

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В ГИПОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ С МЕЖЗЕРЕННОЙ ДЕФОРМАЦИЕЙ

Gudehus G. ¹, Чигарев А.В. ², Киреева И.А. ²

A theoretical study of plane waves in hypoplastic medium is presented using a ray method of geometrical seismology. Dynamical equations for relative small disturbance about an initial state are derived from general equations of hypoplasticity. We consider the hypoplastic equations with intergranular strain and assume that the initial state and the density of medium are inhomogeneous. In this case using of the ray method is the most efficient. The solutions for the components of rate vector or stress are found in the form of ray series. The coefficients of these series satisfy on order differential equations of the transfer which are solved analytical in case when void ratio is less then unit.

The velocities of quasi-longitudinal and quasi-transverse waves in a hypoplastic medium with intergranular strain depend on a kind of the loading and the unloading and they are usually less than the velocities of longitudinal and transverse waves in elastic skeleton.

1. Введение.

Уравнения распространения волн в гипопластической среде описывают некоторые эффекты, наблюдаемые во время землетрясений [1]. Конститутивные уравнения модели являются нелинейными, что в общем случае требует использования аналитических методов типа метода малого параметра. В статье [2] установлено наличие естественного малого параметра в исходных уравнениях, что позволило применить данный метод для решения задач динамической гипопластичности.

В качестве малого параметра выступает выражение $\frac{\|T - T^{(0)}\|}{\|trT^{(0)}\|} = \varepsilon \ll 1$, где $T, T^{(0)}$ – тензор напряжений и тензор начальных напряжений.

Авторы статьи [3] получили решения ряда прикладных задач в первом приближении.

В теории распространения волны в гипопластической среде [4, 5] описаны некоторые стадии процесса распространения волны.

В данной статье рассмотрены вопросы получения следующих приближений.

В случае малой амплитуды возмущения по сравнению с начальным напряженным состоянием, волны распространяются с постоянной скоростью как упругие волны в пористом теле при однородных начальных напряжениях, [6]. Тем не менее, уже в этом приближении можно рассматривать пластические волны для случая относительного перемещения зерен с трением. Вычисление скорости пластической волны приведено в работе [6]. Описанная в этой статье модель гипопластической среды с межзеренной деформацией дает возможность вычислить скорости пластических волн. Математические приемы, использованные авторами [6], не позволяют распространить методы на случай волн в гипопластической среде при неоднородном начальном напряженном состоянии и неоднородной плотности.

Рассмотрим применение лучевого метода, который является одним из наиболее эффективных методов в геометрической сейсмологии.

В основу метода положены условия:

1. Возмущение объема среды распространяется в виде волновой поверхности.
2. Решением динамических уравнений является ряд, описывающий полевые величины в окрестности волновой поверхности вдоль траектории луча.
3. Для коэффициентов этого ряда получены дифференциальные уравнения переноса, которые могут быть решены аналитическим путем.
4. Полученные решения верны вдоль траектории луча, которые находятся с помощью принципа Ферма.
5. Энергия возмущения распространяется вдоль лучевых трубок.
6. Процесс является устойчивым в случае распространения возмущения в форме волновой поверхности. Разрушение волновой поверхности свидетельствует о неустойчивости процесса.

7. Лучевые ряды имеют различные формы для случаев гладкого (непрерывного) изменения полевых величин и для разрывного на волновой поверхности. В этом случае для скачков полевых величин должны быть выполнены условия совместности.

1.1 Математическая формулировка проблемы распространения волны в гипопластической среде.

Замкнутая система уравнений, описывающая процесс распространения волны в гипопластической среде в общем случае имеет вид

$$\operatorname{div} T_{\text{total}} + \rho g = \rho \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \bar{V}) = 0 \quad (1.2)$$

$$\dot{T} = M(T, e, \delta) : D - T \bar{W} + \bar{W} T \quad (1.3)$$

$$\dot{\delta} = F(\delta) : D - \delta \bar{W} + \bar{W} \delta \quad (1.4)$$

$$\dot{e} = (1 + e) \operatorname{tr} D \quad (1.5)$$

Система (1.1) – (1.5) содержит 17 уравнений для 17 неизвестных: \bar{V} – скорость, T – тензор напряжений, δ – тензор межзеренной деформации, ρ – плотность среды, e – коэффициент пористости. Для системы (1.1) – (1.5) можно поставить различные начальные и граничные условия для конкретных задач.

Так как уравнения (1.1) – (1.5) сильно нелинейные, рассмотрим некоторые предположения, которые позволят упростить эту систему. Аналогично [6] предположим что, возмущение напряжения $\|T - T^{(0)}\|$ меньше чем начальное напряжение $T^{(0)}$

$$\frac{\|T - T^{(0)}\|}{\|T^{(0)}\|} \leq \varepsilon \ll 1. \quad (1.6)$$

Однако, в отличие от [3], не полагаем что, начальные напряжения $T^{(0)}$ постоянны.

