HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

”Tillsammans” Kollaborativa matematikuppgifter i ett undersökande landskap

Helsingfors universitet
Magisterprogrammet i pedagogik
Studieinriktning (klasslärare)
Pro gradu-avhandling 30 sp
Vetenskapsområde (pedagogik)
Maj 2019
Sebastian Holsti

Handledare: Laura Tuohilampi, Erika Löfström

HELSINGIN YLIOPISTO

Tiedekunta - Fakultet – Faculty Pedagogiska fakulteten, Magisterprogrammet i pedagogik		
Tekijä - Författare - Author Sebastian Holsti		
Työn nimi - Arbetets titel ”Tillsammans” Kollaborativa matematikuppgifter i ett undersökande landskap		
Title Together		
Oppiaine - Ämne - Subject Pedagogik, matematik		
Työn laji/ Ohjaaja - Arbetets art/Handledare - Level/Instructor Pro gradu-avhandling / Handledarens namn	Aika - Datum - Month and year	Sivumäärä - Sidantal - Number of pages 58 s. + 37 s. bilagor

Tiivistelmä - Referat – Abstract

Mål: Tidigare forskning har visat att elevernas engagemang för matematikundervisningen sjunker stadigt under grundskoleåren. Det har dessutom påvisats att matematikundervisningen är mycket lärobokscentrerad och att undervisningen poängterar en procedural smidighet framom en begreppslig förståelse.
Det finns även indikationer på att en viss nivå av ansträngning är nödvändig för inlärningen samt att kognitivt utmanande uppgifter skapar ett större engagemang hos eleverna.
I denna avhandling presenteras och undersöks ett interventions material med kognitivt utmanande kollaborativa matematikuppgifter. Syftet med denna forskningen är att undersöka vilka matematiska kompetenser eleverna upplever sig öva på i arbetet med kollaborativa uppgifter samt undersöka vad eleverna upplever att bäst stöder dem i deras ansträngningar med kognitivt utmanande matematikuppgifter placerade i ett undersökande landskap.
Även elevernas upplevda kunskapsutveckling under interventionen behandlas.
Metoder: Detta är en kvantitativ studie som tog plats i en lågstadieskola. Eleverna i forskningen är elever i årskurs 4 och årskurs 6 (N=32).
För denna studie konstruerades en enkät som eleverna fyllde i efter varje genomförd lektion. Fokus i denna avhandling ligger på elevernas egen uppfattning. Totalt genomfördes 8 lektioner per årskurs.
Resultat och slutsatser: Resultaten från dennas studie visar att elever i årskurserna 4–6 upplever gruppen som sitt största stöd i arbetet med kognitivt utmanande matematikuppgifter placerade i ett undersökande landskap. Det förelåg en skillnad mellan årskurserna så att de äldre eleverna upplevde sig ha övat mera på begreppsliga förmågor och de kunde även aningen bättre kunde utnyttja de kollaborativa resurserna medan de yngre eleverna aningen mera förlitade sig på läraren och upplevde gruppens stöd som störst i arbetet med mera procedurala färdigheter. Varken de äldre eller de yngre eleverna förmådde att verkligen utnyttja de kollaborativa resurserna då antingen den kognitiva kravnivån ökade eller uppgifterna tog plats i mindre konkreta miljöer. Resultaten antyder att det finns skäl att spekulera vidare i hur man bäst kan stöda eleverna kollaborativa matematikutveckling.

Avainsanat - Nyckelord
Matematik, Pedagogik, Kollaborativt

Keywords
Mathematics, Education, Collaborative

Säilytyspaikka - Förvaringsställe - Where deposited
Helsingfors Universitets Bibliotek – Helda/E-thesis (examensarbeten)

Muita tietoja - Övriga uppgifter - Additional information

Tiedekunta - Fakultet - Faculty Educational Sciences		
Tekijä - Författare - Author Sebastian Holsti		
Työn nimi - Arbetets titel Tillsammans		
Title Together		
Oppiaine - Ämne - Subject Education, Mathematics		
Työn laji/ Ohjaaja - Arbetets art/Handledare - Level/Instructor Laura Tuohilampi	Aika - Datum - Month and year	Sivumäärä - Sidantal - Number of pages 58 p. + 37 p. appendices

Aim: Previous research has shown that the students' involvement in mathematics education is steadily decreasing during the compulsory school years. It has also been shown that the teaching of mathematics is very textbook centered and that teaching emphasizes a procedural fluency over conceptual understanding.
There are also indications that a certain level of struggle is necessary for learning and that cognitively challenging tasks create a greater level of engagement.
In this thesis, an intervention material with cognitively challenging collaborative mathematical tasks is presented and examined. The purpose of this research is to investigate which mathematical competences the students find themselves practicing in their work on collaborative tasks and to investigate what the pupils find to best support them in their efforts with cognitively challenging mathematical tasks placed in an investigative landscape.
The students' perceived knowledge development during the intervention is also addressed.
Methods: This is a quantitative study that took place in a primary school. The students in the research are students in grade 4 and grade 6 (N = 32).
For this study, a survey was constructed that the students completed after each lesson. The focus of this thesis lies on the students' own experience. A total of 8 lessons were conducted per year.
Results and conclusions: The results from his study show that pupils in grades 4-6 experience the group as their greatest support in the work on cognitively challenging mathematical tasks placed in an investigative landscape. There was a difference between the classes. The older students felt that they had practiced more on conceptual abilities, and they could also slightly better utilize the collaborative resources. The younger pupils relied somewhat more on the teacher and experienced the group's support as their greatest asset in their work with more procedural skills. Neither the elderly nor the younger students were able to really utilize the collaborative resources when the cognitive level of demand increased or the tasks took place in less concrete environments. The results suggest that there is reason to speculate further on how best to support students' collaborative mathematical development.

Avainsanat - Nyckelord
Matematik, Pedagogik, Kollaborativt

Keywords
Mathematics, Education, Collaborative

Säilytyspaikka - Förvaringsställe - Where deposited
Helsinki University Library – Helda/E-thesis (theses)

Muita tietoja - Övriga uppgifter - Additional information

UNIVERSITY OF HELSINKI

Innehållsförteckning

1. Inledning

Matematik har i långa tider varit en del av det mänskliga samhället, enligt Fauvel och Maanen (2006) så har matematik har varit en del av mänskligheten i över 4000 år. Tidigare fanns ett starkare behov av mekaniska kunskaper och räknefärdigheter. Men i och med det förändrade samhället och teknikens frammarsch så har behoven förändrats. Bland andra så för Skovmose (1998) fram förmågan att ta del av sociala och politiska sammanhang konstruerade av eller kring matematik. Han lyfter fram termen "mathemacy" för att beskriva matematiska färdigheter som någonting mer än enbart förmågan att räkna.

Finlands konkurrenskraft bygger starkt på matematisk kompetens och det verkar finns ett speciellt behov av matematiskt kunnande i Finland idag: Enligt en ny rapport från Teknikindustrin (Teknologiateollisuus, 2018) står Teknikindustrin för mer än hälften av vår export och sysselsätter idag cirka 300 000 personer i Finland. Rapporten konstaterar att det fram till år 2021 behövs 53 000 nya experter inom området. Med andra ord kan en matematisk kompetens utgöra grunden för en välbetald och stabil karriär för många ungdomar. Men matematisk kompetens som en fristående kompetens räcker inte. Jokinen och Sieppi (2018) för i sin artikel fram att sociala färdigheter blir allt viktigare i arbetslivet. Och att sysselsättning är säkrast då matematiska färdigheter kombineras med sociala färdigheter.

I och med att matematiken som någonting mer än enbart förmågan att räkna uppenbarligen uppfyll-ler en så pass viktig funktion i dagens samhälle såväl på individnivå som på samhällsnivå är det av yttersta vikt att alla grundskolelever får förutom undervisning i matematik även en tillräcklig förståelse för matematik. Vidare med tanke på det stora framtida behovet av matematisk kompetens i Finland så är det förutom kunnande viktigt att eleverna även engageras och motiveras i deras matematikstudier. Förståelse och engagemang hävdar jag att är sammanlänkade då en tillräcklig förståelse för matematik nås genom att engagera eleverna i matematikundervisningen. Schoenfeld (1992) menar att elever kan engageras i matematik om de får delta i en undersökande process. Att vara engagerad i matematik innebär att undervisningen kan förankras i praktiken och göras meningsbärande utanför en skolkontext (Koskinen, 2016). Vidare så måste uppgifterna även erbjuda på tillräckligt motstånd och eleverna bör få anstränga sig för att ta reda på något som inte är uppenbart (Hiebert & Grouws 2007)

Matematikundervisningen i Finland idag har haft svårt att svara på dessa utmaningar och enligt Utbildningsstyrelsens rapport om elevernas matematikutveckling (Metsämuuronen, 2017) har resultaten de senaste tio åren sjunkit både vad beträffar kunskapsutveckling och attityder mot ämnet. Motivationen har avtagit till den grad att det är svårt att locka sökande till de matematiska linjerna på andra och tredje stadiet (Metsämuuronen, 2017).

En orsak till elevernas sjunkande engagemang kan tänkas vara att lärarnas svårigheter att övergå till en mera öppen matematikundervisning. Läraren idag anser i huvudsak att en elevcentrerad undervisning är nyckeln till en god matematikundervisning (Handal, 2003). Men lärare undervisar ofta så som de själva har blivit undervisade (Pehkonen, 2017; Patrikainen, 2012). Vilket leder till att matematik fortsättningsvis undervisas mekaniskt och undervisning klargör inte betydelsen av innehållet för eleverna (Perkkilä, 2002; Patrikainen, 2012). ”Grunderna för läroplanen för den grundläggande utbildningen” (Utbildningsstyrelsen, 2014, hädanefter hänvisad till som GLGU, 2014) som då infördes i finländska skolorna 2016 poängterar starkt ett större elevengagemang och påvisar lärarens handledande roll. Så det finns anledning att tro att läget har förändrats sedan Perkkilä (2002) och Patrikainen (2012).

Denna avhandling placerar sig i en finlandssvensk kontext och ur ett finlandssvenskt perspektiv kan det vara intressant att konstatera att lågstadieeleverna i de finlandssvenska skolorna presterar sämre än de finskspråkiga eleverna på alla områden. (Metsämuuronen, 2017) Orsakerna till detta är oklart men Holsti (2018) antyder att en orsak kunde vara att de finlandssvenska lärarna i matematik inte undervisar särskilt kollaborativt och kommunikativt. Detta är oroväckande då kollaborativt lärande inom matematik ses som en möjlig lösning på flera utmaningarna inom matematikundervisningen (Langer-Osuna, 2017). Således vore det viktigt att undervisningen tog de nödvändiga stegen mot en mera kollaborativ och kommunikativ matematikundervisning. Tuohilampi (2016) konstaterar att redan en lektion kollaborativt problemlösande per månad kan ha markanta effekter på elevernas uppfattning om ämnet.

Denna avhandling tar avstamp i en internationell forskning om pedagogiskt lyssnande “Listen to me” som leds av professor Andrea English från Edinburghs universitet. English anser att en av nyckelkunskaperna som lärare kunde dra nytta av vore att lyssna på elevernas matematiska tankar. Projektet “Listen to me” expanderade i sin tur till Finland där det döptes till “Lyssna på mig”.

Inom projektet “Lyssna på mig” grundades ett forskarteam, där jag ingår som en av medlemmarna. I projektet ”Lyssna på mig” skapade vi ett interventionsmaterial (Bilaga 1) som testades hösten 2018. Materialet kommer att fungera som ett öppet fortbildningsmaterial för svenskspråkiga lärare. ”Lyssna på mig!” finansierades av Svenska tekniska vetenskapsakademien i Finland och utfördes i samarbete med Utbildningsstyrelsen.

Det verkar alltså finnas att ett behov att övergå till en mera kollaborativ och kommunikativ matematikundervisning (Langer-Osuna, 2017; Tuohilampi, 2016). Inom projektet ”Lyssna på mig” har vi strävat till att möta detta behov genom att skapa ett interventionsmaterial som skall underlätta för lärare i Svenskfinland att bättre implementera GLGU, 2014. Denna avhandling koncentrerar sig på att dels utvärdera detta material men även ställer den frågor om vad eleverna anser att de tränar på för färdigheter i arbetet med detta material samt vad eleverna anser att bäst stöda deras ansträngningar i arbetet med dess uppgifter.

Jag kommer inledningsvis att presentera de teoretiska bitarna som ligger som grund för dels själva interventionen men även för denna avhandling. Därefter beskriver jag kontexten som denna forskning ägt rum i, det vill säga själva interventionen och i samband med det så presenterar jag även närmare en av interventionsuppgifterna. Efter det så presenterar jag själva forskningsfrågorna och beskriver forskningens metodologiska sida. För denna forskning skapades en enkät och i det metodologiska kapitalet redogör jag för hur enkäten konstruerades samt hur den kodades och tolkades. Avslutningsvis så rapportera jag för resultaten samt diskuterar dem.

1.1 Matematikundervisningens affektiva aspekter

Om man tittar på resultaten i den senaste Programme for International Student Assessment (PISA) undersökningen så kan man se att Finland fortfarande håller en relativt hög standard i matematik. Finland är på delad sjunde plats med Danmark. Resultaten har de senaste tio åren sjunkit och även om Finland fortfarande resultatmässigt når relativt bra resultat så är elevernas motivation inte i linje med resultaten. De finländska eleverna uppvisar en lägre motivation gentemot både naturvetenskapliga ämnen och matematik än de övriga toppländerna. (Metsämuuronen, 2017). Speciellt är att elevernas attityd gentemot matematik och deras självuppfattning som matematikelever sjunker drastiskt mellan årskurserna 3–6. Metsämuuronen (2017) menar att detta resultat var väntat, men oväntat var att elevernas attityd vid utgången av årskurs två rapporterades ha sjunkit från extremt positiva till extremt negativa. Även Tuohilampi och Hannula (2013) rapporterar att elevernas engagemang och upplevda självförmåga sjunker drastiskt under grundskoleåren. Elevernas sjunkande engagemang är oroväckande då elevernas engagemang anses central då det gäller matematikinlärning (Arens mfl, 2017; Chiu & Klassen, 2010; Bell & Norwood, 2007; Bandura, 1997; Metsämuuronen, 2017)

Vad kan då tänkas vara orsaken till denna nedgång i motivation gentemot matematikundervisningen. Blomqvist och Elamari (2010) spekulerar i att ämnets repetitiva natur där år efter år och lektion efter lektion ser mer eller mindre likadan ut i slutändan tröttar ut eleverna. En annan möjlig aspekt vore att matematikundervisningen trots ansträngningar inte har klarat av att klargöra betydelsen av det inlärda. Detta leder till att matematikinlärningen ofta förblir abstrakt och svår att närmare sig. Och den vanliga frågan "varför skall vi lära oss det här" förblir ofta obesvarad" (Koskinen, 2016). Tuohilampi (2014) för fram matematikens sociala dimension och menar att man borde granska matematikundervisningen ur ett större perspektiv än den enskilda elevens perspektiv för att på så sätt försöka ge matematiken relevans. Även Koskinen (2016) tänker i samma banor då han för fram att ett meningsfullt lärande i matematik handlar om att förstå, och att nyckel till förståelse ligger i det konkreta samt att uppgiften kontextualiseras och begrips i ett socialt sammanhang.

Bell och Norwood (2007) poängterar att den upplevda självförmågan och elevens motivation är nyckelfaktorer för att lyckas inom matematik och att självkänsla och självförtroende står i ett direkt förhållande till inlärningsresultaten.

Elevernas uppfattning om sig själva som matematiker påverkar långt med hurdan inställning de tar sig an nya uppgifter. Det verkar finnas ett förhållande mellan självkänslan och inlärningsresultaten och vice versa (Bandura, 1997; Bell & Norwood, 2007). Goda resultat påverkar självkänslan och självförtroendet positivt medan dåliga resultat påverkar dem negativt. Här är det enligt mig mera relevant att se att det även fungerar åt andra hållet det vill säga elever med god självkänsla och gott självförtroende tar sig an mera utmanande uppgifter och klarar av mera och uppnår således bättre inlärningsresultat (Arens et al., 2017; Chiu & Klassen, 2010). Detta leder i sin tur till en gynnsam kunskapsutveckling. Även Metsämuuronen (2017) för fram att det föreligger ett direkt samband mellan förhållningssättet mot matematik och inlärningsresultaten. Således kan det vara värt att reflektera kring hur man bäst kan stödja elevernas självkänsla och självförtroende i en positiv riktning.

Förhållandet mellan en god självuppfattning och goda resultat är dock inte helt entydigt då det finns en del globala jämförelser som påpekar att flera av de asiatiska eleverna har i genomsnitt sämre självuppfattning än de övriga OECD (Organisation for Economic Co-operation and Development) länderna men uppnår ändå bättre kunskapsresultat (Lee, 2009). I samma jämförelse framgår det även att de finländska eleverna når goda kunskapsresultat men att deras självuppfattning är på lägre nivå än medeltalet.Oberoende om en positiv självuppfattning kan skapa bättre inlärningsresultat i matematik så har det konstaterats att negativa känslor kring matematik kan vara direkt skadliga för elevernas utveckling och kan i värsta fall utgöra hinder för eleverna i deras matematiska utveckling. Exempelvis så för Partanen (2018) fram att en negativ självuppfattning ofta kan kopplas samman med matematikångest.

Negativa känslor kring matematik föder tankar om att matematiska förmågor vore medfödda och att hårt arbete och ansträngningar inom matematik vore en indikation på talang brist (Hannula, 2006). Vilket då i sin tur i värsta fall kan leda till att elever upplever att det inte kan lära sig och i slutändan till att eleverna inte längre försöker och därmed är en fortsatt positiv kunskapsutveckling svår att nå. Här har lärare ett enormt ansvar och ett enormt jobb. Läraren har en stark inflytelse på elevernas motivation (Ekstam, Korhonen, Linnanmäki & Aunio, 2017) och har således förutom rollen som kunskapsförmedlare en viktig roll i att skapa en tilltro och tillit till sig själv hos eleverna.

1.2 Ett finlandssvenskt perspektiv

Ur ett finlandssvenskt perspektiv är det intressant att notera att nedgången i matematikresultaten verkar ha avtagit för de finlandssvenska eleverna medan den fortsatt för de finskspråkiga elevernas del. I samband med Pisa undersökningen 2105 visade sig de finlandssvenska skolorna på andra stadiet klarade sig bättre än de finskspråkiga eleverna med 520p vilket är 10p bättre än de finska elevernas 510p och hela 30p bättre än medelvärdet för OECD-länderna där medeltalet låg på 490p. Även om de finlandssvenska skolorna har uppvisat snäppet bättre resultat så är resultaten inte statistiskt signifikanta. (Metsämuuronen, 2017)

Resultaten som presenterats ovan bygger på svar givna av studeranden på andra stadiet. Och även om resultaten på andra stadiet är goda så är det värt att notera att de finlandssvenska eleverna har ett svagare utgångsläge än de finskspråkiga. Det är främst två aspekter jag upplever som viktiga att föra fram. För det första så är de finlandssvenska elevernas kunskapsnivå i början av årskurs tre (292p) på en klart lägre nivå en deras finskspråkiga gelikar (355 p). Vidare så saknar de finlandssvenska skolorna toppresterare i såväl årskurs 0 som i årskurs 3. (Metsämuuronen, 2017)

Vad det kan bero på kan man enbart spekulera i men det kan tänkas vara en kulturell fråga (Metsämuuronen, 2017; Tuohilampi, 2014) Men oberoende så verkar det finnas en möjlighet att stärka de finlandssvenska elevernas kunskapsutveckling i matematik i de tidiga årskurserna. Metsämuuronen (2017) frågar om det möjligtvis ett behov av att se över materialen, organiseringen och arbetssätten i de finlandssvenska skolorna. Detta väcker i sin tur igen frågor om hur man kunde utveckla matematikundervisningen i de finlandsvenskaskolorna mot en mera engagerande undervisning som stöder elevernas upplevda självförmåga och motivation samt deras matematiska kunskapsutveckling då det konstaterats av flera att det föreligger ett positivt samband mellan dessa två (Arens et al., 2017; Chiu & Klassen, 2010; Bell & Norwood, 2007; Bandura, 1997; Metsämuuronen ,2017).

För att försöka skapa en mera engagerande undervisning så inledes planerandet av interventionen inom projektet ”Lyssna på mig”. Själva interventionen presenteras tydligare i ett senare skede. I följande kapitel skall jag beskriva den teoretiska bakgrunden till interventionen.

2. Teoretiska utgångspunkter

Hur lärare uppfattar och lär ut matematik och vad matematik egentligen är, det är två vitt skilda saker. Inom pedagogiken har man traditionellt sett matematiskt kunnande som ett bemästrande av matematiska färdigheter och betonat en interaktion med fokus på att få fram rätt svar (Ball 1988). Man har betonat matematikens oberoende existens och matematiken har betraktats som en sort ofelbar verklighet, ett fullständigt system. Denna syn på matematik kan man även se i undervisningssammanhang där läraren har kunskapen och verktygen att lära ut det och det är elevernas uppgift att anamma kunskapen. (Tuohilampi, Rämö, Häsä & Pekkarinen, 2017). Även Koskinen (2016) för fram att matematikundervisning ofta handlar om just att genomföra och upprepa matematiska uppgifter.

Ur ett elevperspektiv föreligger det vissa problem med att lära sig matematik på detta sätt genom upprepningar. Att lära sig genom upprepningar leder till att de flesta elever lär sig matematik utan att egentligen förstå den bakomliggande betydelsen av matematikens symboler och räkneoperationer. (Mack 1995). Då eleverna inte förstår betydelsen och relevansen av det lärda leder det i sin tur till att elevernas engagemang sjunker (Koskinen, 2016).

Det har visat sig att matematikundervisningen och elevernas uppfattning om matematik är starkt bundet till en skolkontext och eleverna har svårt att anpassa och tillämpa sina matematiska kunskaper och färdigheter i nya situationer (Johanning, 2008). Det här leder till att många elever har naiva eller till och med felaktiga uppfattningar om matematik (Op't Eynde & De Corte, 2003) och att många elever betraktar matematiken som en serie orelaterade händelser och tekniker som främst bör memoreras (Swan, 2006). Resultat av den här typen är varken nya eller revolutionerande. Redan Brownellin (1947) förde fram att en mekanisk förmåga att genomföra och upprepa matematiska uppgifter är gynnsam endast ifall förmågan är tänkt att användas i ett specifikt sammanhang.

Jag väljer därför i denna avhandling att i motsatt till en statisk syn på matematiken betrakta matematiken som en dynamisk disciplin vilket innebär att man undersöker problem, söker lösningar, formulerar idéer, gör noggranna gissningar och resonemang, i motsats till en statisk disciplin som bara består av strukturerade fakta, rutiner och begrepp som ska memoreras eller läras in genom upprepning (Schoenfeld, 1992; Hiebert et al., 1996).

2.1 Ett socialkonstruktivistiskt synsätt

Utgångsläget för denna avhandling är en social-konstruktivistiska kunskapssyn där kunskap betraktas som socialt konstruerat (Säljö, 2011), enligt tankar presenterade av Lev Vygotsky (Säljö, 2011). Inom socialkonstruktivisimen poängterar man att alla elever har sin egen uppfattning om verkligheten och även skapar sig en egen verklighet beroende på tidigare kunskaper och erfarenheter (Stensmo, 2007).

