REVUE FRANÇAISE DE PÉDAGOGIE

Revue française de pédagogie
Recherches en éducation

155 | avril-juin 2006
La motivation scolaire : approches récentes et perspectives pratiques

Apprentissage de schémas et résolution de problèmes en SEGPA

Learning drawings and problem solving in SEGPA

Aprendizaje de esquemas y resolución de problemas en SEGPA

Schemenlernen und Problemenlösung in der SEGPA[*]

Jean-Pierre Levain, Philippe Le Borgne et Arnaud Simard

Édition électronique
URL : http://journals.openedition.org/rfp/252
DOI : 10.4000/rfp.252
ISSN : 2105-2913

Éditeur
ENS Éditions

Édition imprimée
Date de publication : 1 juin 2006
Pagination : 95-109
ISBN : 978-2-7342-1047-4
ISSN : 0556-7807

Référence électronique
Jean-Pierre Levain, Philippe Le Borgne et Arnaud Simard, « Apprentissage de schémas et résolution de problèmes en SEGPA », *Revue française de pédagogie* [En ligne], 155 | avril-juin 2006, mis en ligne le 25 novembre 2010, consulté le 01 mai 2019. URL : http://journals.openedition.org/rfp/252 ; DOI : 10.4000/rfp.252

Apprentissage de schémas et résolution de problèmes en SEGPA

Jean-Pierre Levain, Philippe Le Borgne, Arnaud Simard

Cet article traite de la résolution de problèmes mathématiques chez une population d'adolescents en situation d'échec scolaire. Dans un premier temps, un questionnaire est proposé à deux ans d'intervalle au même groupe d'élèves. L'évolution de la réussite moyenne de ces élèves est loin d'être aussi significative que l'on pourrait le souhaiter. À partir de cette observation, les auteurs décident d'évaluer l'impact d'un protocole d'aide à la résolution de problèmes basé sur l'apprentissage et l'analyse de schémas représentant les différentes classes de problèmes. Les résultats sont significatifs et soulignent l'intérêt et la portée de la démarche didactique proposée.

Descripteurs (TEE) : apprentissage, arithmétique, échec scolaire, éducation spécialisée, résolution de problème, transposition didactique

INTRODUCTION

Ce travail de recherche est issu de la rencontre de plusieurs problématiques que nous avons développées ces dernières années. Tout d'abord deux enquêtes, concernant la résolution de problèmes au collège, nous ont permis de mieux spécifier la conceptualisation progressive des notions de proportionnalité, d'agrandissement et d'échelle (Levain, 1997). Outre l'émergence de profils cognitifs bien différenciés entre groupes d'élèves, ce travail nous a également permis d'analyser les réussites et les échecs en fonction, d'une part des catégories de problèmes et, d'autre part de la nature des schèmes mobilisés par les sujets. D'emblée, il se dégage de l'analyse statistique qu'un nombre important de collégiens, entre 30 et 40 % de notre population, semble installé plus ou moins durablement dans un échec massif (1) (pourcentage élevé de non-réponses, temps de réflexion très court, impulsivité, éventail très restreint de procédures, confusion et interférence entre structures additives et structures multiplicatives, fort impact des aspects sémantiques superficiels dans le choix des procédures). Dans un deuxième temps, nous avons expérimenté pendant deux ans, un protocole d'aide à la résolution de problèmes tant additifs que multiplicatifs dans quatre classes de CM1 et CM2 (Levain, 2000). Ce protocole prenait appui sur un travail d'apprentissage et d'analyse de schémas représentant les principales classes de situations susceptibles d'être traitées à la fin du cycle primaire. Nous avons montré que l'apprentissage et l'utilisation de schémas, considérés comme des représentations graphiques isomorphes aux différentes structures de problèmes, constituent bien, sous certaines conditions, un outil de médiation efficace qui facilite la compréhension et améliore notablement les performances de bon nombre d'élèves.

Ces différents éléments de recherche nous ont permis d'engager un travail de plusieurs années en direction des élèves de Section d'enseignement général et professionnel adapté (SEGPA) (2). Dans un premier temps, nous avons essayé d'évaluer, à partir d'une méthodologie : « test re-test », les progrès accomplis sur une période de deux années. Pour ce faire, nous avons proposé deux fois à deux ans d'écart un questionnaire de dix-neuf problèmes à quarante et un élèves issus de quatre classes de SEGPA (respectivement en sixième ou cinquième puis en quatrième ou troisième). Enfin, nous avons tenté d'évaluer, en SEGPA, l'impact d'un travail didactique d'apprentissage qui associe à chaque énoncé une présentation graphique des différentes classes de problèmes, tant additifs que multiplicatifs. Cette présentation s'appuie sur différents schémas de problème qui visent à faciliter le travail d'abstraction de la structure mathématique sous-jacente ainsi que l'identification des relations pertinentes nécessaires au traitement de la situation.

CADRE THÉORIQUE ET HYPOTHÈSES

Nos résultats précédents soulignent l'importance et la complexité de tout un ensemble de variables psychologiques, didactiques et expérimentales qui interviennent tout au long du processus d'analyse, de compréhension et de résolution des problèmes proposés. La modification d'une seule de ces variables, par exemple la prise en charge des algorithmes opératoires par le recours systématique à des calculatrices (Levain, 2000), influe de manière radicale sur le niveau de performance (3). Il importe donc de bien spécifier nos orientations aussi bien méthodologiques qu'épistémologiques.

Nous nous situons dans une perspective constructiviste liée, pour une bonne part, à la théorie des champs conceptuels (Vergnaud, 1991). Cette théorie, qui se situe à l'interface de la psychologie cognitive, de la psychologie sociale et de la didactique, analyse le développement des connaissances chez l'enfant et l'adulte sous trois aspects bien imbriqués : la catégorisation des différentes situations, la description et l'analyse des schèmes mis en œuvre par le sujet, l'étude de ses principales représentations symboliques.

La catégorisation des différentes situations.

Nous nous appuyons, pour réaliser notre questionnaire, sur une analyse exhaustive des différentes classes de problèmes tant additifs que multiplicatifs. Cette catégorisation prend en compte l'analyse des concepts mathématiques impliqués ainsi que l'identification des principales opérations de pensée nécessaires au traitement des données pertinentes de l'énoncé (Vergnaud, 1982 & 1983). Nous avons également fait le choix d'associer situations additives et multiplicatives (4). La bipartition fréquemment opérée par les chercheurs entre structures additives et multiplicatives répond davantage à une logique de recherche qu'à la réalité des apprentissages dans laquelle les secondes s'imbriquent nécessairement dans les premières tout en interférant avec elles.

