

Form- und Parameterfindung von multistabilen Tensegrity-Strukturen mittels Optimierungsalgorithmen und Anwendungen in der Greifertechnik

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades

Doktoringenieur

(Dr.-Ing.)

vorgelegt der

Fakultät für Maschinenbau der
Technischen Universität Ilmenau

von Frau

Susanne Sumi, M. Sc.

geboren am 09.07.1990 in Suhl

Tag der Einreichung: 13.04.2018

Tag der Verteidigung: 16.07.2018

Gutachter: Herr Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Klaus Zimmermann
(Technische Universität Ilmenau)
Herr Prof. Dr.-Ing. habil. Valter Böhm
(Ostbayerische Technische Hochschule Regensburg)
Herr Univ.-Prof. Dr. rer. nat. habil. Armin Hoffmann
(Technische Universität Ilmenau)

urn:nbn:de:gbv:ilm1-2018000245

Zusammenfassung

Der Gegenstand der Arbeit sind Tensegrity-Strukturen mit mehreren stabilen Gleichgewichtskonfigurationen, sogenannte multistabile Tensegrity-Strukturen.

Im Vordergrund der Arbeit steht die Entwicklung von Algorithmen, mit denen solche Strukturen entworfen, untersucht und gezielt ausgelegt werden können.

Dafür werden Möglichkeiten zur Bestimmung der Gleichgewichtskonfigurationen von multistabilen Tensegrity-Strukturen betrachtet. Des Weiteren wird untersucht, wie Tensegrity-Strukturen so ausgelegt werden können, dass sie vorgegebene Eigenschaften aufweisen. Dazu werden Kenngrößen zur Charakterisierung dieser Eigenschaften definiert. Für beide Aufgabenstellungen werden Optimierungsprobleme hergeleitet. Zur Lösung dieser Optimierungsprobleme werden Algorithmen entworfen, getestet und analysiert.

Aufbauend auf diesen theoretischen Untersuchungen liegt ein weiterer Schwerpunkt dieser Arbeit in der Betrachtung der Einsatzmöglichkeiten von multistabilen Tensegrity-Strukturen in der Greifertechnik. Es werden verschiedene Konzepte für die Entwicklung von Greifern aus diesen Strukturen diskutiert. Zu ausgewählten Konzepten erfolgen weiterführende Betrachtungen, unter anderem durch Einbeziehung dynamischer Analysen. Neben theoretischen Untersuchungen dieser Greifer werden die wichtigsten Erkenntnisse experimentell an Funktionsmustern überprüft und potentielle Einsatzgebiete werden aufgezeigt.

Abstract

The thesis considers tensegrity structures with several stable equilibrium configurations, so-called multistable tensegrity structures.

The first part of the thesis is dedicated to the development of algorithms to design, examine and construct multistable tensegrity structures.

For that, theoretical results to obtain the different equilibrium configurations of multistable tensegrity structures are derived. Further, methods to design tensegrity structures that have specific properties are investigated. Parameters that characterise these properties are defined. For these tasks optimisation problems are derived and algorithms to solve these problems are developed, tested and analysed.

The second part of the thesis builds on these theoretical investigations to consider the application of multistable tensegrity structures in gripper technology. Different concepts to develop multistable tensegrity grippers are discussed. Further investigations, including dynamic analyses, are carried out for selected concepts. In addition to the theoretical considerations, the most important results are tested with development samples of the grippers and potential application fields are revealed.

*„Wenn die Neugier sich auf ernsthafte Dinge richtet,
dann nennt man sie Wissensdrang.“*

Marie Freifrau von Ebner-Eschenbach

Inhaltsverzeichnis

Symbolverzeichnis	vii
1 Einleitung und Zielsetzung	1
1.1 Zielsetzung	2
1.2 Aufbau der Arbeit	2
2 Stand der Technik	5
2.1 Tensegrity-Strukturen	5
2.1.1 Vorbilder für Tensegrity-Strukturen in der Natur	7
2.1.2 Tensegrity-Strukturen in Kunst und Architektur	8
2.1.3 Tensegrity-Strukturen in der Robotik	9
2.1.4 Formfindung und Parameterfindung	11
2.1.5 Vereinbarungen zu den verwendeten Tensegrity-Strukturen	15
2.1.6 Darstellung der Tensegrity-Strukturen in Koordinatensystemen	17
2.1.7 Verwendete Tensegrity-Strukturen	20
2.2 Mathematisch-mechanische Grundlagen und Methoden	21
2.2.1 Berechnung von Gleichgewichtskonfigurationen	21
2.2.2 FE-Formfindungsalgorithmus	26
2.2.3 Evolutionäre Algorithmen	28
2.2.4 Genetische Algorithmen	32
2.2.5 Multi Level Single Linkage Algorithmus	40
3 Formfindung	47
3.1 Optimierungsprobleme für die Formfindung	47
3.1.1 Energiefunktion	47
3.1.2 Gleichgewichtsbedingungen	55
3.1.3 Zusammenfassung und Überblick über Optimierungsverfahren	60
3.2 Genetische Algorithmen für die Formfindung	61
3.2.1 FGenPrioFe-Algorithmus	63
3.2.2 FGenFeFi-Algorithmus	71
3.2.3 FGenFeFiMu-Algorithmus	79
3.3 MultiOpt-Algorithmus für die Formfindung	86
3.4 Anwendung der Algorithmen für die Formfindung	95
3.4.1 Verwendete Tensegrity-Strukturen und Rechentechnik	95
3.4.2 Anwendung der genetischen Algorithmen	96
3.4.3 Anwendung des MultiOpt-Algorithmus	104
3.5 Schlussfolgerungen	110
4 Parameterfindung	111
4.1 Fragestellungen und Optimierungsprobleme	111
4.1.1 Lage der Tensegrity-Struktur	112
4.1.2 Stabilität	114
4.1.3 Eigenfrequenzen und Eigenformen	115

4.1.4	Kombination von Eigenschaften	121
4.1.5	Diskussion der Optimierungsprobleme	123
4.2	Optimierungsalgorithmus für die Parameterfindung	124
4.3	Anwendung des Algorithmus für die Parameterfindung	127
4.4	Schlussfolgerungen	136
5	Anwendung	137
5.1	Bewegungsgleichungen und dynamische Untersuchungen	137
5.1.1	Bewegungsgleichungen für Topologie C	138
5.1.2	Bewegungsgleichungen für Topologie E	145
5.1.3	Bewegungsgleichungen für Topologie D_2	146
5.1.4	Dynamische Untersuchungen	147
5.2	Tensegrity-Greifer	151
5.2.1	Topologie	151
5.2.2	Greifarme	157
5.2.3	Funktionsmuster	159
5.2.4	Antrieb	167
5.2.5	Miniaturisierung des Greifers	170
5.3	Weitere mögliche Tensegrity-Greifer	173
5.3.1	3D-Tensegrity-Greifer	173
5.3.2	Tensegrity-Greifer der Klasse 1	175
5.4	Anwendung in der Minimal-invasiven Chirurgie	183
5.5	Zusammenfassung	187
6	Zusammenfassung und Ausblick	189
6.1	Zusammenfassung	189
6.2	Ausblick	190
A	Verwendete Tensegrity-Strukturen	193
A.1	Topologie A	193
A.2	Topologie B	194
A.3	Topologie C	195
A.4	Topologie D	196
A.5	Topologie D_2	197
A.6	Topologie E	198
A.7	Topologie F	199
B	Bewegungsgleichungen	201
B.1	Herleitung der Bewegungsgleichungen für Topologie E	201
B.2	Herleitung der Bewegungsgleichungen für Topologie D_2	203
C	Zusätzliche Informationen zu den Funktionsmustern	207
C.1	Entwicklungsstufen des Tensegrity-Greifers	207
C.2	3D-Tensegrity-Greifer	210
	Literaturverzeichnis	213

Symbolverzeichnis

$\ \cdot\ _2$	Euklidische Norm
$[\cdot]$	Rundung einer reellen Zahl zur dichtesten ganzen Zahl
δ	Freiheitsgrad einer Tensegrity-Struktur
η	Dimension der Tensegrity-Struktur; $\eta := 2$ bei planarer, und $\eta := 3$ bei räumlicher Tensegrity-Struktur
ν	Freiheitsgrad eines Optimierungsproblems
∇	Gradient
\mathbb{B}^n	Menge aller nicht-leeren, kompakten Intervalle (Boxen) in \mathbb{R}^n
D	Dissipationsfunktion $D \in \mathbb{R}$ oder Dämpfungsmatrix, $D \in \mathbb{R}^{\eta n_k \times \eta n_k}$
\mathcal{D}	Definitionsbereich
\mathcal{F}	Menge der Indizes der Segmente mit geringer Steifigkeit
$F_{\textcircled{i}}$	Resultierende Kraft an Knoten i
F_{Di}	Resultierende Kraft an Segment i
f_{e_i}	Eigenfrequenz der Tensegrity-Struktur, $f_{e_i} \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, \delta$
k_i	Steifigkeit von Segment i
K	(Tangenten)steifigkeitsmatrix, $K \in \mathbb{R}^{\eta n_k \times \eta n_k}$
L_i	Segmentvektor von Segment i
l_{0i}	Anfangslänge von Segment i
l_i	Länge des starren Stabes i
M	Massenmatrix, $M \in \mathbb{R}^{\eta n_k \times \eta n_k}$
$M_{i\textcircled{j}}$	Moment an Segment i mit Knoten \textcircled{j} als Bezugspunkt
n_d	Anzahl Segmente mit hoher Steifigkeit einer Tensegrity-Struktur
n_{gen}	Anzahl Generationen, die ein genetischer Algorithmus ausgeführt wird
n_{ind}	Anzahl Individuen in einer Generation bei genetischen Algorithmen
n_k	Anzahl Knoten einer Tensegrity-Struktur
n_s	Anzahl Segmente einer Tensegrity-Struktur
n_z	Anzahl Segmente mit geringer Steifigkeit einer Tensegrity-Struktur
\mathbb{N}	Natürliche Zahlen: $\{1, 2, 3, \dots\}$
$P_{\textcircled{i}}$	Position von Knoten \textcircled{i} im globalen Koordinatensystem

\mathbb{R}	Reelle Zahlen
S	Menge der Indizes der Segmente mit hoher Steifigkeit
T	kinetische Energie
u	Knotenverschiebungen, $u \in \mathbb{R}^{m_k}$
U	potentielle Energie
U_{mod}	modifizierte Funktion der potentielle Energie
v_i	Eigenform der Tensegrity-Struktur, $v_i \in \mathbb{R}^\delta$, $i = 1, \dots, \delta$
\mathbb{Z}	Ganze Zahlen: $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

Vereinbarungen über die Schreibweise

$\mathbb{R}^n := \mathbb{R}^{n \times 1}$ Vektoren aus \mathbb{R}^n sind immer Spaltenvektoren.

$x_1 = (x_{1(1)}, x_{1(2)}, \dots, x_{1(n)})^\top \in \mathbb{R}^n$ Schreibweise der Komponenten eines Vektors.

$[\underline{x}, \bar{x}] := \{x \in \mathbb{R}^n | \underline{x} \leq x \leq \bar{x}\}$ mit $\underline{x}, \bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{x} \leq \bar{x}$ kompaktes nicht-leeres Intervall (Box) in \mathbb{R}^n .

$\dot{x} := \frac{d}{dt}x$ Ableitung nach der Zeit wird mit einem Punkt über der Funktion dargestellt.

$[g(x)]_+ := \max\{g(x), 0\}$ Die negativen Funktionswerte einer Funktion $g|R^n \rightarrow \mathbb{R}$ werden auf Null gesetzt.

Abkürzungen

Anzahl

FE-Alg. FE-Formfindungsalgorithmus

GGK Gleichgewichtskonfiguration

PLA Polylactid

KAPITEL 1

Einleitung und Zielsetzung

Die wachsende Bedeutung von Robotern erfordert eine kontinuierliche Verbesserung von Robotersystemen. Durch die Entwicklung von innovativen Konzepten erschließen sich immer mehr Anwendungsfelder für Roboter. Konventionelle Roboter mit ausschließlich starren Strukturelementen können in vielen Fällen, beispielsweise wenn der Arbeitsbereich beschränkt ist, kaum eingesetzt werden. Es gibt außerdem vermehrt Anwendungen, bei denen Roboter durch kleine Zugänge geführt werden müssen, um danach mehr Arbeitsraum zur Verfügung zu haben, beispielsweise in der Chirurgie. Deshalb sind Robotersysteme, welche einen kleinen Bauraum besitzen und über Nachgiebigkeit verfügen, ein aktuelles Forschungsthema.

Die Verwendung von mechanisch nachgiebigen Strukturen in der Robotik ist ein aktuelles Forschungsthema. Durch die Verwendung von weichen, elastischen Materialien entstehen sogenannte *soft robots*. Die Nachgiebigkeit der Strukturen wird durch eine bestimmte Materialwahl und Formgebung angepasst.

Neben den mechanisch nachgiebigen Strukturen sind auch faltbare Strukturen ein gegenwärtig von zahlreichen Wissenschaftlern untersuchter Forschungsgegenstand. Für das Prinzip des Faltens gibt es in der Natur viele Beispiele. So werden Flügel von Käfern unter den Deckflügeln gefaltet, um dort geschützt zu werden und um weniger Platz einzunehmen. Palmenblätter und Gräser erhalten durch ihre Faltungen eine erhöhte Stabilität. In der Technik, insbesondere in der Medizintechnik und Robotik, werden bereits vielfältig faltbare Strukturen eingesetzt. Ein bekanntes Beispiel aus der Medizin sind Stents, welche gefaltet in den Körper eingeführt werden und am Bestimmungsort entfaltet werden. Ein populäres Beispiel, was mit dem Falten erreicht werden kann, ist Origami - die Kunst des Papierfaltens. Aus nur einem Blatt Papier lassen sich beliebig komplexe Objekte falten. Es werden bereits erste Roboter entwickelt, welche als ebene Struktur gefertigt und versendet werden können und sich dann nach dem Origami-Prinzip selbst entfalten können.

Eine spezielle Klasse von Strukturen, welche alle oben genannten Eigenschaften kombinieren, sind nachgiebige Tensegrity-Strukturen. Dies sind vorgespannte, freistehende Strukturen, welche nur aus zug- und druckbeanspruchten Segmenten bestehen. Die druckbeanspruchten Segmente (beispielsweise Stäbe) berühren sich nicht und sind nur über das Netz aus zugbeanspruchten Segmenten (beispielsweise Seilen oder Federn) verbunden. Roboter, welche auf nachgiebigen Tensegrity-Strukturen basieren, haben viele Vorteile: sie sind faltbar, leicht, filigran und haben ein gutes Steifigkeit-Gewichts-Verhältnis. Außerdem sind sie robust und unempfindlich gegenüber Stoßbelastung. Durch Änderung der Vorspannung ist eine Anpassung der Tensegrity-Struktur, beziehungsweise des Roboters, an veränderte Umgebungsbedingungen während des Betriebs möglich. Aufgrund dieser vorteilhaften Eigenschaften ist der Einsatz von Tensegrity-Strukturen bei der Entwicklung von neuartigen Robotern ein aktuelles Thema. Eine weitere besondere Eigenschaft von Tensegrity-Strukturen ist, dass sie mehrere stabile Gleichgewichtskonfigurationen haben können - solche Strukturen werden multistabile Tensegrity-Strukturen genannt. Durch die unterschiedliche geometrische Form und Nachgiebigkeit in den verschiedenen Gleichgewichtskonfigurationen könne Roboter, die auf solchen Strukturen basieren, flexibel eingesetzt werden. Die Möglichkeit der Änderung der Steifigkeit und das Vorhandensein mehrerer geometrischer Formen, welche ohne Energiezufuhr aufrechterhalten werden können, machen diese Strukturen auch für die Greifertechnik vielversprechend. Diese Art von Tensegrity-Strukturen und deren Einsatz in der Robotik ist bisher nur wenig erforscht.

1.1 Zielsetzung

Das Ziel der Arbeit ist, einen Beitrag zum Einsatz von multistabilen Tensegrity-Strukturen in der Greifertechnik zu leisten. Dazu werden theoretische Betrachtungen durchgeführt, mit dem Ziel, multistabile Tensegrity-Strukturen mit geeigneten Parametern zu untersuchen und zu konstruieren. Außerdem werden Einsatzmöglichkeiten dieser Strukturen in der Greifertechnik erforscht und es werden verschiedene Greifer, welche auf nachgiebigen, multistabilen Tensegrity-Strukturen basieren, entwickelt und analysiert.

Die zentralen Fragen für diese Zielsetzung lauten:

- Was für Möglichkeiten gibt es, um von einer Tensegrity-Struktur mit mehreren stabilen Gleichgewichtskonfigurationen alle Gleichgewichtskonfigurationen zu ermitteln?
- Welche Kenngrößen sollten für die Definition von Eigenschaften einer Tensegrity-Struktur verwendet werden?
- Wie können Tensegrity-Strukturen mit vorgegebenen Eigenschaften entwickelt werden?
- Wie können Greifer auf Basis von Tensegrity-Strukturen mit mehreren stabilen Gleichgewichtskonfigurationen entwickelt werden?
- Ist der Antrieb von Greifern, welche auf Tensegrity-Strukturen basieren, mit wenig Aufwand und energieeffizient möglich?

1.2 Aufbau der Arbeit

Die Arbeit ist in sechs Kapitel unterteilt.

Nach dieser Einleitung werden im zweiten Kapitel Tensegrity-Strukturen genauer eingeführt und es wird ein Überblick über den Stand der Technik bei Tensegrity-Strukturen gegeben. Dabei werden die in dieser Arbeit angesprochenen Themen und Ziele konkretisiert und motiviert. Anschließend werden theoretische Werkzeuge für die folgenden Kapitel bereitgestellt.

Im dritten Kapitel wird untersucht, wie von einer Tensegrity-Struktur mit mehreren stabilen Gleichgewichtskonfigurationen alle Gleichgewichtskonfigurationen bestimmt werden können. Dafür werden verschiedene Algorithmen entworfen und vorgestellt. Anhand von Beispielen werden die Algorithmen getestet und es werden Parameterstudien durchgeführt, um die Arbeitsweise der Algorithmen zu untersuchen.

Im vierten Kapitel wird betrachtet, wie Tensegrity-Strukturen mit vordefinierten Eigenschaften entwickelt werden können. Dafür werden Tensegrity-Strukturen mit Hilfe von Kenngrößen charakterisiert und klassifiziert. Im Anschluss wird ein Algorithmus entworfen und vorgestellt, mit dem Tensegrity-Strukturen dimensioniert werden können, sodass sie die speziellen Eigenschaften vorweisen. Dabei soll der Algorithmus möglichst universell sowohl in Bezug auf die möglichen Tensegrity-Strukturen als auch auf die geforderten Eigenschaften sein. Der vorgestellte Algorithmus wird anhand verschiedener Beispiele getestet und seine Arbeitsweise wird analysiert.

Im fünften Kapitel wird die Anwendung von Tensegrity-Strukturen in der Greifertechnik diskutiert. Es werden dynamische Untersuchungen exemplarisch an drei Tensegrity-Strukturen durchgeführt. Dann wird beispielhaft an einer Struktur der Prozess von der Ideenfindung, über die theoretischen Untersuchungen und den Bau eines Funktionsmusters bis zur Integration eines Antriebs bei der Entwicklung eines Greifers

basierend auf einer Tensegrity-Struktur betrachtet. Im Anschluss werden weitere Ansätze diskutiert, wie aus Tensegrity-Strukturen Greifer entwickelt werden können. Außerdem werden Anwendungsmöglichkeiten solcher Greifer angegeben und eine Anwendung wird beispielhaft genauer analysiert.

Im letzten Kapitel wird die Arbeit zusammengefasst, indem die in der Einleitung gestellten Fragen beantwortet werden. Außerdem wird ein Ausblick gegeben.

KAPITEL 2

Stand der Technik

In diesem Kapitel werden einführende Betrachtungen zu Tensegrity-Strukturen und deren Anwendung in der Robotik durchgeführt. Aufbauend auf diese Betrachtungen wird die Aufgabenstellung dieser Arbeit konkretisiert. Im Anschluss werden theoretische Werkzeuge, welche in dieser Arbeit benötigt werden, vorgestellt.

2.1 Tensegrity-Strukturen

Tensegrity-Strukturen sind mechanisch vorgespannte nachgiebige Strukturen. Diese Strukturen bestehen aus Segmenten, die entweder auf Druck (zum Beispiel Stäbe) oder auf Zug (zum Beispiel Seile, Federn) beansprucht sind. Der Begriff TENSEGRITY-STRUKTUR, oder englisch TENSEGRITY STRUCTURE wurde in den 1960er Jahren von Buckminster Fuller und Kenneth Snelson geprägt [Jau09; Mot03]. Er besteht aus den Begriffen TENSION - Zugspannung und INTEGRITY - Zusammenhalt. In Abbildung 2.1 sind zwei Tensegrity-Strukturen dargestellt.

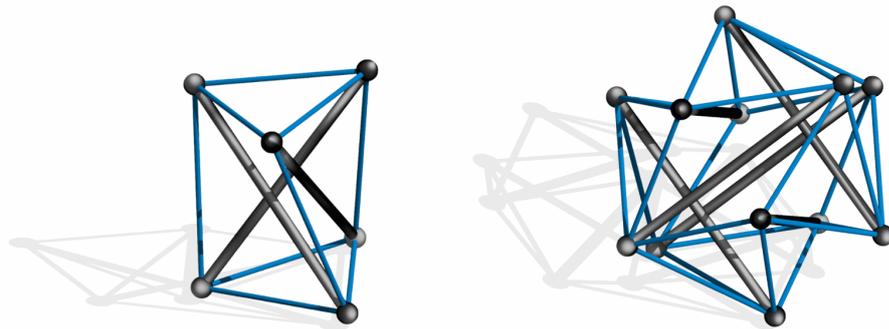
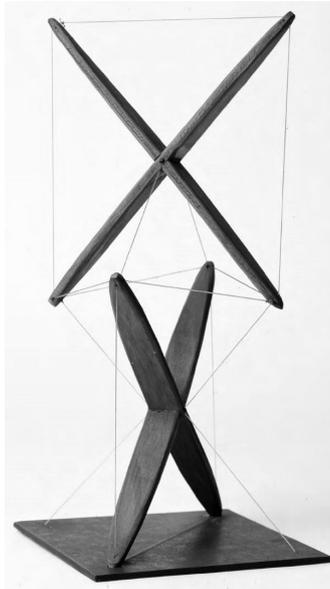
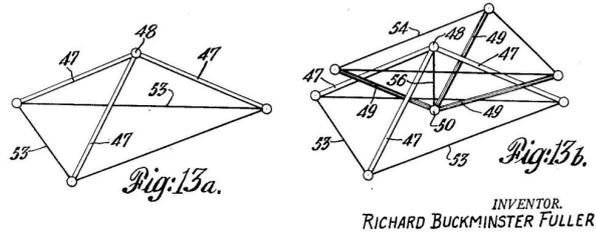


Abbildung 2.1: Zwei Tensegrity-Strukturen. Blau: Zugsegmente; Schwarz: Drucksegmente.

Anfangs haben sich hauptsächlich Architekten und Künstler mit Tensegrity-Strukturen beschäftigt. Die ersten Tensegrity-Strukturen, die in der Literatur zu finden sind, entwickelte der lettische Konstruktivist K. Ioganson in den 1920er Jahren. Er nannte diese Strukturen SPATIAL CONSTRUCTIONS [Gou98]. In den 1950er Jahren begannen hauptsächlich drei Personen sich mit Tensegrity-Strukturen zu beschäftigen: B. Fuller, K. Snelson und D.G. Emmerich. Die erste Tensegrity-Struktur von Snelson zeigt die Abbildung 2.2(a) und erste Patente von Fuller von Emmerich die Abbildungen 2.2(b) und 2.2(c). Emmerichs erste Tensegrity-Strukturen entstanden unabhängig von Fuller und Snelson [Jau04; Jau09]. Ab den 1980er Jahren begannen Designer [Sne13], Mathematiker [Con98; Con13] und Ingenieure sich mit Tensegrity-Strukturen zu beschäftigen. Eine frühe systematische Untersuchung von symmetrischen Tensegrity-Strukturen ist Gegenstand von [Pug76].



(a) Erste Tensegrity-Struktur von K. Snelson 1948, [Sne13]. © K. Snelson



(b) Eine der ersten patentierten Tensegrity-Strukturen von B. Fuller, 1954 [Ful54].

N° 1.377.291 M. Emmerich Pl. unique

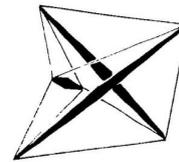


FIG. 1.

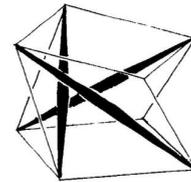


FIG. 2.

(c) Eine der ersten patentierten Tensegrity-Strukturen von D.G. Emmerich, 1963, [Emm63].

Abbildung 2.2: Erste gebaute und patentierte Tensegrity-Strukturen.

Für Tensegrity-Strukturen gibt es bis heute keine einheitliche Definition, die von allen Wissenschaftlern anerkannt wird [Mot03; Ske09; Zha15]. In [Zha15] werden Eigenschaften aufgelistet, die eine Tensegrity-Struktur erfüllen sollte:

- Die Struktur sollte freistehend sein, also keine Lagerung benötigen.
- Die Segmente der Struktur sollten gerade sein.
- Es sollte nur zwei Arten von Segmenten geben: Segmente die auf Druck (Drucksegmente) und Segmente die auf Zug (Zugsegmente) beansprucht sind.
- Die Drucksegmente sollten nicht in Kontakt miteinander stehen.

Allerdings gibt es auch für diese Punkte Ausnahmen in der Literatur. So werden in [Adr01; Bar05; Böh16a; Fru09b; Fru09a; Sch61] Tensegrity-Strukturen, welche gekrümmte Drucksegmente haben, untersucht. In [Ske01a; Ske09, Kapitel 1] wird zwischen Klasse 1 und Klasse k Tensegrity-Strukturen unterschieden. Bei Klasse 1 Tensegrity-Strukturen dürfen Drucksegmente nur indirekt über Zugsegmente verbunden sein, wohingegen bei Klasse k Tensegrity-Strukturen k Drucksegmente direkt miteinander verbunden sind. Klasse k Tensegrity-Strukturen werden unter anderem in [Böh16a; Boe17; Sch17; Ske09; Wen18] untersucht und auch in dieser Arbeit neben den Klasse 1 Tensegrity-Strukturen betrachtet.

Meist werden Tensegrity-Strukturen betrachtet, welche eine stabile Gleichgewichtskonfiguration besitzen. Eine besondere Klasse von Tensegrity-Strukturen sind Strukturen, welche mehrere stabile Gleichgewichtskonfigurationen aufweisen, sogenannte multistabile Tensegrity-Strukturen. Solche Strukturen können im unbelasteten Zustand verschiedene Formen annehmen [Böh16a; Mit17]. Die genaue Definition einer Gleichgewichtskonfiguration und einer multistabilen Tensegrity-Struktur befindet sich in Definition 2.3. Multistabile Tensegrity-Strukturen werden beispielsweise in [Böh16a; Böh17c; Böh17d; Def03; Sum17a;

Sum17b; Sum17c; Xu10; Zha07, Kapitel 8.4] und [Zha15, Kapitel 7.5] untersucht. In Abbildung 2.3 sind drei Gleichgewichtskonfigurationen einer Tensegrity-Struktur abgebildet.

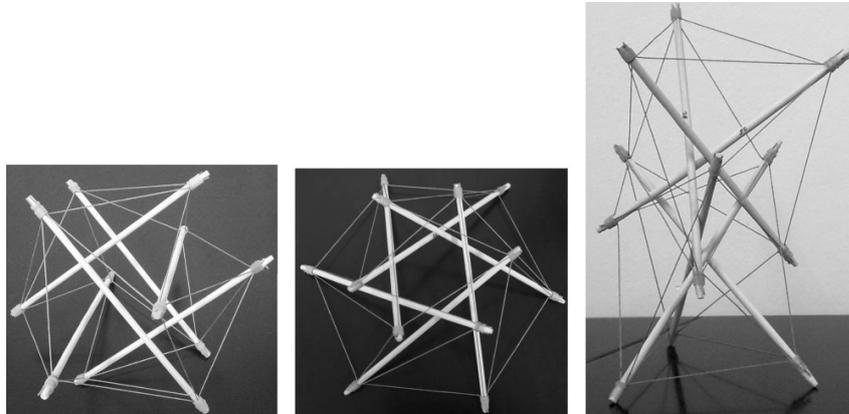


Abbildung 2.3: Drei stabile Gleichgewichtskonfigurationen einer Tensegrity-Struktur. Reprinted from [Xu10] with permission from Elsevier.

Eine Arbeitsgruppe an der Technischen Universität Ilmenau beschäftigt sich seit 2011 mit Tensegrity-Strukturen. Die bisher veröffentlichten Arbeiten dieser Arbeitsgruppe sind [Böh11; Böh12; Böh13a; Böh13b; Böh13c; Böh15a; Böh15b; Böh16a; Böh16b; Böh17a; Böh17b; Böh17c; Böh17d; Kau17a; Kau17b; Sch17; Sum17a; Sum17b; Sum17c; Sum17d].

2.1.1 Vorbilder für Tensegrity-Strukturen in der Natur

Vorbilder für Tensegrity-Strukturen lassen sich an verschiedensten Stellen in der Natur finden. So können Katzen und Geparden Höchstleistungen im Springen und Laufen vollbringen, indem ihr Muskel-Skelett-System ähnlich wie eine Tensegrity-Struktur aufgebaut ist. Die Muskeln arbeiten als Zugsegmente und die Knochen als Drucksegmente. Die nachgiebigen Segmente sorgen für den Zusammenhalt des Systems und können Energie speichern, [Pau06].

Auch bei anderen Lebewesen kann die Kombination aus Knochen (Drucksegmente) und Muskeln (Zugsegmente) als Tensegrity-Struktur aufgefasst werden, wie es in Abbildung 2.4 anhand des menschlichen Armes und Fußes illustriert ist [Ske09].

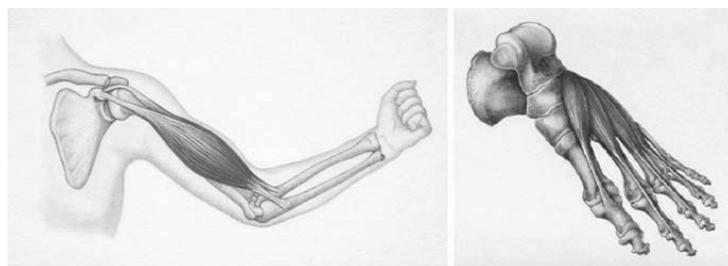


Abbildung 2.4: Links: Schulter- und Ellenbogengelenk als Tensegrity-Struktur. Rechts: Fußzehengelenke als Tensegrity-Struktur. Reprinted by permission from Springer Nature: [Ske09].

In [Ing08] und [Nac13] wird ein Bezug zwischen Viren, Enzymen und Zellen und Tensegrity-Strukturen hergestellt. Diese Strukturen ordnen sich so wie Tensegrity-Strukturen an, um ihre Masse und Energie zu minimieren, [Saf12a]. Selbst bei Spinnen lassen sich Tensegrity-Strukturen finden: Die Spinnennetze

von Webspinnen sind wie Tensegrity-Strukturen aufgebaut. Dafür bestehen die Spinnennetze aus zwei Komponenten, sogenannten *rectangular plates*, welche die Drucksegmente bilden, und *amorphus strands*, welche ein Netz aus Zugsegmenten bilden, siehe [Ske09; Ter94].

In [Nac13; Saf12a; Ske09] sind ausführlichere Überblicke über Vorbilder für Tensegrity-Strukturen in der Natur zu finden.

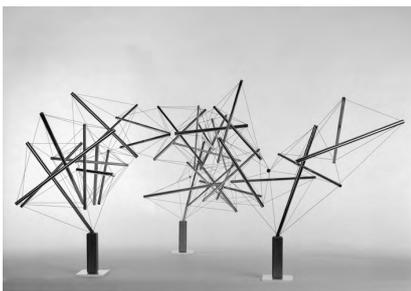
2.1.2 Tensegrity-Strukturen in Kunst und Architektur

Die ersten Anwendungen von Tensegrity-Strukturen finden sich in der Kunst und Architektur.

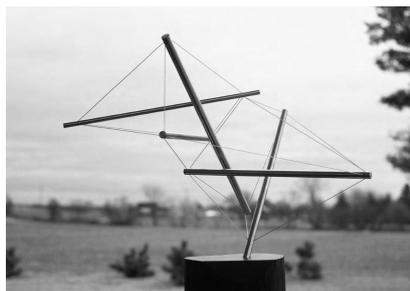
Aus Tensegrity-Strukturen, welche nur aus wenigen Segmenten bestehen, können durch Aneinanderfügen mehrerer solcher Strukturen große Tensegrity-Strukturen gebildet werden, welche als Skulpturen verwendet werden. K. Snelson entwickelte bis 2016 solche Tensegrity-Skulpturen [Sne13], Abbildung 2.5(a), 2.5(b). Indem statt eindimensionalen Zugsegmenten mehrdimensionale elastische Membranen verwendet werden oder die Tensegrity-Struktur zusätzlich mit Stoff bespannt wird, können Tensegrity-Strukturen als Dächer von Arenen oder Zelten verwendet werden [Zha15, Kapitel 1.2.2], Abbildung 2.5(c).

Ein aktuelles Forschungsthema ist der Einsatz von Tensegrity-Strukturen für Brücken [Ali10; Bar11; Bar12; Kor11; Mot11; Veu14; Veu15], Abbildung 2.5(d).

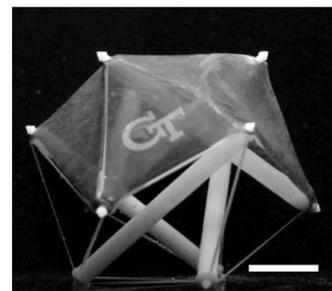
In [Jau04; Nac13; Ske09] sind ausführlichere Überblicke über Tensegrity-Strukturen in Kunst und Architektur zu finden.



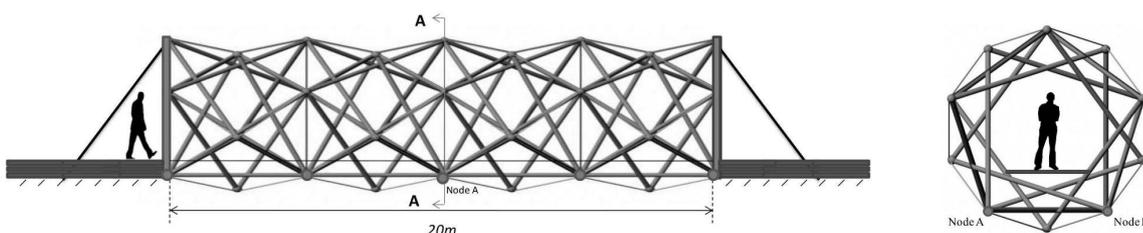
(a) Triple Crown von K. Snelson, 1889, [Sne13]. © K. Snelson



(b) Sag Harbour I von K. Snelson, 1965, [Sne13]. © K. Snelson



(c) Tensegrity-Struktur mit einer Membran als *Dach*, [Liu17].



(d) Entwurf für eine Tensegrity-Fußgängerbrücke. Reprinted from [Kor11] with permission from Elsevier.

Abbildung 2.5: Anwendung von Tensegrity-Strukturen in Kunst und Architektur.

2.1.3 Tensegrity-Strukturen in der Robotik

Tensegrity-Strukturen haben für den Einsatz in der Robotik vielversprechende Eigenschaften [Isc14; Jua08; Ske01a]:

- Filigran: Das Steifigkeit-Gewichts-Verhältnis ist gut, da die Segmente nur axial belastet werden.
- Effizienz: Tensegrity-Strukturen können Energie in den Zug- und Drucksegmenten speichern.
- Faltbarkeit: Durch den Einsatz von Zugsegmenten mit einer hohen Nachgiebigkeit können Tensegrity-Strukturen auf ein kleines Volumen reduziert werden.
- Konfigurierbarkeit: Tensegrity-Strukturen sind vorgespannt. Durch eine Änderung der Vorspannung kann die Steifigkeit der Tensegrity-Struktur angepasst werden.
- Redundanz: Bei Tensegrity-Strukturen kann ein Segment gleichzeitig Sensor und Aktuator sein. Daher können mehrere Segmente die gleiche Aufgabe erfüllen und wenn ein Sensor oder Aktuator ausfällt, kann trotzdem die gewünschte Aufgabe erfüllt werden.
- Skalierbarkeit: Die wesentlichen mechanischen Eigenschaften einer Tensegrity-Struktur basieren auf ihrer Geometrie und weniger auf den Werkstoffen. Dadurch ist es möglich, unter Berücksichtigung wesentlicher Systemeigenschaften, Tensegrity-Strukturen in der Größe zu skalieren.
- Belastbarkeit: Äußere Lasten werden auf die gesamte Struktur verteilt.

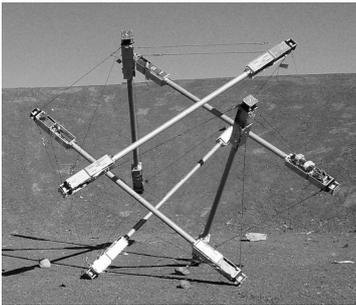
Das am meisten erforschte Thema von Tensegrity-Strukturen in der Robotik sind mobile Systeme und damit deren Lokomotion. Ein Überblick über den Stand der Technik bei der Lokomotion von Tensegrity-Strukturen ist in [Böh16a; Kau17a] zu finden. Verschiedene Tensegrity-Strukturen werden auf die Möglichkeiten zur Lokomotion untersucht. Meist wird hierbei die terrestrische Lokomotion betrachtet. Es gibt aber auch Forschungen im Bereich aquatischer Lokomotion [Shi13; Shi14].

Bei der terrestrischen Lokomotion kann zwischen einer rollenden, kriechenden und laufenden Fortbewegung unterschieden werden. Da einfache Tensegrity-Strukturen im weitesten Sinne kugelförmig sind, ist die rollende Fortbewegung eines der häufigsten Forschungsthemen. Bei diesen Strukturen kann eine Fortbewegung auf verschiedene Art und Weise erfolgen, beispielsweise durch eine Verformung der Struktur, siehe Abbildung 2.6(a) und 2.6(c) oder durch eine Verschiebung des Schwerpunktes, siehe Abbildung 2.6(b). Die rollende Fortbewegung einer Tensegrity-Struktur mit drei Drucksegmenten wird zum Beispiel in [Pau05c; Pau05a; Pau06; Tur07] erforscht. Eine Tensegrity-Struktur bestehend aus sechs Drucksegmenten wird unter anderem in [Ago13; Bru16; Che16; Che18; Isc13; Kim16a; Sab15], [Du16] und [Hir12; Hir13; Hir14; Koi12] untersucht. Eine Fortbewegung durch eine Änderung des Schwerpunktes innerhalb der Tensegrity-Struktur wird in [Böh16b; Kau17b] betrachtet.

Durch das Aneinanderfügen von einfachen Tensegrity-Strukturen können größere und komplexere Strukturen hergestellt werden. Durch geeignete Antriebe können diese Strukturen eine kriechende Fortbewegung ausführen, siehe Abbildungen 2.6(d) und 2.6(e), [Bli13; Mir14; Rie08; Rie10; Tie13; Web13]. Solche Roboter sind für den Einsatz in Rohrsystemen geeignet [Fri14; Fri16].

Außerdem gibt es erste Forschungen zur laufenden Fortbewegung. Dabei kann unterschieden werden, ob der gesamte Roboter eine Tensegrity-Struktur ist, Abbildung 2.6(f), [Hus16], oder ob nur die Wirbelsäule des Roboters auf einer Tensegrity-Struktur basiert, Abbildung 2.6(g), [Che17].

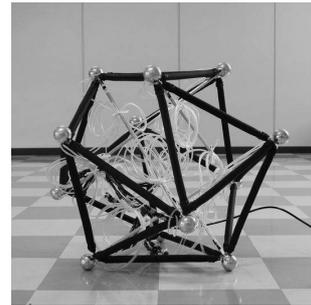
Ein wichtiges Einsatzgebiet von Robotern, welche auf Tensegrity-Strukturen basieren, ist die Raumfahrt. Dort sollen Tensegrity-Strukturen eingesetzt werden, um eine Nutzlast vom Raumschiff zum Planeten zu bringen und sie dort zu einem anderen Ort zu transportieren. Für die Landung ist die Nachgiebigkeit von Tensegrity-Strukturen hilfreich, um den Aufprall abzufedern. Wenn der Roboter gelandet ist, kann er sich rollend zum vorgegeben Ort bewegen, siehe Abbildung 2.6(h), [Ago18; Kim16b; Kim16a].



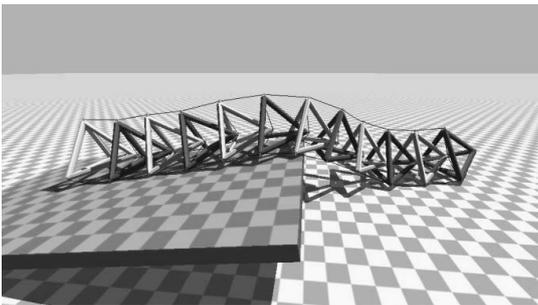
(a) SUPERball, Fortbewegung durch Änderung der Längen der Zugsegmente, [Sab15]. © [2015] IEEE



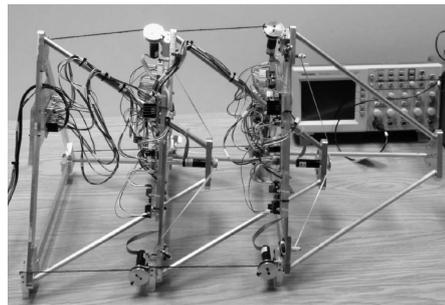
(b) Kugelförmiger mobiler Roboter, Lokomotion durch Änderung des Schwerpunktes, [Böh16b]. © [2016] IEEE



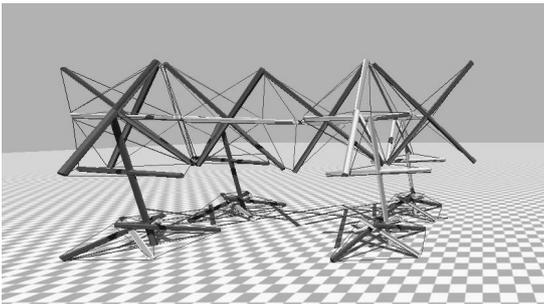
(c) Lokomotion durch pneumatische Änderung der Vorspannung, [Hir13]. © [2013] IEEE



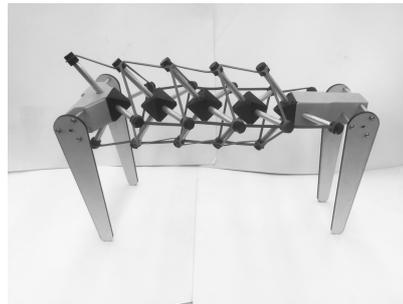
(d) Roboter als Nachbildung der Wirbelsäule, [Tie13]. © [2013] IEEE



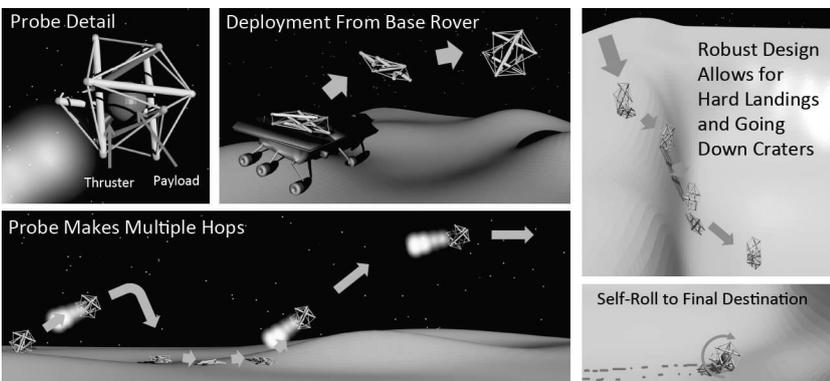
(e) Modell eines Elements von 2.6(d), [Par14]. © [2014] IEEE



(f) Simulation eines vierbeinigen Tensegrity-Roboters, [Hus16]. © [2016] IEEE



(g) Modell eines vierbeinigen Roboters, dessen Wirbelsäule eine Tensegrity-Struktur ist, [Che17].

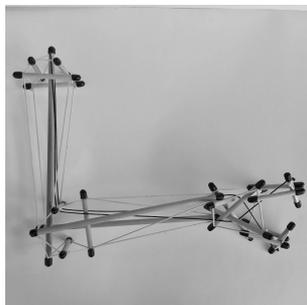


(h) Simulation der Landung und Fortbewegung eines Tensegrity-Roboters auf einem Planeten, [Ago18].

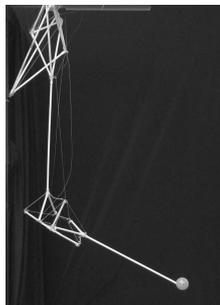
Abbildung 2.6: Tensegrity-Strukturen in der Robotik - zur Lokomotion.

Ein weniger erforsches Gebiet ist der Einsatz von Tensegrity-Strukturen als Manipulator oder Greifer. Aufgrund der geringen Anzahl werden alle dem Autor bekannten Arbeiten zu diesem Thema im Folgenden beschrieben. Flemons hat, basierend auf dem menschlichen Arm, eine Art Greifer gebaut, siehe Abbildung 2.7(a). Lessard et.al. [Les16] haben einen Manipulator, welcher ebenfalls auf dem menschlichen Arm basiert und eine Tensegrity-Struktur ist, erforscht, siehe Abbildung 2.7(b). Aldrich [Ald03; Ald06] hat eine erste Idee präsentiert, in der eine Tensegrity-Struktur so angetrieben wird, dass sie als Manipulator arbeiten kann, siehe Abbildung 2.7(c).

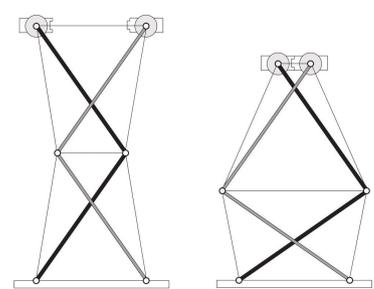
Die Eigenschaften von Tensegrity-Strukturen sind besonders vorteilhaft für Greifer. Wenn eine multistabile Tensegrity-Struktur als Grundlage für einen Tensegrity-Greifer verwendet wird, kann gegebenenfalls ein Wechsel zwischen den Gleichgewichtskonfigurationen das Öffnen beziehungsweise Schließen des Greifers realisieren, sodass nur beim Öffnen beziehungsweise Schließen Energie benötigt wird, und nicht, wenn der jeweilige Zustand aufrecht erhalten werden muss. Aus diesen Gründen wird in dieser Arbeit (Kapitel 5) untersucht, ob und wie es möglich ist, Tensegrity-Strukturen als Basis von Greifern zu verwenden.



(a) Tensegrity-Arm, basierend auf dem menschlichen Arm, [Fle08]. © [2008] T. Flemons



(b) Tensegrity-Manipulator basierend auf dem menschlichen Arm, [Les16]. © [2016] IEEE



(c) Tensegrity-Manipulator zum Fügen von Bauteilen, [Ald03]. © [2003] IEEE

Abbildung 2.7: Tensegrity-Manipulatoren.

2.1.4 Formfindung und Parameterfindung

In diesem Abschnitt werden die Begriffe Topologie, Gleichgewichtskonfiguration, multistabile Tensegrity-Struktur, Formfindung und Parameterfindung definiert und es wird ein Überblick über den Stand der Technik gegeben.

Definition 2.1 (Topologie).

Die Topologie einer Tensegrity-Struktur gibt an, aus wie vielen Segmenten eine Tensegrity-Struktur besteht und wie diese Segmente miteinander verbunden sind. Dabei werden die Segmente unterteilt in Segmente mit hoher- und mit geringer Steifigkeit.

Aus technischer Sicht ist es sinnvoll zu fordern, dass die Segmente mit geringer Steifigkeit auf Zug beansprucht sind, und die Segmente mit einer hohen Steifigkeit auf Druck. Zunächst werden die Betrachtungen in dieser Arbeit allgemein durchgeführt, und wenn diese Forderung zum Einsatz kommt, wird darauf hingewiesen.

Die Endpunkte der Segmente werden als **KNOTEN** bezeichnet.

Für die Definition einer Gleichgewichtskonfiguration gibt es zwei verschiedene Ansätze. Der erste Ansatz verwendet die inneren Kräfte und Momente einer Tensegrity-Struktur und im zweiten Ansatz wird eine Gleichgewichtskonfiguration über die Energiefunktion der inneren Energie definiert.

Definition 2.2 (Gleichgewichtskonfiguration).

Es sei eine Tensegrity-Struktur gegeben (Topologie, Segmentparameter). Angenommen, auf diese Tensegrity-Struktur wirken keine äußeren Kräfte.

- a) *Eine Tensegrity-Struktur befindet sich in einer Gleichgewichtskonfiguration, wenn die Gleichgewichtsbedingungen (Kräfte- und Momentensumme identisch Null) erfüllt sind, [Her05, Kapitel 6.6.2].*
- b) *Eine Tensegrity-Struktur befindet sich in einer Gleichgewichtskonfiguration, wenn die Energiefunktion (innere Energie der Segmente) in einem stationären Punkt ist (lokales Minimum, Maximum oder Sattelpunkt).*

Mit Hilfe der Energiefunktion kann auch die statische Stabilität der Tensegrity-Struktur in einer Gleichgewichtskonfiguration bestimmt werden: Wenn die Energiefunktion in einem lokalen Minimum ist, dann liegt die Tensegrity-Struktur in einer (statisch) stabilen Gleichgewichtskonfiguration vor, [Zha15, Kapitel 4].

In dieser Arbeit werden beide Definitionen verwendet, welche nach [Zha15, Kapitel 4] äquivalent sind. Der Vorteil von Definition 2.2 b) ist, dass die Energiefunktion fast überall differenzierbar ist. In Hinblick auf die Verwendung von Optimierungsverfahren ist diese Eigenschaft wichtig. Bei Überprüfung der Gleichgewichtsbedingungen, Definition 2.2 a), muss die Kräfte- und Momentensumme identisch Null sein. Dies ist eine einfachere Überprüfung, als die Berechnung der stationären Punkte der Energiefunktion, Definition 2.2 b), weshalb auch diese Definition einer Gleichgewichtskonfiguration in dieser Arbeit verwendet wird.

Die Berechnung der Gleichgewichtskonfigurationen basierend auf beiden Definitionen ist in Abschnitt 2.2.1 angegeben.

Definition 2.3 (Multistabile Tensegrity-Struktur).

Eine multistabile Tensegrity-Struktur sei eine Tensegrity-Struktur, welche für eine gegebene Topologie und gegebene Segmentparameter mehrere (statisch) stabile Gleichgewichtskonfigurationen hat.

Bei multistabilen Tensegrity-Strukturen gibt es zwei verschiedene Betrachtungsweisen. In der ersten Variante werden zwei Gleichgewichtskonfigurationen nur dann als unterschiedlich angesehen, wenn die Tensegrity-Struktur in den Gleichgewichtskonfigurationen unterschiedliche mechanische Eigenschaften hat, siehe beispielsweise [Böh16a]. In der zweiten Variante werden die Gleichgewichtskonfigurationen bezüglich einer speziellen Lagersituation betrachtet. Es werden Lager verwendet, um die Tensegrity-Struktur in der Ebene oder im Raum zu fixieren. Dann gelten zwei Gleichgewichtskonfigurationen als unterschiedlich, wenn die Knoten unterschiedliche Positionen besitzen. Diese Betrachtungsweise wird in dieser Arbeit angewendet.

Beispiel 2.4 (Definition unterschiedlicher Gleichgewichtskonfigurationen).

Für dieses Beispiel wird Topologie A verwendet, mit den Bezeichnungen und Segmentparametern aus Abbildung A.1. Diese Tensegrity-Struktur hat unter anderem die beiden Gleichgewichtskonfigurationen, die in Abbildung 2.8 dargestellt sind. Diese beiden Gleichgewichtskonfigurationen unterscheiden sich in der Drehung von Segment 2 und 3 um jeweils 180° . In [Böh16a] wäre dies ein und dieselbe Gleichgewichtskonfiguration, denn in beiden Gleichgewichtskonfigurationen liegen die gleichen mechanischen Eigenschaften vor. In dieser Arbeit werden diese beiden Gleichgewichtskonfigurationen allerdings als unterschiedlich angesehen, da Knoten ③ bis ⑥ unterschiedliche Koordinaten in beiden Gleichgewichtskonfigurationen haben. ┘

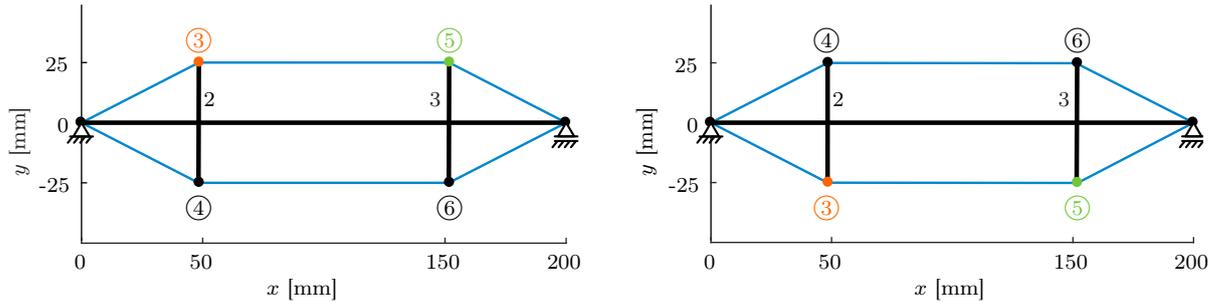


Abbildung 2.8: Zwei unterschiedliche Gleichgewichtskonfigurationen.

Die in dieser Arbeit verwendete Betrachtungsweise ist allgemeiner und die damit als unterschiedlich geltenden Gleichgewichtskonfigurationen können ohne Probleme als *gleich* im Sinne von [Böh16a] identifiziert werden.

Ein wichtiger Schritt bei der Untersuchung von Tensegrity-Strukturen ist, die Anordnung der Segmente (*configuration*) und die Vorspannung in einer Gleichgewichtskonfiguration zu bestimmen. Dies wird in der Literatur als FORM-FINDING bezeichnet, [Tib11; Zha15], deutsch: Formfindung.

Das Thema Formfindung wird häufig in der Literatur betrachtet. Übersichtsartikel über bisher entwickelte Verfahren der Formfindung sind beispielsweise [Jua08; Tib11; Zha15, Kapitel 1.3]. Nach [Zha15] können die Methoden der Formfindung in drei Klassen unterteilt werden:

- intuitive Methoden,
- analytische Methoden und
- numerische Methoden.

Die ersten Tensegrity-Strukturen wurden rein intuitiv entwickelt. Durch Hinzufügen und Entfernen von Segmenten konnten neue Tensegrity-Strukturen mit den erwünschten Gleichgewichtskonfigurationen gebaut werden. Dabei wurde sich häufig an platonischen und archimedischen Körpern orientiert, [Car12; Mot11]. Einen Überblick über intuitiv entwickelte Tensegrity-Strukturen und die dafür verwendete Herangehensweise gibt die Arbeit [Mot03, Kapitel 5.3].

Analytische Methoden wurden bisher nur für einfache Tensegrity-Strukturen entwickelt, siehe [Con95; Koo13b; Opp00]. Symmetrische Strukturen können auf kleinere, einfachere Strukturen reduziert werden, sodass auch komplexe, aber symmetrische Tensegrity-Strukturen untersucht werden können, [Zha15].

Die am meisten erforschte Klasse ist die der numerischen Methoden. Diese Methoden können nach [Zha15] in drei Klassen unterteilt werden:

- geometrische Methoden,
- Kraftmethoden und
- Energiemethoden.

Im Folgenden wird, ohne Anspruch auf Vollständigkeit, ein Überblick über numerische Methoden für die Formfindung gegeben. Die Klassifizierung basiert auf den angewendeten Verfahren und nennt deren besondere Merkmale.

- dynamische Relaxation: [Bar99; Zha06]
- Kraftdichtemethoden: Ein Überblick über verschiedene Kraftdichtemethoden, mit Unterteilung nach den notwendigen Voraussetzungen, ist in [Cal14] zu finden.
 - Minimierung der Zielfunktion mittels eines genetischen Algorithmus: [Koo12]
 - Minimierung der Zielfunktion mittels des Nelder-Mead-Simplex-Algorithmus: [Koo13a]
 - Untersuchung von Tensegrity-Strukturen mit mehreren Vorspannungszuständen: [Lee17; Tra10;

- Tra11; Tra13]
 - Vorgabe der Form der Tensegrity-Struktur: [Mas05]
 - Ausnutzen von Symmetrie zur Untersuchung großer Tensegrity-Strukturen: [Raj06]
 - Bestimmung von mehreren Parametern der Tensegrity-Struktur: [Vas99]
- evolutionäre und genetische Algorithmen:
 - in Verbindung mit der Kraftdichtemethode: [Koo12; Lee17]
 - zur Generierung von großen Strukturen: [Rie09]
 - Topologie und Längen aller Segmente sind vorgegeben: [Pau05b]
 - Topologie und Klassifizierung der Segmente (Zug/Druck) sind vorgegeben: [Yam11]
(Die Formfindungsmethode aus [Est06] wird hier mit einem genetischen Algorithmus gelöst.)
 - für multistabile Tensegrity-Strukturen: [Xu10; Xu11]
- stochastische Methoden: Es werden die Topologie, die Segmentparameter und eine Initialkonfiguration vorgegeben. Ausgehend von der Initialkonfiguration werden zufällige Konfigurationen generiert, von welchen die Energie betrachtet wird, [Li10].
- Finite-Elemente-Methoden: [Böh16a; Böh17d; Pag09; Zha14], siehe auch Abschnitt 2.2.2.

Wie der Literaturüberblick zeigt, gibt es viele verschiedene Methoden für die Formfindung. Dabei werden von den Methoden unterschiedliche Aufgabenstellungen der Formfindung gelöst: Teilweise ist die gesamte Tensegrity-Struktur fest vorgegeben, und es soll nur die geometrische Form der Gleichgewichtskonfiguration bestimmt werden. Teilweise werden bei der Formfindung auch Segmentparameter ermittelt, sodass die Tensegrity-Struktur gewisse Eigenschaften aufweist. Aus diesem Grund wird für diese Arbeit der Begriff der FORMFINDUNG genauer definiert und eingeschränkt, siehe Definition 2.5. Außerdem wird aus der Formfindung, wie sie in der Literatur zu finden ist, ein weiterer Begriff abgeleitet: PARAMETERFINDUNG, siehe Definition 2.6. So ist eine Unterscheidung der Aufgabenstellungen, die in der Literatur unter einem Begriff geführt werden, möglich.

Definition 2.5 (Formfindung und Formfindungsalgorithmus).

Es seien die Topologie einer Tensegrity-Struktur und alle Segmentparameter gegeben. Der Begriff Formfindung bezeichnet die Bestimmung der Positionen der Knoten der Tensegrity-Struktur, sodass sich diese in einer Gleichgewichtskonfiguration befindet.

Ein Algorithmus, welcher die Formfindung durchführt, wird Formfindungsalgorithmus genannt.

Die hier definierte Formfindung ist ein erster wesentlicher Schritt bei der Entwicklung von Tensegrity-Strukturen und möglichen Anwendungen in der Robotik. Bei der Formfindung von multistabilen Tensegrity-Strukturen ist das Ergebnis nicht eindeutig. Hierbei ist das Ziel alle existierenden Gleichgewichtskonfigurationen zu bestimmen, wobei die Segmentparameter unverändert bleiben. Die Kenntnis aller Gleichgewichtskonfigurationen ist bei der Entwicklung von Robotern, welche auf Tensegrity-Strukturen beruhen wichtig, um ihr Verhalten berechnen zu können. Außerdem können die stabilen Gleichgewichtskonfigurationen gezielt genutzt werden, damit spezielle Aufgaben (beispielsweise das Greifen eines Objektes) ohne Energiezufuhr ausgeführt werden können.

In der Literatur haben sich mit der Formfindung bei multistabilen Tensegrity-Strukturen [Xu10; Xu11; Böh17d] beschäftigt. Dabei werden in [Xu10; Xu11] genetische Algorithmen verwendet und in [Böh17d] ein Formfindungsalgorithmus, welcher auf der Finite-Elemente-Methode basiert (siehe Abschnitt 2.2.2). Das Ziel dieser Arbeit ist, Algorithmen für die Formfindung zu entwickeln, mit denen alle statisch stabilen Gleichgewichtskonfigurationen ermittelt werden können (Kapitel 3). Ein Ansatz dafür ist, genetische Algorithmen und den Finite-Elemente-Algorithmus aus [Böh17d] miteinander zu verknüpfen. Außerdem

soll überprüft werden, ob diese Aufgabenstellung mit klassischen Optimierungsverfahren gelöst werden kann.

Definition 2.6 (Parameterfindung).

Es seien die Topologie einer Tensegrity-Struktur und einige ihrer (aber nicht alle) Segmentparameter vorgegeben. Außerdem seien eine oder mehrere Eigenschaften vorgegeben, die die Tensegrity-Struktur haben soll. Der Begriff Parameterfindung bezeichnet die Bestimmung der unbekanntenen Segmentparameter unter Beachtung der vorgegebenen Eigenschaften der Tensegrity-Struktur.

Diese Eigenschaften können beispielsweise die Anzahl der stabilen Gleichgewichtskonfigurationen oder die Lage der Knoten in bestimmten Gleichgewichtskonfigurationen sein.

Bei der Entwicklung von Anwendungen von Tensegrity-Strukturen in der Robotik ist die Parameterfindung ein weiterer wesentlicher Schritt. Für die Anwendung ist es beispielsweise wichtig, die Form der Gleichgewichtskonfigurationen oder die Eigenfrequenzen vorzugeben, um das technische System entsprechend konstruieren zu können. Der Literaturüberblick hat gezeigt, dass es verschiedenste Verfahren für die Parameterfindung gibt. Oft kann damit aber nur eine Vorgabe an die Tensegrity-Struktur erfüllt werden. In vielen Fällen wird die gewünschte Form der Tensegrity-Struktur vorgegeben. Alle Segmentparameter werden bestimmt. Für spezielle Anwendungen kann es sinnvoll sein, einige Segmentparameter fest vorzugeben. Es ist keine Literatur bekannt, in der die Parameterfindung mit multistabilen Tensegrity-Strukturen ausgeführt wird. Durch die Vorgabe von Eigenschaften in verschiedenen Gleichgewichtskonfigurationen (beispielsweise Lage und Stabilität), können gezielt multistabile Tensegrity-Strukturen gefunden werden, sodass die Aufgabe der Parameterfindung besonders für diese Klasse von Tensegrity-Strukturen interessant ist.

In dieser Arbeit soll ein Algorithmus für die Parameterfindung beliebiger Tensegrity-Strukturen entwickelt werden, der bei der Wahl der Segmentparameter eine Vielzahl verschiedener Eigenschaften berücksichtigen kann.

2.1.5 Vereinbarungen zu den verwendeten Tensegrity-Strukturen

In diesem Abschnitt werden Konventionen, welche in dieser Arbeit zur Beschreibung und Darstellung von Tensegrity-Strukturen verwendet werden, eingeführt.

Eine Tensegrity-Struktur habe n_k Knoten, n_d Segmente mit hoher Steifigkeit und n_z Segmente mit geringer Steifigkeit und somit $n_s := n_d + n_z$ Segmente insgesamt. Alle Segmente werden nummeriert. Es seien \mathcal{F} die Menge der Nummern der Segmente mit geringer Steifigkeit und \mathcal{S} die Menge der Nummern der Segmente mit hoher Steifigkeit.

Die Knoten einer Tensegrity-Struktur werden mit einem Kreis um die Nummer bezeichnet: zum Beispiel $\textcircled{1}$, damit diese von den Segmenten unterschieden werden können. Die Position eines Knotens \textcircled{i} im globalen Koordinatensystem sei $P_{\textcircled{i}} \in \mathbb{R}^\eta$. Wobei η angibt, ob es sich um eine planare ($\eta = 2$) oder eine räumliche ($\eta = 3$) Tensegrity-Struktur handelt.

Wenn nicht anders angegeben, ist der Ursprung des globalen kartesischen Koordinatensystems im Knoten $\textcircled{1}$, der erste Basisvektor des Koordinatensystems (als x-Achse bezeichnet) verläuft dabei von Knoten $\textcircled{1}$ in Richtung Knoten $\textcircled{2}$.

In den Skizzen werden die Segmente mit hoher Steifigkeit mit dickeren Linien als die Segmente mit geringer Steifigkeit dargestellt. Knoten werden durch einen gefüllten Kreis markiert. Verbindungen zwischen Segmenten mit hoher und geringer Steifigkeit sind immer gelenkige Verbindungen. Verbindungen zwischen Segmenten mit hoher Steifigkeit sind starr, wenn sie durch einen kleinen Kreis und gelenkig, wenn sie durch einen großen Kreis markiert sind. Für eine eindeutige Identifizierung der Segmente und deren

Orientierung werden einzelne Knoten farbig markiert.
Diese Vereinbarungen werden in Beispiel 2.7 illustriert.

Beispiel 2.7 (Tensegrity-Struktur mit Bezeichnungen).

In Abbildung 2.9 ist eine Tensegrity-Struktur mit $n_k = 5$ Knoten, $n_d = 3$ Segmenten mit hoher Steifigkeit, $n_z = 6$ Segmenten mit geringer Steifigkeit und insgesamt $n_s = 9$ Segmenten dargestellt. In Knoten ④ sind die beiden Segmente gelenkig miteinander verbunden. Die Segmente mit geringer Steifigkeit sind hier blau hervorgehoben. Durch den orange markierten Knoten können Knoten ③ und Knoten ⑤, beziehungsweise Segment 2 und 3 unterschieden werden.

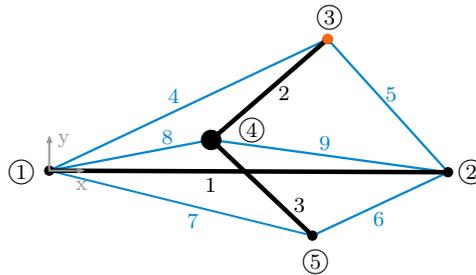


Abbildung 2.9: Tensegrity-Struktur mit Bezeichnungen.

┘

Die Segmente werden als gerade angenommen. Verallgemeinerungen auf gekrümmte Segmente sind allerdings möglich. Biegungen der Segmente und Torsionen um die Längsachse der Segmente werden in dieser Arbeit nicht betrachtet.

Für die Beschreibung der Segmente mit hoher Steifigkeit können zwei verschiedene Betrachtungsweisen unterschieden werden:

Annahme 2.8 (Beschreibung der Segmente mit hoher Steifigkeit).

- A) Die Segmente mit hoher Steifigkeit werden als starr, mit fester Länge angenommen.
- B) Die Segmente mit hoher Steifigkeit werden als elastisch angenommen (Druckfedern, lineare Federkennlinie). Die Steifigkeit ist dabei größer oder gleich $10^5 \frac{N}{mm}$.

Im Fall A) werden die entsprechenden Segmente durch ihre feste Länge l_i , $i \in \mathcal{S}$ definiert. Der Schwerpunkt eines Segmentes befindet sich in dessen Mitte. Im Fall B) werden die Segmente mit hoher Steifigkeit durch eine Anfangslänge l_{0i} und eine Steifigkeit k_i , $i \in \mathcal{S}$ definiert.

Die Segmente mit geringer Steifigkeit werden in dieser Arbeit als Federn mit linearer Federkennlinie angenommen. Ihre Anfangslänge sei $l_{0i} > 0$ und ihre Steifigkeit k_i , $i \in \mathcal{F}$.

Sofern nicht anders angegeben, werden alle Segmente als masselos angenommen.¹

Definition 2.9 (Segmentvektor).

Sind $P_{\textcircled{i}}, P_{\textcircled{j}} \in \mathbb{R}^n$, $i, j \in \{1, \dots, n_k\}$ mit $i < j$ die Koordinaten von zwei Knoten, die innerhalb der Tensegrity-Struktur durch ein Segment $k \in \{1, \dots, n_s\}$ verbunden sind, so heißt die vektorielle Differenz $L_k := P_{\textcircled{j}} - P_{\textcircled{i}} \in \mathbb{R}^n$ SEGMENTVEKTOR.

¹Es gibt Ausnahmen bei der Berechnung der Eigenfrequenzen von Tensegrity-Strukturen (Kapitel 4) und bei der Betrachtung der Bewegungsgleichungen (Abschnitt 5.1).

Die verwendeten Einheiten sind, wenn nicht anders angegeben:

- Steifigkeit: N/mm
- Länge: mm
- Masse: g
- Dämpfung: Ns/mm
- Kraft: N.

2.1.6 Darstellung der Tensegrity-Strukturen in Koordinatensystemen

Die Lage einer Tensegrity-Struktur wird durch die Knotenkoordinaten eindeutig bestimmt. Bei der Darstellung der Tensegrity-Strukturen wird entsprechend Annahme 2.8 unterschieden, ob die Segmente mit hoher Steifigkeit starr oder elastisch sind.

Segmente mit hoher Steifigkeit sind elastisch

Wenn das Konzept von Annahme 2.8 B) verwendet wird, bei dem sich die Länge der Segmente mit hoher Steifigkeit ändern kann, dann ist der Freiheitsgrad δ der Tensegrity-Struktur $\delta = 2n_k$ (bei planaren Tensegrity-Strukturen) beziehungsweise $\delta = 3n_k$ (bei räumlichen Tensegrity-Strukturen). Die Definition der Lage der Tensegrity-Struktur kann beispielsweise durch die Angabe der Koordinaten der beiden Endpunkte jedes Segmentes mit hoher Steifigkeit erfolgen.

Segmente mit hoher Steifigkeit sind starr

Wenn das Konzept von Annahme 2.8 A) verwendet wird, dann ist die Länge der Segmente mit hoher Steifigkeit konstant. Somit ist der Freiheitsgrad der Tensegrity-Struktur kleiner als bei Variante B) in Definition 2.8.

Zunächst werden nur Klasse 1 Tensegrity-Strukturen betrachtet, bei denen keine Segmente mit hoher Steifigkeit direkt miteinander verbunden sind, das heißt diese Segmente haben keine gemeinsamen Knoten. Im planaren Fall ist die Lage der Tensegrity-Struktur eindeutig bestimmt, wenn je Segment mit hoher Steifigkeit von einem Endpunkt die Koordinaten und der Winkel bezüglich der x-Achse angegeben werden. Statt eines Endpunktes kann auch ein beliebiger fixierter Punkt auf dem Segment gewählt werden, zum Beispiel der Schwerpunkt des Segmentes.

Im räumlichen Fall ist je Segment mit hoher Steifigkeit ein zusätzlicher Winkel notwendig. Das heißt, für die vollständige Beschreibung der Lage der Tensegrity-Struktur im Raum, werden je Segment mit hoher Steifigkeit die Koordinaten eines Punktes auf dem Segment (beispielsweise Endpunkt oder Schwerpunkt) angegeben und zwei Winkel.

Aus diesen Betrachtungen folgt, dass der Freiheitsgrad δ der Tensegrity-Struktur gleich $\delta = 1.5n_k$ (bei planaren Tensegrity-Strukturen) beziehungsweise $\delta = 2.5n_k$ (bei räumlichen Tensegrity-Strukturen) ist. In Beispiel 2.11 wird diese Darstellung der Tensegrity-Strukturen illustriert.

Definition 2.10 (Segmentkoordinaten).

Gegeben sei eine Tensegrity-Struktur, deren Segmente mit hoher Steifigkeit als starr angenommen werden. Die Koordinaten, die verwendet werden, um die Lage dieser Tensegrity-Struktur zu definieren (je Segment mit hoher Steifigkeit Koordinaten und Winkel), werden SEGMENTKOORDINATEN genannt.

Bei Klasse k Tensegrity-Strukturen verringert sich durch die hinzugekommenen Zwangsbedingungen der Freiheitsgrad entsprechend (und damit die Anzahl der benötigten Segmentkoordinaten).

Um zu verhindern, dass sich die Tensegrity-Struktur in der Ebene oder im Raum verschiebt (Starrkörperverschiebung), werden einige Segmente oder Knoten gelagert. Damit wird der Freiheitsgrad weiter verringert und damit auch die Anzahl der freien Segmentkoordinaten. Die Lagerung ist an den entsprechenden Stellen, an denen sie notwendig ist, angegeben.

Beispiel 2.11 (Darstellung in Koordinatensystemen).

In diesem Beispiel sei die Länge der Segmente mit hoher Steifigkeit konstant, es gilt Variante A) von Annahme 2.8. Für den planaren und den räumlichen Fall wird jeweils eine Tensegrity-Struktur angegeben, um jeweils eine Möglichkeit für die Definition der Lage der Tensegrity-Struktur zu zeigen. In Abbildung 2.10 sind beide Topologien mit ihren Bezeichnungen dargestellt.

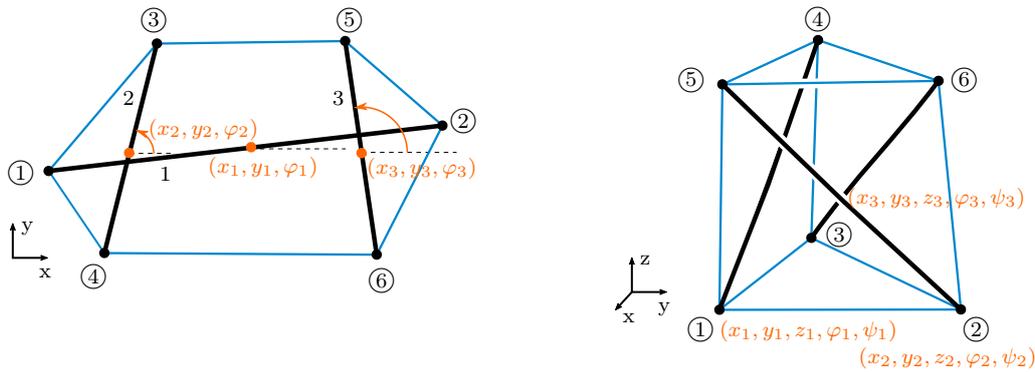


Abbildung 2.10: Zwei Topologien mit Segmentkoordinaten zur Darstellung der Lage der Tensegrity-Strukturen.

- a) Bei der linken planaren Struktur werden pro starrem Segment die Schwerpunktkoordinate und ein Winkel, mathematisch positiv von der positiven x -Achse ausgehend, verwendet. Aus diesen drei Variablen pro starrem Segment können von jedem Segment die Koordinaten der beiden Endpunkte berechnet werden. Für Segment 2 mit Knoten ③ und ④ und der Länge l_2 wird die Berechnung der Positionen $P_{\textcircled{3}} \in \mathbb{R}^2$ und $P_{\textcircled{4}} \in \mathbb{R}^2$ angegeben:

$$P_{\textcircled{3}} = \left(x_2 + \frac{1}{2}l_2 \cos(\varphi_2), y_2 + \frac{1}{2}l_2 \sin(\varphi_2) \right)^\top,$$

$$P_{\textcircled{4}} = \left(x_2 - \frac{1}{2}l_2 \cos(\varphi_2), y_2 - \frac{1}{2}l_2 \sin(\varphi_2) \right)^\top.$$

Um Starrkörperverschiebungen zu verhindern, wird diese Struktur gelagert. Dies kann beispielsweise durch ein Festlager in Knoten ① und ein Loslager in Knoten ② realisiert werden. Damit werden die Segmentkoordinaten x_1, y_1, φ_1 auf feste Werte gesetzt. Für diese Struktur werden also sechs Segmentkoordinaten benötigt, um ihre Lage zu bestimmen: $(x_2, y_2, \varphi_2, x_3, y_3, \varphi_3)$.

- b) Bei der rechten, dreidimensionalen Struktur werden pro starrem Segment die Knotenkoordinaten von einem Knoten und zwei Winkel analog zu den Winkeln im Kugelkoordinatensystem angegeben: α_i gibt den Polarwinkel (Winkel zwischen der z -Achse und dem Segment) und β_i den Azimutwinkel (Winkel zwischen der x -Achse und der Projektion des Segmentes auf die x - y -Ebene) an, siehe auch [Bro05, Kapitel 3.5.3.1.7, S.215f.]. Die Koordinaten des zweiten Endpunktes jedes starren Segmentes können wie bei der Transformation von Kugelkoordinaten in kartesische Koordinaten berechnet werden.

Beispielhaft wird die Berechnung der Positionen $P_{\textcircled{4}} \in \mathbb{R}^3$ von Knoten $\textcircled{4}$ an Segment 1 angegeben:

$$P_{\textcircled{4}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + l_1 \begin{pmatrix} \sin(\varphi_1) \cos(\psi_1) \\ \sin(\varphi_1) \sin(\psi_1) \\ \cos(\varphi_1) \end{pmatrix}.$$

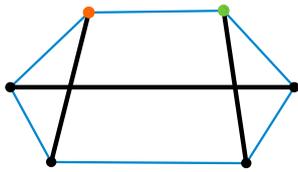
Um Starrkörperverschiebungen im Raum zu verhindern werden beispielhaft die Koordinaten von Knoten $\textcircled{1}$ (x_1, y_1, z_1), zwei Komponenten der Koordinaten von Knoten $\textcircled{2}$ (y_2, z_2) und eine Komponente der Koordinaten von Knoten $\textcircled{3}$ (z_3) auf feste Werte gesetzt. Aus diesen Betrachtungen ergeben sich für diese Struktur neun Segmentkoordinaten: $(\varphi_1, \psi_1, x_2, \varphi_2, \psi_2, x_3, y_3, \varphi_3, \psi_3)$.

┘

2.1.7 Verwendete Tensegrity-Strukturen

In dieser Arbeit werden verschiedene Tensegrity-Strukturen beispielhaft untersucht, diese sind in Abbildung 2.11 gezeigt. Einige der Strukturen sind aus Veröffentlichungen bereits bekannt. Außerdem ist dort für geeignete Segmentparameter eine Auswahl der möglichen Gleichgewichtskonfigurationen dargestellt. Weitere Informationen zu diesen Strukturen befinden sich in Anhang A.

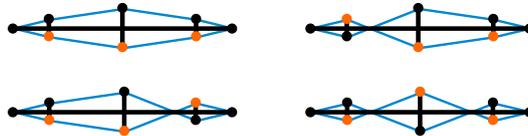
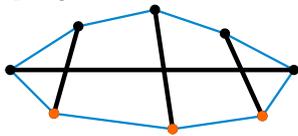
Topologie A



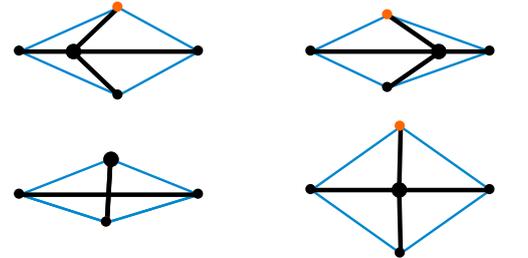
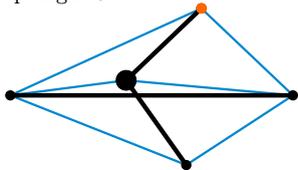
Auswahl von Gleichgewichtskonfigurationen bei geeigneter Wahl der Segmentparameter



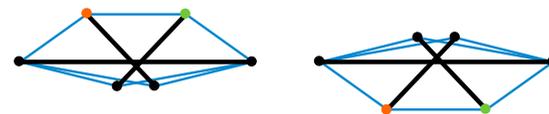
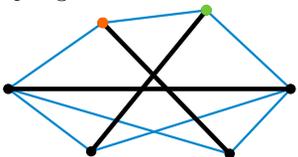
Topologie B



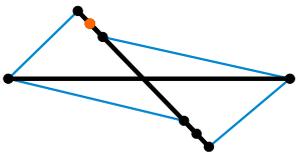
Topologie C



Topologie D



Topologie E



Topologie F

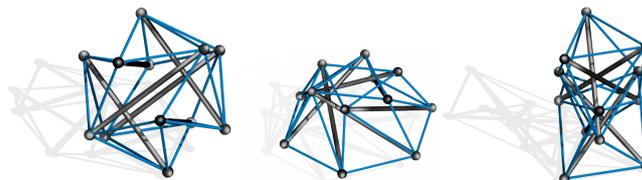
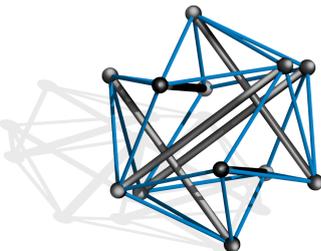


Abbildung 2.11: Übersicht über die in dieser Arbeit beispielhaft verwendeten Tensegrity-Strukturen. Topologie A, Topologie C und Topologie D: [Böh16a], Topologie F: [Def03; Xu10; Xu11].

2.2 Mathematisch-mechanische Grundlagen und Methoden

In diesem Abschnitt werden die theoretischen Werkzeuge, die in den folgenden Kapiteln benötigt werden, beschrieben. Es wird erklärt, wie eine Gleichgewichtskonfiguration einer Tensegrity-Struktur berechnet werden kann und es wird ein Formfindungsalgorithmus genauer vorgestellt. Im Anschluss wird ein Überblick über evolutionäre Algorithmen und deren Unterklasse, die genetischen Algorithmen, gegeben und ein Multistart-Optimierungsverfahren wird vorgestellt.

2.2.1 Berechnung von Gleichgewichtskonfigurationen

Bei der Berechnung, ob sich eine Tensegrity-Struktur in einer Gleichgewichtskonfiguration befindet, wird entsprechend Definition 2.2 zwischen der Berechnung mittels Gleichgewichtsbedingungen und mittels Energiefunktion unterschieden.

Gleichgewichtskonfiguration mittels Gleichgewichtsbedingungen

Zur Überprüfung der Gleichgewichtsbedingungen werden zwei Möglichkeiten erläutert. Dabei ist das Vorgehen unabhängig davon, ob es eine multistabile Tensegrity-Struktur oder eine Tensegrity-Struktur mit nur einer stabilen Gleichgewichtskonfiguration ist. Es wird angenommen, dass keine äußeren Kräfte auf die Struktur wirken.

Segmentweise Betrachtung der Tensegrity-Struktur: Eine Tensegrity-Struktur besteht aus vorgespannten Segmenten. Die resultierende Kraft $F_f \in \mathbb{R}^n$ eines einzelnen Segmentes $f \in \{1, \dots, n_s\}$ berechnet sich mit:

$$F_f := k_f (\|L_f\|_2 - l_{0f}) \frac{L_f}{\|L_f\|_2},$$

wobei k_f die Steifigkeit, l_{0f} die Anfangslänge und L_f der Segmentvektor von Segment f sei. Der Faktor $L_f/\|L_f\|_2$ und das Vorzeichen der Differenz $(\|L_f\|_2 - l_{0f})$ bestimmen die Richtung der Kraft. Per Definition wird in dieser Arbeit die Kraft immer in Bezug auf den Knoten mit der kleineren Nummer berechnet. Wenn die Kraft eines Segmentes auf den Knoten mit der größeren Nummer berechnet werden soll, ist dies $-F_f$.

Der Segmentvektor $L_f \in \mathbb{R}^n$ und die aktuelle Länge des Segmentes $\|L_f\|_2$ sind von den Segmentkoordinaten (beziehungsweise den Knotenkoordinaten) $\chi \in \mathbb{R}^d$ abhängig.

Satz 2.12. *Ein Körper bleibt genau dann in Ruhe, wenn alle an ihm angreifenden Kräfte F_1, \dots, F_n eine Gleichgewichtsgruppe bilden. Dafür ist notwendig und hinreichend:*

$$\sum_{i=1}^n F_i = 0 \tag{2.1}$$

$$\sum_{i=1}^n r_i \times F_i = 0, \tag{2.2}$$

wobei r_i der Ortsvektor des Angriffspunktes von F_i bezüglich eines beliebigen Punktes ist.

Die Gleichungen (2.1) und (2.2) heißen Gleichgewichtsbedingungen, in Gleichung (2.1) wird eine Kräfte-summe und in Gleichung (2.2) eine Momentensumme berechnet.

Da eine Tensegrity-Struktur ein Verband mehrerer Segmente ist, wird sie in ihre Segmente mit hoher

Steifigkeit zerlegt (*freischneiden*). Für jedes Segment mit hoher Steifigkeit werden die Gleichgewichtsbedingungen, unter Berücksichtigung aller am Segment angreifenden Kräfte (welche eine Kräftegruppe bilden), aufgestellt, siehe Beispiel 2.13 a). Genau dann, wenn für alle Segmente mit hoher Steifigkeit die Gleichgewichtsbedingungen erfüllt sind, befindet sich die Tensegrity-Struktur in einer Gleichgewichtskonfiguration. Bei der Berechnung der Kräfte- und Momentensumme können verschiedene Fälle auftreten, welche im Beispiel 2.13 b), c), d), gezeigt sind.

Die Kräftesumme an einem Segment mit hoher Steifigkeit i werde mit $F_{Di} \in \mathbb{R}^n$ bezeichnet. Für die erste Gleichgewichtsbedingung (2.1) der gesamten Tensegrity-Struktur muss gelten:

$$F_{Di} = 0 \in \mathbb{R}^n, \quad \text{für alle } i \in \mathcal{S}. \quad (2.3)$$

Für die zweite Gleichgewichtsbedingung (2.2) muss die Momentensumme bezüglich eines beliebigen Bezugspunktes identisch Null sein. Als Bezugspunkt wird ohne Beschränkung der Allgemeinheit ein Knoten des betrachteten Segmentes gewählt.

Es sei $F_{\textcircled{k}} \in \mathbb{R}^n$ die Summe aller an Knoten \textcircled{k} angreifenden Kräfte. Die Momentensumme $M_{i\textcircled{j}} \in \mathbb{R}^3$ an einem Segment $i \in \mathcal{S}$, mit den Knoten \textcircled{j} und \textcircled{k} , mit Bezugspunkt \textcircled{j} ist²:

$$M_{i\textcircled{j}} := \begin{cases} L_i \times F_{\textcircled{k}}, & \text{falls } j < k, \\ -L_i \times F_{\textcircled{k}}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für die zweite Gleichgewichtsbedingung (2.2) der gesamten Tensegrity-Struktur muss gelten:

$$M_{i\textcircled{j}} = 0 \in \mathbb{R}^3, \quad \text{für alle } i \in \mathcal{S}, j \text{ sei ein Knoten von Segment } i. \quad (2.4)$$

Genau dann, wenn sich eine Tensegrity-Struktur in einer Gleichgewichtskonfiguration befindet, sind die Gleichungen (2.3) und (2.4) erfüllt.

Im folgenden Beispiel 2.13 wird illustriert, wie die Gleichgewichtsbedingungen für eine spezielle Tensegrity-Struktur überprüft werden.

Beispiel 2.13 (Gleichgewichtsbedingungen bei segmentweiser Betrachtung).

Für dieses Beispiel wird Topologie A verwendet, siehe auch Abbildung A.1.

a) In Abbildung 2.12(a) ist dargestellt, wie die Tensegrity-Struktur in ihre Elemente zerlegt wird. Ein Element ist dabei ein Segment mit hoher Steifigkeit. Die Kräftesumme der Segmente 1 und 2 berechnet sich wie folgt:

$$F_{D1} = F_4 + F_6 + F_7 + F_9, \quad F_{D2} = -F_4 + F_5 + F_8 - F_9.$$

Die Momentensummen von Segment 1 (Bezugspunkt Knoten $\textcircled{1}$), 2 (Bezugspunkt Knoten $\textcircled{3}$) und 3 (Bezugspunkt Knoten $\textcircled{6}$) berechnen sich wie folgt:

$$M_{1\textcircled{1}} = L_1 \times (F_6 + F_7), \quad M_{2\textcircled{3}} = L_2 \times (F_8 - F_9), \quad M_{3\textcircled{6}} = -L_3 \times (-F_5 - F_6).$$

²Das Kreuzprodukt \times ist nur zwischen Vektoren in \mathbb{R}^3 definiert. Vereinbarung für diese Arbeit: Wenn $n = 2$ gilt, dann wird für die Bildung des Kreuzproduktes eine dritte Komponente in den Vektoren eingefügt, welche identisch Null ist. Dann ist das berechnete Kreuzprodukt ein Vektor in \mathbb{R}^3 , bei dem die ersten beiden Komponenten gleich Null sind und die letzte Komponente das resultierende Moment enthält.

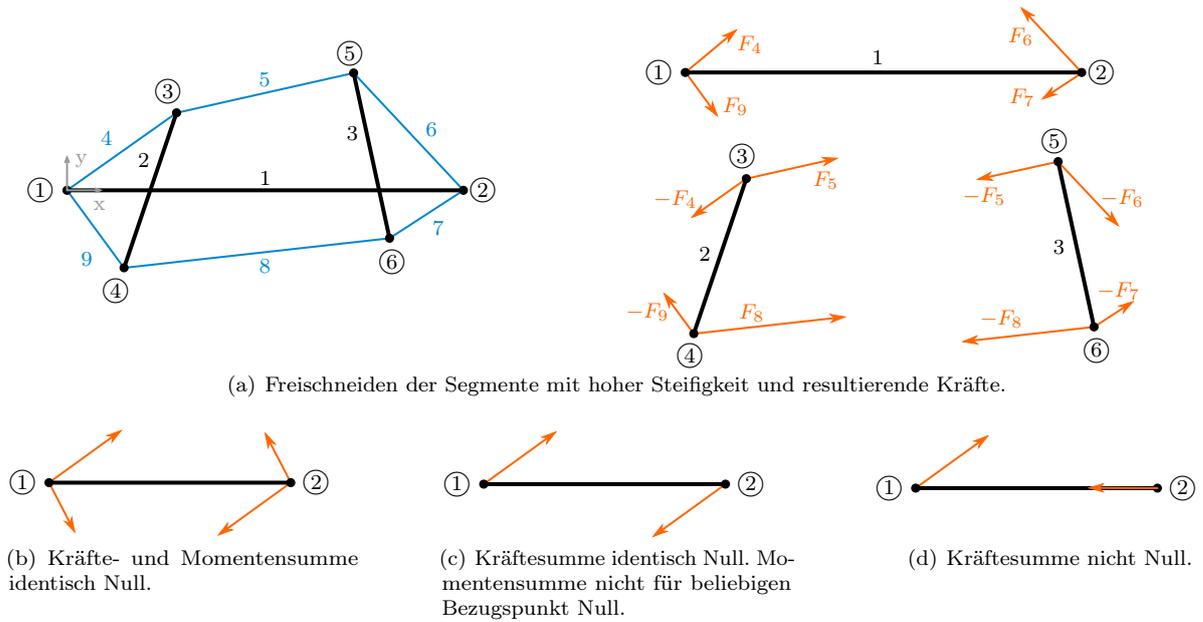


Abbildung 2.12: Beispiele für die Berechnung der Kräfte- und Momentensumme.

- b) Abbildung 2.12(b): Die Kräfte bilden eine Gleichgewichtsgruppe. Die Gleichgewichtsbedingungen sind erfüllt.
- c) Abbildung 2.12(c): Die Kräfte bilden ein Kräftepaar, das heißt die Kräftesumme ist identisch Null, die Momentensumme ist ungleich Null.
- d) Abbildung 2.12(d): Es gibt eine resultierende Kraft. Die Kräftesumme ist nicht Null.

Knotenweise Betrachtung der Tensegrity-Struktur: In dieser Betrachtungsweise wird prinzipiell genauso vorgegangen, wie in der ersten Variante, allerdings werden hier die einzelnen Knoten freigeschnitten und alle angreifenden Kräfte werden berücksichtigt, siehe auch Beispiel 2.14.

Die Kräftesumme an einem Knoten i werde mit $F_{\textcircled{i}}$, $i \in \{1, \dots, n_k\}$ bezeichnet, sie berücksichtigt die Kräfte aller am Knoten befindlichen Segmente. Damit die Gleichgewichtsbedingungen aus Satz 2.12 für die gesamte Tensegrity-Struktur erfüllt sind, muss gelten:

$$F_{\textcircled{i}} = 0 \in \mathbb{R}^n, \quad \text{für alle } i \in \{1, \dots, n_k\}. \quad (2.5)$$

Beispiel 2.14 (Gleichgewichtsbedingungen bei knotenweiser Betrachtung).

Für dieses Beispiel wird Topologie A verwendet, siehe auch Abbildung A.1.

In Abbildung 2.13 ist dargestellt, wie die Knoten einer Tensegrity-Struktur freigeschnitten werden. Die Kräfte an Knoten $\textcircled{1}$ und $\textcircled{3}$ berechnen sich wie folgt:

$$F_{\textcircled{1}} = F_1 + F_4 + F_9, \quad F_{\textcircled{3}} = F_2 - F_4 + F_5.$$

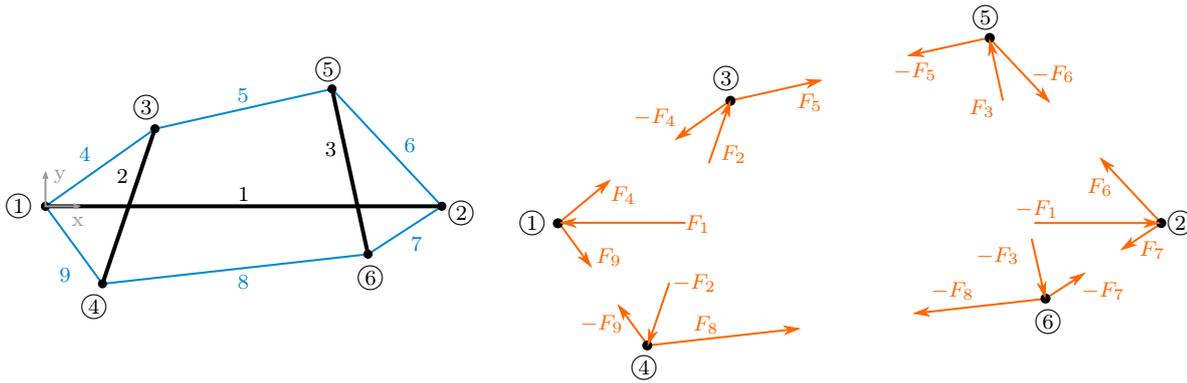


Abbildung 2.13: Freischneiden der Knoten und resultierende Kräfte.

Gleichgewichtskonfiguration mittels Energiefunktion

In diesem Abschnitt wird beschrieben, wie die Gleichgewichtskonfiguration(en) einer Tensegrity-Struktur mit Hilfe der Energiefunktion bestimmt werden. Dabei ist das Vorgehen unabhängig davon, ob eine multistabile Tensegrity-Struktur oder eine Tensegrity-Struktur mit nur einer stabilen Gleichgewichtskonfiguration zu Grunde liegt. Die Segmente mit einer hohen Steifigkeit werden als starr, mit einer festen, vorgegeben Länge (siehe Annahme 2.8 A)) angenommen.

Die potentielle Energie einer Tensegrity-Struktur ist die Summe der inneren Energien der elastischen Segmente [Sza63, Kapitel IV, §23]:

$$U := \frac{1}{2} \sum_{f \in \mathcal{F}} k_f (\|L_f\|_2 - l_{0f})^2. \tag{2.6}$$

Dabei sind $L_f \in \mathbb{R}^n$ die Segmentvektoren. Dementsprechend sind $\|L_f\|_2 \in \mathbb{R}$ die aktuellen Längen der Segmente. Die stationären Punkte (Minimum, Maximum, Sattelpunkt) der Energiefunktion sind Gleichgewichtskonfigurationen. Die lokalen Minima sind Positionen, an denen die Gleichgewichtskonfiguration statisch stabil ist, siehe Definition 2.2 b).

Beispiel 2.15 (Beispiel für die Energiefunktion).

In diesem Beispiel wird die Energiefunktion einer Tensegrity-Struktur grafisch dargestellt. Es wird Topologie A verwendet, mit den in Abbildung A.1 angegebenen Bezeichnungen und Segmentparametern. Zur besseren Illustration der Energiefunktion wird die Tensegrity-Struktur auf den Freiheitsgrad $\delta = 2$ eingeschränkt. Dafür werden die Segmente 2 und 3 in ihrem Schwerpunkt mit jeweils einem Festlager gelagert, siehe Abbildung 2.14. Damit sind die beiden Freiheiten der Struktur die Drehung von Segment 2 und 3 um den jeweiligen Schwerpunkt mit den Winkeln φ_2 und φ_3 .

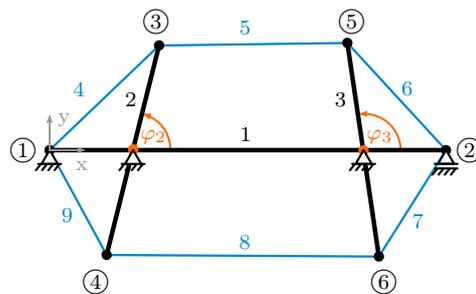
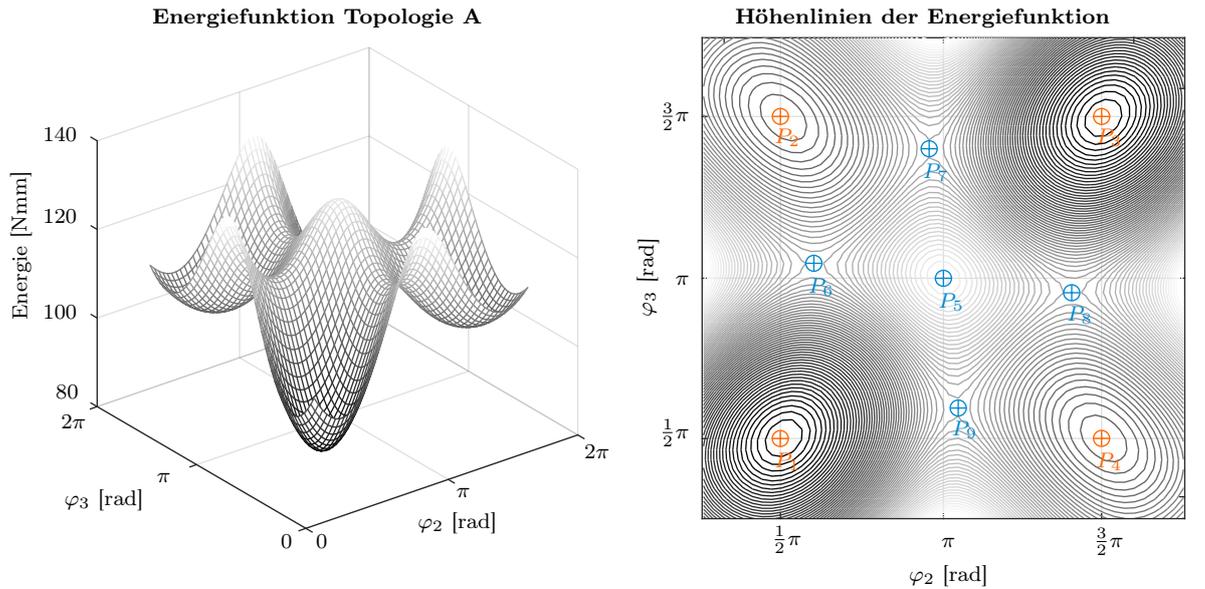
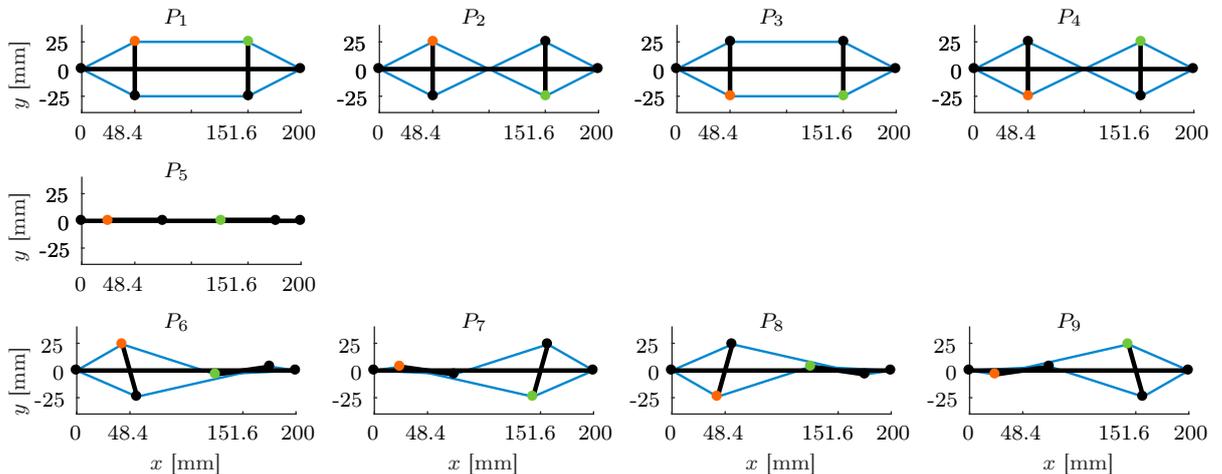


Abbildung 2.14: Topologie A mit Bezeichnungen und verwendeten Parametern.

In Abbildung 2.15(a) sind die Höhenlinien und das Gebirge der Energiefunktion dargestellt. An den Positionen $(\varphi_2, \varphi_3) = (\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$, $(\varphi_2, \varphi_3) = (\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi)$, $(\varphi_2, \varphi_3) = (\frac{3}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$, $(\varphi_2, \varphi_3) = (\frac{3}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi)$ liegt in diesem Beispiel entsprechend der gewählten Segmentparameter und Lagerung jeweils eine stabile Gleichgewichtskonfiguration vor.³ Diese sind in Abbildung 2.15(a) im Gebirge die lokalen Minimalstellen. Zwischen diesen stabilen Gleichgewichtskonfigurationen befinden sich fünf instabile Gleichgewichtskonfiguration - im lokalen Maximum $(\varphi_2, \varphi_3) = (\pi, \pi)$, und an den Sattelpunkten (blaue Punkte rechts in Abbildung 2.15(a)). In Abbildung 2.15(b) ist die Tensegrity-Struktur in den Gleichgewichtskonfigurationen dargestellt.



(a) Links: Energiefunktion, Rechts: Höhenlinien der Energiefunktion mit Minima (orange), Maxima (blau) und Sattelpunkten (blau).



(b) Erste Zeile: Stabile Gleichgewichtskonfigurationen als Minima der Energiefunktion. Zweite und Dritte Zeile: Instabile Gleichgewichtskonfiguration als Maximum und Sattelpunkt der Energiefunktion.

Abbildung 2.15: Beispiel für die Energiefunktion.

³Die Lagerkräfte und die Lagerstellen wurden so gewählt, dass in den Gleichgewichtskonfigurationen die Lagerkräfte verschwinden. Somit ist die betrachtete Struktur eine Tensegrity-Struktur.

2.2.2 FE-Formfindungsalgorithmus

Der FE-Formfindungsalgorithmus ist ein Algorithmus für die Formfindung (siehe Definition 2.5) bei Tensegrity-Strukturen. Er basiert auf dem Algorithmus, der in [Zha14] vorgestellt wurde und verwendet die statische Finite-Elemente-Methode. Der FE-Formfindungsalgorithmus wurde in [Böh16a; Böh17c] eingeführt und beschrieben. In diesem Abschnitt werden nur die wesentlichen Schritte des Algorithmus aufgeführt.

FE-Formfindungsalgorithmus zur Bestimmung einer Gleichgewichtskonfiguration

Es sei eine Tensegrity-Struktur mit n_s Segmenten und n_k Knoten gegeben. Die Topologie und alle Segmentparameter (Anfangslängen und Steifigkeiten) der Tensegrity-Struktur seien gegeben. Alle Segmente der Tensegrity-Struktur werden als masselose lineare Federn angenommen (siehe Annahme 2.8 B)). Es wird angenommen, dass keine äußeren Lasten auf die Tensegrity-Struktur wirken. Des Weiteren sei eine Initialkonfiguration, welche durch die Knotenkoordinaten der Tensegrity-Struktur definiert wird, gegeben. Die charakteristische nichtlineare Gleichung einer Tensegrity-Struktur ist

$$F(u) = K(u)u, \quad (2.7)$$

wobei $F \in \mathbb{R}^{\eta n_k}$ die resultierenden Kräfte an den Knoten (Lastvektor), $u \in \mathbb{R}^{\eta n_k}$ die Verschiebungen der Knoten (Verschiebungsvektor), und $K \in \mathbb{R}^{\eta n_k \times \eta n_k}$ die Tangentensteifigkeitsmatrix (siehe [Gue06]) seien. Dabei gelte $\eta = 2$ bei planaren und $\eta = 3$ bei räumlichen Tensegrity-Strukturen. Die geometrischen Randbedingungen werden so gewählt, dass keine Starrkörperbewegungen in der Ebene oder im Raum möglich sind. Dafür werden die entsprechenden Knotenverschiebungen $u_i \in \mathbb{R}$ auf null gesetzt. Die Gleichung (2.7) wird mit Hilfe eines inkrementell-iterativen Algorithmus gelöst. Dabei werden die Knotenverschiebungen zwischen der Initialkonfiguration und einer Gleichgewichtskonfiguration bestimmt.

Ein Teil des inkrementell-iterativen Algorithmus ist die inkrementelle Vergrößerung der Vorspannung in der Tensegrity-Struktur. In der Initialkonfiguration liegt zunächst keine Vorspannung vor, die Anfangslängen der Segmente werden entsprechend den Längen in der Initialkonfiguration gesetzt. Schrittweise wird die Vorspannung in der Struktur erhöht, indem die Anfangslängen der Segmente schrittweise an die gegebenen Anfangslängen angepasst werden. Diese Schritte werden im Folgenden auch LASTINKREMENTE genannt. In jeder Iteration werden die Tangentensteifigkeitsmatrix und der Lastvektor berechnet. Im Anschluss wird das Gleichungssystem (2.7) nach dem unbekanntem Verschiebungsvektor u aufgelöst und der Vektor der Knotenverschiebungen wird aktualisiert. Für jedes Lastinkrement werden so viele Iterationen durchgeführt bis ein gewisses Konvergenzkriterium (siehe [Böh17c]) erfüllt ist. Zusätzlich wird eine obere Schranke für die Anzahl maximal durchführbarer Iterationen angegeben. Dadurch können lange Rechenzeiten bei nicht konvergenten Lösungen vermieden werden.

Sofern der FE-Formfindungsalgorithmus konvergiert, kann mit Hilfe der Eigenwerte der Tangentensteifigkeitsmatrix bestimmt werden, ob die berechnete Gleichgewichtskonfiguration stabil oder instabil ist (siehe [Zha15]). Wenn der kleinste Eigenwert größer als Null ist (das heißt, die Tangentensteifigkeitsmatrix positiv definit ist), dann ist die Gleichgewichtskonfiguration stabil, andernfalls instabil.

Im folgenden Beispiel 2.16 werden für eine Tensegrity-Struktur mit verschiedenen Initialkonfigurationen und verschiedenen Anzahlen an Lastinkrementen und Iterationen die Ergebnisse des FE-Formfindungsalgorithmus dargestellt.

Beispiel 2.16 (Ergebnisse des FE-Formfindungsalgorithmus).

In diesem Beispiel wird Topologie C verwendet. Die Topologie, die Bezeichnungen, die Lagerung und die verwendeten Parameter sind in Abbildung A.3 angegeben. Die Gleichgewichtskonfigurationen, die

mit diesen Segmentparametern erreicht werden können, befinden sich ebenfalls in Abbildung A.3. In der folgenden Abbildung 2.16 sind verschiedene Initialkonfigurationen und die Ergebnisse des FE-Formfindungsalgorithmus mit unterschiedlichen Anzahlen an Lastinkrementen und Iterationen dargestellt. Über den Tensegrity-Strukturen stehen jeweils zwei Zahlen. Die erste Zahl gibt an, ob der FE-Formfindungsalgorithmus eines der Konvergenzkriterien erreicht hat (1 - konvergiert, 0 - nicht konvergiert). Die zweite Zahl gibt den kleinsten Eigenwert der Tangentensteifigkeitsmatrix nach dem FE-Formfindungsalgorithmus an. Ist dieser Wert größer als Null, dann ist die Gleichgewichtskonfiguration statisch stabil, ansonsten instabil.