Inom det socio kulturella synsättet menar man att kunskap medieras, det vill säga kunskap förmedlas mellan individer i sociala sammanhang där eleverna kan och har möjlighet att lära sig av varandra (Vygotsky, 1978). Detta klingar väl med de tankar som bland annat Koskinen (2016) för fram att matematikundervisningen borde skapa förståelse för innehållet genom att på ett ändamålsenligt och konkret sätt kontextualisera innehållet och presentera det i en mera social kontext än tidigare

Centralt i det social-konstruktivistiska synsättet är begreppet zone of proximal development (ZPD). ZPD är ett begrepp myntat av Lev Vygotsky. På svenska talar man ofta om den proximala zonen för utveckling. Med ZPD avser Vygotsky den zon inom vilken inlärningen sker. ZPD symboliserar avståndet mellan elevens rådande utvecklingsnivå, det vill säga vad eleven kan och klarar av på egen hand för tillfället och elevens potentiella utvecklingsnivå alltså vad eleven har möjlighet att lära sig. Inom denna zon finns det kunskaper som eleven ännu inte har tillgodosett sig eller kunskaper eleven ännu inte hanterar men som ligger inom elevens utvecklingspotential. För att då tillägna sig denna kunskap som ligger inom zonen för proximal utveckling så behöver eleven stöd. (Vygotsky, 1978) Man talar ofta om scaffoldning då undervisningen sker inom zonen för proximal utveckling (Imsen, 2000). Scaffolding innebär alltså hjälp att komma vidare kan eleven visserligen få på flera olika sätt, men Vygotsky själv ansåg att språket är det viktigaste redskapet vi har. Han menade att det var med hjälp av språket i sociala sammanhang som den intellektuella utvecklingen tog sin plats (Vygotsky, 1978). För att nå nästa utvecklingsnivå i ZPD så har man artefakter till sin hjälp. Dessa artefakter är redskap och verktyg vi har till vårt förfogande för att skapa oss förståelse. Det kan var både fysiska redskap som språk, bilder och symboler men även mera abstrakta redskap och verktyg räknas hit (Säljö, 2011)

Eftersom språket anses som en av de viktigaste medierande verktygen så är samtal en av de väsentligaste scaffolding teknikerna. Genom ledande frågor och klargörande samtal utvecklar då oftast alla parter i en dylik situation nya kompetenser och kunskaper. Dessa samtal kan vara samtal mellan eleven och läraren men det kan lika väl vara diskussioner klasskamrater emellan. Utöver inlärningens socialaspekt poängterar Vygotsky att all inlärning kräver tänkande, han själv kallade detta tänkande för det indre språket (Vygotsky, 1978). Centralt här är att för att tillägna sig kunskap så måste man själv vara aktiv och delta i sin egen tankeutveckling och inlärning. Vygotsky kallar denna aktiva process där kunskap föregår utveckling för internalisering av kunskap.

Ur ett lärarperspektiv kan man tänka sig är att lärarens roll under processens roll blir mera av en handledares roll snarare än en förläsare. Eleverna är de som skall ta det största utrymmet och lärarens roll blir att hjälpa eleverna att komma vidare, läraren kan använda sig av olika scaffolding tekniker för att hjälpa eleverna att aktivt konstruera ny kunskap.

2.2 Centrala begrepp

I detta kapitel kommer jag att definiera central begrepp som används i denna avhandling. Begreppen *Kollaborativt arbete*, *Produktiva ansträngningar* och *Undersökande landskap* presenteras sedan mera ingående i egna kapitel. Begreppen *Pedagogiskt lyssnande* och *Matematiska kompetenser* redogörs det för närmare i samband med kapitlet om interventionens kontext.

1) Kollaborativ arbete: Med kollaborativt arbete avses inlärningstillfällen där eleverna engagerar sig i att diskutera och förklara idéer, att utmana och undervisa varandra, att skapa egna frågor och att lösa varandras frågor och att arbeta tillsammans för att dela med sig av metoder och resultat. (Swan, 2006)

2) Produktiv ansträngning (Productive struggle): Med produktiv ansträngning menas, i enlighet med Warshauer (2015), den intellektuella ansträngning som eleverna gör för att skapa mening med matematiska begrepp och uppgifter som är utmanande men som faller inom elevernas rimliga förmågor.

3) Undersökande landskap (Landscapes of investigation): här avses undervisningstillfällen som bjuder in eleverna som aktiva medproducenter i matematiska aktiviteter. Aktiviteterna kan ta plats i olika situationer som erbjuder möjligheter till ett undersökande förhållningssätt. Ett undersökande landskap kan beskrivas som situationer som inte erbjuder färdigt definierade svar, utan som i stället uppmuntrar till att undersöka sakförhållanden. (Skovmose, 2001)

4) *Pedagogiskt lyssnande*: Med pedagogisk lyssnande avses i enlighet med English (2011) ett lyssnande specifikt för undervisningssituationer som spelar en viktig roll i att hjälpa lärare att förstå studenternas inlärningsprocess.

5) *Matematisk kompetens:* Med matematisk kompetens i denna avhandling de kriterier som används för att bedöma ”Goda kunskaper (verbal bedömning) eller vitsordet 8 (sifferbedömning) i slutet av årskurs 6 i matematik” (Utbildningsstyrelsen, 2014 s.268)

2.3 Kollaborativt lärande

Matematik kan ses som ett logiskt begreppssystem utgjort av symboler och givna regler. Om man väljer att se på matematik på det sättet innebär det att begreppsförståelsen och det logiska tänkandet utgör de mest centrala delarna av det matematiska stoffet (Koskinen, 2016). För att träna de här färdigheterna effektiv bör eleverna engageras i situationer som kräver att eleverna verkligen använder sig av dessa färdigheter bland annat Schoenfeld (1992) för fram att det är i de sociala situationerna då eleverna arbetar kollaborativt som de utvecklar sin egen begreppsförståelse och ett fungerande logiskt tänkande. När elever arbetar i gruppsammanhang och i kollaborativa miljöer måste de hitta på sätt att göra sin kunskap tillgänglig för andra elever. Och i samband med att eleverna hjälper varandra med olika matematiska fenomen utvecklas även deras förmåga att förklara matematiska processer (Schoenfeld, 1992).

Att förklara hur man tänker kan nämligen främja inlärningen genom att man är tvungen att förklara, repetera och klargöra material, både för sig själv och för andra. Dessutom kan eleverna bli medveten om sina egna missuppfattningar och fyller på så sätt igen sina egna kunskapsluckor. (Webb, Franke, Ing, Wong, Fernandez, Shin, & Turrou, 2014) Det har påvisats att matematikundervisningen som en social aktivitet gör att eleverna blir både medvetna om samt diskuterar sina egna matematiska uppfattningar och strategier (Smith & Mancy 2018). Att matematikundervisingen placeras i en socialkontext där eleverna diskuterar matematik ökar i sin tur eleverna förmåga att koppla samman ny kunskap med tidigare inlärd information (Webb, Franke, Ing, Turrou, Johnson, & Zimmerman, 2017). Dessutom har sociala fenomen som kollaboration, grupparbete och kollaborativ problemlösning visat sig påverka elevernas engagemang för matematik på ett positivt sätt (Moss & Beatty, 2006; Plass et al., 2013; Springer, Stanne, & Donovan, 1999; Tuohilampi, 2016).

Den inneboende potentialen i det kollaborativa lärandet inom matematikundervisningen har fått mycket uppmärksamhet (Lerman, 2000) och kollaborativt lärande inom matematik har redan en längre tid setts som en möjlig lösning på flera utmaningarna inom matematikundervisningen (Langer-Osuna, 2017). Kollaborativt lärande är ansett som en så pass viktig färdighet att OECD publicerat PISA Collaborative Problem Solving Framework (OECD, 2015). OECD lyfter på så sätt upp kollaborativa färdigheter som en nyckelfärdighet som behövs för att klara sig i framtiden.

Ett av problemen med att kontextualisera ämnet matematik i skolan och att försöka styra det mot en mera elevbaserad och öppen undervisning har varit att eleverna haft svårt att uppfatta nyttan med de mera öppna undervisningsmetoderna. Det har visat sig att eleverna inte förstår värdet i att arbeta mera kollaborativ och med mera verklighetsbaserade uppgifter placerade i sociala kontexter (Star, Smith III ja Jansen, 2008). Då eleverna har svårt att se nyttan med det kollaborativa arbetet skapar det en ond cirkel där lärarna inte utnyttjar det kollaborativa resurserna och matematikundervisningen tar inte de nödvändiga stegen framåt i utvecklingen som skulle krävas. Koskinen (2016) för fram att matematiklärarna nog har blivit instruerade och uppmanade att i sin undervisning sträva till en mera meningsfull undervisning och att använda sig av metoder som lämpar sig för detta. Men trots goda försök finns det indikationer på att lärare inte undervisar särskilt kollaborativt (Holsti, 2018; Koskinen, 2016; Metsämuuronen, 2017). Även Howe och Abedin (2013) har i en systematisk genomgång av tidigare forskning beklagligt nog konstaterat att mycket lite har hänt i det matematiska klassrummet under de senaste 40 åren.

Detta är en utmaning då det presenteras forskningsbaserade fakta som påvisar nyttan av kollaborativt arbete inom matematikundervisning. Dessutom så poängteras de sociala och de kollaborativa aspekterna av undervisningen i GLGU, 2014. Det finns således ett starkt yttre krav på undervisningen att anamma ett mera kollaborativt förhållningssätt, så som en klar pedagogisk fördel med att tillägna sig denna syn på matematikundervisningen.

2.4 Produktiva ansträngningar

Matematikundervisning har tidigare setts som en överförande process, där kunskap skall överföras från lärare till elev. Ett sådant synsätt poängterar en enkel och smidig överföring av kunskap och problem som uppstår under processen betraktas ofta som negativa. Detta leder till att elever som kämpar med att lära sig matematik ofta ses som ett problem. (Hiebert & Wearne, 2003; Borasi, 1996). Lärare och föräldrar har en tendens att rutinmässigt försöka övervinna denna typ av problem till fördel för en smidig kunskapsöverföring (Warshauer, 2015). Om man ser på problem som hinder och om man tolkar matematikinlärning som en överförande process finns det en risk för att undervisningen inte skapar djup bestående överförbar kunskap som eleverna kan använda sig av utanför klassrummet (Swan, 2006). I stället borde man i likhet med Warshauer (2015) sträva till att se problem, misstag och fel som en källa och en möjlighet till inlärning, chanser man kan ta till för att utforska, för att växa och för att lära sig av för att bättre stödja och motivera eleverna att fortsätta. Warshauers (2015) tankar är varken nya eller häpnadsväckande, redan i början av 90-talet konstaterade Borasi (1994) att genom att visa på och diskutera fel och missuppfattningar kan lärandet förbättras. Även Eggleton och Moldavan (2001) noterar att genom att hjälpa eleverna att konfrontera sina fel och lösa oklarheter kan misstagen ses som en källa till lärande. Om läraren klarar av att förändra elevernas inställning från ”jag förstår inte" till "jag förstår det inte ännu", så stöder man elevens produktiva engagemang i matematiken.

För att skapa sig förståelse måste elever åtminstone i någon mån anstränga sig (Hiebert & Grouws, 2007). Denna tanke om ansträngningar sammanfaller väl med Vygotskys tankar om zonen för proximal utveckling (1978). Det har dessutom visat sig att kognitivt utmanande uppgifter är en förutsättning för att skapa ett elevengagemang. Även om kognitivt utmanande uppgifter inte garanterar ett högt elevengagemang så engagerar uppgifter med låg kognitiv utmaning knappast någonsin eleverna (Smith & Stein, 1998).

Med tanke på att matematikundervisningen idag långt handlar om att upprepa (Koskinen, 2016) och att läroboken ofta styr undervisningen (Metsämuuronen, 2017) så är detta oroväckande då det lätt leder till att elever ofta upprepar liknande, kognitiv inte speciellt utmanande uppgifter ur textboken och mycket sällan får uppleva utmanande och komplexa uppgifter som skulle stöda deras engagemang. Forskning har visat att uppgifter som innehåller utmaningar och svårigheter och som saktar ner hastigheten på det uppenbara lärandet är gynnsamma för långvarigt lärande (Bjork & Bjork, 2011). Det intressanta och noterbara här är alltså att oberoende om den produktiva ansträngningen leder till att uppgiften i sig blir löst så är själva ansträngning till nytta då man betraktar ett mera långsiktigt lärande (Warshauer, 2015).

2.5 Ett undersökande landskap

Skovmose (2001) lyfter fram att matematisk kunskap borde betraktas likt ”literacy”, som är en vidare syn på vad läskunnighet är till att betraktas som ”mathemacy”. Alltså att förutom att kunna utföra matematiska räkneoperationer så borde eleverna även kunna granska matematiken kritiskt och kunna ta del av sociala och politiska sammanhang konstruerade av eller kring matematik. Dessa tankar sammanfaller väl med de målsättningar som preciseras i GLGU, 2014 där det bland annat konstateras att ”Undervisningen ska handleda eleverna att förstå nyttan av matematik i sitt eget liv och i ett bredare samhällsperspektiv” (Utbildningsstyrelsen s.138, 2014).

Det har konstaterats att eleverna måste aktivera och involveras och läraren får inte vara rädd för att ge upp sin plats som allvetande, utan även läraren bör aktivt våga delta i en undersökande undervisning (Langer-Osuna, 2017). Vikten av att bjuda in eleverna som aktiva producenter i matematikundervisningen för att verkligen utveckla deras färdigheter samt ge dem en djupare begreppslig förståelse för matematik har konstaterats av flera forskare (Webb, Franke, Ing, Wong, Fernandez, Shin, & Turrou, 2014).

Skovmose (2001) däremot lyfter fram att matematiklektioner oftast är konstruerade så att lärare presenterar ett stoff och en modell som eleverna sedan skall upprepa och utföra. Stoffet saknar oftast relevans för eleverna och legitimeras av en yttre auktoritet, oftast läroboken eller läraren. Samma fenomen är även synligt i Finland (Patrikainen, 2012). Typiskt för övningsparadigmet som Skovmose (2001) kallar det är att det existerar endast ett rätt svar. Denna typ av undervisning går att se i de flesta skolor i Finland i dag då matematikundervisningen i de finländska skolorna tenderar att basera sig långt på läroböckerna och mindre på läroplanens krav (Metsämuuronen 2017; Patrikainen, 2012). Skovmose (2001) menar inte att man borde helt och hållet sluta arbeta i detta övningsparadigm, han förespråkar snarare en mera mångsidig undervisning och menar att undervisningen även borde ta plats i vad han kallar ett undersökande landskap. Ett undersökande landskap kännetecknas av att det är öppet och undersökande och erbjuder till att förklara snarare än att svara Det kan vara bundet till riktiga situationer som eleverna kan känna igen, någonting som ger uppgifterna relevans. Skovmose (2001) påpekar att det ofta i skolan görs uppgifter i vad han kallar semi-verkliga miljöer, exempelvis matematikbokens textuppgifter kan tänkas vara sådana och dessa uppgifter skall inte förväxlas med ett undersökande landskap.

Utmärkande för dessa semi-verkliga miljöer är att de begränsar elevens handlande eftersom de enkelt kan reduceras till exempelvis ett algoritmiskt uttryck. I dessa semi-verkliga miljöer finns det inte utrymme för alternativa lösningar, ej heller tar man ställning till om lösningen är relevant eller ens den bästa lösningen. Exempelvis så kan vi tänka oss en textuppgift i en lärobok där man skall köpa en bil och då ombeds välja mellan två olika alternativ. Alternativen kan variera i bilens inköpspris, avbetalningsplanen, ränta på billånet osv. Det finns flera sätt att variera uppgiften på men i den semi-verkliga miljön så ges verkliga aspekter ingen betydelse. Aspekter som, vad är bilens ändamål, alltså varför köpa bilen i första taget, ekologiska aspekter, köparens betalningskraft, estetiska aspekter osv, val som alltså inte går att kvantifiera och reducera till enkla räkneoperationer. I dessa semi-verkliga miljöer så är uppgifterna konstruerade så att det oftast bara finns ett enda rätt svar till skillnad från det undersökande landskapet, där vi ännu inte vet hur uppgiften kommer att utforma sig. (Skovmose, 2001)

I ett undersökande landskap vet man inte på förhand vad svaret är eller vart det undersökande arbetet för en. I stället drivs det av frågan "Vad om?". Vad om man frågan fungerar som en inbjudan åt eleverna att själva fundera att "ja vad om?" När eleverna sedan intresserar sig för frågan ”vad om” kan läraren ändra sin fråga till, "Ja, varför är det så?" Att arbeta på detta sätt i ett undersökande landskap placerar eleverna i förgrunden. (Skovmose, 2001) eleverna är de som bestämmer. Tankar om eleven som huvudaktör sammanfaller väl med de huvudströmningar som går att skönja i GLGU, 2014. När eleverna är de som bestämmer, kan inte läraren längre förutse vilka frågor som kan uppstå eller vad som kommer näst. Att ge bort kontroll och överlåta eleverna bestämma riktningen kan upplevas obekvämt för många lärare som då gärna styr uppgiften tillbaks till övningsparadigmet där läraren ger modell och alla gör efter. Att mera använda sig av ett undersökande landskap på bekostnad av övningsparadigmet eller de semi-verkliga miljöerna är en stor utmaning i dag då de flesta lärare upplever en rädsla för att övergå till mera elevcentrerade arbetssätt (Portaankorva-Koivisto, 2010) även om detta idag i och med den nya läroplanens (GLGU, 2014) krav och en allmänt mera elevcentrerad pedagogik torde ha förändrats.

3. Kontext och Intervention

Denna avhandling är ett självständigt forskningsarbete men placerar sig i en internationell forskning. För att ge en bättre inblick och förståelse så skall jag i detta kapitel redogöra för kontexten samt presentera begreppet ”pedagogiskt lyssnande närmare”.

3.1 Projektet ”lyssna på mig”

Denna avhandling och denna intervention har sitt ursprung ett större internationellt forskningsprojekt om lärares förmåga att lyssna med huvudsäte i Edinburghs universitet, PLUSS-Mathematics (Pedagogical Listening for Understanding and supporting Student Struggle) lett av Dr. Andrea English. Detta projekt antyder att en produktiv ansträngning inom matematik är essentiellt för elevernas begreppsliga utveckling. De anser att eleverna bör få diskutera och verbalisera sin matematiska fundering för att utveckla sin matematiska tankeförmåga. PLUSS-Mathematics fokuserar främst på lärarnas utveckling och förmåga att lyssna medan denna avhandling har eleverna som forskningsobjekt.

PLUSS-Mathematics utvidgades sedan till Finland i form av projektet ”Lyssna på mig!” ett vid Helsingfors universitet baserat projekt. Projektet ”Lyssna på mig!” leds av universitetslektor Laura Tuohilampi. Målet med ”Lyssna på mig” är att utnyttja det ”Pedagogical Listening Framework” som skapats inom PLUSS projektet för att hjälpa finlandssvenska lärare att lägga märke till, och ta tag i spontana situationer då elever uttrycker matematiska tankar.

3.1.1 Pedagogiskt lyssnande

Eftersom avhandlingen är en del av ett forskningsprojekt som fokuserar på det pedagogiska lyssnandet, så har det pedagogiska lyssnandet varit starkt närvarande i planeringsskedet och i uppgörandet av uppgifterna som denna avhandling kretsar kring. Uppgifternas kollaborativa och kommunikativa karaktär vill möjliggöra situationer där läraren har möjlighet att utveckla det pedagogiska lyssnandet.

I likhet med det som redan framgått i teorikapitlet så för även English (2011) fram att lyssnandet i skolan har traditionellt kommit att handla om att lyssna efter rätt svar. Man vill försäkra sig om att eleverna har anammat rätt normer, rätt information. Man lyssnar efter det man vill höra. English menar att lyssna i bemärkelsen pedagogiskt lyssnade innebär att lyssna på ett nytt sätt. Ett sätt som öppnar en möjlighet för lärare att lära sig. Det pedagogiska lyssnandet lyfter fram förhållningssättet till det man hört. Det lyfter även fram lärarens förhållningssätt gentemot den man talar med och innebär i synnerhet, att söka och försöka förstå.

Det pedagogiska lyssnandet kan även tänkas ha en plats i matematikundervisningen. Man har traditionellt sett strukturerat matematiklektionerna så att läraren presenterat ett nytt stoff som förklaras och sedan skall eleverna anamma sig denna kunskap. (Koskinen, 2016; Patrikainen, 2012) Men med utgång i det pedagogiska lyssnade kunde man tänka sig att man istället presenterade nya idéer och öppnade upp nya begrepp genom att börja med vad barnen redan vet om matematik och hur de uttrycker sitt matematiska tänkande. På så sätt kunde man bemyndiga eleverna och ge dem en möjlighet att ta ansvar över sitt eget lärande. (Kazemi & Hintz, 2014).

Det pedagogiska lyssnandet syns även i klassrumsinteraktionen. Där den efterlyser en mera kommunikativ undervisning där eleverna är de som kommunicerar sitt matematiska tänkande genom muntliga och skriftliga motiveringar och gester och läraren är den som lyssnar. Att arbeta mera kommunikativt ger eleverna flera möjligheter att klargöra sitt tänkande och bearbeta sina egna idéer (Jacobs & Ambrose, 2008).

I slutändan lär sig lärare mer om hur studenterna tänker när studenterna delar sitt tänkande, oavsett om det är korrekt, felaktigt, kortfattat och/eller oklart. Detta sätt att undervisa matematik hjälper barn att också testa nya idéer och utveckla en djupare förståelse för matematik (Boaler, 2016; Jansen, Cooper, Vascellaro, & Wandless, 2016).

3.2 Genomförande

I denna interventionsforskning skapades det åtta undervisningspass utgående från olika delområden i matematiken. Efter noga övervägande bestämdes det inom projektet att utgå ifrån GLGU, 2014 tyngdpunktsområden och det beslöts det att fokusera på följande delområden, proportionalitet, sannolikhetslära, algebra, problemlösning, vanliga matematiska missuppfattningar, funktioner, skapandet av den egna kunskapsbasen, och areor. Dessa pass undervisades sedan av behöriga läraren i årskurserna F (förskola), 1, 4, 6, 8 och 9 (deltagarna var följaktligen 6, 7, 10, 12, 14 och 15 år gamla). I denna avhandling behandlas enbart data insamlat från årskurserna 4 och 6.

Uppgifterna vi skapat var konstruerade att undervisas på ca 45 min. Då lärarna själva förde fram att de hade dubbla lektioner (90 min) bestämdes det att de kunde undervisa lektioner under dessa dubbla pass så att det inte uppstod tidspress. Lärarna kunde således själva avgöra när de tyckte att det var dags att avsluta. Detta gällde då naturligtvis inte förskolegruppen då de inte följde en given läsordning utan de kunde själva avgöra när och hur länge de ville arbete kring en uppgift.
För att stöda undervisandet av uppgifterna hade vi inhandlat en hel del konkret material som skulle underlätta för lärarna att genomföra uppgifterna. Det kunde exempelvis handla om rep till area uppgiften osv.

4. Skapandet av uppgifterna, koppling till teorin och läroplan

Uppgifterna skapades under sommaren 2018 och eftersträvar att undervisa samma kärnområde inom matematik oberoende av ålder. Forskning har visat sig att redan unga barn är mera kompetenta och klarar av allt mer komplicerade matematiska resonemang än man tidigare trott (Mulligan & Vergnaud, 2006; Säfström, 2013). Naturligtvis så åldersanpassades uppgifterna så att exempelvis de yngre elevernas uppgifter oftast var mera konkreta och laborativa till sitt arbetssätt medan de äldre elevernas uppgifter kunde vara mera abstrakta.

Vi utgick ifrån tanken om att uppgiften bestämmer inlärningen (Smith & Stein, 1998). Liknande studier som denna har utförts tidigare men de har oftast kretsat kring redan existerande uppgifter hämtade ur exempelvis läroböcker. I bland annat Warshauers (2015) studie var de flesta uppgifter tagna direkt ur en textbok.

Uppgifterna vi skapade är tänkta att vara utmanande och engagerande och de är alla tänkta att lösas kollaborativt. Vi ville att eleverna skulle dela med sig av sitt eget kunnande till varandra och ges möjligheter att själva föra fram idéer och lösningar. Vi vill ge eleverna en ökad begreppsförståelse och skapa ett större engagemang (Langer-Osuna, 2017). Målsättningarna med interventionsmaterialet är just att dels stärka elevengagemanget men även att stärka elevernas begreppsförståelse. Målsättningen vara alltså att eleverna skulle förstå dels begreppen i sig men även att förstå relationerna mellan begreppen. Vi ville ge eleverna verktyg för att bättre förstå framtida matematiska framställningar och utgick från tanken om att en begreppslig förståelse för matematik är mer än ett tillfälligt utantillärande. (National Research Council, & Mathematics Learning Study Committee, 2001)

Utöver att uppgifterna är planerade utgående från de teoretiska tankar som presenterats i denna avhandling så bygger de även på målen för undervisningen i matematik i årskurs 1–9 samt på de centrala innehållet som anknyter till målen för matematik i årskurs 1–9 så som de framställs i GLGU, 2014. Tanken är att detta material skulle hjälpa läraren att lättare implementera de målsättningar som ställs i läroplanen samtidigt som de känns relevanta för både lärare och elev.