La description et l'analyse des schèmes mis en œuvre par le sujet

Le concept de schème a été introduit par Jean Piaget dans le cadre de sa théorie opératoire du développement (Piaget, 1927, 1936 & 1947). Il traduit l'organisation invariante des conduites d'un sujet relativement à une classe de situations. Claude Bastien (1987) en a souligné tout l'intérêt dans l'analyse de l'activité cognitive de l'enfant. Gérard Vergnaud (1985 & 1991), à travers son travail d'analyse du schème en quatre composantes indissociables (invariants opératoires de différentes sortes, inférences, règles d'action, attentes et prédictions) a sans doute contribué, de manière décisive, à en faire un concept central de la psychologie cognitive fonctionnelle. Aujourd'hui encore, cet aspect nous semble insuffisamment reconnu notamment dans le domaine des activités numériques et de la résolution de problèmes.

L'analyse des schèmes nous paraît être pour le chercheur un outil particulièrement bien adapté à la description des procédures bonnes ou mauvaises développées par les élèves. La résolution d'un problème dépendra directement de l'ensemble des schèmes mobilisés par le sujet. Deux cas sont alors possibles : si le problème proposé est familier à l'élève, il pourra activer tout un ensemble de schèmes disponibles en mémoire et constituant sa procédure de résolution. Par contre si le problème comporte une part d'éléments nouveaux, l'élève devra alors mobiliser et coordonner différents schèmes, déjà utilisés dans des situations qu'il considère comme proches ou analogues, de manière à les ajuster au mieux aux caractéristiques de la tâche. Pour qu'une aide efficace puisse être mise en place, il importe donc qu'un sous-ensemble des schèmes mobilisés par le sujet soit déjà globalement pertinents et efficaces de manière à permettre la compréhension et le traitement d'une partie de la tâche. S'il n'est pas possible de mobiliser ces quelques schèmes parfois primitifs, mais qui gardent un degré de pertinence, alors l'ampleur du travail de guidage peut vite sembler trop conséquente pour être géré dans le cadre de la classe. Pour certains élèves de SEGPA, largement en échec, de nombreux schèmes même primitifs semblent déficients. Du coup, il devient difficile d'analyser avec eux les effets et les conséquences des calculs qu'ils mettent en œuvre (5).

L'étude des principales représentations symboliques

C'est par l'intermédiaire de représentations graphiques relativement épurées (les schémas de problèmes) que nous souhaitons provoquer un travail de coordination et d'ajustement de l'ensemble des schèmes mobilisés par l'élève afin qu'il les adapte progressivement de manière plus effective aux caractéristiques de la tâche. Nous pensons en effet que l'utilisation de schémas peut contribuer à faciliter le raisonnement des élèves. Tout en fixant plus clairement la place de l'inconnue, les représentations graphiques utilisées condensent l'information pertinente et facilitent l'identification des différents opérateurs. Nous sommes néanmoins très vigilants, tout au long de notre travail didactique, à utiliser prioritairement les schémas comme des supports de réflexion et de discussion mis à la disposition des élèves et pas comme des ensembles de représentations plus ou moins canoniques de tel ou tel type de problèmes qu'il conviendrait d'apprendre par cœur et de reproduire comme tels. L'essentiel reste bien de faire des mathématiques et non, comme le souligne Pierre Belmas (2003, p.186) de « substituer des outils de médiation à des objets d'enseignement ».

APPRENDRE DES SCHÉMAS DE PROBLÈMES

Le concept de « schémas de problèmes » est fréquemment invoqué pour analyser tout un ensemble de fonctions cognitives : structuration des représentations, construction progressive d'une « mémoire de problèmes », abstraction de la structure mathématique sous-jacente aux textes d'énoncé ou encore transfert analogique et catégorisation. Dans le cadre de la psychologie des apprentissages, ce concept reste particulièrement polysémique puisqu'il renvoie aussi bien à l'analyse des problèmes et à la classification exhaustive des tâches (Carpenter & Moser, 1982 ; Vergnaud, 1982 & 1983) qu'à des modèles cognitifs précisant la construction et l'organisation des connaissances en mémoire (Riley, Greeno & Heller, 1983 ; Kintsch & Greeno, 1985). Le terme de schéma peut traduire également une simple représentation graphique (schéma ou dessin) fournie ou construite par l'élève et qui sert de support à son propre raisonnement (Nesher, 1988 ; Willis & Fuson, 1988 ; Fisher, 1993 ; Belmas, 2003).

Jean Julo (1995), dans une tentative d'explicitation, en précise les deux idées principales : les schémas seraient des objets cognitifs structurés sous forme de « blocs » ou d'ensembles d'éléments indissociables mais pas nécessairement disjoints les uns des autres (un élément pouvant appartenir à plusieurs schémas) ; les schémas assureraient une fonction assimilatrice et constitueraient de la sorte des mécanismes actifs de reconnaissance et d'assimilation des informations (proximité avec le concept de schème).

Dans le cadre de notre recherche, l'apprentissage de schémas nécessite l'élaboration de situations d'apprentissage qui, avant de faciliter le traitement des problèmes, peuvent se révéler coûteuses pour les élèves du point de vue de la charge cognitive qu'elles induisent (6). Sweller (Sweller, 1994 ; Sweller *et al.*, 1998, cité par Gaonac'h & Fradet, 2003) distingue en ce sens une charge cognitive « associée » qui augmente lorsque les situations d'apprentissage sont structurées pour favoriser la schématisation, d'une charge cognitive externe inhérente aux activités didactiques et dans lesquelles les tâches sont peu contraignantes du point de vue de la construction de schémas. La conception de dispositifs didactiques adaptés impliquerait une nécessaire « négociation » entre ces deux aspects.

PRÉSENTATION DE LA PREMIÈRE EXPÉRIMENTATION

Nous avons construit un questionnaire de dix-neuf problèmes additifs et multiplicatifs que nous avons fait passer, à deux années d'écart, à la même population de quarante et un élèves issus de quatre classes de SEGPA. La première passation a eu lieu dans le courant du mois de janvier 2000 lorsque les élèves étaient en classe de sixième ou de cinquième ; la seconde au mois de mai 2002 alors qu'ils étaient en quatrième ou troisième. L'écart entre les deux passations est donc de deux ans et quatre mois.

