**Mathématiques et sciences humaines**
Mathematics and social sciences

**166 | Été 2004**
**Varia**

# Pouvoir mesuré et capacité d'un électeur à influencer le résultat du vote

*The measured power and the elector's capacity of influencing the voting outcome*

**Lawrence Diffo Lambo, Bertrand Tchantcho et Joël Moulen**

**Édition électronique**
URL : http://journals.openedition.org/msh/2896
DOI : 10.4000/msh.2896
ISSN : 1950-6821

**Éditeur**
Centre d'analyse et de mathématique sociales de l'EHESS

**Édition imprimée**
Date de publication : 1 mars 2004
ISSN : 0987-6936

**Référence électronique**
Lawrence Diffo Lambo, Bertrand Tchantcho et Joël Moulen, « Pouvoir mesuré et capacité d'un électeur à influencer le résultat du vote », *Mathématiques et sciences humaines* [En ligne], 166 | Été 2004, mis en ligne le 05 mars 2006, consulté le 20 avril 2019. URL : http://journals.openedition.org/msh/2896 ; DOI : 10.4000/msh.2896

*Math. & Sci. hum. / Mathematical Social Sciences* (42$^e$ année, n° 166, *2004*(2), p. 5–24)

# POUVOIR MESURÉ ET CAPACITÉ D'UN ÉLECTEUR À INFLUENCER LE RÉSULTAT DU VOTE[1]

Lawrence DIFFO LAMBO[2], Bertrand TCHANTCHO[3], Joël MOULEN[4]

RÉSUMÉ – *Nous étudions la* relation de puissance $\geq_P$. *Cette relation binaire, définie sur l'ensemble des électeurs d'un jeu de vote, a permis dans* [Diffo Lambo, Moulen, 2000] *de montrer que la* relation d'influence *de Taylor* $\geq_T$ *traduit la capacité du votant à influencer le résultat du vote, lorsque les préférences individuelles sont des ordres totaux, le résultat du vote étant représenté par la dominance classique et l'insatisfaction du votant mesurée au moyen de la* distance de la différence symétrique. *Dans cet article, la définition de* $\geq_P$ *est généralisée dans deux directions : d'une part, l'insatisfaction est mesurée à l'aide d'une distance quelconque (au lieu de la distance de la différence symétrique), et d'autre part, le domaine de préférences individuelles est maintenant quelconque (et peut être constitué de préordres totaux au lieu d'ordres totaux). Le résultat suscité sur* $\geq_T$ *étant alors parfois faux, nous obtenons une condition pour que* $\geq_T$ *traduise la capacité du votant à influencer le résultat du vote. En outre, nous parvenons, grâce à cette condition suffisamment unificatrice, à généraliser les autres résultats obtenus dans* [Diffo Lambo, Moulen, 2000].

MOT-CLÉS – Jeu simple, Indice de pouvoir, Relation de puissance, Relation d'influence, Relation de performance

SUMMARY – The measured power and the elector's capacity of influencing the voting outcome. *We study the power* relation $\geq_P$. *This binary relation on the set of voters was used in* [Diffo Lambo, Moulen, 2000] *to show that the Taylor's* influence relation $\geq_T$ *appraises the voter's capacity of influencing the voting outcome when individual preference relations are linear orders, if the classical dominance stands for the social outcome and the Kendal's distance is the means of measuring a voter's dissatisfaction. In this paper, the definition of* $\geq_P$ *is extended in two directions : on the one hand, dissatisfaction is measured by any distance (apart from the Kendal's distance), and on the other hand, the domain of individual preference relations has no restriction (it may contain complete weak orders apart from complete linear orders). The above mentioned result on* $\geq_T$ *now being at times wrong, we come out with a sufficient condition under which* $\geq_T$ *actually appraises the voter's capacity of influencing the voting outcome. Moreover we succeed, thanks to this highly unifying condition, in generalizing all the other results of* [Diffo Lambo, Moulen, 2000].

KEYWORDS - Simple game, Power index, Power relation, Influence relation, Performance relation

JEL Classification Numbers : C62, C70, D72

[1]Article reçu le 20.06.2003, révisé le 05.12.2003, accepté le 19.01.2004

[2]ENS Yaoundé, BP 47, Yaoundé, Cameroun, yldiffo@yahoo.fr

[3]ENS Yaoundé, BP 47, Yaoundé, Cameroun, btchantcho@yahoo.fr

[4]Faculté des Sciences, Université de Yaoundé I, BP 812 Yaoundé, Cameroun, joel_moulen@yahoo.fr

## 1. INTRODUCTION

Le modèle d'élection concerné dans ce travail est formalisé par le concept de jeu de vote ou de jeu simple. Il est défini par la donnée de l'ensemble $N$ d'électeurs qui est un ensemble fini non vide, l'ensemble $\mathcal{W}$ des *coalitions gagnantes,* ensemble fini non vide de parties non vides de $N$, et l'ensemble $A$ des candidats également fini et non vide. La mesure du pouvoir individuel des joueurs dans un jeu simple a pris plusieurs formes dans la littérature. Deux indices de pouvoirs ont retenu notre attention. L'indice de Shapley-Shubik (respectivement l'indice de Banzhaf-Coleman) assigne à chaque électeur $i$ un nombre réel positif ou nul $\mu(i)$ (respectivement $\eta(i)$) sensé mesurer le pouvoir de $i$ dans ce jeu de vote. Les indices $\mu$ et $\eta$ induisent sur l'ensemble $N$ des préordres totaux respectifs $\geq_S$ et $\geq_B$ permettant chacun un classement des électeurs deux-à-deux.

Dans une approche qualitative, Taylor et Zwicker ([Taylor, Zwicker, 1993], [Taylor, 1995], [Taylor, Zwicker, 1999]) présente la relation binaire sur $N$ dite relation d'influence[5] $\geq_T$ qui ordonne directement les électeurs par comparaisons deux-à-deux. Taylor montre que $\geq_T$ est un préordre total si et seulement si le jeu est $\pi$-robuste (concept de $\pi$-robustesse rappelé à la section 2. de ce papier).

Dans [Diffo Lambo, Moulen, 2000], nous avons posé le problème suivant : les définitions des relations $\geq_S$, $\geq_B$ et $\geq_T$ sont basées uniquement sur les caractéristiques structurelles de l'ensemble des coalitions gagnantes. On ne prend en compte ni les préférences des électeurs, ni la manière dont est déterminé l'élu du vote. Si par exemple, $\mu(i) > \mu(j)$, cela signifie que l'indice de Shapley-Shubik déclare que le joueur $i$ a plus de pouvoir que $j$. Au vu du processus de détermination du résultat du vote, observe-t-on que $i$ est effectivement plus « puissant » que $j$ dans le sens (Q) suivant ?

> (Q) : *« $i$ plus puissant que $j$ » signifie que dans la lutte pour faire prévaloir au mieux ses intérêts, $i$ a effectivement plus que $j$ la capacité d'influencer le résultat du vote.*

Pour formaliser (Q), nous avons introduit dans [Diffo Lambo, Moulen, 2000] une relation binaire $\geq_P$ dans l'ensemble des votants appelée relation de puissance. Cette dernière est définie à partir du processus de prise de décision collective (une procédure d'agrégation de préférences $f$ dans le cas général), des préférences individuelles des votants et de la mesure de l'insatisfaction, qui est pour nous la manière dont est déterminée la « distance » entre la préférence individuelle d'un votant et la préférence collective. Nous admettons en effet que l'insatisfaction est mesurée à l'aide d'une distance $d$ sur l'ensemble des relations binaires sur l'ensemble $A$ des candidats.

Pour deux votants $i$ et $j$, $i \geq_P j$ signifie qu'au vu du processus de détermination du résultat du vote en fonction des préférences individuelles, on observe effectivement que $i$ a au moins autant que $j$ la capacité d'influencer ledit résultat. Lorsque la procédure d'agrégation de préférences $f$ est la dominance classique du jeu et $d$

[5] Déjà définie sous le nom *replacement* par Isbell [1958] , $\geq_T$ fut aussi considérée par Allingham [1975], Lapidot [1971], Mashler et Peleg [1966].

est la distance de la différence symétrique $d_{sym}$ (qui compte le nombre de couples de désaccord entre deux relations binaires), on a obtenu dans [Diffo Lambo, Moulen, 2000] les résultats suivants quand les préférences individuelles sont des ordres totaux :

1) (Q) est vérifié pour $\geq_T$, car $\geq_T$ et $\geq_P$ coïncident.

2) [(Q) est vérifié pour $\geq_S$] si et seulement si [elle est vérifiée pour $\geq_B$] si et seulement si [ le jeu de vote est $\pi$-robuste].

Dans le présent papier, nous admettons que les préférences individuelles sont des préordres totaux et que $f$ est la dominance classique du jeu. Nous montrons que pour toute distance $d$, $\geq_P$ est une sous-relation de $\geq_T$, c'est-à-dire que $\forall i, j \in N$, $i \geq_P j \Rightarrow i \geq_T j$. De plus, si $d$ est la distance de la différence symétrique, alors $\geq_P$ coïncide avec la *composante indifférente* de $\geq_T$. Donc 1) et 2) ci-dessus deviennent faux. Nous introduisons une condition de compatibilité vérifiable ou non par $d$ et montrons que 1) et 2) s'étendent au cas où les préférences individuelles sont des préordres totaux quelconques si $d$ est compatible (théorème 4.6).

Le travail est organisé ainsi qu'il suit : la présente introduction constitue la première section et la deuxième section est consacrée à quelques définitions et notations préliminaires. Dans la troisième section, nous rappelons la définition de la relation de puissance et nous proposons une nouvelle formulation de cette relation, formulation basée sur l'idée intuitive suivante :

> *Un joueur puissant qui modifie sa préférence individuelle provoque une transformation de la préférence collective en faveur de son nouvel avis.*

La quatrième section est consacrée à l'étude de la relation de puissance, successivement lorsque $d$ est la distance de la différence symétrique et lorsque $d$ est une distance compatible quelconque.

Dans la cinquième section, nous montrons sous l'hypothèse que les préférences individuelles sont des préordres totaux, que $\geq_T$ mesure la capacité du joueur à influencer la formation de l'ensemble de stabilité de Rubinstein.

La sizième section est consacrée à la conclusion.

## 2. DÉFINITIONS ET NOTATIONS PRÉLIMINAIRES

On appelle jeu simple tout couple $G = (N, \mathcal{W})$ où $N = \{1, 2, ..., i, ...n\}$, est un ensemble fini non vide dont les éléments sont appellés *votants*, *électeurs* ou *joueurs*, et $\mathcal{W}$ une famille non vide de parties non vides de $N$ appelées coalitions gagnantes de $G$. L'ensemble des parties non vides de $N$ est noté $2^N$. Nous noterons par $A = \{x, y, z, ...\}$ un ensemble non vide fini dont les éléments sont appelés *candidats* ou *alternatives*. La notation $G = (N, A, \mathcal{W})$ aidera à expliciter en cas de besoin l'ensemble des candidats dans la désignation de $G$. Pour tout ensemble fini $E$, $|E|$ désigne le cardinal de $E$.

