**Bulletin de la Sabix**
Société des amis de la Bibliothèque et de l'Histoire de l'École polytechnique

**44 | 2009**
**Gabriel Lamé (1795-1870) : Les pérégrinations d'un ingénieur au XIXe siècle**

# Les coordonnées curvilignes de Gabriel Lamé – Représentation des situations physiques et nouveaux objets mathématiques

**René Guitart**

OpenEdition Journals

**Édition électronique**
URL : http://journals.openedition.org/sabix/686
ISSN : 2114-2130

**Éditeur**
Société des amis de la bibliothèque et de l'histoire de l'École polytechnique (SABIX)

**Édition imprimée**
Date de publication : 1 octobre 2009
Pagination : 119 -129
ISBN : ISSN N° 2114-2130
ISSN : 0989-30-59

**Référence électronique**
René Guitart, « Les coordonnées curvilignes de Gabriel Lamé – Représentation des situations physiques et nouveaux objets mathématiques », *Bulletin de la Sabix* [En ligne], 44 | 2009, mis en ligne le 18 juillet 2011, consulté le 19 avril 2019. URL : http://journals.openedition.org/sabix/686

# LES COORDONNÉES CURVILIGNES DE GABRIEL LAMÉ, REPRÉSENTATIONS DES SITUATIONS PHYSIQUES ET NOUVEAUX OBJETS MATHÉMATIQUES

René Guitart
Institut de Mathématiques de Jussieu – Université Denis Diderot Paris 7

Le mathématicien Viatcheslav V. Meleshko écrivait en 2003 à propos de Lamé :

> Les mathématiciens français, cependant, le considérait comme trop pratique, et les ingénieurs français le considérait comme trop théorique[1].

Cela fait bien écho à l'idée maîtresse que Lamé exprimait lui-même ainsi :

> Ecartez à tout jamais la division de la science en mathématiques pures et en mathématiques appliquées[2],

ce qui se résume brièvement et simplement dans l'expression : « physique mathématique ». C'est dans ce cadre indissoluble de physique *et* mathématique liées qu'il faut comprendre l'importance novatrice des coordonnées curvilignes de Lamé.

Nous allons nous limiter à examiner pourquoi et comment Lamé introduit les notions de coordonnées curvilignes, notamment les isothermes ou les orthogonales, et en particulier les ellipsoïdales, et spécialement comment il envisage leur relation étroite avec la théorie des fonctions elliptiques et avec l'analyse harmonique générale, en posant la fameuse équation de Lamé. Les principales recherches mathématiques de Lamé sur les sujets concernés, surtout des recherches des années 1833 à 1843, sont plus tard reprises (de 1852 à 1861), éclaircies et parfois approfondies dans quatre traités[3] qui ont eu un rôle essentiel dans la transmission de ses idées. Nous ferons donc référence tant aux premiers articles qu'aux traités, même si les notations sont parfois, ici et là, différentes, et différentes encore de celles des traités aujourd'hui classiques.

Dans la suite de Lamé, sur ces sujets-là, il faut noter, dans la deuxième partie du XIX^e^ siècle, des contributions essentielles d'héritiers intellectuels d'importance : Hermite, Bertrand, Poincaré, Mathieu, Darboux, Halphen. On trouvera dans les mémoires et traités de ces trois derniers[4] des exposés très complets de la mathématique laméenne. Au début du XX^e^ siècle, deux traités d'analyse devenus classiques,[5] de Whittaker et Watson, de Hobson, consacrent des chapitres entiers aux développements des découvertes de Lamé. En 1953 la « Bible » de la physique théorique[6] de Morse et Feshbach, lui consacre une place importante. La plupart des livres sur les fonctions spéciales ont un chapitre sur les fonctions de Lamé.

---

[1] Meleshko, Viatcheslav. V., « Selected topics in the history of the two-dimensional biharmonic problem », *Appl. Mech. Rev.* Vol 56, n°1, january 2003, p. 72.

[2] Bertrand, Joseph, « Eloge de Gabriel Lamé », *Annales des Mines*, VII, 13, 1878.

[3] Lamé, Gabriel, *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*, Bachelier, 1852 . *Leçons sur les fonctions inverses des transcendantes et les surfaces isothermes*, Mallet-Bachelier, 1857. *Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications*, Mallet-Bachelier, 1859. *Leçons sur la théorie analytique de la chaleur*, Mallet-Bachelier, 1861.

[4] Mathieu, Emile, *Cours de physique mathématique*, vol. 1, Gauthiers-Villars, 1873, et six autres volumes de 1883 à 1890. Darboux, Gaston, « Mémoire sur la théorie des coordonnées curvilignes, et des systèmes orthogonaux », *Ann. ENS*, 2ème série, t. 7, 1878, 101-150, 227-260, 275-348. Darboux, Gaston, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, 4 vol., Gauthier-Villars, 1887, 1889, 1894, 1896. Darboux, Gaston, *Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes*, Gauthier-Villars, 1897 (éd. augmentée 1910). Halphen, G.-H., *Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications*, 3 vol. Gauthier-Villars, 1886, 1888, 1891.

[5] Whittaker, E. T. & Watson, G. N., *A course of modern analysis*, Cambridge University Press, 1902. Hobson, E. W., *The theory of spherical and ellipsoidal harmonics*, Cambridge University Press, 1931.

[6] Morse, Philip M., and Feshbach, Herman, *Methods of Theoretical Physics*, 2 vol., McGraw-Hill, 1953.

Pendant l'année 2008, on trouve (MathSciNet) 11 articles de mathématiques publiés avec, dans le titre, le nom de Lamé. Il s'agit de travaux sur le système et les coefficients et paramètres de Lamé en élasticité, sur les polynômes de Lamé, sur l'équation de Lamé, sur les courbes de Lamé, thèmes qui sont donc toujours d'actualité. Sur les soixante dernières années, on en trouve plus de 440. Mais l'influence de Lamé est bien plus vaste, comme on le verrait en cherchant des titres avec les mots : surfaces orthogonales, surfaces isothermes, coordonnées ellipsoïdales, etc.

## I. L'UNITÉ DE LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE PAR LES COORDONNEES CURVILIGNES

Dans ses *Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications*[7], parues il y a 150 ans, Gabriel Lamé explique qu'il veut promouvoir «l'avènement futur d'une science rationnelle unique ». Il voulait par là promouvoir la «physique mathématique », dont il disait que c'était la nouvelle discipline commençant avec le siècle, et initiée notamment par Fourier, Fresnel, Poisson. Il pensait qu'il n'y a qu'une rationalité, qui constitue l'unique principe de science compréhensive, et que les diverses sciences ne devraient être qu'une. La physique reposerait sur un seul et unique objet fondamental, à savoir l'éther. Expressément, si $\rho(x, y, z)$ est la densité d'éther, alors dans le cas du vide de matière, là où il n'y a que l'éther, la loi que propose Lamé[8] en 1833 est :

$$\Delta(\log \rho) = 0.$$

Une fois que la loi générale de l'éther serait dégagée, ce qui pour Lamé reviendrait à peu près à comprendre l'élasticité des cristaux, toute la physique s'expliquerait : on aurait alors une seule loi générale à la place de toutes les lois particulières (e.g. lumière, chaleur, gravitation) qui n'en seraient plus que des spécialisations.