Le questionnaire se composait de six problèmes additifs et de treize problèmes multiplicatifs. Concernant les premiers, nous avons privilégié les situations de transformation reliant deux mesures, ainsi que les problèmes de composition entre deux transformations, beaucoup plus complexes (Vergnaud, 1982). La difficulté de la tâche dépendra, pour une bonne part, de la structure du problème, de la nature des valeurs numériques, ainsi que de la place de l'inconnue ou du caractère positif ou négatif de la transformation (Vergnaud, 1981). En ce qui concerne les situations multiplicatives, nous avons utilisé exclusivement des problèmes nécessitant une multiplication, une division (de type un ou deux (7), Vergnaud, 1983), ou encore des situations de recherche d'une quatrième proportionnelle en faisant varier autant que faire se peut les structures de problème, les valeurs numériques impliquées, ainsi que la position de l'inconnue. Quelques exemples de problèmes sont présentés dans les tableaux I et II.

ANALYSE DES RÉSULTATS DE LA PREMIÈRE EXPÉRIMENTATION

Le tableau III synthétise les résultats obtenus. Les deux premières colonnes traduisent, pour les deux enquêtes, les pourcentages de réussite des élèves de notre population respectivement aux problèmes additifs puis multiplicatifs. La troisième colonne indique, toujours pour nos deux enquêtes, les pourcentages de réussite des mêmes élèves à l'ensemble des dix-neuf problèmes proposés (six additifs et treize multiplicatifs). En un peu plus de deux années, le pourcentage de réussite des élèves est passé de 54 % à 59 %. L'amélioration est de neuf points pour les problèmes additifs proposés et de seulement trois points en ce qui concerne les problèmes multiplicatifs.

Le gain global de cinq points nous semble très faible au regard de la double dimension : apprentissage (importance du travail en mathématiques mené dans les classes) et développement (le raisonnement proportionnel est censé croître avec l'âge).

Tableau I. — **Exemples de problèmes additifs**

Transformation reliant deux mesures :

Le vol n° 9 d'Air France Europe fait escale à Lyon avant de se poser à Marseille.

Il y avait 93 passagers dans l'avion, il en monte 38 à Lyon, aucun ne descend.

Combien y a-t-il de passagers avant l'atterrissage à Marseille ?

Composition entre deux transformations :

François a joué aux billes à la récréation du matin et à celle de l'après-midi.

À la récréation du matin, il a gagné 9 billes.

Le soir, quand il compte ses billes, il s'aperçoit qu'il en a perdu 4 sur l'ensemble de la journée.

Que s'est-il passé pendant la récréation de l'après-midi ?

Tableau II. — **Exemples de problèmes multiplicatifs**

Multiplication :

Une école commande 6 ordinateurs.

Le prix d'un ordinateur est 5 286 francs.

Combien l'école doit-elle payer ?

Division de type 1 :

Françoise achète des croissants aux amandes.

7 croissants aux amandes coûtent 42 francs.

Combien coûte un croissant aux amandes ?

Division de type 2 :

Une école paye 2 964 francs pour l'entrée au cinéma de ses élèves.

Une place de cinéma coûte 39 francs.

Combien d'élèves sont allés au cinéma ?

Recherche d'une quatrième proportionnelle :

5 gommes coûtent 12 francs.

Combien coûtent 9 gommes ?

Tableau III. — **Pourcentages de réussite aux deux catégories de problèmes**

	Problèmes additifs	Problèmes multiplicatifs	Ensemble des problèmes
Enquête 2000	69 %	47 %	54 %
Enquête 2002	78 %	50 %	59 %
Évolution :	+ 9 points	+ 3 points	+ 5 points

Tableau IV. — **Répartition des élèves en trois classes**

Évolution < – 4 points	– 4 points évolution – 4 points	Évolution > + 4 points
11 élèves	9 élèves	21 élèves

L'analyse des résultats souligne, qu'entre 2000 et 2002, les écarts pour chaque élève sont très hétérogènes et s'échelonnent d'une amélioration de soixante-huit points à une régression de trente-deux points. Le tableau IV illustre la répartition des élèves en trois classes : vingt et un élèves progressent d'au moins cinq points ; neuf élèves stagnent ; onze élèves régressent d'au moins cinq points.

Seulement la moitié des élèves de notre population progresse. Nous retrouvons bien ici, toute l'hétérogénéité des performances inhérente aux classes spécialisées. Ces résultats nous confortent dans l'idée de l'importance qu'il peut y avoir à mener, avec les élèves de SEGPA, un travail spécifique et davantage ciblé sur la résolution de problèmes.

PRÉSENTATION DE LA DEUXIÈME EXPÉRIMENTATION

Nous reprenons, pour cette deuxième expérimentation, le schéma général de notre protocole (Levain, 2000) illustré à la figure 1.

Il s'agit d'une méthodologie de type groupe expérimental – groupe contrôle avec un pré-test nous permettant de construire les deux groupes et un post-test d'évaluation de nos résultats. Nous avons construit, pour ces deux épreuves (pré-test et post-test), un seul questionnaire (annexe A) en tout point comparable au précédent (8). Nous y avons adjoint quatre problèmes supplémentaires. Le n° 20 traduit une recherche de quatrième proportionnelle. Il s'ajoute aux problèmes n^{os} 4, 11 et 17 et nous permet de croiser la nature simple ou complexe du rapport avec le type de rapport fonction ou scalaire (Levain & Vergnaud, 1995) comme illustré à la figure 2 :

Les trois derniers problèmes (n^{os} 21, 22 et 23) nécessitent de programmer des calculs plus complexes. Ils n'ont pas été travaillés au cours de la phase didactique. L'ordre de présentation des problèmes est aléatoire hormis les trois premiers qui sont toujours les plus simples de manière à ce

