Philosophia Scientiæ
Travaux d'histoire et de philosophie des sciences

11-2 | 2007
Varia

La connexion syntaxique

Kazimierz Ajdukiewicz

Traducteur : Katarzyna Gan-Krzywoszyńska

Édition électronique
URL : http://journals.openedition.org/philosophiascientiae/344
DOI : 10.4000/philosophiascientiae.344
ISSN : 1775-4283

Éditeur
Éditions Kimé

Édition imprimée
Date de publication : 1 novembre 2007
Pagination : 97-120
ISBN : 978-2-84174-439-8
ISSN : 1281-2463

Référence électronique
Kazimierz Ajdukiewicz, « La connexion syntaxique », *Philosophia Scientiæ* [En ligne], 11-2 | 2007, mis en ligne le 30 juin 2011, consulté le 01 mai 2019. URL : http://journals.openedition.org/philosophiascientiae/344 ; DOI : 10.4000/philosophiascientiae.344

La connexion syntaxique

Kazimierz Ajdukiewicz
Traduction : Katarzyna Gan-Krzywoszyńska

Présentation

Kazimierz Ajdukiewicz (1890-1963) était un disciple direct de Kazimierz Twardowski, fondateur de l'Ecole de Lvov-Varsovie. Le texte de 1935 a été publié en allemand dans *Studia Philosophica* I, pp. 1-27 sous le titre « Die syntaktische Konnexität ». C'est l'un des travaux les plus importants de Kazimierz Ajdukiewicz et la théorie du langage en général, et plus particulièrement pour le développement de la linguistique mathématique. Ce texte est aussi considéré comme fondateur pour les grammaires catégorielles. Il a été traduit en polonais (publié dans *JĘzyk i poznanie* vol. I, Warszawa, 1960 (traducteur : Franciszek Zeidler)) et en anglais (dans « *The Scientific World-Perspective and Other Essays,* 1931-1963 »Dordrecht-Holland, Boston-USA, 1978 (traducteur : Horst Weber)). C'est ce texte polonais que nous avons traduit ici.

Avant toute chose, je souhaite remercier très sincèrement de son aide Monsieur le Docteur Piotr Leśniewski de l'Université Adam Mickiewicz de Poznań. Je suis aussi très reconnaissante à Monsieur Jean-Luc Gaspars de l'Université Adam Mickiewicz de Poznan, lequel a consacré beaucoup de temps à la correction de ma traduction. Mes remerciements vont tout particulièrement à Monsieur le Professeur Pierre Joray, de l'Université Rennes 1, pour ses remarques précieuses et précises, ainsi que pour toute l'attention qu'il a porté à une première version de cette traduction.

I

1. Suite à la découverte des antinomies et de leur mode de résolution, les problèmes de syntaxe linguistique sont devenus les plus importants en logique (le terme de logique étant entendu en un sens large, incluant également les recherches métathéoriques). Parmi ces problèmes, celui de la connexion syntaxique est le plus significatif pour la logique. Il s'agit d'établir les conditions sous lesquelles une combinaison de mots simples,

chacun possédant un sens, peut constituer une expression elle-même douée d'un sens unitaire, bien que composée des sens des mots qu'elle contient. Une telle combinaison de mots est dite syntaxiquement connectée.

Il en va ainsi par exemple de la suite de mots « Jean aime Anne » ; constituée de mots doués de sens de la langue française, elle appartient aux expressions pourvues de sens de cette langue. Par contre, l'expression « peut-être un cheval si sera cependant briller », bien que constituée de mots français ayant un sens, ne possède pas de connexion syntaxique et n'est pas une expression douée de sens de la langue française.

Il existe plusieurs solutions au problème de la connexion syntaxique. La théorie russellienne des types en est un exemple. Mais le concept de connexion syntaxique peut être appréhendé d'une manière particulièrement simple et élégante à l'aide de la théorie des catégories sémantiques élaborée par le Prof. Stanislaw Leśniewski[1].

Nous nous appuierons ici sur les résultats établis à ce sujet par Leśniewski et proposerons pour notre part une symbolisation applicable dans son principe à toutes les langues et permettant de définir et de vérifier d'une manière calculatoire la connexion syntaxique d'une combinaison de mots.

2. Le concept et l'expression « catégorie sémantique » ont été introduits pour la première fois par E. Husserl. Dans ses *Logische Untersuchungen,* Husserl[2] remarque que les mots simples et les expressions composées d'une langue peuvent être divisés en classes, de telle façon que deux mots ou expressions d'une même classe soient remplaçables réciproquement dans les contextes doués d'un sens unitaire et ceci sans que le contexte ainsi modifié ne devienne une suite incohérente et dénuée de sens unitaire, à l'opposé, deux mots ou expressions appartenant à des classes différentes ne possèdent pas cette propriété. A titre d'exemple de contexte possédant un sens unitaire, prenons la proposition « Le soleil brille ». Si dans cette proposition nous remplaçons le mot « brille » par « brûle », « siffle » ou « danse », nous obtiendrons d'autres propositions, vraies ou fausses, mais possédant à chaque fois un sens unitaire. En revanche, si à « brille » nous substituons « si », « vert » ou « peut-être », nous obtenons des suites incohérentes de mots. Les classes de mots ou expressions ainsi décrites sont ce que Husserl nomme des catégories sémantiques.

Nous voulons définir ce concept d'une manière un peu plus précise : le mot ou l'expression A, pris au sens x, et le mot ou l'expression B, pris au sens y, appartiennent à la même catégorie sémantique si et seulement s'il y a une proposition (respectivement fonction propositionnelle) S_A dans laquelle A a le sens x et qui, par le remplacement de A par B (avec le sens y) — remplacement conservant rigoureusement le sens des mots restants et la structure de Sa — donne lieu à une expression S_B qui est également une proposition (ou fonction propositionnelle).

L'échelonnement des catégories sémantiques est en relation étroite avec la hiérachie simple des types logiques, bien qu'il soit beaucoup plus ramifié que celle-ci. Fondamentalement, il constitue son pendant grammatico-sémantique[3].

Parmi toutes les catégories sémantiques, on peut distinguer deux genres que nous appellerons les catégories de base, d'une part, et les catégories de foncteurs de l'autre (le terme « foncteur » est de Kotarbinski, le concept et l'expression « catégorie de base » sont de moi). Malheureusement, nous ne pouvons pas définir ces concepts avec une précision acceptable. Il est cependant aisé de faire comprendre de quoi il s'agit. Le mot « foncteur » signifie la même chose que « signe de fonction », c'est un « symbole insaturé »,

« accompagné de parenthèses ». Les catégories de foncteurs sont toutes les catégories auxquelles appartiennent des foncteurs. Les catégories de base sont en revanche toutes celles qui ne sont pas des catégories de foncteurs.

De cette définition résulte directement que deux propositions quelconques appartiennent à la même catégorie sémantique. Les propositions n'étant évidemment pas des foncteurs, la catégorie sémantique des propositions appartient alors aux catégories de base. En dehors de la catégorie des propositions, il peut également y avoir d'autres catégories de base. Chez Leśniewski, une seule autre catégorie de base vient s'ajouter à celle des propositions. Il s'agit de la catégorie des noms, à laquelle appartiennent aussi bien les noms singuliers que les noms généraux. Si on compare la théorie simple des types et la théorie des catégories sémantiques, il convient de compter le type des propositions et le type des noms singuliers parmi les catégories de base. Tous les autres types relèveraient des catégories de foncteurs. Il semble que dans le langage ordinaire, les noms ne se rangent pas dans une seule et unique catégorie sémantique. A notre avis, on peut distinguer au moins deux catégories sémantiques parmi les noms du langage ordinaire : premièrement, il y a la catégorie regroupant les noms singuliers d'individus ainsi que les noms généraux d'individus, pour autant que ces derniers soient pris en *suppositione personali ;* deuxièmement, il y a la catégorie des noms généraux pris en *suppositione simplici* (i.e. les noms d'universaux).

