



Mathématiques et sciences humaines

Mathematics and social sciences

190 | Été 2010

Mathématiques discrètes : théories et usages.
Numéro en hommage à Bruno Leclerc

Liminaire au n° spécial : Mathématiques discrètes : théories et usages. Numéro en hommage à Bruno Leclerc

*Foreword to the special issue: Discrete mathematics: Theories and uses. Tribute
issue to Bruno Leclerc*

Olivier Hudry et Bernard Monjardet



Édition électronique

URL : <http://journals.openedition.org/msh/11715>

DOI : 10.4000/msh.11715

ISSN : 1950-6821

Éditeur

Centre d'analyse et de mathématique sociales de l'EHESS

Édition imprimée

Date de publication : 10 mars 2010

Pagination : 5-9

ISSN : 0987-6936

Référence électronique

Olivier Hudry et Bernard Monjardet, « Liminaire au n° spécial : Mathématiques discrètes : théories et usages. Numéro en hommage à Bruno Leclerc », *Mathématiques et sciences humaines* [En ligne], 190 | Été 2010, mis en ligne le 16 octobre 2010, consulté le 06 mai 2019. URL : <http://journals.openedition.org/msh/11715> ; DOI : 10.4000/msh.11715

MATHÉMATIQUES DISCRÈTES ET THÉORIES ET USAGES.
HOMMAGE À BRUNO LECLERC

LIMINAIRE

Olivier HUDRY¹, Bernard MONJARDET²



En mars 2009, une journée *Mathématiques discrètes théories et usages* s'est tenue au Centre d'Analyse et de Mathématique Sociale et à Télécom ParisTech. Son titre reflétait le fait que, comme dans bien d'autres domaines des mathématiques, il n'y a pas deux mathématiques, la pure et l'appliquée, mais de nombreuses interactions entre les développements internes des mathématiques et ceux motivés par des problématiques externes. Pour prendre un seul exemple qui sera évoqué dans le dernier article de ce numéro, la théorie des *algèbres et graphes à médianes*, développée dans les années 1960 par des mathématiciens «*puristes*», a connu dans les années 1980 de nombreux prolongements suscités par les problèmes d'agrégation des préférences en théorie du choix social ou de consensus de classifications en analyse des données.

Cette journée était une *Journée en hommage à Bruno Leclerc*, à l'occasion de sa retraite (qui, comme c'est souvent et heureusement le cas pour les universitaires, ne signifiait pas la fin de son activité scientifique). Les articles de ce numéro sont issus des contributions des orateurs de cette journée. Ils portent sur des thèmes où les mathématiques discrètes sont soit développées pour elles-mêmes (comme l'étude des

¹ Télécom ParisTech, 46 rue Barrault 75634 Paris Cedex 13, hudry@enst.fr.

² Centre d'Économie de la Sorbonne, Université Paris I Panthéon Sorbonne, Maison des Sciences Économiques, 106-112 boulevard de l'Hôpital 75647 Paris Cedex 13, et CAMS, EHESS, Bernard.Monjardet@univ-paris1.fr

treillis de Coxeter) ou servent dans des modélisations ou des méthodes utiles dans diverses disciplines (comme la théorie du choix social ou l'analyse des données). Tous ces articles, que nous allons maintenant présenter sommairement, ont des liens plus ou moins étroits avec certains des travaux de Bruno. Nous reviendrons à la fin de ce liminaire sur l'ensemble de ses travaux.

On trouve en premier un texte «Pédagogique» de Marc Barbut qui décrit le procédé de Cantor aboutissant à une distribution de probabilité très singulière sur le segment $[0, 1]$ (fonction de répartition continue, presque partout dérivable de dérivée nulle, mais non dérivable sur son support). Il rappelle à cette occasion que le premier ouvrage de Bruno, *Distributions statistiques et lois de probabilité* [1972], présentait de nombreuses lois de probabilité, certaines peu usuelles, et leurs applications en statistique.

