



Mathématiques et sciences humaines

Mathematics and social sciences

178 | Été 2007

Art, mathématiques, langage et émotion

Mathématiques de tradition orale

Orally transmitted mathematics

Marc Chemillier



Édition électronique

URL : <http://journals.openedition.org/msh/4152>

DOI : 10.4000/msh.4152

ISSN : 1950-6821

Éditeur

Centre d'analyse et de mathématique sociales de l'EHESS

Édition imprimée

Date de publication : 1 juillet 2007

Pagination : 11-40

ISSN : 0987-6936

Référence électronique

Marc Chemillier, « Mathématiques de tradition orale », *Mathématiques et sciences humaines* [En ligne], 178 | Été 2007, mis en ligne le 21 septembre 2007, consulté le 19 avril 2019. URL : <http://journals.openedition.org/msh/4152> ; DOI : 10.4000/msh.4152

MATHÉMATIQUES DE TRADITION ORALE

Marc CHEMILLIER¹

RÉSUMÉ – *L'ethnomathématique met en évidence des structures mathématiques dans certaines activités spécialisées de sociétés de tradition orale. L'une des difficultés qui se posent dans cette approche est de mettre en relation ces structures formelles, étudiées « en laboratoire », avec les modes de penser locaux des personnes concernées, telles qu'ils peuvent être observés « sur le terrain ». Cet article expose les difficultés rencontrées à partir de différents exemples : arts visuels, musique, divination. Dans ce dernier cas, on présente les résultats d'enquêtes de terrain à Madagascar qui ont permis d'accéder aux véritables représentations mathématiques autochtones.*

MOTS-CLÉS – Canons musicaux, Cognition, Dessins sur le sable, Ethnomathématique, Géomancie, Rythmes asymétriques

SUMMARY – Orally transmitted mathematics

Ethnomathematics is a new domain studying mathematical structures in particular activities of traditional societies. The main difficulty in this approach is to establish a link between formal structures, studied « in laboratory », and mental representations of native people, as they can be observed during fieldworks. We describe these difficulties in different situations: visual arts, music, divination. In the latter case, we present the results of fieldworks done in Madagascar where mathematical mental representations of native people have been discovered.

KEY-WORDS – Asymmetric rhythms, Cognition, Divination, Ethnomathematics, Musical canon, Sand drawing

INTRODUCTION

L'ethnomathématique s'est développée depuis quelques années, à travers des recherches spécialisées portant sur les propriétés mathématiques de certaines activités pratiquées dans les sociétés de tradition orale. Parmi ces activités, les arts visuels ont occupé une place de choix. Les riches traditions décoratives observées dans de nombreuses régions du monde ont fourni un matériau fascinant pour l'étude de certaines propriétés géométriques (symétrie de figures ornementales) ou topologiques (enchevêtrement de tracés linéaires). La musique est restée en retrait de ce mouvement, alors même qu'elle constitue un réservoir important de propriétés formelles pouvant être exprimées en langage mathématique et étudiées dans ce paradigme. Nous en montrerons deux exemples dans le présent article. Pour ces exemples, comme pour la plupart des travaux menés en ethnomathématique, le traitement mathématique est effectué *a posteriori*, en « laboratoire », à partir de données de terrain recueillies, le plus souvent, de façon indépendante de toute préoccupation mathématique. Il en résulte un fossé important

¹ Groupe de Recherche en Informatique, Image, Automatique et Instrumentation de Caen (GREYC), (UMR 6072), Université de Caen, 14032 Caen, chemilli@free.fr

entre la richesse des propriétés mises en évidence, et la pauvreté des liens établis entre celles-ci et les processus mentaux censés leur avoir donné naissance. Tout se passe comme si les indigènes des sociétés étudiées, à l'instar de Monsieur Jourdain faisant de la prose, faisaient des mathématiques « sans le savoir ». Les exemples que nous présentons dans la première partie de cet article (dessins sur le sable, rythmes asymétriques africains, formules de harpe nzakara) témoignent de cette difficulté.

Dans la deuxième partie, nous présentons les résultats d'une recherche sur les aspects algébriques de la divination à Madagascar². La particularité de cette recherche est précisément d'associer, de façon étroite, l'analyse mathématique et l'enquête de terrain. Les résultats rassemblés ici ne concernent que le versant mathématique de la question, dont nous nous efforçons de présenter un exposé synthétique, mais en respectant la condition selon laquelle aucune propriété n'est énoncée si elle n'est pas reliée d'une manière ou d'une autre à des conceptions réellement attestées chez les autochtones. Le versant ethnographique et cognitif, c'est-à-dire la description des méthodes employées sur le terrain pour accéder aux mécanismes mentaux qui « incarnent » les différentes propriétés mathématiques étudiées, fait l'objet d'un autre article publié indépendamment [Chemillier *et al.*, 2007]. Dans l'exposé mathématique présenté plus loin, chaque propriété sera reliée à une opération, une procédure, ou un discours réellement observés chez les devins eux-mêmes. De cette manière, l'étude se rapprochera des objectifs implicitement contenus dans le terme « ethnomathématique », qui consistent à établir un pont entre certaines propriétés mathématiques et des modes de penser spécifiques à certaines sociétés de tradition orale³.

1. ETHNOMATHÉMATIQUES « DE LABORATOIRE »

1.1. DESSINS SUR LE SABLE

1.1.1. *Tracés eulériens*

Les dessins sur le sable sont une tradition pratiquée dans plusieurs régions du monde, en particulier au Vanuatu et en Angola. Elle consiste à tracer un sillon sur le sable en respectant une règle, que l'on peut appeler « règle de la ligne continue », et qui s'exprime comme une propriété mathématique : on ne doit pas lever le doigt, ni repasser sur un sillon déjà tracé. De tels tracés sont donc des chemins *eulériens* au sens de la théorie des graphes. L'étude de leurs propriétés a donné lieu à des travaux de référence en ethnomathématique, de Marcia Ascher [Ascher, 1998] pour le Vanuatu et de Paulus Gerdes [Gerdes, 1995] pour l'Angola.

² Financée par l'action concertée incitative « Cognitive » pour la période 2001-2004, cette recherche met en œuvre une approche pluridisciplinaire à la croisée de l'anthropologie, des mathématiques, de l'informatique, et de la psychologie cognitive, associant l'équipe d'intelligence artificielle du GREYC à Caen (CNRS UMR 6072), le laboratoire de psychologie cognitive de Caen (EA 1774) et le laboratoire CNRS UMR 8574 du Musée de l'Homme. Elle est poursuivie en 2004-2007 dans le cadre de l'action concertée incitative « Histoire des savoirs ».

³ Les thèmes abordés dans cet article sont développés, sous une forme moins formalisée, dans le livre *Les Mathématiques naturelles* paru récemment [Chemillier, 2007].

Ces dessins très stylisés ont souvent un caractère figuratif, évoquant un végétal ou un animal [Cabane, 1997]. C'est le cas de la célèbre tortue Vanuatu⁴ représentée Figure 1.

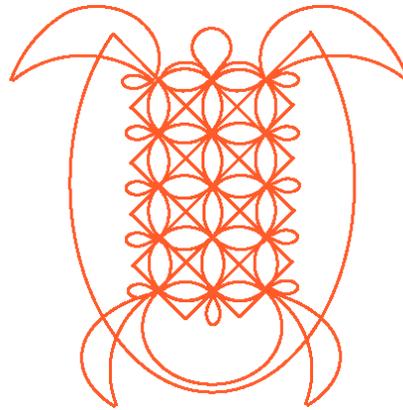


FIGURE 1. Tortue Vanuatu

Mais leur forme tend en général vers l'abstraction avec des tracés parfois très complexes. La difficulté à concevoir de tels tracés invite à penser que les artistes ont développé des techniques spécifiques permettant d'y parvenir.

1.1.2. Algorithme de construction de dessins monolinéaires

L'une de ces techniques pourrait consister à transformer un dessin donné, qui ne vérifie pas la règle de la ligne continue, pour le remplacer par un dessin la vérifiant. On rencontre cette situation dans une famille de dessins angolais étudiés par Paulus Gerdes, dans lesquels le tracé suit une variante de la règle appelée *monolinéarité* (les tracés peuvent se croiser, mais pas se toucher sans croisement). Dans le dessin de gauche Figure 2, on observe que le tracé ne peut recouvrir la totalité du dessin en respectant la règle. La possibilité de recouvrir toute la figure dépend des dimensions du réseau de points sous-jacent (9×7 dans ce cas, c'est-à-dire 9 lignes et 7 colonnes de points principaux, on ne compte pas les points intermédiaires).

Pour les nombres de lignes et de colonnes qui ne permettent pas le tracé complet, il semble que les artistes aient utilisé une transformation qui permet d'obtenir un nouveau dessin ayant la propriété d'être traçable en respectant la règle voulue. Ce nouveau dessin est représenté à droite Figure 2, et la transformation consiste à remplacer, à l'intérieur d'une colonne, tous les croisements par des arcs de cercle. On voit que le résultat peut être tracé intégralement sans violer la règle. Paulus Gerdes présente cette transformation comme un « algorithme » [Gerdes, 1995, p. 205].

⁴ Le compositeur Tom Johnson a composé une pièce pour saxophone contrebasse en suivant le tracé de la tortue (interprétée par Daniel Kientzy sur le CD *Kientzy plays Johnson*, Pogus 21033). Elle a été jouée au Musée des Arts africains et océaniques en octobre 1997 à l'occasion d'une conférence-concert qu'il organisait lors de l'exposition sur les arts du Vanuatu, et dans laquelle les dessins sur le sable étaient présentés.

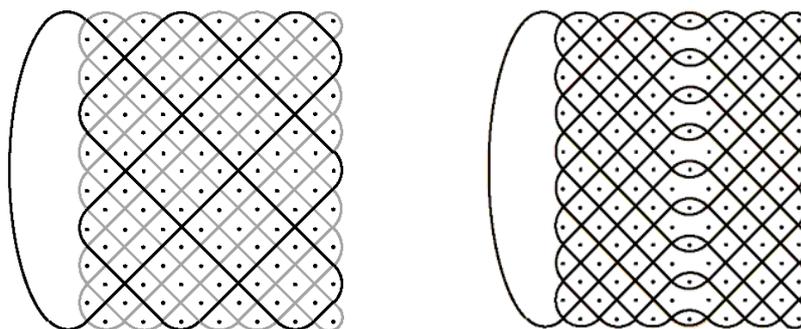


FIGURE 2. Transformation donnant un dessin monolinéaire (Angola)

Cet exemple soulève de nombreuses questions, à la fois sur le plan mathématique et sur le plan cognitif. Sur le plan mathématique, existe-t-il une relation simple entre les nombres de lignes et de colonnes de la figure, et le nombre de courbes nécessaires pour la tracer ? Dans l'exemple étudié, le dessin d'origine est bilinéaire, c'est-à-dire qu'il faut deux courbes pour le tracer. Elles se croisent dans la colonne 4, où a été appliquée la transformation qui élimine les points de croisement, et qui rend le dessin monolinéaire. Mais dans les colonnes 3 et 6, où elles ne se croisent pas, l'application de la transformation est inopérante. La condition de croisement des courbes est donc nécessaire. Dans le cas général, quelles sont les conditions qui caractérisent de façon univoque les colonnes permettant de rendre un dessin monolinéaire quand on leur applique la transformation ? L'étude mathématique de ces dessins, on le voit, laisse encore de nombreuses questions en suspens.

1.1.3. Relation entre les dimensions du dessin et son nombre de courbes

Paulus Gerdes a étudié ce type de questions pour les tracés d'une autre famille de dessins appelés « coq en fuite » [Gerdes, 1995, p. 373].