Les intérêts d'un électeur $i$ dans le jeu sont représentés par sa préférence sur l'ensemble des candidats. Nous représentons la préférence d'un électeur $i$ par une relation binaire $R^i$ sur $A$. Pour $x$ et $y \in A$, $xR^iy$ signifie que pour $i$, $x$ est au moins aussi bon que $y$. Des hypothèses peuvent être faites sur les $R^i$, $i \in N$. Chaque $R^i$ peut par exemple être un ordre total (i.e réflexif, antisymétrique, transitif et total) ou un préordre total (i.e réflexif, transitif et total). Si $R^i$ est un ordre total sur $A = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$,

$$R^i : x_1 x_2 ... x_m \text{ signifie } x_1 R^i x_2 R^i ... R^i x_m$$

Nous notons par $\mathcal{B}$ l'ensemble des relations binaires sur $A$, $\mathcal{L}$ l'ensemble des ordres totaux sur $A$ et $\mathcal{U}$ l'ensemble des préordres totaux sur $A$. On dit que $R \in \mathcal{B}$ est *asymétrique* si $\forall x, y \in A$, $xRy \Rightarrow non\,(yRx)$. Si à chaque électeur $i$ est assignée une préférence $R^i$, la famille $(R^i)_{i\in N}$ est appelée profil (des préférences) et est notée $R^N$. Si $\mathcal{K} \subset \mathcal{B}$, l'ensemble de tous les profils $R^N$ vérifiant $\forall i \in N$, $R^i \in \mathcal{K}$ se note $\mathcal{K}^N$. L'ensemble $\mathcal{K}$ s'appelle alors un *domaine des préférences individuelles.*

DÉFINITION 2.1 *Un jeu simple $G = (N, \mathcal{W})$ est dit :*
1) *monotone si* $\forall S, T \in 2^N, (S \in \mathcal{W}$ *et* $S \subset T) \Rightarrow T \in \mathcal{W}$;
2) *propre si* $\forall S \in 2^N, S \in \mathcal{W} \Rightarrow N \setminus S \notin \mathcal{W}$;
3) *anonyme si* $\forall S, T \in 2^N, (S \in \mathcal{W}$ *et* $|S| = |T|) \Rightarrow T \in \mathcal{W}$.

Notons qu'un jeu simple monotone est propre si et seulement si $\forall S, T \in \mathcal{W}$, $S \cap T \neq \emptyset$.

Rappelons maintenant les indices de pouvoir de Shapley-Shubik et de Banzhaf-Coleman. Pour cela, au couple $(N, \mathcal{W})$ on associe la fonction caractéristique $v$ définie de $2^N$ dans $\{0,1\}$ par $\forall S \in 2^N$, $v(S) = 1 \Leftrightarrow S \in \mathcal{W}$.

DÉFINITION 2.2 *L'indice de Shapley-Shubik et l'indice de Banzhaf-Coleman pour le jeu $G = (N, \mathcal{W})$ sont les fonctions respectives $\mu$ et $\eta$ qui, à tout $i \in N$, associent les nombres $\mu(i)$ et $\eta(i)$ respectivement définis par :*

$$1)\ \mu(i) = \frac{\sum_{S\subset N}(s-1)!(n-s)![v(S) - v(S \setminus \{i\})]}{n!}$$

$$2)\ \eta(i) = \frac{\sum_{S\subset N}[v(S) - v(S \setminus \{i\})]}{2^{n-1}}$$

La relation d'influence de Taylor $\geq_T$ est définie ainsi qu'il suit :

DÉFINITION 2.3 *Soient $G = (N, \mathcal{W})$ un jeu simple monotone, $i$ et $j$ deux joueurs. On dit que :*

1) *$i$ est au moins aussi influent que $j$ dans le jeu et on note $i \geq_T j$ si $\forall S \subset N$ tel que $\{i, j\} \cap S = \emptyset$, $S \cup \{j\} \in \mathcal{W} \Rightarrow S \cup \{i\} \in \mathcal{W}$*

2) *$i$ est strictement plus influent que $j$ dans le jeu et on note $i >_T j$ si $i \geq_T j$ et non$(j \geq_T i)$.*

3) *$i$ et $j$ sont de même influence et on note $i \sim_T j$ si $i \geq_T j$ et $j \geq_T i$.*

En plus des notations ci-dessus, nous adoptons également les suivantes :

NOTATION 2.1 *Si $R$ est une relation binaire sur un ensemble quelconque $E$, et si $x$ et $y \in E$, nous notons :*

| | |
|---|---|
| 1) $x \succ_R y$ *pour* $xRy$ *et* $non(yRx)$ | 3) $x \succcurlyeq_R y$ *pour* $xRy$ |
| 2) $x *_R y$ *pour* $non\,(xRy)$ *et* $non(yRx)$ | 4) $x \sim_R y$ *pour* $xRy$ *et* $yRx$ |

La relation $\succ_R$ définie sur $E$ par 1) s'appelle la *partie stricte* de $R$.

Soit $G = (N, A, \mathcal{W})$ un jeu simple. Lorsqu'un profil $R^N$ est sous-entendu sans risque de confusion, alors pour $i \in N$, nous écrirons $x \succ_i y$ pour $x \succ_{R^i} y$.

Avant de rappeler la notion de jeu $\pi$-robuste, notons que l'opération de permutation de deux joueurs entre deux coalitions gagnantes consiste, à partir de deux coalitions gagnantes $S$ et $T$ et deux joueurs $i$ et $j$ tels que $i \in S \setminus T$ et $j \in T \setminus S$, à construire deux nouvelles coalitions $S'$ et $T'$ par échange (permutation) de $i$ et de $j$ c'est-à-dire $S' = (S \setminus \{i\}) \cup \{j\}$ et $T' = (T \setminus \{j\}) \cup \{i\}$, respectivement notées $\pi_{ij}(S)$ et $\pi_{ij}(T)$.

On dit qu'un jeu $G$ est $\pi$-robuste si toute permutation de deux joueurs entre deux coalitions gagnantes $S$ et $T$ conduit aux coalitions $S'$ et $T'$ dont l'une au moins est gagnante.

Taylor et Zwicker ([Taylor, Zwicker, 1993], [Taylor, 1995]) montrent que la relation d'influence de tout jeu simple est un préordre et que ce préordre est total si et seulement si le jeu simple est $\pi$-robuste.

> *Dans la suite, nous considérons $G = (N, A, \mathcal{W})$ un jeu simple propre et monotone. Dans un tel jeu, deux coalitions gagnantes sont toujours d'intersection non vide.*

## 3. DE LA CAPACITÉ À INFLUENCER LE RÉSULTAT DU VOTE

### 3.1. RAPPEL DE LA RELATION DE PUISSANCE

Soit $\mathcal{K} \subset \mathcal{B}$, on appelle procédure d'agrégation de préférences de domaine $\mathcal{K}$ toute application $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{K}^N & \to & \mathcal{B} \\ R^N & \longmapsto & f(R^N) \end{array}$. On dit que $f(R^N)$, qui est une relation binaire sur $A$, est la préférence collective associée par $f$ au profil $R^N$.

Un exemple de procédure d'agrégation est la dominance classique $D_{\mathcal{W}}$, où nous rappelons que $D_{\mathcal{W}}(R^N)$ est définie par $\forall x, y \in A$,

$$xD_{\mathcal{W}}(R^N)y \Leftrightarrow (\exists S \in \mathcal{W} / \forall i \in S,\ x \succ_{R^i} y)$$

Nous avons remarqué que deux coalitions gagnantes sont d'intersection non vide. On en déduit que $D_{\mathcal{W}}(R^N)$ est antisymétrique.

On remarque que :

1) Si un votant $i_0$ vérifie $\forall S \subset N,\ S \in \mathcal{W} \Leftrightarrow i_0 \in S$, alors $\forall R^N \in \mathcal{K}^N$, $x \succ_{R^{i_0}} y \Leftrightarrow \left(xD_{\mathcal{W}}(R^N)y\right)$.

2) Si $i_0$ appartient à toutes les coalitions gagnantes, on constate que $xD_{\mathcal{W}}(R^N)y \Rightarrow x \succ_{R^{i_0}} y$.

3) Si $i_0$ n'appartient à aucune coalition gagnante minimale $S$ (i.e. telle qu'aucun $T \subset S$ distinct de $S$ n'est gagnant, avoir $y \succ_{R^{i_0}} x$ est sans effet sur la véracité de $xD_{\mathcal{W}}(R^N)y$ et de $yD_{\mathcal{W}}(R^N)x$.

Dans le cas général, $R^{i_0}$ a une influence sur la formation de la préférence collective $f(R^N)$qui dépend du « pouvoir » détenu par $i_0$ dans $(N, A, \mathcal{W})$, mais dont la manifestation n'est pas aussi tranchée que dans les remarques 1), 2) et 3) ci-dessus. Mais, nous admettons que plus le « pouvoir » détenu dans $G = (N, A, \mathcal{W})$ par $i_0$ est « grand », plus $R^{i_0}$ « prévaut » dans la formation de $f(R^N)$.

Le formalisme de « $i$ a plus que $j$ la capacité d'influencer $f(R^N)$ » proposé dans [Diffo Lambo, Moulen, 2000] et [Moulen, Diffo Lambo, 2001], est rappelé ci-après :

On note par $R^N_{ij}$ le profil défini par :

$$R^k_{ij} = \begin{cases} R^k \text{ si } k \notin \{i, j\} \\ R^j \text{ si } k = i \\ R^i \text{ si } k = j \end{cases}$$

Le profil $R^N_{ij}$ est obtenu à partir de $R^N$ en permutant les préférences de $i$ et de $j$, les autres votants gardant leurs préférences inchangées. La relation de puissance est définie ainsi qu'il suit :

DÉFINITION 3.1 *Soient $f$ une procédure d'agrégation, $\mathcal{K} \subset \mathcal{B}$, $d$ une distance sur $\mathcal{B}$, $i$ et $j$ deux joueurs. On dit que :*

1) *$i$ est au moins aussi puissant que $j$ (pour la procédure $f$) sur $\mathcal{K}$ et on note $i \geq_P j$ si pour tout profil $R^N \in \mathcal{K}^N$, $d(R^j, f(R^N_{ij})) \leq d(R^j, f(R^N))$.*
*La relation $\geq_P$ est appelée relation de puissance (relativement à $f$)*

2) *$i$ est strictement plus puissant que $j$ (pour la procédure $f$) sur $\mathcal{K}$ et on note $i >_P j$ si $i \geq_P j$ et non$(j \geq_P i)$.*

3) *$i$ et $j$ ont la même puissance et on note $i \sim_P j$ si $i \geq_P j$* et *$j \geq_P i$.*

Pour expliciter la procédure d'agrégation $f$, la distance $d$ et le domaine des préférences individuelles $\mathcal{K}$, $\geq_P$ sera encore noté $\geq_{Pf,d/\mathcal{K}}$.