Рассмотрим случай когда, $T = T^{(0)}(\bar{x})$, $\rho = \rho(\bar{x})$ – функции пространственных координат \bar{x} . Аналогично [3], предположим: начальное напряженное состояние – гидростатическое, тогда тензоры $\hat{T} = T \cdot \|T\|^{-1}$, $\hat{T}^* = T \cdot \|T\|^{-1} - \frac{1}{3} J$ имеют следующий вид

$$\hat{T}_{ij} = \frac{1}{3} \delta_{ij}, \quad \hat{T}_{ij}^* = 0 \quad (1.7)$$

Из (1.7) следует что, \hat{T}^* – малый параметр нелинейной системы (1.1) – (1.5). Используя метод малого параметра (или метод последовательных приближений), мы последовательно получим системы уравнений для приближений полевых величин.

Сначала рассмотрим уравнения (1.3), (1.4). Запишем эти уравнения с учетом условия (1.7) в форме [6]:

$$\dot{T} = \alpha_1 L : D + \alpha_2 L : \hat{\delta} \hat{\delta} : D + \alpha_3 N \hat{\delta} : D \quad (1.8)$$

$$\dot{\delta} = D - \alpha_4 \hat{\delta} \hat{\delta} : D, \quad \text{для } \hat{\delta} : D > 0 \quad (1.9)$$

$$\dot{T} = \alpha_5 L : D + \alpha_6 L : \hat{\delta} \hat{\delta} : D \quad (1.10)$$

$$\dot{\delta} = D, \quad \text{для } \hat{\delta} : D \leq 0 \quad (1.11)$$

$$\alpha_1 = \rho_1^x m_T + (1 - \rho^x) m_R, \quad \alpha_2 = \rho_1^x (1 - m_T), \quad \alpha_3 = \rho_1^x,$$

$$\alpha_4 = \rho_1^{\beta r}, \quad \alpha_5 = \alpha_1, \quad \alpha_6 = \rho_1^x (m_R - m_T),$$

$$L_{ijkl} = \lambda^* \delta_{ij} \delta_{kl} + 2\mu^* \delta_{ik} \delta_{jl}, \quad N_{ij} = \delta_{ij} X,$$

$$\lambda^* = \frac{f_b f_e a^2}{27}, \quad \mu^* = \frac{f_b f_e}{6}, \quad X = \frac{f_d f_b f_e}{27}.$$

$$f_b f_e \stackrel{\text{def}}{=} \frac{h_s}{h} \frac{1+e_i}{e} \left(-\frac{\text{tr} T^{(0)}}{h_s} \right)^{1-n} \left[3 + a^2 - a\sqrt{3} \left(\frac{e_{io} - e_{do}}{e_{co} - e_{do}} \right)^\alpha \right]^{-1},$$

$$f_d \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{e - e_d}{e_c - e_d} \right), \quad a \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi_c)}{2\sqrt{2} \sin \varphi_c}, \quad \rho_1 = \frac{\|\delta\|}{R}.$$

Параметр φ_c соответствует критическому углу трения [6].

1.2. Постановка задачи о распространении волн в слое.

Рассмотрим задачу распространения волны в слое гипопластического материала, толщины L , лежащем на полупространстве $x_{10} \leq x_1 \leq x_{10} + L$ (рис. 1).

На практике материал обладает слоистостью, макроскопические эффекты учета которой можно описать удачно подобранной моделью эффективной среды. Сцепление слоя и полупространства считаем жестким.

В момент времени $t = t_0$ на границу слоя и полупространства $x_1 = x_{10}$ из полупространства $x_1 < 0$ падает волна.

Поставим следующие начальные условия:

$$V_1(x_{10}, t_0) = 0, \quad V_2(x_{10}, t_0) = V_2^0, \quad V_3(x_{10}, t_0) = 0. \quad (1.12)$$

$$T_{11}(x_{10}, t_0) = T_{22}(x_{10}, t_0) = T_{33}(x_{10}, t_0) = T_{13}(x_{10}, t_0) = T_{23}(x_{10}, t_0) = 0, \quad T_{12}(x_{10}, t_0) = T_{12}^0. \quad (1.13)$$

Граничные условия зададим в виде:

$$V_1(x_{10}, t) = V_3(x_{10}, t) = 0, \quad V_2(x_{10}, t) = V_2^0(t), \quad (1.14)$$

$$T_{11}(x_{10}, t) = T_{22}(x_{10}, t) = T_{33}(x_{10}, t) = T_{13}(x_{10}, t) = T_{23}(x_{10}, t) = 0, \quad T_{12}(x_{10}, t) = T_{12}^0(t). \quad (1.15)$$