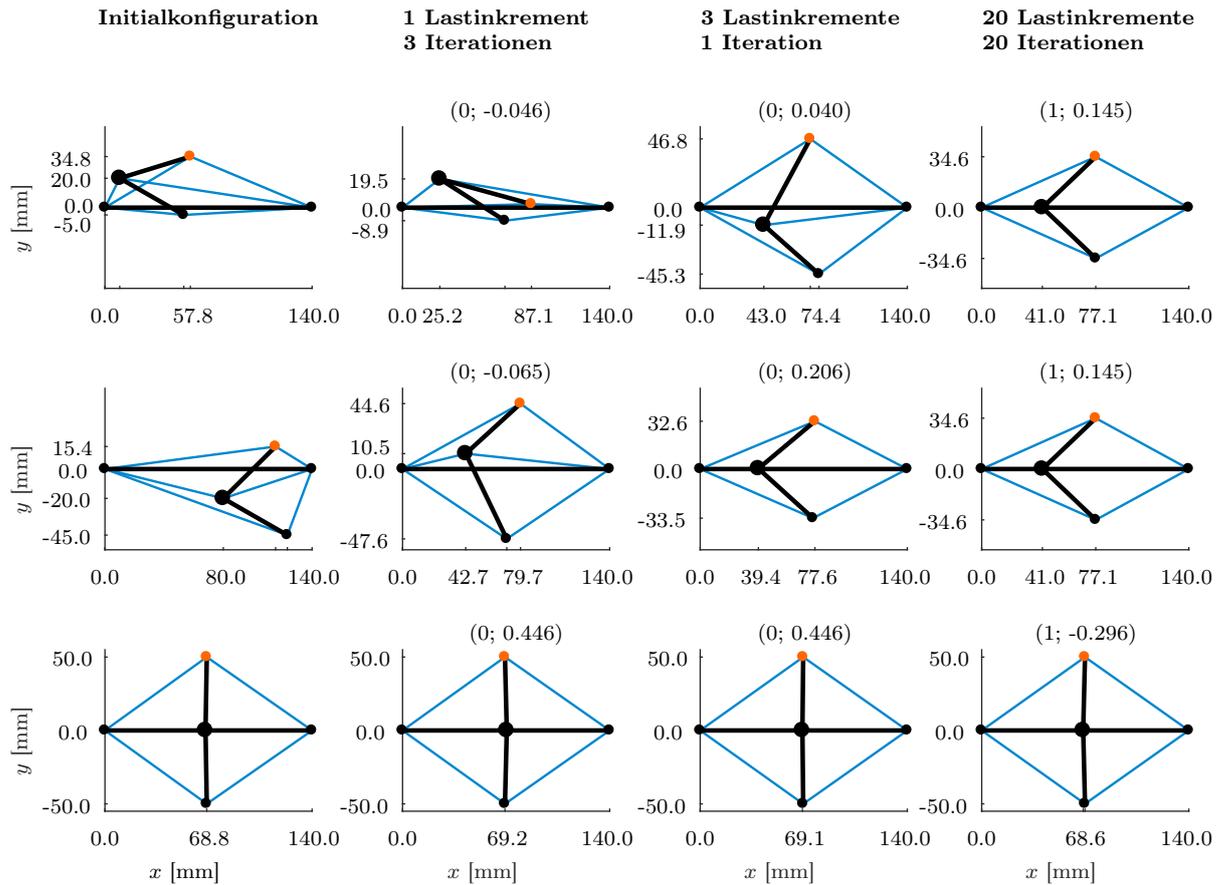


Abbildung 2.16: Ergebnisse des FE-Formfindungsalgorithmus bei verschiedenen Initialkonfigurationen und Parametern. Klammer: erste Zahl - Konvergenz: 1 - konvergiert, 0 - nicht konvergiert, zweite Zahl - kleinster Eigenwert der Tangentensteifigkeitsmatrix: positiv: stabil, negativ: instabil.

Die Ergebnisse in Abbildung 2.16 zeigen, dass die Anzahl der Lastinkremente und Iterationen eine Rolle spielt. Wenn diese Werte zu klein gewählt werden, dann konvergiert der Algorithmus nicht und es wird keine Gleichgewichtskonfiguration bestimmt. Die ersten beiden Zeilen in der Abbildung zeigen, dass von verschiedenen Initialkonfigurationen ausgehend die gleiche Gleichgewichtskonfiguration ermittelt werden kann. Die letzte Zeile in der Abbildung zeigt, dass unterschiedliche Initialkonfigurationen aber auch zu unterschiedlichen Gleichgewichtskonfigurationen führen können. Die Eigenwerte in der letzten Spalte in Abbildung 2.16 können verwendet werden, um die Stabilität der Gleichgewichtskonfiguration zu bestimmen, da der Algorithmus hier konvergiert ist. Die Gleichgewichtskonfiguration, die in der ersten und zweiten Zeile in Abbildung 2.16 bestimmt wurde, ist (statisch) stabil, die aus der dritten Zeile ist instabil. ┘

FE-Formfindungsalgorithmus bei multistabilen Tensegrity-Strukturen

Beispiel 2.16 zeigt, dass bei einer multistabilen Tensegrity-Struktur der FE-Formfindungsalgorithmus mit unterschiedlichen Initialkonfigurationen zu unterschiedlichen Gleichgewichtskonfigurationen führen kann. Auf dieser Beobachtung basiert der in [Böh16a; Böh17c] vorgestellte Algorithmus zur Bestimmung von mehreren Gleichgewichtskonfigurationen der Tensegrity-Struktur.

Ziel des Algorithmus ist, möglichst viele stabile und instabile Gleichgewichtskonfigurationen einer Tensegrity-Struktur zu finden. Für den Algorithmus wird die Initialkonfiguration systematisch innerhalb vorgegebener Grenzen variiert und es wird jeweils der FE-Formfindungsalgorithmus durchgeführt. Unterschiedliche Gleichgewichtskonfigurationen werden in einer Ergebnis-Liste abgespeichert. Dieser Algorithmus garantiert nicht, dass alle existierenden Gleichgewichtskonfigurationen gefunden werden. Je mehr verschiedene Initialkonfigurationen verwendet werden (kleinere Schrittweite bei der Variation), desto größer ist die Wahrscheinlichkeit alle Lösungen zu finden.

In [Böh17c] wird als Beispiel unter anderem Topologie A (siehe Abbildung A.1), mit anderen Segmentparametern, verwendet. Es wird die Position von Segment 2 variiert. Dies entspricht einer Variation der Segmentkoordinaten $(x_2, y_2, \varphi_2) \in \mathbb{R}^3$. Der FE-Formfindungsalgorithmus wird mit 125 000 verschiedenen Initialkonfigurationen ausgeführt. Dabei werden zwei stabile Gleichgewichtskonfigurationen und fünf instabile Gleichgewichtskonfigurationen gefunden.⁴ Für die 125 000 Anwendungen des FE-Formfindungsalgorithmus werden circa zwei Stunden benötigt (mit der gleichen Rechentechnik wie in Abschnitt 3.4.1).

2.2.3 Evolutionäre Algorithmen

In diesem Abschnitt werden evolutionäre Algorithmen, basierend auf [Deb01], vorgestellt. Evolutionäre Algorithmen sind Optimierungsverfahren, welche von einer Zielfunktion das globale Maximum bestimmen. Dabei werden Prinzipien der biologischen Evolution ausgenutzt, um das globale Optimum zu finden.

Das Optimierungsproblem, welches in diesem und im folgenden Abschnitt untersucht wird, sei durch

$$\max_{\chi \in \mathcal{D}} f(\chi), \tag{2.8}$$

mit der Zielfunktion $f: \mathbb{R}^\nu \rightarrow \mathbb{R}$, $\nu \in \mathbb{N}$ und der beschränkten, abgeschlossenen Box $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^\nu$ als Definitionsbereich gegeben. Dabei wird das globale Maximum von (2.8) gesucht.

Bei evolutionären Algorithmen wird, im Gegensatz zu klassischen Optimierungsverfahren, eine endliche Menge an Lösungskandidaten, die POPULATION betrachtet. Außerdem werden bei der Beschreibung dieser Algorithmen evolutionstheoretische Begriffe verwendet. Die am häufigsten vorkommenden Begriffe sind in Tabelle 2.1 aufgelistet und erklärt. Dabei wird einerseits beschrieben, was der Begriff in der Evolutionstheorie bedeutet und andererseits, wie dieser Begriff bei den evolutionären Algorithmen angewendet wird. In Beispiel 2.18 werden die Begriffe anhand eines konkreten Optimierungsproblems erläutert.

Bemerkung 2.17 (Vereinbarung zu Begriffen).

Die Begriffe GENOTYP und CHROMOSOM werden im Folgenden synonym verwendet.

Mit dem Begriff INDIVIDUUM werden sowohl der Phänotyp als auch der Genotyp des Individuums bezeichnet. Wenn eine Unterscheidung notwendig ist, wird explizit angegeben, ob der Phänotyp oder der Genotyp verwendet wird.

⁴Gleichgewichtskonfiguration I und III beziehungsweise Gleichgewichtskonfiguration II und IV werden in dieser Untersuchung als *gleich* aufgefasst, siehe auch Beispiel 2.4.

Begriff	Natur	Algorithmus
Individuum	ein einzelnes Lebewesen	ein Lösungskandidat des Optimierungsproblems
Population	Gruppe von Individuen, die eine Fortpflanzungsgemeinschaft bilden und sich im gleichen Gebiet aufhalten	eine endliche Menge von Lösungskandidaten ⁵
Chromosom	enthält die Eigenschaften eines Individuums	bestimmt die Lage des Lösungskandidaten im Definitionsbereich, codiert
Gen	Teil eines Chromosoms, legt eine Eigenschaft fest	bestimmt den codierten Wert einer Variablen des Lösungskandidaten
Genotyp	Erscheinungsbild des Chromosoms	Codierter Lösungskandidat (z.B. Binärstring)
Phänotyp	Erscheinungsbild des Lebewesens	Decodierter Lösungskandidat (Variablenvektor)
Fitness(wert)	Angepasstheit des Lebewesens an Umwelt	Zielfunktionswert des Lösungskandidaten
Fitnessfunktion	Maß für die Bestimmung der Fitness	Zielfunktion des Optimierungsproblems
Selektion	Auswahlprozess innerhalb der Population abhängig von der Fitness der Individuen	Auswahl spezieller Lösungskandidaten abhängig vom Zielfunktionswert
Rekombination	Fortpflanzung mit Austausch der Gene	Verknüpfung von Lösungskandidaten um neue Lösungskandidaten zu erhalten
Mutation	Zufällige Veränderungen im Chromosom	Zufällige Veränderung der Lösungskandidaten
Generation	Individuen einer Population, die im gleichen Zeitraum entstanden sind	eine Iteration im Algorithmus, bestehend aus Selektion, Rekombination und Mutation

Tabelle 2.1: Verwendung der evolutionstheoretischen Begriffe bei Optimierungsalgorithmen, [Deb01; Ger04, Kapitel 4.1; Kut06; Wei07].

Beispiel 2.18 (Individuum, Genotyp, Gen, Phänotyp, Fitnesswert).

Dieses Beispiel zeigt die Bedeutung der Begriffe INDIVIDUUM, CHROMOSOM, GEN, GENOTYP, PHÄNOTYP anhand des diskreten Optimierungsproblems:

$$\max_{(x,y) \in (\mathbb{Z} \cap [0,7])^2} 2 - y - (x - 5)^2. \quad (2.9)$$

Ein Individuum im Phänotyp ist ein Vektor mit je einem Wert für x und y , beispielsweise sind $(0, 0)^\top$ und $(1, 2)^\top$ zwei Individuen, die in ihrem Phänotyp vorliegen.

Jede der Optimierungsvariablen hat den Definitionsbereich $\mathbb{Z} \cap [0, 7]$. Soll ein Individuum mit einem Binärstring codiert werden, um den Genotyp zu erhalten, so kann dies beispielsweise auf die folgende Art und Weise umgewandelt werden. Um eine natürliche Zahl zwischen 0 und 7 binär dazustellen, werden 3 Bits benötigt. Die Binärstrings von beiden Variablen werden ohne Trennzeichen aneinander gefügt. In der folgenden Tabelle 2.2 sind verschiedene Individuen in ihrem Genotyp und ihrem Phänotyp angegeben,

⁵Ein Lösungskandidat kann innerhalb einer Population auch mehrmals vorkommen. Deshalb ist es genauer bezeichnet eine Multimenge.

sowie die Gene der Individuen und deren Fitnesswert (der Wert der Zielfunktion dieses Lösungskandidaten).

Genotyp	Gen 1	Gen 2	Phänotyp	Fitnesswert
000 000	000	000	(0, 0)	-23
001 010	001	010	(1, 2)	-16
101 010	101	010	(5, 2)	0
111 111	111	111	(7, 7)	-9

Tabelle 2.2: Umrechnung zwischen Genotyp - Gen - Phänotyp - Fitnesswert.

Das Individuum mit dem Genotyp 101 010 und dem Phänotyp (5, 2) ist die Lösung des Optimierungsproblems (2.9). J

Im Gegensatz zur natürlichen Evolution, welche kein Ende hat, sollten evolutionäre Algorithmen in endlicher Zeit eine optimale Lösung bestimmen. Als Abbruchkriterium kann hierfür eine gewisse Anzahl an Generationen vorgegeben werden, die durchgeführt werden soll. Sofern Optimalwert bekannt ist, kann der Algorithmus abgebrochen werden, wenn ein oder mehrere Individuen einen Fitnesswert nahe des Optimalwertes haben.

Evolutionäre Algorithmen können in vier Klassen aufgeteilt werden:

- Genetische Algorithmen,
- Evolutionsstrategien,
- Evolutionäre Programmierung und
- Genetische Programmierung.

Die Grenzen zwischen diesen Klassen sind nicht streng und verschiedene Autoren beschreiben unterschiedliche Zuordnungen zu den einzelnen Klassen. Im Folgenden wird ein Überblick gegeben, welche Algorithmen zu den einzelnen Klassen gehören. Dabei wird hauptsächlich die Unterteilung aus [Deb01, Kap. 4] angewendet. Es werden aber auch Unterschiede zu anderer Literatur ([Bae96; Ger04; Par01; Wei07]) aufgezeigt.

Genetische Algorithmen

Genetische Algorithmen sind die bekannteste und am weitesten verbreitete Klasse von evolutionären Algorithmen. Bei der Beschreibung und der Abgrenzung von den Evolutionsstrategien und der evolutionären Programmierung unterscheiden sich die Quellen [Bae96; Deb01; Ger04; Par01] und [Wei07] stark. Zum ersten Mal entworfen wurden die genetischen Algorithmen von Holland [Hol92]. Holland verwendet eine binäre Codierung der Individuen. In [Deb01; Par01] und [Wei07] ist auch eine reelle Repräsentation der Individuen erlaubt, wohingegen [Bae96] und [Ger04] hier eine strenge Grenze ziehen.

Ein genetischer Algorithmus besteht im Allgemeinen aus den Schritten Selektion, Rekombination und Mutation. Zu Beginn des Algorithmus werden zufällige Individuen generiert, diese bilden die Startpopulation. Der prinzipielle Ablauf eines genetischen Algorithmus ist in Abbildung 2.17 dargestellt.

Die Mutation hat nur eine geringe Bedeutung bei den genetischen Algorithmen. Sie wird nur bei einem kleinen Teil der Population durchgeführt.

In Abschnitt 2.2.4 werden die genetischen Algorithmen genauer betrachtet.

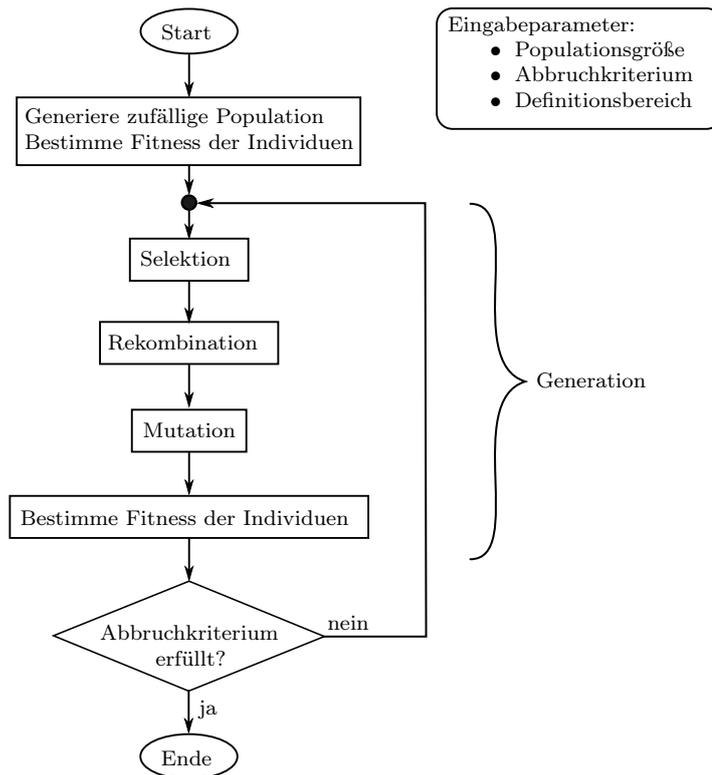


Abbildung 2.17: Ablaufplan des genetischen Algorithmus.

Evolutionstrategien

Die Evolutionstrategien wurden in Deutschland entwickelt, hauptsächlich von I. Rechenberg und H.-P. Schwefel, in den 1960er Jahren. Erste Publikationen dazu sind [Rec73] und [Sch75]. In den Anfängen wurde in den Evolutionstrategien ein Individuum verwendet, welches ein Kind durch Mutation erzeugt. Sofern das Kind besser ist, ersetzt es das Eltern-Individuum. Später wurden die Evolutionstrategien auf mehrere Individuen ausgeweitet, wobei jedes Individuum auch mehrere Kinder erzeugen kann. Auch wenn die Evolutionstrategien unabhängig von den genetischen Algorithmen entwickelt wurden, sind sie sich prinzipiell ähnlich. Evolutionstrategien arbeiten immer mit reellen Parametern, es findet keine Codierung statt. Außerdem haben Evolutionstrategien nur Selektion und Mutation, aber keine Rekombination.

Evolutionäre Programmierung

Evolutionäre Programmierung ist ein evolutionärer Algorithmus, der auf Mutation basiert. Das Prinzip wurde von L. Fogel 1960 für diskrete Suchräume entwickelt, [Fog62; Fog66]. In den 1980er Jahren wurde die evolutionäre Programmierung von seinem Sohn D. Fogel [Fog88] weiterentwickelt und an reelle Optimierungsprobleme angepasst. Die Weiterentwicklung ist ähnlich zu den Evolutionstrategien, entstand aber unabhängig davon. Bei der evolutionären Programmierung gibt es keine Rekombination und die Individuen werden durch reellwertige Vektoren (Chromosomen) repräsentiert. Die evolutionäre Programmierung orientiert sich wenig an der biologischen Evolutionstheorie, denn die Evolution wird in diesem Fall vom phänotypischen Standpunkt aus betrachtet. Dabei wird angenommen, dass die Anpassung der Individuen an die Umwelt nicht vorrangig von einer Veränderung der Chromosomen ausgeht. Da die evolutionäre Programmierung zunächst nur für diskrete Suchräume entwickelt wurde und sich wenig an der biologischen Evolution orientiert, hat diese Klasse von evolutionären Algorithmen in der Forschung und Anwendung keine große Bedeutung.

Genetische Programmierung

Die genetische Programmierung unterscheidet sich grundlegend von den anderen drei Klassen der evolutionären Algorithmen. Die Chromosomen haben hier eine variable Länge und unterscheiden sich somit von den bisher betrachteten. Die Chromosomen können als Programme interpretiert werden. Damit kann die genetische Programmierung genutzt werden, um Programme zu erzeugen, deren Ein- und Ausgabeparameter nach gewissen Vorgaben optimiert sind. Die ersten Veröffentlichungen zur genetischen Programmierung stammen von Koza, [Koz92].

2.2.4 Genetische Algorithmen

In diesem Abschnitt werden die genetischen Algorithmen detaillierter eingeführt. Dabei wird hauptsächlich die Betrachtungsweise von [Deb01] verwendet, es wird aber auch auf Unterschiede und andere Aspekte in [Ger04; Par01; Wei07] eingegangen. Ein Programmablaufplan eines genetischen Algorithmus mit den wichtigsten Schritten befindet sich in Abbildung 2.17.

Binäre und reelle Repräsentation der Individuen

In der Literatur gibt es zwei Möglichkeiten für die Repräsentation der Individuen im Genotyp: die reelle und die binäre Repräsentation. Bei der reellen Repräsentation stimmen der Genotyp und der Phänotyp des Individuums überein und entsprechen einem Vektor mit den Optimierungsvariablen. Auf die binäre Codierung der Individuen wird detaillierter eingegangen.

Das Optimierungsproblem habe ν Optimierungsvariablen. Das heißt, das Chromosom eines Individuums besteht aus ν Genen. Jedes Gen wird in einen Binärstring umgewandelt und die Binärstrings der einzelnen Gene werden zu einem langen Binärstring zusammengefügt. Für die Umwandlung einer Variablen in einen Binärstring muss festgelegt werden, durch wie viele Bits diese Variable repräsentiert werden soll. Es sei n_{bi} , $i = 1, \dots, \nu$ die Anzahl der Bits, aus denen das i -te Gen besteht. Der Definitionsbereich $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^\nu$ des Optimierungsproblems (2.8) ist eine abgeschlossene und beschränkte Box. Somit hat jede Optimierungsvariable $\chi_{(i)} \in \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall als Definitionsbereich: $\chi_{(i)} \in [\underline{\chi}_{(i)}, \bar{\chi}_{(i)}]$. Wenn ein Gen aus n_{bi} Bits besteht und das Intervall $[\underline{\chi}_{(i)}, \bar{\chi}_{(i)}]$ abdeckt, gibt es $2^{n_{bi}}$ Zahlen, welche das Intervall $[\underline{\chi}_{(i)}, \bar{\chi}_{(i)}]$ repräsentieren.

Die Umrechnung von $\chi_{(i)}$ in ihrem Definitionsbereich in das binäre Gen $\chi_{b(i)}$ (Codierung) erfolgt mit der Gleichung

$$\chi_{b(i)} = \text{bin} \left(\left\lceil \frac{(\chi_{(i)} - \underline{\chi}_{(i)}) (2^{n_{bi}} - 1)}{\bar{\chi}_{(i)} - \underline{\chi}_{(i)}} \right\rceil \right), \quad (2.10)$$

wobei $[a]$ die nächste ganze Zahl von $a \in \mathbb{R}$ sei und $\text{bin}(b)$ die Umrechnung einer nicht negativen ganzen Zahl $b \in \mathbb{Z}$ in eine Binärzahl bezeichnet. Die Umrechnung von der binären Variable $\chi_{b(i)}$ zu $\chi_{(i)}$ (Decodierung des Gens) erfolgt mit der folgenden Gleichung

$$\chi_{(i)} = \underline{\chi}_{(i)} + \frac{\bar{\chi}_{(i)} - \underline{\chi}_{(i)}}{2^{n_{bi}} - 1} \cdot \text{dez}(\chi_{b(i)}),$$

wobei $\text{dez}(\chi_{b(i)})$ der Dezimalwert der binären Zahl $\chi_{b(i)}$ sei.

Das folgende Beispiel 2.19 zeigt verschiedene Besonderheiten der binären Repräsentation.

Beispiel 2.19 (Binäre Repräsentation der Individuen).

Gegeben sei das Optimierungsproblem (2.8).

- a) Der Freiheitsgrad des Optimierungsproblems sei $\nu = 1$. Der Definitionsbereich für die Optimierungsvariable sei $[0, 31]$. Weiterhin sei die Anzahl der Bits des ersten Gens $n_{b1} := 5$. Dann gilt, siehe Gleichung (2.10), $\chi_{b(1)} = \text{bin}(\lceil \chi_{(1)} \rceil)$. Es ist keine Umrechnung der Größen notwendig, sondern nur eine Umwandlung in das Binärsystem. Alle ganzen Zahlen im Intervall $[0, 31]$ können exakt dargestellt werden, reelle Zahlen werden hingegen zur nächsten ganzen Zahl gerundet. Beispielsweise ist der Binärstring von 9.5 und 10.0 identisch und lautet: 01010.
- b) Es gelten die gleichen Voraussetzungen wie in a). Allerdings wird $n_{b1} := 6$ gewählt. Mit der Umrechnung in (2.10) gilt:

$$\chi_{b(1)} = \text{bin}(\lceil \frac{63}{31} \cdot \chi_{(1)} \rceil).$$

Somit können bei Erhöhung der Länge des Binärstrings um Eins exakt doppelt so viele Werte dargestellt werden, der Abstand zwischen je zwei exakt darstellbaren Zahlen wird ungefähr halbiert. Tabelle 2.3 gibt Beispiele für die Umrechnung an. Im Gegensatz zu Fall a) mit $n_{b1} := 5$, haben die beiden Werte 9.5 und 10.0 unterschiedliche Binärstrings.

$\chi_{(1)}$	$\text{dez}(\chi_{b(1)})$	Binärstring $\chi_{b(1)}$
0.0	0	000000
9.0	$\lceil 18 \rceil = 18$	010010
9.5	$\lceil 19 \rceil = 19$	010011
10.0	$\lceil 20 \rceil = 20$	010100
31.0	63	111111

Tabelle 2.3: Berechnung der reellen Werte der Variable aus dem Binärstring.

Allgemein gilt, je größer die Zahl n_{bi} gewählt wird, desto höhere Genauigkeiten sind möglich.

- c) Mit Hilfe der vorgestellten Umrechnung zwischen einer Variablen und ihrer Binärdarstellung sind negative Werte für die Variable realisierbar. Der Freiheitsgrad des Optimierungsproblems sei $\nu = 1$. Der Definitionsbereich für die Optimierungsvariable sei $[-10, 21]$. Weiterhin sei $n_{b1} := 5$. Mit der Umrechnung in (2.10) gilt:

$$\chi_{b(1)} = \text{bin}(\lceil \chi_{(1)} + 10 \rceil).$$

Damit können alle ganzen Zahlen im Intervall $[-10, 21]$ exakt dargestellt werden.

- d) Da für jede Variable ein anderer Wert für n_{bi} festgelegt werden kann, können verschiedene Gene mit unterschiedlichen Genauigkeiten ausgestattet werden, beziehungsweise unterschiedlich große Definitionsbereiche berücksichtigt werden. Der Freiheitsgrad des Optimierungsproblem sei $\nu = 2$. Der Definitionsbereich für die Optimierungsvariablen sei $[0, 31]$ und $[0, 63]$. Zunächst sei $n_{b1} := 5$ und $n_{b2} := 5$. Mit der Umrechnung in (2.10) gilt:

$$\chi_{b(1)} = \text{bin}(\lceil \chi_{(1)} \rceil) \quad \text{und} \quad \chi_{b(2)} = \text{bin}(\lceil 0.492 \cdot \chi_{(2)} \rceil).$$

Mit dieser Umrechnung kann von der ersten Variable jede ganze Zahl im Definitionsbereich $[0, 31]$ exakt dargestellt werden. Von der zweiten Variable haben je zwei ganze Zahlen im Definitionsbereich $[0, 63]$ den gleichen Binärstring. Es gilt beispielsweise:

$$\begin{array}{lll} \chi_{(2)} = 10 & \text{dez}(\chi_{b(2)}) = [4.92] = 5 & \chi_{b(2)} = 00101 \\ \chi_{(2)} = 11 & \text{dez}(\chi_{b(2)}) = [5.41] = 5 & \chi_{b(2)} = 00101. \end{array}$$

Nun sei $n_{b2} := 6$, dann gilt mit (2.10)

$$\chi_{b(1)} = \text{bin}([\chi_{(1)}]) \quad \text{und} \quad \chi_{b(2)} = \text{bin}([\chi_{(2)}]).$$

Somit können bei beiden Variablen alle ganzen Zahlen im jeweiligen Definitionsbereich exakt dargestellt werden. Es gilt beispielsweise:

$$\begin{array}{lll} \chi_{(2)} = 10 & \text{dez}(\chi_{b(2)}) = [10] = 10 & \chi_{b(2)} = 001010 \\ \chi_{(2)} = 11 & \text{dez}(\chi_{b(2)}) = [11] = 11 & \chi_{b(2)} = 001011. \end{array}$$

Deshalb ist bei der Wahl der Länge der Binärstrings die Größe des Definitionsbereiches zu beachten, um bestimmte Genauigkeiten in den Optimierungsvariablen zu realisieren.

┘

Beispiel 2.19 illustriert, dass mit binär repräsentierten Chromosomen prinzipiell alles möglich ist, was mit reellen Chromosomen auch möglich ist. Eine zusätzliche Transformation der Werte und die Umrechnung zwischen Binär- und Dezimaldarstellung sind notwendig. Um eine größere Genauigkeit zu erhalten, muss der Binärstring für das jeweilige Gen verlängert werden. Durch die Verwendung von langen Binärstrings erhöhen sich die Rechenzeiten der Umrechnung. Die Binärdarstellung der Chromosomen passt sich besser an die Chromosomen bei der natürlichen Evolution an. Die Vorteile der Binärdarstellung liegen in den möglichen Rekombinations- und Mutationsverfahren (siehe folgende Abschnitte). Diese haben einen geringeren Rechenaufwand, als ähnliche Verfahren bei reell repräsentierten Individuen. Außerdem liegen Individuen, deren Chromosomen einen Binärstring mit der geforderten Länge haben, immer im Definitionsbereich des Optimierungsproblems. Dadurch relativiert sich der höhere Rechenaufwand.

Bei der binären Repräsentation treten sogenannte *Hamming-Klippen* auf. Eine Hamming-Klippe liegt vor, wenn zwei im Phänotyp benachbarte Werte im Genotyp einen Hamming-Abstand⁶ größer als Eins haben. Beispielsweise haben die Zeichenketten 10000 und 01111 einen Hamming-Abstand von 5, obwohl ihr Phänotyp, mit den Werten 16 und 15, benachbart ist. Um diese Hamming-Klippen zu umgehen, kann anstatt der bisher beschriebenen Codierung die GRAY-CODIERUNG verwendet werden [Wei07, Kapitel 3.1.5]. Bei dieser Codierung haben benachbarte Werte einen Hamming-Abstand von 1. Allerdings stellt auch die Gray-Codierung nicht sicher, dass eine kleine Veränderung im Genotyp einer kleinen Veränderung im Phänotyp entspricht. So ist beispielsweise der Gray-Code von 15 gleich 01000 und der von Null 00000, die 15 und die Null haben demnach ebenfalls einen Hamming-Abstand von 1. Aus diesem Grund wird der Gray-Code in dieser Arbeit nicht weiter verwendet.

⁶Der Hamming-Abstand gibt die Anzahl unterschiedlicher Bits in zwei binären Zeichenketten an.

Selektion

Die Selektion ist ein Auswahlverfahren von Individuen aus der Population. In der natürlichen Evolutionstheorie überleben nur die am besten angepassten Individuen und nur (hauptsächlich) diese können Nachkommen zeugen. Dieses Prinzip wird auch bei den genetischen Algorithmen angewendet. Für die Selektion wird der Fitnesswert betrachtet. Die Selektion ist unabhängig von der Art der Repräsentation der Individuen, sodass die binäre und die reelle Repräsentation nicht unterschieden werden. In der Literatur gibt es viele verschiedene Selektionsverfahren, von denen drei hier vorgestellt werden.

Bei der **TOURNAMENT-SELEKTION** werden je zwei Individuen bezüglich ihrer Fitnesswerte miteinander verglichen. Das bessere Individuum wird in die neue Population kopiert, das schlechtere nicht. Jedes Individuum nimmt an genau zwei Duellen teil (weitere Szenarien sind denkbar). So hat die neue Population genauso viele Individuen wie die in der vorhergehenden Population. Das beste Individuum gewinnt beide Duelle und befindet sich deshalb zwei Mal in der neuen Population. Das schlechteste Individuum verliert beide Duelle und ist somit in der neuen Population nicht enthalten.

Ein weiteres Selektionsverfahren ist die **ROULETTERAD-SELEKTION** (oder auch **PROPORTIONATE-SELEKTION**). Bei diesem Verfahren wird jedem Individuum in Abhängigkeit seines Fitnesswertes eine Wahrscheinlichkeit, in der nächsten Population vorzukommen, zugeordnet. Im Anschluss werden Zufallszahlen generiert und entsprechend der Wahrscheinlichkeiten und Zufallszahlen werden Individuen in die neue Population kopiert. Die Rouletterad-Selektion führt dazu, dass in der neuen Population Individuen mit einem großen Fitnesswert wahrscheinlicher auftauchen als Individuen mit einem kleinen Fitnesswert. Es garantiert allerdings nicht, dass die besten Individuen übernommen werden. Dieser Nachteil wurde auch in [Ger04] aufgezeigt. Er wirkt sich besonders stark aus, wenn die Population nur aus wenigen Individuen besteht. Eine Möglichkeit, diesen Nachteil auszugleichen, ist die **STOCHASTIC-REMAINDER-ROULETTERAD-SELEKTION**.

Ein Verfahren, welches diesen Nachteil nicht hat, kommt ursprünglich von den Evolutionsstrategien, kann aber auch bei den genetischen Algorithmen angewendet werden. Es ist die sogenannte **PLUS-STRATEGIE**, [Ger04, Kapitel 7 und 7.1.1]. Hierbei wird nach dem Eliteprinzip ausgewählt. Es wird die gesamte Population kopiert. Dann werden mit der Kopie die Rekombination und die Mutation ausgeführt. Im Anschluss werden die beiden Populationen wieder vereinigt und aus dieser Vereinigung werden die besten Individuen für die Population in der nächsten Generation verwendet. Dabei bleibt auch hier die Populationsgröße über alle Generationen konstant. Es kann festgelegt werden, wie viele Individuen aus der Elternpopulation maximal in der neuen Population verwendet werden dürfen. Damit wird sichergestellt, dass der Evolutionsprozess nicht zum Erliegen kommt.

Rekombination

Bei der Rekombination werden aus Individuen der aktuellen Population neue Individuen gebildet. Dies ist der Fortpflanzung und der damit verbundenen Weitergabe von bestimmten Eigenschaften der natürlichen Evolution nachempfunden.

Die Rekombination wird auf die Population angewendet, welche durch die Selektion entstanden ist. In der Regel werden jeweils zwei Individuen verwendet, welche eine gewisse Anzahl (meist zwei) neuer Individuen generieren. Das Ziel der Rekombination ist, neue Individuen zu generieren, die bessere Eigenschaften haben, als ihre Eltern. Dabei sollen die Kinder die guten Eigenschaften der Eltern übernehmen und die schlechten eliminieren. Die Rekombination läuft in den Chromosomen des Individuums ab, also im Genotyp. Aus diesem Grund ist eine Unterscheidung der möglichen Verfahren bei reeller- und binärer Repräsentation der Individuen notwendig.

Zunächst wird der Fall der binären Repräsentation der Individuen betrachtet. Dieser Fall ist ähnlich zu der natürlichen Evolution. Bekannte Verfahren sind hierbei das 1-PUNKT-CROSSOVER und das N-PUNKT-CROSSOVER.

Das **1-PUNKT-CROSSOVER** findet zwischen je zwei Individuen statt. Es wird eine zufällige Stelle innerhalb des Chromosoms (Binärstrings) gewählt und alle Bits rechts von dieser Stelle werden zwischen beiden Individuen ausgetauscht. Dabei entstehen zwei Kinder, welche von beiden Elternindividuen Eigenschaften übernommen haben.

Das **N-PUNKT-CROSSOVER** ist bei $n = 1$ gleich dem 1-Punkt-Crossover. Hier werden $n \in \mathbb{N}$ Trennstellen gewählt und zwischen je zwei Trennstellen werden die Bits der Chromosomen beider Individuen vertauscht. Dadurch entstehen aus zwei Individuen zwei Kinder. Durch ein $n > 1$ wird eine größere Varianz zwischen den Kindern erreicht, als bei $n = 1$.

Im Beispiel 2.20 werden das Vorgehen bei beiden Verfahren und die Wirkungsweise veranschaulicht. Durch die Darstellung der Individuen als Binärstring liegen die Kind-Individuen garantiert im Definitionsbereich.

Beispiel 2.20 (1-Punkt-Crossover und 2-Punkt-Crossover).

In diesem Beispiel werden das 1-Punkt-Crossover und das 2-Punkt-Crossover anhand von zwei verschiedenen Elternpaaren (insgesamt vier Individuen) veranschaulicht. Der Definitionsbereich für die beiden Optimierungsvariablen sei jeweils $[0, 15]$ und als Längen für die Codierung werde $n_{b1} = n_{b2} := 4$ gewählt. In diesem Beispiel werden mit den vier Individuen das 1-Punkt-Crossover und das 2-Punkt-Crossover durchgeführt. In Tabelle 2.4 sind die Individuen im Phänotyp und im Genotyp, die Trennstelle und die daraus resultierenden Kinder (im Phänotyp und im Genotyp) dargestellt. Außerdem sind in Abbildung 2.18 die Individuen (schwarz) und deren Kinder (orange) dargestellt. ┘

	Eltern-Individuen		Trennstelle	Kind-Individuen	
	Phänotyp	Genotyp		Genotyp	Phänotyp
1-Punkt-Crossover	(5, 1)	0101 0001	0101 00 01	0101 0011	(5, 3)
	(6, 7)	0110 0111	0110 01 11	0110 0101	(6, 5)
	(2, 4)	0010 0100	0010 0100	0010 0110	(2, 6)
	(5, 6)	0101 0110	0101 0110	0101 0100	(5, 4)
2-Punkt-Crossover	(5, 1)	0101 0001	010 1 00 01	0100 0101	(4, 5)
	(6, 7)	0110 0111	011 0 01 11	0111 0011	(7, 3)
	(2, 4)	0010 0100	001 0 0100	0011 0100	(3, 4)
	(5, 6)	0101 0110	010 1 0110	0100 0110	(4, 6)

Tabelle 2.4: Vorgehen beim 1-Punkt-Crossover (oben) und 2-Punkt-Crossover (unten).

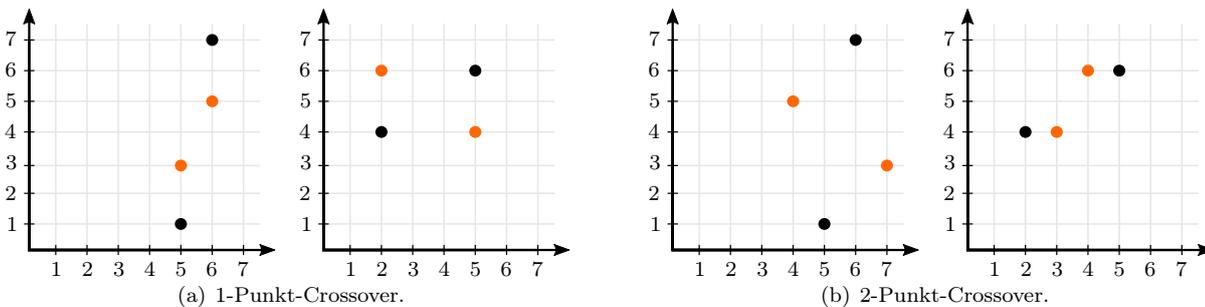


Abbildung 2.18: Eltern (schwarz) und Kinder (orange) beim 1- und 2-Punkt-Crossover.

Bei einer reellen Repräsentation der Individuen kann das n-Punkt-Crossover nicht durchgeführt werden. Weil lediglich Komponenten der Vektoren ausgetauscht werden können, ohne die Werte an sich zu verändern, kann vorkommen, dass Teile des Definitionsbereiches nicht durchsucht werden.

Bei der reellen Repräsentation der Individuen ist ein häufig verwendetes Verfahren für die Rekombination das **BLEND-CROSSOVER**. Das Blend-Crossover wird zwischen je zwei Individuen aus der Population durchgeführt. Für das Blend-Crossover wird ein Parameter $\alpha \in [0, 1]$ festgelegt. Die Schritte, die durchgeführt werden, um aus den beiden Individuen $\chi_1, \chi_2 \in \mathcal{D}$ zwei neue Individuen zu generieren, sind in Abbildung 2.19 dargestellt.

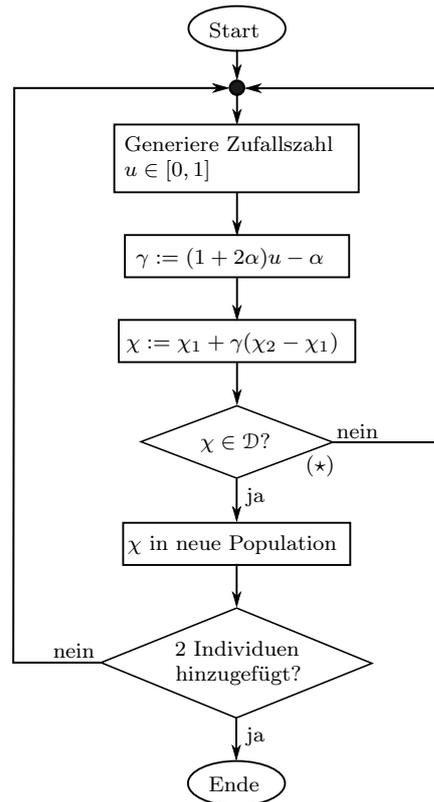


Abbildung 2.19: Programmablaufplan des Blend-Crossovers.

Ein generiertes Kind χ der beiden Eltern-Individuen $\chi_1, \chi_2 \in \mathbb{R}^\nu$ hat mit der Berechnung aus Abbildung 2.19 in jeder Komponente $i = 1, \dots, \nu$ bei $\chi_{1(i)} \leq \chi_{2(i)}$ einen möglichen Wertebereich von

$$\chi_{(i)} = [\chi_{1(i)} - \alpha(\chi_{2(i)} - \chi_{1(i)}), \chi_{2(i)} + \alpha(\chi_{2(i)} - \chi_{1(i)})]$$

und bei $\chi_{2(i)} \leq \chi_{1(i)}$ einen möglichen Wertebereich von

$$\chi_{(i)} = [\chi_{2(i)} + \alpha(\chi_{2(i)} - \chi_{1(i)}), \chi_{1(i)} - \alpha(\chi_{2(i)} - \chi_{1(i)})].$$

Der Parameter $\alpha \in [0, 1]$ steuert demnach, wie weit die Kind-Individuen von den Eltern-Individuen entfernt sein dürfen. Der Einfluss von α auf die möglichen Werte der Kind-Individuen wird in Beispiel 2.21 veranschaulicht. Wenn die Eltern-Individuen dicht zusammen liegen (also wahrscheinlich schon gut angepasst sind und dicht bei einem Maximum liegen), dann haben die Kinder einen geringeren möglichen Wertebereich, als wenn die Eltern-Individuen weit auseinander liegen. Damit passt sich das Blend-Crossover

an den Fortschritt des Algorithmus an, indem am Anfang weit gestreute Kind-Individuum generiert werden, und bei zunehmender Anpassung an das gesuchte Optimum die Streuung immer weiter abnimmt. Wenn $\alpha = 0$ gewählt wird, dann liegen die Kind-Individuen immer zwischen den Eltern-Individuen. Laut [Deb01, Kapitel 4.2] ist $\alpha := 0.5$ für die meisten Optimierungsprobleme geeignet.

Beispiel 2.21 (Einfluss von α beim Blend-Crossover).

In diesem Beispiel wird ein Freiheitsgrad des Optimierungsproblems von $\nu = 1$ gewählt. Für zwei verschiedene Eltern-Paare (2 und 6 beziehungsweise 2 und 4) sind in Abbildung 2.20 die möglichen Wertebereiche für die Kind-Individuen dargestellt. Bei $\alpha = 0$ liegen die Kind-Individuen zwischen den Eltern-Individuen. Je größer der Parameter α gewählt wird, desto größer ist auch der mögliche Wertebereich für die Kind-Individuen. Ein Vergleich der linken und der rechten Abbildung in 2.20 zeigt, dass bei dichter zusammen liegenden Eltern-Individuen die Kind-Individuen einen kleineren Wertebereich haben.

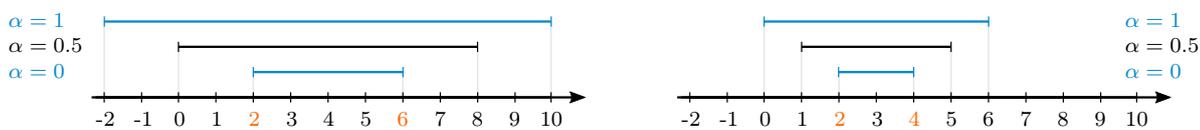


Abbildung 2.20: Auswirkung der Wahl von α und der Werte der Eltern-Individuen (orange) auf den möglichen Wertebereich der Kind-Individuen (Balken über dem Zahlenstrahl).

┘

Die Berechnung der Kind-Individuen berücksichtigt nicht den Definitionsbereich der Individuen, sodass ein ermitteltes Kind nicht zwangsläufig innerhalb des Definitionsbereichs \mathcal{D} liegt. Aus diesem Grund wird überprüft, ob sich ein Kind-Individuum im Definitionsbereich befindet. Wenn nicht, dann wird es verworfen und es wird weiteres Kind-Individuum generiert. Bei ungünstig verteilten Eltern-Individuen kann dies oft der Fall sein. Um den Rechenaufwand zu beschränken, kann bei (*) in Abbildung 2.19 ergänzt werden, dass maximal $n \in \mathbb{N}$ neue Kind-Individuen berechnet werden. Wenn unter den n Kind-Individuen weniger als zwei im Definitionsbereich liegen, werden die Eltern-Individuen in die neue Population übernommen.

Alle vorgestellten Rekombinationsverfahren generieren aus je zwei Individuen Kinder. Dabei werden die Individuen, die sich nach der Selektion in der Population befinden, verwendet. Es müssen allerdings nicht alle Individuen für die Rekombination genutzt werden. Es kann auch eine Anzahl festgelegt werden, mit wie vielen Individuen die Rekombination durchgeführt wird. Dabei können zufällige Individuen oder die besten Individuen der Population verwendet werden. Wenn die Plus-Strategie als Selektionsverfahren gewählt wird, dann werden die Individuen, die nicht an der Rekombination teilnehmen, nicht weiter verwendet.

Mutation

Die Mutation hat bei genetischen Algorithmen keine große Bedeutung. Aus diesem Grund wird nur ein gewisser Anteil der Individuen in der Population mutiert. Bei der Mutation werden zufällige Veränderungen an den Chromosomen vorgenommen. Dies ist an die Mutation in der natürlichen Evolution angelehnt. Mutation sorgt für die Diversität innerhalb der Population, damit neue Suchräume erschlossen werden können. Da die Mutation in den Chromosomen der Individuen stattfindet, wird zwischen der reellen und der binären Repräsentation der Individuen unterschieden.

Zunächst wird die binäre Repräsentation der Individuen betrachtet. Dabei wird festgelegt, wie viele Individuen mutieren sollen. So viele Individuen werden zufällig aus der Population, welche nach der

Rekombination vorliegt, ausgewählt. Bei diesen Individuen wird im Chromosom (Binärstring) eine vorgegebene Anzahl an Bits invertiert. Dabei werden die Bits innerhalb des Chromosoms zufällig ausgewählt. Die Anzahl, wie viele Bits invertiert werden sollen, wird festgelegt. Dies kann beispielsweise die Anzahl der Optimierungsvariablen sein. Durch die Darstellung der Binärstrings liegt ein mutiertes Individuum garantiert im Definitionsbereich.

Wenn die Individuen eine reelle Repräsentation haben, kann die Mutation nicht auf diese Art und Weise erfolgen. Es gibt verschiedene Möglichkeiten die Mutation zu realisieren. Eine mögliche Variante wird hier vorgestellt, weitere Verfahren sind in [Deb01, Kapitel 4.2.2] zu finden. Der Programmablaufplan für die Mutation ist in Abbildung 2.21 dargestellt.

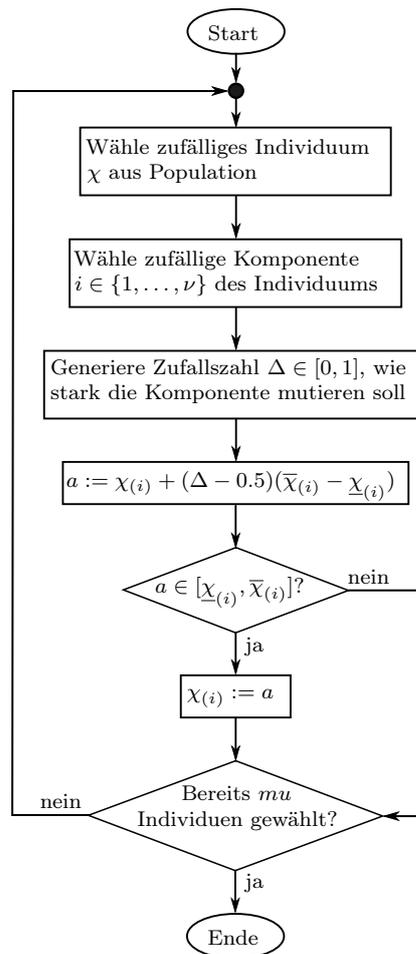


Abbildung 2.21: Programmablaufplan für die Mutation von μ -vielen Individuen innerhalb der Population.

Von jedem Individuum, welches mutiert werden soll, wird eine Komponente ausgewählt, die verändert werden soll. Dabei ist die Größe der Veränderung vom Definitionsbereich der Komponente und von einer Zufallszahl $\Delta \in [0, 1]$ abhängig. Die Komponente kann maximal um die Hälfte ihres Definitionsbereiches verändert werden. Dies soll sicherstellen, dass in den meisten Fällen die mutierte Komponente wieder in ihrem Definitionsbereich liegt. Ist dies nicht der Fall, wird dieses Individuum nicht verändert.

Zusammenfassung

In diesem Abschnitt wurden die wesentlichen Bestandteile der genetischen Algorithmen vorgestellt. Soll ein genetischer Algorithmus für ein Optimierungsproblem verwendet werden, wird aus den verschiedenen Abschnitten jeweils das Verfahren verwendet, welches gut zu den Eigenschaften des zu Lösenden Optimierungsproblems passt.

2.2.5 Multi Level Single Linkage Algorithmus

In diesem Abschnitt wird der MULTI LEVEL SINGLE LINKAGE Algorithmus vorgestellt (kurz: MLSL-Algorithmus). Außerdem wird auf eine Modifikation von Marco Locatelli [Loc98] eingegangen, welche die benötigten Voraussetzungen abschwächt.

Der MLSL-Algorithmus ist ein Multistart-Optimierungsverfahren, welches (mit hoher Wahrscheinlichkeit) alle lokalen Minimalstellen eines Optimierungsproblems findet. Bei einem Multistart-Algorithmus werden im Definitionsbereich zufällige Punkte generiert. Von einer gewissen Auswahl dieser Punkte wird ein lokaler Optimierungsalgorithmus gestartet. Die Besonderheit dieses Algorithmus ist die Art und Weise, wie die Punkte ausgewählt werden.

Das Optimierungsproblem, das in diesem Abschnitt untersucht wird, sei durch

$$\min_{\chi \in \mathcal{D}} f(\chi), \tag{2.11}$$

mit der Zielfunktion $f | \mathbb{R}^{\nu} \rightarrow \mathbb{R}$ und der beschränkten Box $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^{\nu}$ als Definitionsbereich gegeben.

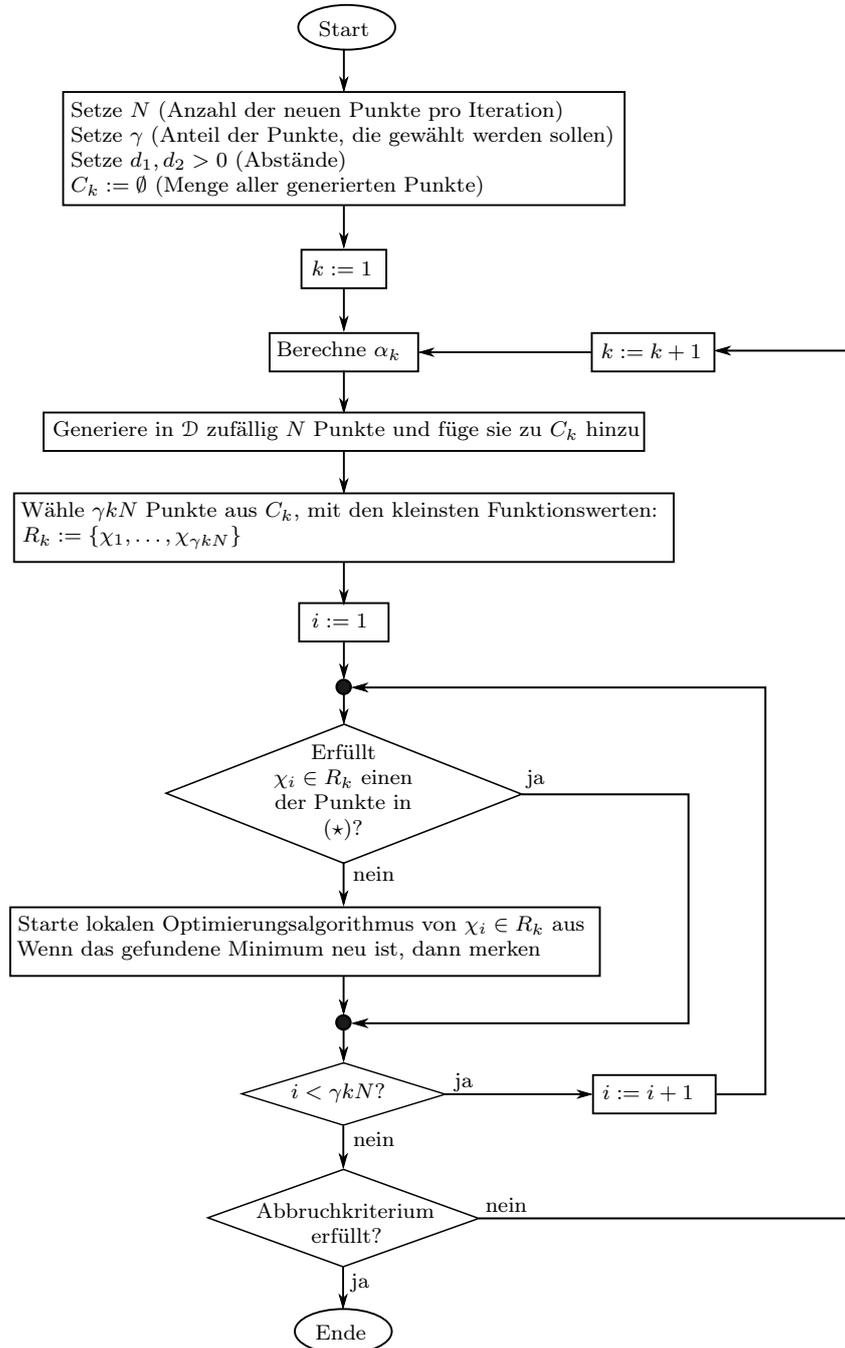
Das Optimierungsproblem (2.11) erfülle die folgenden Voraussetzungen:

- Die Funktion f ist zweimal stetig differenzierbar.
- \mathcal{D} ist kompakt, konvex und hat ein nichtleeres Inneres.
- Das Optimierungsproblem hat eine endliche Anzahl an stationären Punkten.
- Alle stationären Punkte des Optimierungsproblems liegen im Inneren von \mathcal{D} .

Der MLSL-Algorithmus wurde zuerst von Kaan und Timmer in [Kan87a] und [Kan87b] vorgestellt. In jeder Iteration wird eine vorgegebene Anzahl an Punkten in \mathcal{D} zufällig generiert und es sei C_k die Menge der bis zu Iteration k generierten Punkte in \mathcal{D} . In jeder Iteration wird nach gewissen Regeln eine Menge S_k der Punkte aus C_k ausgewählt, von der aus ein lokaler Optimierungsalgorithmus gestartet wird. In Abbildung 2.22 ist ein vereinfachter Ablaufplan des Algorithmus dargestellt, mit den Auswahlkriterien für die Menge S_k .

Es wird von einem Punkt im Definitionsbereich \mathcal{D} nur dann der lokale Optimierungsalgorithmus gestartet, wenn es in C_k in der Nähe keinen Punkt mit einem kleineren Funktionswert gibt (denn dieser Punkt ist dann wahrscheinlich dichter an einem gesuchten lokalen Minimum) und wenn der Punkt nicht in der Nähe eines gefundenen Minimums liegt (dann würde der lokale Optimierungsalgorithmus wahrscheinlich wieder im gleichen Minimum liegen) und wenn der Punkt nicht zu dicht am Rand liegt (denn auf dem Rand befinden sich laut Voraussetzung keine lokalen Minima).

Der Abstand, ab wann zwei Punkte *nah* zueinander sind, wird durch den Parameter α_k festgelegt. Eine Berechnung von α_k ist in [Loc98, S. 26, 28] zu finden. Der Wert von α_k wird in jeder Iteration kleiner. Wenn ein Punkt aus C_k in einer Iteration wegen des ersten Kriteriums in (\star) , in Abbildung 2.22, nicht verwendet wird, kann er trotzdem in einer späteren Iteration verwendet werden, wenn α_k hinreichend klein ist.



- (*)
- Es existiert zu χ_i ein Punkt in R_k mit Abstand kleiner α_k , der einen kleineren Funktionswert hat
 - χ_i liegt dicht (Abstand $\leq d_1$) am Rand von \mathcal{D}
 - χ_i liegt dicht (Abstand $\leq d_2$) an einem schon gefundenen Minimum
 - Lokaler Optimierungsalgorithmus wurde bereits auf χ_i angewendet

Abbildung 2.22: Ablaufplan des MLSL-Algorithmus.

Der MLSL-Algorithmus hat nach [Kan87a; Kan87b] die folgenden Eigenschaften:

- Jedes lokale Minimum wird in endlicher Zeit mit Wahrscheinlichkeit Eins gefunden.
- Die erwartete Anzahl der Anwendungen des lokalen Optimierungsalgorithmus ist endlich, auch wenn der Algorithmus unendlich lange läuft.

Die Voraussetzungen an das Optimierungsproblem sind streng. Locatelli hat in [Loc98] die Voraussetzung abgeschwächt und erhält mit einer Abänderung des Algorithmus (NON-MONOTONIC MULTI LEVEL SINGLE LINKAGE Algorithmus, kurz: NM MLSL-Algorithmus) fast die gleichen Ergebnisse.

Die abgeschwächten Voraussetzungen für den NM MLSL-Algorithmus lauten [Loc98]:

- Die Funktion f ist Lipschitz-stetig auf \mathcal{D} .
- \mathcal{D} ist kompakt, konvex und hat ein nichtleeres Inneres.
- Es gibt eine endliche Anzahl an stationären Mengen in \mathcal{D} .

Damit der Algorithmus mit den abgeschwächten Voraussetzungen ähnlich gute Ergebnisse liefert, weist der NM MLSL-Algorithmus in einigen Schritten Unterschiede zum MLSL-Algorithmus auf. Um diese Unterschiede beschreiben zu können, werden zunächst zwei neue Begriffe definiert.

Zunächst werden die Begriffe STATIONÄRE MENGE, MINIMUM-MENGE, SATTEL-MENGE und MAXIMUM-MENGE eingeführt, siehe [Loc98, Definition 2]. Die genaue Definition wird hier nicht wiederholt, sondern eine Erklärung, was unter diesen Bezeichnungen zu verstehen ist. Es sind Verallgemeinerungen der Begriffe *stationärer Punkt*, *Minimalstelle*, *Sattelpunkt* und *Maximalstelle*. Eine stationäre Menge ist eine zusammenhängende, maximale, abgeschlossene Menge, deren innere Punkte alle den gleichen Funktionswert haben. Wenn es eine Umgebung um diese Menge gibt, in der alle Punkte einen größeren Funktionswert als die Punkte im inneren der Menge haben, ist es eine Minimum-Menge, bei kleineren Funktionswerten ist es eine Maximum-Menge. In Beispiel 2.22 sind schematisch solche Mengen angegeben.

Beispiel 2.22 (Stationäre Mengen).

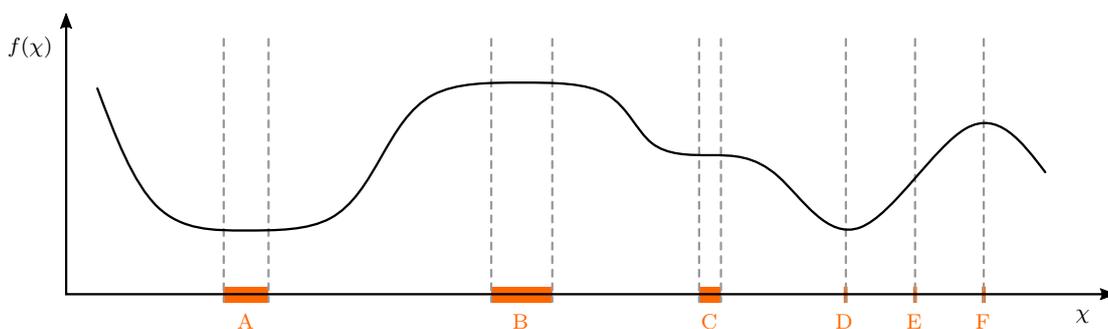


Abbildung 2.23: Verschiedene Stationäre Mengen.

In Abbildung 2.23 sind sowohl die Mengen A, B und C, als auch die Punkte D, E und F stationäre Mengen. Die speziellen Bezeichnungen sind:

- A - Minimum-Menge,
- B - Maximum-Menge,
- C - Sattel-Menge,
- D - Minimum und Minimum-Menge,
- E - Sattelpunkt und Sattel-Menge,
- F - Maximum und Maximum-Menge.

┘

Definition 2.23 $((r, s)$ -Folge). nach [Loc98, Definition 3]

Es sei $r > 0$, $s \geq 0$ und $t \in \mathbb{N}$ gegeben. Des Weiteren sei $f|_{\mathcal{D}} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion und $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}$ eine Menge von Punkten in \mathcal{D} . Eine Folge $(y_i)_{i=1}^t$, welche für alle $i = 1, \dots, t-1$ die folgenden Bedingungen erfüllt:

$$(1) \quad y_i \in \mathcal{E} \qquad (2) \quad \|y_{i+1} - y_i\|_2 \leq r \qquad (3) \quad f(y_{i+1}) < \min_{j < i+1} f(y_j) + s,$$

heißt (r, s) -Folge.

Beispiel 2.24 $((r, s)$ -Folge).

In Abbildung 2.24 ist dargestellt, wie eine (r, s) -Folge, beginnend mit dem Punkt y_1 gebildet wird. Dabei sind die beiden Abstände r und $s \in \mathbb{R}$ vorgegeben (blaue Intervalle). Die Menge \mathcal{E} wird durch die Abszissenwerte der orange markierten Punkte gebildet.

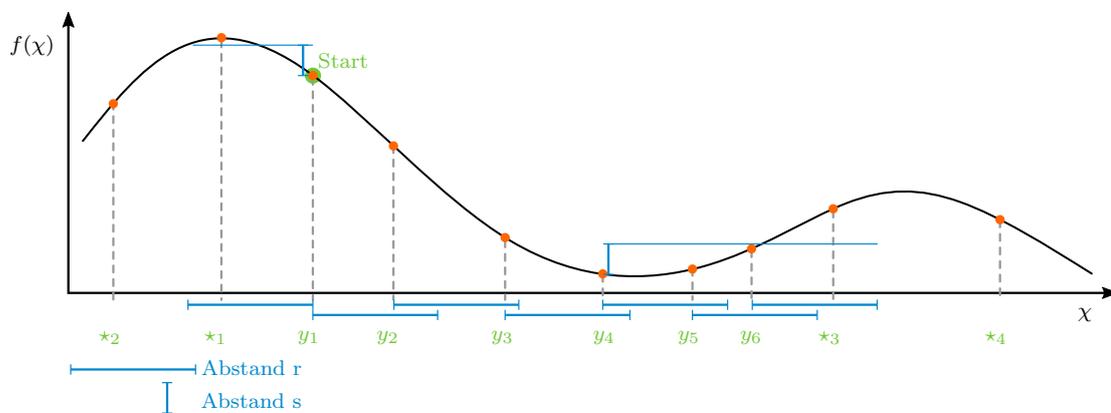


Abbildung 2.24: Elemente einer (r, s) -Folge.

Im Folgenden wird für die einzelnen Punkte beschrieben, ob Sie in die Folge aufgenommen werden und warum.

- $*_1$: Dieser Punkt ist ausreichend dicht am Punkt y_1 ((2) erfüllt), sein Funktionswert ist aber zu groß ((3) nicht erfüllt). Er wird nicht in die Folge aufgenommen.
- $*_2$: Dieser Punkt hat einen kleineren Funktionswert als y_1 ((3) erfüllt), aber er hat einen zu großen Abstand zu y_1 ((2) nicht erfüllt). Er wird nicht in die Folge aufgenommen.
- y_2, y_3, y_4 : Diese Punkte liegen ausreichend dicht am jeweils vorherigen Punkt ((2) ist erfüllt) und ihre Funktionswerte sind absteigend ((3) ist erfüllt). Sie werden nacheinander in die (r, s) -Folge aufgenommen.
- y_5 : Dieser Punkt liegt ausreichend dicht an y_4 ((2) ist erfüllt). Der Funktionswert von y_5 ist größer als der von y_4 , aber weniger als s ((3) ist erfüllt). Dieser Punkt wird in die (r, s) -Folge aufgenommen.
- y_6 : Dieser Punkt liegt ausreichend dicht an y_5 ((2) ist erfüllt). Der Funktionswert muss mit dem kleinsten, der in der Folge enthalten ist, verglichen werden, also mit dem von y_4 : Er ist zwar größer, aber nicht mehr als s größer ((3) ist erfüllt). Der Punkt wird in die (r, s) -Folge aufgenommen.
- $*_3$: Dieser Punkt liegt ausreichend dicht an y_6 ((2) ist erfüllt). Der Funktionswert ist aber mehr als s größer, als der von y_4 ((3) nicht erfüllt). Er wird nicht in die Folge aufgenommen.
- $*_4$: Dieser Punkt hat einen zu großen Abstand zu y_6 ((2) nicht erfüllt) und wird deshalb nicht in die Folge aufgenommen.

Die (r, s) -Folge, beginnend mit y_1 lautet: $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)$. ┘

Nach der Einführung dieser neuen Begriffe werden nun die Unterschiede zwischen dem MLSL- und dem NM MLSL-Algorithmus aufgezeigt. Der Programmablaufplan vom NM MLSL-Algorithmus ist in Abbildung 2.25 dargestellt.

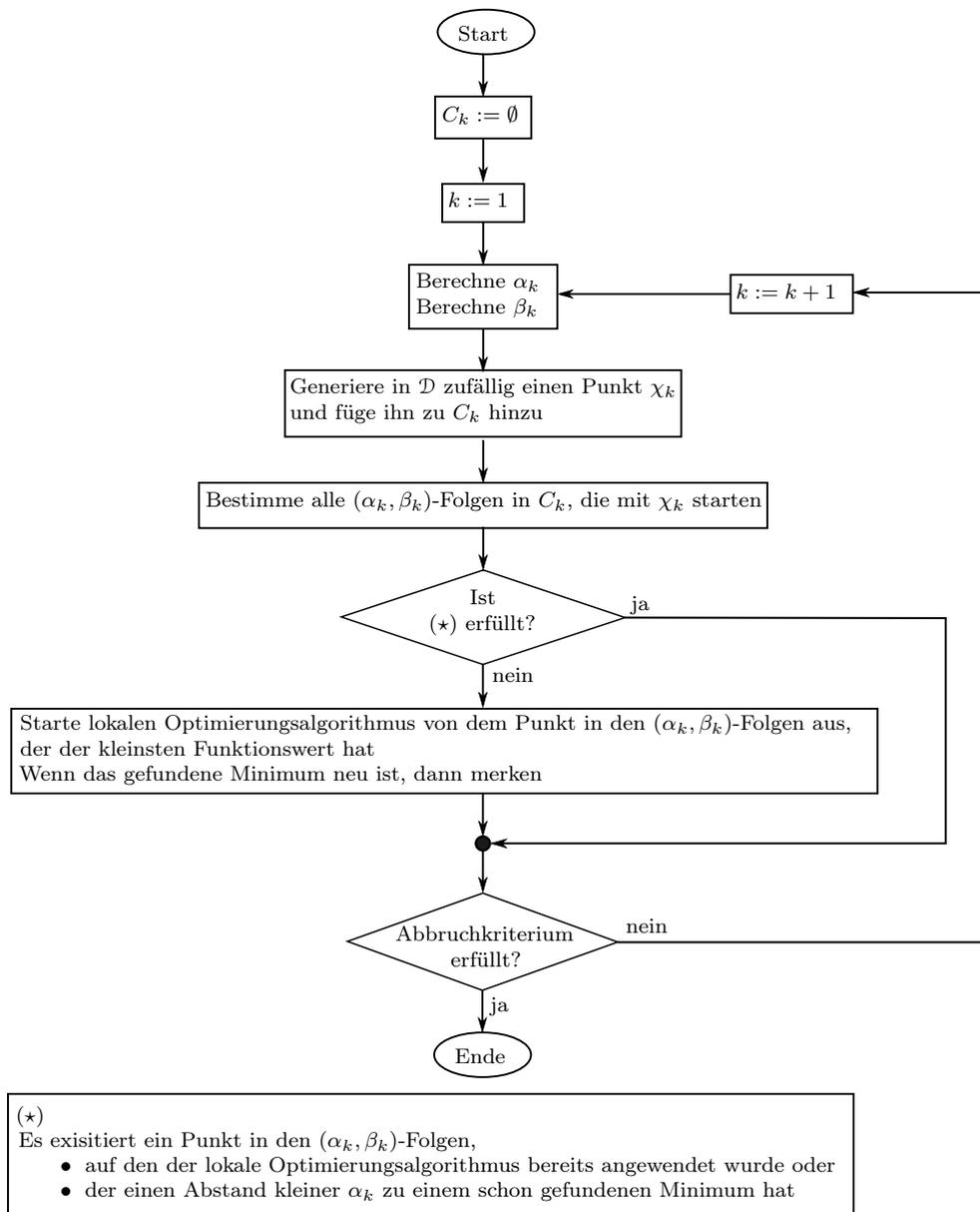


Abbildung 2.25: Ablaufplan des NM MLSL-Algorithmus.

Pro Iteration wird nur ein neuer Punkt im Definitionsbereich zufällig generiert (dies entspricht $N = 1$ beim MLSL-Algorithmus). Der Parameter α_k wird wieder verwendet, um zu definieren, ab wann zwei Punkte *nah* zusammen liegen. Beim MLSL-Algorithmus wird die lokale Optimierung nur gestartet, wenn es keinen Punkt in C_k mit kleinerem Funktionswert in der Nähe gibt. Hier darf der Punkt auch bis zu einem gewissen Wert größer sein. Dieser Abstand wird durch den Parameter β_k festgelegt (bei der Bildung der (α_k, β_k) -Folgen). Daher kommt der Name *Non Monotonic* MLSL-Algorithmus. Die Werte von α_k und

β_k werden in jeder Iteration nach gewissen Berechnungsvorschriften kleiner⁷.

Die Eigenschaften des NM MLSL-Algorithmus sind die gleichen, wie bei dem MLSL-Algorithmus, bis auf eine Ausnahme: Es wird nicht jedes lokale Minimum gefunden, sondern pro Minimum-Menge (mindestens) ein Repräsentant, [Loc98].

⁷Die Berechnung von α_k und β_k wird bei der Umsetzung in Kapitel 3.3 angegeben.

KAPITEL 3

Formfindung

In diesem Kapitel werden Optimierungsprobleme für die Formfindung bei Tensegrity-Strukturen hergeleitet und deren Eigenschaften analysiert. Im Anschluss werden mögliche Optimierungsverfahren entwickelt, mit denen die Optimierungsprobleme gelöst werden können. Außerdem werden die Arbeitsweise und die Anwendbarkeit der beschriebenen Optimierungsverfahren anhand von Beispielen illustriert und die verschiedenen Verfahren werden gegenübergestellt. Des Weiteren werden die ermittelten Verfahren mit der in Abschnitt 2.2.2 beschriebenen Methode für die Formfindung verglichen.

3.1 Optimierungsprobleme für die Formfindung

Bei der Formfindung von Tensegrity-Strukturen sind die Topologie der Tensegrity-Struktur und alle Segmentparameter gegeben (Längen, Anfangslängen und Steifigkeiten der Segmente). Die Aufgabe der Formfindung ist, die Koordinaten der Tensegrity-Struktur so zu bestimmen, dass eine Gleichgewichtskonfiguration vorliegt. Sofern es mehrere (stabile) Gleichgewichtskonfigurationen gibt, sollten möglichst viele davon ermittelt werden (siehe auch Abschnitt 2.1.4).

Die Herleitung der Optimierungsprobleme erfolgt im ersten Abschnitt mit Hilfe der inneren Energie und im zweiten Abschnitt mit den Gleichgewichtsbedingungen einer Tensegrity-Struktur.

3.1.1 Energiefunktion

In diesem Abschnitt wird ein Optimierungsproblem für die Formfindung mit Hilfe der inneren Energie von Tensegrity-Strukturen hergeleitet. Dafür wird für die Segmente mit hoher Steifigkeit die Betrachtungsweise aus Annahme 2.8 A) verwendet, das heißt, diese Segmente sind starr.

Die Energiefunktion für die innere (potentielle) Energie einer Tensegrity-Struktur $U = U(\chi) | \mathbb{R}^\delta \rightarrow \mathbb{R}$ wurde bereits in (2.6) angegeben, und wird hier zur Übersichtlichkeit wiederholt:

$$U := \frac{1}{2} \sum_{f \in \mathcal{F}} k_f (\|L_f\|_2 - l_{0f})^2. \quad (3.1)$$

Dabei sind k_f und l_{0f} konstant. L_f und damit auch U hängen von der Lage der Tensegrity-Struktur, und somit von den Segmentkoordinaten (siehe Definition 2.10) $\chi \in \mathbb{R}^\delta$, ab: $L_f = L_f(\chi)$ und $U = U(\chi)$, für $f \in \mathcal{F}$. Für die Segmentkoordinaten wird jeweils ein beschränktes, abgeschlossenes Intervall in \mathbb{R} als Definitionsbereich angegeben. Daraus ergibt sich insgesamt eine beschränkte und abgeschlossene Box als Definitionsbereich $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^\delta$.

In einer stabilen Gleichgewichtskonfiguration ist die potentielle Energie der Tensegrity-Struktur in einem lokalen Minimum (siehe Definition 2.2). Das Optimierungsproblem, mit Hilfe dessen stabile Gleichgewichtskonfigurationen gefunden werden können, lautet demnach

$$\min_{\chi \in \mathcal{D}} U(\chi). \quad (3.2)$$

Das Optimierungsproblem (3.2) enthält mit $\|L_f\|_2$ die aktuelle Länge der elastischen Segmente. Die euklidische Norm ist im Nullpunkt (Länge eines Segmentes gleich Null) nicht differenzierbar. Da dies theoretisch vorkommen kann (zwei Knoten liegen aufeinander), ist die Energiefunktion im Allgemeinen nicht im gesamten Definitionsbereich differenzierbar. Zwei Knoten können aufgrund der positiven Anfangslänge der elastischen Segmente nur dann aufeinander liegen, wenn das entsprechende Segment auf Druck beansprucht wird. Aufgrund der geringen technischen Relevanz wird der Fall der Druckbeanspruchung der Segmente mit geringer Steifigkeit im Folgenden nicht betrachtet und es wird eine Nebenbedingung zu dem Optimierungsproblem (3.2) hinzugefügt:

$$\min_{\chi \in \mathcal{D}} U(\chi) \quad \text{Nebenbedingung:} \quad \|L_f\|_2 \geq l_{0f}. \quad (3.3)$$

Damit werden in (3.3) nur Lösungen bestimmt, bei denen alle elastischen Segmente entweder entspannt sind, oder auf Zug beansprucht sind, aber nicht auf Druck.

Von dem Optimierungsproblem (3.3) wird beispielhaft für Topologie A der zulässige Bereich betrachtet.

Beispiel 3.1 (Zulässiger Bereich des Optimierungsproblems (3.3)).

Es wird Topologie A verwendet. Die Bezeichnungen, Segmentparameter und verwendeten Koordinatenbezeichnungen sind in Abbildung A.1 dargestellt. Damit der zulässige Bereich illustriert werden kann, wird der Freiheitsgrad des Systems auf zwei eingeschränkt. Die Einschränkungen und den sich jeweils daraus ergebenden zulässigen Bereich zeigt Abbildung 3.1. \lrcorner

Beispiel 3.1 zeigt, dass der zulässige Bereich beschränkt ist (wegen des beschränkten Definitionsbereiches \mathcal{D}), im Allgemeinen aber

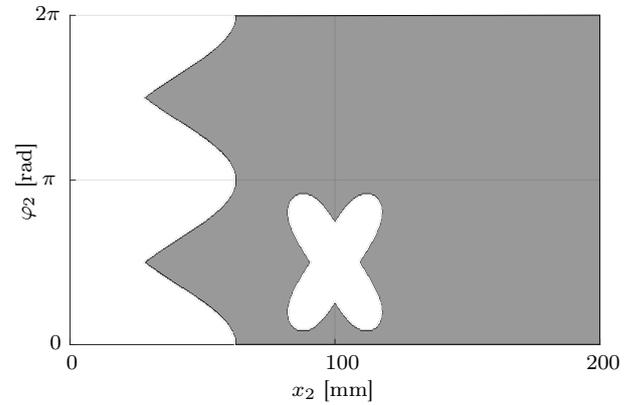
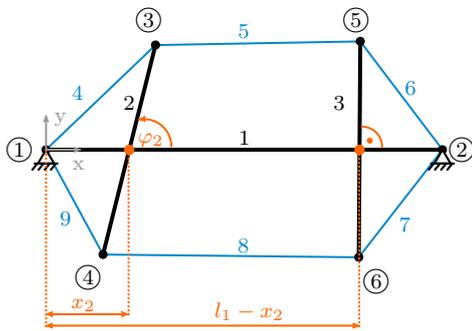
- kein mehrdimensionales Intervall (Box) ist,
- nicht konvex ist,
- nicht einfach zusammenhängend ist und
- nicht zusammenhängend ist.

Die Eigenschaften des Optimierungsproblems gestalten sich für die aktuell bekannten Optimierungsverfahren als schwierig (Zielfunktion nicht differenzierbar beziehungsweise ungünstige Eigenschaften des zulässigen Bereiches). Daher ist es notwendig eine alternative Formulierung für die Zielfunktion beziehungsweise das Optimierungsproblem zu suchen.

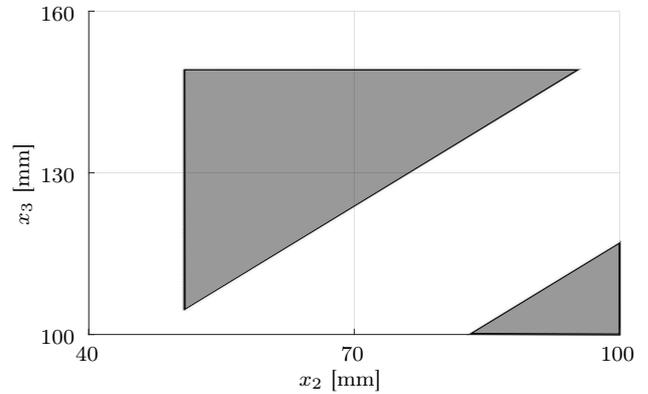
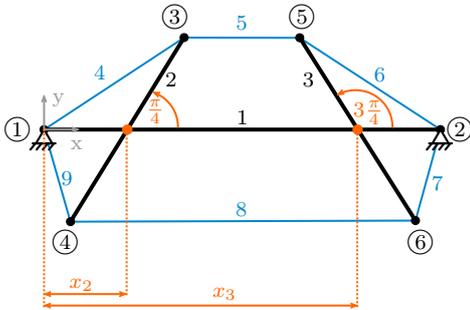
Modifikation der Energiefunktion

In diesem Abschnitt wird die Energiefunktion modifiziert, mit dem Ziel, die Eigenschaften des resultierenden Optimierungsproblems zu verbessern, ohne die gesuchten Lösungen der Energiefunktion zu verändern. Bei der Einführung der Nebenbedingung in (3.3) wurde argumentiert, dass die Gleichgewichtskonfigurationen, bei denen mindestens ein Segment mit geringer Steifigkeit auf Druck beansprucht ist, in dieser Arbeit nicht betrachtet werden. Aus diesem Grund kann in diesem Bereich die Energiefunktion modifiziert werden, ohne die gesuchten Minimalstellen zu verändern. An dem Punkt, an dem ein elastisches Segment entspannt ist ($\|L_f\|_2 = l_{0f}$), ist der dazugehörige Summand in der Berechnung der potentiellen Energie (3.1) gleich Null. An dieser Eigenschaft wird angesetzt und die Summanden in (3.1), bei denen $\|L_f\|_2 < l_{0f}$ gilt, werden auf null gesetzt. Damit ergibt sich für die modifizierte Energiefunktion $U_{mod} = U_{mod}(\chi) | \mathbb{R}^{\delta} \rightarrow \mathbb{R}$:¹

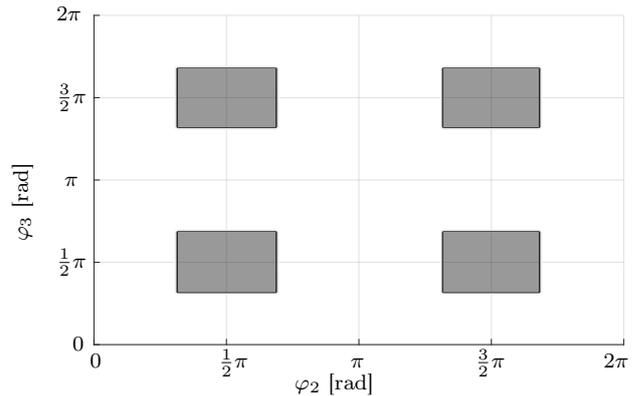
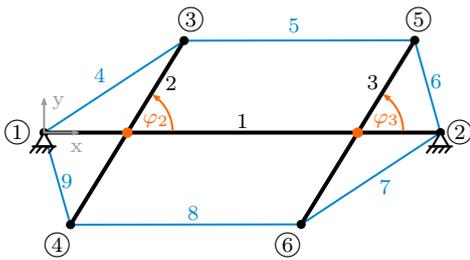
¹Die Struktur der modifizierten Energiefunktion ist aus der Optimierung bei den Strafverfahren bekannt, siehe [Ber82; Ber99; Fia68; Gil81; Gro76; Gro79; Gro97].



(a) Freiheitsgrad zwei, Segment 2 kann entlang der x-Achse verschoben und um den Schwerpunkt rotiert werden. Segment 3 bewegt sich entsprechend der Position von Segment 2 entlang der x-Achse, Winkel von Segment 3 und y-Position beider starrer Segmente sind fixiert. Definitionsbereich: $\mathcal{D} := [0 \text{ mm}, 200 \text{ mm}] \times [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}^2$.



(b) Freiheitsgrad zwei, Segment 2 und 3 bewegen sich entlang der x-Achse, Winkel und y-Position der starren Segmente sind fixiert. Definitionsbereich: $\mathcal{D} := [40 \text{ mm}, 100 \text{ mm}] \times [100 \text{ mm}, 160 \text{ mm}] \subset \mathbb{R}^2$.



(c) Freiheitsgrad zwei, Segment 2 und 3 können um ihren Schwerpunkt rotiert werden. Die Position der Schwerpunkte von Segment 2 und 3 sind auf der Ebene fixiert ($x_2 := 48.35 \text{ mm}$, $x_3 := 151.65 \text{ mm}$, $y_2 = y_3 := 0 \text{ mm}$). Definitionsbereich: $\mathcal{D} := [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}^2$.

Abbildung 3.1: Zulässiger Bereich für Topologie A. Grau: zulässige Werte; Weiß: unzulässige Werte.

$$U_{mod} := \frac{1}{2} \sum_{f \in \mathcal{F}} k_f [\|L_f\|_2 - l_{0f}]_+^2, \quad (3.4)$$

wobei $[g(x)]_+ := \max\{g(x), 0\}$, mit $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Die Segmentvektoren hängen von den Segmentkoordinaten ab: $L_f = L_f(\chi)$, $f \in \mathcal{F}$, die anderen Größen sind konstant. Der Definitionsbereich \mathcal{D} sei, wie bei der Energiefunktion (3.1), eine beschränkte und abgeschlossene Box.

Beispiel 3.2 (Unterschied zwischen den Energiefunktionen U_{mod} und U).

In diesem Beispiel wird illustriert, wie die Energiefunktion modifiziert wird. Dafür wird die Tensegrity-Struktur mit den gleichen freien Variablen wie in Beispiel 2.15 verwendet. In Abbildung 3.2(b) sind die Höhenlinien der Energiefunktion U dargestellt und der Bereich, in dem die Energiefunktion *nicht* verändert wird, ist grün markiert. Diese grünen Markierungen entsprechen auch dem zulässigen Bereich des Optimierungsproblems (3.3), welcher in Beispiel 3.1(c) für dieselbe Tensegrity-Struktur mit demselben Freiheitsgrad dargestellt ist.

Die gesuchten Minimalstellen der Energiefunktion (durch orange Kreise markiert) werden bei der Modifikation der Energiefunktion nicht verändert. Lediglich die Maximalstelle und die Sattelpunkte ändern ihren Funktionswert, und eventuell auch ihre Position. Bei der Formfindung sind in der Regel nur die stabilen Gleichgewichtskonfigurationen, und damit die Minimalstellen, interessant. \lrcorner

Mathematische Eigenschaften der modifizierten Energiefunktion

Die Eigenschaften der modifizierten Energiefunktion U_{mod} werden genauer analysiert. Dafür wird zunächst die mathematische Struktur der Segmentvektoren der Segmente mit geringer Steifigkeit L_f , $f \in \mathcal{F}$ betrachtet. In diesem Abschnitt sind im Folgenden Segmentvektoren nur die Segmentvektoren der Segmente mit geringer Steifigkeit. Die Segmentvektoren der Segmente mit hoher Steifigkeit werden nicht verwendet.

Beobachtung 3.3 (Eigenschaften der Segmentvektoren).

- Die Abbildung \mathcal{R} , welche die Positionen $P_{\textcircled{i}}, P_{\textcircled{j}} \in \mathbb{R}^n$ von zwei Knoten $\textcircled{i}, \textcircled{j}$ mit $i, j \in \{1, \dots, n_k\}$, $i < j$ auf den Segmentvektor $L_f \in \mathbb{R}^n$ abbildet:

$$\begin{aligned} \mathcal{R} \mid (P_{\textcircled{i}}, P_{\textcircled{j}}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\mapsto L_f \in \mathbb{R}^n \\ L_f &:= P_{\textcircled{i}} - P_{\textcircled{j}}, \end{aligned}$$

ist stetig differenzierbar.

- Die Abbildung \mathcal{P} , welche die Segmentkoordinaten (x_k, y_k, φ_k) beziehungsweise $(x_k, y_k, z_k, \varphi_k, \psi_k)$ eines Segmentes $k \in \mathcal{S}$, auf die Endpunkte dieses Segmentes abbildet (Abstand $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ zu den Endpunkten):

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \mid (x_k, y_k, \varphi_k)^\top \in \mathbb{R}^3 &\mapsto \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} \pm l_{1/2} \begin{pmatrix} \cos(\varphi_k) \\ \sin(\varphi_k) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, & \text{beziehungsweise} \\ \mathcal{P} \mid (x_k, y_k, z_k, \varphi_k, \psi_k)^\top \in \mathbb{R}^5 &\mapsto \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix} \pm l_{1/2} \begin{pmatrix} \sin(\varphi_k) \cos(\psi_k) \\ \sin(\varphi_k) \sin(\psi_k) \\ \cos(\varphi_k) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \end{aligned}$$

ist stetig differenzierbar.

- Die Verkettung der beiden Abbildungen $\mathcal{R} \circ \mathcal{P}$, welche die Segmentvektoren bildet, ist stetig differenzierbar.

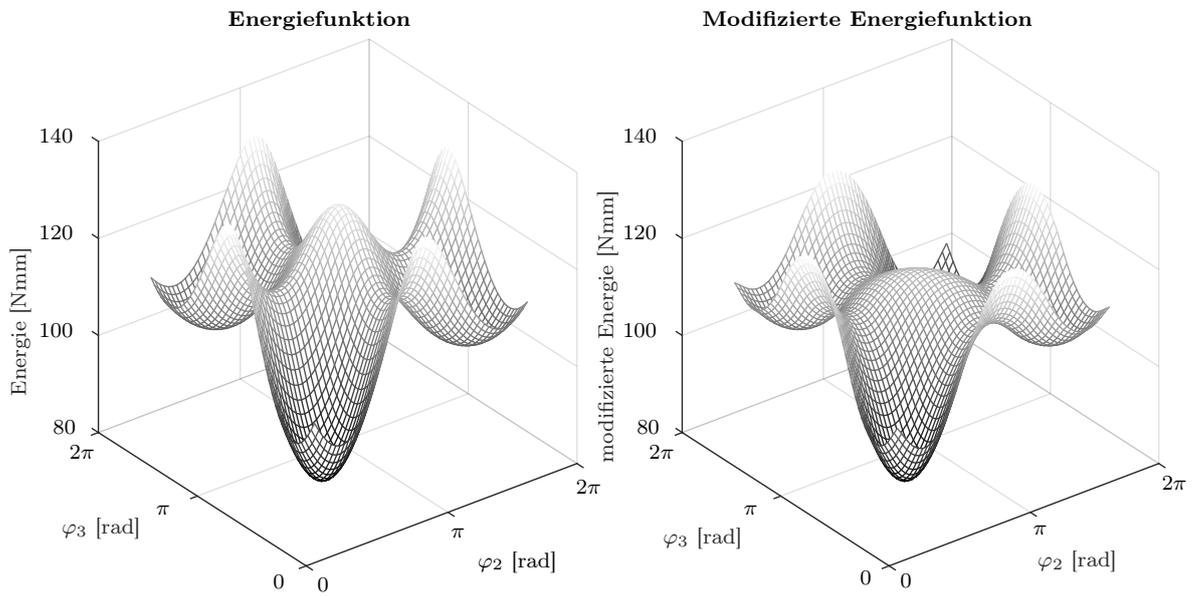
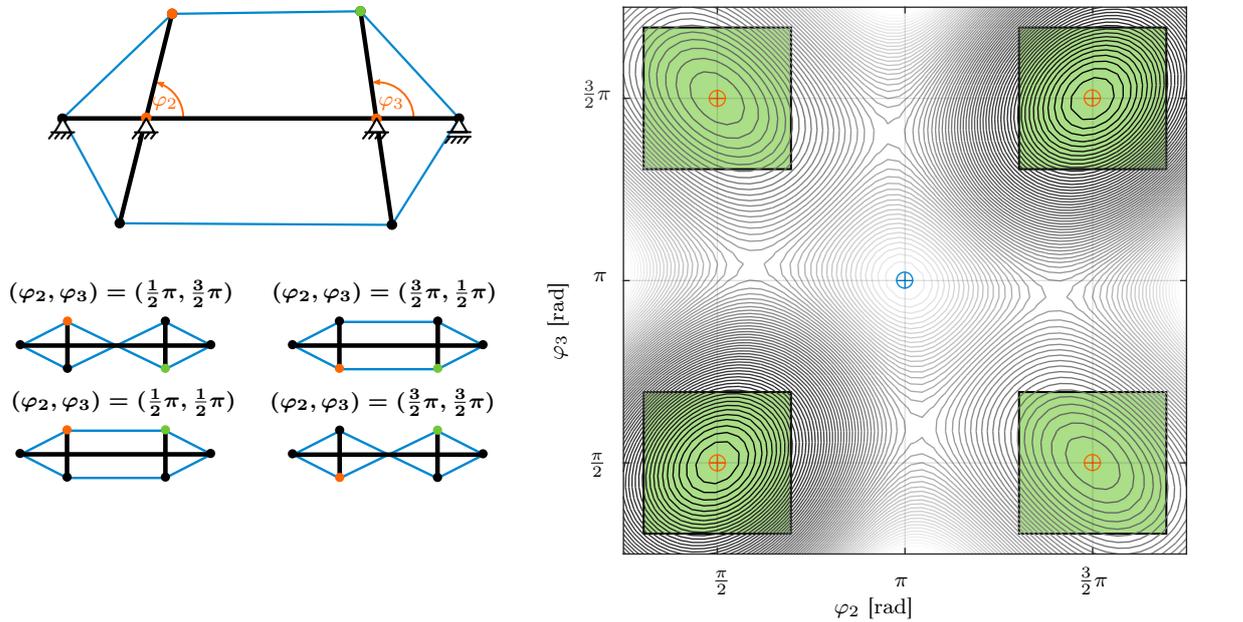


Abbildung 3.2: Vergleich der Energiefunktion und der modifizierten Energiefunktion und Darstellung der unveränderten Bereiche während der Modifikation.

Werden von den Segmentkoordinaten eines Segmentes einige Koordinaten fixiert, dann ist die Abbildung \mathcal{P} in diesen Koordinaten eingeschränkt. Die Aussagen von Beobachtung 3.3 bleiben erhalten.

Lemma 3.4 (Differenzierbarkeit der modifizierten Energiefunktion).

Die modifizierte Energiefunktion $U_{mod} = U_{mod}(\chi)$ (3.4) ist in \mathbb{R}^δ stetig differenzierbar.

Beweis. Nach Beobachtung 3.3 sind die Segmentvektoren auf \mathbb{R}^δ stetig differenzierbar. Die euklidische Norm ist in $\mathbb{R}^\delta \setminus \{0\}$ stetig differenzierbar. Aufgrund $[\|L_f\|_2 - l_{0f}]_+ = \max\{0, \|L_f\|_2 - l_{0f}\}$ in U_{mod} , und da $l_{0f} > 0$ gilt, reicht die stetige Differenzierbarkeit der euklidischen Norm auf $\mathbb{R}^\delta \setminus \{0\}$ aus.

Aus der stetigen Differenzierbarkeit von $\|L_f\|_2 - l_{0f}$ folgt nach [Ber99, Kapitel 4.2.1] die stetige Differenzierbarkeit von $[\|L_f\|_2 - l_{0f}]_+$. Die Summe einer endlichen Anzahl von stetig differenzierbaren Funktionen ist stetig differenzierbar und deren Verkettung auch.

Folglich ist die modifizierte Energiefunktion $U_{mod}(\chi)$ auf \mathbb{R}^δ stetig differenzierbar. \square

Aus der stetigen Differenzierbarkeit von U_{mod} folgt direkt deren Stetigkeit. Die erste Ableitung von U_{mod} ist gegeben durch:

$$\frac{\partial U_{mod}}{\partial \chi^{(i)}} = \sum_{f \in \mathcal{F}} k_f [\|L_f\|_2 - l_{0f}]_+ \frac{\left(\frac{\partial}{\partial \chi^{(i)}} L_f\right)^\top L_f}{\|L_f\|_2} \quad \text{für } i \in \{1, \dots, \delta\}.$$

Lemma 3.5 (Beschränktheit der modifizierten Energiefunktion).

- a) Die modifizierte Energiefunktion $U_{mod} = U_{mod}(\chi)$ (3.4) ist im Definitionsbereich \mathcal{D} beschränkt.
- b) Die modifizierte Energiefunktion $U_{mod} = U_{mod}(\chi)$ (3.4) ist in \mathbb{R}^δ nicht beschränkt.
- c) Die erste Ableitung der modifizierten Energiefunktion $U_{mod} = U_{mod}(\chi)$ ist im Definitionsbereich \mathcal{D} beschränkt.

Beweis.

Zu a): Nach Lemma 3.4 ist die modifizierte Energiefunktion eine stetige Funktion auf \mathbb{R}^δ . Der Definitionsbereich ist eine beschränkte und abgeschlossene Box in \mathbb{R}^δ und somit kompakt. Nach dem Extremalsatz, [Heu90, Satz 36.3], ist eine stetige Funktion mit kompakten Definitionsbereich beschränkt.

Zu b): Annahme: Die modifizierte Energiefunktion ist auf \mathbb{R}^δ beschränkt.

Gegenbeispiel: Es wird Topologie A mit den Bezeichnungen, Segmentparametern und Koordinatenbezeichnungen aus Abbildung A.1 verwendet. Wenn $x_2 \rightarrow \infty$, dann wird die Länge von Segment 4 unendlich groß: $\|L_4\|_2 \rightarrow \infty$ und damit ist die modifizierte Energiefunktion auf \mathbb{R}^δ nicht beschränkt.

Zu c): Nach Lemma 3.4 ist die erste Ableitung der modifizierten Energiefunktion eine stetige Funktion auf \mathbb{R}^δ . Der Definitionsbereich ist eine beschränkte und abgeschlossene Box in \mathbb{R}^δ und somit kompakt. Nach dem Extremalsatz, [Heu90, Satz 36.3], ist eine stetige Funktion mit kompakten Definitionsbereich beschränkt. \square

Lemma 3.6 (Lipschitz-Stetigkeit der modifizierten Energiefunktion).

Die modifizierte Energiefunktion U_{mod} (3.4) ist in ihrem Definitionsbereich \mathcal{D} Lipschitz-stetig.

Beweis. Der Definitionsbereich der modifizierten Energiefunktion ist eine beschränkte Box. Nach Lemma 3.4 ist U_{mod} stetig differenzierbar und nach Lemma 3.5 ist U_{mod} auf \mathcal{D} beschränkt.

Es seien $\chi_1, \chi_2 \in \mathcal{D}$ beliebig und fest gewählt. Dann gibt es laut dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung, siehe [Beh07, Korollar 8.3.5], ein $\chi_0 \in \mathcal{D}$, mit

$$U_{mod}(\chi_2) - U_{mod}(\chi_1) = \nabla U_{mod}(\chi_0)^\top (\chi_2 - \chi_1).$$

Mit Hilfe des Mittelwertsatzes folgt direkt die Lipschitz-Stetigkeit:

$$\|U_{mod}(\chi_2) - U_{mod}(\chi_1)\|_2 \leq L\|\chi_2 - \chi_1\|_2 \quad \text{mit } L := \sup_{\chi_0 \in \mathcal{D}} \|\nabla U_{mod}(\chi_0)\|_2.$$

□

Lemma 3.7 (Zweimalige Differenzierbarkeit der modifizierten Energiefunktion).

Die modifizierte Energiefunktion $U_{mod} = U_{mod}(\chi)$ (3.4) ist in \mathcal{D} im Allgemeinen nicht zweimal differenzierbar.

Beweis. Annahme: U_{mod} ist zweimal differenzierbar.

Gegenbeispiel: Als Beispiel wird die in Abbildung 3.3 dargestellte Tensegrity-Struktur verwendet.

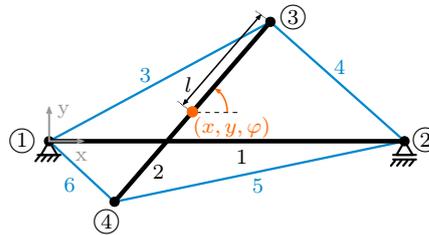


Abbildung 3.3: Tensegrity-Struktur mit Bezeichnungen, welche für das Gegenbeispiel verwendet wird.

Es seien die Längen von Segment 1 (l_1) und Segment 2 (l_2 , $l := \frac{1}{2}l_2$), die Steifigkeiten aller elastischen Segmente k_i , $i = 3, \dots, 6$, sowie die Anfangslänge von Segment 3 (l_{03}) gegeben. Die Anfangslängen von Segment 4, 5, und 6 seien entsprechend der folgenden Bedingungen fest gegeben:

$$l_{04} > |l_{03} - l_1| \quad l_{05} > |l_{03} - l_1 - 2l| \quad l_{06} > |l_{03} - 2l|. \quad (3.5)$$

In diesem Beispiel werden, ohne Beschränkung der Allgemeinheit, die Segmentkoordinaten bei $y := 0$ mm und $\varphi := 0$ fixiert. Außerdem wird $x \geq 0$ mm festgelegt.

Mit diesen Einschränkungen ergibt sich:

$$\begin{aligned} L_3 &= (x + l, 0)^\top & \|L_3\|_2 &= x + l, \\ L_4 &= (x + l - l_1, 0)^\top & \|L_4\|_2 &= |x + l - l_1|, \\ L_5 &= (x - l - l_1, 0)^\top & \|L_5\|_2 &= |x - l - l_1|, \\ L_6 &= (x - l, 0)^\top & \|L_6\|_2 &= |x - l|. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Es gilt $\|L_3\|_2 \geq l_{03}$ genau dann, wenn $x \geq l_{03} - l$ gilt.

Bei Betrachtung der Längen der Segmente an der Stelle $x := l_{03} - l$ folgt aus (3.6) mit (3.5):

$$\|L_4\|_2 = |l_{03} - l_1| < l_{04} \quad \|L_5\|_2 = |x - l - l_1| < l_{05} \quad \|L_6\|_2 = |x - l| < l_{06}.$$

Daraus folgt, dass in U_{mod} (3.4) nur der Summand mit $f = 3$ berücksichtigt wird (die anderen Summanden erfüllen nicht die Bedingung $\|L_f\|_2 \geq l_{0f}$). Der Summand $u_3(z)$ von U_{mod} , der die Energie von Segment 3 berechnet, wird betrachtet:

$$u_3(x) := \begin{cases} \frac{1}{2}k_3(x+l-l_{03})^2, & \text{falls } x \geq l_{03} - l \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}u_3(x) = \begin{cases} k_3(x+l-l_{03}), & \text{falls } x \geq l_{03} - l \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die beiden Differenzenquotienten (*von oben* und *von unten*) von $\frac{\partial}{\partial x}u_3(x)$ werden an der Stelle $x := l_{03} - l$, mit $h \in \mathbb{R}$, gebildet.

$$\frac{\frac{\partial}{\partial x}u_3(x+h) - \frac{\partial}{\partial x}u_3(x)}{h} = \frac{k_3((l_{03} - l + h) + l - l_{03}) - k_3((l_{03} - l) + l - l_{03})}{h} = k_3$$

$$\frac{\frac{\partial}{\partial x}u_3(x-h) - \frac{\partial}{\partial x}u_3(x)}{h} = \frac{0 - k_3((l_{03} - l) + l - l_{03})}{h} = 0$$

Die beiden Differenzenquotienten stimmen an der kritischen Stelle $x = l_{03} - l$ nicht überein. Damit ist die Funktion $u_3|\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nicht zweimal differenzierbar. Somit ist auch die modifizierte Energiefunktion in diesem Beispiel nicht zweimal differenzierbar. Die Annahme am Anfang des Beweises wurde widerlegt und damit wurde die Behauptung gezeigt. \square

Es wurden die folgenden Eigenschaften der modifizierten Energiefunktion (3.4) mit einer beschränkten Box als Definitionsbereich \mathcal{D} nachgewiesen:

- U_{mod} ist auf \mathcal{D} beschränkt.
- U_{mod} ist auf \mathbb{R}^δ stetig.
- U_{mod} ist auf \mathcal{D} Lipschitz-stetig.
- U_{mod} ist auf \mathbb{R}^δ einmal stetig differenzierbar.
- Die ersten Ableitungen von U_{mod} sind auf \mathcal{D} beschränkt.

Zur Bestimmung der stabilen Gleichgewichtskonfigurationen wird nun das Optimierungsproblem (3.7) mit der modifizierten Energiefunktion (3.4) betrachtet.

$$\min_{\chi \in \mathcal{D}} U_{mod}(\chi). \tag{3.7}$$

Dabei ist der Definitionsbereich $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^\delta$ weiterhin eine beschränkte und abgeschlossene Box. Die Nebenbedingung aus (3.3) wird hier nicht benötigt, da die Zielfunktion im gesamten Definitionsbereich \mathcal{D} stetig differenzierbar ist, siehe Lemma 3.4. Es werden alle lokalen Minimalstellen gesucht, denn jede lokale Minimalstelle ist eine statisch stabile Gleichgewichtskonfiguration.

3.1.2 Gleichgewichtsbedingungen

In diesem Abschnitt werden Optimierungsprobleme für die Formfindung mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen von Tensegrity-Strukturen hergeleitet. Für beide Varianten aus Abschnitt 2.2.1 wird ein Optimierungsproblem für die Formfindung hergeleitet. Die segmentweise Betrachtung wird angewendet, wenn die Segmente mit hoher Steifigkeit als starr, und die knotenweise Betrachtung, wenn diese als elastisch angenommen werden, siehe Annahme 2.8.

Segmentweise Betrachtung

Es wird angenommen, dass keine äußeren Kräfte auf die Tensegrity-Struktur wirken.

Für die erste Gleichgewichtsbedingung (2.1) (**Kräfte**summe) muss die Gleichung (2.3) für alle Segmente mit hoher Steifigkeit der Tensegrity-Struktur erfüllt sein:

$$F_{Di} = 0 \in \mathbb{R}^n, \quad \text{für alle } i \in \mathcal{S}, \quad (3.8)$$

wobei F_{Di} die resultierende Kraft an Segment $i \in \mathcal{S}$ sei. Da ein Vektor genau dann dem Nullvektor entspricht, wenn seine Norm gleich Null ist, kann (3.8) äquivalent umgeformt werden in:

$$\|F_{Di}\|_2 = 0 \in \mathbb{R}, \quad \text{für alle } i \in \mathcal{S}. \quad (3.9)$$

Da die euklidische Norm immer größer oder gleich Null ist, können die n_d Gleichungen in (3.9) addiert werden, und es ergibt sich eine zu (3.9) äquivalente Aussage:

$$\sum_{i \in \mathcal{S}} \|F_{Di}\|_2 = 0. \quad (3.10)$$

Bei einer Tensegrity-Struktur ist die erste Gleichgewichtsbedingung erfüllt, wenn Gleichung (3.10) gilt.

Für die zweite Gleichgewichtsbedingung (**Momenten**summe) muss die Gleichung (2.4) für alle Segmente mit hoher Steifigkeit der Tensegrity-Struktur erfüllt sein. Es gibt den Fall, dass die Momentensumme für einen Bezugspunkt (Knoten) identisch Null ist, für den zweiten allerdings nicht, siehe Beispiel 2.13 d). In diesem Fall ist immer die Kräfte

summe ungleich Null. Um Fehler zu minimieren, wird im Folgenden die Momentensumme eines Segmentes bezüglich beider Knoten berechnet. Für die Berechnung der Momentensumme gilt:

$$M_{i_{\textcircled{j}}} = 0 \in \mathbb{R}^3, \quad \text{für alle } i \in \mathcal{S}, \quad (3.11)$$

$$j \in \{k_1, k_2\}; \quad k_1, k_2 \text{ seien die Knoten von Segment } i,$$

wobei $M_{i_{\textcircled{j}}}$ das resultierende Moment an Segment $i \in \mathcal{S}$ ist, mit Knoten \textcircled{j} als Bezugspunkt. Da ein Vektor genau dann dem Nullvektor entspricht, wenn seine Norm gleich Null ist, kann (3.11) äquivalent umgeformt werden in:

$$\|M_{i_{\textcircled{j}}}\|_2 = 0 \in \mathbb{R}, \quad \text{für alle } i \in \mathcal{S}, \quad (3.12)$$

$$j \in \{k_1, k_2\}; \quad k_1, k_2 \text{ seien die Knoten von Segment } i.$$

Da die euklidische Norm immer größer oder gleich Null ist, können die $2n_d$ Gleichungen in (3.12) addiert werden, und es ergibt sich eine zu (3.12) äquivalente Aussage:

$$\sum_{i \in \mathcal{S}} \sum_{j \in \{k_1, k_2\}} \|M_{i \ominus j}\|_2 = 0, \quad \text{wobei } k_1, k_2 \text{ die Knoten von Segment } i \text{ seien.} \quad (3.13)$$

Wenn Gleichung (3.13) gilt, dann ist bei einer Tensegrity-Struktur die zweite Gleichgewichtsbedingung erfüllt.

Wenn beide Gleichgewichtsbedingungen erfüllt sein sollen, müssen (3.10) und (3.13) gleichzeitig gelten. Da beide Summen immer größer oder gleich Null sind, können sie ohne Beschränkung der Allgemeinheit addiert werden, und es ergibt sich die Gleichung:

$$\sum_{i \in \mathcal{S}} \|F_{Di}\|_2 + \sum_{i \in \mathcal{S}} \sum_{j \in \{k_1, k_2\}} \|M_{i \ominus j}\|_2 = 0, \quad (3.14)$$

wobei k_1, k_2 die Knoten von Segment i seien.

Bemerkung 3.8 (Kräfte- und Momentensumme aus praktischer Sicht).

Die Addition des Kräfte- und Momentensumme in (3.14) ist nur aus formaler Sicht möglich, denn die Einheiten der beiden Summanden stimmen nicht überein.

Wenn die Gleichung (3.14) numerisch gelöst werden soll, dann sollte die Größenordnung der beiden Summanden (Kräfte- und Momentensumme) ähnlich sein. Deshalb wird eine Skalierung durchgeführt, indem die Momentensumme einen positiven Faktor erhält.

Am Beispiel von Topologie A, siehe Abbildung A.1, kann dieser Effekt beobachtet werden: Die Beträge der Momente berechnen sich mit $\|r \times F\|_2 = \|r\|_2 \|F\|_2 \sin(\vartheta)$, wobei r der Richtungsvektor, F der resultierende Kraftvektor und ϑ der Winkel zwischen r und F ist. Die Längen der Segmente mit hoher Steifigkeit sind 50 mm und 200 mm. Damit sind die resultierenden Momente bis zu 200 Mal größer als die resultierenden Kräfte. Aus diesem Grund bietet sich bei den in Anhang A verwendeten Topologien an, den Summand mit den resultierenden Momenten mit dem Faktor 0.01 zu verkleinern.

Aufgrund der in Bemerkung 3.8 beschriebenen Beobachtung, wird in (3.14) ein konstanter, positiver Faktor $a > 0$ eingeführt, welcher für die Angleichung der Wertebereiche der beiden Summanden verwendet werden kann:

$$\sum_{i \in \mathcal{S}} \|F_{Di}\|_2 + a \sum_{i \in \mathcal{S}} \sum_{j \in \{k_1, k_2\}} \|M_{i \ominus j}\|_2 = 0. \quad (3.15)$$

Die Kräfte und Momente in Gleichung (3.15) hängen von den Segmentkoordinaten $\chi \in \mathbb{R}^\delta$ ab:

$$\sum_{i \in \mathcal{S}} \|F_{Di}(\chi)\|_2 + a \sum_{i \in \mathcal{S}} \sum_{j \in \{k_1, k_2\}} \|M_{i \ominus j}(\chi)\|_2 = 0, \quad (3.16)$$

wobei k_1, k_2 die Knoten von Segment i und a ein reeller, positiver Faktor für die Angleichung der Wertebereiche der beiden Summanden seien. Für die Segmentkoordinaten wird jeweils ein beschränktes, abgeschlossenes Intervall in \mathbb{R} als Definitionsbereich angegeben. Damit ergibt sich insgesamt eine beschränkte und abgeschlossene Box als Definitionsbereich $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^\delta$.

Die linke Seite von Gleichung (3.16) ist immer größer oder gleich Null. Aus diesem Grund, kann diese

Gleichung auch als Minimierungsproblem geschrieben werden:

$$\min_{\chi \in \mathcal{D}} \left(\sum_{i \in \mathcal{S}} \|F_{Di}(\chi)\|_2 + a \sum_{i \in \mathcal{S}} \sum_{j \in \{k_1, k_2\}} \|M_{i\textcircled{1}}(\chi)\|_2 \right). \quad (3.17)$$

Dabei werden von (3.17) alle globalen Minimalstellen (Minimalwert ist Null) gesucht. Im folgenden Beispiel 3.9 ist die Zielfunktion von (3.17) grafisch dargestellt.

Beispiel 3.9 (Beispiel für die Kräfte- und Momentensumme).

