



**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA**

**DII - DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA INDUSTRIALE**

Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale

**MODELLAZIONE FEM DELLE VIBRAZIONI DI UN  
DISCO PORTA PALE E RELATIVA VALIDAZIONE  
SPERIMENTALE**

Relatore Italiano: Prof. Ugo Galvanetto

Relatore Estero: Prof. Philip Bonello

Laureando: Giovanni Solivo

Matricola: 1153486

ANNO ACCADEMICO 2018–2019



# Indice

<b>Elenco delle figure</b>	<b>V</b>
<b>Elenco delle tabelle</b>	<b>IX</b>
<b>Abstract</b>	<b>1</b>
<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
<b>1 Studio preliminare del disco porta pale e sua realizzazione CAD</b>	<b>5</b>
1.1 Manifattura del disco porta pale . . . . .	5
1.2 Materiale del disco porta pale . . . . .	7
1.3 Costruzione del modello CAD del disco porta pale . . . . .	9
1.4 Realizzazione del modello FEM del disco porta pale . . . . .	11
<b>2 Fondamenti di vibrazioni meccaniche e di analisi modale</b>	<b>13</b>
2.1 Introduzione analisi agli elementi finiti: risoluzione numerica mediante approccio modale . . . . .	13
2.2 Approccio modale per la risoluzione del problema FEM . . . . .	15
2.2.1 Vibrazioni di sistemi a $N > 1$ gdl . . . . .	15
2.2.2 Vibrazioni libere non smorzate . . . . .	19
2.2.3 Proprietà di ortogonalità tra autovettori . . . . .	21
2.2.4 Matrice modale . . . . .	23
2.3 Analisi modale sperimentale . . . . .	26
2.3.1 Fondamenti teorici dell'analisi modale . . . . .	26
2.3.2 Metodologie di analisi modale . . . . .	30
2.3.3 Matrice $H(\omega)$ . . . . .	33
2.3.4 Determinazione della Matrice $H(\omega)$ per sistemi reali . . . . .	35
2.4 Vibrazioni forzate e smorzate nei sistemi ad 1 gdl . . . . .	36

<b>3</b>	<b>Test d’impatto: caso blisk non vincolato</b>	<b>39</b>
3.1	Introduzione . . . . .	39
3.2	Acquisizione sperimentale . . . . .	40
3.3	Validazione del modello FEM . . . . .	41
<b>4</b>	<b>Test d’impatto: caso blisk vincolato</b>	<b>45</b>
4.1	Introduzione . . . . .	45
4.2	Acquisizione sperimentale . . . . .	46
4.3	Validazione del modello FEM . . . . .	48
<b>5</b>	<b>Modi di Vibrare: blisk vincolato</b>	<b>51</b>
5.1	Introduzione . . . . .	51
5.2	Validazione dei modi di vibrare . . . . .	55
<b>6</b>	<b>Acquisizione dei modi di vibrare mediante estensimetri</b>	<b>59</b>
6.1	Introduzione . . . . .	59
6.2	Applicazione dell’eccitazione mediante shaker . . . . .	61
6.3	Scelta, dislocazione e incollaggio estensimetri . . . . .	61
6.4	Validazione del modello FEM tramite estensimetri . . . . .	64
	<b>Conclusioni e sviluppi futuri</b>	<b>69</b>
<b>A</b>	<b>Validazione del modello FEM della piastra e calibrazione estensimetrica</b>	<b>71</b>
A.0.1	Calibrazione degli estensimetri . . . . .	73
<b>B</b>	<b>Strumentazione e software utilizzati</b>	<b>77</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>85</b>
	<b>Ringraziamenti</b>	<b>89</b>

# Elenco delle figure

1.1	Modello utilizzato di disco porta pale . . . . .	6
1.2	Messa in tavola del disco porta pale . . . . .	9
1.3	Modello CAD del disco porta pale . . . . .	10
1.4	Schema a blocchi in ambiente Workbench . . . . .	11
1.5	Modelli FEM: configurazione non vincolata e configurazione vincolata . . . . .	12
1.6	Modello reale: configurazione operativa . . . . .	12
2.1	Modello continuo - Modello discreto - [22] . . . . .	14
2.2	Sistema discreto massa-molla-smorzatore - [3] . . . . .	15
2.3	Sistema discreto a N gdl - [5] . . . . .	19
2.4	Sistema a 1 gdl - [13] . . . . .	26
2.5	Sistema a N gdl - [13] . . . . .	28
2.6	Esempio di acquisizione del segnale derivante da test d'impatto - [18] . . . . .	30
2.7	Esempio di impulso ideale - [21] . . . . .	31
2.8	Esempio di impulso reale - [13] . . . . .	31
2.9	Esempio di eccitazione di tipo sweep - [18] . . . . .	32
2.10	Esempio di discretizzazione di un sistema meccanico - [20] . . . . .	35
2.11	Sistema a 1 gdl - [3] . . . . .	36
3.1	Spugna e martello strumentale . . . . .	39
3.2	Acquisizione della funzione di trasferimento: caso blisk non vincolato . . . . .	40
3.3	Frequenze naturali: caso blisk non vincolato . . . . .	41
3.4	Funzioni di trasferimento del blisk non vincolato . . . . .	42
4.1	Configurazione sperimentale: blisk vincolato . . . . .	45
4.2	Acquisizione della funzione di trasferimento: caso blisk vincolato . . . . .	46
4.3	Funzione di trasferimento del blisk vincolato: diagramma del modulo . . . . .	47
4.4	Funzione di trasferimento del blisk vincolato: diagramma della fase . . . . .	47
4.5	Frequenze naturali: caso blisk vincolato . . . . .	48

4.6	Funzioni di trasferimento del blisk vincolato . . . . .	49
5.1	Punti d'acquisizione delle FDT: configurazione non utilizzata . . . . .	52
5.2	Punti d'acquisizione delle FDT: configurazione utilizzata . . . . .	52
5.3	Punti d'acquisizione delle FDT: configurazione usata per determinare solo i modi di vibrare torsionali . . . . .	53
5.4	Frequenze di risonanza sperimentali: blisk vincolato . . . . .	55
5.5	Modi di vibrare sperimentali: animazioni tridimensionali . . . . .	56
5.6	Modi di vibrare derivanti dall'analisi FEM: animazioni tridimensionali . . . . .	57
6.1	Apparato sperimentale per acquisizioni estensimetriche . . . . .	60
6.2	Configurazione operativa di ancoraggio tra shaker e blisk . . . . .	61
6.3	Esempio di estensimetri monoassiali - [19] . . . . .	62
6.4	Disposizione operativa dei 4 estensimetri . . . . .	63
6.5	Primo modo di vibrare flessionale: primo picco . . . . .	64
6.6	Primo modo di vibrare flessionale: secondo picco . . . . .	64
6.7	Primo modo di vibrare assiale . . . . .	65
6.8	Secondo modo di vibrare flessionale: primo picco . . . . .	66
6.9	Secondo modo di vibrare flessionale: secondo picco . . . . .	66
6.10	Rumore connesso all'apparato di acquisizione . . . . .	67
A.1	Configurazione operativa per l'acquisizione del segnale vibratorio della piastra	71
A.2	Fattore di conversione tra volt e la deformazione effettiva della piastra . . . . .	73
A.3	Fattore di conversione tra volt e lo sforzo effettivo della piastra . . . . .	74
A.4	Fattore di conversione tra volt e la deformazione effettiva del blisk . . . . .	74
A.5	Fattore di conversione tra volt e lo sforzo effettivo del blisk . . . . .	75
B.1	Laboratorio di analisi modale presso il dipartimento MACE dell'Università di Manchester . . . . .	77
B.2	Tavolo sperimentale . . . . .	78
B.3	Strumentazione utilizzata per effettuare il test d'impatto: martello strumentale e accelerometro . . . . .	79
B.4	Analizzatore di spettro e sua interfaccia grafica: SignalCalc . . . . .	80
B.5	Interfaccia grafica del software per la validazione dei modi di vibrare: MEsco- peVES . . . . .	81
B.6	Shaker e sua interfaccia grafica: SignalCalc . . . . .	82
B.7	Interfaccia grafica del software Scitek atto all'acquisizione del segnale estensi- metrico . . . . .	83

B.8	Strumentazione utilizzata per l'eccitazione mediante getto d'aria . . . . .	84
-----	---	----



# Elenco delle tabelle

1.1	Composizione chimica R.R. 58 - [14], [15], [16], [17] . . . . .	7
1.2	Proprietà fisiche R.R. 58 - [14], [15], [16], [17] . . . . .	8
1.3	Proprietà meccaniche R.R. 58 - [14], [15], [16], [17] . . . . .	8
A.1	Risultati teorici e sperimentali delle frequenze naturali della piastra . . . . .	72



# Abstract

In questo elaborato si sono studiate le vibrazioni di un disco porta pale. I test sperimentali sono serviti a validare il modello agli elementi finiti del disco palare. Il progetto svolto ha validato il modello FEM utilizzando vari metodi (*test d'impatto, misurazioni estensimetriche ed eccitazione mediante air jet*) con l'ausilio di accelerometri ed estensimetri. L'elaborato presenta una prima parte nella quale si è analizzata la tipologia di componente meccanico e la sua applicazione reale, nella seconda invece lo si è studiato dal punto di vista della geometria e del materiale con cui è stato realizzato. Grazie alla messa in tavola del *blisk* si è potuto riprodurlo tramite software CAD nel modo più accurato possibile. Il modello CAD è stato importato in un software agli elementi finiti dove è stato analizzato dal punto di vista delle frequenze naturali e dei modi di vibrare. In parallelo si sono svolti numerosi test sperimentali in modo da avere tutti i dati vibratorii necessari alla validazione del modello FEM. La validazione delle frequenze di risonanza e dei modi di vibrare ha richiesto l'aiuto di numerosi software e hardware, i quali sono stati trattati nel dettaglio nella seguente elaborato di tesi.



# Introduzione

I modelli agli elementi finiti sono strumenti software molto efficienti per predire il comportamento delle strutture, in quanto dopo la loro validazione è possibile sfruttarli per ottenere soluzioni con qualsiasi condizione al contorno imposta senza dover utilizzare ogniqualvolta gli strumenti di misura. Ciò ci fa capire come utilizzare modelli agli elementi finiti per avere soluzioni in tempi ragionevoli e senza utilizzare apparecchiature che talvolta risultano particolarmente costose. Tuttavia il modello FEM deve essere validato al fine di avere dei risultati affidabili e ciò richiede un attento ed accurato lavoro sperimentale. Lo scopo di questo lavoro di tesi è stato quello di validare il modello agli elementi finiti rappresentante un disco porta pale, più comunemente chiamato *blisk*. Il lavoro sperimentale e numerico è stato svolto presso il dipartimento di ingegneria meccanica, aerospaziale e civile dell'Università di Manchester (MACE), sotto la supervisione del Prof. Bonello e del dottorando Mohamed Mohamed. Tutte le foto delle attrezzature sono state realizzate presso i laboratori di analisi modale dell'università. Il mio lavoro di tesi rientra in un più vasto progetto che il Prof. Bonello e il suo dottorando Mohamed Mohamed stanno portando avanti da alcuni anni. In particolare il macro-progetto riguarda sempre la validazione FEM, ma utilizzando approcci non invasivi sul pezzo stesso. Questi sono approcci non convenzionali, che sfruttano ad esempio sensori ottici per la determinazione delle vibrazioni delle palette del disco porta pale. Il progetto da me svolto rientra negli approcci convenzionali, in particolare ho validato il modello FEM utilizzando vari metodi (*test d'impatto*, *misurazioni estensimetriche* ed *eccitazione mediante air jet*) con l'ausilio di accelerometri ed estensimetri. Scendendo più nel particolare, in tale progetto si sono validate le frequenze naturali per la condizione non vincolata e vincolata e modi di vibrare solo per la condizione vincolata. La validazione delle frequenze naturali è ricaduta nel range 0-2000 Hz, in quanto le applicazioni aeronautiche non si spingono tanto oltre tale soglia. Il modello FEM è stato realizzato utilizzando il software Ansys 16.1, invece per la validazione del modello FEM si sono utilizzati i seguenti software: *SignalCalc* (test d'impatto e calibrazione estensimetri), *ME'scopeVES 5.0* (validazione modi di vibrare), *SCITEK* (misure estensimetriche).



# Capitolo 1

## Studio preliminare del disco porta pale e sua realizzazione CAD

Il termine usato per indicare il disco porta pale è *blisk*. Questo termine deriva dalla fusione di due parole inglesi: *blade* (paletta) e *disk* (disco). Il *blisk* non è altro che un rotore con palette integrali. La tecnologia di produzione di tali componenti prende analogamente il nome di tecnologia *blisk*. Tale tecnologia è nata per produrre componenti che possiedano elevato rapporto resistenza-peso e con notevole stabilità aerodinamica (incremento di efficienza anche dell'8% in quanto si hanno meno discontinuità sulle superfici), ma soprattutto per evitare le problematiche legate all'incremento degli sforzi in corrispondenza delle basi della paletta (attacchi convenzionali sono quelli a coda di rondine) e agli elevati momenti d'inerzia legati ai componenti rotorici del compressore. In altre parole, la tecnologia *blisk* è nata soprattutto per evitare cricche nella sezione di incastro della paletta sul disco. Sembra che la tecnologia *blisk* comporti solamente dei vantaggi, ma è importante ricordare che è una tecnologia molto costosa poiché, se la singola pala presenta danni estesi (per piccoli danni è possibile rilavorare la superficie della singola pala danneggiata), è necessaria la sostituzione completa di tutto il componente della turbomacchina. Le riparazioni sono quindi di gran lunga più costose rispetto ai rotori realizzati convenzionalmente.

### 1.1 Manifattura del disco porta pale

Lo sviluppo di rotori a palette integrali è stato possibile grazie a particolari tecnologie di lavorazione dei materiali metallici. In particolare il disco porta pala può essere ottenuto mediante tre differenti tecnologie:

- Lavorazione mediante macchine utensili (macchine a controllo numerico - tecnica più semplice - usata soprattutto per dischi in lega di titanio e alluminio (si veda [2])). In particolare i rotori possono essere ottenuti per fresatura (asportazione di materiale) partendo da un singolo blocco, oppure mediante colata in stampi.
- ECM (electrochemical machining): lavorazione elettrochimica usata soprattutto per dischi realizzati in superlega. È un processo di lavorazione più veloce, più preciso e con finitura superficiale migliore della fresatura.
- LFW (linear friction welding). Viene usata per realizzare il *blisk* in composito a matrice metallica.

Il disco porta pale utilizzato in questo progetto è stato realizzato in lega di alluminio e mediante macchine utensili. Dalla Figura 1.1 è possibile vedere come il *blisk* presenti 24 palette non svergolate e non rastremate, 8 fori passanti disposti a  $45^\circ$  l'uno dall'altro (localizzati nella parte più esterna del disco) ed infine un foro passante centrale a cui, tramite l'utilizzo di una vite, si è vincolato il *blisk* al blocco di supporto.



Figura 1.1: Modello utilizzato di disco porta pale

## 1.2 Materiale del disco porta pala

Il disco porta pala è stato realizzato in lega di alluminio, in particolare la R.R. 58 (Aluminum). La lega R.R. 58 (anche detta lega 2618) viene utilizzata nel settore aerospaziale (usata per parti rotanti di compressori e giranti), della difesa e per componenti ad alte prestazioni per l'automobilismo sportivo. Essendo una lega di alluminio della serie 2000, il principale alligante (2%) è il rame, che ne conferisce elevata resistenza meccanica, rigidità superiore a tutte le altre leghe e buona saldabilità. Invece il magnesio (1,5%) accelera ed incrementa il processo di invecchiamento a temperatura ambiente, ma aumenta la resistenza alla corrosione in ambiente alcalino e in mare, inoltre aumenta il grado di incrudimento per cui il materiale metallico risulta rafforzato in seguito a una deformazione plastica a freddo. Tale lega permette il mantenimento delle caratteristiche meccaniche a temperature superiori o uguali a 200°C e ridotta dilatazione termica ad alta temperatura (lega utilizzata per impieghi ad alte temperature). Si riportano ora le proprietà chimiche di tale lega, in particolare osserviamo la Tabella 1.1 che riporta in percentuale la composizione chimica, in particolare:

Tabella 1.1: Composizione chimica R.R. 58 - [14], [15], [16], [17]

Elementi	% peso
Alluminio	92.4 ÷ 94.9
Rame	1.9 ÷ 2.7
Magnesio	1.3 ÷ 1.8
Ferro	0.9 ÷ 1.3
Nickel	0.9 ÷ 1.2
Silicio	0.1 ÷ 0.25
Titanio	0.04 ÷ 0.1
Zinco	0 ÷ 0.1

Notiamo come, essendo una lega di alluminio della serie 2000, l'alligante principale è il rame ma sia il magnesio che il ferro sono presenti in percentuali non trascurabili. Di fondamentale importanza, dal punto di vista prestazionale e operativo, sono anche le proprietà fisiche e meccaniche. Tramite quest'ultime si è potuto implementare tale materiale in ambiente Ansys.

Si riportano le principali proprietà fisiche nella seguente Tabella 1.2, in particolare:

Tabella 1.2: Proprietà fisiche R.R. 58 - [14], [15], [16], [17]

Proprietà	Valore
Densità	$2.6 \div 2.8 \frac{g}{cm^3}$
Modulo di elasticità	$70 \div 80 GPa$
Modulo a taglio	$25 \div 30 GPa$
Intervallo di fusione	$510 \div 560 ^\circ C$
Coefficiente di espansione termica lineare	$21 \div 22 e-6 \frac{1}{K}$

Si riportano le principali proprietà meccaniche nella seguente Tabella 1.3, in particolare:

Tabella 1.3: Proprietà meccaniche R.R. 58 - [14], [15], [16], [17]

Proprietà	Valore
<b>Limite di snervamento Rs 0.1</b>	<b>294 MPa</b>
Limite di snervamento Rs 0.2	$350 \div 370 MPa$
Limite di snervamento tangenziale	$250 \div 270 MPa$
Carico di rottura	$410 \div 420 MPa$
Coefficiente di Poisson	0.33
Durezza Brinell	$120 \div 130 HB$
Allungamento a rottura	$5 \div 7 \%$

Notiamo in grassetto il limite di snervamento ad una deformazione percentuale dello 0.1%. Tale valore è stato trovato nel disegno tecnico fornito dell'azienda che ha prodotto il *blisk*. Grazie alla meticolosa conoscenza delle sue proprietà fisiche e meccaniche è stato possibile riprodurre in ambiente Ansys tale materiale. In particolare, una volta riprodotto il materiale si è realizzato il controllo sulla massa, ovvero si è confrontata la massa derivante dal modello FEM con quella derivante da strumento di misurazione della massa. Tale controllo ha permesso di verificare l'uguaglianza della massa ricavata nei due modi. Ciò permette di affermare come la densità impostata sia corretta. La densità del materiale e il modulo di elasticità sono le due grandezze fisiche maggiormente rilevanti per un'analisi vibratoria. Tramite l'utilizzo di una bilancia digitale è stata verificata l'effettiva massa del *blisk*, in particolare  $M_{blisk} = 816.8$  grammi. Tramite tale dato, variando la densità nel modello FEM nel range indicato in Tabella 1.2, è stato possibile giungere all'uguaglianza della massa tra modello reale e modello agli elementi finiti.

## 1.3 Costruzione del modello CAD del disco porta pale

Il *blisk* è stato realizzato in collaborazione con l'azienda *Rotadata*. È una delle aziende leader a livello mondiale nell'ambito delle turbomacchine. La sede inglese si trova a Derby, capoluogo della contea del Derbyshire. Tale azienda ha provveduto alla realizzazione del disegno tecnico del *blisk* e grazie a quest'ultimo si è realizzato il modello CAD del disco porta pale. Si riporta in Figura 1.2 il disegno tecnico con le relative quote dimensionali, in particolare:

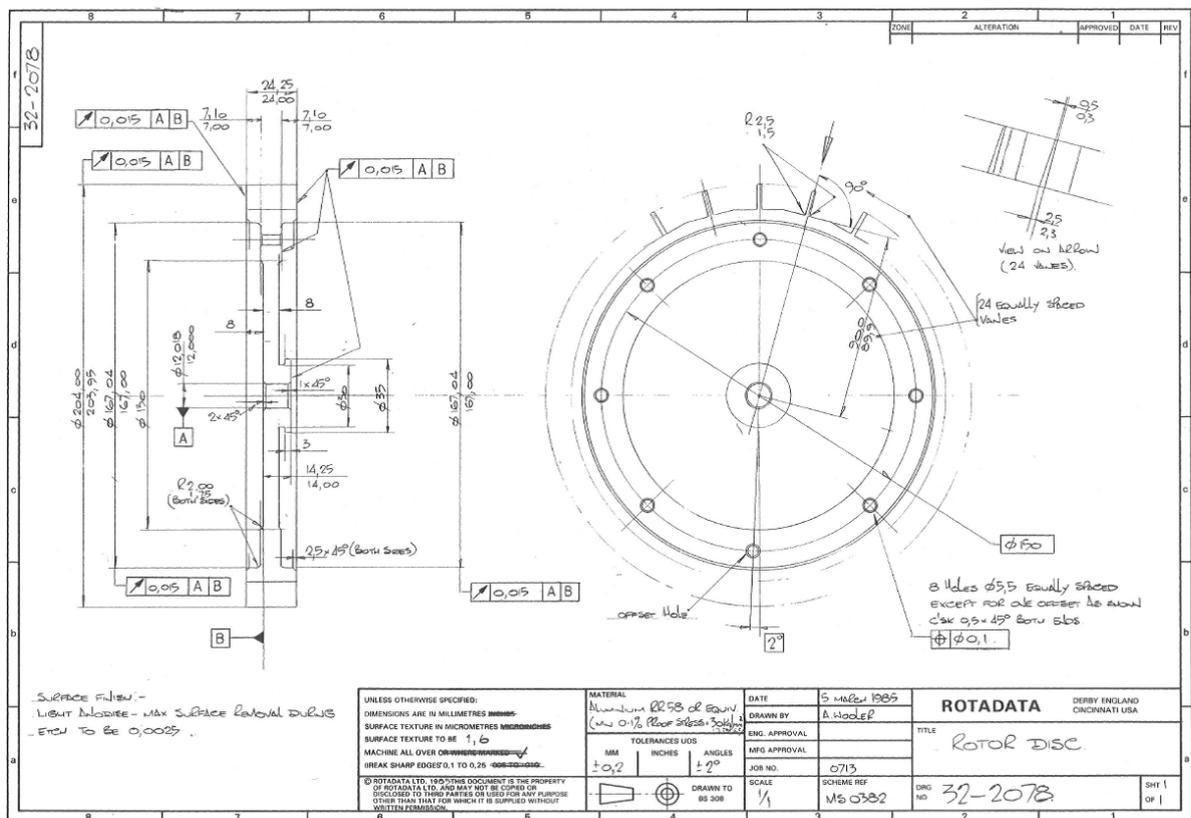


Figura 1.2: Messa in tavola del disco porta pale

Come già riportato, il *blisk* presenta 24 palette equamente spaziate, 8 fori passanti all'estremità e uno centrale. Dal disegno tecnico è possibile leggere come il *blisk* sia stato soggetto a processi di finitura superficiale come quello di anodizzazione (utile a prevenire la corrosione superficiale) e asportazione di materiale. Dopo un'attenta analisi del disegno tecnico è stato possibile osservare due aspetti. Il primo è legato alla forma delle palette, in particolare, nel disegno tecnico le palette sono rastremate, cioè muovendosi dalla faccia superiore a quella inferiore lo spessore va diminuendo, la palette tende ad assottigliarsi (si veda in alto a destra nella Figura 1.2). Nella realtà le palette del *blisk* non presentano nessun assottigliamento, quindi il modello CAD non ha tenuto conto della rastremazione delle palette (questa approssimazione riscontrata nel pezzo reale non ha alcuna influenza sull'analisi vibratoria). Il secondo aspetto riguarda la dislocazione

dei fori passanti localizzati nella parte più esterna del disco. In particolare nella messa in tavola è possibile notare come il foro in basso non sia perfettamente allineato con il suo speculare in quanto è scostato angularmente di  $2^\circ$  dall'asse di simmetria verticale del *blisk*. Anche in tal caso nella realtà i fori passanti sono tutti speculari quindi senza alcun scostamento angolare, in altre parole sono tutti simmetrici rispetto ai due assi di simmetria, asse x e y. Nella Figura 1.3 vediamo il modello CAD, realizzato in ambiente Solidworks, del *blisk* utilizzato per l'analisi vibratoria.

