Mathématiques et sciences humaines
Mathematics and social sciences

178 | Été 2007
Art, mathématiques, langage et émotion

Gammes bien réparties et transformée de Fourier discrète

Maximally even sets and discrete Fourier transform

Emmanuel Amiot

Édition électronique
URL : http://journals.openedition.org/msh/4272
DOI : 10.4000/msh.4272
ISSN : 1950-6821

Éditeur
Centre d'analyse et de mathématique sociales de l'EHESS

Édition imprimée
Date de publication : 1 juillet 2007
Pagination : 95-118
ISSN : 0987-6936

Math. & Sci. hum. / Mathematical Social Sciences (45e année, n° 178, *2007*(2), p. 95–117)

GAMMES BIEN RÉPARTIES ET TRANSFORMÉE DE FOURIER DISCRÈTE

Emmanuel AMIOT[1]

RÉSUMÉ – *Un des concepts les plus intŕessants de ces dernières années dans la recherche mathématico-musicale américaine est celui de «* Maximally Even Set *», ou gamme bien répartie. Il est particulièrement pertinent aussi bien pour le musicien, qui y retrouvera ses gammes préférées, que pour le mathématicien qui y verra des définitions claires et d'intéressants problèmes d'optimisation discrète. Cet article vise à présenter cette notion et son histoire au public francophone, tout en mettant en avant une définition nouvelle, en termes de transformée de Fourier discrète, approche radicale héritée du regretté David Lewin dans le contexte musical.*

MOTS CLÉS – Chopin, Contenu intervallique, Debussy, Équirépartition, Gammes musicales, Groupes cycliques, Intervalles, Myhill, Théorème de l'hexacorde, Transformée de Fourier discrète

SUMMARY – Maximally even sets and discrete Fourier transform
*One of the most fascinating concepts in recent American mathematico-musical research is that of "*Maximally Even Sets*", which is on the one hand an economic and elegant characterization of a class of musically interesting scales; and on the other hand a nice optimization problem, with a clear description of solutions. This paper aims firstly at broaching the subject in French, which has seldom been done. It also brings forth an original definition of Maximally Even Sets by way of Discrete Fourier Transform, following an old but fruitful idea of David Lewin, the late American master of maths and music.*

KEYWORDS – Babbit's hexacord theorem, Chopin, Cyclic groups, Debussy, Discrete Fourier transform, Equirepartition, Intervallic content, Intervals, Musical scales, Myhill

Un des concepts les plus séduisants avancés ces dernières années par les théoriciens américains de la musique est celui des gammes bien réparties (« Maximally Even Sets »), qui étend et précise celui des gammes monogènes (« Generated Scales ») ou celui moins connu mais fécond de gamme bien formée (« Well Formed »). L'objectif essentiel de cet article est de présenter ces notions au public francophone. Sa principale originalité consiste à partir, contrairement à l'école américaine, d'une définition purement (géo)métrique en termes de transformée de Fourier, sans référence à la notion ordonnée de gamme musicale. Il peut paraître ironique que la transformée de Fourier discrète resurgisse dans ce contexte plutôt algébrique, voire ensembliste, alors que l'étude des spectres (continus) est depuis longtemps un cheval de bataille en théorie du son !

[1]Classes Préparatoires aux Grandes Écoles (CPGE), Lycée Arago, 66000 Perpignan, manu.amiot@free.fr

Notations :

1. $\lfloor x \rfloor$ dénote la partie entière du réel x, $\lceil x \rceil$ est l'entier immédiatement supérieur.
2. $\mathbf{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs, $\mathbf{Z}_c$ le groupe cyclique à c éléments.
3. $c \wedge d$ est le plus grand commun diviseur de c et d.
4. $d \mid c$ signifie que d divise c.

1. QUE VEUT-ON DIRE PAR « BIEN RÉPARTIE » ?

Dans le langage de Claude Debussy comme de bien d'autres compositeurs, on trouve aussi bien la gamme traditionnelle, majeure, que la gamme par tons ou la gamme pentatonique ; dans plusieurs pièces (*L'Isle Joyeuse, Voiles...*) on trouve plusieurs de ces modes en concurrence, ou en complément. Le présent article présente, sous un angle inédit, une propriété qui est commune à ces trois gammes et les caractérise sous certaines conditions.

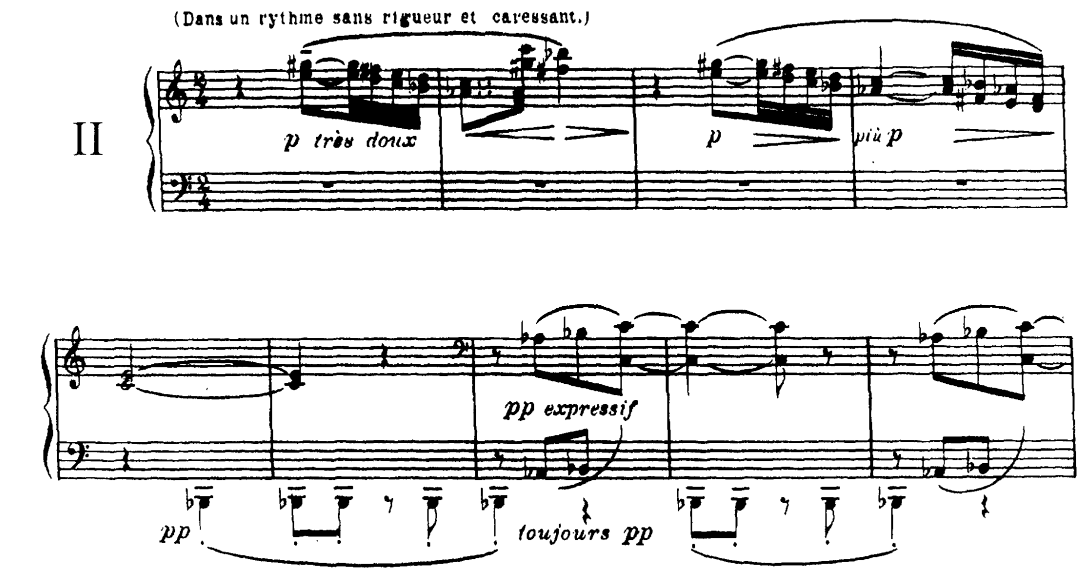

FIGURE 1. Le début de « Voiles », de C. Debussy

Nous travaillons dans le contexte d'un *total chromatique* modélisé par le groupe cyclique $\mathbf{Z}_c$[2] à c éléments, qui s'interprète musicalement comme une division de l'octave en c parties égales, ou encore aux rapports de fréquence de la forme $2^{k/c}, k \in \mathbf{N}$. Il existe en musique des tempéraments inégaux, bien sûr, et l'on peut étendre au moins une partie de la théorie qui suit à de tels objets, avec des résultats intéressants, mais ce n'est pas ici notre propos. Une *gamme* sera tout simplement un sous-ensemble de cardinal d de $\mathbf{Z}_c$ (ces notations sont celles notamment de [Quinn, 2004]). Notre souci est de choisir ces d notes parmi c de telle sorte qu'elles soient les plus également réparties possible. Les pionniers de cette notion ont découvert avec délice que l'on retrouve ainsi des gammes très particulières, comme la gamme majeure ou la pentatonique (gamme chinoise) qui trouvent ainsi une légitimité supplémentaire.

[2]Ce qui modélise le fait psychoacoustique que le cerveau tend à reconnaître comme « égales » des notes distantes d'une octave, i.e. dont le rapport des fréquences vaut 2.

1.1. BIEN POSER LA QUESTION

Il convient de préciser ce que l'on entend par « le mieux réparti possible ».

Ce n'est pas une question si évidente, comme évoqué par [Block, Douthett, 1994]. Ceci peut sembler étrange, car l'idée en est intuitive et suffisamment simple pour être appréhendée par des lycéens ([Johnson, Durfee, 1999]).

Mais si l'on propose, par exemple, la définition naturelle consistant à maximiser la somme des intervalles entre tous les éléments (l'intervalle entre $a, b \in \mathbf{Z}_c$ étant $\max\limits_{k\in\mathbb{Z}} |a - b + k\,c|$, la plus petite valeur de $|a - b|$ quand on fait varier le choix des représentants des classes a, b modulo c), on obtient des gammes tout à fait contraires à l'intuition. Ainsi par exemple : parmi les pentacordes (gammes de cinq notes parmi 12), les diverses valeurs possibles de cette somme sont 40, 48, 52, 56, 60, 64, 68 et 72. Si la valeur minimum de 40 correspond, conformément à l'intuition, aux pentacordes chromatiques (comme Do Do♯ Ré Ré♯ Mi), le maximum de 72 est atteint pour de très nombreuses (21 !) gammes différentes, comme (0 1 2 6 7) ou Do Do♯ Ré Fa♯ Sol - il n'y a donc pas unicité de la solution, qui ne caractérise donc pas la gamme pentatonique[3].

La définition usuelle par l'école américaine présuppose que l'on range les éléments de la gamme, pour pouvoir calculer les intervalles entre une note et ses voisines immédiates. Elle porte donc une forte connotation culturelle ($\mathbf{Z}_c$ n'a pas une vraie relation d'ordre ! on se souvient ici *inconsciemment* que le modèle de $\mathbf{Z}_c$ est une réduction du domaine totalement ordonné des hauteurs), et nous ferons ici le choix de proposer une définition purement abstraite, qui s'applique à un *sous-ensemble* à d éléments et non à un $d-$uplet.