In diesem Beispiel wird die Zielfunktion von (3.17), die Kräfte- und Momentensumme einer Tensegrity-Struktur, grafisch dargestellt. Es wird Topologie A verwendet, mit den in Abbildung A.1 angegebenen Bezeichnungen und Segmentparametern. Die Segmente mit hoher Steifigkeit werden als starr angenommen. Zur besseren Illustration der Zielfunktion wird die Tensegrity-Struktur bis auf Freiheitsgrad zwei eingeschränkt. Dafür werden die beiden starren Segmente 2 und 3 in ihrem Schwerpunkt mit jeweils einem Festlager gelagert (bei $x_2 := 48.35$ mm beziehungsweise $x_3 := 151.65$ mm und $y_2 = y_3 := 0$ mm), siehe Abbildung 3.4(a). Sie rotieren um ihren jeweiligen Schwerpunkt, mit den Winkeln φ_2 und φ_3 .

In Abbildung 3.4(b) sind die Höhenlinien und das Gebirge der Zielfunktion von (3.17) dargestellt. Dabei wurde, wie in Bemerkung 3.8 beschrieben, ein Faktor von $a := 0.01$ für die Momente verwendet. An den Positionen $(\varphi_2, \varphi_3) = (\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$, $(\varphi_2, \varphi_3) = (\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi)$, $(\varphi_2, \varphi_3) = (\frac{3}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$, $(\varphi_2, \varphi_3) = (\frac{3}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi)$ liegt jeweils eine stabile Gleichgewichtskonfiguration vor. Diese sind in Abbildung 3.4(b) orange eingezeichnet.² \square

Knotenweise Betrachtung

Es wird angenommen, dass keine äußeren Kräfte auf die Tensegrity-Struktur wirken.

Damit die Gleichgewichtsbedingungen erfüllt sind, muss Gleichung (2.5) für alle Knoten der Tensegrity-Struktur erfüllt sein:

$$F_{\textcircled{1}} = 0 \in \mathbb{R}^n, \quad \text{für alle } i \in \{1, \dots, n_k\}. \quad (3.18)$$

Mit den gleichen Umformungen wie von (3.8) bis (3.10) kann (3.18) äquivalent umgeformt werden zu:

$$\sum_{i=1}^{n_k} \|F_{\textcircled{1}}\|_2 = 0. \quad (3.19)$$

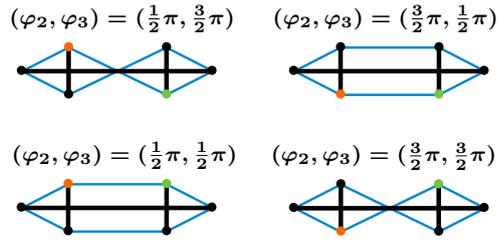
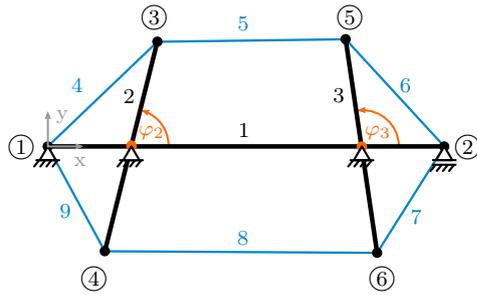
Die Gleichgewichtsbedingungen sind also erfüllt, wenn Gleichung (3.19) gilt, und dann liegt eine Gleichgewichtskonfiguration vor.

Die resultierenden Kräfte an den Knoten hängen von den Segmentkoordinaten $\chi \in \mathbb{R}^\delta$ ab:

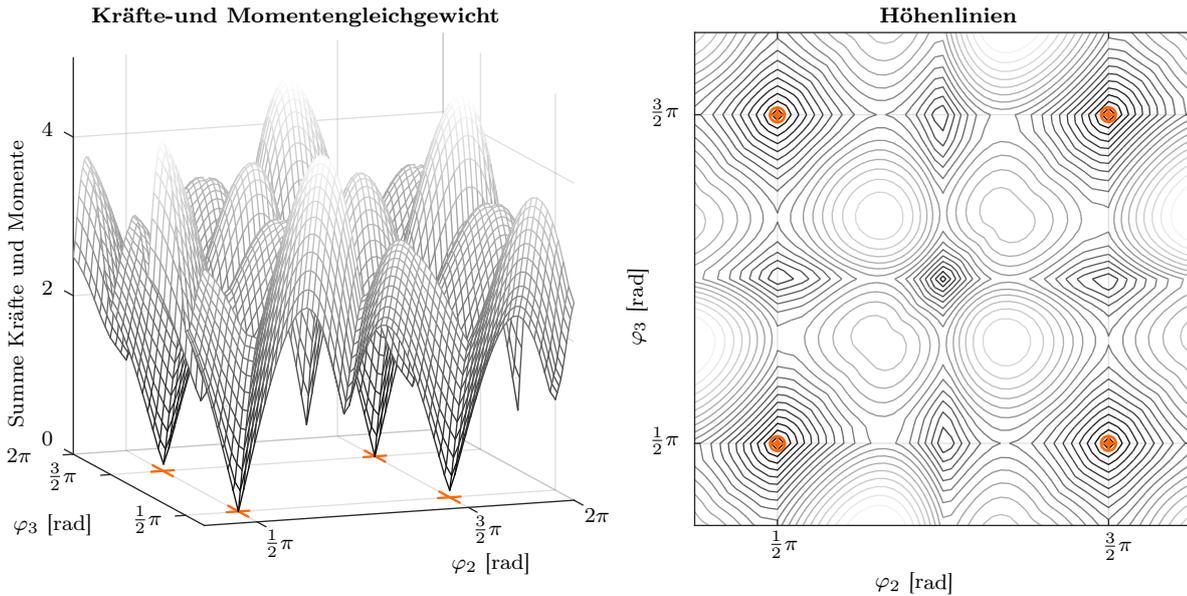
$$\sum_{i=1}^{n_k} \|F_{\textcircled{1}}(\chi)\|_2 = 0. \quad (3.20)$$

Für die Segmentkoordinaten wird jeweils ein beschränktes, abgeschlossenes Intervall in \mathbb{R} als Definitionsbereich angegeben. Damit ergibt sich insgesamt eine beschränkte und abgeschlossene Box als Definitionsbereich $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^\delta$.

²An den beiden Stellen $(\varphi_2, \varphi_3) = (\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi)$, $(\varphi_2, \varphi_3) = (\frac{3}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ sind die Gleichgewichtsbedingungen nicht erfüllt. Dies liegt daran, dass die x-Position der beiden starren Segmente in dieser Gleichgewichtskonfiguration an einer anderen Stelle ist (48.62 mm), als bei den beiden anderen Gleichgewichtskonfigurationen (die festgelegten 48.35 mm). Diese Kräfte werden durch die zusätzlichen Lager aufgenommen und müssten formal in die Rechnung mit aufgenommen werden. Da Tensegrity-Strukturen freistehend sind, ist dies eine Situation die nur bei der Veranschaulichung auftritt und nicht in die allgemeinen Betrachtungen aufgenommen werden muss.



(a) Topologie A mit Bezeichnungen und verwendeten Parametern und den Gleichgewichtskonfigurationen.



(b) Links: Kräfte- und Momentensumme, Rechts: Höhenlinien der Zielfunktion mit eingezeichneten Minima (orange).

Abbildung 3.4: Beispiel für die Kräfte- und Momentensumme.

Die linke Seite von Gleichung (3.20) ist immer größer oder gleich Null. Aus diesem Grund, kann diese Gleichung auch als Minimierungsproblem geschrieben werden:

$$\min_{\chi \in \mathcal{D}} \left(\sum_{i=1}^{n_k} \|F_{\text{①}}(\chi)\|_2 \right). \tag{3.21}$$

Dabei werden von (3.21) alle globalen Minimalstellen (Minimalwert ist Null) gesucht.

Eigenschaften und Diskussion der Optimierungsprobleme

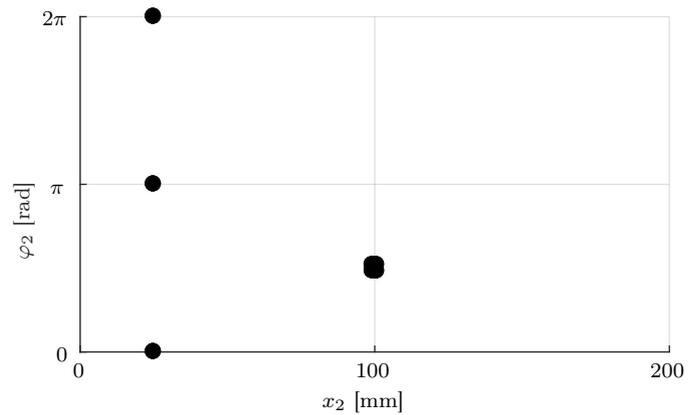
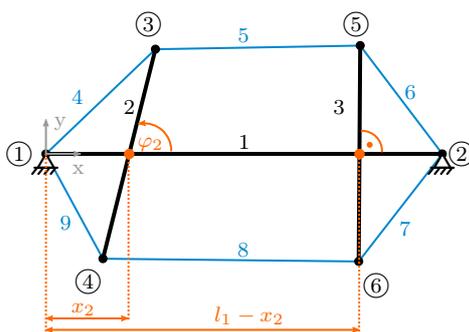
In diesem Abschnitt werden Eigenschaften von den Optimierungsproblemen (3.17) und (3.21) analysiert. Der Definitionsbereich \mathcal{D} der beiden Optimierungsprobleme ist identisch. Er ist eine abgeschlossene, beschränkte Box in \mathbb{R}^{δ} , und damit kompakt.

In Beobachtung 3.3 wurde festgestellt, dass die Abbildung $L_f(\cdot)$, $f = 1, \dots, n_s$, welche die Segmentvektoren bildet, stetig differenzierbar ist. Allerdings sind die Einzelkräfte $F_f = k_f(\|L_f\|_2 - l_{0f}) \frac{L_f}{\|L_f\|_2}$ an der Stelle $\|L_f\|_2 = 0$ nicht definiert. Dieser Fall kann im Definitionsbereich \mathcal{D} auftreten, siehe Beispiel 3.10. Aus diesem Grund sind die Zielfunktionen von (3.17) und (3.21) nicht in ganz \mathcal{D} definiert. Durch die Forderung, dass ein Segment immer eine Anfangslänge größer als Null hat und dass die Segmente mit geringer Steifigkeit immer eine Länge größer oder gleich ihrer Anfangslänge haben, kann dieser Fall bei den

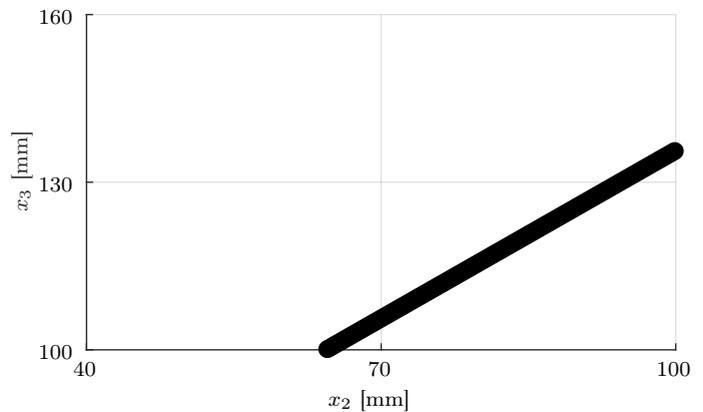
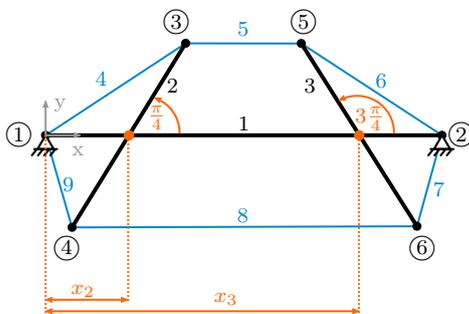
gesuchten Lösungen der Optimierungsprobleme nicht vorkommen. Außerhalb dieser Punkte sind die Zielfunktionen stetig. Ein Hinzufügen der Nebenbedingung $\|L_f\|_2 > l_{0f}$, wie in (3.3), würde zu den in Beispiel 3.1 dargestellten ungünstigen Eigenschaften des zulässigen Bereiches führen.

Beispiel 3.10 (Nicht definierte Stellen der Kräfte- und Momentensumme).

Es wird die gleiche Tensegrity-Struktur wie in Beispiel 3.1 verwendet. Es werden die ersten beiden Einschränkungen des Freiheitsgrades aus Beispiel 3.1 verwendet: a) und b). In Abbildung 3.5 ist der Definitionsbereich der Segmentkoordinaten dargestellt und es sind die Punkte schwarz markiert, in denen die Zielfunktionen von (3.17) und in (3.21) nicht definiert sind (weil die Länge eines Segmentes gleich Null ist).



(a) Freiheitsgrad zwei, Segment 2 kann entlang der x-Achse verschoben und um den Schwerpunkt rotiert werden. Segment 3 bewegt sich entsprechend der Position von Segment 2 entlang der x-Achse, Winkel von Segment 3 und y-Position beider Segmente (2 und 3) sind fixiert. Definitionsbereich: $\mathcal{D} := [0 \text{ mm}, 200 \text{ mm}] \times [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}^2$.



(b) Freiheitsgrad zwei, Segment 2 und 3 bewegen sich entlang der x-Achse, Winkel und y-Position dieser Segmente sind fixiert. Definitionsbereich: $\mathcal{D} := [40 \text{ mm}, 100 \text{ mm}] \times [100 \text{ mm}, 160 \text{ mm}] \subset \mathbb{R}^2$.

Abbildung 3.5: An den schwarz markierten Punkten ist die Zielfunktion von (3.17) und (3.21) nicht definiert.

Ein Quadrieren der euklidischen Normen in den Zielfunktionen von (3.17) und (3.21) würde zu verbesserten Eigenschaften der Zielfunktion bezüglich der Differenzierbarkeit führen. Da allerdings, wie oben beschrieben, die Kraftfunktionen nicht im gesamten Definitionsbereich \mathcal{D} definiert sind, können trotzdem keine klassischen Optimierungsverfahren auf diese Optimierungsprobleme angewendet werden.

3.1.3 Zusammenfassung und Überblick über Optimierungsverfahren

In den obigen Abschnitten wurden drei Optimierungsprobleme hergeleitet, welche für die Formfindung verwendet werden können. Dabei ist bei diesen Optimierungsproblemen die Aufgabe, *alle* globalen- beziehungsweise lokalen Minimalstellen zu finden. Bei den Optimierungsproblemen (3.17) und (3.21) werden alle globalen Minimalstellen gesucht und diese bilden alle, im Definitionsbereich vorhandenen, statisch stabilen und instabilen Gleichgewichtskonfigurationen. Bei Optimierungsproblem (3.7) werden alle lokalen Minimalstellen gesucht, welche alle, im Definitionsbereich vorhandenen, statisch stabilen Gleichgewichtskonfigurationen bilden.

Optimierungsverfahren, welche zur Lösung von globalen Optimierungsproblemen verwendet werden, sind beispielsweise Branch and Bound Algorithmen, welche die Intervallarithmetik nutzen, [Han04]. Mit Hilfe von speziellen Branch and Bound Optimierungsverfahren können alle globalen Minimalstellen eines Optimierungsproblems bestimmt werden. Ein solcher Algorithmus ist beispielsweise die α BB-Methode [Eic16]. Diese Verfahren benötigen aber meist die zweite Ableitung der Zielfunktion (welche bei den hier vorliegenden Optimierungsproblemen nicht existiert) und die benötigte Zeit zur Bestimmung aller Lösungen steigt mit der Dimension des Optimierungsproblems stark an, sodass in der Regel nur bis zu sechs Variablen optimiert werden können. In den hier vorliegenden Optimierungsproblemen werden aber bereits bei Topologie B (siehe Abbildung A.2) neun Variablen ermittelt.

Eine weitere Möglichkeit, um mehrere Minimalstellen zu finden, ist, ein lokales Optimierungsverfahren von verschiedenen Punkten aus starten zu lassen. Wenn in verschiedenen Punkten gestartet wird, werden in manchen Fällen unterschiedliche Lösungen gefunden. Dies sind sogenannte Multistart-Algorithmen. Ob dieses Verfahren alle, oder nur möglichst viele, Minimalstellen ermittelt, hängt von der Wahl der Startpunkte des lokalen Optimierungsverfahrens und auch von den Eigenschaften des Optimierungsproblems ab. Dabei werden nicht nur globale Minimalstellen bestimmt, sondern auch lokale. Ein Multistart-Algorithmus ist das MULTI LEVEL SINGLE LINKAGE Verfahren (kurz: MLSL, siehe Abschnitt 2.2.5 und [Kan87a], [Kan87b]). Dieses Verfahren wird in einer angepassten Version in Abschnitt 3.3 auf das Optimierungsproblem (3.7) angewendet.

Häufig verwendete Verfahren zur Bestimmung von globalen Minimalstellen sind außerdem die genetischen Algorithmen. Im folgenden Abschnitt 3.2 werden Algorithmen entwickelt, welche die Optimierungsprobleme (3.17) beziehungsweise (3.21) lösen und auf genetischen Algorithmen basieren.

3.2 Genetische Algorithmen für die Formfindung

In diesem Abschnitt wird beschrieben, wie die Formfindung mit Hilfe von genetischen Algorithmen durchgeführt werden kann. Ein Überblick über den Stand der Technik bei genetischen Algorithmen ist in Abschnitt 2.2.3 und 2.2.4 gegeben. In diesem Abschnitt werden die genetischen Algorithmen für die Formfindung angepasst. Eine wesentliche Anpassung ist dabei die Einführung des GRUPPIERUNGSTESTS, welcher dafür sorgt, dass mit genetischen Algorithmen mehrere Optimalstellen gefunden werden können. Es werden drei verschiedene Algorithmen entwickelt, welche auf genetischen Algorithmen basieren. Im Abschnitt 3.4.2 wird überprüft, ob diese für die Formfindung bei Tensegrity-Strukturen geeignet sind.

Bemerkung 3.11 (Optimierungsvariablen).

In diesem Kapitel wird sich auf die Bestimmung der Gleichgewichtskonfigurationen durch Überprüfung der Gleichgewichtsbedingungen bezogen, siehe Abschnitt 3.1.2. Dabei werden beide Konzepte für die Segmente mit hoher Steifigkeit aus Annahme 2.8 verwendet: sie werden teilweise als elastisch und teilweise als starr angenommen. Da im Fall, in dem diese Segmente elastisch sind, die Steifigkeiten groß gewählt werden, ist ihre Längenänderung klein (kleiner als 10^{-4} mm). Aus diesem Grund werden im Folgenden die Segmentkoordinaten als die Optimierungsvariablen verwendet (siehe Abschnitt 2.1.6) und nicht die Knotenkoordinaten. Dadurch verringert sich der eigentlich höhere Freiheitsgrad einer Tensegrity-Struktur, der bei Variante B) aus Definition 2.8 vorliegt.

Bemerkung 3.12 (Minimierung / Maximierung).

Die genetischen Algorithmen, wie sie in Abschnitt 2.2.3 vorgestellt wurden, maximieren die Fitnesswerte der Individuen. Die Optimierungsprobleme (3.17) und (3.21) sind dahingegen Minimierungsaufgaben. Deshalb werden die Zielfunktionswerte, welche berechnet werden, mit -1 multipliziert. Somit sind alle Fitnesswerte kleiner Null und eine Maximierung führt zu einer Lösung der Optimierungsprobleme.

Alle drei in diesem Abschnitt vorgestellten Algorithmen enthalten einen neuen Aspekt bei genetischen Algorithmen, den sogenannten Gruppierungstest.

Der GRUPPIERUNGSTEST ist der Teil des genetischen Algorithmus, der dafür sorgt, dass mehrere Optimalstellen gefunden werden, und nicht nur eine, wie im klassischen genetischen Algorithmus.

Die Idee für diesen zusätzlichen Schritt im genetischen Algorithmus stammt aus [Xu10] und [Jon75, Kapitel 4.7]. Allerdings wurden die dort beschriebenen Verfahren abgewandelt und an das vorliegende Problem angepasst. Die Grundidee wird in [Jon75] beschrieben. Sie kommt aus der natürlichen Evolutionstheorie. Wenn viele Individuen gleich gut angepasst sind, dann erhöht sich der Wettbewerb auf begrenzte Ressourcen (zum Beispiel Nahrung) und die Lebenserwartung sinkt.

Als Umsetzung dieser Idee im Algorithmus wird in [Jon75] vorgeschlagen, dass für ein neues Individuum (Kind) in der Population ein ähnliches Individuum sterben muss. Das heißt, wenn ein neuer Lösungskandidat hinzukommt, wird ein ähnlicher Lösungskandidat entfernt. Das wird in [Jon75] realisiert, indem eine gewisse Anzahl an Individuen ausgewählt wird (dort zwischen 1 und 5), und das Individuum, welches am ähnlichsten zum neuen Kind ist, wird entfernt. Ähnlichkeit wird hierbei durch den Hamming-Abstand im Genotyp dargestellt, welcher in [Jon75] binär repräsentiert ist.

In [Xu10] wird bei der Umsetzung etwas anders vorgegangen. Die Individuen liegen im Genotyp binär vor. Es wird der Hamming-Abstand zwischen dem Genotyp von jeweils zwei Individuen bestimmt. Außerdem wird eine Grenze festgelegt, ab welchem Abstand zwei Individuen als *ähnlich* zählen. Sind zwei Individuen ähnlich, dann wird eines dieser beiden Individuen bestraft. Es wird das Individuum bestraft, welches

den schlechteren Fitnesswert hat. Die Bestrafung erfolgt, indem der Fitnesswert dieses Individuums um einen vorher festgelegten Faktor verschlechtert wird. Der Hamming-Abstand berücksichtigt nicht die Signifikanz der unterschiedlichen Bits, wodurch im Phänotyp sehr unterschiedliche Individuen durch den Hamming-Abstand des Genotyps als ähnlich bestimmt werden können.

Funktionsprinzip 3.13 (Gruppierungstest).

Der Gruppierungstest, wie er in diesem Kapitel verwendet wird, wird auf den Phänotyp der Individuen angewendet, also auf einen reellwertigen Vektor mit den zu bestimmenden Segmentkoordinaten. Der Abstand zwischen zwei Individuen wird mit der euklidischen Norm bestimmt. Dabei kann es aber sein, dass bei unterschiedlich großen Definitionsbereichen der einzelnen Segmentkoordinaten eine Komponente den Abstand dominiert. Damit dies nicht passiert, wird der Definitionsbereich für diese Berechnung auf die Einheitsbox skaliert. Das heißt, jede Komponente hat als Definitionsbereich $[0, 1] \in \mathbb{R}$. Damit werden auch die Vektoren mit den Segmentkoordinaten der einzelnen Individuen skaliert. Für den Gruppierungstest wird der Abstand zwischen je zwei skalierten Vektoren mit der euklidischen Norm berechnet und mit einer vorgegebenen Schranke verglichen. Wenn dieser Abstand kleiner als eine gewisse Schranke ist, wird das Individuum, welches den schlechteren Fitnesswert hat, bestraft. Die Bestrafung erfolgt durch die Multiplikation des Fitnesswertes mit einer natürlichen Zahl.³

Beispiel 3.14 (Gruppierungstest).

In diesem Beispiel wird die Wirkung des Gruppierungstests illustriert. Die vorliegende Situation ist links in Abbildung 3.6 dargestellt. Es gibt nur eine Optimierungsvariable, welche auf der Abszisse abgetragen ist. Die Fitnessfunktion ist schwarz dargestellt. Die Kreise markieren die Individuen *a* bis *f* im Phänotyp, mit ihrem jeweiligen Fitnesswert. Für den Gruppierungstest wird der euklidische Abstand zwischen je zwei Individuen gebildet und er wird mit dem minimalen Abstand (blaues Intervall) verglichen. Der Abstand zwischen Individuum *a* und *b*, sowie der Abstand zwischen Individuum *b* und *c* ist kleiner als der minimale Abstand. Dabei sind die Individuen *a* und *c* diejenigen, mit dem jeweils kleineren Fitnesswert. Diese beiden Individuen werden bestraft. Ihr Fitnesswert wird verringert, siehe rechts in Abbildung 3.6. Damit ist ihr Fitnesswert kleiner als der von Individuum *e* und *f*. Somit werden bei der Selektion die Individuen *e* und *f* bevorzugt vor den Individuen *a* und *c* verwendet und somit steigt die Wahrscheinlichkeit, dass das zweite Maximum in einer folgenden Iteration bestimmt wird. ┘

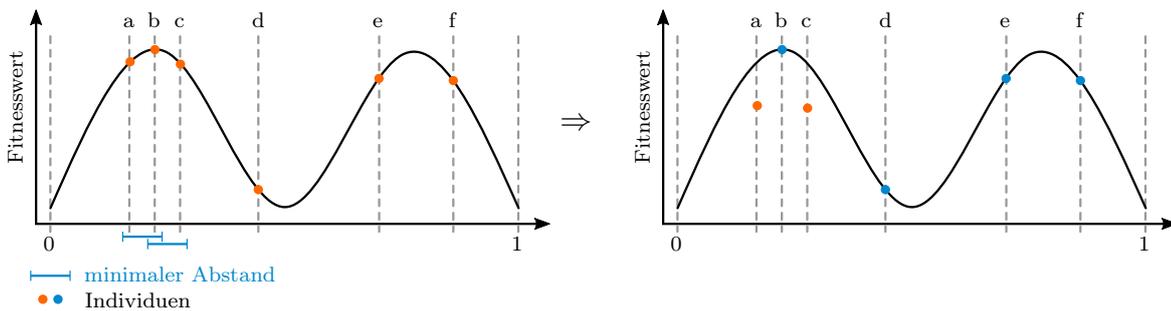


Abbildung 3.6: Arbeitsweise des Gruppierungstests.

Die praktischen Auswirkungen des Gruppierungstests werden in Beispiel 3.18 illustriert.

³Der Faktor wird an den speziellen genetischen Algorithmus beziehungsweise an den Wertebereich der Fitnesswerte angepasst.

Ein weiterer Test, der in allen drei vorgestellten Algorithmen verwendet wird, ist der LÄNGENTEST. Wie bereits in vorherigen Abschnitten beschrieben, ist es aus technischer Sicht meist sinnvoll, wenn die Segmente mit geringer Steifigkeit nur auf Zug, und nicht auf Druck beansprucht sind. In diesem Fall sind also alle Segmente mit geringer Steifigkeit Zugsegmente. Der Längentest soll diese Eigenschaft in den Gleichgewichtskonfigurationen sicherstellen. Außerdem werden durch diese Einschränkung die nicht definierten Stellen bei der Kräfte- und Momentensumme ausgeschlossen.

Funktionsprinzip 3.15 (Längentest).

*Der Längentest bestraft Individuen, bei denen mindestens ein Segment mit geringer Steifigkeit auf Druck beansprucht wird, indem der Fitnesswert dieses Individuums mit einer natürlichen Zahl multipliziert wird.*⁴

Im Folgenden werden die drei entwickelten Algorithmen vorgestellt.

3.2.1 FGenPrioFe-Algorithmus

Der FGenPrioFe-Algorithmus⁵, ist ein reeller genetischer Algorithmus, bei dem im Anschluss der FE-Formfindungsalgorithmus (siehe Abschnitt 2.2.2) durchgeführt wird. Der Programmablaufplan ist in Abbildung 3.7 vereinfacht dargestellt. Die einzelnen Schritte im Algorithmus werden im Folgenden genauer erläutert.

Repräsentation der Individuen: Die Lage einer Tensegrity-Struktur wird durch ihre Segmentkoordinaten bestimmt, siehe auch Bemerkung 3.11. Die Individuen haben in diesem Algorithmus eine reelle Repräsentation, siehe Abschnitt 2.2.4. Ein Individuum besteht also aus dem Vektor mit den Segmentkoordinaten. Genotyp und Phänotyp stimmen in diesem Algorithmus überein.⁶

Fitnessfunktion: Für die Berechnung der Fitnessfunktion werden die Segmente mit hoher Steifigkeit der Tensegrity-Struktur als starr angenommen, siehe Annahme 2.8 A). Eine Gleichgewichtskonfiguration wird in diesem Algorithmus durch die Überprüfung der Gleichgewichtsbedingungen mit Gleichung (3.16) bestimmt. Das Optimierungsproblem, das in diesem Algorithmus gelöst wird, ist demnach (3.17). Entsprechend Bemerkung 3.12 wird (3.17) als Maximierungsproblem geschrieben:

$$\max_{\chi \in \mathcal{D}} \left(- \sum_{i \in \mathcal{S}} \|F_{Di}(\chi)\|_2 - a \sum_{i \in \mathcal{S}} \sum_{j \in \{k_1, k_2\}} \|M_{i \oplus j}(\chi)\|_2 \right). \quad (3.22)$$

In (3.22) ist $\chi \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^\delta$ der Vektor mit den Segmentkoordinaten der Tensegrity-Struktur. Der Parameter a wird entsprechend Bemerkung 3.8 für die in dieser Arbeit verwendeten Tensegrity-Strukturen als $a := 0.01$ gewählt.

⁴Der Faktor wird an den speziellen genetischen Algorithmus beziehungsweise an den Wertebereich der Fitnesswerte angepasst.

⁵Bildung des Namens: F: Formfindung, Gen: Genetischer Algorithmus, Fe: FE-Formfindungsalgorithmus, Prio: der genetische Algorithmus wird vor (prio) dem FE-Formfindungsalgorithmus durchgeführt.

⁶Wie in Abschnitt 2.2.3 und 2.2.4 beschrieben, gibt es bei genetischen Algorithmen sowohl die binäre als auch die reelle Repräsentation von Individuen. In der Literatur wird keine der beiden Varianten bevorzugt. Aus diesem Grund werden in diesem Abschnitt beide Varianten getestet. Der erste Algorithmus FGenPrioFe verwendet die reelle Repräsentation und die beiden folgenden Algorithmen FGenFeFi und FGenFeFiMu verwenden die binäre Repräsentation.

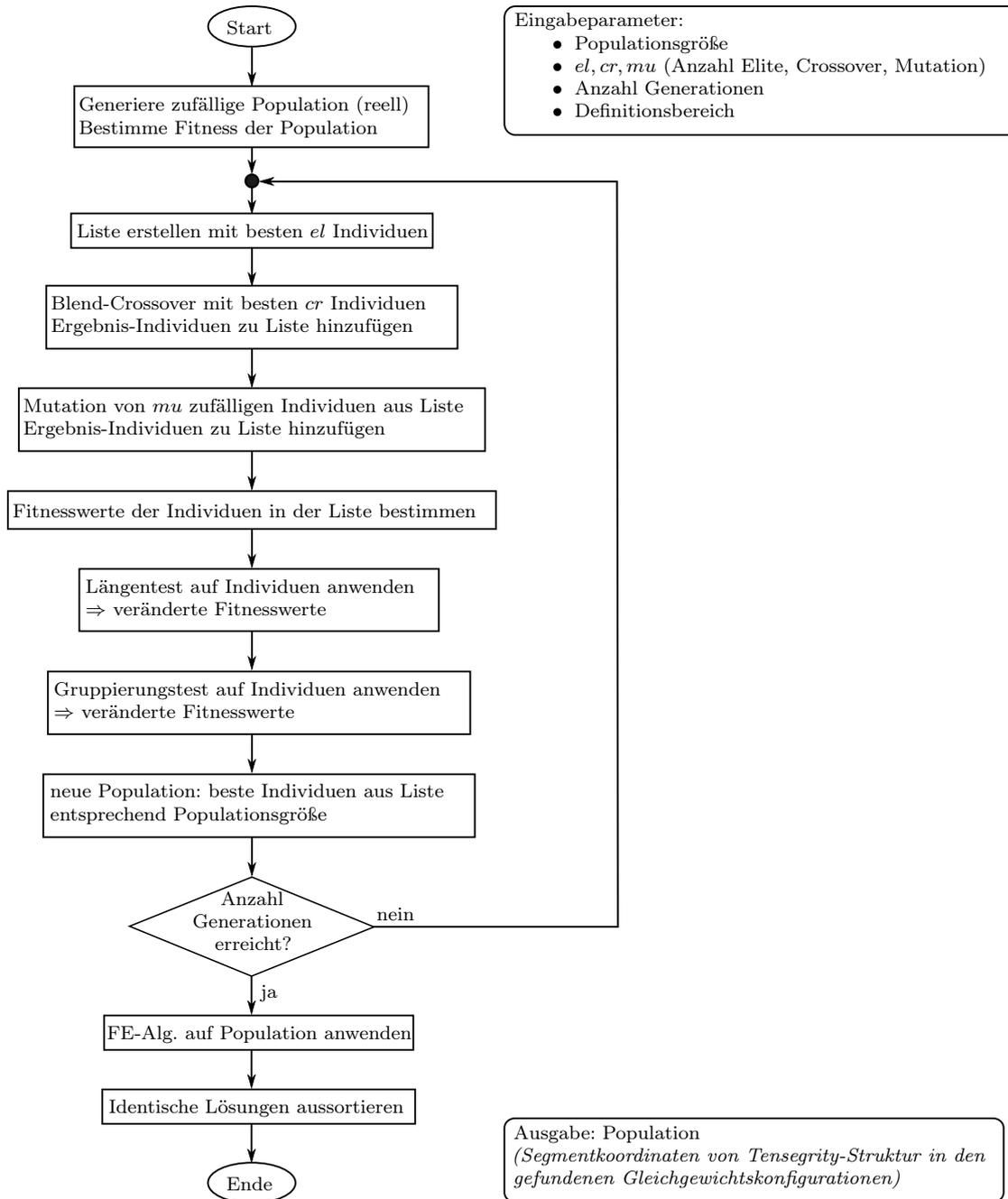


Abbildung 3.7: Programmablaufplan des FGenPrioFe-Algorithmus.

Selektion: Als Selektionsverfahren verwendet der FGenPrioFe-Algorithmus die Plus-Strategie, siehe Abschnitt 2.2.4. Diese Wahl wurde getroffen, da bei der Plus-Strategie die besten Individuen mit Sicherheit erhalten bleiben. Bei der Rouletterad-Selektion werden eventuell bereits gefundene Optimalstellen wieder verworfen. Bei der Tournament-Selektion bleibt nur das beste Individuum mit Sicherheit erhalten. Da im FGenPrioFe-Algorithmus aber mehrere globale Optimalstellen gesucht sind, reicht dies für den sicheren Erhalt aller gefundenen Optimalstellen nicht aus. Auch werden bei den anderen Selektionsverfahren mehrere Kopien desselben Individuums in die neue Population aufgenommen. Da in diesem Algorithmus allerdings mehrere Lösungen gesucht werden, und damit die Diversität innerhalb der Population wichtig ist, ist die Selektion mit der Plus-Strategie den anderen Verfahren vorzuziehen. Im FGenPrioFe-Algorithmus werden für die Selektion die besten el Individuen (siehe Tabelle 3.1) am Anfang einer Generation gespeichert, welche unverändert bleiben und nach der Rekombination und der Mutation mit den neuen Individuen verglichen werden, welche am besten sind. Die besten Individuen (Anzahl entsprechend Populationsgröße) werden in die nächste Generation übernommen.

Rekombination: Da die Individuen eine reelle Repräsentation haben, muss das Verfahren für die Rekombination daran angepasst sein. In diesem Algorithmus wird das Blend-Crossover, siehe Abschnitt 2.2.4, verwendet. Das Blend-Crossover wird mit den cr (siehe Tabelle 3.1) besten Individuen der aktuellen Population ausgeführt. Dabei muss der Parameter α festgelegt werden. Der Wert für α wird entsprechend der Empfehlung in [Deb01, Kapitel 4.2] gewählt: $\alpha := 0.5$. Wie in Abschnitt 2.2.4 beschrieben, liegen neue Individuen nicht sicher im Definitionsbereich. Damit der Rechenaufwand nicht zu hoch ist, wenn dies öfter der Fall ist, wird die Berechnung der neuen Individuen auf maximal fünf festgelegt. Wenn nach fünf berechneten Individuen noch nicht zwei Individuen im Definitionsbereich liegen, werden entsprechend viele Eltern-Individuen (ein oder zwei) in die neue Population übernommen.

Mutation: Es wird, aufgrund der reellen Repräsentation der Individuen, das Verfahren aus Abschnitt 2.2.4 und Abbildung 2.21 übernommen. Die Mutation wird mit mu -vielen (siehe Tabelle 3.1) Individuen durchgeführt. Dabei werden sowohl die Elite-Individuen aus der Selektion als auch die Ergebnisse aus der Rekombination verwendet. Für die Mutation werden diese Individuen kopiert, mutiert und dann der Population hinzugefügt. Somit liegen nach der Mutation $el + cr + mu$ Individuen in der Population vor, welche am Ende der Generation entsprechend ihrer Fitnesswerte auf die gegebene Populationsgröße reduziert werden.

Längentest: Der Längentest wurde in Definition 3.15 eingeführt. Der Faktor, der für die Bestrafung der Individuen verwendet wird, ist in Tabelle 3.1 angegeben.

Gruppierungstest: Der Gruppierungstest wurde in Definition 3.13 eingeführt. Es werden Individuen bestraft (Faktor siehe Tabelle 3.1), welche sich zu dicht (siehe Tabelle 3.1) an anderen Individuen befinden und den schlechteren Fitnesswert haben. Da der Längentest vor dem Gruppierungstest ausgeführt wird, werden bevorzugt Individuen weiter bestraft, bei denen die Segmente mit geringer Steifigkeit eine zu kleine Länge haben.

Abbruchkriterium: Der genetische Algorithmus wird beendet, wenn eine vorher vorgegebene Anzahl an Generationen n_{gen} durchgeführt wurde.

Auswertung der Ergebnisse: Der genetische Algorithmus bestimmt über alle Generationen Lösungen, die dicht an den gesuchten Maximalstellen liegen. Es kommt allerdings vor, dass der Algorithmus nicht exakt im Maximum landet, sondern nur in der Nähe, siehe erste Zeile in Abbildung 3.8. Aus diesem Grund wird, nach Beendigung des genetischen Algorithmus, der FE-Formfindungsalgorithmus auf alle Individuen angewendet.⁷ So wird von Individuen, welche sich nur in der Nähe einer Gleichgewichtskonfiguration befinden, die genaue Gleichgewichtskonfiguration bestimmt. Das Ergebnis des FE-Formfindungsalgorithmus ist in der zweiten Zeile in Abbildung 3.8 dargestellt. Die Anzahl der verwendeten Iterationen und Lastinkremente ist in Tabelle 3.1 angegeben.

Im Anschluss werden alle identischen Lösungen aussortiert, denn jede Lösung (das heißt Gleichgewichtskonfiguration) wird nur einmal benötigt.

Beispiel 3.16 (Individuen am Ende des FGenPrioFe-Algorithmus vor und nach dem FE-Formfindungsalgorithmus).

Als Tensegrity-Struktur wird in diesem Beispiel Topologie A verwendet, mit den Segmentparametern aus Abbildung A.1. Der FGenPrioFe-Algorithmus wurde mit $n_{ind} := 10$ Individuen und $n_{gen} := 550$ Generationen durchgeführt. Die anderen Parameter wurden so gewählt, wie sie in Tabelle 3.1 angegeben sind. In der ersten Zeile in Abbildung 3.8 sind die besten vier Individuen nach dem genetischen Algorithmus angegeben. Jedes der vier Individuen liegt in der Nähe einer der Gleichgewichtskonfigurationen, siehe Abbildung A.1. Die Gleichgewichtskonfigurationen wurden allerdings nicht exakt bestimmt. In der zweiten Zeile in Abbildung 3.8 sind die Individuen dargestellt, nachdem der FE-Formfindungsalgorithmus angewendet wurde. Die vier Individuen befinden sich in je einer der vier möglichen stabilen Gleichgewichtskonfigurationen. \lrcorner

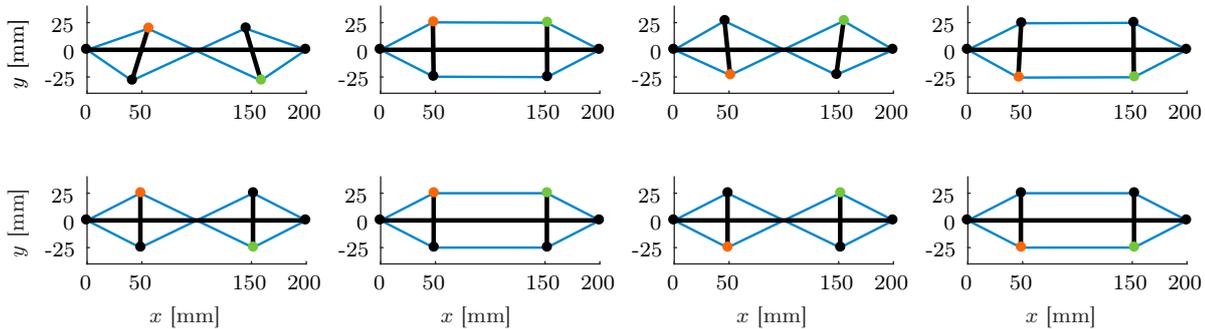


Abbildung 3.8: Erste Zeile: Individuen nach dem genetischen Algorithmus. Lösungen sind teilweise noch ungenau. Zweite Zeile: Individuen nach dem FE-Formfindungsalgorithmus. Alle vier Gleichgewichtskonfigurationen wurden bestimmt.

⁷Da die Lösungen bereits in der Nähe der gesuchten Minimalstellen liegen, könnte statt des FE-Formfindungsalgorithmus ein lokales Optimierungsverfahren auf die Zielfunktion (3.22) angewendet werden. Durch Quadrieren der euklidischen Normen in der Zielfunktion könnten effiziente lokale Optimierungsverfahren (beispielsweise nichtlineare Least-Square-Verfahren) mit gutem Konvergenzverhalten verwendet werden. Allerdings ist die Zielfunktion nicht im gesamten Definitionsbereich definiert. Durch den Längentest werden diese Bereiche im genetischen Algorithmus ausgeschlossen, sodass konventionelle lineare Optimierungsverfahren funktionieren sollten. Da aber nicht garantiert werden kann, dass ein solches Verfahren nicht in eine nicht-definierte Stelle der Zielfunktion läuft, wurde dieser Ansatz in dieser Arbeit nicht weiter verfolgt.

Festlegung der Parameter: Der FGenPrioFe-Algorithmus hat mehrere Parameter, die festgelegt werden müssen. Bis auf die Anzahl an Individuen n_{ind} und Anzahl an Generationen n_{gen} werden diese für alle möglichen Aufgabenstellungen, Topologien und Segmentparameter identisch gewählt und sind in Tabelle 3.1 angegeben. Wenn in Abschnitt 3.4.2 andere Parameter verwendet werden, wird dies explizit angegeben. Die Parameter wurden experimentell und mit Hilfe heuristischer Untersuchungen, welche teilweise in Abschnitt 3.4 vorgestellt werden, festgelegt.

Parameter	el	cr	mu	Abstand Gruppierungstest	Bestrafung
Wert	$\min\{n_{ind}, 20\}$	n_{ind}	$\min\{n_{ind}, 5\}$	$0.05 \cdot \delta$	100

Parameter	Iterationen	Lastinkremente
Wert	20	20

Tabelle 3.1: Festlegung der Parameter des FGenPrioFe-Algorithmus. Dabei gilt die Bestrafung sowohl für den Gruppierungs- als auch für den Längentest. Die Parameter in der unteren Tabelle beziehen sich auf den FE-Formfindungsalgorithmus.

Tests, ob und wie gut dieser Algorithmus funktioniert, werden in Kapitel 3.4.2 angegeben. Hier wird im folgenden Beispiel 3.17 der prinzipielle Ablauf des Algorithmus veranschaulicht und verschiedene Situationen, die eintreten können, werden erläutert. Außerdem wird im Beispiel 3.18 illustriert, wie wichtig der Gruppierungstest ist, damit mehrere Lösungen gefunden werden.

Beispiel 3.17 (Ablauf des FGenPrioFe-Algorithmus).

Als Beispiel wird Topologie A verwendet, so, wie sie bereits in Beispiel 3.9 angewendet wurde. Es liegt ein Freiheitsgrad von zwei vor: φ_2 und φ_3 . Das Gebirge und die Höhenlinien der Zielfunktion sind bereits in Beispiel 3.9 angegeben. Hier wurde allerdings das Vorzeichen der Zielfunktion verändert, sodass die gesuchten Minimalstellen Maximalstellen sind. Als Definitionsbereich wird $\mathcal{D} := [\frac{1}{4}\pi, 2\pi] \times [\frac{1}{4}\pi, 2\pi] \subset \mathbb{R}^2$ gewählt. In diesem Definitionsbereich gibt es vier Maximalstellen: $(\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$, $(\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi)$, $(\frac{3}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$, $(\frac{3}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi)$. Im Folgenden werden mehrere Iterationen gezeigt und die einzelnen Schritte des FGenPrioFe-Algorithmus werden erläutert. In den Abbildungen dieses Beispiels gelten die Notationen:

- Blaue Kreuze mit Kreis: gesuchte Minimalstellen.
- Punkte: Individuen.
- Grün umrandete Punkte: Durch Längentest bestrafte Individuen.
- Blau umrandete Punkte: Durch Gruppierungstest bestrafte Individuen.
- Orange: Auswahl der besten Individuen für die nächste Generation.

Start - Abbildung 3.9: Der Algorithmus wird in diesem Beispiel mit 8 Individuen ausgeführt. Diese wurden an speziell festgelegte Positionen gesetzt, um zu zeigen, dass auch bei einer ungünstigen Startpopulation (Individuen nur in der unteren Hälfte des Definitionsbereiches) alle Lösungen gefunden werden. Normalerweise wird die Startpopulation zufällig im Definitionsbereich gewählt.

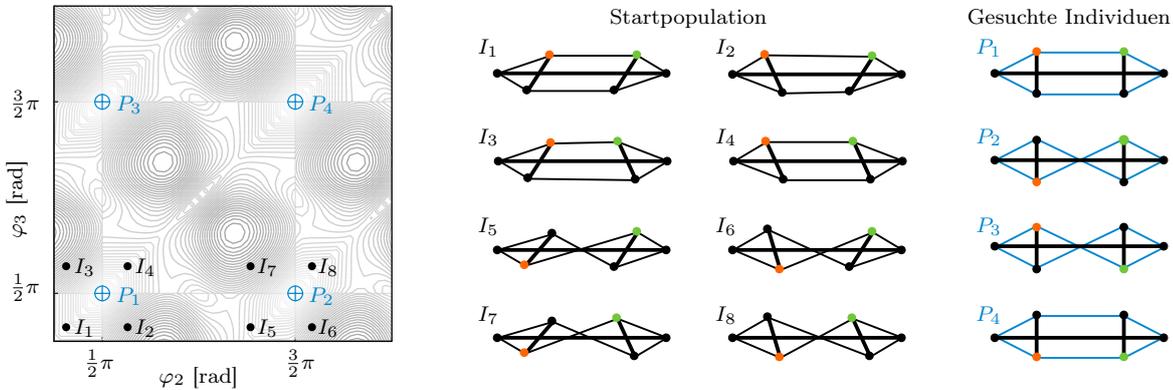


Abbildung 3.9: **Startpopulation:** In diesem Fall speziell gewählte Startpopulation mit 8 Individuen.

Generation 1 - Abbildung 3.10: Im linken Bild sind alle Individuen abgebildet, die es nach der Selektion, der Rekombination und der Mutation in der Population gibt. Grün markiert sind die Individuen, die durch den Längentest bestraft wurden, da mindestens ein Segment mit geringer Steifigkeit (welche alle auf Zugsegmente sein sollen) eine Länge kleiner seiner Anfangslänge hat. Im mittleren Bild ist das Ergebnis des Gruppierungstests abgebildet. Je zwei Individuen, welche dichter als eine vorgegebene Schranke beisammen liegen, sind durch eine blaue Linie verbunden. Das Individuum, welches davon bestraft wird, weil es den schlechteren Fitnesswert hat, ist blau umrandet. Im rechten Bild sind die acht Individuen orange markiert, welche in die nächste Generation übernommen werden, da diese die besten Fitnesswerte haben.

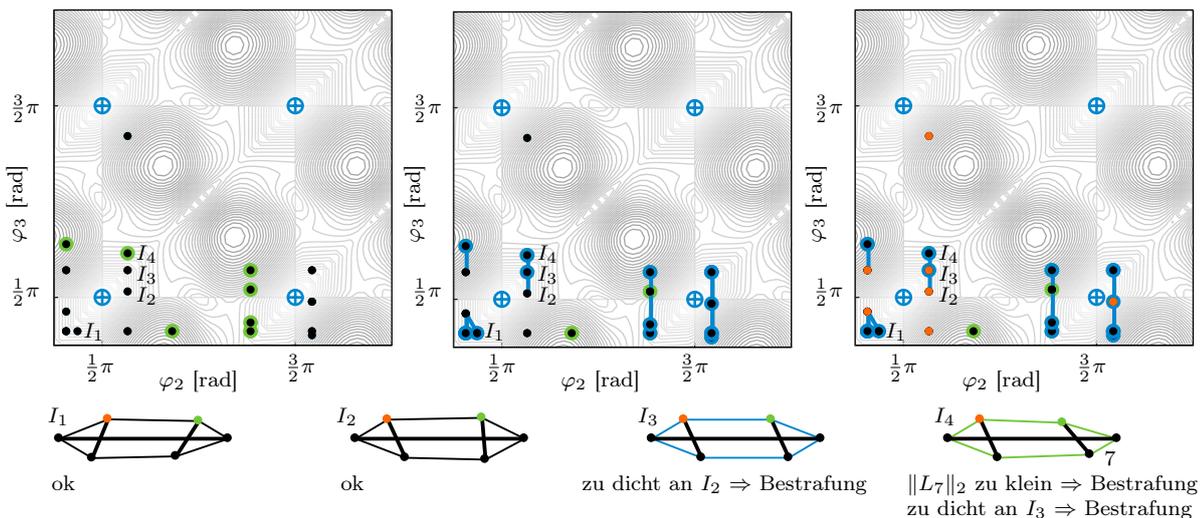


Abbildung 3.10: **Generation 1:** Links: Ergebnis von Selektion, Rekombination, Mutation und Längentest. Mitte: Gruppierungstest. Rechts: Auswahl der besten Individuen für die nächste Generation.

Generation 2 - Abbildung 3.11: Im oberen linken Bild ist die Population zu Beginn der Generation dargestellt. Im oberen mittleren Bild sind alle Individuen, die es nach Selektion, Rekombination und Mutation in der Population gibt, abgebildet. Außerdem sind die Individuen grün umrandet, welche im Längentest bestraft wurden. Im oberen rechten Bild ist das Ergebnis des Gruppierungstests abgebildet. Die Individuen mit einer blauen Umrandung wurden bestraft, weil sie zu dicht an einem anderen Individuum liegen. Im unteren linken Bild ist ein Ausschnitt des Definitionsbereiches abgebildet. Zwei Individuen sind nicht blau umrandet, das heißt, diese beiden Individuen wurden nicht bestraft, weil sie im Test immer den jeweils besseren Fitnesswert hatten. Im unteren rechten Bild ist die Auswahl der besten Individuen, welche in die nächste Generation übernommen werden, orange markiert. Es werden fast nur Individuen gewählt, die nicht vom Längen- oder Gruppierungstest bestraft wurden.

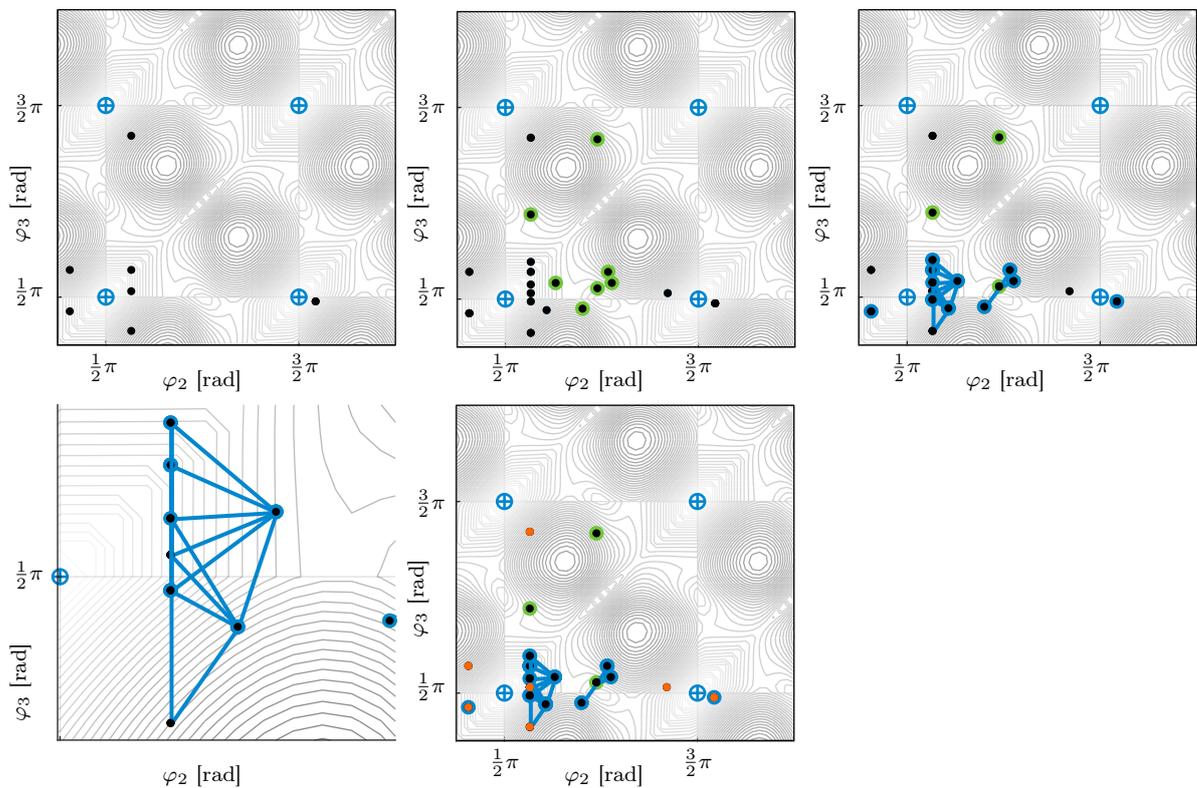


Abbildung 3.11: **Generation 2:** Von links nach rechts, von oben nach unten: Beginn der Generation; Population nach Längentest; Gruppierungstest; Detailansicht; Auswahl für die nächste Generation.

Generation 5 - Abbildung 3.12: Im oberen linken Bild ist die Population zu Beginn der Generation dargestellt. Im mittleren Bild ist die gesamte Population nach Selektion, Rekombination und Mutation dargestellt. Die grün umrandeten Individuen wurden im Längentest bestraft. Im rechten Bild ist das Ergebnis des Gruppierungstests abgebildet. Die blau umrandeten Individuen wurden aufgrund ihrer Nähe zu anderen Individuen bestraft. Die orange markierten Individuen sind die Individuen, die aufgrund ihres guten Fitnesswertes in die nächste Generation übernommen werden. Bereits nach dieser Iteration befindet sich in der Nähe jedes gesuchten Maximums ein Individuum. In den folgenden Iterationen passen sich die Individuen immer besser an und nähern sich somit den Maximalstellen.

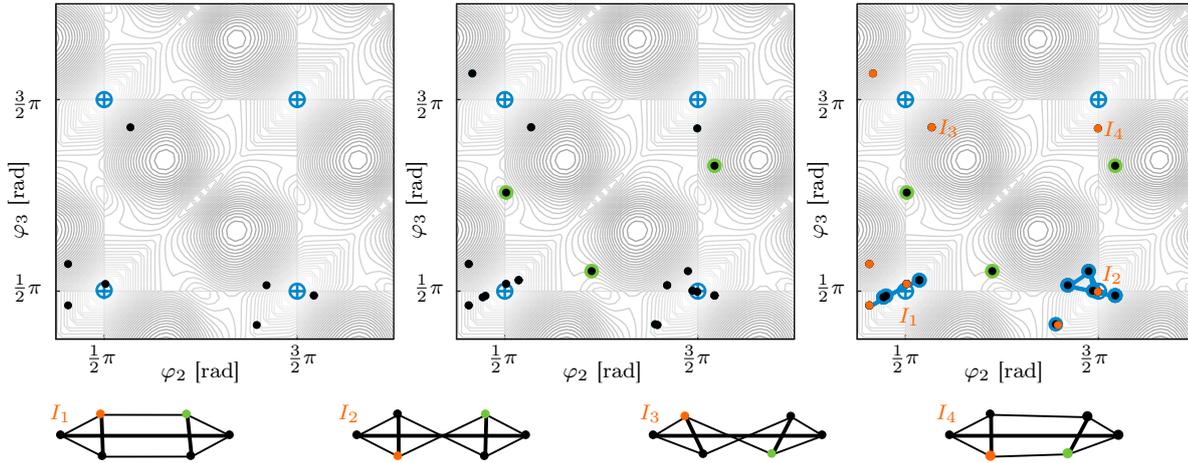


Abbildung 3.12: **Generation 5:** Links: Population zu Beginn der Generation. Mitte: Ergebnis von Selektion, Rekombination, Mutation und Längentest. Rechts: Gruppierungstest und Auswahl der besten Individuen für die nächste Generation.

Generation 30 - Abbildung 3.13: Im linken Bild ist das Ergebnis des FGenPrioFe-Algorithmus nach 30 Iterationen dargestellt. Es befindet sich in der Nähe jeder gesuchten Lösung ein Individuum. Durch Anwendung des FE-Formfindungsalgorithmus im Anschluss werden alle vier gesuchten Lösungen genauer bestimmt. Das Ergebnis des FE-Formfindungsalgorithmus ist im rechten Bild dargestellt.

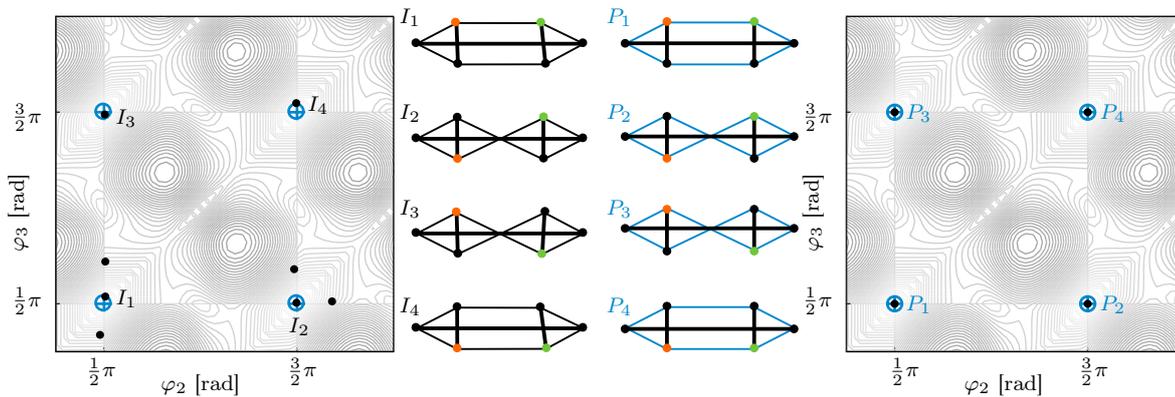


Abbildung 3.13: **Generation 30:** Links: Ergebnis des genetischen Algorithmus nach 30 Iterationen. In der Nähe jeder gesuchten Lösung befindet sich ein Individuum. Rechts: Genauere Bestimmung der Lösungen durch FE-Formfindungsalgorithmus.

Beispiel 3.18 (Einfluss des Gruppierungstests auf den FGenPrioFe-Algorithmus).

Es wird die gleiche Tensegrity-Struktur mit der gleichen Zielfunktion, wie in Beispiel 3.17 verwendet. Die Population besteht aus 30 Individuen. Die zufällig gewählte Startpopulation ist links in Abbildung 3.14 dargestellt. Es werden 50 Iterationen ausgeführt. Die sich damit ergebende Population mit dem FGenPrioFe-Algorithmus ist das mittlere Bild in Abbildung 3.14. Es befindet sich in jeder gesuchten Optimalstelle ein Individuum. Die anderen Individuen sind um die gesuchten Lösungen verteilt, weil der Gruppierungstest ein dichteres Zusammenliegen der Individuen verhindert. Da sich bei diesen Individuen der Fitnesswert weit weg vom gesuchten Optimum (Null) befindet, können diese Lösungen nach dem genetischen Algorithmus als *nicht optimal* aussortiert werden.

Um die Wirkung des Gruppierungstests zu zeigen, wurde der FGenPrioFe-Algorithmus mit der gleichen Startpopulation erneut ausgeführt. Allerdings werden dieses Mal im Gruppierungstest die Individuen nicht bestraft (Faktor wurde als Eins gewählt). Rechts in Abbildung 3.14 ist das Ergebnis des genetischen Algorithmus nach 50 Iterationen abgebildet. Jedes der Individuen befindet sich an einer Optimalstelle. Allerdings sammeln sich alle Individuen in einer der vier gesuchten Optimalstellen. Drei der vier Lösungen werden nicht gefunden.

Dieses Beispiel illustriert die Notwendigkeit des Gruppierungstests für das Finden aller globalen Optimalstellen innerhalb des Definitionsbereiches. \lrcorner

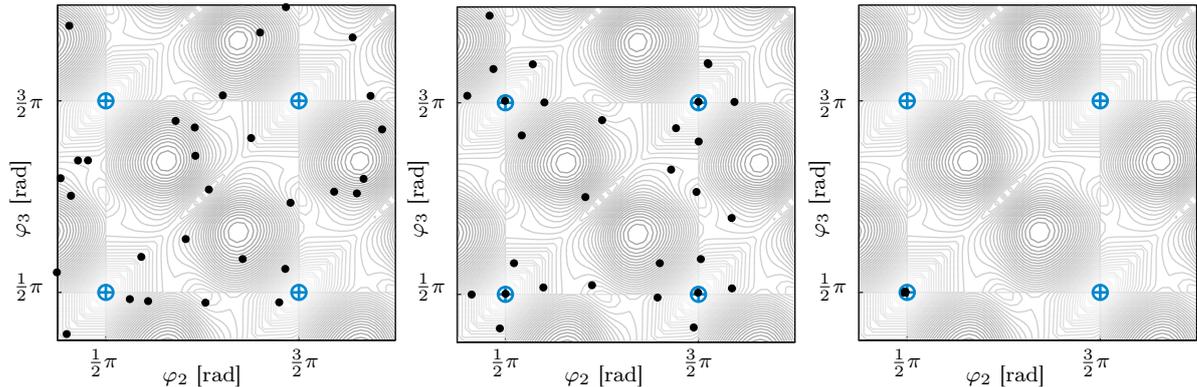


Abbildung 3.14: Links: Startpopulation, Mitte: Ergebnis des FGenPrioFe-Algorithmus; Rechts: Ergebnis des FGenPrioFe-Algorithmus ohne Gruppierungstest.

3.2.2 FGenFeFi-Algorithmus

Der FGenFeFi-Algorithmus⁸ ist ein binärer genetischer Algorithmus, bei dem der FE-Formfindungsalgorithmus angewendet wird, um die Fitnesswerte der Individuen zu bestimmen und um den Gruppierungs- und Längentest durchzuführen. Im Anschluss an den genetischen Algorithmus wird, wie beim FGenPrioFe-Algorithmus aus dem vorherigen Abschnitt 3.2.1, der FE-Formfindungsalgorithmus angewendet, damit die gefundenen Lösungen dichter an den gesuchten Maximalstellen liegen. Der Programmablaufplan ist in Abbildung 3.15 vereinfacht dargestellt. Die einzelnen Schritte des Algorithmus werden im Folgenden genauer erläutert.

Repräsentation der Individuen: Die Lage einer Tensegrity-Struktur wird durch ihre Segmentkoordinaten bestimmt, siehe auch Bemerkung 3.11. Die Individuen haben in diesem Algorithmus eine binäre Repräsentation, siehe Abschnitt 2.2.4. Das heißt, der Phänotyp eines Individuums besteht aus einem Vektor mit den Segmentkoordinaten. Dahingegen ist der Genotyp ein Binärstring. Dafür muss für jede Segmentkoordinate (jedes Gen) festgelegt werden, aus wie vielen Bits der dazugehörige Binärstring bestehen soll. Für diesen Algorithmus wurde für jede Segmentkoordinate die gleiche Länge $n_b := 32$ festgelegt. Somit hat eine Segmentkoordinate $\chi_{(i)} \in \mathbb{R}$ mit einem Definitionsbereich von $[\underline{\chi}_{(i)}, \bar{\chi}_{(i)}] \subset \mathbb{R}$ eine Genauigkeit von $(\bar{\chi}_{(i)} - \underline{\chi}_{(i)}) / (2^{32} - 1)$. Dies entspricht bei einem Definitionsbereich von $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ einer Genauigkeit von rund $2.33 \cdot 10^{-10}$.

⁸Bildung des Namens: F: Formfindung, Gen: Genetischer Algorithmus, Fe: FE-Formfindungsalgorithmus, Fi: Fitness - der FE-Formfindungsalgorithmus wird angewendet, um die Fitness der Individuen zu bestimmen.

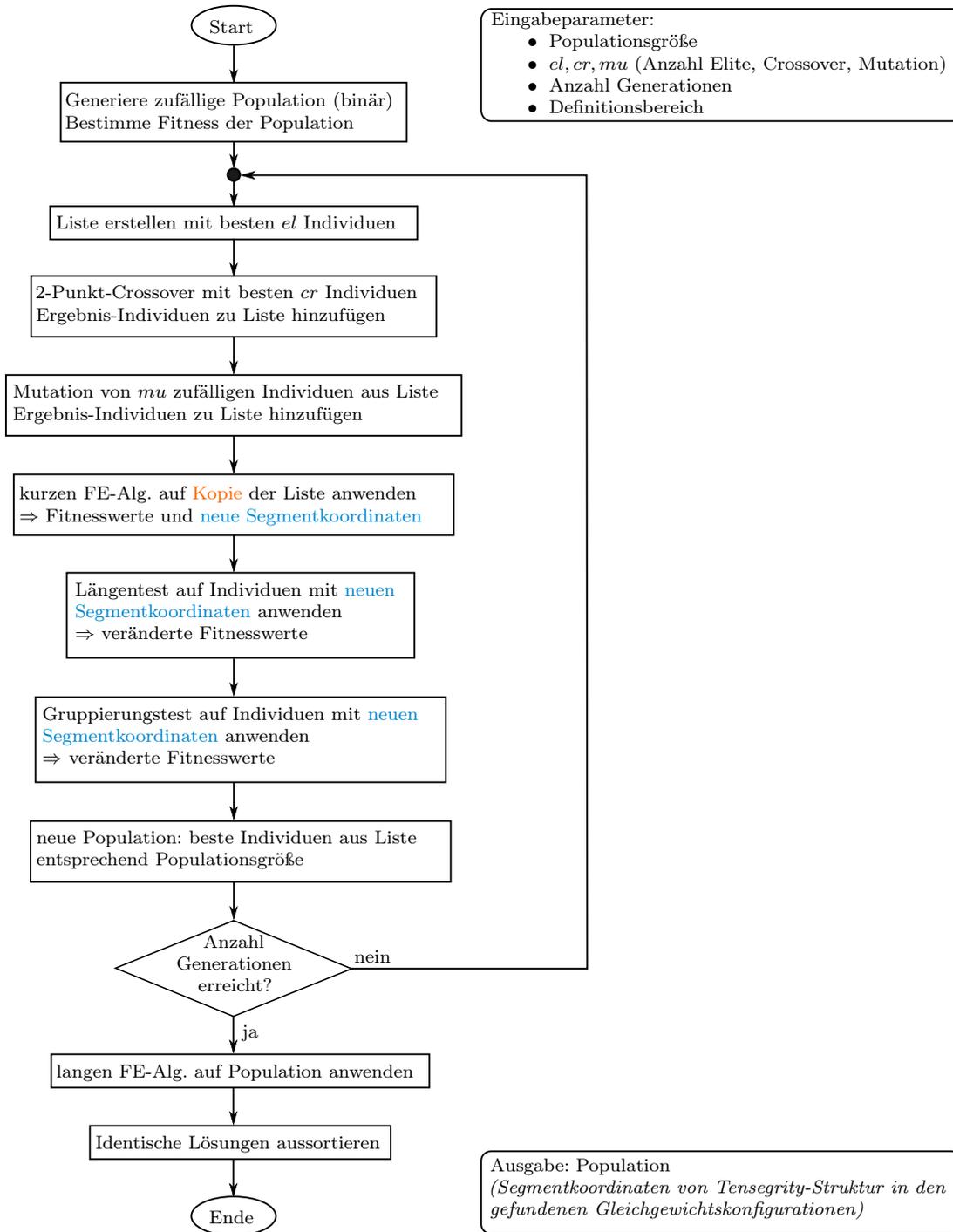


Abbildung 3.15: Programmablaufplan des FGenFeFi-Algorithmus.

Fitnessfunktion: Für die Bestimmung der Fitnesswerte wird der FE-Formfindungsalgorithmus, siehe Abschnitt 2.2.2, auf eine Kopie des Phänotyps der Individuen angewendet.⁹ Demnach werden in diesem Algorithmus die Segmente mit hoher Steifigkeit entsprechend Annahme 2.8 B) als elastisch angenommen. Der FE-Formfindungsalgorithmus arbeitet mit den Knotenkoordinaten der Tensegrity-Struktur (Individuum). Diese können aus den Segmentkoordinaten berechnet werden. Bei dem FE-Formfindungsalgorithmus werden nur wenige Iterationen und Lastinkremente durchgeführt (siehe Tabelle 3.2), sodass er nur eine kurze Laufzeit hat. Dadurch konvergiert der FE-Formfindungsalgorithmus in der Regel nicht, die Tensegrity-Struktur befindet sich danach aber wahrscheinlich dichter an einer der Gleichgewichtskonfigurationen. Ein Vergleich, wie ein Individuum vor dem FE-Formfindungsalgorithmus, nach wenigen Iterationen und Lastinkrementen und nach vielen Iterationen und Lastinkrementen aussieht, ist in Beispiel 3.19 dargestellt. Der Fitnesswert des Individuums entspricht der Kräftesumme der Tensegrity-Struktur nach Anwendung des FE-Formfindungsalgorithmus. Das Optimierungsproblem, welches im FGenFeFi-Algorithmus gelöst wird ist demnach (3.21). Entsprechend Bemerkung 3.12 wird (3.21) als Maximierungsproblem geschrieben:

$$\max_{\chi \in \mathcal{D}} \left(- \sum_{i=1}^{n_k} \|F_{\odot}(\chi)\|_2 \right). \quad (3.23)$$

Beispiel 3.19 (Individuen vor und nach dem FE-Formfindungsalgorithmus).

Als Beispiel wird Topologie A verwendet, mit den gleichen Segmentparametern, wie in Abbildung A.1. In der ersten Zeile in Abbildung 3.16 sind vier Individuen des FGenFeFi-Algorithmus dargestellt. In der zweiten Zeile wurde auf diese Individuen der FE-Formfindungsalgorithmus nur kurz (mit zwei Iterationen und zwei Lastinkrementen) angewendet. Die Tensegrity-Strukturen befinden sich dichter an den Gleichgewichtskonfigurationen, die auch in Abbildung A.1 dargestellt sind. In der dritten Zeile wurde auf die Individuen der FE-Formfindungsalgorithmus länger angewendet, mit 20 Iterationen und 20 Lastinkrementen. Die Tensegrity-Struktur befindet sich jeweils in einer Gleichgewichtskonfiguration. ┘

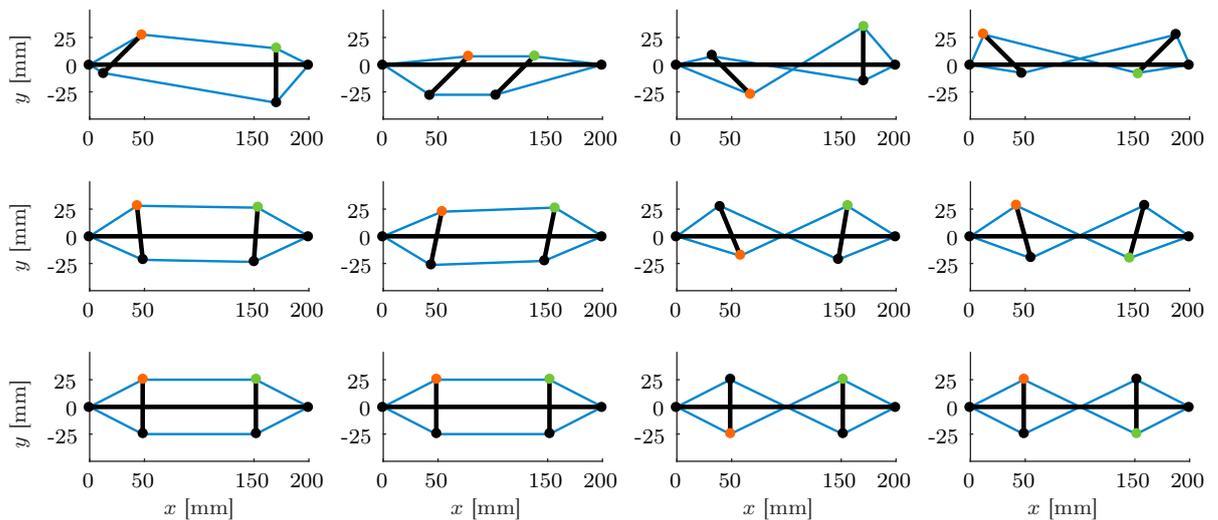


Abbildung 3.16: Erste Zeile: Individuen im FGenFeFi-Algorithmus. Zweite Zeile: Individuen nach kurzem FE-Formfindungsalgorithmus. Dritte Zeile: Individuen nach langem FE-Formfindungsalgorithmus.

⁹Damit werden die Individuen, die sich in der Population befinden, und mit denen der genetische Algorithmus (Selektion, Rekombination und Mutation) durchgeführt werden, nicht verändert. Das Ergebnis des FE-Formfindungsalgorithmus wird lediglich für die Bestimmung der Fitnesswerte, den Längen- und den Gruppierungstest verwendet.

Selektion: Die Selektion ist unabhängig von der Repräsentation der Individuen. Es wird die Plus-Strategie mit den el besten Individuen verwendet, wie auch im FGenPrioFe-Algorithmus, siehe Abschnitt 3.2.1. Für die Wahl von el siehe Tabelle 3.2.

Rekombination: Da die Individuen eine binäre Repräsentation haben, muss das Verfahren für die Rekombination daran angepasst sein. In diesem Algorithmus wird das 2-Punkt-Crossover, siehe Abschnitt 2.2.4 verwendet. Dieses Verfahren wurde gewählt, weil es eine größere Varianz als das 1-Punkt-Crossover hat. Außerdem hat ein n -Punkt-Crossover mit $n > 2$ einen höheren Rechenaufwand und die Kind-Individuen enthalten nur noch wenige Eigenschaften der Eltern-Individuen. Das 2-Punkt-Crossover wird auf die cr (siehe Tabelle 3.2) besten Individuen der Population angewendet.

Mutation: Aufgrund der binären Repräsentation der Individuen kann das am Anfang in Abschnitt 2.2.4 beschriebene Mutationsverfahren angewendet werden. Es werden mu -viele (siehe Tabelle 3.2) Individuen zufällig aus der Population gewählt, welche aus den Elite-Individuen der Selektion und den durch die Rekombination entstandenen Individuen besteht. Bei diesen Individuen werden δ Bits im Binärstring invertiert. Die mutierten Individuen werden der Population wieder hinzugefügt, sodass die Population nach der Mutation aus $el + cr + mu$ Individuen besteht.

Längentest: Der Längentest, siehe Definition 3.15, wird auf das Ergebnis des FE-Formfindungsalgorithmus angewendet. Beim FE-Formfindungsalgorithmus werden die Knotenkoordinaten der Tensegrity-Struktur zurückgegeben. Diese können direkt für die Berechnung der Längen der Segmente verwendet werden. Der Faktor, der für die Bestrafung der Individuen verwendet wird, ist in Tabelle 3.2 angegeben.

Gruppierungstest: Der Gruppierungstest, siehe Definition 3.13, wird auf das Ergebnis des FE-Formfindungsalgorithmus angewendet. Bei dem FE-Formfindungsalgorithmus ergeben sich Knotenkoordinaten der Tensegrity-Struktur. Der Gruppierungstest arbeitet allerdings mit den freien Segmentkoordinaten. Indem die Längenänderungen der Segmente mit hoher Steifigkeit vernachlässigt werden (Längenänderung kleiner als 10^{-4} mm, siehe Bemerkung 3.11), können aus den Knotenkoordinaten die Segmentkoordinaten berechnet werden. Mit Hilfe dieser Segmentkoordinaten wird der Gruppierungstest durchgeführt. Der Faktor, der für die Bestrafung der Individuen verwendet wird, ist der gleiche wie für den Längentest und in Tabelle 3.2 angegeben.

Abbruchkriterium: Der genetische Algorithmus wird beendet, wenn eine vorgegebene Anzahl an Generationen n_{gen} durchgeführt wurde.

Auswertung der Ergebnisse: Die Bestimmung der Fitnesswerte erfolgt nach Anwendung des FE-Formfindungsalgorithmus. Der FE-Formfindungsalgorithmus verändert allerdings nicht die Individuen. Dadurch sind die Individuen nach dem genetischen Algorithmus relativ weit von den gesuchten Minimalstellen entfernt, siehe auch Beispiel 3.19. Aus diesem Grund ist es wichtig, dass nach dem genetischen Algorithmus der FE-Formfindungsalgorithmus auf die Individuen angewendet wird. An dieser Stelle wird der FE-Formfindungsalgorithmus mit mehr Iterationen und Lastinkrementen durchgeführt, um eine Konvergenz des FE-Formfindungsalgorithmus zu erhalten. Die verwendeten Anzahlen an Lastinkrementen und Iterationen sind in Tabelle 3.2 angegeben.

Im Anschluss werden alle identischen Lösungen aussortiert, denn jede Lösung (das heißt jede Gleichgewichtskonfiguration) wird nur einmal benötigt.

Festlegung der Parameter: Der FGenFeFi-Algorithmus hat mehrere Parameter, die festgelegt werden müssen. Bis auf die Anzahl an Individuen n_{ind} und Anzahl an Generationen n_{gen} werden diese für alle möglichen Aufgabenstellungen, Topologien und Segmentparameter identisch gewählt und sind in Tabelle 3.2 angegeben. Wenn in Abschnitt 3.4.2 andere Parameter verwendet werden, wird dies explizit angegeben. Die Parameter wurden experimentell und mit Hilfe heuristischer Untersuchungen, welche teilweise in Abschnitt 3.4 vorgestellt werden, festgelegt.

Parameter	el	cr	mu	Abstand Gruppierungstest	Bestrafung
Wert	$\min\{n_{ind}, 10\}$	n_{ind}	$\min\{n_{ind}, 5\}$	$0.02 \cdot \delta$	100

Parameter	Iterationen kurz	Iterationen lang	Inkrement kurz	Inkrement lang
Wert	2	20	2	20

Tabelle 3.2: Festlegung der Parameter des FGenFeFi-Algorithmus. Dabei gilt die Bestrafung sowohl für den Gruppierungs- als auch für den Längentest. Die Parameter in der unteren Tabelle beziehen sich auf den FE-Formfindungsalgorithmus.

In Kapitel 3.4.2 werden Tests des Algorithmus durchgeführt um zu zeigen, wie gut der Algorithmus arbeitet. Hier wird im folgenden Beispiel 3.20 der prinzipielle Ablauf des Algorithmus veranschaulicht und verschiedene Situationen, die eintreten können, werden erläutert.

Beispiel 3.20 (Ablauf des FGenFeFi-Algorithmus).

Als Beispiel wird Topologie A verwendet, so, wie sie bereits in Beispiel 3.9 angewendet wurde. Es liegt ein Freiheitsgrad von zwei vor: φ_2 und φ_3 . Bei dem FGenFeFi-Algorithmus wird allerdings eine andere Zielfunktion verwendet, als im Beispiel 3.9. Da bei der hier verwendeten Berechnung der Zielfunktionswerte (Fitnesswerte) alle Segmente eine variable Länge haben, ist der Freiheitsgrad der Zielfunktion größer als zwei. Außerdem ergibt sich der Zielfunktionswert nicht aus der Position des Individuums, sondern aus der Lage der Tensegrity-Struktur nach Anwendung des FE-Formfindungsalgorithmus. Aus diesen Gründen ist es nicht möglich die Höhenlinien der Zielfunktion in ein zweidimensionales Diagramm zu plotten. Da aber die Ergebnisse vergleichbar mit denen aus der Kräfte- und Momentensumme sind, wird in den folgenden Abbildungen diese Zielfunktion zur Veranschaulichung der Zielfunktionswerte verwendet. Die gesuchten Maximalstellen befinden sich an den gleichen Stellen.

Als Definitionsbereich wird $\mathcal{D} := [\frac{1}{4}\pi, 2\pi] \times [\frac{1}{4}\pi, 2\pi] \subset \mathbb{R}^2$ gewählt. In diesem Definitionsbereich gibt es vier Maximalstellen: $(\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$, $(\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi)$, $(\frac{3}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$, $(\frac{3}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi)$.

Im Folgenden werden mehrere Generationen betrachtet und die einzelnen Schritte des FGenFeFi-Algorithmus werden erläutert. In den Abbildungen dieses Beispiels gelten die folgenden Notationen:

- Blaue Kreuze mit Kreis: gesuchte Minimalstellen.
- Punkte: Individuen.
- Schwarz umrandete weiße Punkte: Individuen von Rekombination und Mutation.
- Grün: Ergebnis des FE-Formfindungsalgorithmus.
- Blau umrandete Punkte: Durch Gruppierungstest bestrafte Individuen.
- Orange: Auswahl der besten Individuen für die nächste Generation.

Start - Abbildung 3.17: Der Algorithmus wird in diesem Beispiel mit vier Individuen ausgeführt. Diese wurden an speziell festgelegte Positionen gesetzt, um zu zeigen, dass auch bei einer ungünstigen Startpopulation (Individuen nur in der unteren Hälfte des Definitionsbereiches) alle Lösungen gefunden werden. Normalerweise wird die Startpopulation zufällig im Definitionsbereich gewählt.

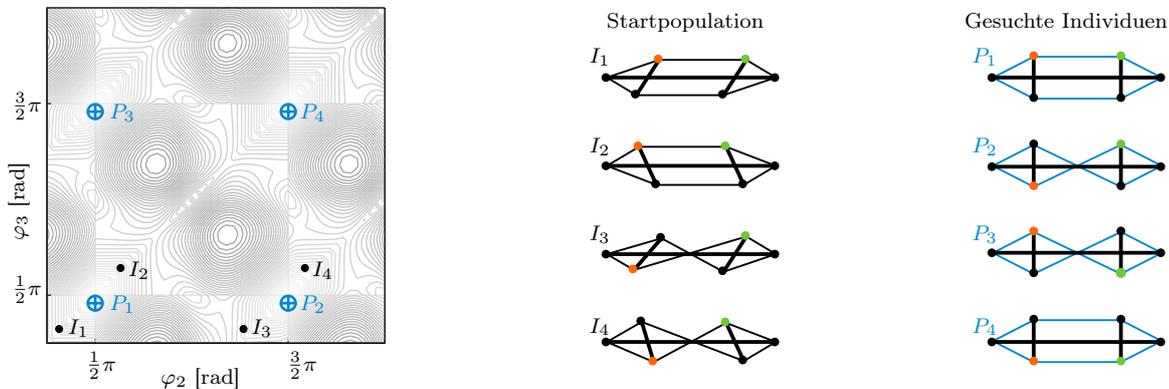


Abbildung 3.17: **Startpopulation:** In diesem Fall speziell gewählte Startpopulation mit vier Individuen.

Generation 1 - Abbildung 3.18: Im oberen linken Bild sind alle Individuen abgebildet, die es nach der Selektion, der Rekombination und der Mutation in der Population gibt. Dabei sind die neuen Individuen in dieser Generation (Rekombination und Mutation) durch schwarz umrandete weiße Punkte markiert. Im oberen mittleren Bild ist das Ergebnis des FE-Formfindungsalgorithmus dargestellt. Ein Individuum, welches als Initialkonfiguration für den FE-Formfindungsalgorithmus dient, ist mit einer schwarzen Linie mit dem Ergebnis des FE-Formfindungsalgorithmus (grün) verbunden (vergleiche auch Abbildung 3.16 erste und zweite Zeile). Im oberen rechten Bild ist das Ergebnis des Gruppierungstests dargestellt. Die Individuen, welche durch den Gruppierungstest bestraft wurden, sind blau umrandet. Im unteren linken Bild ist ein Detail des Definitionsbereiches mit dem Ergebnis des Gruppierungstests abgebildet. Dabei sind je zwei Individuen, welche dichter als die vorgegebene Schranke zusammen liegen, durch eine blaue Linie verbunden. Außerdem ist jeweils das Individuum, welches bestraft wird, blau umrandet. Im unteren rechten Bild sind die Individuen orange markiert, welche aufgrund ihrer guten Fitnesswerte in die nächste Generation übernommen werden¹⁰.

¹⁰Dies sind in dieser Abbildung nicht immer die Individuen, die sich am dichtesten am markierten Optimum befinden. Das liegt daran, dass die Abbildung nur eine Projektion ist, denn im FE-Formfindungsalgorithmus werden alle Knotenkoordinaten verändert, ohne die fixierten Segmentkoordinaten zu beachten.

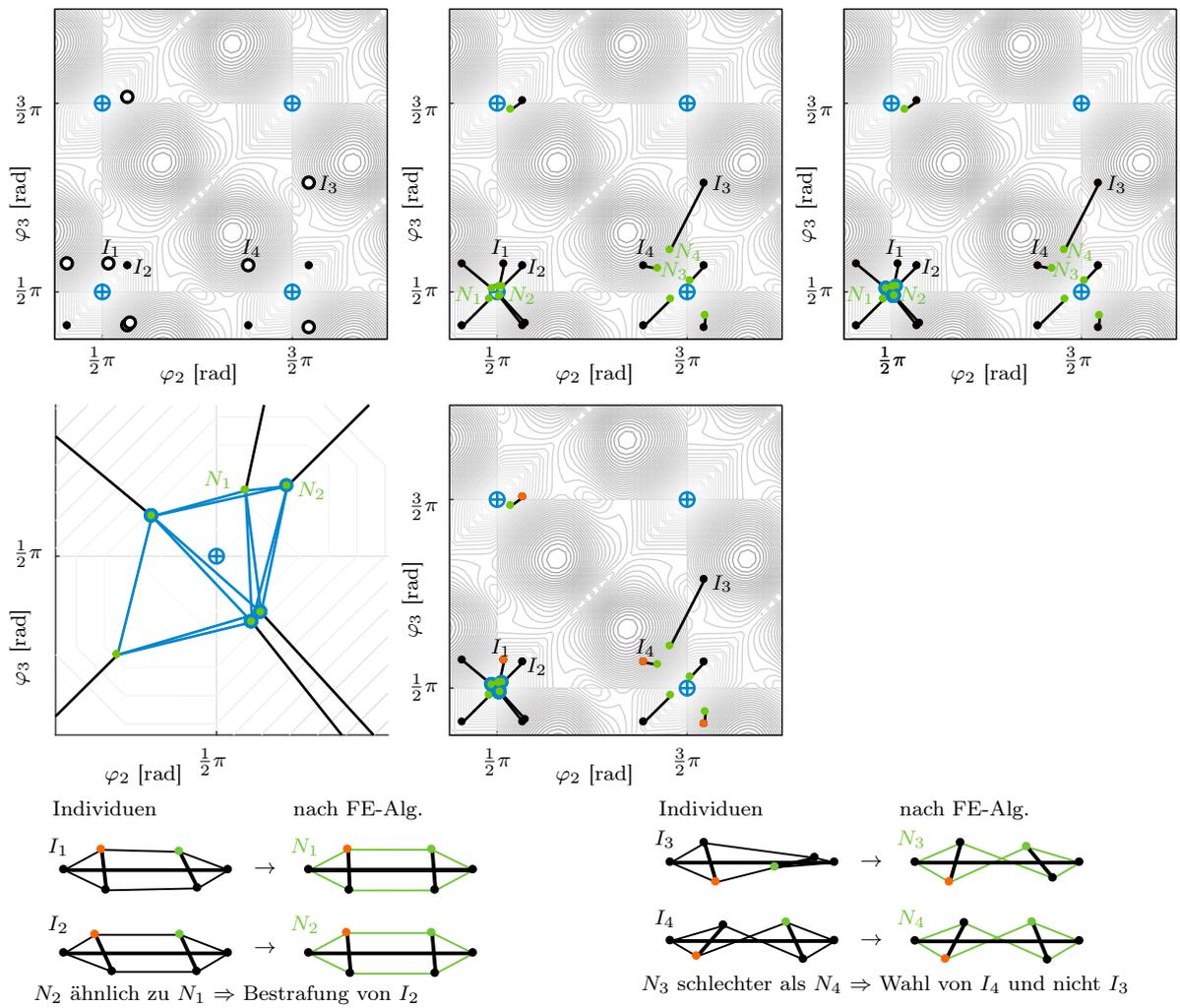


Abbildung 3.18: **Generation 1:** Oben links: Individuen zu Beginn der Generation und Ergebnis von Rekombination und Mutation. Oben mittig: FE-Formfindungsalgorithmus. Oben rechts: Gruppierungstest. Unten links: Detail vom Gruppierungstest. Unten mittig: Auswahl der besten Individuen für nächste Generation.

Generation 4 - Abbildung 3.19: Im linken Bild sind alle Individuen abgebildet, die es nach der Selektion, der Rekombination und der Mutation in der Population gibt. Im mittleren Bild ist das Ergebnis des FE-Formfindungsalgorithmus und im rechten Bild das Ergebnis des Gruppierungstests dargestellt. Außerdem sind die Individuen orange markiert, welche aufgrund ihrer guten Fitnesswerte in die nächste Generation übernommen werden.

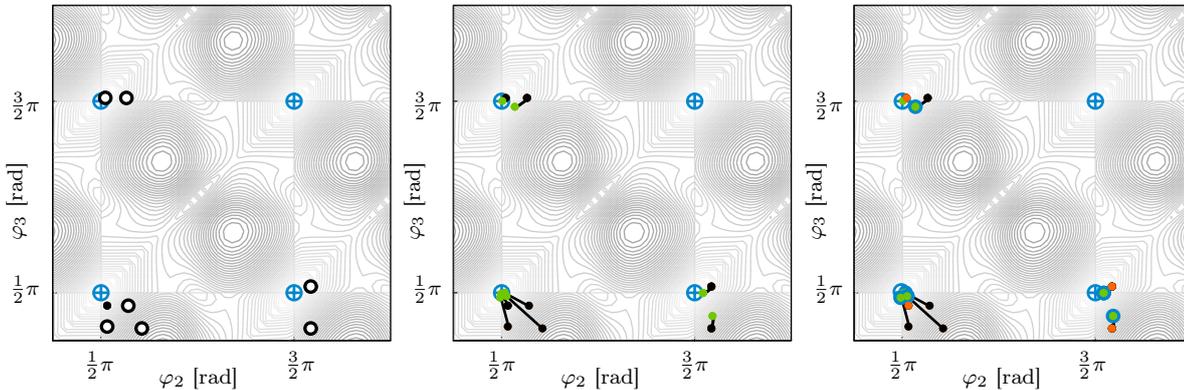


Abbildung 3.19: **Generation 4:** Links: Individuen zu Beginn der Generation und Ergebnis von Rekombination und Mutation. Mitte: FE-Formfindungsalgorithmus. Rechts: Gruppierungstest und Auswahl der besten Individuen für nächste Generation.

Generation 5 - Abbildung 3.20: Zu dieser Generation gilt die gleiche Beschreibung, wie bei Generation 4. Nach dieser Generation befindet sich in der Nähe jedes gesuchten Optimums ein Individuum.

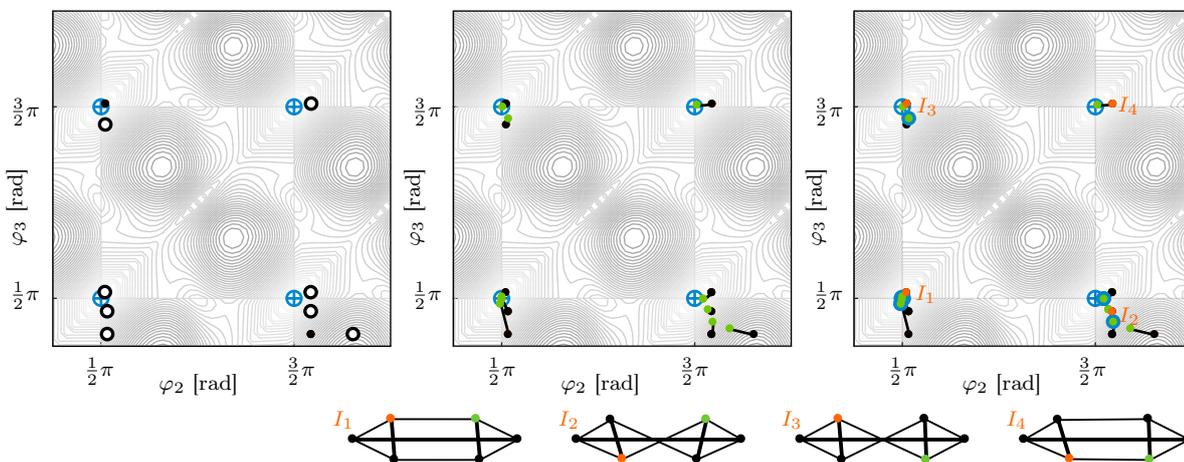


Abbildung 3.20: **Generation 5:** Links: Individuen zu Beginn der Generation und Ergebnis von Rekombination und Mutation. Mitte: FE-Formfindungsalgorithmus. Rechts: Gruppierungstest und Auswahl der besten Individuen für nächste Generation.

Generation 10 - Abbildung 3.21: Im linken Bild ist das Ergebnis des FGenFeFi-Algorithmus nach 10 Generationen dargestellt. Es befindet sich in der Nähe jeder gesuchten Lösung ein Individuum. Durch Anwendung des FE-Formfindungsalgorithmus im Anschluss werden alle vier gesuchten Lösungen genauer bestimmt. Das Ergebnis des FE-Formfindungsalgorithmus ist im rechten Bild dargestellt.

┘

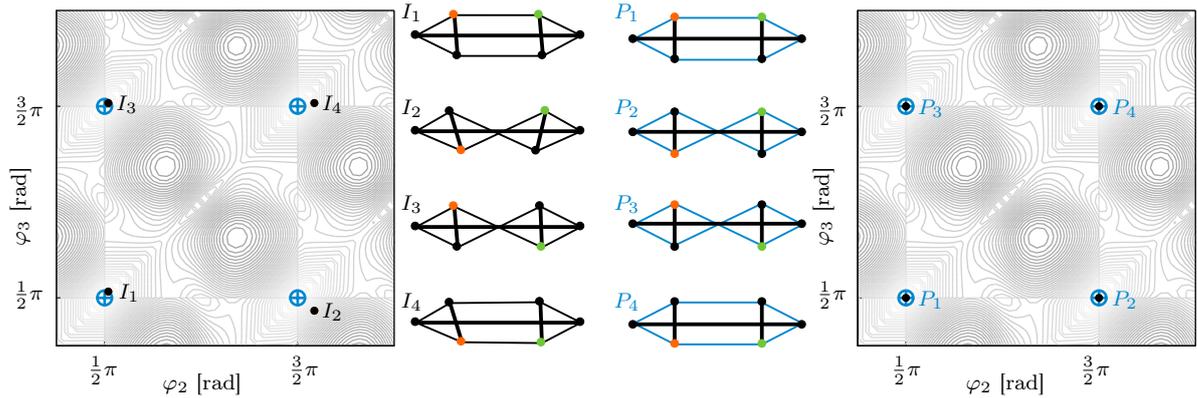


Abbildung 3.21: **Generation 10:** Links: Ergebnis des genetischen Algorithmus nach 10 Iteration. In der Nähe jeder gesuchten Lösung befindet sich ein Individuum. Rechts: Genauere Bestimmung der Lösungen durch FE-Formfindungsalgorithmus.

3.2.3 FGenFeFiMu-Algorithmus

Der FGenFeFiMu-Algorithmus¹¹ ist ein binärer genetischer Algorithmus, bei dem der FE-Formfindungsalgorithmus angewendet wird, um die Individuen zu verändern und die Fitnesswerte zu bestimmen. Der FGenFeFiMu-Algorithmus ist in vielen Schritten identisch mit dem FGenFeFi-Algorithmus. Der vereinfachte Programmablaufplan ist in Abbildung 3.22 dargestellt. Die Schritte, die sich vom FGenFeFi-Algorithmus unterscheiden, sind im Programmablaufplan orange markiert.

Die Schritte *Repräsentation der Individuen*, *Selektion*, *Rekombination*, *Mutation*, *Längentest* und *Gruppierungstest* sind in beiden Algorithmen identisch. Im Folgenden werden nur die Schritte, die anders als im FGenFeFi-Algorithmus sind, genauer beschrieben.

Fitnessfunktion: Die Bestimmung der Fitnesswerte erfolgt prinzipiell genauso, wie im FGenFeFi-Algorithmus. Allerdings wird der FE-Formfindungsalgorithmus nicht auf eine Kopie der Individuen, sondern direkt auf die Individuen angewendet (die Individuen werden durch den FE-Formfindungsalgorithmus mutiert). Um den FE-Formfindungsalgorithmus auf die Individuen anwenden zu können, werden die Knotenkoordinaten der Tensegrity-Struktur (Individuen) aus den Segmentkoordinaten berechnet. Das Ergebnis des FE-Formfindungsalgorithmus sind ebenfalls die Knotenkoordinaten der Tensegrity-Struktur. Unter Vernachlässigung der Längenänderungen in den Segmenten mit hoher Steifigkeit (siehe Bemerkung 3.11), können daraus die Segmentkoordinaten berechnet werden, welche die veränderten Individuen definieren. Die Bestimmung der Fitnesswerte erfolgt genauso wie im FGenFeFi-Algorithmus und das zu lösende Optimierungsproblem ist (3.23).

Auswertung der Ergebnisse: Da im genetischen Algorithmus die Individuen durch den FE-Formfindungsalgorithmus direkt verändert werden, passen sie sich schrittweise an und befinden sich nach einer ausreichend großen Anzahl an Generationen in den gesuchten Maximalstellen des Optimierungsproblems. Aus diesem Grund muss der FE-Formfindungsalgorithmus nicht auf das Ergebnis des genetischen Algorithmus angewendet werden.¹²

¹¹Bildung des Namens: F: Formfindung, Gen: Genetischer Algorithmus, Fe: FE-Formfindungsalgorithmus, Fi: Fitness - der FE-Formfindungsalgorithmus wird angewendet, um die Fitness der Individuen zu bestimmen, Mu: Mutation - die Individuen werden bei der Anwendung des FE-Formfindungsalgorithmus verändert.

¹²Wenn die Anzahl der durchzuführenden Generationen beim FGenFeFiMu-Algorithmus reduziert werden soll, kann am Ende dennoch der FE-Formfindungsalgorithmus durchgeführt werden. Dies beeinflusst Individuen, welche sich bereits in einer Optimalstelle befinden, nicht. Individuen, die sich noch nicht genau an das Optimum anpassen konnten, erreichen dies durch die finale Anwendung des FE-Formfindungsalgorithmus.

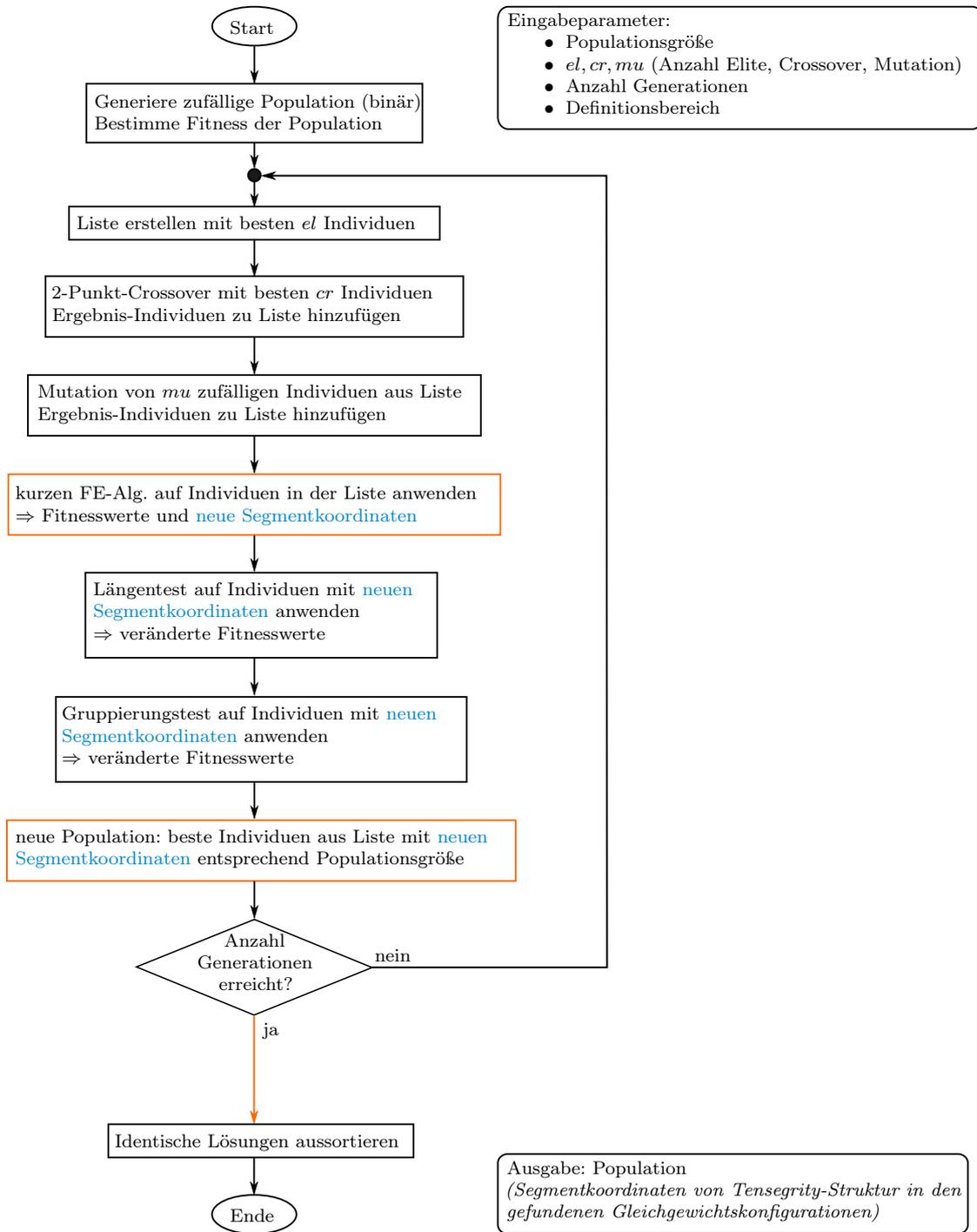


Abbildung 3.22: Programmablaufplan des FGenFeFiMu-Algorithmus.

Der einzige Schritt, der in der Auswertung nach dem genetischen Algorithmus durchgeführt wird ist das Aussortieren identischer Lösungen. Denn jede Optimalstelle, das heißt jede Gleichgewichtskonfiguration, muss nur einmal gefunden werden.

Festlegung der Parameter: Der FGenFeFiMu-Algorithmus hat mehrere Parameter, die festgelegt werden müssen. Bis auf die Anzahl an Individuen n_{ind} und Anzahl an Generationen n_{gen} werden diese für alle möglichen Aufgabenstellungen, Topologien und Segmentparameter identisch gewählt und sind in Tabelle 3.3 angegeben. Wenn in Abschnitt 3.4.2 andere Parameter verwendet werden, wird dies explizit angegeben. Die Parameter wurden experimentell und mit Hilfe heuristischer Untersuchungen, welche teilweise in Abschnitt 3.4 vorgestellt werden, festgelegt.

Parameter	el	cr	mu	Abstand Gruppierungstest	Bestrafung
Wert	$\min\{n_{ind}, 10\}$	n_{ind}	$\min\{n_{ind}, 5\}$	$0.02 \cdot \delta$	100

Parameter	Iterationen	Lastinkremente
Wert	2	2

Tabelle 3.3: Festlegung der Parameter des FGenFeFiMu-Algorithmus. Dabei gilt die Bestrafung sowohl für den Gruppierungs- als auch für den Längentest. Die Parameter in der unteren Tabelle beziehen sich auf den FE-Formfindungsalgorithmus.

Tests, ob und wie gut dieser Algorithmus funktioniert, werden in Kapitel 3.4.2 durchgeführt. Hier wird im folgenden Beispiel 3.21 der prinzipielle Ablauf des Algorithmus veranschaulicht. Außerdem wird in Beispiel 3.22 illustriert, wie sich einzelne Individuen während des FGenFeFiMu-Algorithmus verändern und schrittweise an die gesuchten Gleichgewichtskonfigurationen anpassen.

Beispiel 3.21 (Ablauf des FGenFeFiMu-Algorithmus).

Als Beispiel wird Topologie A verwendet, so, wie sie bereits in Beispiel 3.20 angewendet wurde. Es gelten die gleichen Vorbemerkungen wie in Beispiel 3.20. Im Folgenden werden mehrere Iterationen gezeigt und die einzelnen Schritte des FGenFeFiMu-Algorithmus werden erläutert. In den Abbildungen dieses Beispiels gelten die folgenden Notationen:

- Blaue Kreuze mit Kreis: gesuchte Minimalstellen.
- Punkte: Individuen.
- Schwarz umrandete weiße Punkte: Individuen von Rekombination und Mutation.
- Grün: Ergebnis des FE-Formfindungsalgorithmus.
- Blau umrandete Punkte: Durch Gruppierungstest bestrafte Individuen.
- Orange: Auswahl der besten Individuen für die nächste Generation.

Start - Abbildung 3.23: Der Algorithmus wird in diesem Beispiel mit vier Individuen ausgeführt (linkes Bild). Sie wurden an speziell festgelegte Positionen gesetzt, um zu zeigen, dass auch bei einer ungünstigen Startpopulation (Individuen nur in der unteren Hälfte des Definitionsbereiches) alle Lösungen gefunden werden. Normalerweise wird die Startpopulation zufällig im Definitionsbereich gewählt. Im mittleren Bild ist das Ergebnis des FE-Formfindungsalgorithmus (grün) dargestellt. Dabei sind Initialkonfiguration und Ergebnis des FE-Formfindungsalgorithmus durch eine schwarze Linie verbunden. Im rechten Bild sind die neuen Individuen dargestellt. Diese entsprechen dem Ergebnis des FE-Formfindungsalgorithmus.

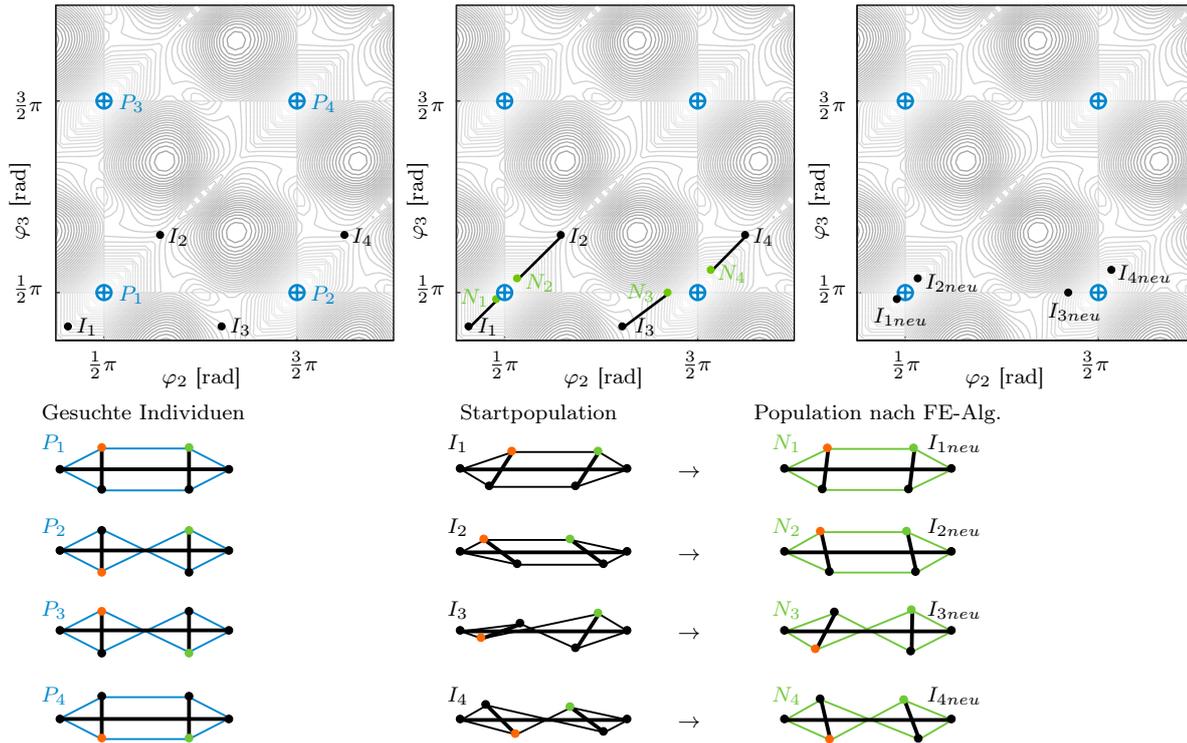


Abbildung 3.23: **Startpopulation:** Links: In diesem Fall speziell gewählte Startpopulation mit vier Individuen. Mitte: FE-Formfindungsalgorithmus. Rechts: Individuen entsprechen dem Ergebnis des FE-Formfindungsalgorithmus.