Chaque situation de problème physique dépend de l'examen d'une fonction (potentiel, température, etc.) dans un corps, et au plan mathématique le corps en question est naturellement générateur d'un système de coordonnées curvilignes qui lui est adapté, qui est propre à sa forme. Il faut alors examiner la fonction du problème dans le système de coordonnées adapté au corps. Le monde mathématique des coordonnées curvilignes en général est alors comme un modèle du monde des corps des systèmes physiques. Lamé exprime ces idées directrices notamment dans les diverses préfaces de ses livres, y inclus son cours de physique[9] et aussi dans une note[10] de 1863, qui devait servir d'introduction à un cinquième livre de Leçons. En parallèle à cette vue unificatrice des théories physiques, plus concrètement, ce que propose Lamé au fondement de la « physique mathématique », se détaille comme suit.

L'étude d'un problème physique, ramenée à celle d'un système de coordonnées curvilignes, revient à caractériser ce système par des invariants différentiels, et notamment à calculer les paramètres différentiels des fonctions, et notamment le second $\Delta_2$, que nous appelons aujourd'hui le laplacien et notons $\Delta$, dans des coordonnées curvilignes quelconques, ce que Lamé fait explicitement. Puis il faut trouver les solutions à variables séparées d'équations associées à ce laplacien sur les surfaces coordonnées, et enfin résoudre les problèmes par des séries de telles solutions (comme l'ont déjà pratiqué Laplace et Legendre sur la sphère pour l'attraction, et Fourier dans un disque, pour la chaleur). Mais maintenant, souligne Lamé, il s'agit de développer la méthode en général. La clé mathématique initiale, motivée par la physique, est l'introduction des deux idées de systèmes de coordonnées isothermes et de systèmes orthogonaux. En physique en substance, en gros il n'y aurait plus qu'une équation à résoudre, disons l'équation de Poisson qui est $\Delta U = \rho$ (ou l'équation de la chaleur, ou l'équation des ondes), écrite donc en coordonnées

[7] Lamé, Gabriel, *Leçons sur les coordonnées curvilignes*, op. cit., p. XIII-XIV.
[8] Lamé, Gabriel, *Loi de l'équilibre du fluide éthéré, JEP t. XIV,* 1833, p. 209, p. 212.
[9] Lamé, Gabriel, *Cours de physique de l'Ecole Polytechnique*, 3 vol. Bachelier, 1840.
[10] Lamé, Gabriel, « Note sur la marche à suivre pour découvrir le principe seul véritablement universel de la nature physique ». Extrait des *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, tome LVI, 25 mai 1863, Paris, Mallet-Bachelier, 1863.

curvilignes grâce à la formule du laplacien de Lamé, avec des conditions au bord (e.g. problème de Dirichlet pour les potentiels).

C'est là une figure majeure de la constitution de la physique mathématique au XIX$^{e}$ siècle et au-delà. Lamé est celui qui la dégage au mieux explicitement dans sa formulation abstraite idéale. Cependant, il ne semble pas participer à l'autre grande avancée méthodologique pour la physique de l'époque, celle du calcul des variations.

De plus, Lamé traite la question concrètement en profondeur dans le cas du problème de l'attraction ou de la température d'un ellipsoïde, avec ses coordonnées ellipsoïdales et les fameuses fonctions dites aujourd'hui *fonctions de Lamé*. Aux formes élémentaires de corps utilisées jusque-là, soit les cubes, cylindres droits circulaires et sphères, et aussi les cristaux[11], Lamé ajoute celle de l'ellipsoïde (et des quadriques générales), avec tous les moyens naturels de calculs afférents. Ainsi à l'analyse de Fourier et aux harmoniques sphériques est ajouté le corpus des harmoniques ellipsoïdales. Cela s'avère essentiel et naturel pour la physique parce que, tout au long du XIX$^{e}$ siècle, les physiciens, et notamment Lamé, utilisent des ellipsoïdes (d'inertie, de déformation et de contraintes, de Fresnel, etc) pour représenter au deuxième ordre les phénomènes, et notamment en effet pour spécifier les données se rapportant à l'élasticité.

L'extension de la méthode de superpositions linéaires de solutions à variables séparables pour une équation donnée n'est pas possible en coordonnées curvilignes quelconques, des solutions pouvant échapper au procédé. Il est remarquable que nous sachions aujourd'hui que cette méthode proposée par Lamé s'avère correcte[12] (i. e. produit bien toutes les solutions) pour l'équation des ondes dans l'espace à trois dimensions, exactement pour 11 systèmes de coordonnées curvilignes, à savoir, justement, les coordonnées ellipsoïdales et ses 10 formes dégénérées (e.g., en termes de surfaces coordonnées, les surfaces de quadriques confocales). Quant au cas de l'équation de Laplace dans l'espace à trois dimensions, les systèmes convenables (avec facteurs de modulations) sont exactement les systèmes des coordonnées cyclidales et de ses formes dégénérées, ces systèmes étant pour l'essentiel dûs à Darboux qui dans sa thèse[13] a prolongé la recherche de systèmes orthogonaux algébriques de Lamé, en relation[14] avec les ovales cartésiennes et les surfaces cyclides de Dupin. Sur les coordonnées cyclidales et pentasphériques on devra aussi se reporter à la thèse de Bôcher[15] en 1891, où justement est également traitée la question de la généralisation de l'équation de Lamé dont nous parlerons au paragraphe V.

Ainsi pour l'idée des coordonnées curvilignes en général et son apport à la physique, il semble que, vis-à-vis du prolongement qu'il envisage de la méthode d'analyse harmonique, Lamé ait mis la main justement sur « le cas essentiel », celui des coordonnées ellipsoïdales ; et il sait la nécessité de décliner toutes les dégénérescences (ou confluences) du système, et de les introduire en propre, comme par exemple le cas parabolique[16], les cas de révolution, cylindrique, etc.

Mais l'importance des coordonnées curvilignes pour la mathématique et la physique est loin de se limiter à ce côté analyse harmonique, comme l'explique Elie Cartan :

> La géométrie euclidienne connaît, elle aussi, des méthodes analytiques reposant sur l'usage de coordonnées, mais ces coordonnées (cartésiennes, rectangulaires, polaires, etc.) ont une signification géométrique précise, et c'est pour cela du reste que leur introduction ne peut se faire qu'une fois la géométrie fondée par ses méthodes propres. En géométrie riemannienne, au contraire, les coordonnées, introduites dès le début, servent simplement à repérer d'une

---

11 Lamé, Gabriel, *Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie* (1818), Hermann, 1903. Dans ce livre, aux pages 89-104, Lamé introduit notamment les coordonnées obliques adaptées aux formes de cristaux dans la nature, afin de pouvoir exploiter algébriquement les symétries des situations.

12 Morse, Philip M., and Feshbach, Herman, op. cit. p. 513, p.523.

13 Darboux, Gaston, « Recherches sur les surfaces orthogonales », *Ann. Sci. Ecole norm. Sup. II*, 1865, pp. 54-69, et III, 1866, pp. 97-141.

14 Barbin, Evelyne, et Guitart, René, « Algèbre des fonctions elliptiques et géométrie des ovales cartésiennes », *Revue d'Histoire des Mathématiques*, vol.7 n°2, 2001, pp. 161-205.

