Recherches sur Diderot et sur l'Encyclopédie

38 | avril 2005
La formation de D'Alembert

Le calcul différentiel et intégral dans l'*Analyse démontrée* de Charles René Reyneau

Jean-Pierre Lubet

Édition électronique
URL : http://journals.openedition.org/rde/304
DOI : 10.4000/rde.304
ISSN : 1955-2416

Éditeur
Société Diderot

Édition imprimée
Date de publication : 1 juin 2005
ISBN : 2-9520892-4-8
ISSN : 0769-0886

Jean-Pierre LUBET

Le calcul différentiel et intégral dans l'*Analyse démontrée* de Charles René Reyneau

Le premier mémoire envoyé par Jean Le Rond D'Alembert à l'Académie royale des sciences avait pour objectif essentiel de rectifier une erreur contenue dans l'*Analyse démontrée* de Charles René Reyneau. Avec d'autres travaux de D'Alembert sur le calcul intégral, cette question a été présentée en détail par Christian Gilain dans un article récent[1]. Nous proposons de revenir ici sur l'ensemble du traité de Reyneau, pour essayer de caractériser les éléments de calcul différentiel et intégral qu'il contient. Publié pour la première fois en 1708, l'ouvrage a été largement diffusé au point qu'une seconde édition, comportant peu de modifications, a été nécessaire en 1736-1738. Il est généralement admis que le jeune D'Alembert a tiré de ce traité les premiers éléments de sa formation mathématique[2]. Chronologiquement, l'ouvrage de Reyneau prend place entre l'*Analyse des infiniment petits*[3] de Guillaume de l'Hôpital et l'*Introductio in analysin infinitorum*[4] de Léonard Euler. Dans l'historiographie, il occupe une place beaucoup plus modeste que ces deux traités. Cependant, à l'occasion d'une étude sur les travaux mathématiques de Nicolas Malebranche, Pierre Costabel a décrit les circonstances dans

1. Christian Gilain, «D'Alembert et l'intégration des expressions différentielles d'une variable », *Analyse et dynamique, études sur l'œuvre de d'Alembert* sous la direction d'Alain Michel et Michel Paty, Québec, Presses de l'Université Laval, 2002, p. 207-235.

2. Voir la notice concernant Reyneau, écrite par Pierre Costabel dans Charles Gillipsie, éd., *Dictionary of Scientific Biography* 11-12, 1981, p. 392 et aussi Christian Gilain, o. c., p. 210.

3. *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes,* Paris 1796, réimpr. Paris, ACL-éditions, 1988.

4. *Euleri Opera omnia, (I),* 8 et 9. L'édition originale de l' *Introductio* est parue à Lausanne en 1748.

lesquelles Reyneau a travaillé à cet ouvrage. Cette étude nous permettra de donner quelques indications sur la personnalité de Reyneau et sur ses relations avec les mathématiques qui s'élaboraient au tournant des XVII^{e} et XVIII^{e} siècles. Nous passerons ensuite au contenu du traité lui-même: que recouvre la dénomination d'*Analyse* présente dans le titre ? Quels sont les moyens utilisés pour introduire le calcul différentiel ? Quels sont les résultats exposés en matière de calcul intégral ? Les réponses à ces questions mettent en évidence quelques-uns des traits que l'on retrouvera, en particulier, dans les travaux de D'Alembert, et qui continueront à caractériser les mathématiques au-delà même du XVIII^{e} siècle.

*Reyneau, l'*Analyse démontrée *et le « groupe malebranchiste »*

En 1684, Gottfried Wilhelm Leibniz a rendu publiques les règles du calcul différentiel. Il s'agit d'un article bref exposant rapidement la notation des différentielles, leur mode d'emploi et leur usage pour la détermination des tangentes ou des maxima. Leibniz lui-même n'a jamais publié un traité complet regroupant les principes du calcul différentiel et intégral, ainsi que les nombreuses applications qu'il en connaissait. Le nouveau calcul s'est répandu à partir des écrits ponctuels que Leibniz a continué à livrer et par les développements qu'ont apportés ses disciples. Son introduction en France a été le fait d'un petit groupe de personnes, parmi lesquelles Nicolas Malebranche a joué un rôle déterminant. En France, les travaux d'André Robinet et Pierre Costabel permettent en effet de mesurer l'activité d'un « groupe malebranchiste », dont les membres s'intéressent très vite aux mathématiques nouvelles [5]. Pendant son séjour à Paris entre 1672 et 1776, Leibniz a rencontré Malebranche. Dès cette époque il l'a mis en garde contre des conceptions étroitement cartésiennes et il l'a entretenu de la nécessité d'une « science de l'infini »[6]. Quand les projets de Leibniz se concrétisent, ils n'entraînent pas une adhésion immédiate et unanime. À l'Académie des sciences de Paris, les oppositions ne s'effaceront véritablement qu'en 1706. Mais dès 1690, les nombreux mathématiciens favorables au nouveau calcul bénéficient du soutien et de la notoriété de Malebranche. Le groupe suit avec intérêt les publications de Leibniz et de ses proches ; les articles publiés à Leipzig dans les *Acta*

5. Pierre Costabel, *Mathematica,* tome XVII-2 des *Œuvres complètes* de Malebranche, Paris, Vrin, 2^{e} éd., 1979 ; André Robinet, « Le groupe malebranchiste introducteur du calcul infinitésimal en France », *Revue d'histoire des sciences,* XIII, 1960, n° 4, p. 287-308, 1961 ; « La philosophie malebranchiste des mathématiques », *Revue d'histoire des sciences,* XIV, 1961, n° 3-4, p. 205-254 ; *Malebranche de l'académie des sciences, l'œuvre scientifique,* 1674-1715, Paris, Vrin, 1970.

6. Pierre Costabel, *Mathematica,* o. c., p. 173.

eruditorum sont recopiés et mis en circulation; le cas échéant, ils s'enrichissent des interrogations ou des remarques des lecteurs successifs. Des documents de travail sont échangés. Des dispositions sont prises pour faire face aux critiques formulées au sein de l'Académie.

Ce travail théorique vient se conjuguer à des préoccupations pédagogiques, liées à l'appartenance de Malebranche à l'ordre des Oratoriens et à la présence de cet ordre dans le réseau des collèges et des universités. En 1675 a été publié un ouvrage élémentaire d'initiation à l'arithmétique et à l'algèbre : les *Éléments de mathématiques ou principes généraux de toutes les sciences qui ont les grandeurs pour objet.* L'auteur est un jeune Oratorien, Jean Prestet ; selon A. Robinet, Malebranche lui-même a pris une part active à la rédaction, mais, sensible aux critiques formulées par Leibniz, il finit par exprimer lui-même des réserves sur cet ouvrage. Il ne se satisfait pas non plus des *Nouveaux éléments* publiés par Prestet en 1689. Et dans l'édition de *La recherche de la vérité* parue en 1700, il souhaite la réalisation d'un nouvel ouvrage élémentaire.

Parallèlement, se pose la question de l'initiation au nouveau calcul. Parmi les membres du groupe, L'Hôpital est sans doute le mathématicien le plus éminent. Pendant l'hiver 1691-1692, il prend Jean Bernoulli à son service pour parfaire sa connaissance des nouvelles mathématiques. Malebranche attend d'abord de lui un traité des sections coniques augmenté de cahiers sur le calcul différentiel. Mais le projet ne se réalise pas sous cette forme et L'Hôpital publie en 1696 l'*Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes,* dont la diffusion est un succès. Après cette date, L'Hôpital continue à travailler sur son texte et son *Traité analytique des sections coniques* sera édité après sa mort par les soins de Pierre Varignon et Nicolas Malebranche. L'*Analyse* de L'Hôpital contient essentiellement un exposé des principes du calcul différentiel, avec ses applications géométriques : étude de tangentes, détermination de développées, de caustiques... On n'y trouve pas de problèmes qui déboucheraient sur le calcul d'intégrales ou la résolution d'équations différentielles. On sait que ce travail n'aurait pas vu le jour sans l'aide substantielle des leçons que Jean Bernoulli a données à L'Hôpital [7].

Charles René Reyneau (1656-1728) a connu Malebranche et Prestet au cours de sa formation à la maison de l'Oratoire de Paris. Il a enseigné, de 1679 à 1681 au collège de Toulon, puis jusqu'à 1705 à l'Université d'Angers, à partir de cette date il est retourné à la maison de l'Oratoire.