Generation 1 - Abbildung 3.24: Im oberen linken Bild sind alle Individuen abgebildet, die es nach der Selektion, der Rekombination und der Mutation in der Population gibt. Dabei sind die neuen Individuen in dieser Generation (Rekombination und Mutation) durch schwarz umrandete weiße Punkte markiert. Im oberen mittleren Bild ist das Ergebnis des FE-Formfindungsalgorithmus dargestellt. Ein Individuum, welches als Initialkonfiguration für den FE-Formfindungsalgorithmus dient ist mit einer schwarzen Linie mit dem Ergebnis des FE-Formfindungsalgorithmus (grün) verbunden. Im oberen rechten Bild sind die neuen Individuen dargestellt. Diese entsprechen dem Ergebnis des FE-Formfindungsalgorithmus. Im unteren linken Bild ist das Ergebnis des Gruppierungstests dargestellt. Die Individuen, welche durch den Gruppierungstest bestraft wurden, sind blau umrandet. Im unteren mittleren Bild ist ein Detail des Definitionsbereiches mit dem Ergebnis des Gruppierungstests abgebildet. Dabei sind je zwei Individuen, welche dichter als die vorgegebene Schranke zusammen liegen, durch eine blaue Linie verbunden. Im unteren rechten Bild sind die Individuen orange markiert, welche aufgrund ihrer guten Fitnesswerte in die nächste Generation übernommen werden.¹³

¹³Dies sind in dieser Abbildung nicht immer die Individuen, die sich am dichtesten am markierten Optimum befinden. Das liegt daran, dass die Abbildung nur eine Projektion ist, denn im FE-Formfindungsalgorithmus werden alle Knotenkoordinaten verändert, ohne die fixierten Segmentkoordinaten zu beachten.

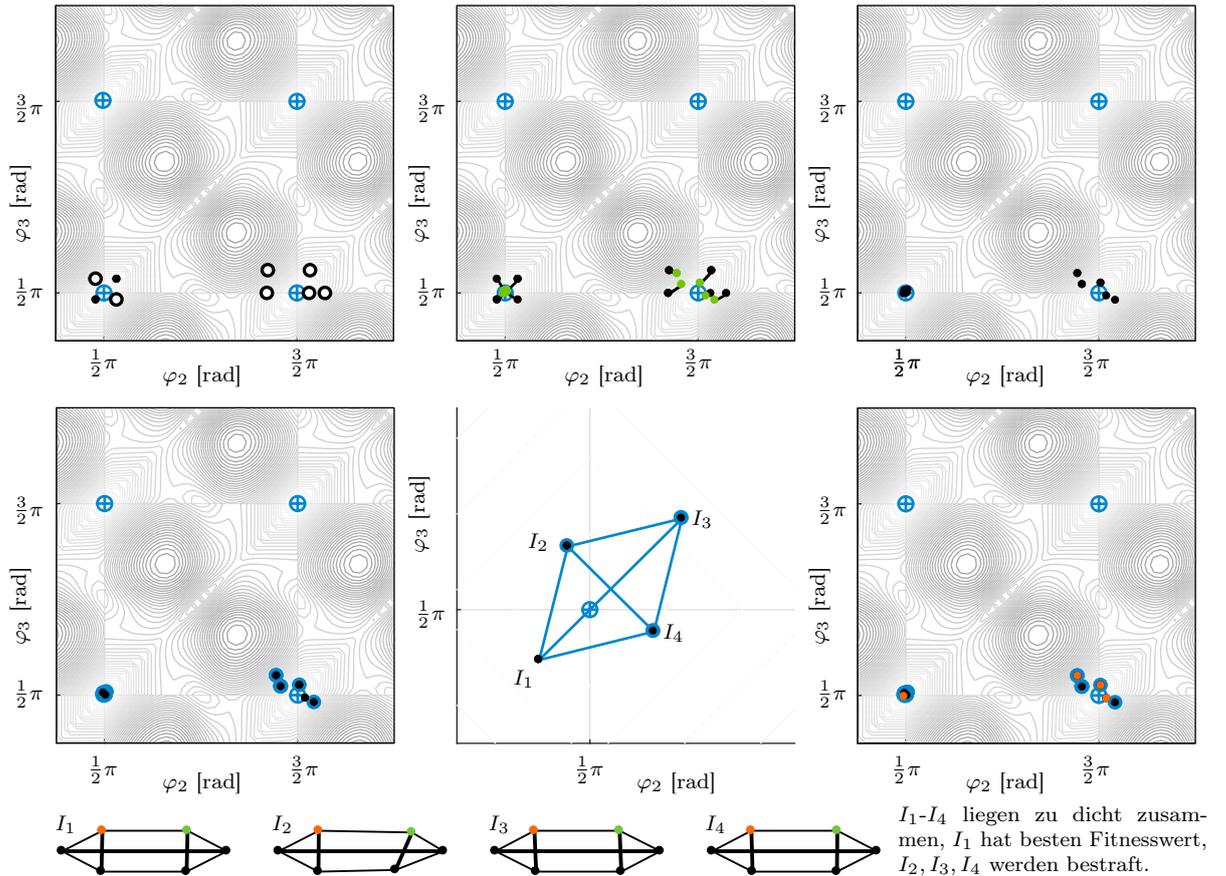


Abbildung 3.24: **Generation 1:** Oben links: Individuen nach Rekombination und Mutation. Oben mittig: FE-Formfindungsalgorithmus. Oben rechts: Individuen entsprechen dem Ergebnis des FE-Formfindungsalgorithmus. Unten links: Gruppierungstest. Unten mittig: Detail vom Gruppierungstest. Durch Linie verbundene Individuen sind zu dicht zusammen. Unten rechts: Auswahl der besten Individuen für die nächste Generation.

Generation 4 - Abbildung 3.25: Im linken Bild sind alle Individuen abgebildet, die es nach der Selektion, der Rekombination und der Mutation in der Population gibt. Im mittleren Bild ist das Ergebnis des FE-Formfindungsalgorithmus und im rechten Bild sind die Individuen, die nach dem FE-Formfindungsalgorithmus vorliegen dargestellt. Es sind die im Gruppierungstest bestraften Individuen und die für die nächste Generation ausgewählten Individuen farblich markiert.

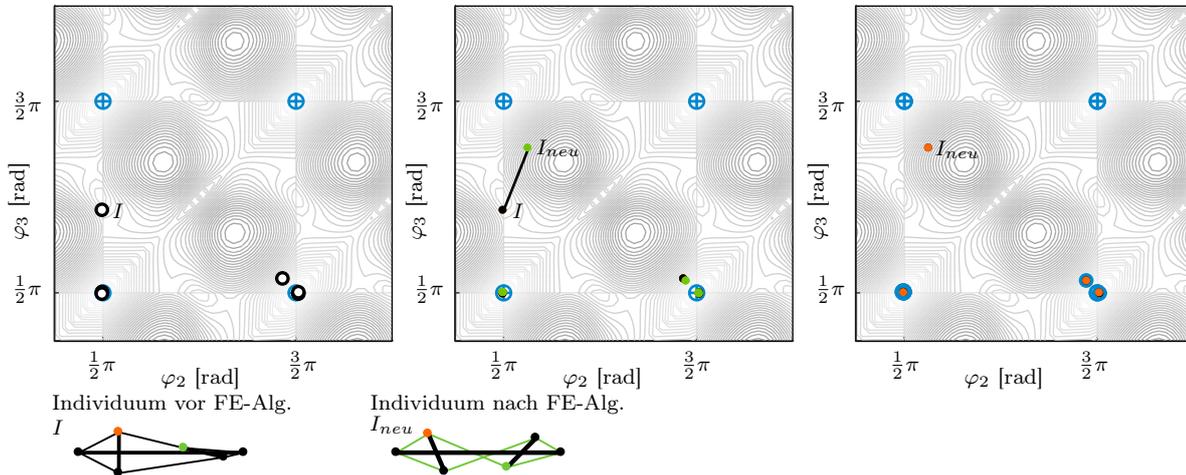


Abbildung 3.25: **Generation 4:** Links: Individuen nach Rekombination und Mutation. Mitte: FE-Formfindungsalgorithmus. Rechts: Individuen nach FE-Formfindungsalgorithmus und Gruppierungstest. Auswahl der besten Individuen für die nächste Generation.

Generation 6 - Abbildung 3.26: Zu dieser Generation gilt die gleiche Beschreibung, wie bei Generation 4. Nach dieser Generation befindet sich in der Nähe jedes gesuchten Optimums ein Individuum.

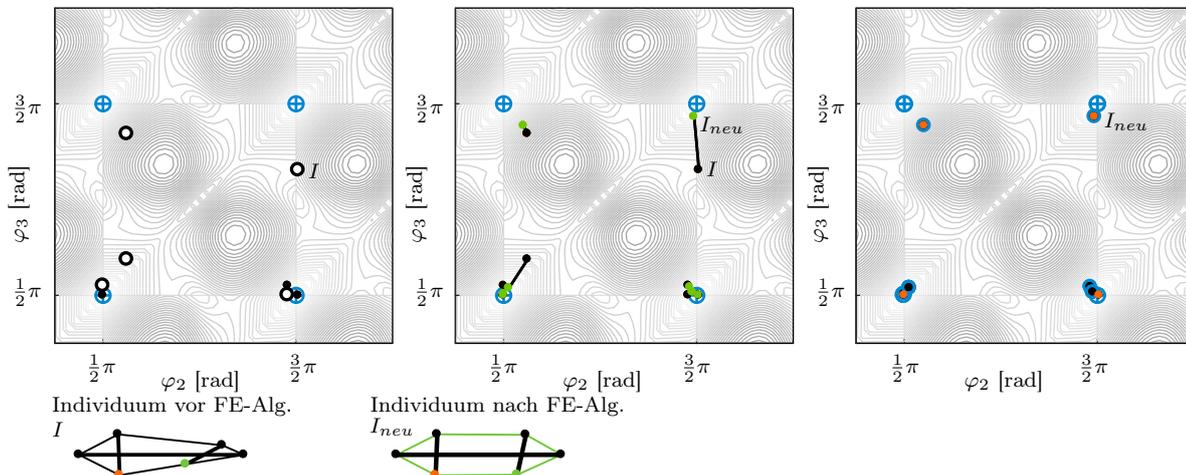


Abbildung 3.26: **Generation 6:** Links: Individuen nach Rekombination und Mutation. Mitte: FE-Formfindungsalgorithmus. Rechts: Individuen nach FE-Formfindungsalgorithmus und Gruppierungstest. Auswahl der besten Individuen für die nächste Generation.

Generation 7, 10 und 12 - Abbildung 3.27: In den Bildern ist von links nach rechts das Ergebnis des FGenFeFiMu-Algorithmus nach 7, 10 und 12 Iterationen dargestellt. Es befindet sich in der Nähe jeder gesuchten Lösung ein Individuum. Je mehr Generationen durchgeführt werden, desto dichter liegen diese Individuen an den Optimalstellen. Eine Anwendung des FE-Formfindungsalgorithmus im Anschluss ist nicht notwendig.

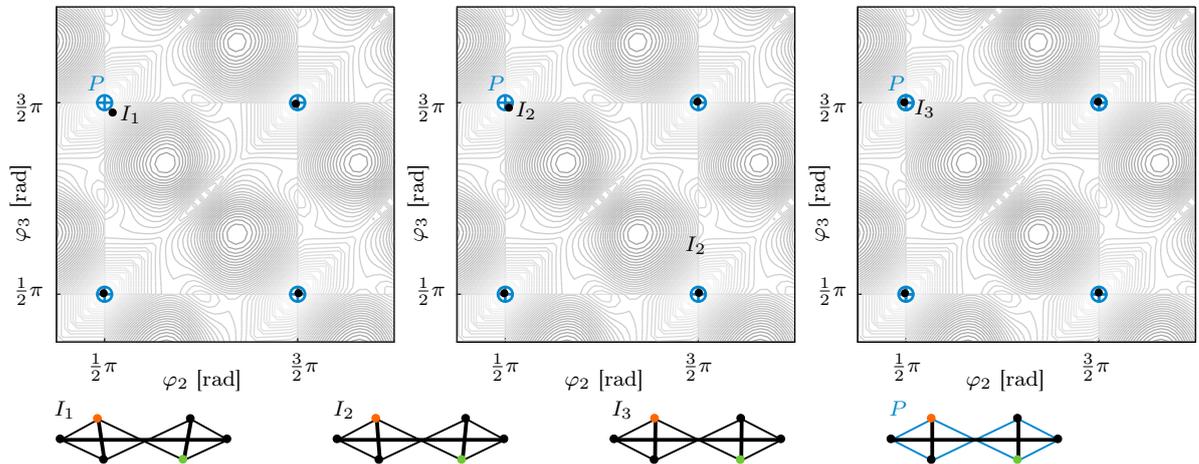


Abbildung 3.27: **Generation 7, 10 und 12:** Von links nach rechts: Ergebnis des FGenFeFiMu-Algorithmus nach 7, 10 und 30 Generationen.

Beispiel 3.22 (Schrittweise Anpassung der Individuen an die Optimalstellen).

Es wird die gleiche Topologie mit dem gleichen Freiheitsgrad, wie im vorherigen Beispiel 3.21 verwendet. Als Startpopulation werden die vier in Abbildung 3.28 orange markierten Individuen verwendet. Im Anschluss werden sieben Generationen des FGenFeFiMu-Algorithmus durchgeführt. Die Lage der Individuen ist in Abbildung 3.28 dargestellt (Farbverlauf von hell nach dunkel). Wie die Lage der Individuen sich in der zugehörigen Tensegrity-Struktur äußert, ist rechts in Abbildung 3.28 von hell nach dunkel dargestellt. Damit wird illustriert, dass sich die Individuen in jeder Generation besser an die gesuchten Optimalstellen anpassen. Die Form der Tensegrity-Struktur wird schrittweise ähnlicher zu der jeweils gesuchten Gleichgewichtskonfiguration.

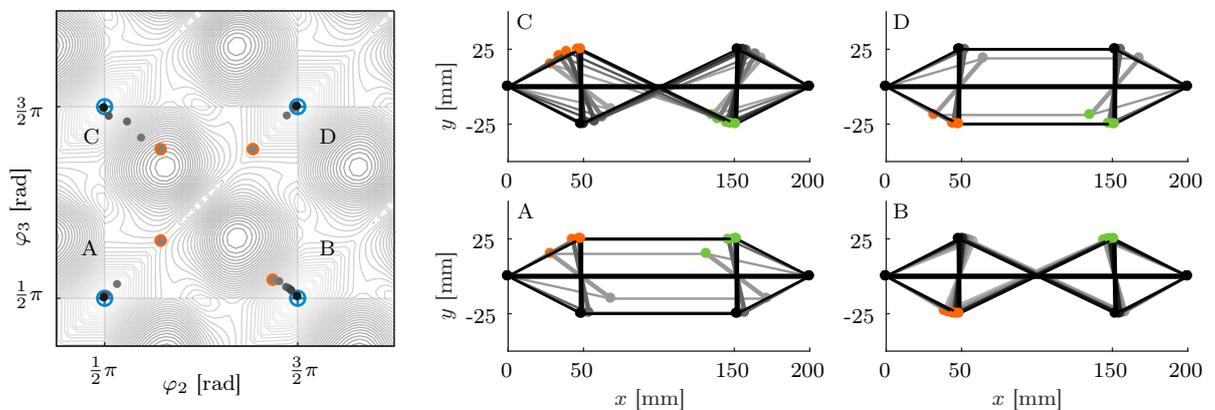


Abbildung 3.28: Links: Verlauf der Individuen in mehreren Generationen, von hell zu dunkel. Rechts: Lage der Tensegrity-Struktur in mehreren Generationen, von hell zu dunkel.

3.3 MultiOpt-Algorithmus für die Formfindung

In diesem Abschnitt wird der MULTIOPT-ALGORITHMUS für die Formfindung beschrieben. Der MultiOpt-Algorithmus basiert auf dem NM MLSL-Algorithmus, welcher in Kapitel 2.2.5 beschrieben wurde. Er wurde an einigen Stellen an das vorliegende Optimierungsproblem angepasst. Dies verändert aber nicht die Aussagen über die Arbeitsweise und Ergebnisse des NM MLSL-Algorithmus.

In diesem Abschnitt wird das Optimierungsproblem (3.7) verwendet. Zunächst wird nachgewiesen, dass das Optimierungsproblem die geforderten Voraussetzungen für die Anwendung des NM MLSL-Algorithmus (und somit des MultiOpt-Algorithmus) erfüllt.

Lemma 3.23 (Voraussetzungen für den NM MLSL-Algorithmus an (3.7)).

Für das Optimierungsproblem (3.7) gilt

- a) Die Zielfunktion U_{mod} ist Lipschitz-stetig.
- b) Der Definitionsbereich \mathcal{D} ist kompakt, konvex und hat ein nichtleeres Inneres.
- c) Es gibt eine endliche Anzahl an stationären Mengen im Definitionsbereich \mathcal{D} .

Beweis. zu a): Wurde in Lemma 3.6 bewiesen.

zu b): Nach Definition (siehe Beschreibung unter (3.1)) ist der Definitionsbereich \mathcal{D} eine beschränkte und abgeschlossene Box in \mathbb{R}^d . Damit ist der Definitionsbereich kompakt und konvex. Außerdem ist er per Definition nicht leer.

zu c): Siehe folgende Beobachtung 3.24. □

Beobachtung 3.24. Die Aussage von Lemma 3.23 c) wird hier nicht formal gezeigt. Es wird aus Sicht der Anwendung argumentiert, warum die modifizierte Energiefunktion im Definitionsbereich \mathcal{D} nur endlich viele stationäre Mengen haben kann.

Wenn ein indifferentes Gleichgewicht vorliegt hat die Energiefunktion unendlich viele stationäre Punkte. Ein indifferentes Gleichgewicht bildet allerdings nur eine stationäre Menge, da benachbarte stationäre Punkte zu einer stationären Menge zusammengefasst werden. Damit unendlich viele stationäre Mengen vorliegen, müsste es demnach unendlich viele Gleichgewichtskonfigurationen geben, welche nicht zusammengefasst werden können. Alle Tensegrity-Strukturen, die beispielhaft in dieser Arbeit untersucht werden (siehe Anhang A), haben nur endlich viele Gleichgewichtskonfigurationen also auch nur endlich viele stationäre Mengen. Die dreidimensionale Tensegrity-Struktur, die in Kapitel 5.3.1 als Greifer verwendet wird, hat ein indifferentes Gleichgewicht (Rotation der Segmente um das mittlere Segment), aber trotzdem nur endlich viele stationäre Mengen.

Insgesamt muss also, bevor die Formfindung mit dem MultiOpt-Algorithmus durchgeführt wird, untersucht werden, ob die Bedingung in Lemma 3.23 c) erfüllt ist. Im Allgemeinen wird dies der Fall sein. Wenn die Bedingung nicht erfüllt ist, gilt die bewiesene Aussage des Algorithmus nicht mehr, dass in endlicher Zeit mit Wahrscheinlichkeit Eins aus jeder stationären Menge ein Punkt gefunden wird. Das heißt, es werden nicht alle stabilen Gleichgewichtskonfigurationen ermittelt. Dies wäre bei unendlich vielen Gleichgewichtskonfigurationen auch nicht möglich. Alle vom Algorithmus bestimmten Minimalstellen sind weiterhin (statisch) stabile Gleichgewichtskonfigurationen des Algorithmus.

Im Folgenden wird auf Besonderheiten und Modifikationen des NM MLSL-Algorithmus für die Implementierung und Anwendung auf Tensegrity-Strukturen eingegangen, sodass sich der MultiOpt-Algorithmus ergibt.

Implementierung und lokale Optimierungsverfahren

Der Programmablaufplan für den NM MLSL-Algorithmus ist bereits in Abbildung 2.25 dargestellt. Für den MultiOpt-Algorithmus ist er identisch. Der Algorithmus wurde in Matlab® 2016b implementiert. Anpassungen beziehungsweise Ergänzungen waren notwendig, um den Algorithmus auf die Formfindung bei Tensegrity-Strukturen anzuwenden.

Als lokales Optimierungsverfahren wurden Algorithmen verwendet, welche in Matlab bereits implementiert sind - in der OPTIMIZATION TOOLBOX. Für die Auswahl eines geeigneten Optimierungsverfahrens wurden verschiedene Verfahren analysiert und getestet. Naheliegend ist die Wahl eines nichtlinearen Least-Square Verfahren (`lsqnonlin`), wie das TRUST-REGION-REFLECTIVE oder das LEVENBERG-MARQUARDT Verfahren. Bei diesen Verfahren kann eine Box als Definitionsbereich angegeben werden. Tests haben allerdings gezeigt, dass diese Verfahren im Definitionsbereich springen und somit oftmals nicht das Minimum bestimmen, welches am dichtesten am Startpunkt liegt. Weitere mögliche Verfahren, bei denen eine Box als Definitionsbereich angegeben werden kann, bietet die Funktion `fmincon` von Matlab. Auch hier zeigen die Verfahren INTERIOR-POINT, SQP und ACTIVE-SET das gleiche Springen im Definitionsbereich, wie die nichtlinearen Least-Square Verfahren. Bei dem MLSL-Algorithmus und dem davon abgeleiteten MultiOpt-Algorithmus ist es allerdings wichtig, dass von einem Startpunkt das dichteste Minimum bestimmt wird. Lediglich die unrestringierten Optimierungsverfahren der Funktionen `fminsearch` und `fminunc` bestimmen in der Regel die zum Startpunkt dichteste Lösung. Bei unrestringierten Optimierungsverfahren liegt die gefundene Lösung allerdings nicht sicher innerhalb des Definitionsbereiches \mathcal{D} . Um dieses Problem zu umgehen, kann die Zielfunktion um einen Strafterm ergänzt werden, welcher Funktionswerte außerhalb des Definitionsbereiches verschlechtert. Dadurch können aber Scheinlösungen auf dem Rand des Definitionsbereiches entstehen, welche im Nachhinein wieder ausgeschlossen werden müssen. Hier wurde eine andere Möglichkeit eingesetzt, wie mit Lösungen außerhalb des Definitionsbereiches umgegangen wird. Im MultiOpt-Algorithmus wird ein weiterer Schritt eingeführt: Nur wenn die gefundene Minimalstelle innerhalb des Definitionsbereiches \mathcal{D} liegt, wird die Lösung in die Menge der gefundenen Minimalstellen aufgenommen. Da das Problem der Lösungen außerhalb des Definitionsbereiches umgangen werden kann und da die gefundenen Minimalstellen meist in der Nähe des Startpunktes liegen, werden die beiden Verfahren `fminsearch` und `fminunc` weiter verfolgt.

Für zweidimensionale Tensegrity-Strukturen wird der Algorithmus `fminsearch` verwendet. Dieser Algorithmus ist ein direkter Suchalgorithmus, basierend auf einem Simplex-Verfahren, der keine Gradienten der Zielfunktion verwendet (die Differenzierbarkeit wird allerdings für die Konvergenzaussagen des Algorithmus benötigt).

Tests haben ergeben, dass sich bei räumlichen Tensegrity-Strukturen der Algorithmus `fminunc` besser eignet. Bei räumlichen Tensegrity-Strukturen werden von `fminsearch` zu oft Lösungen außerhalb des Definitionsbereiches ermittelt oder Algorithmus bricht vor dem Finden einer Lösung ab. Der `fminunc`-Algorithmus wird mit dem QUASI-NEWTON-VERFAHREN angewendet. Der für das Verfahren benötigte Gradient der Zielfunktion wird hierbei numerisch bestimmt.

Skalierung des Definitionsbereiches

Bei der Berechnung der (α_k, β_k) -Folgen werden Abstände zwischen Punkten im Definitionsbereich gebildet und mit gewissen Schranken verglichen. Um zu vermeiden, dass eine Komponente diesen Abstand dominiert, wenn diese einen größeren Definitionsbereich als die anderen Komponenten hat, wird der Definitionsbereich am Anfang des Algorithmus auf die Einheitsbox skaliert (das heißt jede Komponente hat als Definitionsbereich $[0, 1] \in \mathbb{R}$). Innerhalb dieser Einheitsbox werden Punkte generiert und die Abstände für die (α_k, β_k) -Folgen werden innerhalb dieser Einheitsbox gebildet. Nur wenn die Zielfunktion auf einen

Punkt angewendet wird, wird dieser Punkt in den originalen Definitionsbereich zurück transformiert. Dadurch ist der Algorithmus nicht von unterschiedlich großen Definitionsbereichen in den einzelnen Komponenten abhängig.

Abbruchkriterium

In [Kan87a] und [Kan87b] werden keine speziellen Abbruchkriterien für den MLSL-Algorithmus gefordert. In [Hor95] werden im Kapitel *Stochastic Methods* verschiedene mögliche Abbruchkriterien für globale Optimierungsverfahren angegeben. Für den MultiOpt-Algorithmus wurde Abbruchkriterium (S – 5) verwendet [Hor95, S.858]. Es wird ein Parameter $\tau > 0$ vorgegeben und es wird gestoppt, wenn

$$\frac{w(w+1)}{n(n-1)} < \tau \quad (3.24)$$

gilt. Dabei ist w die Anzahl der bisher gefundenen unterschiedlichen Minimalstellen und n gibt an, wie oft bereits der lokale Optimierungsalgorithmus angewendet wurde. Bei den in dieser Arbeit verwendeten Tensegrity-Strukturen hat sich ein τ im Bereich 0.001 bis 0.05 als praktikabel erwiesen. Eine Untersuchung, wie sich der Wert von τ auf die gefundenen Lösungen auswirkt, wird in Abschnitt 3.4.3 durchgeführt.

Als Abbruchkriterium kann auch eine feste Anzahl an Iterationen verwendet werden. Dies wurde unter anderem bei Untersuchungen der Laufzeit (Abschnitt 3.4.3) umgesetzt, um vergleichbare Ergebnisse zu erhalten.

Die Folge (α_k)

Die Definition der Folge (α_k) ist in [Loc98, Theorem 3] angegeben. Dabei unterscheidet sich die dort definierte Folge (α_k) nur um einen konstanten Faktor vor dem Parameter σ von der Folge (α_k) , die im MLSL-Algorithmus [Loc98, S. 26] verwendet wird. Aus diesem Grund kann, mit einer Anpassung von σ , auch die Berechnung aus dem MLSL-Algorithmus angewendet werden:

$$\alpha_k := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\Gamma \left(1 + \frac{1}{\delta} \right) \sigma \frac{\log(k)}{k} \right)^{\frac{1}{\delta}}. \quad (3.25)$$

Dabei ist $\Gamma(\cdot)$ die Gamma-Funktion ([Bro05, Kapitel 8.2.5.6, S. 478]). In [Loc98] wird bei der Berechnung von α_k das Volumen des zulässigen Bereiches des Optimierungsproblems als Faktor verwendet. Durch die Skalierung des zulässigen Bereichs (der gleich dem Definitionsbereich \mathcal{D} ist) auf die Einheitsbox, ist das Volumen immer Eins und muss deshalb beim MultiOpt-Algorithmus nicht multipliziert werden.

Für die Folge (β_k) wird in [Loc98] nur gefordert, dass sie proportional zur Folge (α_k) ist. In dieser Implementierung wird (β_k) identisch zu (α_k) gewählt.¹⁴

Bestimmung der (α_k, β_k) -Folgen

Im MultiOpt-Algorithmus ist ein wesentlicher Punkt festzustellen, ob in der aktuellen Iteration ein lokales Optimierungsverfahren durchgeführt werden muss. Dabei spielen die (α_k, β_k) -Folgen eine entscheidende Rolle. Es werden alle (α_k, β_k) -Folgen, welche mit χ_k beginnen und deren Punkte in C_k liegen gebildet. Wenn in einer dieser Folgen ein Punkt existiert, auf den bereits ein lokales Optimierungsverfahren angewendet wurde oder der dicht an einer gefundenen lokalen Minimalstelle liegt, dann bricht die weitere Berechnung der Folgenglieder ab und es wird in dieser Iteration kein lokales Optimierungsverfahren gestartet. Anderenfalls müssen alle Punkte aller möglichen (α_k, β_k) -Folgen bestimmt werden, denn es wird das lokale Optimierungsverfahren von dem Punkt der (α_k, β_k) -Folgen gestartet, der den kleinsten

¹⁴Wenn die Lipschitz-Konstante der Zielfunktion bekannt wäre, dann könnte (β_k) mit deren Hilfe genauer definiert werden.

Funktionswert hat.

Ein Algorithmus der diese (α_k, β_k) -Folgen berechnet wird in [Loc98] nicht angegeben und wurde deshalb selbst entwickelt. Es ist ein rekursiver Algorithmus, mit der Funktion **Finde Folgen**. Ein Programmablaufplan ist in Abbildung 3.29 dargestellt. Dieser Algorithmus startet mit dem Punkt χ_k , von dem aus die Folgen gebildet werden sollen: **Finde Folgen**($\{\chi_k\}$). In dem Algorithmus werden nicht nur alle (α_k, β_k) -Folgen bestimmt, sondern es wird zusätzlich untersucht, ob in dieser Iteration eine lokale Optimierung durchgeführt werden soll. Ist keine lokale Optimierung durchzuführen, wird die Suche nach den (α_k, β_k) -Folgen abgebrochen (Abbruch = 1). Denn in diesem Fall werden die restlichen Folgenglieder nicht benötigt. Es ist für den MultiOpt-Algorithmus nicht wichtig, die Folgenglieder den einzelnen Folgen zuzuordnen. Es ist hinterher nur der Punkt der (α_k, β_k) -Folgen wichtig, der den kleinsten Funktionswert hat. Aus diesem Grund wird global immer das Folgenglied gespeichert, das den kleinsten Funktionswert aller bisher bestimmten Folgenglieder hat. Dieser wird, nachdem **Finde Folgen** beendet wurde, als Startpunkt für das lokale Optimierungsverfahren verwendet.

Auswertung der Ergebnisse

Der MultiOpt-Algorithmus bestimmt mehrere Minimalstellen. Durch die Modifikation der Energiefunktion ist es möglich, dass in dem modifizierten Bereich Minimalstellen existieren und auch gefunden werden. Diese werden nicht benötigt, da in diesem Fall die elastischen Segmente eine Länge kleiner als ihre Anfangslänge haben. Daher werden die Lösungen des MultiOpt-Algorithmus aussortiert, die sich im modifizierten Bereich der Energiefunktion befinden.

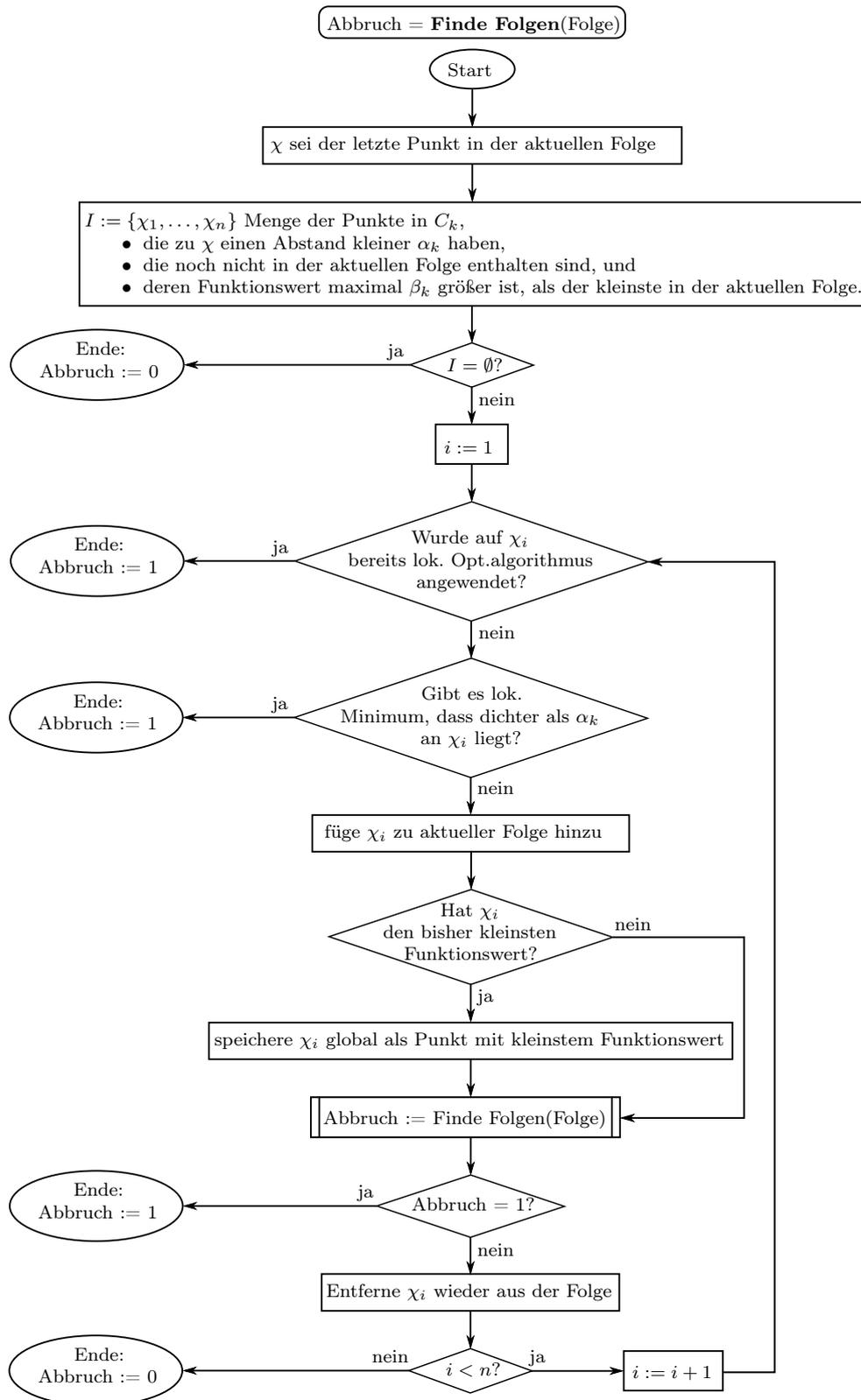


Abbildung 3.29: Programmablaufplan für die Bildung aller (α_k, β_k) -Folgen.

Beispiel 3.25 (Ablauf des implementieren MultiOpt-Algorithmus).

Bei der Anwendung des MultiOpt-Algorithmus können in jeder Iteration unterschiedliche Situationen eintreten, bei denen entschieden wird, ob ein lokales Optimierungsverfahren angewendet wird. Auf fünf verschiedene Situationen wird in diesem Beispiel eingegangen.

Als Beispiel wird Topologie A verwendet, welche in Abbildung A.1 mit ihren Bezeichnungen und den verwendeten Parametern dargestellt ist. Die Struktur wird genauso, wie in Abbildung 3.2, verwendet. Sie hat also den Freiheitsgrad $\delta = 2$, gesucht sind die Winkel φ_2 und φ_3 . Die Zielfunktion und die vier Minimalstellen für den Definitionsbereich $\mathcal{D} := [\frac{1}{4}\pi, 2\pi] \times [\frac{1}{4}\pi, 2\pi] \subset \mathbb{R}^2$ sind auch in Abbildung 3.2 dargestellt.

Im Folgenden werden die verschiedenen Situationen, die beim MultiOpt-Algorithmus auftreten können, beschrieben. In den Abbildungen dieses Beispiels gelten die folgenden Notationen:

- Blau: gesuchte Minimalstellen.
- Schwarz: Generierte Punkte.
- Grün: Ermittelte (α_k, β_k) -Folgen mit entsprechendem Umkreis um die Punkte.
- Orange: Punkte, von denen eine lokale Optimierung gestartet wurde mit Verbindung zur gefundenen Lösung.

Iteration 2 - Abbildung 3.30: Es wurde ein neuer Punkt P_2 generiert und in dessen Umkreis (Radius α_2) liegt kein weiterer Punkt aus $C_2 = \{P_1, P_2\}$ und kein gefundenes Minimum $\{Q_1\}$. Es gibt also keine (α_2, β_2) -Folgen und das lokale Optimierungsverfahren wird auf den neu generierten Punkt angewendet. Die Strecke zwischen Startpunkt und gefundener Minimalstelle des lokalen Optimierungsverfahrens ist orange markiert.

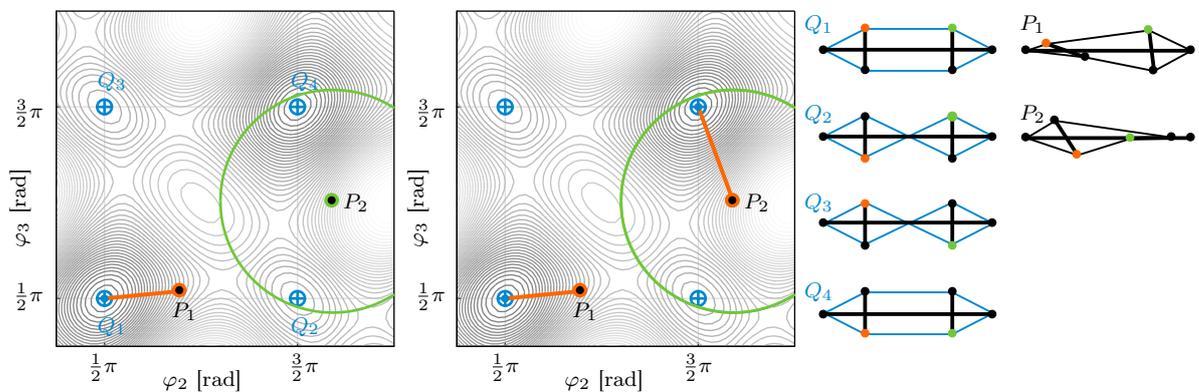


Abbildung 3.30: **Iteration 2:** Links: Neu generierter Punkt P_2 und Umkreis mit Radius α_2 . Mitte: Ergebnis der lokalen Optimierung von P_2 aus.

Iteration 3 - Abbildung 3.31: Es wurde ein neuer Punkt P_3 generiert und in dessen Umkreis (Radius α_3) liegt ein bereits gefundenes Minimum Q_4 . Aus diesem Grund muss nicht weiter nach (α_3, β_3) -Folgen gesucht werden. In dieser Iteration wird kein lokales Optimierungsverfahren angewendet.

(Es wird vom Algorithmus angenommen, dass von P_3 die gleiche Lösung bestimmt werden würde, wie von P_2 .)

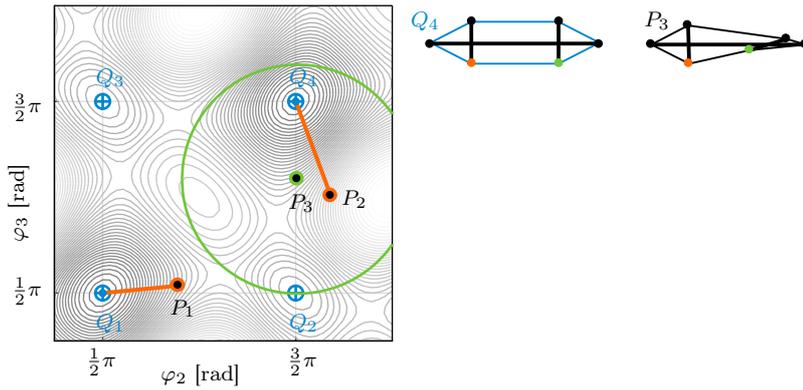


Abbildung 3.31: **Iteration 3:** Neu generierter Punkt P_3 und Umkreis, in dem das bereits gefundene Minimum Q_4 liegt.

Iteration 27 - Abbildung 3.32: Im Umkreis (Radius α_{27}) des neu generierten Punktes P_1 liegen zwei Punkte P_2 und P_3 . Der Punkt P_2 hat einen kleineren Funktionswert als P_1 und P_3 hat einen Funktionswert, der mehr als β_{27} größer ist. Für die $(\alpha_{27}, \beta_{27})$ -Folgen kann nur der Punkt mit dem kleineren Funktionswert, P_2 , gewählt werden. In dessen Umkreis liegt nur der Punkt P_3 , welcher einen zu großen Funktionswert hat. Die zwei grün markierten Punkte, P_1 und P_2 , sind also die einzigen Punkte, die in den möglichen $(\alpha_{27}, \beta_{27})$ -Folgen liegen. Es wurde kein Widerspruch für die Anwendung des lokalen Optimierungsverfahrens gefunden. Es wird das lokale Optimierungsverfahren auf den Punkt von $\{P_1, P_2\}$, der den kleineren Funktionswert hat, angewendet: P_2 . Dieser ist im rechten Bild orange markiert und die Verbindung zum gefundenen Minimum ist eingezeichnet.

Dabei ist zu bemerken, dass in dieser Iteration das lokale Optimierungsverfahren auf einen Punkt angewendet wurde, der in Iteration 3 ausgeschlossen wurde. Zu diesem Zeitpunkt lag das Ausschlusskriterium *Minimum im Umkreis vorhanden* vor. Da in jeder Iteration der Radius der entsprechenden Umkreise verkleinert wird (da α_k kleiner wird (3.25)), ist dies in Iteration 27 nicht mehr der Fall.

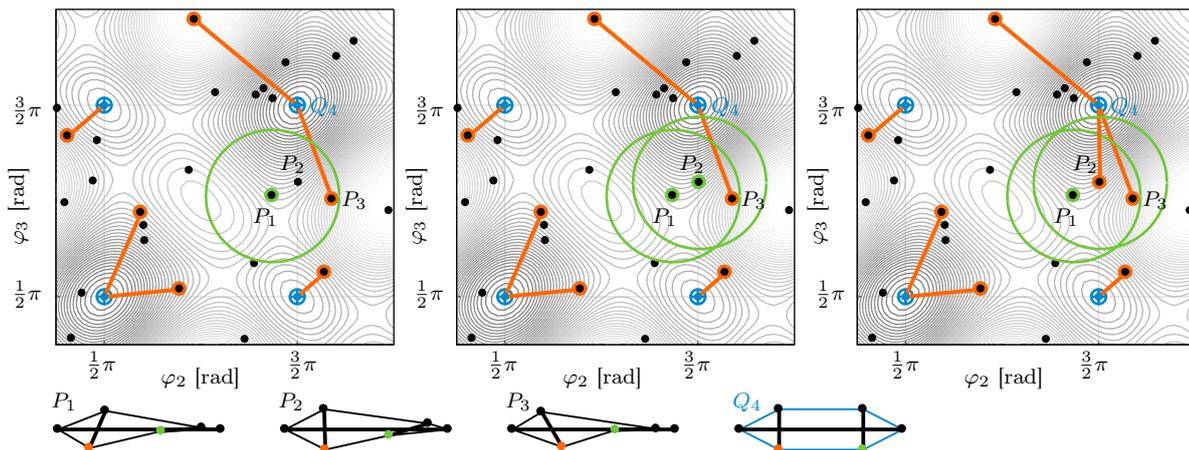


Abbildung 3.32: **Iteration 27:** Links: neu generierter Punkt P_1 und Umkreis mit Radius α_{27} . Mitte: P_2 wurde als Punkt in $(\alpha_{27}, \beta_{27})$ -Folge gewählt. Rechts: Ergebnis der lokalen Optimierung von P_2 aus.

Iteration 31 - Abbildung 3.33: Im Umkreis (Radius α_{31}) des neu generierten Punktes P_1 liegt ein weiterer Punkt P_2 . Dessen Funktionswert ist maximal β_{31} größer. Das heißt, P_2 wird die die $(\alpha_{31}, \beta_{31})$ -Folge aufgenommen. Im Anschluss wird P_3 in die Folge aufgenommen. Im Umkreis von P_3 befindet sich ein bereits ermitteltes Minimum (Q_4). Aus diesem Grund wird in der Iteration keine lokale Optimierung ausgeführt.

(Es wird vom Algorithmus angenommen, dass bei Start von P_1 auch das Minimum Q_4 gefunden wird. Die Darstellung der zugehörigen Tensegrity-Struktur zeigt allerdings eine höhere Ähnlichkeit zu Q_3 als zu Q_4 . Aus diesem Grund wird in den folgenden Iterationen der Radius α_k verkleinert. Dadurch ist eine genauere Beurteilung der Zugehörigkeit der Punkte möglich.)

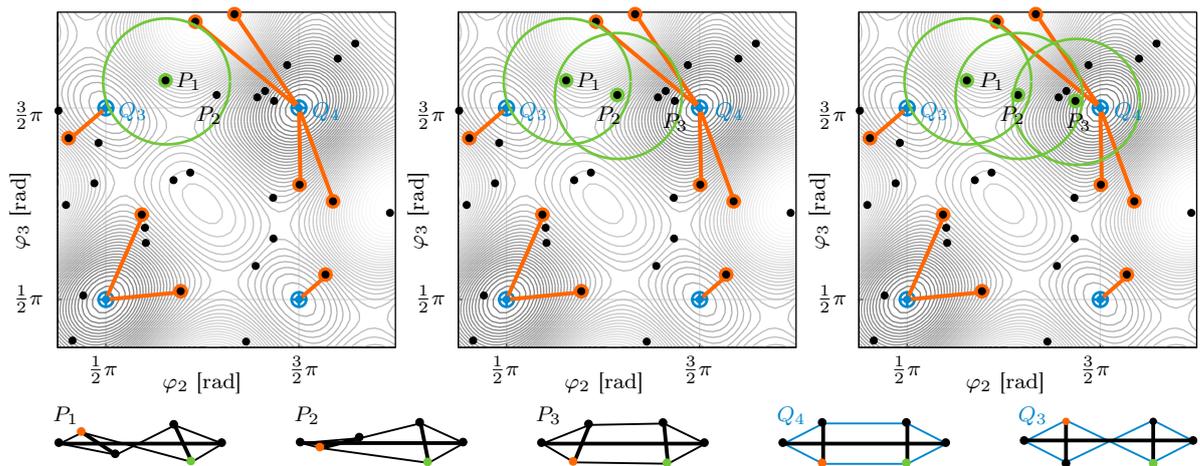


Abbildung 3.33: **Iteration 31:** Links: neu generierter Punkt P_1 und Umkreis. Mitte: P_2 wurde als Punkt in $(\alpha_{31}, \beta_{31})$ -Folge gewählt. Rechts: P_3 wurde als Punkt in $(\alpha_{31}, \beta_{31})$ -Folge gewählt. In dessen Umkreis liegt das bekannte Minimum Q_4 , d.h. keine lokale Optimierung.

Iteration 40 - Abbildung 3.34: Im Umkreis des neu generierten Punktes P_1 liegen mehrere Punkte. Zunächst wird P_2 , dann P_3 und dann P_4 in die $(\alpha_{40}, \beta_{40})$ -Folge aufgenommen. Da von P_4 bereits eine lokale Optimierung gestartet wurde, wird in dieser Iteration keine lokale Optimierung ausgeführt.

(Es wird vom Algorithmus angenommen, dass bei Start von P_1 die gleiche Lösung bestimmt wird, wie bei Start von P_4 bereits bestimmt wurde).

┘

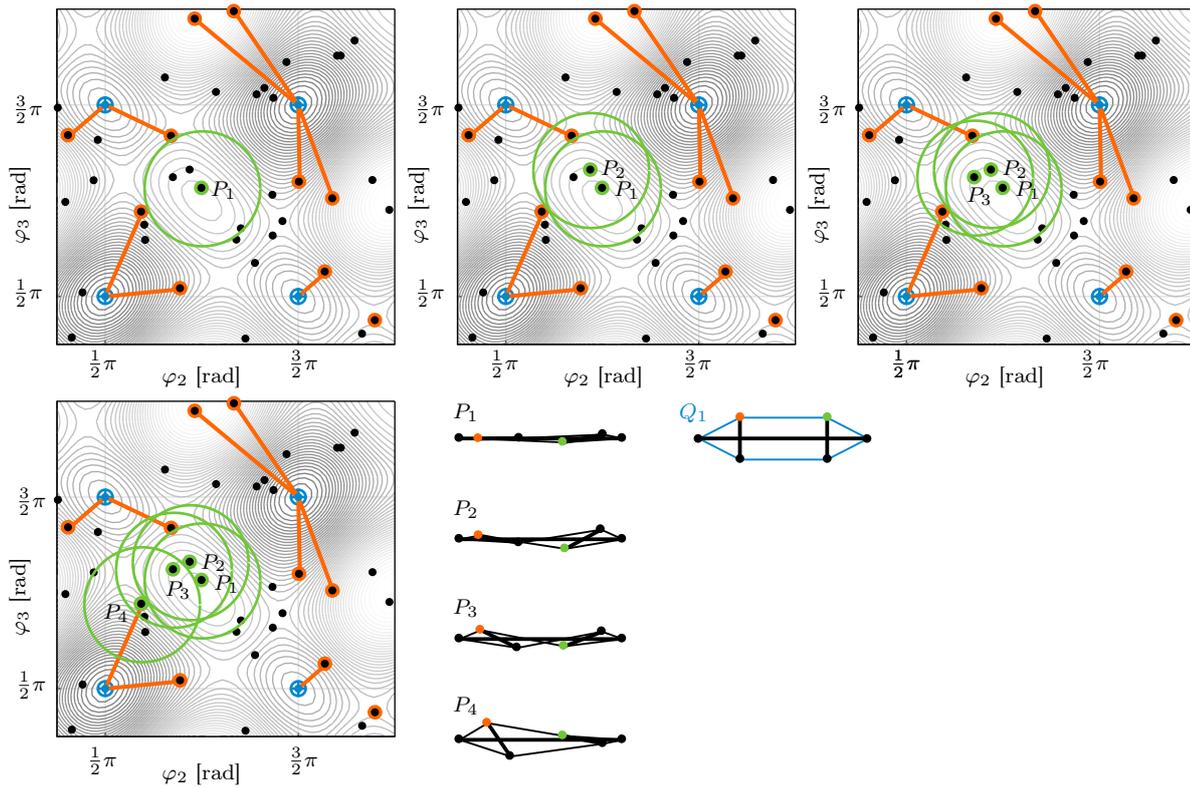


Abbildung 3.34: **Iteration 40:** Von links nach rechts und oben nach unten: Mit dem neu generierten Punkt P_1 und den Punkten P_2, P_3 und P_4 wird eine $(\alpha_{40}, \beta_{40})$ -Folge gebildet. Wegen P_4 keine lokale Optimierung.

3.4 Anwendung der Algorithmen für die Formfindung

In diesem Abschnitt werden die vorgestellten Algorithmen für die Formfindung, der FGenPrioFe-, der FGenFeFi-, der FGenFeFiMu- und der MultiOpt-Algorithmus an verschiedenen Tensegrity-Strukturen getestet. Der Einfluss der zu wählenden Parameter auf das Verhalten des Algorithmus und die Laufzeit in Abhängigkeit von der Anzahl der Optimierungsvariablen wird anhand von Beispielen analysiert.

3.4.1 Verwendete Tensegrity-Strukturen und Rechentechnik

Für die verschiedenen Tests werden Tensegrity-Strukturen verwendet, die in Anhang A definiert sind. Es werden die Segmentparameter und Bezeichnungen der Segmentkoordinaten verwendet, wie sie dort definiert sind. Die verwendeten Definitionsbereiche für die einzelnen Segmentkoordinaten sind in Tabelle 3.4 und 3.5 aufgelistet. Die jeweils nicht angegebenen Segmentkoordinaten sind fixiert, damit die Tensegrity-Struktur keine Starrkörperbewegungen in der Ebene beziehungsweise im Raum durchführen kann. Dies geschieht durch Anwendung der Lagerung, die in Anhang A in jeweils obersten Bild eingezeichnet ist. Die Definitionsbereiche wurden so gewählt, dass genau die stabilen Gleichgewichtskonfigurationen möglich sind, die in Anhang A bei der jeweiligen Topologie dargestellt sind.

Topologie	x_2 [mm]	y_2 [mm]	φ_2	x_3 [mm]	y_3 [mm]	φ_3	x_4 [mm]	y_4 [mm]	φ_4
A	0	-25	$\frac{1}{4}\pi$	90	-25	$\frac{1}{2}\pi$	-	-	-
	110	25	2π	200	25	2π	-	-	-
B	0	-16	$\frac{1}{4}\pi$	70	-36	$\frac{1}{4}\pi$	110	-16	$\frac{1}{4}\pi$
	90	16	2π	130	36	2π	200	16	2π
C	-	-	0	-	-	0	0	-50	-
	-	-	2π	-	-	2π	140	50	-
D	0	-25	$\frac{1}{4}\pi$	0	-25	$\frac{1}{4}\pi$	-	-	-
	140	25	2π	140	25	2π	-	-	-

Tabelle 3.4: Definitionsbereiche der verwendeten planaren Tensegrity-Strukturen.

x_i, y_j, z_k [mm]	φ_1	ψ_1	φ_2	ψ_2	φ_3	ψ_3	φ_4	ψ_4	φ_5	ψ_5	φ_6	ψ_6
-500	$\frac{1}{2}\pi$	$-\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$-\frac{3}{4}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$-\frac{1}{4}\pi$	0	$-\frac{1}{8}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$-\frac{3}{4}\pi$
500	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	π	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	π	π	$\frac{1}{2}\pi$	π	π

mit $i \in \{2, \dots, 6\}$, $j \in \{3, \dots, 6\}$ und $k \in \{4, 5, 6\}$.

Tabelle 3.5: Definitionsbereich der räumlichen Tensegrity-Struktur Topologie F.

Für die Untersuchungen der Laufzeit der Algorithmen wird ein Optimierungsproblem benötigt, bei dem der Freiheitsgrad schrittweise erhöht wird. Um vergleichbare Ergebnisse zu erhalten, sollte immer die gleiche Topologie als Grundlage dafür verwendet werden. Der Freiheitsgrad einer Tensegrity-Struktur kann nicht erhöht werden (da sich durch Hinzufügen von Segmenten die Topologie und damit die Ergebnisse verändern würden). Er kann allerdings verringert werden, indem gewisse Segmentkoordinaten auf feste Werte gesetzt werden (dies entspricht dem Hinzufügen von Lagern). Dies wird im Folgenden bei drei

verschiedenen Topologien (Topologie A, Topologie B, Topologie D) durchgeführt. Die Werte, auf die die einzelnen Segmentkoordinaten gesetzt werden, wenn sie fixiert werden, sind in Tabelle 3.6 angegeben. Die freien Segmentkoordinaten der Tensegrity-Strukturen haben den Definitionsbereich aus Tabelle 3.4.

Topologie	x_2 [mm]	y_2 [mm]	φ_2	x_3 [mm]	y_3 [mm]	φ_3	x_4 [mm]	y_4 [mm]	φ_4
A	48.35	0	–	$l_1 - x_2$	0	–			
B	33.00	0	–	100	0	–	$l_1 - x_2$	0	–
D	60.70	0	–	$l_1 - x_2$	0	–			

Tabelle 3.6: Werte, auf die Segmentkoordination fixiert werden, bei Einschränkung des Freiheitsgrades.

Von den Segmentkoordinaten werden so viele auf feste Werte gesetzt, wie für den gewählten Freiheitsgrad benötigt wird.¹⁵ Die Einschränkung des Freiheitsgrades kann zu einer Veränderung der Gleichgewichtskonfigurationen führen. Werden beispielsweise bei Topologie A die Segmentkoordinaten x_2 und x_3 auf feste Werte gesetzt: $x_2 := 48.35$ mm, $x_3 := 151.65$ mm, werden nicht genau die in Abbildung A.1 beschriebenen Gleichgewichtskonfigurationen erreicht, denn Gleichgewichtskonfiguration I und II, haben unterschiedliche x-Positionen der Segmente 2 und 3:

Gleichgewichtskonfiguration I: $x_2 = 48.35$ mm, $x_3 = 151.65$ mm,

Gleichgewichtskonfiguration II: $x_2 = 48.62$ mm, $x_3 = 151.38$ mm.

Die Energiefunktion hat mit dieser Einschränkung weiterhin vier lokale Minimalstellen im Definitionsbereich. Bei der Kräfte- und Momentensumme werden zwei globale Minimalstellen zu lokalen Minimalstellen, da resultierende Lagerkräfte existieren. Diese müssten zusätzlich betrachtet werden. Da Lagerkräfte allerdings nur bei dieser Analyse auftauchen und Tensegrity-Strukturen ohne Einschränkungen freistehend sind, werden diese Lagerkräfte nicht betrachtet. Da die genetischen Algorithmen allerdings auch lokale Minimalstellen bestimmen können, werden weiterhin vier stabile Gleichgewichtskonfigurationen bestimmt. Dies führt in manchen Fällen zu einem optimalen Fitnesswert ungleich Null.

In den Untersuchungen werden nur Segmentkoordinaten fixiert, bei denen die Anzahl der stabilen Gleichgewichtskonfigurationen erhalten bleibt. Somit werden vergleichbare Ergebnisse erreicht.

Die Berechnungen wurden mit einem Desktop-PC (Prozessor: *Intel(R) Core(TM) i7-4790 CPU @ 3.60GHz* 3.60GHz, Arbeitsspeicher: 16 GB) mit Windows 10 Pro durchgeführt. Es wurde Matlab in der Version R2016b verwendet.

3.4.2 Anwendung der genetischen Algorithmen

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass die drei genetischen Algorithmen (FGenPrioFe, FGenFeFi und FGenFeFiMu, Abschnitt 3.2) für die Formfindung bei Tensegrity-Strukturen geeignet sind. Dafür werden drei Aspekte betrachtet. Zuerst wird überprüft, ob die Algorithmen bei speziellen Tensegrity-Strukturen alle¹⁶ stabilen Gleichgewichtskonfigurationen finden. Im zweiten Test wird die Abhängigkeit des Algorithmus von der Anzahl der Optimierungsvariablen (Freiheitsgrad) untersucht. In einer dritten Analyse

¹⁵Das gleiche Vorgehen ist auch in Beispiel 3.17, 3.20 und 3.25 angewendet worden. Dort wurden x_2, y_2, x_3, y_3 auf die Werte in Tabelle 3.6 gesetzt.

¹⁶Die für diese Strukturen mit diesen Segmentparametern aus Voruntersuchungen bekannten stabilen Gleichgewichtskonfigurationen, werden als *alle* bezeichnet.

wird der Einfluss der Populationsgröße n_{ind} und der Anzahl an Generationen n_{gen} auf die Qualität der Lösungen und auf die Laufzeit betrachtet.

Da die Algorithmen Zufallskomponenten haben (Bestimmung der Startpopulation, Auswahl von Individuen für Rekombination und Mutation etc.), wird der Algorithmus mehrmals auf das gleiche Optimierungsproblem angewendet, um allgemeingültige Aussagen zu erhalten.

Die Algorithmen können auch instabile Gleichgewichtskonfigurationen finden, sofern bei diesen alle Segmente mit geringer Steifigkeit Zugsegmente sind (also eine Länge größer oder gleich ihrer Anfangslänge haben). Denn nur in diesen Bereichen entspricht die modifizierte Energiefunktion der Energiefunktion. Weil in technischen Anwendungen von Tensegrity-Strukturen die stabilen Gleichgewichtskonfigurationen wichtiger sind, als die instabilen und da die instabilen Gleichgewichtskonfigurationen im FE-Formfindungsalgorithmus nur bestimmt werden, wenn nah bei ihnen gestartet wird, werden in diesem Abschnitt zunächst nur die stabilen Gleichgewichtskonfigurationen betrachtet. Im letzten Teil dieses Abschnittes wird eine Untersuchung zu instabilen Gleichgewichtskonfigurationen durchgeführt.

Analyse der Qualität der Lösungen

Es wird überprüft, ob die drei genetischen Algorithmen aus Abschnitt 3.2 (FGenPrioFe, FGenFeFi, FGenFeFiMu) bei verschiedenen Tensegrity-Strukturen alle stabilen Gleichgewichtskonfigurationen finden. Die zwei Parameter, die für die einzelnen Algorithmen eingestellt werden, sind die Populationsgröße n_{ind} und die Anzahl an durchzuführenden Generationen n_{gen} . Eine Betrachtung des Einflusses dieser Parameter wird später in diesem Kapitel durchgeführt.

Für den Test werden vier planare Tensegrity-Strukturen verwendet. Die Segmentparameter und Bezeichnungen sind in den Abbildungen in Anhang A angegeben und die Definitionsbereiche in Tabelle 3.4.

Die Algorithmen werden jeweils 100 Mal auf dasselbe Optimierungsproblem angewendet. Es wird berechnet, in wie viel Prozent der Durchführungen alle stabilen Gleichgewichtskonfigurationen bestimmt werden. Außerdem wird die Zeit, die für den Algorithmus benötigt wird, über alle 100 Durchläufe gemittelt. Die Ergebnisse der Analyse sind in Tabelle 3.7 angegeben. Im Folgenden werden Besonderheiten genauer erläutert.

	δ	# Min.	Algorithmus	n_{ind}	n_{gen}	Ø Zeit	Erfolg
Topologie A	6	4	FGenPrioFe	10	350	0.6 s	100 %
			FGenFeFi	14	20	1.5 s	100 %
			FGenFeFiMu	10	35	1.3 s	100 %
Topologie B	9	8	FGenPrioFe	110	1250	6.0 s	100 % (Δ)
			FGenFeFi	24	40	4.6 s	100 % (Δ)
			FGenFeFiMu	18	50	3.5 s	100 %
Topologie C	4	6	FGenPrioFe	50	1100	1.8 s	100 % (Δ)
			FGenFeFi	36	180	16.0 s	100 %
			FGenFeFiMu	24	70	3.9 s	28 %
			FGenFeFiMu	24	70	9.0 s	100 % (\star)
Topologie D	6	2	FGenPrioFe	16	150	0.9 s	100 % (Δ)
			FGenFeFi	8	15	0.9 s	100 % (Δ)
			FGenFeFiMu	8	20	0.7 s	100 %

Tabelle 3.7: Verhalten der drei genetischen Algorithmen bei verschiedenen Topologien, Freiheitsgraden und Minima.

(\star): In der oberen der beiden Zeilen wurde der FGenFeFiMu-Algorithmus mit den standard-Parametern aus Tabelle 3.3 durchgeführt. Die Erfolgsquote ist mit 28 % gering. In der zweiten Zeile wurden die

Anzahl der Iterationen, die der FE-Formfindungsalgorithmus durchführt von zwei auf sechs erhöht. Die Erfolgsquote erhöht sich dadurch auf 100 %.

(Δ): Bei diesen Ergebnissen wurden in mehreren (FGenFeFi: Topologie B: 1, Topologie D: 5) Durchläufen eine Lösung zu viel gefunden. Dies sind Gleichgewichtskonfigurationen, bei denen mindestens ein Segment mit geringer Steifigkeit eine Länge kleiner seiner Anfangslänge hat. Diese Lösungen können leicht ausgeschlossen werden, indem die Überprüfung der Längen der Segmente am Ende des Algorithmus hinzugefügt wird.

Zusätzlich zu den planaren Tensegrity-Strukturen aus der vorhergehenden Analyse wird eine räumliche Tensegrity-Struktur getestet: Topologie F, siehe Abbildung A.7, mit dem FGenFeFiMu-Algorithmus. Diese Struktur hat einen Freiheitsgrad von $\delta = 24$ und im Definitionsbereich drei stabile Gleichgewichtskonfigurationen. Dabei wurden $n_{ind} := 40$ Individuen und $n_{gen} := 50$ Generationen gewählt. Die anderen Parameter wurden so, wie in Tabelle 3.3 angegeben, verwendet. Allerdings wurde nach dem genetischen Algorithmus, vor dem Aussortieren von gleichen Lösungen, nochmals der FE-Formfindungsalgorithmus auf alle Individuen angewendet, mit 10 Iterationen und 4 Lastinkrementen. Damit ist die Anwendung des FE-Formfindungsalgorithmus am Ende kürzer, als beim FGenPrioFe- und beim FGenFeFi-Algorithmus. Es ergibt sich eine Erfolgsquote von 95 % bei einer durchschnittlichen Laufzeit von circa 15 s.

Analyse der Laufzeit

Für die Analyse der Laufzeit des Algorithmus wurde Topologie B verwendet. Diese hat von den betrachteten planaren Tensegrity-Strukturen den größten Freiheitsgrad und ist deshalb am besten geeignet. Der Freiheitsgrad wird auf bis zu $\delta = 3$ eingeschränkt, so wie es in Abschnitt 3.4.1 beschrieben ist. Auf welche Werte die fest definierten Segmentkoordinaten gesetzt werden, ist in Tabelle 3.6 angegeben. Die freien Segmentkoordinaten haben jeweils den Definitionsbereich, der in Tabelle 3.4 angegeben ist. Es ist möglich, gewisse Freiheitsgrade mit unterschiedlichen Einschränkungen zu erreichen. Es wurden nur Einschränkungen verwendet, bei denen die Anzahl der gesuchten stabilen Gleichgewichtskonfigurationen gleich bleibt. Die freien Segmentkoordinaten, die bei dem jeweiligen Freiheitsgrad verwendet wurden, sind in Tabelle 3.8 angegeben. Jedes der Optimierungsprobleme (anderer Freiheitsgrad, anderes Optimierungsverfahren) wird 100 Mal gelöst und die Ergebnisse werden gemittelt. Außerdem wurde die Standardabweichung der Laufzeiten berechnet.

Die Ergebnisse des Tests sind in Abbildung 3.35 dargestellt. Auf der Abszisse ist der Freiheitsgrad abgetragen und auf der Ordinate die Erfolgsquote beziehungsweise die Laufzeit des Algorithmus. Wie in Tabelle 3.8 angegeben, gibt es für gewisse Freiheitsgrade verschiedene Varianten der Einschränkung. Die Ergebnisse von allen verwendeten Varianten der Einschränkung für einen Freiheitsgrad wurden gemittelt. Bei der Laufzeit wurde eine lineare Regressionsgerade durch die ermittelten Zeiten gelegt. Die Laufzeit ist (fast) unabhängig von der Anzahl der Optimierungsvariablen. Allerdings ist in dem Diagramm mit der Erfolgsquote abzulesen, dass der Algorithmus bei mehr Optimierungsvariablen auch mehr Individuen und Generationen benötigt, um eine Erfolgsquote von rund 100 % zu erhalten. Dies führt zu einem indirekten Anstieg der Laufzeit, da eine größere Anzahl an Individuen und Generationen bei einem größeren Freiheitsgrad benötigt wird.

δ	Variablen
3	$\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$
4	$x_3, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$
4	$x_2, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$
5	$x_2, x_3, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$
5	$x_3, y_3, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$
6	$x_2, x_3, x_4, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$
6	$x_2, x_4, y_3, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$
7	$x_2, x_3, x_4, y_3, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$
7	$x_2, x_4, y_2, y_4, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$
8	$x_2, x_3, x_4, y_2, y_3, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$
8	$x_2, x_4, y_2, y_3, y_4, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$
8	$x_2, x_3, y_2, y_3, y_4, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$
9	$x_2, x_3, x_4, y_2, y_3, y_4, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$

Tabelle 3.8: Verwendete freie Segmentkoordinaten für den Test der Laufzeit.

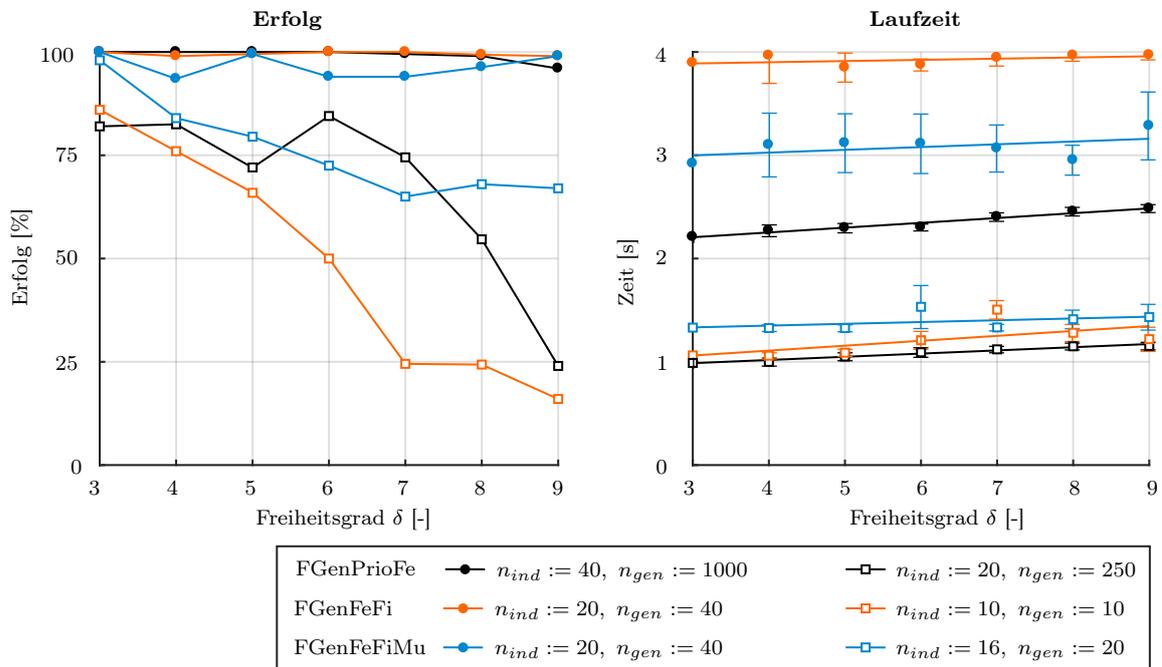


Abbildung 3.35: Erfolg und Laufzeit der drei genetischen Algorithmen bei unterschiedlicher Anzahl an Optimierungsvariablen. Schwarz: FGenPrioFe, Orange: FGenFeFi, Blau: FGenFeFiMu.

Analyse des Einflusses der Populationsgröße n_{ind} und der Anzahl an Generationen n_{gen}

In diesem Abschnitt wird untersucht, welchen Einfluss die Populationsgröße n_{ind} und die Anzahl an Generationen n_{gen} auf die Erfolgsquote der genetischen Algorithmen und auf die Laufzeit haben. Beide Parameter werden unabhängig voneinander untersucht. Der jeweils nicht veränderte Parameter wird entsprechend Tabelle 3.7 gewählt.

Es wird jedes Optimierungsproblem 100 Mal in Folge gelöst. Es wird ermittelt, in wie viel Prozent der Durchläufe alle gesuchten stabilen Gleichgewichtskonfigurationen bestimmt wurden, und die durchschnittliche Laufzeit des Algorithmus wird berechnet. Die Untersuchungen werden mit den beiden planaren Topologien Topologie A und Topologie B durchgeführt. Die Ergebnisse für die Populationsgröße sind in Abbildung 3.36 und die Ergebnisse für die Anzahl an Generationen sind in Abbildung 3.37 dargestellt.

Da die Ergebnisse qualitativ ähnlich sind, werden diese im Folgenden gemeinsam ausgewertet. Die Ergebnisse in Abbildung 3.36 und 3.37 zeigen, dass, unabhängig vom Algorithmus, bei einer zu kleinen n_{ind} beziehungsweise n_{gen} nicht alle stabilen Gleichgewichtskonfigurationen im Definitionsbereich bestimmt werden. Eine zu große n_{ind} beziehungsweise n_{gen} kann es bezüglich der Erfolgsquote nicht geben. Allerdings steigt die Laufzeit des Algorithmus bei steigender Populationsgröße beziehungsweise Anzahl an Generationen an. Es wurde jeweils mit linearer Regression eine lineare Funktion durch die ermittelten Laufzeiten des Algorithmus gelegt. Aus den Ergebnissen ist ersichtlich, dass die Laufzeit annähernd linear steigt.

Analyse der Qualität der Lösungen bei instabilen Gleichgewichtskonfigurationen

In den bisherigen Abschnitten wurden instabile Gleichgewichtskonfigurationen nicht betrachtet. In diesem Abschnitt wird beispielhaft an Topologie C untersucht, wie gut die Algorithmen instabile Gleichgewichtskonfigurationen bestimmen. Bei den beiden instabilen Gleichgewichtskonfigurationen i und ii von Topologie C ist die Bedingung, dass alle Segmente mit geringer Steifigkeit eine Länge größer oder gleich ihrer Anfangslänge haben, erfüllt. Mit den sechs stabilen Gleichgewichtskonfigurationen sollten die Algorithmen bei Topologie C acht Gleichgewichtskonfigurationen ermitteln (6 stabile und 2 instabile). Der Freiheitsgrad ist weiterhin $\delta = 4$. Es werden die gleichen Parameter, wie in Tabelle 3.7 angegeben, verwendet. Bei dem FGenFeFiMu-Algorithmus wird die zweite, modifizierte Variante (siehe (★) in Tabelle 3.7) verwendet. Wie in den vorhergehenden Untersuchungen wird der Algorithmus jeweils 100 Mal durchgeführt und es wird angegeben, wie oft alle acht Gleichgewichtskonfigurationen gefunden werden. Die Ergebnisse sind in Tabelle 3.9 aufgelistet und werden im Folgenden diskutiert.

Algorithmus	n_{ind}	n_{gen}	Erfolg
FGenPrioFe	50	1100	0 %
	50	2200	79 % bzw. 95 %
FGenFeFi	36	180	1 %
FGenFeFiMu	24	70	90 %

Tabelle 3.9: Erfolgsquote der drei Algorithmen, wenn zusätzlich zu den sechs stabilen Gleichgewichtskonfigurationen auch die zwei instabilen bestimmt werden sollen.

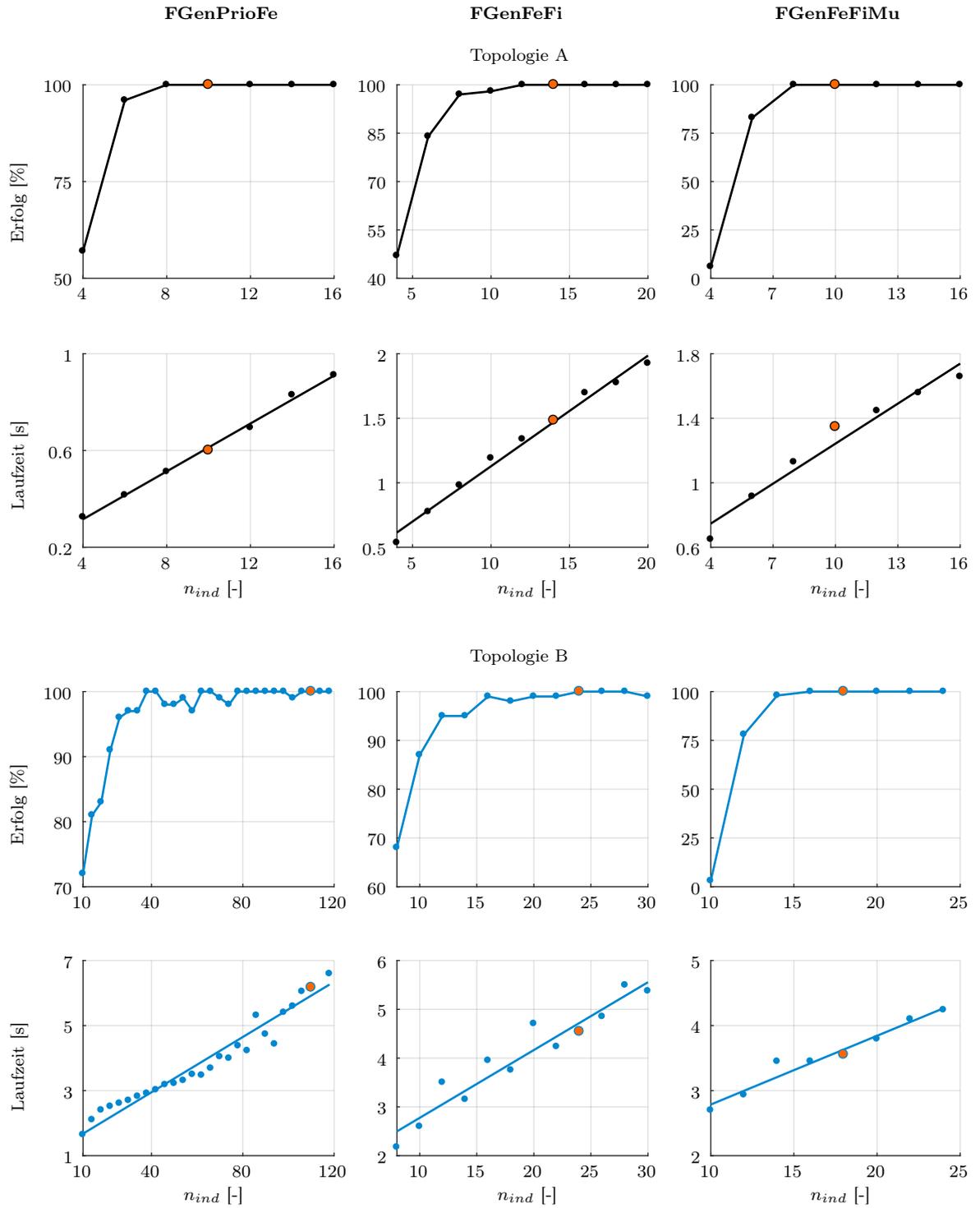


Abbildung 3.36: Variation der Populationsgröße n_{ind} . Spalten von links nach rechts: FGenPrioFe-, FGenFeFi- und FGenFeFiMu-Algorithmus. Schwarz: Topologie A. Blau: Topologie B. Jeweils Erfolgsquote und durchschnittliche Laufzeit des Algorithmus bei 100 Durchläufen.

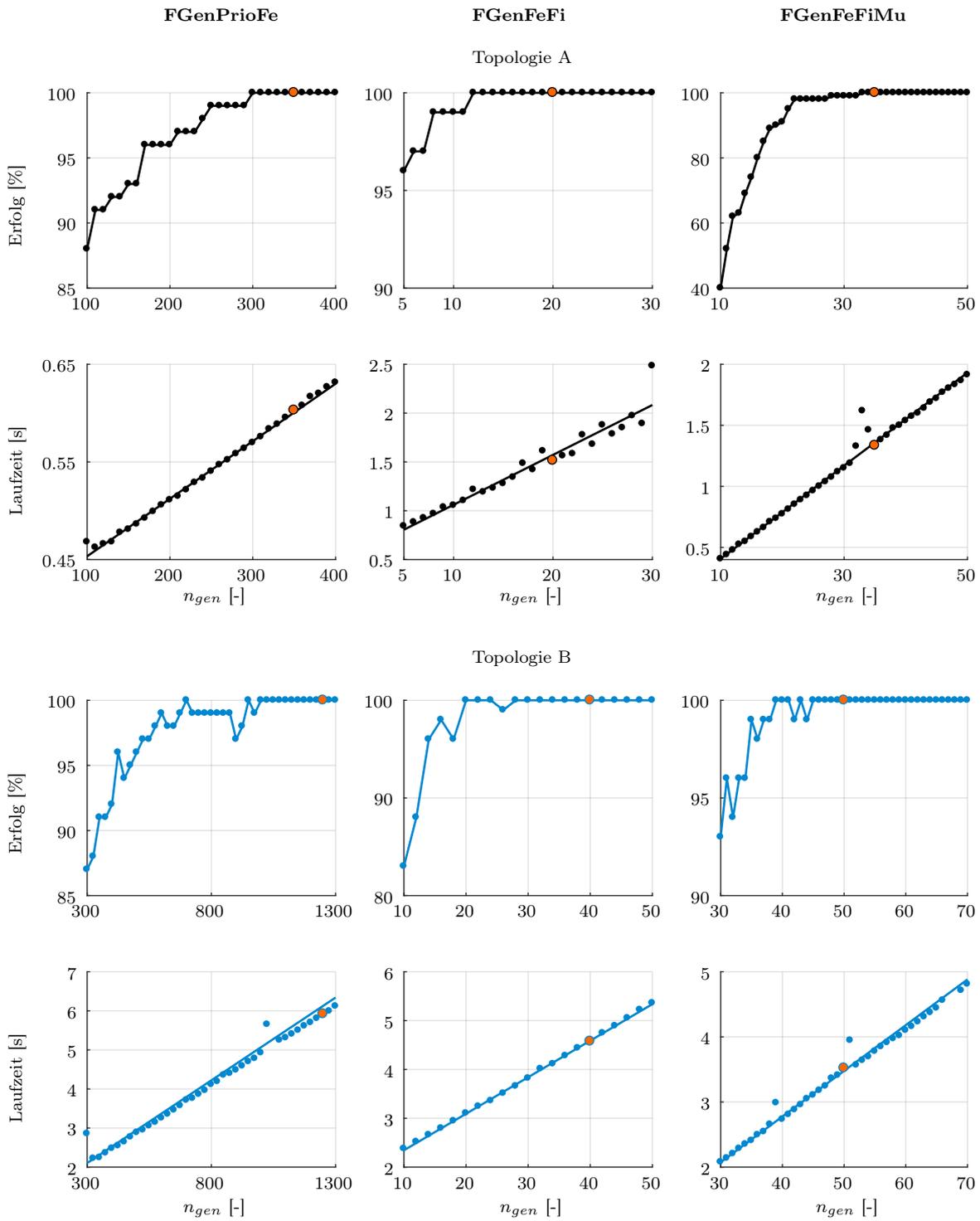


Abbildung 3.37: Variation der Anzahl an Generationen n_{gen} . Spalten von links nach rechts: FGenPrioFe-, FGenFeFi- und FGenFeFiMu-Algorithmus. Schwarz: Topologie A. Blau: Topologie B. Jeweils Erfolgsquote und durchschnittliche Laufzeit des Algorithmus bei 100 Durchläufen.

FGenPrioFe-Algorithmus: Erste Zeile: Bei diesem Test wurden die Parameter verwendet, wie auch in Tabelle 3.7. Dort wurden die stabilen Gleichgewichtskonfigurationen mit einer Erfolgsquote von 100 % gefunden. Die 0 %, die hier als Erfolgsquote ermittelt wurden, lassen also darauf schließen, dass in den Lösungen mindestens eine der beiden instabilen Gleichgewichtskonfigurationen nicht bestimmt wurde. Im FGenPrioFe-Algorithmus wird nach dem genetischen Algorithmus der FE-Formfindungsalgorithmus auf die Ergebnisse angewendet. Bei Betrachtung der Ergebnisse vor der Anwendung des FE-Formfindungsalgorithmus sind die instabilen Gleichgewichtskonfigurationen qualitativ erkennbar. Sie liegen aber, wie alle Lösungen, nicht exakt auf den zu bestimmenden Positionen. Wird der FE-Formfindungsalgorithmus angewendet, dann werden von diesen Lösungen ausgehend stabile Gleichgewichtskonfigurationen gefunden. Zweite Zeile: Nach den Beobachtungen in der ersten Untersuchung wurde der gleiche Algorithmus mit doppelt so vielen Generationen durchgeführt. Durch die doppelte Anzahl an Generationen werden die einzelnen Lösungen im genetischen Algorithmus (vor Anwendung des FE-Formfindungsalgorithmus) genauer bestimmt.¹⁷ Der FE-Formfindungsalgorithmus wird in dieser Betrachtung nicht angewendet, sondern es wird direkt das Ergebnis des genetischen Algorithmus verwendet. Es wird untersucht, ob alle acht Gleichgewichtskonfigurationen ermittelt wurden und ob beide instabilen Gleichgewichtskonfigurationen (ohne Beachtung der stabilen) gefunden wurden. Dabei ergeben sich Erfolgsquoten von 79 % und 95 %. Das Ergebnis zeigt, dass öfter die beiden instabilen Gleichgewichtskonfigurationen gefunden werden, als die sechs stabilen Gleichgewichtskonfigurationen. Es zeigt auch, dass es mit dem FGenPrioFe-Algorithmus, mit einer Modifikation, möglich ist, die gesuchten instabilen Gleichgewichtskonfigurationen zu bestimmen.

FGenFeFi-Algorithmus: Der FGenFeFi-Algorithmus ist nicht für die Bestimmung von instabilen Gleichgewichtskonfigurationen geeignet, weil der FE-Formfindungsalgorithmus, welcher nach dem genetischen Algorithmus angewendet wird, eine große Bedeutung hat. Damit im FE-Formfindungsalgorithmus instabile Lösungen ermittelt werden, muss dicht an so einer Gleichgewichtskonfiguration gestartet werden.

FGenFeFiMu-Algorithmus: Der FGenFeFiMu-Algorithmus ist gut für die Bestimmung der instabilen Gleichgewichtskonfigurationen geeignet. Es wurden, ohne weitere Modifikationen des Algorithmus, in 90 % der Durchläufe alle acht Gleichgewichtskonfigurationen bestimmt.

Zusammenfassung

Die Untersuchungen in diesem Abschnitt zeigen, dass alle drei vorgestellten Algorithmen genutzt werden können, um die Aufgabe der Formfindung bei Tensegrity-Strukturen zu lösen.

Für jede Formfindungsaufgabe müssen die Parameter n_{ind} und n_{gen} festgelegt werden. Diese sollten eher groß gewählt werden, da dann die Erfolgsquote steigt. Jeder Parameter an sich beeinflusst die Laufzeit des Algorithmus annähernd linear.

Zusätzlich zu den zwei Parametern (n_{ind} und n_{gen}) gibt es Parameter, welche, bis auf Ausnahmen (siehe (*) in Tabelle 3.7), für alle Formfindungen gleich bleiben können.

Insgesamt ist es bei allen Algorithmen möglich, für die gewählten Topologien eine Erfolgsquote von 100 % zu erreichen. Zusätzlich konnte mit dem FGenFeFiMu-Algorithmus die Formfindung bei einer räumlichen Tensegrity-Struktur mit einem Freiheitsgrad $\delta = 24$ mit einer Erfolgsquote von 93 % gelöst werden. Außerdem ist es möglich, mit dem FGenFeFiMu- und dem FGenPrioFe-Algorithmus (der Letztere mit einer Modifikation) neben den stabilen Gleichgewichtskonfigurationen auch instabile zu bestimmen.

¹⁷Durch eine Anwendung des FE-Formfindungsalgorithmus würden die stabilen Gleichgewichtskonfigurationen noch genauer gefunden werden, dann würden allerdings auch die instabilen Lösungen wieder verschwinden.

3.4.3 Anwendung des MultiOpt-Algorithmus

In diesem Abschnitt wird nachgewiesen, dass der MultiOpt-Algorithmus, wie er in Abschnitt 3.3 beschrieben wurde, für die Formfindung bei Tensegrity-Strukturen geeignet ist. Es werden drei Aspekte des Algorithmus betrachtet: Zunächst wird überprüft, ob bei Anwendung des MultiOpt-Algorithmus alle¹⁸ stabilen Gleichgewichtskonfigurationen gefunden werden. In einem zweiten Test wird die Laufzeit des Algorithmus untersucht. Dafür wird bei einer Tensegrity-Struktur die Anzahl der zu bestimmenden Variablen Schrittweise erhöht und die Laufzeit des Algorithmus wird bestimmt. In einer dritten Auswertung wird betrachtet, wie sich die Parameter σ (von den (α_k) -Folgen, siehe (3.25)) und τ (vom Abbruchkriterium, siehe (3.24)) auf die Vollständigkeit der gefundenen Lösungen auswirken.

Da der Algorithmus eine Zufallskomponente hat (Generieren von Punkten im Definitionsbereich), wird der Algorithmus auf ein und dasselbe Optimierungsproblem mehrmals angewendet, um allgemeingültige Aussagen zu erhalten.

Analyse der Qualität der Lösungen

Es wird überprüft, ob der implementierte Algorithmus bei verschiedenen Tensegrity-Strukturen alle stabilen Gleichgewichtskonfigurationen findet. Dafür wird das Abbruchkriterium verwendet, das in (3.24) definiert ist. Es gibt zwei Parameter, die eingestellt werden können: τ vom Abbruchkriterium und σ bei der Bildung der (α_k) - und (β_k) -Folgen, siehe (3.25). In dieser Analyse werden diese Parameter auf feste Werte gesetzt und es wird untersucht, ob alle Lösungen gefunden werden. In einem späteren Abschnitt wird der Einfluss dieser beiden Parameter auf die Qualität der Lösungen betrachtet.

Für jede Tensegrity-Struktur, das heißt für jedes Optimierungsproblem, wird der Algorithmus 100 Mal in Folge durchgeführt, da der Algorithmus auf Zufallszahlen basiert. Die Anzahl der durchgeführten Iterationen und Anwendungen des lokalen Optimierungsverfahrens werden gemittelt. Außerdem wird angegeben, in wie viel Prozent der durchgeführten Optimierungen die gesuchte Anzahl an Lösungen gefunden wurde. Die Ergebnisse sind in Tabelle 3.10 dargestellt.

Topologie	δ	# Min.	σ	τ	# Iter.	# lok. Opt.	Ø Zeit	Erfolg
A	6	4	1.0	0.01	106.01	46.0	0.9 s	100 %
B	9	8	0.5	0.001	389.97	271.56	23.1 s	100 % (*)
C	4	6	0.5	0.001	502.39	206.00	3.0 s	100 %
D	6	2	1.0	0.01	47.49	26.00	0.6 s	100 %
F	24	3	1.0	(▲)	350.00	343.83	135.1 s	76 %

Tabelle 3.10: Verhalten des MultiOpt-Algorithmus bei verschiedenen Topologien, Freiheitsgraden und Minima.

Zu (*): Bei dieser Struktur wurde in sieben Durchläufen des Algorithmus eine Lösung zu viel gefunden, da in diesen Fällen der lokale Optimierungsalgorithmus (`fminsearch`) nicht genau die lokale Minimalstelle findet, sondern davor aufhört. Aus diesem Grund wird diese Lösung vom Algorithmus als unterschiedlich angesehen. Diese Lösung kann aussortiert werden, indem der FE-Formfindungsalgorithmus (siehe 2.2.2) auf die ermittelten Lösungen angewendet wird, oder indem nochmals der gleiche lokale Optimierungsalgorithmus von dieser Lösung aus gestartet wird. Dann wird eine der bereits gefundenen Lösungen auch hier ermittelt.

Zu (▲): Bei dieser Tensegrity-Struktur hat sich durch Tests ergeben, dass der lokale Optimierungsalgorithmus `fminsearch` nicht gut geeignet ist. Die Lösungen, die gefunden werden, befinden sich nicht innerhalb des Definitionsbereiches und werden dadurch vom MultiOpt-Algorithmus ausgeschlossen. Aus

¹⁸Die für diese Strukturen mit diesen Segmentparametern aus Voruntersuchungen bekannten stabilen Gleichgewichtskonfigurationen, werden als *alle* bezeichnet.

diesem Grund wurde für dieses Beispiel der lokale Optimierungsalgorithmus `fminunc` mit dem Quasi-Newton-Verfahren verwendet. Außerdem wurde nicht das Abbruchkriterium aus (3.24) verwendet, sondern die Anzahl der Iterationen wurde auf 350 festgelegt. Bei einer Wahl des Abbruchkriteriums müsste der Parameter τ sehr klein gewählt werden, damit alle Lösungen gefunden werden. Um eine bessere Erfolgsquote zu bekommen, müsste die Anzahl der Iterationen erhöht werden.

In Tabelle 3.11 ist berechnet, in wie viel Prozent der Iterationen das lokale Optimierungsverfahren angewendet wurde. Je kleiner diese Zahl ist, desto effektiver ist die Entscheidung, ob das lokale Optimierungsverfahren angewendet wird, wenn zusätzlich alle gesuchten Lösungen gefunden werden. Umso kleiner diese Zahl ist, desto effektiver ist dieser Algorithmus im Vergleich zu einem Algorithmus, der von jedem generierten Punkt das lokale Optimierungsverfahren startet. Bei Topologie F wird in fast jeder Iterationen das lokale Optimierungsverfahren angewendet.

Topologie	A	B	D	C	F
Verhältnis	43.4 %	69.6 %	54.7 %	41.0 %	98.2 %

Tabelle 3.11: Verhältnis, zwischen der Anzahl der Iterationen und der Anzahl der Anwendungen des lokalen Optimierungsverfahrens.

Die Laufzeit des Algorithmus ist bei Topologie B höher, als bei den anderen drei planaren Tensegrity-Strukturen (Topologie A, Topologie C, Topologie D). Dies liegt zum einen daran, dass viele Iterationen durchgeführt werden, und zum anderen, dass der lokale Optimierungsalgorithmus bei neun Optimierungsvariablen länger benötigt, als bei nur sechs oder weniger. Im folgenden Abschnitt wird die Laufzeit des Algorithmus genauer untersucht.

Analyse der Laufzeit

Für die Analyse der Laufzeit des Algorithmus werden verschiedene planare Tensegrity-Strukturen verwendet, deren Freiheitsgrad schrittweise erhöht wird, um eine Entwicklung der Laufzeit über die Anzahl der Optimierungsvariablen zu erhalten. Das Vorgehen für die schrittweise Änderung des Freiheitsgrades ist in Abschnitt 3.4.1 beschrieben. Es werden Topologie A, Topologie D (jeweils ein Freiheitsgrad von maximal 6) und Topologie B (Freiheitsgrad maximal 9) verwendet.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, um eine Tensegrity-Struktur auf einen gewissen Freiheitsgrad δ einzuschränken. Um vergleichbare Ergebnisse zu erhalten, werden nur Einschränkungen gewählt, bei der die Anzahl der Minimalstellen gleich bleibt. Außerdem wird als Abbruchkriterium die Anzahl der Iterationen festgelegt. Damit werden für jede Anzahl an Optimierungsvariablen gleich viele Iterationen ausgeführt. Jedes Optimierungsproblem wird 100 Mal gelöst. Es wird notiert, bei wie viel Prozent der Durchführungen alle stabilen Gleichgewichtskonfigurationen gefunden werden. Dadurch wird eine weitere Analyse der Qualität der Lösungen durchgeführt. Es wird ermittelt, wie oft das lokale Optimierungsverfahren im Durchschnitt angewendet wird und wie lange der Algorithmus im Durchschnitt benötigt.

In Tabelle 3.12, 3.13 und 3.14 sind die Ergebnisse für alle drei Topologien dargestellt.

δ	Variablen	Erfolg	# lok. Opt.	Zeit [s]
2	φ_2, φ_3	100 %	16.67	0.08
3	$x_2, \varphi_2, \varphi_3$	100 %	23.49	0.19
3	$y_2, \varphi_2, \varphi_3$	100 %	23.93	0.18
4	$x_2, x_3, \varphi_2, \varphi_3$	100 %	28.82	0.36
4	$y_2, y_3, \varphi_2, \varphi_3$	100 %	30.58	0.37
4	$x_2, y_2, \varphi_2, \varphi_3$	100 %	30.55	0.39
4	$x_2, y_3, \varphi_2, \varphi_3$	100 %	30.69	0.40
5	$x_2, x_3, y_2, \varphi_2, \varphi_3$	100 %	36.61	0.71
5	$x_2, y_2, y_3, \varphi_2, \varphi_3$	100 %	37.70	0.77
5	$x_2, x_3, y_3, \varphi_2, \varphi_3$	100 %	36.61	0.70
6	$x_2, x_3, y_2, y_3, \varphi_2, \varphi_3$	100 %	44.03	1.00

 Tabelle 3.12: Ergebnisse bei Topologie A, mit 100 Iterationen und $\sigma := 1.0$.

δ	Variablen	Erfolg	# lok. Opt.	Zeit [s]
3	$\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$	100 %	71.18	0.69
4	$x_3, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$	100 %	84.59	1.27
4	$x_2, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$	100 %	88.09	1.54
5	$x_2, x_3, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$	100 %	100.12	2.40
5	$x_3, y_3, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$	100 %	96.96	2.21
6	$x_2, x_3, x_4, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$	100 %	112.20	3.98
6	$x_2, x_4, y_3, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$	99 %	112.90	4.81
7	$x_2, x_3, x_4, y_3, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$	98 %	123.53	6.54
7	$x_2, x_4, y_2, y_4, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$	100 %	123.46	7.11
8	$x_2, x_3, x_4, y_2, y_3, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$	100 %	134.63	11.04
8	$x_2, x_4, y_2, y_3, y_4, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$	98 %	135.07	11.74
8	$x_2, x_3, y_2, y_3, y_4, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$	99 %	134.84	11.44
9	$x_2, x_3, x_4, y_2, y_3, y_4, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$	98 %	144.20	14.43

 Tabelle 3.13: Ergebnisse bei Topologie B, mit 200 Iterationen und $\sigma := 0.5$.

δ	Variablen	Erfolg	# lok. Opt.	Zeit [s]
2	φ_2, φ_3	100 %	23.41	0.12
3	$x_2, \varphi_2, \varphi_3$	100 %	29.25	0.24
3	$y_2, \varphi_2, \varphi_3$	100 %	29.73	0.25
4	$x_2, x_3, \varphi_2, \varphi_3$	100 %	35.37	0.45
4	$y_2, y_3, \varphi_2, \varphi_3$	100 %	36.63	0.40
5	$x_2, x_3, y_2, \varphi_2, \varphi_3$	100 %	42.15	0.78
5	$x_2, y_2, y_3, \varphi_2, \varphi_3$	100 %	42.65	0.78
6	$x_2, x_3, y_2, y_3, \varphi_2, \varphi_3$	100 %	49.74	1.32

 Tabelle 3.14: Ergebnisse bei Topologie D, mit 100 Iterationen und $\sigma := 1.0$.

Die Erfolgsquote bei Topologie B ist in Tabelle 3.13 teilweise schlechter, als in Tabelle 3.10, da dort im Durchschnitt mehr Iterationen durchgeführt wurden. Bei mehr Iterationen ist die Wahrscheinlichkeit größer alle Lösungen zu finden.

Die Ergebnisse zeigen, dass der Algorithmus in den meisten Fällen alle gesuchten Lösungen findet und somit für die Formfindung geeignet ist.

In Abbildung 3.38 ist eine Auswertung der Untersuchungen dargestellt. Oben links ist abgebildet, wie oft im Durchschnitt pro Iteration die lokale Optimierung durchgeführt wird. Durch die ermittelten Punkte wurde jeweils eine lineare Regressionsgerade gezeichnet. Es kann beobachtet werden, dass die Anzahl, wie oft der lokale Optimierungsalgorithmus angewendet wird, mit der Anzahl der Optimierungsvariablen annähernd linear ansteigt. In den anderen drei Diagrammen ist die gemittelte Laufzeit (mit der Standardabweichung) in Abhängigkeit der Anzahl der Optimierungsvariablen dargestellt. Durch die ermittelten Datenpunkte wurde mit linearer Regression eine quadratische Funktion gelegt. Die Laufzeit hängt demnach in näherungsweise quadratisch von der Anzahl der Optimierungsvariablen ab. Außerdem ist die Laufzeit bei den unterschiedlichen Tensegrity-Strukturen unterschiedlich. Das liegt zum einen an der unterschiedlichen Anzahl an Iterationen, die durchgeführt wurden. Wenn mehr Iterationen (Topologie B) durchgeführt werden, dann ist die Laufzeit des Algorithmus größer. Zum anderen kann die Laufzeit durch unterschiedlich große Definitionsbereiche verschieden sein.

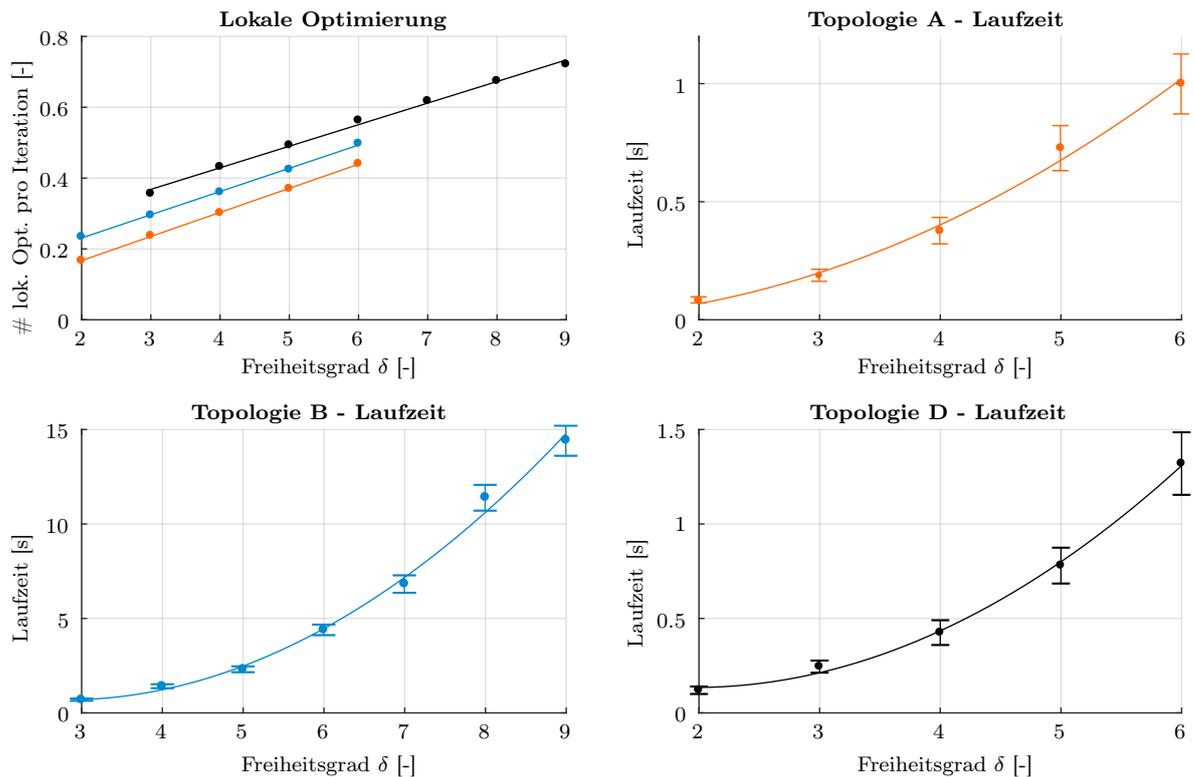


Abbildung 3.38: Auswertungen über die Anzahl der Durchführung der lokalen Optimierung und der Laufzeit in Abhängigkeit der Anzahl an Optimierungsvariablen. Orange: Topologie A, Blau: Topologie B, Schwarz: Topologie D.

Analyse des Einflusses von σ

In diesem Abschnitt wird betrachtet, wie sich die Parameter σ (von den (α_k) - und (β_k) -Folgen, siehe (3.25)) auf die Vollständigkeit der gefundenen Lösungen und die Laufzeit des implementierten MultiOpt-Algorithmus auswirkt. Dafür werden als Beispiel Topologie A und Topologie B verwendet, mit einem Freiheitsgrad von $\delta = 6$ beziehungsweise $\delta = 9$. Die verwendeten Definitionsbereiche sind in Tabelle 3.4 angegeben.

Bei beiden Tensegrity-Strukturen wurden Tests mit einem σ zwischen 0 und 5 durchgeführt. Als Abbruchkriterium wurde das in (3.24) definierte Abbruchkriterium mit $\tau := 0.01$, für Topologie A, und $\tau := 0.001$, für Topologie B, gewählt. Jedes Optimierungsproblem, das durch die Variation von σ entsteht, wird 100 Mal gelöst und es werden Durchschnittswerte der Ergebnisse gebildet.

Die Ergebnisse sind bei beiden Tensegrity-Strukturen ähnlich.

Bei Topologie A wurden bei $\sigma \leq 0.25$ nicht alle vier Minimalstellen bestimmt. Je kleiner σ ist, desto seltener werden alle Minimalstellen gefunden. Bei Topologie B wurden bei allen getesteten Werten von σ alle acht gesuchten Lösungen ermittelt. Dies zeigt, dass σ nicht zu klein gewählt werden darf, um alle vorhandenen lokalen Minimalstellen zu finden.

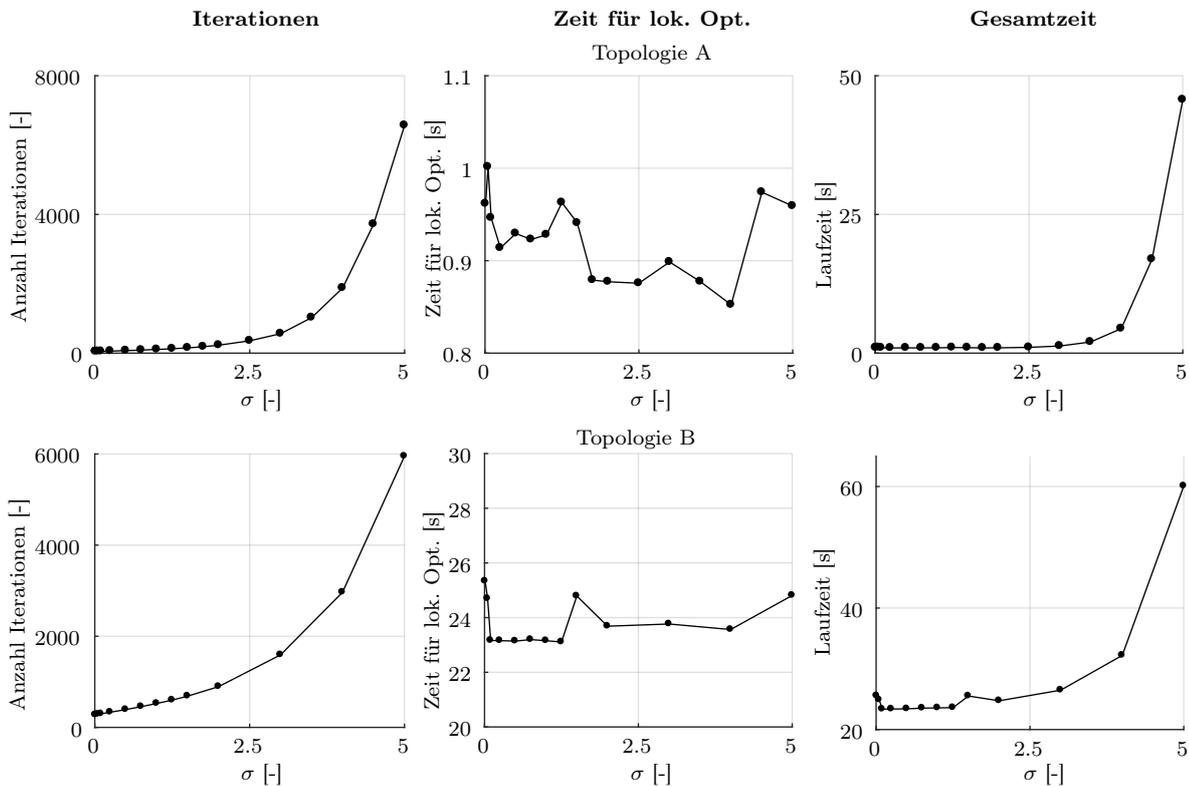


Abbildung 3.39: Einfluss der Größe von σ auf den MultiOpt-Algorithmus, bei Topologie A und Topologie B.

In Abbildung 3.39 links ist die Anzahl der durchgeführten Iterationen in Abhängigkeit des gewählten Wertes für σ dargestellt. Die Anzahl der Iterationen nimmt bei steigendem σ zu. Allerdings bleibt die Anzahl der lokalen Optimierungen fast gleich - sie schwankt bei Topologie A zwischen 45 und 46 und bei Topologie B zwischen 269 und 333. Das heißt, dass auch bei steigender Anzahl an Iterationen die lokale Optimierung nicht öfter ausgeführt wird. Dadurch bleibt die Zeit, die für die lokale Optimierung benötigt wird, unabhängig von σ fast konstant. Die Zeit, die der Algorithmus im Durchschnitt für die lokale Optimierung verwendet, ist in der mittleren Spalte von Abbildung 3.39 dargestellt. Die Gesamtzeit,

die für eine Durchführung des Algorithmus benötigt wird, steigt bei wachsendem σ allerdings an, da für die Bildung der (α_k, β_k) -Folgen Vergleiche zwischen allen bereits generierten Punkten durchgeführt werden und bei einem Anstieg der Iterationen müssen auch mehr Vergleiche durchgeführt werden. Der Wert für σ sollte demnach nicht zu groß gewählt werden, da sonst die Laufzeit des Algorithmus steigt.

Analyse des Einflusses von τ

In diesem Abschnitt wird untersucht, wie sich der Parameter τ des Abbruchkriteriums (3.24) auf die Vollständigkeit der gefundenen Lösungen und auf die Laufzeit des MultiOpt-Algorithmus auswirkt. Dafür werden als Beispiel Topologie A und Topologie B verwendet, mit einem Freiheitsgrad von $\delta = 6$ beziehungsweise $\delta = 9$. Die verwendeten Definitionsbereiche sind in Tabelle 3.4 angegeben. Für den Parameter σ in den (α_k) - und (β_k) -Folgen wurde bei Topologie A $\sigma := 0.5$ und für Topologie B $\sigma := 1.0$ gewählt.

Der Parameter τ wird bei Topologie A zwischen 10^{-4} und 1.0 variiert und bei Topologie B zwischen 10^{-5} und 10^{-1} . Für jeden Wert von τ wird der Algorithmus 100 Mal gestartet, um aufgrund der zufallsbasierten Optimierung allgemeine Ergebnisse zu erhalten.

Die Ergebnisse der Untersuchung sind in Abbildung 3.40 dargestellt. Die Ergebnisse bei beiden Tensegrity-Strukturen sind qualitativ ähnlich und werden aus diesem Grund gemeinsam ausgewertet.