15 Bôcher, Maxime, *Ueber die Reihenentwickelungen der Potentialtheorie*, Teubner, 1894.

16 Lamé, Gabriel, « Sur les surfaces isothermes paraboloïdales », *Journal Math. Pures Appl.* 19, 1874, pp. 307-318.

manière empirique les divers points de l'espace, et la géométrie a précisément pour objet de dégager les propriétés géométriques qui sont indépendantes de ce choix arbitraire des coordonnées. Un problème de cette nature n'est pas absolument nouveau. Gauss, dans ses « *Disquisitiones generales circa superficies curvas* », avait précisément donné un modèle de développement de la géométrie riemannienne à deux dimensions. D'autre part Lamé, quelques années, il est vrai, après la Dissertation de Riemann, avait, pour la géométrie *euclidienne* à trois dimensions, introduit des coordonnées n'ayant pas un aussi grand degré de généralité que celles de Riemann, mais dans ce cadre un peu plus restreint, il faisait en somme de la géométrie riemannienne. La nécessité où l'on s'est trouvé d'utiliser des systèmes de coordonnées arbitraires n'a pas été sans exercer une profonde influence sur le développement ultérieur des Mathématiques et de la Physique. Elle a conduit à la création admirable du calcul différentiel absolu de Ricci et Levi-Civita ; ce calcul lui-même a été l'instrument qui a servi à l'élaboration de la relativité générale[17].

Puisque les Dissertations de Riemann sont de 1851 et 1854, on comprend que Cartan songe ici aux traités de Lamé, qui sont ultérieurs, notamment le traité sur les coordonnées curvilignes, de 1859. Mais en fait les idées de Lamé à propos de coordonnées curvilignes sont déjà en place dans ses articles des années 1830, et du coup ils précèdent les travaux de Riemann, ce qui donne encore plus d'importance à l'appréciation de Cartan. Cependant, comme le signale Darboux[18], les coordonnées curvilignes symétriques et isothermes sur les surfaces sont introduites par Gauss[19] en 1825, en relation avec la question de la représentation d'une surface sur un plan en préservant les angles (question des représentations géographiques). Loria[20] indique la même source, suivie bien évidemment des célèbres *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, publiées en 1828[21]. Enfin, en paramétrant « arbitrairement » l'espace, comme Euler avait paramétré les courbes et Gauss les surfaces, les coordonnées curvilignes de Lamé vont être l'outil indispensable de la géométrie différentielle, riemannienne ou non, et notamment permettre le développement de la *méthode du repère mobile* (Serret, Frenet, Darboux, Ribaucour, Cartan).

## II. COORDONNÉES CURVILIGNES GENERALES, SURFACES ISOTHERMES ET ORTHOGONALES, CALCUL DU LAPLACIEN

Les recherches achevées de Gabriel Lamé sur les coordonnées curvilignes, surfaces isothermes et orthogonales, coordonnées ellipsoïdales, figurent dans deux de ses traités[22] des années 1850, mais la première mise en place remonte à 1833.

Lamé[23] définit une famille de surfaces isothermes de la façon suivante. La famille

$$\lambda(x, y, z) = \lambda_0$$

est dite d'*isothermes* s'il existe une fonction $V(x, y, z)$ dont la valeur ne dépend que de $\lambda(x, y, z)$, et donc telle que la famille de surfaces

$$V(x, y, z) = V_0$$

soit la famille initiale considérée, et telle que $\Delta V = 0$. Puisque cette équation est celle de la chaleur en régime constant, V peut être considérée comme une température ou paramètre thermométrique, et le paramètre initial $\lambda$ est dit géométrique. Avec donc

17 voir pp. 393-398 in : Cartan, Elie, « Géométrie euclidienne et géométrie riemannienne », *Scientia*, Milano, 1931, pp. 393-402. Cité par Johan Gielis in : Universal Natural Shapes, chap 3, p. 33 (thèse à soutenir prochainement).

18 Darboux, Gaston, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, vol. 1, Gauthier-Villars, 1887, p. 153.

19 Gauss, C. F., *Œuvres complètes*, t. IV, p. 189, p. 193.

20 voir pp. 281-282 in : Loria, Gino, « Perfectionnement, Evolution, Métamorphoses du concept de « coordonnées » : Contribution à l'Histoire de la Géométrie Analytique », *Osiris*, vol. 8, 1948, 218-288.

21 Gauss, C. F., op. cit., p. 217.

22 Lamé, Gabriel, *Leçons sur les fonctions inverses des transcendantes et les surfaces isothermes*, op. cit. *Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications*, op. cit..

23 Lamé, Gabriel, « Mémoire sur les surfaces isothermes dans les corps solides en équilibre de température », *Annales de Chimie et Physique* 1833, pp. 190-204. « Mémoire sur les surfaces isothermes dans les corps solides », *Journal Math. Pures Appl.*, t. II, 1837.

$$\Delta\lambda = \lambda''_{xx} + \lambda''_{yy} + \lambda''_{zz},$$

il faut que :

$$(\Delta\lambda)/(\lambda'_x + \lambda'_y + \lambda'_z)^2 = -V''/V'$$

et donc que le premier membre soit une fonction de $\lambda$ seulement, notée

$$g(\lambda) = (\Delta\lambda)/(\lambda'_x + \lambda'_y + \lambda'_z)^2.$$

On pose alors

$$\varphi(\lambda) = \exp\,(?g(\lambda)d\lambda), \text{ soit } g(\lambda) = \varphi'(\lambda)/\varphi(\lambda),$$

et il vient

$$(\varphi V')' = 0,$$

puis l'expression de la température ou paramètre thermométrique V en fonction de $\lambda$ :

$$V(\lambda) = A\ ?_a^{\lambda}\, d\lambda/\varphi(\lambda) + B.$$

Lamé dans son mémoire de 1837[24], relève le premier l'intérêt des coordonnées curvilignes dans l'espace[25] et de la notion de système triple orthogonal, motivée par les questions d'élasticité. Trois familles de surfaces

$$f_1(x, y, z) = h_1, \quad f_2(x, y, z) = h_2, \quad f_3(x, y, z) = h_3,$$

constituent un *système triple orthogonal* si par tout point de l'espace il passe une surface de chaque famille, et si, en ce point les trois surfaces sont orthogonales. Pour un système triple orthogonal, suivant le théorème de Dupin[26], auquel Lamé accorde la plus grande importance, les surfaces se coupent suivant leurs lignes de courbures.

Le théorème fondamental à ce sujet s'énonce : il n'y a que les systèmes de quadriques confocales qui forment des systèmes à la fois isothermes et triples orthogonaux (cf. paragraphe IV). Il est dû à Lamé[27] en 1843, et la preuve en est améliorée par Bonnet et par Liouville[28].

Quand le point (x, y, z) est repéré par les $h_i = f_i(x, y, z)$, i = 1, 2, 3, dites coordonnées curvilignes orthogonales, Lamé fournit[29] en 1834 la formule générale pour le second paramètre différentiel ou laplacien, qui est, pour $V = V(h_1, h_2, h_3)$, avec

$$H_i^2 := (h_i)'_x{}^2 + (h_i)'_y{}^2 + (h_i)'_z{}^2,$$

$$\Delta V = H_1H_2H_3[((H_1V'_{h_1})/(H_2\,H_3))'_{h_1} + ((H_2V'_{h_2})/(H_3\,H_1))'_{h_2} + ((H_3V'_{h_3})/(H_1\,H_2))'_{h_3}].$$

Après la preuve de Lamé, de nombreuses autres preuves de cette formule ont été trouvées[30].