Une méthode intuitive avec « des points blancs et des points noirs » ([Clough, Douthett, 1991]), bien qu'elle consiste à étudier justement l'ordre dans lequel se retrouvent les points, mérite une mention spéciale : on considère un polygone régulier à d sommets blancs et un autre avec $c - d$ sommets noirs. Alors on superpose les deux, convenablement tournés pour que deux sommets ne puissent coïncider ; l'ordre alors obtenu donne une gamme bien répartie[4], que l'on peut expliciter en ajustant les positions des points sans changer leur répartition. Clough et Douthett montrent que ce procédé équivaut à leur définition.

En tant que mathématicien, on peut rechercher une définition moins « bricolée ». À titre de motivation citons un résultat relativement récent [Toth, 1956]).

THÉORÈME 1. [Toth, 1956]. *On considère d points sur le cercle unité ; la somme des distances* euclidiennes *(i.e. en ligne droite) entre tous ces points est maximale si, et seulement si, la figure qu'ils forment est un polygone régulier.*

DÉMONSTRATION. Elle est non triviale. Observons que ce résultat est faux en dimension supérieure (c'est encore un problème ouvert en général que de trouver d

[3] Par rapport au résultat général de [Clough, Douthett, Krantz, 2000] mentionné plus loin, cela tient à ce que la fonction utilisée d'évaluation n'est pas *strictement* convexe.

[4] Aussi bien pour le sous-ensemble noir que pour le blanc.

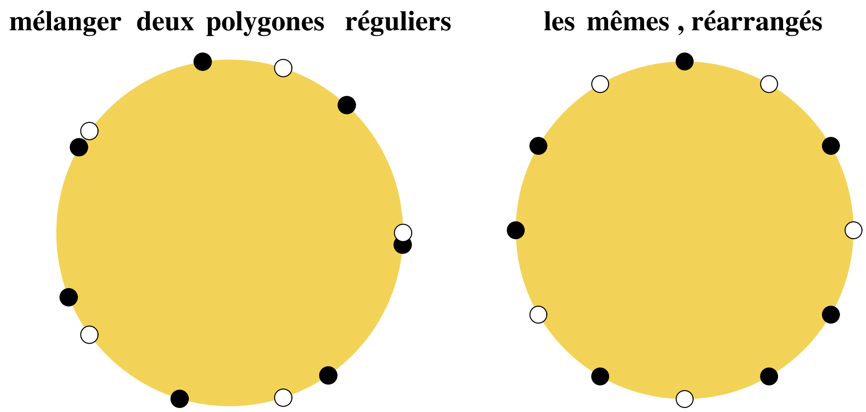

FIGURE 2. La méthode des points blancs et noirs

points sur la sphère S^2 maximisant la somme de leurs distances mutuelles). En revanche il est facile (calcul différentiel élémentaire) de montrer que les polygones réguliers sont ceux qui maximalisent le *périmètre*. □

Nous pourrions, en nous inspirant de ce lemme, chercher les sous-ensembles à d éléments de $\mathbf{Z}_c$, identifié au $c-$polygone régulier, qui maximisent la somme des distances euclidiennes, ce qui est une façon de chercher à approcher un polygone régulier à d sommets. Ce serait une bonne idée dans la mesure où l'on retrouverait ainsi les sous-ensembles particuliers appréciés des musiciens (cf. [Clough, Douthett, Krantz, 2000]), et une unique solution pour chaque valeur de d (à symétries près). Si l'on reprend le cas des pentacordes dans l'univers des douze sons, la gamme pentatonique est maximale pour ce critère, avec une somme égale à 30.5758, et c'est l'unique solution à translation près.

Mais ces distances euclidiennes, ces longueurs de cordes, n'ont pas de signification musicale[5] et font appel à la structure euclidienne du plan dans lequel on dessine la figure ; nous préfèrerons donc une définition sans doute plus technique, mais à notre avis plus pure, qui va dans le même sens, à savoir chercher à approcher un $d-$polygone régulier par une sous-figure du $c-$polygone régulier. Ceci est plus proche du procédé avec les points noirs et blancs. Mais dans ce but nous allons plutôt faire un retour aux sources de l'étude des propriétés internes des gammes (ou accords) telle que commencée par [Lewin, 1959].

1.2. TRANSFORMÉE DE FOURIER

L'idée géniale d'exploiter la transformée de Fourier discrète pour inventorier les intervalles dans un accord (ou une gamme) remonte à David Lewin en 1959. et est à l'origine de nombreux concepts qui ont marqué la recherche américaine depuis 1959. Nous choisissons la même définition que lui parmi toutes les définitions possibles.

DÉFINITION 1. *La transformée de Fourier de* $f : \mathbf{Z}_c \to \mathbf{C}$ *est*

[5] On prend le double du sinus de l'intervalle, avec un facteur d'échelle...

$$\mathcal{F}(f) : t \mapsto \sum_{k \in \mathbf{Z}_c} f(k) e^{-2ik\pi t/c}$$

Plus particulièrement, la transformée de Fourier de $A \subset \mathbf{Z}_c$ sera la transformée de Fourier de la fonction caractéristique 1_A du sous-ensemble A [6] *:*

$$\mathcal{F}_A : t \mapsto \sum_{k \in A} e^{-2i\pi kt/c}$$

Quelques exemples :

1. $\mathcal{F}_{\mathbf{Z}_c}$, la transformée de Fourier de toute la gamme chromatique, est $\sum\limits_{k=0}^{d-1} e^{-2i\pi kt/c} = \dfrac{1 - e^{-2i\pi t}}{1 - e^{-2i\pi t/c}}$. Cette fonction est nulle sur $\mathbf{Z}_c$ sauf quand $t = 0$. On voit bien sur ce calcul que seule compte la classe de l'indice k modulo d, ce qui est adéquat.
2. Considérons la septième diminuée D7 = (0 3 6 9) dans l'univers à 12 notes. Alors
$$\mathcal{F}_{D7} : t \mapsto \sum_{k=0}^{3} e^{-(3k)2i\pi t/12} = \sum_{k=0}^{3} e^{-ki\pi t/2} = \frac{1 - e^{-2i\pi t}}{1 - e^{-i\pi t/2}}$$
On remarque que $\mathcal{F}_{D7}(4) = 4$. Observons aussi que A est $3-$périodique : le principe même de la transformée de Fourier est que *le coefficient de Fourier $\mathcal{F}(f)(k)$ mesure à quel point la fonction f est $c/k-$périodique.* Ceci résulte du principe de la transformée de Fourier inverse (théorème de Plancherel) : on a toujours
$$\forall t \in \mathbf{Z}_c \qquad f(t) = \frac{1}{c} \sum_{k=1}^{c} \mathcal{F}(f)(k) e^{+2i\pi kt/c}$$
et donc plus $\mathcal{F}(f)(k)$ est gros, plus f est « concentrée » autour de $t \mapsto e^{+2i\pi kt/c}$.
3. Le *module* de la transformée de Fourier est invariant par translation et inversion :
$$\mathcal{F}_{A-p}(t) = e^{2ipt/c} \mathcal{F}_A(t) \qquad \mathcal{F}_A(-t) = \overline{\mathcal{F}}_A(t)$$
Cette propriété est importante pour les musiciens, dont les notions sont invariantes par transposition (= translation dans le domaine des hauteurs) et parfois par inversion (où la quinte devient une quarte).
4. Pour toute partie $A \in \mathbf{Z}_c$ on a $\mathcal{F}_A(0) = \text{Card } A$.

La puissance de cet outil est considérable, comme on le voit dans les propriétés suivantes.

[6] Si l'on s'intéresse aux fonctions du cercle S^1 à valeurs dans $\mathbf{C}$, on peut voir cela comme la transformée de Fourier d'une distribution, à savoir un peigne de Dirac $\sum_{k \in A} \delta_k$.

1.3. Propriétés des transformées de Fourier de parties de $\mathbf{Z}_c$

THÉORÈME 2. *La transformée de Fourier d'une partie et celle de son complémentaire sont opposées en* $k = 1 \dots d-1$ *:*

$$\mathcal{F}_A(k) + \mathcal{F}_{\mathbf{Z}_c \setminus A}(k) = 0 \quad \forall k = 1 \dots c-1$$

DÉMONSTRATION. Cela provient, par linéarité, de $\mathcal{F}_A + \mathcal{F}_{\mathbf{Z}_c \setminus A} = \mathcal{F}_{\mathbf{Z}_c}$ et de ce que (cf. supra) $\mathcal{F}_{\mathbf{Z}_c}(k) = 0$ pour $k = 1 \dots c-1$. □

Observons que la remarque faite ci-dessus sur la septième diminuée se généralise.

PROPOSITION 1. *Considérons une division de* $\mathbf{Z}_c$ *en* d *parties égales :* $A = \{0, m = \dfrac{c}{d}, 2m, \dots (d-1)m\}$. *Alors la transformée de Fourier de* A *est maximale au point* $t = d$. *Plus précisément*

$$\mathcal{F}_A(t) = \begin{cases} d & \text{si } d \mid t \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. En effet, on a

$$\mathcal{F}_A(t) = \sum_{k=0}^{d-1} e^{-2ik\pi tm/c} = \sum_{k=0}^{d-1} e^{-2ik\pi t/d} = \frac{1 - e^{-2i\pi t}}{1 - e^{-2i\pi t/d}} = 0$$

pour t non multiple de d. En revanche pour $t = d$ (et multiples) on a $\mathcal{F}_A(t) = 1 + 1 + \dots 1 = d$. □

Il est notable que la division régulière de $\mathbf{Z}_c$ donne une valeur absolue maximale de la transformée de Fourier *parmi tous les sous-ensembles de cardinal d donné.* Nous allons toutefois donner une raison supplémentaire de nous intéresser à cette transformée, qui est qu'elle permet de mesurer l'importance de la présence entre les éléments de A d'intervalles proches de c/d.