Dans le profil $R^N$, la préférence de $j$ est $R^j$, de sorte que $d(R^j, f(R^N))$ est une mesure du niveau de divergence entre la préférence de $j$ et la préférence sociale lorsque le profil est $R^N$.

Dans le profil $R^N_{ij}$, la préférence de $i$ est $R^j$, de sorte que $d(R^j, f(R^N_{ij}))$ est une mesure du niveau de divergence entre la préférence de $i$ et la préférence sociale lorsque le profil est $R^N_{ij}$. L'inégalité $d(R^j, f(R^N_{ij})) \leq d(R^j, f(R^N))$ signifie donc que l'influence de $j$ sur la préférence collective est moindre (au sens non strict) que l'influence de $i$ dans des conditions similaires.

## 3.2. UNE NOUVELLE FORMULATION DE LA RELATION DE PUISSANCE

L'idée que nous voulons formaliser est qu'un joueur puissant $i$ qui change d'avis provoque au niveau de la préférence collective un changement en faveur de son nouvel avis. Soient $\mathcal{K} \subset \mathcal{B}$, $R^N \in \mathcal{K}^N$ et $R \in \mathcal{K}$. Nous définissons $\left(R^{N\backslash i}, R\right) \in \mathcal{K}^N$ par : $\left(R^{N\backslash i}, R\right) = (R^1, R^2, ..., R^{i-1}, R, R^{i+1}, ..., R^n)$.

Le nouveau profil $\left(R^{N\backslash i}, R\right)$ est obtenu par le changement d'avis de $i$ consistant à remplacer sa préférence $R^i$ par la nouvelle relation $R$.

Soient maintenant $i$ et $j \in N$. Nous allons ramener la comparaison des pouvoirs de $i$ et $j$ à la comparaison de $d(R, f(R^{N\backslash i}, R))$ et $d(R, f(R^{N\backslash j}, R))$. Si $d(R, f(R^{N\backslash i}, R)) \leq d(R, f(R^{N\backslash j}, R))$, la différence $d(R, f(R^{N\backslash j}, R)) - d(R, f(R^{N\backslash i}, R))$ contient des indications sur le supplément de succès que $i$ est parvenu à se garantir. Pour veiller à ce que $i$ et $j$ soient dans des conditions similaires, nous allons supposer que dans $R^N$, on a $R^i = R^j$. On obtient alors la définition suivante :

DÉFINITION 3.2 *Soient $f$ une procédure d'agrégation, $\mathcal{K} \subset \mathcal{B}$, $d$ une distance sur $A$, $i$ et $j$ deux joueurs. On dit que $i$ est au moins aussi performant que $j$ pour $f$ sur $\mathcal{K}$ et on note $i \geq_{P_e} j$ si pour tout $R^N \in \mathcal{K}^N$ et tout $R \in \mathcal{K}$ tel que $R^i = R^j$,*
*$d(R, f(R^{N\backslash i}, R)) \leq d(R, f(R^{N\backslash j}, R))$*

Pour expliciter la procédure d'agrégation $f$, la distance $d$ et le domaine des préférences individuelles $\mathcal{K}$, $\geq_{P_e}$ sera encore noté $\geq_{P_e f,d/\mathcal{K}}$.

Nous allons montrer que la relation de performance est équivalente à la relation de puissance, indépendamment de $f$, $d$ et $\mathcal{K}$.

THÉORÈME 3.3 *Soient $f$ une procédure d'agrégation, $d$ une distance sur $\mathcal{B}$, $\mathcal{K} \subset \mathcal{B}$, $i$ et $j$ deux joueurs. Alors :*

$$[i \geq_{P_e f,d/\mathcal{K}} j] \Leftrightarrow [i \geq_{P f,d/\mathcal{K}} j]$$

*Démonstration* :

1) Supposons que $i \geq_{P_e f,d/\mathcal{K}} j$ et considérons un profil $R^N \in \mathcal{K}^N$. Montrons que $d(R^j, f(R^N_{ij})) \leq d(R^j, f(R^N))$. Définissons le profil $Q^N$ par : $\forall k \in N$,

$$Q^k = R^k \text{ si } k \notin \{i, j\} \text{ et } Q^k = R^i \text{ si } k \in \{i, j\}.$$

On a bien $Q^N \in \mathcal{K}^N$ et $Q^i = Q^j$. Puisque $i \geq_{P_e f,d/\mathcal{K}} j$, alors pour $Q = R^j$, $d(Q, f(Q^{N\backslash i}, Q)) \leq d(Q, f(Q^{N\backslash j}, Q))$. Or, $Q = R^j$, $\left(Q^{N\backslash i}, Q\right) = R^N_{ij}$ et $(Q^{N\backslash j}, Q) = R^N$, d'où $d(R^j, f(R^N_{ij})) \leq d(R^j, f(R^N))$, et on a $i \geq_{P f,d/\mathcal{K}} j$.

2) Supposons que $i \geq_{P f,d/\mathcal{K}} j$ : soient un profil $R^N \in \mathcal{K}^N$ tel que $R^i = R^j$, et $R \in \mathcal{K}$. Pour montrer que $d(R, f(R^{N\backslash i}, R)) \leq d(R, f(R^{N\backslash j}, R))$, définissons le profil $Q^N$ par : $\forall k \in N$,

$$Q^k = R^k \text{ si } k \neq j \text{ et } Q^j = R.$$

On a $i \geq_{P f,d/\mathcal{K}} j$, donc pour $Q^N$, on a $d(Q^j, f(Q^N_{ij})) \leq d(Q^j, f(Q^N))$. Or, $(Q^{N\backslash i}, R) = Q^N_{ij}$ et $(Q^{N\backslash j}, R) = Q^N$,
donc l'inégalité précédente s'écrit encore $d(Q^j, f(R^{N\backslash i}, R)) \leq d(Q^j, f(R^{N\backslash j}, R))$,
c'est-à-dire $d(R, f(R^{N\backslash i}, R)) \leq d(R, f(R^{N\backslash j}, R))$.
Donc, on a $i \geq P_e f, d/\mathcal{K} j$. ■

Puisque $\geq_{P_e}$ et $\geq_P$ coïncident (d'après ce théorème), nous poursuivrons ce travail en maintenant la notation $\geq_P$ et le terme relation de puissance afin de rester conformes à [Diffo Lambo, Moulen, 2000]. Nous utiliserons toutefois le formalisme donné par la définition de $\geq_{P_e}$ (cf. Définition 3.2).

## 4. PROPRIÉTÉS DE LA RELATION DE PUISSANCE

### 4.1. Relation de puissance et relation d'influence de Taylor

Désormais dans ce travail, nous supposons que la procédure d'agrégation $f$ est la dominance classique $D_{\mathcal{W}}$ du jeu simple $G = (N, \mathcal{W})$. Le jeu simple étant propre et monotone, $D_{\mathcal{W}}$ est antisymétrique.

Nous montrons dans le résultat ci-après que la relation de puissance est une sous-relation du préordre d'influence de Taylor.

PROPOSITION 4.1 *Soit $d$ une distance sur $\mathcal{B}$. On suppose que $f$ est la dominance classique et que $\mathcal{K} \subset \mathcal{U}$ est tel que $|\mathcal{K}| \geq 2$ et $\mathcal{L} \cap \mathcal{K} \neq \emptyset$. Alors, la relation de puissance $\geq_P$ est une sous-relation du préordre d'influence $\geq_T$, c'est-à-dire que $\forall i, j \in N$, $i \geq_P j \Rightarrow i \geq_T j$.*

*Démonstration :*

Soient $i$ et $j$ deux joueurs. Supposons que $non(i \geq_T j)$. Nous allons montrer que $non(i \geq_P j)$. Puisque $non(i \geq_T j)$, il existe une coalition $S \in 2^N$ telle que $S \cap \{i, j\} = \emptyset$, $S \cup \{j\} \in \mathcal{W}$ et $S \cup \{i\} \notin \mathcal{W}$. Soient $\Phi \in \mathcal{K} \cap \mathcal{L}$ et $\Psi \in \mathcal{K}$ tels que $\Phi \neq \Psi$. Définissons $R^N \in \mathcal{K}^N$ comme suit : pour tout $k \in N$,

Si $k \in S$, $R^k = \Phi$, et si $k \notin S$, (en particulier si $k \in \{i, j\}$) $R^k = \Psi$. Soit $R = \Phi$ ; alors, $D_{\mathcal{W}}(R^{N \backslash j}, R) = \Phi$. En effet, soient $x$, $y \in A$ tels que $x \neq y$. Si $x \succ_\Phi y$, alors dans $(R^{N \backslash j}, R)$, on a $\{k \in N / x \succ_k y\} = S \cup \{j\} \in \mathcal{W}$. Donc, $x \succ_{D_{\mathcal{W}}(R^{N \backslash j}, R)} y$. Ainsi, on a $x \succ_\Phi y \Rightarrow x \succ_{D_{\mathcal{W}}(R^{N \backslash j}, R)} y$. On déduit, du fait que $\Phi \in \mathcal{L}$, que $D_{\mathcal{W}}(R^{N \backslash j}, R) = \Phi = R$, d'où $d(R, D_{\mathcal{W}}(R^{N \backslash j}, R)) = 0$. Montrons que $d(R, D_{\mathcal{W}}(R^{N \backslash i}, R)) \neq 0$. Puisque $\Phi \neq \Psi$ et $\Phi \in \mathcal{L}$, il existe $a$ et $b \in A$ tels que $a \succ_\Phi b$ et $non(a \succ_\Psi b)$. Alors, dans $(R^{N \backslash i}, R)$, $\{k \in N / a \succ_k b\} = S \cup \{i\} \notin \mathcal{W}$. Donc, on a $non\left(a \succ_{(D_{\mathcal{W}}(R^{N \backslash i}, R)} b\right)$. On déduit que $D_{\mathcal{W}}(R^{N \backslash i}, R) \neq \Phi$, donc $d(R, D_{\mathcal{W}}(R^{N \backslash i}, R)) \neq 0$ car $d$ est une distance. Ainsi, $d(R, D_{\mathcal{W}}(R^{N \backslash j}, R)) = 0$ et $d(R, D_{\mathcal{W}}(R^{N \backslash i}, R)) > 0$, d'où $non(i \geq_P j)$. ■

L'hypothèse $\mathcal{L} \cap \mathcal{K} \neq \emptyset$ est la seule condition significative sur $\mathcal{K}$, car l'hypothèse $|\mathcal{K}| \geq 2$ apparaît comme étant une condition de non-dégénérescence. En effet, le cas contraire $\mathcal{K} = \{R\}$ décrit un contexte de "pensée unique". On a alors, $\forall i, j \in N$, $i \sim_P j$, c'est-à-dire que tous les joueurs sont équivalents dans leur totale impuissance. Notons que dans les cas $\mathcal{K} = \mathcal{U}$ et $\mathcal{K} = \mathcal{L}$, on a de manière évidente $|\mathcal{K}| \geq 2$ et $\mathcal{L} \cap \mathcal{K} \neq \emptyset$.

