

# Ein Beitrag zur Berücksichtigung von pseudoelastischem Werkstoffverhalten in der Modellierung tubulärer Kontinuumsroboter

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades

Doktoringenieur  
(Dr.-Ing.)

vorgelegt der

Fakultät für Maschinenbau der  
Technischen Universität Ilmenau

von Herrn

M.Sc. Christoph Greiner-Petter

Gutachter:	Prof. Dr.-Ing. Thomas Sattel	Technische Universität Ilmenau
	Prof. Dr.-Ing. Jessica Burgner-Kahrs	Leibniz Universität Hannover
	Prof. Dr.-Ing. Stefan Seelecke	Universität Saarbrücken

Tag der Einreichung: 23.02.2018

Tag der wissenschaftlichen Aussprache: 28.11.2018

urn:nbn:de:gbv:ilm1-2018000597



# Kurzfassung

Die Arbeit widmet sich der elastokinematischen Modellierung tubulärer Kontinuumsroboter aus Nickel-Titan-Röhrchen. Besonderes Augenmerk liegt dabei auf der Berücksichtigung des nichtlinearen und hysteresebehafteten Werkstoffverhaltens der Nickel-Titan-Legierung und dessen Einfluss auf das mechanische Verhalten tubulärer Kontinuumsmechanismen.

Einleitend erfolgt eine Motivation zur potentiellen Anwendung tubulärer Kontinuumsroboter in der Medizin, eine Gegenüberstellung unterschiedlicher Kanülen zur aktiven Trajektorienverfolgung sowie die Darlegung des Standes der Forschung von tubulären Kontinuumsrobotern.

Die Modellierung wird dann in mehreren Stufen, aus zum Teil verschachtelten, Teilmodellen aufgebaut. Zunächst wird die Werkstoffcharakteristik der Nickel-Titan-Legierung durch ein nichtlineares Werkstoffmodell mit Hystereseberücksichtigung abgebildet und mit Messungen verglichen. Darauf aufbauend wird ein Bauteilmodell hergeleitet, welches einzelne Nickel-Titan-Röhrchen unter reiner Biegung abbilden kann. Anschließend erfolgt die Betrachtung der Auswirkung der Werkstoffhysterese auf die Gleichgewichtslage tubulärer Kontinuumsmechanismen sowie die Bestimmung von Gleichgewichtskrümmungen und Übergangswinkeln. Diese Teilmodelle werden aus einer numerischen Kontaktsimulation einer einfachen Röhrchenkombination mit linearelastischem Werkstoffverhalten abgeleitet. Eine Gesamtkinematik führt die, aus den Teilmodellen gewonnenen, kinematischen Zustände zu einer Beschreibung des Bewegungsverhaltens des gesamten Kontinuumsmechanismus zusammen. Zur Beurteilung der Modellqualität erfolgen Messungen der Trajektorie der Röhrchenenden eines tubulären Kontinuumsmechanismus aus zwei Röhrchen. Es wird gezeigt, dass es mit der Modellierungsweise möglich ist, die gesamte Trajektorie für eine maximale Kanülenlänge von 70 mm mit einer maximalen euklidischen Abweichung von etwa 2 mm abzubilden. Die Kalibrierung der kinematischen Zustände reduziert die maximale euklidische Abweichung deutlich unter 1 mm.

Basierend auf dem nichtlinearen Bauteilmodell und der berechneten Gleichgewichtslage erfolgt eine modellbasierte Bestimmung der erforderlichen Antriebskräfte zum Verschieben der Röhrchen und der Vergleich dieser mit Messungen.

Die Arbeit schließt mit der Beschreibung aller verwendeten Experimentalaufbauten ab. Dazu gehören die Antriebseinheit zur Verschiebung der Röhrchen, eine schwenkbare Austrittsbuchse zur Erhöhung der Bewegungsfreiheit tubulärer Kontinuumsmechanismen, ein Stereokamera-Messsystem zur Trajektorienmessung und ein Kraftmesssystem zur Bestimmung der erforderlichen Antriebskräfte.





# Abstract

This thesis addresses the elastokinematic modeling of tubular continuum robots comprised of nickel-titanium tubes. Particular attention is paid to the nonlinear and hysteretic material behaviour of nickel-titanium and its influence on the mechanical behaviour of tubular continuum mechanisms.

Initially, a potential application of tubular continuum robots in medicine is motivated. It is followed by a comparison of different cannulas for active following of trajectories and a statement of the state of the research on tubular continuum robots.

The modelling is then built up in several stages of partially nested submodels. First, the material characteristic of the nickel-titanium alloy is represented by a nonlinear material constitutive law with hysteresis. Based on this, a structural element constitutive law is derived, which represents single nickel-titanium tubes under pure bending. Subsequently, the effect of the material hysteresis on the equilibrium conformation of tubular continuum mechanisms and the determination of equilibrium curvatures and transition angles is considered. These submodels are derived from a numerical contact simulation of a simple tube combination with linear elastic material behaviour. The kinematic states, obtained from the submodels, are then combined into an overall kinematic formulation of the entire continuum mechanisms motion behaviour. Trajectory measurements of the tube ends of a tubular continuum mechanism made of two tubes are conducted to assess the model quality. The measurements show that the modelling method is able to map the entire trajectory for a maximum cannula length of 70 mm, with a maximum euclidean deviation of approximately 2 mm. The calibration of the kinematic states reduces the maximum euclidean deviation to well below 1 mm.

Finally, based on the non-linear structural element constitutive law and the calculated equilibrium conformation, a model-based determination of the required driving forces for moving the tubes is presented and compared to measurements.

The work concludes with a description of all employed experimental setups. These include the drive unit for displacing the tubes, a pivotable outlet bushing to increase the freedom of movement of tubular continuum mechanisms, a stereo camera measurement system for trajectory measurement and a force measurement system for determining the required driving forces.



# Inhaltsverzeichnis

<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>1</b>
<b>1. Einleitung und wissenschaftlicher Beitrag</b>	<b>5</b>
<b>2. Stand der Forschung</b>	<b>9</b>
2.1. Lokalisationssysteme in der Neurochirurgie . . . . .	9
2.2. Kanülen zur aktiven Trajektorienverfolgung . . . . .	15
2.3. Tubuläre Kontinuumsroboter . . . . .	20
<b>3. Ein Werkstoffmodell für die Nickel-Titan-Legierung</b>	<b>29</b>
3.1. Grundlagen . . . . .	30
3.2. Zug- und Druckmessungen . . . . .	36
3.3. Formulierung des Werkstoffmodells . . . . .	40
3.4. Ermittlung der Werkstoffparameter . . . . .	46
<b>4. Ein Bauteilmodell für Nickel-Titan-Röhrchen</b>	<b>51</b>
4.1. Stand der Forschung . . . . .	51
4.2. Bauteilkinematik . . . . .	55
4.3. Biegemoment und neutrale Faser . . . . .	59
4.4. Modellvergleich mit Experimenten aus der Literatur . . . . .	69
<b>5. Die Gleichgewichtslage verschachtelter Nickel-Titan-Röhrchen</b>	<b>73</b>
5.1. Kanülenzusammensetzung . . . . .	74
5.2. Kontaktverhalten verschachtelter Röhrchen . . . . .	78
5.3. Abschätzung der Gleichgewichtskrümmung . . . . .	91
5.4. Abschätzung des Übergangswinkels . . . . .	97
5.5. Gesamtkinematik . . . . .	102
5.6. Hysterese des Trajektorienverlaufs . . . . .	106
5.7. Kalibrierung . . . . .	131
5.8. Sensitivität . . . . .	136
<b>6. Antriebskräfte in tubulären Kontinuumsmechanismen</b>	<b>143</b>
6.1. Kräfte zur Verrichtung der Arbeit der inneren Kräfte . . . . .	144
6.2. Kräfte zur Überwindung der Reibung zwischen den Röhrchen . . . . .	149

---

6.3. Kräfte zur Durchdringung von Gewebe . . . . .	152
<b>7. Versuchsaufbauten</b>	<b>159</b>
7.1. Antriebseinheit für Translation und Rotation . . . . .	159
7.2. Aktuierte schwenkbare Austrittsbuchse . . . . .	169
7.3. Positionsmessung . . . . .	172
7.4. Kraftmessung . . . . .	180
<b>8. Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>183</b>
<b>Quellenverzeichnis</b>	<b>185</b>
<b>A. Modellparameter</b>	<b>203</b>

# Symbolverzeichnis

---

Symbol	Beschreibung
$a$	Abstand der Messmarke vom Röhrchenende
$A$	Fläche
$A, B, \dots$	Kontaktpunkte
$b$	Luftspalt
$B$	Breite des Querschnitts
$c$	Zyklus oder Lastschritt
$C$	Anzahl an Zyklen
$D$	Durchmesser
$e$	Einheitsvektor
$E$	Elastizitätsmodul
$F$	Kraft
$G$	Schubmodul
$H$	Heaviside-Funktion
$i$	Röhrchenindex
$I$	Flächenträgheitsmoment
$j$	Abschnittsindex
$k$	diskretes Querschnittselement
$\ell$	Kontaktpunktindex
$K$	Anzahl an Querschnittselementen
$\mathcal{K}$	Menge aus Kontaktpunkten
$l$	Kontaktpunktposition oder -abstand
$M$	Biegemoment
$N$	Anzahl der Röhrchen einer Kanülenzusammensetzung
$p$	Unterabschnittsindex

---

Fortsetzung auf nächster Seite.

---

Fortsetzung der vorherigen Seite.

---

Symbol	Beschreibung
$P$	Anzahl an Unterabschnitten
$\mathcal{P}$	Menge aus Parametern
$Q$	Gütemaß
$\mathbf{r}$	Ortsvektor
$s$	natürliche Koordinate der Röhrenachse
$S$	Sensitivität
$t$	Zeit
$T$	Temperatur
$\mathbf{T}$	Koordinatentransformation
$u$	diskretisierte Zeit
$U$	Endzeitpunkt des diskreten Zeitverlaufs
$v$	Verschiebung in $y$ -Richtung
$w$	längenbezogene Dichte der inneren Arbeit
$W$	Arbeit
$x$	Koordinate
$\mathbf{x}$	Koordinaten eines Bildpunkts
$y$	Koordinate
$z$	Koordinate
<hr/>	
$\alpha$	räumlicher Ausrichtungswinkel der Führungsbuchse
$\beta$	Parameter der Werkstoffhysterese
$\Gamma$	Modellfehler
$\delta$	Übergangswinkel zwischen Segmenten
$\varepsilon$	Dehnung
$\theta$	Winkeländerung der Röhrenachse
$\Theta$	Winkel der Röhrenachse
$\kappa$	Krümmung
$\xi$	Martensitanteil
$\Xi$	Toleranzbereich der Kontaktdurchdringung
$\sigma$	mechanische Spannung
$\varphi$	axiale Verdrehung der Röhren

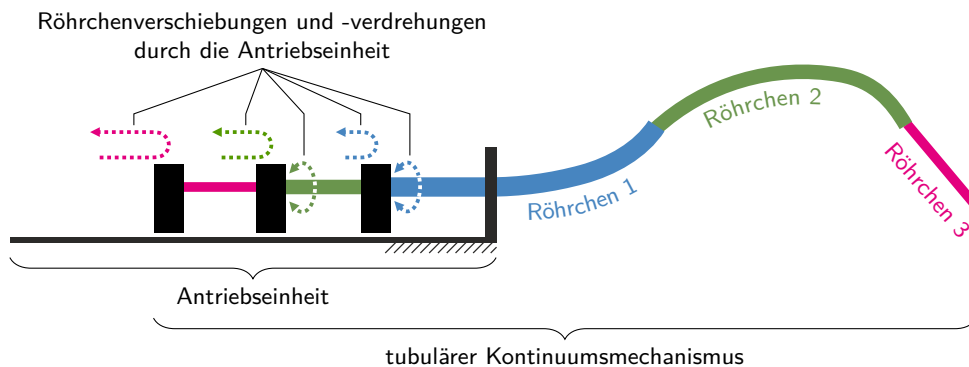
---

# 1. Einleitung und wissenschaftlicher Beitrag

Die Kernmotivation dieser Arbeit bildet der Wunsch, ein Operationsinstrument zu schaffen, welches in der Lage ist, Gehirngewebe auf einer gekrümmten Trajektorie zu durchqueren. Die stereotaktische Neurochirurgie beschäftigt sich beispielsweise mit Biopsieprozessen innerhalb des Gehirngewebes oder der Implantation von Elektroden zur tiefen Hirnstimulation. Solche Eingriffe können es erforderlich machen, Strukturen von 1 mm Durchmesser in etwa 100 mm Tiefe im Gehirn zu erreichen. Eine sichere Trajektorie muss dabei Blutgefäße, Ventrikel und Gehirnfurchen umgehen [18]. Um chirurgische Werkzeuge oder Stimulationselektroden an den Zielpunkt zu führen, wird dabei bisher ausschließlich mit starren Kanülen auf geraden Trajektorien gearbeitet. Eine Kanüle stellt einen Körper von langer schlanker Gestalt dar, der in seiner gesamten Längenausdehnung über mindestens einen Arbeitskanal verfügt, und beispielsweise zum Einbringen von Flüssigkeiten, Entnehmen von Gewebe oder dem Durchführen von Werkzeugen genutzt werden kann. Einen Beitrag zur Schaffung der technischen Voraussetzungen für das Erzeugen einer gezielt krümmbaren Kanüle zu leisten, ist der Anspruch dieser Dissertation.

Wie der Überblick zu Kanülen zur aktiven Trajektorienverfolgung zeigen wird, verfügen tubuläre Kontinuumsmechanismen sowohl über die Bewegungsfreiheit als auch die Abmessungen, um die Anforderungen der Neurochirurgie zu erfüllen. Ein solcher Mechanismus besteht aus mehreren, teilweise vorgekrümmten, Röhrrchen, welche ineinander verschachtelt sind. Abbildung 1.1 zeigt beispielhaft einen Mechanismus aus drei Röhrrchen. Die Gleichgewichtslage einer Röhrrchenkombination kann eine ebene oder räumliche Kurve sein, deren Gestalt durch die Vorkrümmungen der beteiligten Röhrrchen beeinflusst wird. Durch Verschiebung und Verdrehung der Röhrrchen zueinander kann, mittels einer an einem Ende der Röhrrchen angreifenden Aktorik, Einfluss auf die Gleichgewichtslage des Mechanismus genommen werden. Die Anzahl der Röhrrchen, deren Längen und Vorkrümmungen sowie die Werkstoffeigenschaften des Röhrrchenmaterials stellen die Entwurfparameter tubulärer Kontinuumsmechanismen dar. Die Verschiebungen und Verdrehungen der Röhrrchen, wie auch die der gesamten Antriebseinheit, bilden die Steuergrößen beim Betrieb des Mechanismus.

Die Verwendung eines tubulären Kontinuumsmechanismus' in medizinischen Eingriffen wie der endoskopischen Drittventrikulostomie [4, 25], der Kauterisierung des Plexus choroideus [11, 25], der Behandlung des Hydrocephalus [11] oder der Absaugung intrazerebraler Blutungen



**Abbildung 1.1.:** Tubulärer Kontinuumsmechanismus mit Antriebseinheit, bestehend aus zwei vorgekrümmten und einem geraden Röhren.

[23] wurde bereits vorgeschlagen. Bei diesen Anwendungen wird stets auf zunächst geradem Weg in die flüssigkeitsgefüllten Kavitäten des Gehirns vorgedrungen, um dort anschließend auf einer gekrümmten Trajektorie voranzuschreiten. Dabei ist die Verwendung eines Messsystems möglich, wodurch eventuelle Positionierfehler aus unzureichender Modellgenauigkeit korrigiert werden können. Da eine Belastung des Gehirngewebes durch Querbewegung der Kanüle zu vermeiden ist, sind auch die Möglichkeiten der regelungstechnischen Kompensation von Modellfehlern eingeschränkt, sobald die gekrümmten Röhren direkt im Gehirngewebe zum Einsatz kommen. Korrekturen der Trajektorie können folglich nur in tangentialer Richtung der Kanülenspitze erfolgen. Die Darlegung zum Stand der Forschung zu tubulären Kontinuumsrobotern in Abschnitt 2.3 zeigt, dass die derzeit erreichbare Genauigkeit im gesteuerten Betrieb dem Genauigkeitsanspruch der Neurochirurgie nicht gerecht wird.

Zur Erhöhung der Modellgenauigkeit tubulärer Kontinuumsmechanismen wird in dieser Arbeit der Einfluss des nichtlinearen Werkstoffverhaltens der Nickel-Titan-Legierung, dem beinahe ausschließlich verwendeten Konstruktions- und Funktionswerkstoff der Röhren, untersucht. Das, in den Arbeiten zum Stand der Forschung verwendete, Hooke'sche Gesetz ist nicht in der Lage, den mit der enormen reversiblen Dehnung der Nickel-Titan-Legierung einhergehenden, nichtlinearen Spannungs-Dehnungs-Verlauf abzubilden. In dieser Arbeit wird deshalb erstmalig ein nichtlineares, hysteresebefahtetes Materialgesetz verwendet. Basierend auf diesem wird ein Bauteilgesetz für die Röhren hergeleitet und zur Ermittlung der Gleichgewichtslage von



---

Röhrchenkombinationen verwendet. Die Arbeit baut dabei an vielen Stellen auf der Veröffentlichung [47] auf. Weiterhin erfolgt erstmalig eine Untersuchung des Einflusses des Luftspalts zwischen den Röhrchen auf deren Gleichgewichtslage. Aus einer Analyse des Kontaktverhaltens zwischen den Röhrchen wird unter Berücksichtigung des Bauteilmodells eine Methodik zur Beschreibung des nicht-tangentialen Übergangs zwischen den Röhrchenabschnitten vorgestellt. Das resultierende Modell ist schließlich in der Lage, hystereseebedingte veränderliche Krümmungen der Röhrchen während der Bewegung des Mechanismus sowie luftspaltbedingte Übergangswinkel zwischen den Röhrchenabschnitten abzubilden. Damit wird gezeigt, dass die Materialhysterese und der Luftspalt einen deutlichen Einfluss auf die Gleichgewichtslage tubulärer Kontinuumsmechanismen haben. Die Modellierung der hystereseebehafteten Trajektorie von Körperpunkten tubulärer Kontinuumsmechanismen aus Nickel-Titan-Legierung wird damit möglich. Aus einer Betrachtung der Gesamtenergie der Gleichgewichtslage sowie dem Kontaktverhalten von Röhrchenkombinationen werden zudem erstmalig die Antriebskräfte zur Bewegung der Röhrchen relativ zueinander modellbasiert bestimmt. Deren Kenntnis erlaubt zukünftig eine Abschätzung der erforderlichen Antriebskräfte und damit einen modellbasierten Entwurf der Antriebseinheit. Da die Berücksichtigung der Materialnichtlinearität und des Kontaktverhaltens die Modellkomplexität deutlich erhöht, wird die untersuchte Klasse an Kanülenszusammensetzungen ausschließlich auf ebene Fälle reduziert, wodurch die Berücksichtigung von Torsionsverformungen entfallen darf.

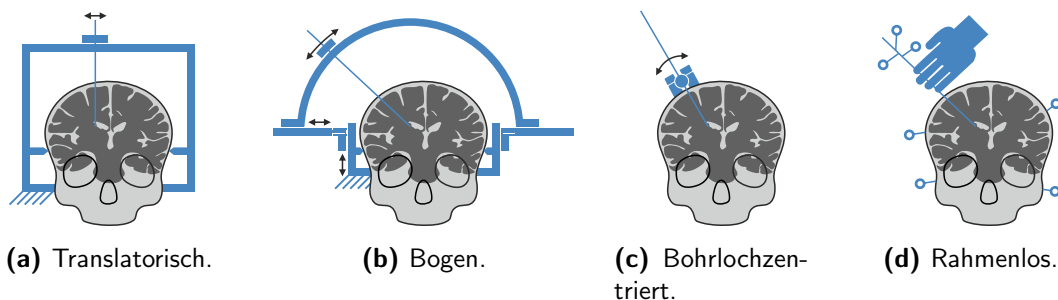


## 2. Stand der Forschung

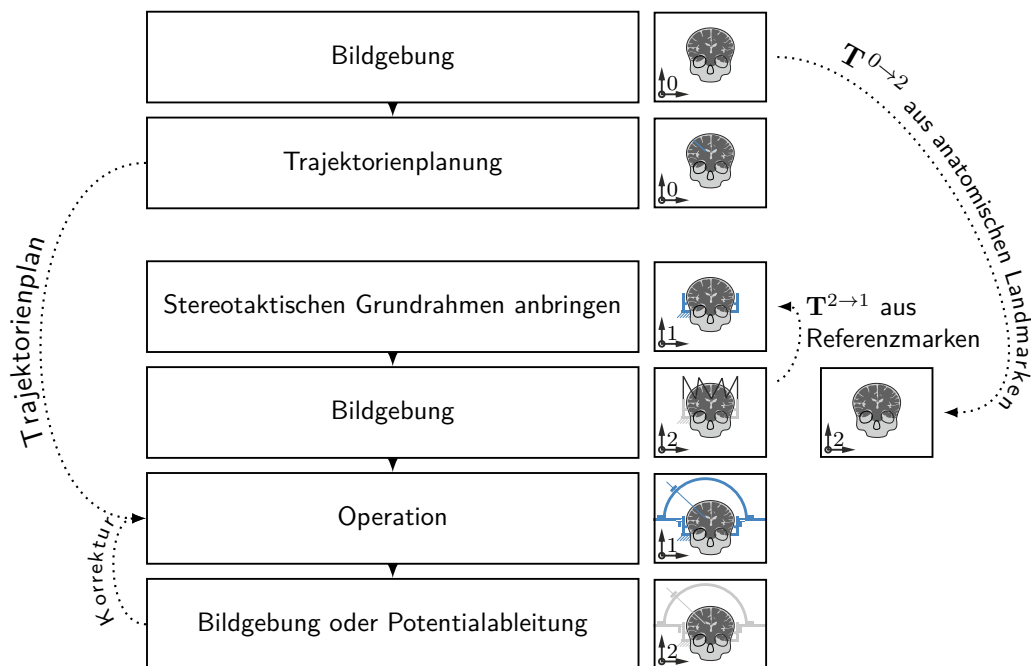
Im vorliegenden Kapitel wird zunächst der Stand der Technik von technischen Hilfsmitteln aus der medizinischen Praxis zur Erreichung von Zielpunkten innerhalb des menschlichen Gehirns vorgestellt. Zunächst folgt darauf die Darlegung allgemeiner Forschungsergebnisse zu aktiv verformbaren Kanülen, welche als Zielpunktansteuermechanismen geeignet scheinen. Im Speziellen wird darauffolgend der Stand der Forschung bezüglich tubulärer Kontinuumsroboter aufgearbeitet.

### 2.1. Lokalisationssysteme in der Neurochirurgie

Der wissenschaftliche Beitrag dieser Arbeit bezieht seine Motivation aus dem potentiellen Mehrwert, den tubuläre Kontinuumsmechanismen für das Erreichen von Zielpunkten bei neurochirurgischen Operationen bieten könnten. Die Lokalisation in der Neurochirurgie umfasst nach Grunert et al. [51] zwei Fragen. Zum einen, wo innerhalb des Schädels sich eine Verletzung oder ein funktionaler Bereich befindet und zum anderen, wie man diese oder diesen während einer Operation findet. Letztere Frage soll in diesem Abschnitt kurz beantwortet werden. So kann der Leser mit ingenieurtechnischem Hintergrund ein Gefühl und eine Begründung für die Anforderungen an ein potentielles neurochirurgisches Operationsinstrument gewinnen und die wissenschaftliche Lücke aus Kapitel 1 auch anhand medizinischer Gesichtspunkte nachvollziehen.



**Abbildung 2.1.:** Vergleich von Systemen zum Erreichen eines Zielpunkts innerhalb des Gehirns.



**Abbildung 2.2.:** Möglicher Ablauf einer stereotaktischen Operation.

Das Hauptmerkmal nach dem alle Lokalisationssysteme zunächst grob unterschieden werden können, ist die Art und Weise mit der die Instrumentenposition im Raum ermittelt wird. Zum einen existiert seit der Mitte des 20. Jahrhunderts die Stereotaxie, welche rahmenbasiert ist, und zum anderen seit den 80er Jahren die Neuronavigation, welche rahmenlos erfolgt [51]. Die in Abbildung 2.1 gezeigten neurochirurgischen Lokalisationssysteme können gemäß ihrer Kinematik in translatorische Systeme, Bogen-Systeme und Bohrloch-zentrierte-Systeme klassifiziert werden [42, S. 29]. Daneben existieren die rahmenlosen Systeme der Neuronavigation.

Bei stereotaktischen Operationen wird der Schädelknochen des Patienten fest mit einem Rahmen verschraubt. Dieser verfügt über eine Reihe von Führungen, welche die Bewegung von medizinischen Instrumenten, relativ zum Schädel, ermöglichen. Aufgabe aller Rahmensysteme ist es, die Lage eines intrakraniellen Zielpunkts relativ zum Koordinatensystem des Rahmens beschreibbar zu machen, um diesen anschließend mit Hilfe der vorhandenen Kinematik zu erreichen. Die historische Entwicklung der Lokalisationssysteme ist gekoppelt an die vorhandenen Methoden zur Ermittlung und räumlichen Beschreibung gewünschter Zielpunkte [50]. Anfänglich wurden Atlanten einzelner Gehirnschichten verwendet, um intrakranielle Zielpunkte anhand äußerer Landmarken in kartesischen Koordinaten zu beschreiben. Der erste am Menschen klinisch eingesetzte Rahmen stammt aus dem Jahr 1947 von Spiegel und Wycis

und arbeitet mit einer kartesischen Kinematik vergleichbar mit Abbildung 2.1a. Kurze Zeit später wurden Rahmen mit bogenförmiger Kinematik entwickelt, welche die Beschreibung des Zielpunkts in Kugelkoordinaten erfordern und damit der Form des Gehirns besser gerecht werden. Das erste Bogensystem stammt von Leksell aus dem Jahr 1949 und gleicht Abbildung 2.1b. Bohrlochzentrierte Systeme, welche direkt auf eine Trepanation des Schädels geschraubt werden, entstanden ebenfalls kurze Zeit später. Ein Beispiel dafür ist das System von Cooper aus dem Jahr 1955, grob vergleichbar mit Abbildung 2.1c. Um geplante Trajektorien an einem Lokalisationsrahmen umzusetzen, wird auch heute noch die aus den 70er Jahren stammende Methodik der präoperativen Planung angewendet [96]. Abbildung 2.2 zeigt beispielhaft den Ablauf einer solchen stereotaktischen Operation aus ingenieurtechnischer Sicht. Dabei erfolgt zunächst einige Tage bis Wochen vor der Operation die präoperative Trajektorienplanung anhand gewonnener Bilddaten. Am Tag der Operation wird der Patient zunächst fest mit dem stereotaktischen Grundring verbunden, an dem ein Aufbau mit dreidimensionaler N-förmiger Ausrichtung von Referenzstäben befestigt wird. Für die unterschiedlichen bildgebenden Verfahren wie CT, MRT oder konventionelles Röntgen existieren unterschiedliche Systeme, die eine gute Abbildung von Referenzmarken durch das jeweilige Verfahren ermöglichen. Die Referenzmarken erlauben es die räumliche Lage des stereotaktischen Rahmens, relativ zum Patienten zu rekonstruieren. Anhand anatomischer Landmarken können verschiedene Bilddatensätze, beispielsweise aus der präoperativen Planung oder aus CT- und MRT-Bildern, ineinander überführt werden. Durch Koordinatentransformationen  $\mathbf{T}^{a \rightarrow b}$  kann der Trajektorienplan anschließend in die unterschiedlichen Bilddatensätze überführt werden. Anhand aktueller Bilddaten wird der endgültige Zielpunkt definiert, der Trajektorienplan gegebenenfalls angepasst und in die kinematischen Größen des Rahmensystems überführt. Das Abfahren der Trajektorie am Patienten erfolgt zunächst in einem gesteuerten Prozess. Zusätzlich kann eine intraoperative Bildgebung oder die Ableitung von Potentialen aus dem Gehirn genutzt werden, um den gesteuerten Bewegungsprozess teilweise zu überwachen, Rückkopplungen zu erhalten und gegebenenfalls Korrekturen vorzunehmen.

Bei den rahmenlosen Verfahren, welche auch als Neuronavigation bezeichnet werden, werden entweder berührungslöse optische oder elektromagnetische Messsysteme, entsprechend Abbildung 2.1d, oder Gelenkarme eingesetzt, um die chirurgischen Instrumente im Raum zu lokalisieren und in CT- oder MRT-Bildern des Patienten zu visualisieren. Die Koordinaten von realem Patient und dem chirurgischen Werkzeug werden dazu in das Koordinatensystem von CT- oder MRT-Daten transformiert und in Echtzeit visualisiert. Die Transformation wird durch Antasten von aufgeklebten oder implantierten Marken, anatomischen Landmarken, Reliefs der Schädeloberfläche oder hybriden Verfahren ermittelt. Der Schädel wird dabei entweder fixiert oder wenn nötig beweglich gelassen. Sind Relativbewegungen zwischen dem Patient oder Operationstisch und dem Messsystem nicht unterbunden, was prozessbedingt notwendig sein kann, ist eine permanente Neubestimmung der Transformationen erforderlich. Hierzu werden zusätzliche Marker an Operationstisch oder Patient angebracht und überwacht [51, 118].

Während die rahmenbasierten Verfahren rein gesteuert ablaufen können, stellt die Neuronavigation stets einen positionsgeregelten Prozess mit dem Chirurgen als Regler dar. Es existieren zudem auch Mischformen, bei denen rahmenbasierte Systeme durch zusätzliche Lagemesssysteme rückgekoppelt werden, um die Genauigkeit zu erhöhen [51]. Allgemein lässt sich sagen, dass rahmenbasierte Systeme auch in der offenen Steuerkette eine höhere Anwendungsgenauigkeit aufweisen als rahmenlose. Die Stereotaxie wird darüber hinaus als Goldstandard für die exakte Lokalisation eines Zielpunkts angesehen [97, S. 204]. Die räumliche Abweichung zwischen dem angestrebten und dem tatsächlich erreichten Zielpunkt

$$AG = \begin{cases} e_{CT} & \text{für CT Daten} \\ e_{MRT} & \text{für MRT Daten} \end{cases} + \begin{cases} e_{Reg,S} + e_{Mechanik} & \text{für Stereotaxie} \\ e_{Reg,N} + e_{Sensorik} & \text{für Neuronavigation} \end{cases} \quad (2.1)$$

wird als Anwendungsgenauigkeit bezeichnet und summiert sich aus mehreren Teilfehlern auf. Zunächst entstehen Fehler bereits durch die Bildgebung, da die reale Anatomie in diskrete Volumen zerlegt wird. Die typische räumliche Auflösung einer CT-Aufnahme von  $512 \times 512$  Punkten resultiert bei einer Schichtdicke von 1 mm in einer Voxelgröße von  $0.65 \times 0.65 \times 1 \text{ mm}^3$ . Daraus ergibt sich der maximale Fehler für die Bildgebung aus CT-Daten  $e_{CT}$  von 1.4 mm aus der maximalen räumlichen Ausdehnung eines Voxels. Bei der Verwendung von MRT-Daten erhöht sich dieser Wert noch einmal um 0.5 mm bis 1 mm auf Grund von Feldinhomogenitäten und durch die Datenfusion mit den CT-Daten [96]. In der Stereotaxie stellt die Registrierung des Grundrings in seiner Relativlage zum Schädel des Patienten eine weitere Fehlerquelle dar. Ein Registrierungsfehler  $e_{Reg,S}$  von 0.125 mm ist dabei erreichbar [49]. Hinzu kommt letztendlich die mechanische Ungenauigkeit des Führungssystems selbst, die ebenfalls meist deutlich unter einem Millimeter angegeben wird. Für das Riechert/Mundinger-System wird eine mechanische Ungenauigkeit  $e_{Mechanik}$  von 0.1 mm angegeben [93, S. 73]. Bei der Neuronavigation hingegen ist der Registrierungsfehler  $e_{Reg,N}$  sehr stark abhängig vom verwendeten Verfahren. Mit fest eingeschraubten Knochenmarken ist ein Fehler von 0.8 mm bis 1.2 mm erreichbar. Bevorzugt angewandt werden jedoch nichtinvasive Methoden, wie beispielsweise die Oberflächenrelief-Registrierung, welche zu Fehlern im Bereich von 3 mm bis 8 mm führt [96]. Einen weiteren Einfluss hat das erforderliche Messsystem. Mit optischen Sensoren können Werte für  $e_{Sensorik}$  von 0.2 mm erreicht werden. In Summe geben Raabe et al. [96] eine mittlere Anwendungsgenauigkeit von 1 mm bis 2 mm für die Stereotaxie und 1 mm bis 4 mm für die Neuronavigation an.

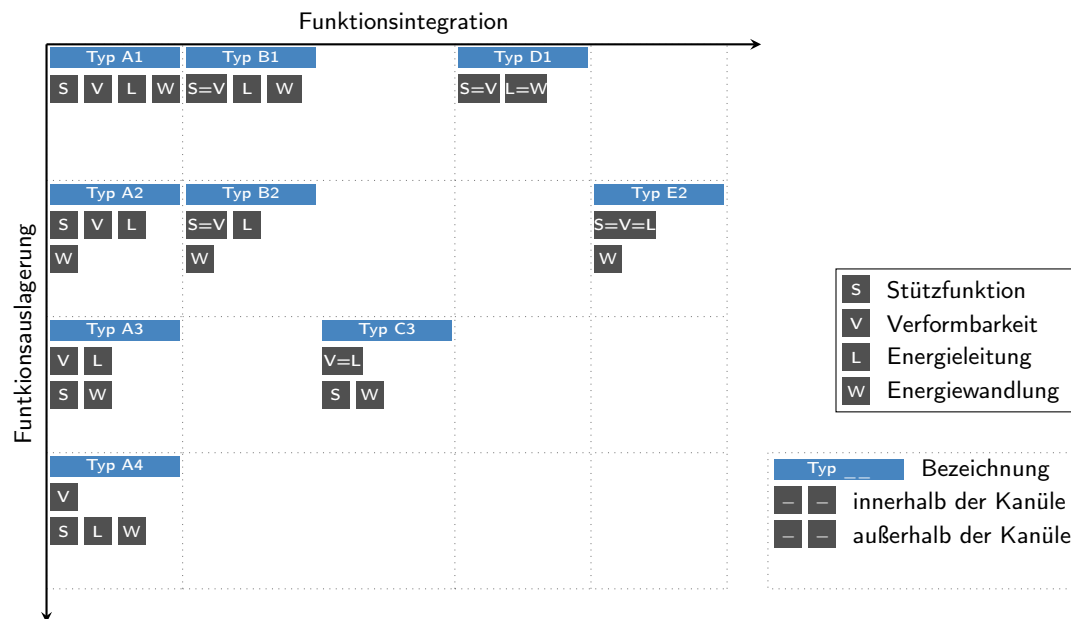
Die Neurochirurgie stellt ein gutes Anwendungsfeld für Robotersysteme dar. Die Anatomie ist komplex, der Schädel verfügt über eine feste Struktur, wodurch sich Zielpunkte kaum verschieben können und die Anforderungen an die Genauigkeit sind hoch [33, S. 2047]. Dennoch existieren bis heute, verglichen mit der enormen Verbreitung von Robotern im industriellen Umfeld, nur wenige klinische Anwendungen. Dem Vorteil der hohen Genauigkeit im Umgang mit Werkzeugen stehen immer wieder Fragen der Sicherheit gegenüber. Chirurgen arbeiten teilweise noch immer mit Methoden und Werkzeugen, die in den 50er Jahren entwickelt

wurden [100, S. 339],[82]. Die Herausforderungen, welche die Neurochirurgie an einen potentiellen Operationsroboter stellt, erfreuen sich einem anhaltenden wissenschaftlichen Interesse. Die Neuronavigation wird als erster Schritt der Computerisierung und Roboterisierung des Operationssaals verstanden [19]. Die erste neurochirurgische Anwendung eines modifizierten Industrieroboters fand bereits im Jahr 1985 statt [46, S. 7]. Neben generalistischen Systemen, wie auch im industriellen Umfeld, wurden Spezialsysteme erforscht, welche in besonderem Maße ihrer Aufgabe angepasst sind. So beispielsweise die Systeme *NeuroArm*, *NeuroMate*, *NeuRobot* oder *RAMS*. Auch kommerzielle Roboter sind bereits verfügbar, wie zum Beispiel das System *ROSA* von *Medtech* oder der *SpineAssist* von *Mazor Robotics*. Erfolgreiche Anwendung fanden solche neurochirurgischen Operationsroboter bereits bei der Platzierung von Biopsienadeln sowie dem Einsetzen von Tiefenhirnstimulatoren und Epilepsieüberwachungselektroden [89]. Die Forschung an solchen Systemen dauert bis heute an, so zum Beispiel mit dem *Robotic System for MRI-Guided Stereotactic Neurosurgery* von Li et al. [78].

Allen genannten Systemen gemein ist jedoch, dass der Zielpunkt auf einer geraden Trajektorie erreicht wird. Eingesetzt werden die stereotaktischen Verfahren bei Punktionen, Nadelbiopsien, Elektrodenplatzierungen, der Entfernung von Zysten oder der Drainage von Hämatomen [32, S. 9]. Das Anfahren mehrerer Zielpunkte ist lediglich auf der Achse der geraden Trajektorie möglich. Tief innerhalb des Gehirns liegende Ziele können durch Blutgefäße oder vitale Hirnstrukturen versperrt sein [19]. Den rein translatorischen Sondenvorschub aller Rahmensysteme durch einen Mechanismus, der einen gekrümmten Trajektorienverlauf erlaubt, zu erweitern ist eine Idee, welche noch immer zu der Aufgabe passt, der sich Chirurgen bereits zu Beginn des 20. Jahrhunderts gestellt haben.

## 2.2. Kanülen zur aktiven Trajektorienverfolgung

In der wissenschaftlichen Literatur ist eine enorme Zahl an theoretischen und bereits realisierten Konzepten für Mechanismen zur gezielten Fortbewegung innerhalb des menschlichen Körpers zu finden. Diese werden nun grob klassifiziert und von den tubulären Kontinuumsrobotern abgegrenzt. Ein wichtiges Kriterium beim Entwurf steuerbarer Kanülen ist eine möglichst geringe Baugröße des Systems, in erster Linie innerhalb des Patienten. Nachfolgend werden dazu alle Systeme auf die vier unverzichtbaren Grundfunktionen einer steuerbaren Kanüle reduziert. Zunächst ist dies die Stützfunktion zum Tragen des eigenen Körpers und zur Aufrechterhaltung der geformten Bahn. Das Bereitstellen von Verformbarkeit stellt die zweite Grundfunktion dar, um verschiedene gekrümmte Trajektorien abfahren zu können. Zur Formänderung ist als dritte Grundfunktion die Energiewandlung erforderlich, welche aus einer bereitgestellten Energiequelle die notwendigen Verformungskräfte oder -momente erzeugt. Das Weiterleiten von Energie, um entweder Energiewandler in der Kanüle zu versorgen oder direkt mechanische Energie in Form von Kräften und Momenten sowie Verschiebungen und Verdrehungen auf die verformbare Struktur aufzubringen, stellt die vierte Grundfunktion dar.

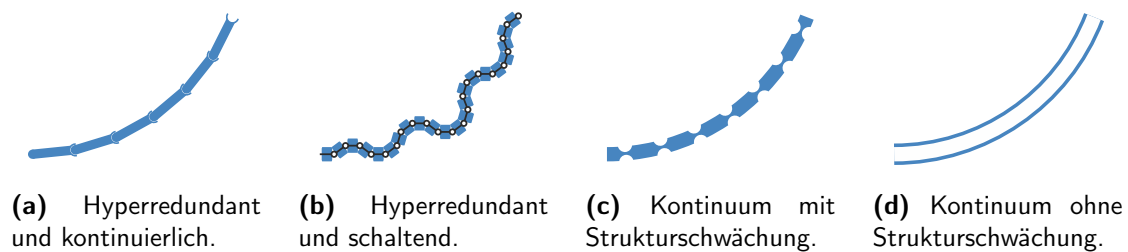


**Abbildung 2.3.:** Morphologischer Kasten unterschiedlicher Systemtopologien. Dargestellt sind nur Topologien, für welche auch publizierte Realisierungen bekannt sind. Leere Reihen und Spalten wurden entfernt. Beginnend bei Typ A1, welcher alle vier Grundfunktionen separat, aber im Kanülenkörper realisiert, finden sich auf der horizontalen Achse Lösungen mit zunehmender Funktionsintegration und auf der vertikalen Achse Lösungen mit zunehmender Funktionsauslagerung. Zwischen diesen beiden Achsen existieren Mischformen beider Ansätze.

Die Klassifikation der Systeme aus dem Stand der Forschung erfolgt nun anhand ihrer Systemtopologie, welche durch die räumliche Anordnung der vier genannten Grundfunktionen definiert wird. Das Spektrum aller denkbaren Topologien ergibt sich durch Auslagerung von Funktionen aus dem Kanülenkörper und damit aus dem Patienten und durch Integration von Funktionen innerhalb der Kanüle in ein und das selbe Bauteil. Beide Wege können zu einer Verringerung der Baugröße beitragen, nehmen jedoch auch Einfluss auf andere relevante Systemeigenschaften. Die Abbildung 2.3 zeigt die morphologische Matrix verschiedener Systemtopologien aus Integration und Auslagerung für alle aus dem Stand der Forschung bekannten Systeme. Die Varianten an der südöstlichen Front möglicher Topologien bieten hohes Potenzial für einen geringen Bauraum. Letztendlich entscheidet jedoch die konstruktive Umsetzung einer Topologie, welche enormen Spielraum bei der Ausgestaltung lässt, über den tatsächlichen Bauraum.

Neben ihrer Topologie können die bekannten Systeme auch nach der konstruktiven Ausführung ihrer mechanischen Stützstruktur sowie ihrer Gelenkigkeit in drei Typen unterschieden werden. Der klassische Ansatz einer festen Stützstruktur mit diskreten Gelenken, wie in Abbildung 2.4a,





**Abbildung 2.4.:** Vergleich von Kinematiken nach der Quelle ihrer Beweglichkeit.

scheint eher zu größeren Systemen zu führen. Systeme mit schaltenden Aktoren fallen ebenfalls unter diese Klasse, verfügen jedoch meist über eine noch höhere Zahl an Segmenten, wie in Abbildung 2.4b dargestellt. Der Übergang von diskreten Gelenken und starrer Stützstruktur durch Funktionsintegration in einen Körper führt zu einer Festkörpergelenkstruktur, wie in Abbildung 2.4c dargestellt. Diese Ausführungsform kann noch zu vollständig kontinuierlichen Mechanismen gesteigert werden, indem der Querschnitt nicht abschnittsweise unterschiedlichen Funktionen zugeordnet wird, sondern kontinuierlich, wie in Abbildung 2.4d, die Aufgaben des Stützens und Verformens übernimmt. Der Übergang zu einem kontinuierlichen System ist anzustreben, da dieser das Potenzial bietet, Kosten zu reduzieren, die Präzision zu erhöhen, das Gewicht - und damit eventuell den Bauraum - zu reduzieren, Miniaturisierung zu ermöglichen und den Wartungsaufwand zu verringern [59, S. 6]. Reduzierte Kosten machen es zudem einfacher, ein Einweg-Produkt herzustellen, welches geringeren Ansprüchen hinsichtlich der Sterilisierbarkeit gerecht werden muss. Damit sind zukünftig auch individualisierte Instrumente denkbar, welche im Rahmen einer geplanten Operation wenige Tage vorher hergestellt werden könnten [110, S. 138].

Beispielhaft werden nun zu allen Topologien aus Abbildung 2.3 dokumentierte Realisierungen genannt. Diese stellen jedoch nur eine mögliche Ausgestaltungsvariante eines meist vielfältig umsetzbaren Grundtypus dar. Systeme nach dem **Typ A1** realisieren alle vier Grundfunktionen jeweils separat, aber dennoch vollständig innerhalb des Kanülenkörpers. Ein Beispiel dafür sind die *Binary Electromagnetic Actuators* von Tappe et al. [120]. Die Kinematik ist dabei hyperredundant und schaltend, gemäß Abbildung 2.4b. Durch je zwei Elektromagnete in jedem Segment kann die Struktur binär verkippt werden und muss sich so der Zielform annähern. Für das rein theoretisch untersuchte System wird ein Durchmesser von 45 mm angegeben, welcher je nach Anwendung noch reduziert werden kann. Durch Funktionsintegration von Stützfunktion und Verformbarkeit ( $S=V$ ) entstehen nachgiebige Mechanismen mit gezielter Strukturschwächung gemäß Abbildung 2.4c oder vollständig kontinuierliche Systeme entsprechend Abbildungen 2.4d. Ein Beispiel für ein System nach **Typ B1** ist die *Optically Controlled MR-compatible Active Needle* von Ryu et al. [107], welche durch einen in der Struktur befindlichen thermischen Formgedächtnis-Aktor verformt wird. Die Energieleitung erfolgt in Form von Strahlungsenergie durch einen Lichtleiter, welche gezielt auf den Formgedächtnis-Aktor

ausgekoppelt wird und diesen erwärmt. Das System erreicht einen Außendurchmesser von 1.37 mm. Ein ähnliches System ist das von Ikuta et al. [62], welches eine vollständig kontinuierliche Stütz- und Verformstruktur besitzt und durch ohmisch beheizte und wassergekühlte Formgedächtnis-Aktoren angetrieben wird. Es weist einen Außendurchmesser von 13 mm auf und stellt mit seiner Veröffentlichung im Jahr 1988 das älteste bekannte System im vorliegenden Kontext dar. Die Integration von Stützen und Verformen in einen Werkstoff sowie Energieleitung und Wandlung in einen zweiten Werkstoff resultiert in einem System nach **Typ D1**. Ein solches stellen Shoa et al. [112] mit dem *Conducting Polymer Based Active Catheter* vor. Ein strukturiertes leitfähiges elektromechanisch aktives Polymer dient als Energieleiter und Wandler, ein flexibler Kern als vollständig kontinuierliche Stützstruktur und Verformungskörper. Ein Außendurchmesser von 1 mm soll für dieses System möglich sein.

Durch Funktionsauslagerung der Energiewandlerfunktion erreichen Degani et al. [30] mit der *Highly Articulated Robotic Probe* einen Außendurchmesser von 12 mm mit einem System nach **Typ A2**. Die Mechanik besteht dabei aus zwei konzentrischen Gelenkstrukturen, welche durch Zugseile gelenkt und wahlweise versteift werden können. Mechanisch gleicht dieser Aufbau deshalb einem hyperredundanten und kontinuierlich beweglichen System gemäß Abbildung 2.4a. Durch Funktionsintegration von Stützen und Verformen wird **Typ B2** erreicht. Typische Vertreter dieser Klasse sind Mechanismen, bei denen eine kontinuierliche Stütz- und Gelenkstruktur an diskreten Stellen durch Zugseile verformt wird. Diese, beispielsweise als *Continuous Backbone*, *Cable-Driven Robots* [77] bezeichneten Systeme, wurden bereits in unterschiedlichsten Größenordnungen untersucht. Ein System von Simaan et al. [113] erreicht einen Außendurchmesser von 4.2 mm. Die Funktionsintegration der drei Grundfunktionen Stützen, Verformen und Leiten bei ausgelagertem Energiewandler führt zur Topologie nach **Typ E2**, zu welcher die *tubulären Kontinuumsroboter* oder *Curved Concentric Tube Robots* zu zählen sind. In Abschnitt 2.3 wird der Stand der Forschung zu dieser Roboterklasse detailliert dargelegt. Mahvash und Zenati [86] stellen ein hybrides System vor, welches aus der Kombination von *Highly Articulated Robotic Probe* und *Curved Concentric Tube Robot* besteht und sich damit nicht mehr in die hier gewählte Klassifikation einordnen lässt.

Alle genannten Topologien mit deren beispielhaften Realisierungen stellen Kanülen zur aktiven Trajektorienverfolgung dar. Im Folgenden werden die noch ungenannten Topologien vom **Typ 3-4** aus Abbildung 2.3 mit Beispielen erläutert, und es wird gezeigt, dass eine weitere Funktionsauslagerung dazu führt, dass die entstehenden Systeme nicht zur aktiven Trajektorienverfolgung geeignet sind. Diese erfordert es, durch einen aktuierten Mechanismus eine zuvor festgelegte Trajektorie nachzufahren. Dabei soll das Gesamtvolumen des Mechanismus innerhalb eines definierten Korridors um diese Trajektorie verbleiben, um Gewebe nicht unnötig zu verdrängen oder gar zu zerstören. Ohne genaue Anforderungen an die Trajektorie lässt diese Definition zunächst einmal alle klassischen stereotaktischen Verfahren mit linearem Sondenvorschub zu. Der Mechanismus soll deshalb zudem in der Lage sein, zwei Punkte im Raum auf einer Trajektorie miteinander zu verbinden, welche von einer Geraden abweicht. Klassische Endoskope können diese Anforderungen erfüllen, wenn der Korridor durch das

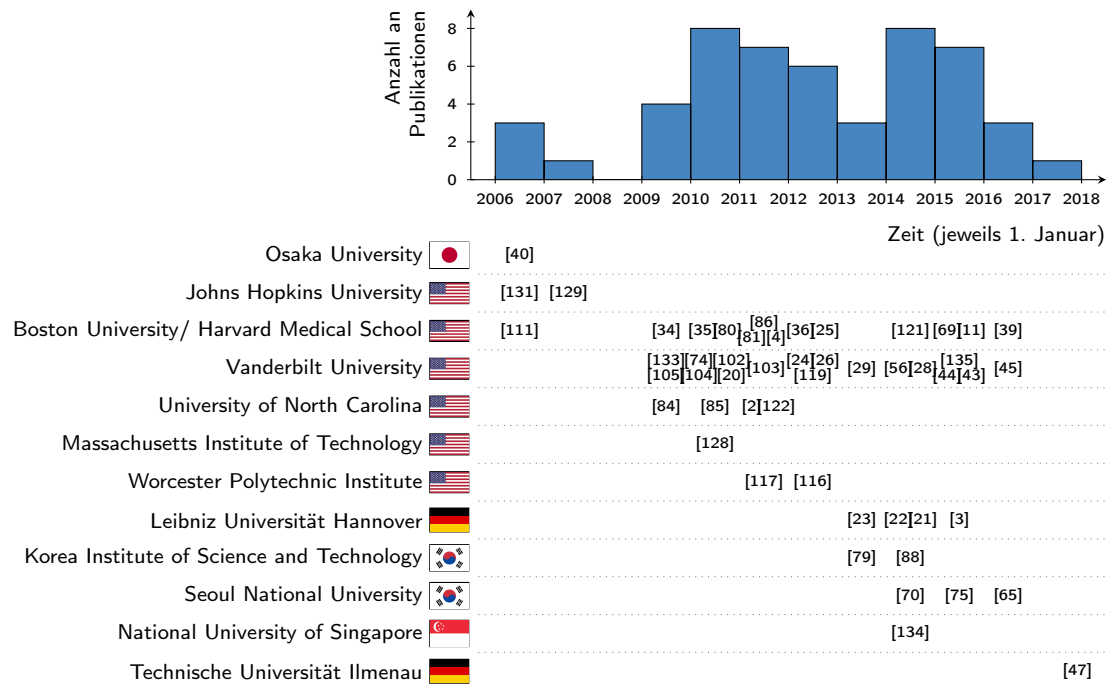
umgebende Organ festgelegt wird und das Gewebe somit eine Art Führung darstellt. Für Bewegungen innerhalb von Gewebe muss die gewünschte Trajektorie jedoch erst durch den Mechanismus selbst erzeugt werden. Dazu ist es erforderlich, Energie in geeigneter Weise an die Kanülenspitze zu leiten, um Gewebe zu verdrängen. Systeme nach dem **Typ 3** erreichen durch Auslagerung der Stützfunktion und des Energiewandlers einen vergleichsweise geringen Durchmesser, erfordern jedoch äußere Kräfte zur Abstützung des eigenen Körpers. Bei den *Beveled-Tip*-Systemen wird ein nachgiebiger Mechanismus durch das Gewebe geschoben, von diesem geführt und in Form erhalten. Als Spitze wird entweder eine schwenkbare symmetrische Spitze gemäß **Typ A3** oder eine asymmetrische Spitze durch Rotation des Körpers selbst, gemäß **Typ C3** eingesetzt, um beim Vorschub des Drahtes in eine Vorzugsrichtung durch das Gewebe abgelenkt zu werden. Hierzu zählen die Systeme *Spinning Needle* [37] oder *Programmable Bevel* [72].

Durch Funktionsauslagerung von Stützen, Wandeln und Leiten entsteht die Topologie nach **Typ A4**. Ein Vertreter davon ist das *Magnetic Guidance System* [83],[38], bei dem durch von außen erzeugte Magnetfelder die Spitze einer flexiblen Struktur gezielt durch den Körper gezogen wird. Gemäß der Definition aus [9] und [129, S. 121] sind aktive Systeme solche, bei denen der Mechanismus im Gesamtsystem selbst in der Lage ist, seine Form zu verändern und zu halten. Passive Systeme, wie die *Beveled-Tip*-Mechanismen, nutzen Kontaktkräfte mit dem Gewebe zur Formänderung und Erhaltung, da ihre Stützfunktion ausgelagert wurde. Sie sind damit nicht in der Lage, Luft oder flüssigkeitsgefüllte Organe gezielt zu traversieren. Für das präzise Steuern solcher Systeme ist zudem eine gute Kenntnis der mechanischen Eigenschaften des Umgebungsgewebes notwendig. Der Vorschlag, diese im Gehirn einzusetzen, existiert dennoch [37]. Auch bei aktiven Systemen kann der Gewebeeinfluss nicht in jedem Fall vernachlässigt werden. Abhängig von der Steifigkeit des Mechanismus unterscheidet Berg et al. [9] in dominante Systeme und ausgeglichene Systeme.

Unter den nicht ausgeschlossenen Topologien stellt sich **Typ E2**, als Vertreter der tubulären Kontinuumsroboter, als diejenige Topologie heraus, welche den höchsten Grad an Funktionsauslagerung und Funktionsintegration aufweist. Dies verspricht vielfältige, jedoch auch komplexe Möglichkeiten bei der Gestaltung, Modellierung und dem Einsatz solcher Systeme.

## 2.3. Tubuläre Kontinuumsroboter

**Historie** Die erste dem Autor bekannte Veröffentlichung, welche eine Art tubulären Kontinuumsmechanismus beschreibt, stammt von Levy und Oro [76] aus dem Jahr 1984. Der beschriebene Mechanismus setzt sich aus einem geraden Außenröhrchen und einem gekrümmten Innenröhrchen mit einem Durchmesser von 1.27 mm zusammen. Es wird die stereotaktische Anwendung zur Biopsie von Tumoren an 18 Patienten beschrieben. Das vielversprechende Konzept scheint dann aber zunächst wieder in Vergessenheit geraten zu sein. Einen weiteren



**Abbildung 2.5.:** Innerhalb dieser Arbeit zitierte Veröffentlichungen mit thematischer Ausrichtung auf tubuläre Kontinuumsmechanismen aus dem Zeitraum von Anfang 2006 bis Anfang 2018, gruppiert nach der ersten, einem Autor zuordenbaren, Forschungseinrichtung.

historischen Abriss früher Veröffentlichungen aus dem Zeitraum von 1985 bis 2004 bietet Gilbert et al. [45]. Alle dokumentierten Mechanismen aus dieser Zeit wurden aus einem geraden Außenröhrchen und einem gekrümmten Innenröhrchen konzipiert [76, 91, 94], was die einfachste mögliche Zusammensetzung eines tubulären Kontinuumsmechanismus darstellt. Mit der Arbeit von Furusho et al. [41] wird im Jahr 2005 erstmalig die Verschachtelung mehrerer vorgekrümmter Röhrchen vorgestellt. Nachdem im Zeitraum 1984 bis 2005 nur wenige Arbeiten mit geringer bis keiner gegenseitigen Zitation veröffentlicht wurden, gibt es seit 2006 intensive Forschungsbemühungen zu dieser Thematik. Die voneinander unabhängigen Arbeiten von Webster III et al. [131] und Sears und Dupont [111] zur kinetischen Modellierung aus dem Jahr 2006 leiten die vergangene Dekade intensiver Forschungsarbeiten an tubulären Kontinuumsrobotern ein. Alle für die vorliegende Arbeit relevanten Forschungsergebnisse entstammen der letzten Dekade. Der folgende Abschnitt fasst diese zusammen und ist analog zur Gesamtgliederung dieser Arbeit strukturiert. Abbildung 2.5 gibt schließlich einen grafischen Überblick zu Veröffentlichungsdatum und Forschungseinrichtung aller in dieser Arbeit zitierten Publikationen mit thematischer Ausrichtung auf tubuläre Kontinuumsroboter ab dem Jahr 2006.

**Röhrchenwerkstoffe und Formeinprägung** Als Röhrchenwerkstoff wird, auf Grund ihrer enormen reversiblen Dehnbarkeit, fast ausschließlich die pseudoelastische Nickel-Titan-Legierung verwendet. In allen bekannten Veröffentlichungen werden die gekrümmten Röhrchen aus zunächst geradem Rohrrhalbzeug hergestellt. Den technologisch einfachsten Weg zur Formeinprägung stellt plastisches Verformen dar, was jedoch nur sehr begrenzte Möglichkeiten der gezielten Formgebung bietet [29, 132]. Um präziser definierte Formen einzuprägen, werden die Röhrchen häufig in eine Haltevorrichtung eingespannt und einer Wärmebehandlung im Ofen mit abschließendem Abschreckvorgang unterzogen [43, 121, 128]. Von einer Abweichung zwischen geplanter und erreichter Vorkrümmung wird jedoch auch vielfach berichtet [21, 43]. Durch mehrfache Glüh- und Abschreckvorgänge kann zunächst die Form eingeprägt und anschließend die Transformationstemperaturen geeignet verschoben werden. Solche mehrstufigen Prozesse liefern die zuverlässigsten Ergebnisse hinsichtlich Formtreue und gewünschter mechanischer Werkstoffcharakteristik [44]. Das Einlegen der Röhrchen in die Form kann vereinfacht werden, indem diese vorher in Trockeneis abgekühlt und dadurch in den martensitischen Zustand versetzt werden [70]. An Stelle eines Ofens wird die Wärmebringung von Gilbert und Webster III [43] durch ohm'sches Erwärmen durchgeführt. Der Prozess ermöglicht auch ohne Abschrecken eine zuverlässige Formeinprägung. Die erreichten mechanischen Eigenschaften, insbesondere die Spannungs-Dehnungs-Kurve, werden jedoch in keiner der genannten Veröffentlichungen untersucht. Von Gilbert et al. [44] wird erstmalig ein helixförmiges Röhrchen hergestellt, indem das Halbzeug um einen Stahlzylinder gewickelt wird. Lee et al. [75] strukturieren die Röhrchenwand durch Laserstrahlschneiden mit Ausbrüchen und prägen anschließend die Krümmung ein, um gezielten Einfluss, sowohl auf die Biege- als auch die Torsionssteifigkeit nehmen zu können. Die Grenze für das Entstehen instabiler Ruhelagen, wie sie an langen, stark gekrümmten Röhrchenkombinationen auftreten, kann dadurch beeinflusst werden. Durch die Reduktion der Biegesteifigkeit der Röhrchen verringern sich auch die notwendigen Antriebskräfte und Momente, was jedoch bislang noch nicht untersucht wurde. Ein Verhaken der Röhrchen durch die Ausbrüche in den Wänden verhindert das Verschieben jedoch teilweise gänzlich [70, 75]. Neben der Verwendung von NiTi als Konstruktionswerkstoff gibt es die Möglichkeit Kunststoff einzusetzen [76]. Amanov et al. [3] stellen funktionsfähige Röhrchen aus Nylon im 3D-Druckverfahren her. Die Röhrchendurchmesser fallen hier jedoch fertigungsbedingt deutlich größer aus. In [88] wird das innerste gekrümmte Röhrchen aus Schrumpfschlauch hergestellt, was enorme Vorkrümmungen ermöglicht, aber auch zu einer starken Krümmungsreduktion mit jedem Verformungszyklus führt.

**Mechanikmodelle und Präzision** Es existiert eine Vielzahl an Modellen, um die Form und insbesondere die Spitzenposition tubulärer Kontinuumsroboter zu beschreiben. Wie in [45] zusammengefasst ist, hat sich die Anzahl vereinfachender Annahmen im Laufe der Zeit Stück für Stück reduziert. Im einfachsten Modell zur Beschreibung tubulärer Kontinuumsroboter von Furusho et al. [40] wird davon ausgegangen, dass das jeweils äußerste Röhrchen immer von dominierender Steifigkeit ist und somit seine eingeprägte Krümmung beibehält.

In den Arbeiten von Sears und Dupont [111] und Webster III et al. [131] wird das Biegemomentengleichgewicht der elastischen Überlagerung mehrerer kreisbogenförmiger Röhren durch vorgekrümmte Euler-Bernoulli-Balken berücksichtigt. Später stellten Webster III et al. [132] ein Modell vor, welches zusätzlich die Torsion der Röhren im ungekrümmten Abschnitt zwischen Antrieb und Beginn der Krümmung berücksichtigt. Ein auf Cosserat-Balken beruhendes Modell wurde anschließend von Rucker und Webster III [105],[102] und Dupont et al. [35] vorgestellt, womit die Torsion auf der gesamten Röhrenlänge berücksichtigt wird. Den Einfluss von Reibungskräften, hervorgerufen von Kontaktkräften zwischen den Röhren, welche unter vereinfachenden Annahmen abgeschätzt werden, untersuchen Lock und Dupont [81]. Von Rucker et al. [104],[103] wird ein Modell für extern belastete tubuläre Roboter mit beliebiger, nicht kreisbogenförmiger Vorkrümmung vorgestellt, welches einen mittleren Fehler der Spitzenposition von 1.5% bis 3% der Kanülenlänge aufweist. Damit ist es Stand der Forschung, Biege- und Torsionsverformungen aus gegenseitigen elastischen sowie Reibungseinflüssen und externen Belastungen in einem Cosserat-Balkenmodell unter Annahme großer Verformungen zu berücksichtigen. Nach Gilbert et al. [45] erreicht diese Modelltiefe ein akzeptables Verhältnis zwischen Modellgenauigkeit und Rechenaufwand. Abgedeckt werden derzeit die Effekte Biegung, Torsion, eine beliebige Vorkrümmung, eine beliebige Anzahl an Röhren sowie äußere Lasten und Reibung. Vernachlässigt wird jedoch noch immer das nichtlineare Spannungs-Dehnungs-Verhalten von NiTi sowie der Einfluss des Luftspalts zwischen den Röhren. Neben den genannten kinetischen Modellen existieren auch rein kinematische Modelle. Anstelle von numerischen Integrationsmethoden zur Berechnung der Spitzenposition aus der Krümmung wird zudem im Fall von konstanter Krümmung häufig eine analytische Koordinatentransformation verwendet [23, 24, 74]. Ausschließlich in den Kinematikmodellen gibt es erste Ansätze zur Berücksichtigung des Luftspaltes zwischen den Röhren. In der Arbeit von Lathrop et al. [74] wird der vom Luftspalt verursachte Übergangswinkel zwischen zwei Röhren erstmalig experimentell bestimmt. In einer späteren Arbeit von Torabi et al. [121] werden der Übergangswinkel sowie die radiale Verschiebung an den Röhrenübergängen durch ein rein kinematisches Modell berücksichtigt. Der Übergangswinkel wird dabei unter Verwendung einer Heuristik ermittelt.

Zur Präzision der Modelle wurden häufig Untersuchungen angestellt. Jedoch unterscheiden sich die Messsysteme, Versuchsbedingungen und Auswertungsmethoden sehr stark. Ein objektiver Vergleich scheint hier unmöglich. Das kalibrierte Cosserat-Balkenmodell von Rucker et al. [104] ist in der Lage, die Kanülenspitze in 40 Testpositionen mit einem maximalen euklidischen Fehler von 8 mm zu berechnen. Trotz der zusätzlichen Berücksichtigung von Reibung erreichen Lock und Dupont [81] nur ein vergleichbares Ergebnis. Im kalibrierten Kinematikmodell von Lathrop et al. [74] wird ein mittlerer Fehler von 6.53 mm berichtet, jedoch für Versuche in Gewebephantom. Sehr gute Ergebnisse erreichen Jang et al. [65] durch die Verwendung eines erweiterten Kalman Filters zur Online-Schätzung der Parameter eines Cosserat-Balkenmodells. Ein mittlerer euklidischer Fehler von 1.12 mm wird durch einen periodisch schwankenden Parameterverlauf erreicht. Mittels der Modellierung des Kontinuummechanismus durch eine

Summe von lokal gewichteten linearen kinematischen Abbildungen, in Kombination mit einem Lernverfahren zur Adaption des Modells an Messdaten, erreichen Fagogenis et al. [39] einen euklidischen Fehler von rund 1 mm. Eine systematische Untersuchung der Ursachen der verbleibenden Abweichungen der Kanülenspitze oder sogar des gesamten Kanülenrückgrats von der berechneten Trajektorie während der Bewegung des Röhrenmechanismus, wurde bislang noch nicht veröffentlicht. Der Einfluss der Bewegungshistorie und damit der Werkstoffhysterese wird in keinem der Modelle oder Kalibrierverfahren berücksichtigt.

**Sensorik** Zur Bestimmung der Position der Kanülenspitze, wie auch der gesamten Röhrenkontur sind aus der Literatur verschiedenste Vorgehensweisen bekannt. In vielen Untersuchungen leidet die Modellpräzision nach der Kalibrierung unter dem Einfluss der geringen Genauigkeit des verwendeten Messsystems. Ein Vergleich der Modelle fällt auch aus diesem Grund schwer.

Für Untersuchungen, bei welchen sich die Bewegungen auf eine Ebene beschränken lassen, werden häufig Kameramesssysteme mit einer Kamera eingesetzt. Die Extraktion relevanter Bildpunkte geschieht dabei entweder manuell [88] oder durch automatisierte Bilderkennung bewusst platzierter optischer Marken [134] oder direkt aus markanten Kanülenmerkmalen [75, 135]. Die Verwendung eines Stereokamerasystems und die manuelle Erfassung bewusst platzierter Marken in beiden Bildern stellt die erste und daraufhin sehr häufig eingesetzte Methode zur Kanülenformerkennung in drei Dimensionen dar [102, 104, 129, 132]. Für diese Methode wird eine Unsicherheit von 2.2 mm angegeben. Kommerzielle Stereokamerasysteme, die Marker automatisiert erkennen, stellen derzeit das präziseste Messmittel im Kontext der tubulären Kontinuumsroboter dar. Eine Unsicherheit von 0.5 mm wird beispielsweise in [35, 80] angegeben. Das derzeit genaueste System erreicht eine Unsicherheit von 0.278 mm [24, 29]. Eine andere Vorgehensweise ist die Verwendung eines Messarmes, welcher jedoch die Notwendigkeit des Berührens interessanter Messpunkte mit sich bringt [3]. Messungen in nicht transparentem Gewebe sind mit allen genannten Methoden unmöglich, da keine ungestörte Sichtverbindung zur Kanüle vorliegt. Elektromagnetische Trackingsysteme, wie in [21, 69, 74] verwendet, sind in der Lage, durch Gewebe hindurch zu messen, jedoch mit einer geringeren Genauigkeit als optische Systeme. Die Verwendung eines optischen Trackers zur Positionsbestimmung eines Ultraschallmesskopfes, welcher wiederum die Kanülenspitze in Gewebephantom und ex vivo Leber erfasst, bietet ein klinisch relevanteres Messszenario [24, 119]. CT-Aufnahmen von platzierten Seeds in Gewebephantom wurden bereits genutzt, um die Platziergenauigkeit tubulärer Kontinuumsroboter zu bestimmen [121].

**Röhrenzusammensetzung und Trajektorienplanung** Aus der Literatur bekannte Zusammensetzungen beginnen bei der einfachst möglichen, aus einem geraden Außenröhren und einem gekrümmten Innenröhren [76]. Ein System mit insgesamt vier verschachtelten, vorgekrümmten Röhren stellt derzeit das System mit der höchsten Anzahl von Röhren

dar [36]. Zwischen diesen beiden Extremen sind alle Untervarianten von Freiheitsgrad drei bis acht zu finden. Der komplexeste Gesamtaufbau stammt von Burgner et al. [22], sie integrieren zwei unabhängige Röhrchensätze aus insgesamt sechs Röhrchen in ein Operationssystem. Grenzen bei der Konzeption der Roboter bestehen in erster Linie in der maximalen Länge und Krümmung der Röhrchen, da diese Parameter zum Auftreten von Instabilitäten führen. Einen Stabilitätsnachweis in Abhängigkeit von Länge und Krümmung der Röhrchen zeigen Dupont et al. [34]. Burgner-Kahrs et al. [21] charakterisieren mittels einer Monte-Carlo-Studie den Arbeitsbereich und den Bereich redundanter Zielpunkte von Röhrchenzusammensetzungen. Bei [23] wird experimentell an Gewebephantom ein Blutgerinsel im Gehirn abgesaugt. Eine geeignete Kanüle aus einem geraden und einem gekrümmten Röhrchen wird dabei gesucht, um das erreichbare Volumen innerhalb des Blutgerinsels zu maximieren.