THÉORÈME 3. (Contenu intervallique). *Définissons le* contenu intervallique *de* $A \subset \mathbf{Z}_c$ *par le nombre d'occurrences de chaque intervalle entre deux éléments de* A, *ce qui se résume par la fonction :*

$$IC_A(k) = \mathrm{Card}\{(x, y) \in A \times A \mid x + k = y\}$$

Alors la transformée de Fourier de la fonction IC_A *est* $|\mathcal{F}_A|^2$.

C'est la remarque fondamentale de David Lewin dans son tout premier article [Lewin, 1959], remarque qu'il a énoncée (en deux lignes seulement) dans le contexte plus général des *relations intervalliques* entre deux parties.

DÉMONSTRATION. IC est un produit de convolution (que nous noterons $\star$) entre la fonction caractéristique de A et celle de $-A$:

$$
\begin{aligned}
IC_A(k) &= \operatorname{Card}\{(x,y) \in A \times A \mid x + k = y\} \\
&= \sum_{\substack{y \in A \\ y-k \in A}} 1 \\
&= \sum_{y \in \mathbf{Z}_c} 1_A(y) \times 1_{-A}(k-y) \\
&= \big(1_A \star 1_{-A}\big)(k)
\end{aligned}
$$

Il est bien connu que la transformée de Fourier d'un produit de convolution est le produit ordinaire des transformées de Fourier : $\mathcal{F}(f \star g) = \mathcal{F}(f) \times \mathcal{F}(g)$. Dans $\mathbf{Z}_c$, cela dérive du calcul suivant :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}(f \star g)(k) = \sum_{k \in \mathbf{Z}_c} (f \star g)(k) e^{-2ik\pi t/c} &= \sum_{k \in \mathbf{Z}_c} \sum_{\ell \in \mathbf{Z}_c} f(\ell) g(k-\ell) e^{-2ik\pi t/c} \\
&= \sum_{\ell \in \mathbf{Z}_c} \sum_{k-\ell \in \mathbf{Z}_c} f(\ell) g(k-\ell) e^{-2i(k-\ell)\pi t/c} e^{-2i\ell\pi t/c} \\
= \sum_{\ell \in \mathbf{Z}_c} f(\ell) e^{-2i\ell\pi t/c} \times \sum_{k-\ell \in \mathbf{Z}_c} & g(k-\ell) e^{-2i(k-\ell)\pi t/c} = \mathcal{F}(f)(k) \times \mathcal{F}(g)(k)
\end{aligned}
$$

Appliquant cela à $f = 1_A$ et $g = 1_{-A}$ on obtient le résultat (avec $\mathcal{F}_{-A} = \overline{\mathcal{F}_A}$). $\square$

On déduit au passage de ce résultat une très jolie preuve du théorème de l'hexacorde de Milton Babbitt :

THÉORÈME 4. (de l'hexacorde [Babbitt, 1964]). *Deux parties complémentaires et de même cardinal de $\mathbf{Z}_c$ (pour c pair) ont même contenu intervallique.*

En effet, si l'on considère deux parties complémentaires et de même cardinal, alors leurs transformées de Fourier sont opposées (pour $t = 1 \dots c-1$) ou égales (en $t = 0$), en particulier les transformées de Fourier de leurs IC sont égales, et donc les IC aussi (par transformée de Fourier inverse).

Nous avons donné ce théorème sur le contenu intervallique parce qu'il montre bien l'importance de la transformée de Fourier quant aux intervalles présents dans une partie de $\mathbf{Z}_c$: la valeur de la transformée de Fourier de $IC_A(t)$ pour $t = m$ dit dans quelle mesure cette fonction IC est $c/m-$ périodique ; considérons le cas extrême où $\mathcal{F}(IC_A)$ serait nulle, sauf en d (et multiples), où elle vaudrait d : alors d'après ce qui précède, A doit diviser régulièrement $\mathbf{Z}_c$.

Tout ceci nous convainc que la transformée de Fourier, et plus particulièrement son module, donne une bonne idée d'à quel point une partie $A \subset \mathbf{Z}_c$ est proche d'un polygone régulier. Cette philosophie de repérer les divisions « archétypales » du total chromatique est celle de la première partie de la remarquable dissertation de Ian Quinn [2004] qui a motivé le présent exposé.

1.4. DÉFINITION DES GAMMES BIEN RÉPARTIES

DÉFINITION 2. *Dorénavant nous dirons que* $A \in \mathbf{Z}_c$*, de cardinal* d*, est* bien répartie *si la quantité*

$$\sqrt{\mathcal{F}(IC_A)(d)} = |\mathcal{F}_A(d)|$$

est maximale parmi toutes les parties de cardinal d *:*

$$|\mathcal{F}_A(d)| \geq |\mathcal{F}_{A'}(d)| \quad \forall A' \subset \mathbf{Z}_c, \text{Card } A' = d$$

Observons que cette définition (contrairement à celle que donnent [Clough, Douthett, 1991] *et alia*) porte sur *l'ensemble* A, sans considérer du tout les éléments de A comme ordonnés. Une partie à d éléments qui réalise ce minimum (il en existe car il n'y a qu'un nombre fini de parties à d éléments parmi c) sera dite *gamme bien répartie* ou GBR.

Résumons ici quelques remarques (démontrées *supra*) qui motivent cette définition :

- $|\mathcal{F}_A| = |\mathcal{F}_{A+\alpha}| = |\mathcal{F}_{-A}|$ pour tout α (invariance par translation et inversion) ;
- $|\mathcal{F}_A(t)| \leq d = \text{Card } A$, pour tout $t \in \mathbf{Z}_c$ et même dans $\mathbf{R}$.
- $|\mathcal{F}_A(p)| = d$ si et seulement si toutes les exponentielles $e^{-2ik\pi t/c}$ qui figurent dans $\mathcal{F}_A$ ont même argument (modulo 2π), i.e. pour $a, b \in A$ la quantité $(b-a)p/c$ est toujours un entier. Ce qui prouve la propriété suivante, réciproque de la proposition précédente :

THÉORÈME 5. *Soit* $A \subset \mathbf{Z}_c$ *de cardinal* d *; si* $|\mathcal{F}_A(d)| = d$*, alors* d *divise* c*, et* A *est un polygone régulier (i.e.* $A = \{a_0, a_0 + c/d, \dots a_0 + (d-1)c/d\}$*).*

DÉMONSTRATION. Fixons une origine $a_0 \in A$: on a dit que tous les $(a-a_0)d/c, a \in A$ prennent d valeurs *entières* distinctes (modulo c), donc le pgcd g des $a - a_0$ est multiple de c/d : $c/d \mid g$ et $g \geq c/d$.

Par ailleurs, il y a d multiples de g, compris entre 0 et $c-1$, qui sont distincts, à savoir les $a - a_0, a \in A$.[7] Donc g n'excède pas c/d. D'où $g = c/d$ et les $a - a_0$ sont les multiples de c/d. □

Une autre propriété est aisément démontrée :

THÉORÈME 6. *Le complémentaire d'une gamme bien répartie est aussi bien répartie.*

DÉMONSTRATION. Soient A et B deux parties complémentaires (non vides) de $\mathbf{Z}_c$, de cardinaux d et $c-d$ respectivement. Alors d'après le théorème 2

$$|\mathcal{F}_{\mathcal{A}}(d)| = |-\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(d)| = |-\overline{\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(-d)}| = |-\overline{\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(c-d)}| = |\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(c-d)|$$

et l'un est maximal (parmi toutes les parties à d éléments) si et seulement si l'autre l'est (parmi toutes les parties à $(c-d)-$ éléments). □

En conséquence nous supposerons dorénavant que $c > d/2$ (le cas $c = 2d$ étant trivial).

Il est aussi évident que le rétrograde $-A$ d'une partie bien répartie A l'est aussi, de même pour les translatés $A+p$. Une propriété n'est toujours pas évidente à partir de cette définition, c'est l'unicité (à translation près) d'une partie bien répartie de cardinal donné. Cela résultera des propriétés données dans la partie suivante.

[7] On choisit le représentant de la classe modulo c qui est compris entre 0 et $c-1$

2. LA FORMULE GÉNÉRATRICE

2.1. Quelques lemmes

Partant de notre définition, nous voulons retrouver qu'une partie bien répartie est donnée (cf. [Clough, Myerson, 1985], généralisé par [Clough, Douthett, 1991]) par une formule du type

$$a_k = J^{\alpha}_{c,d}(k) = \lfloor \frac{kc+\alpha}{d} \rfloor$$

où a_k dénote le $k^{\text{ème}}$ élément de A et $\lfloor x \rfloor$ est la partie entière de x.

