Mathématiques et sciences humaines
Mathematics and social sciences

178 | Été 2007
Art, mathématiques, langage et émotion

André Krop, "La quadrature du cercle et le nombre Π", Paris, Ellipses, 2005

André Krop, "La quadrature du cercle et le nombre Π", Paris, Ellipses, 2005

Olivier Hudry

OpenEdition Journals

Édition électronique
URL : http://journals.openedition.org/msh/4332
ISSN : 1950-6821

Éditeur
Centre d'analyse et de mathématique sociales de l'EHESS

Édition imprimée
Date de publication : 1 juillet 2007
Pagination : 125-127
ISSN : 0987-6936

Référence électronique
Olivier Hudry, « André Krop, "La quadrature du cercle et le nombre Π", Paris, Ellipses, 2005 », *Mathématiques et sciences humaines* [En ligne], 178 | Été 2007, mis en ligne le 21 septembre 2007, consulté le 05 mai 2019. URL : http://journals.openedition.org/msh/4332

ANALYSE BIBLIOGRAPHIQUE

André Krop, *La quadrature du cercle et le nombre* π, Paris, Ellipses, 2005.

Qui n'a entendu parler de la quadrature du cercle, devenue symbole et synonyme de gageure impossible à réaliser ? Mais il n'est pas certain qu'on sache toujours bien en quoi consiste cette fameuse quadrature. Quant aux raisons pour lesquelles la quadrature du cercle est impossible à réaliser, il est peu probable qu'elles soient connues d'un vaste public. Il est vrai qu'à ces interrogations on peut toujours opposer l'attitude décrite par G. Flaubert dans son *Dicti`nnaire des idées reçues* [1913], à l'article « Quadrature du cercle » : « On ne sait pas ce que c'est, mais il faut lever les épaules quand on en parle ».

Plutôt que de déguiser l'ignorance sous les traits du dédain, André Krop invite au contraire à un voyage au pays des nombres en abordant, dans ce plaisant petit livre, trois problèmes classiques de la géométrie grecque : ladite quadrature du cercle, la duplication du cube, la trisection de l'angle.

Après une introduction de sept pages, le premier chapitre expose justement le problème de « la quadrature du cercle » (45 pages) : peut-on construire un carré de même aire qu'un cercle (on devrait dire un disque...) donné à l'aide seulement d'une règle (non graduée) et d'un compas ? C'est aussi l'occasion d'esquisser un rappel historique sur la géométrie antique et d'établir un lien avec un autre problème, proche de celui de la quadrature : la rectification d'un cercle, c'est-à-dire la construction d'un segment de longueur égale au périmètre du cercle considéré, bien sûr de nouveau avec seulement une règle et un compas. Diverses constructions à l'aide de ces deux instruments y sont aussi décrites : la construction d'un carré de côté donné (ce qui montre incidemment, en considérant la diagonale d'un carré de côté égal à l'unité, qu'un segment de longueur $\sqrt{2}$ peut être construit à partir de ces instruments), ou encore la construction de certaines lunules. L'existence de π, constante définie comme rapport entre l'aire délimitée par un cercle et le carré de son rayon, est établie à l'aide la méthode dite d'exhaustion (approximations successives du cercle par des polygones inscrits ou circonscrits), sans le recours explicite aux limites, qui n'entraient pas dans l'arsenal des outils de l'Antiquité. Des encadrés bien conçus proposent aux lecteurs qui le souhaitent les preuves, claires et bien présentées, de ces résultats. Une première catégorisation des nombres est introduite : les entiers, les rationnels, les réels, lesquels n'ont pas manqué, comme on le sait, de susciter interrogations, perplexités et parfois rejets quand ils sont irrationnels. Après l'Antiquité, l'histoire nous entraîne vers les mathématiques arabes, chinoises puis européennes, en quête de valeurs approchées ou d'expressions de π, entre autres à l'aide des fractions continues.

Les dix pages du deuxième chapitre sont consacrées aux deux autres problèmes évoqués plus haut : la duplication d'un cube et la trisection d'un angle. La duplication d'un cube consiste à construire, toujours à la règle et au compas, un cube ayant un volume double de celui d'un cube donné. Quant à la trisection de l'angle, il s'agit, là aussi avec seulement une règle et un compas, de construire les demi-droites divisant un angle quelconque en trois angles égaux. D'habiles solutions sont présentées, remontant à l'Antiquité, mais sortant du cadre imposé car faisant appel à des courbes non constructibles à la règle et au compas. L'auteur nous tient ainsi en haleine pour les parties suivantes, tout en nous éclairant sur les approches d'Hippocrate de Chios, de Ménechme ou encore de Dinostrate.

