Recherches sur Diderot et sur l'Encyclopédie

38 | avril 2005
La formation de D'Alembert

Les études newtoniennes du jeune D'Alembert

François De Gandt

Édition électronique
URL : http://journals.openedition.org/rde/306
DOI : 10.4000/rde.306
ISSN : 1955-2416

Éditeur
Société Diderot

Édition imprimée
Date de publication : 1 juin 2005
ISBN : 2-9520892-4-8
ISSN : 0769-0886

Référence électronique
François De Gandt, « Les études newtoniennes du jeune D'Alembert », *Recherches sur Diderot et sur l'Encyclopédie* [En ligne], 38 | avril 2005, mis en ligne le 30 mars 2009, consulté le 21 avril 2019. URL : http://journals.openedition.org/rde/306 ; DOI : 10.4000/rde.306

François DE GANDT

Les études newtoniennes du jeune D'Alembert

Le triomphe de Newton

En 1740, treize ans après ses funérailles solennelles, Newton est célébré comme le maître de la philosophie. Sur le Continent, une fois passés les affrontements de 1730-1735 à Paris, la gravitation universelle est progressivement acceptée comme un principe d'une fécondité étonnante, qui rend compte de phénomènes très variés avec une précision inconnue jusqu'alors. Maupertuis, Buffon, Voltaire, Clairaut, ont imposé un point de vue nouveau. Les querelles sur la figure de la Terre, les expéditions en Laponie et à l'Equateur ont tourné à l'avantage du système newtonien, le Prix proposé en 1740 par l'Académie Royale des Sciences a été décerné à trois mémoires qui traitent des marées en termes plutôt newtoniens. Le livre agile et séduisant de Voltaire, les *Elémens de la philosophie de Neuton,* a déjà connu plusieurs éditions depuis la première de mars 1738, et il y aura encore six éditions de 1740 à 1750 ; Voltaire fait de Newton le champion d'une nouvelle forme de philosophie naturelle, attachée aux faits et modeste dans la recherche des causes, il l'invoque aussi comme l'adorateur d'un dieu tout puissant, inaccessible, garant de l'ordre cosmique et de la loi morale, loin des superstitions nationales et domestiques [1].

D'Alembert arrive après ces batailles. Il étudie Newton, il s'approprie les résultats et les raisonnements des *Principia.* Nous savons un peu sous quel angle, dans quel esprit il a fait ces lectures actives, grâce à un document très précieux que conserve la Bibliothèque de l'Institut, un témoin de la lecture de Newton par D'Alembert [2]. Ce manuscrit encore

1. Voir *Cirey dans la vie intellectuelle, la réception de Newton en France,* SVEC 2001, 11.

2. *Remarques sur quelques endroits des Principes de Newton,* manuscrits 2467 du folio 235r° au fol. 242 v°et 2033, fol. 23r° à 30v°. Il faut donc combiner deux dossiers pour reconstituer le manuscrit en deux « cahiers » de huit feuilles ; manquent les 18 figures

inédit permet de préciser vers quelle date et sur quelle version D'Alembert a étudié Newton, de voir aussi quels passages l'ont retenu, quels endroits lui ont paru exiger un développement, puisque ce texte est une ébauche de commentaire. Intitulé « Remarques sur quelques endroits des Principes de Newton », c'est probablement l'un des premiers textes de D'Alembert[3].

À quoi ressemble le Newton du jeune D'Alembert ? Les débats philosophiques qui enflaient vers 1735 sont entrés en sommeil, comme si la lassitude avait gagné les esprits, après les empoignades sur la grâce et sur l'attraction. C'est l'un des aspects marquants de ce commentaire de D'Alembert à Newton: on n'y trouve pas trace des questions brûlantes sur l'action à distance, sur l'espace absolu, sur Dieu et son intervention dans l'univers. Rien sur le concept de matière, sur le vide ou sur les cadres généraux de l'intelligibilité en physique. Même les problèmes de la définition de la force sont absents. Ce silence remarquable confirme une impression générale: en ces années D'Alembert s'est astreint à une sorte de jeûne philosophique, d'abstinence en matière de métaphysique, entre la fin de ses études et le lancement de *l'Encyclopédie* en 1751. Il reviendra à la philosophie avec le *Discours préliminaire.*

C'est d'abord en mathématicien qu'il lit Newton. Insistons : D'Alembert lit effectivement Newton, alors que pour le public cultivé les *Principia* sont hors de portée, connus et admirés seulement à travers un large éventail de présentations simplifiées, les manuels newtoniens de Keill[4] ou Pemberton[5], les *Institutions* de s'Gravesande[6],

auxquelles D'Alembert se réfère dans la marge par des renvois numérotés (il y aussi quelques figures rudimentaires dans le corps du texte manuscrit). La continuité entre les deux morceaux est indubitable : une même équation désignée par (D) est posée au milieu de la dernière page du premier « cahier » et reprise et discutée au début de la première page du deuxième « cahier » sous le nom de « la formule (D) ». Le texte s'interrompt à la fin d'une phrase en haut du folio 30 v°, ce qui semble indiquer que le texte n'allait pas plus loin. Mais le texte que nous avons ne concerne que le livre I des *Principia* de Newton, et D'Alembert annonce en un endroit qu'il se propose de donner aussi un commentaire du livre II : « comme nous le démontrerons dans les remarques sur le second livre » (2467 fol. 238 r°).