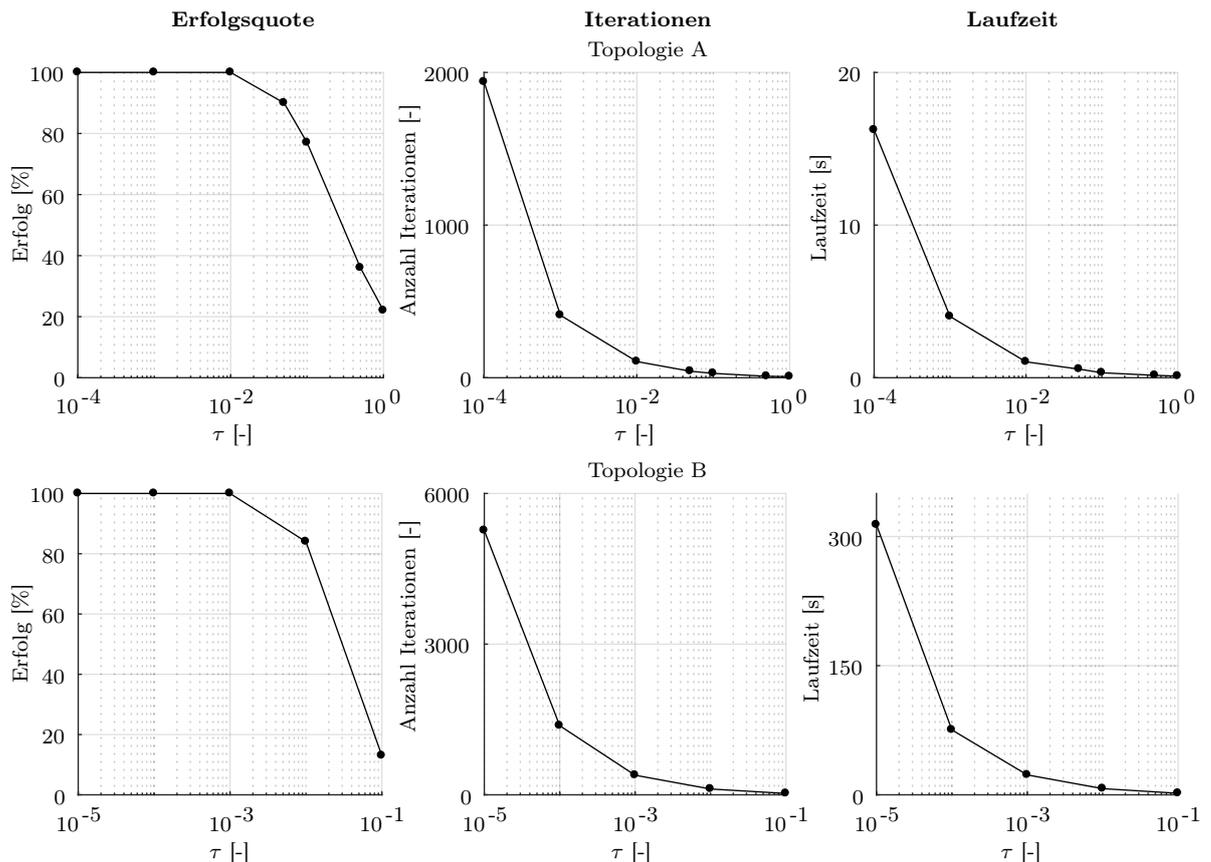


Abbildung 3.40: Einfluss der Größe von τ auf den MultiOpt-Algorithmus, bei Topologie A und Topologie B. Logarithmische Einteilung auf der Abszisse.

Es wurde ermittelt, bei wie vielen der Berechnungen alle gesuchten Minimalstellen gefunden wurden. Je größer der Wert von τ wird, desto weniger Lösungen werden bestimmt. Der Parameter τ darf also nicht zu groß gewählt werden.

Umso kleiner τ ist, desto mehr Iterationen werden durchgeführt und desto größer ist die Laufzeit des Algorithmus (Mitte und Rechts in Abbildung 3.40). Wird τ also zu klein gewählt, dann ist die Laufzeit des Algorithmus größer als notwendig.

Zusammenfassung

Die implementierte Variante des MultiOpt-Algorithmus ist geeignet, um die Aufgabe der Formfindung zu lösen. In den meisten Fällen werden alle stabilen Gleichgewichtskonfigurationen gefunden.

Die Untersuchungen zeigen, dass für σ und τ geeignete Werte bestimmt werden müssen. Wenn die geeigneten Werte nicht bekannt sind, sollte σ eher groß und τ eher klein gewählt werden, um alle Lösungen zu erhalten, auch wenn der Algorithmus dann eventueller länger benötigt als notwendig.

3.5 Schlussfolgerungen

In diesem Kapitel wurde die Aufgabe der Formfindung vorgestellt. Verschiedene Optimierungsprobleme für die Formfindung wurden hergeleitet und analysiert. Im Anschluss wurden vier verschiedene Algorithmen für die Formfindung entwickelt. Dabei bestehen drei Algorithmen aus genetischen Algorithmen und dem FE-Formfindungsalgorithmus und ein Algorithmus ist ein Multistart-Optimierungsverfahren.

Es wurde untersucht, wie gut diese Algorithmen bei verschiedenen Tensegrity-Strukturen arbeiten. Keines der Verfahren garantiert, dass alle stabilen Gleichgewichtskonfigurationen gefunden werden. Bei dem MultiOpt-Algorithmus wurde nachgewiesen, dass mit Wahrscheinlichkeit Eins in endlicher Zeit alle Lösungen gefunden werden. Bei allen Algorithmen erhöht sich die Wahrscheinlichkeit, alle Lösungen zu finden, wenn ausgewählte Parameter angepasst werden.

Bei den vorgestellten Algorithmen wurden bei allen getesteten planaren Tensegrity-Strukturen in 100 Durchläufen alle bekannten stabilen Gleichgewichtskonfigurationen ermittelt.

Die Algorithmen haben bei den planaren Tensegrity-Strukturen eine durchschnittliche Laufzeit (alle Ergebnisse in Tabelle 3.7 und 3.10 gemittelt) von 4.6 s. Der FGenPrioFe-Algorithmus hat die kürzesten Laufzeiten (unter 1 s möglich). Bis auf Ausnahmen sind die Laufzeiten der Algorithmen ähnlich. Mit zwei Algorithmen (FGenFeFiMu, MultiOpt) konnte auch bei der räumlichen Topologie F, welche einen Freiheitsgrad von 24 hat, die Aufgabe der Formfindung gelöst werden. Außerdem können mit zwei der Algorithmen (FGenPrioFe, FGenFeFiMu) auch instabile Gleichgewichtskonfigurationen gefunden werden. Im Vergleich zu dem in Abschnitt 2.2.2 vorgestellten Algorithmus zur Formfindung, durch systematische Anwendung des FE-Formfindungsalgorithmus, sind in den hier vorgestellten Algorithmen weniger Iterationen und somit weniger Anwendungen des FE-Formfindungsalgorithmus möglich und damit kürzere Laufzeiten (unter 1 %) des Algorithmus.

Bei den vorgestellten Algorithmen müssen jeweils zwei Parameter eingestellt werden. Wenn diese Parameter nicht bekannt sind, kann mehr als einer der Algorithmen verwendet werden, um die Wahrscheinlichkeit zu erhöhen, dass alle (stabilen) Gleichgewichtskonfigurationen im Definitionsbereich bestimmt werden.

Parameterfindung

In diesem Kapitel werden Aufgabenstellungen für die Parameterfindung bei Tensegrity-Strukturen formuliert. Für diese Aufgaben werden Optimierungsprobleme hergeleitet und analysiert. Im Anschluss wird ein Optimierungsalgorithmus entworfen, mit welchem diese Optimierungsprobleme gelöst werden können. Die Arbeitsweise und die Anwendbarkeit des Optimierungsalgorithmus werden für die verschiedenen Aufgabenstellungen der Parameterfindung anhand von Beispielen illustriert.

4.1 Fragestellungen und Optimierungsprobleme

Eine Einführung und ein Überblick über den Stand der Technik bei der Parameterfindung ist in Abschnitt 2.1.4 und in Definition 2.6 angegeben. Die Existenz, Form und Stabilität von Gleichgewichtskonfigurationen hängen von den Segmentparametern ab, siehe Beispiel in Abschnitt 5.2.1.

Ziel der Parameterfindung ist, zu einer fest vorgegebenen Topologie mit zum Teil gegebenen Segmentparametern (Steifigkeiten und Anfangslängen der Federn), die verbleibenden Segmentparameter so zu bestimmen, dass die erzeugte Tensegrity-Struktur bestimmte vorgegebene Eigenschaften besitzt. Diese Eigenschaften beziehen sich immer auf eine (oder später auch mehrere) Gleichgewichtskonfiguration und sind beispielsweise:

- Lage (zum Beispiel Segmentkoordinaten in der Gleichgewichtskonfiguration),
- Stabilität,
- Intervall für eine oder mehrere Eigenfrequenzen,
- Intervall, in dem sich keine Eigenfrequenzen befinden dürfen.

Diese Aufgabenstellungen können auch kombiniert werden. Eine Zielsetzung könnte beispielsweise sein, dass die Tensegrity-Struktur *zwei Gleichgewichtskonfigurationen hat, welche beide stabil sind und deren Segmentkoordinaten innerhalb eines gegebenen Bereiches liegen*. So können Parameter bestimmt werden, damit die Tensegrity-Struktur multistabil ist und die Gleichgewichtskonfigurationen eine spezielle Lage haben. Ein weiteres Beispiel für eine Aufgabenstellung ist, dass die Tensegrity-Struktur *zwei Gleichgewichtskonfigurationen in jeweils einer speziellen Lage hat, bei welchen die Eigenfrequenzen eine vorgegebene Verteilung besitzen*. Als weiteres Beispiel könnte gefordert werden, dass *die Form der Tensegrity-Struktur in zwei Gleichgewichtskonfigurationen möglichst unterschiedlich ist*.

Die Aufgabe der Parameterfindung ist, die $\nu \in \mathbb{N}$ freien Segmentparameter $\chi \in \mathbb{R}^\nu$ so zu berechnen, dass alle vorgegebenen Eigenschaften erfüllt sind. Dabei wird für die zu bestimmenden Segmentparameter jeweils ein Intervall angegeben, in dem sich der Parameter befinden darf, sodass sich eine kompakte, nicht-leere Box in \mathbb{R}^ν als Definitionsbereich $\mathcal{D} \in \mathbb{B}^\nu$ für die Segmentparameter ergibt.

Im Folgenden werden für die Punkte in der obigen Aufzählung Optimierungsprobleme hergeleitet. Im Anschluss daran wird eine Kombination der verschiedenen Aufgabenstellungen beziehungsweise Optimierungsprobleme diskutiert.

4.1.1 Lage der Tensegrity-Struktur

In diesem Abschnitt sollen die Segmentparameter einer Tensegrity-Struktur so bestimmt werden, dass sie in einer Gleichgewichtskonfiguration eine gewisse Lage hat.

Die Lage einer Tensegrity-Struktur wird durch ihre Knotenkoordinaten definiert. Werden die Segmente mit hoher Steifigkeit als starr angenommen (Variante A) in Annahme 2.8) oder wird die Längenänderung dieser Segmente vernachlässigt¹, kann die Lage der Tensegrity-Struktur auch mittels der Segmentkoordinaten (siehe Abschnitt 2.1.6) definiert werden. Im Folgenden wird daher nur auf die Charakterisierung der Lage der Tensegrity-Struktur mittels Segmentkoordinaten genauer eingegangen. Die beschriebenen Verfahren können aber auf Knotenkoordinaten übertragen werden.

Es werden die Segmentkoordinaten vorgegeben, welche die Tensegrity-Struktur in der betrachteten Gleichgewichtskonfiguration annehmen soll. Dafür werden die Segmentkoordinaten in einer Box $P_{soll} \in \mathbb{B}^\delta$, wobei \mathbb{B}^δ die Menge aller kompakten, nicht-leeren Intervalle (Boxen) in \mathbb{R}^δ sei, angegeben. Somit können verschiedene Aspekte der Positionsvorgabe realisiert werden. Wenn die i -te Segmentkoordinate ($i \in \{1, \dots, \delta\}$)

- in einem gewissen Bereich liegen soll, dann werden von dem Bereich die untere und die obere Grenze in $P_{soll(i)}$ angegeben.
- einen konkreten Wert haben soll, dann werden die untere und die obere Grenze von $P_{soll(i)}$ auf diesen Wert gesetzt. Das Intervall enthält genau einen Punkt.
- einen beliebigen Wert annehmen darf, dann werden die untere und die obere Grenze auf sehr große Werte gesetzt.

Wenn die freien Segmentparameter auf einen Wert $\chi \in \mathbb{R}^\nu$ gesetzt werden, dann seien die Segmentkoordinaten in der betrachteten Gleichgewichtskonfiguration $P_{ist} \in \mathbb{R}^\delta$.

Um festzustellen, ob sich die Position der Tensegrity-Struktur in dem vorgegebenen Bereich befindet und um gegebenenfalls den Abstand zu dem vorgegebenen Bereich zu bestimmen, wird die Abstandsfunktion

$$d_{in}|\mathbb{R}^n \times \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{R} \tag{4.1}$$

eingeführt, $n \in \mathbb{N}$. Sie berechnet den kleinsten euklidischen Abstand eines Punktes $v \in \mathbb{R}^n$ zu einer Box $V \in \mathbb{B}^n$, mit $V = [\underline{V}_{(1)}, \overline{V}_{(1)}] \times \dots \times [\underline{V}_{(n)}, \overline{V}_{(n)}]$, und wird mit

$$d_{in}(v, V) := \|w\|_2 \quad \text{mit } w_{(i)} := \max\{0, \underline{V}_{(i)} - v_{(i)}, v_{(i)} - \overline{V}_{(i)}\}, i = 1, \dots, n \tag{4.2}$$

definiert. In diesem Abschnitt gilt $n := \delta$, denn es wird der Abstand zwischen $P_{ist} \in \mathbb{R}^\delta$ und $P_{soll} \in \mathbb{B}^\delta$ berechnet. Das folgende Beispiel 4.1 veranschaulicht die Abstandsberechnung mit $d_{in}(\cdot, \cdot)$ und die Vorgabe einer Soll-Position mit Hilfe einer Box P_{soll} .

Beispiel 4.1 (Abstandsberechnung und Vorgabe von Soll-Positionen).

a) Es sei $n = 2$. Das Intervall $V \in \mathbb{B}^2$ sei als $V := [(2, 1)^\top, (4, 5)^\top]$ definiert. Es werden verschiedene Punkte festgelegt:

$$v_1 := (3, 2)^\top \quad v_2 := (6, 4)^\top \quad v_3 := (4, 7)^\top \quad v_4 := (7, 6)^\top \quad v_5 := (1, 6)^\top.$$

Die Punkte v_1, \dots, v_5 und die Box V sind in Abbildung 4.1 veranschaulicht. Außerdem sind dort mit schwarzen Linien der jeweils kürzeste Abstand zwischen den Punkten und dem Intervall dargestellt.

¹Bei einer Steifigkeit von 10^5 N/mm ist die Längenänderung eines Segmentes kleiner als 10^{-4} mm und kann damit vernachlässigt werden.

Die Abstände zwischen den Punkten und der Box können berechnet werden:

$$\begin{array}{lll}
 w_{1(1)} = \max\{0, -1, -1\} & w_{1(2)} = \{0, -1, -3\} & d_{in}(v_1, V) = \|(0, 0)^\top\|_2 = 0 \\
 w_{2(1)} = \max\{0, -4, 2\} & w_{2(2)} = \{0, -3, -1\} & d_{in}(v_2, V) = \|(2, 0)^\top\|_2 = 2 \\
 w_{3(1)} = \max\{0, -2, 0\} & w_{3(2)} = \{0, -6, 2\} & d_{in}(v_3, V) = \|(0, 2)^\top\|_2 = 2 \\
 w_{4(1)} = \max\{0, -5, 3\} & w_{4(2)} = \{0, -5, 1\} & d_{in}(v_4, V) = \|(3, 1)^\top\|_2 = \sqrt{10} \\
 w_{5(1)} = \max\{0, 1, -3\} & w_{5(2)} = \{0, -5, 1\} & d_{in}(v_5, V) = \|(1, 1)^\top\|_2 = \sqrt{2}.
 \end{array}$$

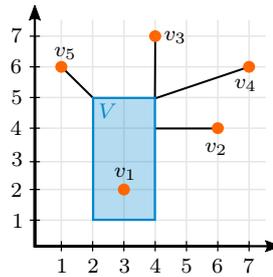


Abbildung 4.1: Box (blau) und Punkte (orange) in \mathbb{R}^2 , sowie die jeweils kürzeste Verbindung zwischen Punkt und Box.

b) In diesem Beispiel wird eine Vorgabe-Position für eine Tensegrity-Struktur veranschaulicht. Dabei wird Topologie A verwendet, mit den Bezeichnungen und der Lagerung aus Abbildung A.1. Die Segmentparameter sind alle, bis auf die Steifigkeit von Segment 5, vorgegeben. Die Werte können Abbildung A.1 entnommen werden. Die vorgegebene Lage der Tensegrity-Struktur in einer Gleichgewichtskonfiguration $P_{soll} \in \mathbb{B}^6$ sei durch die einzelnen Intervalle der Segmentkoordinaten vorgegeben:

$$\begin{array}{lll}
 x_2 \in [40, 60] \text{ mm} & y_2 \in [-5, 0] \text{ mm} & \varphi_2 \in [45, 135]^\circ \\
 x_3 \in [145, 155] \text{ mm} & y_3 \in [-10, 10] \text{ mm} & \varphi_3 \in [72, 108]^\circ.
 \end{array}$$

In Abbildung 4.2 sind in grau die erlaubten Positionen der Segmente mit hoher Steifigkeit, aufgrund von P_{soll} , dargestellt.

Die Steifigkeit von Segment 5 (blau in Abbildung 4.2) ist variabel und wurde in diesem Beispiel auf drei verschiedene Werte gesetzt. In jedem Fall wurde die Gleichgewichtskonfiguration P_{ist} berechnet und in Abbildung 4.2 eingezeichnet. Sofern alle Knoten innerhalb des grauen Bereiches liegen, ist die Lage erlaubt ($d_{in}(P_{ist}, P_{soll}) = 0$, linkes und mittleres Bild), anderenfalls ist die Lage nicht erlaubt ($d_{in}(P_{ist}, P_{soll}) > 0$, rechtes Bild).

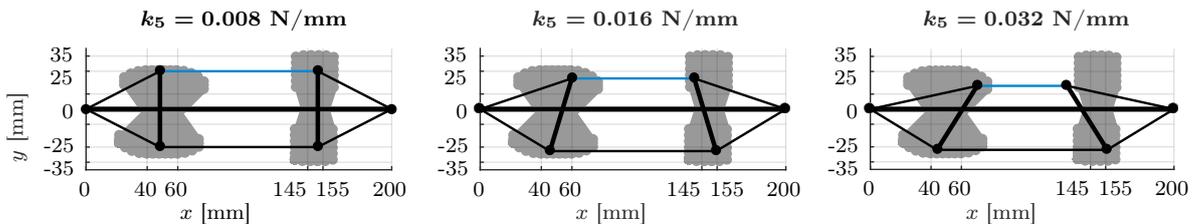


Abbildung 4.2: Erlaubte Lagen der Tensegrity-Struktur (grau) und die Lage der Tensegrity-Struktur bei drei verschiedenen Steifigkeiten von Segment 5.

┘

Die Segmentkoordinaten $P_{ist} \in \mathbb{R}^\delta$ sind von den Segmentparametern $\chi \in \mathbb{R}^\nu$ abhängig: $P_{ist} = P_{ist}(\chi)$. Das Ziel der Parameterfindung ist, die Segmentparameter so zu bestimmen, dass die Segmentkoordinaten innerhalb der gegebenen Box $P_{soll} \in \mathbb{B}^\delta$ liegen, also dass $d_{in}(P_{ist}(\chi), P_{soll}) = 0$ gilt. Diese Aufgabe kann, da $d_{in}(\cdot, \cdot) \geq 0$ gilt, als Optimierungsproblem formuliert werden:

$$\min_{\chi \in \mathcal{D}} d_{in}(P_{ist}(\chi), P_{soll}). \quad (4.3)$$

Das Beispiel 4.1 b) zeigt, dass es für das Optimierungsproblem unendlich viele Lösungen geben kann. Bei der Auswahl der verwendeten Optimierungsverfahren muss dies beachtet werden, damit nicht nur Lösungen auf dem Rand der Lösungs-Boxen gefunden werden.

Das Optimierungsproblem in (4.3) kann durch Multiplikation mit (-1) in ein Maximierungsproblem überführt werden.

$$\max_{\chi \in \mathcal{D}} -d_{in}(P_{ist}(\chi), P_{soll}). \quad (4.4)$$

Um Segmentparameter zu bestimmen, sodass die Lage der Tensegrity-Struktur in ihrer Gleichgewichtskonfiguration der Vorgabe entspricht, muss das globale Optimierungsproblem (4.4), mit globalem Maximalwert Null, gelöst werden.

4.1.2 Stabilität

In diesem Abschnitt sollen die Segmentparameter so bestimmt werden, dass die betrachtete Gleichgewichtskonfiguration der Tensegrity-Struktur (statisch) stabil ist.

Die Stabilität einer Gleichgewichtskonfiguration kann mit Hilfe der Tangentensteifigkeitsmatrix ermittelt werden (siehe Abschnitt 2.2.2 und [Zha15]). Wenn die Tangentensteifigkeitsmatrix positiv definit ist, dann ist die Gleichgewichtskonfiguration stabil, ansonsten instabil. Die Tangentensteifigkeitsmatrix ist symmetrisch. Eine symmetrische Matrix ist genau dann positiv definit, wenn ihr kleinster Eigenwert größer als Null ist.

Um zu überprüfen, ob eine Gleichgewichtskonfiguration einer Tensegrity-Struktur mit den Parametern $\chi \in \mathcal{D}$ stabil ist, wird der kleinste Eigenwert $\lambda_{min} \in \mathbb{R}$ der dazugehörigen Tangentensteifigkeitsmatrix betrachtet. Dieser Eigenwert hängt von den gewählten Segmentparametern ab: $\lambda_{min}(\chi)$. Die Suche nach geeigneten Segmentparametern χ , sodass $\lambda_{min}(\chi) > 0$ gilt, kann als Maximierungsproblem formuliert werden:

$$\max_{\chi \in \mathcal{D}} \lambda_{min}(\chi). \quad (4.5)$$

Bei dem Optimierungsproblem (4.5) ist hauptsächlich interessant, ob der gefundene Optimalwert größer oder kleiner als Null ist. Aus diesem Grund ist, in Hinblick auf die Lösung des Optimierungsproblems, die folgende Modifikation möglich:

$$\max_{\chi \in \mathcal{D}} \lambda_{min}^*(\chi) \quad \text{mit } \lambda_{min}^*(\chi) := \begin{cases} \lambda_{min}(\chi), & \text{falls } \lambda_{min}(\chi) > 0 \\ \lambda_{min}(\chi) - c, & \text{sonst,} \end{cases} \quad (4.6)$$

wobei $c > 0$. Somit gibt es im Bereich $(-c, 0]$ keine Zielfunktionswerte. Damit wird verhindert, dass ein Optimierungsalgorithmus bei einem lokalen Maximum in diesem Bereich landet und das globale Maximum, welches dicht bei der Null liegen kann (aber positiv ist) nicht findet. Diese Modifikation führt allerdings zu einer Unstetigkeit der Zielfunktion. Das muss bei der Auswahl des verwendeten Optimierungsverfahrens beachtet werden.

Außerdem ist es für viele globale Optimierungsverfahren (zum Beispiel genetischer Algorithmus mit Gruppierungstest, siehe Kapitel 3.2) notwendig, dass die Zielfunktionswerte alle kleiner oder gleich Null sind. Aus diesem Grund, kann bei (4.6) die folgende Modifikation vorgenommen werden:

$$\max_{\chi \in \mathcal{D}} \lambda_{min}^*(\chi) \quad \text{mit } \lambda_{min}^*(\chi) := \begin{cases} \lambda_{min}(\chi) - a, & \text{falls } \lambda_{min}(\chi) > 0 \\ \lambda_{min}(\chi) - c - a, & \text{sonst,} \end{cases} \quad (4.7)$$

mit $a > 0$, hinreichend groß.

Um Segmentparameter zu bestimmen, sodass die Tensegrity-Struktur in ihrer Gleichgewichtskonfiguration (statisch) stabil ist, muss das globale Optimierungsproblem (4.7) gelöst werden. Dabei sind alle Lösungen interessant, die einen Zielfunktionswert größer als $(-a)$ besitzen.

4.1.3 Eigenfrequenzen und Eigenformen

In diesem Abschnitt sollen die Segmentparameter einer Tensegrity-Struktur so bestimmt werden, dass die Struktur in einer Gleichgewichtskonfiguration vorgegebene Eigenfrequenzen oder Eigenformen aufweist. Für Anwendungen in der Robotik ist es wichtig Tensegrity-Strukturen so zu dimensionieren, dass die Eigenfrequenzen in gewissen Wertebereichen liegen, oder dass, um Resonanzen auszuschließen, in definierten Bereichen keine Eigenfrequenzen liegen, siehe auch Kapitel 5. Das heißt, von den bisher ausschließlich statischen Betrachtungen folgt nun der Übergang zu Dynamik von Tensegrity-Strukturen.

Dafür wird dieser Abschnitt in drei Unterabschnitte unterteilt. Zuerst wird angegeben, wie die Eigenfrequenzen und Eigenformen einer Tensegrity-Struktur berechnet werden. Im zweiten Unterabschnitt wird anhand von Beispielen die Abhängigkeit der Eigenfrequenzen und Eigenformen von den Segmentparametern untersucht. Im Anschluss werden Optimierungsprobleme hergeleitet, mit denen die Segmentparameter so bestimmt werden können, dass die resultierende Struktur gewisse Eigenfrequenzen und Eigenformen in einer Gleichgewichtskonfiguration aufweist.

Bestimmung von Eigenfrequenzen und Eigenformen

In diesem Abschnitt werden die Segmente mit hoher Steifigkeit als elastisch aufgefasst, (siehe Variante B) in Annahme 2.8. Für die Bestimmung der Eigenfrequenzen und Eigenformen wird das linearisierte dynamische Modell

$$M\ddot{u} + D\dot{u} + Ku = 0 \quad (4.8)$$

der Tensegrity-Struktur, [Saf12b], betrachtet. Dabei seien $M \in \mathbb{R}^{\eta_{n_k} \times \eta_{n_k}}$ die Massenmatrix, $D \in \mathbb{R}^{\eta_{n_k} \times \eta_{n_k}}$ die Dämpfungsmatrix und $K \in \mathbb{R}^{\eta_{n_k} \times \eta_{n_k}}$ die Steifigkeitsmatrix. Mit $u \in \mathbb{R}^{\eta_{n_k}}$ werden die Knotenverschiebungen bezeichnet. Die Massenmatrix ist eine Diagonalmatrix, welche die Massen der Knoten enthält. Da bei den in dieser Arbeit verwendeten Tensegrity-Strukturen keine Dissipation betrachtet wird², gilt $D = 0$.

²Bis auf Abschnitt 5.1, dort wird parallel zu jedem Segment mit geringer Steifigkeit ein linearer Dämpfer modelliert.

Damit reduziert sich die Bewegungsgleichung 4.8 auf

$$M\ddot{u} + Ku = 0. \quad (4.9)$$

Die Massenmatrix und die Steifigkeitsmatrix werden entsprechend der Lagerung der Tensegrity-Struktur reduziert, es gilt: $M, K \in \mathbb{R}^{\delta \times \delta}$ und $u \in \mathbb{R}^{\delta}$.

Mit dem Lösungsansatz

$$u(t) := ve^{\lambda t}$$

ergibt sich aus (4.9) die Eigenwertgleichung

$$M^{-1}Kv = -\lambda^2 v, \quad (4.10)$$

dabei steht M^{-1} für die Inverse der Massenmatrix. Die Lösungen von (4.10) sind die Eigenwerte $(-\lambda_i^2)$ von $M^{-1}K$, $i = 1, \dots, \delta$. Daraus berechnen sich mit $\sqrt{-\lambda_i^2}$ die Eigenkreisfrequenzen der Tensegrity-Struktur in der betrachteten Gleichgewichtskonfiguration und mit

$$f_{e_i} := \frac{\sqrt{-\lambda_i^2}}{2\pi}$$

die Eigenfrequenzen. Die Eigenformen $v_i \in \mathbb{R}^{\delta}$, $i = 1, \dots, \delta$ der Tensegrity-Struktur in der untersuchten Gleichgewichtskonfiguration sind die Eigenvektoren von $M^{-1}K$. Sofern die Lagerung der Tensegrity-Struktur statisch unterbestimmt ist, ergeben sich bei den Eigenvektoren von $M^{-1}K$ neben den Eigenformen auch Starrkörperbewegungen.

Die Untersuchung von Eigenfrequenzen und Eigenformen von Tensegrity-Strukturen ist bereits Stand der Technik. In [Ske09] wird die Berechnung der Eigenfrequenzen und Eigenformen ähnlich zu der hier dargestellten Variante beschrieben. In [Ash14] und [Ash15] wird bei der Berechnung der Eigenfrequenzen auch eine mögliche Biegung in den Drucksegmenten berücksichtigt. In dieser Arbeit wird angenommen, dass keine Biegung stattfindet.

In [Gue11] werden die Eigenfrequenzen und Eigenformen ebenfalls berechnet. Es wird der Verlauf der Eigenfrequenzen bei Veränderung der Vorspannung betrachtet. Solche Untersuchungen werden auch in dieser Arbeit im folgenden Abschnitt für andere Tensegrity-Strukturen und andere Parametervariationen durchgeführt. In [Gue11] wird festgestellt, dass sich die Eigenform, die zu der kleinsten Eigenfrequenz gehört, verändert, wenn die Vorspannung in der Tensegrity-Struktur variiert wird.

In [Sul02] wird angegeben, dass bei steigender Vorspannung in der Tensegrity-Struktur auch die Eigenfrequenzen größer werden. In [Mur00a] werden auch Eigenfrequenzen und Eigenformen auf die gleiche Art und Weise berechnet. Es werden Untersuchungen zum Zusammenhang zwischen Vorspannung und Größe der Eigenfrequenzen gemacht, ohne daraus allgemeine Schlüsse zu ziehen. Außerdem werden Eigenformen analysiert.

Die Berechnung der Eigenfrequenzen in dieser Arbeit erfolgt nach der in [Saf12b] vorgestellten Methode. Dort werden Vorspannungen gesucht, sodass die kleinste Eigenfrequenz möglichst groß ist. Dabei werden verschiedene Methoden kombiniert: Singulärwertzerlegung von Matrizen, Finite Element Methoden und ein genetischer Algorithmus. Die geometrische Form der Tensegrity-Struktur soll dabei erhalten bleiben und nur die Vorspannung der Struktur kann verändert werden. In diesem Abschnitt in dieser Arbeit werden auch Optimierungsprobleme hergeleitet, welche im darauffolgenden Abschnitt durch eine Kombination

aus dem FE-Formfindungsalgorithmus und einem genetischen Algorithmus gelöst werden. Dabei können allerdings andere Parameter variiert werden, als bei [Saf12b].

Abhängigkeit der Eigenfrequenzen und Eigenformen von Segmentparametern

In diesem Abschnitt wird anhand von drei Beispielen untersucht, wie die Eigenfrequenzen und die Eigenformen von den Segmentparametern, abhängen. Im ersten Beispiel 4.2 wird die Abhängigkeit der Eigenfrequenzen von der Vorspannung der Tensegrity-Struktur analysiert. Im zweiten Beispiel 4.3 wird untersucht, wie die Eigenfrequenzen und die Eigenformen von der Masse der Knoten abhängen. Im dritten Beispiel 4.4 wird betrachtet, wie die Eigenfrequenzen, von den Segmentsteifigkeiten, der geometrischen Form der Gleichgewichtskonfiguration und von deren Stabilität abhängen.

Beispiel 4.2 (Abhängigkeit der Eigenfrequenzen von der Vorspannung).

In diesem Beispiel wird untersucht, wie die Größe der Eigenfrequenzen von der Vorspannung in einer Tensegrity-Struktur abhängt. In [Sul02] wird vermutet, dass bei steigender Vorspannung die Eigenfrequenzen steigen.

Es wird Topologie A verwendet. Die Topologie, die Bezeichnungen, die verwendete Lagerung und die Segmentparameter, von denen bei dieser Studie ausgegangen wird, sind in Abbildung A.1 angegeben. Die Masse der einzelnen Knoten wird jeweils auf 100 g gesetzt. Es wird Gleichgewichtskonfiguration I betrachtet.

Die Vorspannung der Tensegrity-Struktur wird variiert, indem die Anfangslängen aller Segmente mit geringer Steifigkeit (4 bis 9) mit einem Faktor $c \in [0.1, 1.0]$ (Schrittweite 0.01) skaliert werden. Die Gleichgewichtskonfiguration ist abhängig von den Anfangslängen der Segmente und wird mit Hilfe des FE-Formfindungsalgorithmus aus Abschnitt 2.2.2 berechnet. Rechts in Abbildung 4.3 ist die Lage der Gleichgewichtskonfiguration, bei den verschiedenen Skalierungen dargestellt. Dabei steigt von hell nach dunkel der Skalierungsfaktor c an. Blau markiert sind die Segmente, bei denen die Anfangslänge variiert wird. In der Mitte in Abbildung 4.3 sind die resultierenden Kräfte in den Segmenten, in Abhängigkeit des Skalierungsfaktors c dargestellt. Mit steigendem Skalierungsfaktor werden die Beträge der Kräfte in den Segmenten kleiner, die Vorspannung in der Tensegrity-Struktur sinkt.

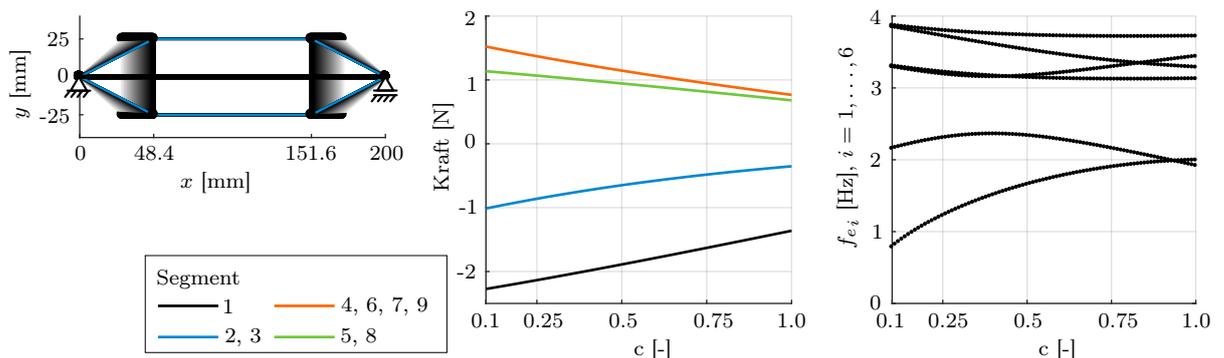


Abbildung 4.3: Variation der Anfangslängen der Segmente mit geringer Steifigkeit. Links: Veränderung der geometrischen Form der Tensegrity-Struktur, von hell nach dunkel steigender Faktor c . Mitte: Resultierende Kräfte der Segmente in Abhängigkeit der Anfangslängen. Rechts: Sechs kleinste Eigenfrequenzen in Abhängigkeit der Anfangslängen.

Rechts in Abbildung 4.3 sind die kleinsten sechs Eigenfrequenzen der Tensegrity-Struktur in der be-

trachteten Gleichgewichtskonfiguration dargestellt. Die restlichen drei Eigenfrequenzen beziehen sich auf Eigenschwingungen in den Segmenten mit hoher Steifigkeit, und haben somit höhere Eigenfrequenzen (zwischen 5000 Hz und 8000 Hz). Es können stetige Veränderungen der Eigenfrequenzen beobachtet werden. Die Eigenfrequenzen haben kein monotonen Verhalten. Die allgemeine Aussage, dass mit steigender Vorspannung auch die Eigenfrequenzen ansteigen, kann mit diesem Beispiel nicht bestätigt werden. ┘

Beispiel 4.3 (Veränderung der Eigenformen).

In diesem Beispiel wird, wie im vorherigen Beispiel 4.2, Topologie A verwendet. Für die Untersuchung werden die Bezeichnungen, Segmentparameter und die Lagerung aus Abbildung A.1 verwendet. Ausgangspunkt der Analyse ist eine Masse von 100 g an allen Knoten. Die Masse von Knoten ③ und ⑤ wird von 20 g bis 100 g, mit einer Schrittweite von 0.5 g, variiert. Es wird Gleichgewichtskonfiguration I, siehe Abbildung A.1, betrachtet, welche mit dem FE-Formfindungsalgorithmus bestimmt wird. Da beim FE-Formfindungsalgorithmus die Masse der Knoten nicht mit einbezogen wird, ist die Form der Gleichgewichtskonfiguration in diesem Beispiel immer gleich.

Rechts in Abbildung 4.4 sind die Eigenfrequenzen in Abhängigkeit von der Masse an Knoten ③ und ⑤ dargestellt. Es kann eine stetige Veränderung der Eigenfrequenzen beobachtet werden, wie bereits im vorherigen Beispiel 4.2. An zwei Stellen schneiden sich die Kurven der Eigenfrequenzen: bei einer Masse von circa 33.5 g und bei circa 78.5 g.

Links in Abbildung 4.4 sind die ersten sechs Eigenformen der Tensegrity-Struktur qualitativ dargestellt (bei 70 g und bei 90 g), zugehörig zu den jeweiligen Eigenfrequenzen, welche der Größe nach geordnet sind. Es kann beobachtet werden, dass die Eigenform, welche bei 70 g zu der vierten Eigenfrequenz gehört, bei 90 g zu der fünften Eigenfrequenz gehört (blau). Außerdem ist die Eigenform, welche zur fünften Eigenfrequenz gehört, bei 90 g qualitativ nicht mehr vorhanden, sondern eine andere Eigenform (orange).

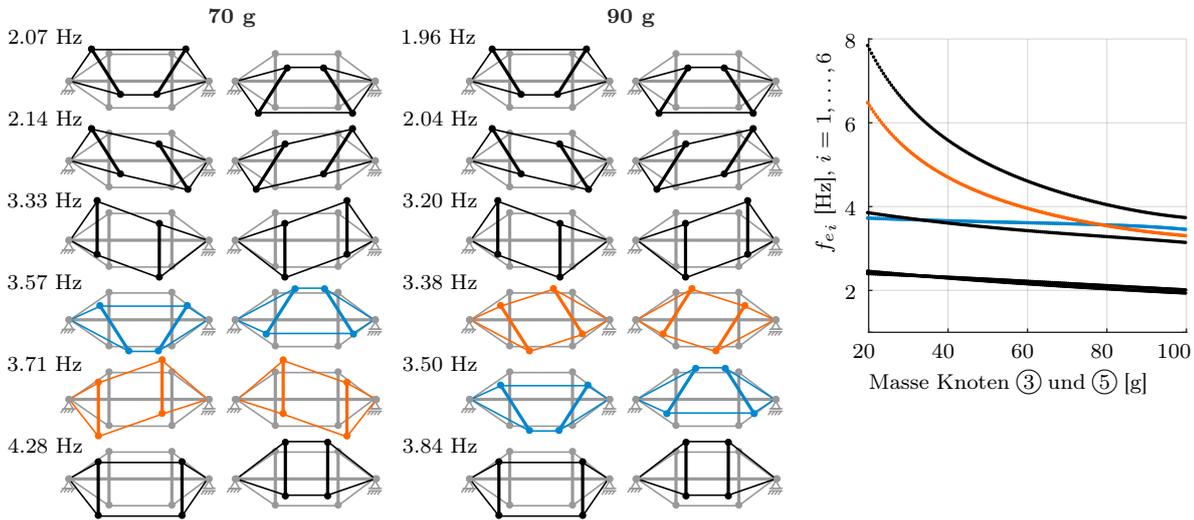


Abbildung 4.4: Betrachtung der ersten (kleinsten) sechs Eigenfrequenzen mit den dazugehörigen Eigenformen, bei Variation der Masse von Knoten ③ und ⑤. Links: Qualitative Eigenformen der Tensegrity-Struktur, bei einer Masse von 70 g und 90 g. Rechts: Verlauf der Eigenfrequenzen bei einer Variation der Masse zwischen 20 g und 100 g.

Diese Beobachtung zeigt, dass die Eigenformen ihre Reihenfolge, in Bezug auf die Größe der Eigenfrequenzen, tauschen, und dass neue Eigenformen entstehen können, wenn Segmentparameter der Tensegrity-Struktur variiert werden. ┘

Beispiel 4.4 (Abhängigkeit der Eigenfrequenzen von geometrischer Form und Stabilität).

In diesem Beispiel wird Topologie C betrachtet, mit den Bezeichnungen und der Lagerung aus Abbildung A.3. Als Ausgangspunkt für diese Untersuchung werden die Segmentparameter aus Abbildung A.3 verwendet. Die Masse der Knoten sei jeweils 100 g. In dieser Analyse werden die Steifigkeiten der Segmente 4, 5, 6 und 7 skaliert, mit einem Faktor $c \in [0.05, 1.7]$ mit einer Schrittweite von 0.01. Außerdem werden die Steifigkeiten von Segment 8 und 9 auf $k_8 = k_9 := 0.5 \text{ N/mm}$ gesetzt. Durch die Skalierung der Steifigkeiten ändert sich die geometrische Form von Gleichgewichtsconfiguration I. Die Veränderung der geometrischen Form ist links in Abbildung 4.5 dargestellt, von hell nach dunkel steigt der Faktor c an.

In der Mitte in Abbildung 4.5 ist der kleinste Eigenwert der Tangentensteifigkeitsmatrix in Abhängigkeit vom Skalierungsfaktor c dargestellt. Ab $c = 1.5$ ist dieser Eigenwert kleiner Null, das heißt die Gleichgewichtsconfiguration ist ab diesem Faktor instabil, davor stabil.

Für die verschiedenen Skalierungsfaktoren wurden die ersten vier Eigenfrequenzen der Tensegrity-Struktur in der betrachteten Gleichgewichtsconfiguration berechnet. Diese Eigenfrequenzen sind in Abhängigkeit vom Faktor c rechts in Abbildung 4.5 dargestellt. Es ist, wie in den beiden vorherigen Beispielen, ein stetiger Verlauf der Eigenfrequenzen zu beobachten. Die Eigenfrequenz, die bei $c = 1.4$ zur kleinsten Eigenfrequenz wird, fällt stark ab, bis sie ein Minimum bei circa $c = 1.5$ erreicht. Der Punkt $c = 1.5$ ist der Faktor, ab dem die Gleichgewichtsconfiguration instabil wird.

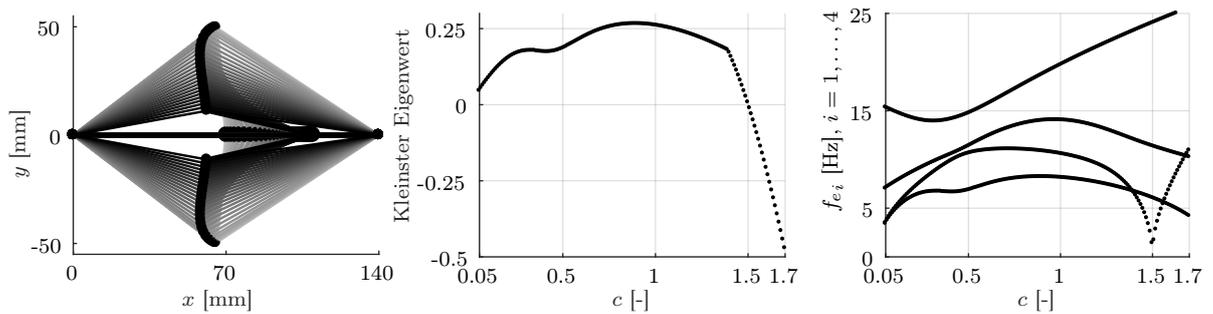


Abbildung 4.5: Skalierung der Steifigkeiten von Segment 4, 5, 6 und 7. Links: Veränderung der geometrischen Lage der Gleichgewichtsconfiguration. Von hell nach dunkel steigender Faktor c . Mitte: Kleinster Eigenwert der Tangentensteifigkeitsmatrix in Abhängigkeit der Skalierung c . Rechts: Erste vier Eigenfrequenzen der Tensegrity-Struktur in Abhängigkeit der Skalierung c .

Dieses Beispiel zeigt, dass die Eigenfrequenzen in der Nähe eines Stabilitätswechsels der betrachteten Gleichgewichtsconfiguration eine qualitative Änderung ihres Verlaufs aufweisen können. \square

Herleitung von Optimierungsproblemen

In diesem Abschnitt werden verschiedene Eigenschaften einer Tensegrity-Struktur, hinsichtlich ihrer Eigenfrequenzen und Eigenformen in einer Gleichgewichtsconfiguration, formuliert. Im Anschluss werden Optimierungsprobleme aufgestellt, welche die freien Segmentparameter einer Tensegrity-Struktur so bestimmen, dass die Struktur die geforderten Eigenschaften aufweist. Eine Tensegrity-Struktur hat in einer Gleichgewichtsconfiguration entsprechend viele Eigenfrequenzen und Eigenformen, wie ihr Freiheitsgrad δ angibt.

Die in der folgenden Aufzählung genannten Eigenschaften sind beim Design von Anwendungen von Tensegrity-Strukturen in der Robotik wesentlich und werden im Anschluss genauer betrachtet.

(a) Gegeben: Intervall $I \in \mathbb{B}^1$, $m \in \mathbb{N}$, $m \leq \delta$

Gesucht: Segmentparameter $\chi \in \mathbb{R}^\nu$, sodass, wenn die Eigenfrequenzen aufsteigend nach der Größe sortiert sind, die m -te Eigenfrequenz in I liegt.

(b) Gegeben: Intervall $J \in \mathbb{B}^1$

Gesucht: Segmentparameter $\chi \in \mathbb{R}^\nu$, sodass in J keine Eigenfrequenz liegt.

(c) Gegeben: Intervall $K \in \mathbb{B}^1$, $n \in \mathbb{N}$, $n \leq \delta$

Gesucht: Segmentparameter $\chi \in \mathbb{R}^\nu$, sodass in K mindestens n Eigenfrequenzen liegen.

(d) Gegeben: Intervall $L \in \mathbb{B}^\delta$, $m \in \mathbb{N}$, $m \leq \delta$

Gesucht: Segmentparameter $\chi \in \mathbb{R}^\nu$, sodass, wenn die zu den Eigenformen gehörenden Eigenfrequenzen aufsteigend nach der Größe sortiert sind, die m -te Eigenform in L liegt.

Es seien $f_{e_1}(\chi), \dots, f_{e_\delta}(\chi) \in \mathbb{R}$ die Eigenfrequenzen einer Tensegrity-Struktur in einer Gleichgewichtskonfiguration, bei welcher die freien Segmentparameter die Werte $\chi \in \mathbb{R}^\nu$ haben. Dabei seien die Eigenfrequenzen aufsteigend nach der Größe sortiert: $f_{e_1} \leq \dots \leq f_{e_\delta}$. Es seien $v_1(\chi), \dots, v_\delta(\chi)$ die zu den Eigenfrequenzen gehörigen Eigenformen.

Zu (a): Um zu überprüfen, ob ein Segmentparametervektor χ die Eigenschaft (a) erfüllt, wird die Abstandsfunktion d_{in} aus (4.1), (4.2) verwendet. Es liegt die m -te Eigenfrequenz $f_{e_m}(\chi)$ genau dann im Intervall I , wenn

$$d_{in}(f_{e_m}(\chi), I) = 0 \quad (4.11)$$

gilt. Da $d_{in}(\cdot, \cdot) \geq 0$ gilt, kann (4.11) in ein Maximierungsproblem umformuliert werden:

$$\max_{\chi \in \mathcal{D}} -d_{in}(f_{e_m}(\chi), I). \quad (4.12)$$

Zu (b): Um zu überprüfen, ob ein Segmentparametervektor χ die Eigenschaft (b) erfüllt, wird eine neue Abstandsfunktion eingeführt:

$$d_{aus} | \mathbb{R} \times \mathbb{B}^1 \rightarrow \mathbb{R}.$$

Sie berechnet den kleinsten euklidischen Abstand eines Punktes $v \in \mathbb{R}$ zum Äußeren eines Intervalls $V \in \mathbb{B}^1$ und wird mit

$$d_{aus}(v, V) := \begin{cases} 0, & v \in V \\ \min\{v - \underline{V}, \bar{V} - v\}, & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert.

Im Intervall J liegt genau dann keine Eigenfrequenz $f_{e_i}(\chi)$, wenn

$$\sum_{i=1}^{\delta} d_{aus}(f_{e_i}, J) = 0 \quad (4.13)$$

gilt. Da $d_{aus}(\cdot, \cdot) \geq 0$ gilt, kann (4.13) in ein Maximierungsproblem umgewandelt werden:

$$\max_{\chi \in \mathcal{D}} - \sum_{i=1}^{\delta} d_{aus}(f_{e_i}(\chi), J). \quad (4.14)$$

Zu (c): Um zu überprüfen, ob ein Segmentparametervektor χ die Eigenschaft (c) erfüllt, wird die Abstandsfunktion d_{in} aus (4.1), (4.2) verwendet. Dafür werden die Eigenfrequenzen $f_{e_i}(\chi)$ so unnummeriert in $f_{e_i}^*(\chi)$, dass $d_{in}(f_{e_1}^*, K) \leq \dots \leq d_{in}(f_{e_\delta}^*, K)$ gilt. Nun liegen genau dann im Intervall K mindestens n

Eigenfrequenzen, wenn

$$\sum_{i=1}^n d_{in}(f_{e_i}^*(\chi), K) = 0 \quad (4.15)$$

gilt. Da $d_{in}(\cdot, \cdot) \geq 0$ gilt, kann (4.15) in ein Maximierungsproblem umgeformt werden:

$$\max_{\chi \in \mathcal{D}} - \sum_{i=1}^n d_{in}(f_{e_i}^*(\chi), K). \quad (4.16)$$

Zu (d): Um zu überprüfen, ob ein Segmentparametervektor χ die Eigenschaft (d) erfüllt, kann genauso wie bei (a) vorgegangen werden. Der einzige Unterschied ist, dass statt der m -ten Eigenfrequenz $f_{e_m}(\chi)$ die dazugehörige Eigenform $v_m(\chi)$ verwendet wird.

$$\max_{\chi \in \mathcal{D}} -d_{in}(v_m(\chi), L). \quad (4.17)$$

In allen vier beschriebenen Optimierungsproblemen (4.12), (4.14), (4.16) und (4.17) werden Segmentparameter $\chi \in \mathbb{R}^\nu$ gesucht, sodass die Zielfunktion dort ein globales Maximum, mit Maximalwert Null hat.

4.1.4 Kombination von Eigenschaften

Die in den vorherigen Abschnitten beschriebenen Eigenschaften einer Tensegrity-Struktur können beliebig kombiniert werden. Bei allen bisherigen Eigenschaften wurde dabei immer nur eine Gleichgewichtskonfiguration der Tensegrity-Struktur verwendet. Es ist auch möglich gezielt Segmentparameter zu suchen, sodass mehrere Gleichgewichtskonfigurationen existieren. Die Kombinationen von Eigenschaften, die in diesem Abschnitt untersucht werden, sind in der folgenden Auflistung zu finden. Diese Kombinationen sind nur beispielhaft und können beliebig ergänzt werden.

- (a) Lage der Tensegrity-Struktur in mehreren Gleichgewichtskonfigurationen.
- (b) Lage und Stabilität der Tensegrity-Struktur in mehreren Gleichgewichtskonfigurationen.
- (c) Verteilung der Eigenfrequenzen in einer Gleichgewichtskonfiguration.
- (d) Lage der Tensegrity-Struktur und Verteilung der Eigenfrequenzen in mehreren Gleichgewichtskonfigurationen.

Im Folgenden werden die Optimierungsprobleme aus den vorangegangenen Abschnitten kombiniert, um die oben genannten Eigenschaften erzielen zu können.

Zu (a): Untersucht werden sollen $n \in \mathbb{N}$ Gleichgewichtskonfigurationen. Die freien Segmentparameter $\chi \in \mathcal{D}$ sollen so bestimmt werden, dass jede der n Gleichgewichtskonfigurationen eine vorgegebene Lage hat. Für $n = 1$ wurde die Aufgabenstellung in Abschnitt 4.1.1 beschrieben. Für jede Gleichgewichtskonfiguration ist die erlaubte Lage der Segmentkoordinaten mit Hilfe einer beschränkten und abgeschlossenen Box vorgegeben: $P_{soll\ 1}, \dots, P_{soll\ n} \in \mathbb{B}^\delta$. Entsprechend der Segmentparameter $\chi \in \mathcal{D}$ ändert sich die aktuelle Lage der Tensegrity-Struktur in den betrachteten Gleichgewichtskonfigurationen $P_{ist\ 1}(\chi), \dots, P_{ist\ n}(\chi) \in \mathbb{R}^\delta$.

Damit in allen Gleichgewichtskonfigurationen die Lage der Tensegrity-Struktur innerhalb der vorgegebenen Grenzen liegt, muss für alle Gleichgewichtskonfigurationen $i = 1, \dots, n$ gelten:

$$d_{in}(P_{ist\ i}(\chi), P_{soll\ i}) = 0. \quad (4.18)$$

Da $d_{in}(\cdot, \cdot) \geq 0$ gilt, können die n Gleichungen in (4.18) ohne Beschränkung der Allgemeinheit addiert werden und es ergibt sich als Optimierungsproblem mit globalem Maximalwert Null:

$$\max_{\chi \in \mathcal{D}} - \sum_{i=1}^n d_{in}(P_{ist\ i}(\chi), P_{soll\ i}). \quad (4.19)$$

Sofern die Segmentparameter so gewählt werden, dass eine der zu betrachtenden Gleichgewichtskonfigurationen nicht existiert, würde die Tensegrity-Struktur bei Betrachtung dieser Gleichgewichtskonfiguration eine andere Gleichgewichtskonfiguration annehmen. Somit wäre die Lage der Tensegrity-Struktur nicht innerhalb der vorgegebenen Box und diese Lösung würde nicht bestimmt werden.

Zu (b): Es werden n Gleichgewichtskonfigurationen untersucht. Die freien Segmentparameter $\chi \in \mathcal{D}$ sollen so ermittelt werden, dass jede der n Gleichgewichtskonfigurationen stabil ist und eine spezielle, vorgegebene Lage hat. Dies ist eine Kombination der Aufgabenstellung in Abschnitt 4.1.1 und 4.1.2. Die Lage in mehreren Gleichgewichtskonfigurationen wurde bereits in (a) betrachtet. Neu hinzu kommt die Vorgabe der Stabilität jeder der betrachteten Gleichgewichtskonfigurationen. Das Optimierungsproblem, um die Stabilität einer Gleichgewichtskonfiguration zu erreichen, ist (4.7). Hier wird zusätzlich zwischen den λ_{min}^* in den einzelnen Gleichgewichtskonfigurationen $i = 1, \dots, n$ unterschieden: $\lambda_{min\ 1}^*, \dots, \lambda_{min\ n}^*$. Damit ergibt sich ein multikriterielles Optimierungsproblem mit $n + 1$ Zielfunktionen:

$$\max_{\chi \in \mathcal{D}} \left(- \sum_{i=1}^n d_{in}(P_{ist\ i}(\chi), P_{soll\ i}), \lambda_{min\ 1}^*(\chi), \dots, \lambda_{min\ n}^*(\chi) \right)^{\top}. \quad (4.20)$$

Zur Lösung von multikriteriellen Optimierungsverfahren gibt es verschiedene Verfahren. Eine Möglichkeit ist, das Optimierungsproblem vorher zu skalieren. Dabei ist eine Variante, die lineare Skalierung, welche hier angewendet wird. Da die Optimalwerte von den Zielfunktionen unterschiedlich sind, gehen dadurch Lösungen verloren. Da es bei der Parameterfindung aber nicht darauf ankommt *alle* Lösungen zu finden, sondern *mindestens eine*, ist dies eine mögliche Vereinfachung. Somit ergibt sich aus (4.20) als Optimierungsproblem

$$\max_{\chi \in \mathcal{D}} \sum_{i=1}^n (\lambda_{min\ i}^*(\chi) - d_{in}(P_{ist\ i}(\chi), P_{soll\ i})), \quad (4.21)$$

wobei die $\lambda_{min\ i}^*$ entsprechend (4.7) definiert sind.

Zu (c): Bei dieser Eigenschaft wird nur eine Gleichgewichtskonfiguration untersucht. Es werden $m \in \mathbb{N}$ Intervalle $I_j \in \mathbb{B}^1$ und zu jedem Intervall eine natürliche Zahl $m_j \in \mathbb{N}, m_j \leq \delta$ vorgegeben, $j = 1, \dots, m$. Die freien Segmentparameter sollen so bestimmt werden, dass sich die m_j -te Eigenfrequenz $f_{e\ m_j}(\chi)$ in dem dazugehörigen Intervall I_{m_j} befindet. Dabei seien die Eigenfrequenzen aufsteigend nach der Größe sortiert. Dies ist eine Erweiterung von Ziel (c) in Abschnitt 4.1.3.

Es befindet sich die m_j -te Eigenfrequenz $f_{e\ m_j}(\chi)$ im Intervall I_{m_j} genau dann, wenn

$$d_{in}(f_{e\ m_j}(\chi), I_{m_j}) = 0 \quad \text{für } j = 1, \dots, m \quad (4.22)$$

gilt. Da $d_{in}(\cdot, \cdot) \geq 0$ gilt, können die m Gleichungen in (4.22) addiert werden und in ein Maximierungsproblem umformuliert werden:

$$\max_{\chi \in \mathcal{D}} - \sum_{j=1}^m d_{in}(f_{e_{m_j}}(\chi), I_{m_j}). \quad (4.23)$$

Es werden globale Maximalstellen von (4.23) gesucht, welche den Maximalwert Null haben.

Zu (d): Es werden n Gleichgewichtskonfigurationen untersucht. Zu jeder Gleichgewichtskonfiguration wird die Lage $P_{soll\ i} \in \mathbb{B}^\delta$ vorgegeben. Dieser Fall wurde bereits in (a) betrachtet. Zusätzlich wird für jede der n Gleichgewichtskonfigurationen ein abgeschlossenes Intervall $I_i \in \mathbb{B}^1$ und eine natürliche Zahl $m_i \in \mathbb{N}, m_i \leq \delta$ vorgegeben³, $i = 1, \dots, n$. Die Segmentparameter $\chi \in \mathcal{D}$ sollen so bestimmt werden, dass in Gleichgewichtskonfiguration i die m_i -te Eigenfrequenz in Intervall I_i liegt, und dass diese Gleichgewichtskonfiguration innerhalb der vorgegebenen Lage $P_{soll\ i}$ liegt, $i = 1, \dots, n$.

Für $n = 1$ wurde der Teil mit den Eigenfrequenzen bereits in Abschnitt 4.1.3(a) betrachtet. Dort wird die Aufgabe mit Optimierungsproblem (4.12) gelöst. Hier müssen die Eigenfrequenzen der einzelnen Gleichgewichtskonfigurationen unterschieden werden. Es sei $f_{e_{ij}}(\chi)$ die j -te Eigenfrequenz der Tensegrity-Struktur (aufsteigend nach der Größe sortiert), wenn sie sich in Gleichgewichtskonfiguration i befindet. Da (4.12) als globalen Maximalwert Null hat, können die Zielfunktionen für die einzelnen Gleichgewichtskonfigurationen addiert werden, und es ergibt sich als Optimierungsproblem

$$\max_{\chi \in \mathcal{D}} - \sum_{i=1}^n d_{in}(f_{e_{im_i}}(\chi), I_i). \quad (4.24)$$

Es kann (4.24) mit (4.19) kombiniert werden, da wiederum beides Maximierungsprobleme, mit globalem Maximalwert gleich Null sind:

$$\max_{\chi \in \mathcal{D}} - \sum_{i=1}^n (d_{in}(P_{ist\ i}(\chi), P_{soll\ i}) + d_{in}(f_{e_{im_i}}(\chi), I_i)). \quad (4.25)$$

4.1.5 Diskussion der Optimierungsprobleme

In den vorherigen Abschnitten wurden Optimierungsprobleme hergeleitet, welche Segmentparameter so ermitteln, dass die Tensegrity-Struktur spezielle Eigenschaften hat. Sie haben als Gemeinsamkeit, dass die Tensegrity-Struktur in einer Gleichgewichtskonfiguration betrachtet wird. Die Gleichgewichtskonfigurationen sind allerdings von den Segmentparametern abhängig. Durch eine Änderung von Segmentparametern kann sich die Lage der Gleichgewichtskonfiguration verändern, oder sie kann auch ganz verschwinden. Für jeden Parametersatz $\chi \in \mathcal{D}$ muss also die Gleichgewichtskonfiguration berechnet werden. Dafür kann ein Formfindungsalgorithmus verwendet werden, welcher eine Gleichgewichtskonfiguration bestimmen kann, beispielsweise der FE-Formfindungsalgorithmus, siehe Abschnitt 2.2.2. Ein Formfindungsalgorithmus, wie er in Kapitel 3 angegeben wurde, wird hier nicht benötigt, da in der Regel nicht pauschal alle Gleichgewichtskonfigurationen betrachtet werden, sondern spezielle, einzelne Gleichgewichtskonfigurationen. Werden die Aufgaben für die Parameterfindung erweitert, beispielsweise, dass die Tensegrity-Struktur

³In diesem Punkt wird der Freiheitsgrad δ für die Vorgabe der Position und für die Berechnung der Eigenfrequenzen verwendet. Bei der Vorgabe der Position aus Abschnitt 4.1.1 werden dafür die Segmentkoordinaten verwendet, unter der Annahme, dass die Längenänderung der Segmente mit hoher Steifigkeit vernachlässigt werden kann. Somit entspricht der Freiheitsgrad, der dort verwendet wird, nicht dem Freiheitsgrad der Tensegrity-Struktur, wenn die Eigenfrequenzen berechnet werden. Dies ist eine Dopplung in der Bezeichnung, beeinflusst aber nicht die hier angegebenen Ergebnisse. Außerdem kann die Vorgabe der Position aus Abschnitt 4.1.1 auf die Vorgabe von Knotenkoordinaten statt Segmentkoordinaten adaptiert werden.

möglichst viele (stabile) Gleichgewichtskonfigurationen haben soll, wird einer der Formfindungsalgorithmen aus Kapitel 3 benötigt. Für den FE-Formfindungsalgorithmus muss eine Initialkonfiguration vorgegeben werden. Diese kann zusätzlich verwendet werden, um festzulegen, welche Gleichgewichtskonfiguration die vorgegebenen Eigenschaften haben soll. In allen vorgestellten Optimierungsproblemen muss also zusätzlich für jede betrachtete Gleichgewichtskonfiguration eine Initialkonfiguration vorgegeben werden, um die zu betrachtende Gleichgewichtskonfiguration zu definieren.

Für jeden untersuchten Parametersatz muss der FE-Formfindungsalgorithmus ausgeführt werden, um die aktuellen Eigenschaften der Tensegrity-Struktur, beispielsweise die Lage $P_{ist}(\chi)$ oder die Stabilität $\lambda_{min}(\chi)$, zu bestimmen.

Sofern eine der betrachteten Gleichgewichtskonfigurationen aufgrund der gewählten Segmentparameter nicht existiert, wird der FE-Formfindungsalgorithmus eine andere Gleichgewichtskonfiguration ermitteln. Wenn eine der geforderten Eigenschaften die Lage der Gleichgewichtskonfiguration ist, dann wird diese Eigenschaft nicht erfüllt sein und diese Segmentparameter sind nicht optimal. Wenn allerdings die Lage der Tensegrity-Struktur nicht vorgegeben ist, beispielsweise bei (4.7), dann ist es möglich, dass Segmentparameter bestimmt werden, in der die vom FE-Formfindungsalgorithmus ermittelte Gleichgewichtskonfiguration zwar stabil ist, aber weit von der Initialkonfiguration entfernt liegt.

Auch möglich ist folgende Situation: Bei Betrachtung mehrerer Gleichgewichtskonfigurationen bestimmt der FE-Formfindungsalgorithmus trotz unterschiedlicher Initialkonfigurationen dieselbe Gleichgewichtskonfiguration. Dies kann ausgeschlossen werden, indem die Lage der Gleichgewichtskonfigurationen gefordert wird. Beispiele für diese beschriebenen Fälle befinden sich in Abschnitt 4.3.

Alle Optimierungsprobleme sind globale Maximierungsaufgaben. Wenn die geforderten Eigenschaften nicht erfüllbar sind, dann hat das Optimierungsproblem auch keine Lösung. Es kann vorkommen, dass das Optimierungsproblem unendlich viele Lösungen hat. Sofern es mehrere Lösungen gibt, ist das Ziel, mehr als eine (aber nicht alle) Lösung zu ermitteln.

4.2 Optimierungsalgorithmus für die Parameterfindung

Aufgrund der Erfahrungen bei der Formfindung und der Eigenschaften der Optimierungsprobleme soll für die Parameterfindung ein genetischer Algorithmus verwendet werden. Der MultiOpt-Algorithmus aus Kapitel 3.3 kann hier nicht verwendet werden, da die Voraussetzungen an das Optimierungsproblem nicht erfüllt sind.

In Kapitel 3.2.1 wurden drei genetische Algorithmen für die Formfindung vorgestellt. Dort waren die Individuen die Segmentkoordinaten einer Tensegrity-Struktur. Bei der Parameterfindung werden die Individuen durch die zu bestimmenden Segmentparameter repräsentiert. Da der FGenFeFi- und der FGenFeFiMu-Algorithmus stark auf Verwendung von Segmentkoordinaten als Individuen zugeschnitten sind (mit dem FE-Formfindungsalgorithmus werden die Individuen verändert), sind diese Algorithmen nicht für die Parameterfindung geeignet. Bei dem FGenPrioFe-Algorithmus können die Individuen auch die Segmentparameter der Tensegrity-Struktur sein. Der Vorteil von genetischen Algorithmen ist, dass sie auch mit un stetigen Zielfunktionen arbeiten können. Außerdem führt der Gruppierungstest dazu, dass bei unendlich vielen Lösungen nicht nur Lösungen auf dem Rand des Lösungsbereiches gefunden werden. Es wird eine Abwandlung des FGenPrioFe-Algorithmus aus Abschnitt 3.2.1 entwickelt: der PGenFeFi-Algorithmus.⁴ Der Programmablaufplan ist in Abbildung 4.6 angegeben.

⁴Bildung des Namens: P: Parameterfindung, Gen: Genetischer Algorithmus, Fe: FE-Formfindungsalgorithmus, Fi: Fitness - der FE-Formfindungsalgorithmus wird angewendet, um die Fitness der Individuen zu bestimmen.

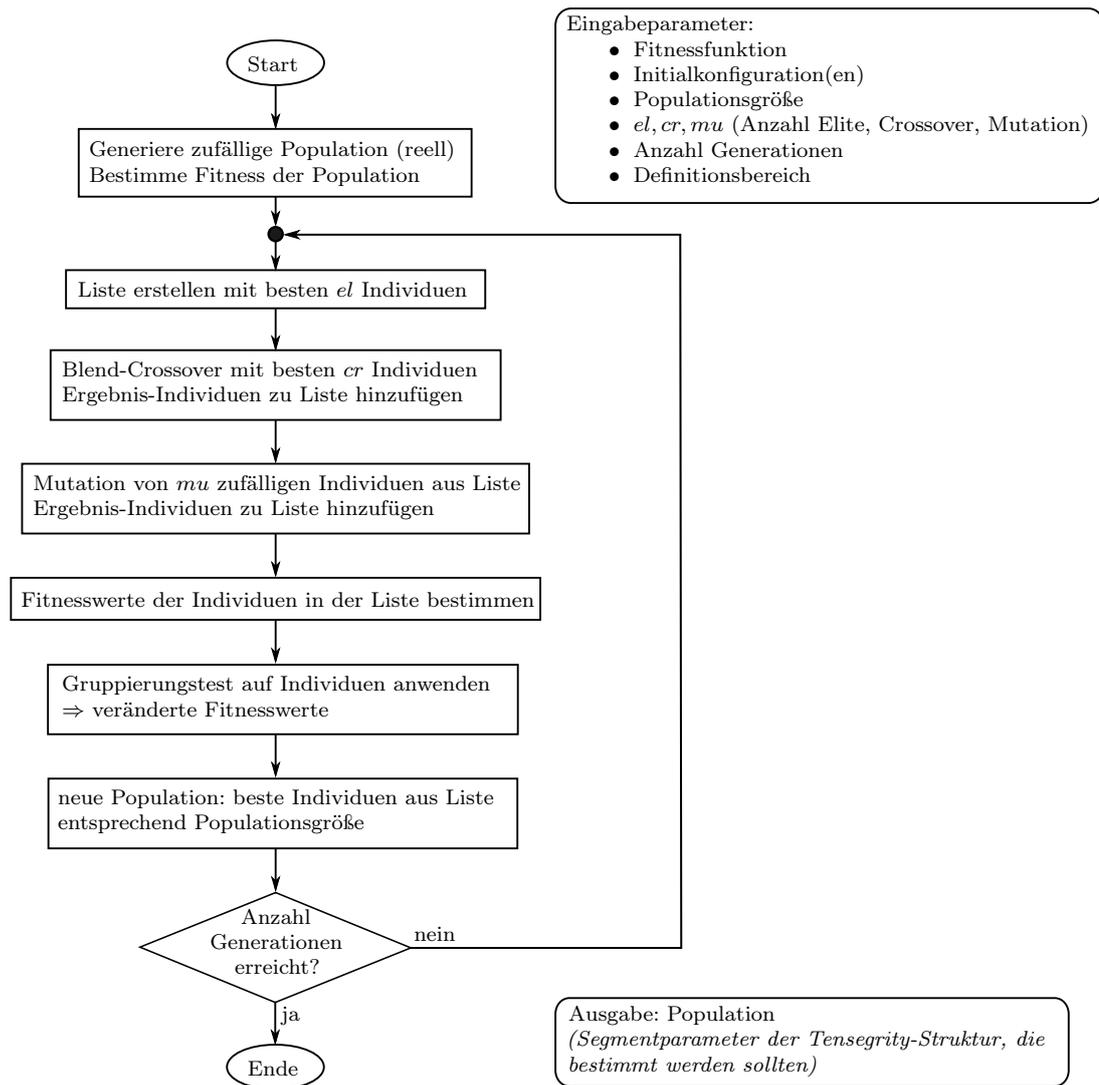


Abbildung 4.6: Programmablaufplan des PGenFeFi-Algorithmus.

Im Folgenden werden die Unterschiede zwischen dem FGenPrioFe- und dem PGenFeFi-Algorithmus erläutert.

Individuen: Die Individuen haben in beiden Algorithmen eine reelle Repräsentation. Beim PGenFeFi-Algorithmus ist ein Individuum ein reeller Vektor, welcher die freien (zu bestimmenden) Segmentparameter enthält.

Die Optimierungsvariablen bei der Parameterfindung sind ausgewählte (oder alle) Segmentparameter der Tensegrity-Struktur. In dem vorgestellten und implementierten Algorithmus ist es möglich festzulegen, welche Segmentparameter ermittelt werden sollen und welche fest sind.

Um gewisse Symmetrieeigenschaften zu erhalten, ist es manchmal erwünscht, dass zwar von mehreren Segmenten die Parameter bestimmt werden sollen, diese aber identisch sein sollen. Aus diesem Grund ist es im implementierten Algorithmus nicht nur möglich, festzulegen, welche Segmentparameter ermittelt werden sollen, sondern auch anzugeben, welche Segmentparameter identisch sind. In Beispiel 4.9 wird dieser Fall angewendet.

Eingabeparameter: Die Eingabeparameter unterscheiden sich von denen in dem FGenPrioFe-Algorithmus. Durch die Vielzahl an möglichen Aufgabenstellungen unterscheidet sich auch jedes Mal die Fitnessfunktion. Aus diesem Grund ist diese bei den Eingabeparametern mit angegeben. Außerdem muss die Gleichgewichtskonfiguration, die untersucht werden soll, definiert werden. Dies geschieht durch Angabe einer Initialkonfiguration je Gleichgewichtskonfiguration.

Fitnessfunktion: Die Eigenschaften der Tensegrity-Struktur werden immer in Bezug auf eine (oder mehrere) Gleichgewichtskonfiguration(en) angegeben. Aus einer Veränderung der Segmentparameter folgt entweder eine Veränderung der Lage beziehungsweise der Eigenschaften einer Gleichgewichtskonfiguration oder eine Gleichgewichtskonfiguration verschwindet. Aus diesem Grund muss für jedes Individuum zunächst die konkrete Gleichgewichtskonfiguration bestimmt werden. Dies erfolgt mit Hilfe der vorgegebenen Initialkonfiguration(en) und dem FE-Formfindungsalgorithmus. Wenn die zu betrachtende(n) Gleichgewichtskonfiguration(en) bestimmt wurde(n), können die in Abschnitt 4.1 angegebenen Zielfunktionen angewendet werden und die Fitnesswerte können berechnet werden.

Bei Optimierungsproblem (4.7) und (4.21) müssen die Parameter a und c festgelegt werden. Der Parameter c wird auf $c := 100$ gesetzt. Der Parameter a , welcher sicherstellen soll, dass die Zielfunktionswerte immer kleiner oder gleich Null sind, wird nicht global festgelegt, sondern im genetischen Algorithmus in jeder Generation neu bestimmt. Er wird so gewählt, dass das Individuum mit dem größten Eigenwert innerhalb der Generation den (Teil-)Fitnesswert Null hat.

Gruppierungstest: Der Gruppierungstest findet, bis auf eine Ausnahme, genauso statt, wie beim FGenPrioFe-Algorithmus. Weil bei der Parameterfindung die Ziele oftmals in Form von Intervallen angegeben sind, kann das Ziel direkt erreicht werden. Der Fitnesswert ist in diesem Fall identisch Null. Werden zwei ähnliche Individuen, welche beide den Fitnesswert Null haben, verglichen und wird dann eines der beiden Individuen bestraft, dann würde eine Multiplikation des Fitnesswertes mit einer positiven Zahl den Fitnesswert nicht verändern. Aus diesem Grund wird, wenn zwei dichte Individuen beide einen Fitnesswert gleich Null haben, der Fitnesswert eines der beiden Individuen auf eine negative Zahl nahe Null (beispielsweise -10^{-10}) gesetzt. Dadurch wird dieses Individuum trotzdem bestraft. Sobald eines der beiden dichten Individuen einen Fitnesswert ungleich Null hat, erfolgt die Bestrafung wie beim FGenPrioFe-Algorithmus durch Multiplikation des Fitnesswertes mit einer positiven Zahl.

Selektion, Rekombination, Mutation, Abbruchkriterium: Diese vier Schritte erfolgen genauso, wie beim FGenPrioFe-Algorithmus.

Festlegung der Parameter: Der PGenFeFi-Algorithmus hat mehrere Parameter, die festgelegt werden müssen. Diese werden für alle möglichen Aufgabenstellungen, Topologien und Segmentparameter identisch gewählt. Alle Beispiele im folgenden Abschnitt 4.3 verwenden diese Parameter, außer es werden explizit andere Parameter angegeben. Die verwendeten Parameter sind in Tabelle 4.1 angegeben. Die Parameter wurden experimentell und mit Hilfe heuristischer Untersuchungen, welche teilweise in Abschnitt 3.4 vorgestellt wurden, festgelegt. Die Anzahl an Individuen und Generationen ist hier kleiner, als im FGenPrioFe-Algorithmus (siehe Tabelle 3.7). Dies liegt unter anderem an den unterschiedlichen Zielfunktionen der beiden Algorithmen.

Die beiden Parameter für den FE-Formfindungsalgorithmus (Iterationen und Lastinkremente) müssen so gewählt werden, dass der FE-Formfindungsalgorithmus möglichst selten vor Erreichen der Konvergenzbedingung abbricht. Da der FE-Formfindungsalgorithmus bei Feststellen einer Konvergenz vorzeitig aufhört,

könnten diese beiden Parameter ohne Einfluss auf die Laufzeit des Algorithmus vergrößert werden.

Parameter	n_{ind}	n_{gen}	el	cr	mu	Bestrafung
Wert	20	50	n_{ind}	n_{ind}	$\min\{n_{ind}, 5\}$	·100 bzw. -10^{-10}
Parameter	Abstand Gruppierungstest		Iterationen		Lastinkremente	
Wert	$0.05 \cdot \nu$		15		2	

Tabelle 4.1: Festlegung der Parameter für den PGenFeFi-Algorithmus.

4.3 Anwendung des Algorithmus für die Parameterfindung

In diesem Abschnitt wird der vorgestellte Algorithmus für die Parameterfindung, der PGenFeFi-Algorithmus, an verschiedenen Tensegrity-Strukturen mit mehreren Aufgabenstellungen getestet.

Es werden nachfolgend die gleichen Tensegrity-Strukturen und die gleiche Rechentechnik, wie bei der Formfindung in Abschnitt 3.4.1 verwendet.

Da der PGenFeFi-Algorithmus ähnlich zum FGenPrioFe-Algorithmus ist, sind die Analysen zur Laufzeit und zum Einfluss von Populationsgröße und der Anzahl an Generationen auf diesen Algorithmus übertragbar. Es werden in diesem Abschnitt keine weiteren Untersuchungen dazu aufgeführt. Stattdessen wird bei verschiedenen Aufgabenstellung gezeigt, wie der Algorithmus damit arbeitet.

Der PGenFeFi-Algorithmus ist zufallsgesteuert. Aus diesem Grund führt der Algorithmus bei mehrmaligen Ausführungen zu unterschiedlichen Ergebnissen. In zwei Beispielen wird die Qualität der Lösungen bei mehreren (100) Durchläufen getestet, siehe Beispiel 4.6 und 4.7. In den anderen Beispielen wird jeweils nur ein Durchlauf (bzw. wenige Durchläufe) durchgeführt.

Mit dem PGenFeFi-Algorithmus ist es möglich, alle Segmentparameter zu bestimmen. Damit die Arbeitsweise des Algorithmus besser veranschaulicht werden kann, werden in den Beispielen nur ausgewählte Segmentparameter ermittelt. Die restlichen Segmentparameter werden auf feste Werte gesetzt. In Beispiel 4.7 wird dargestellt, dass der PGenFeFi-Algorithmus auch alle Segmentparameter bestimmen kann.

Beispiel 4.5 (Vorgabe der Lage der Tensegrity-Struktur).

In diesem Beispiel wird untersucht, wie sich der vorgestellte Algorithmus für die Parameterfindung verhält, wenn auf verschiedene Art und Weise die Lage der Tensegrity-Struktur vorgegeben wird. Es wird Topologie C verwendet, mit den Bezeichnungen und der Lagerung aus Abbildung A.3. Als Ausgangspunkt für die Segmentparameter werden die in Abbildung A.3 angegebenen Segmentparameter verwendet.

In den folgenden Aufgabenstellungen sollen drei Segmentparameter bestimmt werden: Die Längen von Segment 2 und 3 (l_2, l_3) und die Steifigkeit von Segment 8 (k_8), siehe blaue Segmente oben in Abbildung 4.7. Es werden die folgenden Definitionsbereiche für diese Segmentparameter festgelegt:

$$l_2 \in [20, 100] \text{ mm} \quad l_3 \in [20, 100] \text{ mm} \quad k_8 \in [0.01, 1.5] \text{ N/mm.}$$

In diesem Beispiel werden die beiden Gleichgewichtskonfigurationen I und II (siehe Abbildung A.3) betrachtet. Für jede Gleichgewichtskonfiguration wird die erlaubte Lage mit Hilfe von Intervallen definiert

und in Abbildung 4.7 grau dargestellt:

$$\begin{array}{llll} \text{GGK I:} & x_4 \in [0, 60] \text{ mm} & y_4 \in [0, 0] \text{ mm} & \varphi_2 \in [30, 70]^\circ & \varphi_3 \in [290, 330]^\circ \\ \text{GGK II:} & x_4 \in [80, 140] \text{ mm} & y_4 \in [0, 0] \text{ mm} & \varphi_2 \in [110, 150]^\circ & \varphi_3 \in [210, 250]^\circ. \end{array}$$

Für jede der zu untersuchenden Gleichgewichtskonfigurationen wird eine Initialkonfiguration für den FE-Formfindungsalgorithmus festgelegt, siehe erste Zeile in Abbildung 4.7.

Es werden drei verschiedene Aufgabenstellungen A bis C definiert und durch den PGenFeFi-Algorithmus gelöst. Vom Ergebnis werden immer die besten vier Lösungen, in Bezug auf die Fitnesswerte, ausgewertet und in Abbildung 4.7 dargestellt.

A: Es werden Segmentparameter $\chi = (l_2, l_3, k_8)$ gesucht, sodass die Gleichgewichtskonfiguration I innerhalb der vorgegebenen Lage ist. Dies entspricht Optimierungsproblem (4.4). Die vom PGenFeFi-Algorithmus ermittelten Segmentparameter der besten vier Lösungen und die dazugehörigen Fitnesswerte sind in Tabelle 4.2 angegeben.

Fitnesswert	l_2 [mm]	l_3 [mm]	k_8 [N/mm]
-0.00001	58.3159	58.3159	0.4537
-0.00028	51.4221	51.4218	0.9874
-0.00034	56.7344	56.7340	0.6896
-0.00075	48.5873	48.5884	0.4674

Tabelle 4.2: Ergebnisse von Aufgabe A.

Anhand der Ergebnisse ist zu sehen, dass mehrere unterschiedliche Lösungen bestimmt wurden. Der Fitnesswert ist nicht genau Null, weil die Längen der Segmente 2 und 3 nicht genau gleich sind, dadurch wird die Symmetrie verletzt und es gilt nicht, wie gefordert, genau $y_4 = 0$.

Nun wird mit den bestimmten Segmentparametern untersucht, ob auch die zweite Gleichgewichtskonfiguration existiert. Die Existenz dieser Gleichgewichtskonfiguration war bei der Bestimmung der Segmentparameter nicht gefordert. Dafür wird der FE-Formfindungsalgorithmus mit der zweiten Initialkonfiguration angewendet. Das Ergebnis ist in Abbildung 4.7 (Ergebnis A, GGK II) dargestellt. Nur im ersten Parametersatz existiert die gewünschte, aber in der Optimierung nicht geforderte, Gleichgewichtskonfiguration II. Aus diesem Grund wird in der zweiten Aufgabenstellung (B) zusätzlich die Lage von Gleichgewichtskonfiguration II betrachtet.

B: Es werden Segmentparameter $\chi = (l_2, l_3, k_8)$ gesucht, sodass die Gleichgewichtskonfigurationen I und II innerhalb der vorgegebenen Lagen sind. Dies entspricht Optimierungsproblem (4.19). Die ermittelten Segmentparameter und die dazugehörigen Fitnesswerte sind in Tabelle 4.3 angegeben.

Fitnesswert	l_2 [mm]	l_3 [mm]	k_8 [N/mm]	$\lambda_{min I}$	$\lambda_{min II}$
-0.00042	86.9073	86.9074	0.5980	-0.3659	0.1059
-0.01773	64.8005	64.7938	0.4490	0.1078	0.1528
-0.04176	43.3705	43.3297	0.3197	0.1450	0.0154
-0.05352	56.7880	56.7566	0.3652	0.1885	0.1445

Tabelle 4.3: Ergebnisse von Aufgabe B.

Bei allen vier dargestellten Lösungen (Ergebnis B, GGK I und II, in Abbildung 4.7) existieren

beide Gleichgewichtskonfigurationen innerhalb der geforderten Positionen. Die Erweiterung der Aufgabenstellung hat demnach die gewünschte Wirkung erzielt. Bei Betrachtung der Stabilität der Gleichgewichtskonfigurationen (siehe die letzten beiden Spalten in Tabelle 4.3), ist zu bemerken, dass eine Gleichgewichtskonfiguration instabil ist. Aus diesem Grund wird die Forderung nach Stabilität bei Aufgabenstellung C ergänzt.

C: Es werden Segmentparameter $\chi = (l_2, l_3, k_8)$ gesucht, sodass die Gleichgewichtskonfigurationen I und II innerhalb der vorgegebenen Lagen und stabil sind. Dies entspricht Optimierungsproblem (4.21). Die ermittelten Segmentparameter und die dazugehörigen Fitnesswerte, sowie der jeweils kleinste Eigenwert der Tangentensteifigkeitsmatrix sind in Tabelle 4.4 angegeben.

Fitnesswert	l_2 [mm]	l_3 [mm]	k_8 [N/mm]	$\lambda_{min I}$	$\lambda_{min II}$
-0.16429	59.5318	59.5358	0.3318	0.1706	0.1641
-0.24336	48.0928	48.1075	0.2777	0.1455	0.1229
-0.32792	38.9202	38.9345	0.2930	0.1165	0.0595
-0.47381	69.9184	69.9415	0.5156	0.0329	0.1458

Tabelle 4.4: Ergebnisse von Aufgabe C.

Im Vergleich zu dem Ergebnis von Aufgabe B sind hier alle vier untersuchten Lösungen stabil. Die Fitnesswerte haben in diesem Fall einen größeren Abstand zur Null, als bei Aufgabe A und B. Dies liegt daran, dass zusätzlich zum Abstand auch die Eigenwerte betrachtet werden, welche größer als Null sein sollen. Die berechneten kleinsten Eigenwerte pro Individuum werden so verschoben, dass der größte dieser Eigenwerte den Wert Null hat (siehe (4.7) und Abschnitt 4.2). Verletzt nun die Lösung, bei der der Eigenwert maximal ist, die zur Position geforderte Bedingung, so ist als Gesamt-Fitnesswert die Null nicht erreichbar. Auch bei einer exakt gefundenen Lösung kann der Fitnesswert also kleiner als Null sein.

Dieses Beispiel zeigt zum einen, dass der PGenFeFi-Algorithmus für die Parameterfindung geeignet ist. Es ist möglich verschiedene Parametersätze, die eine Aufgabenstellung lösen, zu bestimmen. Zum anderen zeigt dieses Beispiel, dass durch Kombination von Aufgabenstellungen mehrere Ziele miteinander verbunden werden können. ┘

Beispiel 4.6 (Reproduzierbarkeit der Ergebnisse).

In diesem Beispiel wird die Reproduzierbarkeit der Ergebnisse des PGenFeFi-Algorithmus bei mehrmaliger Durchführung getestet. Der Algorithmus soll ein Optimierungsproblem 100 Mal in Folge lösen und es wird überprüft, ob die Ergebnisse vergleichbar sind. In diesem Beispiel wird Topologie D verwendet, mit den Bezeichnungen und der Lagerung aus Abbildung A.4. Als Ausgangspunkt für die Segmentparameter werden die in Abbildung A.4 angegebenen Segmentparameter verwendet.

Als Ziel wird die Lage der Tensegrity-Struktur in einer Gleichgewichtskonfiguration verwendet. Es soll also Optimierungsproblem (4.4) gelöst werden. Die Sollposition $P_{soll} \in \mathbb{B}^6$ sei gegeben durch die Intervalle in den einzelnen Segmentkoordinaten:

$$\begin{array}{lll}
 x_2 \in [60, 70] \text{ mm} & y_2 \in [0, 10] \text{ mm} & \varphi_2 \in [120, 140]^\circ \\
 x_3 \in [70, 90] \text{ mm} & y_3 \in [0, 10] \text{ mm} & \varphi_3 \in [40, 60]^\circ.
 \end{array}$$

Als Initialkonfiguration wird der Mittelpunkt der Box P_{soll} verwendet. Die erlaubte Position des Schwerpunktes von Segment 2 ist in Abbildung 4.8 in grau dargestellt. Außerdem ist links in Abbildung 4.8 die

Initialkonfiguration gezeigt. In den anderen drei Diagrammen in dieser Abbildung ist das Ergebnis des FE-Formfindungsalgorithmus bei drei verschiedenen Werten für die Steifigkeit von Segment 5 (k_5) dargestellt. Dabei ist der Schwerpunkt von Segment 2 durch einen blauen Kreis markiert. Bei $k_5 = 0.1$ N/mm ist die Lage nicht zulässig, bei $k_5 = 0.38$ N/mm ist sie knapp zulässig und bei $k = 0.5$ N/mm ist sie zulässig.

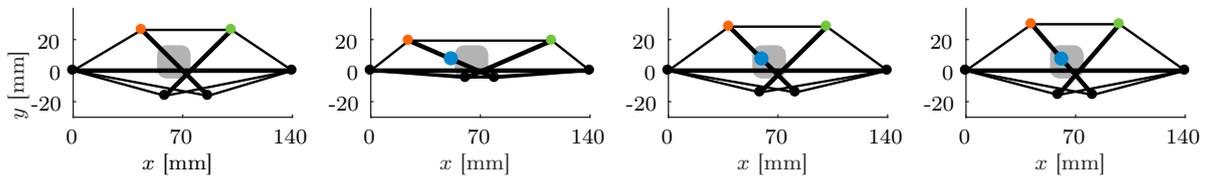


Abbildung 4.8: Grau: Erlaubte Lage des Schwerpunktes von Segment 2. Blau: Schwerpunkt von Segment 2. Von links nach rechts: Initialkonfiguration, Gleichgewichtskonfiguration bei $k_5 = 0.1, 0.38, 0.5$ N/mm.

Der Segmentparameter, der in diesem Beispiel als *frei* gewählt wird, ist die Steifigkeit von Segment 5: k_5 . Es werden drei verschiedene Definitionsbereiche für diese Steifigkeit gewählt:

$$\text{A: } k_5 \in [0.1, 0.3] \text{ N/mm} \quad \text{B: } k_5 \in [0.1, 0.38] \text{ N/mm} \quad \text{C: } k_5 \in [0.1, 1.0] \text{ N/mm.}$$

Nach der Beobachtung aus Abbildung 4.8 gibt es bei A keine Lösung, bei B genau eine Lösung und bei C unendlich viele Lösungen. Auf diese drei Aufgabenstellungen wird der PGenFeFi-Algorithmus jeweils 100 Mal angewendet. Bei A ist zu erwarten, dass das beste Individuum bei circa 0.3 N/mm liegt, denn je größer die Steifigkeit ist, desto näher ist die Gleichgewichtskonfiguration am Ziel. Der Fitnesswert kann aber nicht Null werden. Bei B sollte der Algorithmus ein Individuum mit Fitnesswert gleich Null ermitteln, welches einen Wert von circa $k_5 = 0.38$ N/mm hat. Bei C gibt es theoretisch unendlich viele Lösungen. Durch den Gruppierungstest werden ähnliche Lösungen bestraft. Unter Berücksichtigung des erlaubten Bereiches von 0.38 N/mm bis 1.0 N/mm und des Abstandes im Gruppierungstests von 0.05, bezogen auf einen skalierten Definitionsbereich von $[0, 1]$, können vom Algorithmus maximal 14 unterschiedliche Lösungen bestimmt werden (die restlichen 7 der 21 möglichen Lösungen liegen im nicht-erlaubten Bereich $[0.1, 0.38]$). Diese 14 Lösungen sind nur dann möglich, wenn alle Lösungen nahezu optimal im Intervall $[0.38, 1.0]$ N/mm verteilt sind (das heißt, die Individuen haben einen minimalen Abstand von $0.05 \cdot (1 - 0.1) = 0.0450$ und einen maximalen Abstand von $\frac{1-0.38}{13} = 0.0477$ zueinander).

Die Ergebnisse des PGenFeFi-Algorithmus werden für alle drei Varianten betrachtet. Bei allen drei Varianten benötigt der Algorithmus eine durchschnittliche Zeit von 12 s. Bei Variante A hat das beste Individuum bei 100 Durchläufen einen mittleren Wert von 0.2998 N/mm. Bei Variante B wurde in 100 Durchläufen immer ein Individuum mit Fitnesswert gleich Null ermittelt. Dies hat einen mittleren Wert von 0.3773 N/mm. Bei Variante C wurden im Durchschnitt 10.76 unterschiedliche Individuen (unterschiedlich im Sinne des Gruppierungstests) bestimmt, in jedem Durchlauf mindestens 10 und maximal 13. Damit wurden vom Algorithmus alle erwarteten Ergebnisse ermittelt. Außerdem kann geschlussfolgert werden, dass der Algorithmus reproduzierbare Ergebnisse liefert, obwohl er auf Zufallszahlen basiert. \lrcorner

Beispiel 4.7 (Alle Segmentparameter frei).

In diesem Beispiel sollen alle Segmentparameter (bis auf die Länge von Segment 1) von Topologie D bestimmt werden. Es wird das gleiche Ziel verwendet, wie im vorherigen Beispiel 4.6. Ausgangspunkt für den Definitionsbereich der Segmentparameter sind die Parameter, die in Abbildung A.4 angegeben sind. Die Länge von Segment 2 und 3 wird um ± 20 mm variiert, die Anfangslängen von Segment 4 bis 10 werden

um ± 5 mm variiert. Die Steifigkeiten der Segmente 4 bis 10 werden um ± 0.3 N/mm variiert. Aus diesen Angaben ergibt sich der Definitionsbereich für die Segmentparameter. Es sollen 16 Segmentparameter bestimmt werden.

Zunächst wird eine Zufallspopulation innerhalb des Definitionsbereiches bestimmt und die Fitnesswerte werden berechnet. Von den 20 Zufallsindividuen haben in 100 Durchläufen im Durchschnitt 0.11 Individuen einen Fitnesswert von Null, erfüllen also das Ziel. Wird der PGenFeFi-Algorithmus ausgeführt, dann haben in den 100 Durchläufen im Durchschnitt 2.8 Individuen einen Fitnesswert von Null, in 93 Durchläufen wurde mindestens ein Individuum mit Fitnesswert gleich Null gefunden. Damit ist der PGenFeFi-Algorithmus besser als eine zufällige Bestimmung von Segmentparametern. Durch eine Erhöhung der Anzahl an Generationen kann die Anzahl an gefundenen, verschiedenen Lösungen, erhöht werden. Wenn statt der 50 Generationen beispielsweise 100 Generationen des Algorithmus ausgeführt werden, dann werden im Durchschnitt (von 100 Durchläufen) 3.3 verschiedene Individuen, welche das Ziel erfüllen, bestimmt. In 95 Durchläufen wurde mindestens ein Individuum mit Fitnesswert gleich Null gefunden.

Dieses Beispiel illustriert, dass der PGenFeFi-Algorithmus in der Lage ist die Optimierungsprobleme zu lösen, auch wenn alle Segmentparameter bestimmt werden sollen. Bei vielen freien Segmentparametern kann es sein, dass die Anzahl an Generationen des Algorithmus erhöht werden muss, um bessere Ergebnisse zu erhalten. ┘

Beispiel 4.8 (Eigenfrequenzen).

In diesem Beispiel wird untersucht, wie sich der PGenFeFi-Algorithmus verhält, wenn Eigenfrequenzen auf verschiedene Art und Weise gefordert sind. Es wird Topologie B verwendet, mit den Bezeichnungen und Lagerungen aus Abbildung A.2. Als Ausgangspunkt für die Segmentparameter werden die in Abbildung A.2 angegebenen Segmentparameter verwendet. Damit kann es auch die in dieser Abbildung dargestellten Gleichgewichtskonfigurationen geben. Die Masse der Knoten wird auf jeweils 100 g gesetzt.

In allen folgenden Aufgabenstellungen soll die Länge von Segment 3 (l_3) bestimmt werden. Dabei ist der Definitionsbereich auf $[5, 100]$ mm festgelegt. Wie Gleichgewichtskonfiguration I ihre Lage in Abhängigkeit von l_3 verändert, ist oben links in Abbildung 4.9 dargestellt. Dabei wird von hell nach dunkel die Länge l_3 kleiner.

Im zweiten Diagramm in der ersten Zeile von Abbildung 4.9 sind die beiden kleinsten Eigenfrequenzen von Gleichgewichtskonfiguration I in Abhängigkeit des freien Segmentparameters l_3 dargestellt. Im Folgenden werden sieben verschiedene Aufgabenstellungen (A bis G) formuliert, welche spezielle Eigenschaften dieser beiden Eigenfrequenzen fordern. Die Ergebnisse, die vom PGenFeFi-Algorithmus bestimmt werden sollen, können bereits aus diesem Diagramm abgelesen werden. Dadurch ist es möglich zu beurteilen, ob der PGenFeFi-Algorithmus die gewünschten Ziele erfüllt. Zu den jeweils vorgestellten Aufgaben A bis G gehört jeweils ein Diagramm in Abbildung 4.9. Dort sind die Zielintervalle farbig markiert: orange steht für ein Intervall, in dem sich die kleinste Eigenfrequenz befinden soll, blau für ein Intervall, in dem sich die zweitkleinste Eigenfrequenz befinden soll und grün für ein Intervall, in dem sich keine (B) oder beide (E) Eigenfrequenzen befinden sollen. Der PGenFeFi-Algorithmus wird für jede Aufgabenstellung fünf Mal in Folge ausgeführt. Es werden jeweils die Individuen, deren Fitnesswert gleich Null ist, in das entsprechende Diagramm mit einer grauen Linie eingezeichnet. Daran kann beobachtet werden, ob der PGenFeFi-Algorithmus nur Lösungen innerhalb der geforderten Ziele ermittelt und ob er über den gesamten erlaubten Bereich Lösungen findet.

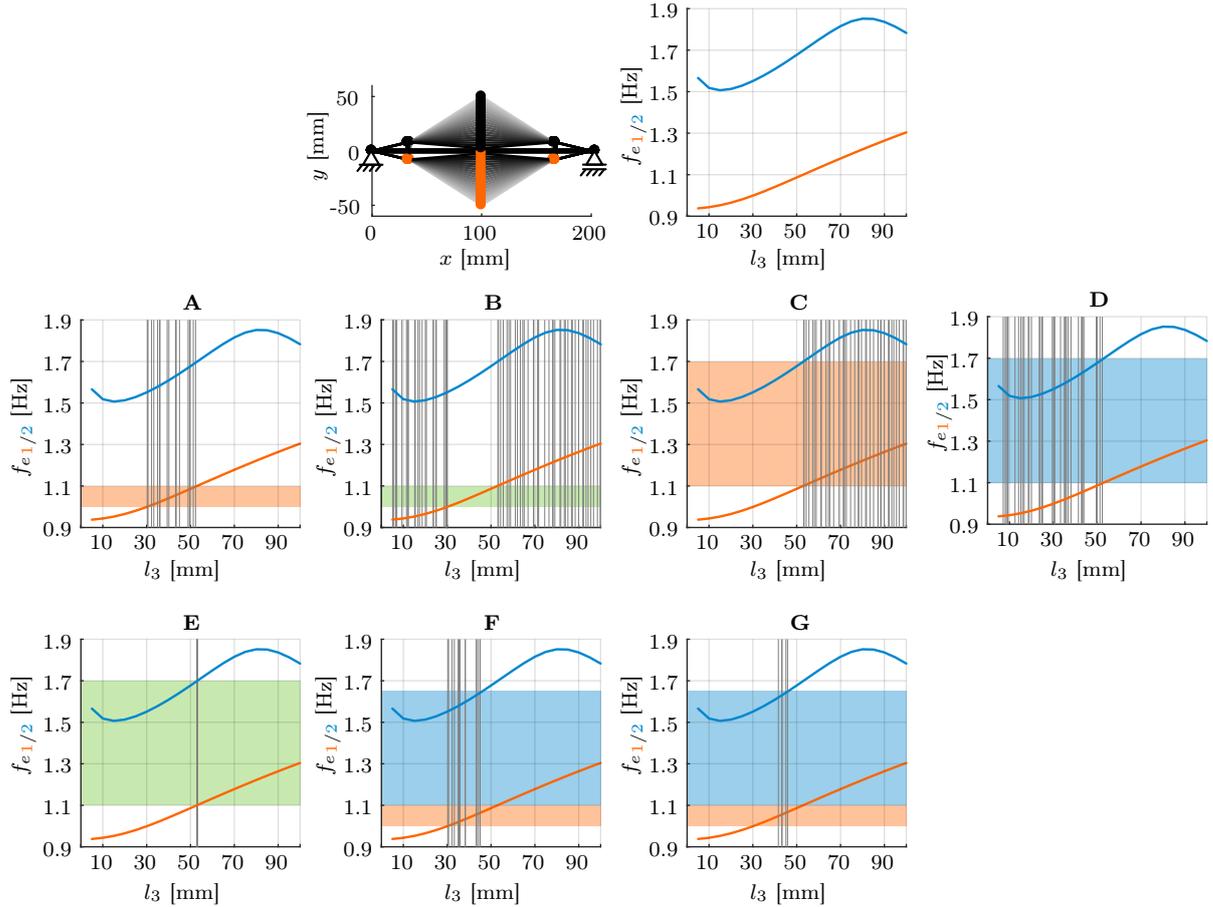


Abbildung 4.9: Oben links: Änderung von GGK I bei Variation von l_3 . Oben rechts: Die beiden kleinsten Eigenfrequenzen in GGK I in Abhängigkeit von l_3 . A bis G: Aufgabenstellung und Ergebnis des PGenFeFi-Algorithmus. Farbige Rechtecke stellen die Intervalle dar, in denen sich Eigenfrequenzen befinden sollen. Graue Linien stellen die vom PGenFeFi-Algorithmus ermittelten Individuen dar.

A: Ziel: $f_{e1} \in [1.0, 1.1]$ Hz

Optimierungsproblem: (4.12)

Es werden Lösungen im Bereich $l_3 \in [30, 50]$ mm bestimmt.

B: Ziel: keine Eigenfrequenz im Intervall $[1.0, 1.1]$ Hz

Optimierungsproblem: (4.14)

Es werden Lösungen in den Bereichen $l_3 \in [5, 30] \cup [50, 100]$ mm bestimmt. Dies ist der Teil vom Definitionsbereich, der in A nicht bestimmt wurde.

C: Ziel: $f_{e1} \in [1.1, 1.7]$ Hz

Optimierungsproblem: (4.12)

Es werden Lösungen im Bereich $l_3 \in [51, 100]$ mm bestimmt.

D: Ziel: $f_{e2} \in [1.1, 1.7]$ Hz

Optimierungsproblem: (4.12)

Es werden Lösungen im Bereich $l_3 \in [5, 52]$ mm bestimmt. Da es keine Forderung für die kleinste Eigenfrequenz f_{e1} mehr gibt, befindet sich diese im Bereich $[0.9, 1.1]$ Hz, und nicht wie in C in $[1.1, 1.7]$ Hz. In den folgenden Aufgabenstellungen werden deshalb Eigenschaften von beiden Eigenfrequenzen gefordert.

E: Ziel: Zwei beliebige Eigenfrequenzen im Intervall $[1.1, 1.7]$ Hz

Optimierungsproblem: (4.16)

Es werden Lösungen im Bereich $l_3 \in [51, 52]$ mm bestimmt und damit sind beide Ziele erfüllt. Es wird nicht gefordert, dass die beiden kleinsten Eigenfrequenzen in diesem Intervall sind. Aber weil in diesem Beispiel nur ein Segmentparameter variiert wird, gibt es nur Lösungen, bei denen die kleinsten beiden Eigenfrequenzen in diesem Bereich sind.

F: Ziel: $f_{e1} \in [1.0, 1.1]$ Hz und $f_{e2} \in [1.1, 1.7]$ Hz

Optimierungsproblem: (4.23)

Es werden Lösungen im Bereich $l_3 \in [30, 45]$ mm bestimmt und damit sind beide Ziele erfüllt.

G: Ziel: Für Gleichgewichtskonfiguration I gelte das Ziel von F. Zusätzlich wird Gleichgewichtskonfiguration III betrachtet. Dort soll gelten: $f_{e1} \in [0.2, 0.85]$ Hz und $f_{e2} \in [0.9, 1.2]$ Hz. Außerdem wird die Lage in beiden Gleichgewichtskonfigurationen vorgegeben. Da in diesem Beispiel die Eigenfrequenzen und nicht die Lage untersucht werden sollen, wirkt die Vorgabe der Lage beider Gleichgewichtskonfigurationen nicht einschränkend.

Optimierungsproblem: (4.25)

Es werden Lösungen im Bereich $l_3 \in [40, 45]$ mm bestimmt.

In allen sieben Beispielen wurden Lösungen zu den Aufgabenstellungen gefunden. Außerdem wurden Lösungen jeweils über den gesamten möglichen Bereich ermittelt. Dies zeigt, dass der PGenFeFi-Algorithmus geeignet ist, um Segmentparameter zu bestimmen, sodass die Eigenfrequenzen der Tensegrity-Struktur spezielle Eigenschaften haben. ┘

Beispiel 4.9 (Eigenformen).

In diesem Beispiel wird als Aufgabenstellung eine Eigenform vorgegeben, um den PGenFeFi-Algorithmus mit Optimierungsproblem (4.17) zu testen. Es wird Topologie A mit den Bezeichnungen und Lagerungen aus Abbildung A.1 verwendet. Als Ausgangspunkt für die Segmentparameter werden die in Abbildung A.1 angegebenen Segmentparameter verwendet. Die Masse der Knoten wird auf jeweils 100 g gesetzt.

Es sollen die Länge von Segment 2 (l_2) und die Steifigkeit von Segment 5 und 8 (k_5, k_8), bestimmt werden. Dabei sollen aus Symmetriegründen die beiden Steifigkeiten gleich sein: $k_5 = k_8$. Der vorgegebene Definitionsbereich für die freien Segmentparameter sei:

$$l_2 \in [5, 50] \text{ mm} \quad k_5 \in [0.001, 0.25] \text{ N/mm}.$$

Die Segmente, bei denen ein Parameter frei ist, sind oben links in Abbildung 4.10 blau markiert. Außerdem ist dort die verwendete Initialkonfiguration für den FE-Formfindungsalgorithmus dargestellt.

Es wird die Eigenform betrachtet, die zur kleinsten Eigenfrequenz gehört. Die Eigenformen werden in diesem Beispiel nur qualitativ analysiert: Bei den einzelnen Komponenten eines Vektors wird nur unterschieden, ob diese Null (0), positiv (+) oder negativ (-) sind. Es werden zwei verschiedene Aufgabenstellungen, A und B, formuliert:

$$\mathbf{A}: (0, +, +, -, +, +, +, -, +) \quad \mathbf{B}: (0, +, -, -, -, -, -, +, -). \tag{4.26}$$

Dabei ist in (4.26) die Reihenfolge der Komponenten: ($\textcircled{2}x, \textcircled{3}x, \textcircled{3}y, \dots, \textcircled{6}x, \textcircled{6}y$). Das qualitative Aussehen dieser Eigenform ist oben rechts in Abbildung 4.10 dargestellt. Um ein Intervall als Zielstellung

für den Algorithmus zu erhalten, werden die Zeichen 0, +, - in (4.26) durch Intervalle ersetzt:

$$0 \mapsto [-0.1, 0.1] \quad + \mapsto [0.1, 0.9] \quad - \mapsto [-0.9, -0.1].$$

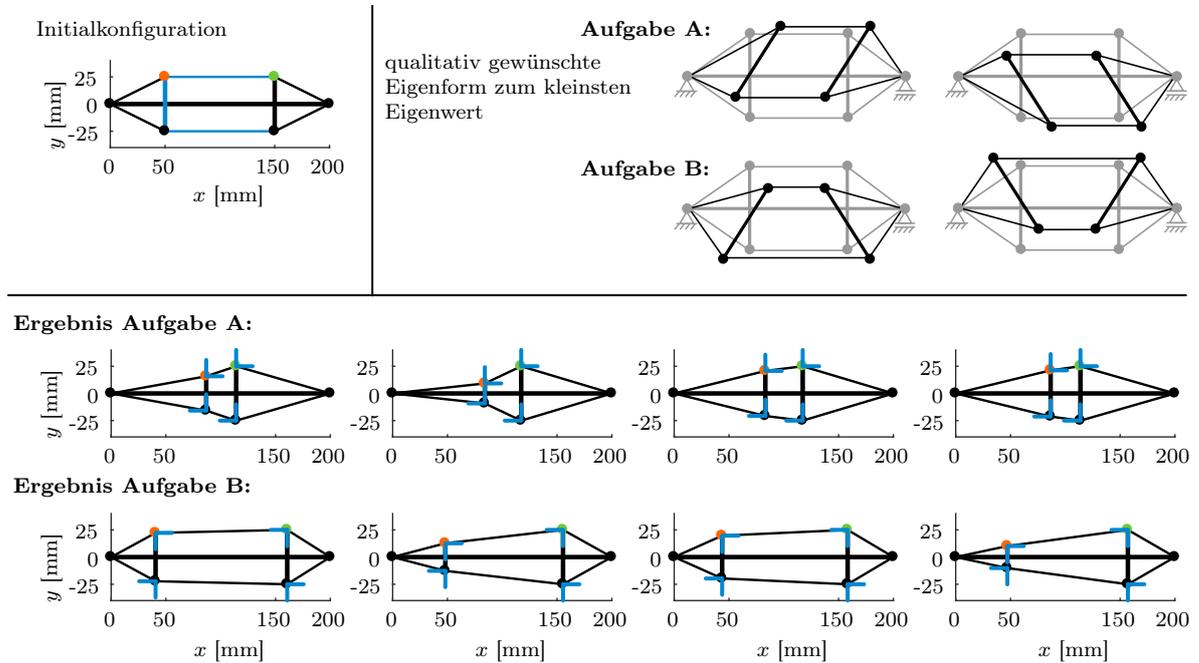


Abbildung 4.10: Oben links: Initialkonfiguration und Segmente, von denen Parameter bestimmt werden sollen. Oben rechts: Geforderte Eigenform der kleinsten Eigenfrequenz. Unten: Beste vier Individuen nach dem PGenFeFi-Algorithmus.

Der PGenFeFi-Algorithmus wird für beide Ziele, A und B, nacheinander ausgeführt. Die jeweils besten vier Individuen sind Abbildung 4.10 dargestellt. Dabei sind mit den blauen Linien qualitativ die Komponenten der betrachteten Eigenformen illustriert. Auch hier wurde nur unterschieden, ob die Komponente null, positiv oder negativ ist. An den Ergebnissen ist zu sehen, dass das entsprechende Ziel jeweils erfüllt wurde. Es wurden bei beiden Aufgabenstellungen mehrere unterschiedliche Lösungen gefunden. Dies zeigt einerseits, dass der PGenFeFi-Algorithmus in der Lage ist, das Optimierungsproblem zu lösen. Andererseits zeigt dieses Beispiel, dass durch Änderung von Segmentparametern eine Änderung der qualitativen Form der Eigenformen möglich ist. ┘

4.4 Schlussfolgerungen

In diesem Kapitel wurden mögliche Aufgabenstellungen für die Parameterfindung bei Tensegrity-Strukturen vorgestellt. Außerdem wurde ein Algorithmus entwickelt, mit welchem Segmentparameter der Tensegrity-Struktur entsprechend der formulierten Aufgabenstellungen bestimmt werden können. Im Anschluss wurde der vorgestellte Algorithmus anhand von mehreren Beispielen getestet. Dies hat gezeigt, dass der PGenFeFi-Algorithmus für die Parameterfindung geeignet ist. Alle formulierten Aufgabenstellungen konnten gelöst werden.

Neben den im ersten Abschnitt formulierten Aufgabenstellungen können ohne großen Aufwand weitere Aufgaben formuliert werden. Beispielsweise kann die Form der Gleichgewichtskonfigurationen durch den Flächeninhalt der konvexen Hülle charakterisiert werden. Dann könnte ein Ziel sein, die Segmentparameter so zu bestimmen, dass die Flächeninhalte in zwei Gleichgewichtskonfigurationen möglichst unterschiedlich sind. So könnten Tensegrity-Strukturen erhalten werden, deren Gleichgewichtskonfigurationen möglichst unterschiedlich sind. Auch die Lösung dieser Aufgabenstellung ist mit dem PGenFeFi-Algorithmus denkbar, nach Formulierung des entsprechenden Optimierungsproblems und Angabe der neuen Fitnessfunktion als Eingabeparameter.