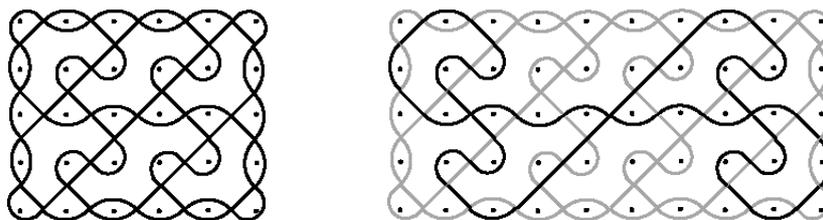


FIGURE 3. Dessin « coq en fuite » monolinéaire à gauche (5 × 6), plurilinéaire à droite (5 × 10)

Dans ces dessins, le réseau de points sous-jacent doit avoir un nombre impair de lignes $2m + 1$, et un nombre pair de colonnes $2n$. Le nombre de courbes nécessaires pour tracer un tel dessin est :

$$f(2m + 1, 2n) = \text{pgcd}(m + 1, n + 1).$$

Ainsi, le dessin angolais (5 × 6) est monolinéaire car $m + 1 = 3$ et $n + 1 = 4$, mais celui de droite (5 × 10) ne l'est pas, car $n + 1 = 6$.

De telles questions renvoient à des questions similaires sur le plan cognitif : les artistes connaissent-ils les relations liant le nombre de courbes nécessaires au tracé, et les dimensions du réseau de points sous-jacent ? dans les dessins comme celui de la Figure 2, la transformation appliquée à une colonne est-elle bien identifiée par les artistes comme une procédure *générale* ? si elle l'est, connaissent-ils ses conditions d'application, c'est-à-dire savent-ils déterminer les colonnes qui permettent d'obtenir un tracé conforme à la règle ?

1.2. RYTHMES ASYMÉTRIQUES AFRICAINS

1.2.1. *Propriété d'imparité rythmique*

La musique offre également un domaine très riche d'étude de propriétés mathématiques. Ce fait est bien connu pour les traditions musicales savantes, mais il peut paraître plus surprenant dans un contexte de tradition orale.

Certains rythmes asymétriques pratiqués en Afrique centrale, combinant des durées de deux et trois unités, ont une propriété particulière appelée « imparité rythmique », qui a été mise en évidence par l'ethnomusicologue Simha Arom [Arom, 1985, p. 429]. Elle s'exprime naturellement sous la forme d'un énoncé mathématique. La séquence rythmique représentée en cercle sur la Figure 4, est un exemple de ce type. La propriété exprime le fait qu'on ne peut couper cette séquence en deux parties de mêmes durées, quel que soit le point choisi.

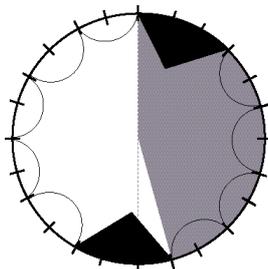


FIGURE 4. Rythme 3222232222 non-divisible en deux parties de même durée

Le cadre mathématique dans lequel cette construction peut s'exprimer naturellement est celui de la combinatoire des mots. Il s'est développé dans le prolongement des travaux de Marcel-Paul Schützenberger (1920-1996), fondateur de l'école française d'informatique théorique. Les objets étudiés sont des *mots*, c'est-à-dire des séquences d'éléments pris dans un ensemble appelé alphabet. Cette théorie prolonge d'autres domaines mathématiques où les mots sont également les objets principaux d'étude, comme la théorie des langages formels et des automates. Un groupe de chercheurs, parmi les anciens élèves de Schützenberger, entreprend depuis une vingtaine d'années de publier sous le pseudonyme collectif M. Lothaire une série d'ouvrages présentant les fondements de cette théorie⁵.

⁵ Dans la préface du premier livre de Lothaire [Lothaire, 1983], Dominique Perrin rappelle que le point de départ des travaux du groupe est un texte rédigé d'après des notes prises lors des conférences données par Schützenberger en 1966 à l'université de Paris, intitulé « Quelques problèmes combinatoires de la théorie des automates ».

Cette approche a de nombreuses applications dans les domaines où apparaissent des objets répartis linéairement. C'est le cas en linguistique, par exemple, car les phrases d'une langue naturelle sont organisées selon ce type de structure séquentielle. C'est le cas également en musique. Les séquences musicales peuvent être étudiées comme des mots dans ce sens abstrait. Une telle manière de voir permet de mettre en œuvre de puissants concepts empruntés à la combinatoire des mots, et de découvrir des modèles efficaces expliquant certains phénomènes musicaux⁶. Les musiques de tradition orale, entre autres, sont un domaine d'application particulièrement fécond pour ce type de méthode. La construction des rythmes asymétriques en est un exemple.

Convenons de noter les séquences rythmiques asymétriques par des *mots finis* sur l'alphabet $A = \{2, 3\}$, et considérons l'ensemble des mots de ce type traditionnellement noté A^* . Les permutations circulaires d'un mot sont obtenues en plaçant plusieurs fois de suite le premier symbole à la fin, par exemple 332, 323, 233. Un mot w vérifie l'*imparité rythmique* si et seulement si la somme de ses symboles est paire, et aucune de ses permutations circulaires ne se factorise en deux mots uv de même somme.

On introduit deux applications a et b de $A^* \times A^*$ dans lui-même, définies de la manière suivante⁷ :

$$\begin{aligned} a(u, v) &= (3u, 3v), \\ b(u, v) &= (v, 2u). \end{aligned}$$

On désigne par e le mot vide. Les mots vérifiant l'imparité rythmique s'obtiennent en appliquant au couple (e, e) certaines applications composées de a et b . Plus précisément, on a [Chemillier, Truchet, 2003] :

(i) un mot w satisfait l'imparité rythmique si et seulement s'il existe une transformation α composée de a et de b , ayant un nombre *impair* de b , telle que $w = uv$ ou $w = vu$, avec $(u, v) = \alpha(e, e)$.

Prenons un exemple pour illustrer cette construction. La formule rythmique 332323332 est appelée *mokongo* par les pygmées Aka [Arom, 1985, p. 436]. Elle s'obtient en utilisant la transformation $\alpha = aababb$ (qui a trois b) de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \alpha(e, e) &= aababb(e, e) \\ &= aabab(e, 2) \\ &= aaba(2, 2) \\ &= aab(32, 32) \\ &= aa(232, 32) \\ &= a(3232, 332) \\ &= (33232, 3332) \end{aligned}$$

d'où la séquence 332323332.

⁶ J'avais suivi cette voie dans ma thèse de doctorat soutenue à l'Université Paris 7 à la fin des années 1980 sous la direction de Dominique Perrin, l'un des membres fondateurs du groupe Lothaire [Chemillier, 1989].

⁷ Cette construction est inspirée de la règle de Rauzy qui intervient dans la construction des mots sturmiens [Lothaire, 2002, p. 58].

1.2.2. Énumération des rythmes asymétriques

La caractérisation ci-dessus permet de compter les séquences satisfaisant l'imparité rythmique en fonction des nombres n_2 et n_3 de 2 et de 3 apparaissant dans ces séquences. Dans le Tableau 1, les valeurs de n_2 sont en lignes, et celles de n_3 en colonnes.

	1	3	5	7	9	11	13	15	17
2	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	1	2	3	4	5	6	7	8	9
6	1	4	7	12	19	26	35	47	57
8	1	5	14	30	55	91	140	204	285
10	1	7	26	66	143	273	476	776	1197
12	1	10	42	132	335	728	1428	2586	4389

TABLEAU 1. Nombres de rythmes vérifiant l'imparité rythmique

Ce tableau fait apparaître une propriété mystérieuse dans la ligne correspondant à $n_3 = 8$. Les valeurs obtenues forment en effet *la suite des sommes des carrés*, soient 1, puis $5 = 1 + 4$, puis $14 = 1 + 5 + 9$, puis $30 = 1 + 4 + 9 + 16$, etc. En fait, on montre que cette propriété inattendue se déduit formellement de la caractérisation (i) ci-dessus (cf. [Chemillier, Truchet, 2004]).

Si l'on veut construire toutes les formules rythmiques possibles de petite longueur (pour des petites valeurs de n_2 et n_3), le tableau ci-dessus montre qu'elles sont peu nombreuses. Lorsqu'on impose en outre que les formules satisfassent un trait caractéristique des formules en usage dans la région, alors on s'aperçoit qu'elles sont pratiquement toutes utilisées. Ce trait concerne la somme totale des durées présentes dans la séquence. Les répertoires de la région ne comportent que des durées totales de type 2^a (en rythme binaire) ou $2^a \times 3$ (en rythme ternaire), ce qui donne les valeurs 8, 12, 16 ou 24. En restreignant le calcul aux séquences de ce type, et en éliminant de plus celles qui sont la répétition d'une séquence plus courte, on obtient le Tableau 2, où l'on a indiqué les ethnies pratiquant ces formules rythmiques.

La seule séquence non utilisée est 333233322. Pour $n_3 = 6$, les deux autres sont rétrogrades l'une de l'autre (chacune s'obtient en lisant l'autre en sens inverse, de la droite vers la gauche). L'une des deux formes est utilisée par les Pygmées Aka. Il s'agit de la formule rythmique 333233232 appelée *mokongo*, qui est frappée sur une poutre de bois, et intervient dans le rituel du *zoboko* effectué la veille d'une grande chasse.

Cette énumération conduit à penser qu'il y a des raisons d'ordre cognitif qui expliqueraient l'apparition de ces formules rythmiques. Mais cette question reste difficile à trancher, en l'absence de discours réflexif des musiciens eux-mêmes sur leur pratique.

n_3	n_2	Somme	Transformations	Rythme	Groupe ethnique
2	1	8	<i>ab</i>	332	Zande
	3	12	<i>abbb</i>	32322	Aka, Gbaya, Nzakara
	5	16	<i>abbbbb</i>	3223222	Gbaya, Ngbaka
	9	24	<i>abbbbbbbb</i>	3222322222	Aka
6	3	24	<i>aaabbb</i>	333233322	<i>non utilisé</i>
		24	<i>aababb</i>	333233232	Aka (formule <i>mokongo</i>)
		24	<i>aabbab</i>	333232332	rétrograde de la précédente

TABLEAU 2. Énumération des rythmes vérifiant l'imparité rythmique

1.2.3. Généralisation à des rythmes indivisibles en n parties

Rachel Hall et Paul Klingsberg, du département de mathématiques de Saint Joseph's University à Philadelphie, ont étudié une généralisation de la propriété d'imparité rythmique à des séquences indivisibles non plus en deux, mais en un nombre quelconque de parties de mêmes durées. Cette généralisation est décrite par Simha Arom dans son livre [Arom, 1985, p. 427]. Leur approche élargit le problème à des rythmes qui ne sont plus seulement composés de durées de 2 ou 3 unités, mais incluent des durées quelconques.

Ils définissent les séquences rythmiques comme des applications de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ dans $\{0, 1\}$, les séquences étant périodiques de longueur m , et les 0 et 1 désignant respectivement les silences et les attaques. Ainsi, la formule 332 s'écrit 10010010. Une formule rythmique f de longueur ln est dite *l -asymétrique* si et seulement si :

$$x \equiv y \pmod{n} \text{ implique } f(x) + f(y) \leq 1 \text{ pour tous } x, y \text{ distincts appartenant à } \mathbb{Z}/ln\mathbb{Z}.$$

Une formule est dite *primitive* si sa longueur est égale à sa plus courte période. Les formules vérifiant l'imparité rythmique correspondent au cas particulier des formules 2-asymétriques.