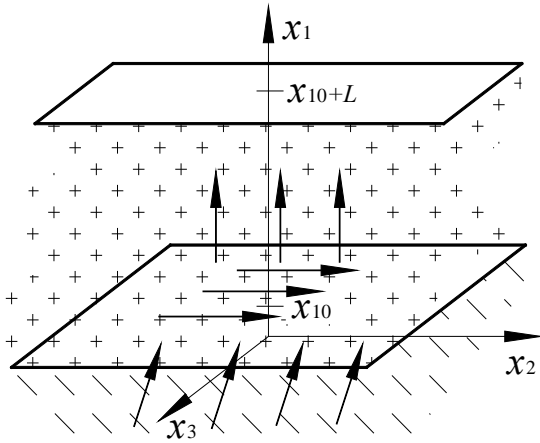


Рис. 1.

В этом случае полевые величины являются функциями только от x_1 и уравнения (1.1), (1.2), (1.8) – (1.11), (1.5) могут быть записаны в форме:

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} - \frac{\partial p}{\partial x_1} + \rho g = \rho \frac{\partial V_1}{\partial t} \quad (1.16)$$

$$\frac{\partial T_{12}}{\partial x_1} = \rho \frac{\partial V_2}{\partial t} \quad (1.17)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x_1} V_1 + \rho \frac{\partial V_1}{\partial x_1} = 0 \quad (1.18)$$

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial t} = \alpha_1 (\gamma^* + 2\mu^*) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \alpha_2 (\gamma^* + 2\mu^*) \hat{\delta}_{11} \hat{\delta}_{pq} D_{pq} + \alpha_3 X \hat{\delta}_{pq} D_{pq} \quad (1.19)$$

$$\frac{\partial T_{12}}{\partial t} = \alpha_1 \mu^* \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \alpha_2 \mu^* \hat{\delta}_{12} \hat{\delta}_{pq} D_{pq} \quad (1.20)$$

$$\dot{\delta}_{11} = \begin{cases} D_{11} - \hat{\delta}_{11} \hat{\delta}_{pq} D_{pq} & , \text{ for } \delta_{pq} D_{pq} > 0 \\ D_{11} & \text{ for } \delta_{pq} D_{pq} \leq 0 \end{cases} \quad (1.21)$$

$$\dot{\delta}_{12} = \begin{cases} D_{12} - \hat{\delta}_{12} \hat{\delta}_{pq} D_{pq} & , \text{ for } \delta_{pq} D_{pq} > 0 \\ D_{12} & \text{ for } \delta_{pq} D_{pq} \leq 0 \end{cases} \quad (1.22)$$

$$\dot{e} = (1 + e)trD \quad (1.23)$$

Выражения для \dot{T}_{22} , \dot{T}_{33} мы не выписываем, так как они не будут использоваться в дальнейших вычислениях, звездочкой обозначим эффективные величины.

Рассмотрим сначала уравнения (1.21) и (1.22). Так как эти уравнения являются нелинейными, можно получить только приближенные аналитические решения. Используем 1-D приближение для каждого уравнения из системы (1.21), (1.22) в линейном приближении.

$$\dot{\delta}_{11} = \begin{cases} D_{11} - \frac{|\delta_{11}|}{R} D_{11} & , \text{ for } \delta_{11} D_{11} > 0 \\ D_{11} & \text{ for } \delta_{11} D_{11} \leq 0 \end{cases} \quad (1.24)$$

$$\dot{\delta}_{12} = \begin{cases} D_{12} - \frac{|\delta_{12}|}{R} D_{12} & , \text{ for } \delta_{12} D_{12} > 0 \\ D_{12} & \text{ for } \delta_{12} D_{12} \leq 0 \end{cases} \quad (1.25)$$

Решение уравнений (1.24), (1.25) имеет вид:

$$\delta_{11} = \begin{cases} R \left(1 - e^{-\tilde{E}_{11}/R} \right) & , \delta_{11} > 0, D_{11} > 0 \\ R \left(e^{\tilde{E}_{11}/R} - 1 \right) & , \delta_{11} < 0, D_{11} < 0 \\ \tilde{E}_{11} = E_{11} - E_{11}^{(0)} & , \delta_{11} D_{11} \leq 0 \end{cases} \quad (1.26)$$

$$\delta_{12} = \begin{cases} R \left(1 - e^{-\tilde{E}_{12}/R} \right) & , \delta_{12} > 0, D_{12} > 0 \\ R \left(e^{\tilde{E}_{12}/R} - 1 \right) & , \delta_{12} < 0, D_{12} < 0 \\ \tilde{E}_{12} = E_{12} - E_{12}^{(0)} & , \delta_{12} D_{12} \leq 0 \end{cases} \quad (1.27)$$

Где E – тензор деформации и $E^{(0)}$ – тензор начальных деформаций.

