Mathématiques et sciences humaines
Mathematics and social sciences

190 | Eté 2010
Mathématiques discrètes : théories et usages. Numéro en hommage à Bruno Leclerc

Des chaînes et des antichaînes dans les ensembles ordonnés finis

About chains and antichains in finite posets

Nathalie Caspard

Édition électronique
URL : http://journals.openedition.org/msh/11716
DOI : 10.4000/msh.11716
ISSN : 1950-6821

Éditeur
Centre d'analyse et de mathématique sociales de l'EHESS

Édition imprimée
Date de publication : 10 mars 2010
Pagination : 19-40
ISSN : 0987-6936

Référence électronique
Nathalie Caspard, « *Des chaînes et des antichaînes dans les ensembles ordonnés finis* », *Mathématiques et sciences humaines* [En ligne], 190 | Eté 2010, mis en ligne le 16 octobre 2010, consulté le 20 avril 2019. URL : http://journals.openedition.org/msh/11716 ; DOI : 10.4000/msh.11716

Math. & Sci. hum. / Mathematics and Social Sciences (48^e année, n° 190, *2010*(2), p. 19–40)

DES CHAÎNES ET DES ANTICHAÎNES DANS LES ENSEMBLES ORDONNÉS FINIS

Nathalie CASPARD[1]

RÉSUMÉ – *L'un des nombreux domaines dans lesquels Bruno Leclerc a travaillé et publié est celui des ensembles ordonnés. Plus précisément, il s'est fortement intéressé à des propriétés d'ensembles ordonnés relatives à des sous-structures bien particulières, les chaînes et les antichaînes. Beaucoup de problèmes de tri, de recherche et d'ordonnancement que l'on rencontre par exemple en informatique et en recherche opérationnelle, sont liés à la détermination du cardinal maximum d'une antichaîne d'un ensemble ordonné, c'est-à-dire de sa largeur.*

Cet article se repenche sur ces centres d'intérêts de l'oeuvre de Bruno, en rappelant d'une part certains grands théorèmes classiques relatifs à ces notions et, d'autre part, des résultats de Bruno sur ces sujets. Nos développements se restreignent au cas fini.

MOTS-CLÉS – Antichaîne, Chaîne, Ensemble ordonné, Largeur, Sperner, Treillis de Coxeter.

SUMMARY – About chains and antichains in finite posets
One of the numerous fields investigated by Bruno Leclerc is the theory of finite posets. More precisely, he was very interested in properties of posets relative to some particular substructures, the so-called chains and antichains. Many problems in sorting, search and scheduling, that one can find for instance in computer science and operational research, are connected with the computing of the maximum cardinality of an antichain of a poset, that is, of its width.

This paper looks into those centers of interest of Bruno's work, recalling on one hand some strong and classical theorems relating to these notions and, on the other hand, some results by Bruno on these subjects. Our developments only concern the finite case.

KEYWORDS – Antichain, Chain, Coxeter lattice, Partially ordered set (poset), Sperner, Width.

1. DÉDICACE

J'ai rencontré Bruno Leclerc en 1994, alors que j'étais en DEA sous la direction de Bernard Monjardet. Bruno fut notamment l'examinateur de mon mémoire. Je l'appréciais déjà en l'ayant simplement croisé à plusieurs reprises au CAMS et j'ignorais encore le plaisir que j'allais prendre des années durant à travailler avec lui ou dans son environnement proche. C'est au cours de la préparation de ma thèse, toujours sous la direction de Bernard, que j'ai plus réellement fait la connaissance de Bruno. J'avais en effet des rendez-vous réguliers de travail avec Bernard au CAMS et, par voie de fait, je croisais souvent Bruno qui partageait le même bureau.

[1]Laboratoire d'Algorithmique, Complexité et Logique, Université Paris-Est Créteil, 60 avenue du Général de Gaulle 94010 Créteil, caspard@univ-paris12.fr

Quelques années plus tard, Bernard et Bruno – dits B&B – me proposèrent de m'allier à eux pour la rédaction d'un ouvrage sur les ensembles ordonnés finis. Ils avaient déjà longuement travaillé dessus quelques années plus tôt mais le projet avait piétiné pour rester finalement en plan, malgré les avancées réalisées. Je me joignis avec enthousiasme à la relance du projet et LEO (Les Ensembles Ordonnés) devint LEON (LEO + Nathalie).

C'est ainsi qu'avec LEON, mon « nombre de Leclerc » devint 1 en 2007 et j'en suis extrêmement fière. Nos séances régulières de travail avec B&B, étalées sur plusieurs années, ont été autant d'occasions de partager des moments riches, instructifs et humains. Lorsque la rédaction fut terminée, la satisfaction du travail accompli laissa vite place à un vide un peu triste : je m'étais habituée à ces séances de travail et les aimais pour ce qu'elles m'apportaient sur les deux plans intellectuel et purement humain.

On me pardonnera donc d'appeler Bruno « Bruno » dans cet article, et non pas « Leclerc », me détournant pour une fois de la tradition ; je ferai de même avec Bernard et Claude, mes amis et, accessoirement, mes collègues.

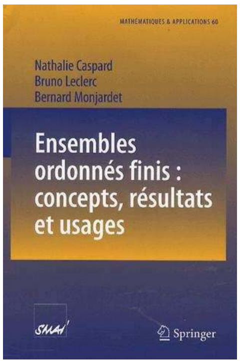


FIGURE 1. LEON et Bruno (et moi)

2. INTRODUCTION

La notion d'ordre – ainsi que la théorie des ensembles ordonnés qui a suivi – a été formalisée puis développée dès la fin du XIX^e siècle, par des mathématiciens et logiciens tels que Peirce, Peano, Schröder, Cantor, Dedekind, Russel, Huntington, Scheffer ou Hausdorff. Ces développements ont été un écho naturel à la présence de la notion d'ordre (ou encore de classement) dans de très nombreuses activités humaines. On trouve des ordres par exemple en informatique et en recherche opérationnelle, où les problèmes de tri, de recherche et d'ordonnancement que l'on rencontre sont fréquemment liés à la détermination du cardinal maximum d'une *antichaîne* d'un ensemble ordonné, c'est-à-dire de sa largeur.

En 1950, Dilworth caractérise la largeur d'un ensemble ordonné dans son théorème fondamental : la largeur de tout ensemble ordonné P est égale au cardinal minimum d'une partition de P en *chaînes*. C'est sans conteste l'un des résultats les plus célèbres de la combinatoire.

Si l'on se place dans le cas particulier des ensembles ordonnés bipartis, le théorème de Dilworth est équivalent au théorème de König-Egerváry et à celui de König-Hall, qui utilisent les notions de *transversales* et de *déficience*.

Lorsqu'un ensemble ordonné P est *rangé*, la largeur de P peut être égale au nombre maximum des éléments d'un de ses *niveaux*. Un ensemble ordonné vérifiant cette propriété est dit *de Sperner* et on dispose alors d'une autre façon, souvent plus directe, de déterminer sa largeur. L'appellation « de Sperner » provient du fait que la propriété en question a été établie par Sperner en 1928 pour le treillis booléen $\underline{2}^n$ des parties d'un ensemble E à n éléments. L'étude de conditions liées à la propriété de Sperner ou au théorème de Sperner constituent un autre thème majeur de la combinatoire des ensembles ordonnés. Enfin, les produits de chaînes constituent un exemple important d'ensembles ordonnés de Sperner, qui apparaissent fréquemment dans la modélisation des problèmes relevant de domaines comme la décision multicritère ou l'analyse de données.

La Section 3 est dédiée aux rappels et définitions de base nécessaires au propos de l'article. La définition du rang fait exception et le lecteur la trouvera au début de la Section 5, ainsi que les définitions des notions connexes.

Nous commençons la Section 4 en présentant l'incontournable théorème de Dilworth. Nous évoquons ensuite quatre autres résultats fondamentaux de la combinatoire – les théorèmes de König-Egerváry, de König-Hall, de Menger et de Ford et Fulkerson – qui sont équivalents au théorème de Dilworth (dans le contexte plus restreint des ensembles ordonnés bipartis sans sommet isolé pour les deux premiers).

Dans la Section 5, nous présentons la propriété de Sperner et le théorème du même nom, ainsi qu'une application étonnante de ce théorème, à savoir la résolution du problème de Littlewood-Offord.

La Section 6 reprend un certain nombre de conditions liées à la propriété de Sperner et étudiées par Bruno. Nous les définissons et étudions des liens les unissant entre elles d'une part et à la propriété de Sperner d'autre part. La section se termine par un schéma récapitulatif très largement inspiré d'un schéma de Bruno.