Si on veut saisir le concept de connexion syntaxique dans sa stricte généralité, rien ne doit être décidé quant au nombre et au genre des catégories de base et fonctorielles, car elles peuvent différer d'une langue à l'autre. Cependant, à des fins de simplicité, nous nous limiterons aux langues dans lesquelles (comme chez Leśniewski) il n y a que deux catégories sémantiques de base : celle des propositions et celle des noms. À part ces deux catégories sémantiques de base, nous adopterons, suivant Leśniewski, une hiérarchie ramifiée et en principe illimitée vers le haut des catégories de foncteurs. Celles-ci se trouvent caractérisées selon un double critère : premièrement, par le nombre et les catégories sémantiques des arguments pris dans leur ordre ; deuxièmement, par la catégorie sémantique de l'expression entière, composée par asssociation avec les arguments. Ainsi, par exemple, les foncteurs constituant une proposition avec un nom comme argument formeraient une catégorie sémantique close ; les foncteurs constituant une proposition avec deux noms comme arguments formeraient une autre catégorie sémantique, etc. Les foncteurs constituant un nom avec un nom comme argument formeraient encore une autre catégorie sémantique. On aurait encore une autre catégorie sémantique avec les foncteurs formant une proposition et prenant pour argument une proposition (par exemple le signe « ~ » de la logistique), etc.

3. Nous admettons que la catégorie sémantique d'un mot simple se trouve déterminée par le sens de ce mot. Un index sera dès lors associé aux mots simples en fonction de la catégorie sémantique à laquelle ils appartiennent. En particulier, les mots simples de la catégorie des propositions seront accompagnés de l'index simple « s », ceux de la catégorie des noms de l'index simple « n ». Les mots simples n'appartenant pas à une catégorie de base mais à une catégorie de foncteurs recevront un index fractionnaire, composé d'un numérateur et d'un dénominateur. Au numérateur figurera l'index de la catégorie sémantique à laquelle appartient une expression composée du signe fonctionnel et de ses arguments. Au dénominateur, en revanche, figurera la suite des index des catégories sémantiques des arguments avec lesquels le foncteur peut constituer une

totalité douée de sens. Ainsi, par exemple, un mot constituant une proposition avec deux noms comme arguments recevrait l'index fractionnaire

$$\frac{s}{nn}.$$

De cette manière, chaque catégorie sémantique aurait un index caractéristique. La hiérarchie des catégories sémantiques se refléterait dans une série (loin d'être exhaustive) d'index de la forme suivante :

$$s,\ n,\ \frac{s}{n},\ \frac{s}{nn},\ \frac{s}{nnn},\ \ldots,\ \frac{s}{s},\ \frac{s}{ss},\ \frac{s}{sss},\ \ldots,\ \frac{s}{ns},$$

$$\frac{s}{sn},\ \ldots,\ \frac{s}{\frac{s}{n}},\ \frac{s}{\frac{s}{n}\frac{s}{n}},\ \ldots,\ \frac{n}{n},\ \frac{n}{nn},\ \frac{n}{sn},\ \ldots,\ \frac{\frac{s}{n}}{\frac{s}{n}}\ \text{etc.}$$

Pour illustrer cette symbolisation par index, prenons une proposition de la logistique, par exemple :

$$\sim p \supset p \,.\supset .\, p$$

En ajoutant aux mots simples leurs index, nous obtenons :

$$\begin{array}{cccccc} \sim & p & \supset & p\,. & \supset . & p \\ \frac{s}{s} & s & \frac{s}{ss} & s & \frac{s}{ss} & s. \end{array}$$

Quand nous voudrons appliquer la symbolisation par index au langage ordinaire, les catégories sémantiques que nous avons posées (d'après Leśniewski) risquent de ne pas être suffisantes puisque, comme il semble, les langues ordinaires sont plus riches en catégories sémantiques. De plus, la question de savoir à quelle catégorie sémantique un mot appartient est rendue plus difficile en raison des fluctuations de sens. Il est aussi parfois incertain de savoir ce qui doit être compté pour un mot. Pourtant, dans les cas simples et favorables, l'appareillage donné ci-dessus s'appliquera plutôt bien à l'usage linguistique, comme l'illustre l'exemple suivant :

le	lilas	sent	très	fort	et	la	rose	fleurit
$\frac{n}{n}$	n	$\frac{s}{n}$	$\frac{\frac{\frac{s}{n}}{\frac{s}{n}}}{\frac{\frac{s}{n}}{\frac{s}{n}}}$	$\frac{\frac{s}{n}}{\frac{s}{n}}$	$\frac{s}{ss}$	$\frac{n}{n}$	n	$\frac{s}{n}$

4. Dans chaque expression composée douée de sens se trouve désormais indiqué d'une manière ou d'une autre quelles sont les expressions qui apparaissent comme arguments et à quelles expressions, apparaissant comme foncteurs, elles se rapportent. Si le foncteur demande plusieurs arguments, il convient aussi d'indiquer lequel est le premier, lequel

est le second, etc. L'ordre des arguments joue un rôle essentiel ; les différences entre sujet et prédicat ou entre antécédent et conséquent d'une proposition hypothétique sont des cas particuliers de cette différence importante découlant de l'ordre des arguments. En règle générale, cet ordre n'est pas identique à celui dans lequel les arguments apparaissent dans l'expression. L'ordre des arguments n'est absolument pas purement structurel -i.e. relatif aux seuls aspects externes. Il est au contraire basé sur les propriétés sémantiques de l'expression entière. Il n'y a que dans les langages symboliques, ainsi que dans quelques langues ordinaires, que l'ordre des arguments correspond à celui strictement externe.

Pour indiquer les divers liens d'appartenance mutuelle entre les parties d'une expression, les langages symboliques s'appuient sur des conventions relatives à la « force d'application » de certains foncteurs ; ils recourent également à l'usage de parenthèses, ainsi qu'à l'ordre des mots. Dans le langage ordinaire, les liens sont marqués au moyen de l'ordre des mots, des flexions, des prépositions et des signes de ponctuation.

Une suite de mots dans laquelle ces liens d'appartenance ne sont pas ou pas complètement marqués reste dénuée de sens unitaire.

Dans chaque expression composée douée de sens, les liens d'appartenance entre les foncteurs et leurs arguments doivent être tels que l'expression puisse être divisée en des parties dont l'une est un foncteur (celui-ci pouvant être une expression composée) et les parties restantes ses arguments. Nous appelons ce foncteur le foncteur principal de l'expression concernée. (Nous devons le concept de foncteur principal, ainsi que l'idée de base de sa définition, à St. Leśniewski). Dans l'exemple logistique donné plus haut, le second signe d'implication constitue le foncteur principal de la proposition entière ; dans l'exemple en langage ordinaire, c'est le mot « et » qui est le foncteur principal. Lorsqu'on peut diviser une expression composée en un foncteur principal et ses arguments, nous dirons de cette expression qu'elle est bien structurée. Nous appellerons le foncteur principal d'une expression et ses arguments les *composants du premier degré* de cette expression. Si les composants du premier degré d'une expression A sont soit déjà des mots simples, soit des expressions composées bien structurées et telles qu'en descendant successivement jusqu'aux composants des composants et ensuite aux composants des composants des composants, etc. — en bref, jusqu'aux composants du n-ième degré — on ne rencontre ainsi que des mots simples ou des expressions bien structurées, alors nous dirons de A qu'elle est une expression entièrement bien structurée.