3. La date de rédaction du manuscrit est très difficile à déterminer. Puisque D'Alembert commente un ouvrage paru en 1739, ces *Remarques* sont postérieures. Peut-être faut-il tirer argument du fait que D'Alembert cite Clairaut avec approbation dès la première page; le manuscrit commence par « M. Clairaut a donné dans les Mémoires... ». Les relations entre D'Alembert et Clairaut se dégraderont assez vite. Enfin le « genre » de ce texte le rapproche d'autres « remarques » que D'Alembert a données dans ses premières années, sur Reyneau et Guisnée.

4. *Introductio ad veram Physicam,* Oxford 1701 (trad. anglaise Londres 1720).

5. *A View of Sir Isaac Newton's Philosophy,* Londres 1728 (Voltaire s'en inspire dans ses *Elemens* de 1738).

6. *G.J.s'GravesandePhilosophiae Newtonianae Institutiones in Usus Academicos,* Leyden 1723 (rééd. Leyden 1728, Venise 1749, trad. française Leyden 1748, etc.)

Sigorgne[7] ou Madame du Chatelet[8]. Le contenu mathématique de ces ouvrages est assez maigre, très pauvre si on le compare à la richesse, la puissance, la fécondité des *Principia.*

Éditions et commentaires de Newton

Sur quel texte s'appuie D'Alembert ? Newton a donné de son vivant trois éditions des *Principia,* de plus en plus développées (1687, 1713, 1726). D'Alembert connaît la différence entre ces éditions, et il mentionne un raisonnement de la première édition[9]. Celle qu'il a sous les yeux est plutôt la troisième, mais dans une version très particulière, et qui présente un grand intérêt pour nous : c'est la grande édition commentée en latin, en trois volumes, donnée par Le Seur et Jacquier en 1739-1741 [10]. Il se confronte

7. *Institutions newtoniennes ou introduction à la philosophie de M. Newton* par M. Sigorgne, de la Maison et Société de Sorbonne, Professeur de Philosophie en l'Université de Paris. À Paris, chez Jacques-François Quillau 1747.

M. Sigorgne, de la Sorbonne, fait cette constatation assez plate et factuelle que Newton a triomphé, et les deux premières pages de sa Préface ont un parfum d'humour involontaire quand on sait quels combats ses devanciers cartésiens de la Sorbonne et de l'Académie ont menés: « La Philosophie de M. Newton, à laquelle on donne ici une introduction, est devenue celle de la plupart des Sçavans et de presque toutes les Académies. Elle n'eut pas d'abord tout le succès qu'elle méritoit ; il fallut le tems de l'entendre, et tous ne se le donnèrent pas. Plusieurs se hâtèrent de contredire, de déclamer même contre ce qu'ils croyaient voir dans un Livre qu'ils ne comprenaient point ; ils disputèrent sur le Vuide et sur l'Attraction, et ces deux mots qu'on rencontre quelquefois dans les *Principes Mathématiques,* où cependant ils sont toujours énoncés avec retenue et précaution, furent pour eux un nuage qui répandit un faux jour sur l'Ouvrage entier et leur en cacha toutes les beautés. Mais tandis que ceux-ci prévenaient le public contre la nouvelle Philosophie, d'autres plus sages s'appliquoient à l'approfondir ; ils y parvinrent et bientôt elle gagna leurs suffrages, qui éclatant de toutes parts /.../ ne formèrent qu'un cri d'admiration. » *Ibid.* p. III-IV. À vrai dire la présentation de la théorie dynamique du mouvement planétaire par Sigorgne est encore bien loin de Newton, gâtée par une prétendue composition des « forces centrifuges » et centripètes.

8. *Institutions de Physique,* Paris, Prault 1740 (sans nom d'auteur); *Institutions Physiques de Madame la Marquise du Chastellet adressées à M. son Fils,* Nouvelle édition, Tome Premier, Amsterdam, Aux dépens de la Compagnie, 1742.

9. «Dans la 1re Édition des Principes de Newton Année 1687 on trouve une construction du Probleme de Kepler qu'il ne sera peut-être pas hors de propos d'inserer icy. » (2033, fol 24v°) Il s'agit du scholie de la prop. 31 du livre I des *Principia ;* cette proposition, avec son scholie et les additions des éditions ultérieures, présente plusieurs solutions approchées du problème de Kepler (assigner un secteur d'ellipse dans un rapport donné à l'aire entière de l'ellipse, ou en termes anachroniques : connaissant T trouver t tel que T = t + e cost). Newton l'a fortement remaniée d'une édition à l'autre.