Les deux textes suivants portent sur la mathématique des ordres (finis). Dans le premier, Nathalie Caspard présente un ensemble de résultats autour des deux théorèmes fondamentaux de Dilworth (sur la partition en chaînes d'un ensemble ordonné) et de Sperner (sur le nombre maximum d'éléments incomparables du treillis booléen). On y trouve, en particulier, un théorème de Bruno sur les ensembles ordonnés q -Sperner.

Les treillis de Coxeter, i.e. les treillis définis sur les groupes de Coxeter par l'«ordre faible de Bruhat», sont décrits en détail par Nathalie Caspard et Claude Le Conte de Poly-Barbut dans le second papier. On sait que ces treillis contiennent le treillis «permutoèdre» (défini par Guilbaud et Rosenstiehl en 1963), i.e. le treillis défini sur l'ensemble des permutations (ou ordres totaux) d'un ensemble fini. On trouvera dans ce texte, entre autres, la preuve du contre-exemple apporté par Bruno à une conjecture de Björner sur les treillis de Coxeter et un puzzle de construction d'un de ces treillis.

On a ensuite trois articles relevant de l'analyse des données et en particulier des outils et méthodes de la classification, domaine dans lequel Bruno a apporté de nombreuses et substantielles contributions.

Dans le premier, Patrice Bertrand fait un panorama des nombreux prolongements de la fameuse bijection de Benzécri-Johnson entre les classifications hiérarchiques (indicées) et les ultramétriques. Outre la bijection la plus générale entre certains systèmes (faiblement indicés) de classes (recouvrantes ou non) et les dissimilarités arbitraires, il présente des cas classiques comme ceux des hiérarchies faibles (fermées et indicées) associées aux dissimilarités vérifiant la condition des quatre points ou des classifications pyramidales (indicées) associées aux dissimilarités fortement robinsoniennes, ainsi que des cas moins classiques.

Le vaste panorama suivant, dû à Bernard Fichet et Morgan Seston, porte sur l'approximation de données (par exemple une dissimilarité) par des structures classificatoires (par exemple une ultramétrique). Ce problème est présenté dans le cadre très général de l'approximation d'éléments d'un espace vectoriel réel muni de la norme du supremum par des éléments d'un cône de cet espace vectoriel. On notera que l'on s'éloigne ici des mathématiques discrètes, mais que la structure latticielle (pour l'ordre usuel) de l'espace vectoriel joue un rôle important notamment pour définir des approximations sous-dominantes ou sous-dominées. Les résultats obtenus montrent qu'on peut souvent obtenir aisément de telles approximations pour des structures classiques de l'analyse des données.

Alain Guénoche, Henri Garreta et Laurent Tichit, auteurs du troisième texte, y considèrent un problème – rencontré en phylogénie – de compatibilité entre des arbres ayant le même ensemble de feuilles, des noeuds de degré au moins 3 et dont les arêtes peuvent être valuées. Il s'agit de trouver le plus grand sous-arbre (non valué) commun aux p arbres donnés. Le problème est NP-difficile (dès que $p > 2$) et l'article présente un

algorithme simple fournissant une approximation d'un tel arbre commun de taille maximum.

Les deux derniers articles portent sur les théories du consensus, théories contenant notamment les problèmes posés par l'agrégation de préférences individuelles en une préférence collective.

Dans le premier, Florent Domenach y traite du consensus de familles de Moore, famille de parties admettant comme cas particulier aussi bien des hiérarchies classificatoires que des topologies. Il y étudie la pertinence dans certains cas d'une méthode particulière issue de travaux menés avec Bruno, et qui généralise la célèbre méthode d'Adams pour le consensus d'arbres hiérarchiques.

Dans le dernier texte de ce numéro, nous passons en revue sept directions de recherche en théorie du consensus, en privilégiant les travaux produits au CAMS et en particulier ceux – là aussi substantiels – de Bruno.