Nous avons besoin d'un lemme géométrique. Nous voulons exprimer plus précisément que, par définition, tous les $e^{ikd2\pi/c}$ doivent être aussi proches que possible, puisque l'on veut en maximiser la somme ; de fait,

THÉORÈME 7. *Considérons un ensemble A de d points* distincts *dans $\mathbf{Z}_c$; la somme $|\sum\limits_k e^{ia_k 2\pi/c}|$ est maximale quand les points sont consécutifs dans $\mathbf{Z}_c$, i.e. A est un translaté de $\{0,1,2,\ldots,d-1\}$ (on exige que les points soient* serrés *les uns contre les autres).*

Cette propriété pourrait être adoptée comme définition des gammes bien réparties, elle a bien sûr été remarquée comme corollaire des définitions usuelles [Clough, Douthett, 1991]. L'implication présentée ici est plus originale, elle repose[8] sur le

LEMME 1. (des points bien serrés). *On prend d points $a_1, \ldots a_d$ sur le cercle unité, et on déplace l'un de ces points (disons a_1) vers la somme de tous les a_i, c'est-à-dire que l'on remplace a_i par un a'_1 situé sur l'arc de cercle (minimal) entre a_1 et $\sum\limits_{k=1}^{d} a_k$. Alors $|a'_1 + a_2 + \ldots a_d| \geq |a_1 + a_2 + \ldots a_d|$.*

DÉMONSTRATION. La somme augmente car l'angle entre $\sum\limits_{k=1}^{d} a_k$ et $a'_1 - a_1$ est aigu : en effet, si on pose que l'argument de $\sum a_k$ est 0 et que l'on prend a_1, a'_1 « au dessus », avec l'orientation usuelle du cercle, alors par convention il vient

$$0 < \arg a'_1 = \theta' < \theta = \arg a_1 \leq \pi \quad \arg(a'_1 - a_1) = \arg(e^{i\theta'} - e^{i\theta'}) = \frac{\theta+\theta'-\pi}{2} \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$$

On peut aussi démontrer ce lemme en projetant sur la droite dirigée par $\sum a_k$, ce qui donne la somme des cosinus des angles avec cette direction, et arguer que la fonction cosinus est décroissante sur $[0,\pi]$. Donc la somme des cosinus va augmenter quand on remplace a_1 par a'_1, Or le module de la somme $a'_1 + a_2 + \ldots$ est encore supérieur (la direction aura changé) à cette somme des cosinus, donc augmente *a fortiori*. □

[8] Ce procédé d'amélioration par itération est utilisé, dans un contexte plus compliqué, pour démontrer le premier résultat de [Clough, Douthett, Krantz, 2000].

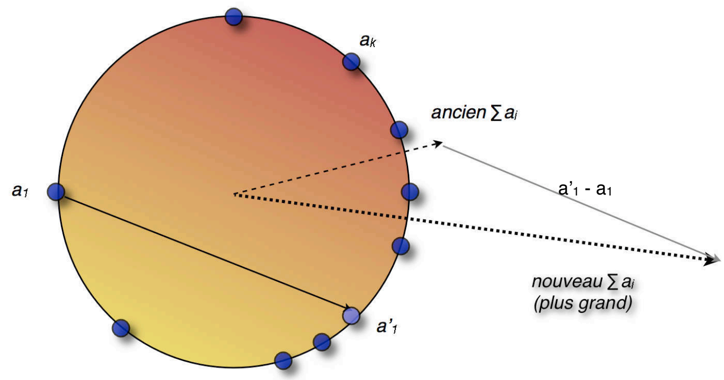

FIGURE 3. Rangement point par point

À partir de ce lemme, la démonstration du théorème est algorithmique : partant d'une configuration des $e^{ia_k 2\pi/c}$ qui comporte des trous (A n'est pas translatée de $\{0, 1, \dots, d-1)$, on effectue un déplacement comme dans le lemme, bouchant un trou avec le point voisin (le voisin vers l'extérieur, i.e. dans la direction opposée par rapport à la somme totale). On peut itérer cela jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de trous, i.e. jusqu'à ce que tous les points soient consécutifs. Cela se fait en un nombre fini d'étapes (le module de la somme augmente strictement à chaque fois, et ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs). D'où le théorème. $\square$

Ceci nous permet de règler le cas où c et d sont premiers entre eux, cas musicalement capital pour les musiciens (gammes à 5 ou 7 notes parmi 12, par exemple !).

Lemme 2. *Supposons $d \wedge c = 1$ et soit $A = \{a_1, \dots a_d\}$ un ensemble bien réparti. Alors il existe un décalage k tel que $d\,A$ s'écrit $k + \{1, 2, \dots d\}$ et il y a exactement c tels ensembles A de cardinal d, tous déduits l'un de l'autre par translation.*

Cette propriété a déjà été observée, notamment par divers chercheurs italiens [Cafagna, Vicinanza, 2004] mais elle n'a pas été utilisée à ma connaissance comme *caractérisation* des gammes bien réparties. Comme on l'établira ci-dessous, à un détail technique près cela fait aussi l'affaire même si $d \wedge c > 1$.

DÉMONSTRATION. Le seul point à préciser avant d'appliquer le Lemme ci-dessus aux points $e^{2i\pi a_k d/c}, a_k \in A$, est que les éléments de $d\,A$ sont bien distincts : ceci résulte de ce que $x \mapsto d \times x$ est bijective dans $\mathbf{Z}_c$; vu que $d \wedge c = 1$. Le lemme nous dit que les éléments de $d\,A$ doivent être consécutifs, i.e. $d\,A$ est translaté de $\{1, 2, \dots d\} \subset \mathbf{Z}_c$ et donc A est translaté de $d^{-1} \times \{1, 2, \dots d\}$ où $d^{-1} \in \mathbf{Z}_c$. $\square$

2.2. ENGENDRER TOUTES LES GAMMES BIEN RÉPARTIES

2.2.1. Cas $d \wedge c = 1$

THÉORÈME 8. *Avec les hypothèses précédentes ($d \wedge c = 1$), une gamme bien répartie A est une* gamme monogène *("Generated Scale") : à une translation près,*

$$\exists f \in \mathbf{Z}_c \mid A = \{f, 2f, \dots d\,f\}$$

DÉMONSTRATION. Avec les notations précédentes, on prend $f = d^{-1} \in \mathbf{Z}_c$, puis $A = f \times \{1, 2, \ldots d\}$. □

Ainsi par exemple les gammes majeure et pentatonique, qui sont les gammes bien réparties de cardinal 7 et 5 respectivement dans $\mathbf{Z}_{12}$, forment une portion du *cycle des quintes* : elles sont engendrées par $f = 7$, car

$$\{0, 2, 4, 5, 7, 9, 11\} = \{-7, 0, 7, 14, 21, 28, 35\} \pmod{12}$$

La relation $f = d^{-1}$ explique bien pourquoi ceci ne fonctionne que quand $d \wedge c = 1$. Le fait que les 5 premières notes de la gamme majeure constitue une gamme pentatonique est remarquable, et tient à ce que f (ici les quintes) comme $-f$ (ici les quartes) engendrent aussi bien les mêmes GBR, puisque comme on l'a vu le rétrogradé d'une GBR est encore une GBR. Plus généralement on a l'énoncé

PROPOSITION 2. *Soit $d < c/2, d \wedge c = 1$; alors une GBR de cardinal d parmi c est incluse dans une (plus précisément dans $c - 2d + 1$ distinctes) GBR de cardinal $c - d$, c'est-à-dire qu'à translation près une GBR est incluse dans sa complémentaire.*

Une célèbre illustration de cette propriété (en filigrane dans [Clough, Douthett, 1991] et dans le contexte des « prototypes »dans [?]) est l'étude 5 en sol bémol majeur, opus 10, de Chopin, dans laquelle la main droite ne joue que des touches noires, la main gauche établissant dans le même temps diverses tonalités compatibles.

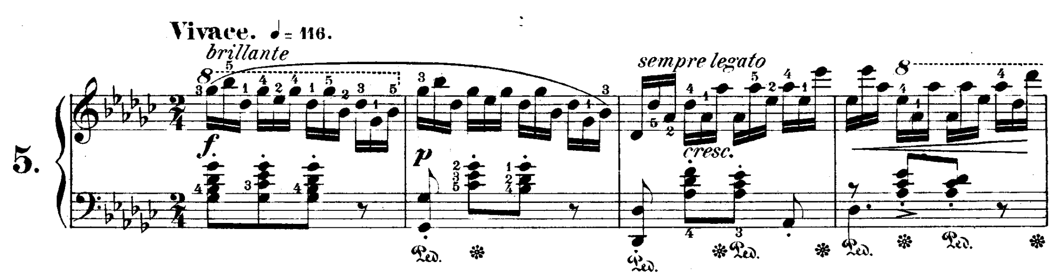

FIGURE 4. Chopin, op. 10 n° 5

Enfin, cette propriété de monogénéité, avec $f = -d^{-1}$ (le signe servant à préserver le même ordre sur le cercle trigonométrique entre les $1, 2 \ldots d$ et les éléments de A) a été mise en avant par [Cafagna, Vicinanza, 2004] en tant qu'*index*, au sens topologique (Poincaré). Avec notre définition métrique des gammes bien réparties, cette propriété est encore plus riche de sens.

Il est maintenant possible de prouver la formule de [Clough, Douthett, 1991], dans ce cas $d \wedge c = 1$.

THÉORÈME 9. *Nous supposons toujours que $d \wedge c = 1$ et que $A = \{a_1, \ldots a_d\}$ est une gamme bien répartie. Alors à translation près, A est l'ensemble*

$$-\{0, \lfloor \frac{c}{d} \rfloor, \ldots \lfloor \frac{(d-1)c}{d} \rfloor\}$$

.

DÉMONSTRATION. Nous savons que $d\,A = \{0, \dots d-1\} \in \mathbf{Z}_c$ (à translation près). Considérons les nombres rationnels suivants $0, -\dfrac{c}{d}, \dots -\dfrac{(d-1)c}{d}$: leurs parties entières sont distinctes, car $c > 2d$; de même quant à leurs parties fractionnaires, cela parce que d est premier avec c.