Mais pourquoi s'astreindre à seulement une règle et un compas ? D'ailleurs, la règle est-elle vraiment utile ? Et que se passe-t-il si on se donne le droit à d'autres instruments ? Ce sont ces questions qui sont discutées dans les quinze pages du chapitre 3. Peut-être la restriction à la règle et au compas trouve-t-elle son explication dans une remarque d'Abel Rey [1947], professeur d'histoire et de philosophie des sciences, citée par l'auteur :

> *La règle et le c`mpas en gé`métrie j`uent un peu le même rôle qu'en arithmétique j`uaient auparavant les n`mbres rati`nnels, v`ire les n`mbres entiers. Ce s`nt des instruments d'intelligibilité parfaite, d'idées claires et distinctes. La dém`nstrati`n en acquiert sa rigueur « parlante », sa déterminati`n achevée qui ferme t`utes les p`rtes à l'indéterminé, et à l``bscur, à la difficulté de c`mpréhensi`n exacte, à l'imparfaite intelligibilité.*

On y voit notamment comment on peut concevoir un instrument permettant de tracer une conchoïde, laquelle permet à son tour de réaliser la trisection des angles. Le chapitre s'achève avec l'apport de la géométrie analytique cartésienne, établissant un lien entre les constructions à la règle et au compas et les opérations algébriques (addition, soustraction, multiplication, division, extraction de la racine carrée), qui conduiront ultérieurement à la caractérisation des points constructibles à la règle et au compas.

Le chapitre suivant (24 pages) est consacré à « la formidable armée des quadrateurs » qui tentèrent de résoudre la quadrature du cercle, traduisant la fascination qu'exerce le problème. Il faudra attendre 1775 pour que l'Académie royale des sciences décide, en France, de ne plus examiner les mémoires qui lui sont soumis sur le sujet. Elle sera bientôt suivie par d'autres académies dans le monde, par exemple la Royal Society de Londres.

Pourtant, l'impossibilité de la quadrature du cercle ne sera établie que plus tard, grâce d'une part aux travaux de L. Wantzel en 1837 et, d'autre part, à ceux de C. L. F. Lindemann établissant la transcendance de π en 1882. C'est à ces dernières étapes vers l'impossibilité de la quadrature du cercle qu'est consacré le cinquième et ultime chapitre de ce livre (22 pages). Après un historique de π, l'auteur décrit le résultat essentiel de L. Wantzel caractérisant les points constructibles à la règle et au compas (ou, de façon équivalente, les nombres constructibles à la règle et au compas, considérés comme coordonnées de ces points). Résultat que l'on ne décrira pas ici pour que le lecteur ait le plaisir de le découvrir par sa propre lecture, mais qui explique pourquoi par exemple le nombre irrationnel $\sqrt{2}$ est constructible à la règle et au compas tandis que $\sqrt[3]{2}$, nombre lié à la duplication du cube, ne l'est pas. Il permet aussi d'affiner la catégorisation des nombres réels évoquée plus haut, en insérant la catégorie des nombres constructibles entre l'ensemble des nombres rationnels et l'ensemble des nombres réels algébriques. Signalons au passage l'honnêteté intellectuelle de l'auteur qui l'incite à reconnaître le tribut qu'il doit payer au livre de M. Serfati [1992] pour la rédaction de son dernier chapitre ; précisons cependant que les deux ouvrages restent bien différents dans leurs conceptions et dans leurs lectorats, le livre de M. Serfati entrant résolument dans des considérations mathématiques bien plus pointues.

Il résulte de tout ceci un agréable livre bien écrit (malgré une proposition qui « s'avère fausse » ; heureusement, on n'y trouve pas de proposition qui « s'affausse » vraie...) et facile à lire. L'auteur a voulu lui donner un petit côté tragédie grecque, avec prologue, épisodes et exode, chœur, stasima et coryphée ; clin d'œil amusant et qui ne nuit pas à la lecture. Le voyage au pays des nombres auquel nous sommes conviés est aussi un voyage dans le temps, traversant près de 2500 ans de mathématiques. Pour jouir du voyage, point n'est besoin d'être mathématicien, mais une certaine familiarité avec les mathématiques est préférable pour profiter pleinement des paysages qu'on y découvre. Le lectorat concerné reste cependant très large et les conditions dans lesquelles lire ce livre peu exigeantes. On peut ainsi, les vacances approchant, imaginer le lecteur emportant l'ouvrage sur la plage, confortant sa lecture par des dessins de figures géométriques sur le sable... Ne serait-ce point là un moyen approprié pour renouer avec les pratiques qu'attribue la tradition aux Grecs de l'Antiquité, en quête d'une solution à la quadrature du cercle ou à d'autres problèmes géométriques ?

O. Hudry

FLAUBERT G., *Dicti` nnaire des idées reçues*, Paris, Conard, 1913.

REY A., *L'ap` gée de la science technique grecque. L'ess` r de la mathématique*, Paris, Albin Michel, 1947.

SERFATI M., *Quadrature du cercle, fracti` ns c` ntinues et autres c` ntes*, brochure de l'A.P.M.E.P., n° 86, 1992.

Articles prévus dans le prochain numéro

- D. E. GEWURZ, A. VIETRI : *A c` mbinat` rial appr` ach t` the ph` netic similarity ` f languages*
- I. CHARON, L. DENŒUD, O. HUDRY : *Maximum de la distance de transfert à une partiti` n d` nnée*
- D. COURGEAU : *Inférence statistique, échangeabilité et appr` che multi-niveau*
