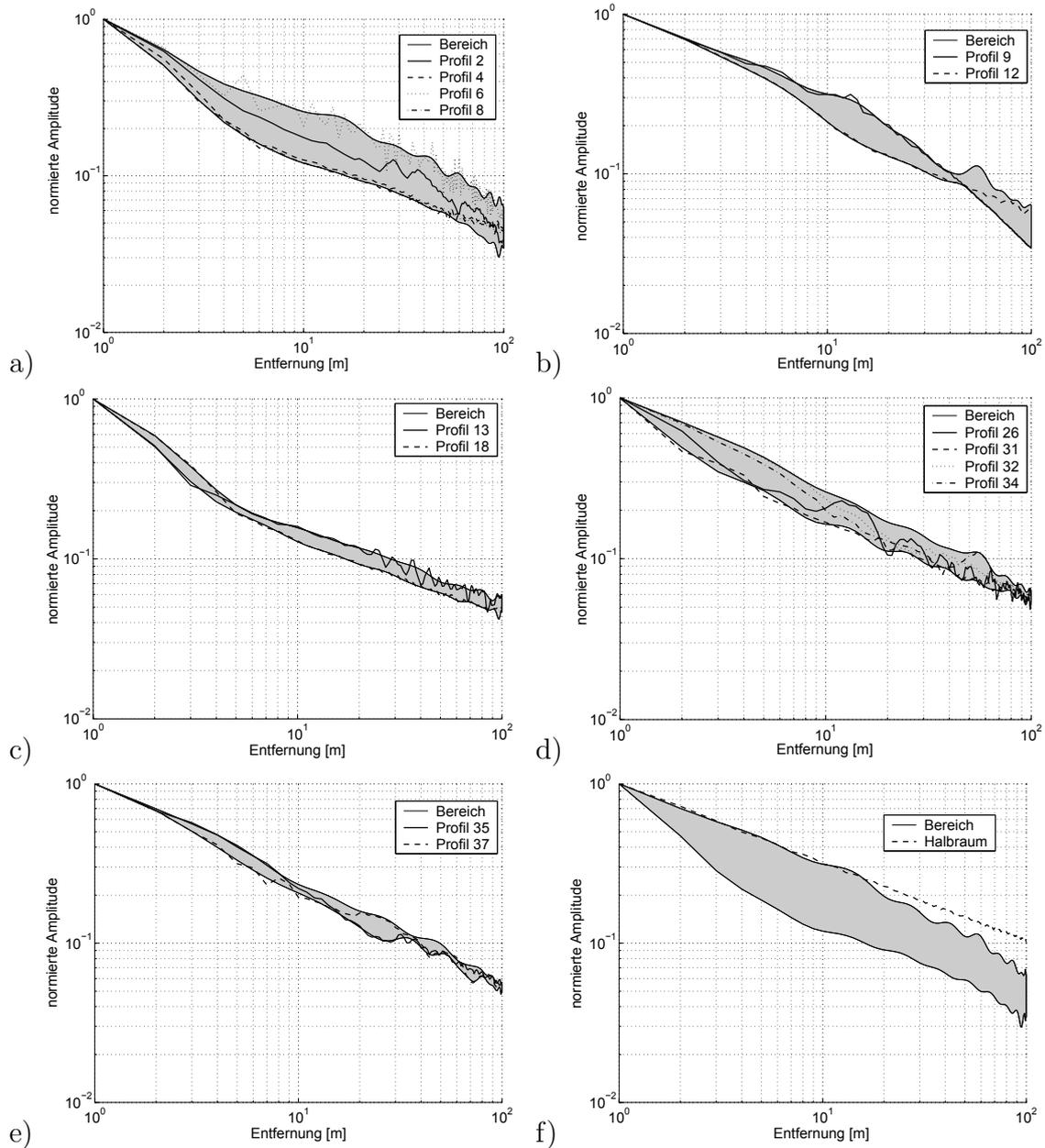


Abbildung 4-1: Einhüllende der Abnahmefunktionen für die normal dispersiven Schichtungen: a) Bereich 1, b) Bereich 2, c) Bereich 3, d) Bereich 4, e) Bereich 5 und f) Zusammenstellung aller Bereiche.

schichtungen und Bereich 5 die Modelle der Dreifach- und Mehrfachschichtungen.

In Abb.(4-1) erfolgte die Normierung der entfernungsabhängigen Amplituden zum auftretenden Maximalwert des jeweilig betrachteten Bodenprofils. Neben den Abklingfunktionen ist zu beachten, dass die Größe der Oberflächen-Verschiebungsamplituden stark von den Steifigkeitswerten der Schichten des betrachteten Modells abhängig sind. Eine weichere Schicht wird immer größere Amplituden an dem betrachteten Punkt gegenüber einer steiferen Schicht erzeugen. Damit können die Abnahmebereiche in Abb.(4-1) nur als mögliche ungünstige Prognosewerte bei bekannter Quellamplitude dienen. In der Regel kommen zu der betrachteten geometrischen Dämpfung weitere Dämpfungsfaktoren hinzu, so dass die Amplitude in der Realität geringere Werte aufweist.

4.1.1.2 Verhalten der Green'schen Funktion

Bei den Green'schen Funktionen der untersuchten Profile ist ein Bereich vorhanden, innerhalb dessen die Verschiebungsamplituden stark verringert sind. Für diese Untersuchungen wird vorrangig das frequenzabhängige Verhalten der Green'schen Funktionen abgebildet. Die entfernungsabhängigen Eigenschaften können besser mit den oben untersuchten geometrischen Dämpfung beschrieben werden.

Dieser amplitudenverringerte Bereich hat für die in Abb.(4-2) betrachteten Einfachschichtungen eine Ausdehnung bis zum Wert der dominanten Standortfrequenz. Die Standortfrequenz für Einfachschichtungen wird durch die Gleichung $f = \frac{c_s}{4h}$ beschrieben. Die Ergebnisse von (Rücker 1989), mit der Angabe von $f = \frac{c_s}{2h}$ für die Resonanzfrequenz bzw. der Amplitudenverhältnisse, können nicht bestätigt werden. Beispielhaft für die Annahme einer Einfachschichtung werden in Abb.(4-2) die Green'schen Funktionen der Profile 6 und 9 betrachtet. Die in der Abb.(4-2) dar-

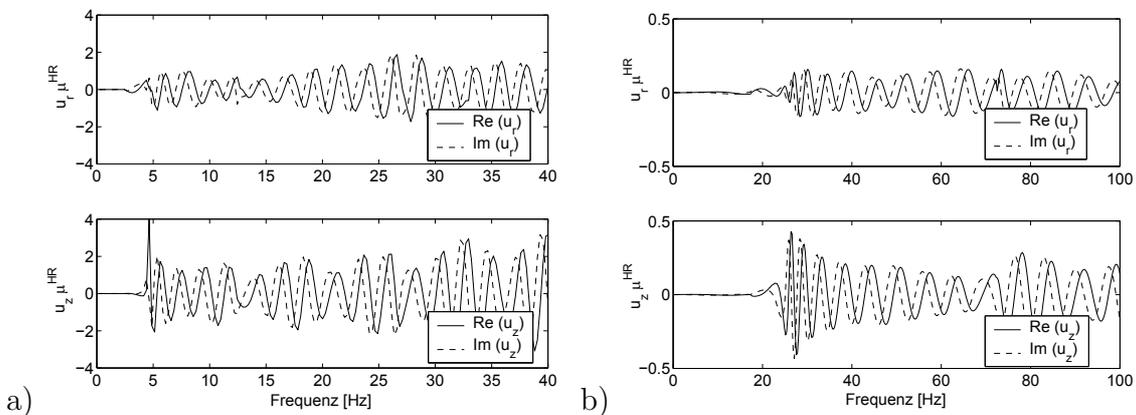


Abbildung 4-2: Darstellung der Green'schen Funktion von a) Profil 6 und b) Profil 9.

gestellten Green'schen Funktionen wurden auf Basis der Gl.(2.3) als Modale Summation berechnet. Eine Darstellung der Green'schen Funktionen unter Nutzung der Wellenzahl-Integration mit der darin notwendigen Materialdämpfung zeigt ein gleiches, aber *verwischtes* Verhalten der Funktion am Punkt der dominanten Standortfrequenz. Durch die vorhandene Materialdämpfung wird die klare Abgrenzung von Bereichen unterschiedlicher Amplituden schwieriger.

Zur Verringerung der mitunter starken Impedanzunterschiede in der Modellierung zwischen Schicht und Halbraum wurde das in Abb.(4-2a) untersuchte Profil mit einer Abstufung der Wellengeschwindigkeit im Übergangsbereich von der Schichtung zum Halbraum versehen. Damit wird die Einfachschichtung der Abb.(4-2a) in ein mehrschichtiges Modell gleicher Gesamttiefe überführt. Die Untersuchung der dominanten Standortfrequenz erfolgt nun mit Hilfe der Transferfunktion¹ dieser Schichten (siehe Abb.4-3). Im Vergleich der dominanten Standortfrequenzen zwischen den

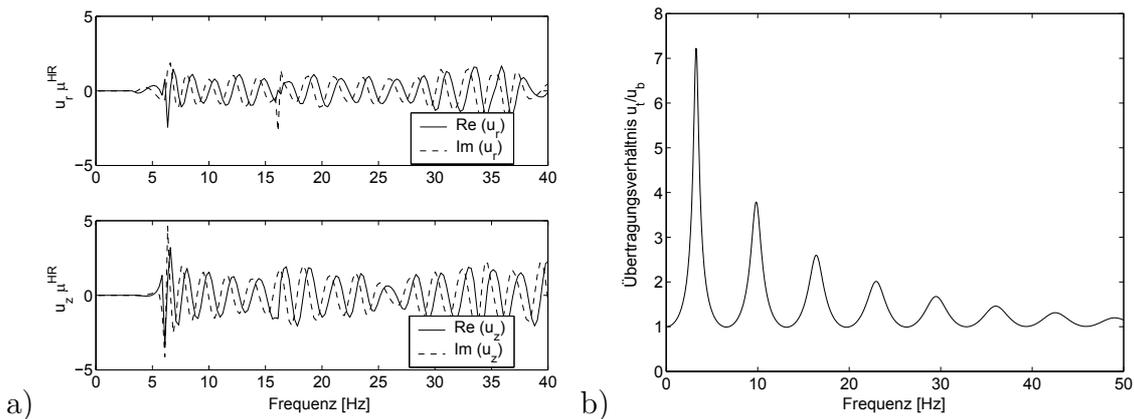


Abbildung 4-3: Darstellung der Green'schen Funktion a) und der Transferfunktion b) von Profil 38.

Darstellungen der Green'schen Funktionen in Abb.(4-3) und den Untersuchungen in Abb.(4-2) ist ein ähnliches Verhalten vorhanden. In analoger Art und Weise wurde nachfolgend das Verhalten beliebiger Mehrschichtungen in Abb.(4-4) untersucht. Beispielhaft sind die Green'schen Funktionen und die Transferfunktionen der Profile 35 und 36 abgebildet. Bei allen Modellen ist eine ähnliche Tendenz im Verhalten der Green'schen Funktionen zur dominanten Standortfrequenz zu verzeichnen. Im Fall der Mehrschichtung ist naturgemäß die Lage der dominanten Standortfrequenz innerhalb der Transferfunktionen nicht so deutlich ausgeprägt wie im Fall von Einfachschichtungen, doch auch hier ist die beschriebene Tendenz vorhanden.

¹Die Terme u_t und u_b bzw. u_0 entsprechen der Verschiebung an der Oberfläche u_t und der Verschiebung an der Halbraumgrenze u_b bzw. einer Kontrollbewegung u_0 auf Halbraum. Die entsprechenden Verhältnisse berücksichtigen oder verhindern eine Abstrahlung in den Halbraum. Die Transferfunktion einer Mehrschichtung damit definiert als u_t / u_0 bzw. u_t / u_b .

Zur deutlicheren Darstellung der dominanten Standortfrequenz wurde in den Abbildungen der Transferfunktion mitunter der Fall der starr gelagerten Schicht u_t / u_b herangezogen. Bei dieser Berechnung ist die Energieabstrahlung in den Halbraum verhindert.

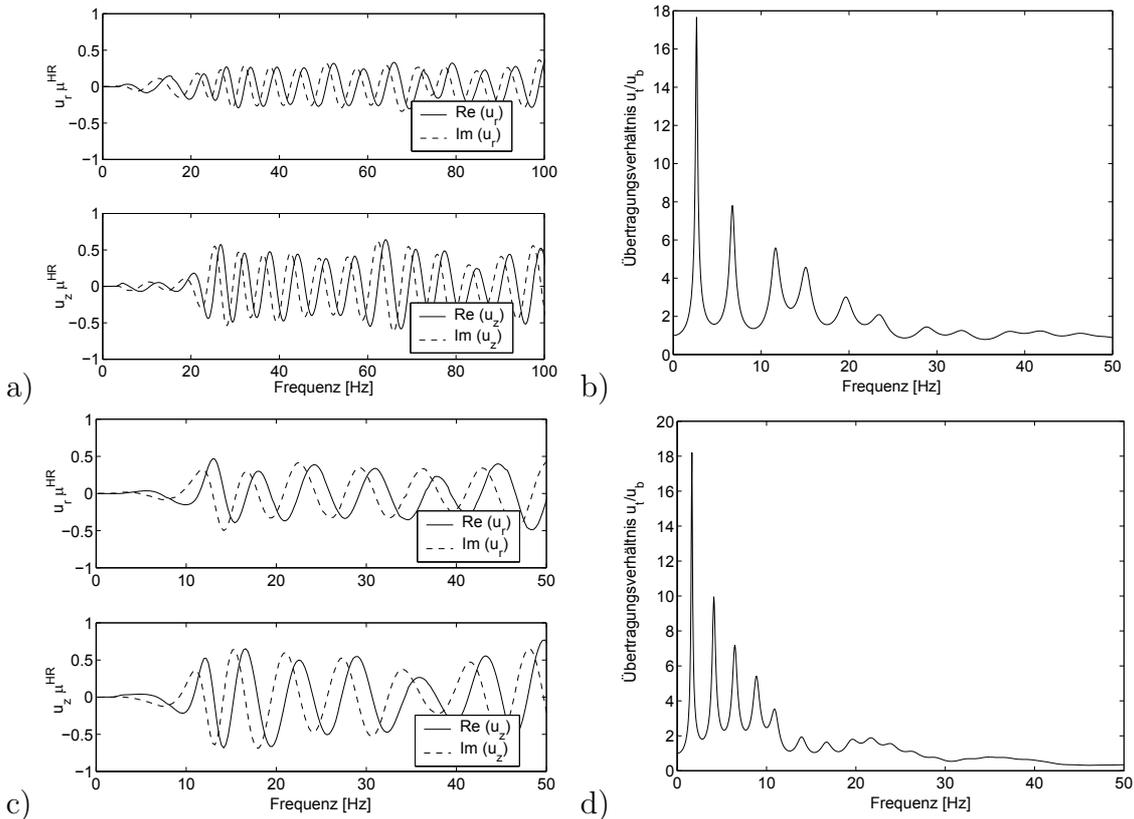


Abbildung 4-4: Darstellung der Green'schen Funktion von a) Profil 35, c) Profil 36 und der Transferfunktion von b) Profil 35 und d) Profil 36.

Die Ursache für das Auftreten von Bereichen verminderter Amplituden in den Green'schen Funktionen wird aufgrund der Untersuchung von Profil 20 in den Abb.(4-5) und Abb.(4-6) deutlich. Darin sind die Funktionen der Einfachschichtung (Profil 20) zusammen mit der eines homogenen Halbraums (Profil 19, Profil 23) bzw. mit der einer Einfachschichtung (Profil 22, Profil 24) sehr großer Schichtstärke abgebildet. Die Schlussfolgerung aus der gemeinsamen Darstellung in Abb.(4-5) und Abb.(4-6) ist, dass das Verhalten der Green'schen Funktion unterhalb des Frequenzpunktes $f = \frac{c_S}{4h}$ denen eines homogenen Halbraums mit den Kennwerten des überlagerten Halbraums des Schichtungsprofils entspricht. Oberhalb dieses Frequenzpunktes tendiert das Verhalten der Green'schen Funktion zu einem Halbraum mit den Kennwerten der aufliegenden Schicht in dem betrachteten Einschichtsystem². Diese Er-

²Das Verhalten einer Einfachschichtung unter Variation der Schichtstärke und der Vergleich zum homogenen Halbraum wird ebenfalls in der Arbeit von (Hirschauer 2001) aufgeführt.

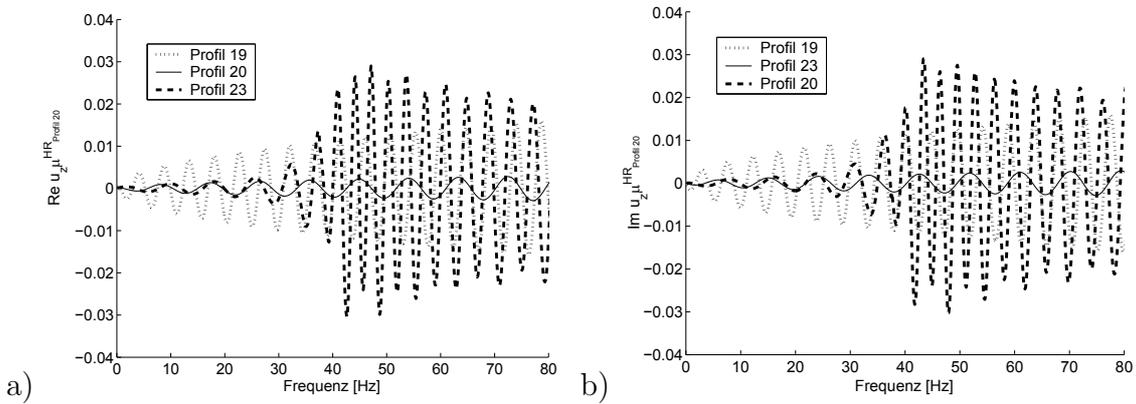


Abbildung 4-5: Darstellung der a) normierten Realteile der Green'schen Funktion der Profile 19, 20 und 23 und b) normierten Imaginärteile der Green'schen Funktion der Profile 19, 20 und 23.

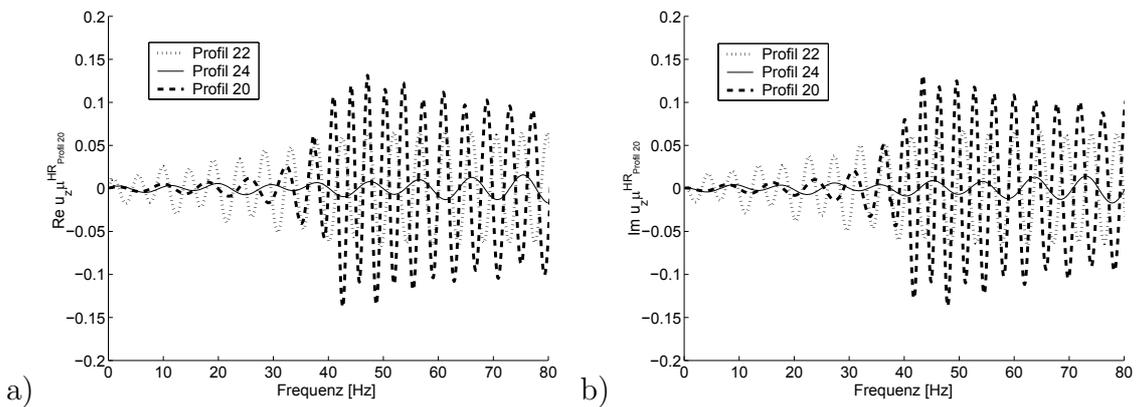


Abbildung 4-6: Darstellung der a) normierten Realteile der Green'schen Funktion der Profile 20, 22 und 24 und b) normierten Imaginärteile der Green'schen Funktion der Profile 20, 22 und 24.

ergebnisse der Einfeldschichtungen (Profil 20) können auch für beliebig geschichtete normal dispersive Böden bestätigt werden. Die Green'schen Funktion in Abb.(4-7) zeigt, dass das beispielhaft untersuchte, mehrfach geschichtete Modell (Profil 35) einen abschnittsweise analogen Verlauf zur Halbraumlösung aufweist. Bei einer Frequenz unterhalb der Standortfrequenz in Abb.(4-7) hat die Green'sche Funktion der Mehrschichtung (Profil 35) und des simulierten Halbraums (Profil 25) einen gleichen Funktionsverlauf. Oberhalb der Standortfrequenz wird das Verhalten der aufliegenden Schicht im Profil 35 dominant. Die Transferfunktion des Profils 35 zur Bestimmung der dominanten Standortfrequenz ist in Abb.(4-4) abgebildet. Aus diesem Amplitudensprung innerhalb der Green'schen Funktionen folgt, dass Amplituden für eine harmonische Anregung unterhalb dieser Frequenz stark vermindert sind. In diesem Zusammenhang bekommt die Erkundung der dominanten Standortfre-

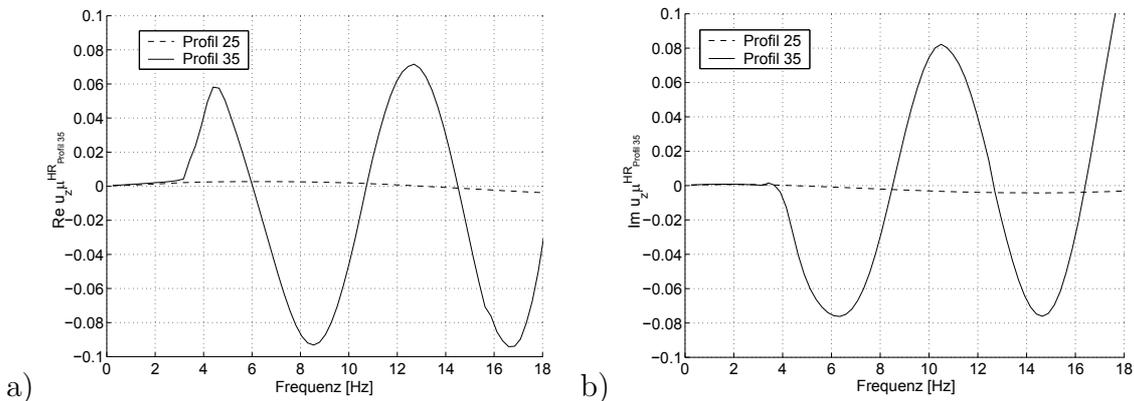


Abbildung 4-7: Darstellung der a) normierten Realteile der Green'schen Funktion der Profile 25 und 35 und b) normierten Imaginärteile der Green'schen Funktion der Profile 25 und 35.

quenz mittels des H/V-Verfahrens³ auch für übliche praktische Belange einen größeren Stellenwert. Nach Aussage vielfältiger Literatur wurde dieses Verfahren vorrangig im Rahmen des Erdbebeningenieurwesens eingesetzt. Ist es möglich, die Standortfrequenz⁴ eines Bodens experimentell zu ermitteln, könnte eine Grenze für die Verringerung der Erschütterungsausbreitung angegeben werden.

4.1.1.3 Energietransport in den Schichten

Zum besseren Verständnis des Dispersionsverhaltens in anstehenden Böden werden nachfolgend der horizontale Energietransport und das Bewegungsverhalten in den Schichten aufgrund einer Anregung eines theoretischen Profils näher untersucht. Diese Erkenntnisse liefern zusätzlich eine Begründung für das oben beschriebene Verhalten der Green'schen Funktionen.

Die in den Green'schen Funktionen deutlich unterschiedlichen Frequenzbereiche in den Amplitudendarstellungen liegen darin begründet, dass unterhalb der Standortfrequenz die Energie des Oberflächenwellenfeldes vorrangig innerhalb des überlagerten Halbraums geführt wird. In der Regel ist dafür der Grundmode verantwortlich. Mit dem allgemein größeren Schubmodul des überlagerten homogenen Halbraums ergeben sich entsprechend kleinere Verformungskennwerte in diesem Frequenzbereich. Nachfolgend wird für eine eingehendere Untersuchung das Bodenprofil 9 (Einfach-

³Das H/V-Verfahren ist auch als *Nakamura Verfahren* bekannt. Die Arbeit von (Nakamura 1989) löste in dem letzten Jahrzehnt einen regelrechten Boom zu Untersuchungen mittels dieser empirischen Analyse aus. Eine entgeltliche theoretische Klärung dieses Verfahrens steht noch aus (Bard & Lachet 1994).

⁴Die Standortfrequenz einer Bodenschicht ist an der Stelle des Maximalwertes der Übertragungsfunktion von dem Schichtpaket definiert. Für eine Einfachschichtung berechnet sich die Stelle zu:
 $f = \frac{c_s}{4h}$.

schichtung) und das Profil 35 (Mehrfachschichtung) genutzt. Durch die Analyse dieser Profile lassen sich prinzipielle Aussagen für eine normal dispersive Schichtung treffen.

Für die Berechnung des Energietransportes wird in der Regel die über die vertikale Ebene definierte Energiestromdichte in einem Kontinuum nach Gleichung $S = -\frac{i\omega}{2} \int_0^\infty \text{Re} \left(\sigma_{i1} \dot{u}_i \right) dz$ benutzt (Malischewsky 1973). In den folgenden Untersuchungen wird ein anderer, numerisch stabilerer Weg nach (Malischewsky 1973) und (Alsop 1966) über die Gleichung $S = 2 \cdot T \cdot U$ gewählt. Der Term U ist dabei die Gruppengeschwindigkeit und T entspricht der schon in Gl.(2.107) definierten kinetischen Energie $T = \frac{\omega^2}{4} \int_0^\infty \rho u_i u_i^* dz$. Mit der Nutzung des Energieintegrals kann T geschrieben werden als $T = \frac{\omega^2}{2} I_1$ bzw. der Energietransport S als $S = \omega^2 U I_1$. Der Berechnungsaufwand reduziert sich damit auf die Bestimmung der kinetischen Energie und der Gruppengeschwindigkeit. In der Untersuchung des Energieflusses von einzelnen Moden innerhalb der Bodenschichtung hatte die Gruppengeschwindigkeit kaum einen Einfluss auf die Darstellungen. Näherungsweise wurde deshalb in den Berechnungen zum Energiefluss die Gleichung $S = \omega^2 I_1$ benutzt. Die Normierung erfolgte entsprechend den Gleichungen (4.1), worin $S_{i,j}$ die einzelnen Energieraten innerhalb der Schichtung j und des Modes i bzw. $S_{i,ges}$ die Energierate der gesamten vertikalen Bodensäule darstellt.

$$\text{norm } S_{i,j} = \frac{S_{i,j}}{S_{i,ges}} \quad \text{mit } j = 1, 2, \dots, N+1$$

$$S_{i,j} = \frac{\omega^2}{2} \int_d^{d_{j+1}} \rho(u^2 + w^2) dz, \quad S_{i,ges} = \frac{\omega^2}{2} \int_0^\infty \rho(u^2 + w^2) dz \quad (4.1)$$

In Abb.(4-8) sind die normierten Energieraten der ersten drei Moden für das Profil 9 in Bodenschicht und Halbraum aufgeführt. Es ist klar ersichtlich, dass in Abb.(4-8) ab einer bestimmten Frequenz die Energie der betrachteten Mode vom Halbraum in die erste Schicht übergeht und in höheren Frequenzbereichen dort verbleibt. Ausgehend von dieser Erkenntnis wird in einem nächsten Schritt die Energierate zwischen den unterschiedlichen Moden in der ersten Schicht und im Halbraum betrachtet. Die einzelnen Energieraten $S_{i,j}$ der Moden i in der Schicht j wurden in Abb.(4-9) mit der Summe der auftretenden Raten in der Schicht normiert, wobei M die Anzahl der Moden ist.

$$\text{norm } S_j = \frac{S_{i,j}}{\sum_{i=1}^M S_{i,j}} \quad \text{mit } i = 1, 2, \dots, M \quad (4.2)$$

In dem betrachteten Beispiel wird deutlich, dass der Fundamentalmode innerhalb der Schicht 1 über weite Frequenzbereiche der dominante Mode bezüglich des Energietransportes ist.

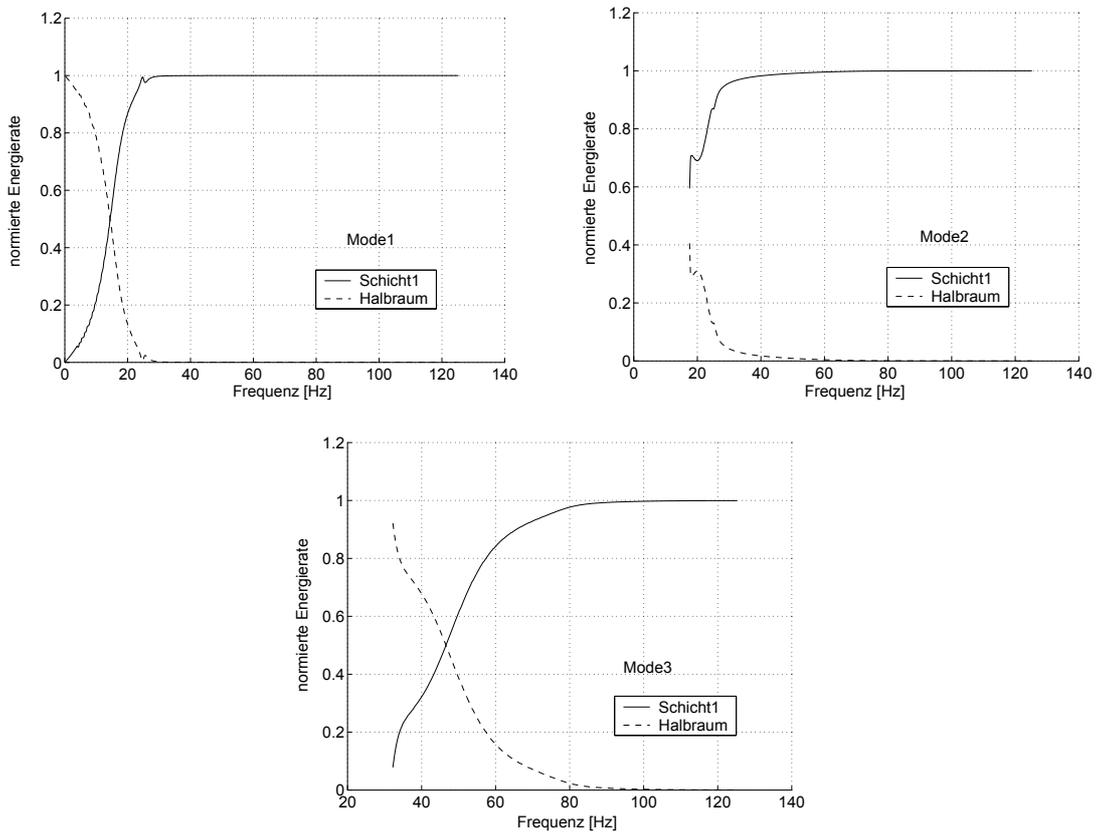


Abbildung 4-8: Normierte Energierate der Moden 1, 2 und 3 in den unterschiedlichen Schichtungsbereichen, Profil 9.

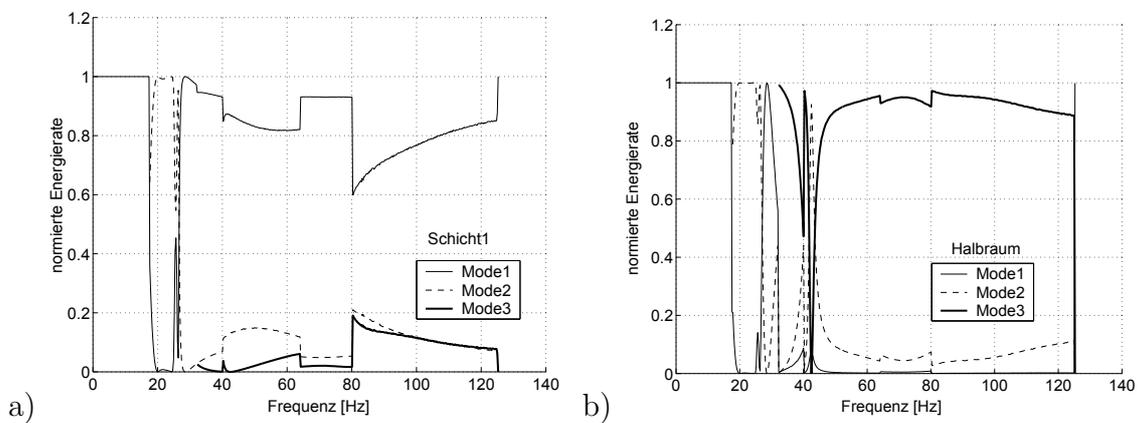


Abbildung 4-9: Normierte Energierate der unterschiedlichen Moden innerhalb a) der ersten Schicht und b) im Halbraum des Profils 9.

Verfälschend wirkt in (Abb.4-9a) der Frequenzbereich bis 20 Hz. Die Energierate in diesem Frequenzbereich ist in der Schicht um ein Vielfaches kleiner im Vergleich mit der Rate im Halbraum, so dass nur durch die alleinige Anwesenheit des Grundmodes in diesem Frequenzbereich der Wert Eins in der Normierung entsteht. Der weitaus größte Teil der Energie in diesem Frequenzbereich wird nach Abb.(4-8) im Halbraum transportiert.