Die inverse Kinematik, aus der die Antriebspositionen zum Erreichen eines bestimmten Zielpunkts berechnet werden können, ist für die Kanülenmodelle mit Torsion nicht geschlossen formulierbar. Burgner et al. [24] lösen dieses Invertierungsproblem durch Minimierung der Abweichung von Zielpunkt und berechneter Spitzenposition aus der direkten Kinematik. Trajektorienplanungsverfahren, welche Hindernisse umgehen oder anatomischen Strukturen folgen, wurden bereits vorgestellt. Lyons et al. [84] stellen ein Verfahren zur Umgehung von kugelförmigen Hindernissen vor, welchem jedoch das einfachst mögliche Kanülenmodell von Furusho et al. [40] zugrunde liegt. Die berechneten Trajektorien sind deshalb nicht in der geplanten Form realisierbar. In erster Linie wird das für den Einsatz im Gehirn notwendige Follow-the-Leader-Verhalten vernachlässigt, welches für tubuläre Kontinuumsmechanismen im allgemeinen Fall nicht möglich ist. Follow-the-Leader-Verhalten liegt vor, wenn beim Ausfahren der Röhrchen alle der Kanülenspitze folgenden Röhrchenquerschnitte ebenfalls auf dem von der Kanülenspitze beschriebenen Pfad verlaufen. Gilbert et al. [44] haben untersucht, bei welchen Zusammensetzungen ein echtes Follow-the-Leader-Verhalten möglich ist und bei welchen dieses noch mit einer bestimmten Abweichung vorliegt. Sie zeigen dabei auch erstmalig den Einsatz von helixförmigen Röhrchen. Ein Trajektorienplanungsverfahren für tubuläre anatomische Umgebungen, wie beispielsweise die Lunge, wird von Lyons et al. [85] vorgestellt. Ein neurochirurgisches Beispiel, bei dem zunächst auf geradem Weg in die Ventrikel vorgestoßen und dort anschließend durch eine Optimierung Entwurfsparameter gefunden werden, die das Erreichen mehrerer Zielpunkte ermöglichen, wird von Anor et al. [4] vorgestellt. Dieses Verfahren wird von Bergeles und Dupont [10] noch erweitert, um die elastische Stabilität der Kanüle entlang der geplanten Trajektorie sicherzustellen. Das Verfahren der Rapidly-Exploring Roadmaps wird von Alterovitz et al. [2] beispielhaft auf tubuläre Kontinuumsroboter angewandt. Torres und Alterovitz [122] erweitern das Verfahren mit dem Modell der Kanüle und stellen ein neurochirurgisches Beispiel mit endonasalem Zugang zum Gehirn vor. Die Trajektorienplanung unter Verwendung sowohl eines vereinfachten, als auch eines komplexeren Kanülenmodelles wird von Bergeles et al. [11] vorgestellt. Das Vorgehen spart Rechenzeit, da die elastische Stabilität der Kanüle nur im Arbeitsbereich nachgerechnet wird. Als beispielhafte Anwendung dient hier ebenfalls ein neurochirurgischer Eingriff innerhalb der Ventrikel. Ein



Trajektorienplanungsverfahren, welches realisierbare Trajektorien im Sinne eines Follow-the-Leader-Verhaltens innerhalb des Gehirngewebes plant, wurde bislang noch nicht veröffentlicht. Es existiert weiterhin keine Bedienschnittstelle für die Trajektorienplanung durch Mediziner.

**Antriebseinheit** Zur Verschiebung und Verdrehung der Röhren wurde bereits eine Vielzahl an Antriebseinheiten publiziert. Bei diesen handelt es sich in den meisten Fällen um Laboraufbauten zu Experimentalzwecken und nur teilweise um spezialisierte Gesamtsysteme zur Anwendung in einem konkreten chirurgischen Prozess. Eine systematische Herangehensweise beim Entwurf der Antriebseinheiten wurde bislang nicht gezeigt. Von Walsh et al. [128] werden die erforderlichen Kräfte zum Verschieben eines vorgekrümmten in einem geraden Außenröhren gemessen. Eine modellbasierte Herangehensweise zur Berechnung erforderlicher Kräfte beim Antriebsentwurf ist jedoch nicht bekannt. Die Bandbreite an publizierten Antriebskonzepten reicht von einem einfachen handbetriebenen System von Burgner et al. [24] mit Spindel- und Schneckengetrieben bis hin zu einem in einem Endoskop integrierten tubulären Kontinuumsmechanismus wie in den Systemen von Hendrick et al. [56] oder Butler et al. [25]. Auch die Aspekte der Trennbarkeit von Antrieb und Röhren [23] sowie der Autoklavierbarkeit [24] wurden bereits untersucht.

**Werkzeuge und Endeffektoren** Die Integration eines thermischen Ablators in einen tubulären Kontinuumsroboter wird von Burdette et al. [20] vorgestellt und an ex vivo Tiergewebe erprobt. York et al. [135] erweitern die Röhren um einige diskrete Festkörpergelenke und ein Zugseil, um eine an der Kanülenspitze befestigte Kürette schwenken zu können. In [134] wird vorgeschlagen, den Kontinuumsroboter zu verwenden, um komplizierte Rohrverbindungen zu schweißen, jedoch bislang ohne Umsetzung. Die Integration von Werkzeugen in das Arbeitslumen muss bei relevanter Biegesteifigkeit im Mechanikmodell berücksichtigt werden, was bislang noch nicht publiziert wurde. Burgner et al. [24] schlagen vor, die Röhren zunächst ohne Werkzeug auszufahren und dieses anschließend einzufügen. Die resultierende Gewebever-schiebung durch die veränderte elastische Gleichgewichtslage beeinflusst auch den Zielpunkt, welcher dadurch an das neue Ziel mitbewegt wird.



### 3. Ein Werkstoffmodell für die Nickel-Titan-Legierung

Inhalt dieses Kapitels ist ein Werkstoffmodell zur Beschreibung des mechanischen Verhaltens der Nickel-Titan-Legierung für die spätere Verwendung im Bauteilmodell. Dazu werden zunächst die im Kontext der vorliegenden Arbeit relevanten Eigenschaften der Nickel-Titan-Legierung vorgestellt, um ein Verständnis für die nachfolgende Modellierung aufzubauen. Anschließend werden Zug- und Druckmessungen vorgestellt und der dazu verwendete Messaufbau erläutert. Darauf folgt schließlich das Werkstoffmodell in direkter und inverser Form. Abschließend werden zwei Wege vorgestellt, um die erforderlichen Werkstoffparameter zu ermitteln. Ergebnis dieses Kapitels ist ein Werkstoffmodell entsprechend dem Blockschaltbild in Abbildung 3.1, welches den Zusammenhang des zeitlichen Verlaufes von Spannung und Dehnung, unter Berücksichtigung des Gefügezustands und der Belastungshistorie, für einen konstanten Satz von Werkstoffparametern beschreibt.

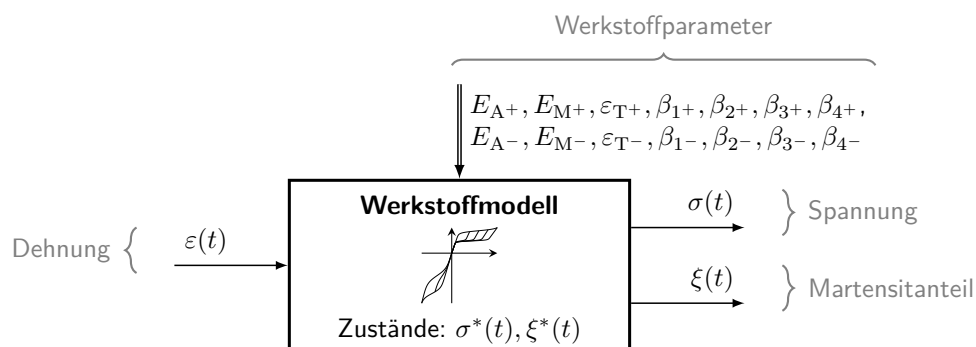
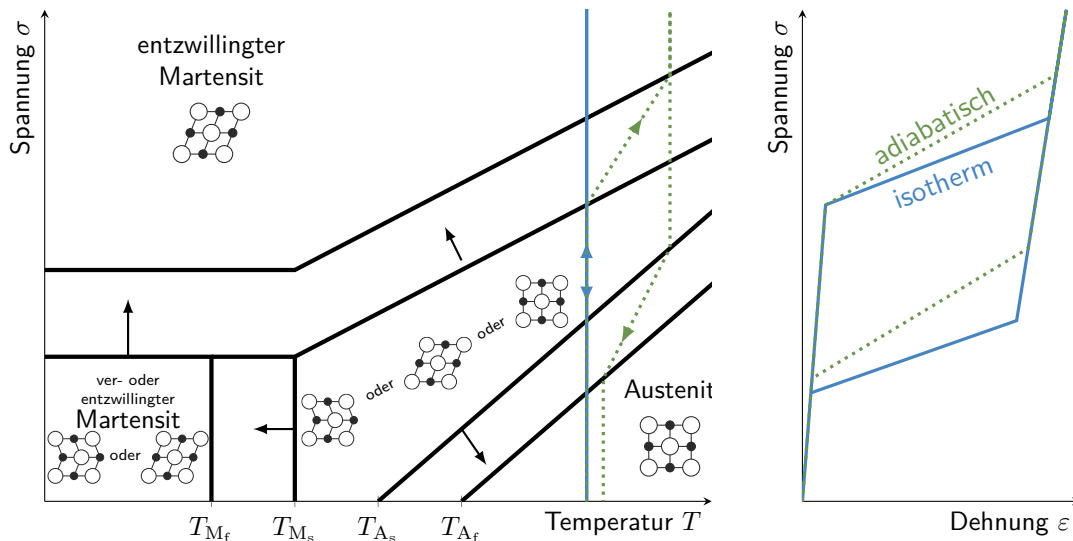


Abbildung 3.1.: Struktur des Werkstoffmodells.

#### 3.1. Grundlagen

**Effektursache** Der Hauptgrund für die besondere Eignung der Nickel-Titan-Legierung als Konstruktionswerkstoff für die Röhren von tubulären Kontinuummechanismen ist ihre hohe reversible Dehnung. Der Spannungs-Dehnungs-Zusammenhang dieses pseudoelastischen

Werkstoffs ist geprägt von Nichtlinearität, Asymmetrie in Zug- und Druckrichtung, Hysterese und der Abhängigkeit von der Temperatur. Dieses charakteristische Verhalten von Formgedächtniswerkstoffen begründet sich in einer thermoelastischen martensitischen Phasenumwandlung. Im Falle von NiTi ist dies ein struktureller Phasenübergang erster Ordnung von einer kubischen Hochtemperaturphase, dem Austenit, zu einer monoklinen Tieftemperaturphase mit einer Vielzahl von Gittervarianten, dem Martensit [66, S. 1]. Diese Umwandlung



**Abbildung 3.2.:** Phasendiagramm (links) und Spannungs-Dehnungs-Diagramm (rechts) von NiTi mit isothermen und adiabatischen pseudoelastischen Belastungspfad nach [7, 16] und [73, S. 162]. Die Phasenübergänge werden vereinfacht als linear dargestellt.

kann durch die Änderung der Temperatur oder der mechanischen Spannung ausgelöst werden und führt zu Transformationsdehnungen von bis zu 6% in polykristallinen und bis zu 15% in monokristallinen Werkstoffen [60]. Durch innere Reibung bei der Verschiebung von Phasengrenzen während der Phasentransformationen kommt es zu einer Temperatur bzw. Spannungshysterese [95]. Wie Abbildung 3.2 zeigt, beginnt die Phasenumwandlung vom martensitischen in den austenitischen Gefügestand für den spannungsfreien Fall  $\sigma = 0$  bei der Austenit-Start-Temperatur  $T_{A_s}$  und endet bei der Austenit-Finish-Temperatur  $T_{A_f}$ . Die Rückumwandlung vom austenitischen in den martensitischen Zustand beginnt hystereseebedingt bei der Martensit-Start-Temperatur  $T_{M_s}$  und ist bei der Martensit-Finish-Temperatur  $T_{M_f}$  abgeschlossen. Liegt der Werkstoff permanent bei einer Temperatur  $T > T_{A_f}$  vor, so bildet sich ohne äußere Last  $\sigma = 0$  vollständig die Hochtemperaturphase aus. Diese Voraussetzung ermöglicht die Nutzung der Pseudoelastizität. Durch Anlegen einer äußeren mechanischen Spannung verschieben sich die Umwandlungstemperaturen hin zu höheren Temperaturen und es kommt zu einer spannungsinduzierten Phasenumwandlung in die Niedertemperaturphase mit der einhergehenden starken Dehnung des Werkstoffes. Nach dem vollständigen

Abbauen der Spannung bildet sich die Dehnung nahezu reversibel zurück. Das thermomechanische Verhalten der Nickel-Titan-Legierung wird durch seine inhärente Sensitivität auf Temperatur und mechanische Spannung, die Generierung und Absorption latenter Wärme sowie den Wärmeaustausch mit Umgebungsmedien definiert [61]. Die Phasenumwandlungen sind immer verbunden mit dem Freisetzen oder Aufnehmen von Umwandlungswärme. Da diese die Temperatur des Werkstoffes beeinflusst, zeigt sich eine Ratenabhängigkeit der Pseudoelastizität von der Spannungsänderung. Entsprechend Abbildung 3.2 bewegt sich diese zwischen den beiden Extremen, der isothermen und der adiabatischen Spannungsänderung.

**Legierung** NiTi-Legierungen können nach ihrer kristallinen Struktur in monokristallin oder polykristallin unterschieden werden. Die als Konstruktionswerkstoff gebräuchlichere Variante ist, wie auch in dieser Arbeit verwendet, der polykristalline Zustand. Weiterhin ist die atomare Zusammensetzung eine Kenngröße des Werkstoffes. NiTi-Legierungen werden am häufigsten als binäre Legierung eingesetzt. Der Werkstoff lässt sich dann direkt durch die Anteile von Nickel und Titan charakterisieren. Der Nickelanteil kann im Bereich von 49 at% bis 52 at% variieren [54, S. 7]. Das Zusammensetzungsverhältnis der beiden Hauptbestandteile hat starken Einfluss auf die Phasenumwandlungstemperaturen und damit auf das Spannungs-Dehnungsverhalten. Die Martensit-Start-Temperatur  $T_{M_s}$  kann durch das Nickel-Titan-Verhältnis im Bereich von  $-200\text{ °C}$  bis  $80\text{ °C}$  variiert werden [67, Abb. 16]. Eine Änderung der atomaren Zusammensetzung um 0.1 at% kann bereits zu einer Verschiebung der Phasenumwandlungstemperaturen um bis zu 10 K führen [124, S. 9]. Durch Zulegieren weiterer Elemente entstehen ternäre und quaternäre Legierungssysteme. Die Umwandlungstemperaturen werden durch diese zusätzlichen Legierungselemente verschoben, je nachdem, ob sie die Hoch- oder die Tieftemperaturphase stabilisieren [124, S. 3]. Elemente wie Eisen, Chrom oder Vanadium führen zu einer Absenkung der Phasenumwandlungstemperaturen [115]. Die Substitution von Nickel durch Palladium, Platin oder Gold führt zu einer Anhebung der Phasenumwandlungstemperaturen [124, S. 11]. Die Anzahl und Konzentration von Valenzelektronen ternärer und quaternärer Legierungssysteme stellt eine Einflussgröße für die Breite der Hysterese dar [136]. Die Verwendung anderer pseudoelastischer Legierungen, neben binärem NiTi, für tubuläre Kontinuumsmechanismen ist jedoch nicht bekannt. Die *ASTM F2063*-Norm definiert unter anderem die Grenzwerte für die chemische Zusammensetzung von NiTi zur Herstellung medizinischer Geräte und chirurgischer Implantate. Die maximal zulässigen Anteile an Verunreinigungen liegen beispielsweise jeweils bei 0.05 gw% für Kohlenstoff, Eisen, Kobalt und Stickstoff [5]. Der Hersteller, der in dieser Arbeit verwendeten Röhrchen, garantiert die Einhaltung der *ASTM F2063*-Norm.

**Thermomechanische Behandlung** Die thermomechanische Behandlung der Nickel-Titan-Legierung kann komplexe Eigenschaftsveränderungen herbeiführen. Diese Behandlung kann gewollt und vor allem gezielt erfolgen, um gewünschte Werkstoffeigenschaften, auch noch

am fertigen Bauteil, einzustellen. Sie kann jedoch auch ungewollt sein und zur Ermüdung des Werkstoffs im Betrieb führen. Letzterem widmet sich der nächste Abschnitt. Eine thermomechanische Behandlung kann Umwandlungs-, Ausscheidungs- und Rekristalisationsreaktionen herbeiführen. Diese wiederum können zum einen genutzt werden, um auf funktionelle Eigenschaften, wie Umwandlungstemperaturen und Umwandlungsspannungen Einfluss zu nehmen. Zum anderen werden aber auch strukturelle Eigenschaften wie Festigkeit und Härte beeinflusst [124, S. 11]. Beim Abschrecken Nickel-reicher Legierungen kann mehr Nickel in der Matrix verbleiben, als beim langsamen Abkühlen aus der Schmelze gelöst bleiben könnte. Durch gezielte Wärmebehandlung kann deshalb der Nickel-Anteil verändert werden, indem er entweder in der Matrix gelöst oder in Form von Partikeln ausgeschieden wird [54, S. 8]. Abhängig von der Anlasstemperatur und Dauer werden solche Ausscheidungen neu gebildet, wachsen oder lösen sich auf. Durch den veränderten Nickel-Anteil in der Matrix ändern sich die Phasenumwandlungstemperaturen und mit diesen auch die Spannungen [124, S. 149].

**Ermüdung** Unter Ermüdung soll die Änderung von Werkstoffeigenschaften unter wiederkehrenden thermischen oder mechanischen Belastungen verstanden werden. Neben den auch für klassische Strukturwerkstoffe bekannten Ermüdungsmechanismen, die letztlich zum Bruch führen, ist bei NiTi zusätzlich der Einfluss auf die Pseudoelastizität entscheidend. Bei der Phasenumwandlung zwischen Austenit und Martensit bilden sich Kristalldefekte, welche lokal Bereiche im Austenit oder in bestimmten Martensitvarianten stabilisieren. Solche stabilisierten Volumenanteile nehmen bei geringer Defektkonzentration noch an der spannungsinduzierten Transformation teil, führen jedoch zu einer Veränderung des Niveaus und der Steigung des pseudoelastischen Plateaus. Mit steigender Defektkonzentration verlieren die Bereiche ihre Fähigkeit zur Transformation und werden nur noch elastisch oder sogar plastisch gedehnt. Mit der Lastspielzahl sinkt deshalb die maximale Transformationsdehnung und die plastische Dehnung nimmt zu. Einfluss auf das Ermüdungsverhalten kann durch die Mikrostruktur des Gefüges genommen werden, welche sich in Folge der thermomechanischen Vorbehandlung einstellt [54, S. 10f und S. 53f]. Die Anzahl an Kristalldefekten nimmt zudem Einfluss auf die Beweglichkeit der Phasengrenzen und damit auch auf die Verrundung der Spannungs-Dehnung-Kurve.

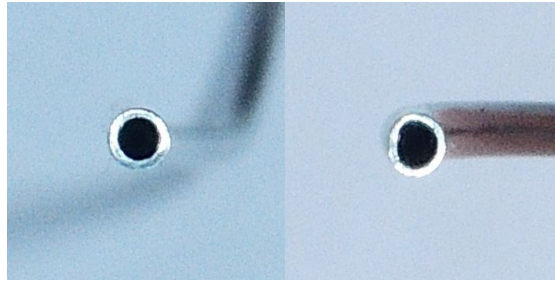
**Medizinische Eignung** Das Element Titan ist für den menschlichen Körper nicht toxisch. Nickel hingegen ist karzinogen, kann allergische Reaktionen hervorrufen und Muskelgewebe degenerieren. Die Nickel-Titan-Legierung bildet jedoch eine passive  $TiO_2$  Schicht, welche eine physikalische Barriere zum Nickel darstellt und den Werkstoff zudem vor Korrosion schützt [92]. Die gute Korrosionsbeständigkeit verhindert eine Zersetzung des Werkstoffs in physiologischen Umgebungen und erhöht damit die Biokompatibilität. Durch Elektropolieren lässt sich eine gleichmäßige Oxidschicht erzeugen, welche die Korrosionsbeständigkeit weiter erhöht [123].



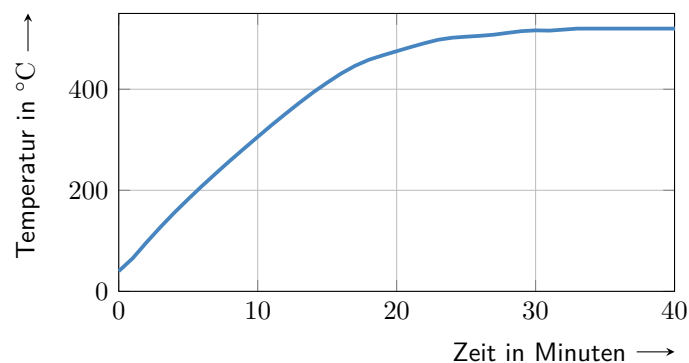
(a) Einzelne Kupferplatte mit Nutenbahnen für eben vorgekrümmte Röhren. (b) Verschraubte Messingplatten mit drei eingelegten Röhren. (c) Vorrichtung zur Einprägung einer helixförmigen Vorkrümmung.

**Abbildung 3.3.:** Formen zur Einprägung einer Vorkrümmung.

**Formeinprägung** Zur Herstellung der in dieser Arbeit verwendeten Versuchsröhren wurden durch Rohrzug hergestellte, gerade Halbzeuge eingesetzt. Die erforderliche Krümmung wurde für einige Röhren beim Halbzeughersteller selbst eingepreßt, hier ist der eingesetzte Formeinprägungsprozess jedoch unbekannt. Für die Mehrzahl der gekrümmten Röhren wurde die Formeinprägung durch Glühen der in einem Formwerkzeug eingespannten Röhren und anschließendem Abschrecken im Wasserbad selbst durchgeführt. Als Formwerkzeug für ebene Vorkrümmungen dienten Kupfer- oder Messingplatten mit Nuten, wie beispielsweise in den Abbildungen 3.3a-3.3b dargestellt. Die Nuten weisen einen quadratischen Querschnitt, mit einer Kantenlänge, welche um 0.05 mm größer als der Außendurchmesser der Röhren ist, auf. Der gewählte Luftspalt erweist sich als praktikabel, um die Röhren noch einlegen zu können. Die Röhren verspannen sich reibschlüssig in den Nuten, werden jedoch zusätzlich durch eine aufgeschraubte Deckplatte, entsprechend Abbildung 3.3b, in der Form gehalten. Mehrere unterschiedlich gekrümmte Nuten in einer Platte lassen es zu, mehrere Versuchsröhren gleichzeitig herzustellen, um somit ähnliches Werkstoffverhalten durch gleiche thermische Behandlung zu erzielen. Da die notwendigen Kräfte zur Verformung der geraden Röhren in die gekrümmten Nutenbahnen vorwiegend durch ein Kräftepaar an den Krümmungsenden aufgebracht werden (siehe Abschnitt 5.2), ergibt sich bei stark gekrümmten Röhren nach der Formeinprägung eine Deformation des Querschnittes. Abbildung 3.4 zeigt ein Rohrende, welches auf der dem Krümmungsmittelpunkt abgewandten Seite eine Abflachung des Querschnittes erfahren hat. Das gekrümmte Ende der Rohre wurde deshalb stets um etwa 10 mm Bogenlänge gekürzt. Helixförmige Röhren wurden mit der Form in Abbildung 3.3c hergestellt. Der Durchmesser des Stahlzylinders legt dabei den Krümmungsradius fest. Die



**Abbildung 3.4.:** Röhrenquerschnitt nach der Formeinprägung am geraden (links) und am gekrümmten (rechts) Ende des Röhrchens.

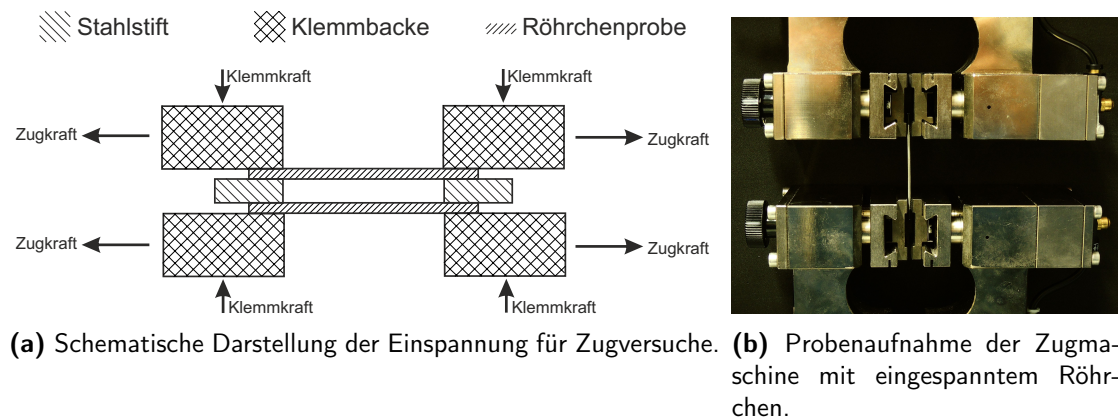


**Abbildung 3.5.:** Lufttemperaturverlauf im Röhrcheninneren während der thermischen Behandlung im Ofen.

gewünschte Steigung und Windungszahl legt die Höhe des Zylinders sowie die Positionen und Winkel der Einspannungen an den Zylinderenden fest.

Da der Glühvorgang, wie im Unterabschnitt „Thermomechanische Behandlung“ (S. 32) beschrieben, einen Einfluss auf die Werkstoffeigenschaften nimmt, ist das Temperatur-Zeit-Profil bei der Formeinprägung so zu wählen, dass die funktionswichtige Pseudoelastizität erhalten bleibt. In erster Linie muss dazu die Austenit-Finish-Temperatur  $T_{A_f}$  deutlich unterhalb der Raumtemperatur liegen. Die in der Literatur [68, 108, 114, 125, 127] zu findenden Glühtemperaturen im Bereich von 400 °C bis 600 °C und Glühdauern von 2 bis 10 Minuten sind aufgrund der hohen thermischen Zeitkonstante des Formeinprägewerkzeugs schwer zu realisieren. Abbildung 3.5 zeigt den Temperaturverlauf, welcher mit einem dünnen Thermometer innerhalb eines Röhrchens in der Form im Ofen gemessen wurde. Die dabei verwendeten Kupferplatten haben eine Abmessung von jeweils 350 mm × 150 mm × 4 mm. Das gezielte thermische Behandeln der Röhrchen bei hoher Temperatur und kurzer Zeitdauer war aus diesem Grund nicht möglich. Der Glühvorgang erfolgte deshalb für 60 Minuten im auf 525 °C vorgeheizten Ofen. Anschließend wurde das Formwerkzeug mit dem Röhrchen in Wasser bei Zimmertemperatur



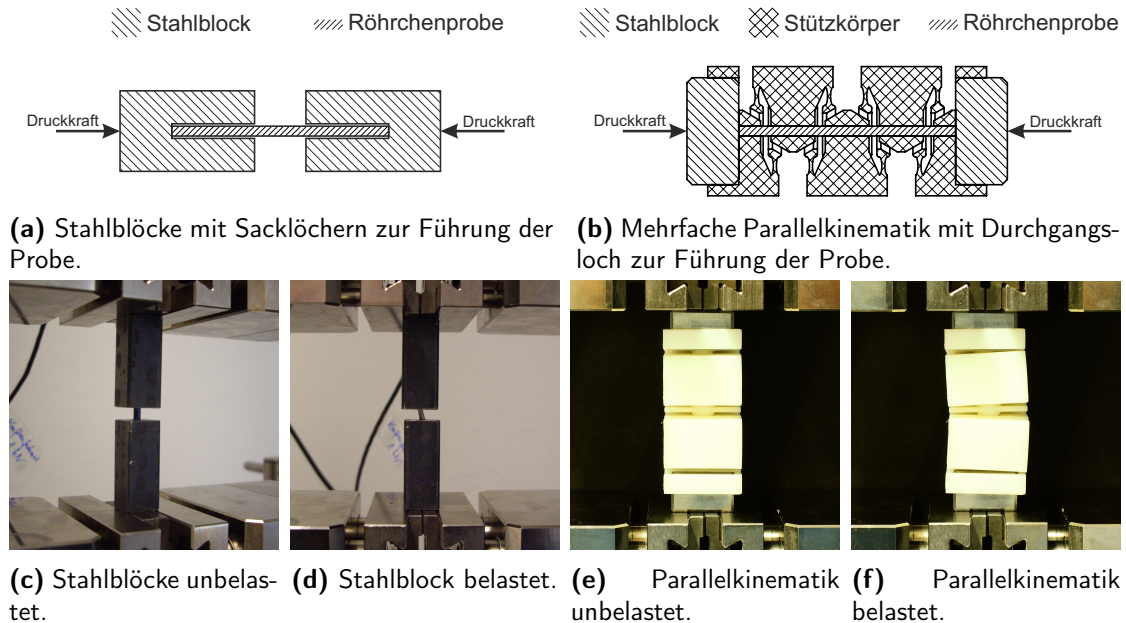


**Abbildung 3.6.:** Einspannung einer Röhrenprobe für Zugversuche.

abgeschreckt. Die lange Glühdauer wurde aufgrund der hohen thermischen Zeitkonstante des Formwerkzeugs gewählt und stellt sicher, dass die gewünschte Form ohne Zurückfedern eingepreßt wird. Ein nachträgliches Vermessen der mechanischen Werkstoffeigenschaften sichert schließlich die Verwendbarkeit der Versuchsröhren in den Versuchen mit Modellvergleich.

### 3.2. Zug- und Druckmessungen

Um verlässliche Parameter für das folgende Werkstoffmodell ermitteln zu können, werden Spannungs-Dehnungs-Kennlinien für Zug- und Druckbelastung benötigt. Aufgrund der schlechten Verfügbarkeit geeigneter Halbzeuge, ihrer schlechten Zerspanbarkeit, ihres Preises und der Notwendigkeit gleicher thermischer Behandlung wie die Versuchsrohre wurde auf die Verwendung eines für Zug- und Druckversuche geeigneten Prüfkörpers verzichtet. Stattdessen dienten Rohrabschnitte der Versuchsrohre als Werkstoffproben. Durch den Herstellungsprozess, wie zum Beispiel das Strangpressen, ergibt sich auch in polykristallinen Werkstoffen eine Richtungsabhängigkeit der elastischen Konstanten [66, S. 82]. Durch den Rohrzug bei der Herstellung der Versuchsröhren dürfte auch hier eine Anisotropie vorliegen. Die Spannungsrichtung der axialen Zug- und Druckmessungen entspricht aber auch der Belastungsrichtung bei Biegung der Röhren, was ebenfalls für die Verwendung von Röhren in den Versuchen spricht. Zur Messung wurden ausschließlich gerade Proben verwendet, welche direkt von den Versuchsröhren abgetrennt wurden. Bei den vorgekrümmten Röhren wurden gerade Rohrabschnitte nach der Formeinprägung abgeschnitten, um den Einfluss der thermischen Behandlung in den Messungen zu berücksichtigen. Alle Messungen erfolgten an einer *Zwick ProLine Z005* Prüfmaschine. Prinzipbedingt wurden die Zug- und die Druckversuche getrennt durchgeführt und die Messdaten anschließend zusammengesetzt.



**Abbildung 3.7.:** Stützstrukturen zur Durchführung von Druckversuchen an schlanken Röhrenproben sowie die Gesamtverformung unter Last.

In den Zugmessungen wurden die Röhren direkt zwischen den Spannbacken der Prüfmaschine eingespannt. Um eine ausreichende radiale Steifigkeit gegenüber der Klemmkraft zu bieten, wurden die Enden der Röhren mit Stahlstiften versehen. Den beschriebenen Aufbau zeigt Abbildung 3.6. In den ersten Belastungsvorgängen konnte ein Setzen der Probe in den Klemmböcken beobachtet werden. Die eigentlichen Messdaten wurden deshalb nach einem ersten Be- und Entlastungszyklus aufgenommen. Eine Verfälschung der Messung durch lokal ungleichmäßige Spannungs- und Dehnungsverteilungen an den Einspannungen kann nicht erfasst werden und stellt eine Fehlerquelle bei der Dehnungsbestimmung dar. Die für die Modellierung deutlich wichtigere Höhe der Plateaus wird dadurch jedoch nicht beeinflusst.

Die Durchführung von Druckmessung gestaltet sich deutlich aufwändiger, da die dünnen langen Proben zum Ausknicken neigen. Die DIN-Norm 50106 [31] gibt für Druckversuche ein Verhältnis von Probenlänge  $l$  zu Probendurchmesser  $d$  von  $1 \leq \frac{l}{d} \leq 2$  an, welches mit den verwendeten Röhren kaum realisierbar ist. Mit der Probenlänge von 40 mm und einem Außendurchmesser der schlanksten Probe von 1.5 mm ergibt sich ein Länge zu Dicke Verhältnis von über 26. Zur Durchführung der Druckversuche wurden deshalb zwei unterschiedliche Stützstrukturen untersucht. Eine Möglichkeit, das Ausknicken abzufangen, besteht darin, wie in Abbildung 3.7a dargestellt, das Röhren in einer Bohrung in zwei sich gegenüber stehenden Stahlblöcken zu führen. Solche Aufbauten wurden bereits vielfach eingesetzt, beispielsweise in [55, 99]. Die freie Probenlänge kann dann wenige Millimeter betragen, wodurch ein Ausknicken

verhindert wird. Nachteilig erweist sich jedoch die Notwendigkeit der präzisen Ausrichtung der Führungsbohrungen zueinander. Durch Fehler in der Konzentrizität und Kolinearität der Bohrungen entsteht eine ungewollte Biegeverformung der Werkstoffprobe, wie der Vergleich der Abbildungen 3.7c und 3.7d erkennen lässt. Um die Fehlerquellen bei der Ausrichtung zu reduzieren, wurde eine monolithische Stützstruktur, welche das Röhrchen beinahe vollständig umgibt, gefertigt. Ziel ist es, eine Struktur zu schaffen, die in axialer Röhrchenrichtung möglichst weich, in radialer aber möglichst steif ist. Durch eine Reihenschaltung von vier Parallelkinematiken, die in gleichmäßigen Abständen einen Rohrabschnitt axial führen, wird zudem die freie Probenlänge weiter reduziert. Die in Abbildung 3.7b gezeigte Struktur wurde im 3D-Druck-Verfahren hergestellt und weist in Druckrichtung eine Steifigkeit von  $3.5 \text{ N mm}^{-1}$  auf. Ein Hub von 3 mm ist mit nahezu linearem Kraft-Weg-Verhalten erreichbar, was ausreicht, um die Proben um 10 % zu stauchen. Bei Druckspannungen oberhalb des Belastungsplateaus, kam es dennoch zu einem Ausknicken der Probe mit der einhergehenden Verformung der Stützstruktur, wie in den Abbildungen 3.7e und 3.7f zu sehen ist. Die gewonnenen Messdaten unter Druckbelastung werden sowohl bei der Verwendung der Stahlblöcke als auch bei der Parallelkinematik zusätzlich durch das Einarbeiten der Probe an den Kontaktstellen, der lokalen Verformung der Röhrchenenden und der Reibung zwischen Probe und Knickstütze verfälscht.

Eine zuverlässigere Zug- und Druckmessung ist beispielsweise mit einem Aufbau wie in [99] möglich, bei dem die Dehnung direkt optisch an der Probe gemessen wird. Für alle Messungen betrug die frei verformbare Länge der Proben 40 mm bei den Druckversuchen und 30 mm bei den Zugversuchen, aufgrund der Notwendigkeit des Klemmens. Um thermische Einflüsse durch das Freiwerden und Aufnehmen der Phasenumwandlungsenthalpie zu vermeiden und die Messungen als isotherm betrachten zu können, wurde eine Dehnrate von  $0.5 \text{ mm min}^{-1}$  gewählt. Die Umgebungstemperatur betrug  $18 \text{ }^\circ\text{C}$ , was auch als Temperatur der Probe angenommen wird.

### 3.3. Formulierung des Werkstoffmodells

**Überblick** Die Literatur aus den 90er Jahren bietet bereits eine Vielzahl an Werkstoffmodellen zur Beschreibung von Formgedächtnislegierungen [12, 16]. Effekte wie Zug-Druck-Unsymmetrie, transformationsbedingte Plastizität oder Versagensmechanismen wurden in der nachfolgenden Dekade in diese Modelle mit aufgenommen [27]. Aktuelle Werkstoffmodelle bieten bereits die Abbildung von unsymmetrischem Zug-Druck-Verhalten [98] sowie tiefer gehenden Deformationsmechanismen wie Scherung [13, 90]. Grundsätzlich können die Werkstoffmodelle für Formgedächtniswerkstoffe in phänomenologische Modelle, Plastizitätsmodelle oder Modelle basierend auf der freien Energie eingeteilt werden [64, S. 17].

Die Verformungsvorgänge der Röhren werden innerhalb dieser Arbeit als quasistatisch und in Hinblick auf den Werkstoff als isotherm betrachtet. Die Umgebungstemperaturen werden im Folgenden ebenfalls als konstant angenommen. Die Berücksichtigung des Temperatureinflusses im Modell entfällt deshalb. Für die spätere Formulierung eines Bauteilgesetzes für Biegeröhren wird ein Werkstoffmodell zur ausschließlichen Beschreibung von Zug- und Druckspannungen in Abhängigkeit der Dehnung benötigt. Da Torsionseffekte der Röhren nicht berücksichtigt werden sollen, genügt die Betrachtung des einachsigen Spannungszustandes. Es existiert eine große Zahl an eindimensionalen und komplexeren dreidimensionalen Werkstoffmodellen. Viele der in der Literatur zu findenden Modelle zur Beschreibung von Formgedächtniswerkstoffen können separiert werden, in ein mechanisches Gesetz, welches den makroskopischen Zusammenhang von Spannung, Dehnung, Temperatur und Gefügestand formuliert und ein Kinetik-Gesetz zur Beschreibung der Veränderung des Gefügestands in Abhängigkeit von Spannung und Temperatur [16]. Es gibt Modelle, welche alle 24 möglichen Martensitvarianten berücksichtigen, bis hin zu Modellen welche diese in ihrer makroskopischen Erscheinung zu nur einer Martensitvariante reduzieren. Häufig liegen diesen Gesetzen thermodynamische Zusammenhänge zugrunde, welche sich schließlich mit thermischen Modellen verkoppeln lassen, um beispielsweise thermisch aktivierte Systeme zu modellieren. Die Beschreibung des Hystereseverhaltens selbst kann durch unterschiedlichste mathematische Ansätze erfolgen. Brinson [17] verwendet eine Cosinus-Funktion, Boyd und Lagoudas [14] eine Exponentialfunktion und Ivshin und Pence [63] eine hyperbolische Funktion zur Beschreibung der Phasentransformation. Diese Methoden bieten den Vorteil der anschaulichen Parametrierung und Implementierung gegenüber beispielsweise Preisach-Modellen mit präziserer Nachbildung der Hystereseform [109]. Im einachsigen Spannungszustand kann die mechanische Modellierung unterschieden werden nach der Art und Weise wie die unterschiedlichen Gefügestarten innerhalb eines Kontrollvolumens angeordnet sind. Die Unterscheidung nach mechanischer Parallel- oder Reihenschaltung von Austenit und Martensit hat jedoch einen vernachlässigbaren Einfluss im Vergleich zur Abbildung der Hysterese [16].

**Direktes Modell** Die Modellierung des Werkstoffes innerhalb dieser Arbeit erfolgt unter der Annahme, dass Austenit, Martensit und transformierter Martensit in einem betrachteten Kontrollvolumen mechanisch in Reihe vorliegen. Dies wird durch die Dehnungsanalysen in Reedlunn et al. [99] bestätigt. Entlang der Rohrachse eines verbogenen Nickel-Titan-Röhrens kommt es zur Ausbildung von Diamantmustern mit abwechselnden Bereichen rein austenitischer Dehnung und Bereichen starker Dehnung mit entzwillingtem Martensit. Die Modellierung der Martensitumwandlung in der Gefügekinetik erfolgt durch die Tangens-Hyperbolikus-Funktionen, welche die gemessenen Spannungs-Dehnungs-Verläufe hinreichend gut nachbildet. Die Modellierung beruht damit auf dem Modell von Ivshin und Pence [63]. Es wurde jedoch um den Einfluss der Temperatur reduziert und erfordert deshalb weniger Parameter, welche sich zudem leichter identifizieren lassen. Ein thermisches Modell, welches die Erwärmung und Abkühlung der Röhren bei Verformung durch den Einfluss der Umwandlungs-

enthalpie sowie der Umgebungstemperatur berücksichtigen kann, wäre als Erweiterung des ursprünglichen Modells von Ivshin und Pence [63] leicht denkbar, würde jedoch eine ausführlichere thermische Charakterisierung des Werkstoffes erfordern, um die notwendigen Parameter zu bestimmen.

Die Gesamtdehnung eines Volumenelementes ergibt sich aus den genannten Annahmen zu

$$\varepsilon(\sigma, \xi) = \begin{cases} (1 - \xi)E_{A+}^{-1}\sigma + \xi E_{M+}^{-1}\sigma + \xi\varepsilon_{T+} & \text{für } \sigma > 0 \\ 0 & \text{für } \sigma = 0 \\ (1 - \xi)E_{A-}^{-1}\sigma + \xi E_{M-}^{-1}\sigma + \xi\varepsilon_{T-} & \text{für } \sigma < 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

und stellt die durch den Martensitanteil  $\xi$  gewichtete Reihenschaltung von austenitischen, martensitischen und Transformationsdehnungsanteilen dar. Dabei stehen  $E_A$  und  $E_M$  jeweils für die E-Moduli von Austenit und Martensit. Die maximale Transformationsdehnung ist durch  $\varepsilon_T$  gegeben und die Symbole '+' und '-' bezeichnen jeweils die Zug- und Druckparameter. Das Modell berücksichtigt den Martensitanteil

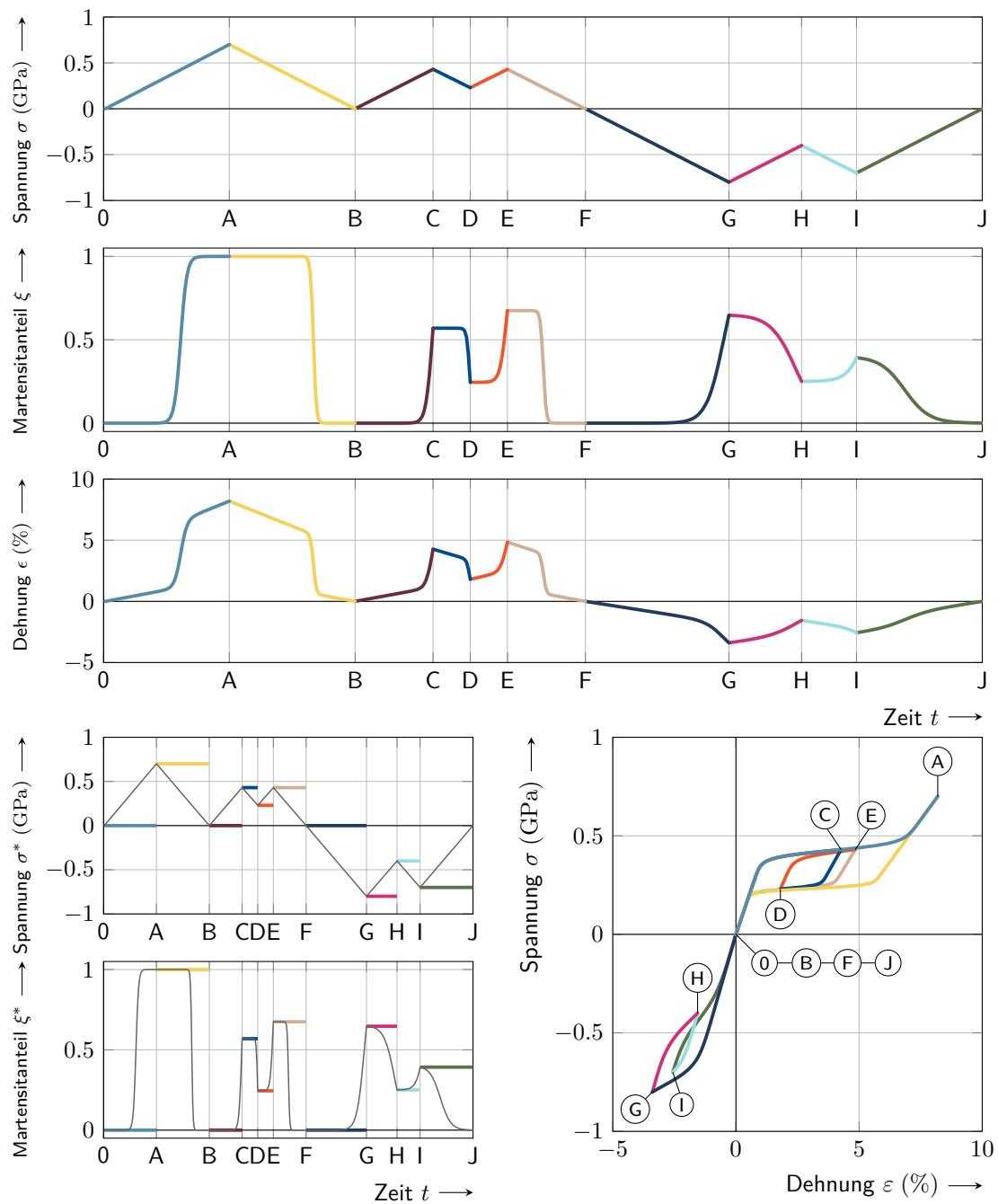
$$\xi(\sigma, \sigma^*, \xi^*) = \begin{cases} 1 - \frac{(1-\xi^*)(1-\xi_{AM}(\sigma))}{1-\xi_{AM}(\sigma^*)} & \text{für } |\sigma| > |\sigma^*| \\ \xi^* & \text{for } \sigma = \sigma^* \quad , \quad \xi \in [0, 1], \\ \frac{\xi^* \xi_{MA}(\sigma)}{\xi_{MA}(\sigma^*)} & \text{für } |\sigma| < |\sigma^*| \end{cases} \quad (3.2)$$

welcher durch die Skalierung reiner Martensit-Austenit- bzw. Austenit-Martensit-Übergänge bestimmt werden kann und von den beiden inneren Zuständen  $\sigma^*$  und  $\xi^*$  beeinflusst wird. Die Hüllkurven reiner und vollständiger Phasenübergänge sind definiert durch

$$\xi_{AM}(\sigma) = 0.5 + 0.5 \tanh \begin{cases} \beta_{1+}(\sigma - \beta_{2+}) & \text{for } \sigma > 0 \\ \beta_{1-}(\sigma - \beta_{2-}) & \text{für } \sigma < 0 \end{cases}, \quad \xi_{AM} \in [0, 1], \quad (3.3)$$

$$\xi_{MA}(\sigma) = 0.5 + 0.5 \tanh \begin{cases} \beta_{3+}(\sigma - \beta_{4+}) & \text{for } \sigma > 0 \\ \beta_{3-}(\sigma - \beta_{4-}) & \text{für } \sigma < 0 \end{cases}, \quad \xi_{MA} \in [0, 1]. \quad (3.4)$$

Die Funktion  $\xi_{AM}(\sigma)$  beschreibt eine vollständige Austenit-zu-Martensit-Umwandlung aus dem reinen austenitischen Zustand mit  $\xi^* = 0$ . Umgekehrt beschreibt  $\xi_{MA}(\sigma)$  eine vollständige Martensit-zu-Austenit-Umwandlung mit  $\xi^* = 1$ . Die Parameter  $\beta_{1+}, \beta_{1-}, \dots, \beta_{4+}, \beta_{4-}$  stellen Anpassungsparameter für die Intensität der Verrundung der Übergänge und die Höhe der Plateauspannungen dar. Die Skalierung der Hüllkurven hängt von den Startwerten für mechanische Spannung  $\sigma^*$  und Martensitanteil  $\xi^*$  ab, welche beim Richtungswechsel der Phasentransformation neu gesetzt werden müssen und somit stets den Hysteresezustand speichern. Insgesamt erfordert das Modell 14 Parameter, bestehend aus vier E-Moduli, zwei Transformationsdehnungen, vier Plateauspannungen und vier Parametern zur Anpassung der Hystereseform. Um das Modell auf beliebige Spannungsverläufe anzuwenden, muss der Verlauf



**Abbildung 3.8.:** Vorgegebener Spannungsverlauf und der daraus resultierende Verlauf von Martensitanteil und Dehnung, berechnet mit dem direkten Werkstoffmodell und den Parametern aus Tabelle A.2.

in Lastschritte mit monoton steigender oder monoton fallender Spannung und konstantem Vorzeichen zerlegt werden. Abbildung 3.8 zeigt dies an einem beispielhaften Spannungsverlauf. An Zeitpunkten mit Wechseln der Belastungsänderungsrichtung oder Nulldurchgängen der Spannung beginnt ein neuer Lastschritt und die Zustände  $\sigma^*$  und  $\xi^*$  müssen auf die entsprechenden Werte am Ende des letzten Lastschrittes gesetzt werden. Zur Initialisierung des Modells müssen die Zustände definiert werden. Eine Möglichkeit dazu stellt der spannungs- und dehnungsfreie Zustand mit den trivialen Startbedingungen  $\sigma^* = 0$  und  $\xi^* = 0$  dar.

**Inverses Modell** Für die Berechnungen in den folgenden Kapiteln wird das Werkstoffmodell in der Form  $\sigma(\varepsilon(t), \sigma^*(t), \xi^*(t))$  als Funktion der Dehnung  $\varepsilon(t)$  und den inneren Zuständen  $\sigma^*(t)$  und  $\xi^*(t)$  benötigt. Generell existiert zu jedem Satz  $(\sigma^*, \xi^*)$  ein eindeutiger Zusammenhang zwischen  $\sigma$  und  $\varepsilon$  solange diese monoton sind. Die Invertierung der Gleichungen (3.1)-(3.4) erfolgt für jeden Zeitpunkt  $t$  durch lineare Inter- und Extrapolation auf einem zuvor unter Berücksichtigung des inneren Zustands berechneten Stützstellenraster. Dazu wird über dem technisch sinnvollen Spannungsbereich

$$\sigma_{\text{Raster}} = [0 \text{ MPa}, 0.5 \text{ MPa}, \dots, 2000 \text{ MPa}]^T \begin{cases} +1 & \text{für } \varepsilon \geq 0 \\ -1 & \text{für } \varepsilon < 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

zunächst das direkte Modell (3.1)-(3.4) entsprechend der bekannten Dehnung für Zug oder Druck gelöst. Für den Stützstellenvektor  $\sigma_{\text{Raster}}$  und die Zustände  $\sigma^*$  und  $\xi^*$  wird der Martensitanteil

$$\xi_{\text{Raster}} = \xi(\sigma_{\text{Raster}}, \sigma^*, \xi^*) \quad (3.6)$$

und daraus schließlich die Dehnung

$$\varepsilon_{\text{Raster}} = \varepsilon(\sigma_{\text{Raster}}, \xi_{\text{Raster}}) \quad (3.7)$$

für jedes Wertepaar aus Spannung und Martensitanteil berechnet. Die Zustände  $\sigma^*$  und  $\xi^*$  sind, wie auch beim direkten Modell, aus der Zerlegung in Lastschritte durch das Modellergebnis des vorangegangenen Lastschrittes bekannt. Durch lineare Interpolation innerhalb des Stützstellenrasters sowie Extrapolation für Dehnungswerte außerhalb des Stützstellenrasters  $[\varepsilon_{\text{Raster}} \quad \sigma_{\text{Raster}}]$  wird anschließend der gesuchte Wert  $\sigma$  zum gegebenen  $\varepsilon$  ermittelt. Für den inter- bzw. extrapolierten Wert  $\sigma$  wird anschließend noch einmal das direkte Modell (3.2) genutzt, um den für diese Spannung korrekten Martensitanteil

$$\xi = \xi(\sigma, \sigma^*, \xi^*) \quad (3.8)$$

zu berechnen, anstatt ihn auch zu inter- bzw. extrapolieren. Die Werte von  $\sigma$  und  $\xi$  am Ende jedes Lastschrittes dienen dann als neue Zustandsgrößen  $\sigma^*, \xi^*$  im nächsten Lastschritt. Zeitliche Dehnungsverläufe müssen, wie auch die Spannungsverläufe, im direkten Modell in

Lastschritte mit monoton steigendem oder monoton fallendem sowie vorzeichenwechselfreien Dehnungsverlauf unterteilt werden. Die Neuberechnung des Stützstellenrasters durch (3.6) und (3.7) muss für jeden Lastschritt aufgrund der konstanten Zustände  $\sigma^*$  und  $\xi^*$  nur einmal ausgeführt werden. Das Berechnungsvorgehen 1 zeigt eine mögliche Implementierung der

<b>Ziel</b>	: Bestimmung der Spannung $\sigma$ zur gegebenen Dehnung $\varepsilon$ unter Berücksichtigung der Werkstoffzustände $\xi^*$ und $\sigma^*$
<b>Erforderlich</b>	: Werkstoffparameter
<b>Bedingung</b>	: $\xi^* = 0$ oder $\text{sign } \sigma^* = \text{sign } \varepsilon$
<b>1 Berechnungsvorgehen</b>	$(\sigma, \xi) = \text{Werkstoffmodell}(\varepsilon, \sigma^*, \xi^*)$
2	Erzeuge ein Spannungs-Stützstellenraster mit (3.5)
3	Berechne das Martensitanteil-Stützstellenraster mit (3.6) für die Werkstoffzustände $\xi^*$ und $\sigma^*$ über dem Spannungs-Stützstellenraster
4	Berechne das Dehnungs-Stützstellenraster mit (3.7) für das zugehörige Spannungs- und Martensitanteil-Stützstellenraster
5	Inter- oder Extrapoliere die Spannung $\sigma$ für die gegebene Dehnung $\varepsilon$ aus dem Spannungs-Dehnungs-Stützstellenraster
6	Berechne den Martensitanteil $\xi$ mit (3.8) für die Spannung $\sigma$ und die Werkstoffzustände $\xi^*$ und $\sigma^*$

**Berechnungsvorgehen 1** : Werkstoffmodell.

beschriebenen Rechenschritte, wie sie auch im Bauteilmodell in Kapitel 4 wieder aufgegriffen wird. Die Werkstoffzustände können dabei entweder durch Erkennung einzelner Lastschritte, wie in Abbildung 3.8 am direkten Modell gezeigt, nur an den notwendigen Zeitpunkten neu definiert werden. Die im Berechnungsvorgehen 1 definierten Bedingungen sind dadurch stets erfüllt. Alternativ ist nach hinreichend kleiner Diskretisierung des zeitlichen Dehnungsverlaufs ein Aktualisieren der Werkstoffzustände nach jedem diskreten Dehnungsschritt möglich, was das Erkennen einzelner Lastschritte erspart. Die Dehnungsschrittweite ist dabei so klein zu wählen, dass eine der beiden Bedingungen aus Berechnungsvorgehen 1 stets erfüllt wird.

### 3.4. Ermittlung der Werkstoffparameter

**Parameterermittlung mit kleinsten Fehlerquadraten** Für das Werkstoffmodell (3.1)-(3.4) werden insgesamt 14 Parameter benötigt. Für Zug und Druck sind dies jeweils die E-Moduli von Austenit und Martensit, die Transformationsdehnung, die Be- und Entlastungsplateauspannungen sowie die Verrundung der Hysteresekurve bei Be- und Entlastung. Zur Bestimmung dieser wird die Methode der kleinsten Fehlerquadrate auf Messreihen mit mehreren Be- und Entlastungszyklen in Zug- und Druck-Richtung angewandt. Die Messreihen



unterteilen sich in insgesamt  $C$  Lastschritte. Jeder einzelne Lastschritt  $c$  besteht aus  $U_c$  Messpunkten monoton steigender oder monoton fallender Dehnungen  $\hat{\epsilon}_c = [\hat{\epsilon}_{c,1}, \dots, \hat{\epsilon}_{c,U_c}]$  und den dazu gemessenen Spannungen  $\hat{\sigma}_c$ . Die Summe der kleinsten Fehlerquadrate

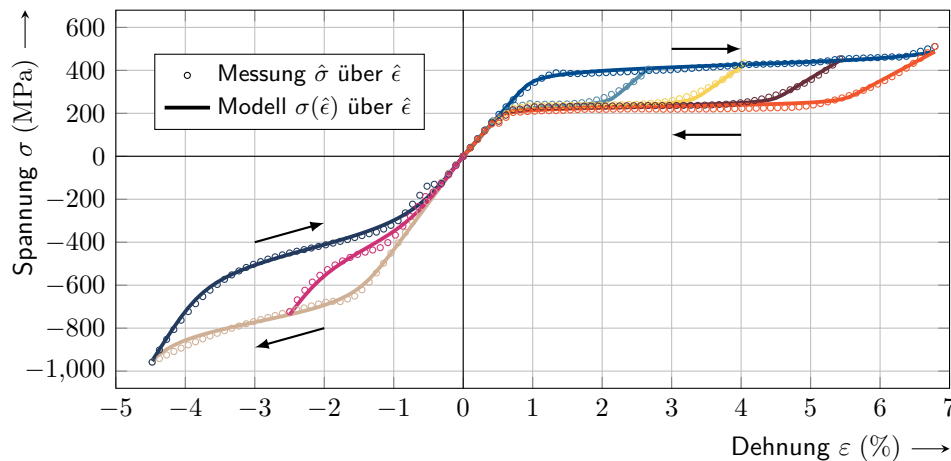
$$Q = \sum_{c=1}^C \sum_{u=1}^{U_c} (\sigma(\hat{\epsilon}_{c,u}, \sigma_w^*, \xi_c^*) - \hat{\sigma}_{c,u})^2 \quad (3.9)$$

wird aus den Spannungsdifferenzen aller Einzelmessungen gebildet. Die Modellspannungen werden unter Verwendung des inversen Werkstoffmodells (3.5)-(3.8) aus Berechnungsvorgehen 1 ermittelt. Die Werkstoffzustände für jeden Lastschritt  $w$ , bestehend aus mechanischer Spannung  $\sigma_c^*$  und Martensitanteil  $\xi_w^*$ , werden mit den Vorschriften

$$\sigma_{w,0} = \begin{cases} 0 & \text{für } \hat{\epsilon}_{c,1} = 0 \\ \sigma(\hat{\epsilon}_{c-1,U_{c-1}}, \sigma_{c-1}^*, \xi_{c-1}^*) & \text{für } \hat{\epsilon}_{c,1} \neq 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad (3.10)$$

$$\xi_c^* = \begin{cases} 0 & \text{für } \hat{\epsilon}_{c,1} = 0 \\ \xi(\hat{\epsilon}_{c-1,U_{c-1}}, \sigma_{c-1}^*, \xi_{c-1}^*) & \text{für } \hat{\epsilon}_{c,1} \neq 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

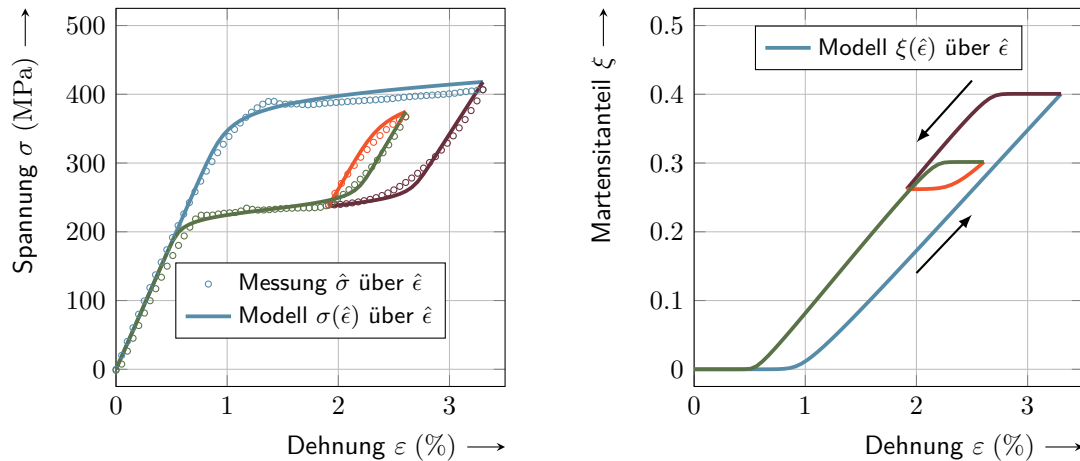
gebildet. Für Lastschritte die im unbelasteten Zustand mit  $\hat{\epsilon}_{c,1} = 0$  beginnen, können die Zustandsvariablen mit Null initialisiert werden. Andernfalls werden die vom Modell errechneten Endwerte des vorangegangenen Lastschrittes als Startwerte des nächsten herangezogen. Dies setzt voraus, dass mindestens die erste Messung im unbelasteten Zustand beginnt. Weiterhin werden die verwendeten Messreihen durch lineare Interpolation zwischen den Messpunkten in ein äquidistantes Raster mit Dehnungsabständen von 0.1% reduziert. Da das



**Abbildung 3.9.:** Messung und Modellvorhersage des Werkstoffmodells für die mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate ermittelten Parameter aus Tabelle A.2.

Modell nichtlinear in seinen Parametern ist, ist die direkte Bestimmung des optimalen Parametersatzes nicht möglich. Aus einer vorgegebenen Startschätzung der Parameter wird

durch ein Simplex-Verfahren ein lokales Minimum der Summe der Fehlerquadrate  $Q$  über dem gesamten Parametersatz gesucht. Abbildung 3.9 zeigt beispielhaft den resultierenden

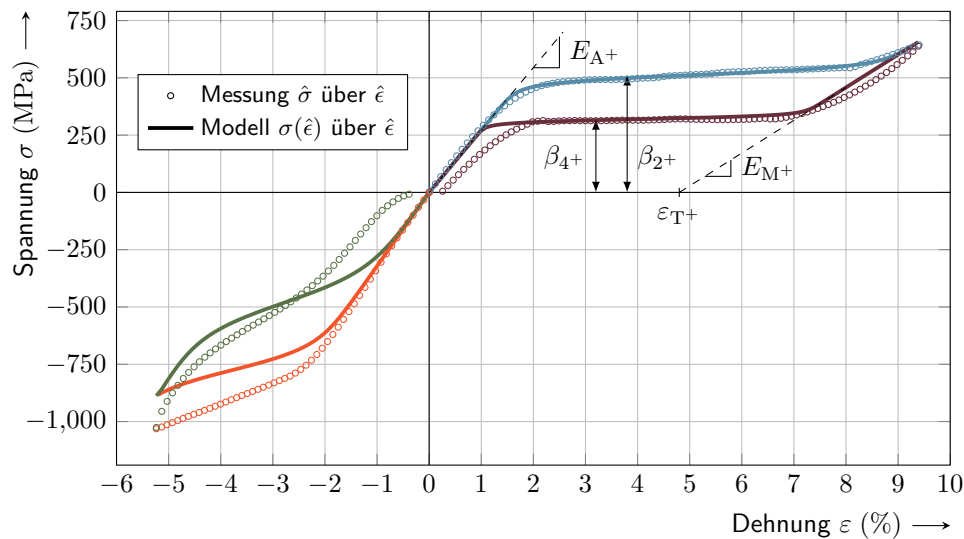


**Abbildung 3.10.:** Messung und Modellvorhersage mit Parametern aus der Methode der kleinsten Fehlerquadrate aus Tabelle A.2. Dargestellt sind der Spannungs- und der Martensitverlauf über der Dehnung für die Lastfolge Zugbelastung-teilweise Entlastung-erneute Zugbelastung-vollständige Entlastung. Die Werkstoffparameter wurden anhand der Messungen aus Abbildung 3.9 bestimmt.

Spannungs-Dehnungsverlauf für einen optimierten Satz an Parametern im Vergleich zur Messung. Es wurden  $w = 12$  Lastschritte, welche aus vier Zug- und zwei Druck-Zyklen bestehen, zur Optimierung verwendet. Die resultierenden Parameter zeigt Tabelle A.2. Zur Beurteilung der Modell- und Parameterqualität ist in Abbildung 3.10 Messung und Modellantwort auf einen Belastungszyklus aus vier Lastschritten mit erneuter Zugbelastung vor der vollständigen Entlastung dargestellt. Es wurden erneut die in Tabelle A.2 notierten, anhand der Messungen in Abbildung 3.10 gewonnenen Parameter verwendet. Es zeigt sich auch für innere Hystereseschleifen, welche nicht bei der Parameterbestimmung beteiligt waren, eine gute Übereinstimmung von Modell und Messung.

**Parameterermittlung mit kleinstem Messaufwand** Da der Messaufwand zur Gewinnung von Druckkurven sehr hoch ist, ist es wünschenswert, die Druckparameter aus den einfacher zu messenden Zugkurven abzuleiten. Eine Möglichkeit die Modellparameter ausschließlich anhand von Zugdaten zu ermitteln, wird in diesem Abschnitt vorgestellt. Steht eine geeignete Zugmessung zur Verfügung, kann gänzlich auf die Parameterbestimmung durch Minimierung der kleinsten Fehlerquadrate, auch auf der Zugseite, verzichtet werden. Aus den Zugmessdaten lassen sich die maßgeblichen Parameter direkt ablesen oder mit einfachsten Mitteln bestimmen. Die Druckparameter werden anschließend aus den Zugparametern bestimmt. Voraussetzung dafür ist eine Zugmessung mit vollständiger Hin- und Rückumwandlung zwischen reinem

Austenit und reinem Martensit sowie erneutem Spannungsanstieg am Ende des Dehnungsplateaus. Entsprechend Abbildung 3.11 lassen sich fünf von sieben Zugparametern direkt able-



**Abbildung 3.11.:** Messung und Modellvorhersage für aus der Zugmessung abgeschätzte Werkstoffparameter aus Tabelle A.5.

sen, namentlich sind dies  $E_{A+}$ ,  $E_{M+}$ ,  $\varepsilon_{T+}$ ,  $\beta_{2+}$  und  $\beta_{4+}$ . Die beiden Formparameter  $\beta_{1+}$  und  $\beta_{3+}$  haben einen geringen Einfluss auf das Gesamtergebnis und weisen für noch unbelastete Werkstoffproben ähnliche Werte auf. Mit der Ermüdung des Werkstoffs verrunden jedoch die Transformationsplateaus, was sich in der Veränderung der Parameter  $\beta_1$  und  $\beta_3$  ausdrückt. Als Quelle für  $\beta_{1+}$  und  $\beta_{3+}$  können vergleichbare Werkstoffproben mit bekannten Parametern dienen. Anschließend werden die Druckparameter durch Skalierung der Zugparameter bestimmt. Die entsprechenden Skalierungsfaktoren werden aus dem Parametersatz eines Vergleichsröhrchens mit ähnlicher Wärmebehandlung gewonnen. Für das nachfolgende Beispiel wurden die Parameter aus Tabelle A.2 verwendet. Das Verhältnis von  $E_{A-}/E_{A+} = 1.18$  wird zunächst genutzt, um aus dem Zug-E-Modul von Austenit den Wert für den austenitischen Druck-E-Modul zu generieren. Das Verhältnis von Zug- zu Druck-Transformationsdehnung wird als  $\varepsilon_{T-}/\varepsilon_{T+} = -0.66$  bestimmt und genutzt. Aus dem Verhältnis von  $E_{M-}/E_{A-} = 1.19$  kann dann der Druck-E-Modul des Martensits bestimmt werden. Für den isothermen Belastungsfall leiten Reedlunn et al. [99] aus einer energetischen Betrachtung, unter der Annahme konstanter Plateauspannungen, die Zusammenhänge

$$\frac{\varepsilon_{T+} \beta_{2+}}{\varepsilon_{T-} \beta_{2-}} \approx 1, \quad (3.12)$$

$$\frac{\varepsilon_{T+} \beta_{4+}}{\varepsilon_{T-} \beta_{4-}} \approx 1 \quad (3.13)$$

her. Diese werden genutzt, um aus den bekannten Zug-Plateauspannungen  $\beta_{2+}$  und  $\beta_{4+}$  die entsprechenden Druck-Plateauspannungen zu berechnen. Die Verrundungsparameter  $\beta_{1\pm}$  und  $\beta_{3\pm}$  werden für Zug und Druck aus Tabelle A.2 übernommen. Die resultierenden Parameter für ein beispielhaftes Röhrchen zeigt Tabelle A.5. Zur Beurteilung der Methode werden in Abbildung 3.11 eine Zug-Druck-Messkurve und die zugehörigen Modellergebnisse, mit den ausschließlich aus der Zugmessung abgeschätzten Parametern, verglichen. Es wird deutlich sichtbar, dass die Bestimmung der Parameter durch Ablesen charakteristischer Werte auf der Zugseite zu guten Ergebnissen führt. Auf der Druckseite hingegen kommt es zu deutlichen Abweichungen zwischen Modell und Messung. Die Skalierung der Zugparameter anhand eines Vergleichsröhrchens liefert jedoch nur eine grobe Abschätzung der Druckparameter. Für den Fall, dass keine Messdaten zur Druckkurve vorliegen, stellt die genannte Methode in dieser Arbeit trotz ihrer Ungenauigkeit das einzig verfügbare Mittel zur Bestimmung der Werkstoffparameter dar.

## 4. Ein Bauteilmodell für Nickel-Titan-Röhrchen

Nach einer Einführung zu Bauteilgesetzen im Kontext tubulärer Kontinuumsmechanismen und der Darlegung von deren Defiziten wird ein für vorgekrümmte NiTi-Röhrchen geeignetes Bauteilmodell aus dem Werkstoffmodell des vorangegangenen Kapitels hergeleitet und analysiert. Abbildung 4.1 zeigt die Struktur des Modells, welches es schließlich ermöglicht, die Werkstoffhysterese auch im Biegemomenten-Krümmungs-Zusammenhang abzubilden.