Для упрощения последующих вычислений линеаризуем решения (1.26), (1.27) – разложив функцию экспоненты в ряд Тейлора и ограничимся приближением до второго порядка.

$$\delta_{11} = \begin{cases} \tilde{E}_{11} \left(1 + \frac{\tilde{E}_{11}}{2R} \right) & , \text{ for } \delta_{11} > 0, D_{11} > 0 \\ \tilde{E}_{11} \left(1 - \frac{\tilde{E}_{11}}{2R} \right) & , \text{ for } \delta_{11} < 0, D_{11} < 0 \\ \tilde{E}_{11} & , \text{ for } \delta_{11} D_{11} \leq 0 \end{cases} \quad (1.28)$$

$$\delta_{12} = \begin{cases} \tilde{E}_{12} \left(1 + \frac{\tilde{E}_{12}}{2R} \right) & , \text{ for } \delta_{12} > 0, D_{12} > 0 \\ \tilde{E}_{12} \left(1 - \frac{\tilde{E}_{12}}{2R} \right) & , \text{ for } \delta_{12} < 0, D_{12} < 0 \\ \tilde{E}_{12} & , \text{ for } \delta_{12} D_{12} \leq 0 \end{cases} \quad (1.29)$$

$$\dot{\delta}_{11} = \begin{cases} \left(1 + \frac{\tilde{E}_{11}}{R} \right) D_{11} & , \text{ for } \delta_{11} > 0, D_{11} > 0 \\ \left(1 - \frac{\tilde{E}_{11}}{R} \right) D_{11} & , \text{ for } \delta_{11} < 0, D_{11} < 0 \\ D_{11} & , \text{ for } \delta_{11} D_{11} \leq 0 \end{cases} \quad (1.30)$$

$$\dot{\delta}_{12} = \begin{cases} \left(1 + \frac{\tilde{E}_{12}}{R} \right) D_{12} & , \text{ for } \delta_{12} > 0, D_{12} > 0 \\ \left(1 - \frac{\tilde{E}_{12}}{2R} \right) D_{12} & , \text{ for } \delta_{12} < 0, D_{12} < 0 \\ D_{12} & , \text{ for } \delta_{12} D_{12} \leq 0 \end{cases} \quad (1.31)$$

Заменим выражение $\hat{\delta}_{ij} \delta_{kl} D_{kl}$ в уравнениях (1.19), (1.20) разложением (1.30) и (1.31), учитывая (1.21), (1.22). Тогда получим:

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial t} = \alpha_1 (\gamma^* + 2\mu^*) \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \alpha_2 (\gamma^* + 2\mu^*) (\text{sign } D_{11}) \frac{\tilde{E}_{11}}{R} \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \alpha_3 \chi \hat{\delta}_{pq} D_{pq} \quad (1.32)$$

$$\frac{\partial T_{12}}{\partial t} = \alpha_1 \mu^* \frac{\partial V_2}{\partial x_1} + \alpha_2 \mu^* (\text{sign } D_{12}) \frac{\tilde{E}_{12}}{r} \frac{\partial V_2}{\partial x_1} \quad (1.33)$$

Следующее упрощение получим для выражения $\hat{\delta}_{pq} D_{pq}$ в уравнении (1.32). Для этого запишем приближенное выражение для $\hat{\delta}_{pq} D_{pq}$, учитывая разложение (1.28):

$$\hat{\delta}_{pq} D_{pq} \approx (\text{sign } \tilde{E}_{11}) \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + (\text{sign } \tilde{E}_{12}) \frac{\partial V_2}{\partial x_1} \quad (1.34)$$

Подставив (1.34) в (1.32), запишем уравнения (1.32) и (1.33) в следующей форме:

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial t} = A_1 \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + B_1 \frac{\partial V_2}{\partial x_1} \quad (1.35)$$

$$\frac{\partial T_{12}}{\partial t} = A_2 \frac{\partial V_2}{\partial x_1}, \quad (1.36)$$

где коэффициенты A_1, A_2, B_1 вычисляются по формулам:

$$A_1 = (\gamma^* + 2\mu^*) \left[\alpha_1 + \alpha_2 (\text{sign } D_{11}) \frac{\tilde{E}_{11}}{R} \right] + \alpha_3 X(\text{sign } \tilde{E}_{11}) \quad (1.37)$$

$$A_2 = \mu^* \left[\alpha_1 + \alpha_2 (\text{sign } D_{12}) \frac{\tilde{E}_{12}}{R} \right], \quad B_1 = \alpha_3 X(\text{sign } \tilde{E}_{12})$$

Объединив уравнения (1.19) и (1.35), получим:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(A_1 \frac{\partial V_1}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{\partial V_1}{\partial t} \right) = - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(B_1 \frac{\partial V_2}{\partial x_1} \right) + \rho \left(\frac{\partial \rho}{\partial x_1} V_1 + \rho \frac{\partial V_1}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_1 \partial t} \quad (1.38)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial T_{11}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{B_1}{A_1} \frac{\partial V_2}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_1} \right) \quad (1.39)$$

Объединив уравнения (1.20) и (1.36), получим:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(A_2 \frac{\partial V_2}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{\partial V_2}{\partial t} \right) = 0 \quad (1.40)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial T_{12}}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial T_{12}}{\partial t} \right) = 0 \quad (1.41)$$

Система дифференциальных уравнений (1.38), (1.39) описывает процесс распространения волны в гипопластической среде с межзеренной деформацией. Для уравнений (1.36) – (1.39) мы можем задать начальные и граничные условия (1.11) – (1.14) на плоскости $x_1 = x_{10}$.