Lamé propose de penser qu'une surface n'est jamais seule, qu'elle fait partie d'une famille, qu'elle est un niveau d'une famille f(x, y, z) = h, et que c'est de la famille, plutôt que de telle surface de niveau de la famille, qu'il convient d'isoler les paramètres différentiels. Notamment il faut comprendre comment, lorsque le niveau h varie, varient les données géométriques des surfaces de niveau. C'est dans cette perspective qu'il introduit[31] en 1834 les « premier et second paramètres différentiels »[32], que Beltrami reprendra ultérieurement à partir de 1865 pour les familles de courbes sur les surfaces, en indiquant qu'ils proviennent de Lamé. Le rapport entre les idées de Lamé et celles de Beltrami est exprimé par Darboux :

---

24 Lamé, Gabriel, « Mémoire sur les surfaces isothermes dans les corps solides », op. cit.

25 Loria, Gino, op. cit., p. 285.

26 Dupin, Ch, *Développements de Géométrie*, Paris, 1813.

27 voir p. 399 in : Lamé, Gabriel, « Mémoire sur les surfaces orthogonales et isothermes », *Journal Math. Pures Appl.*, (1) t.VIII, 1843, pp. 397-434.

28 Bonnet, Ossian, « Mémoire sur la théorie des surfaces isothermes », *J. Ecole Poly.* XXXème cahier, 1845, p. 141. *Journal de Math. Pures et Appl.*, t. XIV, 1849, pp. 401-416. Liouville, J., *Journal Math. Pures Appl.*, t. XV, 1850, p. 103.

29 Lamé, Gabriel, *Journal de l'Ecole Polyt.* XIV, cahier 23, 1834, pp. 191-288.

30 Whittaker E. T. & Watson G. N., op. cit., note p. 401 : Thompson, W., *Camb. Math. Journal*, IV, 1845, pp. 33-42. Bertrand, J., *Traité de calcul différentiel*, 1864, pp. 181-187. Heine, *Theorie der Kugelfunctionen*, I, 1878, pp. 303-306. Goursat, *Cours d'Analyse*, I, 1910, pp. 155-159. Neville, *Quarterly Journal*, XLIX., 1923, pp. 338-352.

31 Lamé, Gabriel, *Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications*, op. cit.., pp. 1-36.

32 Lamé, Gabriel, *Loi de l'équilibre du fluide éthéré,* op. cit.

> On sait toute l'importance du rôle attribué aux deux paramètres différentiels du premier et du second ordre de Lamé, soit en physique mathématique, soit dans la théorie des coordonnées curvilignes de l'espace. M. Beltrami, dans une série de beaux travaux qui remonte à 1865[33], a constitué pour les surfaces une théorie analogue[34].

Notons aussi ce qu'écrit Vincensini en 1972 :

> C'est à l'instar de G. Lamé (Lamé, 1859), qui a fondé la théorie des coordonnées curvilignes de l'espace euclidien à trois dimensions sur la considération de deux paramètres différentiels, l'un de 1er ordre et l'autre du 2ème, ouvrant ainsi la voie au calcul différentiel absolu de Ricci et Levi-Civita, que Beltrami a été amené à introduire de son côté, dans la géométrie différentielle des surfaces, les paramètres différentiels qui portent son nom[35].

En un sens, Beltrami fait une synthèse des idées de Gauss de 1825 et de celles de Lamé de 1837.

L'idée de Lamé que les surfaces sont à considérer comme surfaces de niveau, et que du coup on puisse là utiliser les paramètres différentiels, la mécanique des fluides, l'équation de Poisson, etc., est d'actualité aujourd'hui avec les études de surfaces implicites dynamiques[36].

A la suite de Lamé, les deux notions de systèmes triples orthogonaux et de surfaces isothermes sont développées considérablement par notamment Duhamel, Bertrand[37], Bonnet, Garlin[38], Bouquet, Serret, et ensuite surtout Darboux. Lamé semblait croire[39] que toute famille à un paramètre de surfaces puisse être complétée par deux autres familles telles que les trois constituent un système triple orthogonale. Bouquet a montré sur un exemple qu'il n'en était rien. Darboux a précisé cela dans l'esprit du théorème de Dupin : pour que deux systèmes formés de surfaces orthogonales soient orthogonaux à un troisième système, il faut et il suffit que les lignes d'intersections des surfaces des deux systèmes soient des lignes de courbures de ces surfaces. Darboux montre que si une famille f(x, y, z) = h fait partie d'un système triple orthogonal, alors la fonction f(x, y, z) satisfait à une certaine équation différentielle du troisième ordre. Il nomme *surface de Lamé* ou système de Lamé (à ne pas confondre avec les «systèmes de Lamé » en élasticité) les surfaces satisfaisant à cette condition. Plus tard,[40] Darboux montrera qu'un système de Lamé est complètement déterminé par trois surfaces particulières, deux à deux orthogonales, et se coupant suivant des lignes de courbures. Les systèmes de surfaces cyclides que Darboux dégage dans sa thèse[41] et ensuite, constituent de tels systèmes de Lamé, et les surfaces en question étant du quatrième degré, en vertu du théorème de Lamé, elles ne constituent pas un système isotherme. Toutefois, Darboux montre qu'elles constituent ce qu'il appelle un système *isothermique*, c'est-à-dire orthogonal, et tel que les lignes de courbures constituent sur chaque surface un réseau isotherme, et qu'il s'agit là du système isothermique le plus général. Ainsi, le théorème de Lamé de 1843 trouve-t-il son prolongement le plus naturel.

L'importance du geste général de considérer tous les systèmes de coordonnées curvilignes, et non pas seulement les quatre ou cinq (cartésien, oblique, cylindrique, sphérique, bipolaire) en usage vers 1830, est tout à fait considérable. On peut comparer ce geste à celui de Descartes qui, tout à coup, au lieu de la dizaine de courbes admise par les Anciens, passe à une infinité effective de courbes[42], ce qui sert à représenter les phénomènes physiques. Maintenant en

---

33 Beltrami, « Ricerche de analysi applicata alla Geometria », *Giornale di Matematiche*, t. II, 1865.

34 Darboux, Gaston, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, vol. 3, op. cit., p.193.

35 Vincensini P. 1972. « La géométrie différentielle au XIXème siècle », *Scientia*, Milano, 1972, pp. 2-44. Cité par Johan Gielis in : Universal Natural Shapes, chap 3, p. 33 (thèse à soutenir prochainement).

36 Osher, Stanley Fedkiw, Ronald, *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces*, Springer, 2003.

37 Bertrand, J., « Démonstration de quelques théorèmes sur les surfaces orthogonales », *CRAS*, 2ème trimestre, 1843, t. XVII, n°20.

38 Garlin, J., *Sur les surfaces isothermes et orthogonales*, thèse, Fac. Sc. Paris, 1853.

39 Picard, Emile, *Notice historique sur Gaston Darboux*, Acad. Sciences, 10 déc. 1917, p. XI.

40 Darboux, Gaston, *Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes*, op. cit.

41 Darboux, Gaston, « Recherches sur les surfaces orthogonales », op. cit.

42 Barbin, Evelyne, *La révolution mathématique du XVII$^{e}$ siècle*, Paris, Ellipses, 2006.

plus, suivant Lamé, avant de représenter le phénomène lui-même, à chaque situation physique est d'abord associé un système de coordonnées curvilignes qui reflète la forme du lieu où il réside.