Alla uppgifter i interventionen är klassificerade utgående från 1) vilken inlärningsmiljö de tar plats i och 2) vilken nivå av kognitiv utmaning de utgör.

För att klassificera inlärningsmiljön som uppgifterna tar plats i har jag valt att använda mig av Skovmoses (2001) modell om inlärningsmiljöer. Skovmose (2001) menar att matematikuppgifter grovt kan delas in i tre kategorier där de kan ses som att de berör enbart matematik, berör en sorts semiverklighet konstruerad enbart för matematiken eller så de kan ta plats i en verklig miljö. Genom att kombinera denna insikt med tankar om ett undersökande landskap så konstruerade Skovmose en matris som beskriver inlärningsmiljön. I Skovmoses matris förkommer det följaktligen sex typer matematikuppgifter. Typ (1) kan ses som att den berör enbart matematik och den tar plats i ett övningsparadigm. Denna typ domineras oftast av uppgifter som 3+3x4-2=. Typ (2) Beskriver ett undersökande landskap placerat bland numror och geometriska figurer, exempelvis kunde man undersöka sambandsförhållanden i en siffertabell. Typ (3) Tar plats i en semi-verklighet och i ett övningsparadigm, textuppgifter i matematikböckerna kunde ses som utmärkta exempel på denna typ. Typ (4) tar även plats i en semiverklighet men, med den skillnaden att uppgiften bjuder in och kräver att eleverna undersöker och förklarar snarade än besvarar. Uppgiften "stora hästkapplöpningen" i denna undersökning (se bilaga 1) kunde ses som ett bra exempel på denna typ. Typ (5) är matematiska uppgifter som baserar sig på verklig fakta, exempelvis uppgifter som basars på baserar sig på matsvinn i skolan kunna ses som typ (5) uppgifter. Typ (6) uppgifter är svårast att definiera, typ (6) uppgifter kunde tänkas vara projektarbeten exempelvis om vi tog uppgiften om matsvinn som nämndes i typ (5) och utförde den så att eleverna fick i uppdrag att ta reda på hur stort matsvinnet var och räknade sedan ut låt oss säga totala energiförlusten, bortslängd mat/elev, bortslängd mat/år etc. och sedan skapade modeller för att reducera matsvinnet och startade en kampanj för att åstadkomma detta. Projekten och uppgifterna kan vara både mindre och större till sin utformning men essentiellt är att det finns en nivå av oklarhet om resultatet och att eleverna aktivt använder sig av matematik för att skapa någonting nytt.

	Övningsparadigm	Ett undersökande landskap
Berör enbart matematik	(1)	(2)
Berör en semi-verklighet	(3)	(4)
Verklig miljö	(5)	(6)

Figur 1. (Milieus of learning, Skovmose 2001, fri översättning av Sebastian Holsti)

För att mäta och klassificera vilken kognitivkravnivå uppgiften representerar så använde jag mig av Stein m.fl. (1996) modell med fyra nivåer av kognitivkravnivå som även Warshauer (2015) använder i sitt ”Productive Struggle Framework”. De fyra nivåerna är

1) *Memorera,* dessa är rutinuppgifter, eleverna har oftast inga problem med att lösa dessa uppgifter. Handlar oftast om att återge kunskap man redan besitter.

2) *Procedural men inte begreppsliga*, kan vara en algoritmisk uppgift med en viss abstraktionsnivå kring vad som krävs men fokus ligger fortfarande på att ge rätt svar. Textuppgifter kunde tänkas höra till den typ av uppgift.

3) *Procedural och begreppsliga*, öppna uppgifter med flera olika svarsalternativ, fokus på att utveckla förståelse för matematiska koncept. Kräver viss nivå av begreppsliga förståelse.

4) *Att göra matematik*, finns ingen tydlig väg eller lösning, ofta en icke-algoritmisk uppgift, eleverna bör själv forska och ta reda på och undersöka flera olika lösningar.

Sedan utgående från Skovmoses (2001) modell om inlärningsmiljö och Stein m.fl. (1996) modell om kognitivkravnivå så har jag klassificerat alla uppgifter som undersöks i denna avhandling. Från matrisen nedan (figur 2.) kan man se att alla uppgifter representerar en hög kognitiv kravnivå och de flesta tar plats i ett undersökande landskap. Detta medvetet eftersom produktiva ansträngningar och undersökande miljöer antas i denna avhandling vara nyckelfaktorer.

Lektion	Stora slump-rean	Den stora hästkapp-löpningen	Alge-bra pussel	Proble-met med det blonda håret	Mate-matiska påståen-den	Vecko-pengen	Skapa eget material	Guld-ru-schen
Kognitiv kravnivå	3	3	3	4	3	2	4	3
Inlär-nings-miljö	4	4	2	4	2	5	6	2

Figur 2. Klassificering av lektionerna

4.1 Stora slumprean

I detta kapitel så ämnar jag kort presentera en av uppgifterna närmare för att tydligare klargöra uppgifternas art.

I denna elevuppgift döpt till ”stora sluprean” arbetar elever med koncepten absolut och relativ i en uppgift som behandlar procenträkning. Uppgiften klargör för eleverna hur en procentuell ökning eller sänkning av ett pris är beroende av utgångspriset och motbevisar den allmänna missuppfattningen att exempelvis en 25% sänkning av priset och därefter ytterligare en 25% sänkning av priset skulle motsvara en 50% sänkning av det ursprungliga priset.

I praktiken så presentar läraren för eleverna en situation där de skall inhandla en biobiljett, en telefon och en cykel. Det är dock ”den stora slumprean” i affären där de handlar vilket innebär att de måste använda sig av tre olika kuponger. Varje kupong har två sidor alltså två alternativ som på olika sätt påverkar priset. Elevernas uppgift är att avgöra vilken kupong och vilken sida av kupongen vill de använda sig av till vilken vara. Varje kupong får användas endast en gång och till endast en vara. Alla kuponger måste således användas.

Eleverna arbetar i grupp för att tillsammans komma fram till det alternativ de tycker att bäst passar dem. Läraren skall inte i framhålla att målet är att köpa produkterna så billigt som möjligt utan enbart att alla kuponger skall användas

Då alla grupper gjort sina val så går man tillsammans igenom uppgiften och valen i klassen. Poängen i uppgiften ligger inte i att hitta den bästa lösningen utan snarare på att lyfta fram hur de olika valen påverkar prissättningen och hur de förhåller sig till varandra. I det här skedet är det bra att se ifall att det råder missuppfattningar bland eleverna som kan utnyttjas för att ytterligare befästa tankar kring absolut och relativt.

I och med att läraren inte explicit poängterat att målet är att få det lägsta möjliga priset så har även alla elever per definition rätt svar, och alla elever har möjligheten att känna sig delaktig i uppgiften.

I denna uppgiften kan man tydligt se att uppgiften dels är kollaborativ till sin natur, den är dessutom kognitiv utandande och kan anses kräva dels en Procedural och begreppsliga förståelse (3) (Warshauer, 2015). Uppgiften är semi-verklig till sin natur, det vill säga den är konstruerad enbart för detta ändamål men den tar plats i ett undersökande landskap där eleverna bjuds in för att undersöka orsaksförhållanden (Typ 4) (Skovmoses, 2001).

Efter avslutad uppgift kan läraren ännu med fördel berätta att uppgiften är en variation på studentexamens nämndens matematikprov (kort lärokurs) 2018.

Utred i fallen nedan vilken metod som gör att slutpriset blir högre, eller om slutpriserna
blir lika stora. I alla situationer är det ursprungliga priset 299 euro. Du behöver inte
beräkna priserna om du kan motivera ditt svar på något annat sätt.

a) Metod 1: produktens pris höjs först med 10 % och höjs sedan en gång till med 10 %.
Metod 2: produktens pris höjs med 20 %.

b) Metod 1: produktens pris sänks först med 10 % och höjs sedan med 10 %.
Metod 2: produktens pris höjs först med 10 % och sänks sedan med 10 %.

c) Metod 1: produktens pris höjs först med 20 % och sänks sedan med 20 %.
Metod 2: produktens pris höjs först med 30 % och sänks sedan med 30 %.”

5. Syfte och forskningsfrågor

Detta är en interventionsforskning med syfte att svara på elevernas sjunkande motivation och engagemang gentemot matematiken som skolämne. Materialet i interventionen är baserat på målen för matematikundervisningen så som de preciseras i "grunderna för läroplanen för den grundläggande utbildningen" (Utbildningsstyrelsen, 2014). Materialet stöder elevernas matematiska engagemang genom utmanande kollaborativa uppgifter. Intervention tog plats hösten 2018 och resultaten ur ett elevperspektiv presenteras här i denna avhandling. Målet med avhandlingen är att bredda kunskapssynen vad beträffar kollaborativt arbete inom matematikundervisningen i grundskolan. Förhoppningarna är att resultaten från denna studie kan användas för att utveckla det kollaborativa arbetet inom matematikundervisningen. Denna forskning kan ses som tvådelad där en del består av att utvärdera och reflektera över interventionen medan den andra delen tar fasta på vilka matematiska färdigheter eleverna upplevt sig tränat på i arbetet med dessa uppgifter samt vad eleverna upplevde att bäst stödde deras produktiva ansträngningar i arbetet med kollaborativa matematikuppgifter.

De direkta forskningsfrågor som denna avhandling söker svar på är:

1. *Vilka matematiska kompetenser anser sig elever i åldern 10–12 år öva på i arbetet med kollaborativa matematikuppgifter i ett undersökande landskap som kräver produktiva ansträngningar*

   1.1Föreligger det skillnader mellan årskurserna?

2. *Vad anser elever i åldern 10–12 år att bäst stöder deras inlärning i arbetet med kollaborativa matematikuppgifter i ett undersökande landskap som kräver produktiva ansträngningar.*

   2.1 Föreligger det skillnader mellan årskurserna?

3. *Har eleverna upplevt en kunskapsutveckling i de matematiska kompetenserna i arbetet med kollaborativa matematikuppgifter i ett undersökande landskap som kräver produktiva ansträngningar*

För att svar på dessa frågor skapades en elevenkät som jag kommer att närmare beskriva i det metodologiska kapitlet.

6. Metodologi

Denna forskning är till sin natur kvantitativ och alla data som behandlas här i denna avhandling samlades in via en enkät. Ansatsen är fenomenografisk och det är elevens upplevelse som är av intresse.

All forskningen har tagit plats under skoldagen som en del av elevernas vanliga matematiklektioner i enlighet med Läroplanen för grundläggande utbildning (GLGU, 2014).

6.1 Beskrivning av sampel

Samplet i denna studie består av elever i årskurs 4 och årskurs 6 (N=32). Eleverna har svarat med varierande svarsprocenter. Av eleverna i studien var 62,5% av eleverna i årkurs sex (n=20) medan 37,5% av eleverna gick i årskurs 4 (n=12). Alla elever undervisades av samma lärare. Urvalet skedde inte slumpmässigt utan lärarna i studien var handplockade.

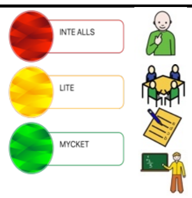
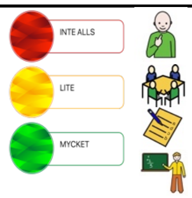
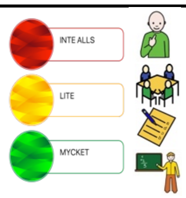
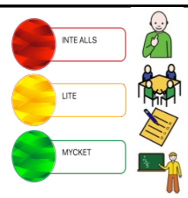
6.2 Mätinstrument

I och med att uppgifterna konstruerats utgående från specifika tankar så ville jag även mäta precis dessa egenskaper. I praktiken innebar det att det inte existerade ett färdigt mätinstrument. Följaktligen var jag tvungen att konstruera ett sådant. Jag skall i detta kapitel redogöra hur denna enkät är konstruerad samt förklara vad den strävar att mäta. Enkäten som eleverna ombads fylla i efter varje lektion (Bilaga 2) är i korthet konturerad att mäta

1) Vad eleverna har upplevt sig träna på för färdigheter i relation till läroplanens målsättningar.
2) Vilken faktor som bäst stödde elevernas produktiva ansträngningar
3) Elevernas upplevda matematiska kunskapsutveckling under interventionen.

De undervisande lärarna försågs även med en klargörande enkät och instruktioner för ifyllnad för att undvika missförstånd (Bilaga 3). Dessutom så var en av målsättningarna att elevenkäten skulle utformas på ett sådant sätt att den åskådliggjorde för eleven det arbete som skett under interventionen då Koskinen (2016) konstaterat att elever ofta har svårt att inse värdet i det kollaborativa arbetet. I enlighet med en konstruktivistisk pedagogisk grundsyn var syftet att skapa en enkät som samtidigt som datainsamlingsredskap även skulle fungera som ett nyttigt reflektionsverktyg för eleverna. Jag ville att eleverna skulle uppleva en nytta med enkäten. Detta styrde mycket skapandet av enkäten då jag genomgående fick fundera på hur den bäst skulle utformas så att den skapa ett mervärde för eleven. Vilket innebar i praktiken att en stor ansträngning lades ner på att skapa en visuellt tilltalande och klargörande enkät. Lärarna blev även uppmanade att gärna använda sig av denna enkät i bedömning och/eller utvecklingssamtal.

Enkäten är en tvåsidig enkät bestående av 10 matematiska kompetenser ordande i rader under varandra och åtta stycken lektioner i kolumner. I denna avhandling kallas de punkter i enkäten där kompetensen möter en lektion för en sambandspunkt.

Idag har jag tränat på	Jag kan det här (hur bra kan du det här nu)	**Stora slumprean**	**Den stora hästkapplöpningen**
att uppfatta och ge exempel på samband mellan			
att presentera matematiska frågor och slutledningar.			

Figur 3. Utklipp ur enkäten

Jag har för tydlighetens skull strukturerat upp detta kapitel i enlighet med de tre faktorer som enkäten har som mål att mäta. Detta resulterar visserligen i att skapandet av själva enkäten och förklarandet av variablerna och hur de är kodade och testade går aningen in i varandra. Men i och med enkätens många dimensioner har jag trots det valt att presentera enkäten på detta sätt då jag upplever detta som redigast.

Vad eleverna har upplevt sig träna på för färdigheter i relation till läroplanens målsättningar.

Här var jag tvungen att avgöra vilka egenskaper från läroplan skulle tas med. Att ta med allt från GLGU, 2014 alla skulle ha orsakat att enkäten dels skulle blivit så omfattande att eleverna skulle ha tappat motivationen att fylla i den och således skulle datan bli opålitlig. Dessutom så skulle det ha stridit mot målsättningen att skapa en enkät som klargjorde och tydligt visade eleverna deras utveckling.

Valet föll på de bedömningskriterier som uppgjorts för goda kunskaper (verbal bedömning) eller vitsordet 8 (sifferbedömning) i slutet av årskurs 6 i matematik GLGU, 2014 (Utbildningsstyrelsen, 2014 s.268). Valet av just dessa kriterier basera sig på att de dels upplevdes summera målsättningarna vad beträffar kunskapsutvecklingen och dessutom så fungerar de tydligt i syfte att visa för elever vad de arbetat med och varför. De här kriterierna var dock för omfattande för att tänkas användas i sin helhet. I GLGU 2104 (Utbildningsstyrelsen, 2014 s.268) uppställs det 13 kriterier var av 12 används som grund för bedömning. ”Målet M1 bibehålla elevens inspiration och intresse för matematik samt stödja elevens positiva självbild och självförtroende” används inte som bedömningsgrund och används följaktligen inte heller i denna enkät som bedömningsgrund. Jag skalade sedan ner de 12 kvarstående kriterier till tio kriterier som jag utvärderade att tränades med de kollaborativa uppgifter vi konstruerat. (se figur 4.) Alla kriterier omformulerades till meningar som lättare kunde uppfattas av eleverna. I samband med det så slogs kriterierna M3 ”handleda eleven att utveckla sin förmåga att ställa frågor och dra motiverade slutsatser utifrån sina observationer ” och M4 ”uppmuntra eleven att presentera sina lösningar och slutledningar för andra med konkreta hjälpmedel, figurer, muntligt och skriftligt, även med hjälp av digitala verktyg” ihop och bilda ett gemensamt påstående som kort och gott löd ”Att presentera matematiska frågor och slutledningar”. Målen M11 ”handleda eleven att observera och beskriva geometriska egenskaper hos kroppar och figurer samt introducera eleven i geometriska begrepp” och M12 ”handleda eleven att uppskatta storleken av ett mätobjekt, välja lämpliga mätredskap och lämplig enhet samt bedöma mätresultatets rimlighet” slogs ihop och bildade påståendet, ”beräkna areor och ytor”. Mål M14” inspirera eleven att utarbeta instruktioner som datorprogram i en visuell programmeringsmiljö ”lämnades bort i och med att det inte existerade uppgifter med anknytning till programmering i interventionen. (Utbildningsstyrelsen s.238, 2014)

De kvarstående tio påståendena utgjorde sedan tillsammans med lektionerna stommen för enkäten. Och efter varje genomförd lektion skulle eleverna sedan ta ställning till huruvida de upplevt sig träna den färdigheten. I anslutning till varje kompetens ordnat under den lektion de precis haft fanns det ett trafikljussystem där eleverna ombeds ta ställning till hur väl de upplevt sig träna på just den kompetensen. Grön symboliserade mycket, gul lite och röd inte alls. Utgående från detta trafikljussystem skapades en ordinalvariabel, som kodades enligt en stigande likertskala så att ”inte alls” fick värdet 1, ”lite” värdet 2 och ”mycket” fick värdet 3.

Detta resulterade i ett stort antal variabler (80 st.) och för att lösa problemet med för många variabler så skapade jag 18 summavariabler. Variablerna skapades kompetensvis och lektionsvis. Detta möjliggjorde analys av kompetenserna men även av lektionerna. Med andra ord enkäten kunde läsas och tolkas både vågrätt och lodrätt. Av någon anledning så hade inte eleverna tagit ställning till alla påståenden. Framför allt fanns det ett stort bortfall i påståendena kring lektionerna sju och åtta där det kunde vara upp till 50% av respondenterna som inte svarat. Dessa två lektioner behandlas med en viss försiktighet i denna redovisning.

Vidare så undersökte jag huruvida årskurserna hade upplevt en gradskillnad i vad de upplevt sig träna på för färdigheter i relation till läroplanens målsättningar. För att undersöka detta anlitades ett relaterat students t-test. Effektens storlek mättes med Eta kvadrat. Eftersom fördelningen av svaren varierade mellan årskurserna och i och med att samplet var relativt litet så användes även med det non-parametriska Mann-Whitney -testet för att kontrollera resultaten.

Påstående i enkäten	**Goda kunskaper (verbal bedömning) eller vitsordet 8 (sifferbedömning) i slutet av årskurs 6 i matematik GLGU, 2014**
Att uppfatta och ge exempel på samband mellan saker som jag lärt mig.	(M2) Eleven uppfattar och ger exempel på samband mellan saker som hen lär sig
Att presentera matematiska frågor och slutledningar.	(M3) Eleven kan presentera matematiskt intressanta frågor och slutledningar. (M4) Eleven presenterar sina lösningar och slutledningar på olika sätt.
Att använda olika strategier vid problemlösning.	(M5) Eleven kan använda olika strategier vid problemlösning
Att bedöma hur ändamålsenlig min lösning är och om mitt svar är rimligt.	(M6) Eleven kan i regel bedöma en lösnings ändamålsenlighet och ett resultats rimlighet.
Att använda rätt begrepp och symbolerna.	(M7) Eleven använder i regel rätta begrepp och symboler
Tiosystemets princip också vid räkning med tal i decimalform.	(M8) Eleven behärskar tiosystemets princip också vid räkning med tal i decimalform.
Att använda positiva rationella tal och negativa heltal.	(M9) Eleven kan använda positiva rationella tal och negativa heltal.
Att räkna obehindrat i huvudet och skriftligt.	(M10) Eleven räknar relativt obehindrat i huvudet och skriftligt.
Att beräkna areor och volymer.	(M11) Eleven kan klassificera och identifiera kroppar och figurer. (M12) Eleven kan använda skalor samt känner igen symmetriska figurer i förhållande till räta linjer och punkter.
Att göra en tabell utgående från ett material samt tolka tabeller och diagram.	(M13) Eleven kan göra en tabell utgående från ett material samt tolka tabeller och diagram. Eleven kan beräkna medelvärdet och bestämma typvärdet.
Mäts inte.	(M14) Eleven kan programmera ett fungerande program i en visuell programmeringsmiljö

Figur 4. Påståenden i elevenkäten jämfört med GLGU, 2014

Vilken faktor som bäst stödde elevernas produktiva ansträngningar

Eftersom jag med denna enkät även ville mäta vilken faktor som eleverna upplevt att bäst hjälpt dem i deras produktiva ansträngningar, var det följande valet jag stod inför att skapa en pålitlig mätare för detta. Resultatet blev att enkäten i samband med trafikljussymbolerna försågs med ytterligare fyra symboler man kunde välja mellan. Symbolerna man kunde välja mellan var “jag själv”, “läraren”, “grupparbetet” eller “uppgiften”. Eleverna ombads välja endast en symbol. De skulle välja den symbol som de i anslutnings till den uppgiften upplevt dem hjälpa dem mest i deras strävan att lösa uppgiften.

För att skapa dessa fyra kategorier så utgick jag ifrån *Student´s Mathematics-Related Belief Questionnaire* (Op't Eynde & De Corte, 2003) där elevers uppfattningar om matematik undersöks genom 58 frågor. Formuläret i sig är alldeles för omfattande och inte i linje med vad denna avhandling vill undersöka men utgående från deras resultat och deras frågeformulär skapade jag fyra kategorier vilka jag döpte till faktorer. De fyra faktorerna jag skapade definieras i enlighet med Op't Eynde & De Cortes (2003) som följande:

Jag själv: 

Avses elevens matematikkunskaper och intresse, det är alltså i första hand elevens egna redan existerande kunskaper och redan existerande intresse och motivation för matematik som hjälper hen med uppgiften.

Läraren: 

Med läraren här avses både lärarens förmåga att hjälpa med kognitiva problem så som att ställa ledandefrågor etc. Lärarens förmåga att motivera eleverna, genom att sporra dem att fortsätta och kämpa vidare utan att ge färdiga svar och lösningar. Lärarens förmåga till att lyssna på elevernas resonemang och det värde som uppstår genom ett visat intresse gentemot eleven och hens resonemang och svar.

Grupparbetet: 

Med grupparbete avses klasskompisarnas inverkan på inlärning, både förväntningar och antaganden de har på en. Men även tillfället att få diskutera och synliggöra matematiska föreställningar och miss-uppfattningar och klargöra dem genom diskussion.

Uppgiften: 

Med uppgiften avses en yttre motivation. Det vill säga ifall det i huvudsak var uppgiften i sig som var hjälpsam, antingen så att den var motiverande och rolig eller så att den var tillräckligt utmanande och tvingade eleven att anstränga sig produktivt.

De undervisande lärarna försågs även med förklaringar till de faktorerna och de ombads klargöra dem för eleverna innan eleverna fyllde i enkäten (Bilaga 4). Huruvida lärarna förklarat faktorerna eller på vilket sätt de förklarat faktorerna kan jag inte ta ställning till.

Utgående från dessa fyra faktorer skapades en nominal variabel som kodades med värdena 1–4
För att mäta vad eleverna upplevt att bäst stödde deras produktiva ansträngningar så användes ett Chi-kvadrat -test och effektens storlek mätes med Cohens W.

Bör nämnas att en del av de observerade värdena i testerna understeg fem till antalet, i vissa fall, till och med noll. Detta innebär att den centrala gränsvärdessatsen möjligtvis inte är tillämpbar och som ett resultat av det kan χ^2 vara missvisande.

Utöver det så letade jag efter sambandspunkter där ≤75% av eleverna valt samma svar och granskade hur dessa svar sammanfallit både kompetensvis och lektionsvis.

Jag kontrollerade även om det fanns skillnader mellan hur årskurserna upplevt vad som bäst stött deras produktiva ansträngningar i förhållande till det olika kompetenserna. För att mäta detta så användes ett Chi-kvadrat -test, effektens storlek mätes med Cramers V -testet.