Figure 1. — **Déroulement de l'expérience**

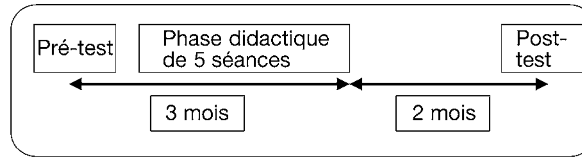
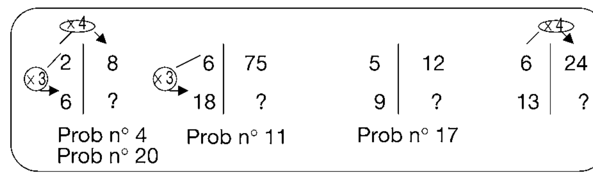


Figure 2. — **Type et nature des rapports dans les problèmes de recherche d'une quatrième proportionnelle**

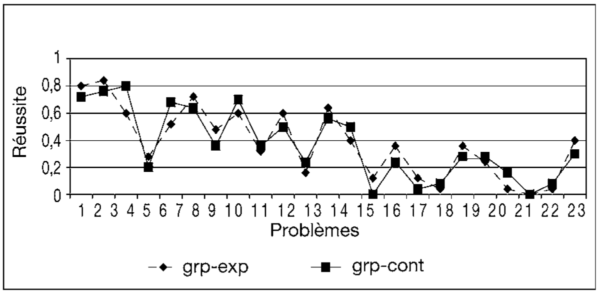


qu'aucun élève ne soit d'emblée en échec. Des calculettes sont fournies aux élèves et utilisées tout au long du travail (pré-test, phase didactique, post-test).

PRÉ-TEST ET CONSTITUTION DES GROUPES

Nous avons soumis notre questionnaire, sous forme de pré-test, à six classes de SEGPA (trois de sixième et trois de cinquième). Nous avons minutieusement analysé les résultats des élèves item par item de manière à construire un appariement entre sujets. Un élève de chaque paire constituée est affecté au groupe expérimental, l'autre au groupe contrôle. Les élèves qui ne peuvent être appariés dans de bonnes conditions participent à l'expérimentation, mais ne sont pas retenus dans cette étude (9). Cette méthodologie qui consiste à isoler des paires de sujets « cognitivement semblables » au regard de notre épreuve est assez exigeante puisque nous prenons en compte une double proximité entre moyenne des réponses et similarité des protocoles. De plus, toute absence d'un sujet du groupe expérimental à une seule des séances de la phase didactique entraîne l'élimination de la paire (lui et son correspondant) du tableau des résultats. Nos deux groupes se composent de vingt-cinq sujets qui réussissent 37 % des problèmes. La figure 3 représente les courbes de réussite des deux groupes à chacun de nos vingt-trois problèmes. Elle illustre notre souci de construire deux groupes réellement équivalent :

Figure 3. — **Pré-test**



PRÉSENTATION DE LA PHASE DIDACTIQUE

Le travail didactique spécifique comporte cinq séances, deux d'une heure suivies de trois d'une heure trente. Il est réalisé en petits groupes de quatre à six élèves, afin de privilégier l'argumentation mathématique dans les échanges. La constitution de ces groupes de travail a pris en compte le taux de réussite des élèves au pré-test de façon à réduire l'hétérogénéité des niveaux au sein des groupes. Un expérimentateur prend en charge un groupe avec lequel il conduit le travail tout au long des cinq séances qui s'échelonnent sur une durée de deux mois. Les élèves disposent systématiquement de calculettes qu'ils utilisent s'ils en éprouvent le besoin. Au cours de ces séances de travail, l'enseignant n'intervient pas directement. Différents documents lui sont néanmoins proposés de manière à ce qu'il puisse prolonger le travail entre chacune des séances de la phase didactique.

Les deux premières séances exploitent sous forme de jeu une situation adaptée du manuel *Ermel CM2* (10) qui propose de calculer des valeurs équivalentes en euros et en dollars à partir d'une équivalence donnée (100 € = 125 $). Il s'agit tout d'abord de mettre en correspondance terme à terme deux séries d'étiquettes sur lesquelles sont inscrites différentes valeurs en dollars et en euros : 125 $, 250 $, 375 $, 25 $ et 100 €, 200 €, 300 €, 20 €. La même situation est ensuite réinvestie, certaines étiquettes ne correspondant pas entre elles. L'objectif de ces séances est de s'appuyer sur les connaissances des élèves relevant du champ des problèmes multiplicatifs pour mettre en évidence et réactiver au besoin les procédures de linéarité et éventuellement le retour à l'unité. Le tableau de proportionnalité est alors introduit (par collage des différentes étiquettes) comme schéma permettant de structurer les résultats obtenus.

La troisième séance de travail est centrée sur la résolution de problèmes à supports textuels (annexe B). Ces problèmes peuvent être représentés par des schémas traduisant la plupart des relations additives et multiplicatives de base, telles qu'elles ont été analysées par Gérard Vergnaud dans le cadre de la théorie des champs conceptuels (Vergnaud, 1982 & 1983). Les tâches de résolution présentent des difficultés très inégales selon les valeurs numériques en jeu. Durant cette séance, l'expérimentateur propose différents schémas dans le but d'aider la visualisation et l'identification des opérateurs en jeu et de favoriser l'analyse des différentes procédures mises en œuvre.

La quatrième séance privilégie un travail de mise en correspondance entre schémas et énoncés. Elle se poursuit par la résolution des problèmes proposés puis par une discussion générale à l'intérieur de chacun des groupes. La figure 4 est une réduction d'un document de travail qui illustre la première partie de cette séance.

Les élèves sont invités à associer chaque énoncé de problème au schéma lui correspondant. Les valeurs numériques des différents problèmes additifs et multiplicatifs sont respectivement les mêmes (« 50,25 et 130,5 » et « 2304 et 4 ») de manière à induire un véritable travail de reconnaissance et d'analyse des différentes classes de problèmes.