À la suite de ces développements, la Section 7 aborde le cas des ensembles ordonnés *q-Sperner* et *fortement de Sperner*. Nous y présentons la notion de q-antichaîne et un théorème de caractérisation établi par Bruno des q-antichaînes de cardinalité maximale parmi toutes les q-antichaînes d'un ensemble ordonné P. Ce théorème induit notamment une caractérisation des ensembles ordonnés fortement de Sperner.

La Section 8 présente un résultat important de Bruno sur les treillis finis de Coxeter. Ces derniers généralisent les treillis dits *Permutoèdre*, eux-mêmes des sous-ordres couvrants des ordres produits directs de chaînes dont la définition est rappelée en Section 6.

Finalement, la dernière section expose un exemple simple et réel d'utilisation des ensembles ordonnés avec les produits directs de chaînes.

Il est à noter que tout ce qui est présenté dans ce papier ne concerne que le cas *fini*.

En outre, une source majeure pour la rédaction de cet article est logiquement notre ouvrage [Caspard, Leclerc, Monjardet, 2007] et beaucoup de renvois – notamment pour des preuves – et références y seront faits tout au long du texte.

3. PRÉLIMINAIRES

DÉFINITION 1. *Une relation binaire O sur un ensemble X est un* ordre *sur X si elle est réflexive (pour tout $x \in X, xOx$), antisymétrique (pour tous $x, y \in X$, [xOy et yOx] implique $x = y$) et transitive (pour tous $x, y, z \in X$, [xOy et yOz] implique xOz).*

Si O est un ordre sur un ensemble X, le symbole O^c désigne la relation complémentaire *de O sur X définie par xO^cy si xOy n'est pas vérifié.*

Quand une paire $\{x, y\}$ d'éléments vérifie xOy ou yOx (ou les deux), on dit que x et y sont comparables. *Dans le cas contraire (xO^cy et yO^cx), il sont dits* incomparables.

Un ensemble ordonné *est un couple $P = (X, O)$ où X est un ensemble et O un ordre sur X.*

L'ordre O est dit *total* s'il est tel que, pour tous $x, y \in X$, xO^cy implique yOx et l'ensemble ordonné $P = (X, O)$ est alors appelé *ensemble totalement ordonné.*

Dans la suite, nous préfèrerons la notation $\leq$ à celle de O pour désigner une relation d'ordre, et $x < y$ signifiera que $x \leq y$ avec $x \neq y$. En outre, si $x < y$ et qu'il n'existe aucun élément z vérifiant $x < z < y$, on dit que y *couvre* x et l'on note $x \prec y$. La relation $\prec$ associée à une relation d'ordre est appelée sa relation de *couverture.*

Soient $P = (X, \leq)$ un ensemble ordonné et Y une partie de X. La restriction de l'ordre $\leq$ à la partie Y est un ordre, noté $\leq_Y$ et appelé un *sous-ordre* de $\leq$. On dit alors que $Q = (Y, \leq_Y)$ est un *sous-ensemble ordonné* de P.

Soit Q un sous-ensemble ordonné d'un ensemble ordonné P. Si Q est totalement ordonné, on dit que Q est une *chaîne de P.* On note $x_0 < x_1 < ... < x_p$ une chaîne de P ou, simplement, $x_0x_1...x_p$. L'élément x_0 est l'*origine* de la chaîne, x_p son *extrémité*, et sa *longueur* vaut le nombre de ses éléments moins un (donc p pour la chaîne $x_0 < x_1 < ... < x_p$).

Une chaîne $Q = x_0x_1...x_p$ de $(P, \leq)$ est dite *couvrante* si elle vérifie $x_0 \prec x_1 \prec ... \prec x_p$ (où $\prec$ est la relation de couverture sur P associée à l'ordre $\leq$) avec p supérieur ou égal à 1.

On appelle *antichaîne* d'un ensemble ordonné $P = (X, \leq)$ tout sous-ensemble ordonné de P dans lequel deux éléments (distincts) sont toujours incomparables vis-à-vis de $\leq$.

Quatre paramètres fondamentaux relatifs aux chaînes et aux antichaînes sont traditionnellement attachés à un ensemble ordonné P :

- $\kappa(P)$, le nombre maximum d'éléments d'une chaîne de P, désigne l'*étendue* de P,
- $\alpha(P)$, le nombre maximum d'éléments d'une antichaîne de P, désigne la *largeur* de P,

- $\theta(P)$ désigne le nombre minimum de chaînes dans une partition de P en chaînes,
- $\gamma(P)$ désigne le nombre minimum d'antichaînes dans une partition de P en antichaînes.

Il est clair que tout ensemble ordonné P vérifie $\kappa(P) \leq \gamma(P)$ et $\alpha(P) \leq \theta(P)$, puisque deux éléments de P ne peuvent appartenir simultanément à une chaîne et à une antichaîne. En fait, les deux théorèmes suivants montrent que ces inégalités sont des égalités, et sont donc des résultats du type dit « min-max » : ils établissent que le minimum d'un certain ensemble de valeurs est égal au maximum d'un autre ensemble de valeurs. Ainsi, trouver une instance du premier ensemble et une du second qui sont de même cardinal nous assure d'avoir effectivement atteint ce minimum et ce maximum.

Le Théorème 1 exprime la première égalité et une preuve de nature constructive en est donnée dans [Caspard, Leclerc, Monjardet, 2007].

THÉORÈME 1. *Pour tout ensemble ordonné P, on a l'égalité $\kappa(P) = \gamma(P)$.*

4. AUTOUR DU THÉORÈME DE DILWORTH

Il est très difficile – en fait impossible – de développer un sujet sur les chaînes et antichaînes des ensembles ordonnés sans parler du théorème de Dilworth, publié en 1950 et constituant l'un des résultats au coeur de la théorie des ordres. Il en existe de nombreuses preuves dont celle, courte, donnée par Tverberg en 1967 est reprise dans [Caspard, Leclerc, Monjardet, 2007].

THÉORÈME 2 (Dilworth, 1950). *Pour tout ensemble ordonné P, on a l'égalité $\alpha(P) = \theta(P)$.*

Dans l'ensemble ordonné de la Figure 2 ci-dessous, les sommets encerclés constituent une antichaîne de cardinalité maximum et les traits en gras représentent une partition de cardinalité minimum des éléments de P en chaînes.

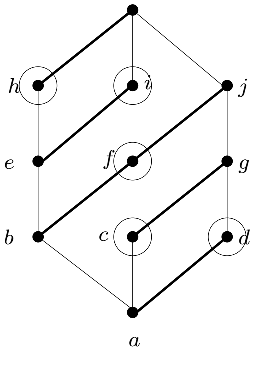


FIGURE 2. Un ensemble ordonné P avec $\alpha(P) = \theta(P) = 5$

Historiquement, ce résultat est né des recherches de Dilworth sur la représentation d'un treillis[2] distributif comme sous-treillis d'un produit direct de chaînes[3]. La question qu'il se posait alors était de déterminer, étant donné un treillis T distributif, le nombre minimum de chaînes de longueur quelconque dont le produit direct avait T pour sous-treillis ; il s'agissait donc ici d'un problème de *dimension*. Ses développements sur ce sujet l'ont peu à peu mené à conjecturer puis démontrer son célèbre théorème.

Quand les ensembles ordonnés considérés sont *bipartis* (et sans sommet isolé), le théorème de Dilworth devient équivalent à deux autres théorèmes importants, ceux de König-Egerváry et de König-Hall. Ces deux théorèmes sont des résultats majeurs de la théorie des graphes, mais nous les énonçons ci-après dans une version ordinale afin de conserver l'homogénéité de ce texte.

Les ensembles ordonnés bipartis[4] sont exactement les ensembles ordonnés P d'étendue $\kappa(P) = 2$. Un tel ensemble est noté $P = (Y \cup Z, \leq)$, Y (respectivement, Z) étant l'ensemble de ses éléments minimaux (respectivement, maximaux). Dans la suite de cette section, on ne considérera que des ensembles ordonnés bipartis sans élément isolé, où donc chaque élément est soit minimal, soit maximal mais pas les deux. Ainsi, à la place de $P = (Y \cup Z, \leq)$ on écrira $P = (Y + Z, \leq)$, où le symbole « + » désigne l'union disjointe d'ensembles.

Il sera équivalent d'écrire $y \leq z$ avec $y \in Y$ et $z \in Z$, $y \prec z$, ou $y < z$. Pour toute partie X' de $X = Y + Z$, on pose $X'_Y = X' \cap Y$ et $X'_Z = X' \cap Z$. Soient $p = |Y|$ et $q = |Z|$ (avec $n = p + q$). On supposera $p \leq q$, sans perte de généralité puisque l'on peut sinon remplacer P par son dual[5].