Elevernas upplevda matematiska kunskapsutveckling under interventionen.

Vidare så hade enkäten som mål att mäta elevens egenupplevda utveckling. Föra att göra det så ombads eleverna att innan interventionen att kryssa i en "smiley" vid varje kompetens, det vill säga samma kompetenser som de tog ställning till under interventionen. I samband med ”smileyn" frågades det hur väl eleven upplevde sig behärska denna kompetens. Det fanns fyra nivåer av smileys att välja på mycket glad, glad, neutral och ledsen. Utgående från dessa smileys skapades en ordinalvariabel, som kodades enligt en stigande likertskala så att ”mycket glad" fick värdet 4 medan ”ledsen" fick värdet 1.

Eleverna utvärderade även sin egen kunskapsnivå efter interventionen i förhållande till de 10 kompetenser som enkäten presenterade. Dessa svar analyserades med ett relaterat students T-test och effektens storlek mätes med Cohen´s D testet. Även här var fördelningen av svaren varierade mellan årskurserna och i och med att samplet var relativt litet så användes även med det non-parametriska Wilcoxon signed rank -testet för att ytterligare testa signifikansnivån.

Enbart ett fåtal av eleverna hade fyllt i kolumnerna om kunskapsnivå och kunskapsutveckling och därför bör dessa svar behandlas och tolkas med viss försiktighet. På grund av detta bortfall så undersöks det inte heller huruvida det föreligger skillnader mellan årskurserna då eleverna i årskurs fyra inte svarat på dessa frågor i tillräcklig utsträckning.

6.3 Reliabilitet och validitet

Jag har i denna forskning eftersträvat att följa god forskningssed och att skapa en forskning som är både pålitlig och upprepbar.

I och med att materialet som undervisats i denna forskning skall bli ett öppet undervisningsmaterial så är det möjligt att upprepa denna studie. De lärare som genomförde undervisningen i denna studie fick visserligen god insikt i det pedagogiska lyssnandet i samband med en workshop som ordnades. Men även inom arbetet med det pedagogiska lyssnandet skapas det ett öppet material vilket möjliggör att framtida läraren kan ta del av samma kunskap. De lärare som undervisade materialet i denna studie var behöriga klasslärare som visserligen var handplockade men utan någon specialkompetens eller specialegenskap som eftersökts. Lektionerna och utvärderingen utgjorde en kontinuerlig och strukturerad undervisningshelhet med en återkommande datainsamlingsprocess. Denna tydliga datainsamlingsstruktur underlättade för eleverna vilket skapar högre reliabilitet.

Undervisningen utfördes i elevernas eget klassrum, det vill säga i samband med eras normala undervisning. Med undantag för tre tillfällen då vi videofilmade lektionerna så var forskarna inte närvarande.

I analysen av elevernas svar har alla otydligheter eller dubbla markeringar tolkats som inget svar för att undvika förvanskning av data.

Undersökningen är naturligtvis inte utan kritik. Speciellt enkäten som eleverna fyllde i kontinuerligt innehöll en del knepiga ord även om materialet försökts anpassas till elevernas nivå. Det svåra språket kan orsaka att eleverna inte alltid vetat vad de svarat på. Dessutom är ofta påståendena av en sådan karaktär att det kräver en hög nivå av metakognition för att effektivt kunna besvaras. Huruvida eleverna i undersökningen har en tillräckligt hög nivå av självkännedom för att helt korrekt kunna ta ställning till alla dessa påståenden kan jag naturligtvis inte veta. Enkäten var dessutom rätt så dryg med 20 punkter eleverna förväntades ta ställning till efter varje lektion. Det kan naturligtvis tänkas att enkätens dels svåra språk, höga krav på metakognition samt enkätens långa format lett till att eleverna inte förmåtts koncentrera sig tillräckligt för att helt exakt ta ställning till varje enskilt påstående.

Enkäten är även konstruerad att mäta en kunskapsutveckling hos eleverna och se ifall att de upplever sig strakare i någon av de av tio stycken påståenden utgående ifrån bedömningskriterier som uppgjorts för goda kunskaper (verbal bedömning) eller vitsordet 8 (sifferbedömning) i slutet av årskurs 6 i matematik GLGU, 2014 (Utbildninsstyrelsen, 2014 s.268). Jag vill avslutningsvis föra fram att jag är medveten om svårigheten i mätningar av detta slag. Eleverna fick även annan matematisk undervisning i samma kärnstoff inom ramen för deras normala undervisning parallellt med denna intervention.

Det kan även tänkas att faktorer som inte ingått i mätinstrumenten har bidragit till elevernas kunskapsutveckling. Men jag upplevde ändå frågan om kunskapsutveckling relevant i samband med en intervention. Resultaten bör naturligtvis speglas i relation till hur mycket eleverna upplevt sig öva upp den specifika färdigheten under interventionens gång.

Att genomföra en forskning innebär samtidigt att man är tvungen att göra vissa etiska överväganden. I denna studie har jag lagt särskild vikt vid tre etiska aspekter: 1) Frivillighet 2) Anonymitet och 3) Mervärde för eleverna. Med frivillighet avses att deltagande i studien sker med informanternas samtycke. Informanternas samtycke baserar sig på deras information om forskningens syfte. Informanterna har därför givits all relevant information utan att undanhålla någonting om studiens syfte och upplägg. Detta för att informanterna skall kunna göra ett övervägt val. Informanterna har dessutom rätt att när som helst dra sig ut ur forskningen och alla deras data raderas då även ur forskningen.
I och med att forskningen samtidigt är en intervention och således påverkar det dagliga arbetet i klassrummet, så beslöts det att de elever som inte givit sitt medgivande i studien ändå deltar och genomför de lektionerna som det forskas i precis som de informanter som givit sitt medgivande till datainsamling. Skillnaden är dock den att de som inte givit sitt medgivande enbart deltar i lektionen men ingen data samlas in från de eleverna. Detta val gjordes eftersom det upplevs ur ett elevperspektiv som en mera jämlik lösning. I och med att lektionerna baserar sig på målsättningar preciserade i GLGU, 2014 så placerar deltagandet inte i elever i en ofördelaktig situation. Dessutom ansåg vi att utesluta elever från lektionerna kunde skapa ett utanförskap för eleverna.

Lov att bedriva forskningen söktes av kommunen samt skolans rektor. I och med elevernas låga ålder så skickades ett informationsbrev med information om studien till elevernas föräldrar (Bilaga 5) där de hade möjlighet att ge deras samt elevens samtycke till studien. Vi övervägde att enbart be om tillstånd av eleverna men konstaterade att vi upplever att det hör till god praxis att för det första informera vårdnadshavarna samt att be om deras medgivande. Vi upplever att i och med detta så har informanterna tillräckligt med information för att göra ett övervägt val.

Vidare beaktades informantens anonymitet. Den information som informanterna bidrar med i denna studie behandlas konfidentiellt. Med tanke på deltagarnas anonymitet är det viktigt att på förhand fastslå vem som har tillgång till det insamlade materialet och hur materialet får användas.
Forskningsmaterial i denna studie behandlas och förvaras ändamålsenligt och konfidentiellt i enlighet med god forskningsetik. Eleverna tilldelas ett id/alias, som används genom hela forskningen för att på så sätt behandlas anonymt. Deltagarna har även informeras om allt detta.
Forskningsresultaten rapporteras anonymt utan att uppge personuppgifter. I rapporteringen strävar studien till att skolorna inte skall gå att identifiera och rapportering överlag anger varken skolornas namn eller ort.

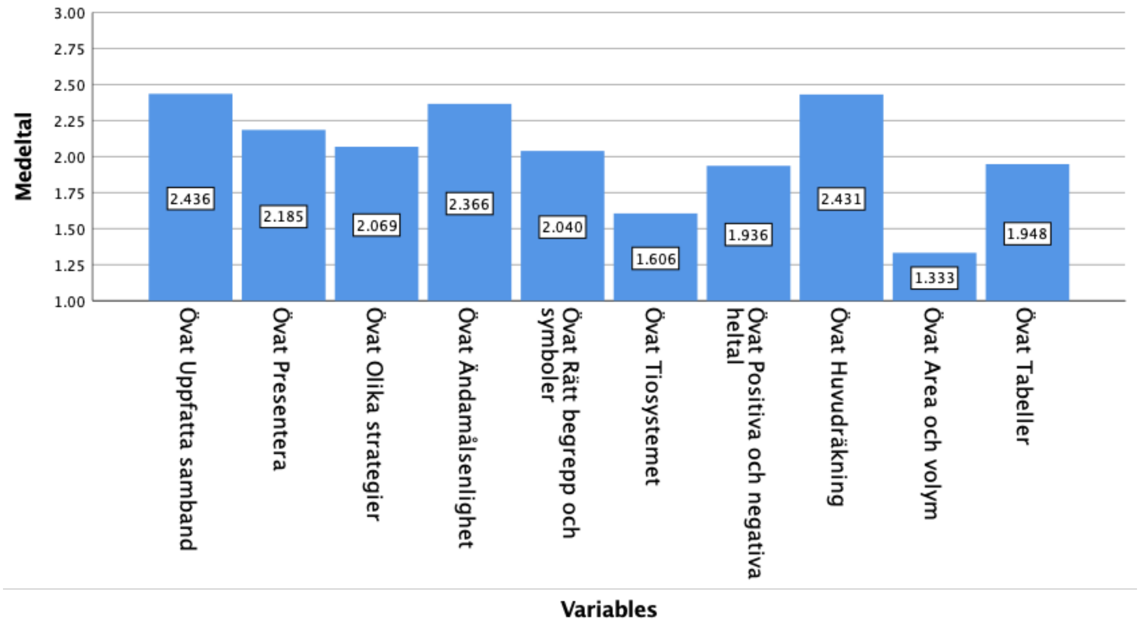
Med mervärde avses i denna studie att informanterna i denna studie skall uppleva och få ett mervärde genom deltagande. Studien strävar till att eleverna skall uppleva ett engagemang för matematiken samtidigt som matematiska koncept klargörs för eleverna. Detta har rigoröst eftersträvas i uppförandet av lektionerna. Vidare så har denna studie eftersträvat att konstruera en datainsamlingsenkät som samtidigt klargöra och synliggöra för eleven hens egen kunskapsutveckling och arbetsprocess i interventionen för att på detta sätt skapa ett mervärde

7. Resultatredovisning

Jag skall i detta kapitel öppna upp och redogöra för resultaten från elevenkäten
Jag kommer enbart att rapportera de resultat som kan anses statistiskt signifikanta med en signifikans nivå på $p<.05$.

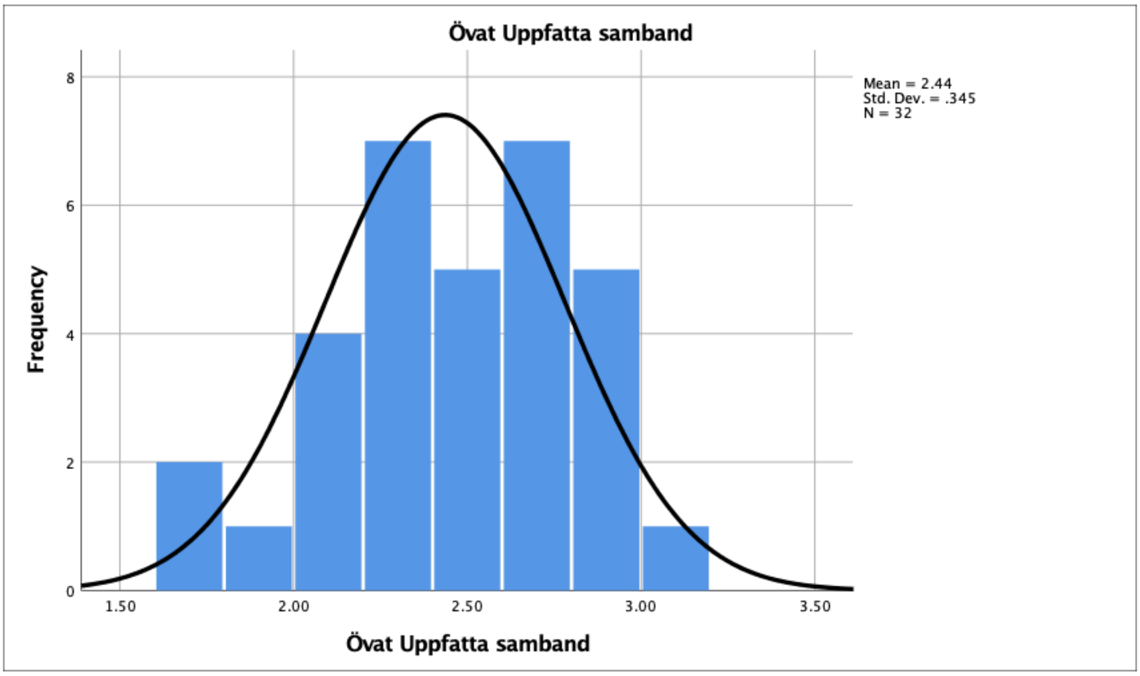
1. *Vilka matematiska kompetenser anser sig elever i åldern 10–12 år öva på i arbetet med kollaborativa matematikuppgifter i ett undersökande landskap som kräver produktiva ansträngningar*

Eleverna har generellt sett upplevt att de har övat relativt mycket på en rad olika matematiska kompetenser under arbetet med uppgifterna. Framför allt vill jag inledningsvis att jag lyfta fram förmågan att se samband som i medeltal upplevts tränats tämligen väl (2,44). Dessutom så har eleverna upplevt sig öva upp förmågan att bedöma ändamålsenligheten i sina svar relativt bra (2,37) och de har dessutom upplevt sig öva upp sin förmåga till huvudräkning (2,43).
Det som eleverna upplevt att de minst övat upp är tio systemets principer (1,61) samt beräkningar av areor och volym (1,33).



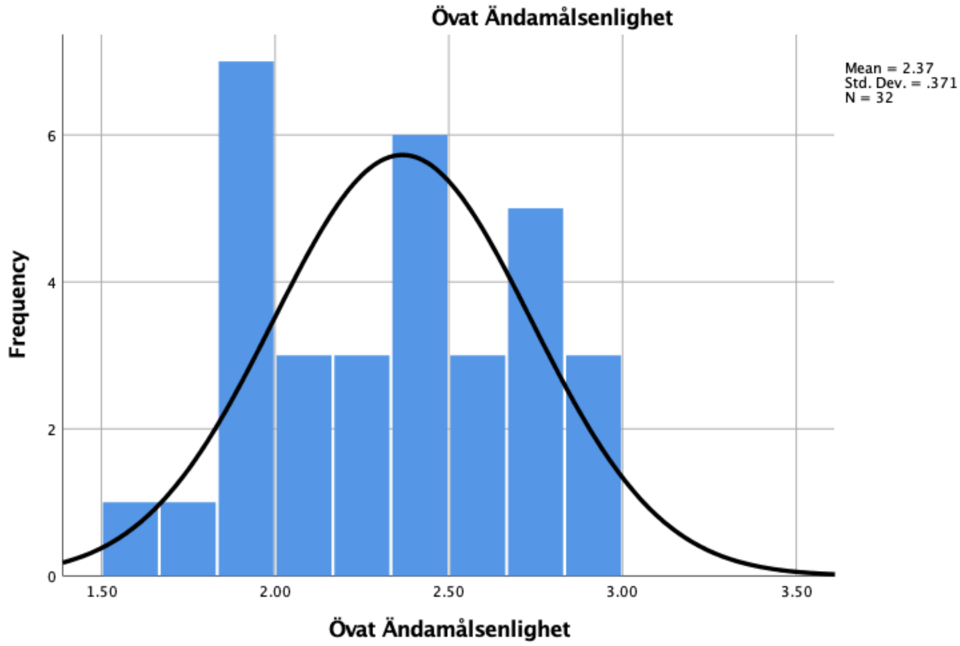
Figur 5. Eleverna upplevda förmåga av att träna matematiska kompetenser.

En närmare granskning av uppgifterna visar att det förekommer vissa mindre skillnader. Vad beträffar eleverna upplevelse av att öva på att uppfatta och ge exempel på samband så tenderar spridningen relativt väl att följa normalfördelningen (M 2,44, Md 2,5). De flesta verkar ha upplevt att denna förmåga har övats upp medelmycket genomgående genom interventionen (se figur 6.).



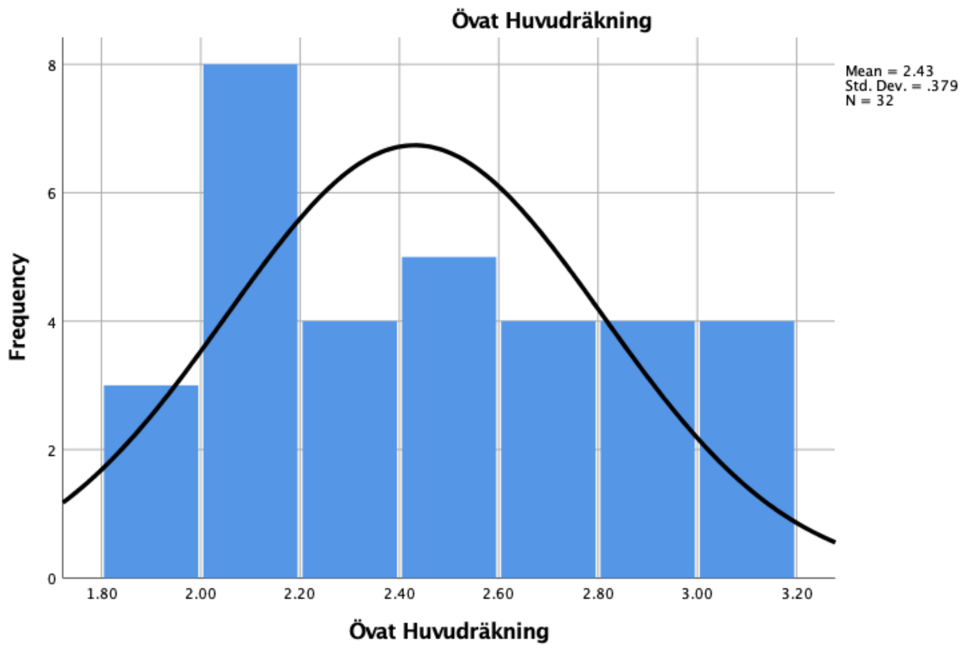
Figur 6. Fördelning av svaren på kompetensområdet uppfatta samband.

Om vi däremot ser på hur väl eleverna upplevt sig öva upp sin förmåga att bedöma hur ändamålsenligt och rimligt deras svar är så kan vi konstatera att det råder en större spridning bland svaren. Detta kan vi konstatera dels eftersom skillnaden mellan medelvärdet och median har ökat (M2,36, Md2,41). Det är ingen enorm ökning rent numeriskt men med tanke på att skalan är 1–3 så är det redan en märkbar förändring. Dessutom kan vi konstatera att det finns flera höga värden men även flera lågavärden (se figur 7.).



Figur 7. Fördelning av svaren på kompetensområdet ändamålsenlighet.

Huvudräkningen som var en av de kompetenser som eleverna upplevt sig träna på mycket fick däremot fick det lägsta minimumvärde av dessa tre toppkompetenser (1,86) och fördelningen av svar ligger jämt fördelat mellan värdena 2 och 3. Detta har tolkats som att huvudräkning varit närvarande men inte framträdande (se figur 8.).



Figur 8. Fördelning av svaren på kompetensområdet huvudräkning.

Att beräkna ytor och areor fick ett så pass lågt värde i intervention beror troligtvis på att area och ytor är en betydligt mer specifik kompetens än de övriga kompetenser som nämnts och den var närvarande i enbart två uppgifter och övades specifikt på enbart i en enda uppgift. Detta syns tydligt i eleverna svars där det i sju av 10 sambandspunkter framgår att ≤85% av eleverna upplevt att de inte övat på den färdigheten alls.

1.1) Föreligger det skillnader mellan årskurserna?

Det tenderade att finnas vissa signifikanta skillnader i hur eleverna i de olika årskurserna upplevt att de övat på de olika kompetenserna. I följande kompetenser förelåg det signifikanta skillnader.

Att använda olika strategier vid problemlösning

I medeltal upplevde eleverna i åk 6 ($M = 2.24$) att de övat mera på förmågan att använda olika strategier vid problemlösning än eleverna i åk 4 ($M = 1.77$), skillnaden var signifikant $t(30) = -4.48$ $p<.01$. $\eta^2 =.827$

Signifikansnivån var även signifikant enligt Mann-Whitney -testet, $U = 28.500$, $z = -3.575$, $p<.01$.

Att använda positiva rationella tal och negativa heltal

I medeltal upplevde eleverna i åk 4 ($M = 2.44$) att de övat mera på förmågan att använda positiva rationella tal och negativa heltal än eleverna i åk 6 ($M = 1.63$), skillnaden var signifikant $t(30)$ $=8.05$ $p<.01$, $\eta^2 =.844$

Signifikansnivån var även signifikant enligt Mann-Whitney Testet, $U = 5.500$, $z = -4.473$, $p<.01$.

Att räkna obehindrat i huvudet och skriftligt

I medeltal upplevde eleverna i åk4 ($M = 2.60$) att de övat mera på förmågan att räkna obehindrat i huvudet och skriftligt än eleverna i åk6($M = 2.32$), skillnaden var signifikant $t(30) = 2.17$ $p < .05$, $\eta^{2=}.689$

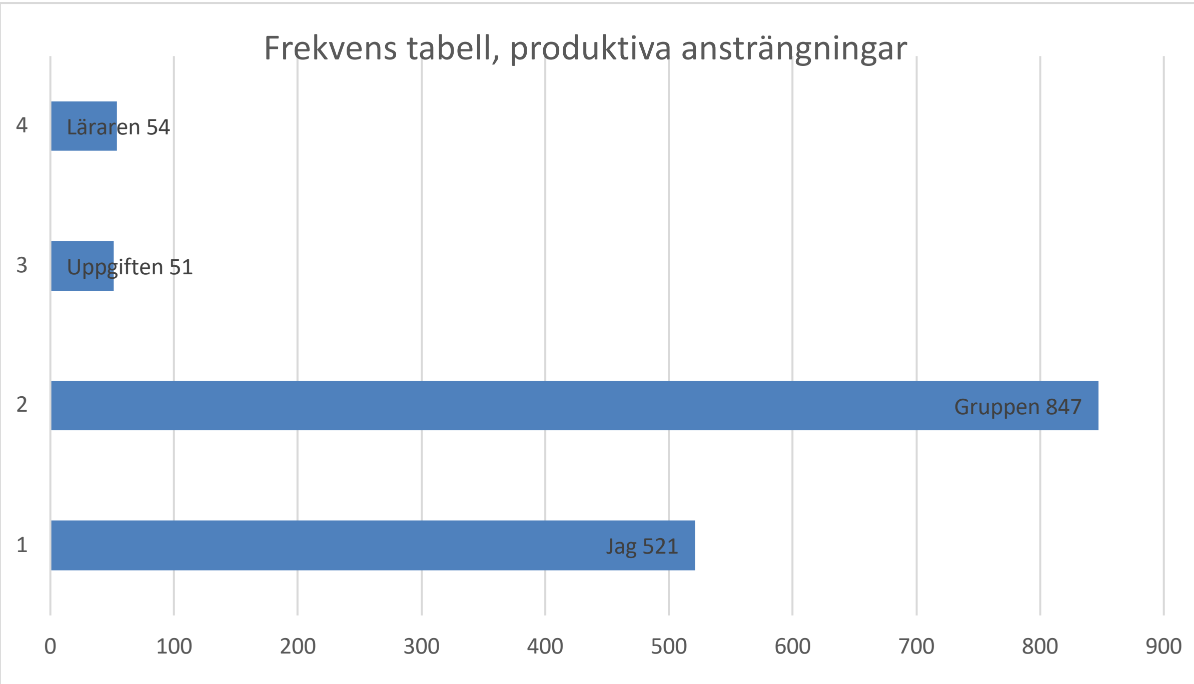
Signifikansnivån var även signifikant enligt Mann-Whitney Testet, $U = 68.000$, $z = -2.035$, $p < .05$.