Les résidus modulo c des quantités $d\lfloor\dfrac{kc}{d}\rfloor$, identifiés à leur représentant dans $[1-c, 0]$, tombent entre $-d+1$ et 0, car

$$\frac{kc}{d} - 1 < \lfloor\frac{kc}{d}\rfloor \leq \frac{kc}{d} \qquad k\,c - d < d\lfloor\frac{kc}{d}\rfloor \leq k\,c$$

Quand k varie de 1 à d, les d entiers $k\,c - d\lfloor\dfrac{kc}{d}\rfloor$ se retrouvent donc entre 0 et $d-1$; de plus ils sont distincts, puisque comme évoqué ci-avant les parties fractionnaires des $\dfrac{kc}{d}$ sont distincte :

$$k\,c - d\lfloor\frac{kc}{d}\rfloor = d\big(\frac{k\,c}{d} - \lfloor\frac{kc}{d}\rfloor\big) = d \cdot \mathrm{frac}\left(\frac{kc}{d}\right)$$

donc ces d entiers forment exactement l'ensemble $0, \dots d-1$, c'est-à-dire que, modulo c,

$$d \times \{0, -\lfloor\frac{c}{d}\rfloor, \dots -\lfloor\frac{(d-1)c}{d}\rfloor\} \equiv \{0, \dots d-1\} \quad \text{et donc}$$
$$A = d^{-1} \times \{0, \dots d-1\} = -\{0, \lfloor\frac{c}{d}\rfloor, \dots \lfloor\frac{(d-1)c}{d}\rfloor\}$$

C'est bien la formule annoncée. □

Remarque 1. Considérons une famille similaire, mais sans le signe - :

$$\{0, \lfloor\frac{c}{d}\rfloor, \dots \lfloor\frac{(d-1)c}{d}\rfloor\}$$

Comme elle est déduite de A par inversion, elle fournit aussi une gamme bien répartie, donc à translation près c'est A comme on l'a vu. On peut donc énoncer le théorème précédent sous une forme plus simple encore :

$$\text{« } A \text{ s'écrit } \{0, \lfloor\frac{c}{d}\rfloor, \dots \lfloor\frac{(d-1)c}{d}\rfloor\} \text{ à translation près ».}$$

Remarque 2. Plus généralement, on peut raisonner avec les entiers immédiatement supérieurs, ou l'entier le plus proche, au lieu des parties entières. En fait, ainsi que le fait remarquer [**?**], une forme plus générale quoique équivalente de la séquence donnant A est

$$k \mapsto J^{\alpha}_{c,d}(k) = \lfloor\frac{kc+\alpha}{d}\rfloor$$

avec α réel arbitraire. Ce n'est pas difficile de le prouver en reprenant la discussion précédente adaptée à cette nouvelle famille. Le choix $\alpha = 1/2$, éventuellement combiné avec l'inversion de A en $-A$ (ce qui change de fait k en $c-k$) permet effectivement de passer de l'une à l'autre des trois façons usuelles d'approcher un réel par un entier.

2.2.2. Le cas $d \wedge c > 1$

THÉORÈME 10. *Soit $A = \{a_1, \dots a_d\}$ une gamme bien répartie. Alors A est engendrée par une formule comme ci-dessus :*

$$A = \{\lfloor \frac{kd+\alpha}{c} \rfloor \mid k = 0 \dots d-1\}$$

Quand $m = c \wedge d$ est strictement supérieur à 1, A est c/m-périodique (un mode à transposition limitée, pour reprendre la notion du compositeur Olivier Messiaen), obtenue comme orbite sous la translation de c/m d'un domaine fondamental qui est lui-même une gamme bien répartie monogène de cardinal d/m dans $\mathbf{Z}_{c/m}$.

DÉMONSTRATION. Remarque : il est tentant de faire cette démonstration à coups de structures quotients et de suites exactes, mais nous avons préféré des arguments plus concrets, étant donnée la nature appliquée des objets considérés.
Seul le cas $m = c \wedge d > 1$ reste à considérer, l'autre étant élucidé. Il n'est plus possible que tous les éléments de $d\,A$ soient consécutifs dans $\mathbf{Z}_c$, car

LEMME 3. *L'application $\varphi : x \mapsto d\,x$ de $\mathbf{Z}_c$ dans lui-même a pour image le sous-groupe $\boldsymbol{m\,\mathbf{Z}_c} \approx \mathbf{Z}_{c/m}$ cyclique d'ordre c/m. Chaque élément de l'image a m antécédents, translatés les uns des autres de c/m : $\ker \varphi = c/m\,\mathbf{Z}_c$.*

Pour maximiser $IC(A)(d) = |\mathcal{F}_A(d)|^2$, le mieux que l'on puisse obtenir est que les éléments de $d\,A$ soient consécutifs **dans $\boldsymbol{m\,\mathbf{Z}_c}$**, i.e.

$$d\,A = m\,\{0, 1, 2 \dots \frac{d}{m} - 1\} = m\,\{0, 1, 2 \dots d' - 1\} \quad \text{en posant } d' = d/m.$$

ATTENTION : $A' = d\,A$ a alors $d' = d/m$ éléments, et pas d comme A. C'est qu'en fait on peut voir $d\,A$, image de A par φ, non comme un ensemble mais comme un « multi-ensemble » : chaque élément de $d\,A$ est répété m fois, comme image de m éléments distincts de A. Donnons un exemple : la configuration $4 \times \{0, 3, 5, 8\} = \{0, 2, 0, 2\} \subset \mathbf{Z}_{10}$ est optimalement serrée, plus que $\{0, 2, 4, 2\}$ ou toute autre configuration plus « lâche », dans $4\,\mathbf{Z}_{10} = 2\,\mathbf{Z}_{10}$.

On prouve que la configuration $d\,A = m\,\{0, 1, 2 \dots \frac{d}{m} - 1\}$ (au sens où chaque élément est répété m fois) est optimale par le lemme des points bien serrés : si le multi-ensemble $d\,A$ *n'est pas* constitué de $d' = d/m$ éléments consécutifs répétés chacun m fois, alors on peut augmenter la somme des exponentielles en rapprochant un des points de la somme de tous. On itère jusqu'à obtenir une configuration maximale (cf. Figure 5).

Ceci étant acquis, nous avons vu comment obtenir $d'A' = \{0, \dots d' - 1\}$ modulo $c' = c/m$: il suffit de poser

$$A' = -\{0, \lfloor \frac{c'}{d'} \rfloor, \dots \lfloor \frac{(d'-1)c'}{d'} \rfloor\} = -\{0, \lfloor \frac{c}{d} \rfloor, \dots \lfloor \frac{(d'-1)c}{d} \rfloor\}$$

N.B. : c', d' sont premiers entre eux, et A' relève donc du cas précédent : c'est une gamme bien répartie dans $\mathbf{Z}_{c'}$ (un sous-cycle, « subcycle », dans la terminologie de Cohn, (cf. [Quinn, 2004]).

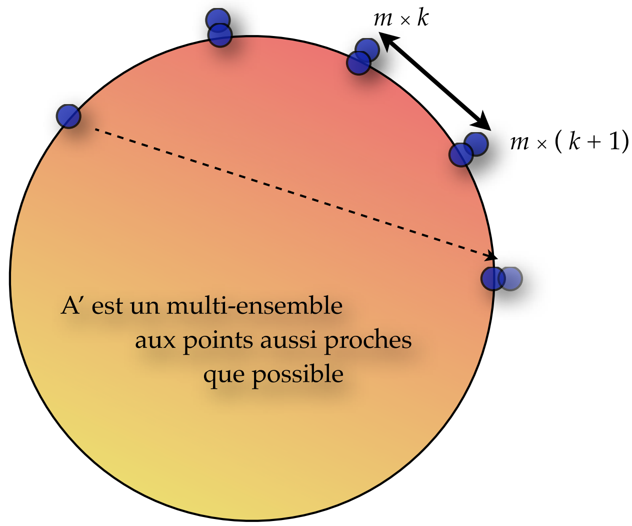

FIGURE 5. Optimisation de A'

On tient alors A tout entier en rajoutant à A', plongé dans $\mathbf{Z}_c$, le noyau de φ, i.e. en translatant A' des multiples de $c' = c/m$, car comme on l'a dit

$$\begin{aligned} a \in A \iff \exists k \in [0, d'-1],\ da = k \pmod{c} &\iff d'a = m^{-1}k \pmod{c}' \\ &\iff a \in A' \pmod{c}' = c/m \end{aligned}$$

En résumé,

$$A = A' \oplus \{0, \frac{c}{m}, \frac{2c}{m}, \dots\}$$

Donc A est un Mode à Transpositions Limitées[9]. De plus, nous avons, encore (modulo c),

$$A = -\{0, \lfloor \frac{c}{d} \rfloor, \dots \lfloor \frac{(d-1)c}{d} \rfloor\}$$

En effet, pour $k \geq d'$ on écrit $k = qd' + r, 0 \leq r < d'$ d'où

$$\lfloor \frac{kc}{d} \rfloor = \lfloor \frac{(qd'+r)c'}{d'} \rfloor = qc' + \lfloor \frac{rc}{d} \rfloor \in (A' + qc')$$

Nous avons établi (à translation près) que les formules du type [?] engendrent toutes les gammes bien réparties. □

Remarque 3. Le nombre de gammes bien réparties distinctes est $c' = c/m$ (ce n'est c que si $d \wedge c = 1$), et toute *inversion* d'une gamme bien répartie est toujours une *translatée* d'elle même : le groupe des inversions-translations (i.e. les applications de

[9]Pour prendre une définition mathématique, et non la définition (musicale !) de Messiaen, nous dirons qu'un M.T.L. est une partie de $\mathbf{Z}_c$ dont l'orbite sous l'action des translations a moins de c éléments distincts, ou encore qu'elle admet un stabilisateur non trivial.

la forme $x \mapsto \lambda \pm x$ dans $\mathbf{Z}_c$) n'agit pas fidèlement sur l'ensemble des gammes bien réparties.