On rappelle en outre les définitions suivantes :

DÉFINITION 2. *Soit P un ensemble ordonné biparti.*

- *Un* couplage *de P est un ensemble de chaînes de P de longueur 1 et deux à deux disjointes. On désigne alors par $\sigma(P)$ le cardinal maximum d'un couplage de P.*

- *Une* transversale *(*des chaînes de longueur 1*)* de P *est une partie T de $Y + Z$ telle que, pour tous $x, x' \in Y + Z$, avec $x < x'$, on a $x \in T$ ou $x' \in T$. On désigne alors par $\tau(P)$ le cardinal minimum d'une transversale de P.*

THÉORÈME 3 (König-Egerváry, 1931). *Tout ensemble ordonné biparti P et sans sommet isolé vérifie $\sigma(P) = \tau(P)$.*

[2]Rappelons qu'un ensemble ordonné P est un *inf-demi-treillis* si, pour toute paire $\{x, y\}$ d'éléments de P, l'ensemble $\{z \in P : z \leq x \text{ et } z \leq y\}$ des minorants communs à x et y admet un plus grand élément – appelé son infimum et noté $x \wedge y$. Dualement, P est un *sup-demi-treillis* si, pour toute paire $\{x, y\}$ d'éléments de P, l'ensemble $\{z \in P : z \geq x \text{ et } z \geq y\}$ des majorants communs à x et y admet un plus petit élément – appelé son supremum et noté $x \vee y$. Enfin P est un *treillis* si c'est à la fois un inf- et un sup-demi-treillis.

[3]Les définitions relatives aux produits de chaînes figurent à la Section 6.

[4]Un tel ensemble ordonné est donc très particulier puisque la transitivité ne joue aucun rôle dans son « ordre » et que ses chaînes sont les couples d'éléments $(x < y)$.

[5]On rappelle que le *dual* d'un ensemble ordonné $P = (X, \leq)$ est l'ensemble ordonné $P^d = (X, \leq^d)$ défini sur X par $x \leq^d y$ si $y \leq x$).

La figure suivante illustre ce résultat (où les arêtes en gras représentent un couplage de cardinalité maximum et les sommets blancs les éléments d'une transversale de cardinalité minimum).

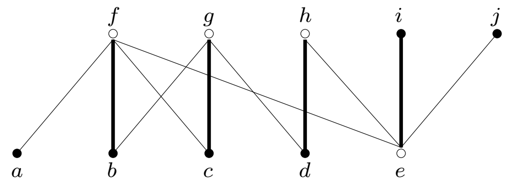


FIGURE 3. Illustration du théorème de König-Egerváry

Nous allons à présent énoncer le théorème de König-Hall (ici sous une formulation attribuée à Hall). Il nous faut rappeler les définitions suivantes :

DÉFINITION 3. *Soit $P = (Y + Z, \leq)$ un ensemble ordonné biparti sans sommet isolé. Pour toute partie Y' de Y, on note $]Y') = \{z \in Z : \exists y' \in Y'$ vérifiant $y' < z\}$ et l'on définit l'entier positif :*

$$\begin{aligned} \delta(Y') &= |Y'| - |]Y')| \quad si\ |]Y')| \leq |Y'| \\ &= 0 \quad sinon \end{aligned}$$

On appelle alors déficience de P, *et l'on note $\delta(P)$, la valeur $max_{Y' \subseteq Y} \delta(Y')$.*

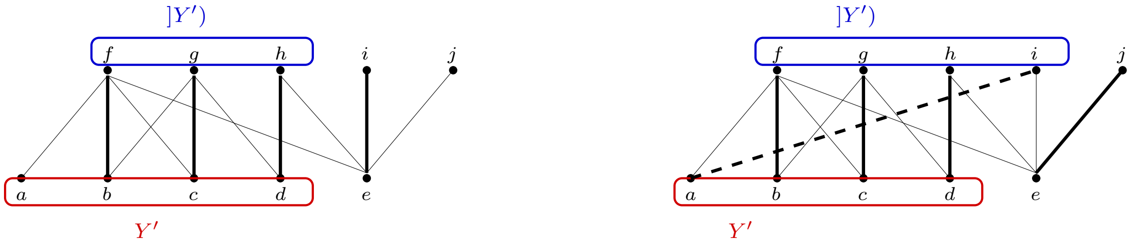
THÉORÈME 4 (König-Hall, 1935). *Soit $P = (Y + Z, \leq)$ un ensemble ordonné biparti sans sommet isolé. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *il existe un couplage de Y dans Z (i.e. $\sigma(P) = p = |Y|$),*

2. *la déficience $\delta(P)$ est nulle.*

L'ensemble ordonné P de la Figure 4(a) ci-après satisfait l'égalité $\delta(P) = 1$. En effet, pour $Y' = \{a, b, c, d\}$ on a $]Y') = \{f, g, h\}$ d'où $\delta(Y') = 1$ et, de plus, il n'existe aucune partie $Y"$ de Y vérifiant $\delta(Y") > 1$. Un couplage de taille maximum est donné par les traits en gras et il n'existe donc aucun couplage de Y dans Z.

Si l'on considère maintenant l'ensemble ordonné P' de la Figure 4(b), égal à P auquel on ajoute le couple (a, i), le lecteur peut vérifier que $\delta(P') = 0$ (et cette valeur est atteinte par exemple pour $Y' = \{a, b, c, d\}$) et on indique un couplage de Y dans Z en traits gras.



(a) Ici, P vérifie $\delta(P) = 1$

(b) Pour $P' = P + (a, i)$, on a $\delta(P') = 0$

FIGURE 4. Illustration du théorème de König-Hall

Rappelons enfin que le théorème de Dilworth est équivalent à deux autres grands résultats de la combinatoire, à savoir les théorèmes de Menger et de Ford et Fulkerson.

Le théorème de Menger date de 1927 et constitue un résultat important de la théorie des graphes non orientés (finis). Il caractérise les graphes k-connexes[6] comme suit : « Étant donné un entier k positif, un graphe simple G à n sommets et vérifiant $n \geq k + 1$ est k-connexe si et seulement si deux sommets disctincts quelconques de G sont reliés par au moins k chaînes élémentaires deux à deux sommets-disjointes ».

Ce théorème concerne les sommets du graphe mais Menger a également énoncé et démontré une version « arêtes » du théorème portant sur la *k-arête-connexité* d'un graphe.

Pour ce qui est du théorème « min coupe-max flot » de Ford et Fulkerson [Ford et Fulkerson, 1962], également issu de la théorie des graphes, prenons là aussi le temps de le rappeler et, pour ce faire, posons quelques définitions.

Pour chaque sommet s d'un graphe orienté $G = (S, U)$, notons Us (respectivement, sU) l'ensemble des arcs d'extrémité (respectivement, d'origine) s. Pour deux sommets distincts y et z, un *flot* de y à z est une application $f\ : U \longmapsto \mathbb{N}$ telle que, pour tout $s \in X \setminus \{y, z\}$, $\Sigma_{u \in Us} f(u) = \Sigma_{u \in sU} f(u)$, tandis que, si $u \in Uy \cup zU$, on a $f(u) = 0$. La *valeur du flot* f est la quantité $f(y, z) = \Sigma_{u \in yU} f(u) = \Sigma_{u \in Uz} f(u)$. Pour être *admissible*, un flot f doit aussi respecter pour tout arc u une inégalité du type $f(u) \leq \chi(u)$, le nombre entier $\chi(u)$ étant la « capacité » de l'arc u. Une *coupe* (séparant y et z) est une partition de S en deux classes Y et Z telles que $y \in Y$ et $z \in Z$. On lui associe l'ensemble $D(Y, Z)$ des arcs (y', z') de G tels que $y' \in Y$ et $z' \in Z$, puis la capacité de la coupe $\chi(Y, Z) = \Sigma_{u \in D(Y,Z)} \chi(u)$. Le théorème de Ford et Fulkerson établit l'égalité :

$$Max\{f(y, z),\ f \text{ flot admissible}\} = Min\{\chi(Y, Z),\ (Y, Z) \text{ coupe séparant } y \text{ et } z\}$$

La recherche d'une partition d'un ensemble ordonné $P = (X, \leq)$ quelconque en $\theta(P)$ chaînes se ramène à celle d'un flot (de valeur) maximum dans un graphe orienté

[6]Le *nombre de connexité* d'un graphe G, symbolisé par $\kappa(G)$, désigne le plus petit nombre de sommets de G dont la suppression de G génère un graphe non connexe ou réduit à un sommet. Un graphe G est *k-connexe* si $\kappa(G) \geq k$.

G associé à un ensemble ordonné P' biparti, lui-même défini à partir de P comme suit : $P' = (X + X', \leq')$, où $X' = \{x'_1, ..., x'_n\}$ est une copie de $X = \{x_1, ..., x_n\}$, avec $x_i <' x'_j$ si et seulement si $x_i < x_j$. La recherche d'une antichaîne de P de cardinal $\alpha(P)$ se ramène quant à elle à celle d'une coupe minimum de G.