Det fanns även indikationer på att eleverna i årskurs fyra upplevde att de övade mera på multiplikationstabellerna ($M=2.09$) än eleverna på årskurs 6 ($M=1.86$) men skillnaden var inte statistiskt signifikant $t(30) = 2.006$ $p = .054$

2.) Vad anser elever i åldern 10–12 år att bäst stöder deras inlärning i arbetet med kollaborativa matematikuppgifter i ett undersökande landskap som kräver produktiva ansträngningar.

Eleverna i interventionen såg helt klart gruppen som deras största stöd. Gruppen nämndes i 847 fall av 1473st svar (57,5%). Därefter kom ”jaget” (35,3 %) medan uppgiften och läraren enbart fick ströomnämningar.

Det fanns en signifikant skillnad mellan vad eleverna upplevde att bäst stödde deras produktiva ansträngningar $\chi^2(3) = 1227.24$, $p<.001$. w=.91. Det som tydligast steg fram som en faktor som eleverna upplevde att stödde deras inlärning var grupparbetet



Figur 9. Elevernas upplevelse av stöd i deras ansträngningar.

Även då jag letade efter sambandspunkter punkter där 75% eller fler av eleverna hade valt gruppen som sitt största stöd så steg gruppen tydligt fram. Av 80 möjliga sambandspunkter så fanns det 26 st sambandspunkter där 75% eller fler hade valt gruppen som den resurs de upplevt att bäst stött dem i deras inlärning. Det innebär att i 35% av påståendena tyckte ≤ 75% av eleverna att gruppen var deras största tillgång. I de övriga fallen var även grupparbetets betydelse stor. Den näst största tillgången upplevde eleverna att var de själva. I åtta av sambandspunkterna (10 %) steg jaget fram, alltså att över 75% av respondenterna hade valt jag själv som den största hjälpen.

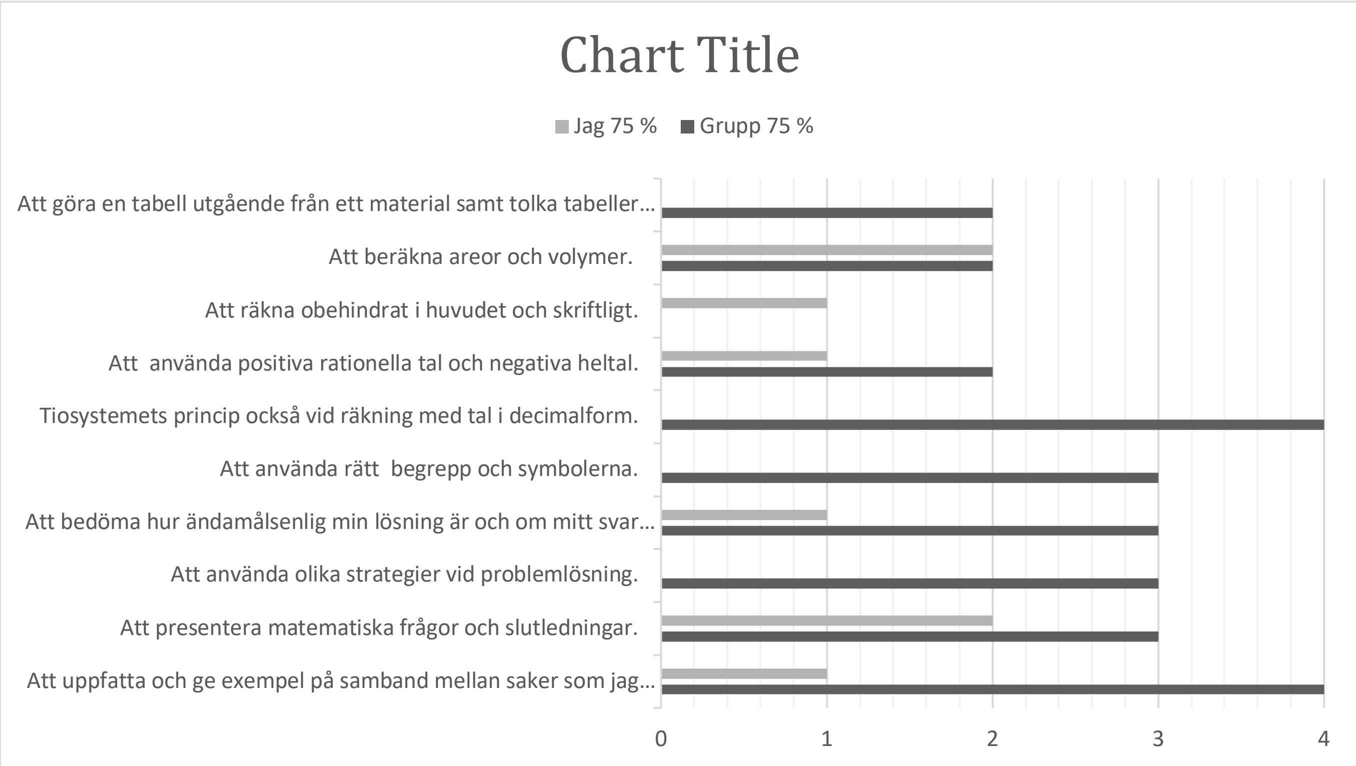
Varken uppgiften eller läraren översteg 75% en enda gång. Överlag var uppgiften det som eleverna upplevde att minst hjälpte dem. Uppgiften nämndes dock i fler samband än läraren som hade endast valts endast i enstaka samband. I flesta fall var läraren inte alls omnämnd. Noterbart är dock att lärarens steg fram i två sambandspunkter som båda berörde påståendet ”att göra en tabell utgående från ett material samt tolka tabeller och diagram” med 31,3% respektive 40,6%. Detta är intressant med tanke på att läraren varit så pass frånvarande i de övriga 80 punkterna. På grund av dessa två samband så steg läraren upp över uppgiften i antal svar.

Till följande valde jag att se var dessa svar med 75% eller högre samstämmighet befann sig både lektonsvis och kompetensvis. Intressant nog kan man konstatera att de i viss mån koncentrerar till vissa uppgifter och vissa kompetenser. Speciellt i tre av uppgifterna steg gruppen fram som mycket viktig. I dessa uppgifter angavs det på sex eller sju av 10 möjliga påståenden med 75% eller högre marginal att gruppen var deras största stöd.

Lektion	Stora slump-rean	Den stora häst-kapplöp-ningen	Algebra pussel	Proble-met med det blonda håret	Mate-matiska påståen-den	Vecko-pengen	Skapa eget material	Guldru-schen
Kognitiv kravnivå	**3**	**3**	**3**	**4**	**3**	**2**	**4**	**3**
Inlärnings-miljö	**4**	**4**	**2**	**4**	**2**	**5**	**6**	**2**
Grupp ≤75 %	*2*	*1*	*6*	*0*	*7*	*0*	*3*	*7*
Jag ≤ 75 %	*0*	*5*	*0*	*2*	*0*	*1*	*0*	*0*

Figur 10. Lektionsvis fördelning av svar som är ≤ 75 %

Om man ser på hur de samband med över 75% av svaren fördelade sig bland de matematiska kompetenserna kan man konstatera att gruppen dominerar alla kompetensområden förutom förmågan att räkna obehindrat i huvudet och skriftligt, där den inte omnämns men där jaget förkommit en gång. Utgående från detta tenderar gruppens betydelse vara störst då uppgiftens målsättning är träna en mera begreppslig förmåga som kräver en djupare förståelse snarare än en procedurall kunskap så som att räkna



Figur 11. Kompetensvis fördelning av svar som är ≤ 75 %

2.1) Föreligger det skillnader mellan årskurserna

I tre kompetenser fanns det en signifikant interaktion mellan vad eleverna bäst ansåg att stödde deras produktiva ansträngningar.

Att använda olika strategier vid problemlösning

Det fanns en signifikant interaktion mellan vad eleverna bäst ansåg att stödde deras produktiva ansträngningar då det gällde att använda olika strategier vid problemlösning och årskursen $\chi^2(3) = 15.400$, $p<.001$, V=0.3403

Även om de båda årskurserna upplevde gruppen som sitt största stöd så upplevde eleverna i årskurs sex att uppgiften stödde dem klart mera än vad eleverna i årskurs sex gjorde medan eleverna i årskurs fyra upplevde läraren som klart mera stödgivande än eleverna i årskurs sex.

Att använda positiva rationella tal och negativa heltal

Det fanns en signifikant interaktion mellan vad eleverna bäst ansåg att stödde deras produktiva ansträngningar då det gällde att använda positiva rationella tal och negativa heltal och årskursen $\chi^2(3) = 9.972$, $p<.001$, V=0.2813

Eleverna i årkurs sex upplevde gruppen som deras största stöd medan eleverna i årskurs fyra upplevde sig själva som deras största stöd.

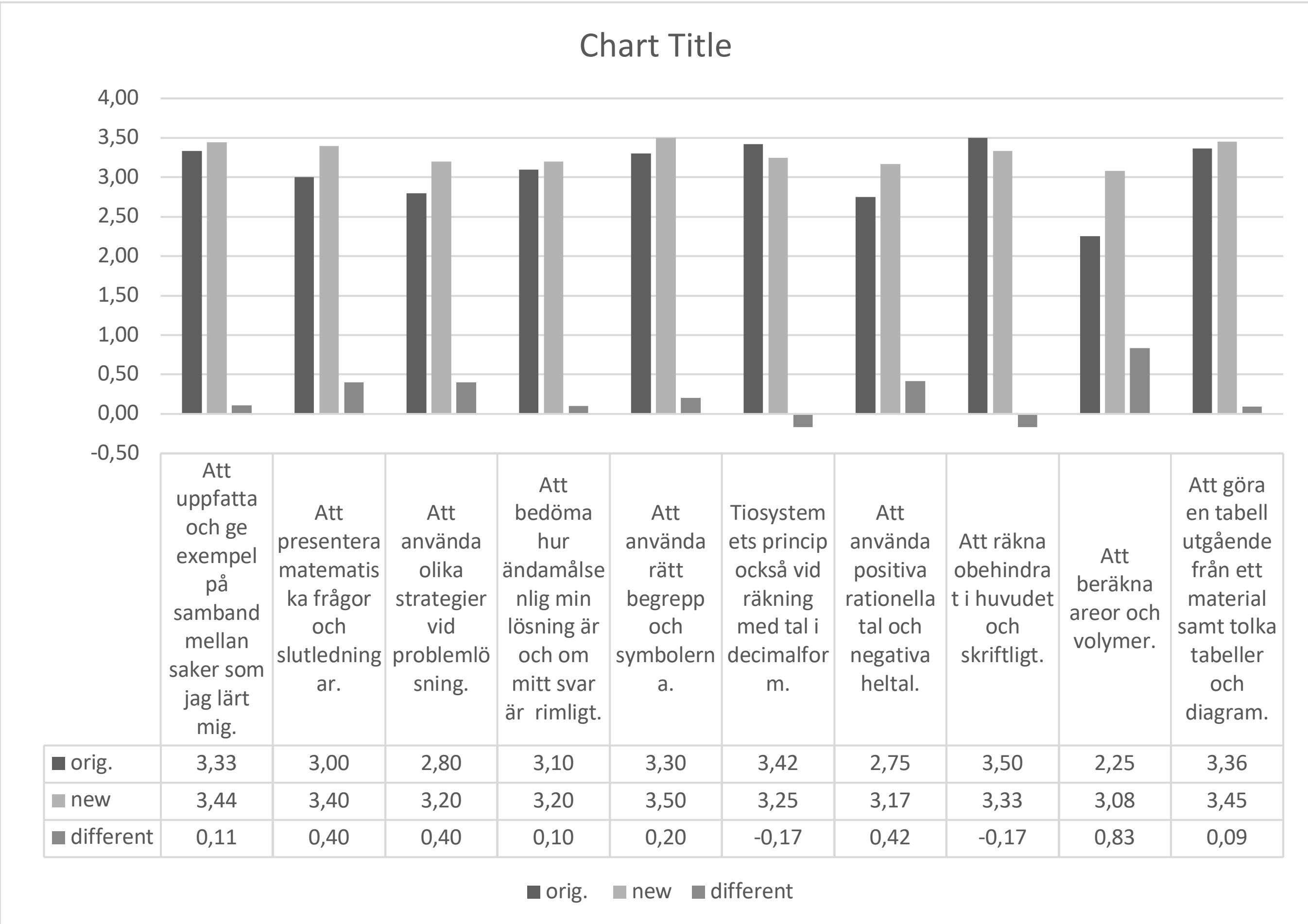
Att göra en tabell utgående från ett material samt tolka tabeller och diagram

Det fanns en signifikant interaktion mellan vad eleverna bäst ansåg att stödde deras produktiva ansträngningar då det gällde att göra en tabell utgående från ett material samt tolka tabeller och diagram och årskursen $\chi^2(3) = 11.596$, $p<.001$, V=0.3135

Medan årskurs sex upplevde gruppen som sitt största stöd så upplevde eleverna i årskurs fyra att läraren var deras största stöd.

3. Har eleverna upplevt en kunskapsutveckling i arbetet med kollaborativa matematikuppgifter i ett undersökande landskap som kräver produktiva ansträngningar

Resultaten tyder på att en liten upplevd kunskapsutveckling skett på åtta av tio delområden men huruvida denna utveckling skett på grund av denna intervention eller på grund av andra omständigheter är svårt att säga. Det hade även skett en liten nedgång på två av kompetenserna. Vid första anblick så verkade det som om det skett en märkbar förändring endast på ett område nämligen elevernas förmåga att beräkna areor och volymer. Där har medelvärdet stigit med 0,8 enheter (K1=2,2500 K2=3,0833).



	Att uppfatta och ge exempel på samband mellan saker som jag lärt mig.	Att presentera matematiska frågor och slutledningar.	Att använda olika strategier vid problemlösning.	Att bedöma hur ändamålsenlig min lösning är och om mitt svar är rimligt.	Att använda rätt begrepp och symbolerna.	Tiosystemets princip också vid räkning med tal i decimalform.	Att använda positiva rationella tal och negativa heltal.	Att räkna obehindrat i huvudet och skriftligt.	Att beräkna areor och volymer.	Att göra en tabell utgående från ett material samt tolka tabeller och diagram.
orig.	3,33	3,00	2,80	3,10	3,30	3,42	2,75	3,50	2,25	3,36
new	3,44	3,40	3,20	3,20	3,50	3,25	3,17	3,33	3,08	3,45
different	0,11	0,40	0,40	0,10	0,20	-0,17	0,42	-0,17	0,83	0,09

Figur 12. Elevernas upplevda kunskapsutveckling under interventionen

Det visade sig att det i tre av fallen kunde visas på att det låg en statistiskt signifikant ökning. På följande tre kompetensområden hade det skett en statistiskt signifikant upplevd kunskapsökning. Resultaten här innebär alltså att eleverna upplever sig behärska detta kompetensområde statiskt signifikant bättre efter avslutad intervention än innan.

1. *Att presentera matematiska frågor och slutledningar*

Vid andra mätningen rapporterar eleverna en signifikant upplevd kunskapsutveckling jämfört med mättillfälle 1, t(9)=-2.2449, p=<.05. d=0.687685.
Medelvärdet vid första mättillfälle var 3 (*SD*=0.47140) och medelvärdet vid andra mättillfälle var 3.4 (*SD*=0.51640).

Detta bekräftades ytterligare med Wilcoxon Signed Ranks -testet som indikerar att ranksumman från den första mätningen skiljer sig signifikant från den andra mätningen Z = -2.000, p <.046

2. *Att använda olika strategier vid problemlösning*

Vid andra mätningen rapporterar eleverna en signifikant upplevd kunskapsutveckling jämfört med mättillfälle 1, *t*(9)=-2.2449, p=<.05.d=0.744203.
Medelvärdet vid första mättillfälle var 2.8 (*SD*=0.63246) och medelvärdet vid andra mättillfälle var 3.2 (*SD*=0.42164).

Detta bekräftades ytterligare med Wilcoxon Signed-Ranks testet som indikerar att ranksumman från den första mätningen skiljer sig signifikant från den andra mätningen Z = -2.000, p <.046

3. Att beräkna areor och volymer

Vid andra mätningen rapporterar eleverna en signifikant upplevd kunskapsutveckling jämfört med mättillfälle 1, $t(11)=-3.079$, $p=<.05$. $d=$ 0.939607.2
Medelvärdet vid första mättillfälle var 2.2500 (SD=0.96531) och medelvärdet vid andra mättillfälle var 3.0833 (SD=0.79296).

Detta bekräftades ytterligare med Wilcoxon Signed-Ranks testet som indikerar att ranksumman från den första mätningen skiljer sig signifikant från den andra mätningen $Z = -2.946$, $p <.013$

8. Diskussion

Resultaten från denna avhandling antyder att eleverna som deltog i denna intervention upplevde en kunskapsökning bland de mätta kompetenserna på åtta av tio områden. På tre av tio områden 1.Att presentera matematiska frågor och slutledningar 2.Att använda olika strategier vid problemlösning och 3.Att beräkna areor och volymer var det frågan om en statistiskt signifikant kunskapsökning.
Så på den punkten kan man i alla fall anse att interventionen som sådan var relativt lyckad. Eleverna hade dessutom inledningsvis redan ansetts sig vara rätt så kompetenta på alla delområden, medeltalet varierade mellan 2.25 och 3.50 på skalan 1 till 4.

De äldre eleverna upplevde sig mera ha övat på begreppsliga förmågor som att använda olika strategier i problemlösning medan de yngre upplevde sig mera ha övat på mera direkta procedurala färdigheter så som att räkna i huvudet.

De flesta kompetenser som mättes i denna intervention syftade på någon slags begreppsliga förmåga i form av uttryck och ordval som ”att använda”, ”att bedöma”, och ”att uppfatta” etc. Detta leder naturligtvis till att begreppsliga aspekter får ett visst framträdande även i resultaten. Men det är kompetenser som starkt poängteras i GLGU 2014 så har jag valt att ge dem utrymme i denna forskning.
Jag utgick i denna forskning från tanken om att uppgiften bestämmer inlärningen (Smith & Stein, 1998) men resultaten från denna forskning antyder att eleverna i alla fall upplevde att uppgiften spela en mycket lite roll.

Eleverna i denna studie upplevde oberoende av årskurs att gruppen var deras största stöd i deras produktiva ansträngningar för att lösa kognitivt utmanade uppgifter i ett undersökande landskap.
Gruppens betydelse tenderade att stiga tydligast fram i begreppsliga aspekter av matematiken. Gruppen var starkt närvarande i alla kompetenser som mätes med undantag för förmågan ”att räkna obehindrat i huvudet och skriftligt”. Där ”jaget” steg kraftigast fram.
Läraren var mycket frånvarande i resultatet och steg fram i enbart två sambandspunker som båda berörde påståendet ”att göra en tabell utgående från ett material samt tolka tabeller och diagram” alltså en direkt färdighet eller förmåga som eleverna behövde expert hjälpa med, alltså en modell för hur uppgiften skulle lösas. Detta är i linje med Kirschner, Paas och Kirschner (2009) som konstaterar att kollaborativt lärande inte alltid är att föredra och att färdighetsbetonade uppgifter gynnas av direkta instruktioner. Resultaten från denna studie verkar stöda denna tanke och elever i denna studie

verkar uppleva saken på samma sätt då lärarens roll framgick enbart vid tillfällen då det gällde att tillgodose sig med nya specifika färdigheter. Det förekom en statistisk signifikant skillnad mellan årskurserna och de yngre eleverna verkar uppleva läraren som en starkare stödfaktor i sina ansträngningar än de äldre eleverna.

Att gruppen steg kraftigt fram är med tanke på att uppgifterna konstruerats att stöda kollaborativt arbete inte ett speciellt överraskande resultat. Det intressanta ligger väl snarare i vilka kompetenser och i vilka uppgifter gruppen steg extra starkt fram. Och framför allt i vilka kompetenser och uppgifter gruppen inte steg fram i. Om man ser på vilka lektioner som har flest sambandspunkter där ≤75% av eleverna har ansett att gruppen varit deras största stöd kan man konsterna att sambandspunkterna koncentrerar sig till tre uppgifter så att sammanlagt 20 st. av totalt 26 sambandspunkter finns inom tre uppgifter. Det är frågan om uppgifterna ”Algebra pussel” (6 st.), ”Matematiska påståenden” (7 st.) och ”Guldrushen” (6 st.). Gemensamt för dessa tre lektioner är att de alla representerar en inlärningsmiljö av typ (2) enligt Skovmose (2001). Eleverna i denna intervention tenderar alltså uppleva det största gruppstödet i ett undersökande landskap placerat bland siffror och geometriska figurer. Uppgifterna ”Algebra pussel”, ”Matematiska påståenden“ och ”Guldrushen” hade dessutom ett uttalat krav på kollaboration på så sätt att läraren explicit bad eleverna att utföra någonting i grupp eller explicit bad dem diskutera någonting i grupp.

I uppgifter som tog plats i ett landskap av typ (4) där uppgiften bjuder in och kräver att eleverna undersöker och förklarar snarare än besvarar så hade eleverna däremot upplevt sig själv som deras största stöd. Gruppen steg inte heller lika tydligt fram (3 st. sambandspunkter med ≤75% som valt gruppen) i uppgiften ”skapa eget material” som tog plats i ett undersökande landskap av typ (6) alltså uppgifter där det finns en nivå av oklarhet om resultatet och att eleverna aktivt använder sig av matematik för att skapa någonting nytt. Detta är intressant då gruppen i typ (4) och typ (6) får relativt fritt utforska, undersöka och skapa. I denna miljö framhävs gruppens betydelse egentligen tydligare.

I och med att jag inte har sett lektionerna och följaktligen inte kan ställning till huruvida lektionerna verkligen genomförts så som planerats, och att de verkligen tagit plats i undersökande landskap så är naturligtvis alla mina funderingar kring landskapen teoretiska till sin natur.

Men man kunde egentligen fråga sig varför gruppen enbart hade betydelse i dessa ”enklare” sammanhang och inte steg mera och tydligare fram i de uppgifter som verkligen krävde och kunde ha gynnats av kollaboration. Ej heller steg gruppen fram i uppgifter som krävde en hög kognitiv ansträngning där det kollektiva medvetandet verkligen kunnat gynna de gemensamma ansträngningarna. Exempelvis i lektionen ”problemet med det blonda håret” som representerade den högsta nivån av kognitiv utmaning så steg gruppen inte fram en enda gånga utan istället steg jaget fram. Resultaten från denna forskning verkar således att påvisa att elever i åldern 10–12 upplevde gruppen som sitt största stöd då uppgiften krävde en begränsad ansträngning och inte tog plats i ett alltför undersökande landskap.

Man borde kanske fråga sig vad det beror på att eleverna inte utnyttjat eller upplevt en nytta av gruppen i vissa av uppgifterna då det var bäddat för grupparbete och det specifikt frågades efter kompetenser som bevisligen övas väl upp i kollaborativa sammanhang. En möjlig tanke är att undervisningen fortfarande tenderar att vara lärarstyrd och bokcentrerad (Pehkonen, 2017; Patrikainen, 2012; Perkkilä 2002; Patrikainen, 2002; Metsämuuronen, 2017) och att eleverna helt enkelt har svårt att tänka på matematiska utmaningar utanför en traditionell skolkontext (Johanning, 2008; Koskinen, 2016) och har således svårt att förstå vad det förväntas av dem.

Det förekom även en viss skillnad mellan årskurserna så att de yngre eleverna tenderade att uppleva en större nytta av kollaborativt arbete då övade på mera procedurala färdigheter medan de äldre eleverna upplevde en större nytta av gruppen i arbetet med mera begreppsliga färdigheter. Vad denna skillnad beror på framgår inte i denna avhandling men det kan spekuleras i om det handlar om en kognitiv mognads nivå hos eleverna eller om det är frågan om en färdighets fråga, att de yngre helt enkelt inte fått lika mycket träning. Noterbart här är att Retnowati, Ayres och Sweller (2017) konstaterat att det har visat sig vara fördelaktigt med kollaborativa metoder då eleverna arbetar med problemlösning men att det kan ha en rent av negativ inverkan då eleverna arbetar med uppgifter som erbjuder färdiga lösningsmodeller. Det kan följaktligen vara värt att resonera kring vad, i vilken mån och med vilket syfte kollaborativt arbete används bland de yngre eleverna. Oberoende av vad skillnaden mellan årskurserna berodde på så undervisades båda grupperna av samma lärare så arbetssätten torde inte variera markant mellan grupperna.