Par exemple, le prototype de $GBR_{10,4}$ est $(0, 3, 5, 8)$. La gamme rétrogradée est $10 - (0, 3, 5, 8) = (2, 5, 7, 0) = (0, 3, 5, 8) + 2$.

Notons dans le même esprit que la proposition 2.2.1. reste vraie pour ces GBR générales (non monogènes) : une réduction au quotient modulo c' ramène au cas c', d', et (pour $d' < c'/2$) d'un $GBR(c', d') \subset GBR(c', c' - d')$ on déduit $GBR(c, d) = GBR(c', d') + c'\mathbb{Z} \subset GBR(c', c' - d') + c'\mathbb{Z} = GBR(c, c - d)$.

2.3. UNE PROPRIÉTÉ DES INTERVALLES CONSÉCUTIFS

À partir des formules ci-dessus, on obtient bien, mais comme conséquence, la propriété de Myhill qui permet de retrouver la définition américaine [Clough, Myerson, 1985 ; Clough, Douthett, 1991] des gammes monogènes *bien formées* "Well Formed") :

THÉORÈME 11. *Les intervalles entre deux notes consécutives d'une gamme bien répartie ne peuvent pas prendre plus de deux valeurs distinctes. Il y a une seule valeur si et seulement si la gamme divise également* $\mathbf{Z}_c$.

Ce dernier cas est considéré comme dégénéré ("not Well Formed"). Remarquons que ce résultat est valide aussi pour les intervalles entre notes *d'indices* à une distance constante, le cas des notes consécutives étant celui d'une différence d'indices de 1. C'est sous cette forme plus forte qu'est généralement énoncée la propriété de Myhill. Clarifions par un exemple. Dans le cas de la gamme majeure $GBR_{12,7}$, dont une instance est $(0, 2, 4, 5, 7, 9, 11) =$ (do, ré, mi, fa, sol, la, si), les intervalles (chromatiques) entre deux notes consécutives sont de deux demi-tons, sauf mi-fa et si-do qui sont d'un seul demi-ton : il existe des secondes majeures et des secondes mineures, contrairement à d'autres gammes non bien réparties, comme la gamme mineure par exemple $(0, 2, 3, 5, 7, 8, 11)$ qui contient aussi des secondes augmentées. Revenons à la gamme majeure : les intervalles de deux en deux sont les *tierces* do-mi, ré-fa, mi-sol etc... qui contiennent trois (tierces mineures) ou quatre (tierces majeures) demi-tons. Il y a de même deux sortes de quartes (do-fa et fa-si), de quintes, etc... Revenons à la preuve du théorème :

DÉMONSTRATION. Les deux valeurs possibles sont tout bonnement les entiers immédiatement voisins de c/f où f est le générateur dans les formules précédentes. En effet, on a par l'encadrement classique de la partie entière

$$\frac{c}{d} - 1 = \frac{(k+1)c}{d} - 1 - \frac{k\,c}{d} < \lfloor\frac{(k+1)c}{d}\rfloor - \lfloor\frac{k\,c}{d}\rfloor < \frac{(k+1)c}{d} - (\frac{k\,c}{d} - 1) = \frac{c}{d} + 1$$

et cet intervalle ouvert est de largeur 2, donc contient deux entiers, nommément $\lfloor\frac{c}{d}\rfloor$ et $\lceil\frac{c}{d}\rceil$.

Les deux sont possibles quand c/d est non entier : le plus grand quand $\frac{k\,c}{d}$ est non entier, le plus petit par exemple pour $k = 0$.

Si $c/d = m$ est un entier en revanche, on a toujours $\lfloor \frac{k\,c}{d} \rfloor = \frac{k\,c}{d} = k\,m$ donc l'intervalle entre deux éléments consécutifs vaut toujours m.

Nous avons établi que les intervalles de « seconde » (entre deux notes consécutives d'une même gamme) peuvent prendre seulement deux valeurs distinctes, qui sont les deux arrondis d'un même rationnel. Enfin, on trouve de même les intervalles de « tierce, de quarte… », en considérant les arrondis de $\frac{2c}{d}, \frac{3c}{d} \dots$ □

Par exemple, les intervalles consécutifs entre les éléments de la gamme majeure $((c, d) = (12, 7))$ sont 2 (cinq fois) et 1 (2 fois).

2.4. Cardinal et variété

Une autre jolie propriété qui a originellement amené [Clough, Myerson, 1985] à leur définition (dans le cas où $c \wedge d = 1$ seulement) est équivalente à la propriété de Myhill évoquée ci-dessus (qu'elle généralise), et facile à établir comme conséquence des formules génératrices retrouvées dans le présent exposé. Donnons-la d'abord sur un exemple : si on cherche les $GBR_{7,3}$ *dans l'univers diatonique*, c'est-à-dire en numérotant les notes de la gamme de do majeur, on obtient 7 accords, do-mi-sol, ré-fa-la, etc… Ces accords se trouvent répartis en trois types (majeur, mineur, diminué). Trois notes, trois types : la cardinalité est égale à la variété, i.e. au nombre d'orbites modulo transposition. Ce concept est musicalement très important car lié à la notion d'ambiguïté. Mathématiquement il est sans doute moins naturel que la notion de « bonne répartition ».

Théorème 12 (Clough, Myerson, 1986). *Considérons pour $c \wedge d = 1$ une $GBR_{c,d}$, que l'on écrit sous la forme* ordonnée $(a_1, \dots a_d)$. *Alors pour tout $k < d$, il y a exactement k orbites par translation des d séquences $S_{k,i} = (a_i, a_{i+1}, \dots a_{i+k-1})$ où les indices sont pris modulo d.*

Démonstration. Plutôt que de donner la démonstration dans toute sa généralité (cf. [Clough, Douthett, 1991], théorème 1.10) je préfère mettre en lumière la compréhension fine du phénomène qu'apporte la transformation $A' \ni x \mapsto fx \in A$. Il arrive en effet fréquemment, mais pas systématiquement, que l'ordre des éléments de A soit le même que l'ordre des éléments de A'. C'est le cas par exemple quand $d \ll c$, comme pour $c = 15, d = 4$. Alors comme en fait foi la Figure 6, il est clair qu'il n'y a que d types de séquences d'éléments contigus de A', et donc (puisqu'on a supposé que l'homothétie $x \mapsto f \times x \mod c$ conserve cette contiguïté) il en est de même pour A, ce qui est la propriété à démontrer.

Le cas où les éléments de A' correspondant aux séquences d'éléments contigus de A ne le sont pas, comme par exemple la gamme pentatonique $(0, 2, 4, 7, 9) \subset \mathbf{Z}_{12}, f = 5$ est moins évident géométriquement, mais guère difficile à prouver algébriquement avec les fonctions $J^{\alpha}_{c,d}$. □

Par ailleurs on trouvera dans [Clough, Douthett, 1991] le cas $c \wedge d > 1$ (le nombre de cas distincts est alors $d' = d/(c \wedge d)$).

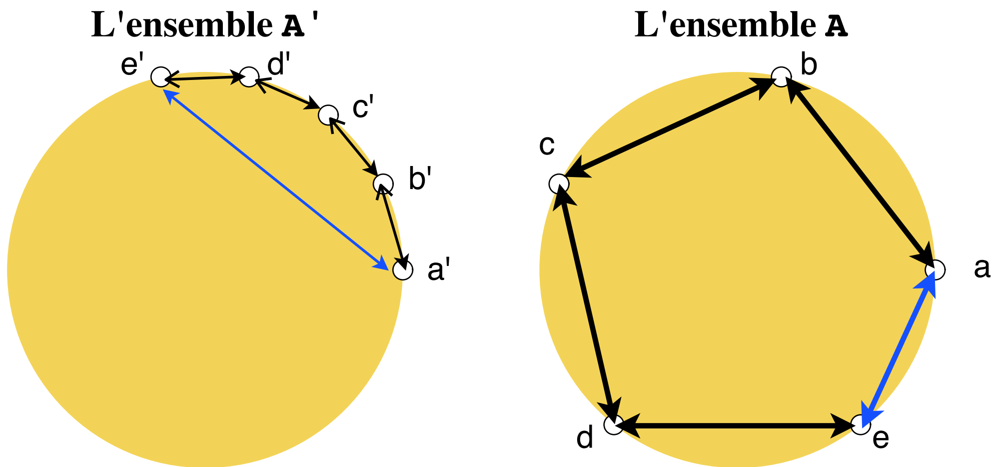

FIGURE 6. Deux sortes d'intervalles consécutifs

3. CLASSIFICATION DES GAMMES BIEN RÉPARTIES

L'essentiel de ce paragraphe repose sur la très belle synthèse de [Quinn, 2004], qui reprend et complète [Clough, Douthett, 1991].

Pour chaque couple (c, d) nous avons caractérisé une unique gamme (à translation près) $GBR_{(c,d)}$. Nous allons étudier de plus près la structure fine de cet objet remarquable.

3.1. LES TROIS TYPES DE GBR

La discussion porte sur les facteurs communs à c et d. On pose encore $m = d \wedge c$.

DÉFINITION 3. *On a une GBR de type I quand* $m = 1$. *Cette gamme est alors monogène et bien formée (WF) au sens expliqué ci-dessus.*

Rappelons que dans ce cas, on obtient cette gamme (à translation près) en considérant les multiples de l'inverse multiplicatif (modulo c) f de d, ou les multiples de $-f$.

DÉFINITION 4. *On a une GBR de type* II_a *quand* $m = d$ *i.e.* $d \mid c$. *Cette gamme est alors monogène et dégénérée, elle divise de façon parfaitement régulière* $\mathbf{Z}_c$.