Il existe une boucle d'implications entre les cinq théorèmes de Dilworth, de König-Hall, de Menger, de Ford et Fulkerson et de König-Egerváry, permettant de démontrer leur équivalence :

Dilworth $\overset{(1)}{\Longrightarrow}$ König-Hall $\overset{(2)}{\Longrightarrow}$ Menger $\overset{(3)}{\Longrightarrow}$ Ford et Fulkerson $\overset{(4)}{\Longrightarrow}$ König-Egerváry $\overset{(5)}{\Longrightarrow}$ Dilworth.

L'ouvrage [Caspard, Leclerc, Monjardet, 2007] propose des (éléments de) preuves pour les implications (1), (4) et (5). On y trouve en outre une démonstration de l'équivalence du théorème de Dilworth avec, d'une part, celui de Ford et Fulkerson (Section 4.5, page 128) et, d'autre part, celui de König-Egerváry (Section 4.2, page 116 et Exercice 4.5, page 131). Pour les implications (2) et (3), nous conseillons au lecteur de se référer au chapitre 13 du livre [Welsh, 1976] et au chapitre 8 du livre [Aigner, 1979] respectivement.

5. PROPRIÉTÉ ET THÉORÈME DE SPERNER. EXEMPLE D'APPLICATION

Dans cette section, nous restreignons notre propos aux ensembles ordonnés rangés, de rang normé r. Rappelons qu'un ensemble ordonné $P = (X, \leq)$ est *rangé* s'il admet un *rang*, i.e. une application r de X dans l'ensemble ordonné des entiers $\mathbb{N}$ conservant la relation de couverture :

$$x \prec y \Longrightarrow r(y) = r(x) + 1$$

Tout ensemble ordonné rangé admet une infinité de rangs, puisque l'addition d'une constante entière à un rang détermine encore un rang. Un rang de P est dit *normé* si $r(x) = 0$ pour au moins un élément minimal de P, i.e. si la plus petite valeur possible du rang est atteinte. Tout P rangé et connexe admet par définition un unique rang normé et, désormais et sauf mention contraire, on assimilera dans le texte « rang » et « rang normé ». Par ailleurs, la notation $r(P)$ désignera alors la valeur $r(P) = max_{x \in P} r(x)$ pour r le rang normé de P.

Il est intéressant de noter que, pour P rangé, $r(P) = \kappa(P) - 1$ où l'on rappelle que $\kappa(P)$ est l'étendue de P, c'est-à-dire le nombre maximum d'éléments d'une chaîne de P.

Si P est un ensemble ordonné rangé de rang r et k un entier positif ou nul, on pose $N_k = \{x \in P \ : r(x) = k\}$. Tout N_k non vide est appelé le *niveau* de rang k de P (notons au passage qu'ils forment une partition en antichaînes de P).

Pour tout k entre 0 et $r(P)$, on pose $n_k = |N_k|$ et $\nu(P) = max_{0 \leq k \leq r(P)} n_k$ (dans la littérature, les nombres n_k sont souvent appelés les *nombres de Whitney*). Puisque les niveaux sont des antichaînes particulières, on a $\nu(P) \leq \alpha(P)$.

DÉFINITION 4. *Un ensemble ordonné rangé P est dit* de Sperner *s'il vérifie la* propriété de Sperner *selon laquelle tout niveau de cardinal maximum est une antichaîne de cardinal maximum.*

En d'autres termes, un ensemble ordonné est de Sperner si l'égalité $\nu(P) = \alpha(P)$ est atteinte. Cette égalité – lorsque P est un treillis booléen (c'est-à-dire isomorphe au treillis des parties d'un ensemble fini ordonnées par inclusion) – a été établie en 1928 dans [Sperner, 1928] et constitue le très important théorème de Sperner (cf. [Caspard, Leclerc, Monjardet, 2007] pour une preuve) :

THÉORÈME 5 (Sperner, 1928). *Soit E un ensemble de cardinal n. Le treillis booléen $\underline{2}^n$ des parties de E est un ensemble ordonné de Sperner, avec $\alpha(\underline{2}^n) = \nu(\underline{2}^n) = \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$.*

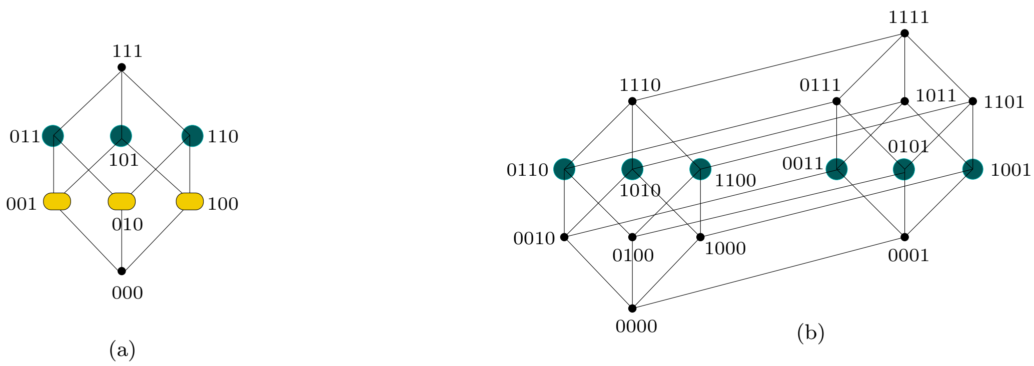


FIGURE 5. Illustration du théorème de Sperner sur (a) $\underline{2}^3$ et (b) $\underline{2}^4$

Sur la Figure 5(a) représentant le treillis $\underline{2}^3$, on observe deux antichaînes de taille maximum (=3) qui se trouvent être chacune un niveau « central » du treillis. De même en 5(b) pour le treillis $\underline{2}^4$, l'unique antichaîne de taille maximum (=6) est le niveau central de $\underline{2}^4$.

Une application inattendue du théorème de Sperner consiste en une preuve simplifiée du fameux « problème de Littlewood-Offord ».

En 1943, Littlewood et Offord publient le résultat suivant :

THÉORÈME 6 (Littlewood-Offord, 1943). *Soient $z_1, ..., z_n$ des nombres complexes vérifiant $|z_i| \geq 1$ pour tout $i \leq n$. On pose aussi, pour tout i, $\epsilon_i \in \{-1, +1\}$.*

Alors, pour tout disque D de rayon r, le nombre d'éléments de la forme $\Sigma_{i=1}^{n} \epsilon_i z_i$ appartenant à D est inférieur ou égal à $Cr^{2^n} n^{-1/2} log n$, pour une certaine constante C.

En passant de la dimension 2 à la dimension 1 pour exprimer cette propriété, on obtient la version « réelle » du théorème, énoncée et démontrée par Erdös deux ans plus tard en 1945 dans [Erdös, 1945]. Sa preuve utilise le théorème de Sperner.

THÉORÈME 7 (Erdös, 1945). *Soient $r_1, ..., r_n$ des réels vérifiant $r_i \geq 1$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Soient aussi $I = [t, t+1[$ un intervalle réel (avec t quelconque) et $E_I = \{x \in I : x = \Sigma_{i=1}^{n} \epsilon_i r_i$, avec $\epsilon_i \in \{0, 1\}\}$. Alors on a :*

$$|E_I| \leq \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$$

Preuve. À chaque élément $x = \Sigma_{i=1}^{n} \epsilon_i r_i$ de E_I, on associe le n-uplet $v = (\epsilon_1, ..., \epsilon_i, ...\epsilon_n)$.

Soient $v = (\epsilon_1, ..., \epsilon_i, ...\epsilon_n)$ et $v' = (\epsilon'_1, ..., \epsilon'_i, ...\epsilon'_n)$ les deux n-uplets associés aux éléments x et x' de E_I. Rappelons qu'un ordre naturel entre n-uplets d'éléments d'un ensemble ordonné $P = (X, \leq)$ est défini par $v = (\epsilon_1, ..., \epsilon_i, ...\epsilon_n) \sqsubseteq (\epsilon'_1, ..., \epsilon'_i, ...\epsilon'_n) = v'$ si, pour tout i entre 1 et n, on a $v_i \leq v'_i$ dans P.

Si $v \sqsubseteq v'$ avec $v \neq v'$ alors $x' - x \geq 1$ et l'on ne peut donc avoir à la fois x et x' dans E_I, ce qui est une contradiction.

Ainsi les n-uplets associés aux éléments de E_I doivent constituer une antichaîne dans $\underline{2}^n$ et le théorème de Sperner permet de conclure.

Quelques années plus tard, cette borne par coefficient binômial du cas réel a été démontrée également valable dans le cas complexe par Kleitman [Kleitman, 1965] – cf. aussi [Katona, 1966].