Soulignons que le langage ordinaire admet souvent des expressions elliptiques. Ainsi, il arrive parfois qu'une expression composée ayant un sens ne soit pas entièrement bien structurée lorsqu'on s'appuie uniquement sur les mots qu'elle contient explicitement. Il est cependant aisé d'établir le caractère entièrement bien structuré de l'expression si l'on introduit les mots omis et seulement sous-entendus. De plus grandes difficultés apparaissent lorsqu'une langue, comme par exemple l'allemand, admet des mots disjoints. Dans ce cas, le critère déterminant ce qui constitue un mot ne peut pas être donné de manière purement structurelle.

5. Etre entièrement bien structuré est une condition nécessaire, mais pas suffisante, pour qu'une expression composée ait un sens unitaire. Cette condition doit encore être complétée par d'autres. Pour qu'une expression entièrement bien structurée ait un sens, ses constituants d'un même ordre doivent aussi se correspondre mutuellement comme foncteur et argument. C'est-à-dire qu'à chaque composant du n-ième ordre apparaissant comme foncteur principal soit de l'expression entière, soit d'un composant du $(n — 1)$-

ième ordre de cette expression, il doit correspondre exactement autant de composants du *n*-ième ordre, appartenant aux catégories requises, que n'en demande la catégorie sémantique du ,foncteur pour qu'il puisse former avec eux une expression ayant un sens. Ainsi, par exemple, à un composant de la catégorie figurée par l'index

$$\frac{s}{ns}$$

(s'il apparaît comme foncteur principal) doivent correspondre, premièrement, deux arguments dont, deuxièmement, le premier est de la catégorie sémantique des noms et le second de la catégorie sémantique des propositions. Nous dirons d'une expression entièrement bien structurée qui satisfait à ces deux conditions qu'elle est syntaxiquement connectée.

Nous pouvons formuler ces conditions d'une autre manière et de façon plus précise à l'aide de notre symbolisation par index. Pour ce faire, nous devons introduire la notion d'exposant d'une expression. Notre explication passera tout d'abord par un exemple. Si nous prenons l'expression :

$$p \vee p \,.\supset .\, p$$

et que nous associons leurs index aux mots simples, nous obtenons :

$$\begin{array}{ccccccc} p & \vee & p & . \supset . & p \\ s & \frac{s}{ss} & s & \frac{s}{ss} & s. \end{array} \tag{A}$$

Maintenant, nous allons ordonner les composants de cette expression selon le principe suivant. Nous inscrivons d'abord le foncteur principal de l'expression entière et ensuite, successivement, son premier argument, puis son deuxième (s'il y a lieu, son troisième, son quatrième, etc). Nous obtenons alors :

$$\begin{array}{cccc} \supset, & p & \vee & p, \quad p \\ \frac{s}{ss} & s & \frac{s}{ss} & s \quad s. \end{array} \tag{B}$$

Si, dans cette suite, un composant est encore constitué d'un foncteur principal et de ses arguments, nous le divisons en ses constituants d'ordre immédiatement supérieur et ordonnons ceux-ci selon le même principe : d'abord le foncteur principal, puis le premier argument, le deuxième, etc.

Avec notre exemple, nous obtenons alors :

$$\begin{array}{ccccc} \supset, & \vee, & p, & p, & p \\ \frac{s}{ss} & \frac{s}{ss} & s & s & s. \end{array} \tag{C}$$

Si dans cette suite apparaissait encore un composant constitué de plusieurs mots, nous le décomposerions selon le même principe et poursuivrions cette procédure jusqu'à n'obtenir plus que des mots simples comme éléments de la suite. Une suite ainsi ordonnée et constituée des mots simples d'une expression est dite *suite propre* des mots de cette expression. Dans notre exemple, la suite propre des mots a déjà été atteinte à la seconde étape, i.e., (C) est la suite propre de l'expression (A). Si maintenant nous détachons les index des mots constituant la suite propre des mots d'une expression et que nous les écrivons dans le même ordre, nous obtenons ce que nous appelons la *suite propre des index* de l'expression concernée.

La suite propre des index de l'expression (A) revêt alors la forme suivante :

$$\frac{s}{ss}\,\frac{s}{ss}\,s\,s\,s. \tag{1}$$

Nous allons maintenant examiner si, en parcourant cette suite d'index de gauche à droite, nous pouvons trouver une séquence d'index constituée d'un index fractionnaire en première position, suivi immédiatement par exactement les mêmes index que ceux figurant au dénominateur de cet index fractionnaire. En présence d'une ou plusieurs séquences de cette sorte, nous effaçons la première d'entre elles (toujours en allant de gauche à droite) et la remplaçons, dans la suite des index, par le numérateur de l'index fractionnaire. La nouvelle suite d'index que nous obtenons de cette manière est appelée première dérivée de la suite propre des index de l'expression (A). Celle-ci se présente comme suit :

$$\frac{s}{ss}\,s\,s. \tag{2}$$

Cette première dérivée est constituée d'un index fractionnaire initial suivi directement par la même séquence d'index que celle figurant au dénominateur de cet index fractionnaire. Nous pouvons donc encore la transformer de la façon décrite et former la seconde dérivée, qui a ici la forme d'un index simple

$$s. \tag{3}$$

Cette deuxième dérivée est ici appelée dernière dérivée, car elle ne permet aucune dérivation supplémentaire.

Nous appelons *exposant d'une expression donnée* la dernière dérivée de la suite propre des index de cette expression.

s.

Nous allons encore déterminer l'exposant de la proposition du langage ordinaire que nous avons donnée à la page 102. Sa suite propre des index et ses dérivées successives se présentent de la manière suivante :

$$\frac{s}{ss}\ \frac{\frac{\frac{s}{n}}{\frac{s}{n}}}{\frac{\frac{s}{n}}{\frac{s}{n}}}\ \frac{\frac{s}{n}}{\frac{s}{n}}\ \frac{s}{n}\ n\ \frac{s}{n}\ n \qquad \text{(suite propre des index)}$$

$$\frac{s}{ss}\ \frac{\frac{s}{n}}{\frac{s}{n}}\ \frac{s}{n}\ \frac{n}{n}\ n\ \frac{s}{n}\ \frac{n}{n}\ n \qquad \text{(première dérivée)}$$

$$\frac{s}{ss}\ \frac{s}{n}\ \frac{n}{n}\ n\ \frac{s}{n}\ \frac{n}{n}\ n \qquad \text{(deuxième dérivée)}$$

$$\frac{s}{ss}\ \frac{s}{n}\ n\ \frac{s}{n}\ \frac{n}{n}\ n \qquad \text{(troisième dérivée)}$$

$$\frac{s}{ss}\ s\ \frac{s}{n}\ \frac{n}{n}\ n \qquad \text{(quatrième dérivée)}$$

$$\frac{s}{ss}\ s\ \frac{s}{n}\ n \qquad \text{(cinquième dérivée)}$$

$$\frac{s}{ss}\ s\ s \qquad \text{(sixième dérivée)}$$

$$s \qquad \text{(septième et dernière dérivée)}$$

Nous sommes désormais en mesure de poser la définition suivante : *une expression est syntaxiquement connectée* si et seulement si 1) elle est entièrement bien structurée, 2) à chaque foncteur qui se présente dans cette expression comme un foncteur principal d'un quelconque degré correspondent exactement autant d'arguments qu'il n'y a de lettres au dénominateur de son index, 3) l'exposant de l'expression est constitué d'un unique index[4] .