Comme $>_T$ est acyclique, on déduit de la proposition ci-dessus que $>_P$ est acyclique, c'est-à-dire que $\forall k \geq 2$, $\forall i_1, i_2, \ldots, i_k \in N$, $i_1 >_P i_2 >_P \ldots >_P i_k >_P i_1$ est impossible.

Dans [Diffo Lambo, Moulen, 2000], on a montré que si les préférences individuelles sont des ordres totaux, et si $d$ est la distance de la différence symétrique (qui sera rappelée plus bas), alors $\geq_P$ est un préordre, car $\geq_P$ coïncide avec $\geq_T$. Dans la prochaine section, nous verrons que ce résultat change si les préférences individuelles sont des préordres totaux.

La distance de la différence symétrique, que nous notons $d_{sym}$ est définie sur l'ensemble des relations binaires sur $A$ par :

$$d_{sym}(\mathcal{R},\mathcal{S}) = |\{(x,y) \in A^2 / x\mathcal{R}y \text{ et non}(x\mathcal{S}y) \text{ ou } x\mathcal{S}y \text{ et non}(x\mathcal{R}y)\}|$$

L'examen du lien entre $\geq_P$ et $\geq_T$ conduit à la proposition ci-après qui affirme que $\geq_P$ coïncide avec $\sim_T$.

PROPOSITION 4.2 *On suppose que* $d = d_{sym}$, $f = D_{\mathcal{W}}$ *et que* $\mathcal{K} = \mathcal{U}$. *Alors,* $\geq_P$ *coïncide avec* $\sim_T$, *c'est-à-dire* $\forall i,j \in N$, $i \geq_P j \Leftrightarrow i \sim_T j$.

*Démonstration :*
1) Supposons que $i \geq_P j$. Nous avons déjà montré qu'alors $i \geq_T j$. Il reste à montrer que $j \geq_T i$. Supposons le contraire : alors il existe une coalition $S \in 2^N$ telle que $S \cap \{i,j\} = \emptyset$, $S \cup \{i\} \in \mathcal{W}$ et $S \cup \{j\} \notin \mathcal{W}$. Le cas $|A| = 1$ étant évident, supposons $|A| \geq 2$, et posons $A = \{x, y, x_1, x_2, ..., x_m\}$.

Considérons le profil $Q^N$ défini par : $\forall k \in N$,
si $k \in S \cup \{i,j\}$ alors $Q^k : yxx_1x_2...x_m$ ; si $k \notin S \cup \{i,j\}$, $Q^k : [yx]\, x_1x_2...x_m$.

Considérons également la relation $Q$ définie sur $A$ par $Q : [yx]\, x_1x_2...x_m$. On a $Q^i = Q^j$. Pour $Q^N$ et $Q$ ainsi définis, vérifions que $d_{sym}(Q, D_{\mathcal{W}}(Q^{N\setminus i}, Q)) > d_{sym}(Q, D_{\mathcal{W}}(Q^{N\setminus j}, Q))$.

Nous avons dans $(Q^{N\setminus j}, Q) : \{k \in N / y \succ_k x\} = S \cup \{i\} \in \mathcal{W}$ donc $yD_{\mathcal{W}}(Q^{N\setminus j}, Q)x$. L'on vérifie d'ailleurs que $D_{\mathcal{W}}(Q^{N\setminus j}, Q) = yxx_1x_2...x_m = Q$ et par conséquent $d_{sym}(Q, D_{\mathcal{W}}(Q^{N\setminus j}, Q)) = 0$.

De plus, dans $(Q^{N\setminus i}, Q) : \{k \in N / y \succ_k x\} = S \cup \{j\} \notin \mathcal{W}$ donc *non*$(yD_{\mathcal{W}}(Q^{N\setminus i}, Q)x)$. De même dans $(Q^{N\setminus i}, Q) : \{k \in N / x \succ_k y\} = \emptyset$. Par suite, *non*$(xD_{\mathcal{W}}(Q^{N\setminus i}, Q)y)$ et *non*$(yD_{\mathcal{W}}(Q^{N\setminus i}, Q)x)$. On vérifie aisement que $\forall u \in \{y,x\}$, $u \succ_{D_{\mathcal{W}}(Q^{N\setminus i},Q)} x_1 \succ_{D_{\mathcal{W}}(Q^{N\setminus i},Q)} x_2 \succ_{D_{\mathcal{W}}(Q^{N\setminus i},Q)} \cdots \succ_{D_{\mathcal{W}}(Q^{N\setminus i},Q)} x_m$ (via $S \cup \{i\}$). Ainsi, $d_{sym}(Q, D_{\mathcal{W}}(Q^{N\setminus i}, Q)) = 2$. Étant donné que $d_{sym}(Q, D_{\mathcal{W}}(Q^{N\setminus i}, Q)) > d_{sym}(Q, D_{\mathcal{W}}(Q^{N\setminus j}, Q))$, on en déduit *non*$(i \geq_P j)$, ce qui est absurde.

2) Réciproquement, supposons que $i \sim_T j$. Il est évident que pour tout profil $R^N$ tel que $R^i = R^j$, pour toute relation $R$, on a $D_{\mathcal{W}}(R^{N\setminus i}, R) = D_{\mathcal{W}}(R^{N\setminus j}, R)$. En effet, étant donné que pour toute coalition gagnante $S$, soit $\{i,j\} \cap S = \emptyset$, soit $\{i,j\} \subset S$, on a : $\forall x,y \in A$, $xD_{\mathcal{W}}(R^{N\setminus i}, R)y$ via $S \Leftrightarrow xD_{\mathcal{W}}(R^{N\setminus j}, R)y$ via $S$. Ainsi, $d_{sym}(R, D_{\mathcal{W}}(R^{N\setminus i}, R)) = d_{sym}(R, D_{\mathcal{W}}(R^{N\setminus j}, R))$ donc $i \geq_P j$. ■

Nous allons montrer que $\geq_{PD_{\mathcal{W}}, d_{sym}/\mathcal{U}}$ n'est total que dans le cas dégénéré où le jeu est anonyme. Pour cela, nous avons besoin du lemme suivant qui donne une caractérisation des jeux simples anonymes.

LEMME 4.3 *Le jeu simple* $G$ *est anonyme si et seulement si tous les électeurs sont équivalents suivant la relation d'influence* (*i.e* $\forall i,j \in N$, $i \sim_T j$).

*Démonstration* :
1) Si $G$ est anonyme, il est évident que $\forall i, j \in N$, $i \sim_T j$.
2) Réciproquement, supposons que $\forall i, j \in \mathcal{W}$, $i \sim_T j$. Soient $S$ et $T$ deux coalitions telles que $S \in \mathcal{W}$ et $|S| = |T|$. Montrons que $T \in \mathcal{W}$.

- Si $S = T$, il est évident que $T \in \mathcal{W}$.
- Si $S \neq T$, alors $S \setminus T \neq \emptyset$, $T \setminus S \neq \emptyset$ et $|S \setminus T| = |T \setminus S|$. Posons : $T_0 = S \cap T$, $S \setminus T = \{i_1, i_2, ..., i_q\}$ et $T \setminus S = \{j_1, j_2, ..., j_q\}$.

Considérons la suite $(S_p)_{0 \leq p \leq q}$ définie de la manière suivante :
$S_0 = S$, pour tout $1 \leq k \leq q$, $S_k = [S_{k-1} \setminus \{i_k\}] \cup \{j_k\}$.

Compte tenu du fait que $S \in \mathcal{W}$, $\forall m, n \in \{1, 2, ..., q\}$, $i_m \sim_T j_n$ et du fait que $S \in \mathcal{W}$, on a $\forall u \in \{0, 1, 2, ..., q\}$, $S_u \in \mathcal{W}$. En particulier, on a $S_q \in \mathcal{W}$. Or, $S_q = [S_{q-1} \setminus \{i_q\}] \cup \{j_q\} = T_0 \cup \{j_1, j_2, ..., j_q\} = T$ d'où $T \in \mathcal{W}$. ■

De la Proposition 4.2. et du lemme ci-dessus, nous déduisons le corollaire suivant :

COROLLAIRE 4.4 *On suppose que la procédure d'agrégation des préférences est la dominance classique, la distance $d$ est la distance de la différence symétrique et les préférences individuelles sont des préordres totaux. Alors, $\geq_P$ est total (et égal à l'équivalence totale) si et seulement si $G$ est un jeu anonyme.*

*Démonstration* :

Par définition, on a ($\geq_P$ total) $\Leftrightarrow$ $[\forall i, j \in N$, $(i \geq_P j)$ *ou* $(j \geq_P i)]$. Or, d'après la Proposition 4.2., $(i \geq_P j) \Leftrightarrow (i \sim_T j)$. Donc, on a :

$$(\geq_P \text{ total}) \Leftrightarrow [\forall i, j \in N, \ (i \sim_T j)]$$

On déduit du lemme ci-dessus que $\geq_P$ est total si et seulement si $G$ est anonyme. ■

Dans le sous-cas où $\mathcal{K} = \mathcal{L}$ (où les préférences individuelles sont des ordres totaux), on a obtenu dans [Diffo Lambo, Moulen, 2000] que $\geq_T$ traduit bien la capacité à influencer le résultat du vote car $\geq_P$ coïncide avec $\geq_T$. Les résultats qui précèdent montrent que si $\mathcal{K} = \mathcal{U}$, c'est-à-dire que les préférences individuelles sont des préordres totaux, ce résultat positif pour $\geq_T$ n'est en général pas vérifié, même si le jeu est $\pi-$robuste.

Pour comprendre ce changement, examinons la relation de puissance dans le jeu suivant :

EXEMPLE 4.1 *Soit le jeu simple $G = (N, A, \mathcal{W})$, où $N = \{1, 2\}$, $A = \{x, y\}$ et $\mathcal{W} = \{S \subset N / 1 \in S\}$.* On a $1 >_T 2$.

Pour $\geq_P$, il faut tenir compte des profils des préférences individuelles et de $f = D_{\mathcal{W}}$ :
Notons les trois éléments $R_0$, $R_1$, et $R_2 \in \mathcal{U}$ dans le tableau suivant :

| $R_0$ | $R_1$ | $R_2$ |
|---|---|---|
| $x \sim_{R_0} y$ | $x \succ_{R_1} y$ | $y \succ_{R_2} x$ |

Pour chaque $R \in \mathcal{U}$ et $R^N \in \mathcal{U}^N$ tel que $R^1 = R^2$ , le tableau ci-dessous présente dans la cellule à l'intersection de la ligne d'entrée $R$ et de la colonne d'entrée $R^N$, le nombre :

$$\delta(R^N, R) = d_{sym}(R, D_{\mathcal{W}}\left(R^{N\backslash 2}, R\right)) - d_{sym}(R, D_{\mathcal{W}}\left(R^{N\backslash 1}, R\right)).$$

| | $(R_0, R_0)$ | $(R_1, R_1)$ | $(R_2, R_2)$ |
|---|---|---|---|
| $R_0$ | 0 | $-1$ | $-1$ |
| $R_1$ | 1 | 0 | 1 |
| $R_2$ | 1 | 1 | 0 |

On n'a ni $1 \geq_P 2$, ni $2 \geq_P 1$ car $\delta(R^N, R)$ change de signe.