Запишем уравнения неразрывности и кинетические уравнения для коэффициента пористости e :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + V_1 \frac{\partial \rho}{\partial x_1} = 0 \quad (1.42)$$

$$\dot{e} = (1 + e) \cdot \text{tr } T \quad (1.43)$$

Подставляя $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ из (1.42) в (1.40), находим

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(A_2 \frac{\partial V_2}{\partial x_1} \right) - \rho \frac{\partial^2 V_2}{\partial t^2} = - \frac{\partial v_2}{\partial t} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x_1} V_1 + \rho \frac{\partial V_1}{\partial x_1} \right) \quad (1.44)$$

Из (1.43) следует:

$$\frac{\partial V_1}{\partial x_1} = \frac{d}{dt} [\ln(1 + e)] \Rightarrow V_1 = C \ln \frac{1 + e}{1 + e_0} \quad (1.45)$$

Подставляя (1.45) в (1.44), получим

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(A_2 \frac{\partial V_2}{\partial x_1} \right) - \rho \frac{\partial^2 V_2}{\partial t^2} = - \frac{\partial V_2}{\partial t} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x_1} C(x_1) \ln \frac{1 + e}{1 + e_0} + \rho \frac{d \ln(1 + e)}{dt} \right) \quad (1.46)$$

В случае $e \ll 1$ можем записать уравнение для нулевого приближения:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(A_2 \frac{\partial V_2}{\partial x_1} \right) - \rho \frac{\partial^2 V_2}{\partial t^2} = 0 \quad (1.47)$$

Преобразуем уравнения (1.39) с учетом (1.35):

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{A_2} \right) = - \frac{\mu^* \alpha_2 (\text{sign } D_{12})}{A_2 R} \frac{\partial V_2}{\partial x_1} \quad (1.48)$$

Используя выражения (1.36) и (1.48), запишем уравнение (1.41) в следующей форме

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial T_{12}}{\partial x_1} \right) - \frac{1}{A_2} \frac{\partial^2 T_{12}}{\partial t^2} + \frac{\mu^* \alpha_2 (\text{sign } D_{12})}{A_2^2 R} \left(\frac{\partial T_{12}}{\partial t} \right)^2 = 0 \quad (1.49)$$

Итак, получено нелинейное дифференциальное уравнение (1.49) для T_{12} .

Рассмотрим теперь уравнение (1.38).

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(A_1 \frac{\partial V_1}{\partial x_1} \right) - \rho \frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2} = - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(B_1 \frac{\partial V_2}{\partial x_1} \right) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial x_1} V_1 + \rho \frac{\partial V_1}{\partial x_1} \right) \left[p + \frac{\partial V_1}{\partial t} \right] + \frac{\partial^2 p}{\partial x_1 \partial t} \quad (1.50)$$

Для функции $p(x, t)$ запишем следующее уравнение:

$$\frac{\partial p_e}{\partial t} = - \frac{(p_e + p_a)(1+e)}{e(1-S_r)} \frac{\partial V_1}{\partial x_1} - V_1 \frac{\partial p_e}{\partial x_1} \quad (1.51)$$

В нулевом приближении уравнение (1.50) преобразуется в выражение:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(A_1 \frac{\partial V_1}{\partial x_1} \right) - \rho \frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2} = - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(B_1 \frac{\partial V_2}{\partial x_1} \right), \quad p_e = p_e(x) \quad (1.52)$$

2. Получение и решение уравнений переноса в общем случае.

Рассмотрим уравнение (1.47). Коэффициенты A_2 , p являются функциями от переменных t , x_1 , поэтому используем лучевой метод для решения этого уравнения. Решение будем искать в форме лучевого ряда:

$$V_2(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} V_2^{(n)}(x_1) \cdot f_n(t - \psi(x_1)) \quad (2.1)$$

$$f_n'(\xi) = \frac{df_n(\xi)}{d\xi} = f_{n-1}(\xi) \quad (2.2)$$

где $\psi(x_1)$ – эйконал; $V_2^{(n)}$ – функции, которые должны быть найдены; t – текущее время; x_1 – пространственная координата.