L'article de Hall et Klingsberg [Hall, Klingsberg, 2004] donne des formules d'énumération, basées sur le lemme de Burnside, pour calculer les nombres suivants :

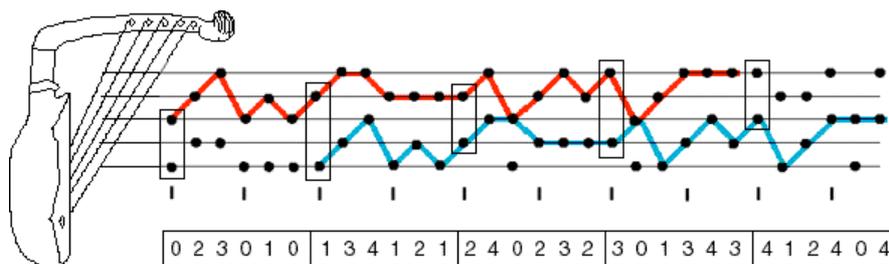
- (a) nombre de rythmes de longueur $2n$ vérifiant l'imparité rythmique,
- (b) nombre de rythmes de longueur $2n$ vérifiant l'imparité rythmique avec r attaques,
- (c) nombre de rythmes de longueur ln qui sont l -asymétriques,
- (d) nombre de rythmes de longueur ln qui sont l -asymétriques avec r attaques.
- (e) nombre de rythmes de longueur ln qui sont l -asymétriques et primitifs avec r attaques,
- (f) nombre de rythmes de longueur $2n$ vérifiant l'imparité rythmique et primitifs avec des nombres n_2 et n_3 de 2 et de 3.

Cette approche ne donne pas une méthode explicite de construction de ces différents rythmes. C'est pourtant une telle méthode qui permettrait de dresser la table des rythmes théoriquement possibles, et de la comparer à ceux effectivement utilisés, comme nous l'avons fait ci-dessus pour l'imparité rythmique. Le calcul explicite des rythmes généralisant l'imparité rythmique à des divisions en n parties est un problème ouvert.

1.3. FORMULES DE HARPE NZAKARA

1.3.1. Structure en canon

Un autre exemple de structures musicales d'Afrique centrale qui révèle certaines propriétés remarquables concerne les formules de harpe jouées par les poètes-musiciens nzakara de République centrafricaine, sur lesquelles nous avons mené des recherches dans les années quatre-vingt-dix, et dont les propriétés surprenantes sont à l'origine de notre intérêt pour l'ethnomathématique. Les résultats ont été décrits dans plusieurs publications [Chemillier, 1995, 1996, 1997, 1999, 2003], et prolongés depuis par d'autres travaux que nous résumons ci-après.

FIGURE 5. Formule de harpe nzakara en canon (*limanza*)

La transcription de la Figure 5 est un exemple d'une telle formule de harpe. Les cinq lignes horizontales correspondent aux cinq cordes de l'instrument. Les points indiquent quelles cordes sont pincées pendant le déroulement de la formule. Celle-ci est répétée en boucle pour accompagner une improvisation poétique chantée. Son rythme est régulier à pulsation ternaire, caractéristique de la catégorie *limanza* (d'autres formules, de la catégorie *ngbakia*, sont à pulsation binaire).

La première propriété remarquable de la formule est sa *structure de canon*. Les cordes pincées par couples forment deux lignes mélodiques superposées, l'une sur les trois cordes aiguës et l'autre sur les trois cordes graves, dont les profils mélodiques sont identiques, mais décalés dans le temps. Pour exprimer mathématiquement cette notion de canon, nous reprenons ici les idées et notations de [Chemillier, 2003].

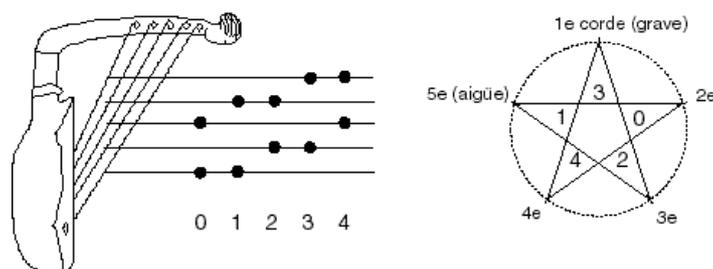


FIGURE 6. Étoile à cinq branches des couples de cordes pincées simultanément

Les couples de cordes pincées simultanément apparaissant dans la formule sont au nombre de cinq, numérotés de 0 à 4 (cf. Figure 5, où ils sont encadrés dans la transcription). Dans ces couples, les cordes ne sont ni trop proches (pas de cordes consécutives), ni trop éloignées (cordes extrêmes). Si on les dispose sur un cercle, en joignant celles qui peuvent être pincées simultanément, on obtient la Figure 6.

On représente les formules de harpe comme des *mots binifinis* sur l'ensemble des cinq couples de cordes, c'est-à-dire des applications de \mathbb{Z} dans $\{0, 1, 2, 3, 4\}$, ce qui est justifié par le fait qu'elles sont répétées indéfiniment et n'ont pas de début caractérisé.

Définir un canon à distance p , cela revient à imposer une contrainte d'enchaînement entre les couples de notes simultanées situés à distance p . Cette contrainte peut être décrite par un graphe R sur l'ensemble de ces couples. On trace une flèche de x vers y si la note inférieure de y est décalée de deux cordes vers le grave par rapport à la note supérieure de x . Cela donne le graphe de la Figure 7.

On constate que dans la formule de harpe nzakara de la Figure 5, les couples encadrés qui sont à distance 6 (c'est-à-dire la distance du canon), sont enchaînés les uns aux autres en suivant les flèches du graphe R , sauf lorsque 4 est suivi de 0. Dans ce cas, la structure de canon n'est pas respectée, et il y a une sorte « d'erreur » dans le canon. On complète le graphe avec une flèche en pointillé de 4 vers 0 pour matérialiser ces transitions qui sont effectivement utilisées, mais ne suivent pas la règle du canon.

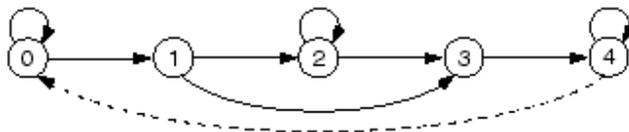


FIGURE 7. Graphe R d'enchaînement des couples de cordes pincées simultanément

On introduit deux applications H_p et T de l'ensemble des mots bi-infinis dans lui-même. L' une permet d'extraire un couple sur p , et l'autre effectue un décalage :

$$H_p u(i) = u(pi), \quad Tu(i) = u(i + 1)$$

pour tout entier i de \mathbb{Z} . On a la caractérisation suivante [Chemillier, 2003] :

(i) un mot biinfini u est un canon à distance p si et seulement si tous les sous-mots $H_p T^k u$ suivent des chemins dans le graphe R , pour tout k tel que $0 \leq k < p$.

Cette caractérisation implique que dans le cas Nzakara, il n'est pas possible de construire un canon sans « erreur ». En effet, le graphe R privé de la flèche pointillée ne contient pas de chemins fermés autres que les cycles triviaux, c'est-à-dire les cycles réduits à une seule flèche (autour des éléments 0, 2 et 4). De tels cycles donnent des mots bi-infinis constants, c'est-à-dire des canons « dégénérés » où les deux voix sont parallèles. En revanche, si l'on utilise la flèche en pointillé, on a le cycle non trivial $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 0$, et il est possible de construire un pseudo-canon avec autant d'erreurs que de passages par cette flèche additionnelle⁸.

Il faut préciser que le terme « erreur » employé ici n'a qu'une valeur métaphorique, car notre analyse ne tient pas compte de la manière dont les Nzakara se représentent eux-mêmes leurs formules de harpe. Sont-ils conscients de la structure de canon, c'est-à-dire de l'identité des deux profils mélodiques ? Ou bien ignorent-ils les propriétés de ces formules ? Il est probable que du fait de la disparition de ce répertoire, qui n'a pas survécu aux bouleversements cumulés de la colonisation et de l'indépendance, la question restera à jamais sans réponse.

Dans un article de la revue *L'Homme*, nous avons exposé cette problématique, en soulignant les difficultés qu'il y avait à ancrer dans la réalité cognitive autochtone certaines analyses abstraites [Chemillier, 2004]. Le formalisme permet des « métamorphoses logiques », qui éloignent l'analyse de son point de départ par un cheminement déductif, en lui faisant éventuellement perdre tout lien avec les processus mentaux dont elle rend compte. Nous avons rassemblé, dans l'article cité, un faisceau d'indices tirés des écrits de Dampierre, grand spécialiste de la société nzakara, qui

⁸ Le problème se complique du fait que le canon est périodique. Si la distance p du canon ne divise pas la période m , les sous-mots ne sont pas indépendants. On montre alors que le nombre minimal « d'erreurs » est en fait $\text{pgcd}(m, p)$.

pourrait expliquer l'apparition de formules de harpe en canon. Mais la question est controversée, et l'ethnomusicologue Klaus-Peter Brenner a publié un livre [Brenner 2004], dans lequel il rejette l'hypothèse des canons, et développe l'idée que sur le plan cognitif, les formules nzakara doivent être analysées autrement.

1.3.2. Structure en escalier

On peut en effet analyser les formules de harpe nzakara d'une façon totalement différente, quoique logiquement équivalente sous certaines conditions, qui consiste à mettre en évidence une structure « en escalier »⁹. Si l'on regarde la succession des couples Figure 5, on constate que les six premiers 023010 sont ensuite décalés d'une unité 134121, et ainsi de suite, jusqu'à revenir à la succession initiale. On peut formaliser cette propriété en introduisant une permutation cyclique σ de l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Un mot bi-infini u a une *structure en escalier* avec un pas de longueur d si

$$u(i + d) = \sigma(u(i))$$

pour tout entier i de \mathbb{Z} . Ainsi, le motif $u(0)u(1)...u(d-1)$ est le pas élémentaire (c'est-à-dire la « marche » de l'escalier), et il est translaté en $\sigma(u(0))\sigma(u(1))...\sigma(u(d-1))$.

La structure en escalier permet de révéler un autre aspect surprenant des formules de harpe nzakara. On trouve en effet dans le répertoire la formule suivante 0134124023. Elle a une structure en escalier formée d'un pas élémentaire 01, et d'un cycle $0 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 0$. Or dans cette situation où le pas élémentaire n'a que deux éléments, on constate que, pour le cycle choisi, *la formule nzakara est la seule solution possible*. En effet, si l'on essaie toutes les manières de varier le pas élémentaire, les résultats obtenus font apparaître soit une répétition de symbole, soit une répétition de séquence plus courte, exceptés pour les deux séquences 0134124023 et 0230134124 qui s'avèrent être des permutations circulaires l'une de l'autre.

répétition de symbole	(00)33114422
<i>formule nzakara</i>	0134124023
permutation de la formule nzakara	023[0134124
répétition de symbole	0(33)1144220
répétition d'une séquence plus courte	(04321)(04321)

TABLEAU 3. Unicité d'une structure en escalier ayant un pas de longueur 2

Cette formule remarquable est un canon. En effet, le cycle de la structure en escalier est tel que σ^2 est le cycle non trivial de R . La distance du canon est donc égale à $p = 2d = 4$, et il faut deux pas de l'escalier pour que la voix grave reproduise le profil de la voix aiguë.