Ce dernier index peut se présenter sous la forme d'une simple lettre. Il peut cependant aussi être une fraction. Ainsi, par exemple, l'expression :

$$\begin{array}{ccc} \text{sent} & \text{très} & \text{joliement} \\ \frac{s}{n} & \frac{\frac{\frac{s}{n}}{\frac{s}{n}}}{\frac{\frac{s}{n}}{\frac{s}{n}}} & \frac{\frac{s}{n}}{\frac{s}{n}} \end{array}$$

dont la suite propre des index est :

$$\frac{\frac{\frac{s}{n}}{\frac{s}{n}}}{\frac{\frac{s}{n}}{\frac{s}{n}}}\ \frac{\frac{s}{n}}{\frac{s}{n}}\ \frac{s}{n}$$

a pour exposant l'index fractionnaire

s/n (insérer image)

Citons, comme exemple d'une expression qui n'est pas syntaxiquement connectée, la suite de mots suivante :

$$\begin{array}{cccccc} F & (\varphi) & :\equiv: & \sim & \varphi & (\varphi) \\ \\ \dfrac{\mathrm{s}}{\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{n}}} & \dfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{n}} & \dfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{ss}} & \dfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{s}} & \dfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{n}} & \dfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{n}}. \end{array}$$

Par dérivation à partir de la suite propre des index de cette expression, on obtient :

$$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{ss}} \quad \frac{\mathrm{s}}{\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{n}}} \quad \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{n}} \quad \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{s}} \quad \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{n}} \quad \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{n}} \qquad \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{ss}} \quad \mathrm{s} \quad \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{s}} \quad \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{n}} \quad \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{n}}$$

La première dérivée, qui est aussi la dernière, constitue l'exposant de l'expression. Cet exposant étant constitué de plusieurs index, l'expression considérée n'est donc pas syntaxiquement connectée. (La suite de mots examinée dans ce dernier exemple constitue la fameuse « définition » conduisant à l'antinomie russellienne de la classe des classes qui ne se contiennent pas elles-mêmes comme élément).

L'exposant d'une expression syntaxiquement connectée indique la catégorie sémantique à laquelle l'expression prise en entier appartient.

6. Un symbolisme qui associerait à chaque mot simple son index n'aurait besoin ni de parenthèses, ni d'autres moyens pour marquer la structuration de ses expressions syntaxiquement connectées (l'appartenance mutuelle des foncteurs et de leurs arguments). Il suffirait pour cela d'appliquer également à l'ordre des mots le principe strict régissant l'ordre des index dans la suite propre des index d'une expression. Cela signifie qu'il faudrait ordonner les mots de chaque expression composée de sorte que le foncteur principal soit toujours suivi successivement par son premier argument, son deuxième, etc.

Par exemple, la proposition qui s'exprime ainsi dans le symbolisme de Russell :

$$p\,.\,q\,.\supset.\,r \;:\equiv:\sim r\,.\,q\,.\supset\sim p \tag{A}$$

devrait, selon ce principe, s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{array}{l} \equiv\;\supset\;.\;p\,q\,r\;\overbrace{\supset}^{5}\;\overbrace{\overbrace{.\sim r\,q}^{3}\,\overbrace{\sim p}^{4}}^{1} \\ \\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{ss}}\;\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{ss}}\;\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{ss}}\;\mathrm{s\,s\,s}\;\underbrace{\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{ss}}\;\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{ss}}\;\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{s}}\;\mathrm{s\,s}\;\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{s}}}_{2}\;\mathrm{s} \end{array} \tag{B}$$

Quand le dénominateur de l'index d'un foncteur contient n index, nous le qualifions de foncteur *n*-aire. Nous pouvons alors dire que l'expression *A* est le *k*-ième argument du foncteur *n*-aire *F* dans l'expression *B* si et seulement si I. on peut extraire de *B* une partie *T* qui ne contient pas de lacunes, placée directement à droite de *F* et dont l'exposant est le même que le dénominateur de *F*, II. cette partie *T* peut être entièrement décomposée en *n* sous-parties sans lacune de telle manière que les exposants de ces sous-parties soient successivement les mêmes que les index figurant au dénominateur de l'index de *F*, III. *A* est la *k*-ième de ces sous-parties, et IV. *F* et *T* pris ensemble constituent soit l'expression *B* entière, soit un composant de *B*. (A strictement parler, il conviendrait de remplacer cette explication par une définition récursive).

Selon cette explication, par exemple la partie de l'expression *B* désignée par le chiffre 3 est le premier argument du signe d'implication désigné par le chiffre 5, celle désignée par le chiffre 4 en est le second argument. Il en va ainsi car I. dans l'expression *B*, on peut extraire une partie - celle désignée par le chiffre 1 — qui est sans lacune, qui vient juste à la droite de la partie désignée par le chiffre 5 et dont l'exposant est de la même forme que le dénominateur de l'index de 5, II. on peut entièrement décomposer la partie désignée par le chiffre 1 en deux parties sans lacune dont les exposants sont respectivement les mêmes que les index figurant au dénominateur de l'index de 5, III. 3 est la première de ces parties, 4 en est la seconde, et IV. les parties désignées par les chiffres 5 et 1 pris ensemble constituent un composant de l'expression *B*.

L'avantage de cette symbolisation par index que les parenthèses y sont rendues inutiles peut sembler insignifiant, lorsqu'on ne prend en considération que des exemples du calcul des propositions. Pour le calcul propositionnel, le Prof. Jan Łukasiewicz a introduit un symbolisme qui, même sans l'aide des index, n'exige pas de parenthèses, ni de signes auxiliaires comparables pour exprimer la structuration des expressions syntaxiquement connectées[5].

La possibilité de se passer des parenthèses sans introduction des index s'explique cependant ici par le fait que le calcul des propositions ne s'occupe que de quelques catégories sémantiques (en pratique, seulement trois) ; de plus toutes ses variables appartiennent à une seule catégorie sémantique et le nombre des constantes y est limité. Ainsi la catégorie sémantique d'une expression donnée peut-elle être indiquée par certains aspects des symboles eux-mêmes. Dans ce cas, les règles de formation se laissent également énumérer facilement. Cependant, quand nous avons affaire à un nombre élevé, et théoriquement illimité, de catégories sémantiques différentes, nous devons avoir recours à un moyen systématique semblable à notre symbolisation par index pour marquer ces diverses catégories.

Les recherches menées jusqu'ici ayant porté uniquement sur des expressions sans opérateur (voir ci-dessous § 7), nous allons désormais nous occuper des expressions contenant des opérateurs.