7. Dans la préface de son ouvrage, L'Hôpital «reconnaît devoir beaucoup aux lumières de M$^{\text{rs}}$ Bernoulli, surtout à celles du jeune présentement professeur à Groningue, [Jean Bernoulli] (12$^{\text{e}}$ page, non numérotée, de la préface), mais on peut penser que cette reconnaissance vague et globale est une habileté qui cache des emprunts beaucoup plus précis (voir Costabel, o c., p. 167 et surtout Otto Spiess dans son introduction au tome 1 de *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli,* Basel, Birkhäuser Verlag, 1955).

En 1714, il publiera un livre élémentaire d'initiation : *La science du calcul en général ou les éléments de mathématiques.* L'*Analyse démontrée, ou la méthode de résoudre facilement des problèmes des mathématiques et d'apprendre facilement ces sciences,* est publiée en 1708. Le second tome contient notamment les éléments de calcul intégral qui ne figuraient pas dans le traité de L'Hôpital. Les publications didactiques de L'Hôpital et de Reyneau couvrent ainsi un large champ des mathématiques. D'ailleurs, dans la dernière édition de *La recherche de la vérité* publiée de son vivant, Malebranche recommandera sans réserves les quatre ouvrages[8].

Jusqu'en 1698 au moins, Reyneau a éprouvé des difficultés dans l'assimilation du nouveau calcul[9]. Mais son expérience l'a fait désigner pour travailler à des *éléments* qui puissent remplacer les livres de Prestet, l'ouvrage à mettre en œuvre devant comprendre aussi une initiation au calcul différentiel et intégral. Reyneau ne travaille pas en solitaire. Pierre Costabel le montre inséré dans un réseau dont l'activité documentaire est par moments particulièrement intense. Alors qu'il vit encore à Angers, il reçoit du bibliothécaire de l'Oratoire des articles des *Acta eruditorum*, signés notamment de Leibniz et de Jacques Bernoulli. Le cours que Jean Bernoulli a dispensé à L'Hôpital en 1692 a donné lieu à une ou plusieurs copies, il a servi de support à des travaux personnels que Malebranche a réalisés pour assimiler les méthodes du calcul différentiel et intégral [10], mais Reyneau a également eu ce cours entre les mains [11]. Il a aussi bénéficié de l'aide de certains de ses confrères[12].

L'*Analyse démontrée* est divisée en huit livres. Les Livres I à VII constituent le premier volume, ils traitent essentiellement des équations algébriques, avec, notamment, la résolution par radicaux pour les degrés 2, 3, 4. Le Livre VI est consacré à la recherche d'encadrements des racines. Le Livre VII concerne la résolution d'équations par le moyen des séries entières. Le Livre VIII constitue à lui seul le second volume et comprend

8. Nicolas Malebranche, *De la recherche de la vérité,* tome II, introduction et texte établi par Geneviève Rodis-Lewis, Paris, Vrin, 1962, p. 243. Il y manque quand même un ouvrage d'initiation à la géométrie ; sur ce point, Malebranche recommande *pour la géométrie ordinaire, celle de Monseigneur le duc de Bourgogne ;* un ouvrage portant ce titre a connu 5 éditions entre 1705 et 1735, il aurait pour origine les notes rédigées par le duc de Bourgogne (Louis, petit-fils de Louis XIV) à la suite des leçons que lui a données son professeur de mathématiques, Nicolas de Malezieux, entre 1691 et 1698. Lire à ce sujet Henri Plane, *Actes du colloque inter-Irem des 14-15 mai 2004,* Irem de Dijon, à paraître.

9. C'est du moins le jugement émis par Pierre Costabel et fondé sur l'examen de sa correspondance avec Claude Jacquemet, lui-même jugé « excellent mathématicien » (o. c., p. 158).

10. Pierre Costabel, *Mathematica,* o. c., p. 177-294.

11. Probablement en 1704, *ibid.,* p. 165.

12. Ibid., p. 302.

plus de 400 pages. Il a pour titre: *Où l'on fait voir l'usage de l'Analyse dans la Géométrie et dans les sciences physico-mathématiques; c'est-à-dire, on explique la manière de se servir de l'Analyse pour résoudre les problèmes de la science.* Après quelques précisions sur l'emploi du mot *analyse*, c'est essentiellement le contenu de ce volume que nous allons étudier dans la suite.

Ce qu'il faut entendre par le mot Analyse

À la suite de la préface du premier tome, un avertissement à destination des «lecteurs qui commencent» donne une définition de l'*analyse :*

> *[...]* dans tous les Problèmes de Mathématiques, il y a des grandeurs inconnues que l'on cherche, des grandeurs connues et des rapports connus entre les grandeurs connues et inconnues : et [...] c'est par le moyen de ces rapports qu'on peut découvrir les grandeurs inconnues que l'on cherche. L'Analyse est la science qui contient les méthodes pour découvrir les grandeurs inconnues que l'on cherche [13].

Il faut comprendre que les *rapports* désignent des relations générales exprimées en termes géométriques ou physiques. Et l'analyse doit parcourir une première étape comportant une mise en équation : choix des lettres qui vont désigner les grandeurs, écriture des équations qui, à l'aide de ces lettres, vont traduire les *rapports* que comporte l'énoncé du problème. Cette première phase peut déboucher sur une ou plusieurs équations algébriques, ce sera le cas dans la première partie du Livre VIII, laquelle s'intitule : *De l'usage de l'Analyse dans la résolution de problèmes de la Géométrie et dans les sciences physico-mathématiques, en se servant des seuls calculs de l'algèbre.* Elle peut aussi conduire à une équation différentielle. Le calcul différentiel n'intervient que dans la deuxième partie et, avec lui, les problèmes (tangentes, points d'inflexion, extrema...) qu'il permet de résoudre. La troisième partie sera réservée au calcul intégral et à ses applications. On trouve le mot *Analyse* avec la

13. Charles René Reyneau, *L'analyse démontrée, ou la méthode de résoudre les problèmes de mathématiques et d'apprendre facilement ces sciences, expliquée et démontrée dans le premier volume et appliquée, dans le second, à découvrir les propriétés des figures de la géométrie simple et composée, à résoudre les problèmes de ces sciences et les problèmes des sciences physico-mathématiques, en employant le calcul ordinaire de l'Algèbre, le calcul différentiel et le calcul intégral. Ces derniers calculs y sont aussi expliqués et démontrés,* Paris, chez J. Quillau, premier tome 1736, p. xv. Les citations de Reyneau qui vont suivre sont extraites du second tome (1738) et elles seront référencées par le seul numéro de page, sans rappel du titre ni de l'auteur.

même acception sous la plume de Malebranche [14] et, plus tard chez D'Alembert [15]. Quand on parcourt l'histoire des mathématiques, la signification de ce mot évolue. Le type de démonstration instauré par les mathématiciens grecs est caractérisé par l'ordre logique dans lequel il procède : on part de ce qui est connu et le discours progresse jusqu'à obtention du résultat (énoncé d'un théorème, réponse à un problème posé). Cette démarche est qualifiée de synthétique par Pappus, il lui oppose l'analyse, celle-ci est « la voie de ce qui part de ce qui est cherché, comme s'il était accordé, pour parvenir, par les conséquences qui s'ensuivent, à quelque chose qui est accordé par la synthèse » [16]. C'est cette analyse, conçue comme une méthode générale, qui est utilisée par René Descartes pour introduire l'algèbre dans la résolution des problèmes de géométrie [17]. Cette étape, analytique et algébrique, a une contrepartie synthétique et géométrique : Descartes ne se contente pas de résoudre les équations, il réalise une *construction géométrique des racines* [18]. En inventant le calcul différentiel et intégral, Leibniz lève les restrictions que Descartes imposait aux types de problèmes traités, et, selon ses propres termes, il établit « la liaison entre l'Analyse algébrique et l'Analyse transcendante » [19]. C'est cette époque de l'analyse mathématique qui est illustrée par l'ouvrage de Reyneau. Au XVIII[e] siècle, les traités d'Euler et de Joseph-Louis Lagrange vont faire évoluer le calcul différentiel et intégral en le détachant de la géométrie, à la fois dans ses concepts et dans ses procédures. Un nouveau glissement de sens s'opère et, en mathématiques, l'*analyse* finira par désigner de façon plus exclusive le domaine qui contient les techniques propres à l'étude des fonctions, avec, sous une forme ou une autre, la prise en compte des questions de continuité et de limite.

14. Malebranche, o. c., p. 187. Par ailleurs, André Robinet a donné une étude d'ensemble de la philosophie malebranchiste des mathématiques (article cité note 5).

