Mathématiques et sciences humaines
Mathematics and social sciences

150 | Été 2000
La doctrine des chances : sur le calcul des probabilités

A la recherche des "Lois de la Pensée". Sur l'épistémologie du calcul logique et du calcul des probabilités chez Boole

The search for the "Laws of thought". On the epistemology of Boole's logical calculus and calculus of probabilities

Michel Serfati

Édition électronique
URL : http://journals.openedition.org/msh/2823
DOI : 10.4000/msh.2823
ISSN : 1950-6821

Éditeur
Centre d'analyse et de mathématique sociales de l'EHESS

Édition imprimée
Date de publication : 1 mars 2000
ISSN : 0987-6936

Référence électronique
Michel Serfati, « A la recherche des "Lois de la Pensée". Sur l'épistémologie du calcul logique et du calcul des probabilités chez Boole », *Mathématiques et sciences humaines* [En ligne], 150 | Été 2000, mis en ligne le 10 février 2006, consulté le 02 mai 2019. URL : http://journals.openedition.org/msh/2823 ; DOI : 10.4000/msh.2823

Math. & Sci. hum., (38e année, n°150, *2000*, p. 41-79)

À LA RECHERCHE DES *LOIS DE LA PENSÉE*

Sur l'épistémologie du calcul logique et du calcul des probabilités chez Boole

Michel SERFATI[1]

RÉSUMÉ – *Dans les conceptions de G. Boole, les deux disciplines, «logique» et «calcul des probabilités», concouraient toutes deux à la transcription dans la langue symbolique mathématique des «lois de la pensée», en une entreprise à la fois quasi-expérimentale pour Boole (par l'introspection qu'elle nécessitait), mais aussi profondément mathématique, ancrée dans des techniques de calcul raffinées. Nous examinerons, dans les* Laws of Thought*, l'articulation entre logique et probabilités, et décrirons aussi les perspectives que l'ouvrage propose au lecteur contemporain, à la fois sur le «calcul discret» moderne, en même temps que sur une ébauche de théorie de la mesure.*

MOTS-CLÉS – Symbolique, Logique, Analogie, Probabilité, Paramétrisation, Division logique, «Développement», Méthode, Élimination, Ininterprétable.

ABSTRACT – The search for the *Laws of thought*. On the epistemology of Boole's logical calculus and calculus of probabilities

In G. Boole' s conceptions, both «logic» and «calculus of probabilities» converged to transcript the «laws of thought» into symbolic mathematical writing. This process turned out to be quasi-experimental for Boole (when referring to the necessity of introspection), but also profoundly mathematical, deep-rooted in some subtle calculation techniques. We shall investigate, in the Laws of Thought*, the articulation between logic and probabilities, and also describe the viewpoints it may propose to the contemporary reader on the modern «discrete calculus», as well as on a possible starting point for measure theory.*

KEYWORDS – Symbolic, Logic, Analogy, Probabiliy, Parametrisation, Logical division, «Development», Method, Elimination, Uninterpretable.

1. INTRODUCTION

Cet article décrit la genèse épistémologique du premier des véritables calculs logiques de l'histoire, ancré dans des techniques mathématiques raffinées, qui demeurent parfois surprenantes, aujourd'hui encore. On en proposera une analyse quelque peu détaillée, en même temps qu'on s'efforcera de décrire l'articulation qu'avait voulu placer Boole entre calcul logique et calcul des probabilités. Car, pour Boole, logique et calcul des probabilités se constituaient comme deux disciplines solidaires, celle-là précédant nécessairement celui-ci. Ainsi, dès sa première équation, le calcul des probabilités booléen prend-il nécessairement appui sur le calcul logique préalable. Dans les conceptions de Boole, les deux disciplines concouraient en effet à la transcription dans la langue symbolique

[1] Professeur de mathématiques spéciales, IREM et LIAFA, Université de Paris VII – 2 place Jussieu 75251 Paris Cedex 05, e-mail serfati@cicrp.jussieu.fr.

mathématique des lois de la pensée, en une entreprise à la fois quasi-expérimentale pour Boole (par l'introspection qu'elle nécessitait), et aussi profondément mathématique, inscrite dans des procédures de calcul subtiles, analogiquement héritières des méthodes de résolution des systèmes d'équations linéaires. Car c'est l'analogie numérique qui dirige Boole dans la création, à partir de l'observation des lois de la pensée, de ses procédures mathématiques spécifiques, «booléennes», souvent raffinées, parfois extravagantes, comme la division logique. Et c'est cette même analogie, concept-clé pour la compréhension de l'épistémologie booléenne, qui le conduit à l'écriture de ses symboles ininterprétables, tels $\frac{1}{0}$ et $\frac{0}{0}$, à qui la postérité fournira pourtant, à sa façon, de la substance et du sens. On examinera ainsi, dans les *Laws of Thought,* l'articulation entre logique et probabilités, et aussi les perspectives que l'ouvrage propose au lecteur contemporain, à la fois sur le calcul discret moderne, en même temps que sur une ébauche de théorie de la mesure.

L'ÉTUDE DES LOIS DE LA PENSÉE EST POSSIBLE ET NÉCESSAIRE

> «Le but de ce traité est d'étudier les lois fondamentales des opérations de l'esprit par lesquelles s'effectue le raisonnement ; de les exprimer dans le langage symbolique d'un calcul, puis, sur un tel fondement, d'établir la science de la logique et de constituer sa méthode ; de faire de cette méthode elle-même la base d'une méthode générale qu'on puisse appliquer à la théorie mathématique des Probabilités ; et enfin de dégager des divers éléments de vérité qui seront apparus au cours de ces enquêtes des conjectures probables concernant la nature et la constitution de l'esprit humain.
>
> Qu'un tel but ne soit pas tout à fait nouveau […]» (et Boole cite Aristote).

Telles sont les premières lignes des *Investigations on The Laws of Thought, on which are founded the mathematical theories of Logic and Probabilities*[2]. Ainsi, parce qu'elles ont un caractère structurel universel, les lois de la pensée peuvent et doivent faire l'objet d'une étude scientifique. Et leur description en sera mathématique. Il s'agira donc d'un calcul en matière logique, et qui sera parfois techniquement raffiné. De cette conception de la «constitution de l'intellect» (une partie du titre du dernier chapitre des *Laws)*, Boole racontera comment il eut l'illumination en 1833 alors qu'il n'avait que dix-huit ans, à Doncaster au cours d'une promenade à travers champs[3]. Même s'il avait lu Leibniz qu'il cite à l'occasion du principe de contradiction (*Lois*, 238, chap. XV [*Laws*]), Boole ne pouvait cependant en connaître les textes logiques dont l'essentiel fut découvert et publié seulement au début de notre siècle, en particulier par Couturat. Les espérances leibniziennes étant restées inconnues et sans descendance, Boole pouvait donc croire présenter un projet profondément original : examiner les lois de la pensée, dont une nouvelle algèbre transcrirait fidèlement les structures. Ce projet initial n'était donc nullement l'élaboration d'une nouvelle structure mathématique (celle-ci viendra en quelque sorte par surcroît), mais ce qu'on peut appeler une algébrisation naturellement nécessaire de la logique. En fait, et même si Boole ignorait Leibniz logicien, son projet s'inscrira pourtant dans le droit-fil leibnizien : calculer *dans le langage*, sur ces objets que sont les

---

[2] MacMillan, Londres, 1854, réimpress, Dover, 1958, L'ouvrage sera référencé *Laws*. Nous utiliserons aussi la traduction française de S.B Diagne, *Les lois de la pensée*, Vrin, 1992. Dans la suite de l'article, nous nous réfèrerons à la traduction française que nous dénommerons *Lois*.

[3] C'est une sorte d'expérience mystique que son biographe, Desmond Mac Hale, compare à celle de Saül sur le chemin de Damas, Desmond Mac Hale, *Georges Boole*, *His Life and Work*, Dublin, Boole Press, 1985, p. 19.

classes ou les propositions, et sans se limiter à un support proprement numérique[4]. On rapprochera davantage encore les deux hommes en rappelant leur absence d'éducation mathématique première : Boole, tout comme Leibniz, était un autodidacte en mathématiques ; et on sait qu'il est parfois arrivé aux autodidactes, innocents du poids des usages et des traditions qui les ont précédés, de se trouver investis d'une capacité de création profonde qui peut définitivement faire défaut aux érudits.

Utilisant des catégories épistémologiques modernes, nous dirions aujourd'hui que la réalisation du projet logique booléen se situe dans le registre de la *modélisation*, usuel dans les sciences physiques : recueil des données observées, traduction en termes symboliques des énoncés primitivement rédigés en langue naturelle, résolution ultérieure par le calcul nouveau des systèmes d'équations logiques obtenues, enfin réinterprétation en sens inverse dans le langage usuel des résultats obtenus. On n'aura malheureusement pas la place, dans le cadre du présent article, de détailler les étapes obligées de la procédure : collecte, interprétation et codification des données, mise en équation, techniques mathématiques de résolution des systèmes obtenus, retour enfin à la description des lois de la pensée, à nouveau dans une phase de l'interprétation. On notera toutefois qu'une des particularités dans l'élaboration de cette théorie – et qui, pour Boole, la facilitait grandement – est que, pour lui la structure des lois de la pensée est aperçue sur un exemple de façon immédiate et indiscutable ; la répétition n'apportant ici rien à la construction :

> «Les lois de la Nature ne sont pas, la plupart du temps, des objets immédiats de perception (...) En revanche, la connaissance des lois de l'esprit n'a pas besoin de se fonder sur un vaste ensemble d'observations. La vérité générale y est aperçue dans l'exemple particulier, et ce n'est pas la répétition des exemples qui la confirme »[5].

On aura pu ici observer chez Boole une certaine identification entre vrai et évident, bien proche des positions cartésiennes. Mais on a en même temps pu aussi découvrir une forme du psychologisme de Boole. Dans l'élaboration booléenne de la théorie des lois de la pensée en effet, l'observation et l'examen directs, l'introspection et l'examen du discours et du langage, jouent le rôle véritablement moteur, eux qui, selon Boole, ne peuvent se tromper. Qu'en particulier l'introspection soit décisive, pour Boole dans les *Laws*, nous paraît incontestable, lorsqu'on examine sa présentation de tout le faisceau des preuves – au sens mathématique du mot – qu'il nous donne quant aux relations algébriques symboliques *qu'il déduit* de l'examen du langage. D'un autre côté, il nous faut ici constater cette difficulté spécifique qu'a dû affronter Boole, et qui tient à ce que, pour modéliser, les physiciens d'aujourd'hui ont souvent trouvé à leur disposition un appareil mathématique forgé par d'autres – ce ne fut néanmoins pas toujours le cas – , cependant que Boole sera ici en devoir de créer en même temps l'appareil mathématique qu'il utilisera. Ce à quoi il ne réussira pas tout à fait[6].

---

[4] Ainsi Boole avait-il expliqué dans *Mathematical Analysis of Logic* (p. 5), ce qui, pour lui, rendait la logique «possible» : «Ce qui rend la Logique possible, c'est l'existence dans nos esprits de notions générales – notre capacité de concevoir une classe, et de désigner ses membres individuels par un nom commun. La théorie de la Logique est ainsi intimement liée à celle du *Langage*». Citation extraite de l'étude de E. Coumet, «Logique, mathématiques et langage dans l'œuvre de G. Boole», (parties I, II, III), *Mathématiques et sciences humaines*, 1966, n[os] 15, 16, 17, ici II, p. 3.

[5] *Op. cit.*, *Lois* , p. 23.

[6] Ainsi exposerons-nous dans la suite réussites et échecs divers de Boole. De son côté, E. Coumet se montre sévère avec les insuffisances théoriques de la théorie booléeene : «Ce programme, on peut dire globalement, comme en témoigne Bourbaki, que Boole l'a effectivement rempli. Mais qu'on se mette à lire vraiment ses écrits, cette belle image se brouille rapidement. Il y a bien de la différence entre

Rédigé en 1853, le travail de Boole, méticuleux et précis, paraît en 1854, le temps de la maturité (Boole a trente neuf ans). Certes, en 1847, il avait déjà publié sur un sujet connexe un opuscule de 82 pages, *Mathematical Analysis of Logic*. Sept ans après cependant, c'est cette fois un volumineux ouvrage au titre ambitieux (*Recherches sur les Lois de la Pensée)* qu'il proposait au public. Devenu d'autre part dans l'intervalle Professeur au Queen's College de Cork (1849), il mettait donc aussi en jeu dans cette publication sa position et sa réputation scientifique nouvelles.

À l'époque de Boole, il n'allait en effet nullement de soi que la logique doive (ou puisse) s'algébriser, elle qui, depuis deux mille ans, était une rubrique obligée de la philosophie. Et le contexte général était ici classiquement celui de la perspective millénaire, rhétorique et philosophique, de la logique, que les mathématiciens d'aujourd'hui pourraient avoir quelque mal à imaginer. Une conception qui était pourtant bien vivante à l'époque, chez des philosophes de premier plan, tels Kant, Stuart Mill, ou Sir William Hamilton[7]. Ainsi, en 1787, dans la seconde préface à la *Critique de la Raison pure*, Kant considérait-il la logique de son temps – c'est-à-dire rhétoriquement exprimée – comme une science achevée et parfaite depuis Aristote et, par là, insusceptible de s'améliorer, ni de connaître le moindre «pas en avant» :

> «Que la Logique ait suivi ce chemin déjà depuis les temps les plus anciens, le fait que, depuis Aristote, elle n'a été obligée de faire aucun pas en arrière, suffit à le montrer [...]. Ce qu'il faut encore admirer en elle, c'est que, jusqu'à présent, elle n'a pu faire non plus, aucun pas en avant, et que par conséquent, elle semble close et achevée(...) On n'étend pas, mais on défigure les sciences quand on en fait se pénétrer les limites ; or, les limites de la logique sont rigoureusement déterminées par cela seul qu'elle est une science qui expose dans le détail et prouve de manière stricte, uniquement les règles formelles de toute pensée [...]»[8].

l'énumération de quelques résultats fondamentaux extraits de l'œuvre, et l'œuvre elle-même. On attend pour le moins du fondateur de la logique moderne qu'il se plie à un minimum de rigueur formelle, et l'on trouvera qu'il se satisfait de peu lorsqu'il étudie les lois de combinaisons de symboles ; on aurait espéré de lui, qui n'était pas un mathématicien médiocre, plus d'adresse, et une conscience plus claire de la structure à laquelle il avait affaire [..]», E. Coumet, «Logique, mathématiques et langage dans l'œuvre de G. Boole», *op. cit*., ici I, p. 3-4.

[7] Le *System of Logic ratiocinative and deductive*, de John Stuart Mill, paru en 1843 (trad. française de L. Peisse, Paris, 1866-1867), onze ans avant les *Laws*, et qui fut très largement diffusé, déniait la possibilité même de l'étude de la logique comme science en soi, c'est-à-dire indépendamment des contenus. D'un autre côté, Sir William Hamilton, dont l'influence fut considérable sur les philosophes de son temps, et qui correspondit avec Boole, ne pouvait accepter, ni même imaginer, que la voie des mathématiques puisse conduire à quoi ce fût d'une construction acceptable en Logique, lui qui ne manifestait qu'incompréhension, mépris et aversion pour les mathématiques. S. Diagne reproduit sur ce point un texte fort célèbre de Hamilton qui pourra peut-être éclairer le lecteur moderne sur l'image des mathématiques chez certains philosophes du milieu du siècle dernier : «Les mathématiques ne sont en aucune manière une voie conduisant à la logique spéculative ou à la logique pratique. Que dis-je ? Il faut se louer lorsque les mathématiques [...] ne ruinent pas positivement les habitudes de raisonnement de qui les cultive. Le philosophe doit avoir quelque connaissance de leur objet et de leur méthode, mais il ne doit s'y adonner qu'avec modération et précaution. Un mathématicien en matière contingente est comme un oiseau de nuit en plein jour», *Sir William Hamilton's Discussions on philosophy and litterature, education and University reform*, 3e ed. Blackwood and Sons, Edimbourg et Londres, 1866, p. 705. Cet extrait a fourni à Diagne le titre de son propre ouvrage, S. Diagne, *G. Boole, L'oiseau de nuit en plein jour*, avec des notes de Marie-José Durand, Belin, Paris, 1989, ici p. 110. L'ouvrage est une excellente analyse philosophique, qui contient une bibliographie abondante et précise. Il sera référencé *Oiseau* dans la suite.

[8] E. Kant, préface de la seconde édition (1787) de la *Critique de la raison pure*, P.U.F, Paris, éd. 1986 (1e éd.1944), trad. A. Tremesaygues et B. Pacaud, p. 15. Boole lui-même évoque ce texte de Kant,

CALCUL LOGIQUE ET OBJETS INTERPRÉTABLES

Il ne peut être question, dans le cadre du présent article, d'analyser toutes les techniques de Boole en calcul logique : il y faudra plusieurs exposés, tant philosophiques que mathématiques. Il s'agit en effet de méthodes raffinées, ancrées dans le développement des mathématiques des années 1850, et aussi dans les conceptions des mathématiciens de l'époque de ce qu'était un calcul ; des procédures qui ont trouvé, après Boole lui-même et divers remaniements par ses successeurs, des développements historiques profonds, aujourd'hui encore bien vivants, dans ce qu'on appelle le calcul discret, à la fois en mathématiques et en informatique théorique[9]. J'ai choisi de n'en examiner qu'une seule illustration, (la «division logique»), exemplaire cependant, parce que typiquement booléenne, sans doute surprenante pour les mathématiciens d'aujourd'hui, tout comme elle le fut pour ceux d'hier. On ne pourra qu'y constater la foi dans le calcul, proprement aveugle, de son auteur, qu'on ne peut guère, sur ce plan, comparer qu'à Leibniz. On verra cependant aussi les difficultés véritables, sur le terrain mathématique, qu'a rencontrées Boole, tout imprégné des conceptions des opérations et du calcul quotidiens à son époque, c'est-à-dire portant sur des nombres, selon ce qu'on peut se risquer à appeler rétrospectivement la culture (mathématique) de corps commutatif». Boole réussira cependant là où Leibniz avait échoué[10], à créer le premier des calculs véritables de l'histoire qui porterait sur des objets qui ne sont pas des nombres : une méta-procédure qui aura, comme on sait, une abondante descendance mathématique, et pas seulement en calcul logique. Nous exposerons d'abord très brièvement le cadre théorique booléen.