Diese Aussagen sind identisch mit der Dispersionsabbildung eines synthetisch berechneten Wellenfeldes von Profil 9, Abb.(4-10). Für die Abbildung des Dispersionsverhaltens in dem Wellenfeld wurde die Wellenfeld-Transformation nach Kapitel 3.1 benutzt. Eine bessere Vergleichsmöglichkeit zwischen vorhandenen Moden und angeregten Bereichen konnte durch die Überlagerung von Abb.(4-10) mit den Moden des freien Systems erreicht werden. Zusätzlich wurden zur Erhöhung der Abbildungs- kontraste der erste und zweite Mode farblich und stilistisch von den übrigen Moden abgesetzt.

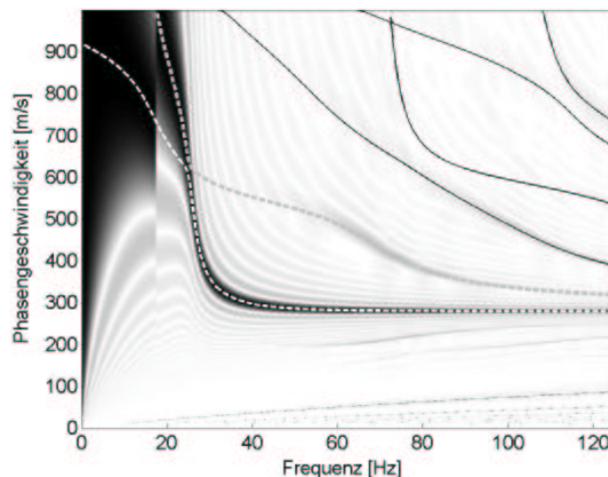


Abbildung 4-10: Dispersionsverhalten des synthetischen Wellenfeldes von Profil 9.

Wie schon in Kapitel 3.1 beschrieben, sind die angeregten Modenabschnitte in einem Wellenfeld in den Darstellungen der Dispersionsanalyse durch die maximalen Amplituden beschrieben. Somit entspricht die Abstufung der Grauskalierung in der Abb.(4-10) den angeregten Modenabschnitten. Danach ist bis auf einen Frequenzbereich bei 20 Hz der Grundmode der Hauptenergieträger. Im Frequenzbereich von 20 Hz wird abschnittsweise der zweite Mode dominant angeregt. Die auftretende Dispersion aus Abb.(4-10) ist auch in einer Momentaufnahme des Wellenfeldes über die Entfernung und Tiefe (Abb.4-11) deutlich erkennbar. Durch eine Grau-Skalierung von auftretenden Amplituden über die Tiefe wird deren Änderung in dem normierten Verschiebungsfeld dargestellt. Zum entsprechenden Zeitpunkt laufen die schnelleren

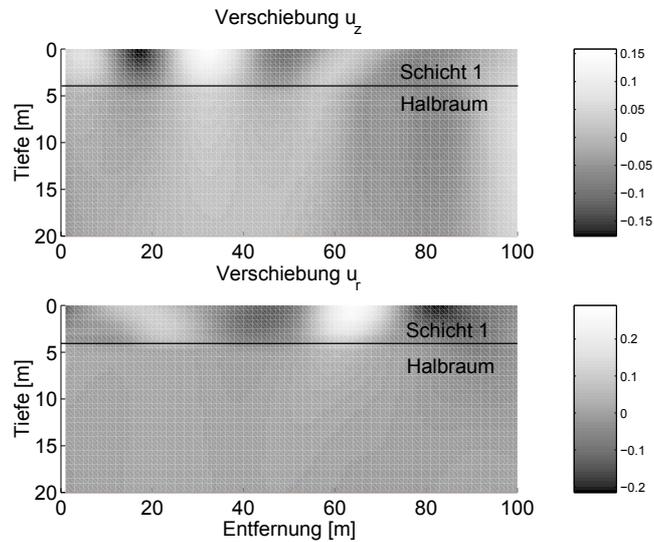


Abbildung 4-11: Normierte Verschiebung u_z und u_r über die Tiefe, Profil 9.

tiefrequenten Anteile des Wellenfeldes vor Amplituden höherer Frequenz und geringerer Geschwindigkeit. Deutlich wird diese Zuordnung in der Erfassung größerer Tiefenbereiche durch die tiefrequenten Wellenfeldanteile in Abb.(4-11). Zum Ab-

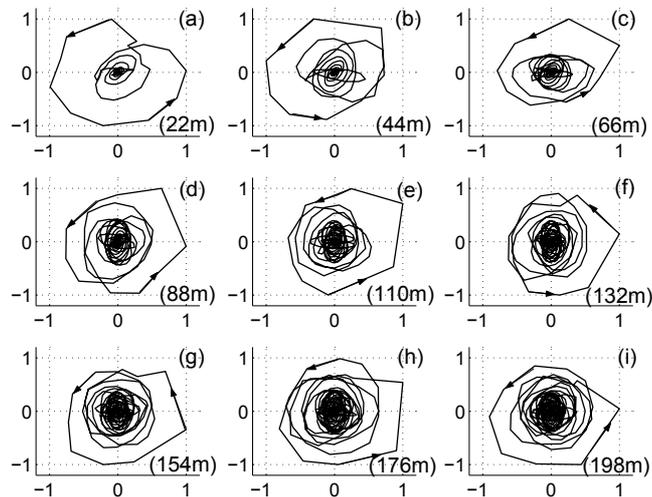


Abbildung 4-12: Ausrichtung der Partikelbewegung an der Oberfläche, Profil 9.

schluss und zur Vervollständigung der Betrachtungen einer Einfeldschichtung (Profil 9) werden die Partikelbewegungen an der Oberfläche untersucht. Dementsprechend existiert in (Abb.2-12) hauptsächlich eine, analog dem homogenen Halbraum (siehe Abb.2-17b), retrograde Partikelbewegung. In dem berechneten synthetischen Oberflächenwellenfeld sind aber auch im beginnenden Wellenzug prograde Bewegungsanteile vorhanden.

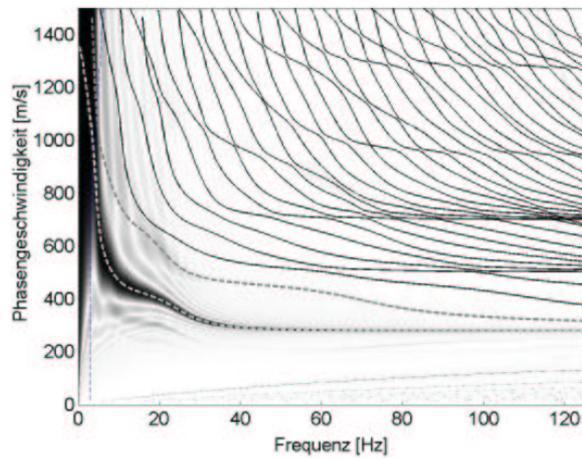


Abbildung 4-13: Dispersionsverhalten des synthetischen Wellenfeldes von Profil 35.

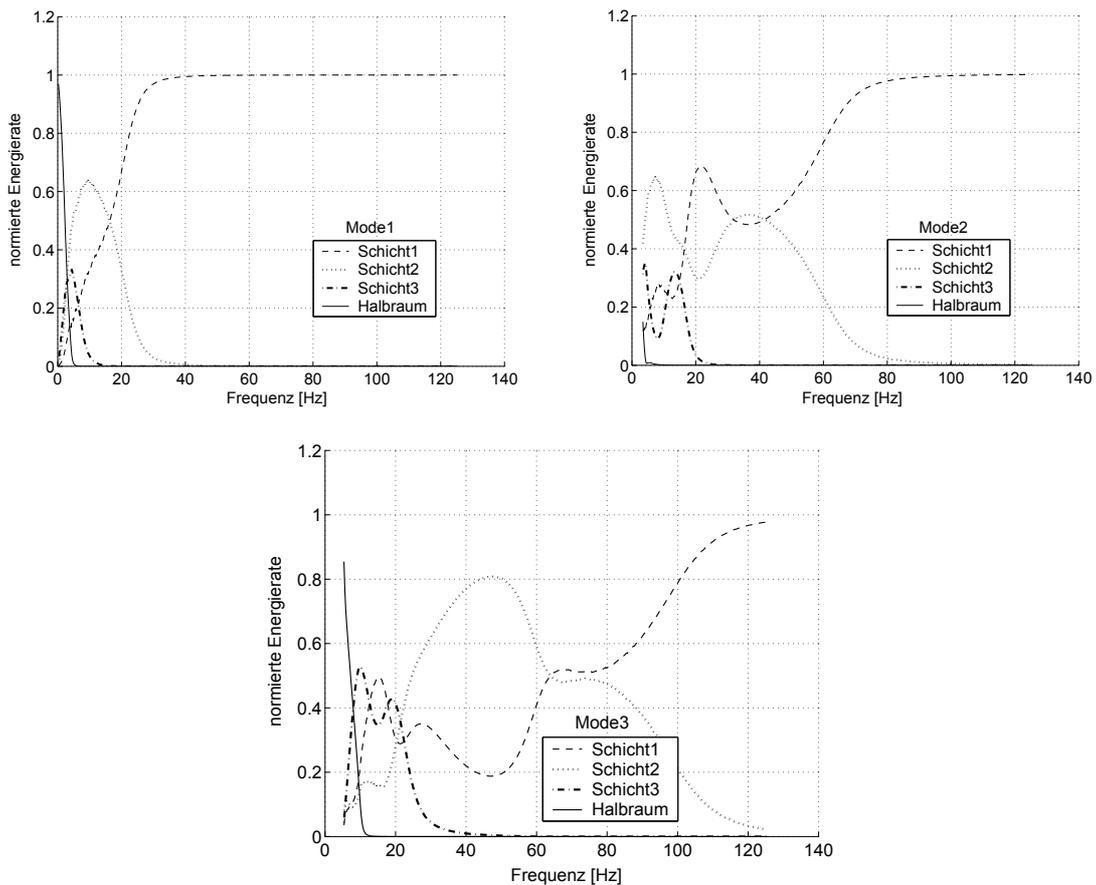


Abbildung 4-14: Normierte Energierate der Moden 1, 2 und 3 in den unterschiedlichen Schichtungsbereichen von Profil 35.

Durch die Erweiterung der vorherigen Energiebetrachtungen auf eine Mehrschichtung (Profil 35) werden analoge Untersuchungen zum Energiefluss durchgeführt.

Dabei ist ein ähnlich dominantes Verhalten in der Anregung des Grundmodes in Abb.(4-13) festzustellen. Diese Eigenschaft bleibt charakteristisch für Böden mit zunehmender Steifigkeit über die Tiefe. Analog Abb.(4-10) wurden auch in Abb.(4-13) die ersten beiden Moden stilistisch von den übrigen Moden abgesetzt. Die normierten Energieraten der Moden innerhalb der Schichten zeigen ebenfalls ein ähnliches Verhalten wie die Einzelschichtung (Abb.4-14). Die Energie des ersten Modes geht mit zunehmender Frequenz vom Halbraum in die erste Schicht über. Der Grundmode besitzt unter den Moden verhältnismäßig den weitaus größten Energieanteil (Abb.4-15).

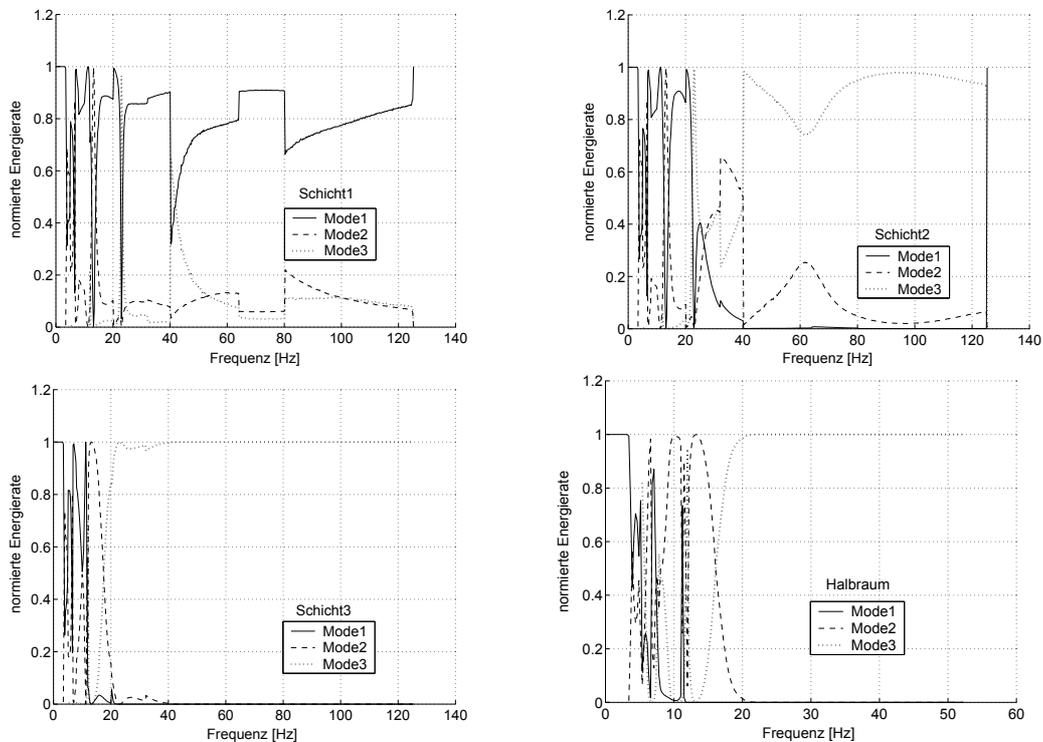


Abbildung 4-15: Normierte Energieraten der unterschiedlichen Moden innerhalb der ersten Schicht, der zweiten Schicht, der dritten Schicht und des Halbraums von Profil 35.

4.1.1.4 Starre Randbegrenzung

Mit der Vergrößerung der Impedanz zwischen Schicht und Halbraum liegt es nahe, den theoretischen Fall einer starren Lagerung und deren Auswirkungen auf die Ausbreitung von Oberflächenwellen zu betrachten. Das heißt, der Einfluss des von Schichten überlagerten Halbraumes wird vollständig vernachlässigt.

Für die Berechnung des Wellenfeldes eines geschichteten Mediums auf starrem Untergrund werden die Gleichungen des Kapitels 2 in Bezug auf die Abstrahlungsbedin-

gungen dahingehend geändert, dass eine Abstrahlung von Energie in den Halbraum nicht weiter zugelassen wird. Diese Forderung ist erfüllt, wenn die Verschiebungen an der Grenze zum Halbraum zu Null gesetzt werden (Abb.4-16). Unter Nutzung

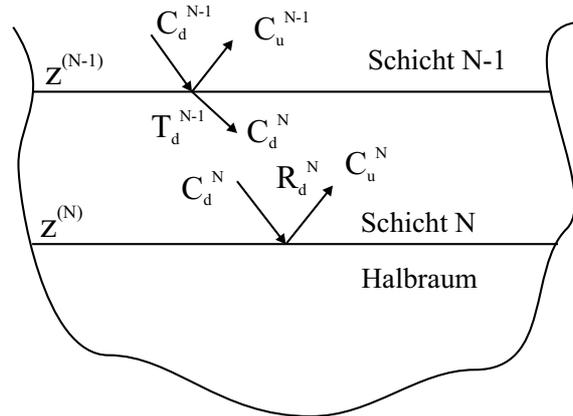


Abbildung 4-16: Darstellung der Abstrahlungsbedingungen für einen starren Halbraum.

von Gl.(2.36) ergibt sich damit an der Schichtgrenze N (Abb.2-3) folgende Verschiebungsbedingung:

$$0 = \tilde{U}_N^{H_n}(z = z^N) = E_{11}^N \Lambda_d^N(z = z^N) C_d^N + E_{12}^N \Lambda_d^N(z = z^N) C_u^N \quad (4.3)$$

Durch Umstellen der obigen Gleichung kann der allgemeine Reflexionskoeffizient $\tilde{R}_d^N = R_d^N$ unter Berücksichtigung der gegebenen Randbedingungen an der unteren Schichtgrenze bestimmt werden:

$$C_u^N = \underbrace{(-E_{12}^N)^{-1} E_{11}^N \Lambda_d^N}_{\tilde{R}_d^N} C_d^N = R_d^N C_d^N. \quad (4.4)$$

Mit den eingeführten Randbedingungen entspricht das neue System physikalisch einem idealen Wellenleiter⁵. Das wesentliche Kennzeichen eines solchen Systems ist neben der Cutoff-Frequenz von höheren Moden die vorhandene Cutoff-Frequenz der Grundmode. Unterhalb dieser Grenzfrequenz gibt es keine reellen Phasengeschwindigkeiten für die Normalmodenausbreitung. Die Grundmode strebt in Abb.(4-17) asymptotisch gegen eine Grenzfrequenz, die mit der dominanten Standortfrequenz identisch ist. In (Schmidt et al. 2001) wurde dieses Verhalten neben weiteren Methoden zur Identifizierung der ersten Standortfrequenz von theoretischen Schichtungen benutzt (siehe Abb.4-18). Durch die vorhandenen Randbedingung der Verschiebung

⁵Unter einem Wellenleiter wird eine Schicht verstanden, in der Wellen konzentriert geführt werden können. Die gesamte Energie verbleibt innerhalb der Schicht.

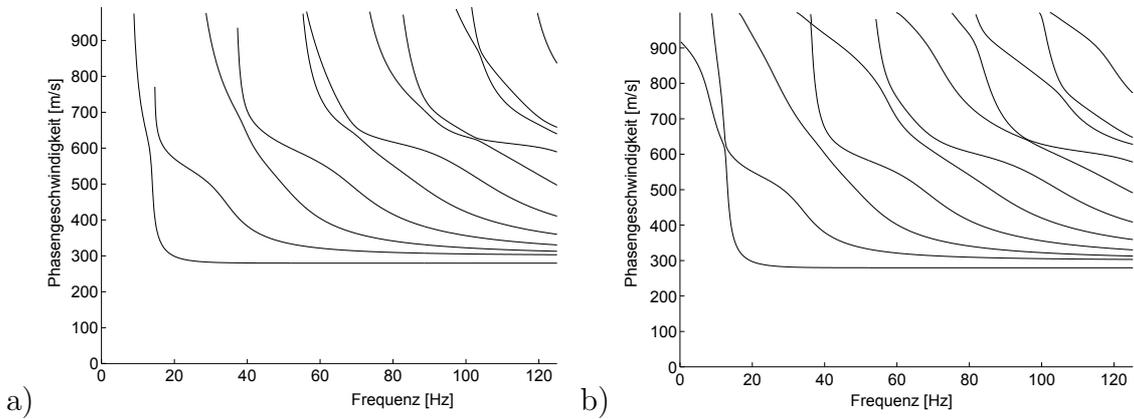


Abbildung 4-17: Dispersionsverhalten des starr gelagerten Profils 10 (a) im Vergleich zu dem Dispersionsverhalten des Profil 10 Berücksichtigung des Halbraums (b).

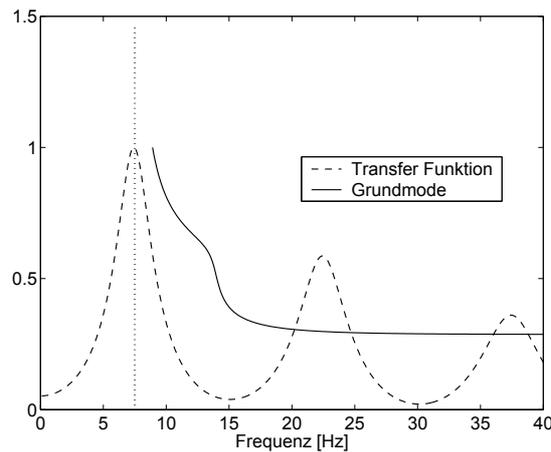


Abbildung 4-18: Gegenüberstellung von Dispersionskurve und Transfer-Funktion des Profils 10.

in Gl.(4.3) folgt die Cutoff-Frequenz des Grundmodes. Eine Normalmodenausbreitung bedingt reelle Phasengeschwindigkeiten und ist dadurch nur oberhalb dieser Frequenz möglich. Bestimmt man unter Beachtung der Randbedingungen aus Gl.(4.3) und Gl.(4.4) die Green'schen Funktionen bzw. das resultierende Wellenfeld, fehlen in den Berechnungen die tieffrequenten Anteile unterhalb der Standortfrequenz. Die Existenz von komplexen Nullstellen in den Bereichen fehlender reeller Nullstellen (Phasengeschwindigkeiten) unterhalb der Cutoff-Frequenz wurde in dieser Arbeit nicht geprüft. Das Vorkommen von komplexen Nullstellen, so genannter verlustbehafteter Moden, würde auf vorhandene exponentiell gedämpfter Wellen in der horizontalen Ausbreitungsrichtung schließen lassen (Malischewsky 1973).

Abschließend kann zu den Analysen von Wellenfeldern in normal dispersiven Böden

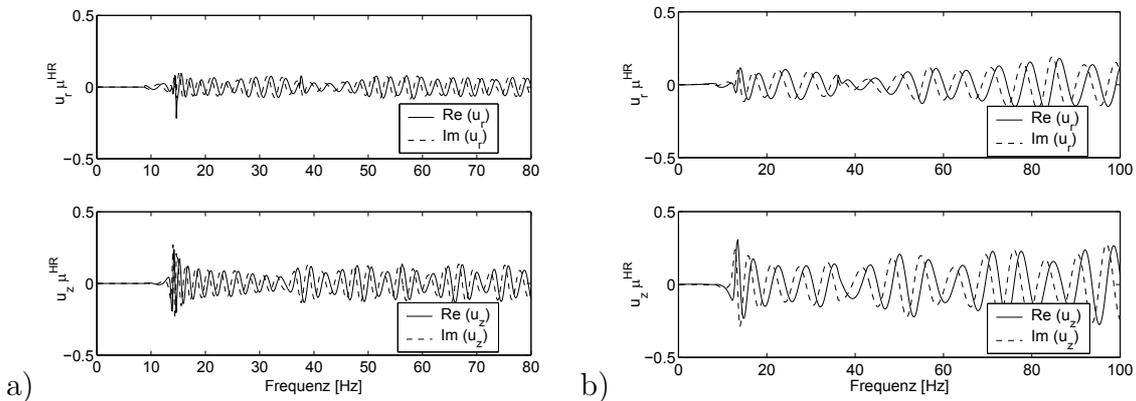


Abbildung 4-19: Green'sche Funktion des starr gelagerten Schichtungsmodells (a) und des auf elastischem Halbraum gelagerten Modells (b).

folgendes Dispersionverhalten festgestellt werden. Das Wellenfeld wird vorrangig durch die Grundmode als Hauptenergieträger dominiert. Höhere Moden werden ebenfalls mit angeregt, sind aber von untergeordneter Bedeutung. Die Berücksichtigung auftretender höherer Moden in einer Inversion sorgt aber für zusätzliche Informationen, so dass das weitere Modelle aus der Menge der Modelle die den experimentellen Grundmode beschreiben ausgeschlossen werden können.

4.1.2 Anormal dispersive Profile (unregelmäßig geschichtete Böden)

Anormal oder invers dispersive Profile zeichnen sich durch eine abnehmende Steifigkeit mit zunehmender Tiefe z oder durch die Einlagerung von Schichten kleiner Wellengeschwindigkeit in Schichten großer Wellengeschwindigkeit aus. Der zweite Fall wird in der Literatur oft unter der Bezeichnung *Wellenleiter* geführt. Die dazu theoretisch untersuchten Modelle sind im Anhang A5 mit ihren entsprechenden Parametern angegeben. In den nachfolgenden Untersuchungen werden die Besonderheiten derartiger Schichtungen, die mitunter recht häufig in natürlichen Böden anzutreffen sind, näher analysiert. Die untersuchten Modelle wurden durch eine Punktlast an der Oberfläche belastet. Als Quellspektrum diente wiederum ein Ricker-Impuls.

4.1.2.1 Geometrische Dämpfung

Analog zu den Untersuchungen der geometrischen Dämpfung von normal geschichteten Böden werden in einem ersten Schritt die Abnahmefunktionen der Verschiebungen an der freien Oberfläche bei der Anregung des Wellenfeldes an der Oberfläche betrachtet.

Die in Abb.(4-20) dargestellten Bereiche entsprechen den in Anhang A.5 zusammengestellten Bodenprofilen aus den Bereichen 1 bis 5 für anormal dispersive Böden.

Die Zusammenfassung der Bereiche erfolgte nach Wahl der auftretenden Wellengeschwindigkeiten in den überwiegend zweifach geschichteten Modellen. Der Bereich 1 entspricht dabei einem Modell mit den Schichtmächtigkeiten $h = 5/5[m]$ bzw. $h = 10/10[m]$ für die obere und mittleren Schicht und der Variation der Wellengeschwindigkeiten in der oberen Schicht von $c_S = 200...400[m/s]$ und in dem Halbraum von $c_S = 400...1000[m/s]$. Die Wellengeschwindigkeit der mittlere Schicht wurde bei dem Wert $c_S = 100[m/s]$ belassen.

Im Bereich 2 wurden unterschiedliche Schichtmächtigkeiten von $h = 5...20[m]$ mit den Wellengeschwindigkeiten $c_S = 200/100/400[m/s]$ für die erste/zweite Schicht und den Halbraum kombiniert. Analog Bereich 2 erfolgte in Bereich 3 eine Variation der Schichtmächtigkeiten von $h = 5...20[m]$ mit der Kombination der Wellengeschwindigkeiten $c_S = 400/100/400[m/s]$ für die erste/zweite Schicht und den Halbraum. Der Bereich 4 umfasst eine Variation der Wellengeschwindigkeit und Schichtmächtigkeiten von Profilen in Ergänzung zu den vorherigen Bereichen sowie mehrfach geschichtete Profile. Im Gegensatz zu den vorherigen Bereichen umfasst der Bereich 5 ausschließlich Profile mit einer aufliegenden Schicht deren Steifigkeit größer als der überlagerte Halbraum ist. Die Verwendung dieser Profile erfolgte nur für die Untersuchung der geometrischen Dämpfung.

Bei der Gegenüberstellung der Abnahmefunktionen aus Abb.(4-20) mit den Abnahmefunktionen der normal geschichteten Böden in Abb.(4-1) ist in den geringeren Entfernungsbereichen eine deutlich niedrigere Amplitudenabnahme vorhanden. Diese kann in Abhängigkeit vom Modell in eine stärkere Amplitudenabnahme in den größeren Entfernungsbereichen umschlagen.

4.1.2.2 Verhalten der Green'schen Funktion

In der Analyse der Green'schen Funktionen von normal geschichteten Böden wurde unterhalb der dominanten Standortfrequenz eine Verminderung der Amplituden festgestellt. Diese Eigenschaft konnte bei den untersuchten Modellen der anormal geschichteten Böden nicht oder nur schwach nachgewiesen werden. Ersichtlich ist, dass die Amplituden unterhalb der dominanten Standortfrequenz nochmals etwas sinken. Der ausgeprägte Sprung in den Amplituden, wie in Abb.(4-2) und Abb.(4-3) für die normal geschichteten Böden, ist nicht vorhanden. In Abb.(4-21) und Abb.(4-22) werden die Green'schen Funktionen der Profile 41, 54 und 64 beispielhaft dargestellt.

4.1.2.3 Energietransport in den Schichten

Anormal geschichtete Böden und normal geschichteten Böden weisen wesentliche Unterschiede im Dispersionsverhalten und dem horizontalen Energietransport auf. Infolge dessen ist es erforderlich anormal geschichtete Böden hinsichtlich der Disper-

sion eingehender zu untersuchen.

Betrachtet man die in Abb.(4-23) angeregten Dispersionsäste, ist ein fast vollständiger Übergang der Energie auf höhere Moden in den beispielhaften Darstellungen zu verzeichnen. Das typische Verhalten der normal geschichteten Böden mit dem vorrangig angeregten Grundmode ist nicht mehr vorhanden. Auf die entstehenden Schwierigkeiten in den experimentellen Analysen durch den sprunghaften Übergang von Energie auf nächsthöhere Moden an den Stellen von Oskulationspunkten wurde schon in Kap.3.3 eingegangen. Sehr ausgeprägt sind derartige Übergänge in Abb.(4-23a) vorhanden.

Nachfolgend wird für eine eingehendere Untersuchung das Bodenprofil 63 genutzt. Hieran lassen sich prinzipielle Aussagen für eine anormal dispersive Schichtung treffen.

Die Energierate eines Modes bzw. einer Bodenschicht wird analog den Betrachtungen für normal geschichtete Böden nach Gl.(4.1) und Gl.(4.2) bestimmt. In Abb.(4-24) sind die normierten Energieraten der ersten drei Moden für das Profil 63 in Bodenschichten und Halbraum dargestellt. Die Energieraten der Moden in einer Schicht sind in Abb.(4-25) abgebildet.

Zum Vergleich mit den Abbildungen des horizontalen Energietransportes wird die Gruppengeschwindigkeit U bestimmt. Entsprechend der Beziehungen von Gruppengeschwindigkeit und Energie nach (Malischewsky 1973, Alsop 1966) bzw. nach Gl.(2.108) sind Analogien zwischen den Maxima der Gruppengeschwindigkeiten und den angeregten Dispersionsästen zu erwarten. Nach Abb.(4-26) wird diese Aussage bestätigt. Die auftretenden lokalen Maxima in den Gruppengeschwindigkeiten sind mit den angeregten Bereichen der Dispersionsäste in Abb.(4-23b) übereinstimmend. Die Gruppengeschwindigkeit kann somit als ein Indikator für den Energietransport in einer Schichtung bzw. in deren Dispersionsverlauf angesehen werden.

Zur Untersuchung des Verformungsverlaufes wird die Momentaufnahme eines Verschiebungswellenfeldes u_r und u_z in der Ebene betrachtet (Abb.4-27). Durch die abschirmende Wirkung der aufliegenden, steifen Schicht bleiben die Verformungen in der weicheren Schicht relativ gering, so dass das gesamte Verformungsniveau innerhalb des geschichteten Halbraums keine ausgeprägten Bereiche größerer Werte aufweist.

Für die nähere Analyse des Anregungsverlaufes und des Energietransportes werden parallel zu Verschiebungen aus Abb.(4-27) die Eigenformen der möglichen Moden des Systems in Abb.(4-28) und Abb.(4-29) untersucht. In diesen Abbildungen finden sich Analogien zwischen den angeregten Bereichen der Dispersionsäste in Abb.(4-23b) und der Lage der seismischen Quelle.

Die deutlich angeregten Bereiche der Dispersionskurven in Abb.(4-23b) laufen konform zu den relativ großen Verschiebungsamplituden der Eigenformen in Höhe der seismischen Quelle bei $z = 0$. Besonders deutlich wird das in den höheren Frequenzbereichen, siehe Abb.(4-28p) bis Abb.(4-28z), in denen die relevanten Verschiebungen des Grundmodes fast ausschließlich in die weiche Schicht hineinlaufen.

Werden die benannten Eigenformen in Höhe der seismischen Quelle kleiner, so trägt der nächsthöhere Mode, der im Vergleich zum vorhergehenden Mode größere Verschiebungswerte an der Oberfläche besitzt, die Energie weiter. In dieser Beziehung wird die Bedeutung der Eigenwerte und -formen bzw. deren Analyse für das Interpretieren von Oberflächenwellen ersichtlich. Wesentlich deutlicher als in Abb.(4-12) ergibt sich in der Betrachtung der Partikelbewegung an diesem Standort eine retrograde Bewegung des gesamten Wellenzuges an der Oberfläche, siehe Abb.(4-30) .

Ausgehend von den genannten Ergebnissen können auch für weitere Anregungsfälle, wie die Anregung innerhalb der weichen Schichtung, wesentliche Schlussfolgerungen gezogen werden. Durch die deutlich größeren Verschiebungen der Eigenformen innerhalb der weichen Schichtung wird eine Anregung im entsprechenden Frequenzbereich zu ausgeprägteren Verformungen in der zwischengelagerten weicheren Schicht führen. Die Art der Wellen sind in der Flözseismik als geführte Wellen bekannt (Abb.4-31), und wegen ihrer guten Energieführung in der Schicht an Stellen der Airyfrequenz geschätzt und benutzt (Bender 1985). Die für diesen Fall der hohen Anregungsfrequenzen verwendeten Modelle zweier Halbräume, getrennt durch das Nebengestein, werden in dieser Arbeit nicht weiterführend untersucht.