La divergence entre $\geq_P$ et $\geq_T$ provient des deux cellules dont les valeurs sont $\delta(R^N, R) = -1$. Le changement d'avis envisagé dans ces deux cellules permet de passer d'un avis initial qui est soit $R_1$, soit $R_2$ à l'avis final qui est $R_0$. Pour nous fixer les idées, détaillons les calculs pour la cellule correspondant à $R^N = (R_1, R_1)$ et $R = R_0$. La préférence sociale pour $D_{\mathcal{W}}$ peut être égale à $R_\varnothing$ défini par $non(x \succcurlyeq_{R_\varnothing} y)$ et $non(y \succcurlyeq_{R_\varnothing} x)$. Dans le tableau ci-dessous, nous avons posé $\Psi^i = D_{\mathcal{W}}\left(R^{N\backslash i}, R^i\right))$.

| $i$ | $\left(R^{N\backslash i}, R\right)$ | $\Psi^i$ | $d_{sym}\left(R, \Psi^i\right)$ | $\delta\left(R^N, R\right)$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $(R_0, R_1)$ | $R_\varnothing$ | 1 | $-1$ |
| 2 | $(R_1, R_0)$ | $R_1$ | 1 | |

On constate que la divergence entre $\geq_P$ et $\geq_T$ provient de $d_{sym}$ qui vérifie l'inégalité $d_{sym}\left(R_0, R_1\right) < d_{sym}\left(R_0, R_\varnothing\right)$. Cette inégalité signifie que $d_{sym}$ ne se conforme pas à la condition suivante :

*Première condition de proximité* :

> *si le joueur $i$ est indifférent entre $x$ et $y$ alors la société est plus proche de $i$ si elle ne compare pas $x$ et $y$ que si elle compare strictement $x$ et $y$*

Donc, pour cette condition de proximité, l'indifférence et la non comparabilité sont plus proches l'une de l'autre que ne sont l'indifférence et la comparabilité stricte. Dans le prochain paragraphe, nous formaliserons cette condition de proximité, et le fait pour une distance sur $\mathcal{B}$ de se conformer à cette condition.

## 4.3. RELATION DE PUISSANCE ET COMPATIBILITÉ DE LA DISTANCE $d$

Dans ce travail, nous n'exigeons pas absolument que la distance $d$ se conforme à la première condition de proximité. Pour nous, $d$ est un paramètre qui, « bien ajusté » permet d'adapter $\geq_{Pf,d/\mathcal{K}}$ à un contexte social donné. Par exemple, le contexte social peut vouloir que la distance se conforme à cette condition. Nous allons formaliser le fait pour une distance $d$ de se conformer ou non à cette condition.

Soit $R \in \mathcal{U}$, la préférence individuelle d'un votant $i$, et soient $\mathcal{S} \in \mathcal{B}$ et $\mathcal{T} \in \mathcal{B}$, des relations asymétriques. Il se peut que $\mathcal{T}$ intéresse $i$ comme relation collective plus que $\mathcal{S}$. Formalisons d'abord ce fait. Sur une paire de candidats $\{x, y\}$ telle que $x \succ_R y$, la société peut soit préférer strictement $x$ à $y$ (c'est le mieux que peut espérer $i$), soit ne pas comparer $x$ et $y$, soit préférer strictement $y$ à $x$. Nous trouvons naturel d'admettre la deuxième condition de proximité qui suit :

*Deuxième condition de proximité* :

> *si le joueur $i$ préfère strictement $x$ à $y$, le résultat social sur $\{x, y\}$ le plus distant de $i$ est que la société préfère strictement $y$ à $x$*

Pour nous, le contexte social peut justifier ou non la première condition de proximité (celle énoncée plus haut). Quant à la deuxième condition de proximité ci-dessus, nous pensons qu'elle est naturelle et nous l'exigeons à tous nos contextes sociaux.

Sous la condition $x \succ_{\mathcal{R}} y$, formalisons d'abord la deuxième condition de proximité en indquant les positions relatives de $\mathcal{T}$ et $\mathcal{S}$ sur $\{x, y\}$ à exiger pour traduire le fait que « $\mathcal{T}$ est plus proche de $R$ que $\mathcal{S}$ » (dans le cas non banal où $\mathcal{T}$ et $\mathcal{S}$ ne coïncident pas sur $\{x, y\}$). Pour cela distinguons les deux cas $x *_{\mathcal{T}} y$ et non $(x *_{\mathcal{T}} y)$ :

a) Si $x *_{\mathcal{T}} y$, alors le fait que $\mathcal{T}$ et $\mathcal{S}$ ne coïncident pas sur $\{x, y\}$ impose $y \succ_{\mathcal{S}} x$ ou $x \succ_{\mathcal{S}} y$. Mais, $x \succ_{\mathcal{S}} y$ exprime un accord parfait de $\mathcal{S}$ et $R$ sur $\{x, y\}$, ce qui est inacceptable dans la traduction de « $\mathcal{T}$ est plus proche de $R$ que $\mathcal{S}$ », car on a $x *_{\mathcal{T}} y$. Donc, si $x *_{\mathcal{T}} y$, il faut $y \succ_{\mathcal{S}} x$.

b) Si non $(x *_{\mathcal{T}} y)$, alors l'asymétrie de $\mathcal{T}$ exclut $x \sim_{\mathcal{T}} y$. On a donc soit $x \succ_{\mathcal{T}} y$, soit $y \succ_{\mathcal{T}} x$. Mais, $y \succ_{\mathcal{T}} x$, signifie que $\mathcal{T}$ préfère strictement $y$ à $x$. Or, vu le principe ci-dessus, préférer $y$ à $x$ est le pire choix social pour $i$. Donc, une position de $\mathcal{S}$ sur $\{x, y\}$ pire pour $i$ que la position de $\mathcal{T}$ n'existe pas. Donc, si non $(x *_{\mathcal{T}} y)$, il faut $x \succ_{\mathcal{T}} y$, et cette dernière condition suffit à traduire que « $\mathcal{T}$ est plus proche de $R$ que $\mathcal{S}$ » indépendamment de la position de $\mathcal{S}$ sur $\{x, y\}$.

Nous venons de voir que la traduction de « $\mathcal{T}$ est plus proche de $R$ que $\mathcal{S}$ » inspirée de la deuxième condition de proximité est bien :

$$(x \succ_R y) \Rightarrow \begin{cases} \text{si } (x *_{\mathcal{T}} y)\text{, alors } (y \succ_{\mathcal{S}} x) \\ \text{sinon, alors } x \succ_{\mathcal{T}} y \end{cases}$$

Formalisons maintenant la première condition de proximité. Il s'agit du cas où $i$ est indifférent sur $\{x, y\}$. Elle affirme alors que pour $i$, il est préférable que la société ne compare pas $x$ et $y$. L'exigence $x *_{\mathcal{T}} y$ oblige, quand il y a non coïncidence de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ sur $\{x, y\}$ et vue leur asymétrie, qu'on soit ramené pour $\mathcal{S}$ à $x \succ_{\mathcal{S}} y$ ou $y \succ_{\mathcal{S}} x$. Cette comparaison stricte place $\mathcal{S}$ plus loin que $\mathcal{T}$ de $R$. Donc, la première condition de proximité se formalise par :

$$(x \sim_R y) \Rightarrow (x *_{\mathcal{T}} y)$$

Pour conclure, intruduisons une notation destinée à traduire le fait que $\mathcal{T}$ est plus proche de $R$ que $\mathcal{S}$ au sens des deux conditions de proximité :

NOTATION 4.1 *Soient $\mathcal{S} \in \mathcal{B}$, $\mathcal{T} \in \mathcal{B}$ asymétriques, et $R \in \mathcal{U}$. On écrit $[R, \mathcal{T}, \mathcal{S}]$ si $\forall x, y \in A$ tels que $\mathcal{T}$ et $\mathcal{S}$ ne coïncident pas sur $\{x, y\}$,*

*1)* $(x \succ_R y) \Rightarrow \begin{cases} si\ (x *_{\mathcal{T}} y),\ alors\ (y \succ_{\mathcal{S}} x) \\ sinon,\ alors\ x \succ_{\mathcal{T}} y \end{cases}$

*2)* $(x \sim_R y) \Rightarrow (x *_{\mathcal{T}} y)$

En résumé, écrire que $[R, \mathcal{T}, \mathcal{S}]$ revient à affirmer que si $\mathcal{T}$ et $\mathcal{S}$ ne coïncident pas sur une paire $\{x, y\}$, on a :

- si $x \succ_R y$, alors soit $(x *_{\mathcal{T}} y)$ et $(y \succ_{\mathcal{S}} x)$, soit $x \succ_{\mathcal{T}} y$.
- si $(x \sim_R y)$, alors $(x *_{\mathcal{T}} y)$.

Notons $\mathcal{B}_{as}$ l'ensemble des $\mathcal{S} \in \mathcal{B}$ asymétriques. Rappelons que si $\mathcal{S} \in \mathcal{B}$, $\succ_{\mathcal{S}} \in \mathcal{B}_{as}$ est la partie stricte de $\mathcal{S}$ (Notation 2.1). Si $\mathcal{T} \in \mathcal{B}$ et $\mathcal{S} \in \mathcal{B}$, nous écrivons $\mathcal{S} \equiv \mathcal{T}$ si $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ sont identiques (c-à-d coïncident sur toute paire de candidats).
Si $\mathcal{T} \in \mathcal{B}$, l'opposé de $\mathcal{T}$ est $\mathcal{T}_{opp} \in \mathcal{B}$ défini par :

$$\forall x \in A, \forall y \in A,\ (x, y) \in \mathcal{T}_{opp} \Leftrightarrow (y, x) \in \mathcal{T}$$

Il est évident que si $R \in \mathcal{U}$ et $\mathcal{T} \in \mathcal{B}_{as}$, alors on a toujours $[R, \mathcal{T}, \mathcal{T}]$. Voici d'autres exemples de $R$, $\mathcal{T}$, et $\mathcal{S}$ tels qu'on a $[R, \mathcal{T}, \mathcal{S}]$ :

EXEMPLE 4.2 *On montre que* $\forall\ R \in \mathcal{U}, \forall \mathcal{S} \in \mathcal{B}$,

1) $[R, R \cap \mathcal{S}, \mathcal{S}]$, $[R, \mathcal{S}, R_{opp} \cap \mathcal{S}]$, $[R, \succ_R, \mathcal{S}]$ et $[R, \mathcal{S}, \succ_{R_{opp}}]$
2) $[R, \mathcal{S}, \succ_R] \Rightarrow (\mathcal{S} \equiv \succ_R)$
3) $[R, \succ_{R_{opp}}, \mathcal{S}] \Rightarrow (\mathcal{S} \equiv \succ_{R_{opp}})$

Définissons maintenant le fait pour une distance $d$ de se conformer à l'acception de "$\mathcal{T}$ est plus proche de $R$ que $\mathcal{S}$" formalisée ci-dessus par la notation $[R, \mathcal{T}, \mathcal{S}]$.