Mais, en terminant, nous voudrions surtout insister sur le fait que beaucoup des contributions importantes de Bruno, peut-être celles qu'il préfère, n'apparaissent pas du tout dans ces textes, comme on peut s'en rendre compte en regardant ci-dessous le sommaire de son document pour l'HDR et la liste de ses principales publications. Il en est ainsi de ses travaux sur les matroïdes et sur les applications à seuils, cette dernière notion, qui généralise la notion d'application galoisienne (ou résiduelle), ayant été définie et étudiée par lui. Malheureusement, certains de ces derniers travaux sont restés trop peu connus sans doute en raison de l'extrême modestie de leur auteur et de sa propension à surestimer les capacités de compréhension de ses lecteurs.

CONTRIBUTIONS À L'ANALYSE COMBINATOIRE DES DONNÉES

B. LECLERC Habilitation à Diriger des Recherches, octobre 1992.

Introduction.

I - Sur la comparaison des bases d'un matroïde

- 1.1. Relation de dominance sur un hypergraphe uniforme.
- 1.2. Préordres de dominance.
- 1.3. Bases d'un matroïde : dominance et échangeabilité.
- 1.4. Une tripartition de E induite par les bases minimales.
- 1.5. Le matroïde des bases minimums.

II - Applications à seuils

- 2.1. Définitions.
- 2.2. Applications à seuils et applications E -galoisiennes.
- 2.3. Étude des applications E -galoisiennes.
- 2.4. Cas où P est un treillis.
- 2.5. Bases minimums et applications à seuils.
- 2.6. Applications aux treillis d'ultramétriques.

III - Chaînes et antichaînes

- 3.1. Sur la dimension des ordres.
- 3.2. Nombres d'éléments des niveaux de certains ensembles ordonnés.

IV - Agrégation dans les structures latticielles

- 4.1. Résultats arrowiens sur l'agrégation d'applications à seuils.
- 4.2. Médianes et majorités dans les treillis finis.

Quelques publications de Bruno Leclerc

Livres, recueils

LECLERC B., (1972), *Distributions statistiques et lois de probabilité*, coll. Mathématiques des Sciences de l'Homme, Paris, Mouton et Gauthier-Villars.

CASPARD N., LECLERC B., MONJARDET B., (2007), *Ensembles ordonnés finis : concepts, résultats, usages*, Springer-Verlag, 298 pages.

HUDRY O., LECLERC B., MONJARDET B., BARTHELEMY J.-P., (2009), "Metric and latticial medians", D. Bouyssou, D. Dubois, M. Pirlot, H. Prade (éds), *Concepts and methods of decision-making*, Wiley, p.811-856.

Articles

LECLERC B., MONJARDET B. (1973), «Ordres C.A.C.», *Fundamenta Mathematicae* LXXIX, p.11-22.

LECLERC B. (1976), «Arbres et dimension des ordres», *Discrete Mathematics* 14, p. 69-76.

LECLERC B. (1981), «Description combinatoire des ultramétriques», *Mathématiques et Sciences humaines* 73, p. 5-37.

FLAMENT C., LECLERC B. (1983), «Arbres minimaux d'un graphe préordonné», *Discrete Mathematics* 46, p. 159-171.

LECLERC B. (1984), "Efficient and binary consensus functions on transitively valued relations", *Mathematical Social Sciences* 8, p. 45-61.

LECLERC B. (1985), «Les hiérarchies de parties et leur demi-treillis», *Mathématiques et Sciences humaines* 89, p. 5-34.

LECLERC B. (1985), «La comparaison des hierarchies : indices et métriques», *Mathématiques et Sciences humaines* 92, p. 5-40.

BARTHÉLEMY J.-P., LECLERC B., MONJARDET B. (1986), "On the use of ordered sets in problems of comparison and consensus of classifications", *Journal of Classification* 3(2), p. 187-224.

LECLERC B. (1986), «Caractérisation, dénombrement et construction des ultramétriques supérieures minimales», *Statistique et analyse des données* 11(2), p. 26-50.

LECLERC B. (1989), "Consensus approaches for multiple categorical or relational data", in R. Coppi, S. Bolasco (eds), *Multiway Data Analysis*, Amsterdam, Elsevier Science, p. 65-75.