10. *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, auctore Isaaco Newtono, perpetuis commentariis illustrata, communi studio PP. Thomae Le Seur et Francisci Jacquier ex Gallicana Minimorum Familia, matheseos professorum, Genevae,* tome I 1739, tome II 1740, tome III en deux vol. 1742 (plusieurs rééditions : Coloniae Allobrogum 1760, Glasgow 1822, Glasgow 1833).

ainsi à Newton directement, mais l'édition qu'il utilise contient la substance de nombreuses lectures antérieures et très savantes. Dans ses *Remarques* il ne commente donc pas seulement Newton, il commente aussi un commentaire, reprenant, critiquant ou approuvant des « commentateurs » [11] qu'il ne nomme pas, mais qu'il est facile de deviner: les Pères Le Seur et Jacquier [12].

L'édition dont il se sert est beaucoup plus qu'une nouvelle impression du texte des *Principia,* c'est pour ainsi dire une somme newtonienne, la quintessence des prolongements que les mathématiciens des années 1700-1735 ont donnés aux *Principia.* Les notes très abondantes, en latin sur deux colonnes, vont bien au-delà des éclaircissements usuels dans un commentaire. On trouve par exemple un petit traité sur les coniques [13], une longue reprise sur le calcul du mouvement de l'apogée lunaire [14], on y trouve même, dans le tome III, la reproduction *in extenso* des trois mémoires sur les marées de D. Bernoulli, L. Euler et C. Maclaurin, ces mémoires qui ont été couronnés en 1741 par l'Académie Royale des Sciences. Les notes ajoutées aux diverses propositions de Newton reprennent des résultats et des raisonnements dispersés dans les revues savantes et les recueils d'académies (provenant de de Moivre, D. Gregory, les Bernoulli, Hermann, Varignon, Musschenbroek, Wolff, Maupertuis, etc.) [15].

11. « Je ne sçay pourquoi les commentateurs ont avancé cette proposition sans démonstration. Elle en mérite bien une et nous allons la donner. » (Ms 2467, fol. 236r°).

12. Thomas Le Seur et François Jacquier sont deux professeurs français, de l'ordre de Minimes, établis à Rome. Le Père Jacquier entretenait des relations suivies avec les savants et philosophes français, il est notamment passé à Cirey chez Madame du Chatelet et Voltaire en 1744. Sur ces deux hommes, voir les indications et la bibliographie donnée par R. Taton in « Madame du Chatelet traductrice de Newton », *Archives Internationales d'Histoire des Sciences*, 1969, p. 194.

13. Sous la forme de la longue note 224, de 17 pages sur deux colonnes en latin, après la prop. 8 du livre I, contenant et démontrant les propriétés les plus usuelles des coniques (« ex conicis propositiones quae saepius occurrunt »). La préface du premier tome contient, dans les dernières lignes, un remerciement à J.L. Calandrini, professeur à Genève, qui a veillé sur la publication et contribué lui-même par diverses additions, en particulier les « éléments des sections coniques » ; on peut donc supposer que cette note 224 est l'œuvre de Calandrini.

14. Les additions relatives au mouvement de la Lune (livre III, notes ajoutées à la prop. 35) forment un petit traité sur la Lune, d'une trentaine de pages sur deux colonnes. La partie intitulée *De motu apsidum* présente deux méthodes pour le calcul du mouvement de l'apogée lunaire, qui ont été discutées par Clairaut et D'Alembert au moment de la crise du système newtonien en 1747-1749. Voir D'Alembert, *Œuvres Complètes,* série I, vol. 6, *Premiers Textes de Mécanique Céleste,* éd. M. Chapront-Touzé, CNRS Éditions, 2002, p. xxxvii , lvi, 246, 253.

15. Par exemple, à la suite de la prop. 6 et de ses corollaires, les commentateurs ont inséré un scholie n° 213 qui commence ainsi : « Newton a ouvert la voie par les propositions précédentes à une théorie générale des forces centrales, et en a donné d'élégantes formules dans les corollaires de la prop. 6. Après lui d'autres auteurs qui tiennent le premier rang parmi les géomètres sont parvenus à de nombreuses autres formules par l'analyse et la méthode des fluxions. » Viennent alors les noms de Varignon, Jean Bernoulli, Jacob Hermann, ainsi que Keill dans le n° suivant. La démonstration qui suit présente le raisonnement avec les deux centres dont nous parlerons plus loin.