Подставив (2.1) в (1.47), получим:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[(\psi')^2 A_2 - \rho \right] \cdot V_2^{(n)} f_{n-2} - \left[2A_2 \psi' V_2^{(n)'} + (A_2 \psi'' + A_2' \psi') V_2^{(n)} \right] f_{n-1} + \left[A_2 V_2^{(n)''} + A_2' V_2^{(n)'} \right] f_n \right\},$$

где знак „'“ означает производную.

Для $n < 0$ должно выполняться условие $V_2^{(n)} = 0$.

Из выражения (2.2) следует

$$\left[(\psi')^2 A_2 - \rho \right] \cdot V_2^{(n+1)} - 2A_2 \psi' V_2^{(n)'} - (A_2 \psi'' + A_2' \psi') V_2^{(n)} + A_2 V_2^{(n-1)''} + A_2' V_2^{(n-1)'} = 0, \quad (2.3)$$

$n = -1, 0, 1, \dots$

При $n = -1$ $V_2^{(n)} \equiv 0$, но $V_2^{(0)} \neq 0$, тогда из (2.3) получим следующее выражение

$$\left(\psi'_{(x_1)} \right)^2 = \frac{\rho(x)}{A_2(x)} = C^{-2}(x), \quad (2.4)$$

где $C(x)$ это скорость волны.

Уравнение (2.4) называется уравнением эйконала. Это уравнение используется в геометрической акустике (сейсмологии).

Решение уравнения (2.4) имеет вид:

$$\psi(x_1) = \psi_{(x,0)} \pm \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx_1}{C(x_1)} \quad (2.5)$$

Функция $\psi(x_1)$ обозначает время прибытия волны в точку x_1 . В формуле (2.5) знак « + » берется для волн в направлении точки x_1 , знак « - » для волн в направлении $-x_1$.

Подставляя (2.5) в (2.3), получим систему уравнений переноса. Эти уравнения являются однородными дифференциальными уравнениями 1-го порядка относительно $V_2^{(n)}(x_1)$.

Запишем решение этой системы в общем виде:

$$V_2^{(n)}(x_1) = V_2^{(n)}(x_{10}) \left(\frac{\rho(x_{10})A_2(x_{10})}{\rho(x_1)A_2(x_1)} \right)^{1/4} + \int_{x_{10}}^{x_1} V_2^{(n-1)}(\tau) \left(\frac{\rho(\tau)A_2(\tau)}{\rho(x_1)A_2(x_1)} \right)^{1/4} d\tau \quad (2.6)$$

$$V_2^{(n-1)}(x_1) = \frac{\pm 1}{2(\rho A_2)^{1/2}} \frac{d}{dx} (A_2 V_2^{(n-1)'}) , \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.7)$$

Значения ρ , A_2 , $V_2^{(n)}(x_{10})$ считаются заданными. Найдем $V_2^{(n)}(x_1)$ из (2.6), (2.7) и подставим в уравнение (2.1).

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (\psi_1')^2 A_1 - \rho \right\} V_1^{(n)} f_{n-2} - \left[2A_1 \psi_1' V_1^{(n)'} + (A_1 \psi_1'' + A_1' \psi_1') V_1^{(n)} \right] f_{n-1} + \left[A_1 V_1^{(n)''} + A_1' V_1^{(n)'} \right] f_n = \\ & = - \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (\psi')^2 B_1 \right\} V_2^{(n)} f_{n-2} - \left[2B_1 \psi' V_2^{(n)'} + (B_1 \psi'' + B_1' \psi') V_2^{(n)} \right] f_{n-1} + \left[B_1 V_2^{(n)''} + B_1' V_2^{(n)'} \right] f_n \end{aligned} \quad (2.9)$$

Аналогично выражению (2.3), запишем следующее равенство для (2.9):

$$\begin{aligned} & \left[(\psi_1')^2 A_1 - \rho \right] V_1^{(n+1)} - 2A_1 \psi_1' V_1^{(n)'} - (A_1 \psi_1'' + A_1' \psi_1') V_1^{(n)} + A_1 V_1^{(n-1)''} + A_1' V_1^{(n-1)'} = \\ & = - \left[(\psi')^2 B_1 \cdot V_2^{(n+1)} - 2B_1 \psi' V_2^{(n)'} - (B_1 \psi'' + B_1' \psi') V_2^{(n)} + B_1 V_2^{(n-1)''} + B_1' V_2^{(n-1)'} \right] \end{aligned} \quad (2.10)$$

При $n = -1$ $V_2^{(n)} = V_1^{(n)} \equiv 0$, но $V_1^{(0)} \neq 0$, $V_2^{(0)} \neq 0$, следовательно:

$$(\psi_1')^2 = \frac{\rho}{A_1} \left(1 - \frac{B_1}{A_2} \right) = \frac{1}{C_1^2}, \quad (2.11)$$

где $C_1 = \sqrt{\frac{A_1}{\rho}}$, $\rho_1 = \rho \left(1 - \frac{B_1}{A_2} \right)$, $C_1(x_1)$ – скорость волны V_1 .