II

7. Nous avons admis dans ce qui précède que l'on peut, grâce au sens, ranger chacun des mots simples d'une langue dans une catégorie sémantique déterminée et, par conséquent, lui assigner un index. On ne peut analyser toutes les expressions composées selon le schéma « foncteurs et leurs arguments » que si cette supposition se trouve vérifiée. Peut-être est-ce le cas pour quelques langues ; il semble pourtant qu'elle ne soit pas adaptée à certains langages symboliques. Il s'agit de langages faisant usage de ce que l'on appelle des opérateurs. Nous entendons par ce terme les signes tels que, par exemple, le signe logistique de l'opérateur universel, « (**Π***x*) » ou « (x) », qui peut aussi être qualifié de

quantificateur universel[6], ainsi que le signe logistique d'existence ou opérateur existentiel « (∃x) », ou encore les signes algébriques de la somme

$$\text{« } \sum_{K=1}^{n} \text{ »}$$

et du produit

$$\text{« } \prod_{x=1}^{100} \text{ »}$$

le signe de l'intégrale définie

$$\text{« } \int_{0}^{1} dx \text{ »}$$

etc. Tous ces signes ont une propriété en commun : ils s'appliquent toujours à une expression qui contient une ou plusieurs variables et réduisent une ou plusieurs de celles-ci au rôle de variable apparente. Si, par exemple un opérateur est appliqué à une expression contenant une seule variable, on obtient alors une expression composée dont la valeur est constante.

Ainsi, par exemple, les expressions « (∃*x*).*x* est l'homme »,

$$\text{« } \sum_{x=1}^{10} x^2 \text{ »}$$

ont-elles une valeur constante, bien qu'elles contiennent des variables. Par l'action de l'opérateur, ces variables deviennent des variables apparentes ou comme on dit aussi ces variables se trouvent « liées » par l'opérateur, comme on dit aussi.

L'analyse d'une expression contenant un opérateur, et ainsi par exemple d'une proposition générale comme « (**Π***x*).*fx* », en foncteurs et leurs arguments dont les catégories sémantiques devraient correspondre les unes aux autres, semble se heurter à des difficultés insurmontables.

Sans tenir compte de la composition interne de l'opérateur complexe « (**Π***x*) », il nous faut d'emblée rejeter l'interprétation immédiate de la proposition générale « (**Π***x*).*fx* » selon laquelle, dans une proposition de ce genre, l'opérateur « (**Π**x) » jouerait le rôle de foncteur principal et la fonction propositionnelle à laquelle il s'applique le rôle de son argument. S'il s'agissait là de l'analyse syntaxique correcte de la proposition générale, on devrait alors compter le quantificateur universel « (**Π***x*) » parmi ces foncteurs qui prennent une proposition pour argument et qui forment une proposition et ainsi les ranger dans la catégorie s/s. Cependant, il convient de constater que, dans une logique extensionnelle, un foncteur s/s est forcément un foncteur de vérité (*truth functor*). Son parcours de valeurs doit alors correspondre à l'une de ces quatre tables :

p	f_1p
0	0
1	1

p	f_2p
0	1
1	0

p	f_3p
0	1
1	1

p	f_4p
0	0
1	0

Autrement dit, si le quantificateur universel était un foncteur s/s, la proposition

$$(\prod x).fx$$

devrait soit être équivalente à 1) *fx* ou à 2) ~ *fx*, soit, 3) indépendamment de « *x* », être toujours vraie ou 4) toujours fausse. Pourtant, tous ces cas ne correspondent pas au sens de l'expression « **(Π***x*).*fx* ». Dans une logique extensionnelle, on ne peut pas comprendre l'opérateur « **(Π***x*).*fx* » comme un foncteur s/s. Cependant, puisqu'il forme une proposition en s'appliquant à une proposition « *fx* », il ne peut pas non plus être un autre foncteur.

Ici s'impose cependant l'idée que l'on peut interpréter différemment la structure syntaxique d'une proposition générale

image

Peut-être que, dans cette proposition, « **(Π***x*) » n'est pas le foncteur principal et « *fx* » n'est pas son argument ; en revanche, le signe « **Π** » est peut-être le foncteur principal, « *x* » son premier argument et ainsi « *fx* » est son second argument. Il aurait alors été correct d'écrire la proposition générale sous la forme suivante :

$$\prod(x,\, fx).$$

Puisque « *x* » peut appartenir à différentes catégories sémantiques, « **Π** » devra lui aussi être polysémique quant au type. Si, par exemple, « *x* » appartient à la catégorie des noms et « *f* » à la catégorie s/n, « **Π** » devra appartenir à la catégorie s/n,s. Si, par contre, « *x* » appartient à la catégorie des propositions et « *f* » à la catégorie s/s , « **Π** » devra appartenir à la caté gorie s/ss pour que « **Π(***x*, *fx* » puisse être une proposition.

Dans ce cas et dans le cadre d'une logique extensionnelle, « **Π** » devra être un foncteur de vérité binaire et correspondre à l'une des 16 tables bien connues relatives à ces foncteurs de vérité. Cependant, il est une fois de plus aisé de montrer que cela ne peut pas s'accorder avec le sens de la proposition générale « **(Π***x*).*fx* ».

Ainsi, ni la première ni la seconde manière d'interpréter la construction syntaxique de la proposition générale selon le schéma foncteurs et arguments n'est adéquate.

8. Rien ne peut être substitué à une variable sur laquelle porte un opérateur dans une proposition légitime. Tel est le sens de l'expression variable « apparente » ou « liée ». A cet égard, les foncteurs se comportent d'une façon tout à fait opposée.

Si donc nous attribuons un rôle non liant au concept de foncteur et un rôle liant à celui d'opérateur, nous constatons immédiatement qu'un opérateur ne peut pas être compté parmi les foncteurs.

On peut encore rapporter une différence secondaire entre un foncteur et un opérateur : si un foncteur peut aussi apparaître comme argument d'un autre foncteur, en revanche un opérateur ne peut jamais être argument d'un foncteur.

Malgré ces différences, il existe pourtant une similitude entre opérateur et foncteur. Tout comme le foncteur avec ses arguments, l'opérateur peut former un tout composé et doué d'un sens unitaire avec l'expression sur laquelle il porte. On devrait donc aussi pouvoir associer des index aux opérateurs. Pourtant, il faudrait distinguer ces index de ceux attribués aux foncteurs, car dans la détermination des exposants, on ne peut pas les traiter exactement de la même manière que les index des foncteurs. Puisque l'opérateur ne peut jamais être un argument, son index ne peut pas s'unir à un index qui le précède, que ce soit dans une suite propre des index, comme dans les dérivées de cette suite. Au contraire, l'index d'un opérateur doit toujours être saisi avec les index qui le suivent. Nous proposons donc pour les index d'opérateurs une forme de fraction, munie d'une barre verticale du côté gauche. Le quantificateur universel « (**Π***x*) » recevra l'index

$$\left| \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{s}} \right.$$

puisqu'il forme une proposition à partir d'une proposition.

Bien que l'opérateur semble constitué de plusieurs mots, nous venons à l'instant d'attribuer à l'opérateur pris comme un tout un unique index. Ce faisant, nous n'abandonnons pourtant pas le principe selon lequel, depuis le début, seuls les mots simples reçoivent des index, alors que les expressions composées ne reçoivent des index qu'à titre d'exposants (c'est-à-dire comme dernières dérivées de leurs suites d'index). Ainsi un opérateur ne doit pas être considéré comme une expression constituée de plusieurs mots. Au fond, l'opérateur est un mot simple constitué de plusieurs lettres. Il y a aussi des façons d'écrire les opérateurs qui rendent compte de ce fait. Ainsi le Prof. Scholz, par exemple, écrit « *x* » plutôt que « (**Π***x*) ». Ce caractère de mot simple apparaît aussi avec la notation usuelle, dans laquelle on écrit « (*x*) » à la place de « **Π***x* » ou « **Π***x* » à la place de « (**Π***x*) ».

9. Lorsqu'une expression contient un opérateur, le calcul de son exposant doit être mené d'une façon différente de celle vue précédemment. Si nous procédions avec les index d'opérateurs comme avec ceux des fonc-teurs, il se pourrait que l'index d'un opérateur se joigne avec celui de l'index qui le précède, ce qui, comme nous l'avons déjà mentionné, est inadmissible.