La parution de cette édition commentée a marqué une étape nouvelle dans la réception de Newton. Plusieurs philosophes français, qui avaient nourri le projet d'un commentaire des *Principia,* ont renoncé à cette idée dès la parution de cette édition. Ainsi Diderot:

> « Il est vrai que j'avais étudié Newton dans le dessein de l'éclaircir ; je vous avouerai même que ce dessein avait été poussé, sinon avec beaucoup de succès, du moins avec beaucoup de vivacité ; mais je n'y pensai plus dès le temps que les PP. Le Sueur [sic] et Jacquier donnèrent leur Commentaire ; et je n'ai point été tenté de le reprendre. Il y aurait eu, dans mon ouvrage, fort peu de choses qui ne soient dans celui des savants géomètres ; et il y en a tant dans le leur, qu'assurément on n'eût pas rencontré dans le mien ! Qu'exigez-vous donc de moi ? Quand les sujets mathématiques m'auraient été jadis très familiers, m'interroger aujourd'hui sur Newton, c'est me parler d'un rêve de l'an passé. »[16]

Madame du Chatelet, embarquée dans son entreprise immense de traduction du livre de Newton, écrit dans le même sens au Père Jacquier à Rome, qu'elle renonce à un commentaire complet des *Principia:*

> « Votre excellent ouvrage m'est d'un grand secours, et si j'avais eu le courage d'entreprendre un commentaire perpétuel, je n'aurais pas hésité à traduire le vôtre. »[17]

On voit que l'ouvrage a été considéré comme un instrument essentiel dans l'appropriation des *Principia* par toute une génération. On constate aussi des renoncements à l'occasion de cette parution: Diderot, comme Buffon ou Voltaire vers la même date, se détourne de l'étude de Newton. La publication de l'édition Le Seur et Jacquier indique ainsi une ligne de partage entre les discussions philosophiques et mondaines des années 1730 et l'émergence d'un newtonianisme technique et savant à partir de 1740.

Qu'est-ce que le « rayon de la développée » ?

D'Alembert reprend et discute les méthodes et les résultats présentés dans l'édition Le Seur et Jacquier (en se restreignant au livre I pour ce qui concerne le manuscrit dont nous parlons). Sa reprise présente des traits originaux. Un indice permet de mesurer cette différence et de deviner

16. Diderot, Préface des *Écrits mathématiques* de 1748, *Œuvres,* 1821, tome X, p. 514-515.

17. *Correspondance de Madame du Chatelet,* éd. Besterman, lettre 360 du 13 avril 1747, vol. II, p. 156.

l'influence d'une « filière continentale » ou d'une « filière française » dans l'étude des forces centrales. Pour désigner le rayon de courbure de la courbe trajectoire, D'Alembert emploie une expression très particulière, il parle du « rayon de la développée ». Les « commentateurs » Le Seur et Jacquier n'utilisent pas cette expression, mais *radius curvaturae* (le rayon de courbure), *radius osculi* (le rayon d'osculation) ou *radius circuli osculantis* (le rayon du cercle osculateur)[18]. Newton parle de *radius curvaturae*[19]. La dénomination « rayon de la développée » est usuelle chez L'Hospital[20], Varignon, Jean Bernoulli[21] et dans le milieu français, par exemple on la retrouve encore chez Sigorgne[22] en 1747.

Derrière cette expression on peut apercevoir un univers de pensée non-newtonien, une sorte d'alternative aux *Principia.* Qu'est-ce que le «rayon de la développée » ? Développer une courbe, c'est tirer bien droit le fil que l'on a enroulé autour de la courbe en question, de manière qu'il reste toujours tendu et tangent à la courbe ; on marque à chaque fois le bout du fil sur le plan ; en déroulant le fil que l'on maintient toujours tendu, on obtient la suite continue des positions du bout du fil ; cette suite continue de positions forme une deuxième courbe, la première est appelée « développée » puisque le fil qui était enveloppé ou entouré autour d'elle a été déroulé (la seconde courbe est parfois appelée « développante » ; Huygens l'appelle la « courbe décrite par développement ») ; on peut montrer que le fil est toujours perpendiculaire à cette deuxième courbe, et que la première courbe (la développée) est par conséquent le lieu des centres de courbure de l'autre courbe (puisque le centre de courbure d'une courbe peut être conçu comme l'intersection de trois perpendiculaires à la courbe en trois points qui seraient infiniment proches) : à chaque fois la portion rectiligne de fil peut représenter le rayon de courbure du cercle variable qui exprime la courbure de l'autre courbe (« rayon de la développée » est donc une expression abrégée de cette désignation précise beaucoup plus longue).

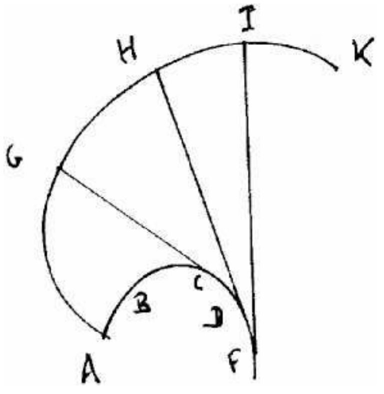
18. Dans les notes à la prop 6 des *Principia* et dans la longue série de notes qui suit la prop. 10 du livre des *Principia.* Voir par exemple les notes n° 212 et 242 où figure « radius osculi », et la note 240 qui emploie « radius curvaturae ». La notion de *radius circuli osculantis* est introduite par les « commentateurs » à la note 121 qui suit le lemme XI du livre I des *Principia.*

19. *Principia*,Livre I, prop. 6 Corollaire 3 (de la deuxième éd.).