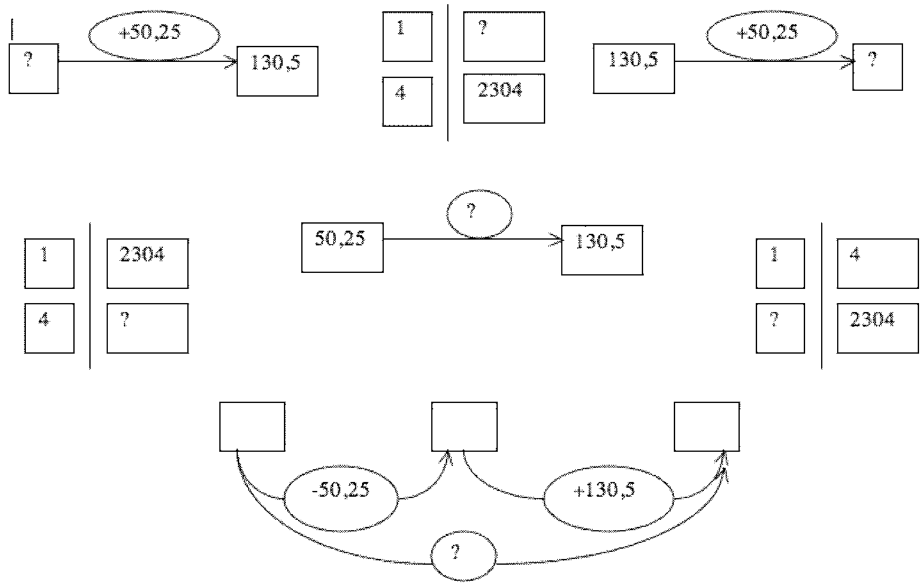
Au cours de la cinquième séance, les élèves doivent construire des énoncés de problèmes correspondants à différents schémas qui leur sont fournis (annexe C). La séance inclut le travail de résolution des problèmes construits. Plusieurs énoncés différents ont pu être produit pour un même schéma. Le débat issu de ce constat permet de mieux mettre en évidence la structure des différents problèmes.

ANALYSE DES RÉSULTATS DE LA DEUXIÈME EXPÉRIMENTATION

Les problèmes n^{os} 21, 22 et 23 sont considérés comme complexes (quatrième colonne du tableau n° 5). Les items n^{os} 21 et 22 traduisent une structure mixte (additive et multiplicative). Le problème n° 23 représente une relation statique entre deux mesures. Ils n'ont pas été directement travaillés au cours de la phase didactique.

À la lecture du tableau V, les résultats du groupe expérimental apparaissent nettement supérieurs à ceux

Figure 4. — **Réduction d'un document de travail**



A/ Un magasin vend 4 ordinateurs pour 2 304 euros. Quel est le prix d'un ordinateur ?

B/ Hier Pierre avait 50,25 euros à la banque. Aujourd'hui il a 130,25 euros. Combien a-t-il reçu ?

C/ Un scooter coûte 2304 euros. Combien coûtent 4 scooters ?

D/ À la fin de son stage, Annie reçoit 50,25 euros. Elle dispose maintenant de 130,5 euros. Combien avait-elle avant de recevoir l'argent du stage ?

E/ Paul a 130,5 euros à la banque. Son père lui donne 50,25 euros. Combien a-t-il maintenant ?

F/ En septembre le niveau d'eau d'une citerne baisse de 50,25 litres. En octobre, il augmente de 130,5 litres. Pour ces deux mois, le niveau a-t-il monté ? Baissé ? et de combien ?

G/ Un supermarché achète un lot de calculatrices pour 2 304 euros. Une calculatrice coûte 4 euros. Combien le supermarché a-t-il acheté de calculatrices ?

Tableau V. — **Pourcentages de réussite aux différents types de problèmes**

	Problèmes additifs	Problèmes multiplicatifs	Problèmes complexes	Ensemble des problèmes
Groupe expérimental	58 %	65 %	36 %	59 %
Groupe contrôle	47 %	43 %	16 %	40 %
Différence	11 points	22 points	20 points	19 points

du groupe contrôle (59 % de réussite contre 40 %) et ce pour tous les types de problèmes proposés.

Le tableau VI souligne, de manière évidente, la supériorité du groupe expérimental sur le groupe contrôle pour pratiquement l'ensemble des items.

L'écart de réussite entre nos deux groupes est de onze points en ce qui concerne les problèmes additifs, de vingt-deux points pour les problèmes multiplicatifs et de 20 points pour les trois derniers problèmes jugés plus complexes.

Tableau VI. — **Résultats au post-test**

Problèmes	n° 1	n° 2	n° 3	n° 4	n° 5	n° 6	n° 7	n° 8	n° 9	n° 10	n°11	n°12
Grp expé	92 %	96 %	8 %	56 %	72 %	84 %	72 %	88 %	56 %	76 %	60 %	72 %
Grp cont	76 %	72 %	7 %	36 %	64 %	64 %	60 %	68 %	48 %	60 %	20 %	52 %
Problèmes	n° 13	n° 14	n° 15	n° 16	n° 17	n° 18	n° 19	n° 20	n° 21	n° 22	n°23	**Total**
Grp expé	76 %	16 %	28 %	44 %	48 %	56 %	40 %	44 %	8 %	36 %	64 %	**59 %**
Grp cont	44 %	4 %	28 %	32 %	16 %	36 %	20 %	16 %	0 %	8 %	40 %	**40 %**

Tableau VII. — **Pourcentages de réussite aux différentes catégories de problèmes multiplicatifs**

Problèmes	Multiplication	Division de type 1	Division de type 2	Quatrième proportionnelle
Grp expé	87 %	49 %	58 %	52 %
Grp cont	65 %	33 %	46 %	21 %
Écart	22 points	16 points	12 points	31 points

En ce qui concerne les problèmes additifs, nous pouvons distinguer les situations de transformation reliant deux mesures (problèmes n^{os} 3, 5 et 9) et les problèmes de composition entre deux transformations (n^{os} 12, 15 et 19). Concernant les problèmes de transformation reliant deux mesures, la réussite est de 61 % (groupe contrôle) et de 69 % (groupe expérimental). Elle est assez élevée pour les deux groupes puisque ces problèmes sont les plus simples. Ces résultats expliquent à eux seuls la moindre importance de l'écart de onze points entre nos deux groupes pour l'ensemble des problèmes additifs. En ce qui concerne les problèmes de composition entre deux transformations, le pourcentage de réussite est cette fois de 47 % pour le groupe expérimental et de 33 % pour le groupe contrôle (quatorze points d'écart). Ces problèmes sont, pour nos élèves, particulièrement complexes. Les schémas apparaissent ici particulièrement utiles. Ils permettent de condenser l'information pertinente et de calculer la transformation (par des essais successifs) en testant des hypothèses concrètes concernant les états initial, intermédiaire ou final alors même que l'absence de ces valeurs contribue grandement à la difficulté de ce type de situations.