## III. COORDONNÉES ELLIPTIQUES PLANES

Dans le plan des (x, y), pour x et y données, il y a deux valeurs p et q de k telles que (x, y) soit situé sur la courbe

$$x^2/(5^2 + k) + y^2/(3^2 + k) = 1,$$

et on a $-25 < p < -9 < q$. Pour la valeur q la courbe est une ellipse, et pour p c'est une hyperbole. Le point (x, y) est repéré par (p, q) mais p et q sont géométriques et ne sont pas des paramètres thermométriques.

On trouve deux paramètres thermométriques $\mu$ et $\nu$ en posant

$$x = a \cosh \mu \cos \nu \text{ et } \quad y = a \sinh \mu \sin \nu,$$

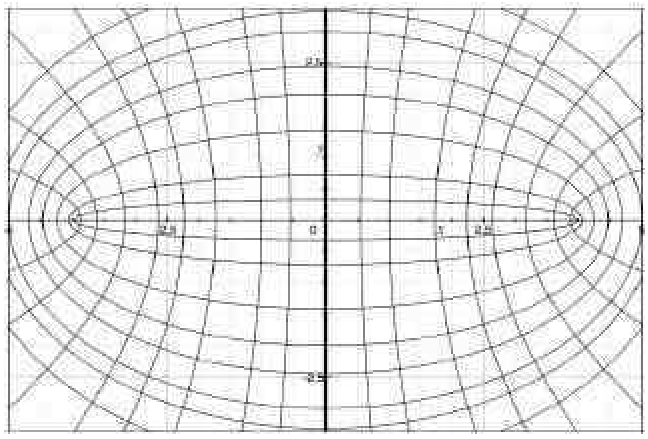
ce qui fournit d'une part les ellipses

$$x^2/(a^2\cosh^2\mu) + y^2/(a^2\sinh^2\mu) = 1 \ (a = 4,\ q = 16 \cosh^2\mu - 25)$$

et les hyperboles

$$x^2/(a^2\cos^2\nu) - y^2/(a^2\sin^2\nu) = 1 \ (a = 4,\ p = 16 \cos^2\nu - 25).$$

Toutes ces coniques ont les mêmes foyers, qui sont les points (–4,0) et (4, 0).



Ces coordonnées $\mu$ et $\nu$, introduites par Lamé, seront utilisées en particulier en 1868 par Mathieu[43], qui à suivit les cours de Lamé à la Sorbonne jusqu'à 1866. A cette époque aussi, en 1866, Darboux, suppléant de Bertrand, fait au Collège de France des leçons sur la chaleur, les surfaces isothermes et isothermiques. Avec ces coordonnées, Mathieu étudie les vibrations d'un tambour elliptique, et à cette occasion il dégagera l'importante équation qui porte aujourd'hui son nom, sous la forme :

$$P'' + (N - 4\lambda^2c^2\cos^2\alpha)P = 0,$$

équation dont les solutions $P = P(\alpha)$ sont nommées *fonctions de Mathieu.* Il suit, dans un cas plus simple, la même méthode qu'a utilisé Lamé pour former l'équation dite de Lamé (voir ici le paragraphe V).

Mathieu fut aussi ensuite l'auteur d'un important traité de physique, peut-être le premier à s'intituler par l'expression de « physique mathématique » chère à Lamé, dont les derniers cours s'intitulaient : Cours de physique mathématique rationnelle[44]. Le volume premier de ce cours[45] (matière d'un cours en 1867-1868 à la Faculté des Sciences de Paris) est dédié aux « méthodes

---

[43] voir p. 146 in : Mathieu, Emile, « Mémoire sur le mouvement vibratoire d'une membrane de forme elliptique », *Journal Math. Pures Appl.* (2), XIII., 1868, pp. 137-203.

[44] Lamé, Gabriel, *Cours de physique mathématique rationnelle,* 1861. *Discours préliminaire*, Gauthier-Villars, Paris, 1865.

[45] Mathieu, Emile, *Cours de physique mathématique*, vol. 1, op. cit.

d'intégrations en Physique mathématique », et Mathieu indique que « les Traités qui se rapportent à ce sujet sont : la Théorie analytique de la chaleur, par Fourier ; la Théorie mathématique de la chaleur, par Poisson, et les Ouvrages de Lamé ».

Dans ce volume, après l'emploi des séries trigonométriques, se trouve complètement développée une approche laméenne de la physique mathématique, suivant des problématiques physiques semblables à celle des *Leçons sur les coordonnées curvilignes* de Lamé : surfaces isothermes et coordonnées curvilignes, équilibres de températures des cylindres et mouvement vibratoire de membranes, distribution de températures dans les sphères et ellipsoïdes, avec un usage essentiel des coordonnées ellipsoïdales.

## IV. COORDONNÉES ELLIPSOÏDALES DANS L'ESPACE, RAPPORT AUX FONCTIONS ELLIPTIQUES

Les coordonnées elliptiques planes sont manipulées par Lamé en hors d'œuvre au cas général des coordonnées ellipsoïdales, quand il traite des cylindres droits à bases elliptiques ou hyperboliques. Dans ces cas particuliers de cylindres il n'est pas besoin des fonctions elliptiques pour construire les paramètres thermométriques. Les circulaires et hyperboliques suffisent pour exprimer p et q en fonction de $\mu$ et $\nu$, et ces fonctions suffisent encore pour les quadriques de révolutions

$$x^2/\lambda^2 + y^2/(\lambda^2 - b^2) + z^2/(\lambda^2 - b^2) = 1.$$

Mais ce ne sera plus le cas avec les familles que voici dans l'espace, et Lamé répondra à la question en introduisant sa version des fonctions elliptiques (ci-dessous les fonctions A, B, C).

En 1833, Lamé considère les trois familles de surfaces :

$$x^2/\rho^2 + y^2/(\rho^2 - b^2) + z^2/(\rho^2 - c^2) = 1 \qquad \text{ellipsoïdes,}$$
$$x^2/\rho_1^2 + y^2/(\rho_1^2 - b^2) - z^2/(c^2 - \rho_1^2) = 1 \qquad \text{hyperboloïdes à une nappe,}$$
$$x^2/\rho_2^2 - y^2/(b^2 - \rho_2^2) - z^2/(c^2 - \rho_2^2) = 1 \qquad \text{hyperboloïde à deux nappes.}$$

avec $c > b > 0$, et avec $\rho > c > \rho_1 > b > \rho_2 > 0$. Ces trois familles sont exprimables en une seule équation, qui est :

$$x^2/\lambda^2 + y^2/(\lambda^2 - b^2) + z^2/(\lambda^2 - c^2) = 1 \quad (*)$$

Pour un (x, y, z) donné, il existe trois racines positives $\rho$, $\rho_1$ et $\rho_2$ de l'équation en $\lambda$ ci-dessus, et ces trois racines sont séparées par c et b. L'analogue de l'équation (*) et sa résolution figurent chez Laplace[46]. Mais avec Lamé, le point (x, y, z) est repérable par les trois paramètres géométriques $\rho$, $\rho_1$, $\rho_2$, appelés désormais *coordonnées elliptiques* ou *ellipsoïdales* de (x, y, z), et puis ensuite par trois paramètres thermométriques $\varepsilon$, $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ qui seront déterminés plus loin, de sorte que les trois familles en deviennent isothermes. Comme de plus Lamé montre que les trois familles en $\rho$, $\rho_1$ et $\rho_2$ sont orthogonales (fait qui remonte à Dupin et à Binet, en 1813), on a bien des surfaces isothermes constituant aussi un système triple orthogonal.