15. Voir l'article ANALYSE, *Enc.*, I, 400b et aussi l'*Essai sur les éléments de philosophie,* (1759), rééd. Paris, Fayard, 1989, p. 107.

16. *La collection mathématique,* trad. Paul Ver Eecke, Paris-Bruges, 1933, Vol II, p. 477.

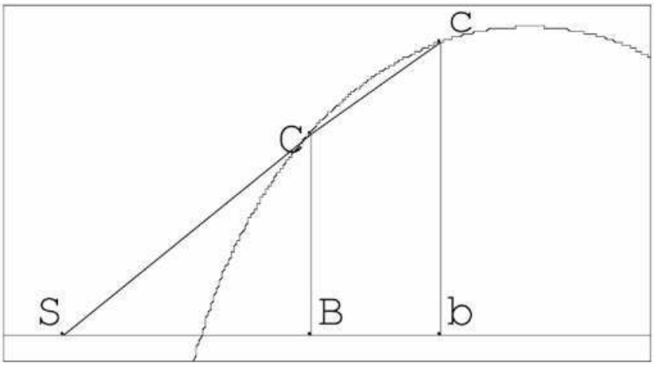
17. Cette période allant des Grecs à Descartes est étudiée par Jean-Louis Gardies dans *Qu'est-ce que et pourquoi l'analyse ? Essai de définition,* Paris, Vrin, 2001.

18. Sur l'importance de la *construction des équations* dans la *Géométrie* de Descartes et sur la perpétuation de cette pratique jusqu'au milieu du XVII[e] siècle, lire Henk J. M. Bos, « La structure de la *Géométrie* de Descartes », *Revue d'histoire des sciences* 51, 2/3, avril-sept 1998, p. 291-317, et « Arguments on motivation in the rise and decline of a mathematical theory : the construction of equations », *Archive for History of Exact Sciences,* 30, 1984, p. 331-380.

19. *Constructio ... de curva isochrona paracentra... (Acta Eruditorum,* août 1694), Marc Parmentier, *La naissance du calcul différentiel,* 26 articles des *Acta eruditorum,* traduits, présentés, annotés, Paris, Vrin, 1989, p. 295.

Une partie de l'analyse qui relève des seuls calculs de l'algèbre

De la première partie, on retiendra d'abord une « méthode générale pour mener les tangentes aux courbes géométriques »[20]. La terminologie est la même que chez Descartes : les courbes *géométriques* sont celles dont l'équation est algébrique, les autres ne sont que *mécaniques*. Pour cette première partie, Reyneau adopte une définition élémentaire: « une ligne qui touche une courbe en un seul point, [...] s'appelle la tangente en ce point là, qui s'appelle le point touchant »[21]. Cette caractérisation va se prêter à un traitement algébrique.



Reyneau met en œuvre une méthode dont l'origine remonte à Pierre Fermat: pour un point C de la courbe projeté en B sur l'axe, il veut déterminer la sous-tangente BS. Dans ce but, il introduit un deuxième point c, également sur la courbe, projeté sur l'axe en b ; les calculs algébriques suffisent alors pour passer de la sécante Cc à la tangente au point C, en s'appuyant sur le principe suivant: « il est évident que la différence Bb entre les ordonnées devenant zéro ou s'anéantissant, les deux points C, c deviennent le seul point C et que la sécante SCc devient la tangente au point C »[22].

20. p. 61.

21. p. 57. Cette définition peut être rapprochée de celle que donne Euclide pour définir le contact d'une droite et d'un cercle : « une droite qui, rencontrant un cercle et prolongée, ne le coupe pas est dite être tangente au cercle », *Les Éléments d'Euclide,* traduit du texte de Heiberg par Bernard Vitrac, Vol. I, Paris, Presses universitaires de France, 1990, p. 413.

22. p. 64.

L'auteur précise que la voie suivie pour traiter cette question n'a pas été choisie par hasard : « entre toutes les méthodes pour trouver la tangente des courbes géométriques », il a en effet retenu « celle qui présente le plus de rapport avec la méthode de la trouver par le calcul différentiel »[23]. La recherche de la tangente à la parabole restera un passage important par lequel les auteurs successifs illustreront leur choix quant à la meilleure manière d'exposer le « calcul de l'infini ». À l'article DIFFÉRENTIEL de l'*Encyclopédie*, D'Alembert utilisera la tangente à la parabole pour montrer comment la notion de limite peut être une alternative à l'usage des infiniment petits. Dans les *Leçons sur le calcul des fonctions,* Lagrange se servira aussi de ce problème pour défendre un point de vue algébrique et attribuer à Fermat un rôle déterminant dans la genèse du calcul différentiel[24].

Reyneau applique ensuite la méthode aux autres coniques. Celles-ci sont introduites par des définitions de géométrie plane exprimées par des proportions entre des lignes. Le choix de ces définitions est bien adapté à une traduction analytique la plus immédiate possible, on passe en effet très rapidement à des équations du type[25] :

$$y^2 = 2px, \qquad y^2 = px + \frac{p}{d}x^2 \quad \text{ou} \quad y^2 = px - \frac{p}{d}x^2,$$

qui sont celles de la parabole, de l'ellipse et de l'hyperbole. Les calculs permettent ensuite la détermination des tangentes et des asymptotes, ainsi que la démonstration des propriétés bifocales. Plusieurs dizaines de pages sont consacrées à ces courbes et Malebranche pourra écrire, dans la dernière édition de son *De la recherche de la vérité,* que le livre de Reyneau est suffisant si l'on veut se contenter des «principales propriétés des coniques et de leurs usages »[26], le *Traité analytique des sections coniques* de L'Hôpital n'intervenant que pour des lecteurs plus exigeants.

Parmi les problèmes réputés relever de *l'algèbre ordinaire,* plusieurs sont relatifs à des mouvements. Dès le début de la première partie, l'algèbre va recevoir le secours de « principes que l'on suppose pris des traités du mouvement »[27]. Dans l'énoncé de ces principes, la vitesse est présentée comme une notion première et elle ne relève d'aucune définition explicite,

23. p. 63.

24. *Œuvres de Lagrange,* éd. par J.-A. Serret et G. Darboux, Paris, Gauthier-Villars, 1867-1892, tome X, p. 296.

25. On retrouve là, sous une forme analytique, les caractérisations données dans *Les coniques d'Apollonius de Perge,* traduction de Paul Ver Eecke, Paris, Blanchard, 1959 (p. 21, 24, 28), mais dans ce traité, les coniques étaient d'abord définies comme sections planes d'une surface conique.

26. Malebranche, o. c., p. 243.

27. p. 21.

elle sert au contraire à caractériser le mouvement uniforme (« celui dont la vitesse demeure la même pendant toute la durée du mouvement »), avant qu'un énoncé vienne préciser que dans ce cas « la vitesse est égale à la longueur divisée par le temps employé à la parcourir »[28]. Cette circularité semble bien attester qu'il n'y a aucune intention de donner, fût-ce sous forme résumée, un exposé raisonné des principes du mouvement, il s'agit simplement de mobiliser les résultats indispensables à l'étude annoncée des *problèmes physico-mathématiques.* Ces rappels concernent les mouvements uniformes et les mouvements uniformément accélérés ou retardés.

À l'aide de ces principes, Reyneau détermine l'équation des trajectoires d'une *bombe* tirée d'un mortier caractérisé par une *force de poudre* donnée. En faisant varier l'inclinaison du mortier, on obtient une famille de paraboles et on trouve aussi l'équation de la demi-ellipse constituée par les sommets de ces paraboles. Reyneau obtient ensuite l'équation de l'enveloppe de cette famille de trajectoires (appelée aujourd'hui parabole de sécurité). Ce problème avait fait l'objet d'une demande précise de L'Hôpital à Jean Bernoulli[29] et L'Hôpital avait traité la question dans *L'Analyse des infiniment petits*[30]. Les calculs de Reyneau se réfèrent à la même figure que ceux de L'Hôpital, les points y sont repérés par les mêmes lettres, mais L'Hôpital utilisait le calcul différentiel, alors que Reyneau résout la question par un procédé purement algébrique en étudiant l'intersection de deux paraboles. Il y a bien une intention délibérée d'obtenir par l'algèbre le maximum de résultats.