Ainsi la septième diminuée $D7 = (0, 3, 6, 9)$ divise $\mathbf{Z}_{12}$ en 4. De même pour la gamme par tons (M1 de Messiaen) $(0, 2, 4, 6, 8, 10)$.

DÉFINITION 5. *On a une GBR de type* II_b *quand* $1 < m = c - d < d$. *On a alors affaire au complémentaire d'une gamme de type* II_a.

C'est immédiat : le complémentaire est de cardinal m, qui divise c, et c'est une GBR comme complémentaire de GBR.

DÉFINITION 6. *On a une GBR de type III dans le cas restant :* $1 < m < d, m \neq c-d$.

Notons que la classe des GBR de type III est stable par complémentation, comme les deux autres classes.

Les deux dernières classes réunissent toutes les GBR qui possèdent une *période interne*, c'est-à-dire qui sont des MTL (cf. Théorème 10). Elles sont donc toutes obtenues comme réunion de translatées d'une GBR plus petite. On peut arguer, avec Clampitt *et alii* [1996], que les GBR de type I sont fondamentaux, au sens où ils permettent d'écrire tous les autres : on obtient comme on l'a vu un GBR de type III en découpant c en m parties égales (comme le type II_a) et en glissant dans chaque partie le même GBR de type I correspondant à d' notes parmi $c' = c/m$.

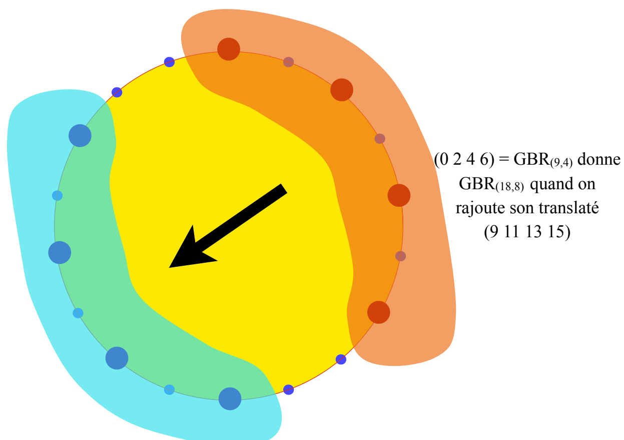

FIGURE 7. Une GBR de type III

3.2. EXISTENCE DE GAMMES DE TYPE III

Le résultat prouvé dans ce dernier paragraphe est inédit.

On a observé [Quinn, 2004] qu'il n'existe pas de gammes de type III pour $c = 12$, qui est tout de même le cas de référence pour les musiciens (occidentaux). Pourtant il en existe pour $c \neq 12$, par exemple pour $c = 18$ on a $GBR_{(18,8)} = (0, 2, 4, 6, 9, 11, 13, 15)$ comme on le voit sur la Figure 7.

Bien sûr, il est impossible d'avoir une GBR de type III quand c est premier, car alors seul le type I est possible (à part les cas très limites de $GBR_{(c,0)}$ ou $GBR_{(c,c)}$).

Jusqu'en juin 2005 on n'avait pas trouvé de c composé, $c > 12$, pour lequel il n'existe pas de GBR de type III. Ceci est général :

THÉORÈME 13 (Amiot, 2005). *Pour $c > 12$ composé, il existe toujours d tel que $GBR_{(c,d)}$ soit de type III.*

Ma première preuve reposait sur la conjecture de Bertrand, outil bien lourd (avec sa fameuse démonstration en 17 lemmes due à Pafnouti Tchebitchef !) pour le simple lemme suivant :

LEMME 4. *Pour tout $c > 12$ non premier, il existe un diviseur k de c et un nombre premier $p < k - 1$ tel que p ne divise pas k.*

J'ai depuis trouvé une preuve plus élémentaire de ce lemme :

DÉMONSTRATION. Notons que ce lemme est faux pour $c = 12$, car au maximum $k = 6$ et les nombres premiers *strictement* inférieurs à 5 divisent tous 6.

Prenons c composé supérieur ou égal à 25, les valeurs inférieures sont vérifiées à la main. Soit k le plus grand diviseur strict de c. Qu'il soit pair ou impair, on l'écrit $k = 2n + 1$ ou $k = 2n + 2$. Comme $k \geq \sqrt{c}$, on a $k \geq 5$ et $n \geq 2$.

- Premier cas : c est une puissance de 2. On pose alors $k = c/2, p = 3$. Marche dès que $c \geq 8$.
- Second cas : c possède un facteur *impair* $k > 3$ (pas forcément premier). On prend cette valeur pour k, et on pose $p = 2$. C'est la construction la plus sexy de toutes : par exemple $(0, 2, 4, 6, 8, 9, 11, 13, 15, 17)$ quand $c = 18$. Cela marche pour $c \geq 10$.
- Dernier cas : quand c est égal à une puissance de 2, fois 3. En vérité c'est quand $c = 2 \times 2 \times 3$ que le lemme est faux. Nous tenons donc bien le cas problématique, mais il n'est pas difficile : dès que $c \geq 24$ on pose $k = c/2$ et $p = 5$, qui conviennent.

Maintenant le théorème découle de ce que

$$j \mapsto \lfloor \frac{kj}{p} \rfloor = \lfloor \frac{jc}{cp/k} \rfloor$$

donne une GBR, qui est forcément de type III car elle n'est ni de type I ni de type II : en effet elle est réunion des translatés de $GBR_{(k,p)}$ qui est de type I (ce n'est **pas** une division régulière de $\mathbf{Z}_k$). □

3.3. RÉCURSIVITÉ DES GBR

La gamme pentatonique de $\mathbf{Z}_{12}$ est une GBR dans la gamme à 7 notes de $\mathbf{Z}_{12}$. Pour $(c, d) = (7, 5)$ on trouve en effet la GBR $(0, 1, 2, 4, 5)$. Si l'on injecte ces valeurs comme indices dans la gamme majeure $GBR_{(12,7)} = (0, 2, 4, 5, 7, 9, 11)$ on trouve $(0, 2, 4, 7, 9)$ qui n'est autre que la gamme pentatonique $GBR_{(12,5)}$! (complémentaire, ici, de la précédente).

De même, l'extraction de trois notes selon le schéma $GBR_{(7,3)}$ de la gamme majeure $GBR_{(12,7)}$ donne (selon décalage) les différents accords parfaits, majeur ou mineur.

Ce phénomène ne se produit pas pour toutes les valeurs, mais il est assez remarquable pour mériter d'être mentionné. Il est à rapprocher de la construction des gammes par réduites successives d'une même fraction continue, (cf. par exemple [Clampitt, Carey, 1996])[10]. Comme l'obervaient déjà Clough et Douthett dans l'article fondateur [Clough, Douthett, 1991], cela n'est pas si étonnant puisque l'on considère des sous-polygones *aussi réguliers que possible* de polygones *aussi réguliers que possible*. Cela leur permettait de définir des *GBR de seconde espèce*, comme

[10] Pour mettre le lecteur en appétit, observons que 3/5, 7/12,... sont des réduites du DFC de $\log_2(3/2)$ qui fonde classiquement la gamme pythagoricienne...

éléments d'indices $i \in GBR(d,e)$ d'un $GBR_{c,d}$. De l'univers entier à ces objets, on passe par le chromatique (12 notes), le diatonique (7 notes), et la fonction tonale (3 notes) ! Cela a été joliment formalisé par un modèle que Jack Douthett a présenté en juillet 2005 à un colloque dédié à la mémoire de John Clough, celui des « beacons » : on dispose une lumière centrale dans une pièce circulaire, munie d'ouvertures régulièrement réparties, imbriquée dans une structure similaire, avec la contrainte peu physique qu'un rayon lumineux *glisse* jusqu'à l'ouverture la plus proche dans le sens des aiguilles d'une montre (!).

Ceci permet d'engendrer les fonctions $J : k \mapsto \lfloor \frac{kd+\alpha}{c} \rfloor$ obtenues plus haut, et surtout de les imbriquer les unes dans les autres. Les cas où l'on obtient des ensembles moins bien équilibrés ne manquent pas d'intérêt, puisque l'on obtient ainsi, par exemple, des séquences d'accords parfaits que l'on retrouve dans la IX^{e} de Beethoven !

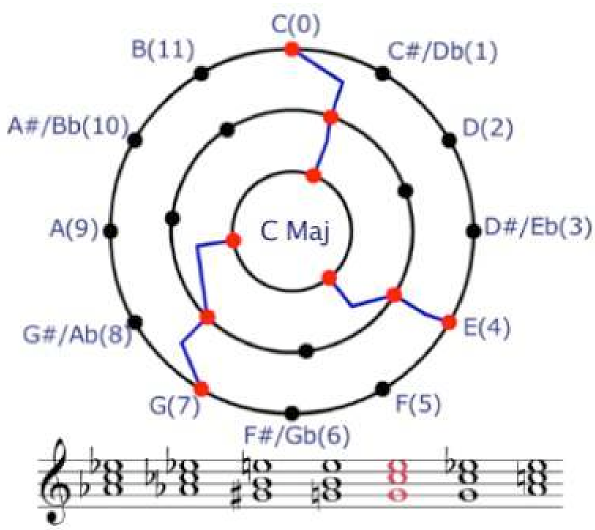

FIGURE 8. Fonctions J imbriquées générant des séquences d'accords parfaits

4. CONCLUSION

4.1. HISTORIQUE

Nous présentons ici un historique très sommaire. Le lecteur anglophone pourra se référer au récent [Douthett, Kranz, 2007] qui montre les nombreux champs d'applications des GBR. À l'origine, Clough et Myerson [1985] ont inventorié essentiellement le cas $c \wedge d = 1$. Leur démarche est partie de propriétés musicales, comme (Cardinal = Variété) et la propriété de MYHILL (au plus deux valeurs chromatiques différentes pour les intervalles diatoniques) et aboutissait aux fonctions génératives du type J.