6. QUELQUES CONDITIONS LIÉES À LA PROPRIÉTÉ DE SPERNER

La propriété de Sperner est liée à l'existence de certaines relations entre les chaînes d'un ensemble ordonné rangé et ses niveaux. Ceci se trouve illustré dans le Théorème 8 qui énonce deux caractérisations des ensembles ordonnés de Sperner. Suite au résultat de Sperner, beaucoup de recherches se sont portées sur des conditions qui entraîneraient la propriété de Sperner, recherches ayant nécessité l'introduction de nouvelles notions. Cette section est dédiée à la présentation de ces notions et conditions qui, prises isolément ou combinées entre elles, impliquent la propriété de Sperner. Nous terminons la section avec un schéma de Bruno qui récapitule les liens d'implications entre ces différentes conditions (ou combinaisons de conditions).

Une chaîne d'un ensemble ordonné P est dite *maximale* si elle n'est contenue (strictement) dans aucune autre chaîne de P. Ainsi la cardinalité d'une telle chaîne de P vaut-elle $\kappa(P)$. Considérons une famille $\mathcal{R} = (C_1, ..., C_h)$ de h chaînes maximales, non forcément toutes distinctes, d'un ensemble ordonné P. Soit maintenant, pour tout élément x de P, le nombre $\rho_{\mathcal{R}}(x) = |\{j \in \{1, ..., h\} \ : x \in C_j\}|$ de chaînes de $\mathcal{R}$ contenant x et soit $\rho_{\mathcal{R}} = min_{x \in P} \rho_{\mathcal{R}}(x)$. Si $\rho_{\mathcal{R}} \geq 1$, tout élément de P appartient à au moins l'une des chaînes de $\mathcal{R}$ qui est alors appelée un *recouvrement* de P (*en chaînes*).

Un niveau N de P est dit *$\mathcal{R}$-régulier* si chaque élément x de N appartient au même nombre $\rho_{\mathcal{R}}(x) = \frac{h}{|N|}$ de chaînes de $\mathcal{R}$. Il est *minimum-$\mathcal{R}$-régulier* si, de plus, pour tout x de N, $\rho_{\mathcal{R}}(x) = \rho_{\mathcal{R}}$.

Rappelons que dans tout ensemble ordonné P rangé, $\nu(P)$ désigne le maximum des nombres de Whitney associés à P. On peut désormais donner les caractérisations annoncées, pour lesquelles on trouvera des preuves dans [Caspard, Leclerc, Monjardet, 2007] :

THÉORÈME 8. *Soit P un ensemble ordonné rangé. Les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

(SP) P est un ensemble ordonné de Sperner,

(N) il existe une partition de P en $\nu(P)$ chaînes,

(MR) il existe un recouvrement $\mathcal{R}$ de P par des chaînes maximales et un niveau N de P tels que N est minimum-$\mathcal{R}$-régulier.

Si maintenant nous prenons simplement pour $\mathcal{R}$ l'ensemble $\mathcal{C}$ de toutes les chaînes maximales de P, nous obtenons un cas particulier de la condition (MR), donc une condition entraînant que P est de Sperner :

(MCR) il existe un niveau de P minimum-$\mathcal{C}$-régulier.

Aprés avoir donné quelques définitions, nous allons lister un ensemble de conditions qui, prises isolément ou combinées, interviennent dans la détermination de classes d'ensembles ordonnés de Sperner.

On dit qu'une suite finie $m_0, m_1, ..., m_q$ d'entiers est *unimodale* si elle est la concaténation d'une suite croissante $m_0 \leq ... \leq m_p$ et d'une suite décroissante $m_{p+1} \geq ... \geq m_q$, et qu'un ensemble ordonné rangé P est *unimodal* si la suite de ses nombres de Whitney n_k, pour $k = 0, 1, ..., r(P)$, est unimodale (les chaînes et les treillis booléens sont clairement des exemples d'ensembles ordonnés unimodaux).

Une chaîne C de P est dite *symétrique* si elle est couvrante et si $r(maxC) + r(minC) = r(P)$, où $maxC$ et $minC$ sont respectivement le maximum et le minimum de C.

Dans tout ensemble ordonné $P = (X, \leq)$ rangé, on peut définir $r(P)$ sous-ensembles ordonnés bipartis sans sommets isolés en considérant les restrictions de P à deux niveaux consécutifs : pour tout $k = 0, ..., r(P) - 1$, $P_k = (N_k + N_{k+1}, \leq)$. Les deux conditions (REG) de *régularité* et (SPN) – *Sperner Par Niveaux* – données ci-dessous portent sur ces sous-ensembles particuliers.

Soit P un ensemble ordonné rangé. On énonce les conditions suivantes sur P :

(REG) Pour tout $k = 0, ..., r(P) - 1$, l'ensemble ordonné biparti P_k est régulier[7].

(SPN) Pour tout $k = 0, ..., r(P) - 1$, l'ensemble ordonné biparti P_k est de Sperner.

(UNI) L'ensemble ordonné P est unimodal.

(SUR) Les nombres de Whitney de P vérifient $n_0 = n_{r(P)} \leq n_1 = n_{r(P)-1} \leq ... \leq n_k = n_{r(P)-k} \leq ...$, pour $k \leq \frac{(r(P)+1)}{2}$.

(SYM) L'ensemble ordonné P est partitionnable en chaînes symétriques.

Avant d'en venir aux implications entre ces conditions avec la Figure 6, nous définissons une importante classe d'ensembles ordonnés partitionnables en chaînes symétriques, constituée des produits directs de chaînes, généralisation immédiate des treillis booléens. Pour h ensembles ordonnés $P_1 = (X_1, \leq_1), ..., P_i = (X_i, \leq_i), ..., P_h = (X_h, \leq_h)$, on appelle *produit direct des* P_i et l'on note $P = \Pi_{1 \leq i \leq h} P_i$ l'ensemble ordonné $P = (X, \leq_P)$ défini par $X = \Pi_{1 \leq i \leq h} X_i$ et $(x_1, ..., x_i, ..., x_h) \leq_P (x'_1, ..., x'_i, ..., x'_h)$ si, pour tout $i = 1, ..., h$, $x_i \leq_i x'_i$.

[7]Un ensemble ordonné biparti sans sommet isolé $P = (X + Y, \leq)$ est dit *régulier* si chaque élément de X est couvert par le même nombre k d'éléments de Y, tandis que chaque élément de Y couvre le même nombre k' d'éléments de X.

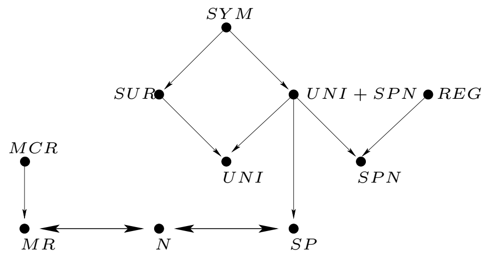


FIGURE 6. Ordre d'implications entre propriétés d'ensembles ordonnés

Lorsque, pour tout $i \leq h$, P_i est un ensemble totalement ordonné de cardinalité c_i, P est un *produit direct de chaînes.* On note alors $P = \underline{c_1} \times ... \times \underline{c_i} \times ... \times \underline{c_m}$ où, pour tout $i = 1, ..., m$, c_i est un entier au moins égal à 2 et où $\underline{c_i}$ est la chaîne $\{0 < 1 < ... < c_{i-1}\}$ à c_i éléments. Il n'est pas difficile de voir que le rang $r(P)$ d'un tel ensemble ordonné P vaut $(\Sigma_1^n c_i) - n$.

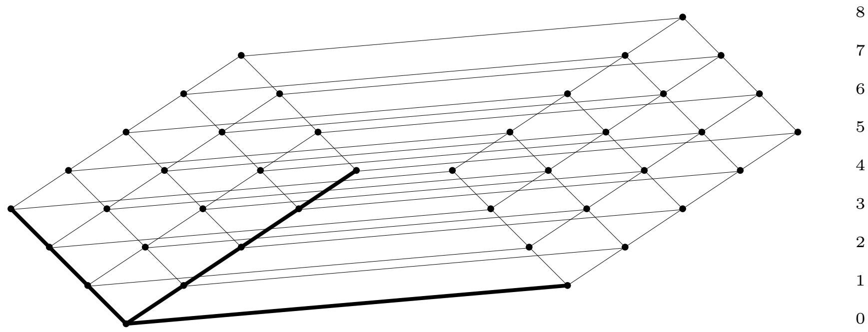


FIGURE 7. $P = \underline{2} \times \underline{4} \times \underline{5}$ de rang 8

La dernière section du texte expose un cas simple et réel d'utilisation des produits directs de chaînes.

La Figure 6 représente un diagramme de l'ordre d'implications entre propriétés (dessiné du haut vers le bas et où les double-flèches traduisent l'équivalence entre deux conditions) ; on y lit par exemple que les produits directs de chaînes vérifient la propriété de Sperner *(SP)*, puisqu'ils sont partitionnables en chaînes symétriques (en effet, tout produit direct d'ensembles ordonnés partitionnables en chaînes symétriques l'est aussi). Des preuves de ces implications sont données dans [Caspard, Leclerc, Monjardet, 2007].