Il existe une relation de dépendance logique entre les deux notions de canon et de structure en escalier :

⁹ Ces deux analyses (canon ou structure en escalier) sont deux manières de voir *un même objet*. Simha Arom faisait observer que cette situation rappelle l'illusion du cube de Necker, dont les faces avant et arrière sont d'égales mesures, de telle sorte qu'on peut le voir selon deux perspectives différentes, et que le cerveau hésite entre les deux représentations.

- (1) si u est un canon à distance p dont tous les sous-mots définis par les $H_p T^k u$ suivent un cycle identique (et non-trivial), alors u a une structure en escalier avec un pas de longueur p ou un diviseur de p ,
- (2) si u a une structure en escalier avec un pas de longueur d , et un cycle dont une puissance est un cycle non trivial de R , alors u est un canon dont la distance est un multiple de d .

On voit que les notions de canon et de structure en escalier sont équivalentes logiquement si on les restreint à un cas particulier : canon dont les cycles sont identiques d'un côté, ou structure en escalier suivant un cycle dont une puissance est un cycle du graphe R de l'autre. Or les formules nzakara sont précisément toutes dans ce cas particulier. Sur le plan logique, il n'y a donc pas de raison de préférer l'une plutôt que l'autre.

1.3.3. Symétries des formules de harpe

Une troisième propriété structurelle des formules de harpe nzakara faisant intervenir les groupes de frise a été mise en évidence indépendamment par Klaus-Peter Brenner dans son livre cité plus haut [Brenner, 2004] et le mathématicien Dave Benson, de l'université d'Aberdeen en Écosse.

Revenons à une numérotation des cordes elles-mêmes (et non plus des couples) de 0 à 4, en identifiant l'ensemble des cinq cordes à $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Soient E l'ensemble des paires de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, et $E^{\mathbb{Z}}$ l'ensemble des mots bi-infinis sur E , c'est-à-dire des applications de \mathbb{Z} dans E . Si x est une paire, et t un élément de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, on note $x + t$ la paire obtenue en ajoutant t à chaque élément de x . Pour t et x dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, p et q dans \mathbb{Z} , on définit trois types de bijections de $E^{\mathbb{Z}}$ dans lui-même appelées respectivement translations, inversions, et rétrogradations :

$$T_{p,t}u(i) = u(i - p) + t, \quad V_x u(i) = 2x - u(i), \quad R_q u(i) = u(2q - i)$$

pour tout i dans \mathbb{Z} . Si l'on étudie les sous-groupes du groupe G des bijections de $E^{\mathbb{Z}}$ dans lui-même engendré par les $T_{p,t}$, V_x et R_q , on montre qu'il existe exactement sept types de sous-groupes possibles, selon qu'ils contiennent ou non des inversions, des rétrogradations, ou des symétries centrales (composition d'une inversion et d'une rétrogradation). Ces sept types correspondent aux sept groupes de frise (cf. une présentation détaillée dans [Chemillier, 1989, p. 121-139]).

Parmi les sept groupes de frise, le premier, noté p111 dans le système des cristallographes, est engendré par une translation. Le second, noté p112, est engendré par une translation $T_{p,t}$ et une symétrie centrale $R_q V_x$. On montre alors qu'il contient une infinité de symétries centrales, dont les centres sont équidistants : $R_q V_x$, $R_{q+p/2} V_{x-t/2}$, $R_{q+p} V_{x-t}$, $R_{q+3p/2} V_{x-3t/2}$, etc.

La propriété remarquable de la formule de harpe Figure 5 est qu'elle est *invariante par une symétrie centrale*, c'est-à-dire que son groupe de symétrie est de type p112, et non pas seulement p. 111. Pour placer le centre de symétrie en début de formule, décalons celle-ci de deux couples vers la droite (cf. Figure 8). Les centres de symétries sont alors matérialisés graphiquement, en indiquant les numéros des cordes sous la figure. La translation $T_{p,t}$ qui laisse la formule invariante correspond à $p = 6$, $t = 3$ (la séquence 100001 se translate en 433334). On a relié par des traits les deux lignes

invariantes par symétrie centrale. Ces tracés zigzagants donnent une image bien différente de la formule que ceux utilisés Figure 5 pour la mise en évidence du canon.

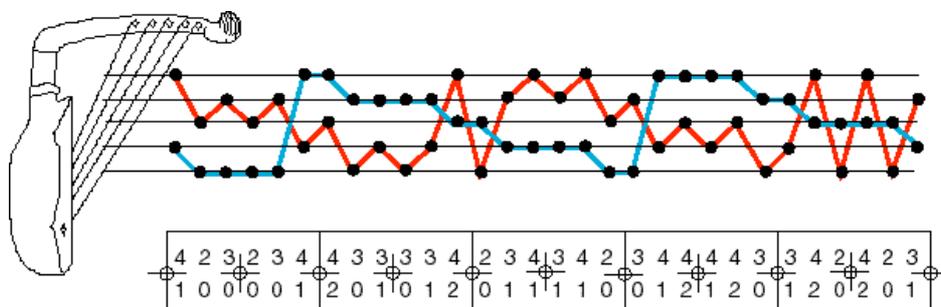


FIGURE 8. Symétries centrales de la formule de *limanza*

Cette propriété de symétrie n'est pas vérifiée par toutes les formules de harpe en canon du répertoire nzakara. Il existe un *ngbakia* en canon à dix pulsations binaires qui n'admet pas de symétrie centrale (cf. page 5 de notre disque *Musiques des anciennes cours Bandia* [Chemillier, Dampierre, 1996]). Dans ces conditions, on peut se demander si la symétrie renvoie à des mécanismes cognitifs spécifiques chez les musiciens autochtones. D'un côté, il est remarquable qu'une formule admette ce type de propriété, mais de l'autre, elle apparaît comme un cas particulier isolé.

1.3.4. Mesure de la complexité

Barbra Gregory a réalisé un travail sous la direction de Karl Petersen à l'université de Caroline du Nord à Chapel Hill concernant la « complexité » des formules de harpe nzakara du point de vue des gestes nécessaires au musicien pour les produire [Gregory, 2004]. La *complexité* $C(u)$ d'une séquence de couples de cordes est définie récursivement, à partir des valeurs $C(v)$ pour tous les v de longueur plus petite que u . Dans le tableau de valeurs calculées par Barbra Gregory, on constate que les séquences de longueur $n = 5$ qui suivent le cycle non-trivial dans le graphe de R ci-dessus (cf. Figure 7) ont la même complexité 1,35, et que cette complexité est identique pour une séquence de longueur $n = 10$ qui a une structure en escalier avec un pas de longueur 2 (au sens défini plus haut pour les modèles nzakara).

Il est probable que cette mesure pourrait être affinée, comme le suggère l'auteur, en tenant compte de facteurs musicaux plus précis (le doigté, par exemple). Ce travail ouvre une voie intéressante dans la recherche des causes de l'apparition des formules nzakara en canon. Si l'on parvenait à une mesure de la complexité faisant apparaître ces modèles comme des singularités remarquables, on obtiendrait une explication d'ordre gestuel des mécanismes cognitifs qui leur ont donné naissance.

2. ETHNOMATHÉMATIQUES DE TERRAIN¹⁰

2.1. RÈGLES DE LA DIVINATION MALGACHE

2.1.1. *Construction des tableaux de graines*

C'est la lecture d'un article de Marcia Ascher consacré aux propriétés mathématiques de la divination à Madagascar [Ascher, 1997] qui nous a décidé, en juin 2000, à entreprendre une recherche de terrain dans ce pays, dans le but de mener conjointement analyse mathématique et collecte de données ethnographiques.

Il existe principalement deux études sur les propriétés algébriques de la divination *sikidy*. Outre celle de Marcia Ascher citée, il existe un travail non publié de Manelo Anona, mathématicien spécialiste de géométrie différentielle de l'université de Tananarive [Anona, 2001]. Leur source ethnographique commune est le livre de Raymond Decary [1970], auquel il faut ajouter, dans le cas de Marcia Ascher, le travail réalisé pour l'ORSTOM dans les années soixante-dix par Jean-François Rabedimy, anthropologue de Majunga qui enseigne à l'université de Tuléar [Rabedimy, 1976].

La divination malgache est directement empruntée à la géomancie arabe. Celle-ci est décrite dans les traités du Moyen-Âge, en arabe ou en latin. Elle s'est répandue sur tout le continent africain. Dans la forme qu'elle a prise au Tchad, par exemple, elle a fait l'objet d'un important travail de formalisation mené par Robert Jaulin [1966, 1971], en collaboration avec les mathématiciens Robert Ferry, Françoise Dejean, Bernard Jaulin (son frère) et Ramdane Sadi [Sadi, 1989]. Il est évident qu'une recherche sur les savoirs traditionnels liés à la divination doit associer modélisation mathématique et enquête ethnographique, mais aussi une étude historique des textes qui ont circulé dans toute l'Afrique, et plus particulièrement à Madagascar.

La technique divinatoire utilise des graines de tamarin, que l'on brasse en tas sur une natte, en prononçant diverses incantations. On prend une poignée de graines au hasard, puis on la pose sur le sol, en éliminant les graines par paires, jusqu'à ce qu'il n'en reste qu'une ou deux. Ce reste, produit d'un tirage aléatoire, manifeste la destinée du consultant.

Pour procéder à la divination, on place le reste obtenu (une ou deux graines) dans un tableau en forme de matrice carrée de dimension quatre, que l'on remplit en réitérant seize fois le tirage. Les éléments qui interviennent dans le processus de divination sont les suivants :

- *Matrice mère* (appelée *renin-tsikidy*) : c'est le tableau carré de quatre par quatre obtenu par tirage aléatoire, dont les éléments valent 1 ou 2.
- *Colonnes filles* : ce sont huit nouvelles colonnes calculées de façon entièrement déterministe à partir de la matrice mère, ayant chacune quatre éléments (qui valent 1 ou 2). Le tableau complet de divination est constitué de la matrice mère et des huit colonnes filles.
- *Positions* : ce sont les quadruplets définis par le tableau, dont les éléments valent 1 ou 2. Il s'agit :
 - des quatre lignes et quatre colonnes de la matrice mère,
 - des huit colonnes filles,

¹⁰ Je remercie Bernard Jaulin pour ses commentaires sur cette partie qui traite de la géomancie, et Marc Barbut pour la copie qu'il m'a transmise d'un séminaire du CAMS consacré à ce thème dans les années soixante [Jaulin, Ferry, 1960].

soit au total seize positions qui ont toutes un nom vernaculaire (*tale, maly, fahatelo*, etc.).

- *Figures* : ce sont tous les quadruplets que l'on peut théoriquement former avec des 1 et des 2, par exemple (1, 1, 1, 2). Ils sont au nombre de seize et chacun a un nom vernaculaire (*karija, tareky, asombola*, etc.). Leur apparition dans telle ou telle position du tableau détermine la prédiction du devin.
- *Princes/esclaves* : les figures avec un nombre pair de graines sont appelées « princes », les autres « esclaves ». L'apparition d'un prince ou d'un esclave dans telle ou telle position du tableau est un paramètre important de la divination.
- *Points cardinaux* : il existe une répartition des figures en quatre sous-ensembles orientés selon les points cardinaux. L'apparition d'un point cardinal dans telle ou telle position du tableau influence la prédiction.

Dans la description qui suit, nous reprenons les notations de Manelo Anona [Anona, 2001]. La matrice mère s'écrit :

$$\begin{array}{cccc} a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{24} & a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{34} & a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{44} & a_{43} & a_{42} & a_{41} \end{array}$$

Chaque élément a_{ij} vaut une ou deux graines.