C'est avec Jack Douthett que John Clough a étendu la propriété « Maximally Even » (i.e. « bien réparti ») à sa forme la plus générale [Clough, Douthett, 1991]. Jack Douthett a par ailleurs démontré que cette propriété de bonne répartition admettait une infinité de définitions équivalentes, en termes de fonctions potentielles strictement convexes sur un réseau d'électrons situés sur un cercle [Clough, Douthett, Krantz, 2000]. Ainsi de la définition avec les sommes des distances euclidiennes que nous avions considérée, puis abandonnée[11] ; mais aussi par exemple du potentiel électrostatique d'une répartition d'électrons sur les sites de $\mathbf{Z}_c$, avec une interaction coulombienne. En revanche la distance angulaire n'est *pas* strictement convexe et l'on comprend (un peu) mieux pourquoi elle ne donne pas les mêmes ensembles extrémaux.

Ce résultat, qui établit un lien pour le moins surprenant avec la physique des particules, montre que nous entrons dans une ère nouvelle, où les recherches de théoriciens de la musique sont susceptibles d'ouvrir de nouveaux horizons dans d'autres sciences[12].

Ensuite une autre propriété des gammes a été étudiée pour elle-même par Norman Carey et David Clampitt [1989] : la « Well Formedness » (gammes bien formées). Dans le contexte de cet article, il s'agit des GBR dans le cas $c \wedge d = 1$. Cette notion permet de s'affranchir (plus ou moins) du présupposé d'un total chromatique, d'un univers ambiant tempéré, mais il s'agit par définition du cas particulier des gammes monogènes. Une différence ontologique avec les cas précédents est que l'on y retrouve les gammes *naturelles*, comme la gamme pythagoricienne engendrée par le rapport $3/2$ et ses puissances[13], et le concept de gamme *bien formée* permet de considérer comme gammes isomorphes à celle-là toute gamme monogène de générateur suffisamment voisin[14] de $3/2$, comme en fait foi le dessin suivant où le choix du générateur fait que les notes de la gamme restent dans l'ordre princeps (un polygone *régulier*, mais étoilé) :

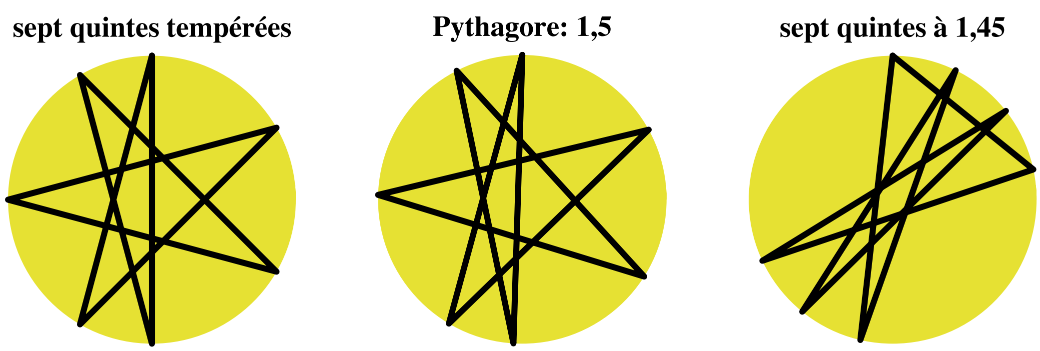

FIGURE 9. Trois gammes bien formées.

On gagne ainsi des propriétés *topologiques* des gammes (homéomorphisme, voisinage, mais aussi « Winding number », i.e. index au sens de Poincaré, (cf. [Cafagna, Vicinanza, 2004]). Cela peut se poursuivre par des études de séquences infinies, comme l'est celle des $n \log_2 3/2 \mod 1$ qui surgit de la gamme pythagoricienne, mais aussi bien avec tout irrationnel. Les propriétés de semi-récursivité évoquées

[11]Incidemment, ceci démontre le théorème de Toth cité en introduction.

[12]Toutes proportions gardées, il en est de même pour mes propres recherches liant les canons rythmiques à certains cas de la conjecture de Fuglede [Amiot, 2005].

[13]Ce qui correspond à placer sur le cercle des points d'argument multiple de $\log_2 3/2$.

[14]Entre $2^{1/2}$ et $2^{3/5}$ plus précisément.

plus haut peuvent s'interpréter par des cheminements dans l'arbre de Stern-Brocot. Pour cela, avec de belles propriétés d'autosimilarité, (cf. [Noll, 2005]).

Enfin et indépendamment de ces développements foisonnants, c'est en recherchant dans les diverses théories musicales les accords ou gammes les plus « typiques » que Ian Quinn est retombé sur les GBR. Cherchant par ailleurs à définir rigoureusement cette typicité en terme de contenu intervallique, il a utilisé les « balances de Lewin », introduites par celui-ci dans son dernier article [Lewin, 2001] en un émouvant retour aux sources de sa toute première publication. Et c'est Ian Quinn qui aura remarqué que les GBR maximisent une valeur d'une transformée de Fourier discrète, ce résultat – le plus récent historiquement – étant la propriété que le présent article a choisi de prendre comme définition des GBR.

4.2. PERSPECTIVES

Il reste à étudier ce que ces outils *harmoniques*, au sens de l'analyse de Fourier, permettent de préciser dans un contexte plus large, où les intervalles ne sont plus des diviseurs d'une même totalité (tempérament égal). Techniquement cela n'est pas trop difficile – quitte à considérer des distributions et non plus des fonctions – mais il est alors nécessaire de réintroduire un peu de structure. Cela est possible en prenant de nouveau en compte un ordre des notes dans la gamme, ce qui fait sens notamment pour les gammes monogènes (generated scales). On peut alors définir la transformée de Fourier de la fonction qui à $k \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ associe la k^{e} note de la gamme, ce qui n'est *pas* la définition que nous avons utilisée.

Les recherches en cours ont déjà révélé certaines propriétés géométriques remarquables, mais pas caractéristiques, des coefficients de Fourier de certaines gammes.

Remerciements. Merci à David Clampitt, Thomas Noll, Richard Cohn, Ian Quinn... et à feu David Lewin, dont les idées continuent de répandre leur lumière.

BIBLIOGRAPHIE

AMIOT E., « À propos des canons rythmiques », *Gazette des Mathématiciens* 106, 2005, p. 43-68.

BABBITT M., "Some aspects of twelve-tone composition", *Score* 12, 1955, p. 53-61.

BLOCK S. , DOUTHETT J., "Vector products and intervallic weighting", *Journal of Music Theory* 38, 1994, p. 21-41.

CAFAGNA V., VICINANZA D. , "Myhill property, CV, well-formedness, winding numbers and all that", *Outils informatiques en analyse musicale. Logique et théories transformationnelles en musique*, Présentation au Séminaire MaMuX 2004 - IRCAM - Paris.

CAREY N. , CLAMPITT D. , "Aspects of well formed scales", *Music Theory Spectrum* 11(2), 1989, p. 187-206.

CLOUGH J. , DOUTHETT J. , "Maximally even sets", *Journal of Music Theory* 35, 1991, p. 93-173.

CLOUGH J., MYERSON G., “Variety and multiplicity in diatonic systems”, *Journal of Music Theory* 29, 1985, p. 49-270.

CLOUGH J., MYERSON G., “Musical scales and the generalized circle of fifths”, *AMM* 93(9), 1986, p. 695-701.

CLAMPITT D., CAREY N., “Self-similar pitch structures, their duals, and rhythmic analogues”, *Perspectives of New Music* 34(2), 1996, p. 62-87.

JOHNSON T., DURFEE A, *Introducing mathematics into an elementary music theory course*, 1999. `http://www.mtholyoke.edu/courses/adurfee/mac/article.htm`

CLOUGH J., DOUTHETT J., KRANTZ R., “Maximally even sets : a discovery in mathematical music theory is found to apply in physics”, *Bridges : Mathematical Connections in Art, Music, and Science*, Conference Proceedings 2000, R. Sarhangi (ed.), Winfield (Kansas), Central Plain Book Manufacturing, p. 193-200.

DOUTHETT J., KRANTZ R., “Maximally even sets and configurations : common threads in mathematics, physics, and music”, *Journal of Combinatorial Optimization*, Springer (ed.), netehrlands, DOI 10.1007/s10878-006-9041-5.

LEWIN D., “Re : Intervalic relations between two collections of notes”, *Journal of Music Theory* 3, 1959, p. 298-301.

LEWIN D., “Special cases of the interval function between pitch-class sets X and Y”, *Journal of Music Theory* 45, 2001, p. 1-29.

QUINN I, *A unified theory of chord quality in equal temperaments*, Ph.D. dissertation : Eastman School of Music, 2004 .

MAZZOLA G., *The Topos of Music*, Basel, Birkhäuser, 2003.

NOLL T., “Facts and counterfacts : mathematical contributions to music-theoretical knowledge”, *Models and Human Reasoning*, S. Bab *et al.* (eds.), Berlin, Bernd Mahr zum 60. Geburtstag. W&T Verlag, 2005.

TOTH L. F., “On the sum of distances determined by a pointset”, *Acta. Math. Acad. Sci. Hungar.* 7, 1956, p. 397-401.