Anwendung

In diesem Kapitel werden Anwendungsmöglichkeiten von Tensegrity-Strukturen in der Robotik untersucht. Dabei wird sich auf die Anwendung dieser Strukturen in der Greifertechnik fokussiert. Weitere Anwendungsmöglichkeiten von Tensegrity-Strukturen in der Robotik wurden bereits im Stand der Technik in Abschnitt 2.1 diskutiert. Dort wurde auch ein Überblick über Greifer und Manipulatoren, basierend auf Tensegrity-Strukturen, in der Literatur gegeben.

Es wird betrachtet, wie nachgiebige Tensegrity-Strukturen in Greifern eingesetzt werden können. Dafür werden verschiedene Topologien analysiert. Es wird untersucht, ob diese Strukturen zu einem Greifer modifiziert werden können. Wenn dies möglich ist, werden Funktionsmuster dieser Greifer gebaut und analysiert. Bei einem Funktionsmuster wird ein Antrieb integriert, um ein voll funktionstüchtiges Funktionsmuster zu erhalten. Vorbereitend für diese Untersuchungen werden im ersten Abschnitt die Bewegungsgleichungen für ausgewählte Tensegrity-Strukturen hergeleitet und analysiert.

Im Anschluss an die Vorstellung von möglichen Tensegrity-Greifern wird betrachtet, welche Einsatzgebiete es für Tensegrity-Greifer in der Technik geben könnte. Dabei wird insbesondere der Einsatz von Tensegrity-Greifern in der Medizin, beispielsweise der minimalinvasiven Chirurgie, untersucht.

5.1 Bewegungsgleichungen und dynamische Untersuchungen

Anwendungen können nur entwickelt werden, wenn das dynamische Verhalten der Tensegrity-Strukturen bekannt ist [Sul02]. Aus diesem Grund werden in diesem Abschnitt die Bewegungsgleichungen für drei Tensegrity-Strukturen hergeleitet. Mögliche Anwendungen werden in den darauffolgenden Abschnitten erläutert.

Die Bewegungsgleichungen von Tensegrity-Strukturen wurden unter anderem in [Mot86; Mur00a; Mur00b; Opp01a; Opp01b; Ske01b; Sul02; Tur07] betrachtet. In [Böh16a, Kapitel 4] wurden für eine ausgewählte Tensegrity-Struktur Langrange-Gleichungen 2. Art hergeleitet, allerdings wurden dort teilweise andere Annahmen getroffen als in dieser Arbeit. In [Sch17] wurden Bewegungsgleichungen mit Hilfe des Impuls- und Drehimpulssatzes und ausgewählten Annahmen hergeleitet. Meist werden in der Literatur nur Klasse 1 Tensegrity-Strukturen untersucht, welche sich frei in der Ebene beziehungsweise im Raum bewegen können.

Die Bewegungsgleichungen werden in Form der Lagrangeschen Gleichungen 2. Art mit der Lagrange-Funktion \mathcal{L} hergeleitet. Für die Lagrange-Funktion gilt

$$\mathcal{L} := T - U,$$

wobei T die kinetische Energie und U die potentielle Energie des Systems ist.

Die Segmente mit hoher Steifigkeit werden als starr angenommen, siehe Variante A) in Annahme 2.8. Somit kann die Lage einer Tensegrity-Struktur mittels ihrer Segmentkoordinaten (siehe Definition 2.10) definiert werden. Der Freiheitsgrad des Systems sei $\delta \in \mathbb{N}$. Außerdem werden, wie in Abschnitt 2.1.5, die Segmente mit geringer Steifigkeit als Federn mit linearer Federkennlinie angenommen. Zusätzlich zu den Vereinbarungen in Abschnitt 2.1.5 wird parallel zu jedem elastischen Segment ein linearer Dämpfer modelliert. Dabei sei D die Dissipationsfunktion des Systems. In diesem Kapitel werden mit q_a , $a = 1, \dots, \delta$ die generalisierten

Koordinaten und mit Q_a , $a = 1, \dots, \delta$ die generalisierten Kräfte, welche keine konservativen oder dissipativen Kräfte sind, bezeichnet. In diesem Abschnitt werden die Segmente mit hoher Steifigkeit als (starre) Stäbe und die Segmente mit geringer Steifigkeit als Federn bezeichnet.

Mit den beschriebenen Bezeichnungen lauten die Lagrangeschen Gleichungen 2. Art: [Her05, Kapitel 7.3.4]

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} = - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_a} + Q_a, \quad a = 1, \dots, \delta. \quad (5.1)$$

In diesem Abschnitt sind die Stäbe massebehaftete, homogene Zylinder. Wie in den vorherigen Abschnitten werden die Federn und die Dämpfer weiterhin als masselos angesehen. Die Schwerkraft sowie die Reibung zum Untergrund und in den Gelenken werden in diesen Betrachtungen aufgrund der hohen Vorspannung in den Tensegrity-Strukturen vernachlässigt.

5.1.1 Bewegungsgleichungen für Topologie C

In diesem Abschnitt werden die Bewegungsgleichungen für die Topologie C hergeleitet, [Sum17c; Sum17d]. Die Topologie mit den Bezeichnungen, der verwendeten Lagerung, dem globalen Koordinatensystem (Ursprung in Knoten ①) und den Segmentkoordinaten ist in Abbildung A.3 dargestellt. Zusätzlich zu diesen Bezeichnungen seien $m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{R}$ die Massen der Segmente 1, 2 und 3.

Mit der in Abbildung A.3 dargestellten Lagerung, und da die Segmente mit hoher Steifigkeit als starr angenommen werden, ist der Freiheitsgrad $\delta = 4$. Mit den freien Segmentkoordinaten $(x_4, y_4, \varphi_2, \varphi_3) \in \mathbb{R}^4$ (siehe Abbildung A.3) werden die generalisierten Koordinaten wie folgt definiert:

$$(q_1, q_2, q_3, q_4) := (x_4, y_4, \varphi_2, \varphi_3).$$

Die generalisierten Geschwindigkeiten werden mit \dot{q}_a , $a = 1, \dots, 4$ bezeichnet.

Entsprechend der Bezeichnungen in Abbildung A.3 seien die folgenden Größen gegeben:

- Längen der Stäbe: $l_1, l_2, l_3 \in \mathbb{R}$,
- Masse der Stäbe: $m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{R}$,
- Steifigkeiten der Federn: $k_4, k_5, \dots, k_9 \in \mathbb{R}$,
- Längen der Federn: $\|L_4\|_2, \|L_5\|_2, \dots, \|L_9\|_2 \in \mathbb{R}$ wobei $L_4, L_5, \dots, L_9 \in \mathbb{R}^2$ die Segmentvektoren (siehe Definition 2.9) der elastischen Segmente seien,
- Anfangslängen der Federn: $l_{04}, l_{05}, \dots, l_{09} \in \mathbb{R}$ mit $l_{0i} > 0, i = 4, \dots, 9$,
- Dämpfungskonstanten: $d_4, d_5, \dots, d_9 \in \mathbb{R}$.

In den folgenden drei Abschnitten werden nacheinander die Komponenten der Lagrangeschen Gleichung (5.1) - die potentielle Energie, die kinetische Energie und die Dämpfung - betrachtet.

Potentielle Energie: Die potentielle Energie $U \in \mathbb{R}$ der Tensegrity-Struktur ist die Summe der inneren Energien aller Federn [Sza63, Kap. IV, §23]:

$$U := \frac{1}{2} \sum_{f=4}^9 k_f (\|L_f\|_2 - l_{0f})^2. \quad (5.2)$$

Die partielle Ableitung der potentiellen Energie nach den generalisierten Koordinaten q_a , $a = 1, \dots, 4$ ergibt:

$$\frac{\partial U}{\partial q_a} = \sum_{f=4}^9 \left(k_f (\|L_f\|_2 - l_{0f}) \cdot \frac{\partial \|L_f\|_2}{\partial q_a} \right). \quad (5.3)$$

Es kann, ohne Beschränkung der Allgemeinheit, $\|L_f\|_2 \neq 0$ angenommen werden, denn die Anfangslängen der Federn l_{0f} , $f = 4, \dots, 9$ sind größer Null und die Federn (Segmente mit geringer Steifigkeit) sollen in den Gleichgewichtskonfigurationen nur auf Zug beansprucht sein und können deshalb nicht kürzer als deren Anfangslänge werden. Es kann also die Ableitung der Federlängen nach den generalisierten Koordinaten mit

$$\frac{\partial \|L_f\|_2}{\partial q_a} = \frac{\left(\frac{\partial L_f}{\partial q_a} \right)^\top L_f}{\|L_f\|_2}$$

berechnet werden. Um die Segmentvektoren der Federn L_f zu bestimmen, werden zunächst die Ortsvektoren $r_{\textcircled{i}} \in \mathbb{R}^2$, $i = 1, \dots, 5$ im globalen Koordinatensystem zu den Knoten der Struktur berechnet:

$$\begin{aligned} r_{\textcircled{1}} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & r_{\textcircled{2}} &= \begin{pmatrix} l_1 \\ 0 \end{pmatrix} & r_{\textcircled{3}} &= \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \end{pmatrix} + l_2 \begin{pmatrix} \cos(\varphi_2) \\ \sin(\varphi_2) \end{pmatrix} \\ & & r_{\textcircled{4}} &= \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \end{pmatrix} & r_{\textcircled{5}} &= \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \end{pmatrix} + l_3 \begin{pmatrix} \cos(\varphi_3) \\ \sin(\varphi_3) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Daraus können die Segmentvektoren der Federn bestimmt werden:

$$\begin{aligned} L_4 &= r_{\textcircled{3}} - r_{\textcircled{1}} = (x_4, y_4)^\top + l_2 (\cos(\varphi_2), \sin(\varphi_2))^\top, \\ L_5 &= r_{\textcircled{3}} - r_{\textcircled{2}} = (x_4 - l_1, y_4)^\top + l_2 (\cos(\varphi_2), \sin(\varphi_2))^\top, \\ L_6 &= r_{\textcircled{5}} - r_{\textcircled{2}} = (x_4 - l_1, y_4)^\top + l_3 (\cos(\varphi_3), \sin(\varphi_3))^\top, \\ L_7 &= r_{\textcircled{5}} - r_{\textcircled{1}} = (x_4, y_4)^\top + l_3 (\cos(\varphi_3), \sin(\varphi_3))^\top, \\ L_8 &= r_{\textcircled{4}} - r_{\textcircled{1}} = (x_4, y_4)^\top, \\ L_9 &= r_{\textcircled{4}} - r_{\textcircled{2}} = (x_4 - l_1, y_4)^\top. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Die partiellen Ableitungen der Segmentvektoren nach den einzelnen Koordinaten lauten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_i}{\partial x_4} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{für } i \in \{4, \dots, 9\} \\ \frac{\partial L_i}{\partial y_4} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{für } i \in \{4, \dots, 9\} \\ \frac{\partial L_4}{\partial \varphi_2} &= \frac{\partial L_5}{\partial \varphi_2} = l_2 \begin{pmatrix} -\sin(\varphi_2) \\ \cos(\varphi_2) \end{pmatrix}, & \frac{\partial L_i}{\partial \varphi_2} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{für } i \in \{6, 7, 8, 9\} \\ \frac{\partial L_6}{\partial \varphi_3} &= \frac{\partial L_7}{\partial \varphi_3} = l_3 \begin{pmatrix} -\sin(\varphi_3) \\ \cos(\varphi_3) \end{pmatrix}, & \frac{\partial L_i}{\partial \varphi_3} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{für } i \in \{4, 5, 8, 9\}. \end{aligned}$$

Damit sind alle Terme bestimmt, um die potentielle Energie U (5.2) und deren Ableitung nach den generalisierten Koordinaten (5.3) zu berechnen.

Die Ableitungen der potentiellen Energie nach den generalisierten Geschwindigkeiten verschwinden.

Kinetische Energie: Die kinetische Energie $T \in \mathbb{R}$ der Tensegrity-Struktur setzt sich aus der kinetischen Energie der Stäbe 2 und 3 zusammen (Stab 1 ist aufgrund der Lagerung unbeweglich).

Die kinetische Energie setzt sich im Allgemeinen aus drei Teilen zusammen: Translationsenergie, Rotationsenergie und Mischenergie. Wenn als Bezugspunkt für die kinetische Energie eines Stabes der Schwerpunkt gewählt wird, dann ist die Mischenergie gleich Null [Hah90, Kap. 6.2.6].

Die Translationsenergie berechnet sich wie folgt:

$$T_{Trans} = \frac{1}{2}m_2 \dot{r}_2^\top \dot{r}_2 + \frac{1}{2}m_3 \dot{r}_3^\top \dot{r}_3, \quad (5.5)$$

dabei sind $r_2 \in \mathbb{R}^2$ und $r_3 \in \mathbb{R}^2$ die Ortsvektoren zu den Schwerpunkten der beiden Stäbe 2 und 3.

Die Rotationsenergie berechnet sich mit den Massenträgheitsmomenten $J_{zz,2} \in \mathbb{R}$ und $J_{zz,3} \in \mathbb{R}$ der Stäbe bezüglich deren jeweiligen Schwerpunkt und den Winkelgeschwindigkeiten ω_2, ω_3 der Stäbe. Die Rotation der Stäbe ist durch φ_2 und φ_3 im Knoten ④ gegeben. Aufgrund der ebenen Drehungen gilt: $\omega_2 = \dot{\varphi}_2$, $\omega_3 = \dot{\varphi}_3$. Für die Rotationsenergie gilt somit:

$$T_{Rot} = \frac{1}{2}J_{zz,2} \dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2}J_{zz,3} \dot{\varphi}_3^2. \quad (5.6)$$

Aus Translationsenergie (5.5) und Rotationsenergie (5.6) ergibt sich für die kinetische Energie T :

$$T = T_{Trans} + T_{Rot} = \frac{1}{2}m_2 \dot{r}_2^\top \dot{r}_2 + \frac{1}{2}m_3 \dot{r}_3^\top \dot{r}_3 + \frac{1}{2}J_{zz,2} \dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2}J_{zz,3} \dot{\varphi}_3^2. \quad (5.7)$$

Um die kinetische Energie und deren Ableitungen zu berechnen, werden zunächst die Massenträgheitsmomente bestimmt. Die Stäbe werden als schlank angenommen (das heißt der Durchmesser ist viel kleiner als die Länge der Stäbe [Hah90, Kap. 6.1.3]). Dann gilt für die Massenträgheitsmomente der Stäbe

$$J_{zz,2} = \frac{1}{12}m_2 l_2^2 \quad J_{zz,3} = \frac{1}{12}m_3 l_3^2. \quad (5.8)$$

Die Ableitungen der kinetischen Energie (5.7) für die Lagrangeschen Gleichungen 2. Art (5.1) ergeben sich mit (5.8) zu ($a = 1, \dots, 4$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_a} &= m_2 \dot{r}_2^\top \left(\frac{\partial \dot{r}_2}{\partial \dot{q}_a} \right) + m_3 \dot{r}_3^\top \left(\frac{\partial \dot{r}_3}{\partial \dot{q}_a} \right) + J_{zz,2} \dot{\varphi}_2 \left(\frac{\partial \dot{\varphi}_2}{\partial \dot{q}_a} \right) + J_{zz,3} \dot{\varphi}_3 \left(\frac{\partial \dot{\varphi}_3}{\partial \dot{q}_a} \right) \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_a} &= m_2 \ddot{r}_2^\top \left(\frac{\partial \dot{r}_2}{\partial \dot{q}_a} \right) + m_2 \dot{r}_2^\top \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{r}_2}{\partial \dot{q}_a} \right) + m_3 \ddot{r}_3^\top \left(\frac{\partial \dot{r}_3}{\partial \dot{q}_a} \right) + m_3 \dot{r}_3^\top \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{r}_3}{\partial \dot{q}_a} \right) + \\ &\quad J_{zz,2} \ddot{\varphi}_2 \left(\frac{\partial \dot{\varphi}_2}{\partial \dot{q}_a} \right) + J_{zz,3} \ddot{\varphi}_3 \left(\frac{\partial \dot{\varphi}_3}{\partial \dot{q}_a} \right) \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_a} = m_2 \dot{r}_2^\top \left(\frac{\partial \dot{r}_2}{\partial q_a} \right) + m_3 \dot{r}_3^\top \left(\frac{\partial \dot{r}_3}{\partial q_a} \right). \quad (5.10)$$

Die Vektoren zu den Schwerpunkten der Stäbe 2 und 3 ($r_2, r_3 \in \mathbb{R}^2$) mittels der generalisierten Koordinaten haben die Form:

$$\begin{aligned} r_2 &= r_{\textcircled{4}} + \frac{1}{2}(r_{\textcircled{3}} - r_{\textcircled{4}}) = \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}l_2 \begin{pmatrix} \cos(\varphi_2) \\ \sin(\varphi_2) \end{pmatrix}, \\ r_3 &= r_{\textcircled{4}} + \frac{1}{2}(r_{\textcircled{5}} - r_{\textcircled{4}}) = \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}l_3 \begin{pmatrix} \cos(\varphi_3) \\ \sin(\varphi_3) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Die Ableitungen nach der Zeit von (5.11) lauten:

$$\begin{aligned} \dot{r}_2 &= \begin{pmatrix} \dot{x}_4 \\ \dot{y}_4 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}l_2 \begin{pmatrix} -\sin(\varphi_2)\dot{\varphi}_2 \\ \cos(\varphi_2)\dot{\varphi}_2 \end{pmatrix} & \ddot{r}_2 &= \begin{pmatrix} \ddot{x}_4 \\ \ddot{y}_4 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}l_2 \begin{pmatrix} \cos(\varphi_2)\dot{\varphi}_2^2 + \sin(\varphi_2)\ddot{\varphi}_2 \\ \sin(\varphi_2)\dot{\varphi}_2^2 - \cos(\varphi_2)\ddot{\varphi}_2 \end{pmatrix} \\ \dot{r}_3 &= \begin{pmatrix} \dot{x}_4 \\ \dot{y}_4 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}l_3 \begin{pmatrix} -\sin(\varphi_3)\dot{\varphi}_3 \\ \cos(\varphi_3)\dot{\varphi}_3 \end{pmatrix} & \ddot{r}_3 &= \begin{pmatrix} \ddot{x}_4 \\ \ddot{y}_4 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}l_3 \begin{pmatrix} \cos(\varphi_3)\dot{\varphi}_3^2 + \sin(\varphi_3)\ddot{\varphi}_3 \\ \sin(\varphi_3)\dot{\varphi}_3^2 - \cos(\varphi_3)\ddot{\varphi}_3 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Die Ableitungen der Geschwindigkeitsvektoren von (5.12) nach den generalisierten Geschwindigkeiten ergeben sich zu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{x}_4} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{y}_4} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{für } i \in \{2, 3\} \\ \frac{\partial \dot{r}_2}{\partial \dot{\varphi}_2} &= \frac{1}{2}l_2 \begin{pmatrix} -\sin(\varphi_2) \\ \cos(\varphi_2) \end{pmatrix} & \frac{\partial \dot{r}_3}{\partial \dot{\varphi}_2} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{\partial \dot{r}_2}{\partial \dot{\varphi}_3} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \frac{\partial \dot{r}_3}{\partial \dot{\varphi}_3} &= \frac{1}{2}l_3 \begin{pmatrix} -\sin(\varphi_3) \\ \cos(\varphi_3) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Zur Berechnung von (5.9) kann nun (5.8), (5.12) und (5.13) verwendet werden und es ergeben sich die folgenden Ausdrücke:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_4} &= m_2 \left(\ddot{x}_4 - \frac{1}{2}l_2(\cos(\varphi_2)\dot{\varphi}_2^2 + \sin(\varphi_2)\ddot{\varphi}_2) + m_2 \cdot 0 + \right. \\ &\quad \left. m_3 \left(\ddot{x}_4 - \frac{1}{2}l_3(\cos(\varphi_3)\dot{\varphi}_3^2 + \sin(\varphi_3)\ddot{\varphi}_3) + m_3 \cdot 0 + J_{zz,2} \cdot 0 + J_{zz,3} \cdot 0 \right) \right. \\ &= (m_2 + m_3)\ddot{x}_4 - \frac{1}{2}m_2l_2 \cos(\varphi_2)\dot{\varphi}_2^2 - \frac{1}{2}m_2l_2 \sin(\varphi_2)\ddot{\varphi}_2 - \\ &\quad \left. \frac{1}{2}m_3l_3 \cos(\varphi_3)\dot{\varphi}_3^2 - \frac{1}{2}m_3l_3 \sin(\varphi_3)\ddot{\varphi}_3 \right. \end{aligned} \quad (5.14a)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_4} &= (m_2 + m_3)\ddot{y}_4 - \frac{1}{2}m_2l_2 \sin(\varphi_2)\dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2}m_2l_2 \cos(\varphi_2)\ddot{\varphi}_2 - \\ &\quad \frac{1}{2}m_3l_3 \sin(\varphi_3)\dot{\varphi}_3^2 + \frac{1}{2}m_3l_3 \cos(\varphi_3)\ddot{\varphi}_3 \end{aligned} \quad (5.14b)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} &= m_2 \left[- \left(\ddot{x}_4 - \frac{1}{2}l_2(\cos(\varphi_2)\dot{\varphi}_2^2 + \sin(\varphi_2)\ddot{\varphi}_2) \right) \frac{1}{2}l_2 \sin(\varphi_2) + \right. \\ &\quad \left. \left(\ddot{y}_4 - \frac{1}{2}l_2(\sin(\varphi_2)\dot{\varphi}_2^2 - \cos(\varphi_2)\ddot{\varphi}_2) \right) \frac{1}{2}l_2 \cos(\varphi_2) \right] + \\ &\quad m_2 \left[- \left(\dot{x}_4 - \frac{1}{2}l_2 \sin(\varphi_2)\dot{\varphi}_2 \right) \frac{1}{2}l_2 \cos(\varphi_2)\dot{\varphi}_2 - \right. \\ &\quad \left. \left(\dot{y}_4 + \frac{1}{2}l_2 \cos(\varphi_2)\dot{\varphi}_2 \right) \frac{1}{2}l_2 \sin(\varphi_2)\dot{\varphi}_2 \right] + m_3 \cdot 0 + J_{zz,2}\ddot{\varphi}_2 + J_{zz,3} \cdot 0 \\ &= \frac{1}{2}m_2l_2 \left(-\sin(\varphi_2)\ddot{x}_4 + \cos(\varphi_2)\ddot{y}_4 \right) - \frac{1}{2}m_2l_2\dot{\varphi}_2 \left(\cos(\varphi_2)\dot{x}_4 + \sin(\varphi_2)\dot{y}_4 \right) + \\ &\quad \frac{1}{3}m_2l_2^2\ddot{\varphi}_2 \end{aligned} \quad (5.14c)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_3} &= \frac{1}{2}m_3l_3 \left(-\sin(\varphi_3)\ddot{x}_4 + \cos(\varphi_3)\ddot{y}_4 \right) - \frac{1}{2}m_3l_3\dot{\varphi}_3 \left(\cos(\varphi_3)\dot{x}_4 + \sin(\varphi_3)\dot{y}_4 \right) + \\ &\quad \frac{1}{3}m_3l_3^2\ddot{\varphi}_3. \end{aligned} \quad (5.14d)$$

Weiterhin ergeben sich die Ableitungen der Geschwindigkeitsvektoren von (5.12) nach den generalisierten Koordinaten zu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{x}_4} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{y}_4} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{für } i \in \{2, 3\} \\ \frac{\partial \dot{r}_2}{\partial \dot{\varphi}_2} &= -\frac{1}{2}l_2 \begin{pmatrix} \cos(\varphi_2)\dot{\varphi}_2 \\ \sin(\varphi_2)\dot{\varphi}_2 \end{pmatrix} & \frac{\partial \dot{r}_3}{\partial \dot{\varphi}_2} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{\partial \dot{r}_2}{\partial \dot{\varphi}_3} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \frac{\partial \dot{r}_3}{\partial \dot{\varphi}_3} &= -\frac{1}{2}l_3 \begin{pmatrix} \cos(\varphi_3)\dot{\varphi}_3 \\ \sin(\varphi_3)\dot{\varphi}_3 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Mit Hilfe von (5.12) und (5.15) kann auch (5.10) berechnet werden:

$$\frac{\partial T}{\partial x_4} = 0 \quad (5.16a)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y_4} = 0 \quad (5.16b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \varphi_2} &= m_2 \left[-\left(x_4 - \frac{1}{2}l_2 \sin(\varphi_2)\dot{\varphi}_2\right) \frac{1}{2}l_2 \cos(\varphi_2)\dot{\varphi}_2 - \left(y_4 + \frac{1}{2}l_2 \cos(\varphi_2)\dot{\varphi}_2\right) \frac{1}{2}l_2 \sin(\varphi_2)\dot{\varphi}_2 \right] \\ &= -\frac{1}{2}m_2 l_2 \dot{\varphi}_2 (\cos(\varphi_2)x_4 + \sin(\varphi_2)y_4) \end{aligned} \quad (5.16c)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \varphi_3} &= m_3 \left[-\left(x_4 - \frac{1}{2}l_3 \sin(\varphi_3)\dot{\varphi}_3\right) \frac{1}{2}l_3 \cos(\varphi_3)\dot{\varphi}_3 - \left(y_4 + \frac{1}{2}l_3 \cos(\varphi_3)\dot{\varphi}_3\right) \frac{1}{2}l_3 \sin(\varphi_3)\dot{\varphi}_3 \right] \\ &= -\frac{1}{2}m_3 l_3 \dot{\varphi}_3 (\cos(\varphi_3)x_4 + \sin(\varphi_3)y_4). \end{aligned} \quad (5.16d)$$

Somit sind mit (5.14) und (5.16) alle Ableitungen der kinetischen Energie für die Lagrangeschen Gleichungen 2. Art bestimmt.

Dissipationsfunktion: Wie oben beschrieben, wird parallel zu jeder Feder ein Dämpfer modelliert. Es werden Dämpfer eingesetzt, welche linear abhängig (Dämpfungskonstanten $d_i \in \mathbb{R}$, $i = 4, \dots, 9$) von der Geschwindigkeit der Längenänderung der Dämpfer ($\dot{r}_{\text{proj}_i} \in \mathbb{R}^2$, $i = 4, \dots, 9$) sind (Stokesche Reibung), [Hah90, Kap. 7.2.1].

Die Bezeichnungen der folgenden Herleitung können in Abbildung 5.1 nachvollzogen werden.

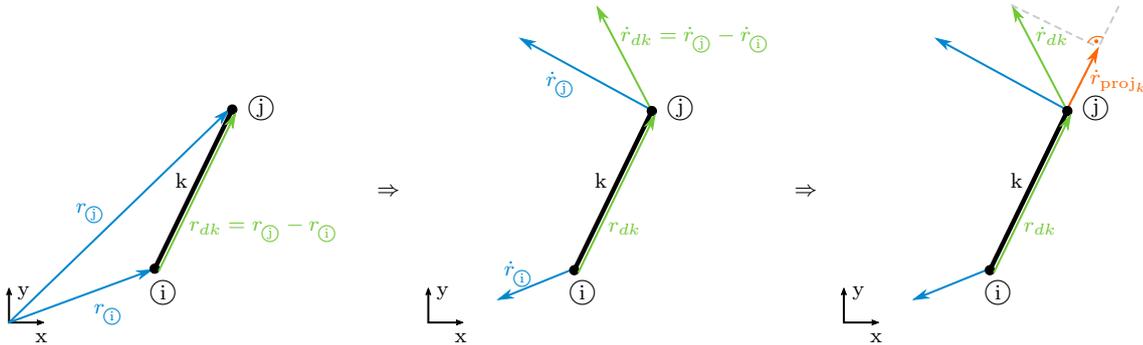


Abbildung 5.1: Bezeichnungen für die Berechnung der Dämpfung.

Die Dissipationsfunktion $D_i \in \mathbb{R}$ für einen Dämpfer berechnet sich mit:

$$D_i = \frac{1}{2}d_i \left(\dot{r}_{\text{proj}_i}^\top \dot{r}_{\text{proj}_i} \right). \quad (5.17)$$

Um die projizierten Geschwindigkeitsvektoren \dot{r}_{proj_i} zu berechnen, werden zunächst die Segmentvektoren der Dämpfer $r_{di} \in \mathbb{R}^2$ und deren Ableitungen $\dot{r}_{di} \in \mathbb{R}^2$, $i = 4, \dots, 9$ bestimmt. In diesem Fall stimmen die Segmentvektoren der Dämpfer und der Federn (5.4) überein, da die Dämpfer parallel zu den Federn modelliert werden.

$$\begin{aligned} r_{di} &= L_i, \quad i \in \{4, \dots, 9\} \\ \dot{r}_{d4} &= (\dot{x}_4, \dot{y}_4)^\top + l_2 (-\sin(\varphi_2)\dot{\varphi}_2, \cos(\varphi_2)\dot{\varphi}_2)^\top \\ \dot{r}_{d5} &= (\dot{x}_4, \dot{y}_4)^\top + l_2 (-\sin(\varphi_2)\dot{\varphi}_2, \cos(\varphi_2)\dot{\varphi}_2)^\top \\ \dot{r}_{d6} &= (\dot{x}_4, \dot{y}_4)^\top + l_3 (-\sin(\varphi_3)\dot{\varphi}_3, \cos(\varphi_3)\dot{\varphi}_3)^\top \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{r}_{d7} &= (\dot{x}_4, \dot{y}_4)^\top + l_3(-\sin(\varphi_3)\dot{\varphi}_3, \cos(\varphi_3)\dot{\varphi}_3)^\top \\ \dot{r}_{d8} &= (\dot{x}_4, \dot{y}_4)^\top \\ \dot{r}_{d9} &= (\dot{x}_4, \dot{y}_4)^\top\end{aligned}$$

Die Projektion \dot{r}_{proj_i} der Geschwindigkeitsvektoren \dot{r}_{di} auf die Richtungsvektoren r_{di} der Dämpfer kann wie folgt berechnet werden:

$$\dot{r}_{\text{proj}_i} = \frac{r_{di}^\top \dot{r}_{di}}{\|r_{di}\|_2^2} r_{di}, \quad \text{für } i \in \{4, 5, \dots, 9\}. \quad (5.18)$$

Gleichung (5.18) wird in (5.17) eingesetzt und nach einer Zusammenfassung der Skalare ergibt sich für die Dissipationsfunktion:

$$D_i = \frac{d_i}{2\|r_{di}\|_2^4} (r_{di}^\top \dot{r}_{di})^2 (r_{di}^\top r_{di}), \quad \text{für } i \in \{4, 5, \dots, 9\}. \quad (5.19)$$

Für die Lagrangeschen Gleichungen 2. Art (5.1) werden Ableitungen der Dissipationsfunktion (5.19) nach den generalisierten Geschwindigkeiten \dot{q}_a , $a = 1, \dots, 4$ benötigt:

$$\frac{\partial D_i}{\partial \dot{q}_a} = \frac{d_i}{\|r_{di}\|_2^4} (r_{di}^\top \dot{r}_{di}) \left(r_{di}^\top \frac{\partial \dot{r}_{di}}{\partial \dot{q}_a} \right) (r_{di}^\top r_{di}), \quad \text{für } i \in \{4, 5, \dots, 9\}. \quad (5.20)$$

Da die Dissipationsfunktion für die Tensegrity-Struktur die Summe der einzelnen Dissipationsfunktionen ist, ergibt sich mit (5.20) für die Dissipationsfunktion in den Lagrangeschen Gleichungen 2. Art (5.1) für die hier betrachtete Topologie C:

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_a} = \sum_{i=4}^9 \frac{d_i}{\|r_{di}\|_2^4} (r_{di}^\top \dot{r}_{di}) \left(r_{di}^\top \frac{\partial \dot{r}_{di}}{\partial \dot{q}_a} \right) (r_{di}^\top r_{di}). \quad (5.21)$$

Um (5.21) zu berechnen, werden noch die Ableitungen der Geschwindigkeitsvektoren \dot{r}_{di} nach den generalisierten Geschwindigkeiten benötigt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \dot{r}_{di}}{\partial \dot{x}_4} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad i \in \{4, \dots, 9\} & \frac{\partial \dot{r}_{di}}{\partial \dot{y}_4} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad i \in \{4, \dots, 9\} \\ \frac{\partial \dot{r}_{di}}{\partial \dot{\varphi}_2} &= l_2 \begin{pmatrix} -\sin(\varphi_2) \\ \cos(\varphi_2) \end{pmatrix}, \quad i \in \{4, 5\} & \frac{\partial \dot{r}_{di}}{\partial \dot{\varphi}_2} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad i \in \{6, 7, 8, 9\} \\ \frac{\partial \dot{r}_{di}}{\partial \dot{\varphi}_3} &= l_3 \begin{pmatrix} -\sin(\varphi_3) \\ \cos(\varphi_3) \end{pmatrix}, \quad i \in \{6, 7\} & \frac{\partial \dot{r}_{di}}{\partial \dot{\varphi}_3} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad i \in \{4, 5, 8, 9\}.\end{aligned}$$

Lagrangische Gleichungen 2. Art: Mit (5.14), (5.16), (5.3) und (5.21) sind alle Informationen vorhanden, um die Lagrangischen Gleichungen 2. Art (5.1) zu berechnen.

$$\begin{aligned}
 x_4 : & -\frac{1}{2}m_2 l_2 \cos(\varphi_2)\dot{\varphi}_2^2 - \frac{1}{2}m_2 l_2 \sin(\varphi_2)\ddot{\varphi}_2 + (m_2 + m_3)\ddot{x}_4 - \frac{1}{2}m_3 l_3 \cos(\varphi_3)\dot{\varphi}_3^2 - \\
 & \frac{1}{2}m_3 l_3 \sin(\varphi_3)\ddot{\varphi}_3 + \frac{\partial U}{\partial x_4} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}_4} + Q_{x_4} \\
 y_4 : & -\frac{1}{2}m_2 l_2 \sin(\varphi_2)\dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2}m_2 l_2 \cos(\varphi_2)\ddot{\varphi}_2 + (m_2 + m_3)\ddot{y}_4 - \frac{1}{2}m_3 l_3 \sin(\varphi_3)\dot{\varphi}_3^2 + \\
 & \frac{1}{2}m_3 l_3 \cos(\varphi_3)\ddot{\varphi}_3 + \frac{\partial U}{\partial y_4} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{y}_4} + Q_{y_4} \\
 \varphi_2 : & \frac{1}{3}m_2 l_2^2 \ddot{\varphi}_2 + \frac{1}{2}m_2 l_2 \cos(\varphi_2)\ddot{y}_4 - \frac{1}{2}m_2 l_2 \sin(\varphi_2)\ddot{x}_4 + \frac{\partial U}{\partial \varphi_2} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{\varphi}_2} + Q_{\varphi_2} \\
 \varphi_3 : & \frac{1}{3}m_3 l_3^2 \ddot{\varphi}_3 + \frac{1}{2}m_3 l_3 \cos(\varphi_3)\ddot{y}_4 - \frac{1}{2}m_3 l_3 \sin(\varphi_3)\ddot{x}_4 + \frac{\partial U}{\partial \varphi_3} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{\varphi}_3} + Q_{\varphi_3}
 \end{aligned}$$

Diese vier Differentialgleichungen bilden ein implizites, gekoppeltes, nichtlineares Differentialgleichungssystem 2. Ordnung. Es kann auch in der folgenden Form geschrieben werden:

$$M \begin{pmatrix} \ddot{x}_4 \\ \ddot{y}_4 \\ \ddot{\varphi}_2 \\ \ddot{\varphi}_3 \end{pmatrix} = b,$$

$$\text{mit } M := \begin{pmatrix} m_2 + m_3 & 0 & -\frac{1}{2}m_2 l_2 \sin(\varphi_2) & -\frac{1}{2}m_3 l_3 \sin(\varphi_3) \\ 0 & m_2 + m_3 & \frac{1}{2}m_2 l_2 \cos(\varphi_2) & \frac{1}{2}m_3 l_3 \cos(\varphi_3) \\ -\frac{1}{2}m_2 l_2 \sin(\varphi_2) & \frac{1}{2}m_2 l_2 \cos(\varphi_2) & \frac{1}{3}m_2 l_2^2 & 0 \\ -\frac{1}{2}m_3 l_3 \sin(\varphi_3) & \frac{1}{2}m_3 l_3 \cos(\varphi_3) & 0 & \frac{1}{3}m_3 l_3^2 \end{pmatrix},$$

$$b := \begin{pmatrix} \frac{1}{2}m_2 l_2 \cos(\varphi_2)\dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2}m_3 l_3 \cos(\varphi_3)\dot{\varphi}_3^2 - \partial U/\partial x_4 - \partial D/\partial \dot{x}_4 + Q_{x_4} \\ \frac{1}{2}m_2 l_2 \sin(\varphi_2)\dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2}m_3 l_3 \sin(\varphi_3)\dot{\varphi}_3^2 - \partial U/\partial y_4 - \partial D/\partial \dot{y}_4 + Q_{y_4} \\ -\partial U/\partial \varphi_2 - \partial D/\partial \dot{\varphi}_2 + Q_{\varphi_2} \\ -\partial U/\partial \varphi_3 - \partial D/\partial \dot{\varphi}_3 + Q_{\varphi_3} \end{pmatrix}.$$

Sofern die Matrix M invertierbar ist, kann das implizite Differentialgleichungssystem in ein explizites Differentialgleichungssystem umgeformt werden.

Lemma 5.1. Die Matrix M ist invertierbar.

Beweis. Eine quadratische Matrix ist genau dann invertierbar, wenn ihre Determinante ungleich Null ist. Die Determinante von der Matrix M lautet

$$\det(M) = \frac{3}{4}m_2 m_3 l_2^2 l_3^2 \underbrace{(2(2m_2 + 2m_3))^2}_{>0} + 9m_2 m_3 \underbrace{(1 - \cos(2\varphi_2 - 2\varphi_3))}_{\in[-1,1]} \underbrace{\geq 0}_{\geq 0}.$$

Da außerdem für alle Konstanten $m_2, m_3, l_2, l_3 > 0$ gilt, ist $\det(M) > 0$, und somit $\det(M) \neq 0$. Daraus folgt die Invertierbarkeit der Matrix M . \square

Nun kann das Differentialgleichungssystem mit der Inversen der Matrix M (mit M^{-1} bezeichnet) nach den zweiten Ableitungen der Koordinaten umgestellt werden.

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_4 \\ \ddot{y}_4 \\ \ddot{\varphi}_2 \\ \ddot{\varphi}_3 \end{pmatrix} = M^{-1}b. \quad (5.22)$$

Somit ist es ein explizites, gekoppeltes, nichtlineares Differentialgleichungssystem 2. Ordnung. Sofern die generalisierten Kräfte nicht von der Zeit abhängen ist es ein autonomes Differentialgleichungssystem.

Für die generalisierten Kräfte, die nicht über die potentielle Energie und die Dissipationsfunktion berechnet werden können, gilt (5.23):

$$Q_a = \sum_{k=1}^n F_k^\top \frac{\partial r_{Fk}}{\partial q_a}, \quad a = 1, \dots, \delta, \quad (5.23)$$

wobei $F_k \in \mathbb{R}^2$, $k = 1, \dots, n$ äußere Kräfte seien, die an der Tensegrity-Struktur angreifen, und $r_{Fk} \in \mathbb{R}^2$ der jeweilige Vektor zum Angriffspunkt der Kraft sei, [Her05, Kapitel 7.3.4].

Durch die Substitution $(q_1, q_2, q_3, q_4) = (x_4, y_4, \varphi_2, \varphi_3)$ und $(q_5, q_6, q_7, q_8) := (\dot{x}_4, \dot{y}_4, \dot{\varphi}_2, \dot{\varphi}_3)$ kann (5.22) in ein explizites, gekoppeltes, nichtlineares Differentialgleichungssystem 1. Ordnung umgewandelt werden.

5.1.2 Bewegungsgleichungen für Topologie E

In diesem Abschnitt werden die Bewegungsgleichungen für Topologie E angegeben. Die Topologie mit den Bezeichnungen, der verwendeten Lagerung, dem globalen Koordinatensystem (in Knoten ①) und den Segmentkoordinaten ist in Abbildung A.6 dargestellt. Zusätzlich zu diesen Bezeichnungen seien $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$ die Massen der Segmente 1 und 2.

Mit der in Abbildung A.6 dargestellten Lagerung, und da die Segmente mit hoher Steifigkeit als starr angenommen werden, ist der Freiheitsgrad $\delta = 3$. Mit den freien Segmentkoordinaten $(x_2, y_2, \varphi_2) \in \mathbb{R}^3$ (siehe Abbildung A.6) werden die generalisierten Koordinaten wie folgt definiert:

$$(q_1, q_2, q_3) := (x_2, y_2, \varphi_2).$$

Die generalisierten Geschwindigkeiten werden demnach mit \dot{q}_a , $a = 1, 2, 3$ bezeichnet.

Einzelne Schritte der Herleitung, sowie die Berechnung der potentiellen Energie U und der Dissipationsfunktion D befinden sich in im Anhang B.1. Die Bewegungsgleichungen für Topologie E lauten:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_2 &= \frac{1}{m_2} \left(-\frac{\partial U}{\partial x_2} - \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_2} + Q_{x_2} \right) \\ \ddot{y}_2 &= \frac{1}{m_2} \left(-\frac{\partial U}{\partial y_2} - \frac{\partial D}{\partial \dot{y}_2} + Q_{y_2} \right) \\ \ddot{\varphi}_2 &= \frac{12}{m_2 l_2^2} \left(-\frac{\partial U}{\partial \varphi_2} - \frac{\partial D}{\partial \dot{\varphi}_2} + Q_{\varphi_2} \right). \end{aligned} \quad (5.24)$$

Das Gleichungssystem (5.24) ist ein explizites, gekoppeltes, nichtlineares Differentialgleichungssystem 2. Ordnung. Sofern die generalisierten Kräfte Q_a , $a = 1, 2, 3$ nicht von der Zeit abhängen, ist es zusätzlich ein autonomes Differentialgleichungssystem. Die Berechnung der generalisierten Kräfte aus den äußeren Kräften ist in (5.23) angegeben.

5.1.3 Bewegungsgleichungen für Topologie D₂

In diesem Kapitel werden die Bewegungsgleichungen für Topologie D₂ angegeben. Die Topologie mit den Bezeichnungen, der verwendeten Lagerung, dem globalen Koordinatensystem (in Knoten ①) und den Segmentkoordinaten ist in Abbildung A.5 dargestellt. Zusätzlich zu diesen Bezeichnungen seien $m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{R}$ die Massen der Segmente 1, 2 und 3.

Mit der in Abbildung A.5 dargestellten Lagerung, und da die Segmente mit hoher Steifigkeit als starr angenommen werden, ist der Freiheitsgrad $\delta = 6$. Mit den freien Segmentkoordinaten $(x_2, y_2, \varphi_2, x_3, y_3, \varphi_3) \in \mathbb{R}^6$ (siehe Abbildung A.5) werden wie generalisierten Koordinaten wie folgt definiert:

$$(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6) := (x_2, y_2, \varphi_2, x_3, y_3, \varphi_3).$$

Die generalisierten Geschwindigkeiten werden demnach mit \dot{q}_a , $a = 1, \dots, 6$ bezeichnet.

Einzelne Schritte der Herleitung, sowie die Berechnung der potentiellen Energie U und der Dissipationsfunktion D befinden sich in Anhang B.2. Die Bewegungsgleichungen für Topologie D₂ lauten:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_2 &= \frac{1}{m_2} \left(-\frac{\partial U}{\partial x_2} - \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_2} + Q_{x_2} \right) & \ddot{x}_3 &= \frac{1}{m_3} \left(-\frac{\partial U}{\partial x_3} - \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_3} + Q_{x_3} \right) \\ \ddot{y}_2 &= \frac{1}{m_2} \left(-\frac{\partial U}{\partial y_2} - \frac{\partial D}{\partial \dot{y}_2} + Q_{y_2} \right) & \ddot{y}_3 &= \frac{1}{m_3} \left(-\frac{\partial U}{\partial y_3} - \frac{\partial D}{\partial \dot{y}_3} + Q_{y_3} \right) \\ \ddot{\varphi}_2 &= \frac{12}{m_2 l_2^2} \left(-\frac{\partial U}{\partial \varphi_2} - \frac{\partial D}{\partial \dot{\varphi}_2} + Q_{\varphi_2} \right) & \ddot{\varphi}_3 &= \frac{12}{m_3 l_2^2} \left(-\frac{\partial U}{\partial \varphi_3} - \frac{\partial D}{\partial \dot{\varphi}_3} + Q_{\varphi_3} \right). \end{aligned} \quad (5.25)$$

Das Gleichungssystem (5.25) ist ein explizites, gekoppeltes, nichtlineares Differentialgleichungssystem 2. Ordnung. Sofern die generalisierten Kräfte Q_a , $a = 1, \dots, 6$ nicht von der Zeit abhängen, ist es zusätzlich ein autonomes Differentialgleichungssystem. Die Berechnung der generalisierten Kräfte aus den äußeren Kräften ist in (5.23) angegeben.

5.1.4 Dynamische Untersuchungen

In diesem Abschnitt wird das dynamische Verhalten von Tensegrity-Strukturen mit Hilfe der Bewegungsgleichungen anhand von Beispielen untersucht. Konkrete Antriebsszenarien für Anwendungen als Greifer werden in den folgenden Abschnitten direkt bei den Greifern betrachtet.

Zum Lösen der Differentialgleichungen wird Matlab (Version 2016b) mit der Funktion `ode45` verwendet. Dabei wird die relative Fehlertoleranz auf `RelTol:= 10-8` und die absolute Fehlertoleranz auf `AbsTol:= 10-2` gesetzt. Die Schrittweite für die Zeit wird auf 0.1 ms gesetzt und die Dauer der Auswertung hinreichend groß, sodass die Struktur nach dieser Zeit nicht mehr schwingt.

Beispiel 5.2 (Topologie E und verschiedene Anfangsgeschwindigkeiten).

In diesem Beispiel wird das Phasenportrait $(\varphi_2, \dot{\varphi}_2)$ von Topologie E für verschiedene Anfangsbedingungen betrachtet. Die Bezeichnungen, die verwendeten Segmentparameter und die Lagerung sind in Abbildung A.6 dargestellt. Zusätzlich zu den dort angegebenen Parametern wird die Dämpfungskonstante bei allen Dämpfern auf $d_3 = \dots = d_6 := 0.0002$ Ns/mm gesetzt und die Masse der Stäbe auf $m_1 = m_2 := 50$ g.

Die Bewegungsgleichungen sind (5.24). Die generalisierten Kräfte Q_a , $a = 1, 2, 3$ sind Null, das heißt es existieren nur konservative und dissipative Kräfte.

Als Anfangsposition wird Gleichgewichtskonfiguration I verwendet:

$$(x_{2start}, y_{2start}, \varphi_{2start}) := (72.4626 \text{ mm}, -0.7093 \text{ mm}, 151.4786^\circ).$$

Die Anfangsgeschwindigkeit $\varphi_2(0)$ wird variiert, wohingegen die Anfangsgeschwindigkeiten der Position von Stab 2 (x_2, y_2) auf null gesetzt werden: $(\dot{x}_{2start}, \dot{y}_{2start}) := (0, 0)$ mm/s.

In Abbildung 5.2 ist oben das Phasenportrait $(\varphi_2, \dot{\varphi}_2)$ bei verschiedenen positiven Anfangsgeschwindigkeiten zu sehen. In diesem Phasenportrait sind die zwei stabilen Gleichgewichtskonfigurationen (grüner Punkt) zu erkennen und auch die instabile Gleichgewichtskonfiguration bei $\varphi_2 = 180^\circ$ (blauer Punkt).

Für drei verschiedene Anfangsgeschwindigkeiten wurde in der zweiten Zeile in Abbildung 5.2 die Bewegung der Knoten ③ und ④ Tensegrity-Struktur dargestellt.¹ Dabei steigt von hell nach dunkel die Zeit an. Grau ist die Anfangsposition und schwarz ist der eingeschwungene Zustand der Tensegrity-Struktur abgebildet. Es sind drei verschiedene Szenarien dargestellt:

- $\dot{\varphi}_{2start} = 20$ rad/s: Die Struktur schwingt nur um die Anfangsposition. Die eingeschwungene Position ist gleich der Anfangsposition.
- $\dot{\varphi}_{2start} = 40$ rad/s: Die Geschwindigkeit ist ausreichend groß, sodass die Struktur in die zweite Gleichgewichtskonfiguration wechselt.
- $\dot{\varphi}_{2start} = 60$ rad/s: Die Geschwindigkeit ist so groß, dass die Struktur erst in die zweite Gleichgewichtskonfiguration wechselt, aber dann wieder zurück in die erste Gleichgewichtskonfiguration schwingt, in der die Bewegung beendet wird.

Des Weiteren wurde das Verhalten der Tensegrity-Struktur bei einer negativen Anfangsgeschwindigkeit getestet. Die Ergebnisse sind in der untersten Zeile in Abbildung 5.2 dargestellt. Auch wenn die Geschwindigkeit zunächst in die andere Richtung wirkt, dreht sich der Stab für den Wechsel in die zweite Gleichgewichtskonfiguration ($\dot{\varphi}_{2start} = -70$ rad/s) in die gleiche Richtung, wie bei einer positiven Anfangsgeschwindigkeit. ┘

¹Zur Vereinfachung der Darstellung wurden in diesen Abbildungen die Federhalter nicht eingezeichnet. In der zugrundeliegenden Rechnung wurden diese allerdings, wie in (5.24) angegeben, berücksichtigt.

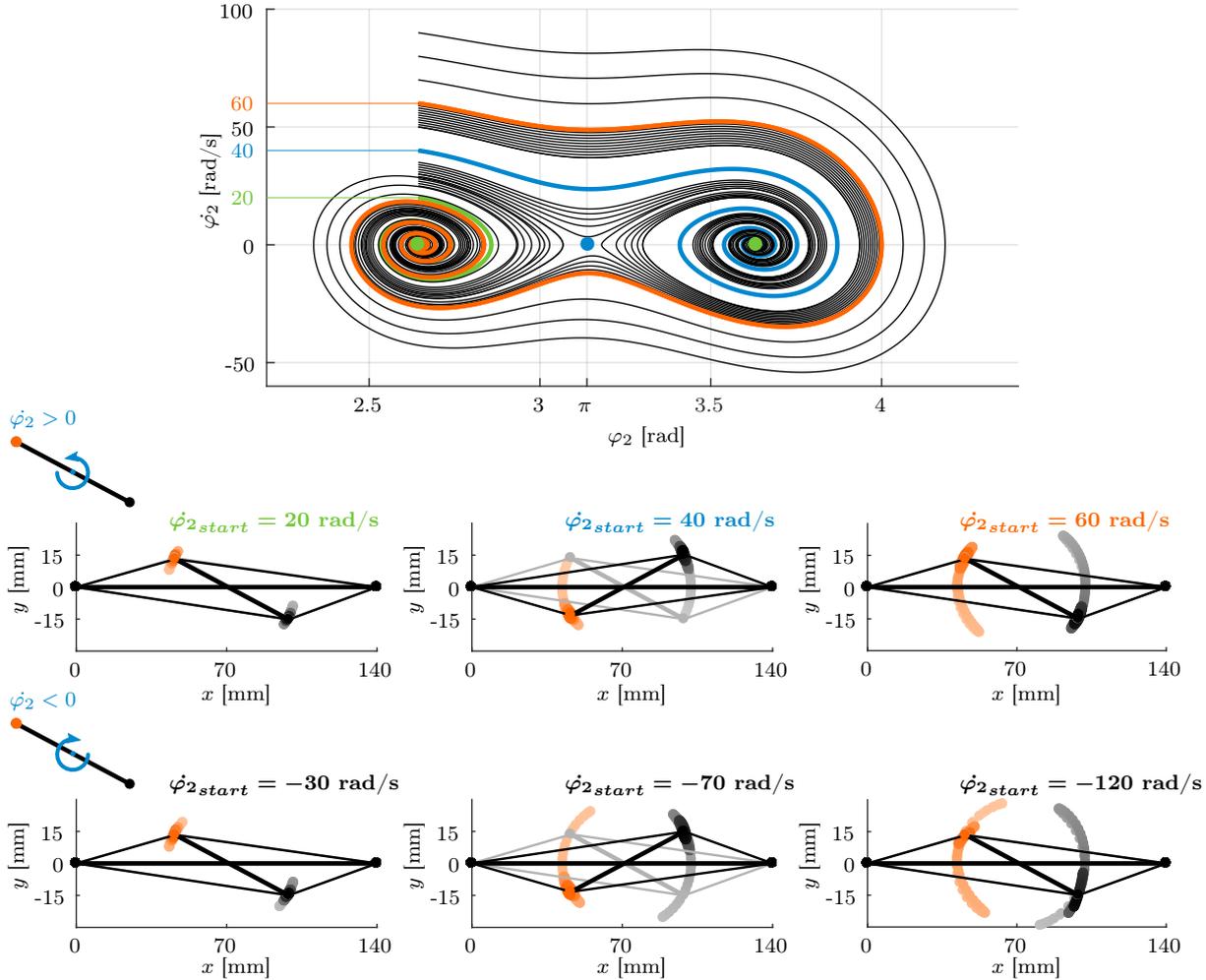


Abbildung 5.2: Phasenportrait von Topologie E und Verhalten der Tensegrity-Struktur bei verschiedenen Startgeschwindigkeiten von φ_2 .

Beispiel 5.3 (Topologie C und verschiedene Antriebskräfte).

In diesem Beispiel wird der Wechsel zwischen Gleichgewichtskonfigurationen von Topologie C mit Hilfe von Antriebskräften untersucht. Die Bezeichnungen, die verwendeten Segmentparameter und die Lagerung sind in Abbildung A.3 dargestellt. Zusätzlich zu den dort angegebenen Parametern wird die Dämpfungskonstante bei allen Dämpfern auf $d_3 = \dots = d_9 := 0.001$ Ns/mm gesetzt und die Masse der Stäbe auf $m_1 = m_2 = m_3 := 100$ g. Es wird der Wechsel zwischen Gleichgewichtskonfiguration I und III in beide Richtungen betrachtet.

Die Bewegungsgleichungen von Topologie C sind (5.22). Die Antriebskräfte sind äußere Kräfte, die durch die Q_a gemäß (5.22) in den Lagrange-Gleichungen berücksichtigt werden.

Zunächst werden die Antriebskräfte für beide Richtungen des Antriebes definiert.

Die verwendeten Kräfte sind von der Zeit t abhängig. Um von Gleichgewichtskonfiguration I zu III zu wechseln, wird an Knoten ③ eine Kraft in negative y -Richtung aufgebracht. Dabei sei $F_1(t) \in \mathbb{R}^2$ die angreifende Kraft und $r_{F_1} \in \mathbb{R}^2$ der Vektor zum Kraftangriffspunkt. Es gilt:

$$F_1(t) := (0, -F_a(t))^T \quad r_{F_1} := (x_4, y_4)^T + l_2(\cos(\varphi_2), \sin(\varphi_2))^T,$$

mit $F_a(t) \in \mathbb{R}$. Um aus der angreifenden Kraft die generalisierten Kräfte mit (5.23) zu berechnen, werden

die Ableitungen von r_{F1} nach den generalisierten Koordinaten benötigt. Dafür gilt:

$$\frac{\partial r_{F1}}{\partial x_4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \frac{\partial r_{F1}}{\partial y_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \frac{\partial r_{F1}}{\partial \varphi_2} = l_2 \begin{pmatrix} -\sin(\varphi_2) \\ \cos(\varphi_2) \end{pmatrix} \quad \frac{\partial r_{F1}}{\partial \varphi_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe von (5.23) können die generalisierten Kräfte $Q = (Q_{x_4}, Q_{y_4}, Q_{\varphi_2}, Q_{\varphi_3})^\top \in \mathbb{R}^4$ berechnet werden:

$$Q = (0, -F_a(t), -F_a(t) l_2 \cos(\varphi_2), 0)^\top.$$

Für den Wechsel in die andere Richtung, von Gleichgewichtskonfiguration III zu I, werden zwei äußere Kräfte $F_2(t), F_3(t) \in \mathbb{R}^2$ mit den Vektoren $r_{F2}, r_{F3} \in \mathbb{R}^2$ zu den Kraftangriffspunkten verwendet. Die Kraft F_2 greift an Knoten ④ und die Kraft F_3 an Knoten ③ an:

$$\begin{aligned} F_2(t) &:= (-F_b(t), -F_b(t))^\top & r_{F2} &:= (x_4, y_4)^\top \\ F_3(t) &:= (F_c(t), F_c(t))^\top & r_{F3} &:= (x_4, y_4)^\top + l_2(\cos(\varphi_2), \sin(\varphi_2))^\top, \end{aligned}$$

mit $F_b(t), F_c(t) \in \mathbb{R}$. Somit ergibt sich für die generalisierten Kräfte

$$Q = (F_c(t) - F_b(t), F_c(t) - F_b(t), F_c(t) l_2(\cos(\varphi_2) - \sin(\varphi_2)), 0)^\top.$$

Die Kräfte $F_a(t), F_b(t), F_c(t)$ werden so gewählt, dass sie bei einer Kraft von Null starten und enden und in \mathbb{R} einmal stetig differenzierbar sind. Es wird eine maximale Kraft $F_{a,\max}, F_{b,\max}, F_{c,\max} \in \mathbb{R}$ und Zeiten $t_{a1}, t_{a2}, t_{b1}, t_{b2}, t_{c1}, t_{c2} \in \mathbb{R}$ festgelegt. Der definierte Verlauf der Kraft wird nur für F_a angegeben, für F_b und F_c ist er analog. Während der Zeit t_{a1} steigt die Kraft von Null auf $F_{a,\max}$ an, dann bleibt sie für die Zeit t_{a2} konstant und fällt dann genauso wieder auf null, wie sie auf $F_{a,\max}$ angestiegen ist:

$$F_a(t) := \begin{cases} \frac{F_{a,\max}}{2} \sin\left(t \frac{\pi}{t_{a1}} - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{F_{a,\max}}{2}, & t \in [0, t_{a1}) \\ F_{a,\max}, & t \in [t_{a1}, t_{a1} + t_{a2}) \\ \frac{F_{a,\max}}{2} \sin\left((t - t_{a2}) \frac{\pi}{t_{a1}} - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{F_{a,\max}}{2}, & t \in [t_{a1} + t_{a2}, 2t_{a1} + t_{a2}) \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Der Kraftverläufe von $F_a(t), F_b(t), F_c(t)$ sind in Abbildung 5.3 dargestellt. Als Konstanten wurden gewählt:

$$F_{a,\max} := 2.5 \text{ N} \quad F_{b,\max} = F_{c,\max} := 5 \text{ N} \quad t_{a1} = t_{b1} = t_{c1} := 1.0 \text{ s} \quad t_{a2} = t_{b2} = t_{c2} := 0.2 \text{ s}.$$

Für die Simulation der Bewegung wird als Anfangsposition die jeweilige Gleichgewichtskonfiguration und als Anfangsgeschwindigkeit Null gewählt. Die Bewegungsgleichungen werden über einer Zeit von $t \in [0, 4]$ s ausgewertet, um die Reaktion der Tensegrity-Struktur auf die Antriebskräfte zu simulieren.

Die Ergebnisse der Simulation sind in Abbildung 5.3 dargestellt, im oberen Teil der Wechsel von Gleichgewichtskonfiguration I zu III, und im unteren Teil die andere Richtung. In den Phasenportraits sind die Punkte farbig markiert, in denen ein Monotoniewechsel in der Antriebskraft stattfindet (blau: Anstieg der Kraft beendet, orange: konstante Kraft beendet, grün: Kraft ist gleich Null). Außerdem ist jeweils in der zweiten Zeile links die Bewegung der Knoten ③ und ④ über die Simulationszeit von 4 s dargestellt, dabei steigt die Zeit von hell nach dunkel an. Zusätzlich ist die Lage der Tensegrity-Struktur zu speziellen Zeitpunkten dargestellt.

Diese Simulation zeigt, dass es mit Hilfe von einer oder mehreren äußeren Kräften möglich ist, zwischen den Gleichgewichtskonfigurationen der Tensegrity-Struktur zu wechseln. \lrcorner

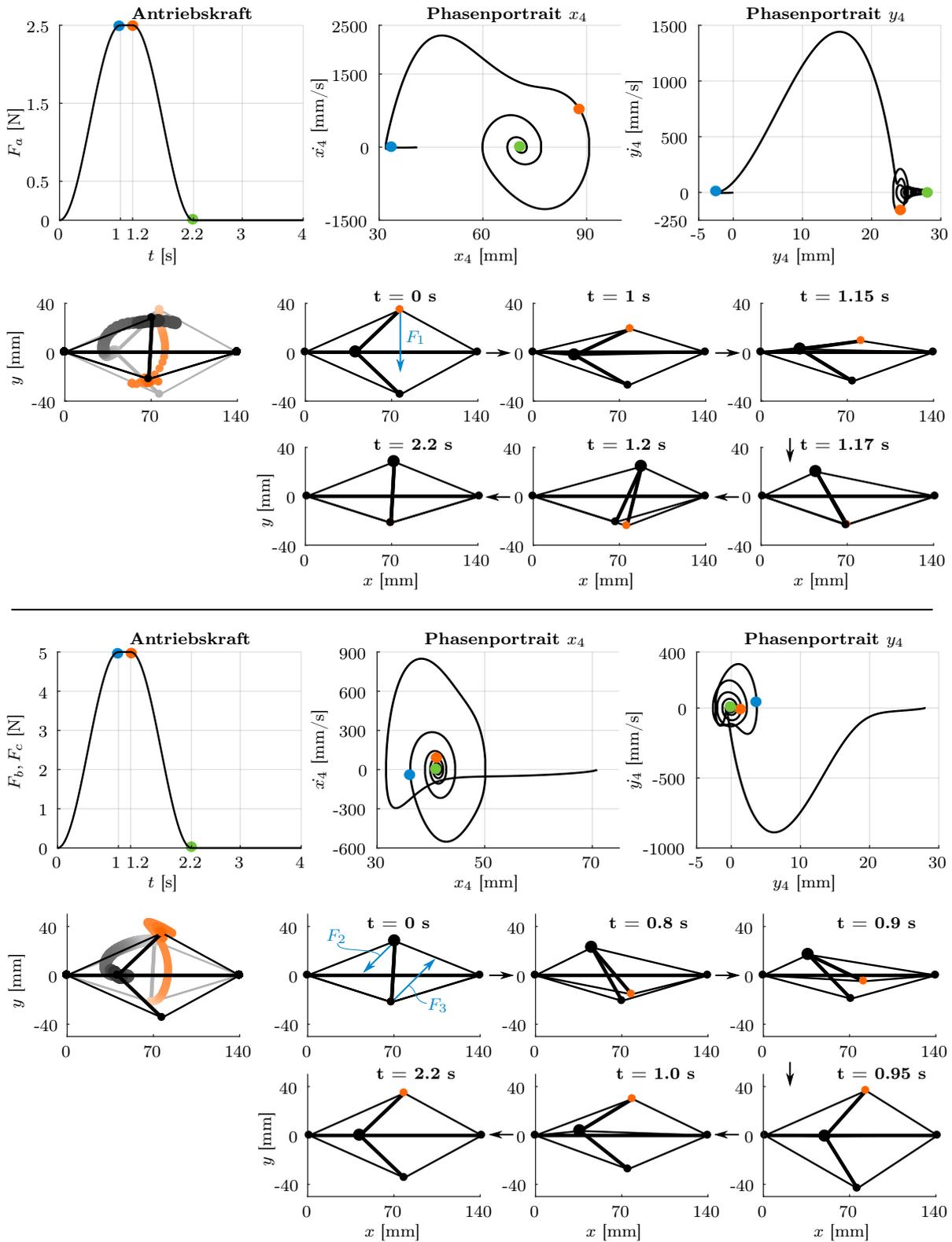


Abbildung 5.3: Oben: Wechsel von Gleichgewichtskonfiguration I zu III. Unten: Wechsel von Gleichgewichtskonfiguration III zu I.

5.2 Tensegrity-Greifer

Der erste Greifer der betrachtet wird, basiert auf Topologie C, wie sie in Abbildung A.3 dargestellt ist. Der Ansatz ist, daraus, durch Hinzufügen von Greifarman, einen Zweifingergreifer zu entwickeln. Mit den in Abbildung A.3 angegebenen Segmentparametern ist es eine multistabile Tensegrity-Struktur. Für den Greifer können die Gleichgewichtskonfiguration I und II genutzt werden - in einer Gleichgewichtskonfiguration ist der Greifer geöffnet und in der anderen geschlossen. Dabei hat das Gelenk zwischen den beiden Segmenten mit hoher Steifigkeit keine direkte Verbindung zu dem waagerechten Segment. Ein Entwurf, wie aus Topologie C ein Zweifingergreifer entstehen kann, ist in Abbildung 5.4 illustriert.

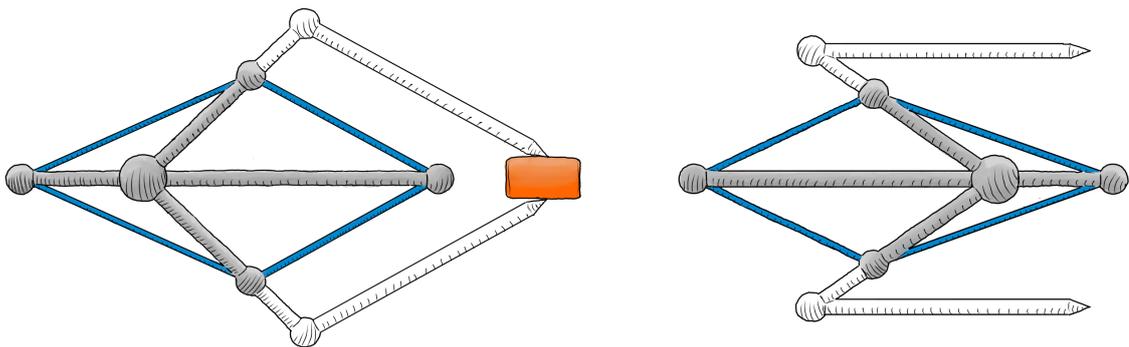


Abbildung 5.4: Entwurf eines Tensegrity-Greifers basierend auf Topologie C.

5.2.1 Topologie

Für den in Abbildung 5.4 entworfenen Greifer werden die beiden Gleichgewichtskonfigurationen I und II (Bezeichnungen siehe Abbildung A.3) benötigt. In Beispiel 4.5 kann beobachtet werden, dass die Form und die Existenz dieser Gleichgewichtskonfigurationen abhängig von den gewählten Segmentparametern ist. Diese Abhängigkeit wird genauer betrachtet.

Existenz und Stabilität der Gleichgewichtskonfigurationen

Als Ausgangspunkt für die Untersuchung werden die Segmentparameter verwendet, die in Abbildung A.3 angegeben sind. Um die Abhängigkeit der Existenz und der Form der Gleichgewichtskonfigurationen von den Segmentparametern zu untersuchen, wird die Steifigkeit von Segment 8 auf $k_8 := 0.8 \text{ N/mm}$ gesetzt und die Steifigkeit von Segment 9 wird variiert. Durch die Veränderung des Parameters k_9 kann es zu einer Veränderung der Fixpunkte der Bewegungsgleichungen (5.22), welche den Gleichgewichtskonfigurationen entsprechen, kommen. Die Lage der Fixpunkte der Bewegungsgleichungen (5.22) wird numerisch bestimmt und ein Bifurkationsdiagramm wird betrachtet. Dabei wird der Parameter k_9 zwischen $k_9 = 0.05 \text{ N/mm}$ und $k_9 = 0.60 \text{ N/mm}$ mit einer Schrittweite von 0.001 N/mm variiert. Durch die Symmetrie der Segmentparameter gilt in allen Fixpunkten: $y_4 = 0 \text{ mm}$ und $\varphi_3 = -\varphi_2$, im Bifurkationsdiagramm müssen also nur x_4 und φ_2 betrachtet werden. Zwei Projektionen des Bifurkationsdiagramms (auf die $k_9 - x_4$ - und die $k_9 - \varphi_2$ -Ebene) sind in Abbildung 5.5 dargestellt.

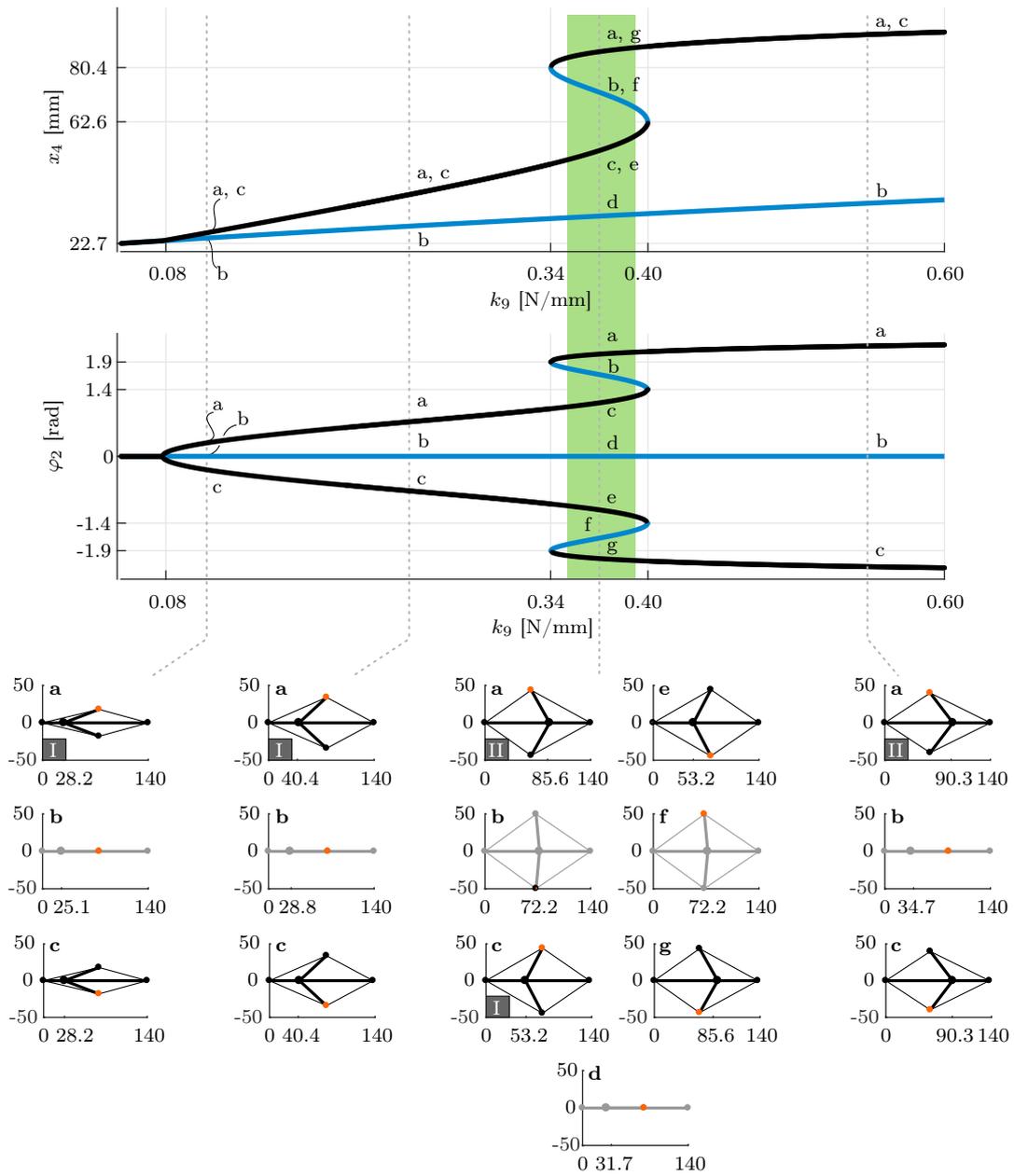


Abbildung 5.5: Bifurkationsdiagramm von Topologie C bei Variation der Steifigkeit von Segment 9.

Im Diagramm ist an mehreren Stellen ($k_9 = 0.337$ N/mm, $k_9 = 0.402$ N/mm) eine Sattel-Knoten-Bifurkation [Str94, Kapitel 3.1] und bei $k_9 = 0.077$ N/mm eine Pitchfork-Bifurkation [Str94, Kapitel 3.4] zu finden. Nur im Bereich $k_9 \in [0.338, 0.401]$ N/mm existieren die beiden benötigten Gleichgewichtskonfigurationen I und II. In Abbildung 5.5 ist von verschiedenen Stellen des Bifurkationsdiagramms die zugehörige Tensegrity-Struktur abgebildet. Bei Variation des Parameters k_9 ändert sich nicht nur die Existenz der Gleichgewichtskonfigurationen, sondern auch die Form.

Analysen über die Existenz und Stabilität von diesen Gleichgewichtskonfigurationen können auch mit dem FE-Formfindungsalgorithmus (siehe Kapitel 2.2.2) durchgeführt werden, [Sum17b; Sum17a; Sum17c]. Als Ausgangspunkt für die Betrachtung werden die Parameter aus Abbildung A.3 verwendet. Es wird die Existenz und Stabilität der Gleichgewichtskonfigurationen I und II (Bezeichnungen siehe Abbildung A.3) untersucht, wenn die Steifigkeiten der Segmente 4, 5, 6 und 7 zwischen 0.2 N/mm und 1.0 N/mm mit einer Schrittweite von 0.002 N/mm variiert werden. Zum Erhalt der x-Achse als Symmetrieachse gelte in dieser Betrachtung $k_4 = k_7$ und $k_5 = k_6$. Um die Symmetrie der beiden Gleichgewichtskonfigurationen zu verhindern, werden die Steifigkeiten der Segmente 8 und 9 verändert: $k_8 := 0.25$ N/mm, $k_9 := 0.3$ N/mm. Für jeden der sich ergebenden Segmentparametersätze wird der FE-Formfindungsalgorithmus mit zwei verschiedenen Initialkonfigurationen ausgeführt und es wird untersucht, ob die beiden Gleichgewichtskonfigurationen existieren² und ob sie stabil sind. Zusätzlich wird analysiert, ob die Belastung der Segmente so wie gewünscht ist: Die Segmente mit einer hohen Steifigkeit sollen eine Länge kleiner- (Drucksegmente) und die Segmente mit einer geringen Steifigkeit sollen eine Länge größer (Zugsegmente) als ihre Anfangslänge haben. Das Ergebnis der Untersuchung ist in Abbildung 5.6 dargestellt. Im ersten und im zweiten Diagramm wurden die beiden Gleichgewichtskonfigurationen separat voneinander betrachtet und im rechten Diagramm gemeinsam. Der Bereich, in dem beide Gleichgewichtskonfigurationen existieren, stabil sind und die Segmente die geforderte Belastung haben, ist weiß dargestellt.

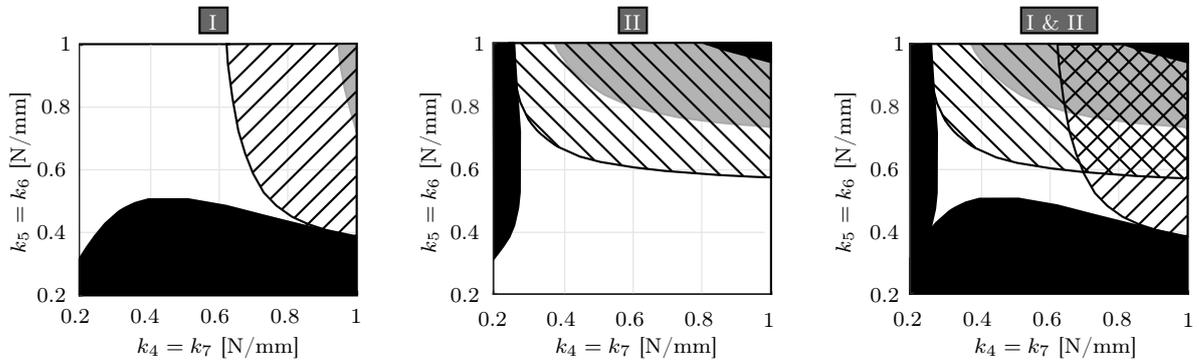


Abbildung 5.6: Existenz und Stabilität von Gleichgewichtskonfiguration I und II bei Variation von Segmentparametern. Schwarz: Gleichgewichtskonfiguration existiert nicht. Weiß/Grau: Gleichgewichtskonfiguration existiert und ist stabil/instabil. Schraffiert: Mindestens ein Segment hat eine Beanspruchung in die andere Richtung (Zug/Druck) als gewünscht.

²Wie schon in Abbildung 5.5 beobachtet, ändert sich bei einer Variation der Segmentparameter auch die Form der Gleichgewichtskonfigurationen, sodass nur die qualitative Form der Gleichgewichtskonfigurationen überprüft wird. Für beide Gleichgewichtskonfigurationen muss gelten: $\|P_{\textcircled{3}(1)} - P_{\textcircled{3}(1)}\| < \varepsilon$ und $\|P_{\textcircled{3}(2)} + P_{\textcircled{5}(2)}\| < \varepsilon$ und $P_{\textcircled{3}(2)} > 1$ mm. Es ist Gleichgewichtskonfiguration I, wenn gilt: $\|P_{\textcircled{3}(1)} - P_{\textcircled{4}(1)}\| > 1$ mm, und Gleichgewichtskonfiguration II, wenn gilt: $\|P_{\textcircled{4}(1)} - P_{\textcircled{3}(1)}\| > 1$ mm. Dabei ist ε eine kleine positive Zahl, welche die Rechengenauigkeit des FE-Formfindungsalgorithmus repräsentiert.

In dieser Betrachtung mit dem FE-Formfindungsalgorithmus wurden, im Vergleich zu der obigen mit Bifurkationsdiagramm, mehrere Segmentparameter variiert und neben der Existenz und Stabilität wurde die Richtung der Beanspruchung der Segmente betrachtet. Allerdings ist in diesem Diagramm nicht die Veränderung der Form der Tensegrity-Struktur in den Gleichgewichtskonfigurationen dargestellt. Ein weiterer Unterschied der Analysen ist, dass beim Bifurkationsdiagramm die Segmente mit hoher Steifigkeit als starr und beim FE-Formfindungsalgorithmus als elastisch (mit einer hohen Steifigkeit) angenommen werden (siehe Annahme 2.8).

Bei diesen beiden Untersuchungen ist zu beobachten, dass die Segmentparameter sorgfältig gewählt werden müssen, damit die beiden für die Anwendung notwendigen Gleichgewichtskonfigurationen existieren. Der in Kapitel 4 vorgestellte Algorithmus für die Parameterfindung kann genutzt werden, um die Segmentparameter so zu ermitteln, dass die beiden gewünschten Gleichgewichtskonfigurationen existieren. Wenn Segmentparameter festgelegt wurden, dann kann einer der Algorithmen für die Formfindung aus Kapitel 3 genutzt werden, um die Anzahl und die Form der existierenden Gleichgewichtskonfigurationen zu bestimmen.

Wechsel zwischen den Gleichgewichtskonfigurationen

Um den in Abbildung 5.4 entworfenen Tensegrity-Greifer entwickeln zu können, ist es wichtig, zwischen den beiden Gleichgewichtskonfigurationen wechseln zu können. In diesem Abschnitt werden mehrere Antriebskonzepte diskutiert und mit Hilfe der Bewegungsgleichungen werden dynamische Untersuchungen zum Wechsel zwischen den Gleichgewichtskonfigurationen durchgeführt.

Es gibt verschiedene Prinzipien, mit denen zwischen den Gleichgewichtskonfigurationen der Tensegrity-Struktur gewechselt werden kann. In Hinblick auf die Anwendung ist lediglich ein Wechsel zwischen Gleichgewichtskonfiguration I und II notwendig, weshalb im Folgenden auch nur diese beiden Gleichgewichtskonfigurationen betrachtet werden. Mögliche Prinzipien für einen Antrieb sind:

- Änderung der Position von Knoten oder Segmenten,
- Änderung der relativen Position zwischen Segmenten,
- Änderung der Vorspannung in ausgewählten Segmenten.

Diese drei Prinzipien sind in Abbildung 5.7 veranschaulicht. In [Sch17] wird der Fall c) genauer analysiert und in [Sum17c; Sum17d] sind die Ergebnisse von Fall a) präsentiert.

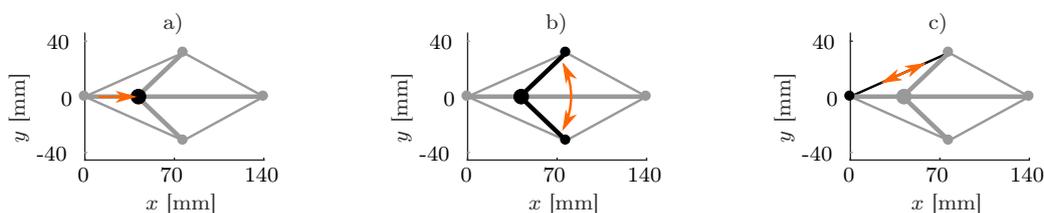


Abbildung 5.7: Drei verschiedene Antriebskonzepte um zwischen den Gleichgewichtskonfigurationen I und II zu wechseln.

Der Vorteil von Fall a) ist, dass nur ein Aktuator benötigt wird, der bei einem geeigneten Design des Aktuators räumlich fixiert werden kann. Aus diesem Grund wird dieser Fall genauer betrachtet. Da der Knoten ④ die größte Positionsänderung zwischen den beiden Gleichgewichtskonfigurationen hat, wird Knoten ④ als Angriffspunkt des Aktuators gewählt. Dieser Aktuator kann durch eine äußere Kraft $F_1 \in \mathbb{R}^2$ in x-Richtung, welche an Knoten ④ angreift (Vektor zum Kraftangriffspunkt sei $r_{F_1} \in \mathbb{R}^2$),

realisiert werden:

$$F_1 := (F, 0)^\top \quad r_{F1} := (x_4, y_4)^\top, \quad (5.26)$$

mit $F \in \mathbb{R}$. Je nachdem, ob ein Wechsel von Gleichgewichtskonfiguration I zu II oder andersherum stattfinden soll, ist die Kraft F positiv oder negativ. Das Verhalten der Tensegrity-Struktur bei dieser Antriebskraft wird im Folgenden mit Hilfe der Bewegungsgleichungen (5.22) untersucht. Die generalisierten Kräfte ergeben sich mit (5.23) aus (5.26) zu:

$$Q_{x_4} = F \quad Q_{y_4} = 0 \quad Q_{\varphi_2} = 0 \quad Q_{\varphi_3} = 0.$$

Damit die Aktivierungskraft nicht sprunghaft auf die Tensegrity-Struktur gebracht wird, wird sie zeitabhängig von 0 N auf eine maximale Kraft F_{\max} in einer Zeit $t_{\max}/2$ gebracht und dann mit dem gleichen Profil wieder auf 0 N. Die Kraft wird wie folgt definiert:

$$F(t) := \begin{cases} \frac{F_{\max}}{2} \sin\left(t \frac{2\pi}{t_{\max}} - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{F_{\max}}{2}, & t \in [0, t_{\max}] \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (5.27)$$

Für verschiedene Werte für F_{\max} und t_{\max}

$$\begin{array}{ll} F_{\max} \in [-15, 15] \text{ N, Schrittweite: } 0.05 \text{ N} & t_{\max} \in [0.1, 1.0] \text{ s, Schrittweite: } 0.01 \text{ s} \\ F_{\max} \in [-200, 200] \text{ N, Schrittweite: } 0.1 \text{ N} & t_{\max} \in [0.01, 0.1] \text{ s, Schrittweite: } 0.001 \text{ s} \end{array}$$

werden die Bewegungsgleichungen gelöst³ und es wird die Lage der Tensegrity-Struktur, nachdem der Einschwingvorgang beendet ist, untersucht. Dabei wird als Anfangsposition die jeweilige Gleichgewichtskonfiguration gewählt und es wird angenommen, dass sich das System in Ruhe befindet, das heißt die Anfangsgeschwindigkeiten sind gleich Null. Das Ergebnis der Untersuchung ist in Abbildung 5.8 dargestellt.

Wenn die Anregungskraft geeignet dimensioniert ist (oranger Bereich), wird ein Wechsel in die andere Gleichgewichtskonfiguration möglich (Abbildung 5.8 oben). Je kürzer die Antriebskraft wirkt, desto größer muss ihr Betrag sein, damit ein Wechsel stattfindet. Bei großen, nur kurz wirkenden Kräften, kann es zu unerwünschten Effekten kommen:

- statt Gleichgewichtskonfiguration I oder II werden Gleichgewichtskonfiguration IV oder V erreicht (grau),
- es findet ein mehrmaliger Wechsel zwischen den Gleichgewichtskonfigurationen statt (weiß).

In den unteren beiden Zeilen in Abbildung 5.8 wurden drei verschiedene Antriebskräfte ausgewählt (in der ersten Zeile rechts durch schwarze Punkte markiert), welche drei der möglichen Fälle repräsentieren: Kein Wechsel in die andere Gleichgewichtskonfiguration (blau), Wechsel in Gleichgewichtskonfiguration I (orange), Wechsel in Gleichgewichtskonfiguration V (grau). Es ist der zeitliche Verlauf der Antriebskraft, die Phasenportraits von x_4 und φ_2 und die Bewegung der Knoten ③ und ④ dargestellt.

³Hierbei wird die gleiche Berechnung verwendet, wie am Anfang von Abschnitt 5.1.4.

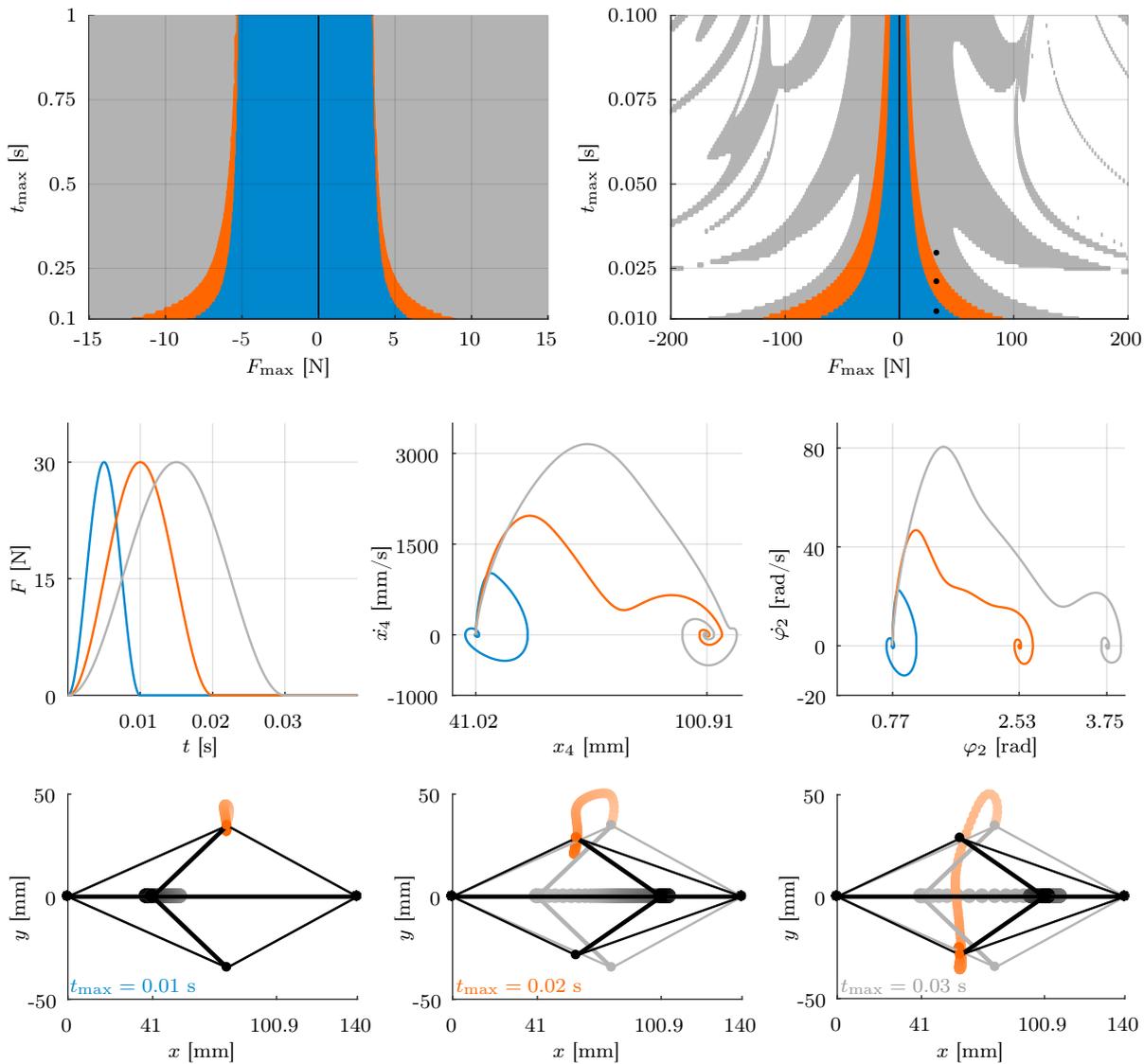


Abbildung 5.8: Erste Zeile: Lage der Tensegrity-Struktur nach dem Aufbringen einer Antriebskraft an Knoten ④. Blau: Keine Veränderung der Gleichgewichtskonfiguration. Orange: Wechsel in die andere Gleichgewichtskonfiguration I bzw. II. Grau: Wechsel in Gleichgewichtskonfiguration IV bzw. V. Weiß: Mehrmaliger Wechsel zwischen den Gleichgewichtskonfigurationen. Zweite und Dritte Zeile: Drei verschiedene Antriebskräfte mit ihren Phasenportraits und der Bewegung ausgewählter Knoten.

5.2.2 Greifarme

Nachdem im vorhergehenden Abschnitt die zugrundeliegende Topologie für den Tensegrity-Greifer untersucht wurde, werden Möglichkeiten vorgestellt, um durch Greifarme aus der Tensegrity-Struktur einen Tensegrity-Greifer zu erhalten.

Ein Entwurf, wie diese Greifarme angebracht werden können, wurde bereits in Abbildung 5.4 skizziert. Die Greifarme sollten so konzipiert sein, dass der Greifer in Gleichgewichtskonfiguration I geschlossen ist und in Gleichgewichtskonfiguration II geöffnet. Als Segmentparameter der zugrundeliegenden Tensegrity-Struktur werden die in Abbildung A.3 angegebenen Parameter verwendet. Der Abstand zwischen den Greiferspitzen und dem Knoten ② soll zwischen 30 mm und 50 mm liegen, damit ausreichend Platz für ein zu greifendes Objekt ist. Im Entwurf in Abbildung 5.4 links ist der Greifarm parallel zu Segment 5. Dies soll bei den realisierten Greifarmen auch der Fall sein.

Eine mögliche Lösung ist links in Abbildung 5.9 dargestellt. Der eigentliche Greifarm ist orange gefärbt. Das blaue Segment mit hoher Steifigkeit sorgt für einen Abstand zwischen Greiferspitze und Knoten ② von 30 mm. Mit dem festen Winkel zwischen dem blauen und dem orangenen Segment wird die Parallelität zwischen Greifarm und Segment 5 hergestellt. In der Mitte in Abbildung 5.9 ist der Öffnungsvorgang des Greifers (von hell nach dunkel) und rechts ist der geöffnete Greifer abgebildet. Durch den festen Winkel zwischen dem blauen und dem orangenen Segment benötigt der Greifer beim Öffnen und im geöffneten Zustand einen großen Arbeitsraum. Diese Lösung ist nicht praktikabel.

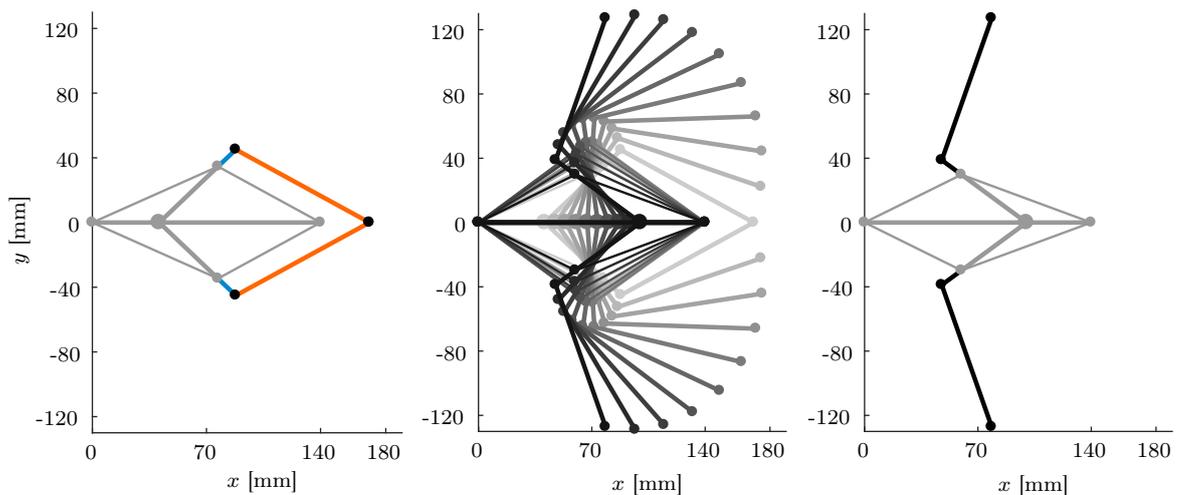


Abbildung 5.9: Tensegrity-Struktur mit hinzugefügten Greifarmen im geschlossenen (links) und geöffneten (rechts) Zustand. Mitte: Positionen beim Öffnen des Greifers von hell nach dunkel.

Um den Platzbedarf des Greifers im geöffneten Zustand zu verringern, wird eine zweite Variante von Greifarmen entwickelt. Der Bewegungsbereich ist kleiner, wenn der Greifarm (orange) im geöffneten Zustand parallel zu Segment 1 ist. Um dies zu erreichen, werden die beiden hinzugefügten Segmente (blau und orange) nicht steif verbunden, wie in Abbildung 5.9, sondern durch ein Drehgelenk. Durch zwei zusätzliche Segmente mit geringer Steifigkeit je Greifarm wird die Bewegung der Greifarme beim Öffnen und Schließen des Greifers realisiert. Diese beiden Segmente werden auf Zug beansprucht - es sind Zugsegmente. Der Tensegrity-Greifer im geschlossenen und im geöffneten Zustand sowie Positionen während des Öffnens sind in Abbildung 5.10 dargestellt. Wegen des verkleinerten Bauraums wird diese Variante im Folgenden weiter betrachtet.

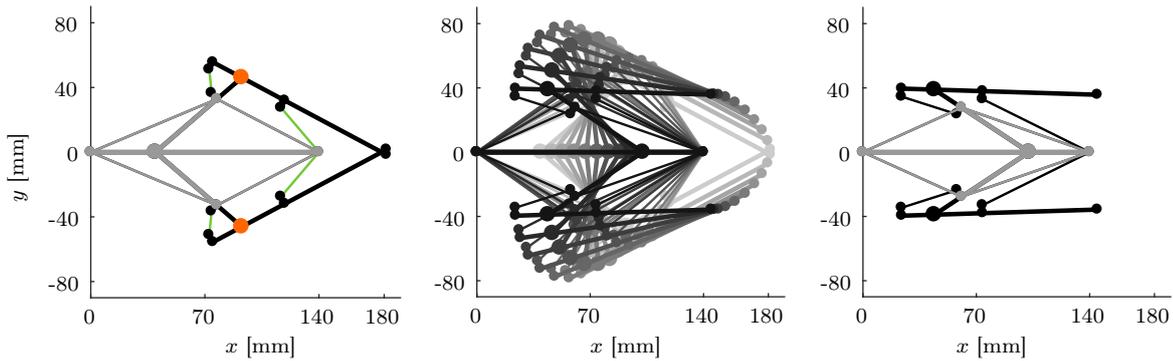


Abbildung 5.10: Tensegrity-Struktur mit Greifarmen im geschlossenen (links) und geöffneten (rechts) Zustand. Mitte: Positionen beim Öffnen des Greifers von hell nach dunkel.

Die Parameter der hinzugefügten Zugsegmente werden so gewählt, dass die beschriebenen Anforderungen erfüllt sind und sind in Tabelle 5.1 angegeben. Die hinzugekommenen Bezeichnungen sind links in Abbildung 5.11 angegeben. Die beiden neu hinzugefügten Zugsegmente je Greifarm sind nicht direkt mit den Knoten der Struktur verbunden. An den Knoten wurden *Federhalter* (grün in Abbildung 5.11 links) hinzugefügt, an welchen die Zugsegmente in einem Funktionsmuster befestigt werden können. Diese haben eine Länge von 5 mm. Die Lage der Gleichgewichtskonfiguration wird mit dem FE-Formfindungsalgorithmus (siehe Abschnitt 2.2.2) bestimmt. Mit dem FE-Formfindungsalgorithmus können nur Drehgelenke an den Knoten realisiert werden. Da die Segmente mit hoher Steifigkeit in Knoten ③, ⑤, ⑧ und ⑨ und die Federhalter allerdings steif miteinander verbunden sind, müssen für die Berechnung mit dem FE-Formfindungsalgorithmus Fachwerke hinzugefügt werden, diese sind rechts in Abbildung 5.11 in orange und blau dargestellt. Da der Greifer entlang der x-Achse symmetrisch ist, sind die Fachwerke zur besseren Übersichtlichkeit nur auf einer Seite des Greifers eingezeichnet.

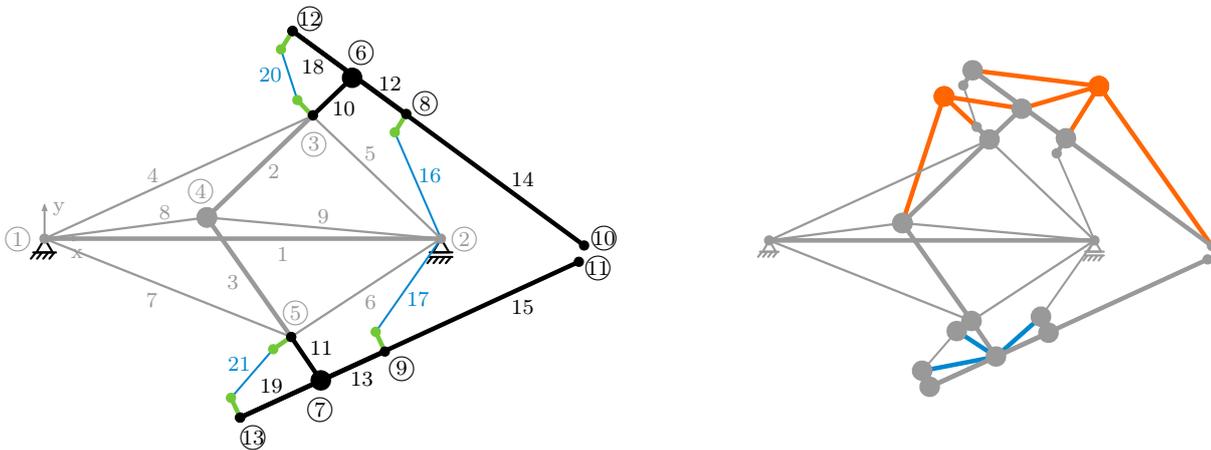


Abbildung 5.11: Links: Bezeichnungen der Knoten und Segmente am Tensegrity-Greifer. Grün: *Federhalter* zur Anbringung der Zugsegmente. Rechts: Fachwerke, um steife Verbindungen zwischen Segmenten im FE-Formfindungsalgorithmus zu realisieren.

Segment	10 & 11	12 & 13	14 & 15	16 & 17	18 & 19	20 & 21
Steifigkeit [N/mm]	10^5	10^5	10^5	0.033	10^5	0.050
Anfangslänge [mm]	20.21	30.00	70.85	29.40	20.00	13.20

Tabelle 5.1: Segmentparameter der durch die Greifarme hinzugekommenen Segmente.

Das Hinzufügen der Greifarme samt Zugsegmenten ändert die Lage der zugrundeliegenden Tensegrity-Struktur nur minimal. In Abbildung 5.12 ist die Tensegrity-Struktur mit Greifarmen (schwarz) und ohne Greifarme (blau) in beiden Gleichgewichtskonfigurationen zum Vergleich der Positionen dargestellt. Beim geschlossenen Greifer ändert sich die Position von Knoten ③ um circa 1.8 mm. Die Aussagen zur Topologie aus dem vorherigen Abschnitt sind demnach weiterhin gültig.

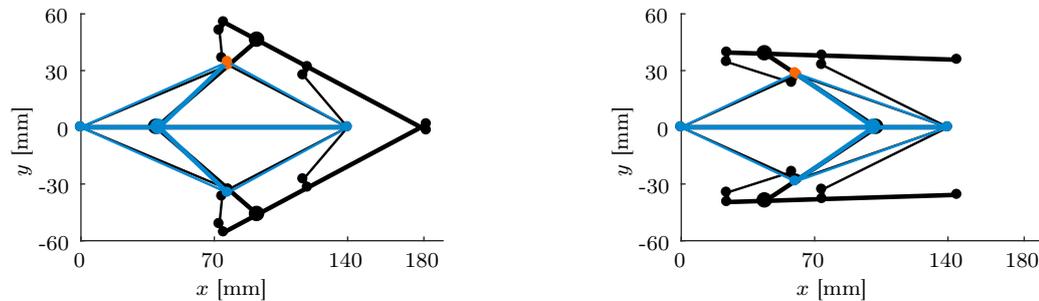


Abbildung 5.12: Gleichgewichtskonfigurationen der Tensegrity-Struktur mit Greifarmen (schwarz) und ohne Greifarme (blau) zum Vergleich der Lage der beiden Strukturen.

In den Abbildungen des geschlossenen Greifers (Abbildung 5.10) kann beobachtet werden, dass sich die Greiferspitzen überschneiden. Dies ist beim FE-Formfindungsalgorithmus erlaubt, denn das Überschneiden von Segmenten wird dort nicht betrachtet. Aus praktischer Sicht ist diese Überschneidung sinnvoll, da der Greifer dadurch im geschlossenen Zustand eine leichte Vorspannung hat. Soll dies verhindert werden, können die Längen der Greifarme l_{014} und l_{015} entsprechend verringert werden.

In der vorgestellten Variante der Greifarme ergibt sich die Greifkraft lediglich aus der Kraft in den Zugsegmenten 16, 17, 20 und 21. Um die Greifkraft zu erhöhen, können in Knoten ⑥ und ⑦ Anschläge eingebaut werden, sodass der Winkel zwischen Segment 10 und 12 (11 und 13) nicht größer als im geschlossenen Greifer und nicht kleiner, als im geöffneten Greifer werden kann. Dadurch wird die Bewegung nicht eingeschränkt, aber die Greifkraft kommt aus der zugrundeliegenden Tensegrity-Struktur und wird durch die höhere Steifigkeit dieser Segmente vergrößert.

5.2.3 Funktionsmuster

Von dem hier vorgestellten Tensegrity-Greifer wurden mehrere Funktionsmuster gebaut. Das aktuellste der Funktionsmuster wird hier vorgestellt. Bilder von den vorhergehenden Versionen befinden sich im Anhang C.1.

Aufbau des Funktionsmusters

Für den Aufbau dieses Greifers müssen Anpassungen an der Struktur vorgenommen werden. Einerseits ist die Tensegrity-Struktur mit einer planaren Topologie modelliert - beispielsweise bewegen sich Knoten ④ und Segment 1 unabhängig voneinander, liegen aber in der gleichen Ebene. Für einen Aufbau müssen diese beiden Komponenten in verschiedene Ebenen gebracht werden. Andererseits muss das Modell eine gewisse räumliche Stabilität haben. Aus diesem Grund werden einige Segmente verdoppelt. Ein schematischer Aufbau des Greifers, welche Segmente sich in welcher Ebene befinden, ist in Abbildung 5.13 dargestellt. Dabei wurden für die bessere Übersichtlichkeit die Greifarme nicht eingezeichnet. Sie befinden sich allerdings samt der dazugehörigen Zugsegmente in der durch \star markierten Ebene. Die in Abbildung 5.13 durch große Punkte verbundenen Segmente befinden sich im Aufbau in einer Ebene. Dies kann durch eine

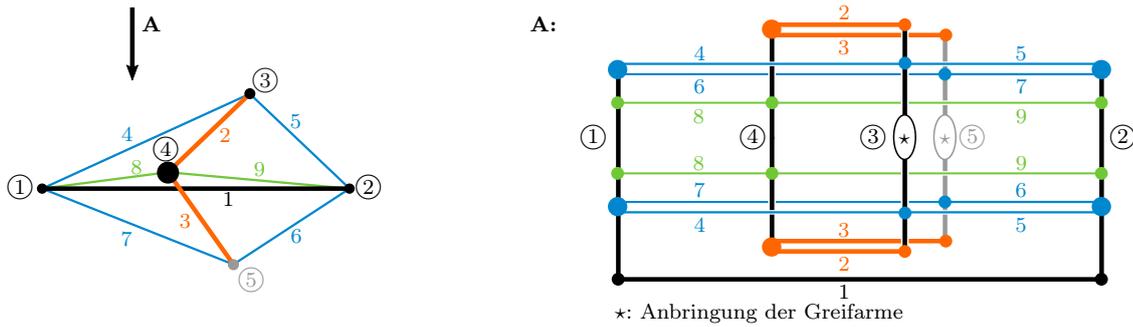


Abbildung 5.13: Anordnung der Segmente im Funktionsmuster - Ansicht von oben.

besondere Anbringung der Segmente an den Knoten realisiert werden.

Die Funktionsmuster wurden mit Hilfe von Aluminiumstäben für die Knoten und Segmente mit hoher Steifigkeit, und Zugfedern aus Stahl für die Segmente mit geringer Steifigkeit (welche in den Gleichgewichtskonfigurationen alle auf Zug beansprucht sind), realisiert. Die Verbindungen zwischen den Segmenten erfolgt durch 3D-gedruckte Komponenten (Material: PLA). Außer für Segment 1, welches größeren Kräften ausgesetzt ist, haben die Aluminiumstäbe einen Durchmesser von 4 mm. Für Segment 1 wird ein Aluminiumstab mit einem H-Profil verwendet (Breite×Länge = 12 mm × 11.5 mm), [Roe16]. Teilweise wurden bei der Betrachtung der Topologie bereits Federhalter vorgesehen, wo die Aufhängung der Federn nicht in Richtung der jeweiligen Segmente wirkt (Segmente 16, 17, 20 und 21). Die anderen Befestigungen der Zugsegmente werden so realisiert, dass sie in Richtung der Segmente wirken und somit nur eine Änderung der Anfangslänge der Zugsegmente bewirken. Im schematischen Aufbau des Greifers (Abbildung 5.13) ist außerdem dargestellt, dass alle Zugsegmente der zugrundeliegenden Tensegrity-Struktur doppelt ausgeführt sind. Die benötigte Anfangslänge $l_{0verbaut}$ und Steifigkeit $k_{verbaut}$ der verwendeten Zugfedern $f = 4, \dots, 9$ berechnet sich demnach mit:

$$l_{0f\ verbaut} = l_{0f} - 2l_{Federhalter} \quad k_{f\ verbaut} = \frac{k_f}{2}, \quad (5.28)$$

wobei $l_{Federhalter}$ die Länge ist, die durch die Aufhängung der Federn im Funktionsmuster benötigt wird. Die Segmente, die im schematischen Aufbau aufeinander liegen (zum Beispiel Segment 4 und 6 oder Segment 2 und 3) oder an einer Stelle am Knoten angreifen (Segment 8 und 9) werden durch spezielle gedruckte Komponenten verbunden, welche in den Abbildungen 5.14(a), 5.14(b) und 5.14(c) dargestellt sind. Aus den konstruierten Federhaltern ergibt sich für (5.28) eine Länge der Federhalter von $l_{Federhalter} = 4.5$ mm. Die Segmentparameter der Zugsegmente wurden so gewählt, dass für diesen Aufbau Standard-Zugfedern verwendet werden können.

Der Abstand zwischen den verdoppelten Segmenten 8 und 9 dient der Herstellung der räumlichen Stabilität und bietet Bauraum für einen Antrieb (siehe Abschnitt 5.2.4).

Für die Greifarme werden zwei Aluminiumstäbe parallel verwendet. Die Konstruktion mit den dazugehörigen Federhaltern ist in Abbildung 5.14(d) dargestellt. Das Gelenk zwischen Segment 10 und 12 ist so ausgeführt, dass der Winkel zwischen diesen Gelenken auf den benötigten Arbeitsbereich (siehe obige Beschreibung) eingeschränkt wird.

In die in Abbildung 5.14 dargestellten Bohrungen mit einem Durchmesser von 4.3 mm werden die Aluminiumstäbe gesteckt, sodass sich die Bauteile um die Aluminiumstäbe drehen können (an den Verbindungen, an denen eine Drehung nicht erwünscht ist, werden die Verbindungen verklebt).