Cette matrice appelée *renin-tsikidy* définit huit positions, qui sont les quadruplets apparaissant dans les quatre colonnes et les quatre lignes (lues de droite à gauche). À partir de ces huit quadruplets initiaux, on construit huit colonnes secondaires (les filles) placées sous la matrice mère les unes à côté des autres, et dérivées des quadruplets initiaux en respectant la règle de combinaison suivante :

- une graine et une graine donnent deux graines,
- deux graines et une graine donnent une graine,
- deux graines et deux graines donnent deux graines.

On reconnaît la loi de composition interne du groupe abélien $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Les deux graines correspondent à l'élément neutre $\hat{0}$, et la graine isolée correspond à $\hat{1}$. L'opération de combinaison des figures se fait dans le groupe produit $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$ des quadruplets de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. La Figure (2, 2, 2, 2) est l'élément neutre pour cette opération. Toute figure est son propre inverse.

On note P_i les seize positions du tableau ainsi obtenues, initiales et secondaires, pour $i = 1, \dots, 16$. Les huit premières P_1 à P_8 sont les colonnes et lignes de la matrice mère, partie supérieure du tableau. Les huit autres $P_9, P_{10}, \dots, P_{16}$ sont les colonnes secondaires, placées dans la partie inférieure du tableau, numérotées dans l'ordre de gauche à droite, et calculées par combinaison des précédentes selon la loi du groupe. Le calcul et les noms vernaculaires des positions sont indiqués dans le tableau 4 à partir d'un exemple. Les P_i définissent des applications de l'ensemble des matrices $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{16}$ dans celui des quadruplets $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$. Par exemple, pour la matrice M notée ci-dessus, on a $P_1(M) = (a_{11}, a_{21}, a_{31}, a_{41})$.

Les devins font explicitement la distinction entre ces deux types de figures. Les huit dont le nombre de graines est pair sont appelées princes (*mpanjaka*). Les huit autres sont appelées esclaves (*andevo*). Une règle simple d'interprétation des tableaux est qu'un prince est plus fort qu'un esclave. Prenons l'exemple d'un individu qui consulte à propos d'une maladie. Le consultant est représenté par la colonne P_1 de la matrice mère. La maladie s'obtient en additionnant les colonnes P_1 et P_9 . Ainsi, lorsque la figure du consultant est un esclave, mais que celle représentant la maladie est un prince, on en déduit que la maladie est grave.

Les devins expriment également à leur manière, à propos des figures paires, la propriété de stabilité caractéristique des sous-groupes, en disant que la combinaison de deux *mpanjaka* est encore *mpanjaka*. En fait, ils énoncent la règle complète de combinaison des princes et des esclaves :

$$\begin{aligned} mpanjaka + mpanjaka &= mpanjaka, \\ mpanjaka + andevo &= andevo, \\ andevo + andevo &= mpanjaka \end{aligned}$$

ce qui revient à décrire la table d'addition du groupe quotient $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4/\text{Ker}(s)$.

Antandroy															
Nord				Sud				Ouest				Est			
<i>adalo</i>	<i>reniliza</i>	<i>alibitavo</i>	<i>karija</i>	<i>alasad</i>	<i>alimizanda</i>	<i>tareky</i>	<i>asombola</i>	<i>alakarabo</i>	<i>alokola</i>	<i>alitikisy</i>	<i>alakaosy</i>	<i>alohotsy</i>	<i>alaimora</i>	<i>adabara</i>	<i>alotsimay</i>
•	•	••	•	•	•	•	••	•	•	••	••	••	••	••	••
••	••	••	•	•	•	•	••	••	••	••	•	•	•	••	•
•	••	•	•	••	••	•	••	•	••	••	•	••	••	•	•
••	••	••	••	••	•	•	••	•	•	•	•	•	••	•	••

Antemoro															
Nord				Sud				Ouest				Est			
•	•	••	•	••	•	•	••	•	••	••	•	•	••	••	••
••	••	••	•	•	•	•	••	••	••	••	••	•	•	•	•
•	••	•	•	•	••	•	••	•	•	••	••	••	••	•	••
••	••	••	••	••	•	•	••	•	•	•	•	••	••	•	•

Arabe															
Nord				Est				Sud				Ouest			
•	•	••	•	•	•	•	••	•	••	••	•	••	••	••	••
••	•	••	•	•	•	••	••	••	••	••	••	•	•	•	•
•	•	•	•	••	••	••	••	•	•	••	••	•	••	•	••
••	•	••	••	••	•	••	••	•	•	•	•	••	••	•	•

TABLEAU 5. Classements en points cardinaux antandroy (en haut), Antemoro (au milieu) et arabe (en bas). Les permutations de figures propres à chaque système sont marquées par des cases grisées. Les points cardinaux arabes, dont les noms sont soulignés, sont également permutés.

Les points cardinaux interviennent également dans le processus d'interprétation. Par exemple, deux princes, ou deux esclaves, de même point cardinal ne se nuisent jamais. Mais contrairement aux règles de construction des tableaux, qui sont transmises de façon immuable depuis des siècles, la classification des figures en points cardinaux est fluctuante. À Madagascar, en particulier, cette classification varie d'une ethnie à l'autre (quoiqu'elle soit stable dans le temps). Le système antandroy prévaut sur la côte Ouest (et c'est celui que nous étudions ici), mais à l'Est, on utilise plutôt le classement antemoro.

On trouve dans les manuscrits arabes une classification en points cardinaux proche du système antemoro (Tableau 5). Elle s'en distingue par deux modifications. D'une part, les noms des points cardinaux sont permutés (Ouest devient Sud, qui devient Est, qui devient Ouest, ce qui est indiqué en soulignant les termes du tableau). Et d'autre part, on a effectué deux échanges de figures (indiqués ici par rapport aux points cardinaux antemoro) :

- 1) Permutation A : entre Nord et Sud, (1, 1, 1, 1) est échangée avec (1, 2, 2, 2),
- 2) Permutation B : entre Sud et Est, (2, 1, 1, 2) est échangée avec (1, 1, 2, 2).

Le système antandroy se distingue de l'antemoro également par deux échanges de figures, mais il est très curieux de constater que l'un annule l'effet du deuxième échange ci-dessus, c'est-à-dire que les figures concernées retrouvent leur position initiale du système arabe :

- 1) Permutation B,
- 2) Permutation C : entre Est et Ouest, (2, 2, 1, 1) est échangée avec (2, 1, 1, 1) et (2, 1, 2, 1).

Il en résulte que les systèmes antandroy et arabe ne diffèrent, eux aussi, que par deux échanges de figures. Ce point mérite d'être souligné, car les Antemoro revendiquent le fait qu'ils ont enseigné le *sikidy* aux Antandroy et que leur classement est « le plus primitif ». Or l'analyse des permutations ne va pas dans ce sens, car le système antandroy apparaît « à égale distance » des deux autres :

- 1) Permutation A,
- 2) Permutation C.

Ajoutons que deux propriétés formelles intéressantes apparaissent dans le système arabe, qui font intervenir un sous-groupe du groupe des figures paires, celui des figures *autosymétriques* (identiques à elles-mêmes quand on les lit à l'envers, cette condition implique la parité du nombre de graines) :

- (i) chacun des quatre points cardinaux contient l'une des quatre figures autosymétriques,
- (ii) dans chaque classe, les trois autres figures ont leurs symétriques dans une même classe, associant ainsi Nord et Ouest d'une part, et Sud et Est de l'autre.

Dans le passage au système antemoro, les figures autosymétriques (1, 1, 1, 1) et (2, 1, 1, 2) rejoignent (2, 2, 2, 2), ce qui donne à Sud trois figures autosymétriques, qui sont des princes, alors que Nord et Est n'en contiennent aucune. On voit que le passage d'un classement à l'autre fait perdre au système une partie de sa cohérence formelle¹¹.

¹¹ Dans les textes arabes, on trouve de nombreuses classifications, appelées *tasakin*, en quatre classes de quatre figures chacune (pas nécessairement liées aux points cardinaux), et dont certaines ont des

2.2. PROPRIÉTÉS ALGÈBRIQUES DES TABLEAUX

2.2.1. Calcul de P_{10} , P_{14} , P_{12}

La propriété fondamentale¹² des applications P_i définissant les seize positions du tableau est que *ce sont des morphismes du groupe des matrices $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{16}$ dans celui des quadruplets $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$.*

Le calcul des P_i donne lieu à diverses simplifications algébriques. Les rôles presque symétriques joués par les lignes et les colonnes conduisent naturellement à introduire la *transposée* tM d'une matrice M , obtenue en inversant les lignes et les colonnes (symétrie par rapport à la deuxième diagonale¹³). On voit facilement que :

$$P_{10}(M) = P_{14}({}^tM),$$

et que :

$$P_{12}(M) = P_{14}(M + {}^tM).$$

Par associativité de l'opération de groupe, on peut écrire $P_{14} = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$, soit la somme des quatre colonnes de la matrice mère. Les éléments de $P_{14}(M)$ sont donc les sommes des éléments des quatre lignes. En utilisant le morphisme s défini plus haut, et en posant $s_k = s(P_k(M))$ pour les lignes et colonnes de la matrice mère, $k \leq 8$, on obtient :

- (1) $P_{14}(M) = (s_5, s_6, s_7, s_8),$
- (2) $P_{10}(M) = (s_1, s_2, s_3, s_4),$
- (3) $P_{12}(M) = (s_1 + s_5, s_2 + s_6, s_3 + s_7, s_4 + s_8).$

Le fait important concernant ces égalités, du point de vue anthropologique, est qu'elles permettent de calculer les filles de seconde et troisième génération P_{14} , P_{10} , P_{12} non plus à partir de celles de première génération P_9 , P_{11} , P_{13} , P_{15} (comme dans le Tableau 4 ci-dessus), mais *en se référant directement à la matrice mère*. L'anthropologue Jean-François Rabedimy a décrit explicitement ces formules dans son livre, sous le nom de « nouveau système » [Rabedimy, 1976, p. 78]. Il affirme que certains devins les utilisent pour modifier l'ordre de construction des figures secondaires. Ainsi, au lieu de les calculer dans l'ordre de leur génération (celles de première génération, puis de deuxième génération, etc.), ils pourraient par un simple coup d'œil sur la matrice mère calculer les filles P_9 à P_{15} dans un ordre quelconque (par exemple, l'ordre dans lequel elles sont disposées de gauche à droite). Les expériences de calcul mental des filles que nous avons faites avec certains devins laissent penser qu'ils utilisent les égalités (1) et (2) pour calculer celles de seconde génération P_{14} et P_{10} sans

propriétés mathématiques élaborées. Robert Jaulin a étudié la classification en usage chez les Sara du Tchad, qu'il appelle *système au repos*. Il a mis en évidence les deux propriétés remarquables suivantes [Jaulin, Ferry, 1960] : (i) le nombre total de points par classe est toujours égal à 24, et (ii) dans chaque classe, les figures se groupent par couples dont la somme est constante égale à (2, 1, 2, 1).

¹² Cette propriété de linéarité par rapport à la matrice mère rappelle les carrés magiques. Pour ces derniers, les sommes des lignes et des colonnes (dont les valeurs doivent être égales) sont également des applications linéaires. On sait que l'étude des carrés magiques était très prisée dans le monde arabe médiéval (voir [Sesiano, 1996]), et qu'elle fournit aujourd'hui un ensemble de problèmes difficiles pour les mathématiques contemporaines (cf. [Descombes, 2002]).