Nous pouvons distinguer, pour les problèmes multiplicatifs, ceux dont la résolution implique une multiplication (n^{os} 1, 2, 6, 8 et 13), ceux qui nécessitent une division de type 1 (n^{os} 10, 14 et 18), ceux faisant appel à une division de type 2 (n° 7 et 16) et enfin les problèmes de recherche d'une quatrième proportionnelle déjà présentée à la figure n° 2 (problèmes n^{os} 4, 11, 17 et 20). Un récapitulatif des résultats est présenté dans le tableau VII.

L'écart de réussite entre les deux groupes est important pour tous les types de problèmes multiplicatifs, particulièrement en ce qui concerne les situations de recherche d'une quatrième proportionnelle pour lesquelles l'écart de réussite est supérieur à trente points. Ces résultats renvoient sans doute à l'importance du travail didactique mené au cours des deux premières séances quant à l'introduction des tableaux de proportionnalité et des schémas multiplicatifs.

Il y a plusieurs années, nous insistions, déjà tout particulièrement, sur le fait que les problèmes nécessitant l'utilisation d'une seule multiplication ou division sont déjà des problèmes de proportionnalité et doivent être traités comme tels (Levain & Vergnaud, 1995). Ces problèmes simples ont véritablement une structure quaternaire (11) qu'il convient de présenter comme telle. Ils apparaissent alors comme des cas particuliers de la recherche d'une quatrième proportionnelle. La portée de cette représentation, qui découle de l'analyse des structures multiplicatives, reste aujourd'hui encore assez largement sous-estimée tant au cycle primaire que dans l'Adaptation et intégration scolaire.

CONCLUSION

Nous avons, dans un premier temps, tenté d'évaluer les progrès réalisés, sur plus de deux années, par un groupe de quarante et un élèves de sixième et cinquième de SEGPA à un questionnaire de dix-neuf problèmes additifs et multiplicatifs. Nous constatons que le niveau de maîtrise des différents sujets évolue de manière très hétérogène puisque seule la moitié de l'effectif progresse alors que plus du quart régresse (tableau IV). D'une manière générale, l'augmentation des performances reste très faible et semble en contradiction, d'une part avec l'importance du travail conduit en mathématiques dans ces classes spécialisées et, d'autre part avec le décalage de deux ans et quatre mois dans le développement cognitif de notre population adolescente. Ce travail mériterait bien évidemment d'être répliqué avec une population plus large. Ces résultats peuvent néanmoins traduire un effet d'émiettement des apprentissages ou encore un manque d'individualisation et de soutien (comment mieux prendre en compte et développer, pour chaque sujet, les procédures et les schèmes véritablement disponibles et adaptés aux tâches proposées ?).

Nous avons donc souhaité, dans un deuxième temps, évaluer l'impact d'un travail d'aide à la résolution de problèmes s'appuyant sur l'apprentissage et l'analyse de schémas représentant les principaux types de problèmes tant additifs que multiplicatifs. Pour ce faire, nous avons privilégié une typologie exhaustive des différentes classes de problèmes dans l'élaboration de notre questionnaire (Vergnaud, 1982 & 1983). Nous avons ensuite, dans notre travail avec le groupe expérimental, favorisé la présentation de schémas que nous avons utilisé principalement comme des supports de discussion facilitant le raisonnement des élèves. Nous avons enfin privilégié les aspects de médiation à l'adulte (un adulte par groupe de cinq élèves) ainsi que les débats entre pairs au sein des groupes restreints ainsi constitués (12).

Les résultats obtenus découlent du cadre didactique mis en place. Ils sont largement significatifs et confirment qu'il est possible d'améliorer notablement les performances de bon nombre d'élèves. Ces résultats sont par ailleurs cohérents avec notre expérimentation précédente avec des élèves de CM2 (Levain 2000). Ils nous permettent d'avancer plusieurs pistes de travail. Tout d'abord il nous semble particulièrement important de mettre en place, avec les élèves de SEGPA, de nombreuses situations de résolution de problèmes en faisant varier aussi bien les types de situations que la nature et la taille des différentes valeurs numériques. Dans ce cadre, l'usage régulier des calculatrices constitue un apport décisif pour de nombreux élèves qui maîtrisent mal les algorithmes opératoires, notamment celui de la division, tout en restant capables de comprendre le sens de cette opération. Le travail de discussion animé par un adulte dans chaque petit groupe pour analyser et comparer les procédures proposées, qu'elles soient valides ou non, nous a semblé grandement contribuer à l'obtention de nos résultats. Dans ce cadre, les schémas, comme autant de représentations isomorphes aux différentes structures de problème, peuvent avoir une double fonction. D'une part, ils semblent faciliter le travail de reconnaissance et de catégorisation ; ainsi les élèves du groupe expérimental distinguent mieux les structures additives des structures multiplicatives. D'autre part, les schémas sont progressivement investis par les élèves comme autant d'outils facilitant l'identification des différents opérateurs et l'analyse des procédures.

Jean-Pierre Levain
jean-pierre.levain@fcomte.iufm.fr
Institut universitaire de formation des maîtres
de Franche-Comté
Laboratoire de psychologie,
université de Franche-Comté

Philippe Le Borgne
philippe.leborgne@fcomte.iufm.fr
Institut universitaire de formation des maîtres
de Franche-Comté
Laboratoire de didactique des mathématiques,
université Paris 7-Denis Diderot

Arnaud Simard
arnaud.simard@fcomte.iufm.fr
Institut universitaire de formation des maîtres
de Franche-Comté
Laboratoire de mathématiques de Besançon,
université de Franche Comté

NOTES

(1) Pour ces élèves, les mathématiques ne sont pas ou plus perçues comme des outils permettant de résoudre des problèmes et de comprendre le réel, mais plutôt comme un ensemble de règles plus ou moins opaques qu'il convient de maîtriser pour réussir son parcours scolaire.

(2) Ces classes intégrées dans les collèges sont destinées à des élèves rencontrant des difficultés scolaires graves. Les enseignants sont spécialisés et proposent des parcours individualisés avec un objectif de qualification de niveau V.

(3) Ces résultats peuvent sans doute s'interpréter en termes de charge cognitive excessive en mémoire de travail (lire les textes, identifier les structures mathématiques, abstraire les schémas, identifier les opérateurs, programmer les calculs et exécuter les algorithmes opératoires).