Dans une perspective initialement purement extensionnelle, Boole avait d'abord traité de symbolisation algébrique des classes : x est par exemple le signe de la classe des boules blanches dans une urne, ou celles des «montagnes arides ou des vallées fertiles»[11], ou des «bêtes qui ont les ongles fendus»[12], ou bien encore celle des «êtres qui ont volontairement sacrifié leur liberté d'agir»[13]. On observera à ce propos la conceptualisation booléenne des classes universelles, de signe 0 et 1, ainsi que celle de la classe complémentaire de celle de signe x, de signe 1 - x [14]. Boole note aussi l'arbitraire du signe logique[15]. À partir de ce qu'il conçoit comme les lois de l'esprit, il fait ensuite

---

ironisant sur «l'immunité» particulière dont seule jouirait la logique : «In accordance with these views it has been contended that the science of Logic enjoys an immunity from those conditions of imperfection and of progress to which all other sciences are subject» (Introduction to Kant's «Logik»), cf. *Laws*, p. 39.

[9] Cf. par exemple une présentation moderne dans M. Serfati, *Algèbres de Boole, avec une introduction à la théorie algébrique des graphes orientés et aux «sous-ensembles flous»*, SEDES, Paris, 1973.

[10] Cf. l'analyse de Bourbaki : «En second lieu, Boole doit être considéré comme le véritable créateur de la logique moderne. Son idée maîtresse consiste à se placer systématiquement du point de vue de l'extension, donc à calculer directement sur les ensembles, en notant x y l'intersection de deux ensembles et x + y leur réunion lorsque x et y n'ont pas d'élément commun [...]», N. Bourbaki, *Éléments d'histoire des mathématiques*, Paris, Hermann, 1969, p. 32. Ce commentaire est rapporté par E. Coumet, *op.cit*, I, p. .

[11] «Barren mountains or fertile vales», *Laws*, p. 32.

[12] «Beasts dividing the hoof», *Laws*, p. 84, cf. *infra*.

[13] «Beings who have voluntarily sacrificed their freedom of action», *Laws*, p. 95, cf. *infra*.

[14] Pour simple qu'elle nous apparaisse aujourd'hui la conceptualisation de la classe «contraire» d'une classe donnée avait néanmoins nécessité la production, toute récente à l'époque – essentiellement par De Morgan – du concept d'«Univers du Discours», jusque-là absent dans les théorisations. Elle demandait par exemple en effet que soit examiné le statut du concept de non-homme ou de non-rationnel. Sur la question de l'Univers du Discours, cf. *Laws*, p. 42-43.

[15] *Laws*, p. 28.

dériver les deux lois de sa nouvelle algèbre, produit et somme logique, cette dernière portant par essence pour lui sur des classes disjointes (somme disjonctive), ainsi accompagnées d'écritures symboliques telles que : $x\ y$, $x + y$, ou $x(y + z)$. Introspection et examen subséquent des lois de la pensée lui permettent alors de munir l'ensemble de ces classes de lois algébriques, à la fois semblables et différentes de celles de l'algèbre ordinaire. Boole se déplaçait ici sur le terrain de la pure analogie, qu'il affectionna entre tous. Ainsi écrit-il : «Et ces symboles logiques voient leur usage soumis à des lois qui en partie s'accordent et en partie ne s'accordent pas avec les lois des symboles correspondants dans la science de l'algèbre»[16]. Ainsi des deux commutativités

$$x + y = y + x \quad \text{et} \quad x\ y = y\ x$$

et des deux distributivités :

$$x.\ (y + z) = x\ y + x\ z \quad \text{et}$$

$$x + (y.\ z) = (x + y)\ .\ (x + z)$$

Fera cependant exception à l'analogie la loi de *simplification*, qui n'est pas valable en algèbre de la logique : $x\ .\ y = x\ .\ z$ n'implique pas en effet $y = z$ [17]. Fait aussi exception à l'analogie, mais en sens inverse, *la loi de dualité* : la relation $x^2 = x$ (idempotence du produit logique, en termes modernes), qui s'écrit encore analogiquement

$$x\ (1 - x) = 0$$ [18]

Elle doit en effet être valide pour toute classe x, alors qu' en algèbre ordinaire, «réelle», elle ne l'est évidemment que si $x = 0$ ou si $x = 1$. Ainsi Boole la justifie-t-il cependant : «Si deux symboles ont exactement la même signification, leur composition n'entraîne rien de plus que ce que l'une ou l'autre exprimait séparément»[19]. Dès lors, la *loi de dualité*, centrale dans tout le texte, caractérisera pour Boole les seuls objets logiques *interprétables*. Boole déclare y reconnaître un fondement de la structure intime de la pensée et, à un premier titre, la «démonstration mathématique d'un axiome des métaphysiciens», savoir le principe de contradiction[20]. La loi de dualité est en effet équivalente à□

$$x + (1 - x) = 1 \text{ et } x\ (1 - x) = 0$$

pour toute classe x, exprimant ainsi que de «deux choses l'une et l'une seulement».

Cette loi est pour Boole un principe fondateur, et il invoque sur ce point l'autorité de Leibniz : «Taking this view, Leibnitz appears to me to have judged correctly when he

---

[16] «And these symbols of Logic are in their use subject to definite laws, partly agreeing with and partly differing from the laws of the corresponding symbols in the science of Algebra», *Laws*, p. 27. Traduction de Diagne, *Lois*, p. 44.

[17] *Laws*, p. 36-37.

[18] E. Coumet (I, p. 10), place à ce moment l'apparition subreptice du «zéro logique».

[19] «It follows that if the two symbols have exactly the same signification, their combination expresses no more than either of the symbols taken alone would do», *Laws*, p. 31. Traduction de S. Diagne, *Lois*, p. 49.

[20] «That axiom of metaphysicians which is termed the principle of contradiction, and which affirms that it is impossible for any being to possess a quality, and at the same time not to possess it, is a consequence of the fundamental laws of thought, whose expression is $x^2 = x$», *Laws*, p. 49 (Proposition IV).

assigned to the ‘principle of contradiction’ a fundamental place in Logic (*Nouveaux Essais*, Livre IV, Chap. 2 et *Théodicée*, 1e partie. Sect. 44) ; for we have seen the consequences of that law of thought of which it is the axiomatic expression»[21]. La mise en avant par Boole de ce principe épistémologique central, «la pensée humaine est régie par une certaine équation du second degré», est alors accompagnée par lui de deux commentaires essentiels à la mise en œuvre de son projet :

1. Si on affecte à chaque classe un nombre qui vaut zéro ou un, selon la vérité de l'appartenance d'un objet à la classe donnée, il y a alors, selon Boole, complète analogie entre les deux types de calculs. Une analogie qui est en vérité, pour Boole, une sorte d'artifice, seulement fondée sur l’écriture symbolique et destinée à maîtriser, autant que faire se peut, les problèmes d’ininterprétabilité qui ne pourront manquer de surgir : «En fait, nous pouvons laisser de côté l'interprétation logique des symboles entrant dans l'équation donnée : les convertir en symboles quantitatifs ne pouvant prendre que les valeurs 0 et 1 ; effectuer avec les symboles ainsi convertis toutes les procédures que demande la solution ; et les rétablir finalement dans leur interprétation logique»[22]. Ainsi, modulo la loi de dualité ($x^2 = x$), le calcul logique devrait bien prolonger sur les classes le calcul ordinaire sur les nombres. La pensée est ainsi pour Boole, absolument régie par une équation du second degré[23].

2. La constitution d'assemblages de signes portant sur les classes peut tout naturellement conduire à des concaténations comme $1 + x$ ou $x + y$ – dans le cas où les classes x et y ne sont pas disjointes – qui ne vérifient pas la loi de dualité. Car, bien que les sommes logiques non disjonctives ne soient pas des opérations permises, *Boole ne s'interdit pas de les écrire dans les calculs intermédiaires*. Il s’efforce cependant, au nom du pragmatisme et de l’effectivité, de faire justice de l’accusation d’incohérence à laquelle il s’exposait ainsi : «l'expression $x + y$ semble réellement ininterprétable, à moins qu’on ne suppose que les choses représentées par x et celles représentées par y soient entièrement distinctes [...] Si une telle restriction était nécessaire, il est évident que rien de ce qu’on pourrait appeler méthode générale ne serait possible en Logique»[24]. C'est ici le premier et le plus simple des cas d'ininterprétabilité dans le calcul booléen, qui lui vaudra déjà bien des critiques de la part de ses contemporains. S'appuyant alors sur l'exemple obligé des nombres imaginaires[25], Boole déclare qu'il convient néanmoins de continuer le calcul si l'on parvient à obtenir des résultats terminaux interprétables (c'est-à-dire justiciables de la loi de dualité) sans se soucier de la légitimité des objets intermédiaires obtenus. Position qui fait bon marché de la question ontologique, elle manifeste seulement à nouveau la foi de Boole en la toute puissance du calcul, lui qui finira toujours, selon lui, par donner un résultat admissible et interprétable.

Un autre point appelle un commentaire. Dans la phase de la codification symbolique, au chapitre 4, Boole a été conduit, par l’analyse des significations possibles du verbe «est» à deux types de démarches, et à l’introduction naturelle de symboles de classe indéterminée. C’est ici un point essentiel dans les conceptions booléennes, et que nous tâcherons de développer quelque peu. Boole distingue d’abord le «est» lorsqu’il est *définissant*. Dans cette perspective, la codification symbolique résulte alors directement de

---

[21] *Laws*, p. 240. Chap XV, Logique aristotélicienne.
[22] *Laws*, p. 70. Traduction de S. Diagne, *Lois*, p. 83.
[23] En une attitude typique de mathématicien, Boole s'interroge longuement sur l'éventualité que la pensée aurait pu suivre la loi du troisième degré, d’équation $x^3 = x$. Cette dernière relation est en effet impliquée par $x^2 = x$, mais ne lui est pas équivalente (cf. la note étendue de la page 50).
[24] *Laws*, p. 66-67.
[25] *Laws*, p. 69.

sa construction préalable, sans adjonction de nouveaux symboles[26]. Tel est l'«exemple de la richesse» : «la richesse consiste en des choses susceptibles d'échange, en quantité limitée, et qui peuvent, soit produire le plaisir, soit prévenir la douleur», telle est la définition booléenne, que Boole codifie tout naturellement selon[27] :

$$w = s\, t\, [p + r\, (1 - p)]$$

où w dénote la richesse (*wealth*), t les choses susceptibles d'échange (*trade*), s le choses en quantité limitée (*supply*), p, celles qui peuvent produire le plaisir (*pleasure*), et r celles qui peuvent empêcher la douleur. Cet exemple est clairement une *définition* de la richesse. Le «consiste» de l'énoncé est en effet le signe d'une caractérisation de celle-ci, c'est-à-dire d'une condition nécessaire et suffisante pour que quelque chose de ce monde puisse être désigné comme la richesse. Un cas structurellement différent nécessite l'introduction de ce que nous appellerons les symboles de classe indéfinie («indefinite symbol»). Il est en effet des exemples où le rhétorique n'est le signe que d'une prédication. Tel est évidemment le cas, usuel entre tous, de la proposition universelle affirmative, que Boole examine ici sur cette instance, qui est aussi son archétype : «Tous les hommes sont mortels». Boole codifie[28] cette proposition en représentant par x la classe des hommes, y celle des mortels, en écrivant la formule :

$$x = v\, y$$

c'est-à-dire : les hommes sont parmi les mortels, ou bien, mieux encore : les hommes sont parmi les mortels ceux qui vérifient une condition adventice indéterminée[29] symbolisée par v. Appliquée à une proposition catégorique aussi simple, le procédé montre bien la nécessité de l'introduction de ces variables indéfinies dont l'étude sera plus loin prolongée par Boole. De même, l'universelle négative se codifie[30] selon

$$y = v\, (1 - x)$$

c'est-à-dire, au sens booléen propre, *tout homme appartient à la classe des non-parfaits et aussi à une autre classe adventice indéterminée de signe* v. Quant à la particulière affirmative (resp. négative), elle se traduit pour Boole par : $vy = vx$ (resp. $vy = v(1-x)$[31].

[26] Ainsi de la Règle 10, *Laws*, p. 59.
[27] *Laws*, p. 60.
[28] *Laws*, p. 61.
[29] «Represent then by v, a class indefinite in every respect but this, viz., that some to its member are mortal being», *Laws*, p. 61.
[30] y dénote ici la classe des hommes, et x celles des êtres parfaits, *Laws*, p. 62.
[31] Il est aujourd'hui clair qu'une telle représentation des propositions particulières, parce qu'elle implique deux fois le même symbole v avec des dénotations différentes, est incorrecte, comme nous le détaillons *infra*. Les symboles de classe indéfinie étaient déjà omniprésents dans la *Mathematical Analysis of Logic* de 1847, avec leur lot de difficultés obligées, corrélatives du contexte de leur interprétation (ou de leur absence d'interprétation). Ainsi, relève E. Coumet : «mais le cas des propositions particulières est plus délicat, et nous allons voir surgir une des graves difficultés sur lesquelles va buter la méthode de Boole. Pour exprimer
- la proposition particulière affirmative (I) : «Quelques Xs sont des Ys»
- la proposition particulière négative (0) : «Quelques Xs sont non Ys», Boole va faire intervenir un symbole auxiliaire qui a, en ce premier temps, un sens bien déterminé. Si «Quelques Xs sont des Ys», il y a des termes communs aux classes X et Y ; considérons la classe V que constituent ces termes, et à laquelle correspond le symbole électif v ; on aura v = x y (...) mais dès les premiers calculs où va s'engager Boole, ce symbole v créera des difficultés, car on ne pourra pas le détacher de ses conditions d'interprétation», E. Coumet, *op. cit.*, I, 10. Et, plus loin : «Boole oscille ainsi entre la première

Dans tous les cas v, qui est un symbole logique, doit être *interprétable* et donc satisfaire à la loi de dualité $v^2 = v$. Au chapitre XV, clôturant la partie Logique des *Laws*, et consacré à la logique aristotélicienne, Boole, étudiera exhaustivement la codification[32], à l'aide de ses *indefinite symbols*, des huit formes de syllogismes de la logique aristotélicienne qu'il ne met aucunement en question – il insiste même sur le fait que les énoncés aristotéliciens, s'ils se soumettent complètement à son nouveau calcul, n'en représentent qu'une bien faible partie du territoire.

Observons en terminant ici sur le plan de l'épistémologie mathématique, crucial à nos yeux pour la compréhension de la démarche booléenne, que la fonction véritable, ultime, de l'introduction des *indefinite symbols* se résume pour nous – et pour Boole – à la *paramétrisation* des équations et des inéquations logiques. Représenter en effet symboliquement la proposition-type «tous les hommes sont mortels» pourra en effet désormais se faire de deux façons différentes, soit :

$$x(1-y)=0 \qquad (1)$$

c'est-à-dire : *il n'est pas d'être qui soit à la fois homme et non mortel*, équation absolue, en soi, où ne figurent que les symbolisations des données initiales. Ou bien, comme on l'a vu ci-dessus : «il existe une classe indéfinie de symbole v telle que

$$x = v\,y \quad » \qquad (2)$$

L'écriture (2) est ainsi une paramétrisation de la relation (1), selon une figure de pensée obligée chez les mathématiciens, usuelle depuis le XVII^e^ siècle jusqu'à nos jours (le signataire de ces lignes l'enseigne en tant que telle, c'est-à-dire comme figure de méthode, aux étudiants d'aujourd'hui). Elle est originée dans la géométrie algébrique et dans la procédure de paramétrisation d'une courbe plane d'équation $F(x, y) = 0$, dont les premiers exemples historiques furent les coniques, puis les cubiques. Et il est clair pour nous, à la lecture des *Laws*, que ce point de vue central, pour technique qu'il soit, ne pouvait être aussi que celui de Boole.

FONCTIONS LOGIQUES ET «DÉVELOPPEMENT»

C'est la force et la nouveauté de la méthode booléenne que de trouver *explicitement* la (les) valeur(s) d'une classe inconnue recherchée, en fonction des diverses classes données. Il s'agit donc ici de questions de techniques mathématiques. Ainsi bien posé, l'énoncé même du problème était nouveau, et c'est à seulement pouvoir l'énoncer en des termes similaires qu' avait échoué Leibniz. Au-delà de la seule énonciation du problème, on verra aussi comment ce calcul neuf permettra de *résoudre* effectivement les équations logiques. Par rapport au calcul algébrique ordinaire, il présente des spécificités épistémologiques majeures, dont les deux plus importantes sont l'*élimination* et le *développement*.

Écrire des équations logiques requiert évidemment d'abord de définir ce qu'est une fonction logique : ce sera, pour Boole, simplement une fonction de variables logiques ainsi est-elle complètement déterminée par les valeurs qu'elle prend lorsque les variables qu'elle contient prennent les valeurs 0 ou 1 et elles seulement. Voici Boole dans un

signification qu'il avait donné à v, signification claire, mais sans fécondité pour son calcul, et la tentation de donner à l'expression «Quelques» une «représentation» indépendante des termes sur lesquels elle porte», (I, 13).