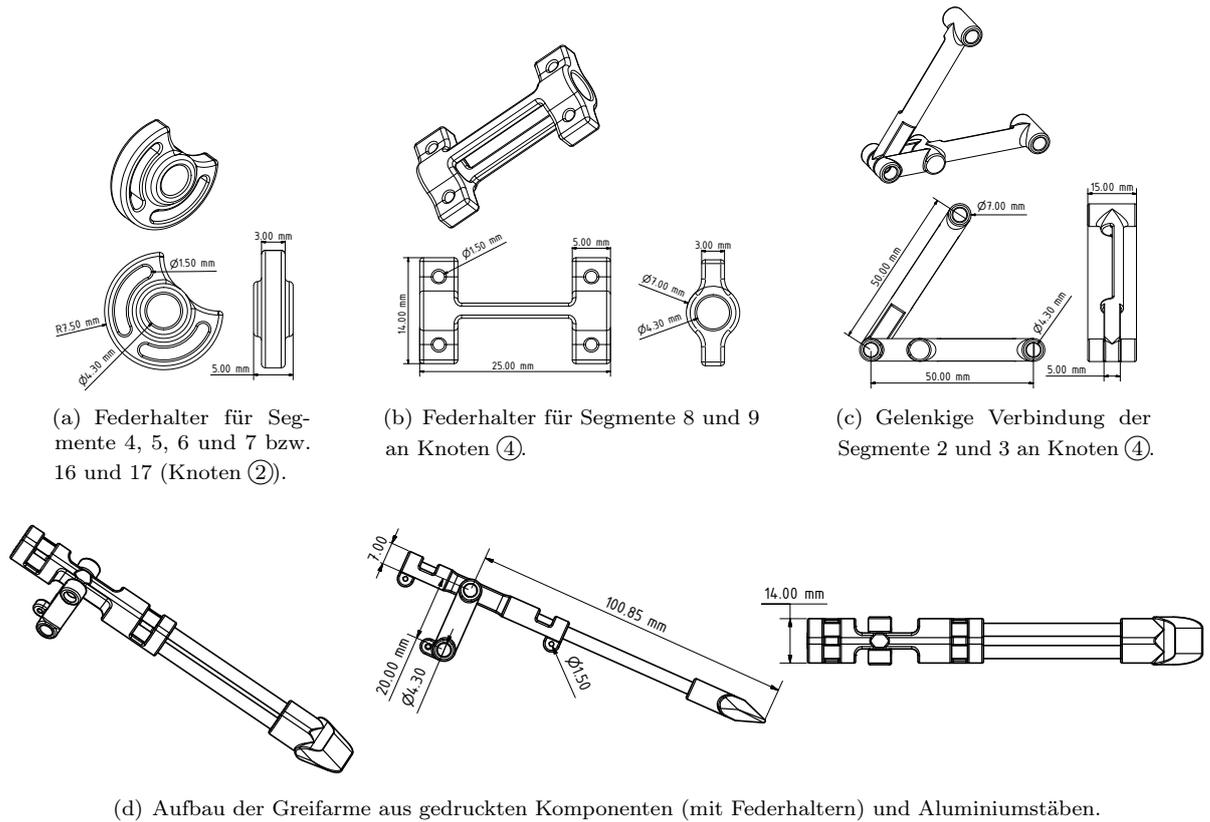


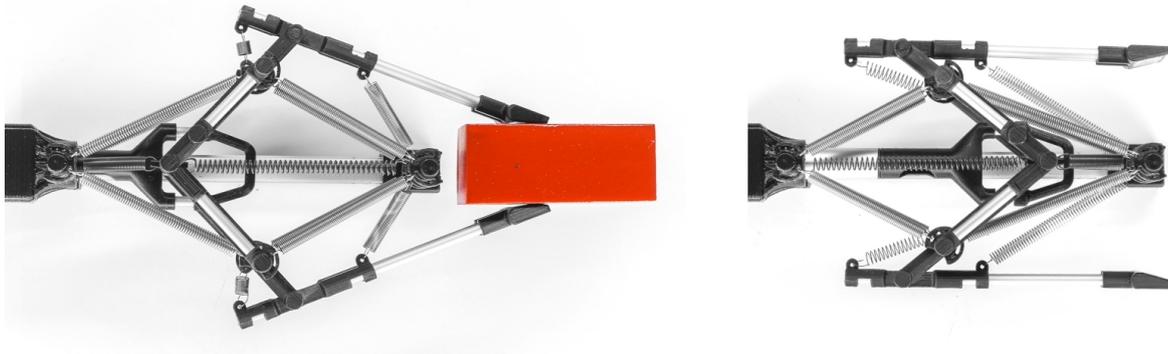
Abbildung 5.14: Zeichnung der Verbindungen der Segmente 2 bis 9 an den Knoten ① bis ⑤ und der Greifarme.

In die Greiferspitzen (Knoten ⑩ und ⑪) wurde ein Silikonkissen gegossen, um einen besseren Kontakt (höhere Reibung) zwischen Greifobjekt und Greiferspitzen herzustellen.

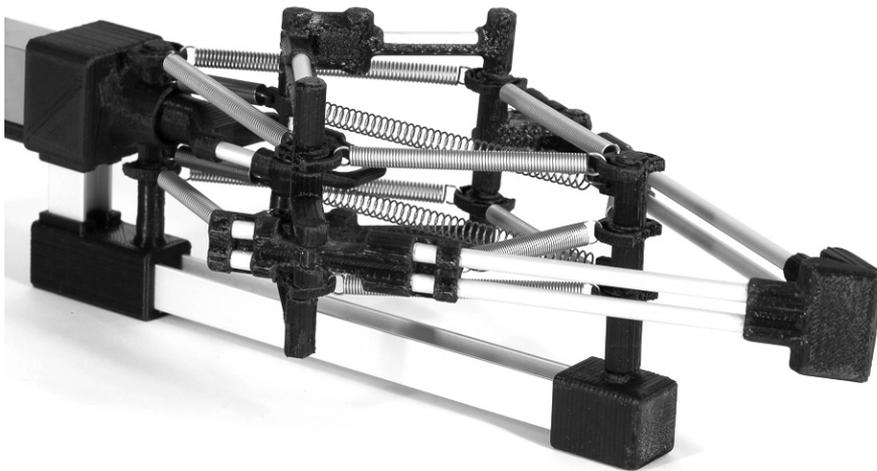
Mit dem beschriebenen Aufbau ergibt sich eine Breite des Funktionsmusters von 80 mm. Die anderen Maße entsprechen denen der betrachteten Topologie (siehe Abbildung A.3 und Tabelle 5.1).

In Abbildung 5.15 ist das aufgebaute Funktionsmuster des Tensegrity-Greifers dargestellt. In den Abbildungen ist ein Bügel um Knoten ④ vorhanden. Dieser dient in diesem Fall als *Griff*, um mit Hilfe einer Positionsänderung von Knoten ④ ein Öffnen und Schließen des Tensegrity-Greifers vorzunehmen.

Im Folgenden werden experimentelle Untersuchungen mit dem Funktionsmuster durchgeführt und mit theoretischen Analysen verglichen.



(a) Tensegrity-Greifer, Ansicht von oben: Greifer geschlossen und geöffnet.



(b) Tensegrity-Greifer, Isometrische Ansicht.

Abbildung 5.15: Bilder des aufgebauten Tensegrity-Greifers.

Greifkraft

In diesem Abschnitt wird die Greifkraft des Tensegrity-Greifers auf zwei verschiedene Arten ermittelt und die Ergebnisse werden miteinander verglichen. Die Greifkraft wird in Abhängigkeit von der Größe des gegriffenen Objektes bestimmt.

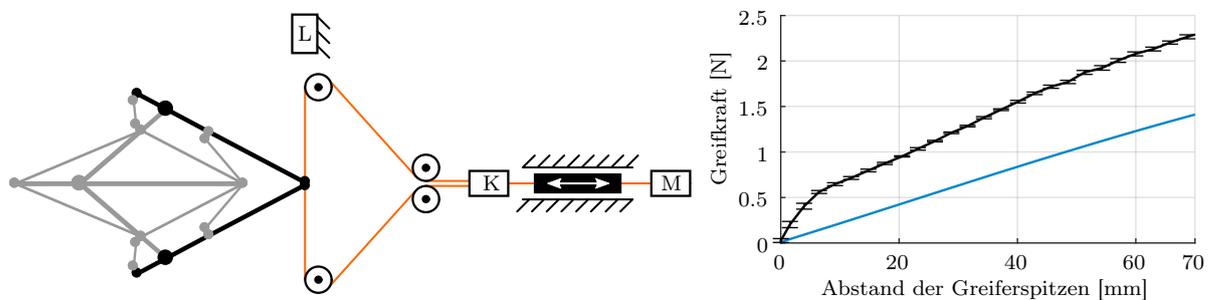
In der ersten Variante wird die Greifkraft mit Hilfe des FE-Formfindungsalgorithmus (siehe Abschnitt 2.2.2) berechnet. Dazu wird beim geschlossenen Greifer an die Knoten ⑩ und ⑪ jeweils eine Kraft in positive beziehungsweise negative y -Richtung aufgebracht. Es wird die Gleichgewichtskonfiguration mit dem FE-Formfindungsalgorithmus bestimmt. Im Anschluss wird der Abstand zwischen den beiden Knoten ⑩ und ⑪ ermittelt. Da im aufgebauten Modell ein Anschlag in Knoten ⑥ und ⑦ verbaut ist, sodass die Greifkraft aus der zugrundeliegenden Tensegrity-Struktur kommt, und nicht nur aus den Segmenten 16, 17, 20 und 21, wird im Modell für den FE-Formfindungsalgorithmus eine Änderung vorgenommen: Die Segmente 20 und 21 erhalten eine hohe Steifigkeit (10^5 N/mm), sodass sich der Winkel in Knoten ⑥ und ⑦ nicht ändern kann. Damit wird der Anschlag im Funktionsmuster modelliert.

In der zweiten Variante wird die Greifkraft experimentell ermittelt. Der genaue Versuchsaufbau ist in [Mit17] beschrieben. Hier ist in Abbildung 5.16 der schematische Aufbau dargestellt und ein Foto des Testaufbaus gegeben. Mit Hilfe der Umlenkrollen wird sichergestellt, dass die Greiferspitzen in y -Richtung auseinander bewegt werden. Die lineare Führung wird mit Hilfe eines Motors (M) bewegt. Mit dem

Kraftaufnehmer (K) wird die wirkende Kraft und mit Hilfe des Laserinterferometers (L) der Abstand zwischen den Greiferspitzen bestimmt.



(a) Foto des Testaufbaus.



(b) Links: Schematischer Testaufbau. M: Motor, K: Kraftaufnehmer, L: Laserinterferometer. Rechts: Greifkraft gemessen (schwarz) und berechnet (blau).

Abbildung 5.16: Messung der Greifkraft - Testaufbau und Gegenüberstellung Messung und Berechnung.

Das Ergebnis der Messung und der Berechnung der Greifkraft ist rechts in Abbildung 5.16(b) dargestellt. Dabei ist das Ergebnis der Messung schwarz und das Ergebnis der Berechnung blau. Bei der Messung wurden nacheinander 10 Messreihen aufgenommen. Die Standardabweichung der Messungen ist an ausgewählten Punkten dargestellt. Dies zeigt die Reproduzierbarkeit der Ergebnisse der Messungen. Der Verlauf der gemessenen und der berechneten Greifkraft ist qualitativ ähnlich. Zwischen der gemessenen und der berechneten Greifkraft sind jedoch große Unterschiede zu verzeichnen. Dies zeigt die Notwendigkeit der Berücksichtigung der Reibung in den Gelenken in zukünftigen theoretischen Betrachtungen.

Bewegungsanalyse

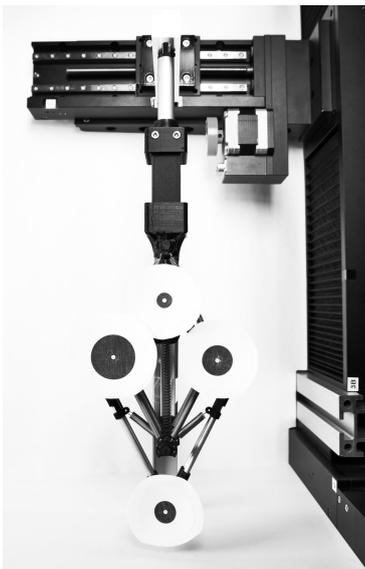
Es wird das Verhalten des Tensegrity-Greifers beim Wechsel zwischen den Gleichgewichtskonfigurationen untersucht. Dafür wird die Bewegung der Knoten mit Hilfe des FE-Formfindungsalgorithmus berechnet. Zusätzlich wird die Bewegung der Knoten des Funktionsmusters gemessen. Die beiden Ergebnisse werden verglichen.

Da die wesentliche Bewegung des Greifers durch Knoten ③, ④, ⑤ und die Greiferspitzen (Knoten ⑪) charakterisiert wird, wird die Bewegung dieser Knoten betrachtet. Für die Aufnahme der Bewegung der Knoten des Funktionsmusters wird eine Hochgeschwindigkeitskamera verwendet. Der Greifer wird fest eingespannt und die zu untersuchenden Knoten werden durch schwarze Kreise auf weißem Hintergrund markiert. Der Mittelpunkt eines Kreises ist der zu beobachtende Knoten. Diese Markierung wird vorgenommen, um die Aufnahmen im Anschluss automatisiert auswerten zu können. Knoten ④ wird mit einem

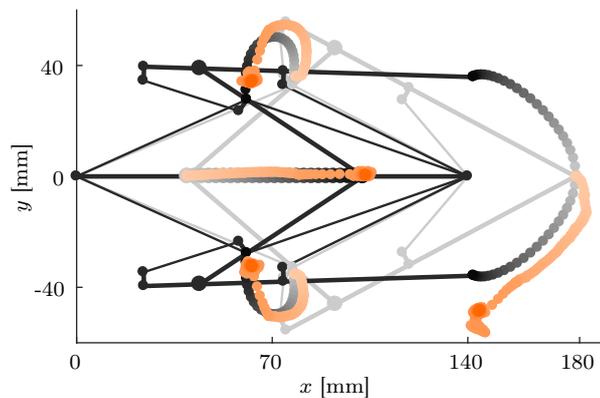
Linearantrieb mit einer Geschwindigkeit von 10 mm/s bewegt. Der Testaufbau ist in Abbildung 5.17(a) dargestellt. Mit Hilfe der Kamera werden vom Greifer 350 Bilder pro Sekunde aufgenommen. Die folgenden Schritte werden nacheinander für jedes Bild ausgeführt.

- Konvertierung von Graustufen in ein schwarz-weiß Bild.
- Reduzieren der Auflösung des Bildes.
- Für jeden untersuchten Knoten: Zuschneiden des Fotos, sodass sich der Kreis im Bild befindet.
- Suchen des Kreises im Bild mit der Matlab-Funktion `imfindcircles`. Diese Funktion findet den Kreis und seinen Mittelpunkt mittels der Hough-Transformation.
- Speichern der ermittelten Knotenposition.

Genauere Angaben zum Aufbau, zu den durchgeführten Messungen und detaillierte Auswertungen befinden sich in [Mit17]. Hier werden die Ergebnisse der Berechnung mit dem FE-Formfindungsalgorithmus und das Ergebnis einer Messung für das Öffnen des Greifers verglichen. Beide Verläufe der Knoten befinden sich in Abbildung 5.17(b), von hell nach dunkel öffnet sich der Greifer. Dabei ist orange das Ergebnis der Messung und schwarz das Ergebnis des FE-Formfindungsalgorithmus. Die Trajektorien der Knoten sind ähnlich. Die Trajektorien von Knoten ③ und ⑤ haben ein Offset von circa 3 mm. Der Beginn des Verlaufes von Knoten ⑪ ist in beiden Untersuchungen ähnlich. In der Messung bewegt sich dieser Knoten allerdings weiter, als beim FE-Formfindungsalgorithmus. Dies liegt am Aufbau des Gelenks in Knoten ⑦, denn dort ist einerseits durch die gedruckten Verbindungen ein Spiel vorhanden und andererseits wirkt der Anschlag später als erforderlich.



(a) Foto des Testaufbaus.



(b) Bewegung der Knoten des Greifers beim Öffnen von hell nach dunkel. Schwarz: berechnete Bewegung. Orange: gemessene Bewegung.

Abbildung 5.17: Untersuchung des Bewegungsverhaltens des Tensegrity-Greifers beim Öffnen - Testaufbau und Ergebnis.

Für einen weiteren Vergleich zwischen der Lage der Knoten im Funktionsmuster und den berechneten Positionen werden die Knotenpositionen von Knoten ③, ④ und ⑤ gegenübergestellt, siehe Tabelle 5.2.

	Geschlossen			Offen		
	Berechnet	Gemessen	Abstand	Berechnet	Gemessen	Abstand
④ x	39.8 mm	39.6 mm	0.1 mm	102.5 mm	103.6 mm	1.1 mm
④ y	0.0 mm	0.0 mm		0.0 mm	0.0 mm	
③ x	77.4 mm	78.2 mm	2.9 mm	60.9 mm	62.9 mm	5.2 mm
③ y	32.8 mm	35.6 mm		27.7 mm	32.5 mm	
⑤ x	77.4 mm	78.7 mm	3.2 mm	60.9 mm	103.6 mm	6.6 mm
⑤ y	-32.8 mm	-35.7 mm		-27.7 mm	-34.0 mm	

Tabelle 5.2: Berechnete und gemessene Positionen der Knoten des Tensegrity-Greifers.

Nachgiebigkeit

Es wird die Nachgiebigkeit des Funktionsmusters betrachtet. Dabei wird sich an die folgende Definition für die Nachgiebigkeit gehalten.

Definition 5.4 (Steifigkeit). [IFT14, Kapitel 3.5.7]

Steifigkeit ist das Maß für die Fähigkeit eines Körpers oder einer Struktur einer Deformation infolge der Wirkung äußerer Kräfte zu widerstehen.

Definition 5.5 (Nachgiebigkeit). [IFT14, Kapitel 3.5.8]

Nachgiebigkeit ist das Maß für die Fähigkeit eines Körpers oder einer Struktur zur Deformation unter dem Einfluss äußerer Kräfte, und somit der Kehrwert der Steifigkeit.

In [Zen12] wird die Nachgiebigkeit charakterisiert, indem ein Referenzpunkt für die Struktur definiert wird und eine äußere Kraft an der Struktur aufgebracht wird. Dann wird die Verschiebung des Referenzpunktes aufgrund der äußeren Kraft als Maß für die Nachgiebigkeit bestimmt. Bei dieser Charakterisierung hängt die Nachgiebigkeit stark von der Lage des Referenzpunktes ab. Diese Untersuchung wird exemplarisch an ausgewählten Knoten des Tensegrity-Greifers durchgeführt.

Der Testaufbau ist ähnlich zu dem für die Messung der Greifkraft. In Abbildung 5.18 ist schematisch der Testaufbau für die Messung der Nachgiebigkeit in positive (orange) und negative (blau) x-Richtung an Knoten ③ dargestellt. Mit Hilfe eines Motors (M) wird das Seil verkürzt oder verlängert. Mit dem Kraftaufnehmer (K) wird die Kraft und mit dem Laserinterferometer (L) die Verschiebung des Knotens gemessen. Die anderen Knoten und Achsrichtungen können analog untersucht werden.

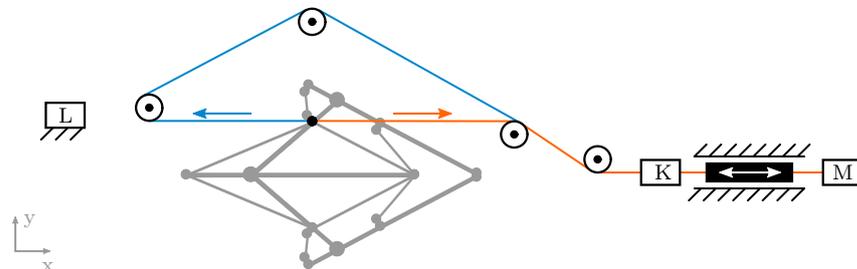


Abbildung 5.18: Schematischer Testaufbau für die Messung der Nachgiebigkeit des Tensegrity-Greifers. Hier wird eine äußere Last an Knoten ③ betrachtet. M: Motor, K: Kraftaufnehmer, L: Laserinterferometer.

In den hier präsentierten Analysen wird im geschlossenen Greifer eine Kraft in positive x- beziehungsweise negative y-Richtung an Knoten ④ aufgebracht. Außerdem wird eine Kraft an der Greiferspitze in y-

Richtung beim geschlossenen und in x-Richtung beim geöffneten Tensegrity-Greifer betrachtet. Für die Untersuchungen am geschlossenen Greifer werden die Greiferspitzen miteinander verbunden, um ein Überschneiden, beziehungsweise Aneinanderstoßen, der Greiferspitzen zu vermeiden. Jede Messung wird drei Mal wiederholt und die Ergebnisse werden gemittelt und die Standardabweichung der Messungen wurde berechnet. Die Ergebnisse sind in Abbildung 5.19 dargestellt. Den Ergebnissen der Messung wird eine Berechnung des Kraft-Weg-Verlaufes mit Hilfe des FE-Formfindungsalgorithmus (siehe Abschnitt 2.2.2) gegenübergestellt. Zusätzlich zum gemessenen und berechneten Kraft-Weg-Verlauf ist die mit dem FE-Formfindungsalgorithmus bestimmte Verformung der Tensegrity-Struktur bei der entsprechenden äußeren Last dargestellt. Dabei wird von hell nach dunkel die Kraft größer. Der Knoten, an dem die Kraft angreift ist orange markiert.

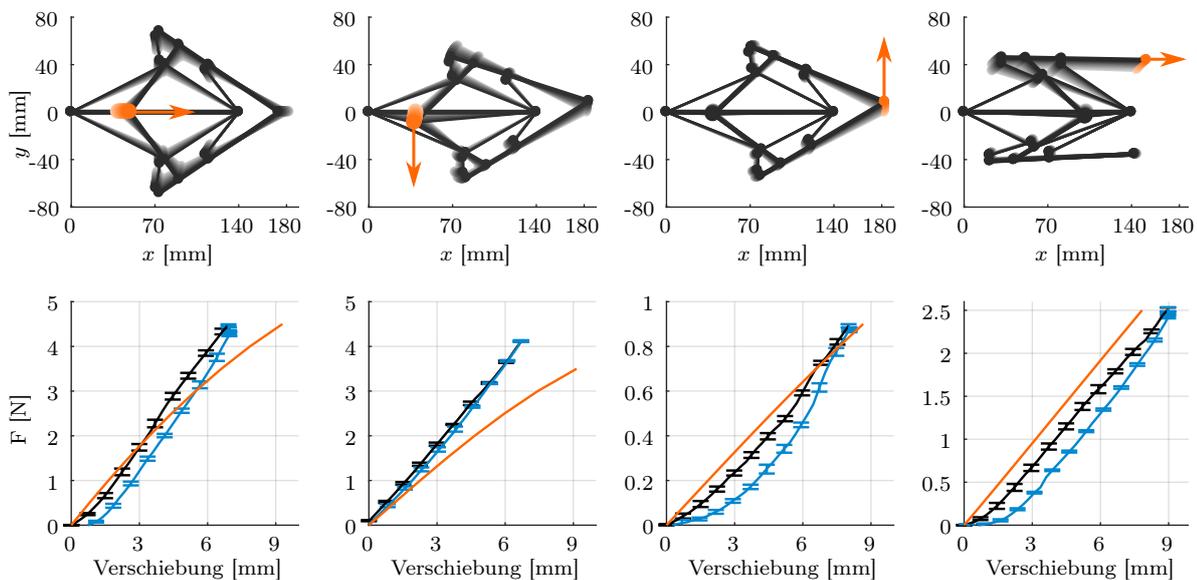


Abbildung 5.19: Nachgiebigkeit des Tensegrity-Greiferaus bei äußerer Last an verschiedenen Knoten. Orange: Berechnete Verformung, Schwarz: Gemessene Verformung bei Belastung, Blau: Gemessene Verformung bei Entlastung.

Bei den Messungen ist ein Unterschied zwischen Belastung und Entlastung der Tensegrity-Struktur zu erkennen. Diese Differenz kann unter anderem durch eine Dehnung des Seils oder Veränderungen am Befestigungsknoten entstehen. Die Verläufe zwischen Messung und Rechnung stimmen nicht immer überein. Dies kann an der Reibung in den Gelenken und in den Aufhängungen der Federn, aber auch an Ungenauigkeiten bei den verwendeten Federn liegen.

In Abbildung 5.20 ist das Funktionsmuster mit Belastungen an verschiedenen Knoten und die daraus resultierende Verformung dargestellt.

Die Ergebnisse aus diesem Abschnitt zeigen, dass das Verhalten des Greifers durch seinen symmetrischen Aufbau anfällig für Ungenauigkeiten in der Fertigung und Montage ist.

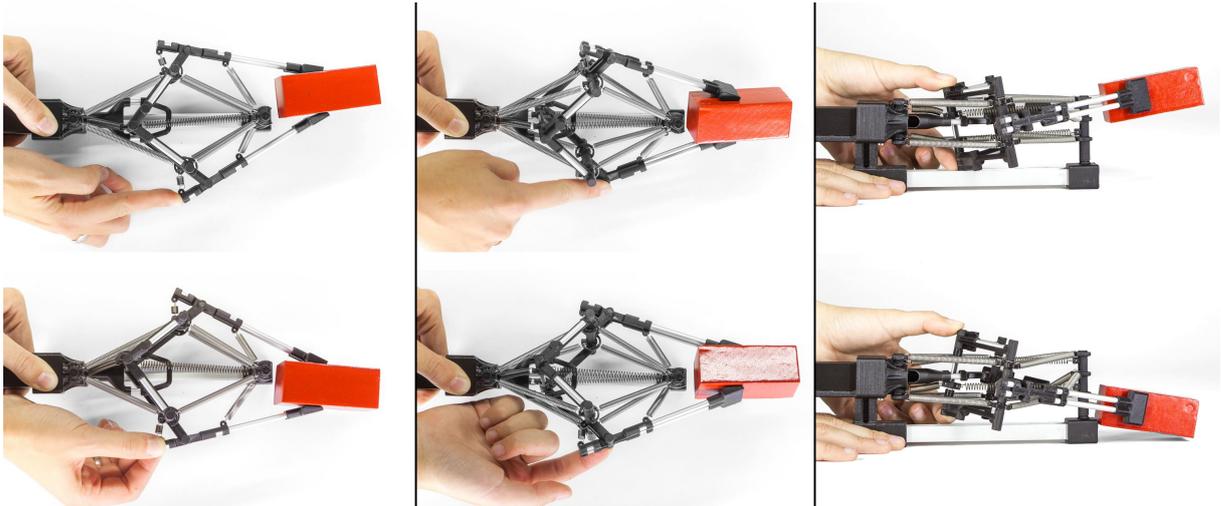


Abbildung 5.20: Demonstration der Nachgiebigkeit des Tensegrity-Greifers.

5.2.4 Antrieb

Nach der Untersuchung des Funktionsmusters wird ein Antrieb dem Funktionsmuster hinzugefügt. Mögliche Antriebskonzepte und die Wahl eines Konzeptes befinden sich in Abschnitt 5.2.1. Die Betrachtungen dort sind auch für die Topologie mit hinzugefügten Greifarmen gültig. Zunächst werden einige Vorbetrachtungen beschrieben und im Anschluss werden zwei realisierte Antriebe vorgestellt.

Wenn der Tensegrity-Greifer geöffnet oder geschlossen ist, dann befindet er sich in einer stabilen Gleichgewichtskonfiguration. Deshalb wird, während der Greifer geschlossen oder geöffnet ist, keine Energie benötigt. Der Antrieb wird nur benötigt, um einen Wechsel zwischen den Gleichgewichtskonfigurationen zu realisieren. Der Antrieb sollte so konzipiert werden, dass er, wenn sich der Greifer in einer Gleichgewichtskonfiguration befindet, ausgeschaltet werden kann. Auch sollte der Greifer uneingeschränkt alle Bewegungen ausführen können (entsprechend seiner Nachgiebigkeit).

In Abschnitt 5.2.1 wurde ein Antrieb beschrieben, welcher durch eine Verschiebung von Knoten ④ entlang der x-Achse zu einem Wechsel zwischen den Gleichgewichtskonfigurationen führt. Dieses Antriebskonzept wird hier weiter verfolgt.

Wenn Knoten ④ entlang der x-Achse bewegt wird, findet, kurz nachdem er die Position der instabilen Gleichgewichtskonfiguration erreicht hat, ein Umschlagen in die andere Gleichgewichtskonfiguration statt. Ein Antrieb, welcher in Knoten ④ wirkt, soll dieses Umschlagen nicht behindern, damit diese Eigenschaft des Tensegrity-Greifers erhalten bleibt. Außerdem würde eine steife Ankopplung des Antriebs an Knoten ④ die Nachgiebigkeit des Greifers einschränken. Aus diesen Gründen darf die Kopplung zwischen Knoten ④ und Antrieb nicht fest sein. Anstelle einer festen Ankopplung wird ein Verbindungsstück mit einem Langloch verwendet. Das Verbindungsstück ist fest mit dem Antrieb verbunden und in dem Langloch befindet sich Knoten ④. Die Länge des Langlochs ist so gewählt, dass das Umschlagen des Greifers in die andere Gleichgewichtskonfiguration ohne Behinderung stattfinden kann. Außerdem kann Knoten ④ innerhalb dieses Langlochs entsprechend der Nachgiebigkeit des Greifers ohne Einschränkung bewegt werden. In Abbildung 5.21 ist die Funktionsweise des Verbindungsstücks mit Langloch illustriert.

Das Verbindungsstück greift im Funktionsmuster an Knoten ④ in der Mitte an, zwischen den verdoppelten Segmenten 8 und 9, siehe Abbildung 5.13. Ein mögliches Verbindungsstück ist bereits in Abbildung 5.15 am Funktionsmuster vorhanden.

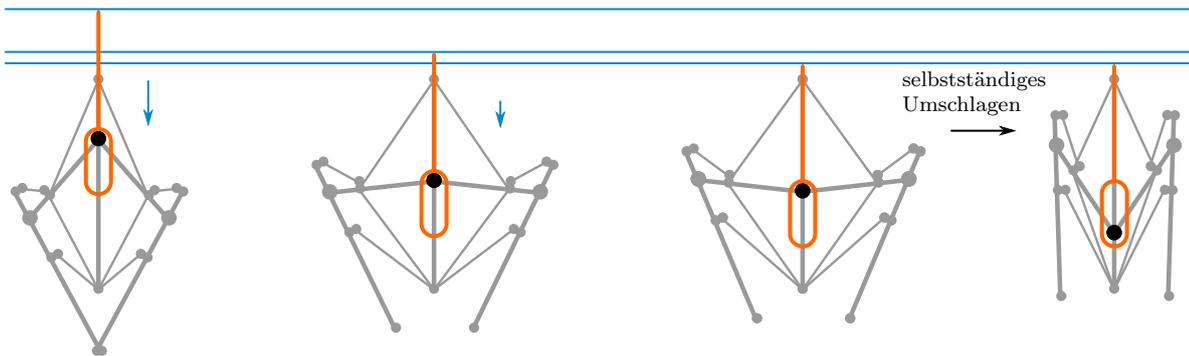


Abbildung 5.21: Kopplung zwischen Knoten ④ und Antrieb mittels Verbindungsstück (orange), sodass keine Einschränkung der Nachgiebigkeit und keine Beeinflussung des Umschlagens stattfindet.

Messungen am Funktionsmuster zeigen, dass für das Öffnen des Greifers eine Kraft von 6.3 N und für das Schließen von 9.4 N an Knoten ④ erforderlich ist. Dementsprechend muss der Antrieb dimensioniert werden.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, wie Knoten ④ mittels eines Antriebs verschoben werden kann. Das Ziel ist, dass für das Öffnen und das Schließen des Greifers insgesamt nur ein Antrieb notwendig ist. Die beiden hier vorgestellten Varianten des Antriebs sind in [Roe16] ausführlicher beschrieben.

Linearantrieb

Die erste Realisierung des Antriebs erfolgt mittels Linearmotor. Es wird ein linearer DC-Servomotor (LM 2070-080-01 Faulhaber Inc.) verwendet, dessen Hublänge von 80 mm ausreichend für den zurückzulegenden Weg von Knoten ④ ist. Der Motor hat eine Dauerkraft von 9.2 N und eine Spitzenkraft von 27.0 N. Die Dauerkraft ist für das Schließen des Tensegrity-Greifers nicht ausreichend. Da die maximale Kraft von 9.4 N allerdings nur kurz vor dem Umschlagen benötigt wird, kann hierfür die Spitzenkraft ausgenutzt werden. Die maximale Geschwindigkeit des Antriebs beträgt $2.3 \cdot 10^3$ mm/s.

Der Läuferstab wird mittels einer 3D-gedruckten Kopplung (Material: PLA) mit dem Verbindungsstück um Knoten ④ verbunden. Außerdem wird die Führung des Läuferstabes mit Knoten ① verbunden, sodass Tensegrity-Greifer und Antrieb eine Einheit bilden. In Abbildung 5.22 ist der Tensegrity-Greifer mit Linearantrieb dargestellt.

Die Ansteuerung des Antriebs der Tensegrity-Struktur erfolgt mittels Windows-PC. Für zukünftige Anwendungen könnte die Steuerung in den Greifer integriert werden.

Der Läuferstab kann sich, wenn der Motor ausgeschaltet ist, frei bewegen. Damit wird der Greifer in seinen Bewegungen durch den Antrieb nicht eingeschränkt.

Es wurden Hochgeschwindigkeitsaufnahmen des Tensegrity-Greifers mit Antrieb aufgenommen. Dabei hat sich ein Überschwingen gezeigt: Der Winkel zwischen Segment 2 und 3 wird zunächst geringer, als für die jeweilige Gleichgewichtskonfiguration erforderlich. Im Anschluss stellt sich die gewünschte Gleichgewichtskonfiguration ein. Weil Knoten ③ und ⑤ beim Überschwingen den Läuferstab des Motors berühren, wurden in Knoten ④ Winkelbegrenzungen für den Winkel zwischen Segment 2 und 3 ergänzt.

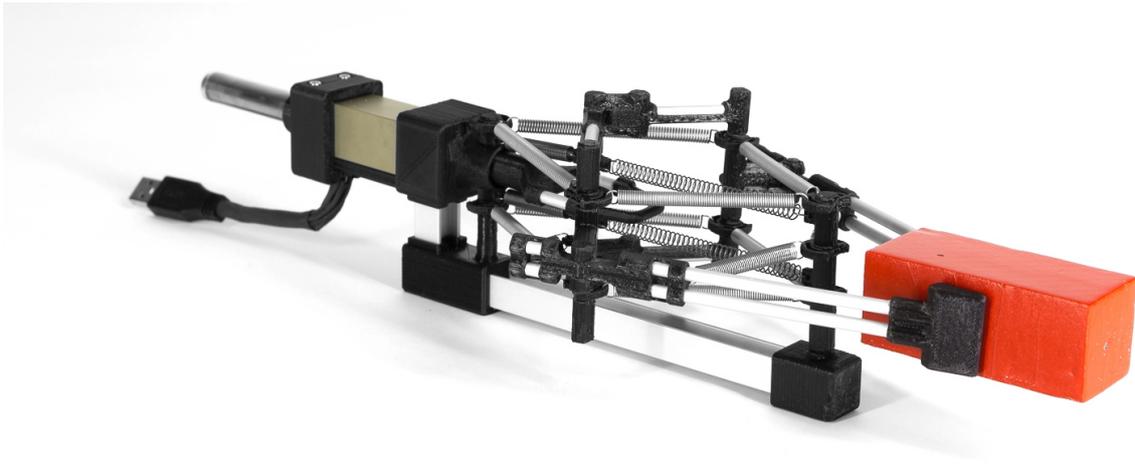


Abbildung 5.22: Tensegrity-Greifer mit Linearantrieb.

Rotatorischer Antrieb

Eine weitere umgesetzte Variante ist ein rotatorischer Antrieb. Ein Schrittmotor (QSH4218-35-026 Trinamic) wird an Knoten ① des Funktionsmusters montiert. Auf der Welle des Schrittmotors befindet sich eine Spule, auf welcher zwei Seile aufgewickelt sind. Wenn sich der Motor dreht, werden jeweils ein Seil auf- und ein Seil abgewickelt. Beide Seile sind mit dem Verbindungsstück, welches sich um Knoten ④ befindet, befestigt. Dabei ist eines der Seile direkt mit Verbindungsstück verbunden. Das zweite Seil wird über eine Umlenkrolle an Knoten ② geführt und dann mit dem Verbindungsstück verbunden. Die Seile haben eine Vorspannung, sodass das Aufwickeln eines Seiles (nahezu) zeitgleich zu einer Bewegung des Verbindungsstückes führt. Ein schematischer Aufbau befindet sich in Abbildung 5.23.

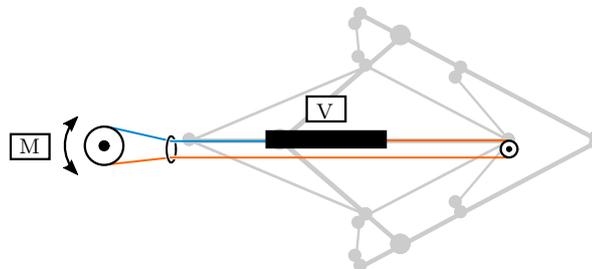


Abbildung 5.23: Schematischer Aufbau des rotatorischen Antriebs. Auf Motor mit Spule (M) werden zwei Seile aufgewickelt welche direkt und indirekt über Umlenkrolle mit Verbindungsstück (V) um Knoten ④ verbunden sind.

Das Verbindungsstück ist anders aufgebaut, als beim linearen Antrieb. Um Verdrehungen zu vermeiden, ist es in die Aluminiumstäbe von Knoten ④ integriert. Da die Ankopplung zwischen Verbindungsstück und Spule mit Seilen erfolgt und weil der Motor im ausgeschalteten Zustand gedreht werden kann, bleibt die Nachgiebigkeit des Tensegrity-Greifers erhalten.

Als Grundlage für den Aufbau des Greifers wurde eine Vorgängerversion des Funktionsmusters verwendet, welches auf beiden Seiten des Greifers Segment 1 hat (vergleiche Version in Abbildung C.2). Abbildung 5.24 zeigt ein Foto des aufgebauten Funktionsmusters mit rotatorischem Antrieb.

Für die Ansteuerung des Motors befinden sich ein Netzteil, ein Mikrocontroller (Arduino Uno Rev. 3) und Taster zur Bedienung des Greifers in einer Box, an welche der Greifer per USB angeschlossen wird.



Abbildung 5.24: Tensegrity-Greifer mit rotatorischem Antrieb.

Vergleich der Antriebe

Mit beiden Antrieben ist es möglich den Tensegrity-Greifer zu Öffnen und zu Schließen. Die Nachgiebigkeit des Tensegrity-Greifers bleibt erhalten. Die Antriebe schränken das Umschlagen in die jeweils andere Gleichgewichtskonfiguration nicht ein. In den beiden stabilen Gleichgewichtskonfigurationen können die Antriebe ausgeschaltet werden. Somit erfüllen beide Antriebe alle Anforderungen, welche am Anfang dieses Abschnittes definiert wurden.

Das Funktionsmuster ohne Antrieb hat eine Masse von 198 g. Mit linearem Antrieb wiegt es 347 g und mit rotatorischem Antrieb 386 g. Somit sind beide angetriebenen Funktionsmuster im Vergleich zum Funktionsmuster ohne Antrieb fast doppelt so schwer.

Bei dem rotatorischen Antrieb ist der Aufbau aufwändiger, da eine ausreichende Seilspannung erzielt werden muss. Insgesamt hat sich die Variante mit dem linearen Antrieb als robuster erwiesen.

5.2.5 Miniaturisierung des Greifers

Für ausgewählte Anwendungen in der Robotik (siehe Abschnitt 2.1.3) ist es wichtig, dass nachgiebige Tensegrity-Greifer kleiner sind, als das in den obigen Abschnitten präsentierte Funktionsmuster. Um zu untersuchen, ob es möglich ist, eine verkleinerte Version des Tensegrity-Greifers aufzubauen, wird zunächst angestrebt die Längen der Segmente mit hoher Steifigkeit zu halbieren, [Roe16].

Für eine verkleinerte Version sollte die Anzahl der Einzelteile, aus denen der Greifer aufgebaut wird, reduziert werden, um den Montageaufwand zu reduzieren. Für erste Untersuchungen wird zunächst nur die zugrundeliegende Tensegrity-Struktur betrachtet. Die Greifarme können mit ähnlichen Methoden ergänzt werden.

Der Aufbau der Tensegrity-Struktur erfolgt wieder in verschiedenen Ebenen, wie in Abschnitt 5.2.3 beschrieben. Die Änderung, die in diesem Abschnitt im Vergleich zu Abbildung 5.13 durchgeführt wird, ist, dass ein vollständiger Rahmen um die Struktur, bestehend aus Knoten ① und ② sowie Segment 1, gebaut wird. Das heißt, Segment 1 wird, wie alle anderen Segmente auch, verdoppelt. Somit kann eine

höhere Stabilität erreicht werden.

Für Segment 1 und alle Knoten werden wieder Aluminiumstäbe mit einem Durchmesser von 4 mm verwendet.

Die bisher verwendeten Zugfedern aus Stahl sind nicht geeignet für einen verkleinerten Aufbau, denn im Modell sind 12 Zugfedern enthalten. Die Anzahl der Einzelteile des Greifers kann reduziert werden, indem weniger einzelne Zugsegmente verwendet werden. Dies kann realisiert werden, indem die Zugsegmente, welche sich in einer Ebene befinden, zu einem Segment verbunden werden. Um dies zu erreichen, werden die Zugfedern aus Stahl durch Segmente aus Silikon - Elastomer ersetzt. Segment 4, 5, 6 und 7 sowie Segment 8 und 9 können zu je einem Bauteil kombiniert werden. Die verschiedenen Steifigkeiten der Zugsegmente können durch verschiedenen Querschnitte der Silikonfedern erreicht werden. Die Silikonfedern werden in gedruckte Gussformen gegossen. Verschiedene Varianten (Anfangslängen und Querschnitte) für die zusammengefassten Silikonfedern sowie die dafür hergestellten Gussformen sind in Abbildung 5.25 dargestellt. Die Eigenschaften der Silikonfedern, Materialzusammensetzung, Anfangslängen und Querschnitte, werden experimentell bestimmt, sodass die Tensegrity-Struktur zwei stabile Gleichgewichtskonfigurationen hat.



Abbildung 5.25: Gussformen für Silikonfedern und Silikonfedern mit unterschiedlichen Anfangslängen und Querschnitten.

Durch den Einsatz von Silikonfedern werden keine separaten Federhalter mehr benötigt, denn diese können direkt an die Federn gegossen werden. Eine Umsetzung davon ist bereits in Abbildung 5.25 dargestellt. Damit sich die Silikonfedern auf den Aluminiumstäben drehen können, werden in die Silikonfedern gedruckte Hülsen (Material: PLA) eingesetzt. Somit wird die Reibung in den Gelenken verringert, siehe rechts in Abbildung 5.26.

In einem weiteren Schritt kann der Aufbau der Tensegrity-Struktur schmaler gestaltet werden, indem die beiden verschiedenen Silikonfedern zu einer zusammengefügt werden, siehe Abbildung 5.26. Dann liegen alle Zugsegmente von Topologie C in einer Ebene. Für die räumliche Stabilität des Modells werden diese Silikonfedern weiterhin doppelt ausgeführt.

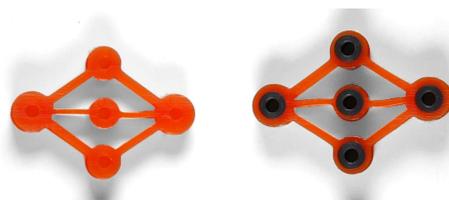


Abbildung 5.26: Silikonfeder ohne (links) und mit (rechts) Hülse.

In einem verkleinerten Aufbau soll auch das Gelenk zwischen Segment 2 und 3 vereinfacht werden:

Variante 1 Abbildung 5.27 Mitte. Segment 2 und 3 werden nebeneinander an Knoten ④ angebracht. Dadurch laufen sie nicht in der gleichen Ebene, aber die Verbindung zwischen Knoten ④ und Segment 2 wird vereinfacht.

Variante 2 Abbildung 5.27 Links. Mittels eines 3D-Druckers, welcher zwei Extruder hat, können Drucke mit verschiedenen Materialien ausgeführt werden. Die Segmente werden weiterhin mit dem Material PLA gedruckt. Das Gelenk zwischen Segment 2 und 3 wird in dieser Variante aus einem flexiblen PLA gedruckt (rosa in der Abbildung). Dadurch sind Segment 2 und 3 ein zusammengehöriges Bauteil, welches nicht montiert werden muss. Allerdings ist die Dimensionierung dieses Verbindungsstückes mit einem großen Aufwand verbunden, wenn die Vermeidung eines möglichen Ausbrechens mit berücksichtigt wird. Diese Variante wird deshalb nicht weiter verfolgt.

Variante 3 Abbildung 5.27 Rechts. Auch in dieser Variante werden Segment 2 und 3 als ein zusammenhängendes Bauteil hergestellt. Die Segmente wurden so konstruiert, dass ein Gelenkteil das andere mit ausreichend radialem und axialem Spiel umschließt. Im Anschluss werden die beiden Segmente mit dem Gelenk zusammen gedruckt (Material: PLA). Somit wird das Gelenk bereits montiert gedruckt und muss nicht im Nachhinein montiert werden. Außerdem wird die Breite des Modells im Vergleich zu Variante 1 reduziert. Es wurden Maße für das notwendige Spiel im Gelenk gefunden, sodass diese Art der Gelenke funktionstüchtig ist.

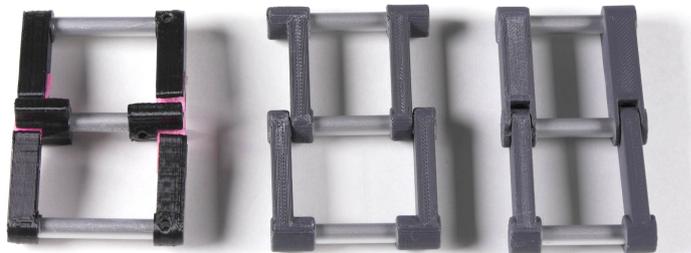


Abbildung 5.27: Drei verschiedene Variante für das Gelenk zwischen Segment 2 und 3. Links: Gelenk aus flexiblem PLA, nur ein Bauteil; Mitte: Zwei separate Bauteile, Anordnung der Segmente nebeneinander; Rechts: Ineinander gedruckte Segmente, nur ein Bauteil.

Sowohl mit Variante 1 als auch mit Variante 3 wurden Funktionsmuster aufgebaut. Das Modell hat eine Länge von 70 mm und eine Breite von circa 25 mm. Segment 2 und 3 haben eine Länge von jeweils 30 mm. In Abbildung 5.28 ist das Modell in beiden Gleichgewichtskonfigurationen abgebildet.

Diese Tests zeigen, dass es möglich ist, eine verkleinerte Version der dem Tensegrity-Greifer zugrundeliegenden Tensegrity-Struktur aufzubauen. Für einen Einsatz in der Praxis eignet sich das hier verwendete Silikon nicht, da es nicht langzeitstabil ist. Um ein geeignetes elastisches Material für die Zugsegmente zu finden, müssen weitere Untersuchungen durchgeführt werden. Dieser Test hat gezeigt, dass es möglich ist, alle Zugsegmente als ein Bauteil herzustellen, sodass keine Montage notwendig ist und sodass ein schmaler Aufbau möglich ist, da sich alle Segmente in einer Ebene befinden.



Abbildung 5.28: Verkleinerte Version der dem Tensegrity-Greifer zugrundeliegenden Tensegrity-Struktur (Topologie C) in Gleichgewichtskonfiguration I und II.

5.3 Weitere mögliche Tensegrity-Greifer

In diesem Abschnitt werden weitere Tensegrity-Greifer vorgestellt. Dies sind teilweise Modifikationen des im obigen Abschnitt 5.2 vorgestellten Tensegrity-Greifers als auch Greifer, welche auf anderen Topologien basieren.

5.3.1 3D-Tensegrity-Greifer

Der 3D-Tensegrity-Greifer basiert auf dem Greifer aus dem vorhergehenden Abschnitt 5.2. Zunächst wird nur die zugrundeliegende Tensegrity-Struktur ohne Greifarme betrachtet.

Die Segmente 2, 4 und 5 sind in Topologie C an der x -Achse gespiegelt erneut vorhanden - als Segment 3, 6 und 7, sie haben um Segment 1 einen Winkel von 180° zueinander. In der neuen Topologie C_3 werden diese Segmente dreimal im Winkel von 120° um Segment 1 angeordnet. Dadurch ergibt sich eine räumliche Tensegrity-Struktur. Wenn die Segmentparameter von Segment 4 und 5 beibehalten werden, dann müssen nur die Steifigkeiten von Segment 8 und 9 angepasst werden, mit der folgenden Formel

$$k_{8neu} = \frac{3}{2} k_8 \quad k_{9neu} = \frac{3}{2} k_9.$$

Damit bleibt die Lage der Gleichgewichtskonfiguration gleich, abgesehen davon, dass Segment 2 und 3 nun einen Winkel von 120° anstatt 180° zueinander haben. In Abbildung 5.29 sind Topologie C und Topologie C_3 in einer Gleichgewichtskonfiguration dargestellt.

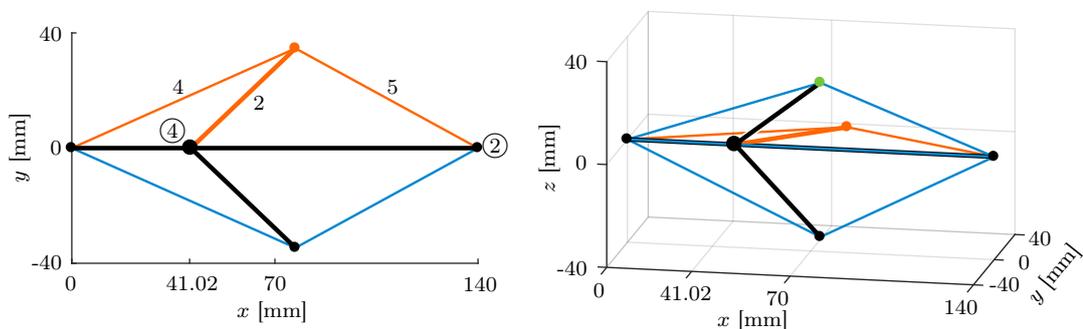


Abbildung 5.29: Tensegrity-Struktur basierend auf Topologie C (links) und Topologie C_3 (rechts) in einer Gleichgewichtskonfiguration.

Die Greifarme können genauso konstruiert werden, wie bei dem zugrundeliegenden Greifer aus dem vorherigen Abschnitt 5.2. Es ergibt sich ein Dreifingergreifer. Eine schematische Darstellung des Greifers im geschlossenen und im geöffneten Zustand zeigt Abbildung 5.30.

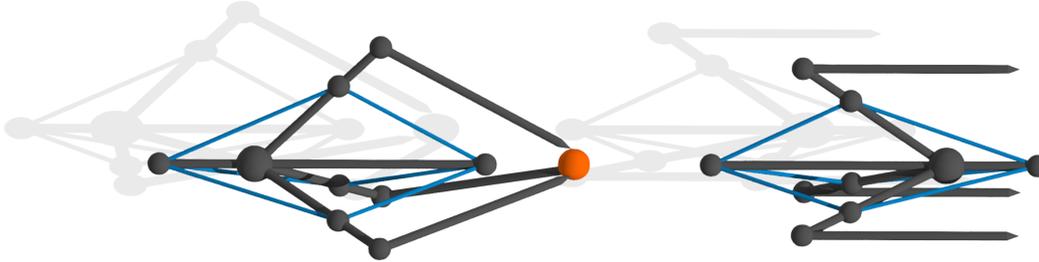


Abbildung 5.30: Schematische Darstellung des 3D-Tensegrity-Greifers im geschlossenen (mit gegriffenem Objekt) und im geöffneten Zustand. Die zusätzlichen Segmente, welche für die Winkeländerung der Greifarme nötig sind, werden hier nicht gezeigt.

Da sich in dieser Simulation Knoten ④ auf Segment 1 bewegt, sind Änderungen notwendig, um den Greifer aufzubauen. Beim zuvor vorgestellten Tensegrity-Greifer wurde dies durch einen Aufbau in verschiedenen Ebenen realisiert (siehe Abbildung 5.13). Dies ist hier nicht möglich, da die Topologie bereits dreidimensional ist. Aus diesem Grund wurde für den Aufbau eines Funktionsmusters Knoten ④ in drei Knoten aufgeteilt, welche kreisförmig um Segment 1 angeordnet sind. Mit jedem der drei neuen Knoten ist eines der Segmente mit hoher Steifigkeit, welche sich vorher an Knoten ④ befanden, verbunden. Damit der Aufbau weiterhin symmetrisch ist, werden Segment 8 und 9 in drei parallele Segmente aufgeteilt, wobei jedes der Segmente statt zu Knoten ④ zu je einem der drei neuen Knoten führt. Damit die Segmente 8 und 9 weiterhin parallel zu Segment 1 sind, werden Knoten ① und ② genauso wie Knoten ④ in drei Knoten aufgeteilt. Die neuen Knoten sind so, wie sie im Funktionsmuster verwendet werden, in Abbildung 5.31 abgebildet.

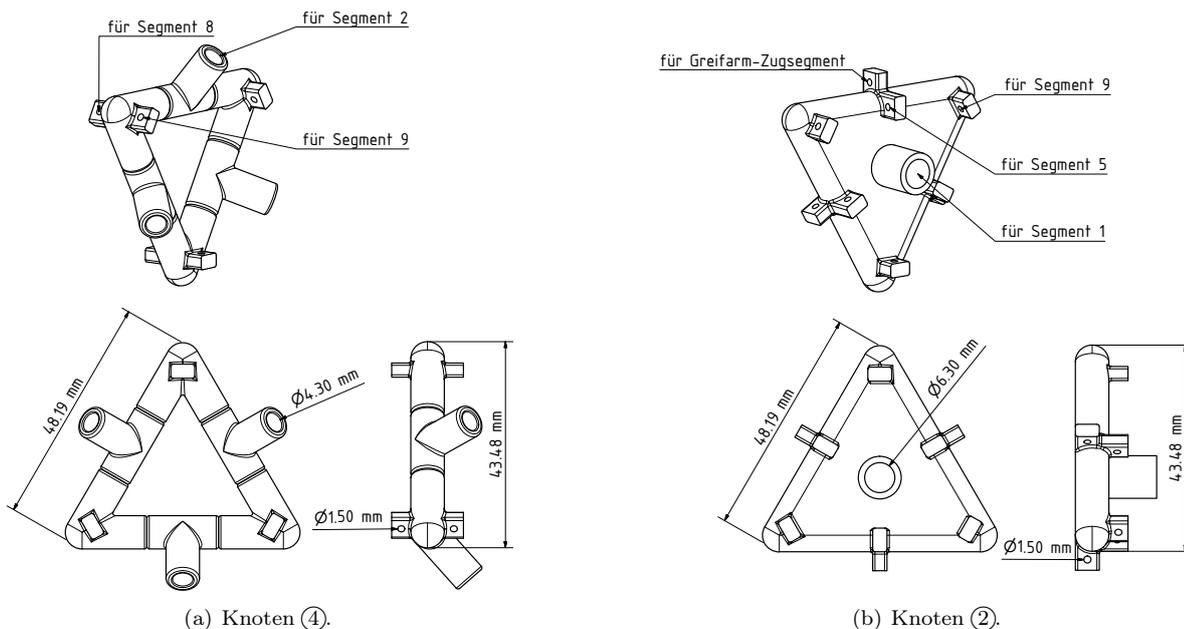


Abbildung 5.31: Veränderung von Knoten ④ und ② für den Aufbau eines Funktionsmusters.

Durch die Veränderung der Knoten ändern sich die benötigten Segmentparameter, um ähnliche Gleichgewichtskonfigurationen, wie bei dem in Abschnitt 5.2 vorgestellten Greifer zu erhalten. Die Segmentparameter können mit dem FE-Formfindungsalgorithmus (Abschnitt 2.2.2) und dem Algorithmus für die Parameterfindung (Kapitel 4) ermittelt werden. Zur einfacheren Bestimmung der Segmentparameter können zweidimensionale Ersatz-Strukturen verwendet werden. Diese Ersatzstrukturen und die verwendeten Segmentparameter befinden sich im Anhang in Abschnitt C.2. Es wurde ein Funktionsmuster des Greifers aufgebaut, siehe Abbildung 5.32.



Abbildung 5.32: Funktionsmuster des 3D-Tensegrity-Greifers.

5.3.2 Tensegrity-Greifer der Klasse 1

Die in den obigen Abschnitten vorgestellten Tensegrity-Greifer sind Klasse k Tensegrity-Strukturen. In diesem Abschnitt werden Tensegrity-Greifer der Klasse 1 (siehe Abschnitt 2.1) entwickelt. Zunächst wird die Herangehensweise für die Entwicklung vorgestellt. Im Anschluss werden zwei Klasse 1 Tensegrity-Greifer, von welchen Funktionsmuster aufgebaut wurden, vorgestellt.

Konzept

Damit der Tensegrity-Greifer eine einfache Struktur hat, soll er aus möglichst wenigen Segmenten mit hoher Steifigkeit bestehen. Damit es eine Klasse 1 Tensegrity-Struktur ist, dürfen die Segmente mit hoher Steifigkeit nicht direkt miteinander verbunden werden. Im Folgenden werden vier aufeinander aufbauende Konzepte für Tensegrity-Greifer der Klasse 1 vorgestellt. Illustrationen zu den Konzepten befinden sich

in Abbildung 5.33. Bei den Konzepten werden noch keine konkreten Segmentparameter angegeben. Es werden vorerst nur Topologien und deren möglichen (bei geeigneter Wahl der Segmentparameter) Gleichgewichtskonfigurationen beschrieben.

Variante A Die kleinste mögliche Tensegrity-Struktur besteht aus zwei Segmenten mit hoher Steifigkeit und vier Segmenten mit geringer Steifigkeit. Diese Topologie wird verwendet und es wird zunächst von symmetrischen Segmentparametern ausgegangen (alle Segmente mit hoher und geringer Steifigkeit haben jeweils identische Parameter). Durch Hinzufügen von Greifarmen an Knoten ② und ③ kann daraus ein Greifer entwickelt werden. Durch die symmetrischen Segmentparameter liegt eine zweite Gleichgewichtskonfiguration vor, wenn sich Segment 2 um 180° dreht. Dann ist der Greifer geöffnet. Somit ist es möglich einen Tensegrity-Greifer aus zwei Segmenten mit hoher Steifigkeit mit nur zwei unterschiedlichen Segmentarten zu designen. Da sich Segment 2 um 180° drehen muss, um den Greifer zu Öffnen oder zu schließen, ist dieser Greifer jedoch nicht praktikabel.

Variante B Dieser Greifer basiert auf Variante A. Im Unterschied zu Variante A werden die Segmentparameter in dieser Variante nicht identisch gewählt. Die Segmente mit hoher Steifigkeit haben unterschiedlichen Längen und durch unterschiedliche Parameter bei den Segmenten mit geringer Steifigkeit kann eine Schrägstellung von Segment 2 erreicht werden. Bei einem Wechsel in die andere Gleichgewichtskonfiguration dreht sich Segment 2 weniger als 180° . Die Greifarme werden, wie bei Variante A, an Knoten ② und ③ angebracht. Es muss nur ein Segment bewegt werden und der Greifer öffnet beziehungsweise schließt sich. Ein Nachteil dieser Variante ist, dass ein Greifarm immer raumfest verbleibt und sich nur ein Greifarm bewegt.

Variante C In Variante C wird die Topologie aus Variante B zwei Mal verwendet. Segment 2 und 3 sind nicht direkt miteinander verbunden. Wenn nur Segment 2 angetrieben wird, dann verändert sich die Lage von Segment 3 nicht, und andersherum. Die Greifarme können an Knoten ③ und ⑤ befestigt werden. Durch die Unabhängigkeit von Segment 2 und Segment 3 gibt es zwei verschiedene Öffnungsstufen: Wenn nur ein Segment in die andere Gleichgewichtskonfiguration bewegt wird, dann ist der Greifer einseitig geöffnet, ähnlich wie bei Variante B. Es kann aber zusätzlich das zweite Segment in die andere Gleichgewichtskonfiguration bewegt werden und der Greifer ist vollständig geöffnet. Die Vorteile dieser Variante sind die zwei möglichen Öffnungen des Greifers und dass beide Greifarme bewegt werden können. Ein Nachteil ist, dass beide Segmente separat voneinander angetrieben werden müssen.

Variante D Um den Nachteil von Variante C (zwei Antriebe) auszugleichen, werden die Segmente mit geringer Steifigkeit anders angeordnet. Dadurch sind Segment 2 und 3 durch Segment 5 miteinander verbunden. Die Greifarme können genauso wie in Variante C angebracht werden. Es genügt, eines der beiden Segmente anzutreiben und beide Segmente bewegen sich in die andere Gleichgewichtskonfiguration⁴. Dadurch ist das Greifen eines Objektes von beiden Seiten mit nur einem Antrieb möglich.

⁴Ein Nachweis dieser Eigenschaft wird später in diesem Abschnitt mittels der Bewegungsgleichungen für diese Tensegrity-Struktur erbracht.

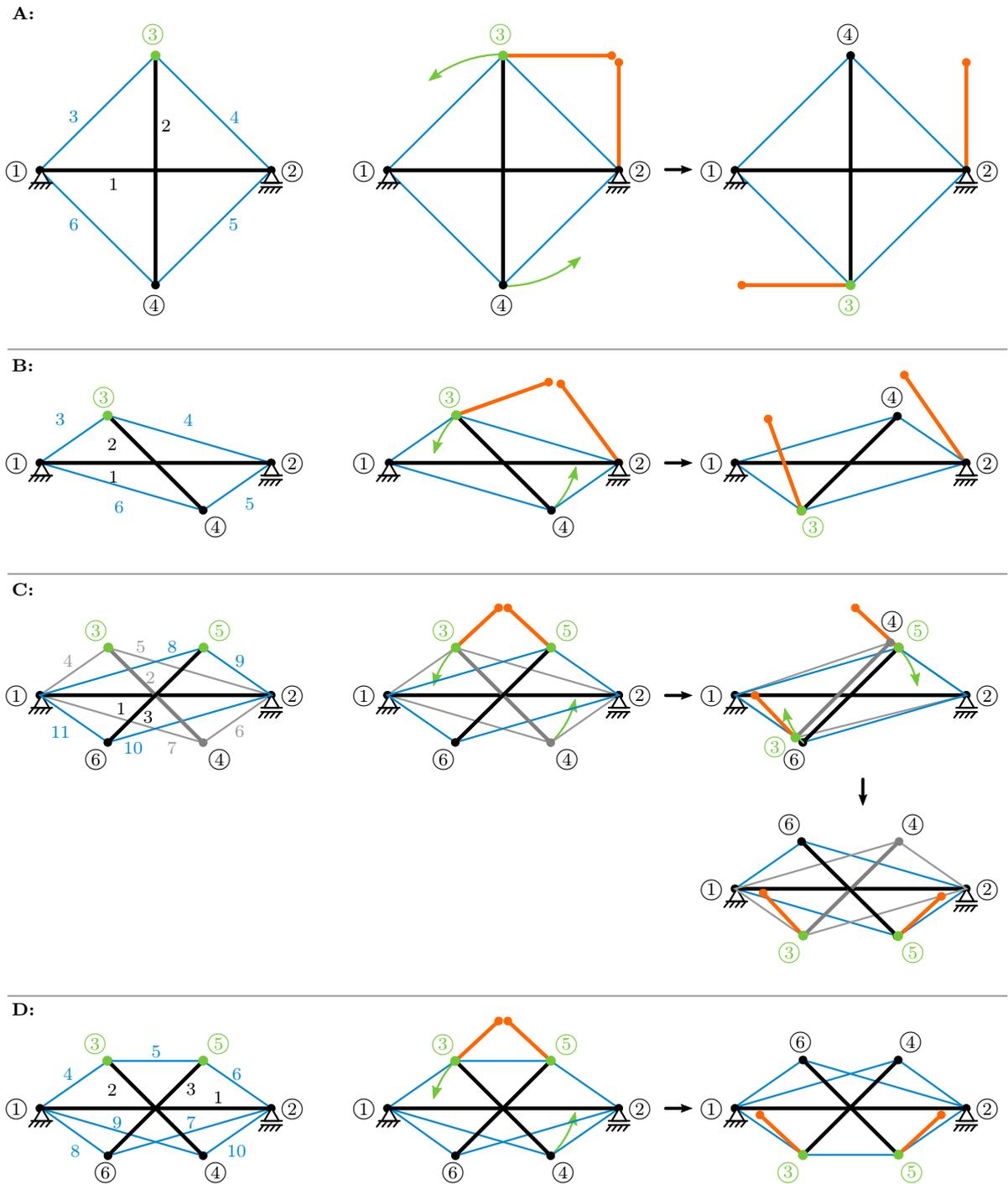


Abbildung 5.33: Verschiedene Konzepte für Tensegrity-Greifer der Klasse 1. Erste Spalte: Bezeichnungen. Zweite Spalte: Gleichgewichtskonfiguration mit Greifarmen, geschlossener Greifer. Dritte Spalte: weitere Gleichgewichtskonfiguration mit gleichen Greifarmen, offener Greifer.

Da sowohl Variante C als auch Variante D positive Eigenschaften für einen Tensegrity-Greifer haben, werden diese beiden Konzepte im Folgenden genauer betrachtet. Es werden geeignete Segmentparameter bestimmt, die Topologie wird weiter untersucht und es werden Funktionsmuster der Tensegrity-Greifer vorgestellt.

Variante C

Die verwendete Topologie basiert auf der Topologie von Variante B. Aus diesem Grund wird zunächst diese vereinfachte Topologie betrachtet. In Hinblick auf einen Aufbau der Tensegrity-Struktur werden in Variante B an Knoten ③ und ④ Federhalter hinzugefügt. Die sich daraus ergebende Topologie E ist in Abbildung A.6 dargestellt. Die dort angegebenen Segmentparameter wurden nach den folgenden Randbedingungen mit dem Algorithmus für die Parameterfindung aus Kapitel 4 bestimmt.

- Segment 2 kann sich um seinen Schwerpunkt um 360° drehen, ohne dass dabei Knoten ① oder ② überlaufen werden.
- Es gibt zwei stabile Gleichgewichtskonfigurationen.
- Segment 1 hat eine Länge von 140 mm, wie bei dem ersten Tensegrity-Greifer.
- Der Winkel φ_2 liegt in einer der stabilen Gleichgewichtskonfigurationen zwischen 110° und 160° .
- Die Segmente mit hoher Steifigkeit sind Drucksegmente und die Segmente mit geringer Steifigkeit sind Zugsegmente.

In Beispiel 5.2 werden dynamische Untersuchungen mit Topologie E durchgeführt.

Der Greifarm wird an Knoten ③ so angebracht, dass die Greiferspitze bei 70 mm auf der x-Achse liegt. Damit berühren sich die Greiferspitzen bei Verdopplung der Struktur. Wenn die Greifarme hinzugefügt werden, gibt es eine weitere Anforderung, welche bei der Wahl der Segmentparameter beachtet werden muss:

- Die Greiferspitzen müssen im geöffneten Zustand (Gleichgewichtskonfiguration II) eine y-Position über den Segmenten 6 und 11 haben. Sonst behindern sich Greiferspitze und Segment.

Es wird ein Winkel zwischen Segment 2 und Greifarm von 80° gewählt und eine Länge des Greifarms von circa 38.5 mm. Mit diesen Parametern für die Greifarme und den in Abbildung A.6 angegebenen Segmentparametern sind alle fünf Anforderungen erfüllt. In Abbildung 5.34 sind drei der vier stabilen Gleichgewichtskonfigurationen, die sich mit den gewählten Parametern ergeben, dargestellt.

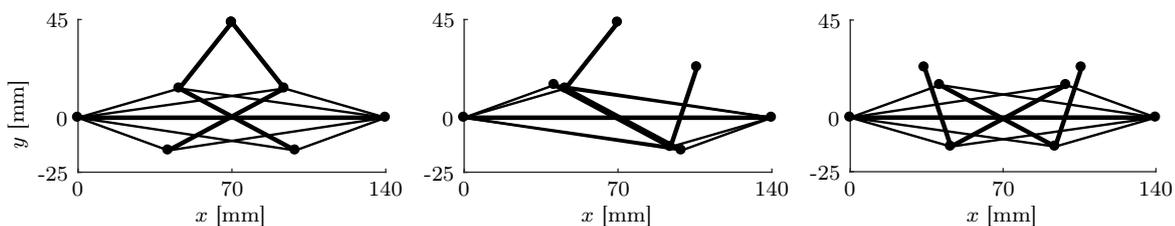


Abbildung 5.34: Drei der vier stabilen Gleichgewichtskonfigurationen des Greifers aus Variante C. Die vierte Gleichgewichtskonfiguration entspricht der mittleren, welche bei $x = 70$ mm gespiegelt wurde. Die Federhalter wurden der Übersichtlichkeit halber nicht eingezeichnet.

Von dem Tensegrity-Greifer, welcher auf der verdoppelten Topologie E basiert, wurde ein Funktionsmuster realisiert. Bei dem Funktionsmuster wird das gleiche Vorgehen angewendet, wie bei dem zuerst vorgestellten Tensegrity-Greifer, siehe Abschnitt 5.2.3. Da die Topologie planar ist und es eine Überschneidung von Segment 1 und 2 gibt, muss der Tensegrity-Greifer aus mehreren Ebenen aufgebaut werden. Außerdem werden alle Segmente verdoppelt um eine räumliche Stabilität zu erhalten. Eine schematische Anordnung

der Segmente ist in Abbildung 5.35 dargestellt. Dabei werden zur besseren Veranschaulichung die Greifarme nicht abgebildet.

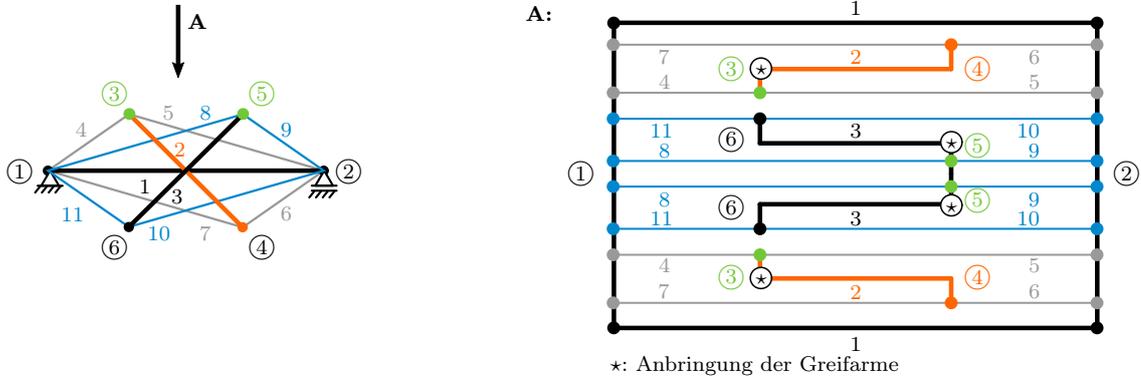


Abbildung 5.35: Anordnung der Segmente im Funktionsmuster - Ansicht von oben.

Die Anbringung und Konstruktion der Greifarme ist in Abbildung 5.36 dargestellt. Dort wurden zur besseren Veranschaulichung die Zugsegmente nicht gezeichnet.



Abbildung 5.36: Anordnung der Segmente mit hoher Steifigkeit und der Greifarme im Funktionsmuster, beim geschlossenen und geöffneten Greifer. Blau: Knoten ③ und ⑤; Orange: Greifarme.

Für die Segmente mit hoher Steifigkeit und die Knoten werden Aluminiumstäbe mit einem Durchmesser von 4 mm verwendet. Für die Segmente mit geringer Steifigkeit werden Zugfedern aus Stahl verwendet (da alle diese Segmente in den Gleichgewichtskonfigurationen auf Zug beansprucht sind). Da alle Zugsegmente doppelt vorkommen und in Knoten ① und ② die Federhalter (Länge 5 mm) nicht im Modell enthalten sind, müssen diese bei der Berechnung von Anfangslänge und Steifigkeit der Zugfedern berücksichtigt werden. Die Parameter für die Zugfedern berechnen sich mit:

$$k_{f \text{ verbaut}} = \frac{1}{2}k_f \quad l_{0f \text{ verbaut}} = l_{0f} - 5 \text{ mm}. \quad (5.29)$$

Die Befestigungen der Zugfedern und die Verbindungen der Segmente werden per 3D-Druck hergestellt (Material: PLA). Diese Bauteile sind in Abbildung 5.36 dargestellt. Der äußere Rahmen des Funktionsmusters hat eine Breite von 105 mm und eine Länge von 140 mm. Fotos des Funktionsmusters im geschlossenen, halb-offenen und offenen Zustand befinden sich in Abbildung 5.37.

Es wurde gezeigt, dass Variante C ein möglicher Tensegrity-Greifer der Klasse 1 ist. Der Greifer kann beide Greifarme getrennt voneinander bewegen, wodurch eine einseitige Öffnung des Greifers möglich ist.



Abbildung 5.37: Tensegrity-Greifer der Klasse 1 - Variante C. Von links nach rechts: geschlossen, einseitig geöffnet, geöffnet.

Es ist aber auch eine beidseitige Öffnung des Greifers möglich. Antriebskonzepte werden für diesen Greifer nicht weiter untersucht. Da beide Greifarme unabhängig voneinander sind, müssen die Segmente 2 und 3 für einen Wechsel zwischen den Gleichgewichtskonfigurationen getrennt voneinander angesteuert werden.

Variante D

Die Topologie, die diesem Greifer zugrunde liegt ist Topologie D (siehe Abbildung A.4). Diese Topologie wurde bereits in verschiedenen Kapiteln dieser Arbeit untersucht, siehe Abschnitt 3.4 und Abschnitt 4.3. In Hinblick auf einen Aufbau dieser Tensegrity-Struktur als ein Funktionsmuster werden Federhalter an den Knoten ③ bis ⑥ hinzugefügt. Damit ergibt sich Topologie D₂, siehe Abbildung A.5. Die Segmentparameter wurden so bestimmt, dass die gleichen Eigenschaften wie bei Variante C erfüllt sind (siehe vorherigen Abschnitt). Die gewählten Segmentparameter sind in Abbildung A.5 aufgelistet. Die Greifarme werden mit einem Winkel von 70° zum jeweiligen Segment und einer Länge von 46 mm festgelegt. Die sich ergebenden Gleichgewichtskonfigurationen, welche dem geöffneten und dem geschlossenen Greifer entsprechen, sind in Abbildung 5.38 dargestellt.

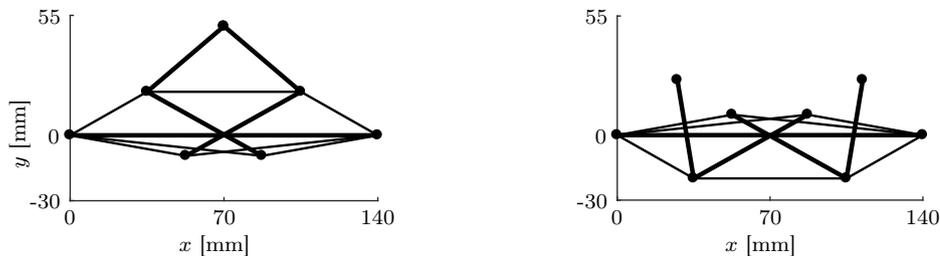


Abbildung 5.38: Die stabilen Gleichgewichtskonfigurationen des Greifers aus Variante D. Die Federhalter wurden der Übersichtlichkeit halber nicht eingezeichnet.

In der Vorstellung des Konzeptes für diesen Tensegrity-Greifer wurde angenommen, dass mit nur einer äußeren Kraft beide Segmente bewegt werden können und ein Wechsel zwischen den Gleichgewichtskonfigurationen stattfindet. Dies resultiert aus der Verbindung der beiden Segmente 2 und 3 durch Segment 5. Diese Vermutung wird im Folgenden mit Hilfe der Bewegungsgleichungen (5.25) untersucht.

Die Anfangsposition sei Gleichgewichtskonfiguration I (siehe Abbildung A.5), die Anfangsgeschwindigkeit sei Null. Es wird eine Kraft an Knoten ③ in negative y-Richtung aufgebracht:

$$F_1 := (0, -F)^\top \quad r_{F1} := (x_2, x_2)^\top + \frac{1}{2}l_2(\cos(\varphi_2), \sin(\varphi_2))^\top. \quad (5.30)$$

Dabei sei $F = F(t)$ wie in (5.27) definiert. Exemplarisch werden die konstanten als $F_{\max} := 4 \text{ N}$ und $t_{\max} := 1 \text{ s}$ gesetzt. Der Verlauf der Kraft F ist oben links in Abbildung 5.39 dargestellt. Die generalisierten

Kräfte ergeben sich aus (5.23) mit (5.30):

$$Q_i = 0 \quad Q_{y_2} = -F \quad Q_{\varphi_2} = -\frac{1}{2}F l_2 \cos(\varphi_2) \quad i \in \{x_2, x_3, y_3, \varphi_3\}.$$

Die Masse der Segmente sei jeweils 50 g und die Dämpfung 0.0002 Ns/mm. Die Bewegungsgleichungen werden, wie am Anfang von Kapitel 5.1.4 beschrieben, gelöst. Die Ergebnisse sind in der zweiten Zeile in Abbildung 5.39 illustriert.

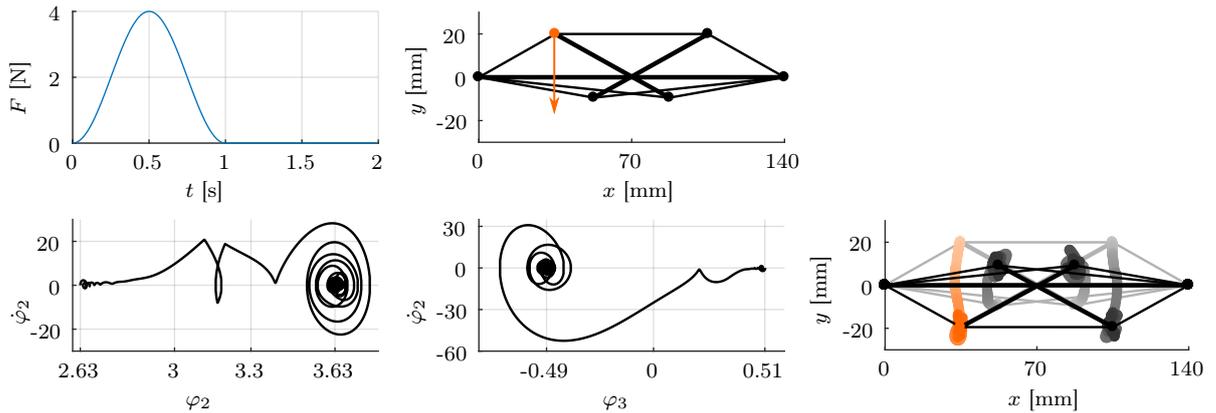


Abbildung 5.39: Oben links: zeitlicher Verlauf der äußeren Kraft. Oben mittig: Angriffspunkt und Richtung der äußeren Kraft. Unten links / mittig: Phasenportrait für φ_2 / φ_3 . Unten rechts: Bewegung der Knoten der Tensegrity-Struktur, von hell nach dunkel. Die Federhalter wurden der Übersicht halber nicht dargestellt.

Die Tensegrity-Struktur wechselt in Gleichgewichtskonfiguration II, obwohl nur eine äußere Kraft an nur einem Knoten aufgebracht wird. Damit ist die Annahme, dass ein zweiseitiges Öffnen des Greifers mit nur einem Antrieb möglich ist, bestätigt.

Auch für diesen Tensegrity-Greifer wurde ein Funktionsmuster realisiert. Wie bei Variante C ist ein Aufbau in verschiedenen Ebenen notwendig, um einerseits die Überschneidung von Segmenten zu verhindern und um andererseits eine räumliche Stabilität sicherzustellen. Der schematische Aufbau ist in Abbildung 5.3.2 illustriert. Zur vereinfachten Darstellung wurden die Greifarme nicht eingezeichnet. In Abbildung 5.3.2 sind die Greifarme für das Funktionsmuster dargestellt.

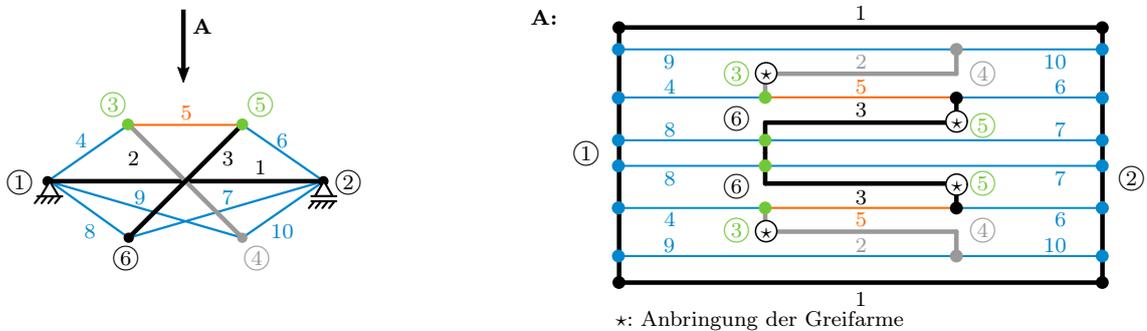


Abbildung 5.40: Anordnung der Segmente im Funktionsmuster - Ansicht von oben.

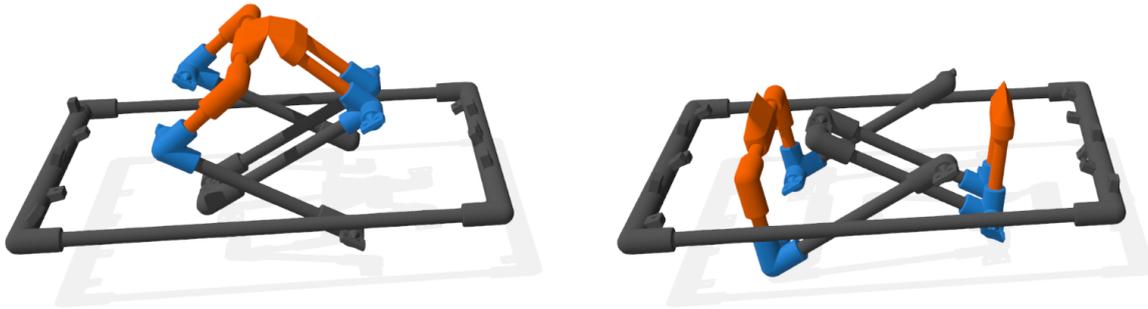


Abbildung 5.41: Konstruktion der Greifarme (orange) an Knoten ③ und ⑤ (blau).

Der Aufbau des Funktionsmusters erfolgt wie bei Variante C aus Aluminiumstäben und gedruckten Verbindungselementen. Die Eigenschaften der verwendeten Segmente mit geringer Steifigkeit berechnen sich wie in (5.29), außer bei $f = 5$. Dort sind an beiden Seiten der Aufhängung keine Federhalter modelliert und somit muss für die Anfangslänge 10 mm statt 5 mm subtrahiert werden.

Der Tensegrity-Greifer hat eine Breite von 100 mm und eine Länge von 140 mm, siehe Abbildung 5.42.

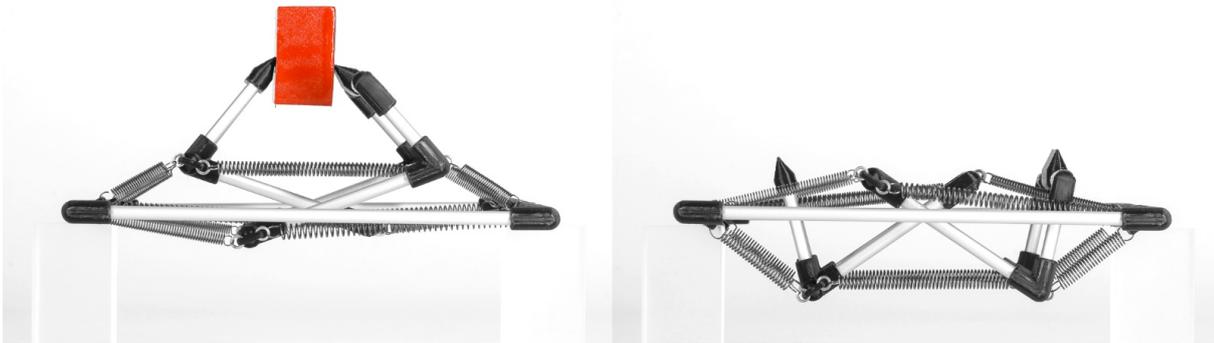


Abbildung 5.42: Tensegrity-Greifer der Klasse 1 - Variante D. Links: Geschlossen; Rechts: Geöffnet.

Es wurde gezeigt, dass Variante D ein möglicher Tensegrity-Greifer der Klasse 1 ist. Mit nur einem Antrieb können beide Greifarme gleichzeitig bewegt werden. Damit ist ein gleichzeitiges Öffnen beziehungsweise Schließen beider Greifarme möglich. Ein möglicher Antrieb würde über eine eingeprägte Kraft an Knoten ③ (wie in Abbildung 5.39) realisierbar sein.

5.4 Anwendung in der Minimal-invasiven Chirurgie

Wie in Abschnitt 2.1.3 beschrieben, gibt es viele Ansätze mobile Roboter zu entwickeln, welche auf Tensegrity-Strukturen basieren. Daher wäre es naheliegend, wenn die Handhabungsaufgaben, welche ein solcher Roboter übernehmen soll, durch Greifer oder Manipulatoren realisiert werden, welche auch auf Tensegrity-Strukturen basieren. Es können Tensegrity-Greifer entwickelt werden, welche sowohl im offenen, als auch im geschlossenen Zustand keine Energiezufuhr benötigen. Solche Greifer können eingesetzt werden, wenn die Zustände *offen* und *geschlossen* jeweils über einen längeren Zeitraum aufrechterhalten werden müssen und der Zustandswechsel vergleichsweise selten stattfindet. Außerdem können Tensegrity-Greifer eine hohe Nachgiebigkeit aufweisen. Dadurch sind sie robust gegenüber Hindernissen und können auch Objekte greifen, welche sich nicht exakt an der erwarteten Position befinden. Tensegrity-Strukturen können bei geeigneter Form- und Parametergebung faltbar ausgelegt werden. Somit ist es möglich Tensegrity-Greifer einzusetzen, die während des Transports nur wenig Platz einnehmen dürfen, beispielsweise in der Raumfahrt. Auch ist dadurch ein Einsatz möglich, wenn der Greifer zunächst durch eine kleine Öffnung bewegt werden muss, bevor der Greifvorgang ausgeführt werden kann, wie zum Beispiel in der Chirurgie. Eine der häufig genannten positiven Eigenschaften von Tensegrity-Strukturen ist ihre Skalierbarkeit. Aus diesem Grund werden in diesem Abschnitt Anwendungen von *kleinen* Tensegrity-Greifern und deren Realisierbarkeit am Beispiel des Einsatzes in der Minimal-invasiven Chirurgie diskutiert. In Abschnitt 5.2.5 wurde bereits eine verkleinerte Version der Tensegrity-Struktur, mit 70 mm Länge und 25 mm Breite technisch umgesetzt.

Kleine Greifwerkzeuge verschiedenster Form und Art werden in der Minimal-invasiven Chirurgie benötigt. Bei der Minimal-invasiven Chirurgie werden durch mehrere kleine Öffnungen im Körper Operationsinstrumente und ein Endoskop eingeführt, womit der Chirurg die Operation durchführen kann. Ein Überblick über den aktuellen Stand bei der Minimal-invasiven Chirurgie befindet sich unter anderem in [Ass06; Dös15, Kapitel 12; Joh08]. Je nachdem, ob die Operation manuell oder mit Hilfe eines Robotersystems ausgeführt wird, unterscheidet sich die Ansteuerung der Instrumente, aber nicht die Konstruktion der Instrumentenspitze. Da es in dieser Arbeit um die Einsatzmöglichkeiten von Tensegrity-Strukturen geht, werden die unterschiedlichen Ansteuerungsvarianten nicht betrachtet. Für verschiedene Greif-Aufgaben während einer Operation gibt es eine Vielzahl unterschiedlicher Operationsinstrumente, siehe Abbildung 5.43.



Abbildung 5.43: Instrumente vom Operationsroboter da Vinci Xi[®].

Aktuelle Operationsinstrumente haben meist einen Schaftdurchmesser von mindestens 8 mm. Es gibt allerdings Bestrebungen noch kleiner zu werden, um die notwendigen Wunden zu verkleinern. Auch für Operationen bei Kindern wären dünnere Instrumente wünschenswert [Bax08, Kapitel 2]. Damit Gewebe gegriffen werden kann, sollten die Greiferbacken eine Länge zwischen 2 mm und 10 mm haben.

Nicht nur wegen der Skalierbarkeit ist der Einsatz von Tensegrity-Greifern in der Minimal-invasiven Chirurgie vielversprechend, sondern auch wegen der Freiheiten in der Wahl der verwendeten Materialien. Es müssen lediglich Materialien für die Segmente gewählt werden, die die erforderliche Steifigkeit haben und dem entsprechenden Zug oder Druck standhalten. Somit können biokompatible Materialien verwendet werden und es können Materialien verwendet werden, die den CT- und MRT-Einsatz nicht einschränken. In Abbildung 5.44 wird anhand einer Simulation dargestellt, wie Tensegrity-Strukturen als Greifer (Links) und als Schere (Rechts) in der Minimal-invasiven Chirurgie verwendet werden können. Dabei wurde sich am Tensegrity-Greifer aus Abschnitt 5.2 orientiert.

Um Tensegrity-Greifer in der Minimal-invasiven Chirurgie verwenden zu können, müssen verschiedene Herausforderungen gemeistert werden. Teilweise sind weitergehende Forschungsarbeiten notwendig. Im Folgenden werden, ohne Anspruch auf Vollständigkeit, Anforderungen an Tensegrity-Greifer formuliert, damit sie in der Minimal-invasiven Chirurgie als Greif-Instrumente verwendet werden können. Sofern bereits vorhanden, werden Lösungsmöglichkeiten oder Forschungsrichtungen gegeben.

Größe und Greifkraft: Wie oben beschrieben sind die Anforderungen an die Größe: Schaftdurchmesser kleiner als 8 mm und Länge einer Greiferbacke zwischen 2 mm und 10 mm, je nach Aufgabe des Greifers. Bezüglich der benötigten Greifkraft gibt es viele unterschiedliche Angaben in der Literatur. In [Her97] wird beschrieben, dass die Kräfte mindestens 10 N bis 20 N betragen müssen, besser 30 N. Dahingehen reichen in [Pic05; Tri17] Kräfte von 0.5 N bis 10 N aus. Laut [Kim15; Oka04] werden für das Nähen von Gewebe Kräfte zwischen 4 N und 5 N benötigt.

Material: An das verwendete Material gibt es verschiedene Anforderungen.

Es gibt zwei Konzepte bei Operationsinstrumenten. Sie werden entweder nur für eine Operation verwendet und danach entsorgt oder sie werden zwischen den Operationen sterilisiert, [Bax08, Kapitel 2]. Beide Verfahren sind gängig. Es muss demnach mindestens die Sterilisierbarkeit während oder direkt nach der Fertigung realisierbar sein.

Die verwendeten Materialien müssen für den Einsatz im menschlichen Körper geeignet sein.

In der Mikrotechnik werden in der Regel Strukturen bis zu einer Größe von 1 mm betrachtet, seltener auch bis 10 mm. Aufgrund der Größenvorgaben für die Operationsinstrumente sind Materialien und Fertigungsverfahren aus der Mikrotechnik bezüglich Realisierbarkeit und Effizienz nicht geeignet.

Fertigungsverfahren und Montage: Die Fertigungsverfahren hängen direkt von den Materialanforderungen ab.

Die Operationsinstrumente müssen für die Serienfertigung geeignet sein. Dafür sollten möglichst wenig Fertigungs- und Montageschritte nötig sein. Am besten wäre ein monolithischer Aufbau. Da Tensegrity-Strukturen vorgespannte Strukturen sind und bisher keine Fertigungsverfahren bekannt sind, mit denen Strukturen mit einer Vorspannung gefertigt werden können, ist dies ein aktuelles Forschungsthema. Eine Möglichkeit für den monolithischen Aufbau wäre spezielle Materialien zu verwenden, welche erst nach einer einmaligen Energiezufuhr ihre endgültige Form annehmen. In diesem Fall könnte die Struktur ohne Vorspannung monolithisch hergestellt werden und nach einer Energiezufuhr entsteht die vorgespannte Tensegrity-Struktur. Forschungsarbeiten zu diesem Thema gibt es unter anderem von [Liu17], siehe

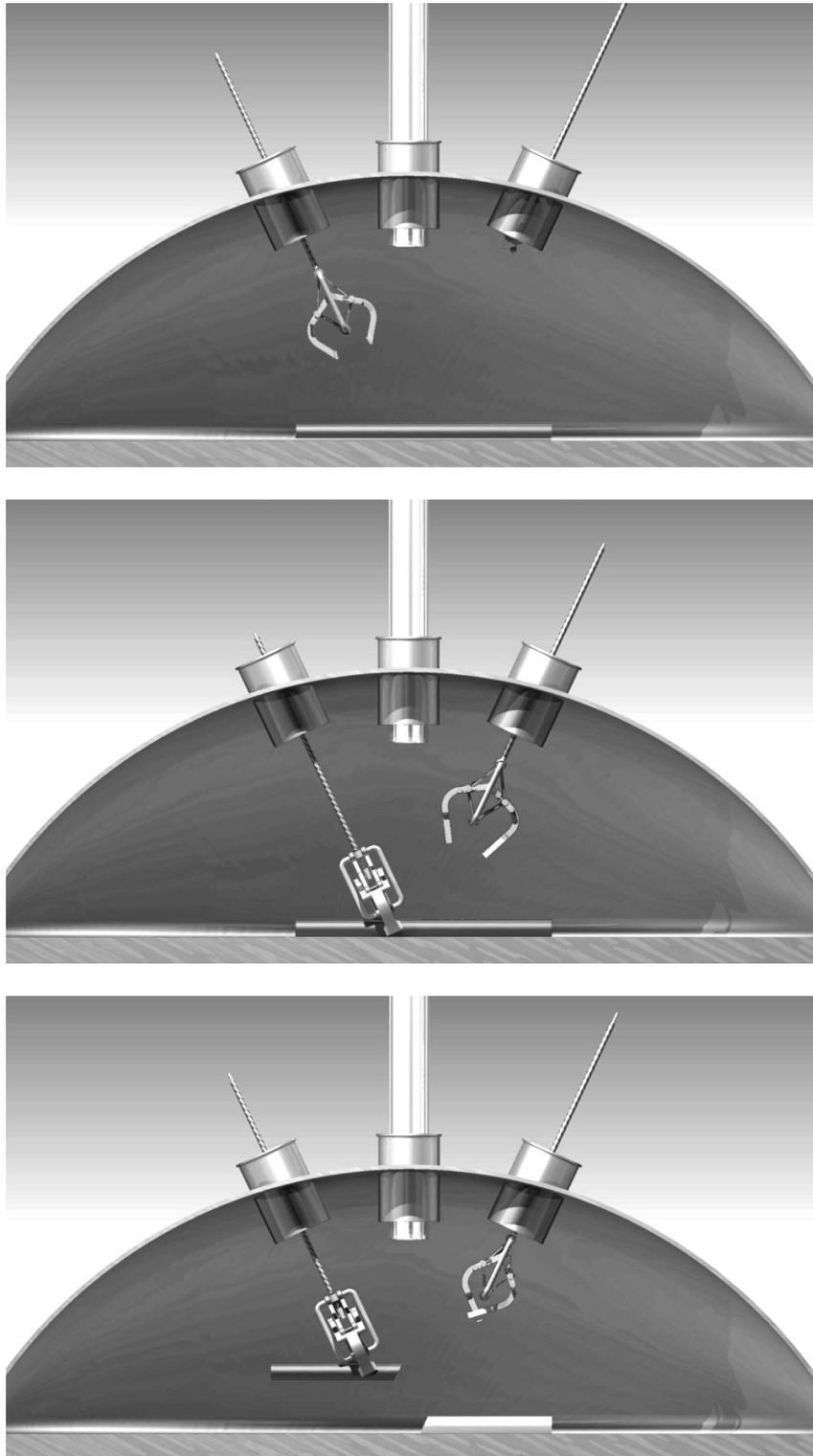


Abbildung 5.44: Mögliches Szenario mit Operationswerkzeug, welches auf Tensegrity-Strukturen basiert - Greifer und Schere. Bilder von einem Video aus [Roe16].

Abbildung 5.45. Dort wird die Grundstruktur aus mehreren Bauteilen zusammengesetzt. Die Drucksegmente werden als gerade Segmente per 3D-Druck hergestellt, danach erwärmt und gefaltet. Die gefaltete Form wird durch eine Abkühlung aufrechterhalten. Im Anschluss werden die Drucksegmente und die Zugsegmente miteinander verbunden. Die Entfaltung findet unter Wärmeinfluss statt. Ein nächster Schritt in der Forschung müsste sein, Möglichkeiten zu entwickeln, mit denen die gefaltete Struktur monolithisch hergestellt werden kann und zu untersuchen, wie die manuelle Faltung der Segmente vermieden werden kann.

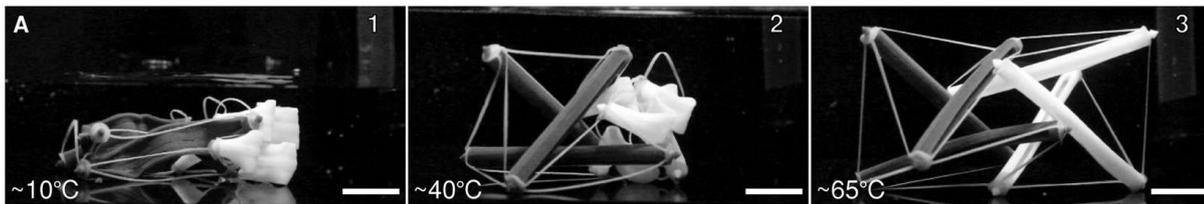


Abbildung 5.45: Ohne Vorspannung gefertigte Tensegrity-Struktur, welche durch Temperaturerhöhung ihre finale Form annimmt, [Liu17].

Eine weitere Möglichkeit wäre ein Aufbau des Greifers aus zwei Bauteilen, in Anlehnung an die verkleinerte Struktur aus Abschnitt 5.2.5. Ein Bauteil könne der Rahmen sein und ein Bauteil die Zugsegmente, welche zu einem Netz verbunden sind. Durch eine Verbindung des Rahmens und der Zugsegmente erhält die Struktur die notwendige Vorspannung.

Gelenke: Eine Tensegrity-Struktur hat mehrere Gelenke. Diese sind die Verbindungen zwischen Zugsegmenten und Drucksegmenten. Bei Klasse k Tensegrity-Strukturen gibt es zusätzlich Gelenke zwischen Drucksegmenten. Alle Gelenke müssen in der erforderlichen Größe und mit möglichst geringem Fertigungs- und Montageaufwand realisiert werden.

Eine Möglichkeit hierfür sind Festkörpergelenke. Dafür sind allerdings weitere Forschungsarbeiten bezüglich Material, Fertigung, Haltbarkeit und prinzipieller Realisierbarkeit notwendig, da teilweise große Winkeländerungen durch die Gelenke realisiert werden müssten (bei Topologie C ist die Winkeländerung in Knoten ④ größer als 100° , siehe Abbildung A.1).

Konventionelle Gelenke, beispielsweise mit Kugellager, eignen sich aufgrund des Montageaufwandes und der zu realisierenden Größe nicht.

Die Herstellung von Gelenken als ein Bauteil ist mittels 3D-Druck möglich, wie es in Abschnitt 5.2.5 vorgestellt und getestet wurde. Hierfür müssen die Einsatzmöglichkeiten in Bezug auf Haltbarkeit und erlaubte Materialien untersucht werden.

Antrieb: Der Antrieb sollte nicht direkt an der Instrumentenspritze sitzen, sondern am Ende vom Schaft, welcher 30 cm bis 40 cm lang ist. Wird der Tensegrity-Greifer aus Abschnitt 5.2 betrachtet, kann mit einer Schubstange an Knoten ④ angegriffen werden. Diese Schubstange kann im Schaft des Instrumentes beliebig lang sein.

Besonderheiten eines Tensegrity-Greifers: Ein konventioneller Greifer für die Operationstechnik ist *normally closed*, das heißt, wenn er nicht angetrieben wird, ist er geschlossen. Dies ist insbesondere bei robotisch angetriebenen Greifern so, da die Instrumente möglichst schmal sein müssen, wenn sie in den Körper eingeführt werden. Durch einen Antrieb kann der Greifer geöffnet werden und somit können verschiedene Greifaufgaben erfüllt werden. Wenn der Greifer bei einem technischen Defekt nicht mehr

angetrieben werden kann, dann schließt sich der Greifer beziehungsweise bleibt geschlossen. Wenn der Greifer in diesem Fall Gewebe gegriffen hat, kann das Instrument nicht ohne Schaden am Patienten entnommen werden. Es wäre also von Vorteil, wenn sich das Instrument öffnet, sobald ein Antrieb ausfällt. In diesem Fall wäre es *normally opened*.

Ein solcher Greifer ist durch multistabile Tensegrity-Strukturen denkbar. Es könnte eine Tensegrity-Struktur mit zwei stabilen Gleichgewichtskonfigurationen entworfen werden. In einer der Gleichgewichtskonfigurationen ist der Greifer klein zusammenfaltend, sodass er in den Körper eingeführt werden kann. Durch einen Antrieb wird er entfaltet und befindet sich im Arbeitsmodus. Hier ist der geöffnete Greifer die Gleichgewichtskonfiguration und um den Greifer zu schließen, muss er angetrieben werden. Somit wären gleichzeitig ein kleines Format beim Einführen des Instrumentes und ein sicheres Arbeiten mit dem Instrument möglich.

Die beschriebenen Punkte zeigen, dass es möglich sein kann, Operationsinstrumente für die Minimal-invasive Chirurgie zu entwickeln. Bis dahin ist allerdings noch weitere Forschungs- und Entwicklungsarbeit notwendig.

5.5 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden zuerst vorbereitend die Bewegungsgleichungen für drei verschiedenen Topologien hergeleitet.

Im zweiten Abschnitt wurde ein Tensegrity-Greifer entwickelt. Der Tensegrity-Greifer basiert auf Topologie C. Zunächst wurden theoretische Analysen der Topologie durchgeführt, um die Existenz und Form der Gleichgewichtskonfigurationen zu untersuchen. Im Anschluss wurden Greifarme der Struktur hinzugefügt, um einen Zweifingergreifer zu entwickeln. Der Tensegrity-Greifer ist weiterhin eine Tensegrity-Struktur der Klasse k. Es wurden mehrere Funktionsmuster des Greifers aufgebaut und es wurden verschiedene Antriebsvarianten vorgestellt und aufgebaut. Dabei hat sich die Variante mit dem Linearantrieb als geeigneter herausgestellt. Der Tensegrity-Greifer hat mehrere positive Eigenschaften. Er ist nachgiebig und er kann ohne Energieaufwand Objekte gegriffen halten. Lediglich für den Greifvorgang an sich wird Energie benötigt. Im Anschluss wurde untersucht, ob der Tensegrity-Greifer mit alternativen Materialien und einem geringeren Montageaufwand auch verkleinert aufgebaut werden kann. Dabei wurde gezeigt, dass es prinzipiell möglich ist, aber weitere Untersuchungen bezüglich eines geeigneten Silikons notwendig sind.

Im dritten Abschnitt wurde gezeigt, dass verschiedene Tensegrity-Greifer möglich sind. Es kann ein Dreifingergreifer, basierend auf einer dreidimensionalen Topologie hergestellt werden. Außerdem ist es möglich Tensegrity-Greifer der Klasse 1 zu entwickeln.

Im letzten Abschnitt wurden Anwendungsbeispiele genannt und es wurde genauer auf den möglichen Einsatz von Tensegrity-Greifern in der Minimal-invasiven Chirurgie eingegangen. Es wurden Möglichkeiten diskutiert, wie entsprechende Operationsinstrumente entwickelt werden können und es wurden noch zu lösende Aufgaben diskutiert.

KAPITEL 6

Zusammenfassung und Ausblick

Die Ergebnisse der einzelnen Kapitel wurden ausführlicher in den Abschnitten 3.5, 4.4 und 5.5 zusammengefasst. Aus diesem Grund werden in diesem Kapitel die Ergebnisse in Bezug auf die zentralen Fragen in der Einleitung präsentiert. Außerdem wird ein Ausblick auf zukünftige Entwicklungsrichtungen gegeben.

6.1 Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit der Entwicklung von Algorithmen für die Untersuchung und Dimensionierung von Tensegrity-Strukturen mit mehreren stabilen Gleichgewichtskonfigurationen und deren Anwendung in der Greifertechnik.

Was für Möglichkeiten gibt es, um von einer Tensegrity-Struktur mit mehreren stabilen Gleichgewichtskonfigurationen alle Gleichgewichtskonfigurationen zu ermitteln?

Nachdem im zweiten Kapitel der Stand der Technik analysiert wurde, wurden im dritten Kapitel vier Algorithmen entwickelt, mit welchen stabile Gleichgewichtskonfigurationen von Tensegrity-Strukturen bestimmt werden können. Dabei wurden drei Algorithmen entwickelt, welche auf genetischen Algorithmen basieren. Der vierte Algorithmus ist ein Multistart-Optimierungsverfahren. Anhand von Tests wurde gezeigt, dass diese Algorithmen in der Lage sind, die Aufgabe zu erfüllen. Da bei diesen Algorithmen verschiedene Parameter eingestellt werden müssen, ist es vorteilhaft, dass mehrere Algorithmen zur Verfügung gestellt wurden. Denn so können bei der Analyse unbekannter Tensegrity-Strukturen die Ergebnisse mehrerer Algorithmen verglichen werden. Mit diesen Algorithmen können sowohl planare als auch räumliche Tensegrity-Strukturen untersucht werden. Mit einem der Algorithmen können auch zuverlässig instabile Gleichgewichtskonfigurationen gefunden werden.

Welche Kenngrößen sollten für die Definition von Eigenschaften einer Tensegrity-Struktur verwendet werden?

Im vierten Kapitel wurden Kenngrößen definiert, mit denen gewisse Eigenschaften von Tensegrity-Strukturen charakterisiert werden können. Diese Kenngrößen sind beispielsweise die Lage der Tensegrity-Struktur in einer oder mehreren Gleichgewichtskonfigurationen und die Stabilität der Gleichgewichtskonfigurationen. Außerdem kann die Größe und Verteilung der Eigenfrequenzen der Gleichgewichtskonfigurationen vorgegeben werden. Diese Eigenschaften sind sinnvoll, wenn Tensegrity-Strukturen für Anwendungen in der Robotik dimensioniert werden sollen.

Wie können Tensegrity-Strukturen mit vorgegebenen Eigenschaften entwickelt werden?

Die Analyse des Standes der Technik im zweiten Kapitel hat gezeigt, dass es keinen Algorithmus gibt, der für alle definierten Kenngrößen die Parameter einer Tensegrity-Struktur bestimmen kann. Deshalb wurde ein Algorithmus entwickelt, mit welchem Tensegrity-Strukturen so dimensioniert werden können, dass sie die vorgegebenen Eigenschaften aufweisen. Dieser Algorithmus basiert auf einem genetischen Algorithmus. Dabei kann der Algorithmus auf alle möglichen Tensegrity-Strukturen angewendet werden. Es können ohne großen Aufwand weitere Eigenschaften mit Hilfe von Kenngrößen definiert werden, welche bei der Dimensionierung berücksichtigt werden. Anhand verschiedener Beispiele wurde gezeigt, dass der

Algorithmus die gestellte Aufgabe erfüllt. Somit wurde ein wichtiges Werkzeug für die Entwicklung von Robotern basierend auf Tensegrity-Strukturen zur Verfügung gestellt.

Wie können Greifer auf Basis von Tensegrity-Strukturen mit mehreren stabilen Gleichgewichtskonfigurationen entwickelt werden?

Im zweiten Kapitel wurde im Stand der Technik analysiert, dass zwar viele Arbeiten zur Lokomotion von Tensegrity-Strukturen existieren, aber fast keine Arbeiten zum Einsatz in der Greifertechnik existieren. Die dort erläuterten Eigenschaften erscheinen auch für Greifer sinnvoll, sodass dieses Ziel in Kapitel 5 weiterverfolgt wurde.

Im fünften Kapitel wurde durch den Aufbau mehrerer Tensegrity-Greifer gezeigt, dass es möglich ist, Greifer basierend auf Tensegrity-Strukturen zu entwickeln. Ein Greifer wurde systematisch von der Idee, über theoretische Untersuchungen und den Bau eines Funktionsmusters bis zur Integration eines Antriebs entwickelt. Es wurden Experimente durchgeführt, um die theoretischen Ergebnisse mit dem Funktionsmuster zu vergleichen.

Es wurde gezeigt, dass es prinzipiell möglich ist, Greifer auf Basis von Tensegrity-Strukturen zu entwickeln. Es wurden verschiedene Anwendungsmöglichkeiten von solchen Greifern diskutiert und auf die Anwendung in der Minimal-invasiven Chirurgie wurde detaillierter eingegangen. Dabei hat sich gezeigt, dass der Einsatz solcher Greifer in der Minimal-invasiven Chirurgie möglich ist, allerdings sind noch weiterführende Arbeiten zu diesem Thema notwendig.

Ist der Antrieb von Greifern, welche auf Tensegrity-Strukturen basieren, mit wenig Aufwand und energieeffizient möglich?

Durch die Ausnutzung der zwei stabilen Gleichgewichtskonfigurationen muss der Greifer nur beim Wechsel der Zustände offen und geschlossen angetrieben werden. Somit ist der Greifer energieeffizient. Außerdem ist es möglich den Greifer mit nur einem Antrieb anzusteuern. Damit ist auch diese Fragestellung positiv beantwortet.

6.2 Ausblick

Es wurden Algorithmen für die Formfindung und für die Parameterfindung bei Tensegrity-Strukturen entwickelt. Sowohl bei der Formfindung als auch bei der Parameterfindung ist die Topologie der Tensegrity-Struktur vorgegeben. Ein weiterer Schritt ist, dass nicht die gesamte Topologie vorgegeben wird, und von einem Algorithmus die optimale Topologie bestimmt wird, sodass die Tensegrity-Struktur die geforderten Eigenschaften aufweist: *Topologiefindung*. Dafür muss zunächst definiert werden, was von der Topologie vorgegeben werden soll (Anzahl der Segmente, Anzahl der Knoten, Verbindung zwischen den Knoten). Es müssen weitere Kenngrößen definiert werden, um die Forderungen an die zu bestimmende Tensegrity-Struktur formulieren zu können. Da die genetischen Algorithmen in Verbindung mit einem FE-Formfindungsalgorithmus für Formfindung und für die Parameterfindung geeignet waren, ist der Einsatz eines ähnlichen Algorithmus für die Topologiefindung vielversprechend.