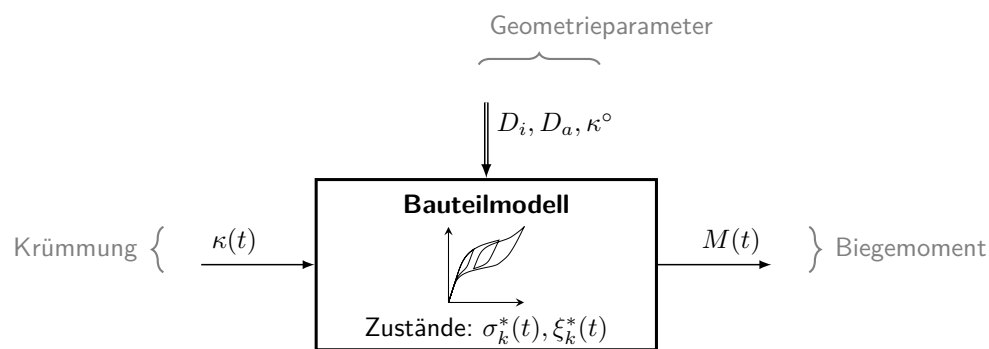
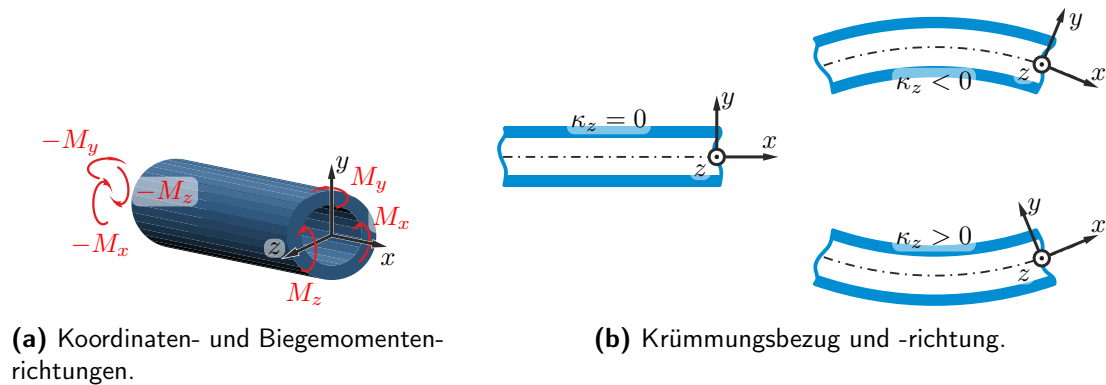


Abbildung 4.1.: Struktur des Bauteilmodells.

### 4.1. Stand der Forschung

Das Bauteilgesetz beschreibt die Beziehung zwischen der verformenden Last und der Verformung des Röhrchens selbst. Die klassische Balkentheorie, wie sie in Lehrbüchern zur technischen Mechanik zu finden ist, bildet die Grundlage zur Modellierung des Bauteilverhaltens eines einzelnen Röhrchens. Es existiert eine Vielzahl klassischer Arbeiten zur Balkentheorie mit unterschiedlichsten Verformungsmechanismen. Alle Balkenmodelle, die bisher im Kontext tubulärer Kontinuumsmechanismen Anwendung finden, treffen die Annahme, dass das Material isotrop ist und dem Hooke'schen Gesetz genügt. Die Arbeiten von Sears und Dupont [111] und Webster III et al. [131] stellen die ersten beiden Publikationen dar, bei denen die



**Abbildung 4.2.:** Definitionen an einem infinitesimalen Röhrchenabschnitt.

NiTi-Röhrchen als elastisch angenommen werden. Die einzig zulässige Verformungsfreiheit ist dabei zunächst ausschließlich die Biegung. Das verwendete Bauteilgesetz

$$M_z = EI\Delta\kappa_z \quad (4.1)$$

beschreibt das erforderliche Biegemoment  $M_z$  zur Erreichung einer Krümmungsänderung  $\Delta\kappa_z$  als lineare Funktion mit dem Elastizitätsmodul  $E$  und dem Flächenträgheitsmoment  $I$  als konstante Parameter des infinitesimalen Röhrchenabschnitts aus Abbildung 4.2. Die Krümmungsänderung

$$\Delta\kappa_z = \kappa_z - \kappa_z^{\circ} \quad (4.2)$$

bezieht sich in der gesamten Arbeit stets auf den unverformten Krümmungszustand  $\kappa_z^{\circ}$ . Die absolute Krümmung bezieht sich in der gesamten Arbeit stets auf den ungekrümmten Fall. Wie in Abbildung 4.2b dargestellt, beschreibt die absolute Krümmung  $\kappa_z$  für den Wert Null einen geraden Balken. In den nachfolgenden Abschnitten und Kapiteln wird für den ebenen Krümmungsfall auf die Indizierung der Krümmung durch die Krümmungsachse verzichtet. Aus den Bernoulli'schen Annahmen, welche einen im unverformten Zustand geraden Balken und das Ebenbleiben des Balkenquerschnitts unter Verformung voraussetzen, lässt sich für den ebenen Krümmungsfall der Zusammenhang

$$\varepsilon_x = -y\Delta\kappa_z \quad (4.3)$$

aufstellen, welcher die Dehnung  $\varepsilon_x$  in Abhängigkeit der Krümmungsänderung und der Radialkoordinate  $y$  des Balkenabschnitts beschreibt. Mit Hilfe des Hooke'schen Gesetzes

$$\sigma_x = E\varepsilon_x, \quad (4.4)$$

welches die ebenfalls lineare Abhängigkeit der Spannung  $\sigma_x$  von der Dehnung  $\varepsilon_x$  durch den Elastizitätsmodul  $E$  beschreibt, lässt sich die Spannungsverteilung im Balkenquerschnitt er-

mitteln. Aus dem Integral

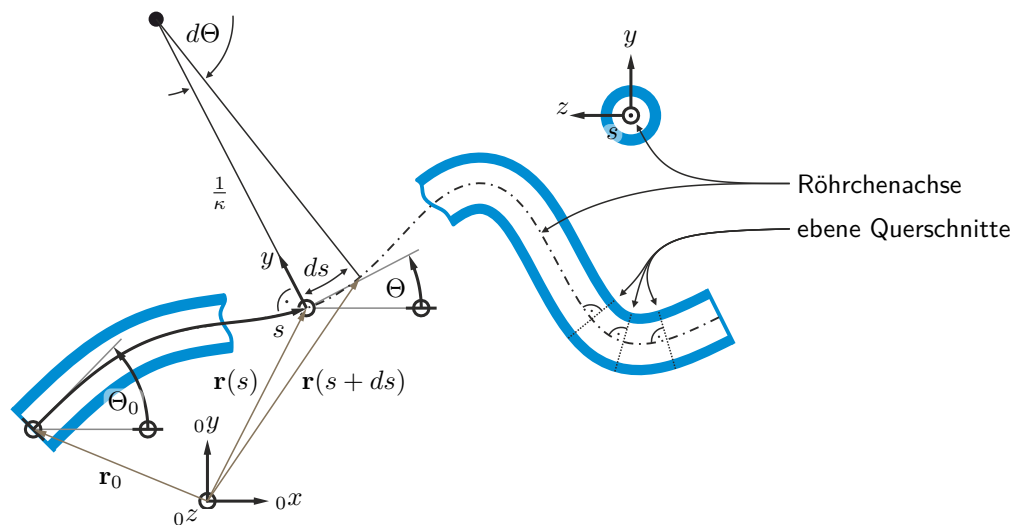
$$M_z = - \int_A \sigma_x y \, dA \quad (4.5)$$

über der Querschnittsfläche  $A$  des Balkens kann unter Nutzung von (4.4) und (4.3) schließlich das lineare Bauteilgesetz (4.1) ermittelt werden. Eine ausführliche Herleitung dazu liefert beispielsweise Hagedorn [52, S. 71ff.]. Den Stand der Forschung bezüglich Bauteilgesetzen zur Modellierung tubulärer Kontinuumsmechanismen bilden derzeit die Arbeiten von Rucker [103] oder Dupont et al. [35]. Dort wird zusätzlich zur Biegeverformung auch die Torsion der Röhren auf ihrer gesamten Länge berücksichtigt. Das Bauteilgesetz

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} GJ & 0 & 0 \\ 0 & EI & 0 \\ 0 & 0 & EI \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\kappa_x \\ \Delta\kappa_y \\ \Delta\kappa_z \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

beschreibt dabei den Zusammenhang zwischen dem räumlichen Krümmungszustand und den dabei auftretenden Biege- bzw. Torsionsmomenten in Abhängigkeit der linearen Biegesteifigkeit  $EI$  sowie Torsionssteifigkeit  $GJ$ . Schubverformung und Längsdehnung werden in allen bekannten Arbeiten, meist unter Begründung ihrer Irrelevanz, vernachlässigt. Die Bauteilgesetze beruhen auf linearelastischem Werkstoffverhalten und stellen damit auf der Krümmungsebene sehr einfache, und wie diese Arbeit zeigen soll, ungenügende Abbildungen des mechanischen Bauteilverhaltens dar. Einzig die Arbeit von York et al. [135] berücksichtigt das nichtlineare Werkstoffverhalten von NiTi durch ein stückweise lineares Werkstoffgesetz, jedoch ohne Hysterese, zur Beschreibung des mechanischen Verhaltens eines integrierten Endeffektors, nicht jedoch der Kanülenform selbst.

Abseits der Veröffentlichungen zu tubulären Kontinuumsmechanismen existieren Veröffentlichungen, welche sich ausschließlich mit der Beschreibung des aus dem Werkstoffverhalten herrührenden nichtlinearen Bauteilverhaltens von NiTi-Röhren befassen. Gegenseitige Zitationen existieren in diesen Arbeiten jedoch nicht. Die erste, dem Autor bekannte, Modellierung des Biegeverhaltens pseudoelastischer Balken stammt von Atanacković und Achenbach [6] aus dem Jahr 1989. Dort wird ein in Zug- und Druckrichtung symmetrischer und durch konstante Plateauspannungen gekennzeichnete Spannungs-Dehnungsverlauf angenommen und ein hysteresebehafteter Biegemomenten-Krümmungsverlauf ermittelt. Darauf folgend ist eine Vielzahl an Bauteilmodellierungen auf Basis von unterschiedlichen und ebenso zahlreichen Werkstoffmodellen publiziert worden, meist unter Vernachlässigung unterschiedlicher, relevanter Effekte wie der Zug-Druck-Asymmetrie oder der Hysterese. Eine Auflistung von insgesamt 13 Biegemodellen bieten Reedlunn et al. [99]. Die aktuellste und in den berücksichtigten Werkstoff- und Verformungsmechanismen detailreichste Modellierung bieten Ravari et al. [98], indem sie ein Werkstoffmodell mit räumlichem Spannungszustand, Asymmetrie und Hysterese in einer FE-Software implementieren und die Biegung eines Röhrens simulieren.



**Abbildung 4.3.:** Kinematische Beziehungen an einem gekrümmten Röhrchen.

Neben den Publikationen zur Modellierung existieren einige aktuelle messtechnische Untersuchungen einzelner NiTi-Röhrchen unter reiner Biegung [8, 99]. Die Messergebnisse und Analysen von Reedlunn et al. [99] bilden die Grundlage zur Herleitung und Verifikation des Bauteilmodells in dieser Arbeit.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass das Bauteilgesetz (4.1) bzw. (4.6) nur eine grobe Näherung darstellt und den Hystereseeinfluss des Werkstoffs nicht abbilden kann. Ein handhabbares Bauteilgesetz in der Art von (4.1), jedoch unter Berücksichtigung der relevanten Werkstoffeigenschaften der Nickel-Titan-Legierung sowie der Geometrieigenschaften vorgekrümmter Röhrchen, existiert nicht. Im vorliegenden Kapitel wird deshalb nun ein Bauteilgesetz hergeleitet, das vorgekrümmte Röhrchen mit nichtlinearem, asymmetrischem und hysteresebefahetem Werkstoffverhalten unter reiner Biegung abbilden kann und damit zur Modellierung von NiTi-Röhrchen geeignet ist. Die Modellierung von Torsionseffekten erfolgt nicht, weshalb das Bauteilmodell nur für ebene Kanülenzusammensetzungen anwendbar sein wird.

## 4.2. Bauteilkinematik

**Ortsvektor** Ein eben gekrümmtes Röhrchen, entsprechend Abbildung 4.3, wird im Folgenden durch die Kurve  $\mathbf{r}(s)$  in der  ${}_{0}x$ - ${}_{0}y$ -Ebene über der Bogenlänge  $s$  beschrieben. Die Kurve verläuft entlang der natürlichen Koordinate  $s$ , die mit der Röhrchenachse zusammenfällt und



ihren Ursprung an einem Röhrenende bei  $s = 0$  hat. In jedem Punkt  $\mathbf{r}(s)$  kann ein Koordinatensystem mit der um  $90^\circ$  im mathematisch positiven Sinn zur  $s$ -Achse rotierten  $y$ -Achse definiert werden. Die  $z$ -Achse der ebenen Kurve ist gleich der  ${}_0z$ -Achse des globalen Koordinatensystems mit der Bezeichnung "0".

Innerhalb dieser Arbeit wird die Bauteilverformung und damit auch die elastische Gleichgewichtslage des tubulären Kontinuumsmechanismus ausschließlich durch die Berücksichtigung von Biegemomenten und unter Vernachlässigung von Quer- und Normalkrafteinflüssen abgebildet. In der Praxis erweisen sich diese Annahmen für schlanke Balken als hinreichend genau [48, S. 115f]. Die Anwendung des Bauteilmodells erfolgt nur für ebene Fälle, bei denen keine Torsionsmomente wirken, weshalb keine Torsionseffekte abgebildet werden. Die Biegeröhren werden dazu unter Verwendung der Bernoulli'schen Annahmen modelliert. Diese setzen voraus, dass alle Balkenquerschnitte vor und nach der Verformung eben sind und stets senkrecht auf der Balkenachse stehen sowie Schubstarrheit des Balkens herrscht. Die Krümmung  $\kappa(s)$  genügt damit zur vollständigen Beschreibung des (ebenen) Verlaufs eines Röhrens.

Gemäß Abbildung 4.3 ergibt sich der Tangentenwinkel  $\Theta(s)$  im mathematisch positiven Sinn zwischen der  ${}_0x$ -Achse und der Röhrenachse bei bekannter Krümmung  $\kappa(s)$  aus der Lösung von

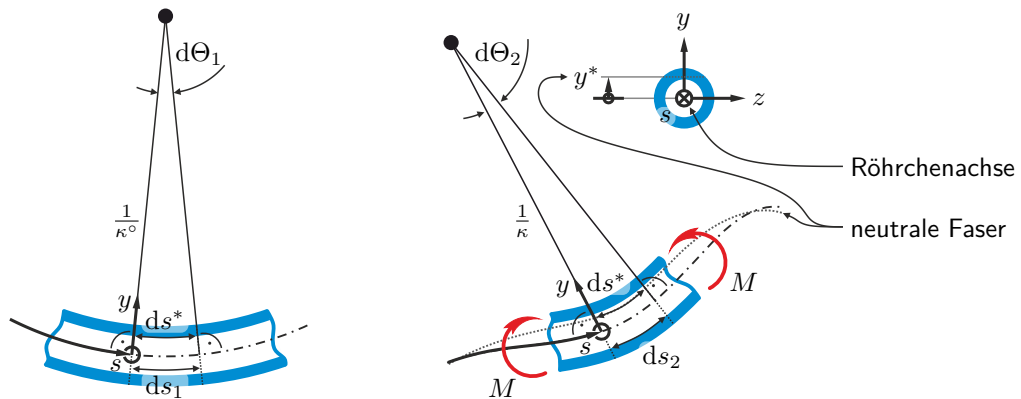
$$d\Theta(s) = \kappa(s) ds \quad (4.7)$$

und unter Berücksichtigung der Randbedingung  $\Theta(0) = \Theta_0$ . Der Ortsvektor  $\mathbf{r}(s)$  kann wiederum aus

$$d\mathbf{r}(s) = \begin{bmatrix} \cos \Theta(s) \\ \sin \Theta(s) \\ 0 \end{bmatrix} ds \quad (4.8)$$

gewonnen werden. Das Integral von (4.8) über  $s$  mit der Randbedingung  $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$  liefert die geometrisch exakte Lösung des Ortsvektors, auch für große Krümmungen und lange Röhren. Weiteren Möglichkeiten zur Lösung von (4.8) widmet sich Kapitel 5, im vorliegenden Kapitel erfolgt die Beschreibung des Bauteilverhaltens zunächst ausschließlich auf Krümmungsebene.

**Dehnung** Im nächsten Schritt wird der Zusammenhang zwischen der Krümmung  $\kappa$  und der Dehnung  $\varepsilon$  hergeleitet. Am klassischen Euler-Bernoulli-Balken mit dem Dehnungsausdruck (4.3), fallen die Röhrenachse, der Flächenschwerpunkt und die neutrale Faser bewusst im selben Punkt des Balkenquerschnitts zusammen. Bei NiTi-Röhren ist die Lage der neutralen Faser, aufgrund des in Zug- und Druckrichtung asymmetrischen Werkstoffverhaltens, jedoch nicht konstant und muss folglich im Dehnungsausdruck Berücksichtigung finden. Weiterhin betrachtet der klassische Fall (4.3) einen im unbelasteten Zustand geraden Balken, was nicht



(a) Unbelasteter, vorgekrümmter Zustand.

(b) Verformter Zustand.

**Abbildung 4.4.:** Geometrische Beziehungen zur neutralen Faser an einem infinitesimalen Röhrchenabschnitt.

auf die vorgekrümmten Röhrchen von tubulären Kontinuumsmechanismen anwendbar ist. Innerhalb dieser Arbeit wird, wie auch im klassischen Fall und entsprechend Abbildung 4.3, der Krümmungsradius stets auf die Röhrenachse bezogen, welche ihren Durchstoßpunkt im Flächenschwerpunkt der Querschnittsfläche des Röhrchens hat und sich entlang des Pfades  $s$  orthogonal zur Querschnittsfläche fortsetzt. Entsprechend der Kinematik für die reine Biegung aus (4.7) und wie in Abbildung 4.4a dargestellt, ergibt sich die Länge  $ds_1$  eines infinitesimalen Faserelements im Abstand  $y$  von der Röhrenachse zu

$$ds_1 = \left( \frac{1}{\kappa^0} - y \right) d\Theta_1, \quad (4.9)$$

wobei  $\kappa^0$  die Vorkrümmung des Röhrchens ist. Unter der Wirkung eines Biegemoments  $M$  verformt sich das Röhrchen in die Krümmung  $\kappa$ . Das betrachtete Faserelement weist dann gemäß Abbildung 4.4b die Länge

$$ds_2 = \left( \frac{1}{\kappa} - y \right) d\Theta_2 \quad (4.10)$$

auf. Aus der relativen Längenänderung des Faserelements ergibt sich schließlich dessen Dehnung

$$\varepsilon = \frac{ds_2 - ds_1}{ds_1} = \frac{\left( \frac{1}{\kappa} - y \right) d\Theta_2 - \left( \frac{1}{\kappa^0} - y \right) d\Theta_1}{\left( \frac{1}{\kappa^0} - y \right) d\Theta_1}. \quad (4.11)$$

Aus der unsymmetrischen Zug- und Drucksteifigkeit des Röhrchenquerschnitts entsteht eine noch unbekannt verschobung der neutralen Faser aus der Röhrenachse auf die Position

$y^*$ . Die Bedingung

$$ds^* \equiv \left( \frac{1}{\kappa^\circ} - y^* \right) d\Theta_1 = \left( \frac{1}{\kappa} - y^* \right) d\Theta_2 \quad (4.12)$$

verlangt, dass die neutrale Faser eine konstante Länge  $ds^*$  sowohl im unverformten als auch im verformten Zustand des Röhrchens aufweist. Aus dem Lösen von (4.12) nach  $d\Theta_1$  und dem Einsetzen in (4.11) ergibt sich

$$\varepsilon = -\frac{(y - y^*)(\kappa - \kappa^\circ)}{(1 - y^*\kappa)(1 - y\kappa^\circ)} \quad (4.13)$$

als die Dehnung eines vorgekrümmten Balkens. Für den Fall der reinen Biegung muss sich die neutrale Faser stets innerhalb des Röhrchenquerschnitts mit der Bedingung ( $|y^*| < R_a$ ) befinden. Weiterhin ist der Außenradius des kreisförmigen Röhrchenquerschnitts typischerweise deutlich kleiner als der Krümmungsradius der Röhrchenachse im verformten ( $R_a \ll |\frac{1}{\kappa}|$ ) und im unverformten Zustand ( $R_a \ll |\frac{1}{\kappa^\circ}|$ ). Weiterhin kann die Koordinate  $y$  in (4.13) maximal den Wert  $R_a$  erreichen. Diese Voraussetzungen lassen die Approximation der Terme  $(1 - y^*\kappa) \approx 1$  und  $(1 - y\kappa^\circ) \approx 1$  zu und ermöglichen die Vereinfachung des Dehnungsdrucks zu

$$\varepsilon = -(y - y^*)(\kappa - \kappa^\circ), \quad (4.14)$$

wie er im Folgenden verwendet wird. Für den Fall, dass der Balken im unverformten Zustand gerade ist ( $\kappa^\circ = 0$ ) und die neutrale Faser mit der Balkenachse zusammenfällt ( $y^* = 0$ ), reduziert sich (4.14) weiter auf den klassischen Dehnungsdruck (4.3) des Bernoulli-Balkens.

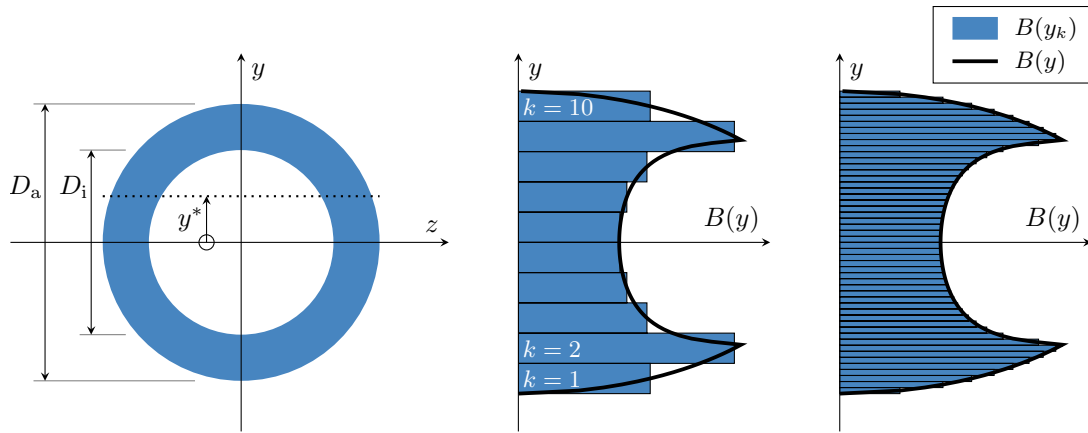
### 4.3. Biegemoment und neutrale Faser

**Neutrale Faser** Ziel dieses Abschnitts ist die Bestimmung des Biegemomentes  $M$  in Abhängigkeit der Krümmung  $\kappa$  unter Berücksichtigung des zeitlichen Verlaufs der Krümmung und der daraus resultierenden Hystereseerscheinung. Zur Bestimmung des Biegemomentes muss das Flächenintegral (4.5) gelöst werden. Dazu muss jedoch die Lage der neutralen Faser bekannt sein. Für den betrachteten Fall der reinen Biegung verschwinden die Normalkräfte, was sich in der Bedingung

$$\int_A \sigma dA = 0 \quad (4.15)$$

ausdrückt. Die Lösung der impliziten Gleichung

$$\int_A \sigma(\varepsilon(y, y^*(t), \kappa(t); \kappa^\circ), \sigma^*(y, t), \xi^*(y, t)) dA = 0 \quad (4.16)$$



**Abbildung 4.5.:** Rohrquerschnitt (links) und dessen Diskretisierung durch Rechtecke mit  $N = 10$  (Mitte) und  $N = 50$  (rechts) Elementen.

liefert die Lage der neutralen Faser  $y^*(t)$  in Abhängigkeit vom zeitlichen Verlauf der Krümmung und der Werkstoffzustände  $\sigma^*(y, t)$  und  $\xi^*(y, t)$ .

Zunächst wird dazu das Flächenintegral

$$dA = B(y) dy \quad (4.17)$$

durch ein Linienintegral über der  $y$ -Koordinate mit der Querschnittsbreite des Röhrchens

$$B(y) = \begin{cases} D_a \sqrt{1 - \frac{4y^2}{D_a^2}} - D_i \sqrt{1 - \frac{4y^2}{D_i^2}} & |y| \leq \frac{D_i}{2} \\ D_a \sqrt{1 - \frac{4y^2}{D_a^2}} & \frac{D_i}{2} < |y| \leq \frac{D_a}{2} \end{cases} \quad (4.18)$$

ersetzt. Die Parameter  $D_i$  und  $D_a$  geben, wie in Abbildung 4.5 dargestellt, den Innen- und Außendurchmesser des Rohrquerschnitts an. Die Ersetzung führt zu dem Integral

$$\int_{-\frac{D_a}{2}}^{+\frac{D_a}{2}} \sigma(\varepsilon(y, y^*(t), \kappa(t); \kappa^0), \sigma^*(y, t), \xi^*(y, t)) B(y) dy = 0. \quad (4.19)$$

Da sich das Werkstoffgesetz nicht explizit in der Form  $\sigma(\epsilon)$  ausdrücken lässt, wird es, wie in Abschnitt 3.3 (S. 44) beschrieben, durch lineare Interpolation invertiert. Die Lösung des Integrals kann damit nur noch numerisch erfolgen. Der Röhrchenquerschnitt wird dazu entlang der  $y$ -Achse in  $k = 1, \dots, K$  rechteckige Elemente mit der konstanten Höhe

$$\Delta y = \frac{D_a}{K} \quad (4.20)$$

diskretisiert. Die  $y$ -Koordinate jedes Flächenelementes  $k$  wird auf seinen Flächenschwerpunkt bezogen und ergibt sich folglich zu

$$y_k = \left( \frac{2k-1}{K} - 1 \right) \frac{D_a}{2}, \quad k = 1, \dots, K. \quad (4.21)$$

Die daraus resultierende Diskretisierung ist in Abbildung 4.5 beispielhaft dargestellt. Setzt man den Ausdruck für die Dehnung (4.14) in die Bedingung für verschwindende Normalkraft (4.19) ein und wendet die Diskretisierung

$$dy \rightsquigarrow \Delta y, \quad (4.22a)$$

$$y \rightsquigarrow y_k, \quad (4.22b)$$

$$\varepsilon \rightsquigarrow \varepsilon_k, \quad (4.22c)$$

$$\xi^*(y, t) \rightsquigarrow \xi_k^*(t), \quad (4.22d)$$

$$\sigma^*(y, t) \rightsquigarrow \sigma_k^*(t) \quad (4.22e)$$

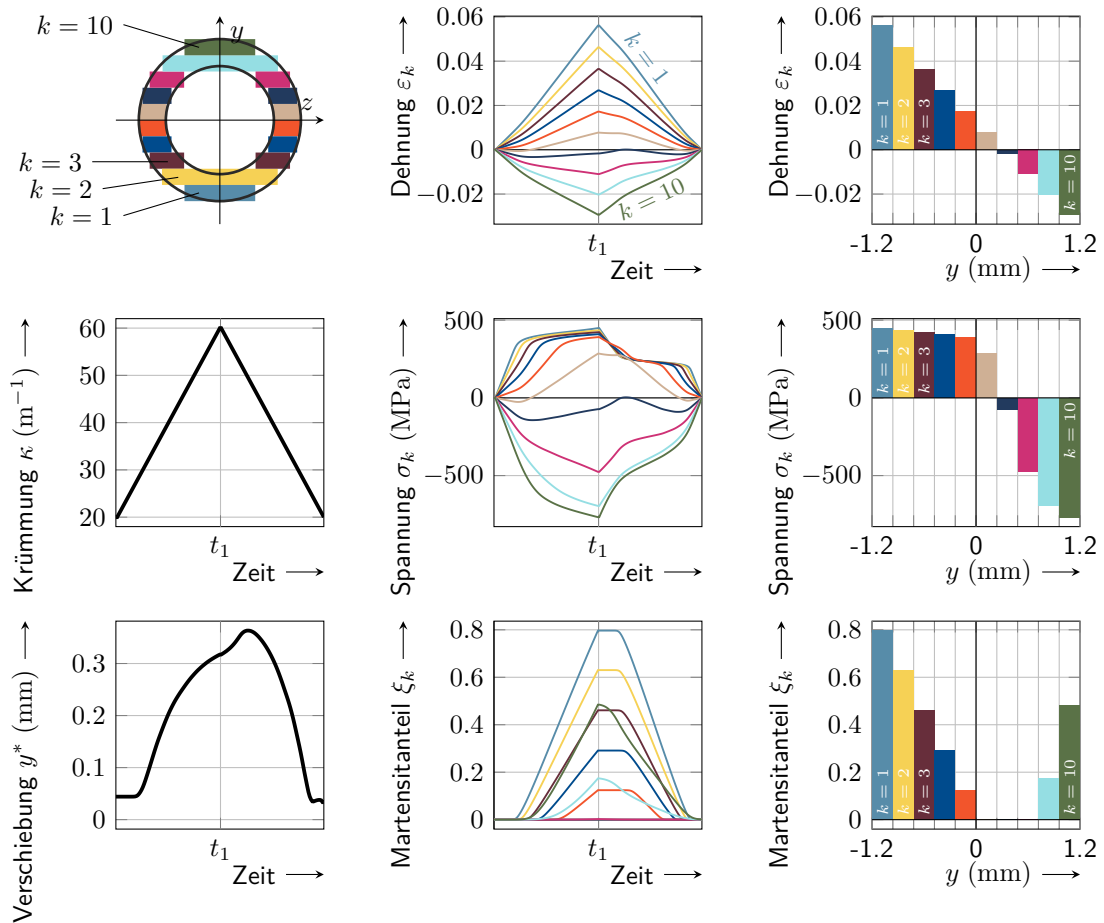
an, ergibt sich aus dem Integral die Summe

$$\sum_{k=1}^K \sigma(\varepsilon_k(t), \sigma_k^*(t), \xi_k^*(t)) B(y_k) \Delta y = 0, \quad \text{mit} \quad (4.23)$$

$$\varepsilon_k(t) = (y_k - y^*(t))(\kappa(t) - \kappa^\circ). \quad (4.24)$$

Gesucht ist bei gegebenem Krümmungsverlauf  $\kappa(t)$  die Berechnung des Verlaufs der neutralen Faser  $y^*(t)$ . Die Verwendung des Werkstoffmodells aus Abschnitt 3.3 erfordert die Berücksichtigung des Hysteresezustands bestehend aus Spannung  $\sigma_k^*(t)$  und Martensanteil  $\xi_k^*(t)$  in jeder der  $k = 1, \dots, K$  Schichten. Es muss deshalb für jedes Element  $k$  und jeden Zeitpunkt  $t$  das passende invertierte Materialgesetz  $\sigma(\varepsilon_k(t), \sigma_k^*(t), \xi_k^*(t))$  verwendet werden. Durch ein Nullstellensuchverfahren kann schließlich für jeden Zeitpunkt  $t$  zur gegebenen Krümmung  $\kappa(t)$  dasjenige  $y^*(t)$  gefunden werden, welches die Summe (4.23) zu Null führt und damit die Normalkräfte verschwinden lässt. Zur Berechnung der neutralen Faser für einen Krümmungsverlauf  $\kappa(t)$  muss das Modell zunächst mit passenden Startwerten initialisiert werden. In den nachfolgenden Berechnungen wird dazu stets der unverformte Zustand mit der Krümmung  $\kappa(0) = \kappa^\circ$  mit den initialen Zuständen  $\sigma_k^*(0) = 0$  und  $\xi_k^*(0) = 0$  herangezogen. Da durch die Verschiebung der neutralen Faser auch bei monoton steigender oder fallender Krümmung die Elemente in der direkten Umgebung der neutralen Faser einer wechselnden Belastungsrichtung ausgesetzt sind, werden die Werkstoffzustände in diskreten Krümmungsschritten neu gesetzt. Im Folgenden werden die Krümmungsverläufe dazu über der dimensionslosen Zeit  $t$  dargestellt, wobei zwischen zwei diskreten Zeitschritten jeweils eine Krümmungsänderung um  $\Delta\kappa$  stattfindet. Die Hysterese des Werkstoffes ist ratenunabhängig und kein Einfluss der Änderungsgeschwindigkeit der Krümmung  $\dot{\kappa}$  existiert. In Abbildung 4.6 wird die Reaktion des Bauteilmodells auf die Krümmungssequenz

$\kappa(t) = \kappa^\circ, \kappa^\circ + \Delta\kappa, \kappa^\circ + 2\Delta\kappa, \dots, 2.5\kappa^\circ, 2.5\kappa^\circ - \Delta\kappa, \dots, \kappa^\circ$  dargestellt. Für die Simulation wurden die Werkstoff- und Geometrieparameter aus Tabelle A.2 verwendet. Die Abbildung zeigt den zeitlichen Verlauf der aus der Krümmung resultierenden Verschiebung der neutralen Faser sowie von Dehnung, Spannung und Martensitanteil für  $K = 10$  Elemente. Es kommt zu einer Verschiebung der neutralen Faser hin zur Druck-Seite, wodurch die höheren Druckspannungen des Werkstoffs durch die flächenanteilig größere Zugseite ausgeglichen werden, um (4.15) zu erfüllen. Für den Zeitpunkt der maximalen Krümmung bei  $t_1$  ist zudem der örtliche Verlauf der drei mechanischen Größen über der  $y$ -Achse entsprechend der gewählten Diskretisierung dargestellt. Aus dem Verlauf der Verschiebung der neutralen Faser und besonders aus der Spannung der Elemente  $k = 6$  und  $k = 7$  ist leicht zu erkennen, dass auch bei streng monoton steigender oder fallender Krümmung Elemente existieren, in welchen die Belastungsrichtung des Werkstoffs wechselt. Die Lösung des Modells erfolgt deshalb in diskreten Krümmungsschritten  $\Delta\kappa$  mit der entsprechenden schrittweisen Änderung der Werkstoffzustände  $\sigma_k^*(t)$  und  $\xi_k^*(t)$ . Wie bereits Atanacković und Achenbach [6] anhand eines deutlich einfacheren Werkstoffmodells gezeigt haben, kommt es bei der Biegung pseudoelastischer Röhrchen dazu, dass die maximale Spannung bei Entlastung nicht zwingend in einer der Randfasern auftritt. Dieser Effekt wird auch vom in dieser Arbeit verwendeten Modell abgebildet. Wie im zeitlichen Verlauf der Spannungen in Abbildung 4.6 zu erkennen ist, überschreitet die Spannung von Faser  $k = 5$  beim Rückgang der Krümmung kurzzeitig die Spannungen der weiter außen liegenden Fasern mit  $k = 1, \dots, 4$ .

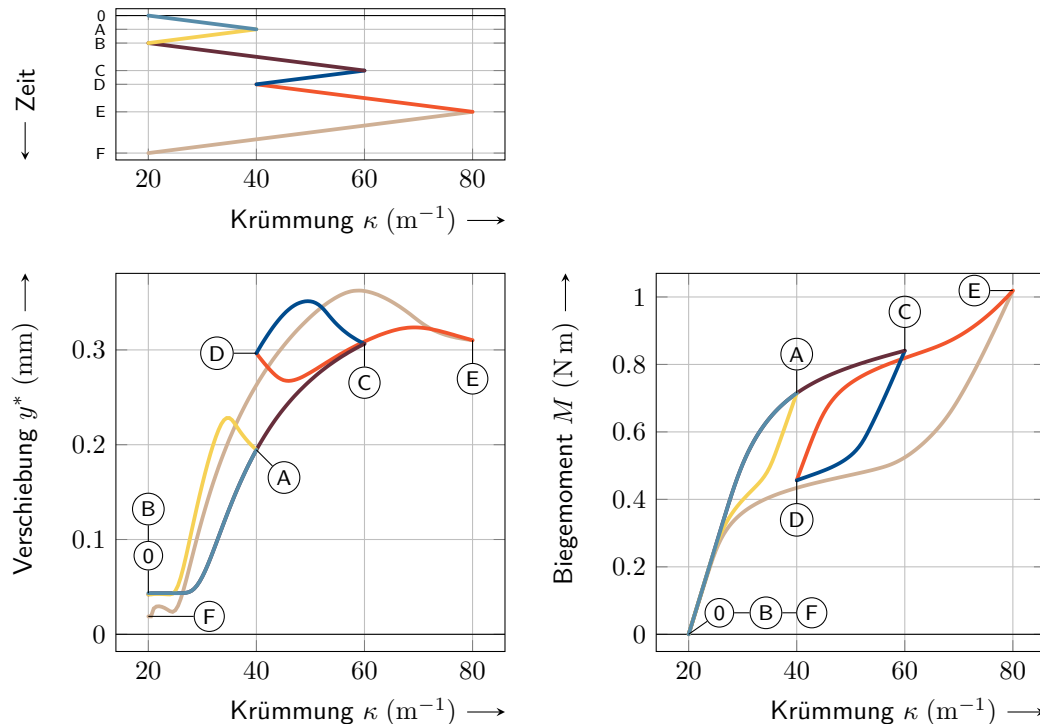


**Abbildung 4.6.:** Zeitlicher (mittlere Spalte) und örtlicher (rechte Spalte) Verlauf der mechanischen Größen im Röhrenquerschnitt als Reaktion auf einen erzwungenen zeitlichen Krümmungsverlauf (links-Mitte). Ebenfalls dargestellt ist die resultierende Verschiebung der neutralen Faser (links-unten). Der örtliche Verlauf (rechte Spalte) der mechanischen Größen zeigt den Zeitpunkt  $t_1$ . Die Werkstoff- und Geometrieparameter entsprechen denen aus den Tabellen A.2 und A.8, jedoch mit einer reduzierten Diskretisierung (links-oben) des Querschnitts mit  $K = 10$  Elementen.

**Biegemoment** Mit der Kenntnis der Lage der neutralen Faser  $y^*(t)$  kann das Biegemoment aus der Summe

$$M = \sum_{k=1}^K y_k \sigma(\varepsilon_k(t), \sigma_k^*(t), \xi_k^*(t)) B(y_k) \Delta y \quad (4.25)$$

berechnet werden. Das Berechnungsverfahren 2 fasst die Rechenschritte zur Bestimmung des Biegemoments in Abhängigkeit der Krümmung noch einmal zusammen. Abbildung 4.7 zeigt



**Abbildung 4.7.:** Vorgegebener zeitlicher Verlauf der Krümmung mit jeweils drei unterschiedlichen Belastungs- und Entlastungsschritten und resultierende Verschiebung der neutralen Faser sowie das zugehörige Biegemoment für die Werkstoff- und Geometrieparameter aus den Tabellen A.2 und A.8.

die Verschiebung der neutralen Faser und den Biegemomentenverlauf für die Werkstoff- und Geometrieparameter aus den Tabellen A.2 und A.8. Dargestellt ist eine Abfolge von jeweils drei unterschiedlichen Belastungs- und Entlastungsschritten. Der qualitative Verlauf des pseudoelastischen Spannungs-Dehnungsverhaltens von NiTi ist im Biegemoment-Krümmungsverlauf wieder zu erkennen.

Für die Ermittlung von Gleichgewichtslagen von tubulären Kontinuumsmechanismen wird das vorgestellte Bauteilmodell auch in der inversen Formulierung  $\kappa = \kappa(M)$  benötigt. Die dazu notwendige Invertierung erfolgt durch lineare Interpolation zwischen Stützstellen, die aus der

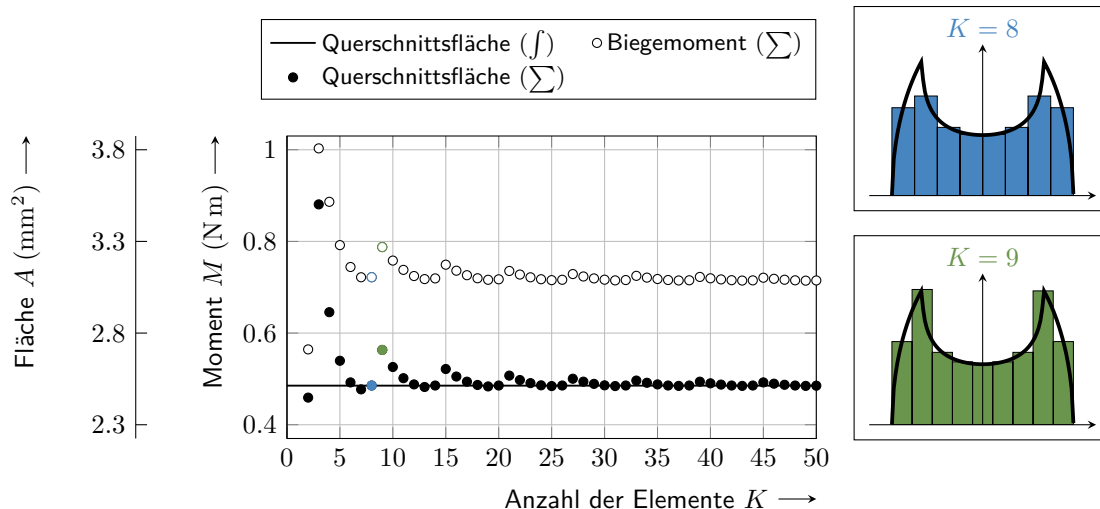


<b>Ziel</b>	: Berechnung des Momentenverlaufs $M(t)$ zum gegebenen Krümmungsverlauf $\kappa(t)$
<b>Bedingung</b>	: Werkstoffzustände $\sigma_k^*$ und $\xi_k^* \forall k$ gegeben oder $\kappa(0) = \kappa^\circ$
<b>Erforderlich</b>	: Werkstoffparameter, Geometrieparameter, Diskretisierungsparameter
<b>1 Berechnungsvorgehen</b>	$M(t) =$ Bauteilmodell( $\kappa(t)$ )
<b>2</b>	<b>Wenn</b> $\kappa(0) = \kappa^\circ$ <b>dann</b>
<b>3</b>	└ Initialisiere die Werkstoffzustände $\forall k$ mit $\sigma_k^* = 0$ und $\xi_k^* = 0$
<b>4</b>	<b>sonst</b>
<b>5</b>	└ Initialisiere die Werkstoffzustände mit gegebenen Werten
<b>6</b>	Diskretisiere den zeitlichen Verlauf von $\kappa(t)$ in einer Schrittweite $\leq \Delta\kappa$ in diskrete Stützstellen $\kappa_u$ und $t_u$ mit $u = [1, 2, \dots, U]$
<b>7</b>	<b>Für jedes</b> $u$ aus $1, 2, \dots, U$ <b>führe aus</b>
<b>8</b>	└ Löse die implizite Gleichung (4.23) mit (4.24) unter Nutzung des Werkstoffmodells (Berechnungsvorgehen 1 auf S. 45) nach der Verschiebung der neutralen Faser $y_u^*$
<b>9</b>	<b>Für jedes</b> $k$ aus $1, 2, \dots, K$ <b>führe aus</b>
<b>10</b>	└ Berechne die Dehnung $\varepsilon_{u,k}$ mit Gleichung (4.24)
<b>11</b>	└ Berechne die Werkstoffzustände $\xi_{u,k}$ und $\sigma_{u,k}$ für die Dehnung $\varepsilon_{u,k}$ unter Nutzung des Werkstoffmodells (Berechnungsvorgehen 1 auf S. 45)
<b>12</b>	└ Berechne das Biegemoment $M_u$ mit Gleichung (4.25) aus den Spannungen $\sigma_{u,k}$
<b>13</b>	└ Aktualisiere die Werkstoffzustände mit $\sigma_k^* = \sigma_{u,k}$ und $\xi_k^* = \xi_{u,k}$
<b>14</b>	└ Bilde $M(t)$ aus den Stützstellen $M_u$ und $t_u$

**Berechnungsvorgehen 2 : Bauteilmodell.**

direkten Lösung (4.23) und (4.25) generiert wurden. Bekannt sein müssen auch dazu die initiale Spannungsverteilung  $\sigma_k^*$  und die initiale Martensitverteilung  $\xi_k^*$  oder es gilt  $M(0) = 0$  und damit  $\kappa(0) = \kappa^\circ$ .

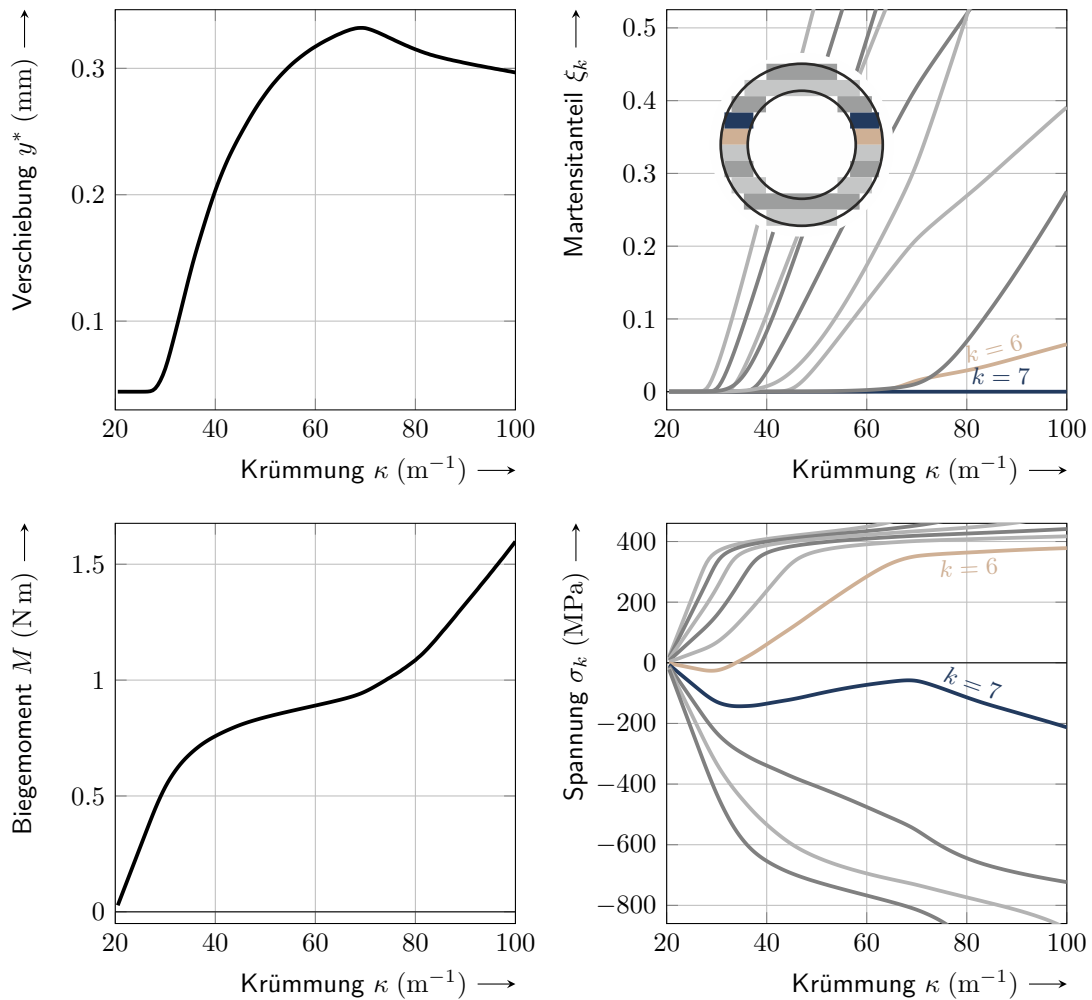
**Einfluss der Diskretisierung durch  $K$  und  $\Delta\kappa$**  Zur Untersuchung der erforderlichen Elementdichte bei der Diskretisierung des Querschnittes für eine gute Approximation des Momentenverlaufs wurde eine Parameterstudie durchgeführt. Der Einfluss der Elementdichte auf das Biegemoment und die Querschnittsfläche als Summe der Elementflächen wird in Abbildung 4.8 dargestellt. Es zeigt sich ein periodisch schwankender Verlauf des Momentes. Die Ursache dafür liegt in der ungünstigen Verteilung von Elementen im Bereich  $y = \pm \frac{D_i}{2}$ . Liegen Elemente genau auf dieser Koordinate kommt es zu einer Überabschätzung der Querschnittsfläche, welche in einem vergrößerten Biegemoment resultiert. Für die Röhrendurchmesser



**Abbildung 4.8.:** Numerisch ermitteltes Biegemoment für ein Beispielrohr bei  $\kappa = 40 \text{ m}^{-1}$  sowie analytische und numerische Querschnittsfläche für unterschiedliche Anzahl an Elementen (links). Zusätzlich dargestellt ist die Elementgröße und Verteilung für  $K = 8$  und  $K = 9$  Elemente (rechts). Die Werkstoff- und Geometrieparameter entsprechen denen aus den Tabellen A.2 und A.8, jedoch mit der auf der Abszissenachse abgetragenen Diskretisierung  $K$  des Querschnitts.

aus Tabelle A.8 wird dieser Effekt, wie in Abbildung 4.8 dargestellt, beispielsweise beim Vergleich der Elementanzahlen  $K = 8$  und  $K = 9$  deutlich. Im weiteren Verlauf der Arbeit werden alle Querschnitte mit einer Elementanzahl von 50 Elementen diskretisiert.

Die Diskretisierung des Krümmungsverlaufs  $\kappa(t)$  mit der Schrittweite  $\Delta\kappa$  in einzelne Krümmungslastschritte wird dazu genutzt, den nichtlinearen Verlauf des Biegemoments in Abhängigkeit der Krümmung hinreichend fein abzutasten und darstellen zu können. Entsprechend der Berechnungsvorschrift 2 werden nach jedem Krümmungslastschritt, und damit nicht nur bei Krümmungsrichtungswechseln, die Werkstoffzustände  $\xi_k^*$  und  $\sigma_k^*$  neu gesetzt. Dies ist erforderlich, da auch bei streng monoton steigender Krümmung Werkstoffquerschnitte existieren, in denen die Belastungsrichtung sich ändert. Durch die Verschiebung der neutralen Faser wechseln Werkstoffquerschnitte in der Nähe von  $y^*$  von der Druck- zur Zugbelastungsseite oder umgekehrt. Abbildung 4.9 zeigt eine beispielhafte Verformung eines Röhrchens mit streng monoton steigender Krümmung. Dargestellt sind der Verlauf des Biegemoments und der neutralen Faser für schrittweise neu definierte Werkstoffzustände nach jedem Krümmungslastschritt. Die in Abbildung 4.9 farbig hervorgehobenen Elemente  $k = 6$  und  $k = 7$  zeigen deutlich den Richtungswechsel in der Belastungsrichtung. Die Auswirkung auf das berechnete Biegemoment erweist sich zunächst als kaum wahrnehmbar. Bei komplexeren Krümmungsverläufen können sich die Fehler durch falsch verfolgte Werkstoffzustände jedoch akkumulieren und zu unzureichend abgebildeten Hystereseverläufen aller Elemente



**Abbildung 4.9.:** Verlauf von Verschiebung der neutralen Faser und Biegemoment für  $K = 10$  Elemente und  $\Delta\kappa = 0.5 \text{ m}^{-1}$ . Der Spannungsverlauf der farbig gekennzeichneten Faserelemente mit  $k = 6$  und  $k = 7$  zeigt mehrere Richtungswechsel trotz streng monoton steigender Krümmung, was zur Entstehung innerer Hystereseschleifen mit Be- und Entlastungszeigen führt. Die verwendeten Werkstoff- und Geometrieparameter entsprechen denen aus den Tabellen A.2 und A.8.

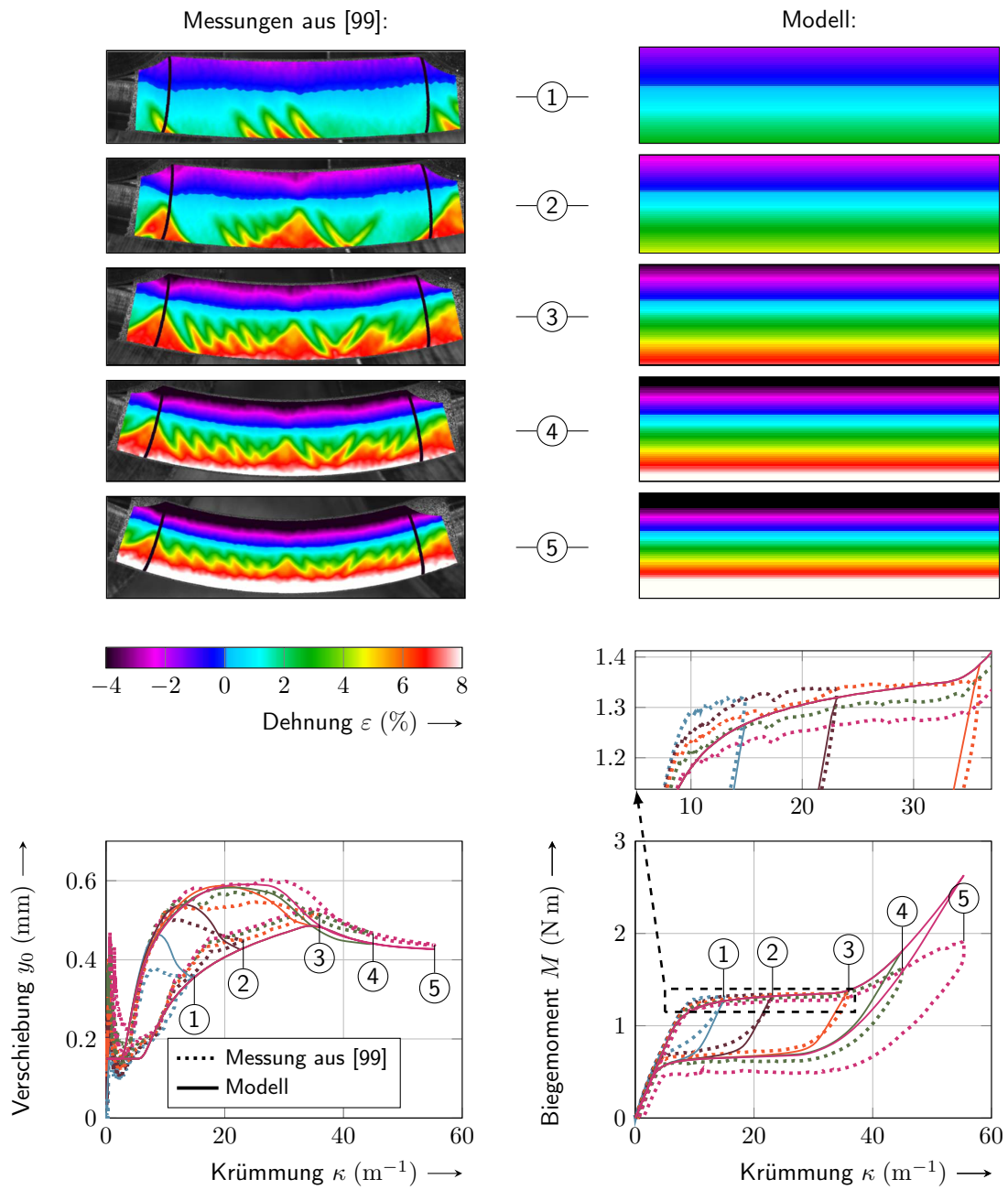
führen. Im weiteren Verlauf der Arbeit werden alle Krümmungsverläufe mit der Schrittweite  $\Delta\kappa = 0.5 \text{ m}^{-1}$  diskretisiert.

#### 4.4. Modellvergleich mit Experimenten aus der Literatur

Das Bauteilmodell berücksichtigt die Asymmetrie und Hysterese im Spannungs-Dehnungs-Zusammenhang von NiTi. Jedoch wird die Belastung auf reine Biegung beschränkt, weshalb die in tubulären Kontinuumsmechanismen auftretenden Torsionsmomente beim Verdrehen vorgekrümmter Röhrchen zueinander nicht abgebildet werden können. Der Einfluss der Vorkrümmung wird in der Herleitung ebenfalls berücksichtigt, spielt jedoch nach dem Übergang von (4.13) auf (4.14) keine wesentliche Rolle mehr.

Die als *Brazier*-Effekt bezeichnete Ovalisierung des Röhrchenquerschnitts, welche beim Biegen dünnwandiger Querschnitte auftritt [15], kann auch bei NiTi-Röhrchen beobachtet werden [99]. Das Modell berücksichtigt solche Verformungen jedoch nicht und nimmt den Querschnitt als kreisförmig und konstant an. Die Ovalisierung führt, aufgrund der ovalen Querschnittsfläche und der dadurch absinkenden maximalen Ausdehnung in  $y$ -Richtung, zu einer Reduktion der Biegesteifigkeit bei hoher Krümmung. Der Einfluss der Ovalisierung auf das Biegemoment zeigt sich jedoch erst bei Krümmungen ab dem Ende des Momentenplateaus und darüber hinaus, wie [99] untersucht hat. Beim Betrieb tubulärer Kontinuumsroboter sind derart große Krümmungsänderungen jedoch unüblich und aufgrund der damit einhergehenden plastischen Verformungen auch nicht anzustreben.

Die lineare Dehnungsverteilung über der  $y$ -Achse, entsprechend (4.14), stellt ebenfalls eine Vereinfachung dar. Tatsächlich kommt es beim Biegen von NiTi auf der Zugseite des Röhrchenquerschnitts zu einer Lokalisierung von transformierten Bereichen mit starker Dehnung in Abwechslung mit schwach gedehnten austenitischen Bereichen [8, 99], wie in Abbildung 4.10 links oben dargestellt ist. Dieser Effekt führt zu Schwankungen der Krümmung entlang der Röhrchenachse  $s$  und wird nicht abgedeckt. Das vorgestellte Modell berechnet einen linearen Dehnungsverlauf in  $y$ -Richtung und einen für konstantes Biegemoment entlang  $s$  ebenfalls konstanten Dehnungsverlauf über  $s$ . Abbildung 4.10 zeigt Messungen aus [99], welche in einem sorgfältig durchgeführten Biegeversuch gewonnen wurden. Die Krümmungen und Dehnungen wurden dabei durch eine Stereokamera und ein digitales Bildkorrelationsverfahren ermittelt. Die Messungen werden dem vorgestellten Modell gegenübergestellt, die verwendeten Werkstoffparameter wurden aus den in Abbildung A.1 dargestellten Zug- und Druckmessungen der gleichen Röhrchen gewonnen. Die Messungen wurden an vorher unbelasteten, geraden NiTi-Röhrchen durchgeführt. Die Belastungszyklen erfolgten sequentiell mit höher werdender maximaler Krümmung und anschließender vollständiger Entlastung. Die Vergrößerung des Biegemomentenplateaus in Abbildung 4.10 zeigt, dass analog zu der Reduktion der Be- und

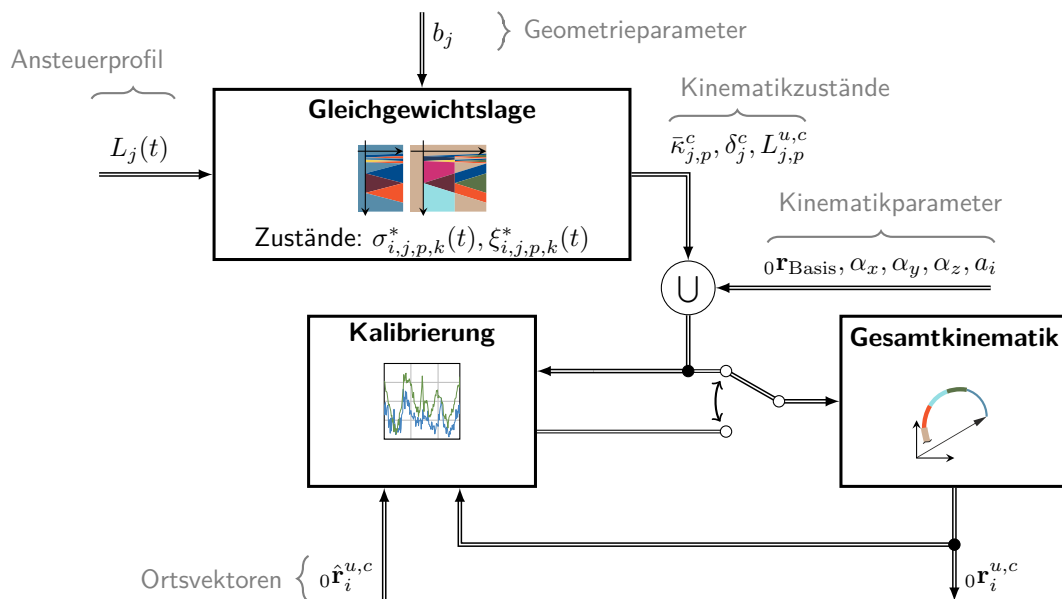


**Abbildung 4.10.:** Vergleich von gemessenem und modelliertem Biegeverhalten eines NiTi-Röhrchens. Dargestellt sind Verschiebung der neutralen Faser und Biegemoment über der Krümmung sowie Dehnungsmuster entlang der Röhrchenachse.

Entlastungsplateauspannungen bei Zug und Druck auch die Höhe des Biegemomentenplateaus von Zyklus zu Zyklus abnimmt. Das vorgestellte Modell berechnet durch konstante Werkstoffparameter jedoch auch einen reproduzierbaren Momentenverlauf für alle Lastschritte.

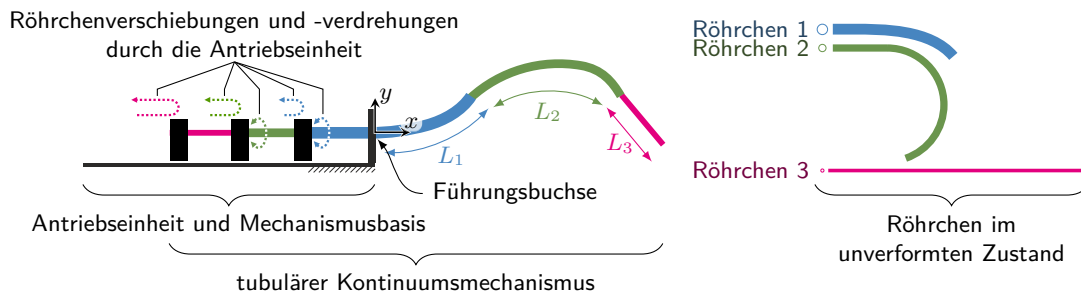
Die mangelhafte Abbildung der Entlastungskurven kann aufgrund des unbekanntes Entlastungsverhaltens des Werkstoffs bei inneren Hystereseschleifen schwer verglichen werden. Die Werkstoffparameter wurden nur an einem einzigen äußeren Be- und Entlastungszyklus jeweils in Zug- und Druck-Richtung bestimmt. Das Ergebnis zeigt Abbildung A.1 im Anhang. Die präzise Abbildung innerer Hystereseschleifen ist für die Modellgenauigkeit aber besonders im Entlastungsfall von großer Bedeutung, da in jedem Querschnittselement eine andere Subhysterese durchlaufen wird. Die deutliche Überschätzung des Biegemoments bei großen Krümmungen wird auf die fehlende Abbildung von Ovalisierungseffekten zurückgeführt.

## 5. Die Gleichgewichtslage verschachtelter Nickel-Titan-Röhrchen



**Abbildung 5.1.:** Struktur der Gesamtkinematik einschließlich Modellierung und Kalibrierung der Gleichgewichtslage.

Ziel dieses Abschnitts ist die Ermittlung der elastischen Gleichgewichtslage verschachtelter Nickel-Titan-Röhrchen und die Beschreibung des daraus resultierenden Bewegungsverhaltens der Kanüle bei quasistatischer Veränderung der Steuergrößen. In Abschnitt 5.1 wird dazu zunächst der grundlegende Aufbau einer gekrümmten Kanüle erläutert und die Einschränkungen genannt, für welche die nachfolgenden Betrachtungen Gültigkeit haben. Abschnitt 5.2 widmet sich der Modellierung des Kontaktverhaltens von verschachtelten, linearelastischen Röhrchen und liefert eine Rechtfertigung für die Vorgehensweise zur Ermittlung der Gleichgewichtslage der Raumkurve pseudoelastischer Röhrchen. Darauf basierend liefern die Abschnitte 5.3 und 5.4 zunächst einen Satz von Kinematikzuständen für die Gleichgewichtskrümmungen  $\kappa_{j,p}^c$  von Röhrchenunterabschnitten, deren Längen  $L_{j,p}^{u,c}$  und die Übergangswinkel  $\delta_j^c$  zwischen den Röhrchen. Die Teilmodelle werden an einfachen Experimenten analysiert. Anschließend



**Abbildung 5.2.:** Tubulärer Kontinuumsmechanismus mit Antriebseinheit und einer Kanülenzusammensetzung aus drei Röhren.

erfolgt in Abschnitt 5.5 die Herleitung einer Gesamtkinematik zur Beschreibung der Trajektorie eines tubulären Kontinuumsmechanismus aus den ermittelten Kinematikzuständen und gegebenen Kinematikparametern. Messungen des Bewegungsverhaltens eines vollständigen tubulären Kontinuumsroboters und der Vergleich dieser mit dem Modell liefert Abschnitt 5.6. Ein Kalibrierverfahren für die Kinematikzustände und -parameter, zur Reduktion von Modellfehlern durch vereinfachende Annahmen oder ungenaue Werkstoffparameter, wird in Abschnitt 5.7 vorgestellt und auf die Beispielmessungen angewandt. Eine Sensitivitätsanalyse der kinematischen Modellierung bezüglich der Kinematikzustände, aber auch der Werkstoff- und Geometrieparameter beendet dieses Kapitel mit Abschnitt 5.8. Das Blockschaltbild in Abbildung 5.1 stellt die Verknüpfung der Teilmodelle noch einmal graphisch dar.

## 5.1. Kanülenzusammensetzung

Als tubulärer Kontinuumsmechanismus oder synonym Kanüle, wird der ineinander verschachtelte Zusammenbau von  $N$  Röhren, entsprechend Abbildung 5.2, verstanden. Die Raumkurve einer Kanüle wird entsprechend der Bauteilkinematik (4.7)-(4.8) durch den Krümmungsverlauf ihres Rückgrats beschrieben. Das Rückgrat ist definiert als die Röhrenachse des jeweils äußersten Röhrens der Kanüle. Der Verlauf des Rückgrats lässt sich somit in Abschnitte zerlegen, wobei in jedem Abschnitt eine konstante Anzahl an Röhren überlappt. Das distale Ende des innersten Röhrens wird als Kanülen spitze bezeichnet. Einfluss auf die Form des Rückgrats nehmen zum einen die Ansteuergrößen, also die jeweilige Rotation und Translation der proximalen Röhrenenden, eingepreßt durch die Antriebseinheit, zum anderen sind die Werkstoff- und Geometrieparameter dafür verantwortlich, in welchem Maße sich die Röhren beim Einnehmen einer gemeinsamen Gleichgewichtslage gegenseitig beeinflussen. Die qualitative Form des Arbeitsraums, in welchem sich das Rückgrat bewegen kann, wird durch die Zusammensetzung, also die Abfolge von vorgekrümmten und nicht vorgekrümmten Röhren innerhalb der Kanüle, festgelegt. Die Kanülenzusammensetzung sowie













die Werkstoff- und Geometrieparameter können nur in der Entwurfsphase der Kanüle beeinflusst werden und erlauben es den Arbeitsraum des Mechanismus festzulegen. Während sich Werkstoff- und Geometrieparameter durch Alterung oder Verschleiß verändern können, bleibt die Kanülenzusammensetzung beim Betrieb des Mechanismus gleich. Neben der Festlegung der äußeren Form des Arbeitsraums hat die Kanülenzusammensetzung auch einen Einfluss auf den aktuierbaren Gesamtfreiheitsgrad eines tubulären Kontinuumsmechanismus.

Zum Vergleich verschiedener Kanülenzusammensetzungen wird nun die folgende Namenskonvention eingeführt. Beginnend mit dem äußersten Röhrchen und fortschreitend bis zum innersten werden vorgekrümmte Röhrchen mit einer 1 kodiert, gerade Röhrchen mit einer 0. Kombinationen mit zwei aufeinanderfolgenden Nullen (00) werden ausgelassen. Die Möglichkeit, durch 00-Kombinationen gezielt mittels unterschiedlicher Biegesteifigkeiten eine weitere Formgebungsfreiheit zu schaffen, wird hier vernachlässigt. Alle verbleibenden Kanülenzusammensetzungen bis  $N = 3$  werden in Tabelle 5.1 hinsichtlich ihres Gesamtfreiheitsgrades verglichen. Aus der Summe an vorgekrümmten Röhrchen innerhalb einer Zusammensetzung ergibt sich zunächst der Entwurfsfreiheitsgrad. Dieser beschreibt die Anzahl der Möglichkeiten, verschiedene Vorkrümmungen und damit auch die Anzahl unterschiedlicher resultierender Krümmungen zu wählen. Der Steuerungsfreiheitsgrad beschreibt die Anzahl der Freiheiten in der Antriebseinheit. Für jedes vorgekrümmte Röhrchen ergeben sich zwei Freiheiten in der Ansteuerung, aus Verschiebung und Verdrehung dieser. Röhrchen ohne Vorkrümmung besitzen nur eine Ansteuerfreiheit, durch die Möglichkeit sie zu verschieben. Die Mechanismusbasis in Abbildung 5.2, als der starre Rahmen des Antriebssystems, welche auch die Führungsbuchse des äußersten Röhrchens trägt, besitzt für alle Kanülenzusammensetzungen den konstanten Basisfreiheitsgrad 5. Die Führungsbuchse verfügt damit über alle drei Translationen im Raum sowie zwei Rotationen. Die Drehung um die Rotationsachse der Führungsbuchse stellt keine zusätzliche Freiheit dar, da Röhrchenrotationen um diese Achse bereits im Steuerungsfreiheitsgrad der Kanülenzusammensetzung enthalten sind.