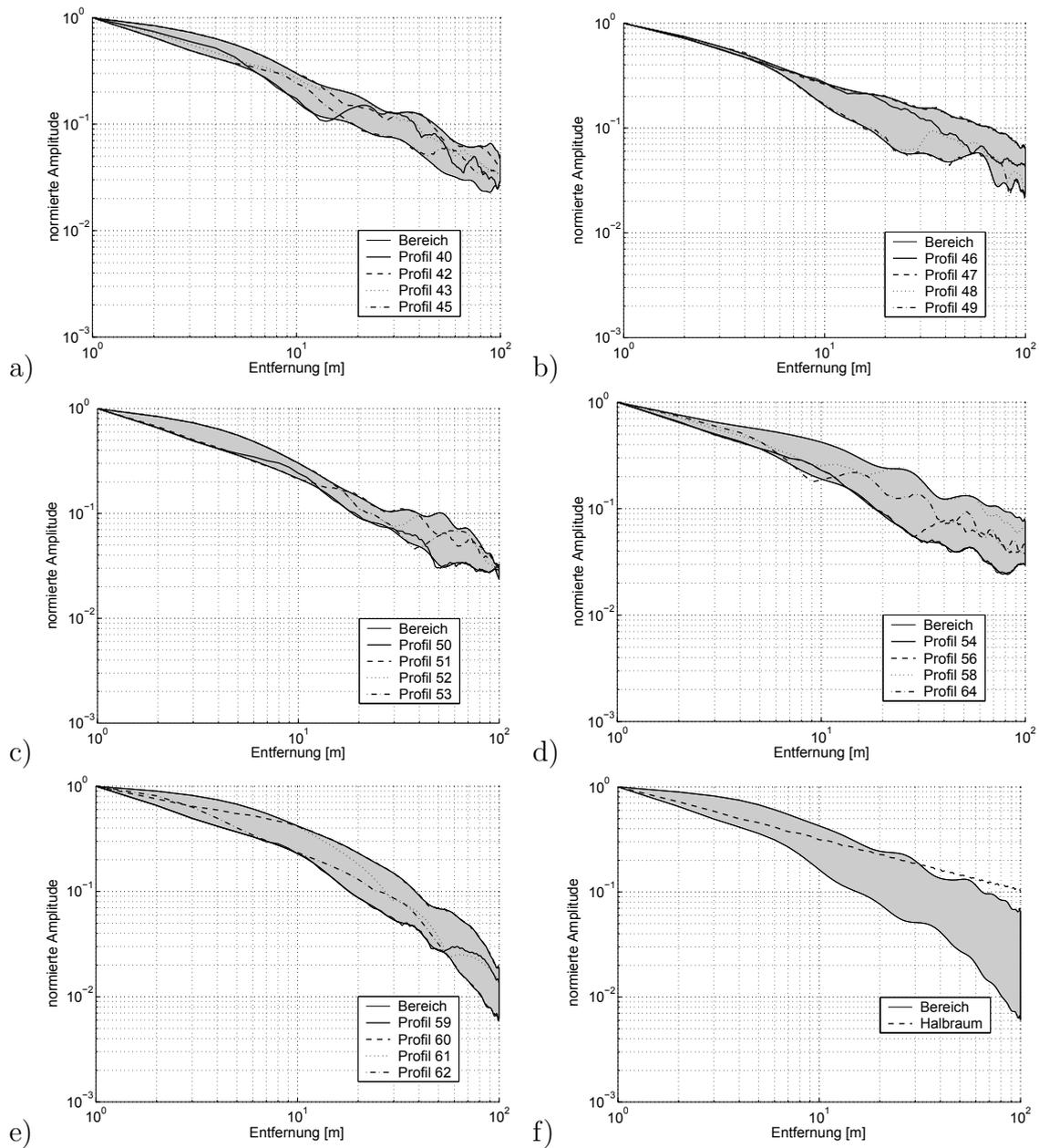


Abbildung 4-20: Einhüllende der Abnahmefunktionen für die anormal dispersiven Schichtungen: a) Bereich 1, b) Bereich 2, c) Bereich 3, d) Bereich 4, e) Bereich 5 und f) Zusammenstellung aller Bereiche.

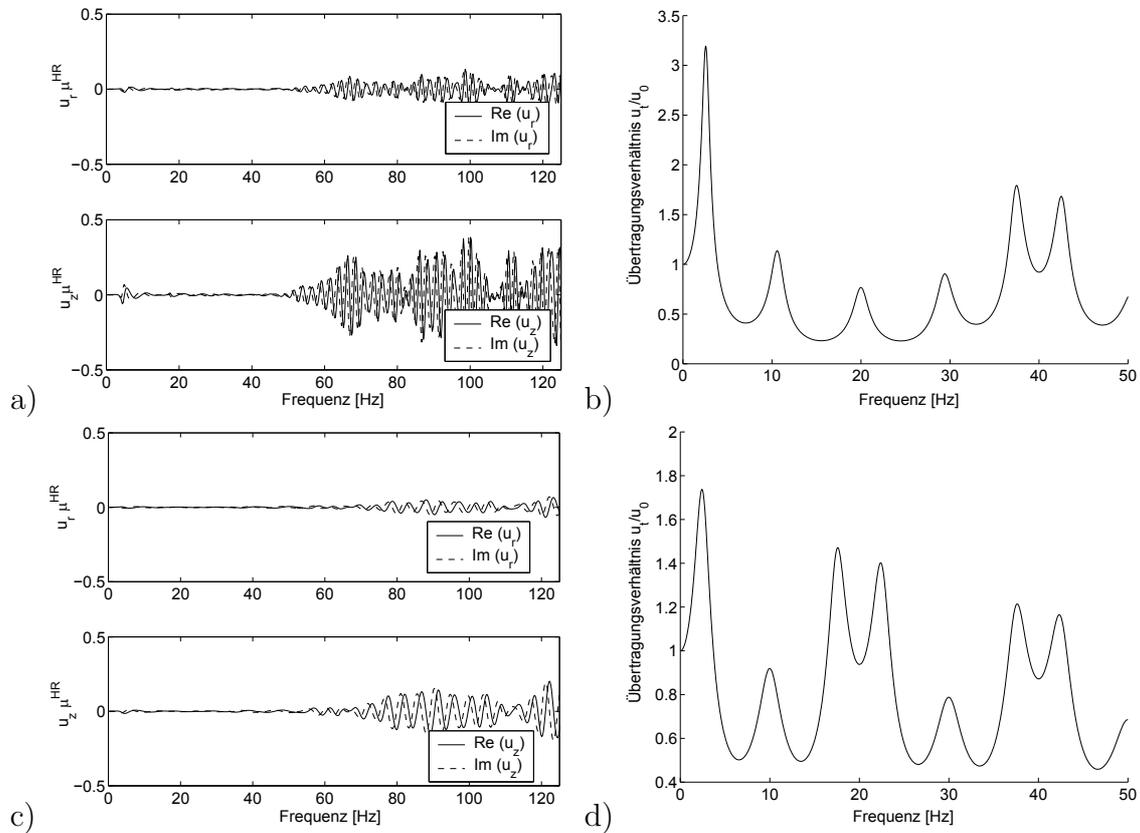


Abbildung 4-21: Darstellung der Green'schen Funktion von a) Profil 41, c) Profils 54 und Darstellung der Transferfunktion von b) Profils 41 und d) Profil 54.

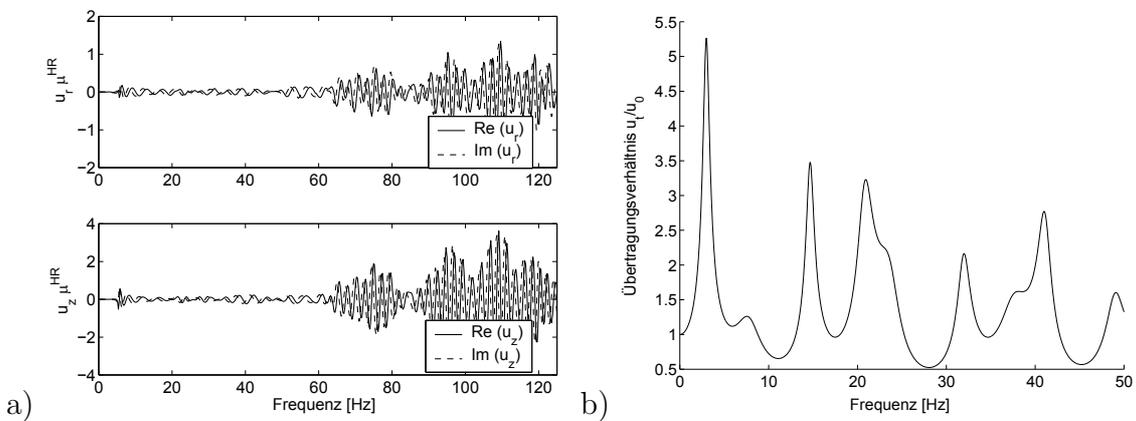


Abbildung 4-22: Darstellung der Green'schen Funktion (a) und der Transferfunktion (b) von Profil 64.

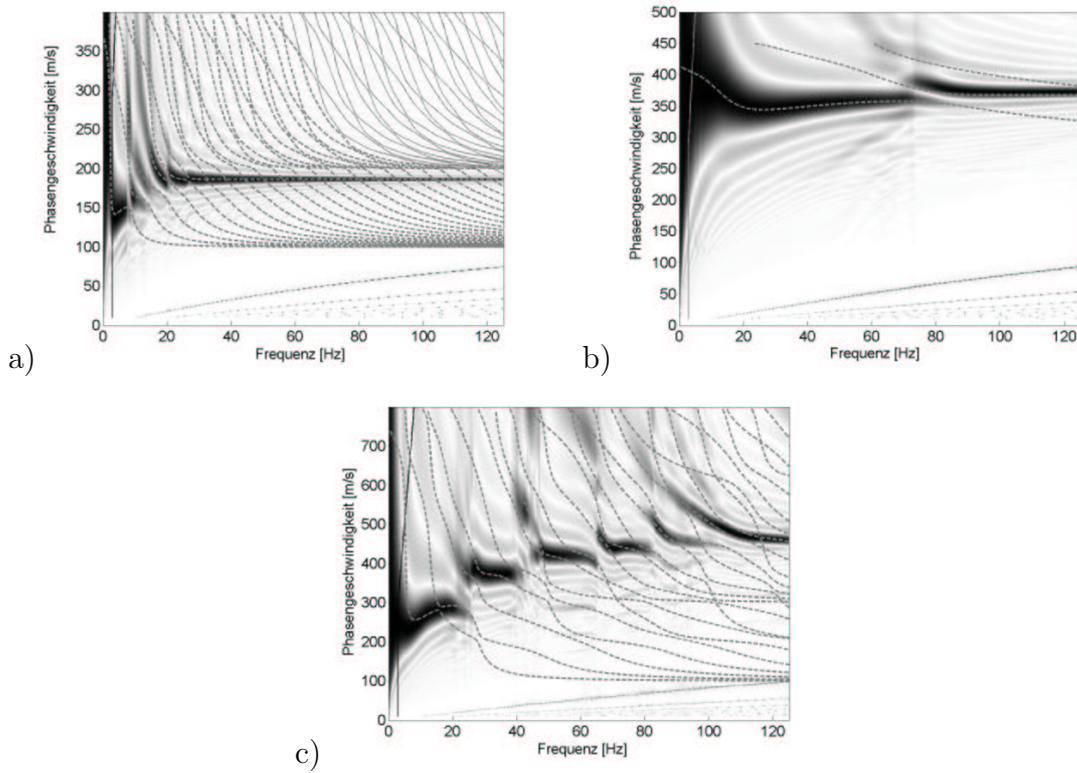


Abbildung 4-23: Dispersionsverhalten des synthetischen Wellenfeldes von a) Profil 43, b) Profil 63 und c) Profil 65.

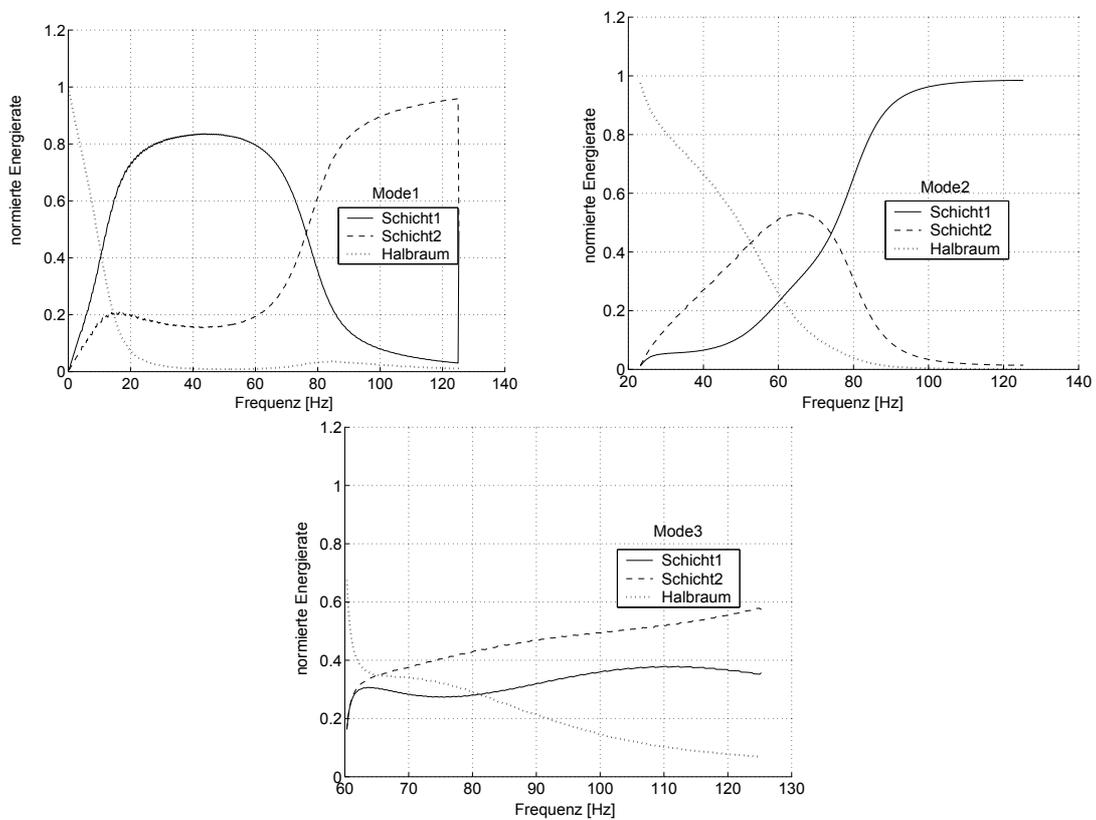


Abbildung 4-24: Normierte Energie rate der Moden 1, 2 und 3 in den unterschiedlichen Schichtungsbereichen des Profils 63.

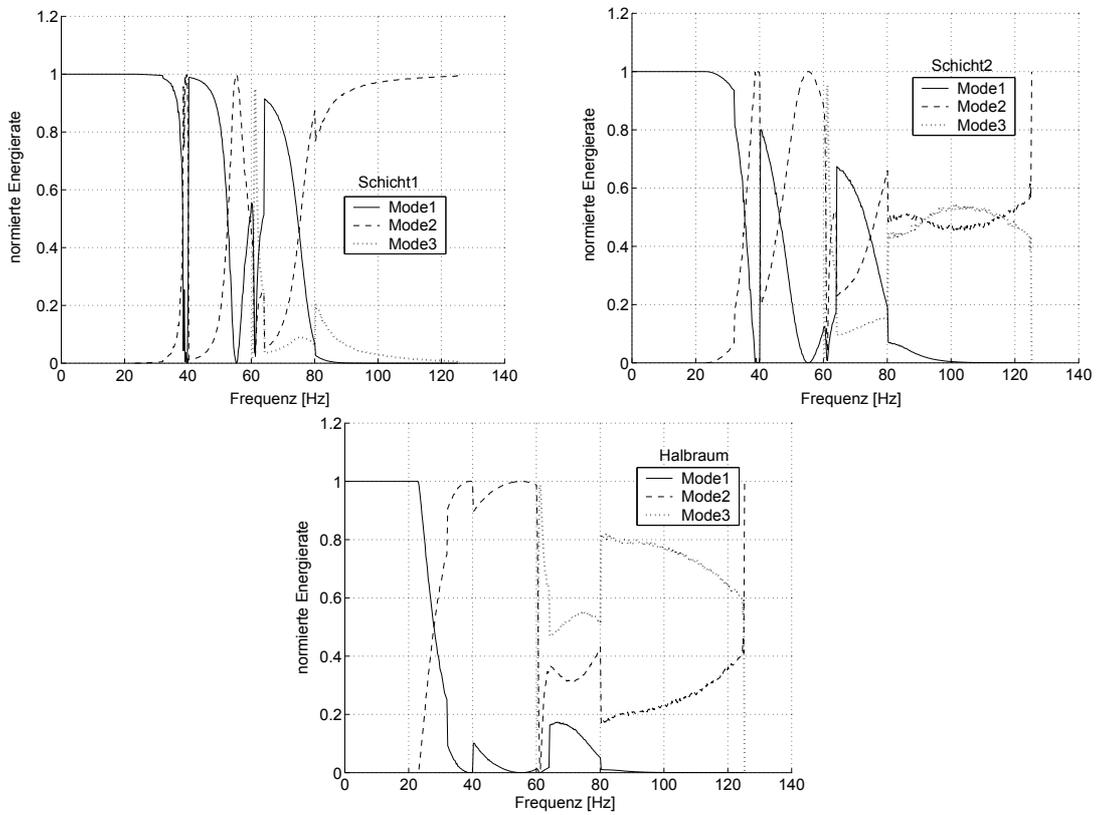


Abbildung 4-25: Normierte Energierate der unterschiedlichen Moden innerhalb a) der ersten Schicht, b) der zweiten Schicht und c) im Halbraum des Profils 63.

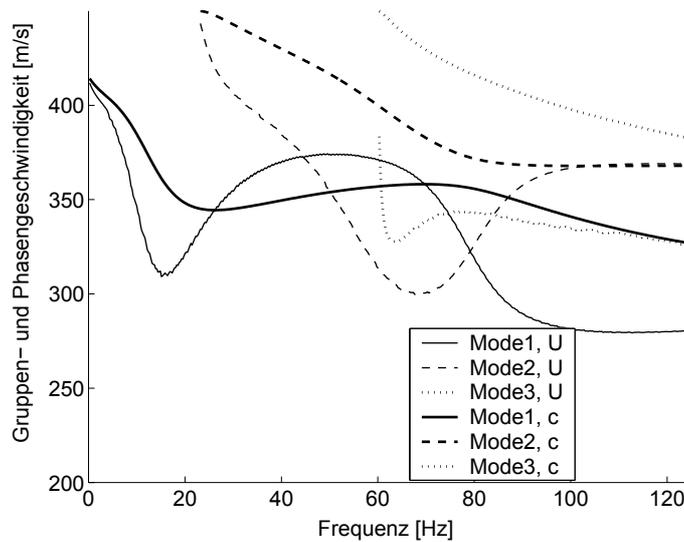


Abbildung 4-26: Dispersions- und Gruppengeschwindigkeiten des Profils 63.

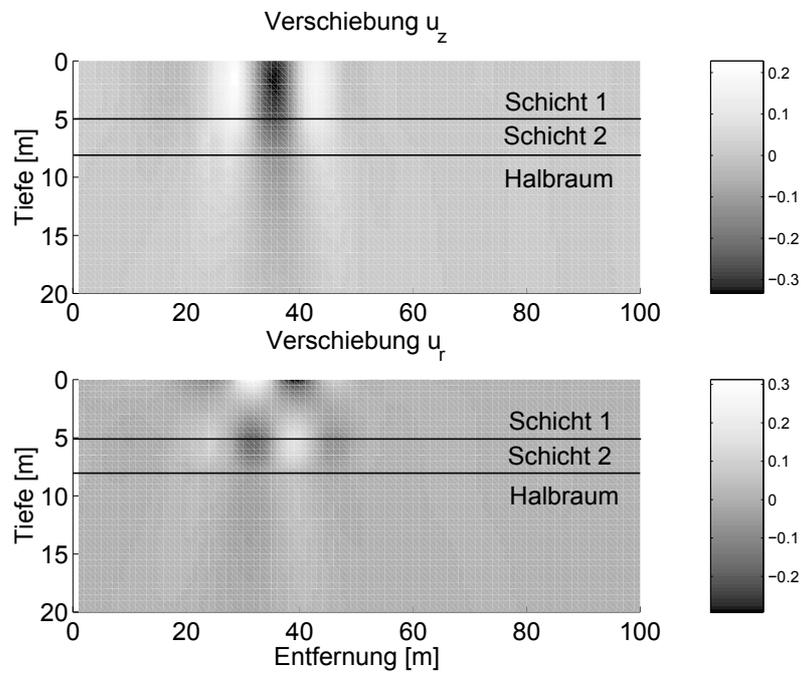


Abbildung 4-27: Verhalten der normierten Verschiebung u_z und u_r über die Tiefe, Profil 63.

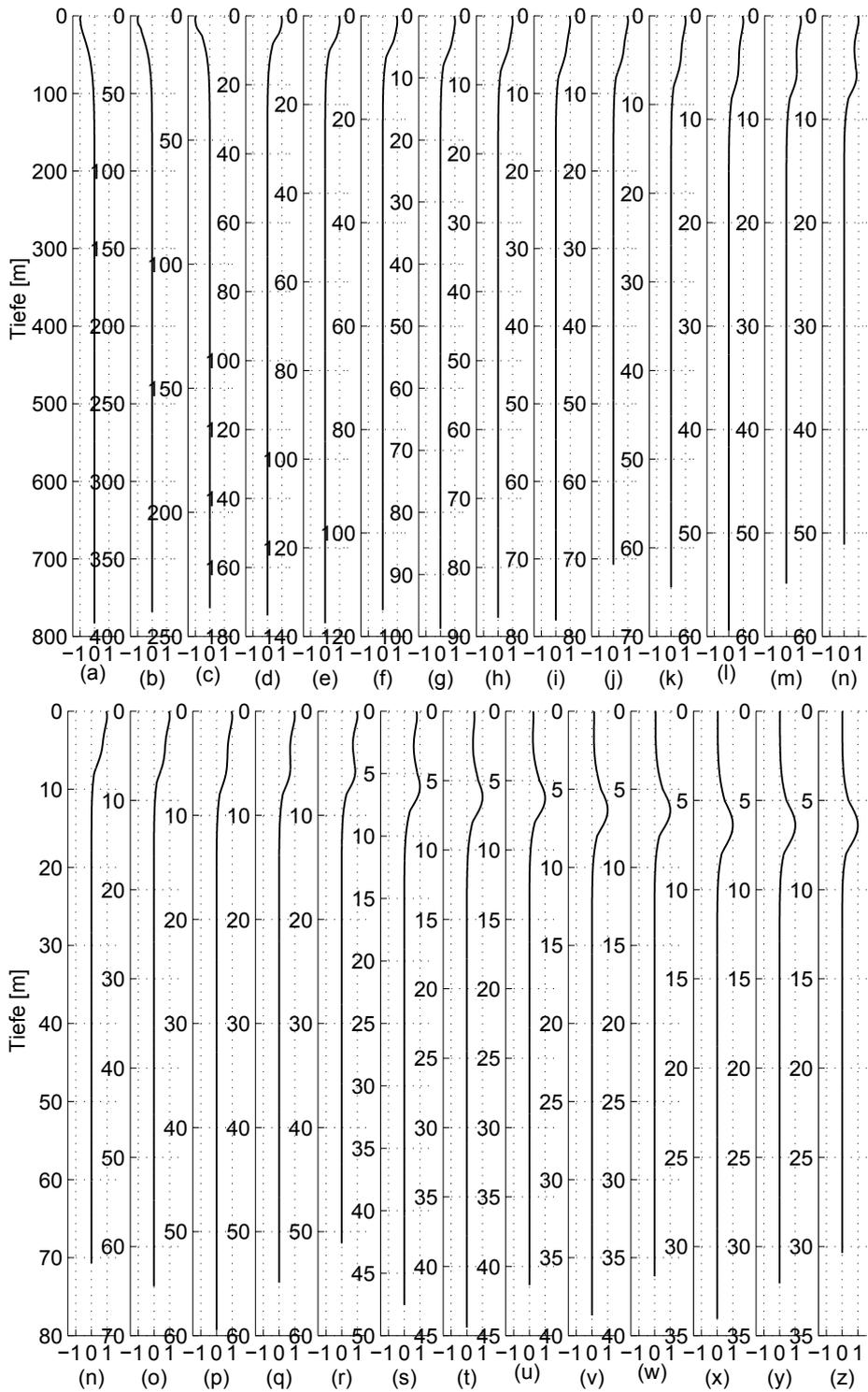


Abbildung 4-28: Normierte Eigenformen des Grundmodes von Profil 63 mit diskreten Frequenzen von 5 (a) bis 110 Hz (z) mit 5Hz Schrittweite.

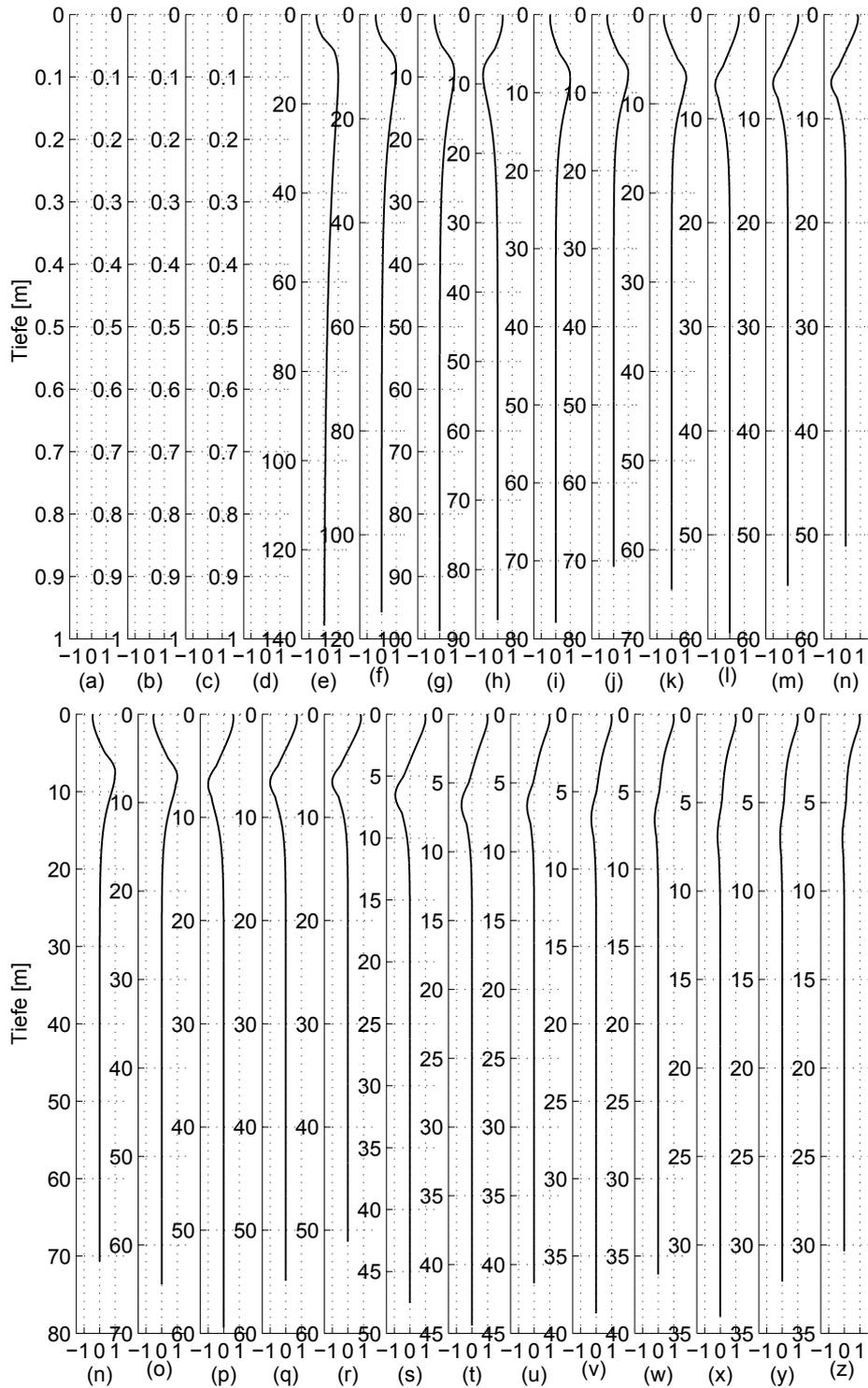


Abbildung 4-29: Normierte Eigenformen des 2. Modes von Profil 63 mit diskreten Frequenzen von 5 (a) bis 110 Hz (z) mit 5Hz Schrittweite.

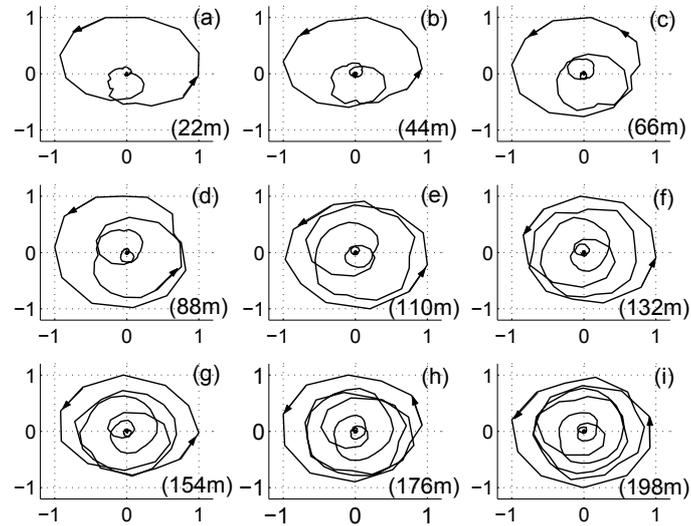


Abbildung 4-30: Ausrichtung der Partikelbewegung an der Oberfläche von Profil 63.

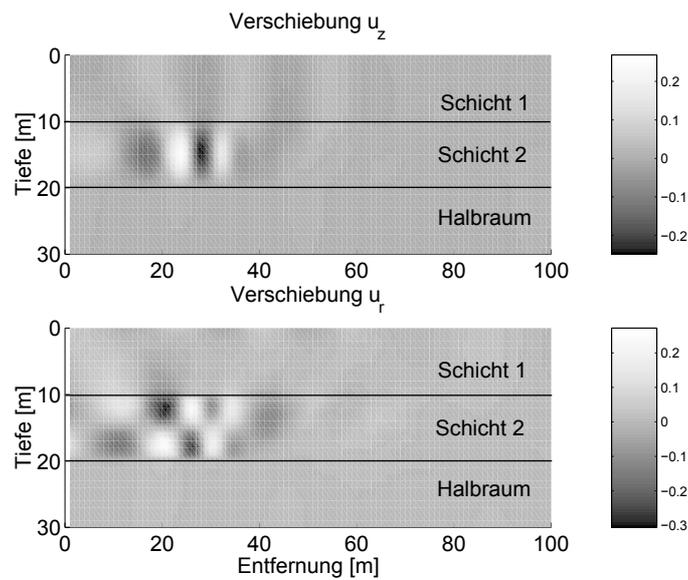


Abbildung 4-31: Normierte Verschiebung u_z und u_r über die Tiefe bei Anregung in der weichen Schicht von Profil 55.

4.2 Standortuntersuchungen

4.2.1 Messung Halde Freiberg

4.2.1.1 Das Untersuchungsgebiet

Das Untersuchungsgebiet, eine Schwemmkippe aufbereiteter Grubenrückstände, befindet sich nördlich von Freiberg in Sachsen. Die ca. 30 bis 40 Jahre alte Kippe diente als Testfeld für Untersuchungen der Bundesanstalt für Materialprüfung Berlin (BAM), in deren Auftrag auch die nachfolgenden Analysen durchgeführt worden sind. Als Messstandorte waren drei unterschiedliche Punkte vorgegeben. Zwei Messungen sollten versuchsweise im Dammbereich durchgeführt werden. Als Referenzstandort wurde die ebene Kippenmitte gewählt.

Der Referenzstandort war notwendig, um die zu erwartenden Störungen aus Reflexionen am geneigten Dammkörper abschätzen zu können und um ein geometrisch *ungestörtes* Vergleichsprofil zu erhalten. Für die Erkundung dienten Oberflächenwellen, da diese nicht an eine bestimmte Schichtung gebunden sind und damit die besten Voraussetzungen für diese Art der Erkundung besitzen.

Von Seiten der BAM wurden Bohrungen an verschiedenen Punkten der Kippe vorgenommen, so dass Hinweise zur Klassifizierung des Materials vorhanden waren. Demzufolge ist die Kippe mit einer Sandschicht abgedeckt, die eine durchschnittliche Dicke von 2 m aufweist. Das darunter befindliche, eingeschwemmte Material besitzt unterschiedliche Schichtabstufungen, die aufgrund der Zusammendrückung innerhalb der Bohrsonde nur schlecht zu bestimmen waren. Das Material unter der Deckschicht hatte mitunter eine weiche, knetbare Konsistenz. Ausgehend von diesen Kenntnissen wird erwartet, dass die Deckschicht eine größere Steifigkeit als die überlagerten, eingeschwemmten Bereiche besitzen.