Naturellement, les coordonnées ellipsoïdales sont très vite utilisées pour étudier la géométrie de l'ellipsoïde, par exemple dans la thèse de Valson[47], élève de Bertrand. Ces coordonnées ellipsoïdales sont parfaitement adaptées à la cartographie terrestre, pour autant que la terre soit assimilée à un ellipsoïde[48]. Cela est expliqué par Jacobi[49], comme le rapporte Darboux[50]. Avec des notations légèrement différentes, à savoir en considérant la famille :

$$x^2/(a - \lambda) + y^2/(b - \lambda) + z^2/(c - \lambda) = 1,$$

[46] Laplace, *Mécanique céleste* (1ère éd). 2, Paris, an VII, p. 16. Œuvres 2, Paris , 1878, p. 20.Note 448 in : Staude, Otto, Grévy, Auguste, « Quadriques » , *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées*, éd. Molk, tome III, p. 80.

[47] Valson, C.-A., *Application de la théorie des coordonnées elliptiques à la géométrie de l'ellipsoïde*, thèse, Fac. Sc. Paris, 1854.

[48] Par exemple aujourd'hui on utilise pour le GPS l'ellipsoïde le plus proche de la surface équipotentielle qui coïncide le mieux avec le niveau des mers, surface appelée géoïde, et là bien sûr les coordonnées ellipsoïdales sont naturelles.

[49] Jacobi, C. G. J., *J. Crelle* t. LIX, 1861, p. 74.

[50] Darboux, Gaston, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, vol. 1, Gauthier-Villars, 1894, pp. 157-158.

et en notant alors $\rho$, $\rho_1$, $\rho_2$, les coordonnées ellipsoïdales correspondantes, on peut représenter l'ellipsoïde correspondant à une valeur fixée $\rho_2$ sur un plan. De sorte que, comme le dit Darboux, si l'ellipsoïde s'aplatit en demeurant homofocal à lui-même, la région cartographiée vienne à la limite se confondre avec la carte, on associe au point ($\rho$, $\rho_1$, $\rho_2$) le point du plan des xy de coordonnées elliptiques (($\rho'$, $\rho'_1$) déterminées par les identités :

$$\int_b^{\rho'} d\rho'/\sqrt{(a-\rho')}\sqrt{(\rho'-b)} = \int_b^{\rho} (\sqrt{(\rho-\rho_2)})d\rho/\sqrt{(a-\rho)}\sqrt{(b-\rho)}\sqrt{(c-\rho)},$$
$$\int_b^{\rho'_1} d\rho'_1/\sqrt{(a-\rho'_1)}\sqrt{(b-\rho'_1)} = \int_b^{\rho_1} (\sqrt{(\rho_1-\rho_2)})d\rho_1/\sqrt{(a-\rho_1)}\sqrt{(b-\rho_1)}\sqrt{(\rho_1-c)}.$$

Pour les éléments linéaires on a alors :

$$ds^2/ds'^2 = (\rho-\rho_1)/(\rho'-\rho_1').$$

Ces coordonnées se rattachent de deux façons aux premiers travaux de Lamé de 1818. En effet, d'une part, avec
$m = \lambda^2$, $E = x^2 + y^2 + z^2 + b^2 + c^2$, $E' = (b^2 + c^2)x^2 + c^2y^2 + b^2z^2 + b^2c^2$, et $E'' = b^2c^2x^2$, l'équation

$$x^2/\lambda^2 + y^2/(\lambda^2 - b^2) + z^2/(\lambda^2 - c^2) = 1$$

s'écrit

$$m^3 - m^2E + mE' - E'' = 0.$$

De même, la famille dans le plan envisagée au paragraphe précédent s'écrit, avec

$$E' = 34 - x^2 - y^2 \text{ et } E'' = 225 - 9x^2 - 25y^2,$$

sous la forme

$$k^2 + kE' + E''= 0.$$

Cela rappelle les combinaisons mE +m'E' que Lamé manipulait à ses débuts[51].

En fait, Chasles indique qu'une famille de quadriques homofocales est un faisceau tangentiel[52], et que, en dimension deux, Poncelet a déjà fait usage du fait que des coniques homofocales sont les coniques inscrite dans le quadrilatère imaginaire dont deux sommets opposés sont les deux foyers et deux autres sont les points cycliques. En dimension trois, on vérifie aisément que la famille

$$x^2/(a-\lambda) + y^2/(b-\lambda) + z^2/(c-\lambda) = 1,$$

admet pour équation tangentielle

$$(au^2 + bv^2 + cw^2 - t^2) + \lambda (u^2 + v^2 + w^2) = 0.$$

En 1890, Legoux[53] étudie dans le plan les possibilités de courbes orthogonales et homofocales de la forme

$$A\lambda^2 + B\lambda + C = 0,$$

où A, B et C sont des fonctions a priori quelconques des coordonnées x, y (non nécessairement du second degré) et naturellement propose d'utiliser là les coordonnées elliptiques planes. On pourrait peut-être y utiliser aussi le point de vue tangentiel.

D'autre part, les surfaces ellipsoïdales

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$$

en jeu ici peuvent être regardées comme des cas particuliers des surfaces introduites par Lamé[54] et nommées depuis *surfaces tétraédrales*, d'équations

$$x^m/a^m + y^m/b^m + z^m/c^m = 1,$$

lesquelles, réécrites sous la forme

---

[51] Lamé, Gabriel, *Examen*, op. cit., p. 28.

[52] Chasles, *Aperçu Historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, Gauthier-Villars, 1837, pp. 396-397. Extrait d'une lettre de M. Chasles à M. Liouville, *Journal Math. Pures et appliquées* (1) t. 13, 1848, p. 16.

[53] Legoux, A., « Sur un système de courbes orthogonales et homofocales », *Annales fac. Sc. Toulouse*, série 1, 4 n°1, 1890, pp. D1-D7.

[54] Lamé, Gabriel, *Examen,* op. cit., p. 122. Une généralisation simple permet aujourd'hui de représenter élégamment de nombreuses formes de la nature : Gielis, Johan, « A generic geometric transformation that unifies a large range of natural and abstract shapes. » *American Journal of Botany* 90(3), 2003, Invited special paper, pp. 333-338.

$$(x/A)^{1/n}(b-c) + (y/B)^{1/n}(c-a) + (z/C)^{1/n}(a-b) = (a-b)(b-c)(a-c)$$

se paramétrisent sous la forme[55] :

$$x = A(\rho - a)^n(\rho_1 - a)^n,\ y = B(\rho - b)^n(\rho_1 - b)^n,\ z = C(\rho - c)^n(\rho_1 - c)^n.$$

Cela redonne, pour m = 2 ou soit n = ½, la paramétrisation de l'ellipsoïde par les coordonnées elliptiques $\rho$, $\rho_1$.

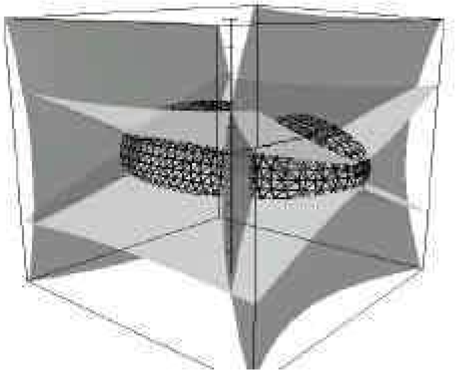
Les coordonnées ellipsoïdales de Lamé ont été généralisées à l'espace n dimensionnel par Jacobi, et utilisées par Darboux[56] pour étendre à n dimensions la théorie des cyclides et des systèmes orthogonaux. Au XX^e^ siècle une extension aux espaces à une infinité de dimensions est faite par Hartman et Wintner[57] et par Kostyuchenko et Stepanov[58], les coordonnées ellipsoïdales, relativement à un opérateur symétrique fixé, étant alors pour un point les valeurs propres d'un opérateur associé à ce point et à l'opérateur fixé.