Таким образом, делаем вывод, что в гипопластической среде распространяются волна V_2 (квазипоперечная волна) и волна V_1 (квазипродольная волна), которые связаны друг с другом.

Решение уравнения (2.11) имеет вид:

$$\psi(x_1) = \psi(x_{10}) \pm \int_{x_{10}}^{x_1} \frac{dx_1}{C_1(x_1)} \quad (2.12)$$

Подставив (2.12) в (2.9), получим систему уравнений переноса. Запишем решение этой системы в общем виде:

$$\begin{aligned} V_1^{(n)}(x_1) = & V_1^{(n)}(x_{10}) \left(\frac{\rho_1(x_{10})A_1(x_{10})}{\rho_1(x_1)A_1(x_1)} \right)^{1/4} + \int_{x_{10}}^{x_1} V_1^{(n-1)}(\tau) \left(\frac{\rho_1(\tau)A_1(\tau)}{\rho_1(x_1)A_1(x_1)} \right)^{1/4} d\tau + \\ & + \int_{x_{10}}^{x_1} V_{21}^{(n-1)}(\tau) \left(\frac{\rho_1(\tau)A_1(\tau)}{\rho_1(x_1)A_1(x_1)} \right)^{1/4} d\tau , \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$V_1^{(n-1)} = \pm \frac{1}{2(\rho_1 A_1)^{1/2}} \frac{d}{dx_1} (A_1 V_1^{(n-1)'}) , \quad (2.14)$$

$$V_{21}^{(n-1)} = \pm \frac{1}{2(\rho_1 A_1)^{1/2}} \frac{d}{dx_1} (A_2 V_2^{(n-1)'}) \quad (2.15)$$

Рассмотрим нулевое приближение при $n = 0$. В этом случае из (2.10) получаем:

$$2A_1 \psi_1' V_1^{(0)'} + (A_1 \psi_1')' V_1^{(0)} = 2B_1 \psi_1' V_2^{(0)'} + (B_1 \psi_1')' V_2^{(0)} , \quad (2.16)$$

Решение уравнения (2.16) имеет вид:

$$V_1^{(0)}(x_1) = V_1^{(0)}(x_{10}) \left(\frac{\rho_1(x_{10}) A_1(x_{10})}{\rho_1(x_1) A_1(x_1)} \right)^{1/4} + \int_{x_{10}}^{x_1} V_{21}^{(0)}(\tau) \left(\frac{\rho_1(\tau) A_1(\tau)}{\rho_1(x_1) A_1(x_1)} \right)^{1/4} d\tau , \quad (2.17)$$

$$V_{21}^{(0)}(\tau) = V_2^{(0)'}(\tau) \sqrt{\frac{B_1(\tau)}{A_1(\tau)}} \left(\frac{A_2(\tau)}{A_2(\tau) - B_1(\tau)} \right)^{1/4} + \frac{1}{2} V_2^{(0)}(\tau) \frac{(\sqrt{B_1(\tau) \rho(\tau)})'}{A_1(\tau) \rho_1(\tau)} \quad (2.18)$$

Пусть начальные условия будут нулевыми, а среда распространения волны – однородная, тогда из (2.12), (2.16) и (2.8) следует:

$$\psi_1(x_1) = \pm \frac{x}{C_1} , \quad x_{10} = 0 , \quad \psi(0) = 0 \quad (2.19)$$

$$V_1^{(0)} = \frac{B_1}{A_1} V_2^{(0)} f_0 \left(t \pm \frac{x}{C_1} \right) . \quad (2.20)$$

Формулы (2.19), (2.20) дают решение качественно аналогичное [6, 9].

3. Сравнение результатов распространения волны в гипопластической среде с учетом и без учета межзеренной деформации.

Рассмотрим выражения (1.37) для коэффициентов A_i , B_1 с учетом межзеренной деформации, а коэффициенты $A_i^{(n)}$, $B_1^{(n)}$ без учета межзеренной деформации.