4.2.1.2 Experiment und Interpretation

Dispersionsverhalten Für die Ermittlung des Dispersionsverhaltens wurden zum einen das Phasendifferenzen-Verfahren (SASW) und zum anderen die Wellenfeld-Analyse verwendet. Die beiden Methoden wurden gewählt, da die mögliche Auslagenlänge örtlich begrenzt war und die Effektivität der Methoden an dem Standort nicht abgeschätzt werden konnten. Als seismische Quelle kamen zwei Vorschlagshämmer mit unterschiedlichen Massen (5 und 10 kg) sowie ein Fallgewicht von 10 kg zum Einsatz. Die Auslagen für die Wellenfeldanalyse wurden auf einen 2 m äquidistanten Abstand gesetzt. Für die Auswertung der Phasendifferenzen (SASW) erfolgte die Auslage mit einem von der Quelle zunehmendem, sich verdoppelnden, Aufnahmeabstand, wobei ein Abstand von 0.5 m bis 32 m gewählt wurde. Die Anzahl der zur Verfügung stehenden Geophone (Geschwindigkeitsaufnehmer) der Firma Bartec beläuft sich auf neun Stück. Diese Geophone besitzen eine Eigenfrequenz von

4 Hz. Um die Auslagelänge von 66 m für die Wellenfeld-Transformation zu erreichen, wurden die Aufnehmer versetzt und das gesamte Wellenfeld aus den einzelnen, gemessenen Segmenten zusammengesetzt. Die SASW-Messung konnte aufgrund des sich verdoppelnden Abstandes in einer Auslage durchgeführt werden. Für jeden Anregungspunkt und jede Auslageanordnung erfolgten je 10 Einzelschüsse. In der späteren Signalbearbeitung wurde das Signal-Rausch Verhältnis durch eine vertikale Stapelung dieser Einzelschüsse wesentlich verbessert. Diese gestapelten Signale waren die Grundlage der folgenden Dispersionsanalysen und damit auch der Inversionsrechnung (siehe Abb.(4-32a) und Abb.(4-32b)). Bei der Auswertung der in Abb.(4-33a)

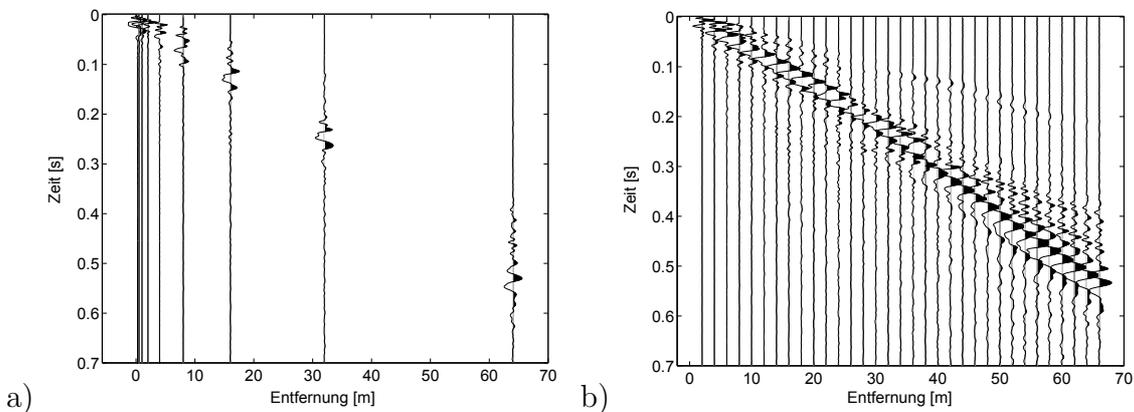


Abbildung 4-32: Spurnormiertes Wellenfeld für a) Phasen-Differenzen-Auswertung und b) Wellenfeld- Transformation.

bis Abb.(4-33d) dargestellten Dispersionsspektren des Referenzpunktes konnte im Vergleich mit den Ergebnissen der Bohrproben ein konformes Verhalten festgestellt werden. Wie erwartet, findet ab einer bestimmten Frequenz ein nahezu vollständiger Energieübergang der Welle auf höhere Moden statt. Der Grundmode wird nur in einem bestimmten Frequenzbereich angeregt. Beim Vergleich der Ergebnisse der beiden entgegengerichteten Schussrichtungen (1. und 2. Schussrichtung) fallen leichte Unterschiede in den angeregten höheren Moden auf. Diese Unterschiede können mit den zur Verfügung stehenden Mitteln nicht ausreichend geklärt werden. Die wahrscheinlichsten Gründe liegen entweder in lateralen Heterogenitäten oder einer Neigung des Schichtenaufbaus bzw. in Temperaturunterschieden der oberflächennahen Schichten. Mit Temperaturunterschieden ist gemeint, dass die Messungen in entgegengesetzten Schussrichtungen zu unterschiedlichen Tageszeiten erfolgten. Am frühen Morgen wurde die 1. Schussrichtung und am Nachmittag die 2. Schussrichtung ausgelegt. Die Messungen selbst fanden im Dezember statt, so dass ein Auftauen der oberen Schichten durch die Sonneneinstrahlung möglich war. Trotz der Unterschiede sind die Daten prinzipiell für eine Inversion und für die Berechnung eines gemeinsamen Schichtungsprofils geeignet.

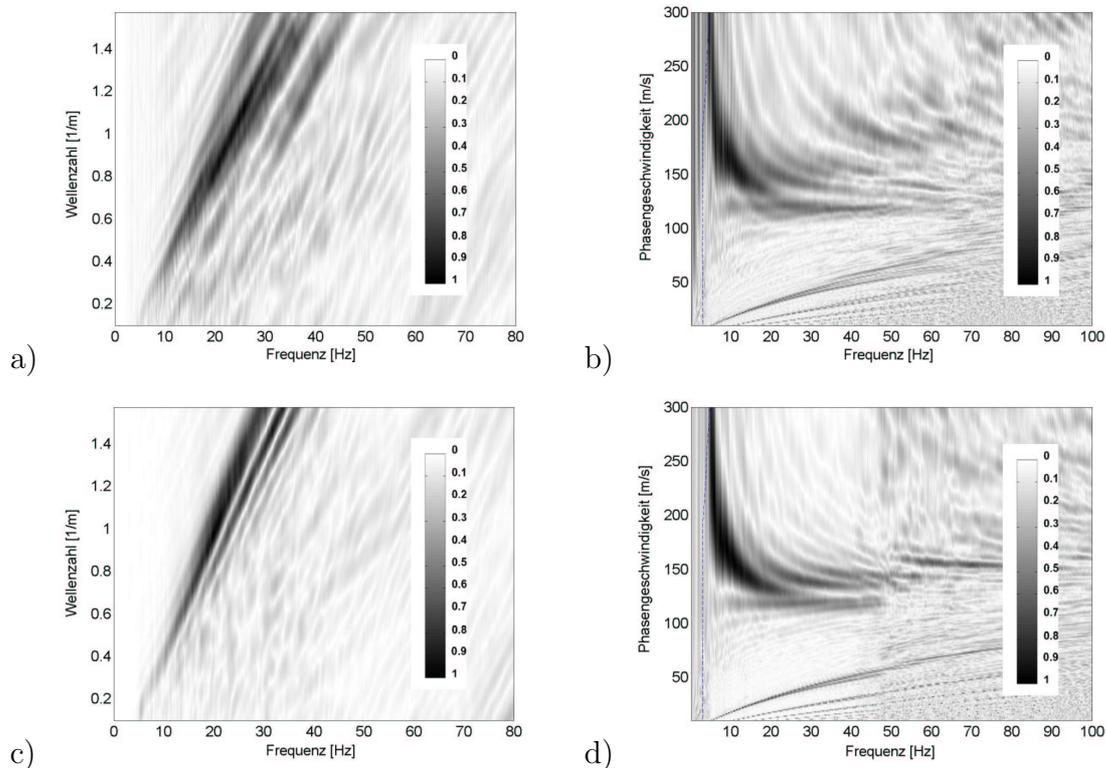


Abbildung 4-33: a) f-k Analyse - 1. Schussrichtung, b) f-k Analyse - 2. Schussrichtung, c) Wellenfeld-Analyse - 1. Schussrichtung und d) Wellenfeld-Analyse - 2. Schussrichtung. Beispielhaft wurde diesen Grafiken die Legende des normierten Spektrums überlagert. Zur vertiefenden Erläuterung der grafischen Darstellung wird auf Kapitel 3.1 verwiesen.

Parallel zu den Wellenfeldauswertungen sind in Abb.(4-34a) bis Abb.(4-34d) beispielhafte Phasen- und Kohärenzspektren der Messung dargestellt. Die aus den Phasenspektren entstehenden Dispersionskurven sowie die daraus resultierenden Inversionsergebnisse sind in Abb.(4-35a) und Abb.(4-35b) dargestellt. In den abgebildeten Phasengängen und Kohärenzspektren ist die Störung durch höhere Moden und die vorhandene Bodenunruhe deutlich erkennbar. Die Abbildungen stellen ausgewählte Beispiele aus der Menge der vorhandenen Aufnehmerkombinationen dar. Aus den *brauchbaren* Spektren wurden die entsprechenden Teilabschnitte weiter verwendet. Entsprechend der Kohärenz und dem Auftreten einer hinreichend glatten Phase wurden die jeweiligen Abschnitte subjektiv ausgewählt. In der Regel wurden nur die Abschnitte genutzt, die eine Kohärenz zwischen 0.9 und 1.0 aufweisen. So besitzt die Kohärenz in den betrachteten Aufnehmerkombinationen von Abb.(4-34a) und Abb.(4-34b) einen Wert von größer 0.9 zwischen 10 und 80 Hz. Die Lage dieses Bereichs korreliert gut mit den entsprechend glatten Bereichen der Phasengänge. In Abb.(4-34c) und Abb.(4-34d) ist die Kennzeichnung des nutzbaren Abschnittes durch kleine Kreise zwischen den Stellen von 12 und 45 Hz bzw. 8 und 97 Hz darge-

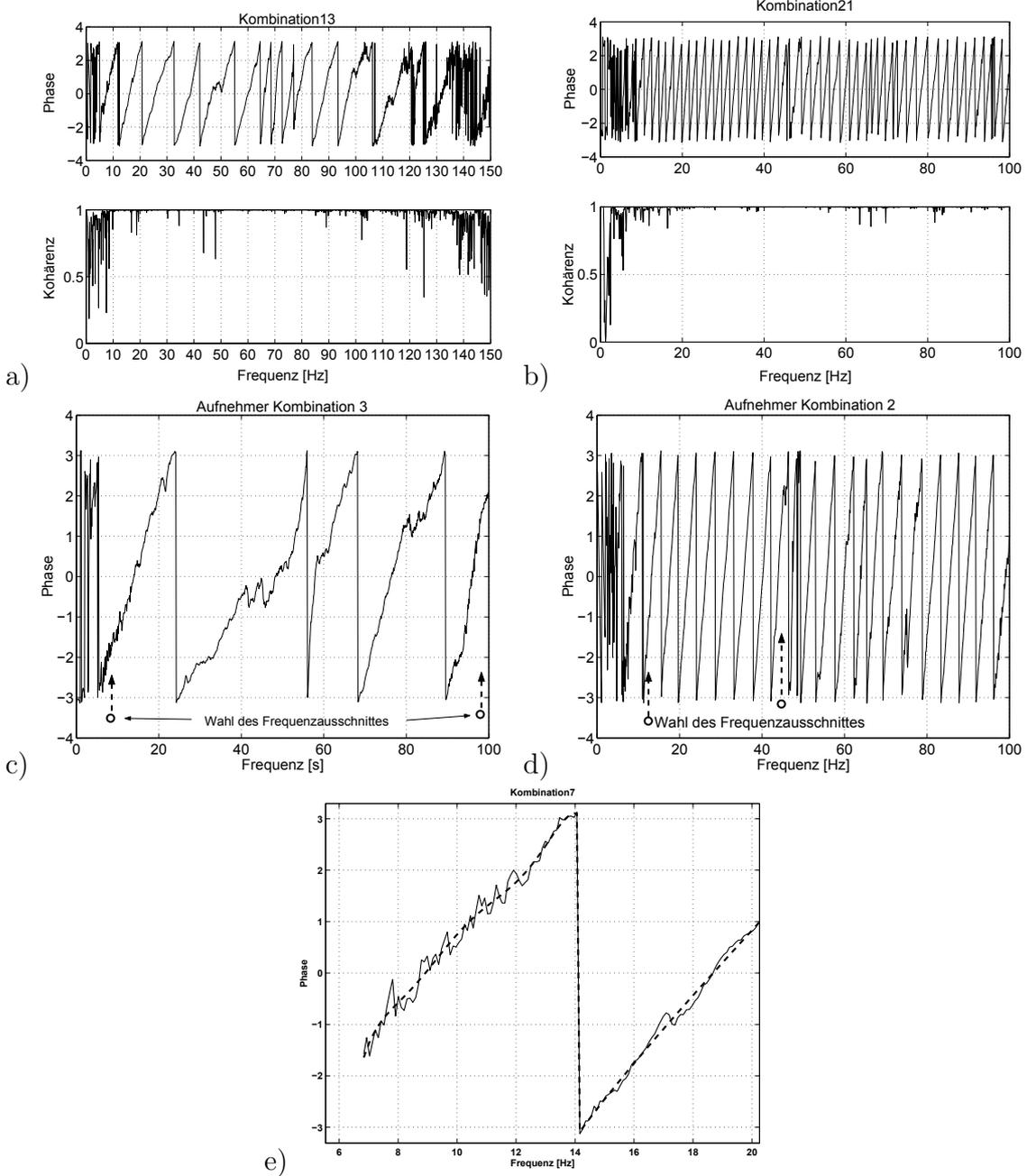


Abbildung 4-34: a) und b) Phasengang, Kohärenz von ausgewählten Kombinationen der Messung Halde Freiberg (Referenzpunkt), c) Wahl des Frequenzausschnittes aus dem Phasengang, e) Glättung des Phasengangs.

stellt.

Da der Phasengang mitunter auch innerhalb der gewählten Frequenzbereiche keinen ausreichend glatten Verlauf besitzt, wird der gewählte Teil des Phasenspektrums mit einer Polynomfunktion genähert (siehe Abb.4-34e). Der so bestimmte Phasengang ist in seinem Verlauf glatter und liefert in der weiteren Inversion eine besser anzugleichende Dispersionsfunktion.

Ein weiteres auftretendes Problem in der Verwendung der Phasen-Differenzen-Methode sind die vorhandenen 2π -Phasenwechsel vor dem gewählten Frequenzbereich. Die richtige Anzahl ist für die korrekte Berechnung der entfalteten Phasenwinkel in Gl.(3.5) und damit für die zu bestimmende Dispersion notwendig.

Nutzt man ausschließlich das Phasen-Differenzen-Verfahren für die Erkundung, würde bei den ermittelten Dispersionskurven in Abb.(4-35a) eine Unsicherheit in der Zuordnung zwischen einem Mode oder einer scheinbaren Dispersionskurve, gemittelt aus mehreren Moden, bestehen (siehe auch Abb.3-9). Es kann in dem Fall nur die Annahme getroffen werden, dass die Kurve aus mehreren Moden gemittelt ist, da die Zuordnung zum Grundmode ein komplett anderes Bodenprofil liefert (siehe Abb.4-35b). Für die Inversion der Kurven nach Abb.(4-35b) sollte eine numerische Näherung an eine gewichtete, scheinbare Dispersionskurve genutzt werden. Die Gewichtung wird durch die Anregungsfaktoren der berechneten Moden des Modells vorgenommen.

Aufgrund der Schwierigkeiten bei der Auswahl des Phasengangs, der Glättung und Interpretation ist eine automatisierte Dispersionsberechnung mit den hier genutzten Mitteln der Phasenberechnung ausgeschlossen. Eine automatische Entfaltung der mitunter stark oszillierenden und gestörten niederfrequenten Bereiche sowie der Anstiegswechsel (Abb.4-34a und Abb.4-34b) innerhalb des Phasengangs würden unweigerlich zu einem falschen Ergebnis im Dispersionsverhalten führen. Die manuelle Wahl der zu entfaltenden Phasengänge und -bereiche ist daher unumgänglich. Innerhalb der f/p - bzw. f/c -Spektren (nach Abb.(4-33b) und Abb.(4-33d)) sind mehrere Moden erkennbar. Die Anwesenheit dieser Moden muss auch im Phasengang der SASW-Messung vorhanden sein. Dadurch wird zum einen die Kohärenz des Phasengangs schlechter, zum anderen wird der resultierende Mode aus diesen Phasengängen einen gemittelten Wert der angeregten Dispersionskurven abbilden. In Abb.(3-9c) und Abb.(3-9d) ist dieses Verhalten an einem synthetisch berechneten Zeitverlauf zu beobachten. Das heißt, der aus den gezeigten Phasengängen (Abb.3-34) berechnete Mode wird ein genähertes Verhalten in seinen Geschwindigkeitswerten wie die gemittelten Maximalamplituden der angeregten Moden innerhalb der f/c -Spektren (Abb.4-33) besitzen.

Das kann zur Annahme führen, dass das Phasen-Differenzen-Verfahren auch bei

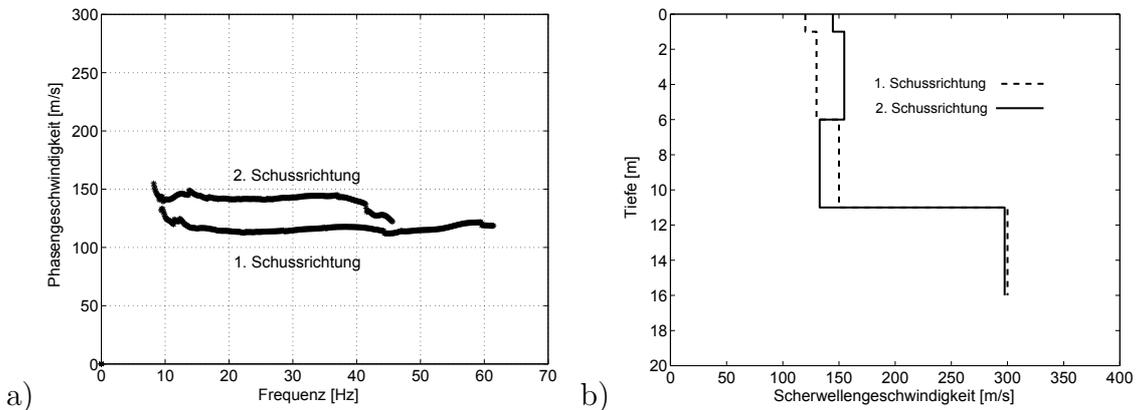


Abbildung 4-35: a) Dispersionskurve für die Referenzpunktmessung - 1. Schussrichtung und 2. Schussrichtung, b) Inversionsergebnis mit Dispersionskurven bei Zuordnung dieser zum Grundmode.

Anwesenheit höherer Moden zu einer Dispersionskurve führt, die im Mittel der Wellenfeld-Transformation entspricht. Ein Fehler in dieser Annahme ist der störende Einfluss höherer Moden in der Phasen- bzw. Kohärenzdarstellung, der dazu führen kann, dass dieser Teil schlechter Kohärenz *nicht* mit in die Phasenfaltung einfließt und damit auch in der weiteren Umrechnung zur Phasengeschwindigkeit fehlt. Dieses kann vor allem auftreten, wenn mehrere Moden zusammen in einem Frequenzbereich vorhanden sind. Existieren die Moden in unterschiedlichen Frequenzbereichen, werden sie als ein gemittelter Kurvenverlauf der Dispersionskurve abgebildet, siehe Abb.(4-37b). Ein weiterer Nachteil in der Verwendung von gemittelten Dispersionskurven ist die Reduktion bzw. Komprimierung der vorhandenen Informationen in einem Wellenfeld (siehe auch Kapitel 4.1.1).

Zusammengefasst kann gesagt werden, dass bei der Darstellung von Dispersionskurven hauptsächlich zwei Fehlerquellen Einfluss auf die Ergebnisse haben können: erstens die Mittelung der auftretenden Moden und zweitens die Bestimmung der Phasengeschwindigkeit aus dem Phasenverlauf. Nach eigenen Erfahrungen überwiegt der zweite Fehler. Die Unsicherheiten, die daraus resultieren, waren in der Vergangenheit der Grund dafür, dass alternative Methoden zur üblichen Phasen-Differenzen-Methode in die Analyse der Dispersionseigenschaften einbezogen worden sind.

Bodenprofil Ausgehend von den Erkenntnissen in Kapitel 4.1 kann aus dem Verlauf des Dispersionsverhaltens in Abb.(4-33c) und Abb.(4-33d) auf folgende prinzipielle Eigenschaften der vorhandenen Schichtung geschlossen werden: Der betrachtete Messpunkt besitzt eine steifere Deckschicht auf einer weicherer, eingebetteten Schichtung. Die steifere, obere Schicht kann der Sandschicht zugeordnet werden. Welche Wellengeschwindigkeitswerte die jeweiligen Schichten besitzen, muss durch die Inver-

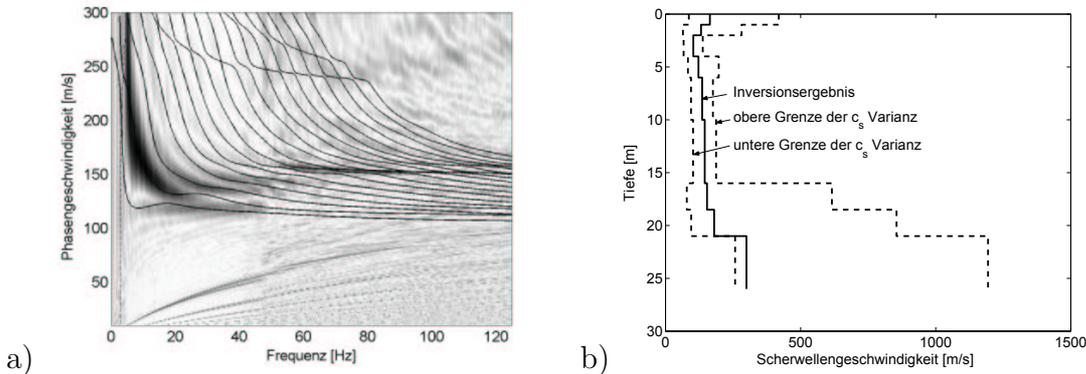


Abbildung 4-36: a) Inversionsergebnis der 2. Schussrichtung und b) Bodenprofil mit Varianz der Scherwellengeschwindigkeit in den Schichten.

sion geklärt werden.

Für die Inversion wurde das in Kapitel 3.2 vorgestellte Verfahren verwendet. In Abb.(4-35a) und Abb.(4-35b) ist das Inversionsergebnis des Rückschusses abgebildet.

Zur Kontrolle des invertierten Modells wurde der Darstellung der experimentellen Dispersionsanalyse das theoretische Dispersionsverhalten des Ergebnismodells überlagert (Abb.4-35a). Zusätzlich zu dem Inversionsergebnis von $E = e^T e \stackrel{!}{=} \min$ wurde zur Einschätzung der Kennwertkombinationen eines Modells im Bereich der möglichen Lösung eine Variation der Modellvariablen um das berechnete Profil des letzten Inversionsschrittes durchgeführt. Die Variation wurde bis zu einer 10% Vergrößerung des Fehlerwertes der objektiven Funktion nach Gl.(3.37) bzw. Gl.(3.55) vorgenommen (siehe Abb.4-36b). Von dieser Abschätzung ausgehend, wurden Aussagen hinsichtlich des Vertrauensbereiches der ermittelten Wellengeschwindigkeiten im Bodenprofil getroffen. Das heißt für die Interpretation des Inversionsergebnisses, dass die Tiefenbereiche mit kleiner Varianz um das Ergebnisprofil für mögliche Wellengeschwindigkeiten repräsentativ sind und die Tiefenbereiche mit großer Varianz nur geringe oder keine Aussagen über Scherwellengeschwindigkeiten zulassen. Für den betrachteten Standort bedeutet das, dass die vorliegenden Daten Aussagen bis zu 15 m Tiefe gestatten.

4.2.2 Messung Oberlausitz

4.2.2.1 Das Untersuchungsgebiet

Das Untersuchungsgebiet befindet sich im Länderdreieck Schleitz. Der Standort ist ein freies, landwirtschaftlich genutztes Gelände. In dem Gebiet befinden sich entsprechend geologischer Karten oberflächlich alluviale Ablagerungen sowie in tieferen Regionen Basalt- und Granitgestein, welches mitunter über lokale Spitzen verfügt. Einem vorliegenden Baugrundgutachten zufolge, ist in dem Messgebiet folgende Bo-

denschichtung vorhanden: bis zu 10m Tiefe steht ein halbfester bis fester Schluff an. Festgestein wurde bis zur Erkundungstiefe von 10 bzw. 12 m nicht angetroffen. Ein stehender Grundwasserspiegel ist nicht vorhanden. Das Rammprofil (Abb.4-38e) zeigt, bis auf einen lokalen Bereich mit größerer Schlagzahl in 3m Tiefe, eine kontinuierlich zunehmende Schlagzahl bis zur maximalen Aufschlusstiefe.

4.2.2.2 Experiment und Interpretation

Für einen Vergleich der Verfahren wurden das Phasendifferenzen-Verfahren und die Mehrkanal-Analysen in der Ermittlung des Dispersionsverhaltens nach Kap. 3.1.2 verwendet. Die seismische Quelle war je ein 5 kg und ein 10 kg Hammer.

Auslagen mit 1 m und 2 m äquidistante Abstände waren die Grundlage für die Wellenfeld- bzw. f/k -Analysen. Die räumliche Abtastung des Wellenfeldes erfolgte mit unterschiedlichen Auslagelängen. Als Versuchsanordnungen wurden Auslagen von 34 m und 52 m mit entsprechenden äquidistante Abstände für die Wellenfeldtransformation gewählt, wobei das gesamte Wellenfeld in der Auswertung aus einzelnen Geophongruppen bzw. Einzelmessungen zusammengesetzt ist. Die SASW-Auslage erfolgte mit einem von der Quelle anfänglich verdoppelnden Aufnehmerabstand der in den größeren Entfernungsbereichen in einen äquidistanten Abstand von 4 m übergang. Diese Messungen konnten in einer Auslage durchgeführt werden. Zur Verbesserung der Datenqualität in den Zeitverläufen ist das resultierenden Wellenfeld das Ergebnis einer Stapelung von 10 - 12 Schüsse. Deutlich sind in Abb.(4-38c)

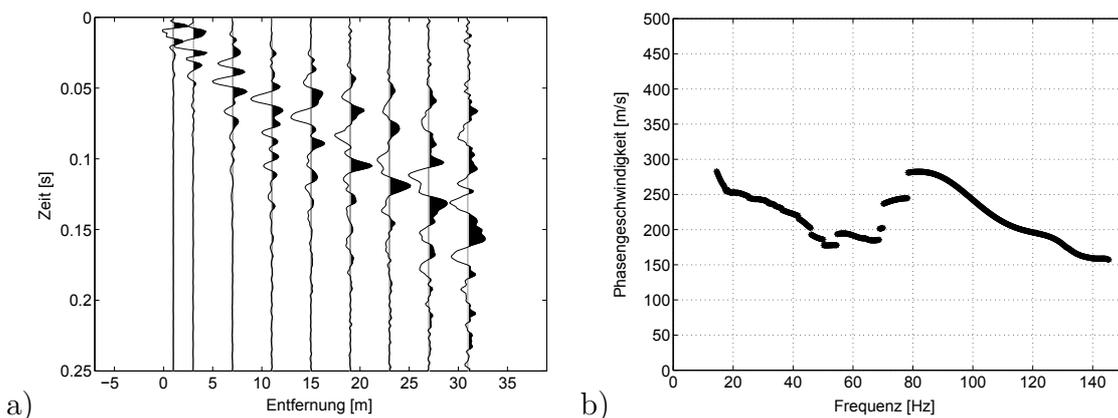


Abbildung 4-37: a) Spurnormiertes Wellenfeld, b) gemittelte experimentelle Dispersionskurve.

die zwei vorhandenen Dispersionsäste zu erkennen. Die linear ansteigende Funktion innerhalb der Abb.(4-38c) kennzeichnet den Bereich, ab dem durch den Geophonabstand das frequenzabhängige Aliasing-Signal nach Gl.(3.22) bedingt auftreten würde. Durch die Unschärfe in Abb.(4-38c) ist eine Unsicherheit bei der Bestimmung der Phasengeschwindigkeiten bei tiefen Frequenzen vorhanden. Mit der gemeinsamen Nutzung von Abb.(4-38c) und Abb.(4-38b) kann das Problem kompensiert werden.

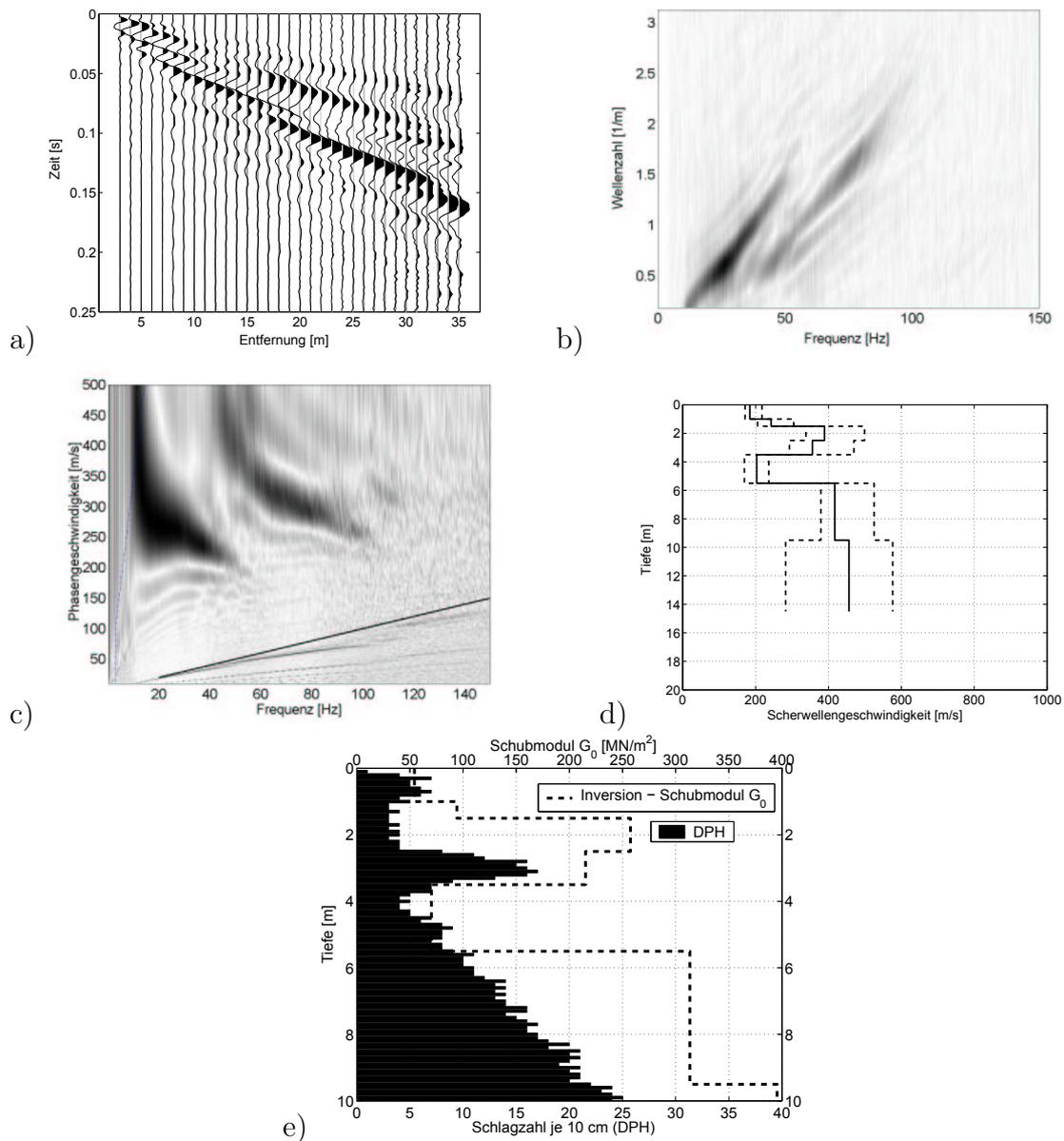


Abbildung 4-38: a) Spurnormiertes Wellenfeld, b) f-k Analyse, c) Wellenfeld-Transformation, d) Inversionsergebnis mit Varianz der Scherwellengeschwindigkeiten und e) Rammprofil des Standortes mit überlagertem Verlauf des invertierten Schubmoduls G_0 .

Die angegebene Dispersionskurve in Abb.(4-37b) ist das Ergebnis der SASW-Auswertung und Mittelwert der Menge der berechneten Dispersionskurven bei unterschiedlichen Aufnehmerkombinationen entlang der Auslage. Vergleicht man die Abb.(4-38b) mit der Abb.(4-37b), so zeigt sich, dass der Einfluss höherer Moden auf die scheinbare Dispersionskurve von Abb.(4-37b) stark ausgeprägt ist. Ab einer Frequenz von 55 Hz findet der Übergang zur zweiten Mode statt. In Abb.(4-38d) ist das Inversionsergebnis der Abb.(4-38c) zuzüglich der Variation der Modellvaria-

blen um das Endprofil bis zum Erreichen einer 10% Vergrößerung des Fehlerwertes in der objektiven Funktion dargestellt. Das Profil zeigt eine Zunahme der Varianz der Scherwellengeschwindigkeiten bei einer Tiefe größer 10 m, womit Aussagen zur Scherwellengeschwindigkeit nur bis 10 m möglich sind. Als Vorinformation für die Inversion diene das Rammprofil der geotechnischen Erkundung nach Abb.4-38e.

4.2.3 Messung Niederlausitz

4.2.3.1 Das Untersuchungsgebiet

Das Untersuchungsgebiet befindet sich auf dem Gelände einer ehemaligen Tagebaukippe, ca. 100 km nördlich von Dresden. Der Tagebau wurde vor ca. 30 Jahren um rund 90m mit dem örtlich anstehenden Material, größtenteils Sand, wieder verfüllt. Aufgrund der überwiegend sehr lockeren Lagerung und der großen Mächtigkeit dieser lockeren Schichten, werden durch das zukünftig ansteigende Grundwasser starke Sackungen in den mit Windkraftanlagen bebauten Gebieten erwartet. Um dieses Verhalten unter den Anlagen zu vermindern wurden Bodenverbesserungen durch die Firma *Arcadis* geplant. Zur Einschätzung dieser Verbesserungen wurden von der Universität Weimar zusammen mit der Firma *Geotomografie* Cross-Hole Messungen unter den Anlagen und im Freifeld durchgeführt. Zur Verifikation der entwickelten Oberflächenwellenanalysen wurden die Ergebnisse aus diesen Messungen mit den Resultaten der Cross - Hole - Freifelduntersuchung verglichen (Schmidt, Wuttke & Schanz 2003).