Dans la figure ci-après se trouvent représentées trois surfaces de la famille (analogue à celle considérée par Lamé ci-dessus)

$$x^2/(5^2 - \lambda^2) + y^2/(3^2 - \lambda^2) + z^2/(2^2 - \lambda^2) = 1,$$

soit

- en résille l'ellipsoïde $x^2/25 + y^2/9 + z^2/4 = 1$,
- en gris clair l'hyperboloïde à une nappe $x^2/(25-5) + y^2/(9-5) + z^2/(4-5) = 1$,
- en gris foncé l'hyperboloïde à deux nappes $x^2/(25-20) + y^2/(9-20) + z^2/(4-20) = 1$.



Passons à la question des paramètres thermométriques, en adoptant maintenant les notations qu'adopte ultérieurement Lamé pour les coordonnées ellipsoïdales, en notant désormais $\rho_1 = \mu$, $\rho_2 = \nu$ . Les coordonnées ellipsoïdales sont donc notées $\rho, \mu, \nu$. Lamé montre que les paramètres thermométriques correspondants sont données par les intégrales elliptiques

$$\xi = \int_c^{\rho} d\rho/\sqrt{(\rho^2 - b^2)}\sqrt{(\rho^2 - c^2)},\ \eta = \int_b^{\mu} d\mu/\sqrt{(\mu^2 - b^2)}\sqrt{(c^2 - \mu^2)},\ \zeta = \int_0^{\nu} d\nu/\sqrt{(b^2 - \nu^2)}\sqrt{(c^2 - \nu^2)},$$

les quadriques correspondantes s'écrivant successivement, pour successivement $\varepsilon = \zeta, \eta, \xi$ :

$$x^2/A^2(\varepsilon) + y^2/(B^2(\varepsilon) + z^2/C^2(\varepsilon) = 1,$$
$$x^2/A^2(\varepsilon) + y^2/(B^2(\varepsilon) - z^2/C^2(\varepsilon) = 1,$$
$$x^2/A^2(\varepsilon) - y^2/B^2(\varepsilon) - z^2/C^2(\varepsilon) = 1.$$

Les quantités $\rho, \mu, \nu$ sont donc des fonctions elliptiques de $\zeta, \eta, \xi$ respectivement, et par suite, les axes A, B et C aussi. On obtient alors les élégants systèmes ABC de fonctions elliptiques de

---

[55] Darboux, Gaston, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, vol. 1, op. cit., p.142.

[56] Darboux, Gaston, «Sur l'application du théorème fondamental d'Abel relatif aux intégrales algébriques à la recherche de systèmes complètement orthogonaux dans un espace à n dimensions », *Acta mathematica*, 1902, pp. 227-240.

[57] Hartman, Philip, & Wintner, Aurel, « Lamé coordinates in Hilbert space », *Amer. J. Math.* 72, 1950, pp.775-786.

[58] Kostyuchenko, A. G., & Stepanov A.A., « Infinite-Dimensional Elliptic Coordinates », *Functional Analysis and Its Applications*, Vol. 33, n°4, 1999, pp. 300-303.

Lamé, exprimant[59] les axes des quadriques du système triple en fonction de leurs températures, avec dans les trois cas successivement les formules symétriques:

$$dA = BCd\varepsilon,\ dB = CAd\varepsilon,\ dC = ABd\varepsilon,$$

$$dA = BCd\varepsilon,\ dB = CAd\varepsilon,\ dC = -ABd\varepsilon,$$

$$dA = BCd\varepsilon,\ dB = -CAd\varepsilon,\ dC = -ABd\varepsilon,$$

avec des formules d'Euler (d'additions) pour ces fonctions A, B, C. Les applications servent notamment à l'étude de l'équilibre des températures dans les ellipsoïdes, et en particulier les ellipsoïdes planétaires.

En 1859, Lamé revient[60] sur le système ellipsoïdal. On a

$$A' = BC, \text{ et } \rho = \int_0^A dA/BC,$$

puis, avec $k = b/c$, et l'on voit que A est une fonction elliptique, soit

$$\rho = \int_0^A df/\sqrt{(k^2 - f^2)}\ \sqrt{(1-f^2)}.$$

En fait, l'ensemble des résultats indiqués jusqu'ici sur les fonctions A, B et C est établi par Lamé dès 1839[61]. Dans la suite de son livre sur les coordonnées curvilignes, Lamé établit les relations entre les courbures des surfaces et des lignes d'intersections du système ellipsoïdal. Puis le reste est consacré aux applications aux problèmes de potentiel et d'élasticité.

Rappelons que les fonctions elliptiques de Jacobi, proposées[62] en 1827, sont notées ensuite dans les années 1830 par respectivement sn(x, k), cn(x, k) et dn(x, k). Pour $0 \le k \le 1$, la fonction $y = \mathrm{sn}(x,k)$ est définie par

$$dx/dy = 1/\sqrt{(1 - x^2)}\ \sqrt{(1 - k^2x^2)} \text{ et } x(0) = 0,$$

et les deux autres s'en déduisent par les formules

$$\mathrm{cn}(x, k) = \sqrt{(1 - \mathrm{sn}^2(x,k))},\ \ \mathrm{dn}(x, k) = \sqrt{(1 - k^2\mathrm{sn}^2(x,k))}.$$

Lorsque $k = 0$ on retrouve $\mathrm{sn}(x,0) = \sin x$, et lorsque $k = 1$ il vient $\mathrm{sn}(x,1) = \tanh x$. Pour la valeur $k = 1/\sqrt{2}$, on retrouve les fonctions lemniscatiques de Gauss.

On a pour les dérivations, une « symétrie » ternaire moins parfaite que pour les fonctions elliptiques de Lamé A, B et C ; à savoir, pour les dérivations de sn, cn et dn :

$$(\mathrm{sn}\ x)' = \mathrm{cn}\ x.\ \mathrm{dn}\ x,\ (\mathrm{cn}\ x)' = -\mathrm{sn}\ x.\mathrm{dn}\ x,\ (\mathrm{dn}\ x)' = -k^2\mathrm{sn}\ x.\mathrm{cn}\ x.$$

Enfin, les fonctions elliptiques que considère Lamé sont calculables à partir de celles de Jacobi[63]. Par exemple, on a dans le cas des hyperboloïdes à deux nappes[64] :

$$\rho_2 = \nu = b\ .\ \mathrm{sn}(c\zeta, b/c).$$

Les contributions de Lamé aux applications des fonctions elliptiques sont considérées comme majeures à son époque, puisque Halphen écrit en 1886 :

> Ces applications [des fonctions elliptiques] sont nombreuses déjà, toutes d'une grande importance, comme l'attestent les noms des géomètres qui les ont faites, Gauss, Jacobi, Lamé, Hermite, pour ne citer que les plus célèbres.[65]