Prenons, par exemple, l'expression suivante :

$$F(\prod x \, . \, x) \qquad \text{(A)}$$

$$\frac{\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{n}}}{\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{s}}} \; \left| \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{s}} \right. \; \mathrm{n}$$

Si nous formions son exposant en nous appuyant sur les règles données précédemment, nous obtiendrions les dérivées suivantes :

$$(1)\ \frac{\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{n}}}{\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{s}}} \; \left| \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{s}} \right. \; \mathrm{n}, \qquad (2)\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{n}}\,\mathrm{n}, \qquad (3)\ \mathrm{s}.$$

Nous obtiendrions donc comme exposant un index propositionnel, alors que l'expression *A* constitue manifestement un non-sens syntaxique.

La nouvelle règle pour établir l'exposant d'une expression exige que soit traitée tout d'abord séparément la partie de sa suite propre des index qui fait suite à la barre verticale située le plus loin à droite dans la suite. Pour cette partie, dont la seule barre verticale qu'elle contienne est la barre initiale, la dernière dérivée devra être obtenue à l'aide de l'ancienne directive. Ce faisant, l'index avec barre sera traité comme s'il n'en avait pas.

Ainsi, par exemple, « - s », tout aussi bien que « - s », sera remplacé par l'index « s » et de façon similaire dans les autres cas.

Après avoir calculé la dernière dérivée de la suite partielle d'index commençant par la dernière barre verticale, on inscrit cette dérivée à la place de la suite partielle dans la suite complète des index. Ici deux cas sont à distinguer. Soit en calculant la dernière dérivée de la suite partielle commençant par la dernière barre verticale, l'index initial de cette suite a disparu (c'est-à-dire qu'en formant la *n*-ième dérivée, à partir de la $(n - 1)$-ième, l'index initial, pris avec les index suivants, a été remplacé par son numérateur), soit il n'a pas disparu.

Dans le second cas, c'est-à-dire quand l'index avec barre placé en tête de la suite partielle ne disparaît pas, nous nous arrêtons et prenons comme dernière dérivée de la suite complète des index de l'expression examinée — et donc comme exposant de cette expression — toute la suite obtenue en remplaçant la suite partielle traitée à part par sa dernière dérivée.

Dans le premier cas, c'est-à-dire quand l'index avec barre placé en tête de la suite partielle disparaît, la barre en question disparaît également de la suite d'index entière, réduisant d'une barre le nombre total des barres de cette suite. Dans ce cas, nous poursuivons le processus de la même manière jusqu'à rencontrer un index fractionnaire avec barre qui ne disparaît pas, ou alors jusqu'à l'élimination de tous les index munis d'une barre et l'obtention d'une suite d'index sans barre ne permettant plus aucune dérivation. Nous prenons la suite obtenue au terme de ce processus comme la dernière dérivée de la suite propre des index de l'expression de départ, et donc comme l'exposant de cette expression.

Nous allons présenter cette nouvelle procédure à l'aide de l'exemple suivant d'expression :

$$(\prod fg):\ .(\prod x)\ .f\ \ x\ \supset\ g\ \ x\ :\supset:\ (\prod x)\ .f\ \ x\ .\supset.\ (\prod x)\ .g\ \ x \qquad \text{(A)}$$

$$\Big|\frac{s}{s}\qquad \Big|\frac{s}{s}\quad \frac{s}{s}\quad n\quad \frac{s}{ss}\quad \frac{s}{n}\quad n\quad \frac{s}{ss}\qquad \Big|\frac{s}{s}\quad \frac{s}{n}\quad n\quad \frac{s}{ss}\qquad \Big|\frac{s}{s}\quad \frac{s}{n}\quad n$$

La suite propre de ses index est de forme

$$\Big|\frac{s}{s}\quad \frac{s}{ss}\quad \Big|\frac{s}{s}\quad \frac{s}{ss}\quad \frac{s}{n}\quad n\quad \frac{s}{n}\quad n\quad \frac{s}{ss}\quad \Big|\frac{s}{s}\quad \frac{s}{n}\quad n\quad \Big|\frac{s}{s}\quad \frac{s}{n}\quad n \qquad \text{(I)}$$

Tout d'abord, nous formons la dernière dérivée de la partie située à droite de la dernière barre verticale :

$$(1)\quad \Big|\frac{s}{s}\quad \frac{s}{n}\quad n \qquad (2)\quad \Big|\frac{s}{s}\quad s \qquad (3)\quad s.$$

Nous remplaçons maintenant dans (I) la partie à droite de la dernière barre par sa dernière dérivée. Nous avons ainsi une barre de moins et obtenons

$$\Big|\frac{s}{s}\ \frac{s}{ss}\ \Big|\frac{s}{s}\ \frac{s}{ss}\ \frac{s}{n}\, n\, \frac{s}{n}\, n\, \frac{s}{ss}\ \Big|\frac{s}{s}\ \frac{s}{n}\, n\, s. \qquad \text{(II)}$$

Avec la suite (II), nous procédons de la même manière qu'avec (I) et obtenons :

$$\Big|\frac{s}{s}\ \frac{s}{ss}\ \Big|\frac{s}{s}\ \frac{s}{ss}\ \frac{s}{n}\, n\, \frac{s}{n}\, n\, \frac{s}{ss}\, s\, s \qquad \text{(III)}$$

Nous traitons encore (I) de la même manière et cherchons donc la dernière dérivée de la partie à droite de la dernière barre verticale de (III). La procédure étant un peu plus longue, nous la poursuivons ainsi :

$$\Big|\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{s}}\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{ss}}\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{n}}\,\mathrm{n}\,\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{n}}\,\mathrm{n}\,\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{ss}}\,\mathrm{s\,s} \tag{1}$$

$$\Big|\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{s}}\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{ss}}\,\mathrm{s}\,\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{n}}\,\mathrm{n}\,\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{ss}}\,\mathrm{s\,s} \tag{2}$$

$$\Big|\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{s}}\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{ss}}\,\mathrm{s\,s}\,\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{ss}}\,\mathrm{s\,s} \tag{3}$$

$$\Big|\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{s}}\ \mathrm{s}\,\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{ss}}\,\mathrm{s\,s} \tag{4}$$

$$\Big|\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{s}}\ \mathrm{s\,s} \tag{5}$$

$$\mathrm{s\,s} \tag{6}$$

Nous insérons cette valeur dans (III) à la place de la partie séparée par la dernière barre et obtenons :

$$\Big|\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{s}}\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{ss}}\,\mathrm{s\,s} \tag{IV}$$

On calcule alors facilement que la dernière dérivée de cette suite d'index est

$$\mathrm{s}.$$

On obtient ainsi la dernière dérivée de la suite d'index initiale constituant l'exposant de l'expression (A).