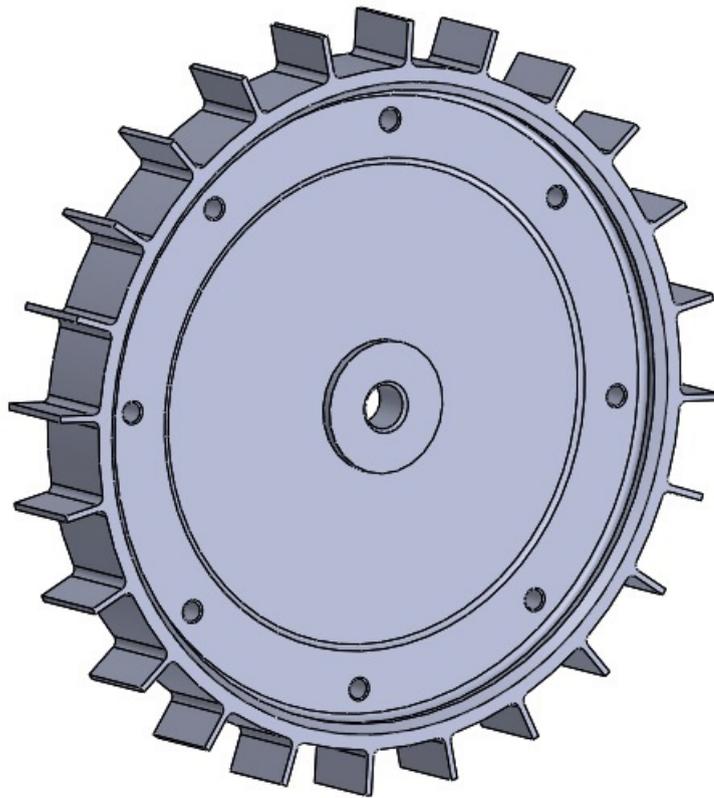


Figura 1.3: Modello CAD del disco porta pale

## 1.4 Realizzazione del modello FEM del disco porta pale

Il software scelto per l'analisi agli elementi finiti finalizzato all'indagine vibratoria è stato Ansys 16.1. In particolare, per ciascuna differente condizione al contorno si è realizzato uno studio modale e uno armonico. In Figura 1.4 vediamo il classico schema a blocchi realizzato in ambiente Workbench, nello specifico:

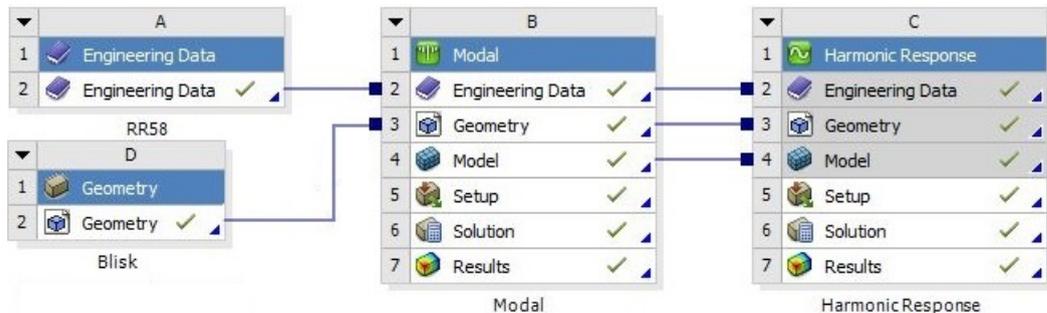


Figura 1.4: Schema a blocchi in ambiente Workbench

Vediamo come, a partire dai blocchetti di sinistra, si siano in un primo momento definiti la tipologia di materiale associandolo alla geometria del *blisk*. Il materiale è stato implementato direttamente in Ansys, invece la geometria creata in Solidworks è stata importata in ambiente Ansys tramite l'estensione *Standard Triangulation Language*, più comunemente noto come formato *.STL*. Per quanto riguarda il materiale si sono definite le seguenti proprietà nel menù *Engineering Data*:

- Densità:  $2821.5 \frac{kg}{m^3}$
- Modulo di Young:  $77000 MPa$
- Coefficiente di Poisson: 0.33

Inserendo queste tre proprietà in maniera automatica Ansys calcola il modulo di comprimibilità e il modulo a taglio che risultano rispettivamente  $7.549e+10 Pa$  e  $2.894e+10 Pa$ . I valori inseriti sono stati accuratamente individuati tenendo presente due aspetti: il primo riguarda le limitazioni della lega di alluminio presentate nel Capitolo 1.2, mentre il secondo riguarda il costante controllo che la massa ricavata con Ansys fosse la medesima di quella trovata con strumento di misurazione di massa. Dopo la definizione del materiale, questo è stato associato alla geometria del *blisk* in modo da avere il modello pronto per le successive analisi. Il modello del *blisk* non vincolato ha subito dapprima un'analisi modale e armonica e successivamente, dopo averlo vincolato al blocco di elevata inerzia, ha subito le medesime analisi svolte per il caso *blisk* non vincolato. In seguito si è riportata la Figura 1.5 dei modelli utilizzati per l'analisi,

in particolare a sinistra si può vedere il modello utilizzato per l'analisi non vincolata, invece a destra il modello utilizzato per l'analisi vincolata.

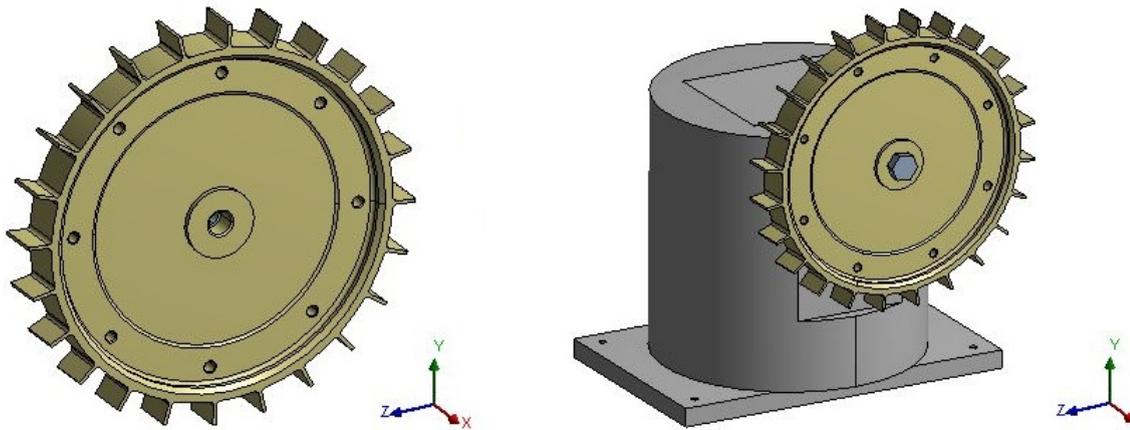


Figura 1.5: Modelli FEM: configurazione non vincolata e configurazione vincolata

Infine si è riportata in Figura 1.6 la configurazione reale del *blisk* vincolato. È possibile vedere come la configurazione FEM vincolata rispecchi appieno quella reale. In particolare si possono vedere: il blocco di elevata inerzia, il *blisk* e la vite di ancoraggio.

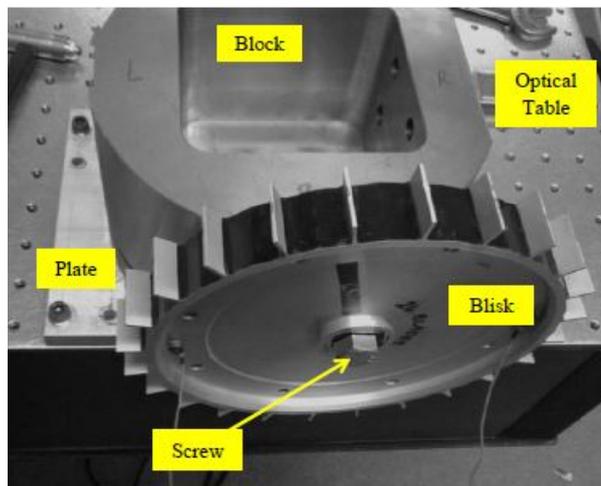


Figura 1.6: Modello reale: configurazione operativa

In conclusione si sottolinea come, oltre ad aver vincolato il *blisk* al blocco, si sia vincolato anche il blocco alla tavola sperimentale. Ciò fa capire come analizzare la condizione vincolata sia stata la parte più complessa e onerosa di tale progetto, in quanto vi sono state molteplici variabili connesse ai contatti tra i vari componenti da tenere sotto controllo.

## Capitolo 2

# Fondamenti di vibrazioni meccaniche e di analisi modale

### 2.1 Introduzione analisi agli elementi finiti: risoluzione numerica mediante approccio modale

Il metodo agli elementi finiti, classicamente conosciuto nella sua versione all'inglese come FEM -Finite Element Method-, è un metodo numerico molto flessibile in quanto può essere applicato in diversi campi dell'ingegneria, come ad esempio: la fluidodinamica, la meccanica dei solidi, la trasmissione del calore e la meccanica delle vibrazioni. In tale introduzione verranno esaminati gli aspetti essenziali di tale metodo numerico, applicato nello specifico allo studio delle vibrazioni. Il metodo agli elementi finiti è una tecnica numerica che prevede la ricerca di soluzioni approssimate a problemi descritti da equazioni differenziali alle derivate parziali (equazioni d'onda dello studio delle vibrazioni dei sistemi continui), riducendole in equazioni più semplici da implementare, quali sono le equazioni algebriche. Tale metodo viene implementato in maniera automatica nei principali codici di calcolo disponibili in commercio. Da un punto di vista più pratico il metodo FEM consente di semplificare il modello reale, di predire cioè il comportamento di un sistema continuo ad infiniti gradi di libertà, trasformandolo in uno discreto, ovvero con gradi di libertà finiti. Tali elementi finiti vengono collegati tra loro in corrispondenza dei nodi. Gli spostamenti nodali rappresentano le coordinate indipendenti del sistema, quindi se abbiamo un sistema tridimensionale avente  $N$  nodi, allora il modello FEM complessivo avrà  $3N$  gradi di libertà, in quanto nello spazio ad ogni nodo sono associati 3 gradi di libertà, le tre traslazioni.

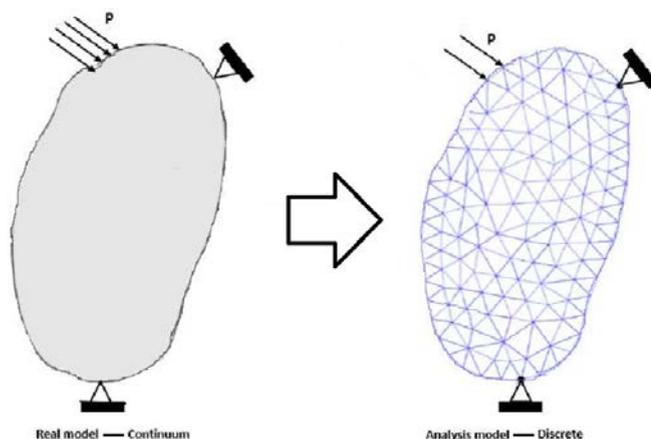


Figura 2.1: Modello continuo - Modello discreto - [22]

Vediamo in Figura 2.1 come i carichi e i vincoli nella configurazione discreta siano applicati ai nodi e non agli elementi. Tale osservazione permette di capire più facilmente come la deformazione del modello discreto sia legata alla deformazione tra i vari nodi. Inoltre tale deformazione viene considerata funzione degli spostamenti nodali e si descrive tramite opportune *funzioni di forma*. Le funzioni di forma vengono scelte in modo tale da far mantenere inalterate le proprietà di distribuzione di massa e di elasticità proprie del continuo. Le funzioni di forma legano gli spostamenti nel generico punto dell'elemento finito agli spostamenti nodali. Tali funzioni di forma sono dei polinomi che nella maggior parte delle applicazioni si presentano nella forma lineare, in quanto si vuole avere un costo computazionale contenuto e giungere al risultato richiesto in tempi di calcolo contenuti. Esistono casi particolari nei quali è prevista l'applicazione di funzioni di forma di ordine superiore. In base alla funzione di forma scelta si avranno delle specifiche matrici di massa e di rigidezza per gli elementi finiti. Nello specifico del presente progetto di tesi si sono utilizzati elementi tridimensionali tetraedrici con funzioni di forma lineari. Infine si può intuitivamente capire come al crescere del numero di nodi, ovvero infittendo il reticolo/mesh, la soluzione approssimata sarà migliore. A tal proposito è importante sottolineare come si debba trovare un compromesso tra dettaglio della mesh e tempo di calcolo della soluzione, in quanto è possibile giungere ad un'accuratezza della soluzione anche non avendo mesh troppo raffinate. Concludendo, il sistema completo sarà a sua volta caratterizzato da una matrice di massa e rigidezza ottenute considerando tutte le matrici di massa e rigidezza di tutti gli elementi presenti nel sistema discreto.

## 2.2 Approccio modale per la risoluzione del problema FEM

### 2.2.1 Vibrazioni di sistemi a $N > 1$ gdl

È importante capire il motivo per il quale si è risolto il problema agli elementi finiti utilizzando l'approccio modale. Ora verrà presentata la trattazione teorica di un sistema discreto a 2 gdl, in cui si potrà capire perché l'approccio modale è quello più rapido e semplice. Ovviamente i concetti teorici che affronteremo potranno essere generalizzati per strutture finite come il *blisk* e quindi strutture aventi infiniti gradi di libertà.

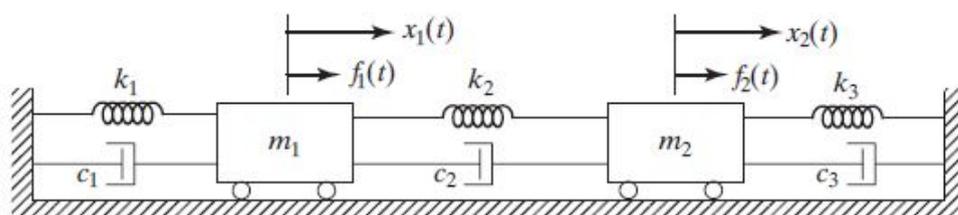


Figura 2.2: Sistema discreto massa-molla-smorzatore - [3]

Si procede ora con la trattazione newtonina e lagrangiana del problema delle vibrazioni del sistema a 2 gdl. Successivamente verranno presentate in forma matriciale le equazioni del moto di tale sistema. Per giungere alla scrittura della matrice modale si prenderà in considerazione un caso più semplice, in particolare un sistema a  $N > 1$  gdl non smorzato. Infine si vedrà come la matrice modale diagonalizzi le matrici di massa e rigidità; le equazioni del problema delle vibrazioni saranno quindi disaccoppiate e risulteranno conseguentemente più facili da risolvere.

La trattazione newtoniana prevede l'applicazione della prima equazione cardinale, ovvero l'equazione traslazionale, l'equazione di Newton. In particolare si studia lo schema in Figura 2.2 considerando il primo carrello e il secondo carrello operanti singolarmente. Si consideri il primo carrello, si assuma  $x_1 > 0$  verso positivo dello spostamento assoluto e  $x_1 - x_2 > 0$  verso positivo dello spostamento relativo, quindi si ottiene:

$$m_1 \ddot{x}_1 = -c_1 \dot{x}_1 - c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k_1 x_1 - k_2 (x_1 - x_2) + F_1(t)$$

da cui:

$$m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2) \dot{x}_1 - c_2 \dot{x}_2 + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 = F_1(t)$$

Si consideri il secondo carrello, si assuma  $x_2 > 0$  verso positivo dello spostamento assoluto e

$x_2 - x_1 > 0$  verso positivo dello spostamento relativo, quindi si ottiene:

$$m_2 \ddot{x}_1 = -c_3 \dot{x}_2 - c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - k_3 x_2 - k_2 (x_2 - x_1) + F_2(t)$$

da cui

$$m_2 \ddot{x}_2 + (c_2 + c_3) \dot{x}_2 - c_2 \dot{x}_1 + (k_2 + k_3) x_2 - k_2 x_1 = F_2(t)$$

in forma matriciale il sistema sarà:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

In tale sistema di equazioni sono chiaramente distinguibili le tre matrici che caratterizzano il sistema meccanico, in particolare: la matrice di massa, la matrice di smorzamento e la matrice di rigidità. Tale sistema di equazioni sarà analogo anche nel caso di sistema a  $N > 2$  gradi di libertà con matrici via via sempre più grandi. Per sistema a  $N \gg 1$  gradi di libertà risulta più conveniente l'approccio lagrangiano, ovvero usando le cosiddette equazioni di Lagrange.

Per un sistema meccanico come quello rappresentato nello schema in Figura 2.2, avente vincoli lisci e olonomi, le equazioni di Lagrange si presentano nella seguente forma:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k} = \Psi_k \quad (2.2)$$

dove  $L$  è la funzione di Lagrange, ovvero  $L = E_k - E_p$  ( $E_p$  elastica o gravitazionale);  $D$  è la funzione di dissipazione ( $D$  rappresenta la potenza dissipata in tutti gli ammortizzatori presenti nel sistema);  $q_k$  sono le coordinate generalizzate e  $\dot{q}_k$  derivate delle coordinate generalizzate;  $\Psi_k$  è la  $k$ -esima componente lagrangiana della sollecitazione, in particolare:

$$\Psi_k = \sum_{i=1}^r \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{P}_i}{\partial q_k}$$

dove  $P_i$  è il punto di applicazione della forza e  $\frac{\partial \vec{P}_i}{\partial q_k}$  è la derivata dello spostamento del punto di applicazione della  $i$ -esima forza rispetto alla  $k$ -esima coordinata generalizzata.

Andando ad applicare tale approccio al sistema in Figura 2.2 si ottiene:

$$E_k = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$$

$$E_p = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2} k_3 x_2^2$$

da cui si ottiene:

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k_1x_1^2 - \frac{1}{2}k_2(x_1 - x_2)^2 - \frac{1}{2}k_3x_2^2 \quad (2.3)$$

$$D = \frac{1}{2}c_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2 + \frac{1}{2}c_3\dot{x}_1^2 \quad (2.4)$$

Sviluppando per ogni grado di libertà i vari termini dell'equazione di Lagrange si ottiene per il primo grado di libertà:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m_1\ddot{x}_1 \quad \frac{\partial L}{\partial x_1} = -k_1x_1 - k_2(x_1 - x_2) \quad \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_1} = c_1\dot{x}_1 + c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$$

Per il secondo grado di libertà si ottiene:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = m_2\ddot{x}_2 \quad \frac{\partial L}{\partial x_2} = k_2(x_1 - x_2) - k_3x_2 \quad \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_2} = -c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + c_3\dot{x}_2$$

Dal punto di vista delle sollecitazioni abbiamo:

$$\vec{F}_1 = F_1\hat{i} \quad \partial\vec{P}_1 = \partial P_1\hat{i}$$

$$\vec{F}_2 = F_2\hat{i} \quad \partial\vec{P}_2 = \partial P_2\hat{i}$$

quindi si ottiene:

$$\Psi_1 = F_1 \frac{\partial P_1}{\partial q_1} + F_2 \frac{\partial P_2}{\partial q_2} = F_1 \frac{\partial x_1}{\partial x_1} + F_2 \frac{\partial x_2}{\partial x_1} = F_1$$

analogamente:

$$\Psi_2 = F_1 \frac{\partial P_1}{\partial q_2} + F_2 \frac{\partial P_2}{\partial q_2} = F_1 \frac{\partial x_1}{\partial x_2} + F_2 \frac{\partial x_2}{\partial x_2} = F_2$$

Infine le equazioni risulteranno:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (c_1 + c_2)\dot{x}_1 - c_2\dot{x}_2 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = F_1 \\ m_2\ddot{x}_2 + (c_2 + c_3)\dot{x}_2 - c_2\dot{x}_1 + (k_2 + k_3)x_2 - k_2x_1 = F_2 \end{cases} \quad (2.5)$$

in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad (2.6)$$

È importante ricordare che le matrici di massa e di rigidezza sono sempre matrici simmetriche, in particolare la matrice di massa è sempre definita positiva invece la matrice di rigidezza è

sempre semi-definita positiva. Le matrici definite positive hanno la forma quadratica ad esse associata sempre positiva. Nel nostro caso abbiamo:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 & \dot{x}_2 \end{Bmatrix}^T [M] \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} = 2E_k \quad (2.7)$$

L'energia cinetica di un sistema reale è sempre positiva per questo la matrice di massa è sempre definita positiva. Invece le matrici semi-definite hanno la forma quadratica ad essa associata positiva o al più nulla, in particolare per la matrice di rigidità abbiamo:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 & \dot{x}_2 \end{Bmatrix}^T [K] \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} = 2E_p \quad (2.8)$$

Tale forma può essere nulla quando, ad esempio, abbiamo un grado di libertà rigido e quindi l'organo elastico non si deforma e l'energia potenziale risulta nulla. In generale per la matrice di smorzamento possiamo affermare che essa eredita le proprietà della matrice di massa e della matrice di rigidità. Classicamente viene descritta tramite una combinazione lineare delle due matrici appena citate.

Le Equazioni 2.18 sono accoppiate in quanto sono presenti termini extra-diagonali nelle matrici di smorzamento e rigidità. In tal caso si parla di sistema accoppiato staticamente, viceversa se l'accoppiamento fosse avvenuto tramite la matrice di massa, si sarebbe parlato di accoppiamento dinamico. Nella realtà il tipo di accoppiamento dipende dalle coordinate che si sono scelte per descrivere il sistema. È sempre possibile trovare un sistema di riferimento in cui tali equazioni risultino disaccoppiate e le coordinate di tale sistema prendono il nome di *coordinate modali*. In generale, le vibrazioni forzate e smorzate di un sistema meccanico si possono descrivere studiando il seguente sistema di equazioni:

$$[M]\{\ddot{q}(t)\} + [C]\{\dot{q}(t)\} + [K]\{q(t)\} = \{F(t)\} \quad (2.9)$$

dove le  $\{q(t)\}$  sono le generiche coordinate generalizzate.

Durante il progetto di tesi si sono studiati i sistemi privi di smorzamento, ciò a favore di sicurezza, quindi si sono studiati sistemi meccanici del tipo:

$$[M]\{\ddot{q}(t)\} + [K]\{q(t)\} = \{F(t)\} \quad (2.10)$$

### 2.2.2 Vibrazioni libere non smorzate

L'obiettivo principale dell'elaborato è quello di determinare pulsazioni naturali e modi di vibrazione del *blisk*. È di fondamentale importanza capire dal punto di vista teorico come giungere a tali informazioni di carattere vibratorio di un sistema meccanico.

Si consideri un sistema libero e non smorzato avente N gradi libertà come in figura qui sotto:

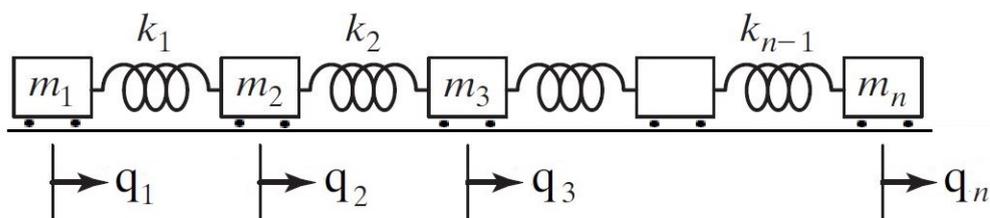


Figura 2.3: Sistema discreto a N gdl - [5]

dove  $q$  rappresenta le coordinate generalizzate del sistema,  $k$  le rigidità di collegamento tra i vari carrelli e  $m$  le masse. Le equazioni differenziali che descrivono il sistema rappresentato in Figura 2.3 sono:

$$[M]\{\ddot{q}(t)\} + [K]\{q(t)\} = \{0\} \quad (2.11)$$

Ipotizziamo che tutti i carrelli si muovano con la stessa legge temporale (si ipotizza quindi una soluzione sincrona), in particolare:

$$\{q(t)\} = \{u\}f(t)$$

con  $f(t)$  legge armonica uguale per tutti i carrelli (sincronismo garantito). Ogni grado di libertà inoltre si muove con un'ampiezza e fase che è determinata dal valore del componente  $i$ -esimo del vettore  $\{u\}$ . Per tale sistema il vettore  $\{u\}$  è un vettore di numeri reali e ci informa sull'ampiezza e la fase con cui i vari gradi di libertà si muovono. Inoltre abbiamo:

$$\{\dot{q}(t)\} = \{u\}\dot{f}(t) \quad \{\ddot{q}(t)\} = \{u\}\ddot{f}(t)$$

Inserendo tali soluzioni sincrone nelle Equazioni differenziali 2.11 otteniamo:

$$[M]\{u\}\ddot{f}(t) + [K]\{u\}f(t) = \{0\} \quad (2.12)$$

Questa relazione rappresenta un sistema di equazioni differenziali del secondo ordine. Consi-

derando la  $i$ -esima equazione abbiamo:

$$[M_i]^T \{u\} \ddot{f}(t) + [K_i]^T \{u\} f(t) = 0$$

dove i coefficienti di  $\ddot{f}(t)$  e  $f(t)$  sono numeri reali.

Risolvendo tale equazione con lo scopo di determinare le pulsazioni naturali e modi di vibrare otteniamo:

$$f \ddot{f}(t) + \frac{[K_i]^T \{u\}}{[M_i]^T \{u\}} f(t) = 0 \quad (2.13)$$

da cui

$$-\frac{\ddot{f}(t)}{f(t)} = \frac{[K_i]^T \{u\}}{[M_i]^T \{u\}} = \omega^2 \quad i = 1 \dots n \quad (2.14)$$

Questi due membri devono essere sempre uguali per ogni valore del tempo e per ogni valore dell'indice, ciò è verificato se sono uguali ad una stessa costante pari a  $\omega^2$ . Dalla natura dell'Equazione 2.14 è possibile suddividere il problema in due parti: *parte temporale* e *parte spaziale*. Si studi la parte temporale, da cui:

$$-\frac{\ddot{f}(t)}{f(t)} = \omega^2 \quad -\frac{\ddot{f}(t)}{\omega^2} = f(t) \quad \frac{\ddot{f}(t)}{\omega^2} + f(t) = 0$$

Una possibile soluzione dell'equazione differenziale ordinaria è:

$$f(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad \dot{f}(t) = -A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

$$\ddot{f}(t) = -A \omega^2 \cos \omega t - B \omega^2 \sin \omega t = -\omega^2 f(t)$$

Vediamo come la parte temporale sia un'oscillazione armonica.

Studiando la parte spaziale riusciamo ad ottenere l' $\omega^2$ , da cui:

$$\frac{[K_i]^T \{u\}}{[M_i]^T \{u\}} = \omega^2 \quad [K_i]^T \{u\} = \omega^2 [M_i]^T \{u\} \quad [K] \{u\} = \omega^2 [M] \{u\}$$

infine:

$$([K] - \omega^2 [M]) \{u\} = \{0\} \quad (2.15)$$

Tale relazione prende il nome di *matrice delle frequenze*.

Da tale sistema è possibile ricavare  $\omega$ . In particolare, ponendo  $\{u\} = 0$  si ricava la soluzione banale e cioè di un sistema fermo. Si è interessati alla soluzione  $\{u\} \neq 0$ . Quindi dall'algebra lineare otteniamo che per non avere soluzioni banali il determinante della matrice delle frequenze

deve essere nullo. Considerando il determinante della matrice delle frequenze otteniamo:

$$\det([K] - \omega^2[M])\{u\} = 0 \quad (2.16)$$

da cui si ricaverà il polinomio  $a_n\omega^{2n} + a_{n-1}\omega^{2(n-1)} + a_{n-2}\omega^{2(n-2)} + \dots + a_1\omega^2 + a_0 = 0$ , da tale polinomio, per il teorema fondamentale dell'algebra, ricaveremo:  $\omega_1^2; \omega_2^2; \dots; \omega_n^2$  dove  $n$  sono gli autovalori. Gli  $n$  autovalori trovati saranno reali e positivi perché le matrici  $[K]$  e  $[M]$  sono simmetriche e definite o semi definite positive, quindi si ricaveranno  $n$   $\omega$  che saranno le  $n$  pulsazioni naturali di un sistema a  $n$  gradi di libertà. In particolare:

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_1^2} \dots \omega_n = \sqrt{\omega_n^2}$$

Infine, una volta ricavate le pulsazioni naturali, cioè gli autovalori, si ricavano i modi di vibrare, cioè gli autovettori, risolvendo il sistema:

$$([K] - \omega_k^2[M])\{u_k\} = \{0\} \quad k = 1 \dots n$$

da cui si ricavano  $\{u_k\}$ , che rappresentano i vari autovettori. Ciascun autovettore rappresenta il modo di vibrare di un grado di libertà rispetto ad un altro e la soluzione trovata sarà nota a meno di un parametro, in quanto la matrice delle frequenze non ha rango massimo.