## V. ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE LAMÉ, FONCTIONS DE LAMÉ

Dans les ouvrages de Whittaker et Watson, puis de Hobson[66], on trouve un traitement détaillé de la théorie classique de l'équation de Lamé et des harmoniques ellipsoïdales. Mais ici, nous

---

59 voir p. 52 in : Lamé, Gabriel, *Leçons sur les fonctions inverses des transcendantes et les surfaces isothermes*, op. cit., pp. 46-48.
60 Lamé, Gabriel, *Leçons sur les coordonnées curvilignes*, op. cit., p. 94, pp. 109-110, p.119, p. 122, pp.125-142.
61 Lamé, Gabriel, « Sur les axes des surfaces isothermes du second degré, considérés comme des fonctions de la température », *Journal Math Pures er Appl.* t.IV, 1839, pp. 100-125.
62 Whittaker E. T. & Watson G. N., op. cit., p. 512.
63 Greenhill, Alfred George, *Les fonctions elliptiques et leurs applications*, Georges Carré, Paris, 1895, p. 45. Morse, Philip M., and Feshbach, Herman, op. cit., p. 1308.
64 D'après Hobson, Jacobi a donné de telles formules. Hobson, op. cit., p.459.
65 Halphen, G.-H., *Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications*, vol. 1, Gauthier-Villars, 1886, p. vi.

n'indiquerons brièvement que l'idée du mouvement qui de Lamé en 1839 à Klein et Bôcher en 1894, place l'équation de Lamé au centre de la physique mathématique.

Lamé cherche[67] à résoudre l'équation de Laplace $\Delta V = 0$, en imaginant que le point de coordonnées cartésiennes (x, y, z) est donné par ses coordonnées ellipsoïdales $\rho$, $\mu$, $\nu$, et en partant donc de V donnée comme fonction de ces coordonnées, soit $V = V(\rho, \mu, \nu)$. Puisque $\rho$, $\mu$, $\nu$ sont des fonctions respectivement des températures $\zeta$, $\eta$, $\xi$, cela a du sens de dériver V relativement à ces dernières variables. L'équation de Laplace prend la forme[68] :

$$(\mu^2 - \nu^2)\, V''_{\xi\xi} + (\rho^2 - \nu^2)\, V''_{\eta\eta} + (\rho^2 - \mu^2)\, V''_{\zeta\zeta} = 0.$$

Lamé propose alors[69], en imitation des démarches de Laplace dans le cas sphérique, et de Fourier dans la mise en place de ses séries, de chercher des solutions particulières de la forme

$$V(\rho, \mu, \nu) = E(\rho)\, E(\mu)\, E(\nu).$$

et il montre qu'une telle fonction $E(\rho)$ (*fonction de Lamé*) devra être solution, pour n entier, et avec $q = b^2 + c^2$ et $p = b^2c^2$, de l'équation dite aujourd'hui *équation de Lamé* :

$$(\rho^4 - q\rho^2 + p)\, E'' + (2\rho^3 - q\rho)\, E' = (n\,(n + 1)\rho^2 - B)\, E.$$

De cette équation, Lamé n'a donné une solution que dans un cas assez particulier, et le mérite d'une vaste étude de l'équation de Lamé revient à Charles Hermite, qui montre que les solutions sont des fonctions elliptiques de seconde espèces[70] (quel que soit A dans la forme jacobienne ci-dessous). D'ailleurs, Darboux écrit : « … équation de Lamé, cette équation que les travaux de M. Hermite ont rendue célèbre »[71].

L'étude approfondie de l'équation de Lamé repose prioritairement sur la variété des manières de la présenter, et suivant les problèmes, telle ou telle présentation conviendra mieux. Notons, par exemple, l'équation équivalente à l'équation de Lamé[72] qui s'écrit (forme dite jacobienne) :

$$y'' - [n(n + 1)k^2 \operatorname{sn}^2(x, k) + A]y = 0.$$

Mais ce qui met le mieux en relief la nature de l'équation de Lamé, et notamment ses singularités, c'est la forme suivante, écrite ici vis-à-vis de la famille :

$$x^2/(a^2 + \lambda) + y^2/(b^2 + \lambda) + z^2/(c^2 + \lambda) = 1,$$

et pour une fonction $E = E(\lambda)$ :

$$E'' + (1/2)\{1/(a^2 + \lambda) + 1/(b^2 + \lambda) + 1/(c^2 + \lambda)\}E'$$
$$= \{(n\,(n + 1)\,\lambda + C)/((a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda))\}E.$$

La réflexion sur l'équation et les fonctions de Lamé (avec aussi les équations de Mathieu, Legendre, Bessel, Weber, Hermite, Stokes) sera un terrain fécond pour Henri Poincaré et son dégagement du rôle des *fonctions fuchsiennes*, dont ces équations sont des cas particuliers. Précisément, en 1894, Klein[73] et Bôcher[74] ont montré que ces équations et toutes les équations différentielles linéaires qui apparaissent dans certaines branches de la physique mathématique sont des formes confluentes (i.e. par identification de singularités) d'une unique équation

---

[66] Whittaker E. T. & Watson G. N., op. cit. Hobson, E. W., op. cit.

[67] Lamé, Gabriel, « Mémoire sur l'équilibre des températures dans un ellipsoïde à trois axes inégaux », *Journal Math Pures er Appl.* t.IV, 1839, pp. 126-163.

[68] équation (8) p. 135 dans : Lamé, Gabriel, op. cit.

[69] équation (19) p. 139, équation (22), p. 141, dans : Lamé, Gabriel, op. cit.

[70] Hermite, Charles, « Sur quelques applications des fonctions elliptiques », 26 notes, *CRAS*, 85 à 94, 1977-1882, in *Œuvres*, III, pp. 266-418. « Sur l'équation de Lamé », *A.D.M.* 9, 1878, pp. 21-24., *Œuvres*, III, pp. 118-122.

[71] Darboux, Gaston, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, vol. 2, op. cit., p. 212.

[72] Whittaker E. T. & Watson G. N., op. cit., pp. 554-555.

[73] Klein, Felix, « Ueber lineare Differentialgleichungen der zweiter Ordnung », 1894, p. 40. Voir aussi « Vorlesung über Lamé'schen Funktionen » cité dans Whittaker E. T. & Watson G. N., op. cit., p. 203.

[74] Bôcher, Maxime, *Ueber die Reihenentwickelungen der Potentialtheorie*, Teubner, 1894, p. 193., cité dans Whittaker E. T. & Watson G. N., op. cit., p. 203.

fuchsienne précise appelée *équation de Lamé généralisée*[75], qui se présente, pour une fonction u($\zeta$) sous la forme à 5 singularités $\alpha_r$ , r = 1 à 4, et ∞ :

$$u'' + \{\Sigma_{r=1}{}^4 (1/2 - 2\alpha_r)/(\zeta - \alpha_r)\} u' + \{\Sigma_{r=1}{}^4 (\alpha_r(\alpha_r + 1/2)/(\zeta - \alpha_r)^2$$
$$+ (A\zeta^2 + 2B\zeta + C)/\Pi_{r=1}{}^4(\zeta - \alpha_r)\} u = 0,$$

où

$$A = (\Sigma_{r=1}{}^4\alpha_r)^2 - \Sigma_{r=1}{}^4\alpha_r{}^2 - 3/2\,\Sigma_{r=1}{}^4\alpha_r + 3/16.$$

Voilà qui résonne bien avec l'idée de Lamé d'un principe unique.

[75] Whittaker E. T. & Watson G. N., op. cit., pp. 203-207.