Comme autre exemple, examinons un cas où ne disparaissent pas tous les index munis d'une barre. Prenons par exemple l'expression :

$$\begin{array}{cccccccc} (\prod x) & .f & x & :\supset: & (\prod x) & .g & (x, & z) \\ \Big|\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{s}} & \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{n}} & \mathrm{n} & \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{ss}} & \Big|\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{s}} & \frac{\mathrm{n}}{\mathrm{nn}} & \mathrm{n} & \mathrm{n} \end{array} \tag{B}$$

Sa suite propre des index est :

$$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{ss}}\ \Big|\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{s}}\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{n}}\,\mathrm{n}\ \Big|\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{s}}\ \frac{\mathrm{n}}{\mathrm{nn}}\,\mathrm{n\,n}. \tag{I}$$

Nous formons la dernière dérivée de la partie séparée par la dernière barre verticale. Cette dérivée est de la forme suivante :

$$\Big|\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{s}}\ \mathrm{n}.$$

Dans ce processus, l'index avec barre ne disparaît pas. Ainsi la dernière barre n'est pas supprimée et la dernière dérivée de I, qui est donc aussi l'exposant de B, a la forme suivante :

$$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{ss}}\ \Big|\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{s}}\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{n}}\,\mathrm{n}\ \Big|\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{s}}\ \mathrm{n}.$$

L'expression (B) n'a donc pas pour exposant un index unique.

Nous disposons à présent de la méthode pour former les exposants des expressions contenant des opérateurs. Il est évident que la méthode précédemment exposée pour les expressions dénuées d'opérateurs en est un cas particulier. (Il suffirait de la formuler en parlant des index munis de barres comme pouvant « éventuellement » se présenter). Nous pourrions maintenant reprendre mot pour mot la définition déjà posée de la connection syntaxique, et elle serait désormais également adéquate pour les expressions contenant des opérateurs.

10. En ce qui concerne les expressions sans opérateurs, leur connection syntaxique coïncide avec leur correction syntaxique. Cependant, pour les expressions qui contiennent des opérateurs, il convient encore d'ajouter à la connection syntaxique une condition supplémentaire. Cette condition exige que dans l'argument de chaque opérateur, c'est-à-dire dans l'expression à laquelle cet opérateur s'applique[7], se trouve une variable non liée équiforme à celle indiquée par l'opérateur. C'est uniquement lorsque cette condition est remplie qu'une expression syntaxiquement connectée contenant des opérateurs est également une expression syntaxiquement correcte.

III

11. Nous avons considéré le rôle liant des opérateurs comme leur propriété propre et qui les différencie des foncteurs. La liaison d'une ou de plusieurs variables est commune à tous les opérateurs. En dehors de ce rôle liant, plusieurs opérateurs jouent également d'autres rôles, par lesquels ils se distinguent les uns des autres. Néanmoins, il existe un opérateur dont le rôle se limite à la liaison d'une ou plusieurs variables. Le signe circonflexe « ˆ » introduit par Whitehead et Russell semble être un tel opérateur. Russell l'utilise pour distinguer ce qu'il nomme « la valeur indéfinie d'une fonction » de ce qu'il décrit comme « la fonction elle-même ». Si « fx » symbolise la valeur indéfinie d'une fonction, « f » représente alors cette fonction elle-même. Une plus grande attention permet pourtant de montrer que ce que Russell appelle « valeur indéfinie d'une fonction » n'est rien d'autre que ce que l'on désigne comme « valeur de la variable dépendante ». Par contre, ce que Russell appelle « la fonction elle-même » ne désigne pas une variable, mais une certaine constante. Un examen plus approfondi des remarques par lesquelles Russell explique le concept de « fonction elle-même » nous conduit à supposer qu'avec cette expression Russell tente d'obtenir ce que nous désignerions comme corrélat objectif d'un foncteur. Ainsi $f\hat{x}$ n'est rien d'autre que f, et les symboles « $f\hat{x}$ » et « f » désignent la même chose. Si cette interprétation est correcte, on peut alors compter le circonflexe « ˆ » parmi les opérateurs, puisque son rôle est de « supprimer » ou de « lier » d'une variable. Il faut encore ajouter qu'à l'aide du circonflexe « ˆ », plusieurs variables peuvent être liées simultanément dans une expression. Ainsi, par exemple, « $f\hat{x}\,\hat{y}$ » représente le foncteur à deux arguments « f ».

Dans les cas les plus simples, lorsque le circonflexe « ˆ » est inscrit sur tous les arguments du foncteur principal de l'expression complète, comme dans les exemples schématiques « fx◌̂ » ou « $f\,\hat{x}\,\hat{y}$ » le circonflexe « ˆ » agit comme un trait biffant la variable accentuée (c'est-à-dire celle avec le circonflexe « ˆ »), celle-ci se trouvant alors éliminée. Quand, cependant, les arguments du foncteur principal de l'expression complète ne sont pas tous accentués, le rôle du circonflexe « ˆ » ne peut plus être identifié à celui d'un simple trait d'élimination. Ainsi, par exemple, l'expression « p◌̂ $\supset .a. \sim a$ » (où « a » doit être une constante de proposition) représente un foncteur « *f* » de catégorie s/s, pour lequel l'équivalence suivante est satisfaite :

$$fp. \equiv .p \supset .a. \sim a.$$

On constate d'emblée qu'à la place de « *f* » le signe de négation conviendrait et par conséquent, « ^p ⊃ *.a.* ~ *a* » a le même sens que « ~ » ; par contre, « ⊃ *.a.* ~ *a* », qui signifie la même chose que « p ⊃ *.a.* ~ *a* » lorsque « *p* » est supprimé, n'est pas un foncteur s/s ; elle n'est même pas une expression syntaxiquement connectée.

12. Lorsque l'expression entière dans laquelle le circonflexe « ˆ » est appliqué à une variable appartient à la catégorie des propositions, nous trouvons dans la notation de Russell un autre signe que l'on peut assimiler au circonflexe « ˆ » . Il s'agit du préfixe (*x*◌̂), utilisé pour former les symboles de classes, ou encore les préfixes (*x*◌̂ *ŷ*) utilisés pour les symboles de relations. Si « *fx*◌̂ » représente une fonction propositionnelle (et si l'on exclut les complications relevant de l'admission de fonctions intensionnelles, auxquelles Russell a d'ailleurs renoncé dans la seconde édition des *Principia),* alors le symbole « (*x*◌̂). *fx* » représente la même chose que le foncteur « *f* » et que « *fx*◌̂ », également. On peut encore en dire autant en ce qui concerne la synonymie des symboles « (*x*◌̂ *ŷ*) *fxy* » et « *f x* ◌̂ *ŷ* ».

Nous allons aussi nous servir des préfixes (*x̂*) et (*x̂ ŷ*) dans les cas où ils s'appliquent à des expressions n'appartenant pas à la catégorie des propositions; de façon générale, nous écrirons « (*x*◌̂).*fx* » plutôt que de nous servir d'une symbolisation en « *f x̂* » et au lieu de symboles tels que « *fx*◌̂ *ŷ* », nous écrirons « (*x̂ ŷ*), *fxy* ». Ce changement de notation pour l'opération circonflexe « ˆ » a l'avantage de permettre de marquer distinctement l'expression sur laquelle porte l'opérateur, tandis qu'avec la notation précédente cela n'était pas possible et pouvait, dans les cas complexes, conduire à des ambiguïtés. De plus, la nouvelle notation permet aussi l'application réitérée et successive de l'opération circonflexe « ˆ » à une même expression et ainsi d'écrire « (*x*◌̂) : (*ŷ*).*fxy* », qui est différent de « (*x*◌̂ *ŷ*), *fxy* » (« *fx*◌̂ *ŷ* ».dans l'ancienne notation). Le caractère d'opérateur du symbole circonflexe « ˆ » apparaît aussi plus distinctement dans la nouvelle notation.x

13. En tant qu'opérateur, le symbole (*x*◌̂) (ou (*x*◌̂ *ŷ*), etc.) se voit attribuer, dans notre symbolisation par index, un index muni d'une barre. Mais puisque ces opérateurs peuvent être appliqués à des expressions de différentes catégories sémantiques et qu'ils forment à partir d'elles des expressions de diverses catégories, les symboles circonflexes « ˆ » ne recevront pas toujours le même index avec barre.