Sammanfattningsvis så tenderar resultaten från denna forskning visa att eleverna upplever kollaborativt arbete inom matematikundervisningen som stödgivande i produktiva ansträngningar. Eleverna i

denna forskning förmår däremot ännu inte att utnyttja de kollaborativa resurserna till sitt fulla. Detta är någonting man borde lägga vikt vid då det är kompetenser som betonas i GLGU, 2014.
Gruppen steg tydligast fram i uppgifter med ett uttalat behov av kollaboration och med en inte allt för stor frihetsgrad vad gäller utförande. Det är i linje med bland annat King (2002) som konstaterar att elever inre engagerar sig i att förklara, ställa frågor eller bygga på tidigare erfarenheter och kunskaper utan att få handledning i det. Även Chinn, O'Donnell och Jinks (2000) konstaterar att eleverna engagerar sig i diskussioner enbart om de är tvungna att motivera sitt svar.

Denna forskning har möjliggjort att eleverna kunnat utveckla sin förmåga att arbeta kollaborativt och eleverna har själva har upplevat en stor nytta av kollaborativt arbete och de har upplevt en tydlig kunskapsutveckling. Fortsatt forskning kunde koncenterara sig på vad elever egentligen lär sig i arbetet med kognitivt utmanade uppgifter i ett undersökande landskap. Förslagsvis kunde en mera longitudinell studie med kontrollgrupper genomföras för att närmare granska fenomenet.

Avslutningsvis kan väl konstateras att det kan antas att matematikens grundstenar är och fortsättningsvis kommer att vara de samma även i framtiden. Men det betyder inte att undervisningen kan förbli oförändrad. I framtiden kommer det att krävas ett kunnande inom komplex problemformulering och problemlösning placerat i kollaborativa miljöer (OECD, 2008). Så matematikundervisningen verkar ha en bit att gå ännu men en bra start kunde vara att tillskriva det kollaborativa lärandet en större vikt i undervisningen då det finns ett uttalat krav att anamma sig den kunskapen. Resultaten från denna avhandling antyder att det verkar finns ett behov av att fundera hur man bäst kunde utveckla matematikundervisningen mot en mera kollaborativ undervisning då eleverna i denna undersökning upplevde gruppen som sitt överlägset största stöd. Med tanke på framtiden utmaningar och krav på kollaborativa förmågor (OECD, 2008) och elevernas upplevelse av gruppens stöd men samtidigt utmaningar att utnyttja gruppens potential fullt ut så verkar det finnas ett behov av en mera kollaborativ matematikundervisning. Det innebär i slutändan att det bör skapas och implementeras material likt det som undersökts i denna avhandling för att möjliggöra en genomtänkt och ändamålsenlig kollaborativ undervisning, då det har konstaterats att undervisningen bör vara välplanerad, strukturerad och med tydliga inlärningsmål definierade om man vill att undervisningen skall vara öppen och kommunikativ (Gillies, 2004)

9. Källor

Arens, A. K., Marsh, H. W., Pekrun, R., Lichtenfeld, S., Murayama, K., & vom Hofe, R. (2017). Math self-concept, grades, and achievement test scores: Long-term reciprocal effects across five waves and three achievement tracks. *Journal of Educational Psychology*, *109*(5), 621.

Au, W. (2014). Hiding behind high-stakes testing: Meritocracy, objectivity and inequality in US education. *International Education Journal: Comparative Perspectives*, *12*(2).

Ball, D. L. (1988). Unlearning to teach mathematics. *For the learning of mathematics*, *8*(1), 40-48.

Fauvel, J., & van Maanen, J. A. (Eds.). (2006). *History in mathematics education: The ICMI study* (Vol. 6). Springer Science & Business Media.

Bjork, E. L., & Bjork, R. A. (2011). Making things hard on yourself, but in a good way: Creating desirable diffculties to enhance learning. *Psychology and the real world: Essays illustrating fundamental contri butions to society*, *2*(59-68).

Blomqvist, A., & Elamari, U. (2010). Älskade matematik!: En enkätstudie baserad på uppfattningar, motivtion och känslor om matematik bland elever i årskurs två och fem.

Boaler, J. (2015). *Mathematical mindsets: Unleashing students' potential through creative math, inspiring messages and innovative teaching*. John Wiley & Sons.

Borasi, R. (1996). *Reconceiving mathematics instruction: A focus on errors*. Greenwood Publishing Group.

Chinn, C. A., O'donnell, A. M., & Jinks, T. S. (2000). The structure of discourse in collaborative learning. *The Journal of Experimental Education*, *69*(1), 77-97.

Chiu, M. M., & Klassen, R. M. (2010). Relations of mathematics self-concept and its calibration with mathematics achievement: Cultural differences among fifteen-year-olds in 34 countries. *Learning and Instruction*, *20*(1), 2-17.

Ekstam, U., Korhonen, J., Linnanmäki, K., & Aunio, P. (2017). Special education pre-service teachers' inter est, subject knowledge, and teacher efficacy beliefs in mathematics. *Teaching and Teacher Education*, *63*, 338-345.

Handal, B. (2003). Teachers' mathematical beliefs: A review. *The Mathematics Educator*, *13*(2).

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). ADDING IT.

King, A. (2002). Structuring peer interaction to promote high-level cognitive processing. *Theory into practice*, *41*(1), 33-39.

English, A. (2007). Interrupted experiences: reflection, listening and negativity in the practice of teaching. *Learning Inquiry*, *1*(2), 133-142.

English, A. (2011). Critical listening and the dialogic aspect of moral education: JF Herbart's concept of the teacher as moral guide. *Educational Theory*, *61*(2), 171-189.

Fink, L. D. (2013). *Creating significant learning experiences: An integrated approach to designing college courses*. John Wiley & Sons.

Gillies, R. M. (2016). Dialogic interactions in the cooperative classroom. *International Journal of Educational Research*, *76*, 178-189.

Hannula, M. S. (2006). Affect in mathematical thinking and learning: Towards integration of emotion, motivation, and cognition. In *New mathematics education research and practice*(pp. 209-232). Brill Sense.

Hiebert, J., & Grouws, D. A. (2007). The effects of classroom mathematics teaching on students' learning. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, *1*, 371-404.

Hiebert, J., & Wearne, D. (2003). Developing understanding through problem solving. *Teaching mathematics through problem solving: Grades*, *6*(12), 3-14.

Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K., Human, P., Murray, H., ... & Wearne, D. (1996). Problem solving as a basis for reform in curriculum and instruction: The case of mathematics. *Educational researcher*, *25*(4), 12-21.

Holsti, S (2018). Finlandsvenska lärarens uppfattningar om det problembaserade lärandet (kandidatuppsats). Helsingfors; pedagogiska fakulteten, Helsingforsuniversitet

Howe, C., & Abedin, M. (2013). Classroom dialogue: A systematic review across four decades of research. Cambridge journal of education, 43(3), 325-356.

Jacobs, V. R., & Ambrose, R. C. (2008). Making the most of story problems. Teaching children mathematics, 15(5), 260-266.

Jansen, A., Cooper, B., Vascellaro, S., & Wandless, P. (2017). Rough-Draft Talk in Mathematics Class- rooms. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *22*(5), 304-307.

Jokinen, J., & Sieppi, A. (2018). Sosiaaliset taidot ovat entistä tärkeämpiä työelämässä. Talous ja yhteiskunta, 46(2).

Joutsenlahti, J. & Vainionpää, J. (2010). Oppimateriaali matematiikan opetuksessa ja osaamisessa. In E. K. Niemi & J. Metsämuuronen (toim.) Miten matematiikan taidot kehittyvät? Matematiikan oppimistulokset peruskoulun vii dennen vuosiluokan jälkeen vuonna 2008. Helsinki: Opetushallitus, 137-148. (Koulutuksen seurantaraportti 2010:2).

Joutsenlahti, J., & Lehtonen, D. (2018). Maailma muuttuu–voiko matematiikan harjoitustehtävät muuttua?. FMSERA Journal, 2(1), 89-98.

Kalinec-Craig, C. A. (2017). The Rights of the Learner: A Framework for Promoting Equity through Formative Assessment in Mathematics Education. Democracy and Education, 25(2), 5.

Kazemi, E., & Hintz, A. (2014). Intentional talk: How to structure and lead productive mathemtical discussions. Portland, OR: Stenhouse Publishers.

King, A. (2002). Structuring peer interaction to promote high-level cognitive processing. Theory into practice, 41(1), 33-39.

Kirschner, F., Paas, F., & Kirschner, P. A. (2009). A cognitive load approach to collaborative learning: United brains for complex tasks. *Educational psychology review*, *21*(1), 31-42.

Koskinen, R. J. (2016). Mielekäs oppiminen matematiikan opetuksen lähtökohtana.

Lee, J. (2009). Universals and specifics of math self-concept, math self-efficacy, and math anxiety across 41 PISA 2003 participating countries. Learning and individual differences, 19(3), 355-365.

Lerman, S. (2000). The social turn in mathematics education research. Multiple perspectives on mathematics teaching and learning, 19-44

Lerman, S. 1990. Alternative perspectives of the nature of mathematics and their influence on the teaching of mathematics. British Educational

Magne, O. (1998). Att lyckas med matematik i grundskolan. Studentlitteratur.

Metsämuuronen, J. (2017). Oppia ikä kaikki–Matemaattinen osaaminen toisen asteen koulutuksen lopussa 2015. Helsinki: Kansallinen koulutuksen arviointikeskus. Julkaisut, 1, 2017

Moss, J., & Beatty, R. (2006). Knowledge building in mathematics: Supporting collaborative learning in pattern problems. *International Journal of Computer-Supported Collaborative Learning*, *1*(4), 441-465.

Mulligan, J., & Vergnaud, G. (2006). Research on children's early mathematical development: Towards integrated perspectives. In *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp.117-146). Brill Sense.

Gutiérrez & P. Boero (Eds.),Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future (pp. 261 - 276). London: Sense Publishers.

National Research Council, & Mathematics Learning Study Committee. (2001). Adding it up: Helping children learn mathematics. National Academies Press.

OECD. (2015). PISA 2015 collaborative problem solving framework. Retrieved from https://www.oecd.org/pisa/pisap roducts/Draft%20PISA%202015%20Collaborative%20Problem%20Solving% 20Framework%20.pdf

Op't Eynde, P., & De Corte, E. (2003). Students' Mathematics-Related Belief Systems: Design and Analysis of a Questionnaire.

Op't Eynde, P., De Corte, E. & Verschaffel, L. 2002. Framing students' mathematics-related beliefs. Teoksessa G. C. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (toim.) Beliefs: A hidden variable in mathematics education?. Springer Netherlands, 13–37.

Partanen, M. (2018). Oppilaan matemaattinen minäkäsitys, matematiikan osaaminen ja koettu vanhempien matematiikan arvostus matematiikka-ahdistuksen ennustajina.

Patrikainen, S. (2012). Luokanopettajan pedagoginen ajattelu ja toiminta matematiikan opetuksessa.

Pehkonen, E. (2017). Finnish elementary teachers' conceptions on problem solving in mathematics teaching. Matematica e la sua Didattica

Perkkilä, P. 2002 Opettajien matematiikkauskomukset ja matematiikan oppikirjan merkitys alkuopetuksessa. Jyväskylä Studies in Education, Psychology and Social Re- search. Julkaisusarja nro. 195. Jyväskylän yliopisto.

Plass, J. L., O'keefe, P. A., Homer, B. D., Case, J., Hayward, E. O., Stein, M., & Perlin, K. (2013). The impact of individual, competitive, and collaborative mathematics game play on learning, performance, and motivation. Journal of educational psychology, 105(4), 1050.

Portaankorva-Koivisto, P. 2010. Elämyksellisyyttä tavoittelemassa. Narratiivinen tutkimus matematiikan opettajaksi kasvusta. Tampereen yliopisto.

OECD. 2008. 21st Century Learning: Research, Innovation and Policy Directions from recent OECD analyses. http://www.oecd.org/site/educeri21st/40554299.pdf. (Läst 28.3.2019.)

Schubring, G., Cousquer, É., Fung, C. I., El Idrissi, A., Gispert, H., Heiede, T., ... & Philippou, G. (2002). History of mathematics for trainee teachers. In *History in mathematics education* (pp. 91-142). Springer, Dordrecht.

Schoenfeld, A. (2009). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. Colección Digital Eudoxus, (7).

Scoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem Solving. Metacognition, and Sense Making in Mathematics,(ed. Grouw, DA) Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, 334-370.

Silva, E. (2008). Measuring Skills for the 21st Century. Education Sector Reports. *Education Sector*.

Skovsmose, O. (1998). Linking mathematics education and democracy: Citizenship, mathematical archaeology, mathemacy and deliberative interaction. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 30(6), 195-203.

Skovsmose, O. (2001). Landscapes of investigation. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 33(4), 123-132.

Smith, J. M., & Mancy, R. (2018). Exploring the relationship between metacognitive and collaborative talk during group mathematical problem-solving–what do we mean by collaborative metacognition?. Research in Mathematics Education, 20(1), 14-36.

Smith, M. S., & Stein, M. K. (1998). Selecting and creating mathematical tasks: From research to practice. Mathematics teaching in the middle school, 3(5), 344-50.

Springer, L., Stanne, M. E., & Donovan, S. S. (1999). Effects of small-group learning on undergraduates in science, mathematics, engineering, and technology:

Säfström, A. I. (2013). Exercising mathematical competence: Practising representation theory and representing mathematical practice.

Star, J. R., Smith III, J. P., & Jansen, A. (2008). What students notice as different between reform and traditional mathematics programs. Journal for Research in Mathematics Education, 9-32.

Stein, M. K., Grover, B.W., & Henningsen, M. (1996). Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: An analysis of mathematical tasks used in reform classrooms. American Education Research Journal, 33(2), 455-488

Swan, M. (2006). Collaborative learning in mathematics. A Challenge to our Beliefs.

Säfström, A.I. (2013). Exercising mathematical comptence. Practising representation theory and representing mathematical practice. PhD thesis. Göteborgs Universitet, Göteborg.

Säljö, R. (2011). Lärande och lärandemiljöer. i S.-E. Hansén, & L. Forsman (Red.), Allmändidaktik - vetenskap för lärare (ss. 155-184). Lund: Studentlitteratur

Teoksessa J. Metsämuuronen, (toim.). Perusopetuksen matematiikan oppimistulosten pitkittäisarviointi vuosina 2005-2012. Tampere: Opetushallitus.

Tuohilampi, L. (2014). What we evaluate, when we evaluate the level of mathematic skills?. LUMAT (2013–2015 Issues), 2(1), 69-78.

Tuohilampi, L., & Hannula, M. S. (2013). Matematiikkaan liittyvien asenteiden kehitys sekä asenteiden ja osaamisen välinen vuorovaikutus 3., 7. ja 9. luokalla.

Tuohilampi, L., Rämö, J., Häsä, J., & Pekkarinen, E. (2017). Tiedonsiirrosta tiedon yhteiseen omistamiseen ja rakentamiseen – autonomian tukeminen Helsingin yliopiston matematiikan kurssikokeilussa. Manuscript submitted for publication.

Turnipseed, S., & Darling-Hammond, L. (2015). Accountability is more than a test score.Education Policy Analysis Archives, 23,11.

Vygotsky, L. (1978). Interaction between learning and development. Readings on the development of children, 23(3), 34-41.

Warshauer, H. K. (2015). Productive struggle in middle school mathematics classrooms. Journal of Mathematics Teacher Education, 18(4), 375-400.

Webb, N. M., Franke, M. L., Ing, M., Turrou, A. C., Johnson, N. C., & Zimmerman, J. (2017). Teacher practices that promote productive dialogue and learning in mathematics classrooms. International Journal of Educational Research.

Webb, N. M., Franke, M. L., Ing, M., Wong, J., Fernandez, C. H., Shin, N., & Turrou, A. C. (2014). Engaging with others' mathematical ideas: Interrelationships among student participation, teachers' instructional practices, and learning. International Journal of Educational Research,

10. Bilagor

Bilaga 1. Interventionsmaterialet

”Lyssna på mig”

Matematikuppgifter

UNIVERSITY OF HELSINKI

Innehållsförteckning

UNIVERSITY OF HELSINKI

1. Absolut vs. Relativ

F-1, megaorm

Uppgift: MEGAORM

Pyssla en ”megaorm”.
Innan uppgiften inleds kan man allmänt diskutera ormar osv. Kanske någon sett en under sommaren el.dyl.

Steg 1:

Börja med att tillverka ett huvud av kartong åt Megaormen. Från huvudet skall det sedan hänga en lång garn/fisketrådstum eller liknande (längden beror på hur lång ni vill bygga)
Ormen börjar växa så att en pärla träs på först av en färg, sedan två pärlor av den andra färgen, sedan fyra ...
Hur växer ormen? Hur långt kan ormen byggas upp? Hur många olika färgade pärlor är det vid varje punkt?
För läraren
Försök att klä det som händer i ord, ormen ökar sin tidigare mängd med samma som föregående och ökar dessutom ännu ytterligare med samma mängd (Begrepp som dubbelt är svåra att uppfatta)
Siffrorna kan skrivas som på tavlan för att illustrera vad som sker (1,2,4,8,16,32,64, ... hur långt kan man räkna tillsammans)
Låt uppgiften ta den tid det tar, alla behöver inte bygga lika långt, variationer kan och får förkomma. Fullt möjligt att pausa i uppgiften, måste inte göras i ett sträck.
Det spelar ingen roll, även om pärlorna har räknats och delats ut I förväg , finns tillräckligt med tänkande och räknande ändå (det behöver inte vara så att barnen kan beräkna de rätta beloppen

Steg 2: Ormen blir hungrig.

Ormen är snål och äter alltid häften av en (mask) tråd.

Var kommer ormen att bita av masken.
Kan ormen någonsin äta upp hela masken?
Varför är halvorna olika stora även om det alltid är en halva (Mäts en halva alltså alltid från samma storlek)
(Kan kopplas till skördefesten, äta grönsaker, stöder kompetensområdena, välmående)

Om halverande som koncept inte öppnar sig kan det vara bra att instruera eleverna en aning innan man börjar, exempelvis gemensam genomgång med en kortare tråd.
Kan vara svårt för eleverna att förstå att du verkligen alltid kan halvera tråden. Bra att diskutera vad man kan göra en sax och vad man kan göra en superprecis mikroskopsax

Kan vara bra att sammanfatta och rita på tavla eller likdanade för avslutande reflektion.

Stora slumprean åk 4

Du vill köpa en telefon, en cykel och en biobiljett. Telefonen kostar 300 euro, cykel 500 euro och en biobiljett 10 euro. Men butiken erbjuder just idag storaslumprean., Det innebär att när du handlar, måste du använda tre olika kuponger. Vilken deal sänker priset, och vilken höjer det? Vilken kuponger använder du för varje produkt? Hur mycket pengar kommer dina inköp att kosta totalt?

(Eleven väljer en deal från en kupong för ett köp, varje kupong kan användas endast en gång)
(Färdiga kuponger bakom länk)

Deal 1: Priset på produkten ökar med 1/10 och ökar sedan igen med 1/10.
Deal 2: priset på produkten ökar med 2/10.

Deal 1: Priset på produkten sjunker först med 1/10 och ökar sedan med 1/10.
Deal 2: Priset på en produkt ökar först med 1/10 och sjunker sedan med 1/10.

Deal 1: priset på produkten ökar med 2/10 och sjunker sedan med 2/10.
Deal 2: Priset på produkten ökar med 3/10 först och sjunker sedan med 3/10.

Uppgiften förtydligas avslutningsvis med gemensam genomgång. Hurdana motiveringar dök det upp.

Läraren kan avslutningsvis berätta att uppgiften varit del av studentskrivningarna (kort matematik) 2018.

Stora slumprean åk 6 och 8

Du vill köpa en telefon, en cykel och en biobiljett. Telefonen kostar 300 euro, cykel 500 euro och en biobiljett 10 euro. Men butiken erbjuder just idag storaslumprean., Det innebär att när du handlar, måste du använda tre olika kuponger. Vilken deal sänker priset, och vilken höjer det? Vilken kuponger använder du för varje produkt? Hur mycket pengar kommer dina inköp att kosta totalt?

(Eleven väljer en deal från en kupong för ett köp, varje kupong kan användas endast en gång).
(Färdiga kuponger bakom länk)

Deal 1: Priset på produkten ökar med 10% och ökar sedan igen med 10%
Deal 2: priset på produkten ökar med 20%

Deal 1: Priset på produkten sjunker först med 10% och ökar sedan med 10%.
Deal 2: Priset på en produkt ökar först med 10% och sjunker sedan med 10%

Deal 1: priset på produkten ökar med 20% och sjunker sedan med 20%.
Deal 2: Priset på produkten ökar med 30% först och sjunker sedan med 30%.

Uppgiften förtydligas avslutningsvis med gemensam genomgång. Hurdana motiveringar dök det upp.

Läraren kan avslutningsvis berätta att uppgiften varit del av studentskrivningarna (kort matematik) 2018.

Stora slumprean åk 9

Uppgiften skall göras utan miniräknare

Du vill köpa en telefon, en cykel och en biobiljett. Telefonen kostar 300 euro, cykel 500 euro och en biobiljett 10 euro. Men butiken erbjuder just idag stora slumprean., Det innebär att när du handlar, måste du använda tre olika kuponger. Vilken deal sänker priset, och vilken höjer det? Vilken kuponger använder du för varje produkt? Hur mycket pengar kommer dina inköp att kosta totalt?

(Eleven väljer en deal från en kupong för ett köp, varje kupong kan användas endast en gång).
(Färdiga kuponger bakom länk)

Deal 1: Priset på produkten ökar med 10% och ökar sedan igen med 10%
Deal 2: priset på produkten ökar med 20%

Deal 1: Priset på produkten sjunker först med 10% och ökar sedan med 10%.
Deal 2: Priset på en produkt ökar först med 1/10 och sjunker sedan med 1/10.

Deal 1: priset på produkten ökar med 20% och sjunker sedan med 20%.
Deal 2: Priset på produkten ökar med 30% först och sjunker sedan med 30%.

Uppgiften förtydligas avslutningsvis med gemensam genomgång. Hurdana momtiveringar dök det upp.

Läraren kan avslutningsvis berätta att uppgiften varit del av studentskrivningarna (kort matematik) 2018.

K18 lyhyt matikka tehtävä 2

Selvitä seuraavissa tilanteissa se, kummalla tavalla loppuhinta on korkeampi vai ovatko loppuhinnat yhtä suuria. Kaikissa tilanteissa alkuperäinen hinta on 299 euroa. Hintoja ei tarvitse laskea, jos osaat perustella vastauksesi jollakin muulla tavalla.
a) Tapa 1: tuotteen hinta nousee ensin 10 % ja nousee vielä uudestaan 10 %.
Tapa 2: tuotteen hinta nousee 20 %.
b) Tapa 1: tuotteen hinta laskee ensin 10 % ja nousee sitten 10 %.
Tapa 2: tuotteen hinta nousee ensin 10 % ja laskee sitten 10 %.
c) Tapa 1: tuotteen hinta nousee ensin 20 % ja laskee sitten 20 %.
Tapa 2: tuotteen hinta nousee ensin 30 % ja laskee sitten 30 %.

Länk till:

1.1.1 ”Förmånskuponger”

https://drive.google.com/open?id=12HdMxOfQMhLxqF9A1kZC9S7IO1oGHH9n

2. Statistik och väntevärde

CIrklar F-1

En sätta svansen på grisen typs uppgift där sannolikhet och väntevärdet lärs ut genom att att leka ”sätta svansen på grisen” alltså sätta ett märke i blindo på pappret med de olika cirklarna, se länk. Uppgiften kan också göras genom att ha pappret med cirklar på bordet och man kastar en tärning på brädet och ser var den landar)

Man kan sedan få poäng genom att gissa vilken färg den landar på 10 poäng om det var gult, 5 poäng om det var turkos och 1 poäng om det var rött?
10 poäng för att vinna.
Hur ofta blir du röd, turkos, gul?