LECLERC B. (1990), "Medians and majorities in semimodular lattices", *SIAM Journal on Discrete Mathematics* 3(2), p. 266-276.

LECLERC B. (1991), "Aggregation of fuzzy preferences: a theoretic Arrow-like approach", *Fuzzy Sets and Systems* 43(3), p. 291-309.

LECLERC B., (1993), "Lattice valuations, medians and majorities", *Discrete Mathematics* 111, p.345-356.

LECLERC B. (1994), "A finite Coxeter group the weak Bruhat order of which is not symmetric chain", *European Journal of Combinatorics* 15, p. 181-185.

LECLERC B. (1994), "Medians for weight metrics in the covering graphs of semilattices", *Discrete Applied Mathematics* 49, p. 281-297.

LECLERC B. (1994), "The residuation model for the ordinal construction of dissimilarities and other valued objects", in Bernard Van Cutsem (éd.), *Classification and Dissimilarity Analysis, Lecture notes in Statistics* 93, New York, Springer Verlag, p. 149-172.

BARTHÉLEMY J.-P., LECLERC B. (1995), "The median procedure for partitions", in I.J. Cox, P. Hansen and B. Julesz (eds), *Partitioning data sets, DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science* 19, Providence (RI), Amer. Math. Soc., p. 3-34.

- LECLERC B., MONJARDET B. (1995), "Latticial Theory of Consensus", in W. Barnett, H. Moulin, M. Balles, N. Schofield (eds), *Social Choice, Welfare, and Ethics*, Cambridge, Cambridge University Press, p. 145-160.
- LECLERC B. (1995), "Minimum spanning trees for tree metrics: abridgements and adjustments", *Journal of Classification* 12, p. 207-241.
- LECLERC B. (1996), "Minimum spanning trees and types of dissimilarities", *European Journal of Combinatorics* 17(2/3), p. 255-264.
- LECLERC B. (1997), "Families of chains of a poset and Sperner properties", *Discrete Mathematics* 165/166, p. 461-468.
- LECLERC B., MAKARENKO V. (1998), "On some relations between 2-trees and tree metrics", *Discrete Mathematics* 192, p. 223-249.
- MAKARENKO V., LECLERC B. (1999), "An algorithm for the fitting of a tree metric according to a weighted least squares criterion", *Journal of Classification* 16(1), p. 3-26.
- MAKARENKO V., LECLERC B. (2000), "Comparison of additive trees using circular orders", *Journal of Computational Biology* 7(5), p. 731-744.
- GUÉNOCHE A., LECLERC B. (2001), "The triangles method to build X -trees from incomplete distance matrices", *RAIRO Operations Research* 35, p. 283-300.
- DOMENACH F., LECLERC B. (2001), "Biclosed binary relation and Galois connections", *Order* 18, p. 99-104.
- LECLERC B. (2002), "Graphes d'arches", *Mathématiques et Sciences humaines* 157, p. 27-48.
- LECLERC B. (2003), "The median procedure in the semilattice of orders", *Discrete Applied Mathematics*, 127(2), p. 241-269.
- GUÉNOCHE A., LECLERC B., MAKARENKO V. (2003), "On the extension of a partial metric to a tree metric", *Discrete Mathematics* 276(1-3), p. 229-248.
- DOMENACH F., LECLERC B. (2004), "Consensus of classification systems, with Adams's results revisited", in D. Banks, L. House, F.R. McMorris, P. Arabie, W. Gaul, eds, *Classification, Clustering and Data Mining Applications*, Berlin, Springer, p. 417-428.
- DOMENACH F., LECLERC B. (2004), "Closure systems, implicational systems, overhanging relations and the case of hierarchical classification", *Mathematical Social Sciences* 47(3), p. 349-366.
- DOMENACH F., LECLERC B. (2007), "The structure of the overhanging relations associated with some types of closure systems", *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence* 49, p. 137-149.
- LECLERC B. (2008), "Consensus de classifications basé sur les regroupements fréquents", *RNTI-C-2*, p. 115-122.