Скорости квазипродольной и квазипоперечной волн находятся по формулам:

$$C_e^2 = \frac{A_0}{\rho} = C_e^{2(0)} \left[\alpha_1 + \alpha_2 (\text{sign } D_{11}) \frac{\tilde{E}_{11}}{R} \right] + \alpha_3 \frac{X}{\rho} (\text{sign } \tilde{E}_{11}) \quad (3.1)$$

$$C_t^2 = \frac{A_2}{\rho} = C_t^{2(0)} \left[\alpha_1 + \alpha_2 (\text{sign } D_{11}) \frac{\tilde{E}_{12}}{R} \right]$$

Выражения для $C_e^{2(n)}$, $C_t^{2(n)}$ запишем с учетом формул (3.1):

$$C_e^2 = C_e^{2(n)} + C_e^{2(i)} \quad (3.2)$$

$$C_t^2 = C_t^{2(n)} + C_t^{2(i)}$$

$$C_e^{2(i)} = C_e^{2(0)} \alpha_2 (\text{sign } D_{11}) \frac{\tilde{E}_{11}}{R} + \alpha_3 \frac{X}{\rho} (\text{sign } \tilde{E}_{11}) \quad (3.3)$$

$$C_e^{2(i)} = C_e^{2(0)} \alpha_2 (\text{sign } D_{12}) \frac{\tilde{E}_{12}}{R}$$

Из (3.2), (3.3) следует, что значения скоростей зависят от знака D_{11} , D_{12} , \tilde{E}_{11} , α_2 , α_3 . В статье [6] даны численные значения для следующих коэффициентов:

$$R = 1 \cdot 10^{-4} ; \quad m_R = 5,0 ; \quad m_T = 2,0 ; \quad \beta_r = 0,5 ; \quad \chi = 6,0 ;$$

тогда в формулах (3.1), (3.2), (3.3) получаем $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 < 0$, $\alpha_6 > 0$.

Таким образом, при нагрузке квазипродольная волна распространяется со скоростью меньшей, чем скорость волны в упругом скелете, при разгрузке могут быть различные ситуации для конкретных данных. Скорость квазипоперечной волны меньше чем скорость поперечной волны в упругом скелете.

4. Выводы

1. Получены уравнения распространения волн в гипопластической среде с учетом межзеренной деформации, описывающие эволюцию сравнительно малого возмущения в виде плоской волны в случае, когда начальное состояние и плотность среды являются неоднородными. Вследствие неоднородности динамические уравнения для продольных и поперечных волн попарно связаны друг с другом.
2. В случае, когда коэффициент пористости $e \ll 1$, динамические уравнения описывают распространение квазипродольных и квазипоперечных волн, причем для поперечного компонента динамические уравнения замкнуты, а для продольного компонента динамические уравнения содержат зависимость от поперечного компонента.
3. Решения динамических уравнений найдены в общей аналитической форме лучевым методом, который позволяет получить решение динамических уравнений гипопластической среды с межзеренной деформацией. Эти решения получены вдоль траектории луча в окрестности волновой поверхности.
4. Скорость квазипродольной волны в гипопластической среде с межзеренной деформацией меньше чем в упругой модели при нагрузке и может быть меньше или больше при разгрузке (это зависит от условий конкретной задачи). Скорость квазипоперечной волны в гипопластической среде с межзеренной деформацией меньше чем в упругой модели.
5. Полученные результаты в случае однородного начального состояния и постоянной плотности гипопластической среды аналогичны результатам, полученным другим методом.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Gudehus, Y. Loukachev, N. Pralle. Inelastic behavior of grain skeletons with propagation of plane shear waves. // International Conference Of Powders and Grains, Sendai, Japan, May 2001. – The Netherlands, Rotterdam. – P. 125-128.
2. V.A. Osinov, G. Gudehus. Plane shear waves and loss of stability in a saturated granular body // Mech. Cohesive-Frict. Mater. –1996. – Vol. 1. – P. 25-44.
3. Y. Loukachev, N. Pralle, G. Gudehus. Dilatancy-Induced P-Waves as Evidence for Nonlinear Soil Behavior. // Bull. Seismol. Soc. of America. – March 2002. – Vol. 92. – № 2. - P. 854-862.
4. V.A. Osinov. Theoretical investigation of large-amplitude waves in granular soils. // Soil Dyn. Earthquake Eng. – № 17. – P. 13-28.
5. Seismic Risk and Engineering Decisions / By C. Lomnitz and E. Rosenblueth // Developments in Geotechnical Engineering. – Elsevier scientific publishing company, 1976. – №15. – 425 p.
6. Y. Loukachev. Dilatauzwellen und Schichtrennung bei wellenausbreitung in sandigen Böden Veröffentlichungen des Institutes für Bodenmechanik und Felsmechanik der Universität Fridericiana in Karlsruhe, Helt 155. – Karlsruhe, 2002. – S. 1200.
7. A. Niemunis, I. Herle. Hipoplastic model for cohesionless soils with elastic strain range. // Mech. Cohesive-Frictional Mater., 1996. – № 2(4). – Pp. 279-299.
8. N.P. Bestuzheva, A.V. Chigarev. On the use of Markovian approximation in dynamics of the stochastic media. // I. Appl. Math. Mech., 1977. – Vol. 41, № 6. – Pp. 1099-1106.
9. Y.A. Berezin, V.A. Osinov, K. Hutter. Evolution of plane disturbances in hypoplastic granular materials. // Continuum Mech. thermodyn., 2001. – № 13. – Pp. 79-90.