DÉFINITION 4.5 *Soit $\mathcal{K} \subset \mathcal{U}$. On dit que $d$, distance sur $\mathcal{B}$, est compatible avec les conditions de proximité sur $\mathcal{K}$ (ou en plus bref, $d$ est compatible sur $\mathcal{K}$) si $|\mathcal{K}| \geq 2$ et si pour tous $\mathcal{S} \in \mathcal{B}$, $\mathcal{T} \in \mathcal{B}$ asymétriques et $R \in \mathcal{K}$,*

$$[R, \mathcal{T}, \mathcal{S}] \Rightarrow [d(R, \mathcal{T}) \leq d(R, \mathcal{S})]$$

On constate à partir de l'exemple 4.1 que $d_{sym}$ n'est pas compatible sur $\mathcal{U}$. Mais, nous verrons que $d_{sym}$ l'est sur l'ensemble des ordres totaux $\mathcal{L}$.

THÉORÈME 4.6 *On suppose que le domaine des préférences individuelles est $\mathcal{K} \subset \mathcal{U}$ tel que $\mathcal{L} \cap \mathcal{K} \neq \emptyset$, et la procédure d'agrégation est $f = D_{\mathcal{W}}$. Si la distance $d$ est compatible sur $\mathcal{K}$, alors $\geq_P$ coïncide avec $\geq_T$.*

*Démonstration* :
Supposons que $d$ est compatible. On a ($i \geq_P j$ implique $i \geq_T j$) (Proposition 4.1.). Il reste à montrer que ($i \geq_T j$ implique $i \geq_P j$).

Si $i \geq_T j$, soient $R \in \mathcal{K}$ et $R^N \in \mathcal{K}^N$ tel que $R^i = R^j$. Nous allons montrer que $d\left(R, D_{\mathcal{W}}(R^{N\setminus i}, R)\right) \leq d\left(R, D_{\mathcal{W}}(R^{N\setminus j}, R)\right)$. Pour cela, il suffit de montrer qu'on a $\left[R, D_{\mathcal{W}}(R^{N\setminus i}, R), D_{\mathcal{W}}(R^{N\setminus j}, R)\right]$, car $d$ est compatible. Soient $x$, $y \in A$ tels que :

$$D_{\mathcal{W}}(R^{N\setminus i}, R) \text{ et } D_{\mathcal{W}}(R^{N\setminus j}, R) \text{ ne coïncident pas sur } \{x, y\} \qquad \text{(a)}$$

(a) entraîne que $R$ et $R^i$ ne coïncident pas sur $\{x, y\}$. Soit $K_1 = \{k \in N\setminus \{i, j\} / x \succ_{R^k} y\}$ et $K_2 = \{k \in N\setminus \{i, j\} / y \succ_{R^k} x\}$. Nous allons montrer que $K_1 \notin \mathcal{W}$ et $K_2 \notin \mathcal{W}$. En effet, si $K_1 \in \mathcal{W}$, alors $xD_{\mathcal{W}}(R^{N\setminus j}, R)y$ via $K_1$ et $xD_{\mathcal{W}}(R^{N\setminus i}, R)y$ via $K_1$, contradiction à cause de (a). De même, $K_2 \notin \mathcal{W}$. Deux cas à distinguer : $x \succ_R y$, et $x \sim_R y$.

A) Si $x \succ_R y$ : alors on a $x \sim_{R^i} y$ ou $y \succ_{R^i} x$.

A1) Si $x \sim_{R^i} y$, montrons que $xD_{\mathcal{W}}(R^{N\setminus i}, R)y$ :

Si non, on a soit $yD_{\mathcal{W}}(R^{N\setminus i}, R)x$, soit $x *_{D_{\mathcal{W}}(R^{N\setminus i},R)} y$. Or, $yD_{\mathcal{W}}(R^{N\setminus i}, R)x$ est impossible car dans $(R^{N\setminus i}, R)$, $\{k \in N/y \succ_k x\} = K_2 \notin \mathcal{W}$. Donc, $x *_{D_{\mathcal{W}}(R^{N\setminus i},R)} y$. De (a), on déduit que soit $xD_{\mathcal{W}}(R^{N\setminus j}, R)y$, soit $yD_{\mathcal{W}}(R^{N\setminus j}, R)x$. Mais, on a $xD_{\mathcal{W}}(R^{N\setminus j}, R)y$ et $yD_{\mathcal{W}}(R^{N\setminus j}, R)x$, d'où on a respectivement :

$$\begin{array}{l} i)\ K_1 \cup \{j\} \in \mathcal{W} \\ ii)\ K_2 \cup \{j\} \in \mathcal{W} \end{array}$$

Du fait que $i \geq_T j$, $i$) entraîne d'abord $K_1 \cup \{i\} \in \mathcal{W}$, et s'ensuit la contradiction $xD_{\mathcal{W}}(R^{N\setminus i}, R)y$, et $ii$) entraîne d'abord $K_2 \cup \{i\} \in \mathcal{W}$, et s'ensuit la contradiction $yD_{\mathcal{W}}(R^{N\setminus i}, R)x$. Donc, $(x \succ_R y)$ et $(x \sim_{R^i} y) \Rightarrow xD_{\mathcal{W}}(R^{N\setminus i}, R)y$.

A2) Si $y \succ_{R^i} x$, supposons que non$\left(xD_{\mathcal{W}}(R^{N\setminus i}, R)y\right)$. Nous allons montrer que $x *_{D_{\mathcal{W}}(R^{N\setminus i},R)} y$ et $yD_{\mathcal{W}}(R^{N\setminus j}, R)x$ :

i) non$\left(x *_{D_{\mathcal{W}}(R^{N\setminus i},R)} y\right)$ implique $\left(yD_{\mathcal{W}}(R^{N\setminus i}, R)x\right)$. Mais, dans $(R^{N\setminus i}, R)$, $\{k \in N/y \succ_k x\} = K_2 \cup \{j\}$. Donc, $K_2 \cup \{j\} \in \mathcal{W}$, entraînant $K_2 \cup \{i\} \in \mathcal{W}$ car $i \geq_T j$. Mais, $K_2 \cup \{i\} \in \mathcal{W}$ implique $yD_{\mathcal{W}}(R^{N\setminus j}, R)x$, car dans $(R^{N\setminus j}, R)$, $\{k \in N/y \succ_k x\} = K_2 \cup \{i\}$. Il y a contradiction avec (a), donc $x *_{D_{\mathcal{W}}(R^{N\setminus i},R)} y$.

ii) Supposons que non$(yD_{\mathcal{W}}(R^{N\setminus j}, R)x)$ : alors, (a) et $x *_{D_{\mathcal{W}}(R^{N\setminus i},R)} y$ impliquent $xD_{\mathcal{W}}(R^{N\setminus j}, R)y$. Mais dans $(R^{N\setminus j}, R)$, $\{k \in N/x \succ_k y\} = K_1 \cup \{j\}$. Donc, $K_1 \cup \{j\} \in \mathcal{W}$, d'où $K_1 \cup \{i\}$. Alors, $xD_{\mathcal{W}}(R^{N\setminus i}, R)y$ contredisant (a). Ainsi, $yD_{\mathcal{W}}(R^{N\setminus j}, R)x$.

B) Si $x \sim_R y$ : alors on a $x \succ_{R^i} y$ ou $y \succ_{R^i} x$. Sans nuire à la généralité, supposons que $x \succ_{R^i} y$. Nous voulons montrer que $x *_{D_{\mathcal{W}}(R^{N\setminus i},R)} y$. Dans $(R^{N\setminus i}, R)$, $\{k \in N/y \succ_k x\} = K_2 \notin \mathcal{W}$, donc non$(yD_{\mathcal{W}}(R^{N\setminus i}, R)x)$. Si $xD_{\mathcal{W}}(R^{N\setminus i}, R)y$, dans $(R^{N\setminus i}, R)$, on a $\{k \in N/x \succ_k y\} = K_1 \cup \{j\} \in \mathcal{W}$. Or, $K_1 \cup \{j\} \in \mathcal{W}$ implique que $K_1 \cup \{i\} \in \mathcal{W}$. Il s'ensuit que $xD_{\mathcal{W}}(R^{N\setminus j}, R)y$ car dans $(R^{N\setminus j}, R)$, $\{k \in N/x \succ_k y\} = K_1 \cup \{i\}$, ce qui contredit (a). Donc, $x *_{D_{\mathcal{W}}(R^{N\setminus i},R)} y$. ■

Le théorème ci-dessus affirme que si l'insatisfaction est mesurée au moyen d'une distance $d$ compatible et si les préférences individuelles sont quelconques (dans $\mathcal{K} \subset \mathcal{U}$ tel que $\mathcal{L} \cap \mathcal{K} \neq \emptyset$), alors la relation d'influence de Taylor mesure bien la capacité du votant à influencer le résultat du vote représenté par $f\left(R^N\right) = D_{\mathcal{W}}\left(R^N\right)$.

Nous allons maintenant comparer les notions de pouvoir de Shapley-Shubik et de Banzhaf-Coleman avec la relation de puissance lorsque la distance $d$ est compatible. Nous avons montré dans [Diffo Lambo, Moulen, 2002] que le préordre de Shapley-Shubik $\geq_S$ et le préordre de Banzhaf-Coleman $\geq_B$ sont des sous-préordres de $\geq_T$. Rappelons le théorème suivant démontré dans [Diffo Lambo, Moulen, 2002].

THÉORÈME 4.7 (d'équivalence ordinale). *Le préordre $\geq_T$ coïncide avec le préordre $\geq_S$ (respectivement $\geq_B$) si et seulement si le jeu simple est $\pi$-robuste.*

Dans cet énoncé, (respectivement $\geq_B$) rappelle que $\geq_T$ et $\geq_S$ coïncident si et seulement si $\geq_T$ et $\geq_B$ coïncident.

Nous déduisons le résultat suivant :

COROLLAIRE 4.8 *On suppose que $\mathcal{K} \subset \mathcal{U}$* est tel que $\mathcal{L} \cap \mathcal{K} \neq \emptyset$, *$d$ est compatible sur $\mathcal{K}$* et $f = D_{\mathcal{W}}$. *Si $i$ et $j$ sont deux joueurs,*

(1)

i) $i \geq_P j$ implique $i \geq_S j$.

i) $i \geq_P j$ implique $i \geq_B j$.

(2)

a) Si si le jeu est $\pi$-robuste, $i \geq_S j$ équivaut à $i \geq_B j$.

b) $i \geq_P j$ équivaut à $i \geq_S j$ si et seulement si le jeu est $\pi$-robuste.