[32] *Laws*, p. 227.

exemple très pédagogique : «Comme exemple, on cherche à developper la fonction $\frac{1 + x}{1 + 2x}$. Ici lorsque x = 1, on a f(1) = 2/3 et lorsque x = 0, nous trouvons f(0) = 1/1, ou 1. L'expression cherchée est donc : $\frac{1 + x}{1 + 2x} = \frac{2}{3}(x) + (1 - x)$, et cette équation est vérifiée pour toutes les valeurs que peut prendre le symbole x»[33]. Boole est alors en mesure de démontrer que *toute* fonction logique d'une variable s'écrit :

$$f(x) = f(1)\, x + f(0)\, (1 - x) \qquad (1)$$

On notera d'abord qu'un tel théorème n'est autre qu'une mise en acte *explicite* du tiers exclu dans l'écriture symbolique (de deux choses l'une et l'une seulement). Dans la *Mathematical Analysis of Logic* de 1847, Boole en avait produit une autre démonstration, paraphrasant la formule réelle usuelle de Taylor-Mac Laurin[34], instructive pour l'historien des idées en ce qu'elle montre les origines intuitives de son résultat, même si Boole, dans les *Laws*, considèrera cette première démonstration comme «moins générale» que celle qu'il y propose (en fait, par récurrence). Dès lors cependant qu'est valide le résultat (1), la dépendance d'une équation logique du type V = 0 par rapport à l'une quelconque de ses inconnues sera d'un type structurel très simple[35]. De la même façon, Boole démontrera que toute fonction logique de deux variables logiques peut s'écrire :

$$f(x, y) = f(1, 1)\, x y + f(0, 1)\, (1 - x)\, y + f(1, 0)\, x\, (1 - y) + f(0, 0)\, (1 - x)\, (1 - y) \qquad (2)$$

La preuve se fait très simplement par itération, à partir du résultat (1) à une variable[36]. Le lecteur pourra d'ailleurs s'assurer de la véracité de ce résultat si x et y sont des variables logiques booléennes, c'est-à-dire ne peuvent prendre ques les valeurs 0 ou 1. Et, de fait, cette écriture dit également à sa façon que «de quatre choses l'une et une seulement». Appelant «constituants» (aujourd'hui usuellement dénommés *min-terms*) les quatre fonctions élémentaires de deux variables : xy ; (1 - x) y ; x(1 - y) et (1 - x) (1 - y), Boole est alors en mesure d'affirmer :

> «Les constituants du développement d'une fonction quelconque des symboles logiques x, y sont interprétables et représentent les diverses partitions mutuellement exclusives de l'univers du discours, formées par l'attribution ou la non attribution de toutes les manières possibles, des qualités désignées par les symboles x, y, etc...»[37].

Les écritures (1) et (2) sont appelées par leur auteur le «développement» de la fonction logique f. La simplicité et les modalités techniques du passage d'une à deux variables induisent évidemment le *working mathematician* à s'intéresser à une possible extension à n variables et à une démonstration par récurrence[38].

---

[33] *Laws*, p. 72-73.

[34] Cf. S. Diagne, *Oiseau*, *op. cit.*, p. 144.

[35] Dans l'exemple *supra* cependant, 2/3 n'est pas une valeur logique acceptable, car non susceptible de vérifier la loi de dualité. Plus loin, Boole exigera de plus que f(0) et f(1) soient eux aussi interprétables.

[36] *Laws*, p. 73-74.

[37] *Laws*, p. 81 (Proposition 1) ; traduction de Diagne, *Lois*, p. 93.

[38] Le résultat est effectivement valide, comme Boole l'affirme (*Laws*, p. 73) : «To expand or develop a function involving any number of logical symbols», mais dans les *Laws,* il se limite à trois variables (p. 75). On en trouve une présentation complète dans E. Schröder, *Vorlesungen über die Algebra der Logik* (*Exakte Logik*), rééd. Chelsea Publishing Company, Bronx, New York, (vol. I, 1890), (vol. II, 1891). Pour un énoncé et une présentation moderne dans le cadre de la théorie des treillis, cf. M. Serfati, *Algébres de Boole* [...], *op. cit.* Le résultat s'écrit aujourd'hui de façon très condensée sous la forme suivante (p. 75) : si B est une algèbre de Boole quelconque et f un polynôme booléen à n variables, alors on a :

DIVISION LOGIQUE

Revenons au cas de la division logique. Cet exemple, important et constitutif de la théorie, mais qui n'est pas sous la forme canonique f(x) = 0, est simplement celui de la résolution de l'équation ax = b où a, b, x sont des variables logiques[39]. En une surprenante application de sa méthode du «développement», Boole réécrit en effet, par pure analogie, $x = \frac{b}{a}$ la division proposée, puis se met en devoir de développer la fonction de deux variables égale au quotient, par le théorème de «développement», en fonction des quatre valeurs possibles que peut prendre le couple (a, b) :

$$x = \frac{1}{1}\,a\,b + \frac{0}{1}\,a\,(1 - b) + \frac{1}{0}(1 - a)\,b + \frac{0}{0}(1 - a)(1 - b)$$

Tous les lecteurs de Boole, ses contemporains ou les nôtres, n'auront pas manqué d'observer sur-le-champ le caractère strictement ininterprétable, au regard même de l'analogie qui constituait la formule, des coefficients $\frac{0}{0}$ et $\frac{1}{0}$, deux assemblages de signes archétypiques que tout apprenti en mathématiques, aujourd'hui encore, doit savoir très tôt reconnaître pour les rejeter. Ainsi, l'ininterprétable booléen apparaît-il ici comme le produit direct d'une analogie dont, en première analyse, il semblerait qu'elle ait échappé à son auteur pour devenir incontrôlée. Car si c'est bien l'analogie qui a fait découvrir à Boole le quotient logique de signe $\frac{b}{a}$, c'est aussi l'analogie qui l'a plongé dans d'apparentes apories. Dans le résultat aberrant obtenu, Boole se livre cependant à une catégorisation en quatre espèces de termes : le premier terme (associé à $\frac{1}{1}$) correspond à l'*universel* (ou encore l'*existant*) et doit être intégralement retenu dans la solution. Le second (associé à $\frac{0}{1}$) au *non existant,* et doit en être complètement exclu; le troisième terme (associé à $\frac{1}{0}$) est associé à l'*impossible* et doit être préalablement annulé pour qu'il y ait des solutions. Ainsi (1 - a) b = 0 est-elle la condition de consistance de l'équation. Elle est équivalente à a b = b. C'est aussi le résultat de l'élimination de x. Enfin le quatrième terme (associé à $\frac{0}{0}$) correspond à l'*indéterminé* et doit apparaître dans la solution affecté d'un coefficient, lui aussi indéterminé, symbolisé par un *symbole de classe indéfinie* v. En résumé, on a, pour la solution :

$$x = ab + v\,(1 - a)\,(1 - b) = b + v\,[(1 - b) - a + a\,b].$$

Or ab = b à nouveau. La relation :

$$x = b + v\,(1 - a)$$

fournit donc une paramétrisation de la solution générale. On notera que le v booléen fixe une *fraction indéterminée* de l'*indéterminé.*

Les exemples booléens de division logique qui suivent dans le texte des *Laws* sont divers, mais cependant nullement dans le registre mathématique. Le premier, tiré, selon Boole, de la «loi juive», est celui-ci : «les bêtes pures sont les bêtes qui ruminent et qui ont

---

$$(\forall\, x \in B^n) \quad f(x) = \bigvee_{\alpha \in <2>^n} \left(x^{\alpha} \wedge f(\alpha)\right)$$ avec $x = (x_1, \ldots, x_n)$; $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, et où l'on a posé :

$x^{\alpha} = x_1^{\alpha_1} \wedge x_2^{\alpha_2} \wedge \ldots \wedge x_n^{\alpha_n}$ et aussi $x_k^1 = x_k$ et $x_k^0 = \overline{x_k}$.

[39] Chapitre VI, «On the general interpretation of logical equations, and the resulting analysis of propositions. Also, of the condition of interpretability of logical functions», *Laws*, p. 80.

les ongles fendus» [40]. En dénotant par x les bêtes pures, par y les bêtes qui ont les ongles fendus, et par z les bêtes qui ruminent, on reconnaît évidemment une division logique, qui s'écrit x = y z, que Boole tâche de résoudre en z conformément au schéma précédent[41]:

$$z = \frac{1}{1}\, x\, y + \frac{1}{0}\, x\,(1 - y) + \frac{0}{1}\,(1 - x)\, y + \frac{0}{0}\,(1 - x)(1 - y)$$

La solution générale en est donc : z = x + v (1 - y), où v est un symbole de classe indéterminée, cependant que la condition de consistance s'écrit : y x = x. Cette dernière s'interprète à l'évidence en ce que «tout x est un y» donc qu'il est nécessaire, pour que le problème posé ait une solution, que toute bête pure ait nécessairement les ongles fendus. En fait, Boole montrera simplement plus loin[42] que toutes les relations du type y x = x sont le support des propositions «Universelles Affirmatives». Et Boole d'interpréter alors rhétoriquement (*Laws*, p. 87) l'écriture symbolique de la solution générale z = x + v (1 - y) de façon naturelle : «Les bêtes qui ruminent sont toutes les bêtes pures (qui ont aussi nécessairement les ongles fendus) et aussi une fraction indéterminée (quelques-unes, aucunes, ou toutes) des bêtes impures qui n'ont pas les ongles fendus».

Nous commenterons ensuite cet autre exemple booléen, cette fois à trois variables : «Les êtres responsables sont les êtres rationnels qui soit sont libres d'agir, soit ont volontairement sacrifié leur liberté d'agir». Boole précise qu'il considère qu'être libre d'agir ou avoir volontairement sacrifié sa liberté sont des conditions qui s'excluent mutuellement[43]. Posons que x dénote la classe des êtres responsables, y celle des êtres rationnels, z celle des êtres libres d'agir et w celle de ceux qui ont volontairement sacrifié leur liberté. Boole écrit d' abord : x = y z + y w = y (z + w) et se propose de résoudre en y.

On a évidemment $y = \frac{x}{z + w}$. Boole développe alors la fonction logique de trois variables logiques $\Phi(x, z, w) = \frac{x}{z + w}$ par son théorème. Se dispensant d'écrire les termes «non existants» (i.e. associés à $\frac{0}{1}$ et $\frac{0}{2}$), il lui reste (*Laws*, p. 95) :

$$y = \frac{1}{2}\, x\, z\, w + xz\,(1 - w) + x(1 - z)\, w + \frac{1}{0}\, x(1 - z)\,(1 - w) + \frac{0}{0}\,(1 - x)\,(1 - z)\,(1 - w)$$

La solution générale est donc :

$$y = xz\,(1 - w) + x\,(1 - z)\, w + v\,(1 - x)\,(1 - z)\,(1 - w) \qquad (7)$$

où v est un symbole de classe indéterminée, cependant que les conditions de consistance s'écrivent ici :

$$x\, z\, w = 0 \qquad (8)$$

et $$x(1 - z)\,(1 - w) = 0 \text{ [44]} \qquad (9)$$

Et Boole d'interpréter alors dans la langue naturelle ses propres résultats (p. 96), tant la solution générale (qu'il dénomme «*direct conclusion*»), que les deux conditions de

---

[40] *Laws*, p. 84.
[41] *Laws*, p. 84-87.
[42] *Laws*, Chapitre XV, p. 226-242.
[43] *Laws*, p. 95.
[44] Les références (7), (8), (9) entre parenthèses renvoient à la numérotation de Boole dans les p. 95-96 des *Laws*.

consistance (appelées «independant relations»). Ainsi décrit-il rhétoriquement la solution générale (7) :

> «Conclusion directe : Les êtres rationnels sont tous les êtres responsables qui sont, soit libres d'agir et n'ont pas volontairement sacrifié leur liberté[45], soit ceux qui ne sont pas libres d'agir et ont volontairement sacrifié leur liberté[46], à quoi s'ajoute une fraction indéterminée (quelques uns, aucuns, ou tous) d'êtres qui ne sont ni responsables, ni libres, et qui n'ont pas volontairement sacrifié leur liberté»[47].

On ne pourra qu'accorder un caractère indiscutable à ces conclusions, au regard des hypothèses. Et cet accord profond avec l'intuition et le bon sens n'a sans doute pas dû manquer de frapper les lecteurs contemporains de Boole, et les engager à persévérer dans l'étude des *Laws*, en dépit du caractère extravagant des méthodes mathématiques booléennes, particulièrement celles des symboles ininterprétables. On observera aussi *supra* la relative difficulté pour le commentateur – qui est ici Boole lui-même – à formuler en termes définitivement non ambigus une interprétation rhétorique exhaustive des écritures symboliques mathématiques[48]. Boole continue cependant, en interprétant les deux conditions de consistance (8) et (9) :

> «Première relation indépendante□il n'y a pas d'êtres responsables qui soient en même temps libres d'agir et en situation d'avoir volontairement sacrifié leur liberté[49].
>
> Deuxième relation indépendante : Aucun être responsable n'est en même temps empêché d'agir et en situation de ne pas avoir volontairement sacrifié sa liberté[50]».

Boole transforme ensuite, toujours par «développement», les relations (8) et (9) en deux conditions de consistance plus simples – elles font toutefois intervenir des symboles de classe indéterminée – qu'il interprète ensuite rhétoriquement, toujours selon le même mécanisme. Ainsi (8) devient-elle (10) : $xw = v(1 - z)$, et (9) se transforme-t-elle en (11)□ $x(1 - w) = v z$, des relations qui sont ainsi rétrospectivement interprétées en termes rhétoriques : «Les êtres responsables qui ont volontairement sacrifié leur liberté ne sont pas libres», et «Les êtres responsables qui n'ont pas volontairement sacrifié leur liberté sont libres». Ainsi, ces indiscutables maximes morales apparaissent-elles à la fin de l'exemple comme autant de corollaires nécessaires (conditions de consistance d'une équation) de certains résultats mathématiques du calcul logique booléen. Toute la technique provient en vérité d'un emploi systématique d'un «théorème des fonctions implicites logiques», essentiel à toute la suite de la théorie [51], et tout aussi fondamental au

---

[45] Interprétation rhétorique de $x z (1 - w)$.

[46] Interprétation rhétorique de $x(1- z) w$.

[47] Interprétation rhétorique de $v(1 - x) (1 - z) (1 - w)$.

[48] Sur ce point de l'écriture rhétorique prétendument *exhaustive*, par exemple à propos de l'équation du second degré, cf. notre thèse de doctorat de philosophie, M. Serfati, *La constitution de l'écriture symbolique mathématique*, Université Paris I, décembre 1997 ; ici chapitre V, *Ambiguïté de l'ordre et signes délimitants*.

[49] Interprétation rhétorique de $x z w = 0$.

[50] Interprétation rhétorique de $x (1 - z) (1 - w) = 0$.

[51] Le «théorème des fonctions implicites logiques» stipule qu'on peut résoudre n'importe quelle équation logique à n inconnues, sous la seule réserve qu'elle soit consistante, par rapport à l'une quelconque de ses variables. Ainsi écrit Boole : «The solution of this problem consists in all cases in determining, from the equation given, the expression of the above symbol w, in terms of the other symbols, and rendering that expression interpretable du development», *Laws*, p. 87 (chapitre VI, L'interprétation générale des équations logiques). S'y ajoute le fait, largement souligné par Boole, qu'on peut aussi *éliminer* d'une équation consistante à n inconnues autant de variables que l'on voudra, contrairement aux usages du calcul

calcul des probabilités, tel que l'exposera Boole dans la seconde partie. Nous arrêterons ici l'analyse des méthodes proprement mathématiques qui se continueront pourtant dans l'ouvrage ; il nous faudrait la place d'étudier la réception des *Laws* et de leurs symboles ininterprétables[52]. Il nous a cependant semblé utile de présenter en termes contemporains simples, à l'adresse des lecteurs de *M.S.H*, le problème de la division logique, de montrer comment s'effectue aujourd'hui la résolution, et comment celle-ci justifie *a posteriori* le calcul booléen. Dans ces conditions, un énoncé contemporain acceptable de la division logique est celui-ci : E est un ensemble quelconque. Soit à résoudre sur P(E) l'équation $A \cap X = B$.

a) Consistance

On a $A \cap X \subset A$. Nécessairement, $B \subset A$, ou encore $B \cap A = B$ (1).

Réciproquement si $B \subset A$, on a $B \cap A = B$ et $X = B$ est solution. En conséquence, la condition (1) est bien la condition nécessaire et suffisante de consistance. On retrouve bien le $a \,.\, b = b$ de Boole.

b) Résolution

On suppose donc $A \cap X = B$, et on utilise la différence symétrique notée $\oplus$, définie par

$$C \oplus D = (\overline{C} \cap D) \cup (C \cap \overline{D}). \text{ On sait que } C = D \text{ équivaut à } C \oplus D = \emptyset.$$

Dans ces conditions, $A \cap X = B$ équivaut à $(A \cap X) \oplus B = \emptyset$, soit

$$\left[(A \cap X) \cap \overline{B}\right] \cup \left[\left(\overline{A \cap X}\right) \cap B\right] = \emptyset$$

c'est-à-dire : $\left(A \cap \overline{B} \cap X\right) \cup \left[\left(\overline{A} \cup \overline{X}\right) \cap B\right] = \emptyset$. Comme $B \subset A$, on a $B \cap \overline{A} = \emptyset$.

Reste donc :

$$\left[\left(A \cap \overline{B}\right) \cap X\right] \cup \left[\overline{X} \cap B\right] = \emptyset \qquad (2)$$

Pour que (2) soit satisfaite, il faut et il suffit que chacun des termes soit vide, c'est-à-dire :

$$\overline{X} \cap B = \emptyset \qquad (3)$$

et

$$\left(A \cap \overline{B}\right) \cap X = \emptyset \qquad (4)$$

La condition (3) est équivalente à (5) *infra* :

$$B \subset X \qquad (5)$$

et la condition (4) à

$$X \subset \overline{A \cap \overline{B}} = B \cup \overline{A} \qquad (6)$$

ordinaire, réel ou complexe. Sur ce point du statut véritablement exceptionnel de l'élimination en logique, nous renvoyons à notre étude, «Mathématiques et pensée symbolique chez Leibniz», in actes du colloque *La constitution des systèmes leibniziens*, mars 1998, à paraître (2001) dans la *Revue d'Histoire des Sciences*.

52 Sur le point de l'ininterprétable chez Boole, nous renvoyons à notre thèse de doctorat, *op. cit.*, §. 7.9.3 (Sur la diversité des «clés»), et aussi à S. Diagne, *Oiseau*, *op. cit.*, p. 125-126 («L'optimisme du symbolique»).