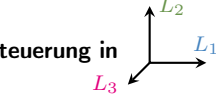





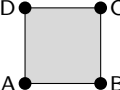
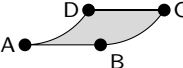

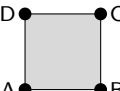
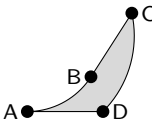

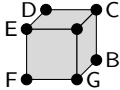
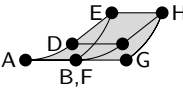
Das im vorangegangenen Kapitel hergeleitete Bauteilmodell erlaubt lediglich die Betrachtung der reinen Biegung. Neben den gegenseitigen Biegemomenten können Torsionsmomente jedoch ebenfalls einen wesentlichen Einfluss auf die Gleichgewichtslage einer Kanüle haben. Tabelle 5.1 listet die möglichen Quellen für Torsionsmomente, die innerhalb der Kanüle entstehen, für die unterschiedlichen Zusammensetzungen auf. Torsionsmomente entstehen beim Verdrehen der Röhrchen zueinander, aufgrund von Reibkräften an den Kontaktstellen zwischen den Röhrchen. Die Zusammensetzungen "0" und "1" weisen folglich keine Torsionsmomente auf. Bei Konfigurationen mit mehr als einem vorgekrümmten Röhrchen kommt es zusätzlich zu konservativen Torsionsmomenten, aus dem Bestreben der Röhrchen, ihre Grundkrümmungsebenen deckungsgleich zu halten und damit die Summe der potentiellen Energien aus Biege- und Torsionsverformung zu minimieren. Die Betrachtung von Torsionsverformungen mit linearelastischem Werkstoffverhalten erfolgt in der Literatur beispielsweise in den Modellen von [34, 35, 102, 104]. Die zusätzlichen Einflüsse von Reibungskräften werden in [81] berücksichtigt, ebenfalls für linearelastisches Werkstoffverhalten.

**Tabelle 5.1.:** Kanülenszusammensetzungen und deren Freiheiten sowie Quellen für Torsionsmomente bis  $N = 3$ .

$N$	Kanülenszusammensetzung	Freiheitsgrad				$\Sigma$	Quelle der Torsionsmomente
		Basis	Entwurf	Steuerung			
1	0		5	0	1	6	nicht vorhanden
1	1		5	1	2	8	nicht vorhanden
2	01		5	1	3	9	Reibung
2	10		5	1	3	9	Reibung
2	11		5	2	4	11	Reibung und Elastizität
3	010		5	1	4	10	Reibung
3	011		5	2	5	12	Reibung und Elastizität
3	101		5	2	5	12	Reibung und Elastizität
3	110		5	2	5	12	Reibung und Elastizität
3	111		5	3	6	14	Reibung und Elastizität

Das in dieser Arbeit vorgestellte Gesamtkinematikmodell betrachtet ausschließlich ebene Kanülenszusammensetzungen, bei denen keine konservativen Torsionsmomente berücksichtigt werden müssen. Das gegenseitige Verdrehen von Röhrchen ist in ebenen Zusammensetzungen unnötig, weshalb dissipative Torsionsmomente durch Reibung zwischen den Röhrchen ebenso wenig berücksichtigt werden müssen. Reibkräfte aus der translatorischen Röhrchenbewegung treten zwar auf, werden aber vernachlässigt. Die Zusammensetzungen "0", "1", "01", "10" und "010" stellen ebene Zusammensetzungen dar und erfüllen damit die genannten Einschränkungen. Tabelle 5.2 zeigt qualitativ die Arbeitsflächen dieser Zusammensetzungen, welche sich unter ausschließlicher Nutzung der translatorischen Steuerungsfreiheiten ergeben. Die Kanülenszusammensetzung "0" wird durch das 1-Tupel  $(L_1)$  in ihrer Steuerungsfreiheit beschrieben. Unter der Annahme, dass die Führungsbuchse gemäß Abbildung 5.2 im Punkt Null liegt und

**Tabelle 5.2.:** Arbeitsflächen ebener Kanülenzusammensetzungen unter Annahme dominierender Steifigkeit des jeweils äußersten Röhrchens sowie für verschwindenden Luftspalt zwischen den Röhrchen. Eine weitere Bewegungsfreiheit durch die Rotation des gekrümmten Röhrchens ist für alle Zusammensetzungen außer "0" vorhanden und verwandelt die dargestellten Arbeitsflächen in rotationssymmetrische Arbeitsräume.

$N$	Kanülenzusammensetzung	Steuergrößen	Steuerung in $L_1, L_2, L_3$	Bewegung in $x, y$
1	0 	$L_1$	 A ● — B ●	 A ● — B ● 
1	1 	$L_1$	A ● — B ●	
2	01 	$L_1, L_2$	 D ● — C ● A ● — B ●	
2	10 	$L_1, L_2$	 D ● — C ● A ● — B ●	
3	010 	$L_1, L_2, L_3$	 D ● — C ● E ● — G ● F ● — B ●	

entlang der  $x$ -Achse ausgerichtet ist, liefert

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.1}$$

das kinematische Modell dieser Zusammensetzung. Die Zusammensetzung "1" besteht aus einem vorgekrümmten Röhrchen mit der Krümmung  $\kappa^\circ$  und lässt sich unter Vernachlässigung von äußeren Kräften, beispielsweise durch Gewebeeinflüsse, durch die Kinematik

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\kappa^\circ} \begin{bmatrix} \sin(\kappa^\circ L_1) \\ 1 - \cos(\kappa^\circ L_1) \end{bmatrix} \tag{5.2}$$

beschreiben. Die Zusammensetzungen mit mehr als einem Röhrchen erfordern zunächst die Berechnung der Gleichgewichtslage aller Röhrchen. In einer der ersten Publikationen zum

Thema tubulärer Kontinuumsmechanismen gehen Furusho et al. [40] von einer dominierenden Steifigkeit des jeweils äußersten Röhrchens aus, wodurch dieses seine eingeprägte Vorkrümmung beibehält. Unter dieser Annahme lassen sich die Kinematiken für die Zusammensetzung "01" als

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{\kappa^\circ} \begin{bmatrix} \sin \kappa^\circ L_2 \\ 1 - \cos \kappa^\circ L_2 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

und für die Zusammensetzung "10" als

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\kappa^\circ} \begin{bmatrix} \sin(\kappa^\circ L_1) \\ 1 - \cos(\kappa^\circ L_1) \end{bmatrix} + L_2 \begin{bmatrix} \cos(\kappa^\circ L_1) \\ \sin(\kappa^\circ L_1) \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

aufstellen. Das 2-Tupel  $(L_1, L_2)$  beschreibt dabei die Steuerungsfreiheit der beiden Zusammensetzungen. Die Zusammensetzung "010" mit dem 3-Tupel  $(L_1, L_2, L_3)$  lässt sich schließlich durch

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{\kappa^\circ} \begin{bmatrix} \sin(\kappa^\circ L_2) \\ 1 - \cos(\kappa^\circ L_2) \end{bmatrix} + L_3 \begin{bmatrix} \cos(\kappa^\circ L_2) \\ \sin(\kappa^\circ L_2) \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

beschreiben. Die in Tabelle 5.2 dargestellten Arbeitsflächen wurden aus den kinematischen Beschreibungen (5.1)-(5.5) aus der Analyse der Grenzen der jeweiligen Steuerungs-Tupel ermittelt.

Kanülenzusammensetzungen mit mehr als einem vorgekrümmten Röhrchen bilden im allgemeinen Fall eine nicht-ebene Raumkurve, lassen sich jedoch unter geeigneter Einschränkung der rotatorischen Röhrchenfreiheiten auf ebene Kurvenverläufe reduzieren. Bedingung dafür ist das Zusammenfallen aller Vorkrümmungsebenen. Gleichgewichtslagen, bei denen die Krümmung zwischen zwei Röhrchen das Vorzeichen wechselt, beispielsweise die Zusammensetzungen "11" aus Tabelle 5.1, können jedoch instabil sein und haben daher eher akademischen Charakter. Eine Bedingung für das Auftreten solcher Instabilitäten liefert [35] für linearelastisches Materialverhalten.

## 5.2. Kontaktverhalten verschachtelter Röhrchen

**Allgemeines zum Luftspalt** Für alle Betrachtungen innerhalb dieser Arbeit wird der Luftspalt

$$b_i = D_{i,i} - D_{a,i+1} \quad \forall i = 1, \dots, N - 1 \quad (5.6)$$

definiert als der Freiraum zwischen dem Röhrchen mit dem Index  $i$  und dem darauf folgenden, nächst-inneren Röhrchen mit dem Index  $i + 1$ . Gemäß Abbildung 5.3 ergibt er sich als die Differenz aus Innendurchmesser des jeweiligen Außenröhrchens und Außendurchmesser des entsprechenden Innenröhrchens für alle  $i = 1, \dots, N - 1$  Abschnittsübergänge zwischen den  $N$  Röhrchen einer beliebigen Kanülenzusammensetzung.

Alle im Stand der Forschung gelisteten elastokinematischen Modelle basieren auf der Vernachlässigung des Luftspalteinflusses auf die Gleichgewichtslage einer Kanüle. Dies manifestiert sich selbst in der gebräuchlichen Bezeichnung von tubulären Kontinuumsrobotern als "curved concentric tube robots" mit der Annahme, dass alle Röhren konzentrisch sind. Aus der Konzentrizität folgt weiterhin, dass der räumliche Verlauf einer Kanüle, beschrieben durch die Röhrenachse des jeweils äußersten Röhrens, einen einfach stetig differenzierbaren Verlauf annimmt. Tatsächlich sorgt der Luftspalt jedoch dafür, dass die Biegelinien einzelner Röhren besonders an den Abschnittübergängen weder in ihrer Lage, noch in ihrem Winkel übereinstimmen. Dieser Effekt wurde erstmals von Lathrop et al. [74] berücksichtigt, indem der Übergangswinkel zwischen zwei Abschnitten experimentell bestimmt wurde. In einer späteren Veröffentlichung von Torabi et al. [121] wird mit Hilfe rein kinematischer Annahmen der Übergangswinkel und die radiale Verschiebung eines Innenröhrens gegenüber einem Außenröhren am Abschnittübergang ermittelt. In allen bekannten elastokinematischen Modellen wird der Luftspalt jedoch vollständig vernachlässigt und daraus folgend angenommen, dass die Achsen aller Röhren auf einer gemeinsamen Biegelinie zusammenfallen. Für typische Luftspalte von einigen  $100\ \mu\text{m}$  und Kanülenlängen im dreistelligen Millimeter-Bereich stellt diese Annahme eine sehr gute Näherung für die Berechnung der Gleichgewichtskrümmungen der Kanülenabschnitte dar. Die Unstetigkeit des Winkelverlaufs an den Abschnittübergängen hat jedoch einen deutlichen Einfluss auf die Kinematik tubulärer Kontinuumsmechanismen.

Um einen möglichst geringen Außendurchmesser der Kanüle zu erreichen, ist ein verschwindender Luftspalt eine Wunschforderung bei der Festlegung der Geometrieparameter einer Kanüle. Wie jedoch in Kapitel 6 gezeigt wird, steigen mit kleiner werdendem Luftspalt die Normalkräfte an den Kontaktstellen zwischen den Röhren und damit auch die erforderlichen Antriebskräfte zum Überwinden der Reibung. Im Sinne einer möglichst kompakten Dimensionierung der Antriebseinheit eines tubulären Kontinuumsroboters sollte der Luftspalt deshalb möglichst groß gewählt werden. Zur Verdeutlichung des Luftspalteinflusses auf die Gleichgewichtslage einer Röhrenzusammensetzung wurden die Aufnahmen in Abbildung 5.4 angefertigt. Diese zeigen ein nicht vorgekrümmtes Nickel-Titan-Röhrchen, welches jeweils in drei

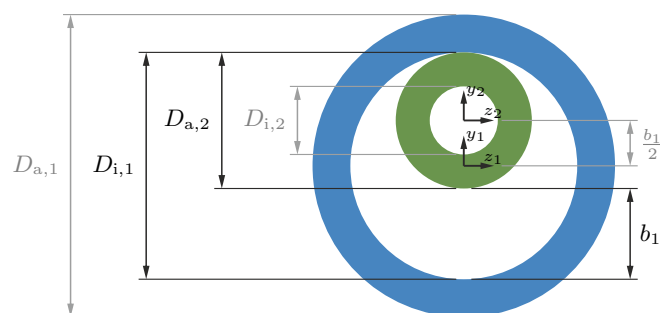
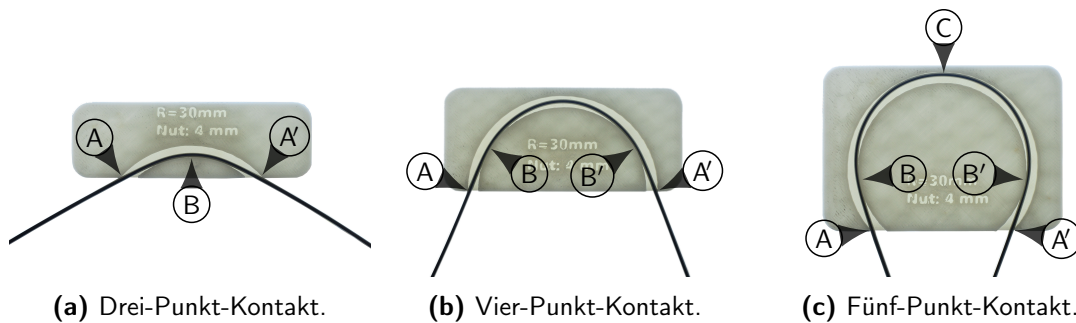


Abbildung 5.3.: Definition des Luftspalts.

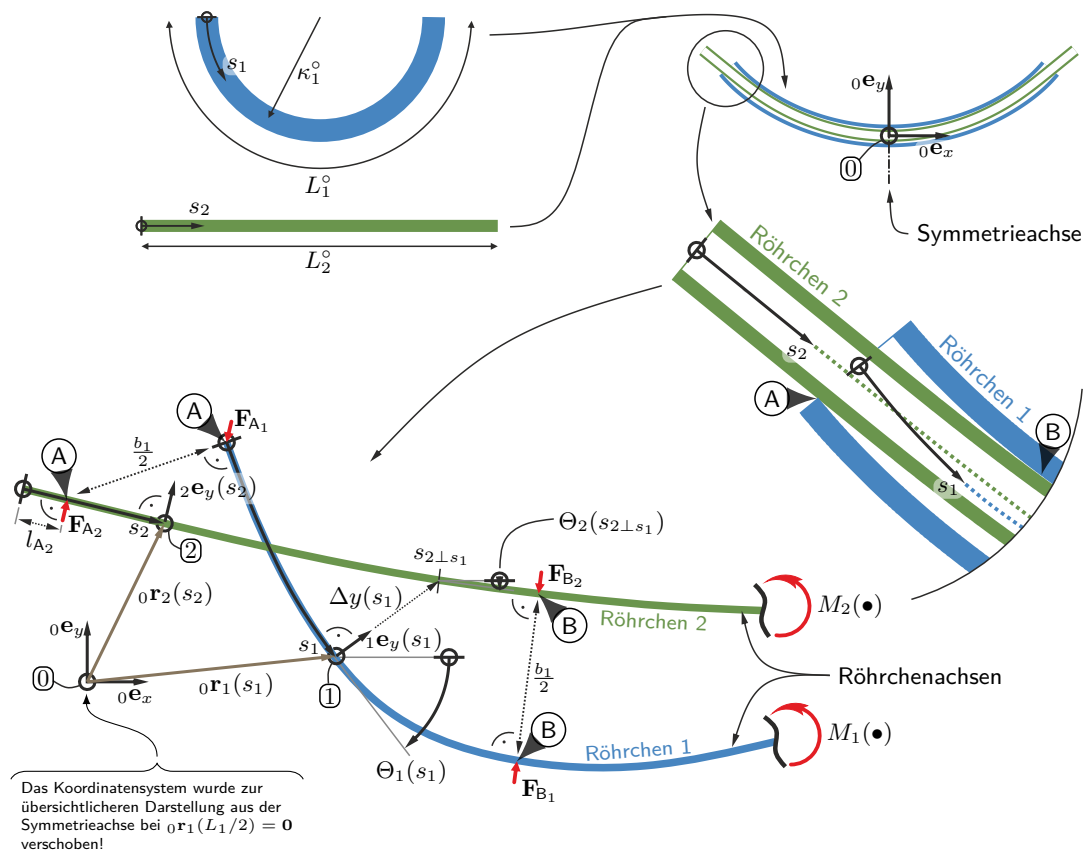


**Abbildung 5.4.:** Ein NiTi-Röhrchen ohne Vorkrümmung mit dem Außendurchmesser 1.55 mm ist in einer Nut mit 30 mm Krümmungsradius und 4 mm Breite eingespannt. Die Nutmitte überstreicht dabei ein Viertel, ein Halb und drei Viertel eines Vollkreises. Je nach Länge der Nut bilden sich unterschiedlich viele Kontaktpunkte (►) aus, nach [47].

unterschiedlich lange Nuten mit konstanter Krümmung und konstanter Breite eingeklemmt ist. Die Nutschablonen sind aus 5 mm dickem ABS-Kunststoff gefertigt und werden durch das eingelegte Röhrchen nicht wahrnehmbar verformt. Das Röhrchen ist damit gezwungen, sein elastisches Gleichgewicht mit einem nahezu unendlich steifen "Außenrohr" zu bilden. Es ist erkennbar, dass das Röhrchen den gegebenen Freiraum mehrfach durchquert und deshalb nicht in der Lage ist, einen Zustand mit konstanter Krümmung einzunehmen. Die Nutmitte und die Röhrchenachse sind folglich nicht koinzident. An den Enden der Nut geht mit der Koinzidenz auch die in vielen Modellen angenommene Tangentialität der Röhrchenachsen an den Segmentübergängen verloren. Das in Abbildung 5.4 dargestellte Experiment zeigt Kontaktfälle mit drei, vier und fünf Kontaktpunkten, hervorgerufen durch die Veränderung der Überlappungslänge von Nut und Röhrchen.

**Modellbasierte Untersuchung des Kontaktverhaltens** Mit dem Ziel, die Lage von Kontaktpunkten sowie die dort wirkenden Kontaktkräfte für einen beliebigen, vorher festgelegten Luftspalt zwischen zwei symmetrisch verschachtelten Röhrchen zu bestimmen, wird im Folgenden eine modellbasierte Untersuchung des Kontaktverhaltens durchgeführt. Neben den Kontaktkräften ist auch die Gleichgewichtslage der Röhrchenachsen sowie deren Krümmungs- und Winkelverlauf von Interesse. Zunächst wird die Modellierung und Lösung des Kontaktproblems beschrieben, anschließend erfolgt die Analyse des Kontaktverhaltens zur Ableitung einer vereinfachten Modellvorstellung für komplexere Röhrchenzusammensetzungen.

Für die Analyse des Kontaktverhaltens werden die beiden ineinander verschachtelten Röhrchen aus Abbildung 5.5 herangezogen. Das äußere Röhrchen mit dem Index  $i = 1$  und der Bogenlänge  $L_1^0$  weist die Vorkrümmung  $\kappa_1^0$  auf. Das innere Röhrchen mit  $i = 2$  hat die Länge  $L_2^0 > L_1^0$  mit der Vorkrümmung  $\kappa_2^0$ . Die Röhrchen sind in der dargestellten Weise symmetrisch



**Abbildung 5.5.:** Röhrenzusammensetzung und Modellvorstellung der Kontaktsimulation.

zusammengefügt und folglich nicht in einer Antriebseinheit gefasst. Für die Berechnungen in diesem Abschnitt gelten die folgenden Einschränkungen und Annahmen:

- Das verwendete Bauteilmodell bildet einen linear-elastischen Euler-Bernoulli-Balken gemäß (4.1)-(4.2) ab, in dem ausschließlich die Verformung durch das Biegemoment berücksichtigt wird. Aus den Kontaktkräften herrührende Quer- und Normalkräfte in den Balken werden vernachlässigt.
- Zur Beschreibung der ausschließlich durch Krümmung entstehenden Verformung wird die Bauteilkinematik (4.7)-(4.8) verwendet.
- Die beiden Röhren werden für die Kontaktpunktermittlung als infinitesimal dünne Balken angenommen. Die geometrische Ausdehnung des Röhrenquerschnitts wird daher nicht betrachtet, stattdessen wird zur Kontaktbeurteilung direkt der Abstand  $b_1/2$  der Röhrenachsen gemäß den Abbildungen 5.3 und 5.5 ausgewertet. Damit entfällt

auch die Berücksichtigung des Abstands der Kraftangriffspunkte zur Röhrchenachse. Alle Kontaktkräfte wirken deshalb unmittelbar auf die Röhrchenachse.

- Das Auftreten von Reibkräften an den Kontaktpunkten wird vernachlässigt und es wirken keine zusätzlichen äußeren Kräfte.

<b>Ziel</b>	: Berechnung der Gleichgewichtslagen ${}_{0}\mathbf{r}_i(s_i)$ für die Röhrchen $i = 1$ und $i = 2$ mit dem Luftspalt $b_1$
<b>Bedingung</b>	: $L_2^\circ > L_1^\circ$
<b>Erforderlich</b>	: Diskretisierungsparameter, Konvergenzgrenze, Durchdringungstoleranz, Vorkrümmungen, Biegesteifigkeiten
<b>1 Berechnungsvorgehen</b>	$\mathbf{r}_i(s_i) = \text{Kontaktmodell}(b_1)$
<b>2</b>	Erzeuge den initialen, diskretisierten Verlauf $r_i^0(s_i)$ der Röhrchenachsen
<b>3</b>	<b>Bestimme den einfachstmöglichen Kontaktfall <math>\mathcal{K}</math>, sodass die Plausibilitätsbedingung (5.24) erfüllt wird</b>
<b>4</b>	<b>Bestimme die Kraftangriffspunkte und -amplituden von <math>\mathcal{K} \in \mathcal{K} \setminus \{A, A'\}</math>, sodass die Kontaktbedingungen (5.22)-(5.23) erfüllt werden</b>
<b>5</b>	<b>Wiederhole</b>
<b>6</b>	Berechne die Kontaktkräfte mit (5.8)-(5.11) aus den gegebenen Angriffspunkten und Beträgen
<b>7</b>	Berechne die Biegemomentenverläufe $M_i(s_i)$ mit (5.12) aus den Kontaktkräften und Angriffspunkten
<b>8</b>	Berechne die Krümmungsverläufe $\kappa_i(s_i)$ mit (5.13) aus den Biegemomentenverläufen
<b>9</b>	Berechne $\Theta_i(s_i)$ und ${}_{0}\mathbf{r}_i(s_i)$ aus den Biegedifferentialgleichungen (5.14)-(5.15) und den Randbedingungen (5.16)-(5.19)
<b>10</b>	<b>bis das Konvergenzkriterium (5.7) erfüllt wird</b>

### Berechnungsvorgehen 3 : Kontaktmodell.

Die Beschreibung der Gleichgewichtslage erfolgt, entsprechend Abbildung 5.5, bezogen auf das globale Koordinatensystem  $\mathbb{0}$ , durch die Ortsvektoren  ${}_{0}\mathbf{r}_i(s_i)$  der Röhrchenachsen, parametrisiert über den natürlichen Koordinaten  $s_i$  für die beiden Röhrchen mit  $i = \{1, 2\}$ . Die Röhrchenachsen beginnen bei  $s_i = 0$  am linken Ende eines Röhrchens und enden bei  $s_i = L_i$  am rechten Ende. Die Kontaktpunkte werden, wie auch in den Experimenten in Abbildung 5.4, beginnend bei  $s_i = 0$  und fortlaufend bis  $s_i = L_i/2$  alphabetisch bezeichnet. Aus der Symmetrie der Anordnung werden die an der Symmetrieachse gespiegelten Kontaktpunkte im Bereich  $s_i = (L_i/2, L_i]$  mit einem Apostroph gekennzeichnet. Für einen bestimmten Luftspalt liegt stets ein bestimmter Kontaktfall  $\mathcal{K}$  mit der entsprechenden Menge an Kontaktpunkten  $\mathcal{K} \subset \{A, B, C, \dots, B', A'\}$  vor. Die Lösung des Kontaktproblems umfasst zunächst



das Bestimmen des Kontaktfalls selbst, anschließend das Bestimmen der zugehörigen Kontaktkraftangriffspunkte und Kontaktkraftbeträge und schließlich das Berechnen der daraus resultierenden Gleichgewichtslage der beiden Röhren. Diese Schritte erfolgen, wie in der Berechnungsvorschrift 3 zusammengefasst, in drei verschachtelten Prozessen.

Für einen vorgegebenen Luftspalt wird durch den äußersten Prozess (Berechnungsvorgehen 3, Zeile 3) iterativ die Anzahl an Kontaktpunkten erhöht, um zu prüfen welcher Kontaktfall für den vorgegebenen Luftspalt vorliegt. Im nächst-inneren Prozess (Zeile 4) werden die Kontaktkraftangriffspunkte und -beträge für den festgelegten Kontaktfall derart bestimmt, dass alle Kontaktbedingungen erfüllt werden. Im innersten Prozess (Zeile 10) erfolgt schließlich die Berechnung der Gleichgewichtslage der beiden Röhren, für einen gegebenen Satz an Kontaktkraftangriffspunkten und -beträgen sowie den entsprechenden Luftspalt.

Zunächst wird nun die Berechnung der Gleichgewichtslage durch den innersten Prozess mit den Berechnungsschritten aus den Zeilen 6-9 beschrieben. Aufgrund der großen Verschiebungen der beiden Bauteile erfordert die Berechnung des Biegemomentenverlaufs auch die Kenntnis des Verlaufs der Röhrenachsen nach der Verformung. Die Berechnung der verformten Röhrenachsen erfordert wiederum die Kenntnis des Biegemoments. Die Berechnung beider Verläufe erfolgt daher iterativ bis zum Erreichen eines Konvergenzkriteriums. Im ersten Iterationsschritt  $q = 1$  wird ein geschätzter Startverlauf der Röhrenachsen  ${}_0\mathbf{r}_i^0(s_i)$  angenommen, um den Biegemomentenverlauf zu bestimmen und daraus den Verlauf der Röhrenachsen zu berechnen. In allen weiteren Iterationen  $q > 1$  wird dann das Ergebnis  ${}_0\mathbf{r}_i^{q-1}(s_i)$  des vorangegangenen Rechenschritts zur Momentenberechnung verwendet. Am Ende jeder Iteration  $q$  wird aus den Gleichgewichtslagen  ${}_0\mathbf{r}_i^{q-1}(s_i)$  zur Berechnung des Biegemoments und den aus dem Biegemoment resultierenden Gleichgewichtslagen  ${}_0\mathbf{r}_i^q(s_i)$  die Konvergenzbedingung

$$\max_{\substack{s_i \in (0, L_i) \\ i \in \{1, 2\}}} \| {}_0\mathbf{r}_i^q(s_i) - {}_0\mathbf{r}_i^{q-1}(s_i) \|_2 < Q_{\text{konv}} \quad (5.7)$$

überprüft. Diese bildet die maximale euklidische Differenz der Veränderung der Lage der beiden Röhrenachsen ab. Ist diese kleiner als eine festgelegte Konvergenzgrenze  $Q_{\text{konv}}$ , wird die berechnete Gleichgewichtslage als hinreichend exaktes Ergebnis ausgegeben. Zur besseren Lesbarkeit wird im Folgenden auf die Kennzeichnung der Gleichgewichtslagen, der Winkel und der Einheitsvektoren in Abhängigkeit der Iteration  $q$  verzichtet. Wenn nicht anders gekennzeichnet, wird sich stets auf das Ergebnis der letzten Iteration und damit das aktuellste Ergebnis bezogen.

Zur Berechnung des Biegemomentenverlaufs müssen zunächst alle Kraftangriffspunkte, definiert durch die Abstände  $l_{\mathcal{K}_i}$  des Kraftangriffs zum Ursprung der natürlichen Koordinate  $s_i \forall \mathcal{K} \in \mathcal{K}, \forall i \in \{1, 2\}$ , ermittelt werden. Für die Kräfte an den Enden des äußersten Röhrens sind diese mit  $l_{A_1} = 0$  und  $l_{A'_1} = L_1$  stets bekannt. Alle weiteren Kraftangriffspunkte am Außenröhren mit  $\mathcal{K} \in \mathcal{K} \setminus \{A, A'\}$  sind bereits durch den nächst-äußeren Prozess

gegeben. Wie in Abbildung 5.5 dargestellt, ergeben sich die Kraftangriffspunkte auf dem Innenröhrchen aus dem Schnittpunkt der  ${}_1\mathbf{e}_y(l_{s_1})$ -Achse bei  $s_1 = l_{\ell_1}$  mit der Röhrchenachse des Innenröhrchens. Die Notation  $s_{2\perp s_1}$  bezeichnet diesen Schnittpunkt auf der natürlichen Koordinate des Innenröhrchens. Die Lösung

$$l_{\ell_2} = s_{2\perp l_{\ell_1}} \quad \forall \ell \in \mathcal{K} \quad (5.8)$$

liefert folglich die senkrecht zum Außenröhrchen auf das Innenröhrchen projizierten Kraftangriffspunkte. Für einen reibungsfreien Kontakt zwischen den Röhrchen stehen die Kräfte

$$\mathbf{F}_{\ell_2} = F_{\ell_2} {}_2\mathbf{e}_y(l_{\ell_2}) \quad \forall \ell \in \mathcal{K} \quad (5.9)$$

stets senkrecht auf dem Innenröhrchen und können aus der Skalierung der Einheitsvektoren  ${}_2\mathbf{e}_y(l_{\ell_2})$  mit den ebenfalls durch den nächst-äußeren Prozess gegebenen Kraftbeträgen  $F_{\ell_2}$  mit  $\ell \in \mathcal{K} \setminus \{A, A'\}$  bestimmt werden. Aus den Kräftegleichgewichten

$$\sum_{\ell \in \mathcal{K}} \mathbf{F}_{\ell_2} = 0 \quad (5.10)$$

aller Kräfte eines Röhrchens kann mit  $i = 2$  anschließend der Kraftbetrag  $F_{A_2}$  im Kontaktpunkt A am Innenröhrchen berechnet werden. Aus Actio gleich Reactio

$$\mathbf{F}_{\ell_1} = -\mathbf{F}_{\ell_2} \quad \forall \ell \in \mathcal{K} \quad (5.11)$$

an allen Kontaktpunkten zwischen den beiden Röhrchen ergibt sich schließlich auch der entsprechende Kraftvektor am Außenröhrchen. Die Biegemomente

$$M_i(s_i) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left( \sum_{\ell \in \mathcal{K}} H(s_i - l_{\ell_i}) ({}_0\mathbf{r}_i(l_{\ell_i}) - {}_0\mathbf{r}_i(s_i)) \times \mathbf{F}_{\ell_i} \right) \quad \forall i \in \{1, 2\} \quad (5.12)$$

um die  ${}_0\mathbf{e}_z$ -Achse ergeben sich aus den Kontaktkräften  $\mathbf{F}_{\ell_i}$ , deren Angriffspunkten  $l_{\ell_i}$  und den Verläufen der Röhrchenachsen  ${}_0\mathbf{r}_i(s_i)$  selbst.  $H(s_i)$  bezeichnet dabei die Heaviside-Funktion. Das Bauteilgesetz (4.1)-(4.2) liefert unter den oben genannten Annahmen die Krümmung

$$\kappa_i(s_i) = \frac{M_i(s_i)}{E_i I_i} + \kappa_i^\circ \quad \forall i \in \{1, 2\} \quad (5.13)$$

jedes Röhrchens aus dessen Momentenverlauf  $M_i(s_i)$  entlang der natürlichen Koordinate  $s_i$ . Die Bauteilkinematik (4.7)-(4.8) liefert anschließend die Biegedifferentialgleichungen

$$\Theta'_i(s_i) = \kappa_i(s_i) \quad \forall i \in \{1, 2\}, \quad (5.14)$$

$${}_0\mathbf{r}'_i(s_i) = \begin{bmatrix} \cos(\Theta_i(s_i)) \\ \sin(\Theta_i(s_i)) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \forall i \in \{1, 2\} \quad (5.15)$$

für beide Röhren. Deren Lösung erfolgt numerisch durch das Trapezverfahren. Die Integrationskonstanten zur Lösung von (5.14) ergeben sich aus der Symmetriebedingung

$$\Theta_i(L_i/2) = 0 \quad \forall i \in \{1, 2\} \quad (5.16)$$

der Röhrenkombination. Fünf der sechs Integrationskonstanten zur Lösung von (5.15) werden ebenfalls aus den Symmetriebedingungen

$${}_{0}\mathbf{r}_1(L_1/2) = \mathbf{0}, \quad (5.17)$$

$${}_{0}\mathbf{r}_{2,xz}(L_1/2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

der Anordnung gewonnen. Die in Abbildung 5.5 rechts oben dargestellte Lage des Koordinatensystems verdeutlicht dies. Das Erzwingen des Kontaktes der beiden Röhren, am in jedem Kontaktfall vorhandenen Kontaktpunkt A, mit der Bedingung

$${}_{0}\mathbf{r}_2(l_{A_2}) = {}_{0}\mathbf{r}_1(l_{A_1}) + \mathbf{T}^{10}(l_{A_1}) \operatorname{sign}(\kappa_2^\circ - \kappa_1^\circ) \begin{bmatrix} 0 & b_1/2 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad (5.19)$$

liefert schließlich die sechste Integrationskonstante. Die Transformation  $\mathbf{T}^{10}(s_i)$  überführt dabei den vektoriellen Luftspaltabstand vom Koordinatensystem ① in das Koordinatensystem ②. Die Ortsvektoren  ${}_{0}\mathbf{r}_i(s_i)$  der beiden Röhrenachsen sind damit vollständig bestimmt. Anschließend wird die Konvergenzbedingung (5.7) für die Ortsvektoren der aktuellen und der vorangegangenen Iteration überprüft. Ist diese nicht erfüllt, wird der Berechnungsprozess wiederholt. Die Angriffspunkte und Wirkrichtungen der Kontaktkräfte sowie die resultierenden Biegemomente werden dazu erneut aus den aktuellen Ortsvektoren  $\mathbf{r}_i(s_i)$  ermittelt und die Berechnung der Ortsvektoren der nächsten Iteration wie beschrieben wiederholt. Dieser Prozess erfolgt iterativ bis die Konvergenzbedingung erfüllt ist. Die Konvergenz lässt sich beschleunigen, indem ein gleitender Mittelwertfilter auf die mit (5.8) auf das Innenröhren projizierten Kraftangriffspunkte angewendet wird.

Abhängig vom, durch den äußersten Prozess festgelegten, Kontaktfall werden die unbekanntesten Kontaktkraftangriffspunkte  $l_{\mathcal{K}_1} \forall \mathcal{K} \in \mathcal{K}$  und Kontaktkraftbeträge  $F_{\mathcal{K}} \forall \mathcal{K} \in \mathcal{K} \setminus \{A, A'\}$  durch eine Nullstellensuche bestimmt. Dazu wird der vorzeichenbehaftete Abstand

$$\Delta y(s_1) := {}_1\mathbf{e}_y(s_1) \cdot ({}_1\mathbf{r}_2(s_{2\perp s_1}) - {}_1\mathbf{r}_1(s_1)) \quad (5.20)$$

zwischen einem beliebigen Punkt  $s_1$  auf der Achse des Außenröhrens und dem senkrecht dazu auf der Achse des Innenröhrens liegenden Punkt  $s_{2\perp s_1}$  definiert. Zwischen den selben beiden Punkten lässt sich zudem die Winkeldifferenz

$$\Delta\Theta(s_1) := \Theta_2(s_{2\perp s_1}) - \Theta_1(s_1) \quad (5.21)$$

der beiden Röhrchenachsen definieren. Die Nullstellensuche über den Kontaktbedingungen

$$\Delta y(l_{\mathcal{K}_1}) - \text{sign}(\kappa_1^{\circ} - \kappa_2^{\circ}) \frac{b_1}{2} = 0 \quad \forall \mathcal{K} \in \mathcal{K}, \quad (5.22)$$

$$\Delta \Theta_1(l_{\mathcal{K}_1}) = 0 \quad \forall \mathcal{K} \in \mathcal{K} \setminus \{A, A'\} \quad (5.23)$$

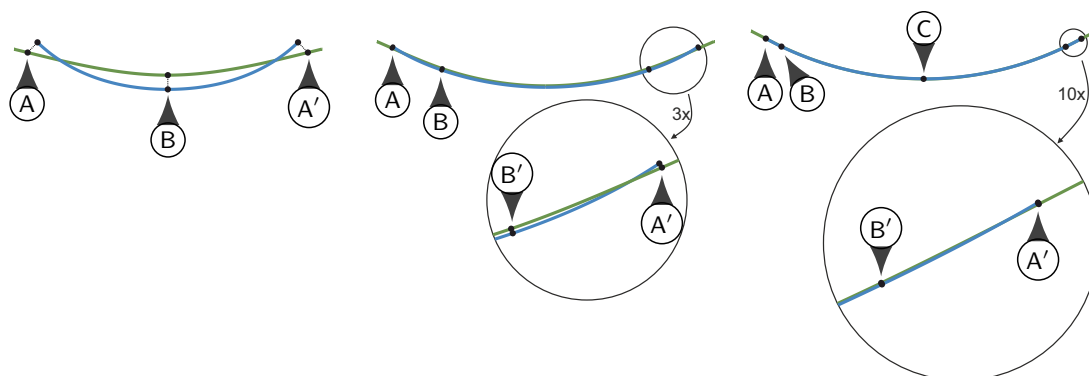
liefert die unbekanntenen Größen. Bedingung (5.22) stellt dabei sicher, dass die Röhrchen im Kontaktpunkt den Abstand Null aufweisen. Bedingung (5.23) sorgt dafür, dass die Röhrchen im Kontaktpunkt tangential verlaufen. Nach erfolgreicher Lösung der Nullstellensuche wird durch den äußersten Prozess eine Plausibilitätsprüfung der Gleichgewichtslage für den gewählten Kontaktfall durchgeführt. Dazu wird das Durchdringen der Wand des Außenröhrchen durch das Innenröhrchen mit der Bedingung

$$-\left(\frac{b_1}{2} + \Xi\right) \leq \Delta y(s_1) \leq +\left(\frac{b_1}{2} + \Xi\right) \quad \forall s_1 \in [0, L_1] \quad (5.24)$$

geprüft. Der Parameter  $\Xi$  stellt dabei einen festgelegten, konstanten Toleranzbereich der zulässigen Durchdringung der beiden Röhrchen dar. Liegt im Rahmen dieser Toleranz keine Durchdringung vor, ist die Berechnung abgeschlossen. Andernfalls wird der Kontaktfall um eine Ordnung erhöht und der Gesamtprozess wiederholt. Die Kontaktsuche beginnt dabei für den einfachst möglichen Kontaktfall  $\mathcal{K} = \{ABA'\}$ . Der Angriffspunkt der Kraft B liegt in diesem Fall bei  $l_{B_1} = L_1/2$ , unbekannt ist lediglich der Kontaktkraftbetrag  $F_B$  der Kontaktkraft. Für den nächst komplexeren Kontaktfall  $\mathcal{K} = \{ABB'A'\}$  muss zusätzlich zum Kraftbetrag auch deren Angriffspunkt  $l_{B_1}$  gesucht werden. Der Kontaktfall  $\mathcal{K} = \{ABCB'A'\}$  erweitert die Nullstellensuche um die Kraft im Punkt C mit  $l_{C_1} = 0$  und dem zusätzlichen unbekanntenen Kontaktkraftbetrag  $F_C$ . Entsprechend diesem Vorgehen lassen sich weitere Kontaktkräfte beim Nichterfüllen von (5.24) hinzufügen.

Die Abbildungen 5.6-5.9 fassen nun die gewonnenen Simulationsergebnisse der numerischen Kontaktsimulation in einem Luftspaltbereich von 0.05 mm bis 30 mm für die Parameter aus Tabelle A.9 zusammen. In der Simulation wurde ein vorgekrümmtes 100 mm langes Außenröhrchen und ein gerades, etwas längeres Innenröhrchen gewählt. Die Biegesteifigkeiten der beiden Röhrchen sind gleich.

Die Kontaktkräfte erzeugen einen veränderlichen Biegemomentenverlauf entlang der Röhrchenachsen. Da die Achsen nicht zusammenfallen, unterscheiden sich die Momentenverläufe und die Biegelinien der einzelnen Röhrchen. Die resultierende Gleichgewichtslage der beiden Röhrchen ist für die Luftspalte 10 mm, 1 mm und 100  $\mu\text{m}$  in den Abbildungen 5.6a bis 5.6c dargestellt. Es ist erkennbar, dass die Röhrchenachsen mit kleiner werdendem Luftspalt immer näher zusammen fallen und die Anzahl an Kontaktpunkten zunimmt. Die Anzahl und Lage von Kontaktpunkten wird unter anderem vom Luftspalt, aber auch von der überlappenden Röhrchenlänge oder der Vorkrümmung beeinflusst. Für sehr große Luftspalte entsteht zunächst der Dreipunkt-Kontakt  $\mathcal{K} = \{ABA'\}$ , entsprechend Abbildung 5.6a. Es resultiert



(a) Gleichgewichtslage mit drei Kontaktpunkten für  $b_1 = 10 \text{ mm}$ . (b) Gleichgewichtslage mit vier Kontaktpunkten für  $b_1 = 1 \text{ mm}$ . (c) Gleichgewichtslage mit fünf Kontaktpunkten für  $b_1 = 100 \mu\text{m}$ .

**Abbildung 5.6.:** Gleichgewichtslagen der Röhrenachsen für unterschiedlichen Luftspalt.

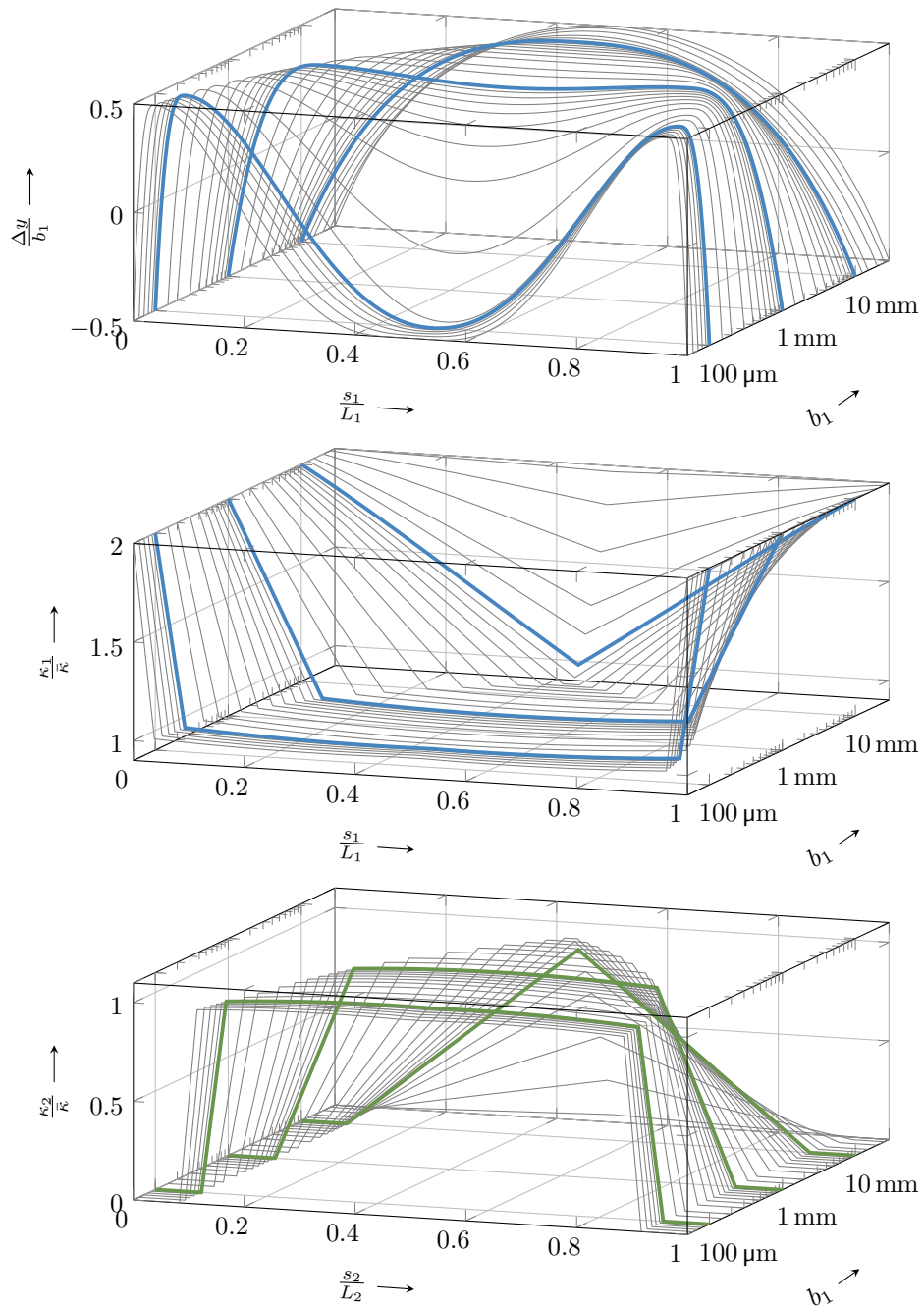
ein in erster Näherung dreieckförmiger Momentenverlauf und aus der linearen Biegesteifigkeit ein ebenfalls dreieckförmiger Krümmungsverlauf. Beim Verringern des Luftspalts bildet sich durch das Auftrennen des Kontaktpunktes B auf der Symmetrieachse in die beiden symmetrisch verteilten Kontaktpunkte B und B' der Vierpunkt-Kontakt  $\mathcal{K} = \{ABB'A'\}$ , gemäß Abbildung 5.6b. Damit entstehen zwei Kräftepaare, zwischen denen es zu einem annähernd konstanten Momenten- und Krümmungsverlauf kommt. Eine weitere Verringerung des Luftspalts führt zur Entstehung eines neuen Kontaktpunktes C auf der Symmetrieachse. Abbildung 5.6c zeigt den zugehörigen Kontaktfall  $\mathcal{K} = \{ACB'A'\}$ .

Wie Abbildung 5.7 zeigt, nähert sich der Krümmungsverlauf mit der Verringerung des Luftspalts zunehmend einem trapezförmigen bis beinahe rechteckigem Verlauf an. Die Krümmung wurde normiert mit der luftspaltfreien Gleichgewichtskrümmung

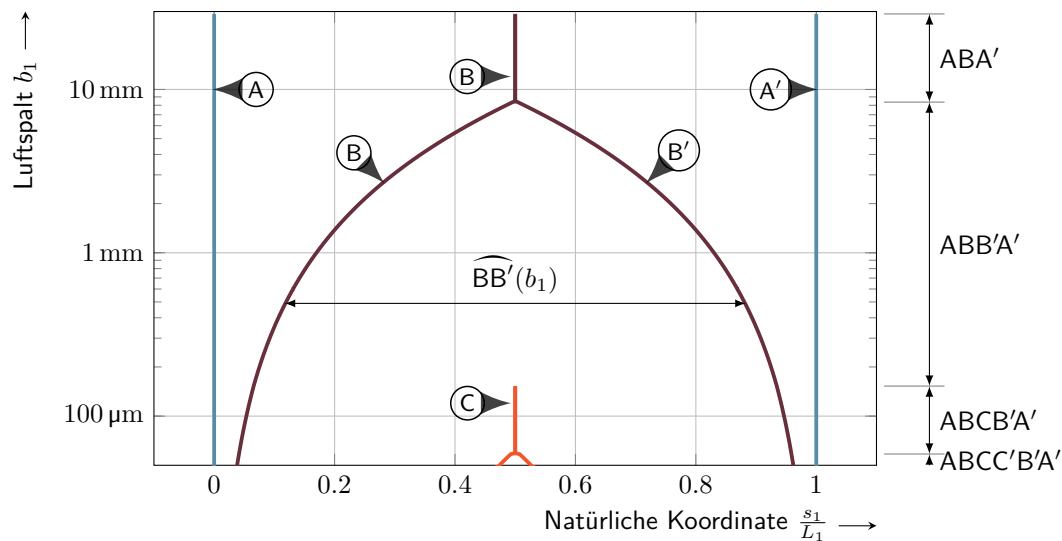
$$\bar{\kappa} = \frac{E_1 I_1 \kappa_1^0 + E_2 I_2 \kappa_2^0}{E_1 I_1 + E_2 I_2} \quad (5.25)$$

aus den beiden Vorkrümmungen und den Biegesteifigkeiten. Diese lässt sich beispielsweise nach Webster III et al. [131] direkt aus dem Gleichgewicht von Biegemoment und Krümmung der beiden Röhren herleiten. Die Abbildung 5.7 zeigt, dass mit dem Absinken des Luftspalts ein zunehmend größerer Bereich zwischen den Kontaktpunkten B und B' entsteht, innerhalb dessen die tatsächliche Krümmung der beiden Röhren nah am Wert  $\bar{\kappa}$  liegt. Die Anzahl und Lage der Kontaktpunkte im untersuchten Luftspaltbereich zeigt Abbildung 5.8.

Die normierte Bogenlänge des Abschnitts  $\widehat{BB'}$  ist in Abbildung 5.9 (oben) über dem Luftspalt abgetragen. Die mittlere, minimale und maximale Krümmung im Bereich  $\widehat{BB'}$  ist ebenfalls in Abbildung 5.9 (Mitte) dargestellt. Es zeigt sich, dass die mittlere Krümmung in diesem



**Abbildung 5.7.:** Krümmungsverläufe und Abstand der Röhrchenachsen in Abhängigkeit des Luftspalts.

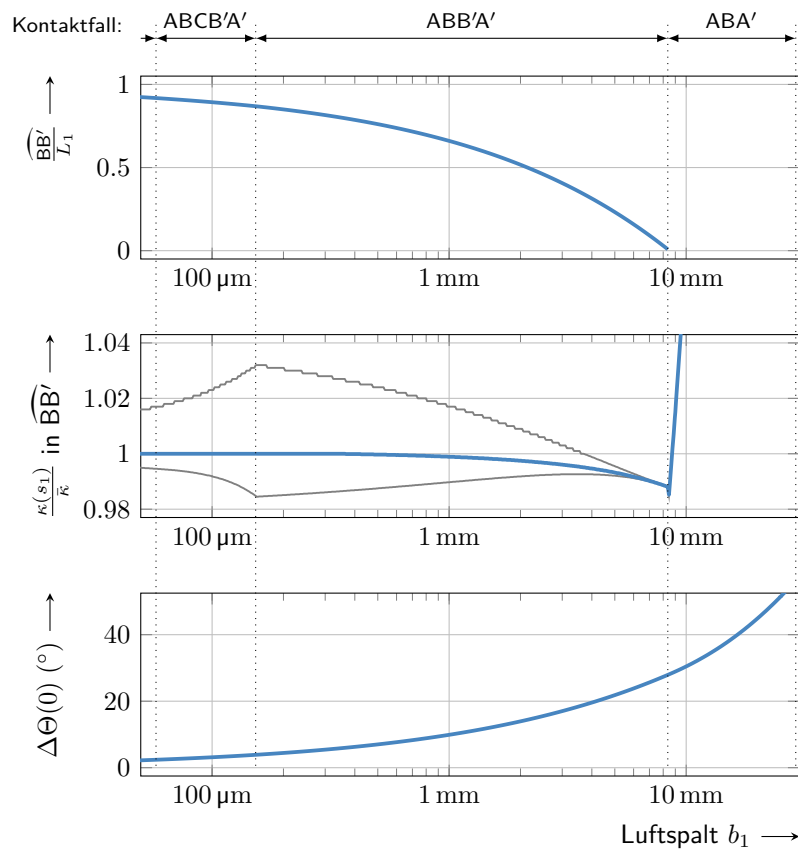


**Abbildung 5.8.:** Anzahl und Lage der Kontaktpunkte in Abhängigkeit des Luftspalts.

Bereich bereits bei verhältnismäßig großem Luftspalt sehr nah an der luftspaltfreien Gleichgewichtskrümmung  $\bar{\kappa}$  liegt.

Mit abnehmendem Luftspalt verringert sich die Winkeldifferenz  $\Delta\Theta(0)$  zwischen den beiden Röhren am linken Ende des Außenröhrens. In Abbildung 5.9 (unten) wird diese über dem Luftspalt aufgetragen. Die logarithmische Luftspaltachse zeigt jedoch, dass auch für einen verhältnismäßig kleinen Luftspalt noch immer eine kinematisch relevante Winkelabweichung der Röhrenachsen von mehreren Grad vorliegt.

**Annahmen zur Vereinfachung des Kontaktverhaltens** Die exakte Bestimmung des Kanülenverlaufs von Röhrenzusammensetzungen mit Antriebseinheit erfordert ebenfalls die Berechnung von Kontaktpunkten und -kräften zur Ermittlung des Biegemomentenverlaufs. Aus der Stetigkeit des Biegemomentenverlaufs würde, auch für pseudoelastisches Materialverhalten, ein stetiger Krümmungsverlauf resultieren. Die numerische Berechnung einer symmetrischen Gleichgewichtslage, unter Berücksichtigung großer Verschiebungen, in Verbindung mit dem Finden der Kontaktpunkte und -kräfte, erweist sich für kleine Luftspalte und der daraus resultierenden hohen Zahl an Kontaktpunkten jedoch bereits mit linear-elastischem Werkstoffverhalten als sehr rechenintensiv. Praktikable Luftspalte für die Röhren tubulärer Kontinuumsmechanismen liegen bei etwa 200  $\mu\text{m}$  und weniger. In Abbildung 5.9 ist erkennbar, dass schon bei deutlich größeren Luftspalten die mittlere Krümmung im Bereich  $\widehat{BB'}$  sehr nah an der luftspaltfreien Gleichgewichtskrümmung  $\bar{\kappa}$  liegt. Die Einfluss des Luftspalts auf die Gleichgewichtskrümmung wird daher als vernachlässigbar erachtet. Der Differenzwinkel



**Abbildung 5.9.:** Bogenlänge sowie minimale, mittlere und maximale Krümmung im Bereich zwischen den Kontaktpunkten B und B' sowie Übergangswinkel am Kontaktpunkt A in Abhängigkeit des Luftspalts.

$\Delta\Theta(0)$  mit dem das Innenröhrchen aus dem Außenröhrchen austritt ist hingegen auch für sehr kleine Luftspalte noch von kinematischer Relevanz.

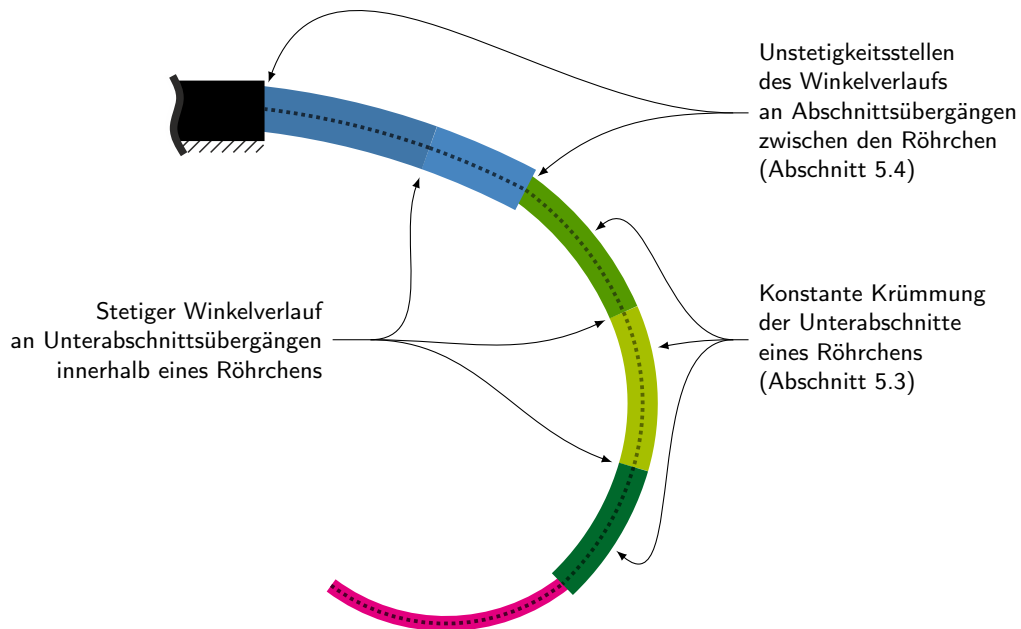
Die Modellierung tubulärer Kontinuumsmechanismen mit pseudoelastischem Werkstoffmodell und Antriebseinheit erfolgt daher unter vereinfachenden Annahmen. Mit der Vereinfachung

$$\widehat{BB'} \approx L \quad (5.26)$$

erstreckt sich der Bereich annähernd konstanten Biegemoments über die gesamte Röhrchenlänge des jeweiligen Außenröhrchens. Als Konsequenz daraus gilt mit

$$\widehat{BB'} \gg \widehat{AB} \approx 0, \quad (5.27)$$





**Abbildung 5.10.:** Vereinfachte kinematische Vorstellung eines tubulären Kontinuumsmechanismus.

dass der Bereich des Momenten- und Krümmungsübergangs zwischen zwei Röhrenabschnitten vernachlässigbar kurz ist. Zur Berechnung der Gleichgewichtskrümmungen mehrerer Röhren in Abschnitt 5.3 wird der Momentenverlauf entlang des Kanülenrückgrats basierend auf Vereinfachung (5.26) als Bereichsweise konstant angenommen. Der Luftspalt wird dabei vernachlässigt, was einen direkten Momentenaustausch zwischen den Röhren und die Konzentrität der Röhrenachsen erlaubt. Momentensprünge, sowohl an den Röhrenenden als auch innerhalb eines Röhrens, sind damit zulässig. Die Berücksichtigung des Übergangswinkels zwischen den Kanülenabschnitten in Abschnitt 5.4 erfolgt auf Basis einer Momentenübergangszone am Ende jedes Röhrens. Mit Vereinfachung (5.27) wird angenommen, dass die Momentenübergangszonen vergleichsweise kurz gegenüber den Bereichen mit konstantem Biegemoment sind. Daraus folgt, dass die verantwortlichen Kontaktkräfte nahezu parallel verlaufen, was wiederum die Annahme eines linearen Momentenübergangs zwischen den beiden Kontaktpunkten zulässt. Die Einfluss der Länge der Momentenübergänge auf den Krümmungsverlauf, wird sowohl an den Abschnittsenden, an denen der Momentenübergang des Außenröhrens zu Null stattfindet, als auch für kleinere Momentenveränderungen innerhalb der Abschnitte vernachlässigt.

Die Gesamtkinematik in Abschnitt 5.5 kombiniert diese Teilergebnisse in eine kinematische

Beschreibung des gesamten tubulären Kontinuumsmechanismus, einschließlich der Antriebseinheit. Dabei wird die Kanüle, entsprechend der in Abbildung 5.10 dargestellten Weise, als Zusammensetzung aus stückweise konstant gekrümmten und tangentialen Unterabschnitten, berechnet in Abschnitt 5.3, angenommen. Es wird dabei davon ausgegangen, dass ein direkter Momentenaustausch zwischen den Röhrchen stattfindet. Zwischen den Abschnitten sorgen die in 5.4 berechneten Übergangswinkel für eine Unstetigkeit im Winkelverlauf des Kanülenrückgrats. Der mit dem Berechnungsschritt zur Bestimmung der Übergangswinkel einhergehende Verlust der Konzentrizität der Röhrchen und die stetig veränderliche Krümmung in der Momentenübergangzone wird lediglich als Mittel zur Berechnung des Übergangswinkels eingesetzt. Die Berücksichtigung des präziseren Krümmungsverlaufs sowie der radiale Versatz der Röhrchen am Übergangspunkt werden in der Gesamtkinematik vernachlässigt.

### 5.3. Abschätzung der Gleichgewichtskrümmung

**Zerlegung der Kanüle in Abschnitte und Unterabschnitte** Das Bauteilmodell für ein einzelnes, vorgekrümmtes, pseudoelastisches Röhrchen (4.23)-(4.25), als eines von mehreren Bauteilen eines tubulären Kontinuumsmechanismus, wird nun genutzt, um die Gleichgewichtskrümmung einer Zusammensetzung aus mehreren Röhrchen zu ermitteln. Dazu wird die Reibung zwischen den Röhrchen vernachlässigt und eine entlang der Röhrchenachse konstante Vorkrümmung vorausgesetzt. Torsionsverformungen, welche entstehen, wenn vorgekrümmte Röhrchen relativ zueinander verdreht werden, werden ebenfalls vernachlässigt. Diese Einschränkung hat jedoch keinen Einfluss auf die nachfolgend gezeigten Ergebnisse, da ausschließlich planare Zusammensetzungen, entsprechend Tabelle 5.2, betrachtet werden. Mit den vereinfachenden Annahmen aus dem vorangegangenen Abschnitt wird der Luftspalteinfluss nun zunächst vernachlässigt. Folglich sind alle Röhrchen konzentrisch und erreichen bereichsweise eine gemeinsame Gleichgewichtskrümmung. Weiterhin können die Röhrchen ihre Biegemomente unmittelbar mit anderen Röhrchen austauschen, woraus folgt, dass sich das Biegemoment und die davon abhängige Krümmung zwischen den Unterabschnitten sprunghaft ändern dürfen. Aufgrund der Hysterese des Röhrchenwerkstoffs und der darin gespeicherten Krümmungshistorie kann sich die Biegemomenten-Krümmungs-Charakteristik eines Röhrchens entlang seiner Achse ebenfalls sprunghaft ändern. Aus der gegenseitigen Verschiebung der Röhrchen zueinander entstehen solche Unterabschnitte mit unterschiedlicher Krümmungshistorie, welche wiederum dazu führen, dass die Kanüle trotz konstanter Vorkrümmungen aller Röhrchen bereichsweise unterschiedliche Gleichgewichtskrümmungen annimmt.

Um Kanülenzusammensetzungen aus  $N$  Röhrchen entsprechend den Abbildungen 5.11 und 5.12 zu betrachten, werden alle Größen des Bauteilmodells aus Kapitel 4 durch den Index  $i$  erweitert. Somit können individuelle Werkstoff- und Geometrieparameter sowie Materialzustände für jedes Röhrchen  $i$  berücksichtigt werden. Die Röhrchenindizierung beginnt bei  $i = 1$  mit dem äußersten Röhrchen und endet bei  $i = N$  am innersten. Der Zusammenbau dieser

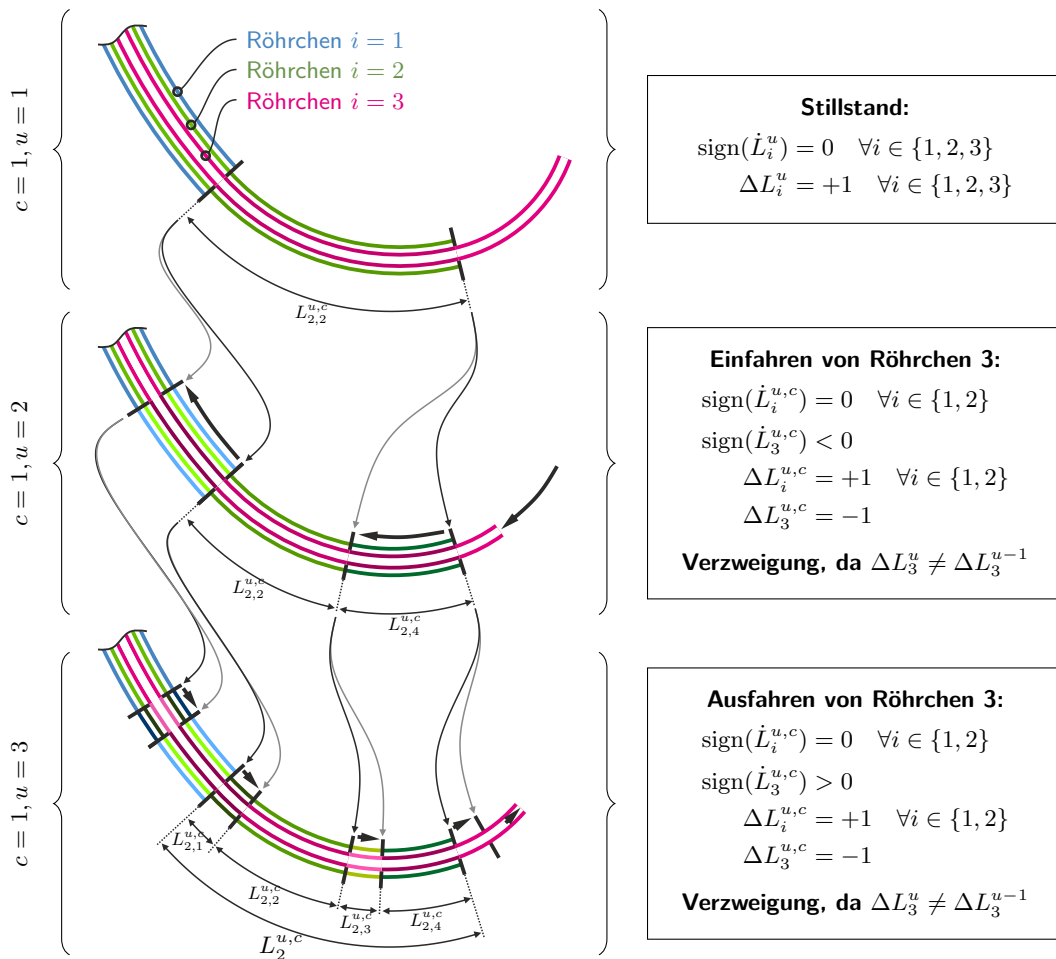


Abbildung 5.11.: Verzweigung der Kanülenzustände durch Verschiebung eines Röhrens.

Röhren resultiert in einer gekrümmten Kanüle, welche zunächst in  $N$  Abschnitte zerlegt wird. In jedem Abschnitt überlappt eine konstante Anzahl an Röhren. Die Abschnittsindizierung beginnt bei  $j = 1$  am Ausgang der Führungsbuchse der Antriebseinheit, wo alle  $N$  Röhren überlappen. Sie endet bei Abschnitt  $j = N$ , welcher nur noch aus dem innersten Röhren besteht. Um dem Einfluss der Werkstoffhysterese Sorge zu tragen, wird jeder Abschnitt weiter in Unterabschnitte zerlegt, welche durch  $p = 1, \dots, P_j$  indiziert werden. Auch hier verläuft die Indizierung von der Basis hin zur Spitze.

Im Folgenden werden alle Berechnungen über der diskretisierten Zeit  $u$  durchgeführt. Das zeitlich diskretisierte Steuerungsprofil  $L_j^u$  mit  $u \in \{1, \dots, U\}$  liefert die Längen aller Kanülenabschnitte  $j = 1, \dots, N$  und resultiert direkt aus der Verschiebung der Röhren durch

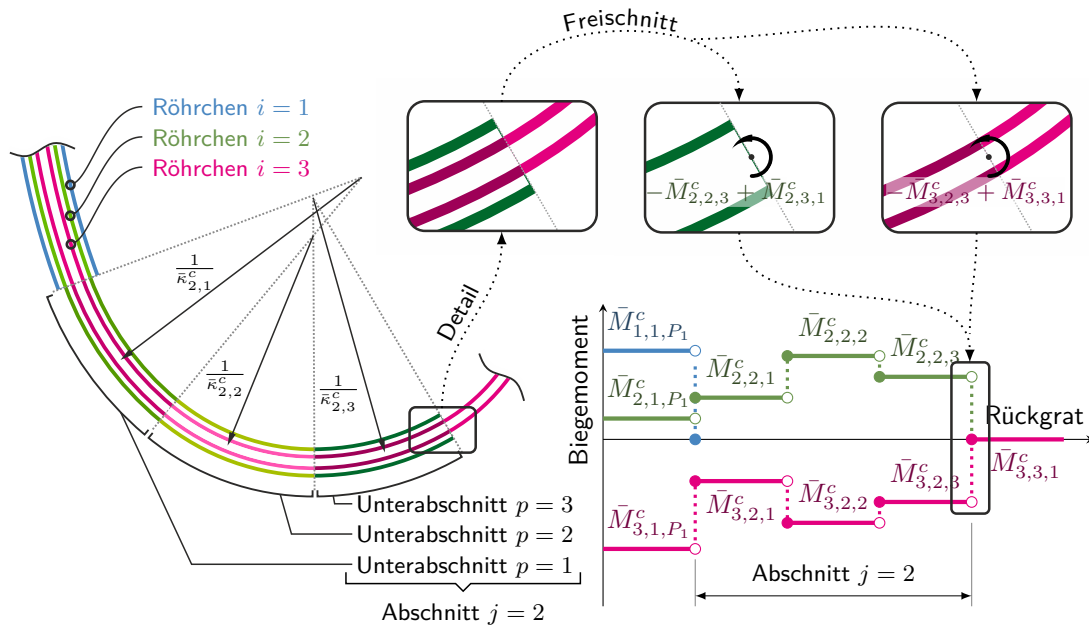
die Antriebseinheit. Die zeitliche Diskretisierung kann beliebig gewählt werden, muss aber mindestens an Zeitpunkten mit Bewegungsrichtungsumkehr eine zeitdiskrete Stützstelle aufweisen.