4.2.3.2 Experiment und Interpretation

Die vorrangig verwendeten f/k -Analysen und Wellenfeld-Transformationen zur Ermittlung der Dispersionseigenschaften wurden in der Regel mit einer Auslagenlänge von 52 m durchgeführt. Als Quelle wurden Hämmer von 5 und 10 kg eingesetzt.

Die in Abb.(4-39b) bis Abb.(4-39d) dargestellte Datensätze wurden an unterschiedlichen Punkten des Messfeldes aufgezeichnet. Deutlich wird aus den Abbildungen die alleinige Anregung der Grundmode im Wellenfeld. Das rasche Abklingen der Amplituden bei höheren Frequenzen ab 50 Hz wird auf die relativ hohe Dämpfung des untersuchten Materials zurückgeführt. Die linearen Funktionen kennzeichnen den Bereich, ab dem durch den Geophonabstand bedingt das frequenzabhängige Aliasing-Signal nach Gl.(3.22) auftritt.

In der vorliegenden Dispersionsanalyse mittels Phasen-Differenzen-Verfahren wurde eine Mittelung der Daten erst im Frequenzbereich vorgenommen. In Abb.(4-40a) und (4-40b) sind Phasengänge verschiedener Aufnehmerkombinationen beispielhaft abgebildet. Die in Abb.(4-40a) und (4-40b) gezeigten Phasengänge besitzen in die-

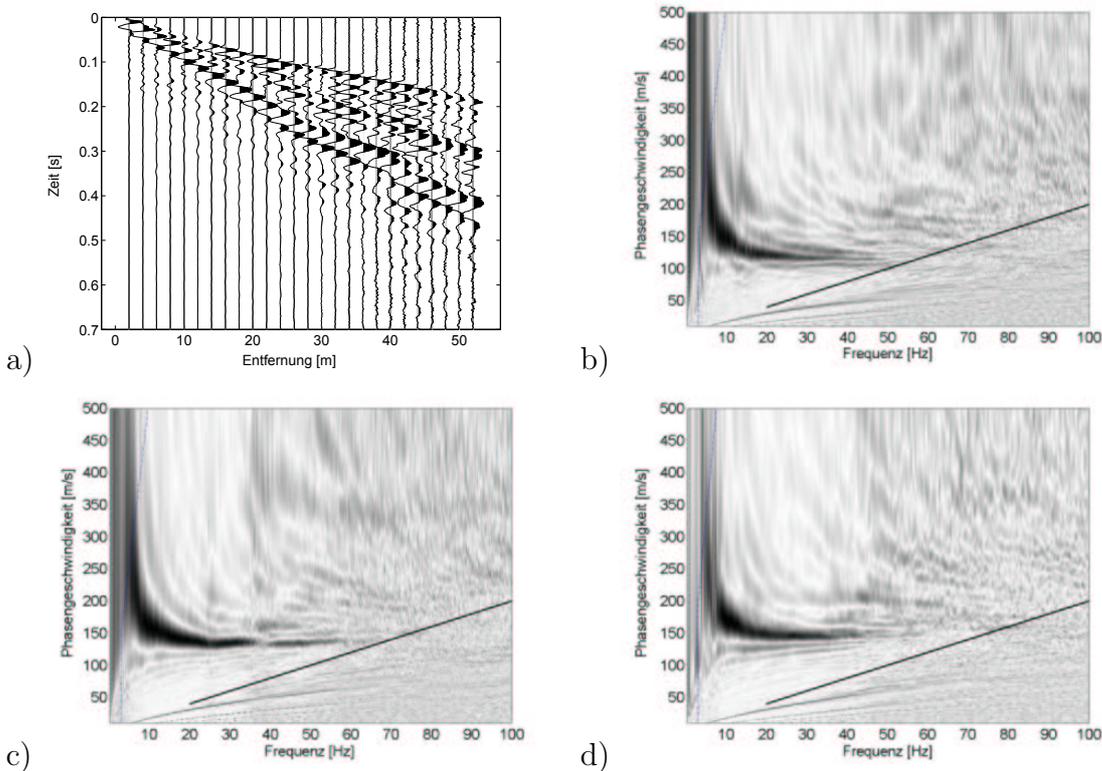


Abbildung 4-39: a) Spurnormierter Zeitverlauf, b) Wellenfeld-Transformation - Messpunkt 1, c) Wellenfeld-Transformation - Messpunkt 2, d) Wellenfeld-Transformation - Messpunkt 3.

sen Messungen einen nahezu ungestörten Verlauf im niederfrequenten Bereich. Diese Abschnitte bildeten die Grundlage für die weitere Ermittlung der Dispersionskurven. In Abb.(4-40c) ist die Überlagerung der Dispersionskurven der zur Auswertung verwendeten Aufnehmerkonfigurationen und Schüsse abgebildet. Durch Mittelung dieser Werte zu jedem Frequenzpunkt ergibt sich die resultierende Dispersionskurve in Abb.(4-40d).

Der Vergleich der Ergebnisse aus der Phasen-Differenzen-Methode und aus der Wellenfeld-Transformation in Abb.(4-41a) zeigt eine hohe Übereinstimmung im Verlauf der Phasengeschwindigkeitsfunktion. Die nahezu komplette Deckung hat ihre Ursache darin, dass das Wellenfeld ausschließlich von der Grundmode getragen wird. Mit dieser Voraussetzung kann das Phasen-Differenzen-Verfahren problemlos genutzt werden, um die Dispersionseigenschaften des Untergrunds zu ermitteln.

Die Abbildung (4-41b) zeigt das resultierende Inversionsprofil in den Variationsgrenzen, die einen Fehler von 10% in der objektiven Funktion hervorrufen. Zusätzlich ist das mit den Cross-Hole Messungen ermittelte Profil des Freifelds, d.h. ein Profil im unverbesserten Boden, in die Abbildung des Schichtungsprofils eingearbeitet, um die

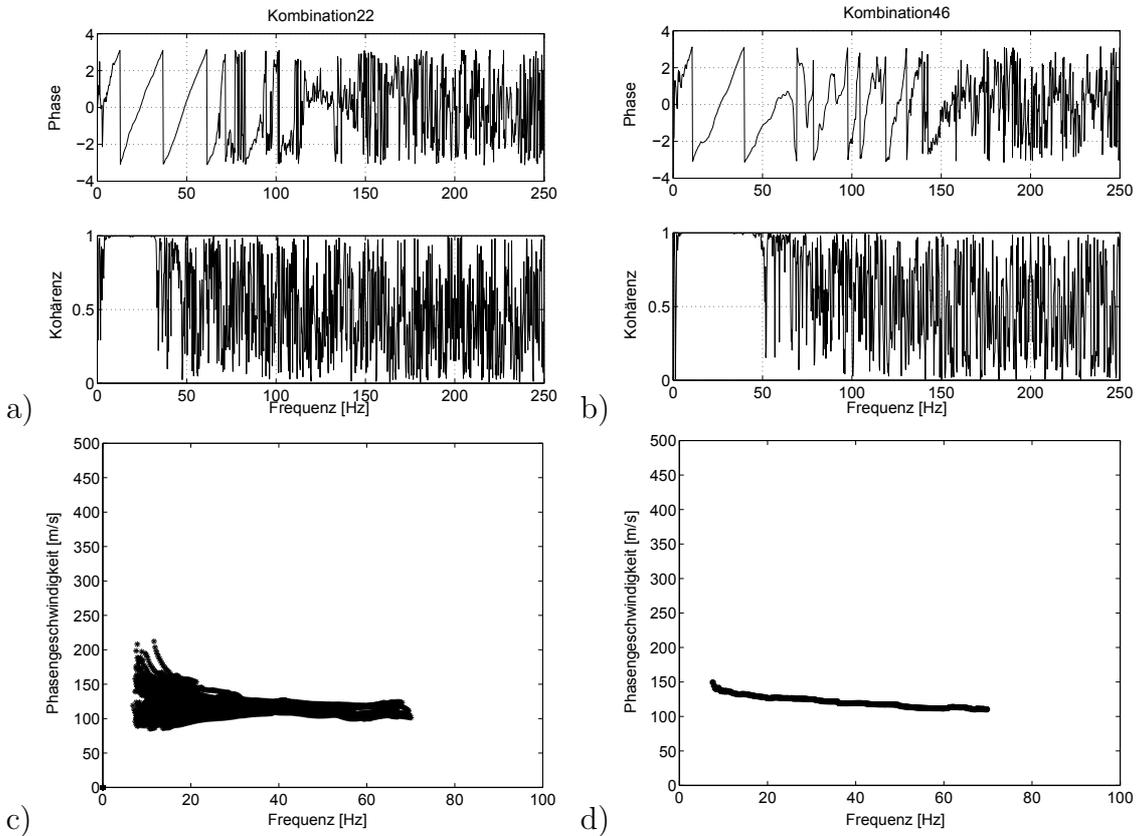


Abbildung 4-40: a) und b) Phasengang der Kreuzkorrelation und dazugehörige Kohärenz, c) Dispersionskurven der Aufnehmerkombinationen, d) gemittelte Dispersionskurve.

gute Kongruenz der beiden Scherwellengeschwindigkeitsprofile über die Erkundungstiefe darzustellen.

In Abb.(4-42a) sind neben dem Tiefenprofil des Spitzendruckes q_c der vor Ort durchgeführten CPT-Messungen auch der Verlauf des Schubmoduls dargestellt. Entsprechend (Fahey 1998) kann der Schubmodul über eine empirische Beziehung aus dem Verlauf des Spitzendruck einer CPT-Messung, dem atmosphärischen Druck und der effektiven, vertikalen Bodenspannung ermittelt werden. Diese Näherungsbeziehung wurde in Abb.(4-42a) dem invertierten Tiefenprofil des Schubmoduls von Messpunkt 1 gegenübergestellt. Erkennbar ist die gute Übereinstimmung zwischen dem aus der Inversion gewonnenen Schubmodulprofil und dem Verlauf des Schubmoduls ermittelt aus der empirischen Beziehung nach (Fahey 1998) für das vorhandene Bodenprofil zunehmender Steifigkeit.

Letztlich werden in Abb.(4-42b-d) die Inversionsergebnisse des Messpunktes 2 dargestellt. Dabei werden zur Verdeutlichung der auftretenden numerischen Varianzen einer Inversion und der damit notwendigen Angabe eines Fehlerbereiches um ein

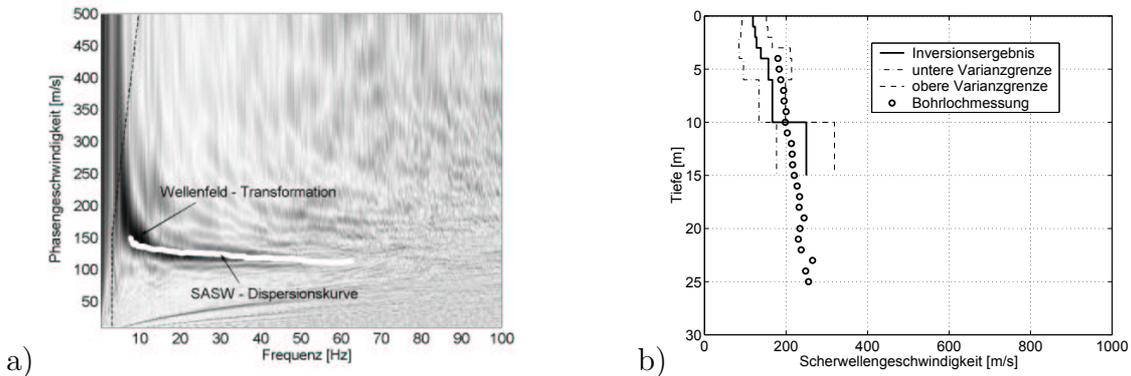


Abbildung 4-41: a) Vergleich der von Phasen-Differenzen-Verfahren und Wellenfeld-Transformation, b) Inversionsergebnis mit Varianz der Scherwellengeschwindigkeiten im direkten Vergleich mit dem Profil der Cross-Hole Messungen am Messpunkt 1.

Ergebnisprofil unterschiedliche Startprofile verwendet. Im Ergebnis des letzten Iterationschrittes sind zwischen den drei gewählten Beispielen geringe Unterschiede in den ermittelten Wellengeschwindigkeiten vorhanden. Die Ursache dafür ist der vorgegebene Abbruchfehler ϵ wodurch immer ein gewisser Bereich der Wellengeschwindigkeit diese Forderung erfüllt. Zusätzlich entsteht durch die verwendete lokale Suchmethodik des zugrundeliegenden Inversionsmodells eine entsprechende Variation des Inversionsergebnisses in Abhängigkeit vom gewählten Startprofil. Die notwendigen Vorinformationen für eine erfolgreiche Konvergenz in der Fehlerminimierung der Inversionsrechnung wurden in diesen Beispielen aus vorhandenen geotechnischen Felduntersuchungen, wie CPT-Messungen bzw. Bohrprofile, gewonnen. In der Regel geben diese Analysen Hinweise zu vorhandenen Schichtstärken. Die Werte der Scherwellengeschwindigkeiten für das Startprofil konnten dem Dispersionsspektrum direkt oder einer durchgeführten refraktionsseismischen Analyse entnommen werden.

Zusammenfassung des Kapitels 4

Kapitel 4 beinhaltet die Analyse von theoretischen Bodenmodellen hinsichtlich auftretender Besonderheiten als eine Interpretationshilfe für experimentelle Untersuchungen. Bei diesen theoretischen Untersuchungen wurde zwischen normal und anormal geschichteten Modellen unterschieden. Diese differenzierte Betrachtung ist wegen der ausgeprägten Unterschiede im Dispersionsverlauf, dem Energietransport und den Green'schen Funktionen notwendig.

Bei der Untersuchung der Green'schen Funktionen normal geschichteter Böden ist ein Bereich stark verringerter Amplituden unterhalb der dominanten Standortfrequenz vorhanden. Erfolgt eine Anregung innerhalb dieses Bereichs, sind resultierenden Schwingungsamplituden erheblich kleiner als bei einer Anregung außerhalb dieses

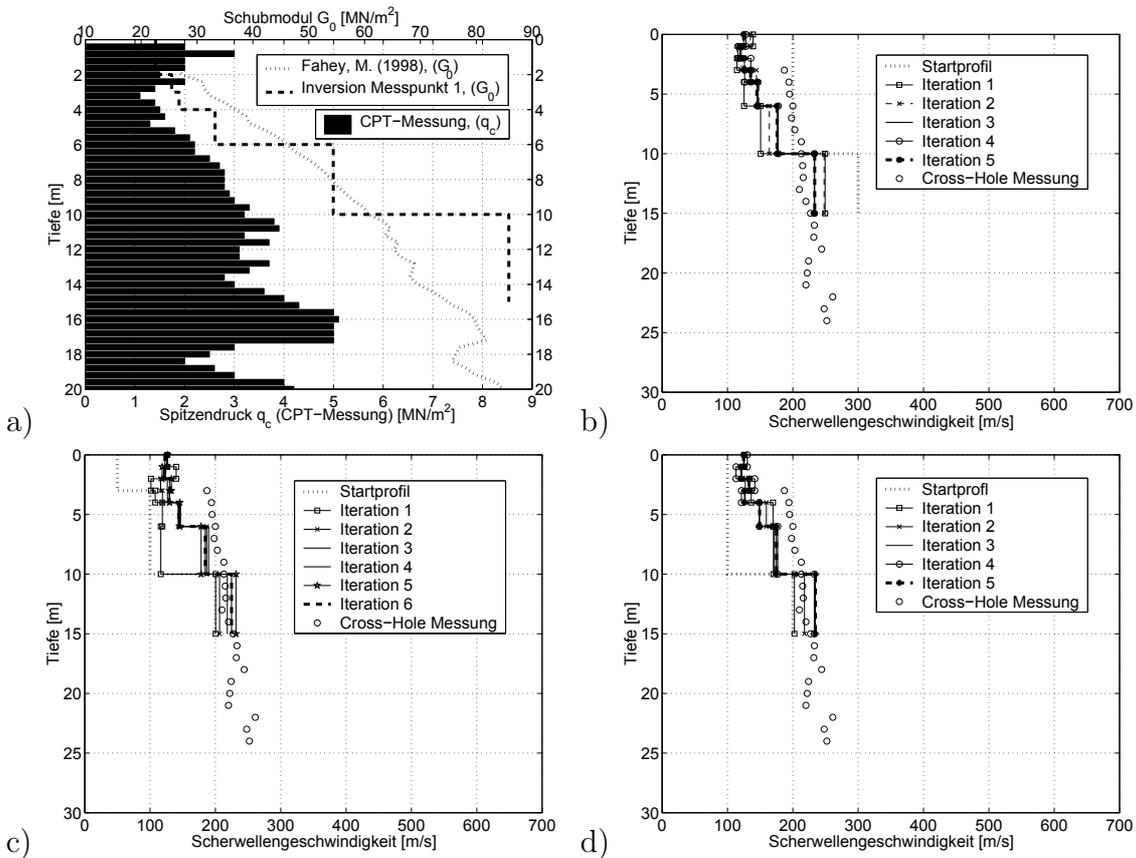


Abbildung 4-42: a) Vergleich des Schubmodulverlaufs über die Tiefe, b), c) und d) Iterationsschritte der Inversion von Messpunkt 2 mit unterschiedlichen Startprofilen.

Bereichs.

Aufgrund der Erkenntnisse aus Analysen zum Dispersionsverhalten und des Energietransports kann schon mit den Dispersionsspektren von Felddaten eine Zuordnung zu Profilstrukturen angegeben werden. Im Zusammenhang mit dem lokalen Suchverfahren können diese Informationen mögliche Startmodelle einschränken. Das in Kapitel 3 vorgestellte Inversionsverfahren war die Grundlage zur Ermittlung der Bodenkennwerte an unterschiedlichen Standorten. Von diesen Untersuchungen wurden drei Standorte im Detail vorgestellt. Die Verdeutlichung der Realitätsnähe der gefundenen Modelle in den Standortuntersuchungen erfolgte durch die grafische Überlagerung der experimentellen Dispersionsspektren mit dem theoretischen Ergebnismodell.

Die vorgestellten Arbeiten der Messung an der Halde Freiberg wurden zum Teil im Auftrag der Bundesanstalt für Materialforschung und -prüfung (BAM) durchgeführt und durch die Europäische Kommission (5. Rahmenprogramm) im Projekt *Sustainable Improvement in Safety of Tailings Facilities* (TAILSAFE, EVG1-CT-2002-00066, www.tailsafe.com) finanziert.

Kapitel 5

Zusammenfassung und Ausblick

5.1 Zusammenfassung der vorgestellten Verfahren

In der vorliegenden Arbeit wurden Verfahren für die Standortidentifizierung mit Oberflächenwellen präsentiert. Die Arbeit gliedert sich in vier Schwerpunkte:

- 1) Im ersten Punkt *Strukturmodellierung* werden die Grundlagen für das zu benutzende Modell in den theoretischen Untersuchungen und der anschließenden Inversion erarbeitet. Das Modell darf dabei nicht unnötig viele Parameter besitzen, muss aber andererseits die Eigenschaften eines vorhandenen Bodens gut erfassen.
- 2) Der zweite Teil *Wellenfeldanalyse* beinhaltet die notwendige Analyse für die Aufbereitung der Felddaten. Die Identifikation auftretender Moden in einem Wellenfeld ist das vorrangige Ziel dieser Untersuchungen. Damit legt die Wellenfeldanalyse die Grundlagen für eine erfolgreiche Parameterbestimmung an einem Standort.
- 3) Im dritten Abschnitt *Inversion* wird eine Methode vorgestellt die es ermöglicht, auftretende Moden in einem Wellenfeld gemeinsam zu invertieren. Als Modellgrundlage für die Inversion wurde ein Verfahren des kleinsten Fehlerquadrates verwendet.
- 4) Im letzten Teil *Standortanalyse* wurden die erarbeiteten theoretischen Grundlagen für Parameterstudien genutzt. Zum einen erfolgte eine Analyse von Modellen als Interpretationshilfe beobachteter Daten, und zum anderen erfolgte eine Parameteridentifikation an vorhandenen Felddaten.

Die Erstellung eines Modells des vertikal heterogenen Untergrundes erfolgte im Frequenzbereich für beliebig geschichtete Böden, aufbereitet durch weitestgehend analytische Formulierungen. Durch Nutzung beliebiger horizontaler, elastisch-isotroper

Schichten konnte die vertikale Heterogenität approximiert werden. Die Definition der Green'schen Funktionen wurde aus der Haskell'schen Matrixformulierung in die Formulierungen der Reflexions- und Transmissionskoeffizienten überführt, womit die folgenden analytischen Betrachtungen am mathematisch übersichtlicheren Verfahren durchgeführt werden konnten. Die Lösung des so formulierten Halbraumproblems erfolgte unter Verwendung der Konturintegration. Dazu wurde die Vorgehensweise der bestehenden Lösung des homogenen Halbraums auf das Problem des geschichteten Mediums übertragen. Die daraus sich ergebende Lösung ist in ein Körperwellen- und ein Oberflächenwellenfeld separiert.

Der Vorteil dieser analytischen Betrachtungsweise liegt in der eindeutigen Zuordnungsmöglichkeit der erhaltenen Lösungen zu Wellentypen und der klaren Dispersionscharakteristik der berechneten Modelle. Im Gegensatz dazu liefern numerische Lösungen, wie FEM, immer ein Wellenfeld, in dem die Wellentypen zugeordnet bzw. interpretiert werden müssen. Mit Hilfe der synthetischen Bodenmodellierung wird das Verhalten von geschichteten Böden bei durchlaufenden Oberflächenwellenfeldern simuliert und untersucht. Für die Untersuchung der Profile wurde hauptsächlich die Modale Superposition von Oberflächenwellen und die Wellenzahl-Integration verwendet.

Bei der Analyse von Oberflächenwellenfeldern in vorhandenen Medien sind abweichend von den üblichen seismischen Methoden spezielle Untersuchungsmethoden zur Ermittlung der vorhandenen Dispersion notwendig. Zur Durchführung der Dispersionsanalyse wird in geotechnischen Untersuchungen in der Regel das Phasen-Differenzen-Verfahren (SASW) genutzt. Aufgrund der beschränkten Aussagefähigkeit dieses Verfahrens zu auftretenden höheren Moden werden verbesserte Analysemethoden zur experimentellen Auswertung hinzugezogen. Diese Methoden nutzen zur Informationsgewinnung das räumlich ausgedehnte Wellenfeld.

Ausgehend von dem Dispersionsverhalten kann die Bodenstruktur mittels inverser Methoden bestimmt werden. Für die gemeinsame Inversion der in den Messungen vorhandenen Moden wurde ein entsprechendes Inversionsverfahren abgeleitet. Als Grundlage der Inversion wurde ein Verfahren des kleinsten Fehlerquadrates gewählt. Die Vorteile hinsichtlich einer effizienten und stabilen Inversion unter Nutzung dieser Methodik überwiegen den Nachteil der lokalen Suche nach dem Fehlerminimum. Zum Erreichen der stabilen und zielgerichteten Inversion wird ein Levenberg-Marquardt Algorithmus, zusammen mit der Wichtung der Dispersionäste entsprechend ihrem Anregungsverhalten in den Dispersionsspektren, eingesetzt.

Von Vorteil hat sich innerhalb der Arbeit die gleichzeitige Behandlung von theoretischen und experimentellen Parameterstudien erwiesen, da sich Ergebnisse und

Erkenntnisse beider Seiten ergänzten. Eine Interpretation von Felddaten kann damit weitaus sicherer durchgeführt werden. Zusätzlich konnten die erarbeiteten experimentellen und theoretischen Verfahren gegenseitig überprüft werden. So erfolgte die Verifikation der theoretisch berechneten Seismogramme mittels der experimentellen Verfahren aufgrund der Kenntnis über die vorhandene Dispersionscharakteristik des Modells.

5.2 Zusammenfassung der Ergebnisse

Mit den vorgestellten theoretischen Lösungen wurden in der Arbeit unterschiedliche Analysen bezüglich des Dispersionsverhaltens, der vorhandenen geometrischen Dämpfung, des Energietransportes und des Verhaltens der Green'schen Funktionen im Frequenzbereich durchgeführt.

So zeigen Untersuchungen an Modellrechnungen, dass in normal geschichteten Böden unterhalb der dominanten Standortfrequenz stets eine starke Verringerung der Amplituden auftritt. Dieses Verhalten ist nicht zu beobachten, wenn eine weichere Schicht eingebettet ist. Ferner wurde nachgewiesen, dass bei starr gebetteten Modellen immer ein Fehlen von Oberflächenwellen in den tieffrequenten Bereichen zu verzeichnen ist. In den Untersuchungen zum Dispersionsverhalten wurde zwischen Böden unterschieden, die ein normales und ein anormales Verhalten hervorrufen. Das anormale Dispersionsverhalten hat seine Ursache in dem Energieübergang vom Grundmode auf höhere Moden mit zunehmender Frequenz. Problematisch wird diese Eigenschaft, wenn die Energie an Oskulationspunkten in den Dispersionsspektren überspringt. In diesem Fall ist eine Separation der Moden nicht mehr möglich und es können Fehlinterpretation der Felddaten entstehen. Ausgehend von diesen Ergebnissen können die Grenzen des entwickelten Inversionsalgorithmus klar aufgedeckt bzw. der Typ der Messdaten gekennzeichnet werden, bei dem eine Inversion von Normalmoden nicht funktionieren wird. Die Untersuchung des Energietransportes ist für die Erklärung von auftretenden Wellenphänomenen in Böden, wie z.B. in Wellenleitern, ebenfalls von besonderem Interesse. Zur Vervollständigung der theoretischen Untersuchungen wurde die typische Partikelbewegung an der Halbraumoberfläche infolge einer durchlaufenden Rayleigh-Welle numerisch nachvollzogen. Im Fall eines geschichteten Halbraums existiert überwiegend -analog dem homogenen Halbraum- eine ebenfalls retrograde Partikelbewegung, wobei aber auch prograde Bewegungsanteile im Wellenfeld auftreten können.

Die Nutzung der verbesserten Dispersionsanalysen für die Interpretation der Wellenfelder liefert einen entscheidenden Beitrag innerhalb der experimentellen Versuche. Zum einen werden vorhandene Unsicherheiten der Phasen-Differenzen-Methode

verringert und zum anderen erhöht die Identifizierung mehrerer Moden in einem Wellenfeld den Informationsgehalt für eine anschließende Inversion.

5.3 Ausblick

Wie in jeder wissenschaftlichen Arbeit war es unumgänglich aus der Vielzahl von offenen bzw. hinzukommenden Problemstellungen nur diese herauszugreifen, die nach Meinung des Autors mit der Verbesserung und Erweiterung der vorgestellten Verfahren verbunden sind.

Mit dem beschriebenen Verfahren wurden gute Ergebnisse in den vorgestellten Untersuchungen erzielt. In der Bearbeitung dieser und weiterer Standorte ergaben sich jedoch auch verschiedene Defizite, die die Bearbeitung der einzelnen Punkte, wie Strukturmodellierung, Wellenfeldanalyse und Inversionsrechnung, erschwerten oder ausschlossen.

In der Strukturmodellierung erwies sich die Annahme einer horizontalen Schichtung mit elastisch-isotropen Materialeigenschaften als ein robustes Modell tatsächlicher Bodeneigenschaften. Mit dem Vorhandensein einer immer mehr oder weniger starken Anisotropie in natürlichen Böden ist eine dementsprechende Änderung der Wellenausbreitung und Kopplung der Wellentypen gegeben. Dieser Einfluss wird in den derzeitigen Annahme nicht berücksichtigt und kann zu Fehlern führen. Ein analoger Punkt in der Beeinflussung der experimentellen Arbeiten ist das Vorhandensein eines teilgesättigten Bodens. Zukünftige Arbeiten sollten eine Erweiterung der Berechnungen und experimentellen Analysen in den anisotropen und teilgesättigten Bereich ermöglichen, um diese Einflüsse auf die Messungen zu klären.

Schließlich erwies sich in den theoretischen Parameterstudien oder Inversionsrechnungen die mitunter lange Berechnungsdauer der Green'schen Funktion als problematisch für eine größere Variationsmöglichkeit der Kennwerte. Reine Zeitbereichslösungen, wie in (Triantafyllidis 1989) und (Bode 2000) für den homogenen Halbraum gelöst, besitzen den Vorteil einer relativ kurzen Berechnungszeit. Zukünftige Entwicklungen sollten auf die Zeitbereichslösung der Green'schen Funktionen eines geschichteten Halbraums abzielen.

Die Wellenfeldanalyse mit der Aufgabe der Dispersionsabbildung besitzt immer das Problem der klaren Identifizierung auftretender Moden. In der vorliegenden Arbeit wurden unterschiedliche Methoden der Wellenfeld-Transformation in einer gemeinsamen Betrachtung verwendet, um die verschiedenen Mängel zu kompensieren. In zukünftigen Entwicklungen sollte versucht werden, die Auflösung und die Vertrau-

ensbereiche der auftretenden Oberflächenwellen mit zusätzlichen Methoden oder Verbesserungen in der Signalverarbeitung zu erhöhen.

Aus den durchgeführten Inversionsrechnungen ergibt sich die Notwendigkeit einer vertiefenden Absicherung des erhaltenen Inversionsergebnisses durch verschiedene Modell- und Inversionserweiterungen. Dazu sollte eine Erweiterung des Inversionsmodells hin zu einem globalen Suchverfahren oder eine Kopplung zwischen globalem und lokalem Suchverfahren durchgeführt werden. Andererseits muss die Bestimmung der Kennwert- und Geometrievarianzen am Standort noch gelöst werden, um die Frage nach den vorhandenen Streuungen der ermittelten bzw. zugrunde liegenden Kennwerte klären zu können. In den eigenen Untersuchungen wurde eine Abschätzung möglicher Modelltypen im Bereich des Minimum durchgeführt, um die Aussagefähigkeit des invertierten Ergebnismodells auf die Beschreibung der Eingangsdaten zu prüfen.

Literaturverzeichnis

- Abo-Zena, A. (1979), 'Dispersion functions for unlimited frequency values', *Geophys. J.R. astr. Soc.* **58**, 91–105.
- Abramowitz, M. & Stegun, I. A. (1984), *Pocketbook Of Mathematical Functions*, Harri Deutsch.
- Achenbach, J. D. (1980), *Wave Propagation In Elastic Solids*, Northland-Holland Publishing Company.
- Aki, K. & Richards, P. (1980), *Qualitative Seismology: Theory and Methods*, Vol. 1, Freeman and Company.
- Al-Hunaidi, M. O. (1992), 'Difficulties with phase spectrum unwrapping in spectral analysis of surface waves nondestructive testing of pavements', *Can. Geotechn. J.* **29**, 506–511.
- Al-Hunaidi, M. O. (1998), 'Evolution-based genetic algorithm for analysis of non-destructive surface wave tests on pavements', *NDT&E International* **31**(4), 273–280.
- Alsop, L. E. (1966), 'Transmission and reflection of love waves at a vertical discontinuity', *J. Geophys. Res.* **71**(16), 3969–3984.
- Arfken, G. B. & Weber, H. J. (2001), *Mathematical methods for physicists*, 5 edn, Academic Press.
- Auersch, L. (1981), 'Wellenausbreitung durch eine Bodenschicht', *Die Bautechnik* (7).
- Auersch, L. (1994), 'Wave propagation in layered soils: theoretical solution in wave number domain and experimental results of hammer and railway traffic excitation', *Journal of sound and vibration* **173**(2), 233–264.
- Awojobi, A. O. (1972), 'Vertical vibration of a rigid circular foundation on gibson soil', *Géotechnique* **22**(2), 333–343.

- Bard, P. Y. & Lachet, C. (1994), 'Numerical and theoretical investigations on the possibilities and limitations of nakamura's technique', *J.Phys.Earth* **42**, 377–397.
- Bard, Y. (1974), *Nonlinear Parameter Estimation*, Academic Press.
- Bender, F. (1985), *Angewandte Geowissenschaften*, Enke Verlag.
- Bode, C. (2000), Numerisches Verfahren zur Berechnung von Baugrund-Bauwerk-Interaktionen im Zeitbereich mittels GREENscher Funktionen für den Halbraum, PhD thesis, Technische Universität Berlin.
- Bode, C. (2001), Persönliche Kommunikation.
- Bouchon, M. (1981), 'A simple method to calculate green's functions for elastic layered media', *BSSA* **71**(4), 959–971.
- Bronstein, I. N., Semendjajew, K. A., Musiol, G. & Mühlig, H. (2001), *Taschenbuch der Mathematik*, 5 edn, Verlag Harri Deutsch.
- Buchen, P. W. & Ben-Hador, R. (1996), 'Free-mode surface-wave computations', *Geophysical Journal International* **124**, 869–887.
- Burg, K., Wille, F. & Haf, H. (1990), *Vektoranalysis und Funktionentheorie*, IV, Teubner Verlag.
- Burland, J. B. (1989), 'Small is beautiful - the stiffness of soils at small strains', *Can.Geotechnical J.* **26**, 499–516.
- Bycroft, G. N. (1956), 'Forced vibrations of a rigid circular plate on a semi-infinite elastic space and on an elastic stratum', *Philos. Trans. R. Soc.* (A248), 327–368.
- Chen, X. (1993), 'A systematic and efficient method of computing normal modes for multilayered media', *Geophysical Journal International* **115**, 391–409.
- Chen, X. (2001), Persönliche Kommunikation.
- Dahm, T. (1998), *Nichtlineare Inversionsprobleme*, Vorlesungsskript Geophysik, Institut für Meteorologie und Geophysik, Universität Frankfurt.
- Doyle, H. (1995), *Seismology*, John Wiley & Sohns.
- Dresen, L. & Rüter, H. (1994), Seismic coal exploration: In-seam-seismics, in 'Handbook of Geophysical Exploration', Vol. 16B of *I*, Pergamon.
- Dunkin, J. W. (1965), 'Computation of modal solutions in layered, elastic media at high frequencies', *BSSA* **55**(2), 335–358.