### 2.2.3 Proprietà di ortogonalità tra autovettori

Gli autovettori costituiscono una base dello spazio delle possibili deformate del sistema, quindi la deformata  $d$  è espressa come combinazione lineare dei vari modi di vibrare, quindi:

$$d = c_1u_1 + c_2u_2 + \dots + c_nu_n \quad (2.17)$$

dove i coefficienti di tale combinazione rivelano quanto un modo di vibrare sia maggiormente amplificato rispetto ad un altro. Di fondamentale importanza è dimostrare come gli autovettori siano ortogonali alle matrici di massa e di rigidezza. In particolare si vuole dimostrare:

$$\{u_s\}^T[M]\{u_r\} = 0 \quad \{u_s\}^T[K]\{u_r\} = 0 \quad (2.18)$$

dove  $r$  indica il modo di vibrare  $r$  analogamente per  $s$ . Le Equazioni 2.38 rappresentano le cosiddette *condizioni di ortogonalità* rispettivamente alle matrici di massa e rigidezza. Dimostriamo che le Equazioni 2.38, in quanto saranno utili per il disaccoppiamento delle equazioni.

Il sistema da risolvere è:

$$\det([K] - \omega^2[M])\{u\} = 0 \quad (2.19)$$

Si considerino due modi di vibrare  $r$  ed  $s$ , che soddisfino il sistema meccanico appena individuato. Per il modo di vibrare  $r$ :

$$\begin{aligned} ([K] - \omega_r^2[M])\{u_r\} &= \{0\} \\ [K]\{u_r\} &= \omega_r^2[M]\{u_r\} \\ \{u_s\}^T[K]\{u_r\} &= \omega_r^2\{u_s\}^T[M]\{u_r\} \\ (\{u_s\}^T[K]\{u_r\})^T &= \omega_r^2(\{u_s\}^T[M]\{u_r\})^T \\ \{u_r\}^T[K]^T\{u_s\} &= \omega_r^2\{u_r\}^T[M]^T\{u_s\} \end{aligned}$$

ricordando che  $[K]^T = [K]$  e  $[M]^T = [M]$

$$\{u_r\}^T[K]\{u_s\} = \omega_r^2\{u_r\}^T[M]\{u_s\} \quad (2.20)$$

analogamente per il modo di vibrare  $s$ :

$$\begin{aligned} ([K] - \omega_s^2[M])\{u_s\} &= \{0\} \\ [K]\{u_s\} &= \omega_s^2[M]\{u_s\} \\ \{u_r\}^T[K]\{u_s\} &= \omega_s^2\{u_r\}^T[M]\{u_s\} \end{aligned} \quad (2.21)$$

Vediamo come i primi membri delle Equazioni 2.20 e 2.21 sono uguali, quindi possiamo porre l'uguaglianza dei secondi due membri.

$$\omega_r^2\{u_r\}^T[M]\{u_s\} = \omega_s^2\{u_r\}^T[M]\{u_s\}$$

da cui:

$$(\omega_r^2 - \omega_s^2)\{u_r\}^T[M]\{u_s\} = 0$$

Se supponiamo modo di vibrare  $r \neq s$ , quindi  $\omega_r^2 \neq \omega_s^2$ , allora

$$\{u_r\}^T[M]\{u_s\} = 0 \quad (2.22)$$

Ecco dimostrata la condizione di ortogonalità per la matrice di massa. In maniera analoga è possibile arrivare alla condizione di ortogonalità per la matrice di rigidezza, da cui:

$$\{u_s\}^T [K] \{u_r\} = 0 \quad (2.23)$$

È importante sottolineare che nel caso di modi di vibrare  $r$  e  $s$  uguali, la relazione di ortogonalità risulta diversa da zero, in particolare nel caso di ortogonalità rispetto alla matrice di massa otteniamo la massa modale associata all' $r$ -esimo modo di vibrare, invece nel caso di ortogonalità rispetto alla matrice di rigidezza otteniamo la rigidezza modale associata all' $r$ -esimo modo di vibrare.

## 2.2.4 Matrice modale

Considerando il sistema rappresentato in Figura 2.3 abbiamo che ogni modo di vibrare ha  $n$  elementi che rappresentano le ampiezze (con segno) di vibrazione dei vari gradi di libertà quando il sistema vibra a quel determinato  $\omega_n$ . Siccome si hanno  $n$  modi di vibrare e i vettori rappresentanti i modi di vibrare sono lunghi  $n$ , è utile introdurre la matrice modale  $[U]$ , da cui:

$$\left[ \begin{array}{cccc} \{u_1\} & \dots & \{u_k\} & \dots & \{u_n\} \end{array} \right] = [U] \quad (2.24)$$

La matrice modale ha dimensione  $n \times n$ , quindi è una matrice quadrata.  $[U]$  è in grado di diagonalizzare le matrici di massa e di rigidezza, ovvero la matrice modale permette di disaccoppiare i vari gradi di libertà del nostro sistema meccanico. In altre parole permette di disaccoppiare le equazioni che descrivono il sistema semplificando notevolmente l'onere computazionale legato a tale operazione. Si dimostra ora come la matrice  $[U]$  diagonalizzi le matrici di massa e di

rigidezza. Nello specifico vogliamo dimostrare che:  $[U]^T [M] [U] = \begin{bmatrix} m_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & m_{nn} \end{bmatrix}$

quindi:

$$\begin{bmatrix} \{u_1\}^T \\ \vdots \\ \{u_k\}^T \\ \vdots \\ \{u_n\}^T \end{bmatrix} [M] \left[ \begin{array}{cccc} \{u_1\} & \dots & \{u_k\} & \dots & \{u_n\} \end{array} \right]$$

da cui

$$\begin{bmatrix} \{u_1\}^T \\ \vdots \\ \{u_k\}^T \\ \vdots \\ \{u_n\}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [M]\{u_1\} & \dots & [M]\{u_k\} & \dots & [M]\{u_n\} \end{bmatrix}$$

Svolgendo il prodotto vettore matrice si ottiene:

$$\begin{bmatrix} \{u_1\}^T [M] \{u_1\} & \dots & \{u_1\}^T [M] \{u_k\} & \dots & \{u_1\}^T [M] \{u_n\} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \{u_k\}^T [M] \{u_1\} & \dots & \{u_k\}^T [M] \{u_k\} & \dots & \{u_k\}^T [M] \{u_n\} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \{u_n\}^T [M] \{u_1\} & \dots & \{u_n\}^T [M] \{u_k\} & \dots & \{u_n\}^T [M] \{u_n\} \end{bmatrix}$$

Infine, considerando le condizioni di ortogonalità, si ottiene:

$$[U]^T [M] [U] = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & m_{nn} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

analogamente per la matrice di rigidità:

$$[U]^T [K] [U] = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & k_{nn} \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Concludendo, è importante ricordare come sia possibile normalizzare i modi di vibrare, ovvero gli autovalori, e giungere quindi alle seguenti semplificazioni matriciali:

$$[U^*]^T [M] [U^*] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

analogamente per la matrice di rigidezza:

$$[U^*]^T [K] [U^*] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \omega_{nm}^2 \end{bmatrix}$$

dove  $[U^*]$  rappresenta la matrice delle frequenze normalizzata.

## 2.3 Analisi modale sperimentale

L'analisi modale sperimentale è una tecnica per lo studio delle vibrazioni che permette di trovare le proprietà e le caratteristiche dei sistemi meccanici. Il suo sviluppo è stato introdotto inizialmente in campo aeronautico intorno agli anni '40 del secolo scorso, ma il suo utilizzo non era affatto facile e proficuo fino all'avvento dei computer. Tecniche numeriche per l'analisi di segnali provenienti da analizzatori e sensori hanno permesso un repentino sviluppo di tale analisi modale sperimentale. Grazie all'analisi modale sperimentale possiamo identificare facilmente frequenze naturali, smorzamenti e modi di vibrare. I sistemi che si sono trattati assumono ipotesi di comportamento lineare e caratteristiche tempo-invarianti. Grazie all'analisi sperimentale è possibile ottenere un modello matematico della struttura, che poi può essere utilizzato per molteplici scopi. Il modello sperimentale può essere usato per:

- Validazione e miglioramento del modello numerico agli elementi finiti sulla base di dati sperimentali.
- Risposta a sollecitazioni generiche.
- Previsione del comportamento dei sistemi reali (apporte modifiche soltanto nel modello FEM).
- Monitoraggio, diagnostica, manutenzione preventiva di oggetti al fine di evitare rotture improvvise durante la loro vita operativa.

### 2.3.1 Fondamenti teorici dell'analisi modale

La trattazione matematica di partenza per spiegare l'analisi modale sperimentale prevede lo studio della risposta forzata di un sistema ad un grado di libertà con smorzamento viscoso con una forzante complessa  $F = F_0 e^{i\omega t}$ , come mostrato in figura seguente:

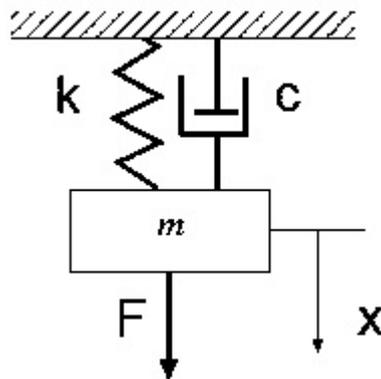


Figura 2.4: Sistema a 1 gdl - [13]

L'equazione del moto risultante è la seguente:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 e^{i\omega t} \quad (2.27)$$

dividendo per m otteniamo:

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}e^{i\omega t}$$

inoltre:

$$\ddot{x} + \frac{2\sqrt{k}c}{2\sqrt{k}\sqrt{m}\sqrt{m}}\dot{x} + \omega_n^2 x = \frac{k}{k} \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}$$

da cui si ottiene l'espressione finale dalla quale ricaveremo la funzione di trasferimento del nostro sistema:

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = \frac{F_0}{k}\omega_n^2 e^{i\omega t} \quad (2.28)$$

dove  $\frac{F_0}{k}$  è pari allo spostamento statico. Ora per risolvere l'equazione differenziale supponiamo una soluzione di tipo armonico:

$$x(t) = x_0 e^{i\omega t} \quad \dot{x}(t) = i\omega x_0 e^{i\omega t} \quad \ddot{x}(t) = -\omega^2 x_0 e^{i\omega t} \quad (2.29)$$

Sostituendo le 2.29 nell'Equazione 2.28, passando dal dominio del tempo a quello della frequenza otteniamo:

$$x_0(\omega_n^2 - \omega^2 + 2\zeta i\omega\omega_n) = \frac{F_0}{k}\omega_n^2$$

da cui:

$$x_0 = \frac{1}{(\omega_n^2 - \omega^2 + 2\zeta i\omega\omega_n)} \frac{F_0}{k} \omega_n^2$$

Infine considerando  $\omega_n^2 = \frac{k}{m}$  otteniamo:

$$x_0 = \frac{1}{m(\omega_n^2 - \omega^2 + 2\zeta i\omega\omega_n)} F_0$$

Con quest'ultima formula è possibile evidenziare la funzione di risposta complessa più comunemente conosciuta come funzione di trasferimento  $H(\omega)$ . Infine:

$$H(\omega) = \frac{1}{m(\omega_n^2 - \omega^2 + 2\zeta i\omega\omega_n)} \quad (2.30)$$

Si nota come la funzione di trasferimento dipenda da due parametri caratteristici del sistema: pulsazione naturale  $\omega_n = \sqrt{k/m}$  e rapporto di smorzamento viscoso  $\zeta = c/2\sqrt{km}$ . Da quanto appena detto si evince come, una volta nota la funzione di trasferimento, sia possibile ricavare i parametri caratteristici del sistema. Classicamente la funzione di trasferimento viene rappre-

sentata tramite i diagrammi di Bode di modulo e fase, oppure tramite i diagrammi di Nyquist. Lo step successivo per lo studio modale sperimentale prevede lo studio di un sistema lineare discreto a  $N$  gradi di libertà con smorzamento viscoso proporzionale. Tale sistema costituisce la più semplice discretizzazione di un sistema reale continuo.

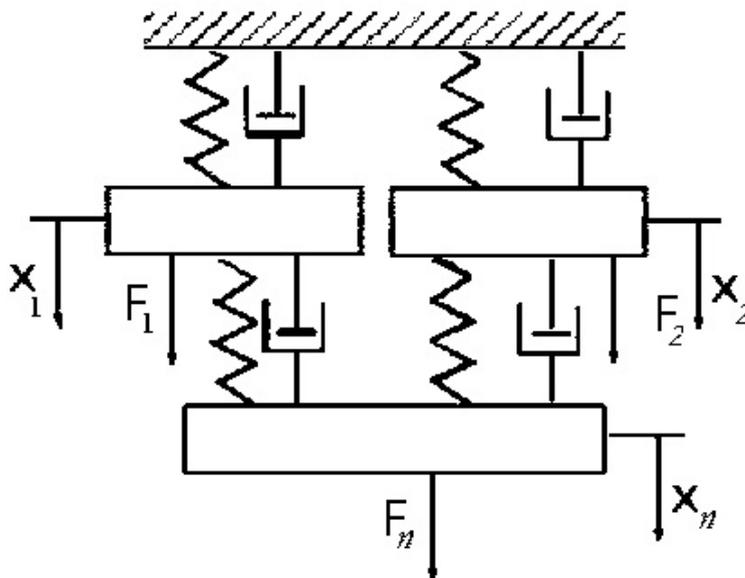


Figura 2.5: Sistema a  $N$  gdl - [13]

L'equazione del moto in tal caso risulta:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F(t)\} \quad (2.31)$$

Tale sistema di equazioni ha dimensione  $N \times N$ , dove  $N$  è il numero di gradi di libertà considerati. Inoltre si suppone che le forzanti siano complesse, abbiano cioè ampiezze diverse ma stessa pulsazione  $\omega$ . Le forzanti sono ad esempio:  $F_1(t) = F_{10}e^{i\omega t}$ ,  $F_2(t) = F_{20}e^{i\omega t}$ ...  $F_n(t) = F_{n0}e^{i\omega t}$ . In analogia al caso precedente, cioè considerando un solo grado di libertà, l'integrale generale è dato dall'integrale particolare della non omogenea più l'integrale generale della omogenea particolareggiato con le condizioni iniziali specifiche. Come per il caso ad 1 gdl si può pensare ad una soluzione complessa di regime che possa soddisfare l'equazione del moto e una volta sostituita è possibile ottenere:

$$\{x_0\} = [[K] + i\omega[C] - \omega^2[M]]^{-1}\{F_0\}$$

in forma più estesa:

$$\begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{0i} \\ \vdots \\ x_{0N} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} H_{1,1}(\omega) & \dots & H_{1,N}(\omega) \\ & H_{i,j}(\omega) & \\ H_{N,1}(\omega) & \dots & H_{N,N}(\omega) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} F_{01} \\ F_{0j} \\ \vdots \\ F_{0N} \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

La matrice NxN viene chiamata H, è simmetrica ed è la matrice che raggruppa tutte le funzioni di trasferimento di ciascun grado di libertà del nostro sistema. In particolare il generico elemento di  $H_{i,j}(\omega)$  rappresenta la risposta del nostro sistema sulla coordinata i-esima quando è applicata una forzante sulla coordinata j-esima. Ciò ci permette di affermare che è possibile misurare tale matrice NxN, in quanto è sufficiente eccitare con una forzante a frequenza variabile in un punto e poi andare a misurare la risposta in un altro punto. Una volta trovata la matrice [H] è possibile ricavare i parametri modali del sistema quindi le pulsazioni naturali e i modi di vibrare. Le pulsazioni naturali si calcolano risolvendo l'equazione delle frequenze, come segue:

$$\det[[K] - \omega^2[M]] = 0 \quad (2.33)$$

I modi di vibrare si ottengono risolvendo il seguente sistema lineare, una volta ricavati i valori delle pulsazioni naturali:

$$\det[[K] - \omega^2[M]]\{\psi_n\} = \{0\} \quad n = 1 \dots N$$

da cui si ottengono i modi di vibrare:

$$\begin{pmatrix} \psi_{1n} \\ \psi_{2n} \\ \vdots \\ \psi_{Nn} \end{pmatrix}$$

Infine l'equazione che correla la matrice delle funzioni di trasferimento e i parametri modali del sistema è:

$$H_{i,j}(\omega) = \sum_{i=n}^N \frac{\psi_{in}\psi_{jn}}{m_n(\omega_n^2 - \omega^2 + i2\zeta_n\omega\omega_n)} \quad (2.34)$$

Concludendo si osserva come la funzione di trasferimento tra il nodo i-esimo dove misuriamo la risposta e il nodo j-esimo dove applichiamo l'eccitazione non sia altro che la combinazione lineare delle risposte di vari sistemi ad 1 grado di libertà dove i coefficienti della combinazione sono  $\psi_{in}$  e  $\psi_{jn}$ , cioè i modi di vibrare. Infine, il prodotto  $\psi_{in}\psi_{jn}$  prende il nome di costante modale.

### 2.3.2 Metodologie di analisi modale

L'importanza dell'analisi modale sperimentale è riassunta nella seguente equazione:

$$H_{i,j}(\omega) = \sum_{i=n}^N \frac{\psi_{in}\psi_{jn}}{m_n(\omega_n^2 - \omega^2 + i2\zeta_n\omega\omega_n)} \quad (2.35)$$

Tale equazione stabilisce una relazione tra le funzioni di trasferimento, che possono essere misurate sperimentalmente, e i parametri modali identificativi del sistema, in particolare:

$$\omega_n \quad \zeta_n \quad \{\psi_n\} = \begin{Bmatrix} \psi_{1n} \\ \psi_{2n} \\ \vdots \\ \psi_{Nn} \end{Bmatrix} \quad n = 1 \dots N \quad (2.36)$$

ovvero pulsazioni naturali, rapporti di smorzamento, e modi di vibrare per ciascun grado di libertà. Nella pratica per ottenere sperimentalmente le funzioni di trasferimento occorre eccitare il sistema meccanico e tramite celle di carico e trasduttori misurare rispettivamente la forza applicata e l'accelerazione in più punti. Nello specifico, l'eccitazione deve essere caratterizzata da una frequenza variabile e da un'ampiezza il più costante possibile per evitare l'esaltazione di aspetti non-lineari del sistema meccanico e per evitare che il rapporto segnale/rumore cambi al variare delle frequenze di eccitazione del sistema. Da tali considerazioni si deduce come sia importante ottenere una forzante avente spettro il più possibile costante. Il procedimento si chiude dopo aver misurato tutte le funzioni di trasferimento, assemblato la matrice  $H_{i,j}(\omega)$  e successivamente uguagliandola all'Equazione 2.35, così da poter trovare i parametri caratteristici del sistema meccanico.

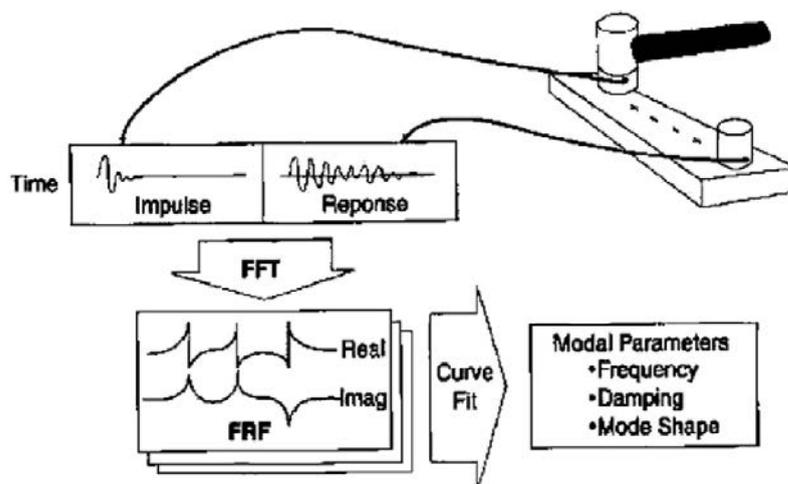


Figura 2.6: Esempio di acquisizione del segnale derivante da test d'impulso - [18]

Operativamente è possibile ottenere una forzante avente le caratteristiche appena descritte utilizzando:

- Martelli strumentali
- Shaker/Eccitatori

La prima categoria prevede l'eccitazione del nostro sistema meccanico mediante martelli strumentali. L'eccitazione ideale sarebbe quella avente come risposta nel tempo l'impulso di Dirac e nella frequenza uno spettro costante a tutte le frequenze.

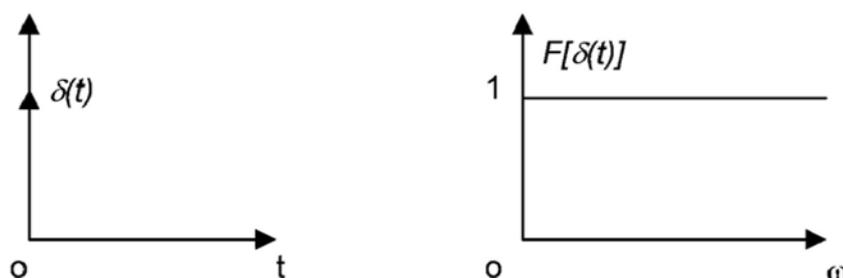


Figura 2.7: Esempio di impulso ideale - [21]

Per ovvie ragioni è impossibile realizzare un'eccitazione ideale, ma dal punto di vista ingegneristico vi si può avvicinare molto grazie all'utilizzo di martelli specifici per l'analisi modale, che creino profili di risposta nel tempo e nella frequenza, come ad esempio:

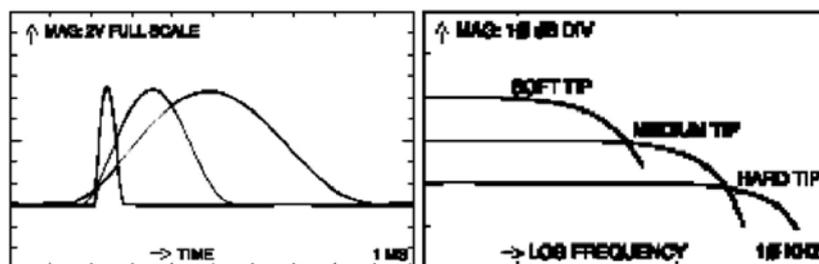


Figura 2.8: Esempio di impulso reale - [13]

Vediamo dalla Figura 2.8 come, al variare della durezza della punta del martello, varia la durata dell'impulso in termini di tempo e quindi in termini di frequenza. La pulsazione di taglio è legata alla durata dell'impulso, più breve è l'impulso maggiore sarà la pulsazione di taglio. Quindi cambiando la durata dell'impulso è possibile regolare il campo di frequenze in cui eccitare il sistema. La durata dell'impulso dipende da due fattori: la rigidità superficiale dell'oggetto da colpire e la punta del martello. Ne deriva che per cambiare la durata dell'impulso si deve andare ad agire sulla durezza della punta del martello. Tutti i martelli strumentali sono accessoriati

con una serie di punte più o meno rigide. Tale flessibilità permette di attuare la cosiddetta *accordatura* della martellata rispetto alle caratteristiche di rigidità dell'oggetto da colpire. Nel progetto si è utilizzato un martello strumentale avente punta a rigidità intermedia in modo da poter essere utilizzato in più situazioni. In generale i pregi dell'utilizzo dei martelli strumentali sono relativi al fatto che durante il loro uso non si altera il sistema meccanico, non vi sono eccitatori da attaccare; inoltre con i martelli si riesce ad arrivare in posizioni poco accessibili. Dall'altro lato il principale difetto legato all'utilizzo dei martelli è connesso alla non ripetibilità della martellata data dall'uomo. Tale difetto può essere ridotto adottando un approccio statistico alle nostre misurazioni.

La seconda categoria prevede l'eccitazione del nostro sistema meccanico mediante eccitatori. Lo shaker è uno strumento che può essere di natura elettromagnetica (come quello usato nel progetto), piezoelettrica e idraulica. L'eccitatore consente di applicare delle forzanti variabili nel tempo. Classicamente si attua un'eccitazione di tipo sweep.

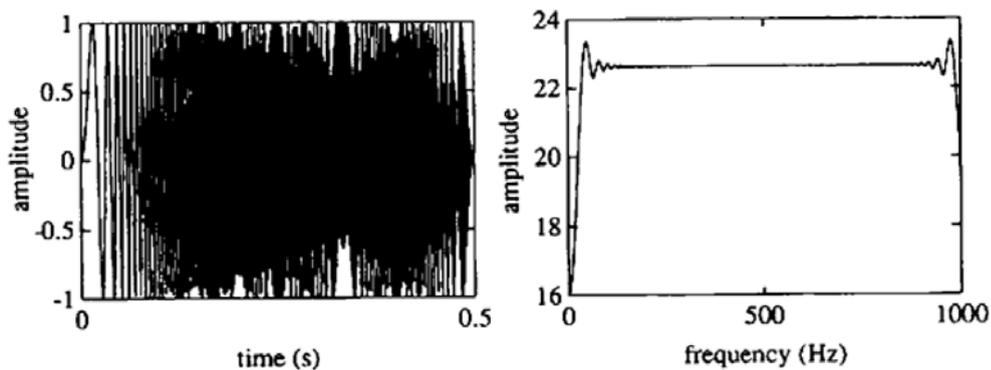


Figura 2.9: Esempio di eccitazione di tipo sweep - [18]

In Figura 2.9 si può vedere come l'ampiezza sia per lo più costante, invece la frequenza sia variabile. Con questa tecnica è possibile ottenere uno spettro della forzante costante al variare della frequenza. Inoltre si hanno ulteriori pregi derivanti dall'utilizzo dello shaker, in particolare è possibile applicare forze elevate, ed essendo strumenti controllati automaticamente, quindi molto ripetibili, è possibile compiere decine di prove applicando la medesima eccitazione. I difetti derivanti dall'utilizzo dello shaker sono legati all'alterazione del sistema meccanico, in quanto lo shaker deve essere collegato al sistema; inoltre presenta una limitata accessibilità, in quanto risulta difficile collocare lo shaker in diversi punti rapidamente.