Eine algorithmische Methodik zur Bestimmung der Anzahl und Länge von Unterabschnitten für beliebige zeitliche Ansteuerungsverläufe ist nicht Teil dieser Arbeit. Es wird sich hier zudem auf Ansteuerprofile beschränkt, bei denen  $L_j^1 = L_j^U$  gilt. Ein Ansteuerprofil endet daher mit den selben Abschnittslängen, mit denen es auch begonnen hat. Die Wiederholung vollständiger Ansteuerprofile von  $u = 1$  bis  $u = U$  wird jedoch berücksichtigt und als Zyklus  $c = 1, \dots, C$  bezeichnet. Aus der Analyse des Ansteuerprofils, welche innerhalb dieser Arbeit nur beispielhaft durchgeführt wird, ergibt sich schließlich eine Menge an Unterabschnitten  $(j, p)$  mit der Länge  $L_{j,p}^{u,c}$  und der zugehörigen Gleichgewichtskrümmung  $\bar{\kappa}_{j,p}^{u,c}$ . In Abbildung 5.12 wird beispielhaft eine Gleichgewichtslage dargestellt, welche unter Vernachlässigung des Luftspalts einen diskontinuierlichen Biegemomentenverlauf als Resultat der Werkstoffhysterese aufweist. Zur Verdeutlichung der Nomenklatur hat die dargestellte Kanülenszusammensetzung drei Abschnitte ( $N = 3$ ) mit drei Unterabschnitten ( $P_2 = 3$ ) im zweiten Abschnitt.

Die Summe der Längen der Unterabschnitte ist stets gleich der Gesamtlänge eines Abschnitts

$$L_j^u = \sum_{p=1}^{P_j} L_{j,p}^{u,c} \quad \forall j = 1, \dots, N \quad \forall c = 1, \dots, C. \quad (5.28)$$

Abbildung 5.11 verdeutlicht die Entstehung von Unterabschnitten zunächst anhand eines Beispiels. Zum Zeitpunkt  $u = 1$  liegt die Kanüle nach dem Ausfahren in drei Abschnitten mit abschnittsweise konstanten Werkstoffzuständen vor. Jeder Abschnitt besteht daher aus genau einem Unterabschnitt. Beim Wechsel zum Zeitpunkt  $u = 2$  wurde das innerste Röhrchen  $i = 3$  eingezogen. Der Abschnitt  $j = 2$  zerfällt dadurch in zwei Unterabschnitte unterschiedlicher Gleichgewichtskrümmung, da das innerste Röhrchen durch die Verschiebung nun zwei Bereiche mit unterschiedlicher Krümmungshistorie aufweist. Beim Wechsel zum Zeitpunkt  $u = 3$  wird das innerste Röhrchen erneut ausgefahren. Es kommt zur Bildung von vier Unterabschnitten in Abschnitt  $j = 2$ . Neue Unterabschnitte entstehen dabei stets an allen Unterabschnittsgrenzen und wachsen in Bewegungsrichtung des verantwortlichen Röhrchens. Für die spätere Verwendung der Unterabschnittslängen  $L_{j,p}^{u,c}$  und deren zugehöriger Gleichgewichtskrümmung  $\bar{\kappa}_{j,p}^{u,c}$  in der Gesamtkinematik des Kontinuumsmechanismus werden die Unterabschnitte in der Reihenfolge ihres Auftretens entlang der Kanüle mit dem Parameter  $p$  nummeriert, wie das Beispiel in Abbildung 5.11 verdeutlicht. Die Bestimmung der Anzahl und Nummerierungsreihenfolge aller Unterabschnitte erfordert die Kenntnis des gesamten zeitlichen Ansteuerprofils und der Anfangsverteilung der Werkstoffzustände entlang aller Röhrchenachsen. In Abschnitt 5.6 wird dies noch einmal beispielhaft an einem realen Ansteuerprofil durchgeführt und mit Experimenten verdeutlicht.



**Abbildung 5.12.:** Stückweise konstante Gleichgewichtsbiegemomente entlang eines beispielhaften Abschnitts mit drei Unterabschnitten für die Kanülenszusammensetzung "001", nach [47].

Als Kriterium für die Entstehung neuer Unterabschnitte kann der zeitdiskrete Verlauf des Änderungszustands

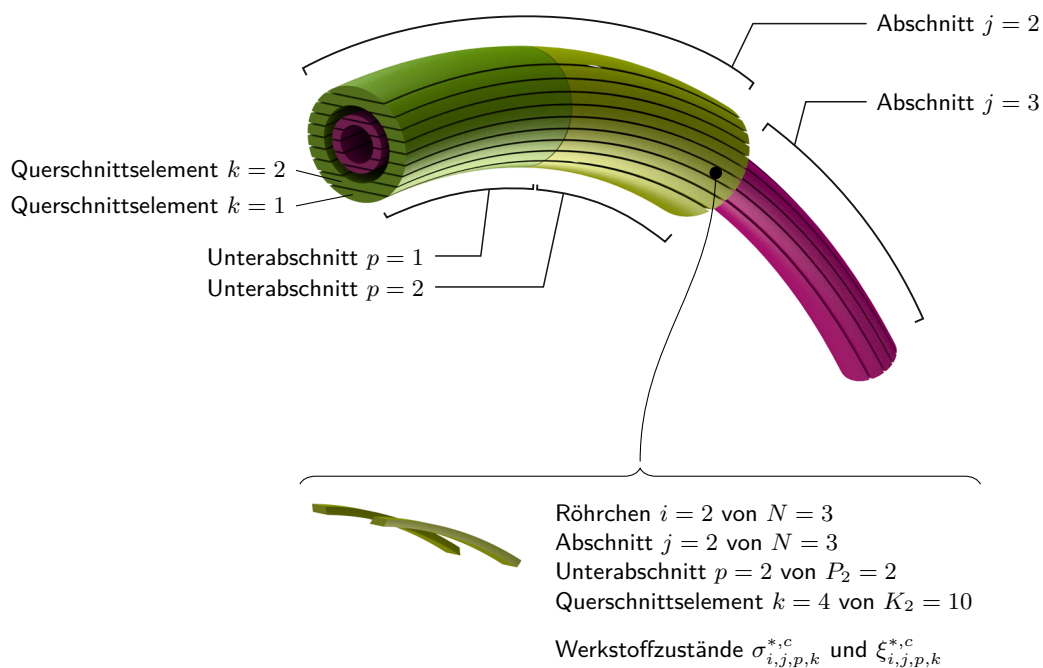
$$\Delta L_j^u = \begin{cases} +1 & \text{für } \text{sign}(\dot{L}_j^u) > 0 \\ L_j^{u-1} & \text{für } \text{sign}(\dot{L}_j^u) = 0 \\ -1 & \text{für } \text{sign}(\dot{L}_j^u) < 0 \end{cases} \quad \forall j \in \{1, \dots, N\} \quad (5.29)$$

ausgewertet werden. Dieser gibt an, ob Kanülenabschnitte in der Vergangenheit gewachsen oder geschrumpft sind. Der Vergleich

$$\Delta L_j^u \neq \Delta L_j^{u-1} \quad \forall i \in \{1, \dots, N\} \quad \forall u \in \{1, \dots, U\} \quad (5.30)$$

liefert diejenigen Zeitpunkte  $u$ , bei denen es zu einer Bewegungsrichtungsumkehr und damit zur Entstehung neuer Unterabschnitte kommt.

**Biegemomentengleichgewicht** Der Zusammenhang zwischen Biegemoment und Krümmung eines pseudoelastischen Röhrens an einer beliebigen Stelle seines Rückgrats  $s_i$  hängt von seinen Werkstoffzuständen, gespeichert in  $\sigma_{k,i}^*(s_i, t)$  und  $\xi_{k,i}^*(s_i, t)$  mit  $k = 1, \dots, K_i$



**Abbildung 5.13.:** Beispielhafte Diskretisierung einer Kanüle. Dargestellt sind die Abschnitte  $j = 2$  und  $j = 3$  einer Kanüle aus drei Röhrchen.

und  $i = 1, \dots, N$ , ab. Diese beiden Zustände sind abhängig von ihrer räumlichen Lage  $k$  innerhalb des Querschnitts sowie von ihrer räumlichen Lage  $s_i$  entlang der Röhrchenachse. Die Zerlegung des Kanülenrückgrats in stückweise konstant gekrümmte Unterabschnitte lässt es zu, die Werkstoffhistorie auch stückweise konstant zu speichern. Abbildung 5.13 verbildlicht die verwendete Diskretisierung. Die kontinuierlich über  $s_i$  und  $t$  verteilten Kanülenzustände  $\sigma_{k,i}^*(s_i, t)$  und  $\xi_{k,i}^*(s_i, t)$  werden dazu für jedes Röhrchen  $i$  in jedem Unterabschnitt  $(j, p)$  für alle Querschnittselemente  $k$  in die Zustände  $\sigma_{i,j,p,k}^{*,c}$  und  $\xi_{i,j,p,k}^{*,c}$  zerlegt. Innerhalb eines Unterabschnitts sind diese Zustände nichtmehr abhängig von  $t$ , sondern nur noch vom Zyklus  $c$ , und können für alle Querschnittselemente  $k \in \{1, \dots, K\}$  in die vektorwertigen Kanülenzustände  $\sigma_{i,j,p}^{*,c}$  und  $\xi_{i,j,p}^{*,c}$  zusammengefasst werden.

Für verschwindenden Luftspalt gilt mit

$$\begin{aligned}
 \bar{\kappa}_{j,p}^c &:= \kappa_{1,j,p}^c = \kappa_{2,j,p}^c = \dots = \kappa_{N,j,p}^c \\
 \forall p = 1, \dots, P_j \quad \forall j = 1, \dots, N \quad \forall c = 1, \dots, C,
 \end{aligned} \tag{5.31}$$

dass alle Krümmungen innerhalb eines Unterabschnitts gleich sind.  $\bar{\kappa}_{j,p}^c$  bezeichnet dabei die gemeinsame Gleichgewichtskrümmung aller Röhrchen eines Unterabschnitts  $(j, p)$  im Zyklus

c. Die Lösung der Momentengleichgewichte

$$\sum_{i=j}^N M_i(\bar{\kappa}_{j,p}^c, \sigma_{i,j,p}^{*,c}, \xi_{i,j,p}^{*,c}) = 0 \quad (5.32)$$

$$\forall p = 1, \dots, P_j \quad \forall j = 1, \dots, N \quad \forall c = 1, \dots, C$$

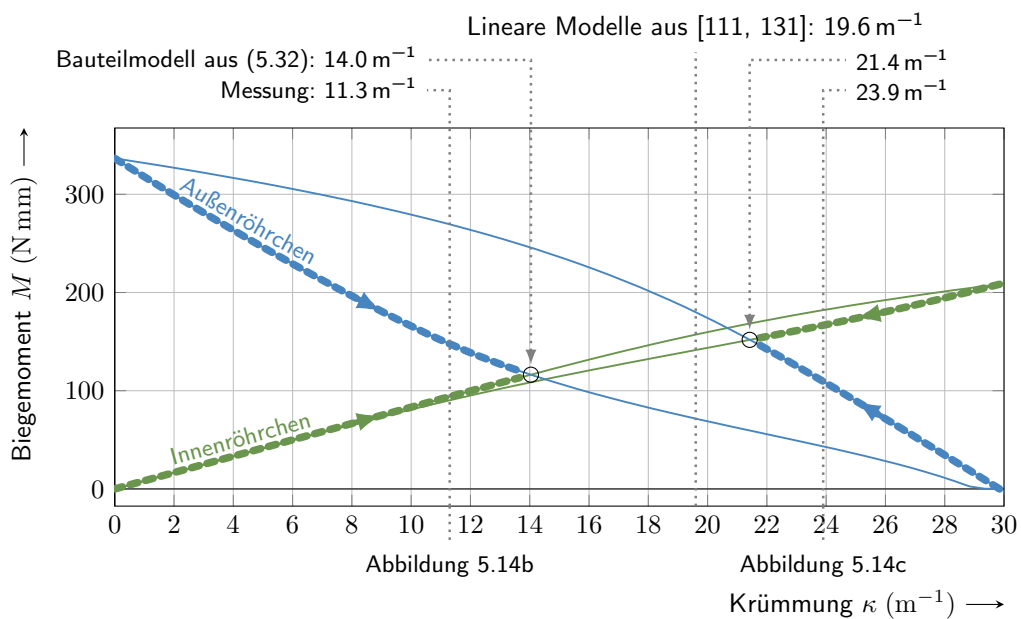
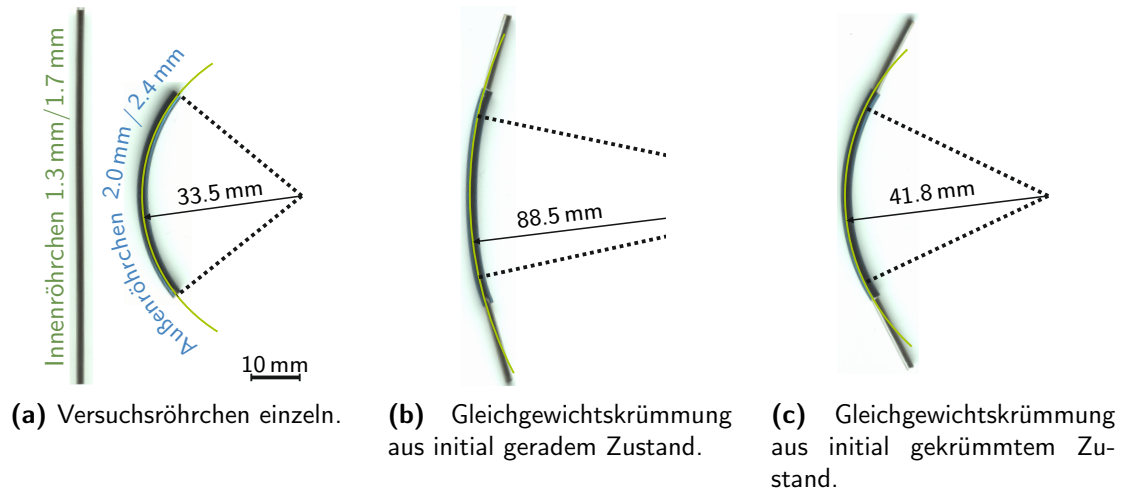
mit  $M_i$  aus (4.25) liefert die Gleichgewichtskrümmungen  $\bar{\kappa}_{j,p}^c$ . Zur einfacheren Lesbarkeit in den nachfolgenden Berechnungen werden die zugehörigen Gleichgewichtsbiegemomente aus der Lösung von (5.32) geschrieben als

$$\bar{M}_{i,j,p}^c := \begin{cases} M_i(\bar{\kappa}_{j,p}^c, \sigma_{i,j,p}^{*,c}, \xi_{i,j,p}^{*,c}) & i \geq j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (5.33)$$

Die Fallunterscheidung definiert Biegemomente in Abschnitten in denen ein Röhrchen nicht mehr vorkommt als Null. Abbildung 5.12 verdeutlicht diese Definition.

**Experiment** Um die Modellberechnung der Gleichgewichtskrümmungen zu überprüfen, wurde ein Experiment mit zwei NiTi-Röhrchen ohne Antriebseinheit durchgeführt. Das vorgekrümmte Außenröhrchen sowie das gerade Innenröhrchen aus Abbildung 5.14a wurden verwendet, um unterschiedliche Gleichgewichtskrümmungen als Folge der Krümmungshistorie nachzuweisen. Die Formeinprägung für das vorgekrümmte Röhrchen erfolgt mit der in Abschnitt 3.1 beschriebenen Methode. Das gerade Röhrchen wurde, wie vom Hersteller geliefert, verwendet. Die beiden Versuchsröhre wurden, mit dem in Abschnitt 3.2 beschriebenen Vorgehen, durch Zug-Druck-Messungen charakterisiert, ihre Werkstoffparameter gemäß Abschnitt 3.4 identifiziert und ihr Biegemomenten-Krümmungsverlauf mit dem Bauteilmodell aus Abschnitt 4.3 ermittelt. Wie der Vergleich der Werkstoffparameter in den Tabelle A.6 und A.7 zeigt, unterscheiden sich die Werkstoffparameter, insbesondere die Plateauspannungen, sehr stark voneinander, was auf die Wärmebehandlung zurückzuführen ist. Das Außenröhrchen verhält sich aufgrund seiner niedrigen Plateauspannung bei Entlastung deutlich nachgiebiger als das Innenröhrchen. Der Biegemomenten-Krümmungsverlauf in Abbildung 5.14d verdeutlicht dies.

In einem ersten Versuch wurde der Röhrchenzusammenbau möglichst straff um einen Stahlzylinder gewickelt, welcher den Außenradius entsprechend der Vorkrümmung  $\kappa_1^\circ$  des äußeren Röhrchens hat und anschließend bis zur resultierenden Gleichgewichtslage entlastet. Die resultierende Krümmung ist in Abbildung 5.14c zu sehen. Anschließend wurden die Röhrchen in einem Schraubstock in eine ungekrümmte Form gezwungen, was der Vorkrümmung  $\kappa_2^\circ$  des geraden inneren Röhrchens entspricht. Das daraus entstehende Gleichgewicht zeigt Abbildung 5.14b. Bereits mit dem bloßen Auge sind die unterschiedlichen resultierenden Krümmungen erkennbar. Die mittlere Krümmung der Röhrchen wurde aus dem ebenen Verlauf



(d) Hystereseverlauf von Biegemoment über Krümmung für beide Versuchsröhrchen und die daraus resultierenden Gleichgewichtskrümmungen. Um ein einfaches grafisches Ablesen der Schnittpunkte zu ermöglichen, ist der negative Wert des Biegemoments des Außenrohres dargestellt.

**Abbildung 5.14.:** Verschiedene Gleichgewichtskrümmungen eines Zusammenbaus von zwei Röhrchen als Resultat der Werkstoffhysterese, nach [47].



der Röhrenachsen rekonstruiert. Die Aufnahmen der unterschiedlichen Gleichgewichtslagen wurden mit einem *HP ScanJet 3400C* Scanner gewonnen. Dieser bietet eine Auflösung von 600dpi, was  $42.3\ \mu\text{m}$  pro Bildpunkt entspricht. Um die nötigen Informationen zu extrahieren, wird dieser Wert als hinreichend erachtet. Die Umrisse des Außenröhrchens wurden mit Hilfe des Kantenerkennungsalgorithmus *edge* in Matlab in den Abbildungen 5.14a-5.14b im Bereich zwischen den gepunkteten Linien detektiert. Die Regression von Kreisen mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate an die Koordinaten der Innen- und Außenkanten und die anschließende Mittelwertbildung der beiden Radien liefert schließlich die gemessenen Krümmungsradien für die beiden Lastfälle aus den Abbildungen 5.14b und 5.14c. Die Momenten-Krümmungs-Charakteristiken für die beiden Versuchsröhrchen sind in Abbildung 5.14d dargestellt. Analog dem Vorgehen im Experiment wurden die Modelle jeweils bis zu der Krümmung  $\kappa_1^\circ$  beziehungsweise  $\kappa_2^\circ$  belastet und anschließend bis zum Momentengleichgewicht entsprechend (5.32) entlastet. Die Messwerte und Modellergebnisse werden oberhalb des Diagramms in Abbildung 5.14d verglichen. Die Modelle aus den Publikationen von Webster III et al. [131] oder Sears und Dupont [111] verwenden ein linearelastisches Werkstoffgesetz und liefern mit gleichem  $E$ -Modul für beide Röhrchen dieselbe Gleichgewichtskrümmung für beide Lastfälle. Die Abweichungen zwischen Modell und Messung lassen sich durch falsche Werkstoffparameter erklären. Die Zug- und Druckmessungen der beiden Versuchsröhrchen wurden ohne Berücksichtigung der Materialveränderung durch wiederholte Belastung durchgeführt. Das dargestellte Biegeexperiment wurde mehrfach durchgeführt, ebenso die anschließend aufgenommenen Zug- und Druckmessungen. Wie in Abschnitt 3.1 erläutert, führt eine wiederholte Verformung von NiTi zu einer Veränderung des Werkstoffverhaltens. Die verwendeten Parameter beschreiben aus diesem Grund nur die Stichprobe der Zug-Druckmessungen, nicht jedoch das durchgeführte Experiment.

## 5.4. Abschätzung des Übergangswinkels

**Annahmen und Lösung** Wie bereits in Abschnitt 5.2 erläutert und in den Abbildungen 5.4, 5.14b und 5.14c deutlich erkennbar ist, verlaufen die Röhrenachsen an den Übergangstellen der Abschnitte nicht tangential. Selbst bei Luftspalten im Bereich von unter  $100\ \mu\text{m}$  entsteht eine deutliche Winkeldifferenz der Röhrenachsen, wie das  $\Delta\Theta(0)$ -Diagramm in Abbildung 5.9 zeigt. Dieser Abschnitt widmet sich nun der Abschätzung dieser Winkeldifferenz zur späteren Verwendung in der kinematischen Kanülenbeschreibung.

Dazu wird in jedem Abschnitt gemäß Abbildung 5.12 der jeweils letzte Unterabschnitt  $P_j$  betrachtet und, unabhängig von seiner tatsächlichen Länge, als kontinuierliche Momentenübergangszone zwischen dem Biegemoment im Unterabschnitt  $(j, P_j)$  und  $(j + 1, 1)$  modelliert. Unter der Annahme eines kleinen Luftspalts werden ausschließlich die beiden äußersten Kontaktpunkte zwischen dem jeweiligen Außenröhrchen und dem nächst-inneren Röhrchen

berücksichtigt, wie in Abbildung 5.15 dargestellt. Zwischen diesen Punkten sorgt ein Kräftepaar für die Entstehung eines Biegemomentenübergangs vom Gleichgewichtsbiegemoment des aktuellen Unterabschnitts hin zum Gleichgewichtsbiegemoment des darauffolgenden. Die im vorangegangenen Abschnitt berechneten und in Abbildung 5.12 dargestellten Momentensprünge an den Abschnittübergängen werden somit vermieden. Der Einfluss von Röhrchen, die sich tiefer in der Kanüle befinden, wird dabei nur durch deren Beitrag zum Gleichgewichtsbiegemoment berücksichtigt, nicht jedoch durch zusätzliche Kontaktkräfte. Im Folgenden werden daher für alle Abschnitte  $j = 1, \dots, N - 1$  einer Kanüle nur noch das jeweils äußerste Röhrchen  $i = j$  sowie das nächst-innere  $i = j + 1$  betrachtet. Die Analyse des Kontaktverhaltens in Abschnitt 5.2 und insbesondere in Abbildung 5.7 zeigt, dass sich zwischen den beiden äußeren Kontaktpunkten für kleinen Luftspalt ein nahezu linearer Momentenübergang einstellt. Aus (5.32)-(5.33) sind die Gleichgewichtskrümmungen  $\bar{\kappa}_{j,p}^c$  und die Gleichgewichtsbiegemomente  $\bar{M}_{i,j,p}^c$  bereits bekannt. Der Biegemomentenverlauf wird nun als lineare Funktion

$$\begin{aligned} \widetilde{M}_{i,j}^c(\bar{s}_j) &\approx (\bar{M}_{i,j+1,1}^c - \bar{M}_{i,j,P_j}^c) \frac{\bar{s}_j}{l_j} + \bar{M}_{i,j,P_j}^c \\ \forall i &= j, \dots, N \quad \forall j = 1, \dots, N - 1 \quad \forall c = 1, \dots, C \end{aligned} \quad (5.34)$$

zwischen den beiden äußeren Kontaktpunkten mit dem noch unbekanntem Abstand  $l_j$  approximiert. Wie bereits erwähnt, wird die tatsächliche Länge des Unterabschnitts  $(j, P_j)$  dabei außer Acht gelassen. Die im Folgenden beschriebenen Berechnungsschritte vom Biegemomentenübergang zum Krümmungsübergang und schließlich zur Verschiebung werden beispielhaft in Abbildung 5.15 zusammengefasst. Auf die Indizierung aller Größen in Abhängigkeit des Zyklus  $c$  wird im weiteren Verlauf dieses Abschnitts zur besseren Lesbarkeit verzichtet. Als Referenzsystem wird die natürliche Koordinate  $\bar{s}_j$  genutzt, welche durch den Kreis mit der Gleichgewichtskrümmung  $\bar{\kappa}_{j,P_j}$  definiert wird. Der Ursprung von  $\bar{s}_j$  liegt am inneren der beiden berücksichtigten Kontaktpunkte. Der Punkt  $\bar{s}_j = l_j$  bezeichnet folglich die Lage des äußersten Kontaktpunkts, an dem das äußere Röhrchen des betrachteten Abschnitts endet. Der lineare Biegemomentenübergang  $\widetilde{M}_{i,j}(\bar{s}_j)$  führt zu einem Krümmungsübergang  $\widetilde{\kappa}_{i,j}(\bar{s}_j)$ , welcher durch das inverse Bauteilgesetz, das heißt der Invertierung von (4.25), aus dem Biegemomentenverlauf ermittelt werden kann. Da die Invertierung nicht analytisch erfolgen kann, wird der Krümmungsbereich zwischen der aktuellen Gleichgewichtskrümmung  $\bar{\kappa}_{j,P_j}$  und der Gleichgewichtskrümmung im nachfolgenden Segment  $\bar{\kappa}_{j+1,1}$  in äquidistanten Schritten diskretisiert

$$\kappa_{i,j,\text{grid}} = \begin{cases} \bar{\kappa}_{j,P_j}, \bar{\kappa}_{j,P_j} \pm \Delta\kappa, \bar{\kappa}_{j,P_j} \pm 2\Delta\kappa, \dots, \kappa_i^\circ & i = j \\ \bar{\kappa}_{j,P_j}, \bar{\kappa}_{j,P_j} \pm \Delta\kappa, \bar{\kappa}_{j,P_j} \pm 2\Delta\kappa, \dots, \bar{\kappa}_{j+1,1} & i > j \end{cases}. \quad (5.35)$$

Das Vorzeichen der Schrittweite  $\Delta\kappa$  ergibt sich entsprechend für steigende oder fallende Krümmungsübergänge. Zu jeder Krümmungstützstelle aus  $\kappa_{i,j,\text{grid}}$  wird nun das zugehörige Biegemoment aus dem direkten Bauteilmodell (4.25) berechnet. Somit liegt nun das Bauteilgesetz  $M_i(\kappa)$  numerisch vor und kann durch Vertauschen von unabhängigen und abhängigen Werten zu  $\kappa(M_i)$  umgekehrt werden. Durch lineare Interpolation zwischen den Stützstellen entsteht

anschließend die approximierte Umkehrfunktion. So kann schließlich der Krümmungsübergang  $\tilde{\kappa}_{i,j}(\bar{s}_j)$  zum entsprechenden Biegemomentenübergang (5.34) ermittelt werden. Unter der Annahme eines kleinen Luftspalts resultieren ebenfalls nur kleine Verschiebungen zwischen der tatsächlichen Kanülenform und der ideal kreisförmigen Referenzkonfiguration, beschrieben durch den Pfad  $\bar{s}_j$  mit der Krümmung  $\bar{\kappa}_{j,P_j}$ . Die geometrisch exakte Lösung

$$|\kappa_{i,j}(\bar{s}_j) - \bar{\kappa}_{j,P_j}| = \frac{v''_{i,j}(\bar{s}_j)}{\sqrt{(1 + v'^2_{i,j}(\bar{s}_j))^3}} \quad \forall i = j, j+1 \quad \forall j = 1, \dots, N-1 \quad (5.36)$$

der Verschiebung  $v_{i,j}(\bar{s}_j)$  des  $i$ -ten Röhrchens im  $j$ -ten Abschnitt in  $y_j$ -Richtung relativ zur Referenzkonfiguration  $\bar{s}_j$  wird durch die Linearisierung

$$v''_{i,j}(\bar{s}_j) \approx \tilde{\kappa}_{i,j}(\bar{s}_j) - \bar{\kappa}_{j,P_j} \quad \forall i = j, j+1 \quad \forall j = 1, \dots, N-1 \quad (5.37)$$

vereinfacht. Aus dieser kinematischen Beziehung für die beiden äußeren Röhrchen jedes Abschnittsendes müssen durch die Bestimmung von vier Integrationskonstanten und der noch unbekanntem Kontaktbereichslänge  $l_j$  die Übergangswinkel  $\delta_j$  ermittelt werden. Dazu muss das Randwertproblem mit den analog zu den allgemeinen Kontaktbedingungen (5.22)-(5.23) gewonnenen Randbedingungen

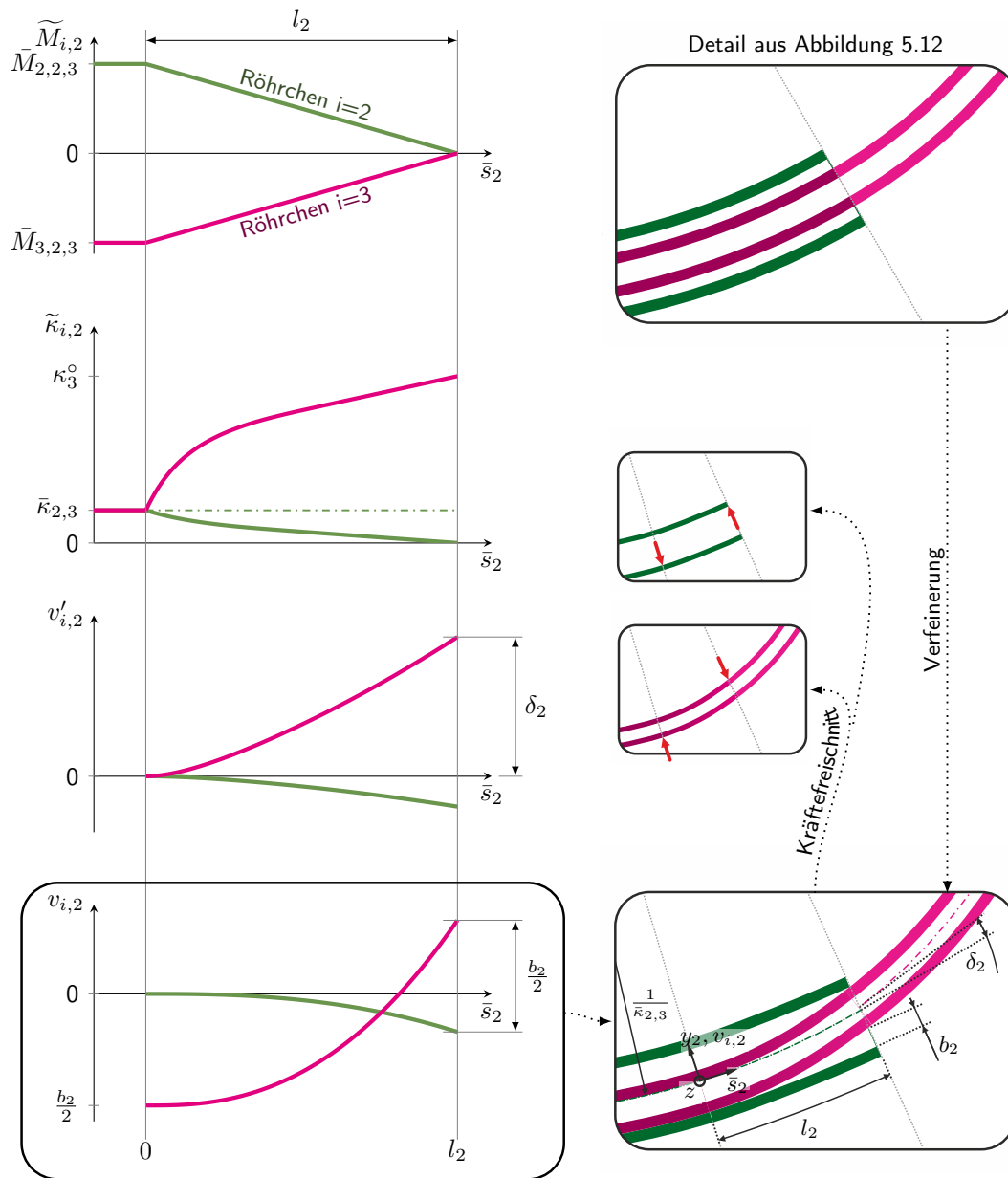
$$v'_{i,j}(0) = 0 \quad \forall i = j, j+1 \quad \forall j = 1, \dots, N-1 \quad (5.38)$$

$$v_{i,j}(0) = \begin{cases} 0 & i = j \\ \frac{b_j}{2} \text{sign}(\bar{\kappa}_{j+1,1} - \bar{\kappa}_{j,P_j}) & i = j+1 \end{cases} \quad \forall i = j, j+1 \quad \forall j = 1, \dots, N-1 \quad (5.39)$$

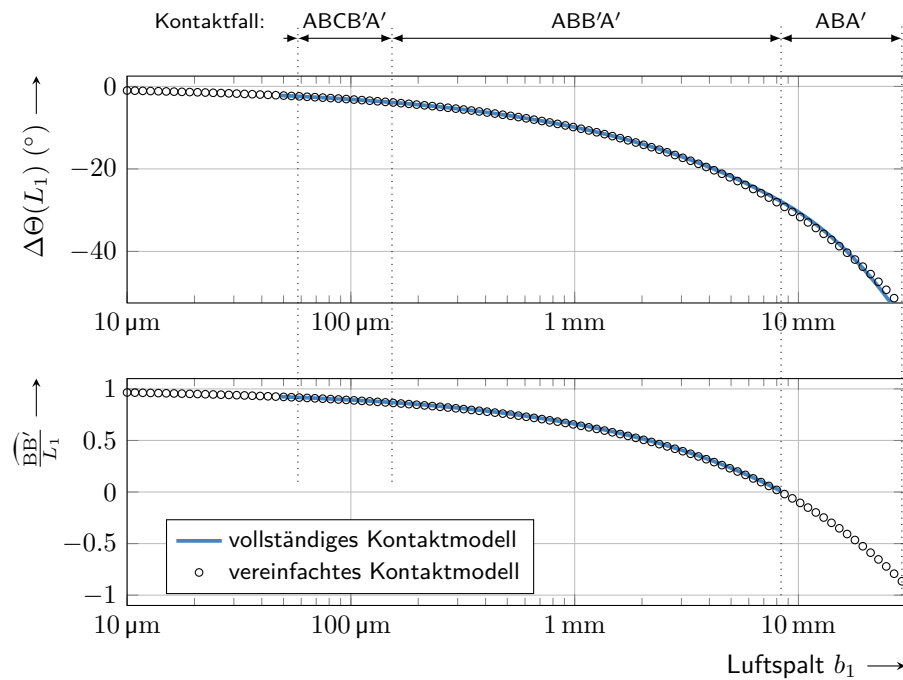
$$v_{j+1,j}(l_j) = v_{j,j}(l_j) - \frac{b_j}{2} \text{sign}(\bar{\kappa}_{j+1,1} - \bar{\kappa}_{j,P_j}) \quad \forall j = 1, \dots, N-1 \quad (5.40)$$

gelöst werden. Die erforderlichen Integrationskonstanten werden am inneren Kontaktpunkt gewonnen. Die Randbedingungen (5.38) stellen analog zu (5.23) sicher, dass beide Röhrchen am inneren Kontaktpunkt bei  $\bar{s}_j = 0$  tangential zur Referenzkonfiguration verlaufen. Die Randbedingungen (5.39) erzwingen analog zu (5.22) den Kontakt der beiden Röhrchen am inneren Kontaktpunkt in Abhängigkeit der Krümmung und des Luftspalts. Die Randbedingung (5.40) am äußeren Kontaktpunkt stellt ebenfalls analog zu (5.22) sicher, dass das innere Röhrchen nach dem Durchqueren des Luftspalts wieder in Kontakt mit dem Außenröhrchen tritt. Mit Hilfe eines Nullstellensuchverfahrens kann (5.40) nach der unbekanntem Länge  $l_j$  gelöst werden. Abschließend ergibt sich der Übergangswinkel zwischen den Abschnitten  $j$  und  $j+1$ , unter Berücksichtigung des Zyklus  $c$ , als

$$\delta_j^c := (v^c)'_{j+1,j}(l_j) \quad \forall j = 1, \dots, N-1 \quad \forall c = 1, \dots, C \quad (5.41)$$



**Abbildung 5.15.:** Kinematische Verfeinerung an den Enden eines Abschnitts zur Berücksichtigung des Luftspalts für das Beispiel aus Abbildung 5.12, nach [47].



**Abbildung 5.16.:** Vergleich der Ergebnisse des vollständigen und des vereinfachten Kontaktmodells.

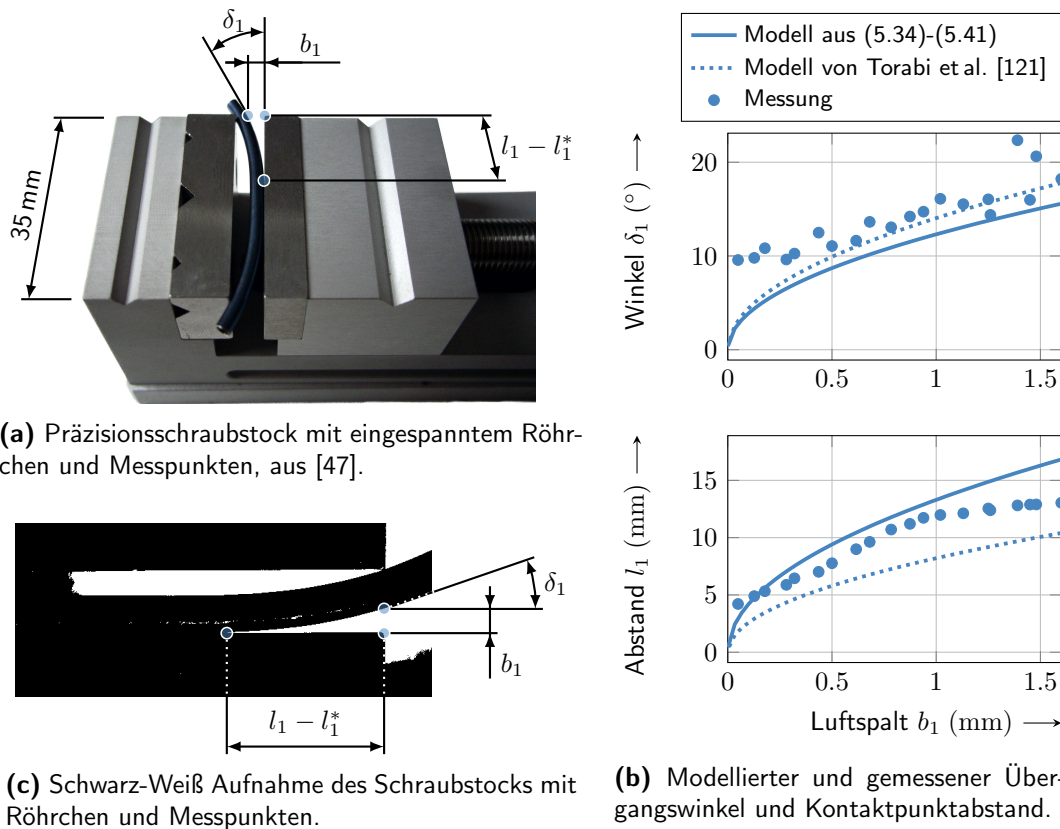
**Modellvergleich** Das Lösungsvorgehen zur Abschätzung des Übergangswinkels nutzt einige Vereinfachungen gegenüber dem vollständigen Kontaktmodell aus Abschnitt 5.2. Die bereits in Abbildung 5.9 vorgestellte Parameterstudie wurde mit dem vereinfachten Kontaktmodell (5.34)-(5.41) und den selben Parametern wiederholt. Abbildung 5.16 zeigt den Vergleich der Ergebnisse der beiden Modelle. Der Übergangspunkt zwischen dem Außenröhrchen und dem Innenröhrchen liegt im vollständigen Kontaktmodell bei  $s_1 = L_1$  und im in diesem Abschnitt vorgestellten, vereinfachten Kontaktmodell bei  $\bar{s}_1 = l_1$ . Die Übergangswinkel in diesem Punkt lassen sich mit der Entsprechung

$$\Delta\Theta(L_1) \hat{=} v'_{2,1}(l_1) - v'_{1,1}(l_1) \stackrel{(5.41)}{=} \delta_1 - v'_{1,1}(l_1) \quad (5.42)$$

vergleichen. Ebenso entspricht die Bogenlänge

$$\widehat{BB'} \hat{=} L_1 - 2l_1 \quad (5.43)$$

des Bereiches näherungsweise konstanter Krümmung der Differenz aus dem Abstand  $l_1$  der äußeren Kontaktpunkte und der Gesamtlänge  $L_1$  des äußeren Röhrchens. Im Bereich ab vier Kontaktpunkten zeigt sich eine sehr gute Übereinstimmung der beiden Modelle. Bemerkenswert ist, dass der Abstand der beiden Kontaktpunkte  $l_1$  unabhängig von der überlappenden



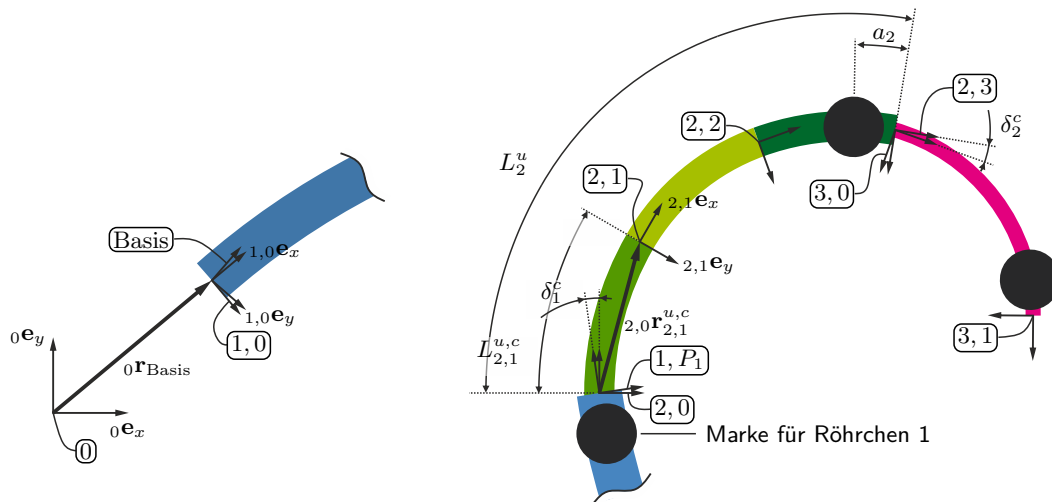
**Abbildung 5.17.:** Versuchsaufbau sowie Mess- und Modellergebnisse des Schraubstockversuchs.

Röhrchenlänge  $L_1$  berechnet werden kann. Der Luftspaltbereich mit drei Kontaktpunkten kann durch das vereinfachte Modell deshalb jedoch nicht korrekt beschrieben werden, da die luftspaltfreie Gleichgewichtskrümmung der beiden Röhrchen nicht erreicht wird. Der Abstand  $l_1$  zwischen den äußeren Kontaktpunkten wird dann falsch berechnet. Für den Übergangswinkel liegt aber trotz der vereinfachenden Modellannahmen eine gute Abschätzung vor. Kontaktfälle mit mehr als sechs Kontaktpunkten wurden in der vollständigen Kontaktsimulation, aufgrund der deutlich zunehmenden Problemkomplexität, nicht betrachtet. Die Berechnung von Übergangswinkeln durch das vereinfachte Verfahren liefert hingegen auch für kleinste Luftspalte eine Lösung. Die getroffenen Näherungen gewinnen dabei zudem an Richtigkeit.

**Experiment** Um die Modellrechnungen im Experiment zu überprüfen, wurde ein Präzisionsschraubstock genutzt, um ein vorgekrümmtes NiTi-Röhrchen zwischen zwei parallelen Platten einzuspannen. Das elastokinematische Modell ist in der Lage diesen Fall abzubilden, indem die Steifigkeit des äußeren Röhrchens als unendlich angenommen wird und dessen Innen-

durchmesser dem Klemmbackenabstand des Schraubstocks entspricht. Auf diese Weise ist es möglich den Abstand  $l_1$  der äußeren Kontaktpunkte und den Übergangswinkel  $\delta_1$  für unterschiedliche Luftspalte  $b_1$  zu messen. Abbildung 5.17a zeigt den verwendeten Schraubstock mit dem eingespannten Röhrchen. Das Röhrchen wurde im Experiment mit mehreren LED's hinterleuchtet und kopfüber auf dem bereits für die Versuche aus Abbildung 5.14 verwendeten Scanner platziert. Die in den Scanner-Aufnahmen verwendete LED-Hinterleuchtung ist in Abbildung 5.17a nicht dargestellt. Das Röhrchen mit den Parametern aus Tabelle A.7 wurde zunächst vollständig geklemmt, um den Luftspalt so nah wie möglich zu Null zu führen. Der Klemmbackenabstand wurde anschließend in kleinen Schritten erhöht und nach jedem Schritt eine Scanaufnahme durchgeführt. Die Messdaten in Abbildung 5.17b wurden durch manuelles Erfassen der Kontaktpunkte sowie der Tangente des Röhrchens am Klemmbackenende in einer Schwarz-Weiß-Aufnahme der Bilder, wie in Abbildung 5.17c dargestellt, gewonnen. Wie auch an der  $v_{i,2}(s_2)$ -Kurve in Abbildung 5.15 zu erkennen ist, beginnen die Röhrchen nach dem inneren Kontaktpunkt zunächst nur sehr langsam sich voneinander zu entfernen. Es wird angenommen, dass der Spalt zwischen Klemmbacke und Röhrchen nicht erkennbar ist, solange der Abstand zwischen Röhrchen und Klemmbacke kleiner als die Scanner-Auflösung ist. Aus diesem Grund wurde der gemessene Wert für die Länge  $l_1$  um den zusätzlichen Abstand  $l_1^*$  korrigiert. Dazu wurde die Länge  $l_1^*$ , bei der  $v_2(l_1^*)$  die Scanner Auflösung von  $42.3 \mu\text{m}$  erreicht, für jeden Messpunkt jeweils zu dem Wert  $l_1$  addiert. Die korrigierten Messwerte und die zugehörigen Modellergebnisse sind in Abbildung 5.17b dargestellt. Bei sehr kleinem Klemmbackenabstand konnte eine Deformation des Röhrchenquerschnitts durch die Kante der Klemmbacke beobachtet werden. Im Balkenmodell wird jedoch angenommen, dass die Röhrchenquerschnitte kreisförmig bleiben und durch den punktuellen Kraftangriff keine Deformation des Querschnitts erfolgt. Dies ist eine mögliche Begründung für die Abweichung zwischen Messung und Modellrechnung für kleine Luftspalte. Mit der Veränderung des Klemmbackenabstands verändert sich auch die Röhrchenlänge innerhalb der Klemmbacken, was eine Relativbewegung zwischen Klemmbacke und Röhrchen an den beiden äußeren Kontaktpunkten erfordert. Die auftretende, aber nicht modellierte, Reibung kann deshalb ebenfalls einen Einfluss auf die Ergebnisse haben.

Von Torabi et al. [121] wird eine rein kinematische Lösung für den Übergangswinkel  $\delta_j$  eines gekrümmten Innenröhrchens aus einem geraden Außenröhrchen präsentiert. Mit der Annahme, dass das Außenröhrchen von dominierender Steifigkeit ist und gerade bleibt und das Innenröhrchen nach dem Ablösen am inneren der beiden Kontaktpunkte sofort seine Vorkrümmung zurückerlangt, ergibt sich die ebenfalls in Abbildung 5.17b dargestellte Lösung. Die von Torabi et al. [121] getroffenen Annahmen bilden das Schraubstockbeispiel sehr gut ab. Für Röhrchenkombinationen, bei denen das Außenröhrchen vorgekrümmt oder nicht von dominierender Steifigkeit ist, ist die Abschätzung jedoch schlechter geeignet.



**Abbildung 5.18.:** Definition von Koordinatensystemen entlang des Kanülenrückgrats für eine beispielhafte Kanülenszusammensetzung aus drei Röhrchen, nach [47].

## 5.5. Gesamtkinematik

In diesem Abschnitt wird eine rein kinematische Beschreibung ebener Kanülenszusammensetzungen vorgestellt. Ziel ist es, die Bewegung der Kanülenspitze und zu Messzwecken auch die Positionen von Messmarken an den Abschnittsenden im dreidimensionalen Raum zu ermitteln. Die elastokinematischen Berechnungen der Abschnitte 5.3 und 5.4 liefern die Längen der Unterabschnitte  $L_{j,p}^{u,c}$ , deren Gleichgewichtskrümmung  $\bar{\kappa}_{j,p}^c$  und die Übergangswinkel  $\delta_j^c$  an den Abschnittsenden. Die Gesamtheit dieser Größen beschreibt den kinematischen Zustand der Kanüle zu jedem Zeitpunkt. Die Grundausrichtung und Position der Antriebseinheit liefert die zeitlich konstanten Kinematikparameter. Die ebene Lage des Kanülenrückgrats wird aus der Bauteilkinematik (4.7)-(4.8) gewonnen, indem deren Lösung, in Form stückweise konstant gekrümmter Kreissegmente, abgebildet durch Transformationsmatrizen, aufsummiert wird. Ein solches Vorgehen findet sich für linearelastisches Materialverhalten mit abschnittsweise konstant gekrümmten Röhrchen beispielsweise bei [23, 24, 74] und in einem Übersichtsartikel in [130]. Diese rein kinematischen Modelle ermöglichen eine einfache Kalibrierung der Kinematikparameter zur Erhöhung der Modellgenauigkeit. Die vorliegende Arbeit erweitert die genannten Modelle durch nicht-tangentiale Abschnittsübergänge und veränderliche Krümmungen der Kanüle während der Bewegung, aufgrund der Werkstoffhysterese.

Zunächst wird ein Satz an Grundtransformationen definiert. Jeder Unterabschnitt  $p$  in Abschnitt  $j$  beginnt dabei im Koordinatensystem  $(j, p-1)$  und endet in  $(j, p)$ . Abbildung 5.18 verdeutlicht diese Definition für ein Beispiel im Abschnitt  $j = 2$  mit  $P_2 = 3$  Unterabschnitt-



ten. Aus der Integration der Bauteilkinematik (4.7)-(4.8) mit der konstanten Krümmung  $\bar{\kappa}_{j,p}^c$  über der Bogenlänge  $L_{j,p}^{u,c}$  ergibt sich der Verschiebungsvektor

$${}_{j,p-1}\mathbf{r}_{j,p}^{u,c} = \begin{cases} \frac{1}{\bar{\kappa}_{j,p}^c} \begin{bmatrix} \sin(\bar{\kappa}_{j,p}^c L_{j,p}^{u,c}) \\ 1 - \cos(\bar{\kappa}_{j,p}^c L_{j,p}^{u,c}) \\ 0 \end{bmatrix} & \text{für } \bar{\kappa}_{j,p}^c \neq 0 \\ \begin{bmatrix} L_{j,p}^{u,c} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \text{für } \bar{\kappa}_{j,p}^c = 0 \end{cases} \quad (5.44)$$

zwischen den Koordinatensystemen der Unterabschnitte, sowohl für gerade, als auch gekrümmte Unterabschnitte. Die  $x$ -Achsen der Koordinatensysteme  $\overline{(j, p-1)}$  und  $\overline{(j, p)}$  sind stets tangential zur Röhrenachse, die  $y$ -Achsen zeigen auf den Krümmungsmittelpunkt. Die Integrationskonstanten zur Lösung von (4.7)-(4.8) ergeben sich aus den Randbedingungen entsprechend der Lage und Orientierung des Koordinatensystems  $\overline{(j, p-1)}$ . Die Rotationsmatrix

$$\mathbf{R}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

wird genutzt, um das Koordinatensystem  $\overline{(j, p-1)}$  durch den Winkel  $\theta = \bar{\kappa}_{j,p}^c L_{j,p}^{u,c}$  in die Orientierung von  $\overline{(j, p)}$  zu überführen. Die Kombination von (5.44) und (5.45) liefert schließlich die Transformation

$$\mathbf{T}_{j,p}^{u,c} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(\bar{\kappa}_{j,p}^c L_{j,p}^{u,c}) & {}_{j,p-1}\mathbf{r}_{j,p}^{u,c} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.46)$$

zwischen den Unterabschnitten  $(j, p-1)$  und  $(j, p)$ . Die Übergangstransformation

$$\mathbf{T}_j^c = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(\delta_{j-1}^c) & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.47)$$

bildet die Verkippung der Röhren aufgrund des Luftspalts durch den Übergangswinkel  $\delta_{j-1}^c$  ab. Sie transformiert das Koordinatensystem  $\overline{(j-1, P_{j-1})}$  am Ende von Abschnitt  $j-1$  in das Koordinatensystem  $\overline{(j, 1)}$  am Beginn von Abschnitt  $j$ .

Die Position und Ausrichtung der Antriebseinheit aus Abbildung 5.2 ist in sechs Freiheiten im Raum frei wählbar. Diese wird beschrieben durch die Verschiebung

$${}^0\mathbf{r}_{\text{Basis}} = \begin{bmatrix} r_{0x} & r_{0y} & r_{0z} \end{bmatrix}^T \quad (5.48)$$

der Führungsbuchse bezüglich des globalen Koordinatensystems  $\textcircled{0}$  in Abbildung 5.18 sowie deren Verdrehung

$$\mathbf{R}_{\text{Basis}} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_z & -\sin \alpha_z & 0 \\ \sin \alpha_z & \cos \alpha_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha_y & 0 & -\sin \alpha_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha_y & 0 & \cos \alpha_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_x & -\sin \alpha_x \\ 0 & \sin \alpha_x & \cos \alpha_x \end{bmatrix} \quad (5.49)$$

um die Euler-Winkel  $\alpha_x$ ,  $\alpha_y$  und  $\alpha_z$ . Die Basistransformation

$$\mathbf{T}_{\text{Basis}} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\text{Basis}} & 0\mathbf{r}_{\text{Basis}} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad (5.50)$$

liefert dann den Mittelpunkt der Führungsbuchse auf der Röhrchenaustrittsseite mit dem Koordinatensystem  $\textcircled{\text{Basis}}$ .

Für die Messung der Kanülenbewegung werden kugelförmige Marken an jedem Röhrchen befestigt. Deren Bedeutung wird in Abschnitt 7.3 noch einmal aus messtechnischer Perspektive erläutert. Die Marken werden konzentrisch auf jedem Röhrchen im Abstand  $a_j$  zum Röhrchenende befestigt. Wie in Abbildung 5.18 beispielhaft verdeutlicht wird, kann jeder Abschnitt durch das Produkt aus der Übergangstransformation  $\mathbf{T}_j$ , gefolgt von einer Reihe von Unterabschnitts-Transformationen  $\mathbf{T}_{j,p}$ , beschrieben werden. Das Produkt dieser Transformationen über alle Abschnitte von  $j = 1, \dots, i$  sowie der Basistransformation  $\mathbf{T}_{\text{Basis}}$  liefert die Transformation vom globalen Koordinatensystem  $\textcircled{0}$  zur Spitze des Röhrchens  $i$ . Das Anhängen der Transformation

$$\mathbf{T}_{\text{Marke},i}^c = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(-\bar{\kappa}_{i,P_j}^c a_i) & {}_{i,P_j-1}\mathbf{r}_{i,P_j}^c(-a_i) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.51)$$

von der Spitze von Röhrchen  $i$  zur entsprechenden Marke liefert schließlich

$$\mathbf{T}_i^{u,c} = \mathbf{T}_{\text{Basis}} \prod_{j=1}^i \left( \mathbf{T}_j^c \prod_{p=1}^{P_j} \mathbf{T}_{j,p}^{u,c} \right) \mathbf{T}_{\text{Marke},i}^c. \quad (5.52)$$

Der Ortsvektor  ${}_0\mathbf{r}_i$  vom globalen Koordinatenursprung zum Mittelpunkt der Marke am Röhrchen  $i$  ergibt sich schließlich aus

$$\begin{bmatrix} {}_0\mathbf{r}_i^{u,c} & 1 \end{bmatrix}^T = \mathbf{T}_i^{u,c} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T. \quad (5.53)$$

Im Allgemeinen wird die Länge eines gekrümmten Abschnitts durch die Steuergröße  $L_j^u$  festgelegt und in  $P_j$  Unterabschnitte der Länge  $L_{j,p}^{u,c}$  und der Krümmung  $\bar{\kappa}_{j,p}^c$  zerlegt. Jeder Abschnitt beginnt zudem mit einer Verkipfung durch den Übergangswinkel  $\delta_j^c$ . Zu Messzwecken wird an jedem Röhrchen eine Marke im Abstand  $a_j$  vom Röhrchenende befestigt. Für die

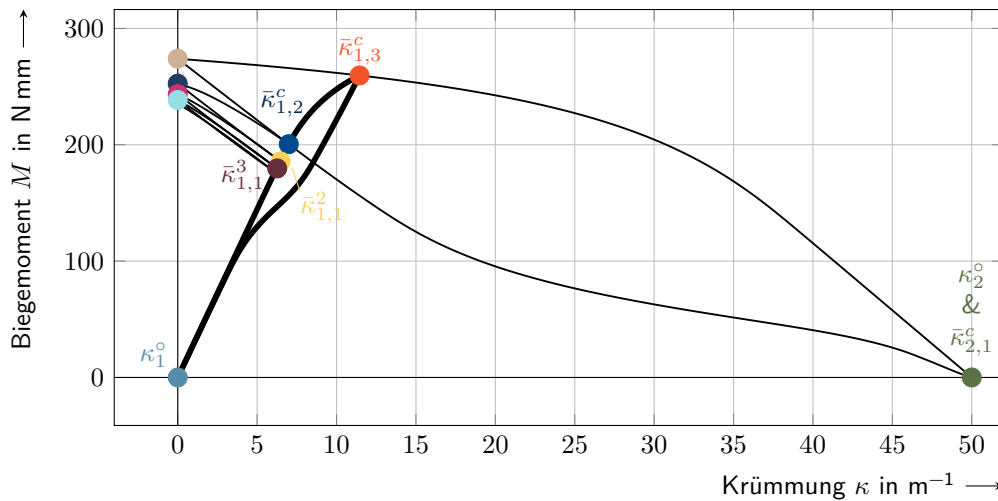
Antriebseinheit kommen die drei Parameter  $r_{0x}$ ,  $r_{0y}$  und  $r_{0z}$  für deren Position sowie die drei Parameter  $\alpha_x$ ,  $\alpha_y$  und  $\alpha_z$  für deren Ausrichtung hinzu. Die genaue Zahl der notwendigen Parameter hängt dabei von der Gestalt des Ansteuerprofils und der daraus resultierenden Anzahl an Unterabschnitten ab. Das Berechnungsvorgehen 4 fasst alle erforderlichen Berechnungsschritte zur Bestimmung des Ortsvektors der Spitze eines beliebigen Röhrchens zusammen.

<b>Ziel</b>	: Bestimmung der Position ${}^0\mathbf{r}_i^{u,c}$ des Endes von Röhrchen $i$ zum Zeitpunkt $u$ in Zyklus $c$ für das Ansteuerprofil $L_j^u$
<b>Erforderlich</b>	: Werkstoffparameter, Geometrieparameter, Kanülenzustände bei $u = 1$ und $c = 1$ , Position und Ausrichtung der Antriebseinheit, Position der Messmarke
<b>Bedingung</b>	: $L_j^u \forall i \in \{1, \dots, N\}, \forall u \in \{1, \dots, U\}$ bekannt
<b>1 Berechnungsvorgehen</b>	${}^0\mathbf{r}_i^{u,c} =$ Gesamtkinematik aus Bauteilmodell( $L_j^u$ )
<b>2</b>	Analysiere das Ansteuerprofil $L_j^u$ und bestimme daraus die Entwicklung der Kanülenzustände $\sigma_{i,j,p}^{*,c}$ und $\xi_{i,j,p}^{*,c}$ sowie die Längen $L_{j,p}^{u,c}$ aller Unterabschnitte
<b>3</b>	Berechne aus den Kanülenzuständen alle Gleichgewichtskrümmungen $\bar{\kappa}_{j,p}^c$ und Gleichgewichtsbiegemomente $\bar{M}_{i,j,p}^c$ mit (5.31)-(5.32)
<b>4</b>	Berechne aus den Gleichgewichtsbiegemomenten die Übergangswinkel $\delta_j^c$ mit (5.37)-(5.41)
<b>5</b>	Berechne den Ortsvektor ${}^0\mathbf{r}_i^{u,c}$ mit (5.53) aus der gegebenen Position und Ausrichtung der Antriebseinheit, den berechneten Gleichgewichtskrümmungen $\bar{\kappa}_{j,p}^c$ und Übergangswinkeln $\delta_j^c$ sowie dem zeitlichen Verlauf der Unterabschnittslängen $L_{j,p}^{u,c}$ zum Zeitpunkt $u$ im Zyklus $c$

**Berechnungsvorgehen 4** : Gesamtkinematik.

## 5.6. Hysterese des Trajektorienverlaufs

Die mit dem Modell abbildbare Hystereserscheinung im Trajektorienverlauf der Kanüle wird in diesem Abschnitt durch Modellanalysen und an einem Experiment verdeutlicht. Die Betrachtungen beziehen sich dabei ausschließlich auf die, entsprechend der Konvention in Tabelle 5.1 als Typ „01“ bezeichnete, Zusammensetzung mit einem geraden Außenröhrchen und einem gekrümmten Innenröhrchen. Das Innenröhrchen wird im Experiment jedoch durch einen Draht ersetzt, um die Geometrie- und Werkstoffeinflüsse auf die Krümmungsgleichgewichte durch vergleichbar große Flächenträgheitsmomente zu egalisieren. Grundsätzlich ist die Hystereserscheinung aber auch für eine Kombination aus zwei Röhrchen sichtbar, wie sich beispielsweise

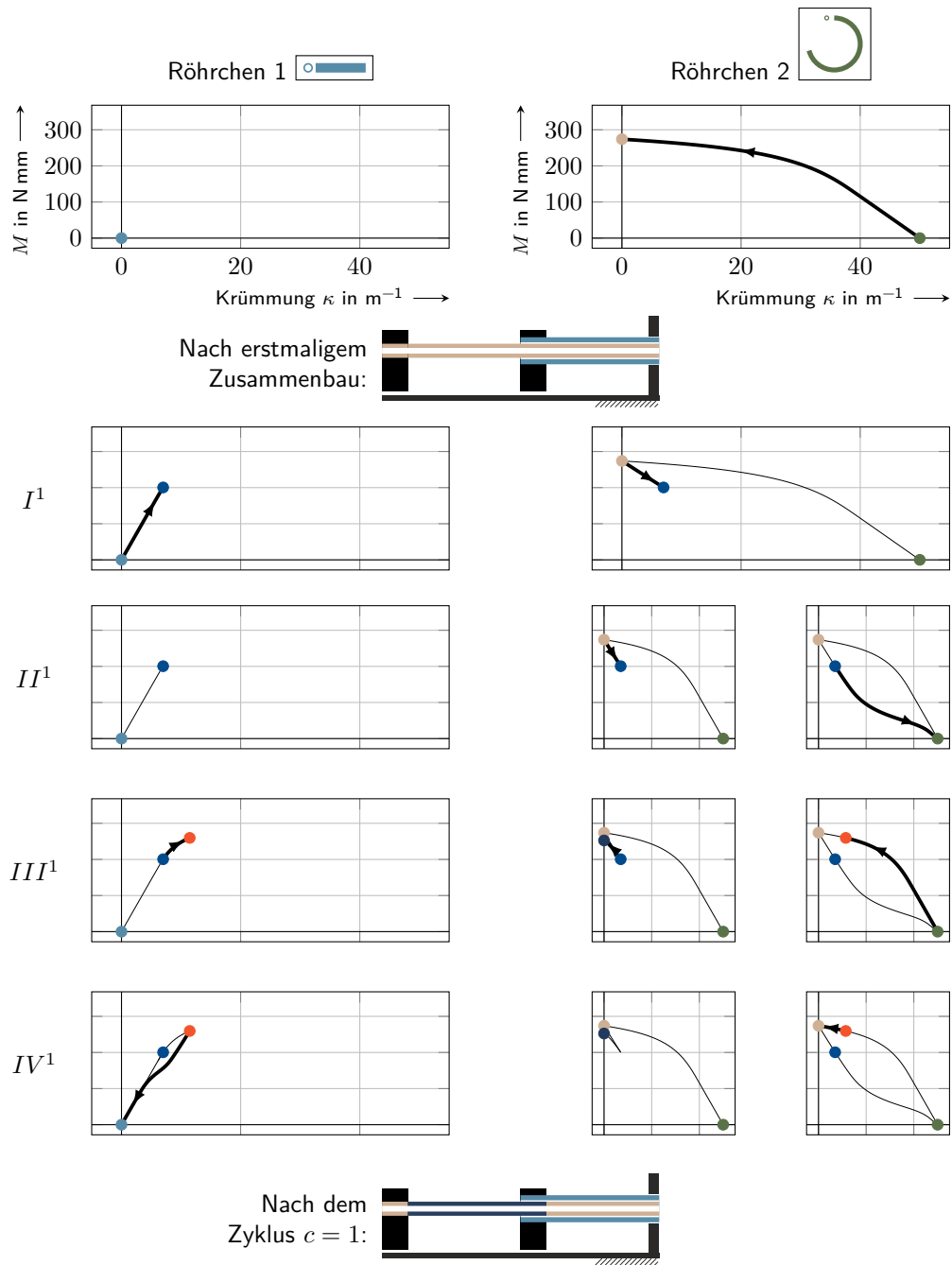


**Abbildung 5.19.:** Biegemomentenverlauf und Gleichgewichtskrümmungen der Beispielröhrchen für das Ansteuerprofil aus Abbildung 5.21 innerhalb der ersten drei Zyklen. Die Gleichgewichtskrümmungen und die zugehörigen Hysteresezustände sind mit den gleichen Farben kodiert. Der negative Wert des Biegemoments des Innenröhrchens ist dargestellt, um eine graphische Interpretation der Biegemomentengleichgewichte zu ermöglichen. Die Werkstoff- und Geometrieparameter der beiden Röhrchen entstammen den Tabellen A.3 und A.4.

im Experiment in Abschnitt 5.3 (Abbildung 5.14) zeigt. Im Folgenden wird der Innendraht deshalb verallgemeinernd als Innenröhrchen bezeichnet. Die gewählte Zusammensetzung bildet eine Kanüle mit zwei Abschnitten. In den Versuchen werden beide Abschnitte nacheinander auf eine maximale Länge  $L_j$  von jeweils etwa 35 mm ausgefahren und in umgekehrter Reihenfolge wieder in die Antriebseinheit eingezogen.

Abhängig von der Bewegungsrichtung der Röhrchen zueinander können Unterabschnitte an beiden Enden eines Abschnittes entstehen oder verschwinden. Das Ansteuerprofil wird deshalb in Lastschritte zerteilt, wobei ein neuer Lastschritt beginnt, sobald gemäß dem Kriterium 5.30 eine Bewegungsrichtungsumkehr vorliegt und dadurch mindestens ein Unterabschnitt entsteht oder verschwindet. Das beschriebene Ansteuerprofil lässt sich in die vier Lastschritte  $I$  bis  $IV$  zerlegen. Abbildung 5.21 verdeutlicht diese Unterteilung. Jede Wiederholung der vollständigen Lastschrittsequenz  $I^c$  bis  $IV^c$  wird als Zyklus  $c$  bezeichnet. Die gewählte Lastschrittsequenz ruft im Abschnitt  $j = 1$  insgesamt drei Unterabschnitte mit unterschiedlicher Gleichgewichtskrümmung hervor. Wie in Abbildung 5.21 dargestellt ist, haben jedoch maximal zwei Unterabschnitte zeitgleich eine Länge verschieden von Null. Die Unterabschnitte sowie deren zugehörige Gleichgewichtskrümmung sind im folgenden Text, wie auch in den zugehörigen Abbildungen 5.19 bis 5.21, farbkodiert.