- Dziewonski, A., Bloch, S. & Landisman, M. (1969), 'A technique for the analysis of transient seismic signals', *BSSA* **59**(1), 427–444.
- Erfurth, H. & Bieß, G. (1975), *Optimierungsmethoden*, Deutscher Verlag der Grundstoffindustrie.
- Ewing, W. M., Jardetzky, W. S. & Press, F. (1957), *Elastic Waves in Layered Media*, McGraw-Hill Book Company.
- Fahey, M. (1998), Deformation and in situ stress measurement, in Robertson & Mayne, eds, 'Geotechnical Site Characterization', pp. 49–69.
- Forbriger, T. (2002), Oskulationen von Dispersionskurven, in '62. Jahrestagung der DGG'.
- Forbriger, T. (2003a), 'Inversion of shallow-seismic wavefields: II. Inferring subsurface properties from wavefield transforms', *Geophys. J. Int.* **153**, 735–752.
- Forbriger, T. (2003b), 'Inversion of shallow-seismic wavefields: I. wavefield transformation', *Geophys. J. Int.* **153**, 719–734.
- Forchap, E. A. (1996), Die Wellenzahlanalyse zur Ermittlung des Baugrundaufbaus bei der Untersuchung von Fundamentalschwingungen und Bodenerschütterungen, PhD thesis, Ruhr-Universität Bochum.
- Foti, S. (2000), Multistation Methods for Geotechnical Characterization using Surface Waves, PhD thesis, Politecnico di Torino.
- Frazer, N. (1988), Quadrature of wave number integrals, in D. Doornbos, ed., 'Seismological Algorithms', Academic Press.
- Fuchs, K. & Müller, G. (1971), 'Computation of synthetic seismograms with the reflectivity method and comparison with observations', *Geoph. J. R. Astr. Soc.* (23), 417–433.
- Gilbert, F. & Backus, G. E. (1966), 'Propagator matrices in elastic wave and vibration problems', *Geophysics* **31**, 326–332.
- Goldstein, H. (1991), *Klassische Mechanik*, Aula Verlag.
- Graff, K. F. (1991), *Wave motion in elastic solids*, Dover.
- Gucunski, N. (1991), Generation of Low Frequency Rayleigh Waves for the Spectral-Analysis-of-Surface-Waves Method, PhD thesis, University of Michigan.

- Gucunski, N. & Woods, R. D. (1991*a*), Instrumentation for sasw testing, *in* S. K. Batia, ed., 'Geotechnical Special Publication', Vol. 29, chapter Data Acquisition and Testing in Soil Dynamics, pp. 1–16.
- Gucunski, N. & Woods, R. D. (1991*b*), Rayleigh modes in interpretation of SASW test, *in* 'Proc. of the 2nd Int. Conf. On Recent Advances in Geotechnical Earthquake Engineering and Soil Dynamics', pp. 1399–1408.
- Gupta, R. N. (1966), 'Reflection of elastic waves from a linear transition layer', *BSSA* **56**(2), 511–526.
- Gutowski, T. G. & Dym, C. L. (1976), 'Propagation of ground vibration: A review', *J. of Sound and Vibration* **49**, 179–193.
- Haegeman, W. & Van Impe, W. F. (1995), Developments in sasw testing, *in* 'Proc. XIth ECSMFE', pp. 133–140.
- Harkrider, D. G. (1964), 'Surface waves in multilayered elastic media, I. Rayleigh and Love waves from buried sources in a multilayered elastic half-space', *BSSA* **54**(2), 627–679.
- Harkrider, D. G. & Anderson, D. L. (1966), 'Surface wave energy from point sources in plane layered earth models', *J. Geophys. Res.* **12**(12), 2967–2980.
- Haskell, N. A. (1953), 'The dispersion of surface waves on multilayered media', *BSSA* **43**, 17–34.
- Haupt, W. A. (1977), Surface waves in non-homogeneous half-space, *in* 'Proc. of DMSR 77'.
- Hayes, M. H. (1999), *Theory and Problems of Digital Signal Processing*, McGraw-Hill.
- Hering, A., Misiak, R., Gyulai, A., Ormos, T., Dobroka, M. & Dresen, L. (1995), 'A joint inversion algorithm to process geoelectrical and surface wave seismic data. Part I: basic ideas', *Geophysical Prospecting* **43**, 135–156.
- Herrmann, R. & Wang, C. Y. (1985), 'A comparison of synthetic seismograms', *BSSA* **75**(1), 41–56.
- Hight, D. W., Bennell, J. D., Chana, B., Davis, P. D., Jardin, R. J. & Porovic, E. (1997), 'Wave velocity and stiffness measurements of the crag and lower london tertiaries at Sizewell', *Géotechnique* **47**(3), 451–474.
- Hirschauer, R. (2001), Kopplung von Finiten Elementen mit Rand-Elementen zur Berechnung der dynamischen Baugrund-Bauwerk-Interaktion, PhD thesis, Technische Universität Berlin.

- Hisada, Y. (1994), 'An efficient method for computing green's functions for a layered half space without sources and receivers at close depth', *BSSA* **84**(5), 1456–1472.
- Ishihara, K. (1996), *Soil behaviour in earthquake geotechnics*, Oxford University Press.
- Jamiolkowski, M., LoPresti, D. C. F. & Pallara, O. (1995), State of the art: Role of in situ testing in geotechnical earthquake engineering, *in* 'Proc. 3rd International Conference on Recent Advances in Geotechnical Earthquake Engineering and Soil Dynamics'.
- Joh, S.-H. (1996), Advances in data interpretation technique for Spectral - Analysis - Of - Surface - Waves (SASW) Measurements, PhD thesis, University of Texas at Austin.
- Jupp, D. L. B. & Vozoff, K. (1975), 'Stable iterative methods for the inversion of geophysical data', *Geophys. J. R. astr. Soc.* **42**, 957–976.
- Kausel, E. & Roesset, J. M. (1981), 'Stiffness matrices for layered soils', *BSSA* **71**(6), 1743–1761.
- Keilis-Borok, V. I. & Yanovskaya, T. B. (1962), 'Dependence of the spectrum of surface waves on the depth of the focus within the earth crust', *Bull. Acad. Sci. USSR, Geophys. Ser., English Transl.* **11**, 1532–1539.
- Kennett, B. L. N. (1974), 'On variational principles and matrix methods in elastodynamics', *Geophys. J. Int.* **37**, 391–405.
- Kennett, B. L. N. (1983), *Seismic Wave Propagation in Stratified Media*, Vol. I, Cambridge University Press.
- Kennett, B. L. N., Kerry, N. J. & Woodhouse, J. H. (1978), 'Symmetries in the reflection and transmission of elastic waves', *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.* **52**, 215–229.
- Lai, C. G. & Rix, G. J. (1998), Simultaneous inversion of rayleigh phase velocity and attenuation for near-surface site characterization, Technical report, National Science Foundation and Geological Survey, Georgia Institute of Technology.
- Lamb, H. (1904), 'On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid', *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A* **203**.
- Lines, L. R. & Treitel, S. (1984), 'Tutorial: A review of least-square inversion and its application to geophysical problems', *Geophysical Prospecting* **32**, 159–186.
- Lomnitz, C., Butler, R. & Novaro, O. (2002), 'Coupled modes at interfaces: A review', *Geofisica International* **41**(2), 77–86.

- Lomnitz, C., Flores, J., Novaro, O., Seligman, T. H. & Esquivel, R. (1999), 'Seismic coupling of interface modes in sedimentary basins: A recipe for disaster', *BSSA* **89**(1), 14–21.
- Love, A. E. H. (1903), 'The propagation of wave-motion in an isotropic elastic solid medium', *Proc. Lond. Math. Soc. (Ser 2)* (1), 291–344.
- Luco, E. & Apsel, R. J. (1983), 'On the green's function for a layered half-space', *BSSA* **73**(4), 909–929.
- Malischewsky, P. (1973), Ausbreitung von seismischen Oberflächenwellen in Medien mit vertikaler Diskontinuität, PhD thesis, Friedrich Schiller Universität Jena.
- Malischewsky, P. (1987), *Surface Waves and Diskontinuities*, Elsevier.
- Marquering, H., Snieder, R. & Nolet, G. (1996), 'Waveform inversions and the significance of surface wave mode coupling', *Geophys. J. Int.* **124**, 258–278.
- Matthews, M., Hope, V. & Clayton, C. (1996), The use of surface waves in the determination of ground stiffness profiles, in 'Proc. Instn. Civ. Engrs. Geotechn. Engng.', Vol. 119, pp. 85–95.
- Mauerer, H. R., Van der Veen, M., Gindici, J. & Springman, S. (1999), Determining elastic soil properties at small strains, in 'Proc. Symposium on the Application of Geophysics to Engineering and Environmental Problems (SAGEEP)'.
- McMechan, G. A. & Ottolini, R. (1980), 'Direkt observation of a p - τ curve in a slant stacked wavefield', *BSSA* **70**, 775–789.
- McMechan, G. A. & Yedlin, M. J. (1981), 'Analysis of dispersive waves by wave field transformation', *Geophysics* **46**(6), 869–874.
- Menichetti, V. & Guillen, A. (1983), 'Simultaneous interactive magnetic and gravity inversion', *Geophysical Prospecting* **31**, 929–944.
- Menke, W. (1984), *Geophysical Data Analysis: Discrete Inverse Theorie*, Academic Press.
- Mitakidis, A. (1991), Zur Analytischen Lösung der dreidimensionalen Wellenausbreitung im elastischen Halbraum mit Anwendung auf Interaktionsprobleme Baugrund-Bauwerk, PhD thesis, Technische Universität Berlin.
- Müller, G. (1968), 'Theoretical Seismograms for some Types of Point-sources in Layered Media, Part I: Theory', *Zeitschrift für Geophysik* **34**, 147–167.
- Müller, G. (1985), 'The reflectivity method: a tutorial', *J. Geophys.* **58**, 153–174.

- Müller, G. (1991), *Vorlesungsskripte Geophysik*, Institut für Meteorologie und Geophysik, Universität Frankfurt.
- Myschkis, A. (1981), *Angewandte Mathematik für Physiker und Ingenieure*, MIR Verlag Moskau, (Übersetzung aus dem Russischen).
- Nakamura, Y. (1989), 'A method for dynamic characteristics estimation of subsurface using microtremor on the ground surface', *Quarterly Report of Railway Technical Research Institute (RTRI)* **30**(1).
- Nazarian, S. (1984), In situ determination of elastic moduli of soil deposits and pavement systems by Spectral - Analysis - Of - Surface - Wave Method, PhD thesis, University of Texas at Austin.
- Nazarian, S. & Stokoe, K. H. (1986), Use of surface waves in pavement evaluation, Technical Report 1070:132-144, Transportation Research Record.
- Nazarian, S., Yuan, D. & Baker, M. R. (1994), Automation of spectral analysis of surface wave method, in Ebelhar, Drevinch & Kutter, eds, 'Dynamic Geotechnical Testing II', pp. 88–100.
- Nolet, G. & Dorman, L. M. (1996), 'Waveform analysis of scholte modes in ocean sediment layers', *Geophys.J.Int.* **125**, 385–396.
- Novotný, O. (1976), 'Methods of computing the partial derivatives of dispersion curves', *Pageoph* **114**, 765–774.
- Park, C. B., Miller, R. D. & Xia, J. (1998), Imaging dispersion curves of surface waves in multi-channel record, Technical report, SEG.
- Park, J. (2002), Wave motion in finite and infinite media using the Thin-Layer Method, PhD thesis, MIT.
- Parker, R. (1994), *Geophysical inverse theory*, Princeton University Press.
- Pekeris, C. L. (1948), 'Theory of propagation of explosive sound in shallow water', *Geol. Soc. Amer.Mem.* **27**.
- Press, W. H., Flannery, B. P., Teukolsky, S. A. & Vetterling, W. T. (1989), *Numerical Recipes in Pascal*, Cambridge University Press.
- Rayleigh, D. (1885), 'On waves propagated along the plane surface of an elastic solid', *Proc. Lond. Math. Soc.* **17**, 4–11.
- Reissner, E. (1936), 'Stationäre, axialsymmetrische, durch eine schüttelnde Masse erregte Schwingung einer homogenen elastischen Halbraumes', *Ingenieur-Archiv, Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik* pp. 381–396.

- Richart, F. E., Hall, J. R. & Woods, R. D. (1969), *Vibrations of Soils and Foundations*, Prentice-Hall.
- Rix, G. J. (1988), Experimental study of factors affecting the Spectral - Analysis - Of - Surface - Waves method, PhD thesis, University of Texas at Austin.
- Roesset, J. M. & Jones Jr., T. J. (1970), Soil amplification of SV and P waves, Technical Report Research Report R70-3, MIT.
- Roesset, J. M. & Whitman, R. V. (1969), Theoretical background for amplification studies, Technical Report Research Report R69-15, MIT.
- Rücker, W. (1979), Ermittlung der Schwingungserregung beim Betrieb schienengebundener Fahrzeuge in Tunneln sowie Untersuchungen des Einflusses einzelner Parameter auf die Ausbreitung von Erschütterungen im Tunnel und dessen Umgebung, PhD thesis, Technische Universität Berlin.
- Rücker, W. (1989), 'Schwingungsausbreitung im Untergrund', *Bautechnik* **66**, 343–350.
- Saito, M. (1967), 'Excitation of free oscillations and surface waves by a point source in a vertically heterogeneous earth', *J. of Geophysical Research* **72**(14), 3689–3699.
- Saito, M. (1993), 'Branch line contribution in lamb's problem', *Butsuri-Tansa* **46**(5), 372–380.
- Saito, M. & Kabasawa, H. (1993), 'Computations of reflectivity and surface wave dispersion curves for layered media, rayleigh wave calculations', *Butsuri-Tansa* **47**(4), 283–298.
- Savidis, S. S. (1977), Analytical methods for the computation of wavefields, in 'Proceedings of DMSR 77', Vol. 1, pp. 5–16.
- Schmidt, H.-G., Schwarz, J. & Wuttke, F. (1998), 'Site response studies for low seismicity regions of central europe: research strategies in support of code development', *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* **17**, 459–464.
- Schmidt, H.-G., Wuttke, F. & Schanz, T. (2003), Foundation of wind power stations of reclaimed mining areas - soil improvement and site parameter investigations, in 'Symposium on Construction Process in Geotechnical Engineering', City University London.
- Schmidt, H.-G., Wuttke, F. & Schoenhardt, M. (2001), Beurteilungsmöglichkeiten von seismisch beanspruchten Standorten, in 'D-A-CH Tagung'.

- Schmutzer, E. (1989), *Grundlagen der theoretischen Physik*, Vol. 1/2, Deutsche Verlag der Wissenschaften.
- Schneider, C. (1993), Erkundung des Untergrundes von Deponien und Altlasten mit Rayleigh - Oberflächenwellen, PhD thesis, Ruhr-Universität Bochum.
- Schwab, F. & Knopoff, L. (1970), 'Surface-wave dispersion computations', *BSSA* **60**(2), 321–344.
- Schwarz, J., Schmidt, H.-G., Lang, D., Golbs, C. & Wuttke, F. (1999), Standorttypische Spektren für die DIN 4149 - neu, in 'D - A - CH Tagung', Berlin.
- Sheriff, R. E. & Geldhard, L. P. (1995), *Exploration Seismology*, 2 edn, Cambridge University Press.
- Sommerfeld, A. (1992a), *Mechanik der deformierbaren Medien*, Vol. II of *Vorlesungen über Theoretische Physik*, Verlag Harri Deutsch.
- Sommerfeld, A. (1992b), *Partielle Differentialgleichungen der Physik*, Vol. VI of *Vorlesungen über Theoretische Physik*, Verlag Harri Deutsch.
- Stöcker, H. (2000), *Taschenbuch der Physik*, Harry Deutsch Verlag.
- Takeuchi, H. & Dorman, J. (1963), 'Partial derivatives of surface wave phase velocity with respect to parameter change within the earth', *J. Geophys. Res.* **69**(16), 3429–3441.
- Thomson, W. T. (1950), 'Transmission of elastic waves through a stratified solid medium', *J. Appl. Phys.* **21**, 89–93.
- Tokimatsu, K. (1997), Geotechnical site characterization using surface waves, in 'Earthquake Geotechnical Engineering', Balkema.
- Tokimatsu, K., Tamura, S. & Kojima, H. (1992), 'Effects of multiple modes on rayleigh wave dispersion characteristics', *Journal of Geotechnical Engineering* **118**(10), 1529–1543.
- Triantafyllidis, T. (1989), Halbraumlösungen zur Behandlung bodendynamischer Probleme mit der Randelementemethode, Habilitationsschrift, Universität Fridericiana in Karlsruhe.
- Trim, D. W. (1990), *Applied partial differential equations*, PWS-KENT Publishing Company.
- Vrettos, C. (1988), Oberflächenwellen im Halbraum mit tiefenabhängigem Schubmodul, PhD thesis, Universität Fridericiana in Karlsruhe.

- Waas, G. (1972), Analysis method for footing vibrations through layered media, Technical report, US-Army-Engineer-Waterways Experiment Station.
- Watson, T. H. (1972), 'A real frequency, complex wave-number analysis of leaking modes', *BSSA* **62**(1), 369–384.
- Weißenburg, S. (1994), Beitrag zur Untersuchung der Standortabhängigkeit der Bodenbewegung bei Erdbeben infolge des Effektes der Bodenverstärkung, PhD thesis, Bauhaus-Universität Weimar.
- Wiggins, R. A. (1972), 'The general linear inverse problem: Implication of surface waves and free oscillations for earth structure', *Reviews of Geophysical and Space Physics* **10**(1), 251–285.
- Wolf, J. P. (1985), *Dynamic Soil-Structure Interaction*, Prentice-Hall.
- Wuttke, F., Schmidt, H.-G. & Schanz, T. (2004), Geotechnical site investigation of surface waves considering higher modes, in 'Proc. 13th World Conference On Earthquake Engineering, Vancouver, Canada'.
- Yuan, D. & Nazarian, S. (1993), 'Automated surface wave method: Inversion technique', *Journal of Geotechnical Engineering* **119**(7), 1112–1126.

Anhang A

Nebenrechnungen / Funktionen

A.1 Zylinderfunktionen

A.1.1 Differentiations- und Transformationsregeln für Zylinderfunktionen

Die verwendeten Zylinderfunktionen sind die Besselfunktion - J_n , die Neumann'sche Funktion - N_n , die Hankelfunktion 1. und 2. Art - $H_n^{1,2}$ und die modifizierte Besselfunktion n -ter Ordnung - K_n .

$$J'_n(x) = -\frac{n}{x}J_n(x) + J_{n-1}(x) \quad (\text{A.1-1})$$

$$\frac{J'_0(kr)}{\partial r} = \frac{dJ_0(kr)}{\partial r} = -kJ_1(kr) = -\frac{0}{r}J_0(kr) + kJ_{-1}(kr) \quad (\text{A.1-2})$$

$$J_{-1}(x) = (-1)^1 J_1(x) \quad (\text{A.1-3})$$

$$J_1(x) = -J'_0(x) \quad (\text{A.1-4})$$

$$N_1(x) = -N_0(x) \quad (\text{A.1-5})$$

Nach (Graff 1991) ist das Fourier-Besselsche-Integral definiert als:

$$f(r) = \int_0^\infty \int_0^\infty f(r)J_n(kr)J_n(kr)rdrkdk. \quad (\text{A.1-6})$$

A.1.2 Substitutionsregeln und Asymptotische Entwicklung von Zylinderfunktionen

1. Hankel-, Bessel- und Neumann'sche Funktionen mit reellem Argument nach (Abramowitz & Stegun 1984):

$$H_n^1(x) = J_n(x) + iN_n(x) \quad \text{bzw.} \quad H_n^2(x) = J_n(x) - iN_n(x) \quad (\text{A.1-7})$$

$$2J_n(x) = H_n^1(x) + H_n^2(x) \quad \text{bzw.} \quad 2iN_n(x) = H_n^1(x) - H_n^2(x) \quad (\text{A.1-8})$$

$$H_n^1(-x) = -(-1)^n H_n^2(x) \quad (\text{A.1-9})$$

$$J_n(x) = \frac{1}{2} [H_n^1(x) + H_n^2(x)] \quad (\text{A.1-10})$$

$$J_n(-x) = (-1)^n J_n(x) \quad (\text{A.1-11})$$

2. Hankel-, Bessel- und Neumann'sche Funktionen mit imaginärem Argument nach (Arfken & Weber 2001) und (Abramowitz & Stegun 1984):

$$H_n^2(-ix) = -(-1)^n H_n^1(ix) \quad (\text{A.1-12})$$

$$K_n^1(z) = \frac{1}{2} \pi i e^{\frac{1}{2} n \pi i} H_n^1 \left(z e^{\frac{1}{2} \pi i} \right) \quad \left(-\pi < \arg z \leq \frac{1}{2} \pi \right)$$

$$K_n^2(z) = -\frac{1}{2} \pi i e^{-\frac{1}{2} n \pi i} H_n^2 \left(z e^{-\frac{1}{2} \pi i} \right) \quad \left(-\frac{1}{2} \pi < \arg z \leq \pi \right) \quad (\text{A.1-13})$$

3. Die Fernfeldnäherungen der Zylinderfunktionen für ein reelles Argument ergeben sich nach (Bronstein et al. 2001) und (Abramowitz & Stegun 1984) folgendermaßen:

$$J_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\cos \left(x - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + O \left(\frac{1}{x} \right) \right] \quad (\text{A.1-14})$$

$$N_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\sin \left(x - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + O \left(\frac{1}{x} \right) \right] \quad (\text{A.1-15})$$

$$K_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-x} \left[1 + O \left(\frac{1}{x} \right) \right] \quad (\text{A.1-16})$$

$$H_n^1(x) \approx \left(\frac{2}{\pi x} \right)^{\frac{1}{2}} e^{i \left(x - \frac{1}{2} n \pi - \frac{1}{4} \pi \right)} \quad \text{bzw.} \quad H_n^2(x) \approx \left(\frac{2}{\pi x} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-i \left(x - \frac{1}{2} n \pi - \frac{1}{4} \pi \right)} \quad (\text{A.1-17})$$

4. Die notwendigen Fernfeldnaherungen der Zylinderfunktionen fur ein komplexes Argument sind in (Abramowitz & Stegun 1984) definiert:

$$J_n(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left[\cos\left(z - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + e^{|\varphi z|} O\left(\frac{1}{z}\right) \right] \quad (|\arg z| < \pi) \quad (\text{A.1-18})$$

$$N_n(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left[\sin\left(z - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + e^{|\varphi z|} O\left(\frac{1}{z}\right) \right] \quad (|\arg z| < \pi) \quad (\text{A.1-19})$$

$$H_n^1(z) \approx \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i\left(z - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi\right)} \quad (-\pi < \arg z < 2\pi) \quad (\text{A.1-20})$$

$$H_n^2(z) \approx \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-i\left(z - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi\right)} \quad (-2\pi < \arg z < \pi) \quad (\text{A.1-21})$$

A.1.3 Grenzübergang von der Kreis- zur Punktlast

Die Randbedingung an der Oberfläche sind nach Gl.(2.25a,b):

$$\left. \begin{aligned} \tau_z(r, z, t) &= -f(r) \\ \tau_{rz}(r, z, t) &= 0 \end{aligned} \right\} z = 0.$$

Als Definition der geometrischen Funktion wurde der Fall einer konstanten Kreislast gewählt.

$$\sigma_z(r, z, t) = -f(r) = \frac{F}{\pi\delta^2}$$

Die Transformation der Lastbeschreibung nach Abb.A-1 in den Wellenzahlbereich

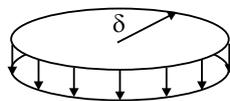


Abbildung A-1: Definition der Punktlast.

erfolgt mit Hilfe der Hankeltransformation. Diese ist nach Gl.(2.14a,b) fur die Hin- und Rucktransformation wie folgt definiert:

$$\mathfrak{H}(f) = f^{Hn}(k) = \int_0^\infty f(r) J_n(kr) r dr \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{H}(f^{Hn}) = f(r) = \int_0^\infty f^{Hn}(k) J_n(kr) k dk.$$

Mit der gegebenen geometrischen Ausdehnung der Funktion von $f(r)$ ergibt sich unter Annahme einer konstanten Lastamplitude und Beachtung der Integrations- und Differentiationsregeln von Anhang A fur Zylinderfunktionen die Transformierte wie

folgt:

$$f^{H_n}(k) = \frac{F}{\pi} \frac{J_1(kr)}{kr}.$$

Für die Berechnung der Punktlastlösung wird (Bode 2001) mit dem Grenzwertübergang des Radius gegen Null gefolgt. Der Ausdruck kr wird dabei durch κ ersetzt.

$$\lim_{\kappa \rightarrow 0} \frac{F}{\pi} \frac{J_1(\kappa)}{\kappa}$$

Für den entstehenden unbestimmten Ausdruck „ $\frac{0}{0}$ “ können die Regeln von Bernoulli und L'Hospital angewendet werden. Der Zähler und Nenner dieses Ausdrucks werden nachfolgend mit den Funktionen $\varphi(\kappa)$ und $\psi(\kappa)$ bezeichnet. Der konstante Term $\frac{F}{\pi}$ wird in der Bestimmung des Grenzwertes nicht mitgeführt sondern erst an späterer Stelle wieder eingefügt.

$$\lim_{\kappa \rightarrow 0} \left[\frac{\varphi(\kappa)}{\psi(\kappa)} \right] = \lim_{\kappa \rightarrow 0} \left[\frac{\varphi'(\kappa)}{\psi'(\kappa)} \right]$$

Mit

$$\varphi'(\kappa) = [J_1(\kappa)]' = \frac{dJ_1(\kappa)}{d\kappa} = -\frac{1}{\kappa}J_1(\kappa) + J_0(\kappa) \quad \text{bzw.} \quad \psi'(\kappa) = 1$$

folgt

$$\left[\frac{\varphi'(\kappa)}{\psi'(\kappa)} \right] = \frac{dJ_1(\kappa)}{d\kappa} = -\frac{1}{\kappa}J_1(\kappa) + J_0(\kappa)$$

bzw.

$$\lim_{\kappa \rightarrow 0} \left[\frac{\varphi(\kappa)}{\psi(\kappa)} \right] = \lim_{\kappa \rightarrow 0} \left[\frac{dJ_1(\kappa)}{d\kappa} \right] = \lim_{\kappa \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{\kappa}J_1(\kappa) + J_0(\kappa) \right].$$

Fasst man den Ausdruck

$$\lim_{\kappa \rightarrow 0} \left[\frac{J_1(\kappa)}{\kappa} = -\frac{J_1(\kappa)}{\kappa} + J_0(\kappa) \right],$$

weiter zusammen und beachtet das $J_0(0) = 1$, so ergibt sich der Grenzwert der Funktion $\frac{\varphi(\kappa)}{\psi(\kappa)}$ zu:

$$\lim_{\kappa \rightarrow 0} \left[\frac{2J_1(\kappa)}{\kappa} = J_0(\kappa) \right] \rightarrow \lim_{\kappa \rightarrow 0} \left[\frac{J_1(\kappa)}{\kappa} = \frac{J_0(\kappa)}{2} \right] \rightarrow \lim_{\kappa \rightarrow 0} \left[\frac{J_1(\kappa)}{\kappa} \right] = \frac{1}{2}.$$

Der resultierende Grenzwert der Punktlast im Wellenzahlbereich ist damit definiert als:

$$\lim_{\kappa \rightarrow 0} \frac{F}{\pi} \frac{J_1(\kappa)}{\kappa} = \frac{F}{2\pi}.$$

A.2 Eigenschaften der Übertragungsmatrizen

Die Eigenschaften der Übertragungsmatrizen werden anhand eines einfach geschichteten Bodenmodells analysiert.

In dem in Abb.(A-2) betrachteten Schichtenmodell existieren an den Schichtgrenzen folgende Spannungs- und Verschiebungsrandbedingungen:

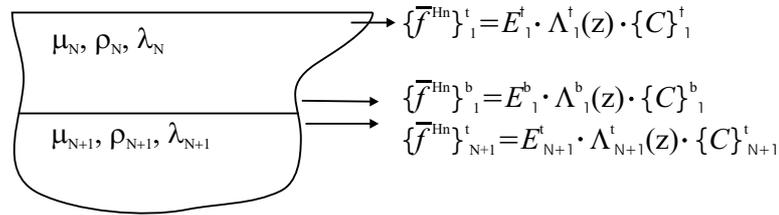


Abbildung A-2: Spannungs- und Verschiebungsrandbedingungen eines einfach geschichteten Bodenmodells.

In Abb.(A-2) kennzeichnet der Index 1 die Schicht 1 (Schichtanzahl $N = 1$). Der überlagerte Halbraum erhält den Index $N + 1$. Mit den Kontinuitätsbedingungen innerhalb einer Schicht

$$\{C\}_1^t = \{C\}_1^b \quad (\text{A.2-1})$$

können die Spannungen und Verschiebungen an der oberen Berandung der Schicht mit der Übertragungsmatrix in Abhängigkeit von den Spannungen und Verschiebungen an der unteren Berandung beschrieben werden

$$\left\{ \tilde{f}^{H_n} \right\}_1^t = E_1^t \cdot \Lambda_1^t(z) \cdot [\Lambda_1^b(z)]^{-1} \cdot [E_1^b]^{-1} \left\{ \tilde{f}^{H_n} \right\}_1^b = D_1^{-1} \left\{ \tilde{f}^{H_n} \right\}_1^b. \quad (\text{A.2-2})$$

Der Index t in Gl.(A.2-2) kennzeichnet die obere Berandung (top) und der Index b die untere Berandung (bottom). Die Kopplung der Schicht mit dem Halbraum erfolgt über Kontinuitätsbedingungen an der Grenzfläche zwischen Schicht und Halbraum.

$$\left\{ \tilde{f}^{H_n} \right\}_1^b = \begin{Bmatrix} \tilde{u}_r^{H_1} \\ \tilde{u}_z^{H_0} \\ \tilde{\tau}_{zr}^{H_1} \\ \tilde{\tau}_z^{H_0} \end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix} \tilde{u}_r^{H_1} \\ \tilde{u}_z^{H_0} \\ \tilde{\tau}_{zr}^{H_1} \\ \tilde{\tau}_z^{H_0} \end{Bmatrix}_{N+1} = \left\{ \tilde{f}^{H_n} \right\}_{N+1}^t \quad (\text{A.2-3})$$

Setzt man die Beschreibung des Halbraums aus der Abb.(A-2) in die Gl.(A.2-2) ein, erhält man die vollständige Beschreibung des geschichteten Halbraums:

$$\left\{ \tilde{f}^{H_n} \right\}_1^t = D_1^{-1} \cdot E_{N+1}^t \cdot \Lambda_{N+1}^t(z) \cdot \{C\}_{N+1}. \quad (\text{A.2-4})$$

In Gl.(A.2-4) sind die Spannungen und Verschiebungen an der Oberfläche in Abhängigkeit von den Wellenkoeffizienten des Halbraums und den Schichtungskennwerten definiert. Die in Gl.(A.2-4) verwendete Übertragungsmatrix D_1^{-1} wird vollständig mit den entsprechenden Submatrizen d_{11} , d_{12} , d_{21} und d_{22} in Gl.(A.2-5) dargestellt.

$$D_j^{-1} = \frac{1}{(2k^2 - \chi_1)} \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{A.2-5})$$

$$d_{11} = \begin{bmatrix} 2k^2 \cosh(\gamma_1 z) & k \begin{pmatrix} -\frac{\chi_1}{\gamma_1} \sinh(\gamma_1 z) \\ +2\nu_1 \sinh(\nu_1 z) \end{pmatrix} \\ k \begin{pmatrix} 2\gamma_1 \sinh(\gamma_1 z) \\ -\frac{\chi_1}{\nu_1} \sinh(\nu_1 z) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -\chi_1 \cosh(\gamma_1 z) \\ 2k^2 \cosh(\nu_1 z) \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

$$d_{12} = \begin{bmatrix} -\frac{k^2}{\mu_1 \gamma_1} \sinh(\gamma_1 z) & k \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu_1} \cosh(\gamma_1 z) \\ -\frac{1}{\mu_1} \cosh(\nu_1 z) \end{pmatrix} \\ +\frac{\nu_1}{\mu_1} \sinh(\nu_1 z) & \begin{pmatrix} \frac{\gamma_1}{\mu_1} \sinh(\gamma_1 z) \\ -\frac{k^2}{\mu_1 \nu_1} \sinh(\nu_1 z) \end{pmatrix} \\ k \begin{pmatrix} -\frac{1}{\mu_1} \cosh(\gamma_1 z) \\ +\frac{1}{\mu_1} \cosh(\nu_1 z) \end{pmatrix} & \end{bmatrix}$$

$$d_{21} = \begin{bmatrix} -4\mu_1 k^2 \gamma_1 \sinh(\gamma_1 z) & k \begin{pmatrix} 2\mu_1 \chi_1 \cosh(\gamma_1 z) \\ -2\mu_1 \chi_1 \cosh(\nu_1 z) \end{pmatrix} \\ +\frac{\chi_1^2 \mu_1}{\nu_1} \sinh(\nu_1 z) & \begin{pmatrix} \frac{\chi_1^2 \mu_1}{\gamma_1} \sinh(\gamma_1 z) \\ -4\mu_1 k^2 \nu_1 \sinh(\nu_1 z) \end{pmatrix} \\ k \begin{pmatrix} 2\gamma_1 \cosh(\gamma_1 z) \\ -\frac{\chi_1}{\nu_1} \cosh(\nu_1 z) \end{pmatrix} & \end{bmatrix}$$

$$d_{22} = \begin{bmatrix} 2k^2 \cosh(\gamma_1 z) & k \begin{pmatrix} -2\gamma_1 \sinh(\gamma_1 z) \\ +\frac{\chi_1}{\nu_1} \sinh(\nu_1 z) \end{pmatrix} \\ -\chi_1 \cosh(\nu_1 z) & \begin{pmatrix} \chi_1 \cosh(\gamma_1 z) \\ 2k^2 \cosh(\nu_1 z) \end{pmatrix} \\ k \begin{pmatrix} \frac{\chi_1}{\gamma_1} \sinh(\gamma_1 z) \\ -2\nu_1 \sinh(\nu_1 z) \end{pmatrix} & \end{bmatrix}$$

Die auftretenden Variablen ν_1 , γ_1 und χ_1 sind analog Gl.(2.20) und Gl.(2.27) definiert.

$$\nu_1 = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c_{s,1}^2}}, \quad \gamma_1 = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c_{p,1}^2}} \quad \text{und} \quad \chi_1 = \left(2k^2 - \frac{\omega^2}{c_{s,1}^2} \right)$$

Die mehrdeutigen Wurzel­ausdrücke in der Übertragungsmatrix besitzen für die modellierte Schichtung folgendes Verhalten:

1. Mögliche Verzweigungspunkte ν_1 und γ_1 sind Argumente einer Hyperbelfunktion (z.B. $\cosh(\nu_1 z)$) oder stehen in einer Kombination von Hyperbelfunktion und Wurzel­ausdruck (z.B. $\frac{\chi_1}{\gamma_1} \sinh(\gamma_1 z)$).
2. Die Funktion $\cosh(x)$ ist eine gerade Funktion bezüglich eines Vorzeichenwechsels im Argument.