¹³ En algèbre linéaire, la transposition d'une matrice se fait par rapport à la première diagonale (descendante de la gauche vers la droite). Nous changeons la convention habituelle pour tenir compte du fait qu'en géomancie, les lignes sont lues de droite à gauche, ce qui est une survivance de l'origine arabe de cette technique (et du fait que l'écriture arabe se lit de droite à gauche).

calculer celles de première génération. En revanche, nous n'avons pas observé l'utilisation de l'égalité (3) plus sophistiquée (calcul de P_{12} à partir de la matrice mère).

2.2.2. Parité du nombre de graines en P_{12}

Une propriété essentielle de tout tableau de *sikidy* est que la figure en position P_{12} a nécessairement un nombre pair de graines, c'est-à-dire que pour toute matrice M , on a :

$$(4) \quad s(P_{12}(M)) = \hat{0}$$

Cela résulte du calcul suivant :

$$s(P_{12}(M)) = \sum_{k \leq 8} s_k = 2 \sum_{i, j \leq 4} a_{ij} = \hat{0}$$

Tous les devins connaissent cette propriété, et ils l'utilisent comme un moyen de vérifier qu'ils ne se sont pas trompés dans la construction. Dans le langage des devins, un tableau ne peut être interprété que si la figure en position *haky* est un prince.

2.2.3. Résolution d'équations $P_i(X) = z$

Les devins s'intéressent beaucoup à la recherche de matrices mère permettant d'obtenir certaines figures dans certaines positions, ce qui revient à résoudre des équations du type :

$$P_i(X) = z$$

où X est la matrice cherchée, et z une figure donnée. Si M est une solution particulière, alors une matrice X est solution de l'équation si et seulement si $X - M$ appartient à $\text{Ker}(P_i)$. L'ensemble des solutions est donc de la forme :

$$M + \text{Ker}(P_i).$$

En particulier, le nombre de solutions est égal à $\text{card}(\text{Ker}(P_i))$.

L'ensemble des figures pouvant apparaître dans une colonne secondaire est soit le sous-groupe des figures paires (pour P_{12}), soit le groupe tout entier (pour les autres) :

$$\text{Im}(P_{12}) = \text{Ker}(s), \quad \text{Im}(P_i) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4,$$

avec $9 \leq i \leq 16$ et $i \neq 12$. Autrement dit, les morphismes sont surjectifs dans l'un de ces deux groupes. Cela est évident pour les colonnes de première et seconde génération. Pour celles de troisième et quatrième génération, on a :

- pour P_{12} , l'inclusion est assurée par la propriété de parité de P_{12} énoncée plus haut, et inversement, pour obtenir une figure avec une paire de graines en positions i et j , il suffit de prendre la matrice ayant un seul coefficient a_{ij} égal à 1 (et les autres égaux à 2), et pour obtenir une figure paire quelconque, il suffit de la décomposer en une, deux ou zéro figures avec une paire de graines,
- pour P_{16} , il suffit de placer la figure voulue en P_1 et de construire une matrice symétrique.

On en déduit que le nombre de tableaux ayant une figure donnée dans une colonne donnée est égal soit à 8.192 dans le cas de P_{12} (c'est-à-dire $65.536/8$), soit à 4.096 pour les autres (c'est-à-dire $65.536/16$).

Le calcul explicite des éléments de $\text{Ker}(P_i)$, c'est-à-dire les matrices qui donnent l'élément neutre (2, 2, 2, 2) en position P_i , ne pose pas de problèmes pour $i \neq 12$ et $i \neq 16$. Pour P_{12} et P_{16} , ce calcul a été établi par Ramdane Sadi [1989, p. 41].

Pour calculer $\text{Ker}(P_{12})$, notons d'abord que les matrices telles que ${}^tM = M$ sont des solutions. Ainsi, l'ensemble des matrices mère symétriques par rapport à la deuxième diagonale est un sous-groupe de $\text{Ker}(P_{12})$. Les devins semblent conscients de cette propriété, car lorsqu'une matrice est symétrique, il peuvent calculer immédiatement la colonne P_{12} , qui contient la figure neutre.

Dans le cas des matrices non symétriques, on remarque que toute matrice se décompose de façon unique en $M = M_D + M_C$, où M_D est une matrice diagonale symétrique (tous les coefficients non diagonaux sont égaux à 2), et M_C une matrice à diagonale nulle (tous les coefficients diagonaux sont égaux à 2). Comme $P_{12}(M_D)$ est toujours nul, il en résulte que $P_{12}(M)$ est nul si et seulement si $P_{12}(M_C)$ l'est aussi. Le problème se ramène donc au calcul des matrices de $\text{Ker}(P_{12})$ à diagonale nulle. L'égalité (1) ci-dessus conduit à :

$$(s_1 + s_5) + (s_2 + s_6) + (s_3 + s_7) = s_4 + s_8.$$

Donc, pour un élément de $\text{Ker}(P_{12})$, le fait que les quatre sommes $s_1 + s_5$, $s_2 + s_6$, $s_3 + s_7$, $s_4 + s_8$ soient égales à 2, équivaut à seulement trois équations. Elles s'écrivent (les coefficients diagonaux sont supposés nuls) :

$$\begin{aligned} a_{14} + a_{13} + a_{12} + a_{21} + a_{31} + a_{41} &= 2, \\ a_{24} + a_{23} + a_{32} + a_{42} &= a_{21} + a_{12}, \\ a_{34} + a_{43} &= a_{32} + a_{31} + a_{23} + a_{13}. \end{aligned}$$

La résolution consiste à choisir successivement les coefficients de gauche des trois équations, ceux de droite étant déjà fixés par les choix précédents. Une fois ces choix faits, on est assuré que la somme des éléments placés en quatrième ligne et quatrième colonne est égale à 2. Pour compléter la matrice, il reste à choisir librement les quatre coefficients diagonaux.

Pour calculer $\text{Ker}(P_{16})$, on note qu'il faut une figure paire en P_1 . Les équations sur les coefficients de la matrice mère se ramènent à :

$$\begin{aligned} a_{11} + a_{21} + a_{31} + a_{41} &= 2, \\ a_{14} + a_{13} + a_{12} &= 2, \\ a_{24} + a_{23} + a_{32} + a_{42} &= a_{12}, \\ a_{34} + a_{32} + a_{43} + a_{23} &= a_{13}. \end{aligned}$$

Comme précédemment, on choisit les coefficients des membres gauche, ceux de droite étant déjà fixés.

L'étude des méthodes développées par les devins pour chercher des matrices permettant d'obtenir certaines figures dans certaines positions reste à l'heure actuelle un problème non résolu. L'approche algébrique basée sur le calcul des noyaux $\text{Ker}(P_i)$ fournit le cadre de référence général. Mais la démarche des devins consiste vraisemblablement à restreindre le problème à des classes particulières de matrices (on en verra un exemple plus loin, avec la classe des matrices ayant quatre colonnes mère égales).

2.2.4. Identités remarquables

Pour finir, notons que les règles ancestrales de la géomancie introduisent une dissymétrie entre lignes et colonnes par l'ajout de la seizième position secondaire P_{16} . Cela explique l'apparition de deux séries remarquables d'égalités :

$$\begin{aligned} P_{16} + P_{10} &= P_2 + P_{13} = P_1 + P_{14}, \\ P_{16} + P_2 &= P_{12} + P_{15} = P_{10} + P_{13}. \end{aligned}$$

Ces deux séries sont les seules qui permettent d'obtenir *trois sommes* $P_i + P_j$ égales, parmi tous les couples (P_i, P_j) possibles. La première série est mentionnée par Jean-François Rabedimy, qui affirme que les devins l'utilisent comme un moyen de vérification supplémentaire, pour s'assurer que leur construction des tableaux de *sikidy* est correcte. Il appelle cette règle le *tsy misara-telo* (les « trois inséparables ») [Rabedimy, 1976, p. 81]. L'autre série de trois sommes égales est mentionnée par Marcia Ascher, mais elle ne semble pas utilisée dans la pratique [Ascher, 1997, p. 385]. Jusqu'à présent, nous n'avons recueilli aucune information qui montre l'utilisation explicite de ces équations chez les devins, mais cette hypothèse est plausible, car comme on l'a vu, le processus de divination consiste à faire mentalement des combinaisons de colonnes parmi les seize du tableau (par exemple, la « maladie » est donnée par $P_1 + P_9$). Il est assez naturel qu'à l'usage, les devins aient remarqué les égalités ci-dessus.

2.3. TABLEAUX REMARQUABLES TOKA ET FOHATSE

2.3.1. Tableaux toka

Les devins appellent *toka* (ou aussi *tokan-tsikidy*, ou encore *sikidy into*) un tableau dans lequel l'un des points cardinaux n'apparaît qu'une seule fois parmi les seize positions du tableau :

$$\exists i \leq 16, \forall k \neq i, \Omega(P_k(M)) \neq \Omega(P_i(M)),$$

où Ω est l'application qui a une figure associe son point cardinal. La définition de Ω varie d'une ethnie à l'autre, comme on l'a vu.

Un programme informatique tournant sur un ordinateur portable met quelques secondes pour parcourir l'ensemble des 65.536 tableaux de *sikidy* possibles. Nous avons fait un programme en Lisp qui permet d'énumérer les tableaux *tokan-tsikidy*, et plus généralement, d'extraire tout sous-ensemble de tableaux vérifiant une propriété particulière. On montre ainsi qu'il existe 15.125 *tokan-tsikidy* dans le système antandroy (et 12.496 dans le système antemoro, dont la répartition en points cardinaux est différente).

Points cardinaux	Nombre de <i>tokan-tsikidy</i>
antandroy	15.125
antemoro	12.496

TABLEAU 6. Nombre de *tokan-tsikidy* en fonction du classement en points cardinaux

2.3.2. Tableaux *fohatse*

Les devins appellent *fohatse* un tableau dans lequel une même figure est répétée un grand nombre de fois, c'est-à-dire concrètement, un nombre de fois supérieur à huit :

$$\exists i_1, i_2, \dots, i_8 \leq 16, P_{i_1}(M) = P_{i_2}(M) \dots = P_{i_8}(M).$$

Notre programme informatique montre qu'à partir de huit occurrences d'une même figure, certaines impossibilités apparaissent. Il est impossible, en effet, d'obtenir exactement huit occurrences des figures suivantes : *alokola*, *alikisy*, *alaimora*, *renilaza*, *alibiavo*, *adalo*, *tareky* (bien qu'on puisse, pour certaines d'entre elles, obtenir *plus* de huit occurrences). En revanche, il est toujours possible de construire un tableau avec exactement sept occurrences d'une figure donnée, quelle que soit cette figure¹⁴.

Lorsque cela est possible, le nombre de manières d'obtenir plus de huit occurrences varie de un à trente environ. Il arrive que la solution soit unique, selon la figure choisie, et le nombre d'occurrences voulues. C'est le cas des configurations remarquables du Tableau 7, qui sont connues des devins pour la plupart (la colonne de gauche donne le nombre de répétitions).

Figures donnant un <i>fohatse</i> unique	Nombre de répétitions
<i>asombola</i>	16
<i>karija</i> , <i>alimizanda</i> , <i>alakarabo</i>	11
<i>alakaosy</i>	10
<i>tareky</i> , <i>alimizanda</i> , <i>adalo</i> , <i>karija</i> , <i>alokola</i>	9
<i>alotsimay</i> , <i>alohotsy</i> , <i>alakaosy</i>	8

TABLEAU 7. Unicité des *sikidy fohatse* pour certaines répétitions de figures

Les devins s'intéressent également aux possibilités de combiner les propriétés logiques entre elles, par exemple en cherchant des tableaux qui soient à la fois *fohatse* pour une certaine figure, et *toka* pour une autre, ou bien plusieurs fois *toka*.