### 2.3.3 Matrice $H(\omega)$

L'analisi modale sperimentale, come già precedentemente accennato, prevede il soddisfacimento di due requisiti:

- Misurazione della forza
- Misurazione della risposta

Per la misura della forza, sia nel caso di martelli strumentali sia nel caso di shaker, non vi sono particolari problemi, in quanto i martelli sono equipaggiati sulla punta di una cella di carico piezoelettrica che misura esattamente l'impulso di forza. La stessa configurazione viene adottata anche per gli shaker.

Per la misura della risposta, in generale l'accelerazione, vengono classicamente usati accelerometri piezoelettrici. Ne esistono di varie tipologie, ad esempio: monoassiali (usati nel progetto) e triassiali. In generale la misura della risposta risulta difficoltosa per oggetti di piccole dimensioni, in quanto l'accelerometro, seppur di dimensioni ridotte, inficerebbe la validità della misurazione. Esistono accelerometri di varie dimensioni atti a coprire un ampio ventaglio di applicazioni. Una volta misurata la forza e la risposta, si attua l'analisi in frequenza in maniera automatica tramite software (il software usato nel corso del progetto per l'analisi in frequenza è stato SignalCal). Dopo aver determinato tutte le funzioni di trasferimento, queste stesse vengono utilizzate per costruire in maniera automatica la matrice quadrata  $N \times N$   $H_{i,j}(\omega)$ . La matrice si presenta nella seguente forma:

$$[H_{i,j}(\omega)] = \begin{bmatrix} H_{1,1}(\omega) & \dots & H_{1,n}(\omega) \\ \vdots & H_{i,j}(\omega) & \vdots \\ H_{n,1}(\omega) & \dots & H_{n,n}(\omega) \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

Tale matrice risulta simmetrica per sistemi lineari, ovvero  $H_{i,j}(\omega) = H_{j,i}(\omega)$ . È importante soffermarsi sul significato fisico di righe e colonne della matrice appena illustrata. Le righe corrispondono alla risposta in un specifico grado di libertà, quando l'eccitazione viene applicata in tutti gli altri gradi di libertà. Invece il significato fisico delle colonne è l'opposto, ovvero otteniamo la risposta in tutti i gradi di libertà quando l'eccitazione è applicata in un unico grado di libertà. È evidente, essendo la matrice  $H_{i,j}(\omega)$  simmetrica, come sia sufficiente al fine dell'identificazione dei parametri modali, ottenere solo una riga o una colonna e quindi sia necessario misurare solo  $n$  funzioni di trasferimento. Inoltre la metodologia per ricavare una riga o una colonna corrisponde a delle modalità operative diverse. La determinazione delle righe implica che si misuri sempre nello stesso punto e si sposti la fonte di eccitazione, perciò in tal caso è più facile l'applicazione del martello strumentale. Viceversa, per la determinazione delle colonne

accade l'opposto, quindi lo shaker risulta lo strumento più adatto, grazie alla sua ripetibilità. È possibile effettuare un controllo sull'ipotesi di matrice simmetrica andando a determinare ad esempio la prima riga e colonna; inoltre è possibile fare un controllo sulle funzioni di trasferimento caratterizzate da coincidenza tra punto di misura e di eccitazione, che sono quelle che si localizzano sulla diagonale della matrice  $H_{i,j}(\omega)$ . Tali funzioni di trasferimento prendono il nome di *driving points* FRF, invece le funzioni di trasferimento extra-diagonali prendono il nome di *cross point* FRF. Le driving point FRF possiedono alcune importanti proprietà:

- Sono necessarie per la normalizzazione dei modi rispetto alla matrice di massa.
- Il diagramma di Bode del loro modulo è sempre caratterizzato da antirisonanze tra i successivi picchi di risonanza. Questa proprietà è utile ai fini della qualità dei dati sperimentali.

Il procedimento si conclude realizzando, tramite l'ausilio di software di analisi modale, la matrice  $H_{i,j}(\omega)_{Sperimentale}$ . Infine, uguagliando la matrice appena studiata con l'espressione analitica (si veda Espressione 2.35) è possibile, adottando tecniche di fitting, ricavare i parametri modali del sistema meccanico. Le tecniche di fitting possono essere classificate in:

- Single mode methods
- Multiple mode methods

I metodi single mode analizzano una funzione di trasferimento alla volta e sfruttano l'ipotesi che in prossimità della risonanza la risposta del sistema sia causata prevalentemente da quel singolo modo. Sono metodi molto semplici e richiedono piccoli costi computazionali se vengono utilizzati per analizzare poche funzioni di trasferimento. Inoltre sono metodi preferibili quando abbiamo sistemi poco smorzati e modi ben separati. Viceversa, se dobbiamo analizzare diverse funzioni di trasferimento, sistemi molto smorzati e modi molto vicini, è preferibile l'utilizzo dei metodi multiple mode.

### 2.3.4 Determinazione della Matrice $H(\omega)$ per sistemi reali

Nella realtà abbiamo sistemi continui quindi è necessario attuare la discretizzazione del sistema reale. Si suddivide il dominio in un insieme di nodi, ciascuno dei quali ha un numero di gradi di libertà e si vanno a ricavare le funzioni di trasferimento di ciascuno nodo e per ogni grado di libertà in modo da andar a comporre la matrice  $H_{i,j}(\omega)_{Sperimentale}$ .

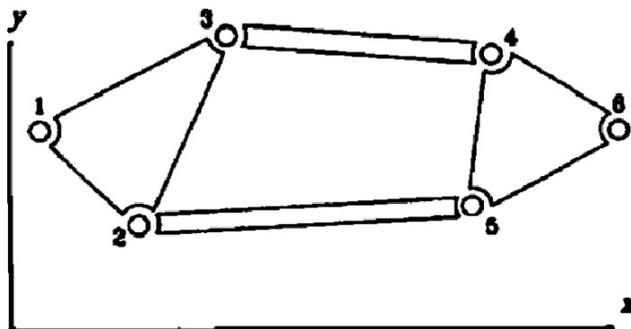


Figura 2.10: Esempio di discretizzazione di un sistema meccanico - [20]

In Figura 2.10 è rappresentato un modello meccanico bidimensionale discretizzato. Ogni nodo può traslare nelle due direzioni, quindi avendo 6 nodi dobbiamo ricavare 12 funzioni di trasferimento. La matrice  $H_{i,j}(\omega)_{Sperimentale}$  avrà dimensioni 12x12. Concludendo, è opportuno ricordare come le funzioni di trasferimento possano essere rappresentate tramite i diagrammi di Bode di modulo e fase, oppure mediante i diagrammi di Nyquist, usati soprattutto nel settore dei controlli.

## 2.4 Vibrazioni forzate e smorzate nei sistemi ad 1 gdl

Tale paragrafo sarà utile per verificare la correttezza del modello *blisk* nella condizione non vincolata, in particolare si dimostrerà come la funzione di trasferimento accelerazione in funzione della forza applicata ( $\frac{\ddot{x}(t)}{F_0}$ ) debba in maniera asintotica tendere al valore di  $\frac{1}{m}$ , con  $m$  massa del *blisk*. Studiando il sistema rappresentato in Figura 2.11 si ricaverà questa importante considerazione utile alla validazione del modello agli elementi finiti.

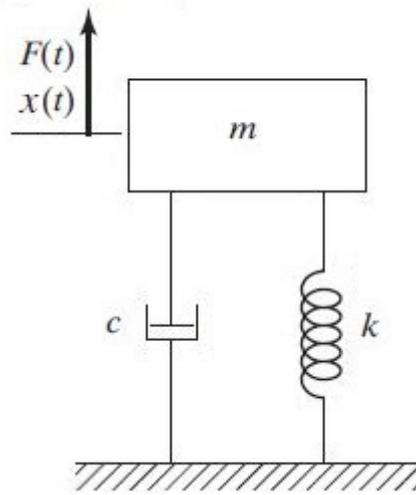


Figura 2.11: Sistema a 1 gdl - [3]

L'equazione del moto risultante è la seguente:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F(t) \quad (2.38)$$

Volendo risolvere il problema in un dominio più ampio, si considera la forzante complessa e di conseguenza anche lo spostamento viene descritto nel dominio complesso. In particolare studiamo solo la parte reale della forzante e dello spostamento in quanto soltanto tale componente ha significato fisico.

$$x(t) = \text{Re}\{x_0 e^{i\omega t}\} \quad F(t) = \text{Re}\{F_0 e^{i\omega t}\}$$

Considerando l'Equazione 2.38 e dividendo per  $m$  otteniamo:

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}e^{i\omega t}$$

inoltre:

$$\ddot{x} + \frac{2\sqrt{k}c}{2\sqrt{k}\sqrt{m}\sqrt{m}}\dot{x} + \omega_n^2 x = \frac{k}{k} \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}$$

da cui si ottiene l'espressione finale dalla quale ricaveremo la funzione di trasferimento del nostro sistema:

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = \frac{F_0}{k}\omega_n^2 e^{i\omega t} \quad (2.39)$$

dove  $\frac{F_0}{k}$  è pari allo spostamento statico. Ora per risolvere l'equazione differenziale supponiamo una soluzione di tipo armonico:

$$x(t) = x_0 e^{i\omega t} \quad \dot{x}(t) = i\omega x_0 e^{i\omega t} \quad \ddot{x}(t) = -\omega^2 x_0 e^{i\omega t} \quad (2.40)$$

Sostituendo le soluzioni armoniche ipotizzate 2.40 nell'Equazione 2.39 e passando dal dominio del tempo a quello della frequenza otteniamo:

$$x_0(\omega_n^2 - \omega^2 + 2\zeta i\omega\omega_n) = \frac{F_0}{k}\omega_n^2$$

da cui:

$$x_0 = \frac{1}{(\omega_n^2 - \omega^2 + 2\zeta i\omega\omega_n)} \frac{F_0}{k} \omega_n^2$$

Infine considerando  $\omega_n^2 = \frac{k}{m}$  otteniamo:

$$x_0 = \frac{1}{m(\omega_n^2 - \omega^2 + 2\zeta i\omega\omega_n)} F_0$$

Considerando la  $\omega \gg \omega_n$ , che nella pratica significa essere distanti dalla pulsazione di risonanza della spugna, otteniamo:

$$\frac{-\omega^2 x_0}{F_0} = \frac{1}{m}$$

quindi

$$\frac{\ddot{x}(t)}{F_0} = \frac{1}{m} \quad (2.41)$$

Il membro di sinistra è la funzione di trasferimento tra l'accelerazione e la forza impressa ricavata sperimentalmente mediante martello strumentale.



# Capitolo 3

## Test d'impatto: caso blisk non vincolato

### 3.1 Introduzione

La prima validazione del modello FEM è stata condotta per la condizione di *blisk* non vincolato. Il test svolto sperimentalmente è quello denominato *test d'impatto*, adoperando il cosiddetto martello sperimentale. È la validazione nella condizione più semplice possibile, non vi è infatti la necessità di apporre vincoli al pezzo. Dal punto di vista operativo non è facile ricreare una condizione simile; risulta invece molto più immediato utilizzando il software agli elementi finiti. In particolare si sono messe in atto due soluzioni: la prima consiste nel legare il *blisk* con delle funi (bungees) in modo da farlo rimanere sospeso in aria; la seconda soluzione è stata quella di porre il *blisk* sopra ad una spugna (foam). La prima scelta è stata scartata, in quanto la dislocazione delle funi non è risultata operativamente facile, quindi si è optato per la seconda soluzione. L'analisi nella condizione non vincolata è stata condotta appoggiando il *blisk* sopra una spugna, come riportato in figura qui sotto.

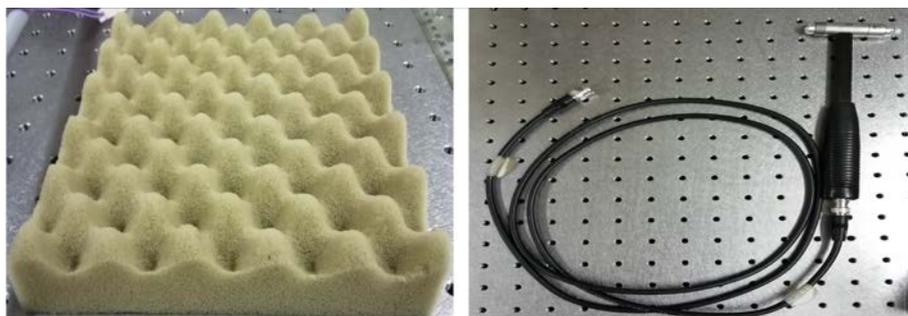


Figura 3.1: Spugna e martello strumentale

## 3.2 Acquisizione sperimentale

Il test è stato eseguito al di sopra di un tavolo sperimentale (si veda appendice B per maggiori dettagli) appoggiando il *blisk* alla spugna e ponendo un accelerometro (si veda appendice B per maggiori dettagli) in una posizione nella quale la funzione di trasferimento risultante potesse essere chiaramente comprensibile. La posizione dell'accelerometro è stata scelta dopo numerosi tentativi. La posizione prescelta è stata quella in cui eccitatore e misuratore sono disposti approssimativamente a formare un angolo retto. Tramite il martello sperimentale si è colpito il *blisk* più volte nella stessa posizione, in modo tale da avere anche un certo grado di ripetibilità e quindi di confidenza statistica sul risultato ottenuto, in particolare si sono effettuati test colpendo inizialmente quattro volte, poi otto volte nel medesimo punto e durante la medesima sessione di acquisizione.

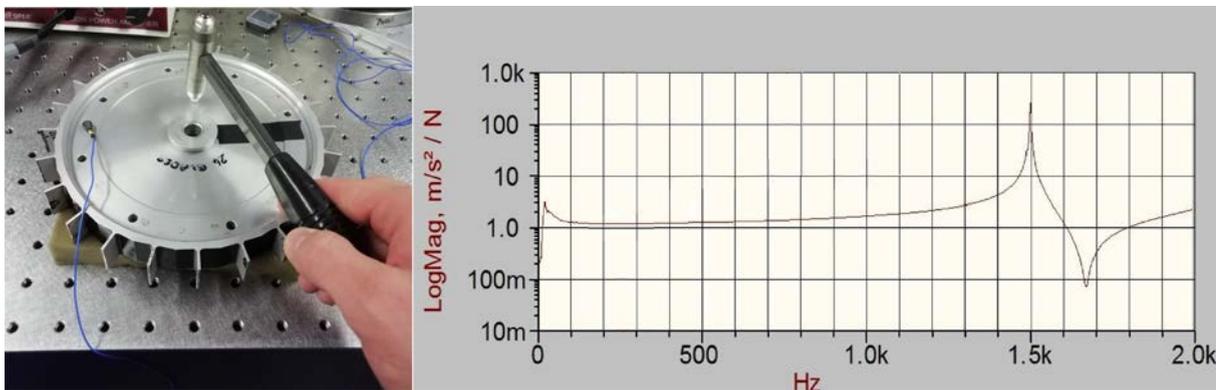


Figura 3.2: Acquisizione della funzione di trasferimento: caso blisk non vincolato

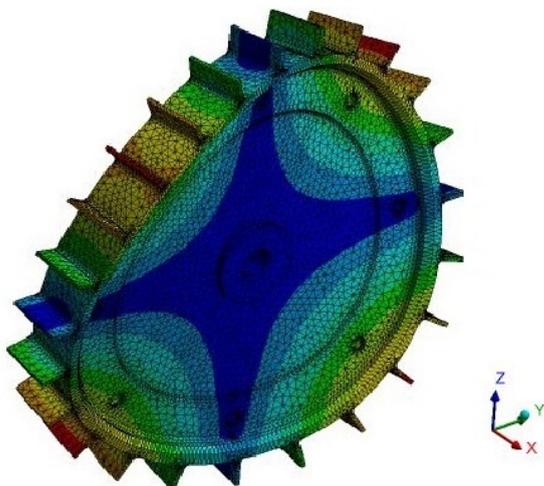
Dal grafico in Figura 3.2 si può vedere come il picco principale si attesti attorno alla frequenza di 1500Hz e ad una frequenza leggermente più alta si rilevi un picco di attenuazione, che rassicura sulla bontà del test realizzato (si veda Paragrafo 2.3.3). Nello specifico è possibile, guardando il file .txt in uscita dal software di acquisizione del segnale, identificare con una precisione dell'ordine dell'Hz il picco, che si verifica attorno ai 1506Hz. Inoltre, osservando il diagramma del modulo della funzione di trasferimento, si nota un ulteriore picco di risonanza a frequenze molto basse. Tale picco di risonanza è legato alla prima frequenza propria della spugna posta al di sotto del *blisk*. Si osservi come la frequenza di risonanza della spugna sia molto inferiore rispetto a quella del *blisk*; ciò dimostra che, l'aver posto la spugna al di sotto del *blisk* per effettuare i test, non ha comportato rilevanti modifiche nella prima frequenza di risonanza del disco porta pale. Osserviamo la notevole amplificazione del segnale in corrispondenza del picco di risonanza, essendo lo smorzamento in tale configurazione davvero minimo. Si vede infine come al diminuire della frequenza la risposta del sistema tenda al valore unitario e quindi al valore dello spostamento statico, ciò in accordo con la teoria vibrazionale.

### 3.3 Validazione del modello FEM

Dal punto di vista dell'analisi agli elementi finiti è stata dapprima importata la geometria del *blisk* in Ansys, si è poi assegnato il materiale, non si sono assegnati alcuni vincoli, ed infine si è svolta l'analisi modale per ritrovare le medesime pulsazioni naturali del caso sperimentale e l'analisi armonica per il confronto delle funzioni di trasferimento  $\frac{\ddot{x}}{F_0}$ , sperimentale e numerica. Dall'analisi modale numerica sono emersi i seguenti risultati:

- Prime 6 frequenze naturali nulle
- Prima frequenza naturale diversa da zero pari a 1517Hz

Tali risultati sono visualizzabili in Figura 3.3 qui sotto:



	Modo	Frequenza (Hz)
1	1	0
2	2	0
3	3	0
4	4	0
5	5	3,1246e-003
6	6	8,4686e-003
7	7	1517,2
8	8	1517,4

Figura 3.3: Frequenze naturali: caso blisk non vincolato

Il primo risultato è coerente con il fatto che un corpo nello spazio possiede 6 gradi di libertà (tre traslazioni e tre rotazioni), quindi le prime 6 frequenze naturali legate a tali moti rigidi devono risultare nulle o tutt'al più prossime allo zero (ciò dovuto ad errori di natura numerica). Il secondo risultato, che si rileva nel range d'interesse 0-2000Hz, mostra come la settima e ottava frequenza naturale si attestino attorno ai 1517Hz. Il motivo per cui le due frequenze sono praticamente uguali è legato alla simmetria del *blisk* (in prima approssimazione è un disco), quindi è possibile affermare che la pulsazione di risonanza è unica. In Figura 3.3 si

noti inoltre la rappresentazione grafica del modo di vibrare legato al primo picco di risonanza, il quale mostra due diametri nodali disposti a formare un angolo retto. Grazie all'animazione fornita dal software tale modo di vibrare risulta di tipo flessionale, più precisamente secondo flessionale, in quanto sono presenti due diametri nodali (zone in cui lo spostamento è minimo). La precedente affermazione verrà validata in seguito grazie all'ausilio di uno specifico software che ci permetterà di validare la tipologia dei modi di vibrare. Grazie al test d'impatto si era ottenuta la prima pulsazione naturale del *blisk*, che era pari a 1506Hz. Dall'analisi FEM si è ottenuta la prima pulsazione naturale ad una frequenza pari a 1517Hz. Essendo l'errore fra i due approcci minore dell'1%, possiamo ritenere validato il modello FEM per quanto riguarda la prima pulsazione naturale del *blisk* non vincolato. Questo leggero errore del modello FEM può essere legato al fatto che nel modello reale è certamente presente un piccolo smorzamento e che quindi tale scostamento causa un piccolo shift del picco di risonanza (si veda Figura 3.4) in base alla relazione  $\omega_n = \sqrt{1 - \xi^2}$ , che afferma come la pulsazione di risonanza sia tanto più piccola tanto maggiore è lo smorzamento del nostro sistema.

Ora si vuole focalizzare l'attenzione sulla validazione della funzione di trasferimento  $\frac{\ddot{x}}{F_0}$  del sistema, in particolare ci si aspetta la medesima risposta in frequenza tra modello FEM e sperimentale. Il grafico qui sotto riportato mostra in maniera quantitativa la validità del modello FEM. Nello specifico il grafico riportato in Figura 3.4 riporta tre curve: la funzione di trasferimento sperimentale, numerica e la retta rappresentante il rapporto  $\frac{1}{m}$ , dove  $m$  è la massa del *blisk*.

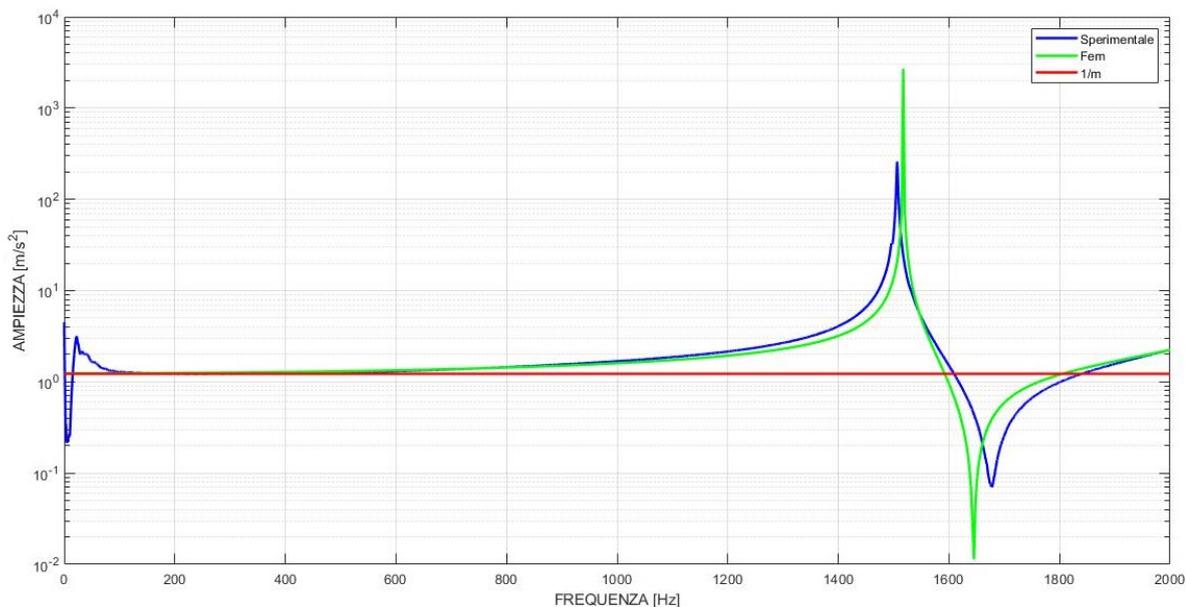


Figura 3.4: Funzioni di trasferimento del blisk non vincolato

Innanzitutto si può vedere come la curva verde, numerica, sia davvero prossima a quella blu, sperimentale, soprattutto lontano dalla risonanza. Si voglia porre l'attenzione sui seguenti tre aspetti:

- Attenuazione del picco di risonanza nella funzione di trasferimento sperimentale
- Convergenza di entrambe le curve a quella rappresentata la retta pari al valore  $\frac{1}{m}$
- Pulsazione di risonanza spugna

Il primo aspetto da indagare è l'abbassamento del picco di risonanza tra le due curve verde e blu. Questo lo si spiega in quanto il modello sperimentale presenta, seppur con ridotta entità, uno smorzamento che abbassa l'amplificazione, l'energia messa in gioco alla risonanza e quindi il picco è conseguentemente più basso di quello ricavato dall'analisi FEM. Il secondo aspetto è legato alla convergenza di entrambe le curve Fem e sperimentale al valore di  $\frac{1}{m}$ , ciò è stato dimostrato nel Paragrafo 2.4, in particolare si è ricavato come  $\frac{\ddot{x}(t)}{F_0} = \frac{1}{m}$ . Questo secondo aspetto rafforza la validazione del modello agli elementi finiti, ma anche la bontà dei dati acquisiti sperimentalmente. Il terzo e ultimo aspetto riguarda la curva sperimentale, in particolare per frequenze molto basse tendenti a zero. Tale curva non segue né quella Fem né quella  $\frac{1}{m}$ , ciò nuovamente è dovuto alla presenza della spugna. È immediata la visualizzazione del picco di risonanza della spugna che altera la risposta del nostro sistema per frequenze basse.

Concludendo, grazie agli aspetti appena discussi, è possibile confermare in maniera quantitativa la bontà dei test e come il modello FEM possa essere considerato validato per il *blisk* operante nella condizione non vincolata.



# Capitolo 4

## Test d’impatto: caso blisk vincolato

### 4.1 Introduzione

La validazione del modello FEM tramite test d’impatto, quindi mediante l’utilizzo di martello sperimentale, è stata condotta anche per la condizione di *blisk* vincolato. Si tratta della validazione nella condizione di esercizio nel caso di *blisk* non rotante (condizione stazionaria). Dal punto di vista operativo è stato più difficile ricreare la condizione di vincolo nel modello FEM che rispettasse quella del modello reale. Come è possibile vedere in Figura 4.1, il *blisk* è stato vincolato al blocco di supporto tramite vite M12, dadi e rondelle. Il blocco di supporto è di



Figura 4.1: Configurazione sperimentale: blisk vincolato

acciaio e presenta una massa notevolmente superiore al *blisk*, inoltre tale blocco è stato fissato tramite 4 viti al tavolo sperimentale in modo da garantire in maniera più meticolosa possibile il fissaggio del *blisk* ad un vincolo che si possa avvicinare il più possibile ad uno ideale. In Figura 4.1 è visualizzabile la modalità con cui si è fissato il blocco al tavolo, la scelta della sequenza di viti e dadi per fissare al meglio il *blisk* al supporto (si è pensato di porre le due rondelle all’estremità in modo tale da distribuire al meglio le forze di serraggio e di porre i due dadi a diretto contatto, come se fossero un dado unico, ciò grazie all’elevato attrito tra le due superfici

adiacenti) e per garantire uno certo spazio vuoto tra *blisk* e supporto, ed infine la configurazione operativa.