20. L'Hospital utilise cette notion en 1700 dans son exposition du calcul des forces centrales (MARS pour l'année 1700, éd. Amsterdam 1734, p. 317 etc.)

21. Par exemple dans la lettre de Jean Bernoulli à Varignon du 4 août 1711, *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli,* Bd III, éd. par P. Costabel et J. Peiffer, Basel 1992, p. 422. On trouvera une occurence sous la plume de Varignon dans le même volume, p. 361.

22. *Institutions newtoniennes,* 1747, p. 159-160 et passim.



[Figure 1]

Sur notre figure 1, inspirée de celle de l'Hospital, ABCDEF est la courbe initiale que l'on se donne, celle qu'on appelle développée, CG ou DH est le fil que l'on déroule (comme si ABCDEF était une bobine sur laquelle est enroulé le fil d'extrémité G, et si on déroule un peu plus l'extrémité du fil se retrouvera en H puis en I, puis en K), AGHIK est la deuxième courbe engendrée par le développement de la première. En chaque point tel que H, le fil est perpendiculaire à la courbe GHI et D est le centre de courbure de la courbe AGHIK au point H, la longueur HD exprimant le rayon de courbure (on « voit » que si GHI était presque rectiligne, le « rayon » HD serait de longueur immense, expression d'une courbure très faible ; si au contraire AGHIK est très incurvée, alors GC, HD et IF sont très inclinés l'un sur l'autre et leurs intersections C, D, F sont à courte distance de l'arc GHI). BDF est la « développée » de AHK, et les segments GC, HD, IF sont les « rayons de la développée ». La théorie de ces développées a été inventée par Huygens dans son *Horologium oscillatorium* de 1673[23] et reprise par le Marquis de L'Hospital dans *L'Analyse des infiniment petits* en 1696[24]. C'est pourquoi D'Alembert, comme ses devanciers continentaux, parle de « rayon de la développée » là où Newton et bien d'autres parlent de « rayon de courbure ». Le mot rayon n'a pas tout à fait le même sens, puisque la développée n'est pas un cercle et que ce « rayon » est situé en dehors d'elle.

23. Christiaan Huygens, *Horologium oscillatorium,* Pars tertia, Def. III et IV, éd. 1673 p. 60-61. (Huygens parle de curva « evoluta » et de curva « descripta ex evolutione »).

24. *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes,* Paris 1696, section V, pp. 71 sqq (« Usage du calcul des différences pour trouver les développées »).

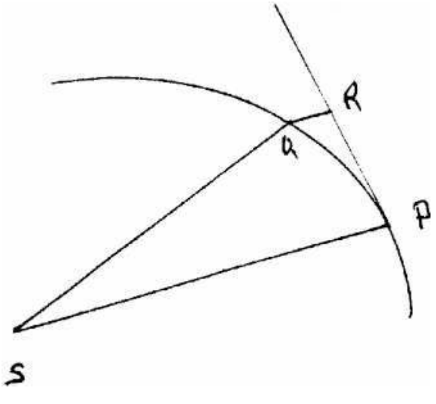
Un calcul des forces centrales avec deux centres

S'agit-il d'une pure différence terminologique ? La suite de l' œuvre de D'Alembert montre que non. Dans les *Recherches sur différens points du système du monde,* D'Alembert prétendra que Huygens avait tous les matériaux pour une théorie complète des forces centrales :

1) la formule d'évaluation des forces centrifuges

2) la théorie des centre de courbure grâce à la théorie des développées[25].

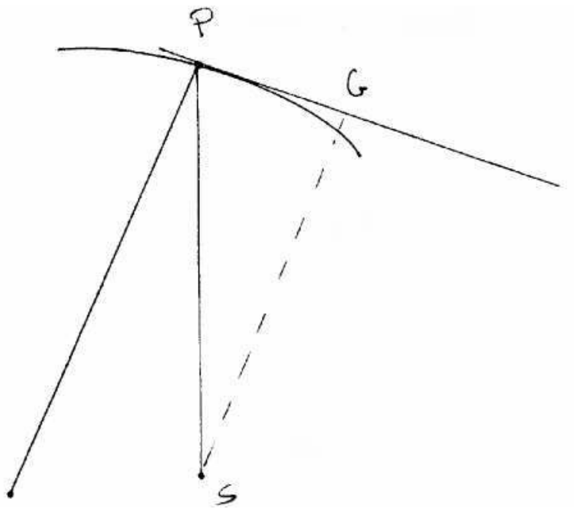
Cela suppose une description des forces centrales qui n'est pas tout à fait celle de Newton. Chez Newton, du moins dans la première édition des *Principia,* le centre de forces S est le point autour duquel on raisonne, et on commence par s'intéresser aux aires balayées autour de ce point pris comme centre (prop. 1 et 2). La proposition 3 démontre que si un point est le centre d'un balayage d'aires régulier, alors ce point est centre de force. La géométrie de la situation est en même temps une présentation concrète et visuelle des relations dynamiques. Newton montre dans sa proposition fondamentale de mesure des forces (prop. 6) que l'écart QR est proportionnel à la force qui tire (ou pousse) P vers S et proportionnel au carré de l'aire du secteur SPQ (voir figure 2).