Nous avons déjà vu que $d_{sym}$ n'est pas compatible sur $\mathcal{U}$. Pour voir que $d_{sym}$ l'est sur $\mathcal{L}$, notons que si $R \in \mathcal{L}$, si $\mathcal{T}$ et $\mathcal{S} \in \mathcal{B}$ sont asymétriques, si $[R, \mathcal{T}, \mathcal{S}]$ et si $(x, y) \in A^2$, alors on a $x \succ_R y$ ou $y \succ_R x$ (et pas $x \sim_R y$). De $[R, \mathcal{T}, \mathcal{S}]$, on déduit, vu 1), de la notation 4.3., que :

$$[R \text{ et } \mathcal{T} \text{ en désaccord sur } (x,y)] \Rightarrow [R \text{ et } \mathcal{S} \text{ en désaccord sur } (x,y)]$$

On déduit que $d_{sym}(R, \mathcal{T}) \leq d_{sym}(R, \mathcal{S})$. Donc, le théorème 3.1 et le corollaire 3.4 de [Diffo Lambo, Moulen, 2000] obtenus pour les profils d'ordres totaux sont des cas particuliers respectifs du théorème 4.6 et du corollaire 4.8 ci-dessus.

Nous allons terminer cette section par le traîtement de $\geq_P$ pour une distance $d$ trouvée dans la littérature, et qui est telle que pour tout $\mathcal{K} \subset \mathcal{U}$ avec $|\mathcal{K}| \geq 2$, $d$ est compatible sur $\mathcal{K}$.

Dans [Moulen, Diffo Lambo, 2001] a été mentionnée la distance $d_1$ sur $\mathcal{B}$ que nous rappelons ci-après.

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{Q} \in \mathcal{B}$. A chaque $\{x, y\} \in \mathcal{P}^2(A)$ où $\mathcal{P}^2(A)$ est l'ensemble des $M \subset A$ tels que $|M| = 2$, associons d'abord $m_{xy}(\mathcal{R}, \mathcal{Q}) \in \mathbb{R}^+$ de la manière suivante :

i) Si $\mathcal{R}$ et $\mathcal{Q}$ coïncident sur $\{x, y\}$, $m_{xy}(\mathcal{R}, \mathcal{Q}) = 0$.

ii) $\forall \{x, y\} \in \mathcal{P}^2(A)$, $m_{xy}(\mathcal{R}, \mathcal{Q}) = m_{yx}(\mathcal{R}, \mathcal{Q})$.

iii) La définition de $m_{xy}(\mathcal{R}, \mathcal{Q})$ est complétée par le tableau suivant :

| $\mathcal{R}$ | $\mathcal{Q}$ | $m_{xy}(\mathcal{R}, \mathcal{Q})$ |
|---|---|---|
| $x \succ_{\mathcal{R}} y$ | $y \succ_{\mathcal{Q}} x$ | $1$ |
| | $x \sim_{\mathcal{Q}} y$ | $0,5$ |
| | $x *_{\mathcal{Q}} y$ | $0,5$ |
| $x *_{\mathcal{R}} y$ | $x \sim_{\mathcal{Q}} y$ | $0,25$ |

iv) On pose $d_1(\mathcal{R}, \mathcal{Q}) = \Sigma_{\{x,y\} \in \mathcal{P}^2(A)} m_{xy}(\mathcal{R}, \mathcal{Q})$.

PROPOSITION 4.9 *Soit* $\mathcal{K} \subset \mathcal{U}$ *tel que* $|\mathcal{K}| \geq 2$ et $\mathcal{L} \cap \mathcal{K} \neq \emptyset$. *On suppose que* $d = d_1$ *et* $f = D_{\mathcal{W}}$. *Alors,* $\geq_P$ *coïncide avec* $\geq_T$, *c'est-à-dire que* $\forall i, j \in N$, $i \geq_{Pf,d_1/\mathcal{K}} j \Leftrightarrow i \geq_T j$

*Démonstration* :
Vu le théorème 4.6, il suffit de montrer que $d_1$ est compatible sur $\mathcal{K}$.

Soient $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T} \in \mathcal{B}$ asymétriques, et soit $R \in \mathcal{K}$ tel qu'on ait $[R, \mathcal{T}, \mathcal{S}]$. Il faut montrer que $d_1(R, \mathcal{T}) \leq d_1(R, \mathcal{S})$. Soit :

$\times = \{\{x, y\} \in \mathcal{P}^2(A) / \mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ coïncident sur $\{x, y\}\}$
$\Psi_1 = \{\{x, y\} \in \mathcal{P}^2(A) / \mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ ne coïncident pas sur $\{x, y\}$ et $x \succ_R y\}$
$\Psi_2 = \{\{x, y\} \in \mathcal{P}^2(A) / \mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ ne coïncident pas sur $\{x, y\}$ et $x \sim_R y\}$

Alors, $\times$, $\Psi_1$ et $\Psi_2$ constituent une partition de $\mathcal{P}^2(A)$.

Or, si $\{x, y\} \in \times$, $m_{xy}(R, \mathcal{T}) = m_{xy}(R, \mathcal{S})$. Si $\{x, y\} \in \Psi_1$, soit $x \succ_{\mathcal{T}} y$, alors $m_{xy}(R, \mathcal{T}) = 0$, soit $(x *_{\mathcal{T}} y)$ et $(y \succ_{\mathcal{S}} x)$, alors $m_{xy}(R, \mathcal{T}) = 0,5$ et $m_{xy}(R, \mathcal{S}) = 1$. Si $\{x, y\} \in \Psi_2$, alors $m_{xy}(R, \mathcal{T}) = 0,25$ et (vu que $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ ne coïncident pas sur $\{x, y\}$) $m_{xy}(R, \mathcal{S}) = 0,5$. On déduit que $\forall \{x, y\} \in \mathcal{P}^2(A)$, $m_{xy}(R, \mathcal{T}) \leq m_{xy}(R, \mathcal{S})$, d'où $d_1(R, \mathcal{T}) \leq d_1(R, \mathcal{S})$. ■

## 5. RELATION DE PUISSANCE ET ENSEMBLE DE STABILITÉ

Le problème de savoir si la relation d'influence $\geq_T$ mesure effectivement la capacité à influencer le résultat du vote lorsque les préférences individuelles sont des ordres totaux a également été résolu dans [Diffo Lambo, Moulen, 2000] en supposant que le résultat du vote est représenté par une notion de solution du jeu, cette notion de solution étant tour à tour, le coeur classique $\mathcal{C}(\mathcal{W}, R^N)$ ou l'ensemble de stabilité $\mathcal{S}(\mathcal{W}, R^N)$. Pour nous fixer les idées, commençons par le cœur classique. Soit à comparer deux votants $i$ et $j$ en examinant les conséquences de leur changement d'avis de $R^i = R^j$ au nouvel avis $R$. Les cœurs après changement d'avis respectifs sont $\mathcal{C}(\mathcal{W}, (R^{N \backslash i}, R))$ et $\mathcal{C}(\mathcal{W}, (R^{N \backslash j}, R))$. En l'absence d'un concept « de distance entre $R$ et $\mathcal{C}(\mathcal{W}, (R^{N \backslash i}, R))$ », l'approche consiste en l'examen du motif d'expulsion d'un candidat $a$ (*i.e.* tel que $a \in \mathcal{C}(\mathcal{W}, (R^{N \backslash i}, R))$ et $a \notin \mathcal{C}(\mathcal{W}, (R^{N \backslash j}, R)))$, et du motif d'admission d'un candidat $a$ (*i.e.* tel que $a \notin \mathcal{C}(\mathcal{W}, (R^{N \backslash i}, R))$ et $a \in \mathcal{C}(\mathcal{W}, (R^{N \backslash j}, R)))$. Lorsque les préférences individuelles sont des préordres totaux (i.e. $\mathcal{K} = \mathcal{U}$), les résultats obtenus pour le coeur classique dans [Diffo Lambo, Moulen, 2000] demeurent vrais après une transposition appropriée. Les démonstrations, qui se transposent facilement, n'ont pas été reprises. Ces résultats sont les suivants :

PROPOSITION 5.1 *Soient $G = (N, A, \mathcal{W})$ un jeu simple propre monotone, et $i$ et $j$ deux joueurs Alors, (i), (ii) et (iii) suivants sont équivalents* :

(i) $i \geq_T j$,

(ii) $\forall\, R^N \in \mathcal{U}^N$ avec $R^i = R^j$, $\forall\, a \in \mathcal{C}(\mathcal{W}, \left(R^{N\setminus i}, R\right))$, $\forall\, S \subset N$,
$[a$ dominé dans $(N, \mathcal{W}, A, \left(R^{N\setminus j}, R\right))$ via $S] \Rightarrow i \in S$ et

(iii) $\forall\, R^N \in \mathcal{U}^N$ avec $R^i = R^j$, $\forall\, a \in \mathcal{C}(\mathcal{W}, \left(R^{N\setminus j}, R\right))$, $\forall\, S \subset N$,
$[a$ dominé dans $(N, \mathcal{W}, A, \left(R^{N\setminus i}, R\right))$ via $S] \Rightarrow i \in S$.

(ii) signifie que toute expulsion de candidat est opérée avec la collaboration de $i$, et (iii) signifie que tout candidat admis n'était maintenu hors du coeur classique qu'avec la collaboration de $i$. La proposition affirme que (ii) et (iii) sont équivalents à $i \geq_T j$, donc $\geq_T$ mesure bien la capacité à influencer le résultat du vote, dans le sens exprimé par (ii) ou (iii).

Il nous reste maintenant à supposer que le résultat du vote est représenté par l'ensemble de stabilité (définition rappelée plus bas).

Si $R^N$ est un profil de préordres totaux sous-entendu sans risque de confusion, $a$ et $b$ deux candidats et $S$ une coalition, la notation $b \succ_S a$ (respectivement $b \succcurlyeq_S a$) signifie que $\forall i \in S$, $b \succ_{R^i} a$ (respectivement $\forall i \in S$, $b \succcurlyeq_{R^i} a$)

Rappelons que si $R^N$ est un profil, l'ensemble de stabilité de Rubinstein est le sous-ensemble $\mathcal{S}(\mathcal{W}, R^N)$ de $A$ défini par :

DÉFINITION 5.2 *Soit $(N, A, \mathcal{W})$ un jeu simple et $R^N \in \mathcal{U}^N$.*

1) Si $x$, $y \in A$, et $S \in \mathcal{W}$, $xd^{\mathcal{S}}(R^N)y$ via $S$ (se lit $x$ domine $y$ via $S$ au sens de l'ensemble de stabilité) si :

$x \succ_S y$ et $\forall z \in A$, $\forall L \in \mathcal{W}$, $(\ z \succ_L x) \Rightarrow (\ z \succcurlyeq_S y)$.

2) $\forall a \in A$, $a \in \mathcal{S}(\mathcal{W}, R^N) \Leftrightarrow \forall x \in A$, $\forall S \in \mathcal{W}$, non$[xd^{\mathcal{S}}(R^N)a$ via $S]$

Si $i$ et $j$ sont deux joueurs et $S$ une coalition, on note $T(S)$ la coalition définie par $T(S) = S$ si $j \notin S$ et $T(S) = [S \setminus \{j\}] \cup \{i\}$ si $j \in S$.