*L'*Explication *du calcul différentiel*

L'Hôpital plaçait la définition de la différentielle tout à fait au début de *l'Analyse des infiniment petits* (le terme retenu est celui de *différence*, comme c'est le cas dans les premiers écrits de Leibniz) : « la portion infiniment petite dont une quantité variable augmente ou diminue continuellement, en est appelée la différence »[31]. Au premier coup d'œil, l'ouvrage de Reyneau manifeste une intention didactique plus élaborée. La définition est placée dans un paragraphe de quatre pages intitulé «Explication du calcul différentiel ». Encore ce paragraphe ne s'ouvre-t-il pas avant un long plaidoyer en faveur des principes qui sous-tendent ce calcul. L'argumentation est connue, elle est celle que Leibniz utilisait face

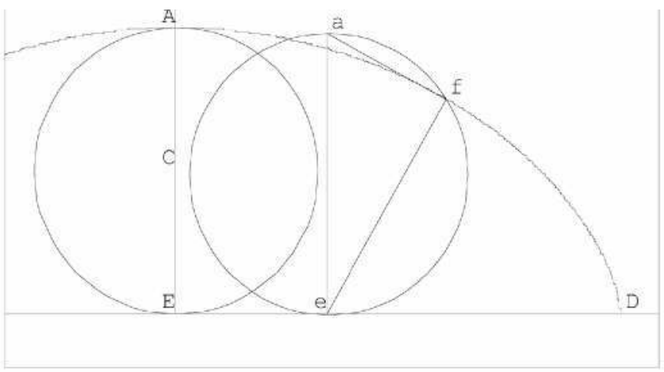
28. p. 22.

29. Lettre du 8 déc 1692, *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli* III, éd. par Pierre Costabel et Jeanne Peiffer, Basel..., Birkhäuser Verlag, 1992, p. 159-160.

30. L'Hôpital, *Analyse des infiniment petits,* p. 132-133.

31. L'Hôpital, o. c., p. 2.

à ses contradicteurs[32] : le nouveau calcul consiste seulement à démontrer directement ce que les anciens obtenaient par une double réduction à l'absurde, la modification porte sur la forme du raisonnement, mais elle n'ôte rien à sa légitimité. La même idée est utilisée par Varignon face aux détracteurs des nouvelles mathématiques à l'Académie des sciences[33]. On la retrouvera dans l'*Encyclopédie* à l'article EXHAUSTION, sous la plume de La Chapelle: «Le calcul différentiel n'est autre chose que la méthode d'exhaustion des anciens, réduite à une analyse simple et commode »[34].



Avant même l'introduction du calcul différentiel et de son formalisme, Reyneau illustre la fécondité des méthodes qui utilisent les infiniment petits. Il s'agit d'abord de la détermination de la tangente à la cycloïde. Celle-ci est la trajectoire du point f lié à un cercle qui roule sans glisser sur la base ED ; à un instant donné, on considère le point de contact e du cercle avec la base et la corde fe :

> On peut concevoir que cette corde fe tournant à cet instant sur le point e, comme sur un centre, décrit par son extrémité f un arc f infiniment petit, qui fait la petite partie f de la cycloïde : or ef étant le rayon de ce petit arc, est perpendiculaire à la tangente de ce petit arc f[35].

32. Par exemple dans la réponse à Nieuwentijt. Voir Marc Parmentier, *La naissance du calcul différentiel, 26 articles des Acta eruditorum*, traduits, présentés et annotés, Paris, Vrin, 1989, p. 327.

33. Lire Jeanne Peiffer, « Pierre Varignon, lecteur de Leibniz et de Newton », *Studia, leibnitiana, supplementa* XXVII, 1990, p. 244-266 (notamment p.256-262).

34. Enc. VI, 256a.

35. p. 146.

Finalement, il suffit de connaître la tangente au cercle de centre f et de rayon fe. Si l'on appelle a le point diamétralement opposé au point e, fa sera la droite cherchée. Dans une lettre à Marin Mersenne datée du 23 août 1636[36], Descartes produisait une démonstration tout à fait semblable mais comportant des étapes plus explicites ; en considérant d'abord, au lieu du cercle, un hexagone régulier dont l'un des sommets serait en e, puis en remarquant que *la même [chose] arrive à un polygone de cent mille millions de côtés*, il passait au cercle et à la cycloïde.

Dans cette phase préliminaire à l'introduction du calcul différentiel, Reyneau traite aussi l'important problème du pendule isochrone. Christian Huygens s'était attaché à fournir des démonstrations conformes aux canons des anciens géomètres ; Reyneau donne des solutions rapides au moyen d'infinitésimaux, la *particule d'une courbe* étant assimilée à une *petite partie* de sa tangente.

Les principes ainsi justifiés, leur fécondité illustrée, l'introduction des différentielles suppose encore un préalable. Il faut par des *demandes*, introduire dans la géométrie les notions de mouvement et de temps : « toutes les lignes droites et courbes, et toutes les figures des surfaces et des solides, peuvent être regardées comme formées ou décrites par le mouvement ». Les courbes sont décrites par le mouvement d'un point qui

> étant détourné à chaque instant de sa direction, ne décrit aucune droite finie, mais une infinité de petites lignes droites chacune infiniment petites et qui font ensemble deux à deux des angles qui ne diffèrent de la ligne droite ou de l'angle de 180° que par un angle infiniment petit[37].

Les surfaces et les solides sont évidemment concernés par un mode de génération semblable. On appellera d'autre part *variables* ou *changeantes* « des quantités (il suffit de considérer les lignes droites et courbes) qui augmentent insensiblement dans la formation des lignes et des figures »[38]. L'auteur aura besoin aussi de préciser des propriétés de divisibilité à l'infini :

> Chaque partie de temps finie, quelque petite qu'elle soit, est divisible à l'infini comme l'étendue, et ces parties de temps infiniment petites, dont il faut une infinité pour faire une partie finie de temps, s'appellent des instants. Il en est de même de la vitesse, des instants, du mouvement, et de toute grandeur.[39]

36. René Descartes, *Œuvres* II, publ. par Charles Adam et Paul Tannery, rééd. Paris, Vrin, 1996, p. 309.

37. p. 151.

38. p. 152.

39. Ibid.

Enfin, la définition de la différence peut intervenir:

> L'augmentation ou la diminution infiniment petite que reçoit une quantité changeante à chaque instant par une vitesse infiniment petite, dans la formation d'une ligne ou d'une figure, est ce qu'on appelle une différence... [40].

Les notations connues, utilisant la lettre *d,* seront ensuite introduites, puis avec elles, les principales règles : différentielles d'un monôme, d'une somme, d'un produit, etc. La tangente à une courbe peut alors être définie dans des termes voisins de ceux que L'Hôpital utilisait en 1696 : une courbe est un polygone « d'une infinité de côtés dont chacun est infiniment petit, et chacun de ces petits côtés fait en même temps une partie de la courbe et une partie de la tangente en ce point là » [41]. La sous-tangente pourra s'exprimer à l'aide des différentielles dx et dy des coordonnées[42].

L'intervention du temps et du mouvement dans la définition de la différentielle a de quoi retenir notre attention. Sur un plan général d'abord, l'utilisation du mouvement pour obtenir la description de lignes, de surfaces etc. est une pratique courante de l'époque et il n'est pas étonnant de la retrouver dans l'*Analyse démontrée.* Mais il faut aussi noter que, au moment où Reyneau rédigeait, le calcul différentiel avait encore à l'Académie des adversaires acharnés [43]. L'auteur a rencontré lui-même des difficultés dans la compréhension du nouveau calcul et il est resté longtemps partagé quant à la solidité de ses fondements [44]. Il y eut un état provisoire de la préface dans lequel les fluxions d'Isaac Newton étaient évoquées, mais où le nom de Leibniz n'était pas mentionné[45] ; c'est l'inverse qui apparaît dans la rédaction définitive. La définition de la différentielle garde peut-être les traces des hésitations de l'auteur et des précautions prises face à des critiques éventuelles. Mais la référence à une *vitesse infiniment petite* dans la définition de la *différence* reste énigmatique, elle ne joue aucun rôle dans le reste du traité. Surtout, cette référence au temps, dès l'exposé des principes du calcul différentiel, soulève des questions de fond sur lesquelles nous reviendrons.

40. *Ibid.*

41. p. 154.

42. p. 171.

43. Une première version du traité semble avoir été prête dès 1704 (Pierre Costabel, o. c., p. 301), mais la querelle ne s'est vraiment apaisée à l'Académie que vers 1706 avec la « reddition » de Rolle *(Ibid.* p. 303).