[Figure 2]

25. « Newton lui-même ne s'est élevé si haut que par l'usage heureux qu'il a su faire de quelques principes trouvés avant lui, et dont les auteurs, ou n'avaient pas senti toute l'étendue, ou n'avaient pas eu le temps de l'apercevoir. Il n'y avait qu'un pas de la méthode de Barrow pour les tangentes au calcul des fluxions ; la théorie des forces centrifuges dans le cercle, trouvée par Huygens, et rapprochée de la théorie des développées du même auteur qui réduit toutes les courbes à des portions d'arc de cercle, conduit immédiatement et comme nécessairement à la théorie générale des forces centrales sur lesquelles le système du monde est appuyé. » *Recherches sur différens points du système du monde,* Préface, in D'Alembert, *Œuvres choisies,* Paris 1853 p. 174.

D'Alembert s'y prend autrement pour représenter et mesurer les forces centrales, en s'inspirant de la tradition issue de Varignon et des Bernoulli[26]. Deux centres distincts apparaissent sur sa figure (notre figure 3, qui reproduit à peu près le petit croquis du folio 239 v°) : le point S est le centre de force (P a tendance à « tomber » vers S) et le point C est centre de courbure de la courbe décrite (CP est le rayon de courbure ou « rayon de la développée » qui mesure la courbure de l'orbite au point P).



[Figure 3]

La formule qui donne la mesure de la force s'écrit pour D'Alembert

$$f/uu = 1/r\ n \quad \text{(folio 239 v°)}$$

dans laquelle
f est la force vers S,
u est la vitesse en P
r est le « rayon de la développée » ou rayon de courbure PC
n est le cosinus de l'angle PSG.

26. Il faut noter que dans la deuxième édition des *Principia* Newton avait lui-même ouvert la possibilité d'une méthode alternative proche de la méthode « continentale », avec le corollaire 3 de la prop. 6 (voir les réflexions et commentaires de J.B. Brackenridge, *The Key to Newton's dynamics*, Berkeley 1995 et Niccolo Guicciardini, *Reading the Principia*, Cambridge Univ. Press, 1999).

On retrouve un ingrédient essentiel: la formule de Huygens pour la mesure de la force centrifuge u^2/r, ici modifiée par un coefficient qui représente l'angle entre la direction de la force et la direction de la courbure.

Cette formule des forces centripètes est la même (à une erreur près) que D'Alembert reprendra dans son *Traité de dynamique* de 1743: « Dans une courbe quelconque, l'effet de la force centrale est comme le carré de la vitesse divisé par le rayon de la développée et multiplié par le rapport qu'il y a entre le sinus de l'angle que fait cette force avec la courbe et le sinus total »[27].

Pour décrire plus intuitivement ce raisonnement, on pourrait dire qu'ici on commence par mesurer la courbure de la courbe trajectoire, puis on affecte la courbure trouvée d'un coefficient qui exprime l'obliquité de cette courbure par rapport à la direction de la force (en général la courbure n'est pas tout à fait dans la direction du centre de force). Il y a deux centres : le centre de courbure et le centre de force, on s'intéresse d'abord au premier puis on tient compte du second. Le premier centre est un point fictif, qui n'a aucune réalité physique, et c'est un point variable, centre du cercle osculateur pour chaque point considéré sur la trajectoire. La planète est supposée à chaque fois (en chaque point tel que P) se mouvoir sur un cercle qui approxime la trajectoire, et qui a pour centre le point variable C.

Par rapport à la présentation géométrique de Newton dans la prop. 6 des *Principia,* la méthode de D'Alembert représente un détour, mais un détour qui est conforme à la voie qu'il suppose avoir été tracée implicitement par Huygens : on peut calculer une force centrale

1) si on sait calculer la force centrifuge sur un cercle (f est comme uu/r) et

2) si on connaît la théorie des développées c'est à dire des courbures variables le long d'une courbe donnée.

En somme D'Alembert replace Newton dans le sillage de la tradition continentale, qu'il fait remonter à Huygens. Notons aussi que cette voie de raisonnement est peut-être plus propice à une retraduction analytique.