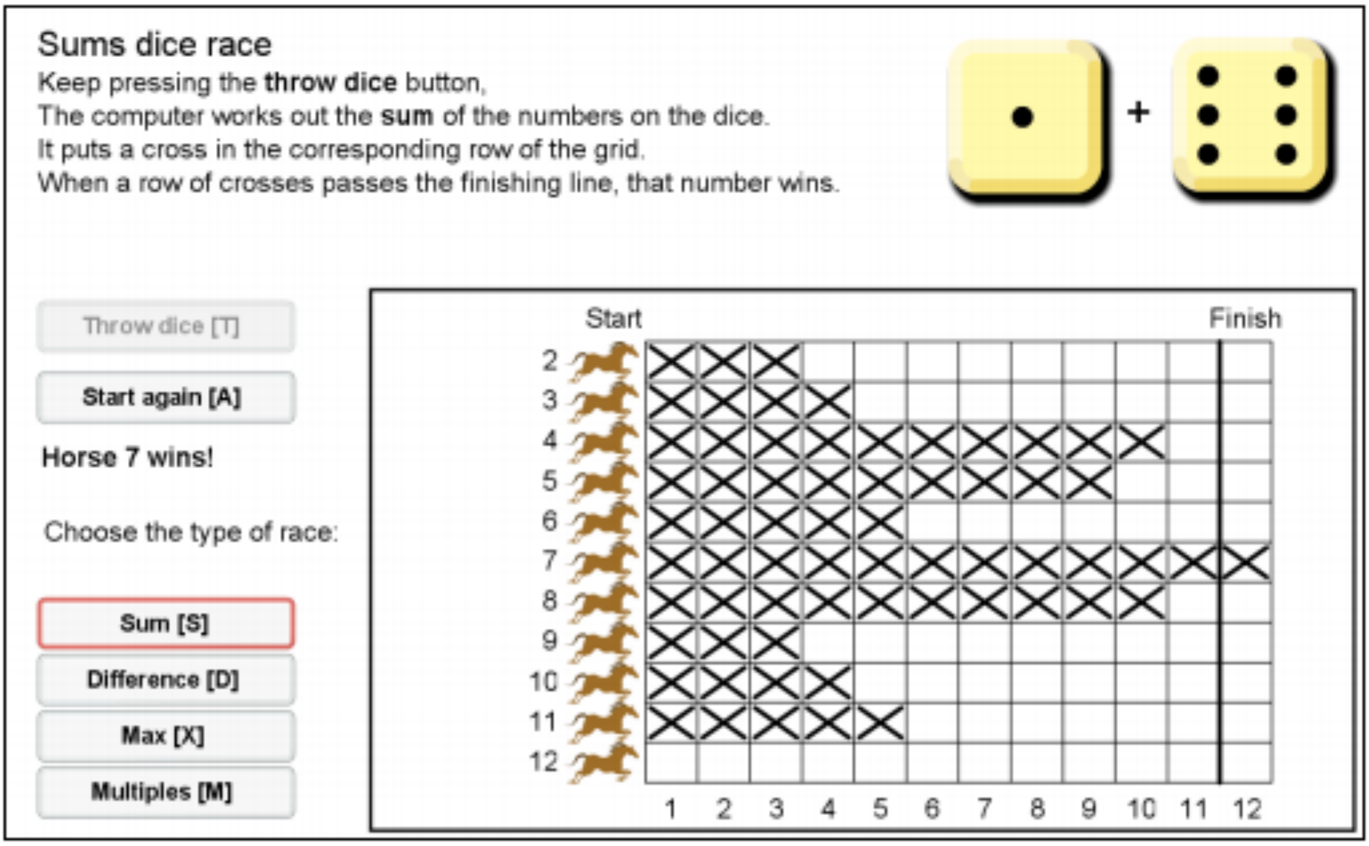
1.1.2 Länk till Cirklarna:

https://docs.google.com/presentation/d/1hfctatD_UTiKL3MvHRpee0o6a-7mtvufO7yBv1sf9QI/edit#slide=id.p

åk 4-9 Den stora hästkapplöpningen

Nedan följer en beskrivning av hur uppgiften kunde se ut och hur klassrumms situationen kunde tänkas arta sig. Efter denna allmänna beskrivning finns ännu en mera detaljerad beskrivning för hur den enskilda årskurserna kunde tänkas förverklig uppgiften samt förslag på fokus områden.

En hästkapplöpning tar plats i klassrummet,
Kapplöpningsbanan ritas på tavlan och elva hästar: 2, 3, 4,..., 12, är redo för start.
Två tärningar kastas, summan av antalet prickar visat på tärningen beräknas och ett kryss görs på diagrammet. (Se bild)



Detta hästlopp kan utvecklas till en större klassrumsaktivitet.

Exempelvis kan två vadslagnings företag ordnas in bakom pulpeter i ett hörn av klassrummet.
En liten grupp elever sköter vadslagningsbyråerna oberoende av varandra, byråerna meddelar sina odds. Resten av klassen, de som spelar på hästarna, gör sina satsningar:

Typ

”titta, byrå A betalar tillbaka 8 gånger pengarna på häst nummer 9.
Men titta på byrå B! De betalar tillbaka 40 gånger för häst nummer 10 ”!
De satsningar som skall göras måste göras i en hast, eftersom nästa tävling börjar snart.

En annan grupp barn ansvarar för loppet, de ringer i klockan för att starta loppet, och (en typ av) tystnad kommer in i klassrummet. Tärningarna kastas, summorna beräknas, kryss görs, hästarna tävlar mot mållinjen. Några av spelarna visar stora leenden.
Vadslagningsbyrå A kanske har endast några kunder. Deras odds verkar långt mindre förmånliga än dem som tillhandahålls av byrån B.
Men snart skall ett nytt lopp starta. Nya odds föreslås. Spelarna blir förvånad: ”vilken fantastisk odds denna byrå A bjuder denna gång !”
Nya satsningar, nya lopp, nya vinnare, nya förlorare. Hästarna är inte anonym längre, och häst nummer 2 får smeknamnet sköldpaddan.

Plötsligt, en byrå förlorar hela dess förmögenhet.
Hur som helst, en ny miljonär sätter upp en ny byrå.

Läraren säger att nu är det dags för ett derby. Hittills har tävlingarna endast haft längden av 3 enheter (gånger man slår tärningen), men ett derby måste vara 7 enheter, minst.
Nya odds görs upp av vadslagningsbyråerna.
Efter det andra Derbyet, börjar några av spelarna undrar om häst nummer 7 möjligen vara särskilt lämpad för derbyn?

1.1.3 Länk till hästkapplöpning botten:

https://docs.google.com/document/d/1t73C1coGHoG8TbJGAEdsM3R6_4gzeP-vdhni0w6ias4U/edit

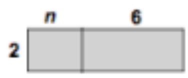
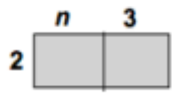
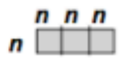
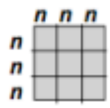
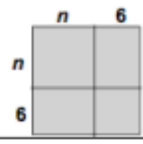
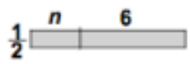
3. Algebra

Algebra pussel

F-9

I uppgiften en är det tänkt att eleverna placerar ”spelkorten” på rätt plats på ”spelbrädet”.
Bilden nedan representerar en färdigt ifylld spelplan.
Eleverna får en rad som modell och resten av bilderna är lösa kort som skall placeras in på rätt ställe.

Interpreting algebraic notation

$\dfrac{n+6}{2}$	$3n^2$	Square *n*, then multiply by three	$\begin{array}{c\|c\|c\|c\|c} n & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline Ans & 14 & 16 & 18 & 20 \end{array}$	
$2n+12$	$2n+6$	Add six to *n*, then multiply by two.	$\begin{array}{c\|c\|c\|c\|c} n & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline Ans & & & 81 & 144 \end{array}$	
$2(n+3)$	$\dfrac{n}{2}+6$	Add six to *n*, then divide by two	$\begin{array}{c\|c\|c\|c\|c} n & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline Ans & & 10 & 15 & 22 \end{array}$	
$(3n)^2$	$(n+6)^2$	Divide *n* by two, then add three	$\begin{array}{c\|c\|c\|c\|c} n & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline Ans & 3 & & 27 & 48 \end{array}$	
$n^2+12n+36$	$\dfrac{n}{2}+3$	Add six to *n*, then square the answer	$\begin{array}{c\|c\|c\|c\|c} n & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline Ans & & & 81 & 100 \end{array}$	
n^2+6	Add three to *n* then multiply by two.	Square *n*, then multiply by nine	$\begin{array}{c\|c\|c\|c\|c} n & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline Ans & & 4 & & 5 \end{array}$	
n^2+6^2	Multiply *n* by two then add twelve	Multiply *n* by two, then add six.	$\begin{array}{c\|c\|c\|c\|c} n & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline Ans & 6.5 & 7 & 7.5 & 8 \end{array}$	

Korten måste själva klippas till.

1.1.4 Länk till algebra uppgiften.

https://docs.google.com/document/d/1XH3W9K4OeRDeqa13rE6Sj8Bb86-AmdBpfLKxDLPE1cg/edit

4. Problemlösning

FÖDELSEDAGSMYSTERIET (F-1)

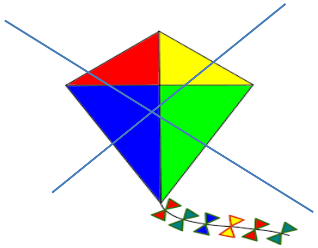
(Barnets namn) har fyllt sex år och haft ett stort kalas. Alla gäster hämtade med sig ett födelsedags-paket till festen, och alla barnen fick med sig en ballong då de gick hem.
På kalaset hade det varit så mycket skoj att de hade inte hunnit öppna alla paket, så (Barneys namn) fick öppna dem då alla gäster gått hem.
Tyvärr hade familjens hund ätit upp alla födelsedagskort så (Barnets namn) viste inte vem som givit vilket paket. Kalaset hade tagit slut så plötsligt så (Barnets namn) kom inte heller ihåg vilken färgs ballong hans gäster gått hem med.
Kan du hjälpa (Barnets namn) att klura ut

1. **Vem som givit vilken gåva?**
2. **Vem som gick hem med vilken färgs ballong?**

Det som (Barnets namn) kommer ihåg är att

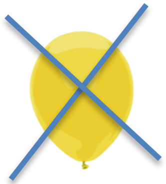
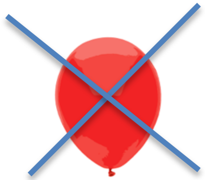
1. Emma hämtade inte draken och gick hem med en grön ballong
2. Wilma hämtade dockan och gick inte hem med en gul eller röd ballong
3. Den personen som hämtade bollen gick hem med en röd ballong
4. Basse hämtade draken

1.1.5 Instruktioner med bildstöd


1. EMMA HÄMTADE INTE DRAKEN OCH GICK HEM MED EN GRÖN BALLONG

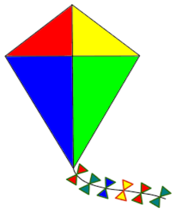


2. WILMA HÄMTADE DOCKAN OCH GICK INTE HEM MED EN GUL ELLER RÖD BALLONG

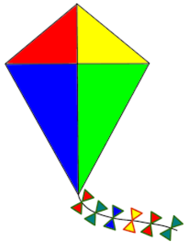
?


3. DEN PERSONEN SOM HÄMTADE BOLLEN GICK HEM MED EN RÖD BALLONG

4. BASSE HÄMTADE DRAKEN

1.1.6 Schema som stöd

									
Emma									
WIilma									
Basse									
Sampo									

UNIVERSITY OF HELSINKI

Problemet med det blonda håret (åk 4-9)

1. De två vännerna, Hypatia och Pythagoras, som båda älskar matte, träffas efter många år igen.
2. De har följande diskussion:
3.
4. **Pythagoras:** Är du gift? Har du barn? Hur många? Hur gamla är de?
5. **Hypatia:** Jo, jag är gift! Jag har tre barn och produkten av deras åldrar är 36.
6. **Pythagoras:** (Efter att ha funderat lite.) Jag kan inte räkna ut deras åldrar. Jag har inte tillräckligt med vinkar.
7. **Hypatia:** Okej! Men om jag berättar för dig att summan av deras åldrar är samma som numret på din adress?
8. **Pythagoras:** (Efter att igen ha funderat lite.) Jag kan fortfarande inte räkna ut deras åldrar. Jag behöver en vink till.
9. **Hypatia:** Väl gjort! Jag kan också berätta att den äldsta har blont hår.
10. **Pythagoras:** Aha! Nu kan jag, utan tvekan, räkna ut åldrarna på dina barn.
11.

12. Hur gamla är Hypatias barn? (Deras åldrar är enbart naturliga tal.)

The Blonde Hair Problem

After having many years to see each other, two friends who really loved math, Hypatia and Pythagoras, meet again. They have the following conversation:

Pythagoras: Are you married? Do you have any children? How many? How old are they?
Hypatia: Yes, I am married! I have three children and the product of their ages is 36.
Pythagoras: (After doing some thinking.) I cannot figure out their ages. I don't have enough clues.
Hypatia: Right! What if I told you that the sum of their ages is the same as the number of your address?
Pythagoras: (After doing some thinking again.) I still can't figure out their ages. I need another hint.
Hypatia: Well done! I also tell you that the oldest has blond hair.
Pythagoras: Aha! Now I can, without any doubt, figure out the ages of your children.

What are the ages of Hypatia's children? (their ages can only be natural numbers)

5. Uppfattningar

F-1 Stationsundervisning

Station 1: Vika papper

Hur många gånger tror barnenen att de kan vika pappret. Först hypotes sedan får de prova i verklig-heten.
Kan få prova en gång till med större papper.
Om möjligt se videon till slut.

https://www.youtube.com/watch?v=kRAEBbotuIE)

Station 2: Volym.

I vilken behållare finns det mera vatten, Först hypotes. Sedan experimentera.

Om man gissat fel, vad var det som lurade en?, om man gissade rätt vad tror man att kan lura folk i denna uppgift.

Station 3: Dela

Hur skall godiset delas ut? Lägg ut enligt bilderna


Dessutom kan man göra en sådan variant där det finns godis på båda sidorna
Man kan ytterligare göra en sådan version där man har godiset färdigt utlagt på båda sidorna men gubbarna på deb högra sidan fattas.,
Exempelvis så att på den vänstra sidan finns en godis åt tre gubbar och på den högra sidan finns det tre godisar men inga gubbar, (alltså nio gubbar saknas)

Stations 4: Byggmästare

Bygga platonska kroppar med ärter och tandpetare
(Kubikmeter, Laura)

https://sv.wikipedia.org/wiki/Platonska_kroppar

UNIVERSITY OF HELSINKI

Matematiska påståenden åk 4 och 6

Inled lektionen med uppgiften (Stellas leksaker) Målsättningen är att väcka diskussion och skapa en klassrums atmosfär som tillåter olika tolkningar.

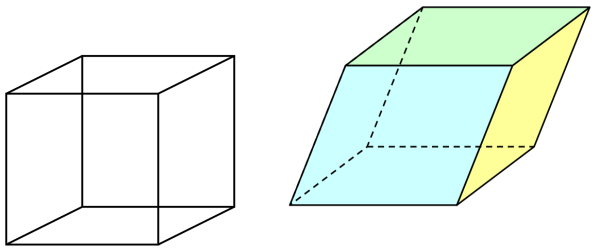
Länk till Stellas leksaker
https://drive.google.com/open?id=1xchHDvkqmYO13_pw21eCNrPyKkaMUmVm

Som lärare kan det var bra att titta på följande video för att få en uppfattning om hurdana diskussioner som dessa påståenden har som målsättning att väcka.

Video till lärare (Deborah Ball)
https://deepblue.lib.umich.edu/handle/2027.42/65013

Stämmer påståendena

1. **Du kan räkna till tusen på ca. 10 minuter och till 10 000 på cirka 100minuter**
2. **En megabit är lika mycket som en gigabit**
3. **Det tal med flest siffror är alltid det största**
4. **Två pizzor delas mellan fyra personer, Är 4:2 rätt uträkning**
5. **Man kan säga kilometer men inte kiloliter**
6. **Om man vrider en kub så förändras dess volym?**



7. **Genom att multiplicera så blir talen alltid större.**
8. **Talet 65 000 kan även skrivas som: 6,5 · 10 · 10 · 10**
9. **Man kan omöjligt rita en klotyta på en karta utan att förvränga det.**
10. **Om man fördubblar en kvadrats sidor så fördubblas även ytan.**

Tanken här är att eleverna verkligen får tid och möjlighet att fundera och svara på frågorna exempelvis genom att be dem bevisa sitt svar.

Avslutningsvis viktigt att gå igenom påståendena och svaren gemensamt för att klargöra vilka uppfattningar eleverna har och om det finns oklarheter. Om ingenting dyker upp kan man ännu ge som läxa att gå igenom påståendena och fundera för att sedan komma tillbaks till dem senare.

1.1.7 Svar:

1. **Tuhanteen laskee noin 10 minuutissa ja 10 000 noin 100 minuutissa**

Oikein ja väärin: tuhanteen 10-15 minuutissa, 10 000 noin 7 tunnissa

2. **Megabitti on yhtä paljon kuin gigabitti**

Väärin: Mega on etuliite (kuten esimerkiksi kilo-) ja tarkoittaa miljoonakertaista, giga-etuliite tarkoittaa miljardikertaista (giga on siis tuhatkertainen megaan verrattuna)

3. **Luku, jossa on eniten numeroita, on aina isoin**

Väärin: esim 0,0052 < 52

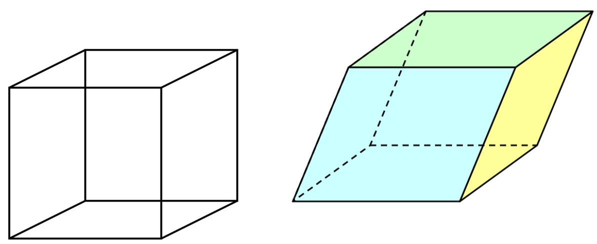
4. **Kaksi pizzaa jaetaan neljälle henkilölle. Lasketaanko kunkin saaman pizzan määrä näin: 4 : 2?**

Väärin: monille jää kuitenkin vielä peruskoulun suorittamisenkin jälkeen harhakäsitys, että suurempi jaetaan aina pienemmällä.

5. **Voi sanoa kilometri, mutta ei voi sanoa kilolitra**

Väärin: voi sanoa myös kilolitra. Kilo- on etuliite, joka tarkoittaa tuhtakertaista, esim paljon käytetty 5K juoksulenkin pituutena viittaa tähän, samoin rahasta saatetaan katukielessä puhua kiloina kun tarkoitetaan tuhansia. Kilo-etuliitteen voi siis liittää mihin tahansa suureeseen.

6. **Jos kuution sivuja kallistaa, sen tilavuus muuttuu**



Oikein: Tilavuus alkaa heti pienentyä. Jos kuution kallistaa ihan litteäksi, sinne ei jää lainkaan tilavuutta. Jos kuution ajattelee vedellä täytettynä, voi helposti kuvitella kuinka vesi alkaa heti valua ulos kuutiota kallistettaessa. Samoin toimii 2-ulotteisena suorakulmio (tai neliö) ja suunnikas.

7. **Kertomalla lukua se aina suurenee**

Väärin: kertomalla ykköstä pienemmällä positiivisella luvulla se pienenee, ja kertomalla positiivista lukua nollaa pienemmällä (eli negatiivisella) se myös pienenee. Ja nollalla kertomalla tietenkin menee nollaksi. Tämä on myös yksi harhakäsityksistä, joita monelle jää peruskoulun päätyttyä.

8. **Luvun 65 000 voi kirjoittaa myös näin: 6,5 · 10 · 10 · 10**

Oikein: tässä hyödynnetään kymmenjärjestelmää. Kirjoittamalla luvun lausekkeeksi se voidaan merkitä lyhyemmin, mikä auttaa erityisen suurien ja pienien lukujen esittämistä pienessä tilassa (kuten laskimessa). Matematiikassa on muutenkin sallittua tehdä kaikkia muunnoksia, mitkä noudattavat laskusääntöjä, ja hyödyntää näitä muunnoksia itse haluamallaan tavalla.

9. Pallon pintaa ei voi piirtää kartalle vääristämättä

Oikein: ks. esim.
https://www.boredpanda.com/true-size-countries-mercator-map-projection-james-talmage-damon-maneice/?utm_source=google&utm_medium=organic&utm_campaign=organic

Kokeile itse
https://thetruesize.com/#?borders=1~!MTUwNDg2Mjk.NTgxNzI1NQ*MzA3NTE5MjQ(Njc0MDIwNQ~!CONTIGUOUS_US*MTAwMjQwNzU.MjUwMjM1MTc(MTc1)MA~!IN*NTI2NDA1MQ.Nzg2MzQyMQ)MQ~!CN*OTkyMTY5Nw.NzMxNDcwNQ(MjI1)Mg
ja tutustu erilaisiin projektioihin (=millä tavalla korkeampiulotteisia pintoja voi esittää alemmissa ulottuvuuksissa)

10. Jos neliön sivun pituuden tuplaa, sen pinta-alakin tuplaantuu

Väärin: se kasvaa enemmän. Sivun pituuden kasvaessa pinta-ala kasvaa tämän neliössä, eli sivun pituuden muutos toiseen potenssin korotettuna. Tätä voi testata piirtämällä ruutupaperille erikokoisia neliöitä ja suorakulmioita, suurentamalla ja tutkimalla, miten paljon pinta-ala oikeastaan kasvaa. Olennaista olisi hoksata, että uuden ulottuvuuden mukaan tullessa "tilaa" tulee yllättävänkin paljon. Sama tapahtuu kolmanteen ulottuvuuteen (ja ylempiin ulottuvuuksiin) mennessä: tilavuus muuttuu muutoksen kuutiona eli kolmantena potenssina.

UNIVERSITY OF HELSINKI

Matematiska påståenden åk 8, 9

Inled lektionen med uppgiften (Stellas leksaker) Målsättningen är att väcka diskussion och skapa en klassrums atmosfär som tillåter olika tolkningar.

Länk till Stellas leksaker
https://drive.google.com/open?id=1xchHDvkqmYO13_pw21eCNrPyKkaMUmVm

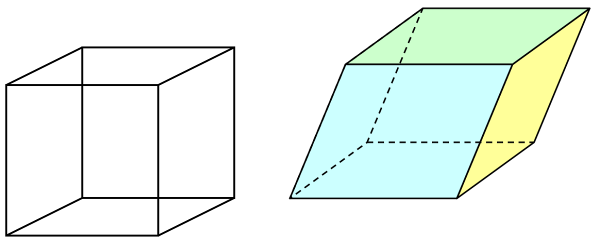
Som lärare kan det var bra att titta på följande video för att få en uppfattning om hurdana diskussioner som dessa påståenden har som målsättning att väcka.

Video till lärare (Deborah Ball)
https://deepblue.lib.umich.edu/handle/2027.42/65013

Stämmer påståendena:

1. **Du kan räkna till tusen på ca. 10 minuter och till 10 000 på cirka 100minuter**
2. **En Megabit är lika mycket som en gigabit men en mikrometer är mindre än en nanometer**
3. **Det tal med flest siffror är alltid det största**
4. **250 delas jämt mellan 600 personer. Är följande korrekt sätt att räkna ut hur mycket pengar var och en får: 600 : 250?**

5. **Man kan säga kilometer men inte kiloliter**
6. **Om man vrider en kub så förändras dess volym?**



7. **Genom att multiplicera så blir talen alltid större.**
8. **Talet 0,000 000 042 kan även skrivas som: $4{,}2 \cdot 10^{-8}$**
9. **Man kan omöjligt rita ett klots yta på en karta utan att förvränga det.**
10. **Om man fördubblar en kvadrats sidor så fördubblas även ytan.**
11. **$2(n+3) = 2n+3$**

Tanken här är att eleverna verkligen får tid och möjlighet att fundera och svara på frågorna exempelvis genom att be dem bevisa sitt svar.

Avslutningsvis viktigt att gå igenom påståendena och svaren gemensamt för att klargöra vilka uppfattningar eleverna har och om det finns oklarheter. Om ingenting dyker upp kan man ännu ge som läxa att gå igenom påståendena och fundera för att sedan komma tillbaks till dem senare

1.1.8 Svar:

1. **Tuhanteen laskee noin 10 minuutissa ja 10 000 noin 100 minuutissa**

Oikein ja väärin: tuhanteen 10-15 minuutissa, 10 000 noin 7 tunnissa

2. **Megabitti on yhtä paljon kuin gigabitti mutta mikrometri on vähemmän kuin nanometri**

Väärin: Mega on etuliite (kuten esimerkiksi kilo-) ja tarkoittaa miljoonakertaista, giga-etuliite tarkoittaa miljardikertaista (giga on siis tuhatkertainen megaan verrattuna). Mikro ja nano ovat myös etuliitteitä, jotka auttavat erityisen pienten lukujen käsittelyssä. Mikro on miljoonasosa, nano on miljardisosa.