2.3.3. Classe des *toka* à quatre colonnes mère égales

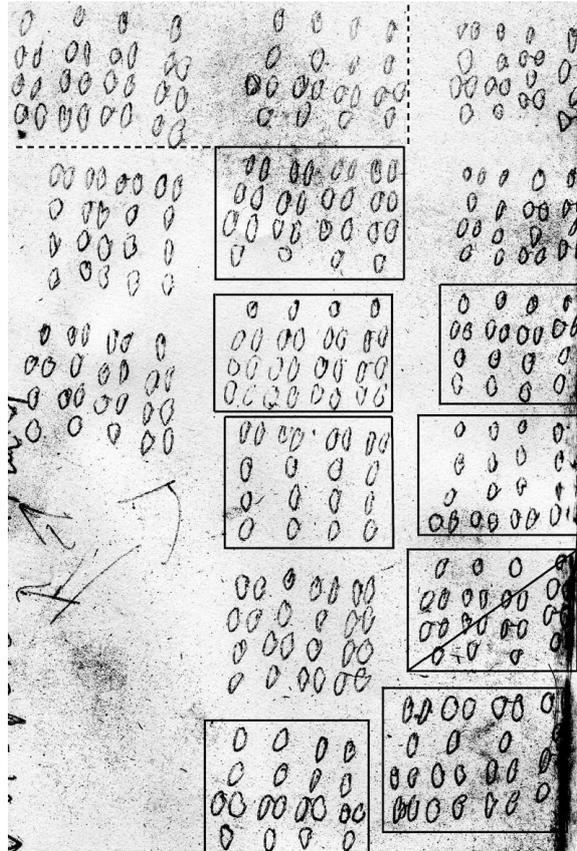
La recherche de tableaux *toka* ou *fohatse* est considérée par les devins comme un exercice intellectuel intéressant en soi, indépendamment de l'usage qu'ils en font dans la divination. Le prestige d'un devin dépend beaucoup du nombre de tableaux de ce type qu'il connaît. L'enquête de terrain a montré qu'ils les notent *dans des carnets*. Nous avons commencé à collecter systématiquement des copies de ces carnets. L'étude de ces précieux documents devrait faire apparaître certaines *mises en série*, révélant ainsi les méthodes utilisées par les devins pour rechercher ces tableaux, en montrant plus précisément comment ils restreignent l'espace de recherche à certaines classes particulières. Nous allons en donner un exemple.

¹⁴ À l'opposé des tableaux ayant un grand nombre de répétitions, il y a ceux qui en ont le moins possible. Mais tout tableau comporte *au moins une répétition*, c'est-à-dire deux colonnes égales. D'après Marcia Ascher, cette propriété est connue des devins [Ascher, 1997, p. 384]. Jean-Pierre Mouis a dénombré par ordinateur les tableaux n'ayant qu'une seule répétition [Mouis, 2004]. On constate qu'ils sont seize, et que parmi eux (i) la figure répétée est nécessairement en seizième colonne, et (ii) la figure absente est toujours l'élément neutre (2, 2, 2, 2).

La page de carnet reproduite Figure 9 fait apparaître une série remarquable de *toka ayant leurs quatre colonnes mère égales* (dont les matrices mère sont encadrées dans la figure, celles en pointillé étant des duplications, sans doute par inattention). Les tableaux de cette classe ont des propriétés très particulières, qui peuvent s'exprimer à travers une suite de propositions, dont chaque étape est élémentaire, mais dont la succession produit un raisonnement assez complexe :

- 1) Dans un tableau avec quatre colonnes mère égales, chaque ligne mère contient soit $(2, 2, 2, 2)$, soit $(1, 1, 1, 1)$.
- 2) Dans un tableau avec quatre colonnes mère égales, les filles de gauche de première et deuxième générations (combinaisons des lignes mères) sont égales à l'une ou l'autre des deux figures ci-dessus.
- 3) Dans un tableau avec quatre colonnes mère égales, les filles de droite de première et deuxième générations (combinaisons des colonnes mères) sont toutes égales à la figure élément neutre $(2, 2, 2, 2)$.
- 4) D'après (2) et (3), la fille de troisième génération est égale soit à $(2, 2, 2, 2)$, soit à $(1, 1, 1, 1)$.
- 5) Il en résulte qu'un tel tableau ne peut être *toka* que dans la dernière position secondaire (quatrième génération).
- 6) Si le tableau est *toka*, la dernière position secondaire doit être différente de la première colonne mère, donc la fille de troisième génération (égale à leur somme) ne peut contenir la figure élément neutre $(2, 2, 2, 2)$, donc d'après (4), elle contient la figure $(1, 1, 1, 1)$.
- 7) Comme d'après (3), la fille de deuxième génération de droite est l'élément neutre, et d'après (6), celle de troisième génération contient la figure $(1, 1, 1, 1)$, il en résulte que la fille de deuxième génération de gauche contient aussi cette figure : $P_{10}(M) = P_{12}(M) = (1, 1, 1, 1)$.
- 8) Si la fille de deuxième génération de gauche $P_{10}(M) = (s_1, s_2, s_3, s_4)$ ne comporte que des uns, cela implique que les colonnes de la matrice mère sont toutes des esclaves : $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 1$.
- 9) On en déduit finalement qu'un tableau avec quatre colonnes mère égales ne peut être *toka* que si la figure répétée de la matrice mère est un esclave.

Dans la page de la Figure 9, on trouve les sept solutions correctes, mais avec une matrice supplémentaire (barrée dans la reproduction) qui est notée par erreur, car la figure répétée $(1, 2, 2, 1)$ n'est pas un esclave, et ne donne pas un tableau *toka*. Plusieurs devins connaissent cette série de sept *toka* en position *kiba*, et lorsqu'on leur montre l'une des matrices mère à quatre colonnes égales, ils savent énumérer les six autres sans hésitation.

FIGURE 9. Page de carnet avec une série remarquable de *toka*

2.4. LES TRANSFORMATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA MATRICE MÈRE

2.4.1. Le groupe diédral d'ordre 4

Les transformations géométriques qui laissent invariant un carré forment le groupe diédral d'ordre 4

$$\Delta_4 = \{\text{Id}, R_1, R_2, R_3, S_1, S_2, S_3, S_4\}$$

composé :

- de l'identité,
- de deux rotations de 90° (en sens direct et en sens inverse) R_1, R_3 ,
- d'une rotation de 180° R_2 ,
- de deux symétries par rapport aux axes verticaux et horizontaux S_1, S_2 ,
- et de deux symétries par rapport aux diagonales S_3, S_4 .

Ce groupe correspond à des transformations géométriques simples, facile à se représenter. Il est donc naturel, comme on va le voir, que les devins en aient expérimenté l'effet sur la matrice mère d'un tableau de *sikidy*. Toutes ces transformations sont des morphismes pour l'addition du groupe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{16}$.

2.4.2. Symétrie par rapport à la deuxième diagonale (transposition)

La première transformation du groupe Δ_4 utilisée par les devins est la symétrie par rapport à la deuxième diagonale S_4 . Elle n'est autre que la transposition de matrice introduite précédemment $S_4(M) = {}^tM$. Elle a la propriété de *conserver quinze figures parmi les seize du tableau initial*.

En effet, la transposition échange les colonnes secondaires P_{13}, P_{14}, P_{15} avec P_9, P_{10}, P_{11} , en laissant P_{12} inchangée. Seule la colonne P_{16} est susceptible de faire apparaître une nouvelle figure, non présente dans le tableau initial. Il existe d'ailleurs certaines conditions suffisantes, faciles à vérifier, pour que la transposition de la matrice mère ne fasse pas apparaître en P_{16} de nouvelle figure :

- (i) si la première ligne est égale à la colonne de droite,
- (ii) ou si l'élément neutre apparaît en P_{12} .

De plus, si la matrice mère est symétrique par rapport à la deuxième diagonale, c'est-à-dire $M = {}^tM$, alors ces deux conditions sont simultanément remplies.

Ainsi, la transposition de la matrice mère modifie au plus une figure dans un tableau de sikidy, de telle sorte que si celui-ci était toka au départ, il y a de fortes chances pour qu'il le reste après transposition. Cette opération apparaît donc comme un moyen d'obtenir, dans de nombreux cas, un nouveau toka à partir d'un toka donné. Le terme que les devins antandroy utilisent pour désigner cette opération est *avaliky*, qui veut dire « inverser » dans le dialecte du Sud. Ils réalisent l'opération par des gestes consistant à faire glisser les graines sur la natte où elles sont disposées, d'abord celles de la première ligne qui sont placées en colonne, puis celles de la deuxième ligne qui sont placées en colonne à gauche de la précédente, etc.

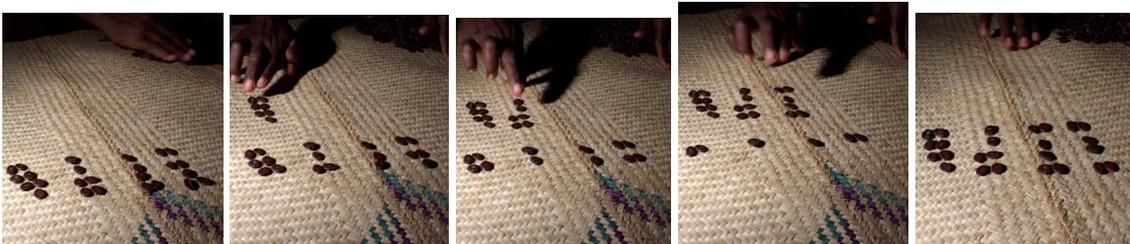


FIGURE 10. Un devin réalise une transposition de matrice

L'opération de transposition apparaît d'elle-même quand on s'intéresse aux tableaux *toka*. Par exemple, il existe certaines impossibilités d'obtenir une figure donnée *toka* dans une position donnée. Ces cas sont regroupés dans le Tableau 8 (le calcul a été fait par ordinateur).

Positions	Impossibilités de <i>toka</i>
P_{12}	les huit figures impaires
P_{11}, P_{15}	<i>tareky, asombola, alasady</i>
P_9, P_{13}	<i>alakarabo, alokola, alohotsy, alakaosy</i>
P_{10}	<i>alohotsy</i>

TABLEAU 8. Impossibilités d'obtenir des *toka* dans certaines positions (système antandroy)

Si l'on regarde les positions obtenues, on constate qu'à une exception près, elles sont liées entre elles par l'opération de transposition : P_{11} et P_{15} d'un côté, P_9 et P_{13} de l'autre, et P_{12} qui est d'une certaine manière auto transposée. Les devins, qui connaissent ces impossibilités, n'ont pas manqué de remarquer qu'elles se groupent par couples de colonnes échangeables sous l'effet d'une transposition. En revanche, la dernière impossibilité (*alohotsy toka* en P_{10}) est une singularité. La colonne associée par transposition P_{14} permet d'obtenir des *toka* avec la figure *alohotsy*.