Remarque : on note que, prises séparément, les conditions (UNI) ou (SPN) ne garantissent pas la propriété *(SP)* de Sperner.

7. ENSEMBLES ORDONNÉS FORTEMENT DE SPERNER

Parmi les ensembles ordonnés de Sperner, il en existe qui vérifient une condition plus forte encore et que l'on appelle *ensembles ordonnés fortement de Sperner.* Afin de définir précisément ces derniers, il nous faut parler des *q-antichaînes*. Une q-antichaîne de P est une partie $A \subseteq P$ qui s'obtient comme union d'au plus q antichaînes de P. En d'autres termes, A est une q-antichaîne de P si $A \cap C \leq q$ pour toute chaîne C de P.

DÉFINITION 5. *Soit P un ensemble ordonné.*

- *P est* q-Sperner *si le cardinal maximum d'une q-antichaîne de P est égal à la somme des cardinaux de ses q plus grands niveaux,*
- *P est* fortement de Sperner *s'il est q-Sperner pour tout q.*

Dans son article [Leclerc, 1997], Bruno enrichit les résultats existant sur les ensembles ordonnés fortement de Sperner en énonçant un théorème de caractérisation des q-antichaînes de cardinalité maximale d'un ensemble ordonné P parmi toutes les q-antichaînes de P. Ce théorème lui permet ensuite de déduire des démonstrations unifiées pour un certain nombre de conditions déjà connues impliquant qu'un ensemble ordonné est fortement de Sperner.

En reprenant les définitions et notations données en page 29 pour la famille $\mathcal{R}$ de h chaînes maximales et les nombres $\rho_{\mathcal{R}}(x)$ et $\rho_{\mathcal{R}}$, et en ajoutant que l'on pose $\rho_{\mathcal{R}}^{max} = max_{x \in P} \rho_{\mathcal{R}}(x)$, on donne les définitions suivantes :

DÉFINITION 6. *Soit P un ensemble ordonné, q un entier compris entre 1 et $\kappa(P)$ et A une q-antichaîne de P. La famille $\mathcal{R}$ de h chaînes maximales est* A-discriminante *si elle vérifie les deux conditions suivantes :*

(D1) $\Sigma_{x \in A} \rho_{\mathcal{R}}(x) = qh$,

(D2) $\rho_{\mathcal{R}}^{max}(A) \leq \rho_{\mathcal{R}}(P \setminus A)$.

On peut réexprimer de manière équivalente chacune des conditions $(D1)$ et $(D2)$. En effet, puisqu'une chaîne ne peut avoir plus de q de ses éléments dans A, $(D1)$ équivaut à avoir $|A \cap C_i| = q$, pour tout $1 \leq i \leq h$. Quant à la condition $(D2)$, elle est vraie si et seulement s'il existe un entier constant $c > 0$ tel que [pour tout $x \in A, \rho_{\mathcal{R}}(x) \leq c$ et, pour tout $x \in P \setminus A, \rho_{\mathcal{R}}(x) \geq c$].

Le théorème s'énonce alors ainsi :

THÉORÈME 9 (Leclerc, 1997). *La cardinalité d'une q-antichaîne A d'un ensemble ordonné P est maximale si et seulement si P possède une famille A-discriminante de chaînes.*

Ce théorème induit directement une caractérisation des ensembles ordonnés q-Sperner par l'existence d'une famille A_q-discriminante de chaînes de P, où A_q désigne l'union des q niveaux de plus grands cardinaux dans P. Il a en outre pour corollaire une caractérisation générale des ensembles ordonnés fortement de Sperner (Corollaire 1) et, pour $q = 1$, il permet de retrouver l'équivalence entre les propriétés (SP) de Sperner et (MR) du Théorème 8 – équivalence qui avait déjà été obtenue dans [Monjardet, 1976].

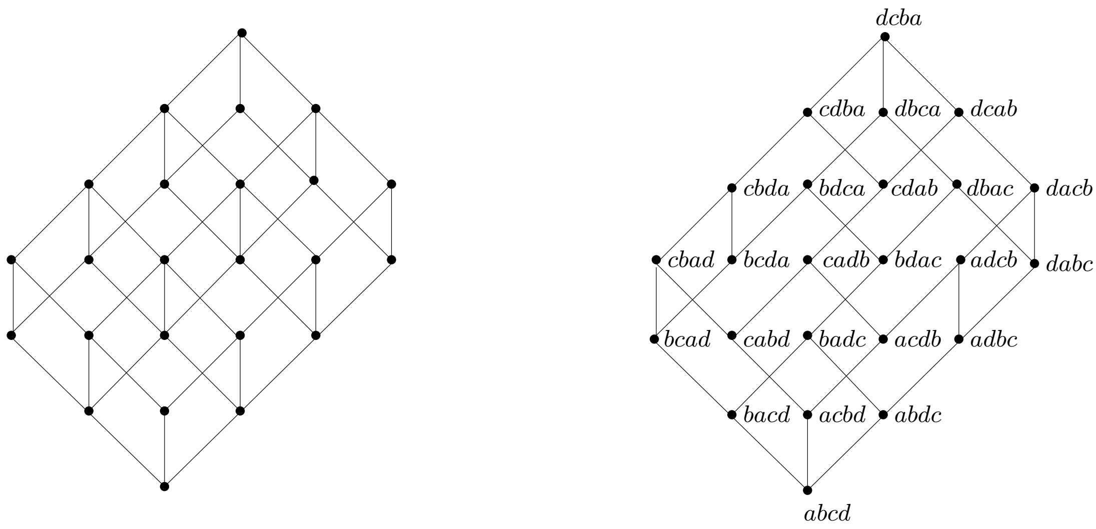
COROLLAIRE 1. *Soit P un ensemble ordonné rangé. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- *P est fortement de Sperner,*
- *Pour tout $q = 1, ..., \kappa(P)$, il existe dans P une famille A_q-discriminante de chaînes.*

8. AUTOUR DES TREILLIS DE COXETER

Claude Le Conte de Poly-Barbut a montré dans [Le Conte de Poly-Barbut, 1990] que, pour tout $n > 1$, le Permutoèdre S_n – c'est-à-dire l'ensemble ordonné des permutations défini par l'ordre faible (de Bruhat) sur le groupe symétrique A_{n-1} – est un sous-ensemble ordonné couvrant du produit direct de chaînes $\underline{2} \times \underline{3} ... \times \underline{n}$, et est donc rangé. Elle a prouvé en outre que S_n conserve les mêmes niveaux que ce produit.

La Figure 8 montre des diagrammes du produit direct de chaînes $\underline{2} \times \underline{3} \times \underline{4}$ et de son sous-ensemble ordonné couvrant S_4. Ces dessins sont repris de l'article [Le Conte de Poly-Barbut, 1990].



(a) (b)

FIGURE 8. (a) Le produit $P = \underline{2} \times \underline{3} \times \underline{4}$ et (b) le treillis S_4

Plus généralement, les groupes symétriques $(A_n)_{n \geq 1}$ constituent l'une des quatre classes infinies de groupes finis de Coxeter. Un *groupe de Coxeter* est un groupe G d'élément neutre e et admettant un système de générateurs $S \subset G$ tel que $(ss)^2 = e$ pour tout $s \in S$ (tous les générateurs ont 2 pour ordre) et où, pour tous $s \neq s' \in S$, il existe un entier $m(s, s') \geq 2$ vérifiant $(ss')^{m(s,s')} = (s's)^{m(s',s)} = e$.

Les groupes de Coxeter peuvent être finis ou infinis. Un groupe de Coxeter est dit *irréductible* s'il n'est pas isomorphe à un produit direct de groupes de Coxeter. Les groupes finis irréductibles de Coxeter sont classés en quatre classes infinies, A_n,

B_n (groupes des permutations signées), D_n (groupes des permutations doublement signées) et I_n (goupes diédraux), et six groupes isolés E_6, E_7, E_8, F_4, H_3 et H_4.

L'ordre faible sur les groupes de Coxeter satisfait de nombreuses et fortes propriétés. En 1984, Björner démontrait dans [Björner, 1984] que cet ordre est un treillis pour les Coxeter finis (et un inf demi-treillis pour les Coxeter infinis), généralisant ainsi un résultat de [Guilbaud et Rosenstiehl, 1963] sur le Permutoèdre.

Dix ans plus tard, Claude montrait dans [Le Conte de Poly-Barbut, 1994] que les treillis de Coxeter finis sont *semidistributifs*[8], ce qui est une propriété algébrique très forte des treillis.