3. **Luku, jossa on eniten numeroita, on aina isoin**

Väärin: esim 0,0052 < 52

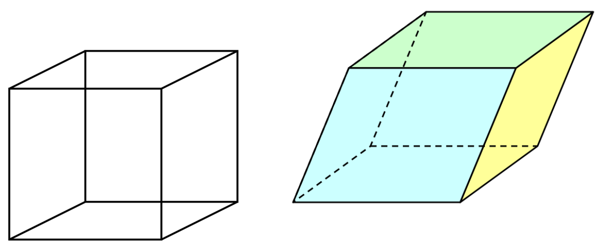
4. **250 euroa jaetaan 600 henkilölle. Lasketaanko kunkin saaman rahan määrä näin: 600 : 250?**

Väärin: monille jää kuitenkin vielä peruskoulun suorittamisenkin jälkeen harhakäsitys, että suurempi jaetaan aina pienemmällä.

5. **Voi sanoa kilometri, mutta ei voi sanoa kilolitra**

Väärin: voi sanoa myös kilolitra. Kilo- on etuliite, joka tarkoittaa tuhtakertaista, esim paljon käytetty 5K juoksulenkin pituutena viittaa tähän, samoin rahasta saatetaan katukielessä puhua kiloina kun tarkoitetaan tuhansia. Kilo-etuliitteen voi siis liittää mihin tahansa suureeseen.

6. **Jos kuution sivuja kallistaa, sen tilavuus muuttuu**



Oikein: Tilavuus alkaa heti pienentyä. Jos kuution kallistaa ihan litteäksi, sinne ei jää lainkaan tilavuutta. Jos kuution ajattelee vedellä täytettynä, voi helposti kuvitella kuinka vesi alkaa heti valua ulos kuutiota kallistettaessa. Samoin toimii 2-ulotteisena suorakulmio (tai neliö) ja suunnikas.

7. Kertomalla lukua se aina suurenee

Väärin: kertomalla ykköstä pienemmällä positiivisella luvulla se pienenee, ja kertomalla positiivista lukua nollaa pienemmällä (eli negatiivisella) se myös pienenee. Ja nollalla kertomalla tietenkin menee nollaksi. Tämä on myös yksi harhakäsityksistä, joita monelle jää peruskoulun päätyttyä.

8. Luvun 0,000 000 042 voi kirjoittaa myös näin: $4{,}2 \cdot 10^{-8}$

Oikein: tässä hyödynnetään kymmenjärjestelmää. Kirjoittamalla luvun ensin lausekkeeksi ($4{,}2 \cdot 1/10 \cdot 1/10 \cdot 1/10 \cdot 1/10 \cdot 1/10 \cdot 1/10 \cdot 1/10 \cdot 1/10$) ja merkitsemällä siten lauseke lyhyemmin saadaan koko luku merkittyä lyhyemmin, mikä auttaa erityisen suurien ja pienien lukujen esittämistä pienessä tilassa (kuten laskimessa). Matematiikassa on muutenkin sallittua tehdä kaikkia muunnoksia, mitkä noudattavat laskusääntöjä, ja hyödyntää näitä muunnoksia itse haluamallaan tavalla.

9. Pallon pintaa ei voi piirtää kartalle vääristämättä

Oikein: ks. esim.
https://www.boredpanda.com/true-size-countries-mercator-map-projection-james-talmage-damon-maneice/?utm_source=google&utm_medium=organic&utm_campaign=organic

Kokeile itse
https://thetruesize.com/#?borders=1~!MTUwNDg2Mjk.NTgxNzI1NQ*MzA3NTE5MjQ(Njc0MDIwNQ~!CONTIGUOUS_US*MTAwMjQwNzU.MjUwMjM1MTc(MTc1)MA~!IN*NTI2NDA1MQ.Nzg2MzQyMQ)MQ~!CN*OTkyMTY5Nw.NzMxNDcwNQ(MjI1)Mg
ja tutustu erilaisiin projektioihin (=millä tavalla korkeampiulotteisia pintoja voi esittää alemmissa ulottuvuuksissa)

10. Jos neliön sivun pituuden tuplaa, sen pinta-alakin tuplaantuu

Väärin: se kasvaa enemmän. Sivun pituuden kasvaessa pinta-ala kasvaa tämän neliössä, eli sivun pituuden muutos toiseen potenssin korotettuna. Tätä voi testata piirtämällä ruutupaperille erikokoisia neliöitä ja suorakulmioita, suurentamalla ja tutkimalla, miten paljon pinta-ala oikeastaan kasvaa. Olennaista olisi hoksata, että uuden ulottuvuuden mukaan tullessa “tilaa” tulee yllättävänkin paljon. Sama tapahtuu kolmanteen ulottuvuuteen (ja ylempiin ulottuvuuksiin) mennessä: tilavuus muuttuu muutoksen kuutiona eli kolmantena potenssina.

11. 2(n+3) = 2n+3

Väärin: vasemmanpuoleinen lauseke tarkoittaa sitä, että suluissa oleva määrä otetaan kaksinkertaisena. Siis sekä n, kuinka paljon se sitten onkaan, että 3, tuplataan. Saadaan 2n+6.

6. Funktioner, Veckopeng

Alla gör samma uppgift som men F-1 med pengar konkret.

Det äldsta syskonet i familjen får får 5 euro i veckopeng., den mellersta får 3 euro och den yngsta 2 euro. Efter 5 veckor får den yngsta 40 euro i födelsedagspresent. Hur länge har hen mest pengar?

Länk till uppgift

https://drive.google.com/open?id=1G-l3KxIIGnLTXvPQwU_RMbK0mkNwlw0J

7. Undervisningsmaterial

Skapa undervisningsmaterial F-1

Gör en "undervisningsvideo", exempelvis med en Ipad, där eleverna lär ut uppgiften med legogubbarna till ett yngre syskon/eller vän. Hur fungerar uppgiften, och varför fungerar det som det gör

Skapa undervisningsmaterial åk 4-9

Pararbete: Skapa ett undervsingsmaterial, exempelvis en fin poster, en animation, en serietidning eller en film. Utgående från en av följande tre länkar

På sätt och vis billigare än Ikea

http://www.feissarimokat.com/2015/06/tavallaan-halvempaa-kuin-ikeassa/

Procent vs. procentenhet

https://docs.google.com/presentation/d/1YDkZEA3oOi2NaCpzSrEO2SoW3EvCGR_JWAoAr-PliTFY/edit#slide=id.g3df4894fc6_0_6

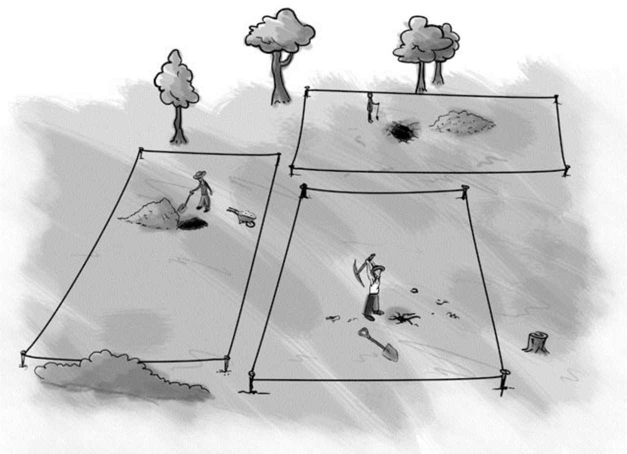
Hamburgare

https://docs.google.com/document/d/18RdnF8JxQPmM_KL2ba1R-b6K9q1G6Pkqyq-KcazATsY/edit

8.Area

Guldruschen

Under 1800-talet var det många som reste till Nord Amerika i hopp om att hitta guld. En av dessa män var Dan Jackson.
Dan Jackson ägde en del mark där man hittade guld.
Men i stället för att själv gräva efter guldet så hyrde han ut marklotter åt ivriga guldgrävare.



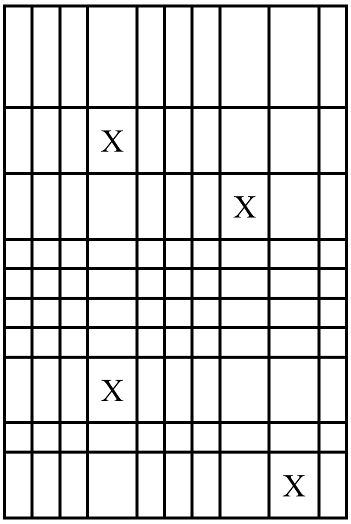
Dan gav varje guldgrävare fyra träpålar och exakt 100m rep..
Varje guldgrävare fick sedan märka ut sitt eget område i form av en fyrhörning med hjälp av pålarna och repet.

Uppgift 1.
Varje guldgrävare är intresserad att få ett så stort område som möjligt, vilka dimensioner bör hans område ha efter att han placerat ut sina pålar.
Förklara med hjälp av text, bild, siffror eller på annat sätt hur du tänkt.

Uppgift 2.
Anta att en guldgrävare får följande erbjudande av en annan guldgrävare.
"Vi slår ihop våra rep"! Vi får mera mark om vi arbetar tillsammans än om vi arbetar enskilt."
Undersök hurvida detta påstående stämmer, ifall att två eller fler personer samarbetar och delar på guldfyndet jämt. Trots att de är två får de endast använda fyra pålar.
Förklara med hjälp av text,bild,siffror eller på annat sätt hur du tänkt.

F-1

Gör det konkret med rep, typ 4 m rep åt en grupp, gör ett så stort område som möjligt. Kolla sedan om man kan få större område om man slår ihop sig med en annan grupp.
GULDMÅLADESTANAR SOM MAN LETAR EFTER, SÅ ATT ANTALET STENAR PER KVADRADMETER ÄR KONSTANT PÅ SÅ SÄTT ATT DET INNEBÄR ATT IFALL MAN ARBETAR I PAR HITTAR MAN VERKLIGEN FLER STENAR.



Märk stenarnas platser, ifall att de rör på sig.

Närmare beskrivning av lektions förloppet och plan.
http://map.mathshell.org/download.php?fileid=1637

UNIVERSITY OF HELSINKI

Bilaga 2. Datainsamlingsenkät

Lyssna på mig

Symbolförklaring:

Jag själv — Läraren

Grupparbetet — Uppgiften

KOD:________________________

Instruktioner: Fyll i efter varje lektion, kryssa i trafikljuset hur du upplever att du tränat på den färdigheten som står på raden, **välj endast en symbol** som bäst representerar det som du upplever att hjälpte dig med din inlärning

Idag har jag tränat på	Jag kan det här (Fyll i denna spalt innan första lektionen)	**Stora slumprean**	**Den stora hästkapplöpningen**	**Algebra pussel**	**Problemet med det blonda håret**	**Matematiska påståenden**	**Veckopengen**	**Skapa eget material**	**Guldruschen**	**SUMMA (Räkna ihop antalet röda,gula eller gröna trafikljus och skriv in det i de tomma rutorna, gör sedan samma sak med symbolerna)**	Nu kan jag detta så här (Fyll i denna spalt efter sista lektionen)
Att uppfatta och ge exempel på samband mellan saker som jag lärt mig		INTE ALLS LITE MYCKET	INTE ALLS LITE MYCKET	INTE ALLS LITE MYCKET	INTE ALLS LITE MYCKET	INTE ALLS LITE MYCKET	INTE ALLS LITE MYCKET	INTE ALLS LITE MYCKET	INTE ALLS LITE MYCKET	____ ____ ____ ____	
Att presentera matematiska frågor och slutledningar.		INTE ALLS LITE MYCKET	INTE ALLS LITE MYCKET	INTE ALLS LITE MYCKET	INTE ALLS LITE MYCKET	INTE ALLS LITE MYCKET	INTE ALLS LITE MYCKET	INTE ALLS LITE MYCKET	INTE ALLS LITE MYCKET	____ ____ ____ ____	
Att använda olika strategier vid problemlösning.		INTE ALLS LITE MYCKET	INTE ALLS LITE MYCKET	INTE ALLS LITE MYCKET	INTE ALLS LITE MYCKET	INTE ALLS LITE MYCKET	INTE ALLS LITE MYCKET	INTE ALLS LITE MYCKET	INTE ALLS LITE MYCKET	____ ____ ____ ____	
Att bedöma hur ändamålsenlighet rimligt mitt svar är		INTE ALLS LITE MYCKET	INTE ALLS LITE MYCKET	INTE ALLS LITE MYCKET	INTE ALLS LITE MYCKET	INTE ALLS LITE MYCKET	INTE ALLS LITE MYCKET	INTE ALLS LITE MYCKET	INTE ALLS LITE MYCKET	____ ____ ____ ____	
Att använda rätt begrepp och symbolerna.		INTE ALLS LITE MYCKET	INTE ALLS LITE MYCKET	INTE ALLS LITE MYCKET	INTE ALLS LITE MYCKET	INTE ALLS LITE MYCKET	INTE ALLS LITE MYCKET	INTE ALLS LITE MYCKET	INTE ALLS LITE MYCKET	____ ____ ____ ____	

Idag har jag tränat på	Jag kan det här	Stora slumprean	Den stora hästkapplöpningen	Algebra pussel	Problemet med det blonda håret	Matematiska påståenden	Veckopengen	Skapa eget material	Guldruschen	SUMMA (Räkna ihop antalet röda,gula eller gröna trafikljus och skriv in det i de tomma rutorna)	Nu kan jag detta så här
tiosystemets princip också vid räkning med tal i decimalform.											
att använda positiva rationella tal och negativa heltal.											
att räkna obehindrat i huvudet och skriftligt.											
att beräkna areor och volymer.											
att göra en tabell utgående från ett material samt tolka tabeller och diagram.											

UNIVERSITY OF HELSINKI

Bilaga 3. Förklarande enkät för lärarna

Lyssna på mig

Symbolförklaring:
Jag själv — Läraren
Grupparbetet — Uppgiften

KOD:**Eleverna fyller i den kod du tilldelat dem**

Instruktioner: Fyll i efter varje lektion, kryssa i trafikljuset hur du upplever att du tränat på den färdigheten som står på raden, **välj endast en symbol** som bäst representerar det som du upplever att hjälpte dig med din inlärning

EXTREMT VIKTIGT ATT ELEVERNA ENDAST VÄLJER EN SYMBOL!

DESSA TVÅ FYLLS I EFTER SISTA LEKTIONEN

Idag har jag tränat på, **Nedan finns tio st plock ur den nationella läroplanen som motsvarar vitsordet 8 i matematik. Efter varje lektion skall eleverna ta ställning till hur väl de upplevde att uppgiften övade upp dessa färdigheter**	FYLL I INNAN FÖRSTA LEKTIONEN Jag kan det här (Fyll i denna spalt innan första lektionen)	**Stora slumprean,** **efter varje lektion fylls motsvarande spalt i, eleven ringar in 1. hur väl den färdigheten tränats,2. samt vad som hjälpte bäst. Endast en färg och en**	**Den stora hästkapplöpningen**	**Algebra pussel**	**Problemet med det blonda håret**	**Matematiska påståenden**	**Veckopengen**	**Skapa eget material**	**Guldruschen**	**SUMMA (Räkna ihop antalet röda,gula eller gröna trafikljus och skriv in det i de tomma rutorna, gör sedan samma sak med symbolerna)**	Nu kan jag detta så här (Fyll i denna spalt efter sista lektionen)
Att uppfatta och ge exempel på samband mellan saker som jag lärt mig		INTE ALLS LITE MYCKET	INTE ALLS LITE MYCKET	INTE ALLS LITE MYCKET	INTE ALLS LITE MYCKET	INTE ALLS LITE MYCKET	INTE ALLS LITE MYCKET	INTE ALLS LITE MYCKET	INTE ALLS LITE MYCKET	____ ____ ____ ____	
Att presentera matematiska frågor och slutledningar.		INTE ALLS LITE MYCKET	INTE ALLS LITE MYCKET	INTE ALLS LITE MYCKET	INTE ALLS LITE MYCKET	INTE ALLS LITE MYCKET	INTE ALLS LITE MYCKET	INTE ALLS LITE MYCKET	INTE ALLS LITE MYCKET	____ ____ ____ ____	
Att använda olika strategier vid problemlösning.		**Poängtera att det handlar om att uppleva att man tränat dessa färdigheter. Inte att man måste kunna detta**		INTE ALLS LITE MYCKET	INTE ALLS LITE MYCKET	INTE ALLS LITE MYCKET	INTE ALLS LITE MYCKET	INTE ALLS LITE MYCKET	INTE ALLS LITE MYCKET	____ ____ ____ ____	
Att bedöma hur ändamålsenlighet rimligt mitt svar är		INTE ALLS LITE MYCKET	INTE ALLS LITE MYCKET	INTE ALLS LITE MYCKET	INTE ALLS LITE MYCKET	INTE ALLS LITE MYCKET	INTE ALLS LITE MYCKET	INTE ALLS LITE MYCKET	INTE ALLS LITE MYCKET	____ ____ ____ ____	
Att använda rätt begrepp och symbolerna.		INTE ALLS LITE MYCKET	INTE ALLS LITE MYCKET	INTE ALLS LITE MYCKET	INTE ALLS LITE MYCKET	INTE ALLS LITE MYCKET	INTE ALLS LITE MYCKET	INTE ALLS LITE MYCKET	INTE ALLS LITE MYCKET	____ ____ ____ ____	

Bilaga 4. Lärarinstruktioner för elevenkäten samt de fyra faktorerna i enlighet med Op't Eynde & De Cortes (2003) förklaring för lärarna.

LYSSNA PÅ MIG

Instruktioner för elevblankett

1. Det är en blankett per elev, eleven fyller i samma blankett varje gång
2. Det vore önskvärt att läraren samlade upp dem efter varje gång, så att de inte tappades bort.
3. Innan ni fyller i blanketten vore det, bra om ni tillsammans kunde gå igenom den och klargöra vad som avses med de olika påståendena, samt gå igenom hur den skall fyllas i.
4. Innan första lektionen, fyller eleverna i kolumnen ”jag kan det här”
5. Lektionerna är de vågräta spalterna, och kunskapskraven är de lodräta kolumnerna.
6. Efter varje lektion skall eleven ta ställning till de tio kunskapskrav som finns ordnade i vågräta kolumner under lektionen ni just haft.
7. Eleverna skall välja hur väl de upplevde att lektionen övade upp just den färdigheten och vad som hjälpte dem med deras inlärning
8. De skall välja en färg från trafikljuset samt välja en symbol, Viktigt att de enbart väljer endast en symbol och en färg per påstående! Kom ihåg att det finns tio påståenden att ta ställning till efter varje lektion.
9. Observera att det finns två sidor
10. Efter sisat lektionen skall eleverna räkna ihop hur mycket de upplevt att tränat sammanlagt på den färdigheten samt räkna ihop vad som hjälpt dem bäst i deras inlärning, Detta görs i summakolumnen
11. Efter detta samlar läraren ihop blanketterna.

Självutvärderingen som eleverna fyller i efter varje lektion är direkta citat ur läroplanens bedömningskriterier för vitsordet 8, så känn era fria att använda det materialet i er egen bedömning. Kan ju fungera väl som diskussionsunderlag eller som en del av den formativa bedömningen.

Vad avses med symbolerna

I dokumentet ombedes eleverna ta ställning till vad som hjälpte dem med deras undervisning. Ifall att det frågas närmare om vad som avses så följer här en kort förklaring på hur jag tänkt så att ni kan förklara det så lika som möjligt.

Jag själv: 

Avses elevens matematikkunskaper och intresse, det är alltså i första hand elevens egna redan existerande kunskaper och redan existerande intresse och motivation för matematik som hjälper hen med uppgiften.

Läraren: 

Med läraren här avses både lärarens förmåga att hjälpa med kognitiva problem så som att ställa ledandefrågor etc. Lärarens förmåga att motivera eleverna, genom att sporra dem att fortsätta och kämpa vidare utan att ge färdiga svar och lösningar. Lärarens förmåga till att lyssna på elevernas resonemang och det värde som uppstår genom ett visat intresse gentemot eleven och hens resonemang och svar.

Grupparbetet: 

Med grupparbete avses klasskompisarnas inverkan på inlärning, både förväntningar och antaganden de har på en. Men även tillfället att få diskutera och synliggöra matematiska föreställningar och missuppfattningar och klargöra dem genom diskussion.

Uppgiften: 

Med uppgiften avses en yttre motivation. Det vill säga ifall det i huvudsak var uppgiften i sig som var hjälpsam, antingen så att den var motiverande och rolig eller så att den var tillräckligt utmanade och tvingade eleven att anstränga sig produktivt.

Bilaga 4. Brev till vårdnadshavarna

Forskningslov för projektet Lyssna på mig

Matematik är ett dynamiskt ämne som går att finna överallt i samhället. Den nya läroplanen skapar möjligheter till en förbättrad undervisning i matematik. Trots det har det visat sig att lärare har haft svårigheter med att implementera nya undervisningsmetoder eftersom deras erfarenheter är mera traditionella och inte samstämmiga med nyare undervisningsmetoder i matematik.

En av de nyckelkunskaper som lärare kunde dra nytta av vore att lyssna på elevernas matematiska tankar. Lyssna på mig! -projektet är en uppföljning till en större internationell forskningen kring lärarens förmåga att lyssna. Målet med projektet är att hjälpa läraren att lägga märke till och ta tag i spontana situationer då elever uttrycker matematiska tankar.
I projektet skapas ett interventions material i samband med en pro gradu avhandling, som kommer att fungera som ett öppet fortbildningsmaterial för svenskspråkiga lärare. Interventions materialet består av matematikuppgifter för 8 lektioner för förskoleelever, första, fjärde, sjätte, åttonde och nionde klassister. Forskningen sker alltså under skoldagen som en del av elevernas vanliga matematiklektioner eller verksamhet (när det gäller förskolan) och i enlighet med Läroplanen för grundläggande utbildning (LP2014).

Elevmaterialet är:
1. Elevernas självutvärdering i förhållande till läroplanens målsättningar efter lektionerna (8st) samt videoinspelning under en del av lektioner (3st).
2. Elevernas syn på matematikinlärning (innan och efter)
3. Elevernas attityd till matematik (innan och efter)
4. Elevernas bakgrundsinformation (betyg etc)

Forskningsmaterial behandlas och förvaras ändamålsenligt och konfidentiellt i enlighet med god forskningsetik. Eleverna tilldelas ett id, som används genom hela forskningen för att på så sätt behandlas anonymt. Vårdnadshavarnas skriftliga medgivande till studien begärs. Forskningsresultaten rapporteras anonymt utan att uppge personuppgifter. I rapporteringen strävar studien till att skolorna inte skall gå att identifiera och rapportering överlag anger varken skolornas namn eller ort.

Det är frivilligt att delta i studien. Om eleven/vårdnadshavaren väljer att eleven inte ska delta i studien, är eleven med på lektioner men inga data samlas om hens deltagande. Eleven har även möjligheten att dra sig ut ur studien i vilket skede som helst av forskningen, alla data som berör den eleven raderas då från själva forskningen.

6.8.2018

Laura Tuohilampi	Sebastian Holsti
Universitetslektor, Helsingfors universitet	Studerande, Helsingfors universitet

UNIVERSITY OF HELSINKI

RETURNERAS TILL SKOLAN

____
Elevens namn

Får delta i studien JA / NEJ
Får videofilmas JA / NEJ

(Om ni väljer att eleven får videofilmas innebär det även att eleven under forskningens gång inte längre kan förbli anonym för forskarna då informationen från de anonyma enkätundersökningarna skall kopplas ihop med videoinspelningarna. I resultatredovisningen och rapporteringen anonymiseras eleverna naturligtvis igen och personuppgifter samt övrig information som möjliggör identifiering av enskilda personer raderas.)

Ort/Datum: ___________________________

________________________________ ________________________________
Vårdnadshavarens underskrift Namnförtydligande