Pour que (2) soit satisfaite, moyennant (1), il faut et il suffit donc que X vérifie

$$B \subset X \subset B \cup \overline{A} \tag{7}$$

donc que X soit la réunion de deux termes, dont l'un est B et l'autre une partie *quelconque* de $\overline{A}$, c'est-à-dire :

$$X = B \cup \left(V \cap \overline{A}\right) \quad \text{avec} \quad V \in P(E)$$

Ainsi retrouve-t-on Boole en sa formule *supra*. La méthode moderne aura bien fourni un sens à l'ininterprétable dans les écritures booléennes, alors que celles-ci, qui avaient produit des résultats véridiques, demeuraient pourtant des formes symboliques sans signification[53]. L'analogie avec les quantités imaginaires, qui est ici frappante, est pourtant illusoire, même si Boole lui-même la relève dans les *Laws* pour promouvoir, en termes presque leibniziens, sa propre thèse[54]. Reste néanmoins l'origine du secret du succès des méthodes booléennes, un problème historico-épistémologique qu'après Boole, et jusqu'à aujourd'hui, des générations de mathématiciens, de J.Venn à Th. Hailperin, en passant par E. Schröder et N. Styazkhin[55], se sont efforcés d'élucider.

CONCLUSIONS SUR LE CALCUL LOGIQUE DANS LES *LOIS*

La prodigieuse capacité d'invention de Boole en matière de calcul, le fait que – sans l'avoir explicitement projeté, contrairement à Leibniz – il ait méthodiquement construit dans les faits un système de calcul et une algèbre véritablement nouveaux, témoignent de

---

[53] Sur le traitement général des «formes» symboliques mathématiques sans significations, cf. nos travaux, M. Serfati, «*Écriture symbolique et existences mathématiques*», in actes du colloque *L'existence en mathématiques*, mars 1999, à paraître dans les Cahiers d'Histoire des Sciences. Aussi «*Formes symboliques sans signification et sélection «naturelles» dans l'écriture leibnizienne des mathématiques*», à paraître in actes du colloque *Écriture et mathématiques*, Université de Clermont II, novembre 1998. Ainsi que «*Formes sans signification et jeux de substitution dans le texte symbolique mathématique*» à paraître in actes du Colloque *Mathématiques et psychanalyse* de Cerisy la Salle, septembre 1999. Aussi notre thèse de doctorat, *op. cit.*, chapitre XIV.

[54] Car Leibniz avait lui aussi invoqué les imaginaires pour justifier ses infinitésimaux. Pour Leibniz, les infinitésimaux ont le même statut et le même emploi de *fictions bien fondées* que les quantités imaginaires : on suppose leur existence, on les insère dans des lois nouvelles du calcul ayant la même forme que les règles ordinaires de l'algèbre. En les utilisant, on trouve des résultats réels effectifs. Après quoi, on les «oublie» après les avoir écrits. Et donc, comme avec les imaginaires, les contradictions que pourraient apporter les infinitésimaux sont résolues, pour le philosophe de Hanovre, dans et par l'écriture mathématique. On soulignera évidemment que le fait d'«oublier» les infinitésimaux n'exonère aucunement le géomètre de la question de la légitimité de leur emploi préalable. D'autre part, qu'il n'y a en fait aucun fondement *dans la chose* d'un rapport entre les infinitésimaux et les imaginaires, seulement une vague analogie souterraine, à titre de pseudo-paradigme épistémologique : ni l'un ni l'autre de ces deux concepts ne recouvre celui de nombre usuel, réel ; «donc» ils se ressemblent. Une argumentation sophistique, que reprendront pourtant des générations de mathématiciens, comme ici Boole dans les *Lois de la pensée*. On notera aussi que, chez Leibniz, le principe de continuité viendra ici tout régler et tout arranger. Sur ce point crucial, cf. notre étude, M. Serfati, *Le paradoxe leibnizien et la lettre à Varignon*, à paraître in Actes du colloque *L'Un et le Multiple* (en l'honneur de Jules Vuillemin), Clermont-Ferrand, novembre 1999.

[55] N.I. Styazkhin, *History of Mathematical Logic from Leibniz to Peano*, Cambridge (Mass.), M.I.T Press, 1969. Après une description historique de la réception du calcul de Boole chez les contemporains de celui-ci, Styazkhin ne résiste pas à se livrer une tentative personnelle de décodage des secrets de la méthode booléenne (*On the nature of the procedure in Boole's calculus*, p. 191).

remarquables qualités de mathématicien et aussi de ce qu'on peut appeler une très fine sensibilité mathématique : ainsi, en une démarche de mathématicien pur qui pourrait sembler exorbitante, voit-t-on Boole décider de la *place* de la syllogistique aristotéliciennne dans la constitution du raisonnement humain seulement à partir de celle qui lui aura été dévolue dans son propre calcul, c'est-à-dire par rapport à l'élimination et au «développement»[56] ! On conçoit à quel point ce type d'arguments hérétiques ne risquait guère toucher les philosophes rhétoriciens de son temps. Même sur ses contemporains mathématiciens, ils ne pouvaient alors exercer qu'une influence encore non décisive.

Les inventions essentielles demeurent : l'algébrisation d'une logique de classes, la technique du développement des fonctions logiques (inspirée des théorèmes d'analyse classique, comme ceux de Taylor-Mac-Laurin), celle de l'élimination et du développement (complètement spécifiques du contexte booléen) ; demeurent pourtant aussi quelques échecs et qui sont autant de rémanences parasites d'un contexte numérique-réel dont Boole, tout comme Leibniz n'est pas complètement parvenu à se détacher. Ce seront ses successeurs, pas à pas, et chacun pour sa part, qui parviendront à s'en extraire progressivement. On notera ici, en concluant sur le calcul logique, les quatre points qui suivent.

Le caractère systématique, «aveugle», des procédés du calcul nouveau portant sur des objets logiques est pleinement revendiqué par Boole. Ses successeurs, Schröder en tête, développeront des méthodes plus systématiques encore de résolution de systèmes d'équations algébriques logiques, telle la méthode des éliminations successives[57]. D'un autre côté, l'introduction des symboles de classe indéfinie est, comme on l'a vu, un facteur indispensable, qui *paramétrise* les solutions. Il est cependant clair que notre conception moderne de la même situation est bien plus opératoire, elle qui requiert aujourd'hui une quantification existentielle. Dire que x = vy où v est un symbole de classe indéfinie, c'est aujourd'hui dire qu'il existe v tel que l'on puisse écrire la relation citée, et ceci n'apparaît pas explicitement chez Boole. En fait, et en dépit des affirmations réitérées de Boole, ses symboles de classe indéterminée ne semblent pas toujours être véritablement pour lui des symboles de classe à part entière (ceux de variables logiques), c'est-à-dire des signes *individualisants*, comme il l'affirme pourtant, mais plutôt des marques d'indétermination. Dans la perspective du calcul booléen lui-même, il faudrait en effet assigner un nom distinct de symbole pour chaque situation d'indétermination et écrire vx = v'y (pour quelques x sont des y's) et non vx = vy comme le fait Boole : le caractère d'indétermination commun à v et v' n'autorise pas en effet à considérer qu'ils ont une valeur commune. La symbolique univoque de Boole fait en vérité perdre tout contenu individuel à ses symboles. Il est piquant de noter que cette confusion entre ce qu'on peut aujourd'hui appeler «signe» et «marque» de la représentation d'un concept – ici celui de classe indéterminée – aura souvent constitué une aporie historique, au moment de la création d'une symbolique nouvelle[58].

---

56 «Mon propos est de montrer comment ces procédures du syllogisme et de la conversion peuvent s'effectuer de la manière la plus générale selon les principes de ce traité et, en les situant dans le contexte d'un sytème de logique qui trouve ses fondements, c'est ma position, dans les lois ultimes de la pensée, de s'attacher à déterminer leur vraie place et leur nature essentielle», *Laws,* p. 228. Traduction de S. Diagne, *Lois*, p. 227. Sur ce point, cf. l'analyse de E. Coumet, *op. cit.*

57 C'est E. Schröder,*Vorlesungen über die Algebra der Logik, op. cit*., qui donna en 1890 la première version de cette méthode arborescente qui permet aujourd'hui de résoudre tout système de p équations et/ou q inéquations à n inconnues sur une algèbre de Boole quelconque. Pour une présentation moderne, cf. M. Serfati, *Algèbres de Boole* (...), *op. cit.*, et S. Rudeanu, *Boolean functions and equations*, North-Holland, Amsterdam, London & Elsevier Publishing Company, New-York, 1974.

58 Sur ce point, cf. M. Serfati, thèse, *op. cit.*

Que la complexité du procédé du «développement» soit en partie liée au refus booléen de l'écriture des *inégalités*, telle est, semble-t-il, une autre des conclusions sur laquelle se sont accordés les épistémologues. Boole ne veut en effet connaître et résoudre que des égalités logiques. Or il est clair aujourd'hui (après 1890 et Schröder[59]) que la prise en compte des inégalités logiques lui aurait permis de présenter ses résultats sur son «développement» de façon beaucoup plus démonstrative et opératoire. Le cas, par exemple, de l'universelle négative (aucun x n'est un y) s'écrit pour Boole sous l'une ou l'autre des deux formes équivalentes :

$$x . y = 0 \quad \text{ou} \quad x = v . (1 - y)$$

après ou avant l'élimination du symbole v de classe indéterminée. Aujourd'hui, nous écririons certes, comme Boole, $X \cap Y = \varnothing$ pour la première relation, ou bien il existe V tel que $X = V \cap \overline{Y}$ pour la seconde, mais aussi $X \subset \overline{Y}$, inégalité qui fait par contre complètement défaut chez Boole et ce, sous quelque forme que ce soit. C'est pourtant cette forme «inclusive» qui, à l'évidence, se prête le mieux à l'interprétation informelle et aussi à une visualisation par diagrammes telle que le proposera John Venn. Cette absence de toute inéquation dans le calcul de Boole et, corrélativement, de toute inclusion de classes, est peut être aujourd'hui à nos yeux le symptôme le plus apparent d'une certaine impasse du calcul booléen. Seule est en vigueur pour Boole l'égalité (et même l'égalité à zéro[60]). C'est un point que les successeurs de Boole s'attacheront grandement à réparer, Schröder en particulier, qui fondera au contraire sur *l'inclusion* ou *l'implication* tout le calcul logique : inclusion de classes, implication logique, ou encore inégalité dans le calcul sont en effet ici trois aspects épistémologiquement équivalents. Et, de fait, la troisième écriture, $x \leq \overline{y}$, qui sera proposée par Schröder ou Peirce se révélerait ici très efficace dans l'effectuation. Ainsi Boole lui-même n'a-t-il pas conclu que son algèbre a deux éléments pouvait être, avant tout, l' ensemble totalement ordonné le plus simple, où 0 < 1 (une «chaîne», en termes modernes), et tel que la structure algébrique toute entière découlât ensuite de l'ordre. Il n'aura donc aucunement perçu ce qu'on s'accorde à reconnaître aujourd'hui comme un des véritables privilèges du calcul booléen par rapport au calcul ordinaire : l'indistinction *de droit* entre égalité et inégalité.

Le refus booléen d'utiliser initialement des sommes logiques autres que disjonctives tire évidemment son origine du souci de Boole de préserver l'analogie sous-jacente et omniprésente du calcul logique entre les classes avec un calcul ordinaire sur un ensemble à deux éléments. Quelle valeur pourrait-on en effet, dans l'analogie, apporter à 1+ 1☐ Cette conclusion ne doit cependant pas masquer le fait que cette interdiction n'empêchera pas Boole des assemblages de signes interdits dans le cours des calculs intermédiaires : à ce moment donc, l'analogie prend nécessairement fin. Toute analogie porte avec elle ses propres limitations, et ce, dans le registre même de l'analogue qu'elle véhicule ; ainsi Boole devait-il ici «jouer serré avec l'analogie» (E. Coumet[61]). La limitation au cas disjonctif de la somme de classes ou d'énoncés apparaît rétrospectivement aujourd'hui

---

59 Cf. E. Schröder, *Vorlesungen über die Algebra der Logik*, *op. cit.*

60 Cette restriction de l'égalité à zéro n'est pas en logique une véritable limitation. Boole lui-même démontre en effet (*Laws*, p. 152-153) que toute équation, tout système d'équations logiques, peut se ramener à la forme d'une unique équation H = 0. Le nombre d'équations n'est donc pas un critère structurel décisif en calcul logique, pas plus que le nombre d'inconnues. Pour une présentation moderne sur ce point, utilisant la différence symétrique, cf. M. Serfati, *Algèbres de Boole*, *op. cit.*, p. 88.

61 «Il [sq. Boole] devait poursuivre aussi loin que possible le parallèle des méthodes algébriques et des méthodes logiques, mais savoir reconnaître les points où se manifestait l'originalité de l'univers logique. Bref il lui fallait jouer serré le jeu des analogies. C'est ce jeu très complexe, où Boole ne réussit qu'à demi», E. Coumet, *op. cit.*, II, p. 2.

comme une entrave à un développement correct du calcul, les procédés modernes utilisant la réunion (ou somme logique) quelconque. L'attachement de Boole à la somme disjonctive est clairement une autre survivance, corrélative de ce qui demeurait chez lui de préoccupations numériques-réelles, ce qu'on a appelé *supra* la «culture de corps». Si on peut rétrospectivement aujourd'hui juger naïve cette persistance de comportements algébriques anciens, elle témoigne en fait de la difficulté dans laquelle Boole se trouvait de s'extraire du cadre étroitement numérique de la mathématique constructive de son temps et de raisonner sur de purs objets logiques, pourvus de règles opératoires spécifiques. Ce même obstacle, encore évidemment renforcé par le contexte du XVII[e] siècle, avait été déterminant dans l'échec de la tentative de Leibniz. On notera, pour l'histoire, que ce premier des calculs logiques véritables, si l'on excepte Leibniz, fut suivi de nombreuses autres versions, accompagnant le développement des structures abstraites□il fut d'abord appelé (légitimement !) le calcul de Boole, puis successivement, l'algèbre de la logique, l'algèbre de Boole, enfin, terminalement aujourd'hui, *les* algèbres de Boole : à ce titre, ces dernières sont de nos jours des structures algébriques ordonnées, une rubrique de la théorie des treillis[62].

D'un autre côté, la technique de division logique, pour apparemment ancrée qu'elle soit dans le développement d'un quotient, ne peut faire ignorer que les quotients $\frac{1}{0}$ et $\frac{0}{0}$ ne peuvent être écrits dans l'algèbre ordinaire et n'ont donc pas davantage de sens dans l'analogie. Le fait que les résultats terminaux soient interprétables est évidemment une autre affaire. Ces deux questions ramènent à celle, plus générale, de l'«interprétable» chez Boole, et les raisons pour lesquelles il a néanmoins passé outre, c'est-à-dire sa foi aveugle en le calcul, ce que Diagne, retrouvant spontanément à son sujet les qualificatifs obligés s'agissant de Leibniz, appelle justement l'*optimisme du symbolique* chez Boole[63]. Au débit de l'entreprise booléenne, il faudra alors porter ce paradoxe, qui fut relevé par les contemporains[64] : comment pouvait-il se faire que ces mêmes lois de la pensée, auxquelles chacun de nous est à chaque instant soumis, aient dû finalement trouver, pour se traduire, un appareil mathématique aussi compliqué dans ses dispositifs, aussi hasardeux et si souvent ininterprétable dans ses conclusions, strictement incompréhensibles en tous cas pour le plus grand nombre des lecteurs, en dehors du public de quelques mathématiciens avertis ? Il semble, selon Diagne[65], que Boole, sur la fin de sa vie, ait été ébranlé par cette argumentation – qui a, en effet, du poids – et ait vainement tenté de produire une version rhétorique, simplifiée, de ses travaux, qui soit enfin communicable au public.

Ainsi, la logique de Boole aura-t-elle été, dès le début, l'objet d'un calcul abstrait, profondément mathématique, dans lesquelles les classes étaient dégagées de toute interprétation, ce que Frege lui reprochera avec véhémence. Frege jugeait en effet que le calcul booléen pour lequel il éprouvait peu de sympathie – contrairement à celui de Péano, qu'il jugeait plus proche de sa propre entreprise – n'était, comme il disait en termes «leibniziens», qu'un *calculus ratiocinator* sans être une *lingua characteristica*[66]. D'un

---

62 En termes modernes, une algèbre de Boole est aujourd'hui un treillis distributif et complémenté. Cf. M. Serfati, *Algèbres de Boole*, *op. cit.*

63 Cf. S. Diagne, *Oiseau* , *op. cit.*, p. 125.

64 Cf. la description de la réception des *Lois* chez certains des contemporains de Boole, Lotze et Jevons par exemple, dans S. Diagne, *Oiseau*, *op. cit*,, p. 177-178.

65 Cf. S. Diagne, *Oiseau* , *op. cit.*, p. 171 (chapitre 4 : «Le remords»).

66 «Car la logique booléenne n'est que logique et rien que logique. Boole ne se soucie que de la forme logique et pas du tout de mettre un contenu dans cette forme. Tel est au contraire le propos de Peano [...] En termes leibniziens on pourrait dire : la logique booléenne est un *calculus ratiocinator* sans être *lingua characteristica* ; la logique mathématique de Peano est essentiellement une *lingua characteristica* et

autre côté, cette «logique» de Boole, parce qu'elle se sera finalement incarnée, en dépit des réticences permanentes de son auteur, dans le premier des calculs absolument non numériques, fut en même temps, comme le remarquera à juste titre Huntington[67] l'ébauche de la toute première structure mathématique véritablement abstraite, c'est-à-dire délivrée de toute interprétation constructive contingente, telles celles à venir de groupe, de corps ou d'espace vectoriel «en soi». Cette antériorité, sur le plan épistémologique et historique, des conceptions booléennes, essentielle sur le plan historique, se redouble, à l'évidence aujourd'hui, de ce privilège crucial et quotidien de l'*effectivité*, ce dont peuvent témoigner ceux des *working mathematician* qui travaillent en mathématiques discrètes, tel le signataire de ces lignes, pour qui le calcul booléen est une pierre de touche de la mise en équation des procédures.