(4) Les termes de structures additives et multiplicatives (Vergnaud, 1982 & 1983) font référence à l'ensemble des situations qui, pour être traitées, nécessitent l'utilisation d'une ou plusieurs additions et soustractions d'une part, d'une ou plusieurs multiplications ou divisions d'autre part.

(5) Les difficultés d'engagement dans la tâche et le maintien d'un niveau d'attention suffisant renforcent fréquemment cette difficulté.

(6) Cet aspect a été bien mis en évidence dans notre recherche concernant l'apprentissage de schémas à la fin du cycle 3. Une pré-expérience a souligné la nécessité de construire de nouvelles séquences didactiques mieux adaptées aux élèves de SEGPA et moins contraignantes du point de vue de la charge cognitive induite.

(7) Dans les problèmes nécessitant une division de type 1 (« division partition »), il s'agit fréquemment de rechercher la valeur unitaire d'un « objet » ; le diviseur représentant alors le nombre « d'objets ». Dans les problèmes impliquant une division de type 2 (« division quotition »), il s'agit très souvent de rechercher la quantité « d'objets » en jeu ; le diviseur représentant alors la valeur unitaire de « l'objet ».

(8) Les différentes structures de problèmes sont conservées ; tous les prix sont transformés en euros.

(9) La validité des plans d'expérience de type groupe expérimental - groupe contrôle, fréquemment utilisée en sciences de l'éducation, nécessite, selon nous, d'évaluer l'équivalence des groupes, non seulement à partir de scores moyens des élèves, mais aussi en termes de profil cognitif suite à une analyse approfondie des procédures à chaque item.

(10) Les ouvrages ERMEL sont des manuels écrits dans le cadre de recherches menées par l'Institut National de la Recherche Pédagogique (INRP) ; ils sont le fruit d'une collaboration entre chercheurs en didactique des mathématiques et enseignants du premier degré qui ont expérimenté les situations étudiées dans leur classe.

(11) Une des quatre quantités, souvent écrite en lettres, est égale à un ; par exemple au problème n° 2 : « Un collège commande 6 ordinateurs. Le prix d'un ordinateur est 1 287 euros. Combien le collège doit-il payer ? ». Cette structure quaternaire est fréquemment réduite aux trois termes de l'opération : « 1 287 X 6 = 7 722 ».

(12) Malgré la taille réduite à cinq des groupes, l'animation et la régulation des débats n'ont pas toujours été aisées. La présence d'un adulte par groupe nous a semblé nécessaire pour fréquemment désamorcer les nombreux conflits et recentrer autant que possible les échanges autour d'une dimension cognitive.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

BASTIEN C. (1987). *Schèmes et stratégies dans l'activité cognitive de l'enfant.* Paris : PUF.

BELMAS P. (2003). « Apprentissage de la proportionnalité et symbolisations chez des élèves en échec scolaire ». *Annales de didactique et sciences cognitives,* vol. 8, p. 167-189.

CARPENTER T. P. & MOSER J. M. (1982). « The development of addition and subtraction problem-solving skills ». In T. P Carpenter, J. M Moser & T. A. Romberg (éd.), *Addition and subtraction : a cognitive perspective*. Hillsdale : L. Erlbaum.

ERMEL (2001). *Apprentissages numériques et résolution de problèmes.* Paris : Hatier.

FISCHER J.-P. (1993). « La résolution de problèmes arithmétiques verbaux : proposition pour un enseignement proactif ». *Annales de didactique en sciences cognitives*, n° 5, p. 177-210.

GAONAC'H D & FRADET A (2003). « La mémoire de travail : développement et implication ». In M. Kail & M. Fayol (éd.), *Les sciences cognitives à l'école.* Paris : PUF, p. 93-150.

JULO J. (1995). *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques*. Rennes : Presses universitaires de Rennes.

KINTSCH Walter & GREENO J. G. (1985). « Understanding and solving word arithmetic problems ». *Psychological Review*, vol. 92, n° 1, p.109-129.

LEVAIN J.-P. & VERGNAUD G. (1995). « La proportionnalité simple et multiple ». *Grand N*, n° 56, p. 55-67.

LEVAIN J.-P. (2000). « Apprentissage de schémas et résolution de problèmes ». *L'orientation scolaire et professionnelle*, vol. 29, n° 3, p. 411-430.

LEVAIN J.-P. (1997). *Faire des maths autrement : développement cognitif et proportionnalité.* Paris : L'Harmattan.

NESHER P. (1988). « Multiplicative school word problems : theoritical approaches and empirical findings ». In J. Hiebert, & M. Behr (éd.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*. Hillsdale [NJ] : L. Erlbaum ; Reston [VA] : National Concil of Teachers of Mathematics, p. 19-40.

PIAGET J. (1927). *Causalité physique chez l'enfant*. Paris : F. Alcan.

PIAGET J. (1936). *La naissance de l'intelligence chez l'enfant*. Neuchâtel ; Delachaux & Niestlé.

PIAGET J. (1947). *La psychologie de l'intelligence.* Paris : A. Colin.

RILEY M. S *et al.* (1983). « Development of children's problem-solving ability in arithmetic ». In H. P. Ginsburg (éd.), *The development of mathematical thinkin.* New York : Academic Press.

Sweller, J. (1994). « Cogntive load theory, learning difficulty, and instructional design ». *Learning and Instruction*, vol. 4, n° 4, p. 295-312.

Sweller J. *et al.* (1998). « Cognitive architecture and instructional design ». *Educational Psychology Review*, vol. n° 10, n° 3, p. 251-296.

Vergnaud G. (1981). *L'enfant, la mathématique et la réalité.* Bern : P. Lang.

Vergnaud G. (1982). « A classification of cognitive task and operations of thought involved in addition and subtraction problems ». In T. P. Carpenter, J. M Moser & T. A Romberg (éd.), *Addition and subtraction : A cognitive perspective.* Hillsdale : L. Erlbaum.

Vergnaud G. (1983). « Multiplicative structures ». In R Lesh. and M. Landau (éd.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*. New York : Academic Press, p. 127-174.

Vergnaud G. (1985). « Concepts et schèmes dans une théorie opératoire de la représentation ». *Psychologie française*, vol. 30, n° 3, p. 245-252.