44. Pierre Costabel, o. c., p. 303.

45. Pierre Costabel, o. c., p. 302.

La transcendance et l'extension du champ des mathématiques

Avant d'entrer dans le détail des méthodes d'intégration, l'auteur indique différents types de problèmes qui pourront désormais être résolus : quadratures, cubatures, rectification, recherche des centres de gravité. Cependant, il faut savoir que les intégrales qui fournissent des réponses à ces problèmes ne peuvent pas toujours être exprimées à l'aide des moyens algébriques habituels, ainsi la rectification des coniques ne sera pas possible, par contre les intégrales auxquelles conduit ce problème, pourront servir de référence pour d'autres calculs :

> Quand on ne peut pas trouver la rectification de courbes plus composées que les sections coniques, on tâche de réduire leur rectification à celle des sections coniques, de manière que la rectification de ces dernières étant supposée, on a la rectification de ces autres plus composées qu'on peut y réduire[46].

Le champ analytique de base doit donc s'élargir sous la pression de la géométrie, mais celle-ci va être bénéficiaire de l'opération à un autre titre: pour engendrer certaines courbes *mécaniques,* on pourra précisément utiliser des coordonnées qui sont « des lignes droites égales à des arcs de courbes »[47] et dont l'expression relève, par exemple, de la rectification des coniques. Les mêmes remarques sont valables pour les calculs relatifs à la quadrature des coniques. De nouvelles courbes deviennent des courbes de référence. Elles valident des expressions analytiques qui, dans un premier temps, n'auraient pas été considérées comme des solutions. Ce processus a été analysé par Henk J. M. Bos dans le cas de l'exponentielle[48].

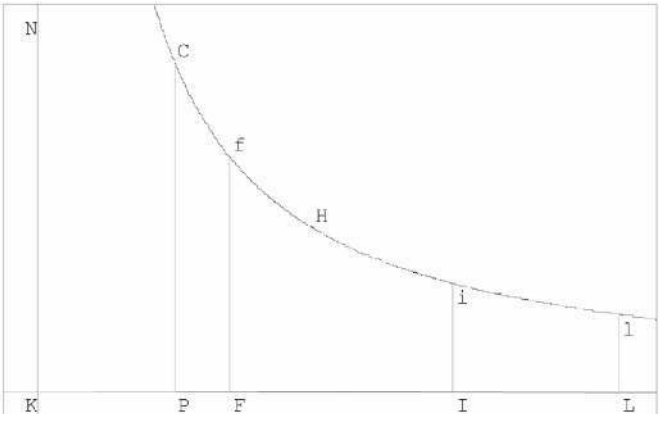
Les logarithmes sont introduits, et traités dans cette logique d'extension, à partir des aires hyperboliques, selon une procédure qui mérite d'être détaillée. La figure de base est constituée d'une hyperbole équilatère dont l'équation, rapportée aux asymptotes KL et KN peut s'écrire $y = \frac{aa}{u}$. Sur cette courbe, on considère les points C et f qui ont pour abscisses respectives KP = b, KF = $b + x$, l'aire A du « quadrilatère hyperbolique » CPFf dépend ainsi de la variable x, elle a pour *élément ou différence dA =* b^ . Elle vérifie l'équation différentielle:

$$\frac{bdA + xdA}{dx} - aa = 0.$$

46. p. 198.

47. p. vii.

48. « Johann Bernoulli on exponential curves, ca. 1695: innovation and habituation in the transition from explicit constructions to implicit functions », *Nieuw Archief voor Wiskunde,* 14, 1996, p. 291-317.



Renvoyant à une méthode de résolution par coefficients indéterminés qui a été pratiquée dans le premier tome, Reyneau donne alors pour A un développement en série[49] :

$$A = aa \times \left(\frac{1}{b}x - \frac{1}{2bb}xx + \frac{1}{3b^3}x^3 - \frac{1}{4b^4}x^4 \text{ etc}\right.$$

Pour a fixé, l'expression de A ne dépend que du rapport b. Il est facile d'en déduire que des abscisses en progression géométrique délimitent des aires en progression arithmétique. Les logarithmes sont obtenus en imaginant une progression dont le « rapport ne diffère du rapport d'égalité que d'une quantité infiniment petite », et l'auteur ne doute pas que l'on puisse « concevoir tous les nombres possibles dans cette progression ». Le développement en série de $\log(1 + x)$ s'obtient à partir de la formule ci-dessus, celui de l'exponentielle s'en déduit alors par le procédé du *retour de suites*[50].

Le même schéma est appliqué à l'étude du sinus : Reyneau trouve d'abord la longueur d'un arc de cercle y[51] connaissant la valeur x de son

49. p. 219 ; par commodité, nous employons ici des parenthèses au lieu du trait horizontal usuel à l'époque.

50. Pour une série donnée $y = ax + bx^2 + cx^3 + \ldots$, le procédé consiste à calculer les coefficients de la série réciproque $x = a y + by^2 + gy^3 + \ldots$ en reportant cette expression de x dans le développement de y et en identifiant les termes semblables dans les deux membres de l'égalité obtenue.

51. Notre fonction $\arcsin x$.

sinus ; puis l'examen d'une figure fait apparaître une différentielle algébrique, dont l'intégrale est développée en série par une méthode de coefficients indéterminés. Le *retour des suites* permet alors d'en déduire le développement de $\sin y$. Ainsi les transcendantes élémentaires sont traitées de façon homogène [52]. Dans l'*Introductio in analysin infinitorum* publiée par Euler en 1748, les développements en série de $\log(1 + x)$, e^x, $\sin x$, $\cos x$ joueront un rôle important, ils seront aussi obtenus à l'aide de procédures homogènes, mais celles-ci, basées sur la formule du binôme, ne devront rien à la géométrie et elles éviteront aussi les méthodes de coefficients indéterminés. D'autre part, Euler fera apparaître les propriétés différentielles des fonctions trigonométriques dans les *Institutiones calculi differentialis,* qui seront publiées en 1755 [53]. Dans l'*Analyse démontrée,* les « quantités trigonométriques » [54] correspondant à $\sin x$ ou $\cos x$ ne sont mentionnées ni dans les règles du calcul différentiel, ni dans celles du calcul intégral. Plus tard, ces quantités interviendront notamment dans la résolution des équations différentielles linéaires. Dans le *Traité de dynamique* (1743), D'Alembert utilise encore une construction géométrique pour résoudre de telles équations [55] ; mais assez rapidement, les exponentielles complexes assureront le lien entre le calcul intégral et les rapports trigonométriques [56].

52. Ces questions sont abordées de façon tout à fait semblable dans le *De analysi per œquationes infinitas* d'Isaac Newton *(The Mathematical Papers of Isaac Newton,* ed. by Derek T. Whiteside, Cambridge, Cambridge University Press, 1967, 1981, tome 2, p. 234-243), mais le retour des suites est assuré par un algorithme dit d'« extraction de racines » et non par le recours à des coefficients indéterminés. En 1692, Leibniz établissait le développement du sinus et de l'exponentielle au moyen de coefficients indéterminés, mais les calculs étaient plus directs, par exemple le sinus était recherché sous la forme $x = au + bu^3 + cu^5 + ...$, à partir de l'équation $\hat{a} + x = 0$ (Marc Parmentier, *op. cit.*, p. 241). La méthode a été pratiquée par L'Hôpital *(Leibnizens mathematische Schriften,* éd. par C. I Gerhardt, 1850-1863, rééd. Olms, 1962, Band I, p. 231).

53. *Euleri Opera omnia (I),* 10. Sur l'insertion des fonctions trigonométriques dans les traités d'analyse, lire Victor J. Katz, «The Calculus of the Trigonometric Functions », *Historia Mathematica,* 14, 1987, p. 311-324.

54. Avec *l'Introductio,* la terminologie des fonctions est utilisée pour la première fois dans un traité.

55. *Traité de dynamique,* Paris, David l'aîné, 1743, p. 99-102.

56. Voir D'Alembert, «Méthodes générales pour déterminer les orbites et les mouvements de toutes les planètes, en ayant égard à leur action mutuelle » (mémoire lu en 1747 devant l'Académie royale des sciences), *Œuvres complètes de D'Alembert,* I/6, publié sous la direction de Michelle Chapront-Touzé, p. 39-46, voir aussi: D'Alembert, « Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration », *Histoire de l'Académie de Berlin pour l'année 1747,* 1748, p. 215-249.