LA PLACE DU CALCUL DES PROBABILITÉS CHEZ BOOLE

Dès son introduction aux *Lois* (p. 2), après un large rappel historique sur les origines de la Logique, lointaines, dit-il, et enracinées dans l'histoire de la pensée, Boole avait parallèlement traité du Calcul des Probabilités. Si son histoire, écrit-il, n'est certes pas aussi ancienne, le Calcul des Probabilités fait néanmoins aussi partie de droit des lois de la pensée (le terme intervient essentiellement dans le titre de l'ouvrage). Car la démarche de Boole dans les *Laws* s'inscrit dans le cadre d'une philosophie générale du savoir : aux côtés du savoir déterminé, ou «démonstratif», incarné pour lui dans la logique, le Calcul des Probabilités procède en effet pour lui d'une autre forme fondamentale de savoir, le savoir «probable» :

> «Car ce n'est pas le seul intérêt de la Théorie des probabilités que de nous apprendre comment construire un système d'assurance-vie sur des bases

accessoirement un *calculus ratiocinator*, tandis que mon idéographie veut être les deux à la fois et au même titre». «Über die Begriffsschift der Herrn Peano und meine eigene. Berichte über die Verhandlungen der königlichen sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig», *Math. Phys. Klasse* 48, 1896, p. 361-378, ici p. 370-371, cité dans J. Largeault, *Logique et philosophie chez Frege*, Nauwelaerts, Louvain, 1970, p. 29.

[67] Dans le droit-fil des conclusions de Leibniz, Boole lui-même avait parfois reconnu que l'objet de la mathématique ne pouvait se limiter au nombre et à la quantité : «Il n'est pas de l'essence de la mathématique de se consacrer aux idées de nombre et de quantité» (*Laws*, p. 12). Comme le note Bourbaki, dans un extrait reproduit par E. Coumet : «il [sq. Boole] avait clairement perçu qu'en s'élargissant, la méthode axiomatique révélait ce que sont dans leur essence, les mathématiques : l'étude des relations entre des objets qui ne sont plus connus et décrits que par celles de leurs propriétés que l'on met à la base leur théorie», Bourbaki, *Éléments d'histoire des mathématiques*, *op. cit.*, p. 33. Cinquante ans après la parution des *Lois*, l'article de 1904 d'Edward Huntington «Sets of independant postulates for the algebra of logic», *Transactions of the American Mathematical Society,* vol. 5, 1904, p. 288-309, allait, à la suite de Whitehead, dégager complètement l'algèbre de la logique d'avec les recherches de Boole sur les *Lois de la Pensée*. Huntington souligne bien cette «indépendance» conquise de la nouvelle structure. C'était donc à ce moment une démarche devenue «naturelle» que de constituer cette indépendance, par le privilège d'une théorie purement déductive, sans référence à ses applications, en suivant ainsi la démarche exactement inverse de celle qui avait servi à la constituer : «This algebra, although originally studied merely as a means of handling certain problems in the logic of classes and the logic of propositions, has recently assumed some independance as an independant calculus ; it may therefore be not without interest to consider it from a purely mathematical or abstract point of view, and to show how the whole algebra, in its abstract form, may be developed from a selected set of fundamental propositions, or postulates, which shall be independant of each other, and from which all the other propositions of the algebra can be deduced by purely formal processes. In other words, we are to consider the construction of a purely deductive theory, without regard to its possible application» (p. 288).

> sûres ni comment trier le bon grain de l'ivraie dans les innombrables données enregistrées en astronomie, en physique (...) Ces deux études ont un autre intérêt, et qui provient de la lumière qu'elles projettent sur les facultés intellectuelles. Elles nous instruisent relativement au mode par lequel langage et nombre nous servent d'aides instrumentales dans les processus de raisonnement ; elles nous révèlent en partie la relation entre les différentes facultés de notre intellect commun; elles nous montrent ce qui, dans les deux domaines du savoir démonstratif et du savoir probable sont les fondements essentiels communs (essential standards) de la vérité et du «correct», des fondements qui ne sont pas déduits de l'extérieur, mais profondément enracinés dans la constitution des facultés humaines»[68].

Et aussi, un peu plus loin, cet exposé des motifs, argumenté sur l'articulation chez lui entre logique et calcul des probabilités, et dont découle la primauté de droit de celle-là sur celui-ci. Comme le souligne Boole lui-même, c'est une position originale, et qui fait que les *Laws* diffèrent de tous les traités qui l'ont précédé.

> «Ce qui fonde la nécessité d'une méthode logique comme base préalable d'une théorie des probabilités peut s'énoncer en quelques mots. Avant de pouvoir déterminer la manière dont la fréquence espérée d'un évènement donné dépend de la fréquence connue d'autres évènements, il faut avoir connaissance de la dépendance mutuelle des évènements eux-mêmes. Pour parler techniquement, nous devons être en mesure d'exprimer l'évènement dont on cherche la probabilité comme une fonction des évènements dont les probabilités sont données. Or cette détermination explicite appartient, dans tous les cas, au domaine de la logique. La probabilité cependant, dans son acception mathématique, admet une mesure numérique. Par conséquent, les probabilités relèvent aussi bien de la science du Nombre que de celle de la logique. En reconnaissant dans cette discipline la coexistence et le lien de ces deux aspects, le présent traité diffère de tous ceux qui l'ont précédé ; et puisque cette différence n'affecte pas seulement la question de la possibilité d'une solution dans un grand nombre de problèmes, mais introduit également des éléments nouveaux et importants dans les solutions ainsi obtenues, je crois nécessaire de souligner ici, assez longuement, les conséquences particulières de la théorie que développent les pages qui suivront»[69].

Ainsi le calcul des probabilités booléen va-t-il être conçu par son auteur comme la rencontre renouvelée entre le calcul numérique et le calcul logique, alors même que ce dernier venait précisément d'être soumis, par Boole lui-même, à un calcul non numérique. Et, de fait, l'une des fonctions du calcul des probabilités sera d'assurer le retour au numérique, à partir du calcul abstrait sur une algèbre de classes : c'est bien là, dans son principe, l'idée de la théorie moderne de la mesure.

La première partie des *Laws* traitant du calcul logique s'était achevée sur le chapitre XV consacré à la logique aristotélicienne. Boole entreprend alors un premier ensemble de trois chapitres concernant le calcul des probabilités. D'abord le chapitre XVI, *On the theory of probabilities* [70], où il expose ce qu'on appellerait aujourd'hui les définitions et les axiomes. Vient ensuite le chapitre XVII[71] *Demonstration of a general method for the solution of problems in the theory of probabilities*. Dans ce chapitre-clé, Boole expose peu à peu une démarche à la fois profondément originale et aussi à visée universelle : la mise en équation et la résolution de *toute question* de probabilités sous forme la plus générale possible. On l'analysera brièvement ci-dessous. Dans ce chapitre, l'entreprise

---

[68] *Laws*, p. 2.
[69] *Laws*, p. 13. Traduction de S. Diagne, *Lois*, p. 32.
[70] *Laws*, p. 243.
[71] *Laws*, p. 253.

booléenne sera donc essentiellement d'ordre théorique, et reposera entièrement sur la partie «logique» préalable, de surcroît dans ses aspects les plus techniques : les théorèmes sur les fonctions booléennes, en particulier élimination et développement. Vient enfin le chapitre XVIII[72] *Elementary illustrations of the general method in probabilities*, où les résultats des deux chapitres précédents sont appliqués à sept exemples divers. Nous détaillerons l'un d'entre eux de façon complète.

ÉPISTÉMOLOGIE DU CALCUL DES PROBABILITÉS CHEZ BOOLE

La théorie booléenne en probabilités se veut, comme on l'a dit, «une méthode générale»[73]. Une expression, *leitmotiv* dans la seconde partie des *Laws*, qui résume bien le double avantage essentiel qu'y voyait son auteur : la mise en équation et la résolution, toutes deux automatiques, de *tout* problème de probabilité. Dans le privilège ainsi revendiqué par Boole pour sa méthode contre toute tentative hasardeuse de résolution au cas par cas, on croit entendre Descartes revendiquant pour lui-même les avantages structurels de sa méthode analytique en géométrie, opposée à celle des Anciens. Dans la «méthode générale» booléenne, on tâchera de distinguer ces cinq points :

1. La (les) définition(s) de la probabilité et des objets sur lesquels elle porte, et aussi le mode d'affectation, à propos d'une situation donnée, d'un ensemble de probabilités.

2. Les principes (nous dirions aujourd'hui les axiomes) qui permettent le calcul.

3. La définition du sujet essentiel de la recherche booléenne, plusieurs fois répété : il s'agit de rechercher la probabilité d'un évènement qui résulte ou qui est associé à un certain nombre d'autres évènements considérés comme des données de base.

4. La mise en équation et le calcul, par des voies entièrement spécifiques : il s'agit, répétons le, d'un procédé qui se veut général, c'est-à-dire s'appliquant à toutes les situations du type précédent. Boole consacre un chapitre entier à sa «méthode générale en probabilités». Pour lui, elle est fondée sur une analogie profonde entre calcul des probabilités et calcul des classes. En ce sens, strictement algébrique, le calcul des probabilités, «homonyme numérique» du calcul des classes, est partie intégrante des *Laws*. Cet aspect était complètement neuf à cette époque[74]. Comme on va cependant le voir, la pratique complexe de la résolution des équations booléennes en probabilité se heurtera à des difficultés supplémentaires spécifiques, qui tiendront ici à la présence quasi nécessaire – dès que l'on quitte les cas les plus simples – d'évènements dits «conditionnés», une question qui n'était aucunement apparue dans le calcul logique.

---

[72] *Laws*, p. 276.

[73] C'est le titre du chapitre XVII (*Demonstration of a general method for the solution of problems in the theory of probabilities*), pivot de la partie «probabilités» de l'ouvrage.

[74] Cet aspect de l'articulation entre calcul logique et calcul des probabilités n'a guère été discuté par les contemporains de Boole, à la notable exception de Wilbraham (cf. *infra*). À l'époque contemporaine, on notera par contre l'ouvrage de Theodore Hailperin, *Boole's Logic and Probability*, Amsterdam, New York, Oxford, North-Holland Publ. Comp., 1976. Écrit par un logicien et mathématicien professionnel contemporain, cet ouvrage, plein d'intérêt, particulièrement sur l'analyse épistémologique, s'efforce en même temps de donner un statut et une justification modernes aux conceptions booléennes en logique et en probabilités, c'est-à-dire, si l'on veut, de construire un lieu où elles pourraient prendre sens : «*Boole made rigorous*», selon le vœu de Hailperin.

5. Enfin, l'interprétation des résultats trouvés, où se retrouvent, avec quelques nouveautés, certaines des caractéristiques importantes du calcul logique qui tiennent à l'indétermination et à l'arbitraire. D’une part en effet, les données d'un problème usuel (ce sont les probabilités de certains évènements) sont en général insuffisantes : le problème est dit «indéterminé». Ceci est dans la nature des choses. C'est-à-dire qu'il peut exister diverses solutions au problème proposé. D'un autre côté, pour décrire les diverses solutions, Boole utilise des paramètres numériques indéterminés, qui sont l'analogue numérique des classes indéfinies dans le calcul logique. Et le résultat d'un calcul booléen en probabilité se terminera le plus souvent par une phase d'interprétation de ces probabilités indéterminées[75]. Enfin, tout en étant insuffisantes en nombre, les données ne peuvent cependant être en général arbitraires, c'est-à-dire qu'on ne pourra se donner arbitrairement les diverses probabilités qui sont les *data* d'un problème. Elles sont en général soumises à des relations d'inégalité, nécessaires pour que le problème ait un sens, c'est-à-dire pour que les probabilités cherchées (les *quaesita*) soient des nombres compris entre 0 et 1. Boole consacre un chapitre entier à ces questions de consistance, qu'il appelle les «conditions de l’expérience» [76].

LES DÉFINITIONS DE LA PROBABILITÉ

À l'époque de Boole, la définition même de la probabilité ne manquait pas d'être une partie cruciale pour tout auteur de traité : en l’absence de toute définition alors universellement reconnue, l’auteur devait en effet y exposer sa philosophie et sa vision du monde sur le fond même de ce qu’il traitait, la probabilité. Ainsi les pages liminaires des traités de probabilités des XVIII^e^ et XIX^e^ siècles sont-elles précieuses à l’historien des idées et au philosophe des sciences. Une situation qui devait évidemment prendre fin avec l’avènement de l’axiomatique de Kolmogorov dans la première moitié du XX^e^ siècle. Sur ce point cependant de la définition de l’objet de son étude (la probabilité), Boole lui-même n'a guère d'états d'âme[77], et sa réflexion nous semble bien courte sur ce point des origines. Certes, il commence bien par déclarer *Probability is expectation founded upon partial knowledge*[78] position subjectiviste-type ; cependant, si l'on conjugue les définitions de la probabilité qu’il donne au chapitre XVI, celles de l'introduction et celles du chapitre terminal («La constitution de l’intellect»), on est conduit à conclure que Boole considère comme simultanément possibles les trois grands modes classiques d'affectation de la probabilité aux évènements simples (ou inconditionnés) :

soit la position *subjectiviste*, où la probabilité provient du sujet probabilisant, qui définit la probabilité comme *mesure du degré de croyance*, que ce soit en la réalisation ou en la non réalisation d'un évènement. C'est une affectation de type «psychologique», pour laquelle Boole marquera toujours une certaine préférence : c'est en effet elle qui s'inscrit le mieux dans le cadre des «Lois de la pensée». Une position bien commune à l'époque, qui

---

[75] Tel est le cas où Boole reprend la question des écliptiques soulevée par de Morgan.

[76] Il faut noter sur le plan épistémologique que ce double aspect, indétermination du problème, conjuguée avec la nécessité de contraintes sur les données, était peu usuel dans les conceptions algébriques de l’époque : l'habitude algébrique faisait en effet considérer qu'en gros, si le nombre d'équations correspondait au nombre d'inconnues, le problème était «déterminé», c'est-à-dire n'avait que des solutions en nombre fini (et, le cas échéant, aucune). Boole lui-même utilise explicitement cette pétition de principe dans une partie essentielle de sa méthode générale en probabilités (cf. en annexe, le commentaire de la proposition 3).

[77] Invoquant à ce propos l'autorité de Poisson, il affirme que ce qu'on appellerait aujourd'hui le caractère probabilisable de l'univers est dû à l'«uniformité de la Nature et de tout ce que nous croyons de l’immuable constance de l’Auteur de la Nature», *Laws*, p. 159.

[78] *Laws,* p. 244.

explique par exemple, dans le jeu de dé ou de pile ou face, les hypothèses d'*équiprobabilité* (respectivement 1/6 et 1/2) par l'*égale ignorance*, ce qu'on a aussi appelé par la suite l'*indifférence épistémique*[79]: dans cette perspective, c'est parce que nous n'avons pas de *raison de croire* qu'aucune face du dé soit privilégiée que nous attribuons à chacune la probabilité 1/6.

soit la position objectiviste, pour qui la probabilité est ancrée dans les propriétés de l'objet à probabiliser, et qui s'efforce par exemple d'affecter la probabilité d'un évènement comme mesure du rapport du nombre de cas «favorables» au nombre «total». Dans cette perspective, c'est par exemple l'homogénéité supposée du dé, et l'indifférence aux modes de lancer, qui conduisent à postuler l'équiprobabilité fondamentale.

soit la position fréquenciste, qui voit la probabilité comme mesure de la «limite d'une fréquence», associée à une épreuve *expérimentale*, comme dans le jeu de dé, ou de pile ou face. Ainsi écrit Boole dans cette perspective : «la limite dont s'approche le rapport des cas favorables au nombre total des cas observés (l'uniformité de la nature étant présupposée), à mesure que le nombre d'observations était indéfiniment augmenté»[80]. Cet aspect fréquenciste sera chez Boole le moins précisé (quel sens a le mot «limite» ?)

Comparée à la position purement subjectiviste de son collègue et ami De Morgan, Boole, sur ce sujet important, sera donc en fait bien plus nuancé. Il ne pouvait par exemple accepter que l'*expectation* fut purement intérieure au sujet, un des fondements de la position subjectiviste. Ainsi écrit Lorraine Daston[81] : «Quoiqu'il reconnût quelque analogie entre opinion et sensation, Boole hésitait à interpréter les probabilités mathématiques comme une émotion de l'esprit» (*Laws,* p. 244). Et pour Boole donc, en une position qu'on reconnaît aujourd'hui sans conteste comme fréquenciste, l'*expectation* avait *aussi* un fondement, non pas directement dans la chose même, mais dans la fréquence des observations sur elle. Ainsi écrit-il par exemple : «La probabilité, on l'a dit, consiste dans l'attente fondée sur une sorte particulière de savoir, c'est-à-dire la fréquence relative de l'occurrence des évènements»[82]. Ce que L. Daston croit pouvoir résumer ainsi[83] : «Boole, comme Mill, définissait les probabilités en termes de fréquences statistique».

Ainsi, ces trois modalités d'affectation des probabilités, dont Boole n'envisage nullement qu'elles puissent être simultanément contradictoires ou individuellement ambiguës, pourront-elles être, dans les faits, indifféremment mises en œuvre dans la pratique, en fonction des cas et des types de problèmes envisagés. Ce n'est pas en effet au niveau de cette question primitive de l'origine des affectations que Boole aura trouvé des problèmes dignes d'intérêt. Le philosophe du calcul des probabilités reste ainsi un peu sur sa faim, tant il est vrai que l'objectif authentique de Boole ici n'est guère de philosopher, mais bien essentiellement, de calculer.

Une question subsidiaire est de savoir sur quels objets ou concepts Boole cherche à faire porter la probabilité ainsi «définie». Sur ce point, sa position est peut-être plus claire. Initialement, il s'agit bien d'évènements au sens factuel du terme : on a tiré une boule de marbre, ou bien il tonne et il grêle, ou bien encore deux témoins disent tous deux la vérité dans leurs déclarations. Cependant, dans un temps second, Boole, par un glissement

---

[79] Sur ce point, nous renvoyons à l'analyse de I. Hacking dans le chapitre *Equipossibility,* in *The emergence of probability*, Cambridge (Mass.), Cambridge University Press, 1975, p. 122-123.
[80] *Laws*, p. 14.
[81] L. Daston, *Classical Probability in the Enlightenment*, Princeton, Princeton University Press, 1988.
[82] *Laws*, p. 245.
[83] L. Daston, *Classical Probability..., op. cit.*, p. 373.

proprement dialectique, déclarera que pour lui les probabilités sont en fait toujours attachées aux *énoncés* de ces mêmes évènements : il s'agit donc par exemple de la probabilité pour que soit vrai l'énoncé «les deux témoins disent la vérité». Le glissement du registre factuel au sens strict à celui des énoncés est en fait parallèle à celui qu'il avait déjà mis en évidence dans son calcul logique. Pareillement, la substitution ainsi mise en lumière est pour Boole d'ordre théorique, puisqu'elle ne modifie en rien les calculs subséquents. Une position qui revient néanmoins dans les faits à conférer au langage ce privilège absolu d'être le seul support au calcul, qu'il soit logique ou probabiliste, et qui peut sans doute être saluée comme fondatrice du calcul propositionnel moderne[84].