Vergnaud G. (1991). « La théorie des champs conceptuels ». *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 10, n° 2-3, p. 133-170.

Willis G. B. & Fuson K. C. (1988). « Teaching children to use schematic drawings to solve addition and subtraction word problems ». *Journal of Educational Psychology*, vol. 80, p. 192-201.

Annexe A : liste des vingt-trois problèmes constituant le pré-test et le post-test

n° 1

Nicolas achète 12 albums d'Astérix.

Le prix d'un album est de 9 euros.

Combien Nicolas doit-il payer ?

n° 2

Un collège commande 6 ordinateurs.

Le prix d'un ordinateur est 1287 euros.

Combien le collège doit-il payer ?

n° 3

Le vol n°9 d'Air France Europe fait escale à Lyon avant de se poser à Marseille.

Il y avait 93 passagers dans l'avion, il en monte 38 à Lyon, aucun ne descend.

Combien y a-t-il de passagers avant l'atterrissage à Marseille ?

n° 4

2 compas coûtent 8 euros.

Combien coûtent 6 compas ?

n° 5

Claire vient de recevoir 103,20 euros pour son stage professionnel.

En tout elle a maintenant 207,80 euros.

Combien avait-elle avant de recevoir l'argent de son stage ?

n° 6

Un professeur commande 38 mètres de grosse ficelle.

Le prix d'un mètre de ficelle est de 0,6 euro.

Combien le professeur doit-il payer ?

n° 7

Un collège paye 2 964 euros pour faire un voyage à Paris

Le prix du voyage est de 39 euros pour un élève.

Combien d'élèves sont allés en voyage à Paris ?

n° 8

Un cuisinier commande 6,25 kilogrammes de viande de bœuf.

Le kilogramme de viande de bœuf coûte 16 euros.

Combien le cuisinier doit-il payer ?

n° 9

Au départ de Besançon, le compteur kilométrique de la voiture de M André marque 72 930 kilomètres.

À son retour, son compteur marque 73460 kilomètres.

Combien de kilomètres M André a-t-il parcouru ?

n° 10

Pour la tombola du collège, Élodie achète 6 DVD de « taxi III ».

Les 6 DVD coûtent 108 euros.

Combien coûte un DVD ?

n° 11

6 ballons de foot coûtent 75 euros.

Combien coûtent 18 ballons de foot ?

n° 12

Nicolas a joué aux billes à la récréation du matin et à celle de l'après-midi.

À la récréation du matin, il a gagné 17 billes, à celle de l'après-midi, il en a gagné 8.

À la fin de la journée, a-t-il gagné ou perdu des billes et combien ?

n° 13

Un restaurateur achète 0,7 kilogramme de foie gras.

Un kilogramme de foie gras coûte 43 euros.

Combien le restaurateur doit-il payer ?

n° 14

Un poissonnier vend 0,7 kilogramme de coquilles Saint-Jacques pour 28 euros.

Combien coûte un kilogramme de coquilles Saint-Jacques ?

n° 15

Françoise a maigri de 4 kilogrammes au bout de deux années de régime.

La première année elle a maigri de 9 kilogrammes.

La deuxième année, Françoise a-t-elle maigri ou grossi et de combien ?

n° 16

Lundi midi, la cantine a servi pour 156 euros de repas.

Un repas coûte 6,5 euros.

Combien de repas la cantine a-t-elle servi lundi midi ?

n° 17

5 boîtes de feutres coûtent 12 euros.

Combien coûtent 9 boîtes de feutres ?

n° 18

Un centre de vacances achète des entrées au parc aquatique.

47 entrées coûtent 319,6 euros.

Combien coûte une entrée au parc aquatique ?

n° 19

La population de mon village a augmenté de 9 personnes en 2002.

En 2003 elle a diminué de 17 personnes.

Sur ces deux années, la population a-t-elle augmenté ou diminué et de combien ?

N° 20

6 classeurs coûtent 24 euros.

Combien coûtent 13 classeurs ?

N° 21

Un commerçant achète un lot de 36 casquettes pour 48 euros.

Il les vend à 6 euros la casquette.

Combien a-t-il gagné en tout ?

N° 22

Vidéoloc propose le système suivant :

Un abonnement annuel de 10 euros puis 2 euros par vidéo louée.

Je vais m'abonner chez eux pour louer 6 vidéos.

Combien dois-je payer ?

N° 23

Pascale pèse 58 kilogrammes.

Pascale pèse 7 kilogrammes de plus que Franck.

Combien Franck pèse-t-il ?

Annexe B : résolution de problèmes à supports textuels

15 boîtes de feutres coûtent 75 euros.
Combien coûtent 60 boîtes de feutres ?

Françoise achète 3 gâteaux pour 4,6 euros.
Il lui reste 12,2 euros dans son porte-monnaie.
Combien avait-elle avant d'acheter les gâteaux ?

Une classe de 27 élèves fait un voyage scolaire en train.
Le prix d'un billet est de 15,2 euros aller et retour par élève.
Quel est le prix du voyage en train pour toute la classe ?

Pierre a 276 euros à la banque.
Avec sa carte bancaire, il achète un CD à 18 euros.
Combien Pierre a-t-il maintenant à la banque ?

Un collège loue des VTT pour faire une randonnée. Il paye en tout 322 euros.
La location d'un vélo tout terrain coûte 14 euros.
Combien de VTT sont loués par le collège ?

Paul a gagné 6 billes hier.
Il en a perdu 9 aujourd'hui.
Que s'est-il passé en tout ?

Un supermarché achète un stock de barils de lessive pour 418,75 euros le tout.
Le prix d'un baril de lessive est de 6,25 euros.
Combien de barils de lessive le supermarché a-t-il commandé ?

Un pilote d'avion vole à une altitude de 1 225 mètres.
Pour éviter un orage, il passe à 3 250 mètres.
Est-il monté, descendu, de combien ?

7 grands classeurs coûtent 31,5 euros.
Combien coûtent 42 grands classeurs ?

Adeline pesait 64,600 kg avant de partir en vacances.
Au retour des vacances, elle pèse 69,350 kg.
Que s'est-il passé pendant les vacances ?

Annexe C : construction d’énoncés de problèmes

Mets le bon nombre à la place du « ? ». Trouve les opérateurs.

Écris un ou plusieurs énoncés de problème pour chaque schéma.