En même temps le lecteur cultivé peut ressentir une certaine gêne devant la reformulation de D'Alembert : la théorie des développées n'est pas tout à fait à sa place ici, elle ne constitue pas le cadre naturel du calcul des forces centrales. En effet l'intérêt et la fécondité de cette théorie des développées sont de mettre en relation deux courbes qui proviennent l'une de l'autre, dans un sens par le déroulement, dans l'autre sens par cette sorte d'enroulement qu'est la recherche des intersection de perpendiculaires successives. Le triomphe de cette étude des courbes associées par

27. *Traité de dynamique,* éd. de 1743, p. 29 (l'éd. de 1754 rétablit le rapport des sinus inversé par inadvertance : il s'agit du rapport entre le sinus total et le sinus de l'angle).

développement est la théorie du pendule cycloïdal, avec la démonstration par Huygens et Newton que la développée d'une cycloïde est encore une cycloïde, ce qui permet de construire effectivement un pendule isochrone avec des « joues » cycloïdales[28]. Pour les forces centripètes comme celles du système solaire, la recherche du lieu des centres de courbure (la développée) n'est pas particulièrement féconde et reste (à ma connaissance) une curiosité mathématique[29].

Géométrie ou analyse ?

Prolongeant l'oeuvre newtonienne, Le Seur et Jacquier la modifient dans son style et ses méthodes. Leur ouvrage est une étape importante dans la réécriture analytique des *Principia*, et D'Alembert dans ses *Remarques* manuscrites franchit un nouveau pas dans la même direction. La plupart du temps Newton raisonnait de manière « synthétique », avec des éléments géométriques variables, des configurations mobiles qui se déformaient et qui pouvaient tendre vers des positions limites. Au contraire les auteurs continentaux, qui s'inspirent de la manière leibnizienne et des travaux pionniers des Bernoulli, utilisent des infiniment petits et mettent en équation les grandeurs qu'ils considèrent, en leur assignant des noms littéraux et les faisant entrer dans des expressions analytiques[30]. Progressivement disparaissent les relations géométriques de proportionnalité, entre des grandeurs concrètes visibles, désignées avec les lettres des points de la figure, comme:

« le segment AB est au segment CD comme l'aire EFG est à l'aire HIK » ; parfois écrit:

« AB : CD:: EFG : HIK », ou en latin « ut AB ad CD, sic est EFG ad HIK ».

À la place de ce langage s'introduit progressivement le langage de «l'analyse », avec des grandeurs abstraites désignées par des lettres de variables, reliées par des relations algébriques ou fonctionnelles, comme ci-dessus

28. Huygens, *Horologium Oscillatorium*, Pars tertia, prop. 6, et Newton, *Principia*, livre I, prop. 50-51.

29. Il faudrait voir si chez L'Hospital, Varignon et leurs successeurs, l'étude de la courbe développée d'une trajectoire permet, en donnant à l'avance et globalement les positions du centre de courbure pour l'ensemble de la trajectoire, de déterminer certaines propriétés de la force. Je ne connais rien qui aille dans ce sens.

30. Le Seur et Jacquier présentent dans les notes 142-170 un bref exposé de calcul infinitésimal, avec des dx, ddz etc., mais en les désignant sous le nom de fluentes et de fluxions. Ils considèrent que la méthode des fluxions de Newton « se déduit et se démontre facilement » à partir des lemmes sur les premières et dernières raisons. Ils donnent à la note 158 un petit dictionnaire de passage entre les notations newtoniennes et leibniziennes.

f/uu = 1 /rn.

Dans ce formalisme les infiniment petits dx, dy, ddx, etc. prennent pleinement leur place, comme si c'étaient des grandeurs variables que l'on a le droit de manipuler au même titre que les autres, en respectant naturellement des conventions relatives aux opérations sur les infiniment petits des différents ordres. Le Seur et Jacquier se tiennent dans une position moyenne, paraphrasant les expressions et les raisonnements de Newton sous une forme encore partiellement géométrique, et parfois se servant plus franchement du mode de raisonnement analytique.

L'éclipse de la géométrie

D'Alembert se prononce avec beaucoup de décision en faveur du langage nouveau. Il ne semble même plus comprendre les avantages ou les richesses du style géométrique de raisonnement. Cette préférence systématique pour l'analyse apparaît crûment dans le commentaire qu'il donne à la section V des *Principia* et qui occupe sept pages, soit presque le quart de ses *Remarques.* Newton se propose dans cette partie du livre I de déterminer une conique en connaissant certains points ou certaines tangentes. Il s'y prend de manière géométrique, et résume sa méthode par les mots « non calculus, sed compositio geometrica » [31], se flattant de résoudre à la manière des Anciens les problèmes de « lieux ».