LES PRINCIPES DU CALCUL DES PROBABILITÉS CHEZ BOOLE

Sur ce qu'il appelle les «principes» (nous dirions aujourd'hui les axiomes) qui dirigent le calcul, Boole ne se soucie pas davantage de questions qui seraient aujourd'hui au premier plan : le développement d'un système d'axiomes consistant et non redondant. Il marque seulement ici, de façon très claire, sa référence et son inscription dans le système et les conceptions de Laplace[85], le maître à penser de l'École française du début du XIX^e siècle. À la suite de Laplace, Boole développe ainsi un ensemble de sept «principes»[86], qu'il expose complètement en termes rhétoriques, dans la langue naturelle, et sans faire aucunement appel à l'écriture symbolique, dont on a pourtant vu ci-dessus que Boole la maniait fort bien. Nous les reproduisons ici dans la traduction de S. Diagne :

> «Premier principe. Si p est la probabilité qu'un évènement quelconque se produise, 1 – p sera la probabilité qu'il ne produise pas.
>
> Second principe. La probabilité que deux évènements indépendants se produisent est le produit de leurs probabilités respectives.
>
> Troisième principe. La probabilité que deux évènements dépendants se produisent ensemble est égale au produit de la probabilité de l'un par la probabilité pour que si cet évènement se produit, l'autre se produise également.
>
> Quatrième principe. La probabilité pour que si un évènement E se produit, un évènement F se produise aussi est égale à la probabilité pour que E et F se produisent ensemble divisée par la probabilité pour que E se produise.
>
> Cinquième principe. La probabilité que se produise l'un ou l'autre de deux évènements qui ne peuvent arriver ensemble, est égale à la somme de leurs probabilités respectives.
>
> Sixième principe. Si un évènement observé ne peut résulter que d'une seule entre n causes qui sont, a priori, également probables, alors la probabilité de l'une quelconque de ces causes est une fraction dont le numérateur est la probabilité de l'évènement dans l'hypothèse que cette cause existe, et dont le dénominateur est la somme des probabilités définies de la même manière pour toutes les causes.

[84] Et aussi de la théorie de l'interprétation : «Enfin il [sq. Boole] n'a pas de mal à montrer que les lois formelles des symboles logiques sont les mêmes qu'on les interprète, ou comme lois de la pensée, ou comme lois du langage. D'où une première application du principe selon lequel un même système de symboles peut avoir des interprétations distinctes», E. Coumet, *op. cit.*, II, p. 8.

[85] «Nous allons présenter un résumé, tiré essentiellement de Laplace, des principes qui ont été appliqués à la résolution des questions de probabilité. Ce sont des conséquences des définitions fondamentales que nous avons déjà données, et l'on peut considérer qu'ils indiquent jusqu'à quel point l'on a réussi à rendre ces définitions opératoires», *Laws*, p. 248-249, traduction de S. Diagne, *Lois*, p. 246.

[86] Chap. XVI, *Laws*, p. 249, et *Lois*, p. 246-247.

> Septième principe. La probabilité d'un évènement futur est la somme des probabilités obtenues en multipliant la probabilité de chaque cause par la probabilité que, si cette cause existe, l'évènement futur se produise».

Le lecteur contemporain, habitué à l'emploi d'un principe d'économie dans la gestion des systèmes axiomatiques sera sans doute un peu déconcerté devant un éventail aussi large d'axiomes que celui proposé ici par Boole – lequel ne s'est guère soucié de leur indépendance logique – et tout autant surpris de l'ordre dans lequel celui-ci les a présentés. Nous en proposerons ici un bref commentaire en termes modernes, pour souligner d'abord que les trois premiers «principes» sont aujourd'hui considérés comme des *définitions*, celle de deux évènements contraires (premier principe) ou d'évènements indépendants (deuxième principe), ou dépendants (troisième principe). Le second axiome s'écrit en termes modernes $P(E \cap F) = P(E).P(F)$ dans le cas d'indépendance stochastique, et le troisième, aujourd'hui appelé axiome des probabilités conditionnelles :

$$P(E \cap F) = P(F \backslash E).P(E)$$

où $P(F \backslash E)$ désigne, en termes modernes, la probabilité conditionnelle pour que F se produise, sachant que E s'est produit. Ainsi raisonne et calcule le lecteur moderne, dès lors qu'il s'inscrit dans les interprétations objectiviste ou fréquenciste du calcul des probabilités, aujourd'hui les plus communément répandues. Pour Boole au contraire, fidèle à sa conception subjectiviste des probabilités – elle était à son époque l'idéologie dominante – c'est *nous qui accordons* à des évènements le qualificatif de «dépendants» ou d'«indépendants», après un examen soigneux de leur nature profonde, et à la mesure de notre interprétation des choses. On reconnaît bien ici à nouveau la prégnance, dans la vision booléenne du monde, d'un certain psychologisme, paradoxalement inséparable de toute sa démarche scientifique, ainsi à l'œuvre dans sa création de la logique formelle, une science nouvelle que Boole aura pourtant jusqu'au bout revendiqué de construire en dehors de toute métaphysique[87]. Quoi qu'il en soit, le quatrième axiome booléen ne fait alors, sans que Boole s'en soit apparemment aperçu, que paraphraser le calcul du précédent, puisque, dans ces conditions, l'on a évidemment :

$$P(F \backslash E) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)}$$

ce qui est la substance même du «troisième principe». Le cinquième «principe», qu'on appelle de nos jours l'axiome de mesure (ou d'*additivité des probabilités*), figure aujourd'hui usuellement *en tête* de tout système d'axiomes de la probabilité, dont il est le pivot. On a d'abord pu observer qu'il est donné chez Boole dans le seul cas d'incompatibilité des évènements («ils ne peuvent arriver ensemble»). Rappelons aussi son écriture moderne : si deux évènements x et y «ne peuvent se produire ensemble» (i. e si $x.y = 0$), alors□

[87] Rejetant à sa façon la(les) métaphysique(s), Boole créditait les systèmes scientifiques de ce privilège véritablement exceptionnel d'être les seuls à partir desquels on pourrait *intégrer* toutes les interprétations métaphysiques. Voici E. Coumet : «cette connaissance ne doit être subordonnée à aucun présupposé métaphysique. Boole ajoute toutefois à cet interdit de style positiviste une clause originale qui lui est inspirée par l'idée qu'il se fait d'un système de lois formelles : ce qui est scientifiquement vrai dans un tel système, c'est ce qui demeure vrai, *quelle que soit* l'interprétation métaphysique qu'on en donne ; c'est en quelque sorte l'invariant que n'affectent pas les variations métaphysiques auxquelles on se livre sur ce système. Tel est le principe qu'il faudra appliquer, en particulier à l'étude des lois de la pensée : sera seulement jugé comme fruit d'une observation véritable, «l'élément de vérité scientifique» qu'aucune hypothèse ou critique métaphysiques ne pourra remettre en question (*Laws*, p. 39)», E. Coumet, *op. cit.*, II, 7.

$$P(x + y) = P(x) + P(y)$$

Rappelons en même temps le mode d'emploi de cet axiome si x et y sont quelconques (non nécessairement incompatibles). On écrit alors, en termes booléens :

$$x + y = x + (1 - x)\, y$$

et on a, pour cette écriture disjonctive :

$$P(x + y) = P(x) + P((1 - x)\, y)$$

Si le septième axiome n'est en vérité que l'extension du troisième à une situation qui comporte plus d'un évènement, Boole l'inscrit pourtant comme une principe de plein exercice. Or il n'est aucunement indépendant des précédents et découle au contraire directement des troisième et cinquième principes. Il s'écrit ainsi en termes modernes : si les E_i sont n évènements qui forment une partition[88] de l'ensemble Ω de tous les possibles (autrement dit, si de n choses, l'une et l'une seulement), et si E est un évènement quelconque, on a

$$P(E) = \sum_{1 \le i \le n} P(E \setminus E_i)\, P(E_i)$$ [89]

Le «sixième principe» [90] de Boole n'est autre que le théorème de Bayes énoncé sous forme rhétorique, et dans le seul cas d'équiprobabilité (au regard de chaque «cause») de la venue de l'évènement concerné. On notera que Boole le compte également au nombre des principes indépendants, bien qu'il puisse, lui aussi, être démontré à partir des deux précédents. On soulignera donc à nouveau en terminant que Boole ne s'est aucunement soucié de produire un système minimum de principes qui lui aurait permis d'en déduire les autres. On rappellera aussi qu'il aura donné tous ses axiomes sous une forme strictement rhétorique, en l'absence de toute notation symbolique. Or, s'agissant des troisième, quatrième, sixième et septième principes, cela l'aura en même temps dispensé de produire aucune notation spécifique pour ce qu'on appelle aujourd'hui les probabilités conditionnelles, telle $P(F \setminus E)$ que nous avons employée dans notre commentaire «moderne», dont les mathématiciens estiment aujourd'hui qu'elle fait organiquement partie du tableau, et qu'elle est inséparable de toute explication cohérente du schéma probabiliste. Cette absence de toute symbolisation chez Boole est en fait corrélative de la non-objectivation chez lui d'un concept, celui de probabilité conditionnelle. Et, comme on verra, cette double absence, de symbolisme et de conceptualisation, lui fera cruellement défaut dans la suite de l'élaboration de sa «théorie générale» des probabilités. Une absence significative en vérité, et qui recouvre en fait une vision du monde probabiliste qui fut longtemps prégnante : Boole considérait en effet que les probabilités conditionnelles sont des probabilités *de plein exercice*, c'est-à-dire relèvent du même cadre de référence que les autres, alors qu'on estime aujourd'hui qu'elles ne sont pas *en droit* de même nature puisqu'elles sont relatives à un univers de référence différent et restreint, celui où un certain évènement est supposé s'être déjà réalisé.

---

[88] Autrement dit $\Omega = \bigcup_{1 \le i \le n} E_i$ et $E_i \cap E_j = \varnothing$, pour i j.

[89] On a en effet $E = E \cap \Omega = E \cap \left[\bigcup_{1 \le i \le n} E_i \right] = \bigcup_{1 \le i \le n} (E \cap E_i)$

Par l'axiome de mesure (cinquième principe) appliqué au cas disjoint, on obtient $P(E) = \left[\sum_{1 \le i \le n} P(E \cap E_i) \right]$, d'où le résultat demandé en appliquant le troisième principe.

[90] Traduction de S. Diagne, *Lois*, p. 246-247.

OBJETS ET MÉTHODES DE LA RECHERCHE PROBABILISTE

Maintes fois répétée dans le texte, la définition de l'objet essentiel de la recherche en probabilités est celle-ci : déterminer la probabilité d'un évènement qui résulte d'un certain nombre d'autres évènements dont les probabilités sont données, ou qui leur est associé[91]. La formulation, apparemment vague pour le lecteur moderne, d'une telle problématique ne doit pas masquer son caractère profondément novateur sur le plan épistémologique. Dans cette démarche, Boole était en vérité guidé par un faisceau d'intuitions et d'habitudes mathématiques intériorisées, en provenance du calcul ordinaire de son temps, c'est-à-dire les quatre opérations portant sur des signes valant pour des nombres. Dès lors, Boole ne pouvait s'intéresser qu'à un certain type de recherche probabiliste, car toutes les questions de probabilités ne se laissent pas facilement ramener à un tel schéma intrinsèquement finitiste : le théorème de de Moivre-Laplace par exemple, qui donne une estimation de la probabilité d'apparition d'un évènement quand le nombre d'épreuves devient grand, n'est pas du type des problèmes susceptibles d'une application de la méthode de Boole, non plus que toutes les formes de «probabilités géométriques continues» connues à cette époque, telle la question de l'aiguille de Buffon. Contrairement à l'*Essay on Probabilities* de de Morgan[92], on ne trouve donc significativement dans les *Laws* que très peu d'applications véritablement numériques, fournissant des «chances» effectives de réussite ou d'échec ni d'épreuves répétées, non plus qu' aucune application du théorème de de Moivre-Laplace, résultat pourtant fondamental et qui constituait au début du XIX° siècle un mode d'approche des probabilités à la fois nouveau et privilégié[93].

Boole expose sa méthode de façon axiomatique dans le chapitre XVII (*General Methods on Probability*), au moyen de propositions et de règles générales, avant de la mettre en application en détail au chapitre XVIII (*Elementary illustrations*) sur sept exemples divers. Dans le cadre du présent article, nous avons choisi de renvoyer en annexe l'analyse de l'axiomatique et d'illustrer la méthode en la détaillant assez longuement sur le premier des exemples booléens [94], celui de «il tonne et il grêle» :

> «La probabilité qu'il tonne un jour donné est p, la probabilité qu'il tonne et qu'il grêle à la fois est q, mais on ne suppose aucune information supplémentaire concernant la relation entre les deux phénomènes du tonnerre et de la grêle. On demande la probabilité pour qu'il grêle ce jour là».

---

[91] Posée en ces termes, la question de l'objet de la recherche en probabilités comme *explicitation* d'un évènement, est un leitmotiv des *Laws*. Ainsi écrit Boole : «Pour parler techniquement, nous devons être en mesure d'exprimer l'événement dont on cherche la probabilité comme une fonction des évènements dont les probabilités sont données», *Laws*, p. 13, traduction de S. Diagne, *Lois*, p. 32. Aussi : «le *quaesitum*, autrement dit ce que l'on cherche, est la probabilité pour que se réalise, absolument ou conditionnellement, tout autre évènement dont l'expression est différente de celle des *data* mais contient plus ou moins les mêmes éléments», *Laws*, p. 14, *Lois*, p. 33. Et plus loin : «Tout d'abord, il est toujours possible par la méthode préalable du calcul logique, d'exprimer l'évènement dont la probabilité est cherchée comme fonction logique des évènements dont les probabilités sont données», *Laws*, p. 15, *Lois*, p. 34.

[92] A. de Morgan, *Essay on Probabilities and on their application to life contingencies and insurance offices*, London, Longman and Taylor, 1838. Augustus de Morgan, l'un des derniers grands laplaciens en calcul des probabilités, fut le collègue et l'ami de Boole.

[93] Les applications typiques du théorème de Bayes : un évènement s'étant réalisé, fixer une probabilité à l'une des hypothèses (les «causes») dont il a pu provenir, entrent par contre de plein droit dans le schéma booléen.

[94] Chap. XVIII, *Laws*, p. 276.

RÉSOLUTION. Voici l'essentiel de la méthode et des preuves de Boole, tels qu'il nous les fournit au chapitre XVIII. Il commence par poser ainsi ses premières définitions : soit x l'évènement : «il tonne», et y l'évènement «il grêle». On connaît les probabilités $p = P(x)$ et $q = P(xy)$. On cherche $P(y)$. Exprimé en ces termes, le problème est typique des énoncés probabilistes booléens tout au long des *Laws*. Pour nous aujourd'hui cependant, la formulation est sans doute un peu surprenante, et la question demeure de savoir si un tel problème est bien posé, c'est-à-dire a un sens dans le cadre donné. Quoi qu'il en soit, on a ici : $P(x) = p$ (probabilité qu'il tonne), et, si on note $u = x . y$, $P(u) = q$.

On a alors $y = \frac{u}{x}$, où l'on reconnaît la division logique *supra*, et donc, par «développement» booléen, on obtient, comme plus haut :

$$y = \frac{u}{x} = u . x + \frac{1}{0} u . (1 - x) + \frac{0}{1} (1 - u) . x + \frac{0}{0} (1 - u) . (1 - x) \qquad (1)$$

Boole met alors en avant le fait que u et x ne sont pas indépendants, mais mutuellement astreints, liés par une fonction logique $V(x, u) = 1$ qui exprime le fait que, puisque $u = x . y$, on ne peut avoir à la fois $x = 0$ et $u = 1$, soit $(1 - x) . u = 1$, les trois autres cas étant par contre permis. Ainsi, dans toute solution du problème, il devra être pris en compte que u et x sont liés par la relation :

$$V(u, x) = u. x + (1 - u). x + (1 - u). (1 - x) = 1$$

qui exprime donc que l'un (et l'un seulement) des trois cas qui subsistent pour le couple (u, x) devra nécessairement être réalisé. C'est tout autant une façon d'exclure en droit le cas où $x = 0$ et $u = 1$. Et Boole de considérer que cette *exclusion détermine un évènement*, encore noté V, qui devra toujours se produire dans ce contexte. D'un autre côté, Boole décidera de confondre désormais dans la notation un évènement avec sa probabilité (ici dans le signe V). Dans ces conditions, la probabilité pour que x se produise, sachant que V s'est produit de toutes façons, est fournie, conformément à l'axiome des probabilités conditionnelles *supra*, par le produit $V . x$, c'est-à-dire :

$$V . x = u . x + (1 - u) . x = x$$

De même la probabilité pour que u se produise, sachant que V se sera de toute façons produit est

$$V . u = u . x$$

Dès lors, les probabilités p et q définies au début apparaissent pour Boole comme des *probabilités conditionnelles*, celles d'évènements subordonnés à la réalisation préalable de V, de sorte que l'on a :

$$p = \frac{V . x}{V} \quad \text{et} \quad q = \frac{V . u}{V}$$

c'est-à-dire encore, ce type de système aux inconnues x, u, si fréquent dans toute cette partie des *Laws*[95]:

$$\frac{V . x}{p} = \frac{V . u}{q} = V$$

D'un autre côté, on a évidemment, en simplifiant l'expression de V plus haut définie : $V = x + (1 - u) . (1 - x)$, de sorte que :

[95] Cf. notre analyse sur ce point en annexe du présent article.

$$\frac{x}{p} = \frac{u \,.\, x}{q} = x + (1 - u) \,.\, (1 - x) \qquad (2)$$

une forme de système également omniprésent dans le calcul des probabilités booléen, et qui permet toujours, en principe pour Boole, (car il y a autant d'équations que d'inconnues, ce qui est pour lui décisif), de calculer x et u, c'est-à-dire les probabilités *absolues* des évènements «il tonne» et «il tonne et il grêle», alors que les valeurs de p et q initialement données sont rétroactivement apparues, ainsi qu'on l'a dit, comme des probabilités conditionnelles.