Les règles du calcul intégral

Dans la troisième partie, les règles du calcul intégral apparaissent d’abord sous la forme de trois *propositions fondamentales.* La première donne l’intégrale de $ax^n dx$, la seconde est relative aux différentielles qui peuvent être mises sous la forme $xdy + ydx$, enfin la troisième traite le cas des différentielles nulles. La première proposition concerne d’abord le cas d’un exposant n entier positif, puis la règle est étendue à des exposants entiers négatifs et finalement à des rationnels quelconques.

Ces règles sont appliquées dans de longs calculs relatifs aux expressions $gx^m dx \times (a + bx^n)^p$, nommées *différentielles binômes,* ces calculs seront ensuite généralisés à des *différentielles trinômes* $gx^m dx \times (a + bx^n + cx^{2n})^p$, *quadrinômes* etc. L’intégration de ces expressions peut être obtenue à l’aide de la formule du binôme de Newton, cette méthode apparaît dans le cours de Jean Bernoulli[57] et elle est aussi utilisée par Reyneau[58]. Si p est entier, le développement ne comporte évidemment qu’un nombre fini de termes ; si $r = \frac{m+1}{n}$ est entier, le changement de variable $z = a + bx^n$ permet de se ramener aussi à cette situation. Reyneau mentionne cette propriété. Mais, dans le cas général, des transformations du même type lui permettent de trouver une relation entre $\int x^m dx \times (a + bx^n)^p$ et $\int x^{m-n} dx \times (a + bx^n)^p$. Le procédé, employé de façon récursive, permet d’écrire des développements en séries ou des formules présentant un nombre fini de termes avec un « reste » dépendant d’une intégrale[59]. À cette occasion, Reyneau considère les intégrales :

$$I_m = \int rx^m\, dx \times (r^2 - x^2)^{-1/2},$$

et il croit pouvoir affirmer que, pour m = -2, -4, -6..., elles dépendent de la quadrature du cercle, plus précisément que leur expression fait nécessairement intervenir l’intégrale $I_0 = \int r\, dx \times (r^2 - x^2)^{-1/2}$. Un examen attentif des calculs montre qu’en réalité cette intégrale I_0 est affectée d’un coefficient nul et que les intégrales I_m peuvent être exprimées algébriquement. C’est cette erreur de Reyneau qui fera l’objet du premier mémoire envoyé à l’Académie par le jeune D’Alembert. En 1754, Bougainville répercutera la mise au point dans son *Traité du calcul intégral,* lequel, dans son ensemble, doit beaucoup à D’Alembert[60]. Dans

57. *Johannis Bernoulli Opera omnia,* Lausannnae et Genevae, 1742, t. III, réimpr. Georg Olms, 1968.

58. p. 247-248.

59. Sur ce calcul et sur l’ « erreur de Reyneau », lire Christian Gilain, o. c., p. 208-210. On ne trouve pas ce calcul dans le cours de Bernoulli, il ne figure pas non plus dans les travaux personnels que Malebranche a réalisés d’après ce cours (publiés par Costabel, o. c., p. 185-233).

60. Bougainville exprime tout spécialement sa reconnaissance à D’Alembert à la fin de sa préface (p. xviii).

l'Analyse démontrée, ces calculs interviennent au sein d'un ensemble consacré aux différentielles binômes, trinômes etc. Cette partie du traité représente un volume de quatre-vingts pages environ, elle est assez confuse et les méthodes sont parfois redondantes. L'objectif essentiel est de ramener à quelques transcendantes élémentaires l'intégration de certaines classes de différentielles. Après cette partie, sont données les règles du calcul intégral relatives aux logarithmes et aux exponentielles.

Deux propositions fondamentales accompagnent l'introduction des logarithmes, que nous noterons ici log.x :

$$d\,\log.x = \grave{z} \qquad \text{et} \qquad \text{S}.\,\grave{z} = \log.x$$

Les propriétés des logarithmes induisent celles des exponentielles ; Reyneau obtient notamment la formule:

$$dx^y = x^y \log.x\ dy + x^{y-1} y dx.$$

Plusieurs exemples sont traités par des méthodes de coefficients indéterminés. Ainsi l'intégrale de $x\log.x$ x dx est cherchée sous la forme Ax^2log.x + B x^2. Le procédé est encore utilisé pour l'intégrale de x^m (log.x)^n x dx. Le résultat obtenu permet d'exprimer l'intégrale de x^x au moyen d'une série, en utilisant le développement:

$$x^x = 1 + x\log.x + {}^{2}\,(x\log.x)^2 + {}^{1}_{2}{}_{3}\,(x\log.x)^3 + \ldots$$

La formule d'intégration par parties $\int y dx = xy - \int x dy$ est bien adaptée à l'intégration des différentielles x^m (log.x)^n x dx, elle sera présente à ce titre dans le traité de Bougainville[61], mais elle ne figure pas dans *l'Analyse démontrée.* Dans les *Opera omnia* de Jean Bernoulli imprimé en 1742, un texte non daté établit le développement en série de $\int x^x\, dx$, dans le but de justifier un résultat que l'auteur a donné en 1697 sans démonstration ; dans ce texte, Bernoulli utilise l'intégration par parties.

Pour l'intégration des fractions rationnelles, Reyneau fait explicitement référence au mémoire dans lequel Jean Bernoulli a traité la question[62]. Une division euclidienne permet de se ramener systématiquement à une fraction r dont le numérateur a un degré inférieur à celui du dénominateur. Pour une telle fraction, la décomposition est posée a priori

$$\frac{r}{q}\, dx = \frac{adx}{f+x} + \frac{bdx}{g+x} + \frac{cdx}{h+x} + \ldots$$

Les coefficients a, b, c... sont calculés par identification des deux membres de cette égalité. Comme dans le mémoire de Bernoulli, le cas où le dénominateur q présente des racines multiples n'est pas évoqué. Telle

61. *Traité du calcul intégral pour servir de suite à l'Analyse des infiniment petits de M. le marquis de l'Hôpital,* Paris, chez Guérin et Delatour, 1754, tome 1, p. 286.

62. *Mémoires de l'Académie royale des sciences,* 1702, Paris, 1704, p. 289-297. Christian Gilain, o. c., a présenté les travaux précoces de D'Alembert sur ce sujet.

quelle, la méthode permet l'intégration de toute une famille de différentielles. Dans une présentation du mémoire de Bernoulli, Varignon a salué un résultat « d'autant plus considérable que nous n'avons rien de si universel dans le calcul intégral »[63].

La résolution des équations différentielles

Les trois *propositions fondamentales* du calcul intégral dont nous avons déjà rendu compte, concernaient l'intégration des différentielles à une variable de type $f(x)\,dx$. Avant même l'introduction des logarithmes et des exponentielles, elles sont exploitées pour indiquer des méthodes d'intégration des équations différentielles. Ces méthodes consistent essentiellement dans l'utilisation d'un facteur intégrant et dans la séparation des variables. Éventuellement le recours à l'une ou l'autre de ces méthodes est préparé par un changement de variable *ad hoc*. Par exemple, pour l'équation :

$$2axdy + xxdy = aydx + xydx,$$

Reyneau introduit la variable z telle que :

$$zz = 2ax + xx,$$

l'équation est alors transformée en :

$$zdy - ydz = 0;$$

elle est résolue au moyen du facteur intégrant $\frac{1}{zz}$,

$$\frac{zdy - ydz}{zz} = 0.$$

Le premier membre s'identifie en effet à $d\left(\frac{y}{z}\right)$, et la 3e *proposition fondamentale* permet d'en déduire que $\frac{z}{y}$ est une constante que Reyneau note b pour des raisons d'homogénéité, d'où la solution:

$$\frac{z}{y} = \frac{a}{b}, \qquad \text{ou encore} \qquad by = a\ \text{x ^2u.x+xx}$$

Étant donné une expression $A(x, y)dx + B(x, y)dy$, Reyneau ne fournit pas de critère pour savoir *a priori* si elle est la différentielle d'une fonction $z = F(x, y)$. La condition simplement de constater que la variable $z = y - x$ permet de se ramener à l'équation à variables séparées :

$$dx = \frac{zdz}{a-z}.$$

Cependant la méthode ne couvre qu'un nombre limité de cas ; l'auteur précise :

> [...] on n'a pas de règle générale pour trouver comment il faut supposer les changeantes nouvelles qu'il faut substituer à la place des changeantes de la différentielle, afin de séparer certainement les changeantes65.

Quand aucun des deux procédés – séparation des variables, facteur intégrant – n'est utilisable, les séries restent un recours possible : « on peut toujours avoir l'intégrale par approximation »[66]. Reyneau renvoie sur ce point aux exemples traités à la fin du premier tome et qui reposent sur l'expression écrite *a priori* de l'une des variables, y par exemple, sous forme de série entière en x.