Un autre cas intéressant faisant intervenir l'opération de transposition est celui du triple *toka*. Jean-François Rabedimy nous a montré un tableau qui a la propriété remarquable d'être trois fois *toka*, en conjecturant qu'il n'en existe qu'un seul de ce type. Le calcul par ordinateur a confirmé son intuition, car la solution est bien unique, mais à une transposition près. Il existe en fait deux matrices mère donnant un tableau trois fois *toka*, qui sont transposées l'une de l'autre. On notera d'ailleurs que la première ligne est égale à la colonne de droite, et ceci est une condition suffisante pour qu'un tableau reste *toka* après transposition. Ce tableau est connu des devins.

			s	o	s	s		
			•	••	•	•		s
			•	••	•	•		s
			••	••	••	••		s
		•	•	•	•			s
•	•	••	••	•	•	••	•	
•	•	••	••	•	•	••	•	
•	•	••	•	••	••	••	•	
•	•	••	•	••	••	••	••	
s	s	s	e	s	s	s	n	

TABLEAU 9. L'unique triple *toka* (à une transposition près)

2.4.3. Sous-groupe des rotations

Outre la transposition (symétrie par rapport à la deuxième diagonale S_4), les autres transformations du groupe diédral Δ_4 utilisées par les devins sont les trois rotations formant le sous-groupe $\{\text{Id}, R_1, R_2, R_3\}$.

Ces transformations interviennent dans le pseudo quadruple *toka*. Il s'agit d'une matrice mère qui donne quatre *toka*, non pas au sein des même filles (cela est impossible), mais en construisant les filles dans les quatre directions possibles. On voit Tableau 10 que les filles du bas donnent (2, 2, 2, 2) *toka* en P_{12} . Mais si l'on construit les filles vers la droite, on trouve la même figure *toka* dans la même position. La matrice étant invariante par R_2 (rotation de 180°), la propriété est conservée pour les filles construites vers le haut et vers la gauche. La propriété exprime le fait que les quatre matrices mère $M, R_1(M), R_2(M),$ et $R_3(M)$ donnent toutes la même figure *toka* en même position.

Si l'on fait le calcul par ordinateur, on trouve trente solutions. Elles sont toutes *toka* en position P_{12} , avec soit la figure (2, 1, 1, 2) à l'Est, soit (2, 2, 2, 2) au Sud. Mais la matrice du Tableau 10 admet de plus certaines symétries : elle est invariante par rapport au sous-groupe de Δ_4 engendré par les symétries par rapport aux diagonales $\{\text{Id}, S_3, S_4, R_2\}$. Si l'on impose de surcroît cette double symétrie aux matrices vérifiant la propriété ci-dessus, alors il ne reste que six solutions, formées de trois matrices (dont celle du Tableau 10) et de leurs rotations de 90°. De plus, les matrices étant symétriques

par rapport à la deuxième diagonale, c'est nécessairement l'élément neutre (2, 2, 2, 2) qui apparaît en P_{12} .

		o	o	o	n		
		••	•	•	•	n	
		•	••	••	•	o	
		•	••	••	•	o	
		•	•	•	••	o	
•	•	••	••	•	•	••	•
•	••	•	••	•	••	•	•
•	••	•	••	•	••	•	•
••	•	•	••	••	•	•	••
n	o	o	s	n	o	o	n

TABLEAU 10. Pseudo quadruple *toka* (dans les quatre directions)

3. CONCLUSION

L'un des principaux problèmes posés par l'ethnomathématique est la mise en évidence de liens entre les propriétés étudiées sur le plan mathématique, et les processus cognitifs sous-jacents chez les gens des sociétés concernées. De ce point de vue, l'enquête de terrain apporte un complément indispensable aux analyses formelles, en permettant d'associer aux propriétés abstraites une base cognitive réelle.

Les travaux présentés dans cette deuxième partie ont montré quelques pistes pour associer l'analyse mathématique et l'enquête de terrain. Cette approche fournit une ébauche de solution pour répondre à la question qui constitue le défi essentiel de l'ethnomathématique, et qui s'énonce ainsi : comment relier les constructions élaborées par les ethnomathématiciens aux processus mentaux des experts indigènes ? Autrement dit, comment s'assurer que l'on est bien en présence de véritables « mathématiques indigènes » ? L'enjeu est de taille, car les recherches ethnomathématiques ont un certain retard sur le grand mouvement ethnographique de la fin du XIX^e et du début du XX^e siècles qui a conduit les institutions scientifiques des pays occidentaux à envoyer aux quatre coins du monde des chercheurs chargés d'observer et de recueillir des informations sur les coutumes et les pratiques de la plupart des sociétés. Il est évident que peu d'ethnographes parmi eux étaient des mathématiciens spécialisés. Ce détail sans doute insignifiant à l'époque a produit avec le recul du temps ce qui apparaît aujourd'hui comme une *erreur de perspective* : les mathématiques pratiquées dans ces sociétés ont été ignorées faute d'observateurs capables de les décrire et de les étudier. Cette absence a donné naissance à de nombreuses interrogations sur l'universalité de la pensée rationnelle, qui se trouvaient en partie faussées par un manque d'informations suffisamment précises. C'est le rôle de l'ethnomathématique aujourd'hui de corriger la mise en perspective de cette question, en contribuant à un état des lieux aussi fidèle et exhaustif que possible des mathématiques pratiquées par l'humanité dans son ensemble.

BIBLIOGRAPHIE

ANONA M., « Aspects mathématiques du *sikidy* », Université d'Antananarivo, Département de mathématique et informatique, manuscrit, 2001.

AROM S., *Polyphonies et polyrythmies d'Afrique centrale. Structure et méthodologie*, Paris, Selaïf, 1985.

ASCHER M., *Ethnomathematics. A multicultural view of mathematical ideas*, New-York, Chapman & Hall, 1991, traduction K. Chemla, S. Pahaut, *Mathématiques d'ailleurs : nombres, formes et jeux dans les sociétés traditionnelles*, Paris, Seuil, 1998.

ASCHER M., "Malagasy *Sikidy*: A Case in Ethnomathematics", *Historia Mathematica* 24, 1997, p. 376-395.

BENSON D., *Music: a Mathematical Offering*, Cambridge, Cambridge University Press, 2006.

BRENNER K.P., *Die kombinatorisch strukturierten Harfen – und Xylophonpattern der Nzakara (Zentralafrikanische Republik) als klingende Geometrie – eine Alternative zu Marc Chemilliers Kanonhypothese*, Bonn, Holos-Verlag, 2004.

CABANE J.-P., *Ululan, les sables de la mémoire*, Nouméa, Grains de sable, 1997.

CHEMILLIER M., *Structure et méthode algébriques en informatique musicale*, Thèse d'informatique, Université Paris 7, 1989.

CHEMILLIER M., « La musique de la harpe », E. de Dampierre (éd.), *Une esthétique perdue*, Paris, Presses de l'École Normale Supérieure, 1995, p. 99-208.

CHEMILLIER M., de DAMPIERRE E., *Musiques des anciennes cours Bandia*, disque CD et notice CNRS/Musée de l'Homme, CNR 274 1009, Le Chant du Monde, 1996.

CHEMILLIER M., « Mathématiques et musiques de tradition orale », in H. Genevois, Y. Orlarey (éds.), *Musique & Mathématiques*, Lyon, Aléas-Grame, 1997, p. 133-143.

CHEMILLIER M., « Éric de Dampierre, un ethnologue passionné de musique. In memoriam », *Cahiers de musiques traditionnelles*, 11, 1998, p. 205-214.

CHEMILLIER M., Trois notices pour le disque *La parole du fleuve. Harpes d'Afrique centrale*, Paris, Cité de la musique, CM001, 1999.

CHEMILLIER M., "Ethnomusicology, Ethnomathematics. The Logic Underlying Orally Transmitted Artistic Practices", in G. Assayag, H.G. Feichtinger, J.F. Rodrigues (eds), *Mathematics and Music*, Fourth Diderot Forum, European Mathematical Society, Berlin, Springer-Verlag, 2002, p. 161-183.

CHEMILLIER M., "Synchronisation of musical words", *Theoretical Computer Science*, 310, 2003, p. 35-60.

CHEMILLIER M., TRUCHET C., "Computation of words satisfying the "rhythmic oddity property" (after Simha Arom's works)", *Information Processing Letters* 86, 5, 2003, p. 255-261.

CHEMILLIER M., « Représentations musicales et représentations mathématiques », *L'Homme*, numéro spécial « Musique et anthropologie », 171-172, 2004, p. 267-284.

CHEMILLIER M., « Musique et rythme en Afrique centrale », *Pour la science*, dossier n° 47 « Mathématiques exotiques », 2005, p. 72-76.

CHEMILLIER M., JACQUET D., RANDRIANARY V., ZABALIA M., « L'art des devins à Madagascar », *Pour la science*, dossier n° 47 « Mathématiques exotiques », 2005, p. 90-95.

CHEMILLIER M., JACQUET D., RANDRIANARY V., ZABALIA M., « Aspects mathématiques et cognitifs de la divination *sikidy* à Madagascar », *L'Homme*, 182, 2007, p. 7-40.

CHEMILLIER M., *Les Mathématiques naturelles*, Paris, Odile Jacob, 2007.

DECARY R., *La divination malgache par le sikidy*, Paris, Librairie orientaliste Paul Geuthner, 1970.

DESCOMBES R., *Les carrés magiques : histoire, théorie et technique du carré magique, de l'Antiquité aux recherches actuelles*, Paris, Vuibert, 2000.

GARDENIER W.J.G., « Divination and kinship among the sakalava of west Madagascar », *Madagascar: society and history*, C.P. Kottack, J.-A. Rakotoarisoa, A. Southall, P. Verrin (eds.), Durham (Carolina), Academic Press, 1986, p. 337-351.

GERDES P., *Une tradition géométrique en Afrique. Les dessins sur le sable*, Paris, L'Harmattan, 1995.

GREGORY B., *Entropy and complexity in music: some examples*, Master of Science, Department of Mathematics, University of North Carolina, 2004.

HALL R.W., KLINGSBERG P., "Asymmetric rhythms and tiling canons", [submitted to *American Math. Monthly*, 2004].

HÉBERT J.-C., « Analyse structurale des géomancies comoriennes, malgaches et africaines », *Journal de la Société des Africanistes*, 21, 1961, p. 115-208.

JAULIN R., FERRY R., « Algèbre d'un système divinatoire », séminaire du CAMS, 10 novembre 1960.

JAULIN R., *La géomancie. Analyse formelle*, Notes mathématiques de R. Ferry et F. Dejean, « Cahiers de l'homme », Paris, Mouton, 1966.

JAULIN R., « Analyse formelle de la géomancie », P. Richard, R. Jaulin (éds.), *Anthropologie et calcul*, 10/18, 1971, p. 183-215.

JAULIN R., *L'univers des totalitarismes. Essai d'ethnologie du « non-être »*, Paris, L. Talmart, 1995.

LOTHAIRE M., "Combinatorics on Words", *Encyclopedia of Mathematics*, Vol. 17, Addison-Wesley, 1983, reprinted Cambridge University Press, 1997.

LOTHAIRE M., *Algebraic Combinatorics on Words*, Cambridge, Cambridge University Press, 2002.

MOULS J.-P., « Nouvelles orientations pour une typologie formelle des séquences fixes de figures des premiers traités de géomancie arabe », [article en ligne (geomance.com), 2004].

RABEDIMY J.-F., *Pratiques de divination à Madagascar. Technique du sikidy en pays sakalava-menabe*, ORSTOM, n°51, 1976.

SADI R., « Configurations et probabilités d'occurrence de la figure unité en P_{15} en géomancie additive et en géomancie multiplicative », R. Jaulin, *Géomancie et Islam*, Paris, Christian Bourgois, 1989, p. 37-46.

SESIANO J., *Un traité médiéval sur les carrés magiques*, Lausanne, Presse Polytechniques et Universitaires Romandes, 1996.

VERIN P., NARIVELO R., "Divination in Madagascar, the antemoro case and the diffusion of divination", Ph. Peek (ed.), *African divination systems*, Indiana University Press, 1991, p. 53-68.