D'un autre côté, et de la même façon, la probabilité *absolue* de l'évènement «il grêle» est fourni par le développement (1), où il est quatre facteurs mutuellement exclusifs : la probabilité est donc la somme des quatre. L'impossible et le non existant doivent cependant en être exclus, cependant que l'indéterminé doit apparaître avec un coefficient arbitraire, ici de signe c. Donc, avec

$$y = \frac{u}{x} = A + \frac{1}{0}B + \frac{0}{1}D + \frac{0}{0}C$$

il reste ainsi, pour la probabilité absolue, A + c. C, et aussi, pour la probabilité véritable (c'est-à-dire conditionnelle) de y :

$$P(y) = \frac{A + c \,.\, C}{V}$$

Avec A = u . x et C = (1 - u) . (1 - x), il vient

$$P(y) = \frac{u \,.\, x + c \,.(1 - u) \,.\, (1 - x)}{x + (1 - u) \,.\, (1 - x)} \qquad (3)$$

Or, par (2) : $p = \dfrac{x}{x + (1 - u) \,.\, (1 - x)}$ et $1 - p = \dfrac{(1 - u) \,.\, (1 - x)}{x + (1 - u) \,.\, (1 - x)}$

De même□ $q = \dfrac{u \,.\, x}{x + (1 - u) \,.\, (1 - x)}$

Finalement : $P(y) = q + c \,.\, (1 - p)$ (5)

Boole revient *in fine* sur l'interprétation de c, comme associée à la fraction de y qui est indéterminée dans (1 - x) . (1 - u) : c'est dit-il, la

> «probabilité, inconnue, que si l'évènement (1 - x) . (1 - u) se produit, l'évènement y se produise. Or (1 - x) . (1 - u) = (1 - x) . (1 - x . y) = 1 - x, lorsqu'on effectue le produit. Donc c est la probabilité, inconnue, pour que s'il ne tonne pas, il grêle. La solution générale (5) peut donc s'interpréter comme suit : la probabilité pour qu'il grêle est égale à la probabilité pour qu'il tonne et grêle, q, plus la probabilité qu'il ne tonne pas, 1 - p, multipliée par la probabilité c que s'il ne tonne pas, il grêle. Le raisonnement ordinaire vérifie ce résultat».

On aura pu observer l'enchaînement subtil, mais complexe, des techniques booléennes. Nous la comparerons avec la méthode moderne, qui consiste simplement à écrire disjonctivement :

$$y = x\,y + (1 - x)\,y \qquad (6)$$

et donc, comme la décomposition est disjonctive :

$$P(y) = P(x\ y) + P((1 - x)\ y) = q + P(1 - x)\ .\ P(y \mid 1 - x) = q + (1 - p)\ c$$

où c est la probabilité inconnue pour qu'il grêle s'il n'a pas tonné.

On notera que notre méthode a donc pareillement fait intervenir une probabilité auxiliaire nécessaire à la résolution, le nombre réel de signe c, qu'on appelle usuellement aujourd'hui le «paramètre de la résolution». Dans cet exemple, Boole aura certes produit le même résultat que nous[96], mais en employant, comme on a vu, une méthode spécifique, surprenante pour le lecteur contemporain, beaucoup plus compliquée, mais dont Boole affirme que sa vertu est d'être générale : elle permet, selon son auteur, la mise en équation et la résolution automatique de tout problème de probabilités[97]. Son privilège est donc la «Méthode», au sens cartésien du terme. Autrement dit, la décomposition (6) que nous avions spontanément écrite sous forme adéquate, mais en quelque sorte par hasard, résulte pour lui d'un calcul universel et automatique. On retrouve à nouveau ici chez Boole des accents proprement cartésiens quant à la nécessité de la Méthode.

Un autre des problèmes typiques de l'usage de probabilités conditionnelles, l'exemple de la «probabilité des témoignages» est traité dans le texte d'une façon complètement semblable dans son principe[98]. Voici une traduction de l'énoncé de la question donnée par Boole :

> «La probabilité pour qu'un témoin A dise la vérité est p. La probabilité pour qu'un autre témoin B dise la vérité est q, et la probabilité pour qu'ils soient en désaccord est r. Quelle est la probabilité pour que, s'ils sont en accord, leur affirmation soit vraie ? »

Employant la même méthodologie que ci-dessus, Boole trouve[99] cette probabilité égale à

$$P(w) = \frac{2 - p - q - r}{2}$$

En conséquence les données p, q, r ne peuvent être arbitrairement choisies entre 0 et 1, mais doivent vérifier la double inégalité : $0 \leq p + q + r \leq 2$.

MISE EN ÉQUATION ET CALCUL

Comme on a vu, la partie essentielle est donc constituée par la mise en équation et le calcul. Boole s'y est employé par des voies entièrement spécifiques : il s'agit, dit-il d'un procédé général, c'est-à-dire devant s'appliquer à toutes les situations de recherche de probabilités du type précédent. Boole consacre un chapitre entier à une «méthode générale en probabilités». Pour lui, elle est fondée sur une analogie profonde entre calcul des probabilités et calcul des classes, lui-même directement associé à la traduction des «Lois

---

[96] $P(y) = q + c(1 - p)$, où c représente «la probabilité inconnue pour que si l'évènement $(1 - u)(1 - x)$ se produit, l'évènement y se produise (…), c'est-à-dire, s'il ne tonne pas, il grêle».

[97] Nous avons donné en annexe un commentaire en termes contemporains des propositions 1 à 4 du chapitre XVII (Méthodes Générales en Probabilités), *Laws*, p. 258-268.

[98] *Laws*, p. 279-281 ; *Lois*, 273-275 ; commentaire de Hailperin, *op. cit.*, p. 163. Aujourd'hui bien oubliée, cette question qui suscita de nombreuses polémiques, avait été longuement étudiée avant Boole, particulièrement par Poisson, et le sera aussi après lui, par exemple par Keynes.

[99] *Laws*, p. 280.

de la pensée». Répétons-le, l'idée de départ de Boole est apparemment simple : la partie calcul logique avait permis de résoudre n'importe quelle équation logique par rapport à n'importe quelle inconnue (qui est une classe) en fonction des autres. Reprenons-en ici le schéma sur cet exemple simple, où l'on a, entre classes, l'équation de division logique plus haut étudiée : $a \, . \, x = b$; d'une part il n'y a de solutions que si $a \, . \, b = b$; d'autre part, et dans ce cas, la solution générale est□

$$x = b + v\,(1 - a)\,(1 - b) \qquad (1)$$

Supposons maintenant que a et b soient des évènements (ou des assertions) pourvues de probabilités $P(a) = p$ et $P(b) = q$, où p et q sont des données, et qu'il s'agisse de calculer $P(x)$, Boole appliquera la fonction P à la relation (1), qui fournit les solutions. Elle est ici sous forme disjonctive (ou exclusive). Donc :

$$P(x) = P(b) + P(v(1 - a)\,(1 - b))$$

Si les évènements a et b sont indépendants, alors□

$$P[(1 - a)\,(1 - b)] = P(1 - a)\,P(1 - b) = (1 - P(a))\,(1 - P(b))$$

Si, de plus, les évènements a, b et v sont indépendants, et Boole fera implicitement cette dernière hypothèse relativement à v, alors□

$$P(x) = P(b) + P(v)\,(1 - P(a))\,(1 - P(b)) = q + c\,(1-p)\,(1-q)$$

Autrement dit, à toute relation sur les classes et toute solution d'une équation entre celles-ci, est associée une version numérique «homonyme», obtenue en appliquant les axiomes de probabilités. La «prise de probabilités» apparaît bien ainsi comme le moyen privilégié de numériser les relations entre classes. En ce sens, elle appartient bien de droit aux *Laws*. La méthode est apparemment simple, générale et efficace. Elle ne fonctionne malheureusement que si les évènements donnés sont indépendants, comme on a pu le constater sur notre exemple ci-dessus, à la fois illustratif et simple. Car si le projet probabiliste booléen se heurta d'abord à la pratique complexe de la résolution des équations booléennes appliquée aux probabilités, il rencontra aussi des difficultés structurelles nouvelles, qui tenaient à la présence quasi nécessaire – dès que l'on quitte les cas les plus simples – d'évènements «conditionnés», une question qui n'avait jamais été de mise dans le calcul logique. C'est qu'il ne peut être pratiquement question d'élaborer un calcul des probabilités conséquent et efficace en ne voulant connaître que des évènements mutuellement indépendants. Ainsi, d'une façon inévitable eu égard à la nature même des questions probabilistes, la distinction, qu'on pourra dire d'essence, entre évènements conditionnés et non-conditionnés, sera venue se superposer à la simple distinction de structure (évènements simples ou composés) d'une façon telle, que le concept opératoire moteur du calcul probabiliste booléen (le retour du schéma des classes vers ce qui serait un schéma numérique «vrai») ne pouvait que se heurter à la question de l'indépendance, qui, à l'époque de Boole, requérait nécessairement des hypothèses supplémentaires, implicites ou explicites, sur la nature des choses.

INTERPRÉTATION DES RÉSULTATS

L'exemple du problème de «il tonne et il grêle», montre bien comment les probabilités p et q, qui étaient des données, ne pouvaient être fixées arbitrairement, puisqu'on doit avoir□

$$p = P(u) \leq P(x) = q$$

De la même façon, l'exemple de la probabilité des témoignages a montré que les probabilités p, q, et r devaient vérifier $p + q + r \leq 2$, sans quoi le problème n'admet pas de solution. Boole consacre un chapitre à traiter ce type de conditions nécessaires sur les données, qu'il appelle «Des conditions de l'expérience». L'exemple de la probabilité des témoignages diffère néanmoins de celui de «il tonne et il grêle» et peut apparaître comme relativement simple, méthodologiquement parlant, puisqu'une fois les conditions remplies, la probabilité de l'évènement cherché est unique. Il n'en est pas en général de même dans un exemple quelconque : la situation générale est au contraire celle où s'introduisent dans le calcul des paramètres arbitraires, à cela près, que comme pour les données, ils peuvent être soumis à des relations supplémentaires nécessaires d'inégalité. Ainsi de la célèbre question des écliptiques que Boole analyse, en commentant en même temps le texte de de Morgan[100] sur le sujet.

CONCLUSIONS SUR LE CALCUL DES PROBABILITÉS BOOLÉEN

La subtile construction booléenne en matière de probabilités n'a laissé aucune trace dans le développement des techniques mathématiques contemporaines, contrairement à son algèbre de la logique. On peut penser que, outre la complexité de ses calculs, le principal obstacle se situe dans la conception booléenne de l'indépendance des évènements, aujourd'hui appelée indépendance stochastique. De fait, dès l'année de la publication des *Laws*, une critique violente des positions booléennes en matière de probabilités parut. Elle était due à Henry Wilbraham[101], en une polémique largement commentée par Hailperin[102].

---

[100] Cette affaire, exemplaire de la probabilité d'une configuration planétaire et des hypothèses physiques sous-jacentes qui pourraient l'expliquer, fit beaucoup d'encre aux XVIII^e et XIX^e siècle, chez D'Alembert et Laplace en particulier, et continuait d'être analysée par Keynes au début de notre siècle. Elle peut aujourd'hui être considérée comme le modèle d'une question probabiliste «mal posée». Boole en expose ainsi les termes au chapitre XX (§. 20) des *Laws,* p. 364-365 : «Again, the sum of the inclinations of the orbits of the ten known planets to the plane of the ecliptic in the year 1801 was 91° 4187 according to the french measures. Were all the inclinations equally probable, Laplace *(Theorie Analytique des Probabilités*, p. 276) determines, that there would be only the excessively small probability .00000011235 that the mean of the inclinations should fall within the limit thus assigned. And he hence concludes, that there is a very high probability in favour of a disposing cause, by which the inclinations of the planetary orbits have been confined within such narrow bounds. Professor De Morgan (Encyclopaedia Metropolitana. Art. Probabilities), taking the sum of the inclinations at 92°, gives to the above probability the value .00000012, and infers that it is 1□.00000012, that there were a necessary cause in the formation of the solar system for the inclinations being what they are».
Pour traiter la question, Boole commence par la replacer dans le cadre plus général d'une hypothèse physique quelconque, et est conduit par les nécessités propres à l'indétermination de son calcul, à introduire un paramètre supplémentaire, c, dont toutes les valeurs entre 0 et 1 sont acceptables. Boole se met alors en devoir d'interpréter c :

$$P = \frac{a\,p}{a\,p + c\,(1 - a)}$$

où a et c sont des constantes arbitraires dont la première représente la probabilité *a priori* de l'hypothèse, la seconde celle que si l'hypothèse est fausse, l'évènement se produise. Examinant alors le résultat proposé par de Morgan à propos des écliptiques, il constate que celui-ci s'inscrit bien dans le cadre de sa propre formule, mais à condition d'y prendre $c = 1$ et $a = 1/2$, ceci constituant en fait des hypothèses spécifiques implicites qui n'avaient pas été explicitées par de Morgan dans sa solution.

[101] «On the theory of chances developed in Professor's Boole «Laws of Thought»»*, The London, Edinburgh, and Dublin philosophical magazine and journal of science*, ser. 4, vol. 7, p. 465-476.

[102] Ainsi Hailperin, *Boole's Logic and Probability*, *op. cit*., analyse-t-il en trois points l'argumentation critique de Wilbraham à l'adresse de la méthodologie de Boole : «1°) Il y a chez Boole des hypothèses implicites concernant les évènements donnés qui lui permettent de transformer un problème indéterminé

Wilbraham attaquait le calcul probabiliste de Boole sur les points mêmes qui étaient fondamentaux pour son auteur, en tout premier lieu le caractère proprement universel que Boole avait voulu donner à sa méthodologie. Voici par exemple Wilbraham[103] :

> «Il [sq. Boole] prend un problème général indéterminé, lui applique des hypothèses particulières qui ne sont pas explicitées dans son livre (...) et avec ces hypothèses, résout le problème, c'est-à-dire : il résout un cas particulier déterminé d'un problème indéterminé, alors que son livre peut être incorrectement compris par son lecteur en lui laissant supposer qu'il s'agit de traiter le problème général».

Boole répondit[104] presque aussitôt en s'arc-boutant sur l'édifice des équations logiques qu'il avait construites. Accordant que la méthode pouvait effectivement ajouter dans les faits des équations supplémentaires implicites (il s'agissait pour Wilbraham d'hypothèses tacites d'indépendance stochastique), Boole répondait qu'«il n'avait pas d'objection à considérer que la méthode apportait par elle même des équations supplémentaires, aussi longtemps que les équations en question étaient des conséquences des lois de la pensée et de notre espérance(*expectation*)[105] appliquées à des données réelles»[106]. La critique de Boole par Keynes, de soixante dix ans postérieure (1921)[107], porta largement, elle aussi, sur les conceptions booléennes de l'indépendance des évènements. Boole, dit en substance Keynes, ne cesse d'opérer conjointement avec deux définitions qui ne sont pas logiquement liées : d'une part, une définition qu'on est (rétrospectivement !) tenté d'appeler correcte, et qui revient à dire que la probabilité de l'intersection de deux évènements indépendants est égale au produit de leurs probabilités. D'autre part, la pétition de principe suivant laquelle deux évènements doivent être présumés indépendants, tant que nous n'avons pas de raison de supposer le contraire. Et de fait, au-delà des règles contenues dans ses sept «principes», cette position au sujet de l'indépendance en probabilités fut effectivement défendue par Boole, lui qui écrivait :

> «Les évènements dont les probabilités nous sont données doivent être considérés comme indépendants de toute relation autre que celle qui est exprimée dans les données ou qui en découle nécessairement ; et la manière dont nous devons utiliser la connaissance de cette relation est indépendante de la nature de la source d'où cette connaissance fut obtenue»[108] .

On observera d'abord qu'il s'agit ici d'une conclusion locale, relative à un état donné de nos connaissances, qui peut apparaître comme spécifique d'un sujet donné à un moment donné, et ne peut donc, en principe, se prêter à aucune théorie. Cette conception psychologiste de l'état local des connaissances est familière à Boole (cf. sa théorie de l'univers du discours). D'autre part, et par rapport à nos conceptions d'aujourd'hui, elle inverse la charge de la preuve : en effet, de nos jours, c'est nous qui sommes censés postuler de façon positive l'indépendance en probabilités de divers évènements, au lieu de le faire comme Boole, en quelque sorte passivement – ce point est souligné par Hailperin.

---

en un problème déterminé. 2°) Si on ajoute explicitement ces hypothèses, on peut alors résoudre les problèmes posés par Boole avec les seules méthodes ordinaires. 3) Si l'on ajoute les hypothèses implicites, alors le type de problèmes effectivement obtenus est d'un intérêt pratique très faible».

[103] Texte extrait de Hailperin, *op. cit.*, p. 129.

[104] Hailperin, *op. cit.*, p. 182.

[105] Le terme d'«expectation» est fréquent chez Boole dans le contexte probabiliste. Ainsi, de cette définition : «Probability is expectation founded upon partial knowledge», *Laws*, p. 244.

[106] «There can be no objections so long as the equations in question are consequences of the laws of thought and expectation as applied to the actual data».

[107] J.M Keynes, *A treatise on probability*, London, MacMillan and Co, 1921, réimpress. 1952.

[108] Chapitre XVII, *Laws*, p. 256-257, traduction de S. Diagne, *Lois*, p. 253.