Les équations d'ordre supérieur à un font l'objet d'une affirmation de principe : comme la différentielle d'ordre n est l'intégrale de la différentielle d'ordre $n + 1$, la résolution d'une équation d'ordre $n + 1$ se ramène à la résolution successive de n équations d'ordre un, mais aucun exemple n'est donné.

Les méthodes sont exploitées dans la dernière section du traité pour la résolution de problèmes géométriques et physico-mathématiques. Les questions de géométrie sont regroupées dans une rubrique *méthode inverse des tangentes,* elles sont relatives à des équations du premier ordre ; celles-ci sont introduites à l'occasion de problèmes géométriques, le plus souvent au moyen d'une condition imposée à la sous-tangente $y\ \hat{a}$.

Quatorze cas sont successivement traités, certains ne mettent en jeu que des expressions algébriques, d'autres utilisent des exponentielles et des logarithmes. Ils sont précédés d'une description générale de la démarche: choix des inconnues, mise en équation, application des méthodes exactes de résolution dont nous venons de parler; en cas d'échec, l'utilisation des séries n'est pas le seul recours, il faut aussi noter le rôle attribué à la *construction des équations.* Un seul exemple sera donné: celui de la logarithmique. Celle-ci est d'abord caractérisée par une sous-tangente constante ou, de façon équivalente, par son équation différentielle $dx = a\ \ y$. Reyneau décrit alors un processus qui s'appuie sur le tracé préalable d'une hyperbole, les aires hyperboliques sont remplacées par des aires rectangulaires équivalentes et les ordonnées de la logarithmique sont des

65. p. 279.

66. Ibid.

lignes proportionnelles à ces aires. La description ne donne pas un procédé effectif, fût-il approximatif ; l'auteur ne fait pas non plus référence aux dispositifs, tels l' *intégraphe*, imaginés par Leibniz pour faire face à ce type de problème[67]. Cet épisode doit sans doute être interprété comme une contribution à la validation d'une nouvelle courbe standard, selon un processus que nous avons déjà signalé. Dans les écrits mathématiques de la première moitié du XVIIIe siècle, la présence de ces constructions géométriques va s'estomper. Mais on en trouve encore des traces dans la première édition du *Traité de dynamique* de D'Alembert à l'occasion de la résolution d'un système de deux équations linéaires du second ordre[68]. Dans un contexte différent, ce point de vue géométrique continuera à s'imposer dans les discussions sur les solutions des équations aux dérivées partielles.

Parmi les *problèmes inverses des tangentes,* le dernier exemple traité est le problème de De Beaune: l'équation différentielle que nous avons déjà rencontrée est transformée cette fois-ci au moyen du changement de variable $z = \frac{b}{a}(x - y + a)$ et la résolution est menée à son terme par le recours aux logarithmes :

$$y = a + a\log \frac{b}{a}(x - y + a)].$$

Le problème avait été posé à Roberval en 1638. Descartes avait fourni une solution, l'une des coordonnées de la courbe était définie par un procédé d'approximation dont l'itération conduit effectivement au résultat ci-dessus. Mais il jugeait que les points étaient définis finalement par des coordonnées animées de *mouvements incommensurables* et qui ne pouvaient *être réglés exactement l'un par l'autre,* et il rendait manifestes les bornes qui restreignaient son projet mathématique en ajoutant: « cette ligne est du nombre de celles que j'ai rejetées de ma Géométrie comme n'étant que mécanique »[69].

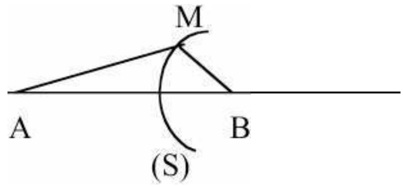
Il arrive aussi que l'analyse infinitésimale fournisse des raccourcis spectaculaires. C'est le cas pour le problème du stigmatisme ponctuel pour un dioptre. Les ovales de Descartes en constituent la solution ; la démonstration à la manière de Descartes utilise les intersections d'un cercle et d'une cubique, elle met en jeu des coefficients indéterminés, les calculs complets sont longs.

Reyneau reprend au contraire une méthode dont l'essence se trouve dans les *Principia* de Newton. Les deux milieux optiques ont pour indices n_1 et n_2. Ils sont séparés par une surface de révolution d'axe AB et dont la trace dans le plan est la courbe (S). La condition de stigmatisme veut que tous les rayons AM issus de A se réfractent selon les rayons MB passant par

67. Marc Parmentier, o. c., p. 247-267.

68. D'Alembert, *Traité de dynamique* (1743), p. 99-102.

69. René Descartes, *Œuvres* II, p. 517.



le point B. Notons r_1 et r_2 les distances AM et MB. Les lois de la réfraction et le recours aux infiniment petits permettent de traduire la condition de stigmatisme par la simple équation:

$$n_1\, dr_1 + n_2\, dr_2 = 0.$$

La courbe (S) est donc constituée des points M qui vérifient

$$n_1\, r_1 + n_2\, r_2 = constante.$$

Cette condition caractérise les ovales de Descartes.

Cependant tous les problèmes de calcul intégral ne se présentent pas aussi bien. Et surtout, en l'absence de procédures systématiques pour résoudre les équations différentielles, on est contraint à des études au cas par cas. Les utilisateurs n'ont pas manqué de solliciter Leibniz. Des échanges épistolaires avec Malebranche et L'Hôpital tournent autour de ces questions. Leibniz regrette de ne pouvoir donner que des *adresses particulières* et de ne pas disposer d'une méthode générale[70]. En 1706, dans une lettre envoyée au bibliothécaire de l'Oratoire[71], mais dont le contenu est partiellement destiné à Reyneau, il établit un parallèle assez circonstancié entre le calcul algébrique d'une part, le calcul différentiel et intégral de l'autre. Comme on ne sait pas résoudre par radicaux les équations de degré supérieur à quatre, il invite à ne pas s'étonner de la lenteur des progrès réalisés en matière de calcul intégral[72]. Leibniz pense qu'il pourrait, s'il en avait le loisir, donner une méthode pour déterminer les solutions algébriques des équations différentielles. Mais, dans cette lettre, son attention ne se tourne pas vers des classes d'équations différentielles qui, avec quelque chance de succès, pourraient faire l'objet d'études plus systématiques. Avec le recul qui est le nôtre, on peut penser aux équations différentielles linéaires. Leibniz avait montré dès 1694 que la résolution de

70. *Leibnizens mathematische Schriften* I, p. 222.

71. Pierre Costabel, « Deux inédits de la correspondance indirecte Leibniz-Reyneau », *Revue d'histoire des sciences,* 1-2, 1947-1948, p. 311-332, puis: «Rectification et complément à la publication d'un inédit de Leibniz », *Ibid.*, 19, 1966, p. 167-169.

72. Cette analogie est présente dans d'autres écrits de Leibniz, voir Marc Parmentier, o. c., p. 414.

l'équation linéaire du premier ordre pouvait être réduite aux quadratures[73]. D'autre part, en 1697, Jean Bernoulli avait mis en œuvre une technique de variation de la constante[74] qui, dans la deuxième partie du XVIII^{e} siècle, allait s'avérer féconde. Enfin, le thème général des équations linéaires allait jouer un rôle essentiel en mécanique et en mécanique céleste ; dans l'œuvre de D'Alembert, comme nous l'avons déjà mentionné, il apparaîtra dès 1743, avec le *Traité de dynamique.*

Le traité de Reyneau et l'analyse du XVII^{e} siècle

La seconde édition de *l'Analyse démontrée* contient des corrections de détail, mais elle ne comporte pas les mises à jour que les progrès du calcul auraient permises. Au milieu du XVIII^{e} siècle, D'Alembert peut considérer que l'*Analyse démontrée* est « un livre auquel ceux qui veulent étudier cette nouvelle science ne peuvent se dispenser d'avoir recours » [75], mais il note aussitôt que son contenu est déséquilibré : il y a bien des choses inutiles en matière d'équations algébriques, alors que le calcul intégral demanderait à être plus développé, et il appelle de ses vœux la rédaction d'un ouvrage nouveau. Publié en 1754, le *Traité du calcul intégral* de Bougainville répondra à cette attente et rendra compte de façon détaillée des méthodes de calcul intégral connues à cette date.