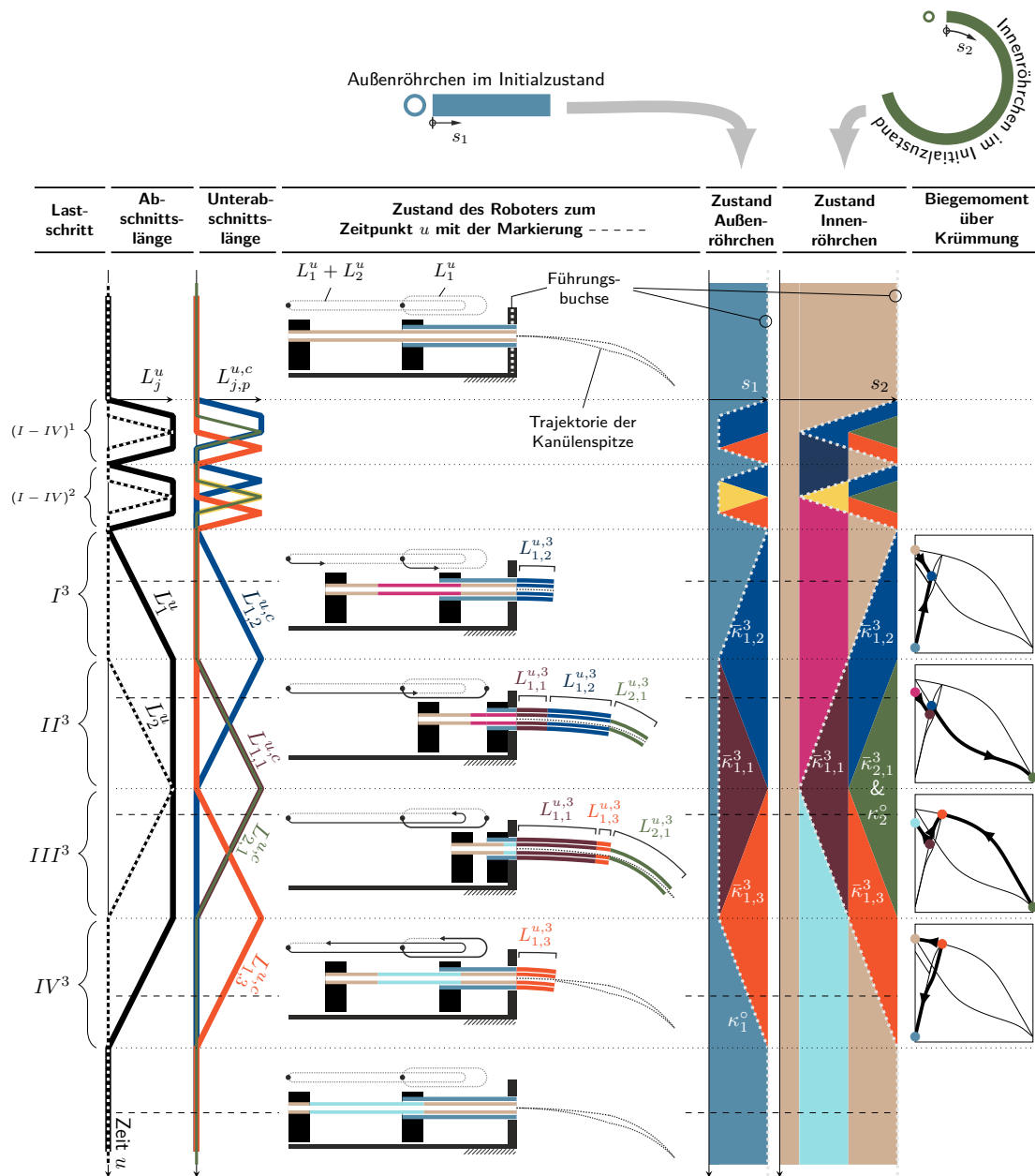
Vor dem allerersten Lastschritt müssen die Röhrchen zunächst in die Antriebseinheit eingebaut



**Abbildung 5.20.:** Biegemomentenverlauf und Entwicklung der Hysteresezustände im ersten Zyklus der Lastschrittsequenz  $I - IV$  in verschiedenen Abschnitten. Die Werkstoff- und Geometrieparameter der beiden Röhrchen entstammen den Tabellen A.3 und A.4.

werden. Das nicht vorgekrümmte, äußere Röhrchen wird dazu in der Antriebseinheit gefasst und in einem geraden Zustand (●) gehalten. Das vorgekrümmte Innenröhrchen muss, wie in Abbildung 5.20 oben rechts dargestellt ist, hingegen aus seinem unbelasteten Zustand (●) in den ungekrümmten Zustand (●) verformt werden, um in die Antriebseinheit eingeführt werden zu können. Die Werkstoffzustände vor dem ersten Lastschritt werden nun zunächst über der gesamten Röhrchenlänge als konstant angenommen. Beginnend mit Lastschritt  $I^1$  werden die Röhrchen gemeinsam ausgefahren und formen einen Kreisbogen der Krümmung  $\bar{\kappa}_{1,2}^1$  (●) und der Unterabschnittslänge  $L_{1,2}^{u,1}$ . Alle weiteren Unterabschnitte weisen zu diesem Zeitpunkt die Länge Null auf. Anschließend wird das Innenröhrchen im Lastschritt  $II^1$  weiter aus dem Außenröhrchen ausgefahren und erlangt auf diese Weise seine Vorkrümmung zurück (●). Daraus gewinnt die Kanüle einen zweiten Abschnitt mit einem Unterabschnitt mit der Krümmung  $\bar{\kappa}_{2,1}^1$  und der Länge  $L_{2,1}^{u,1}$ . Im Lastschritt  $III^1$  wird das Innenröhrchen wieder vollständig in das Außenröhrchen eingezogen, wodurch sich die Länge von Unterabschnitt (2,1) auf Null reduziert, aber ein neuer Unterabschnitt in Abschnitt 1 entsteht. Dieser weist die Krümmung  $\bar{\kappa}_{1,3}^1$  (●) und die zugehörige Länge  $L_{1,3}^{u,1}$  auf. Während Lastschritt  $III^1$  werden außerdem vormals ausgefahrne Bereiche des Innenröhrchens bereits wieder bis in die Antriebseinheit eingezogen. Dadurch wird das Material vom Zustand mit der Krümmung  $\bar{\kappa}_{1,2}^1$  (●) erneut in den ungekrümmten Zustand (●) überführt. Der betroffene Abschnitt weist nun aber aufgrund seiner Belastungshistorie einen Hysteresezustand auf, der sich von dem Zustand (●) nach dem erstmaligen Zusammenbau der Kanüle unterscheidet. Das Zustandsdiagramm des Innenröhrchens sowie die Biegemomentenverläufe in den Abbildungen 5.20 und 5.21 verdeutlichen dies. Im Lastschritt  $IV^1$  werden die beiden Röhrchen schließlich gemeinsam vollständig zurück in die Antriebseinheit eingezogen. Das Außenrohr erlangt somit seine Vorkrümmung  $\kappa_1^\circ$  (●) zurück. Die Belastungshistorie des Außenrohres wird dadurch zurückgesetzt und spielt für die kommenden Zyklen keine Rolle mehr. Das Innenröhrchen hingegen wurde aus zwei unterschiedlichen Krümmungszuständen, namentlich  $\bar{\kappa}_{1,2}^1$  und  $\bar{\kappa}_{1,3}^1$ , eingezogen. Dies führt zu unterschiedlichen Werkstoffzuständen und damit auch zu unterschiedlichen Biegemomenten für der Erreichen der selben Krümmung. Der Werkstoff des Innenröhrchens ist damit nach Abschluss des ersten Zyklus in drei Abschnitte entlang der Röhrchenachse zerteilt. Der erste Abschnitt befindet sich unverändert im Zustand (●), da er die Antriebseinheit nie verlassen hat. Der zweite Abschnitt weist den Zustand (●) auf, da er aus dem geraden Zustand in einen leicht gekrümmten (●) entlastet wurde und anschließend wieder zum geraden Zustand (●) verformt wurde. Der zweite Abschnitt durchlief damit eine innere Hystereseschleife der Biegemomenten-Krümmung-Kennlinie. Der dritte Abschnitt durchlief eine größere Hystereseschleife vom geraden Zustand (●) in einen leicht gekrümmten (●), weiter in den vorgekrümmten Zustand (●), den leicht gekrümmten (●) und schließlich zurück in den geraden Zustand (●). Abbildung 5.19 verdeutlicht diesen Verlauf.

Ab dem zweiten Zyklus erhält die Kanüle mit Lastschritt  $II^2$  einen zusätzlichen Unterabschnitt mit der Krümmung  $\bar{\kappa}_{1,1}^2$  (●), da das Innenröhrchen nun aus unterschiedlichen Hysteresezuständen entlang seiner Achse entlastet wird. Der in Abbildung 5.21 dargestellte zeitlich-örtliche



**Abbildung 5.21.:** Beispielhaftes Ansteuerprofil und sein Einfluss auf die Werkstoffzustände einer Kanülenszusammensetzung mit geradem Außenröhrchen und vorgekrümmtem Innenröhrchen, nach [47]. Die Gleichgewichtskrümmungen und die zugehörigen Hysteresezustände sind mit den gleichen Farben kodiert. Die Vergrößerung des Momentenverlaufs zeigt Abbildung 5.19.

Verlauf des Werkstoffzustands der beiden Röhrchen macht deutlich, dass nach jedem Zyklus  $c$  des beschriebenen Ansteuerprofils eine Veränderung der Gleichgewichtskrümmung  $\bar{\kappa}_{1,1}^c$  resultiert. Die Ursache dafür ist der sich ständig ändernde Werkstoffzustand des inneren Drahtes. Aufgrund der geringen Ausprägung der Biegemomentenhysterese des Außenrohrs beim Verzweigungspunkt  $\bar{\kappa}_{1,1}^c$  ist der Einfluss der Zyklenzahl auf die daraus entstehende Gleichgewichtskrümmung  $\bar{\kappa}_{1,3}^c$  in Abbildung 5.19 optisch nicht wahrnehmbar, aber ebenso vorhanden. Lediglich die Krümmung  $\bar{\kappa}_{1,2}^c$  wird stets aus den selben beiden Werkstoffzuständen angefahren und ist damit, bei konstanten Werkstoffparametern, ebenfalls konstant über alle Zyklen. Für den allgemeinen Fall und die im nächsten Abschnitt folgende Kalibrierung der kinematischen Parameter werden jedoch alle Gleichgewichtskrümmungen mit einer Abhängigkeit von  $c$  versehen. Die Werkstoffhysterese von NiTi führt damit nicht nur zu einer Hysterese im Trajektorienverlauf eines Zyklus', sondern bringt zusätzlich eine Abhängigkeit der Hystereseausprägung von der Anzahl der vorangegangenen Bewegungszyklen mit sich.

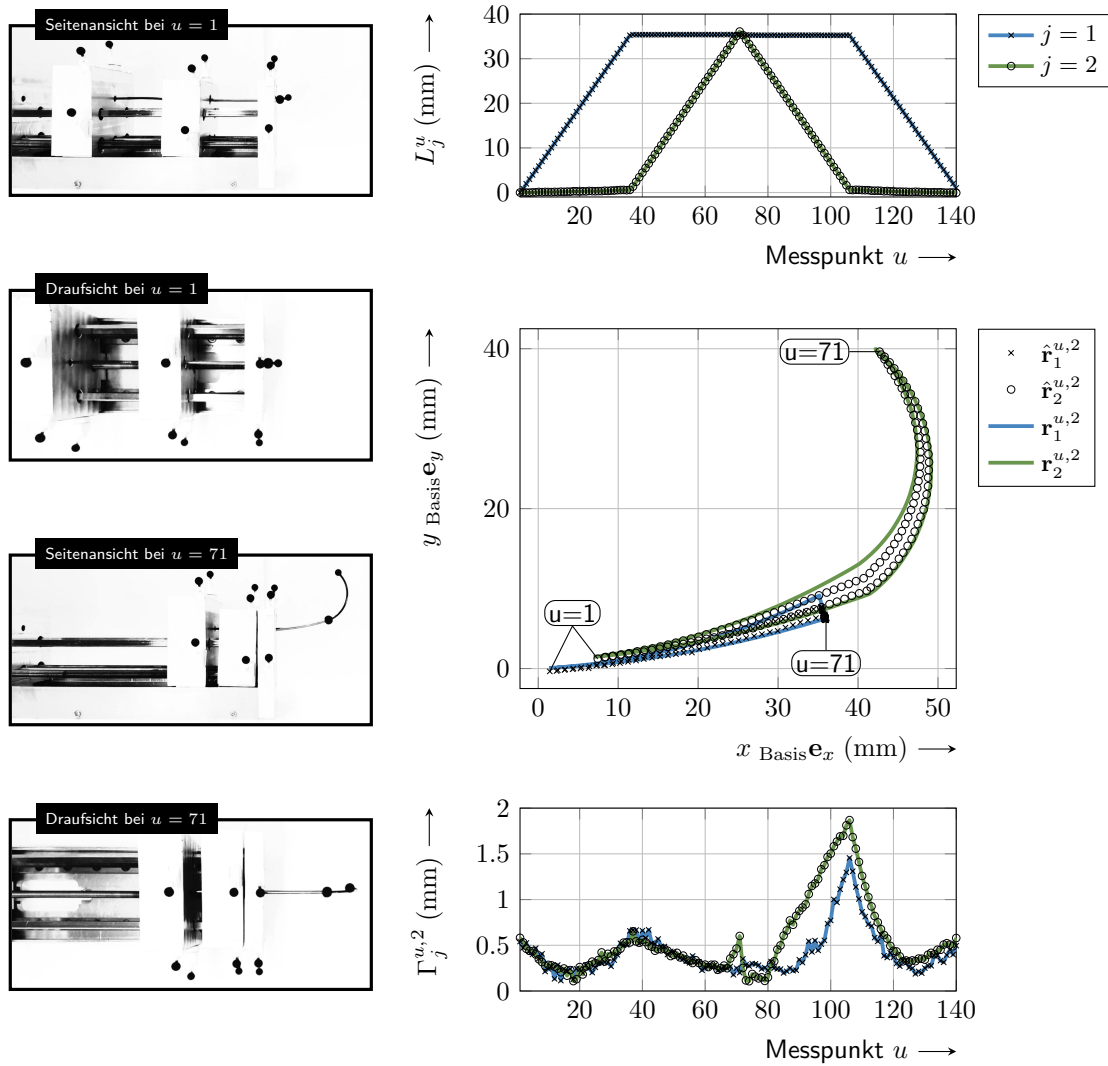
Mit Hilfe der Antriebseinheit sowie des Stereokamera-Messsystems, wie sie in den Abschnitten 7.1 und 7.3 beschrieben werden, wurde die Trajektorie der beiden Abschnitte  $j = 1, 2$  der beschriebenen Zusammensetzung für  $c = 1, \dots, C$  mit  $C = 50$  Zyklen des beispielhaften Ansteuerprofils aufgezeichnet. Die gemessene Trajektorie der Marken mit den Ortsvektoren  $\hat{\mathbf{r}}_1^{u,c}$  und  $\hat{\mathbf{r}}_2^{u,c}$  ist in Abbildung 5.22 für den 2. Zyklus dargestellt. Ebenso des gemessene Ansteuerprofil für  $u = 1, \dots, U$  Messpunkte. Diese sind äquidistant über dem Verschiebungsbereich verteilt und liefern in Verschiebungsschritten der Antriebe von jeweils 1 mm insgesamt  $U = 140$  Messungen. Der zeitkontinuierliche Verlauf des Ansteuerprofils  $L_j(t)$  wurde dazu in die zeitdiskreten Stützpunkte  $L_j^u$  zerlegt und im Experiment Punkt für Punkt im Start-Stopp-Betrieb abgefahren. Die planare Röhrchenzusammensetzung wurde durch das Stereokamera-Messsystem aus Abschnitt 7.3 im dreidimensionalen Raum aufgezeichnet. Zusätzlich wurden das Ansteuerprofil aus den auf den Führungsschlitzen befestigten Messmarken rekonstruiert, um Spiel und parasitäre Nachgiebigkeiten im Antriebssystem ausschließen zu können. Die orthogonalen Kamerabilder zu den Zeitpunkten  $u = 1$ , im komplett eingefahrenen Zustand, und  $u = 71$ , im komplett ausgefahrenen Zustand, sind ebenfalls in Abbildung 5.22 dargestellt. Um Messung und Modell vergleichen zu können, wurden die Position und die Ausrichtung der Antriebseinheit sowie die Lage der Messmarken auf den Röhrchen aus den Messdaten bestimmt. Deren Ermittlung erfolgte durch das im folgenden Abschnitt erläuterte Kalibrierungsverfahren. Die Kanülenzustände entstammen jedoch den Modellrechnungen, basierend auf den Werkstoff und Geometrieparametern der Röhrchen aus den Tabellen A.3 und A.4.

Der Modellfehler

$$\Gamma_j^{u,c} = \|\mathbf{r}_j^{u,c} - \hat{\mathbf{r}}_j^{u,c}\|_2 \quad (5.54)$$

ist definiert als die euklidische Norm zwischen gemessenen Koordinaten  $\hat{\mathbf{r}}_j^{u,c}$  und modellierten Koordinaten  $\mathbf{r}_j^{u,c}$  der Röhrchenenden im  $\mathbb{R}^3$ . Er berücksichtigt daher auch zufällige und systematische Abweichungen der Kanülen trajektorie von ihrer ebenen Form im Modell. Abbildung 5.22 zeigt, dass unter Verwendung der aus den Einzelmodellen für Werkstoff, Bauteil und



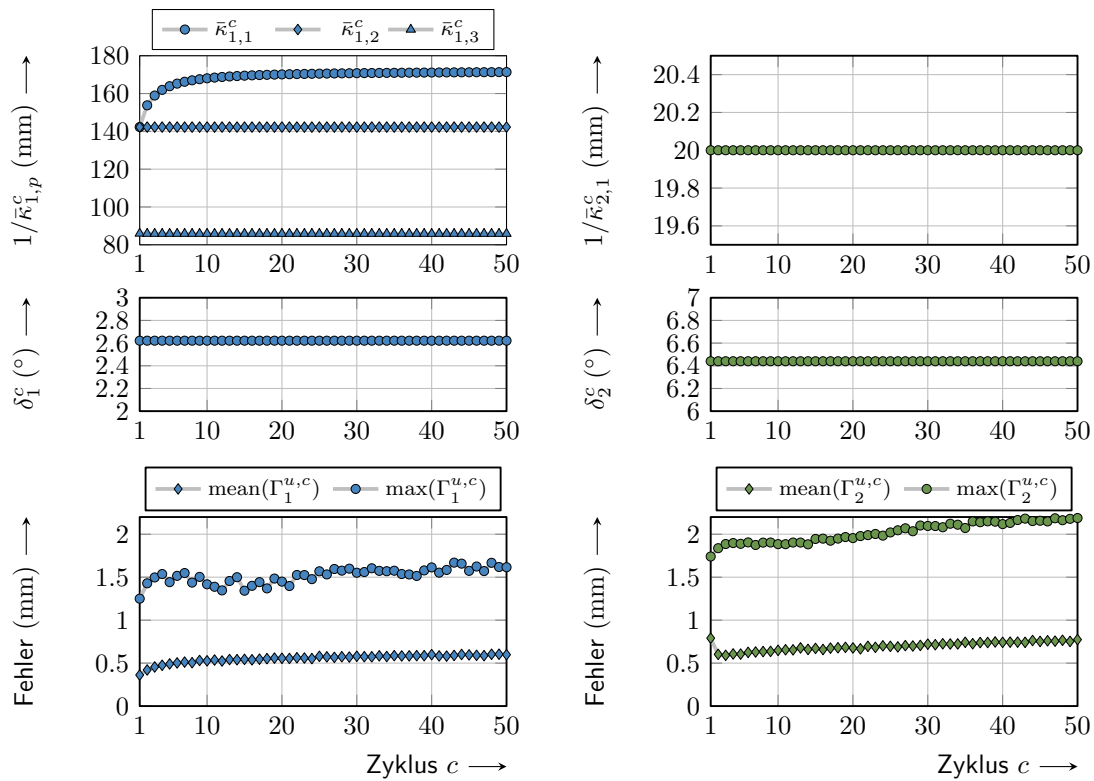


**Abbildung 5.22.:** Ansteuerprofil und resultierende Trajektorien der Röhrenmarken aus Messung und Modell sowie der resultierende Fehler. Dargestellt sind auch die beiden Kameraaufnahmen zu verschiedenen Zeitpunkten.

Gleichgewichtslage gewonnenen Kinematikzustände ein maximaler Modellfehler entlang der gesamten Trajektorie von rund 2 mm, bezogen auf eine maximale Kanülenlänge von 70 mm, erreicht werden kann.

## 5.7. Kalibrierung

Die kinematische Beschreibung der Kanülenspitze (5.52) basiert auf den veränderlichen Kinematikzuständen, bestehend aus den Längen der Unterabschnitte  $L_{j,p}^{u,c}$ , deren Krümmung  $\kappa_{j,p}^c$ , sowie den Übergangswinkeln  $\delta_j^c$  und den konstanten Kinematikparametern, wie beispielsweise der Position und Ausrichtung der Antriebseinheit. Der Zusammenhang zwischen geplanten und durch die Antriebseinheit tatsächlich gestellten Steuergrößen wird als zuverlässig erachtet. Die Messung der gestellten Röhrchenverschiebungen in den Experimenten und die Verwendung dieser Messgrößen als Modelleingänge reduziert mögliche Fehler. Die Kinematikparameter zur Beschreibung von Lage und Ausrichtung der Antriebseinheit sind beliebig wählbar und zunächst unbekannt. Ebenso die Positionen der Messmarken auf den Röhrchen. Die Kinematikzustände zur Beschreibung der Krümmungen und Übergangswinkel können hingegen durch die Modelle aus den Abschnitten 5.3 und 5.4 abgeschätzt werden. Die Abschätzungen weisen jedoch Fehler auf, welche die Modellgenauigkeit verschlechtern. Ursachen für diese Fehler finden sich bereits in der Modellierung des Werkstoffverhaltens, durch die vereinfachte Abbildung der Hystereseform, vor allem innerer Schleifen. Eine präzisere Beschreibung der Hystereseform, beispielsweise durch ein Preisachmodell, würde jedoch auch nur geringfügige Verbesserungen herbeiführen. Die Eigenschaft von NiTi, unter zyklischer Belastung sein mechanisches Verhalten zu verändern, führt zu einer Veränderung der Werkstoffparameter in (3.1) und (3.3)-(3.4). Eine weitere Fehlerursache rührt aus dem Bauteilmodell her. In diesem wird der Röhrchenquerschnitt (4.18) als konstant angenommen und damit Ovalisierungseffekte vernachlässigt. Die eigentliche Berechnung der Kinematikzustände aus den Bauteilgesetzen beinhaltet schließlich mehrere vereinfachende Annahmen, welche zu weiteren Fehlern führen. Tatsächlich ist der Momentenverlauf entlang der Kanüle ein kontinuierlicher. Biegemomentensprünge und damit Krümmungssprünge treten in der Realität nicht auf. Die der kinematischen Beschreibung zugrunde liegende Modellvorstellung einer stückweise konstant gekrümmten Kanüle (5.31) stellt eine Vereinfachung der Realität dar. Weiterhin basiert die Abschätzung der Übergangswinkel auf der Annahme eines linearen Momentenübergangs (5.34) und kleiner Verschiebungen gegenüber der Referenzkrümmung (5.37). Dennoch wird die gesamte Vorgehensweise als hinreichend genau erachtet, um den Einfluss der Werkstoffhysterese auf das kinematische Verhalten tubulärer Kontinuumsmechanismen darzustellen. Durch das in diesem Abschnitt vorgestellte Kalibrierverfahren können die abgeschätzten Kinematikzustände und -parameter schließlich angepasst werden, um das Bewegungsverhalten der Kanüle mit dem kinematischen Modell möglichst präzise nachzubilden.



**Abbildung 5.23.:** Verlauf der mittleren und maximalen Modellfehler von beiden Röhren über 50 Zyklen mit kalibrierten Basisparametern sowie Verlauf der Krümmungen und Übergangswinkel aus der Modellrechnung.

Zur Beurteilung der Modellabweichung wird die bereits in (5.54) definierte euklidische Norm des Fehlers zwischen Modellausgang  $\mathbf{r}_j^{u,c}$  und Messung  $\hat{\mathbf{r}}_j^{u,c}$  genutzt. Zur Kalibrierung wird die Modellabweichung durch Minimierung der Summe der Fehlerquadrate

$$\begin{aligned} & \text{minimiere} \sum_{\mathcal{P}} (\Gamma_j^{u,c})^2 \\ & \mathcal{P} \subseteq \{r_{0x}, r_{0y}, r_{0z}, \alpha_x, \alpha_y, \alpha_z, a_1, \dots, a_N, \kappa_{1,1}^1, \dots, \kappa_{N,P_N}^C, \delta_1^1, \dots, \delta_N^C\} \end{aligned} \quad (5.55)$$

reduziert. Variiert werden dabei die Parameter des Parametersatzes  $\mathcal{P}$ . Dieser kann alle für das Kinematikmodell erforderlichen Parameter oder eine beliebige Untermenge dieser enthalten. Das kinematische Modell ist nichtlinear bezüglich den Winkeln und Krümmungen. In den nachfolgenden Beispielen wurde zur Durchführung der Minimierung deshalb das in der Software *Matlab* als *lsqnonlin* implementierte Trust-Region-Verfahren zur Lösung solcher nichtlinearen Probleme verwendet.

**Kalibrierung der Kinematikparameter** Für den Vergleich von Messung und Modellberechnungen für Krümmungen und Übergangswinkel im vorangegangenen Abschnitt wurde eine Kalibrierung der über alle Zyklen konstanten Kinematikparameter

$$\mathcal{P}_{\text{Basis}} = \{r_{0x}, r_{0y}, r_{0z}, \alpha_z, a_1, a_2\}. \quad (5.56)$$

durchgeführt. Zudiesen gehören die Position der Antriebseinheit  $\mathbf{r}_0$ , deren Verdrehung  $\alpha_z$  um die z-Achse sowie die Positionen der Messmarken  $a_1$  und  $a_2$ . Die Winkel  $\alpha_x$  und  $\alpha_y$  haben den Wert Null, da die ebene Trajektorie der beiden Röhrchen zur besseren Darstellung in den Diagrammen bereits in die  $x$ - $y$ -Ebene transformiert wurde. Als Krümmungen und Übergangswinkel dienen die Ergebnisse der Modellberechnungen der Abschnitte 5.3 und 5.4. Die Minimierung

$$\underset{\mathcal{P}_{\text{Basis}}}{\text{minimiere}} \sum_{c=1}^C \sum_{u=1}^U \sum_{j=1}^N (\Gamma_j^{u,c})^2 \quad (5.57)$$

für  $C = 50$  Zyklen mit jeweils  $U = 140$  Messpunkten an  $N = 2$  Röhrchen liefert schließlich den Basisparametersatz. Die Abbildung 5.22 zeigt die Messung des 2. Zyklus, verglichen mit der Simulation durch das kinematische Modell mit kalibrierten Basisparametern. Abbildung 5.23 veranschaulicht den Verlauf der Krümmungs- und Winkelparameter aus der Modellberechnung, den Mittelwert des Fehlers  $\Gamma_j^{u,c}$  sowie den maximalen Fehler an den beiden Messpositionen über 50 Zyklen. Es ergibt sich ein maximaler Modellfehler der Kanülenspitze von rund 2 mm.

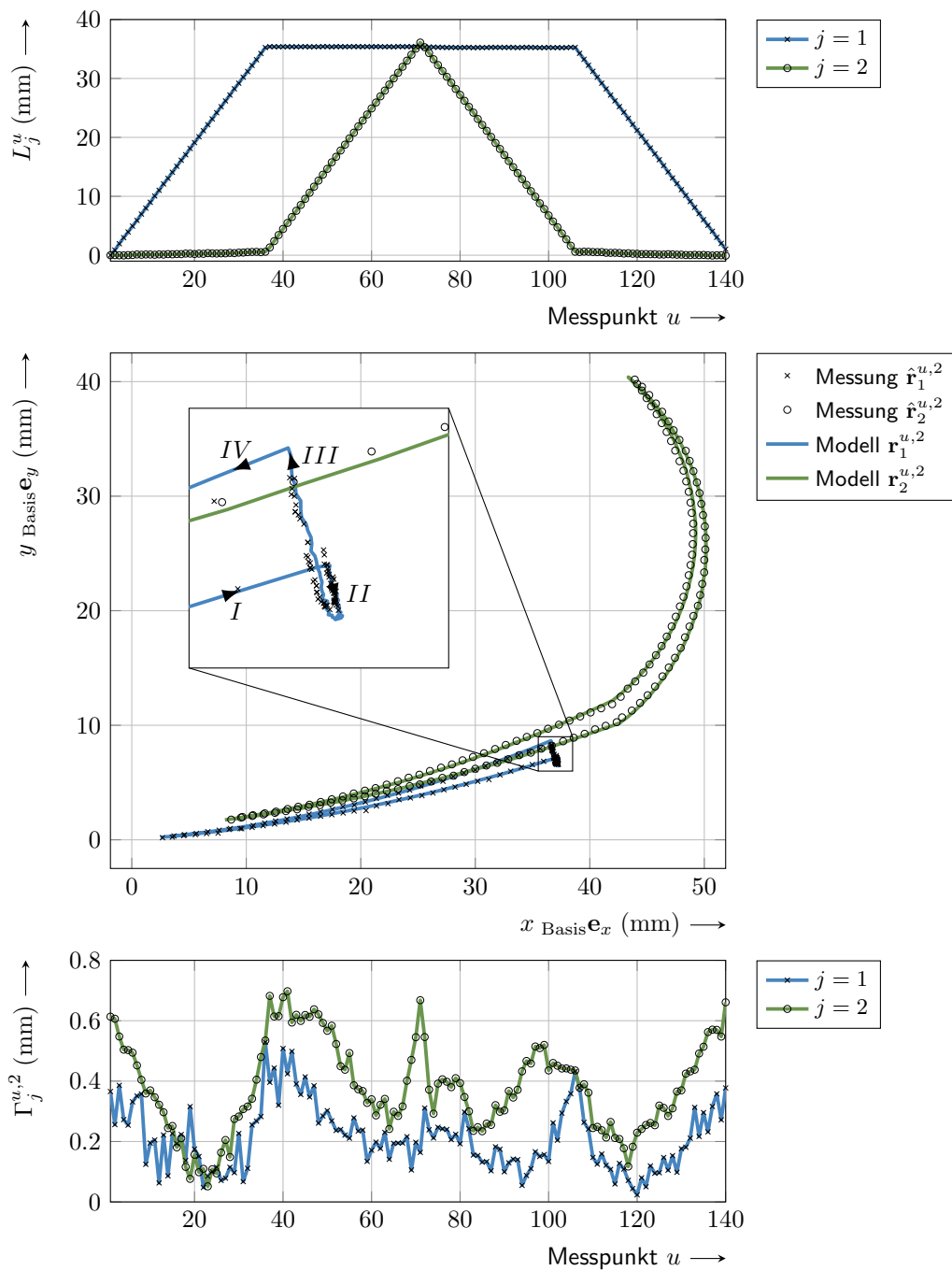
**Kalibrierung der Kinematikzustände und -parameter** Die Aufnahme der Krümmungen und Übergangswinkel in einen zusätzlichen Kalibrierparametersatz

$$\mathcal{P}_c = \{\bar{\kappa}_{1,1}^c, \bar{\kappa}_{1,2}^c, \bar{\kappa}_{1,3}^c, \bar{\kappa}_{2,1}^c, \delta_1^c, \delta_2^c\}, \quad (5.58)$$

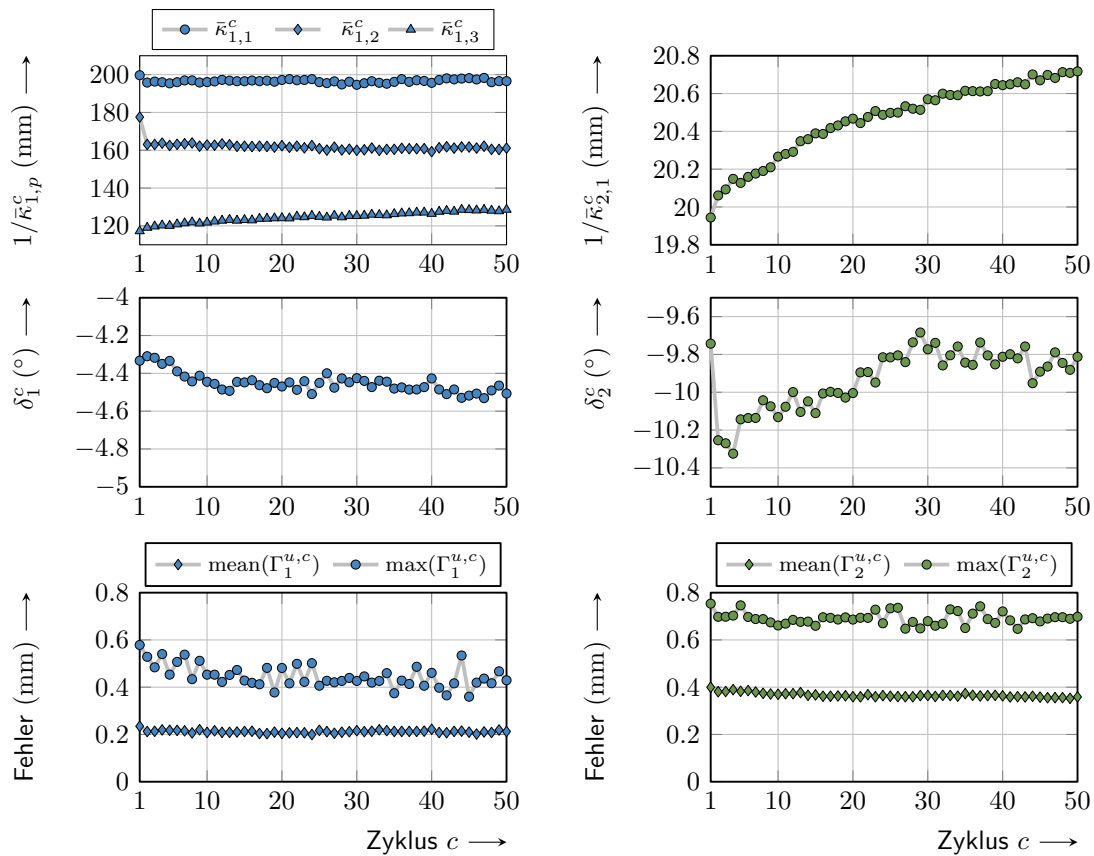
welcher aufgrund der Materialveränderungen für jeden Zyklus  $c$  unterschiedlich sein kann, führt zu der verschachtelten Minimierung

$$\underset{\mathcal{P}_{\text{Basis}}}{\text{minimiere}} \sum_{c=1}^C \left( \underset{\mathcal{P}_c}{\text{minimiere}} \sum_{u=1}^U \sum_{j=1}^N (\Gamma_j^{u,c})^2 \right). \quad (5.59)$$

Die in den Abschnitten 5.3 und 5.4 gewonnenen Kinematikzustände dienen dabei als gute Startwerte. Deren Berechnung und die dazu notwendige Werkstoff- und Bauteilmodellierung kann jedoch auch gänzlich entfallen. Lediglich die Ermittlung der zeitlichen Verläufe der Längen  $L_{j,p}^{u,c}$  der Unterabschnitte ist erforderlich. Die Kalibrierung basiert dann auf einem über allen Zyklen konstanten Basisparametersatz  $\mathcal{P}_{\text{Basis}}$  und einem zyklusabhängigen Parametersatz  $\mathcal{P}_c$  mit den Krümmungen und Übergangswinkeln. Es resultiert eine präzisere kinematische Modellierung der Trajektorie, was sich beim Vergleich von Abbildung 5.22 mit Abbildung 5.24



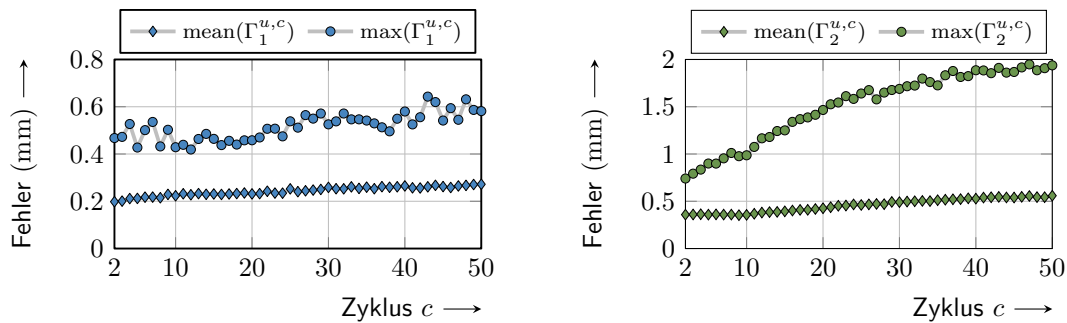
**Abbildung 5.24.:** Ansteuerprofil und Trajektorien der Röhrenenden aus Messung und Modell sowie der resultierende Fehler nach der Kalibrierung aller Parameter mit (5.59) für den 2. Zyklus.



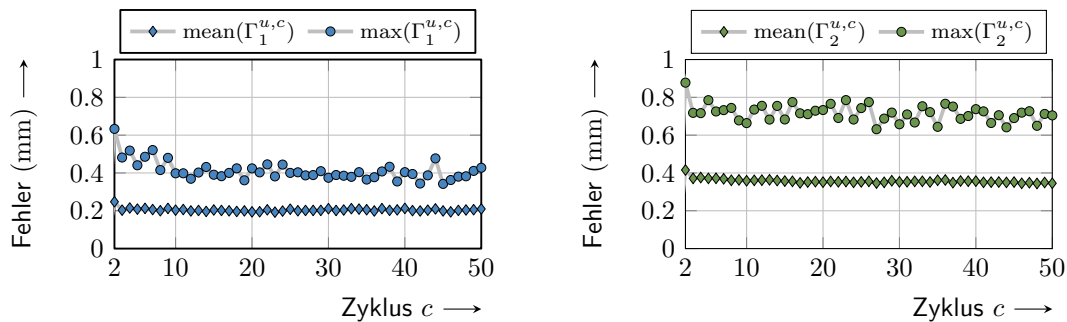
**Abbildung 5.25.:** Verlauf der mittleren und maximalen Modellfehler von beiden Röhrchen sowie der Krümmungs- und Winkelparameter über 50 Zyklen bei Kalibrierung aller Kinematikzustände und -parameter durch (5.59).

deutlich zeigt. Der Verlauf der Modellfehler über 50 Zyklen ist in Abbildung 5.25 dargestellt, zusammen mit den zyklusabhängigen Kinematikzuständen. Es wird deutlich, dass durch die Kalibrierung aller Parameter des Modells, die Trajektorie der Kanüle mit deutlich weniger als einem Millimeter Abweichung abgebildet wird. Der zunehmende Krümmungsradius von  $\bar{\kappa}_{2,1}$  zeigt, dass das wiederholte Verformen des gekrümmten Innenröhrchens zu bleibenden Dehnungen und einem Verlust an Vorkrümmung führt, welcher nicht durch das Werkstoffmodell abgedeckt wird. Ebenso zeigt sich qualitativ dieselbe Reihenfolge der Krümmungsniveaus von  $\bar{\kappa}_{1,1}$ ,  $\bar{\kappa}_{1,2}$  und  $\bar{\kappa}_{1,3}$ , wie sie auch durch das Modell vorhergesagt wird. In ihrer Größe weichen diese jedoch deutlich von den Modellwerten ab, wie der Vergleich der Abbildungen 5.23 und 5.25 zeigt. Durch eine Sensitivitätsanalyse im nachfolgenden Abschnitt wird versucht, Ursachen dafür aufzudecken.

Um das Kinematikmodell für den gesteuerten Betrieb von tubulären Kontinuumsmechanismen



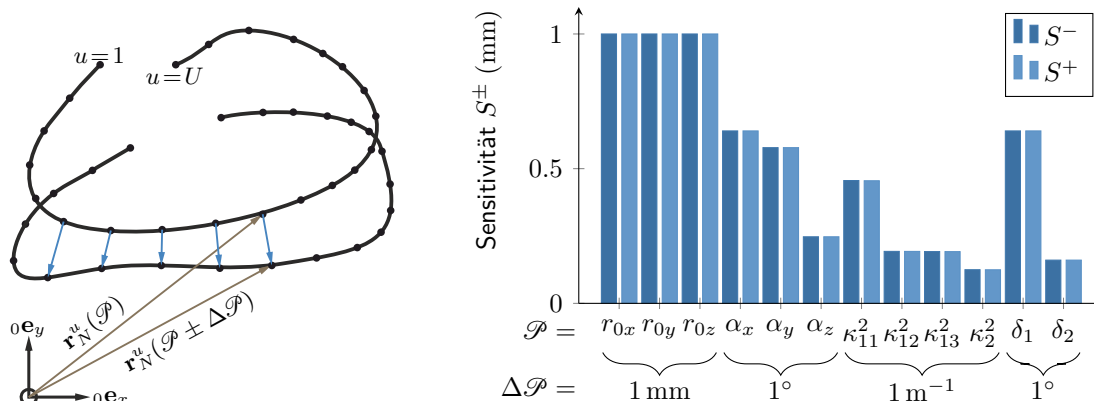
**Abbildung 5.26.:** Verlauf der mittleren und maximalen Modellfehler von beiden Röhrrchen über 50 Zyklen mit konstanten Kinematikzuständen aus der Kalibrierung dieser anhand der Messung von Zyklus  $c = 2$ .



**Abbildung 5.27.:** Verlauf der mittleren und maximalen Modellfehler von beiden Röhrrchen über 50 Zyklen bei der Verwendung von Parametern, welche jeweils aus der Messung des vorangegangenen Zyklus kalibriert wurden.

entlang einer a priori bekannten Trajektorie anzuwenden, ist es nicht sinnvoll alle Kinematikzustände einmalig zu kalibrieren und anschließend als konstant anzunehmen. Abbildung 5.26 zeigt dazu den Verlauf der Modellfehler über 50 Zyklen für konstante Kinematikzustände und -parameter. Diese wurden anhand der Messung des zweiten Zyklus kalibriert. Es zeigt sich, besonders für die Kanülenspitze, ein nach der Kalibrierung wieder anwachsender Modellfehler.

Abbildung 5.27 zeigt schließlich den Fehlerverlauf, der sich für die Verwendung von Parametern ergibt, welche jeweils anhand der Messung des vorangegangenen Zyklus kalibriert wurden. Die direkte Wiederholung desselben Ansteuerungsprofils führt zwischen zwei Zyklen nur zu kleinen Parameterveränderungen, welche den Modellfehler im Vergleich mit der direkten Kalibrierung aus Abbildung 5.25 kaum beeinflussen.



(a) Änderung der Trajektorie der Kanülenspitze durch Änderung eines Kinematikparameters oder -zustands  $\mathcal{P}$  um die Differenz  $\pm\Delta\mathcal{P}$ .

(b) Sensitivität der Trajektorie der Kanülenspitze für den Steuergrößenverlauf aus Abschnitt 5.6 im Zyklus  $c = 2$  bezüglich der Kinematikparameter und -zustände.

Abbildung 5.28.: Sensitivität der Trajektorie der Kanülenspitze.

## 5.8. Sensitivität

Das kinematische Modell basiert auf einer Vielzahl an Parametern, welche wiederum aus Berechnungen mit den Bauteilmodellen der beteiligten Röhrchen gewonnen werden. Den Bauteilmodellen liegen wiederum die Parameter für Geometrie und Werkstoff des entsprechenden Röhrchens zugrunde. Für das im vorangegangenen Abschnitt vorgestellte Beispiel aus zwei Röhrchen mit der Zusammensetzung "01", entsprechend Abbildung 5.21, werden insgesamt 14 Kinematikparameter und -zustände benötigt. Die Kinematikzustände beruhen wiederum auf insgesamt 34 Werkstoff- und Geometrieparametern. Die Sensitivität der Trajektorie bezüglich der Änderung von jeweils einem dieser Werte wird im Folgenden untersucht. Die Sensitivität

$$S^{\pm}(\mathcal{P}) = \frac{1}{U} \sum_{u=1}^U \left\| \mathbf{r}_N^{u,c}(\mathcal{P}) - \mathbf{r}_N^{u,c}(\mathcal{P} \pm \Delta\mathcal{P}) \right\|_2 \quad (5.60)$$

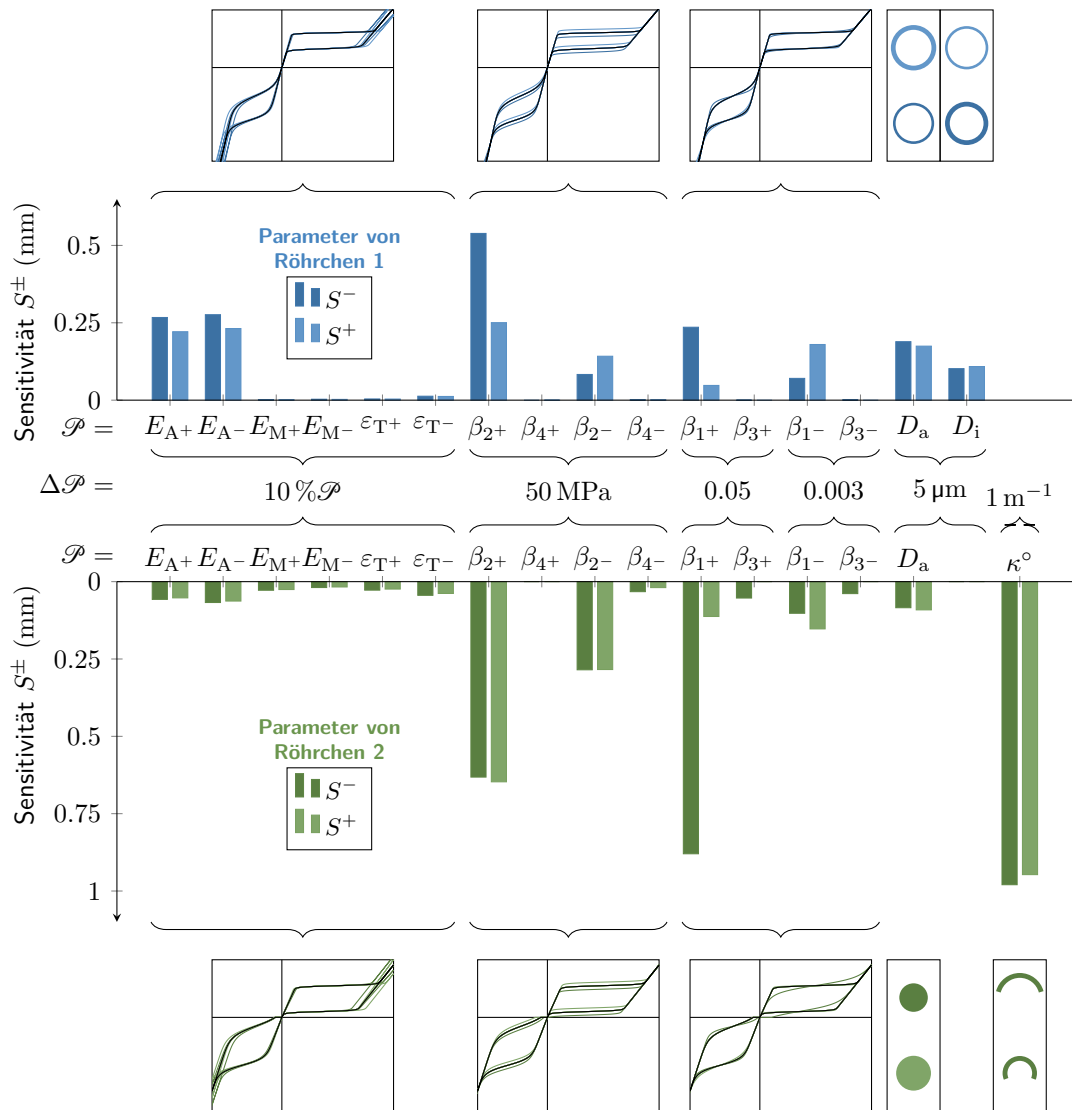
$$\forall \mathcal{P} \in \{r_{0x}, \dots, \alpha_x, \dots, \kappa_{i,j}^c, \delta_j^c, \dots, E_{A,i}^+, \beta_{1,i}^+, \dots, D_{a,i}, \kappa_i^o, \dots\}$$

der Trajektorie der Kanülenspitze ergibt sich für beliebige Ansteuerprofile als die mittlere euklidische Verschiebung zwischen allen zeitdiskreten Trajektorienpunkten der Kanülenspitze  $\mathbf{r}_N^{u,c}$  mit nominellen Werten und einem veränderten Wert, wie in Abbildung 5.28a dargestellt. In einem ersten Schritt wird direkt jeweils einer der Kinematikparameter verändert. Als Ansteuerungsprofil wird erneut die Beispielansteuerung aus dem vorangegangenen Abschnitt herangezogen. Die Sensitivitäten für diesen Fall, bezüglich den Nominalparametern des Zyklus  $c = 2$ , sind in Abbildung 5.28b jeweils für die Verringerung und die Vergrößerung



des entsprechenden Parameters um den angegebenen Wert gegenübergestellt. Während die Basisposition und Ausrichtung  $r_{0x}, \dots, \alpha_x, \dots$  beim wiederholten Abfahren eines Ansteuerprofils konstant bleiben, ändern sich die Krümmungen und Übergangswinkel der Röhren von Zyklus zu Zyklus. Diese ergeben sich aus Berechnungen mit den Bauteilmodellen, basierend auf insgesamt 34 Werkstoff- und Geometrieparametern. In einem zweiten Schritt wurde deshalb die Sensitivität des Gesamtmodells bezüglich Änderungen dieser Parameter ermittelt. Auch hier wurden alle Parameter jeweils einzeln um den angegebenen Betrag erhöht oder verringert. Basierend auf dem geänderten Werkstoff- oder Geometrieparameter wurden die Kinematikzustände für den Zyklus  $c = 2$  neu berechnet und die Sensitivität ermittelt. Das Ergebnis zeigt Abbildung 5.29. Der Einfluss der Änderung der Werkstoffparameter auf die Spannungs-Dehnungs-Kurven ist, in Gruppen zusammengefasst, ebenfalls dargestellt. Die Sensitivitäten bezüglich dem Innendurchmesser des Innenröhrens und der Vorkrümmung des Außenröhrens wurden nicht bestimmt, da diese Parameter den Wert Null haben.

Der Wert der Sensitivität der Trajektorie der Kanülenspitze ist vergleichbar mit dem mittleren Modellfehler des innersten Röhrens bzw. der Kanülenspitze, wie er in den Abbildungen 5.23 sowie 5.25 bis 5.27 dargestellt ist. Es wird deutlich, dass eine Unsicherheit in einigen der Parameter für das Niveau sowie die Form der Phasenumwandlungsplateaus von NiTi bereits ausreicht, um einen mittleren Modellfehler im dreistelligen Mikrometer-Bereich zu verursachen. Besonders die hohe Sensitivität des Parameters  $\beta_{2+}$ , welcher die Höhe des Belastungsplateaus der Spannungs-Dehnungs-Kennlinie in Zug-Richtung beschreibt, stellt sich als kritisch heraus. Wie in Abschnitt 3.1 beschrieben, unterliegt die Höhe des Belastungsplateaus unter zyklischer Belastung einer Ermüdungserscheinung. Ein gezieltes Einlaufen des Werkstoffs, eine Berücksichtigung des Werkstoffverschleißes im Modell oder ein ständiges Nachkalibrieren der Krümmungen im Betrieb des Roboters ist deshalb im Sinne einer präzisen kinematischen Modellierung anzuraten.



**Abbildung 5.29.:** Sensitivität der Trajektorie der Kanülenspitze für den Steuergrößenverlauf aus Abbildung 5.22 im Zyklus  $c = 2$  bezüglich den Werkstoff- und Geometrieparametern der Röhren  $i = 1$  und  $i = 2$ . Die nominellen Werkstoff- und Geometrieparameter der beiden Röhren entstammen den Tabellen A.3 und A.4.

## 6. Antriebskräfte in tubulären Kontinuumsmechanismen

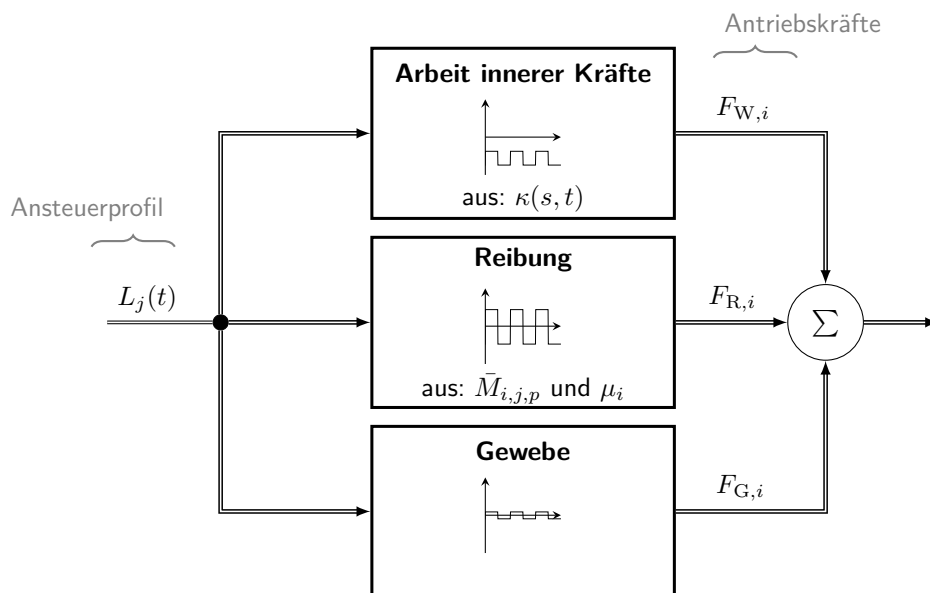


Abbildung 6.1.: Struktur der Antriebskraftberechnung.

Ziel dieses Kapitels ist es, wie in Abbildung 6.1 dargestellt, die Komponenten  $F_{W,i}$ ,  $F_{R,i}$  und  $F_{G,i}$  der Antriebskräfte zur Verschiebung der Röhren für ein vorgegebenes Ansteuerprofil  $L_j(t)$  zu bestimmen. Dazu wird in Abschnitt 6.1 zunächst allgemein die innere Arbeit beim Verbiegen von Nickel-Titan-Röhren bestimmt, aus der die zur Verschiebung der Röhren erforderliche Antriebskraft abgeleitet wird. Eine Abschätzung der Reibkräfte aus den Kontaktkräften in Abschnitt 6.2, liefert anschließend den Anteil der Reibung an der Gesamtkraft. Messungen der erforderlichen Antriebskraft mit und ohne Reibung erlauben eine Beurteilung der Modellqualität. In Abschnitt 6.3 wird abschließend der Einfluss von Gewebekräften aus Messungen aus der Literatur diskutiert.

## 6.1. Kräfte zur Verrichtung der Arbeit der inneren Kräfte

Die Arbeit der inneren Kräfte

$$W_{\text{in}} = \iiint \sigma \, d\varepsilon \, dV \quad (6.1)$$

beschreibt die Energiemenge, bestehend aus Formänderungsenergie und Arbeit der dissipativen Kräfte bei der Phasenumwandlung, welche einem Volumenkörper durch Verformung entlang eines Spannungs-Dehnungs-Pfades zugeführt oder entnommen wird. Innerhalb dieses Kapitels werden die pseudoelastischen Nickel-Titan-Röhrchen über das Werkstoffgesetz mit Hystereseberechnung  $\sigma(\varepsilon, \xi^*, \sigma^*)$  aus Abschnitt 3.3 modelliert. Wie auch in Kapitel 4 wird im Folgenden zur einfacheren Lesbarkeit und sofern es möglich ist, auf die Indizierung der Röhrchen mit dem Index  $i$  verzichtet und stattdessen ein einzelnes Röhrchen betrachtet. Die Verformung der Röhrchen einer ebenen Kanüle wird im einachsigen Spannungszustand als reine Biegung beschrieben. Dabei wird von einer Dehnungsverteilung

$$\varepsilon(s, y, t) = -(y - y^*(s, t))(\kappa(s, t) - \kappa^0), \quad (6.2)$$

entsprechend (4.14), über der Zeit  $t$  sowie der  $s$ - und der  $y$ -Koordinate ausgegangen. Für beliebige Verläufe von  $\kappa(s, t)$  ist aus Abschnitt 4.3 bereits der Lösungsweg zur Bestimmung von  $y^*(s, t)$ ,  $\sigma^*(s, y, t)$  und  $\xi^*(s, y, t)$  bekannt. Durch die Substitution

$$d\varepsilon = \frac{d\varepsilon}{dt} dt = \dot{\varepsilon} dt \quad (6.3)$$

wird das Integral (6.1) über der Dehnung und dem Volumen in das Integral

$$W_{\text{in}} = \iiint \sigma \dot{\varepsilon} dt \, dV \quad (6.4)$$

über der Zeit und dem Volumen umgeformt. Weiterhin erfolgt die Ersetzung des Volumenintegrals durch die Integrale über der  $y$ -Koordinate des Röhrchenquerschnitts mit der Breite  $B(y)$  sowie über der Längsachse  $s$  des Röhrchens mit der Länge  $L$ . Unter Beachtung der örtlichen und zeitlichen Abhängigkeiten der Werkstoffzustände  $\sigma^*(t, y, s)$  und  $\xi^*(t, y, s)$  ergibt sich die Arbeit der inneren Kräfte eines pseudoelastischen Röhrchens zum Zeitpunkt  $t$  als

$$W_{\text{in}} = \int_0^L \int_{-\frac{D_a}{2}}^{\frac{D_a}{2}} \int_0^t B(y) \sigma(\varepsilon(s, y, \tau), \sigma^*(s, y, \tau), \xi^*(s, y, \tau)) \dot{\varepsilon}(s, y, \tau) \, d\tau \, dy \, ds. \quad (6.5)$$

Wie bereits in Abschnitt 4.3 dargelegt, erfolgt die Lösung des Biegemoments und der damit verbundenen Werkstoffzustände durch räumliche Diskretisierung des Röhrchenquerschnitts in  $k = 1, \dots, K$  Schichten und zeitliche Diskretisierung des Krümmungsverlaufs in  $u = 1, \dots, U$

Zeitschritte. Die Annahme einer konstanten Krümmung entlang des Abschnitts  $s = [0, L]$  sowie die genannten Diskretisierungsschritte liefern die Ersetzungen

$$t \circ \rightarrow u, \quad (6.6a)$$

$$\kappa(s, t) \circ \rightarrow \kappa^u, \quad (6.6b)$$

$$\varepsilon(s, y, t) \circ \rightarrow \varepsilon_k^u, \quad (6.6c)$$

$$d\tau \circ \rightarrow \Delta\tau, \quad (6.6d)$$

$$\dot{\varepsilon}(s, y, t) \circ \rightarrow \frac{\varepsilon_k^u - \varepsilon_k^{u-1}}{\Delta\tau}, \quad (6.6e)$$

mit denen sich der zeitlich diskretisierte Verlauf der Formänderungsenergie

$$W_{\text{in}} = L\Delta y \sum_{k=1}^K \sum_{u=1}^U B(y_k) \sigma(\varepsilon_k^u, \sigma_k^{*,u}, \zeta_k^{*,u}) (\varepsilon_k^u - \varepsilon_k^{u-1}) \quad (6.7)$$

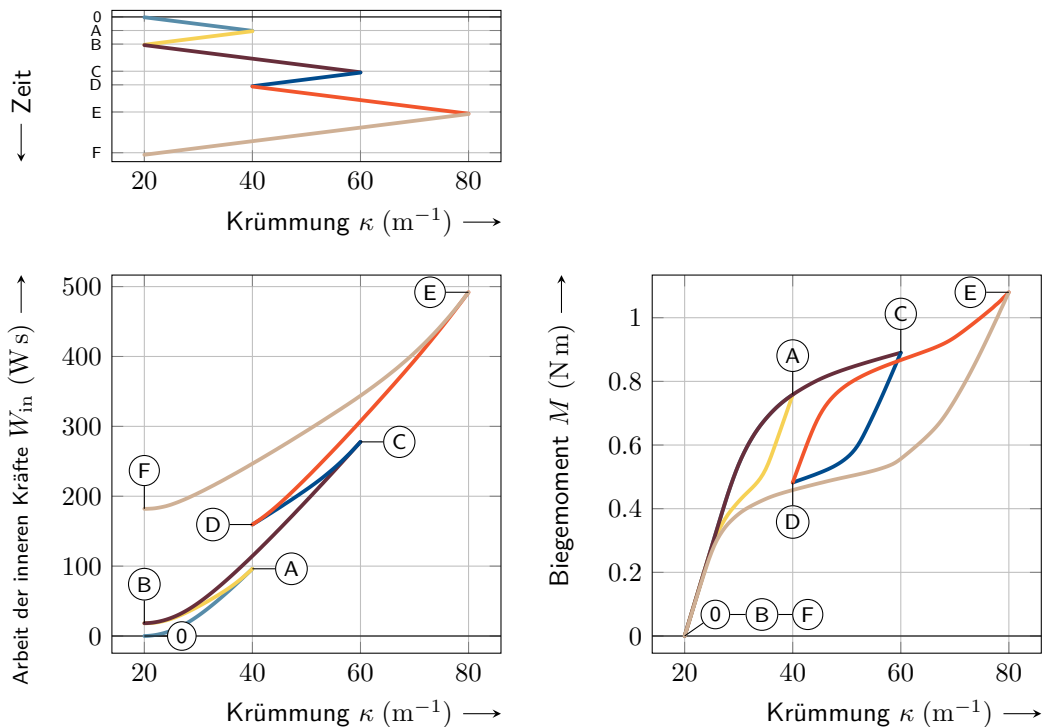
aus (6.5) berechnen lässt.

In Abbildung 6.2 wird der Verlauf der Arbeit der inneren Kräfte für den bereits in Abbildung 4.7 herangezogenen Krümmungsverlauf mit drei Lastzyklen mit anwachsender Maximalkrümmung für ein Beispielröhrchen mit den Werkstoff- und Geometrieparametern aus den Tabellen A.2 und A.8 dargestellt. Der Einfluss der Materialhysterese ist auch hier deutlich zu erkennen. Während linearelastisches Werkstoffverhalten zu einem quadratischen Anstieg der Arbeit der inneren Kräfte führen würde, führt das pseudoelastische Werkstoffverhalten nach dem Ende der kurzen linearelastischen Dehnungsphase zu einem nahezu linearen Anstieg der Arbeit. Die Berechnung der erforderlichen Antriebskräfte auf Basis eines linearelastischen Werkstoffmodells würde damit zu einer Überschätzung der tatsächlich erforderlichen Kräfte führen. Die für eine Krümmungsänderung eines pseudoelastischen Röhrchens zu verrichtende Arbeit wird beim Abbau dieser Krümmung nicht wieder vollständig in mechanische Energie umgewandelt. Stattdessen wird ein Teil der Arbeit der inneren Kräfte in thermische Energie umgewandelt und an die Umgebung abgegeben und sorgt damit für Hystereseverluste. Innerhalb dieser Arbeit erfolgt die Betrachtung aller Prozesse als isotherm, da die Verschiebung der Röhrchen nur langsam erfolgt. Die Berücksichtigung der Erwärmung und Abkühlung der Röhrchen durch latente und dissipative Wärme der Phasenumwandlung erfolgt daher nicht.

Aus der mechanischen Energiebilanz

$$W_{\text{in}} = W_{\text{ex}} \quad (6.8)$$

aus der Arbeit der inneren Kräfte  $W_{\text{in}}$  und der durch die Antriebskräfte und -momente verrichteten Arbeit  $W_{\text{ex}}$  sollen nun die Antriebskräfte zur Verschiebung der Röhrchen eines ebenen tubulären Kontinuumsmechanismus ermittelt werden. Dabei wird angenommen, dass die Bewegung reibungsfrei erfolgt und keine äußeren Kräfte, außer den Antriebskräften, an den



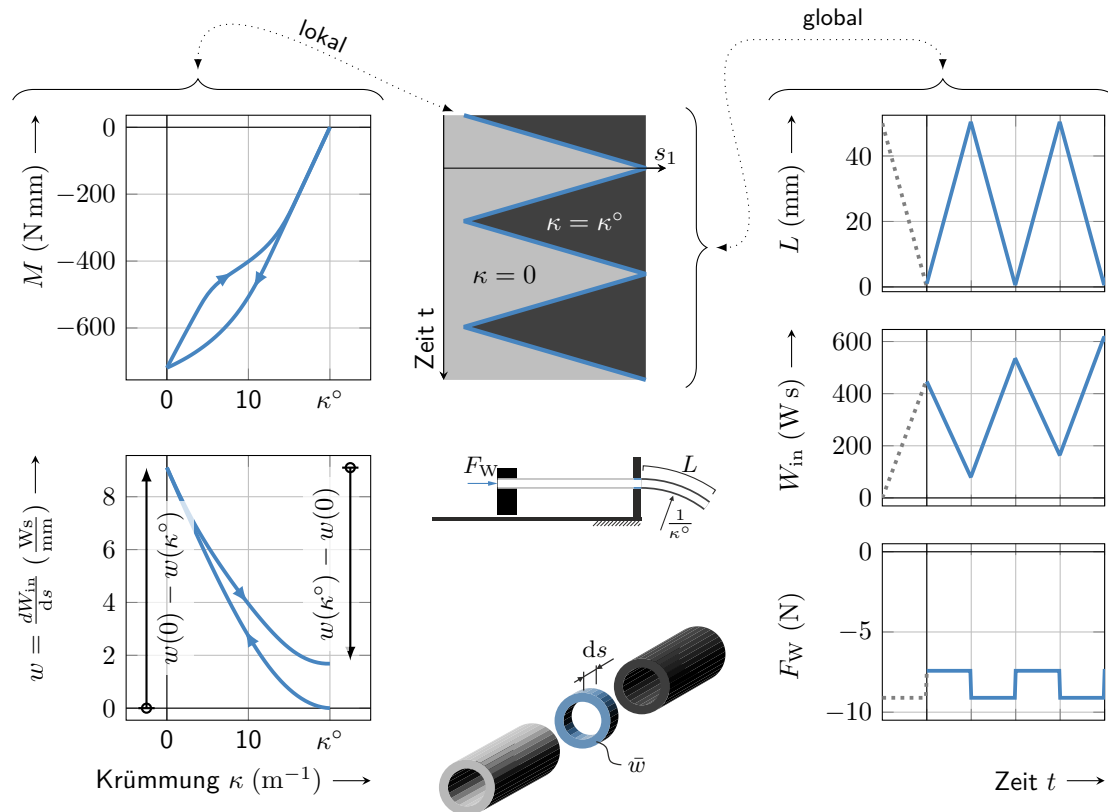
**Abbildung 6.2.:** Zeitlicher Verlauf der Krümmung mit jeweils drei unterschiedlichen Belastungs- und Entlastungsschritten und resultierende Arbeit der inneren Kräfte für ein Röhren mit den Werkstoff- und Geometrieparametern aus den Tabellen A.2 und A.8.

Röhren angreifen. Die Arbeit der inneren Kräfte muss dann vollständig aus der von den Antriebskräften oder -momenten verrichteten Arbeit erfolgen. Für den Fall, dass die Röhren durch die Antriebseinheit ausschließlich translatorisch bewegt werden, ergibt sich die verrichtete Arbeit der Antriebskräfte

$$W_{\text{ex}} = \sum_{i=1}^N \int F_{W,i} \dot{L}_i dt \quad (6.9)$$

aus dem Integral über dem Produkt der Antriebskräfte  $F_{W,i}$  mit den Verschiebegeschwindigkeiten  $\dot{L}_i = \frac{dL_i}{dt}$  an den  $i = 1, \dots, N$  Röhren.