## 4.2 Acquisizione sperimentale

Il test è stato eseguito, come mostra la Figura A.4, al di sopra del tavolo sperimentale al quale si è vincolato il blocco e a quest'ultimo il *blisk*. Come per il caso non vincolato si sono svolte numerose prove per l'individuazione della miglior posizione relativa eccitatore-misuratore per ottenere una migliore funzione di trasferimento. Dopo aver individuato le posizioni che producono la risposta migliore, si sono effettuati test multipli nella stessa posizione in modo da avere un certo grado di ripetibilità, a cui è possibile assicurare una determinata confidenza statistica e per avere dei picchi di risonanza nitidi e distinti.

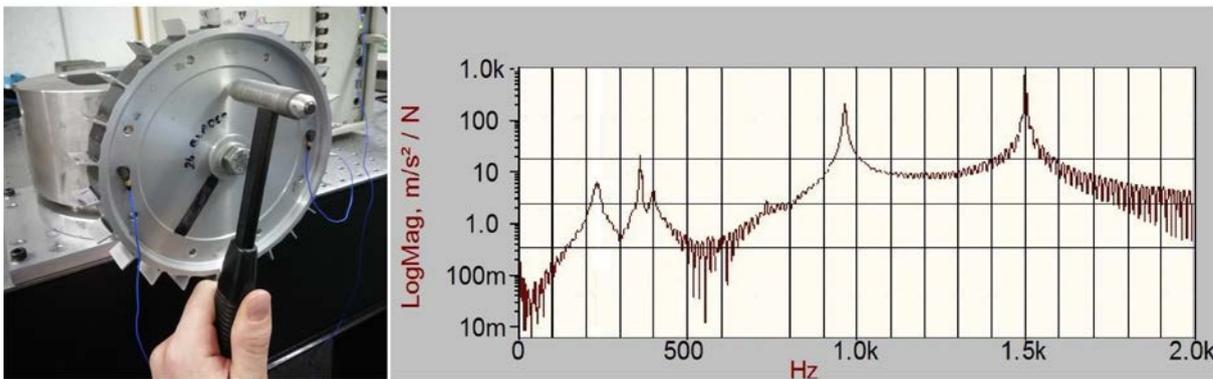


Figura 4.2: Acquisizione della funzione di trasferimento: caso blisk vincolato

Vediamo in Figura A.4 un esempio di come è stato colpito il *blisk* e una possibile funzione di trasferimento tra l'accelerazione e la forza. Si può notare la presenza di due accelerometri, di cui uno soltanto è collegato al sistema di acquisizione; l'altro è stato collocato in maniera diametralmente opposta per bilanciare la massa complessiva dopo l'aggiunta di quello operativo. In maniera analoga al test d'impatto riscontrato per la condizione non vincolata, anche in tal caso tramite la funzione di trasferimento non è possibile capire la tipologia del modo di vibrare legato a quello specifico picco di risonanza, infatti verranno utilizzate altre tecniche per indagare gli effettivi modi di vibrare. Ora l'obiettivo dell'analisi è quello di validare le frequenze naturali ritrovate sperimentalmente. Operativamente, per capire dove ci potessero essere le risonanze, ci si è affidati, non solo al diagramma del modulo, ma anche a quello della fase. È importante ricordare che a cavallo di una risonanza la fase subisce una variazione di  $\pi$  rad. Vediamo in Figura A.4 come siano nitidi 5 picchi di risonanza, ma indagando il file .txt in uscita dal software di acquisizione del segnale i picchi risultano 6, nello specifico: 237 Hz, 375 Hz,

390 Hz, 970 Hz, 1505 Hz e 1516 Hz. Questi due ultimi picchi non sono molto distinguibili in figura in quanto sono spazati di pochissimi Hz (se il *blisk* fosse perfettamente simmetrico non avremmo questa differenza, quindi si avrebbe un unico picco). Inoltre l'ultimo picco si verifica alle medesime frequenze (errore percentuale minore dell'1%) del picco riscontrato per la condizione non vincolata, ciò è naturale in quanto è la prima frequenza propria del *blisk* non vincolato, la quale caratterizzerà qualsiasi analisi vibratoria si attui sul pezzo. Concludendo, per aver la certezza che i vari picchi riscontrati nel diagramma del modulo fossero in realtà delle risonanze, si è effettuato un controllo combinato tra diagramma del modulo e della fase, in particolare:

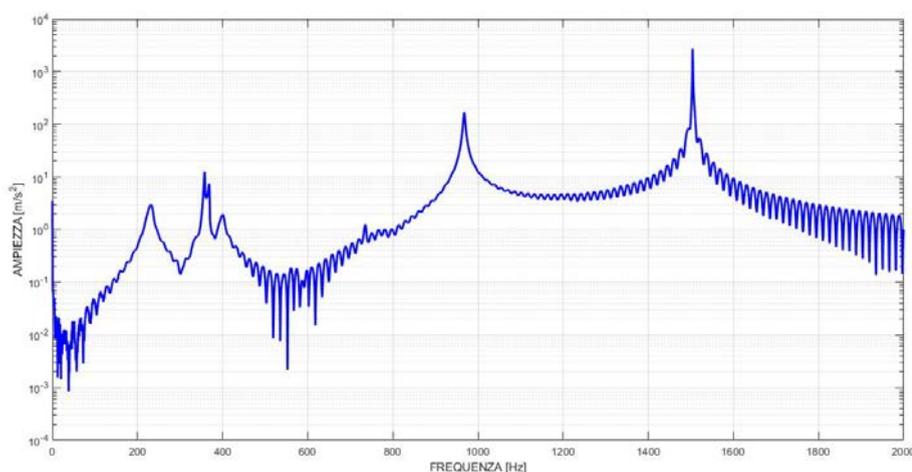


Figura 4.3: Funzione di trasferimento del blisk vincolato: diagramma del modulo

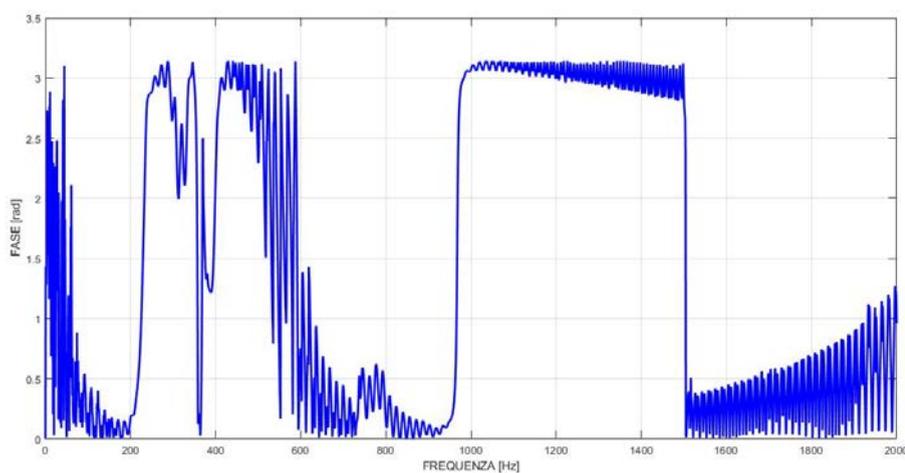


Figura 4.4: Funzione di trasferimento del blisk vincolato: diagramma della fase

Quindi dai diagrammi di Bode è possibile visualizzare la presenza di 5 picchi di risonanza nel

range di frequenze d'interesse, ciò risulta confermato anche dal diagramma della fase, in quanto in prossimità delle frequenze sopra citate abbiamo una discontinuità nel diagramma della fase di  $\pi$  rad.

### 4.3 Validazione del modello FEM

Si è proceduto come per l'analisi svolta nel precedente capitolo. Si è importata la geometria (*blisk*, supporto e vite), si è assegnato il materiale (per il supporto e la vite si è optato per l'acciaio strutturale), si è vincolato il *blisk* ed infine si è svolta l'analisi modale per ritrovare le medesime pulsazioni naturali del caso, l'analisi armonica per il confronto delle funzioni di trasferimento  $\frac{\ddot{x}}{F_0}$ , sperimentale e numerica.

Dall'analisi modale numerica sono emersi i seguenti risultati:

- Sei pulsazioni naturali
- Sei modi di vibrare

In figura qui sotto vediamo i risultati dell'analisi, in particolare:

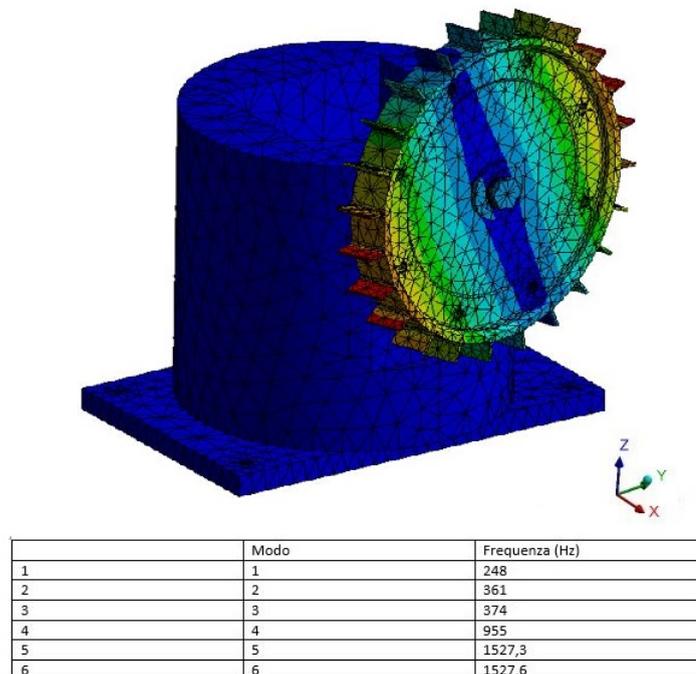


Figura 4.5: Frequenze naturali: caso blisk vincolato

Dall'analisi agli elementi risultano 6 frequenze di risonanza, in particolare: 248 Hz, 361 Hz, 374 Hz, 955 Hz, 1527,3 Hz ed infine 1527,6 Hz. Notiamo come per il caso non vincolato le due

frequenze più elevate siano praticamente uguali, ciò è dovuto nuovamente alla simmetria del pezzo. Successivamente è possibile verificare come l'errore percentuale dei picchi di risonanza corrispondenti nei due casi risulti inferiore del 5% (escluso il primo picco che presenta un errore del 7%). Quest'ultimo aspetto è importante al fine dell'accuratezza del modello numerico. È importante sottolineare tre diversi aspetti tra cui:

- Non idealità del vincolo reale
- Modellazione dell'intero blocco
- Accuratezza della mesh in corrispondenza del foro centrale

Il primo aspetto è legato alla non idealità del vincolo reale, in particolare il vincolo reale non può essere considerato perfettamente *fixed*. Tale fatto ha richiesto di escogitare degli accorgimenti negli accoppiamenti tra foro centrale e vite. L'accoppiamento che si viene a creare tra vite e foro centrale influenza il valore delle frequenze di risonanza in maniera preponderante, ovvero l'errore percentuale tra i due casi in esame risulterebbe anche molto maggiore del 5%. È stato fondamentale studiare diverse tipologie di accoppiamento nel modello FEM per giungere a quella che potesse avere errori percentuali dei valori della risonanza inferiori al 5%. Il secondo aspetto riguarda l'aver modellato il supporto e la vite in maniera il più fedele possibile, in modo da applicare i vincoli esattamente laddove si trovano nel modello reale. Il terzo aspetto è legato al primo, in quanto per migliorare l'accuratezza in maniera sensibile si è infittita la mesh in corrispondenza dell'accoppiamento tre vite e foro passante. Per la validazione del modello FEM si è giunti infine al seguente risultato: Dal grafico sopra esposto si nota come

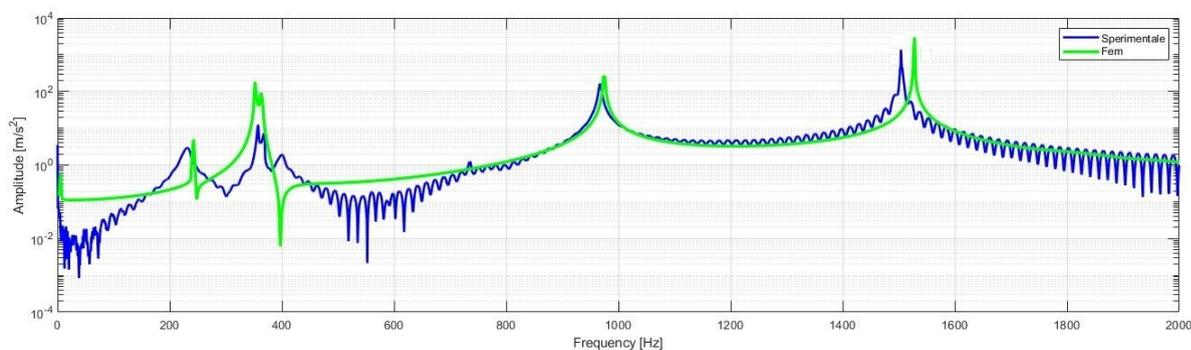


Figura 4.6: Funzioni di trasferimento del blisk vincolato

ci sia un buon accoppiamento tra i due casi. I picchi di risonanza nel caso numerico sono leggermente traslati in frequenza verso frequenze maggiori, in quanto nel modello FEM non c'è smorzamento. Tale fatto inoltre comporta che anche i picchi di risonanza del caso FEM siano più elevati. Infine notiamo come la prima frequenza di risonanza sia parecchio distanziata

dal caso reale, tale aspetto verrà in seguito analizzato grazie alla validazione dei modi di vibrare. Tramite l'ausilio dei modi di vibrare spiegheremo il motivo per il quale la prima frequenza di risonanza si discosta così tanto da quella realmente misurata, essendo l'unica avente un errore percentuale maggiore del 5%, nello specifico del 7%.

# Capitolo 5

## Modi di Vibrare: blisk vincolato

### 5.1 Introduzione

Il secondo fondamentale obiettivo dell'elaborato di tesi è stato quello di validare i modi di vibrare del *blisk* solamente per la configurazione vincolata. Si è utilizzato un software ad hoc per validare i modi di vibrare trovati nel modello FEM. Il software utilizzato si chiama *ME'scopeVES*. Questo permette, data la geometria del componente meccanico, di inserire in maniera ordinata le FRF nei punti considerati importanti al fine di ricavare i modi di vibrare in maniera inequivocabile. Tale software fornisce in uscita, tramite un'animazione tridimensionale, i modi di vibrare del componente meccanico. Nello specifico è possibile muoversi lungo l'asse delle frequenze a piacimento e in prossimità dei picchi di risonanza il *blisk* si muove in base al modo di vibrare eccitato. Si può cambiare la frequenza di eccitazione in maniera molto accurata in quanto ci si può muovere lungo l'asse delle frequenze di Hz in Hz. Ciò appena detto rende la ricerca dei modi di vibrare molto meticolosa e affidabile.

In seguito si è illustrato come il software giunge ai modi di vibrare, in particolare:

- Realizzazione del modello all'interno del software *ME'scopeVES* oppure è possibile importare il modello da un software CAD esterno.
- Creazione manuale dei punti nel modello CAD. A tali punti si assoceranno le FRF trovate sperimentalmente.
- Associazione delle FRF sperimentali nei punti corrispondenti tra modello FEM e modello reale.
- Animazione dei modi di vibrare.

Nello specifico, il primo passo è stato quello di provare a realizzare la geometria direttamente in ambiente *ME'scopeVES*, ma tale evoluzione ha prodotto notevoli difficoltà, in quanto l'ambiente CAD interno a *ME'scopeVES* non ha permesso di realizzare un pezzo così dettagliato. Successivamente si è optato per importare direttamente da Solidworks il componente meccanico, ma anche in tal caso si sono riscontrati problemi nella fase successiva di assegnazione dei punti (difficoltà nell'associare i punti con le FRF). Infine si è scelto di semplificare la geometria e di implementarla direttamente in *ME'scopeVES*. La geometria semplificata del *blisk* è ridotta in un semplice disco senza palette all'estremità. Tale semplificazione è accettabile ai fini di un'analisi modale, in quanto le palette sono corte e di conseguenza risultano molto rigide. Inoltre la deformazione delle palette risulta minima in prossimità delle risonanze. Si riporta la prima configurazione non utilizzata per l'analisi:

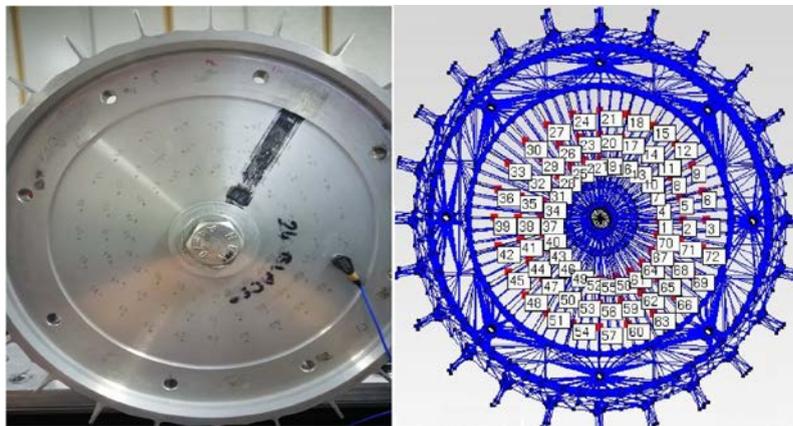


Figura 5.1: Punti d'acquisizione delle FDT: configurazione non utilizzata

Si riporta infine la configurazione finale usata per l'analisi modale:

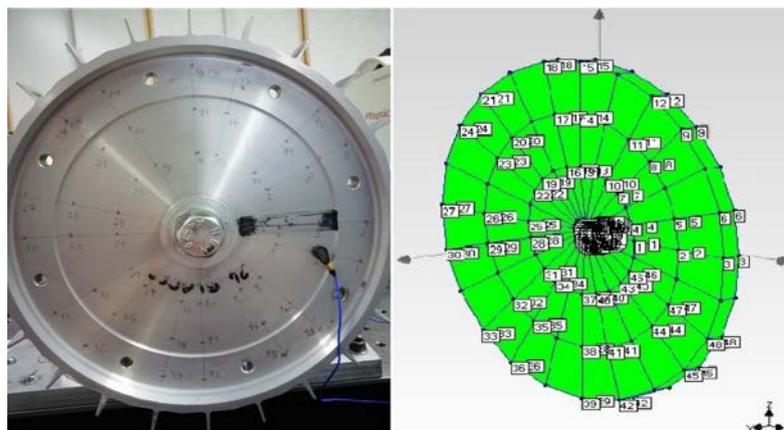


Figura 5.2: Punti d'acquisizione delle FDT: configurazione utilizzata

Notiamo come nella configurazione scelta si siano considerati meno punti su cui calcolare la FRF (nella geometria non utilizzata si aveva una ridondanza di punti), ma maggiormente dislocati su tutto il disco. In particolare si sono considerati 48 punti dove ottenere la FRF tramite test d'impatto (l'accelerometro è stato posto nel punto 2 per tutta la durata del test). Quest'ultima disposizione dei punti ha permesso una migliore animazione dei modi di vibrare che ha permesso di discriminare le tipologie modali in maniera più facile e accurata. La configurazione utilizzata, oltre ai precedenti aspetti positivi che si sono messi in luce, è anche più facile e veloce da ottenere, in quanto si deve tener presente che si è ottenuta una FRF (tramite martello strumentale) per ogni punto in maniera continuativa, ovvero si sono ottenute tutte le FRF una dopo l'altra (se una delle ultime misurazioni non fosse stata acquisita in maniera corretta si sarebbe dovuto ripetere l'intero test di acquisizione anche in tutti gli altri punti precedentemente eccitati correttamente). Si è visto come tramite tale dislocazione dei punti (si veda Figura 5.2) e eccitando il *blisk* ortogonalmente non sia possibile ottenere il primo modo di vibrare ottenuto dall'analisi FEM. Il motivo è dovuto al fatto che tale configurazione (si veda Figura 5.3) è adatta alla ricerca dei modi di vibrare assiali e flessionali e non a quelli torsionali. Si è trovata un'altra soluzione per determinare i modi di vibrare torsionali, in particolare si è adottata la seguente configurazione:

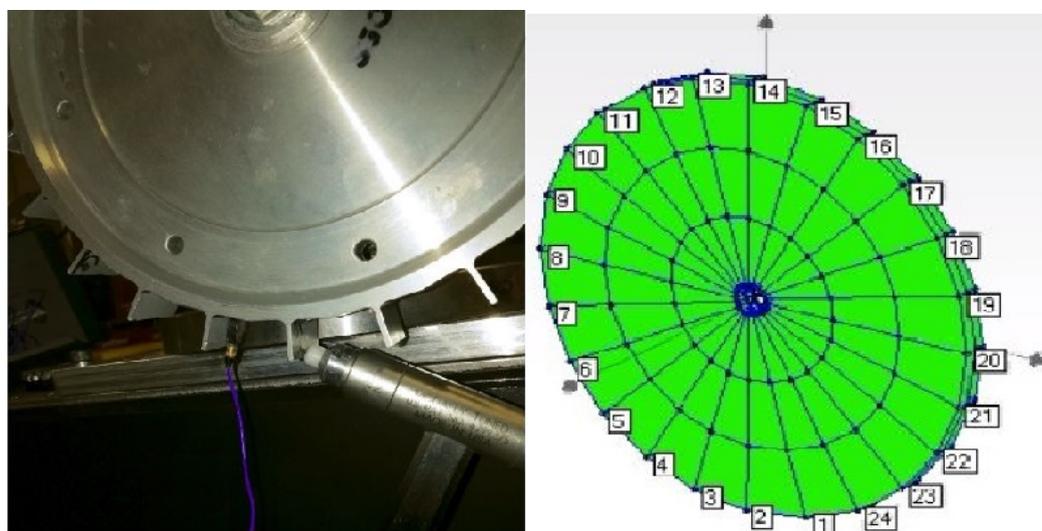


Figura 5.3: Punti d'acquisizione delle FDT: configurazione usata per determinare solo i modi di vibrare torsionali

Notiamo che per scovare con maggiore accuratezza il primo modo di vibrare si sia cambiata la collocazione dell'accelerometro e la direzione di eccitazione del *blisk* (nel capitolo precedente la direzione di eccitazione e dell'accelerometro non erano adatti ad acquisire al meglio il primo modo di vibrare torsionale). Si sono considerati 24 punti dove acquisire la FRF tramite test d'impatto. Questi 24 punti rappresentano le 24 palette presenti nel *blisk*. Una volta ottenute

tutte e 24 le FRF e importate in *ME'scopeVES* è stato possibile visualizzare l'animazione del primo modo di vibrare torsionale.

## 5.2 Validazione dei modi di vibrare

Dal punto di vista dell'analisi dei modi di vibrare è stata dapprima costruita la geometria in ambiente *ME'scopeVES*, poi si sono scelti i punti dove calcolare la FRF ed infine si sono ottenute le animazioni del *blisk* al variare della frequenza. Dopo aver importato tutte le FRF, sia per lo studio dei modi di vibrare flessionali e assiale, sia per lo studio dei modi di vibrare torsionali, si sono ottenuti dei grafici cumulativi di tutte le FRF, nei quali è stato possibile osservare come tutte le funzioni di trasferimento avessero, più o meno amplificati, i medesimi picchi di risonanza.