3. Die ungerade Hyperbelfunktion $\sinh(x)$ steht immer in einem Produkt von dem Argument der Hyperbelfunktionen mit der Hyperbelfunktion, so dass in der Kombination die Doppeldeutigkeit der Wurzelfunktion in der komplexen Ebene nicht weiter vorhanden ist (bzw. in der Kombination entstehen gerade Funktionen hinsichtlich der Wurzelvorzeichen).

$$\cosh(-x) = \cosh(x)$$

$$\sinh(-x) = -\sinh(x) \quad (\text{A.2-6})$$

4. Im Fall eines imaginären Wurzelausdruckes, bei

$$k^2 < \frac{\omega_2^2}{c_s^2}$$

und

$$k^2 < \frac{\omega_2^2}{c_p^2}$$

beschreiben die in Λ vorkommenden Exponenten physikalisch keine exponentiell in die Tiefe abnehmenden Wellen (Oberflächenwellen), sondern Körperwellen (siehe auch Kapitel 2.4.1).

$$\cosh(ix) = \cos(x)$$

$$\cosh(-ix) = \cos(x) \quad (\text{A.2-7})$$

$$\sinh(ix) = i \sin(x)$$

$$\sinh(-ix) = -i \sin(x) \quad (\text{A.2-8})$$

Nur innerhalb der den homogenen Halbraum beschreibenden Matrix $E_{N+1}^t \cdot \Lambda_{N+1}^t(z)$ bleiben die Doppeldeutigkeiten der Wurzelfunktionen ν_{N+1} und γ_{N+1} bestehen. Die auftretenden Wurzeln innerhalb einer Schichtung sind immer positiv reell oder imaginär mit positiven Vorzeichen, d.h. die Forderung $\text{Re}(\nu) \geq 0$ bzw. $\text{Re}(\nu) \geq 0$ nach Gl.(2.21a,b) ist immer erfüllt. Damit folgt für mehrfach geschichtete Böden eine alleinige Doppeldeutigkeit in den Verzweigungspunkten des Halbraums.

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{u}_{r,N+1}^{H_1} \\ \tilde{u}_{z,N+1}^{H_0} \\ \tilde{\tau}_{zr,N+1}^{H_1} \\ \tilde{\tau}_{z,N+1}^{H_0} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cc} -k & \nu_{N+1} \\ -\gamma_{N+1} & k \\ 2\mu_{N+1}k\gamma_{N+1} & -\mu_{N+1} \left(2k^2 - \frac{\omega^2}{c_{s,N+1}^2} \right) \\ \mu_{N+1} \left(2k^2 - \frac{\omega^2}{c_{s,N+1}^2} \right) & -2\mu_{N+1}k\nu_{N+1} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} C_{pd,N+1} \\ C_{sd,N+1} \end{array} \right\} \quad (\text{A.2-9})$$

Im Folgenden wird auf die Abhängigkeit der gekoppelten Matrizen hinsichtlich des Auftretens eines Vorzeichenwechsels durch die Wellenzahl k eingegangen. Dazu ist in den Matrizen von Gl.(A.2-10) und Gl.(A.2-11) das Auftreten von geraden und ungeraden k -Termen mit \hat{k} - gerade Funktion und k - ungerade Funktion, gekennzeichnet.

$$D_j^{-1} = \begin{bmatrix} d_{1,1}(\hat{k}) & d_{1,2}(k) & d_{1,3}(\hat{k}) & d_{1,4}(k) \\ d_{2,1}(k) & d_{2,2}(\hat{k}) & d_{2,3}(k) & d_{2,4}(\hat{k}) \\ d_{3,1}(\hat{k}) & d_{3,2}(k) & d_{3,3}(\hat{k}) & d_{3,4}(k) \\ d_{4,1}(k) & d_{4,2}(\hat{k}) & d_{4,3}(k) & d_{4,4}(\hat{k}) \end{bmatrix} \quad (\text{A.2-10})$$

$$E_{N+1}^T = \begin{bmatrix} e_{1,1}(k) & e_{1,2}(\hat{k}) & e_{1,3}(k) & e_{1,4}(\hat{k}) \\ e_{2,1}(\hat{k}) & e_{2,2}(k) & e_{2,3}(\hat{k}) & e_{2,4}(k) \\ e_{3,1}(k) & e_{3,2}(\hat{k}) & e_{3,3}(k) & e_{3,4}(\hat{k}) \\ e_{4,1}(\hat{k}) & e_{4,2}(k) & e_{4,3}(\hat{k}) & e_{4,4}(k) \end{bmatrix} \quad (\text{A.2-11})$$

In der Kopplung der Matrizen für den Fall einer einfachen Schichtung zeigt das Matrizenprodukt von Übertragungsmatrix und Halbraummatrix eine Abhängigkeit von k ,

$$\left\{ \tilde{f}^{H_n} \right\}_1^t = D_1^{-1} \cdot E_{N+1}^t \cdot \Lambda_{N+1}^t(z) \cdot \{C\}_{N+1} = M_1 \cdot \{C\}_{N+1} \quad (\text{A.2-12})$$

die einer allein auftretenden Halbraummatrix entspricht (Gl.A.2-13).

$$M_1 = \begin{bmatrix} m_{1,1}(k) & m_{1,2}(\hat{k}) & m_{1,3}(k) & m_{1,4}(\hat{k}) \\ m_{2,1}(\hat{k}) & m_{2,2}(k) & m_{2,3}(\hat{k}) & m_{2,4}(k) \\ m_{3,1}(k) & m_{3,2}(\hat{k}) & m_{3,3}(k) & m_{3,4}(\hat{k}) \\ m_{4,1}(\hat{k}) & m_{4,2}(k) & m_{4,3}(\hat{k}) & m_{4,4}(k) \end{bmatrix} \quad (\text{A.2-13})$$

Durch Einsetzen der Spannungsrandbedingungen an der Oberfläche in die Spannungsverschiebungsgleichungen erhält man die Ausdrücke der Verschiebungen in Abhängigkeit von den vorhandenen k -Termen.

$$\begin{aligned} 0 &= m_{3,1}(k) C_{pd,N+1} + m_{3,2}(\hat{k}) C_{sd,N+1} \\ P_z &= m_{4,1}(\hat{k}) C_{pd,N+1} + m_{4,2}(k) C_{sd,N+1} \end{aligned} \quad (\text{A.2-14})$$

$$\begin{aligned}
C_{pd,N+1} &= \frac{m_{3,2}(\hat{k})}{m_{4,1}(\hat{k}) m_{3,2}(\hat{k}) - m_{4,2}(k) m_{3,1}(k)} P_z \\
C_{sd,N+1} &= \frac{-m_{3,1}(k)}{m_{4,1}(\hat{k}) m_{3,2}(\hat{k}) - m_{4,2}(k) m_{3,1}(k)} P_z
\end{aligned} \tag{A.2-15}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_r^{H_1}(z=0) &= \frac{m_{1,1}(k) m_{3,2}(\hat{k}) - m_{3,1}(k) m_{1,2}(\hat{k})}{m_{4,1}(\hat{k}) m_{3,2}(\hat{k}) - m_{4,2}(k) m_{3,1}(k)} P_z = k \left\{ \frac{m_{1,1} m_{3,2} - m_{3,1} m_{1,2}}{m_{4,1} m_{3,2} - m_{4,2} m_{3,1}} \right\} P_z \\
\tilde{u}_z^{H_0}(z=0) &= \frac{m_{2,1}(\hat{k}) m_{3,2}(\hat{k}) - m_{3,1}(k) m_{2,2}(k)}{m_{4,1}(\hat{k}) m_{3,2}(\hat{k}) - m_{4,2}(k) m_{3,1}(k)} P_z = \left\{ \frac{m_{2,1} m_{3,2} - m_{3,1} m_{2,2}}{m_{4,1} m_{3,2} - m_{4,2} m_{3,1}} \right\} P_z
\end{aligned} \tag{A.2-16}$$

Bei der Betrachtung einer Kombination von mehreren Transfer-Matrizen

$$D = D_1^{-1} \cdot D_2^{-1} \cdot \dots \cdot D_m^{-1} \tag{A.2-17}$$

mit $m = 1, 2, 3, \dots, m$ ergibt sich für das Matrizenprodukt folgende Abhängigkeit von k :

$$D = \begin{bmatrix} d_{1,1}(\hat{k}) & d_{1,2}(k) & d_{1,3}(\hat{k}) & d_{1,4}(k) \\ d_{2,1}(k) & d_{2,2}(\hat{k}) & d_{2,3}(k) & d_{2,4}(\hat{k}) \\ d_{3,1}(\hat{k}) & d_{3,2}(k) & d_{3,3}(\hat{k}) & d_{3,4}(k) \\ d_{4,1}(k) & d_{4,2}(\hat{k}) & d_{4,3}(k) & d_{4,4}(\hat{k}) \end{bmatrix}. \tag{A.2-18}$$

Gl.(A.2-18) zeigt die gleiche Abhängigkeit bezüglich gerader und ungerader k -Terme wie die Transfermatrix einer Schicht.

Für die Grenzwertbetrachtungen in Anhang A.3 und das Zusammenfassen der Konturintegrale in Kapitel 2.5.3 ist es auch notwendig, auftretende Größenordnungen der Wellenzahl k im Integranden nach Gl.(2.73) und Gl.(2.74) zu ermitteln. Die Angabe dieser Abhängigkeit in Gl.(2.93) basiert auf den nachfolgenden Matrixelementen für den Fall der Einfachschichtung in Gl.(A.2-16). Die Bestimmung der Vielfachen von k in einer Mehrfachschichtung kann mit den oben angegebenen Übertragungsmatrizen erfolgen.

Nachfolgende relevanten Terme des Produktes von Übertragungsmatrix und Halbraummatrix (Gl.A.2-12) beschreiben die Charakteristik der auftretenden Ordnung von k in einer Einfachschichtung:

$$m_{1,1} = k\mu_{N+1} \left\{ \cosh(\gamma_1 z) \left[\frac{\chi_{N+1}}{\mu_1} - \frac{2k^2}{\mu_{N+1}} \right] - \cosh(\nu_1 z) \left[\frac{\chi_{N+1}}{\mu_1} - \frac{\chi_1}{\mu_{N+1}} \right] \right\} \\ + k\mu_{N+1}\gamma_{N+1} \left\{ \sinh(\gamma_1 z) \left[\frac{-2k^2}{\gamma_1\mu_1} - \frac{\chi_1}{\gamma_1\mu_{N+1}} \right] - \sinh(\nu_1 z) \left[\frac{-2k^2}{\gamma_1\mu_1} - \frac{2\nu_1}{\mu_{N+1}} \right] \right\}$$

$$m_{1,2} = \mu_{N+1}\nu_{N+1} \left\{ \cosh(\gamma_1 z) \left[\frac{2k^2}{\mu_{N+1}} + \frac{2k^2}{\mu_1} \right] - \cosh(\nu_1 z) \left[\frac{\chi_1}{\mu_{N+1}} - \frac{2k^2}{\mu_1} \right] \right\} \\ + \mu_{N+1} \left\{ \sinh(\gamma_1 z) \left[\frac{-k^2\chi_1}{\gamma_1\mu_{N+1}} + \frac{k^2\chi_{N+1}}{\gamma_1\mu_1} \right] + \sinh(\nu_1 z) \left[\frac{2\nu_1 k^2}{\mu_r} - \frac{\nu_1\chi_{N+1}}{\mu_1} \right] \right\}$$

$$m_{2,1} =$$

$$\mu_{N+1} \left\{ \sinh(\gamma_1 z) \left[-\frac{2k^2\gamma_1}{\mu_{N+1}} + \frac{\gamma_1\chi_{N+1}}{\mu_1} \right] - \sinh(\nu_1 z) \left[-\frac{k^2\chi_1}{\nu_1\mu_{N+1}} + \frac{k^2\chi_{N+1}}{\mu_1\nu_1} \right] \right\} \\ + \mu_{N+1}\gamma_{N+1} \left\{ \cosh(\gamma_1 z) \left[\frac{\chi_1}{\mu_{N+1}} - \frac{2k^2}{\mu_1} \right] - \cosh(\nu_1 z) \left[-\frac{2k^2}{\mu_{N+1}} + \frac{2k^2}{\mu_1} \right] \right\}$$

$$m_{2,2} =$$

$$k\mu_{N+1}\nu_{N+1} \left\{ \sinh(\gamma_1 z) \left[\frac{2\gamma_1}{\mu_{N+1}} - \frac{2\gamma_1}{\mu_1} \right] - \sinh(\nu_1 z) \left[-\frac{\chi_1}{\nu_1\mu_{N+1}} + \frac{2k^2}{\mu_1\nu_1} \right] \right\} \\ + k\mu_{N+1} \left\{ \cosh(\gamma_1 z) \left[-\frac{\chi_1}{\mu_{N+1}} + \frac{\chi_{N+1}}{\mu_1} \right] + \cosh(\nu_1 z) \left[\frac{2k^2}{\mu_{N+1}} - \frac{\chi_{N+1}}{\mu_1} \right] \right\}$$

$$m_{3,1} =$$

$$k\mu_{N+1} \left\{ \sinh(\gamma_1 z) \left[\frac{4\mu_1 k^2 \gamma_1}{\mu_{N+1}} - 2\gamma_1\chi_{N+1} \right] - \sinh(\nu_1 z) \left[-\frac{\chi_1^2 \mu_1}{\nu_1 \mu_{N+1}} + \frac{\chi_1 \chi_{N+1}}{\nu_1} \right] \right\} \\ + k\mu_{N+1}\gamma_{N+1} \left\{ \cosh(\gamma_1 z) \left[\frac{2\mu_1 \chi_1}{\mu_{N+1}} - 4k^2 \right] - \cosh(\nu_1 z) \left[\frac{2\mu_1 \chi_1}{\mu_{N+1}} - 2\chi_1 \right] \right\}$$

$$m_{3,2} =$$

$$\mu_{N+1}\nu_{N+1} \left\{ \sinh(\gamma_1 z) \left[-\frac{4\mu_1 k^2 \gamma_1}{\mu_{N+1}} - 4k^2 \gamma_1 \right] + \sinh(\nu_1 z) \left[-\frac{\chi_1^2 \mu_1}{\nu_1 \mu_{N+1}} + \frac{2k^2 \chi_1}{\nu_1} \right] \right\} \\ + \mu_{N+1} \left\{ \cosh(\gamma_1 z) \left[\frac{2k^2 \mu_1 \chi_1}{\mu_{N+1}} - 2k^2 \chi_{N+1} \right] - \cosh(\nu_1 z) \left[\frac{2k^2 \mu_1 \chi_1}{\mu_{N+1}} - \chi_1 \chi_{N+1} \right] \right\}$$

$$\begin{aligned}
m_{4,1} &= \\
&\mu_{N+1} \left\{ \cosh(\gamma_1 z) \left[\frac{2k^2 \mu_1 \chi_1}{\mu_{N+1}} + \chi_1 \chi_{N+1} \right] + \cosh(\nu_1 z) \left[-\frac{2k^2 \mu_1 \chi_1}{\mu_{N+1}} + 2k^2 \chi_{N+1} \right] \right\} \\
&+ \mu_{N+1} \gamma_{N+1} \left\{ \sinh(\gamma_1 z) \left[-\frac{\chi_1^2 \mu_1}{\gamma_1 \mu_{N+1}} + \frac{2k^2 \chi_1}{\gamma_1} \right] - \sinh(\nu_1 z) \left[\frac{4k^2 \nu_1 \mu_1}{\mu_{N+1}} + 4k^2 \nu_1 \right] \right\} \\
\\
m_{4,2} &= k \mu_{N+1} \nu_{N+1} \left\{ \cosh(\gamma_1 z) \left[-\frac{2\mu_1 \chi_1}{\mu_{N+1}} - 2\chi_1 \right] + \cosh(\nu_1 z) \left[\frac{2\mu_1 \chi_1}{\mu_{N+1}} - 4k^2 \right] \right\} \\
&+ k \mu_{N+1} \left\{ \sinh(\gamma_1 z) \left[\frac{\chi_1^2 \mu_1}{\gamma_1 \mu_{N+1}} - \frac{\chi_1 \chi_{N+1}}{\gamma_1} \right] - \sinh(\nu_1 z) \left[-\frac{4k^2 \nu_1 \mu_1}{\mu_{N+1}} + 2\nu_1 \chi_{N+1} \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{A.2-19}$$

Die Terme χ_1 und χ_{N+1} sind durch die Ausdrücke $\chi_1 = (2k^2 - k_{s,1}^2)$ für die Schicht und $\chi_{N+1} = (2k^2 - k_{s,N+1}^2)$ für den Fels definiert.

A.3 Grenzwertbetrachtungen zu den Konturintegralen

A.3.1 Verhalten der Integrale entlang der Kontur $A \rightarrow D$ und $C \rightarrow D$

In den nachfolgenden Ausführungen soll nachgewiesen werden, dass das Integral entlang der gewählten Konturen $A \rightarrow D$ und $C \rightarrow D$ (Abbildung 2-18) verschwindet, wenn der Betrag von $\zeta(k, \tau)$ gegen Unendlich strebt:

$$\begin{aligned}
&\lim_{|\zeta(k, \tau)| \rightarrow \infty} \int_{A(k, \tau)}^{D(k, \tau)} u_{r,z}^{H_n}(\nu_n, \gamma_n, \zeta(k, \tau)) H_n^1(\zeta(k, \tau)r) \zeta(k, \tau) d\zeta(k, \tau) \stackrel{?}{=} 0 \\
&\text{bzw.} \quad \lim_{|\zeta(k, \tau)| \rightarrow \infty} \int_{C(k, \tau)}^{D(k, \tau)} u_{r,z}^{H_n}(\nu_n, \gamma_n, \zeta(k, \tau)) H_n^2(\zeta(k, \tau)r) \zeta(k, \tau) d\zeta(k, \tau) \stackrel{?}{=} 0. \tag{A.3-1}
\end{aligned}$$

Wird zum Nachweis die Darstellung in Polarkoordinaten verwendet, so folgt

$$\zeta = Re^{i\varphi} = R(\cos \varphi + i \sin \varphi) \tag{A.3-2}$$

mit

$$d\zeta = iRe^{i\varphi} d\varphi. \tag{A.3-3}$$

Die zugehörigen Integrationsgrenzen ergeben sich für das Konturintegral des I. Quadranten zu:

$$\begin{aligned}\zeta(A(R, \varphi)) &\rightarrow \varphi = \pi/2 \\ \zeta(D(R, \varphi)) &\rightarrow \varphi = 0\end{aligned}\quad (\text{A.3-4a})$$

und für das Bogenintegral des IV. Quadranten zu:

$$\begin{aligned}\zeta(C(R, \varphi)) &\rightarrow \varphi = -\pi/2 \\ \zeta(D(R, \varphi)) &\rightarrow \varphi = 0.\end{aligned}\quad (\text{A.3-4b})$$

Mit den neuen Integrationsgrenzen erhält man für das Integral entlang $A \rightarrow D$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \tilde{u}_{r,z}^{H_n}(\nu_n, \gamma_n, R, \varphi) H_n^1(R, \varphi, r) Re^{i\varphi} i Re^{i\varphi} d\varphi. \quad (\text{A.3-5})$$

Der Betrag des Integranden bezüglich der Integrationsvariable, ohne den Anteil der Zylinderfunktionen H_n^1 aus der Rücktransformation in den Originalbereich - $\tilde{u}_{r,z}^{H_n}(\nu_n, \gamma_n, R, \varphi)$ -, hat nach Anhang A.2 für $|\zeta(R, \varphi)|$ mit $R \rightarrow \infty$ mindestens die Form:

$$|\tilde{u}_{r,z}^{H_n}(\nu_n, \gamma_n, \zeta)| = O\left(\frac{1}{|\zeta|}\right) = O\left(\frac{1}{R}\right) \leq \frac{K}{R}, \quad (\text{A.3-6})$$

wobei K eine reelle positive Zahl ist und $O\left(\frac{1}{R}\right)$ die auftretende Ordnung von R kennzeichnet. Als Nachweis dazu kann das Beispiel der Einfachschichtung in Anhang A.2 mit den Gleichungen (A.2-16) und (A.2-19) dienen. Danach ergibt sich aus Gl.(A.2-19) mit den nicht trigonometrisch gebundenen Integrationsvariablen folgende Abhängigkeit von k :

$$\tilde{u}_{r,z}(r, z = 0, \omega) = \frac{m_{1,1}(k^3) m_{3,2}(k^4) - m_{3,1}(k^4) m_{1,2}(k^3)}{m_{4,1}(k^4) m_{3,2}(k^4) - m_{4,2}(k^4) m_{3,1}(k^4)} P_z$$

Dementsprechend ist die Abhängigkeit des Nenners von R um eine Grössenordnung höher als der Zähler, was der Darstellung von Gleichung (A.3-6) entspricht.

In der Betrachtung der Integrationsvariable als Argument der Hyperbelfunktionen kann Folgendes notiert werden:

- die Wellenzahl k_p ist immer kleiner k_s ; folglich ist $|\gamma_i| > |\nu_i|$ für $|\zeta| \rightarrow \infty$, womit die Aussage $|\cosh(\gamma_i z)| > |\cosh(\nu_i z)|$ bzw. $|\sinh(\gamma_i z)| > |\sinh(\nu_i z)|$ für $|\zeta| \rightarrow \infty$ gilt.

Entsprechend der Integranden nach Gl.(A.2-19) und Gl.(A.2-20) treten alle Hyperbelfunktionen innerhalb jedes Matrixelementes $m(i, j)$ auf. Nachfolgend wird im Zähler die $\sinh(\gamma_i z)$ -Funktion und im Nenner die $\cosh(\gamma_i z)$ -Funktion herausgelöst. Das entsprechende Matrixelement stellt sich z.B. für $m(1, 1)$ dar als

$$\sinh(\gamma_i z) \left\{ \coth(\gamma_i z) A - \frac{\cosh(\nu_i z)}{\sinh(\gamma_i z)} B + C - \frac{\sinh(\nu_i z)}{\sinh(\gamma_i z)} D \right\} \quad (\text{A.3-7})$$

bzw. für das Matrixelement $m(4, 1)$ als

$$\cosh(\gamma_i z) \left\{ E - \frac{\cosh(\nu_i z)}{\cosh(\gamma_i z)} F + \tanh(\gamma_i z) G - \frac{\sinh(\nu_i z)}{\cosh(\gamma_i z)} H \right\}. \quad (\text{A.3-8})$$

Die in Gl.(A.3-7) und Gl.(A.3-8) auftretenden Kürzel A, B, C und D beschreiben die weiteren Multiplikatoren in dem Matrixelement.

In Gl.(A.2-18) und Gl.(A.2-19) werden diese Umformungen innerhalb jedes Elementes vorgenommen. Durch die herausgelösten Hyperbelfunktionen ergeben sich innerhalb des Integranden $\tanh(\gamma_i z)$ -Funktionen (Gl.A.3-9 und Gl.A.3-10). Innerhalb der gesamten Gleichung treten nur noch die Funktionen $\tanh(\gamma_i z)$, $\coth(\gamma_i z)$ und die Quotienten

$$\frac{\cosh(\nu_i z)}{\sinh(\gamma_i z)}$$

auf, wobei die vorhandenen Kombinationen von \sinh und \cosh sowie die Argumente von γ_i und ν_i innerhalb des Quotienten wechseln können. Der Dividend und Divisor im Quotienten unterscheiden sich dahingehend, dass der Betrag des Divisors mit dem Argument $(\gamma_i z)$ geringfügig größer ist als der Betrag des Dividenden mit dem Argument $(\nu_i z)$.

Die bekannten Funktionen $\tanh(\gamma_i z)$ und $\coth(\gamma_i z)$ konvergieren mit $|\zeta(R, \varphi)| \rightarrow \infty$ gegen den endlichen Wert 1, so dass die Quotienten, welche die Funktionen $\tanh(\gamma_i z)$ bzw. $\coth(\gamma_i z)$, enthalten, gegen einen endlichen Wert in den Grenzen von 0 und 1 konvergieren.

Der Grenzwert hinsichtlich der Hyperbelfunktionen in den Gl. (A.2-19) und (A.2-19) konvergiert damit gegen einen endlichen Wert.

$$\frac{\sinh(\gamma_i z) \{A1 - A2\}}{\cosh(\gamma_i z) \{A3 - A4\}} = \tanh(\gamma_i z) \frac{\{A1 - A2\}}{\{A3 - A4\}} \quad (\text{A.3-9})$$

$$A1 = m_{1,1} \left(\tanh(\gamma_i z), \frac{\sinh(\nu_i z)}{\cosh(\gamma_i z)} \right) m_{3,2} \left(\tanh(\gamma_i z), \frac{\sinh(\nu_i z)}{\cosh(\gamma_i z)} \right)$$

$$A2 = m_{3,1} \left(\tanh(\gamma_i z), \frac{\sinh(\nu_i z)}{\cosh(\gamma_i z)} \right) m_{1,2} \left(\tanh(\gamma_i z), \frac{\sinh(\nu_i z)}{\cosh(\gamma_i z)} \right)$$

$$\begin{aligned}
A3 &= m_{4,1} \left(\tanh(\gamma_i z), \frac{\sinh(\nu_i z)}{\cosh(\gamma_i z)} \right) m_{3,2} \left(\tanh(\gamma_i z), \frac{\sinh(\nu_i z)}{\cosh(\gamma_i z)} \right) \\
A4 &= m_{4,2} \left(\tanh(\gamma_i z), \frac{\sinh(\nu_i z)}{\cosh(\gamma_i z)} \right) m_{3,1} \left(\tanh(\gamma_i z), \frac{\sinh(\nu_i z)}{\cosh(\gamma_i z)} \right) \quad (\text{A.3-10})
\end{aligned}$$

Weitere Terme in $\tilde{u}_{r,z}^{H_n}$, welche die Integrationsvariable k enthalten, konvergieren durch das Herauslösen der Integrationsvariable (mit $|\zeta| \rightarrow \infty$) in der Summe gegen einen endlichen Wert.

Die Anteile, die letztlich noch zur Abschätzung für das Konturintegral zu beachten sind, können in folgender Formulierung dargestellt werden:

$$\left| \lim_{R \rightarrow \infty} \int_A^D \tilde{u}_{r,z}^{H_n}(\nu_n, \gamma_n, \zeta) H_n^1(\zeta r) \zeta d\zeta \right| \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \left| \frac{K}{R} H_n^1(R, \varphi, r) R e^{i\varphi} i R e^{i\varphi} \right| d\varphi. \quad (\text{A.3-11})$$

Zusätzlich wird die asymptotische Entwicklung der Hankelfunktion mit komplexen Argument nach Anhang A.1 in Gl.(A.3-11) eingesetzt.

$$\begin{aligned}
&\left| \lim_{R \rightarrow \infty} \int_A^D \tilde{u}_{r,z}^{H_n} H_n^1(\zeta r) \zeta d\zeta \right| \leq \\
&\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \left| K \left(\frac{2}{\pi r R e^{i\varphi}} \right)^{\frac{1}{2}} e^{irR \cos \varphi} e^{-rR \sin \varphi} e^{-i\frac{n}{2}\pi} e^{-i\frac{1}{2}\pi} i R e^{i2\varphi} \right| d\varphi. \quad (\text{A.3-12})
\end{aligned}$$

Beachtet man, dass der Betrag der Exponentialfunktion eines rein imaginärem Argumentes den Wert Eins besitzt, so folgt:

$$\left| \lim_{R \rightarrow \infty} \int_A^D \tilde{u}_{r,z}^{H_n}(\nu_n, \gamma_n, \zeta) H_n^1(\zeta r) \zeta d\zeta \right| \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \left| K \left(\frac{2}{\pi r R} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-rR \sin \varphi} R \right| d\varphi \quad (\text{A.3-13})$$

bzw.

$$\left| \lim_{R \rightarrow \infty} \int_A^D \tilde{u}_{r,z}^{H_n}(\nu_n, \gamma_n, \zeta) H_n^1(\zeta r) \zeta d\zeta \right| \leq K \left(\frac{2}{\pi r} \right)^{\frac{1}{2}} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \left| e^{-rR \sin \varphi} \sqrt{R} \right| d\varphi. \quad (\text{A.3-14})$$

Mit $\varphi \in [0, \pi/2]$, $r \in]0, \infty]$ und $R \rightarrow \infty$ ergeben sich für den Integranden ausschließlich positive Werte, so dass gilt:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \left| e^{-rR \sin \varphi} \sqrt{R} \right| d\varphi = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 e^{-rR \sin \varphi} \sqrt{R} d\varphi. \quad (\text{A.3-15})$$

Zur Grenzwertbestimmung des Parameterintegrals (A.3-15) wird eine Abschätzung der Sinusfunktion innerhalb des entsprechenden Bereiches $[0, \pi/2]$ vorgenommen. Eine obere Grenze der Exponentialfunktion kann durch Substitution der Funktion $\sin \varphi$ durch den Ausdruck $\varphi/2$ definiert werden.

$$\sin \varphi \geq \varphi/2 \quad \text{für } \varphi \in [0, \pi/2]$$

$$e^{-rR \sin \varphi} \leq e^{-rR\varphi/2} \quad \text{für } \varphi \in [0, \pi/2], r \in]0, \infty] \text{ und } R \rightarrow \infty$$

Auf Basis dieser Substitution erfolgt die weitere Grenzwertbestimmung,

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 e^{-rR \sin \varphi} \sqrt{R} d\varphi &\leq \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 e^{-rR\varphi/2} \sqrt{R} d\varphi \text{ bzw.} \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 e^{-rR\varphi/2} \sqrt{R} d\varphi &= \lim_{R \rightarrow \infty} \sqrt{R} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 e^{-rR\varphi/2} d\varphi. \end{aligned} \quad (\text{A.3-16})$$

wobei der entstandene Integralausdruck in (Gl.A.3-16) ohne größere Probleme bestimmt werden kann.

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \sqrt{R} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 e^{-rR\varphi/2} d\varphi &= \lim_{R \rightarrow \infty} \sqrt{R} \left(\frac{-2e^{-rR\varphi/2}}{rR} \right) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^0 \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \sqrt{R} \left(\frac{-2}{rR} - \frac{-2e^{-rR\pi/4}}{rR} \right) &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{-2}{r\sqrt{R}} - \frac{-2e^{-rR\pi/4}}{r\sqrt{R}} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.3-17})$$

Mit $R \rightarrow \infty$ konvergiert der letzte Ausdruck in (A.3-17) klar gegen Null, womit der Grenzwert des gegebenen Integrals (A.3-15)

$$K \left(\frac{2}{\pi r} \right)^{\frac{1}{2}} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \left| e^{-rR \sin \varphi} \sqrt{R} \right| d\varphi \rightarrow 0$$

ebenfalls gegen diesen Wert konvergiert.