Im Allgemeinen kommt es ausschließlich in Röhrenquerschnitten welche einem Krümmungswechsel unterzogen werden zur Verrichtung innerer Arbeit. Solche Krümmungswechsel treten gemäß dem Modell aus Abschnitt 5.3 nur an den Übergangstellen zwischen Abschnitten und Unterabschnitten auf. Beispielhaft wird nun der Kontinuumsmechanismus aus Abbildung 6.3 mit  $N = 1$  Röhren mit der Vorkrümmung  $\kappa^\circ$  herangezogen. Das betrachtete Röhren kann



**Abbildung 6.3.:** Beispielhafter zeitlicher Verlauf der Abschnittslänge und daraus resultierender Kraftverlauf zur Aufbringung der Formänderungsenergie für ein Röhrrchen mit den Werkstoff- und Geometrieparametern aus den Tabellen A.2 und A.8.

in zwei Abschnitte mit unterschiedlichem Krümmungszustand zerlegt werden. Zum einen in den ungekrümmten Zustand mit  $\kappa=0$ , wie er innerhalb der Antriebseinheit vorliegt und zum anderen in den gekrümmten Zustand mit  $\kappa = \kappa^\circ$ , im Bereich, in dem das Röhrrchen ausgefahren ist. Beim Verschieben des Röhrrchens kommt es ausschließlich in Volumenelementen, welche zum Zeitpunkt  $t$  die Führungsbuchse durchqueren und dabei zwischen einem der beiden Zustände wechseln, zu einer Veränderung der inneren Arbeit. Diese ergibt sich dann aus dem Integral

$$W_{\text{in}} = \int \Delta \bar{w}(\dot{L}) |\dot{L}| dt \quad (6.10)$$

über der Änderung der Dichte der inneren Arbeit

$$\Delta w(\dot{L}) = \begin{cases} w(\kappa^\circ) - w(0) & \text{für } \text{sign}(\dot{L}) > 0 \\ 0 & \text{für } \dot{L} = 0 \\ w(0) - w(\kappa^\circ) & \text{für } \text{sign}(\dot{L}) < 0 \end{cases}, \quad (6.11)$$

welche wiederum aus der längenbezogenen Dichte der inneren Arbeit

$$w = \frac{dW_{\text{in}}}{ds} \quad (6.12)$$

eines infinitesimalen Röhrchenabschnitts bestimmt werden kann. Der  $w(\kappa)$ -Verlauf in Abbildung 6.3 unten links zeigt, dass die Arbeit der inneren Kräfte im infinitesimalen Röhrchenquerschnitt bei der Verformung aus seiner Vorkrümmung  $\kappa^\circ$  hin zur Krümmung Null stärker ansteigt, als sie bei der Entlastung zurück zu  $\kappa^\circ$  wieder abfällt. Ein Teil der verrichteten Arbeit wurde in Wärme umgewandelt, welche dem System nicht wieder in Form von mechanischer Arbeit entnommen werden kann. Folglich ist  $\Delta \bar{w}$  aufgrund der Werkstoffhysterese der Nickel-Titan-Legierung abhängig von der Richtung der Krümmungsänderung und damit auch von der Verschiebungsrichtung des Röhrchens. Aus der Energiebilanz (6.8) mit der verrichteten Arbeit (6.9) und der Arbeit der inneren Kräfte (6.10) resultiert für das betrachtete Beispiel schließlich der Zusammenhang

$$\int \Delta w(\dot{L}) |\dot{L}| dt = \int F_W \dot{L} dt. \quad (6.13)$$

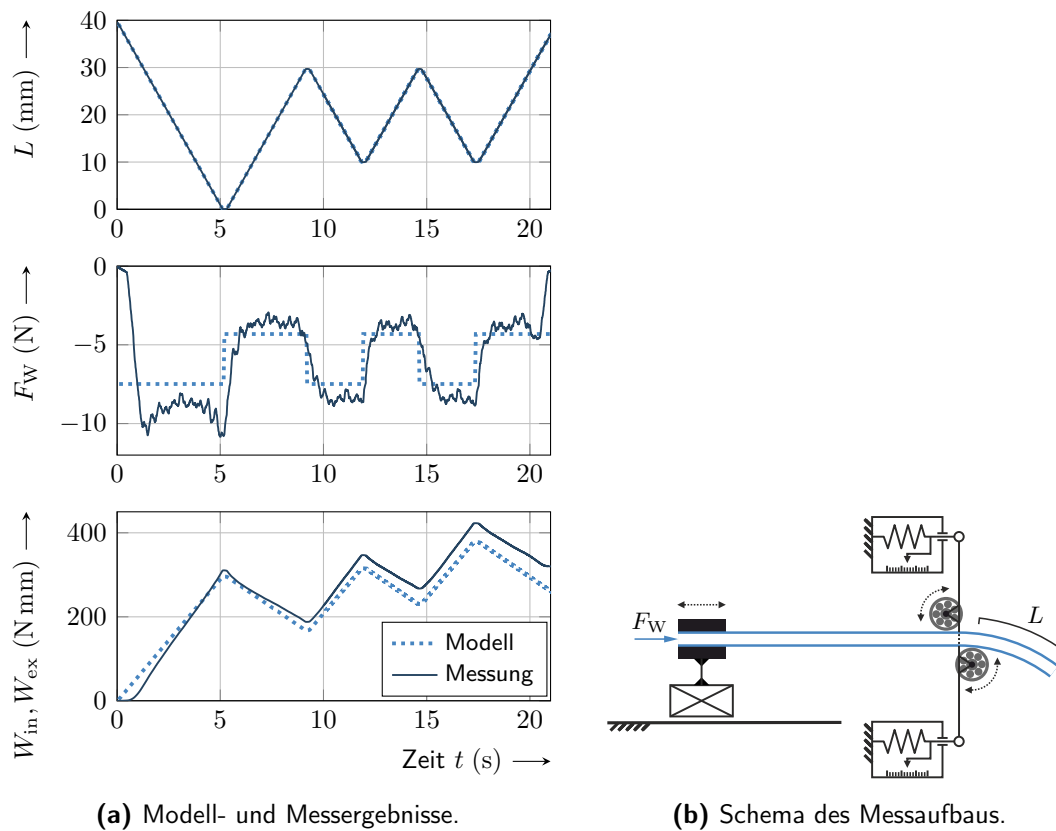
Dieser lässt sich nach der zur Verschiebung des Röhrchens erforderlichen Kraft

$$F_W = \Delta w(\dot{L}) \text{sign}(\dot{L}) \quad (6.14)$$

umformen. Sie ergibt sich als Funktion der Verschiebungsrichtung  $\text{sign}(\dot{L})$  und der Änderung der Dichte der inneren Arbeit  $\Delta w$ . Abbildung 6.3 zeigt für einen beispielhaften Verschiebungsverlauf den ermittelten Antriebskraftverlauf an einem Röhrchen mit den Werkstoff- und Geometrieparametern aus den Tabellen A.2 und A.8. Es wird deutlich, dass die Kraft  $F_W$  im gezeigten Beispiel stets negativ ist. Das Röhrchen muss also, im hier betrachteten, reibungsfreien Fall, stets in die Antriebseinheit gezogen werden, da es andernfalls selbstständig ausfährt, um den energieärmeren, unverformten Zustand einzunehmen.

Die Überprüfung des Modells erfolgt mit einer Versuchsanordnung gemäß dem Schema in Abbildung 6.4b mit dem in Abschnitt 7.4 beschriebenen Messaufbau. Um das Auftreten von Reibkräften so gut wie möglich zu reduzieren, ist das Versuchsröhrchen dabei anstatt durch eine Führungsbuchse durch zwei Miniaturkugellager geführt. Diese sind durch zwei Kraftmessdosen gefasst und lassen damit die Messung der Verschiebungskraft, aber auch des erforderlichen Biegemoments, zu. Das Messergebnis der Kraftmessung, verglichen mit dem





(a) Modell- und Messergebnisse.

(b) Schema des Messaufbaus.

**Abbildung 6.4.:** Messung der Kraft zur Aufbringung der Formänderungsenergie.

Modellergebnis ist in Abbildung 6.4a aufgetragen. Die Werkstoff- und Geometrieparameter des verwendeten Röhrens sind in Tabelle A.7 aufgelistet. Modell und Messergebnis zeigen deutlich den Einfluss der Werkstoffhysterese. Diese sorgt dafür, dass das Kraftniveau zum Einziehen des Röhrens deutlich über dem beim Ausfahren liegt. Es zeigt sich eine gute Übereinstimmung der modellierten und der gemessenen Kraft, wie auch der modellierten Arbeit der inneren Kräfte und der aus den Messungen berechneten, verrichteten Arbeit der Antriebskraft.

## 6.2. Kräfte zur Überwindung der Reibung zwischen den Röhren

Neben den Kräften zur Aufbringung der Formänderungsenergie müssen durch die Antriebe auch die Reibkräfte, welche aus den Kontaktkräften zwischen den Röhren resultieren,

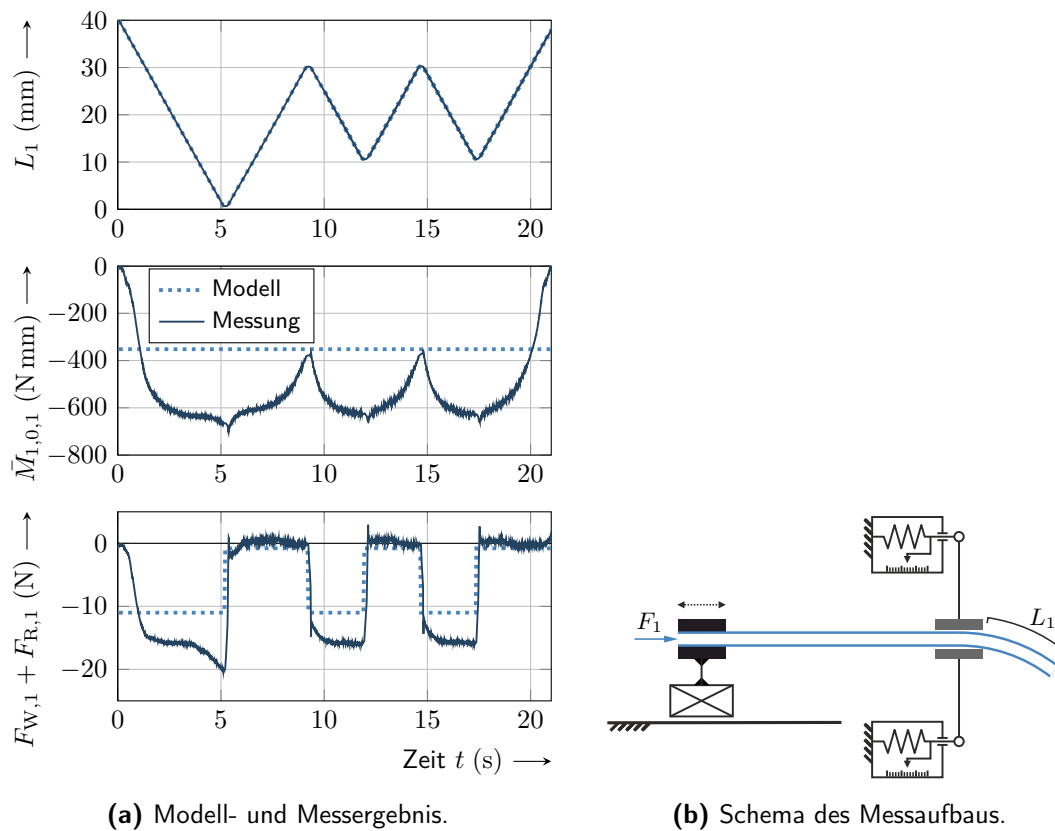
überwunden werden. Die Reibkräfte treten dabei an den Kontaktstellen mit Relativbewegung zwischen den Bauteilen auf.

Wie in Abschnitt 5.2 begründet, wurde zur Lösung der statischen Gleichgewichtslage einer Röhrenchenzusammensetzung auf eine vollständige Betrachtung des Kontaktverhaltens verzichtet und stattdessen einige vereinfachende Annahmen getroffen. Die Gesamtheit aller Kontaktkräfte wird dazu, wie auch in Abschnitt 5.4 zur Abschätzung des Übergangswinkels zwischen den Kanülenabschnitten, zu Kräftepaaren vereinfacht, welche an Stellen mit Biegemomentenwechsel auftreten. Es wird weiterhin angenommen, dass die dominierenden Kontaktkräfte beim Austritt des Röhrenchens  $i$  aus dem vorangegangenen, nächst-äußeren Röhrenchen  $i - 1$  auftreten. Bei der Verwendung eines Ansteuerprofils mit Follow-the-Leader-Verhalten wird zudem stets sequentiell mit dem äußersten Röhrenchen beginnend und mit dem innersten Röhrenchen endend, ausgefahren und in umgekehrter Reihenfolge wieder eingefahren. In diesem Fall tritt bei der Verschiebung von Röhrenchen  $i$  nur an der Kontaktstelle mit Röhrenchen  $i - 1$  eine Relativbewegung auf. Die Reibkraft

$$F_{R,i} = 2\mu_i \frac{|\bar{M}_{i,i,1} - \bar{M}_{i,i-1,P_{i-1}}|}{l_{i-1}} \text{sign}(\dot{L}_i) \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (6.15)$$

lässt sich dann aus dem Kräftepaar an der Biegemomentenwechselstelle abschätzen. Die Gleichgewichtsbiegemomente  $\bar{M}_{i,j,p}$  liefert (5.33) aus der Berechnung der Gleichgewichtskrümmungen. Die Abstände  $l_i$  zwischen den Kontaktkräften gemäß Abbildung 5.15 ergeben sich aus der Lösung des vereinfachten Kontaktmodells (5.34)-(5.41). Für die Länge der Führungsbuchse  $l_0$  kann direkt der konstruktiv bekannte Wert angesetzt werden. Innerhalb dieser Arbeit beträgt der Wert in allen Aufbauten 10 mm. Für die Reibungskoeffizienten  $\mu_i$  wird ein Wert in Abhängigkeit der Werkstoffpaarung gewählt. In allen Aufbauten innerhalb dieser Arbeit wurde eine Führungsbuchse aus PTFE eingesetzt, wofür  $\mu_0 = 0.05$  für den Kontakt zwischen NiTi und PTFE angenommen wird. Für die Materialpaarung NiTi zu NiTi, wie sie zwischen den Röhrenchen selbst auftritt, wird  $\mu_i = 0.15 \forall i = 1, \dots, N$  angenommen. Wie die nachfolgenden Messungen zeigen, unterliegt die für den Reibungskoeffizienten maßgebliche Oberflächengüte im Betrieb des Kontinuumsmechanismus jedoch einem starken Verschleiß.

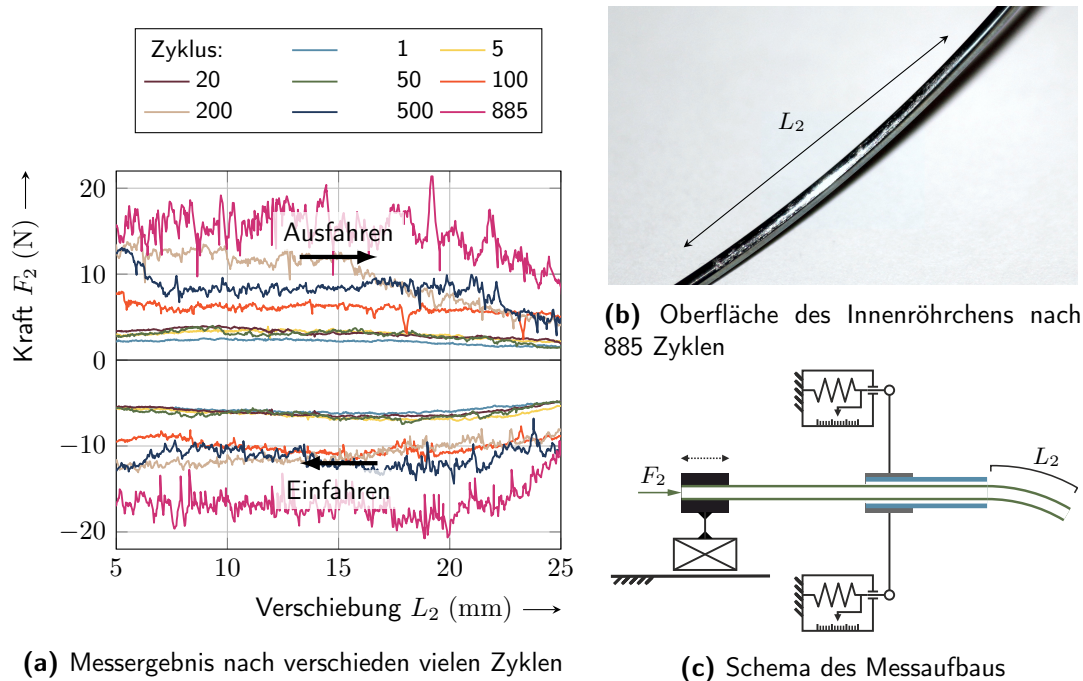
Für den bereits im vorangegangenen Abschnitt betrachteten Fall, einer Kanüle aus einem einzigen vorgekrümmten Röhrenchen, ergibt sich die Biegemomentenwechselstelle ausschließlich in der Führungsbuchse. Aus der zum Geradebiegen des Röhrenchens in der Führungsbuchse erforderlichen Biegemomentenänderung resultiert ein Kontaktkräftepaar, welches schließlich zu einem Reibkräftepaar führt. Das Experiment aus dem vorangegangenen Abschnitt wurde unter den selben Bedingungen mit einer Führungsbuchse aus PTFE wiederholt, das Ergebnis zeigt Abbildung 6.5. Das Biegemoment, welches erforderlich ist, um das vorgekrümmte Röhrenchen in der Antriebseinheit in den ungekrümmten Zustand zu verformen, zeigt in der Messung einen veränderlichen Verlauf, wird im Modell jedoch als konstant berechnet. Eine



**Abbildung 6.5.:** Messung der Kraft zur Aufbringung der Formänderungsenergie und des Moments in der Führungsbuchse aus PTFE mit Reibung. Die Werkstoff- und Geometrieparameter des verwendeten Röhrens sind in Tabelle A.7 aufgelistet.

Ursache für die Veränderlichkeit des Moments ist in der veränderlichen Vorkrümmung entlang der Röhrenachse zu finden. Bei einer Länge von  $L_1 = 40$  mm ist der vorgekrümmte Abschnitt des Röhrens vollständig ausgefahren und es ist kein Biegemoment und keine Antriebskraft zum Halten der Lage mehr erforderlich. Im Bereich von  $0 \text{ mm} \leq L_1 \leq 30$  mm kann eine lageabhängige Werkstoffalterung aus anderen Vorversuchen nicht ausgeschlossen werden. Die Größenordnung von Biegemoment und Reibung stimmt jedoch in Messung und Modell überein. Es ist zu erkennen, dass die Reibung in der Führungsbuchse bereits ausreicht, um die Kraft  $F_W$ , welche das Röhren beim Ausfahren unterstützt, zu kompensieren und somit ein selbstständiges Ausfahren verhindert wird.

In einem zweiten Versuch, entsprechend Abbildung 6.6c, wird nun ein vorgekrümmtes Innenröhren gegenüber einem auf  $L_1 = 30$  mm ausgefahrenen, ungekrümmten Außenröhren verschoben. Die Messergebnisse in Abbildung 6.6a zeigen die zur Verschiebung des Innenröh-



**Abbildung 6.6.:** Messung der Antriebskraft zur Verschiebung eines vorgekrümmten Innenröhrchens in einem geraden Außenröhrchen.

chens notwendige Kraft. Die Messungen wurden für eine zunehmende Anzahl an Bewegungszyklen über einem Hub von jeweils  $L_2 = 30$  mm aufgezeichnet. In der Abbildung dargestellt ist der Hubbereich von 5 mm bis 25 mm ohne sichtbare Einflüsse der Verschiebungsrichtungsumkehr. Die ersten Zyklen der Messung lassen noch deutlich die Asymmetrie des Kraftniveaus in Aus- und Einfahrrichtung aufgrund der Hysterese in der Arbeit der inneren Kräfte erkennen. Mit zunehmender Zyklenzahl wächst jedoch der Reibkraftanteil an, was sich in einem kaum noch wahrnehmbaren Unterschied in den Kraftniveaus beim Ein- und Ausfahren bemerkbar macht. Eine deutliche Erhöhung der Reibkraft findet dabei im Bereich zwischen 50 und 100 Zyklen statt. Ebenso nimmt die Kraftrauhigkeit zu. Ursache dafür ist der Verschleiß der Röhrenoberflächen im Kontaktbereich. Abbildung 6.6b zeigt die deutlich aufgeraute Oberfläche des Innenröhrchens nach 885 Zyklen.

### 6.3. Kräfte zur Durchdringung von Gewebe

Beim Durchdringen von Gewebe setzt sich die für den Vorschub der Röhren erforderliche Axialkraft aus der Summe verschiedener, entlang des Kanülenrückgrats verteilter, Kräfte zu-

sammen. Es treten Steifigkeitskräfte durch das Deformieren von Gewebe, Reibkräfte durch die Relativbewegung gegenüber dem Gewebe und Schnittkräfte beim Zertrennen von Gewebe auf [1]. Die Höhe der wirkenden Kraft hängt beispielsweise von der Form der Kanülenspitze, der Eindringtiefe, der Eindringgeschwindigkeit, aber auch dem Gewebetyp ab. In der Literatur existiert eine Vielzahl an Modellierungsansätzen zur Beschreibung dieser Kräfte. Darunter finden sich beispielsweise die Finite-Elemente-Methode, Bruchmechanik-Analysen oder rein empirische Beschreibungen [87]. Es existiert ebenso eine Vielzahl von Messungen an verschiedensten Gewebetypen, anhand derer sich diese Modelle parametrieren lassen. Innerhalb dieser Arbeit liegt der Fokus des Einsatzes von tubulären Kontinuumsmechanismen in der stereotaktischen Neurochirurgie und damit innerhalb von Gehirngewebe. Umfangreiche Messungen von Gewebekräften am Kalbshirn *in vitro* werden von Ritter et al. [101] vorgestellt. Eine Untersuchung am menschlichen Hirngewebe *in vivo*, welches anschließend im Rahmen einer Epilepsie-Operation entfernt werden soll, präsentieren Howard et al. [58]. Bei den Messungen wurde ein Katheter mit 3 mm Außendurchmesser verwendet und bis zu einer Eindringtiefe im Bereich um 30 mm mit einer Vorschubgeschwindigkeit von etwa  $0.33 \text{ mm s}^{-1}$  axial durch das Gehirngewebe bewegt. Die daraus gewonnenen Messdaten beschränken sich zwar nur auf eine einzige, sehr niedrige Vorschubgeschwindigkeit, bilden aber den für die tatsächliche Anwendung relevanten Gewebetyp ab.

Aufgrund der ineinander verschachtelten Anordnung der Röhrrchen von tubulären Kontinuumsmechanismen werden die inneren Röhrrchen immer vom jeweils äußersten Röhrrchen vor dem Gewebeeinfluss geschützt. Die Gewebekräfte wirken damit stets nur entlang der ausgefahrenen Länge  $L_j$  eines Abschnitts. Eine grobe Abschätzung der Kraft

$$F_{G,i} = 2.75 \frac{\text{N}}{\text{m}} L_i \text{sign}(\dot{L}_i), \quad (6.16)$$

welche zum Verschieben eines Röhrrchens durch Gehirngewebe erforderlich ist, wurde aus den Messdaten aus [58] gewonnen. Es wird von einer mit der Abschnittslänge linear zunehmenden Reibkraft ausgegangen. Die Abschätzung vernachlässigt die Geschwindigkeitsabhängigkeit der Kraft und den kurzzeitigen Kraftanstieg beim Eindringen in das Hirngewebe oder dem Wechsel zwischen unterschiedlichen Gewebetypen. Selbst für einen 100 mm langen Abschnitt mit einem vergleichsweise hohen Außendurchmesser von 3 mm bleiben die Gewebekräfte mehr als eine Größenordnung unter den erforderlichen Antriebskräften zur Verrichtung der Arbeit der inneren Kräfte und zur Überwindung der Reibung zwischen den Röhrrchen. Der Gewebeeinfluss wird daher bei der Antriebskraftbeschreibung als vernachlässigbar erachtet.



## 7. Versuchsaufbauten

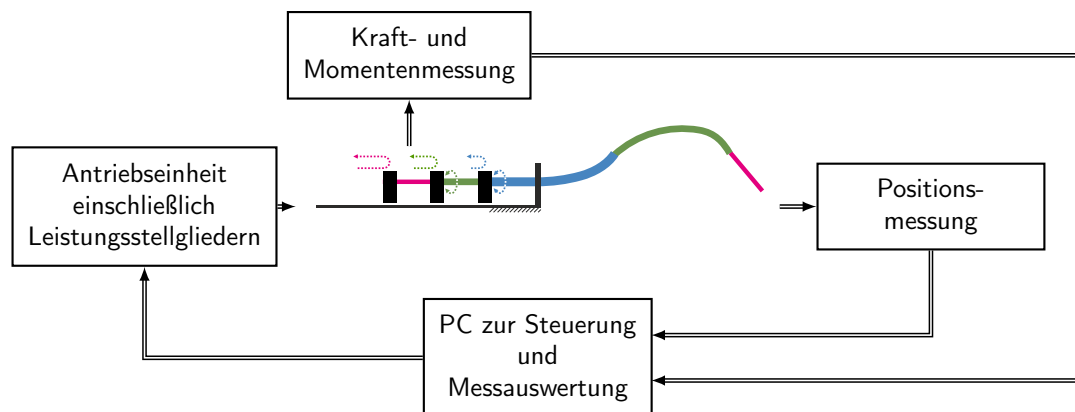
In diesem Kapitel werden die in der Gesamtsystemstruktur in Abbildung 7.1 zusammengefassten Versuchsaufbauten zum Betrieb und zur Durchführung von Messungen an tubulären Kontinuumsmechanismen beschrieben. Zunächst erfolgt in Abschnitt 7.1 eine Beschreibung des mechanischen, elektrischen und informationstechnischen Aufbaus der Antriebseinheit zur Verschiebung und Verdrehung der Röhren. Abschnitt 7.2 stellt den Aufbau einer möglichen Erweiterung der Antriebseinheit zur gezielten Verkipfung der Austrittsbuchse vor. Die Abschnitte 7.3 und 7.4 widmen sich schließlich den Versuchsaufbauten zur Messung der Röhrenpositionen sowie der Antriebskräfte und Momente.

### 7.1. Antriebseinheit für Translation und Rotation

Ein tubulärer Kontinuumsroboter wird als die Gesamtheit von tubulärem Kontinuumsmechanismus, Antriebseinheit sowie Steuerung und Informationsverarbeitung verstanden. Optional können auch Sensoren Bestandteil eines tubulären Kontinuumsroboters sein. Der Formgebung, Modellierung und Nutzung des tubulären Kontinuumsmechanismus widmen sich bereits die vorangegangenen Kapitel. In diesem Abschnitt werden nun aus der Literatur bekannte Antriebseinheiten gegenübergestellt und der Entwurf sowie die konstruktive Umsetzung einer eigenen Antriebslösung präsentiert.

Für die Antriebseinheit eines tubulären Kontinuumsroboters werden die folgenden vier Grundfunktionen gefordert:

- Fassen aller  $i = 1, \dots, N$  Röhren an ihrem proximalen Ende zur Führung der axialen Verschiebung und Verdrehung
- Axiale und radiale Führung des äußersten Röhrens in einer Austrittsbuchse
- Unabhängiges Einprägen von Verschiebungen der Röhren in axialer Richtung der proximalen Röhrenenden
- Unabhängiges Einprägen von Verdrehungen der Röhren mit Vorkrümmung ( $\kappa_i^{\circ} \neq 0$ ) um die Röhrenachse am proximalen Querschnittsende, ansonsten Sperren der Verdrehung der Röhren ohne Vorkrümmung ( $\kappa_i^{\circ} = 0$ )



**Abbildung 7.1.:** Systemstruktur des mechatronischen Gesamtsystems.

Diese ermöglichen den grundsätzlichen Betrieb eines tubulären Kontinuumsroboters und müssen den Steuerungsfreiheitsgrad einer Kanülenzusammensetzung, gemäß der Definition in Abschnitt 5.1, abdecken. Das Einstellen der Basisfreiheit der Führungsbuchse wird nicht als Aufgabe der in diesem Abschnitt beschriebenen Antriebseinheit erachtet und deshalb nicht berücksichtigt. Für den im Kontext dieser Arbeit betrachteten Spezialfall des Follow-the-Leader-Verhaltens wird eine zusätzliche Anforderung an die Antriebsgrößen gestellt:

- Bei der Verschiebung eines Röhrchens  $i$  müssen immer alle nächst-inneren Röhrchen  $i + 1, \dots, N$  synchron mitverschoben werden.

Diese Anforderung lässt sich sowohl konstruktiv als auch steuerungstechnisch erfüllen. An die Struktur der Antriebseinheit ergeben sich, motiviert aus der angedachten medizinischen Anwendung, die folgenden gestalterischen Wunschforderungen:

- Zugänglichkeit zum Lumen des innersten Röhrchens
- Geringer Bauraum und geringes Gewicht
- Möglichst kurze (nicht nutzbare) Röhrchenlänge innerhalb der Antriebseinheit
- Trennbarkeit von Röhrchen und Antriebseinheit

Für experimentelle Untersuchungen an ebenen Kanülenzusammensetzungen ist die Funktion der Rotation der Röhrchen nicht zwingend erforderlich. Für die Orientierung der Röhrchen im Messbereich, aber auch für zukünftige Experimente mit nicht-ebenen Zusammensetzungen, wird die Verdrehfunktion dennoch gefordert. In den Publikationen aus dem Stand der Forschung zu tubulären Kontinuumsmechanismen findet sich bereits eine Vielzahl unterschiedlicher Antriebseinheiten, welche alle Grundfunktionen erfüllen können. Tabelle 7.1 listet für



**Tabelle 7.1.:** Energiewandler und Getriebe von Antriebseinheiten tubulärer Kontinuumsroboter aus der Literatur, sortiert nach dem aktuierbaren Freiheitsgrad (FHG).

Jahr	Quelle	FHG trans.	FHG rot.	Antrieb Translation	Antrieb Rotation
2014	Hendrick et al. [56]	2+3	1+3	BLDC Servomotor Gewindetrieb	BLDC Servomotor Keilwelle Stirnradgetriebe
2012	Dupont et al. [36]	3	4	unbekannt	unbekannt
2007	Webster III [129]	3	3	DC Servomotor Gewindetrieb	DC Servomotor Zahnriemengetriebe
2013	Li et al. [79]	3	3	DC Servomotor Gewindetrieb	DC Servomotor Stirnradgetriebe
2014	Comber et al. [28]	3	2	Pneumatikzylinder	Pneumatikzylinder Zahnriemengetriebe
2012	Burgner et al. [24]	2	2	Manuell Gewindetrieb	Manuell Schneckengetriebe
2012	Cardona [26]	3	1	Pneumatikzylinder	Pneumatikzylinder Zahnstange Kegelradgetriebe
2011	Su et al. [117]	2	1	piezoel. Schrittmotor	piezoel. Schrittmotor Zahnriemengetriebe
2012	Butler et al. [25]	2	1	DC Servomotor Gewindetrieb	DC Servomotor Zahnriemengetriebe
2013	Burgner et al. [23]	2	1	DC Servomotor Gewindetrieb	DC Servomotor Keilwelle Stirnradgetriebe
2014	Torabi et al. [121]	2	1	elektromagn. Schrittmotor Hub-Dreh-Modul	elektromagn. Schrittmotor Hub-Dreh-Modul

diese den aktuierbaren Freiheitsgrad und die entsprechende Antriebslösung auf. Es kann zwischen Systemen mit Direktantrieben und Systemen, welche wie in konventionellen Positioniersystemen durch klassische elektromagnetische Antriebe und eine Übersetzungsmechanik bewegt werden, unterschieden werden. Eines der Systeme wird manuell per Hand aktuiert.

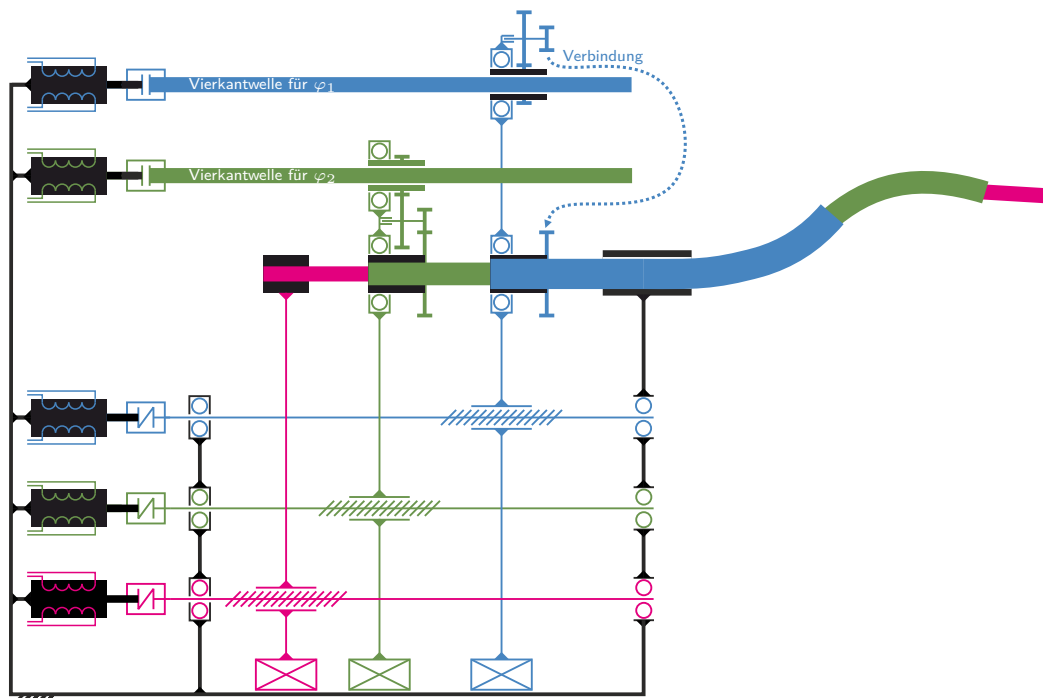
Die komplexeste ebene Kanülenzusammensetzung aus Tabelle 5.2 ist vom Typ „010“ und

erfordert die Verschiebung von  $N = 3$  Röhren. Bei der Erfüllung der Wunschforderungen ist vor allem die a priori Beurteilung von Gewicht und Bauraum eines bestimmten Antriebskonzeptes schwierig. Neben der Wahl der Energiewandlerarten selbst ist auch der Einfluss von mitgeführten oder stationären Antrieben schwer zu beurteilen. In den Quellen der Antriebseinheiten aus Tabelle 7.1 ist das verwendete Antriebskonzept meist nur Mittel zum Zweck und nur geringfügig dokumentiert. Eine Analyse des Erfüllungsgrades der genannten Wunschforderungen in Abhängigkeit der Antriebslösung ist daher nicht möglich.

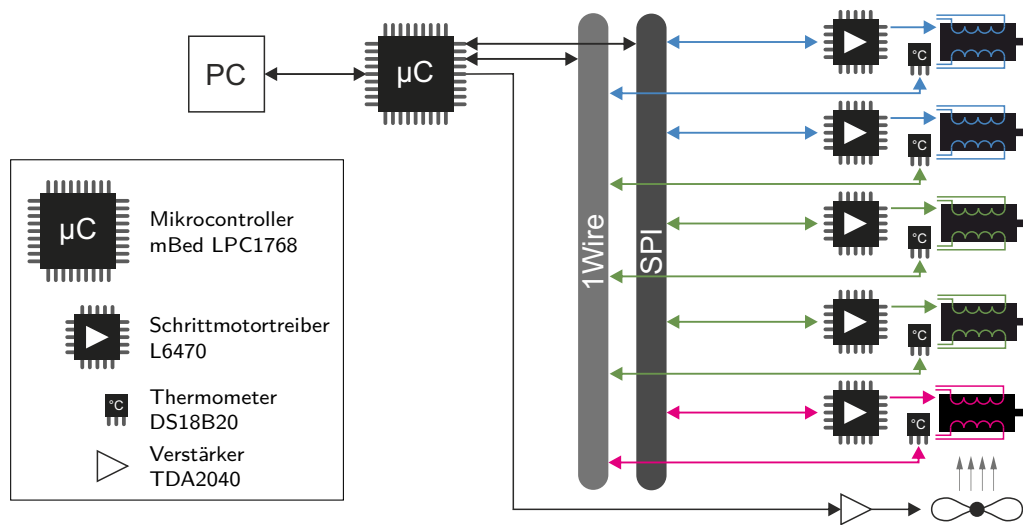
In Anbetracht der Kosten wurde sich für eine Antriebslösung mit konventionellen elektromagnetischen Energiewandlern entschieden. Das technische Prinzip aus Abbildung 7.2a gleicht den Prinzipien der Antriebssysteme aus den Veröffentlichungen von Burgner et al. [23] und Hendrick et al. [56]. Das Prinzip ist leicht skalierbar in seinem Steuerungsfreiheitsgrad. In der hier vorgestellten Umsetzung können insgesamt drei Röhren auf jeweils einem, durch zwei Profilschienenführungen geführten, Schlitten gefasst werden. Als Energiewandler werden fünf Schrittmotoren (*Nanotec TS2018L0804-A*) verwendet. Alle Motoren sind gestellfest am proximalen Ende des Roboters fixiert. Die Verschiebung wird durch Gewindespindeln auf die jeweiligen Schlitten übertragen. Die Rotation der Röhren erfolgt durch eine Vierkantwelle und ein zweistufiges, elastisch vorgespanntes Stirnradgetriebe. An allen drei Schlitten können die Röhren unabhängig voneinander verschoben werden. An zwei der drei Schlitten ist die unabhängige Rotation der Röhren möglich. Somit erreicht die Antriebseinheit den Steuerungsfreiheitsgrad fünf. Die Motoren liefern ein Nenndrehmoment von 36 N mm und eine konstruktive Schrittteilung von 200 Schritten pro Umdrehung. Die trennbare Kopplung der Röhren erfolgt durch eine Fassung, welche am proximalen Röhrenende verklebt und an den entsprechenden Schlitten der Antriebseinheit verschraubt werden kann. Dies ermöglicht eine einfache Austauschbarkeit der Röhren.

Aus der Stirnradgetriebeübersetzung von 1:4 ergibt sich eine Winkelauflösung von  $0.45^\circ$  pro Vollschrift des Schrittmotors bei der Verdrehung der Röhren. Die verwendeten Gewindespindeln verfügen über ein metrisches Feingewinde (M5x0.5) und liefern damit eine Wegauflösung von  $2.5 \mu\text{m}$  pro Vollschrift für die Verschiebung der Röhren. Es ergibt sich für einen Wirkungsgrad von 90 % im Stirnradgetriebe ein maximales Drehmoment von 130 N mm zur Verdrehung der Röhren. Für einen Wirkungsgrad der Gewindespindel von 20 % ergibt sich eine maximale Verschiebekraft von 90 N. Die Führungswagen der verwendeten Miniatur-Profilschienenführung (*Misumi SSEBSZ10*) bilden mit 23 mm Länge in Führungsrichtung das Bauteil, welches ein weiteres Verkürzen der Führungsschlitten begrenzt. Aufgrund der relativ geringen Führungssteifigkeit kommt es zu einer Verkippung der Schlitten aufgrund des Hebelarms zwischen Antriebskraft, Röhrenachse und Führungswagen. Die Folge sind erhöhte Reibkräfte in den Führungen und an den Gewindespindeln. Um Schrittfehler zu vermeiden, werden die Motoren deshalb bei der Positionierung der Röhren im Kurzzeitbetrieb überbestromt.

Die Ansteuerung der Antriebe erfolgt, wie in Abbildung 7.2b dargestellt, zunächst durch

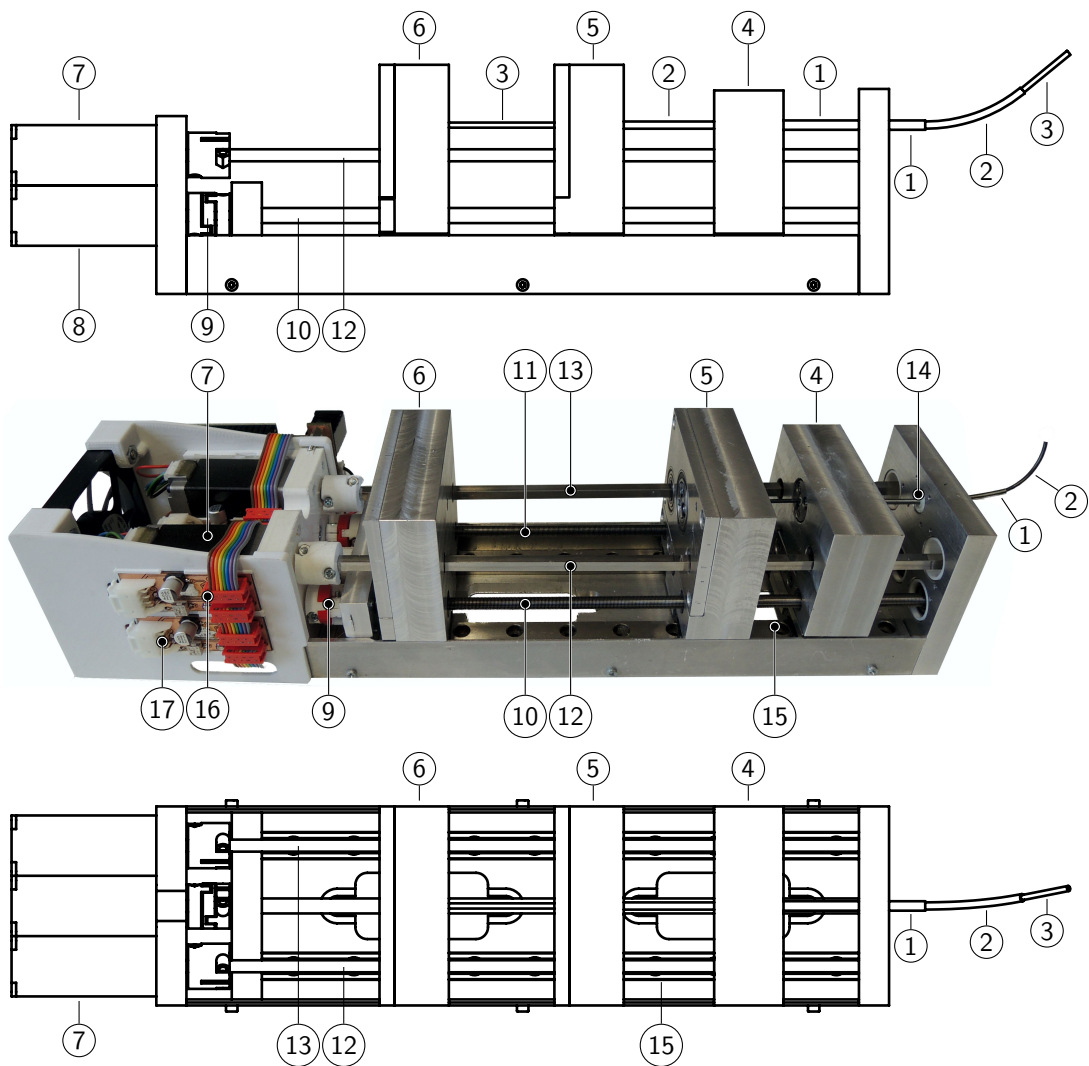


(a) Technisches Prinzip



(b) Schaltungsstruktur

**Abbildung 7.2.:** Mechanisches und schaltungstechnisches Prinzip der Antriebseinheit. Die röhrenspezifischen Komponenten sind in den jeweiligen Farben der Röhren eingefärbt.



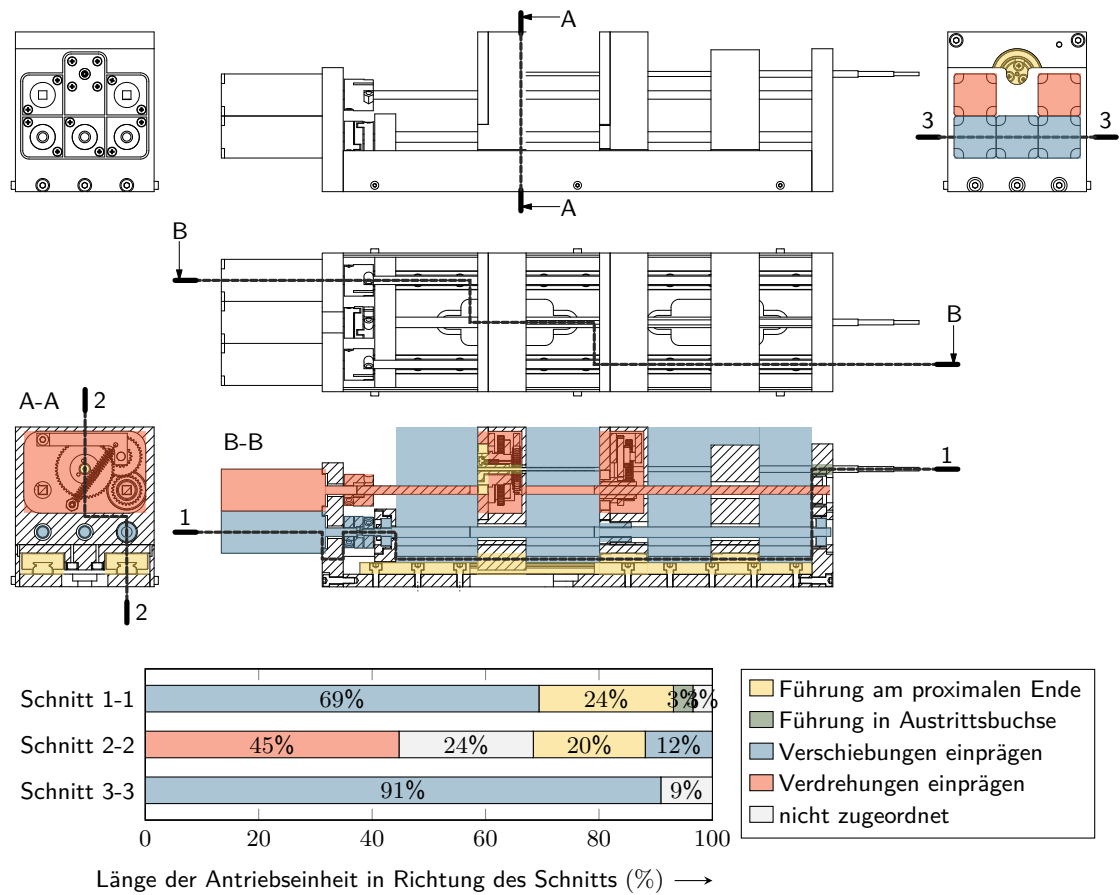
- |                  |                                |                                   |
|------------------|--------------------------------|-----------------------------------|
| ① Röhren $i = 1$ | ⑦ Motor Verdrehung $\varphi_3$ | ⑬ Vierkantwelle $\varphi_2$       |
| ② Röhren $i = 2$ | ⑧ Motor Verschiebung $L_3$     | ⑭ Führungsbuchse                  |
| ③ Röhren $i = 3$ | ⑨ Oldham-Kupplung $L_3$        | ⑮ Profilschienenführung           |
| ④ Schlitten 1    | ⑩ Gewindespindel $L_3$         | ⑯ Leistungsstellglied $\varphi_3$ |
| ⑤ Schlitten 2    | ⑪ Gewindespindel $L_2$         | ⑰ Leistungsstellglied $L_3$       |
| ⑥ Schlitten 3    | ⑫ Vierkantwelle $\varphi_3$    |                                   |

**Abbildung 7.3.:** Komponenten der Antriebseinheit, oben und unten dargestellt mit drei Röhren, jedoch ohne Leistungsstellglieder sowie in der Mitte mit zwei Röhren und Leistungsstellgliedern.

Schrittmotortreiber (*L6470*), welche als Leistungsstellglieder modulweise für jeden Aktor vorhanden sind. Diese sind per SPI-Bus an einen Mikrocontroller (*mBed LPC1768*) gekoppelt, welcher über eine serielle Schnittstelle mit dem Steuer-PC verbunden ist. Die Schrittmotortreiber ermöglichen einen 1/128 Schrittbetrieb und prägen nach vorheriger Konfiguration selbständig die Motorstromprofile für einen vorgegebenen Schrittwinkel ein. Die Berechnung der erforderlichen Schrittwinkel für ein bestimmtes Ansteuerprofil erfolgt zunächst durch den PC und wird durch den Mikrocontroller an die Leistungsstellglieder weitergegeben. Die synchrone Bewegung mehrerer Schlitten zur Erzeugung des Follow-the-Leader-Verhaltens wird durch ein Daisy chaining der Treiberbausteine und ein gemeinsames Chipselect-Signal ermöglicht. Weiterhin werden die Ströme der Schrittmotoren im Stillstand deutlich herabgesetzt, wodurch ein verlustleistungsarmes Halten der Motorposition aufgrund der Selbstsperrung der Gewindespindeln möglich ist. Zusätzlich erfolgt an jedem Motor eine Temperaturmessung durch Digitalthermometer (*DS18B20*) an einem onwire-Bus. Abhängig von den Motortemperaturen wird durch den Mikrocontroller ein Lüfter zur Kühlung geregelt. Dies ermöglicht den Betrieb der Antriebseinheit mit dreifacher Überbestromung der Schrittmotoren während der Röhrenbewegung. Die Zwangskühlung der Antriebe ist dabei nur für Dauereperimente erforderlich. Die Überbestromung im Kurzzeitbetrieb erlaubt, in Anwendungsszenarien welche nur einige wenige Positioniervorgänge der Röhren erfordern, eine bauraum- und gewichtreduzierende Auswahl kleiner Antriebe.

Die mechanischen Komponenten der Antriebseinheit sind, mit Ausnahme von Funktions- und Normteilen wie Führungen, Lagern und Getrieben, aus Aluminiumfrästeilen gefertigt. Sie bietet einen maximalen Hub von 129 mm, welcher beliebig auf die drei Schlitten aufgeteilt werden kann. Jeder Schlitten ist, limitiert durch die Länge der Profilschienenführungswagen, 23 mm lang. Die in Abbildung 7.3 dargestellte Antriebseinheit findet ohne Zwangslüfter in einem Volumen von 291 mm × 76 mm × 66 mm Platz und wiegt 1.85 kg.

Eine Analyse der Ausnutzung des Bauraums durch die geforderten Grundfunktionen zeigt Abbildung 7.4. Die gezeigten Schnitte sind in jeder Raumrichtung durch die Bereiche geführt, welche maßgeblich für die Gesamtausdehnung der Antriebseinheit in der entsprechenden Richtung sind. Die Flächen sind entsprechend ihrer Funktion farblich hinterlegt. Es wird deutlich, dass vor allem die Länge der Antriebseinheit durch die Forderung nach dem Einprägen einer Verschiebung bestimmt wird. Das hohe Aspektverhältnis zwischen Länge und Breite der Antriebseinheit von 4.4:1 resultiert zudem aus dem Bestreben, die Breite und Höhe zu minimieren. Eine Umverteilung der Antriebe kann für das gewählte technische Prinzip zu einer besseren Bauraumnutzung führen.



**Abbildung 7.4.:** Ausnutzung des Bauraums der Antriebseinheit durch die geforderten Grundfunktionen entlang von Schnitten in den drei Raumrichtungen.

## 7.2. Aktuierte schwenkbare Austrittsbuchse

In allen aus dem Stand der Forschung bekannten tubulären Kontinuumsmechanismen werden die Röhren in einer Austrittsbuchse axial und radial geführt. Die Position  $\mathbf{r}_0$  sowie die Ausrichtung  $\alpha_x$ ,  $\alpha_y$  und  $\alpha_z$  der Austrittsbuchse, gemäß Abbildung 5.18, stehen dabei fest. Den Einfluss der Ausrichtung auf die Gesamtkinematik des Kontinuumsmechanismus beschreibt die Rotationsmatrix (5.49). Die Rotationen mit  $\alpha_y$  und  $\alpha_z$  beschreiben die Verkippung der Buchse um die beiden Achsen orthogonal zur Austrittsrichtung des Röhrchens. Sie erlauben zum einen eine Vergrößerung des von der Kanülenspitze erreichbaren Raumes und bieten zum anderen zwei weitere Freiheiten bei der Trajektorienplanung. Die Schwenkung der Austrittsbuchse relativ zur Antriebseinheit bietet dabei den Vorteil eines geringen zusätzlichen Bauraumanspruches, wohingegen das Schwenken der gesamten Antriebseinheit einen deutlich großzügigeren Bewegungsfreiraum erfordert. Für die Anwendung des Roboters in minimalinvasiven medizinischen Eingriffen, bei denen möglichst viele Punkte innerhalb des Körpers durch eine Eintrittsöffnung erreicht werden sollen, sind die beiden Winkel  $\alpha_y$  und  $\alpha_z$  ohnehin die einzigen zulässigen Freiheiten nach Festlegung der Eintrittsposition in den Körper.

Bei der Dimensionierung der aktuierten schwenkbaren Austrittsbuchse sollen der Bauraum, das erforderliche Biegemoment  $M_b$  und die in den Röhren auftretende, maximale Dehnung minimiert werden. Der Abstand  $l$  zwischen der starren Führungsbuchse und der schwenkbaren Austrittsbuchse ist maßgeblich für diese Kriterien. Ihr Einfluss auf die genannten Größen wird mit der Modellvorstellung aus Abbildung 7.5 analysiert. Unter der Annahme kleiner Verschiebungen  $v(x)$  und kleiner Winkel  $v'(x)$  des Röhrchens gegenüber der  $x$ -Achse im Bereich zwischen der starren und der schwenkbaren Buchse wird

$$v''(x) \approx \kappa(M(x)) \quad (7.1)$$

angenommen. Mit den Randbedingungen

$$v(0) = 0 \quad (7.2a)$$

$$v'(0) = 0 \quad (7.2b)$$

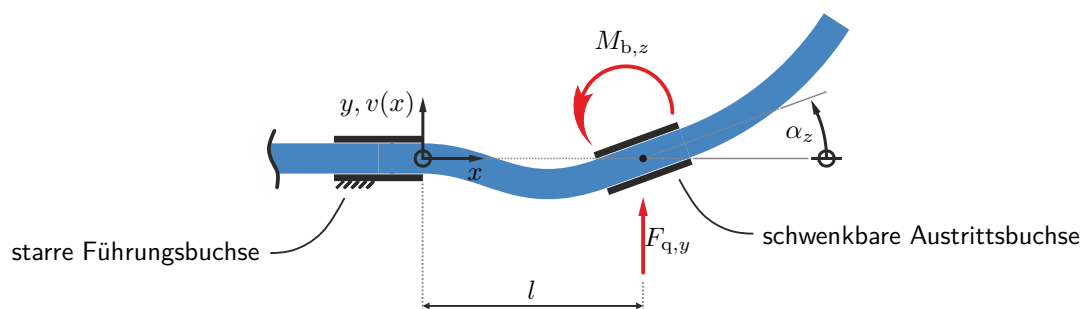
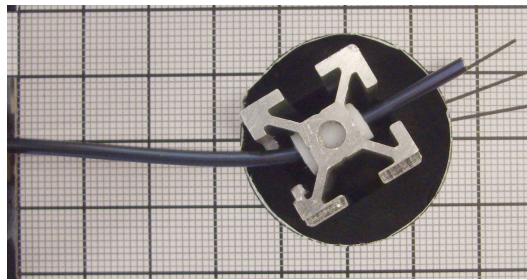
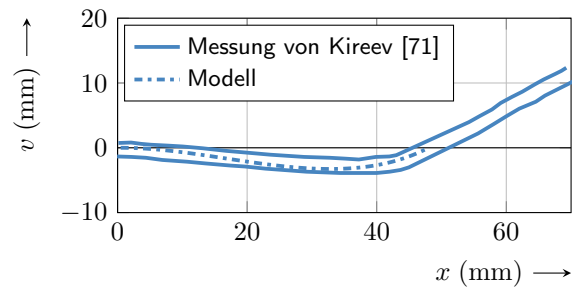


Abbildung 7.5.: Modellvorstellung der aktuierten schwenkbaren Austrittsbuchse.



(a) Versuchsaufbau von Kireev [71], zur Überprüfung der Biegelinie in der Ebene.



(b) Modell- und Messergebnis der Biegelinie.

**Abbildung 7.6.:** Biegelinie eines NiTi-Röhrchens ohne Vorkrümmung bei erzwungenem Austrittswinkel von  $\alpha_z = 30^\circ$ .

an der starren Führungsbuchse und

$$v(l) = 0 \quad (7.3a)$$

$$v'(l) = \alpha_z \quad (7.3b)$$

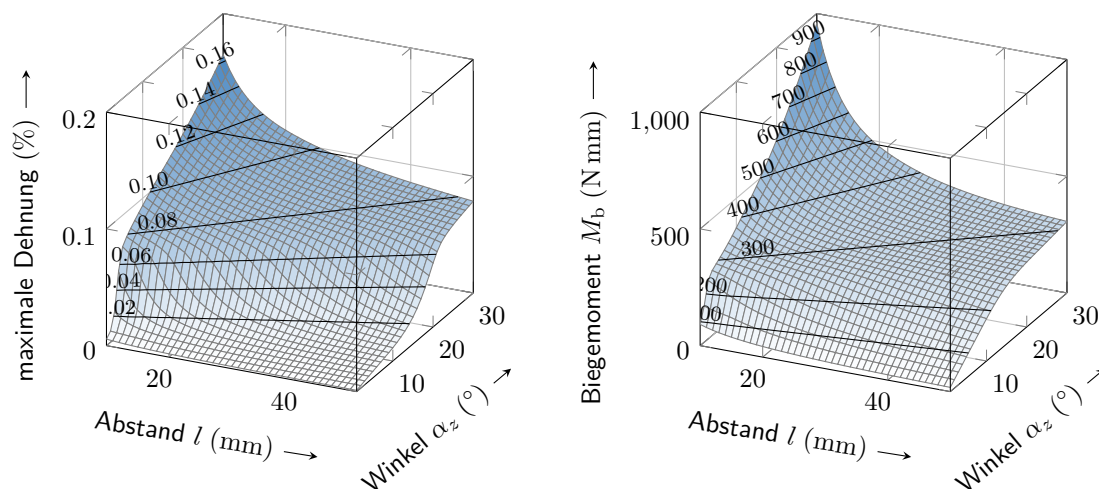
an der schwenkbaren Austrittsbuchse wird, basierend auf dem Biegemomentenverlauf

$$M(x) = M_{b,z} + (l - x)F_{q,y} \quad (7.4)$$

und dem inversen Bauteilmodell  $\kappa(M)$  des NiTi-Röhrchens, die Gleichgewichtslage für beliebige Schwenkwinkel  $\alpha_z$  ermittelt. Durch ein Nullstellensuchverfahren werden die unbekanntenen Größen  $M_{b,z}$  und  $F_{q,y}$  zur Erfüllung der rechtsseitigen Randbedingungen (7.3) bestimmt. Der in der Masterarbeit von Kireev [71] beschriebene Messaufbau aus Abbildung 7.6a wurde genutzt, um die Modellqualität zu untersuchen. Abbildung 7.6b zeigt die durch Kantenerkennung des Röhrchens gemessene sowie die berechnete Biegelinie des Versuchsröhrchens mit den Werkstoff- und Geometrieparametern aus Tabelle A.7.

In einer Parameterstudie mit einem dickwandigen Beispieleröhrchen mit 1 mm Innen- und 3 mm Außendurchmesser ohne Vorkrümmung und mit den Werkstoffparametern aus Tabelle A.1 wurde die maximal auftretende Dehnung gemäß (4.14) und das erforderliche Biegemoment  $M_{b,z}$  über dem Buchsenabstand  $l$  und dem Schwenkwinkel  $\alpha_z$  berechnet. Abbildung 7.7 zeigt das Ergebnis dieser Parameterstudie. Die Dimensionierung der aktuierten Schwenkeinrichtung kann über die Vorgabe einer maximal zulässigen Dehnung zur Vermeidung plastischer Verformungen geschehen. Diese liefert aus der Parameterstudie die Paretofront von möglichem Schwenkwinkel und erforderlichem Buchsenabstand. Um das Beispielrohr mit maximal 8% Dehnung um  $30^\circ$  auszulenken, ist folglich ein Abstand von etwa 45 mm notwendig. Das erforderliche Biegemoment ergibt sich zu rund 300 mNm. Der von Kireev [71]





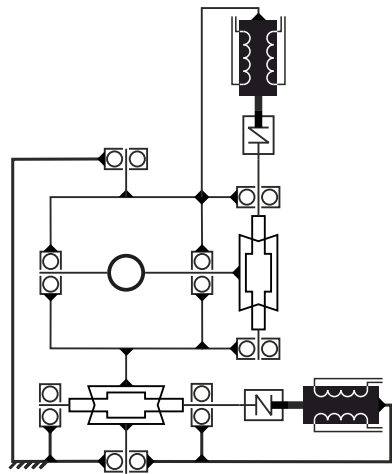
**Abbildung 7.7.:** Parameterstudie zur Dimensionierung der kardanischen Austrittsbuchse nach maximaler zulässiger Dehnung und erforderlichem Biegemoment.

beschriebene Kontruktions- und Entwicklungsprozess liefert als mögliche konstruktive Umsetzung der Schwenkaufgabe die Konstruktion in Abbildung 7.8. Durch eine kardanische Anordnung der beiden Schwenkachsen kann eine Schwenkeinrichtung mit jeweils  $\pm 30^\circ$  Schwenkwinkel und 45 mm Buchsenabstand aufgebaut werden. Die Kombination aus Schrittmotor (*Faulhaber AM1514*), Stirn- und Schneckenradgetriebe erreicht ein maximales Biegemoment von 636 N mm in einem Volumen von 54 mm  $\times$  105 mm  $\times$  130 mm bei einem Gewicht von 0.8 kg.

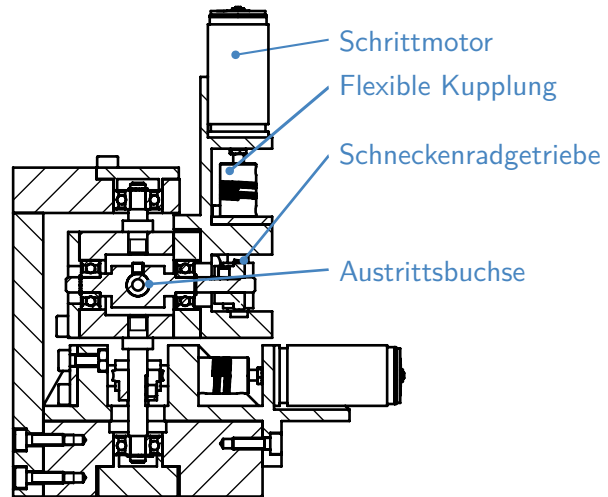
### 7.3. Positionsmessung

Die Notwendigkeit eines Positionsmesssystems rührt aus dem Wunsch her, die Modellberechnungen aus Kapitel 5 überprüfen zu können. Wie die Messungen gezeigt haben, ist das Kinematikmodell zwar hinreichend genau, um im gesteuerten Betrieb ein Ziel im Millimeterbereich zu erreichen, jedoch nur nach vorheriger Kalibrierung der Kinematikzustände und -parameter anhand von Positionsmessungen der Trajektorie der Kanüle. Ein Messsystem ist daher nicht nur zu experimentellen Zwecken, sondern auch für den späteren Einsatz tubulärer Kontinuumsroboter in Anwendungen mit Genauigkeitsanspruch sinnvoll.

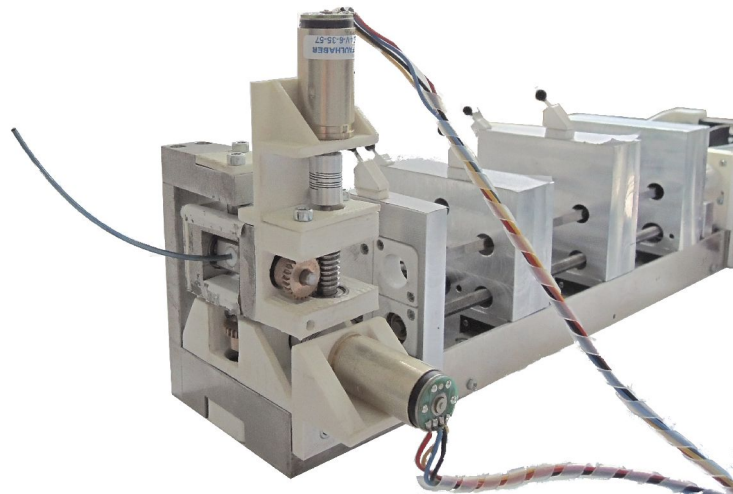
Für die Anwendung am tubulären Kontinuumsmechanismus kommen die Sensorvarianten aus Abbildung 7.9 grundsätzlich in Frage. Im einfachsten Fall, entsprechend Abbildung 7.9a, erfolgt eine Messung der Röhrenverschiebungen und -verdrehungen direkt an der Stelle, an der sie aufgebracht werden. Diese Variante findet sich beispielsweise in den Antriebssystemen



(a) Technische Prinzipskizze, nach [71].



(b) Schnitt der Konstruktionszeichnung in der Schwenkebene, nach [71].

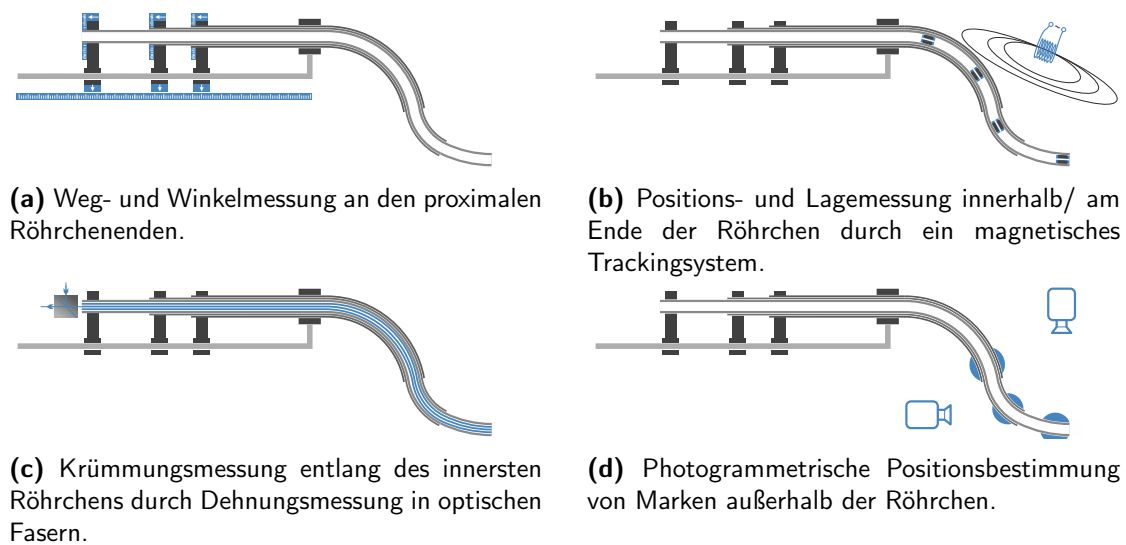


(c) Kombination der schwenkbaren Austrittsbuchse mit der Antriebseinheit.

**Abbildung 7.8.:** Zeichnungen und Aufbau der schwenkbaren Austrittsbuchse.

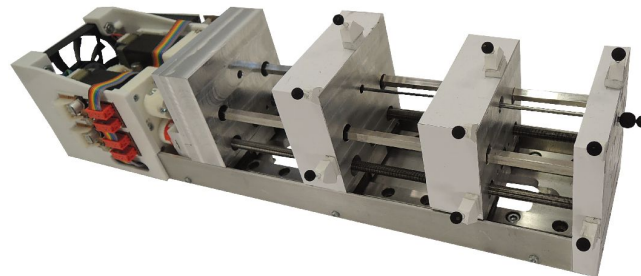
aus [26, 28, 116] wieder und kann zur Regelung der Antriebe zur präzisen Stellung der Rörchensteuergrößen herangezogen werden. Eine Bestimmung des räumlichen Kanülenverlaufs ist nicht möglich. Elektromagnetische Messsysteme entsprechend Abbildung 7.9b ermöglichen die Messung der Position und Ausrichtung mehrerer Sensorspulen in jeweils bis zu fünf Freiheiten. Auch die Messung durch Gewebe ist möglich. Die Größe der verfügbaren Sensorspulen lässt eine Platzierung dieser innerhalb des innersten Röhrchens zu. Die Verwendung eines solchen Messsystems in Kombination mit einem tubulären Kontinuumsroboter wird beispielsweise in den Veröffentlichungen [21, 69, 74] beschrieben. Die Anordnung in Abbildung 7.9c zeigt ein faseroptisches Messverfahren. Die Rekonstruktion des Krümmungsverlaufes aus dem Dehnungsverlauf mehrerer Glasfasern bietet die Möglichkeit, die Krümmung der gesamten Kanüle kontinuierlich oder an diskreten Stützstellen zu erfassen. Die Dehnungsinformation wird dabei aus dem Amplitudenspektrum des reflektierten Lichts einer in der Lichtwellenlänge stimmbaren Lichtquelle gewonnen. Untersuchungen zur Genauigkeit der Positionsbestimmung der Spitze einer gekrümmten Kanüle werden in [57, 106] vorgestellt. Das im Kontext tubulärer Kontinuumsroboter am häufigsten verwendete Messverfahren ist die photogrammetrische Messung gemäß Abbildung 7.9d. Für die Messung in der Ebene genügt die Verwendung einer Kamera. Die Erfassung der Bildkoordinaten relevanter Punkte kann dann manuell erfolgen [88], durch Bilderkennung von bewusst platzierten Marken [134] oder direkt aus der Kanülenkontur [75, 135]. Die Verwendung eines Stereokamerasystems mit manueller Positionsbestimmung von Messmarken auf der Oberfläche der Röhrchen stellt das erste und am häufigsten verwendete Messverfahren dar [102, 104, 129, 132]. Die Quelle [129, S. 160] nennt für dieses Verfahren eine abgeschätzte Messunsicherheit von  $\pm 2.2$  mm. Das Stereokamerasystem *Claronav Micron-Tracker H3-60*, welches in der Lage ist Messmarken automatisch zu erkennen, liefert in den Publikationen [24, 29] eine Messunsicherheit von 0.278 mm und stellt damit das derzeit genaueste verwendete Verfahren dar.