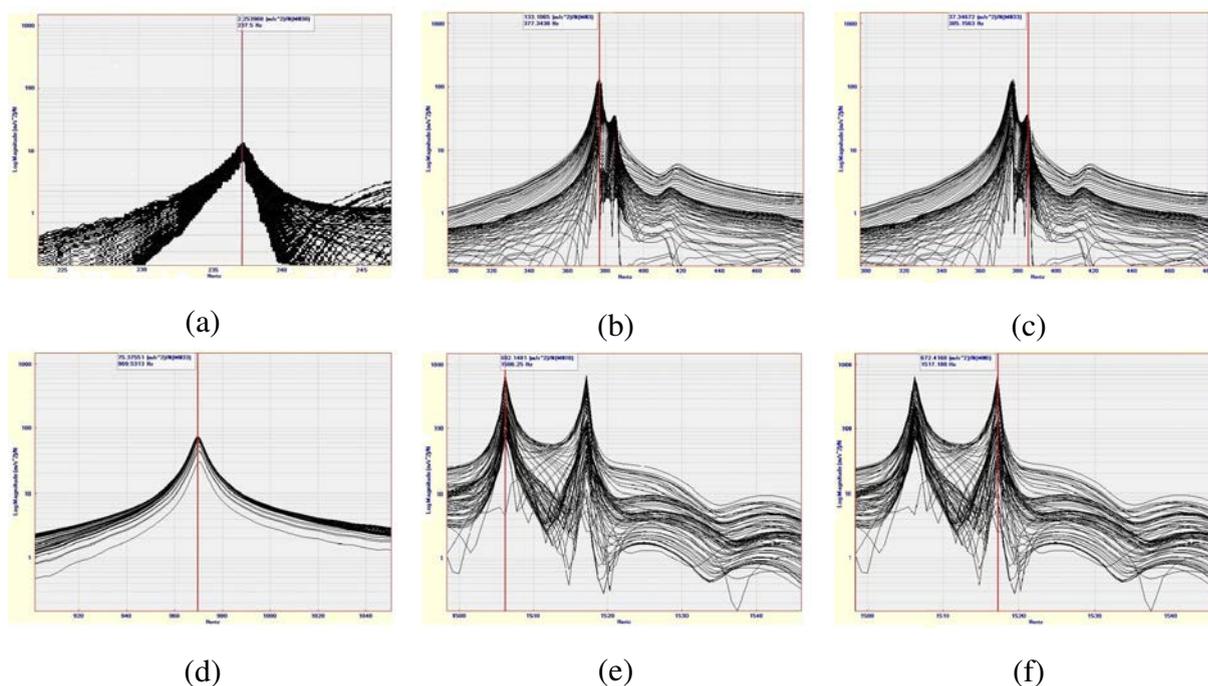


Figura 5.4: Frequenze di risonanza sperimentali: blisk vincolato

In Figura 5.4 sono riportate tutte le funzioni di trasferimento ottenute nei punti presi in considerazione per la validazione dei modi di vibrare. Nello specifico, ad ogni picco di risonanza il software *ME'scopeVES* ha fornito le corrispondenti animazioni tridimensionali atte a visualizzare e a comprendere il modo di vibrare eccitato. Si riportano in seguito delle immagini ricavate dalle animazioni tridimensionali:

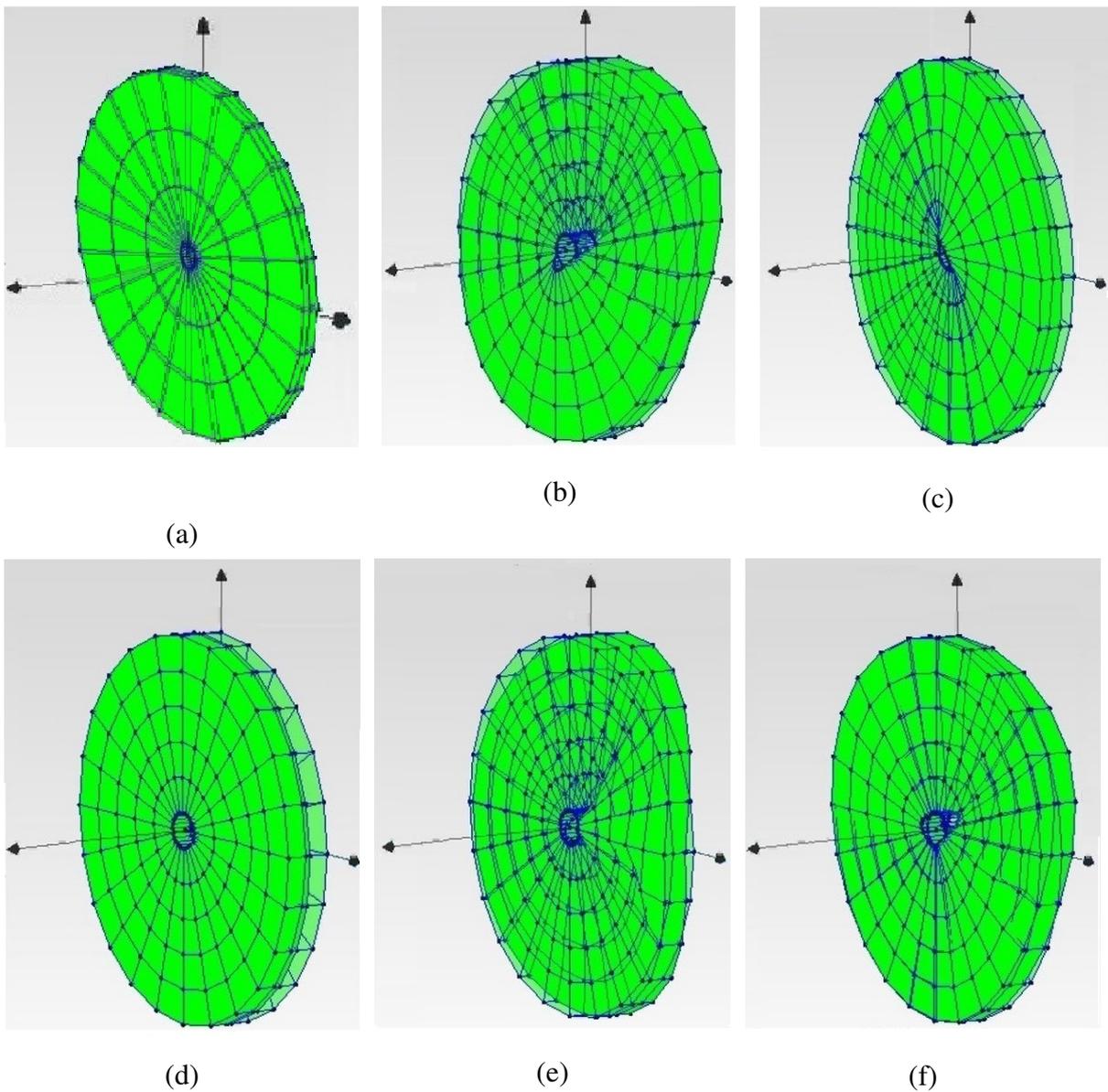


Figura 5.5: Modi di vibrare sperimentali: animazioni tridimensionali

Le due Figure 5.5 e 5.4 sono collegate in quanto spostandosi lungo l'asse delle frequenze si sono potuti ottenere tutti e 6 i modi di vibrare caratteristici del *blisk*. Come appena detto, si sono ottenuti 6 picchi di risonanza che rappresentano nell'ordine: (a) picco di risonanza legato al primo modo di vibrare torsionale; (b) e (c) primo picco di risonanza legato al primo modo di vibrare flessionale (il contenuto shift in frequenza tra i due picchi è dovuto al fatto che il *blisk* reale non è perfettamente simmetrico); (d) primo picco di risonanza legato al primo modo di vibrare di tipo assiale (altresì detto modo di vibrare ad ombrella); (e) e (f) secondo picco di risonanza legato al secondo modo di vibrare di tipo flessionale (è evidente lo shift in

frequenza tra i due picchi che è dovuto alla non simmetria del *blisk* reale). Dal punto di vista delle frequenze dei vari picchi è possibile visualizzare dalla Figura 5.4 gli effettivi picchi di risonanza, nell'ordine: 237.5 Hz, 377.3 Hz, 385.2 Hz, 969.5 Hz, 1506.3 Hz, 1517.2 Hz.

Dal punto di vista del modello FEM si sono ottenuti i seguenti modi di vibrare:

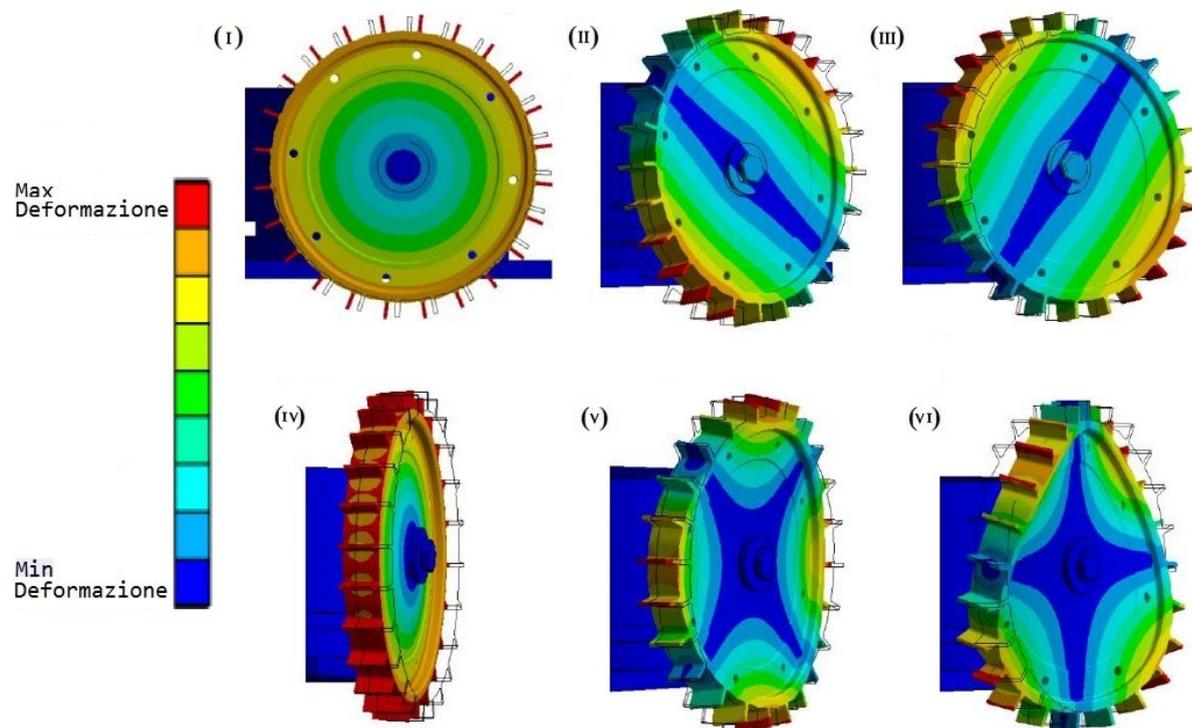


Figura 5.6: Modi di vibrare derivanti dall'analisi FEM: animazioni tridimensionali

Nello specifico la Figura 5.6 presenta nell'ordine:

- I) Primo modo di vibrare torsionale
- II) Primo modo di vibrare flessionale (primo picco)
- III) Primo modo di vibrare flessionale (secondo picco)
- IV) Primo modo di vibrare assiale
- V) Secondo modo di vibrare flessionale (primo picco)
- VI) Secondo modo di vibrare flessionale (secondo picco)

Dal punto di vista delle frequenze dei vari picchi di risonanza, nel caso FEM si sono riscontrati nell'ordine: 248 Hz, 361 Hz, 374 Hz, 955 Hz, 1527.3 Hz, 1527.6 Hz. Dalla Figura 5.6 osserviamo come il primo modo di vibrare di tipo flessionale possieda un solo diametro nodale, invece il secondo modo di vibrare di tipo flessionale ne possieda due, ciò in accordo con la

teoria delle vibrazioni. È importante precisare nuovamente come la presenza di due picchi di risonanza molto vicini in corrispondenza dei due modi flessionali trovati, sia dovuta a piccole imprecisioni di costruzione (il *blisk* non è perfettamente simmetrico, idealmente la frequenza di risonanza sarebbe unica). Infine, osservando le due Figure 5.6 e 5.5 possiamo affermare come il modello FEM del *blisk* sia validato anche dal punto di vista dei modi di vibrare.

# Capitolo 6

## Acquisizione dei modi di vibrare mediante estensimetri

### 6.1 Introduzione

L'ultima validazione del modello FEM che è stata condotta è un'ulteriore conferma dei modi di vibrare precedentemente ottenuti tramite test d'impatto. La seguente validazione è stata condotta tramite l'ausilio di estensimetri, nello specifico si sono adoperati 4 estensimetri aventi le stesse caratteristiche. Con tale approccio si sono riverificati tutti i modi di vibrare eccetto quello torsionale, in quanto avrebbe richiesto una differente dislocazione degli estensimetri (si sarebbero dovuti porre degli estensimetri anche nella direzione di rotazione), e inoltre la loro collocazione nel *blisk* non sarebbe stata immediata vista la poca distanza tra le palette (si sarebbero verificati problemi legati all'incollaggio e al cablaggio). Il test effettuato nel *blisk* è stato successivo a quello realizzato su di una piastrina, in quanto si è voluto familiarizzare con l'intera configurazione operativa (si veda Appendice A). Tra il test di prova e il test reale l'unica cosa che è risultata differente è la modalità di eccitazione, in particolare per la piastrina si è utilizzato un getto d'aria, invece per il *blisk* si è usato lo shaker. L'eccitazione tramite getto d'aria non è in grado di eccitare componenti troppo massivi, in particolare, sia l'intensità della forzante, sia la frequenza di eccitazione risultano non adatti allo studio modale di componenti come il *blisk*. Al fine di ottenere la configurazione utilizzata operativamente si è realizzato il modello CAD di una piastra forata da porre al di sotto dello shaker in modo da avere la corretta disposizione relativa tra shaker e *blisk*. Si è svolta un'analisi preliminare sugli ingombri, successivamente si è realizzato il CAD della piastra forata e questa infine è stata realizzata dal reparto tecnico dell'università. Operativamente si sono effettuati i seguenti passaggi per giungere all'acquisizione del segnale derivante dagli estensimetri:

- Eccitazione mediante shaker del *blisk*
- Variazione della resistenza nei 4 estensimetri
- Acquisizione del segnale estensimetrico mediante opportuni strumenti
- Visualizzazione dell'andamento del segnale dei 4 estensimetri tramite software dedicato

Si riportano in maniera più dettagliata i vari passaggi atti all'acquisizione del segnale estensimetrico:

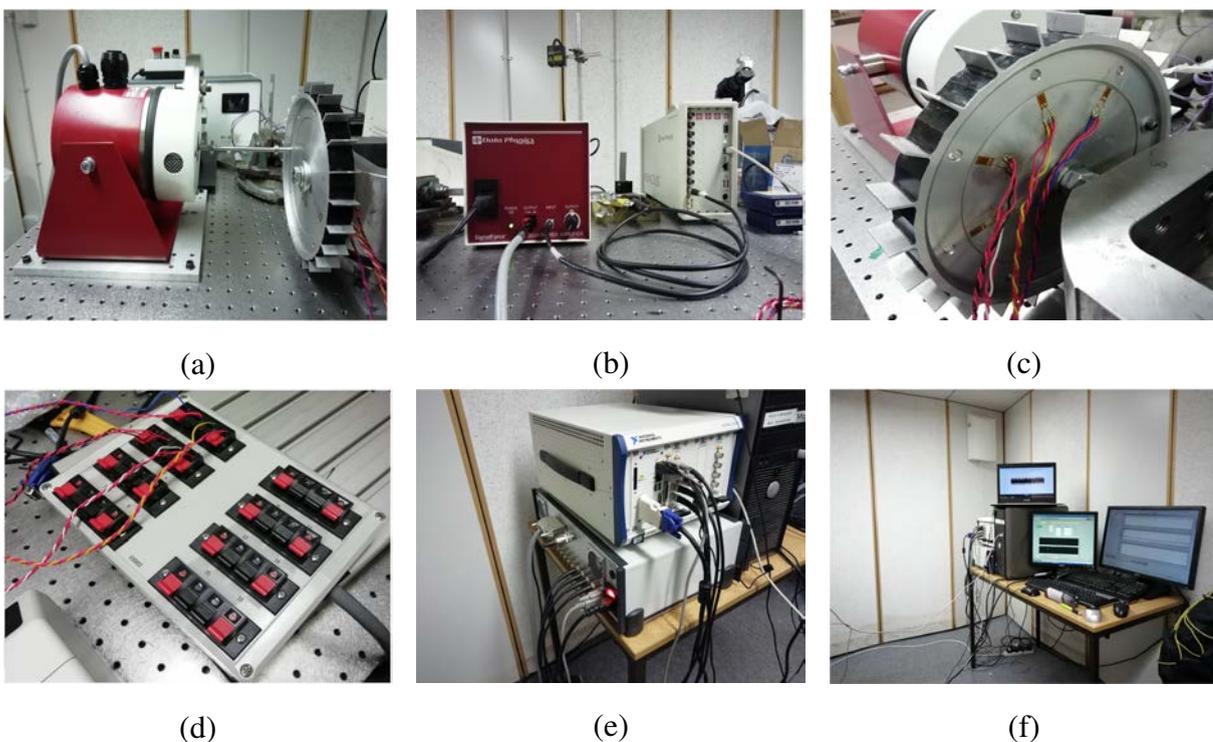


Figura 6.1: Apparato sperimentale per acquisizioni estensimetriche

Nella figura qui sopra presentata sono rappresentati gli strumenti usati per effettuare la validazione. In figura (a) sono rappresentati lo shaker e il *blisk* nella configurazione operativa. Sempre nella precedente figura si noti la piastra forata realizzata ad hoc per ottenere una corretta interfaccia tra lo shaker e il *blisk*. Nella figura (b) sono rappresentati in rosso l'amplificatore collegato direttamente allo shaker e in bianco l'hardware atto alla conversione del segnale d'input impostato da computer e diretto allo shaker. In figura (c) è rappresentata la configurazione scelta dei 4 estensimetri, la quale verrà trattata nel successivo paragrafo. Nelle successive immagini (d) ed (e) abbiamo nell'ordine: morsetti per collegamento cavi estensimetrici collegati direttamente all'amplificatore del segnale estensimetrico e quest'ultimo collegato al computer atto all'elaborazione del segnale utile alla validazione dei modi di vibrare. Nell'ultima figura,

la (f), sono rappresentati tre computer ma in realtà soltanto i due localizzati al di sopra del tavolo sono quelli operativi, nello specifico in quello di sinistra è installato il software *SCITEK* utilizzato per l'acquisizione del segnale e per il controllo dei parametri estensimetrici; in quello di destra è installato il software *SignalCalc* finalizzato al controllo dello shaker.

## 6.2 Applicazione dell'eccitazione mediante shaker

La configurazione operativa presentata in Figura 6.1 (nello specifico la diapositiva (a)) mostra come l'eccitazione impartita dallo shaker sia trasmessa al *blisk* tramite un'asta in acciaio. L'asta è stata meticolosamente ancorata allo shaker e successivamente al *blisk*. L'operazione di ancoraggio al disco porta pale è stata davvero impegnativa in quanto si sono considerate molte varianti in modo da far trasferire l'effettiva forzante impartita dallo shaker. In particolare: Notiamo come la configurazione finale presenti l'asta in perfetto contatto con la superficie ri-



Figura 6.2: Configurazione operativa di ancoraggio tra shaker e blisk

volta verso lo shaker, invece dall'altra parte, tramite l'ausilio di una rondella e di una vite, si sia fissata l'asta alla posizione scelta. La difficoltà principale di tale operazione è stata quella di allineare rigidamente shaker, asta e foro del *blisk* (tutti i componenti devono essere ancorati al tavolo sperimentale), dove poter ancorare asta e *blisk*. L'eccitazione impartita è stata di tipo sinusoidale a frequenza e ampiezza variabili. In particolare si è coperto in frequenza tutto il range 0-2000 Hz.

## 6.3 Scelta, dislocazione e incollaggio estensimetri

Di fondamentale importanza per svolgere questa validazione è stata la scelta degli strumenti di misura. Nello specifico si sono utilizzati estensimetri elettrici a resistenza, che risultano molto

pratici e semplici nel loro funzionamento. In particolare, la deformazione del componente fa variare la resistenza elettrica della parte sensibile dell'estensimetro (griglia metallica) e da ciò risulta una variazione di tensione in uscita (per tensioni rilevate molto piccole è infatti necessario mettere in serie un amplificatore prima di giungere al software di acquisizione). Si sono utilizzati 4 estensimetri monoassiali a griglia metallica.

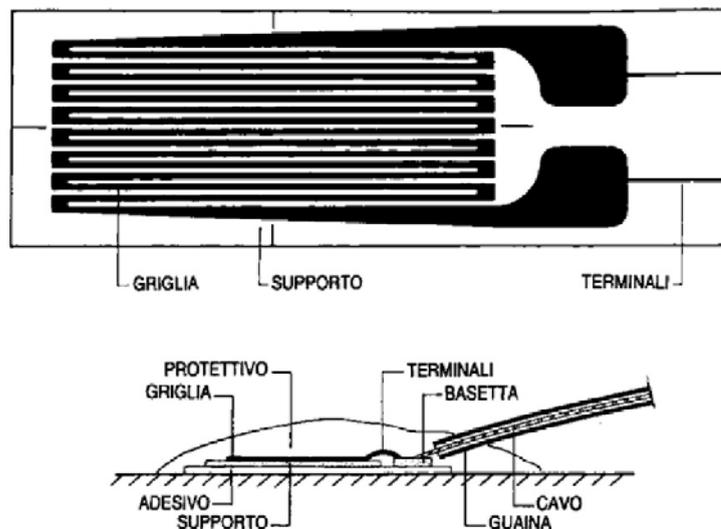


Figura 6.3: Esempio di estensimetri monoassiali - [19]

I quattro estensimetri scelti presentano una resistenza nominale di  $120 \Omega$  con una tolleranza di  $\pm 0.3 \%$  e un rapporto di taratura (rapporto tra la variazione di resistenza relativa  $\frac{\Delta R}{R}$  e la deformazione longitudinale  $\frac{\Delta L}{L}$ ) pari a  $2.110 \pm 0.5\%$ . Altro importante aspetto è stato scegliere il numero di estensimetri e la loro collocazione. Si sono scelti 4 estensimetri in modo da poter acquisire in maniera più chiara possibile il modo di vibrare secondo flessionale, il quale presenta due diametri nodali. È proprio per garantire questa ampia variabilità delle deformazioni (per i modi di vibrare primo flessionale ed assiale ne sarebbero bastati due) che la scelta è ricaduta su 4 estensimetri. Successivamente si è selezionata la loro collocazione, nello specifico si sono disposti angularmente a  $45^\circ$  l'un l'altro, in modo da avere un'elevata confidenza della collocazione dei punti di minima e massima deformazione (i punti di minima deformazione si collocano in corrispondenza dei diametri nodali). Infine, con l'aiuto di un tecnico dell'università, si sono incollati i suddetti estensimetri. L'incollaggio ha previsto i seguenti passaggi:

- Carteggio: il carteggio è usato per togliere degli strati superficiali non graditi come vernice, ossidi, ecc... L'area carteggiata deve essere più grande di quella dell'estensimetro e il carteggio deve essere effettuato in varie direzioni in modo da ottenere una superficie ideale per l'incollaggio. L'operazione del carteggio svolta ha richiesto l'utilizzo di una mola abrasiva e successivamente, per il carteggio finale, l'utilizzo di carte vetrate.

- Tracciatura per l'orientamento dell'estensimetro: il posizionamento e l'orientamento degli estensimetri è stato scelto in direzione radiale (motivata dalla geometria del *blisk*) e questi sono stati allineati in corrispondenza dei fori d'estremità del disco. Con l'ausilio di calibri e matite si sono collocati i 4 estensimetri monoassiali.
- Condizionamento superficie: rimozione dello sporco superficiale con stecchetti di cotone e con il nastro adesivo fino a quando il cotone e il nastro adesivo non risultano perfettamente puliti dopo la loro applicazione.
- Incollaggio: tramite colla epossidica si sono incollati gli estensimetri e successivamente tramite piccoli pesi si è fatta pressione su ciascun estensimetro per far fuoriuscire la colla in eccesso. Infine gli estensimetri sono stati pressati per un'intera notte da ulteriori pesi per ottenere la massima aderenza tra superficie e gli stessi.

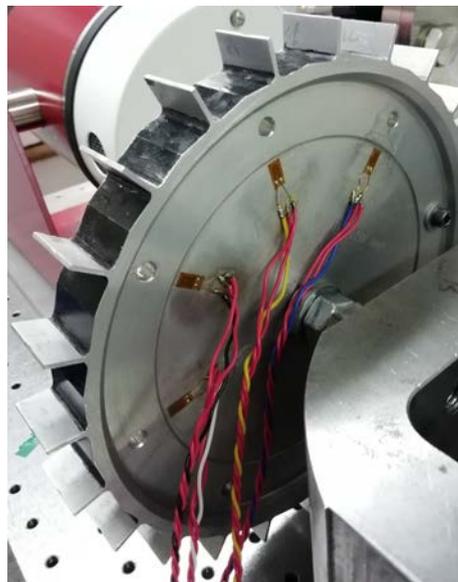
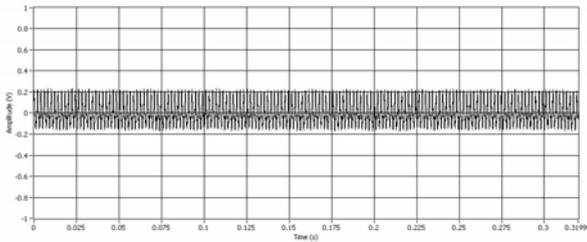


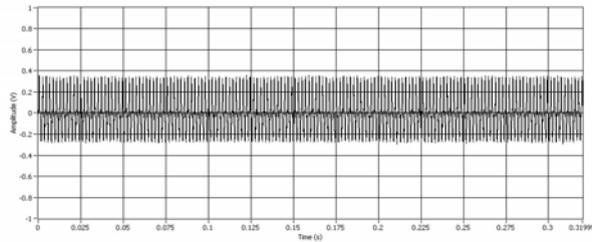
Figura 6.4: Disposizione operativa dei 4 estensimetri

## 6.4 Validazione del modello FEM tramite estensimetri

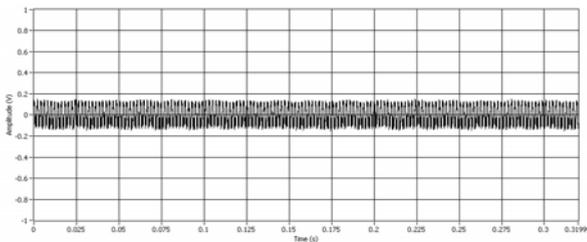
Si riportano i risultati ottenuti dalle misurazioni estensimetriche. Per ogni picco di risonanza si sono ottenuti 4 segnali differenti ricavati dai quattro estensimetri. È stato assegnato ad ogni estensimetro un nome, in particolare dalla Figura 6.4 sono stati chiamati, partendo da destra: AA, BB, CC, DD. Si riportano in ordine i vari risultati ottenuti:



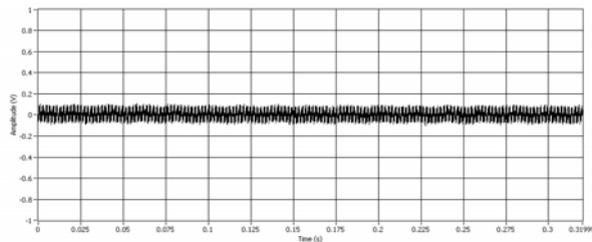
Estensimetro AA



Estensimetro BB

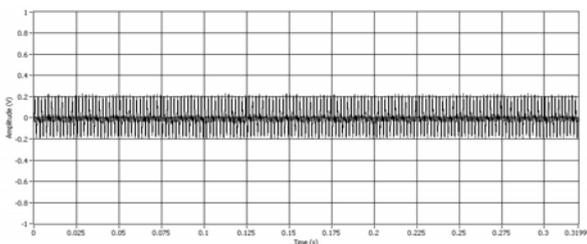


Estensimetro CC

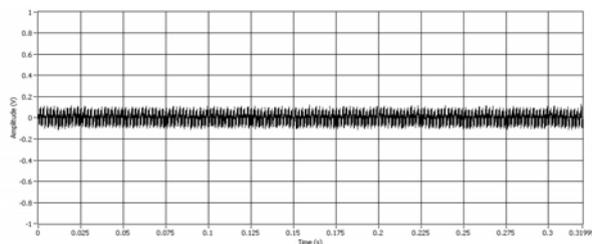


Estensimetro DD

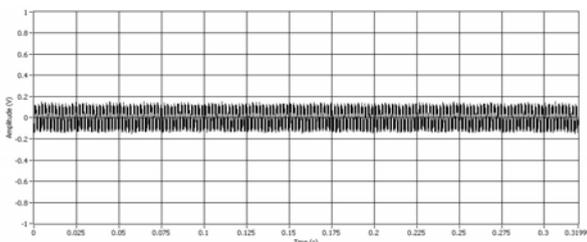
Figura 6.5: Primo modo di vibrare flessionale: primo picco



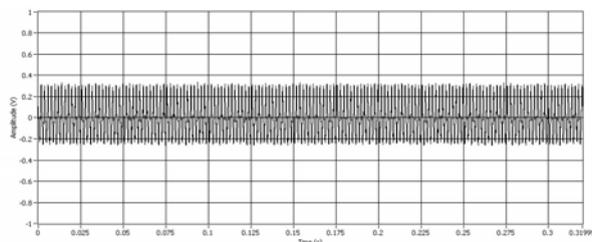
Estensimetro AA



Estensimetro BB



Estensimetro CC



Estensimetro DD

Figura 6.6: Primo modo di vibrare flessionale: secondo picco

La Figura 6.5 rappresenta il primo picco del primo modo di vibrare flessionale e nello specifico i quattro segnali derivanti dai quattro estensimetri alla risonanza. Si può notare come l'ampiezza del segnale massimo si sia verificata nell'estensimetro BB e la minima in quello DD, invece negli altri due i segnali si attestano attorno a valori intermedi. Da tali risultati è intuitivo pensare come in prossimità dell'estensimetro DD sia presente il diametro nodale (luogo dei punti con deformazioni minori) e che in prossimità di quello BB si verifichino le deformazioni maggiori. Da tali osservazioni si capisce come ci sia un solo diametro nodale, ciò è compatibile con la descrizione del primo modo di vibrare flessionale. Similmente si verifica per il secondo picco flessionale; in particolare, in tal caso, il diametro nodale risulta prossimo all'estensimetro BB. Ciò è compatibile con l'analisi teorica, ovvero i due diametri nodali legati al primo picco di risonanza risultano perpendicolari. Le frequenze in cui si sono verificati i due picchi sono leggermente più elevate rispetto a quelle trovate nei capitoli precedenti, in quanto si è dovuta cambiare la vite di fissaggio tra *blisk* e blocco (la vite usata per i test precedenti si è danneggiata nel corso delle ripetute prove e per le notevoli forze di serraggio applicate). Nello specifico, i due picchi si sono assestati a 395 Hz il primo e il secondo a 410 Hz. Tali risonanze si verificano a frequenze leggermente maggiori rispetto a ciò visto nei paragrafi precedenti, in quanto alla nuova vite è associata una rigidità di serraggio leggermente maggiore rispetto a quella danneggiata.