La définition générale de l'opérateur circonflexe (monadique) « (*x*◌̂) » se présente comme suit : un opérateur « (*x*◌̂) » s'appliquant à une variable *X* dans une expression *A* forme avec cette expression un foncteur qui, lorsqu'il prend *X* comme argument, donne lieu à une expression équivalente à l'expression *A*. On peut illustrer cela avec l'exemple suivant, dans lequel l'expression *A* a la forme « *fx* » et la variable *X* la forme « *x* »:

$$(\hat{x}).fx : x. :\equiv .fx.$$

Il suit de cela que, si l'expression *A* à laquelle l'opérateur s'applique possède l'exposant « E_1 » et que la variable *X* a l'index « E_2 », alors l'opérateur « ˆ » doit avoir l'index suivant muni d'une barre :

$$\left| \frac{\frac{E_1}{E_2}}{E_1} \right.$$

Suivant les index qui seront substitués à « E_1 » et « E_2 », l'index de notre opérateur prendra différentes formes.

Il en ira de même pour les opérateurs circonflexes polyadiques ($\hat{x}\,\hat{y}$).

Comme nous l'avons déjà indiqué, le rôle de l'opérateur « ˆ » apparaît limité à la liaison des variables. Celui des autres opérateurs est, en revanche, plus étendu. Nous avons vu qu'un foncteur et un opérateur ont pour différence principale que l'opérateur lie des variables, alors que le foncteur ne le fait pas. Cela nous conduit à penser que le rôle de ces opérateurs qui ne sont pas restreints à la seule liaison des variables doit pouvoir être divisé en deux, le rôle de liaison pouvant être pris en charge par l'opérateur circonflexe « ˆ » et le rôle restant étant, par contre, joué par un foncteur. Introduisons par exemple le foncteur « *U* », auquel nous associons l'index s/s/n. Du point de vue syntaxique, cela signifie que nous comprenons « *U* » comme un foncteur formant une proposition lorsqu'il prend un foncteur s/n pour argument. Dès lors, nous posons aussi la définition suivante de ce foncteur : l'expression « $U(f_s)$ » est satisfaite (quand « *f* » s'y trouve remplacé) par tous les foncteurs s/n, et seulement ceux-là, qui forment une proposition vraie quel que soit le nom qu'ils prennent pour argument. Nous avons ainsi :

$$U(f). \equiv .(\prod x).fx.$$

Nous appellerons un tel foncteur le foncteur universel. On peut désormais remplacer le quantificateur universel par le foncteur universel partout où, pour la fonction propositionnelle sur laquelle porte l'opérateur « (Πx) », nous pouvons donner un foncteur qui, lorsqu'il prend pour argument précisément la variable que l'opérateur avait pour rôle de lier, forme une expression équivalente à la fonction propositionnelle en question. Or c'est cela que l'opérateur circonflexe « $\hat{x}$ » nous permet toujours de faire. En effet, « $(\hat{x}).fx$ » est justement le foncteur recherché pour la fonction propositionnelle « fx », et ceci quelle que soit la forme sous laquelle cette fonction se présente. Au lieu de « $(\Pi x).fx$ », nous pouvons donc toujours écrire « $U((\hat{x}).fx)$ ». De cette manière, le rôle du quantificateur universel peut toujours être remplacé par une combinaison des rôles respectifs du foncteur universel et de l'opérateur circonflexe « $\hat{x}$ ». Il n'est pas nécessaire d'insister sur le fait qu'il n'y a pas un seul mais plusieurs foncteurs universels, chacun étant d'une catégorie sémantique différente et adaptée à la catégorie du foncteur qu'il prend pour argument. Grâce à l'équivalence

$$U(f). \equiv .(\prod x).fx$$

on peut aisément définir le foncteur universel à l'aide du quantificateur universel. On fait pourtant face à des difficultés insurmontables lorsqu'on veut définir ce foncteur sans recours au quantificateur universel. A notre avis, on devrait pourtant trouver un substitut à la définition du foncteur universel dans la donnée des règles d'inférence relative à son emploi déductif. Le symbole « *U* » trouverait ainsi ouvertement sa place en logique, comme un signe primitif ; il aurait dans le système de cette science une position plus distincte que celle du quantificateur universel qui, introduit frauduleusement, n’appartient ni aux signes définis ni aux signes primitifs de la logique.

Il faudrait cependant soit définir l’opérateur circonflexe « $\hat{x}$ » soit l’introduire en fraude en logique, de la même manière que l’on a introduit le quantificateur universel. Nous ne voulons pas ici trancher ce dilemme. Si l’on en restait cependant à l’introduction frauduleuse de l’opérateur circonflexe « $\hat{x}$ » nous nous permettrions de faire la conjecture qu’il pourrait s’agir là d’une fraude avantageuse. Cela ouvrirait en effet la possibilité de remplacer tous les autres opérateurs - si nombreux dans les sciences déductives - par l’opérateur circonflexe « $\hat{x}$ » et les foncteurs qui conviennent. Ce ne serait pas, à notre avis, un avantage négligeable que de pouvoir se restreindre à l’usage d’une seule sorte d’opérateur, c’est-à-dire l’opérateur « $\hat{x}$ ».

Allatum est die 15. Iulii 1934.

NOTES

1. Stanislaw Leśniewski *Grundzüge eines neuen Systems der Grundlagen der Mathematik.* „Fundamenta Mathematicae“, vol. XIV, Warszawa 1929, p. 13 et *sq*, p. 67 et *sq*. D’après Leśniewski, nous ne prenons que l’idée fondamentale des catégories sémantiques et leurs genres. Leśniewski ne peut pas être responsable de notre formulation de définitions et d’explications, ainsi que de détails du contenu que nous pourrions assigner à ce concept ; car ses définitions ne sont pas générales mais appliquées à sa symbolique spécifique et d’une manière toute différente, stricte au plus haut degré et purement structurale.

2. Edmund Husserl *Logische Untersuchungen.* Bd II, T. 1. Zweite umgearbeitete Auflage. Halle a. d. S. 1913, p. 294, 295, 305-312, 316-321, 326-342.

3. R. Carnap *Abriss der Logistik.* Wien 1929, p. 30 ; A. Tarski *Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych.* Warszawa 1933, p. 67.

4. La première et la troisième condition ne sont pas suffisantes pour la connexion syntaxique. Parce que p. ex. l’expression

$$\begin{array}{ccccc} \text{“} \sim & (\varphi, & x) & \text{”} \\ \frac{s}{s} & \frac{s}{n} & n & \end{array}$$

n’est pas syntaxiquement connectée, même si c ’est une expression entièrement bien structurée et même si son exposant obtenu de la manière suivante

$$\frac{s}{s} \quad \frac{s}{n} \quad n, \qquad \frac{s}{s} \quad s, \qquad s$$

est un simple index.

5. Cf. Jan Łukasiewicz ; „Philosophische Bemerkungen zu mehrwertigen Systemen des Aussagenkalküls“, Warszawa 1930, *Comptes rendus des Séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie,* XIII, Cl. III.

6. Cf. R. Carnap *Abriss der Logistik*, Wien 1929, p. 3.

7. À strictement parler, on ne doit pas recourir au terme d'"argument" de l'opérateur, mais utiliser p. ex. le mot "operandum" Nos remarques précédentes concernant la "bonne composition" d'une expression doivent bien sûr se référer aussi aux relations : opérateur — operandum.