$b\Pi^S a$ signifie que $\forall x \in A \setminus \{a, b\}, b \succ_S a \succ_S x$

Rappelons le lemme ci-dessous démontré dans [Diffo Lambo, Moulen, 2000].

LEMME 5.3 *Soient $G = (N, A, \mathcal{W})$ un jeu simple propre et monotone, $a$ et $b$ deux candidats. Pour toute coalition $S$, on a* :

$[S \in \mathcal{W}] \Leftrightarrow [\forall R^N \in \mathcal{U}^N,\, b\Pi^S a \Rightarrow a \notin \mathcal{S}(\mathcal{W}, R^N)]$

*Remarque.* $S \in \mathcal{W} \Rightarrow [\forall R^N \in \mathcal{U}^N,\, b\Pi^S a \Rightarrow bd^{\mathcal{S}}(R^N)a$ via $S]$.

La proposition ci-dessous et son corollaire sont de pures transpositions de la proposition 4.8 et du corollaire 4.9 énoncés dans [Diffo Lambo, Moulen, 2000]. La démonstration a également été omise.

PROPOSITION 5.4 *Soient* $G = (N, A, \mathcal{W})$ *un jeu simple propre monotone,* $i$ *et* $j$ *deux candidats. Il y a équivalence entre (i) et (ii) suivants* :

i) $i \geq_T j$

ii) $\forall R^N \in \mathcal{U}^N / R^i = R^j$, $\forall R \in \mathcal{U}$, $\forall a \in \mathcal{S}(\mathcal{W}, (R^{N-i}, R))$, $\forall S \in \mathcal{W}$, $\forall b \in A$, $[bd^{\mathcal{S}}(R^{N-j}, R)a$ via $S]$ implique :

1) Soit $i \in S$

2) Soit on a simultanément :

a) $T(S) \in \mathcal{W}$,

b) $b \succ_{T(S)} a$ pour le profil $(R^{N-i}, R)$

c) $\forall L \in \mathcal{W}$, $\forall z \in A$, $[z \succ_L b$ et non$(z \not\succ_{T(S)} a)$ pour $(R^{N-i}, R)] \Rightarrow i \in L$.

COROLLAIRE 5.5 *Soient* $G$ *un jeu simple propre et monotone,* $i$ *et* $j$ *deux candidats. Il y a équivalence entre (i) et (ii) suivants* :

i) $i \geq_T j$

ii) $\forall R^N \in \mathcal{U}^N / R^i = R^j$, $\forall R \in \mathcal{U}$, $\forall a \in \mathcal{S}(\mathcal{W}, (R^{N-j}, R))$, $\forall S \in \mathcal{W}$, $\forall b \in A$, $[bd^{\mathcal{S}}(R^{N-i}, R)a$ via $S]$ implique :

1) Soit $i \in S$

2) Soit on a simultanément :

a) $T(S) \in \mathcal{W}$,

b) $b \succ_{T(S)} a$ pour le profil $(R^{N-i}, R)$

c) $\forall L \in \mathcal{W}$, $\forall z \in A$, $[z \succ_L b$ et non$(z \not\succ_{T(S)} a)$ pour $(R^{N-j}, R)] \Rightarrow i \in L$.

L'interprétation, qui avait besoin d'être transposée, se présente comme suit :

*Interprétation.* L'interprétation sera conduite selon A), B) et C) suivants :

A) La condition nécessaire et suffisante pour $i \geq_T j$ donnée par la Proposition 5.4 et le Corollaire 5.5 de la manière suivante : dans le passage de $(R^{N-i}, R)$ (changement d'avis de $i$) à $(R^{N-j}, R)$ (changement d'avis de $j$), l'exclusion et l'admission d'un candidat dans l'ensemble de stabilité obéissent aux impératifs suivants.

i) $a$ n'est exclu de l'ensemble de stabilité que soit avec la participation de $i$, soit parce que la présence de $a$ dans l'ensemble de stabilité était due à la capacité de $i$ de dissuader la coalition gagnante $T(S)$ de l'en écarter.

ii) $a$ n'y est admis que soit parce qu'il ne pouvait pas en être exclu sans la participation de $i$, soit parce que cette admission est due à la capacité de $i$ de dissuader la coalition gagnante $T(S)$ de l'en écarter.

B) Pour mieux comprendre en quoi ces résultats expriment que $i$ est au moins aussi apte que $j$ à contrôler la formation de l'ensemble de stabilité, reportons-nous à la Proposition 5. et examinons-y la conclusion de l'implication (ii), laquelle comporte deux points 1) et 2).

Le point 1) signifie que $a$ est expulsé de $\mathcal{S}(\mathcal{W}, (R^{N-i}, R))$ avec la participation de $i$, opération que $j$, avec la même préférence, n'est pas parvenu à réaliser dans le cadre du profil $(R^{N-j}, R)$.

Si 1) est faux, 2) concerne le cas où $a$ est expulsé de $\mathcal{S}(\mathcal{W}, (R^{N-i}, R))$ sans la participation de $i$. Ce point signifie, au vu de a), b) et c), que $T(S)$ est une coalition gagnante qui était déjà désireuse d'expulser $a$ de $\mathcal{S}(\mathcal{W},(R^{N-j},R))$ et de proposer $b$. Seul $i$ dissuadait $T(S)$, menaçant de se coaliser avec $L$ pour une déviation à partir de $b$ vers un candidat $z$ que certains membres de $T(S)$ trouvent plus mauvais que $a$. Donc la présence de $a$ dans $\mathcal{S}(\mathcal{W},(R^{N-j},R))$ était imposée par $i$. La supériorité de $i$ sur $j$ provient du fait que $j$, qui a hérité de la même préférence, ne peut rien contre la présence de $a$ dans $\mathcal{S}(\mathcal{W},(R^{N-i},R))$.

## 6. CONCLUSION

Les théories de pouvoir classiques (celles de Shapley-Shubik, de Banzhaf-Coleman et de Taylor par exemple) sont basées sur l'analyse de la présence du votant au sein des coalitions gagnantes. La relation de puissance $\geq_P$ insiste plutôt sur la nécessité d'analyser la capacité de ce votant à influencer le résultat du vote. Alors, s'impose évidemment la nécessité de prendre en compte le mode de choix du résultat du vote. Ce mode, représenté dans ce travail par une procédure d'agrégation $f$, intègre :

1) la prise en compte des préférences individuelles. Il est naturel de concevoir que le domaine $\mathcal{K}$ de ces préférences individuelles influence le pouvoir électoral. En effet, dans l'exemple où $\mathcal{K}=\{R\}$, $R$ étant un ordre total sur l'ensemble des candidats, nous avons vu que pour $\geq_P$, tous les joueurs sont équivalents dans leur impuissance. Le jeu simple pouvant être quelconque, la relation d'influence et les indices de pouvoir de Shapley-Shubik afficheront au gré des propriétés de ce jeu des mesures de pouvoir qui ne traduisent manifestement pas la capacité à influencer le résultat du vote.

2) la prise en compte du comportement des électeurs dans les cas où $f$ est la dominance classique ou toute autre relation de dominance.

Nous voyons sur l'exemple sus-cité en 1) qu'une divergence entre $\geq_P$ et $\geq_T$ peut être la manifestation d'un dysfonctionnement réel de la société dont $\geq_T$ ne rend pas compte. Ici, le dysfonctionnement provient de $\mathcal{K}$, mais des exemples fondés sur un « mauvais »choix de la procédure d'agrégation $f$ ou de la distance $d$ peuvent être exhibés.

La relation de puissance nous semble intuitivement justifiée. Elle est cependant handicapée, comme instrument de mesure de pouvoir individuel, par les calculs a priori fastidieux. Toutefois, la relation de puissance ne se pose comme un substitut à l'une quelconque des théories classiques qu'en cas de non coïncidence avec elle. Grâce au domaine des préférences individuelles $\mathcal{K}$, à la mesure de l'insatisfaction (formalisée ici par une distance $d$) et au mode de choix de l'élu, $\geq_P$ peut être ajusté pour cerner au mieux tel ou tel contexte social précis. La relation de puissance fournit donc *un test de sélection de la bonne théorie de pouvoir classique* (disons « $\geq_P$ −test ») si on désire mesurer la capacité à influencer le résultat du vote.

L'application du $\geq_P$ −test à la relation d'influence a engendré notamment le théorème 4.6, la proposition 4.9 et le corollaire 4.8. Ces résultats mettent en évidence une condition de compatibilité de la distance $d$, condition suffisante pour que la relation d'influence mesure la capacité individuelle à influencer la dominance classique du jeu. La distance $d_{sym}$ est un exemple de distance compatible lorsque les préférences individuelles sont des ordres totaux, mais non compatible lorsque les préférences individuelles sont des préordres totaux. La distance $d_1$ est compatible quel que soit le domaine $\mathcal{K}$ des préférences individuelles vérifiant $|\mathcal{K}| \geq 2$.

La nécessité s'impose de poursuivre les recherches en vue d'appliquer le $\geq_P$ −test à d'autres théories de pouvoir et à d'autres contextes sociaux (par exemple, en variant la procédure d'agrégation $f$). Il importe également de constituer un « recueil »de distances $d$, autres que $d_{sym}$ et $d_1$, intuitivement intéressantes en vue de divers ajustements de $\geq_P$.

*Remerciements.* Merci aux deux rapporteurs anonymes pour leur contribution à l'amélioration de la rédaction. Le papier a également bénéficié des commentaires et suggestions du Professeur Nicolas Gabriel Andjiga de l'École Normale Supérieure de Yaoundé.

## BIBLIOGRAPHIE

ALLINGHAM M.G., « Economic Power and Values of Games », *Zeitschrift für Nationalökonomie*, 35, 1975, p. 293-299.

DIFFO LAMBO L., MOULEN J., « Quel pouvoir mesure t-on dans un jeu de vote ? », *Mathématiques et Sciences humaines*, n°152, 2000, p. 27-47.

DIFFO LAMBO L., MOULEN J., « Ordinal equivalence of power notions in voting games », *Theory And Decision* 53, 2002, p. 313-325.

ISBELL J. R., « A class of simple games », *Duke Mathematical Journal* 25, 1958, p. 423-439.

LAPIDOT, « On symmetry-group of games », *Developments in Operations Research*, vol. III, Gordon and Breach, 1971, p. 571-583.

MASHLER M., PELEG B., « A Characterization, Existence proof Dimension bounds for the Kernel of a Game », *Pacific Journal of Mathematics* 18 (2), 1966, p. 289-328.

MOULEN J., DIFFO LAMBO L., *Théorie du vote*, Paris, Hermès Science Publications, 2001.

TAYLOR A. D., ZWICKER W.S., « Weighted voting, Multicameral representation, and Power », *Games and Economic Behavior* 5, 1993, p. 170-181.

TAYLOR A. D., *Mathematics and Politics*, Springer-Verlag, 1995.

TAYLOR A. D., ZWICKER W.S., *Simple Games*, Princeton, New Jersey, Princeton University Press, 1999.