Si riportano ora i risultati per il modo di vibrare assiale:

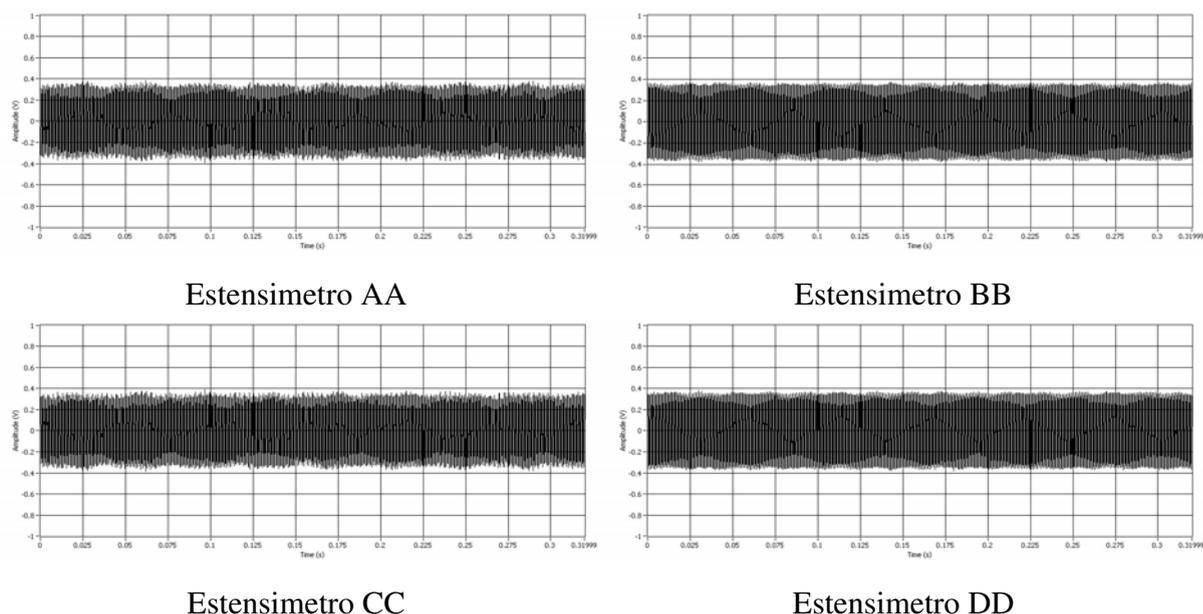
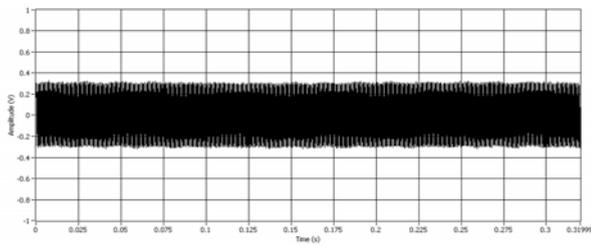


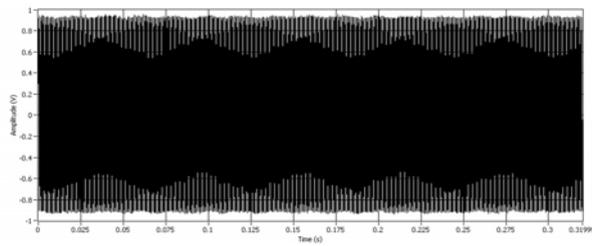
Figura 6.7: Primo modo di vibrare assiale

È intuitivo pensare come essendo localizzati tutti e quattro gli estensimetri allo stesso raggio la deformazione in direzione assiale sia la medesima. Infatti, il segnale estensimetrico risulta

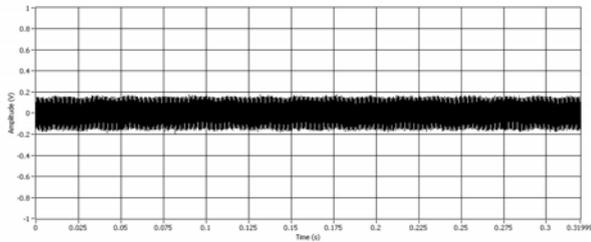
pressoché il medesimo in tutti e quattro i sensori. Questo risultato conferma nuovamente la presenza di un modo di vibrare assiale a frequenza prossima ai 1000 Hz, in particolare, per lo stesso aspetto illustrato precedentemente, la frequenza di tale modo è risultata di 1020 Hz. Si riportano infine i grafici per il secondo modo di vibrare flessionale:



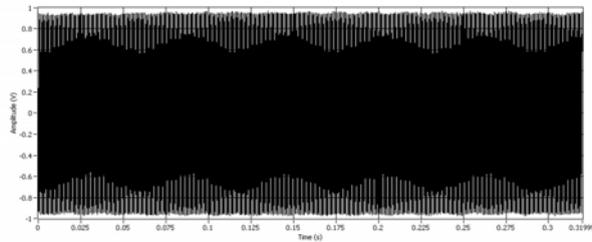
Estensimetro AA



Estensimetro BB

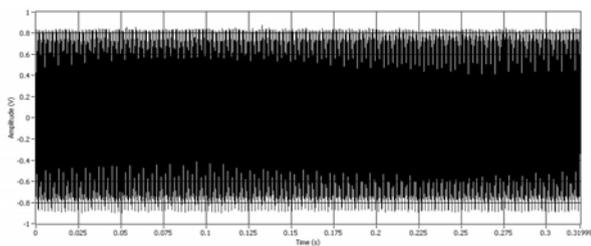


Estensimetro CC

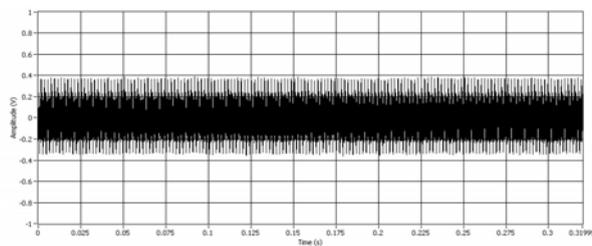


Estensimetro DD

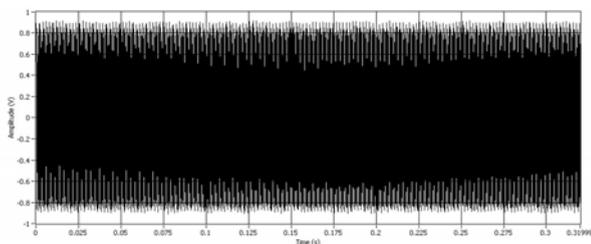
Figura 6.8: Secondo modo di vibrare flessionale: primo picco



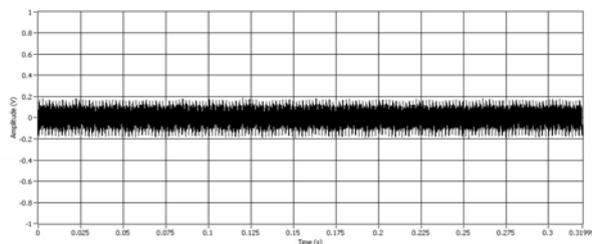
Estensimetro AA



Estensimetro BB



Estensimetro CC



Estensimetro DD

Figura 6.9: Secondo modo di vibrare flessionale: secondo picco

In questa ultima validazione si è alla ricerca di due diametri nodali per dimostrare il modo di vibrare secondo flessionale. In particolare da entrambe le figure si riscontra che due estensimetri sono maggiormente vicini ai due diametri nodali, invece gli altri due sono prossimi alle posizioni di maggior deformazione. Nelle due immagini rappresentanti i due picchi è facilmente visualizzabile come i due diametri nodali siano tra di loro perpendicolari e inoltre lo siano considerando i due picchi di risonanza (analogo al caso con un solo diametro nodale). Le frequenze di risonanza in tal caso risultano di 1520 Hz e 1535 Hz. È importante riportare l'amplificazione dell'errore captata dagli estensimetri per assicurarci che tutti i grafici appena presentati corrispondano a delle letture di tensione corrette, quindi:

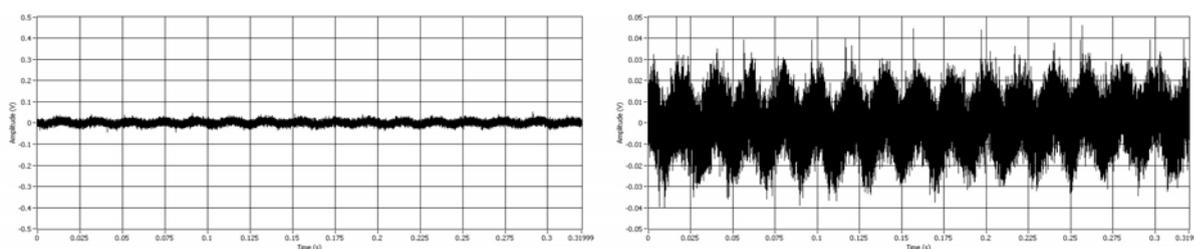


Figura 6.10: Rumore connesso all'apparato di acquisizione

Qui sopra è riportato in due figure il rumore acquisito dagli estensimetri prima dell'effettivo test. Notiamo come l'ordine di grandezza del rumore in termini di tensione si attesti attorno a 0.05 V, invece i segnali acquisiti durante le misurazioni hanno un range tra 0.2 a 1 V; è possibile quindi ritenere corretti i precedenti grafici. La validazione mediante estensimetri dei modi di vibrare del modello FEM del *blisk* ha avuto esito positivo, ovvero sono stati riconfermati i precedenti modi di vibrare trovati anche mediante test d'impatto. Per concludere, in tale paragrafo ci si è soffermati solamente sulla validazione dei modi di vibrare osservando l'andamento dell'output dagli estensimetri, ma da tale output è possibile ricavare tensioni e deformazioni del *blisk*. Dall'acquisizione del segnale in tensione mediante calibrazione degli estensimetri, ovvero ricavando dei fattori di conversione, è possibile passare dal dato in volt a quello in tensione e a quello in deformazione. Tale calibrazione è stata effettuata per una geometria più semplice, nello specifico su di una piastrina (si veda Appendice A).



## Conclusioni e sviluppi futuri

Questo lavoro di tesi è proseguito in modo lineare. Dapprima, si è riportata la geometria e le proprietà del componente meccanico studiato, si è riportata la procedura e i risultati dei test sperimentali; infine si è verificata la bontà dei risultati ottenuti a livello numerico. Nello specifico il modello FEM è stato validato dal punto di vista dell'analisi vibratoria tramite test d'impatto e misure estensimetriche. Entrambi gli approcci, di fatto, dimostrano la correttezza dei risultati trovati numericamente, in particolare delle frequenze di risonanza e dei modi di vibrare. Tali risultati sono stati ottenuti per il caso di *blisk* non vincolata e successivamente vincolata. L'analisi è stata di tipo statico, ovvero il componente è sempre rimasto fermo durante tutti i test. Oltre alla validazione, i risultati sono stati confrontati con quelli ottenuti dal dottorando, il quale aveva ottenuto i medesimi risultati adottando approcci non convenzionali per lo studio delle vibrazioni. Dopo queste due differenti validazioni l'obiettivo sarà quello di validarlo anche durante un'analisi dinamica, ovvero durante l'esercizio. Tale analisi risulta ancor più complessa dal punto di vista sperimentale di quella affrontata in questo progetto di tesi, ma costituirà la validazione finale e riassuntiva dell'analisi vibratoria del *blisk*.



## Appendice A

### Validazione del modello FEM della piastra e calibrazione estensimetrica

Si sono svolti test modali sperimentali su di una trave di alluminio in modo da familiarizzare con l'acquisizione mediante estensimetri. Per ottenere risultati attendibili si è preferito eccitare tale trave mediante getto d'aria in quanto presenta una bassa rigidezza. Inoltre il getto d'aria ha permesso una migliore visualizzazione del fenomeno della risonanza ad occhio nudo. Come per il *blisk*, è stato validato il modello FEM corrispondente alla trave. Tale validazione ha permesso la successiva calibrazione degli estensimetri che verrà trattata in seguito. La scelta di eseguire test estensimetrici, dapprima nella trave, e successivamente nel *blisk*, è stata motivata dal fatto che si è voluto studiare un componente più semplice e per il quale è presente una precisa trattazione teorica. La trave a sbalzo in questione ha sezione rettangolare e qui sotto è possibile vederne la geometria e la sua condizione operativa.

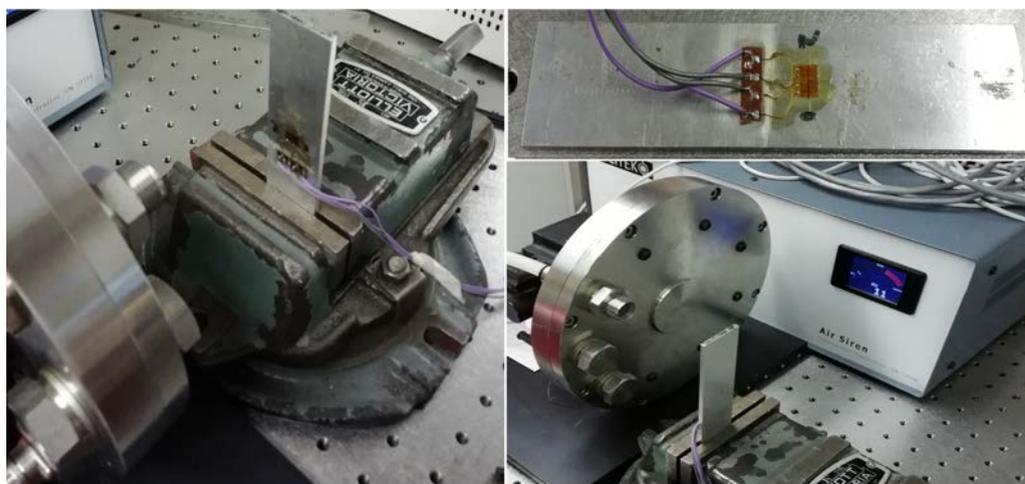


Figura A.1: Configurazione operativa per l'acquisizione del segnale vibratorio della piastra

L'eccitazione di tale trave è stata attuata mediante flusso d'aria intermittente (attuato grazie ad un disco interno all'apparato che frazionava il flusso d'aria), a seconda della frequenza alla quale si è voluta eccitare la trave. È stato possibile validare le frequenze naturali mediante formulazioni esatte e estensimetri. In seguito si riporta la trattazione teorica per la ricerca delle pulsazioni naturali per una trave a sezione rettangolare. La trave presenta le seguenti caratteristiche:

- Lunghezza =  $L = 109.5 \text{ mm}$
- Modulo di elasticità =  $E = 70 \times 10^9 \text{ Pa}$
- Densità =  $\rho = 2700 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$
- Area della sezione =  $A = 9.75 \times 10^{-5} \text{ m}^2$
- Momento d'inerzia della sezione =  $J = 8 \times 10^{-11} \text{ m}^4$

La pulsazione di risonanza legata al primo modo di vibrare è:

$$\omega_1 = \frac{3.52}{L^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho A}} = \frac{1.875104^2}{L^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho A}} = 1400,8 \frac{\text{Rad}}{\text{s}} \quad (\text{A.1})$$

da cui la frequenza risulta:

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = 222.95 \text{ Hz} \quad (\text{A.2})$$

in maniera analoga la seconda frequenza di risonanza risulta:

$$f_2 = \frac{4.694091^2}{2\pi L^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho A}} = 1397.19 \text{ Hz} \quad (\text{A.3})$$

Quindi riassumendo si sono ottenuti i seguenti risultati:

Tabella A.1: Risultati teorici e sperimentali delle frequenze naturali della piastra

Frequenze di risonanza	Formula esatta [Hz]	Fem [Hz]	Estensimetro [Hz]
1	222.95	225.19	213
2	1397.19	1404.0	-

Non è stato possibile verificare anche la seconda frequenza naturale tramite estensimetri per questioni di sicurezza in quanto si sarebbe dovuto incrementare eccessivamente la velocità del disco interno all'apparato del getto d'aria.

### A.0.1 Calibrazione degli estensimetri

La validazione del modello FEM ha permesso la successiva calibrazione degli estensimetri. Si è eccitata la trave con il martello strumentale e si è acquisito il segnale tramite estensimetri collegati tramite cavi BNC al software SignalCalc, in modo da ricavare la funzione di trasferimento  $\frac{V}{N}$ . In particolare si è ricercato un fattore di conversione tra segnale misurato dagli estensimetri e la deformazione o lo sforzo per quel dato valore di amplificazione proveniente dagli estensimetri. Tale fattore di conversione è stato individuato sovrapponendo i due grafici rappresentanti la funzione di trasferimento derivante da test d'impatto e quella derivante dall'analisi FEM. La funzione di trasferimento ottenuta sperimentalmente è per unità di forza, di conseguenza la funzione di trasferimento ottenuta dal modello FEM è stata ottenuta eccitando il modello con una forza unitaria sempre nella medesima posizione di quella sperimentale. Il grafico sotto riportato evidenzia il divario tra le due curve e lontano dalla risonanza ha permesso di ricavare il fattore di scala utile per convertire volt in uscita dagli estensimetri in deformazione della trave. È importante sottolineare come nel calcolo del fattore di conversione non si sia considerata la risonanza, in particolare si sono scartati 50 Hz da ambo i lati rispetto al picco e si sono ottenuti i rapporti ogni 5 Hz e si è fatta una media aritmetica finale per ricavare il valore del fattore di conversione più reale possibile. Tramite tale fattore è possibile con facilità passare dal dato in tensione in uscita dagli estensimetri a quello in deformazione della trave. In analogia al caso

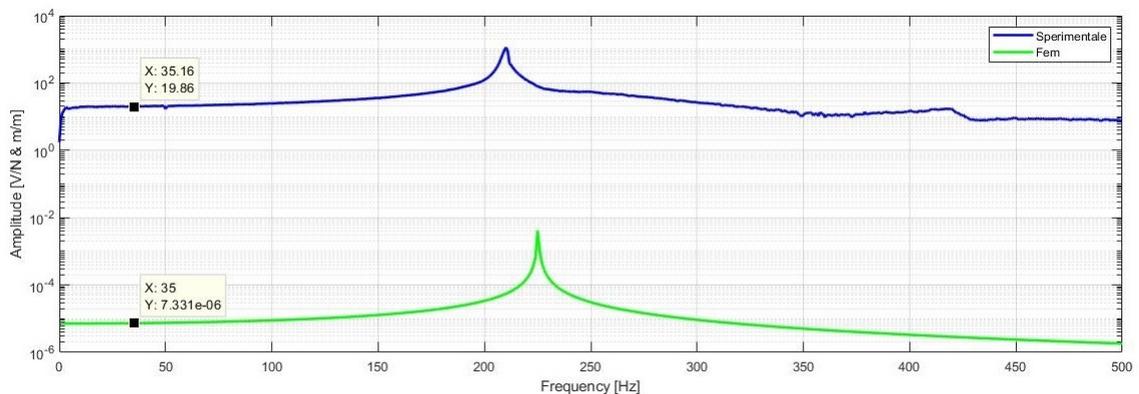


Figura A.2: Fattore di conversione tra volt e la deformazione effettiva della piastra

visto precedentemente si è ricercato il fattore di conversione tra la funzione di trasferimento  $\frac{V}{N}$  e lo sforzo. Come per il caso precedente, la funzione di trasferimento ottenuta sperimentalmente è per unità di forza, quindi la funzione di trasferimento ottenuta dal modello FEM la si è ottenuta eccitando il modello con una forza unitaria sempre nella medesima posizione (di quella sperimentale). Al fine dell'ottenimento del fattore di conversione non si è considerata la zona di risonanza, in particolare si sono scartati 50 Hz da ambo i lati rispetto al picco e si sono ottenuti i rapporti ogni 5 Hz e si è fatta una media aritmetica finale per ricavare il valore del fattore di

conversione più reale possibile. Tramite tale fattore è possibile con facilità passare dal dato in tensione in uscita dagli estensimetri a quello di sforzo della trave.

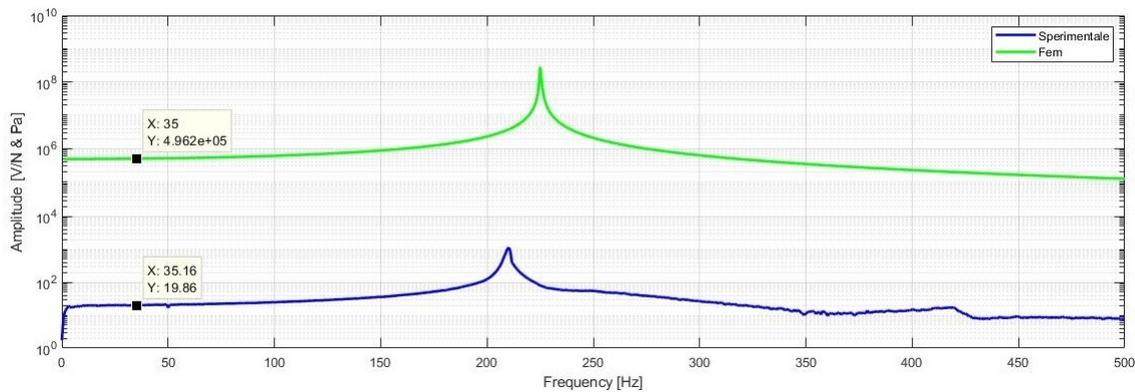


Figura A.3: Fattore di conversione tra volt e lo sforzo effettivo della piastra

Come per la trave a sezione quadrata, si è svolta la calibrazione degli estensimetri per il *blisk*. Svolgendo il test si sono riscontrati notevoli difficoltà nel determinare il fattore di conversione. Il motivo di tale difficoltà è legato agli innumerevoli picchi che alterano la determinazione del fattore di conversione e inoltre il segnale lontano dai picchi nel range di acquisizione non è molto pulito. Ci si è limitati alla rappresentazione combinata delle due funzioni di trasferimento, quella sperimentale derivante da test d'impatto e quella FEM derivante dal modello di *blisk* validato. Si può vedere che dai seguenti grafici è possibile ottenere il fattore di conversione utile a determinare il reale sforzo e la deformazione del *blisk* soggetto ad una determinata forzante. Per la conversione tra volt e deformazione si è ottenuto:

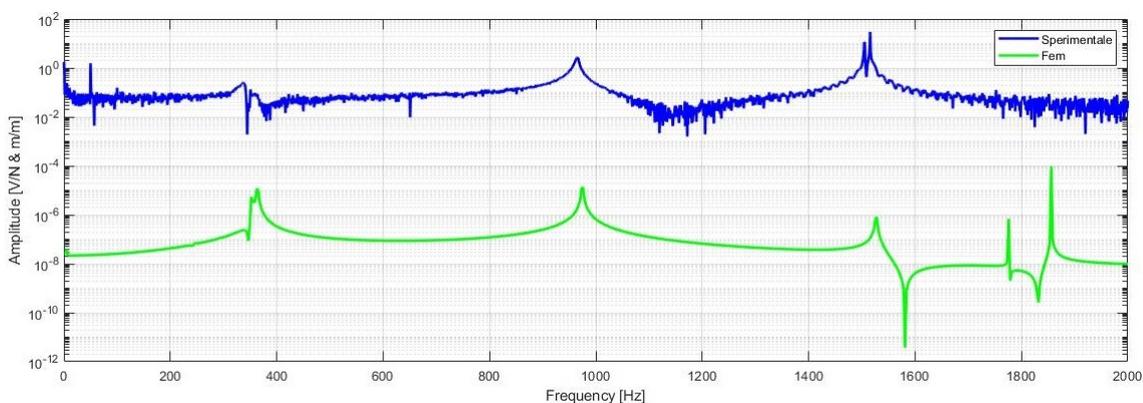


Figura A.4: Fattore di conversione tra volt e la deformazione effettiva del blisk

Per la conversione tra volt e sforzo si è ottenuto:

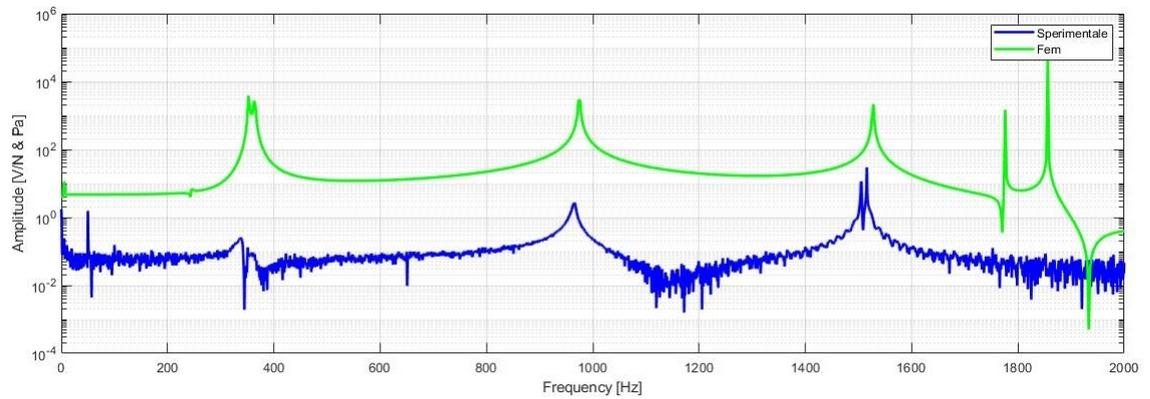


Figura A.5: Fattore di conversione tra volt e lo sforzo effettivo del blisk

In entrambi i grafici nelle curve relative al modello FEM sono presenti due pulsazioni di risonanza legate alla vite posta per bloccare il *blisk* al supporto di acciaio. In particolare gli ultimi due picchi non sono da prendere in considerazione.