Le fondement méthodologique chez Boole, sous-jacent et familier, semble être, ici encore, celui du Principe de raison insuffisante (ou d'indifférence épistémique) : c'est en effet parce que nous n'avons pas de *raison de croire* à la liaison entre deux évènements que nous sommes fondés à les considérer comme indépendants, telle est fondamentalement, dans les *Laws*, la position de Boole. Keynes souligne que ces deux définitions de l'indépendance se trouvent inextricablement liées, et que, pour lui, Keynes, Boole travaille avec l'une pour conclure avec l'autre. Ainsi, note Keynes à propos de la probabilité des témoignages, Boole s'est très largement trompé, et tout autant que ses estimables prédécesseurs, en utilisant de façon constante, mais sans les expliciter, des hypothèses pourtant strictement nécessaires à son calcul[109]. Ainsi conclut Keynes, après une analyse en termes modernes de la question :

> «It is not a sufficient condition for this [sq. pour obtenir le résultat de Boole sur ce point], as seems usually to be supposed, that X_1 and X_2 should be witnesses causally independant of one another[110]. It is also necessary that a and b, i.e the propositions asserted by the witnesses, should be irrelevant to one another and also each of them irrelevant to the fact of the assertion of the other by a witness»[111].

Ainsi l'«indépendance des témoins», seule condition réclamée par Boole n'aura-t-elle pas été suffisante pour Keynes. Pour ce dernier, il y faut aussi, nécessairement pour un développement correct du calcul, celles des *assertions* qui constituent les témoignages. Comme on voit, la critique de Keynes s'inscrit dans le droit-fil de celle de Wilbraham. Dans son *Treatise on probability,* Keynes relève chez Boole bien d'autres exemples d'insuffisance d'explicitation ou d'imprécision quant aux hypothèses d'indépendance, auxquelles le lecteur moderne ne pourra évidemment que souscrire. La position de Boole semble se résumer à ceci, qui avait constitué le fond de sa réponse à Wilbraham : si, au-delà de celles initialement posées par l'auteur du calcul, des hypothèses d'indépendance devaient être peu à peu supplémentairement inscrites au regard de la légitimité du calcul, *elles viendraient d'elles mêmes dans le cours de la méthode*. Il n'y aurait dès lors aucun inconvénient à les expliciter. Dans cette réponse, on aurait tort de voir un subterfuge chez Boole destiné à pallier au coup par coup les lacunes apparues dans sa théorie. Homme sincère et scientifique rigoureux, Boole ne faisait ici que manifester sa foi dans la toute puissance du calcul. Une confiance aveugle, proprement leibnizienne. Répétons-le : que Boole soit ainsi situé comme le successeur véritable de Leibniz nous apparaît indiscutable même si, comme on l'a dit, Boole ignorait Leibniz logicien. Rappelons aussi cette évidence à l'appui de notre thèse : dans les cent cinquante ans qui séparèrent Leibniz de Boole, aucun progrès sensible n'aura été observé en matière de calcul logique. D'un autre côté, la foi de Boole en un calcul qui apporterait au calculateur, *motu proprio*, les hypothèses que lui-même n'avait pas initialement trouvé nécessaires d'inclure, peut sans doute s'analyser chez Boole comme la marque d'un psychologisme qu'on pourra juger sommaire, et qui l'aura conduit à l'échec en matière de probabilités. On retiendra pourtant que c'est au nom de ce même psychologisme, et porté par cette même foi aveugle, tant dans les nécessités objectives du calcul que dans le caractère irréfutable des conclusions apportées par l'introspection, que Boole aura inventé son calcul logique.

---

[109] «The theory of itself, the theory, that is to say, of the combination of the evidence of witnesses, has occupied so considerable a space in the traditional treatment of Probability(...) It may, however, be safely said that the principal conclusions on the subject set out by Condorcet, Laplace, Poisson, Cournot, and Boole, are false. The interest of the discussion is chiefly due to the memory of theses distinguished failures», Keynes, *op. cit.*, p. 180.

[110] Plus haut (p. 180), Keynes avait ainsi précisé sa définition de témoins «indépendants»: «X and Y are independant witnesses (i.e. there is no collusion between them)».

[111] *Idem*, p. 181.

Ainsi la théorie des probabilités chez Boole aura-t-elle été un échec mathématisé. On notera que le plus important demeure aujourd'hui ceci, l'articulation qu'il a voulu placer entre logique et probabilité, elle qui a eu des prolongements tout à fait féconds : faire dépendre en effet analogiquement, par un calcul «homonymique» le calcul des probabilités, c'est-à-dire un calcul sur des nombres, d'un calcul sur des classes (ce qu'on appelle aujourd'hui, à la suite de Borel, un clan ou une tribu d'ensembles, ou bien encore une σ-algèbre) était, au milieu du XIXe siècle, une idée profondément neuve. En rejetant aujourd'hui à juste titre la théorie booléenne des probabilités, il faut cependant garder en mémoire d'une part que personne n'avait eu avant l'auteur des *Laws* l'idée de cette correspondance, et aussi que cette articulation est le fondement de la théorie de la probabilité comme mesure, qui allait naître à la fin du siècle, pour s'achever dans l'axiomatique de Kolmogorov, dans les années 1930.

Les *Laws* s'achèvent sur un bref chapitre de conclusions philosophiques consacré à la «nature de la science et à la constitution de l'intellect», où Boole examine, entre autres choses, le rapport entre sa loi de dualité où «la pensée vérifie une équation du second degré» et la «tendance de la pensée antique à se porter vers ces formes de spéculation philosophique connues sous le nom de dualisme»[112]. Il trouve alors des accents sincères pour conclure à l'organisation du monde autour d'une dualité, qui pourrait être la «sexualité» ou la «polarité»[113] – on pense ici à Lacan et à la division sexuelle ! Et Boole de retrouver ici les thèmes du début des *Laws*, où, avec l'objectif de dégager les lois *scientifiques* de la pensée, et apparemment sans crainte d'une quelconque accusation de psychologisme, il avait posé en principe incontestable la véracité des conclusions apportées par l'introspection et l'observation du langage. Il conclut l'ouvrage en assurant qu'il n'est «pas vraiment improbable que, d'une certaine manière, la constitution des choses extérieures puisse correspondre à celle, intérieure, de l'esprit». Ainsi, selon Boole dans ces lignes terminales, toute construction rationnelle du monde, sans doute à la fois descriptive et normative pour lui, ne pourrait se faire que comme reflet et image de la structure de l'*intuitus* qui la constitue. Une position qui permettrait certes de justifier l'adéquation, toujours soulignée, toujours inexpliquée, des mathématiques à la description physique du monde réel.

---

112 *Laws*, p. 417-418, chap. XXII
113 *Laws* , p. 417.

ANNEXE

MÉTHODE GÉNÉRALE BOOLÉENNE EN PROBABILITÉS

(Commentaire en termes contemporains des propositions 1 à 4 du chapitre XVII «Méthodes Générales en Probabilités», p. 258-268 des *Laws of Thought* de Boole)

PROPOSITION 1 [(114)] : Soit $(x_1, ..., x_n)$ une famille de n évènements simples et inconditionnés de probabilités respectives $(p_1, ..., p_n)$. À tout polynôme «booléen»[115] par rapport aux $(x_1, ..., x_n)$, soit V $(x_1, ..., x_n)$, est associée de façon homonymique sa probabilité [V] par

$$V(p_1, ..., p_n)$$

REMARQUE : ceci suppose des expressions disjonctives des polynômes booléens. Rappelons qu'il existe une forme *normale* disjonctive (et aussi conjonctive) pour tout polynôme booléen[116].

PROPOSITION 2 [(117)] : Soit $(x_1, ..., x_n)$ une famille de n évènements simples et indépendants, de probabilités respectives $(p_1, ..., p_n)$ lorsqu'ils sont assujettis à vérifier une condition logique du type :

$$V(x_1, ..., x_n) = 1$$

On demande leurs probabilités absolues $(p'_1, ..., p'_n)$, c'est-à-dire les probabilités de leurs occurrences respectives, c'est-à-dire indépendamment de la réalisation de la condition V.

Preuve : Les p_i sont en vérité des probabilités conditionnelles, donc

$$p_i = \frac{[V. x_i]}{[V]} \text{ pour } i = 1, 2, ... , n$$

Par ailleurs $V = v(x_1, ..., x_n)$ où v est connue.

Donc, par la proposition 1, $[V] = v(p'_1, ..., p'_n)$ où les p'_i sont recherchés. D'autre part, par multiplication logique : $V . x_i = g_i (x_1, ..., x_n)$ où les g_i sont connus.

Donc $[V. x_i] = g_i(p'_1, ..., p'_n)$. Pour déterminer les n inconnues $(p'_1, ..., p'_n)$, on considère donc le système des n équations à n inconnues (non linéaires) suivant :

$$p_i = \frac{g_i (p'_1,. . . , p'_n)}{v (p'_1,. . . , p'_n)} \quad \text{pour } i = 1, 2, ... , n$$

Boole considère qu'un tel système livre toujours les n inconnues. Cette proposition est d'un emploi constant dans les résolutions probabilistes booléennes (cf. l'exemple ci-dessus de «il tonne et il grêle»).

PROPOSITION 3 [(118)] À partir de la famille des n évènements simples et inconditionnés $(x_1, ..., x_n)$, soit la famille (s_j) des k évènements composés :

$$s_j = \phi_j(x_1, ..., x_n) \quad \text{pour} \quad j = 1, 2, ..., k$$

(les s_j sont les *données*). Soit par ailleurs w un autre évènement connu à partir des x_i, c'est-à-dire :

$$w = h(x_1, ..., x_n)$$

(w est le *requis*). Exprimer le requis à partir des données, c'est-à-dire w comme fonction des s_j.

[114] *Laws*, p. 258.
[115] Qu'on veuille bien nous pardonner cet anachronisme ici nécessaire.
[116] Cf. M. Serfati, *Algèbres de Boole*, *op. cit.*, p. 77-78.
[117] *Laws*, p. 261.
[118] *Laws*, p. 263.

Preuve : Chaque équation $s_j = \phi_j(x_1, ..., x_n)$ se ramène, par différence symétrique, à la forme équivalente $G_j = 0$:

$$(1 - s_j)\, \phi_j + s_j(1 - \phi_j) = 0 = G_j(x_1, ..., x_n, s_j)$$

De la même façon, la relation donnant w est équivalente à :

$$(1 - w)\, h + w\, (1 - h) = 0 = H(x_1, ..., x_n, w)$$

De sorte que l'ensemble des (k+1) relations données est équivalente à une seule équation (un procédé qui a été érigé en théorème par Boole) :

$$G_1(x_1, ..., x_n, s_1) + . . . + G_k(x_1, ..., x_n, s_k) + H(x_1, ..., x_n, w) = 0$$

C'est-à-dire :

$$F(x_1, ..., x_n, s_1, . . ., s_k, w) = 0 \qquad (1)$$

Dans (1), on *élimine* tous les x_i, (du moins ceux, dit Boole dont les «probabilités ne font pas partie des données»). On sait en effet que, d'une équation logique donnée, on peut éliminer autant d'inconnues que l'on veut[119].

Reste alors :

$$M\, (s_1, . . ., s_k, w) = 0 \qquad (2)$$

Par la méthode du «développement», toute équation logique peut également être résolue par rapport à l'une quelconque des variables présentes, soit, ici, w à partir de M :

$$w = A(s_1,\ldots,s_k) + \frac{0}{1}\, B(s_1,\ldots,s_k) + \frac{0}{0}\, C(s_1,\ldots,s_k) + \frac{1}{0}\, D(s_1,\ldots,s_k) \qquad (3)$$

La condition $D(s_1, . . ., s_k) = 0$ est celle de la *consistance* du problème considéré, c'est-à-dire la condition nécessaire et suffisante sur les données pour que l'évènement noté w puisse exister. Si elle est satisfaite, l'ensemble des solutions de (2) s'écrit alors paramétriquement :

$$w\, (s_1, . . ., s_k) = A(s_1, . . ., s_k) + q\, .\, C(s_1, . . ., s_k)$$

où q est un symbole de classe indéterminée.

PROPOSITION 4 [120] (résolution du problème «le plus général» en probabilités) : Soit (s_j) une famille de k évènements composés donnés, de probabilités respectives $(p_1, ..., p_k)$ également données, et soit w un autre évènement donné. On demande la probabilité de w.

Le caractère universel («le plus général») que Boole prête à cette question est clairement inspiré de l'analogie avec les systèmes d'équations de la géométrie algébrique, et répond à ce vœu, qui gouverne constamment la démarche booléenne, d'une possible résolution algébrique, *dans tous les cas*, des systèmes d'équations probabilistes vis-à-vis de la (des) probabilité(s) inconnue(s). Boole est, à notre connaissance, le seul mathématicien à s'être engagé dans cette (vaine) quête algébrique pure, qui est aussi historiquement datée.

MÉTHODE : Avec l'objectif de se replacer dans les conditions de la proposition 3, Boole organise un schéma sous-jacent de composition, à partir d'une famille de n évènements simples et inconditionnés :

$$s_j = \phi_j(x_1, ..., x_n) \quad \text{pour} \quad j = 1, 2, ..., k \text{ et aussi}$$

$$w = h\, (x_1, ..., x_n)$$

où les ϕ_j et h sont des fonctions logiques données. Par la proposition 3, il est une condition de consistance à ce système de (k + 1) équations, qui est :

$$D(s_1, . . ., s_k) = 0 \qquad (4)$$

[119] *Laws*, p. 103.
[120] *Laws*, p. 265.

Comme A, B, C, D sont les constituants de (3), on a A + B + C + D = 1, en sorte que (4) est équivalente à :

$$(A + B + C)\ (s_1, \ldots, s_k) = 1 = V\ (s_1, \ldots, s_k)$$

Les s_j donnés ne peuvent donc être regardés comme inconditionnés, puisque soumis à la condition V = 1, en sorte qu'à nouveau, les probabilités (p_1, ..., p_k) de l'énoncé sont en fait les probabilités des évènements (s_j) soumis à la condition $V(s_1, \ldots, s_k) = 1$. On retrouve ainsi le schéma de la proposition 2 : pour déterminer les probabilités absolues des évènements (s_j), on dispose donc du système :

$$p_j = \frac{[V,\ s_j]}{[V]} \qquad \text{pour} \quad j = 1, 2, \ldots, k. \tag{5}$$

c'est-à-dire :

$$p_j = \frac{g_j(p_1', \ \ldots, p_k')}{v(p_1', \ \ldots, p_k')} \qquad \text{pour} \quad j = 1, 2, \ldots, k. \tag{6}$$

qui est censé déterminer les p'_j. Ceci fait, on revient à l'expression de la solution w :

$$w\ (s_1, \ldots, s_k) = A\ (s_1, \ldots, s_k) + q\ .\ C\ (s_1, \ldots, s_k) \tag{6a}$$

Ce qui est finalement cherché, c'est-à-dire la probabilité de w, est donc à nouveau celle d'un *évènement conditionné* par la condition V = 1, autrement dit :

$$P\ (\ w\ ) = \frac{[A + q\ C]}{[V]} = \frac{[(A + q\ C)\ (s_1, \ \ldots\ , \ s_k)]}{[v\ (s_1, \ \ldots\ , \ s_k)\ ]}$$

Finalement :

$$P\ (\ w\ ) = \frac{\alpha(p_1', \ \ldots, p_k') + c\gamma(p_1', \ \ldots, p_k')}{v(p_1', \ \ldots, p_k')} \tag{7}$$

où les p'_i ont été préalablement déterminés, et où c = P(q).

NOTATIONS BOOLÉENNES : Dans cette partie et pour alléger les écritures, Boole décidera d'abord de supprimer les crochets, c'est-à-dire de remplacer [V] par V, et aussi les p'_j, inconnus, par x_j (qui ne sont donc plus des évènements de base connus, mais des inconnues intermédiaires). Le système (5) pour les déterminer s'écrit alors, avec ces nouvelles notations :

$$p_j = \frac{V\ .\ x_j}{V} \qquad \text{pour} \quad j = 1, 2, \ldots, k \tag{8}$$

ou encore :

$$p_j = \frac{g_j(x_1, \ \ldots, x_k)}{v(x_1, \ \ldots, x_k)} \qquad \text{pour} \quad j = 1, 2, \ldots, k \tag{9}$$

Dans ces conditions, la solution générale (7) s'écrit :

$$P\ (\ w\ ) = \frac{\alpha(x_1, \ \ldots, x_k) + c\gamma(x_1, \ \ldots, x_k)}{v(x_1, \ \ldots, x_k)} \tag{10}$$

L'ensemble du système (9) et (10) prend alors des formes plus symétriques. En notations booléennes simplifiées :

$$\frac{V\ .\ x_1}{p_1} = \frac{V\ .\ x_2}{p_2} = \ldots = \frac{V\ .\ x_k}{p_k} = V = \frac{A + c\ C}{P\ (\ w\ )} \tag{11}$$

Des écritures qui sont omniprésentes dans la partie «probabilités» des *Laws*. En notations fonctionnelles un peu plus élaborées, on a donc le système suivant, à (k + 1) équations et à (k + 1) inconnues (x_1, ..., x_k, P (w)) :

$$\frac{g_1\ (x_1, \ \ldots\ , \ x_k)}{p_1} = \ \ldots = \frac{g_k\ (x_1, \ \ldots\ , \ x_k)}{p_k} = v\ (x_1, \ \ldots\ , \ x_k) = \frac{\alpha\ (x_1, \ \ldots\ , \ x_k) + c\ \gamma\ (x_1, \ \ldots\ , x_k)}{P(\ w\ )} \tag{12}$$

où P (w) est l'inconnue véritable, et où c est un paramètre compris entre 0 et 1.

INTERPRÉTATION BOOLÉENNE DE C. Par (6a), qui fournit la solution w (en variables logiques), on a :

$$w(s_1, \ldots, s_k) = A(s_1, \ldots, s_k) + q \,.\, C(s_1, \ldots, s_k) \tag{6a}$$

Or A et C, qui sont des constituants, sont mutuellement exclusifs. Donc

$$C \,.\, w = q \,.\, C \quad \text{et} \quad P(C \,.\, w) = P(q \,.\, C)$$

En alléguant l'indépendance de q et C, Boole conclut :

$$P(C \,.\, w) = P(q) \,.\, P(C) = c \,.\, P(C)$$

Donc

$$c = \frac{P(C \,.\, w)}{P(C)}$$

c est donc la probabilité conditionnelle pour que C s'étant produite, alors w se produise également.