Viele der erwähnten Messsysteme weisen eine Messunsicherheit auf, welche höher ist als der zu erwartende Fehler des damit überprüften Modells. Anspruch dieses Abschnittes ist es deshalb, den Aufbau eines Messsystems zu beschreiben, welches genutzt werden kann, um Messdaten zur verlässlichen Beurteilung der Modellqualität im Submillimeterbereich zu liefern. Auf Basis der erreichbaren Präzision und des Preises der benötigten Komponenten wurde sich für den Eigenbau eines der Messaufgabe angepassten photogrammetrischen Messsystems entschieden. Als Kameras werden zwei Webcams (*Logitech C920*) verwendet, welche eine Auflösung von 1920x1080 Bildpunkten und eine kostengünstige USB-Verbindung zum PC ermöglichen. Die Kameraausrichtung vieler kommerzieller Stereokamerasysteme entspricht jener der menschlichen Augen. Diese bietet ein weites Sichtfeld, jedoch eine geringe Messgenauigkeit in der Tiefenrichtung der Bilder. Als Daumenregel für die Genauigkeit der Rekonstruktion der tatsächlichen räumlichen Koordinate aus den Bildkoordinaten kann der Winkel zwischen den Strahlen der Kameras angenommen werden. Je kleiner dieser ist, um so ungenauer wird die Rekonstruktion in Strahlrichtung [53, S. 321]. Um die Messgenauigkeit zu erhöhen wurde der größtmögliche Winkel von  $90^\circ$  gewählt. Dies stellt den Hauptunterschied zu den in anderen

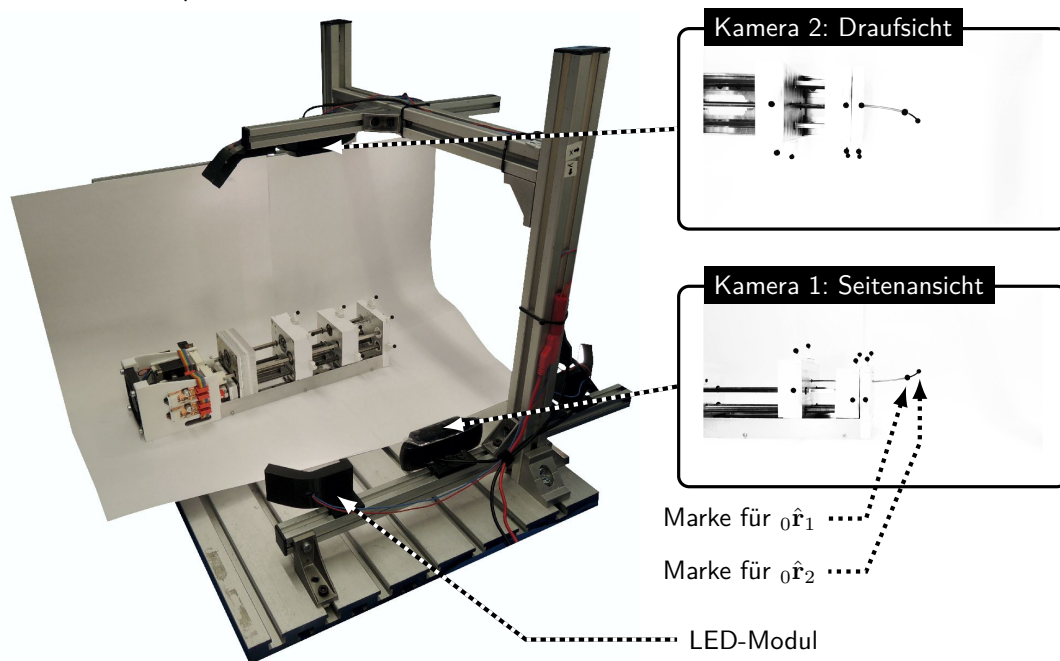


**Abbildung 7.9.:** Sensorvarianten

Publikationen verwendeten Kameramesssystemen dar. Weiterhin sind die Kameras in einem Abstand zueinander angeordnet, der nur den tatsächlich erforderlichen Messbereich in beiden Bildern sichtbar macht und somit die Auflösung der Kameras bestmöglich ausnutzt. Der mechanische Aufbau des Messsystems ist in Abbildung 7.10b dargestellt. Ein Rahmensystem trägt die Kameraanordnung sowie 8 LED-Module zur gleichmäßigen, diffusen Ausleuchtung des Messbereiches. Für die Rekonstruktion der Lage eines Objektes aus zwei unterschiedlichen Bildern ist die genaue Bestimmung der Bildkoordinaten ein und desselben Punktes in beiden Bildern erforderlich. Zur Detektion von für die Modellanalyse interessanten Kanülenpunkten wurden, wie in Abbildung 7.10a dargestellt, Kugeln auf den Röhren sowie den Schlitten und der Grundplatte der Antriebseinheit befestigt. Bei diesen handelt es sich um Kugellager-Kugeln mit 4.8 mm Durchmesser. Durch ein senkerodiertes Loch in der Kugelmitte mit dem Außendurchmesser des jeweiligen Röhrens lassen sich die Kugeln auf die Röhren schieben und verkleben. Die für die Triangulation der Messpunkte erforderlichen Bildpunkte, in denen sich beide Kamerastrahlen kreuzen, liegen dabei theoretisch im Mittelpunkt einer Kugel. Jeder Strahl verläuft damit auch durch den Mittelpunkt des Kreises, der aus der Projektion einer Kugel in eine beliebige Bildebene entsteht. Durch Bildverarbeitungsalgorithmen können diese Kreismittelpunkte automatisiert erkannt werden. Zur robusten Bilderkennung wird die Kugel mit Ruß beschichtet, um eine schwarze, reflektionsarme Oberfläche mit hohem Kontrast zur weiß eingefärbten Umgebung zu schaffen. Bei geeigneten Belichtungseinstellungen erscheinen die Messkugeln schließlich als schwarze Kreise auf vollständig weißem Hintergrund, wie die Detailansichten aus Abbildung 7.10b verdeutlichen. Die Seitenflächen der Antriebseinheit wurden mit weißem Papier bedeckt, um auch die Kugeln auf den Antriebsschlitten sicher erkennen zu können. Bildakquise und Verarbeitung erfolgen nicht zeitgleich. Die Messungen



(a) Antriebseinheit mit Messmarken an den Enden der beiden Röhren sowie auf den Antriebsschlitzen und der Grundplatte.



(b) Mechanischer Aufbau des photogrammetrischen Messsystems. Die Antriebseinheit befindet sich im Messbereich der Kameras. Rechts dargestellt sind die zur Bilderkennung genutzten Kameraaufnahmen.

**Abbildung 7.10.:** Messsystem mit Antriebseinheit mit elf Messmarken, aus [47].

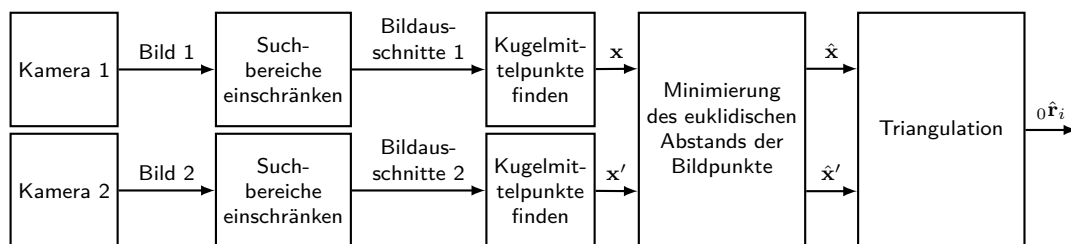
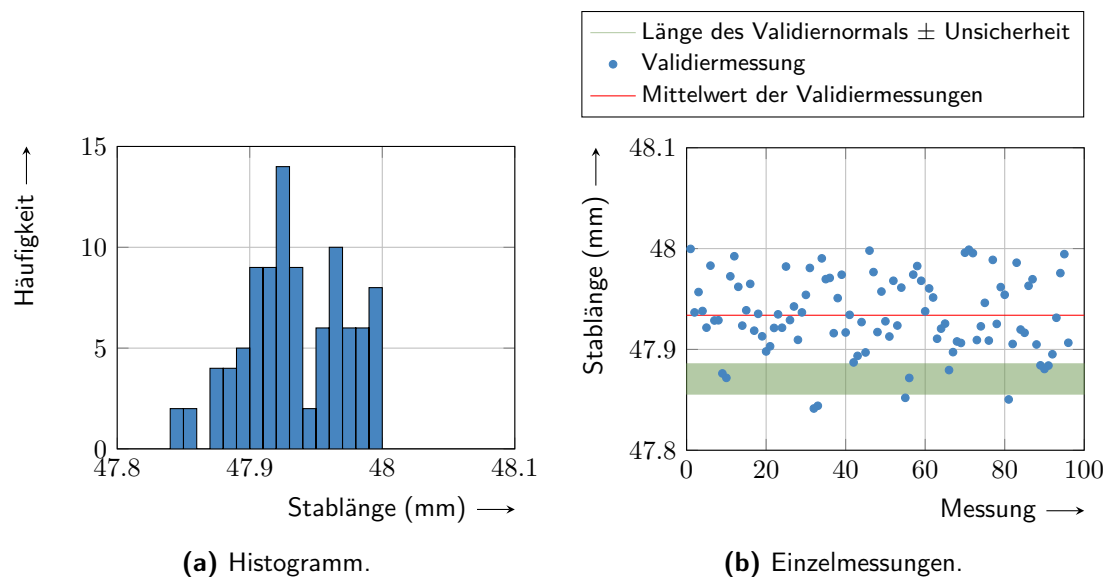


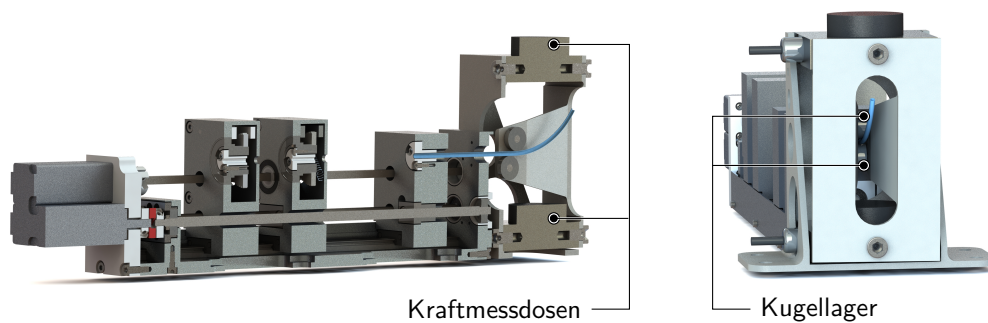
Abbildung 7.11.: Berechnungsschritte bei der photogrammetrischen Messung.

werden stets im Stillstand des Roboters aufgenommen, um zum einen eine Bewegungsunschärfe in den Bildern zu vermeiden und zum anderen, um zwei Bilder derselben Lagekonfiguration bei sequentieller Bildaufnahme zu ermöglichen. Der Roboter fährt schließlich schrittweise das vorgegebene, diskretisierte Ansteuerprofil ab, wobei nach jedem Bewegungsschritt von jeder Kamera jeweils vier Aufnahmen der Szene gespeichert werden. Die Bildakquise und Verarbeitung erfolgt mit Hilfe von Matlab. Nach Abschluss des kompletten Bewegungsvorgangs wird die gewonnene Bilddatenmenge ausgewertet. Der Verarbeitungsablauf ist in Abbildung 7.11 zusammengefasst. In der ersten Aufnahme der Messreihe werden Suchbereiche um die Marken in jedem Bild definiert. Diese ermöglichen es, die Marken einer bestimmten Koordinate  ${}_{0}\hat{x}_i$  zuzuordnen. Anschließend wird in jedem Suchbereich mit Hilfe des Hough-Algorithmus der Mittelpunkt der im Bildausschnitt sichtbaren Kreise bestimmt. Bei der Auswertung der folgenden Aufnahmen wird der Suchbereich für jede Kugel jeweils um den im vorangegangenen Bild detektierten Kreismittelpunkt verschoben. Das Ergebnis ist für die Messkonfiguration aus Abbildung 7.10a für jeden Messpunkt  $u$  insgesamt  $2 \times 11$  Tupel aus Horizontal- und Vertikalkoordinaten der Kreismittelpunkte in den beiden Bildern. Durch das Linsenverzerrungsmodell aus [53, p. 191] werden die radialen und die tangentialen Linsenverzerrungen der Kameras korrigiert. Die Entzerrung wird auf jedes Tupel für die Entzerrungsparameter der entsprechenden Kamera angewendet und liefert schließlich die entzerrten Koordinaten der gefundenen Kugelmittelpunkte in Bild 1 als  $x$  und in Bild 2 als  $x'$ . Eine fehlerhafte Entzerrung, aber vor allem Effekte wie Bildrauschen und Unschärfe, führen dazu, dass der Kugelmittelpunkt nicht exakt gefunden wird. Weiterhin führen Fehler bei der Kalibrierung der Stereokameraparameter dazu, dass die epipolare Bedingung nicht von den gefundenen Punkten erfüllt werden kann. Dies bedeutet, dass die beiden Strahlen von den Kameras durch die Kreismittelpunkte keinen Schnittpunkt im Raum haben. Entsprechend dem Algorithmus 12.1 aus [53, s. 318] wird deshalb ein Punktepaar  $\hat{x}, \hat{x}'$  gefunden, welches die epipolare Bedingung erfüllt und gleichzeitig den euklidischen Abstand zwischen den gemessenen Punkten  $x, x'$  und den verbesserten Punkten  $\hat{x}, \hat{x}'$  minimiert. Das gefundene Punktepaar wird dann durch eine lineare Triangulationsmethode, entsprechend der homogenen Methode aus [53, pp. 312], in den zugehörigen Punkt  ${}_{0}\hat{x}_i$  im Raum umgerechnet. Aus den Koordinaten jeder Marke, welche stets für vier Bilder der selben Szene berechnet werden, wird schließlich der Mittelwert gebildet, um Einflüsse des Bildrauschens zu reduzieren. Das mathematische Mo-



**Abbildung 7.12.:** Ergebnis der Validierung der Messunsicherheit des kalibrierten, photogrammetrischen Messsystems.

dell der Stereokamera erfordert insgesamt 26 Parameter, welche zunächst bestimmt werden müssen. Diese setzen sich zusammen aus der relativen Lage und Orientierung der zweiten Kamera bezüglich der ersten sowie aus den Abbildungsparametern der beiden Kameras. Deren Kalibrierung erfolgt mit dem *Matlab*-eigenen Parameterschätzverfahren (*estimateParameters*) aus  $2 \times 45$  Bildern eines Schachbrettmusters. Die dabei gewonnenen Parameter wurden für die anschließenden Messungen verwendet. Die Bestimmung der Messunsicherheit erfolgt anhand von  $2 \times 100$  Aufnahmen eines Kugelstabes, wie durch die *VDI2634*-Norm [126] vorgeschlagen, in unterschiedlichen Positionen und Ausrichtungen innerhalb des Messbereiches. Die auch bei der Messung am tubulären Kontinuumsmechanismus verwendete Methode zur Bestimmung der Kugelposition im Raum, wird hier auch verwendet. Der Stab hat eine Länge von 47.87 mm mit einer Unsicherheit von  $\pm 15 \mu\text{m}$  und bildet damit das Validiernormal. Das Ergebnis der Validiermessungen zeigt Abbildung 7.12. Es ergibt sich eine mittlere und damit systematische Abweichung zwischen der tatsächlichen und der gemessenen Länge des Kugelstabs von  $129 \mu\text{m}$ . Die Standardabweichung zum Mittelwert der gemessenen Stablängen von 47.934 mm beträgt  $38 \mu\text{m}$ . Die Bestimmungsmethode der Messunsicherheit des in [24, 29] verwendeten *Claronav Micron-Tracker H3-60* ist nicht dokumentiert, weshalb ein objektiver Vergleich der beiden Systeme kaum möglich ist.



**Abbildung 7.13.:** Erweiterung der Antriebseinheit zur Messung von Kraft und Biegemoment bei der Verschiebung eines Röhrchens. Links dargestellt ist ein Schnitt durch Antriebseinheit und Messaufbau, rechts die Vorderansicht.

## 7.4. Kraftmessung

Zur Messung von Axialkraft und Biegemoment, die beide beim Verschieben eines gekrümmten Röhrchens in der Austrittsbuchse auftreten, wurde die in Abschnitt 7.1 beschriebene Antriebseinheit erweitert. Abbildung 7.13 zeigt die verwendete Messanordnung in Kombination mit der bereits beschriebenen Antriebseinheit. Zwei Kugellager, als nahezu reibungsloser Ersatz der Austrittsbuchse, werden dabei zur Einbringung eines Kontaktkräftepaars normal zur Röhrenoberfläche genutzt. Für die Bestimmung des Reibungseinflusses wurden diese durch eine Teflon-Austrittsbuchse ersetzt. Nicht dargestellt ist das verwendete inkrementelle Wegmesssystem (*HEDS-9720*), welches zur Messung der Röhrenverschiebung am Schlitten befestigt wurde. Es bietet eine Wegauflösung von  $40\ \mu\text{m}$  und kompensiert mögliche Fehler, welche durch Spiel und Steifigkeit der Gewindespindelantriebe entstehen. Die beiden Kraftmessdosen (*AST KAP-S-E*) mit einem Messbereich von  $\pm 20\ \text{N}$  erlauben die Bestimmung der wirkenden Axialkraft sowie des Biegemoments im Zentrum der Kugellageranordnung oder der Führungsbuchse. Aus dem Kräftegleichgewicht zwischen der Axialkraft in der Führungsbuchse und der Kraft am Schlitten wird direkt auf die erforderliche Antriebskraft zum Verschieben der Röhren zurückgeschlossen. Ein mechanisches Ersatzschaltbild des Messaufbaus findet sich bei den jeweiligen Messergebnissen in Abschnitt 6.2.



## 8. Zusammenfassung und Ausblick

Die Kernaussage der Arbeit ist, dass tubuläre Kontinuumsmechanismen auf Basis von Nickel-Titan-Röhrchen eine Hysterese in ihrem Trajektorienverlauf aufweisen. Diese lässt sich aus der Gesamtkinematik der Gleichgewichtslage einer ebenen Röhrchenzusammensetzung basierend auf einem Bauteilmodell welchem wiederum ein nichtlineares, hysteresebehaftetes Werkstoffmodell zugrunde liegt ableiten. Die gesamte Modellkette lässt eine Berechnung der Trajektorie einer beispielhaften ebenen Kanülenzusammensetzung von 70 mm Länge mit einer maximalen euklidischen Abweichung zwischen Modell und Messung von rund 2 mm, ausschließlich auf Basis von Werkstoff- und Geometrieparametern, zu. Die Berücksichtigung der Werkstoffhysterese offenbart, dass ein striktes Follow-the-Leader-Verhalten, wie es für die untersuchte Kanülenzusammensetzung unter linearelastischem Materialverhalten definiert werden kann, aufgrund der Trajektorienhysterese nicht vorliegt. Die durchgeführten Messungen bestätigen diese Aussage. Mit der Wahl der Werkstoff- und Geometrieparameter der Röhrchenzusammensetzung kann jedoch gezielt auf die Ausprägung der Trajektorienhysterese Einfluss genommen werden. Durch die zukünftige Integration des vorgestellten Modells in Trajektorienplanungsalgorithmen kann die zu erwartende Abweichung vom Follow-the-Leader-Verhalten vorausberechnet und reduziert werden.

Die nichtlineare Modellierung des Werkstoffs ermöglicht es, die erforderlichen Antriebskräfte zum Verschieben der Röhrchen zu berechnen. Aus einem vereinfachten Kontaktmodell lassen sich darüber hinaus auch die resultierenden Reibkräfte abschätzen. Für den zielgerichteten Entwurf kompakter und leichter Antriebseinheiten, beispielsweise zur Anwendung in der Medizintechnik, bilden die ermittelten Kräfte eine Basis zur Dimensionierung der mechanischen Grundstruktur sowie der Energiewandler der Antriebseinheit.

Die durchgeführten Experimente verdeutlichen jedoch auch die Modellgrenzen. So unterliegt die Nickel-Titan-Legierung einer Verschleißerscheinung, welche nach wiederholter Belastung zu einer deutlichen Veränderung des Spannungs-Dehnungs-Verhaltens führt. Im tubulären Kontinuumsmechanismus wirkt sich diese direkt auf die Trajektorie der Röhrchen aus. Eine detailliertere Werkstoffmodellierung sollte die Verschleißerscheinungen in Zukunft berücksichtigen.

Darauf aufbauend sollten auch räumliche Spannungszustände durch das Werkstoffmodell abgebildet werden, um Torsionseffekte in der Gleichgewichtslage mehrerer vorgekrümmter Röhrchen berücksichtigen zu können. Die Beschreibung räumlicher Kanülenzusammensetzungen

wird dadurch möglich. Weiterhin ist eine tiefergehende Modellierung der Gleichgewichtslage, welche alle auftretenden Kontaktpunkte ermittelt und berücksichtigt, denkbar. Die damit beschreibbaren, kontinuierlichen Momenten- und Krümmungsverläufe können eine präzisere kinematische Abbildung der Kanüle liefern.

## Quellenverzeichnis

- [1] N. Abolhassani, R. Patel und M. Moallem. „Needle insertion into soft tissue: A survey“. In: *Medical Engineering & Physics* 29.4 (2007), S. 413–431. DOI: 10.1016/j.medengphy.2006.07.003.
- [2] R. Alterovitz, S. Patil und A. Derbakova. „Rapidly-exploring roadmaps: Weighing exploration vs. refinement in optimal motion planning“. In: *Robotics and Automation (ICRA), 2011 IEEE International Conference on*. Mai 2011, S. 3706–3712. DOI: 10.1109/ICRA.2011.5980286.
- [3] E. Amanov, T.-D. Nguyen und J. Burgner-Kahrs. „Additive manufacturing of patient-specific tubular continuum manipulators“. In: *Proc. SPIE 9415, Medical Imaging 2015: Image-Guided Procedures, Robotic Interventions, and Modeling*. Bd. 9415. 2015. DOI: 10.1117/12.2081999.
- [4] T. Anor, J. R. Madsen und P. Dupont. „Algorithms for Design of Continuum Robots Using the Concentric Tubes Approach: A Neurosurgical Example“. In: *IEEE International Conference on Robotics and Automation, ICRA 2011, Shanghai, China, 9-13 May 2011*. 2011, S. 667–673. DOI: 10.1109/ICRA.2011.5980311.
- [5] ASTM F2063 - 05. *Standard Specification for Wrought Nickel-Titanium Shape Memory Alloys for Medical Devices and Surgical Implants*. Nov. 2005.
- [6] T. Atanacković und M. Achenbach. „Moment-curvature relations for a pseudoelastic beam“. In: *Continuum Mechanics and Thermodynamics* 1.1 (Feb. 1989), S. 73–80. DOI: 10.1007/BF01125887.
- [7] M. Barati, S. A. Chirani, M. Kadkhodaei, L. Saint-Sulpice und S. Calloch. „On the origin of residual strain in shape memory alloys: experimental investigation on evolutions in the microstructure of CuAlBe during complex thermomechanical loadings“. In: *Smart Materials and Structures* 26 (2017), S. 19. DOI: 10.1088/1361-665X/aa5745.
- [8] N. J. Bechle und S. Kyriakides. „Localization in NiTi tubes under bending“. In: *International Journal of Solids and Structures* 51.5 (2014), S. 967–980. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2013.11.023.
- [9] N. J. van de Berg, D. J. van Gerwen, J. Dankelman und J. J. van den Dobbelsteen. „Design Choices in Needle Steering - A Review“. In: *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics* 20.5 (Okt. 2015), S. 2172–2183. DOI: 10.1109/TMECH.2014.2365999.

- [10] C. Bergeles und P. Dupont. „Planning stable paths for concentric tube robots“. In: *Intelligent Robots and Systems (IROS), 2013 IEEE/RSJ International Conference on*. Nov. 2013, S. 3077–3082. DOI: 10.1109/IROS.2013.6696792.
- [11] C. Bergeles, A. Gosline, N. Vasilyev, P. Codd, P. del Nido und P. Dupont. „Concentric Tube Robot Design and Optimization Based on Task and Anatomical Constraints“. In: *IEEE Transactions on Robotics* 31.1 (Feb. 2015), S. 67–84. DOI: 10.1109/TR0.2014.2378431.
- [12] V. Birman. „Review of Mechanics of Shape Memory Alloy Structures“. In: *Appl. Mech. Rev* (1997). DOI: 10.1115/1.3101674.
- [13] M. Bodaghi, A. R. Damanpack und W. H. Liao. „A robust macroscopic model for normal–shear coupling, asymmetric and anisotropic behaviors of polycrystalline SMAs“. In: *Smart Materials and Structures* (2016). DOI: 10.1088/0964-1726/25/7/075019.
- [14] J. G. Boyd und D. C. Lagoudas. „Thermomechanical Response of Shape Memory Composites“. In: *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 5.3 (1994), S. 333–346. DOI: 10.1177/1045389X9400500306.
- [15] L. G. Brazier. „On the Flexure of Thin Cylindrical Shells and Other „Thin“ Sections“. In: *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 116.773 (1927), S. 104–114. DOI: 10.1098/rspa.1927.0125.
- [16] L. C. Brinson und M. S. Huang. „Simplifications and comparisons of shape memory alloy constitutive models“. In: *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 7.1 (Jan. 1996), S. 108–114. DOI: 10.1177/1045389X9600700112.
- [17] L. Brinson. „One-Dimensional Constitutive Behavior of Shape Memory Alloys: Thermomechanical Derivation with Non-Constant Material Functions and Redefined Martensite Internal Variable“. In: *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 4.2 (1993), S. 229–242. DOI: 10.1177/1045389X9300400213.
- [18] E. Brunenberg, A. Vilanova, V. Visser-Vandewalle, Y. Temel, L. Ackermans, B. Platel und B. ter Haar Romeny. „Automatic trajectory planning for deep brain stimulation: a feasibility study“. In: *Proceedings 10th International Conference Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention - MICCAI 2007, Part I. (Lecture Notes in Computer Science vol. 4791)*. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 2007, S. 584–92.
- [19] R. A. Buckingham und R. O. Buckingham. „Robots In operating theaters“. In: *British Medical Journal* 311.7018 (Dez. 1995), S. 1479–1482.
- [20] E. C. Burdette, D. C. Rucker, P. Prakash, C. J. Diederich, J. M. Croom, C. Clarke, P. J. Stolka, T. Juang, E. M. Boctor und R. J. Webster III. „The ACUSITT Ultrasonic Ablator: The First Steerable Needle with an Integrated Interventional Tool“. In: *Proceedings of SPIE Medical Imaging*. 2010.

- [21] J. Burgner-Kahrs, H. Gilbert, J. Granna, P. Swaney und R. J. Webster III. „Workspace characterization for concentric tube continuum robots“. In: *Intelligent Robots and Systems (IROS 2014), 2014 IEEE/RSJ International Conference on*. Sep. 2014, S. 1269–1275. DOI: 10.1109/IROS.2014.6942720.
- [22] J. Burgner, D. Rucker, H. Gilbert, P. Swaney, P. Russell, K. Weaver und R. J. Webster III. „A Telerobotic System for Transnasal Surgery“. In: *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics* 19.3 (Juni 2014), S. 996–1006. DOI: 10.1109/TMECH.2013.2265804.
- [23] J. Burgner, P. Swaney, R. Lathrop, K. Weaver und R. J. Webster III. „Debulking From Within: A Robotic Steerable Cannula for Intracerebral Hemorrhage Evacuation“. In: *IEEE Transactions on Biomedical Engineering* PP (2013). DOI: 10.1109/TBME.2013.2260860.
- [24] J. Burgner, P. J. Swaney, T. L. Bruns, M. S. Clark, D. C. Rucker, E. C. Burdette und R. J. Webster III. „An Autoclavable Steerable Cannula Manual Deployment Device: Design and Accuracy Analysis“. In: *Transactions of the ASME Journal of Medical Devices* 6.4 (Dez. 2012). DOI: {10.1115/1.4007944}.
- [25] E. J. Butler, R. Hammond-Oakley, S. Chawarski, A. H. Gosline, P. Codd, T. Anor, J. R. Madsen und P. E. Dupont. „Robotic Neuro-Endoscope with Concentric Tube Augmentation“. In: *IEEE/RJS International Conference on Intelligent Robots and Systems*. Okt. 2012, S. 2941–2946. DOI: 10.1109/IROS.2012.6386022.
- [26] D. C. Cardona. „A MRI Compatible Concentric Tube Continuum Robot With Pneumatic Actuation“. Masterarbeit. Vanderbilt University, 2012.
- [27] C. Cisse, W. Zaki und T. B. Zineb. „A review of modeling techniques for advanced effects in shape memory alloy behavior“. In: *Smart Materials and Structures* 25.10 (2016), S. 103001. DOI: 10.1088/0964-1726/25/10/103001.
- [28] D. B. Comber, E. J. Barth und R. J. Webster III. „Design and Control of an Magnetic Resonance Compatible Precision Pneumatic Active Cannula Robot“. In: *ASME Journal of Medical Devices* 8 (2014). DOI: 10.1115/1.4024832.
- [29] D. B. Comber, R. J. Webster III, J. Neimat und E. J. Barth. „Open-Loop Tip Accuracy of an MRI-Compatible Active Cannula Robot“. In: *Hamlyn Symposium on Medical Robotics*. 2013, S. 112–113.
- [30] A. Degani, H. Choset, A. Wolf und M. Zenati. „Highly articulated robotic probe for minimally invasive surgery“. In: *Robotics and Automation, 2006. ICRA 2006. Proceedings 2006 IEEE International Conference on*. 2006, S. 4167–4172. DOI: 10.1109/ROBOT.2006.1642343.
- [31] *DIN 50106: Prüfung metallischer Werkstoffe - Druckversuch bei Raumtemperatur*. Nov. 2016.
- [32] E. Dombre, M. De Mathelin und J. Troccaz. „Medical Robotics“. In: Hrsg. von J. Troccaz. London: ISTE Ltd, 2012. Kap. Characteristics and State of the Art, S. 1–54.

- [33] J. M. Drake, J. T. Rutka und H. J. Hoffman. „Textbook of Stereotactic and Functional Neurosurgery“. In: Hrsg. von P. L. Gildenberg und R. R. Tasker. New York: McGraw-Hill, 1998. Kap. The Future of Robotics in Stereotactic Surgery, S. 2047–2051.
- [34] P. Dupont, J. Lock und E. Butler. „Torsional Kinematic Model for Concentric Tube Robots“. In: *Robotics and Automation, 2009. ICRA '09. IEEE International Conference on*. Mai 2009, S. 3851–3858. DOI: 10.1109/ROBOT.2009.5152649.
- [35] P. E. Dupont, J. Lock, B. Itkowitz und E. Butler. „Design and Control of Concentric-Tube Robots“. In: *IEEE Transactions on Robotics* 26.2 (2010), S. 209–225. DOI: 10.1109/TR0.2009.2035740.
- [36] P. Dupont, A. Gosline, N. Vasilyev, J. Lock, E. B. B. Folk, A. Cohen, R. Chen, G. Schmitz, H. Ren und P. del Nido. „Concentric Tube Robots for Minimally Invasive Surgery“. In: *The Hamlyn Symposium on Medical Robotics*. 2012.
- [37] J. A. Engh, G. Podnar, S. Y. Khoo und C. Riviere. „Flexible Needle Steering System for Percutaneous Access to Deep Zones of the Brain“. In: *Proceedings of the IEEE 32nd Annual Northeast Bioengineering Conference*. Apr. 2006, S. 103–104. DOI: 10.1109/NEBC.2006.1629773.
- [38] M. N. Faddis, W. Blume, J. Finney, A. Hall, J. Rauch, J. Sell, K. T. Bae, M. Talcott und B. Lindsay. „Novel, Magnetically Guided Catheter for Endocardial Mapping and Radiofrequency Catheter Ablation“. In: *Circulation - Journal of the American Heart Association* (Nov. 2002), S. 2980–2985. DOI: 10.1161/01.CIR.0000038704.84304.6F.
- [39] G. Fagogenis, C. Bergeles und P. E. Dupont. „Adaptive nonparametric kinematic modeling of concentric tube robots“. In: *2016 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*. Okt. 2016, S. 4324–4329. DOI: 10.1109/IROS.2016.7759636.
- [40] J. Furusho, T. Katsuragi, T. Kikuchi, T. Suzuki, H. Tanaka, Y. Chiba und H. Horio. „Curved multi-tube systems for fetal blood sampling and treatments of organs like brain and breast“. English. In: *International Journal Of Computer Assisted Radiology And Surgery* 1.1 (Juni 2006), S. 223–226.
- [41] J. Furusho, T. Ono, R. Murai, T. Fujimoto, Y. Chiba und H. Horio. „Development of a curved multi-tube (CMT) catheter for percutaneous umbilical blood sampling and control methods of CMT catheters for solid organs“. In: *Mechatronics and Automation, 2005 IEEE International Conference*. Bd. 1. Juli 2005, 410–415 Vol. 1. DOI: 10.1109/ICMA.2005.1626582.
- [42] E. M. Gabriel und B. S. Nashold, Jr. „Textbook of Stereotactic and Functional Neurosurgery“. In: Hrsg. von P. L. Gildenberg und R. R. Tasker. New York: McGraw-Hill, 1998. Kap. Historical Development of Stereotactic Frames, S. 29–49.

- [43] H. Gilbert und R. J. Webster III. „Rapid, Reliable Shape Setting of Superelastic Nitinol for Prototyping Robots“. In: *Robotics and Automation Letters, IEEE* PP.99 (2015), S. 1–1. DOI: 10.1109/LRA.2015.2507706.
- [44] H. B. Gilbert, J. Neimat und R. J. Webster III. „Concentric Tube Robots as Steerable Needles: Achieving Follow-the-Leader Deployment“. In: *IEEE Transactions on Robotics* 31.2 (Apr. 2015), S. 246–258. DOI: {10.1109/TR0.2015.2394331}.
- [45] H. B. Gilbert, D. C. Rucker und R. J. Webster III. „Robotics Research: The 16th International Symposium ISRR“. In: *16th International Symposium on Robotics Research (2013). Springer Tracts in Advanced Robotics*. 114. Springer International Publishing, 2016. Kap. Concentric Tube Robots: State of the Art and Future Directions. DOI: 10.1007/978-3-319-28872-7.
- [46] C. G. Gourin und D. J. Terris. „Robotics in Surgery: History, Current and Future Applications“. In: Hrsg. von R. A. Faust. New York: Nova Publishers, 2007. Kap. History of Robotc Surgery, S. 3–12.
- [47] C. Greiner-Petter und T. Sattel. „On the influence of pseudoelastic material behaviour in planar shape-memory tubular continuum structures“. In: *Smart Materials and Structures* 26.12 (Nov. 2017). DOI: 10.1088/1361-665X/aa8dc7.
- [48] D. Gross, W. Hauger, J. Schröder und W. A. Wall. *Technische Mechanik 2: Elastostatik*. Springer-Verlag Berlin, 2007.
- [49] P. Grunert, J. Mäurer und W. Müller-Forell. „Accuracy of Stereotactic Coordinate Transformation Using a Localisation Frame and Computed Tomographic Imaging Part I. Influence of the Mathematical and Physical Properties of the CT on the Image of the Rods of the Localisation Frame and the Determination of their Centres“. In: *Neurosurgical Review* 22.4 (Dez. 1999), S. 173–187. DOI: 10.1007/s101430050014.
- [50] P. Grunert. „From the Idea to its Realization: The Evolution of Minimally Invasive Techniques in Neurosurgery“. In: *Minimally Invasive Neurosurgery* (2013). DOI: 10.1155/2013/171369.
- [51] P. Grunert, K. Darabi, J. Espinosa und R. Filippi. „Computer-Aided Navigation in Neurosurgery“. In: *Neurosurg. Rev.* 26.2 (Mai 2003), S. 73–99. DOI: 10.1007/s10143-003-0262-0.
- [52] P. Hagedorn. *Technische Mechanik - Band 2: Festigkeitslehre*. 4. Auflage. Wissenschaftlicher Verlag Harri Deutsch GmbH, Frankfurt am Main, 2006.
- [53] R. Hartley und A. Zisserman. *Multiple View Geometry in Computer Vision*. 2. Aufl. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [54] A. Heckmann. „Mikrostruktur und Ermüdung von NiTi-Formgedächtnislegierungen“. Diss. Ruhr-Universität Bochum, 2003.

- [55] E. Henderson, D. H. Nash und W. M. Dempster. „On the experimental testing of fine Nitinol wires for medical devices“. English. In: *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials* 4.3 (Apr. 2011), S. 261–268. DOI: 10.1016/j.jmbbm.2010.10.004.
- [56] R. J. Hendrick, S. D. Herrell und R. J. Webster III. „A Multi-Arm Hand-Held Robotic System for Transurethral Laser Prostate Surgery“. In: *IEEE International Conference on Robotics and Automation*. 2014, S. 2850–2855. DOI: 10.1109/ICRA.2014.6907268.
- [57] K. Henken, D. V. Gerwen, J. Dankelman und J. V. D. Dobbelsteen. „Accuracy of needle position measurements using fiber Bragg gratings“. In: *Minimally Invasive Therapy & Allied Technologies* 21.6 (März 2012), S. 408–414. DOI: 10.3109/13645706.2012.666251.
- [58] M. A. Howard, B. A. Abkes, M. C. Ollendieck, M. D. Noh, R. C. Ritter und G. T. Gillies. „Measurement of the Force Required to Move a Neurosurgical Probe Through in vivo Human Brain Tissue“. In: *IEEE Transactions on Biomedical Engineering* 46.7 (Juli 1999), S. 891–894. DOI: 10.1109/10.771205.
- [59] L. L. Howell, S. P. Magleby und B. M. Olsen. *Handbook of Compliant Mechanisms*. Wiley, 2013.
- [60] J. V. Humbeeck, E. Aernoudt, L. Delaey, L. Li, H. Verguts und J. Ortin. „Hysteretic Transformation Behavior of Shape Memory Alloys“. In: *Revue de Physique Appliquee* 23.4 (Apr. 1988), S. 557–564. DOI: 10.1051/rphysap:01988002304055700.
- [61] M. A. Iadicola und J. A. Shaw. „The effect of uniaxial cyclic deformation on the evolution of phase transformation fronts in pseudoelastic NiTi wire“. In: *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 13.2-3 (Feb. 2002), S. 143–155. DOI: 10.1177/104538902761402549.
- [62] K. Ikuta, M. Tsukamoto und S. Hirose. „Shape memory alloy servo actuator system with electric resistance feedback and application for active endoscope“. In: *Robotics and Automation, 1988. Proceedings., 1988 IEEE International Conference on*. Bd. 1. Apr. 1988, S. 427–430. DOI: 10.1109/ROBOT.1988.12085.
- [63] Y. Ivshin und T. J. Pence. „A Thermomechanical Model for a One Variant Shape Memory Material“. In: *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 5.4 (1994), S. 455–473. DOI: 10.1177/1045389X9400500402.
- [64] S. Jaeger. „Modellierung thermisch induzierter Martensit-Austenit Umwandlungen in NiTi-Legierungen“. Diss. Ruhr-Universität Bochum, 2014.
- [65] C. Jang, J. Ha, P. E. Dupont und F. C. Park. „Toward on-line parameter estimation of concentric tube robots using a mechanics-based kinematic model“. In: *2016 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*. Okt. 2016, S. 2400–2405. DOI: 10.1109/IROS.2016.7759374.



- [66] M. Kaack. „Elastische Eigenschaften von NiTi-Formgedächtnis-Legierungen“. Diss. Bochum: Ruhr-Universität Bochum, 2002.
- [67] J. Khalil-Allafi, A. Dlouhy und G. Eggeler. „Ni<sub>4</sub>Ti<sub>3</sub>-precipitation during aging of NiTi shape memory alloys and its influence on martensitic phase transformations“. In: *Acta Materialia* 50.17 (2002), S. 4255–4274. DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/S1359-6454\(02\)00257-4](http://dx.doi.org/10.1016/S1359-6454(02)00257-4).
- [68] H. F. Khalil. „Changes in the Mechanical Behavior of Nitinol Following Variations of Heat Treatment Duration and Temperature“. Magisterarb. Georgia Institute of Technology, 2009.
- [69] C. Kim, S. C. Ryu und P. E. Dupont. „Real-time adaptive kinematic model estimation of concentric tube robots“. In: *Intelligent Robots and Systems (IROS), 2015 IEEE/RSJ International Conference on*. Sep. 2015, S. 3214–3219. DOI: 10.1109/IROS.2015.7353823.
- [70] J.-S. Kim, D.-Y. Lee, K. Kim, S. Kang und K.-J. Cho. „Toward a solution to the snapping problem in a concentric-tube continuum robot: Grooved tubes with anisotropy“. English. In: *2014 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2014, 5871–6. DOI: 10.1109/ICRA.2014.6907723.
- [71] B. Kireev. *Entwicklung einer aktuierbaren Rohraustrittsbuchse für tubuläre Kontinuumsroboter*. Masterarbeit, Technische Universität Ilmenau. Apr. 2016.
- [72] S. Y. Ko, L. Frasson und F. R. y Baena. „Closed-Loop Planar Motion Control of a Steerable Probe With a „Programmable Bevel“ Inspired by Nature“. In: *IEEE Transactions on Robotics* 27.5 (Okt. 2011), S. 970–983. DOI: 10.1109/TR0.2011.2159411.
- [73] D. C. Lagoudas, Hrsg. *Shape Memory Alloys: Modeling and Engineering Applications*. Springer US, 2008. DOI: 10.1007/978-0-387-47685-8.
- [74] R. Lathrop, D. Rucker und R. J. Webster III. „Guidance of a steerable cannula robot in soft tissue using preoperative imaging and conoscopic surface contour sensing“. In: *Robotics and Automation (ICRA), 2010 IEEE International Conference on*. Mai 2010, S. 5601–5606. DOI: 10.1109/ROBOT.2010.5509695.
- [75] D. Lee, J. Kim, J. Kim, C. Baek, G. Noh, D. Kim, K. Kim, S. Kang und K. Cho. „Anisotropic Patterning to Reduce Instability of Concentric-Tube Robots“. In: *IEEE Transactions on Robotics* 31.6 (Dez. 2015), S. 1311–1323. DOI: 10.1109/TR0.2015.2481283.
- [76] W. J. Levy und J. J. Oro. „Curved Biopsy Needle for Stereotactic Surgery: A Technical Note“. In: *Neurosurgery* 15.1 (1984), S. 82–85.
- [77] C. Li und C. D. Rahn. „Design of Continuous Backbone, Cable-Driven Robots“. In: *Journal of Mechanical Design* 124 (Juni 2002), S. 265–271.

- [78] G. Li, H. Su, G. Cole, W. Shang, K. Harrington, A. Camilo, J. Pilitsis und G. Fischer. „Robotic System for MRI-Guided Stereotactic Neurosurgery“. In: *Biomedical Engineering, IEEE Transactions on* 62.4 (Apr. 2015), S. 1077–1088. DOI: 10.1109/TBME.2014.2367233.
- [79] X. Li, T. Choi, H. Chun, S. Gim, S. Lee, S. Kang und K. Kim. „Active Cannula Robot with Misorientation Auto-Recovery Camera: A Method to Improve Hand-Eye Coordination in Minimally Invasive Surgery“. In: *Control, Automation and Systems (ICCAS), 2013 13th International Conference on*. Okt. 2013, S. 276–280. DOI: 10.1109/ICCAS.2013.6703908.
- [80] J. Lock, G. Laing, M. Mahvash und P. E. Dupont. „Quasistatic modeling of concentric tube robots with external loads“. In: *Intelligent Robots and Systems (IROS), 2010 IEEE/RSJ International Conference on*. Okt. 2010, S. 2325–2332. DOI: 10.1109/IROS.2010.5651240.
- [81] J. Lock und P. Dupont. „Friction Modeling in Concentric Tube Robots“. In: *IEEE International Conference on Robotics and Automation*. 2011, S. 1139–1146.
- [82] D. F. Louw, T. Fielding, P. B. McBeth, D. Gregoris, P. Newhook und G. R. Sutherland. „Surgical Robotics: A Review and Neurosurgical Prototype Development“. In: *Neurosurgery* 54.3 (März 2004), S. 525–537. DOI: 10.1227/01.NEU.0000108638.05274.E9.
- [83] N. Lück. „Magnetische versus manuelle Navigation in der interventionellen Neuroradiologie - In-vitro-Ergebnisse“. Diss. Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen, 2009.
- [84] L. Lyons, R. J. Webster III und R. Alterovitz. „Motion planning for active cannulas“. In: *Intelligent Robots and Systems, 2009. IROS 2009. IEEE/RSJ International Conference on*. Okt. 2009, S. 801–806. DOI: 10.1109/IROS.2009.5354249.
- [85] L. Lyons, R. J. Webster III und R. Alterovitz. „Planning active cannula configurations through tubular anatomy“. In: *Robotics and Automation (ICRA), 2010 IEEE International Conference on*. Mai 2010, S. 2082–2087. DOI: 10.1109/ROBOT.2010.5509442.
- [86] M. Mahvash und M. Zenati. „Toward a hybrid snake robot for single-port surgery“. In: *2011 Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society*. Aug. 2011, S. 5372–5375. DOI: 10.1109/IEMBS.2011.6091329.
- [87] M. Mahvash und P. E. Dupont. „Mechanics of Dynamic Needle Insertion into a Biological Material“. In: *IEEE Transactions on Biomedical Engineering* 57.4 (Apr. 2010), S. 934–943. DOI: 10.1109/TBME.2009.2036856.
- [88] D. Makarets, G. Noh, K. Kim und D. Lee. „Preliminary study of utilizing plastic tubes as a component of continuum robots“. In: *Control, Automation and Systems (ICCAS), 2014 14th International Conference on*. Okt. 2014, S. 217–220. DOI: 10.1109/ICCAS.2014.6987989.

- [89] T. A. Mattei, A. H. Rodriguez, D. Sambhara und E. Mendel. „Current state-of-the-art and future perspectives of robotic technology in neurosurgery“. English. In: *Neurosurgical Review* 37.3 (Juli 2014), 357–366. DOI: {10.1007/s10143-014-0540-z}.
- [90] R. Mehrabi, M. Kadkhodaei und M. Elahinia. „Constitutive modeling of tension-torsion coupling and tension-compression asymmetry in NiTi shape memory alloys“. In: *Smart Materials and Structures* (2014). DOI: 10.1088/0964-1726/23/7/075021.
- [91] A. Melzer, A. Schmidt, K. Kipfmüller, D. Grönemeyer und R. Seibel. „Technology and principles of tomographic image-guided interventions and surgery“. In: *Surgical Endoscopy* 11.9 (1997), S. 946–956.
- [92] N. B. Morgan und M. Broadley. „Taking the art out of smart! - Forming processes and durability issues for the application of NiTi shape memory alloys in medical device“. In: *Medical Device Materials*. Hrsg. von S. Shrivastava. Anaheim, California: ASM International, Sep. 2003.
- [93] F. Munding und R. Boesecke. „Textbook of Stereotactic and Functional Neurosurgery“. In: Hrsg. von P. L. Gildenberg und R. R. Tasker. New York: McGraw-Hill, 1998. Kap. The Riechert/Munding Apparatus, S. 73–78.
- [94] S. Okazawa, R. Ebrahimi, J. Chuang, S. E. Salcudean und R. Rohling. „Hand-held steerable needle device“. In: *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics* 10.3 (Juni 2005), S. 285–296. DOI: 10.1109/TMECH.2005.848300.
- [95] J. Ortin und A. Planes. „Thermodynamics of Thermoelastic Martensitic Transformations“. In: *Acta Metallurgica* 37.5 (Mai 1989), S. 1433–1441. DOI: 10.1016/0001-6160(89)90175-2.
- [96] A. Raabe, R. Krishnan, M. Zimmermann und V. Seifert. „Neuronavigation oder Stereotaxie? Eine Standortbestimmung zur Wahl des Verfahrens“. In: *Zentralblatt der Neurochirurgie* 64.1 (2003), S. 1–5. DOI: 10.1055/s-2003-37150.
- [97] A. Raabe und V. Rohde, Hrsg. *Vaskuläre Neurochirurgie - Funktionelle Neurochirurgie*. Georg Thieme Verlag Stuttgart, 2011.
- [98] M. R. K. Ravari, S. N. Esfahani, M. T. Andani, M. Kadkhodaei, A. Ghaei, H. Karaca und M. Elahinia. „On the effects of geometry, defects, and material asymmetry on the mechanical response of shape memory alloy cellular lattice structures“. In: *Smart Materials and Structures* 25.2 (2015). DOI: 10.1088/0964-1726/24/7/075016.
- [99] B. Reedlunn, C. B. Churchill, E. E. Nelson, J. A. Shaw und S. H. Daly. „Tension, compression, and bending of superelastic shape memory alloy tubes“. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 63 (Feb. 2014), S. 506–537. DOI: 10.1016/j.jmps.2012.12.012.
- [100] H. F. Reinhardt. „Computer-Integrated Surgery: Technology and Clinical Applications“. In: Hrsg. von R. H. Taylor, S. Lavallée, G. C. Burdea und R. Mösges. Cambridge: MIT Press, 1996. Kap. Neuronavigation: A Ten-Year Review, S. 329–341.

- [101] R. C. Ritter, E. G. Quate, G. T. Gillies, M. S. Grady, M. A. Howard und W. C. Broaddus. „Measurement of friction on straight catheters in in vitro brain and phantom material“. In: *IEEE Transactions on Biomedical Engineering* 45.4 (Apr. 1998), S. 476–485. DOI: 10.1109/10.664203.
- [102] D. C. Rucker, R. J. Webster III, G. S. Chirikjian und N. J. Cowan. „Equilibrium Conformations of Concentric-tube Continuum Robots“. In: *The International Journal of Robotics Research* 29.10 (2010), S. 1263–1280. DOI: 10.1177/0278364910367543.
- [103] D. C. Rucker. „The Mechanics of Continuum Robots: Model-Based Sensing and Control“. Diss. Vanderbilt University, Dez. 2011.
- [104] D. C. Rucker, B. A. Jones und R. J. Webster III. „A Geometrically Exact Model for Externally Loaded Concentric-Tube Continuum Robots“. In: *IEEE Transactions on Robotics* 26.5 (Okt. 2010), S. 769–780. DOI: 10.1109/TR0.2010.2062570.
- [105] D. C. Rucker und R. J. Webster III. „Parsimonious Evaluation of Concentric-Tube Continuum Robot Equilibrium Conformation“. In: *IEEE Transactions on Biomedical Engineering* 56.9 (Sep. 2009), S. 2308–2311. DOI: 10.1109/TBME.2009.2025135.
- [106] S. C. Ryu und P. E. Dupont. „FBG-based shape sensing tubes for continuum robots“. In: *2014 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*. März 2014, S. 3531–3537. DOI: 10.1109/ICRA.2014.6907368.
- [107] S. C. Ryu, Z. F. Quek, J.-S. Koh, P. Renaud, R. Black, B. Moslehi, B. Daniel, K.-J. Cho und M. Cutkosky. „Design of an Optically Controlled MR-Compatible Active Needle“. In: *IEEE Transactions on Robotics* 31.1 (Feb. 2015), S. 1–11. DOI: 10.1109/TR0.2014.2367351.
- [108] H. Sadiq, M. B. Wong, R. Al-Mahaidi und X. L. Zhao. „The effects of heat treatment on the recovery stresses of shape memory alloys“. In: *Smart Materials and Structures* 19.3 (2010). DOI: 10.1088/0964-1726/19/3/035021.
- [109] F. Schiedeck. „Entwicklung eines Modells für Formgedächtnisaktoren für den geregelt dynamischen Betrieb“. Diss. Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover, 2009.
- [110] J. Schipper. „Der digitale Operationsaal“. In: Hrsg. von W. Niederlang, H. U. Lemke, G. Strauß und H. Feußner. Bd. 2. Berlin: Walter de Gruyter GmbH, 2014. Kap. Individualized, Minimized Surgery by Wire (INMISUWI), S. 134–139.
- [111] P. Sears und P. E. Dupont. „A Steerable Needle Technology Using Curved Concentric Tubes“. In: *Proceedings of the 2006 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*. 2006, S. 2850–2856. DOI: 10.1109/IROS.2006.282072.
- [112] T. Shoa, J. Madden, N. Fekri, N. Munce und V. X. Yang. „Conducting polymer based active catheter for minimally invasive interventions inside arteries“. In: *Engineering in Medicine and Biology Society, 2008. EMBS 2008. 30th Annual International Conference of the IEEE*. Aug. 2008, S. 2063–2066. DOI: 10.1109/IEMBS.2008.4649598.

- [113] N. Simaan, R. Taylor und P. Flint. „A dexterous system for laryngeal surgery“. In: *Robotics and Automation, 2004. Proceedings. ICRA '04. 2004 IEEE International Conference on*. Bd. 1. Apr. 2004, S. 351–357. DOI: 10.1109/ROBOT.2004.1307175.
- [114] S. Smith und D. Hodgson. „Shape Setting Nitinol“. In: *Medical Device Materials*. 2004, S. 266–270.
- [115] D. Stöckel. „Superelastische Nickel-Titan-Legierungen - Eigenschaften und Anwendung“. In: *Fachzeitschrift für Metallurgie; Technik, Wissenschaft, Wirtschaft* 48 (1993), S. 728–733.
- [116] H. Su, D. Cardona, W. Shang, A. Camilo, G. Cole, D. Rucker, R. J. Webster III und G. Fischer. „A MRI-Guided Concentric Tube Continuum Robot with Piezoelectric Actuation: A Feasibility Study“. In: *Robotics and Automation (ICRA), 2012 IEEE International Conference on*. 2012, S. 1939–1945. DOI: 10.1109/ICRA.2012.6224550.
- [117] H. Su, M. Zervas, G. Cole, C. Furlong und G. Fischer. „Real-time MRI-guided needle placement robot with integrated fiber optic force sensing“. In: *Robotics and Automation (ICRA), 2011 IEEE International Conference on*. Mai 2011, S. 1583–1588. DOI: 10.1109/ICRA.2011.5979539.
- [118] O. Süss. „Sensor-basierte elektromagnetische Navigation in der kraniellen Neurochirurgie“. Habilitation. Charité - Universitätsmedizin Berlin, 2006.
- [119] P. Swaney, J. Burgner, T. Pfeiffer, D. Rucker, H. Gilbert, J. Ondrake, A. Simpson, E. Burdette, M. Miga und R. J. Webster III. „Tracked 3D ultrasound targeting with an active cannula“. In: *Proceedings of the SPIE - The International Society for Optical Engineering*. Bd. 8316. 2012. DOI: 10.1117/12.912021.
- [120] S. Tappe, J. Kotlarski, T. Ortmaier, M. Dorbaum, A. Mertens und B. Ponick. „The kinematic synthesis of a spatial, hyper-redundant system based on binary electromagnetic actuators“. In: *Automation, Robotics and Applications (ICARA), 2015 6th International Conference on*. Feb. 2015, S. 211–216. DOI: 10.1109/ICARA.2015.7081149.
- [121] M. Torabi, R. Gupta und C. Walsh. „Compact Robotically Steerable Image-Guided Instrument for Multi-Adjacent-Point (MAP) Targeting“. In: *IEEE Transactions on Robotics* 30.4 (Aug. 2014), S. 802–815. DOI: 10.1109/TR0.2014.2304773.
- [122] L. Torres und R. Alterovitz. „Motion planning for concentric tube robots using mechanics-based models“. In: *Intelligent Robots and Systems (IROS), 2011 IEEE/RSJ International Conference on*. Sep. 2011, S. 5153–5159. DOI: 10.1109/IROS.2011.6095168.
- [123] C. Trepanier, R. Venugopalan und A. R. Pelton. „Corrosion Resistance and Biocompatibility of Passivated NiTi“. In: *Shape Memory Implants*. Hrsg. von L. Yahia. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2000, S. 35–45. DOI: 10.1007/978-3-642-59768-8\_3.

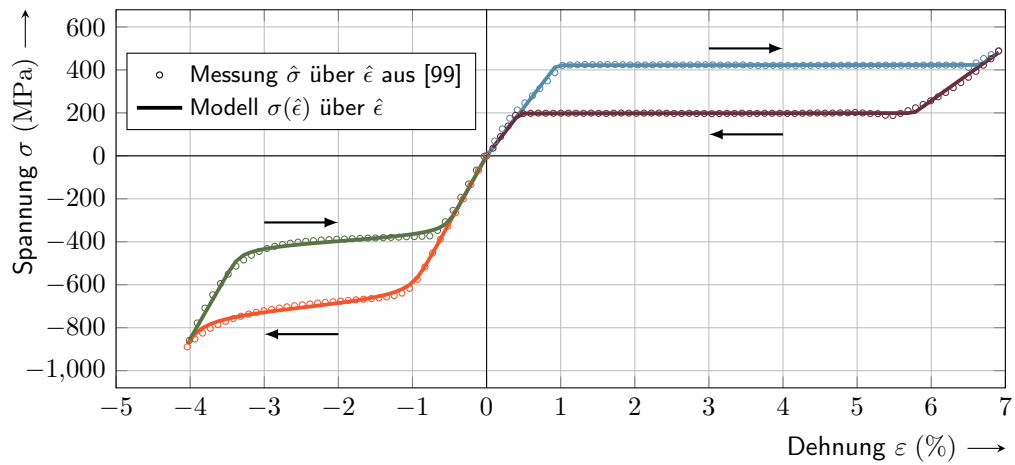
- [124] D. Treppmann. „Thermomechanische Behandlung von NiTi (mit Lösungsansätzen für Qualitätssicherung und Normung von Formgedächtnislegierungen)“. Diss. Ruhr-Universität Bochum, 1997.
- [125] A. Undisz. „Optimierung von strukturellen und funktionellen Eigenschaften von NiTi mit Pseudoelastizität/Formgedächtnis für den medizinischen Einsatz“. Diss. Friedrich-Schiller-Universität Jena, 2009.
- [126] VDI-Richtlinie 2634. *Optische 3-D-Messsysteme*. 2012.
- [127] D. Vojtěch. „Influence of Heat Treatment of Shape Memory Niti Alloy on its Mechanical Properties“. In: *Metal*. Roznov pod Radhostem, 2010.
- [128] C. J. Walsh, A. Slocum, J. C. Franklin und R. Gupta. „Material Selection and Force Requirements for the Use of Precurved Needles in Distal Tip Manipulation Mechanisms“. In: *Proceedings of the 2010 Design of Medical Devices Conference (DMD2010)*. Minneapolis, Apr. 2010.
- [129] R. J. Webster III. „Design and Mechanics of Continuum Robots for Surgery“. Diss. Johns Hopkins University, 2007.
- [130] R. J. Webster III und B. A. Jones. „Design and Kinematic Modeling of Constant Curvature Continuum Robots: A Review“. In: *International Journal of Robotics Research* 29.13 (Nov. 2010), S. 1661–1683. DOI: 10.1177/0278364910368147.
- [131] R. J. Webster III, A. M. Okamura und N. J. Cowan. „Toward Active Cannula: Miniature Snake-Like Surgical Robots“. In: *Proceedings of the 2006 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*. Beijing, China, 2006, S. 2857–2863. DOI: 10.1109/IR0S.2006.282073.
- [132] R. J. Webster III, J. Romano und N. Cowan. „Mechanics of Precurved-Tube Continuum Robots“. In: *IEEE Transactions on Robotics* 25.1 (Feb. 2009), S. 67–78. DOI: 10.1109/TR0.2008.2006868.
- [133] R. J. Webster III, J. P. Swenson, J. M. Romano und N. J. Cowan. „Springer Tracts in Advanced Robotics 54“. In: Hrsg. von B. Siciliano und O. Khatib. Springer Verlag, 2009. Kap. Closed-Form Differential Kinematics for Concentric-Tube Continuum Robots with Application to Visual Servoing, S. 485–494.
- [134] K. Wu, L. Wu und H. Ren. „An image based targeting method to guide a tentacle-like curvilinear concentric tube robot“. In: *Robotics and Biomimetics (ROBIO), 2014 IEEE International Conference on*. Dez. 2014, S. 386–391. DOI: 10.1109/ROBIO.2014.7090361.
- [135] P. A. York, P. J. Swaney, H. B. Gilbert und R. J. Webster III. „A wrist for needle-sized surgical robots“. In: *Robotics and Automation (ICRA), 2015 IEEE International Conference on*. Mai 2015, S. 1776–1781. DOI: 10.1109/ICRA.2015.7139428.

- [136] M. Zarinejad und Y. Liu. „Dependence of Transformation Temperatures of NiTi-based Shape-Memory Alloys on the Number and Concentration of Valence Electrons“. In: *Advanced Functional Materials* 18.18 (Juli 2008), S. 2789–2794. DOI: 10.1002/adfm.200701423.





## A. Modellparameter



**Abbildung A.1.:** Messung und Modellergebnis des Werkstoffmodells für die, anhand der Zug- und Druckmessungen aus [99] mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate ermittelten, Parameter aus Tabelle A.1.

**Tabelle A.1.:** Werkstoff- und Geometrieparameter für die Messungen aus [99] nach Ermittlung mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate.

Parameter	Zug	Druck	Einheit
Elastizitätsmodul Austenit	$E_{A+}$ 44.7	$E_{A-}$ 62.2	GPa
Elastizitätsmodul Martensit	$E_{M+}$ 24.6	$E_{M-}$ 60.0	GPa
Transformationsdehnung	$\varepsilon_{T+}$ 5.0	$\varepsilon_{T-}$ -2.6	%
Plateauverrundung Belastung	$\beta_{1+}$ 2422.8	$\beta_{1-}$ -17.3	$10^{-3}$
Plateauspannung Belastung	$\beta_{2+}$ 422.3	$\beta_{2-}$ -704.1	MPa
Plateauverrundung Entlastung	$\beta_{3+}$ 2638.9	$\beta_{3-}$ -2.7	$10^{-3}$
Plateauspannung Entlastung	$\beta_{4+}$ 198.2	$\beta_{4-}$ -395.5	MPa
Parameter	Wert	Einheit	
Außendurchmesser	$D_a$ 3.176	mm	
Innendurchmesser	$D_i$ 2.54	mm	
Vorkrümmung	$\kappa^\circ$ 0	$m^{-1}$	
Diskretisierung des Querschnitts	K 50	Elemente	
Krümmungsschrittweite	$\Delta\kappa$ 0.5	$m^{-1}$	

**Tabelle A.2.:** Werkstoff- und Geometrieparameter nach Ermittlung mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate.

Parameter	Zug	Druck	Einheit
Elastizitätsmodul Austenit	$E_{A+}$ 36.9	$E_{A-}$ 43.6	GPa
Elastizitätsmodul Martensit	$E_{M+}$ 17.1	$E_{M-}$ 52.0	GPa
Transformationsdehnung	$\varepsilon_{T+}$ 4.1	$\varepsilon_{T-}$ -2.7	%
Plateauverrundung Belastung	$\beta_{1+}$ 28.5	$\beta_{1-}$ -10.3	$10^{-3}$
Plateauspannung Belastung	$\beta_{2+}$ 425.1	$\beta_{2-}$ -770.6	MPa
Plateauverrundung Entlastung	$\beta_{3+}$ 63.7	$\beta_{3-}$ -7.3	$10^{-3}$
Plateauspannung Entlastung	$\beta_{4+}$ 232.2	$\beta_{4-}$ -431.9	MPa
Parameter	Wert	Einheit	
Außendurchmesser	$D_a$ 2.05	mm	
Innendurchmesser	$D_i$ 1.75	mm	
Vorkrümmung	$\kappa^\circ$ 0	$m^{-1}$	
Diskretisierung des Querschnitts	K 50	Elemente	
Krümmungsschrittweite	$\Delta\kappa$ 0.5	$m^{-1}$	

**Tabelle A.3.:** Werkstoff- und Geometrieparameter des Röhrchens aus Tabelle A.2 durch Abschätzung aus Zugdaten.

Parameter	Zug	Druck	Einheit
Elastizitätsmodul Austenit	$E_{A+}$ 64.6	$E_{A-}$ 76.3	GPa
Elastizitätsmodul Martensit	$E_{M+}$ 22.9	$E_{M-}$ 90.8	GPa
Transformationsdehnung	$\varepsilon_{T+}$ 4.4	$\varepsilon_{T-}$ -2.9	%
Plateauverrundung Belastung	$\beta_{1+}$ 84.3	$\beta_{1-}$ -10.3	$10^{-3}$
Plateauspannung Belastung	$\beta_{2+}$ 483.9	$\beta_{2-}$ -733.1	MPa
Plateauverrundung Entlastung	$\beta_{3+}$ 53.4	$\beta_{3-}$ -7.3	$10^{-3}$
Plateauspannung Entlastung	$\beta_{4+}$ 261.2	$\beta_{4-}$ -395.7	MPa
Parameter	Wert		Einheit
Außendurchmesser	$D_a$	2.05	mm
Innendurchmesser	$D_i$	1.75	mm
Vorkrümmung	$\kappa^\circ$	0	$m^{-1}$
Diskretisierung des Querschnitts	K	50	Elemente
Krümmungsschrittweite	$\Delta\kappa$	0.5	$m^{-1}$

**Tabelle A.4.:** Werkstoff- und Geometrieparameter durch Abschätzung aus Zugdaten.

Parameter	Zug	Druck	Einheit
Elastizitätsmodul Austenit	$E_{A+}$ 42.7	$E_{A-}$ 50.4	GPa
Elastizitätsmodul Martensit	$E_{M+}$ 24.3	$E_{M-}$ 60.0	GPa
Transformationsdehnung	$\varepsilon_{T+}$ 5.0	$\varepsilon_{T-}$ -3.3	%
Plateauverrundung Belastung	$\beta_{1+}$ 60.0	$\beta_{1-}$ -10.3	$10^{-3}$
Plateauspannung Belastung	$\beta_{2+}$ 440.0	$\beta_{2-}$ -666.7	MPa
Plateauverrundung Entlastung	$\beta_{3+}$ 63.7	$\beta_{3-}$ -7.3	$10^{-3}$
Plateauspannung Entlastung	$\beta_{4+}$ 80.0	$\beta_{4-}$ -121.21	MPa
Parameter	Wert		Einheit
Außendurchmesser	$D_a$	1.5	mm
Innendurchmesser	$D_i$	0	mm
Vorkrümmung	$\kappa^\circ$	50	$m^{-1}$
Diskretisierung des Querschnitts	K	50	Elemente
Krümmungsschrittweite	$\Delta\kappa$	0.5	$m^{-1}$

**Tabelle A.5.:** Werkstoffparameter durch Abschätzung aus Zugdaten.

Parameter	Zug		Druck		Einheit
Elastizitätsmodul Austenit	$E_{A+}$	27.2	$E_{A-}$	32.1	GPa
Elastizitätsmodul Martensit	$E_{M+}$	14.3	$E_{M-}$	38.2	GPa
Transformationsdehnung	$\varepsilon_{T+}$	4.8	$\varepsilon_{T-}$	-3.2	%
Plateauverrundung Belastung	$\beta_{1+}$	28.5	$\beta_{1-}$	-10.3	$10^{-3}$
Plateauspannung Belastung	$\beta_{2+}$	513.0	$\beta_{2-}$	-777.3	MPa
Plateauverrundung Entlastung	$\beta_{3+}$	63.7	$\beta_{3-}$	-7.3	$10^{-3}$
Plateauspannung Entlastung	$\beta_{4+}$	320.0	$\beta_{4-}$	-484.8	MPa

**Tabelle A.6.:** Werkstoff- und Geometrieparameter des Innenröhrchens des Zweirohrversuchs ohne Antriebseinheit nach Ermittlung mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate.

Parameter	Zug		Druck		Einheit
Elastizitätsmodul Austenit	$E_{A+}$	28.0	$E_{A-}$	33.9	GPa
Elastizitätsmodul Martensit	$E_{M+}$	13.6	$E_{M-}$	61.8	GPa
Transformationsdehnung	$\varepsilon_{T+}$	6.6	$\varepsilon_{T-}$	-4.5	%
Plateauverrundung Belastung	$\beta_{1+}$	12.7	$\beta_{1-}$	-8.0	$10^{-3}$
Plateauspannung Belastung	$\beta_{2+}$	547.2	$\beta_{2-}$	-940.4	MPa
Plateauverrundung Entlastung	$\beta_{3+}$	13.7	$\beta_{3-}$	-2.2	$10^{-3}$
Plateauspannung Entlastung	$\beta_{4+}$	303.8	$\beta_{4-}$	-498.3	MPa
Parameter	Wert				Einheit
Außendurchmesser	$D_a$	1.7			mm
Innendurchmesser	$D_i$	1.3			mm
Vorkrümmung	$\kappa^\circ$	0			$m^{-1}$
Diskretisierung des Querschnitts	K	50			Elemente
Krümmungsschrittweite	$\Delta\kappa$	0.5			$m^{-1}$

**Tabelle A.7.:** Werkstoff- und Geometrieparameter des Außenröhrchens des Zweirohrversuchs ohne Antriebseinheit nach Ermittlung mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate.

Parameter	Zug		Druck		Einheit
Elastizitätsmodul Austenit	$E_{A+}$	22.6	$E_{A-}$	22.1	GPa
Elastizitätsmodul Martensit	$E_{M+}$	16.2	$E_{M-}$	137.3	GPa
Transformationsdehnung	$\varepsilon_{T+}$	6.6	$\varepsilon_{T-}$	-4.5	%
Plateauverrundung Belastung	$\beta_{1+}$	13.8	$\beta_{1-}$	-6.1	$10^{-3}$
Plateauspannung Belastung	$\beta_{2+}$	370.0	$\beta_{2-}$	-549.6	MPa
Plateauverrundung Entlastung	$\beta_{3+}$	30.4	$\beta_{3-}$	-6.7	$10^{-3}$
Plateauspannung Entlastung	$\beta_{4+}$	44.8	$\beta_{4-}$	-193.9	MPa
Parameter	Wert				Einheit
Außendurchmesser	$D_a$	2.4			mm
Innendurchmesser	$D_i$	2.0			mm
Vorkrümmung	$\kappa^\circ$	29.85			$m^{-1}$
Diskretisierung des Querschnitts	K	50			Elemente
Krümmungsschrittweite	$\Delta\kappa$	0.5			$m^{-1}$

**Tabelle A.8.:** Geometrieparameter.

Parameter	Wert	Einheit
Außendurchmesser	$D_a$	2.4 mm
Innendurchmesser	$D_i$	1.6 mm
Vorkrümmung	$\kappa^\circ$	20 $m^{-1}$
Diskretisierung des Querschnitts	K	50 Elemente
Krümmungsschrittweite	$\Delta\kappa$	0.5 $m^{-1}$

**Tabelle A.9.:** Parameter der numerischen Kontaktsimulation.

Parameter	Wert	Einheit
Röhrchenlänge Außenröhrchen	$L_1$	100 mm
Röhrchenlänge Innenröhrchen	$L_2$	120 mm
Vorkrümmung Außenröhrchen	$\kappa_1^\circ$	20 $m^{-1}$
Vorkrümmung Innenröhrchen	$\kappa_2^\circ$	0 $m^{-1}$
Toleranzbereich der Kontaktdurchdringung	$\Xi$	10 nm
Konvergenzgrenze	$Q_{konv}$	1 nm
Diskretisierung entlang der Röhrchenachse	-	1920 Elemente