Encore dix ans plus tard[9], nous précisions ce résultat dans [Caspard, Le Conte de Poly-Barbut, Morvan, 2004] en prouvant que les treillis de Coxeter finis satisfont une propriété impliquant la semidistributivité : ils sont *bornés*. Un treillis est borné s'il peut être construit à partir du treillis $\underline{2}$ à 2 éléments par une suite finie de *duplications* d'intervalles, où dupliquer un intervalle dans un treillis T consiste à le remplacer dans T par son produit direct avec la chaîne $\underline{2}$ à 2 éléments, construisant ainsi un nouveau treillis « plus gros ».

Revenons en 1984. Cette année-là et parallèlement à son résultat sur la structure (semi-)latticielle de l'ordre faible sur les groupes de Coxeter, Björner conjecturait la propriété suivante sur tous les treillis finis de Coxeter :

Tout treillis de Coxeter fini est partitionnable en chaînes symétriques.

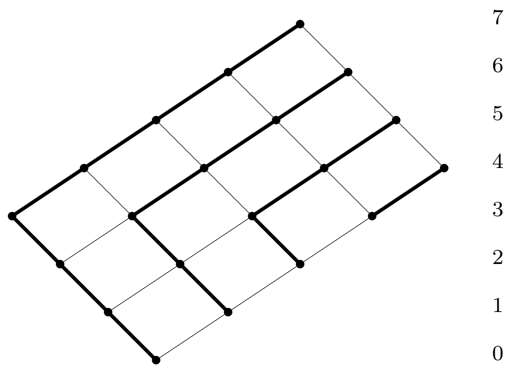


FIGURE 9. Une partition en chaînes symétriques du produit direct $\underline{4} \times \underline{5}$

Après dix ans de vie, et alors que la semidistributivité des treillis de Coxeter était découverte, la conjecture passa de vie à trépas par le biais du treillis de Coxeter à 120 éléments et connu sous le nom de H_3, pour lequel Bruno démontra le résultat négatif suivant :

THÉORÈME 10 (Leclerc, 1994). *Le treillis associé au groupe de Coxeter fini H_3 n'est pas partitionnable en chaînes symétriques.*

[8]Indépendamment et la même année, Duquenne et Cherfouh prouvaient ce résultat sur les treillis des permutations [Duquenne et Cherfouh, 1994].

[9]Rendez-vous est pris pour 2014...

N.B. Le lecteur trouvera la preuve de ce théorème dans le papier d'origine bien entendu mais également dans l'article [Le Conte de Poly-Barbut, Caspard, 2010] publié dans ce même numéro et consacré entièrement aux treillis de Coxeter.

La Figure 10 propose un dessin du graphe de Cayley de H_3, patiemment dessiné par André Lentin, le mentor de Claude. La Figure 11 montre quant à elle le résultat – un peu en ruines à force d'être manipulé – d'un puzzle 3D de H_3 imaginé, conçu et monté par Claude.

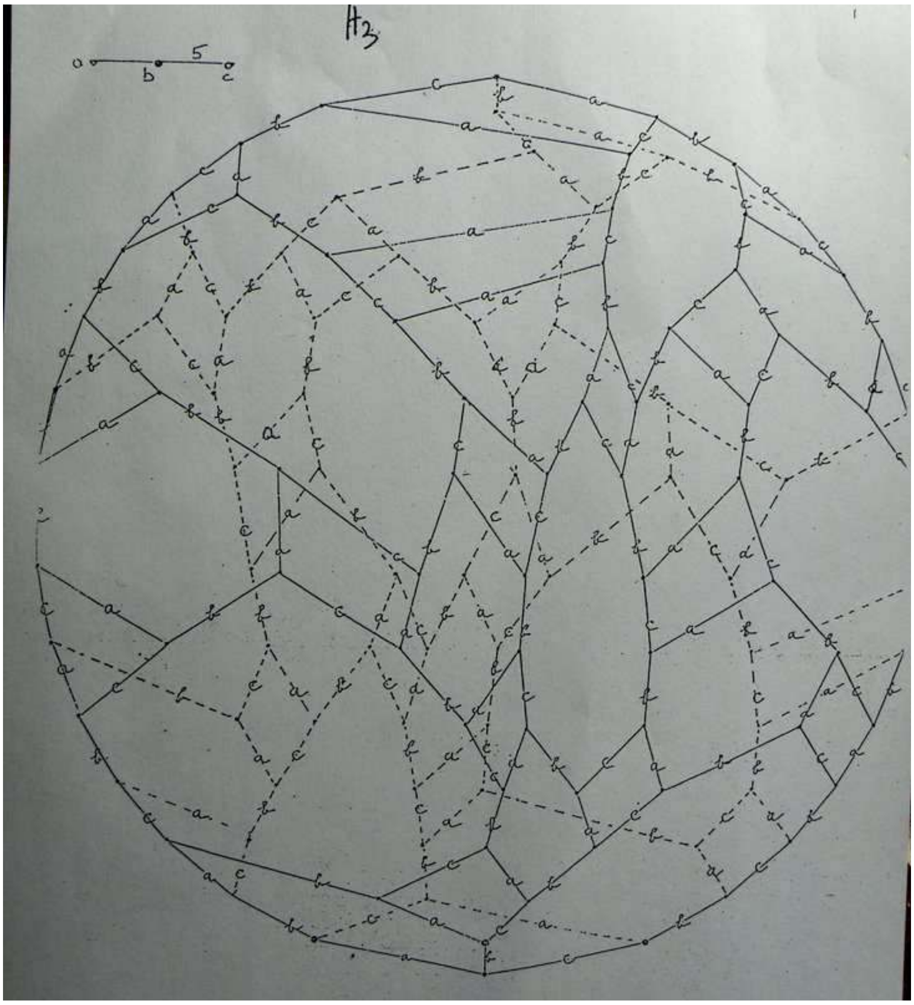


FIGURE 10. Le coupable en 2D

Ajoutons pour finir cette section que, dans le même papier de 1994, Bruno utilise un théorème important de Griggs [Griggs, 1980] caractérisant les ensembles ordonnés fortement de Sperner parmi les ensembles ordonnés rangés unimodaux pour démontrer que, si H_3 n'est pas partitionnable en chaînes symétriques, il est tout de même fortement de Sperner.

Pour énoncer ce théorème, il est pratique de renommer les niveaux N_k d'un ensemble ordonné rangé P selon leurs cardinalités décroissantes (et arbitrairement pour les niveaux de même taille) : les niveaux de P sont ainsi désignés par $V_1, V_2, ..., V_{\kappa(P)}$ et leurs cardinalités respectives $\nu_1, \nu_2, ..., \nu_{\kappa(P)}$ de sorte que, pour tout $k = 1, ..., \kappa(P)$,

FIGURE 11. Le coupable en 3D

$\nu(P) = \nu_1 \geq \nu_2 \geq ... \geq \nu_{\kappa(P)}$. Avec ces notations, le théorème de Griggs s'exprime comme suit :

THÉORÈME 11 (Griggs, 1980). *Un ensemble ordonné rangé P unimodal est fortement de Sperner si et seulement si il vérifie la condition suivante : pour tout $k = 1, ..., \kappa(P)$, il existe ν_{k+1} chaînes disjointes de P ayant une intersection avec tous les niveaux $V_1, ..., V_{k+1}$.*

COROLLAIRE 2 (Leclerc, 1994). *Le treillis associé au groupe de Coxeter fini H_3 est fortement de Sperner.*

9. DÉTERMINATION D'UNE ANTICHAÎNE : UN EXEMPLE D'USAGE

Dans [Caspard, Leclerc et Monjardet, 2007], les auteurs évoquent un exemple d'usage des produits de chaînes issu de [Pichon et al., 1994]. Dans le domaine de l'extraction de connaissances – et plus précisément, celle des règles de décision d'un expert – Pichon et ses co-auteurs supposent que des objets sont décrits par m attributs, chacun de ces attributs correspondant à une échelle ordinale (donc à une chaîne) $\underline{c_i}$ à c_i éléments (avec $i = 1, ..., m$). L'univers des possibles est alors décrit par le produit de chaînes $P = \underline{c_1} \times ... \times \underline{c_i} \times ... \times \underline{c_m}$, de rang $r(P) = (\Sigma_{1 \leq i \leq m} c_i) - m$.

Un expert sélectionne des objets (en rouge dans l'exemple ci-dessous) de telle façon que, si l'objet e est choisi, il en est de même de tout objet e' supérieur à e dans P, tandis que, si e n'est pas choisi, tout objet e' inférieur à e ne l'est pas non plus.