D'Alembert rejette d'emblée la méthode de Newton, et la remplace par un traitement analytique:

> « Comme la plus grande partie des lemmes de cette section n'est que pour enseigner à faire passer une section conique par 5 points donnés, nous croyons qu'il ne sera pas hors de propos de donner une théorie sur ce sujet.
>
> Problème
>
> Faire passer une section conique par cinq points donnés A, B, C, D, G.
>
> Soit supposé le problème résolu, et que AMBGCm soit la section qu'on demande, soit AP = x, PM ou Pm = y, et soit yy + lxx + nxy + py + gx + q = 0, l'équation générale des sections coniques, où l, n, p, g, q, marquent des coefficiens constants que nous déterminerons dans la suite. » [32]

Suivent sept pages de calcul analytique qui permettent de distinguer et déterminer les cas possibles. Il obtient 27 cas par une première méthode qui utilise des propositions données par L'Hospital dans ses « sections coniques », puis 13 cas par une méthode différente [33].

31. Newton, *Principia,* livre I, section V, lemme 19.

32. D'Alembert, *Remarques sur quelques endroits des Principes de Newton,* mss 2467, folio 240 v°.

33. La deuxième méthode apparaît dans les fol. 23 r° et 23 v° du mss 2033.

D'Alembert ne paraît pas prendre conscience que Newton a choisi délibérément la voie géométrique et synthétique, dans le souci de retrouver ce qu'il appelle la rigueur des Anciens. D'Alembert ne semble pas apercevoir non plus que Newton sait parfaitement résoudre ce problème par la voie de l'analyse, et qu'il en a donné lui-même un exposé dans l'*Arithmetica Universalis*[34]. En un endroit D'Alembert présuppose même que Newton doit être arrivé à certains résultats par l'analyse, alors que la présentation qu'il en donne est différente:

> « Pour résoudre analytiquement ce problème et voir comment Newton y est arrivé »...[35].

On comprend mieux, dans cette décision de tout ramener à l'analyse, pourquoi D'Alembert ne s'est pas du tout intéressé à certains développements géométriques très originaux des *Principia*, notamment les lemmes de transformation des courbes qui sont une première ébauche de géométrie projective[36]. La fécondité des méthodes « synthétiques » en géométrie sera redécouverte au XIX^e^ siècle, grâce à Poncelet, Chasles et aux géomètres allemands[37]. Le succès des procédures algébriques et différentielles a relégué à l'arrière-plan d'autres méthodes, les *Principia* ont été progressivement retranscrits dans un style qui n'était pas le leur, et les avantages de la géométrie, sa beauté ou ses ressources propres, ont cessé d'être visibles pendant assez longtemps.

Nous avons restreint notre attention à deux thèmes : le calcul des forces centrales et l'opposition entre géométrie et analyse. Une étude exhaustive des *Remarques* de D'Alembert sur les *Principia* devrait aussi mettre en valeur plusieurs passages brefs et cryptiques, mais importants parce qu'ils témoignent d'un intérêt précoce pour des problèmes que

34. Newton, *Arithmetica Universalis*, problème 58 : « décrire une parabole qui passe par quatre points donnés », problème 59: « décrire une section conique par cinq points donnés », problèmes 60 et 61 avec des tangentes données de position. Voir édition de Leyden 1732, pp. 171-178 (la première éd. est de 1707).

35. Remarque de D'Alembert sur la prop. 30 des *Principia*, mss 2033, fol. 24 r°.

36. *Principia*, livre I, lemmes 21 et 22. Le Seur et Jacquier en donnent un commentaire assez détaillé et citent à ce sujet la *Geometria organica* que Colin Maclaurin a publiée en 1720 (note 316).

37. Il faudrait ici nuancer, et tenir compte par exemple des travaux sur les courbes algébriques au XVII^e^ siècle, à la suite de l'*Enumeratio linearum tertii ordinis* de Newton et des commentaires, critiques et prolongements auxquelles elle a donné lieu. D'Alembert semble peu intéressé par ces recherches, et dans ses *Remarques* manuscrites il déclare que l'étude des diverses branches des courbes « est plus curieuse qu'utile » (Mss 2033, fol. 29 v°).

D'Alembert reprendra plus tard: la discussion de la méthode de Newton pour la précession[38], l'étude de la réfraction en termes de force[39].

On aura peut-être une idée, à travers ces trop brèves indications sur les *Remarques* de D'Alembert, de ce qu'ont représenté les *Principia* de Newton pour les générations qui ont suivi : un immense chantier de travail, en déséquilibre vers une reformulation analytique, sollicitant aussi bien les efforts des observateurs que des mathématiciens. Newton a proposé une théorie d'une nouveauté inouïe, mais en laissant bien des aspects inachevés. Dans ce chantier, le jeune D'Alembert vient prendre sa place sur le front de taille.

François DE GANDT
Université de Lille III

38. Peut-on traiter « un anneau fortement adhérent au globe T » comme « un corps P qui tourne autour d'un autre T » ? (folio 30 r°) Cette question réapparaîtra chez Newton dans la prop. 39 du livre III : est-il légitime d'approximer l'effet d'un renflement solide annulaire, adhérent à la sphère, par une ceinture de satellites ?

39. Folios 30 r° et 30 v°.