Für das Integral in den Grenzen $C \rightarrow D$ kann ein analoger Nachweis geführt werden. Zu Beachten ist das asymptotische Verhalten für die Hankelfunktion $H_1^2(\zeta r)$ nach Anhang A.1. Die Substitution $\frac{\varphi}{2}$ anstelle der Funktion $\sin \varphi$ bildet ebenfalls eine obere Grenze für den Bereich $\varphi \in [-\pi/2, 0]$.

$$e^{rR \sin \varphi} \leq e^{rR\varphi/2} \quad \text{für } \varphi \in [-\pi/2, 0], r \in]0, \infty] \text{ und } R \rightarrow \infty$$

Führt man die weitere Berechnungsschritte analog dem Integral $A \rightarrow D$ aus, so folgt das auch das Integral $C \rightarrow D$ für $R \rightarrow \infty$ gegen Null konvergiert.

A.3.2 Verhalten der Integrale um die Verzweigungspunkte

$k_{s,N+1}$ und $k_{p,N+1}$

Bei der Konturintegration ergibt sich die Notwendigkeit, die auf der reellen Achse liegenden, singulären Stellen $k_{s,N+1}$ und $k_{p,N+1}$ des Halbraums in den Grenzen 0 bis π zu umfahren (siehe Abb.A-3). Zweckmäßigerweise werden sie mit einem Halbkreisbogen $\Gamma_{\nu,\gamma}$ des Radius' R umfahren.

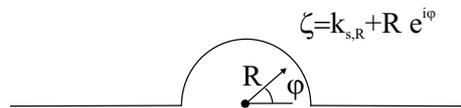


Abbildung A-3: Kontur um die Verzweigungspunkte auf der reellen Achse nach Bild 2-18.

Für den Halbkreisbogen Γ_{k_s} wird hier nachgewiesen, dass dieser einen Wert Null liefert, wenn der Radius R gegen Null läuft.

$$\lim_{R \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{k_s}} \tilde{u}_{r,z}^{H_n}(\nu_{N+1}, \gamma_{N+1}, \zeta) H_n^1(\zeta r) \zeta d\zeta \stackrel{?}{=} 0$$

Werden wieder Polarkoordinaten für ζ verwendet ergibt sich für das zu untersuchende Integral der folgender Ausdruck:

$$\lim_{R \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{k_s}} \tilde{u}_{r,z}^{H_n}(\nu_{N+1}, \gamma_{N+1}, (k_{s,N+1} + R e^{i\varphi})) H_n^1[(k_{s,N+1} + R e^{i\varphi}) r] \cdot (k_{s,N+1} + R e^{i\varphi}) iR e^{i\varphi} d\varphi. \quad (\text{A.3-18})$$

Für die in Gl.(A.3.-18) auftretenden Terme muss nachgewiesen werden, dass diese mit $R \rightarrow 0$ gegen Null konvergieren. Die Hankelfunktion $H_n^1[(k_{s,N+1} + R e^{i\varphi}) r]$ und der Ausdruck $(k_{s,N+1} + R e^{i\varphi})$ liefern mit $R \rightarrow 0$ den endlichen Ausdruck $H_n^1[k_{s,N+1} r] k_s$. In der Analyse der Verschiebungsfunktionen $\tilde{u}_{r,z}^{H_n}$ unter Nutzung der Gleichungen (A.2-18) und (A.2-19) ergeben sich für die Ausdrücke χ_{N+1} und der ebenfalls auftretenden freien Integrationsvariable ζ mit $R \rightarrow 0$ endliche Ausdrücke. In den trigonometrischen Funktionen tritt keine Abhängigkeit von ν_{N+1} auf.

Damit bleiben eine Abhängigkeit von ν_{N+1} in den einzelnen Ausdrücken $m_{i,j}$ die folgende Form besitzt:

$$m(i, j) = g_1(\zeta(R, \varphi), \mu, \gamma_n, \nu_n) \nu_{N+1} + g_2(\zeta(R, \varphi), \mu, \gamma_n, \nu_n).$$

Die zusammengefassten Funktionen $g_1(\zeta(R, \varphi), \mu, \gamma_n, \nu_n)$ und $g_2(\zeta(R, \varphi), \mu, \gamma_n, \nu_n)$ in $m_{i,j}$ sind unabhängig von ν_{N+1} . Mit der Zerlegung von $\nu_{N+1} = \sqrt{\zeta^2 - k_s^2}$ in $\nu_{N+1} = \sqrt{(\zeta - k_s)(\zeta + k_s)}$ kann der Ausdruck $\sqrt{(\zeta + k_s)}$, da er einen endlichen Betrag für $R \rightarrow 0$ liefert, mit zu $g_1(\zeta, \mu, \gamma_n, \nu_n)$ hinzugenommen werden. Damit bleibt für ν_{N+1} der Ausdruck $\sqrt{(\text{Re}^{i\varphi})}$ stehen. Lässt man in den einzelnen Ausdrücken $m_{i,j}$ den Radius R gegen Null laufen, so ergeben die $m_{i,j}$ mit $i = 1, 2, 3, 4$ und $j = 2$ endliche Ausdrücke in Form von $m(i, j) = g_2(\zeta, \mu, \gamma_n, \nu_n)$. Die untersuchten Terme in (A.3-18) können damit zu einer neuen Funktion unabhängig von R zusammengefasst werden:

$$\lim_{R \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{k_s}} g(k_s, \mu_r, \gamma_n, \nu_n) iR e^{i\varphi} d\varphi. \quad (\text{A.3-19})$$

Geht der Grenzwert der verbleibenden Variable R gegen Null, dann läuft der gesamte Grenzwert des Integrals in (A.3-19) gegen Null. Analog kann die Grenzwertbetrachtung für den Halbkreisbogen um Γ_{k_p} vorgenommen werden.

A.4 Konturintegration mit komplexen Wellenzahlen k_s und k_p

Werden in die Verschiebungsgleichungen anstelle der reellen Körperwellengeschwindigkeiten komplexe Geschwindigkeitswerte eingeführt, kann die Kontur der Halb-

raumlösung nach Abbildung 2-15 in der Konturintegration genutzt werden. Die Berechnung der Verschiebungen vereinfacht sich dahingehend, als dass die Residuen vollständig innerhalb der geschlossenen Kontur liegen. Zum Darstellen von auslaufenden Wellen in der Integrationsebene wird der Integrand wieder in Abhängigkeit von H_n^1 im I. Quadrant und in Abhängigkeit von H_n^2 im IV. Quadrant entwickelt. Der erste Quadrant liefert folgende Linienintegrale

$$\int I_1 d\zeta = \int_B^A I_1 d\zeta + \int_A^D I_1 d\zeta + \int_D^B I_1 d\zeta = 0$$

$$\int I_3 d\zeta = \int_B^A I_3 d\zeta + \int_A^D I_3 d\zeta + \int_D^B I_3 d\zeta = 0 \quad (\text{A.4-1})$$

und der vierte Quadrant

$$\int I_2 d\zeta = \int_D^B I_2(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^+, k) dk + \int_B^C I_2(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^+, i\tau) id\tau$$

$$\left. \begin{aligned} &+ \int_C^B I_2(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^+, i\tau) id\tau + \int_C^{k_p} I_2(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^+, k) dk \\ &+ \int_{k_p}^B I_2(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^-, k) dk + \int_B^C I_2(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^-, i\tau) id\tau \end{aligned} \right\} \mathcal{L}_{p,u_r}$$

$$\left. \begin{aligned} &+ \int_C^B I_2(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^-, i\tau) id\tau + \int_B^{k_p} I_2(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^-, k) dk \\ &+ \int_{k_p}^{k_s} I_2(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^+, k) dk + \int_{k_s}^{k_p} I_2(\nu_{N+1}^-, \gamma_{N+1}^+, k) dk \\ &+ \int_{k_p}^B I_2(\nu_{N+1}^-, \gamma_{N+1}^-, k) dk + \int_B^C I_2(\nu_{N+1}^-, \gamma_{N+1}^-, i\tau) id\tau \end{aligned} \right\} \mathcal{L}_{s,u_r}$$

$$+ \int_C^D I_2 d\zeta = 2\pi i \sum_{\kappa=1}^n \text{Res} \{ I_2(\nu_{N+1}, \gamma_{N+1}, k(\kappa_n)) \} \Big|_{\zeta=\zeta(\kappa_n)} \quad (\text{A.4-2})$$

$$\begin{aligned}
\int I_4 d\zeta &= \int_D^B I_4(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^+, k) dk + \int_B^C I_4(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^+, i\tau) id\tau \\
&+ \left. \begin{aligned} &\int_C^B I_4(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^+, i\tau) id\tau + \int_B^{k_p} I_4(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^+, k) dk \\ &+ \int_{k_p}^B I_4(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^-, k) dk + \int_B^C I_4(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^-, i\tau) id\tau \end{aligned} \right\} \mathcal{L}_{p,u_z} \\
&+ \left. \begin{aligned} &\int_C^B I_4(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^-, i\tau) id\tau + \int_B^{k_p} I_4(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^-, k) dk \\ &+ \int_{k_p}^{k_s} I_4(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^+, k) dk + \int_{k_s}^{k_p} I_4(\nu_{N+1}^-, \gamma_{N+1}^+, k) dk \\ &+ \int_{k_p}^B I_4(\nu_{N+1}^-, \gamma_{N+1}^-, k) dk + \int_B^C I_4(\nu_{N+1}^-, \gamma_{N+1}^-, i\tau) id\tau \end{aligned} \right\} \mathcal{L}_{s,u_z} \\
&+ \int_C^D I_4 d\zeta = 2\pi i \sum_{\kappa=1}^n Res \{ I_4(\nu_{N+1}, \gamma_{N+1}, k(\kappa_n)) \} \Big|_{\zeta=\zeta(\kappa_n)} \quad (\text{A.4-3})
\end{aligned}$$

Die zusammengefassten Integrale des vierten Quadranten um die Schleifen der Verzweigungsschnitte \mathcal{L}_p und \mathcal{L}_s stellen gleichzeitig die separierten Integralausdrücke zur Berechnung der Kompressions- und Scherwelle dar. Die Verschiebungen erhält man, indem die obigen Gleichungen A.4-2 in die Gl.(2.88) eingesetzt werden.

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_r &= \frac{1}{2} \left\{ \int_B^A I_1(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^+, i\tau) d\zeta \right\} \\
&+ \frac{1}{2} \left\{ \int_B^C I_2(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^+, i\tau) d\zeta + \int_{\mathcal{L}_p} I_2 d\zeta + \int_{\mathcal{L}_s} I_2 d\zeta - 2\pi i \sum_{\kappa=1}^n Res \{ I_2 \} \Big|_{\zeta=\zeta(\kappa_n)} \right\} \\
\tilde{u}_z &= \frac{1}{2} \left\{ \int_B^A I_3(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^+, i\tau) d\zeta \right\} \\
&+ \frac{1}{2} \left\{ \int_B^C I_4(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^+, i\tau) d\zeta + \int_{\mathcal{L}_p} I_4 d\zeta + \int_{\mathcal{L}_s} I_4 d\zeta - 2\pi i \sum_{\kappa=1}^n Res \{ I_4 \} \Big|_{\zeta=\zeta(\kappa_n)} \right\}. \quad (\text{A.4-4a,b})
\end{aligned}$$

Mit der Berücksichtigung der Beziehungen von den Zylinderfunktionen im Anhang A.1 und der Beachtung des Quellterms können die Integrale zu den entgeltigen

Verschiebungsgleichungen zusammengefasst werden:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_r &= \left\{ \frac{-F_z}{4\pi} \right\} \left\{ \underbrace{\int_{\mathcal{L}_{p,u_r}}}_{\tilde{u}_{r,p}} + \underbrace{\int_{\mathcal{L}_{s,u_r}}}_{\tilde{u}_{r,s}} \right\} \\ &\quad + \left\{ \frac{-F_z}{4\pi} \right\} \left\{ \underbrace{-2\pi i \sum_{\kappa=1}^n \text{Res} \left\{ (k)^2 \cdot f_{u_r}(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^+, k^2) H_1^2(kr) \right\} \Big|_{\zeta=\zeta(\kappa_n)}}_{\tilde{u}_{r,o}} \right\} \\ \tilde{u}_z &= \left\{ \frac{-F_z}{4\pi} \right\} \left\{ \underbrace{\int_{\mathcal{L}_{p,u_z}}}_{\tilde{u}_{z,p}} + \underbrace{\int_{\mathcal{L}_{s,u_z}}}_{\tilde{u}_{z,s}} \right\} \\ &\quad + \left\{ \frac{-F_z}{4\pi} \right\} \left\{ \underbrace{-2\pi i \sum_{\kappa=1}^n \text{Res} \left\{ k \cdot f_{u_z}(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^+, k^2) H_0^2(kr) \right\} \Big|_{\zeta=\zeta(\kappa_n)}}_{\tilde{u}_{z,o}} \right\}. \quad (\text{A.4-5a,b}) \end{aligned}$$

so dass sich die gesamte Verschiebung schließlich aus Anteilen der Kompressions-, Scher- und Oberflächenwelle zusammensetzt:

$$u = u_P + u_S + u_O. \quad (\text{A.4-6})$$

Unter Beachtung der Wurzelvorzeichen entlang der Ufer der Verzweigungsschnitte ergeben sich auf dem Integationsweg um die Schleifen die folgenden Ausdrücke:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{L}_{p,u_r}} &= \\ &- i \frac{2}{\pi} \int_0^\infty (-i\tau)^2 \left\{ u_r^{H_1}(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^+, (-i\tau)^{2n}) - u_r^{H_1}(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^-, (-i\tau)^{2n}) \right\} K_1^1(\tau r) d\tau \\ &\quad + \int_0^{k_p} k^2 \left\{ u_r^{H_1}(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^+, k^{2n}) - u_r^{H_1}(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^-, k^{2n}) \right\} H_1^2(kr) dk \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathcal{L}_{s,u_r}} = \\
& -i \frac{2}{\pi} \int_0^\infty (-i\tau)^2 \{u_r^{H_1}(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^-, (-i\tau)^{2n}) - u_r^{H_1}(\nu_{N+1}^-, \gamma_{N+1}^-, (-i\tau)^{2n})\} K_1^1(\tau r) d\tau \\
& + \int_0^{k_p} k^2 \{u_r^{H_1}(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^-, k^{2n}) - u_r^{H_1}(\nu_{N+1}^-, \gamma_{N+1}^-, k^{2n})\} H_1^2(kr) dk \\
& + \int_{k_p}^{k_s} k^2 \{u_r^{H_1}(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^+, k^{2n}) - u_r^{H_1}(\nu_{N+1}^-, \gamma_{N+1}^+, k^{2n})\} H_1^2(kr) dk \\
\\
& \int_{\mathcal{L}_{p,u_z}} = \\
& \frac{2}{\pi} \int_0^\infty (-i\tau) \{u_z^{H_0}(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^+, (-i\tau)^{2n}) - u_z^{H_0}(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^-, (-i\tau)^{2n})\} K_0^1(\tau r) d\tau \\
& + \int_{k_p}^0 k \{u_z^{H_0}(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^+, k^{2n}) - u_z^{H_0}(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^-, k^{2n})\} H_0^2(kr) dk \\
\\
& \int_{\mathcal{L}_{s,u_z}} = \\
& \frac{2}{\pi} \int_0^\infty (-i\tau) \{u_z^{H_0}(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^-, (-i\tau)^{2n}) - u_z^{H_0}(\nu_{N+1}^-, \gamma_{N+1}^-, (-i\tau)^{2n})\} K_0^1(\tau r) d\tau \\
& + \int_{k_p}^0 k \{u_z^{H_0}(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^-, k^{2n}) - u_z^{H_0}(\nu_{N+1}^-, \gamma_{N+1}^-, k^{2n})\} H_0^2(kr) dk \\
& + \int_{k_p}^{k_s} k \{u_z^{H_0}(\nu_{N+1}^+, \gamma_{N+1}^+, k^{2n}) - u_z^{H_0}(\nu_{N+1}^-, \gamma_{N+1}^+, k^{2n})\} H_0^2(kr) dk \quad (\text{A.4-7})
\end{aligned}$$

Die erhaltenen Gleichungen (A.4-5) und (A.4-6) sind identisch mit den Resultaten aus Kapitel 2.5.3.

A.5 Anregungsimpuls und -spektrum / theoretische Bodenprofile

A.5.1 Definition der verwendeten Impulsformen

Zur Berechnung eines synthetischen Zeitverlaufs nach Gl.(2.125) ist neben der Quellgeometrie auch das Anregungsspektrum der Quelle erforderlich. Für diesen Zweck wurden unterschiedliche Impulsformen, wie Halbsinus-, Dreieck- und Ricker-Impuls, untersucht. Die besten Ergebnisse wurden unter Verwendung des Ricker-Impulses 0. bis 3. Ordnung erzielt. Nachfolgend werden die verschiedenen Varianten dieses Impulses im Zeit- und Frequenzbereich angegeben.

1. Ricker-Impuls 0. Ordnung: $f_0(t) = Ae^{(-a \cdot t)}$, mit $a = \pi \frac{(t-T_S)}{T_P}$, T_S entspricht dem Zeitwert des Maximums und T_P der Periodenlänge
2. Ricker-Impuls 1. Ordnung: $f_1(t) = (-1) f_0(t) a\sqrt{2}e^{0.5}$
3. Ricker-Impuls 2. Ordnung: $f_2(t) = f_0(a^2 - 0.5) \frac{e^{1.5}}{2}$
4. Ricker-Impuls 3. Ordnung: $f_3(t) = f_0 a \left(\frac{3}{2} - a^2\right) \frac{e^k}{\sqrt{kb}}$, mit $b = \sqrt{1.5}$ und $k = 1.5 - b$

In Abb.(A-4) sind die Zeitfunktion und das Amplitudenspektrum dargestellt. Mit der Länge der Impulsdauer kann die Breite des angeregten Spektrums beeinflusst werden. Bei der Wahl der Impulsdauer und der Lage von T_S und T_P ist der Wert des zugrunde liegenden Zeitintervalls dt zu beachten.

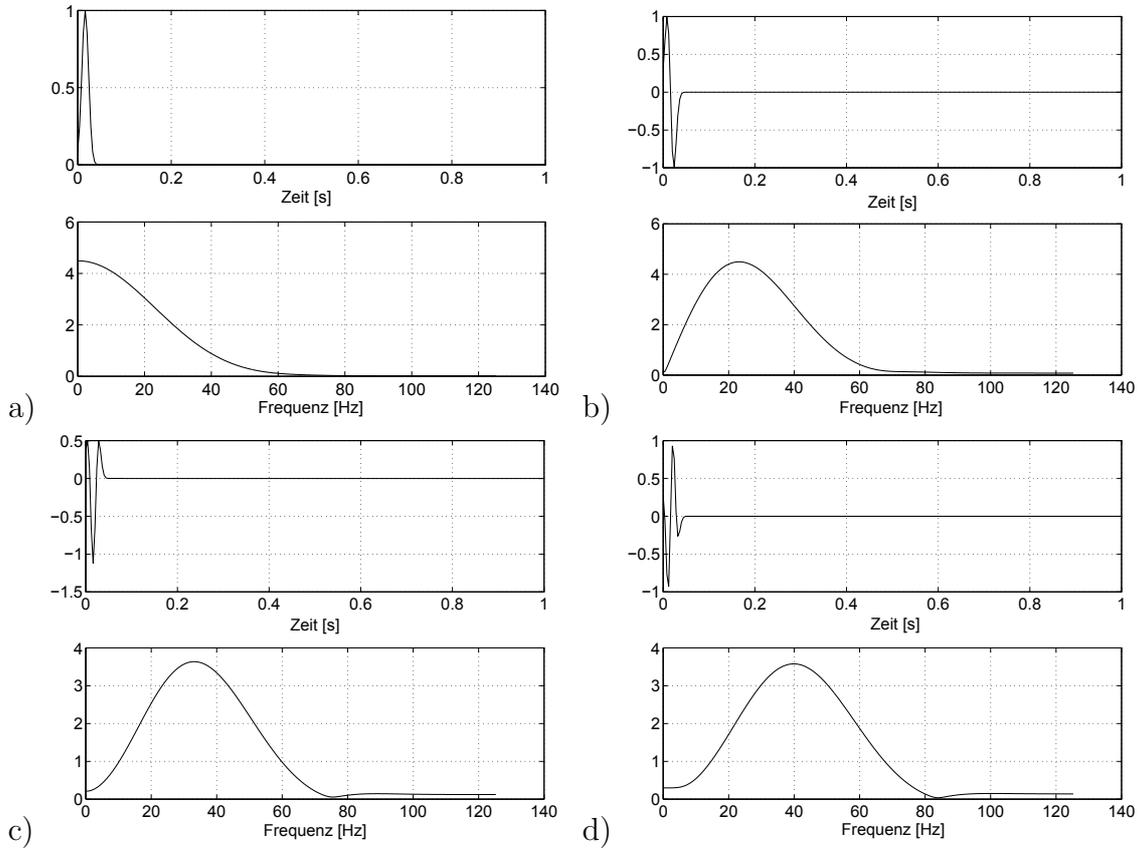


Abbildung A-4: Zeitverlauf und Amplitudenspektrum des Rickerimpulses a) 0. Ordnung, b) 1. Ordnung, c) 2. Ordnung und d) 3. Ordnung.

A.5.2 Definition der theoretischen Bodenprofile

Im folgenden Abschnitt werden die in Kapitel 4.1 ausgewerteten Bodenprofile tabellarisch aufgeführt.

Normal dispersive Profile – Einfachschichtung / Halbraum:

Bereich 1

Profil	Schichtdicke [m]	c_S [m/s]	Querdehnzahl	Dichte [kg/m ³]
1	5	100	0.333	1500
	∞	400	0.30	1800
2	10	100	0.333	1500
	∞	400	0.30	1800
3	20	100	0.333	1500
	∞	400	0.30	1800
3b	35	100	0.333	1500
	∞	400	0.30	1800
4	50	100	0.333	1500
	∞	400	0.30	1800

Profil	Schichtdicke [m]	c_S [m/s]	Querdehnzahl	Dichte [kg/m ³]
5	5	100	0.333	1500
	∞	1000	0.25	2000
6	10	100	0.333	1500
	∞	1000	0.25	2000
6b	15	100	0.333	1500
	∞	1000	0.25	2000
7	20	100	0.333	1500
	∞	1000	0.25	2000
8	50	100	0.333	1500
	∞	1000	0.25	2000

Bereich 2

Profil	Schichtdicke [m]	c_S [m/s]	Querdehnzahl	Dichte [kg/m ³]
9	5	300	0.333	1600
	∞	1000	0.25	2000
10	10	300	0.333	1600
	∞	1000	0.25	2000
11	20	300	0.333	1600
	∞	1000	0.25	2000
12	50	300	0.333	1600
	∞	1000	0.25	2000

Bereich 3 Variation - Poissonzahl

Profil	Schichtdicke [m]	c_S [m/s]	Querdehnzahl	Dichte [kg/m ³]
13	20	100	0.20	1500
	∞	500	0.25	1700
14	20	100	0.25	1500
	∞	500	0.25	1700
15	20	100	0.30	1500
	∞	500	0.25	1700
16	20	100	0.35	1500
	∞	500	0.25	1700
17	20	100	0.40	1500
	∞	500	0.25	1700
18	20	100	0.45	1500
	∞	500	0.25	1700

Bereich 3 Variation - Halbraum

Profil	Schichtdicke [m]	c_S [m/s]	Querdehnzahl	Dichte [kg/m ³]
19	∞	200	0.333	1700
20	2	200	0.333	1500
	∞	400	0.30	1700
21	20	200	0.333	1500
	∞	400	0.30	1700
22	200	200	0.333	1500
23	∞	400	0.30	1700
24	200	400	0.30	1700
	∞	800	0.26	1900
25	200	1500	0.25	2000
	∞	2000	0.25	2100

Normal dispersive Profile Zweifachschichtung*Bereich 4*

Profil	Schichtdicke [m]	c_S [m/s]	Querdehnzahl	Dichte [kg/m ³]
26	5	100	0.35	1500
	5	200	0.35	1650
	∞	400	0.3	1800
27	10	100	0.35	1500
	10	200	0.35	1650
	∞	400	0.3	1800
28	20	100	0.35	1500
	20	200	0.35	1650
	∞	400	0.3	1800

Profil	Schichtdicke [m]	c_S [m/s]	Querdehnzahl	Dichte [kg/m ³]
29	5	100	0.35	1500
	10	200	0.35	1650
	∞	1000	0.25	2000
30	10	100	0.35	1500
	20	300	0.333	1650
	∞	1000	0.25	2000
31	20	100	0.35	1500
	40	400	0.30	1650
	∞	1000	0.25	2000

Profil	Schichtdicke [m]	c_S [m/s]	Querdehnzahl	Dichte [kg/m ³]
32	5	300	0.333	1500
	20	500	0.30	1700
	∞	1000	0.25	2000
33	10	300	0.333	1500
	40	600	0.30	1800
	∞	1000	0.25	2000
34	20	300	0.333	1500
	80	800	0.27	1800
	∞	1000	0.25	2000

Normal dispersive Profile - Mehrschichtung

Bereich 5

Profil	Schichtdicke [m]	c_S [m/s]	Querdehnzahl	Dichte [kg/m ³]
35	5	300	0.333	1500
	20	500	0.3	1700
	40	700	0.28	1800
	∞	1500	0.25	2000
36	10	300	0.333	1500
	20	600	0.3	1700
	40	800	0.3	1800
	80	1000	0.27	1900
	∞	2000	0.25	2000
37	10	250	0.333	1500
	10	400	0.333	1700
	20	600	0.3	1800
	40	900	0.27	1900
	80	1300	0.26	2000
	∞	3000	0.25	2100
38	7.5	100	0.333	1500
	0.5	250	0.333	1500
	0.5	400	0.3	1600
	0.5	550	0.3	1700
	0.5	700	0.28	1800
	0.5	850	0.27	1900
	∞	1000	0.25	2000
39	1	100	0.33	1500
	1	150	0.33	1500
	1	200	0.33	1500
	1	250	0.33	1500
	1	300	0.33	1500
	1	350	0.3	1600
	1	400	0.3	1600
	1	550	0.3	1700
	1	700	0.28	1800
	1	850	0.27	1900
	∞	1000	0.25	2000

Anormal dispersive Profile - Zweifachschichtung*Bereich 1*

Profil	Schichtdicke [m]	c_S [m/s]	Querdehnzahl	Dichte [kg/m ³]
40	5	200	0.33	1600
	5	100	0.33	1500
	∞	400	0.3	1700
41	5	400	0.3	1700
	5	100	0.33	1500
	∞	400	0.3	1700
42	5	400	0.3	1700
	5	100	0.33	1500
	∞	1000	0.25	2000

Profil	Schichtdicke [m]	c_S [m/s]	Querdehnzahl	Dichte [kg/m ³]
43	10	200	0.33	1600
	10	100	0.33	1500
	∞	400	0.3	1700
44	10	400	0.3	1700
	10	100	0.33	1500
	∞	400	0.3	1700
45	10	400	0.3	1700
	10	100	0.33	1500
	∞	1000	0.25	2000

Bereich 2

Profil	Schichtdicke [m]	c_S [m/s]	Querdehnzahl	Dichte [kg/m ³]
46	10	200	0.33	1600
	5	100	0.33	1500
	∞	400	0.3	1700
47	20	200	0.3	1600
	5	100	0.33	1500
	∞	400	0.3	1700
48	5	200	0.3	1600
	10	100	0.33	1500
	∞	400	0.25	1700
49	5	200	0.3	1600
	20	100	0.33	1500
	∞	400	0.25	1700

Bereich 3

Profil	Schichtdicke [m]	c_S [m/s]	Querdehnzahl	Dichte [kg/m ³]
50	10	400	0.3	1700
	5	100	0.33	1500
	∞	400	0.3	1700
51	20	400	0.3	1700
	5	100	0.33	1500
	∞	400	0.3	1700
52	5	400	0.3	1700
	10	100	0.33	1500
	∞	400	0.3	1700
53	5	400	0.3	1700
	20	100	0.33	1500
	∞	400	0.3	1700

Bereich 4

Profil	Schichtdicke [m]	c_S [m/s]	Querdehnzahl	Dichte [kg/m ³]
54	10	400	0.333	1700
	10	200	0.333	1500
	∞	400	0.333	1700
55	10	400	0.333	1700
	10	200	0.333	1500
	∞	800	0.333	1700
56	10	400	0.333	1700
	10	200	0.333	1500
	∞	1000	0.333	1700
57	10	1000	0.333	1700
	10	200	0.333	1500
	∞	1000	0.333	1700
58	10	200	0.333	1500
	10	400	0.333	1700
	∞	200	0.333	1500
63	5	400	0.333	1700
	3	300	0.333	1500
	∞	450	0.333	1800

Profil	Schichtdicke [m]	c_S [m/s]	Querdehnzahl	Dichte [kg/m ³]
64	5	200	0.333	1600
	3	100	0.333	1500
	10	300	0.333	1700
	∞	700	0.3	1900
65	5	500	0.333	1800
	3	100	0.333	1500
	10	300	0.333	1700
	∞	800	0.3	1900

Bereich 5

Profil	Schichtdicke [m]	c_S [m/s]	Querdehnzahl	Dichte [kg/m ³]
59	10	400	0.333	1700
	∞	200	0.333	1500
60	10	1000	0.333	1700
	∞	200	0.333	1500
61	5	1000	0.333	1700
	∞	200	0.333	1500
62	1.5	1000	0.333	1700
	∞	200	0.333	1500

Anhang B

Symbolverzeichnis

B.1 Indizierung

$(A)^{H_n}$	Kennzeichnung der verwendeten Integraltransformation mit $n = 0, 1$
(\tilde{A})	Fouriertransformierte Größe
(\hat{A})	Kennzeichnung der allgemeinen Reflexions- und Transmissionskoeffizienten
$(A)_j$	Index j bezieht sich auf Schichtungsnummern mit $j = 1, 2, \dots, N + 1$
$(A)_S$	Bezug zur Scherwellengeschwindigkeit
$(A)_P$	Bezug zur Kompressionswellengeschwindigkeit
$(A)_R$	Bezug zur Rayleighwelle
$(A)_{pd}$	in positive z -Richtung (abwärts) laufende Kompressionswelle
$(A)_{sd}$	in positive z -Richtung (abwärts) laufende Scherwelle
$(A)_{pu}$	in negative z -Richtung (aufwärts) laufende Kompressionswelle
$(A)_{su}$	in negative z -Richtung (aufwärts) laufende Scherwelle

B.2 Formelzeichen

$\det(\dots)$	Determinante von (\dots)
I	Einheitsmatrix
J_0, J_1	Besselfunktion 0. bzw. 1. Ordnung
H_0^1, H_0^2	Hankelfunktion 0. Ordnung und 1. bzw. 2. Art
H_1^1, H_1^2	Hankelfunktion 1. Ordnung und 1. bzw. 2. Art
K_0^1, K_1^1	modifizierte Besselfunktion

B.3 Operatoren/Kürzel

$\mathfrak{F}, \mathfrak{F}^{-1}$	Fourier-Transformation, Rücktransformation
$\mathfrak{H}, \mathfrak{H}^{-1}$	Hankel-Transformation, Rücktransformation
$O(\dots)$	Landau-Symbol $\hat{=}$ Größenordnung von (\dots)

\mathcal{L}	Lagrange Energiedichte
\oint	Umlaufendes Linienintegral
$\text{Res}(\dots)$	Residuum des Ausdrucks (...)
$\nabla(\dots)$	Gradient von (...)
$\nabla \cdot (\dots)$	Divergenz von (...)
$\nabla \times (\dots)$	Rotation von (...)
$\Delta(\dots)$	Laplace-Operator
$[\dots]^T$	Transponierte Matrix bzw. Vektor
$\{\dots\}$	Vektor
\mathbb{N}	Menge der natürlichen Zahlen
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
\mathbb{Z}	Menge der ganzen Zahlen
\mathbb{Q}_+	Menge der positiven rationalen Zahlen
$(\dots)^*$	Kennzeichnet konjugiert komplexen Zahlen

B.4 Verwendete Bezeichnungen

ω	Kreisfrequenz
k	Wellenzahl
c_s	Scherwellengeschwindigkeit
c_p	Kompressionswellengeschwindigkeit
p	Definition der Wellenlangsamkeit $p = \frac{1}{c}$
μ	Schubmodul innerhalb der theoretischen Ableitungen
G_0	maximaler Schubmodul für das Verzerrungsniveau 10^{-6}
ν	Querdehnungszahl
λ	Lame'sche Materialkonstante
ρ	Materialdichte
E	Elastizitätsmodul
u_r	Verschiebung in Richtung r
u_ϕ	Verschiebung in Richtung ϕ (horizontal)
u_z	Verschiebung in Richtung z
t	Zeitvariable
r	Radius
SV	Bezeichnung des vertial polarisierten Scherwellenanteils
SH	Bezeichnung des horizontal polarisierten Scherwellenanteils
P	Bezeichnung des Kompressionswellenanteils
U	Bezeichnung der Gruppengeschwindigkeit
c	Bezeichnung der Phasengeschwindigkeit
ΔQ_p	Bezeichnung des Lastterms
S_r	Sättigungszahl des Bodens