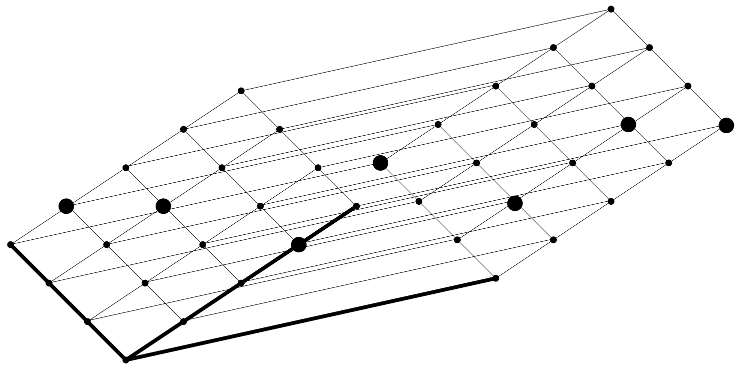


FIGURE 12. Sélection d'objets particuliers dans $P = \underline{2} \times \underline{4} \times \underline{5}$

Autrement dit, l'ensemble des objets choisis constitue une partie finissante F de P (*i.e.*, $x \in F$ et $x < y$ impliquent $y \in F$) et ceux qui ne le sont pas la partie commençante C (*i.e.*, $x \in C$ et $y < x$ impliquent $y \in C$) complémentaire de F dans P.

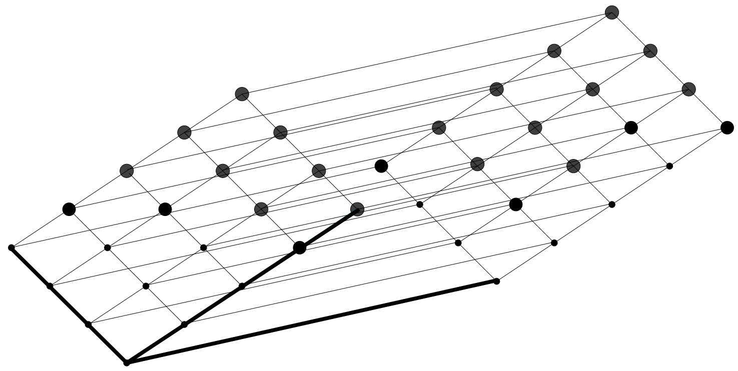


FIGURE 13. Les sommets en gras forment la partie finissante F de P définie par ces objets

La détermination de l'antichaîne A des éléments minimaux de F révèlera les règles de décision de l'expert, qu'il pourrait par ailleurs être difficile de lui faire expliciter par lui-même.

Cette détermination a été effectivement recherchée dans un contexte d'expertise relatif à l'octroi de prêts bancaires.

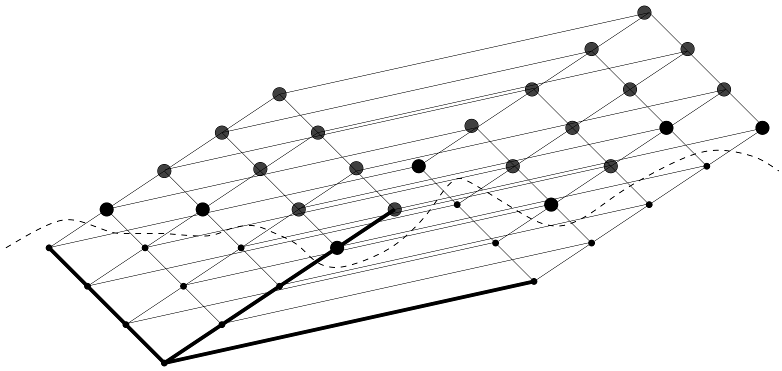


FIGURE 14. Apparition des règles de décision de l'expert

Remerciements. L'auteur souhaite remercier Olivier Cogis pour la lecture incisive et rigoureuse qu'il a faite de cet article, permettant ainsi d'en extraire un certain nombre de coquilles fourbes et d'en améliorer de façon notable le contenu, dans sa forme et son fonds. Merci également à Bernard Monjardet pour sa relecture et ses commentaires bienvenus.

BIBLIOGRAPHIE

AIGNER M. (1979), *Combinatorial Theory*, Berlin, Springer-Verlag.

BJÖRNER A. (1984), "Orderings of Coxeter groups, in: Combinatorics and Algebra", C. Greene (ed.), *Contemporary Mathematics* 34, Providence (R.I.), American Mathematical Society, p. 75-195.

CASPARD N., LECLERC B., MONJARDET B. (2007), « Ensembles ordonnés finis : concepts, résultats et usages », collection *Mathématiques et Application* 60, Springer.

DILWORTH R.P. (1950), "A decomposition theorem for partially ordered sets", *Annals of Mathematics* 51, p. 161-166.

DUQUENNE V., CHERFOUH A. (1994), "On permutation lattices", *Mathematics and Social Sciences* 27, p. 73-89.

ERDÖS P. (1945), "On a lemma of Littlewood and Offord", *Bulletin of American Mathematical Society* 51, p. 898-902.

FORD L.R., FULKERSON D.R. (1962), *Flows in Networks*, Princeton, Princeton University Press.

GRIGGS J.R. (1980), "On chains and Sperner k-families in ranked posets", *Journal of Combinatorial Theory* Series A 28, p. 156-168.

GUILBAUD G.Th, ROSENSTIEHL P. (1963), « Analyse algébrique d'un scrutin », *Mathématiques et Sciences humaines* 4, p. 9-33.

KATONA G.O.H. (1966), "On a conjecture of Erdös and a stronger form of Sperner's theorem", *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica*, p. 59-63. [MR 205864].

KLEITMAN D. (1965), "On a lemma of Littlewood and Offord on the distribution of certain sums", *Mathematische Zeitschrift* 90, p. 251-259.

LECLERC B. (1990), « Sur le nombre d'éléments des niveaux des produits de chaînes et des treillis permutoèdres », *Mathématiques, Informatique et Sciences humaines* 112, p. 37-48.

LECLERC B. (1994), "A finite Coxeter group the weak Bruhat order of which is not symmetric chain", *European Journal of Combinatorics* 15, p. 181-185.

LECLERC B. (1997), "Families of chains of a poset and Sperner properties", *Discrete Mathematics* 165/166, p. 461-468.

LE CONTE DE POLY-BARBUT C. (1990), « Le diagramme du permutoèdre est intersection des diagrammes de deux produits d'ordres totaux », *Mathématiques, Informatique et Sciences humaines* 112, p. 49-53.

LE CONTE DE POLY-BARBUT C. (1994), « Sur les treillis de Coxeter finis », *Mathématiques, Informatique et Sciences humaines* 125, p. 41-57.

LE CONTE DE POLY-BARBUT C., CASPARD N. (2010), « Les treillis de Coxeter », *Mathématiques et Sciences humaines* 190, p. 41-57.

LITTLEWOOD J.E., OFFORD C. (1943), "On the number of real roots of a random algebraic equation" (III), *Mat. Sbornik (Rec. Math.) N.S.* 12, p. 277-285.

MONJARDET B. (1976), « Caractérisations et propriété de Sperner des treillis distributifs planaires finis », *Problèmes Combinatoires et Théorie des Graphes*, Colloques internationaux du C.N.R.S. 260, Paris, éditions du C.N.R.S., p. 297-300.

PICHON E., LENCA Ph., GUILLET F., WANG J.W. (1994), « Un algorithme de partition d'un produit direct d'ordres totaux en un nombre minimum de chaînes », *Mathématiques et Sciences humaines* 125, p. 5-15.

SPERNER E. (1928), "Ein Satz über Untermengen einer endlichen Meng", *Mathematische Zeitschrift* 27, p. 544-548.

WELSH D.J.A. (1976), *Matroid theory*, Londres, Academic Press.

FIGURE 15. Bruno, Bernard *et al.*

ANNEXE : RÉSUMÉ POUR BRUNO LECLERC

Il était une fois un **village** pas si lointain, où l'**ordre** régnait, où tout était bien **rangé**. L'ordre était assuré – le fait est assez rare pour être mentionné – de façon **bipartie** par un ancien cardinal, dit **« Le Clerc »**, et un ex-taulard dont la rencontre avec Le Clerc avait changé la vie en le libérant de ses **chaînes**. Cet homme, **Littlewood-Offord**, qui avait donc réglé ses problèmes, avait par la suite sympathisé avec un musicien, **dit « Le Worth »**, qui **recouvrait** tous les soirs le village d'une douce musique, née des **partitions** qu'il composait lui-même. Le **produit** de ces trois personnalités n'aurait été **parfait** s'il n'avait été également enrichi par l'arrivée du Père Nère, dit **« Sperner »**, dont la **largeur** d'esprit était si **étendue** qu'elle fichait les **Boole** à bien des habitants envieux. Cet homme eut bientôt une grande **famille** et installa sur tous les murs extérieurs de sa maison des **treillis** pour y faire pousser des fleurs, symbole de liberté **antichaînes**. De cette histoire, vraie de toutes pièces, et de la puissante imagination de ses personnages, sont nés de jolis résultats mathématiques.

Mais ça, c'est une autre histoire...