## Appendice B

### Strumentazione e software utilizzati

Questa sezione ha lo scopo di illustrare con maggior dettaglio il laboratorio di analisi, gli strumenti e i software con cui ho lavorato per la realizzazione di tale progetto di tesi presso l'Università di Manchester. Tali strumenti hanno permesso di realizzare i test sperimentali atti alla validazione del modello FEM, in particolare:

- Laboratorio di analisi modale:



Figura B.1: Laboratorio di analisi modale presso il dipartimento MACE dell'Università di Manchester

Il laboratorio destinato alla validazione modale è caratterizzato da una struttura che garantisce un'insonorizzazione ottimale vista l'elevata rumorosità dell'apparecchiatura utilizzata e presenta tutti i dispositivi di sicurezza per l'attività sperimentale. È possibile notare il tavolo sperimentale sopra al quale si sono svolti tutti i test e i computer utilizzati per l'acquisizione dei dati sperimentali.

- Tavolo sperimentale:

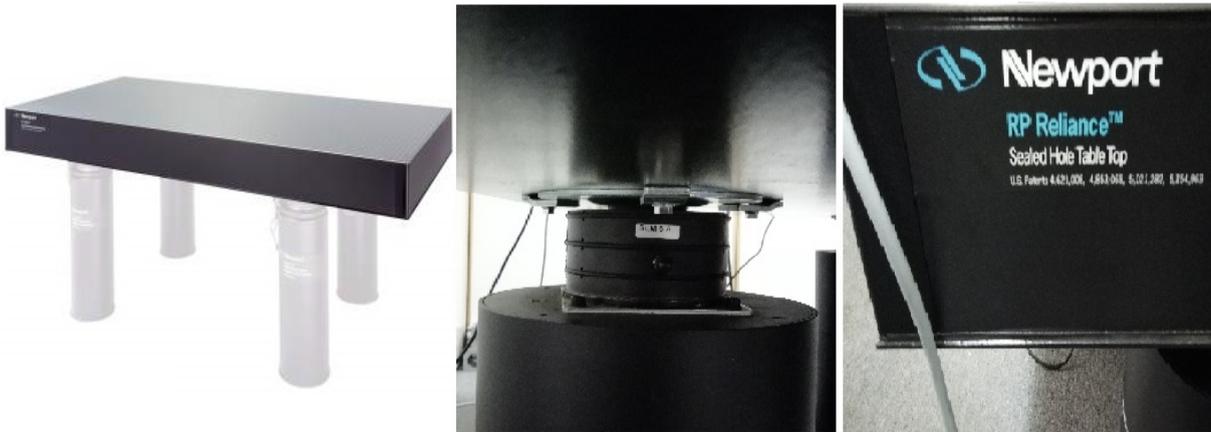


Figura B.2: Tavolo sperimentale

Il tavolo presente nel laboratorio è della rinomata azienda americana Newport, leader mondiale nelle apparecchiature per la ricerca scientifica. In particolare il tavolo sperimentale qui sopra raffigurato agisce in modo da isolare le vibrazioni e, grazie alla sua notevole massa, rappresenta il vincolo ideale su cui ancorare *blisk* e blocco (è un tavolo estremamente rigido). Nell'immagine centrale vediamo come il tavolo poggia su supporti a sezione cilindrica di diametro rilevante. Tali sistemi sono inoltre dotati al loro interno di un sistema anti-vibrante che può essere passivo o attivo. Nello specifico si tratta di supporti passivi dotati di un sistema di smorzamento pneumatico (tipologia *SLM 6 A*). Il tavolo presenta una struttura interna a nido d'ape ingabbiata dalle sei superfici esterne. Il tavolo in questione ha uno spessore di 203 mm, ha una larghezza di 900 mm e una lunghezza di 1800 mm. La superficie superiore presenta fori M6 distanziati l'un l'altro di 25 mm. È possibile osservare dalle curve di cedevolezza fornite dall'azienda Newport come il tavolo diventi maggiormente deformabile in prossimità delle sue risonanze. Tale aspetto è trascurabile in quanto i picchi di risonanza sono notevolmente attenuati dagli smorzatori pneumatici e quindi la deformazione del tavolo risulta influente per lo studio modale effettuato (il moto relativo tra due punti appartenenti alla superficie del tavolo in condizioni di risonanza e nella condizione di massima amplificazione è dell'ordine dei decimi di millimetri, in corrispondenza del primo picco di risonanza, che è attorno ai 300 Hz). Infine è possibile affermare che il piano utilizzato per l'ancoraggio del supporto del *blisk* e lo shaker sono consoni e non alterano i risultati della validazione FEM.

- Martello strumentale e accelerometro

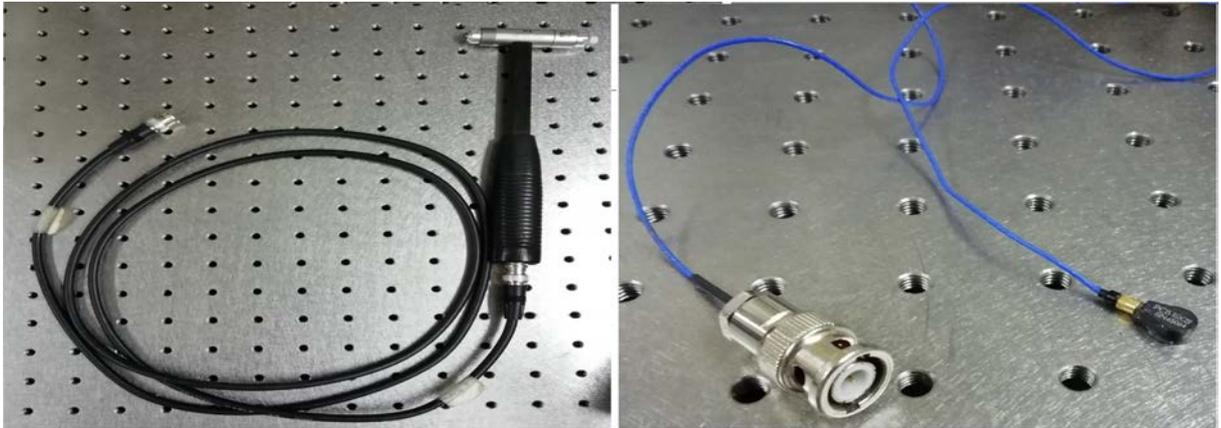


Figura B.3: Strumentazione utilizzata per effettuare il test d'impatto: martello strumentale e accelerometro

Per condurre la validazione mediante test d'impatto sono stati necessari: un martello strumentale atto alla sollecitazione del disco palare e un accelerometro atto all'acquisizione del segnale accelerometrico. Successivamente l'analizzatore di spettro, grazie all'input e all'output, ha potuto dare in uscita la funzione di trasferimento ( $\frac{\ddot{x}(t)}{F_0}$ ). Il martello sperimentale è della nota azienda americana PCB PIEZOTRONICS e il modello in questione è il 086C03, avente una sensibilità di  $2.25 (\frac{mV}{N})$ , un range di misura di  $\pm 2224$  N pk (punta rigida), frequenza di risonanza maggiore di 22 kHz e peso di 0.16 kg. Invece per quanto riguarda l'accelerometro il modello utilizzato è della famiglia 352C22 e presenta una sensibilità di  $9.09 (\frac{mV}{g})$ , una massa di 0.5 grammi e un range di misura di  $\pm 4900$  m/s<sup>2</sup> pk.

- SignalCalc

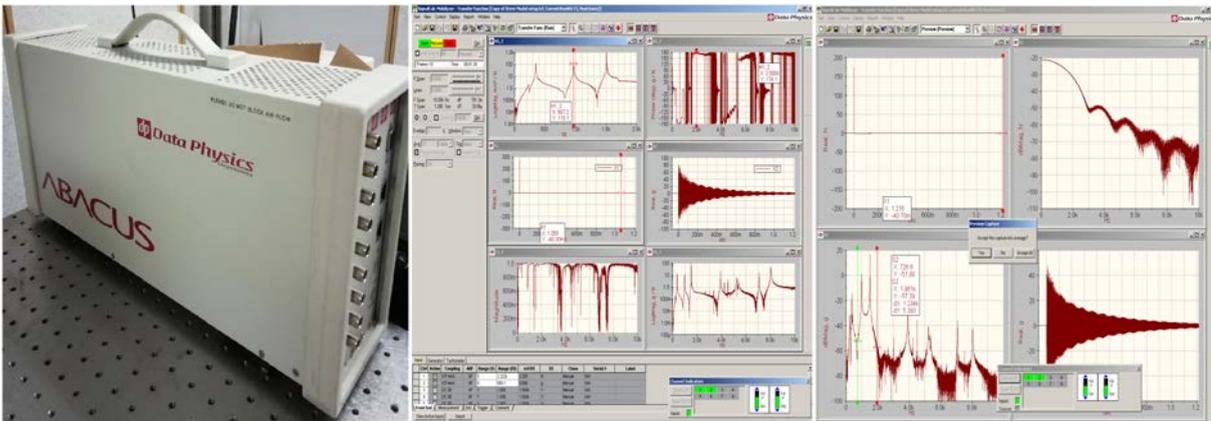


Figura B.4: Analizzatore di spettro e sua interfaccia grafica: SignalCalc

Il software qui sopra raffigurato rappresenta l'analizzatore di spettro e la sua interfaccia grafica utilizzata per l'acquisizione dei segnali durante il test d'impatto e shaker. Nello specifico l'analizzatore è stato collegato tramite connettori BNC con gli strumenti di acquisizione, è stato invece collegato al computer mediante cavo Ethernet. Nella Figura B.4 l'immagine centrale raffigura vari grafici ma i principali sono i primi due dall'alto, che rappresentano nell'ordine la funzione di trasferimento ( $\frac{\dot{x}(t)}{F_0}$ ) e il diagramma della fase sempre della FDT. Di fondamentale importanza è anche l'ultima immagine sulla destra in quanto è possibile capire se la martellata è stata ottimale oppure se per sbaglio si è martellato più di una volta il componente (si vuole avere un unico impulso di forza).

- ME'scopeVES 5.0

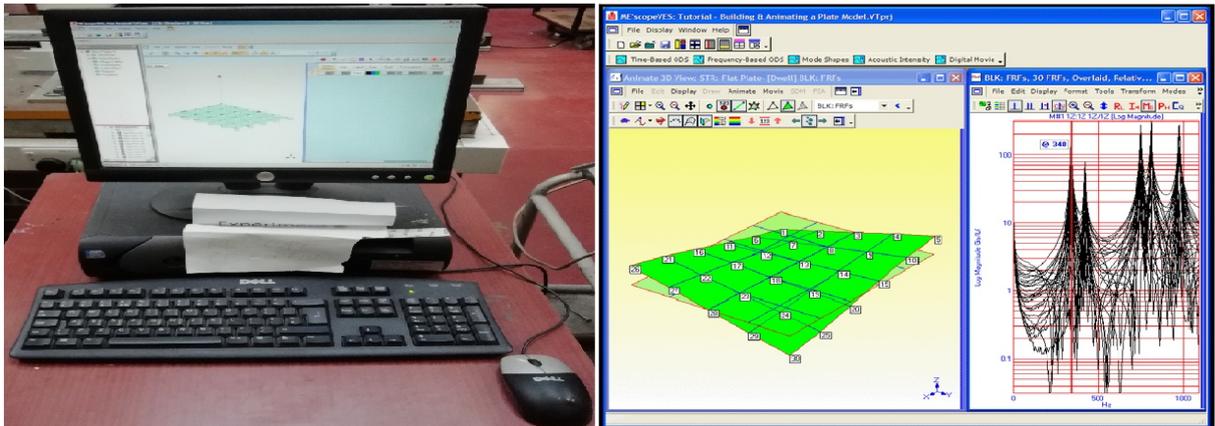


Figura B.5: Interfaccia grafica del software per la validazione dei modi di vibrare: ME'scopeVES

ME'scopeVES 5.0 è il software che è stato utilizzato per la validazione dei modi di vibrare. I pacchetti e le opzioni interne del software facilitano l'osservazione e l'analisi dei problemi legati al rumore e soprattutto alle vibrazioni di macchinari e strutture sfruttando dati sperimentali o analitici. Con ME'scope è possibile importare o acquisire direttamente dati di frequenza e post-elaborarli al suo interno. La sua animazione 3D interattiva consente di osservare le deformazioni in condizioni operative, nonché le forme modali direttamente dai dati acquisiti. ME'scopeVES contiene strumenti all'avanguardia per eseguire: analisi modale basata su FRF, analisi modale operativa, analisi vibro-acustica, modellazione e simulazione dinamiche, modifiche dinamiche strutturali e aggiornamenti modelli FEA. Nella Figura B.5 si vede sulla sinistra il computer dedicato per tale analisi e sulla destra il layout operativo del software ME'scopeVES. Nello specifico è possibile vedere l'animazione del componente per ogni frequenza selezionata e ciò ha permesso in maniera precisa di discernere i modi di vibrare legati ai vari picchi di risonanza.

- Shaker

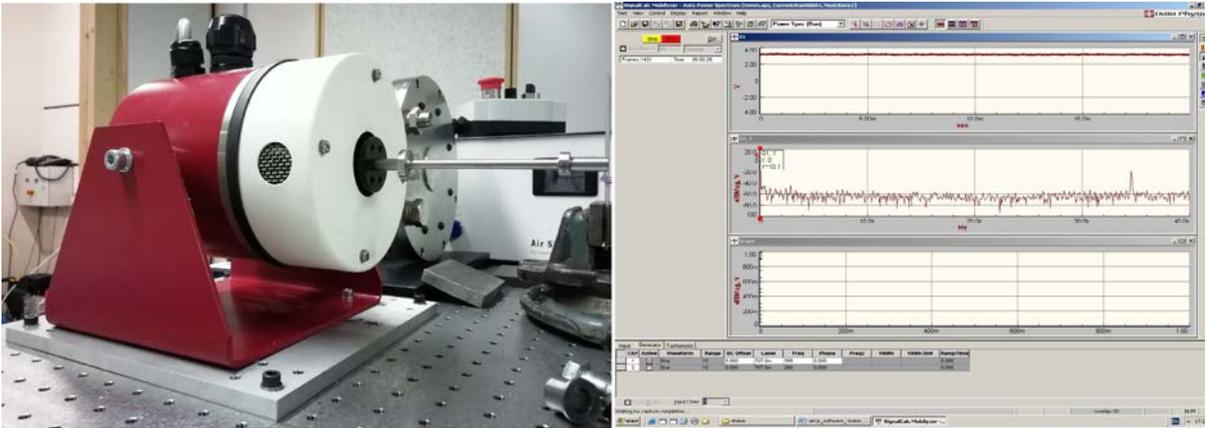


Figura B.6: Shaker e sua interfaccia grafica: SignalCalc

Qui sopra si vede lo shaker utilizzato per l'eccitazione del *blisk*. Lo shaker è della *Data Physics Corporation* e il modello in questione è il V20, raffreddato ad aria. Ha un peso di 16 Kg e può esercitare forze impulsive dell'ordine dei 150 N. È stato vincolato ad una piastrina di acciaio realizzata ad hoc e quest'ultima al tavolo sperimentale. Nella parte destra della Figura B.6 vediamo nuovamente il software SignalCalc utilizzato solo per impartire allo shaker la frequenza di eccitazione e la tipologia di eccitazione: onda triangolare, sinusoidale, quadrata ecc... Nello specifico si è eccitato il *blisk* con onda sinusoidale a frequenza variabile. L'input dato dal software SignalCalc tramite connettori BNC e Ethernet è stato trasmesso all'amplificatore e quest'ultimo direttamente allo shaker.

- SCITEK

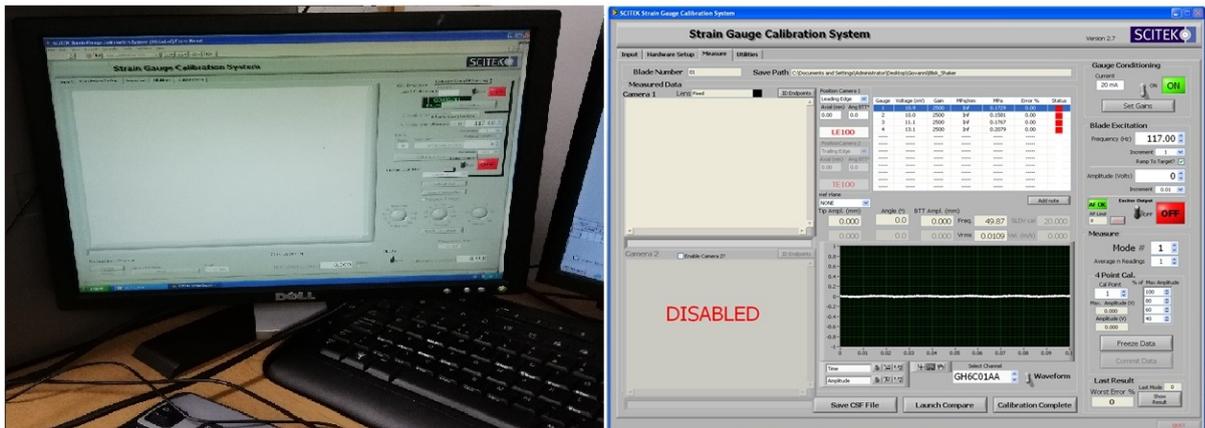


Figura B.7: Interfaccia grafica del software Scitek atto all'acquisizione del segnale estensimetrico

Qui sopra è rappresentato il software dedicato all'acquisizione del segnale estensimetrico. Nello specifico tale software è programmabile attraverso l'ambiente LabVIEW. LabVIEW è un linguaggio di programmazione visuale di National Instruments. L'utilizzo di tale programma è stato finalizzato solamente all'acquisizione del segnale proveniente dagli estensimetri ma esso ha la possibilità di interfacciarsi con altri strumenti, come telecamere. Il set up della strumentazione ha previsto che ogni estensimetro fosse opportunamente testato in modo che l'acquisizione fosse veritiera. Si sono condotti test tramite martello strumentale in modo da discriminare segnale e rumore di ciascun estensimetro. Oltre a tale controllo si è dovuto aumentare il guadagno legato all'amplificazione del segnale per visualizzare con maggior dettaglio le amplificazioni. Di fondamentale importanza è stato inserire le principali proprietà degli estensimetri come: il gauge factor e la resistenza nominale. In particolare si sono scelti estensimetri aventi gauge factor pari a 2.11 e resistenza nominale di  $120 \Omega$ . Un volta messi a punto tutti questi accorgimenti si è potuto effettuare il test.

- Apparato per il funzionamento del getto d'aria



Figura B.8: Strumentazione utilizzata per l'eccitazione mediante getto d'aria

Il test tramite getto d'aria non è stato direttamente implementato al *blisk*, in quanto l'amplificazione dell'eccitazione non è stata compatibile con l'elevata rigidità del pezzo (si è provato ad eccitare il *blisk* con tale getto d'aria ma l'intensità di forza generata dal flusso d'aria non è stata sufficiente per apprezzare variazioni in uscita dall'accelerometro). Questo test è stato effettuato su di una trave a sbalzo vincolata tramite una morsa. Lo scopo di questo test è stato quello di familiarizzare con la misura estensimetrica (due estensimetri disposti nella trave) e la relativa calibrazione. Dal punto di vista pratico si è azionato un compressore a vite per incamerare l'aria necessaria al test e in seguito, grazie ad appositi condotti e valvole, l'aria è stata convogliata verso il dispositivo, che grazie al suo disco interno forato ha permesso, cambiando la velocità di rotazione di quest'ultimo, di ottenere getti d'aria alle differenti frequenze. La diapositiva centrale della Figura B.8 mostra il dispositivo che ha permesso il controllo della velocità di rotazione del disco e che costituiva il comando che ha permesso di variare la frequenza di eccitazione della forzante. Tale dispositivo, pur non avendo un'elevata precisione (dispositivo analogico), ha permesso di trovare le pulsazioni di risonanza della trave, si veda l'Appendice A.

# Bibliografia

- [1] D.J. Ewins. *Modal Testing: Theory, Practice and Application*. Reserch studies press Ltd. Baldock, Hertfordshire, England, second edition, 2000.
- [2] A.F. El-Sayed. *Fundamentals of Aircraft and Rocket Propulsion*. Springer-Verlag London, 2016. Department of Mechanical Engineering, Zagazig University, Egypt.
- [3] S.S. Rao. *Mechanical Vibrations*. Pearson Education, fifth edition, 2011. University of Miami.
- [4] B. Balachandran, E.B. Magrab. *Vibrations*. Cengage Learning, second edition, 2009. University of Miami.
- [5] T.H.G. Megson. *Aircraft Structures for engineering students*. Elsevier Ltd, fifth edition, 2013.
- [6] R. Lot, V. Cossalter. *Meccanica delle Vibrazioni*. Lulu Press, edizione 2014.
- [7] P. Avitabile. *Modal Testing: A Practitioner's Guide*. The Society for Experimental Mechanics and John Wiley and Sons Ltd, edition 2017. University of Massachusetts Lowell, USA.
- [8] S.G. Kelly. *Fundamentals of Mechanical Vibrations*. McGraw-Hill Education, second edition, 2000.
- [9] L. Meirovitch. *Fundamentals of Vibrations*. Waveland Pr Inc, edition 2010.
- [10] D. Thorby. *Structural Dynamics and Vibration in Praticce*. Amsterdam: Elsevier, 2008.
- [11] R. Basso. *Elementi di Meccanica delle Vibrazioni II Edizione*. Padova: Ed. Librerie Progetto, 2014.
- [12] D.J. Inman. *Engineering Vibration - second edition*. Upper Saddle River NJ: Prentice Hall, 2000.

- [13] A. Doria. *Dispense del corso - Analisi modale sperimentale*.
- [14] ANSYS 16.1. *ANSYS Mechanical User's Guide*. ANSYS, Inc.
- [15] Solidworks 2018. *Solidworks User's Guide*. Solidworks, Dassault Systèmes.
- [16] [http://www.euralliage.com/aluminium\\_english.htm#haut](http://www.euralliage.com/aluminium_english.htm#haut)
- [17] <http://referansmetal.com/alasimli-aluminyum/product/195/dtd-5014a-alcu2mg1-5ni-2618-2618a-t6?lang=en>
- [18] <https://www.makeitfrom.com/material-properties/2618-2618-T61-3.1924-Aluminum>
- [19] <https://www.azom.com/article.aspx?ArticleID=6617>
- [20] [https://www.fairfield.com/media/biblioteca/VibrazioniO\\_GSA.pdf](https://www.fairfield.com/media/biblioteca/VibrazioniO_GSA.pdf)
- [21] <http://static.gest.unipd.it/~marinoq/CM/estensimetria.pdf>
- [22] <http://dma.ing.uniroma1.it/users/broggiato/cdm/roma/no/CdmFemRm/dispense/SistemiDiscreti-CdM2016.pdf>
- [23] [http://users.libero.it/sandry/download/TeoriaSegnalidownload/segnali\\_03b.pdf](http://users.libero.it/sandry/download/TeoriaSegnalidownload/segnali_03b.pdf)
- [24] <https://docplayer.net/21697256-Course-in-fem-ansys-classic.html>
- [25] <http://www.ni.com/it-it/innovations/white-papers/07/measuring-strain-with-strain-gages.html>
- [26] <https://www.newport.com/p/M-RPR-36-8>
- [27] <https://www.newport.com/t/understanding-the-compliance-curve>
- [28] <http://www.pcb.com/Products/model/086c03>
- [29] [http://web.deu.edu.tr/mechatronics/old/TUR/strain\\_gauge.htm](http://web.deu.edu.tr/mechatronics/old/TUR/strain_gauge.htm)
- [30] [http://www.svdigital.net/data/pro1/V2\\_V4V\\_V20\\_V55\\_V100.pdf](http://www.svdigital.net/data/pro1/V2_V4V_V20_V55_V100.pdf)
- [31] <https://www.vibetech.com/mescope/mescopeves-overview/>

[32] <http://www.dataphysics.com/products-and-solutions/dynamic-signal-analyzers-signalcalc/signalcalc-software.html>

[33] <https://www.pcb.com/Products/model/352C22>



# Ringraziamenti

Voglio ringraziare il Professor Ugo Galvanetto, relatore italiano di questa tesi, che mi ha permesso di svolgere il progetto di studio presso l'Università di Manchester. Lo ringrazio in particolare per la sua disponibilità durante e dopo essere ritornato dal periodo passato all'estero. Ringrazio inoltre il relatore estero Professor Philip Bonello e il suo dottorato Mohamed per il loro aiuto costante durante tutta la fase sperimentale e in generale per tutto il mio periodo di studi presso l'università. Un ringraziamento particolare va ai miei genitori, Monica e Alessandro, per avermi supportato durante tutti questi anni di studio, a mia sorella Giulia, ai miei nonni e ai amici che mi hanno sempre incoraggiato e aiutato durante il mio percorso formativo.