D'autre part, la définition des différentielles et le recours aux infiniment petits resteront l'objet de réflexions et de critiques. Au moment où Reyneau publiait *l'Analyse démontrée,* Varignon avait déjà présenté à l'Académie des mémoires dans lesquels il précisait un concept de vitesse instantanée lié au quotient différentiel $\frac{de}{dt}$. Une évolution était amorcée vers une mécanique analytique dont les principaux concepts devaient dépendre du calcul différentiel[76], comme le montrent les travaux de Michel Blay[77]. En faisant de la vitesse une sorte de notion première présente dès les

73. Morris Kline, o. c., p. 474.

74. Voir Jean Bernoulli, « Notatiunculæ in Responsionem à Nob. R.T... », *Opera omnia,* 1742, t. I, p. 175.

75. Article ANALYSE, *Enc.* I, 401a.

76. Les premiers mémoires de Varignon qui vont dans ce sens ont été lus en 1698. Voir à ce sujet Michel Blay, *La naissance de la mécanique analytique,* Paris, Presses Universitaires de France, 1992. Selon une lettre qu'il adresse à Jean Bernoulli en 1709, Varignon semble avoir été assez directement concerné par la rédaction du premier volume de l'*Analyse démontrée,* qu'il dit voir relu *feuille à feuille* (et la seconde édition de l'*Analyse démontrée* est augmentée des remarques de Varignon sur ce premier volume). En ce qui concerne le second volume, il écrit, que le *livre lui paraît fort bon* mais qu'il n'a pas encore eu le temps de le lire en détail (Johann Bernoulli, *Der Briefwechsel* III, p. 273).

77. Notamment *La naissance de la mécanique analytique* déjà citée.

prémisses de ce calcul, Reyneau tournait le dos à cette démarche. Dans son *Traité de dynamique*, D'Alembert établira, sur ce type de problème, une distinction très claire : certes le mouvement peut être utilisé dans les recherches de géométrie pure, mais celle-ci « ne considère dans le mouvement que l'espace parcouru, au lieu que dans la Mécanique on a égard de plus au temps que le mobile emploie à parcourir cet espace » [78]. Dans l'article CALCUL DIFFÉRENTIEL de l'*Encyclopédie*, il s'inspirera des concepts newtoniens de *premières et dernières raisons*, mais le concept de *limite* qu'il adoptera pour essayer d'éviter le recours aux infiniment petits ne fera aucune référence explicite au temps.

Quant à la prise en compte de l'infini dans le maniement des quantités transcendantes, Reyneau évoquait deux modes concurrents :

> [...] comme l'on est plus content de se représenter une grandeur incommensurable [...], par une ligne finie, ou par une figure finie, que par une approximation telle que l'on voudra ; les Géomètres de notre temps ont aussi voulu, pour contenter tout le monde, représenter une intégrale que les méthodes ne donnent que par approximation, la représenter, dis-je, par un arc de courbe fini et regardé comme connu, ou par l'aire d'une courbe supposée comme connue. [79]

Nous sommes ainsi invités à revenir, dans l'*Analyse démontrée*, sur le rôle de la géométrie et sur la place des séries.

Nous avons déjà souligné le rôle des constructions géométriques. En conformité à des principes introduits par Descartes, celles-ci concernent d'abord les opérations algébriques élémentaires [80]. Les racines des équations algébriques peuvent aussi être *construites* en recherchant les points d'intersection de deux courbes et un examen attentif permet de vérifier dans tous les cas «l'égale convenance de l'Analyse et de la Géométrie » [81]. Le cas échéant, les équations différentielles elle-mêmes peuvent faire l'objet de constructions. Les questions d'homogénéité sont l'objet d'une grande attention, ainsi l'équation des paraboles généralisées est-elle écrite $y^{p} = 1^{p-q}.x^{q}$ pour garder la trace du segment qui a été choisi pour unité ; les constantes d'intégration sont soigneusement écrites à l'aide de lettres *a, b, c*... qui représentent autant de *lignes*, destinées à rappeler la dimension des objets géométriques sous-jacents. Les logarithmes sont

78. D'Alembert, *Traité de dynamique*, Paris, David l'aîné, 1743, p. vii.

79. p. 281.

80. En particulier, le produit $a \times b$ est défini par Descartes comme la quatrième proportionnelle des *lignes a, b* et de la *ligne* choisie pour unité 1, il est construit au moyen du « théorème de Thalès » *(La géométrie*, p. 2).

81. p. xi.

introduits en liaison étroite avec la quadrature de l'hyperbole et, d'une façon générale, les quantités transcendantes sont classées d'après leur signification géométrique. Les anciens géomètres travaillaient par la seule « contemplation des figures et obtenaient des résultats au prix d'une application pénible et fatigante » [82]. Chez Reyneau une voie plus facile est ouverte aux lecteurs grâce à l'*Analyse* de Descartes, elle-même perfectionnée par le calcul de Leibniz, mais la nature des objets étudiés est restée inchangée.

Dans ce calcul, les séries apparaissent certes comme un moyen subsidiaire et on y a recours lorsque toute autre méthode s'est avérée infructueuse. Cependant elles s'insèrent dans la théorie, ainsi le développement en série des logarithmes sert à démontrer la propriété fondamentale $\log(ab) = \log a + \log b$. Les transcendantes élémentaires sont développées en série entière selon des procédures systématiques. En imaginant des procédés indépendants de la géométrie, Euler pourra fonder son *Introductio in analysin infinitorum* sur le concept de fonction. Ce point de vue formel sera encore accentué dans l'œuvre de Lagrange. Il reste tout à fait compatible avec la méthode des coefficients indéterminés que pratique Reyneau pour la résolution des équations différentielles ou avec les procédés qu'il déploie pour intégrer les différentielles binômes.

Concernant les séries, D'Alembert ne souscrira pas à toutes les pratiques d'Euler et de Lagrange [83], et d'autre part, ses conceptions garderont le plus souvent un fondement géométrique. Ainsi sa notion de limite reçoit sa légitimation dans des contextes tels que la détermination du périmètre du cercle ou la recherche de la tangente à la parabole à partir d'une sécante [84]. Et, *a contrario,* nous avons vu, concernant cette dernière question, comment la méthode de Fermat manifestait une convergence entre le point de vue algébrique de Lagrange et la volonté de Reyneau de donner à l'algèbre toute l'extension dont elle est susceptible.

82. Tome 1, p. ii.

83. Par exemple, pour une série géométrique du type $1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ d'Alembert réserve le mot somme à l'expression des sommes partielles (article LIMITE, *Enc.*, IX, 512b), Euler au contraire désigne $1 - x$ comme la somme de cette série indépendamment de la valeur de x (« *De Seriebus divergentibus* », *Nov. Comm. Acad. Sci. Petro.* 5, 1760 = *Opera (1),* 14, p. 585-594). L'opposition aux méthodes de Lagrange sur les séries se manifeste à l'occasion de la controverse des cordes vibrantes. Voir d'Alembert, *Opuscules mathématiques,* Paris, David, Paris, 1761, p. 65-73.

84. Lire sur ces questions Alain Michel, « Calcul et métaphysique du calcul: la question des principes de l'Analyse au XVII^e siècle », *Analyse et dynamique, études sur l'œuvre de d'Alembert* sous la direction d'Alain Michel et Michel Paty, Presses de l'Université Laval, Québec, 2002, p. 139-183.

85. Nicolas Malebranche, *op. cit.*, p. 293-294.

Conclusion

Le traité de Reyneau donne une image significative du travail d'une génération de cartésiens convertis au calcul de Leibniz et dont Malebranche a pu se faire le porte-parole enthousiaste : « l'invention du calcul différentiel a donné à l'analyse une étendue sans bornes pour ainsi dire »[85]. Autant qu'une discipline avec ses instruments propres, l'analyse pour Reyneau, est une méthode à laquelle il revient de prendre en charge directement les situations géométriques et physiques. Une partie non négligeable du traité est consacrée à la géométrie algébrique, elle prend parfois l'aspect d'une propédeutique au calcul différentiel. Ce calcul opère sur des objets géométriques, tandis que ses concepts ont encore avec la mécanique une relation indécise. La multiplicité des exemples traités rend manifestes une extension du champ des mathématiques et une efficacité accrue de celles-ci. Les méthodes du calcul intégral sont encore peu développées, elles restent assez étroitement liées à une lecture inverse des formules de différentiation et le recours fréquent aux coefficients indéterminés leur donne une portée limitée. Mais, avec la place réservée aux transcendantes et aux développements en série, le traité de Reyneau est porteur de problématiques fécondes.

Jean-Pierre LUBET
Villeneuve d'Ascq