In dieser Arbeit wurde anhand von Funktionsmustern gezeigt, dass es prinzipiell möglich ist, Greifer auf Basis von Tensegrity-Strukturen zu entwickeln. Ein nächster Schritt ist die Weiterentwicklung der Funktionsmuster zu Prototypen. Dafür müssen geeignete Materialien und Fertigungsverfahren ausgewählt werden. Außerdem können neue Topologien für Greifer entwickelt werden. Die Verkleinerung der Greifer

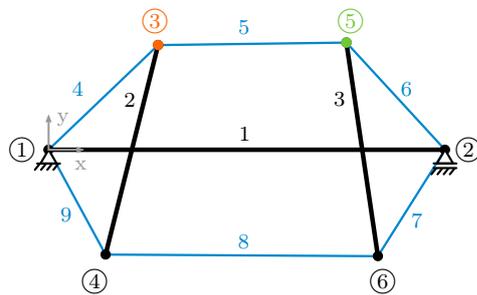
für den Einsatz in der Minimal-invasiven Chirurgie ist ein weiteres Thema, welches erforscht werden kann. Hierzu wurden Ansätze und Ideen bereits in Abschnitt 5.4 diskutiert.

ANHANG A

Verwendete Tensegrity-Strukturen

Hier werden alle in dieser Arbeit verwendeten Tensegrity-Strukturen mit ihren in der Regel verwendeten Parametern dargestellt. Außerdem werden die mit diesen Parametern vorhandenen Gleichgewichtskonfigurationen dargestellt.

A.1 Topologie A



$$\begin{aligned}
 l_1 &= l_{01} = 200.0 \text{ mm} \\
 l_2 &= l_{02} = l_3 = l_{03} = 50.0 \text{ mm} \\
 l_{04} &= l_{06} = l_{07} = l_{09} = 37.4 \text{ mm} \\
 l_{05} &= l_{08} = 18.2 \text{ mm} \\
 k_1 &= k_2 = k_3 = 10^5 \text{ N/mm} \\
 k_4 &= k_6 = k_7 = k_9 = 0.045 \text{ N/mm} \\
 k_5 &= k_8 = 0.008 \text{ N/mm}
 \end{aligned}$$

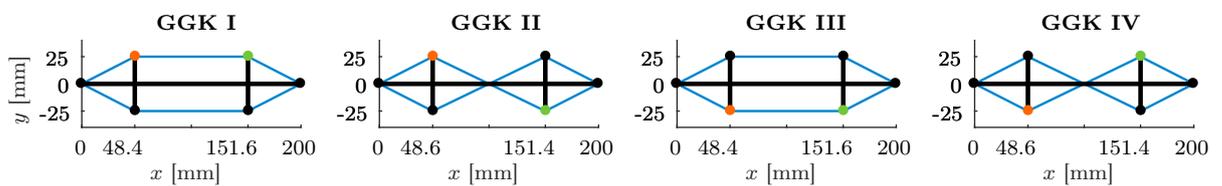
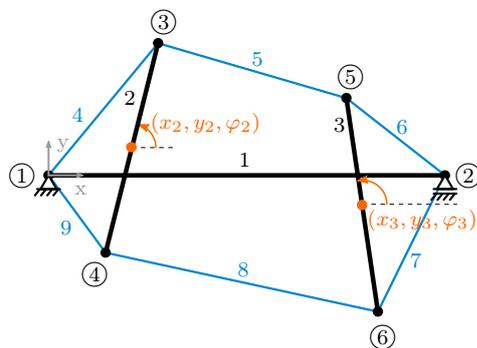
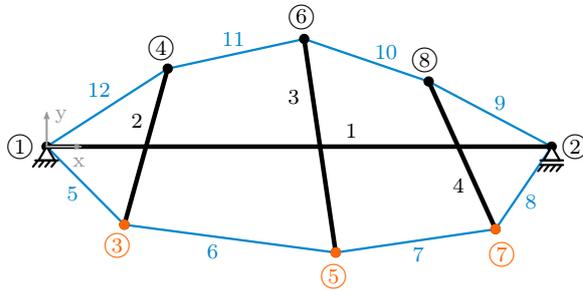


Abbildung A.1: Topologie A und die, in der Regel, verwendeten Parameter und Lagerungen sowie deren Gleichgewichtskonfigurationen.

A.2 Topologie B



$l_1 = l_{01} = 200.0 \text{ mm}$
 $l_2 = l_{02} = l_4 = l_{04} = 16.0 \text{ mm}$
 $l_3 = l_{03} = 36.0 \text{ mm}$
 $l_{05} = l_{08} = l_{09} = l_{012} = 30.45 \text{ mm}$
 $l_{06} = l_{07} = l_{010} = l_{011} = 54.97 \text{ mm}$
 $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 10^5 \text{ N/mm}$
 $k_5 = k_8 = k_9 = k_{12} = 0.072 \text{ N/mm}$
 $k_6 = k_7 = k_{10} = k_{11} = 0.018 \text{ N/mm}$

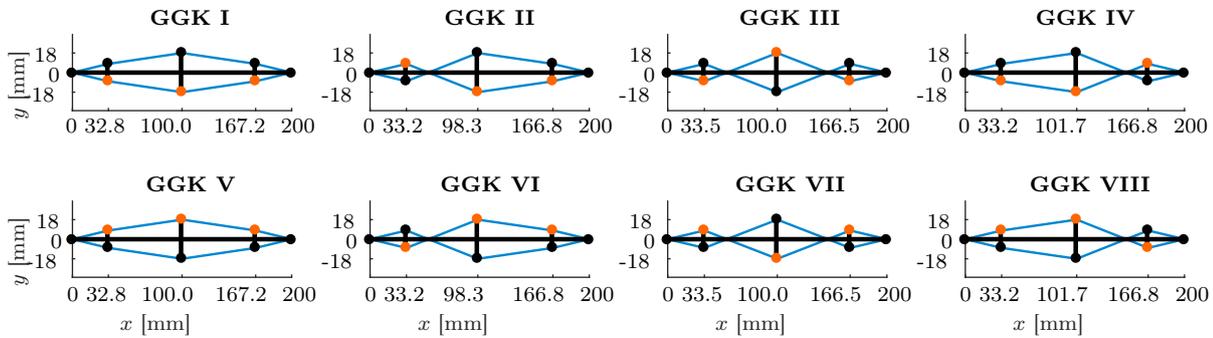
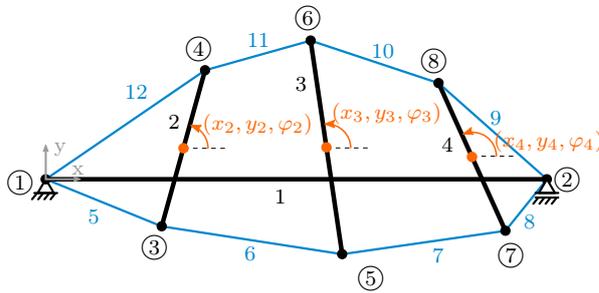
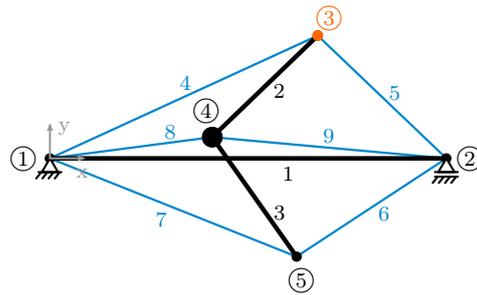


Abbildung A.2: Topologie B und die, in der Regel, verwendeten Parameter und Lagerungen sowie deren Gleichgewichtskonfigurationen.

A.3 Topologie C



$l_1 = l_{01} = 140.0 \text{ mm}$
 $l_2 = l_{02} = l_3 = l_{03} = 50.0 \text{ mm}$
 $l_{04} = l_{07} = 59.0 \text{ mm}$
 $l_{05} = l_{06} = 64.2 \text{ mm}$
 $l_{08} = l_{09} = 36.7 \text{ mm}$
 $k_1 = k_2 = k_3 = 10^5 \text{ N/mm}$
 $k_4 = k_7 = 0.482 \text{ N/mm}$
 $k_5 = k_6 = 0.568 \text{ N/mm}$
 $k_8 = k_9 = 0.256 \text{ N/mm}$

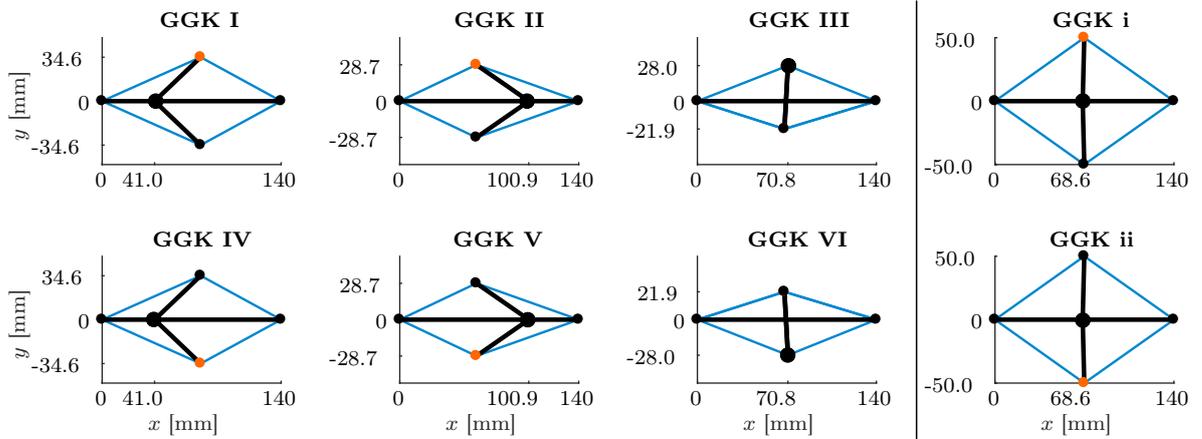
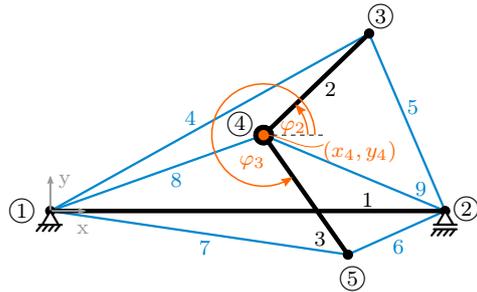
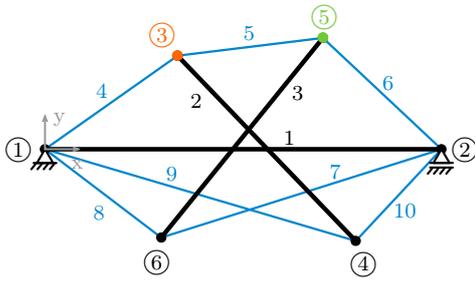


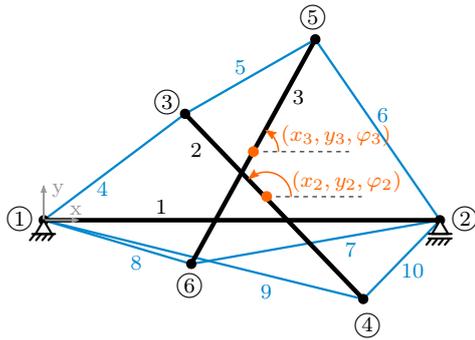
Abbildung A.3: Topologie C und die, in der Regel, verwendeten Parameter und Lagerungen sowie deren Gleichgewichtskonfigurationen.

A.4 Topologie D



- $l_1 = l_{01} = 140.0 \text{ mm}$
- $l_2 = l_{02} = l_3 = l_{03} = 60.0 \text{ mm}$
- $l_{04} = l_{06} = 23.2 \text{ mm}$
- $l_{05} = 29.6 \text{ mm}$
- $l_{07} = l_{09} = 33.4 \text{ mm}$
- $l_{08} = l_{010} = 28.7 \text{ mm}$

- $k_1 = k_2 = k_3 = 10^5 \text{ N/mm}$
- $k_4 = k_6 = 0.358 \text{ N/mm}$
- $k_5 = 0.426 \text{ N/mm}$
- $k_7 = k_9 = 0.326 \text{ N/mm}$
- $k_8 = k_{10} = 0.342 \text{ N/mm}$



GGK I

GGK II

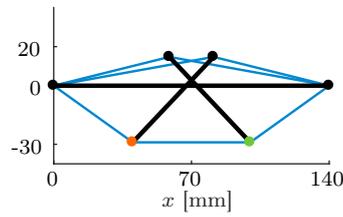
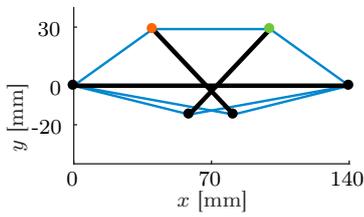
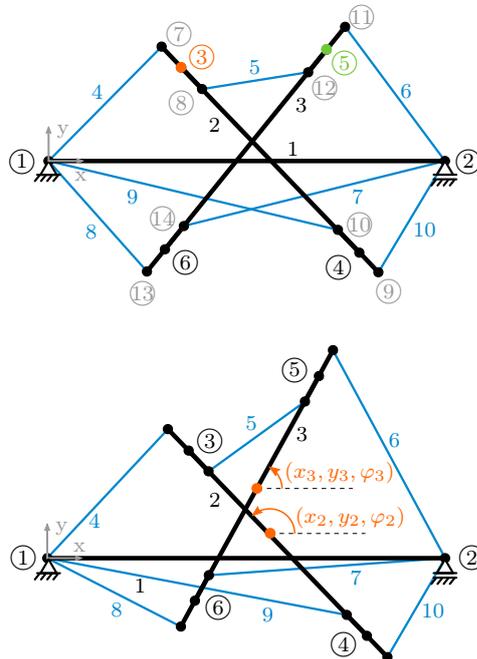


Abbildung A.4: Topologie D und die, in der Regel, verwendeten Parameter und Lagerungen sowie deren Gleichgewichtskonfigurationen.

A.5 Topologie D_2



$$\begin{aligned}
 l_1 &= l_{01} = 140.0 \text{ mm} \\
 l_2 &= l_{02} = l_3 = l_{03} = 60.0 \text{ mm} \\
 l_{04} &= l_{06} = 23.2 \text{ mm} \\
 l_{05} &= 29.6 \text{ mm} \\
 l_{07} &= l_{09} = 33.4 \text{ mm} \\
 l_{08} &= l_{010} = 28.7 \text{ mm} \\
 l_{11} &= 5 \text{ mm (Federhalter)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_1 &= k_2 = k_3 = 10^5 \text{ N/mm} \\
 k_4 &= k_6 = 0.358 \text{ N/mm} \\
 k_5 &= 0.426 \text{ N/mm} \\
 k_7 &= k_9 = 0.326 \text{ N/mm} \\
 k_8 &= k_{10} = 0.342 \text{ N/mm} \\
 k_{11} &= 10^5 \text{ N/mm (Federhalter)}
 \end{aligned}$$

Die Segmente mit geringer Steifigkeit sind nicht direkt mit Knoten ③ bis ⑥ verbunden, um die Aufhängung der Federn bei einem Funktionsmuster zu simulieren. Wenn ein Funktionsmuster aufgebaut wird, können nicht mehrere Federn an einem Knoten befestigt werden. Da diese Anbringung der Segmente die Lage der Gleichgewichtskonfigurationen beeinflusst, wurde diese Variante mit den *Federhaltern* implementiert.

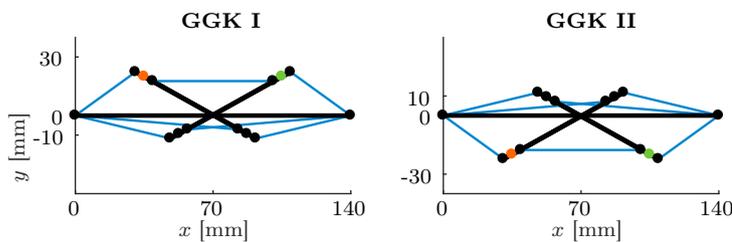
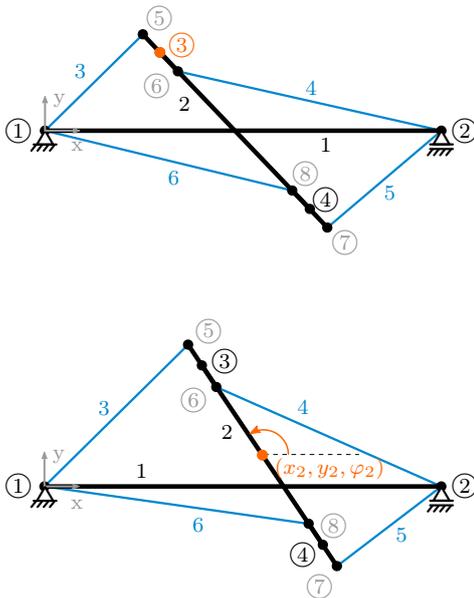


Abbildung A.5: Topologie D_2 und die, in der Regel, verwendeten Parameter und Lagerungen sowie deren Gleichgewichtskonfigurationen.

A.6 Topologie E



$l_1 = l_{01} = 140.0 \text{ mm}$
 $l_2 = l_{02} = 60.0 \text{ mm}$
 $l_{03} = l_{05} = 22.7 \text{ mm}$
 $l_{04} = 37.9 \text{ mm}$
 $l_{06} = 41.1 \text{ mm}$
 $l_7 = 5.0 \text{ mm}$ (Federhalter)

$k_1 = k_2 = 10^5 \text{ N/mm}$
 $k_3 = k_5 = 0.164 \text{ N/mm}$
 $k_4 = 0.196 \text{ N/mm}$
 $k_6 = 0.176 \text{ N/mm}$
 $k_7 = 10^5 \text{ N/mm}$ (Federhalter)

Die Segmente mit geringer Steifigkeit sind nicht direkt mit Knoten ③ und ④ verbunden, um die Aufhängung der Federn bei einem Funktionsmuster zu simulieren. Wenn ein Funktionsmuster aufgebaut wird, können nicht mehrere Federn an einem Knoten befestigt werden. Da diese Anbringung der Segmente die Lage der Gleichgewichtskonfigurationen beeinflusst, wurde diese Variante mit den *Federhaltern* implementiert.

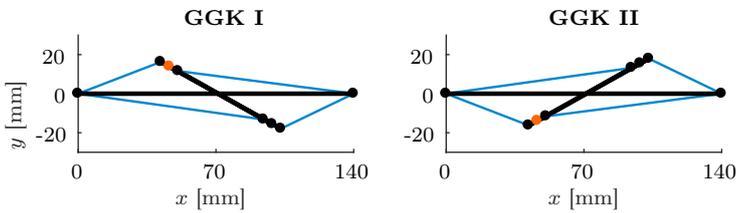


Abbildung A.6: Topologie E und die, in der Regel, verwendeten Parameter und Lagerungen sowie deren Gleichgewichtskonfigurationen.

A.7 Topologie F

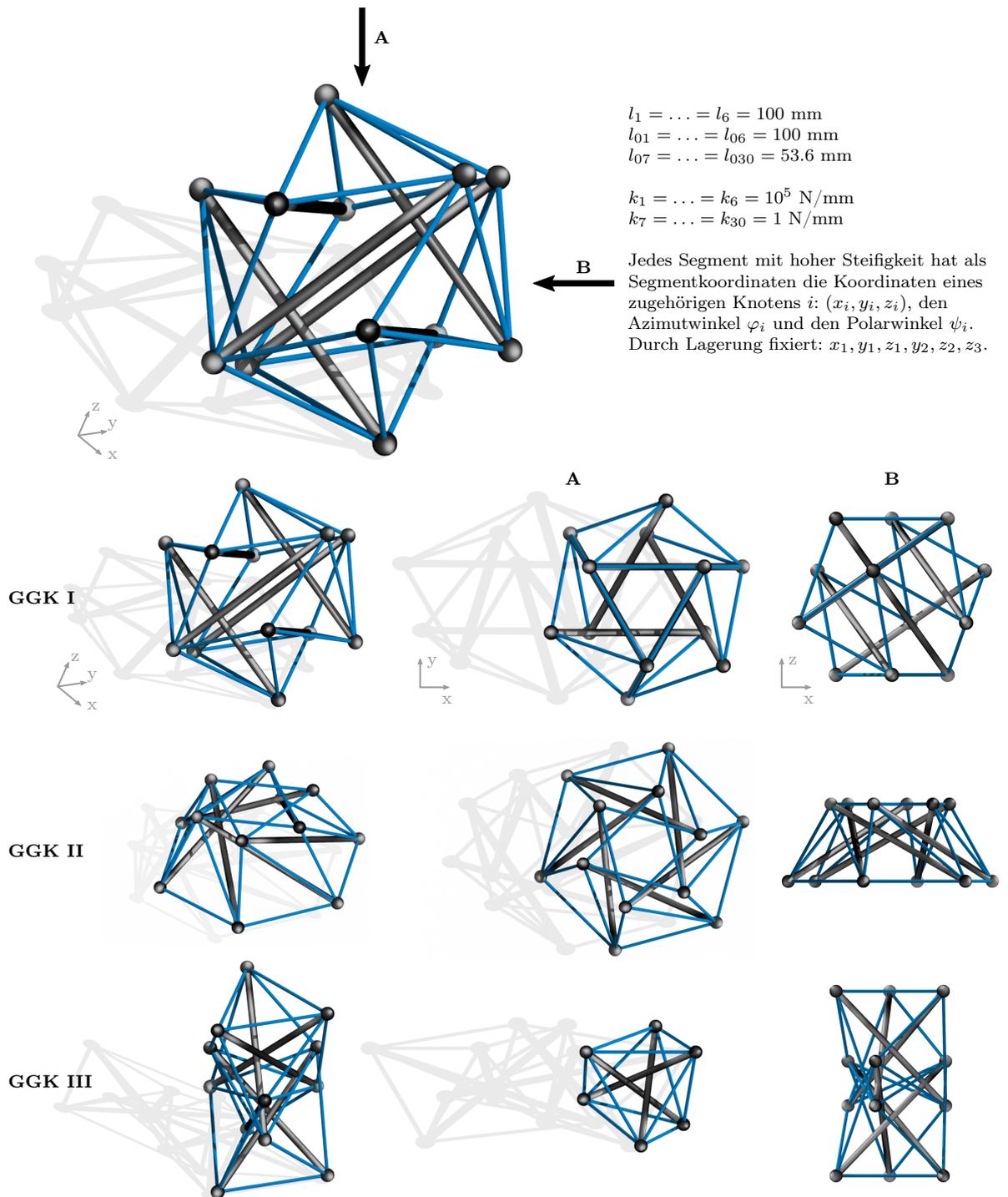


Abbildung A.7: Topologie F und die, in der Regel, verwendeten Parameter und Lagerungen sowie deren Gleichgewichtskonfigurationen.

Bewegungsgleichungen

B.1 Herleitung der Bewegungsgleichungen für Topologie E

In diesem Abschnitt werden einzelne Schritte der Herleitung der Bewegungsgleichungen für Topologie E angegeben. Es ist eine Ergänzung zu Abschnitt 5.1.2.

Das Vorgehen der Herleitung ist das Gleiche wie bei Topologie C im vorhergehenden Kapitel 5.1.1. Aus diesem Grund werden hier nur die wesentlichen (Zwischen-)Ergebnisse präsentiert.

Entsprechend der Bezeichnungen in Abbildung A.6 seien die folgenden Größen gegeben:

- Längen der Stäbe: $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$,
- Länge der Federhalter: $l_7 \in \mathbb{R}$,
- Masse der Stäbe: $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$,
- Steifigkeiten der Federn: $k_3, k_4, k_5, k_6 \in \mathbb{R}$,
- Längen der Federn: $\|L_3\|_2, \|L_4\|_2, \|L_5\|_2, \|L_6\|_2 \in \mathbb{R}$ wobei $L_3, L_4, L_5, L_6 \in \mathbb{R}^2$ die Segmentvektoren der elastischen Segmente seien,
- Anfangslängen der Federn: $l_{03}, l_{04}, l_{05}, l_{06} \in \mathbb{R}$ mit $l_{0i} > 0, i = 3, 4, 5, 6$,
- Dämpfungskonstante: $d_3, d_4, d_5, d_6 \in \mathbb{R}$.

Die potentielle Energie $U \in \mathbb{R}$ berechnet sich mit:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{f=3}^6 k_f (\|L_f\|_2 - l_{0f})^2.$$

Für die Lagrangeschen Gleichungen (5.1) wird die Ableitung der potentiellen Energie nach den generalisierten Koordinaten benötigt. Diese ergibt sich zu:

$$\frac{\partial U}{\partial q_a} = \sum_{f=3}^6 \left(k_f (\|L_f\|_2 - l_{0f}) \cdot \frac{\left(\frac{\partial L_f}{\partial q_a} \right)^\top L_f}{\|L_f\|_2} \right), \quad (\text{B.1})$$

wobei die Vektoren der Federn und deren Ableitungen nach den generalisierten Koordinaten sich zu:

$$\begin{aligned} L_3 &= \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{2}l_2 + l_7 \right) \begin{pmatrix} \cos(\varphi_2) \\ \sin(\varphi_2) \end{pmatrix} & L_4 &= \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{2}l_2 - l_7 \right) \begin{pmatrix} \cos(\varphi_2) \\ \sin(\varphi_2) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} l_1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ L_6 &= \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} - \left(\frac{1}{2}l_2 - l_7 \right) \begin{pmatrix} \cos(\varphi_2) \\ \sin(\varphi_2) \end{pmatrix} & L_5 &= \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} - \left(\frac{1}{2}l_2 + l_7 \right) \begin{pmatrix} \cos(\varphi_2) \\ \sin(\varphi_2) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} l_1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{\partial L_i}{\partial x_2} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{für } i \in \{3, 4, 5, 6\} & \frac{\partial L_j}{\partial y_2} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{für } j \in \{3, 4, 5, 6\} \\ \frac{\partial L_3}{\partial \varphi_2} &= \left(\frac{1}{2}l_2 + l_7 \right) \begin{pmatrix} -\sin(\varphi_2) \\ \cos(\varphi_2) \end{pmatrix} & \frac{\partial L_4}{\partial \varphi_2} &= \left(\frac{1}{2}l_2 - l_7 \right) \begin{pmatrix} -\sin(\varphi_2) \\ \cos(\varphi_2) \end{pmatrix} \\ \frac{\partial L_5}{\partial \varphi_2} &= - \left(\frac{1}{2}l_2 + l_7 \right) \begin{pmatrix} -\sin(\varphi_2) \\ \cos(\varphi_2) \end{pmatrix} & \frac{\partial L_6}{\partial \varphi_2} &= - \left(\frac{1}{2}l_2 - l_7 \right) \begin{pmatrix} -\sin(\varphi_2) \\ \cos(\varphi_2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ergeben.

Die Ableitungen der potentiellen Energie nach den generalisierten Geschwindigkeiten verschwinden.

Die kinetische Energie T setzt sich, wie in Abschnitt 5.1.1 aus Translationsenergie T_{Trans} und Rotationsenergie T_{Rot} zusammen, sofern die kinetische Energie im Schwerpunkt eines Stabes betrachtet wird. Hierfür gilt:

$$\begin{aligned} T_{Trans} &= \frac{1}{2}m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \\ T_{Rot} &= \frac{1}{2}J_{zz,2} \dot{\varphi}_2^2 = \frac{1}{24}m_2 l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 \\ \Rightarrow T &= \frac{1}{2}m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \frac{1}{12}l_2^2 \dot{\varphi}_2^2). \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Für (5.1) werden die Ableitungen von (B.2) nach den generalisierten Koordinaten q_a , $a = 1, 2, 3$ berechnet:

$$\frac{\partial T}{\partial q_a} = 0 \quad (\text{B.3})$$

und nach den generalisierten Geschwindigkeiten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} &= m_2 \dot{x}_2 & \Rightarrow & \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = m_2 \ddot{x}_2 \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_2} &= m_2 \dot{y}_2 & \Rightarrow & \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_2} = m_2 \ddot{y}_2 \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} &= \frac{1}{12}m_2 l_2^2 \dot{\varphi}_2 & \Rightarrow & \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} = \frac{1}{12}m_2 l_2^2 \ddot{\varphi}_2. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Die Ableitung der Dissipationsfunktion D nach den generalisierten Geschwindigkeiten berechnet sich wie in (5.21):

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_a} = \sum_{i=3}^6 \frac{d_i}{\|r_{di}\|^4} (r_{di}^\top \dot{r}_{di}) \left(r_{di}^\top \frac{\partial \dot{r}_{di}}{\partial \dot{q}_a} \right) (r_{di}^\top r_{di}). \quad (\text{B.5})$$

Da die Federn und die Dämpfer parallel liegen, sind die Vektoren der Dämpfer r_{di} gleich den Segmentvektoren der Federn L_i :

$$r_{di} = L_i, \quad \text{für } i \in \{3, 4, 5, 6\}.$$

Für die Ableitung nach der Zeit und den generalisierten Geschwindigkeiten ergibt sich:

$$\begin{aligned} \dot{r}_{d3} &= \begin{pmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{2}l_2 + l_7\right) \begin{pmatrix} -\sin(\varphi_2)\dot{\varphi}_2 \\ \cos(\varphi_2)\dot{\varphi}_2 \end{pmatrix} & \dot{r}_{d4} &= \begin{pmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{2}l_2 - l_7\right) \begin{pmatrix} -\sin(\varphi_2)\dot{\varphi}_2 \\ \cos(\varphi_2)\dot{\varphi}_2 \end{pmatrix} \\ \dot{r}_{d5} &= \begin{pmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} - \left(\frac{1}{2}l_2 + l_7\right) \begin{pmatrix} -\sin(\varphi_2)\dot{\varphi}_2 \\ \cos(\varphi_2)\dot{\varphi}_2 \end{pmatrix} & \dot{r}_{d6} &= \begin{pmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} - \left(\frac{1}{2}l_2 - l_7\right) \begin{pmatrix} -\sin(\varphi_2)\dot{\varphi}_2 \\ \cos(\varphi_2)\dot{\varphi}_2 \end{pmatrix} \\ \frac{\partial \dot{r}_{di}}{\partial \dot{x}_2} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{für } i \in \{3, 4, 5, 6\} & \frac{\partial \dot{r}_{dj}}{\partial \dot{y}_2} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{für } j \in \{3, 4, 5, 6\} \\ \frac{\partial \dot{r}_{d3}}{\partial \dot{\varphi}_2} &= \left(\frac{1}{2}l_2 + l_7\right) \begin{pmatrix} -\sin(\varphi_2) \\ \cos(\varphi_2) \end{pmatrix} & \frac{\partial \dot{r}_{d4}}{\partial \dot{\varphi}_2} &= \left(\frac{1}{2}l_2 - l_7\right) \begin{pmatrix} -\sin(\varphi_2) \\ \cos(\varphi_2) \end{pmatrix} \\ \frac{\partial \dot{r}_{d5}}{\partial \dot{\varphi}_2} &= -\left(\frac{1}{2}l_2 + l_7\right) \begin{pmatrix} -\sin(\varphi_2) \\ \cos(\varphi_2) \end{pmatrix} & \frac{\partial \dot{r}_{d6}}{\partial \dot{\varphi}_2} &= -\left(\frac{1}{2}l_2 - l_7\right) \begin{pmatrix} -\sin(\varphi_2) \\ \cos(\varphi_2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Mit (5.1), (B.1), (B.3), (B.4) und (B.5) lauten die Bewegungsgleichungen für Topologie E:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_2 &= \frac{1}{m_2} \left(-\frac{\partial U}{\partial x_2} - \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_2} + Q_{x_2} \right) \\ \ddot{y}_2 &= \frac{1}{m_2} \left(-\frac{\partial U}{\partial y_2} - \frac{\partial D}{\partial \dot{y}_2} + Q_{y_2} \right) \\ \ddot{\varphi}_2 &= \frac{12}{m_2 l_2^2} \left(-\frac{\partial U}{\partial \varphi_2} - \frac{\partial D}{\partial \dot{\varphi}_2} + Q_{\varphi_2} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Das Gleichungssystem (B.6) ist ein explizites, gekoppeltes, nichtlineares Differentialgleichungssystem 2. Ordnung. Sofern die generalisierten Kräfte Q_a , $a = 1, 2, 3$ nicht von der Zeit abhängen, ist es zusätzlich ein autonomes Differentialgleichungssystem. Die Berechnung der generalisierten Kräfte aus den äußeren Kräften ist in (5.23) angegeben.

B.2 Herleitung der Bewegungsgleichungen für Topologie D₂

In diesem Abschnitt werden einzelne Schritte der Herleitung der Bewegungsgleichungen für Topologie E angegeben. Es ist eine Ergänzung zu Abschnitt 5.1.3.

Das Vorgehen der Herleitung ist das Gleiche wie bei Topologie C im vorhergehenden Kapitel 5.1.1. Aus diesem Grund werden hier nur die wesentlichen (Zwischen-)Ergebnisse präsentiert.

Entsprechend der Bezeichnungen in Abbildung A.5 seien die folgenden Größen gegeben:

- Längen der Stäbe: $l_1, l_2, l_3 \in \mathbb{R}$,
- Länge der Federhalter: $l_{11} \in \mathbb{R}$,
- Masse der Stäbe: $m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{R}$,
- Steifigkeit der Federn: $k_4, k_5, \dots, k_{10} \in \mathbb{R}$,
- Längen der Federn: $\|L_4\|_2, \|L_5\|_2, \dots, \|L_{10}\|_2 \in \mathbb{R}$ wobei $L_4, L_5, \dots, L_{10} \in \mathbb{R}^2$ die Segmentvektoren der elastischen Segmente seien,
- Anfangslängen der Federn: $l_{04}, l_{05}, \dots, l_{010} \in \mathbb{R}$ mit $l_{0i} > 0, i = 4, \dots, 10$,
- Dämpfungskonstante: $d_4, d_5, \dots, d_{10} \in \mathbb{R}$.

Die potentielle Energie $U \in \mathbb{R}$ berechnet sich mit:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{f=4}^{10} k_f (\|L_f\|_2 - l_{0f})^2.$$

Für die Lagrangeschen Gleichungen (5.1) wird die Ableitung der potentiellen Energie nach den generalisierten Koordinaten benötigt. Diese ergibt sich zu:

$$\frac{\partial U}{\partial q_a} = \sum_{f=4}^{10} \left(k_f (\|L_f\|_2 - l_{0f}) \cdot \frac{\left(\frac{\partial L_f}{\partial q_a} \right)^\top L_f}{\|L_f\|_2} \right), \quad (\text{B.7})$$

wobei sich die Vektoren der Federn zu:

$$L_4 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{2} l_2 + l_{11} \right) \begin{pmatrix} \cos(\varphi_2) \\ \sin(\varphi_2) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 L_5 &= \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{2}l_3 - l_{11}\right) \begin{pmatrix} \cos(\varphi_3) \\ \sin(\varphi_3) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} - \left(\frac{1}{2}l_2 - l_{11}\right) \begin{pmatrix} \cos(\varphi_2) \\ \sin(\varphi_2) \end{pmatrix} \\
 L_6 &= \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{2}l_3 + l_{11}\right) \begin{pmatrix} \cos(\varphi_3) \\ \sin(\varphi_3) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} l_1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 L_7 &= \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} - \left(\frac{1}{2}l_3 - l_{11}\right) \begin{pmatrix} \cos(\varphi_3) \\ \sin(\varphi_3) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} l_1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 L_8 &= \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} - \left(\frac{1}{2}l_3 + l_{11}\right) \begin{pmatrix} \cos(\varphi_3) \\ \sin(\varphi_3) \end{pmatrix} \\
 L_9 &= \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} - \left(\frac{1}{2}l_2 - l_{11}\right) \begin{pmatrix} \cos(\varphi_2) \\ \sin(\varphi_2) \end{pmatrix} \\
 L_{10} &= \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} - \left(\frac{1}{2}l_2 + l_{11}\right) \begin{pmatrix} \cos(\varphi_2) \\ \sin(\varphi_2) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} l_1 \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

und sich deren Ableitungen nach den generalisierten Koordinaten zu:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L_i}{\partial x_2} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{für } i \in \{4, 9, 10\} & \frac{\partial L_i}{\partial x_2} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{für } i \in \{6, 7, 8\} & \frac{\partial L_5}{\partial x_2} &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \frac{\partial L_i}{\partial y_2} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{für } i \in \{4, 9, 10\} & \frac{\partial L_i}{\partial y_2} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{für } i \in \{6, 7, 8\} & \frac{\partial L_5}{\partial x_2} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\
 \frac{\partial L_4}{\partial \varphi_2} &= \left(\frac{1}{2}l_2 + l_{11}\right) \begin{pmatrix} -\sin(\varphi_2) \\ \cos(\varphi_2) \end{pmatrix} & \frac{\partial L_5}{\partial \varphi_2} &= \left(\frac{1}{2}l_2 - l_{11}\right) \begin{pmatrix} \sin(\varphi_2) \\ -\cos(\varphi_2) \end{pmatrix} \\
 \frac{\partial L_9}{\partial \varphi_2} &= \left(\frac{1}{2}l_2 - l_{11}\right) \begin{pmatrix} \sin(\varphi_2) \\ -\cos(\varphi_2) \end{pmatrix} & \frac{\partial L_{10}}{\partial \varphi_2} &= \left(\frac{1}{2}l_2 + l_{11}\right) \begin{pmatrix} \sin(\varphi_2) \\ -\cos(\varphi_2) \end{pmatrix} \\
 \frac{\partial L_i}{\partial \varphi_2} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{für } i \in \{6, 7, 8\} \\
 \frac{\partial L_i}{\partial x_3} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{für } i \in \{5, 6, 7, 8\} & \frac{\partial L_i}{\partial x_3} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{für } i \in \{4, 9, 10\} \\
 \frac{\partial L_i}{\partial y_3} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{für } i \in \{5, 6, 7, 8\} & \frac{\partial L_i}{\partial y_3} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{für } i \in \{4, 9, 10\} \\
 \frac{\partial L_5}{\partial \varphi_3} &= \left(\frac{1}{2}l_3 - l_{11}\right) \begin{pmatrix} -\sin(\varphi_3) \\ \cos(\varphi_3) \end{pmatrix} & \frac{\partial L_6}{\partial \varphi_3} &= \left(\frac{1}{2}l_3 + l_{11}\right) \begin{pmatrix} -\sin(\varphi_3) \\ \cos(\varphi_3) \end{pmatrix} \\
 \frac{\partial L_7}{\partial \varphi_3} &= \left(\frac{1}{2}l_3 - l_{11}\right) \begin{pmatrix} \sin(\varphi_3) \\ -\cos(\varphi_3) \end{pmatrix} & \frac{\partial L_8}{\partial \varphi_3} &= \left(\frac{1}{2}l_3 + l_{11}\right) \begin{pmatrix} \sin(\varphi_3) \\ -\cos(\varphi_3) \end{pmatrix} \\
 \frac{\partial L_i}{\partial \varphi_3} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{für } i \in \{4, 9, 10\}
 \end{aligned}$$

ergeben.

Die Ableitungen der potentiellen Energie nach den generalisierten Geschwindigkeiten verschwinden.

Die kinetische Energie T setzt sich, wie in Abschnitt 5.1.1 aus Translationsenergie T_{Trans} und Rotationsenergie T_{Rot} zusammen, sofern die kinetische Energie im Schwerpunkt eines Stabes betrachtet wird. Hierfür gilt:

$$\begin{aligned}
 T_{Trans} &= \frac{1}{2}m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{1}{2}m_3 (\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2) \\
 T_{Rot} &= \frac{1}{2}J_{zz,2} \dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2}J_{zz,3} \dot{\varphi}_3^2 = \frac{1}{24}m_2 l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{24}m_3 l_3^2 \dot{\varphi}_3^2 \\
 \Rightarrow T &= \frac{1}{2}m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \frac{1}{12}l_2^2 \dot{\varphi}_2^2) + \frac{1}{2}m_3 (\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2 + \frac{1}{12}l_3^2 \dot{\varphi}_3^2). \tag{B.8}
 \end{aligned}$$

Für (5.1) werden die Ableitungen der kinetischen Energie T (B.8) nach den generalisierten Koordinaten und den generalisierten Geschwindigkeiten benötigt. Diese werden wir in Abschnitt 5.1.2, (B.3) und (B.4), berechnet.

Die Ableitung der Dissipationsfunktion D nach den generalisierten Koordinaten berechnet sich wie in (5.21):

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_a} = \sum_{i=4}^{10} \frac{d_i}{\|r_{di}\|_2^4} (r_{di}^\top \dot{r}_{di}) \left(r_{di}^\top \frac{\partial \dot{r}_{di}}{\partial \dot{q}_a} \right) (r_{di}^\top r_{di}). \quad (\text{B.9})$$

Da die Federn und die Dämpfer parallel liegen, sind die Vektoren der Dämpfer $r_{di} \in \mathbb{R}^2$ gleich den Segmentvektoren der Federn L_i :

$$r_{di} = L_i, \quad \text{für } i \in \{4, 5, \dots, 10\}$$

Für die Ableitung nach der Zeit ergibt sich:

$$\begin{aligned} \dot{r}_{d4} &= \begin{pmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{2}l_2 + l_{11}\right) \begin{pmatrix} -\sin(\varphi_2)\dot{\varphi}_2 \\ \cos(\varphi_2)\dot{\varphi}_2 \end{pmatrix} \\ \dot{r}_{d5} &= \begin{pmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{2}l_3 - l_{11}\right) \begin{pmatrix} -\sin(\varphi_3)\dot{\varphi}_3 \\ \cos(\varphi_3)\dot{\varphi}_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} - \left(\frac{1}{2}l_2 - l_{11}\right) \begin{pmatrix} -\sin(\varphi_2)\dot{\varphi}_2 \\ \cos(\varphi_2)\dot{\varphi}_2 \end{pmatrix} \\ \dot{r}_{d6} &= \begin{pmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{2}l_3 + l_{11}\right) \begin{pmatrix} -\sin(\varphi_3)\dot{\varphi}_3 \\ \cos(\varphi_3)\dot{\varphi}_3 \end{pmatrix} \\ \dot{r}_{d7} &= \begin{pmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} - \left(\frac{1}{2}l_3 - l_{11}\right) \begin{pmatrix} -\sin(\varphi_3)\dot{\varphi}_3 \\ \cos(\varphi_3)\dot{\varphi}_3 \end{pmatrix} \\ \dot{r}_{d8} &= \begin{pmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} - \left(\frac{1}{2}l_3 + l_{11}\right) \begin{pmatrix} -\sin(\varphi_3)\dot{\varphi}_3 \\ \cos(\varphi_3)\dot{\varphi}_3 \end{pmatrix} \\ \dot{r}_{d9} &= \begin{pmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} - \left(\frac{1}{2}l_2 - l_{11}\right) \begin{pmatrix} -\sin(\varphi_2)\dot{\varphi}_2 \\ \cos(\varphi_2)\dot{\varphi}_2 \end{pmatrix} \\ \dot{r}_{d10} &= \begin{pmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} - \left(\frac{1}{2}l_2 + l_{11}\right) \begin{pmatrix} -\sin(\varphi_2)\dot{\varphi}_2 \\ \cos(\varphi_2)\dot{\varphi}_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Für die Ableitungen der Geschwindigkeitsvektoren nach den generalisierten Geschwindigkeiten ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{r}_{di}}{\partial \dot{x}_2} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{für } i \in \{4, 9, 10\} & \frac{\partial \dot{r}_{di}}{\partial \dot{x}_2} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{für } i \in \{6, 7, 8\} & \frac{\partial \dot{r}_{d5}}{\partial \dot{x}_2} &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{\partial \dot{r}_{di}}{\partial \dot{y}_2} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{für } i \in \{4, 9, 10\} & \frac{\partial \dot{r}_{di}}{\partial \dot{y}_2} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{für } i \in \{6, 7, 8\} & \frac{\partial \dot{r}_{d5}}{\partial \dot{y}_2} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \frac{\partial \dot{r}_{d4}}{\partial \dot{\varphi}_2} &= \left(\frac{1}{2}l_2 + l_{11}\right) \begin{pmatrix} -\sin(\varphi_2) \\ \cos(\varphi_2) \end{pmatrix} & \frac{\partial \dot{r}_{d5}}{\partial \dot{\varphi}_2} &= \left(\frac{1}{2}l_2 - l_{11}\right) \begin{pmatrix} \sin(\varphi_2) \\ -\cos(\varphi_2) \end{pmatrix} \\ \frac{\partial \dot{r}_{d9}}{\partial \dot{\varphi}_2} &= \left(\frac{1}{2}l_2 - l_{11}\right) \begin{pmatrix} \sin(\varphi_2) \\ -\cos(\varphi_2) \end{pmatrix} & \frac{\partial \dot{r}_{d10}}{\partial \dot{\varphi}_2} &= \left(\frac{1}{2}l_2 + l_{11}\right) \begin{pmatrix} \sin(\varphi_2) \\ -\cos(\varphi_2) \end{pmatrix} \\ \frac{\partial L_i}{\partial \varphi_2} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{für } i \in \{6, 7, 8\} \\ \frac{\partial \dot{r}_{di}}{\partial \dot{x}_3} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{für } i \in \{5, 6, 7, 8\} & \frac{\partial \dot{r}_{di}}{\partial \dot{x}_3} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{für } i \in \{4, 9, 10\} \\ \frac{\partial \dot{r}_{di}}{\partial \dot{y}_3} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{für } i \in \{5, 6, 7, 8\} & \frac{\partial \dot{r}_{di}}{\partial \dot{y}_3} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{für } i \in \{4, 9, 10\} \\ \frac{\partial \dot{r}_{d5}}{\partial \dot{\varphi}_3} &= \left(\frac{1}{2}l_3 - l_{11}\right) \begin{pmatrix} -\sin(\varphi_3) \\ \cos(\varphi_3) \end{pmatrix} & \frac{\partial \dot{r}_{d6}}{\partial \dot{\varphi}_3} &= \left(\frac{1}{2}l_3 + l_{11}\right) \begin{pmatrix} -\sin(\varphi_3) \\ \cos(\varphi_3) \end{pmatrix} \\ \frac{\partial \dot{r}_{d7}}{\partial \dot{\varphi}_3} &= \left(\frac{1}{2}l_3 - l_{11}\right) \begin{pmatrix} \sin(\varphi_3) \\ -\cos(\varphi_3) \end{pmatrix} & \frac{\partial \dot{r}_{d8}}{\partial \dot{\varphi}_3} &= \left(\frac{1}{2}l_3 + l_{11}\right) \begin{pmatrix} \sin(\varphi_3) \\ -\cos(\varphi_3) \end{pmatrix} \\ \frac{\partial \dot{r}_{di}}{\partial \dot{\varphi}_3} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{für } i \in \{4, 9, 10\}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe von (B.7), (B.8) und (B.9) können die Bewegungsgleichungen für Topologie D_2 angegeben werden:

$$\begin{aligned}
 \ddot{x}_2 &= \frac{1}{m_2} \left(-\frac{\partial U}{\partial x_2} - \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_2} + Q_{x_2} \right) & \ddot{x}_3 &= \frac{1}{m_3} \left(-\frac{\partial U}{\partial x_3} - \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_3} + Q_{x_3} \right) \\
 \ddot{y}_2 &= \frac{1}{m_2} \left(-\frac{\partial U}{\partial y_2} - \frac{\partial D}{\partial \dot{y}_2} + Q_{y_2} \right) & \ddot{y}_3 &= \frac{1}{m_3} \left(-\frac{\partial U}{\partial y_3} - \frac{\partial D}{\partial \dot{y}_3} + Q_{y_3} \right) \\
 \ddot{\varphi}_2 &= \frac{12}{m_2 l_2^2} \left(-\frac{\partial U}{\partial \varphi_2} - \frac{\partial D}{\partial \dot{\varphi}_2} + Q_{\varphi_2} \right) & \ddot{\varphi}_3 &= \frac{12}{m_3 l_2^2} \left(-\frac{\partial U}{\partial \varphi_3} - \frac{\partial D}{\partial \dot{\varphi}_3} + Q_{\varphi_3} \right).
 \end{aligned} \tag{B.10}$$

Das Gleichungssystem (B.10) ist ein explizites, gekoppeltes, nichtlineares Differentialgleichungssystem 2. Ordnung. Sofern die generalisierten Kräfte Q_a , $a = 1, \dots, 6$ nicht von der Zeit abhängen, ist es zusätzlich ein autonomes Differentialgleichungssystem. Die Berechnung der generalisierten Kräfte aus den äußeren Kräften ist in (5.23) angegeben.

Zusätzliche Informationen zu den Funktionsmustern

C.1 Entwicklungsstufen des Tensegrity-Greifers

In diesem Kapitel werden die Entwicklungsstufen der Funktionsmuster des Tensegrity-Greifers aus Abschnitt 5.2.3 dargestellt.



Abbildung C.1: Erstes Funktionsmuster des Tensegrity-Greifers, mit steifen Greifarmen. Breite: 9.5 cm, Länge: 14 cm, Abstand zwischen Greiferspitzen im geöffneten Zustand: 28 cm.

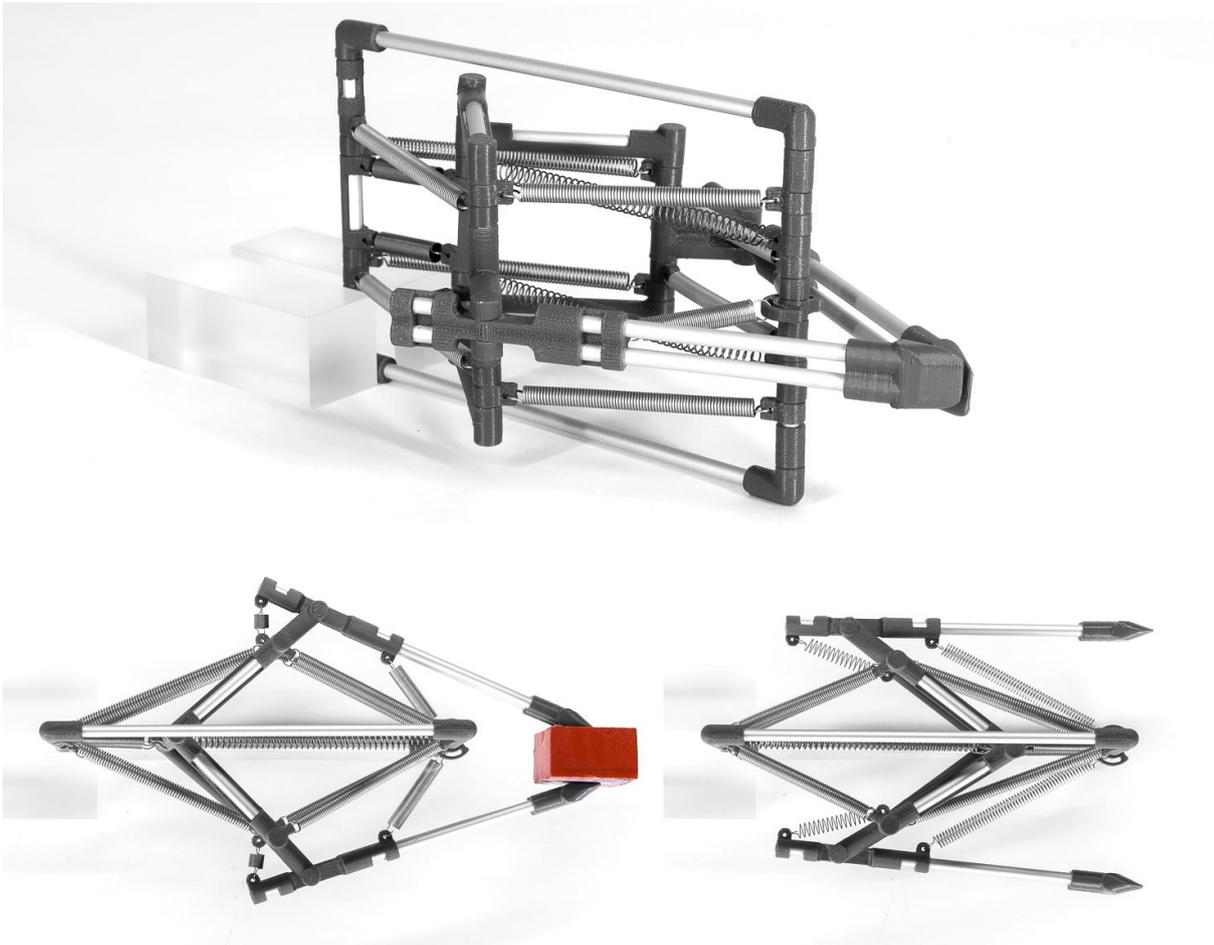


Abbildung C.2: Zweites Funktionsmuster des Greifers, mit gelenkigen Greifarmen. Breite: 9.5 cm, Länge: 14 cm, Abstand zwischen Greiferspitzen im geöffneten Zustand: 9 cm.



Abbildung C.3: Drittes Funktionsmuster des Greifers, mit gelenkigen Greifarman. Breite: 8 cm, Länge: 14 cm, Abstand zwischen Greiferspitzen im geöffneten Zustand: 9 cm.

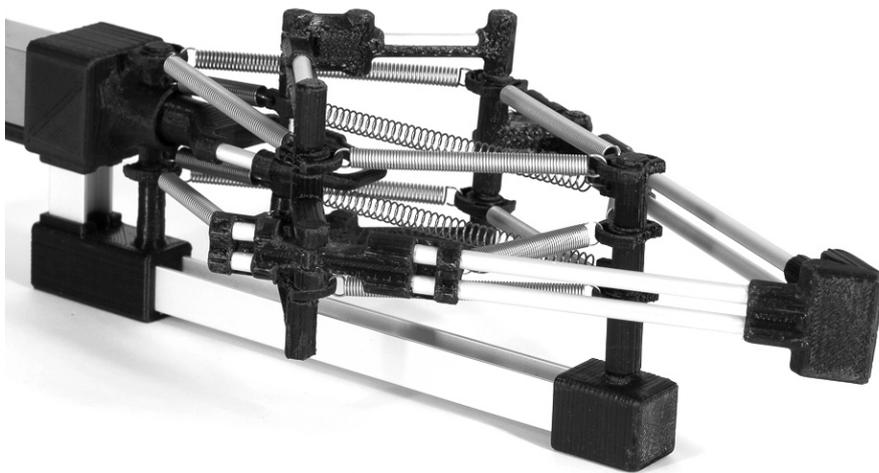
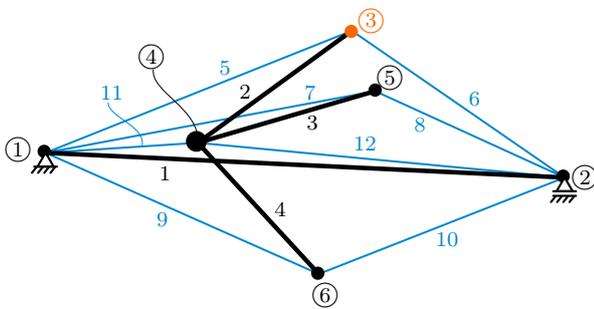


Abbildung C.4: Viertes Funktionsmuster des Greifers, mit gelenkigen Greifarman und offenem Rahmen. Breite: 8 cm, Länge: 14 cm, Abstand zwischen Greiferspitzen im geöffneten Zustand: 9 cm. Siehe auch Abbildung 5.15.

C.2 3D-Tensegrity-Greifer

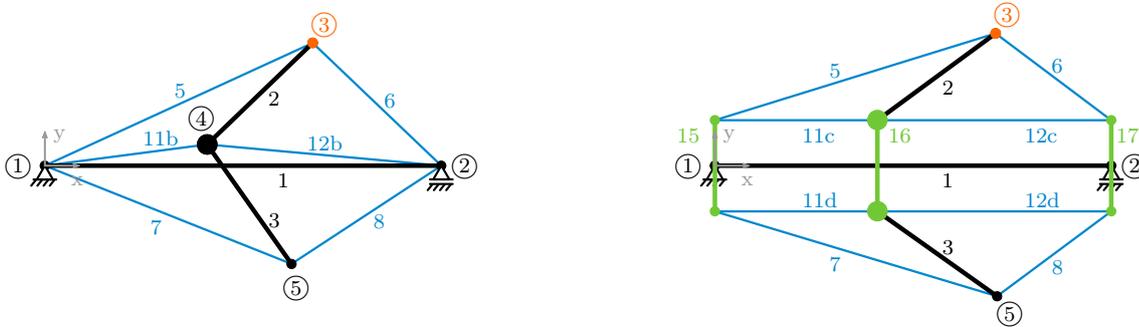
In diesem Abschnitt werden die Segmentparameter für den 3D-Tensegrity-Greifer aus Abschnitt 5.3.1 angegeben und beschrieben. Die Topologie befindet sich in Abbildung C.5(a).



$$\begin{aligned}
 l_1 &= l_{01} = 150.0 \text{ mm} \\
 l_2 &= l_{02} = l_3 = l_{03} = l_4 = l_{04} = 50.0 \text{ mm} \\
 l_{05} &= l_{07} = l_{09} = 64.2 \text{ mm} \\
 l_{06} &= l_{08} = l_{010} = 60.9 \text{ mm} \\
 l_{011} &= l_{012} = 34.0 \text{ mm}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_1 &= k_2 = k_3 = k_4 = 10^5 \text{ N/mm} \\
 k_5 &= k_7 = k_9 = 0.331 \text{ N/mm} \\
 k_6 &= k_8 = k_{10} = 0.395 \text{ N/mm} \\
 k_{11} &= k_{12} = 0.264 \text{ N/mm}
 \end{aligned}$$

(a) Bezeichnungen und Segmentparameter der Topologie für 3D-Tensegrity-Greifer.



(b) Zweidimensionale Ersatz-Topologien für 3D-Topologie.

Abbildung C.5: Topologien für die Bestimmung der Segmentparameter des 3D-Tensegrity-Greiflers.

Für die Bestimmung der Segmentparameter kann die 3D-Topologie auf eine zweidimensionale Topologie reduziert werden, siehe links in Abbildung C.5(b). Damit beide Topologien dieselben Ergebnisse haben, muss zusätzlich gelten:

$$l_{011b} = l_{011} \quad l_{012b} = l_{012} \quad k_{11b} = \frac{2}{3}k_{11} \quad k_{12b} = \frac{2}{3}k_{12}.$$

Aufgrund der Konstruktion des Funktionsmusters mit den Bauteilen aus Abbildung 5.31, werden Knoten ①, ② und ④ in mehrere Knoten aufgeteilt, mit einem Abstand von circa 20 mm zu Segment 1. Diese Änderung der Angriffspunkte der Segmente sollte bereits bei der Bestimmung der Segmentparameter berücksichtigt werden. Aus diesem Grund wurde eine weitere zweidimensionale Topologie entwickelt, deren Ergebnisse auf die dreidimensionale Topologie übertragen werden können. Diese Topologie ist rechts in Abbildung C.5(b) dargestellt. Neu hinzugekommen sind die grün dargestellten Segmente mit hoher Steifigkeit 15, 16 und 17 mit einer Länge von jeweils 40 mm. Dabei sind die Segmente 15 und 17 fest mit Knoten ① beziehungsweise ② verbunden (dies kann im FE-Formfindungsalgorithmus durch zusätzliche Fachwerke realisiert werden). Damit die Ergebnisse von der Ersatz-Topologie auf die 3D-Topologie übertragen werden können, haben die Segmente, die die gleichen Bezeichnungen wie die 3D-Topologie haben, die gleichen Segmentparameter. Weiterhin müssen die folgenden Beziehungen gelten:

$$l_{0ij} = l_{0i} \quad k_{ij} = \frac{1}{3}k_i \quad \text{mit } i \in \{11, 12\}, j \in \{c, d\}.$$

Mit Hilfe von den beiden Ersatz-Topologien wurden Segmentparameter für die 3D-Topologie bestimmt. Sie sind in Abbildung C.5(a) aufgelistet. Alle Segmente mit geringer Steifigkeit sind in den Gleichgewichtskonfigurationen Zugsegmente.

Das Funktionsmuster wird mit Hilfe von Aluminiumstäben, Zugfedern aus Stahl und gedruckten Verbindungselementen (Material: PLA) aufgebaut. Eine Simulation des Funktionsmusters, ohne die Zugsegmente, befindet sich in Abbildung C.6.

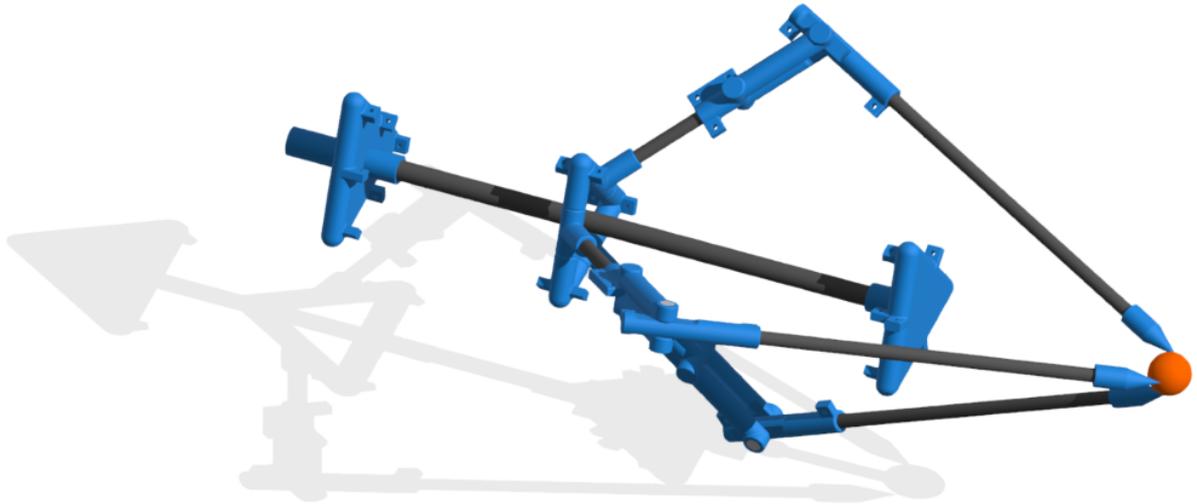


Abbildung C.6: Simulation des Funktionsmusters des 3D-Tensegrity-Greifers. Darstellung ohne Zugsegmente.

Für den Aufbau müssen die Parameter der Zugsegmente angepasst werden. Die Änderung von Knoten ①, ② und ③ (siehe Abbildung 5.31) wurde bereits bei der Bestimmung der Segmentparameter berücksichtigt. Bei der Bestimmung der Parameter der Zugfedern müssen allerdings zusätzlich die Befestigungen der Federn (Federhalter) berücksichtigt werden. Diese haben pro Aufhängung eine Länge von 4,5 mm. Aus diesem Grund müssen die Anfangslängen der gewählten Zugfedern um 9 mm kürzer sein als in Abbildung C.5(a) angegeben. Anstatt von jeweils einer Zugfeder für Segment 11 und 12 werden drei Federn parallel eingesetzt. Diese Federn haben jeweils ein Drittel der in Abbildung C.5(a) angegebenen Steifigkeit.

Literaturverzeichnis

- [Adr01] S.M.L. Adriaenssens und M.R. Barnes. “Tensegrity spline beam and grid shell structures”. In: *Engineering Structures* 23.1 (2001), S. 29,36.
- [Ago13] “A. Agogino and V. SunSpiral and D. Atkinson”. In: NASA Ames Research Center Intelligent Systems Division, 2013. Kap. Final Report Super Ball Bot - Structures for Planetary Landing and Exploration for the NASA Innovative Advanced Concepts (NIAC) Program.
- [Ago18] A. Agogino. *Precision Hopping/Rolling Robotic Surface Probe Based on Tensegrity Structures*. abgerufen Jan. 2018. 2018. URL: <https://www.nasa.gov/content/precision-hoppingrolling-robotic-surface-probe-based-on-tensegrity-structures/#backtoTop>.
- [Ald03] J.B. Aldrich, R.E. Skelton und K. Kreutz-Delgado. “Control synthesis for a class of light and agile robotic tensegrity structures”. In: *Proceedings of the 2003 American Control Conference, 2003*. Bd. 6. 2003, S. 5245–5251. DOI: 10.1109/ACC.2003.1242560.
- [Ald06] J.B. Aldrich und R.E. Skelton. “Backlash-free motion control of robotic manipulators driven by tensegrity motor networks”. In: *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*. 2006, S. 2300–2306. DOI: 10.1109/CDC.2006.377341.
- [Ali10] N.B.H. Ali, L. Rhode-Barbarigos, A.A.P. Albi und I.F.C. Smith. “Design optimization and dynamic analysis of a tensegrity-based footbridge”. In: *Engineering Structures* 32.11 (2010), S. 3650–3659. DOI: 10.1016/j.engstruct.2010.08.009.
- [Ash14] N. Ashweat und A. Eriksson. “Natural frequencies describe the pre-stress in tensegrity structures”. In: *Computers & Structures* (2014). DOI: 10.1016/j.compstruc.2014.01.020.
- [Ash15] N. Ashweat, G. Tamadapu und A. Eriksson. “Optimization of modular tensegrity structures for high stiffness and frequency separation requirements”. In: *International Journal of Solids and Structures* (2015). DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2015.11.017.
- [Ass06] A. Assalia, M. Gagner und M. Schein, Hrsg. *Controversies in Laparoscopic Surgery*. Springer, 2006. ISBN: 978-3-540-22952-3.
- [Böh11] V. Böhm, A. Jentsch, T. Kaufhold, F. Schneider und K. Zimmermann. “An approach to compliant locomotion systems based on tensegrity structures”. In: *Proc. of the 56rd IWK - Internationales Wissenschaftliches Kolloquium*. Ilmenau, Germany, 2011.
- [Böh12] V. Böhm, A. Jentsch, T. Kaufhold, F. Schneider, F. Becker und K. Zimmermann. “An approach to locomotion systems based on 3D tensegrity structures with a minimal number of struts”. In: *Proc. of the ROBOTIK 2012, 7th German Conference on Robotics*. München, Germany, 2012, S. 150–155.
- [Böh13a] V. Böhm, T. Kaufhold und K. Zimmermann. “Non-conventional compliant tensegrity structures for mobile robots with large shape variability”. In: *Proc. of the 2013 International Workshop on Soft Robotics and Morphological Computation*. Ascona, Switzerland, 2013, S. 0–19.
- [Böh13b] V. Böhm, I. Zeidis und K. Zimmermann. “Dynamic analysis of a simple planar tensegrity structure for the use in vibration driven locomotion systems”. In: *Proc. of the 12th Conference on Dynamical Systems - Theory and Applications (Vol. 2 - Applications)*. Łódź, Poland, 2013, S. 341–352.

- [Böh13c] V. Böhm und K. Zimmermann. “Vibration-Driven Mobile Robots Based on Single Actuated Tensegrity Structures”. In: *Proc. of the IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA 2013)*. Karlsruhe, Germany, 2013, S. 5455–5460. DOI: 10.1109/ICRA.2013.6631362.
- [Böh15a] V. Böhm, T. Kaufhold, I. Zeidis und K. Zimmermann. “Dynamic analysis of the rolling locomotion of mobile robots based on tensegrity structures with two curved compressed components”. In: *Proc. of the 13th Conference on Dynamical Systems - Theory and Applications (Vol. 1 - Mathematical and numerical approaches)*. Łódź, Poland, 2015, S. 105–116.
- [Böh15b] V. Böhm, I. Zeidis und K. Zimmermann. “An approach to the dynamics and control of a planar tensegrity structure with application in locomotion systems”. In: *International Journal of Dynamics and Control* 3.1 (2015), S. 41–49. DOI: 10.1007/s40435-014-0067-8.
- [Böh16a] V. Böhm. “Mechanik von Tensegrity-Strukturen und ihre Anwendung in der mobilen Robotik”. Habilitation. Technische Universität Ilmenau, 2016.
- [Böh16b] V. Böhm, T. Kaufhold, F. Schale und K. Zimmermann. “Spherical mobile robot based on a tensegrity structure with curved compressed members”. In: *2016 IEEE International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM)*. 2016, S. 1509–1514. DOI: 10.1109/AIM.2016.7576984.
- [Böh17a] V. Böhm und T. Kaufhold. “Mobile Tensegrity Robots - Structural Aspects”. In: *NASA/ESA Conference on Adaptive Hardware and Systems (AHS 2017), Workshop on Structurally Adaptive Tensegrity Robots*. California Institute of Technology, Pasadena, 2017.
- [Böh17b] V. Böhm, T. Kaufhold, I. Zeidis und K. Zimmermann. “Dynamic analysis of a spherical mobile robot based on a tensegrity structure with two curved compressed members”. In: *Archive of Applied Mechanics* 87.5 (2017). DOI: 10.1007/s00419-016-1183-z.
- [Böh17c] V. Böhm, S. Sumi, T. Kaufhold und K. Zimmermann. “Compliant multistable tensegrity structures”. In: *Mechanism and Machine Theory* 115 (2017), S. 130–148. DOI: 10.1016/j.mechmachtheory.2017.04.013.
- [Böh17d] V. Böhm, S. Sumi, T. Kaufhold und K. Zimmermann. “Compliant Multistable Tensegrity Structures with Simple Topologies”. In: *New Trends in Mechanism and Machine Science: Theory and Industrial Applications*. Hrsg. von P. Wenger und P. Flores. Bd. 43. Springer International Publishing, 2017, S. 153–161. ISBN: 978-3-319-44156-6. DOI: 10.1007/978-3-319-44156-6_16.
- [Bae96] T. Bäck. *Evolutionary Algorithms in Theory and Practice*. 1. Aufl. Oxford University Press, 1996. ISBN: 0-19-509971-0.
- [Bar05] G.T. Barber. “Structures composed of compression and tensile members”. Pat. US 6.868.640 B2. 2005.
- [Bar11] L. Rhode-Barbarigos, N.B.H. Ali, R. Motro und I.F.C. Smith. “Deployment aspects of a tensegrity-ring pedestrian bridge”. In: *Structural Engineers World Congress*. Côme, Italien, 2011.
- [Bar12] L. Rhode-Barbarigos, N.B.H. Ali, R. Motro und I.F.C. Smith. “Design aspects of a deployable tensegrity-hollow-rope footbridge”. In: *International Journal of Space Structures* 27.2 (2012), S. 107–115.
- [Bar99] M.R. Barnes. “Form Finding and Analysis of Tension Structures by Dynamic Relaxation”. In: *International Journal of Space Structures* 14.2 (1999), S. 89–104.

-
- [Bax08] K.M.A. Bax, K.E. Georgeson, S. S. Rothenberg, J.-S. Valla und C.K. Yeung, Hrsg. *Edoscopic Surgery in Infants and Children*. Springer, 2008. ISBN: 978-3-540-00115-7.
- [Beh07] E. Behrends. *Analysis Band 2*. Bd. 2. Friedr. Vieweg & Sohn Verlag, 2007. ISBN: 978-3-8348-0102-9.
- [Ber82] D.P. Bertsekas. *Constrained optimization and Lagrange multiplier methods*. Hrsg. von Werner Rheinboldt. New York, NY: Academic Press, 1982.
- [Ber99] D.P. Bertsekas. *Nonlinear Programming*. Bd. 2. Belmont, Massachusetts: Athena Scientific, 1999. ISBN: 978-1-886529007.
- [Bli13] T. Bliss, J. Werly, T. Iwasaki und H. Bart-Smith. “Experimental Validation of Robust Resonance Entrainment for CPG-Controlled Tensegrity Structures”. In: *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 21.3 (2013), S. 666–678.
- [Boe17] Q. Boehler, S. Abdelaziz, M. Vedrines, P. Poignet und P. Renaud. “Towards the Control of Tensegrity Mechanisms for Variable Stiffness Applications: A Case Study”. In: *New Trends in Mechanism and Machine Science: Theory and Industrial Applications*. Hrsg. von Philippe Wenger und Paulo Flores. Bd. 43. Springer International Publishing, 2017, S. 163–171. ISBN: 978-3-319-44156-6. DOI: 10.1007/978-3-319-44156-6_17.
- [Bro05] I.N. Bronstein, K.A. Semendjajew, G. Musiol und H. Möhlig. *Taschenbuch der Mathematik*. 6. Aufl. Verlag Harri Deutsch, 2005. ISBN: 3-8171-2006-0.
- [Bru16] J. Bruce. “Design, Building, Testing, and Control of SUPERball: A Tensegrity Robot to Enable New Forms of Planetary Exploration”. Dissertation. Santa Cruz: University of California, 2016.
- [Cal14] K. Caluwaerts. “Design and Computational Aspects of Compliant Tensegrity Robots”. Dissertation. Ghent, Belgium: Ghent University. Faculty of Engineering und Architecture, 2014.
- [Car12] S. Carstens. “Modellbildung und numerische Mechanik tensegrer Strukturen”. Dissertation. Kassel: Universität Kassel, 2012.
- [Che16] L.-H. Chen, K. Kim, E. Tang, K. Li, R. House, A.M. Agogino, V. Sunspirale und E. Jung. “Soft Spherical Tensegrity Robot Design Using Rod-Centered Actuation and Control”. In: *International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, Volume 5A: 40th Mechanisms and Robotics Conference*. 2016. DOI: 10.1115/DETC2016-60550.
- [Che17] L.-H. Chen, M.C. Daly, A.P. Sabelhaus, L. A. J. van Vuuren, H.J. Garnier, M.I. Verdugo, E. Tang, C.U. Spangenberg, F. Ghahani, A.M. Agogino und A.K. Agogino. “Modular Elastic Lattice Platform for Rapid Prototyping of Tensegrity Robots”. In: *ASME. International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, Volume 5B: 41st Mechanisms and Robotics Conference*. 2017. DOI: doi:10.1115/DETC2017-68264. Abbildung 2.6(g) wurde mit freundlicher Genehmigung des Autors abgedruckt.
- [Che18] L.-H. Chen, B. Cera, E.L. Zhu, R. Edmunds, F. Rice, A. Bronars, E. Tang, S.R. Malekshahi, O. Romero, A.K. Agogino und A.M. Agogino. “Inclined Surface Locomotion Strategies for Spherical Tensegrity Robots”. In: *Proceedings of the International Conference on Intelligent Robotics and Systems (IROS 2018) (to appear in)*. 2018.
- [Con13] R. Connelly. “Shaping Space”. In: Hrsg. von M. Senechal. Springer, New York, NY, 2013. Kap. Tensegrities and Global Rigidity, S. 267–278. DOI: 10.1007/978-0-387-92714-5_21.
-

- [Con95] R. Connelly und M. Terrell. “Globally rigid Symmetric Tensegrities”. In: *Structural Topology* 21 (1995), S. 59–78.
- [Con98] R. Connelly und A. Back. “Mathematics and Tensegrity”. In: *American Scientist* 86.2 (1998), S. 142–151.
- [Dös15] O. Dössel, T. Lenarz, C. Schlötelburg und T. Schmitz-Rode, Hrsg. *VDE-Expertenbericht: Biomedizinische Technik*. VDE Verband der Elektrotechnik Elektronik Informationstechnik e.V., 2015.
- [Deb01] K. Deb. *Multi-Objective Optimization using Evolutionary Algorithms*. 1. Aufl. John Wiley & Sons, Ltd, 2001. ISBN: 0-471-87339-X.
- [Def03] M. Defosse. “Shape memory effect in tensegrity structures”. In: *Mechanics Research Communications* 30 (2003). DOI: 10.1016/S0093-6413(03)00030-2.
- [Du16] W. Du, S. Ma, B. Li, M. Wang und S. Hirai. “Force Analytic Method for Rolling Gaits of Tensegrity Robots”. In: *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics* 21.5 (2016), S. 2249–2259. DOI: 10.1109/TMECH.2016.2519559.
- [Eic16] G. Eichfelder, T. Gerlach und S. Sumi. “A modification of the α BB method for box-constrained optimization and an application to inverse kinematics”. In: *EURO Journal on Computational Optimization* 4.1 (2016), S. 93–121. DOI: 10.1007/s13675-015-0056-5.
- [Emm63] D.G. Emmerich. “Structures Linéaires Autotendants”. Pat. Fr 1.377.291. 1963.
- [Est06] G.G. Estrada, H.-J. Bungartz und C. Mohrdieck. “Numerical form-finding of tensegrity structures”. In: *International Journal of Solids and Structures* 43.22 (2006), S. 6855–6868. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2006.02.012.
- [Fia68] A.V. Fiacco und G.P. McCormick. *Nonlinear Programming: Sequential unconstrained minimization techniques*. New York: John Wiley & Sons, 1968.
- [Fle08] T. Flemons. *Tensegrity Arm*. abgerufen Nov. 2017. 2008. URL: <http://www.intensiondesigns.com/models.html>. Abbildung 2.7(a) wurde mit freundlicher Genehmigung des Autors abgedruckt.
- [Fog62] L.J. Fogel. “Autonomous automata”. In: *Industrial Research* 4 (1962).
- [Fog66] L.J. Fogel, A.J. Owens und M.J. Walsh. *Artificial Intelligence through Simulated Evolution*. John Wiley, 1966.
- [Fog88] D.B. Fogel. “An evolutionary approach to the traveling salesman problem”. In: *Biological Cybernetics* 60.2 (1988), S. 139–144. DOI: 10.1007/BF00202901.
- [Fri14] J. Friesen, A. Pogue, T. Bewley, M. de Oliveira, R. Skelton und V. Sunspiral. “DuCTT: A tensegrity robot for exploring duct systems”. In: *2014 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*. 2014, S. 4222–4228. DOI: 10.1109/ICRA.2014.6907473.
- [Fri16] J.M. Friesen, P. Glick, M. Fanton, P. Manovi, A. Xydes, T. Bewley und V. Sunspiral. “The second generation prototype of a Duct Climbing Tensegrity robot, DuCTTv2”. In: *2016 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*. 2016, S. 2123–2128. DOI: 10.1109/ICRA.2016.7487361.
- [Fru09a] J.A. Frumar, Y. Zhou, Y Xie und M. Burry. “Tensegrity structures with 3D compression members: development and assembly”. In: *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures* 50.2 (2009), S. 99–110.

- [Fru09b] J.A. Frumar und Y.Y. Zhou. “Beyond Representation: Real Time Form Finding of Tensegrity Structures with 3d ‘Compressed’ Components.” In: *Proc. of the 27th eCAADe Conf.* Istanbul, 2009, S. 21–30.
- [Ful54] R.B. Fuller. “Building construction”. Pat. US 2.682.235. 1954.
- [Ger04] I. Gerdes, F. Klawonn und R. Kruse. *Evolutionäre Algorithmen*. 1. Aufl. Friedr. Vieweg & Sohn Verlag, 2004. ISBN: 3-528-05570-7.
- [Gil81] P.E. Gill, W. Murray und M.H. Wright. *Practical optimization*. London: Academic Press, 1981.
- [Gou98] M. Gough. “In the Laboratory of Constructivism: Karl Ioganson’s Cold Structures”. In: *October, MIT press* 84 (1998), S. 90–117.
- [Gro76] C. Großmann und H. Kleinmichel. *Verfahren der nichtlinearen Optimierung*. Leipzig: BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1976.
- [Gro79] C. Großmann und A.A. Kaplan. *Strafmethoden und modifizierte Lagrangefunktionen in der nichtlinearen Optimierung*. Leipzig: BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1979.
- [Gro97] C. Großmann und J. Terno. *Numerik der Optimierung*. Stuttgart: Teubner, 1997.
- [Gue06] S. Guest. “The stiffness of prestressed frameworks: A unifying approach”. In: *International Journal of Solids and Structures* 43.3 (2006), S. 842–854. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2005.03.008.
- [Gue11] S.D. Guest. “The stiffness of tensegrity structures”. In: *IMA Journal of Applied Mathematics* 76 (2011). DOI: 10.1093/imamat/hxq065.
- [Hah90] H.G. Hahn. *Technische Mechanik fester Körper*. Carl Hanser Verlag, 1990.
- [Han04] E. Hansen und G.W. Walster. *Global Optimization Using Interval Analysis*. 2. Aufl. Marcel Dekker, Inc., 2004. ISBN: 0-8247-4059-9.
- [Her05] E. Hering und H. Steinhart, Hrsg. *Taschenbuch der Mechatronik*. Fachbuchverlag Leipzig, 2005. ISBN: 3-446-22881-0.
- [Her97] J.L. Herder, M.J. Horward und W. Sjoerdsma. “A laparoscopic grasper with force perception”. In: *Minimally Invasive Therapy & Allied Technologies* 6.4 (1997), S. 279–286. DOI: 10.3109/13645709709153076.
- [Heu90] H. Heuser. *Lehrbuch der Analysis Teil 1*. 12. Aufl. B. G. Teubner Stuttgart, Leipzig, 1990. ISBN: 3-519-02233-8.
- [Hir12] S. Hirai und R. Imuta. “Dynamic simulation of six-strut tensegrity robot rolling”. In: *2012 IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics (ROBIO)*. 2012, S. 198–204. DOI: 10.1109/ROBIO.2012.6490966.
- [Hir13] S. Hirai, Y. Koizumi, M. Shibata, M. Wang und L. Bin. “Active shaping of a tensegrity robot via pre-pressure”. In: *2013 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics*. 2013, S. 19–25. DOI: 10.1109/AIM.2013.6584062.
- [Hir14] S. Hirai und R. Imuta. “Dynamic Modeling of Tensegrity Robots Rolling over the Ground”. In: *5th International Conference on Computational Methods (ICCM2014)*. Cambridge, 2014. DOI: 10.1109/AIM.2013.6584062.
- [Hol92] J.H. Holland. *Adaptation in Natural and Artificial Systems*. 2. Aufl. MIT Press, 1992. ISBN: 0-262-58111-6.

- [Hor95] R. Horst und P.M. Pardalos, Hrsg. *Handbook of Global Optimization*. Bd. 2. Springer-Science+Business Media, B.V., 1995. ISBN: 978-1-4613-5838-1.
- [Hus16] D. Hustig-Schultz, V. SunSpiral und M. Teodorescu. “Morphological design for controlled tensegrity quadruped locomotion”. In: *2016 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*. 2016, S. 4714–4719. DOI: 10.1109/IROS.2016.7759693.
- [IFT14] *IFTtoMM dictionaries online*. abgerufen Nov. 2016. Mai 2014, Version 3.1. URL: <http://www.iftomm-terminology.antonkb.nl/>.
- [Ing08] D.E. Ingber. “Tensegrity-based mechanosensing from macro to micro”. In: *Progress in Biophysics and Molecular Biology* 97.2-3 (2008), S. 163–179.
- [Isc13] A. Iscen, A.K. Agogino, V. SunSpiral und K. Tumer. “Robust Distributed Control of Rolling Tensegrity Robot”. In: *Autonomous Robots and Multi-robot Systems (ARMS) Workshop*. Saint Paul, 2013.
- [Isc14] A. Iscen. “Multiagent Learning for Locomotion and Coordination in Tensegrity Robotics”. Dissertation. Oregon State University, 2014.
- [Jau04] V.G. Jáuregui. “Tensegrity Structures and their Application to Architecture”. Masterarbeit. Belfast: Queen’s University, School of Architecture, 2004.
- [Jau09] V.G. Jáuregui. “Controversial Origins of Tensegrity”. In: *Proceedings of the International Association for Shell and Spatial Structures (IASS) Symposium 2009, Valencia*. 2009, S. 1642–1652.
- [Joh08] H. John und P. Wiklund, Hrsg. *Robotic Urology*. Springer, 2008. ISBN: 978-3-540-74139-8.
- [Jon75] K.A. De Jong. “Analysis of the behavior of a class of genetic adaptive systems”. Dissertation. University of Michigan, 1975.
- [Jua08] S.H. Juan und J.M. Mirats-Tur. “Tensegrity frameworks: static analysis review”. In: *Mechanism and Machine Theory* 43.7 (2008). DOI: 10.1016/j.mechmachtheory.2007.06.010.
- [Kan87a] A.H.G. Rinnooy Kan und G.T. Timmer. “Stochastic global optimization methods part I: Clustering methods”. In: *Mathematical Programming* 39.1 (Sep. 1987), S. 27–56. DOI: 10.1007/BF02592070.
- [Kan87b] A.H.G. Rinnooy Kan und G.T. Timmer. “Stochastic global optimization methods part II: Multi level methods”. In: *Mathematical Programming* 39.1 (Sep. 1987), S. 57–78. DOI: 10.1007/BF02592071.
- [Kau17a] T. Kaufhold. “Modellbildung, Simulation und Prototypenentwurf von mechanisch nachgiebigen, mobilen Robotern”. Dissertation. Technische Universität Ilmenau, 2017.
- [Kau17b] T. Kaufhold, F. Schale, V. Böhm und K. Zimmermann. “Indoor locomotion experiments of a spherical mobile robot based on a tensegrity structure with curved compressed members”. In: *2017 IEEE International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM)*. München, Germany, 2017, S. 523–528. DOI: 10.1109/AIM.2017.8014070.
- [Kim15] U. Kim, D.H. Lee, W.J. Yoon, B. Hannaford und H.R. Choi. “Force Sensor Integrated Surgical Forceps for Minimally Invasive Robotic Surgery”. In: *IEEE Transactions on Robotics* 31.5 (2015), S. 1214–1224. DOI: 10.1109/TR0.2015.2473515.
- [Kim16a] K. Kim. “On the Locomotion of Spherical Tensegrity Robots”. Dissertation. Berkeley: University of California, 2016.

-
- [Kim16b] K. Kim, L.H. Chen, B. Cera, M. Daly, E. Zhu, J. Despois, A.K. Agogino, V. SunSpiral und A.M. Agogino. “Hopping and rolling locomotion with spherical tensegrity robots”. In: *2016 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*. 2016, S. 4369–4376. DOI: 10.1109/IROS.2016.7759643.
- [Koi12] Y. Koizumi, M. Shibata und S. Hirai. “Rolling tensegrity driven by pneumatic soft actuators”. In: *2012 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. 2012, S. 1988–1993. DOI: 10.1109/ICRA.2012.6224834.
- [Koo12] K. Koohestani. “Form-finding of tensegrity structures via genetic algorithm”. In: *International Journal of Solids and Structures* 49.5 (2012), S. 739–747. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2011.11.015>.
- [Koo13a] K. Koohestani. “A computational framework for the form-finding and design of tensegrity structures”. In: *Mechanics Research Communications* 54.Supplement C (2013), S. 41–49. DOI: 10.1016/j.mechrescom.2013.09.010.
- [Koo13b] K. Koohestani und S.D. Guest. “A new approach to the analytical and numerical form-finding of tensegrity structures”. In: *International Journal of Solids and Structures* 50.19 (2013), S. 2995–3007. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2013.05.014.
- [Kor11] S. Korkmaz, N.B.H. Ali und Ian F.C. Smith. “Determining control strategies for damage tolerance of an active tensegrity structure”. In: *Engineering Structures* 33.6 (2011). DOI: 10.1016/j.engstruct.2011.02.031.
- [Koz92] J.R. Koza. *Genetic Programming: On the Programming of Computers by Means of Natural Selection*. The MIT Press, 1992. ISBN: 9780262111706.
- [Kut06] U. Kutschera. *Evolutionsbiologie*. 2. Aufl. Ulmer, 2006. ISBN: 3-8001-2851-9.
- [Lee17] S. Lee, J. Lee und J. Kang. “A Genetic Algorithm Based Form-finding of Tensegrity Structures with Multiple Self-stress States”. In: *Journal of Asian Architecture and Building Engineering* 16.1 (2017), S. 155–162. DOI: 10.3130/jaabe.16.155.
- [Les16] S. Lessard, D. Castro, W. Asper, S.D. Chopra, L.B. Baltaxe-Admony, M. Teodorescu, V. SunSpiral und A. Agogino. “A bio-inspired tensegrity manipulator with multi-DOF, structurally compliant joints”. In: *2016 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*. 2016, S. 5515–5520. DOI: 10.1109/IROS.2016.7759811.
- [Li10] Y. Li, X.-Q. Feng, Y.-P. Cao und H. Gao. “A Monte Carlo form-finding method for large scale regular and irregular tensegrity structures”. In: *International Journal of Solids and Structures* 47.14 (2010), S. 1888–1898. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2010.03.026.
- [Liu17] K. Liu, J. Wu, G.H. Paulino und H.J. Qi. “Programmable Deployment of Tensegrity Structures by Stimulus-Responsive Polymers”. In: *Scientific Reports* 7.3511 (2017). DOI: 10.1038/s41598-017-03412-6.
- [Loc98] M. Locatelli. “Relaxing the Assumptions of the Multilevel Single Linkage Algorithm”. In: *Journal of Global Optimization* 13.1 (1998), S. 25–42. DOI: 10.1023/A:1008246031222.
- [Mas05] M. Masic, R.E. Skelton und P.E. Gill. “Algebraic tensegrity form-finding”. In: *International Journal of Solids and Structures* 42.16 (2005), S. 4833–4858. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2005.01.014.
-

- [Mir14] B.T. Mirletz, I.-W. Park, T.E. Flemons, A.K. Agogino, R.D. Quinn und V. SunSpiral. “Design and Control of Modular Spine-Like Tensegrity Structures”. In: *6th World Conference on Structural Control and Monitoring*. Barcelona, Spain, 2014.
- [Mit17] H. Mittag. “Untersuchung des Bewegungsverhaltens einer nachgiebigen Tensegrity-Struktur für einen Zweifingergreifer”. Bachelorarbeit. Technische Universität Ilmenau, 2017.
- [Mot03] R. Motro. *Tensegrity: structural systems for the future*. London und Sterling: Kogan Page Science, 2003. ISBN: 1-903996-37-6.
- [Mot11] R. Motro. “Structural morphology of tensegrity systems”. In: *Meccanica* 46.1 (2011), S. 27–40. DOI: 10.1007/s11012-010-9379-8.
- [Mot86] R. Motro, S. Najari und P. Jouanna. “Static and dynamic analysis of tensegrity systems”. In: *Proceedings of the ASCE International Symposium*. New York: Springer-Verlag, 1986.
- [Mur00a] H. Murakami. “Static and dynamic analyses of tensegrity structures. Part 1. Nonlinear equations of motion”. In: *International Journal of Solids and Structures* 38 (2000), S. 3599–3613. DOI: 10.1016/S0020-7683(00)00232-8.
- [Mur00b] H. Murakami. “Static and dynamic characterization of some tensegrity structures”. In: *Journal of Applied Mechanics* 68.1 (2000), S. 19–27. DOI: 10.1115/1.1331058.
- [Nac13] W. Nachtigall und G. Pohl. *Bau-Bionik: Natur - Analogien - Technik*. Springer Vieweg, 2013. ISBN: 978-3-540-88994-6. DOI: 10.1007/978-3-540-88995-3.
- [Oka04] A.M. Okamura. “Methods for haptic feedback in teleoperated robot-assisted surgery”. In: *The Industrial robot* 31.6 (2004), S. 499–508. DOI: 10.1108/01439910410566362.
- [Opp00] I.J. Oppenheim und W.O. Williams. “Geometric Effects in an Elastic Tensegrity Structure”. In: *Journal of elasticity and the physical science of solids* 59.1-3 (2000), S. 51–65.
- [Opp01a] I.J. Oppenheim und W.O. Williams. “Vibration and Damping in Three-Bar Tensegrity Structure”. In: *Journal of Aerospace Engineering* 14.3 (2001), S. 85–91. DOI: 10.1061/(ASCE)0893-1321(2001)14:3(85).
- [Opp01b] I.J. Oppenheim und W.O. Williams. “Vibration of an elastic tensegrity structure”. In: *European Journal of Mechanics - A/Solids* 20.6 (2001). DOI: 10.1016/S0997-7538(01)01181-0.
- [Pag09] M. Pagitz und J.M. Mirats-Tur. “Finite element based form-finding algorithm for tensegrity structures”. In: *International Journal of Solids and Structures* 46.17 (2009), S. 3235–3240. ISSN: 0020-7683. DOI: 10.1016/j.ijso1str.2009.04.018.
- [Par01] I.C. Parmee. *Evolutionary and Adaptive Computing in Engineering Design*. 1. Aufl. Springer-Verlag, 2001. ISBN: 1-85233-029-5.
- [Par14] I. W. Park und V. SunSpiral. “Impedance controlled twisted string actuators for tensegrity robots”. In: *2014 14th International Conference on Control, Automation and Systems (ICCAS 2014)*. 2014, S. 1331–1338. DOI: 10.1109/ICCAS.2014.6987763.
- [Pau05a] C. Paul und H. Lipson. “Redundancy in the control of robots with highly coupled mechanical structures”. In: *2005 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*. 2005, S. 3585–3591. DOI: 10.1109/IR0S.2005.1545079.
- [Pau05b] C. Paul, H. Lipson und F.J. Valero-Cuevas. “Evolutionary form-finding of tensegrity structures”. In: *GECCO '05 Proceedings of the 7th annual conference on Genetic and evolutionary computation*. 2005, S. 3–10. DOI: 10.1145/1068009.1068011.

- [Pau05c] C. Paul, J.W. Roberts, H. Lipson und F.J. Valero Cuevas. “Gait production in a tensegrity based robot”. In: *ICAR '05. Proceedings., 12th International Conference on Advanced Robotics, 2005*. 2005, S. 216–222. DOI: 10.1109/ICAR.2005.1507415.
- [Pau06] C. Paul, F.J. Valero-Cuevas und H. Lipson. “Design and control of tensegrity robots for locomotion”. In: *IEEE Transactions on Robotics* 22.5 (2006), S. 944–957. DOI: 10.1109/TR0.2006.878980.
- [Pic05] G. Picod, A. C. Jambon, D. Vinatier und P. Dubois. “What can the operator actually feel when performing a laparoscopy?”. In: *Surgical Endoscopy And Other Interventional Techniques* 19.1 (2005), S. 95–100. DOI: 10.1007/s00464-003-9330-3.
- [Pug76] A. Pugh. *An Introduction to Tensegrity*. Berkeley und Los Angeles, California: University of California Press Berkeley, 1976. ISBN: 0-520-03055-9.
- [Raj06] R.P. Raj und S.D. Guest. “Using Symmetry for Tensegrity Form-Finding”. In: *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures* 47 (2006).
- [Rec73] I. Rechenberg. *Evolutionsstrategie: Optimierung technischer Systeme nach Prinzipien der biologischen Evolution*. Stuttgart: Frommann-Holzooog, 1973.
- [Rie08] J. Rieffel, B. Trimmer und H. Lipson. “Mechanism as mind: what tensegrities and caterpillars can teach us about soft robotics”. In: *In Artificial Life XI: Proceedings of the Eleventh International Conference on the Simulation and Synthesis of Living Systems*. Hrsg. von S. Bullock, J. Noble, R. Watson und M. A. Bedau. 2008.
- [Rie09] J. Rieffel, F. Valero-Cuevas und H. Lipson. “Automated discovery and optimization of large irregular tensegrity structures”. In: *Computers & Structures* 87.5 (2009), S. 368–379. DOI: 10.1016/j.compstruc.2008.11.010.
- [Rie10] J.A. Rieffel, F.J. Valero-Cuevas und H. Lipson. “Morphological communication: exploiting coupled dynamics in a complex mechanical structure to achieve locomotion”. In: *Journal of the Royal Society Interface* 7.45 (2010), S. 613–621. DOI: doi:10.1098/rsif.2009.0240.
- [Roe16] R. Roeder. “Entwicklung, Bau und Test eines Antriebs für eine Tensegrity-Struktur”. Masterarbeit. Technische Universität Ilmenau, 2016.
- [Sab15] A. P. Sabelhaus, J. Bruce, K. Caluwaerts, P. Manovi, R. F. Firoozi, S. Dobi, A. M. Agogino und V. SunSpiral. “System design and locomotion of SUPERball, an untethered tensegrity robot”. In: *2015 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*. 2015, S. 2867–2873. DOI: 10.1109/ICRA.2015.7139590.
- [Saf12a] S.D. Safaei. “Stiffness and vibration properties of slender tensegrity structures”. PhD Thesis. Stockholm: Royal Institute of Technology, 2012.
- [Saf12b] S.D. Safaei, A. Eriksson und G. Tibert. “Optimum pre-stress design for frequency requirement of tensegrity structures”. In: *Proceedings of 10th World Congress an Computational Mechanics, Brazil*. Bd. 1. Juli 2012. DOI: 10.5151/meceng-wccm2012-18317.
- [Sch17] P. Schorr, S. Sumi, V. Böhm und K. Zimmermann. “Dynamical investigation of a vibration driven locomotion system based on a multistable tensegrity structure”. In: *Proc. of the 14th Conference on Dynamical Systems - Theory and Applications (Vibration, Control and Stability of Dynamical Systems)*. Łódź, Poland, 2017, S. 485–496.
- [Sch61] C.J. Schmidt. “Spherical building structure with curved beams”. Pat. US 2978074 A. 1961.

- [Sch75] H.-P. Schwefel. “Evolutionsstrategie und numerische Optimierung”. Dissertation. Berlin: TU Berlin, 1975.
- [Shi13] M. Shibata, T. Miyamura, N. Sakagami und S. Miyata. “Use of a Deformable Tensegrity Structure as an Underwater Robot Body”. In: *Journal of Robotics and Mechatronics* 25.5 (2013), S. 804–811.
- [Shi14] M. Shibata, T. Miyamura und N. Sakagami. “A portable underwater robot with a tensegrity body composed of thruster units”. In: *Proceedings of the 17th International Conference on Climbing and Walking Robots and the Support Technologies for Mobile Machines*. Poznan, Poland, 2014, S. 503–510. DOI: 10.1142/9789814623353_0059.
- [Ske01a] R.E. Skelton, R. Adhikari, J. P. Pinaud, W. Chan und J.W. Helton. “The Mechanical Systems Design Handbook: Modeling, Measurement, and Control”. In: Hrsg. von Y. Hurzmuzlu und O. Nwokah. CRC Press, 2001. Kap. An introduction to the mechanics of tensegrity structures. ISBN: 0-8493-8596-2.
- [Ske01b] R.E. Skelton, J.P. Pinaud und D.L. Mingori. “Dynamics of the shell class of tensegrity structures”. In: *Journal of the Franklin Institute* 338.2 (2001), S. 255–320. DOI: 10.1016/S0016-0032(00)00078-8.
- [Ske09] R.E. Skelton und M.C. de Oliveira. *Tensegrity Systems*. Springer, 2009. ISBN: 978-8-387-74241-0.
- [Sne13] K. Snelson und E. Heartney. *Art and Ideas*. Marlborough Gallery, 2013.
- [Str94] S.H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Perseus Book, Reading, Massachusetts, 1994. ISBN: 0-201-54344-3.
- [Sul02] C. Sultan, M. Corless und R.E. Skelton. “Linear dynamics of tensegrity structures”. In: *Engineering Structures* 24 (2002). DOI: 10.1016/S0141-0296(01)00130-4.
- [Sum17a] S. Sumi, V. Böhm, F. Schale, R. Roeder, A. Karguth und K. Zimmermann. “A Novel Gripper Based on a Compliant Multistable Tensegrity Mechanism”. In: *Microactuators and Micro-mechanisms: Proceedings of MAMM-2016, Ilmenau, Germany, October 5-7, 2016*. Hrsg. von L. Zentner, B. Corves, B. Jensen und E.-C. Lovasz. Bd. 45. Springer International Publishing, 2017, S. 115–126. ISBN: 978-3-319-45387-3. DOI: 10.1007/978-3-319-45387-3_11.
- [Sum17b] S. Sumi, V. Böhm, F. Schale und K. Zimmermann. “Compliant Gripper Based on a Multistable Tensegrity Structure”. In: *New Trends in Mechanism and Machine Science: Theory and Industrial Applications*. Hrsg. von P. Wenger und P. Flores. Bd. 43. Springer International Publishing, 2017, S. 143–151. ISBN: 978-3-319-44156-6. DOI: 10.1007/978-3-319-44156-6_15.
- [Sum17c] S. Sumi, V. Böhm und K. Zimmermann. “A multistable tensegrity structure with a gripper application”. In: *Mechanism and Machine Theory* 114 (2017), S. 204–217. DOI: 10.1016/j.mechmachtheory.2017.04.005.
- [Sum17d] S. Sumi, P. Schorr, V. Böhm und K. Zimmermann. “Dynamic analysis of a compliant tensegrity structure for the use in a gripper application”. In: *Proc. of the 14th Conference on Dynamical Systems - DSTA*. To be published in Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. Łódź, Poland, 2017.
- [Sza63] I. Szabó. *Einführung in die Technische Mechanik*. 6. Aufl. Springer-Verlag, 1963.
- [Ter94] Y. Termonia. “Molecular Modeling of Spider Silk Elasticity”. In: *Macromolecules* 27.25 (1994), S. 7378–7381. DOI: 10.1021/ma00103a018.

- [Tib11] A.G. Tibert und S. Pellegrino. “Review of Form-Finding Methods for Tensegrity Structures”. In: *International Journal of Space Structures* 26.3 (2011). DOI: 10.1260/0266-3511.26.3.241.
- [Tie13] B.R. Tietz, R.W. Carnahan, R.J. Bachmann, R.D. Quinn und V. SunSpiral. “Tetraspine: Robust terrain handling on a tensegrity robot using central pattern generators”. In: *2013 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics*. 2013, S. 261–267. DOI: 10.1109/AIM.2013.6584102.
- [Tra10] H.C. Tran und J. Lee. “Advanced form-finding of tensegrity structures”. In: *Computers & Structures* 88.3 (2010), S. 237–246. DOI: 10.1016/j.compstruc.2009.10.006.
- [Tra11] H.C. Tran und J. Lee. “Form-finding of tensegrity structures with multiple states of self-stress”. In: *Acta Mechanica* 222 (2011), S. 131–147. DOI: 10.1007/s00707-011-0524-9.
- [Tra13] H.C. Tran und J. Lee. “Form-finding of tensegrity structures using double singular value decomposition”. In: *Engineering with Computers* 29.1 (2013), S. 71–86. DOI: 10.1007/s00366-011-0245-7.
- [Tri17] D.B.P. Tripp. “Force Sensing Surgical Grasper with Folding Capacitive Sensor”. Master Thesis. The University of Western Ontario, 2017.
- [Tur07] J.M. Mirats-Tur, S.H. Juan und A.G. Rovira. “Dynamic equations of motion for a 3-bar tensegrity based mobile robot”. In: *IEEE Conference on Emerging Technologies and Factory Automation, 2007. ETFA*. 2007. ISBN: 978-1-4244-0825-2. DOI: 10.1109/EFTA.2007.4416935.
- [Vas99] N. Vassart und R. Motro. “Multiparametered Formfinding Method: Application to Tensegrity Systems”. In: *International Journal of Space Structures* 14.2 (1999), S. 147–154. DOI: 10.1260/0266351991494768.
- [Veu14] N.W. Veuve, S.D. Safaei und I. F.C. Smith. “Toward development of a biomimetic tensegrity footbridge”. In: *6WCSCM: Sixth World Conference on Structural Control and Monitoring*. Barcelona, Spain: International Center for Numerical Methods in Engineering (CIMNE), 2014. ISBN: 978-84-942844-6-5.
- [Veu15] N. Veuve, S.D. Safaei und I.F.C. Smith. “Deployment of a Tensegrity Footbridge”. In: *Journal of Structural Engineering* 141.11 (2015). DOI: 10.1061/(ASCE)ST.1943-541X.0001260.
- [Web13] V.A. Webster, A.J. Lonsberry, A.D. Horchler, K.M. Shaw, H.J. Chiel und R.D. Quinn. “A segmental mobile robot with active tensegrity bending and noise-driven oscillators”. In: *2013 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics*. 2013, S. 1373–1380. DOI: 10.1109/AIM.2013.6584286.
- [Wei07] K. Weicker. *Evolutionäre Algorithmen*. 2. Aufl. B. G. Teubner Verlag, 2007. ISBN: 978-3-8351-0219-4.
- [Wen18] P. Wenger und D. Chablat. “Computational Kinematics. Mechanisms and Machine Science”. In: Hrsg. von S. Zeghloul, L. Romdhane und M. Laribi. Bd. 50. Springer, Cham, 2018. Kap. Kinetostatic Analysis and Solution Classification of a Planar Tensegrity Mechanism, S. 422–431. DOI: 10.1007/978-3-319-60867-9_48.
- [Xu10] X. Xu und Y. Luo. “Form-finding of nonregular tensegrities using a genetic algorithm”. In: *Mechanics Research Communications* 37 (2010), S. 85–91. DOI: 10.1016/j.mechrescom.2009.09.003.
- [Xu11] X. Xu und Y. Luo. “Multistable Tensegrity Structures”. In: *Journal of Structural Engineering* 137.1 (2011), S. 117–123. DOI: 10.1061/(ASCE)ST.1943-541X.0000281.

- [Yam11] M. Yamamoto, B.S. Gan, K. Fujita und J. Kurokawa. “A Genetic Algorithm Based Form-Finding for Tensegrity Structure”. In: *Procedia Engineering* 14, Supplement C (2011), S. 2949–2956. DOI: 10.1016/j.proeng.2011.07.371.
- [Zen12] L. Zentner und V. Böhm. *Mechanical Engineering*. Hrsg. von Murat Gokcek. IniTech, 2012. Kap. On the Mechanical Compliance of Technical Systems, S. 341–352. ISBN: 978-953-51-0505-3.
- [Zha06] L. Zhang, B. Maurin und R. Motro. “Form-Finding of Nonregular Tensegrity Systems”. In: *Journal of Structural Engineering* 132.9 (2006). DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9445(2006)132:9(1435).
- [Zha07] J. Zhang. “Structural Morphology and Stability of Tensegrity Structures”. Dissertation. Kyoto University, 2007.
- [Zha14] L.-Y. Zhang, Y. Li, Y.-P. Cao und X.-Q. Feng. “Stiffness matrix based form-finding method of tensegrity structures”. In: *Engineering Structures* 58 (2014), S. 36–48. DOI: 10.1016/j.engstruct.2013.10.014.
- [Zha15] J. Y. Zhang und M. Ohsaki. *Tensegrity structures - Form, Stability, and Symmetry*. Hrsg. von Masato Wakayama. Bd. 6. Mathematics for Industry. Springer, 2015. ISBN: 978-4-431-548121-6.

Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand 2014 bis 2018 während meiner Tätigkeit als Entwicklungsingenieur bei der **avateramedical** Mechatronis GmbH (bis 2017 TETRA Gesellschaft für Sensorik, Robotik und Automation mbH) in Kooperation mit dem Fachgebiet Technische Mechanik der Fakultät für Maschinenbau der Technischen Universität Ilmenau.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Dr.-Ing. Andreas Karguth, dem Geschäftsführer der TETRA GmbH (bis 2015), welcher mir die Promotion in der TETRA GmbH ermöglicht hat. Außerdem gilt herzlicher Dank meinem Doktorvater Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Klaus Zimmermann und meinem unmittelbaren Betreuer Herrn PD Dr.-Ing. habil. Valter Böhm, welche meine Arbeit an der Universität fachlich betreut haben. Diese drei Personen haben meinen wissenschaftlichen Werdegang entscheidend geprägt. Für Ihre Förderung und Unterstützung bin ich ganz besonders dankbar.

Ich danke der **avateramedical** Mechatronics GmbH, welche mir die Promotion finanziell ermöglicht hat.

Die kollegiale und kreative Zusammenarbeit, sowohl in der Arbeitsgruppe mit Prof. Klaus Zimmermann, Dr. Valter Böhm und M.Sc. Philipp Schorr als auch in der Firma, insbesondere mit Dr. Andreas Karguth, Dipl.-Ing. Christian Trommer, Dipl.-Ing. Christian Buth und M.Sc. Simon Wawerka hat zu denen in dieser Dissertation dargestellten Ergebnissen wesentlich beigetragen.

Den von mir betreuten Studierenden, M.Sc. Richard Roeder und B.Sc. Hannah Mittag, möchte ich für ihre Unterstützung bei der Entwicklung und experimentellen Untersuchung der Tensegrity-Greifer danken.

Ich danke Herrn Univ.-Prof. Dr. rer. nat. habil. Armin Hoffmann für das interessante Gespräch auf dem Sportfest des Instituts für Mathematik, welches mir spannende neue Ansätze für mögliche Optimierungsverfahren gegeben hat.

Mein Dank gilt weiterhin Dipl.-Ing. Markus Schweitzer, welcher mich bei der Erstellung der Fotos der Funktionsmuster und der Operationsinstrumente unterstützt hat.

Ich danke meinen Eltern und meinem Mann für ihre Geduld die unzähligen Versionen dieser Arbeit zu lesen und zu kommentieren und für ihre Unterstützung während dieser Zeit.

Erklärung

Ich versichere, dass ich die vorliegende Arbeit ohne unzulässige Hilfe Dritter und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Die aus anderen Quellen direkt oder indirekt übernommenen Daten und Konzepte sind unter Angabe der Quelle gekennzeichnet.

Bei der Auswahl und Auswertung folgenden Materials haben mir die nachstehend aufgeführten Personen in der jeweils beschriebenen Weise entgeltlich/unentgeltlich geholfen:

1. Herr Dr.-Ing. Andreas Karguth (unentgeltlich)

Weitere Personen waren an der inhaltlich-materiellen Erstellung der vorliegenden Arbeit nicht beteiligt. Insbesondere habe ich hierfür nicht die entgeltliche Hilfe von Vermittlungs- bzw. Beratungsdiensten (Promotionsberater oder anderer Personen) in Anspruch genommen. Niemand hat von mir unmittelbar oder mittelbar geldwerte Leistungen für Arbeiten erhalten, die im Zusammenhang mit dem Inhalt der vorgelegten Dissertation stehen.

Die Arbeit wurde bisher weder im In- noch im Ausland in gleicher oder ähnlicher Form einer Prüfungsbehörde vorgelegt.

Ich bin darauf hingewiesen worden, dass die Unrichtigkeit der vorstehenden Erklärung als Täuschungsversuch bewertet wird und gemäß § 7 Abs. 10 der Promotionsordnung den Abbruch des Promotionsverfahrens zur Folge hat.

Ort, Datum

Susanne Sumi